EGYSÉGES ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY

MATEMATIKA

I.



Konsept-M Könyvkiadó

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

$\in$	eleme (a halmaznak)
$\notin$	nem eleme (a halmaznak)
$\subset$	valódi részhalmaza
$\subseteq$	részhalmaza
$\cup$	egyesítés, unió
$\cap$	közös rész, metszet
$\setminus$	különbség (halmazoké)
$\bar{}$	halmaz komplementere; esemény ellentéte
$\varnothing$	üres halmaz
$\{ ; ; \}$	halmaz elemeinek felsorolása
$-\!\!\circ\!\!-$	illeszkedik
$\lvert\ \rvert$	halmaz számossága; szám abszolútértéke; vektor hossza
$\forall$	univerzális kvantor („minden")
$\exists$	egzisztenciális kvantor („van olyan")
$\wedge$	konjunkció („és")
$\vee$	diszjunkció („vagy")
$\neg$	negáció (tagadás)
$\Rightarrow$	implikáció (következés)
$\Leftrightarrow$	ekvivalencia
$!$	faktoriális
$\binom{n}{k}$	binomiális együttható
$\mathbf{N}$	természetes számok halmaza
$\mathbf{N}^+$	pozitív egész számok halmaza
$\mathbf{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbf{Q}$	racionális számok halmaza
$\mathbf{Q}^*$	irracionális számok halmaza
$\mathbf{R}$	valós számok halmaza
$=$	egyenlő
$\neq$	nem egyenlő
$:=$	definiáló egyenlőség
$\approx$	kerekítve, közelítőleg egyenlő
$<$	kisebb
$>$	nagyobb
$\leq$	kisebb vagy egyenlő
$\geq$	nagyobb vagy egyenlő
$+$	összeadás; pozitív előjel; legalább az egyik esemény bekövetkezik
$-$	kivonás; negatív előjel
$\pm$	plusz vagy mínusz, mindkét előjel (mindkét művelet) lehetséges
$\cdot$	szorzás; két esemény egyszerre következik be
$:$	osztás
$\frac{}{}$	törtvonal
a^k	hatvány (alap és kitevő)
$\sqrt{\ }$	(négyzet)gyök

$(\,;\,)$	két szám legnagyobb közös osztója; pont vagy vektor koordinátái (egyes könyvekben – nálunk nem! – nyílt intervallum)
$[\,;\,]$	két szám legkisebb közös többszöröse; zárt intervallum
$]\,;\,[$	nyílt intervallum
$[\,;\,[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum
$]\,;\,]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum
∞	végtelen
$[\,]$	egészrész
$\{\,\}$	törtrész
sgn	előjel
$\mid$	osztója; feltételes valószínűség
$\nmid$	nem osztója
%	százalék
‰	ezrelék
$\overline{abcd}$	(négyjegyű) szám, amelynek számjegyei (még) nincsenek konkrétan meghatározva
$f: A \to B$	az f nevű függvény értelmezési tartománya A, egy képhalmaza B
$\mapsto$	hozzárendelés
D_f	az f függvény értelmezési tartománya
$f(x)$	az f függvény helyettesítési értéke az $x \in D_f$ helyen
$\parallel$	párhuzamos
$\perp$	merőleges
$\sphericalangle$	derékszög
$\cong$	egybevágó
$\sim$	hasonló
$^\circ$	fok
$'$	(szög)perc
$''$	(szög)másodperc
$\measuredangle$	szög
Δ	háromszög
PQ	PQ szakasz (és a hossza is)
$\overline{PQ}$	a PQ szakasz hossza
$d(P; Q)$	a P és Q pontok távolsága
T_{ABC}	terület (az ABC háromszögé)
P'	a P pont képe valamely transzformáció során
$\overrightarrow{AB}$	A-ból B-be mutató vektor
$\mathbf{v}$	vektor
$\mathbf{0}$	nullvektor
$\mathbf{ab}$	az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata
$\bar{x}$	átlag
σ	szórás
p	valószínűség
$P(A)$	az A esemény valószínűsége

1. GONDOLKODÁSI MŰVELETEK

1.1. Halmazok

1. Ábrázolja a következő halmazokat Venn-diagramon (halmazábrán)! Ábrázolja a halmazok egymáshoz való viszonyát, az esetleges üres halmazokat színezze be!

N; **Z**; **Q**; $\mathbf{Q}^*$; **R**

Helyezze el az ábrában a következő számokat!

$\sqrt{2}$; π; $-\frac{2}{3}$; -5; $\sin 150°$; $\lg 1000$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$

2. Legyen $A := \{2; 3; 4\}$, $B := \{2; 5; 6\}$, $C := \{5; 6; 2\}$ és $D := \{6\}$. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak!

a) $4 \in C$ b) $5 \in C$ c) $A \subset B$ d) $B = C$ e) $A = B$

3. Egy hónap során a következő számötösöket sorsolták ki a lottón:
$\{1; 13; 27; 28; 69\}$, $\{12; 13; 69; 78; 85\}$,
$\{25; 27; 69; 70; 81\}$, $\{13; 16; 48; 69; 75\}$.
Melyik a három leggyakrabban kihúzott szám?

4. Az emberi vérben található többek között az A, B és Rh antigén. Vérvizsgálatkor többféleképpen osztályozzák az embereket. Egyrészt Rh-pozitív (röviden: Rh^+) valaki, ha vérében van Rh antigén, különben Rh-negatív (röviden Rh^-). Másrészt az A, B vagy AB vércsoportba tartozik attól függően, hogy az A és B antigén közül a vére melyiket tartalmazza. Ha sem A-t, sem B-t, akkor az egyén a nullás vércsoportba tartozik. Készítsen Venn-diagramot, és vizsgálja meg, hogy az egyes tartományok milyen vércsoportnak felelnek meg!

5. Legyen $A := \{$az $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$ egyenlet egész gyökei$\}$, $B := \{$az $x - 1 > 0$ egyenlőtlenség legkisebb egész megoldása$\}$, $C := \{$egy prímszám pozitív osztóinak száma$\}$, $D := \{(-1)^{2n}$, ahol $n \in \mathbf{Z}\}$.

a) Adja meg a fenti halmazok elemeit!

b) Válassza ki közülük az egyenlő halmazokat!

6. Legyen $A := \{x \in \mathbf{R} \mid (x-1)(1+x) > 0\}$, $B :=$ {a $2x-4 \leq 0$ egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldása}, C a páros prímek halmaza, $D := \{(-1)^n$, ahol $n \in \mathbf{Z}\}$.

a) Adja meg a fenti halmazok elemeit!

b) Válassza ki közülük az egyenlő halmazokat!

7. A koordinátasík pontjai közül legyen A azoknak a halmaza, amelyekre $x^2+y^2=1$ és $x=-1$, B pedig azoké, amelyekre $x(x+1)=0$.

a) Adja meg a fenti halmazok elemeit!

b) Egyenlő-e a két halmaz?

8. Legyen A halmaz a következő halmazok egyike: $\mathbf{N}$; $\mathbf{Q}$; $\mathbf{Q}^*$. Mindhárom esetben vizsgálja meg külön-külön, hogy teljesül-e, hogy ha $a \in A$ és $b \in A$, akkor

a) $a+b \in A$; b) $a-b \in A$; c) $a \cdot b \in A$!

9. Legyen A halmaz a következő halmazok egyike: $\mathbf{N}$; $\mathbf{Q}^*$; $\mathbf{R}$. Mindhárom esetben vizsgálja meg külön-külön, hogy teljesül-e, hogy ha $a \in A$ és $b \in A$, akkor

a) $a^2 \in A$; b) $\frac{a}{b} \in A$; c) $\frac{a}{a} \in A$!

10. Legyen $K := \{0; \frac{1}{2}; 1; 2\}$. Vizsgálja meg, hogy teljesül-e, hogy ha $a \in K$ és $b \in K$, akkor

a) $a+b \in K$; b) $a-b \in K$; c) $a \cdot b \in K$!

11. Legyen K halmaz a következő halmazok valamelyike: {1; 2}; {0; 1}. Mindkét halmazra vizsgálja meg külön-külön, hogy teljesül-e, hogy ha $a \in K$ és $b \in K$, akkor

a) $a^2 \in K$; b) $\frac{a}{b} \in K$; c) $\frac{a}{a} \in K$!

12. Aranka és Béla január 31-én megbeszélték, hogy e naptól kezdve minden második nap találkoznak, és minden ötödik nap moziba mennek. Februárban hányszor voltak együtt és hányszor külön moziban?

13. Négy üzlet nyitva tartási ideje egy pénteki napon a következő:

1. $8^{00} - 14^{30}$;
2. $9^{00} - 15^{30}$;
3. $9^{30} - 16^{30}$;
4. $8^{00} - 12^{00}$ és $13^{00} - 17^{30}$.

Milyen hosszú az az időszak, amikor egyszerre van nyitva a négy üzlet?

14. Három testvér 1-1 szelvénnyel játszott az ötös lottón. Igaz-e, hogy ha mindegyiküknek hármasa lett, akkor van olyan szám, amit mindhárman megjátszottak?

15. Írja fel az egyjegyű prímszámok halmazának összes részhalmazát!

16. Állapítsa meg, hogy egy 7 elemű halmaz részhalmazai között a páros számú elemből álló vagy a páratlan számú elemből álló részhalmazok száma nagyobb! Állítását indokolja!

17. Keresse meg az egyenlő halmazokat a következő pozitív egészekből álló halmazok között! Eredményét indokolja!

A a 6-tal osztható pozitív egész számok halmaza

B a 6-ra végződő pozitív egész számok halmaza

C a 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok halmaza

D a 12-vel osztható pozitív egész számok halmaza

E a 4-gyel osztva 3 maradékot adó pozitív egész számok halmaza

F a 6 pozitív egész osztóinak halmaza

G a 3 páros többszöröseinek halmaza

H a $6n$ alakú számok halmaza, ahol $n \in \mathbf{N}^+$

18. Az alábbi halmazok közül válasszon ki három olyan halmazt, amelyekre teljesül, hogy kettejük metszete a harmadik!

A a téglalapok halmaza

B a trapézok halmaza

C a négyzetek halmaza

D a rombuszok halmaza

E a paralelogrammák halmaza

F a deltoidok halmaza

19. $A \cup B \cup C = \{a; b; c; d; e; f\}$, $A \cap B = \{b\}$, $(A \cup B) \cap C = \{e; f\}$, $A \setminus C = \{b; c; d\}$, $C \setminus B = \{a; e\}$. Határozza meg az A, B, C halmazokat!

20. Legyen $A := \{a; b; c; d; e; f\}$, $B := \{b; d; e; g; h\}$, $C := \{c; d; f; g; i; j; k\}$. Rajzolja meg Venn-diagramon, hogy melyik elem pontosan melyik tartományban van!

21. Ábrázoljon Venn-diagramon úgy négy halmazt, hogy azon a négy halmaz által létrehozott 16 tartomány („mindegyiken kívül", „csak egyikben", „pontosan kettőben", „pontosan háromban", „mind a négyen belül") látsszék!

22. Ábrázolja a következő halmazokat Venn-diagramon! Ábrázolja a halmazok egymáshoz való viszonyát, az esetleges üres halmazokat színezze be!

A a 2-vel osztható pozitív egész számok halmaza

B a 3-mal osztható pozitív egész számok halmaza

C a 5-tel osztható pozitív egész számok halmaza

A következő halmazok közül melyik lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaz?

D a 6-tal osztható pozitív egész számok halmaza

E a 15-tel osztható pozitív egész számok halmaza

F a nem 0-ra vagy 5-re végződő, 6-tal osztható pozitív egész számok halmaza

G a 30-cal osztható pozitív egész számok halmaza

H a 15-tel osztható páratlan pozitív egész számok halmaza

I a 60-nal osztható pozitív egész számok halmaza

23. Legyen $C := \{a; e; i\}$ és $D := \{a; b; c\}$. Sorolja fel a

a) $C \cup D$; b) $C \cap D$; c) $C \setminus D$; d) $D \setminus C$

műveletek eredményeként kapott halmazok elemeit!

24. Tudjuk, hogy $A \subset B \subset C$. Mivel egyenlő $A \cup B \cup C$ és $A \cap B \cap C$? Készítsen Venn-diagramot!

25. Adottak az alábbi halmazok:

$A := \{a \in \mathbf{Z} \mid a^2 - 4 = 0\}$, $B := \{b \in \mathbf{Z} \mid -3 < b < 3\}$, $C := \{c \in \mathbf{N} \mid c \leq 7\}$.

Sorolja fel az A, B, C halmaz elemeit, majd adja meg az alábbi halmazokat!

a) $(A \setminus B) \setminus C$ b) $(A \cup B) \setminus C$ c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

d) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$ e) $(A \cap B) \setminus C$ f) $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

26. Sorolja fel az alábbi véges halmazok elemeit:

$A := \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 \leq 4\}$;

$B := \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 2\}$;

$C := \{x \text{ prímszám} \mid 0 < x < 6\}$.

Határozza meg a fenti halmazok metszetét! Állapítsa meg, hogy a fenti halmazok közül melyik valódi részhalmaza a másiknak!

27. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi kijelentések tetszőleges A és B halmazokra!

a) Ha $a \in B$ és $a \notin A$, akkor $a \in (A \cap B)$.

b) Ha $a \in B$ és $a \notin A$, akkor $a \in (A \setminus B)$.

c) Ha $a \in B$ és $a \notin A$, akkor $a \in (A \cup B)$.

d) Ha $a \in B$ és $a \notin A$, akkor $a \in (B \setminus A)$.

28. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi kijelentések tetszőleges A és B halmazokra!

a) Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cup B)$.

b) Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \setminus B)$.

c) Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cap B)$.

d) Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (B \setminus A)$.

29. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi kijelentések tetszőleges A és B halmazokra!

a) Ha $a \in (A \cup B)$, akkor $a \in A$ vagy $a \in B$.

b) Ha $a \in (A \setminus B)$, akkor $a \in B$ és $a \notin A$.

c) Ha $a \in (A \cap B)$, akkor $a \in A$ vagy $a \in B$.

d) Ha $a \in (A \cap B)$, akkor $a \in A$ és $a \in B$.

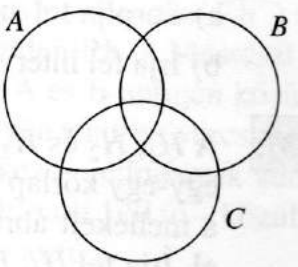
e) Ha $a \notin (A \cap B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

f) Ha $a \notin (A \cup B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

30. Igaz-e tetszőleges A, B, C halmazokra, hogy:

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

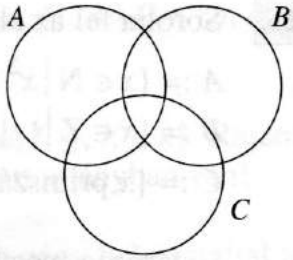
b) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$?



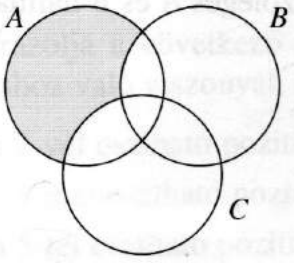
31. Igazak-e tetszőleges A, B, C halmazokra a következő egyenlőségek?

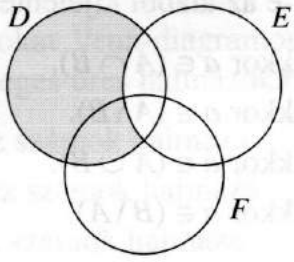
a) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

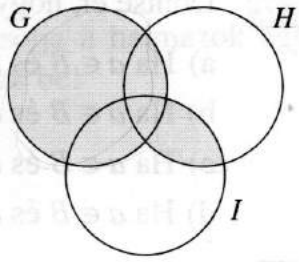
b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$



32. Írja fel halmazműveletekkel az ábrákon színezett tartományokat!







33. Legyen A a mézet szerető, B pedig a tejet szerető magyar állampolgárok halmaza. Adja meg szöveggel az $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

34. Legyen A a páros egész számok, B a hárommal osztható pozitív egész számok, C a kilenccel osztható egész számok halmaza. Adja meg szöveggel a $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cap B$ és $A \cap B \cap C$ halmazokat!

35. Legyen A a rombuszok, B a téglalapok, C a deltoidok halmaza.

a) Szemléltesse a fent megadott halmazokat Venn-diagramok segítségével!

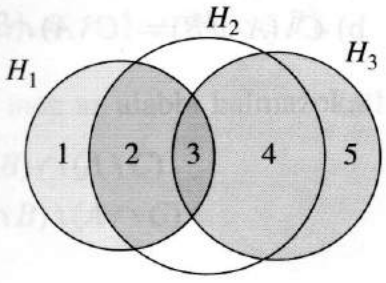
b) Írja fel az A, B, C és halmazműveletek segítségével a következő halmazokat: H_1 a négyzetek halmaza; H_2 azon téglalapok halmaza, amelyek nem négyzetek; H_3 azon deltoidok halmaza, amelyek téglalapok; H_4 azon rombuszok halmaza, amelyek nem négyzetek.

36. Adottak a következő intervallumok: $A :=]-2{,}11; -2{,}1]$ és $B :=]-2{,}105; -2{,}1]$.

a) Sorolja fel az A, illetve B számhalmaz 5-5 különböző elemét!

b) Írja fel intervallum jelöléssel a következő halmazokat: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$!

37. A H_1, H_2 és H_3 halmazok mindegyike egy-egy körlap pontjaiból áll, amelyek a mellékelt ábra szerint helyezkednek el. Írja fel H_1, H_2, H_3 és halmazműveletek segítségével a számozott, színezett tartományokat!



38. Legyen a koordinátasík pontjai közül A azon pontok halmaza, amelyekre $(x-4)^2+(y+3)^2=4$, B pedig azoké, amelyekre $x=b$. Határozza meg b értékét úgy, hogy $A\cap B$ ne legyen üres halmaz! Ábrázolja a kapott ponthalmazokat!

39. Adjon meg olyan A és B végtelen és C véges halmazt, melyekre teljesül, hogy $A\cap B=C$!

40. Tudjuk, hogy $|A\cap B|=4$, $|A\setminus B|=2$, $|A\cup B|=9$. Mennyi $|A|$ és $|B|$? (Az „$|A|$” jelölés az A halmaz elemeinek számát jelenti.)

41. Tudjuk, hogy egy 28 fős osztályban nincs jelese 23 tanulónak fizikából és 21 tanulónak matematikából. Hány tanulónak van matematikából és fizikából is jeles osztályzata, ha tudjuk, hogy matematikából vagy fizikából 10-en kaptak jelest?

42. Száz egyetemi hallgatónőről készült a következő statisztika:

	férjezett és balkezes	hajadon és balkezes	férjezett és jobbkezes	hajadon és jobbkezes
szőke	6	9	10	20
barna	7	11	15	9
vörös	2	3	8	0

Jelölje S a szőke, B a barna, V a vörös, F a férjezett, J a jobbkezes hallgatónők halmazát! Határozza meg a következő halmazokba tartozó hallgatónők számát a táblázat alapján!

a) $S\cap F\cap J$

b) B

c) $V\cap\overline{J}$

d) $(B\cup V)\cap(F\cup\overline{J})$

43. Az emberi vérben található többek között az A, B és Rh antigén. Vérvizsgálatkor többféleképpen osztályozzák az embereket. Egyrészt Rh-pozitív (röviden: Rh^+) valaki, ha vérében van Rh antigén, különben Rh-negatív (röviden Rh^-). Másrészt az A, B vagy AB vércsoportba tartozik attól függően, hogy az A és B antigén közül a vére melyiket tartalmazza. Ha sem A-t, sem B-t, akkor az egyén a nullás vércsoportba tartozik. Egy vérvizsgálaton 1000 fő vett részt. A következő eredmények adódtak: A vércsoportú volt 410, B vércsoportú 482, 0-s 64 fő. Rh^+ volt 120 fő – közülük A vércsoportú 42, B vércsoportú 61, és nem volt AB vércsoportú.

a) Hány AB vércsoportú egyén volt a vizsgálatban?

b) Hány 0-s vércsoportú Rh^- egyén volt a vizsgálatban?

44. Egy matematika versenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók 70%-a, a másodikat pedig az indulók 60%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és kilencen mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

45. Egy felmérésből kiderült, hogy egy iskola tanulói közül 90-en rendszeresen sportolnak, 77-en kedvelik a komolyzenét és 152-en rajonganak az AMFM együttesért.

a) Lehet-e az iskola tanulóinak száma 350?

b) Legalább hány tanulója van az iskolának?

c) Ha az iskola tanulóinak száma 165, akkor legfeljebb hány olyan tanulója van, aki kedveli a komolyzenét, de nem sportol?

46. Egy cég felmérést készít egyik kis üzlete forgalmáról. Az üzletben háromfajta cikket árulnak: A-t, B-t és C-t. Az eladó így számolt be a napi forgalomról: „Az üzletben 40-en fordultak meg, közülük 15-en nem vettek semmit. Az A árucikkből 15-en vásároltak, a B-ből 12-en, a C-ből 10-en. 6 vevő vásárolt az A-ból és B-ből, 1 vevő B-ből és C-ből, 3 vevő C-ből és A-ból." Ha Ön lenne az eladó főnöke, mit mondana a fenti beszámoló után beosztottjának?

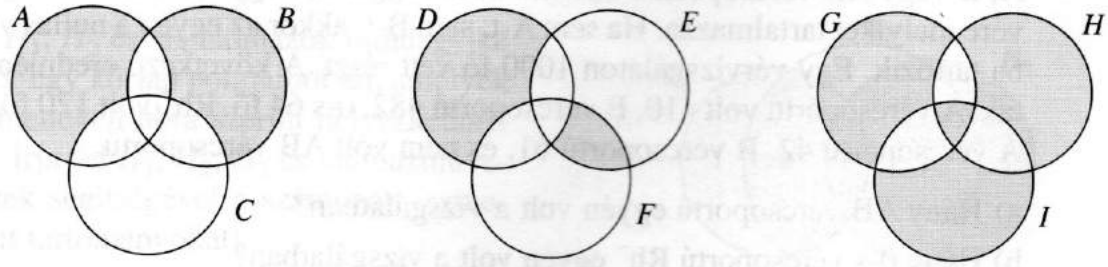
47. Négy ötbetűs magyar szó a következő érdekes tulajdonsággal rendelkezik:

1. Mindegyik szó öt különböző betűből áll.
2. Bárhogyan választunk ki két szót a négyből, mindegyiknek két közös betűje van.
3. Minden három szónak egy közös betűje van.
4. A négy szóban nincsen közös betű.

Hány különböző betű szerepel összesen a négy szóban? (Konkrét példa: város, rétes, virít, vasút.)

48. Legyen a koordinátasík pontjai közül A azon pontok halmaza, amelyekre $(x-4)^2+(y+3)^2=4$, C pedig azoké, amelyekre $y=mx+3$. Határozza meg m értékét úgy, hogy $A \cap C$ ne legyen üres halmaz!

49. Írja fel halmazműveletekkel az ábrákon színezett tartományokat!



50. Az alábbi halmazok közül válasszon ki három olyan halmazt, amely végtelen, és bármelyik két halmaz közös része is végtelen!

$A := \{x \in \mathbf{Q} \mid -1 < x < 4\}$

$B := \{x \in \mathbf{Q}^* \mid x \in [-2; \frac{1}{2}]\}$

$C := \mathbf{Q}$

$D :=]0; 1[$

$E := \mathbf{N}$

F a pozitív páros számok halmaza

51. Az A, B, C halmazok közül egyiknek sem részhalmaza a másik két halmaz bármelyike. A három halmazra teljesül: $|A \cap B \cap C| + 1 = \frac{|A| + |B| + |C|}{3}$.

Mekkora $|(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)|$? (Az „$|A|$” jelölés az A halmaz elemeinek számát jelenti.)

1.2. Logika

52. Igaz vagy hamis? Válaszait röviden indokolja!

a) Minden egész szám racionális.

b) Van olyan egész szám, amelyik nem racionális.

c) Minden racionális szám egész szám.

d) Van olyan racionális szám, amelyik nem egész szám.

e) Nincs olyan természetes szám, amelyik nem racionális szám.

53. Legyen $A :=]0; 2[$. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Az A halmaz bármely eleménél van kisebb eleme is az A halmaznak.

b) Az A halmaznak nincs legkisebb eleme.

c) Bármely p pozitív számhoz találunk az A halmazban e p számnál kisebb elemet.

54. „Két páros szám összege mindig páros."

a) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását!

b) Igaz-e ez a megfordítás?

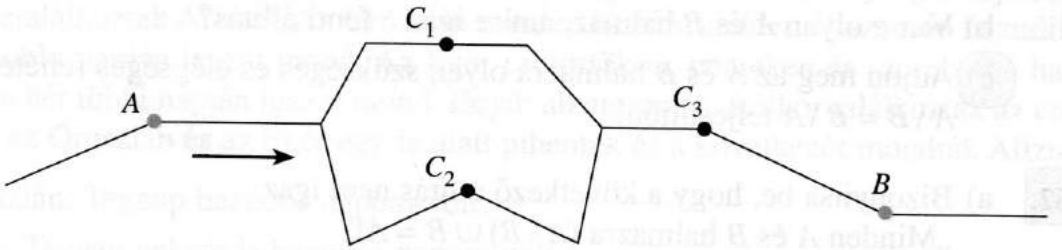
55. Egy versenyen az országos döntőbe 9 diák került be, lányok és fiúk vegyesen. Itt a lányok négytized része legalább 2 feladatot oldott meg hibátlanul. Hány fiú és hány lány volt a döntőben?

56. Egy kiránduló csoport létszáma kétjegyű páros szám. Mindannyian leülhetnek egy ötvenszemélyes buszban, és tudjuk, hogy hússzor annyi fiú van köztük, mint lány. Hányan vannak összesen?

57. Egy osztály 33 tanulója közül 6-ra igaz az az állítás, hogy javítóvizsgáznia kell történelemből; 5-re az, hogy javítóvizsgáznia kell biológiából; 3-ra pedig az, hogy javítóvizsgáznia kell mindkét tárgyból. Hány tanulóra igaz az az állítás, hogy egyik tárgyból sem kell javítóvizsgáznia?

58. András megmagyarázta Bélának, hogy ha négy egész szám összege páratlan, akkor szorzatuk biztosan páros. Igaz-e ez az állítás akkor is, ha öt vagy hat egész számról van szó?

59. Egy vízvezeték-hálózat részlete látható az ábrán, a víz az *A* hely felől a *B* felé folyhat. C_1, C_2 és C_3 egy-egy főcsap, ami nyitott vagy zárt állású lehet.

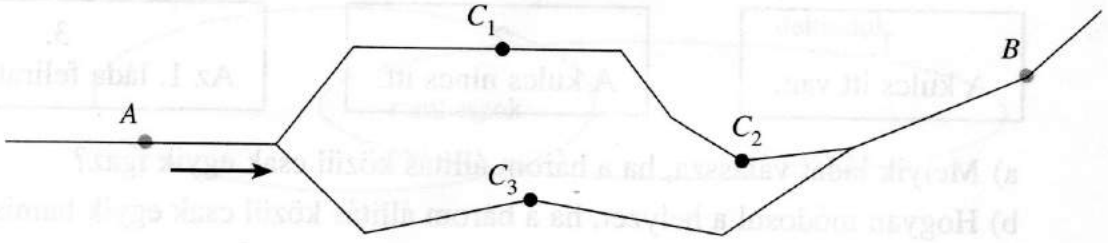


a) A *B* helyen csőrepedés történt, amit sürgősen ki kell javítani. Melyik főcsap zárásával lehet elérni, hogy meg lehessen kezdeni a javítást? Ha több lehetőség is van, sorolja fel mindegyiket!

b) Foglalja táblázatba a főcsapok összes lehetséges állását (nyitott = N, zárt = Z). Mindegyik lehetőség esetén tüntesse fel azt is, hogy a *B* helyen átfolyik-e a víz? A táblázat fejléce és első sora legyen a következő:

	C_1	C_2	C_3	*B* helyen átfolyik a víz
1.	Z	Z	Z	hamis
2.				
⋮				

60. Egy vízvezeték-hálózat részlete látható az ábrán, a víz az *A* hely felől a *B* felé folyhat. C_1, C_2 és C_3 egy-egy főcsap, ami nyitott vagy zárt állású lehet.



a) A *B* helyen csőrepedés történt, amit sürgősen ki kell javítani. Melyik főcsap zárásával lehet elérni, hogy meg lehessen kezdeni a javítást? Ha több lehetőség is van, sorolja fel mindegyiket!

b) Foglalja táblázatba a főcsapok összes lehetséges állását (nyitott = N, zárt = Z). Mindegyik lehetőség esetén tüntesse fel azt is, hogy a *B* helyen átfolyik-e a víz? A táblázat fejléce és első sora legyen a következő:

	C_1	C_2	C_3	*B* helyen átfolyik a víz
1.	N	N	N	igaz
2.				
⋮				

61. a) Bizonyítsa be, hogy a következő állítás nem igaz:
„Minden A és B halmazra $A \setminus B = B \setminus A$!"

b) Van-e olyan A és B halmaz, amire igaz a fenti állítás?

c) Adjon meg az A és B halmazra olyan szükséges és elégséges feltételt, hogy $A \setminus B = B \setminus A$ teljesüljön!

62. a) Bizonyítsa be, hogy a következő állítás nem igaz:
„Minden A és B halmazra $(A \setminus B) \cup B = A$!"

b) Van-e olyan A és B halmaz, amire igaz a fenti állítás?

c) Adjon meg az A és B halmazra olyan szükséges és elégséges feltételt, hogy $(A \setminus B) \cup B = A$ teljesüljön!

63. Hárman beszélgetnek: X, Y és Z. X azt mondja: „Y hazudik." Y azt mondja: „Z hazudik." Z azt mondja: „X hazudik és Y is hazudik." Ki mond igazat, és ki hazudik?

64. Egy útelágazásnál két testvér lakik: az egyik igazmondó, a másik hazudik. Az egyik út egy szakadékba vezet, a másik egy városba. Az utazó az elágazáshoz ér. Csak az egyik testvér van otthon; nem tudni, melyik. Hogyan tudhatja meg egy kérdésből (illetve az arra adott válaszból) az utazó, hogy melyik a helyes út a városba?

65. Egy legény fogoly Bergengócia tömlöcében. A király kegyelmet ad neki, ha elsőre megtalálja a börtön kulcsát a három láda egyikében. A ládákon a következő feliratok vannak:

1.	2.	3.
A kulcs itt van.	A kulcs nincs itt.	Az 1. láda felirata hamis.

a) Melyik ládát válassza, ha a három állítás közül csak egyik igaz?

b) Hogyan módosul a helyzet, ha a három állítás közül csak egyik hamis?

66. Egy papíron az alábbi száz állítás olvasható:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis.

...

100. Ezen a papíron pontosan száz állítás hamis.

Mely állítások igazak a papíron?

67. Alíz a Feledékenység erdejében járva leggyakrabban azt felejtette el, hogy milyen nap van. Az Oroszlán és az Egér is gyakran látogatták a Feledékenység erdejét, ahol összetalálkoztak Alízzal. Az Oroszlán minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, a hét többi napján igazat mond. Az Egér csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, a hét többi napján igazat mond. Egyik alkalommal, amikor találkoztak az erdőben, az Oroszlán és az Egér egy fa alatt pihentek és a következőt mondták Alíznak:

Oroszlán: Tegnap hazudós napom volt.

Egér: Tegnap nekem is hazudós napom volt.

Ebből a két kijelentésből Alíz megállapította, hogy milyen nap volt. Mit állapított meg Alíz?

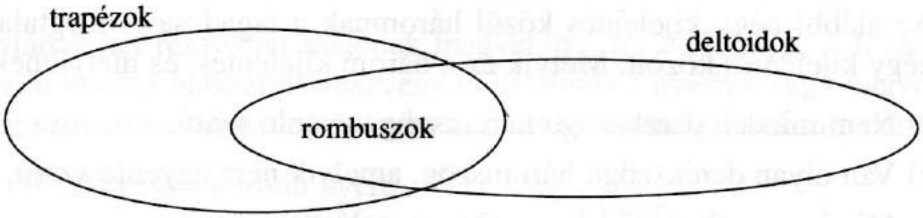
68. Az alábbi következtetések közül melyek helyesek, melyek nem?

a) Ha moziba megyek, nem tudok tanulni. De tanultam. Tehát nem voltam moziban.

b) Ha nem megyek uszodába, tanulok. Nem tanultam. Tehát uszodában voltam.

69. a) A trapézok és deltoidok halmazának metszetében benne van az *ABCD* négyszög. A négyszög átlóinak hossza 20 cm és 15 cm. Mekkora a kerülete?

b) Fogalmazzon meg négy igaz kijelentést az alábbi ábrához kapcsolódóan úgy, hogy a kijelentések rendre a „Minden …”, „Van olyan …”, „Nem minden …”, „Nincs olyan …” kifejezésekkel kezdődjenek!



70. „Ha egy természetes szám nullára végződik, akkor osztható 5-tel.” Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását! A megfordítás igaz vagy hamis?

71. „Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor van két egyenlő szöge.” Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását! A megfordítás igaz vagy hamis?

72. „Ha a $\sqrt{2}$ racionális, akkor a $\sqrt{2}$ felírható két pozitív egész szám hányadosaként.” Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását!

73. Megadunk két állítást:

1. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói kölcsönösen felezik egymást.
2. Ha egy négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

Igaz-e, hogy

a) az első állítás a második megfordítása?

b) a második állítás az első megfordítása?

c) az első állítás a második tagadása?

d) a második állítás az első tagadása?

e) mindkét állítás igaz?

f) az egyik állítás hamis?

74. Fogalmazza meg az alábbi kijelentések tagadását, az a) és c) kijelentését kétféleképpen is!

a) A 12 osztható 3-mal és osztható 4-gyel.

b) A 12 nem osztható 3-mal vagy nem osztható 4-gyel.

c) Minden páros szám nullára végződik.

d) Van olyan 5-tel osztható egész szám, amelyik nem nullára végződik.

75. Az alábbi négy kijelentés közül háromnak a tagadása is megtalálható a felsorolt négy kijelentés között. Melyik ez a három kijelentés, és melyiknek mi a tagadása?

a) Nem minden derékszögű háromszög egyenlő szárú.

b) Van olyan derékszögű háromszög, amelyik nem egyenlő szárú.

c) Minden derékszögű háromszög egyenlő szárú.

d) Van olyan derékszögű háromszög, amelyik egyenlő szárú.

76. Az alábbi négy kijelentés közül háromnak a tagadása is megtalálható a felsorolt négy kijelentés között. Melyik ez a három kijelentés, és melyiknek mi a tagadása?

a) Minden derékszögű háromszög egyenlő szárú.

b) Nincs olyan derékszögű háromszög, amelyik egyenlő szárú.

c) Van olyan derékszögű háromszög, amelyik egyenlő szárú.

d) Minden derékszögű háromszögnek két különböző hosszúságú befogója van.

77. Peti az *ABCD* négyszöget vizsgálva azt szeretné eldönteni, hogy téglalap-e? A következő módon okoskodik: „Tanultuk, hogy ha az *ABCD* négyszög téglalap, akkor átlói kölcsönösen felezik egymást. Azt is tudom, hogy ennek az *ABCD* négyszögnek az átlói kölcsönösen felezik egymást. Tehát ez a négyszög egy téglalap." Helyes-e Peti következtetése? Válaszát röviden indokolja!

78. Kati az *ABCD* négyszöget vizsgálva azt szeretné eldönteni, hogy átlói felezik-e egymást? A következő módon okoskodik: „Tanultuk, hogy ha az *ABCD* négyszög téglalap, akkor átlói kölcsönösen felezik egymást. Azt is tudom, hogy ez az *ABCD* négyszög nem téglalap. Tehát ennek a négyszögnek az átlói nem felezik egymást." Helyes-e Kati következtetése? Válaszát röviden indokolja!

79. Feri az *ABCD* négyszöget vizsgálva azt szeretné eldönteni, hogy téglalap-e? A következő módon okoskodik: „Tanultuk, hogy ha az *ABCD* négyszög téglalap, akkor átlói kölcsönösen felezik egymást. Azt is tudom, hogy ennek az *ABCD* négyszögnek az átlói nem felezik egymást. Tehát ez a négyszög nem téglalap." Helyes-e Feri következtetése? Válaszát röviden indokolja!

80. X úr a következő módon reagál Y felszólalására: „Ha Y úr, tisztelt kollégám, birtokában lenne az elemi logikai következtetési szabályoknak, akkor ezt a baklövést nem követi el. Sajnos Y úr a logikai következtetésekkel sincs tisztában. Ezért ne is csodálkozzunk előbbi melléfogásán." Ön szerint X úr helyes következtetésre jutott-e (pusztán logikai szempontból)? Válaszát röviden indokolja!

81. Okos Katának két részvényt kínálnak megvételre: R_1-et és R_2-t. A tőzsdei szabályok szerint elvileg bármelyik részvényen hatalmasat nyerhet vagy nagyot bukhat. Kata nem szokott kockáztatni, de most van két biztosan igaz információja:

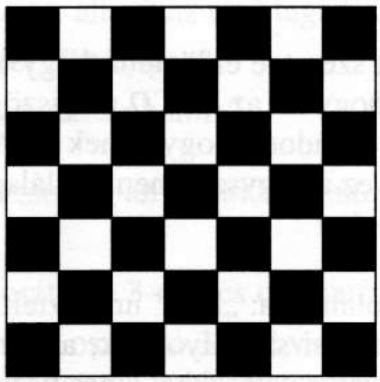
1. Az egyik részvény biztosan nyerő.
2. Az R_1-en nyerni lehet vagy az R_2-n veszíteni.

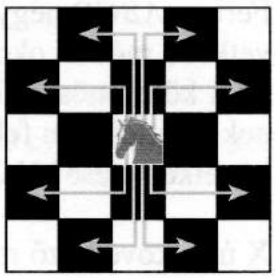
Ön szerint érdemes-e Okos Katának részvényt vásárolni? Ha igen, akkor melyiket, ha nem, akkor miért nem?

82. „Ha a $\sqrt{5}$ racionális szám, akkor felírható két pozitív egész szám hányadosaként. Bizonyítható, hogy a $\sqrt{5}$ nem írható fel két pozitív egész szám hányadosaként. Tehát ..." – itt kicsöngettek a matematikaóráról és a zajban nem lehetett hallani a tanár megkezdett mondatának befejezését. Fejezze be a következtetést úgy, hogy az helyes legyen!

83. Az asztalitenisz TOP'12 versenyen 12 versenyző körmérkőzést játszik, azaz bármely két asztaliteniszező pontosan egyszer játszik egymással. Bizonyítsa be, hogy bármely időpontban van legalább két olyan versenyző, aki addig ugyanannyi mérkőzést fejezett be!

84. Vegyünk egy 7×7 egységes, sakktáblaszerűen színezett tartományt (bal oldali ábra) és rajta egy lovat (sakkfigurát). Bejárhatjuk-e a teljes tartományt a lóval úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és az utolsónak érintett mező pont lóugrásnyira legyen a kiindulási helytől? (Bármelyik mezőről indulhatunk. A ló a második ábrán jelölt módokon ugorhat, ha a lóval jelölt mezőről indul.)





85. Magyarországnak több lakosa van, mint ahány hajszál bármelyik lakos fején. (Tegyük fel, hogy senki sem kopasz teljesen.) Bizonyítsa be, hogy van legalább két olyan magyar ember, akinek pontosan ugyanannyi hajszála van.

86. a) Hét pár fekete és hét pár fehér zokni van egy fiókban rendetlenül. Sötétben tapogatózva legalább hány zoknit kell kivenni a fiókból ahhoz, hogy biztosan legyen köztük legalább két azonos színű?

b) Tegyük fel, hogy ugyanannyi fekete és fehér zokni van a fiókban. Tudjuk, hogy legalább annyi zoknit kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen egy pár egyszínű zokni, mint amennyit ahhoz kell minimálisan kivenni, hogy biztosan legyen két különböző színű zokni. Hány zokni van a fiókban?

87. Hárman megérkeznek egy hotelbe, ahol a recepciós közli velük, hogy egy 3 ágyas szoba ára egy éjszakára 30 \$. Mindegyikük fizet 10-10 \$-t. Este a recepciós észreveszi, hogy aznap éjszakára kedvezmény érvényes, a szoba ára csak 25 \$. Odaadja a pincérnek az 5 \$-t, hogy adja vissza a vendégeknek. Mivel az 5 nem osztható 3-mal, ezért a pincér mindegyiküknek visszaad 1-1 \$-t és a maradék 2 \$-t megtartja magának. A vendégek összesen $9 \cdot 3 = 27$ \$-t fizettek a szobáért, 2-t megtartott a pincér, $27 + 2 = 29$. Hol a harmincadik dollár?

88. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Válaszát indokolja!

a) Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal.

b) Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.

c) Van olyan valós szám, amelynek reciproka megegyezik a szám ellentettjével.

d) Nincs olyan paralelogramma, amely ne lenne középpontosan szimmetrikus.

e) Minden tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció, de nem minden egybevágósági transzformáció tengelyes tükrözés.

89. Egy lakásban öten laknak, éspedig Kovács, a felesége, felnőtt fiuk, Kovács nővére és az édesapja. Mind az öten dolgoznak. Egyikük kereskedő, a másik ügyvéd, a harmadik postás, a negyedik mérnök, az ötödik tanító. Az ügyvéd és a tanító nem vérrokonok. A kereskedő idősebb a sógornőjénél és a tanítónál. A mérnök idősebb a postásnál. Kinek mi a foglalkozása? (Vérrokonok: akiket biológiai, nem jogi rokonság fűz egymáshoz. Ilyenek a szülők és gyermekek, a nagyszülők és unokák, a testvérek; de nem ilyenek a házastársak, az anyós és vő stb.)

90. Tegnap este András hangversenyre ment, Béla Olgával töltötte az estét, Csaba nem is látta Rozit, Panni moziban volt, Rozi viszont színházban. A társasághoz tartozik még Dezső és Sári. Minden fiúnak egy-egy lánnyal volt közös programja. Az egyik pár kiállításon volt. Ki kivel volt és hol?

91. Két kalapunk van, az egyikben két piros és két fehér golyó; a másikban egy fehér és négy piros golyó. Kiválasztunk egy kalapot, majd kihúzunk abból három golyót.

a) Szemléltesse az összes logikai lehetőséget!

b) Hány eset van?

c) Hány olyan eset van, amelyben három piros golyót húzunk?

d) Hány olyan eset van, amelyben két pirosat és egy fehéret húzunk?

e) Hány olyan eset van, amelyben három fehéret húzunk?

f) Melyik eset maradt ki? Abból hány van?

92. A tapasztalat azt mutatja, hogy a kékszeműek között több a szőke, mint általában. Következik-e ebből, hogy a szőkék között több a kékszemű, mint általában?

93. a) A matematikusok között a legjobb zenész és a zenészek között a legjobb matematikus vajon ugyanaz a személy-e?

b) A matematikusok között a legöregebb zenész és a zenészek között a legöregebb matematikus vajon ugyanaz a személy-e?

94. Tekintse a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenséget.

a) Az egyenlőtlenség teljesülésének az $x \geq 0$ feltétel szükséges, elégséges vagy szükséges és elégséges feltétele?

b) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x \geq 0$ helyett $x \geq 10$ esetén!

c) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x \geq 0$ helyett $x \geq 8$ esetén!

95. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Válaszát indokolja!

a) Ha egy négyszög átlói egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek, akkor az négyzet.

b) Páros számú pozitív egész szám összege is páros.

c) Két négyzetszám szorzata is négyzetszám.

96. A napközisek uzsonnához készülődnek: vajas kenyér lesz kakaóval. Nem mindegyikük szereti azonban ezt az összeállítást, így aztán megjegyzéseket tesznek.

Anti: Sem a vajas kenyeret nem eszem meg, sem a kakaót nem iszom meg.

Bea: Megeszem a vajas kenyeret és megiszom a kakaót.

Cili: Csak a kakaót iszom meg.

Dani: Megeszem a vajas kenyeret vagy megiszom a kakaót.

Négyféle tény következhet be az uzsonna során: az illető gyerek

1. megeszi a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
2. megeszi a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót;
3. nem eszi meg a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
4. nem eszi meg a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót.

Töltse ki az alábbi táblázatot „i" és „h" értékekkel aszerint, hogy melyik gyerek esetén melyik tény lesz „igaz" vagy „hamis"!

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

97. A napközisek uzsonnához készülődnek: vajas kenyér lesz kakaóval. Nem mindegyikük szereti azonban ezt az összeállítást, így aztán megjegyzéseket tesznek.

Edit: Nem eszem meg a vajas kenyeret.

Feri: A kakaót megiszom.

Gábor: Ha megeszem a vajas kenyeret, akkor megiszom a kakaót.

Hédi: Nekem mindegy.

Négyféle tény következhet be az uzsonna során: az illető gyerek

1. megeszi a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
2. megeszi a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót;
3. nem eszi meg a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
4. nem eszi meg a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót.

Töltse ki az alábbi táblázatot „i" és „h" értékekkel aszerint, hogy melyik gyerek esetén melyik tény lesz „igaz" vagy „hamis"!

	E	F	G	H
1				
2				
3				
4				

98. Jelentse p azt, hogy „esik az eső", q azt, hogy „fúj a szél". Írja le logikai jelekkel a következő mondatokat!

a) Ha esik az eső, akkor fúj a szél.

b) Ha fúj a szél, akkor esik az eső.

c) Ha a szél fúj, akkor nem esik az eső.

99. Mutassa meg, hogy az A, B, C kijelentések bármely logikai értéke esetén igaz, hogy $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$!

100. Mutassa meg, hogy az A, B, C kijelentések bármely logikai értéke esetén igaz, hogy $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$!

101. Lehetséges-e, hogy az $(A \vee B) \wedge C$ kijelentés igaz, és ugyanakkor az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés hamis?

102. Igaz-e tetszőleges A és B állításokra, hogy

a) $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$; b) $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$?

103. Egyszerűsítse az alábbi formulákat igazságtáblázat segítségével!

a) $A \wedge (A \vee B)$ b) $A \vee (A \wedge B)$

104. A bíróságon X-et, Y-t és Z-t rablásban való részvétellel vádolták. A következő két kijelentést sikerült bizonyítékokkal igazolni:

1. X bűnös vagy Z ártatlan.
2. Ha X ártatlan vagy Y bűnös, akkor Z bűnös.

A fentiek alapján a bíróság X-et bűnösnek találta. Helyesen döntött? Válaszát indokolja!

105. Egy távoli országban egyes emberek mindig igazat mondanak, a többiek mindig hazudnak.

a) Két ember találkozik, és egyikük azt mondja: „Legalább egyikünk hazudik." Mifélék lehetnek ők?

b) Két ember találkozik, és egyikük azt mondja a másiknak: „Vagy hazudok, vagy te igazat mondasz." Mifélék lehetnek ők?

c) Két ember találkozik, és egyikük azt mondja a másiknak: „Én hazudok, de te igazat mondasz." Mifélék lehetnek ők?

106. András és Béla egy-egy pozitív egész számra gondoltak. Megmondták Csabának, aki elárulta, hogy a gondolt számok különbsége 2001. Ebből András még nem tudta, hogy mire gondolt Béla, viszont Béla már tudta, hogy mire gondolt András. Igaz, ha 1-gyel nagyobb számra gondolnak, már nem tudta volna. Melyik számra gondolt András és Béla?

107. Adja meg a következő mondatok tagadását (tovább már nem egyszerűsíthető formában)!

a) Minden jó, ha jó a vége.

b) Nem zörög a haraszt, ha a szél nem fújja.

108. A napközisek uzsonnához készülődnek: vajas kenyér lesz kakaóval. Nem mindegyikük szereti azonban ezt az összeállítást, így aztán megjegyzéseket tesznek.

Ildi: Nem igaz, hogy ha megeszem a vajas kenyeret, akkor megiszom a kakaót.

Jancsi: Vagy megeszem a vajas kenyeret, vagy megiszom a kakaót.

Kati: A kettőt együtt biztos nem kérem.

Lali: Megeszem a vajas kenyeret.

Négyféle tény következhet be az uzsonna során: az illető gyerek

1. megeszi a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
2. megeszi a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót;
3. nem eszi meg a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
4. nem eszi meg a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót.

Töltse ki az alábbi táblázatot „i" és „h" értékekkel aszerint, hogy melyik gyerek esetén melyik tény lesz „igaz" vagy „hamis"!

	I	J	K	L
1				
2				
3				
4				

109. A napközisek uzsonnához készülődnek: vajas kenyér lesz kakaóval. Nem mindegyikük szereti azonban ezt az összeállítást, így aztán megjegyzéseket tesznek.

Miki: Ha megiszom a kakaót, akkor megeszem a vajas kenyeret.

Nóra: Akkor és csak akkor eszem meg a vajas kenyeret, ha megiszom a kakaót.

Olga: Nem iszom meg a kakaót.

Feró: Nem kell! Még a nem kell sem kell!

Négyféle tény következhet be az uzsonna során: az illető gyerek

1. megeszi a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
2. megeszi a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót;
3. nem eszi meg a vajas kenyeret, megissza a kakaót;
4. nem eszi meg a vajas kenyeret, nem issza meg a kakaót.

Töltse ki az alábbi táblázatot „i" és „h" értékekkel aszerint, hogy melyik gyerek esetén melyik tény lesz „igaz" vagy „hamis"!

	M	N	O	F
1				
2				
3				
4				

1.3. Kombinatorika

110. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?

111. Hányféle lyukasztás állítható be a buszjegy-lyukasztón, ha a szerkezet legalább 2, legfeljebb 4 számot lyukaszt ki a 9 közül?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

112. Egy pályázatra 8 hazai és 4 külföldi cég adott be pályamunkát. Egy első, két második és három harmadik díjat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez? Hány esetben lehet külföldi győztes?

113. A 200 m-es mellúszás döntőjében nyolcan indulnak.

a) Hányféle beérkezési sorrend lehetséges?

b) Hányféle dobogós sorrend lehetséges?

114. Év végén a 28 fős osztályban három jutalmat ad át az osztályfőnök. Hányféle jutalmazás lehetséges, ha egy diák

a) csak egyet kaphat a három különböző könyv közül;

b) többet is kaphat a három különböző könyv közül;

c) csak egyet kaphat a három egyforma könyvutalvány közül;

d) többet is kaphat a három egyforma könyvutalvány közül?

115. Óperencia felszabadul az évszázados bergengóc gyarmati uralom alól. A Vének új állami zászlót terveznek, három egyforma vízszintes sávra osztott lobogót. Az öt nagy istenség: a Nap, az Ég, a Felhők, a Növényzet és a Tűz színei közül választanak. A vallás tiltja bárminek az egyedüli istenítését. Hányféle lehetőség közül választhatnak?

116. Az állatszelídítő öt oroszlánt (Bozontost, Hangost, Leót, Mérgest és Pajkost) és négy tigrist (Akaratost, Éneklőt, Ordítozót és Unalmast) akar kivezetni a porondra, de két tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképp állíthatja sorba az állatokat?

117. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros és két ász?

118. Vajon az ötös vagy a hatos lottón lehet kevesebb szelvénnyel biztosan telitalálatot elérni? (Az előbbiben 90 számból húznak ki 5-öt, az utóbbiban 45 számból 6-ot.)

119. Biztosra akarunk menni a szerencsejátékban, és az összes lehetőséget meg akarjuk játszani. Mennyi ideig tartana a szelvények kitöltése

a) az ötös lottó esetén, 5 mp/szelvény sebességgel? (90 számból húznak 5-öt.)

b) a hatos lottó esetén 6 mp/szelvény sebességgel? (45 számból húznak 6-ot.)

c) a totó esetén 14 mp/szelvény sebességgel? (13 + 1 mérkőzésre lehet 1, 2, x tippet adni.)

120. Hasonlítsa össze a következő országok különböző lottóinak telitalálat-esélyeit!

Belgium	7 húzás 35-ből
Jugoszlávia	5 húzás 36-ból
Hollandia	6 húzás 41-ből
Svájc	6 húzás 36-ból
Magyarország	5 húzás 90-ből

121. Ha kitöltenénk az összes lehetséges módon ötöslottó-szelvényeket, az 1 db telitalálat mellett hány négyes, hármas, kettes találatunk lenne? (90 számból húznak 5-öt.)

122. Ha kitöltenénk az összes lehetséges módon hatoslottó-szelvényeket, az 1 db telitalálat mellett hány ötös, négyes, hármas találatunk lenne? (45 számból húznak 6-ot.)

123. Ha kitöltenénk az összes lehetséges módon totószelvényeket, az 1 db telitalálat mellett hány 13-as, 12-es, 11-es, 10-es találatunk lenne? (13 + 1 mérkőzésre lehet 1, 2, x tippet adni, de a +1 mérkőzés találata csak a telitalálatba számít, a többibe nem.)

124. A rulett-tányér peremén 0-tól 36-ig sorakoznak a számok. Hány különböző elhelyezési sorrendjük lehetséges, ha két elhelyezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egyik szám legalább egyik szomszédja eltérő?

125. Jóska elfelejtette Pista telefonszámát, csak arra emlékszik, hogy a (hétjegyű) szám négyessel kezdődik, 3 db kettes van benne és nincs benne 0. Legfeljebb hány lehetőséget kellene végigtárcsáznia?

126. Közvélemény-kutató intézet többféle kérdőíves felmérést végzett a szavazópolgárok körében. A kérdőíveken mindegyik esetben 6 politikai párt neve szerepelt.

a) Az egyik kérdőíven a válaszadóknak egyéni szimpátia alapján kellett sorba állítani a pártokat. Hányféle válasz volt lehetséges?

b) Egy másik kérdőíven három, a válaszadó által leginkább elutasított pártot kellett sorba állítani. Hányféle válasz volt lehetséges?

c) A harmadik alkalommal a 6 párt közül annak a háromnak a nevét kellett aláhúzni, amelyekre nem szívesen szavazna a választópolgár. Most hányféle válasz volt lehetséges?

d) A negyedik alkalommal azt kérték a válaszadóktól, hogy aláhúzással jelöljék meg mindazokat a pártokat, amelyeknek parlamentbe jutását nem ellenzik. Hány különböző válasz volt lehetséges ebben az esetben?

127. Egy játékautomata a következőképpen működik. A játékos bedob egy érmét, ezután három henger véletlenszerűen elfordul, majd megáll. A hengerek mindegyikének három helyzete van: narancsot, almát vagy körtét mutat. Ha mindhárom henger ugyanannak a gyümölcsnek a képét mutatja, akkor a játékos 7 érmét kap a géptől, egyébként elveszti a bedobott érméjét.

a) Hányféle helyzet alakulhat ki egy-egy forgatás után?

b) A nyerő esetek száma hány százaléka az összes lehetőségek számának?

c) Érdemes-e sokáig játszani ezzel a géppel?

128. Egy kosárban 12 alma és 10 barack van. Jancsi kivesz vagy egy almát vagy egy barackot, ezután Juliska választ egy almát és egy barackot is. Mikor van Juliskának több választási lehetősége: ha Jancsi almát vett, vagy ha barackot?

129. Egy országban nincs két olyan ember, akiknek pontosan ugyanazok a fogai hiányoznának. Mekkora lehet legfeljebb az ország lakossága? (Egy embernek legfeljebb 32 foga lehet.) Elvileg előfordulhat-e, hogy a Föld összes ma élő (kb. 6 milliárd) lakosa között nincs két olyan ember, akiknek pontosan ugyanazok a fogai hiányoznak?

130. „Nincs egy árva göncöm, amit felvegyek!" – mondta egyik reggel X-né, miközben körülötte a szekrényéből kiszórt ruhadarabok hevertek. X úr igyekezett megnyugtatni kedves feleségét. Közös megegyezéssel kiválogattak a kupacból öt blúzt, három szoknyát, három muszlinsálat és négy pár cipőt, amiket azért mégiscsak hajlandó volt további viselés céljára megtartani az asszony. Férje így nyugtatta:

– Megígérem neked, ha a kiválasztott ruhadarabokat már minden elképzelhető összeállításban viselted egy-egy napig (minden nap blúzt, szoknyát, sálat és cipőt is viselsz), akkor a teljes ruhatáradat közösen felújítjuk.

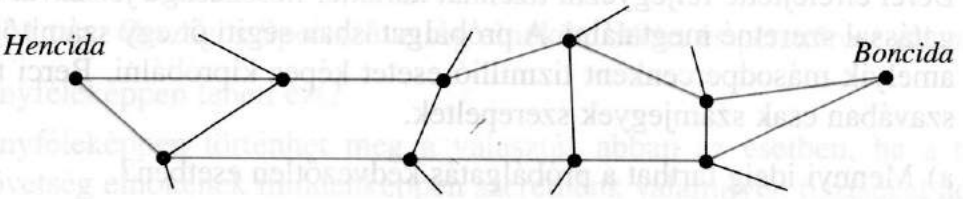
– Jó, de a lila szoknyámat semmiképpen nem hordhatom a zöld blúzommal! – válaszolta tiltakozva, de már kissé megenyhülve X-né.

– Rendben, legyen úgy, ahogy szeretnéd – zárta le a kényes ügyet X úr.

Hány nap „türelmi időt" kapott X úr a feleségétől?

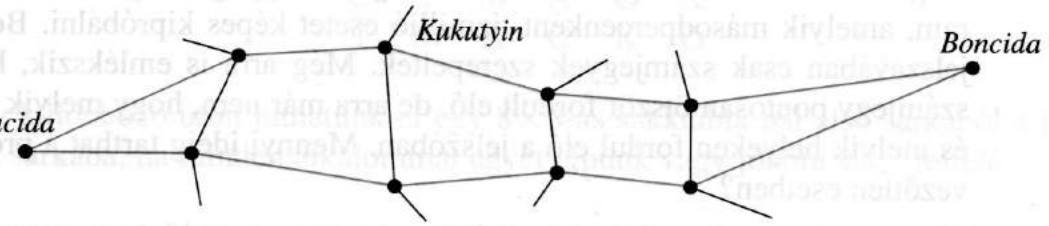
131. Három fiú és két lány munkát keres. A városban három üzemben vesznek fel férfi munkaerőt, két bölcsőde hirdet felvételt nőknek és van még két üzlet, ahol férfiakat és nőket egyaránt alkalmaznának. Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha minden munkahelyen legalább 5 dolgozót tudnak alkalmazni?

132. Hencidáról Boncidára két országút vezet, ezeket négy összekötő út keresztezi az alábbi térképvázlat szerint:



Hány különböző módon juthatunk el Hencidáról Boncidára, ha bármelyik útkereszteződést (Hencidát és Boncidát is beleértve) legfeljebb egyszer érinthetjük?

133. Hencidáról Boncidára két országút vezet, ezeket négy összekötő út keresztezi az alábbi térképvázlat szerint:



Hány különböző módon juthatunk el Hencidáról Boncidára, ha bármelyik útkereszteződést (Hencidát és Boncidát is beleértve) legfeljebb egyszer érinthetjük, és Kukutyinban mindenképpen meg kell állnunk zabot hegyezni?

134. Egy vasúti fülkében két ülés van egymással szemben, egyenként öt hellyel. A helyet foglaló tíz utas közül négyen menetiránnyal szemben akarnak ülni, hárman menetiránynak háttal, a többi háromnak közömbös, hogy hol ül. Hányféleképpen foglalhat helyet a tíz utas?

135. a) Hányféleképpen állíthat ki négytagú csapatot a 30 tagú atlétikai szakosztály mezei futóversenyre?

b) Hányféleképpen jelölhetnek ki négy versenyzőt a 100 + 200 + 400 + 800 méteres (svéd)váltó versenyre?

136. Egy kollégiumi szobában három diák lakik. Összesen négy csészéjük, öt csészealjuk és hat kiskanaluk van (az egyes csészék, csészealjak, kiskanalak mind különbözőek). Hányféleképpen teríthetnek teázáshoz, ha mindhárman egy-egy csészét, csészealjat és kanalat kapnak?

137. Zsóka asszony minden reggel díszpárnákat szokott elhelyezni a nappali szoba hosszú kanapéján. Négy, különböző színű párnája van: ezüstszürke, halványsárga, halványlila és halványkék. Közülük kettőt mindig a kanapé bal oldalán, kettőt pedig a jobb oldalán helyez el úgy, hogy az egy oldalra kerülő két párna közül az egyik félig takarja a másikat. Zsóka asszony szereti a változatosságot, ezért igyekszik minden nap más-más módon elhelyezni a párnákat. Hány nap után kényszerül ismétlésre?

138. Berci elfelejtette feljegyezni tizenhat karakter hosszúságú jelszavát és most próbálgatással szeretné megtalálni. A próbálgatásban segíti őt egy számítógépes program, amelyik másodpercenként tízmillió esetet képes kipróbálni. Berci tudja, hogy jelszavában csak számjegyek szerepeltek.

a) Mennyi ideig tarthat a próbálgatás kedvezőtlen esetben?

b) Mennyi ideig tarthat a próbálgatás, ha Berci emlékszik arra, hogy a jelszó első három karaktere ugyanaz a számjegy, de a negyedik biztosan különbözik az első háromtól?

139. Bea elfelejtette feljegyezni huszonnégy karakter hosszúságú jelszavát és most próbálgatással szeretné megtalálni. Ebben segíti őt egy igen fejlett számítógépes program, amelyik másodpercenként tízmillió esetet képes kipróbálni. Bea tudja, hogy jelszavában csak számjegyek szerepeltek. Még arra is emlékszik, hogy az egyik számjegy pontosan ötször fordult elő, de arra már nem, hogy melyik ez a számjegy és melyik helyeken fordul elő a jelszóban. Mennyi ideig tarthat a próbálgatás kedvezőtlen esetben?

140. Hány különböző rendszámtábla készíthető Magyarországon, ha az autók rendszáma 3 betűből és utána 3 számjegyből állhat? (26 egyjegyű betűből és a 10 számjegyből választhatunk, de a „000" számot nem engedjük meg.)

141. Hány rendszámtábla készíthető Görögországban, ahol az ábécé 24 betűje és a 10 számjegy áll rendelkezésre, ha a rendszám három betűből és utána következő három számjegyből áll, de a 0-val kezdődő számokat nem engedik meg?

142. a) Magyarországon sokáig két egyjegyű betű és négy számjegy volt az autók rendszámtábláján. Eltekintve attól, hogy bizonyos kombinációkat nem osztottak ki, elvileg hány rendszámot lehetett volna ezen feltétel mellett használni? (26 egyjegyű betűből és 10 számjegyből választhattak.)

b) Ma, mint tudjuk 3 egyjegyű betű és 3 számjegy a normál rendszám. Hány százalékkal több gépjárművet lehet ezzel a rendszerrel nyilvántartani, ha ismét nem számítjuk, hogy bizonyos rendszámokat nem adnak ki?

143. Hány pontosan tízjegyű szám van a kettes számrendszerben?

144. Hány darab páratlan, pontosan ötjegyű szám van a tízes számrendszerben?

145. 2000-ben az Év Arca versenyen 237-en indultak. Az esti tévéműsorban az első 8 lánnyal készítettek riportot, figyelembe véve, hogy ki hányadik lett. Hányféle műsor készülhetett, ha a riportalanyokkal való beszélgetés sorrendje pontosan az általuk elért helyezések sorrendjének fordítottja?

146. Egy 231 tagú Országos Sportszövetség elnököt, titkárt és pénztárost választ.

a) Hányféleképpen teheti ezt?

b) Hányféleképpen történhet meg a választás abban az esetben, ha a budapesti szövetség elnökének mindenképpen szeretnénk valamilyen tisztséget adni?

147. Hányféleképpen olvasható ki a MICIMACKÓ szó a következő ábra bal felső sarkából a jobb alsóig haladva?

M	I	C	I	M	A
I	C	I	M	A	C
C	I	M	A	C	K
I	M	A	C	K	Ó

148. Hány különböző úton juthatunk el egy 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha minden alkalommal egyet lépünk vagy jobbra vagy felfelé?

149. Egy egyetem elsőéves matematikus évfolyamának húsz lány és harminc fiú tanulója van. A Hallgatói Önkormányzat alakuló ülésére öttagú küldöttséget választanak, éspedig két lányt és három fiút. Hányféleképpen tehetik ezt?

150. Egy kerékpárzáron 4 forgatható, közös tengelyű korong van, melyek mindegyikén a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyek találhatók. A zár csak a korongok egy bizonyos állásánál nyílik, vagyis ha a korongokon egy előre meghatározott „négyjegyű" szám (amely most kezdődhet 0-val is!) a megfelelő helyre van állítva. Valaki percenként 15 különböző esetet tud kipróbálni. Kedvezőtlen esetben mennyi ideig kell próbálkoznia zár kinyitásával, ha tudja, hogy a kérdéses „négyjegyű" számban legalább egy 5-ös szerepel?

151. Hányféleképpen állhat osztályfőnöke előtt kettesével egy oszlopban a 18 fiúból és 18 lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?

152. Hányféleképpen helyezkedhet el 18 tanuló egy 3, egy 4, egy 5 és egy 6 személyes csónakban, ha

a) az egy csónakon belüli elhelyezkedésükre nem vagyunk tekintettel?

b) megkülönböztetjük a csónakokon belül is a helyeket?

153. Egy sakkversenyen egy versenyzőnek a 6. forduló után 4 pontja van. (A győzelem 1, a döntetlen 0,5, a vereség 0 pontot ér.) Hányféleképpen érhette el ezt a 4 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el eredményeit?

154. Sakkversenyen egy játékosnak a 6. forduló után 3 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény, ha győzelem esetén 1, döntetlen esetén 0,5 pontot kap a versenyző, vereség esetén pedig nem kap pontot, és nem számít, hogy milyen sorrendben érte el az eredményeit?

155. Egy borversenyen 21-féle vörös és 36-féle fehér bort bírálnak. Hányféle „dobogós" sorrend lehetséges, ha tudjuk, hogy az első három bor között 2 vörös és egy fehér bor volt?

156. Négy jó barát moziba ment. Egymás mellé vettek négy jegyet.

a) Hányféleképpen ülhettek le?

b) Ha kettő közülük mindenképpen egymás mellett akar ülni, akkor hány eset lehetséges?

157. Egy fagylaltárusnál ötféle fagylalt van. Valaki szeretne egy kétgombócos fagylaltot venni. Hányféleképpen teheti meg, ha

a) a két gombóc különböző, és a sorrendjük is számít (mert tölcsérbe kapja)?

b) a két gombóc lehet egyforma is, és tölcsérbe kapja?

c) a két gombóc különböző, és a sorrendjük nem számít (pl. kehelybe kéri)?

d) a két gombóc egyforma is lehet, és a sorrendjük nem számít?

158. Egy konferencián 18 különböző előadást tartanak, hármat-hármat egymással párhuzamosan, azaz 3 szekcióban. Hányféleképpen állíthatják össze az előadásokat meghallgatni kívánók a programjukat?

159. Egy bélyegsorozat 4 darabból áll. A nyomdában 8 különböző szín között választhatnak. Hányféleképpen nyomtathatják a bélyegsorozatot, ha

a) a sorozat minden bélyegének különböző színűnek kell lennie?

b) semmilyen megkötés nincs a színre?

c) legfeljebb három egyszínű bélyeg lehet a sorozatban?

160. Nyolc, nagyjából azonos felkészültségű és teljesítményű futó indul egy versenyen. A pillanatnyi állapotoktól függ az eredmény, tegyük fel, hogy bárki ugyanolyan eséllyel végezhet bármelyik helyen.

a) Hányféle dobogós végeredmény lehet?

b) Mekkora eséllyel nyerünk, ha egy tippet adhatunk az első három helyezettre?

c) Mekkora az esélye, hogy legalább egy eredményt eltalálunk (tehát vagy az első vagy a második vagy a harmadik helyezettet, de akár többet is)?

161. Egy körkérdésnél egy évfolyam 100 tanulójából (4 osztály egyenletesen 25-25 tanulóval) 20-at kérdeztek meg. Hányféleképpen választhatták ki a tanulókat, ha

a) a 20 tanulót a 100-ból választották véletlenszerűen?

b) minden osztályból 5 tanulót választottak?

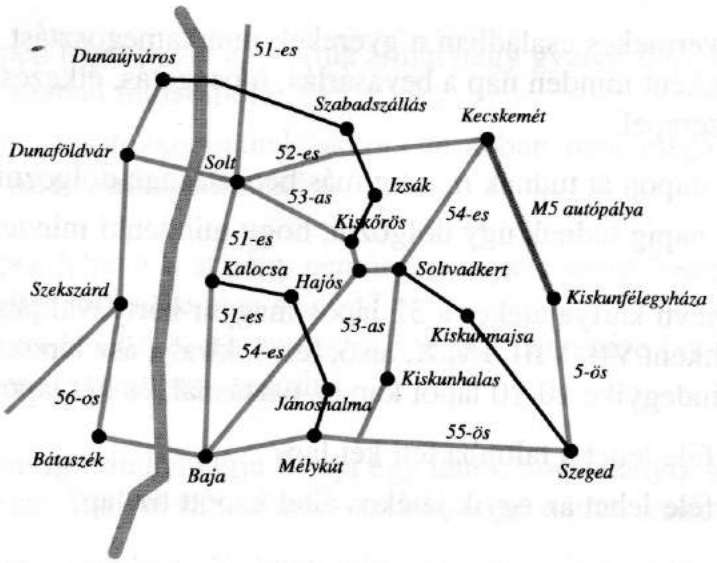
c) az évfolyamon tanuló 60 fiúból 12-t, a 40 lányból 8-at választottak?

162. Valaki el akar jutni autóval Szegedről Dunaújvárosba. Hányféleképpen teheti ezt meg a mellékelt térkép alapján, ha ugyanazon az úton nem megy át kétszer és

a) bármelyik utat használhatja?

b) csak főútvonalon és autópályán halad?

c) autópályán nem megy, mert nem elég gyors az autója, vagy nem akar fizetni?



163. Egy nagy teremben 7 különböző világítótest van. Hányféleképpen lehet megvilágítani a helyiséget, ha

a) pontosan 3 lámpának kell égnie?

b) legalább 5 lámpának kell égnie?

164. A péknél kétfajta zsemle (sima, lenmagos) és négyféle kifli (sima, óriás, sajtos, lenmagos) kapható.

a) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt?

b) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt, ha semelyik féléből nem akarok kettőt?

c) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt, ha legalább egy sajtosat és legalább egy lenmagosat mindenképpen venni akarok?

165. Egy 5 + 1 fős csapatba kell választanunk játékosokat egy 14 fős keretből. A + 1 fő a kapus, a többi 5-nek nincs fix posztja.

a) Hányféleképpen alakulhat a kezdő csapat?

b) Ha a 14 fős keretből 3 kapus és 11 mezőnyjátékos, akkor hogyan alakul a lehetőségek száma?

c) A 14 fős keret beosztása: 3 kapus, 4 védő, 3 középpályás, 4 csatár. Az edző 1 kapus, 2 védő, 1 középpályás és 2 csatár felállásban akar csapatot hirdetni. Hányféle választása van?

166. Egy körzetben hatjegyű telefonszámokat osztanak ki úgy, hogy az első jegy csak 1, 2, 3 lehet, és a legalább 5 egyforma jegyet tartalmazókat megtartják speciális számoknak. Hány vonalat lehet kiosztani ekkor?

167. Egy 4-gyermekes családban a gyerekek munkamegosztást készítenek. Elvégzendő feladatukként minden nap a bevásárlás, mosogatás, étkezésekhez terítés és szemétlevitel szerepel.

a) Hány napon át tudnak mindig más beosztásban dolgozni?

b) Hány napig tudnak úgy dolgozni, hogy mindenki minden nap mást csinál?

168. Az ulti nevű kártyajátékot a 32 lapos magyar kártyával játsszák. (Ebben négy szín és színenként VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász lapok találhatók.) A három játékos mindegyike 10-10 lapot kap az osztásnál, és két lapot talonba tesznek.

a) Hányféle lehet a talonba tett két lap?

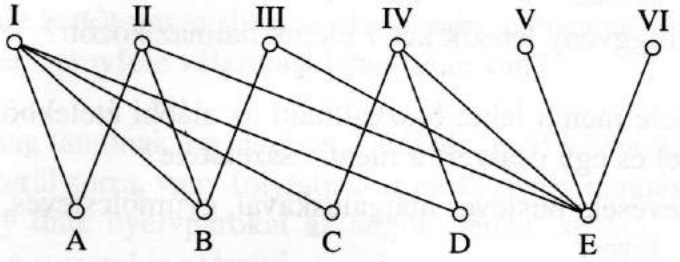
b) Hányféle lehet az egyik játékos által kapott tíz lap?

169. Határozza meg azon négyjegyű számok összegét, amelyek csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyeket tartalmazzák és mindegyiket csak egyszer!

170. Egy cégnél egy adott napon 5 különböző munkát (A, B, C, D, E) kell elvégezni. Összesen 6 személy jön szóba, akivel ezt el lehet végeztetni; senkivel nem lehet kettőt, mert az időveszteség lenne; a fennmaradó hatodik személyt tartalékolják.

a) Hányféleképpen oszthatják be a munkát, ha nincs semmilyen megkötés arra, hogy ki mit csináljon?

b) Mi a helyzet, ha a munkákhoz képzettség kell, amit az alábbi gráf ábrázol? (Az I, II, III, IV, V, VI jelű pontok a személyek; az A, B, C, D, E jelűek a munkák; s akkor van összekötve egy római számmal jelzett csúcs egy betűvel jelzett csúccsal, ha az illető képzettsége szerint el tudja végezni a munkát.)



171. a) Mennyivel több legfeljebb 9-jegyű tízes számrendszerbeli szám van, mint legfeljebb 9-jegyű kettes számrendszerbeli?

b) Legalább mennyi az n értéke, ha több legfeljebb n jegyű kettes számrendszerbeli szám van, mint legfeljebb 9-jegyű tízes számrendszerbeli?

172. a) Hányféleképpen lehet nyolc egyforma almát négy gyerek között elosztani, ha az almákat nem szabad feldarabolni?

b) Hányféleképpen osztozkodhatnak akkor, ha abban még megállapodnak, hogy legalább egy jusson mindenkinek?

173. a) Hányféleképpen lehet a 8-at négy nemnegatív egész szám összegére bontani, ha az összeadandók sorrendje nem számít?

b) Hányféleképpen lehet a 8-at négy pozitív egész összegére bontani? (Az összeadandók sorrendje most sem számít.)

174. Egy 33 tagú társaság minden tagja felírja egy lapra, hogy melyik hónapban és melyik napon született. (Mivel van szökőév is, ezért 366 dátum lehetséges!)

a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy mindenki más dátumot ír fel?

b) Különféle társaságok esetében hányféle lista lehetséges a születésnapokról?

175. Egy játékautomatánál három egymás melletti henger mindegyikén ugyanaz a 6 gyümölcsfajta jelenhet meg aszerint, hogy a megpörgetett henger hol áll meg.

a) Hányféle végeredmény lehet?

b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy mindhárom hengeren más gyümölcs jelenik meg?

c) Hányféleképpen lehet pontosan két azonos gyümölcs?

d) Hányféleképpen lehet legalább két azonos gyümölcs?

176. a) Hány egy-egyértelmű függvényt lehet két 7 elemű halmaz között létesíteni?

b) Hány függvény létezik két 7 elemű halmaz között?

177. a) Hányféle menüt lehet összeállítani az alábbi ételekből, ha egy leves, egy főétel körettel és egy desszert a menü összetétele?

Levesek: húsleves májgaluskával, gyümölcsleves, csirke raguleves, zöldségleves.
Főételek: rántott sajt, sült libacomb, rántott szelet, gombás szelet.
Köretek: rizs, sült krumpli, vegyes köret.
Desszertek: kakaós palacsinta, somlói galuska, parfé.

b) Hányféleképpen rendelhet egy négytagú család a konyha szempontjából nézve (tehát csak a megrendelt menü száma érdekes, hogy ki melyiket eszi, az nem), ha az összes lehetséges menü közül csak 5 kapható, amiből 1 vegetáriánus összeállítás, és a családban két vegetáriánus is van? (Ők csak vegetáriánus menüt választhatnak – igaz, nem csak ők.)

178. Egy községben három vízvezeték-szerelő van: Jóska, Pista és Karcsi. Egy napon hat lakásból telefonálnak vízvezeték-szerelőért. Hányféleképpen történhet ez, ha

a) Jóska három, Pista két és Karcsi egy hívást kap?

b) csak azt tudjuk, hogy a telefonhívások eloszlása: három, kettő, egy?

c) a hívások eloszlása egyenletes: kettő, kettő, kettő?

179. Az egyik tévés szerkesztő olyan félórás műsort akar szervezni, amelyben van humor, zene és reklám. Mindháromfajta műsor ideje csak 5 perc egész számú többszöröse lehet.

a) Adja meg a lehetséges időbeosztások halmazát, ha mindháromnak legalább 5 percet kell szerepelnie!

b) Hány olyan műsorterv van, amelyben 5 percenként váltás van?

180. Egy táncestélyen 12 fiú és 12 lány vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol és azonos neműek nem táncolnak egymással?

181. Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk és a kapott pontszámokat összeadjuk.

a) Elvileg melyik összeg fordulhat elő a leggyakrabban?

b) Elvileg a páros vagy a páratlan számösszeg fordulhat elő gyakrabban?

182. Matematikából a félévi értesítőben és az év végi bizonyítványban az 5; 4; 3; 2; 1 jegyek bármelyike állhat. Az elvileg lehetséges összes eset hány százalékában lesz legalább olyan jó az év végi jegy, mint a félévi?

183. Pista a moziműsorból öt, számára érdekes filmet választott ki. Mindegyik filmet egyszer játsszák, de kettőt ugyanabban az időpontban. Pistának csak két film megnézésére van pénze. Hányféle választási lehetősége van?

184. Egy iskolában 2 évig tanulnak egy nyelvet a diákok, majd a következő 2 évben vagy egy másik nyelv kerül sorra, vagy folytatják az előző nyelv tanulását. Hányféleképpen választhat egy diák nyelvpárokat az angol, német, spanyol, francia és olasz nyelvek közül, ha a sorrend is számít?

185. Nyolc labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Átlagosan hány gól esett egy mérkőzésen, ha összesen 120 gólt rúgtak?

186. Egy dobókockával tízszer dobva hányféle olyan különböző sorozatot kaphatunk, amiben van legalább egy hatos?

187. Hányféleképpen helyezkedhet el 10 házaspár egy sorban úgy, hogy a férjek a feleségek mellé kerülnek?

188. Határozza meg azoknak az 5-tel osztható hatjegyű számoknak a számát, amelyek a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyeket tartalmazzák, de mindegyiket csak egyszer!

189. Határozza meg azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek legalább egy 1-est tartalmaznak!

190. 100 darab készüléknek a 12%-a hibás. Hányféleképpen lehet 10 készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között

a) ne legyen hibás;

b) mind hibás legyen;

c) pontosan 5 hibás legyen;

d) legalább 1 hibás legyen?

191. Adott a térben 10 pont, melyek közül semelyik négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg ezek a pontok?

192. Bizonyítsa be, hogy

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$!

193. Mennyi a négyjegyű, csupa páratlan számjegyből álló számok összege, ha a számjegyismétlődést

a) megengedjük?

b) nem engedjük meg?

194. Mennyi a négyjegyű, csupa páros számjegyből álló számok összege, ha a számjegyismétlődést

a) megengedjük?

b) nem engedjük meg?

195. Egy 10 munkatársat foglalkoztató cég tréningeket szervez dolgozóinak, ötös csoportokban. Hogy minél jobban megismerjék egymást, minden lehetséges ötös csoportnak megszervezik az alkalmat, ahol az öt kolléga mindig tréning-vezetőt választ maguk közül. Bizonyítandó, hogy a teljes sorozat lezajlása után lesznek olyan dolgozók, akik különböző számú tréningnek voltak a vezetői!

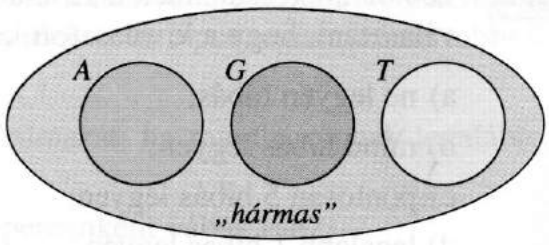
196. Hányféleképpen húzhatunk az 52 lapos francia kártyából 8 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két dáma és legfeljebb két pikk?

197. Lehet-e megfelelő számú ötöslottó-szelvényt kitölteni úgy, hogy minden lehetséges számpár pontosan egy szelvényen szerepeljen?

198. A genetikában „hármas"-nak (triplettnek) nevezik bármely három, egymással kapcsolódó olyan mononukleotid együttesét, amelyik hordozza a négy bázis – adenin, guanin, citozin és timin – valamelyikét. (Egy „hármas" tehát pl. az ábrázolt módon képzelhető el.)

a) Hány genetikai „hármas" képezhető elméletileg a négy bázisból?

b) Elméletileg hányféle lehet a DNS-láncban az a részlet, amelyik két „hármast" tartalmaz?



199. Egy árusító automatában 5 oszlop mindegyikében 6-6 tárgy van egymás fölött elhelyezve. Hányféleképpen lehet kivenni az összes tárgyat az automatából, ha mindig csak a legalsó tárgyhoz lehet hozzáférni?

200. Adott a térben 4 olyan pont, melyek nem illeszkednek egy síkra. Hány olyan sík adható meg, amelytől mindegyik pont ugyanakkora távolságra helyezkedik el?

201. Három tyúkunk, négy kacsánk és két libánk van. Hányféleképpen választhatunk ki ezek közül néhányat úgy, hogy a kiválasztottak közt biztosan legyen legalább egy minden fajtából?

202. Egy könyvkötőnek 12 különböző könyvet kell bekötnie piros, zöld vagy barna kötésbe. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha minden színt legalább egyszer felhasznál?

203. Egy oktaéder 8 különböző lapja közül 4-re véletlenszerűen 1, 2, 3 vagy 4 pöttyöt teszünk, illetve másik 4 lapját fehér, piros, kék vagy zöld színűre festjük.

a) Hányféleképpen dobhatunk olyan 8-as sorozatokat, amelyekben először pirosat és ötödszörre fehéret vagy kéket dobunk?

b) Hány olyan 8-as dobássorozat van, amelyben először pirosat, ötödszörre fehéret vagy kéket dobunk, és az oktaéder nem esik kétszer ugyanarra a lapjára?

204. Egy születésnapi bulira négyen hivatalosak (az ünnepelttel együtt). Csoki-, puncs- és dobostortát rendeltek, mindegyik 4 szeletes. Hányféleképpen lehet elosztani a három tortát; feltéve, hogy mindenki három szeletet ehet, és legalább kétfélét kap?

205. Egy termék a létrehozásához 6 munkafázison megy keresztül, legyenek ezek A, B, C, D, E, F fázisok. A következőket tudjuk: A-nak meg kell előznie C-t; B-nek és C-nek E-t; A-nak és C-nek F-et; végül B sem állhat A előtt. Hányféleképpen készülhet el a termék?

206. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$!

207. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}$!

208. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$!

1.4. Gráfok

209. Rajzoljon olyan ötpontú gráfot, amelyben az egyes pontokból induló élek száma

a) 2, 2, 2, 2, 2; b) 2, 2, 2, 3, 3; c) 2, 2, 3, 3, 3!

210. Egy 3 piros, 4 kék és 5 fekete golyót tartalmazó dobozból húzunk 3 golyót

a) visszatevéssel;

b) visszatevés nélkül.

Rajzolja meg a lehetőségek fáját mindkét esetben!

211. Egy óra számlapján a digitális kijelző négy számjeggyel mutatja az időt (órák : percek, 00 : 00-tól éjfélig). Egy teljes nap alatt hányszor lesz azonos az órák és a percek száma? (Pl.: 13 : 13.)

212. Ábrázolja a kénessav (H_2SO_3) és a kénsav (H_2SO_4) szerkezeti képletét! (A kén vegyértéke az első vegyületben 4, a másodikban 6.)

213. Egy találkozón tizenketten vettek részt. Hatan közülük három emberrel fogtak kezet, ketten közülük öttel, míg négyen hat emberrel fogtak kezet. Hány kézfogás volt?

214. Egy találkozón hat ember vett részt. Megtörténhettek-e a következő kézfogások?

a) A társaság egyik fele 5 emberrel, míg a másik fele 3 emberrel fogott kezet.

b) A résztvevők egyharmada 5, másik harmada 3, míg egy-egy ember 1, illetve 2 emberrel fogott kezet.

215. Igazolja, ha egy 5 pontú gráfban minden pontból legalább 2 él indul, akkor a gráfban van kör! (Azaz élek olyan sorozata, amelyen vissza lehet térni a kiindulási pontba anélkül, hogy egy élen kétszer haladnánk át.)

216. a) Igazolja, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legfeljebb 4 éle van, akkor a gráf nem összefüggő! (Azaz nem lehet bármely pontból bármely másikba eljutni élek mentén.)

b) Igazolja, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legalább 6 éle van, akkor a gráfban van kör! (Azaz élek olyan sorozata, amelyen vissza lehet térni a kiindulási pontba anélkül, hogy egy élen kétszer haladnánk át.)

217. Igazolja, hogy ha egy 10 pontú gráfnak 9 éle van, akkor van olyan pontja, amelyből 1 vagy 0 él indul!

218. Egy bajnokságban 8 csapat játszik körmérkőzést, eddig 9 meccs zajlott le. Bizonyítsa be, hogy van olyan csapat, amely legalább háromszor játszott már!

219. a) Négy szomszéd mindegyike úgy épített utat a másik három házához, hogy azok nem keresztezik egymást. Vázoljon egy lehetséges úthálózatot!

b) Egy ötödik ember újabb házat épít. Tud-e úgy utakat építeni házától a másik négy házához, hogy az úthálózatban ne legyenek kereszteződések?

220. Van-e olyan 8 fős társaság, amelyben a társaság mindegyik tagjának pontosan 3 haragosa van jelen? (A harag kölcsönös.)

221. Az Ön szervező irodája nehéz feladatot kapott. Egy vacsorával egybekötött találkozót kell minden részletében gondosan megszerveznie. A sok tennivaló között még egy nem várt nehézség is akad. A találkozó 6 résztvevőjét úgy kell leültetnie a kerek vacsoraasztal köré, hogy senki se kerüljön olyan ember mellé, akivel nincsen jó viszonyban. Márpedig a 6 résztvevő mindegyikének pontosan 2 haragosa van jelen (s a harag kölcsönös). Hogyan oldja meg ezt a kényes helyzetet?

222. Adott 7 „pontszerűnek" tekintett város, amelyek egymástól vett távolságai különbözőek. Rajzolja meg azt a gráfot, amelynek pontjai a városok, és kösse össze mindegyiket egy szakasszal a hozzá legközelebb eső várossal!

Baja	Békéscsaba	Budapest	Cegléd	Csongrád	Debrecen	Dunaújváros	
–	195	161	140	162	299	105	Baja
	–	203	137	82	130	210	Békéscsaba
		–	70	138	226	67	Budapest
			–	85	159	117	Cegléd
				–	215	140	Csongrád
					–	277	Debrecen
						–	Dunaújváros

223. Egy térképen pontokkal vannak feltüntetve a városok, amelyek páronkénti távolságai mind különbözőek. Mindegyik várost egyenes szakasszal összekötjük a hozzá legközelebbi várossal. Mutassa meg, hogy nem jöhet létre háromszög!

224. Egy konvex 77-szög összes átlóját meghúzzuk, majd közülük egyeseket pirosra színezünk.

a) Hány átlót húztunk meg?

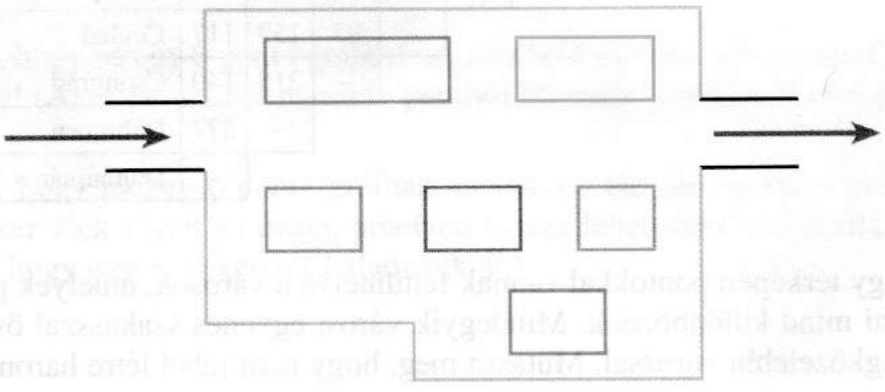
b) Lehetséges-e, hogy a sokszög minden csúcsába pontosan 13 piros átló fut be?

225. Egy útkereszteződésnél A, B, illetve C felé lehet továbbhaladni. A felé a járművek 20%-a, B felé a járművek $\frac{1}{4}$-e halad, a többi C felé folytatja útját. A-tól 1 km-re újabb útkereszteződés van, D és E felé lehet továbbhaladni. D felé a csomópontba beérkező járművek $\frac{1}{5}$-e halad, a többi E felé. B-től 3 km-re is van egy útkereszteződés, F és G felé lehet továbbhaladni. G felé a csomópontba beérkező járművek 35%-a halad, a többi F felé. C-től 7 km-re újabb útkereszteződés van, H, I és K felé lehet továbbhaladni. K felé a csomópontba beérkező járművek $\frac{2}{3}$-a halad, I-be a maradék 10%-a, a többi H felé. Az E-be érkező járművek számának hány %-a a H-ba érkező járművek száma?

226. A, B, C, D, E és F pontokat tetszés szerint vonalakkal kötünk össze. Ez lehet önmagába visszatérő vonal is, és 2 pont között több vonalat is húzhatunk. Az első öt pontból kiinduló vonalak száma rendre 7, 2, 5, 4, 2. Csak azt tudjuk, hogy F-ből 3 vagy 4 vonal indul. Melyik lehet a helyes eredmény? Válaszát indokolja!

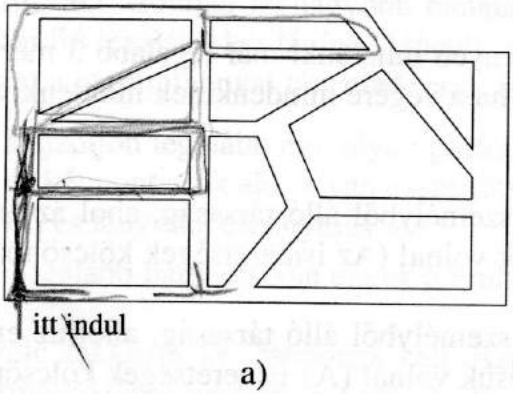
227. Egy társaságról tudjuk, hogy mindenki legalább a tagság felét ismeri, és az ismeretség kölcsönös. Lehet-e a teljes társaságot két olyan részre bontani, hogy a két csoportból bárhogyan is választunk ki egy-egy embert, azok biztos nem ismerik egymást?

228. Az alábbi ábra egy kiállítási terem alaprajza, a színessel jelölt falakon vannak a képek. Be lehet-e járni a termet úgy, hogy egyszerre csak az egyik falon lévő képeket nézem és minden képet csak egyszer nézek meg?

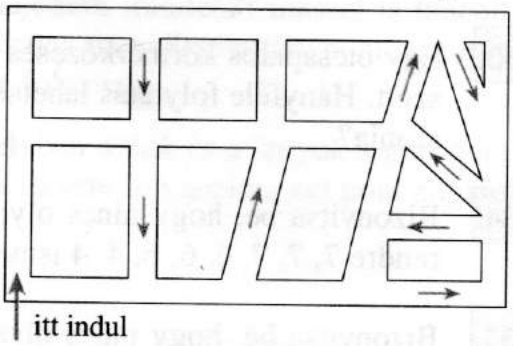


229. a) Végig tud-e menni egy locsolókocsi az alábbi úthálózaton úgy, hogy minden utcában egyszer jár, s így mindent fellocsol? (Minden utcában elég egy irányban elhaladnia, olyan „szélesen" locsol.)

b) Mi a helyzet, ha néhány utca egyirányú, amint azt a második ábra mutatja?



a)



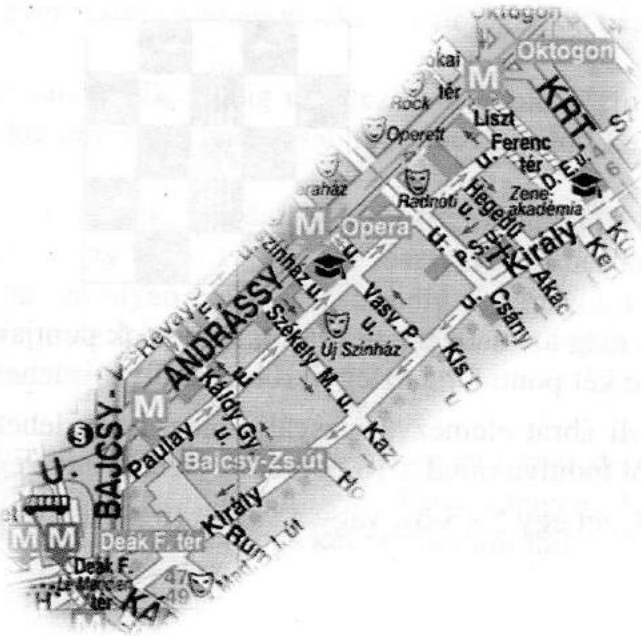
b)

230. Egy 7 tagú társaságban (kölcsönös) barátságok vannak. Az egyes tagoknak a következő barátai vannak: Andrásnak 3 barátja van; Bélának 2; Csabának 5; Daninak 1; Ervinnek 4; Ferinek 5; Gábornak szintén 4.

a) Rajzoljon olyan gráfot, amely a társaság barátságait ábrázolja!

b) Az összes lehetséges barátságnak hány százaléka valósul meg ebben a csoportban?

231. Hányféleképpen lehet célirányosan elgyalogolni a mellékelt térkép alapján az Oktogontól a Deák térre, ha a megadott térképről nem szabad „kilépni"?



232. Egy sakkversenyen bármelyik két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Igaz-e, hogy a verseny bármely pillanatában volt legalább két olyan versenyző, aki addig ugyanannyi lejátszott mérkőzésnél tartott? (Az éppen tartó mérkőzéseket nem tekintjük lejátszottaknak.)

233. Egy ötcsapatos körmérkőzéses versenyen mindenki már legalább 3 mérkőzést játszott. Hányféle folytatás lehetséges, ha a végére mindenkinek mindenkivel kell játszania?

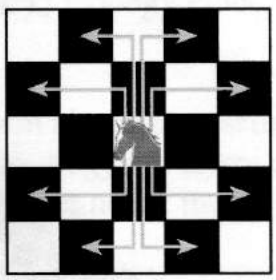
234. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan 8 személyből álló társaság, ahol az embereknek rendre 7, 7, 7, 6, 6, 6, 4, 4 ismerősük volna! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

235. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan 9 személyből álló társaság, ahol az embereknek rendre 8, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4 ismerősük volna! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

236. Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik. Hány mérkőzést játszottak le, ha tudjuk, hogy négy sakkozó mindegyike már három, négy sakkozó mindegyike pedig már négy mérkőzést játszott le?

237. Tudjuk, hogy egy társaságban mindenkinek legalább két ismerőse van. Bizonyítsa be, hogy ekkor a társaságnak legalább három tagját le lehet ültetni egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a mellette ülőket! (Természetesen az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük.)

238. Egy 4×4-es „sakktáblát" szeretnénk egy lóval bejárni. A lóugrás lehetséges módjait az ábra mutatja.



a) Rajzolja meg azt a 16 pontú gráfot, amelynek pontjai a tábla mezői, és él akkor köt össze két pontot, ha az egyikről a másikra át lehet lépni egy lóugrással!

b) Az a)-beli ábrát elemezve vizsgálja meg, hogy lehetséges-e a gráf valamelyik pontjából indulva mind a 16 pontot egyszer érintve egy lóval végigsétálni!

c) Mi a helyzet egy 5×5-ös, vagy a valódi (8×8-as) sakktáblán?

239. Egy partin hat fiú és öt lány vett részt. Az este folyamán sokat táncoltak, de mindig különböző nemű párokban. Egy fiú büszkélkedett azzal másnap, hogy ő minden lánnyal táncolt. A lányok mindegyike legalább két fiúval táncolt, köztük nem volt, aki minden fiú partnere lett volna. A legbátortalanabb fiú csak egy lányt mert felkérni, aki azonban legnagyobb bánatára majdnem mindenki mással is táncolt. A többi fiú legalább két lánnyal táncolt, sőt hárman megállapították, pontosan ugyanazzal a három lánnyal táncoltak csak az este folyamán.

a) Rajzoljon legalább egy olyan gráfot, amelyben a fiúk és a lányok a gráf pontjai, és két pont csak akkor van összekötve, ha az este folyamán a két pont által jelölt fiú és lány táncolt egymással!

b) Legalább hány éle van ennek a gráfnak?

240. Nyolc sakkozót két csoportra kell osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belüli körmérkőzéses versenyek során lejátszott mérkőzések együttes száma a legkevesebb legyen. Hogyan osztaná két csoportra a sakkozókat?

241. Nyolc telefonközpont közötti kapcsolatrendszerről a következőket tudjuk:

1. bármely két központ között létesíthető kapcsolat;
2. bármelyik két különböző vonal tönkremenése esetén is még összefüggő a maradék rendszer, de bármely három esetén ez a feltétel már nem teljesül;
3. a három legnagyobb központ egymást közvetlenül is el tudja érni.

Rajzoljon a feltételeket megvalósító hálózati gráfot minél kevesebb éllel!

242. Egy öttagú társaság találkozik. Bizonyítsa be, hogy ha bármelyik három ember közül van kettő, aki kezet rázott egymással, akkor már legalább négy kézfogás történt!

243. Egy öttagú társaság találkozik. Eddig már lezajlott nyolc kézfogás. Bizonyítsa be, hogy van legalább két ember, aki pontosan háromszor fogott kezet!

244. Egy öttagú társaság találkozik. Mindenki kezet fog mindenkivel pontosan egyszer, de játékból vagy jobb vagy bal kézzel (a két résztvevő azonos kezével). Bizonyítsa be, hogy ha nincs három olyan ember, aki mindig ugyanazon kezével üdvözölte a másik kettőt, akkor mindenkinek pontosan két jobbkezes és két balkezes kézfogása volt! Igaz-e az állítás megfordítása?

245. Öt sziget közül bármelyik kettőt hajó-, illetve repülőjárat (de csak az egyik) köt össze úgy, hogy egyik fajta járattal sem lehet három szigetet körbejárni. Mutassa meg, hogy minden szigetről két hajó- és két repülőjárat indul!

246. Egy térképen pontokkal vannak feltüntetve a városok, amelyek páronkénti távolságai mind különbözőek. Mindegyik várost egyenes szakasszal összekötjük a hozzá legközelebbi várossal.

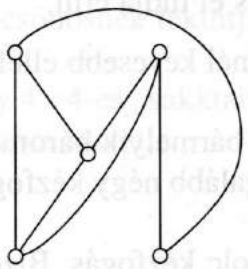
a) Mutassa meg, hogy két szakasz nem metszheti egymást!

b) Mutassa meg, hogy van legalább két olyan város, amelyekre szimmetrikus ez a „hozzá legközelebb levő" tulajdonság! (Azaz ha A-hoz B van legközelebb, akkor B-hez A.)

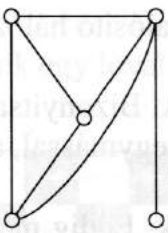
247. Egy ország városairól tudjuk, hogy a városok közötti távolságok mind különbözők. Minden várost összekötünk egy egyenes úttal a hozzá legközelebbi várossal. Bizonyítsa be, hogy egyik városból sem juthatunk el semelyik másik városba két különböző úton!

248. Egy asztalitenisz-versenyen a főtáblára kerülésért a versenyzőket 5 db hatos csoportba osztották be, ahol egy-egy csoporton belül a versenyzők körmérkőzést játszanak. Bizonyítsa be, hogy a verseny bármelyik pillanatában egy csoporton belül vagy van három olyan versenyző, akik az egymás elleni mérkőzésüket már mind lejátszották, vagy van három olyan versenyző, akik közül még semelyik kettő sem játszott egymással!

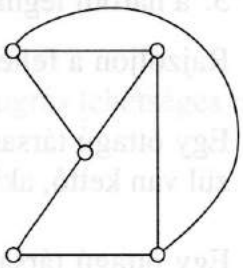
249. Vannak-e az alábbi gráfok között izomorfak? Melyek, miért?



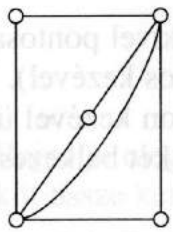
a)



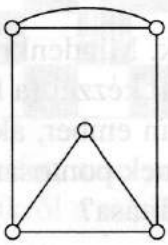
b)



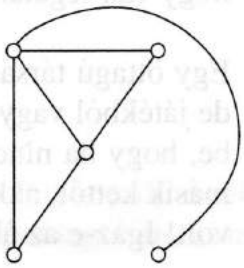
c)



d)



e)



f)

1.5. Módszerek

250. Legalább hány tanulónak kell egy iskolába járnia, hogy biztosan legyen köztük három, aki ugyanazon a napon ünnepli a születésnapját?

251. Egy iskolának 736 tanulója van. Bizonyítsa be, hogy van 3 olyan tanuló, akinek az év ugyanazon a napján van a születésnapja!

252. (Egy korábbi nyári nyereményjáték nyomán.) A gyártó cég a joghurtok fedőfóliáira nyolcféle állat képét teszi, s a nyeréshez beküldendő vagy nyolc egyforma, vagy nyolc különböző állat képe. Legalább hány joghurtot kell vennünk, hogy egy jó sorozat biztosan kijöjjön?

253. Az iskolaudvaron a tölgyfa és a bükkfa között letesznek (a távolság felezőpontjára szimmetrikusan, a fákat összekötő egyenes mentén) 6 széket, majd a sárga- és zöldtrikós csapatok 3-3 embere tetszőleges módon leül ezekre. Bizonyítsa be, hogy a sárgatrikósok tölgyfától való távolságainak összege egyenlő a zöldtrikósok bükkfától való távolságainak összegével!

254. Szabó nagymama, akinek életkora 50 és 80 év közé esik, azt mondja a barátnőjének: „Minden gyermekemnek annyi gyermeke van, ahány testvére; gyermekeim és unokáim száma együttvéve annyi, mint az életkorom." Hány éves a nagymama és hány unokája van?

255. Egy 25 fős osztályban mindenki felírja, hogy melyik hónapban született. A leggyakrabban felírt hónap legalább hányszor fog előfordulni? Mekkora létszám kell ahhoz, hogy legalább négyszer forduljon elő a leggyakrabban felírt hónap?

256. a) Négy különböző, adott egész számból képezzük az összes lehetséges párt. (A pár tagjainak sorrendje nem számít.) Hány ilyen pár lesz?

b) Minden párban képezzük a különbség abszolútértékét. A kapott számokat szorozzuk össze. Miért igaz, hogy az eredmény 12-vel osztható lesz?

257. Egy 5×5-ös táblázatot tetszőlegesen kitöltünk $+1$ és -1 számokkal. Ezután képezzük a sorok és az oszlopok összegét. Igazolja, hogy az így kapott számok között mindig lesz legalább 2 azonos!

258. Egy asztalon három üres pohár áll. Egy-egy alkalommal két poharat megfordítunk. E művelet ismételgetésével elérhetjük-e, hogy mindhárom pohár meg legyen fordítva?

259. Egy szobában hat szék van egy sorban elhelyezve. A székeken kezdetben senki sem ül. Időnként bejön valaki a szobába és leül egy üres székre, ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) feláll és kimegy.

a) Elérhetik-e, hogy három egymás melletti szék foglalt legyen?

b) Elérhetik-e, hogy öt egymás melletti szék foglalt legyen?

c) Elérhetik-e, hogy mind a hat szék foglalt legyen?

260. Seholsincs ország parlamentjének összesen 12 képviselője van. Mindegyik képviselőnek legfeljebb három ellensége van a többi 11 között (az ellenséges érzület kölcsönös). Egy alkalommal két, párhuzamosan ülésező bizottságot kell alkotniuk az összes képviselő bevonásával, mert sürgős ügyeket kell előkészíteniük. A képviselők egyetértenek abban, hogy a hatékony munka érdekében célszerű úgy megalkotni a bizottságokat, hogy ne legyen nagy az ellenségeskedés. Szeretnék elérni, hogy bárkinek a saját bizottságában legfeljebb egy ellensége legyen. Javasoljon gyakorlati eljárást a bizottságok megalkotásához!

261. A számegyenes nulla pontjában egy részecske helyezkedik el. Egységnyi idő alatt a részecske két részre hasad, ezek egyike egységnyivel jobbra, a másik egységnyivel balra mozdul el. Ez a jelenség minden időegység elteltével minden pontban újra megismétlődik, de két, egy pontba kerülő részecske megsemmisíti egymást. Hány részecskénk lesz 2; 4; 8, illetve 10 időegység után?

262. Egy klubban a fiúk és a lányok feljegyezték, hogy hány másnemű partnerrel táncoltak.

a) Igaz-e, hogy a fiúk által feljegyzett számok összege egyenlő a lányok által feljegyzett számok összegével?

b) Mi a válasz az előző kérdésre, ha mindenki azt jegyzi fel, hogy hányszor táncolt a klubesten?

263. Igazolja, hogy tíz pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani néhányat úgy, hogy összegük nullára végződjön!

264. Tudjuk, hogy egy 3-nál nagyobb p szám és a p-nél 2-vel nagyobb szám is prím. Bizonyítsa be, hogy a két prím közötti egész szám

a) páros;

b) 3-mal osztható;

c) összetett szám!

265. Az $\{1; 2; 3; \ldots; 500\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, melynek az 1 és a 2 is eleme?

266. A babona szerint egy kézitáskából soha nem szabad kiszedni az összes pénzt, így sosem fog a tulajdonos pénzhiányban szenvedni. Egy hölgynek 10 táskája van és erre a célra 55 db 1 forintosa. Hogyan ossza el a táskákba a pénzdarabokat, ha minden táskába különböző számú pénzdarabot szeretne tenni?

267. Bizonyítsa be, hogy $1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$ $(n \in \mathbf{N}^+)$!

268. Bizonyítsa be, hogy $6 \mid 3n^2+3n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$!

269. Bizonyítsa be, hogy

a) $6 \mid n^3-n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$;

b) $24 \mid n^3-n$, ha n páratlan természetes szám!

270. Bizonyítsa be, hogy $5 \mid 2^{4n+1}+3$ $(n \in \mathbf{N}^+)$!

271. Bizonyítsa be, hogy $6 \mid n^3+5n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$!

272. Bizonyítsa be, hogy minden nem üres, véges halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú részhalmaza!

273. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amely

a) sem 2-vel, sem 3-mal;

b) sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel

nem osztható?

274. Egy 33 fős osztályból 18-an járnak matematika szakkörre, 12-en történelem szakkörre, 8-an mindkettőre. Az osztálynak hány tanulója nem vesz részt egyik szakkör munkájában sem?

275. Egy 10 fős csoport minden tanulója felírt a füzetébe 10 különböző kétjegyű számot. Bizonyítsa be, hogy a felírt számok közül legalább egy kétjegyű szám két füzetben is szerepel.

276. Egy felmérés szerint a tanulók 60%-a olvassa a Nemzeti Sportot (NS), 50%-a olvassa a Metró újságot (M), valamint 50%-a a helyi kerületi újságot (K). Tudjuk még, hogy 30% NS-t és M-et, 20% M-et és K-t, és szintén 30% K-t és NS-t olvas. 10% mindhármat olvassa.

a) Hány százalék olvas pontosan két újságot?

b) Hány százalék lehet, aki semmit sem olvas a fentiek közül?

277. Szeretnénk 50 Ft-ot felváltani 5, 10, 20 forintosokra. Hányféleképpen tehetjük meg?

278. Egy sakkversenyen 6 fő vesz részt, és úgy akarják szervezni a programot, hogy

1. minden játékos mindenkivel pontosan egyszer játsszon;
2. minden játékos minden játéknapon pontosan egyszer játsszon.

a) Hány játszma lesz összesen, ha csak az 1. feltételt vesszük alapul?

b) Megoldható-e egy olyan beosztás, hogy mindkét feltétel teljesüljön? Ha igen, mutasson példát rá!

c) Ha a játéknapok között mindig egy nap szünet van, akkor hány napig tart a verseny?

279. A Magyarország—Oroszország vízilabda-döntő eredménye a sydneyi olimpián 13:6 (3:1, 5:1, 3:2, 2:2) lett a javunkra. A mérkőzésen, amikor már négyszer annyi gólt értünk el, mint az ellenfél, az egyik lelkes szurkoló kiment a büfébe. Mire visszajött, a társa újságolta, hogy ugyan még két gólt szereztünk, de már csak kétszer annyi a góljaink száma az oroszokéhoz képest. Mennyi lehetett az eredmény ekkor?

280. A Magyarország—Oroszország vízilabda-döntő eredménye a sydneyi olimpián 13:6 lett a javunkra. Tegyük fel, hogy valaki nem látta a mérkőzést, s nem tudja, milyen sorrendben estek a gólok. Egy barátja azt mondja neki, hogy emlékezete szerint az oroszok sosem vezettek, és hogy a magyarok háromszor álltak négyszeres, négyszer háromszoros, négyszer kétszeres gólarányú vezetésre, valamint, hogy ötszörös gólaránnyal nem vezettek. Jól emlékezett-e a barátja, s ha igen, akkor mi lehetett a meccs lefolyása?

281. Egyenes kieséses versenysorozattal döntik el a tenisz olimpiai bajnoki címet. Ha 59 játékos jelentkezett, akkor hány mérkőzést kell lejátszani az eredményhirdetésig? Indokolja is válaszát! (Az egyenes kiesés azt jelenti, hogy a vesztes nem játszik tovább, csak a győztes.)

282. Egy négy csapatból álló Bajnokok Ligája csoportban két forduló után az alábbi állás alakult ki:

1. Manchester United	2	1	1	–	5–2	4
2. Barcelona	2	1	1	–	3–1	4
3. Galatasaray	2	1	–	1	3–5	3
4. Schalke 04	2	–	–	2	1–4	0

(Egy sorban a lejátszott mérkőzések, a győzelmek, a döntetlenek és a vereségek száma, utána a gólkülönbség [lőtt – kapott gólok száma], végül a pontszám szerepel. A győzelem 3 pontot, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t ér.) Milyen mérkőzéseket játszhattak eddig, és milyen eredménnyel?

283. Egy 70 fős budapesti csoportban végigkérdezik mindenkinek az állandó lakóhelyét. A statisztikát készítő meglepve látja, hogy azok milyen egyenletesen oszlanak el a 23 kerület között. A XI. kerületből azonban nyolcan is jelentkeztek. Mennyi lehet általában egy 70 fős csoportban a legnagyobb létszámban képviselt kerületből jöttek minimális száma?

284. Egy zsákban sok azonos méretű, négyféle színű pamut kesztyű, bal- és jobbkezes van összekeverve. Ha minden színből 10 pár került a zsákba, akkor legrosszabb esetben hány kesztyűt kell húzni egy sötét szobában, hogy biztosan legyen köztük legalább egy pár (egyszínű bal és jobbkezes)?

285. Egy lánynak háromféle körömlakkja van. Hányféleképpen lakkozhatja be a körmeit, ha egy kezének a körmeihez nem használ kettőnél több lakkot? (Egy körmöt nem fest több színnel!)

286. Egy matematika versenyen 40 tanuló vesz részt. Tudjuk, hogy 25 tanuló oldotta meg az első feladatot, 30 tanuló a másodikat, 35 tanuló a harmadikat és 33 tanuló a negyediket. Bizonyítsa be, hogy legalább 3 tanuló megoldotta mind a négy feladatot!

287. Egy társaságban végzett felmérés szerint a társaságból ötvenen tévét néznek és negyvenen rádiót hallgatnak. Harminc olyan személy van, aki tévét is szokott nézni és rádiót is szokott hallgatni, valamint tíz olyan személy van, aki tévét sem néz és rádiót sem hallgat. Hányan vannak a társaságban?

288. Egy autókereskedésben 12 kék, 6 piros és 7 fehér autó van raktáron. 25 vevő jelentkezik, közülük 4-en fehéret szeretnének, 3-nak mindegy, csak ne piros legyen, 5-en akarnak kék vagy piros autót, 10-en piros vagy fehéret, 3 embernek mindegy, hogy milyen színű az autó. Eladhatja-e a kereskedő mind a 25 autót?

289. Bizonyítsa be, hogy bármely hét négyzetszám között van legalább két olyan, amelyek különbsége osztható tízzel!

290. Igazolja a következő egyenlőség helyességét!

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad (n\in \mathbf{N}^{+})$$

291. Bizonyítsa be, hogy ha két párhuzamos síkot egy harmadikkal metszünk, akkor a metszésvonalak párhuzamosak!

292. Igaz-e a következő állítás megfordítása: „Ha a és b négyzetszám, akkor ab is négyzetszám"?

293. Igaz-e a következő állítás megfordítása: „Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az téglalap"?

294. a) Egységsugarú körlap 60°-os középponti szögű körcikkén kijelölünk két tetszőleges pontot. Mutassa meg, hogy ezek távolsága nem lehet nagyobb 1-nél!

b) Egységsugarú körlapon 7 pontot helyezünk el. Igazolja, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága nem nagyobb 1-nél!

295. Bizonyítsa be, hogy akárhogy színezzük is ki egy szabályos hétszög csúcsait sárgára és zöldre, mindig van három egyszínű csúcs, amely egyenlő szárú háromszöget alkot!

296. Tündérország kertjében csodafa nőtt, 21 aranyalma és 24 csengő barack van rajta. Egy-egy alkalommal két gyümölcsöt szakítunk a fáról. Ha két egyformát veszünk le, akkor egy csengő barack nő helyettük, ha pedig két különbözőt, akkor egy aranyalma.

a) Utolsónak milyen gyümölcs marad a fán?

b) Összesen hány gyümölcsöt szedtünk le a fáról addig, amíg csak egy maradt rajta?

297. Egy 10 m × 15 m alapterületű teremben 152 ember vesz részt egy állófogadáson. Mutassa meg, hogy mindig kiválasztható közülük kettő, akik legfeljebb 1,5 méter távolságra állnak egymástól!

298. Egy 10 m széles és 20 m hosszú kertben 51 darab gyümölcsfát ültettek el. Bizonyítsa be, hogy van legalább két olyan gyümölcsfa, melyeket 3 m-nél közelebb ültettek egymáshoz!

299. Bizonyítsa be, hogy $24 \mid n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$!

300. Bizonyítsa be, hogy a $\sqrt{5}$ irracionális szám!

301. Hány fős osztály esetén lehet biztosan állítani, hogy legalább két gyerek születésnapja két hétnél közelebb van egymáshoz?

302. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben a, b, c páratlan számok. Bizonyítsa be, hogy az egyenletnek nincs racionális gyöke!

303. Igazolja teljes indukcióval, hogy $\forall\, n \in \mathbf{N}^+$ esetén $9 \mid 7^n + 3n - 1$!

2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

2.1. Számok, műveletek

304. A ❋ jel helyére milyen alapművelet-jeleket írva lehetnek helyesek az alábbi egyenlőségek?

a) $\frac{5}{6}❋\frac{6}{7}=-\frac{1}{42}$ b) $\frac{3}{4}❋\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$ c) $4❋\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$ d) $\frac{121}{42}❋\frac{11}{14}=\frac{11}{3}$

305. Mi lehet a ✶ művelet (esetleg összetett) végrehajtási utasítása, ha a következőket tudjuk?

$1✶1=2;\quad 1✶2=3;\quad 2✶2=5;\quad 2✶3=7;\quad 5✶6=31$

306. Számolja ki számológép segítségével és döntse el, melyik a nagyobb!

a) $\left(4,5\cdot 10^{15}\right)^3\cdot\left(325\cdot 1,07^8\right)^4$ vagy $\left(6\cdot 10^{23}\right)^2\cdot\left(2\cdot 10^3+3,3\cdot 10^{-8}\right)^3$

b) $\left(4,1\cdot 1,6\cdot 10^{-19}+61\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot 10^{-11}\right)\cdot 10^{-8}$ vagy $\left(9\cdot 10^{-31}+72\cdot 10^{-24}\right)^2$

307. Írja fel 10 hatványaként számológép segítségével a következő számokat!

5,473 0, 0723 1,782 143,728 149 537,482

308. A $14-3\cdot 4+8:2$ számítás eredménye 6. Helyezzen el úgy zárójeleket a számításban, hogy az eredmény

a) -2; b) 5; c) -3; d) -10; e) 4

legyen!

309. Az 1; 3; 5; 7; 9 számjegyek közé, ezek sorrendjének megtartásával helyezzen el alapműveleti jeleket, esetleg zárójeleket úgy, hogy eredményül rendre megkapjuk a

a) 0; 1; 2; 3; 4; b) 5; 6; 7; 8; 9; 10

természetes számokat!

310. András olyan házibulira volt hivatalos, ahol 17-en voltak és 5 egyforma méretű tortát igazságosan osztottak fel a résztvevők között. Balázs egy másik társaságban volt, ahol 3 ugyanilyen torta volt – igaz, csak 11 résztvevővel.

a) Ha itt is igazságosan osztoztak, akkor ki evett több tortát: András vagy Balázs?

b) Jelentős-e a különbség?

Válaszait indokolja!

311. a) Mennyi $42x$-nek a $\frac{3}{7}$ része?

b) Minek a $\frac{3}{7}$ része $42y$?

c) Hányadrésze $36y$ a $42x$-nek? (Ahol x és y valamilyen számot jelöl.)

312. Keressen egymással egyenesen, illetve fordítva arányos mennyiségeket a következők között:

a) egy vonat sebessége, megtett útja és menetideje;

b) egy színházba menő társaság létszáma, a megvett jegyekért kifizetett összeg és egy jegy ára;

c) egy test tömege, térfogata és sűrűsége!

313. Budapest térképünk 1 : 20 000 léptékű. Mekkora a valóságban, ami a térképen

a) 2 cm; b) 5 cm; c) 7 mm; d) 11 cm?

Mekkora a térképen, ami a valóságban

e) 200 m; f) 3 km; g) 14 km?

314. Ha 3 szürke marha 5 nap alatt 450 kg takarmányt eszik meg, mennyit eszik meg 4 szürke marha 7 nap alatt? (Feltesszük, hogy mindegyik szürke marha minden nap ugyanannyit eszik.)

315. a) Hány m^3 víz lehet a Balatonban, ha területe 595 km^2, átlagos vízmélysége 2,8 m?

b) Hány százalékkal csökkent a víz mennyisége az elmúlt két évben, ha összesen 35 cm-t csökkent a vízszint?

316. Egy iskolai felmérésben azt vizsgálták, melyik zenei műfajt kedvelik leginkább az iskola tanulói. Az eredményt a táblázat mutatja.

	lányok	fiúk
pop	40%	45%
jazz	30%	50%
népzene	30%	5%

Az iskolának 400 tanulója van, közöttük 160 a fiú. Töltse ki a táblázatot a megfelelő tanulói létszámokkal!

	lányok (fő)	fiúk (fő)
pop		
jazz		
népzene		

317. A 84 000 Ft-os havi bruttó fizetésünkből 10% TB-járulékot és 30% adót vonnak le. Mennyi a kézhez kapott, nettó fizetésünk? A nettó fizetésnek hány százaléka a járulék és az adó?

318. Egy befőttes üvegen az alábbi adatok olvashatók:
„Nettó tömeg: 380 g. Bruttó tömeg: 500 g."

a) Hány százaléka a bruttó tömegnek a nettó?

b) És a nettónak a bruttó?

c) Melyiknek hány százaléka a csomagolás (tára)?

319. Egy 16 000 Ft-os kerékpárt árleszállításkor 15%-kal olcsóbban adnak.

a) Mennyiért?

A kerékpár még így is raktáron maradt, ezért végkiárusitásban újból leértékelték 8%-kal.

b) Mennyiért árulták így?

c) Hány százaléka ez az eredeti árnak?

d) Hány százalék összesen az engedmény?

320. Egy raktárban hetente 5%-kal növekszik az árukészlet, de kéthetente

a) 8%-ot; b) 12%-ot

eladnak. Hány százaléknyi áru van a raktárban a kezdő készlethez képest hat héttel a nyitás után?

321. Összekeverünk 200 g 50%-os, 400 g 25%-os és 150 g 20%-os sóoldatot. Elhasználunk belőle 150 g-ot, és tiszta vízzel pótoljuk. Milyen töménységű most az oldat?

322. Egy egészséges felnőtt napi kalciumszükséglete 1 gramm, fehérjeszükséglete 100 g. A 2,8%-os tej zacskóján a következő olvasható: 100 g tejben 115 mg Ca, 4,7 g szénhidrát, 3 g fehérje, 238 kJ/57 kcal energia található. 1 liter tej tömege 1,03 kg. Hány dl tej fedezné külön-külön egy felnőtt átlagos napi kalcium- illetve fehérjeszükségletét?

323. Egy cipőbolt szezon végi kiárusításkor a következő engedményeket adja: 20-asnál kisebb cipőre 60%, 20–26,5-ig 50%, 27–32-ig 30%, 32-es méret fölött 10% kedvezmény a vételárból. Egy család a következő lábbeliket vásárolta:

1 pár 18-as – eredeti ára: 5120 Ft,

1 pár 21-es – eredeti ára: 5860 Ft,

2 pár 28-as – eredeti ára: 6910 Ft páronként,

1 pár 32 és felest – eredeti ára: 9140 Ft,

1 pár 38-as – eredeti ára: 9990 Ft,

1 pár 43-as – eredeti ára: 12 390 Ft.

Hány % kedvezményt kapott a család a vásárlás során és összesen mennyi pénzt takarított meg?

324. Az $\frac{5}{14}$ tizedestört-alakjában milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 2001. helyen?

325. Adott a számegyenes 0 és 1 pontja. Ábrázolja szerkesztéssel a -3, $\frac{5}{3}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ pontokat!

326. Hány jegyű szám a 2^{100}?

327. Milyen értékek közé esik $|x-y|$, ha $|5-x|<1$ és $|10-y|<2$?

328. Adjon meg 5 olyan racionális számot, amely az $\left]\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right[$ intervallumba esik!

329. Mi az alábbi műveletek eredménye? Jelölje meg számegyenesen is!

a) $[1;2]\cup[3;4]$ b) $[1;2]\cap[3;4]$ c) $[1;2]\setminus[3;4]$

d) $[-2;3]\cup[0;2]$ e) $[-2;3]\cap[0;2]$ f) $[-2;3]\setminus[0;2]$

330. Mi az alábbi műveletek eredménye? Jelölje meg számegyenesen is!

a) $]-\infty; 3[\cup [2; \infty[$ b) $]-\infty; 3[\cap [2; \infty[$ c) $]-\infty; 3[\setminus [2; \infty[$

d) $]-\infty; 2] \cup]3; \infty[$ e) $]-\infty; 2] \cap]3; \infty[$ f) $]-\infty; 2] \setminus]3; \infty[$

331. Milliméter beosztású vonalzónkkal 2,3 cm-nek mérünk egy szakaszt. Milyen pontosságú eredményt mondhatunk annak a négyzetnek a területére, aminek ez a szakasz az oldala?

332. Milyen pontossággal adhatjuk meg annak a hálózati elemnek az ellenállását, amelyre 220 V feszültséget kapcsolva 1,14 A áramerősséget mértünk? (Tudjuk, hogy az Ohm-törvény szerint $U = R \cdot I$, vagyis R ellenálláson a sarkaira kapcsolt U feszültség hatására I erősségű áram folyik át.)

333. Van-e olyan kétjegyű szám, amely egyenlő a számjegyeinek összegével?

334. Antik óránk remekül működik még most is. Csupán a hőmérséklet-változásra érzékeny kissé. Nappal 20 másodpercet késik, éjszaka 30 másodpercet siet. Május elsején este pontosan beállítjuk az órát, s csak akkor állítunk rajta újból, ha már 5 percet siet. Mikor kell ismét beállítani az órát?

335. 800 db termék elkészítésekor 9% selejt keletkezett. A termelés megengedett selejtaránya 2,5%. Legalább hány darabot kell a továbbiakban hibátlanul legyártani, hogy teljesítsék az előírt minőségi követelményt?

336. Anya elsózta az ebédet: a 3 liter húsleves 0,18% sót tartalmaz. Mennyi sótlan alaplét kell hozzátöltenie, hogy ehető (0,12%-os sótartalmú) legyen?

337. Egy üzemben egy termék előállításával 14 munkás foglalkozik, heti termelésük 1520 darab termék. A heti termelést 20%-kal növelni kívánják. Ezért újítások bevezetésével egy termék előállítási idejét 22 percről 17 percre csökkentik, de eközben a munkások száma 12 főre csökken. Teljesíthető-e a megemelt terv változatlan munkaidő alatt? (Feltételezzük, hogy minden munkás azonos teljesítménnyel dolgozik.)

338. Legyenek a és b tetszőleges racionális számok. Bizonyítsa be, hogy $a + b$ és $a \cdot b$ is racionális!

339. Bizonyítsa be, hogy bármely nem egész racionális szám felírható véges vagy végtelen szakaszos tizedestört-alakban!

2.2. Hatvány

340. A hatványozás azonosságainak segítségével számolja ki, mennyi

a) $9^3 \cdot 27^5 : (81^2 \cdot 3^{10})$; b) $8^5 \cdot 4^3 : (2^{10} \cdot 64^2)$!

341. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra!

a) $\frac{15^3}{6^4}$ b) $\frac{7^2 \cdot 6^3}{28^4}$ c) $\frac{8^2}{5^{-3} \cdot 10^6}$ d) $\frac{2^{-6} \cdot 14^5}{35^4}$

342. A hatványozás azonosságainak segítségével hozza a lehető legegyszerűbb alakra!

a) $\left(\frac{12^4 \cdot 5^5}{3^4} : \frac{2^7 \cdot 55^6}{(-11)^6}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{20^4 \cdot 3^5}{(-5)^4} : \frac{2^7 \cdot 21^6}{7^6}\right)^{-2}$

343. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{3}{4}}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

344. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ b) $\left(\left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ c) $\left(\left(\frac{1,25}{7,32}\right)^{0}\right)^{-\frac{7}{11}}$

345. a) Írja fel prímhatványok szorzataként a következő számot: $24^2 \cdot 42^3 \cdot 12^2 \cdot 28 \cdot 18^3$!

b) Írja fel tovább nem egyszerűsíthető alakban a $\frac{3^5 \cdot 8^5 \cdot 20^4 \cdot 49}{16^4 \cdot 6^4 \cdot 70^2}$ törtet!

346. Számítsa ki a következő törtek pontos értékét (számológép használata nélkül)!

a) $\frac{72^3 \cdot 108^{-4}}{54^{-2}}$ b) $\frac{2^{10} + 2^{11} - 2^{12}}{2^9 + 2^{10}}$ c) $\frac{24^{-6} \cdot 25^{-4}}{60^{-8}}$

347. Írja fel a legegyszerűbb hatványalakban a következő kifejezések értékét!

a) $(4 \cdot 2)^6 \cdot 2^{-16}$ b) $(125 \cdot 5^{-2})^7 \cdot 25^3$ c) $6^{-3} \cdot (-2)^5 \cdot 12^{-1} \cdot (-3)^4$

348. Írja fel a legegyszerűbb hatványalakban a következő kifejezések értékét!

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot 9^2 \cdot 27 \cdot 3^{-1}$ b) $\frac{1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-2}}$ c) $\frac{360\,000 \cdot 0{,}000\,002\,5}{0{,}009}$

349. Döntse el, hogy melyik szám nagyobb és mennyivel!

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ vagy $-\left(\frac{2}{3}\right)^4$ b) $-\left(\frac{3}{5}\right)^2$ vagy $-\frac{3^2}{5}$ c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$ vagy $0{,}1^{-1}$

350. Számítsa ki a következő kifejezés értékét, ha $a := 2025^{\frac{1}{2}}$ és $b := 9^{-1}$!

$5a^{-2}b^{-3}a^5b^7 \cdot 4a^{-4}b^{-\frac{9}{2}}$

351. Számítsa ki – számológép használata nélkül – a következő hatványok értékét!

$16^{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}$; $32^{1{,}2}$

352. Igaz-e, hogy $\frac{10^{2000}+1}{10^{2001}+1} > \frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$?

353. Írja át normálalakba!

a) $78{,}3 \cdot 10^2$ b) $0{,}0472 \cdot 10^3$ c) $687{,}5 \cdot 10^{-4}$

d) $0{,}053 \cdot 10^{-2}$ e) $100 \cdot 10^4$ f) $4 \cdot 10^6$

354. Írja át helyiértékes alakba!

a) $4{,}5 \cdot 10^4$ b) $7{,}32 \cdot 10^5$ c) $4{,}187 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-1}$ e) $3{,}62 \cdot 10$ f) $8{,}9 \cdot 10^{-2}$

355. Írja fel normálalakban az eredményt!

a) $\frac{6 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^4}$ b) $\frac{5 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-3}}$ c) $\frac{1{,}2 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^2}$ d) $\frac{3 \cdot 10^{-7}}{2{,}4 \cdot 10^{-3}}$

356. Számológép használata nélkül írja fel normálalakban az eredményt!

a) $\frac{2 \cdot 10^{33} \cdot 0{,}0642 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-7}}{321 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^9}$ b) $\frac{3 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}0246 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-5}}{123 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^7}$

357. Az általános gáztörvény alakja $pV = NkT$, ahol p a gáz nyomása, V a térfogata, N a részecskéinek darabszáma, T a hőmérséklete, k pedig a Boltzmann-állandó (értéke $1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$). Számítsa ki annak a gáznak a nyomását, amelynek térfogata 0,03 m^3, $8{,}9 \cdot 10^{22}$ részecskéből áll, és 293 K hőmérsékletű!

358. Számítsa ki a gravitációs vonzóerőt a Föld és a Nap között, ha az erőtörvény alakja $F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, ahol γ a gravitációs állandó ($6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$), m_1 és m_2 a két test tömege ($m_{\text{Föld}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg és $m_{\text{Nap}} = 2 \cdot 10^{30}$ kg), r pedig a két test közti távolság ($1{,}5 \cdot 10^{11}$ m)!

359. a) Fejezze ki az $F = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot r^{-2}$ képletből az r-et!

b) Számítsa ki r értékét, ha $F := 9{,}81$, $\gamma := 6{,}67 \cdot 10^{-11}$, $m_1 := 1$ és $m_2 := 5{,}97 \cdot 10^{24}$!

360. A Föld felszínének mintegy kétharmadát tenger borítja, ennek átlagos mélysége 3,8 km. Becsülje meg, hány m^3 életterük van a tengeri élőlényeknek? (A Föld sugara kb. 6370 km.)

361. a) Számítsa ki 10^{86} számú elektron együttes tömegét! (Egy elektron tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)

b) A Metagalaxis (az Univerzum műszereinkkel belátható része) tömege kb. 10^{51} kg. Hányszorosa az a)-ban kiszámított tömeg a Metagalaxis tömegének?

362. Az Univerzum legtávolabbi égitestjei, a kvazárok kb. 12 milliárd fényévre vannak tőlünk, tehát a „belátható" Világegyetem, a Metagalaxis egy 12 milliárd fényév sugarú gömb. Mekkora lehet a Metagalaxis tömege, ha átlagos sűrűsége körülbelül $10^{-28}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? (1 fényév = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ méter; a tömeget az átlagos sűrűség és a térfogat szorzataként is meghatározhatjuk.)

363. a) Fejezze ki az $A = B \cdot c^{-k \cdot t}$ képletből a k változót! (A; B; $c > 0$)

b) Számítsa ki a k értékét, ha $A := 2 \cdot 10^{23}$, $B := 6 \cdot 10^{23}$, $c := 2{,}718$ és $t := 5700$!

364. Valaki a következő újságcikket olvasta: „Iszonyatos sáskajárás volt Brazíliában, ahol a becslések szerint kb. 10^{27} darab rovar legelte a termést, és katasztrófaállapotot hirdettek ki." Mi a véleménye erről a hírről? (Brazília területe kb. $8{,}512 \cdot 10^6$ km^2, valamint egy átlagos sáska kb. 5 cm^3 térfogatú.)

365. Valaki szeretné a hidrogénatomot a Naprendszerhez hasonlítani. A proton legyen a Nap és az elektron a Föld. Tudjuk, hogy a Nap tömege: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, a Föld tömege: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, míg az elektron tömege: $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. Mekkorának kellene lennie a proton tömegének, ha a hidrogénatom arányosan kicsinyített tömegű modellje lenne a Naprendszernek? Ellenőrizze, hogy kisebb, nagyobb vagy kb. ennyi a proton tényleges tömege ($1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg)!

366. A hozzánk legközelebbi csillag a Proxima Centauri, melyről 4,2 év alatt ér a Földre a fény. Mekkora a Földtől való távolsága méterben?

(A fény sebessége 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.)

367. a) Mekkora tömege van 1 mol hidrogénben az összes elektronnak? (Egy elektron tömege: $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, 1 molban kb. $6 \cdot 10^{23}$ db kétatomos molekula van.)

b) Hány százaléka ez a mólnyi hidrogén tömegének, azaz 2 g-nak?

368. Egy alumíniumlemezen két atom távolsága 0,000 000 025 cm. Hány cm^3 egy ekkora élhosszúságú kocka térfogata?

369. Hány perc alatt jut el a fény a Napról

a) a Földre;

b) a Plútóra?

(A Föld–Nap távolság 149,6 millió km, a Föld–Plútó távolság 5899 millió km, a fény sebessége 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.)

370. a) Egy vörösvértest térfogata közelítőleg megegyezik egy olyan korong térfogatával, amelynek $7{,}4 \cdot 10^{-3}$ mm átmérőjű az alapköre és magassága $2 \cdot 10^{-3}$ mm. Mekkora a vörösvértest térfogata?

b) Mennyi az 1 liter vérben levő vörösvértestek együttes térfogata, ha 1 mm^3-ben 5 millió vörösvértest van?

371. Bizonyítsa be, hogy ha két egész szám egyes helyiértékű jegyeinek összege 10, akkor a számok négyzeteinek egyes helyiértékű jegyei egyenlők!

372. Mely valós számokra értelmezhetők a következő kifejezések?

a) $\sqrt{\frac{x^2-1}{1+x}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{x-4}}$ c) $\sqrt{x^2+6x}$

373. Hozza egyszerűbb alakra a következő összeget, és számolja ki az értékét számológép nélkül!

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

374. a) Hozza egyszerűbb alakra: $\frac{a-b}{(a+b)^2}\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^6}{(a-b)^{10}}}$ $(0<b<a)$!

b) Határozza meg a kifejezés értékét, ha $a := 23$ és $b := 21$!

375. Egy geometriai számítás során a $\sqrt{p^2+r^2-2pr\cos\varepsilon}$ kifejezésbe kell behelyettesítenie a következőket: $p := 43{,}20$; $r := 54{,}93$ és $\varepsilon := 120°$.

a) Számológépe segítségével határozza meg az adatokhoz tartozó helyettesítési értéket!

b) A megadott kifejezéssel melyik síkidom melyik adata számítható ki?

376. A négyzetgyök kiszámítása nélkül állapítsa meg, hogy melyik szám nagyobb a következő két-két szám közül!

a) $2\sqrt{7}$ vagy $\sqrt{63}$ b) $\sqrt{80}$ vagy $4\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{20}$ d) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ vagy $\frac{1}{5}\sqrt{125}$

377. Számológép nélkül állapítsa meg, melyik nagyobb a következő számok közül!

a) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ vagy $1+2\sqrt{2}$

378. Igazolja, hogy $\left(\frac{1}{5\sqrt{2}+7}\right)^2=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\left(17-12\sqrt{2}\right)$!

379. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=2$!

380. Igazolja a következő egyenlőséget: $\sqrt{17-4\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}-\sqrt{5}$!

381. Egyenlő-e a következő két szám: $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ és $2-\sqrt{5}$?

382. Mennyi a pontos értéke: $\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2$?

383. A változók mely értékeire áll fenn az egyenlőség?

a) $\sqrt{a^2-4a+4} = a-2$ b) $\sqrt{4a^2+4a+1} = 2a+1$

c) $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1} = 2a$

384. Bizonyítsa be, hogy $x>1$ esetén $x\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \sqrt{x+\frac{x}{x^2-1}}$!

385. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$ b) $\sqrt[4]{x^4} = x$ c) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}} = \sqrt{x}$

386. Gyöktelenítse az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

387. Gyöktelenítse az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{8}{\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4}}$

388. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ c) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ $(a\neq b)$

389. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

a) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$ b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $(a\geq 0,\ b\geq 0,\ a\neq b)$ c) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

390. a) Fejezze ki a $T = 2\pi\sqrt{hg^{-1}}$ képletből g-t!

b) Számítsa ki g értékét, ha $T := 2$ és $h := 0{,}994$!

391. A relativisztikus mechanika szerint, ha az m_0 nyugalmi tömegű részecske v sebességgel mozog, akkor tömege megváltozik az $m = m_0 \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ összefüggésnek megfelelően ($c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a fény sebessége).

a) A megadott képlet elemzésével döntse el, hogy a részecske tömege nő, csökken vagy változatlan marad, ha a sebessége növekszik?

b) A képlet alapján világos, hogy egy részecske sebessége nem lehet tetszőlegesen nagy. Hogyan állapítható meg ez a képletből, és mekkora az a sebesség, amelyet nem érhet el egyetlen részecske sem?

c) Egy elektron, melynek nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $1{,}2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel lép ki egy gyorsító berendezésből. Mekkora a tömege?

d) Mekkora sebességgel mozog az a részecske, amelynek tömege a nyugalmi tömegének 110%-a?

392. a) Fejezze ki a $pr^{\frac{2}{3}} = Mk$ képletből az r-et! (p; r; M; $k > 0$)

b) Számítsa ki az r értékét, ha $p := 8 \cdot 10^4$, $M := 1{,}2 \cdot 10^{24}$ és $k := 1{,}2 \cdot 10^{-25}$!

393. Rendezze nagyság szerinti sorba a számokat ($0 < a$)! Diszkutáljon a nagysága szerint!

a) $\sqrt{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$; $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$ b) $\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}}$; $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^2}$; $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}$

394. Bizonyítsa be, hogy $\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$!

395. Mennyi a pontos értéke a következő számoknak?

a) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

396. Számítsa ki a következő szám pontos értékét: $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$!

397. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbf{N}$) vagy egész, vagy irracionális szám!

2.4. Logaritmus

398. Határozza meg a következő értékeket számológép nélkül!

a) $\lg \sqrt[3]{100}$ b) $\log_2 0,25$ c) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

399. Határozza meg a következő hatványok értékét számológép nélkül!

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$ b) $0,25^{\log_2 3}$ c) $(3)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$

400. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mivel egyenlő

a) $\log_2 \sqrt{2}$; b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; c) $\log_{\frac{1}{10}} 100$!

401. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mennyi

a) $3^{\frac{1}{4}\log_3 2}$; b) $81^{\log_3 2}$; c) $25^{\log_5 10-1}$!

402. Mennyi a pontos értéke a következő hatványoknak? (Számológép használata nélkül!)

a) $3^{2-\log_3 10}$ b) $\left(\sqrt{2}\right)^{3-\log_2 5}$ c) $8^{\log_2 6-2}$

403. Mennyi a következő hatvány pontos értéke (számológép nélkül): $13^{\log_{\sqrt{13}} 3+\log_{13} 2}$?

404. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mivel egyenlő

a) $\lg(\lg(\lg 10^{10}))$; b) $\log_2(\log_3(\log_4 64))$!

405. Mely esetekben értelmezhető és mivel egyenlő

a) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$; b) $\log_{\sqrt{a}} a$?

406. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mennyi

a) $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; b) $0,1 \cdot 0,1^{\lg 0,1-2}$; c) $26^{1-\log_3 3} + 4^{-\log_4 5}$!

407. Melyik nagyobb: $4^{\log_2 5}$ vagy $5^{\log_2 4}$? (Számológép nélkül!)

408. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül? (Számológép nélkül!)

a) 7^{20} vagy $\left(10^{2-\lg 2}\right)^{10}$ b) 3^2 vagy $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 4}$

409. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket ($1 < k$)!

a) $\sqrt{k^{6+\log_k 64}}$ b) $\sqrt[3]{k^{6-\log_k 64}}$ c) $k^{\frac{\lg(\lg k)}{\lg k}}$

410. a) Fejezze ki a $t = \dfrac{\lg A - \lg B}{\lg 2} \cdot 5570$ képletből az A változót! ($A > 0$; $B > 0$)

b) Számítsa ki t értékét, ha $A > 0$ és $\dfrac{A}{B} := 10^{5,2}$!

c) Számítsa ki B értékét, ha $A := 10^{-3}$ és $t := 4{,}3$!

411. Számológép segítségével határozza meg a következő tört értékét!

$$A := \frac{632^{54} \cdot 0{,}295^{211}}{5^{220} \cdot 14^{-100}}$$

412. Számológép segítségével határozza meg a következő tört értékét!

$$A := \frac{65^{117} \cdot 203^{107}}{18^{328} \cdot 10^{49}}$$

413. Számológép segítségével határozza meg az A értékét!

$$A := \frac{234^{235}}{235^{234}} + 1915{,}7326$$

414. Számológép segítségével határozza meg az alábbi műveletek eredményét!

a) $\dfrac{\sqrt[13]{23{,}8^{1100}}}{53{,}47^{68}}$ b) $21{,}11^{100} - 21{,}1^{100}$

415. Fejezze ki $a := \lg 450$ és $b := \lg 3$ segítségével $\lg 5$-öt!

416. Fejezze ki $c := \lg 48$ és $d := \lg 72$ segítségével $\lg 30$-at!

417. Fejezze ki c-vel az alábbi kifejezéseket, ha $c = \log_a b$! Tegye meg a szükséges kikötéseket is!

a) $\log_a(ab)$ b) $\log_a \frac{a}{b}$ c) $\log_a b^3$ d) $\frac{\lg a}{\lg b}$

418. Igazolja, hogy $a^{\lg b} = b^{\lg a}$ $(a; b > 0)$!

419. Bizonyítsa be, hogy $\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}$ $(a > 0, a \neq 1, k \neq 0)$!

420. Határozza meg x értékét a következő egyenlőségekből!

a) $\lg x = \lg 1{,}2 + \lg 1{,}5 - \lg 0{,}9$

b) $\lg x = 2 \cdot \lg 5 - 2$

c) $\log_2 x = 3 \cdot \log_2 8 - \frac{1}{2}\log_2 16$

421. „Egy oldat pH értéke az oxóniumion-koncentráció 10-es alapú logaritmusának –1-szerese."

a) A fenti meghatározás szerint mennyi annak az oldatnak a pH értéke, amelyben az oxóniumion-koncentráció $10^{-3}\ \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$?

b) Imi szerint ez is lehetne a definíció: „Egy oldat pH értéke az oxóniumion-koncentráció reciprokának 10-es alapú logaritmusával egyenlő." Döntse el, hogy igaza van-e Iminek!

c) Lúgos közeg pH-ja 13. Mekkora az oldatban az oxóniumion-koncentráció?

422. Ha 150 ezer Ft-ot évi 20%-os kamatos kamatra beteszünk a takarékba, akkor x év múlva $150\,000 \cdot 1{,}2^x$ Ft-unk lesz.

a) Hány forintunk lesz 13 év múlva?

b) Hány év múlva lenne kétmillió Ft a betétünk névértéke?

423. Fejezze ki $e := \lg 12$ és $f := \lg 441$ segítségével $\lg 175$-öt!

424. Fejezze ki $g := \lg 18$ és $h := \lg 21$ segítségével $\lg 245$-öt!

425. Milyen a, b, c számokra igaz, hogy $\log_a c = (\log_{ab} c) \cdot (1 + \log_a b)$?

426. Igazolja, hogy $\log_a \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b$, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$!

2.5. Számelmélet, oszthatóság

427. Bizonyítsa be a következő állításokat!

a) Két egymás utáni páros szám szorzata osztható nyolccal.

b) Minden páratlan szám négyzete nyolccal osztva egyet ad maradékul.

428. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek a pozitív egész számok körében

a) nincs osztójuk;

b) csak egy osztójuk van;

c) pontosan két osztójuk van;

d) nincs valódi osztójuk;

e) csak valódi osztójuk van?

429. a) Mikor nevezünk egy egész számot összetettnek?

b) Mutassa meg, hogy a következő három szám összetett:

$10^{15}-5^{8}$; 100 000 000 047; $10^{20}-7$.

430. a) Mikor nevezünk egy egész számot prímnek?

b) Mutassa meg, hogy az alábbi három szám nem prím:

$14^{15}-7^{8}$; 7 000 000 000 011; $5^{20}+7$.

431. Legyen p tetszőleges prímszám! Bizonyítsa be, hogy ekkor p^2+149 összetett szám!

432. Van-e olyan hat egymást követő pozitív prímszám, amelyek összege is prímszám? Válaszát indokolja!

433. Igazolja, hogy ha hat egész szám összege páratlan, akkor e számok szorzata páros!

434. Egy háromjegyű szám jegyeinek összege 4. Hány ilyen szám van? A legnagyobb és legkisebb szám átlaga szerepel-e a számok között?

435. Létezik-e olyan prímszám, amely után pontosan 4 összetett szám következik a természetes számsorban?

436. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely minden egyjegyű pozitív számmal osztható!

437. Melyik az a legkisebb és legnagyobb háromjegyű szám, amelyet 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et, 5-öt kapunk?

438. Bizonyítsa be, hogy ha a pozitív egész számokat összeadjuk 1-től 1000-ig, akkor a kapott összeg osztható 11-gyel!

439. a) Döntse el, hogy a $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 6^3 \cdot 10^2 \cdot 75$ szám négyzetszám-e? Válaszát indokolja!

b) Ha a szám négyzetszám, írja fel, melyik szám négyzete!

440. Egy építési vállalat téglalap alakú területeket burkol 1 m × 1 m-es betonlapokkal. Milyen méretű téglalapokat fedhet be, ha pontosan 150 darab betonlapot használ fel?

441. Egy 450 m^2 és egy 126 m^2 területű, valahány egész méter oldalú téglalapot illesszünk egymás mellé úgy, hogy ismét téglalapot kapjunk! Milyen téglalapokat kaphatunk? Melyikben lesz a közös oldal hossza a legnagyobb?

442. Melyik az a legnagyobb négyzet alakú járólap, amellyel hézagmentesen ki lehet rakni egy 425 cm × 306 cm-es téglalap alakú helyiséget?

443. Mutassa meg számológép használata nélkül, hogy az alábbi kijelentések igazak!

a) $5 \mid 11^{11} + 4$ b) $3 \mid 10^{20} + 2$

c) $6 \mid 10^{10} + 14$ d) $8 \mid (2k+1)^2 - 1$, ha $k \in \mathbf{Z}$

444. Igazolja a következő állításokat számológép használata nélkül!

a) $9 \mid 10^{33} + 8$ b) $72 \mid 10^{20} + 8$ c) $6 \mid 17^8 - 11^8$

445. Milyen számok állhatnak x és y helyén (és miért?), ha

a) $36 \mid 32x45y$; b) $12 \mid 6x423y$?

446. Igaz-e, hogy azok a számok, amelyek oszthatók

a) 3-mal és 4-gyel; b) 2-vel és 6-tal,

azok mind oszthatók 12-vel is?

447. Fogalmazzon meg szabályt a

a) 18-cal; b) 24-gyel; c) 30-cal

való oszthatóságra!

448. Igaz vagy hamis? Miért?

a) Bármely három szomszédos egész szám összege osztható 6-tal.

b) Bármely négy szomszédos egész szám szorzata osztható 24-gyel.

c) Ha egy pozitív egész számnak pontosan három pozitív osztója van, akkor ez a szám egy prímszám négyzete.

449. Egy tetszőleges négyjegyű szám utolsó jegyét a szám elejére írtuk. Igazolja, hogy ha az így kapott számot az eredetiből kivonjuk, akkor 9-cel osztható számot kapunk!

450. a) Felírható-e a 2001 három szomszédos egész szám összegeként?

b) Felírható-e a 2002 három szomszédos egész szám szorzataként?

451. Miért nem írható fel 2003 két prímszám összegeként?

452. a) Adja meg a 3150 és 5400 számok prímtényezős felbontását!

b) Írja fel a két szám legnagyobb közös osztóját!

c) Írja fel a két szám legkisebb közös többszörösét!

d) Vegye e két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének szorzatát! Mit tapasztal?

453. Ha $a = 24$, $(a; b) = 6$ és $[a; b] = 120$, mennyi b?

454. Melyik lehet az a két szám, amelynek legnagyobb közös osztója 6, és legkisebb közös többszöröse 60?

455. Mi a legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse két olyan számnak, amelyek

a) közül az egyik osztója a másiknak; b) relatív prímek?

456. Melyik az a két pozitív, nem relatív prím szám, amelyek legkisebb közös többszöröse 637?

457. Határozza meg az 1840 és a 3400 legkisebb közös többszörösét, illetve legnagyobb közös osztóját, majd ezek ismeretében

a) egy lépésben egyszerűsítse a $\frac{1840}{3400}$ törtet;

b) végezze el az $\frac{1}{3400} - \frac{1}{1840}$ kivonást!

458. Határozza meg a 7395 és 9860 legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját, majd ezek segítségével

a) egyszerűsítse egy lépésben a $\frac{7395}{9860}$ törtet;

b) végezze el a következő kivonást: $\frac{1}{9860} - \frac{1}{7395}$!

459. Egy szigeten koncertet szerveznek, ahová egy 150 férőhelyes hajó szállítja a nézőket több fordulóval, és a koncert után egy 180 férőhelyes hajón jöhetnek vissza. Hány néző oda-vissza szállítása oldható meg így, ha a hajókon minden helyet ki kell használni, de túlterhelni nem lehet őket? Mennyi a minimális nézőszám, amelyre megoldható a szállítás?

460. Egy külföldi nagyváros vasútállomásáról több irányba lehet utazni. Az egyik irányba 4 perces sűrűséggel közlekednek a szerelvények, egy másikba 6, míg egy harmadikba 7 percenként. 12 órakor mindhárom irányba indul egy szerelvény.

a) Mikor indul legközelebb két vonat egyszerre?

b) Mikor fordul elő legközelebb, hogy mindhárom irányba ugyanakkor indul vonat?

461. Hány pozitív osztója van a 2^7-nek? Állítását indokolja!

462. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek

a) 2; b) 3; c) 6

pozitív osztója van?

463. Mely számoknak van páratlan számú (pozitív) osztója? Állítását indokolja!

464. Adjon meg egy olyan számot, amelynek 2002 pozitív osztója van!

465. Hányféleképpen lehet 80 katonát téglalap alakban felsorakoztatni, ha legalább két sorban, illetve két oszlopban kell állniuk?

466. Egy papírlapot kétfelé tépünk, majd a darabokat ismét kétfelé. Ezután tépjünk minden darabot ötfelé, majd a kapott darabokat ismét ötfelé. Végül tépjünk minden darabot hétfelé. Hány darabot kapunk így?

467. Igaz-e, hogy ha két szám mindegyike 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor

a) az összegük; b) a szorzatuk

1 maradékot ad 3-mal osztva?

468. Igazolja, hogy

a) három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel!

b) öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható hárommal!

469. Kiválasztható-e két szám bármely négy páros természetes szám közül úgy, hogy a kettő összegének és különbségének szorzata osztható legyen 12-vel? Válaszát indokolja!

470. Mennyi lehet egy páratlan szám négyzetének maradéka a 8-cal való osztás után?

471. Milyen számmal osztva adhat azonos maradékot a 35 és az 59?

472. Melyek azok a prímek, amelyek egy négyzetszámnál eggyel kisebbek?

473. Hány olyan tovább nem egyszerűsíthető, 0 és 1 közötti tört van, amelynek nevezője 144?

474. Hány olyan csupa különböző számjegyből álló négyjegyű szám van, amely osztható 5-tel?

475. Az n, $3n$ és $4n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) számok olyanok, hogy szorzatuk osztható az összegükkel. Bizonyítsa be, hogy összegük osztható 16-tal, és szorzatuk 96-tal!

476. Bizonyítsa be, hogy három egymást követő egész szám köbének összege osztható 9-cel!

477. Mely esetben osztható 36-tal három szomszédos pozitív egész szám köbének összege?

478. Az $N := \overline{abca}$ alakú számban a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek. Tudjuk, hogy $15 \mid N$ és $a + c = 11$. Határozza meg az összes ilyen számot!

479. Tekintsük a 100! számot!

a) Hány 0-ra végződik?

b) 6-nak legfeljebb hányadik hatványával osztható?

c) 4-nek legfeljebb hányadik hatványával osztható?

480. Adott egy szám: 1301. Mennyi ez tízes számrendszerben, ha ez egy

a) ötös; b) nyolcas; c) tizenkettes

számrendszerben felírt szám?

481. Adott egy tízes számrendszerbeli szám: 1301. Írja ezt át

a) kettes; b) nyolcas; c) tizenhatos

számrendszerbe!

482. Hogyan ismerjük fel egy szám alakjáról a kettes számrendszerben, hogy

a) 2-vel; b) 4-gyel; c) 8-cal

osztható?

d) Hasonlítsa össze ezt a 10-es számrendszer egy megfelelő oszthatósági szabályával!

483. Gondoltam egy egész számot. Négyzetre emeltem és maradékosan elosztottam hárommal.

a) Mi lehetett a gondolt szám, ha az osztás hányadosa 12 és nincs maradék?

b) Mi lehetett a gondolt szám, ha az osztás eredménye pontosan 8?

c) Mi volt a gondolt szám, ha a maradékos osztásban a hányados 21, a maradék pedig 1?

d) Kaphatunk-e 2 maradékot az osztásban? Állítását igazolja!

484. 50 dobozt helyezünk el egy sorban. Valaki elmegy a dobozok mellett és mindegyikbe beletesz egy golyót. Ezután visszatér a sor elejére, újra végigmegy a dobozok mellett és minden másodikba tesz egy golyót. Amikor harmadszor megy végig, minden harmadikba tesz egy golyót, és így tovább. Az ötvenedik sétája alkalmából az ötvenedik dobozba tesz egy golyót. Melyik dobozban lesz a legkevesebb és a legtöbb golyó? Lesz-e olyan doboz, amelyben 5 golyó van?

485. Melyek azok az $a < b$ pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $ab + a + b = 114$?

486. Hány olyan természetes szám van, melynek négyzete 2001 db 1-esből és néhány 0-ból áll?

487. Egy négyjegyű számot 101-gyel osztva a maradék 83, 102-vel osztva a maradék 64. Melyik ez a négyjegyű szám?

488. Igazolja, hogy ha n 3-mal osztható pozitív szám, akkor $n + 1$ és $\frac{n}{3}$ relatív prím!

489. Határozza meg azokat az n egész számokat, amelyekre $\frac{2n+7}{n-3}$ egész szám!

490. Bizonyítsa be, hogy öt egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám!

491. Van-e olyan, a tízes számrendszerben felírt háromjegyű szám, amelyet a

a) kilences számrendszerben egy szintén háromjegyű szám ad meg, amelynek minden jegye pontosan 2-vel nagyobb, mint a tízes számrendszerbeli számnak?

b) hetes számrendszerben egy szintén háromjegyű szám ad meg, amelynek minden jegye pontosan 2-vel nagyobb, mint a tízes számrendszerbeli számnak?

492. Egy közel négyzetformájú téglalap alakú kertből levágnak két egymásra merőleges irányban a szélétől számítva egy 7, illetve egy 6 méter széles csíkot a kert teljes hosszában utcanyitás és útépítés céljából. Ezzel a kert területe pontosan kétharmad részére csökkent. Mekkora lehetett a kert területe eredetileg, és mekkora lett a kisajátítás után, ha eredetileg méterben mérve egész számok voltak az oldalai?

493. Lili azt állítja, hogy 7-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha a számjegyeiből hátulról hármas csoportokban képzett számok váltakozó előjelű összege osztható 7-tel. Példákat is mutat: $7 \mid 2466884$, mert $7 \mid 2 - 466 + 884 = 420$, de $7 \nmid 45376$, mert $7 \nmid -45 + 376 = 331$. Matyi azt mondja, ez csak véletlen, nem hiszi, hogy általánosan teljesülne. Melyiküknek van igaza?

494. A maja papok egy, a miénknél bonyolultabb, ámde pontosabb naptárt használtak. Kalendáriumuk egyik alapja a 13 napos ciklus (a „hét") volt. Ennek napjait számokkal jelölték. A másik alapvető ciklus 20 napos volt (a „hónap"), ennek napjait nevekkel jelölték. Egy szám-név páros 260 naponként ismétlődött, ez a periódus az ún. *tzolkin*, ami a vallási ünnepeiket szabályozta. Használták emellett az évszakokhoz igazodó, általunk is ismert 365 napos évet (*háb*): tizennyolc 20 napos „hónap" és még 5 év végi „szerencsétlen nap" alkotta ezt. Ez utóbbi időszak alatt is váltakoztak azonban a napnevek, így egy adott nevű nap helye a 20 napos „hónapon" belül minden évben eltolódott. Ezért azt is megadták, hogy a „hónap" hányadik napjáról van szó (ezt ráadásul 0-tól 19-ig számozták). Végülis tehát a maják egy napot négy névvel illettek: pl. az „5-imis-3-kumhu" dátum a 13 napos „hét" 5., egyúttal (most) *imis* nevű napját jelzi, amely 4. nap a *kumhu* nevű „hónapban".

a) Hány nap múlva fordul elő ismét ugyanez a dátummegjelölés?

b) Hány év ez?

495. Melyek azok a téglalapok, amelyeknek oldalai pozitív egész számok, és területük és kerületük mérőszáma ugyanaz a pozitív egész szám?

496. Határozza meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők számjegyeik összegének 18-szorosával!

2.6. Polinomok, algebrai törtek

497. Számítsa ki számológép használata nélkül!

a) $321,7^2 - 221,7^2$ b) $\dfrac{2010^2 - 81}{2001}$ c) $1590^2 + 410 \cdot 1590$

498. Számítsa ki számológép használata nélkül!

a) $\left(\sqrt{7}+1\right)^2 + \left(\sqrt{7}-1\right)^2$ b) $\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(2\sqrt{3}+5\right)$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\sqrt{2}$

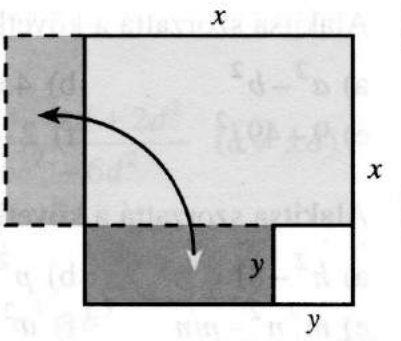
499. Tekintse a következő kifejezést: $3ab(a+b) - 2a^2(a-b)$! Végezze el a műveleteket, és rendezze a polinomot a kapott tagok csökkenő fokszáma szerint! (Ha két tag azonos fokszámú, az ábécében előrébb álló betű csökkenő fokszáma legyen a rendező elv!)

a) Hányadfokúak az egyes tagok és az egész polinom?

b) Mennyi a főegyüttható és a többi együttható?

c) Mennyi a helyettesítési érték $a := 4$ és $b := -1$ esetén?

500. Milyen nevezetes azonosságot szemléltet az alábbi ábra?



501. Egy téglalap egyik oldala 6 egységgel nagyobb, mint a másik. Egy négyzet oldala 3 egységgel nagyobb, mint a téglalap rövidebb oldala. Melyik négyszögnek nagyobb a területe? Mennyivel?

502. Adott egy a oldalú négyzet, és egy téglalap, melynek egyik oldala 6 egységgel nagyobb, a másik oldala 6 egységgel kisebb, mint a négyzet oldala. Melyiknek nagyobb a területe és mennyivel?

503. Bontsa fel a zárójeleket!

a) $(a+b-c)^2$ b) $(a+b)^3$

504. Bontsa fel a zárójeleket!

a) $(a-2)^3$ b) $(a-b+c)^2$

505. Bontsa fel a zárójeleket!

a) $(4-b)^3$ b) $(-a+b+c)^2$

506. Végezze el a kijelölt műveleteket, s a kapott polinomot rendezze x fogyó hatványai szerint!

a) $(2x-1)^2$ b) $(1-2x)^3$ c) $(1-2x)^3-(2x-1)^2$

507. Melyik kéttagú kifejezés négyzete lehet

a) $z^2-10z+25$; b) $s^2+26s+169$;
c) $t^2-8tu+16u^2$; d) $81v^2+144vw+64w^2$?

508. Melyik kéttagú kifejezés négyzete lehet

a) x^4+2x^2+1; b) z^6-6z^3+9; c) $p^4+2p^2q^2+q^4$; d) $u^8-4u^4v^3+4v^6$?

509. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $9u^2+12uv+4v^2$ b) $5p^2-5pq+6p-6q$ c) $x^2+2xy-3y^2$

510. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) a^2-b^2 b) $4x^2-y^2$ c) $9u^2-16v^2$ d) $25i^2-36$
e) $9-49j^2$ f) $2-k^2$ g) $4-3w^2$ h) $16-m$

511. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) h^2-81 b) p^2-4q^2 c) m^4-n^4 d) $144s^6-9t^4$
e) m^2n^2-mn f) $u^2vw+uv^2w+uvw^2$

512. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $8i^2-8ij+3i-3j$ b) $5b^3-5b^2-2b+2$ c) $3c^3-2cd^2+3c^2-2d^2$

513. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) z^2-z-2 b) $2x^2+x-3$

514. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $a^2-b^2-4a+4b$ b) $a^4-b^4+(a-b)^2-(a+b)^2+4ab$ c) a^2-b^2-4a+4

515. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $4(x+y)^2-x-y$ b) a^4-a c) x^3-y^3-x+y

516. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $81-(a^2+6a)^2$ b) $1-x^2-2xy-y^2$

c) $(a+b)^4-(a-b)^4$ d) $x^3+6x^2+11x+6$

517. Adott két polinom: $x^2+2xy+y^2$ és $x+y$. Írja fel a két polinom összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát a legegyszerűbb alakban!

518. Adott két polinom: $2a^3+7a^2+3a$ és a^2+3a. Írja fel a két polinom összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát a legegyszerűbb alakban!

519. Írja fel két polinom hányadosaként: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ $(a;\ b;\ c\neq 0)$!

520. Adott két algebrai tört: $\frac{b-a}{b^2+ba}$ és $\frac{ab-a^2}{b+a}$. Határozza meg

a) összegüket; b) hányadosukat,

és annak értelmezési tartományát!

521. Egyszerűsítse az alábbi törteket!

a) $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{3x^2-3y^2}$ $(x\neq\pm y)$ b) $\frac{2c^2-4cd+2d^2}{6c^2-6d^2}$ $(c\neq\pm d)$

522. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ $(x\neq\pm 2)$ b) $\frac{a^3+b^3}{a^2-a-b-b^2}$ $(a\neq -b;\ a\neq b+1)$

c) $\frac{a^3+1}{6a^2+12a+6}$ $(a\neq -1)$

523. Végezze el a kijelölt műveleteket és a lehetséges egyszerűsítéseket!

a) $\left(\frac{8b^2cd}{9a^5}:\frac{7cd}{12a^3}\right)\cdot\frac{14b^{-2}}{3a^{-4}}$ $(abcd\neq 0)$

b) $\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}$ $\left(x\neq -5;\ x\neq 0;\ |x|\neq 3\right)$

524. Egyszerűsítse az alábbi törteket!

a) $\frac{sx+rx+tx}{s+r+t}$ $(s+r+t\neq 0)$

b) $\frac{(a-b)^2}{3(a-b)^3}$ $(a\neq b)$

c) $\frac{a^2x^2-a^2x^3}{a^2x^2}$ $(ax\neq 0)$

d) $\frac{p^2+8p+16}{p^2-16}$ $(|p|\neq 4)$

525. Egyszerűsítse a következő törtet: $\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}$ $(x\neq\pm 1)$!

526. Egyszerűsítse a következő törteket! Állapítsa meg, változik-e az értelmezési tartományuk?

a) $\frac{a-a^2}{a^2-1}$

b) $\frac{a^2-7a+12}{a^2-6a+9}$

527. Végezze el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{a+2b}{a-b}-\frac{a-2b}{a+b}$ $(a\neq\pm b)$

b) $\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}$ $(a,b\neq 0;\ a\neq b)$

c) $\frac{7}{4x^3-36x}\cdot\frac{x^2-9}{14}$ $(x\neq 0;\ \pm 3)$

528. Végezze el a kijelölt műveleteket! A végeredményt a lehető legegyszerűbb alakban adja meg!

a) $\left(-\frac{2}{5}x^2y^3z\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}x^3yz\right)$

b) $\left(-\frac{2}{5}x^2y^3z\right):\left(-\frac{5}{2}x^3yz\right)$ $(xyz\neq 0)$

c) $\left(\frac{a}{3}+3a\right)^2$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}x^2y^4\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^{-3}y^{-2}\right)\right]^4$ $(xy\neq 0)$

529. Hozza a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést $(3a+2b\neq 0$ és $3a-2b\neq 0)$!

$$\frac{7a-5b}{3a+2b}+\frac{5a-8b}{3a-2b}-\frac{a-9b}{3a+2b}-\frac{8a-10b}{3a-2b}$$

530. a) Írja fel két polinom hányadosaként a következő kifejezést: $\frac{a+6}{a-6}-\frac{a-6}{a+6}$!

b) Milyen a esetén lesz e kifejezés értéke 0?

c) Milyen a esetén nincs e kifejezésnek értelme?

531. Írja fel két polinom hányadosaként ($x \neq \pm 0{,}5$)!

a) $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{2x+1}$ b) $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}$ c) $\dfrac{1}{1-4x^2}-\dfrac{1}{2x-1}$

532. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$(1-a)(1+a^2)+(1+a)(1+a^2)-2(1+a)(a-1)$

533. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $1-a+a^2-\dfrac{a^3}{1+a}$ $(a \neq -1)$ b) $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}$ $\left(a \neq 0;\ a \neq \dfrac{1}{2};\ a \neq 1\right)$

534. Alakítsa szorzattá a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítse a törteket!

a) $\dfrac{x^2+4x-32}{x^2-11x+28}$ b) $\dfrac{-p^2+2p+11{,}25}{-p^2+7p-11{,}25}$

535. Egyszerűsítse az alábbi törteket!

a) $\dfrac{6q^2-q-15}{4q^2-4q-15}$ b) $\dfrac{3+5s-2s^2}{1+s-2s^2}$

536. Hol pozitív az $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}$ algebrai tört értéke az értelmezési tartományán belül?

537. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét, ha tudja, hogy $c := -\dfrac{11}{3}$!

$$\left(\frac{2c}{c+2}-\frac{2c}{3c-6}+\frac{8c}{c^2-4}\right)\cdot\frac{c-2}{c^2-4c}$$

538. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\left(\frac{2}{x^2-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{2x^2+2x}{x^3-1}+\frac{4}{x-1} \quad (x \neq 0;\ x \neq 1;\ x \neq -1)$$

539. Számítsa ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a változók megadott értékei esetén!

a) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$, ha $a := 1\frac{3}{4}$

b) $abc-\left(3a^2b-\left(4abc+\left(3a^2b-5ab^2\right)\right)\right)$, ha $a := -\frac{1}{2}$, $b := -\frac{2}{3}$, $c := -4$

540. Számítsa ki a következő kifejezés helyettesítési értékét (számológép használata nélkül), ha $x := -\frac{11}{7}$ és $y := \frac{4}{7}$: $\frac{x^4y+x^3y^2}{x^5+2x^4y+x^3y^2}$!

541. Számítsa ki a $\frac{3a^2b+2ab^2}{3a+2b}$ kifejezés helyettesítési értékét (számológép használata nélkül), ha $a := -\frac{4}{5}$ és $b := \frac{1}{3}$!

542. Számítsa ki a következő törtek pontos értékét (számológép használata nélkül)!

a) $\frac{ax^2+bx^2}{a+b}$, ha $a := 3^{10}$; $b := -2\cdot 3^9$; $x := -\frac{2}{3}$

b) $\frac{ax^4-bx^4}{a-b}$, ha $a := 3^{10}$; $b := 2\cdot 3^9$; $x := -\frac{2}{3}$

c) $\frac{3^{-9}+3^{-8}}{3^{-10}+3^{-11}}$

543. Számítsa ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a változók megadott értékei esetén!

a) $\left(1-\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}\right)^{-2}$, ha $x := 2$; $y := \frac{1}{2}$

b) $(x+y)^{-1}(x-y)^{-1}(x^{-2}-y^{-2})$, ha $x := 3$; $y := \frac{1}{3}$

544. Egy geometriai számítás során a $\frac{3V}{\pi\left(R^2+Rr+r^2\right)}$ kifejezésbe kell behelyettesítenie a következőket: $V := 12\,659{,}5$; $R := 21{,}9$; $r := 14{,}5$.

a) Számológépe segítségével határozza meg az adatokhoz tartozó helyettesítési értéket!

b) Melyik test melyik alkotórésze számítható ki a megadott kifejezéssel?

545. Oldja meg az $\mathbf{R} \setminus \{-4; 4\}$ halmazon az $\frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{16x}{x^2-16} = 0$ egyenletet!

546. Adja meg a következő egyenlet valós gyökeit: $\frac{x^3-1}{x^2-1} = 3$!

547. A következő összefüggésekből fejezze ki a kérdezett változót!

a) $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$, $k = ?$ b) $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$, $v_1 = ?$ c) $N = -\left(1 + \frac{d}{f}\right)$, $f = ?$

548. Igazolja, hogy $(1-2x)(1+2x)(1-4x^2)^2 = 1 - 12x^2 + 48x^4 - 64x^6$!

549. Bizonyítsa be az $\frac{a}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$ azonosságot! $(|a| \neq |b|)$

550. a) Írja fel összeg alakban a következő hatványt: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$!

b) Mennyi lehet $x + \frac{1}{x}$ értéke, ha $x^2 + \frac{1}{x^2} = 79$?

551. a) Írja fel egy különbség négyzeteként az $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ kifejezést!

b) Mennyi az $x^2 + \frac{1}{x^2}$ értéke, ha $x - \frac{1}{x} = 3$?

552. Mutassa meg, hogy nincs olyan természetes számokból álló szomszédos számhármas, ahol a középső szám reciprokának kétszerese egyenlő a két szélső szám reciprokának összegével!

553. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $\sqrt{2n+1}$ és $\sqrt{2n(2n+1)}$, ahol n egy adott pozitív egész számot jelöl.

a) Mekkorák a háromszög oldalai, ha $n := 4$?

b) Mekkora a háromszög átfogója, ha $n := 5$?

c) Igazolja, hogy az átfogó hossza mindig természetes szám lesz!

554. Igazolja, hogy bármilyen egész számot írunk is a k helyére, igaz lesz, hogy $15 \mid (5k+4)^2-(5k+1)^2$!

555. Gondoltam egy egynél nagyobb számot. Megszoroztam hárommal, majd hozzáadtam kettőt. A kapott számot négyzetre emeltem, majd levontam belőle nyolcat és még a gondolt szám 12-szeresét is. A megmaradt számot elosztottam a gondolt szám háromszorosánál kettővel kisebb számmal és a hányadosból elvettem kettőt. Eredményül 18-at kaptam.

a) Melyik számra gondoltam?

b) Melyik számra gondoltam, ha a végeredményül kapott szám p?

556. Petrának az $x \mapsto \dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ függvényt kellett ábrázolni. Milyen alakzatot rajzolt és miért? (Petra jól oldotta meg a feladatot.)

a) egy egyenest b) egy „lyukas" egyenest c) egy parabolát

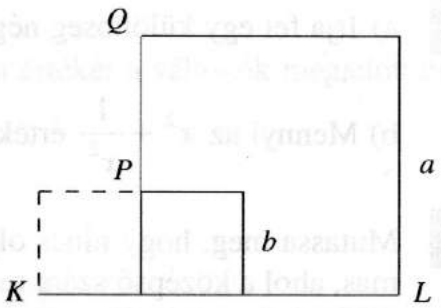
d) egy „lyukas" parabolát e) egy hiperbolát f) egy „lyukas" hiperbolát

557. Péternek az $x \mapsto \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$ függvényt kellett ábrázolni. Milyen alakzatot rajzolt és miért? (Péter jól oldotta meg a feladatot.)

a) egy egyenest b) egy „lyukas" egyenest c) egy parabolát

d) egy „lyukas" parabolát e) egy hiperbolát f) egy „lyukas" hiperbolát

558. Igazolja, hogy az a, illetve b oldalú négyzetek közötti „L-alakú" rész területe megkapható a KL és PQ szakaszok hosszának szorzataként is! (K-t úgy kaptuk, hogy a b oldalú négyzetet tükröztük a PQ egyenesére.)



559. A valószínűség-számításban gyakran használt képlet a $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Számítsa ki $P_6(4)$ értékét, ha $p := 0{,}7$!

560. Magyarországon a megszerzett éves jövedelem után 2001-ben az alábbi módon kellett „sávos" jellegű adót fizetni. Jelölje az éves jövedelmet x. Három eset volt lehetséges:

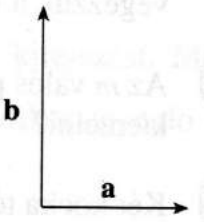
1. Ha $x \leq u$, akkor a teljes jövedelem után $p\%$-os adót kellett fizetni.
2. Ha $u < x \leq v$, akkor az adó két részből tevődött össze: az u-nak a $p\%$-a, plusz az x-nek az u-t meghaladó része utáni $q\%$.
3. Ha $v < x$, akkor a fizetendő adó három részből tevődött össze: az u-nak a $p\%$-a, plusz a $v-u$-nak a $q\%$-a, plusz az x-nek a v-t meghaladó része utáni $r\%$-a $(0 < p < q < r < 100)$.

a) Mekkora volt a két ember által fizetendő adó, ha $u := 4 \cdot 10^5$ Ft; $v := 10^6$ Ft; $p := 20$; $q := 30$; $r := 40$, és egyikük éves jövedelme 1,5 millió forint, a másikuké pedig 950 ezer forint volt?

b) Mindhárom fenti elvi esetben fejezze ki a fizetendő adó mértékét a megadott paraméterek segítségével!

c) Mindhárom fenti elvi esetben fejezze ki a megadott paraméterek segítségével azt, hogy az éves jövedelmének hány százaléka maradt az adózónál!

561. Az ábrán látható merőleges vektorok $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$; $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 7$.

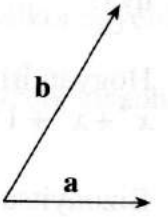


a) Határozza meg a két vektor skaláris szorzatát!

b) Számítsa ki az $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$ értékét!

c) Igaz-e most, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$?

562. Az ábrán látható $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ hajlásszöge 60°; $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 8$.



a) Határozza meg a két vektor skaláris szorzatát!

b) Számítsa ki az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$ értékét!

c) Igaz-e most, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$?

563. Határozza meg azt a 0-tól különböző valós számot, melyet a

a) $\frac{7}{13}$; b) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

tört számlálójához adva, a tört értéke ugyanannyi lesz, mintha ezt a számot az eredeti tört nevezőjéhez adjuk hozzá!

564. Egy InterCity vonat egy bizonyos sebességgel halad 120 km-en keresztül, majd a következő 180 km-en a pálya rosszabb minősége miatt 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kisebb sebességgel.

a) Írja fel az átlagsebességét a teljes 300 km-es útszakaszra, ha a nagyobb sebességét x-szel jelöli! (Átlagsebességen a teljes megtett út és a teljes eltelt idő hányadosát értjük.)

b) Mekkora az x értéke, ha a vonat átlagsebessége 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

565. a) Írja fel annak a keveréknek az alkoholtartalmát, amelyet x liter 15%-os és y liter 40%-os alkohol összekeverésekor kapunk!

b) Milyen arányban állnak a keverék két komponensének mennyiségei, ha a keverék 25%-os?

c) Mennyit kellett vennünk a kétféle alkoholból, ha a keverék 10 liter és 20%-os?

566. Határozza meg azon polinom együtthatóinak összegét, amelyet akkor kapunk, ha elvégezzük a következő hatványozást: $(7x^6-6x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2x-3)^{2002}$!

567. Az m valós paraméter milyen értéke mellett lehet a $2x^2+x+m$ polinomból $(x+3)$-at kiemelni?

568. Két kocka térfogatkülönbségének a 10-szerese pontosan a két kocka felszíne összegének és élhosszuk különbségének a szorzata. Mekkora a két kocka éleinek az aránya?

569. Hogyan írható fel egész együtthatós, alacsonyabb fokú polinomok szorzataként az x^4+x^2+1 polinom?

570. Bizonyítsa be, hogy ha $x+y+z=0$, akkor $x^3+x^2z-xyz+y^2z+y^3=0$!

571. Egyszerűsítse a következő törtet: $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$ $(a \neq \pm 1)$!

572. Ildi felírt egy lapra egy egész együtthatós A polinomot, és azt mondta: „Ma van a húgom születésnapja. Ha életkorát, a-t beírjuk x helyébe, a-t kapunk, vagyis $A(a)=a$. Viszont $A(0)=p$, ahol p egy a-nál nagyobb prím." Hány éves Ildi húga?

2.7. Közepek

573. a) Definiálja két pozitív szám számtani és mértani közepét!

b) Bizonyítsa be, hogy ha a két pozitív szám nem egyenlő, akkor mértani közepük a két szám közé esik!

574. Bizonyítsa be, hogy három különböző pozitív szám számtani közepe a legkisebb és a legnagyobb szám közé esik!

575. Két pozitív szám közé szeretnénk beiktatni egy harmadikat úgy, hogy a három szám

1. egy számtani sorozat három egymást követő tagja legyen.
2. egy mértani sorozat három egymást követő tagja legyen.

a) Mi lesz az 1., illetve a 2. esetben beiktatott szám, ha a két szám a 2 és a 8?

b) Meg lehet-e mondani általánosan, hogy melyik esetben lesz a beiktatott szám nagyobb, vagy ez a két megadott szám értékétől függ?

576. Legyen a és b két pozitív szám. Képezzük belőlük a $\frac{2ab}{a+b}$ kifejezést. Mutassa meg, hogy ez sosem nagyobb a két szám mértani közepénél! Mikor egyenlő vele?

577. Legyen a és b két pozitív szám. Képezzük belőlük a $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ kifejezést. Mutassa meg, hogy ez sosem kisebb a két szám számtani közepénél! Mikor egyenlő vele?

578. Milyen pozitív a és b egészekre teljesül, hogy az összegük négyzete kisebb a szorzatuk négyszeresénél?

579. Bizonyítsa be, hogy $x, y > 0$ esetén $\frac{\lg x + \lg y}{2} \le \lg \frac{x+y}{2}$!

580. a) Adott egységnyi hosszúságú szakaszhoz szerkesszen $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszokat!

b) Jelölje meg egy számegyenesen a $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ pontos helyét!

581. Adott 2 egység sugarú körbe szerkesszen $\sqrt{3}$ hosszúságú húrt!

582. Bizonyítsa be, hogy ha x és y pozitív számok, akkor $\frac{x^2+1}{x} + \frac{y^2+1}{y} \ge 4$!

583. Határozza meg, melyik számot kell a k helyébe írni, hogy a

a) $3(k-1{,}2)^2$;

b) $(k-1{,}2)^2+(k-1{,}4)^2$;

c) $(k-1{,}2)^2+(k-1{,}4)^2+(k-3{,}4)^2$

kifejezés a legkisebb legyen! Mekkora a legkisebb érték?

584. Határozza meg, melyik számot kell a k helyébe írni, hogy a $(k-a)^2+(k-b)^2$ összeg a legkisebb legyen ($a, b \in \mathbf{R}$)! Mekkora a legkisebb érték?

585. a) Melyik számot kell a k helyébe írni, hogy a $|k-1{,}2|$ kifejezés a legkisebb legyen! Mekkora a legkisebb érték?

b) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $x \mapsto |x-1{,}2|+|x-2{,}4|$, $x \in \mathbf{R}$ függvényt!

c) Igaz-e, hogy ha a $|k-1{,}2|+|k-2{,}4|$ kifejezésben k helyébe az 1,2 és a 2,4 számtani közepét írjuk, akkor az így kapott összegnél kisebbet bármely más szám behelyettesítésével sem kaphatunk?

586. Egy 100 m hosszú kötéllel mekkora maximális területű

a) téglalapot; b) rombuszt

keríthetünk körül?

587. A 120 cm² területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete? Válaszát indokolja!

588. A 72 cm kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? Válaszát indokolja!

589. Egy autó a Budapest és Zamárdi közti úton

a) az 1 óra 10 perces menetidő; b) a 116 km-es távolság

egyik felében $120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, másik felében $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt. Melyik esetben mekkora az átlagsebessége? (Ezt úgy értelmezzük, mint az összes megtett út és a teljes eltelt idő hányadosát.)

590. Valaki két órán át $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel gyalogolt, majd a közeledő sötétedést észrevéve a következő két órában $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt.

a) Mekkora volt az átlagsebessége? (Vagyis az összes megtett út és az összes eltelt idő hányadosa.)

b) Egy másik túrán 10 km-t $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tett meg, majd a következő 10 km-t $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val. Most mekkora volt az átlagsebessége?

591. B-ből 120 km hosszú, jó minőségű országút vezet C-be. X úr ráérősen vezette autóját, ezért B-ből C-be 2 óráig tartott az útja. Visszafelé már sietnie kellett, de csak $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességet tudott elérni, mert elég sűrű volt a forgalom.

a) B-ből való indulásától a visszaérkezéséig összesen hány órát volt úton X úr?

b) Mekkora volt a teljes oda-vissza útra számított átlagsebessége? Ez a sebesség egyenlő-e a B-ből C-be, illetve visszafele vezető úton elért két átlagsebesség számtani közepével?

c) Mekkora állandó sebességgel kellett volna a visszafele vezető úton haladnia, hogy a teljes oda-vissza útra számítva elérje a $75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességet? Az ebben az időben hatályos KRESZ-szabályok $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet engedtek meg országúton. Szabályosan közlekedett-e X úr, ha elérte a fenti átlagsebességet?

592. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését, sebességét és gyorsulását a következő képletek írják le: $y(t) = A \cdot \sin \omega t$, $v(t) = A\omega \cdot \cos \omega t$, $a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t$.

a) Melyek azok a t időpontok, amelyekben a pillanatnyi sebesség abszolútértéke mértani közepe a kitérés és a gyorsulás ugyanazon időpontbeli abszolútértékeinek, ha $\omega := 2\pi \frac{1}{s}$?

b) Van-e olyan t időpillanat, amikor a sebesség abszolútértéke a kitérés és a gyorsulás abszolútértékének a számtani közepével egyezik meg?

593. Egy bankban három egymás utáni évben az 1 évre lekötött pénz kamatai rendre 16, 12, illetve 9% voltak. Mekkora átlagos éves kamatnak felel ez meg? Az eredményt századszázalék pontossággal adja meg! (Átlagos kamaton azt értjük, hogy három évre berakva egy fix összeget erre a kamatra, ugyanannyi pénzünk lesz, mintha ugyanezt az összeget három évig évről évre lekötjük a megadott kamatok szerint.)

594. Egy háromszög egyik szöge a másik két szög számtani közepe. A két nagyobbik szög együttvéve akkora, mint a legkisebb szög 3-szorosa. Mekkorák a háromszög szögei?

595. Egy téglalap oldalainak hossza p és q ($p \neq q$). Két négyzet közül az elsőnek az oldalai p és q számtani közepével, a másodiknak az oldalai p és q mértani közepével egyeznek meg.

a) Írja fel a négyzetek oldalhosszát!

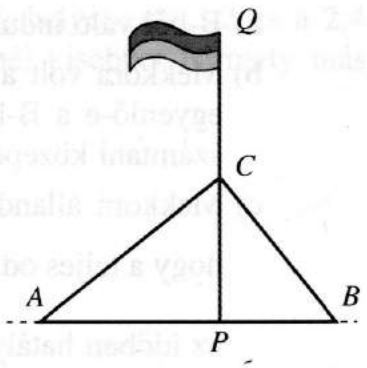
b) Igaz-e, hogy a második négyzet területe megegyezik a téglalap területével?

c) Igaz-e, hogy az első négyzet kerülete megegyezik a téglalap kerületével?

d) Megegyezhet-e az első négyzet kerülete a második négyzet kerületével?

e) Megegyezhet-e az első négyzet területe a második négyzet területével?

596. A terepviszonyok miatt a PQ zászlórudat csak az ábra szerint lehetett a vízszintes talajra merőlegesen rögzíteni a CA, CB kötelekkel. Méréssel a következőket állapították meg: $AP = 5$ m, $PB = 3{,}2$ m, $BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 90°$.



a) Milyen hosszú a zászlórúd, ha C pontosan a rúd felénél van?

b) Milyen hosszú a rúd, ha $PC : CQ = 9 : 10$?

c) Mennyivel rövidebb kötelet használhatnánk, ha az A helyett az AB felezőpontjában rögzíthetnénk a bal oldali kötél másik végét?

597. Egy derékszögű trapéz átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsa be, hogy a merőleges szár az alapok mértani közepe!

598. Az AB szakasz egy belső P pontjában egy PC hosszúságú merőlegest állítunk az AB szakaszra. Tudjuk, hogy az AP és PB szakaszok hosszának mértani közepe PC hosszával egyenlő. Bizonyítsa be, hogy C illeszkedik AB szakasz mint átmérő fölé rajzolt körre!

599. Van két díszgyertyája, mindkettő szabályos négyoldalú gúla alakú. Az alaplapjuk ugyanakkora területű négyzet, a magasságuk azonban különböző: 9 cm és 6 cm. A két gyertya egybeolvasztásával egy ugyancsak szabályos négyoldalú gúla alakú gyertyát szeretne önteni, melynek alapterülete kétszerese az eredeti alapterületnek. Igazolja, hogy az új gyertya magassága a két beolvasztott gyertya magasságának a számtani közepe lesz!

600. Van két díszgyertyája, mindkettő szabályos négyoldalú gúla alakú. A magasságuk ugyanakkora, az alaplapjuk azonban különböző: az egyiké 9 cm oldalú, a másiké 6 cm oldalú négyzet. A két gyertya egybeolvasztásával egy ugyancsak szabályos négyoldalú gúla alakú gyertyát szeretne önteni, melynek magassága az eredetiekének duplája. Igaz-e, hogy az új gyertya alapterülete a két beolvasztott gyertya alapterületének számtani közepe lesz?

601. Jack két aranyrögöt talált, az egyik igazán szép darab volt. Miután megmérette őket, így büszkélkedett barátjának, Jimnek: „A két aranyrög tömegének számtani közepe 68, mértani közepe pedig 60 gramm. Ha gyorsan megmondod, mekkora a tömegük, akkor a kisebbiket neked ajándékozom." Segítsen Jimnek kitalálni az aranyrögök tömegét!

602. Egy briliáns értéke m tömegének négyzetével arányos: $2 \cdot m^2$ fabatka. Hogyan változik az értéke, ha két részre vágjuk? Mikor legnagyobb az értékváltozás?

603. Egy eladót lefüleltek, hogy pontatlan a mérlege: kétkarú mérlegének egyik karja rövidebb, mint a másik. Így védekezett: „Én minden vásárlótól megkérdeztem, melyik serpenyőbe tegyem az árut, melyikbe a súlyt. Nyilván károsodtak néhányan, ugyannyian pedig jól jártak. Én nem jutottam tisztességtelen haszonhoz!" Igazat állít-e az eladó? (A mérleg akkor van egyensúlyban, ha az egyik kar hosszának a serpenyőben lévő tömeggel való szorzata megegyezik a túloldali karhossz és tömeg szorzatával.)

604. Alsófalván négy üzletben is lehet vásárolni: *A*-ban, *B*-ben, *C*-ben és *D*-ben. Mindegyik boltban ugyanolyan típusú kétkarú mérleg van, csakhogy ezek a mérlegek egyformán pontatlanok, mert a mérlegkarok bal, illetve jobb oldali részének hossza nem egyenlő. Ezért az eladók minden árut kétszer mérnek meg: egyszer a jobb oldali, egyszer a bal oldali serpenyőbe teszik az árut, a másik oldalra pedig a hitelesített tömegeket (súlyokat). Mivel a mérlegek egyformák, ugyanazt az árut bármelyik üzlet mérlegén megmérve ugyanazt a két tömegértéket kapjuk. (A kétkarú mérleg akkor van egyensúlyban, ha a bal oldali serpenyőjébe tett tömeg és a bal oldali mérlegkar hosszának szorzata egyenlő a jobb oldali serpenyőjébe tett tömeg és a jobb oldali mérlegkar hosszának szorzatával.) *A*-ban a két mért tömeg közül a kisebbik után kell fizetni, *B*-ben a nagyobbik tömeg után; *C*-ben a két tömeg számtani, *D*-ben pedig a mértani közepe a fizetség alapja.

a) Egy zacskó pattogatott kukorica tömegét a kétszeri mérés 100, illetve 144 grammnak mutatja. Egy gramm ára 13 peták. Mennyit kell fizetni az egyes üzletekben?

b) Az üzletek a pattogatott kukoricát olyan helyen szerzik be, ahol pontos mérleg van, azaz az áru valódi tömege után kell fizetni grammonként 13 petákot. A négy bolt melyikében jár jól a vásárló, és melyikben a kereskedő? Van-e olyan üzlet a négy között, ahol a beszerzési áron adják el a pattogatott kukoricát?

605. Három különböző pozitív egész összege 57, közülük az egyik a másik kettő mértani közepe, egy másik pedig a másik kettő többszöröse. Melyek ezek a számok?

606. Három különböző pozitív egész szorzata 24, közülük az egyik a másik kettő számtani közepe. Melyek ezek a számok?

607. Mely számokat írhatjuk a k helyébe, hogy a $|k-1{,}2|+|k-2{,}1|+|k-3{,}6|$ összeg a legkisebb legyen! Mekkora a legkisebb érték?

608. Tudjuk a geometriából, hogy egy derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének a mértani közepe. Mutassa meg ebben az esetben szemléletesen, hogy miért nagyobb ennél a két szakasz számtani közepe!

609. Vegyük két, egymást kívülről érintő r és R sugarú kör közös külső érintőjét. Ennek a két érintési pont közötti szakasza fölé rajzoljunk egy Thálesz-kört, a két kör középpontját összekötő szakasz fölé egy másik Thálesz-kört.

a) Melyik lesz a nagyobb? Miért?

b) Vezesse le ennek alapján a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségnek egy újabb szemléltetését!

610. Adott területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete? Válaszát indokolja!

611. Adott kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? Válaszát indokolja!

612. Két város között egy gépkocsi az egyik irányban $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, visszafelé $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad.

a) Határozza meg a gépkocsi teljes útra vonatkoztatott átlagsebességet!

b) Bizonyítsa be, hogy ez a különböző irányban mért sebességek harmonikus közepe!

613. Zsolti azt állítja, hogy az 1-nél nagyobb természetes számokra $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Igaza van-e?

2.8. Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

614. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{x-4}{8}+2=\frac{3x+104}{20}-\frac{x+8}{12}\ !$$

615. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{3x-9}{x-3}=3$ b) $\frac{3x-9}{x-3}=x$ c) $\frac{x^2-3x}{x-3}=3$ d) $\frac{x^2-3x}{x-3}=x$

616. Oldja meg az $\mathbf{R}\setminus\{-2;\ 0;\ 2\}$ halmazon az $\frac{x}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{4}{x^2+2x}$ egyenletet!

617. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\frac{7-x}{x-5}=\frac{2}{x-5}+3\ !$

618. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\frac{x^2+6x+9}{x+3}=x+2\ !$

619. Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőség?

$$\frac{x+2}{8-2x^2}-\frac{2x-2}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}+\frac{1}{4-2x}=0$$

620. Egy szám 50-nel nagyobb egy másiknál. A két szám összegét 3-mal megszorozva pedig 210-et kapunk. Melyik ez a két szám?

621. Melyik az az ötjegyű szám, amely után egy 1-est írva háromszor akkora számot kapunk, mint ha eléje írnánk egy 1-est?

622. Egy négyjegyű szám utolsó jegye 8. Ha ezt a szám végéről az elejére írjuk, akkor az eredetinél 3204-gyel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

623. Két szám közül az egyik a másik kétszeresénél hárommal nagyobb. Mekkora a két szám, ha a különbségük 9?

624. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Ha a számjegyeit felcseréljük, 45-tel kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

625. Egy telket Antal egyedül 4 óra, Béla egyedül 6 óra alatt ás fel. Hány óra alatt készülnek el a munkával, ha együtt dolgoznak?

626. Xénia 80 perc alatt hordja tele vízzel a medencét, Yvonne 70 perc alatt, Zalán 60 perc alatt. Mennyi idő alatt végeznek a munkával együtt?

627. Gyöngyi 17 évvel fiatalabb a szomszédasszonynál. Ha Gyöngyi kétszer annyi idős lenne, mint amennyi, épp 1 évvel volna öregebb a szomszédasszonynál. Hány éves Gyöngyi és hány éves a szomszédasszony?

628. Három testvér közül a középső 11 éves, a legidősebb pedig ötször olyan idős, mint a legfiatalabb. A három testvér együttes életkora eggyel kevesebb, mint amennyi idős lesz a legidősebb akkor, ha kétszer olyan idős lesz, mint jelenleg. Hány évesek most a testvérek?

629. Zamárdiból a

a) 83 km-re lévő Martonvásárra; b) a 33 km-re lévő Fonyódra

indul egy motoros $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Egy órával később $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel a célállomásról egy másik motoros indul Zamárdi felé. Mikor és hol találkoznak?

630. Egy ékszerész hétfőn eladta a készlet felét és még 4 darabot, kedden a maradék készlet felét és még 2 darabot, szerdán 5 darab ékszert adott el, és így elfogyott az összes ékszere. Hány ékszer volt az üzletben hétfőn reggel?

631. Egy túra egyik résztvevője minden nap elkölti pénzének felét és még 200 forintot. A kitűzött távot három nap alatt sikerült megtennie, amikorra a pénze elfogyott. Hány forinttal indult útnak a turista?

632. Egy szállodában 24 szoba van, összesen 64 férőhellyel. A szobák két-, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba van?

633. Egy osztály tanulóinak $\frac{1}{3}$-a gyalog jár az iskolába, $\frac{1}{4}$-e kerékpárral, a többi 10 diák pedig busszal. Hány tanulója van az osztálynak?

634. Öt marógép 15 munkadarabot 60 perc alatt munkál meg. Hány perc alatt munkál meg 8 ugyanilyen teljesítményű marógép 40 ugyanilyen munkadarabot?

635. Zoli futópályán edz. Egyszer végigfutott a futópályán, visszafordult és megtette a pálya $\frac{3}{4}$ részét. Itt megint visszafordult és még akkora távot futott, mint az előzőleg

megtett táv $\frac{2}{7}$-e. Végül itt megint visszafordult és még futott akkora távot, mint az előző fordulástól megtett út fele. Milyen hosszú a futópálya, ha így összesen 2500 m-t tett meg?

636. Egy autósnak 5 óra alatt kell megtennie egy 400 km-es útszakaszt, de 2 óra után megállt pihenni, majd az út hátralevő részét 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb sebességgel tette meg, hogy behozza a lemaradást. Az autós mindkét útszakaszon egyenletes sebességgel haladt.

a) Mekkora volt az első útszakaszon a sebesség, ha $\frac{1}{2}$ órát töltött pihenéssel?

b) Legfeljebb mennyi időt pihenhetett, ha maximum 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lehet az első útszakaszon a sebesség?

637. Négy testvérnek összesen 120 könyve van. Antalnak annyi, mint Bencének, Cilinek és Dénesnek együtt. Bencének annyi, amennyi Cilinek és Dénesnek együtt. Cili könyveinek száma 2-vel több, mint Dénesé. Hány könyve van a testvéreknek különkülön?

638. Egy diák egy 750 Ft-os könyvre gyűjtött. Perselyébe csupa 20 és 50 Ft-os érme került, összesen 24 darab. Megszámolta pénzét, s megállapította, hogy ha csak 50 Ft-osai lennének, de annyi, amennyi 20 Ft-osa van, akkor is ugyanennyi lenne a pénze. Döntse el, hogy meg tudja-e vásárolni már a könyvet a diák?

639. Egy diák rendszeresen gyűjtött papírt. A kapott pénzből a 10, 20 és 50 Ft-osokat perselybe tette. Amikor a 25. érmét dobta a perselybe, megállapította, hogy ezzel már 500 Ft-ot takarított meg. Határozza meg, hogy ekkor legfeljebb hány 50 Ft-os érme lehetett a perselyben!

640. Hányan járnak a 11. A osztályba, ha a tanulók 25%-ának lett jeles a dolgozata és tudjuk, hogy ha 4-gyel kevesebbnek sikerült volna jelesre a dolgozata, akkor a nem jelesek száma 7-szer akkora lett volna, mint a jeleseké?

641. Egy autó A-ból B felé indul. Bizonyos idő múlva a megtett út úgy aránylik a még hátralévőhöz, mint 2:3. Ha az autó megtesz még 40 km-t, akkor az út kétharmadát tette meg eddig. Mekkora az AB távolság?

642. Egy pénzváltó automatában felváltunk egy 1000 forintost 100 és 50 forintosokra. Hány 50 forintos és hány 100 forintos érmét kapunk, ha összesen 12 pénzdarab esik ki az automatából?

643. Egy park alaprajza U alakú, és hét darab egybevágó négyzetből áll. A parkot körülvevő kerítés annyi méter hosszú, mint ahány négyzetméter a park területe. Milyen hosszú a kerítés?

644. Egy parkolóban 50 jármű áll: autók, motorkerékpárok és buszok. A járművek kerekeinek száma rendre 4, 2, illetve 6; összesen 184 kerekük van. Hány darab van egy-egy gépjárműtípusból, ha tudjuk, hogy a buszok száma egyötöde az autók számának?

645. A b alapú számrendszerben igaz, hogy $8 \cdot 8 = 54_b$. Ebben a számrendszerben felírva mennyi $6 \cdot 6$?

646. Kétlépcsős rakétának a kilövéstől számított 25 perc alatt összesen 1500 km-t kell megtennie. Az első lépcsőben $0{,}8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ a sebessége, a második lépcső beindulása után pedig $1{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Mekkora út megtétele után kell beindítani a második fokozatot?

647. Két államkötvényünk van, összesen 270 ezer forint értékben. Az egyik hozama egy év alatt 10%-os, a másiké 9%-os. Ha a két százaléklábat felcserélnénk, akkor az egy éves hozam 300 forinttal kevesebb lenne. Mekkora a két kötvény névértéke?

648. Egy ékszerkészítő 500 db apró, csiszolt féldrágakövet kapott gyűrűk és medálok díszítéséhez. A köveknek egyenként 0,2 gramm tömegűeknek kellene lenniük, ez előírás. Az ékszerész, gyakorlott szakember lévén, ránézésre úgy ítéli meg, hogy a kövek között bizony az előírtnál kisebbek és nagyobbak is vannak. Van egy mérlege, ami 1 grammig igen pontosan mér, de az alatt már nem megbízható. Megméri az 500 féldrágakövet és 100 grammnak találja.

a) Mennyi a kövek tömegének átlaga (számtani közepe)?

b) Lehet-e a kövek között 100 darab 0,19 gramm tömegű? Ha igen, akkor mutasson egy példát, ha nem, akkor miért nem?

c) Lehet-e a kövek között 100 darab 0,23 gramm tömegű? Ha igen, akkor mutasson egy példát, ha nem, akkor miért nem?

d) Legfeljebb hány kő lehet 0,24 gramm vagy annál nagyobb tömegű?

e) A szállító cég garantálja, hogy a kövek között nem lehet 0,19 grammnál kisebb tömegű. Ennek az ismeretnek a birtokában legfeljebb hány darabra becsülheti az ékszerész a 0,24 gramm vagy annál nagyobb tömegű ékkövek számát?

649. Egy népszerű énekes CD-jéből Amerikában ebben a hónapban kétszer annyi fogyott, mint az előző hónapban, amikor piacra dobták. Ha a következő két hónapban is mindig az előző havi kétszeresét adják el, akkor már csak 10 000 darab fog hiányozni a bűvösnek számító 100 000 eladott példányhoz. Mennyi CD-t adtak el ebben a hónapban?

650. Két vízcsapot egyszerre kinyitva 40 perc alatt töltenek meg egy medencét. Az általuk szolgáltatott vízmennyiségek aránya 3 : 4. Mikor telik meg a medence, ha az első csapot 6 órakor, a másodikat 6 óra 25 perckor nyitják meg?

651. Egy uszoda vízkeringtető rendszerének két be- és egy kifolyója van. A nagyobbik teljesítményű befolyó 4 óra alatt, a másik, kisebb teljesítményű 10 óra alatt tölti fel a medencét. A kifolyó maximális kapacitás mellett, ha mindkét befolyó is működik, éppen szinten tudja tartani a vizet. Mennyi az a legrövidebb idő, ami alatt le lehet engedni a teljes medencét?

652. Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van; mindegyikük negyvenszer annyi koronát ad hozzá, mint ahányan társultak; az egész összeghez annyi százalékot nyernek, mint ahányan vannak; a hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsa ki, hányan társultak! (Euler nyomán)

653. A Vakapád nevű hajón Piszkos Fred a kapitány. A kapitány évei számánál 24-gyel kevesebb méter a hajó hossza. Fülig Jimmy kétszer annyi kiló, mint ahány méter hosszú a hajó. Naponta 120-szal több km-nyi utat tesznek meg, mint ahány kiló Fülig Jimmy. Huszadannyi matróz szolgál a hajón, mint ahány km utat megtesznek naponta. A matrózok számánál kettővel kevesebb kabin van. Piszkos Fred nyolcszor annyi idős, mint ahány kabin van a hajón. Hány éves a kapitány?

654. Oldja meg a valós számok halmazán!

a) $(3-x)(2x+5)\left(\frac{1}{2}-7x\right)=0$ b) $\frac{9}{x}<0$ c) $\frac{x^2+1}{8-11x}<0$

655. Oldja meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{-7-5x}{-12}>-29$ b) $\frac{3}{x}\le 6$

656. Oldja meg az egyenlőtlenséget az $\mathbf{R}\setminus\{3\}$ halmazon: $\frac{3x+8}{x-3}>0$!

657. Oldja meg az egyenlőtlenséget az $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$ halmazon: $\frac{3x-8}{x+3} < 0$!

658. Oldja meg az egyenlőtlenséget az $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ halmazon: $\frac{3x+8}{x-3} > 3$!

659. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{3x-9}{x-3} < 3$ b) $\frac{3x-9}{x-3} \leq x$ c) $\frac{x^2-3x}{x-3} > 3$ d) $\frac{x^2-3x}{x-3} \geq x$

660. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{2x-4}{3-x} \geq 2$ b) $\frac{3x-6}{4-x} \geq -5$

661. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen: $(x-2)^2 + 2x + 10 < (3-x)^2$!

662. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen: $(3x-1)^2 - 6x < (2-3x)^2$!

663. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen: $\frac{3-5x}{2x-5} < -3$!

664. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen: $\frac{7}{x-3} < \frac{5}{x-2}$!

665. Oldja meg az egyenlőtlenséget: $\frac{x^2(x-10) - 4(1-5x)}{2-x} \geq 5(x-1) + x(3-x)$!

666. Alvinnak minden nap ugyanaz volt az egyik feladata: 3000 forintos és 4000 forintos kilónkénti árú kávéfajtákból 17,5 kg 3600 forintos kilónkénti árú kávékeveréket kellett készítenie.

a) Olyan sokszor csinálta már, hogy fejből tudta a szükséges mennyiségeket. Menynyit kellett az egyes fajtákból felhasználnia a keverék előállításához?

b) A kereslet egyre ingadozóbbá vált, így nap mint nap változott az a mennyiség is, amit Alvinnak kellett elkészíteni. Hogy ne kelljen minden nap új problémával megküzdenie, elhatározta, hogy a keverék tömegét m-mel jelölve egyszer s min-

denkorra megoldja a kérdést. Egy paraméteres egyenletet írt fel, azt megoldotta. Ettől kezdve a megoldásba való egyszerű behelyettesítéssel bármely m érték esetén azonnal ki tudta számítani a szükséges mennyiségeket. (Természetesen $m > 0$.) Oldja meg Alvin feladatát! Ellenőrizze számításait az $m := 17{,}5$ eset vizsgálatával!

c) Nemcsak a kereslet változott azonban, a kávéárak sem maradtak sokáig a régiek. Ezért Alvin úgy döntött, hogy végérvényesen „leszámol" a kávékeverési problémával. Az olcsóbbik kávé kilónkénti árát p-vel, a drágábbikét q-val, míg a keverékét r-rel jelölte, a keverék tömegét pedig továbbra is m-mel. ($0 < p < r < q$ és $m > 0$) Oldja meg Alvin általános feladatát! Ellenőrzésképpen vizsgálja meg a $p := 3000$; $q := 4000$; $r := 3600$; $m := 17{,}5$ esetet!

667. Oldja meg az alábbi egyenleteket (ahol p paraméter)!

a) $p(x-1) = 3x + p - 6$ b) $(x+1)p = p + 2x + 1$

668. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget (ahol p paraméter)! Ábrázolja a megoldást p-x koordináta-rendszerben!

$$x - 1 \le \frac{4(p + x + 1)}{p^2}$$

669. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget (ahol p pozitív paraméter)! Ábrázolja a megoldást p-x koordináta-rendszerben!

$$x + 3 \le \frac{2x + 15}{p + 2}$$

670. n számú féldrágakő együttes tömege M ($M > 0$).

a) Legfeljebb hány kő tömege lehet nagyobb, mint $\frac{M}{n} + \varepsilon$? ($\varepsilon > 0$)

b) Ha a kövek mindegyike legalább $\frac{M}{n} - \delta$ tömegű, akkor legfeljebb hány kő tömege lehet nagyobb, mint $\frac{M}{n} + \varepsilon$? $\left(0 < \delta < \frac{M}{n};\ \varepsilon > 0\right)$

c) A féldrágakövek között k számúnak a tömege nagyobb, mint $\frac{M}{n} + \varepsilon$. Legalább mekkora az n? ($\varepsilon > 0$)

2.9. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

671. a) Egyszerűsítse az $\frac{x^2-10x+25}{x^2-x-20}$ törtet!

b) Oldja meg a valós számok halmazán a $\frac{k^2-10k+25}{k^2-k-20}=\frac{k+4}{k-5}$ egyenletet!

672. Oldja meg a valós számok halmazán a $15(x-2)(x-4)-8(x-3)(x-5)=0$ egyenletet!

673. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(2x-1)(1-2x)=(x+6)^2-58$

b) $(3x-2)^2-(1-x)^2=45-20x$

c) $(x-1)^2-2(x+2)^2+3(x-3)^2=6(x-1)^2+30$

674. Oldja meg a $\mathbf{Z}\setminus\{-1;\,3\}$ halmazon a következő egyenletet: $\frac{5}{(x-3)(x+1)}=1$!

675. Oldja meg a $\mathbf{Q}\setminus\{-2;\,0\}$ halmazon a következő egyenletet: $\frac{2}{x}+\frac{17}{x+2}=24$!

676. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x^2+2{,}5x)^2-5(x^2+2{,}5x)-6=0$

b) $(x^2+x+1)(x^2+x-8)=52$

677. Oldja meg az $\mathbf{R}\setminus\{-3;\,3\}$ halmazon az egyenletet: $\frac{x}{x^2-9}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{5}{4(x-3)}$!

678. Oldja meg az $\mathbf{R}\setminus\{4\}$ halmazon a következő egyenletet: $\frac{10x}{x^2-8x+16}+\frac{3x}{4-x}=-1$!

679. Oldja meg a következő egyenletet: $\frac{x^2-9x+20}{x-5}=\frac{x}{x^2-4x}$!

680. Oldja meg: $\frac{(x-3)(x+2)}{x-1}=2$!

681. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{5-x}{2x-1}=\frac{15-4x}{3x+1}$$

682. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$$

683. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $4x^4-5x^2+1=0$!

684. Adja meg a következő egyenlet negatív gyökeit: $3x^4-7x^2=-2$!

685. Mennyi a $-3x^2+8x-4=0$ egyenlet valós gyökei reciprokának összege?

686. a) Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, melynek a megoldáshalmaza $\left\{\frac{4}{5};\ -5\right\}$!

b) Másodfokú egyenlet két valós gyökének szorzata 2, hányadosa 98. Írjon fel egy ilyen másodfokú egyenletet!

687. Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $x^2-5x+6=0$ egyenlet gyökeinek a kétszeresével egyeznek meg!

688. Egy másodfokú egyenlet egyik gyökéről tudjuk, hogy 3-mal nagyobb, mint a másik. Ezenkívül azt is tudjuk, hogy a szorzatuk 2-szerese az összegüknek. Írjon fel a feltételeknek megfelelő másodfokú egyenleteket!

689. A $2px^2-p^2x-6=0$ egyenlet egyik gyöke 2. Mi a másik gyök, és mekkora p?

690. Határozza meg a q valós paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletek egyik gyöke 3 legyen!

a) $7x^2-3x-q=0$ b) $7x^2-qx-3=0$ c) $qx^2-7x+3=0$

691. Milyen p valós paraméter esetén lesz az $x^2+px-15=0$ egyenlet egyik gyöke 5?

692. Mekkora legyen c, hogy az $x^2+bx+c=0$ és az $x^2+cx+b=0$ egyenletek mindegyikének legyen valós gyöke, ha

a) $b=9$; b) $b=4$; c) $b=1$?

693. a) Határozza meg az $x^2+px+9=0$ egyenletben a p értékét úgy, hogy az egyenletnek egy valós gyöke legyen!

b) Határozza meg, milyen pozitív egész q értékek esetén lesz az $x^2+5x+q=0$ egyenletnek két valós gyöke?

694. Határozza meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy a $3x^2-6x+p=0$ egyenletnek

a) egy valós gyöke legyen (két egyenlő valós gyöke legyen);

b) a (különböző) gyökei pozitívak legyenek;

c) két valós gyöke közül az egyik pozitív, a másik negatív legyen;

d) ne legyen valós gyöke!

695. Melyik az a tört, amelynek számlálója 2-vel nagyobb a nevezőjénél, és tudjuk, értéke nem változik, ha a számlálójához 5-öt adunk, nevezőjét pedig kétszeresére növeljük?

696. Két szám összege 12, szorzata 27. Mekkora e két szám negyedik hatványának összege?

697. Egy téglalap alakú asztallap területe 32 dm², kerülete 24 dm. Mekkorák az oldalai?

698. Három egymás után következő természetes szám négyzetének összege 974. Melyek ezek a számok?

699. Melyik az az öt szomszédos egész szám, amelyek közül

a) az első három négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő négyzetének összegével;

b) az első kettő négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő négyzetének összegével?

700. Melyik az a két szám, amelynek a szorzata 6, és 5

a) az összege; b) a különbsége; c) a hányadosa?

701. Mutassa meg, hogy $|x|>1$ esetén $A<B$, ha $A=2x+1$ és $B=x^2+2x$!

702. Egy konvex sokszögben összesen 90 átló húzható. Határozza meg a sokszög oldalszámát!

703. Egy konvex sokszög átlóinak száma 77. Hány oldalú a sokszög?

704. a) Mekkora lehet annak a négyzetnek az oldala, amelyiknek a területe nagyobb mérőszámú, mint a kerülete?

b) Mely valós számokra teljesül, hogy a négyzetük nem nagyobb, mint a négyszeresük?

705. Két autómodell versenyez. Az egyik egyenletes $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel képes haladni, a másik viszont $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog. Mikor és hol éri utol a második autó az elsőt, ha

a) egyszerre indulnak, de az első kap 2 méter előnyt?

b) egy helyről indulnak, de az első kap 2 másodperc előnyt?

(Az egyenletes mozgást az $s = vt$, a gyorsulót az $s = \frac{a}{2}t^2$ egyenlet írja le, ahol s az indulástól megtett út, t az indulástól eltelt idő, v a sebesség, a a gyorsulás.)

706. Egy függőlegesen felfelé kilőtt kő sebességének nagysága 40 m magasságban $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mennyi idő múlva ér talajt, ha a mozgást a $h = \left(\frac{g}{2}t - v\right)t$ egyenlet írja le, ahol h a test talajszint feletti magassága, g a nehézségi gyorsulás $\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$, v_0 a test sebessége előjelhelyesen (felfelé pozitív, lefelé negatív), t pedig a földet érésig hátralévő idő?

707. Egy álló helyzetből induló, egyenletesen gyorsuló test $100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességig gyorsul fel 6 s alatt. Mikor lesz mozgási energiája fele a végső állapotbelinek? (A mozgási energia képlete: $E = \frac{mv^2}{2}$, ahol m a tömeg, v a pillanatnyi sebesség. Egyenletes gyorsulás esetén $v = at$, ahol t az indulástól eltelt idő, és a a gyorsulás.)

708. Egy ellenállásra 220 V feszültséget kapcsolunk, és ekkor I áram folyik át rajta. Ha az ellenállást növeljük 10 Ω-mal (például sorba kötjük az ellenállásunkkal a 10 Ω-os ellenállást), akkor az áramerősség a mérés szerint 2 A-rel csökken ($I - 2$ A lesz). Határozza meg az ismeretlen R ellenállás értékét! (Az Ohm-törvény szerint $U = RI$, vagyis az R ellenálláson a végeire kapcsolt U feszültség hatására I erősségű áram folyik át.)

709. Egyenletes sebességgel haladó hajó 15 km-es utat 1 órával hosszabb idő alatt tesz meg, ha a folyó folyásával ellenkező irányban halad, mint amikor a folyó folyásával egy irányban halad. A folyó sebessége $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Határozza meg a hajó állóvízben mért sebességét!

710. A 150 km hosszúságú útszakaszon az egyik gépkocsi $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel gyorsabban haladt, ezért fél órával hamarabb ért célba, mint a másik, pedig egyszerre indultak. Mekkora sebességgel haladt a két gépkocsi?

711. Egy autó előzés előtt $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad; csakúgy, mint az előtte levő kocsi, amelytől 10 m-re van, amikor elkezdi előzni. Ezt a műveletet $2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ egyenletes gyorsulással a $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességről indulva $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra felgyorsulva hajtja végre, és 10 m előnnyel kerül vissza a másik kocsi elé. (Annak sebessége mindvégig $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ maradt.) Mindkét kocsi hossza 4 m. Mennyi ideig tart a teljes előzés, és mekkora utat tesz meg az előző kocsi a teljes előzési idő alatt?

712. Egy távúszó a folyóban a folyás irányában 1600 m-t úszott, majd azonnal vissza a kiindulási helyére. Az egész oda-vissza távot 1 óra és 12 perc alatt tette meg. Állóvízben $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt volna. Számítsa ki a folyó sebességét!

713. 50 csavar annyi forintba kerül, ahány csavart 72 Ft-ért kapunk. Mennyibe kerül egy csavar?

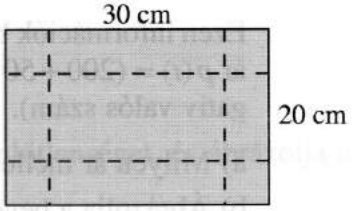
714. Egy könyvet háromféle kötésben árusítanak. Ha a bőrkötéses k%-kal olcsóbb lenne, annyiba kerülne, mint a vászonkötéses. Ha a vászonkötéses $2k$%-kal olcsóbb lenne, annyiba kerülne, mint a papírkötéses. Ha viszont a bőrkötéses 40,5%-kal lenne olcsóbb, annyiba kerülne, mint a papírkötéses. Hány százaléka a vászonkötéses könyv ára a bőrkötésesének?

715. A virágárusnál egy szál rózsa 5-tel több piculába került, mint ahányat Zoli megvásárolt. A díszítés 50 picula volt. Mennyibe került egy szál rózsa, ha Zoli a zsebében lévő 820 piculából a lehető legnagyobb csokrot köttette?

716. Két munkás együttesen 4 nap alatt végez el egy munkát. Ha ezen a munkán külön-külön dolgoznak, akkor az egyik 6 nappal rövidebb idő alatt készül el, mint a másik. Hány nap alatt végzik el a munkát külön-külön?

717. Van két edényünk. Az egyik 8 literes és tele van 87,5%-os alkohollal; a másik 10 literes és üres. Az első edényből áttöltünk a másodikba valamennyi alkoholt, majd a második edényt teletöltjük vízzel. E keverékkel feltöltjük az első edényt. Így az első edényben 70%-os alkoholt kapunk. Határozza meg, hogy először hány liter alkoholt töltöttünk át az első edényből a másodikba!

718. a) Téglalap alakú lemezből dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkaiból 5 cm-es négyzeteket vágunk ki, és azután az oldalakat felhajtjuk. Mekkora térfogatú dobozt kapunk, ha 20 cm × 30 cm-es téglalapból indulunk ki?



b) Négyzet alakú lemezből az a)-ban leírt módon 900 cm^3 térfogatú dobozt tudtunk készíteni. Mekkora volt a négyzet oldala?

719. Egy négyzet területe 169 cm^2. Van-e olyan téglalap, amelynek kerülete megegyezik a négyzet kerületével, területe pedig 168 cm^2?

720. A piacon almát vásároltunk télire 5400 Ft-ért. Ha ugyanennyiért a kilónként 12 Ft-tal drágább fajtából vásároltunk volna, akkor 5 kg-mal kevesebbet kaptunk volna. Hány kg almát vettünk?

721. Idős hölgyek baráti körének tagjai megegyeznek abban, hogy hetente egyszer mindegyikük „pletyizik" egy kicsit telefonon a társaság összes többi tagjával. Gyorsan meg is állapították, hogy ehhez 66 telefonbeszélgetést kell hetente lebonyolítaniuk.

a) Hány tagja van az idős hölgyek baráti körének?

b) Ha a hölgyek közül ketten megtudnak egy-egy új pletykát, akkor legkevesebb hány telefonbeszélgetés kell ahhoz, hogy a baráti kör minden tagja mindkét pletykát megtudja?

722. Egy szakmunkás 3 nappal előbb végez egy munkával, mint egy betanított munkás. Ha együtt dolgoznak, akkor két nap alatt készen vannak. Hány nap alatt végzi el a munkát a két munkás egyedül?

723. Legalább mennyivel kell egy eredeti terv szerint négyzet alapterületű helyiség oldalait megnövelni, ha a magasságát egy álmennyezet beépítése miatt 70 cm-rel csökkenteni kell, miközben a négyzetformát nem akarjuk változtatni, de egy előírás miatt a helyiség légköbméter értéke (térfogata) nem csökkenhet? (Tudjuk hogy az alapterület eredetileg 16 m^2 és a magasság 3,5 m lett volna.)

724. Egy nagykereskedő 10 000 kg mosóport tárol a raktárában. A következő eladási lehetőségei vannak:

1. eladja kg-ját 200 Ft-ért, ilyenkor biztos az egész mennyiség elkel;
2. eladja kg-ját 250 Ft-ért, ekkor 9000 kg-ot tud eladni;
3. eladja kg-ját 300 Ft-ért, ekkor 8000 kg-ot tud eladni.

Ezen információk birtokában a következő modellt állítja fel: ha a kilogrammonkénti ár $p(t) = (200 + 50t)$ Ft, akkor $10\,000 - 1000t$ kg-ot tud eladni (itt t legyen nemnegatív valós szám).

a) Milyen ár mellett marad meg számára a teljes mennyiség e modell szerint?

b) Ábrázolja a bevételét az ár függvényében!

c) Milyen ár mellett várhatja a modell szerint a legnagyobb bevételt?

725. a) Oldja meg az $\frac{5y^2 + 11y - 12}{2y^2 + 7y + 3} = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

b) Oldja meg a $\frac{2y^2 + 7y + 3}{5y^2 + 11y - 12} \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

726. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $2x^2 - 3x - 20 \leq 0$

b) $\frac{5}{2x^2 - 3x - 20} < 0$

727. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$-15x^2 + 7x + 2 > 0$

728. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

729. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$-9x^2 + 6x - 3 < 0$

730. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$(x - 4)(4x - 3) \leq -3$

731. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 1} > 0$$

732. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

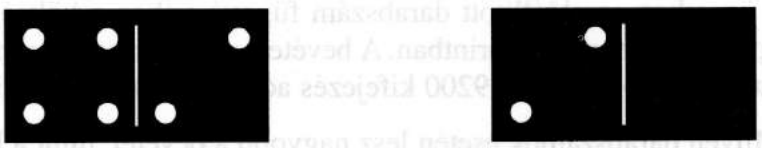
$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} < 3$$

733. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!

$$\frac{6}{2x - 2} < \frac{2}{2x + 5}$$

734. Egy léggömb $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ egyenletes sebességgel függőlegesen emelkedik a talajról. Négy másodperccel az indulása után, kissé távolabbról $30\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőlegesen fellőnek egy lövedéket. A léggömb indulásától mért időskálán mikor és milyen talajszint feletti magasságok között lesz a lövedék magasabban, mint a léggömb? (A léggömb mozgását a $h = vt$, a lövedékét a $h = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$ egyenlet írja le, ahol h a talajszint feletti magasság, v a léggömb sebessége, v_0 a lövedék kezdősebessége, g a nehézségi gyorsulás $\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$, t pedig mindkét test esetén a saját indulásától eltelt idő.)

735. Egy dominókészlet 36 kőből áll. Összesen legfeljebb hány pötty látható egy dominókövön? (A dominókövek mindegyikén az egy-egy oldalon elhelyezett pöttyök száma 0-tól a megengedett maximumig bármi lehet, minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az alábbi ábrán a 4–2-es, illetve 2–0-ás kő látható.)



736. Atom Antal ártatlan vegetáriánus bolha, aki a számegyenesen él. Napjai vidám ugrándozással teltek mindaddig, amíg a gonosz Ármány Ádám meg nem haragudott rá. Ármány addig mesterkedett, amíg a számegyenes minden olyan helye mérgezővé vált a bolhák számára, amelyre igaz, hogy $x + \frac{24}{x} < -25$; aztán még arról is gondoskodott, hogy a 0 is mérgező legyen, de a többi hely megmérgezésére már nem futotta az erejéből. Ármány ármánykodása idején Atom a számegyenes -10 helyén álldogált.

a) Igazolja, hogy Atom Antal életben maradt!

b) A számegyenes mely részei maradtak biztonságosak Atom Antal számára?

c) Ha Atom Antal nagyon összeszedi magát, képes 0,99 egység hosszúságút is ugrani a számegyenesen, de ennél hosszabbat semmiképpen. Eljuthat-e az összes, számára veszélytelen helyre?

737. Határozza meg a $7x^2 - 4x - 1 = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszegét a gyökök kiszámolása nélkül!

738. Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $8x^2 + 4x + k^3 = 0$ másodfokú egyenlet egyik gyöke a másik gyök kétszerese legyen!

739. Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $3x^2 - 5x + k = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökeinek aránya 3 : 4 legyen!

740. Melyik az az x egész szám, amelyre az $\frac{x^2+1}{x}$ tört értéke a legkisebb pozitív egész?

741. Bontsa fel a 100-at két olyan szám összegére, amelyek négyzetösszege a lehető legkisebb!

742. Milyen intervallumba esnek azoknak a téglalapoknak az oldalai, amelyek területe 2 területegység, és az átlójuk hossza legfeljebb $\sqrt{5}$?

743. Egy üzemben az előállított darabszám függvényében a költséget az $f(x) = 5 + 2x$ függvény írja le, millió forintban. A bevételt a megtermelt darabszám függvényében a $g(x) = -3x^2 + 600x - 19200$ kifejezés adja meg, szintén millió forintban.

a) Milyen darabszámok esetén lesz nagyobb a bevétel, mint a költség?

b) Mi az optimális darabszám, amikor a nyereség (bevétel – költség) a legnagyobb?

744. Legyen p és q két pozitív paraméter. Milyen feltételek mellett lesz az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 + qx + p = 0$ egyenletek mindegyikének valós gyöke?

745. Egy áru darabonkénti p eladási ára és az értékesített darabok x száma között az alábbi lineáris összefüggés van: $5x = 265 - p$ $(x < 53)$. Az összes előállítási költség a darabszámtól a következőképpen függ: $K(x) = 5x + 500$. Határozza meg a maximális hasznot, illetve azokat a darabszámokat, ahol éppen nullszaldós az üzlet (azaz a bevétel és a költségek éppen kiegyenlítik egymást)!

746. Bontsa fel a 8 cm-es szakaszt két részre úgy, hogy az egyes részek fölé rajzolt egyenlő oldalú háromszögek területének összege a lehető legkisebb legyen!

747. Állapítsa meg $x + y$ legkisebb és xy legnagyobb értékét, ha az $x > 0$ és $y > 0$ számokra teljesül a $3x + 5y = 150$ egyenlőség!

748. A valós a paraméter mely értéke mellett lesz az $x^2 + (2a + 1)x + 1{,}5a^2 - 2a - 4 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege minimális?

2.10. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

749. Igazolja, hogy

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=4$!

750. Oldja meg az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{x+1}+1=0$ b) $\sqrt{x+1}+1<0$ c) $\sqrt{x+1}+1>0$

751. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\sqrt{3x-1}=3x-1$ b) $\sqrt{3x-1}=1-3x$ c) $\sqrt{3x-1}<3x-1$

752. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sqrt{x+3}+\sqrt{2-3x}=0$!

753. Oldja meg a következő egyenletet a pozitív számok halmazán!

$$\sqrt{\frac{2}{3}-5x}-\sqrt{3x+\frac{1}{2}}=0$$

754. Oldja meg a következő egyenletet a negatív számok halmazán!

$$\sqrt{x-\frac{1}{3}}-\sqrt{2x-\frac{1}{2}}=0$$

755. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $3x+8=\sqrt{2x+7}$ b) $5-12x=\sqrt{3-4x}$

756. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{2x-2}+13=x$ b) $2\sqrt{2x-1}-\sqrt{7x+1}=0$

757. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{3-x}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$

758. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

759. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1$ b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}=2$

760. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-4}=4$ b) $\sqrt{x^2-4x+2}=\sqrt{-x^2+6x-6}$

761. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$ b) $\sqrt{1+\sqrt{2x+5}}=\sqrt{x+2}$

762. Oldja meg a következő egyenletet: $\sqrt{4-\sqrt{4x+1}}=\sqrt{x-1}$!

763. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{6-\sqrt{4+x}}=\sqrt{x-20}$ egyenletet!

764. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x-24}$ b) $\sqrt{9-5x}-\sqrt{3-x}=\dfrac{6}{\sqrt{x-3}}$

765. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{7-4x}+\sqrt{-2x}=\sqrt{1-14x}$ egyenletet!

766. Oldja meg a következő egyenletet: $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$!

767. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $x-\sqrt{x}-6=0$ b) $x-5\sqrt{x}+6=0$

768. Oldja meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán!

$$2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}+3\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}=5$$

769. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5$

770. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{14+3\sqrt{-x}}+5=-\sqrt{2x}$$

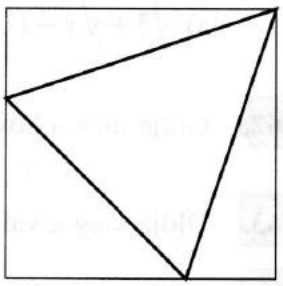
771. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=7$$

772. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x+19}$$

773. Egységnyi oldalú négyzetbe az ábra szerint olyan egyenlő szárú háromszöget írtunk, melynek kerülete 3,084. Mekkorák a háromszög oldalai?



774. Egy tesztautó $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulásra képes. Mekkora úton tudja $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val növelni a sebességét, ha kezdetben

a) áll; b) $30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val halad; c) $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val halad?

(A mozgást a $v=\sqrt{2as+v_0^2}$ egyenlet írja le, ahol v az elért sebesség, a a gyorsulás, s a megtett út, v_0 pedig a kezdősebesség; $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

775. A mai személyautók maximális fékezéskor $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lassulásra képesek. Mekkora úton tud a városban engedélyezett $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre lelassulni az autós, ha

a) $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; b) $70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; c) $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

sebességgel halad, amikor észreveszi a várostáblát? (A mozgást a $v=\sqrt{v_0^2-2as}$ egyenlet írja le, ahol v az elért sebesség, v_0 a kezdősebesség, a a lassulás, s pedig a megtett út; $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

776. Egy követ $30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé kilövünk. Milyen magasságban lesz a sebessége $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$? (A mozgást a $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ egyenlet írja le, ahol v az elért sebesség, v_0 a kezdősebesség, g a nehézségi gyorsulás $\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$, h pedig a magasság.)

777. Az autógyártók katalógusaikban megadják, hogy egyes modelljeik mennyi idő alatt gyorsulnak álló helyzetből $100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre. Mekkora úton éri el ezt a sebességet az az autó, amelyre ez az adat

a) 8 mp; b) 10 mp; c) 12 mp? d) Melyiknek mekkora a gyorsulása?

(Az álló helyzetből induló, egyenletesen gyorsuló test mozgását a $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ és a $v = at$ egyenletek írják le, ahol t az indulástól eltelt idő, s az indulástól megtett út, a a gyorsulás, v pedig az elért sebesség; $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

778. A fonálinga lengésidejét a $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ egyenlet adja meg, ahol ℓ a fonál hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás.

a) Milyen fonálhosszúságú inga lengésideje 2 mp a Föld felszínén $\left(g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$?

b) Mekkora lenne ugyanennek az ingának a lengésideje a Holdon $\left(g = 1{,}65\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$?

c) Milyen fonálhosszúságú inga lengésideje lenne a Holdon 2 mp?

779. A fonálinga lengésidejét a $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ egyenlet adja meg, ahol ℓ a fonál hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás.

a) Milyen fonálhosszúságú inga lengésideje 3 mp a Föld felszínén $\left(g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$?

b) Mekkora a nehézségi gyorsulás azon az égitesten, ahol ugyanennek az ingának a lengésideje 4 mp?

c) Milyen fonálhosszúságú inga lengésideje lenne ezen az égitesten 3 mp?

780. Tudjuk, hogy közelítőleg a következő formula írja le egy bambuszfa magasságát x év elteltével, ha $x > 1$: $m(x) = 2\sqrt{0,2x+1} + 0,5$ (méter).

a) Ha ez a formula jó, akkor egy 100 éves bambuszfa milyen magas lenne?

b) Ha tudjuk, hogy 30 méternél magasabb bambuszfa nincs a világon, akkor a képlet szerint legfeljebb hány évig élhet egy bambuszfa?

c) Melyik az az év, amikor a 15 éves magasságának a háromszorosát eléri?

781. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{5x-2} \leq \sqrt{3x+4}$

782. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{5+\sqrt{x+3}} < 3$ b) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}} \leq 1$

783. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{4-\sqrt{4x+1}} < 1$ b) $\sqrt{4-\sqrt{4x+1}} < 3$

784. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4} = 6$$

785. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}} = 1$$

786. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2-6x+8} \geq 2x-6$$

787. Egy derékszögű háromszög átfogójának a hossza 1 cm-rel nagyobb, mint az egyik befogójának a hossza. Mekkora lehet ez a befogó, ha a másik befogó hossza nem lehet 1 cm-nél kisebb és 4 cm-nél nagyobb?

788. Melyik az a legkisebb pozitív n egész szám, melyre $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} < 0,01$?

2.11. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

789. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x^2} = 0$ b) $\sqrt{x^2} = 4,2$ c) $\sqrt{x^2} = -4,2$

790. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{(x+3,2)^2} = 4,8$ b) $\sqrt{(x-2,8)^2} = |-3,2|$ c) $\sqrt{(2x+5,4)^2} = 11,6$

791. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x^6} = 8$ b) $\sqrt[4]{x^6} = 3$ c) $\sqrt{x^6} = \sqrt[4]{x^4}$

792. Melyik természetes számra igaz, hogy $\left|\frac{x}{2} - 3\right| = 2$?

793. Oldja meg: $\frac{x}{|x|} = 1 + x$!

794. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{1}{|x|} + |x| = 2$ b) $\frac{1}{|-x|} + |-x| = 2$ c) $\frac{1}{|x|} + |x| = -2$

795. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $3x - |x+5| = 7$!

796. Oldja meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán!

$|2x^2 + 5x - 3| = 3$

797. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $x^2 + 3|x| - 1 = 0$!

798. Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!

$|x^2 - x - 2| = x - x^2 + 2$

799. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x$ b) $0,2x + 3 = \sqrt{\frac{16x^2}{25}}$ c) $7 - 2x = \sqrt{25x^2 + 20x + 4}$

800. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $|2x-4|+|x+3|+1=0$ b) $5|3-|x+2||=20$

801. Mekkora legyen a értéke, hogy az $|x-a| = |x-4|$ egyenletnek

a) 0; b) 1; c) 2; d) végtelen sok

megoldása legyen? (Grafikusan is dolgozhat!)

802. Mekkora legyen b értéke, hogy az $|x-b| = |2x-4|$ egyenletnek

a) 0; b) 1; c) 2; d) végtelen sok

megoldása legyen? (Grafikusan is dolgozhat!)

803. Mekkora legyen c értéke, hogy az $|x|+|x-4| = c$ egyenletnek

a) 0; b) 1; c) 2; d) végtelen sok

megoldása legyen? (Grafikusan is dolgozhat!)

804. Egy szám négyzete $\frac{8}{49}$-del nagyobb a szám abszolútértékénél. Melyik ez a szám?

805. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket! Eredményeit ábrázolja számegyenesen!

a) $|x-0,4| \le 0,6$ b) $|x+0,3| \le 0,7$ c) $|2x-5| \le 7$

806. Hány egész szám elégíti ki a következő egyenletet: $|2002-x| \le 10$?

807. Vannak-e olyan számok, amelyekre teljesül az $|x| > 2x+10$ egyenlőtlenség? Ha vannak ilyenek, akkor adja meg ezek közül a legnagyobbat! (Grafikusan is dolgozhat!)

808. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $-|x+2| < 2x-3$!

809. „A termék előírt tömege 1500 gramm. A töltőtömeg megfelelő, ha m mérőszámára teljesül, hogy $|m-1500| \le 8,5$." Ábrázolja számegyenesen az idézett előírásnak megfelelő tömegértékeket!

810. „A termék előírt tömege 1200 gramm. A töltőtömeg előírttól való eltérése legfeljebb 7,5 gramm lehet." Az idézett előírás alapján dönt a minőségellenőr arról, elfogadható-e a vizsgált termék. Jelöljük a vizsgált termék tömegének mérőszámát m-mel.

Az alábbiak közül melyik összefüggés fejezi ki azt, hogy az m az előírásnak biztosan megfelel?

a) $m-1200 \le 7{,}5$ b) $1200-m \ge 7{,}5$ c) $|m-1200| \le 7{,}5$ d) $|m-1200| \ge 7{,}5$

811. „A termék előírt tömege 1800 gramm. A töltőtömeg megfelelő, ha m mérőszámára teljesül, hogy $|m-1800| \le 9{,}5$." Az idézett előírás alapján dönt a minőségellenőr arról, elfogadható-e a vizsgált termék. Az alábbiak közül mely összefüggések fejezik ki azt, hogy az m töltőtömeg az előírásnak biztosan megfelel?

a) $-9{,}5 \le m-1800 \le 9{,}5$ b) $1790{,}5 \le m \le 1809{,}5$ c) $-9{,}5 \le 1800-m \le 9{,}5$

812. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$|x^2+3x-4|+3x+9=0$

813. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$3x^2-6x+|x+2|=0$

814. Oldja meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán!

$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=5$

815. Határozza meg a számegyenes összes olyan pontját, amelynek az 1-től és a -1-től mért távolságainak összege 4!

816. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

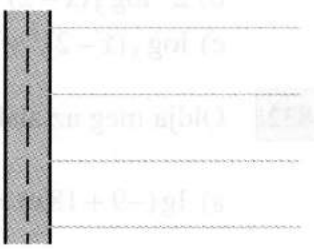
a) $4\,||x+1|-2|=6$ b) $|2x-4|-|x+3|=1$

817. Oldja meg a következő egyenletet: $|x-p|=|x-4|$ (ahol p paraméter)!

818. Oldja meg a következő egyenletet: $|x|+|x-4|=p$ (ahol p paraméter)!

819. Adjon meg olyan $\delta > 0$ számot, hogy minden $1-\delta$ és $1+\delta$ közé eső x értékre $|2x-2| < 0{,}01$ teljesüljön!

820. Egy főútra 200 méterenként négy bekötőút csatlakozik, amelyeken a szántóföldi termést hordják egyforma teherautókkal. Hová építsék a főút bekötőutak közti 600 méteres szakaszára a tárolót, ha a legkevesebbet akarják a főúton szállítani a termést, és ha az első bekötőúton 30 t, a másodikon 20 t, a harmadikon 15 t, a negyediken pedig 50 t érkezik?



2.12. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek

821. Oldja meg az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $2^{-x} = 16$ b) $2^{-x} = -16$ c) $2^{-x} > 16$

822. Oldja meg a következő egyenletet: $2^{x+1} + 8 = 2^{x+2}$!

823. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x-2} = 280$ b) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$ c) $4^{x+1} + 2 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 2^x = 0$

824. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $9^{0,5x^2-3x+4} = \frac{1}{3}$ b) $3^{x^2-4x+2} = \frac{1}{9}$ c) $4^x - 10 \cdot 2^x = -16$

825. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

826. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$!

827. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $5^{x+2} + 2 \cdot 5^{x-1} = 127$!

828. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $9^{\sqrt{x+1}} = 3^6 \cdot 3^{\sqrt{x+1}}$!

829. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $5^{(2x-1)(x+3)} = 1$!

830. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $11^{x-2} = 4^{2x-4}$!

831. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot \log_3(x-2) + 2 \cdot \log_3(x-4) = 0$

b) $2 \cdot \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$

c) $\log_3(x-2)^2 + \log_3(x-4)^2 = 0$

832. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\lg(-9+18x) = 2(\lg 3 + \lg x)$ b) $2(\lg 6 - \lg x) = \lg 9 + \lg\left(\frac{4}{x} - 1\right)$

833. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\lg x = \lg\left(x+\sqrt{6}\right) + \lg\left(x-\sqrt{6}\right)$ b) $\lg x = \lg\left(x+\sqrt{6}\right) - \lg\left(x-\sqrt{6}\right)$

834. Oldja meg a valós számok halmazán: $\frac{\lg(2x^2-5x-3)}{\lg(3-x)} = 2$!

835. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$\log_{\frac{5}{2}}\left(2(1+\log_{16} x)\right) = 1$

836. Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!

$\log_3(\log_4(\log_5 x)) = 0$

837. Oldja meg a következő egyenletet a pozitív számok halmazán!

$\lg\left(10x^2\right) - \lg\sqrt[3]{x} = 11$

838. Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek ($x, y \in \mathbf{N}$)?

a) $8^x = 7^y$ b) $3^x - 9^y = 0$ c) $5^x + 4^x = 2^y$

839. Határozza meg $\log_2 10$ és $\log_5 10$ közelítő értékét számológéppel, 3 tizedesjegypontossággal!

840. Hányadrésze van meg egy kőzetben az időszámításunk kezdetén még meglévő radioaktív tóriumizotópnak? (A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje, amely ezen tóriumizotóp esetén 80 ezer év.)

841. Egy óra alatt hányadrészére csökken a 19,7 perc felezési idejű radioaktív bizmutizotóp tömege? (A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje.)

842. Mennyi a felezési ideje annak a radioaktív izotópnak, amelynek kezdetben $4 \cdot 10^{-15}$ Bq aktivitású darabja két hét múlva már csak $2{,}97 \cdot 10^{-15}$ Bq aktivitású? (A radioaktív anyagok bomlását a $C = C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol C a pillanatnyi aktivitás, C_0 a kezdeti aktivitás, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje; *Bq*, azaz *becquerel* az aktivitás mértékegysége.)

843. Mennyi idő múlva lesz a kezdetben $2 \cdot 10^{-14}$ Bq aktivitású, 5 napos felezési idejű radioaktív anyagdarab aktivitása $7{,}58 \cdot 10^{-15}$ Bq? (A radioaktív anyagok bomlását a $C = C_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol C a pillanatnyi aktivitás, C_0 a kezdeti aktivitás, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje; *Bq*, azaz *becquerel* az aktivitás mértékegysége.)

844. A 226-os tömegszámú rádium (Ra) radioaktív, felezési ideje 1600 év. Az eredetileg N_0 számú atomot tartalmazó rádium t év elteltével N számú bomlatlan rádiumatomot tartalmaz, ahol N kiszámítható a $N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$ összefüggés segítségével is. Mennyi idő alatt bomlik el a rádiumatomok 1%-a az eredetileg $2{,}6 \cdot 10^{21}$ atomot tartalmazó (kb. 1 gramm) rádiumban?

845. A bizmut-214 radioaktív izotóp 10%-a 3 perc alatt elbomlik. Tudjuk, hogy a radioaktív bomlás exponenciális folyamat, az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje.

a) Mekkora a ^{214}Bi felezési ideje?

b) Mennyi idő múlva marad meg az eredeti mennyiség 0,01%-a?

846. A gázok adiabatikus (hőcsere nélküli) állapotváltozását a $\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \text{állandó}$ egyenlet írja le, ahol p a gáz nyomása, T a hőmérséklete, κ pedig egy, a gázfajtára jellemző arányszám. Mekkora ez az arányszám héliumra, ha annak egy adiabatikus folyamatban 69%-kal nő a nyomása, miközben 23%-kal nő a hőmérséklete?

847. Mekkora magasságba kell emelkedni a Földtől, hogy a légnyomás a tengerszinten mért légnyomás kétharmadára csökkenjen? A kilométerben megadott h magasságban uralkodó p nyomást a $p = p_0 \cdot e^{-0{,}1275h}$ formulával kapjuk ($e \approx 2{,}718$, ez a természetes alapú logaritmus alapszáma).

848. Hangfelvételi ismereteket közöl egy internetes weboldal. Egy szó szerint idézett részlet: „... A hangrögzítésben a hangdinamika a legerősebb hangjel (mely még tor-

zítás nélkül rögzíthető) és a készülékben keletkező alapzaj aránya. Ennek az aránynak a logaritmusával számolunk, mely a decibel: $20 \cdot \lg(\text{jel}/\text{zaj})$. ..." Eltekintve a meglehetősen zavaros szöveges „definíció"-tól, a megadott képlet alapján meghatározható a jel/zaj arány, ha a „hangdinamika" 40 decibel. Mekkora ez az arány?

849. Kisebb mennyiségű cukor oldódása nagy mennyiségű vízben közelítőleg az $M(t) = M_0 \cdot a^t$ formula szerint, tehát időben exponenciálisan zajlik ($0 < a < 1$; a cukor vízbe kerülésétől percben mért időt jelöli a t; $M(t)$ a t időpontig még fel nem oldódott cukor mennyisége; M_0 pedig a teljes cukor mennyisége, amit a vízbe tettünk). Legyen $a = 0{,}95$.

a) Mennyi idő múlva oldódik fel a cukormennyiség fele?

b) Ha a 99,9%-os oldódást már „lényegében teljesnek" nevezzük, akkor mikorra oldódik fel lényegében teljesen a cukor?

850. A világméretű szociológiai kutatások eredményeként a fejlett ipari országok egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP) és a lakosság várható élettartama között hozzávetőleg az alábbi tapasztalati összefüggés állítható fel: $\acute{E} = 75{,}5 - 5 \cdot 1{,}081^{\frac{6000-G}{206}}$, ahol $\acute{E}$ az átlagos várható élettartam években, G pedig a GDP, reálértékben átszámítva 1980-as dollárra. Mennyi várható élettartam-növekedést okoz kétszeres GDP-növekedés, ha ez a növekedés

a) 1500 $-ról 3000 $-ra; b) 3000 $-ról 6000 $-ra; c) 6000 $-ról 12 000 $-ra

történik?

851. A világméretű szociológiai kutatások eredményeként a fejlett ipari országok egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP) és a lakosság várható élettartama között hozzávetőleg az alábbi tapasztalati összefüggés állítható fel: $\acute{E} = 75{,}5 - 5 \cdot 1{,}081^{\frac{6000-G}{206}}$, ahol $\acute{E}$ az átlagos várható élettartam években, G pedig a GDP, reálértékben átszámítva 1980-as dollárra. Mennyi GDP-növekedés szükséges a várható élettartam 10 évvel való meghosszabbodásához, ha ez

a) 40 évről 50 évre; b) 50 évről 60 évre; c) 60 évről 70 évre

történik?

852. Ha D összeget heti p%-os kamatozással befektetünk, akkor n hét elteltével $D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ összeget vehetünk fel. Mennyi idő múlva lesz befektetésünk értéke $2D$, ha $p = 0{,}5$?

853. Takarékba betett pénzünk két év alatt 50 000-Ft-ról 57 245 Ft-ra növekedett. Hány %-os éves kamatot adott a bank? Hány év múlva duplázódik meg a pénzünk, feltéve, hogy nem veszünk ki belőle és a kamatláb sem változik?

854. Gyuri szeretné megvenni azt az igazán jó biciklit, amit 65 000 Ft-ért látott. Van már 40 000 Ft-ja.

a) Ha ezt az összeget befektetné évi 14%-os kamatra, akkor mennyi idő múlva vehetné meg a gépet? (Ha annak közben nem változna meg az ára.)

b) Ha a hiányzó 25 000 Ft-ot személyi kölcsönként veszi fel, akkor évi 24%-os kamatra kapja és havi részletekben kell visszafizetnie két év alatt. Mennyit fizet havonta? (Tegyük fel, hogy havi elszámolású kamatos kamattal számol a bank.)

855. Két telefonszolgáltató cég közül az első most egy év alatt annyi nyereségre tesz szert, mint a második 10 hónap alatt. Az első szolgáltató nyeresége évente 10%-kal, míg a másodiké 5%-kal nő. Hány év alatt éri utol az első cég a második cég éves nyereségét a fent említett tendencia mellett?

856. Egy szakszervezet azt követeli, hogy a bérek évi 6%-kal növekedjenek.

a) Ha ezt elérik, akkor mennyire nő meg 5 év alatt a mai 96 000 Ft-os bruttó fizetés?

b) Mikorra lenne a dolgozók fizetése legalább kétszerese a mainak?

857. Gazdaságkutatók szerint Közép- és Kelet-Európa „átmeneti" országainak átlagos egy főre jutó GDP-je $n = \dfrac{\lg F - \lg f}{\lg r - \lg R}$ év alatt éri utol a fejlett országokét, ahol F és f a fejlett, illetve átmeneti országok jelenlegi egy főre jutó GDP-jét jelöli. 1992-ben a fejlett országokban ez a mutató (átlagosan) 17 444 $, az átmeneti országokban pedig 4 627 $ volt. R és r azt mutatja meg, hányszorosára növekszik egy év alatt a fejlett, illetve fejlődő országok egy főre jutó GDP-je. A fejlett országokban az egy főre jutó GDP éves növekedési üteme 2% (vagyis $R = 1{,}02$). Hány százalékos éves növekedést kellett volna elérni az átmeneti országokban, hogy az utolérés 20 év alatt bekövetkezzen?

858. A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté. Mennyi időre lenne szükség ahhoz, hogy egyetlen papucsállatka utódainak térfogata egyenlő legyen a Föld térfogatával, ha az osztódást követően valamennyi papucsállatka életben maradna? Tudjuk, hogy egy papucsállatka egy kb. 0,1 milliméter élhosszúságú kockában fér el, s hogy a Föld sugara 6378 km.

859. Ha egy országban adott időszak (pl. egy év) alatt a születések száma mindig kisebb az elhalálozások számánál, akkor egyéb intézkedések hiányában a népesség fogyásnak indul. Hány év alatt csökkenne Magyarország jelenleg 10 millió fős lakossága 8 millióra, ha a népesség fogyása hosszú időn keresztül átlagosan évi 4 ezrelék lenne?

860. A Föld népessége évente 1,48%-kal növekszik, 2001-ben 6,2 milliárd ember élt a Földön. Melyik évben érné el az össznépesség száma a 8 milliárdot változatlan szaporodási ütem mellett?

861.

év	1837	1927	1960	1987	1999
milliárd fő	1	2	3	5	6

A fenti táblázat a Föld népességének alakulását mutatja. Az adatok a népesség gyorsuló ütemű növekedését mutatják. Ha exponenciális növekedést feltételezünk, akkor az adatsorra illeszkedő trendet az $n = 897{,}9 \cdot 1{,}011^x$ képlettel írhatjuk le (n a Föld előjelzett népessége millió főben számolva, $1837 + x$-ben).

a) Hány lakosa lenne a Földnek 2020-ban a megadott képlet szerint?

b) Melyik évben kellett volna a Föld össznépességének elérnie a 6 milliárdot a megadott képlet szerint?

862. 1650-ben a Föld népessége kb. 500 millió volt, és évente átlagosan 0,3%-kal nőtt.

a) Ennek alapján hány ember élt a Földön 1750-ben, illetve mennyire becsülné változatlan növekedési ütem mellett a 2000. évi létszámot?

b) Mit gondol, ez a változatlan növekedési ütem miért nem ad jó eredményt? Kevesebb vagy több a Föld népessége 2000-ben, mint amit ebből kiszámolt?

c) 1970-ben a világnépesség kb. 3,6 milliárd ember volt, és a növekedési ütem 2,1%. Ennek alapján mennyire becsüli a 2000 évi népességet?

d) Melyik a jobb becslés?

863. Egy reklámcélra használt léghajóba 3000 m^3 gázt töltenek. A gázveszteség 10 nap alatt csak (körülbelül) 2%, s ez állandónak vehető, tehát nem függ a pillanatnyi gázmennyiségtől.

a) Hány százalék a gázveszteség 1 hónap (30 nap) alatt?

b) Mikorra fogy el a gáz fele?

c) Mennyi ideig tud a levegőben tartózkodni a léghajó, ha 80% alatti gázmennyiség esetén már süllyedni kezd?

864. A matematikai információelméletben az n betűs ábécéből alkotott, m számú karakterből álló hír információmennyiségét a $H := m \cdot \log_2 n$ képlettel definiálták (Hartley-képlet). A legegyszerűbb ábécé kétjelű ($n := 2$, mert egy jellel nem lehet hírt közölni). Ha ebből egy jelet kiválasztunk ($m := 1$), akkor megkapjuk a lehető legkisebb információs értékkel rendelkező hírt. Ez az információs érték: $\log_2 2$, azaz éppen 1 lesz. Ezt az információmennyiséget John W. Tukey nevezte el 1 bit-nek (a „binary digit" rövidítése).

a) Mekkora a 90 számos lottó első, illetve második kihúzott számának információs értéke?

b) Hány betűs ábécé esetén lenne egy 5 karakterből álló hír információs értéke 15 bit?

c) Mekkora egy hétjegyű telefonszám információs értéke?

865. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget: $3^x - 9 > 0$!

866. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $2^{(x-1)(x-2)} < 1$!

867. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_2 (x-2) < \log_2 4$ b) $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) > 1$

868. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $6 \cdot 4^x + 4 \cdot 25^x = 10^{x+1}$!

869. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$

870. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $x^{3-\lg\frac{x}{3}} = 900$!

871. Oldja meg a $3^{x^2(x^2-1)} = 3^6 \cdot 7^{x^4-x^2-6}$ egyenletet a valós számok halmazán!

872. Feltéve, hogy ismerjük $\log_5 10$ pontos értékét, fejezze ki ennek segítségével $\log_2 10$ pontos értékét!

873. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$(\log_5 x)^2 + \log_5 x = 2$

874. Mennyi $\frac{x}{y}$, ha $2 \cdot \lg(x-2y) = \lg x + \lg y$?

875. Ismert a barometrikus magasságformula: $p_x = p_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot x}$, ahol x jelöli a tengerszint feletti magasságot, p_x jelöli a légnyomást ebben a magasságban, p_0 jelöli a légnyomást a tengerszinten ($x = 0$ magasságban), ϱ_0 a levegő sűrűségét a tengerszinten, g pedig a gravitációs gyorsulás nagyságát.

($e \approx 2{,}718$; $p_0 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\varrho_0 = 1{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$)

a) Mekkora a légnyomás 10 km magasságban? Ez hány százaléka a normális légnyomásnak?

b) Egy léghajóban a barométer a tengerszinten mért érték 90%-át jelzi. Milyen magasan lebeg?

876. A csillagászok az égitestek fényességét ún. magnitúdóban mérik. A régi görögök a legfényesebb csillagokat nevezték elsőrendűeknek, a szabad szemmel még éppen láthatóakat hatodrendűeknek, vagyis a nagyobb szám jelzi a halványabb csillagot. A skála logaritmikus, vagyis minden egész magnitúdó-változás (különbség) ugyanannyiszoros eltérést (hányadost) jelent. 5 magnitúdó-változás 100-szoros fényerősség változást jelent.

a) Hányszoros fényerőváltozást jelent 1 magnitúdó-változás?

b) A Nap –26,8 magnitúdós, a Hold –12,2. Hányszor olyan fényes a Nap, mint a Hold?

877. Egy lakásépítkezéshez 0,5%-os havi kamatra felveszünk 10 000 000 Ft-ot, amit 10 év alatt havi részletekben fizetünk vissza.

a) Mennyi a havi törlesztő részlet, ha minden hónap végén tőkésítik a kamatot?

b) Ha kamatot csak év végén számolnak, tehát az év közi befizetéseim csak egy összegben a következő évben kamatoznak, akkor mennyi lenne a havi részlet? Korrekt eljárás lenne ez a bank részéről?

c) Ha 5 év (félidő) után már van pénzem, és meg akarok szabadulni az adósságtól, akkor mennyit kell kifizetnem egy összegben, hogy törlesszem a teljes tartozást?

878. Valaki 1 000 000 Ft-ot vesz fel 5 évre, évi 20%-os kamatra.

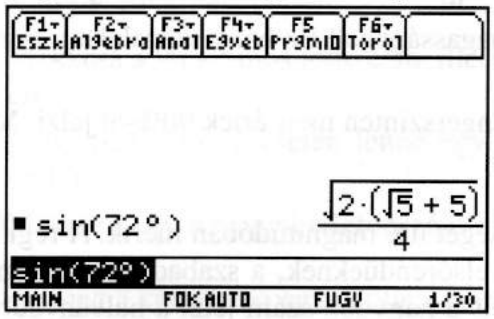
a) Mennyi lesz a havi törlesztőrészlete, ha a bank hó végi kamatoskamat-számítással dolgozik?

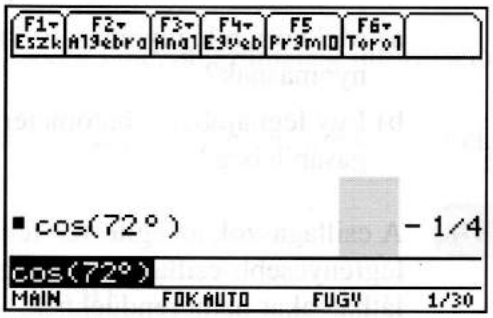
b) Vázolja a pillanatnyi tartozást a hónapok függvényében!

c) Mikor lesz a tartozás kb. fele a felvett kölcsönnek?

2.13. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

879. Grafikus zsebszámológép kijelzőjén az alábbi képeket látja (a bal alsó fekete részben a felhasználó által begépelt adatok, a fölötte lévő világos terület jobb oldalán pedig a számítások végeredményei láthatók):





A számológép a pontos értéket írta ki a $\sin(72°)$-ra és a $\cos(72°)$-ra is. Az nyilvánvaló, hogy $\cos(72°) \neq -\frac{1}{4}$. De akkor mi állhat a jobb oldali kijelző sárga téglalappal letakart részén?

880. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin x + 1 = 0$ b) $\sin x(\sin x + 1) = 0$ c) $\sin^2 x - 1 = 0$

881. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2\cos x - 1 = 0$ b) $\cos x(2\cos x - 1) = 0$ c) $2\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

882. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$!

883. Adja meg az alábbi egyenlet [0; 20] intervallumba eső megoldásait!

$$\cos\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2\pi} + 1\right)$$

884. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$!

885. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$!

886. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$!

887. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3$ b) $\operatorname{ctg} x = 4 - \operatorname{tg} x$

888. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ b) $\sin^2 x - \cos^2 x + 3\sin x = 1$

889. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ b) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 3$ c) $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2$

890. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$ b) $5 + 9\cos x - 2\cos^2 x = 0$ c) $4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0$

891. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$, $x \in \mathbf{R}$

b) $3\cos^2 x - 4\cos x - 4 = 0$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$

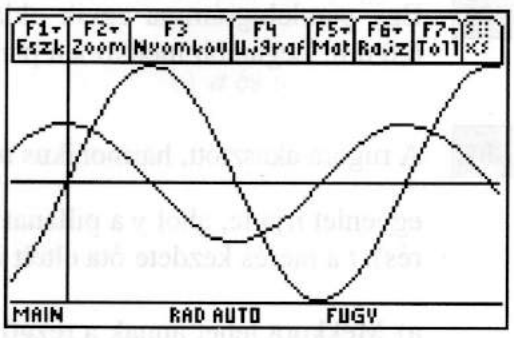
c) $\sin^2 x + \cos x = 1$, $x \in [0;\ 2\pi[$

892. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\sin x + \cos x = 0$!

893. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5\cos x = \operatorname{tg} x$ b) $\cos x = 2\sin x$

894. Grafikus zsebszámológép kijelzőjén az $x \mapsto 2\sin x$ és az $x \mapsto \cos x$ függvények grafikonjai láthatók. A koordinátatengelyek látszanak a kijelzőn, de a koordinátatengelyek beosztása nem. Határozza meg a két grafikon három, a kijelzőn látható metszéspontjának koordinátáit!



895. Egy háromszög β szögére a következő összefüggést kaptuk: $\sin(\beta - 15°) = 0{,}3588$. Mekkora lehet a β?

896. Egy háromszög β szögére a következő összefüggést kaptuk: $\cos(\beta + 15°) = -0{,}9848$. Mekkora lehet a β?

897. Egy háromszög α szögére a következő összefüggést kaptuk: $\sin(12° - \alpha) = -0{,}91$. Mekkora lehet az α?

898. Egy háromszög α szögére a következő összefüggést kaptuk: $\cos(72° - \alpha) = 0{,}6018$. Mekkora lehet az α?

899. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire fennáll, hogy $\sin\alpha + \cos\beta = 1{,}3289$. Határozza meg a hegyesszögek nagyságát!

900. Derékszögű háromszögben az α hegyesszögre igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2{,}6108$. Határozza meg az α szöget!

901. Számítsa ki az α tompaszög koszinuszát és tangensét az α szög kiszámítása nélkül, ha $\sin\alpha = 0{,}4$!

902. Számítsa ki az α hegyesszög szinuszát és tangensét az α szög kiszámítása nélkül, ha $\cos\alpha = 0{,}35$!

903. Számítsa ki az α tompaszög szinuszát és koszinuszát az α szög kiszámítása nélkül, ha $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}2$!

904. Egy háromszög területe 420 cm^2, két oldala 30 cm és 42 cm. Mekkora a két oldal által bezárt szög?

905. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 8,4 dm, a hozzá tartozó magasság 6,0 dm, másik oldala 7,2 dm. Mekkorák a szögei?

906. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 8,4 dm, a hozzá tartozó magasság 6,0 dm. Legalább mekkora a paralelogramma másik oldala?

907. A rugóra akasztott, harmonikus rezgést végző test mozgását az $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ egyenlet írja le, ahol y a pillanatnyi kitérés, A az amplitúdó (azaz a maximális kitérés), t a mérés kezdete óta eltelt idő, T a rezgés periódusideje, φ pedig a kezdőfázis.

a) Mekkora lehet annak a rezgő testnek a kezdőfázisa, amely a $t = \frac{T}{8}$ pillanatban éppen az egyik szélső (azaz maximális kitérésű) helyzetben van?

b) Mekkora ennek a rezgő testnek az amplitúdója, ha $t = 0$ pillanatban a kitérése 1,41 cm?

908. Hálózati váltófeszültség időbeli lefolyását az $u(t) = 230\sin(100\pi t)$ függvény írja le (ha a feszültséget voltban, az időt másodpercben adjuk meg).

a) Mekkora pillanatnyi feszültség tartozik a $t := 0$ s; $t := 0{,}01$ s; $t := 0{,}015$ s időpontokhoz?

b) Határozza meg a feszültség maximális és minimális értékét, valamint azokat az időpontokat, amikor a maximális, illetve minimális értékek fellépnek!

c) Határozza meg azokat az időpontokat, amikor a pillanatnyi feszültség +115 volt értékű!

909. Rugalmas közegben terjedő hullám mozgását az $y = A \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ egyenlet írja le, ahol y a pillanatnyi kitérés, A az amplitúdó (azaz maximális kitérés), t a mérés kezdete óta eltelt idő, T a hullám periódusideje, x a hullámforrástól mért távolság, λ pedig a hullámhossz (ennyi utat fut be a hullám egy periódusnyi idő alatt). Gumikötél végéről 4 cm amplitúdójú, 0,2 s periódusidejű hullámzást indítunk, ami $21\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed.

a) Az indulás után 3 másodperccel, a kötél ezen végétől 3,5 m-re mekkora a kitérés?

b) Ebben a pontban a hullám elindítása után először mikor, és azután mennyi időnként lesz maximális a kitérés?

910. A rugóra akasztott, harmonikus rezgést végző test mozgását az $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $v = \frac{2\pi A}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $a = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ egyenletek írják le, ahol y a pillanatnyi kitérés, A az amplitúdó (azaz maximális kitérés), t az eltelt idő, T egy teljes rezgés ideje (azaz a periódusidő), v a pillanatnyi sebesség, a a pillanatnyi gyorsulás. Írjon fel közvetlen összefüggéseket

a) a és y; b) v és y; c) a és v

között!

2.14. Egyenletrendszerek

911. Egy szám 50-nel nagyobb egy másiknál. A két szám összegét 3-mal megszorozva pedig 210-et kapunk. Melyik ez a két szám?

912. Két testvér együtt 32 éves, a korkülönbség köztük 2 év. Melyik mennyi idős?

913. Egy gép lefestéséhez 7 doboz festék kell. Ha 3 doboz sárga és 4 doboz kék festéket veszünk, az 7840 Ft-ba kerül, ha 4 doboz sárgát és 3 kéket veszünk, az 8050 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül egy-egy doboz festék?

914. Egy róka üldözőbe vesz egy nyulat. Kezdetben a róka háromszor olyan gyorsan fut, mint a nyúl. Amikor a nyúl észreveszi, hogy a róka elért odáig, ahol ő volt kezdetben, megkétszerezi sebességét. Milyen távolról vette üldözőbe a róka a nyulat, ha

a) a saját; b) a nyúl

kiindulási helyétől számítva 120 m utat tett meg, míg utolérte?

915. Karesz egy csónakban evez. A Szentendrei-sziget mellett a folyásiránnyal szemben 6 óra alatt tesz meg 24 km-t, lefelé 2 óra alatt. Mekkora sebességgel haladna állóvízben, és milyen gyorsan folyik a Duna?

916. Egy hajó a Tiszaalsó és Bodrogfelső közti 64 km távot a folyón felfelé 3 óra 12 perc alatt teszi meg. Másnapra a hóolvadás miatt a folyó megárad, és kétszer akkora sebességgel folyik, így a hajó 2 óra alatt ér vissza. Mekkora a hajó sebessége állóvízben, és mekkora a folyó (eredeti) sebessége?

917. Egy repülőgép a Keletpuszta és Nyugatdombos közti 990 km-es távot erős hátszélben 1 óra 6 perc alatt teszi meg. Visszafelé úton a szél már csak fele akkora, így a gép (szembeszélben) 1 óra 22 perc 30 másodperc alatt ér vissza. Mekkora a repülő szélcsendbeni, illetve a szél (eredeti) sebessége?

918. Két természetes szám összege 256. Ha a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, akkor hányadosul 8-at, maradékul pedig 13-at kapunk. Melyek ezek a számok?

919. Hány kilogramm 25%-os és 65%-os sóoldatot kell összekeverni, hogy 110 kilogramm 37%-os oldatot kapjunk?

920. Egy előadóteremben egy csoport tanuló szeretne helyet foglalni. Ha minden asztalhoz csak 8 tanuló ülhetne, akkor kilencüknek nem jutna hely. Ha minden asztalnál 10 ülőhely volna, akkor pedig 15 hely üresen maradna. Hány asztal van az előadóban és hány személyből áll a csoport?

921. Azt mondja egy apa a fiának: 3 évvel ezelőtt én 9-szer olyan idős voltam, mint te, viszont 6 év múlva 12-szer annyi éves leszek, mint te voltál 3 évvel ezelőtt. Hány éves most az apa és a fia?

922. Két kosárban alma van. Ha az egyik kosárból 5-öt átteszünk a másikba, akkor ott kétszer annyi alma lesz, mint az elsőben. Ha viszont a másodikból teszünk át 5 almát az elsőbe, akkor mindkét kosárban azonos számú alma lesz. Hány alma van eredetileg a kosarakban?

923. Ketten lovagolnak egy 2500 m hosszú körpályán. Ha szemben haladnak, 5 percenként; ha egy irányban haladnak, 25 percenként találkoznak. Határozza meg a lovasok sebességét!

924. Ketten korcsolyáznak egy 1800 m hosszú körpályán. Ugyanarról a helyről indulnak. Ha szemben haladnak, 5 percenként találkoznak, ha egy irányban, akkor 15 percenként éri utol a gyorsabb a másikat. Mekkora a sebességük?

925. Határozza meg annak a téglalap alakú kertnek a területét, amelynek átlója 20 m, a kerülete pedig 56 m!

926. Két szám reciprokának az összege $\frac{5}{24}$. A két szám összegének és különbségének a hányadosa pedig 5. Határozza meg a számokat!

927. Írjon a $2x-3y+10=0$ egyenlethez olyan egyenletet, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszernek

a) egyetlen megoldása legyen;

b) ne legyen megoldása;

c) végtelen sok megoldása legyen!

928. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

a) $5x-6y=4 \ \wedge \ 6x+5y=\frac{11}{15}$ b) $x+\frac{3}{4}y=9 \ \wedge \ \frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=\frac{1}{3}$

929. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\frac{x+2}{3}-\frac{y-3}{4}=3 \wedge \frac{3}{x+2}-\frac{1}{y-3}=0$$

930. Egy építtető gazda egy bizonyos munka elvégzésére felfogadott egy kőművest a következő feltételekkel: mindennap, amikor dolgozik, 5 ezüstöt fizet a kőművesnek, de ha nem dolgozik, akkor arra a napra a kőműves tartozik fizetni 7 ezüstöt. Hány napot dolgozott és hány napot pihent a kőműves, ha 48 nap alatt készült el a munkával, de egy garast sem keresett, igaz nem is vesztett rajta?

931. Két borkereskedő érkezik a határhoz. Az egyiknek 64, a másiknak 20 hordó bora van (mind a 84 hordó egyforma értékű bort tartalmaz). A határon átvitt bor után vámot kell fizetni, de nincs elegendő készpénzük a kifizetéséhez. Ezért az első kereskedő odaad 5 hordó bort és még 40 ezüstöt, a másik odaad 2 hordó bort és visszakap 40 ezüstöt. Így már bevihetik árujukat az országba. Mennyit ér egy hordó bor és mennyi vámot kell utána fizetni?

932. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2-2xy-y&=(x+y)(x-y)+1\\ \frac{4}{3}x-\frac{2}{5}y&=\frac{7}{30}\end{aligned}\right\}$$

933. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

a) $2x=12-y \wedge 2\sqrt{x}=y$

b) $\left.\begin{aligned}2x-4\sqrt{x}+y-4&=0\\ 5\sqrt{x}-y-17&=0\end{aligned}\right\}$

934. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned}3^x+4^y&=73\\ 3^x\cdot 4^y&=576\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}9^{xy}-4\cdot 3^{xy}&=528\ 525\\ 3^{x+y}&=243\end{aligned}\right\}$

935. Két egész szám összege 120, szorzata 3456. Határozza meg a számokat!

936. Jótékony célú rendezvény bevételét meghatározott számú alapítvány között egyenlően akarták felosztani. Csakhamar kiderült azonban, hogy az alapítványok száma 8-cal több, s ezért az egy alapítványnak jutó összeg 300 ezer forinttal kevesebb, mint azt eredetileg gondolták. Egy újabb jótékony célú előadás 9 millió 600 ezer forintos bevételét is felhasználva végül mindegyik alapítvány 1 millió forintot kapott. Hány alapítvány kapott pénzt?

937. Kötelezettségvállalásunk miatt egy bizonyos tőzsdei értékpapírból meghatározott számút meg kell vennünk. Egyelőre magasnak találjuk az árfolyamát, ezért kivárunk. Ezalatt az értékpapír árfolyama 5 Ft-tal feljebb kúszik, így kénytelenek vagyunk 12 000 Ft-ot fizetni a tervezett mennyiségért, pedig korábban ezért a pénzért 4 darabbal többet vehettünk volna. Hány értékpapírt vásároltunk és milyen árfolyamon?

938. Egy derékszögű háromszög két befogója hosszának összege 80 cm-rel több, mint az átfogójának a hossza; a háromszög kerülete 900 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

939. Két kocka térfogata együtt 75,78 m^3, élhosszuk összege 6 m. Mekkora a kockák felszíne?

940. Két osztály kirándulást szervez. Mindkét osztályban 22 400 Ft-ot gyűjtöttek be. Abban az osztályban, amelyből 4 tanulóval több megy a kirándulásra, fejenként 100 Ft-tal kevesebbet kellett fizetni. Hány tanuló jár az egyes osztályokba?

941. Melyik az a két szám, melyeknek szorzata 180, négyzeteik különbsége 81?

942. Az egyik héten a 7-es lottón két baráti társaság 6-os találattal 150 000-150 000 Ft-ot nyert. Az egyik társaság eggyel több tagból állt, így fejenként 5000 Ft-tal kevesebb jutott nekik. Hány tagú volt a két társaság, és mennyit nyertek fejenként?

943. Egy derékszög két szárán egy-egy test mozog $4\,\frac{m}{s}$ sebességgel. Az egyik test a derékszögű csúcs felé halad, a másik a csúcstól távolodik. Egymástól való távolságuk egy időpontban 14 m, 1 sec múlva 16 m. Milyen távol voltak a derékszögű csúcstól az első megfigyeléskor?

944. Két kerékpáros halad az egymásra merőleges utcákban ugyanazon utcasarok felé. Egy adott pillanatban 60, illetve 80 méterre vannak a saroktól. 3 másodperc múlva a köztük lévő távolság 70 m, további két másodperc múlva 50 m. Határozza meg a kerékpárosok sebességét!

945. Egyforma kosarainkba 360 db azonos méretű almát akarunk csomagolni. Kiderül, hogy minden kosárba 6 db almával többet kellene elhelyeznünk, mint amennyi belefér. Ha viszont sikerülne még két kosarat szereznünk, akkor valamennyi almának pontosan jutna hely. Hány kosarunk van, és hány alma fér egy kosárba?

946. Mekkorák a háromszög oldalai, ha két-két oldal összege 12, 15, 17 cm?

947. Egy motorcsónak a folyón felfelé 6 km-t ugyanannyi idő alatt tesz meg, mint lefelé 8 km-t. A kiindulási helytől felfelé a 42 km-re lévő helységbe és onnan vissza 4 óra 5 perc a menetideje. Mekkora a folyó sebessége?

948. Megállapították, hogy bizonyos körülmények között az x méter hosszúságú alagút építési költségét a $C = ax + bx^2$ egyenlet adja meg, ahol a és b állandók. A 6 méter hosszú alagút építési költsége 23 millió forint, míg a 12 méteresé 54 millió forint. Számítsa ki egy 15 méter hosszú alagút építési költségét!

949. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} xy &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

950. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{8} - \frac{y}{4} &= \frac{3}{2} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}$$

951. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2a} + \frac{2}{5b} &= \frac{13}{20} \\ \frac{5}{a} - \frac{1}{3b} &= \frac{53}{6} \end{aligned}\right\}$$

952. Egy árucikk első- és másodosztályú darabjait véletlenül összekeverték. Az egyiknek 500 Ft, a másiknak 300 Ft a darabonkénti ára. Összesen 1200 darab van a kétféle fajtából. Ha 600 Ft-ért adnák az áru valamennyi darabját, 50%-os lenne a haszon. Hány darab volt külön-külön a kétféle áruból?

953. Egy kétjegyű szám 45-tel nagyobb a jegyei felcserélésével kapott kétjegyű számnál. Ha a számot 12,5%-kal megnöveljük, és ezután elosztjuk az eredeti szám számjegyeinek összegével, hányadosul 9-et kapunk. Melyik ez a szám?

954. Két csoportnak együtt egy adott földterületről 16 óra alatt kellett volna felszednie a burgonyát. Azonban csak az egyik csoport állt munkába, s már 36 órát dolgozott, amikor a másik csoport is megérkezett, és csatlakozott hozzá. Így közös erővel 4 óra alatt elvégezték a hátralévő munkát. Hány óra alatt tudták volna egyedül felszedni a burgonyát az egyes csoportok az egész területről?

955. Egy teremben minden sorban ugyanannyi szék van. Ha soronként 2-vel több széket helyezünk el, és a sorok számát is megnöveljük 3-mal, akkor 330-ról 425-re nő az ülőhelyek száma. Hány sor van a teremben a kétféle elrendezésben?

956. Az egymástól 400 km távolságban lévő A és B városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy expresszvonat. Az a vonat, amelyik A-ból indult, a két vonat találkozása után 3 órával ér B-be, a másik pedig a találkozás után 80 perccel ér A-ba. Mekkora a vonatok sebessége?

957. Egy derékszögű háromszög átfogója 6 cm, az ehhez tartozó magassága 4 cm. Mekkora a területe és mekkorák a befogók?

958. A derékszögű háromszög hosszabb befogója 2 cm-rel rövidebb az átfogójánál. A legrövidebb magassága a hozzá tartozó oldalt olyan szakaszokra bontja, amelyek különbsége 1 cm. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

959. Melyik az a két szám, amelyek összege 6, reciprokaik összege $\frac{3}{4}$?

960. Egy háziasszony a piacon 4 kg paprikát és 3 kg paradicsomot vásárolt 930 Ft-ért, a sorban mögötte álló kislány másfél kg paprikáért és egy kg paradicsomért 330 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül ennél az árusnál a paprika és a paradicsom?

961. Két munkás ugyanazon a munkadarabon dolgozik. Ha az egyik 9 órát, a másik 14 órát dolgozik, akkor éppúgy elkészülnek a munkával, mintha az első 18 órát, a második 12 órát dolgozna. Megállapodnak abban, hogy együtt dolgoznak. Ez esetben mennyi idő alatt lesznek kész a munkával?

962. Ha egy téglalap oldalait 3 m-rel növeljük, akkor területe 30 m^2-rel lesz nagyobb. Ha viszont egyik oldalát 3 m-rel növeljük, a másikat pedig ugyanennyivel csökkentjük, akkor a keletkezett téglalap területe 9 m^2-rel lesz kisebb. Mekkora az eredeti téglalap kerülete?

963. Egy motorcsónak 4 óra alatt 20 km-t haladt a folyón felfelé, majd 42 km-t lefelé. Egy másik alkalommal 30 km-t tett meg felfelé és ugyanennyit lefelé összesen 4 óra 10 perc alatt. Mekkora a folyó sebessége és milyen sebességgel halad a motorcsónak az állóvízben?

964. Két szám összege 32, különbsége 8. Melyik ez a két szám?

965. Melyik az a két szám, amelyek összege 32, négyzetük különbsége 256?

966. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a rendezett

a) pozitív; b) racionális; c) valós

számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 4y^2 &= 0 \\ xy - y^2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

967. Bálint-napon Szabolcs egy csokor virággal akarja meglepni választottját. Tudja, hogy Melinda a rózsát szereti a legjobban. A virágkereskedő piros és fehér rózsát árul. A piros rózsa szálja 20%-kal drágább, mint a fehéré. Ha Szabolcs mindkét fajtából ugyanannyit vásárol, akkor 1320 Ft-ot fizet. Az árus hajlandó engedni az árból, ha mindkét fajtából 3-mal többet vásárol Szabolcs. A piros rózsa árát a fehér árában adja, a fehér árából 20%-ot enged. Így 2160 Ft-ot kell fizetnie. Szabolcs rááll az ajánlatra, mert így a húgának is kedveskedhet. Hány szál rózsát akart venni eredetileg, és mennyi volt a kétféle rózsa száljának eredeti ára?

968. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} &= \frac{5}{8} \\ \frac{2}{x-y} - \frac{1}{x+y} &= \frac{7}{8} \end{aligned}\right\}$$

969. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} (2x+y)^2 &= 16 \\ x - \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x^2 - 6xy + 9y^2 &= 25 \\ x + \frac{1}{y} &= 9 \end{aligned}\right\}$

970. Oldja meg a rendezett valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x^{\lg y} &= 10 \\ xy &= 1000 \end{aligned}\right\}$$

971. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{a-1} - \frac{5}{b+1} &= 1 \\ \frac{3}{a+3} - \frac{2}{b} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

972. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} xy + x + y &= 29 \\ xy - 2x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

973. Oldja meg a rendezett racionális számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x + y + xy &= 47 \\ x^2y + xy^2 &= 420 \end{aligned}\right\}$$

974. Két pozitív szám szorzata 10, és a köbeik különbsége ötször akkora, mint a négyzeteik különbsége. Mekkora a két szám?

975. Józsi bácsi egy fatörzset vontat a lovával. Béla bácsi kíváncsi a törzs hosszára. Ha szemben halad a lóval, 15 lépésnek méri a törzset, ha a lóval egy irányban, akkor 75 lépésnek. Béla bácsi és a ló is egyenletesen halad. Hány lépés hosszú a fatörzs?

2.15. Összetett feladatok

976. Egy könyvet öt szerző kezdett el megírni. Ahogy egyre jobban szorította őket a határidő, bevettek egy hatodik szerzőtársat. A kiadó közben takarékossági okokból három ötödére csökkentette az eredetileg tervezett terjedelmet. A szerződés szerint a honorárium terjedelem után járt. Azt az eredeti öt szerző között egyenlően osztották volna el; a később bekapcsolódott hatodik háromnegyed annyit kapott, mint a többiek egyenként. Hány százalékkal kapott kevesebbet egy-egy eredeti szerző, mint amire a munka kezdetekor számíthatott?

977. Helyezze el az 1-től a mostani évszámig terjedő természetes számokat egy kör kerületén úgy, hogy két egymás mellé kerülő szám különbsége legfeljebb 2 legyen!

978. Melyek azok az x egész számok, amelyekre az $\frac{x+3}{x-3}$ tört is egész?

979. Valamely munkát 11 (egyformán teljesítő) munkás egész számú nap alatt végezne el. 4 nap után azonban 1 napra le kell állniuk. Hány további munkást kell ezután beállítani, hogy határidőre végezzenek?

980. Milyen előjelű a $\frac{10^{n-1}+1}{10^n+1} - \frac{10^n+1}{10^{n+1}+1}$ szám ($n \in \mathbf{N}^+$)?

981. Mikor született és hány éves idén az az ember, akinek idei életkora megegyezik születési éve számjegyeinek összegével?

982. Az A városból délben elindul egy gyalogos a B város felé. Valamivel később utána indul egy kerékpáros. 1 órakor utoléri a gyalogost és rögtön visszafordul. A-ba visszaérve ismét megfordul, és így a gyalogossal egyidőben, 4 órakor ér B-be. Hányszorosa a kerékpáros sebessége a gyalogosénak? Mennyi az a „valamivel később"?

983. Minden, három egyforma számjegyből álló szám osztható 3-mal. Igaz-e, hogy a

a) $3n$ egyforma számjegyből álló szám osztható $3n$-nel?

b) 3^n egyforma számjegyből álló szám osztható 3^n-nel?

Válaszát indokolja!

984. Tudjuk, hogy a $3x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek a -2 gyöke. Milyen b és c értékek esetén fog teljesülni, hogy az egyenletnek nem lesz további gyöke?

985. Adottak a következő intervallumok:
$A := [0{,}4 \cdot 10^8; 490 \cdot 10^6]$ és $B :=]19 \cdot 10^6; 0{,}49 \cdot 10^8]$.

a) Írja fel normálalakban az A, illetve B halmaz 5-5 különböző elemét!

b) Írja fel intervallum jelöléssel a következő halmazokat: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$!

c) Írja fel normálalakban az A halmaz legkisebb és legnagyobb elemének számtani, illetve mértani közepét!

986. Kerti öntözőberendezés segítségével mindazokat a területeket meg tudjuk locsolni, amelyek a berendezés szórófejétől legalább 1,5 méterre és legfeljebb 4,5 méterre vannak.

a) Hány m^2 nagyságú területet tudunk egyszerre meglocsolni egy ilyen berendezéssel?

b) Ha egyidejűleg két egyforma öntözőberendezést használunk, és azt szeretnénk elérni, hogy a szórófejek 1,5 méter sugarú környezete se maradjon szárazon, akkor egymástól mekkora távolságra kell felállítani a szórófejeket? Mekkora lesz ekkor az öntözött terület? Mekkora lesz az a terület, amelyik mindkét szórófejtől kap vizet?

987. Kerti öntözőberendezés segítségével mindazokat a területeket meg tudjuk locsolni, amelyek a berendezés szórófejétől legalább 1 méterre és legfeljebb 3 méterre vannak.

a) Hány m^2 nagyságú területet tudunk egyszerre meglocsolni egy ilyen berendezéssel?

b) Ha egyidejűleg két egyforma öntözőberendezést használunk és azt szeretnénk elérni, hogy a két berendezés által megöntözött terület a lehető legnagyobb legyen, akkor egymástól mekkora távolságra kell a szórófejeket elhelyezni? Legfeljebb mekkora a megöntözött terület?

c) Egy gondosan megművelt, téglalap alakú veteményeskert négy sarkában egy-egy öntözőberendezést helyezünk el. A kert területének hány százalékát tudjuk megöntözni a négy berendezés egyidejű működtetésével, ha a kert hossza 12 méter, szélessége pedig 8 méter?

988. Géza sikeresen elvégezte a gimnázium utolsó osztályát. A bizonyítványában nyolc osztályzat szerepelt.

a) Azt mondta a barátjának, hogy osztályzatainak átlaga 3,2. A barátja, aki elég jó matekos hírében állott, egyből rajtakapta, hogy füllent. Miért?

b) Az igazság az, hogy Géza átlaga 2,875, és ötöse is csak magyarból volt. Mi volt a többi év végi osztályzata?

989. Két egyforma, egyenként 50 cm hosszú vékony lécből téglalap alakú képkeretet akarunk készíteni.

a) Hogyan vágjuk ketté a léceket, ha azt akarjuk, hogy a bekeretezett terület 600 cm^2 legyen?

b) Tudjuk, hogy a téglalapok közül az emberi szem számára kellemes formájúnak tűnnek azok, ahol a hosszabb és a rövidebb téglalapoldal aránya megegyezik a téglalap fél kerületének és a hosszabbik oldalának az arányával. Ha ilyen képkeretet szeretnénk, akkor hogyan vágjuk ketté a léceket?

c) A gyakorlatban sokszor a 8 : 5 vagy az 5 : 3 oldalarányú téglalapokat használják a b)-ben leírt „kellemes" téglalapok helyett. Mekkora lenne az ilyen oldalarányokkal készült, bekeretezett képek területe?

990. Derékszögű háromszög átfogójának hossza 3 cm, az átfogóhoz tartozó magassága 1 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

991. Derékszögű háromszög egyik befogója 40 cm, kerülete 130 cm.

a) Mekkora a területe?

b) A derékszög szögfelezőjét és az átfogóhoz tartozó magasságot meghúzva az átfogót 3 részre osztottuk. Mekkora az egyes részek hossza?

992. Egy téglalap két szemközti csúcsából merőlegeseket állítunk a másik két csúcsot összekötő átlóra. A merőlegesek talppontjai P és Q.

a) Mekkora a PQ távolság, ha a téglalap oldalainak hossza 3 cm és 4 cm?

b) Igazolja, hogy ha a téglalap oldalainak hossza d és h ($d < h$), akkor a PQ távolság $\frac{h^2 - d^2}{c}$, ahol c a téglalap átlójának hossza!

993. Adja meg a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazának legkisebb egész elemét!

a) $-3x - 7 < 12$

b) $-x^2 - 5x + 6 > 0$

c) $\sin x \geq 1$

994. Péter és Pál apjuk halála után összesen tízmillió forintot örökölt. Pál az örökségét folyószámlán kötötte le, és egy év múlva 960 ezer forint kamathoz jutott. Péter nyíltvégű befektetési alapba rakta a pénzét, így egy év alatt 2%-kal magasabb pénzgyarapodást ért el, és 720 ezer forintot kapott. Mennyi volt a fiúk öröksége különkülön?

995. A tízes számrendszerbeli 101 szám alakja valamelyik másik számrendszerben 10202. Vajon melyik ez a számrendszer? Válaszát indokolja!

996. Határozza meg A, B, C állandók értékét úgy, hogy a

$3x^2 - 7x + 8 = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$

egyenlőség azonosság legyen!

997. Bizonyítsa be, hogy ha n pozitív természetes szám, akkor $(2n+1)^2 - 1$ osztható 8-cal!

998. Egy autóbusz két város közötti d távolságot odafelé $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, visszafelé $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel tesz meg.

a) Mekkora időt töltene úton a vezető, ha oda-vissza a két előző sebesség számtani közepével haladna?

b) Milyen hosszú a menetidő az egyes esetekben, ha a két város közötti távolság $d = 120$ km?

999. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 2,5-szer annyi átlója van, mint oldala?

1000. Melyik az a konvex sokszög, amelyben az oldalak száma annyival nagyobb az átlók számánál, ahányszor 180° a külső szögek összege?

1001. Egy 20 m hosszú, 15 m széles tér közepére téglalap alakú virágágyat tervezünk úgy, hogy szélei a tér szélétől egyforma távolságban legyenek. Mekkora távolságra kell lenniük a virágágy széleinek a tér széleitől, ha a térnek csak 42%-át lehet parkosítani?

1002. Egy repülőgépnek 2400 km utat kellett volna megtennie. Az út első harmadában rossz időjárási viszonyok miatt az eredetileg tervezett sebességét 25%-kal csökkentenie kellett.

a) Az eredetileg tervezetthez képest hány százalékkal kellene növelnie a sebességét az út hátralevő részében, ha késés nélkül szeretne landolni?

b) Ha az út hátralevő részén az eredetileg tervezetthez képest $160\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kisebb sebességgel haladna, 1 órás késése lenne. Mennyi volt az eredetileg tervezett sebessége, és hány óra alatt ért volna eredetileg a célállomásra?

1003. A Nap az égbolton a Földről nézve közelítőleg 0,5°-os szögben látszik. A Nap—Föld távolság $1{,}496 \cdot 10^8$ km.

a) Mekkora a Nap átmérője?

b) Teljes napfogyatkozáskor látható, hogy a Hold éppen el tudja takarni a Napot. Ha tudjuk, hogy a Hold—Föld távolság kb. 384 000 km, akkor a Hold átmérője hányadrésze a Napénak?

1004. Egy egyenlő szárú trapéz alaprajzú szoba „alapjai" 8 méter és 4 méter, míg a „szárak" 5 méter hosszúak. Ezt a szobát szeretnénk olyan, az „alapokkal" párhuzamos fallal kettévágni, amely a szoba kerületét felezi. (Tehát ha a szoba belmagassága mindenütt állandó, akkor olyan falat keresünk, amellyel a két kisebb szoba teljes falfelületei egyenlők lesznek.) Hol kell ezt a falat építeni, és milyen hosszú lesz?

1005. Számítsa ki az alábbi 99 tényezős szorzat értékét!

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

1006. Számítsa ki az alábbi 99 tényezős szorzat értékét!

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

1007. Olangör barátságos, vendégszerető ország hírében áll, bár a határon átlépő külföldiek néha meglepő dolgokkal találják szembe magukat. Ma például az a rendelet, hogy minden belépő külföldivel háromszor meg kell ismételni a következő eljárást: először megduplázni a nála lévő készpénzt, majd fizettetni vele ezer fontot (Olangörben is font a hivatalos fizetőeszköz neve).

a) Géza 1100 fonttal a zsebében érkezett a határhoz. Hány fontja volt a határ átlépése után?

b) Gizi zsebe teljesen kiürült a háromszor megismételt eljárás után. Mennyi készpénzzel érkezett a határhoz?

1008. Milyen k értékekre lesz a $\frac{7}{k-1}$ kifejezés

a) pozitív; b) negatív; c) természetes szám;

d) egész; e) nulla; f) nagyobb 5-nél ?

1009. Határozza meg az összes olyan kétjegyű számot, amely 12-vel nagyobb, mint számjegyei összegének 4-szerese!

1010. Egy négyjegyű számból kivonjuk az első három jegyből álló háromjegyű számot, továbbá az első két jegyből álló kétjegyű számot, végül az első számjegyet. Így eredményül 2002-t kapunk. Mi volt az eredeti négyjegyű szám?

1011. A villanyszámla 2001-ben három részből tevődött össze egy háztartásban, ahol a vízmelegítésre és fűtésre éjszakai áramot is használtak:

alapdíj: ez a mindenkori fogyasztástól független készenléti díj, havonta 240 Ft;
nappali áram: 1 kWh fogyasztás esetén 19,80 Ft;
éjszakai áram: 1 kWh fogyasztás esetén 10,20 Ft.

Ezenkívül az egészet 12% áfa terhelte.

a) Számítsa ki, hogy mennyit fizettek a hó végén, ha 33 kWh nappali és 26 kWh éjszakai áramot használtak!

b) Hogyan függött a két típusú fogyasztástól a fizetendő összeg? (Jelölje pl. x, illetve y a nappali, illetve az éjszakai áramfogyasztást kWh-ban.)

c) Mennyi volt a fogyasztásuk, ha egy hónapban 10 458 Ft-ot fizettek, és éjszakai áramból pontosan feleannyit fogyasztottak, mint nappaliból?

1012. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán: $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 1$!

1013. A fény a ködben elég rövid távon elveszti a fényerejét. A fényerőt a fényforrástól d távolságban az $I(d) = I_0 \cdot a^d$ függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő; d a lámpától való távolság; a egy, a köd sűrűségétől függő állandó érték ($0 < a < 1$). Tudjuk, hogy egy autó lámpája még a ködben is észrevehető, ha az eredeti fényerejének legalább az 5%-a megvan. Ha tudjuk, hogy egy novemberi napon $a = 0{,}95$, akkor

a) milyen messziről lehet látni a szembejövő autó lámpáját?

b) Attól kezdve, hogy észreveszik egymást, mennyi idő múlva találkoznak, ha mindkét autó sebessége 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

c) Az egyik, még éppen nem látva a szembe jövőt, egy előtte csak 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó teherszállító járművet kezd előzni, amelynek hossza 8 méter (az előzést végrehajtó autóé 4 m). A teherjármű éppen 2 méterrel van előtte, és az előzőnek legalább 1 méterrel kell a teherautó elé kerülnie, a teljesen egyenes útszakaszon. Vajon sikerülhet-e még az előzés ütközés nélkül, ha a teherautó nem fékezik és az előző sem akarja túllépni a megengedett sebességhatárt (90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)?

1014. A szakszervezet évenként legalább 5%-os béremelést szeretne.

a) Ha Géza ma 65 000 Ft-ot keres, és a kívánt béremelés 5 éven át megvalósul, akkor mennyi lesz a fizetése 5 év múlva?

b) Géza ma 13 kg sittyőt vehetne havi béréből. Időközben infláció is van, amelynek mértéke az első két évben 8%, majd 6, végül az utolsó két évben 4%. (Az infláció az árak átlagos emelkedését jelenti, tehát pl. a sittyő ára is évről évre ennyivel lesz magasabb.) Hány százalékkal csökkent vagy nőtt Géza fizetésének értéke az inflációt is figyelembe véve? (Ezt szokás reálbér-csökkenésnek, illetve -növekedésnek nevezni: ugyanannyi, kevesebb vagy több sittyőt tud megvásárolni havi béréből.)

1015. Mekkora reálbér-növekedésnek felel meg az a 20%-os fizetésemelés, amellyel a dolgozó emelt fizetése bruttó 115 200 Ft lett, miközben az infláció 9%-os? (Információk: a bruttó fizetésből levonják a tb- és egyéb járulékokat, amelyek együttes értéke most a bruttó fizetés 13%-a. Levonják még a bruttó fizetés adóját, a megadott táblázat szerint [2001. évi adatok]. A reálbér-növekedés mértéke azt jelzi, hogy a kézhez kapott fizetésből mennyivel több árut tudunk megvásárolni. Az infláció pedig az árak átlagos növekedése.)

Ha az évi bruttó jövedelem	akkor adója
0 Ft–400 000 Ft,	a jövedelem 20%-a.
400 001 Ft–1 000 000 Ft,	80 000 Ft és a 400 000 Ft feletti rész 30%-a.
1 000 000 Ft felett,	260 000 Ft és az 1 000 000 Ft feletti rész 40%-a.

1016. Egy egyenlő szárú trapéz alaprajzú szobát szeretnénk az alapjaival párhuzamos fallal két egyenlő alapterületű szobára osztani. Milyen hosszú lesz ez a fal, ha a trapéz két párhuzamos oldala 8 méter és 4 méter, míg a „szárak" 5 méter hosszúak? (A fal vastagsága elhanyagolható.)

1017. Egy háromjegyű szám számjegyei különböző pozitív számok. Felírjuk mindazokat a háromjegyű számokat, amelyeknek ugyanezek a számjegyei. Igazolja, hogy ezen számok összege nem lehet négyzetszám!

1018. 7200 Ft-ért háromféle ajándéktárgyat vásároltunk, összesen 20 darabot. Az ajándékok ára 600, 500, illetve 100 Ft volt. Melyikből hány darabot vettünk?

1019. A tízes számrendszerbeli 333 szám alakja valamelyik másik számrendszerben 654. Vajon melyik ez a számrendszer? Válaszát indokolja!

1020. Bizonyítsa be, hogy ha n olyan pozitív természetes szám, amely nem osztható öttel, akkor $n^4 - 1$ osztható öttel!

1021. Az alábbi (tízes számrendszerbeli) szorzásban az azonos betűk azonos, a különbözők különböző számokat jelentenek. Határozza meg a betűknek megfelelő számokat!

$$\begin{array}{rcl} & \text{A B C} & \cdot \text{ A B C} \\ \hline \text{D E F G} & & \\ \text{H H C B} & & \\ \text{A D F D} & & \\ \hline \text{H D K G E D} & & \end{array}$$

1022. Bizonyítsa be, hogy $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ pozitív, ha $a>b>c$!

1023. Írja fel azt a legkisebb természetes számot, amely 6-ra végződik, és ha ezt a szám végéről a szám elejére írjuk, az eredeti szám négyszeresét kapjuk!

1024. Összesen 31 tonna szenet kell elszállítani egy telephelyről. A szállításhoz három típusú tehergépkocsi bérelhető. Az egyik típusú 3 tonna, a másik 4 tonna, a harmadik 5 tonna szenet tud egy fordulóban elszállítani. A telephely vezetője azt tervezi, hogy egy fordulóban elszállíttatja az összes szenet.

a) Legkevesebb hány gépkocsit kell bérelnie?

b) Legkevesebb mennyibe kerül a szállítás, ha az egyes gépkocsik költsége az alábbi táblázat szerint kalkulálható:

	5 tonnás	4 tonnás	3 tonnás
Bérleti díj	100 batka	80 batka	60 batka
Üzemanyagköltség	20 batka	17 batka	16 batka

1025. Egy kútba követ ejtettünk és 2,7 másodperc múlva hallottuk meg a csobbanást. Milyen mélyen van a kútban a víz felszíne? (A szabadesést az $s=\frac{g}{2}t^2$ egyenlet írja le, ahol s a megtett út, t az eltelt idő, $g\approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a nehézségi gyorsulás. A hang egyenletesen, $c=340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed.)

1026. Milyen valós x-re igaz, hogy $x=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]$?

1027. Milyen egész A-ra, B-re igaz, hogy $\left[\frac{A(B-1)}{B}\right] = A - \left[\frac{A}{B}\right]$? Egyébként pedig milyen reláció áll fenn a két érték között?

1028. Egy kiszáradt kútba követ ejtünk, s az feneket ér. Az ütődés okozta hangot az elejtéstől mért T idő múlva halljuk meg. Határozza meg ebből a kút mélységét! (A szabadesésre az $s = \frac{g}{2}t^2$ összefüggés jellemző, ahol $g \approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, t a kő elejtésétől eltelt idő, s a kő által megtett út. A hang egyenletes terjedési sebessége kb. $340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.)

1029. Oldja meg az egész számok körében: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$!

1030. a) Oldja meg a valós számok halmazán a $(b-1)(x-1) = 1$ egyenletet, ahol b valós paramétert jelöl!

b) Határozza meg az egyenlet megoldáshalmazát, ha $b := -2001$!

c) Határozza meg a b paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet megoldáshalmazának a $\frac{2}{3}$ legyen az egyetlen eleme!

1031. Oldja meg a $(k^2+1)x + 3 = k(3+2x)$ egyenletet, majd határozza meg a k paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet egyetlen megoldása a -6 legyen!

1032. a) Oldja meg a $3kx - 16 = 9k^2 - 24k + 4x$ egyenletet, ha k valós paraméter!

b) Határozza meg a k paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet minden megoldása 11-nél kisebb legyen!

c) Mi lesz az egyenlet megoldáshalmaza, ha $k := -\frac{2\ 999\ 996}{3}$?

1033. a) Oldja meg a valós számok halmazán a $p(p+2)x - 5p = 2(p+2)x + 10$ egyenletet, ahol p valós paramétert jelöl!

b) Határozza meg az egyenlet megoldáshalmazát, ha $p := -4998$!

c) Határozza meg a p paraméter összes olyan értékét, amely esetén a $\frac{-1}{100}$ az egyenlet megoldáshalmazának eleme lesz!

3. FÜGGVÉNYTAN

3.1. Függvénytípusok

Függvények megadása

1034. Függvényt adnak-e meg a következő hozzárendelések?

a) Iskolánk minden egyes osztályához hozzárendeljük jelenlegi osztályfőnökét.

b) Osztályunk minden egyes tanulójához hozzárendeljük legutóbbi matematika-dolgozatának osztályzatát.

c) Minden összetett számhoz hozzárendeljük a legkisebb prím osztóját.

d) Minden pozitív egész számhoz hozzárendeljük pozitív osztóinak számát.

e) Minden prímszámhoz hozzárendeljük a többszöröseit.

f) Minden pozitív valós számhoz hozzárendeljük a 0-szorosát.

Amelyek függvények, azok közül melyek kölcsönösen egyértelműek?

1035. a) Függvényt kap-e, ha minden osztálytársához hozzárendeli annak születésnapját?

b) Függvényt kap-e, ha minden osztálytársához hozzárendeli a testvéreit?

c) András és Béla egyaránt jól oldotta meg a b) feladatot. András igennel, Béla pedig nemmel válaszolt. Miben különbözik András és Béla osztálya egymástól?

1036. Létesíthető-e kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés az alábbi halmazok elemei között? Ha igen, hogyan; ha nem, miért nem?

a) a 9. A tanulóinak halmaza, a 9. A fiútanulóinak halmaza

b) a jelenleg élő dinoszauruszoknak halmaza, $\{0\}$

c) $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$

1037. Rendelje hozzá 1-től 10-ig a természetes számokhoz az osztóik számát! Készítsen táblázatot, nyíldiagramot, oszlopdiagramot! Ábrázolja a függvényt koordináta-rendszerben is!

1038. Egy régi népi mondás szerint: „Egy gyerek nem gyerek, két gyerek fél gyerek, három gyerek egy gyerek". Adjon meg egy képletet e hozzárendelési szabályra!

1039. A labdarúgó NB I állása a 2001. őszi szezon zárásakor a következő volt:

1.	MTK	22	17	3	2	46 – 13	54
2.	ZTE	22	13	4	5	44 – 26	43
3.	Dunaújváros	22	10	7	5	43 – 23	37
4.	Videoton	22	10	6	6	29 – 26	36
5.	FTC	22	10	4	8	34 – 30	34
6.	Újpest	22	8	5	9	39 – 40	29
7.	Kispest	22	7	5	10	30 – 41	26
8.	Debrecen	22	5	10	7	26 – 31	25
9.	Sopron	22	6	5	11	33 – 42	23
10.	Győr	22	4	9	9	27 – 38	21
11.	Haladás	22	4	7	11	23 – 44	19
12.	Vasas	22	4	3	15	24 – 44	15

Adjon meg ennek alapján öt különböző függvényt! (Sorban az oszlopokban a lejátszott mérkőzések száma, a győzelmek, döntetlenek, vereségek száma, a gólkülönbség [rúgott – kapott gólok száma] és a megszerzett pontok száma áll.)

1040. Létesítsen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az alábbi ponthalmazok között!

a) Két különböző hosszúságú szakasz pontjai.

b) Két különböző sugarú kör pontjai.

c) Két különböző sugarú zárt körlemez pontjai.

1041. Adott két halmaz: A az elsőfokú egyenletek halmaza, $B := \mathbf{R}$. Minden elsőfokú egyenlethez rendeljük hozzá a valós megoldását! Döntse el, hogy a felsorolt állítások közül melyik helyes! Válaszát indokolja!

a) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert az első halmaznak van olyan eleme, amely nem szerepel a hozzárendelésben.

b) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert a második halmaznak van olyan eleme, amely nem szerepel a hozzárendelésben.

c) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert az első halmaznak van olyan eleme, amelyhez több elemet rendeltünk.

d) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert a második halmaznak van olyan eleme, amely több elemhez van hozzárendelve.

e) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert a két halmaz számossága nem egyenlő.

f) A fenti hozzárendelés nem függvény, mert A és B egyike nem halmaz.

g) A fenti hozzárendelés függvény.

1042. Adott az A és a B halmaz: $A := \{1; 2; 3; 4\}$, $B := \{10; 11; 12; 13\}$. Tekintsük az $A \to B$ típusú függvényeket!

a) Hány egy-egyértelmű hozzárendelés adható meg összesen?

b) Hány szigorúan monoton növekedő, illetve csökkenő függvény van ezen egy-egyértelműek között?

1043. Legyen $K := \{a; b; c; d\}$ és $L := \{1; 2; 3; 4; 5\}$! Adjon meg egy-egy olyan függvényt, ha lehet, amelynek értelmezési tartománya a K halmaz, egy képhalmaza az L halmaz és

a) értékkészlete az $\{1; 5\}$ halmaz;

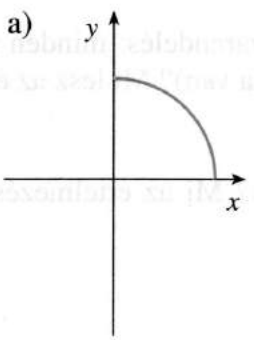
b) kölcsönösen egyértelmű leképezés a K és az értékkészlete között;

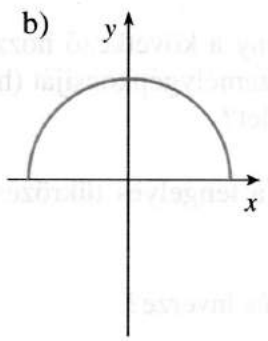
c) értékkészlete az L halmaz!

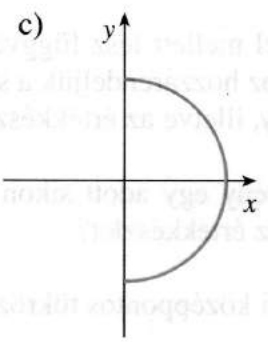
1044. Adjon meg olyan függvényeket, amelyeknek néhány helyettesítési értékét a táblázat tartalmazza! A hiányzó értékeket írja be a táblázatba!

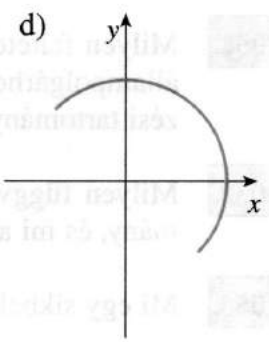
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	5	2	1	2	5	10	17	
$g(x)$	-7		1	2		-2	-7		-23
$h(x)$		-1		3	5			11	
$a(x)$			$-\frac{5}{2}$	-2		1	5		29
$b(x)$		0	$\frac{1}{2}$	1		2		3	

1045. Melyik ábrázol függvényt és melyik kölcsönösen egyértelmű függvényt az alábbi rajzok közül? Válaszát indokolja!

a) 

b) 

c) 

d) 

1046. A budapesti értéktőzsde minden részvényéhez rendelje hozzá külön-külön az aznapi nyitó- és záróárat!

a) Mi lesz a két értelmezési tartomány?

b) Milyen halmaznak része a két értékkészlet?

c) Hogyan lehet megadni képlettel az aznapi részvények nyereségeit, illetve veszteségeit ?

1047. Egy kórházi betegnek minden nap reggel, délben és este megmérik a lázát. Egy hétig fekszik egy kivizsgáláson. A lázlapján vezetik a mért értékeket. Jogos-e, hogy összekötik egy egyenes vonallal a mért értékeket? (Az így nyert vonalat mondják lázgörbének is.) Válaszát indokolja!

1048. Álljon két halmaz egyike 15 magyarországi hegységből (Bakony, Börzsöny, Budai-hegység, Bükk, Cserhát, Gerecse, Kőszegi-hegység, Mátra, Mecsek, Pilis, Velencei-hegység, Vértes, Villányi-hegység, Visegrádi-hegység, Zempléni-hegység), míg másika 20 hegycsúcsból, amelyek mindegyike e hegységek valamelyikében fekszik.

a) A hegységekhez rendeljük hozzá azokat a csúcsokat, amelyeket tartalmazzák. Függvény lesz-e ez a hozzárendelés? Indokolja válaszát!

b) A hegycsúcsokhoz rendeljük azt a hegységet, amelyben találhatók. Függvény-e ez a hozzárendelés? Indokolja válaszát!

1049. Álljon két halmaz egyike a 2001/2002. évi Bajnokok Ligájában résztvevő labdarúgó klubokból, míg másika az előző klubok összes játékosából. Hogyan lehet függvényt készíteni ezzel a két halmazzal úgy, hogy a játékosokat a saját klubjukkal hozzuk kapcsolatba?

1050. Vegye egy sík összes háromszögének a halmazát! Egy másik halmaz legyen a pozitív valós számok halmaza. A hozzárendelés legyen a következő: minden háromszöghöz hozzárendeljük a területét. Függvényt kapunk-e?

1051. Milyen feltétel mellett lesz függvény a következő hozzárendelés: minden magyar állampolgárhoz hozzárendeljük a személygépkocsiját (ha van)? Mi lesz az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet?

1052. Milyen függvény egy adott síkon a tengelyes tükrözés? Mi az értelmezési tartomány, és mi az értékkészlet?

1053. Mi egy síkbeli középpontos tükrözés inverze?

1054. Legyen adott a térben egy középpontos hasonlóság, amelynek aránya $\lambda > 0$. Három függvényt is definiálunk.

1. Az első minden szakasz hosszához a képszakasz hosszát rendeli.
2. A másik minden területtel rendelkező alakzat területéhez a kép területét rendeli.
3. A harmadik minden térfogattal rendelkező alakzat térfogatához a képének a térfogatát rendeli.

Adja meg a fenti három függvényt képlettel!

1055. Minden valós számhoz hozzárendeljük (a tízes számrendszerbeli alakjában) a százas helyiértéken álló számjegyet. Adjon matematikai képletet e hozzárendelési szabályra!

1056. Minden személygépkocsihoz hozzárendeljük a rendszámát. Másrészt minden autótulajdonoshoz, akinek egy autója van, hozzárendeljük a gépkocsiját. Milyen sorrendben lehet a két függvényből összetett függvényt képezni, és mi lesz az? Mihez mit rendel az összetett függvény?

1057. Egy szupermarketben minden áruhoz hozzárendelnek egy vonalkódot. A pénztárgép a vonalkódhoz hozzárendeli az árat, így tudunk gyorsan fizetni. Mi lesz az összetett függvény? Melyik függvénynek van inverze a három közül?

1058. Vegyük a síkon a következő két függvényt: f egy eltolás egy adott $\mathbf{v}$ vektorral, és g egy forgatás adott O pont körül adott α szöggel. Mit lehet mondani az összetett függvényről, ha

a) előbb f-et kell elvégezni, aztán g-t;

b) előbb g-t kell elvégezni, aztán f-et?

c) Van-e megoldása az $f(x) = x$ egyenletnek? Mit jelent ez?

d) Van-e megoldása az $f(g(x)) = x$ egyenletnek?

Értékkészlet, helyettesítési érték, vegyes kérdések

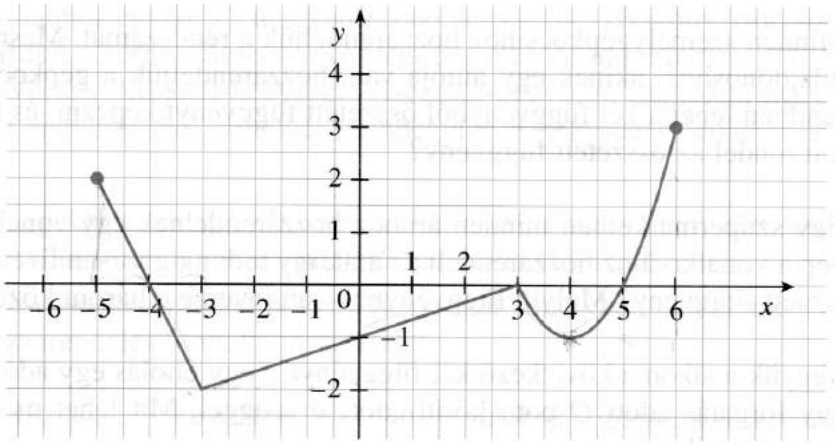
1059. Az alábbi ábrán a $[-5; 6]$ intervallumon értelmezett f függvény grafikonja látható. A grafikon két egyenes szakaszból és egy parabolaívből tevődik össze.

a) Határozza meg a függvény értékkészletét!

b) Fejezze be a függvény alább elkezdett megadását!

$$f:[-5;\ 6]\to \mathbf{R};\ f(x)=\begin{cases} \ldots\ldots, & \text{ha } x\le -3 \\ \ldots\ldots, & \text{ha } -3<x<3 \\ \ldots\ldots, & \text{ha } x\ge 3 \end{cases}$$

c) Határozza meg az $f(x)\le -1$ egyenlőtlenség megoldását!



1060. Válaszoljon az alábbi kérdésekre! Válaszait indokolja! ($x, a\in \mathbf{R}$)

a) Mit értünk egy függvény helyettesítési értékén?

b) Legyen $f(x)=3a+2x$. Mennyi az f függvény helyettesítési értéke a 2 helyen?

c) Legyen $f(a)=3a+2x$. Mennyi az f függvény helyettesítési értéke a 3 helyen?

1061. Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan, a valós számokon értelmezett f függvény, amelyre $f(x)+f(1-x)=1-x$ teljesül minden $x\in \mathbf{R}$ esetén!

1062. Határozza meg a következő függvények értékkészletét!

a) $x\mapsto \dfrac{2\sin x}{3}-5,\ x\in \mathbf{R}$ b) $x\mapsto \lg x^2,\ x\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) $x\mapsto 4:3^x-2,\ x\in \mathbf{R}$

1063. Fejezze ki $f(a+2)-f(a-2)$ értékét, ha $a\in \mathbf{R}$ és

a) $f(x)=-x^2+3x,\ x\in \mathbf{R}$, b) $f(x)=3^x,\ x\in \mathbf{R}$!

1064. Mi az $x \mapsto \sqrt{x-4}+6$ függvény értékkészlete, ha értelmezési tartománya a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz?

1065. Mi az $x \mapsto 2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+4$ függvény értékkészlete, ha értelmezési tartománya a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz?

1066. Mi az $x \mapsto \frac{1}{x+2}+3$ függvény értékkészlete, ha értelmezési tartománya a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz?

1067. Mi az $x \mapsto 2(x-1)^2-3$ függvény értékkészlete, ha értelmezési tartománya a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz?

1068. Határozza meg a következő függvények grafikonjának a koordinátatengelyekre illeszkedő pontjait (ha vannak)!

a) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto x+7$

b) $g: \mathbf{N} \setminus \{4\} \to \mathbf{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{x-4}$

c) $h: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto -7x$

d) $i: \mathbf{Z} \setminus \{3\} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto \frac{x^2+x-12}{x-3}-4$

e) $j: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos x+1$

f) $k: \mathbf{N} \setminus \{0; 1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\lg x}$

g) $l: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -\frac{3}{x}$

h) $m: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3$

i) $n: \mathbf{R} \setminus [0; 1[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{8}{[x]}$

j) $p: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|}$

1069. Válaszoljon az alábbi kérdésekre! Válaszait indokolja!

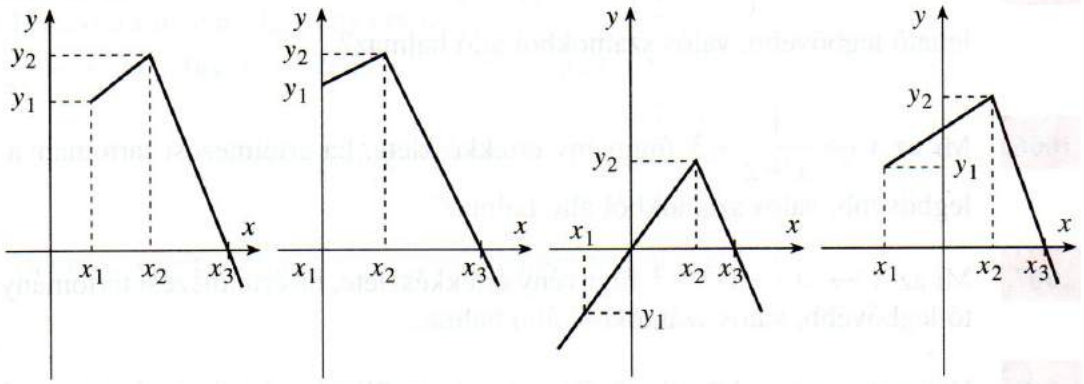
a) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett szigorúan monoton növekvő függvény páros, illetve páratlan?

b) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett pozitív értékű függvény páros, illetve páratlan?

c) Lehet-e egy páros, illetve páratlan függvénynek pontosan 1, 2, illetve 3 szélsőértéke?

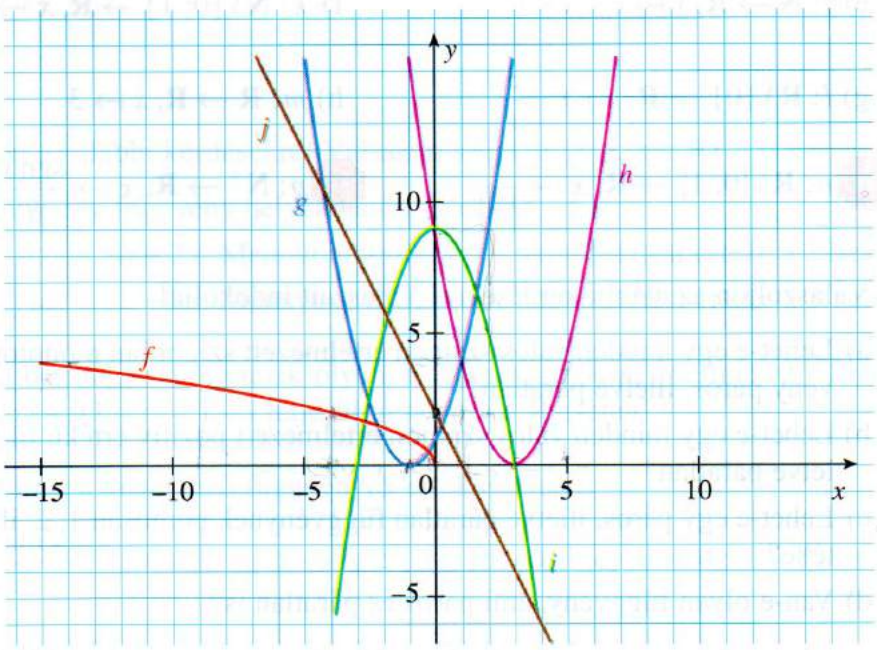
d) Van-e olyan függvény, ami páros és páratlan is?

1070. Az alábbi ábrákon minden valós számra értelmezett függvények grafikonrészletei láthatók. Egészítse ki ezeket úgy, ha lehet, hogy azok páros, illetve páratlan függvények grafikonjainak részletei legyenek! Ha nem lehetséges a kiegészítés, magyarázza meg, miért nem!



1071. Hány helyen metszheti egymást egy $x \mapsto a \cdot x$ egyenes arányosság és egy $x \mapsto \frac{b}{x}$ fordított arányosság képe? Milyen x helyen és y értékeknél?

1072. Az alábbi ábrán három parabola, egy félparabola és egy egyenes látható. Mely függvények grafikonjai ezek?



1073. Vannak-e azonosak a következő függvények között? Válaszát indolkolja!

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto x+4$

$g: \mathbf{N} \setminus \{4\} \to \mathbf{N},\ x \mapsto \dfrac{x^2-16}{x-4}$

$h: \mathbf{N} \to \mathbf{N}^+,\ x \mapsto \lg 10^{x+4}$

$i: \mathbf{Z} \setminus \{3\} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

$j: \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto (x+4) \cdot \sin(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

$k: \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2^{\log_2(x+4)}$

1074. Döntse el, hogy a felsorolt pontok közül melyek illeszkednek mindkét megadott függvény grafikonjára, melyek nem illeszkednek egyikre sem!

$A(-1;0)$, $B(0;-1)$, $C(1;1)$, $D(0;0)$, $E(1;0)$, $F(0;1)$, $G(\pi;\pi)$, $H(\pi;0)$, $I(0;\pi)$

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto 3x-3;$ $\qquad g: \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{9x^2-16}{3x-4} - 7$

1075. Döntse el, hogy a felsorolt pontok közül melyek illeszkednek mindkét megadott függvény grafikonjára, melyek nem illeszkednek egyikre sem!

$A(-1;0)$, $B(0;-1)$, $C(1;1)$, $D(0;0)$, $E(1;0)$, $F(0;1)$, $G(\pi;\pi)$, $H(\pi;0)$, $I(0;\pi)$

$j: \mathbf{Z}^- \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \pi \cdot \operatorname{tg}(\pi x);$ $\qquad k: \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \left| \dfrac{5 \cdot \cos\dfrac{\pi x}{2} - 3}{3} \right| - 1$

1076. Egy úszómedencét éjjel töltenek meg vízzel. Este 9 és 11 óra között az úszómedence üres. 11 órától reggel 6 óráig óránként 800 hektoliter vizet engednek egyenletes sebességgel a medencébe. 6 órakor elzárják a csapokat. Ábrázolja az úszómedencében levő víz mennyiségét az este 9 és a reggel 6 óra közötti időszakban!

1077. Egy gabonasilóban reggel 8 órakor 5 t búza van. Óránként egyenletesen 1 t terményt engednek ki, miközben 2 óránként 10 perc alatt 5 q-t töltenek bele. Ábrázolja a silóban lévő gabona mennyiségét a reggel 8 és a délután 1 óra közötti időszakban!

1078. A következő függvények közül válassza ki azokat, amelyek

a) egyenes arányosságot adnak meg;

b) fordított arányosságot adnak meg;

c) elsőfokúak!

$f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto x+7$

$g\colon \mathbf{N}\setminus\{4\} \to \mathbf{Q},\ x \mapsto \dfrac{1}{x-4}$

$h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto -7x$

$i\colon \mathbf{Z}\setminus\{3\} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \dfrac{x^2+x-12}{x-3} - 4$

$j\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \cos x + 1$

$k\colon \mathbf{N}\setminus\{0;1\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\lg x}$

$l\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -\dfrac{3}{x}$

$m\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 3$

$n\colon \mathbf{R}\setminus[0;1[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{8}{[x]}$

$p\colon \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{\operatorname{sgn} x}{|x|}$

1079. Adjon meg (akár grafikusan) olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is **R**, és minden értéket pontosan kétszer vesz fel!

1080. Konstruáljon olyan lineáris függvényt, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $f(f(x)) = 4x - 3$ teljesüljön!

1081. Mi az $x \mapsto 3x - 3[x]$ függvény értékkészlete, ha értelmezési tartománya a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz?

1082. Döntse el, hogy a felsorolt pontok közül melyek illeszkednek mindkét megadott függvény grafikonjára, és melyek nem illeszkednek egyikre sem!

$A(-1;0)$, $B(0;-1)$, $C(1;1)$, $D(0;0)$, $E(1;0)$, $F(0;1)$, $G(\pi;\pi)$, $H(\pi;0)$, $I(0;\pi)$

$h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \lg 10^{[x]-1}$;

$i\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{N},\ x \mapsto 3\{x\}$

Lineáris függvények

1083. Mi annak az elsőfokú függvénynek a hozzárendelési szabálya, amelynek képe illeszkedik az A és B pontra, ha

a) $A(0;5)$ és $B(1;3)$;

b) $A(0;5)$ és $B(3;8)$;

c) $A(1;7)$ és $B(2;10)$;

d) $A(-2;1)$ és $B(1;6)$?

1084. Egy elsőfokú függvény képe átmegy az (1; 2) ponton. Mi a hozzárendelési szabálya, ha ezen kívül még a

a) (0; 3) b) (0; –1) c) (–1; –1) d) (–2; 4)

ponton is áthalad?

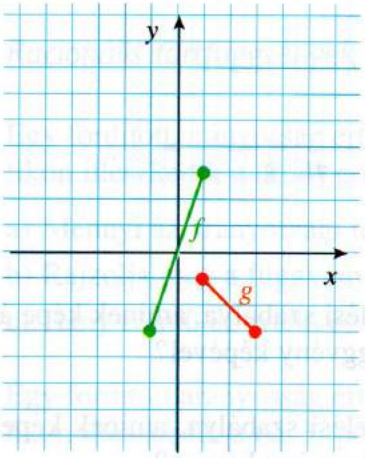
1085. Az f elsőfokú függvény grafikonja olyan m meredekségű egyenes, amely illeszkedik a P pontra. Adja meg az f függvény hozzárendelési szabályát, ha

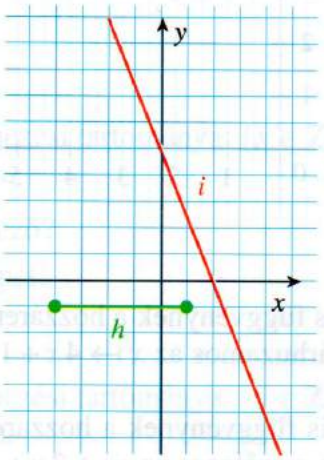
a) $m = 3$ és $P(0; 2)$; b) $m = \frac{2}{3}$ és $P\left(-\frac{1}{5}; \frac{4}{3}\right)$!

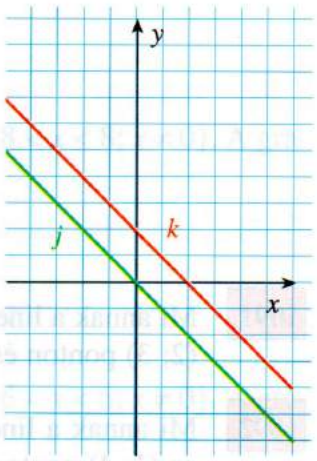
1086. Ábrázolja az $f(x) = \frac{2x-4}{5}$, $x \in \mathbf{R}$ függvényt! Mik a grafikonnak a tengelyekkel való metszéspontjai?

1087. Ábrázolja az $f(x) = \pi - \sqrt{2} \cdot x$, $x \in \mathbf{R}$ függvényt! Mik a grafikonnak a tengelyekkel való metszéspontjai? Mekkora a meredeksége?

1088. a) Mekkora az ábrázolt szakaszok, illetve egyenesek meredeksége? (A tengelyeken a beosztások egységnyiek.)







b) Melyek konstans függvény grafikonjai?

c) Melyek egyenes arányosság grafikonjai?

d) Melyek elsőfokú függvény grafikonjai?

e) Melyek lineáris függvény grafikonjai?

f) Határozza meg az ábrázolt függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

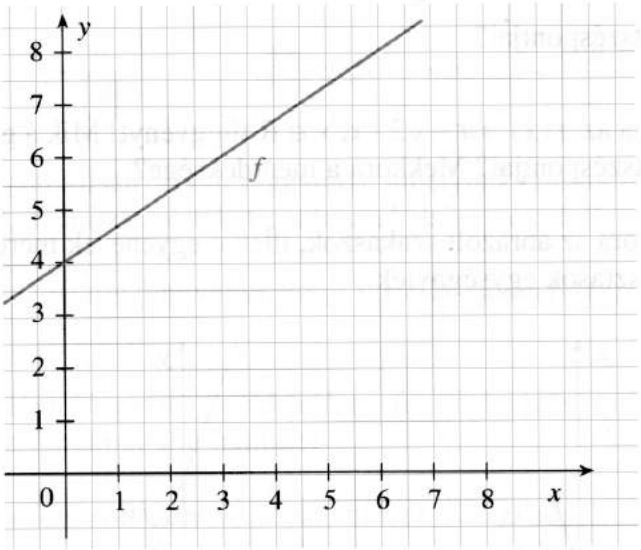
1089. Ábrázolja az $f(x) = \frac{3-\sqrt{5}x}{\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ függvényt! Mik a grafikonnak a tengelyekkel való metszéspontjai? Mekkora a meredeksége?

1090. Az ábrán az elsőfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható ($D_f = \mathbf{R}$).

a) Határozza meg az f függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozza meg az f zérushelyét!

c) Határozza meg az $\frac{f\left(-\frac{10}{3}\right) - f\left(\frac{8}{3}\right)}{-\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}$ tört értékét!



1091. Mi annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabálya, aminek képe átmegy a (2; 3) ponton és párhuzamos az $x \mapsto 4x + 1$ függvény képével?

1092. Mi annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabálya, aminek képe átmegy az (1; 4) ponton és merőleges az $x \mapsto 2x + 1$ függvény képére?

1093. A 20 °C-os víz felforralásához deciliterenként 33 600 J energia szükséges. Ábrázolja függvényként, mennyi energia szükséges 1 dl és 2 l közötti víz felforralásához, ha a lábos felmelegítése mindenképpen 30 000 J energiát igényel! Mi a hozzárendelési szabály?

1094. Egy ország gazdaságában 5 egyenlő hosszú időszakot vizsgálva a bevételek és a kiadások (valamely egységben) az alábbiak:

bevétel	100	200	300	400	500
kiadás	175	250	325	400	475

a) Határozza meg, hogyan függ a kiadás a bevételtől, feltételezve, hogy ez lineáris!

b) Határozza meg a „megtakarítást" az egyes időszakokban!

c) Írja fel, hogyan függ a megtakarítás a bevételtől, majd ábrázolja ezt a függvényt!

1095. Ábrázolja az $x \mapsto x\sqrt{3}+1$ függvényt ($x \in \mathbf{R}$)! A függvény grafikonjának hány olyan pontja van, melynek mindkét koordinátája egész szám?

1096. Ábrázolja az $x \mapsto -x\sqrt{2}+1$ függvényt ($x \in \mathbf{R}$)! Adja meg a függvény grafikonjának öt olyan pontját, melynek mindkét koordinátája irracionális szám!

1097. Adott egy lineáris függvény: $f(x) = ax + b$. Bizonyítsa be, hogy $|f(0)-2|$, $|f(1)-3|$ és $|f(2)-8|$ mindegyike nem lehet 1-nél kisebb!

Racionális törtfüggvények

1098. Egy fordított arányosság értelmezési tartománya: $\{x \in \mathbf{Z} \mid -8 < x < 8; x \neq 0\}$. A grafikon illeszkedik a (2; 4) pontra.

a) Mennyi az arányossági tényező?

b) Rajzolja meg a függvény képét!

c) Hány elemű az értékkészlet?

1099. Egy fordított arányosság értelmezési tartománya: $\{x \in \mathbf{Z} \mid -6 < x < 6; x \neq 0\}$. A grafikon illeszkedik a (2; 3) pontra.

a) Mennyi az arányossági tényező?

b) Rajzolja meg a függvény képét!

c) Szűkítse le úgy a függvényt, hogy az értelmezési tartomány négyelemű legyen!

1100. Az alábbi hozzárendelési szabályok közül melyik fejez ki egyenes, illetve fordított arányosságot?

$$f(x) = 4x;\quad g(x) = -\frac{1}{2}x;\quad h(x) = \frac{2}{x};\quad a(x) = x - 2;\quad b(x) = \frac{x}{x-1};\quad c(x) = 2^x$$

1101. Ábrázolja a következő függvényeket!

$$i(x) = \frac{1}{x-3} + 2,\ x \neq 3;\quad j(x) = \frac{3x-5}{x-1},\ x \neq 1;\quad k(x) = \frac{3x-9}{3x-9},\ x \neq 3$$

1102. Ábrázolja az $x \mapsto \frac{x-14}{x-2}$ függvényt ($x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$)! Adja meg a függvény grafikonjának összes olyan pontját, melynek mindkét koordinátája egész szám!

1103. a) Mennyi idő alatt ér a gépkocsi Budapestről Zamárdiba (115 km), ha átlagban $92\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad?

b) Ábrázolja függvényként, hogy mekkora menetidő tartozik a legalább 60 és legfeljebb $120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ közötti átlagsebességekhez!

c) Mi az előző pontbeli függvény hozzárendelési szabálya?

1104. Tekintse az $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - a}$ függvényt ($x, a \in \mathbf{R}$, $x \neq a$)! Az a paraméter mely értékei esetén illeszkednek egy egyenesre a függvény grafikonjának pontjai?

1105. Ábrázolja a következő függvényeket!

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1},\ x \neq -1;\qquad g(x) = \frac{3x+1}{x+1},\ x \neq -1;\qquad h(x) = \frac{3x-9}{3x-6},\ x \neq 2$$

Abszolútértékes függvények

1106. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto -|x|$ b) $x \mapsto -|-x|$

1107. Ábrázolja a következő függvényt ($x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$)!

$$x \mapsto \left|\frac{x^2}{x}\right|$$

1108. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$)!

a) $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ b) $x \mapsto \frac{|x|^2}{x^2}$

1109. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto x + |x|$ b) $x \mapsto x - |x|$

1110. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto |x-2| + x$ b) $x \mapsto 3x - |x-5|$

1111. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto \big||x+2|-1\big|$ b) $x \mapsto \big||x-1|-3\big|$

1112. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto \Big|\big||x+3|-1\big|-2\Big|$ b) $x \mapsto \Big|\big||x+1|-2\big|-3\Big|$

1113. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $x \mapsto |x-2| + |x+3|$ b) $x \mapsto |x-2| - |x+3|$

1114. Az $|x^2 - 5x + 6| = p$ egyenletben p valós paraméter. Adja meg az egyenlet megoldásainak számát p függvényében! (Grafikusan is dolgozhat!)

Egészrész, törtrész függvény

1115. Ábrázolja a következő függvényt ($x \in [-2; 3]$): $x \mapsto [x] - \{x\}$!

1116. Ábrázolja a következő függvényt ($x \in [-2; 3]$): $x \mapsto \{x\} - [x]$!

1117. Ábrázolja a következő függvényt ($x \in [-2; 3]$): $x \mapsto 2[x] + 1$!

1118. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in [-2; 3]$): $x \mapsto x + [x]$; $x \mapsto x \cdot [x]$!

1119. Hol értelmezhető az $x \mapsto \frac{8}{[x]}$ függvény? Ábrázolja!

Másodfokú függvények

1120. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonja olyan parabola, amelynek tengelypontja $(3; -2)$, és $f(1) = 6$. Mekkora a, b, c?

1121. Egy másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja $(2; 1)$, és $f(1) = 3$. Melyik ez a függvény?

1122. Hogyan függ

a) az adott 100 cm kerületű téglalap területe a téglalap egyik oldalától?

b) az adott 5 cm sugarú körcikk területe a cikket határoló ív hosszától?

c) az $r_1 = 2$ cm és az $r_2 = 3$ cm sugarú körök közös pontjainak a száma a körök középpontjának a távolságától?

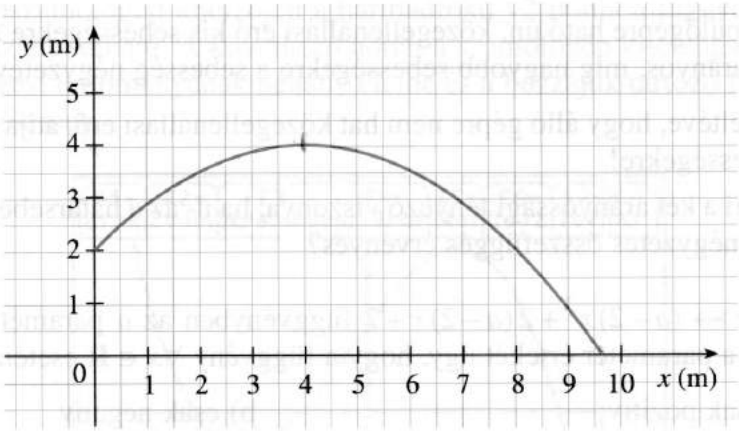
Rajzolja meg az egyes függvények grafikonjait!

1123. Az ábrán egy eldobott golyó röppályáját láthatjuk. A golyó a $(0; 2)$ pontból indult, és a $(4; 4)$ pontban volt pályája tetőpontján.

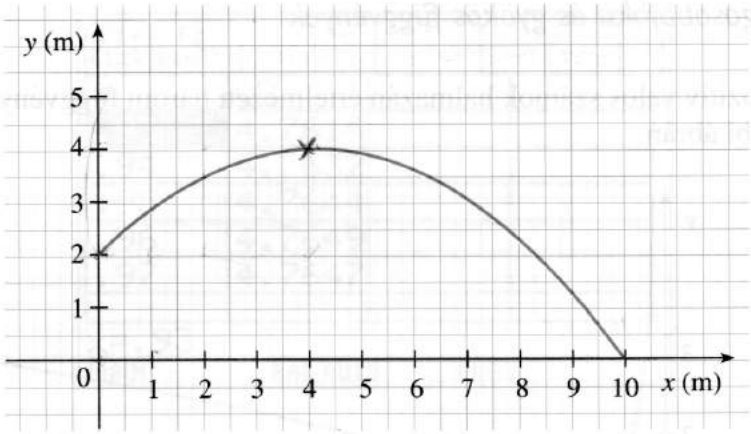
a) Milyen magasságban hagyta el a golyó az eldobó kezét?

b) Írja le a röppályát egy másodfokú függvény segítségével!

c) Az origótól mekkora távolságra ért földet a golyó?



1124. Az ábrán egy eldobott golyó röppályáját láthatjuk. A golyó a (0; 2) pontból indult, 4 m magasra emelkedett és a (10; 0) pontban ért földet.

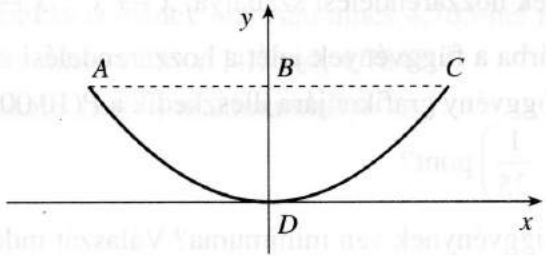


a) Hány méter távolságra repült a golyó az eldobó kezétől?

b) Írja le a röppályát egy másodfokú függvény segítségével!

c) Melyik koordinátájú pontban volt a golyó a legmagasabban?

1125. Egy parabolaantenna keresztmetszete a következő (AC = 60 cm, BD = 6 cm). Írja fel a metszetet jellemző függvény hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!



1126. A repülőgépre ható ún. közegellenállási erő kis sebességekre a sebességgel egyenesen arányos, míg nagyobb sebességekre a sebesség négyzetével arányos.

a) Feltéve, hogy álló gépre nem hat közegellenállási erő, adja meg a képletet kis sebességekre!

b) Mi a két arányossági tényező viszonya, ha v_0 az a határsebesség, ahonnan kezdve a négyzetes összefüggés érvényes?

1127. Az $x \mapsto (a-2)x^2+2(a-2)x+2$ függvényben az a paraméter ($a \neq 2$). Határozza meg a paraméter értékét úgy, hogy a függvény $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén

a) csak pozitív; b) csak negatív

értékeket vegyen fel!

Magasabbfokú és gyökös függvények

1128. A pozitív valós számok halmazán értelmezett három függvény grafikonja látható az alábbi ábrán.



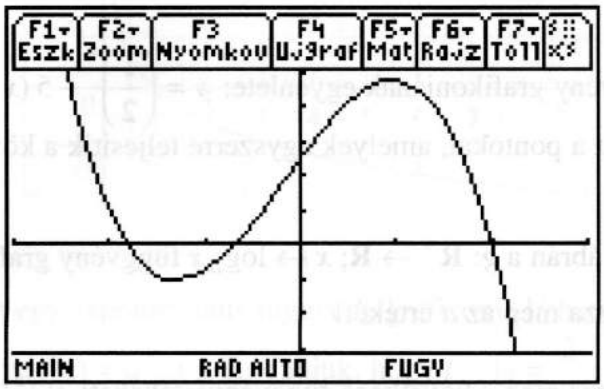
A függvények hozzárendelési szabálya: $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$; $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$; $x \mapsto x^{-1}$.

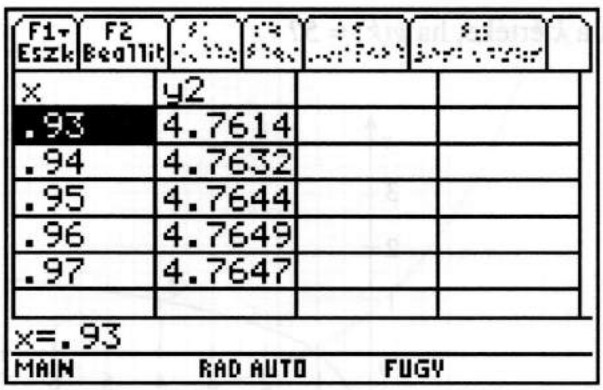
a) Állítsa párba a függvények jelét a hozzárendelési szabályukkal!

b) Melyik függvény grafikonjára illeszkedik a $P(10\,000;\ 10)$, és melyik grafikonjára a $Q\left(25;\ \frac{1}{25}\right)$ pont?

c) Melyik függvénynek van minimuma? Válaszát indokolja!

1129. Grafikus zsebszámológép kijelzőjén a harmadfokú y2 polinomfüggvény grafikonjának egy részlete látható. A következő ábrán a számológép kijelzőjén az y2 függvény értelmezési tartományának néhány eleme és a hozzájuk tartozó függvényértékek figyelhetők meg.





A közölt információkra támaszkodva döntse el, hogy az alábbi kijelentések közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Az y2 függvénynek a 0,96 abszolút maximumhelye.

b) Az y2 függvénynek a 0,96 lokális (helyi) minimumhelye.

c) Az y2 legnagyobb függvényértéke a 0,96.

d) Az y2 függvény lokális (helyi) maximumhelye eleme a]0,95; 0,97[intervallumnak.

e) Az y2 függvény értékkészletének biztosan nincs 4,765-nél nagyobb eleme.

f) Ha $x \in]0{,}95;\ 0{,}97[$, akkor $y2(x) \in]4{,}7644;\ 4{,}7647[$.

g) Az y2 függvény lokális (helyi) maximumhelye az 1.

Exponenciális és logaritmikus függvények

1130. Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

$f(x) = 2^x - 1$; $g(x) = -2^x$; $h(x) = 3 - 2^x$; $i(x) = 2^{-x}$!

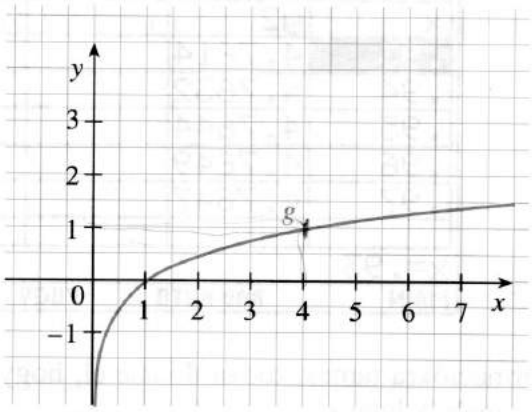
1131. Egy függvény grafikonjának egyenlete: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$ ($x \in \mathbf{R}$). Jelölje be a grafikonon azokat a pontokat, amelyek egyszerre teljesítik a következő feltételeket: $x < 1$, $y > -3$!

1132. Az alábbi ábrán a g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \log_a x$ függvény grafikonja látható.

a) Határozza meg az a értékét!

b) Határozza meg a következő függvényértékeket: $g(2^5)$; $g\left(\frac{1}{4^3}\right)$; $g(16^{-3})$!

c) Mennyi a k értéke, ha $g(k) = 5$?

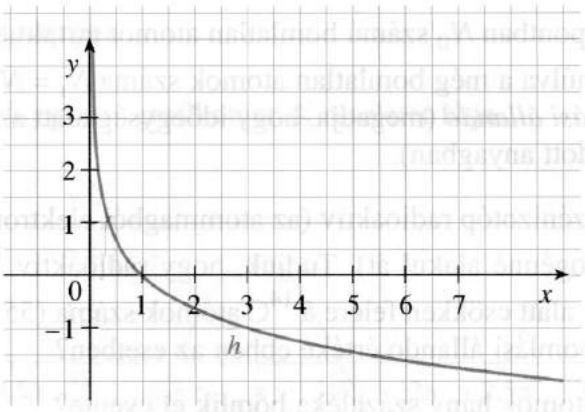


1133. A következő ábrán a h: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \log_a x$ függvény grafikonja látható.

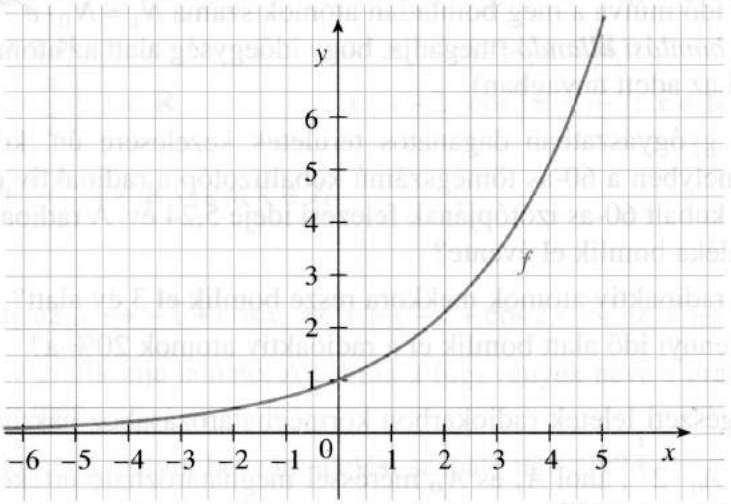
a) Határozza meg az a értékét!

b) Határozza meg a következő függvényértékeket: $h(9^5)$; $h\left(\frac{1}{27^3}\right)$; $h(3^{1,8})$!

c) Mennyi a b értéke, ha $h(b) = -4$?



1134. A következő ábrán egy exponenciális függvény grafikonja látható. A függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = a^x$; $x \in \mathbf{R}$. Tudjuk, hogy $f(-1) = \frac{2}{3}$.



a) Határozza meg az a értékét!

b) Adja meg a függvény értékkészletét!

c) A grafikon alapján $f(4) = 5$ látszik. Igaz-e ez a sejtés? Válaszát indokolja!

1135. Egy tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 m^2 vízfelület fed be, majd hetente megduplázza a befedett felületet.

a) Ábrázolja, hogyan függ a befedett terület a hetekben mért időtől!

b) Olvassa le a grafikonról, hogy mennyi idő alatt lesz a befedett terület 16 m^2, 20 m^2, 40 m^2!

1136. Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve *bomlási állandó* (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban).

a) A ^{14}C szénizotóp radioaktív (az atommagból elektron lép ki és így 7-es rendszámú nitrogénné alakul át). Tudjuk, hogy radioaktív ^{14}C-et tartalmazó anyagban 5570 év alatt csökken felére a ^{14}C atomok száma (5570 év a *felezési ideje*). Mekkora a bomlási állandó értéke ebben az esetben?

b) A ^{14}C atomok hány százaléka bomlik el évente?

c) Hány év alatt bomlik el a radioaktív szenet tartalmazó anyagban a ^{14}C atomok 80%-a?

1137. Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve *bomlási állandó* (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban).

a) A gyógyászatban daganatos területek kezelésére ún. kobaltágyút használtak, amelyben a 60-as tömegszámú kobaltizotóp a radioaktív (gamma-sugár) forrás. A kobalt 60-as izotópjának felezési ideje 5,24 év. A radioaktív atomok hány százaléka bomlik el évente?

b) A radioaktív atomok mekkora része bomlik el 3 év alatt?

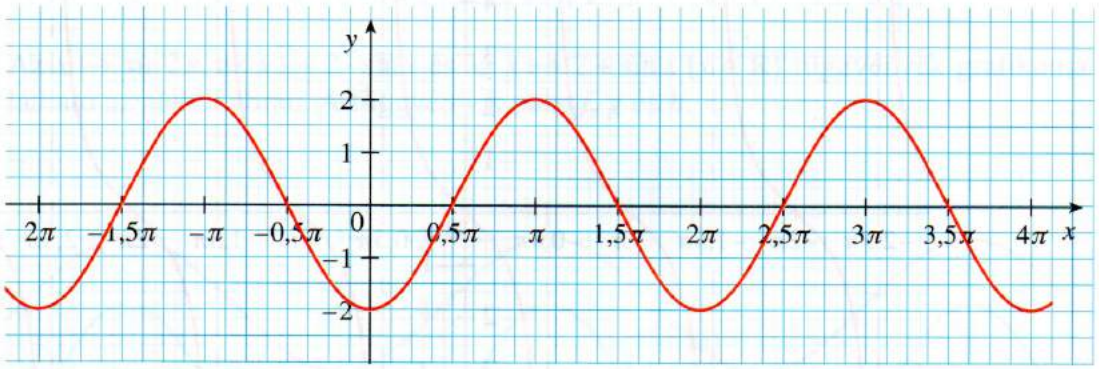
c) Mennyi idő alatt bomlik el a radioaktív atomok 20%-a?

1138. A régészeti leletek radiokarbon kormeghatározásához használt egyik összefüggés: $A_t = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, ahol A_t és A_0 méréssel meghatározható értékek, T a ^{14}C szénizotóp felezési ideje (5570 év), t pedig a vizsgált anyag meghatározandó életkora. Ha – egy leleten elvégzett mérések alapján – A_t háromszorosa az A_0-nak, akkor milyen idősnek mondható a régészeti lelet a radiokarbon-módszer szerint?

1139. Ábrázolja az $x \mapsto \log_x 2$ függvényt ($0 < x, x \neq 1$)!

Trigonometrikus függvények

1140. Az alábbi ábrán egy függvény grafikonjának részletét látja.



A következő függvények közül melyek grafikonja egyezhet meg a fentivel?

$x \mapsto -2 \cdot \cos x;\ x \in \mathbf{R}$

$x \mapsto -2 \cdot \sin x;\ x \in \mathbf{R}$

$x \mapsto -2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ x \in \mathbf{R}$

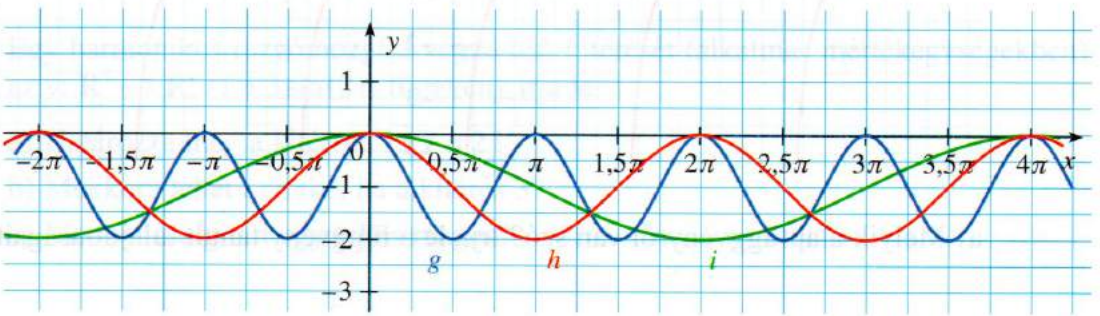
$x \mapsto -2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ x \in \mathbf{R}$

$x \mapsto -2 \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

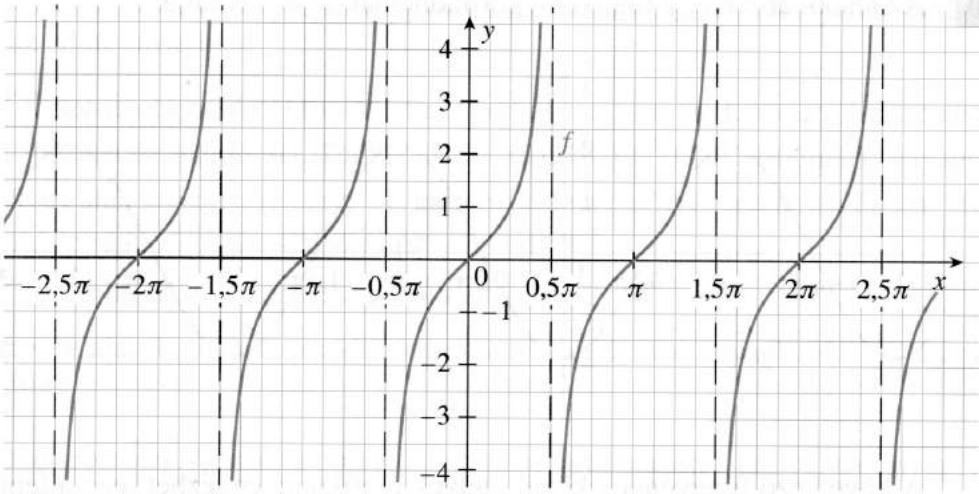
1141. Az alábbi ábrán az $x \mapsto -1 + \cos x$, az $x \mapsto -1 + \cos 2x$ és az $x \mapsto -1 + \cos\frac{x}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonja látható. Az ábrán a függvények neve a grafikonjukhoz „közel" található meg.

a) Melyik grafikonhoz melyik hozzárendelési szabály tartozik?

b) Az ábra alapján úgy látszik, több olyan pont is van, amelyik egyszerre mindhárom grafikonra illeszkedik. Igaz-e ez a sejtés? Ha igaz, akkor adjon meg legalább 3 ilyen tulajdonságú pontot!



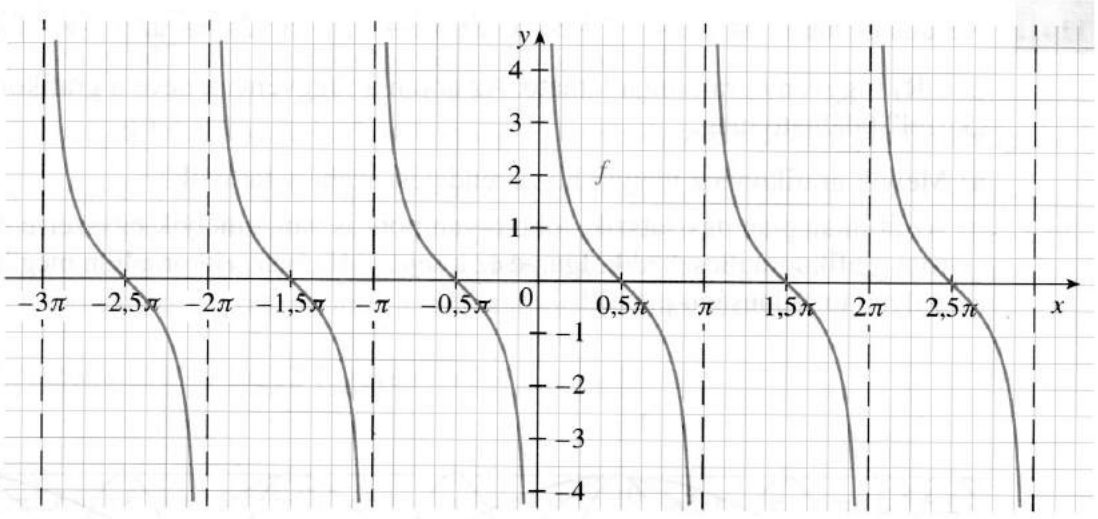
1142. Az alábbi ábrán egy ismert alapfüggvény grafikonja látható. Legyen a függvény neve f.



a) Melyik alapfüggvényről van szó? Írja le a függvény tanult tulajdonságait!

b) Igaz-e az a kijelentés, hogy ha $0 < x < 0{,}5\pi$, akkor $(f(x) \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$? Válaszát indokolja!

1143. Az alábbi ábrán egy ismert alapfüggvény grafikonja látható. Legyen a függvény neve f.

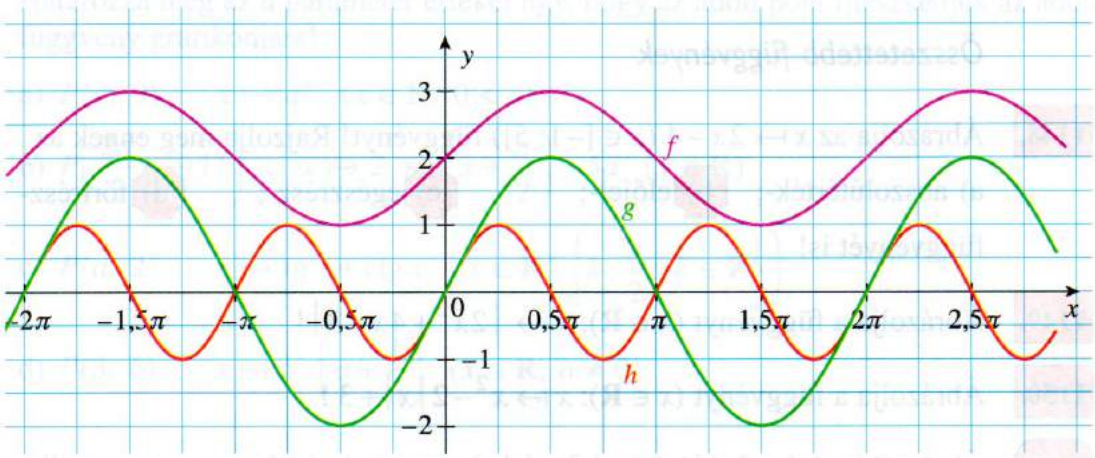


a) Melyik alapfüggvényről van szó? Írja le a függvény tanult tulajdonságait!

b) Határozza meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$4 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) !$$

1144. Az $x \mapsto \sin 2x$, az $x \mapsto 2 \cdot \sin x$ és az $x \mapsto 2 + \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvények grafikonja látható az alábbi ábrán. A függvények neve f, g és h.



a) Állítsa párba a függvények nevét és hozzárendelési szabályát!

b) Ábrázolja és jellemezze az $x \mapsto f(x) - g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényt!

1145. Döntse el, melyik igaz, melyik hamis az alábbi kijelentések közül! Válaszait indokolja!

a) Ha $a \in]0; \pi[$, akkor $\sin a < \cos a$.

b) Ha $a \in]0; \pi[$, akkor $\sin a < 1$.

c) Ha $a \in]0; \pi[$, akkor $\sin a \geq 0$.

d) Ha $a \in]0; \pi[$, $b \in]0; \pi[$ és $a > b$, akkor $\cos a < \cos b$.

e) Ha $a \in]0; \pi[$, $b \in]0; \pi[$ és $a > b$, akkor $\sin a > \sin b$.

1146. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését (alkalmas mértékegységekben) az y: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $t \mapsto 3 \sin(2t)$ függvény írja le.

a) Határozza meg a kitérést, ha $t = 2$!

b) Mekkora lehet t értéke, ha a kitérés 3?

c) Mennyi ideig tart egy teljes rezgés?

1147. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test sebességét (alkalmas mértékegységekben) a $v\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $t \mapsto 3\cos(0{,}5\,t)$ függvény írja le.

a) Határozza meg a test sebességét, ha $t = 2$!

b) Mekkora lehet t értéke, ha a sebesség -6?

c) Mennyi ideig tart egy teljes rezgés?

Összetettebb függvények

1148. Ábrázolja az $x \mapsto 2x-4$ ($x \in [-1; 5]$) függvényt! Rajzolja meg ennek az

a) abszolútérték-; b) előjel-; c) egészrész-; d) törtrész-

függvényét is!

1149. Ábrázolja a függvényt ($x \in \mathbf{R}$): $x \mapsto |2x^2+4x-3|$!

1150. Ábrázolja a függvényt ($x \in \mathbf{R}$): $x \mapsto x^2-2|x|+3$!

1151. Ábrázolja a függvényeket!

$f(x) = \left|\sqrt{x-2}\right|$ $(2 \le x)$; $g(x) = \left|\sqrt{x+3}-2\right|$ $(-3 \le x)$

1152. Ábrázolja a függvényt: $x \mapsto \dfrac{3x-6}{|x-2|}$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{2\})$!

1153. Ábrázolja a függvényt: $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2}{|x-1|}$ $(x \neq 1)$!

1154. Ábrázolja a függvényeket: $x \mapsto x \cdot |x|$ $(x \in \mathbf{R})$; $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$!

1155. Ábrázolja a függvényt: $x \mapsto \dfrac{x^2-16}{|x|-4}$ $(x \neq \pm 4)$!

1156. Ábrázolja a függvényeket: $x \mapsto |\sin x|$; $x \mapsto \sin|x|$; $x \mapsto |\sin|x||$ $(x \in \mathbf{R})$!

1157. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés: $\sqrt{(x-\pi)\cdot \sin x}$?

1158. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés: $\sqrt{\lg(x^2 - 7x + 13)}$?

1159. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés?

$$\frac{2x^2}{\lg(x-3)} + \sqrt{16 - x}$$

1160. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az adott pont illeszkedjék az adott függvény grafikonjára!

a) $P(2;\ 9)$ $\quad x \mapsto a^x \quad (x \in \mathbf{R},\ 0 < a)$

b) $P\left(\frac{2\pi}{3};\ -11\right)$ $\quad x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 5a \quad (x \in \mathbf{R})$

c) $P(a;\ 2)$ $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \quad \left(x \in \mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}\right)$

d) $P(3;\ 6)$ $\quad x \mapsto x \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) \quad (x \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$

1161. Állapítsa meg az alábbi kifejezések lehető legbővebb értelmezési tartományát, és ábrázolja azon az alábbi szabályokkal megadott függvényeket!

$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$; $\quad g(x) = x^2 - 2x + 1$; $\quad h(x) = 2x^2 + 3x$;

$a(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$; $\quad b(x) = \frac{x^3}{2x^2}$; $\quad c(x) = \frac{x^2 + x - 20}{2x + 10}$

1162. a) Milyen értékeket vehet fel az $f(\alpha) = \sqrt{25 - 24\cos\alpha}$ kifejezés, ha α a $]0;\ \pi[$ tartományba esik?

b) Ábrázolja a fenti tartományon az f^2 függvényt!

1163. Adjon meg olyan f függvényt, melyre teljesül: $f^2(x) + 6 \cdot f(x) = 4x - 9 \quad (x \in D_f)$! Ábrázolja ezt a függvényt!

1164. a) Mi a lehető legbővebb értelmezési tartománya a $\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x - 1}$ kifejezésnek?

b) Ábrázolja az $x \mapsto \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x - 1}$ függvényt az a)-ban meghatározott halmazon!

Alkalmazások

1165. Vizsgálja meg az alábbi táblázatot, amely Magyarország népmozgalmi adatait tartalmazza ezrelékekben!

év	1949	1960	1970	1980	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
élveszületés	20,6	14,7	14,7	13,9	12,1	12,3	11,8	11,4	11,3	11,0	10,3	9,9	9,6
halálozás	11,4	10,2	11,6	13,6	14,1	14,0	14,4	14,6	14,3	14,2	14,0	13,7	13,9

a) Mely években volt „természetes szaporodás", illetve „természetes fogyás" Magyarországon?

b) Mekkora volt ezek mértéke 1949-ben, illetve 1998-ban, ezrelékben kifejezve, illetve létszámát tekintve? (Mindkét esetben vegye tízmilliósnak az összlakosságot!)

c) Készítsen grafikont a táblázat adatai alapján, és jelenítse meg rajta a természetes szaporodás, illetve fogyás mértékét!

1166. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 15 cm hosszú. Fejezze ki a gúla térfogatát

a) az alapél függvényeként;

b) az oldalél és az alaplap szögének függvényeként!

1167. Fejezze ki egy adott r sugarú körbe írt téglalap területét az egyik oldalának függvényeként!

1168. A Celsius-féle hőmérsékleti skála alappontjainak (0 °C és 100 °C) a Fahrenheit-skálán 32 °F és 212 °F felel meg.

a) Adjon meg általános formulát az átszámításhoz!

b) Hány Celsius-fok 90 °F?

c) Hány Fahrenheit-fok 20 °C?

1169. Egy tartályba két csövön át folyhat be a víz. Az első a tartályt egyedül 5 óra, a másik x óra alatt tölti meg.

a) Adja meg x függvényében, hogy mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha egyszerre mindkét csövön át folyik be a víz!

b) Mennyi a számszerű eredmény az előző kérdésben, ha $x = 15$?

c) Ábrázolja az a) pont alatti függvényt a $0 < x \leq 20$ intervallumon!

1170. Egy szöveg titkosítása történhet például azzal, hogy a betűket egy adott eljárással megváltoztatjuk, s az így keletkezett szöveget küldjük el. Az egyértelmű visszafejtés feltétele, hogy a betűhalmazon egy egy-egyértelmű függvény szerint végezzük el a titkosítást. Legyen a leképezés elve például az, hogy a magyar ábécé minden egyjegyű betűjéhez hozzárendeljük a felsorolásban rákövetkező harmadik betűt. (Itt a betűket „körbe írjuk", tehát az utolsó után ismét az első jön.)

A Á B C D E É F G H I Í J K L M N O Ó Ö Ő P Q R S T U Ú Ü Ű V W X Y Z

a) Ennek a szabálynak a felhasználásával írja fel a következő üzenet titkosítását: „Holnap is találkozunk."!

b) Adjon meg bonyolultabb kódolási eljárást!

1171. Az egyén által érzékelt (szubjektív) hangerősség és a hangforrás valódi (objektív) hangerőssége közötti összefüggés: $E = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, ahol I a $\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$-ben mért objektív hangerősség, E pedig a decibelben mért szubjektív hangerősség.

a) Az alig hallható suttogás objektív hangerőssége $I_0 = 10^{-12}\ \frac{\text{watt}}{\text{m}^2}$, a hangszóróból áradó hangos zenéé pedig ennek 1 milliószorosa. Szubjektíve milyen erősségűnek érzik az emberek ezeknek a hangforrásoknak a hangját?

b) Az 1000 Hz-es hangmagasságon süvítő repülőgép-motor hangosságát 130 decibelnek érzékeljük (3 méterről). Hányszorosa a motorzaj objektív hangerőssége a halk suttogásénak?

1172. Egy cég forintban kifejezett bevétele 6 egymást követő év végén a következő függvénnyel írható le: $t \mapsto 1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 1{,}06^t$, ahol $t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) Mekkora volt a bevétel a kezdő évben?

b) Hány százalékkal nőtt a bevétel évente?

c) Melyik évben érték el a 200 millió forintos bevételt?

1173. Egy cég forintban kifejezett éves önköltsége 6 egymást követő év végén a következő függvénnyel írható le: $t \mapsto 8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 0{,}97^t$, ahol $t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) Mekkora volt az önköltség a kezdő évben?

b) Hány százalékkal csökkent az önköltség évente?

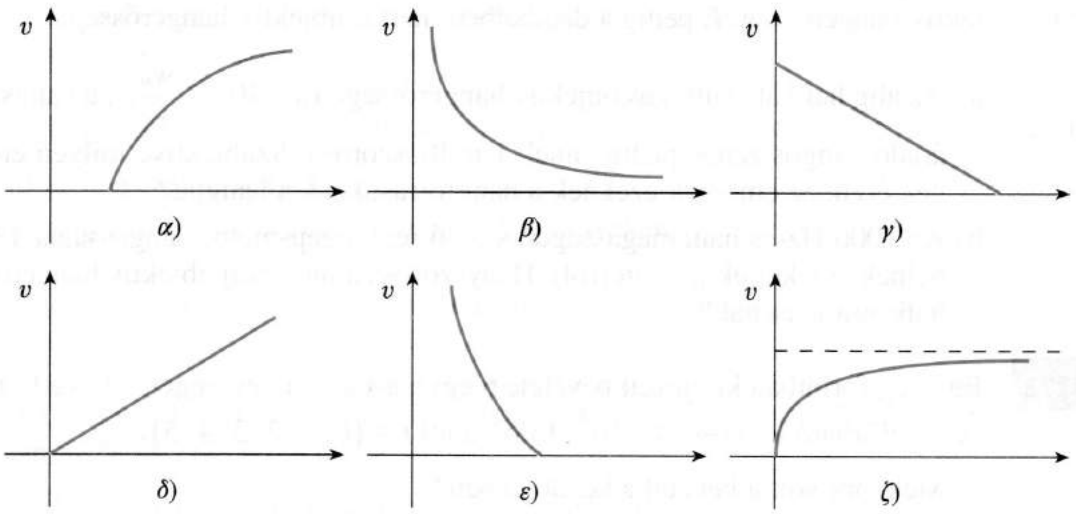
c) Melyik évben csökkent 75 millió forint alá az önköltség?

1174. Egylépcsős rakéta elméletileg elérhető legnagyobb sebessége: $v = 2{,}303 \cdot u \cdot \lg \frac{m_0}{m_v}$, ahol m_0 a rakéta kilövés előtti tömege, m_v a rakéta végső tömege az összes hajtóanyag elégetése után, u pedig a rakéta hajtóművéből kiáramló gáz sebessége a rakétatesthez viszonyítva.

a) A II. világháborús V2 rakéták esetén $m_0 = 13\,000$ kg, $m_v = 4000$ kg, $u = 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt. Legfeljebb mekkora sebességet érhettek volna el?

b) Technikai okok miatt m_0 nem haladhatja meg az m_v ötszörösét, és u sem lehet nagyobb $2{,}5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$-nál. Legfeljebb mekkora sebességet lehet egylépcsős rakétákkal elérni?

c) Az alábbi ábrák közül melyik mutatja az u és v, az m_0 és v, az m_v és v közti függvénykapcsolatot, ha az aktuális változóhoz képest a másik két paraméter állandó?



1175. A Nagyon Nagy Áruházban tévét vásároltunk. A tévé ára 100 ezer forint volt, de nem kellett a teljes vételárat kifizetni, csak annak 20%-át. A fennmaradó összeget havi részletfizetéssel egyenlítjük ki, minden esetben a hónap végén fizetve. A hitelt nyújtó bank a kölcsön után 3% kezelési díjat és a fennálló tartozás után évi 24%-os kamatot számít fel. (A kezelési díjat hozzáírja a tartozásunkhoz.) A bank a kölcsönadott összeg után időarányosan számítja fel a kamatot (tehát ha valaki 1 hónapig „használta" a bank pénzét, akkor 2%-os kamatot kell fizetnie).

a) Számítsa ki, mekkora a fennálló tartozásunk az egyes hónapok végén a törlesztés kifizetése és a bank felszámított kamatának beszámítása után, ha havonta 12 732 forintot törlesztünk. Foglalja táblázatba az adatokat!

b) Szemléltesse oszlopdiagramon a fennálló tartozásunk nagyságát!

1176. A Nagyon Nagy Áruházban tévét vásároltunk. A tévé ára 100 ezer forint volt, de nem kellett a teljes vételárat kifizetni, csak annak 20%-át, a fennmaradó összeget havi részletfizetéssel egyenlítjük ki, minden esetben a hónap végén fizetve. A hitelt nyújtó bank a kölcsön után 3% kezelési díjat és a fennálló tartozás után évi 24%-os kamatot számít fel. A kezelési díjat a kölcsön folyósításakor ki kellett fizetni. A bank a kölcsönadott összeg után időarányosan számítja fel a kamatot (tehát ha valaki 1 hónapig „használta" a bank pénzét, akkor 2%-os kamatot kell fizetnie). A havi törlesztőrészlet 12 361 Ft.

a) Számítsa ki, hogy a havonta fizetett törlesztőrészletekből hány forint jut az egyes hónapok végén a tőketartozás törlesztésére, és hány forint a fizetett kamat! Foglalja táblázatba az adatokat!

b) Szemléltesse oszlopdiagramon az a) feladatban kiszámolt értékeket!

1177. Ön egy befektetési cég alkalmazottja. Egy ügyfélnek, aki 10 évre szeretné befektetni Önöknél a pénzét, az alábbi grafikonon szemlélteti, hogyan változik az Ön cégénél elhelyezett 2 millió forint értéke az idő múlásával:



Elmondja, hogy cége kamatos kamatot fizet a befektetett összegre, s garantálja, hogy 10 évig a kamatláb változatlan marad. Az ügyfél a következő kérdéseket teszi fel Önnek:

a) 5 év múlva lesz-e 3 millió forintja?

b) Mekkora az Ön cége által ígért éves kamatláb?

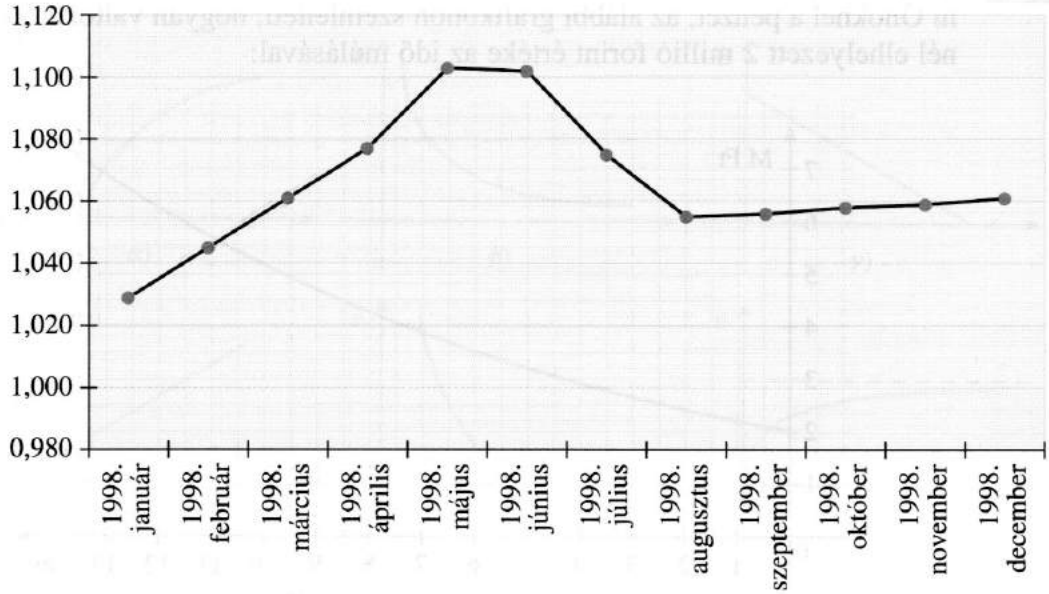
c) Egy másik megbízható befektető cég olyan (csak 10 éves időtartamra köthető) konstrukciót kínál, amelyik szerint az első 5 évben évi 14 %-os kamatos kamatot adnak, a második 5 évben azonban csak 5%-osat. Lehet, hogy ott jobban járna 10 év után?

Írja le és indokolja válaszait!

1178. Az alábbi ábrán látható adatokat szemléltesse két másik módon is (pl. oszlopdiagrammal, sávgrafikonnal stb.)

Egy család kiadásainak megoszlása 1999-ben	
Élelmiszerek	27,16%
Szeszes italok, dohányáruk	8,91%
Ruházkodási cikkek	6,17%
Tartós fogyasztási cikkek	5,50%
Háztartási energia	8,89%
Egyéb cikkek, üzemanyagok	16,96%
Szolgáltatások	26,41%

1179. Az alábbi vonalas grafikonon az 1998. év élelmiszer árindexének változása látható az 1997 decemberéhez viszonyítva.



a) Foglalja táblázatba az adatokat!

b) Hány százalékkal lett nagyobb az élelmiszer-árindex 1997 decemberéhez viszonyítva 1998 végére?

c) Hány százaléka az 1998 decemberi élelmiszer-árindex az 1998 májusinak?

1180. Az alábbi táblázatban az 1998. évi élelmiszer-árindex értékeit adtuk meg az 1997. év azonos hónapjához viszonyítva.

hónap	index
január	1,190
február	1,190
március	1,197
április	1,196
május	1,194
június	1,147
július	1,140
augusztus	1,128
szeptember	1,110
október	1,095
november	1,075
december	1,060

a) Ábrázolja grafikusan az adatokat!

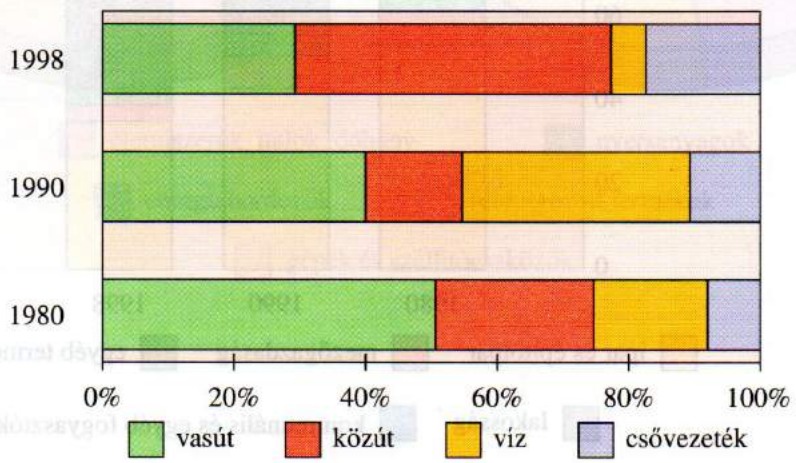
b) A táblázat alapján biztosan mondhatjuk-e, hogy 1998 decemberében átlagosan drágábban vásároltunk, mint 1997 decemberében?

c) A táblázat alapján biztosan mondhatjuk-e, hogy 1998 decemberében átlagosan olcsóbban vásároltunk, mint 1998 novemberében? Válaszát röviden indokolja!

1181. a) Határozza meg az ábra alapján, hogy az egyes ábrázolt években hány százaléka volt a vasúton szállított árumennyiségnek az egyes más módokon szállított mennyiség! (Az adatokat méréssel állapítsa meg!)

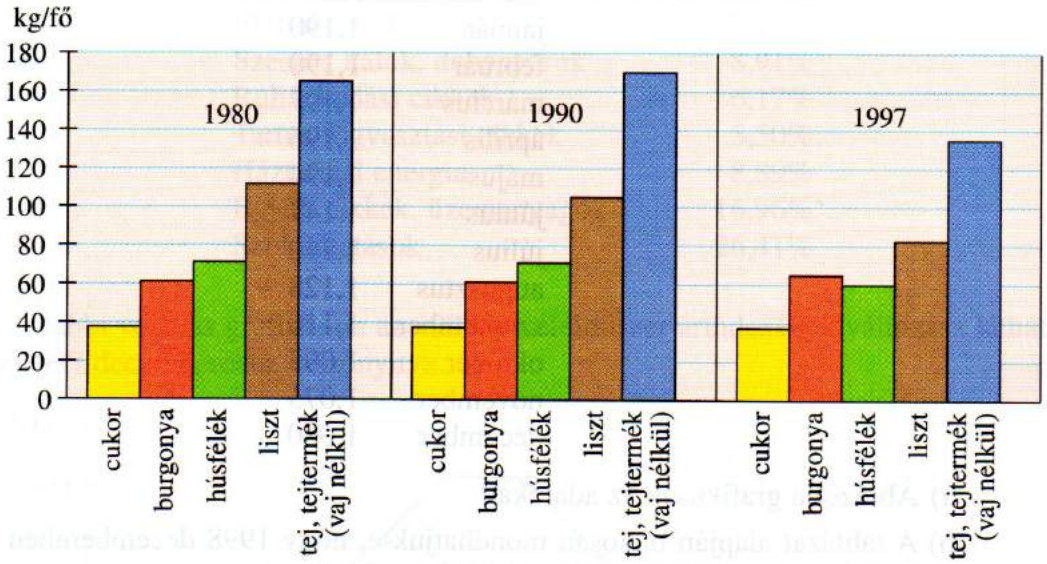
b) Ábrázolja a különféle módokon szállított mennyiségeket koordináta-rendszerben, függvényként!

Az áruszállítás megoszlása (árutonna-kilométer alapján)



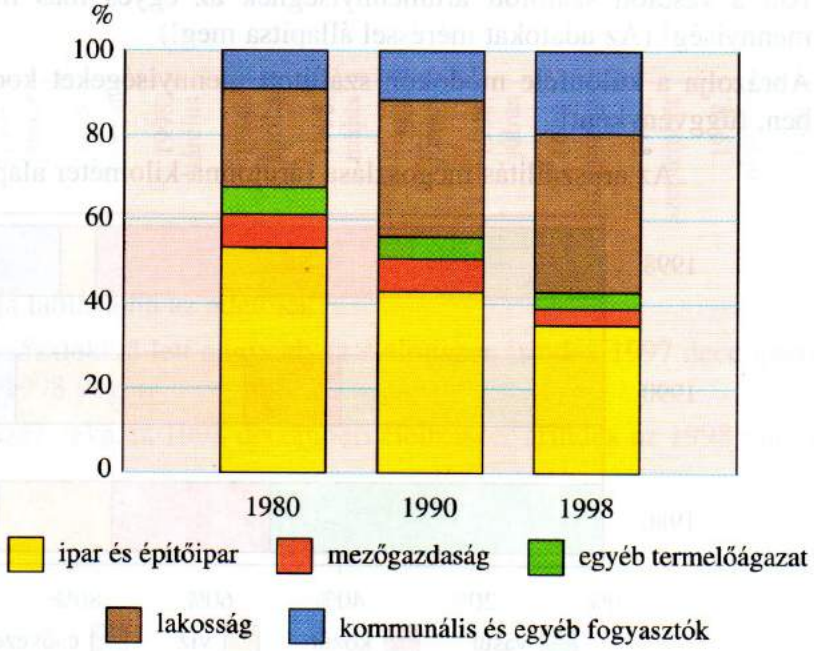
1182. Rajzolja át az oszlopdiagramokon ábrázolt adatokat kördiagramokba! (Az adatokat méréssel állapítsa meg!)

Főbb élelmiszerek egy főre jutó fogyasztása



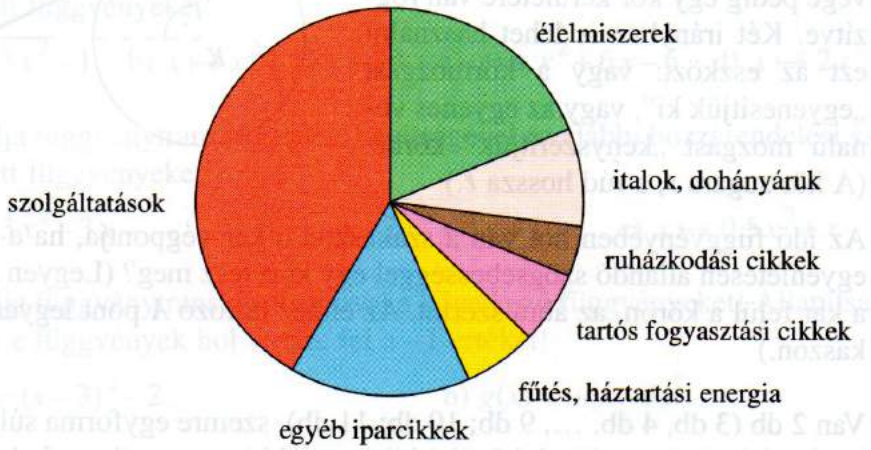
1183. Rajzolja át a sávdiagramokon ábrázolt adatokat kördiagramokba! (Az adatokat méréssel állapítsa meg!)

A főbb fogyasztók részesedése az összes energiafelhasználásból (%)



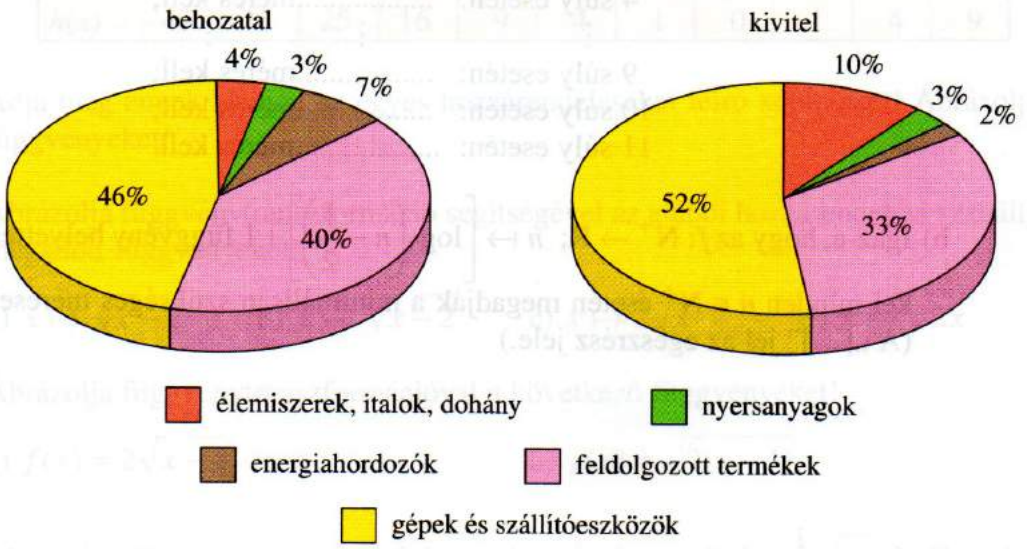
1184. Rajzolja át a háztartási kiadások kördiagramon ábrázolt adatait oszlopdiagramba! (Az adatokat méréssel állapítsa meg!)

A háztartási kiadások megoszlása (1997)

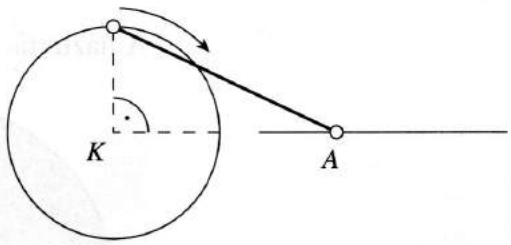


1185. Rajzolja át a külkereskedelmi forgalom kördiagramokon ábrázolt adatait oszlopdiagramokba!

A külkereskedelmi forgalom áruszerkezete (1998)



1186. A körmozgás egyenes vonalú mozgássá átalakításában használják azt a berendezést, amit a régi gőzmozdonyokon jól lehet látni, hogy a dugattyú karjának egyik vége egy szakaszon mozog, a másik vége pedig egy kör kerületére van rögzítve. Két irányban is lehet használni ezt az eszközt: vagy a körmozgást „egyenesítjük ki", vagy az egyenes vonalú mozgást „kényszerítjük" körbe. (A kör sugara r, a rúd hossza ℓ.)



Az idő függvényében hol van a szakaszon a kar végpontja, ha a körön levő pont egyenletesen állandó szögsebességgel egy kört tesz meg? (Legyen $t = 0$ pillanatban a kar felül a körön, az ábra szerint. Az ehhez tartozó A pont legyen a 0 pont a szakaszon.)

1187. Van 2 db (3 db, 4 db, ..., 9 db; 10 db; 11 db), szemre egyforma súlyunk és egy kétkarú mérlegünk. A súlyok közül 1 hibás, a többi azonos tömegű. A hibás súly nehezebb a többinél.

a) Legkevesebb hány méréssel tudjuk (szerencse nélkül) kiválasztani a hibás súlyt?

2 súly esetén: .....mérés kell;
3 súly esetén: .....mérés kell;
4 súly esetén: .....mérés kell;
⋮ ⋮ ⋮
9 súly esetén: .....mérés kell;
10 súly esetén: .....mérés kell;
11 súly esetén: .....mérés kell.

b) Igaz-e, hogy az $f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$; $n \mapsto \left[\log_3\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] + 1$ függvény helyettesítési értékei minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén megadják a minimálisan szükséges mérések számát? (A „[...]" jel az egészrész jele.)

3.2. Függvénytranszformációk

1188. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto 3x^2 - 1$ b) $x \mapsto x^2 - 12x + 30$ c) $x \mapsto x^2 + 6x - 6$ d) $x \mapsto 2x^2 + 6x + 8$

1189. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto 3x^2 - 3x$ b) $x \mapsto -2x^2 + 4x + 16$ c) $x \mapsto 0{,}5x^2 + x - 2$

1190. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! Állapítsa meg azt is, hogy e függvények hol veszik fel a -1 értéket!

a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$ b) $g(x) = -(x-3)^2$

1191. Értéktáblázatot készítettünk három másodfokú függvényhez:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$g(x)$	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	64
$h(x)$	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9

Adja meg ennek alapján az egyes hozzárendeléseket leíró képleteket! Ábrázolja a függvényeket!

1192. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \sqrt{x} - 2$ b) $x \mapsto \sqrt{x-2}$ c) $x \mapsto 2\sqrt{x}$ d) $x \mapsto \sqrt{2x}$

1193. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = 2\sqrt{x-4}$ b) $g(x) = \sqrt{2(x-4)}$

1194. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-3}$ függvényt! Adja meg x mindazon értékeit, amelyekre $f(x) \geq 1$!

1195. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 2$ b) $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

1196. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! Állapítsa meg azt is, hol veszik fel a –2 függvényértéket a függvények!

a) $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$ b) $g(x) = -\sqrt{x-3} + 2$

1197. Értéktáblázatot készítettünk a négyzetgyökfüggvény két transzformáltjához:

x	–1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$				0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$h(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$

Adja meg ez alapján az egyes hozzárendeléseket leíró képleteket! Ábrázolja a függvényeket!

1198. Legyen $f(x) = \sqrt{-x}$ és $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{-x+1}$. Írja le a transzformációs lépések sorrendjét a $h(x) = \sqrt{x}$ függvényből kiindulva! Ábrázolja az f és a g függvényeket!

1199. Ábrázolja az $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 25}{x - 5}}$ $(-5 \le x,\ x \neq 5)$ függvényt!

1200. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto |x| - 2$ b) $x \mapsto |x - 2|$ c) $x \mapsto 2|x|$ d) $x \mapsto |2x|$

1201. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! Állapítsa meg azt is, hol veszik fel a –2 függvényértéket a függvények!

a) $f(x) = |x + 2| - 3$ b) $g(x) = -|x + 2|$

1202. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 4$ b) $g(x) = -|x| + 4$

1203. Értéktáblázatot készítettünk az abszolútérték-függvény két transzformáltjához:

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$g(x)$	-6	-4	-2	-1	0	-1	-2	-4	-6
$h(x)$	-3	-1	1	2	3	2	1	-1	-3

Adja meg ez alapján az egyes hozzárendeléseket leíró képleteket! Ábrázolja a függvényeket!

1204. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \frac{1}{x} - 2$ b) $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ c) $x \mapsto \frac{2}{x}$ d) $x \mapsto \frac{1}{2x}$

1205. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \sin x - 2$ b) $x \mapsto \sin(x-2)$ c) $x \mapsto 2\sin x$ d) $x \mapsto \sin 2x$

1206. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ b) $g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

1207. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! A kapott ábra alapján állapítsa meg azt is, hol veszik fel a -1 függvényértéket a függvények!

a) $f(x) = 2\sin x + 1$ b) $g(x) = -2\sin x - 1$

1208. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ b) $g(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$

1209. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! Állapítsa meg azt is, hol veszik fel az 1 függvényértéket a függvények!

a) $f(x) = -2\sin 2x$ b) $g(x) = -2\sin\frac{1}{2}x$

1210. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket! Állapítsa meg azt is, hol veszik fel a -1 függvényértéket a függvények!

a) $f(x) = -2\cos 2x$ b) $g(x) = -2\cos\frac{1}{2}x$

1211. Ábrázolja az $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ függvényt! Írja le a transzformációs lépéseket a $g(x) = \sin x$ függvényből kiindulva!

1212. Ábrázolja a következő hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto |3^x|$ b) $x \mapsto 3^{|x|}$ c) $x \mapsto 3^3$

1213. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto 2^x - 2$ b) $x \mapsto 2^{x-2}$ c) $x \mapsto 2 \cdot 2^x$ d) $x \mapsto 2^{2x}$

1214. Ábrázolja függvénytranszformációval a következő függvényeket!

a) $f(x) = 3^x - 1$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

1215. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \log_2 x - 2$ b) $x \mapsto \log_2(x-2)$ c) $x \mapsto 2\log_2 x$ d) $x \mapsto \log_2 2x$

1216. Ábrázolja a következő hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ b) $x \mapsto \log_2(x-3)$

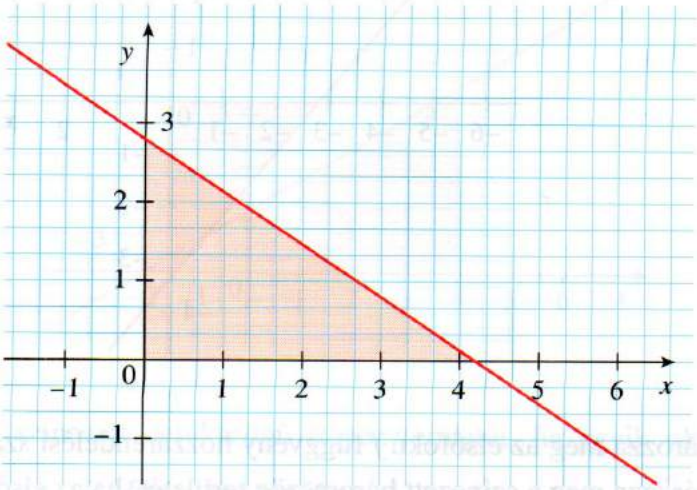
1217. Ábrázolja a következő hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \log_3 x$ b) $x \mapsto 1 + \log_3 x$ c) $x \mapsto \log_3 3x$

1218. Ábrázolja a következő hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

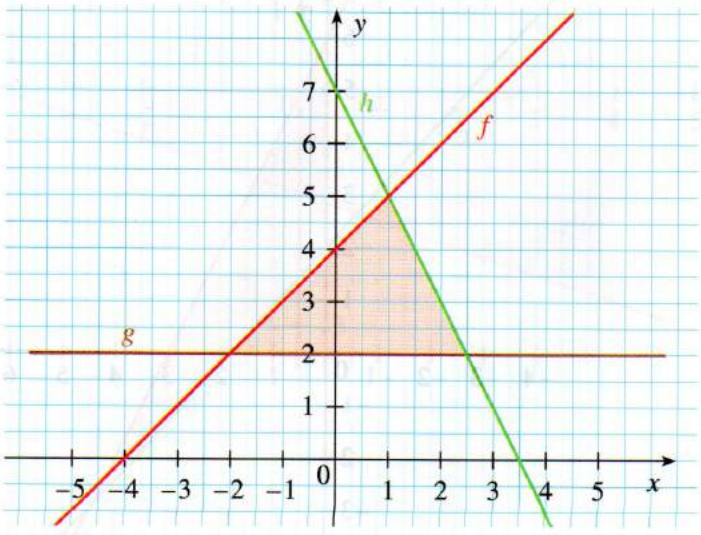
a) $x \mapsto \log_2 |x|$ b) $x \mapsto |\log_2 x|$ c) $x \mapsto \frac{1}{2}\log_2 x^2$

1219. Az ábrán az $x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{14}{5}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény grafikonja látható. Igazolja, hogy a színezett háromszög területe pontosan $\frac{147}{25}$!

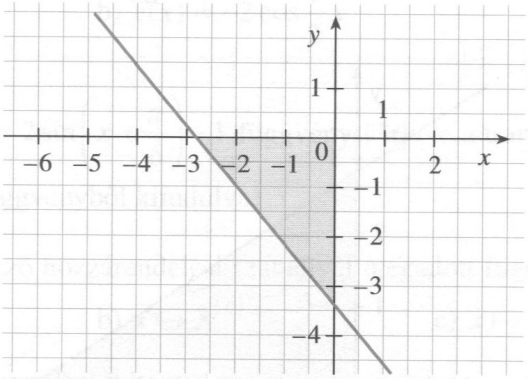


1220. a) Írja fel az ábrázolt lineáris függvények hozzárendelési szabályát!

b) Határozza meg a színezett háromszög területét!

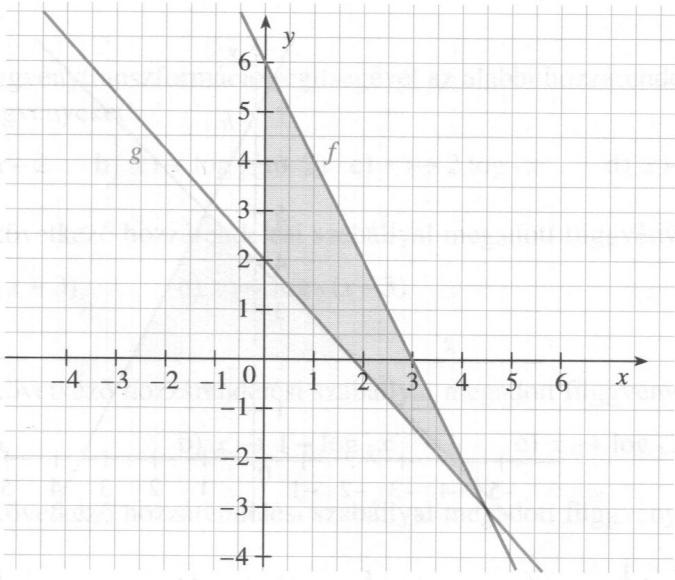


1221. Az ábrán az $x \mapsto -\frac{6}{5}x - \frac{27}{8}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény grafikonja látható. Határozza meg a színezett háromszög területét!

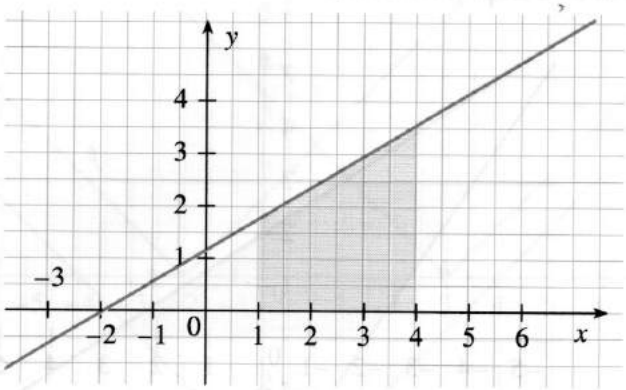


1222. a) Határozza meg az elsőfokú f függvény hozzárendelési szabályát!

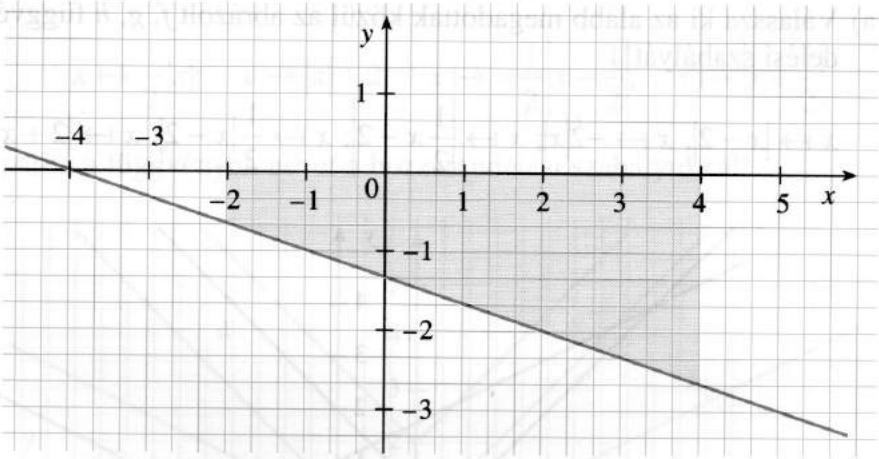
b) Határozza meg a színezett háromszög területét, ha az elsőfokú g függvény grafikonjának meredeksége $-\frac{10}{9}$!



1223. Számítsa ki a színezett négyszög területét, ha egyik oldalegyenese az $x \mapsto \frac{3}{5}x + \frac{8}{7}$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonja!

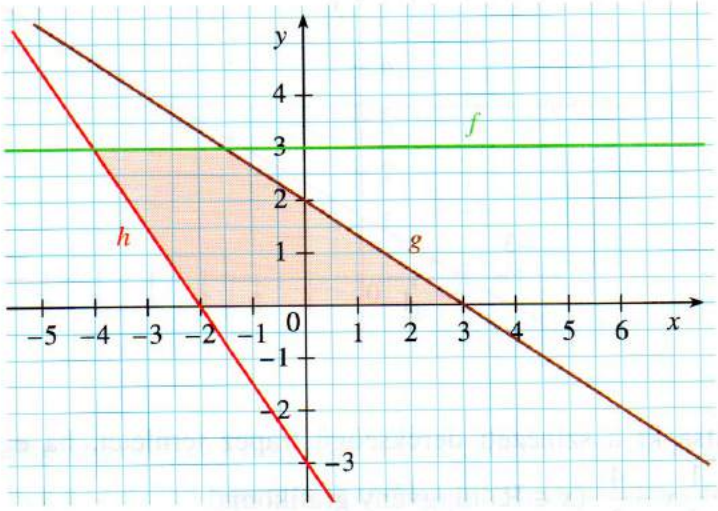


1224. Számítsa ki a színezett derékszögű trapéz területét, ha egyik oldalegyenese az $x \mapsto -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonja!



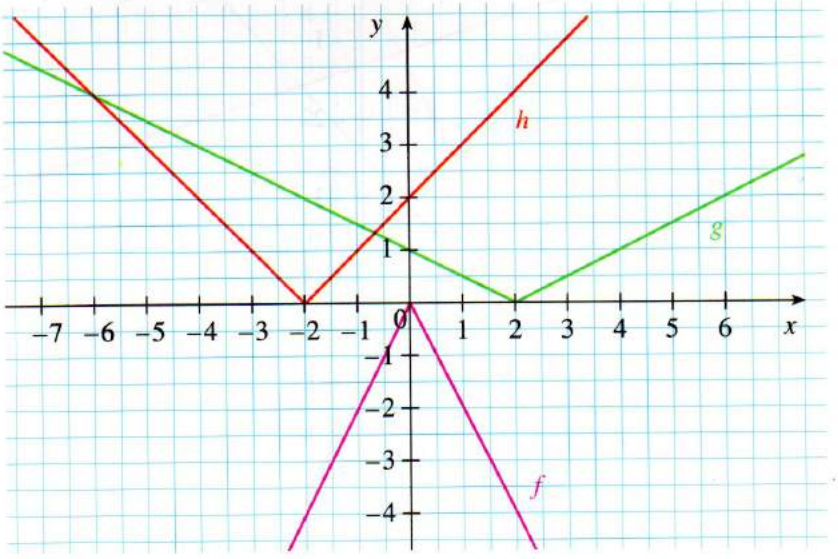
1225. a) Határozza meg, mely függvények grafikonjai alkotják a színezett trapéz oldalegyeneseit!

b) Számítsa ki a trapéz területét!



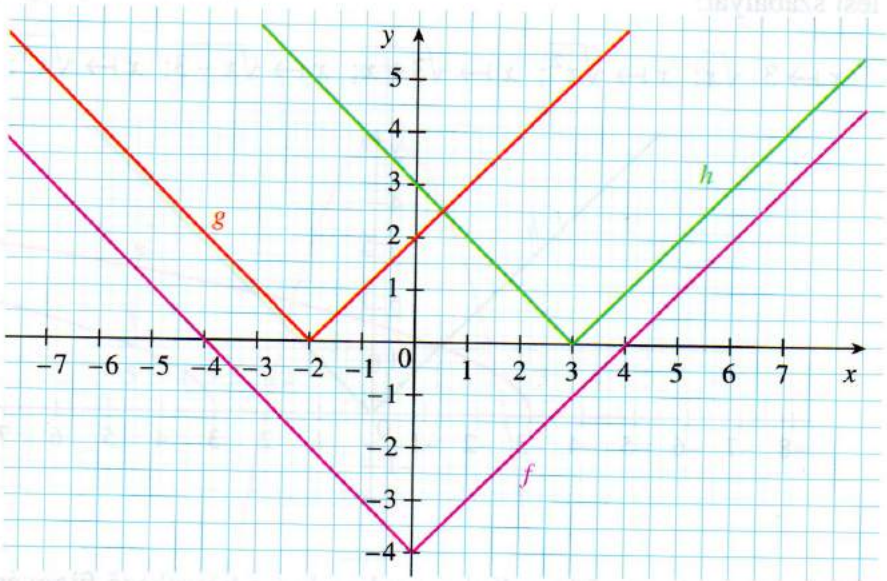
1226. a) Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt f, g, h függvények hozzárendelési szabályát!

$x \mapsto |x-2|$; $x \mapsto -2|x|$; $x \mapsto \left|\frac{1}{2}x-2\right|$; $x \mapsto \frac{1}{2}|x-2|$; $x \mapsto |2+x|$; $x \mapsto 2+|x|$



b) Határozza meg a következő függvényértékeket: $f(0)$; $g(0)$; $h(0)$!

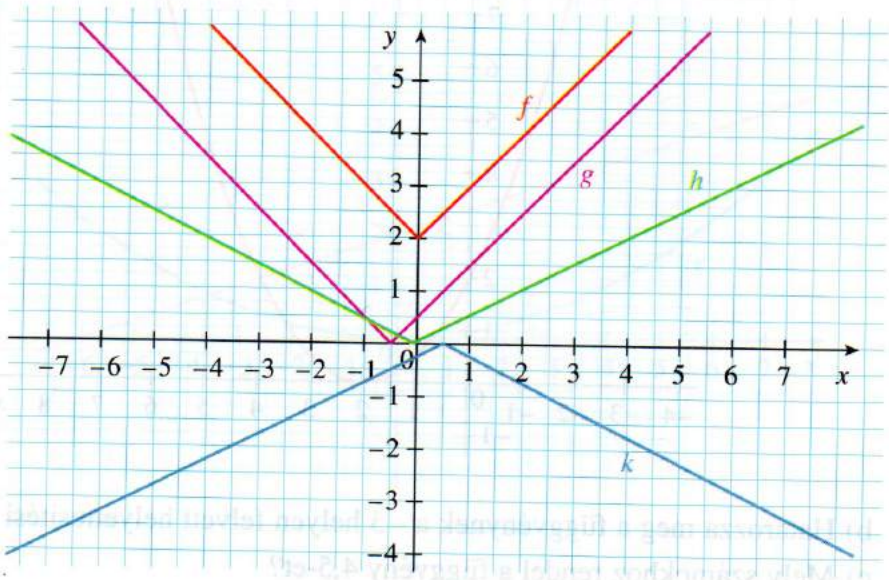
1227. Írja fel az f, g, h függvények hozzárendelési szabályát!



1228. Az f, g, h, k függvények hozzárendelési szabálya valamilyen sorrendben:

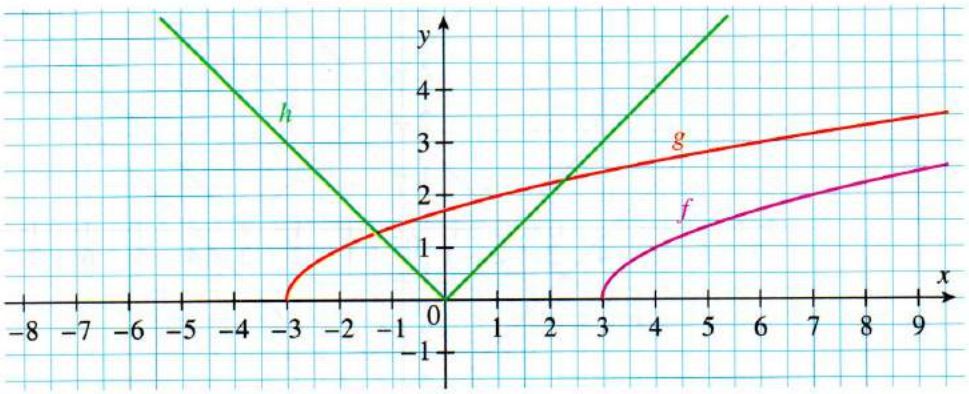
$$\cdot\ x \mapsto \frac{1}{2}|x|; \quad x \mapsto |x| + 2; \quad x \mapsto -\frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right|; \quad x \mapsto \left|x + \frac{1}{2}\right|.$$

Állítsa párba a függvények nevét a hozzárendelési szabályukkal!



1229. Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt *f*, *g*, *h* függvények hozzárendelési szabályát!

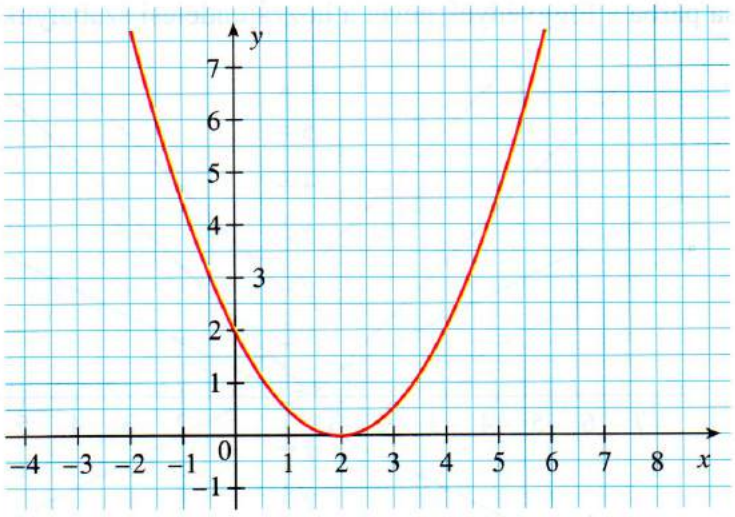
$x \mapsto 3 \cdot \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x^2}$; $x \mapsto \sqrt{3+x}$; $x \mapsto \sqrt{x-3}$; $x \mapsto \sqrt{x^4}$; $x \mapsto \sqrt{3-x}$



1230. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \sqrt{x^2}$ b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \sqrt{(x+2)^2}$

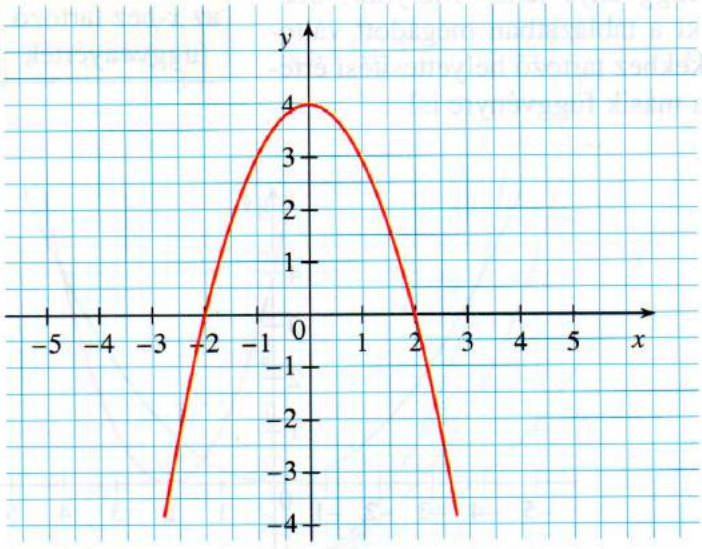
1231. a) Írja fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az ábrán látható!



b) Határozza meg a függvénynek a −3 helyen felvett helyettesítési értékét!

c) Mely számokhoz rendel a függvény 4,5-et?

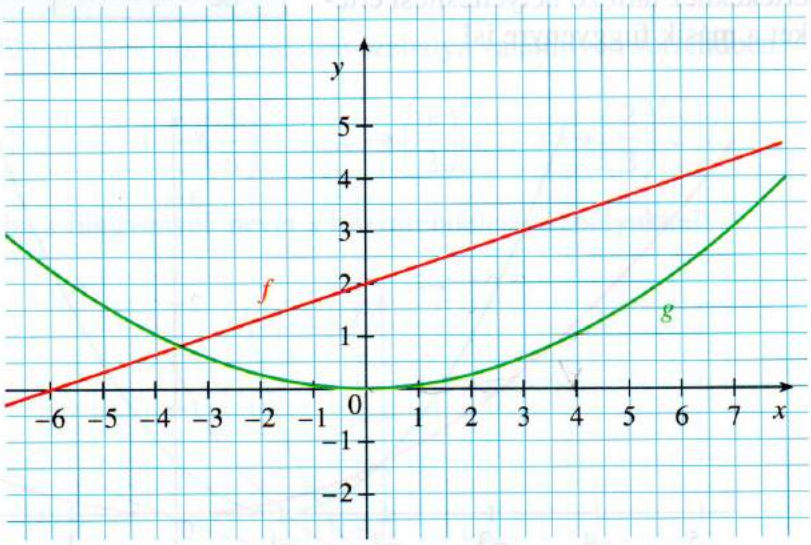
1232. a) Írja fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az ábrán látható!



b) Határozza meg a 4-hez tartozó függvényértéket!

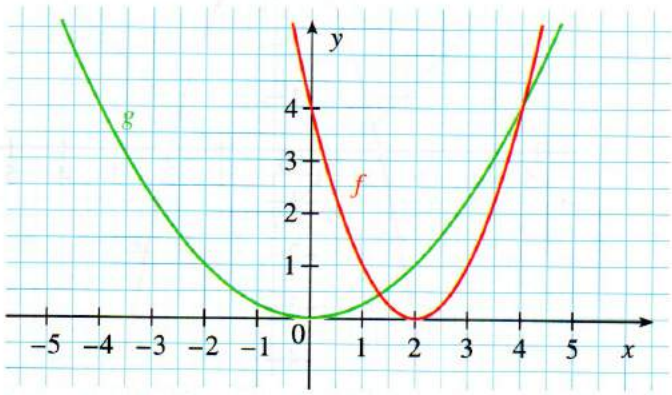
c) Mely számokhoz rendel a függvény 3-at?

1233. Az ábrán egy első- és egy másodfokú függvény grafikonja látható. Írja fel a függvények hozzárendelési szabályát!



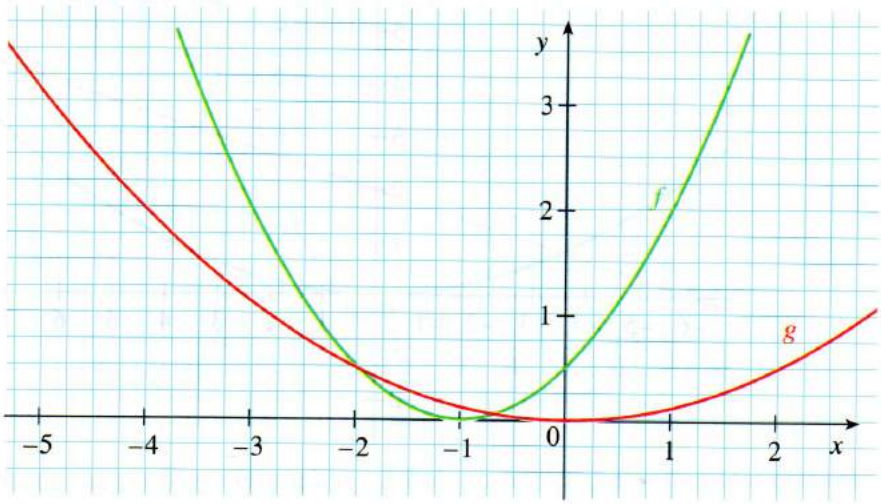
1234. Az ábrázolt másodfokú függvények f és g. A mellékelt értéktáblázat csak az egyik függvényé lehet. Melyiké? Számítsa ki a táblázatban megadott változóértékekhez tartozó helyettesítési értékeket a másik függvényre is!

x	$\frac{4}{3}$	4	100
az x-hez tartozó függvényérték	$\frac{4}{9}$	4	2 500



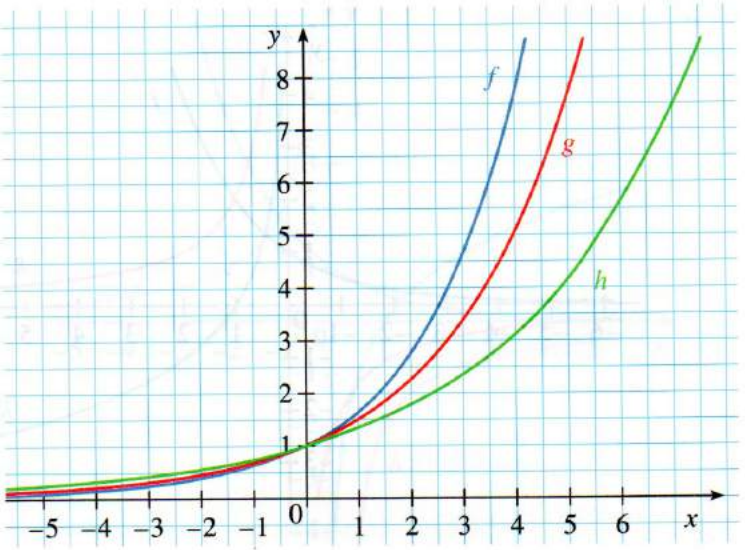
1235. Az ábrázolt másodfokú függvények f és g. A mellékelt értéktáblázat csak az egyik függvényé lehet. Melyiké? Számítsa ki a táblázatban megadott változóértékekhez tartozó helyettesítési értékeket a másik függvényre is!

x	-101	-2	$-\frac{2}{3}$
az x-hez tartozó függvényérték	5 000	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$



1236. a) Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt f, g, h függvények hozzárendelési szabályát!

$$x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{5}{3}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

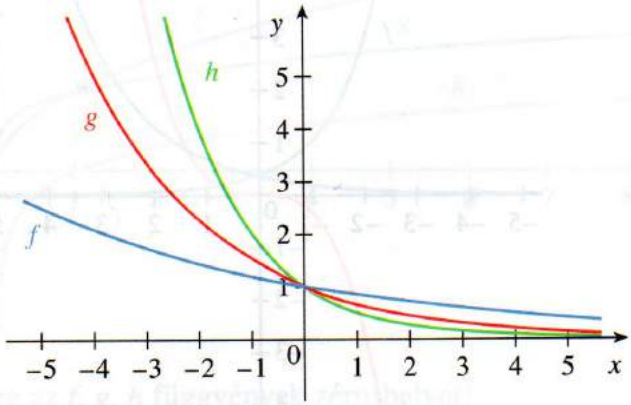


b) Az ábra alapján $g(4) = 5$ igaznak látszik. Számológépe segítségével határozza meg az $|5 - g(4)|$ értékét 3 tizedesjegy-pontossággal!

1237. Az f, g, h függvények hozzárendelési szabálya valamilyen sorrendben:

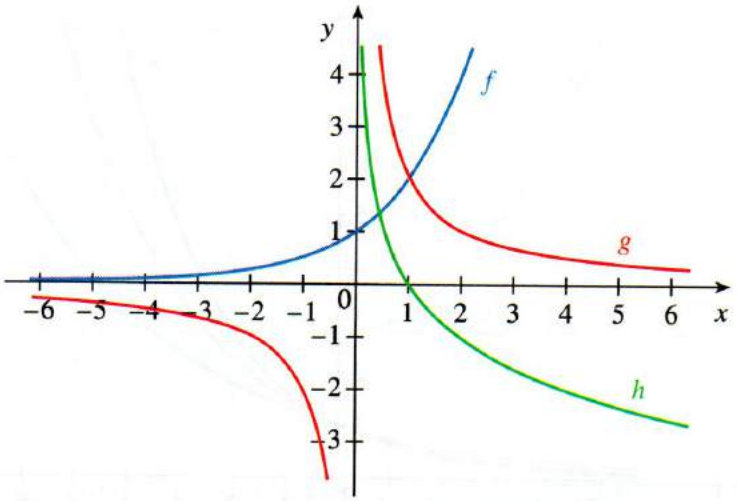
$$x \mapsto \left(\frac{5}{6}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Állítsa párba a függvények nevét a hozzárendelési szabályukkal!



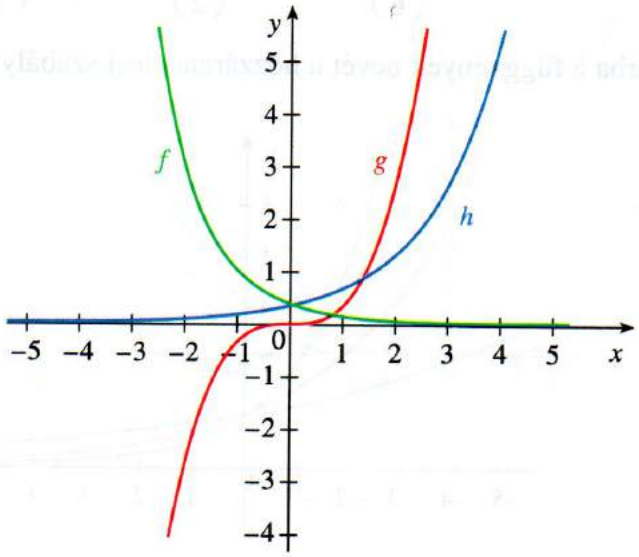
1238. Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt *f*, *g*, *h* függvények hozzárendelési szabályát!

$x \mapsto 2x$; $x \mapsto 2^x$; $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x \mapsto \frac{2}{x}$; $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$; $x \mapsto x^2$



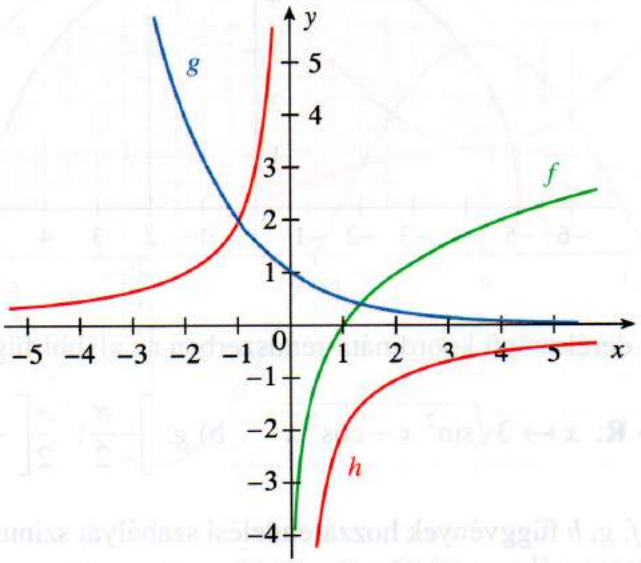
1239. Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt *f*, *g*, *h* függvények hozzárendelési szabályát!

$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$; $x \mapsto \frac{1}{3}x^4$; $x \mapsto \frac{1}{3}\cdot 2^x$; $x \mapsto \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $x \mapsto 3^x$; $x \mapsto \frac{1}{3}$



1240. a) Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt f, g, h függvények hozzárendelési szabályát!

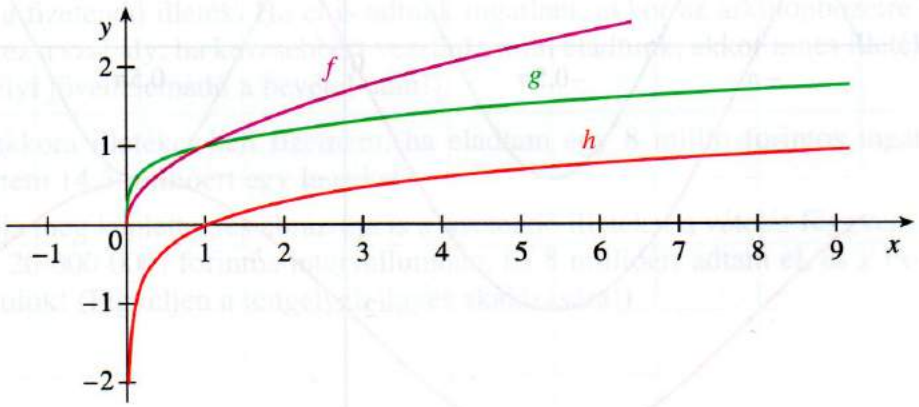
$$x \mapsto -\frac{2}{x};\quad x \mapsto -2+\frac{1}{x};\quad x \mapsto -2^x;\quad x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad x \mapsto \log_2 x;\quad x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$$



b) Határozza meg $f(1)$ és $f\left(\frac{1}{8}\right)$ értékét!

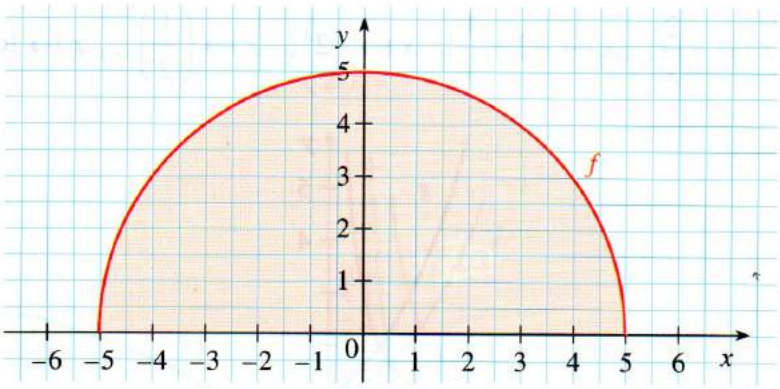
1241. a) Válassza ki az alább megadottak közül az ábrázolt f, g, h függvények hozzárendelési szabályát!

$$x \mapsto \lg x;\quad x \mapsto \sqrt{x};\quad x \mapsto \log_2 x;\quad x \mapsto \sqrt{x^2};\quad x \mapsto \sqrt[4]{x};\quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$$



b) Határozza meg az f, g, h függvények zérushelyét!

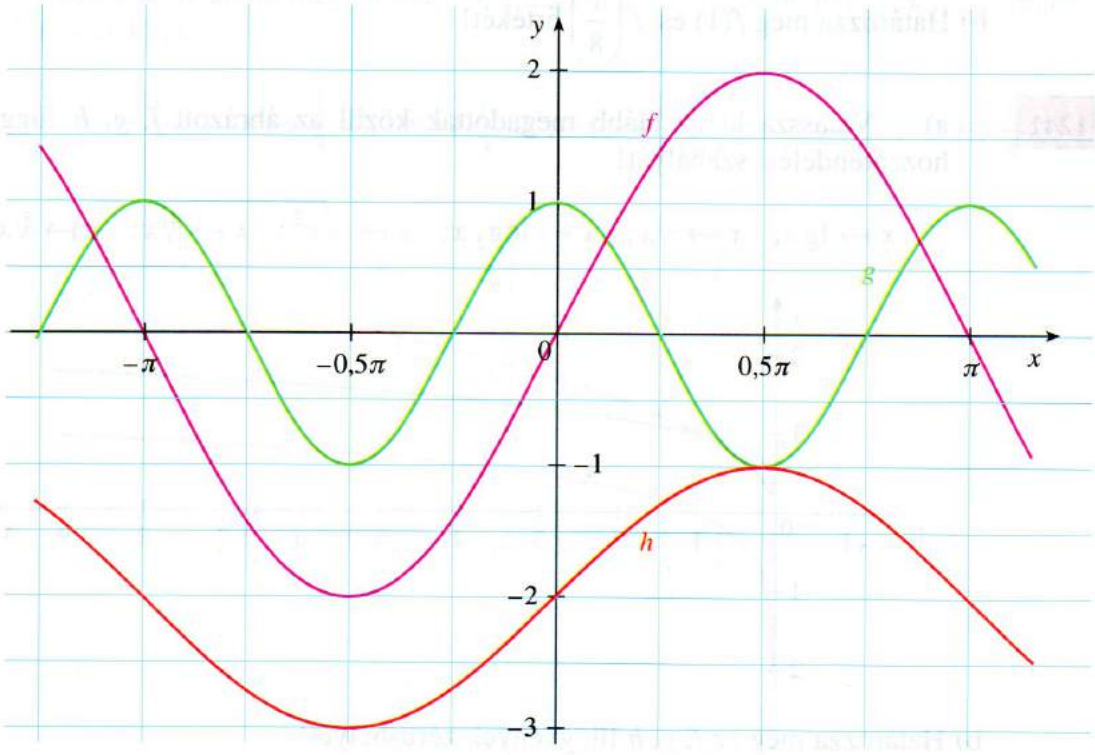
1242. Az ábrán az $f\colon [-5; 5] \to \mathbf{R};\ x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ függvény grafikonja látható. Mekkora a színezett terület? Válaszát indokolja!



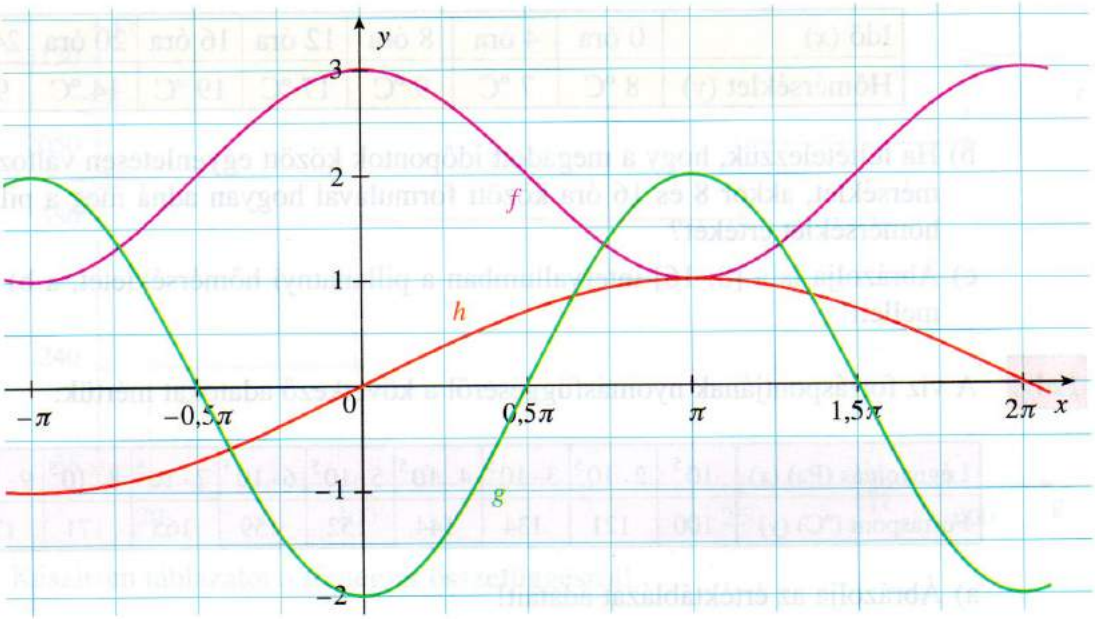
1243. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$ b) $g\colon \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R};\ x \mapsto \frac{\sin x}{2\cos x}$

1244. Írja fel az f, g, h függvények hozzárendelési szabályát szinusz- vagy koszinuszfüggvény segítségével!



1245. Írja fel az f, g, h függvények hozzárendelési szabályát szinusz- vagy koszinuszfüggvény segítségével!



1246. Tudjuk, hogy egy rúd hosszát a $-50\,°C < T < 50\,°C$-os tartományban jó közelítéssel az $\ell(T) = \ell_0 + \alpha \cdot \ell_0 \cdot T$ összefüggés írja le, ahol T jelöli a Celsius-fokban mért hőmérsékletet, az arányossági tényező értéke: $\alpha = 10^{-4}\,\frac{1}{°C}$; míg $\ell_0 = 1$ m. Írja fel és ábrázolja a rúdhossz Fahrenheit-fokban mért hőmérséklet-függését! (A Fahrenheit-skála is egyenletes, a 0 °C-nak 32 °F, míg a 100 °C-nak 212 °F felel meg.)

1247. Egy lakásingatlant vásároltunk. A földhivatalba történő bejegyzéskor értéktől függetlenül 2000 Ft, valamint 4 millió forint vételárig annak 2%-a, és az e feletti rész 6%-a a fizetendő illeték. Ha el is adtunk ingatlant, akkor az árkülönbözetre vonatkozik ez a szabály; ha kevesebbért veszünk, mint eladtunk, akkor nincs illeték (csak személyi jövedelemadó a bevétel után!).

a) Mekkora illetéket kell fizetnem, ha eladtam egy 8 millió forintos ingatlant, s vettem 14,5 millióért egy másikat?

b) Adja meg képlettel, és ábrázolja is a fizetendő illetéket a vételár függvényében a [0; 20 000 000] forintos intervallumban, ha 8 millióért adtam el, és x Ft-ért vásárolok! (Figyeljen a tengelyek ügyes skálázására!)

1248. a) Ábrázolja egy adott napon a hőmérséklet alakulását, ha a következő adataink vannak:

Idő (x)	0 óra	4 óra	8 óra	12 óra	16 óra	20 óra	24 óra
Hőmérséklet (y)	8 °C	7 °C	9 °C	17 °C	19 °C	14 °C	9 °C

b) Ha feltételezzük, hogy a megadott időpontok között egyenletesen változik a hőmérséklet, akkor 8 és 16 óra között formulával hogyan adná meg a pillanatnyi hőmérséklet értékét?

c) Ábrázolja is a [8; 16] intervallumban a pillanatnyi hőmérsékletet, a b) feltevés mellett!

1249. A víz forráspontjának nyomásfüggéséről a következő adatokat mértük:

Légnyomás (Pa) (x)	10^5	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	10^6
Forráspont (°C) (y)	100	121	134	144	152	159	165	171	176	179

a) Ábrázolja az értéktáblázat adatait!

b) A fenti adatsorra az $x \mapsto -114 \cdot 0{,}8^{\frac{x}{10^5}} + 192$ függvényt illesztettük. Számolja ki 3 tetszőleges pontban, mekkora a mért értéktől való százalékos eltérés!

1250. Két személygépkocsi gyorsulási adatairól a következőket tudjuk:

Toyota Corolla 1,6DX

Idő (t) sec	0	5,1	7,9	12,1	18,0
Sebesség (v) km/h	0	60	80	100	120

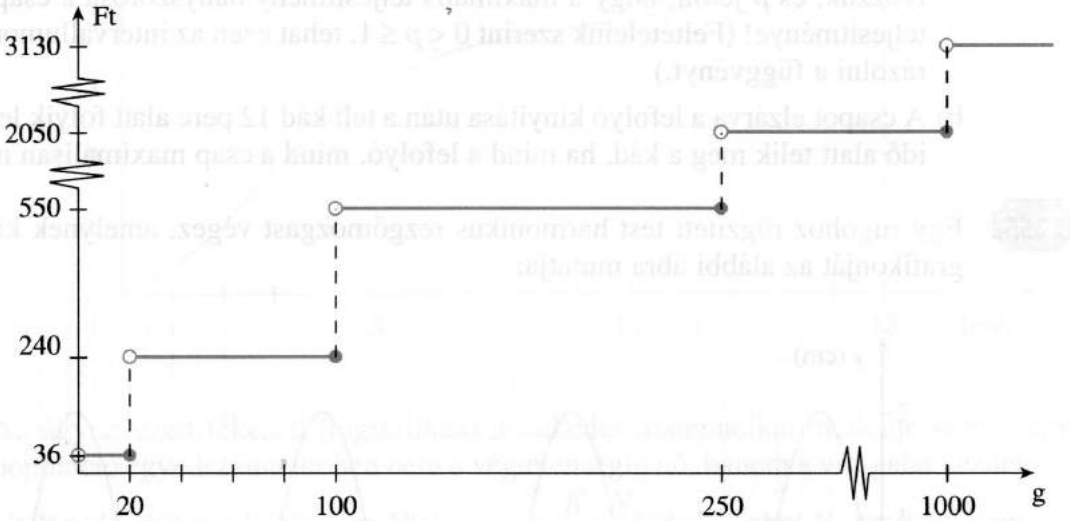
Porsche 928S

Idő (t) sec	0	3,5	5,0	6,7	9,0
Sebesség (v) km/h	0	60	80	100	120

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az adatokat!

b) Számolja ki az átlagos gyorsulást az egyes elért sebességekig mindkét autó esetén!

1251. Külföldre, a közvetlenül szomszédos országokba a levélárak 2001-ben a következő grafikon szerint függtek a levél tömegétől:



Készítsen táblázatot a tömeg-ár összefüggésről!

1252. A levél feladói ára (bélyeg) belföldre 2001-ben a következőképpen függött a levél tömegétől:

a levél tömege	30 g-ig	100 g-ig	350 g-ig	500 g-ig	afölött
feladói ára	36 Ft	58 Ft	78 Ft	90 Ft	121 Ft

a) Adja meg a levél feladói árát a tömeg függvényében hozzárendelési szabályként, 0,6 kg-nál könnyebb levél esetén!

b) Ábrázolja a levélárat a tömeg függvényében a fenti tartományon!

1253. Egy pohár kihűlő tea hőmérsékletét a következő táblázat mutatja:

Eltelt idő (percben)	0	5	10	15	20	25
A tea hőmérséklete (°C)	90	58	37	24	15,5	10

Tudjuk, hogy kb. 0°C a környezet hőmérséklete, ahol a teát osztják.

a) Ábrázolja a megadott értékeket koordináta-rendszerben!

b) Tudjuk, hogy a hőmérséklet exponenciálisan csökken, és pillanatnyi értékét közelítőleg a $T(t) = a \cdot 10^{-bt}$ összefüggés adja meg, ahol a, b adott állandók, t az eltelt idő percben. Adja meg a és b értékét az adatok alapján!

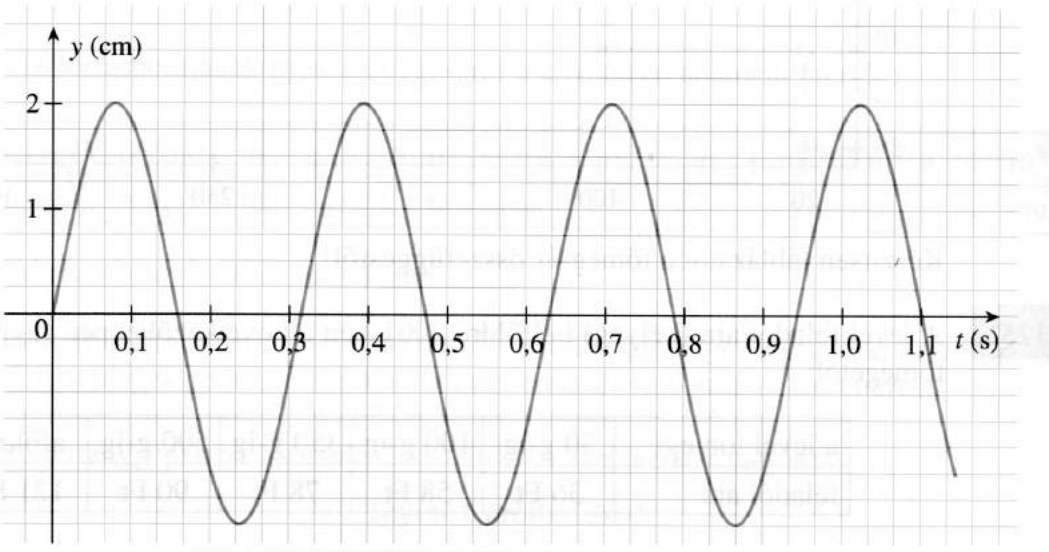
c) Vázolja a $T(t)$ függvényt a [0; 25] intervallumon!

1254. Egy fürdőkádcsap maximális teljesítmény mellett 8 perc alatt tölti meg a kádat.

a) Ábrázolja a kád megtelésének idejét (T) a p függvényében, ha a csapot szabályozzuk, és p jelöli, hogy a maximális teljesítmény hányszorosa a csap aktuális teljesítménye! (Feltételeink szerint $0 < p \leq 1$, tehát ezen az intervallumon kell ábrázolni a függvényt.)

b) A csapot elzárva a lefolyó kinyitása után a teli kád 12 perc alatt folyik le. Mennyi idő alatt telik meg a kád, ha mind a lefolyó, mind a csap maximálisan működik?

1255. Egy rugóhoz rögzített test harmonikus rezgőmozgást végez, amelynek kitérés-idő grafikonját az alábbi ábra mutatja:



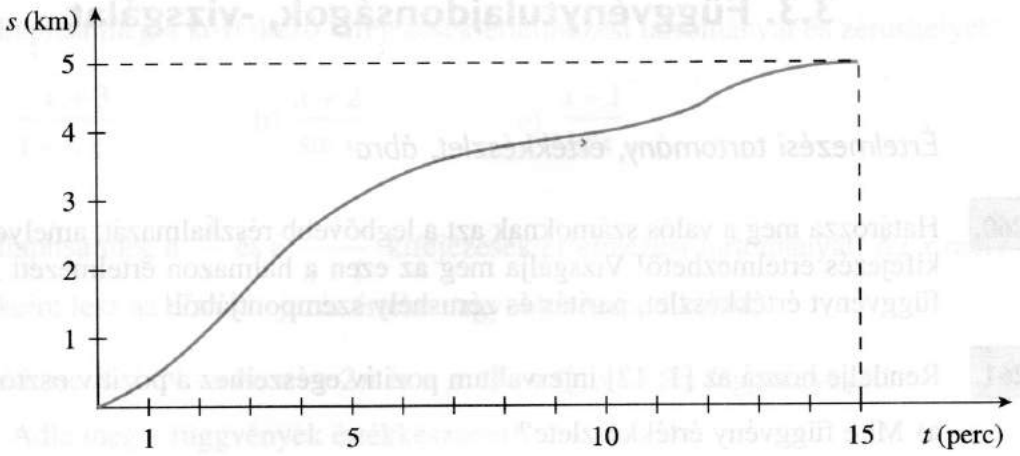
$y(t) = A \sin \omega t$, ahol $A = 2$ cm, $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \left(\frac{1}{\text{s}}\right)$, ahol $D = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ és $m = 0{,}25$ kg.

Ugyanezt a testet aztán egy négyszer olyan erős rugóhoz kötjük, és negyed annyira térítjük ki. Ábrázolja az új kitérés-idő függvényt, ha a $t = 0$ időpontban ugyanúgy az egyensúlyi helyzeten felfelé halad át a test, mint az első esetben!

1256. A következő ábrán egy kerékpáros út-idő grafikonját látja.

a) Mekkora az átlagsebessége a teljes útra nézve?

b) A grafikon alapján körülbelül mikor és mennyi volt a legnagyobb, illetve a legkisebb a sebessége?



1257. Az úgynevezett fékezett (logisztikus) növekedés matematikai modellje szerint egy populáció egyedszáma időben nem a végtelenségig nő, hanem a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva a lélekszám $N(t) = \dfrac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$, ahol N_0 az induló egyedszám, K a körülmények szerint „eltartható" maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző állandó. Tudjuk, hogy egy populáció induló egyedszáma 10 000 volt, $K = 100\,000$, $a = 0{,}5$; a t időt pedig években mérjük.

a) Hány tagú lesz a populáció a modell szerint 5, 10, 15, 20 év múlva?

b) Vázolja a függvény grafikonját a [0, 20] intervallumon!

1258. A népességnövekedés egy lehetséges modellje: $N(t) = K \cdot (1 - c \cdot a^t)$, ahol K, c, és a állandók, t a vizsgálat kezdete óta eltelt idő években, $N(t)$ pedig a népesség létszáma az adott időben. Tudjuk, hogy 1960-ban kb. 3 milliárd, 1978-ban 4,2 milliárd, 1996-ban 6 milliárd ember élt a Földön.

a) Határozza meg a három állandó értékét!

b) E modell alapján mekkora az emberiség várható létszáma 2050-ben, illetve 2100-ban?

c) Ábrázolja az $N(t)$ függvényt a $t \mapsto a^t$ exponenciális függvényből kiindulva!

d) Van-e az egyedszámnak felső korlátja a modell szerint, ha t korlátlanul növekszik?

1259. Ábrázolja függvénytranszformáció segítségével az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket!

a) $x \mapsto \left|\sqrt{x} - 1\right|$ b) $x \mapsto \left|\sqrt{x}\right| - 1$ c) $x \mapsto \sqrt{|x| - 1}$

3.3. Függvénytulajdonságok, -vizsgálat

Értelmezési tartomány, értékkészlet, ábra

1260. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $x^3 - x$ kifejezés értelmezhető! Vizsgálja meg az ezen a halmazon értelmezett $x \mapsto x^3 - x$ függvényt értékkészlet, paritás és zérushely szempontjából!

1261. Rendelje hozzá az [1; 12] intervallum pozitív egészeihez a pozitív osztóik számát!

a) Mi e függvény értékkészlete?

b) Van-e ennek a függvénynek minimuma és maximuma? Ha igen, akkor hol veszi fel és mennyi az?

c) Van-e ennek a függvénynek zérushelye? Ha igen, akkor hol?

1262. Milyen függvénytípus grafikonja lehet

a) egyenes; b) parabola; c) hiperbola?

Adjon mindegyikre két-két konkrét példát is!

1263. Mi az értékkészlete az alábbi függvényeknek, ha $x \in [0; 5]$?

a) $x \mapsto 2x - 3$ b) $x \mapsto |2x - 3|$ c) $x \mapsto [2x - 3]$ d) $x \mapsto \{2x - 3\}$

1264. Van-e olyan másodfokú függvény, amelynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és értékkészlete

a) a pozitív valós számok halmaza; b) $\{y \in \mathbf{R} \mid y \leq 4\}$; c) $[-6; \infty[$?

Válaszát indokolja! Igenlő válasz esetén adjon meg egy-egy példát!

1265. Adjon meg egy-egy olyan $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amelynek értékkészlete

a) csak negatív számokból áll;

b) a nemnegatív számok halmaza;

c) -100-nál kisebb elemet nem tartalmaz!

1266. Állapítsa meg a következő kifejezések értelmezési tartományát és zérushelyét!

a) $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ b) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ c) $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

1267. Állapítsa meg a következő kifejezések értelmezési tartományát és zérushelyét!

a) $\frac{\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}}$ b) $\frac{x+2}{\sin x}$ c) $\frac{x-1}{\lg x}$

1268. Állapítsa meg a $\frac{3}{x}$ és a $\frac{4}{x+1}$ kifejezések értelmezési tartományát! Az x mely értékeire lesz az első kifejezés értéke nagyobb a másodikénál?

1269. Tekintse az f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto 2n$ és a g: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $x \mapsto 2x$ függvényeket!

a) Adja meg e függvények értékkészletét!

b) Egy-egyértelműek-e ezek a függvények?

c) Egy-egyértelmű megfeleltetést adnak-e meg ezek a leképezések az értelmezési tartomány és a megadott képhalmaz elemei között?

1270. Egy másodfokú függvényről tudjuk, hogy az egyik zérushelye a 3; valamint azt, hogy az 5 helyen felvett 4 értékig monoton növő, utána monoton fogyó.

a) Adja meg a másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!

b) Ábrázolja a függvényt!

1271. Egy függvénykapcsolatról a következőket tudja:

a függvény grafikonjának meredeksége mindig 3;
a függvény csak pozitív valós értékekre van értelmezve;
minden pozitív valós számon értelmezve van a függvény;
4 a legkisebb függvényérték.

Adja meg a függvényt és ábrázolja is!

Korlátosság

1272. Egy függvény korlátosság szempontjából négyféle tulajdonságú lehet:

1. csak alulról korlátos, ha valamely számnál kisebb értéket nem vesz föl, de tetszőlegesen nagy értéket felvesz;
2. csak felülről korlátos, ha valamely számnál nagyobb értéket nem vesz föl, de tetszőleges kis értéket felvesz;
3. korlátos, ha alulról és felülről is az;
4. alulról sem, felülről sem korlátos.

Ennek alapján jellemezze korlátosság szempontjából az alábbi (a lehető legbővebb tartományon értelmezett) függvényeket!

a) $x \mapsto 2x-3$ b) $x \mapsto |3x-2|$ c) $x \mapsto \lg(4x-5)$ d) $x \mapsto 2^{x-3}$

1273. Egy függvény korlátosság szempontjából négyféle tulajdonságú lehet:

1. csak alulról korlátos, ha valamely számnál kisebb értéket nem vesz föl, de tetszőlegesen nagy értéket felvesz;
2. csak felülről korlátos, ha valamely számnál nagyobb értéket nem vesz föl, de tetszőleges kis értéket felvesz;
3. korlátos, ha alulról és felülről is az;
4. alulról sem, felülről sem korlátos.

Ez alapján jellemezze korlátosság szempontjából az alábbi (a lehető legbővebb tartományon értelmezett) függvényeket!

a) $x \mapsto (2x+3)^2$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{3x-4}$ c) $x \mapsto \sin(4x+5)$ d) $x \mapsto \sqrt{3x-2}$

Paritás, periodicitás

1274. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$, és $D_f := \mathbf{R}^+$. Ábrázolja f-et, majd egészítse ki úgy az ábrát, hogy $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ legyen, és

a) páros függvényt kapjunk;

b) páratlan függvényt kapjunk!

Adja meg ezeknek a függvényeknek a hozzárendelési szabályát!

1275. Melyik páros, melyik páratlan függvény? Válaszát indokolja!

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin 5x}$ b) $g(x)=-3x^4+2\cos^2 x+5$ c) $h(x)=x^3-3x+4$

(Mindegyik függvény értelmezési tartománya az a valós számokból álló legbővebb halmaz, ahol a kifejezésnek értelme van.)

1276. Melyik páros, melyik páratlan függvény? Válaszát indokolja!

a) $x\mapsto\dfrac{\sin^2 x}{\sin 3x}$ b) $x\mapsto\sin^2 x-3x^6+2$ c) $x\mapsto -5x+3\sqrt{x^3}$

(Mindegyik függvény értelmezési tartománya az a legbővebb, valós számokból álló halmaz, ahol a kifejezésnek értelme van.)

1277. Jellemezze az alábbi függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x\in\mathbf{R}$)!

a) $x\mapsto x^2$ b) $x\mapsto\sin x$ c) $x\mapsto|x|$ d) $x\mapsto\begin{cases}1, \text{ ha } 0<x\\0, \text{ ha } 0=x\\-1, \text{ ha } x<0\end{cases}$

1278. Jellemezze az alábbi függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x\in\mathbf{R}$)!

a) $x\mapsto x^3$ b) $x\mapsto 2^x$ c) $x\mapsto\cos x$ d) $x\mapsto 5$

1279. Vizsgálja meg a következő függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x\in\mathbf{R}$)!

$f(x)=\sin 2x$ $g(x)=\cos\dfrac{1}{2}x$

1280. Vizsgálja meg a következő függvényeket paritás és periodicitás szempontjából!

$f(x)=\sin\dfrac{1}{2}x+1,\ x\in\mathbf{R}$ $k(x)=\sin\left(x-\dfrac{1}{2}\pi\right),\ x\in\mathbf{R}$

$g(x)=\cos 2x+2,\ x\in\mathbf{R}$ $h(x)=2\cdot\operatorname{tg}2x,\ x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

1281. a) Ha egy, a valós számok halmazán értelmezett függvényről tudja, hogy páros, akkor lehet-e invertálható?

b) Ha egy, a valós számok halmazán értelmezett függvény páratlan, és van abszolút minimuma, akkor mit lehet mondani a maximumáról?

1282. Egy, a valós számok halmazán értelmezett függvényről tudjuk, hogy van minimuma és maximuma, továbbá páratlan. Lehet-e periodikus? Ha igen, adjon meg egy példát; ha nem, indokolja!

Invertálhatóság

1283. Válassza ki az alábbi (a lehető legbővebb tartományon értelmezett) függvények közül a kölcsönösen egyértelműeket! Válaszát indokolja is!

a) $x \mapsto 2x-3$ b) $x \mapsto |3x+2|$ c) $x \mapsto \sqrt{2x-4}$ d) $x \mapsto \lg(4x+1)$

1284. Válassza ki az alábbi (a lehető legbővebb tartományon értelmezett) függvények közül a kölcsönösen egyértelműeket! Válaszát indokolja is!

a) $x \mapsto (3x-1)^2$ b) $x \mapsto \frac{1}{2x+3}$ c) $x \mapsto \sin(4x-2)$ d) $x \mapsto \operatorname{tg}(2x+1)$

1285. Az inverzfüggvények grafikonjai közötti szemléletes összefüggés alapján állapítsa meg, hogy mi az inverze a (lehető legbővebb tartományon értelmezett)

a) $x \mapsto 2x-3$ b) $x \mapsto \sqrt{x-2}$ c) $x \mapsto \log_2(x-2)$

függvénynek!

1286. Az inverzfüggvények grafikonjai közötti szemléletes összefüggés alapján rajzolja meg az alábbi függvények inverzének képét!

a) $x \mapsto (x+1)^2$, $x \in [-4;-1]$ b) $x \mapsto \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ c) $x \mapsto x^3$, $x \in [-1;2]$

1287. Határozza meg az $x \mapsto 2x-3$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény inverzét, és ábrázolja is a kapott függvényt!

1288. Határozza meg az $x \mapsto 1+\frac{1}{x+1}$ ($x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$) függvény inverzét, és ábrázolja is a kapott függvényt!

1289. Tükrözze az $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény grafikonját az $y = -x$ egyenesre! Függvény grafikonját kaptuk-e?

Zérushely

1290. Mik az alábbi függvények zérushelyei, ha $x \in [0; 5]$?

a) $x \mapsto 2x-3$ b) $x \mapsto |2x-4|$ c) $x \mapsto \sqrt{2x}-3$ d) $x \mapsto \lg(2x+1)$

1291. Mik az alábbi függvények zérushelyei, ha $x \in]0; 5]$?

a) $x \mapsto (2x-3)^2$ b) $x \mapsto \frac{1}{2x}-4$ c) $x \mapsto \sin(2x-3)$ d) $x \mapsto 2^{2x}-3$

1292. Határozza meg a következő függvények zérushelyeit ($D_f = D_g = D_h = D_k := \mathbf{R}$)!

a) $f: x \mapsto 2x^2+x$ b) $g: x \mapsto 3x-5x^2$ c) $h: x \mapsto x^2+4$ d) $k: x \mapsto -x^2+4$

1293. Legyen $f(x) = 3x^2+6x+c$. Határozza meg a c valós paraméter értékét úgy, hogy az f függvény egyik zérushelye -4 legyen!

1294. Határozza meg az $x \mapsto \cos x - \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény zérushelyeit!

Szélsőérték és szélsőérték-hely

1295. Ábrázolja az alábbi függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

$f(x) = 2x^2-4x-6$; $g(x) = -x^2-2x+3$; $h(x) = 3x^2-12x+9$;

$i(x) = 3x^2-6x-8$; $j(x) = -3x^2+12x-9$

Határozza meg a függvények zérushelyeit, szélsőértékeit és -helyeit!

1296. a) Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

$f(x) = x^2+5x+6$; $g(x) = -x^2-2x+8$; $h(x) = -|x-1|+1$

b) Adja meg zérushelyeiket!

c) Állapítsa meg, hogy melyiknek milyen típusú szélsőértéke van! Adja meg a szélsőérték helyét és értékét!

1297. Mik a szélsőértékeik az alábbi függvényeknek, ha $x \in [0; 5]$? Hol veszik fel azokat?

a) $x \mapsto 2x-3$ b) $x \mapsto |2x-4|$ c) $x \mapsto \sqrt{2x}-3$ d) $x \mapsto \lg(2x+1)$

1298. Mik a szélsőértékeik az alábbi függvényeknek, ha $x \in]0; 5]$? Hol veszik fel azokat?

a) $x \mapsto (2x-3)^2$ b) $x \mapsto \frac{1}{2x} - 4$ c) $x \mapsto \sin(2x-3)$ d) $x \mapsto 2^{2x} - 3$

1299. Van-e a következő függvénynek maximuma, illetve minimuma?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x < 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2 \\ x, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Ha igen, hol, és mennyi ezek értéke?

1300. a) Mekkora a b valós paraméter értéke, ha az $f(x) = -4x^2 + bx + 12$ függvény a -2 helyen veszi fel szélsőértékét?
b) Milyen típusú szélsőértéke van a függvénynek, és mi ennek az értéke?

Növekedés, fogyás

1301. Jellemezze az alábbi függvények növekedési viszonyait, ha $x \in [0; 5]$!

a) $x \mapsto 2x - 3$ b) $x \mapsto |2x-4|$ c) $x \mapsto \sqrt{2x} - 3$ d) $x \mapsto \lg(2x+1)$

1302. Jellemezze az alábbi függvények növekedési viszonyait, ha $x \in]0 ;5]$!

a) $x \mapsto (2x-3)^2$ b) $x \mapsto \frac{1}{2x} - 4$ c) $x \mapsto \sin(2x-3)$ d) $x \mapsto 2^{2x} - 3$

1303. Igaz-e, hogy két (azonos értelmezési tartományú) monoton növekedő függvény összege, illetve különbsége is monoton növekedő? És ha szigorú monotonitást kívánunk meg? Mutasson példákat!

1304. Igaz-e, hogy két (azonos értelmezési tartományú) monoton növekedő függvény szorzata, illetve hányadosa is monoton növekedő? És ha szigorú monotonitást kívánunk meg? Mutasson példákat!

Vegyes függvényvizsgálatok

1305. Állapítsa meg az $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény szélsőértékeit, -helyeit és periódusát!

1306. Legyen $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$, $k(x) = \sqrt{x+2}$, $a(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, $b(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$!

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a g, h és k, illetve az a és b függvényeket!

b) Jellemezze a k függvényt a következő szempontokból: értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1307. Tekintse az $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x-3|$, $h(x) = |x|-3$, $a(x) = 2|x|$, $b(x) = |2x|$ függvényeket!

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f, g, h; illetve az a és b függvényeket!

b) Jellemezze a h függvényt a következő szempontokból: értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1308. a) Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$):

$f(x) = \cos x + \cos(-x)$; $g(x) = \sin x + \sin(-x)$; $h(x) = \sin x + \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$!

b) Jellemezze az f függvényt a következő szempontokból: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1309. a) Tolja el az $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény görbéjét az $(1; -2)$ vektorral! Melyik függvény grafikonját kapta?

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1310. a) Tolja el az $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény görbéjét a $(-2; -4)$ vektorral, majd tükrözze az x tengelyre! Melyik függvény grafikonját kapta?

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1311. a) Tükrözze az $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0; \infty[$) függvény görbéjét az $y = x$ egyenesre! Melyik függvény grafikonját kapta?

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1312. a) Tükrözze az $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0; \infty[$) függvény görbéjét az x tengelyre, majd tolja el a (0; 2) vektorral! Melyik függvény grafikonját kapta?

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

c) Az x mely értékeire vesz fel e függvény pozitív értékeket?

1313. a) Tolja el az $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény görbéjét a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ vektorral! Melyik függvény képét kapta?

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1314. a) Tolja el az $f(x) = \lg x$ ($x > 0$) függvény görbéjét a $(-2; 0)$ vektorral! Melyik függvény képét kapta?

b) Mi változott meg az eredeti függvény jellemzői (értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet) közül?

1315. Tükrözze az $f(x) = \cos x$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény képét az x tengelyre, majd tolja el a $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ vektorral! Melyik ismert függvény görbéjéhez jutottunk?

1316. a) Adja meg egy olyan függvény hozzárendelési szabályát, amelynek periódusa π és maximuma van a $\frac{\pi}{4}$ helyen, amelynek értéke 2 !

b) Jellemezze is ezt a függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1317. a) Adja meg egy olyan függvény hozzárendelési szabályát, melynek értékkészlete a [0; 1] intervallum, periódusa π, továbbá maximuma van a 0 helyen, amelynek értéke 1 !

b) Az x mely értékeire lesz fogyó ez a függvény?

1318. a) Adjon meg olyan másodfokú függvényt, amelynek egyik zérushelye a 0 és grafikonjának tengelypontja (1; 1)!

b) Jellemezze is a kapott függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1319. a) Adjon meg olyan másodfokú függvényt, amely grafikonjának tengelypontja $(-3; 1)$ és egyik zérushelye -4 !

b) Jellemezze is a kapott függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1320. a) Adja meg az abszolútérték-függvény olyan transzformáltját, amely grafikonjának töréspontja $(2; -1)$, egyik félegyenesének meredeksége $\frac{2}{3}$!

b) Jellemezze is a kapott függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1321. Adott az f függvény: $f: [-8; 6] \to \mathbf{R}$; $f(x) := \begin{cases} (x+5)^2 - 6, \text{ ha } x < -1 \\ 2(4-x), \text{ ha } x \geq -1 \end{cases}$.

a) Számolja ki a következő függvényértékeket: $f(-8)$; $f(-4)$; $f(4)$; $f(-0{,}8)$!

b) Ábrázolja az f függvényt!

c) Jellemezze az f függvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték és -hely, növekedés-fogyás!

1322. Adott az f függvény: $f: [-11; 9] \to \mathbf{R}$; $f(x) := \begin{cases} -|x+5| + 3, \text{ ha } x < 0 \\ \sqrt{x} - 2, \text{ ha } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Számolja ki a következő függvényértékeket: $f(-9)$; $f(9)$; $f(4)$; $f(-0{,}2)$!

b) Ábrázolja az f függvényt!

c) Jellemezze az f függvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, (lokális, illetve abszolút) szélsőérték és -hely, növekedés-fogyás!

1323. Adott az f függvény: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) := \begin{cases} (x+2)^2 - 9, \text{ ha } x \leq 2 \\ |x-10| - 1, \text{ ha } x > 2 \end{cases}$.

a) Számolja ki a következő függvényértékeket: $f(-6)$; $f(0)$; $f(200)$; $f(2{,}1)$!

b) Ábrázolja az f függvényt!

c) Jellemezze az f függvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, (lokális, illetve abszolút) szélsőérték és -hely, növekedés-fogyás!

1324. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben és jellemezze (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték és -hely) a következő függvényt!

$$f:[-2;\ 6]\to\mathbf{R};\ f(x):=\begin{cases}-(x+1)^2-2, & \text{ha } -2\le x<0\\ -3, & \text{ha } 0\le x<3\\ \dfrac{1}{x-2}-4, & \text{ha } 3\le x\le 6\end{cases}$$

1325. a) Ábrázolja az f, g, h függvényeket (külön koordináta-rendszerben), ha

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ f(x):=x^2-6x+5;$

$g:\mathbf{R}\setminus\{2\}\to\mathbf{R};\ g(x):=\dfrac{3}{x-2}-1;$

$h:[-3;\ +\infty[\to\mathbf{R};\ h(x):=2-\sqrt{x+3}$!

b) Jellemezze a megadott függvények egyikét (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, (lokális, illetve abszolút) szélsőérték és -hely, növekedés-fogyás)!

1326. Legyen $f(x):=\begin{cases}x^2-2x, & \text{ha } x\le 2\\ (x-2)(4-x), & \text{ha } x>2\end{cases}$.

a) Mi a függvény értékkészlete?

b) Hol monoton növekedő, illetve monoton fogyó a függvény?

c) Melyek a függvény zérushelyei?

d) Van-e maximuma, illetve minimuma?

Válaszát indokolja!

1327. Egy másodfokú függvényről tudjuk, hogy a -1 helyen az 5, a 2 helyen a 14, míg a -3 helyen a 19 értéket veszi fel.

a) Adja meg a másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!

b) Ábrázolja a függvényt, és jellemezze is zérushely, szélsőértékek és -helyek, monotonitás szempontjából!

1328. Egy trigonometrikus függvényről tudjuk, hogy periódusa π, minimuma 0, maximuma 4. Ezenkívül tudjuk még, hogy egyik zérushelye a $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Adjon meg egy ilyen függvényt!

b) Ábrázolja is ezt!

1329. Egy exponenciális függvény transzformáltjáról tudjuk, hogy a 2 helyen 1, a 3 helyen 3 értéket vesz fel.

a) Adjon meg egy ilyen függvényt!

b) Ábrázolja is ezt!

1330. Egy logaritmusfüggvény transzformáltjáról tudjuk, hogy a 2 helyen 0, a 3 helyen 1 értéket vesz fel.

a) Adjon meg egy ilyen függvényt!

b) Ábrázolja is ezt!

1331. a) Adja meg a 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π és a $\frac{9\pi}{4}$ helyen a következő függvény értékeit:

$$f: x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

b) Ábrázolja a függvényt!

c) Jellemezze értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

1332. a) Vizsgálja meg monotonitás, szélsőérték és zérushely szempontjából az $f: x \mapsto 3 \cdot 2^{x+1} - 5$ $(x \in \mathbf{R})$ függvényt!

b) Ábrázolja e függvény inverzét is!

1333. Tekintse a $\lg x + \lg(x+2) - 1$ kifejezést!

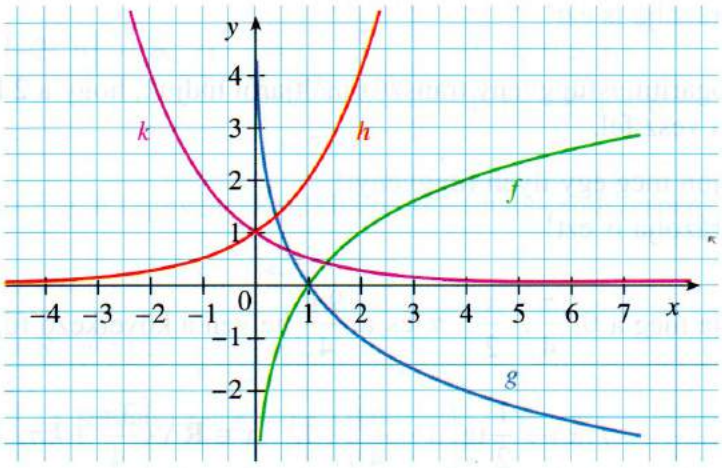
a) Adja meg az értelmezési tartományát!

b) Van-e zérushelye?

c) Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az a)-ban meghatározott halmazon értelmezett $x \mapsto \lg x + \lg(x+2) - 1$ függvényt!

Ábrafelismerés

1334. Négy ismert alapfüggvény grafikonját látja az alábbi ábrán:

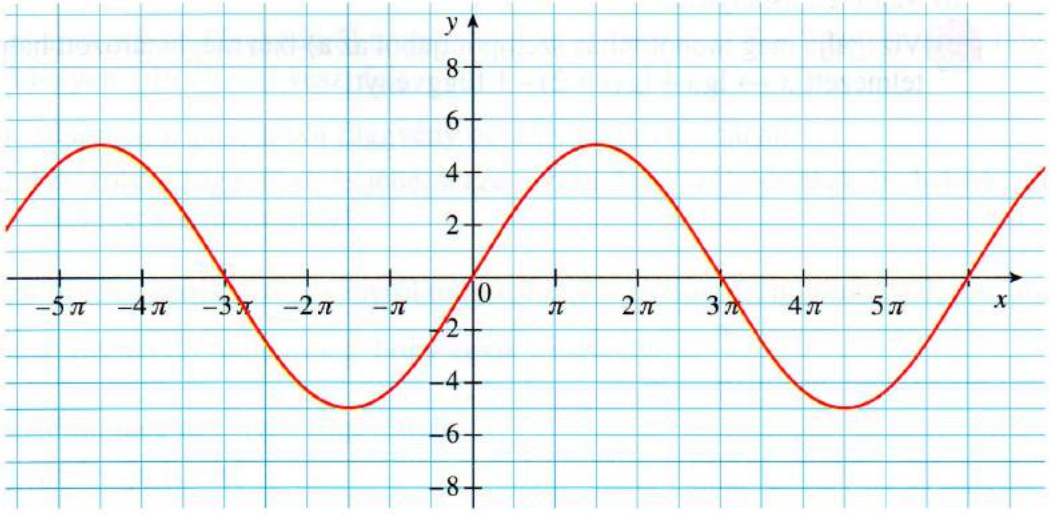


a) Írja fel az egyes függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és hozzárendelési szabályát!

b) Állapítsa meg, hogy az alábbi kijelentések közül melyik igaz, melyik hamis!

1. Az f függvény inverze a g függvény.
2. Az f függvény inverze a h függvény.
3. Az f függvény inverze a k függvény.
4. A k függvény inverze az f függvény.
5. A k függvény inverze a g függvény.
6. A h függvény inverze a g függvény.

1335. A mellékelt grafikon alapján válaszoljon a következő kérdésekre.



a) Az ábra az alábbi függvények egyikének grafikonja. Melyiké?

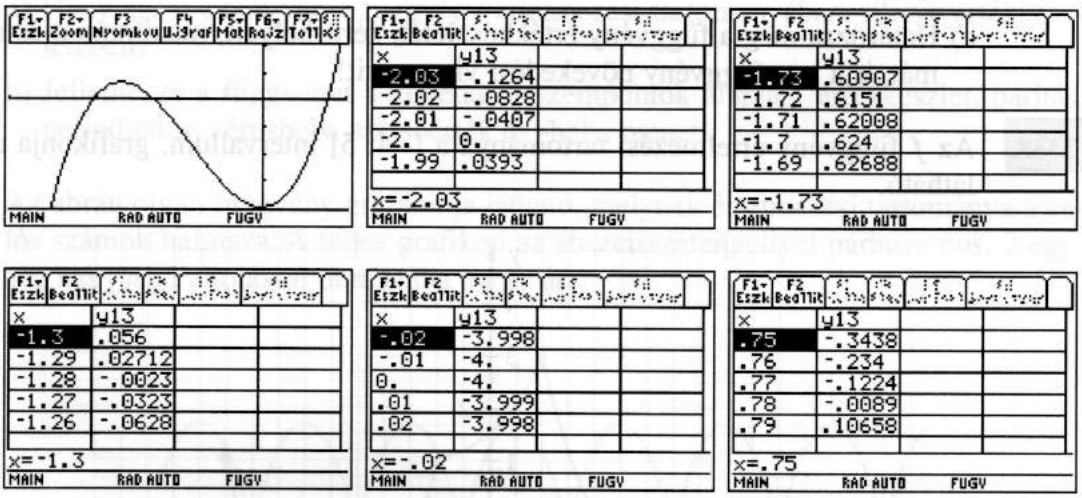
1. $x \mapsto 5\sin x;\ x \in \mathbf{R}$
2. $x \mapsto 5 + \sin x;\ x \in \mathbf{R}$
3. $x \mapsto 5\sin\left(\frac{x}{3}\right);\ x \in \mathbf{R}$
4. $x \mapsto 5\sin(3x);\ x \in \mathbf{R}$

b) Határozza meg az ábrázolt függvény értékkészletét, maximumhelyeit, minimumhelyeit!

c) Az alábbi kijelentések közül melyik igaz, melyik hamis?

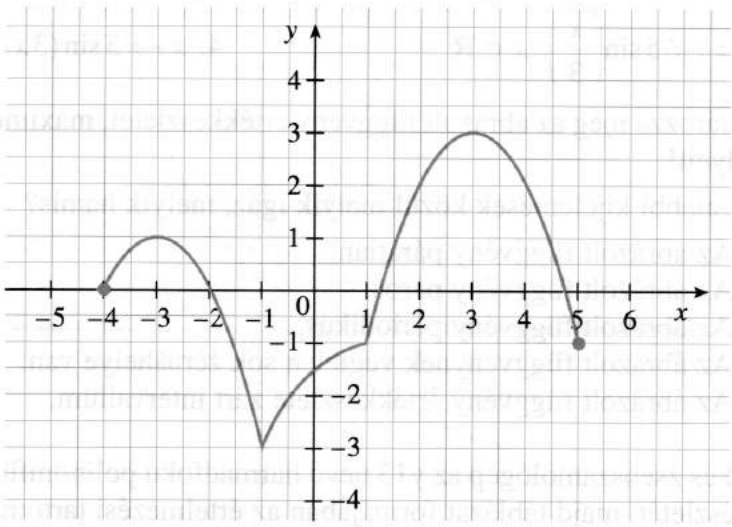
1. Az ábrázolt függvény páratlan.
2. Az ábrázolt függvény páros.
3. Az ábrázolt függvény periodikus.
4. Az ábrázolt függvénynek végtelen sok zérushelye van.
5. Az ábrázolt függvény értékkészlete zárt intervallum.

1136. Grafikus zsebszámológép az y13 nevű harmadfokú polinomfüggvény grafikonjának egy részletét, majd táblázat formájában az értelmezési tartomány néhány értékét és az ezekhez tartozó függvényértékeket mutatja. A függvényértékek kijelzésére 6 karakter áll rendelkezésre (előjelet és tizedespontot is beleértve), a függvényértékek tehát kerekítettek.



Jellemezze az y13 függvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték és -hely, monotonitás – amennyire a kijelzett pontosság lehetővé teszi!

1337. Az f függvény értelmezési tartománya a $[-4; 5]$ intervallum, grafikonja az ábrán látható.

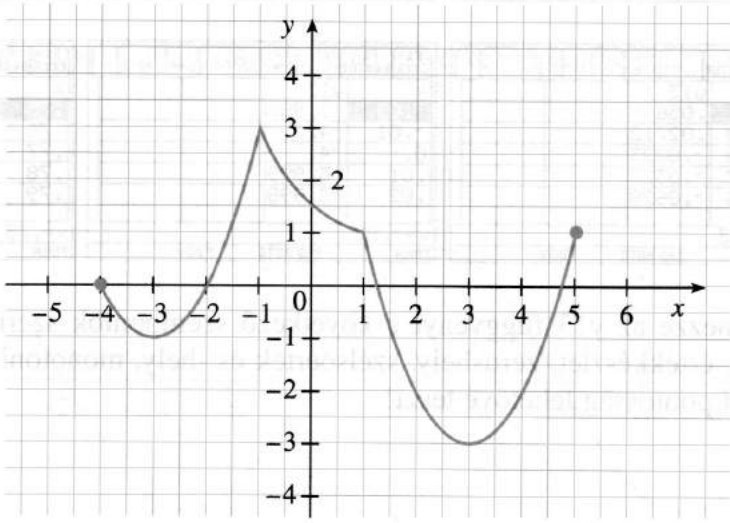


a) Határozza meg a következő függvényértékeket: $f(-3)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(5)$!

b) Olvassa le a grafikonról, mely számokhoz tartozik az 1, illetve a -1 függvényérték!

c) Határozza meg a függvény értékkészletét, zérushelyeit, maximumát és minimumát, írja le a függvény növekedési viszonyait!

1338. Az f függvény értelmezési tartománya a $[-4; 5]$ intervallum, grafikonja az ábrán látható.

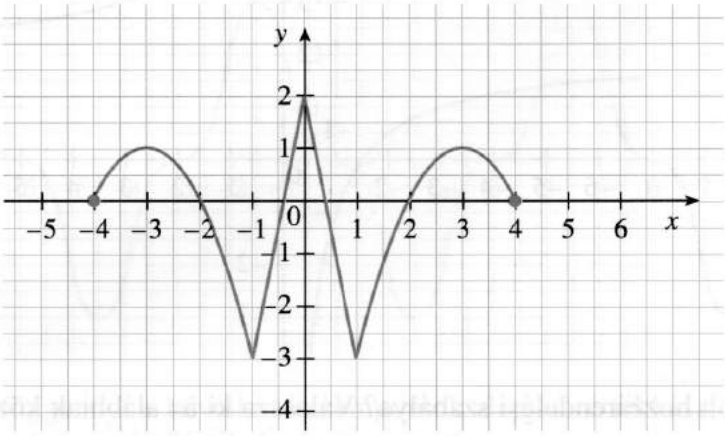


a) Határozza meg a következő függvényértékeket: $f(-4)$; $f(-1)$; $f(3)$; $f(5)$!

b) Olvassa le a grafikonról, mely számokhoz tartozik az 1, illetve a -1 függvényérték!

c) Határozza meg a függvény értékkészletét, zérushelyeit, maximumát és minimumát, írja le a függvény növekedési viszonyait!

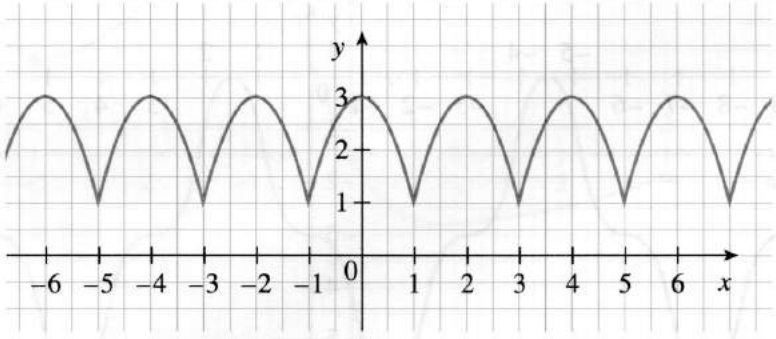
1339. Az f függvény értelmezési tartománya a $[-4; 4]$ intervallum, grafikonja az ábrán látható.



a) Hány egész szám van a függvény értelmezési tartományában, illetve értékkészletében?

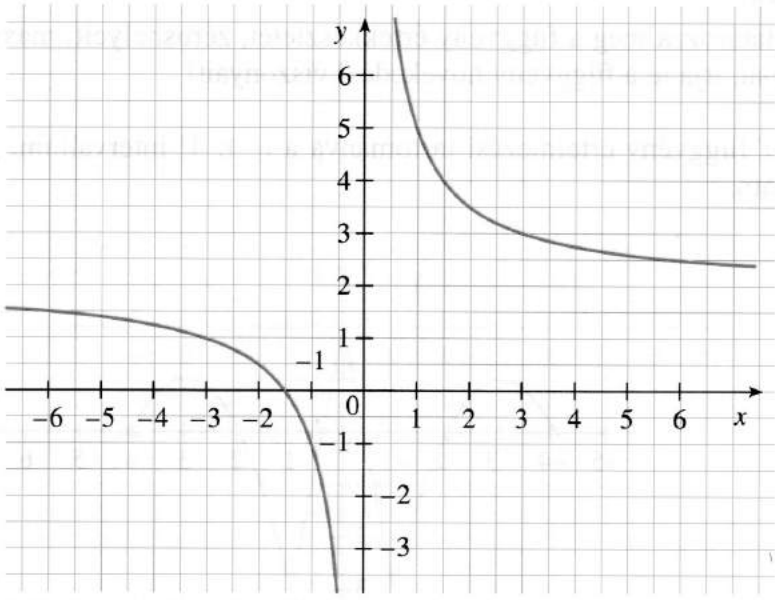
b) Jellemezze a függvényt a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1340. Az ábrán olyan függvény grafikonja látható, melynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A teljes grafikon az abszcisszatengellyel párhuzamos, 2 egység nagyságú eltolással önmagába megy át.



Jellemezze a függvényt a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1341. Az ábrán olyan függvény grafikonja látható, melynek értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

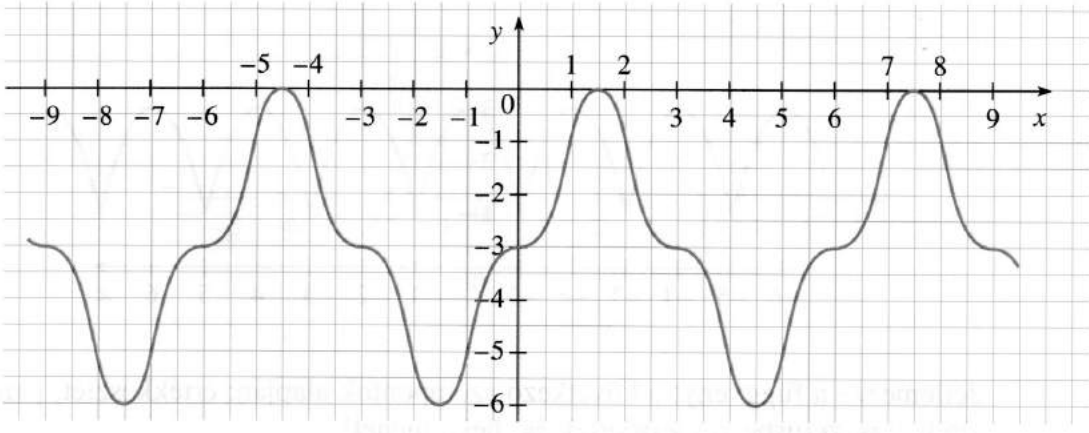


a) Mi a hozzárendelési szabálya? Válassza ki az alábbiak közül!

$$x \mapsto \frac{3}{x+2};\ x \mapsto \frac{3}{x-2};\ x \mapsto \frac{3}{x}+2;\ x \mapsto -\frac{3}{x+2};\ x \mapsto -\frac{3}{x}+2$$

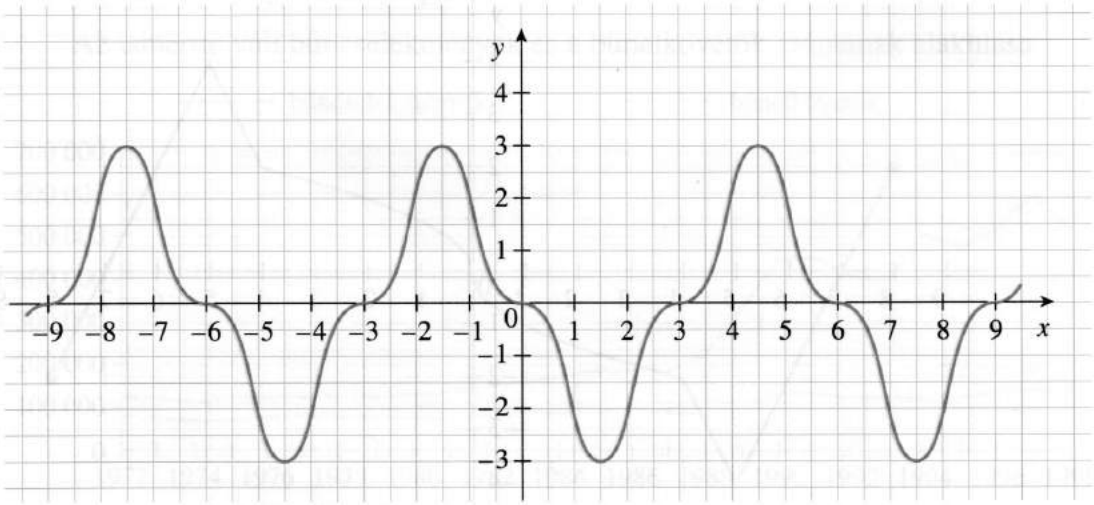
b) Jellemezze a függvényt a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1342. Az ábrán olyan függvény grafikonja látható, melynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A teljes grafikon az abszcisszatengellyel párhuzamos, 6 egység nagyságú eltolással önmagába megy át.



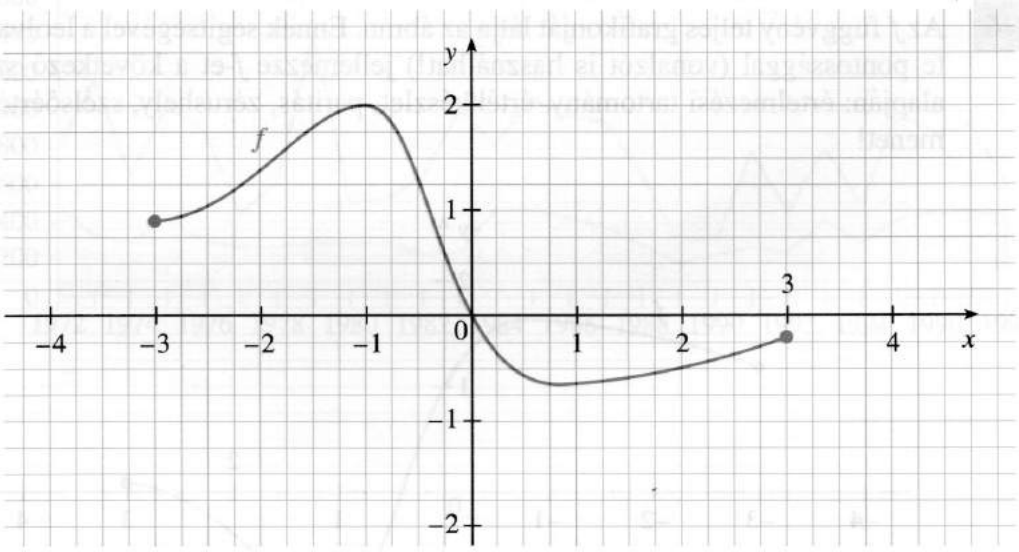
Jellemezze a függvényt a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1343. Az ábrán olyan függvény grafikonja látható, melynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A teljes grafikon az abszcisszatengellyel párhuzamos, 6 egység nagyságú eltolással önmagába megy át.

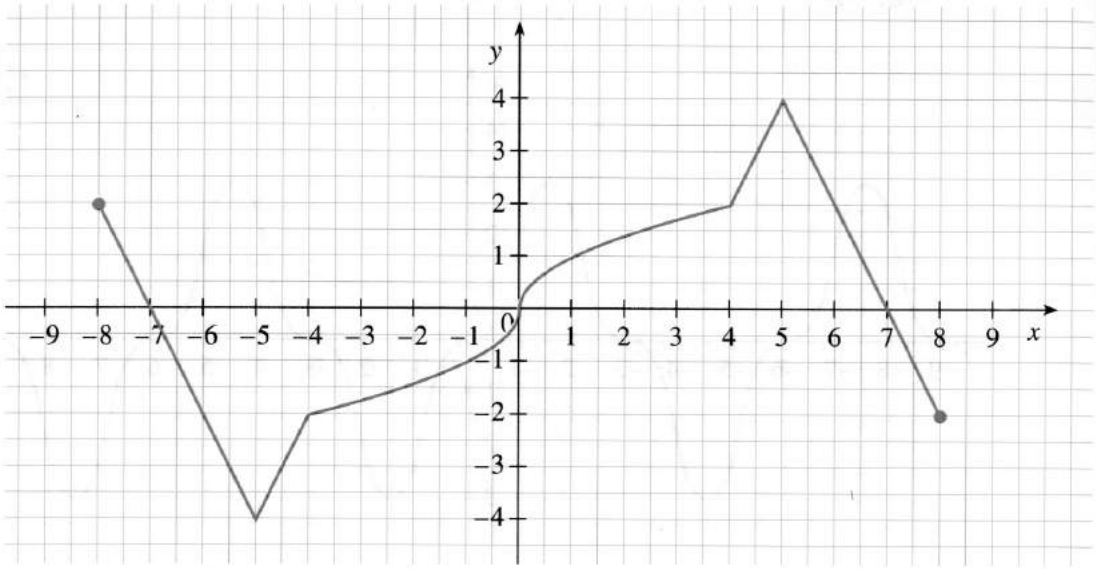


Jellemezze a függvényt a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, periodicitás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

1344. Az f függvény teljes grafikonját látja az ábrán. Ennek segítségével a leolvasás engedte pontossággal (vonalzót is használhat!) jellemezze f-et értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!



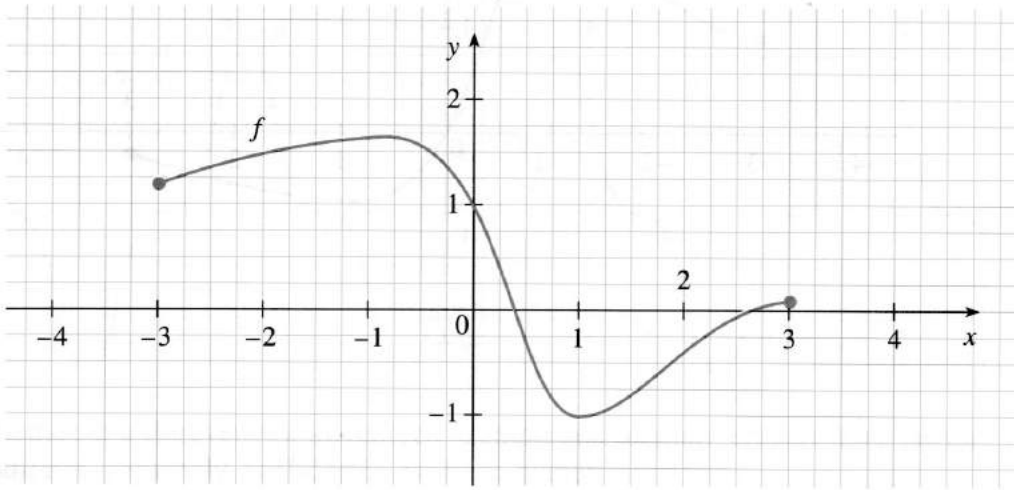
1345. Az f függvény értelmezési tartománya a $[-8; 8]$ intervallum, grafikonja az ábrán látható.



a) Hány egész szám van a függvény értelmezési tartományában, illetve értékkészletében?

b) Jellemezze a függvényt a leolvasás engedte pontossággal (vonalzót is használhat!) a következő szempontok alapján: értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!

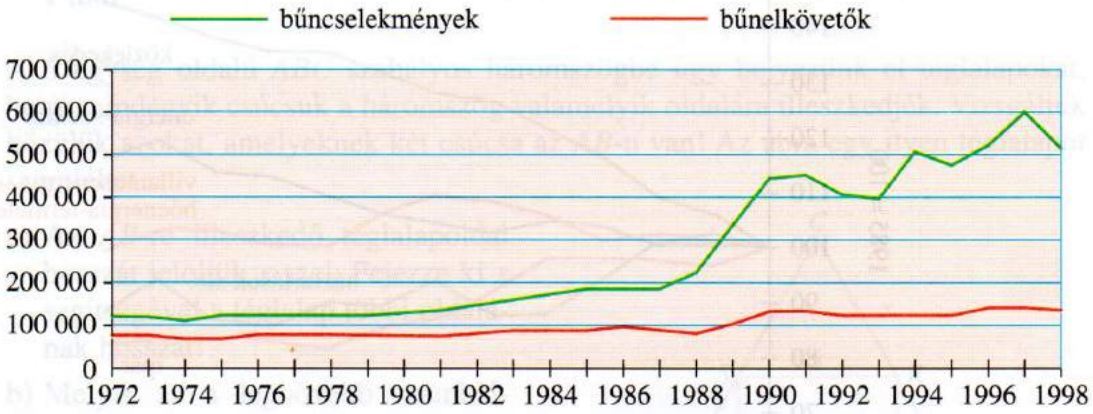
1346. Az f függvény teljes grafikonját látja az ábrán. Ennek segítségével a leolvasás engedte pontossággal (vonalzót is használhat!) jellemezze f-et a következő szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet!



Alkalmazások

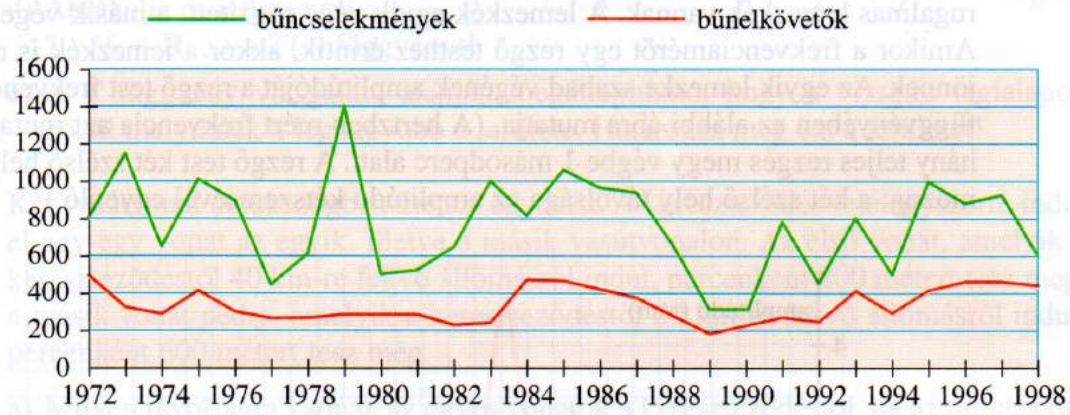
1347. Készítsen rövid, tömör, főleg az adatokat és a változási folyamatokat kiemelő beszámolót az alábbi grafikon alapján!

Az ismertté vált bűncselekmények és a bűnelkövetők számának alakulása



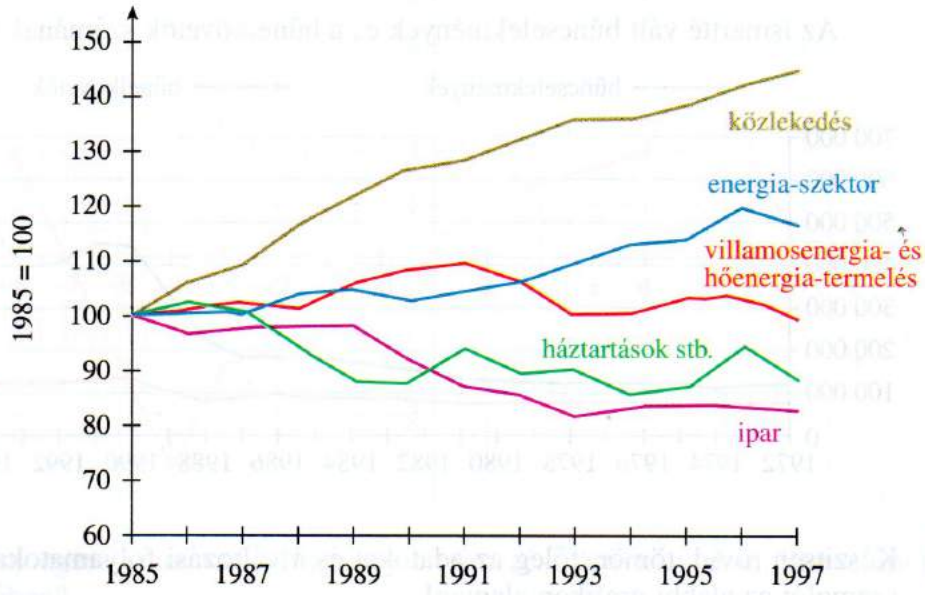
1348. Készítsen rövid, tömör, főleg az adatokat és a változási folyamatokat kiemelő beszámolót az alábbi grafikon alapján!

A korrupciós bűncselekmények és az ismertté vált elkövetők számának alakulása

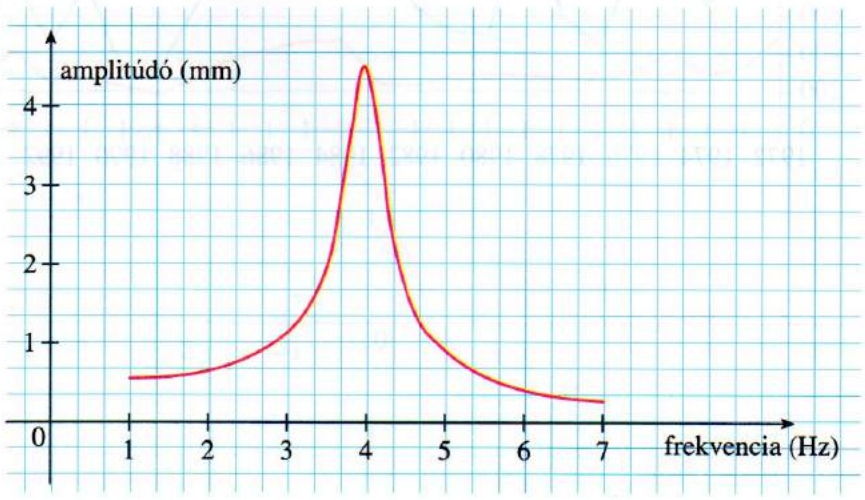


1349. Készítsen rövid, tömör, főleg az adatokat és a változási folyamatokat kiemelő beszámolót az alábbi grafikon alapján!

Az Európai Unió szén-dioxid kibocsátásának alakulása 1985-1997 között



1350. Egy régi frekvenciamérő eszközben (tachométerben) különböző hosszúságú, vékony rugalmas lemezkék vannak. A lemezkék egyik vége rögzített, a másik vége szabad. Amikor a frekvenciamérőt egy rezgő testhez érintik, akkor a lemezkék is rezgésbe jönnek. Az egyik lemezke szabad végének amplitúdóját a rezgő test frekvenciájának függvényében az alábbi ábra mutatja. (A hertzben mért frekvencia azt mutatja meg, hány teljes rezgés megy végbe 1 másodperc alatt. A rezgő test két szélső hely között mozog; a két szélső hely távolsága az amplitúdó kétszeresével egyenlő.)

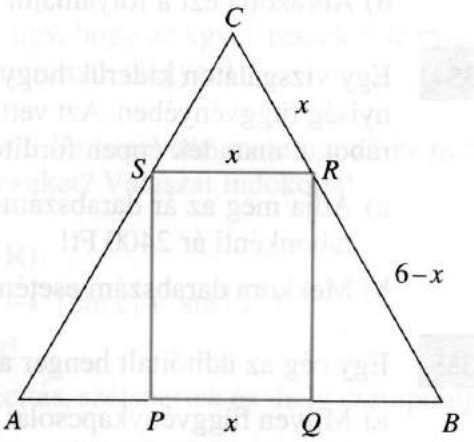


a) Melyik frekvenciatartományban vizsgáltuk a lemezke szabad végének amplitúdóját?

b) Mekkora volt a legnagyobb és a legkisebb amplitúdó, és ezeket melyik frekvenciánál tapasztaltuk?

c) Mekkora frekvenciáknál lesz a lemezke szabad végének amplitúdója legfeljebb 1 mm?

1351. A 6 egység oldalú ABC szabályos háromszögbe úgy helyezünk el téglalapokat, hogy mindegyik csúcsuk a háromszög valamelyik oldalára illeszkedjék. Vizsgáljuk közülük azokat, amelyeknek két csúcsa az AB-n van! Az ábra egy ilyen téglalapot szemléltet.



a) Az AB-re illeszkedő téglalapoldal hosszát jelöljük x-szel. Fejezze ki x segítségével a téglalap többi oldalának hosszát!

b) Melyik az a legbővebb számhalmaz, amelyből x értékét választhatjuk? Jelölje ezt a halmazt H-val!

c) Írja fel a téglalap területét x segítségével, a kapott összefüggést jelölje $T(x)$-szel!

d) Ábrázolja és jellemezze a $T : H \to \mathbf{R}$; $x \mapsto T(x)$ függvényt!

e) A T függvény vizsgálata alapján megállapítható, hogy a vizsgált téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe. Határozza meg ezt a területet!

1352. Két vasútvonal derékszögben metszi egymást. A kereszteződés felé egyszerre indul el egy-egy vonat az egyik, illetve a másik vasútvonalon. Az első vonat, amelyik a kereszteződéstől 40 km-re fekvő állomásról indul, percenként 800 métert tesz meg, a másik vonat pedig, amelyik a kereszteződéstől 50 km-re fekvő állomásról indul, percenként 600 métert tesz meg.

a) Milyen távolságra vannak az egyes vonatok a kereszteződéstől, ha az indulás óta x perc telt el $(x > 0)$?

b) Milyen távolságra vannak a vonatok egymástól, ha az indulás óta x perc telt el $(x > 0)$?

c) Jelölje a b)-ben kapott távolság négyzetét $m(x)$-szel. Ábrázolja és jellemezze az $m : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto m(x)$ függvényt!

d) Az m függvény vizsgálata után válaszoljon arra a kérdésre, hogy az indulástól számítva hány perc múlva lesz a két mozdony egymástól a legkisebb távolságra, és mekkora ez a távolság?

1353. Tudjuk, hogy ideális gázokra teljesül az ún. általános gáztörvény: $pV = nRT$, ahol p a gáz nyomása, V a térfogata, T az abszolút hőmérséklete, n a mólok száma, míg R az univerzális gázállandó. Egy adott gázra igaz, hogy (SI-ben mért mennyiségekkel felírva): $pV = 3T$.

a) Ha tudjuk, hogy a hőmérséklete 300 K, és ez nem változik, akkor hogyan változik a nyomása, ha a térfogatát a kezdeti 1 m^3-ről fokozatosan 10 m^3-re növeljük?

b) Ábrázolja ezt a folyamatot p-V diagramon!

c) Ha ugyanennek a gáznak a nyomását tartjuk állandó 10^5 Pa értéken, akkor a térfogatát ismét 1 m^3-ről 10 m^3-re növelve hogyan változik a (kelvinben mért) hőmérséklete?

d) Ábrázolja ezt a folyamatot T-V diagramon!

1354. Egy vizsgálaton kiderül, hogy egy áru árát jól lehet közelíteni a piacon lévő mennyiség függvényében. Azt vették észre, hogy a piaci mennyiségből levonva 1000 darabot, a maradék éppen fordított arányban van az árral.

a) Adja meg az ár darabszám-függését, ha tudjuk, hogy 10 000 darab esetén a darabonkénti ár 2400 Ft!

b) Mekkora darabszám esetén megy az ár 1000 Ft alá?

1355. Egy cég az üdítőitalt henger alakú fémdobozokban árulja.

a) Milyen függvénykapcsolat fejezi ki a henger felszínét a sugár, illetve a magasság függvényében, ha 1 literes a „doboz"? (Ez azért érdekes, mert a dobozhoz szükséges fém mennyisége, ha állandó falvastagságú a henger, akkor a felszínnel arányos.)

b) Józan határokat szabva a sugár legyen legalább 2 cm, míg a magasság is legalább 5 cm. Ekkor mi lesz az értelmezési tartománya és az értékkészlete az előző függvényeknek?

c) Vázolja is a felszínre kapott egyik függvényt!

d) Vizsgálja meg a függvényeket monotonitás szempontjából!

1356. Egy gazda annyit árult el, hogy téglalap alakú földdarabjának területe 6000 m^2.

a) Tudjuk, hogy még a legkeskenyebb nadrágszíjparcella esetén is a szélesség legalább 10 méter, akkor milyen határok között mozog a birtok kerülete?

b) Ábrázolja a kerületet a téglalap egyik oldalának függvényében!

c) Vizsgálja meg a függvényt monotonitás és szélsőérték szempontjából!

Nehéz és emelt szintű példák

1357. Legyen S a koordinátasík pontjainak halmaza, f pedig olyan leképezés, amely S minden – két különböző pontból álló – pontpárjához az általuk meghatározott szakasz felezőpontját rendeli.

a) Mi a függvény értékkészlete?

b) Egy-egyértelmű-e a függvény?

1358. Mekkora a b és c valós paraméterek értéke, ha az $f(x) = -2x^2 + bx + c$ függvény maximuma -6, és azt $x = 8$-nál veszi fel?

1359. Bontson fel egy 18 cm-es szakaszt két részre úgy, hogy az egyes részek fölé rajzolt szabályos háromszögek területének összege minimális legyen!

1360. Határozza meg az $x \mapsto \cos^2 x - 2\cos x - 3$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény maximumát és minimumát! Hol veszi fel a függvény a szélsőértékeket? Válaszát indokolja!

1361. a) Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$):

$$x \mapsto |\sin x|,\ x \mapsto \sin|x|,\ x \mapsto |\sin x| + \sin|x|!$$

b) Állapítsa meg a függvények értékkészletét!

c) Jellemezze a függvényeket paritás, periodicitás, szélsőérték és -hely szempontjából is!

1362. Ábrázolja és jellemezze (értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték, menet) a következő függvényt ($x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$): $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}$!

1363. Tekintsük az $f : x \mapsto \sqrt[4]{x}$ ($x \geq 0$) függvényt! Adja meg azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, $x \geq 0$-ra azonos az előzővel és

a) páratlan függvény; b) páros függvény!

1364. a) Határozza meg az $f: x \mapsto 4 - \dfrac{2}{x+3}$ függvény inverzét, és ábrázolja mind az f-et, mind az inverzét!

b) Vizsgálja meg mindkét függvény legfontosabb tulajdonságait!

1365. Valakinek a következő, elég hiányos értéktáblázat áll a rendelkezésére:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	4	5	-3

Emellett azt is tudja, hogy egy szinuszfüggvény transzformáltjáról van szó (tehát egy $f: x \mapsto A\sin(cx+d)+B$ alakban megadható függvényről, ahol A, B és c, d valós számok), valamint, hogy a periódusa 4π.

a) Mi lehet a függvény?

b) Ábrázolja és jellemezze a függvényt!

1366. Bontsa fel a 60-at két pozitív összeadandóra úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen!

1367. Egy ablak alakja téglalap, felette félkörrel. Milyenek legyenek az ablak méretei, hogy 8 méteres kerület mellett a lehető legtöbb fényt bocsássa be (azaz lehető legnagyobb legyen a területe)?

1368. Egy 80 cm-es bádoglemez két szélének felhajtásával téglalap keresztmetszetű vízlevezetőt készítünk úgy, hogy a víz a lehető leggyorsabban folyjon át rajta. (Ez akkor következik be, ha keresztmetszetének területe a lehető legnagyobb.) Határozza meg, mekkora legyen a két felhajtandó rész, és mekkora lesz a maximális keresztmetszet területe?

1369. Egy patak partján el akarunk keríteni egy téglalap alakú részt. A kerítésből 400 méternyi anyagunk van. Hogyan kell az elkerített téglalap oldalait megválasztani, hogy a terület maximális legyen? (Természetesen a parthoz nem kell kerítés!)

1370. A bekerített telkünkön baromfiak számára a meglévő 16 m hosszú dróthálónkkal a lehető legnagyobb, téglalap alakú területet szeretnénk elhatárolni. A baromfiudvart egyik oldaláról a meglévő kerítés határolná, mert így az állatok számára nagyobb területet tudunk biztosítani. (A szomszéd sem ellenzi ezt a megoldást, ha nem a háza közelében tartjuk az állatokat.) Mekkora lesz a maximális terület?

3.4. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

1371. Oldja meg grafikusan az $x^3 - x = x + 1$ egyenletet! Az első, a megoldás(ok) helyét hozzávetőlegesen megadó vázlatos ábrázolás után a gyök(ök)et tartalmazó 1 egységnyi intervallum(ok)ról készítsen legalább 0,1 pontosságú leolvasást lehetővé tevő ábrát!

1372. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket! Számolással is ellenőrizze a kapott eredményt!

a) $x = \frac{1}{x}$ b) $x + 1 = \frac{2}{x}$ c) $1 - x = \frac{1}{x}$

1373. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket! Számolással is ellenőrizze a kapott eredményt!

a) $|x - 2| + 1 = \frac{2}{x}$ b) $|x| = 2 - x^2$ c) $\frac{1}{x} = x^2 - 2x + 2$

1374. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $x^2 + 2x - 1 = \frac{2}{x}$ b) $2\sqrt{x} = x^2$ c) $\sqrt{x} = |x - 3|$

1375. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $x^3 = 1 - x$ b) $\frac{1}{x} = \sqrt{x} + 1$ c) $-2x^2 + 4x + 0{,}5 = \frac{1}{x}$

1376. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{x}{2} = \sin x$ b) $2x + 1 = 2^x$ c) $\frac{1}{x} = \{x\}$

1377. Készítsen ábrát a $4 \cdot \sin x = \frac{1}{2} x$ egyenlethez és állapítsa meg, hogy hány gyöke van!

1378. Készítsen ábrát a $3^x = 2x + 1$ egyenlethez és állapítsa meg, hogy hány gyöke van!

1379. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

a) $2^x = \frac{1}{2}x + 1$ b) $\log_2 x = x - 1$

1380. Oldja meg grafikusan az $x^2 + 1 \le \frac{1}{x}$ egyenlőtlenséget! Az első, a megoldás(ok) helyét hozzávetőlegesen megadó vázlatos ábrázolás után a gyök(ök)et tartalmazó 1 egységnyi intervallum(ok)ról készítsen legalább 0,1 pontosságú leolvasást lehetővé tevő ábrát!

1381. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $|x+2| - 3 > -\frac{x+5}{2}$! Számolással is ellenőrizze a kapott eredményt!

1382. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 < 3 - |x-1|$ b) $x^2 - 2x + 3 \ge |x-2|$ c) $-x^2 \ge |x+1|$

1383. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $2 - x < \frac{1}{x}$ b) $|x-2| + 1 \ge \frac{2}{x}$

1384. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $|x| \le 2 - x^2$ b) $\frac{1}{x} < x^2 - 2x + 2$

1385. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{x^2}{2} < \sqrt{x+2}$ b) $(x-1)^2 > \sqrt{x}$

1386. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\cos x < \sqrt{x}$ b) $x^2 < \operatorname{tg} x$

1387. Mekkora legyen az $x \mapsto a \cdot x$ függvény grafikonjának meredeksége, hogy ne legyen közös pontja az

a) $x \mapsto \sqrt{x-1}$; b) $x \mapsto 2^x$

függvény grafikonjával?

1388. Mekkora legyen az $x \mapsto a \cdot x$ függvény grafikonjának meredeksége, hogy ne legyen közös pontja az

a) $x \mapsto \sqrt{x}$; b) $x \mapsto \log_2 x$

függvény grafikonjával?

1389. Mekkora legyen az $x \mapsto a \cdot x$ függvény grafikonjának meredeksége, hogy ne legyen közös pontja az

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$; b) $x \mapsto x^2 + 1$

függvény grafikonjával?

1390. Oldja meg grafikusan: $(x-2)^2 > \sqrt{x-2}$!

1391. Állapítsa meg grafikus módszerrel, x mely értékeire teljesül: $|x-3|-1 > 1-\frac{1}{5}x$!

1392. Ábrázolja az $f(x) = \big||x|-2\big|-3$ függvényt, majd állapítsa meg azokat az x-eket, amelyekhez tartozó függvényérték: 1; 0; –1; –2; –3; –4 !

1393. Állapítsa meg az $\frac{x+1}{x-1}$ kifejezés értelmezési tartományát! Van-e olyan x érték, amelyre a kifejezés értéke

a) 0; b) 3; c) kisebb, mint 3?

1394. Ábrázolja egy koordináta-rendszerben az $f(x) = |x+1|-1$ és a $g(x) = -|x|+2$ függvényt! Állapítsa meg, mely x értékekre teljesül, hogy

a) $f(x) = g(x)$; b) $f(x) < g(x)$; c) $f(x) > g(x)$!

1395. Ábrázolja koordináta-rendszerben a lehető legbővebb halmazon értelmezett $f(x) = |x+1|-|x|$ függvényt! Állapítsa meg

a) az értelmezési tartományát; b) az értékkészletét; c) a zérushelyét,

továbbá, hogy x mely értékeire teljesül, hogy

d) $f(x) = 1$; e) $f(x) = 0$; f) $f(x) = -1$!

1396. Oldja meg grafikusan!

a) $|x-2| = x-2$ b) $|x-2| = 2-x$ c) $\sqrt{x^2-4x+4} = x-2$

1397. Egy négyzet csúcspontjai: (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1). Adjon meg olyan lineáris függvényt, amelynek grafikonja illeszkedik a (0; 2) pontra és a négyzetből területének

a) negyedét; b) felét

metszi le!

c) Milyen arányú részekre bontja a négyzet területét az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes?

1398. Oldja meg grafikusan a $\sqrt{x-1} = |x-4| + 3$ egyenletet!

1399. Oldja meg grafikusan a következő egyenletet: $10^x = x - 1$!

1400. Oldja meg (grafikus lépéseket is felhasználva) a következő egyenletet!

$2^x - 3x + 1 = 0$

1401. Oldja meg (grafikus lépéseket is felhasználva) a következő egyenletet!

$0{,}5 \log_2 x^2 = 1$

1402. Oldja meg grafikusan a következő egyenletet: $|\sin x| = \frac{1}{2}$!

1403. Oldja meg (grafikus lépéseket is felhasználva) a következő egyenletet!

$\log_2 x + x^2 - 5 = 0$

1404. Van-e megoldása a $2^x + 3 = -x^2 + 2x + 1$ egyenletnek? Válaszát indokolja!

1405. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $|\log_2 x| \geq 1$!

1406. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $2^x > 5^x$!

1407. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$!

1408. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $x + |x| \leq 4$!

1409. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $|x| + x \geq -x + 3$!

1410. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget: $\left|\frac{2x^2}{x}\right| > 6$!

1411. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a negatív számok halmazán: $3^x \leq 2x + 1$!

1412. A változó mely értékére állnak fenn a következő egyenlőtlenségek?

a) $2 \cdot \log_3 x > 1$ b) $3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x - 1 < 0$ c) $\lg x \geq \frac{1}{2} \lg x$

1413. Oldja meg grafikus módszerrel az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon a $\frac{4}{x} + 5 < (x+2)^2$ egyenlőtlenséget!

1414. Oldja meg grafikus módszerrel az $\mathbf{R} \setminus \{4\}$ halmazon az $x^2 - 6x + 7 = \frac{2}{x-4}$ egyenletet!

1415. Oldja meg grafikus módszerrel a valós számok halmazán a $|x+1| - 1 = -(x+2)^2 + 4$ egyenletet!

1416. Oldja meg a valós számok halmazán grafikus módszerrel a következő egyenlőtlenséget: $|x+3| \geq 4 - |x-1|$!

1417. Határozza meg a $[0; 2\pi]$-nak azon x értékeit, melyekre

a) $\sin x < \sin 2x$; b) $\cos x < \cos 2x$!

1418. Legfeljebb hány közös pontja lehet egy lineáris és egy (nem 1 alapú) exponenciális függvény grafikonjának? Válaszát grafikusan indokolja!

1419. Adja meg az alábbi egyenlőtlenség megoldáshalmazát a számegyenesen grafikus ábrázolás segítségével: $4\sqrt{x-1} \geq 4x^2 - 24x + 20$!

1420. Oldja meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget a $[-\pi; \pi]$ intervallumban:

$$2 \cdot \sin 3x \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)!$$

1421. Mutassa meg, hogy a következő egyenletnek az egyetlen megoldása a 2 !

$$10 \cdot \lg \frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

1422. a) Ábrázolja az $f(x) := \begin{cases} (x+2)^2, & \text{ha } x \le 1 \\ x-3, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$ függvényt!

b) Megrajzolható-e egyetlen vonallal az f függvény grafikonja?

c) Van-e megoldása az $f(x) = x + 2$ egyenletnek?

1423. a) Ábrázolja az alább megadott f függvényt!

$$f\colon [-5;\ 6] \to \mathbf{R};\ f(x) := \begin{cases} -2x - 8, & \text{ha } x \le -3 \\ \frac{x}{3} - 1, & \text{ha } -3 < x < 3 \\ -(x-4)^2 + 1, & \text{ha } x \ge 3 \end{cases}$$

b) Oldja meg a $[-5; 6]$ alaphalmazon a következő egyenletet, illetve egyenlőtlenséget!

1. $f(x) = -1$
2. $f(x) \ge 1$

1424. $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ g(x) := \begin{cases} x + 6, & \text{ha } x < -4 \\ \frac{1}{4}x + 3, & \text{ha } -4 \le x \le 4 \\ -2x + 8, & \text{ha } x > 4 \end{cases}$

a) Ábrázolja a g függvényt!

b) Jellemezze a g függvényt értékkészlet, paritás, zérushely, szélsőérték és -hely, menet szempontjából!

c) Határozza meg, mely b valós számok esetén lesz igaz a $g(b) \ge 3$ egyenlőtlenség!

1425. Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket ($x \in \mathbf{R}$)!

$$f(x) = x^2; \qquad g(x) = x^3; \qquad h(x) = x^4$$

Az ábra alapján válaszoljon, mely x értékekre teljesül, hogy

a) $x^2 < x^3 < x^4$; b) $x^3 < x^4 < x^2$; c) $x^4 < x^3 < x^2$;

d) $x^3 < x^2 < x^4$; e) $x^2 < x^4 < x^3$; f) $x^2 = x^3 = x^4$?

1426. Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket a lehető legbővebb értelmezési tartományon!

$$f(x) = \sqrt{x}; \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}; \qquad h(x) = \sqrt[4]{x}$$

Az ábra alapján válaszoljon, mely x értékekre teljesül, hogy

a) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x}$;

b) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x}$;

c) $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < \sqrt[4]{x}$;

d) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x}$?

Ha tekintjük az összes valós számot, melyekre igaz, hogy

e) a három függvény közül csak az egyik van értelmezve?

f) a három függvény közül csak kettő van értelmezve?

g) mindhárom függvény értelmezve van?

1427. Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket $(0 < x)$!

$$f(x) = \log_2 x; \qquad g(x) = \log_3 x; \qquad h(x) = \log_4 x$$

Az ábra alapján válaszoljon, mely x értékekre teljesül, hogy

a) $\log_2 x < \log_3 x < \log_4 x$,

b) $\log_2 x > \log_3 x > \log_4 x$,

c) $\log_2 x = \log_3 x = \log_4 x$?

1428. Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket $(0 < x)$!

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x; \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x; \qquad h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Az ábra alapján válaszoljon, mely x értékekre teljesül, hogy

a) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{4}} x$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{4}} x$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{4}} x$?

1429. Ábrázolja ugyanabban a koordináta-rendszerben az $f(x) = |x|$ és a $g(x) = 3 + \frac{1}{2}x$ függvényeket! Határozza meg a két függvény képe által határolt háromszög területét!

1430. Ábrázolja az alábbi tartományokat koordináta-rendszerben!

a) $y < 2x+5$ b) $x-y<0$ c) $x+y \le 1$ d) $3x+5y<15$

1431. Ábrázolja az alábbi tartományokat koordináta-rendszerben!

a) $x^2 < y$ b) $y \le \sqrt{x}$ c) $y > \frac{1}{x}$

1432. Ábrázolja az alábbi tartományokat koordináta-rendszerben!

a) $|x| \le y$ b) $|x|-2<y<3$ c) $x^2 \le y \le 5$

1433. Ábrázolja az alábbi tartományokat koordináta-rendszerben!

a) $x^2 \le y \le 2-x$ b) $x^2 \le y \le |x|$ c) $\frac{1}{x} < y < x-2$

1434. Ábrázolja az alábbi tartományokat koordináta-rendszerben!

a) $y < |x|$ b) $-2 < y \le 2-x^2$ c) $\log_2 x < y < 2^x$

1435. Ábrázolja az alábbi tartományokat a koordináta-rendszer síkjában (S)!

a) $\{P(x; y) \in S \mid 1 < x \wedge y \le 3\}$

b) $\{P(x; y) \in S \mid -2 < x < 3 \wedge 1 < y < 4\}$

c) $\{P(x; y) \in S; x \in \mathbf{Z}; y \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 3 \wedge 1 < y < 4\}$

1436. $A := \{P(x; y) \in S \mid y < 5\}$, $B := \{P(x; y) \in S \mid -1 < x \le 2\}$. Ábrázolja az alábbi tartományokat a koordináta-rendszer síkjában (S)!

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$

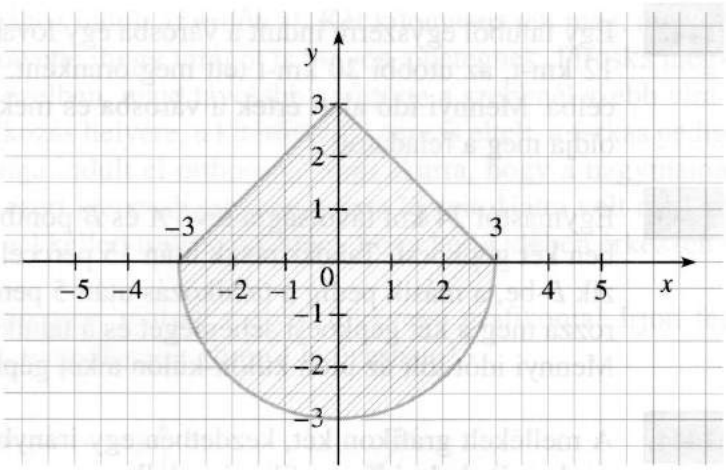
1437. $A := \{P(x; y) \in S \mid x-y<0\}$, $B := \{P(x; y) \in S \mid x+y \le 1\}$. Ábrázolja az alábbi tartományokat a koordináta-rendszer síkjában (S)!

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$

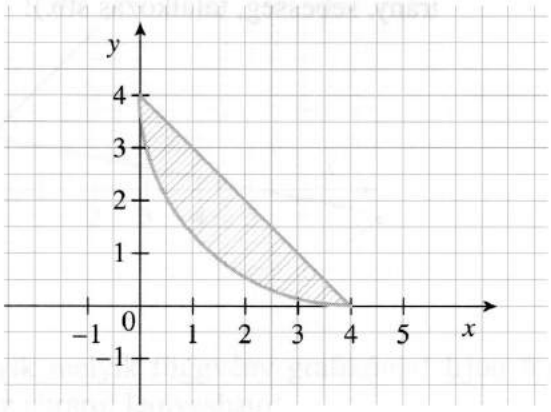
1438. $A := \{P(x; y) \in S \mid 1 \le x \le 3\}$, $B := \{P(x; y) \in S \mid 2 \le y \le 4\}$. Ábrázolja az alábbi tartományokat a koordináta-rendszer síkjában (S)!

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$

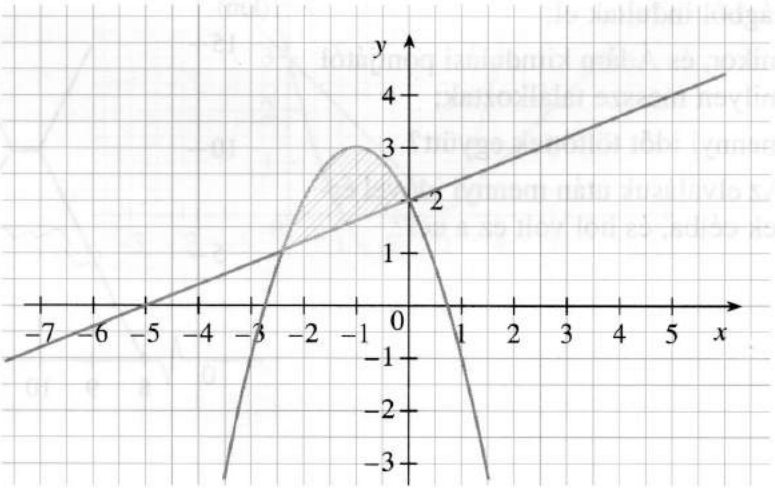
1439. Adja meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely a következő tartományt határozza meg!



1440. Adja meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely az alábbi tartományt adja meg!



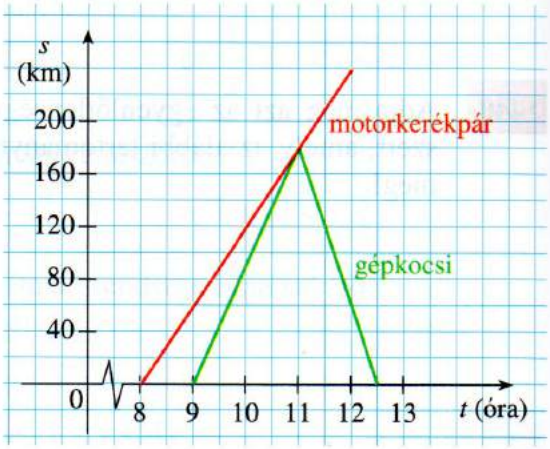
1441. Adja meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amelynek megoldáshalmaza az alábbi függvénygrafikonok által határolt tartomány.



1442. Egy faluból egyszerre indult a városba egy lovas kocsi és egy kerékpáros. Az előbbi 12 km-t, az utóbbi 20 km-t tett meg óránként. Így a kerékpáros 2 órával előbb ért célba. Mennyi idő alatt értek a városba és mekkora utat tettek meg? Grafikusan is oldja meg a feladatot!

1443. Egymástól 24 km távolságra lévő A és B pontból egyszerre indul egymással szemben két gépkocsi. Találkozásuk után 15 perccel az A-ból induló gépkocsi megérkezik B-be, a másik pedig a találkozás után 5 perccel ér A-ba. Grafikon alapján határozza meg a két gépkocsi sebességét és a találkozási helynek A-tól való távolságát! Mennyi időt tölt az úton külön-külön a két gépkocsi?

1444. A mellékelt grafikon két, kezdetben egy irányban mozgó jármű (motorkerékpár és gépkocsi) hely-idő grafikonja. Jellemezze a két jármű mozgását (mozgásirány, sebesség, találkozás stb.)!



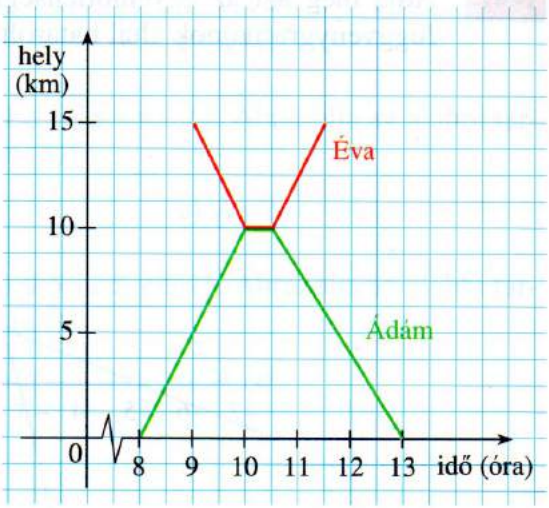
1445. A mellékelt grafikon Ádám és Éva helyét írja le az idő függvényében. Olvassa le a grafikonról, hogy

a) mikor, és egymástól milyen távolságból indultak el;

b) mikor, és Ádám kiindulási pontjától milyen messze találkoztak;

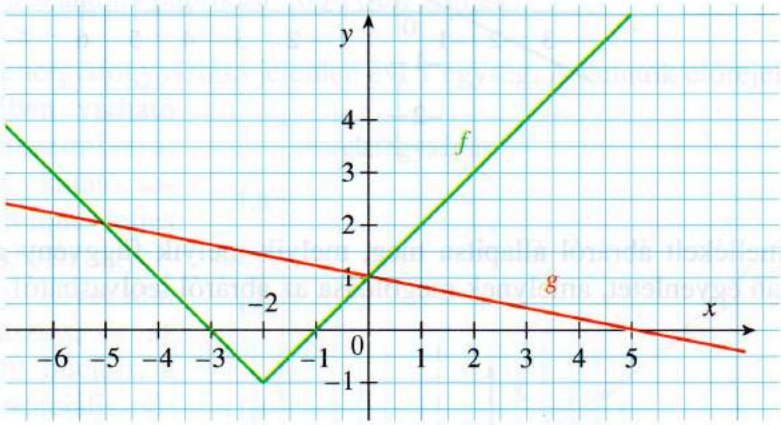
c) mennyi időt töltöttek együtt?

d) Az elválásuk után mennyi idővel értek célba, és hol volt ez a cél?

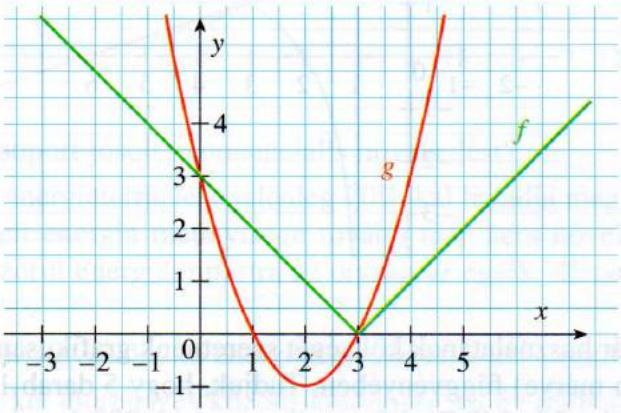


1446. Piroska a beteg nagymamájához indult az erdőn át. Két kilométert tett meg, amikor találkozott a farkassal, aki rávette, hogy virágot is vigyen a betegnek. Piroska megörült az ötletnek. Előbb a közelben, majd távolabb gyűjtötte a szebbnél szebb virágokat. Mire visszaért a találkozás helyére, a kitérővel 20 perc is eltelt, a farkas pedig nem volt sehol. Éppen 1 órája indult el otthonról. Nem akarta, hogy a nagymama izguljon érte a késés miatt, ezért igencsak megszaporázta lépteit. Hátra volt még az út 2/3-a. Mekkora sebességgel kellett tovább haladnia, hogy kellő időben érkezzen?

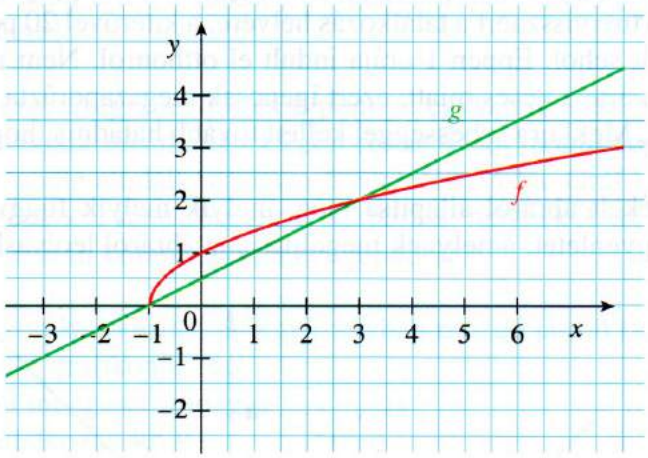
1447. A mellékelt ábráról állapítsa meg, melyik melyik függvény grafikonja! Írjon fel olyan egyenletet, amelynek megoldása az ábráról leolvasható!



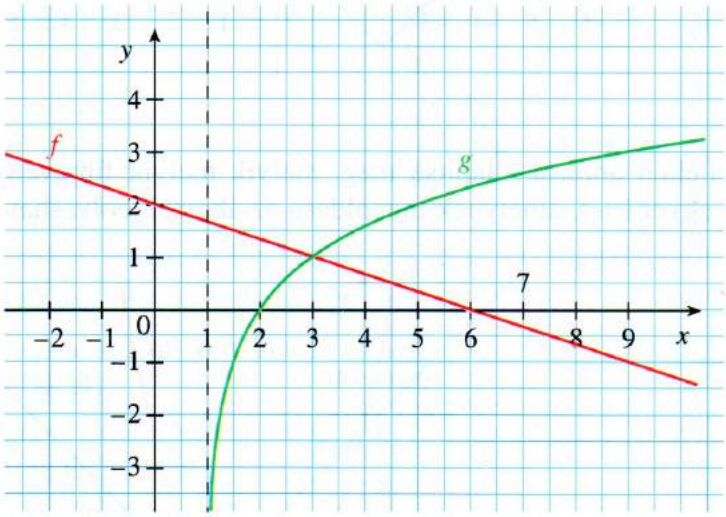
1448. A mellékelt ábráról állapítsa meg, melyik melyik függvény grafikonja! Írjon fel olyan egyenletet, amelynek megoldása az ábráról leolvasható!



1449. A mellékelt ábráról állapítsa meg, melyik melyik függvény grafikonja! Írjon fel olyan egyenletet, amelynek megoldása az ábráról leolvasható!



1450. A mellékelt ábráról állapítsa meg, melyik melyik függvény grafikonja! Írjon fel olyan egyenletet, amelynek megoldása az ábráról leolvasható!



1451. Egy csillár használatának költségét szeretnénk grafikusan ábrázolni a használati idő (t, órában mérve) függvényében. Tudjuk, hogy 5 darab 100 W-os égőt használunk, melynek darabja 140 Ft, átlagos élettartamuk 800 óra, és 1 kWh áram ára 24 Ft.

a) Adja meg a [0; 2000] intervallumon képlettel a költséget!

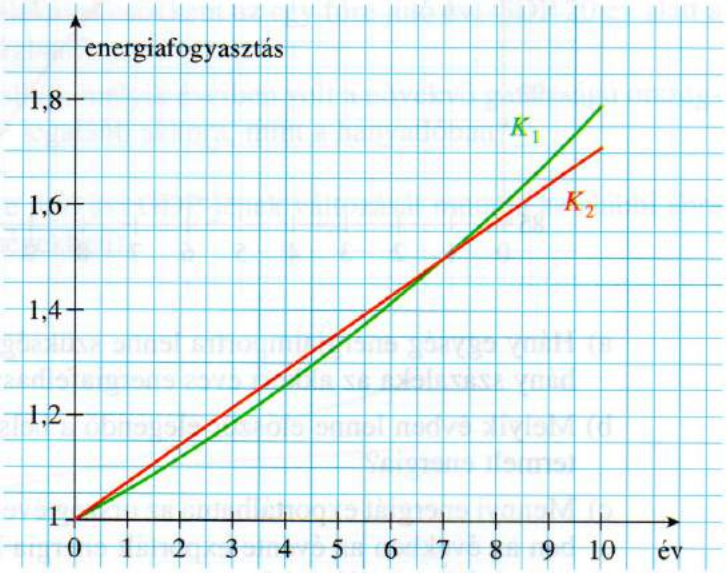
b) Ábrázolja a [0; 2000] intervallumon a költséget!

1452. Egy kis házi büfében egy bulira kétféle szendvicset készítenek, sonkás-sajtost, illetve szalámis-paprikásat. Az elsőhöz darabonként 3 dkg sonka és 2 dkg sajt, valamint 4 dkg kenyér és 1 dkg vaj kell. A szalámishoz ugyanannyi kenyér és vaj, valamint 1 dkg szalámi és 3 dkg paprika szükséges. Rendelkezésre áll 3 kg kenyér, öt darab 10 dkg-os vaj, 0,5 kg sonka és ugyanennyi sajt, 30 dkg szalámi és 0,4 kg paprika.

a) Ábrázolja koordináta-rendszerben mindazon pontokat, amelyek két koordinátája az adott feltételek mellett egyszerre elkészíthető sonkás-sajtos, illetve szalámis-paprikás szendvicsek száma!

b) Milyen szendvicsszámok mellett lesz a bevételük a legnagyobb, ha a sonkás-sajtost 140; a szalámis-paprikást 160 Ft-ért árulják?

1453. Egy ország energiafogyasztása jelenleg évi 1 egység. A kutatók előrejelzéseket adnak a jövőben várható energiafelhasználásra, ám a K_1 és K_2 kutatócsoportok között nincs teljes összhang. Abban egyetértenek, hogy növekedni fog a fogyasztás, de az egyik csoport lineáris, a másik exponenciális növekedést jósol. A két elképzelést egy grafikonon hozzák nyilvánosságra.



a) Melyik kutatócsoport jósolt exponenciális növekedést?

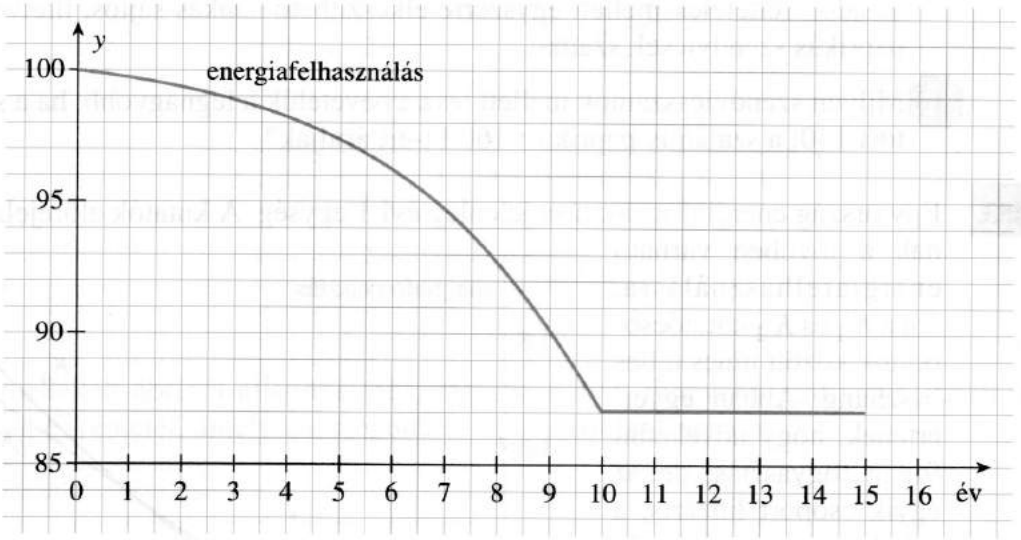
b) Az ország éves energiatermelése jelenleg 70%-kal haladja meg a fogyasztást, de az évente termelt energia mennyisége tovább már nem növelhető. Legelőször melyik évben szorul energiaimportra az ország az egyik, illetve a másik kutatócsoport szerint?

c) Melyik évre jelez ugyanakkora energiafogyasztást a két kutatócsoport?

d) Mekkora lesz a két előrejelzés közötti különbség 10 év múlva? Hány százaléka ez a jelenlegi éves energiafelhasználásnak?

e) Becsülje meg, mekkora lenne az ország energiafogyasztása 15 év múlva, ha az mindvégig a K_1, illetve a K_2 csoport előrejelzése szerint alakulna?

1454. Egy ország energiafogyasztása jelenleg évi 100 egység, energiatermelése pedig évi 90 egység, de az energiatermelés az ország adottságai miatt nem növelhető. Egy kutatócsoport számításai szerint új technológiák bevezetésével és takarékossággal elérhető lenne, hogy az éves energiafelhasználás 10 éven keresztül évről évre csökkenjen. A csoport cikket jelentetett meg, amelyben a következő grafikonnal szemléltette a szerinte várható energiafelhasználást:



a) Hány egység energiaimportra lenne szüksége az országnak az ötödik évben? Ez hány százaléka az akkori éves energiafelhasználásának?

b) Melyik évben lenne először elegendő a belső fogyasztáshoz az országban megtermelt energia?

c) Mennyi energiát exportálhatna az ország évente a 10., a 11. és a 12. évben? Ezekben az években az évente exportált energia hány százaléka lenne az azévi belső energiafelhasználásnak?

1455. 250 tonna betont akarnak egy nagy építkezésre szállítani két kocsival: az egyik 8, a másik 10 tonnát tud elvinni. A nagyobb lassabban halad, 40 perc alatt visz el egy adagot, a kisebb 30 perc alatt.

a) Milyen szállítási tervek lehetségesek? Szemléltesse grafikusan!

b) Melyik tervet követve lesz a szállítási idő a legrövidebb? Hogyan olvasható ez le a grafikus ábrázolásról?

1456. Egy növekvő és egy hanyatló gazdaság egy főre jutó évi nemzeti összтermékét (GDP-jét) mutatja az alábbi ábra (a GDP-t 10 ezer dolláros egységekben ábrázoltuk).

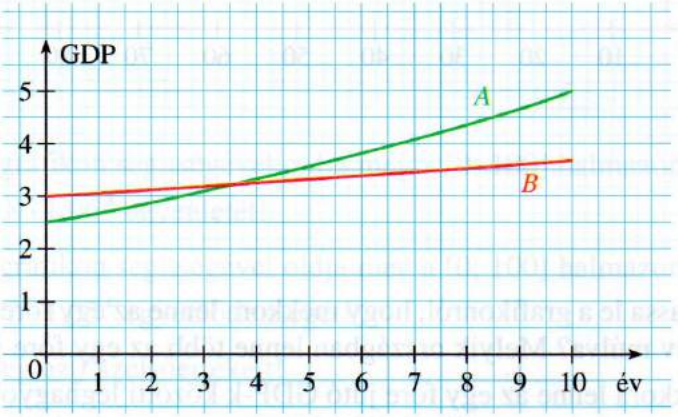


a) Mekkora volt a növekvő gazdaságú országban az egy főre jutó évi GDP a 20. évben?

b) Az eredetinek hány százalékával csökkent az egy főre jutó évi GDP 20 év alatt a hanyatló gazdaságú országban?

c) A vizsgált 20 éves intervallum melyik éveiben volt a növekvő gazdaságú országban az egy főre jutó GDP legalább akkora, mint a hanyatlóban?

1457. Az *A* és *B* országok egy főre jutó évi GDP-jének változását mutatja az alábbi ábra (a GDP-t ezer dolláros egységekben).



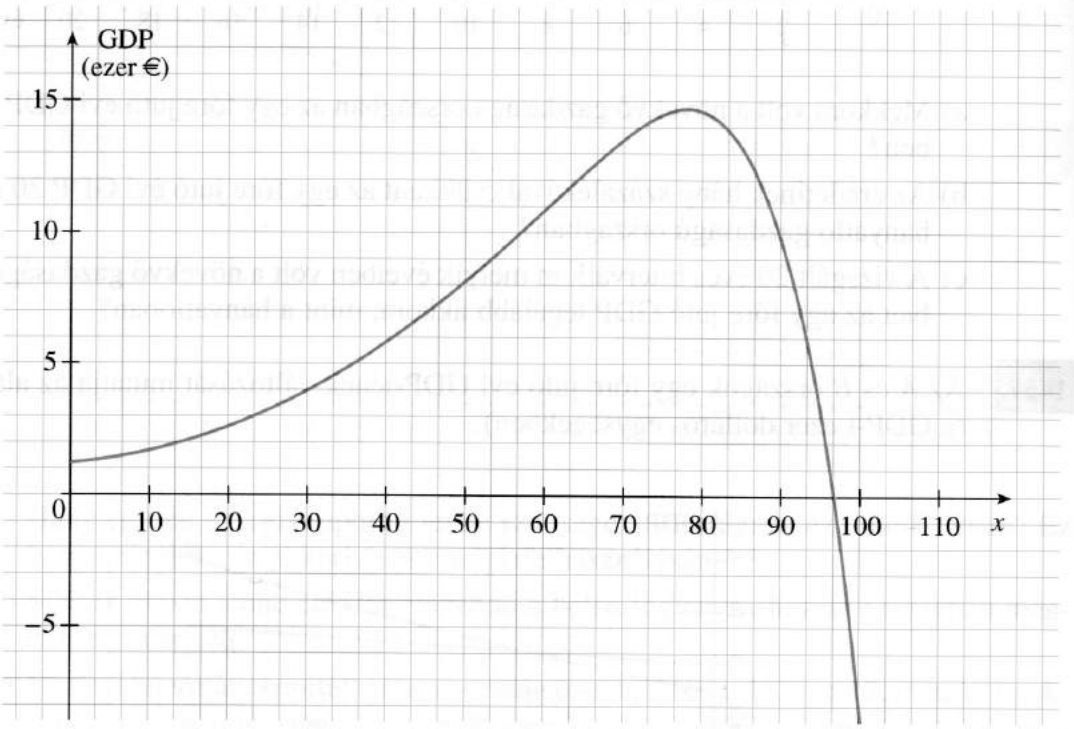
a) Hány év alatt éri be a gyorsabban fejlődő ország a lassabban fejlődőt?

b) Hányszorosára növekedett az egy főre jutó GDP a vizsgált két országban 10 év alatt?

c) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év alatt érték el az egy főre jutó évi 3500 dollár értéket az egyes országok?

d) Ha a *B* ország egy főre jutó GDP-jének növekedése lineáris lett volna, akkor mekkora évenkénti növekedést kellett volna elérniük, hogy ugyanarról a kezdőértékről indulva ugyanarra a szintre jussanak 10 év alatt, mint ahogyan a valóságban?

1458. Két növekvő gazdaságú ország egy főre jutó GDP-jét vizsgáljuk. A jelenlegi adataik: az N országban évi 2000 euró az egy főre jutó GDP, ez évente átlagosan 5%-kal növekszik (mindig az előző évhez viszonyítva); a K országban a megfelelő adatok évi 800 euró és 6%. Ha az egy főre jutó GDP növekedési üteme állandó maradna mindkét országban, akkor az x év elteltével tapasztalható GDP értékeket a $2 \cdot 1{,}05^x$ (ezer euró), illetve a $0{,}8 \cdot 1{,}06^x$ (ezer euró) kifejezésekből lehetne kiszámítani. Az alábbi ábrán az $x \mapsto 2 \cdot 1{,}05^x - 0{,}8 \cdot 1{,}06^x$ $(x \geq 0)$ függvény grafikonjának egy részlete látható.

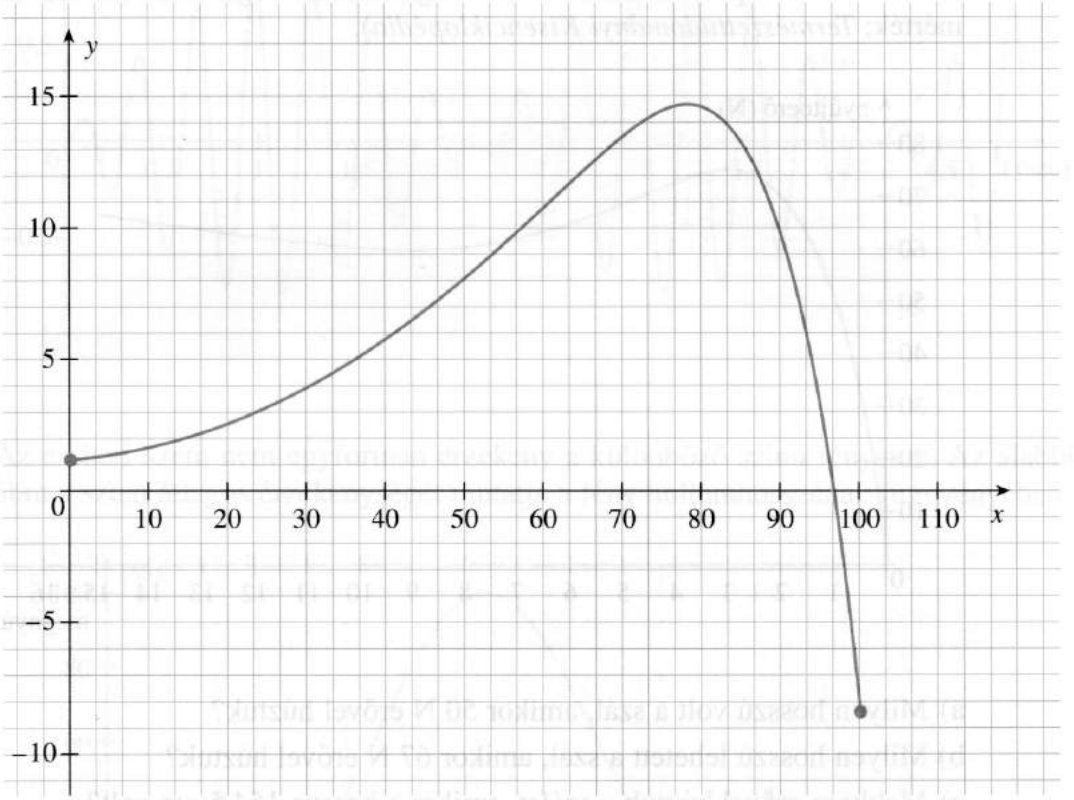


a) Olvassa le a grafikonról, hogy mekkora lenne az egy főre jutó GDP-k különbsége 30 év múlva? Melyik országban lenne több az egy főre jutó GDP?

b) Mekkora lenne az egy főre jutó GDP-k közötti legnagyobb különbség? Mekkora lenne ekkor az egy főre jutó GDP az egyes országokban?

c) Hány év eltelte után lenne egyenlő K-ban és N-ben az egy főre jutó GDP? További 5 év elteltével mi lenne a helyzet?

1459. Az alábbi ábrán az $f : [0; 100] \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 \cdot 1{,}05^x - 0{,}8 \cdot 1{,}06^x$ függvény grafikonja látható.

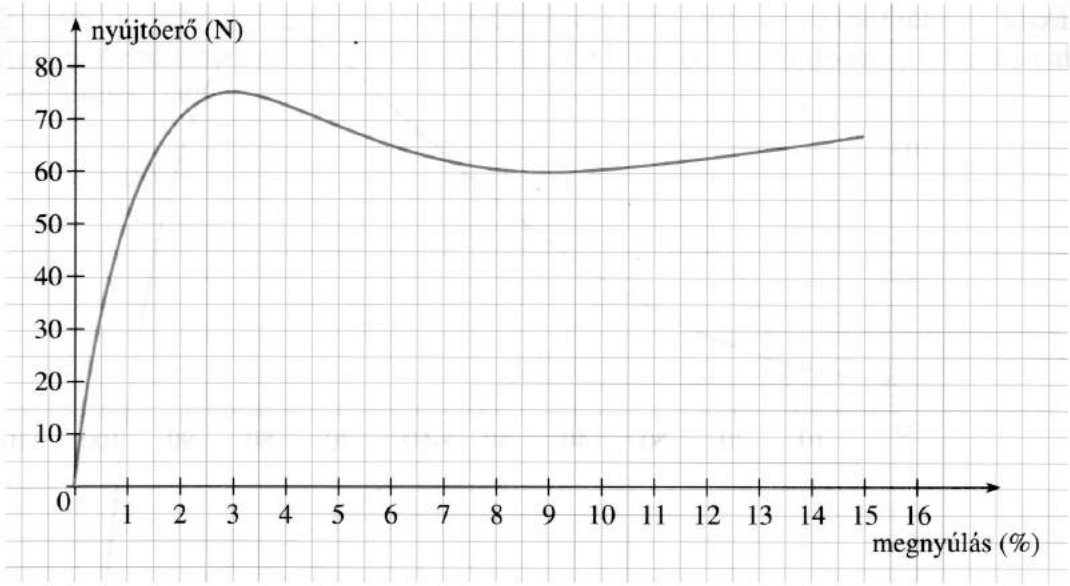


a) A megadott grafikon segítségével oldja meg a [0; 100] halmazon a $2 \cdot 1{,}05^x = 0{,}8 \cdot 1{,}06^x$ egyenletet!

b) A megadott grafikon segítségével oldja meg a [0; 100] halmazon a $0{,}8 \cdot 1{,}06^x > 2 \cdot 1{,}05^x$ egyenlőtlenséget!

c) Határozza meg az f szélsőértékeit!

1460. 150 cm hosszú műanyag szál egyik végét rögzítették. A szál másik végét egyre nagyobb erővel húzták, közben mérték, hogy az eredeti hosszának hány százalékával lett hosszabb. Tapasztalataikat az alábbi grafikonon rögzítették (az erőt newtonban mérték; *Természettudományi Kisenciklopédia*).



a) Milyen hosszú volt a szál, amikor 50 N erővel húztuk?

b) Milyen hosszú lehetett a szál, amikor 67 N erővel húztuk?

c) Mekkora erővel húztuk a szálat, amikor a hossza 154,5 cm volt?

d) Mekkora lehetett a szál hossza, amikor a húzóerő 60 N-nál kisebb volt?

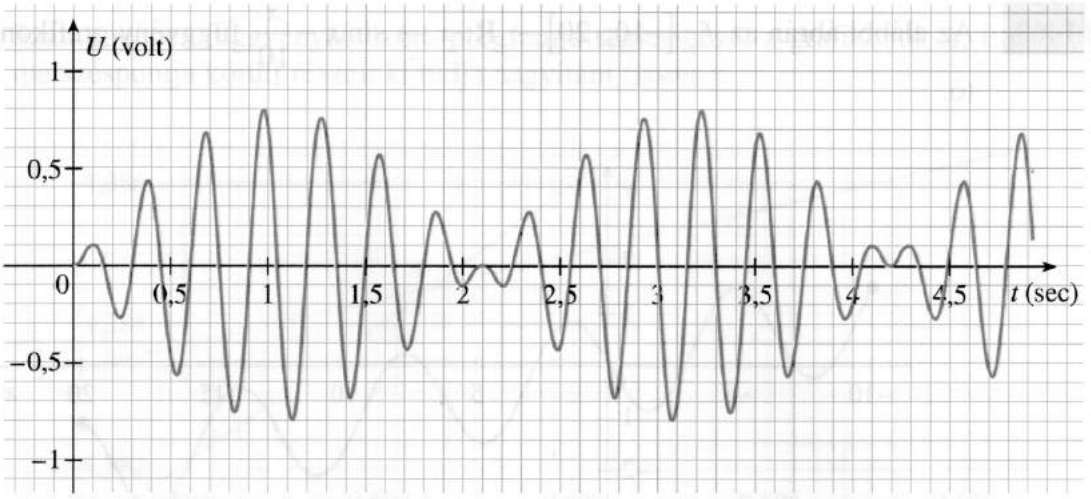
1461. Oszcilloszkóp képernyőjén egy ellenállás két végpontja közötti feszültség időbeli változása figyelhető meg. A feszültség változása periodikus.

a) Mennyi idő alatt játszódik le egy teljes periódus?

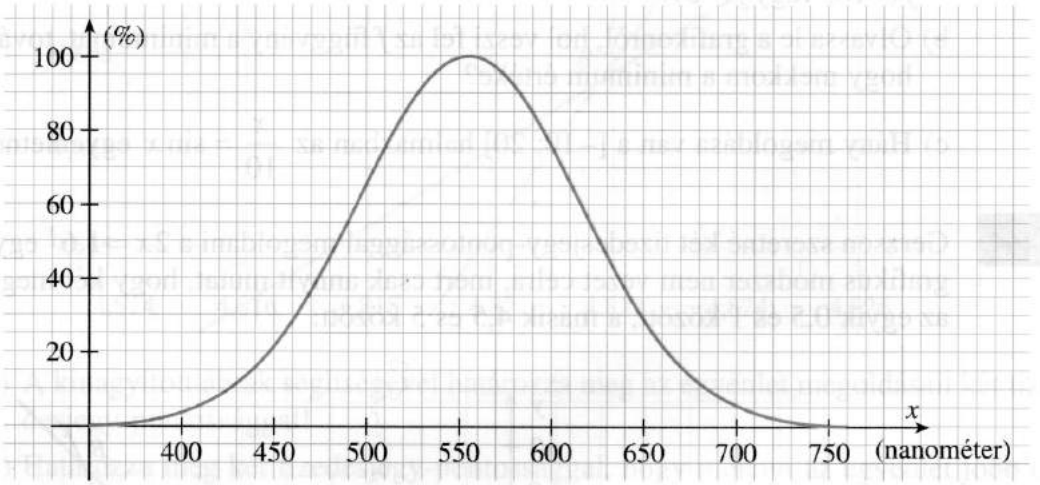
b) Mekkora a legnagyobb és a legkisebb mért feszültség?

c) A mérés első két másodpercében körülbelül mennyi ideig volt az ellenállásra jutó feszültség 0,5 voltnál nagyobb abszolútértékű?

d) Hányszor volt feszültségmentes az ellenállás a mérés első két másodpercében?



1462. Az emberi szem nem egyformán érzékeny a különböző színű fényekre. Az alábbi ábra a szem átlagos érzékenységét mutatja a fény hullámhosszának függvényében.



A fény színe a hullámhosszától függ; az alább közölt táblázatból kiolvasható néhány szín és a hozzá tartozó hullámhossz.

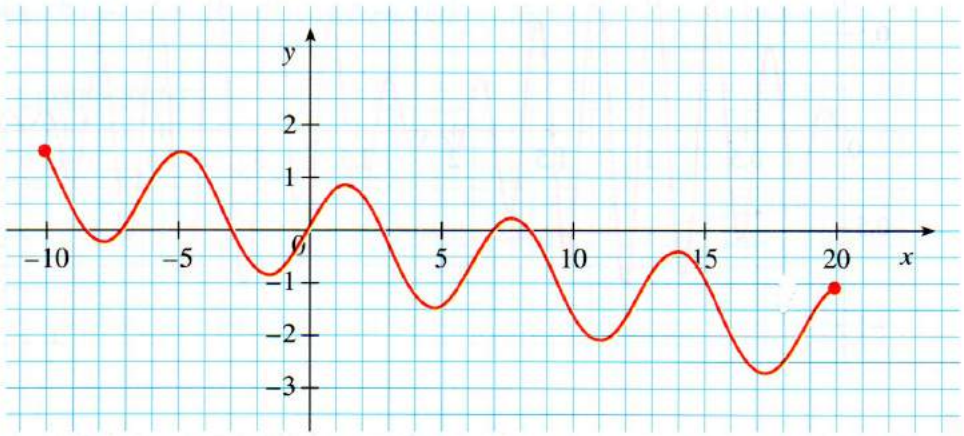
hullámhossz nanométerben	400	480	494	550	570	580	650	700
szín	ibolya	kék	kékeszöld	levélzöld	sárgászöld	sárga	vörös	mélyvörös

a) Melyik színre a legérzékenyebb az emberi szem (azonos fényenergia esetén)?

b) Mely színek esetén lesz a maximális érték fele a szem érzékenysége?

c) Soroljon fel olyan természeti jelenségeket, dolgokat (legalább hármat), amelyek színére az emberi szem érzékenysége legalább 80%-os!

1463. Az alábbi ábrán az $f : [-10;\ 20] \to \mathbf{R};\ x \mapsto \sin x - \frac{x}{10}$ függvény grafikonja látható.

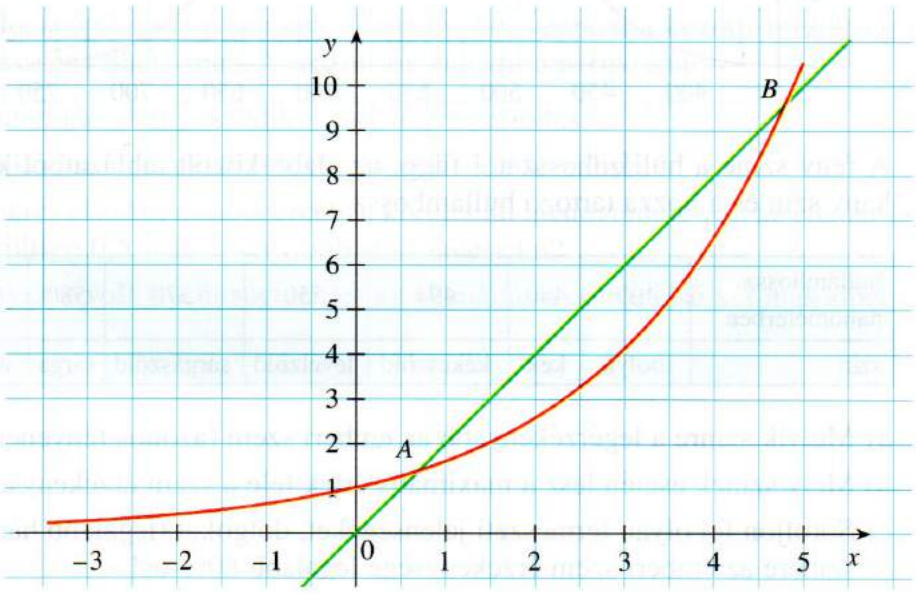


a) Számológépe segítségével döntse el, hogy melyik függvényérték a nagyobb: $f(-10)$ vagy $f(-5)$?

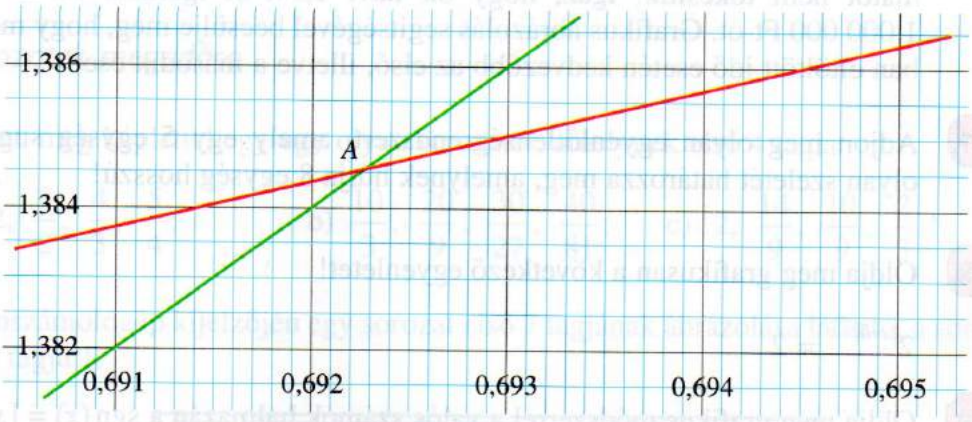
b) Olvassa le a grafikonról, hol veszi fel az f függvény a minimumát, továbbá azt is, hogy mekkora a minimum értéke?

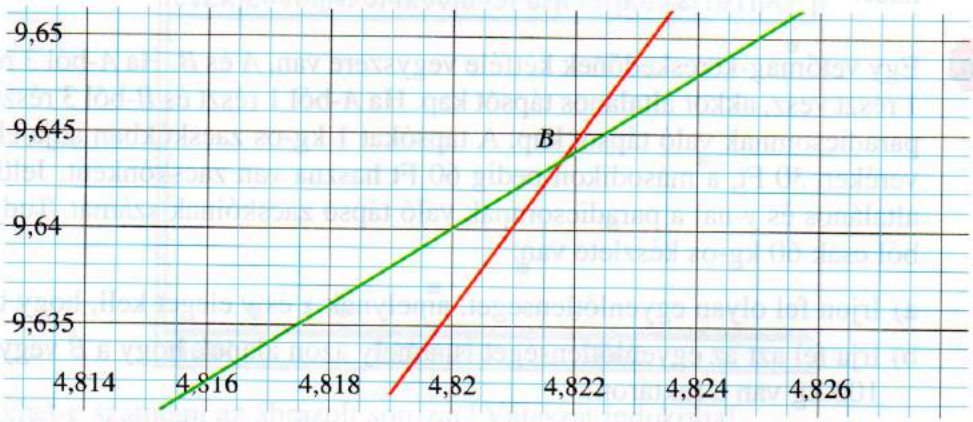
c) Hány megoldása van a $[-10; 20]$ halmazban az $\frac{x}{10} = \sin x$ egyenletnek?

1464. Gerzson szeretné két tizedesjegy-pontossággal megoldani a $2x = 1{,}6^x$ egyenletet. A grafikus módszer nem vezet célra, mert csak annyit mutat, hogy két megoldás van; az egyik 0,5 és 1 között, a másik 4,5 és 5 között:



Számítógépes függvényábrázoló programja segítségével a grafikonok A, illetve B metszéspontja körüli részeit ki tudja nagyítani (zoom):





a) A kinagyított ábrák segítségével határozza meg az egyenlet megoldásait két tizedesjegy-pontossággal!

b) Határozza meg két tizedesjegy-pontossággal, hogy mennyi az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés helyettesítési értéke az egyenlet két gyöke esetén!

1465. A rugóra akasztott, harmonikus rezgést végző test mozgását az $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ egyenlet írja le, ahol y a pillanatnyi kitérés, A az amplitúdó (azaz maximális kitérés), t a periódus kezdete óta eltelt idő, T a rezgés periódusideje. A periódusidő mely szakaszaiban lesz a kitérés nagysága az amplitúdó

a) felénél; b) harmadánál; c) negyedénél

nagyobb?

1466. Egy bankban havi kamatoskamat-számítással, havi 0,5% kamat mellett elhelyeznek 1 000 000 Ft-ot. Egy másik helyen csak egyszerű éves kamatot ígérnek, tehát a kamatot nem tőkésítik, igaz, hogy ők havi 1,5%-ot ígérnek. Itt is elhelyezünk 1 000 000 Ft-ot. Grafikus ábrázolás segítségével becsülje meg, hogy mennyi, bankban eltöltött idő esetén kedvezőbb az első, illetve a második eset!

1467. Adjon meg olyan egyenlőtlenségrendszert, amely egy 5 egység sugarú kör egy olyan szeletét határozza meg, amelynek húrja 8 egység hosszú!

1468. Oldja meg grafikusan a következő egyenletet!

$2^{|x-1|+x} = 2$

1469. Oldja meg grafikus módszerrel a valós számok halmazán a $\operatorname{sgn}(x) = [x] + 1$ egyenletet!

1470. Egy vetőmag-kereskedőnek kétféle vegyszere van, *A* és *B*. Ha *A*-ból 3 részt és *B*-ből 1 részt vesz, akkor általános tápsót kap. Ha *A*-ból 1 részt és *B*-ből 3 részt vesz, akkor paradicsomnak való tápsót kap. A tápsókat 1 kg-os zacskókban adja el, az első keveréken 30 Ft, a másodikon pedig 60 Ft haszna van zacskónként. Jelölje x-szel az általános és y-nal a paradicsomnak való tápsó zacskóinak számát. Tudjuk, hogy *A*-ból csak 60 kg-os készlete van.

a) Írjon fel olyan egyenlőtlenséget, amelynek x és y eleget kell, hogy tegyen!

b) Írja fel azt az egyenlőtlenséget is, amely azon alapul, hogy a *B* vegyszerből csak 100 kg van a raktáron!

c) Határozza meg grafikus úton azon x, y értékeket, amelyre maximális haszna van, ha feltételezzük, hogy minden zacskót el tud adni!

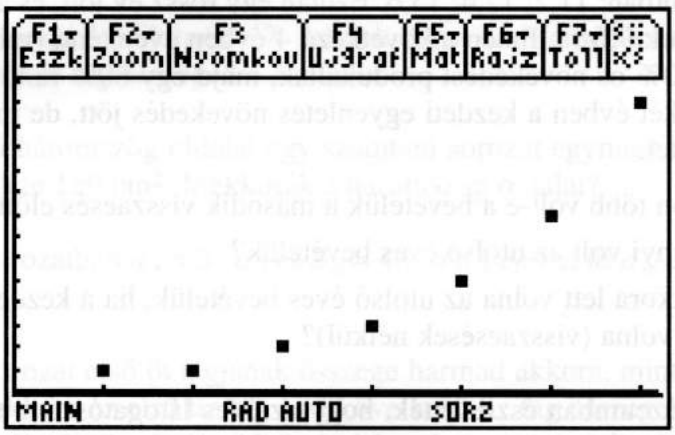
3.5. Sorozatok

Sorozatok megadása

1471. Adjon meg képlettel egy-egy olyan sorozatot, amelynek első 4 tagja:

a) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$; b) $\frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{30}{27}, \frac{40}{81}$; c) $2, \frac{14}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{3}$!

1472. Zsebszámológép kijelzőjén egy sorozat első 7 tagjának ábrázolása látható, a sorozat első tagja 1.



a) Lehet-e számtani az ábrázolt sorozat? Válaszát indokolja!

b) Lehet-e mértani az ábrázolt sorozat? Válaszát indokolja!

c) Lehet-e az ábrázolt sorozat a Fibonacci-sorozat? (Ezt úgy értelmezzük, hogy $a_1 = a_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.) Válaszát indokolja!

d) Adja meg a sorozat 8. és 9. tagját mindazokban az esetekben, amelyekben a feltett kérdésre igennel válaszolt!

1473. A (c_n) sorozat n-edik tagja $c_n := \binom{n+1}{2}$. Számítsa ki a c_1; c_2 és c_{10} tagokat!

1474. Egy speciális körülmények között tartott baktériumtenyészet egyedeinek száma n óra elteltével $a_n = a_{n-1} + 5(n-1)$ volt.

a) Ha kezdetben 1000 egyed volt, akkor 10 óra múlva hányan voltak?

b) Adja meg a_n-t csupán n és a kezdeti egyedszám, a_0 függvényében!

1475. Egy sorozatról a következőket tudjuk: $a_1 = 3$; és $a_n = a_{n-1} + n$ minden $n > 1$ természetes szám esetén.

a) Határozza meg a_{15} értékét!

b) Határozza meg a_n értékét n függvényében!

c) Mennyi az első száz tag összege?

1476. Egy dinamikusan fejlődő gyár 1990-ben 10 tonna gummancsport, 1992-ben pedig 21 tonnát termelt. A %-ban kifejezett termelésnövekedés 1991-ről 1992-re 10-zel nagyobb volt, mint 1990-ről 1991-re. Hány százalékkal nőtt a termelés évről évre?

1477. Egy halásztársaság évenkénti teljesítményeit összehasonlítva a következőket vették észre. Az első három évben egyenletes növekedést mutattak a bevételi mutatók, millió forintban: 11,2; 12,4; 13,6. Ezután egy rossz év jött, és a kezdeti év alá csökkent a bevétel: 9,6-ra. Innen a következő 4 évben évenkénti (mindig az előző évhez képest) 10%-os növekedést produkáltak, majd egy 60%-ra történő visszaesés után az utolsó két évben a kezdeti egyenletes növekedés jött, de most évi 2,5 millió forint többlettel.

a) Vajon több volt-e a bevételük a második visszaesés előtt, mint az első előtt?

b) Mennyi volt az utolsó éves bevételük?

c) Mekkora lett volna az utolsó éves bevételük, ha a kezdeti növekedési ütem maradt volna (visszaesések nélkül)?

1478. Egy múzeumban észrevették, hogy az éves látogatószám egyre jobban emelkedett az elmúlt négy évben. A évenkénti növekedések növekedése mindig 14 500 főt tett ki. A 4. évben ez mennyire növekedett, ha kezdetben 165 000 látogatójuk volt?

1479. Egy sorozat tagjai úgy növekszenek, hogy a szomszédos tagok különbségeiből alkotott sorozat egy számtani sorozat (az ilyen sorozatot szokás másodrendű számtani sorozatnak nevezni).

a) Ha a különbségsorozat differenciája 3, az eredeti sorozat első tagja 5, és a második tagja 7, akkor mennyi lesz a sorozat 12. tagja?

b) Mennyi a sorozat első 20 tagjának az összege?

c) Fejezze ki a sorozat n-edik tagját a megadott számok és az n változó segítségével!

1480. Írja fel zárt alakban: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1)$!

1481. Írja fel zárt alakban: $1 \cdot 7 + 2 \cdot 11 + \ldots + n(4n+3)$!

1482. Egy állattenyésztő észrevette, hogy a kecskeállományának gyarapodása évről évre 4-gyel nagyobb, mint az előző évben volt. (Például ha tavalyelőtt 10 kecskéje lett volna, tavaly 18, idénre a növekedés 8 + 4 = 12 lenne, azaz 30 kecskéje lenne most.) Mennyi kecskéje lesz a 15. évben, ha 100 kecskével kezdett, az ötödik évben 265 kecskéje volt, s feltételezzük, hogy ez a növekedési ütem változatlan marad?

Számtani sorozatok

1483. Andris azt állítja, hogy a számtani sorozat bármely tagja a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepe. Igaz-e az állítás, nem szükséges-e valamilyen kiegészítés?

1484. Egy számtani sorozat ötödik tagja 17, hetedik tagja 10. Mennyi az első tag, a differencia, az első nyolc tag összege?

1485. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai?

1486. Egy számtani sorozatban $a_3 = 3 \cdot a_2$ és $S_n = 40 \cdot a_3$. Fejezze ki a_n-et csak az a_1 segítségével!

1487. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege harmad akkora, mint a következő öt tag összege. Mekkora az első tíz tag és a következő tíz tag összegének aránya?

1488. A kétjegyű páros számok összege x, a kétjegyű páratlan számok összege y. Melyik szám nagyobb és mennyivel?

1489. Tekintsük a háromjegyű páros számok összegét és a háromjegyű páratlan számok összegét! Melyik nagyobb és mennyivel?

1490. Egy számtani sorozatban az első tag n, a differencia 4 és az első n tag összege 96. Mekkora az n?

1491. Egy számtani sorozat különbsége 5, első n tagjának összege -56, n-edik tagja n. Adja meg a sorozat első n tagját!

1492. Egy számtani sorozat differenciája 0,5; az első n tag összege 38, az első $n+4$ tag összege 69. Mennyi a_1 és n?

1493. Egy számtani sorozat második és nyolcadik tagjának összege 2, kilencedik és harmadik tagjának különbsége 24. Mennyi az első tíz tag összege?

1494. Bizonyítsa be, hogy 11 szomszédos egész szám összege osztható 11-gyel! Megfogalmazható-e a hasonló, igaz állítás 12 szomszédos szám esetén?

1495. Egy számtani sorozat első 60 tagja közül a páros indexű tagok összege 2760, a hárommal osztható indexű tagok összege pedig 1870. Határozza meg a sorozat első 60 tagjának összegét!

1496. Egy számtani sorozat első három tagjának összege -12, szorzata 80. Melyik ez a három tag?

1497. Egy számtani sorozat hét egymást követő tagjának az összege 700. Meg lehet-e ebből állapítani, hogy a 100 szerepel-e a sorozat tagjai között?

1498. Egy számtani sorozat első tagja $\frac{5}{\sqrt{2}+1}$, differenciája $\sqrt{2}$. Számítsa ki a sorozat első húsz tagjának pontos összegét számológép használata nélkül!

1499. Egy egész számokból álló számtani sorozat első 5 tagjának összege 65, szorzata 129 168. Melyik ez a sorozat?

1500. Egy számtani sorozat negyedik tagja 15. Mennyi az első hét tag összege? Mutasson két példát ilyen sorozatra úgy, hogy az egyik fogyó, a másik pedig növekedő sorozat legyen!

1501. Egy háromjegyű szám jegyei, a felírás sorrendjében, egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Ha a szám kétszeresét elosztjuk a számjegyeinek összegével, akkor 41-et kapunk. Ha a százasok és a tízesek helyén álló számot felcseréljük, akkor az eredetinél 270-nel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

1502. Egy számtani sorozat első tagja -190, n-edik tagja 202. A közbülső tagok összege 36. Írja fel a sorozat első n tagját!

1503. Mekkora a 2005-nél kisebb, hárommal osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok összege?

1504. Az első n pozitív páros szám összegének és az első n pozitív páratlan szám összegének hányadosa $\frac{101}{100}$. Mekkora az n?

1505. A természetes számok növekvő sorozatából kiválasztottunk egy számot, majd a nála hárommal nagyobbat és így tovább, míg a kiválasztott számok összege 493 lett. Hány számot választottunk, és mi volt az első szám?

1506. Hány olyan háromszög van, amelynek legrövidebb oldala 1 cm, a szögei fokokban mérve egész számok és egy számtani sorozat egymást követő tagjai?

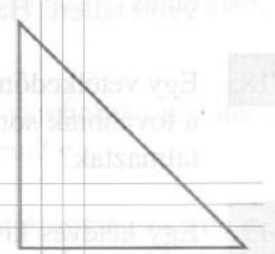
1507. Egy háromszög három oldalhossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. A háromszögnek van 120°-os szöge és a kerülete 300. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát és a másik két szögét!

1508. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat három szomszédos tagját alkotják, melynek a különbsége 3 cm. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

1509. Megállapítható-e egy konvex ötszög egyik szögének pontos értéke, ha az ötszög szögei egy számtani sorozat egymás utáni tagjai?

1510. Egy konvex sokszög belső szögeinek mérőszámai egy számtani sorozat egymás utáni tagjai. Hány oldalú a sokszög, ha a legnagyobb szöge 177,5°, a legkisebb pedig 122°30′? Mekkora a sokszög többi szöge?

1511. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú területen facsemetéket szeretnének nevelni. Két facsemete távolságának legalább 75 cm-nek kell lennie, és szabályos rendben, a háromszög befogóival párhuzamos négyzetháló szerint akarják elültetni őket. A terület 5000 m^2 nagyságú. Legfeljebb hány facsemete ültethető el a területre?



1512. Nyilvántartásunkban 2 M Ft értékben szerepel tárgyi eszköz. Ennek nyilvántartási értéke évente

a) 100 E Ft-tal csökken; b) az eredeti érték 15%-ával csökken.

Töltse ki az alábbi „nyilvántartást" mindkét esetben!

	most (eredeti érték)	2 év múlva	4 év múlva	6 év múlva
a) szerinti érték	2 M Ft			
b) szerinti érték	2 M Ft			

1513. Egy könyvszekrényben hét polc van. A legalsó polcon 51 könyv van, és minden további polcon hárommal kevesebb, mint az alatta levőn. Hány könyv van ebben a könyvszekrényben?

1514. Egy matematikus könyvszekrényének legfelső polcán 17 darab könyv van. A 20 polcos könyvszekrényben lefelé haladva polcról polcra egyre több könyv van: soronként mindig ugyanannyival több. Lehetséges-e, hogy a szekrény minden polcán prímszámnyi könyv van? Válaszát indokolja!

1515. Ottlik Géza Iskola a határon című, 379 oldalas könyvét szeretnénk elolvasni. Ha az első napon 19 oldalt, majd minden nap az előző napinál 18 oldallal többet olvasunk, akkor hány nap alatt sikerül kiolvasni a könyvet?

1516. Osszunk szét öt ember között 100 cipót úgy, hogy a második ember ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Még azt is megkívánjuk, hogy a három legnagyobb rész együttesen hétszer annyit tegyen ki, mint a két legkisebb összege. (Kb. 4000 éves egyiptomi „matematikai" feladvány.)

1517. Agárversenyen a fogadók közül minden nyertes 450 tallérral kevesebbet kapott, mint az őt megelőző. A legtöbbet nyerő 3600 tallért kapott, a többi nyertes összesen 9900 tallért. Hányan nyertek a fogadók közül?

1518. Egy vetélkedőn 15 000 Ft jutalmat osztottak ki. Az első helyezett 3000 Ft-ot kapott, a továbbiak sorra 200 Ft-tal kevesebbet, mint az előttük lévő. Hány versenyzőt jutalmaztak?

1519. Egy kétéves kislány kavicsokkal rakta tele kis vödrét. Ebből egyenként visz kavicsokat a tőle 2 méterre levő virágágyáshoz, az egy sorban ültetett virágok mellé. Az utolsó kavics letétele után is visszatér vödréhez.

a) Mekkora utat tesz meg, ha a 18 virágot 30 cm-enként ültették, és egy egyenesbe esnek a kislány vödrével? A virágok az ágyások szélétől is 30 cm-nyire virítanak.

b) Mekkora a megtett út akkor, ha alkalmanként 3 kavicsot visz magával (3 virág számára)?

1520. Egy 4 m hosszú futószőnyeget kell felcsavarnunk egy 3 cm átmérőjű hengerre. Átköthető-e 50 cm hosszú zsineggel, ha az 5 mm vastagságú szőnyeget sikerül jó szorosan összetekerni, és a zsinegből 10 cm kell a megkötéshez?

1521. Néptáncra várakozás közben két emelet közti lépcsősoron Kati és Zsófi fel-lejárással tölti az idejét. Kati 2 lépcsőfok után visszatér, majd négy lépcsőfoknyit tesz meg, azután hatot és így tovább, mindig fel, majd le. Zsófi eközben végigmegy a lépcsőn fel és le. Harmadszorra már Katival együtt teszi meg a teljes utat. Hány fokú a lépcsősor, ha a két gyerek egyszerre indult és azonos állandó sebességgel haladt?

1522. Egy színházi nézőtéren, amely felülről nézve egy körgyűrűcikk, 24 sor van. Az első sorban 18 hely van, utána minden sorban 3-mal több. Minden sor 20 cm-rel magasabban van, mint az előző.



a) Hány férőhelyes a színház?

b) Mennyivel van magasabban az utolsó sor, mint az első?

1523. Egy stadionról tudjuk, hogy egy szektora egy emelkedő körgyűrűcikk. Az első sorban 80, a többiben soronként 4-gyel több ülőhely van. Minden sor 35 cm-rel magasabban van, mint a megelőző. Tudjuk még, hogy az utolsó sor 14 méterrel magasabban van, mint az első. A stadion 8 ilyen szektorból áll. Mekkora a maximális nézőszám?

1524. Egy körgyűrűcikk alakú szabadtéri nézőtéren minden sorban 4-gyel több férőhely van, mint az előtte lévőben. Hány sorba tudunk elhelyezni 240 nézőt, ha az első, 40 férőhelyes sortól kezdve minden helyre ültetünk embert?

1525. Egy nézőtér első sorában 60 személy ülhet. Hány embernek van helye a nézőtér 20. sorában, ha minden sorban az előzőnél 8-cal több ülőhely van?

1526. Egy áruházi akció során húsz sorban piramisszerűen tornyozták egymásra a dezodorok dobozait: felfelé haladva minden sorban ugyanannyival volt kevesebb doboz. A felső tíz sorban összesen feleannyi doboz volt, mint az alsó tíz sorban, a felső tizenöt sorban pedig összesen 375 doboz volt. Hány doboz volt a legfelső sorban, és felfelé haladva hány dobozzal volt kevesebb mindegyik sorban, mint az alatta levőben?

1527. Egy akciós kínálat alkalmából a bolttulajdonos a kirakatban az ugyanolyan fajtájú, de különböző méretű tányérokat egymásba teszi, s így mintegy tornyot készít a színes porcelánokból. Hány tányér kerül egy ilyen toronyba, ha a legalsótól számítva sorra mindegyiknek az átmérője fél cm-rel kisebb, mint a közvetlen alatta lévőé, s tudjuk, hogy a legnagyobbé 30 cm, a legkisebbé 12 cm?

1528. Berci és Andris egy kis zsebpénzre tehetnek szert, ha vállalják a kiürült befőttes üvegek ki- és lemosását (címkétől való megszabadítását). A délutáni elfoglaltságuktól függően az első nap 40 üveget hoznak rendbe, a további napokon 10-zel többet, mint az előzőn. Hányadik napon kerül sorra az 500. üveg?

1529. Egyforma golyókat helyezünk el az asztalon háromszög alakban: az első sorban 1, alatta, hozzáillesztve 2; majd a következő sorban 3 stb.

a) Hányadik sorba kerül a 30. golyó?

b) Hány golyóra van szükség ahhoz, hogy a határoló háromszög oldala 10 golyóból álljon?

1530. Egy tüzelőtelep szénkészletéből az első nap elszállítottak 8 tonna szenet, minden következő napon fél tonnával többet, mint az előzőn, így néhány nap alatt az egész készlet elfogyott. Ha naponta 10 tonna szenet szállítottak volna el, akkor is ugyanannyi nap alatt fogyott volna el a készlet. Hány tonna szén volt a teljes készlet és hány nap alatt szállították el?

1531. Egy $4\frac{1}{4}$ méteres és egy 385 cm-es lécből egy 12 fokú létra fokait akarjuk kiszabni úgy, hogy a legalsó fok 95 cm-es legyen, és felfelé haladva mindig ugyanannyival rövidüljön a fokok hossza. Mekkorák lesznek a létra fokai? Elkészíthető-e ugyanilyen feltételek mellett a létra két darab 4,2 méteres lécből? Válaszát indokolja!

1532. a) A budapesti Rákóczi út páratlan oldalán sétálva 99 ház előtt haladtunk el. Összeadva a házszámokat 10 791-et kaptunk. Hányas számú ház elől indultunk és hányas számú ház elé érkeztünk?

b) Mennyi ugyanezen útszakaszon a szemközti oldali házszámok összege? (Minden páratlan házszámú házzal az eggyel nagyobb páros házszámú ház áll szemben.)

1533. A főiskolások, egyetemisták kulturális és műveltségi vetélkedőjének eredménye a következőképpen alakult. A négy csapatból a győztes pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyezettének. A három utolsó helyezett pontjai egy számtani sorozat három szomszédos tagját alkotják. A kiosztott pontok száma összesen 59. Minden csapat pontszáma egész szám volt és egyik sem ért el 20-nál több pontot. Határozza meg az egyes csapatok pontszámát!

1534. Egy négyzet alapú piramis építéséhez egyforma, kocka alakú kőtömböket használtak. Felfelé haladva minden réteg oldala eggyel kevesebb kőtömbből állt.

a) Hány réteg van egymás fölött, ha egy kőtömb magassága 80 cm, és a piramis egyetlen zárókövének teteje 40 méter magasan van?

b) A piramis körüljárásával hány kőtömböt tudunk megszámolni?

1535. Könnyelmű fiatalember ismerősünk 100 000 $ készpénzre tett szert, s első útja Monte-Carlóba vezetett, ahol szerencsejátékokkal próbálta növelni „vagyonát". Csakhogy már az első napon 10 $-t vesztett, s minden ezt követő napon 3 $-ral többet, mint az előzőn.

a) Legfeljebb hány napig játszhatott?

b) Mennyit vesztett a 10., a 200., illetve az utolsó napon?

c) Maradt-e 250 $-ja útiköltségre, hogy sürgősen felkeresse gazdag és bőkezű nagynénikéjét?

1536. a) Egy számtani sorozatban $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, és $a_{n+1} = p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1}$, ha $1 < n$. Mekkora p és q?

b) Egy számtani sorozatban $a_{n+1} = p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1}$, ha $1 < n$. Mekkora p és q?

1537. Egy számtani sorozat első 50 tagjának összege P, a következő 50 tag összege Q. Mennyi a_1 és d?

1538. Az első 72 pozitív egész szám összegében valahány tag előjelét megváltoztathatjuk. Elérhető-e, hogy a kapott összeg 2005 legyen?

1539. Ha egy számtani sorozat szinuszainak sorozata állandó, akkor mennyi lehet a sorozat differenciája?

1540. Milyen valós x esetén lesz $\sin 2x$, $\sin^2 x$, $\cos 2x$ egy számtani sorozat három szomszédos tagja?

Mértani sorozatok

1541. Írja fel egy mértani sorozat 7 szomszédos tagját, amelyek közül az első három tag összege 21, a három utolsó tag összege 336!

1542. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 39, szorzata 729. Melyik ez a három tag?

1543. Egy mértani sorozat második tagja 3, hatodik tagja 12. Mennyi S_{10}?

1544. Egy mértani sorozatban $a_3 = 3$, $a_9 = 24$. Mennyi S_{12}?

1545. Egy mértani sorozatban $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$. Mennyi a_1 és q?

1546. Egy mértani sorozat harmadik és ötödik tagjának szorzata 9, második és hatodik tagjának összege $-12{,}75$. Mennyi a_1 és q?

1547. Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80, az ötödik és harmadik tagjának különbsége 240. Melyik ez a sorozat?

1548. A mértani sorozat első tagja 3, n-edik tagja 729, az első n tag összege 1092. Melyik ez a sorozat, melyik az első öt tagja?

1549. Egy mértani sorozat hét egymást követő tagjának a szorzata 700. Meg lehet-e ebből állapítani a sorozat egy tagját? Ha igen, akkor hogyan; ha nem, akkor miért nem?

1550. Egy mértani sorozat három egymást követő tagjának összege 105. A második tagból az elsőt kivonva 15-ot kapunk. Adja meg a sorozatot!

1551. Egy mértani sorozat 6. és 7. tagjának összege, valamint 8. és 6. tagjának különbsége egyaránt 96-tal egyenlő; és az első n tag összege 1023. Mekkora az n?

1552. Határozza meg a 3 első 50 pozitív egész kitevőjű hatványának

a) összegét; b) szorzatát!

1553. Egy jókora vékony lapot felébe hajtok, aztán megint és újból.

a) Hány réteget kapok 8 hajtás esetén?

b) Hány hajtás után keletkezik 64 réteg?

1554. Egy egyenlő szárú háromszög szára 4 cm hosszú. A háromszög szára, alapja és az alaphoz tartozó magassága, ebben a sorrendben, egy mértani sorozat egymást követő három tagja. Mekkora a háromszög alapja?

1555. Lehet-e egy háromszög oldalainak hossza egy mértani sorozat 3 egymást követő tagja? Lehet-e a sorozat hányadosa 1,7? Válaszait indokolja!

1556. Egy háromszög oldalai egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Legrövidebb oldalának hossza 64 cm, a kerülete pedig 244 cm. Mekkora a háromszög másik két oldala és mekkora a legnagyobb szöge?

1557. Egy háromszög két oldala 80 cm és 100 cm hosszú, az általuk közbezárt szög pedig 120°. Igaz-e, hogy a háromszög oldalhosszai tekinthetők egy mértani sorozat három szomszédos tagjának?

1558. Legyen a H_1 háromszög középvonalaiból alkotott háromszög H_2, a H_2 középvonalaiból alkotott háromszög H_3 és így tovább.

a) Ha H_1 kerülete k_1 és területe t_1, akkor mi lehet az értéke H_n k_n-nel jelölt kerületének, illetve t_n-nel jelölt területének?

b) Milyen sorozatot alkotnak a k_n számok?

c) Mennyi az első száz háromszög területének összege?

1559. A derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó m magasság p és q szakaszokra bontja. Igaz-e, hogy e három szakasz hosszának mérőszáma valamilyen sorrendben egy mértani sorozat szomszédos tagjai?

1560. A derékszögű háromszög a befogójának a c átfogóra eső merőleges vetülete p. Zsuzsi fogadást ajánl Andrisnak: szerinte az a, c, p valamilyen sorrendben egy mértani sorozat három egymás utáni tagja. Érdemes-e Andrisnak Zsuzsi ellenében fogadni?

1561. A 60°-os szög egyik szárán kijelölték a P pontot. Ebből a másik szárra merőlegest állítottak, amelynek talppontja a másik száron P_1. Innét újabb merőleges metszi ki az előző szárból P_2-t. Tovább folytatva a merőlegesek állítását a szárakon, felváltva kapták a P_3, P_4 és így a további pontokat. A PP_1 szakaszt a_1-gyel jelölve,

a) mekkora lesz a nyolcadik merőleges szakasz hossza;

b) mekkora lesz az első nyolc szakasz hosszának összege?

1562. Jelöljön ki egy 6 cm sugarú körön egymás után, sugárnyi távolságra 6 pontot! Jelölje ezeket rendre A, B, C, D, E és F! Vetítse merőlegesen az A pontot a B-ből induló átmérőre, majd a vetületi pontot a C-ből induló átmérőre, ezt a D-ből induló átmérőre. Mekkora az így kapott töröttvonal hossza?

1563. Egy 1 m oldalú négyzetet egyik középvonalával megfelezünk és az így kapott két rész közül az egyiket zöldre festjük. Ezután a festetlenül maradt téglalapot vágjuk ketté az egyik középvonalával és megismételjük a fent vázolt eljárást.

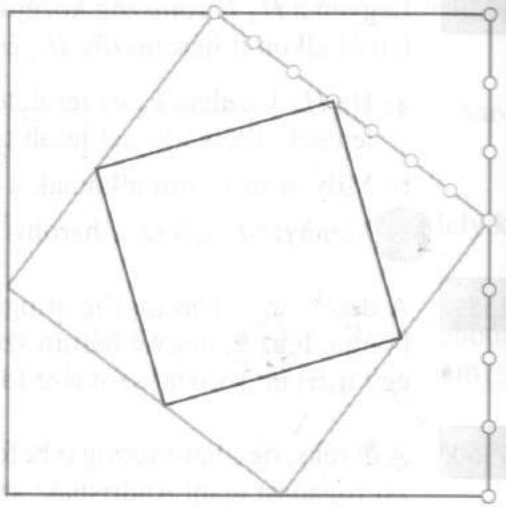
a) A négyzet területének hány százaléka lesz befestve a 7., a 10., a 20., illetve az 50. kettévágás után?

b) Mekkora a befestetlen rész területe a fenti estekben?

c) Mennyi ideig tartana a festés az egyes esetekben, ha 1 cm^2 terület befestéséhez 2 másodpercre van szükségünk?

1564. Egy a oldalú négyzetbe érintőkört írtunk, ebbe négyzetet, amibe ismét kör került. Ezt így folytatva, mekkora lesz a hatodik négyzet oldala, illetve a hatodik kör sugara? Mekkora az első hat négyzet, illetve kör kerületének összege?

1565. A 7 egység oldalhosszúságú négyzet oldalait az egyik csúcspontjától kezdve 3 : 4 arányú részekre kell osztani. A kapott 4 osztáspont ismét négyzetet határoz meg. Ennek az oldalait is fel kell osztani az előbbiek szerint 3 : 4 arányú részre. Tovább folytatva a szerkesztéseket, határozza meg, mekkora lesz

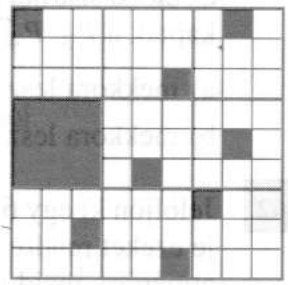


a) a 7. négyzet oldala;

b) a 7. négyzet területe;

c) az első 7 négyzet kerületének összege!

1566. Mintát készít valaki egy négyzet alakú terítőre a következőképpen: először harmadolja a négyzet oldalait, s a szemközti pontok összekötése után keletkező 9 darab kis egybevágó négyzet közül egyet (valamelyiket, véletlenszerűen) pirosra fest. A be nem festett négyzetekkel elvégzi ugyanezt az eljárást: tehát harmadol, s a még kisebb négyzetekből egyet pirosra fest. (Az ábra egy lehetséges állapotot mutat a második lépés után.) Ha ezt ötször ismétli meg összesen, akkor mekkora a pirosra festett rész területe, ha az eredeti négyzet területe 1 m^2 volt? Hány százaléka ez az egész területnek?



1567. Egy kutató a szivacsok szerkezetét vizsgálva észrevette, hogy a kocka alakú szivacsban a lyukak szerkezete úgy alakul, hogy az élek harmadoló pontjai segítségével létrejött $3^3 = 27$ kisebb egybevágó kocka közül a középső lyukas, a többi 26-ban pedig hasonlóképpen az élek harmadolásával kapott még kisebb kockák közül a középső mindig lyukas.

a) Feltéve, hogy ez 10 lépésig folytatódik (mikroméretű lyukakkal), akkor a szivacs térfogatának hányadrésze a lyuk?

b) Ha az eljárást minden határon túl folytatjuk, akkor lényegesen más eredményt kapunk-e az arányra?

1568. Egy egységnégyzetből kiindulva a következő sorozatot képezzük: megfelezzük az oldalait, és a második négyzet az oldalfelező pontok alkotta négyszög lesz. Ezután ennek felezzük meg az oldalait, és egy még kisebb négyzetet kapunk. 100 lépés után mennyi lesz a keletkező négyzetek

a) területeinek;

b) kerületeinek az összege?

c) Akárhány lépés után lehet-e a területösszeg két egységnégyzet területénél nagyobb?

1569. Három könyvért összesen 7280 forintot fizettünk. A legdrágább könyv 1520 forinttal volt olcsóbb, mint a másik kettő együttvéve. Mennyibe kerültek a könyvek, ha áruk egy mértani sorozat 3 egymást követő tagja?

1570. Az Egyesült Művek termelése a Kiváló Üzem termelésének 80%-a. A Művek termelése évi 10%-kal, az Üzemé évi 6%-kal nő. Hány év múlva lesz a két gyár termelése (közel) egyforma?

1571. Nyilvántartásunkban 2 M Ft értékben szerepel tárgyi eszköz. Ennek nyilvántartási értéke minden év végén

a) az előző év végi értéknél annak 15%-ával kisebb;

b) az előző év végi érték 75%-ával egyenlő.

Töltse ki az alábbi „nyilvántartást" mindkét esetben!

	most (eredeti érték)	2 év múlva	4 év múlva	6 év múlva
a) szerinti érték	2 M Ft			
b) szerinti érték	2 M Ft			

1572. Egy új gép ára 200 000 Ft. Elhasználódás és elavulás miatt évenkénti 20%-os értékcsökkenést figyelembe véve, mennyit ér a gép 4 év múlva? Hány év múlva csökken a gép értéke az eredeti harmadára?

1573. Egy farmernek gépesítéssel sikerül a terméshozamait növelnie. Ha az első évi hozamot tekintjük 100%-nak, akkor az ötödik évben 180%-ot ért el.

a) Ha mértani sorozat szerint nőtt a terméshozam, akkor mekkora volt a közbülső években?

b) Mekkora volt a farmer összes bevétele, ha az árak közben évről évre 6%-kal nőttek, és kezdetben 14,2 millió forintért adta el a termést?

1574. Egy városnak 50 évvel ezelőtt 700 ezer lakosa volt. Az átlagos évi népszaporulat az elmúlt 50 év során 0,45% volt. Hány lakosa van most a városnak?

1575. Egy város lakossága közelítőleg mértani sorozat szerint növekszik évről évre.

a) Mekkora az évenkénti növekedési ütem, ha 1980-ban 425 000, míg 2001-ben pedig 529 000 lakosa volt?

b) Hányan lesznek 2010-ben, ugyanilyen növekedést feltételezve?

c) Ha mindenkit születésekor, vagy a városba költözésekor azonnal biztosítanak, valamint minden biztosítottat pontosan évente egyszer felkeresnek, akkor ez összesen hány látogatást jelent 2001 és 2010 között a biztosítóknak?

1576. Egy nagyváros egyik lakójával 8 órakor közlünk egy hírt. Ő negyedóra alatt azt 3 embernek elmondja, majd

a) aki újonnan tudta meg a hírt;

b) mindenki, aki már tudja a hírt,

negyedóra alatt 3-3 újabb embernek adja azt tovább. Mennyi idő alatt értesül a hírről 50 ezer ember?

1577. Valahol a Csendes-óceánon halad egy hajó. Minden szárazföldtől nagy távolságra egyszer csak meghibásodik a hajó motorja. A hiba következtében a motor nem áll le, de a hajó óránként megtett útja óráról órára 2%-kal csökken. A hiba bekövetkezése előtti egy órában a hajó 50 km-t tett meg.

a) Mekkora utat tesz meg a hajó a meghibásodás utáni 1., 2., 5., illetve 28. órában?

b) Legfeljebb mekkora távolságra juthat el a hajó 28 óra alatt?

c) Eljuthat-e 1400 km távolságra is? Ha igen, akkor mennyi idő alatt?

d) Eljuthat-e 2500 km távolságra is? Ha igen, akkor mennyi idő alatt?

1578. 20 liter vízben feloldunk 50 gramm sót. Ezután az oldat tizedét kiöntjük, a helyére tiszta vizet töltünk és elkeverjük; majd ezt a műveletet még 24-szer elvégezzük. Mennyi só marad meg a végére az oldatban az 50 grammból?

1579. Valaki úgy próbál meg egy túl tömény oldatot hígítani, hogy az oldatból kiönt, és a helyére tiszta oldószert tölt. Kezdetben egy 25 literes teli edényben van 80%-os oldata, és egy literes edénye, amivel kimerni, illetve visszatölteni tud. Visszatöltés után mindig megvárja a keveredést, s csak utána folytatja az eljárást.

a) Írja fel, hogy milyen lesz az oldat töménysége 1, 2, illetve 3 lépés után, ahol egy lépés egy liter oldat kivételét és tiszta oldószerrel való pótlását jelenti.

b) Elérhető-e az 50%-os töménység?

c) Milyen tömény az oldat 100 lépés után?

1580. János gazda eladásra kínálja Betyárt, a jó kis hátaslovat. Jakab gazda nézegeti, mustrálgatja, de a ló 180 000 Ft-os árára csak hümmög, soknak találja. Addig-addig alkudozik, míg János gazda megelégeli, s így szól:

– Hát fizessen kend csak a patkószögekért, a lovat ingyen is odaadom.
– No, és mennyi lenne az ára azoknak a szögeknek?
– Hmm... Az első szögért 1 fillért kérek, minden további szögért meg kétszer annyit, mint az előzőért.
– Ha jól számolom, 28 patkószeg van összesen a Betyár patáin.
– Úgy biz a'!
– Hát, ha megbolondult kelmed... én nem bánom. Csapjon a tenyerembe! (Megtörténik.)
– No, mennyit is fizetek akkor?

Mennyit is? (1 Ft = 100 fillér)

1581. Egy sertéshizlaldában 2500 sertés van. A mindenkori állatállomány évenként 5%-kal gyarapszik, de kétévenként a meglévő állomány 3%-át levágják. Mennyi állat lesz 12 év múlva?

1582. Egy társasházban a közös villanyfogyasztás körülbelül azonos, évente 2500 kWh. Ugyanitt a gázkazán éves fogyasztása kb. 8000 m^3. A következő évben a fogyasztások nem, de az árak változtak. A villany 10%-kal, a gáz 6%-kal drágul. Az emelés előtt 1 m^3 gáz 36 Ft, míg 1 kWh villany ára 24 Ft volt.

a) Hány százalékkal nőtt a közös energiaköltség?

b) Hogyan változik a közös energiaköltség, ha változatlan fogyasztás mellett a következő két évben is megmarad ez az árnövekedési ütem?

1583. Egy gazdaság hullámzása 10 év alatt a következőképpen alakult. Az első két évben egyenletesen nőtt a gazdasági teljesítmény, évenként 5%-kal. Ezután hároméves visszaesés következett be, évenkénti 4%-os csökkenéssel. Utána négyéves fellendülés következett, évenként 3%-os növekedéssel, majd az utolsó évben 8%-os visszaesés következett be. Ha kezdetben a gazdaság teljesítménye 100 egység volt, akkor mekkora lett a 10. év végén?

1584. a) Elhelyeztünk egy évre lekötve 500 000 Ft-ot egy bankszámlán évi 12% kamatra. Milyen sorozatot alkotnak az év végén felvehető összegek, ha a pénzt tovább tartjuk bent?

b) Feltételezzük, hogy a kamat nem változott, és mindig az év végi összeget nézzük. Mennyi pénzünk lesz így 10 év múlva?

1585. Hány év alatt növekszik a kétszeresére a bankba betett évi lekötésű összeg, ha a lekötés idején 8,25%-os évi kamatot kínálnak?

1586. Bankba tettem a pénzemet. Hány év alatt nő kb. ötszörösére a betett összeg, ha a bank mindvégig évi 9% kamatos kamatot fizet?

1587. Egy háromgyerekes családban két – 10, illetve 12 éves – fiú és egy – 13 éves – lány van. A szülők 800 ezer forintot akarnak bankba tenni évi 5%-os kamatra úgy, hogy mindegyik gyerek 18 éves korában kapja meg a neki szánt pénzt: a két fiú egyenlő összeget, a lány pedig annyit, mint a két fiú együtt. Kinek mekkora összeget tegyenek be a szülők, ha a kamatokat mindvégig bent hagyják?

1588. Mennyi volt az éves kamatláb, ha 2 000 000 Ft-ot egy számlán kamatoztattunk, és három év múlva 2 590 058 Ft-ot vehettünk fel?

1589. Január elsejei dátummal kiállított takarékbetétkönyvet kaptam jóságos nagybácsikámtól. A könyvecskében 120 ezer tallér volt elhelyezve évi 14%-os kamatra. Bácsikám jól ismeri költekező hajlamaimat, ezért feltételhez kötötte a pénz kiváltását: csak tíz teljes év eltelte után vehetek ki pénzt belőle. Mekkora összeg áll rendelkezésemre ekkor? (Az ilyen típusú betétkönyvek esetén év végén adják hozzá a kamatot az év elején meglévő összeghez, s az így kapott összeg lesz a következő év elején a tőke.)

1590. Új autóra gyűjtök. Januártól kezdve minden hónap első napján 10 ezer batkát teszek a betétkönyvembe havi 1%-os kamatra. A kamatokat a bank év közben egy külön számlán nyilvántartja, de csak az év végén tőkésíti.

a) Mennyi pénzem lesz az első év végén?

b) Mennyi pénzem lesz a második év végén?

c) Elegendő pénzem lesz-e tíz év elteltével egy 2,5 milliós autó megvételéhez?

1591. Egy támogató 10 millió forinttal alapítványt hoz létre egy tanítási intézmény javára. A feltételek szerint először az összegnek el kell érnie a 12 millió forintot, ezt követően pedig 25 egymást követő évben ösztöndíjként évente 5 tanuló között egyenlő arányban szét kell osztani.
A kamat mértéke mindvégig évi 5%.

a) Mikor kezdődhet az ösztöndíj?

b) Mennyi pénzben részesül egy-egy tanuló az év elején?

1592. Tízmillió forinttal új betéti számlát nyit egy pénzintézetnél. Három lehetőség közül választhat, ha legalább egy évre leköti a pénzét:

a) a befektetett összeg után év végén 14,8%-os kamatot kap;

b) fél év után 7,1%-os kamatot hozzáírnak a befektetett pénzhez, majd a második fél év eltelte után ismét 7,1%-os kamatot fizetnek a számláján lévő összeg után;

c) a b)-ben leírt folyamatot az év mind a 365 napján elvégzik $\frac{14{,}1}{365}$ %-os kamattal (napi kamatos kamatozású betét).

Melyik befektetési formát választaná?

1593. Egy számlára befizettek 250 000 Ft-ot, havi lekötésre, havi 1%-os kamatra. Mennyi idő múlva lesz legalább 300 000 Ft a számlán, ha a kamatot havonta csatolják a tőkéhez, és az új összeg kamatozik tovább a következő hónapban?

1594. Egy család a havi megtakarításait félreteszi és leköti a folyószámláján, hogy jobban kamatozzon. A havi lekötés esetén évi 7,5%-ot fizet a bank. Ha minden hó végén van 15 000 Ft megtakarításuk, akkor 3 év múlva mennyi pénzt vehetnek fel? (A bankban havonta tőkésítenek, tehát a havi kamatot hozzáteszik a tőkéhez, és az kamatozik tovább.)

1595. Egy család havonta leköti a megtakarításait. A bank 7%-os éves kamatot számol. (Havonta tőkésítenek, tehát a havi kamatot hozzáteszik a tőkéhez, és az kamatozik tovább.) Mekkora a havi megtakarítás, feltéve, hogy az nem változott, ha 3 év múlva 645 800 forintot vettek ki?

1596. Egy intelligens csiga naponta egy fán felfelé 1 métert mászik, de minden éjszaka az összes addig megtett útjának felével visszacsúszik. Mikor éri el a 187,5 cm magasan lévő első kis hajtást, ahol 2 finom levelet talál? Mikor éri el a 2 méter magasan kinyúló első ágat, ahol sok, neki megfelelő levelet talál?

1597. Egy fiatalember 18 éves korában dohányozni kezdett. Hetente 1200 Ft-ot költött erre a szenvedélyére. Egyszer kiszámította, hogy ha az egy év alatt dohányzásra költött összeget évente inkább befektetné, akkor még évi 8%-os kamattal számolva is szép összeget takaríthatna meg. Így okoskodott: „Egy év alatt 62 400 Ft-ot költök dohányzásra. Ha ezt év elején befektetném, akkor 19 éves koromra $62\,400 \cdot 1{,}08 =$ $= 67\,392$ Ft lenne a bankszámlámon, 20 éves koromra $62\,400 \cdot 1{,}08^2 + 62\,400 \cdot 1{,}08 =$ $= 140\,175{,}36$ Ft. Ha minden év elején 62 400 Ft-ot fektetnék be, akkor nyugdíjas koromra csak a dohányzáson összesen $62\,400 \cdot 1{,}08^{44} + 62\,400 \cdot 1{,}08^{43} +$ $+ 62\,400 \cdot 1{,}08^{42} + \ldots + 62\,400 \cdot 1{,}08$ Ft-ot takarítanék meg." Mekkora ez az összeg?

1598. Áruvásárlási hitelt sokféle módon vehet igénybe. Az egyes lehetőségek mérlegelésekor lényeges szempont a hitel ára, azaz a hiteldíj. Ennek kiszámítása során egy fontos elvnek érvényesülnie kell: csak olyan összeg után fizessen kamatot, amit valóban használt (amivel valóban tartozott) is.

a) Százezer forint kölcsönt egy hónap múlva fizet vissza. Kamatként 2500 Ft-ot számítanak fel. Mekkora az éves hiteldíj mutató?

b) Százezer forint kölcsönt két részletben fizet vissza: az első hónap végén és a második hónap végén is 51 250 Ft-ot. Most mekkora az éves hiteldíj mutató? Az a)-val összevetve melyik esetben volt olcsóbb a hitel?

c) Százezer forint áruvásárlási hitelt vett fel 6 hónapra. A hitelező bank tájékoztatója szerint a teljes hiteldíj mutató (THM) évi 30% (ami egy hónapra 2,5%-ot jelent). Töltse ki az alábbi táblázatot!

	Tartozás (Ft)	Tartozás másképpen (Ft)
1. hónap vége	$100\,000 \cdot 1{,}025 - x$	$102\,500 - x$
2. hónap vége	$100\,000 \cdot 1{,}025^2 - x \cdot 1{,}025 - x$	$105\,063 - x \cdot (1{,}025 + 1)$
3. hónap vége		
4. hónap vége		
5. hónap vége		
6. hónap vége		

d) A legutolsó cellába írt összeg nyilván 0-val egyenlő. Ennek ismeretében már kiszámíthatja a havi törlesztőrészletet is. Mennyi ez?

1599. Évi 14,5%-os kamatra kapott 1 600 000 Ft-os kölcsönt évenként egyenlő összeggel törlesztünk (az egyes évek végén). Szeretnénk kiszámítani, hogy mennyi lesz a törlesztőrészlet, ha 8 alkalommal fizetünk (azaz 8 évre vettük fel a kölcsönt). Így okoskodunk: „Ha a törlesztőrészletet x-szel jelöljük, akkor az első év végén fennálló tartozásunk a törlesztőrészlet kifizetése után $1\,600\,000 \cdot 1{,}145 - x$ Ft lesz, a második részlet kifizetése után $1\,600\,000 \cdot 1{,}145^2 - x \cdot 1{,}145 - x$ Ft tartozásunk marad, a nyolcadik részlet kifizetése után pedig $1\,600\,000 \cdot 1{,}145^8 - x \cdot 1{,}145^7 - x \cdot 1{,}145^6 - \ldots - x \cdot 1{,}145 - x$ Ft lesz az adósságunk." Fejezze be a megkezdett gondolatmenetet, és számítsa ki az éves törlesztőrészletet!

1600. „Mekkora tőke után lehet 10 éven keresztül évente, az év végén 1 millió petákot felvenni, ha az éves kamatláb 8%?" – töprengett G. J. a jövője felől gondolkodva. Így okoskodott: „Ha a kérdezett tőke nagyságát x-szel jelölöm, akkor az első év elteltével a bankban $x \cdot 1{,}08 - 1$ millió petákom marad, a második év végén $x \cdot 1{,}08^2 - 1 \cdot 1{,}08 - 1$ millió petákom, míg a 10. év elteltével $x \cdot 1{,}08^{10} - 1 \cdot 1{,}08^9 - 1 \cdot 1{,}08^8 - 1 \cdot 1{,}08^7 - \ldots - 1 \cdot 1{,}08 - 1$ millió petákom." Fejezze be G. J. gondolatmenetét és határozza meg a kérdezett tőke nagyságát!

1601. Kölcsönadott 1,5 millió forintot 2 évre egy megbízható ismerősének. Megegyeznek abban, hogy a visszafizetendő összeg 1,92 millió forint.

a) Mekkora éves kamatra adta a kölcsönt, ha a 24 hónap elteltével egy összegben kapja meg az 1,92 milliót?

b) Ha havi 80 ezer forintos törlesztésben egyeznek meg, akkor lehetősége van ezt havi 1%-os kamatos kamatra egy bankba befektetni. Szeretné kiszámolni, mekkora összeg áll rendelkezésére a 24. alkalommal átutalt 80 ezer forint után, ezért így okoskodik: „Az első részlet beérkezése után 80 ezer forint lesz a számlámon, a második befizetésekor pedig $80\,000 \cdot 1{,}01 + 80\,000 = 160\,800$ Ft. Amikor a harmadik összeg megérkezik a számlámra, akkor $80\,000 \cdot 1{,}01^2 + 80\,000 \cdot 1{,}01 + 80\,000$, azaz 242 408 Ft lesz a nyilvántartott összeg. A 24. átutalás után a számlán $80\,000 \cdot 1{,}01^{23} + 80\,000 \cdot 1{,}01^{22} + 80\,000 \cdot 1{,}01^{21} + \ldots + 80\,000$ forintom lesz." Számítsa ki ezt az összeget! Mekkora éves kamatlábat érne el ilyen módon a két év alatt (másfél milliót fektetett be és az imént kiszámított összeg áll rendelkezésére 2 év után!)?

1602. Óperencia csatlakozni kíván a Bergengóc Unióhoz. Óperenciában évi 7000 buznyák az egy főre eső nemzeti össztermék (GDP), a BU-ban átlagosan évi 20 000 buznyák. A választásra készülő Óperenciában sikerült a legutóbbi évben kétszer akkora arányú gazdasági növekedést elérni, mint a BU-ban. Ezen felbuzdulva a hatalmon lévő óperenc kormány a választási kampányban azt ígéri, hogy az unióénál kétszer akkora gazdasági növekedéssel 15 év alatt utolérik annak átlagos GDP-jét.

a) Mekkora lesz 15 év múlva Óperencia, illetve a BU átlagos GDP-je akkor, ha a két gazdasági növekedési ütem mindvégig 4%, illetve 2%?

b) Hány év alatt következik be az utolérés, ha a két gazdasági növekedési ütem mindvégig 4%, illetve 2%?

c) Mekkorának kellene lennie a két gazdasági növekedési ütemnek (Óperenciáé kétszerese a BU átlagának, és mindegyiket mindvégig állandónak tekintjük), hogy 15 év alatt bekövetkezzék az utolérés?

1603. Ismerjük a radioaktív bomlás törvényét, miszerint t idő múlva $N(t) = N_0 \cdot 10^{-ct}$ darab el nem bomlott részecskénk van. (Kezdetben volt N_0; a c egy, az adott anyagra jellemző állandó.)

a) Eszerint milyen sorozatot alkot a $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ időegység múlva még el nem bomlott részecskék száma?

b) Milyen állandóság jellemzi a szomszédos tagok viszonyát? Hogyan számszerűsíthető ez?

1604. Lakásra gyűjtök. Minden évben január legelején 500 ezer petákot helyezek el a takarékkönyvemben évi 10%-os kamatra. Elegendő pénzem lesz-e tíz teljes év elteltével egy 9,5 milliós lakás megvételére?

1605. Nagylelkű nénikém 1 millió tallért helyezett el január elején évi 9%-os kamatra a Fontos Banknál. Évente egy, összesen tíz alkalommal – az év legelején vagy a legvégén – vehetek fel alkalmanként ugyanakkora összeget. Mekkora legyen ez az összeg, hogy a tizedik pénzfelvétel után nulla legyen a betétkönyvem egyenlege, ha

a) az első év elteltével veszek fel először pénzt (és később is mindig év végén);

b) azonnal rohanok a Fontos Bankba az első tőkeinjekcióért (és később is mindig az év elején)?

1606. Megvettem életem első autóját, de ehhez 1,6 M Ft hitelt kellett felvennem a Mertcarkellmi banktól havi 1,2%-os kamatra, 24 hónapos futamidőre, havi tőkésítéssel. A bank jóságos és a havonta – hónap végén – befizetett törlesztéseimet is azonnal tőkésíti. Mekkora a havi törlesztőrészlet?

1607. 100 000 Ft kölcsönt veszünk fel 10 évre, évi 18%-os kamattal, év végi egyszeri, azonos összegű visszafizetéssel. Mennyi a törlesztőrészlet?

1608. Egy erdő faállománya 30 000 m^3, s évente 2%-kal gyarapodik. Mennyit vághatunk ki belőle évente az év végén, ha minden évben ugyanannyi m^3 fát vágunk ki, és azt akarjuk, hogy 25 év múlva 35 000 m^3 fa legyen az erdőben?

1609. „Csillagromboló" fantázianevű számítógépet szeretnénk vásárolni, de nincs elegendő készpénzünk. Hitel felvételével is lehetséges a vásárlás. A készülék ára 391 250 Ft, amiből a vásárláskor 78 250 Ft-ot ki kell fizetni. A fennmaradó összeget a MNKBHX bank kifizeti. A hitelt 24 részletben kell visszafizetnünk; havonta, a hó végén 17 841 Ft-ot kell törlesztenünk.

a) Ha a bank a törlesztésként kapott összegeket nem fektetné be, akkor a befektetett (hitelbe adott) pénze után mekkora éves kamatot jelentene a 24 hónap alatt befolyt összeg?

b) A bank a törlesztőrészleteket újra befekteti (legalább 24 hónapra), mégpedig havi 1%-os kamatos kamatra. Az első törlesztőrészlet után a bank 17 841 Ft-tal rendelkezik, a második részlet befizetése után $17\,841 \cdot 1{,}01 + 17\,841$ Ft-tal, a harmadik részlet után pedig $17\,841 \cdot 1{,}01^2 + 17\,841 \cdot 1{,}01 + 17\,841$ Ft-tal. A gondolatmenet folytatásával az adódik, hogy a 24. törlesztőrészlet befizetése után az eredetileg hitelezett összeg helyett $17\,841 \cdot 1{,}01^{23} + 17\,841 \cdot 1{,}01^{22} + \ldots + 17\,841 \cdot 1{,}01^{21} + \ldots + 17\,841 \cdot 1{,}01 + 17\,841$ Ft áll rendelkezésére. Számítsa ki ezt az összeget, és határozza meg, mekkora átlagos éves kamatot ért el a bank ezzel a hitelkonstrukcióval?

c) A hitelt igénybe vevőként mi így gondolkodhatunk: „Kamatot csak fennálló tartozás után fizetünk. Ha pl. 313 000 Ft-tal egy hónapig tartozunk, akkor az egy hónapi pénzhasználat után $313\,000 \cdot x$ Ft-ot kellene visszafizetnünk ($x = 1 + \frac{p}{1200}$, ahol p az éves kamatláb). A számítógép megvásárlására kapott hitelből az első hónap eltelte után $313\,000 \cdot x - 17\,841$ Ft maradt fenn, tehát a következő hónapban csak ez után kell kamatot fizetnünk. A második hónap végén fennálló tartozásunk így $313\,000 \cdot x^2 - 17\,841 \cdot x - 17\,841$ Ft. A gondolatmenetet folytatva a 24. hónap végén fennálló tartozásunk összeg alakban felírva $313\,000 \cdot x^{24} - 17\,841 \cdot x^{23} - 17\,841 \cdot x^{22} - \ldots - 17\,841 \cdot x - 17\,841$ Ft lesz, ami a feltételek szerint 0-val egyenlő. Ahhoz, hogy a hiteldíj mutatót megkapjuk, meg kell oldanunk a $313\,000 \cdot x^{24} - 17\,841 \cdot x^{23} - 17\,841 \cdot x^{22} - \ldots - 17\,841 \cdot x - 17\,841 = 0$ egyenletet. Írja fel a mértani sorozat összegképletének alkalmazásával az egyenlet bal oldalát egyszerűbb alakban, majd $x \neq 1$ ismeretében rendezze úgy az egyenletet, hogy az egyik oldalán egy polinom, a másik oldalán pedig a 0 álljon!

d) A helyesen felírt c)-beli egyenlet (közelítő) megoldása 1,02675. Mekkora éves kamatlábat alkalmaz a bank a hitelezésnél (ez a teljes hiteldíj mutató, azaz THM, ha egyéb költséget a bank nem számít fel)?

e) Hitelt igénybe vevőként mi évi 24%-os hiteldíjat (THM) tartunk elfogadhatónak. A c)-ben közölt gondolatmenet felhasználásával számítsa ki, mekkora havi törlesztőrészlet lenne indokolt ebben az esetben?

1610. Éva örököl 1 500 000 Ft-ot. Ebből szeretné egyetemi tanulmányai alatt a szüleitől kapott anyagiakat kiegészíteni. Öt évre számolja a tanulmányi időt, és minden hónapban ugyanakkora (fix) összeget szeretne felvenni. Mekkora összeget vehet fel havonta, ha a bank a bent levő pénz után havi lekötés esetén 6% évi kamatot ad?

1611. Péter örököl 1 500 000 Ft-ot és továbbtanulására akarja a pénzt használni, azonban azokat a pénzeket, amiket később akar felvenni, egy évre leköti, mert akkor 12% kamatot kap egy évre. A folyó évben felvett havi részleteket havi lekötésre teszi, ami évi 6%. Mennyi pénzt vehet fel havonta ezzel a módszerrel Péter?

1612. Egy pontszerű bogár a síkkoordináta-rendszer origójából indul az x tengely mentén, pozitív irányban. 1 egység megtétele után balra fordul 90°-kal, megteszi az előző hossz felét, ismét balra fordul 90°-kal, megteszi az előző hossz felét, stb. Melyik pontot közelíti meg egyre inkább a bogár?

1613. Bútorboltban ágyat szeretnénk vásárolni. A kiszemelt bútor 79 900 Ft-ba kerül és részletre is megvehető úgy, hogy nem kell előleget, sem kezelési költséget fizetnünk. Ilyen feltételek mellett 36 hónapon keresztül havi 3 440 Ft-ot kell törlesztésként fizetnünk.

a) Ha egy bankban 79 900 Ft-ot elhelyezve 3 év múlva az elhelyezett tőke után 123 840 (= 36 · 3440) Ft-ot vehetünk fel, akkor mekkora éves kamatlábnak felel meg ez az összeg?

b) Ha havonta 3440 Ft-ot helyeznénk el egy bankban havi 1%-os kamatos kamatozással 36 alkalommal, mindig a hónap elején, akkor az 1. hónap végén $3440 \cdot 1{,}01 = 3474{,}4$ Ft állna rendelkezésünkre, a második hónap végén $3440 \cdot 1{,}01^2 + 3440 \cdot 1{,}01 = 6983{,}54$ Ft, a 36. hónap végére pedig $3440 \cdot 1{,}01^{36} + 3440 \cdot 1{,}01^{35} + 3440 \cdot 1{,}01^{34} + \ldots + 3440 \cdot 1{,}01$ Ft lenne a bankszámlánkon. Számítsa ki ezt az összeget!

c) A bank szempontjából az ágy megvásárlásához kapcsolódó hitelezés leegyszerűsítve így elemezhető: „Most befektetek 79 900 Ft-ot (kifizetem a kereskedőnek az ágy árát), cserébe 36 hónapon keresztül havi 3440 Ft-ot kapok. Ha ezeket az összegeket nem fektetem be, akkor az a)-ban kiszámított éves kamatjövedelmet értem el. Ha be tudom fektetni havi 1%-ot kamatozó vállalkozásba, akkor 36 hónap után a b)-ben kiszámított összeg áll rendelkezésemre." Mekkora éves kamatláb esetén lehetne a b)-beli hozamot elérni 79 900 Ft egyszeri befektetésével 3 év alatt?

d) Vállal-e nagy kockázatot a bank a hitelezéssel, ha az éves infláció 10% körül alakul a hitel futamideje alatt?

e) Vásárlóként így is okoskodhatunk: „Most kifizetek 3440 Ft-ot. Az éves infláció 10% körüli, tehát az egy hónap múlva kifizetett 3440 Ft annyit ér, mint most $3440 \cdot \frac{1}{1+\frac{0{,}1}{12}} = 3440 \cdot \frac{120}{121} = 3411{,}57$ Ft. A két hónap múlva (3. alkalommal) kifizetett 3440 Ft annyit ér, mint most $3440 \cdot \left(\frac{120}{121}\right)^2 = 3383{,}38$ Ft. A 36. alkalommal kifizetett 3440 Ft annyit ér, mint most $3440 \cdot \left(\frac{120}{121}\right)^{35} = 2572{,}85$ Ft.

A törlesztésként kifizetett összegek most összesen

$$3440 + 3440 \cdot \frac{120}{121} + 3440 \cdot \left(\frac{120}{121}\right)^2 + 3440 \cdot \left(\frac{120}{121}\right)^3 + \ldots + 3440 \cdot \left(\frac{120}{121}\right)^{35} \text{ forintot}$$

érnének." Számítsa ki ezt az összeget és hasonlítsa össze az így jelenlegi értékével (79 900 Ft)! Csak pénzügyi szempontból nézve jó befektetésnek tűnik-e az így hitelre történő megvétele?

Vegyes feladatok

1614. Lehet-e három különböző valós szám egyidejűleg egy számtani, illetve egy mértani sorozat három egymást követő tagja?

1615. Egy napon két barát vesz egy-egy 50 kg-os csikót. Egy hónap múlva összehasonlítják, hogy csikóik mennyit gyarapodtak. Tamás azt mondja: „Az én csikóm 10 kg-mal gyarapodott." Miklós ezt mondja: „Az én csikóm 20%-kal lett nehezebb." A vásárlás után két hónappal ismét összehasonlítják a két állatot. Tamás: „Az én csikóm ismét 10 kg-ot nőtt." Miklós: „Az enyém pedig ismét 20%-kal lett nehezebb."

a) Mennyi a csikók súlya két hónap elteltével?

b) Hány százalékkal nőtt Miklós csikójának súlya két hónap alatt a kezdetihez képest?

Tegyük fel, hogy ez a tendencia folytatódik fél éven át, tehát Tamás csikója mindig 10 kg-mal gyarapodik, míg Miklósé minden hónapban 20%-kal nő.

c) Töltse ki az alábbi táblázatot!

A vásárlás óta eltelt idő hónapokban	Tamás csikójának súlya (kg)	Miklós csikójának súlya (kg)
0	50	50
1	50 + 10 = 60	50 · 1,2 = 60
2		
3		
4		
5		
6		

d) Hogyan lehet Tamás, illetve Miklós csikójának súlyát megadni a hónapokban mért idő függvényében, ha tovább folytatódik ez a növekedési tendencia?

1616. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, második és ötödik tag, ebben a sorrendben, egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Mennyi a_1, d, q?

1617. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 20. A második, harmadik és ötödik tag, ebben a sorrendben, egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Határozza meg a számtani sorozat első öt tagját!

1618. Három szám összege 114. Lehetnek egy mértani sorozat első három tagja, de egy számtani sorozat 1., 4. és 25. tagja is. Melyek ezek a számok?

1619. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az elsőhöz 6-ot, a másodikhoz 13-at, a harmadikhoz 30-at adunk, egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

1620. Négy szám egy mértani sorozat négy szomszédos tagja. Ha a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at hozzáadunk, a negyedikből 36-ot levonunk – egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Melyek ezek a számok?

1621. Egy pozitív tagú mértani sorozat első és harmadik tagjának szorzata 36. Egy számtani sorozat első tagja egyenlő a mértani sorozat második tagjával, a sorozat különbsége 4, első néhány tagjának összege pedig 70. Mennyi ez a „néhány" tag?

1622. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 114. Ha a harmadik számot 72-vel csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozza meg a mértani sorozatot!

1623. Három szám egy számtani sorozat egymást követő tagja, négyzetük – ugyanebben a sorrendben – egy mértani sorozat egymást követő tagja. A három szám összege 15. Melyik ez a három szám?

1624. Egy sorozatról tudjuk, hogy minden soron következő tagja az előző kétszeresénél 5-tel kevesebb. Ha a sorozat 8. tagja 133, akkor mi az első tagja?

1625. Bizonyítsa be, hogy ha a (b_n) pozitív tagú mértani sorozat, akkor a $(\log_5 b_n)$ számtani sorozat!

1626. a) Ábrázolja az $f\colon x \mapsto 2x$, illetve a $g\colon x \mapsto 2^x$ függvényeket a $0 < x < 20$ intervallumon!

b) Milyen sorozatot alkotnak az $f(1), f(2), \ldots, f(10)$, illetve a $g(1), g(2), \ldots, g(10)$ számok?

c) Mennyi a b)-beli 10-10 tag összege?

d) A grafikonról megbecsülhető-e a két összeg viszonya?

1627. Valamely termékből két gyár termelése 1990-ben egyformán 100 egység volt, 2000-ben pedig mindkettőben 1000 egység. Az első gyárban a termelésnövekedés minden évben ugyanannyi százalékos volt, míg a második gyár termelése évente mindig ugyanannyival nőtt. Melyik gyár termelt többet 1999-ben és mennyivel?

1628. Két építőipari cég értékeli az elmúlt tíz éves teljesítményét. Az egyik kimutatása szerint az első évbeli 30 lakás után minden évben 5-tel többet építettek, mint az előző évben.

a) Milyen sorozatot alkot az egymás utáni években épített lakások száma?

b) Hány lakást épített fel ez a cég a tíz év alatt?

A másik cég azt állítja, hogy minden évben kb. 10%-kal növelték az előző évhez képest a lakásépítési tervüket. Ők is 30 lakást építettek az első évben.

c) Ez a cég hány lakást épített a tíz év alatt?

1629. Egy raktárban azonos méretű dobozokban tárolják az árut. A raktár 6 részre van bontva, az A, B, C, D, E, F betűkkel jelölve az egyes részeket. A betűk sorrendjében nő a raktárterület. Az első alapterülete 100 m^2, a legnagyobbé 200 m^2.

a) Mekkora a teljes raktárterület, ha a részek területei egy számtani sorozat egymás utáni tagjai?

b) Mekkora a teljes raktárterület, ha a részek területei egy mértani sorozat egymás utáni tagjai?

c) Számolás nélkül meg lehet-e mondani, hogy melyik a nagyobb? Miért?

1630. a) Ha a birkák szőre naponta 0,5 mm-t nő, akkor a frissen kopaszra nyírt birka szőre mikor éri el a 12 cm-t?

b) Ha a birkák szőre naponta a pillanatnyi hosszukkal arányosan (mértani sorozat szerint) növekedne, és feltesszük, hogy a frissen nyírott birka szőre 1 mm, 50 nap múlva pedig 2,5 cm hosszú, akkor mennyi lenne a napi növekedési arány?

1631. Egy hónapban 22 munkanap van.

a) Egy segédmunkásnak naponta 100 Ft-tal emelik a bérét, látva jó munkáját. Mennyit kap a hó végén, ha kezdetben 1000 Ft-ban állapodtak meg naponta?

b) Egy másiknak, aki szintén napi 1000 Ft-ról indult, minden nap 5%-kal emelték a járandóságát az előző napihoz képest. Ez a munkás mennyit kap a hó végén?

c) Mit gondol, min múlik, hogy a másik jobban jár a második hó végére, pedig kezdetben lassabban nő a napi bére?

1632. Egy város lakossága 10 éven át egyenletesen évi 400 fővel növekedett. Ezután egy 5 éves fogyási folyamat indult meg, amelyben minden évben az előző évi lakosság 97%-a maradt a lakosság. Ha végül 720 000 lakosa lett a városnak, akkor 15 éve mennyi lakosa volt?

1633. Egy farmer évről évre nyomon követi élősertés eladásait. A következőket vette észre az elmúlt 10 év statisztikáit tanulmányozva. A forintban jegyzett bevételei évről évre növekedtek, mégpedig minden évben az előző év 1,5-szeresére. Az eladott állatok súlya évről-évre egyenletesen növekedett. (Az első évben 100 Ft-ot kapott az eladott sertés kilójáért.) Hogyan változott az állatok ára, ha az első évben 800 000 Ft volt a bevétele, míg a 10. évben eladott sertések össztömege 76 886 kg volt?

1634. Egy számtani sorozat első négy tagjához rendre 5-öt, 6-ot, 9-et, 15-öt adva egy mértani sorozat első négy tagját kapjuk. Mennyi a különbség, a hányados, mekkorák a kezdőtagok?

1635. Egy mértani sorozatra $S_3 = 26$. Az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Melyek ezek a sorozatok?

1636. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at levonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjaihoz jutunk. Határozza meg a mértani sorozatot!

4. GEOMETRIA

4.1. Elemi síkgeometria

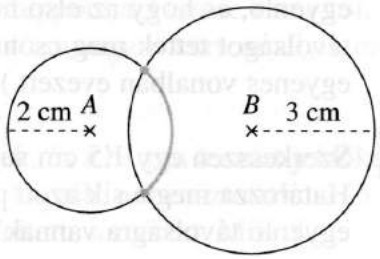
Alapfogalmak

1637. Határozza meg egy konvex szögtartomány belsejében azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre igaz, hogy a szög száraitól mért távolságuk összege 4 cm!

1638. Határozza meg azokat a pontokat az adott e és f egyenes síkjában, amelyek e-től 1 cm-re, f-től 2 cm-re vannak, ha

a) e és f párhuzamosak; b) e és f metszi egymást!

1639. Jellemezze (a tanult jelölésekkel) az ábrán színes vonallal kihúzott ponthalmazt!



1640. Rajzoljon úgy kört és négyzetet, hogy határoló vonalaiknak éppen öt közös pontja legyen!

1641. Adott a síkon három egyenes: e és f metszők, utóbbival párhuzamos a g. Szerkesztendők a sík azon pontjai, amelyek e-től és f-től egyenlő távolságra, g-hez pedig 2 cm-nél közelebb vannak. Fogalmazza meg szövegesen is, milyen ponthalmaz az eredmény!

1642. Az ABC szabályos háromszög oldalai 5 cm hosszúak. Szerkessze meg azokat az egyeneseket az ABC háromszög síkjában, amelyek A-tól és B-től egyenlő távolságra, C-től pedig 3 cm távolságra haladnak!

1643. Szerkessze meg egy 3 cm oldalú négyzet belsejében azokat a pontokat, amelyeknek a négyzet minden oldalától való távolsága legalább

a) 1 cm; b) 1,5 cm; c) 2 cm!

1644. Adott három, egymást páronként különböző pontban metsző egyenes.

a) Határozza meg azoknak a pontoknak a halmazát az egyenesek síkjában, amelyek mindhárom egyenestől ugyanakkora távolságra helyezkednek el!

b) Határozza meg azoknak az egyeneseknek a halmazát az egyenesek síkjában, amelyek az adott egyenesek metszéspontjától ugyanakkora távolságra helyezkednek el!

1645. Rajzolja meg azoknak a pontoknak a halmazát az ABC háromszög síkjában, melyek A-tól mért távolsága kisebb a B-től mért távolságánál is és a C-től mért távolságánál is!

1646. Adott két pont egymástól 10 cm távolságra. Szerkessze meg azokat az egyeneseket a két pontot tartalmazó valamely síkban, amelyek az egyik ponttól 2 cm távolságra, a másik ponttól pedig 3 cm távolságra haladnak!

1647. Három horgász érkezik egy 2 km átmérőjű, kör alakú tó partján lévő stéghez. Ki-ki beül a saját csónakjába, és evezni kezd. Amikor elfoglalták végleges helyüket, akkor kiderült, hogy mindegyikük partközeli helyet választott, páronkénti távolságuk egyenlő, és hogy az első horgász kétszer annyit evezett, mint a második. Mekkora távolságot tettek meg csónakjukkal a horgászok külön-külön? (Mindegyik horgász egyenes vonalban evezett.)

1648. Szerkesszen egy 1,5 cm sugarú kört, mely érinti egy 60°-os szögtartomány szárait! Határozza meg a sík azon pontjait, amelyek a körtől 1 cm-re, a szög száraitól pedig egyenlő távolságra vannak!

1649. Adott az O középpontú, 2 cm sugarú k kör és O-tól 3 cm távolságra az e egyenes. A kör és egyenes síkjának melyek azok a pontjai, amelyek

a) k-tól 1 cm-re és e-től 2 cm-re vannak;

b) k-tól 2 cm-re és e-től 1 cm-re vannak?

1650. Adott O középpontú, 3 cm sugarú k kört metsz egy, az O-tól 1,5 cm-re haladó e egyenes. A kör és egyenes síkjának mely pontjaira teljesül, hogy k-tól és e-től is 1,5 cm-re vannak?

1651. Egy 60°-os szögtartomány csúcspontja legyen A, belsejének egy pontja B. Szerkessze meg a szögtartomány belsejének azokat a pontjait, amelyek B-től 1 cm-re vannak, ha

a) $AB = 3$ cm; b) $AB = 2$ cm; c) $AB = 1$ cm!

1652. Adott O középpontú $ABCD$ négyzet belsejében keresse meg azon P pontok halmazát, amelyre teljesül, hogy

a) $PO < PA$ vagy $PO < PB$ vagy $PO < PC$ vagy $PO < PD$;

b) $PO < PA$ és $PO < PB$ és $PO < PC$ és $PO < PD$!

1653. Adott két párhuzamos, e és f egyenes, továbbá egy ezeket metsző g egyenes. Szerkessze meg a sík azon pontjainak halmazát, amelyek g-től 2 cm-re vannak és

a) e-től és f-től egyenlő távol vannak;

b) e-től fele olyan távol vannak, mint f-től!

1654. Adott A és B pont. Határozza meg a sík azon P pontjait, amelyekre egyszerre teljesül, hogy A-tól nincsenek messzebb, mint B-től és $PB = \frac{2}{3}AB$!

1655. Adott egy 3 cm sugarú kör és középpontjától 5 cm távolságban egy egyenes. Szerkesszen a kört és az egyenest érintő 4 cm sugarú köröket!

1656. Adott egy síkban az e egyenes és a k kör. A k középpontja 3 cm-re van e-től, sugara 2,5 cm hosszú. Szerkessze meg az összes olyan 4 cm sugarú kört, amelyik érinti e-t és k-t is!

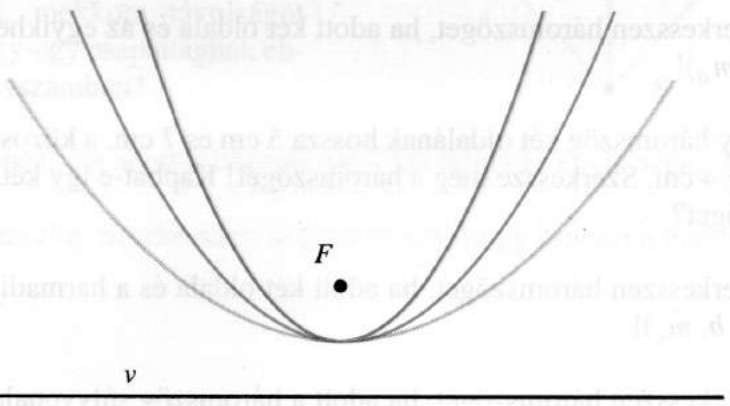
1657. Egy autópálya-építésnél háromszögelést végeztek, és a három leszúrt jelzőkaró között lézeres méréssel az alábbi távolságokat kapták a beosztottak: 345,32 m; 511,24 m; 159,45 m. A munkavezető megismételtette a mérést. Miért?

1658. Az ábrán az F fókuszú, v vezéregyenesű parabola egy íve is látható.

a) Melyik ez a parabolaív a három görbe közül és miért?

b) Szerkesztéssel és méréssel állapítsa meg a parabola paraméterét!

c) Szerkessze meg a parabolaív két különböző pontjában az érintőt!



1659. András, Balázs és Cili álldogál az iskolaudvaron. Balázs kétszer olyan messze van Cilitől, mint András; Cili a két fiú közti távolságot 60°-os szögben látja. Mekkora szögben látja András a Cili és Balázs közti távolságot?

1660. Két koncentrikus kör középpontja K. A külső körvonal egy pontja C. Határozza meg a belső körvonal azon pontjait, ahonnan a CK szakasz

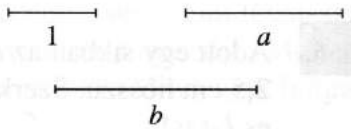
a) hegyes-; b) derék-; c) tompaszögben látszik!

1661. Egy téglalap oldalai 15 és 30 m hosszúak. Hány olyan pont van a téglalap belsejében, amelyből a téglalap valamely két oldala egyszerre látszik derékszögben?

1662. Az r sugarú, O középpontú k kör P pontbeli érintőjén jelölje ki az A és B pontot. Szerkesztéssel állapítsa meg, a k kör mely pontjából látszik AB derékszögben, ha P pont az AB szakasz felezőpontja és

a) $AB = 2r$; b) $AB = 4r$! c) Mekkora az $AOB\sphericalangle$ az a), illetve a b) esetben?

1663. Adott az egység, az a és b szakasz. Szerkesszen



a) $a \cdot b$; b) $\frac{a}{b}$; c) $\frac{1}{b}$; d) $\sqrt{a}$

hosszúságú szakaszt!

1664. Szerkesszen háromszöget, ha adott az egyik oldala, egy másikhoz tartozó magassága és a harmadikhoz tartozó súlyvonala (a, m_b, s_c)!

1665. Szerkesszen egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az alapnak az egyik szárhoz tartozó súlyvonallal bezárt szöge!

1666. Szerkesszen háromszöget, ha adott egyik oldala, a rajta fekvő egyik szög és az oldalhoz tartozó súlyvonal hossza (c, α, s_c)!

1667. Szerkesszen háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó magassága (a, b, m_a)!

1668. Egy háromszög két oldalának hossza 5 cm és 7 cm, a közös csúcsból induló magasság 4 cm. Szerkessze meg a háromszöget! Kaphat-e így két nem egybevágó háromszöget?

1669. Szerkesszen háromszöget, ha adott két oldala és a harmadikhoz tartozó magassága (a, b, m_c)!

1670. Szerkesszen háromszöget, ha adott a háromszög súlyvonalainak a hossza!

1671. Adott egy szögtartomány és a belsejében egy pont. Szerkesszen olyan háromszöget, melynek egy-egy oldala a szögtartomány száraira esik és a súlypontja az adott pont!

1672. Szerkesszen derékszögű háromszöget, ha adott a derékszögű csúcsból kiinduló magasság és súlyvonal hossza!

1673. Szerkesszen háromszöget, ha adott az a oldala, m_b magassága, és tudjuk, hogy a magasságpont az m_b magasságot a csúcstól számítva 3 : 2 arányban osztja!

1674. Szerkesszen háromszöget, ha adott egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala!

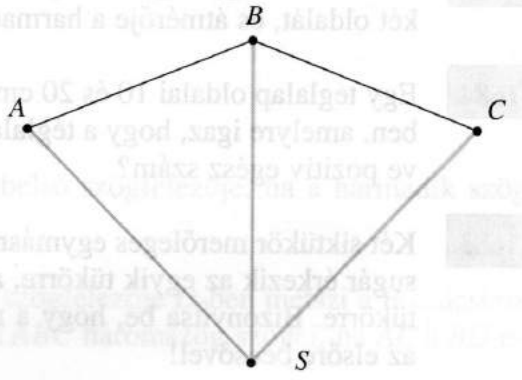
1675. Egy három várost kiszolgáló tévéátjátszó-állomást terveznek.

a) Hová telepítsék az adót, ha azt akarják, hogy mindhárom településtől egyenlő távolságban legyen?

b) Szerkessze is meg ezt a helyet (1 : 500 000 méretarányban), ha a három helység egymástól mért távolságai rendre 28, 37 és 39 km!

c) Mérje le az ábrán, majd km pontossággal adja meg, milyen messze lesz a városoktól az átjátszóállomás!

1676. A törpök játékos vetélkedőt rendeznek 3 azonos létszámú csapat között. Az egyik feladat az lesz, hogy egy adott helyről el kell szaladni a csapatok egy-egy tagjának a csapat betűjelével (A-val, B-vel és C-vel) megjelölt pöttöm labdáért és azt vissza kell vinni a starthelyre (S). A játék akkor igazságos, ha mindegyik versenyzőnek ugyanannyit kell futnia. A labdák páronkénti távolsága 29,0 cm, 29,0 cm és 57,2 cm.



a) Adjon szerkesztési eljárást az „igazságos" starthely meghatározására!

b) Számítsa ki, mekkora távolságot kell futnia egy-egy csapattagnak ebben a versenyszámban?

1677. Szerkesszen trapézt, ha adott a középvonala, két átlója és egyik szára (k, e, f, b)!

1678. Adott egy háromszög. Szerkesszen négyzetet úgy, hogy csúcsai a háromszög oldalaira essenek!

1679. Egy háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 10 cm hosszúságúak.

a) Szerkessze meg a háromszögbe az összes olyan négyzetet, amelynek csúcsai a háromszög oldalaira esnek!

b) Számítsa ki e négyzetek oldalainak hosszát!

1680. Egy háromszög oldalai 4 cm, 5 cm és 6 cm hosszúságúak.

a) Szerkesszen a háromszögbe egy olyan téglalapot, melynek csúcsai a háromszög oldalaira esnek, és a téglalap oldalainak aránya 2 : 3!

b) Számítsa ki a megszerkesztett téglalap oldalainak hosszát!

c) Hány különböző megoldása van a feladatnak?

1681. Az O_1 és O_2 középpontú k_1 és k_2 kör sugara 2, illetve 3 cm. $O_1O_2 = 8$ cm. Szerkessze meg a körök közös

a) külső érintőinek H_1 metszéspontját (külső hasonlósági pont). Mekkora az O_1H_1 távolság?

b) belső érintőinek H_2 metszéspontját (belső hasonlósági pont). Mekkora az O_1H_2 távolság?

1682. Szerkesszen olyan kört, amely átmegy egy háromszög két csúcsán, és érinti valamelyik oldalegyenesét!

1683. Szerkesszen egy hegyesszögű háromszögbe olyan félkört, amely érinti a háromszög két oldalát, és átmérője a harmadik oldalon van!

1684. Egy téglalap oldalai 10 és 20 cm hosszúak. Hány olyan pont van a téglalap belsejében, amelyre igaz, hogy a téglalap bármelyik oldalától mért távolsága cm-ben mérve pozitív egész szám?

1685. Két síktükör merőleges egymásra. A síkok metszésvonalára merőleges síkban fénysugár érkezik az egyik tükörre, az innen visszavert fénysugár pedig beesik a másik tükörre. Bizonyítsa be, hogy a második tükörről visszavert fénysugár párhuzamos az elsőre beesővel!

1686. Az O középpontú kör kerületének adott pontja A. Az A-ból valamennyi átmérőre merőlegest állítva, milyen ponthalmazt ad e merőlegesek talppontja?

1687. Adott egy síkban A és B pont és az A-ra illeszkedő e egyenes. Az A körül körbe forgatjuk az e egyenest, és B-t tükrözzük ezekre az egyenesekre. Mi lesz a tükörképpontok halmaza?

1688. Adott a síkban egy k kör és egy k-n kívüli P pont. Szerkesszen olyan $PQRS$ téglalapokat, melyeknek a Q és R csúcspontja a k körvonalon van. Határozza meg az így rajzolható téglalapok S csúcspontjának a halmazát!

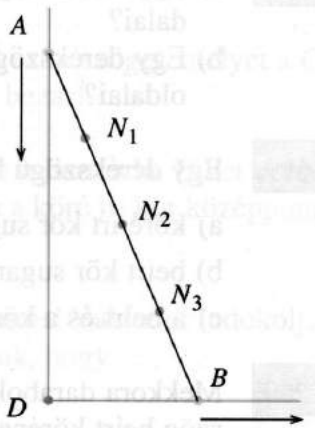
1689. Húzzon az O középpontú egységsugarú körhöz P-ből két érintőt, ahol $OP = 2$ egység. Mutassa meg, hogy a két érintési pontot összekötő kisebbik ív tetszőleges pontjába húzott érintőnek a másik két érintő közé eső szakasza a kör középpontjából állandó szögben látszik! Mekkora ez a szög?

1690. Határozza meg egy adott szakasz síkjában azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek a szakasztól legalább 1 cm, de legfeljebb 2 cm távolságra vannak!

1691. A D csúcsú derékszög egyik, illetve másik szárán mozog az A, illetve B pont úgy, hogy közben az AB távolság mindvégig 12 cm marad. Az N_1, N_2, N_3 pontok négy egyenlő részre osztják e távolságot. Milyen messze van a B pont a D-től, amikor

a) N_1; b) N_2; c) N_3

a legközelebb van D-hez? Válaszait indokolja!



Alakzatok és tulajdonságaik

1692. Mekkora szöget zár be a háromszög két belső szögfelezője, ha a harmadik szög 75°-os?

1693. a) Az ABC háromszög A-ból induló belső szögfelezője D-ben metszi a B csúcshoz tartozó külső szögfelezőt. Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha $AC \parallel BD$ és az említett külső szög 140°-os?

b) Bizonyítsa be, hogy ABD háromszög egyenlő szárú!

1694. Mekkora azon háromszög γ szöge, amelynek A-beli belső és B-beli külső szögfelezője 60°-os szögben metszi egymást?

1695. Egy háromszög egyik szögfelezője a szemközti oldallal 85°-os, egy másik szögfelezővel 54°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei?

1696. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezőjének a hossza 10 cm. Ez a szögfelező a szemközti befogóval 60°-os szöget zár be. Határozza meg a háromszög oldalait és szögeit!

1697. a) Egy derékszögű háromszög befogói 6 cm, illetve 8 cm hosszúságúak. Mekkora a háromszögbe írható kör sugara?

b) Egy derékszögű háromszög két oldala 6 és 7. Mekkora lehet a beleírható kör sugara?

c) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 6, a beleírható kör sugara 2. Mekkora a másik befogó?

1698. a) Egy derékszögű háromszög kerülete 15, a beírható kör sugara 1. Mekkorák az oldalai?

b) Egy derékszögű háromszög területe 100, a beírható kör sugara 4. Mekkorák az oldalai?

1699. Egy derékszögű háromszög befogói 3 és 4 cm hosszúak. Határozza meg a

a) köré írt kör sugarát;

b) beírt kör sugarát;

c) a beírt és a köré írt kör középpontjának távolságát!

1700. Mekkora darabokra bontják a háromszög oldalait az 5, 6, 7 egység oldalú háromszög beírt körének érintési pontjai?

1701. a) Szerkesszen egy háromszöget, melynek oldalai – a szokásos jelöléssel – $a = 62$ mm, $b = 2{,}6$ cm és $c = 0{,}44$ dm hosszúságúak!

b) Szerkessze meg a háromszög magasságpontját! Jelölje a magasságpontot M-mel!

c) Szerkessze meg az ACM háromszög magasságpontját! Fogalmazza meg, mit tapasztal! Válaszát indokolja!

1702. Egy nem derékszögű ABC háromszög magasságpontja M. Melyik pont az ABM, az AMC, illetve az MBC háromszög magasságpontja?

1703. Határozza meg a 10 cm sugarú

a) körbe; b) kör köré

írt szabályos háromszög oldalát!

1704. Az O középpontú kör köré írt ABC háromszögben $\alpha = 70°$. Határozza meg a $COB\sphericalangle$-et!

1705. Az O középpontú kör köré írt ABC háromszögben $AOB\sphericalangle = 145°$. Igazolja, hogy az ABC háromszög tompaszögű!

1706. Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő külső szöge a szárak által bezárt szög háromszorosa. Mekkorák a háromszög szögei?

1707. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének 4-szerese a mellette fekvő külső szög. Mekkorák a háromszög szögei?

1708. Egy háromszög egyik szögének külső szöge a mellette fekvő belső szög 8-szorosa, egy másik külső szög a mellette fekvő belső szög 3-szorosa. Bizonyítsa be, hogy a háromszög tompaszögű!

1709. Az ABC háromszögben $\alpha = 45°$. Fejezze ki β segítségével azt a szöget, melyet a C-ből induló magasságvonal és belső szögfelező egymással bezár!

1710. Egy háromszög egyik szöge a másik két szög összegének a harmada. E két másik szög aránya 1 : 2. Mekkorák a háromszög szögei? Hol van a köré írt kör középpontja: a háromszögön belül, kívül vagy a határán?

1711. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Válaszait indokolja! Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyéről állítjuk, hogy

a) mindig egybeesik a háromszög egyik szögfelezőjével;

b) van olyan háromszög, amelynél egybeesik a háromszög egyik szögfelezőjével;

c) nincs olyan háromszög, amelynek magasságpontja illeszkedik rá.

1712. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Válaszait indokolja! A háromszög súlypontjáról állítjuk, hogy

a) van olyan háromszög, amelyben az egyik magasságvonalra esik;

b) van olyan háromszög, amelyben az egyik középvonalra esik;

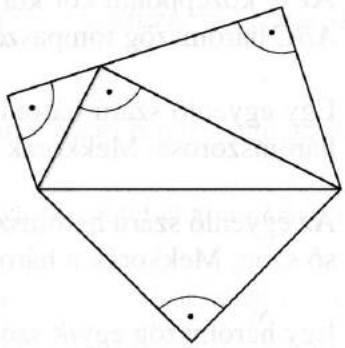
c) nincs olyan háromszög, amelyben szögfelezőre esik.

1713. Kösse össze a háromszög beírt körének két érintési pontját! Bizonyítsa be, hogy így keletkezik egy olyan négyszög, amely egyik oldalának hossza egyenlő két másik oldal hosszának összegével!

1714. Az alábbiakban szereplő 3-3 szám szakaszok hosszának mérőszáma (a és b pozitív számok). Lehet-e a három szakasz egy derékszögű háromszög három oldala?

a) 3; 6; $\sqrt{45}$ b) 4; 6; 10 c) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{5}$; $a\sqrt{7}$ d) a; ab; $a\sqrt{1+b^2}$

1715. Igaz-e, hogy a derékszögű háromszög befogóira az ábra szerint illesztett egyenlő szárú derékszögű háromszögek területének összege egyenlő az átfogóra illesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög területével? Válaszát indolkolja!



1716. Egy derékszögű háromszög befogói hosszának aránya 3 : 4, összegük 35. Mekkora a területe, átfogója és az ehhez tartozó magassága?

1717. Derékszögű-e az a háromszög, melynek leghosszabb oldalához tartozó magassága 10 cm hosszúságú, és ez a leghosszabb oldalt egy 4 cm-es és egy 25 cm-es szakaszra bontja? Válaszát indokolja!

1718. a) Hol van egy háromszög három csúcsába helyezett három egyenlő tömegből álló rendszer tömegközéppontja?

b) Ha ugyanez a háromszög egy vékony homogén lemezből áll, akkor hol a tömegközéppontja?

1719. Egy sík terepen háromszögelnek négy jól látható objektum segítségével, amelyeket jelöljünk A, B, C, D-vel. A következőket mérték meg: $ADB\sphericalangle = 120°$; $BDC\sphericalangle = 150°$; $CDA\sphericalangle = 90°$ és $DAC\sphericalangle = 45°$. Emellett két távolságot is megmértek: $AD = BD = 10$ km. Határozza meg az ABC háromszög

a) szögeit;

b) AB és AC oldalát;

c) BC oldalát (szögfüggvény használata nélkül)!

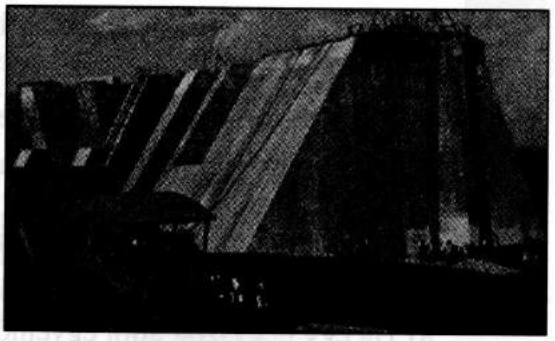
1720. Egy téglalapnak van olyan oldala, amely a téglalap középpontjából 120°-os szögben látszik.

a) Bizonyítsa be, hogy az egyik oldal az átló felével egyenlő!

b) Milyen háromszögekre bontják az átlók a téglalapot?

1721. Egy tengelyesen szimmetrikus trapézba kör írható. Mekkora a trapézba írható és a trapéz köré írható kör sugara, ha a trapéz párhuzamos oldalainak a hossza 1 és 3 egység?

1722. Egy Szudánban épült duzzasztógát fotóját láthatja az ábrán. A 473 m^2 területű trapéz keresztmetszetű gát magassága 22 méter, tetejének szélessége 11 méter. Mélyen széles a gát alapja?



1723. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz szára egy Thalész-kör átmérője. Ez a kör felezi a középvonalat. Milyen összefüggés állapítható meg a középvonal és a szár között?

1724. Az e egyenes és az $ABCD$ paralelogramma egyetlen közös pontja az A csúcspont. Bizonyítsa be, hogy a C csúcspontnak az e-től való távolsága éppen akkora, mint B-nek és D-nek az e-től mért távolságösszege!

1725. Egy derékszögű deltoid formájú sárkány hosszabbik átlója 1,3 méter. Az egyik oldala 50 cm.

a) Mekkora a sárkány területe?

b) Milyen hosszú a másik átlója?

1726. Egy deltoid átlói 75 mm, illetve 60 mm hosszúak. A rövidebb átló harmadolja a hosszabbat.

a) Mekkora a deltoid kerülete?

b) Mekkora a területe?

c) Szerkessze meg a deltoidot!

1727. Állapítsa meg, melyek azok a négyszögek, amelyeknek oldalfelező pontjai téglalapot határoznak meg!

1728. Az $ABCD$ konvex síknégyszögről tudjuk, hogy $AB = BC = CD$. Minek kell még teljesülnie ahhoz, hogy trapéz; paralelogramma; négyzet; deltoid legyen?

1729. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokolja a választ! A deltoid

a) lehet rombusz;

b) nem mindig konvex;

c) a hosszabbik átló mindig szimmetriatengely.

1730. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokolja a választ!

a) Van két szimmetriatengellyel rendelkező deltoid.

b) Minden paralelogrammának van szimmetriatengelye.

1731. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokolja a választ!

a) Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor az négyzet.

b) A négyszögek közül egymásra merőleges átlói csak a négyzetnek és a rombusznak vannak.

c) Ha egy négyszög két szemközti szöge egyenlő, akkor az paralelogramma.

d) Egy négyszögnek lehet 180°-osnál nagyobb szöge is.

e) Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor annak van még egy.

1732. Határozza meg a 3 cm sugarú körbe írt szabályos hatszög szemközti oldalainak távolságát és a kör köré írt szabályos hatszög szemközti csúcspontjainak távolságát!

1733. Van-e olyan nem szabályos hatszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, továbbá van legalább 2 egyenlő átlója?

1734. Egy háromszög csúcspontjai, valamint a beírt kör középpontjának az oldalfelezőpontokra vonatkozó tükörképei egy hatszöget határoznak meg. Mekkorák e hatszög szögei, ha a háromszög két szöge

a) 70°-os és 80°-os;

b) 60°-os és 45°-os?

1735. Egy 6 egység oldalú szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írunk. Ilyen módon hat újabb pontot kapunk. Igazolja, hogy ez a hat pont egy körre illeszkedik! Határozza meg a kör sugarát!

1736. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokolja a választ!

a) A szabályos hatszög oldalai egyenlők.

b) Ha egy hatszög oldalai egyenlők, akkor az szabályos.

c) A szabályos hatszög szögei egyenlők.

d) Ha egy hatszög szögei egyenlők, akkor az szabályos.

e) Ha egy hatszög oldalai és szögei egyenlők, akkor az szabályos.

1737. Egy gazda körbejárja a kerítés mentén konvex hétszög alakú kertjét. Minden csúcsnál fordulni kell valamennyit az addigi menetirányához képest.

a) Mennyi az összes fordulat szögeinek összege?

b) Mekkora a telket alkotó sokszög belső szögeinek az összege?

c) Ha a telket felbontjuk két csúcsán keresztül behúzott átlóval úgy, hogy az egyik rész egy négyszög legyen, akkor hány oldalú sokszög lesz a másik rész? Mekkora a keletkezett részek szögösszege külön-külön?

1738. Zárhat-e be 67,5°-os szöget a szabályos nyolcszög egy csúcsból induló két átlója?

1739. Mennyi egy konvex sokszög belső szögeinek összege, ha átlóinak száma 54?

1740. Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyre fennáll, hogy ha belső szögeinek összegéhez hozzáadjuk a sokszög egyik külső szögét, eredményül 2002°-ot kapunk? Megállapítható-e az említett külső szög nagysága?

1741. Egy A és egy B középpontú kör a C és D pontokban metszi egymást. Legyen C átellenes pontja az egyik körön E, a másikon F. Bizonyítsa be, hogy

a) $CD \perp EF$; b) $D \multimap EF$; c) $EF = 2AB$!

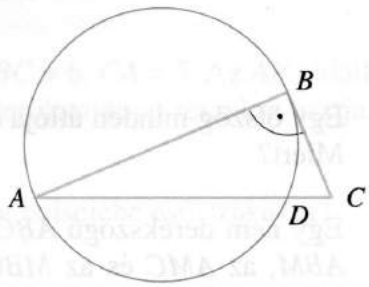
1742. a) Milyen hosszú két, egymást kívülről érintő, R, illetve r sugarú kör közös érintőjének a két érintési pont közötti szakasza?

b) Milyen messze van a közös külső érintők metszéspontjától a nagyobbik körön levő érintési pont?

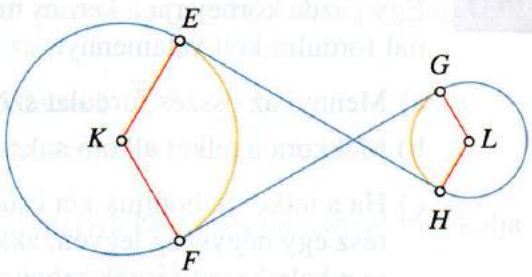
1743. a) Egy 5 cm sugarú kör átmérőjének két végpontjában érintőket rajzolunk a körhöz, majd húzunk egy tetszőleges harmadik érintőt! Bizonyítsa be, hogy a harmadik érintőből a másik két érintő által lemetszett szakaszok mértani közepe 5 cm hosszúságú!

b) Bizonyítsa be, hogy általában, minden kör esetén a fenti módon lemetszett szakaszok mértani közepe sugárnyi hosszúságú!

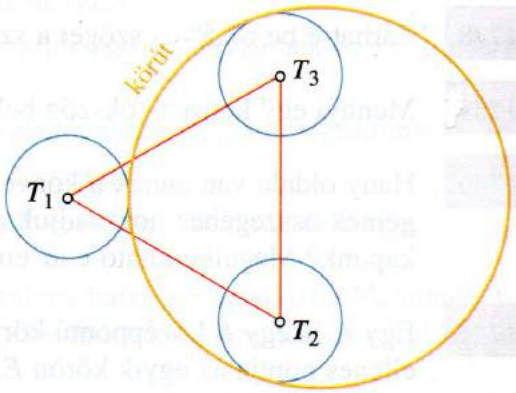
1744. Az AB átmérőjű körhöz a külső C pontból húzott érintő B-ben érinti a kört. Mekkora részekre bontja a kör az AC szakaszt, ha $AB = 12$ cm és $BC = 5$ cm?



1745. Mekkora a K, illetve L középpontú körívekből és közös érintőszakaszaikból felépített „nyolcas" alakú pálya hossza (a rövidebbik EF, illetve GH ív nem tartozik a pályához), ha $\sphericalangle EKF = 120°$, a körök sugara pedig 20 m és 10 m?

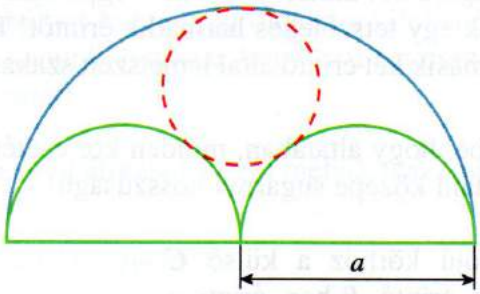


1746. Három települést (T_1, T_2 és T_3) körülvevő úthálózat egy részletét mutatja az ábra. A települések páronként vett távolsága 8-8 km, a településeket körbefutó körgyűrűk 2 km sugarúak. Mekkora a nagy „körút" kerülete, ha az mindegyik településtől 2 km távolságra halad?



1747. Egy 6 cm sugarú körből levágott 4 cm magasságú körszeletbe a lehető legnagyobb sugarú kört írtuk (érinti a húrt és a körívet is). Mekkora annak a két, ugyanebbe a körszeletbe írt körnek a sugara, melyek érintik az eredeti kört, a körszeletbe írt kört és a húrt?

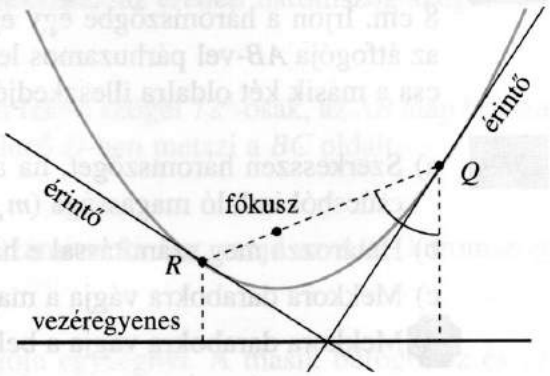
1748. Mekkora az alábbi ábrán szaggatott vonallal berajzolt kör sugara?



1749. Egy ötszög minden átlója egyenlő. Következik-e ebből, hogy az ötszög szabályos? Miért?

1750. Egy nem derékszögű ABC háromszög magasságpontja M. Bizonyítsa be, hogy az ABM, az AMC és az MBC háromszögek köré írható körök sugara ugyanakkora, mint az ABC köré írhatóé!

1751. Tudjuk, hogy a parabola adott pontbeli érintője felezi annak a két félegyenesnek a szögét, amelyek az érintési pontból indulnak és közülük az egyik áthalad a fókuszon, a másik pedig merőlegesen metszi a vezéregyenest. Igazolja ennek segítségével, hogy ha két olyan parabolapontban húzunk érintőt, amelyek összekötő szakasza tartalmazza a fókuszt, akkor a két érintő a vezéregyenesen metszi egymást és merőlegesek is egymásra!



Számítások

1752. Egy 30°-60°-90°-os háromszög kerületének és területének mérőszáma megegyezik. Mekkorák az oldalai?

1753. Egy folyón egy csónak a partra merőleges irányban 12,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel indul. A folyó sebessége 3,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Határozzuk meg, hogy a csónak 3 perc alatt mekkora utat tesz meg! (A sebességeket kerekített értékeknek tekintjük.)

1754. Mekkora az olyan egyenlő szárú háromszög területe, amelynek kerülete 10 egység, és minden oldala egész mérőszámú?

1755. Egy háromszögben $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$. Milyen messze van az A csúcs a BC oldaltól?

1756. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 7, szárai 8 egységnyiek. Az alappal párhuzamosan olyan egyenest húzunk, amely felezi a háromszög területét. Mekkorák a keletkezett trapéz oldalai?

1757. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 7$, $BC = 6$, $CA = 5$. Az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a háromszöget 1 : 3 területarányú részekre osztja.

a) Hány ilyen párhuzamos húzható?

b) Milyen hosszú a párhuzamosnak a háromszög belsejébe eső szakasza?

c) Milyen hosszúak a keletkezett trapéz szárai?

1758. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala $AB = 24$ cm, a hozzá tartozó magasság 8 cm. Írjon a háromszögbe egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy az átfogója AB-vel párhuzamos legyen, s derékszögű csúcsa AB-re, másik két csúcsa a másik két oldalra illeszkedjék! Mekkorák e beírt háromszög oldalai?

1759. a) Szerkesszen háromszöget, ha adott két szöge ($\alpha = 30°$, $\beta = 60°$) és a harmadik csúcsból induló magassága ($m_c = 3$ cm)!

b) Határozza meg számítással e háromszög oldalait!

c) Mekkora darabokra vágja a magasság a c oldalt?

d) Mekkora darabokra vágja a belső szögfelező a c oldalt?

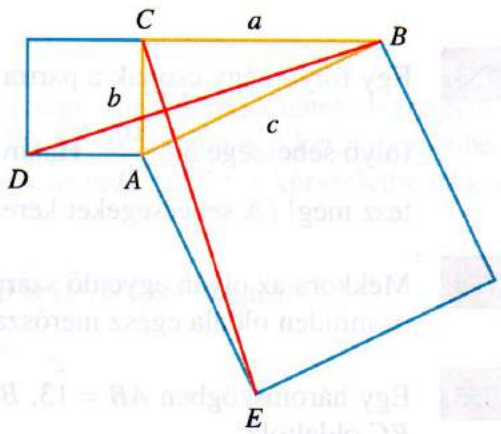
1760. Derékszögű háromszög befogóinak hossza 28 cm és 45 cm.

a) Mekkora szakaszokra bontja az átfogóhoz tartozó magassága az átfogót?

b) Mekkora szakaszokra osztja az átfogót a derékszög szögfelezője?

c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

1761. Az ABC háromszög derékszögű, rövidebbik befogójára és átfogójára kifelé négyzetet rajzoltunk.



a) Igazolja, hogy $BD = CE$!

b) Igazolja, hogy $BD \perp CE$!

c) Határozza meg ED hosszát a és b segítségével!

d) Milyen $\frac{a}{b}$ arány esetén felezi CE BD-t?

1762. Egy derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek egyikének területe 1 területegységgel nagyobb, mint a másik területének kétszerese. Emellett azt is tudjuk, hogy a nagyobbik befogó 5 egységgel hosszabb, mint a másik. Mekkorák a háromszög oldalai?

1763. Hogyan kell felvenni az ABC háromszög AB oldalán a D, AC oldalán az E pontokat úgy, hogy az ADE, DEB, EBC háromszögek területe megegyezzék?

1764. Egy háromszög egyik oldalát a hozzá tartozó magasság 18 és 7 egységnyi részekre osztja. Ezzel a magassággal párhuzamosan olyan egyenest húzunk, amely felezi a háromszög területét. Mekkora részekre osztja ez az egyenes az említett oldalt?

1765. Egy egyenlő szárú háromszög egyik alapon fekvő szögének felezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre vágja. Mekkorák az eredeti háromszög szögei? És az újakéi?

1766. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögei 72°-osak, az AB alap hossza 1 cm. Az A csúcsból induló belső szögfelező D-ben metszi a BC oldalt.

a) Igazolja, hogy $ABC\Delta \sim BDA\Delta$!

b) Jelölje a BD szakasz hosszát x-szel! Számítsa ki x-et, majd az ABC háromszög szárainak hosszát!

1767. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi. A másik befogóhoz és az átfogóhoz tartozó súlyvonal merőleges egymásra. Mekkorák a háromszög oldalai?

1768. Egy körben az AB átmérővel az AC húr α szöget zár be. A C-beli érintő D-ben metszi AB egyenesét. Mekkora az α, ha az ACD háromszög egyenlő szárú?

1769. Egységnyi alapú, egyenlő szárú háromszögbe írjon kört!

a) Írja fel a kör és a háromszög területének arányát a szár hosszának függvényében!

b) Ábrázolja a kör és a háromszög területének arányát a szár hosszának függvényében!

1770. Egy háromszöget a középvonalaival négy háromszögre bontunk, ezek közül besatírozzuk a középsőt, majd megismételjük az eljárást a három nem satírozott háromszöggel is. A nem satírozott vagy a satírozott terület lesz a nagyobb?

1771. Egy szög egyik szárán vegyük fel az A, B, C pontokat az O csúcstól rendre 1, 2, 3 egységnyire, a másik száron pedig az A', B', C' pontokat 2, 4, 6 egységnyire. Hány százaléka az $ABB'A'$ négyszög területe az OCC' háromszög területének?

1772. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, befogóinak összege 12 cm. Határozza meg a háromszög területét!

1773. Jelölje egy adott kör rögzített húrjának végpontjait A_1 és A_2. Az A_3 pont mozog a körvonalon. A_3 milyen helyzetében lesz az $A_1A_2A_3$ háromszög

a) területe; b) kerülete

maximális?

1774. Az ABC háromszög oldalai: $a = 5$; $b = 6$; $c = 7$. Számítsa ki a háromszög

a) legrövidebb magasságát; b) másik két magasságát; c) területét!

1775. Egy 25 m széles úton két szemközti ház közé azonos magasságban kifeszített acélhuzalra középre egy villanylámpát függesztünk, amelynek a „belógása" 70 cm.

a) Készítsen ábrát!

b) Milyen hosszú a huzal?

1776. Egy 30 m oldalú, négyzet alakú telek egyik átlóján a középponttól 10 m-re fúrtak egy kutat. A telek minden sarkától 4 m-re, az átlóra ültettek egy-egy gyümölcsfát. A kert gondozója egyszerre csak egy fának elegendő vizet tud vinni, a kúttól a fákig mindig a legrövidebb úton. Mekkora utat kell megtennie a telt vödörrel valamennyi fa megöntözéséhez?

1777. Egy téglalap oldalai $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm. A CD oldal egyenesén felvett P pontra igaz, hogy $PD = 3$ cm. Milyen távolságra van P a téglalap többi csúcspontjától?

1778. Egy téglalap oldalai $AB = 9$, $BC = 3$. Az AB oldal P pontjára: $AP = CP$. Mekkora AP?

1779. Egy téglalap oldalai $AB = 10$, $BC = 6$. Az AB oldal egy P pontjára: $AP + PC = 12$. Mekkora DP?

1780. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 60$ és $BC = 80$ egység hosszú. Az átfogót a rajta kijelölt D pont az A-tól számítva $2 : 3$ arányban osztja. A D ponton át a befogókkal párhuzamos egyenesek a befogókat P, illetve Q pontban metszi. Mekkora a PQD háromszög

a) területe; b) kerülete? c) Mekkora CD hossza?

1781. Az ABC háromszög BC oldalát osszuk négy egyenlő részre, és a B csúcshoz közelebb eső első osztópontot kössük össze az osztóponthoz közelebbi oldal felezőpontjával. Az összekötő szakasz a háromszög területének hányadrészét metszi le?

1782. Rajzoljon egy 9 cm hosszúságú AC szakaszt, majd vegyen fel rajta egy B pontot úgy, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$ legyen! Szerkesszen AB és BC fölé egy ABD, illetve BCE szabályos háromszöget az AC egyenes ugyanazon oldalára.

a) Mekkora a DBE háromszög területe?

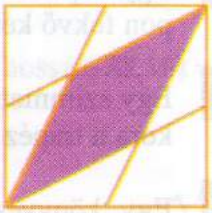
b) Milyen hosszúságú a DE szakasz?

c) Milyen hosszúságú szakaszokra bontja a $DBE\sphericalangle$ belső szögfelezője a DE oldalt?

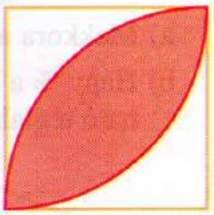
1783. Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 6 cm, illetve 7 cm. A 7 cm-es oldalhoz tartozó magasságának a csúcshoz közelebbi negyedelő pontján keresztül húzzon pár-

huzamosokat az eredeti háromszög oldalaival! Így újabb három háromszög és három négyszög keletkezik. Határozza meg, hogy a kapott 6 alakzat területe különkülön hányad része az eredeti háromszög területének!

1784. Egy egységnégyzet két szemközti csúcsát összekötjük a velük szemközti oldalak felezőpontjaival. Mi a négy vonal által határolt (lila) alakzat, és mekkora a területe?



1785. Egy a oldalú négyzetbe írjon két, a sugarú negyedkört úgy, hogy középpontjuk a négyzet két szemközti csúcsa legyen! Határozza meg a negyed körívek által közrezárt területet!

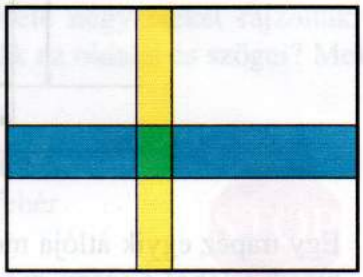


1786. Három, négyzet alakú kert területeinek az aránya 4 : 9 : 16. A legnagyobb és a legkisebb kert kerületének különbsége 180 m. Mekkora a kerületek összege?

1787. Adott egy a oldalú négyzet. Mekkora a sugara annak a körnek, amelyik átmegy a négyzet egyik csúcsán és érinti a szemközti csúcsban találkozó oldalakat?

1788. Egy négyzetbe a négyzet oldalait érintő kört írunk, majd ebbe újra egy négyzetet, amelybe újabb kört és így tovább. Tekintsünk – az eredetivel együtt – három négyzetet és két kört! A középső négyzet átlója 5 cm hosszúságú. Mekkora az egyes négyzetek, illetve körök területe?

1789. A nagy téglalap területe 1200 cm^2. A vízszintes sáv 240 cm^2, a függőleges sáv 120 cm^2 területű. Mekkora a középső kis (zöld) téglalap területe?



1790. Egy trapéz alapjainak hossza 3 és 6. Mekkora az átlók metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapéz belsejébe eső szakasza?

1791. Egy szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra, és 1 : 2 arányban osztják egymást. A rövidebbik alap egységnyi. Mekkora a trapéz területe?

1792. Az $ABCD$ trapéz AD szárának felezőpontja F. Mekkora a BFC háromszög és a trapéz területének aránya?

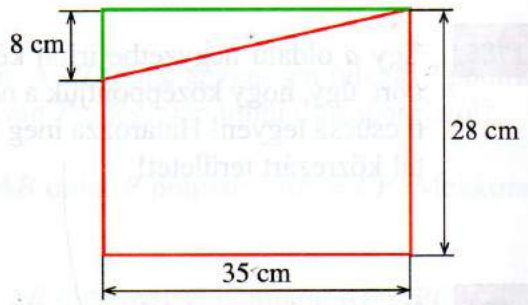
1793. Egy trapéz rövidebbik alapja 20 cm, magassága 4 cm hosszúságú. A hosszabbik alapon fekvő két szög 45°, illetve 30°. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

1794. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 10 és 20 cm, területe 180 cm^2. Mekkora a trapéz magassága, szára, átlója és hegyesszöge?

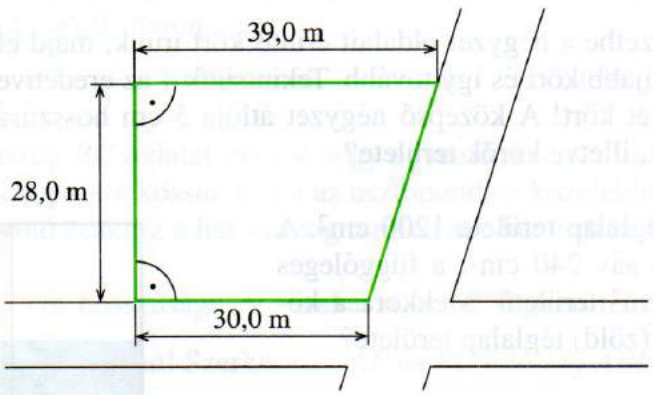
1795. Egy könyvespolc végére egy trapéz alakú oldalzáró lapot készítünk.

a) Mekkora a lap területe?

b) Hány % a hulladék, ha az ábrán látható téglalapból vágjuk ki?



1796. Egy kereszteződésnél üzletház építése céljára eladó egy telek. A méreteket a mellékelt ábra mutatja. Mennyibe kerül ez a telek a vevőnek, ha egy négyzetmétert az önkormányzat 10 000 Ft-ért ad?



1797. Egy trapéz egyik átlója merőleges a szárra, a másik átlóval 60°-os szöget zár be. A másik átlóból a szárra merőleges átló által levágott nagyobbik darab hossza 2 egység, a trapéz rövidebbik alapja $\sqrt{3}$ egység hosszú.

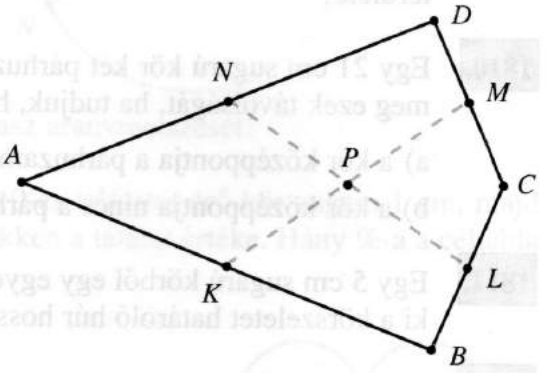
a) Mekkorák a trapéz szögei? b) Mekkorák a trapéz oldalai?

1798. Van-e olyan rombusz, amelynek két átlójából és egy oldalából derékszögű háromszög szerkeszthető?

1799. Egy $ABCD$ paralelogramma AB oldala 10 egység, BC oldalának egy belső pontja legyen P, melyre teljesül: $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{5}$. Legyen a DP és AB egyenesek metszéspontja Q. Határozza meg az AQ szakasz hosszát!

1800. A $KLMN$ paralelogramma területe 200 cm², a KL oldala 25 cm hosszú, $KLM\sphericalangle = 120°$. Számítsa ki a paralelogramma kerületét és átlóinak hosszát!

1801. Az $ABCD$ deltoidban az ábra jelöléseinek megfelelően $AB = 12$, $BC = 5$, $ABC\sphericalangle = 90°$, a K, L, M és N pontok felezik a megfelelő oldalakat, a KM és LN szakaszok metszéspontját P jelöli.



a) Határozza meg az AC és a BD átló hosszát!

b) Számítsa ki a $KLMN$ négyszög területét!

c) Igazolja, hogy az $AKPN$ és a $CLPM$ négyszögek területének összege pontosan a deltoid területének felével egyenlő!

1802. Az ABC szabályos háromszöget a súlypontjára tükrözve kapjuk az $A_1B_1C_1$ háromszöget. Számítsa ki az eredeti és a tükrözött háromszög közös részének területét és kerületét, ha $AB = 18$ cm!

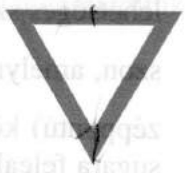
1803. Egy szabályos háromszög oldalainak felezőpontjából merőlegeseket bocsátunk a szomszédos oldalakra. Ezek a háromszögből egy hatszöget vágnak ki. Hányad része a hatszög területe a háromszög területének?

1804. Az a oldalú szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltak. Az új csúcspontok hatszöget határoznak meg. Mekkorák az oldalai és szögei? Mekkora a távolság a két legtávolabbi csúcspont között?

1805. Egy (szabályos nyolcszög alakú) stoptábla aljától a tetejéig mért távolság 60 cm, a szélén található fehér sáv 2 cm széles. Mekkora a fehér sáv területe?



1806. Az „elsőbbségadás kötelező” tábla magassága 70 cm, a szélén levő piros sáv 8 cm széles. Hány %-a a piros sáv területe a belső fehér területnek?



1807. Két, egy síkban lévő, egymást metsző kör sugara R és r, közös húrjuk hossza $2h$. Mekkora a középpontok távolsága? (A közös húr egyenese elválasztja a középpontokat.)

1808. Egy körgyűrűcikket 3, illetve 9 cm sugarú körívek határolnak, területe 18π cm^2. Mekkora a körgyűrűcikk középponti szöge?

1809. Egy 5 cm sugarú kört 8,66 cm hosszúságú húrja két körszeletre bont. Mekkora ezek területe?

1810. Egy 21 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 23, illetve 30 cm hosszú. Határozzuk meg ezek távolságát, ha tudjuk, hogy

a) a kör középpontja a párhuzamosok között van;

b) a kör középpontja nincs a párhuzamosok között!

1811. Egy 5 cm sugarú körből egy egyenes 2 cm magasságú körszeletet vág le. Számolja ki a körszeletet határoló húr hosszát!

1812. Egy körlap és egy vele egyenlő területű négyzet középpontja egybeesik. Hány százaléka a négyzet területének a közös rész területe?

1813. Terelő körutat terveznek egy város köré. Eddig három főbb, jó közelítéssel egyenes útvonal haladt át a városon, amelyek a főtéren futottak össze. Ezekről akarják az átmenő teherautó-forgalmat kitiltani. A körút átmérője 12 km, és középpontja éppen a főtér. Jelöljük A, B, C-vel azokat a pontokat, ahol a terelő körút metszi a főutakat. A főtér legyen az F pont. Eddig, ha egy teherautó A irányból jött és B irányba ment tovább, akkor 12 km-t kellett megtennie A ponttól B pontig. A terelő körúttal ez most kb. 6,28 km hosszú lett.

a) Mekkora az $AFB\sphericalangle$?

b) Ha $AFC\sphericalangle = 150°$, akkor mennyivel változik A-ból C felé az út a tereléssel?

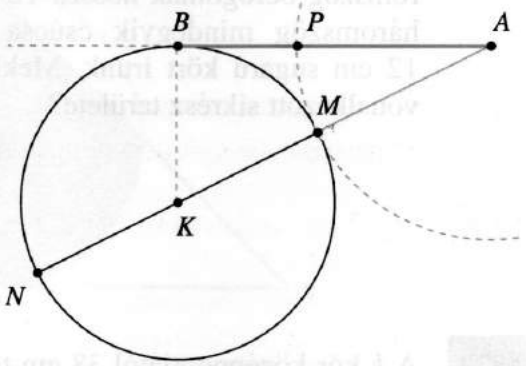
c) Ha egy teherautó A irányból jött, és ezen az úton a főtér után is továbbhaladva hagyta el a várost, akkor mennyivel nőtt meg az útja az eltereléssel?

1814. Az ókor és a reneszánsz művészetében sokszor tudatosan is alkalmazták az emberi érzékelés számára kellemesnek tűnő arányokat. Az egyik ilyen „kellemes arány" az aranymetszés (*aurea sectio*) aránya. Az ábra az AB szakasz aranymetszésének egy lehetséges szerkesztését mutatja (azaz olyan P pont megszerkesztését az AB szakaszon, amelyre igaz, hogy $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$). A szerkesztés első lépéseként olyan (K középpontú) kört szerkesztünk, amelyet az AB félegyenes B-ben érint, és amelynek sugara feleakkora, mint az AB szakasz.

a) Az ábra segítségével írja le azokat a további szerkesztési lépéseket, amelyek végrehajtása után megkapjuk a P pontot!

b) Az aranymetszést definiáló arány-párból számítsa ki, mekkorának kell lennie az AP szakasznak, ha az AB szakasz 8 cm hosszú!

c) A szerkesztési eljárásra támaszkodva igazolja, hogy az AM szakasz hossza valóban megfelel a b)-ben előírt követelménynek!



d) Szerkessze meg egy 8 cm hosszú szakasz aranymetszését!

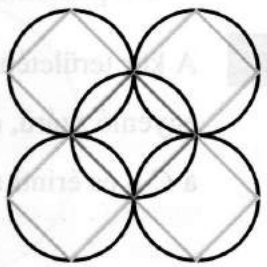
1815. Egy kör alakú céltábla sugara 10 cm. A 10-es találatot érő kör sugara 1 cm, majd kifelé haladva 1 cm-enként egyesével csökken a találat értéke. Hány %-a a céltábla területének a 7 pontot érő terület?

1816. Az ábrázolt körlapok sugara 28 cm.

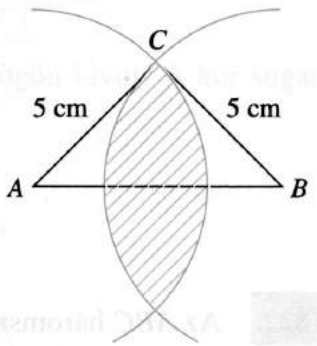
a) Mekkora a négyzetek oldalhossza?

b) A középső négyzet területének hány százalékát fedi le pontosan egy körlap?

c) Mekkora az a terület, amelyet az öt körlap közül legalább egy lefed?

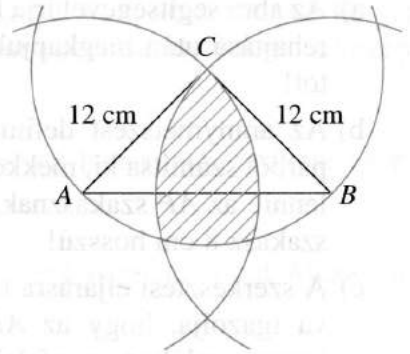


1817. Az ABC háromszög derékszögű, az 5 cm sugarú körök középpontja az átfogó egyik, illetve másik végpontja, és a körök áthaladnak a derékszögű csúcson. Mekkora a vonalkázott rész területe?



1818. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszög mindhárom oldalára megrajzoltuk a Thalész-kört. Mekkora e körök metszetének területe?

1819. Az egyenlő szárú ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza 12 cm. A háromszög mindegyik csúcsa körül 12 cm sugarú kört írunk. Mekkora a vonalkázott síkrész területe?



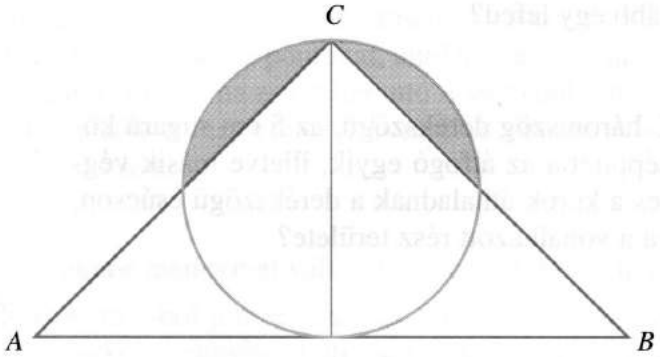
1820. A k kör középpontjától 38 cm távolságra van a P pont. A P-ből húzott két érintőszakasz 120°-os szöget zár be.

a) Mekkorák az érintőszakaszok?

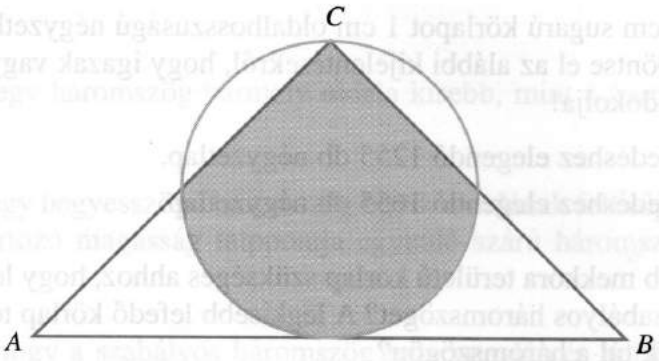
b) Mekkora a kör sugara?

c) Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a két érintőszakasz és az érintési pontok által meghatározott hosszabbik körív határol?

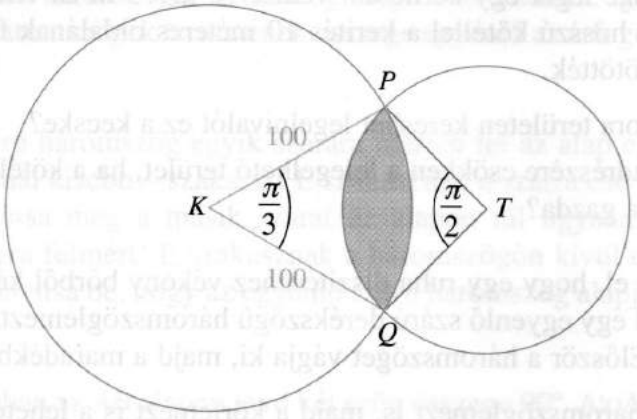
1821. A kör területének hány %-a van az ABC háromszögön kívül? (Az ABC háromszög egyenlő szárú, egyik szöge $\frac{\pi}{2}$ radián; az AB szakasz 100 cm hosszú; a kör átmegy a C-n és érinti az AB-t.)



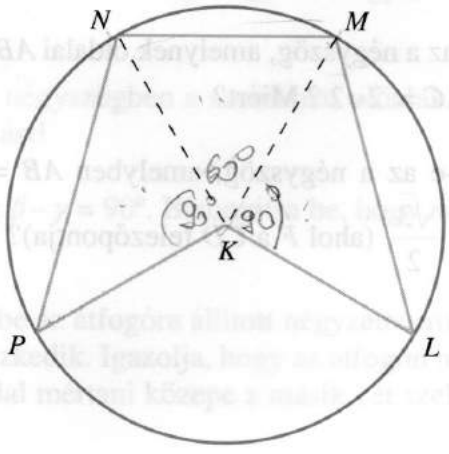
1822. Az ABC háromszög területének hány százalékát fedi le a körlap? (A következő oldali ABC háromszög egyenlő szárú, egyik szöge $\frac{\pi}{2}$ radián; az AB szakasz 100 cm hosszú; a kör átmegy a C-n és érinti az AB-t.)



1823. A 100 cm sugarú, K középpontú kört a T középpontú kör a P és Q pontokban metszi. $PKQ\sphericalangle = \frac{\pi}{3}$ radián, $PTQ\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$ radián. Mekkora a két körlap által kétszeresen lefedett tartomány területe?



1824. A körlap területének hány százaléka van a $KLMNP$ ötszögön kívül? A kör sugara 10 cm, $LKM\sphericalangle = NKP\sphericalangle = 90°$, $MKN\sphericalangle = 60°$.



1825. Egy 20 cm sugarú körlapot 1 cm oldalhosszúságú négyzetlapokkal kell teljesen lefedni. Döntse el az alábbi kijelentésekről, hogy igazak vagy hamisak! Válaszait röviden indokolja!

a) A lefedéshez elegendő 1255 db négyzetlap.

b) A lefedéshez elegendő 1655 db négyzetlap.

1826. Legalább mekkora területű körlap szükséges ahhoz, hogy lefedjük vele az 1 cm^2 területű szabályos háromszöget? A legkisebb lefedő körlap területének hány százaléka nyúlik túl a háromszögön?

1827. Legalább mekkora területű szabályos háromszög szükséges ahhoz, hogy lefedjük vele az 1 cm^2 területű körlapot? A legkisebb lefedő háromszög területének hány százaléka nyúlik túl a körön?

1828. Egy kecske legel egy kerítéssel védett 10 m × 3 m-es virágágyás körül. A kecskét 10 méter hosszú kötéllel a kerítés 10 méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték.

a) Mekkora területen kereshet legelnivalót ez a kecske?

b) Hányadrészére csökken a lelegelhető terület, ha a kötél hosszát 40%-kal megrövidíti a gazda?

1829. Képzelje el, hogy egy ruha díszítéséhez vékony bőrből készült, 14 cm sugarú körlemezből egy egyenlő szárú derékszögű háromszöglemezt és egy körlemezt kell kivágnia. Először a háromszöget vágja ki, majd a maradékból a körlemezt.

a) Ha a háromszöglemezt is, majd a körlemezt is a lehető legnagyobb területűnek választja, hány % hulladékra kell számítania?

b) Bizonyítsa be, hogy a hulladékból kivágható még két darab 7 cm átmérőjű körlemez!

1830. Húrnégyszög-e az a négyszög, amelynek oldalai $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$, $CD = DA = 2$, és egyik átlója $AC = 2\sqrt{2}$? Miért?

1831. Érintőnégyszög-e az a négyszög, amelyben $AB = 1$, $ABC\sphericalangle = 90°$, $BAC\sphericalangle = 60°$, $AC = AD$, $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ahol F a CD felezőpontja)?

Bizonyítások

1832. Igazolja, hogy egy háromszög bármely oldala kisebb, mint a háromszög kerületének a fele!

1833. Igazolja, hogy egy hegyesszögű háromszög egyik oldalának felezőpontja és a másik két oldalhoz tartozó magasság talppontja egyenlő szárú háromszöget határoznak meg!

1834. Bizonyítsa be, hogy a szabályos háromszög határvonalán és belsejében lévő pontoknak a három oldaltól mért távolságösszege minden esetben ugyanannyi. Mennyi ez az érték?

1835. Egy derékszögű háromszög oldalaira olyan egyenlő szárú háromszögeket rajzolunk, amelyeknek alapja és a hozzá tartozó magassága egyenlő. A háromszögek alapja illeszkedik a derékszögű háromszög megfelelő oldalára. Igazolja, hogy a befogókra rajzolt háromszögek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt háromszög területével!

1836. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárára mérjen fel az alap egyik végpontjától bármely – a szárnál kisebb – szakaszt! E szakasznak a szárra eső végpontját jelölje P-vel! Hosszabbítsa meg a másik szárat az alapon túl ugyanakkora szakasszal, amekkorát a szárra felmért! E szakasznak a háromszögön kívül eső végpontját jelölje Q-val! Bizonyítsa be, hogy az egyenlő szárú háromszög alapja felezi a PQ szakaszt!

1837. Az $ABCD$ trapézban az AB alapon lévő két szög összege 90°. Az AB felezőpontja E, a CD felezőpontja F. Igazolja, hogy $2 \cdot EF = AB - CD$!

1838. Ossza 6 egyenlő részre egy $ABCD$ paralelogramma AD oldalát! Az A-hoz legközelebbi osztópont legyen P! Mutassa meg, hogy a BP egyenes az AC átlóból annak hetedrészét metszi le!

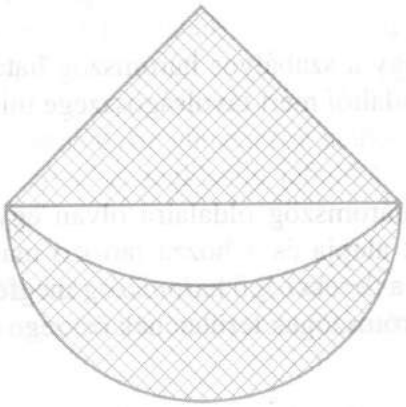
1839. Igazolja, hogy bármely négyszögben a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok felezik egymást!

1840. Az ABC háromszögben $\beta - \gamma = 90°$. Bizonyítsa be, hogy m_a egyenese a körülírt kör érintője!

1841. Derékszögű háromszögbe az átfogóra állított négyzetet írtunk, amelynek másik két csúcsa a befogókra illeszkedik. Igazolja, hogy az átfogón meghatározott három szakasz közül a négyzetoldal mértani közepe a másik két szeletnek!

1842. Egy $ABCD$ konvex négyszög A csúcsát kössük össze a CD oldal E felezőpontjával, a C csúcsot pedig az AB oldal F felezőpontjával. Igazolja, hogy az $AFCE$ négyszög területe az eredeti négyszög területének a fele!

1843. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójára félkört, a derékszögű csúcsból pedig a befogóval mint sugárral negyedkört rajzoltunk. Bizonyítsa be, hogy az így keletkezett holdacska területe egyenlő a háromszög területével!



1844. Egy konvex négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott négyszög területe 180 cm^2. Határozza meg az eredeti négyszög területét!

1845. Igazolja, hogy egy tetszőleges konvex négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe fele a négyszög területének!

1846. Bizonyítsa be, hogy bármely paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlóinak négyzetösszegével!

1847. Igaz-e, hogy egy húrnégyszögnek csak páratlan számú hegyesszöge lehet? Válaszát indokolja!

1848. Igaz-e, hogy minden négyszög szögfelezői – ha négyszöget, akkor – húrnégyszöget zárnak közre? Válaszát indokolja!

Transzformációk

1849. Vannak-e egybevágók az alábbi háromszögek között? Válaszát indokolja!

ABC háromszög: egy oldala 12 cm, rajta fekvő két szöge 30°, illetve 90°.

DEF háromszög: egy oldala 6 cm, ezzel szemközti szöge 30°, egy másik szöge 60°.

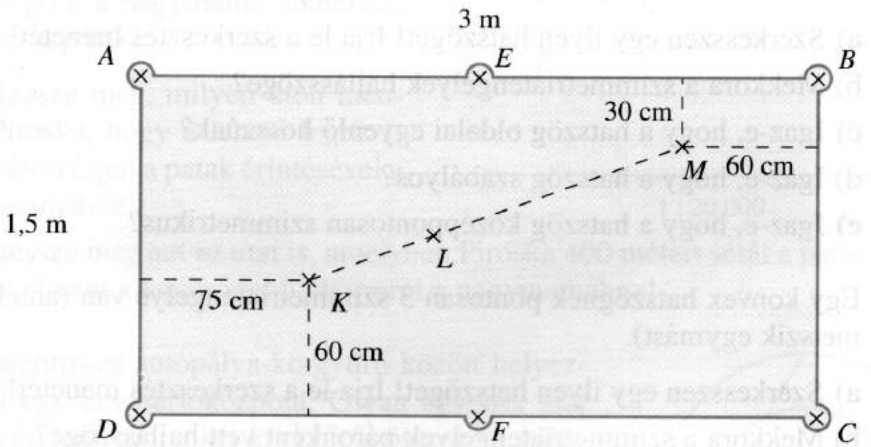
GHJ háromszög: két oldala 6 cm és 12 cm, és az általuk közbezárt szög 30°.

1850. Egy *AB* átmérőjű kör egy további pontja *C*. *A*-t *C*-re tükrözve kapjuk *D*-t. Bizonyítsa be, hogy az *ABD* háromszög egyenlő szárú!

1851. Az *ABC* háromszög tetszőleges belső pontja *P*. Tükrözzük *P*-t először az *AB*, majd a *BC* oldalra. Az így kapott tükörképpontok rendre P_1, illetve P_2. Bizonyítsa be, hogy PAP_1BP_2CP töröttvonal hossza kétszerese a $PA + PB + PC$ összegnek!

1852. Az *ABCD* paralelogramma síkjában lévő *P* pontot tükrözze *A*-ra, a kapott P_1-et *B*-re, így kapja P_2-t, ennek *C*-re vonatkozó tükörképe P_3. Mutassa meg, hogy P_3-nak *D*-re vonatkozó tükörképe *P*!

1853. Egy egyedi tervezésű biliárdasztal hossza 3 m, szélessége 1,5 m. Az ábrán látható elrendezésben három golyó van a táblán, a *K*, *L* és *M* pontokban, melyek egy egyenesbe esnek. Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* jelzik a lyukakat. A *K* golyót meg kell löknie úgy, hogy az az *M* golyóval koccanjon, és közben ne ütközzön az *L* golyóval, illetve ne essen bele a lyukak egyikébe sem. Szerkesszen három különböző lehetséges utat! Az elrendezést az ábrának megfelelően, arányosan vegye fel!

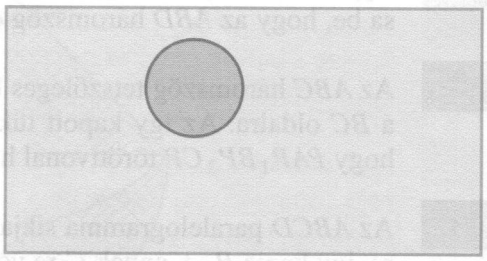


1854. Adott egy háromszög *A* és *B* csúcsa, az *AC* oldal egyenese, és az *A*-beli súlyvonal egyenese. Szerkessze meg a háromszöget!

1855. Adott egy e egyenes, egy rá illeszkedő A pont, továbbá adott egy f egyenes és egy k kör! Szerkesszen egyenlő szárú háromszöget, melynek az e egyenes a szimmetriatengelye, az egyik csúcsa A, másik csúcsa a k körön, harmadik csúcsa az f egyenesen van!

1856. Az a és b metsző egyenesek síkjában adott egy P pont, amely nem illeszkedik sem a-ra sem b-re. Szerkesszen P-re illeszkedő egyenest, melynek a, illetve b egyenessel való A, illetve B metszéspontjára fennáll: $PA : PB = 1 : 4$!

1857. Egy téglalap alakú termékeny szántóföldön van egy kör alakú terméketlen terület. Szerkesszen olyan egyenest, mely egyszerre osztja két egyenlő területű részre mind a termékeny, mind pedig a terméketlen területet!



1858. Lehet-e pontosan két, egymásra merőleges szimmetriatengelye egy

a) négyszögnek; b) ötszögnek; c) nyolcszögnek?

Válaszait indokolja!

1859. Milyen négyszög lehet az a paralelogramma, amelyiknek van szimmetriatengelye?

1860. Egy konvex hatszögnek pontosan 2 szimmetriatengelye van.

a) Szerkesszen egy ilyen hatszöget! Írja le a szerkesztés menetét!

b) Mekkora a szimmetriatengelyek hajlásszöge?

c) Igaz-e, hogy a hatszög oldalai egyenlő hosszúak?

d) Igaz-e, hogy a hatszög szabályos?

e) Igaz-e, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus?

1861. Egy konvex hatszögnek pontosan 3 szimmetriatengelye van (amelyek egy pontban metszik egymást).

a) Szerkesszen egy ilyen hatszöget! Írja le a szerkesztés menetét!

b) Mekkora a szimmetriatengelyek páronként vett hajlásszöge?

c) Igaz-e, hogy a hatszög oldalai egyenlő hosszúak?

d) Igaz-e, hogy a hatszög szabályos?

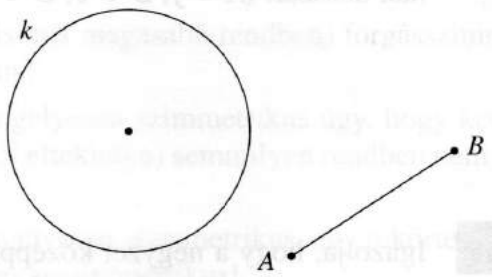
e) Igaz-e, hogy a hatszög forgásszimmetrikus?

1862. Rajzoljon olyan síkbeli alakzatot, melynek végtelen sok szimmetriatengelye van és a tengelyek

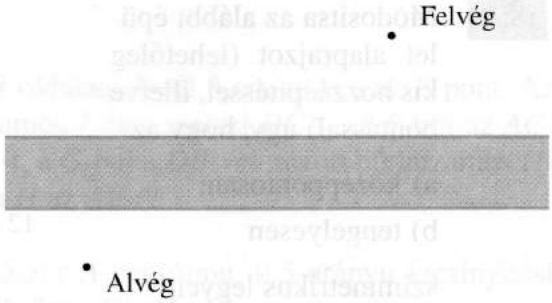
a) egy pontra illeszkednek;

b) párhuzamosak!

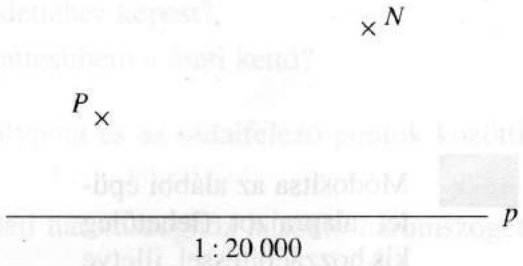
1863. Szerkessze meg a k körnek egy olyan húrját, amelyik az AB szakasszal egyenlő hosszú és vele párhuzamos!



1864. Alvég és Felvég között folyó folyik. Tervezze meg a két falu között a legrövidebb utat, híddal együtt! (A hídnak merőlegesnek kell lennie a folyóra.)



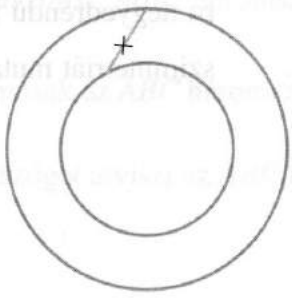
1865. Piroska meglátogatja a nagymamát, és friss vizet is visz neki a patakról. Az adott méretarányú térképen P pont jelöli Piroska, N pont a nagymama lakhelyét, p egyenes a patakot.



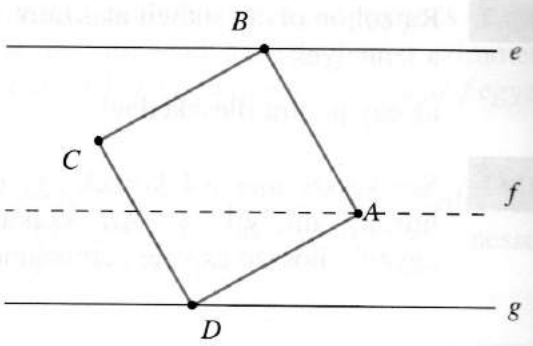
a) Szerkessze meg, milyen úton menjen Piroska, hogy a lehető legrövidebb úton érjen a patak érintésével a nagymamához!

b) Szerkessze meg azt az utat is, amelyben Piroska 400 métert sétál a patak mentén, de egyébként a legrövidebb otthonról a nagymamához!

1866. Két koncentrikus autópálya-körgyűrű között helyezkedik el egy bevásárlóközpont. Olyan egyenes utat akarunk építeni, ami a két körgyűrűt összeköti, elhalad a bevásárlóközpont mellett, és hossza adott. Hogyan lehet megszerkeszteni a keresett utat? (Az első körgyűrű sugara 8 km, a másodiké 13 km. A bevásárlóközpont az első gyűrűtől 2 km-re van. Az út hosszának a 7 km-t jelölték meg.)



1867. Az e és f párhuzamos egyenesek távolsága 3,5 méter, az f és g távolsága 2 méter ($f \parallel g$). Számítsa ki az ábra szerint elhelyezkedő négyzet oldalának hosszát! ($A \multimap f$; $B \multimap e$; $D \multimap g$)



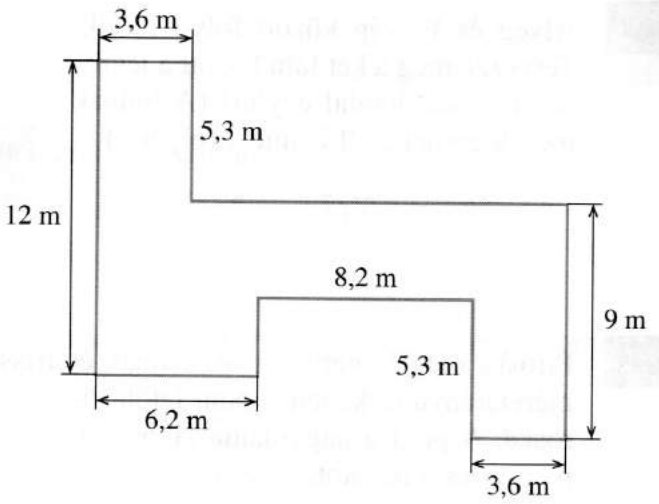
1868. Igazolja, hogy a négyzet középpontján áthaladó bármely két, egymásra merőleges egyenes a négyzetet 4 egyenlő területű részre bontja fel!

1869. Módosítsa az alábbi épület alaprajzot (lehetőleg kis hozzáépítéssel, illetve bontással) úgy, hogy az

a) középpontosan;

b) tengelyesen

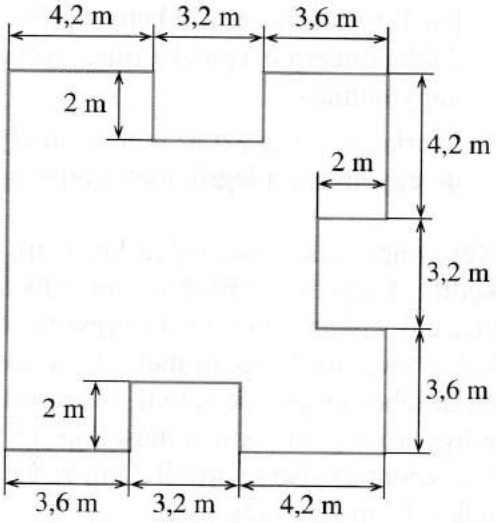
szimmetrikus legyen!



1870. Módosítsa az alábbi épület alaprajzot (lehetőleg kis hozzáépítéssel, illetve bontással) úgy, hogy az

a) tengelyes;

b) negyedrendű forgásszimmetriát mutasson!



1871. a) Rajzoljon olyan négyszöget, amely tengelyesen szimmetrikus, de (a helybenhagyástól eltekintve) semmilyen rendben nem forgásszimmetrikus!

b) Rajzoljon olyan négyszöget, amely tengelyesen szimmetrikus, és (elsőnél magasabb rendben) forgásszimmetrikus is egyben!

1872. a) Rajzoljon olyan négyszöget, amely (elsőnél magasabb rendben) forgásszimmetrikus, de nem tengelyesen szimmetrikus!

b) Rajzoljon olyan négyszöget, amely tengelyesen szimmetrikus úgy, hogy két tükörtengelye van, de (a helybenhagyástól eltekintve) semmilyen rendben nem forgásszimmetrikus!

c) Rajzoljon olyan négyszöget, amely tengelyesen szimmetrikus, egy tükörtengelye van, és (elsőnél magasabb rendben) forgásszimmetrikus!

Ha a feladatok között talált olyat, amelyet nem lehet teljesíteni, indokolja meg, miért!

1873. Az $ABCD$ paralelogramma 12 cm-es AB oldalán, B-től 3 cm-re van az E pont. Az E-ből a (9 cm-es) BC-vel húzott párhuzamos F-ben metszi DC-t, az F-ből az AC-vel húzott párhuzamos G-ben metszi AD-t, a G-ből a DB-vel húzott párhuzamos H-ban metszi AB-t. Milyen arányban osztja H az AB-t?

1874. Az ABC háromszögön hajtson végre először A centrumú, 0,5 arányú kicsinyítést ($A'B'C'$); majd a keletkezett alakzatot tükrözze C'-re!

a) Szerkessze meg a lépéseket!

b) Mekkora a végső alakzat területe az eredetiéhez képest?

c) Milyen egyetlen transzformációval helyettesíthető a fenti kettő?

1875. Tekintse egy általános háromszögben a súlypont és az oldalfelező pontok közötti szakaszok felezőpontjait!

a) Igazolja, hogy ez a három pont az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoz meg!

b) Írja fel a két hasonló háromszög területének arányát!

1876. Egy hegyesszögű háromszög magasságpontja M. Az ABM, AMC, MBC háromszögek súlypontjai rendre T, U, V.

a) Bizonyítsa be, hogy a TUV háromszög oldalai párhuzamosak az ABC háromszög középvonalaival!

b) Adjon meg olyan transzformációt, amely a TUV háromszöget átviszi az ABC háromszögbe!

1877. Adott egy háromszög A és B csúcspontja és egy kör, amelynek C egy tetszőleges pontja. (A és B a kör síkjában van.) Határozza meg az ABC háromszögek súlypontjának halmazát!

1878. Egyenlő szárú háromszög alapja 48 cm, szára 74 cm hosszú.

a) Számítsa ki a háromszög területét, és beírt körének sugarát!

b) Szerkessze meg a háromszög 1 : 5 arányú kicsinyítéssel kapott képét, továbbá a kicsinyített háromszög beírt körének középpontját, sugarát és érintési pontjait!

1879. Egy téglalap oldalai 2,4 dm és 1,8 dm hosszúak. Egy hozzá hasonló téglalap kerülete 52 cm. Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

1880. Egy téglatest alakú dobozt háromféle különböző téglalappár határol.

a) Lehetséges-e, hogy mind a három hasonló egymáshoz?

b) Lehetséges-e, hogy két szomszédos oldallap hasonló egymáshoz?

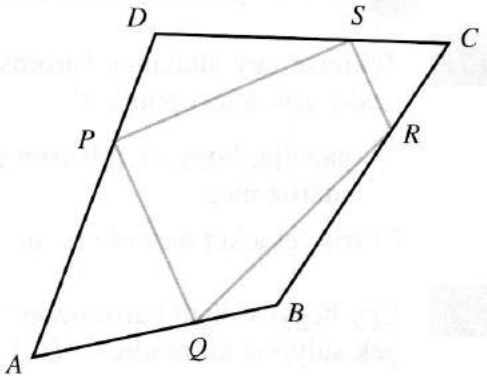
1881. Egy trapéz alapjai 10,5 cm, illetve 4,8 cm, szárai 2,8 cm, illetve 3 cm hosszúságúak. Számítsa ki a kiegészítő háromszög oldalait!

1882. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 2 egység és 6 egység, a száraké 4 egység és 5 egység.

a) Mekkorák a kiegészítő háromszögének az oldalai?

b) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

1883. Az $ABCD$ négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül négyet az ábrán látható módon kötöttünk össze. Igazolja, hogy az összekötő vonalak trapézt alkotnak, és állapítsa meg a párhuzamos oldalak hosszának arányát!



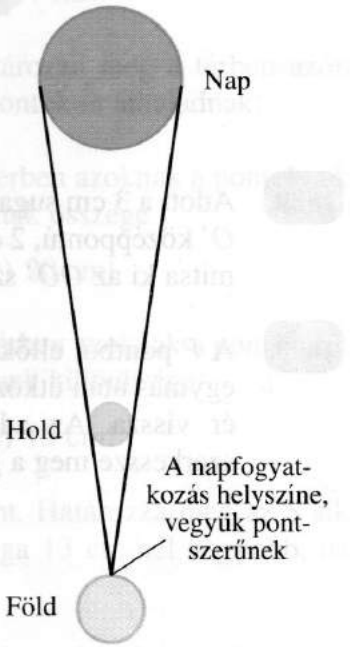
1884. Egy vasúti kocsi hossza 272 méter távolságból két hüvelykujj szélességűnek látszik. Milyen hosszú a kocsi, ha a mérő személy karja 68 cm hosszú, egy hüvelykujjának szélessége pedig 2 cm, és a „mérést" nyújtott karral végezte?

1885. Egy fényképen a kamerától 12 méterre álló fa 7 cm „magas". Ugyanazon a képen a fa előtt, a kamerához képest 2 méterrel közelebb álló barátunk 4 cm magasságúnak látszik.

a) Milyen magas a fa, ha tudjuk, hogy a barátunk 1,80 méter magas?

b) Hányadrészére kicsinyítette a kép a „valóságot"?

1886. Egy teljes napfogyatkozáskor, amelynek sematikus, nem méretarányos képét az ábrán láthatjuk, a Hold teljes egészében eltakarja a Napot (a Föld egy pontszerűnek tekinthető részéről nézve).



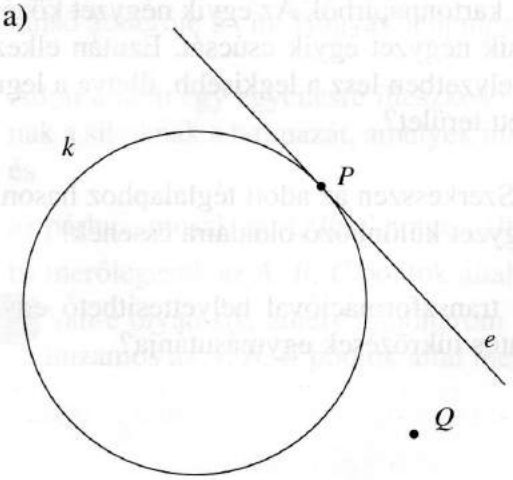
a) Hányszorosa a Nap átmérője a Hold átmérőjének, ha tudjuk, hogy a Nap–Föld távolság kb. $1{,}5 \cdot 10^8$ km, míg a Föld–Hold távolság kb. 384 000 km.

b) A Nap tömege kb. $2 \cdot 10^{30}$ kg. Feltételezve, hogy a Hold sűrűsége megegyezne a Nap sűrűségével, mekkora lenne a Hold tömege?

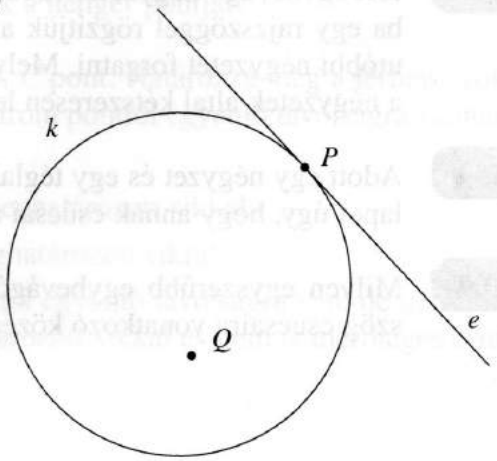
c) Hasonlítsa össze a fenti eredményt a valóságos $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg-mal, és indokolja meg a különbség okát!

1887. Adott a k kör, a kör egy P pontja és a P-ben húzható érintője. Kicsinyítse felére a megadott alakzatot a Q pontból!

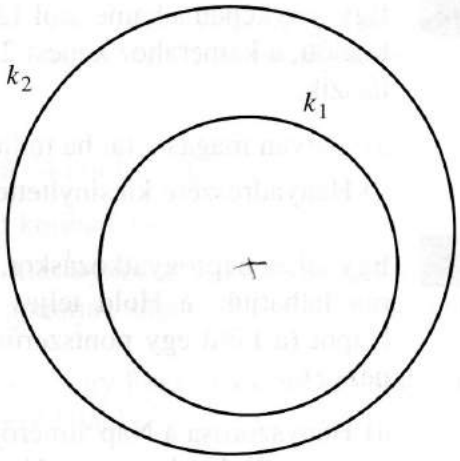
a)



b)

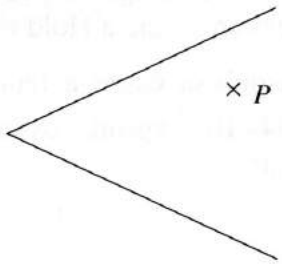


1888. A k_1 kört a K pontból 1,5-szeresére nagyítottuk, így kaptuk a k_2 kört. Szerkessze meg a K pontot!



1889. Adott a 3 cm sugarú k kör O középpontjától 6 cm távolságra a H pont. Szerkesszen O' középpontú, 2 cm sugarú k' kört, hogy k és k' hasonlósági pontja H legyen! Számítsa ki az OO' szakasz hosszát!

1890. A P pontból ellökött golyó a két falon egymás után ütközve az eredeti pontba ér vissza. Az adott ábrát lemásolva szerkessze meg a golyó útját!



1891. Egy síkidomnak két egymásra merőleges szimmetriatengelye van. Igazolja, hogy ez a síkidom ekkor középpontosan is szimmetrikus!

1892. Két egybevágó négyzetet vágunk ki kartonpapírból. Az egyik négyzet középpontjába egy rajzszöggel rögzítjük a másik négyzet egyik csúcsát. Ezután elkezdjük az utóbbi négyzetet forgatni. Melyik helyzetben lesz a legkisebb, illetve a legnagyobb a négyzetek által kétszeresen lefedett terület?

1893. Adott egy négyzet és egy téglalap. Szerkesszen az adott téglalaphoz hasonló téglalapot úgy, hogy annak csúcsai a négyzet különböző oldalaira essenek!

1894. Milyen egyszerűbb egybevágósági transzformációval helyettesíthető egy háromszög csúcsaira vonatkozó középpontos tükrözések egymásutánja?

4.2. Elemi térgeometria

Távolságok, szögek

1895. Hány részre oszthatja fel a teret

a) 2 sík; b) 3 sík; c) 4 sík?

1896. Adott három, nem egy egyenesre illeszkedő pont. Határozza meg a térben azon gömbök középpontjainak a halmazát, melyek az adott pontokon áthaladnak!

1897. Két párhuzamos sík távolsága 15 cm. Határozza meg a térben azoknak a pontoknak a halmazát, melyeknek az adott síkoktól mért távolságának összege

a) 10 cm; b) 15 cm; c) 20 cm!

1898. Két párhuzamos sík távolsága 20 cm. Határozza meg a térben azoknak a pontoknak a halmazát, melyeknek az adott síkoktól mért távolságának különbsége

a) 25 cm; b) 20 cm; c) 15 cm!

1899. Adott egy S sík és a síktól 12 cm távolságra egy P pont. Határozza meg az S sík azon pontjainak a halmazát, melyek P-től mért távolsága 13 cm-nél nagyobb, de 15 cm-nél kisebb!

1900. Egy belül üres vasgolyó középpontja C, belső átmérője 6 cm, külső átmérője 7 cm. Hogyan jellemezhetők azon pontok, ahol a vasrészecskék vannak?

1901. Egy belül üres, végtelen henger (cső) tengelye az e egyenes, belső átmérője 4 cm, külső átmérője 5 cm. Hogyan jellemezhetők a henger pontjai?

1902. Adott a nem egy egyenesre illeszkedő A, B, C pont. Határozza meg a térben azoknak a síkoknak a halmazát, amelyek mindhárom ponttól egyenlő távolságra vannak, és

a) párhuzamosak az A, B, C pontok által meghatározott síkkal;

b) merőlegesek az A, B, C pontok által meghatározott síkra!

c) Van-e olyan sík, amely mindhárom ponttól egyenlő távolságra van, de nem párhuzamos az A, B, C pontok által meghatározott síkkal és nem is merőleges erre?

1903. Mi azon pontok halmaza a térben, amelyeknek egy adott ponttól mért távolsága

a) kisebb, mint 2,5 cm;

b) nem nagyobb, mint 2,5 cm;

c) nagyobb, mint 2,5 cm?

1904. Adott egy sík és rajta kívül egy pont. Hány olyan pont van az adott síkban, amely 12 cm távolságra van az adott ponttól?

1905. Legyen az A és B pontok távolsága 6 cm. Határozza meg azon pontok halmazát a térben, amelyek távolsága

a) A-tól 5 cm és B-től 7 cm;

b) A-tól 2 cm és B-től 4 cm;

c) A-tól 1 cm és B-től 3 cm!

1906. Hány olyan pont van a 9 cm élű kocka belsejében, amelyeknek a kocka lapjaitól való távolsága cm-ben mérve egész szám?

1907. Határozza meg a kocka egyik élének végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát

a) a kocka felületén;

b) a kocka belsejében;

c) a térben!

1908. Egy P pontnak három, egymásra páronként merőleges síktól való távolsága 4,1 cm; 5,4 cm és 6,5 cm. Milyen távol van a P pont a síkok közös pontjától?

1909. Három, egymásra páronként merőleges sík 8 részre osztja a teret. Az egyik térnyolcadban lévő két pontnak a síkoktól mért távolsága rendre 3, 5, 8, illetve 6, 10, 14 egység. Határozza meg

a) annak a téglatestnek az élhosszait, amelynek lapjai párhuzamosak az adott síkokkal és testátlójának hossza a két pont távolsága;

b) a két pont távolságát!

1910. Egy P pont egy sík két pontjától 56, illetve 60 cm távolságra van. A két távolság vetületének aránya 5 : 6. Milyen távolságra van a P pont a síktól?

1911. Határozza meg azokat a szögeket, melyeket a kocka egyik lapátlója bezár

a) az élekkel;

b) a lapokkal!

1912. Hány fokos szöget zár be a kocka egy csúcsból induló két lapátlója?

1913. Határozza meg azt a szöget, melyet a kocka egyik lapátlója bezár a szomszédos lapok lapátlóival!

1914. Egy téglatest élei 6 cm, 9 cm és 12 cm. Mekkora szögeket zárnak be a testátlók

a) a lapokkal; b) az élekkel?

1915. Egy háromszög alapú gúla minden lapja egy 10 cm oldalú szabályos háromszög. Határozza meg a gúla valamely két lapjának hajlásszögét!

1916. Mekkora szöget zár be egy szabályos tetraéder

a) két lapja;

b) két kitérő éle;

c) oldaléle az alaplap síkjával?

1917. Szabályos háromoldalú gúla oldalélei 25 cm hosszúak, magassága 7 cm. Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az alaplappal?

1918. Egy négyoldalú gúla alapja az *ABCD* négyzet, az alaplapon kívüli csúcsa *M*. Az *MA* szakasz merőleges a négyzet síkjára, és hossza a négyzet oldalaival egyenlő. Határozza meg az *MBC* és az *MCD* lapok hajlásszögét!

1919. Egy négyoldalú szabályos gúla oldaléle 6,4 cm, az oldalél az alaplap síkjával 72°-os szöget zár be. Határozza meg a gúla magasságát!

1920. Egy szabályos négyoldalú gúla minden éle egyenlő. Mekkora szöget zár be

a) egy oldalél az alaplap síkjával; b) két szemközti oldalél?

1921. A szabályos oktaéder olyan test, amelyet 8 egybevágó szabályos háromszög határol. Mekkora szöget zár be egy szabályos oktaéder két szomszédos lapja?

Testek

1922. Elmetszünk egy kockát egy síkkal. Lehet-e (és hogyan) a metszet

a) háromszög, szabályos háromszög;

b) négyszög, szabályos négyszög;

c) ötszög, szabályos ötszög;

d) hatszög, szabályos hatszög?

1923. Mekkora az a élű kocka testátlója?

1924. Egy kocka testátlója 3,2 dm. Számítsa ki a kocka élét cm-pontossággal!

1925. Mekkora a d lapátlójú kocka éle, felszíne, térfogata?

1926. Határozza meg az a élű kocka csúcsainak az egyik testátlótól való távolságát!

1927. Egy kocka élének a hossza 12 cm. Határozza meg, hogy mekkora szöget zár be a kocka testátlója

a) a kocka éleivel;

b) a kockalapok síkjaival!

c) Határozza meg a testátló és egy arra nem illeszkedő csúcs távolságát!

1928. Milyen hosszú annak a kockának az éle, melynek csúcsai a rájuk nem illeszkedő testátlótól 3 cm távolságra vannak?

1929. Milyen távol van az egységélű kocka két élének felezőpontja egymástól, ha a két él

a) párhuzamos; b) metszi egymást; c) kitérő?

1930. Bizonyítsa be, hogy a téglatest testátlója hosszának négyzete egyenlő az egy csúcsból induló három él hosszának négyzetösszegével!

1931. Egy szabályos tetraédert tükrözzön egyik magasságának felezőpontjára! Milyen test az eredeti és a tükrözött tetraéder metszete?

Felszín, térfogat

1932. Egy kocka éleit 4 cm-rel megnöveljük, ekkor felszíne 480 cm^2-rel nő. Mekkora az eredeti kocka térfogata?

1933. Egy téglatest éleinek aránya 1 : 3 : 5. Felszínének és térfogatának mérőszáma egyenlő. Mekkorák az élek?

1934. Egy téglatest éleinek aránya 3 : 4 : 5, térfogata 300 cm^3. Milyen hosszúak az élei?

1935. Nagymama azt kéri a közelben lakó Péter unokájától, hogy az 5 literes fazekat vigye át neki, mert finom levest szeretne készíteni a családi ünnepségre. Péter nézegeti az edényeket, de az aljukról már lekopott a jelzés. Azt gyanítja, hogy a 20 cm alapkör átmérőjű, 17 cm magas fazékra gondolt a nagyi. Megfelelő lesz-e a kiválasztott edény?

1936. Egy 3 deci űrtartalmú, henger alakú bögre magassága 10 cm.

a) Mekkora az alapkörének átmérője?

b) A bögre kívül-belül mázzal van bevonva. Hány négyzetméternyi felületet kell mázzal bevonni 1500 bögre készítésénél? (A bögre vastagsága és füle miatt a kapott eredményre számítson rá még 8%-ot.)

1937. Egy fekvő, forgáshenger alakú kazán belső átmérője 140 cm, hossza 300 cm. Mennyi víz van benne, ha a vízállásmutató szerint a víz a magasság $\frac{2}{3}$-ad részéig tölti meg?

1938. Egy hengeres kémcső köbcentiméterekre van beosztva. Két szomszédos beosztás távolsága 1,5 cm. Mekkora a kémcső belső átmérője?

1939. Egy víztartályt alul félgömbben végződő 6,0 m átmérőjű hengernek terveznek. Milyen magas a hengeres rész, ha a tartályban 120 köbméter vizet akarnak tárolni?

1940. Egy forrás óránként 82 hl vizet ad. A forrásvizet henger alakú tartályba vezetik. Milyen magasságig telik meg a tartály 4 óra alatt, ha az alapkör átmérője 7,5 méter?

1941. Egy körhenger alakú torta alapkörének sugara 15 cm, magassága 7 cm. A tortából egy 30°-os középponti szögű tortaszeletet vágunk. Mekkora a kivágott tortaszelet térfogata?

1942. Egy henger alakú üdítős dobozt átalakítottak, hogy ivás közben kényelmesebben lehessen megfogni. A térfogata nem változott, tehát ugyanannyi ital fér bele, csak a doboz felszíne nőtt meg 27,3 cm^2-rel annak következtében, hogy 1 cm-rel kisebb lett a henger alapkörének átmérője, míg a magassága pontosan 4,7 cm-rel megnőtt. Mekkorák az új henger méretei?

1943. Vezesse le, hogy mekkora az a élű szabályos tetraéder felszíne és térfogata!

1944. Egy szabályos tetraéder felszíne 1 m^2. Mekkora a magassága?

1945. a) Egy szabályos ötoldalú gúla alapéle 7 cm, oldalélei 10 cm hosszúak. Mekkora a felszíne és térfogata?

b) Mekkora a fenti gúlába beleírható gömb sugara?

1946. Egy torony teteje szabályos hatoldalú gúla, melynek alapéle 1,2 m, magassága 5 m. Hány négyzetméter rézlemez szükséges a befedéséhez?

1947. Forgassuk meg átfogója körül azt a derékszögű háromszöget, melynek befogói 6 és 8 cm hosszúságúak. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

1948. Egy háromszög oldalai 56,00 cm, 38,00 cm és 26,31 cm. Megforgatjuk a háromszöget a legrövidebb oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

1949. Egy háromszög oldalai 55 cm és 30 cm hosszúságúak, az általuk közbezárt szög 20°. Forgassuk meg a háromszöget a 30 cm-es oldala körül! Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

1950. Mekkora lesz annak a forgástestnek a térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy egy háromszöget megforgatunk

a) a leghosszabb; b) a legrövidebb

oldala körül, ha a háromszög oldalainak hossza: 4 cm, 5 cm, 7 cm?

1951. Melyik test palástjának nagyobb a területe: egy 5 cm sugarú, 6 cm magasságú forgáskúpnak, vagy egy 6 cm sugarú, 5 cm magasságú forgáskúpnak? Válaszát indokolja!

1952. Melyik test palástjának nagyobb a területe: egy x cm sugarú, y cm magasságú forgáskúpnak, vagy egy y cm sugarú, x cm magasságú forgáskúpnak? Válaszát indokolja!

1953. Egy szimmetrikus trapéz alapjai 6 cm, illetve 10 cm, szárai 4 cm hosszúságúak. A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja körül. Mekkora az így keletkezett test felszíne és térfogata?

1954. 3 cm alapkörátmérőjű, 5 cm magas fahengerből maximális térfogatú kúpot esztergálunk (a hengert csúcsok közé szorítjuk és így végezzük a forgácsolást).

a) Hány százalék a forgács?

b) A kúpot további megmunkálásnak kell alávetni, mert szabályos hatoldalú gúlára van szükségünk. A kúp anyagának legalább hány százalékát kell eltávolítani?

c) Összesen legalább mekkora veszteséggel készíthető el a fenti eljárással a hengerből a gúla?

1955. Egy négyoldalú szabályos csonkagúla alapéleinek hossza 10 cm, az oldalélek az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. A csonkagúla testátlója merőleges az egyik csatlakozó oldalélre. Mekkora a csonkagúla térfogata és felszíne?

1956. A kovács tűzhelye fölött (alul-felül nyitott, négyzetes csonkagúla-palást alakú) füstfogó van. Hány m^2 bádog kell az elkészítéséhez, ha a füstfogó alapéle 2 m, a fedőéle 1,3 m, az oldalélek pedig 1,8 m hosszúságúak? (Az összeállításhoz szükséges felületet hagyja ki a számításból.)

1957. Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonkagúla alakú, az alapjai téglalapok. Ezeknek oldalai 15,0 m és 12,0 m, illetve 5,0 m és 4,0 m, mélysége pedig 6,0 m. Hány hektoliter víz fér bele? Mennyi víz van benne, ha magasságának

a) feléig; b) harmadáig; c) $\frac{3}{4}$ részéig

van töltve?

1958. Egy egyenes csonkagúla alaplapja 8 cm oldalú négyzet. Oldallapjai vele egyenlő területűek, fedőlapja feleakkora területű. Mekkora a térfogata?

1959. Egy üvegpohár alja 6 cm, teteje 8 cm átmérőjű kör, a pohár magassága 10 cm.

a) Mennyi folyadék tölthető a pohárba?

b) Hány deciliter víz van a pohárban, ha a víz 5 cm magasan áll benne?

1960. Egy fenyőfa törzsének hossza 11,5 méter, vastagabbik vége 54 cm, vékonyabbik vége 36 cm átmérőjű. Mekkora a fatörzs értéke, ha 1 m^3 fenyőfa ára 17 000 fenyőfabatka?

1961. 50 kiló cementet zsákból egy vödörbe szeretne áttölteni a kőműves. A vödör csonkakúp alakú, alsó alapköre 20 cm átmérőjű, a felső alapköre 28 cm átmérőjű, magassága pedig 27 cm. Sikeres lesz-e az áttöltés? (A cement sűrűsége 3150 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; a tömeg kiszámítható a térfogat és a sűrűség szorzataként is.)

1962. Egy egyenes körkúp alapjának sugara 24 cm, magassága 36 cm. Ebből a kúpból az alaplapjával párhuzamos síkkal egy 12 cm magasságú csonkakúpot vágunk le. Mekkora a csonkakúp felszíne?

1963. Vezesse le, hogy mekkora egy a élű szabályos oktaéder felszíne és térfogata!

1964. Egy 10 cm átmérőjű gömbgyertya fele elégett és már nem nyújt szép látványt. Úgy döntünk, hogy a maradékból három kisebb, egyenlő sugarú gömbgyertyát öntünk. Mekkora lesz ezeknek az átmérője?

1965. Egy 900 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű fából készült, 1,9 kg tömegű tekegolyót végiggurítunk egy 30 m hosszú pályán. Hányszor fordul meg eközben?

1966. Egy 10 cm sugarú gömbbe olyan háromszög alapú hasábot írunk, amelynek minden oldallapja négyzet. Mekkora a hasáb térfogata?

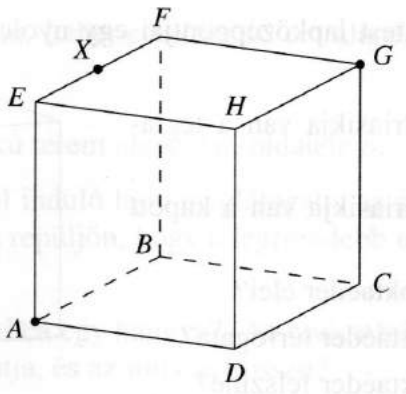
1967. 20 cm sugarú gömbbe olyan szabályos hatoldalú hasábot írtunk, amelynek felszíne fele a gömb felszínének. Határozza meg a hasáb térfogatát!

Számítások

1968. Egy kocka felszíne ugyanannyi négyzetcentiméter, ahány köbcentiméter a térfogata. Határozza meg a kocka lapátlójának a hosszát!

1969. Milyen messze van a kocka egyik csúcspontja a rá nem illeszkedő élek felezőpontjától, ha a kocka éle 8 egység?

1970. Az ábrán látható kockán X jelöli az EF él felezőpontját. Itt egy pók ül áldozatra lesve. Két legyet is észrevesz, az egyik az A, a másik a G pontban pihen. A pók a közelebbi legyet tekinti a biztosabb zsákmánynak. Merre induljon, az A vagy a G csúcspont felé?



1971. Egy kocka két kitérő élének egymástól való távolsága 4 cm. Mekkora a kocka legnagyobb szabályos háromszög síkmetszetének területe?

1972. Mekkora az alapéle és magassága annak a négyzetes oszlopnak, melynek oldallapátlója 9, testátlója 12 egység?

1973. A tengeren úszik egy jégtömb. Alakja négyzetes oszlop, a négyzet oldalai 20,0 méteresek. A jégtömb a tenger vizéből 1,2 m magasra emelkedik ki. Mekkora a jégtömb tömege? (1 dm^3 jég tömege 0,88 kg, 1 liter tengervízé 1,03 kg; úszáskor a test térfogatának annyiad része merül a vízbe, ahányad része a test sűrűsége a vízének.)

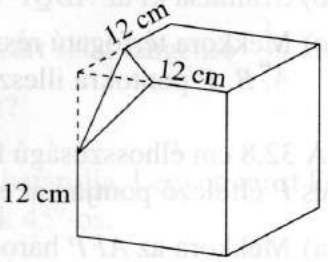
1974. Egy téglatest éleinek hossza 9, 12, 14 cm. Milyen távol van a leghosszabb él a hozzá képest kitérő testátlóktól?

1975. Egy téglatest éleinek aránya 3 : 4 : 5, testátlója 20 cm hosszú.

a) Mekkorák az élek?

b) Mekkora szöget zár be a testátló a téglatest leghosszabb és legrövidebb élével?

1976. Kocka alakú, 24 cm élű gránittömbből az ábra szerint leválasztanak egy kisebb darabot.



a) Mekkora a megmaradó test felszíne?

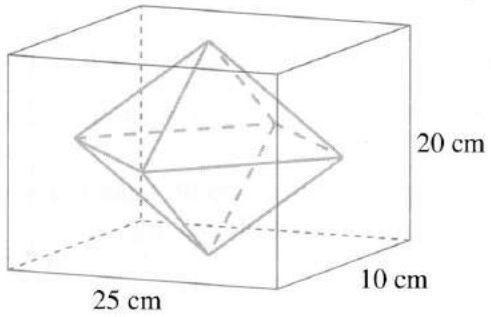
b) Hány százalékát választották le a gránittömb tömegének?

1977. Egy 6 cm élű kocka minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely a csúcsból induló éleket a csúcstól 2 cm távolságra metszi.

a) Állapítsa meg a keletkezett test csúcsainak, éleinek, lapjainak számát!

b) Mekkora a keletkezett test felszíne és térfogata?

1978. Az ábrázolt téglatest lapközéppontjai egy nyolclapú testet (oktaédert) határoznak meg.



a) Hány szimmetriasíkja van a téglatestnek?

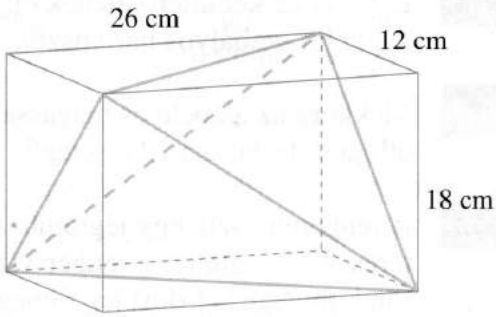
b) Hány szimmetriasíkja van a kapott oktaédernek?

c) Mekkorák az oktaéder élei?

d) Mekkora az oktaéder térfogata?

e) Mekkora az oktaéder felszíne?

1979. Az ábrázolt téglatest megrajzolt lapátlói egy négylapú testet (tetraédert) határoznak meg.



a) Igaz-e, hogy a téglatest középpontosan szimmetrikus?

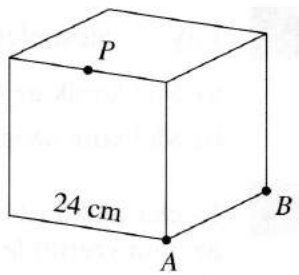
b) Mekkorák a kapott tetraéder élei?

c) Igaz-e, hogy a kapott tetraéder mindegyik lapjának ugyanakkora a területe?

d) Igaz-e, hogy a kapott tetraéder középpontosan szimmetrikus?

e) Mekkora a tetraéder térfogata?

1980. A 24 cm élű kocka két megjelölt csúcsán és P élfelező pontján átfektetett sík az $ABQP$ négyszöget metszi ki a kockából.

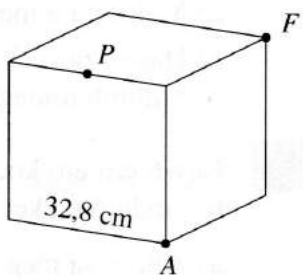


a) Jelölje meg a Q pontot az ábrán!

b) Számítsa ki az $ABQP$ négyszög területét!

c) Mekkora térfogatú részekre vágja szét a kockát az A, B, P pontokra illeszkedő sík?

1981. A 32,8 cm élhosszúságú kocka két megjelölt csúcsán és P élfelező pontján át egy síkot fektetünk.



a) Mekkora az AFP háromszög kerülete?

b) Az AFP sík két részre vágja a kockát. Mekkora az egyes részek térfogata?

c) Az egyik keletkező test tetraéder. Határozza meg e tetraéder mindegyik magasságának a hosszát!

1982. Egy rönkfa átmérője 12 cm. Lehet-e belőle 10 cm alapélű négyzetes oszlop alakú gerendát készíteni?

1983. Egy négyzetes oszlop alakú terem alapéle a, oldaléle b.

a) Az egyik felső sarokból induló légy meglátogatja az átellenes alsó sarokban tanyázó barátját. Hogyan repüljön, hogy a legrövidebb utat tegye meg?

b) Mekkora ez az út?

c) Mit tegyen hasonló esetben egy hangya? (Az csak a falakon tud mászni.) Melyik a hangya legrövidebb útja, és az milyen hosszú?

1984. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 10 cm hosszú, palástjának területe 5-szöröse az alapterületének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

1985. Egy csatorna keresztmetszete lefelé keskenyedő trapéz, melynek párhuzamos oldalai 2,4 m és 1,6 m hosszúságúak, magassága 1,2 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül egy óra alatt, ha a víz a csatorna magasságának harmadáig ér és sebessége 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

1986. Egy csatorna keresztmetszete olyan lefelé keskenyedő szimmetrikus trapéz, amelynek két párhuzamos oldala 4 m és 3 m, magassága 1,8 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül óránként, ha a víz folyásának sebessége 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, és a vízmagasság 1 m?

1987. Egy vízelvezető árok keresztmetszete szimmetrikus trapéz, melynek alapjai 5,2 m, illetve 2,0 m, szárainak hossza 1,3 m. Mennyi víz folyhat rajta keresztül 1 óra alatt, ha a víz sebessége 5,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

1988. Egy 6 m magas vasúti töltés felül 15 m széles. Keresztmetszete szimmetrikus trapéz. Emelkedése, azaz az oldal és az alap által bezárt szög tangense $\frac{2}{3}$. Hány köbméter földet kell beépíteni a töltésbe méterenként?

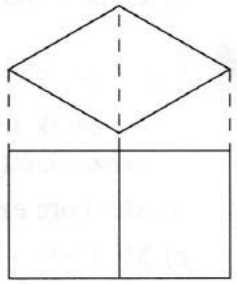
1989. A romboéder nevű testet hat egybevágó rombusz határolja. Legyen most konkrétan a rombuszok éleinek hossza 5 cm és egyik szögük 45°-os.

a) Mekkora a test magassága, ha egyik lapjára állítjuk?

b) Mekkora a test felszíne?

c) Mekkora a test térfogata?

1990. Egy egyenes hasáb oldalnézete téglalap, felülnézete pedig olyan rombusz, amelynek van 60°-os szöge. A hasáb magassága és alapélének hossza egyaránt 12 cm.

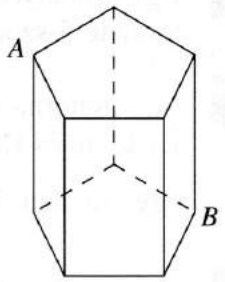


a) Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

b) Mekkorák a hasáb testátlói?

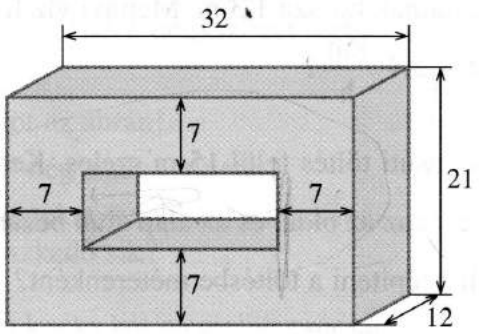
c) Mekkora távolságra lesz az asztallap síkjától a szemközti lapja, ha a hasábot egyik oldallapjával vízszintes asztallapra állítjuk?

1991. a) Szabályos ötszög alapú egyenes hasáb alapéle 1, oldaléle 2. A test belsejében egy légy, illetve egy hangya akar eljutni az A csúcsból a B csúcsba. (A légy repül, a hangya a felületen mászik.) Melyik a legrövidebb útjuk?

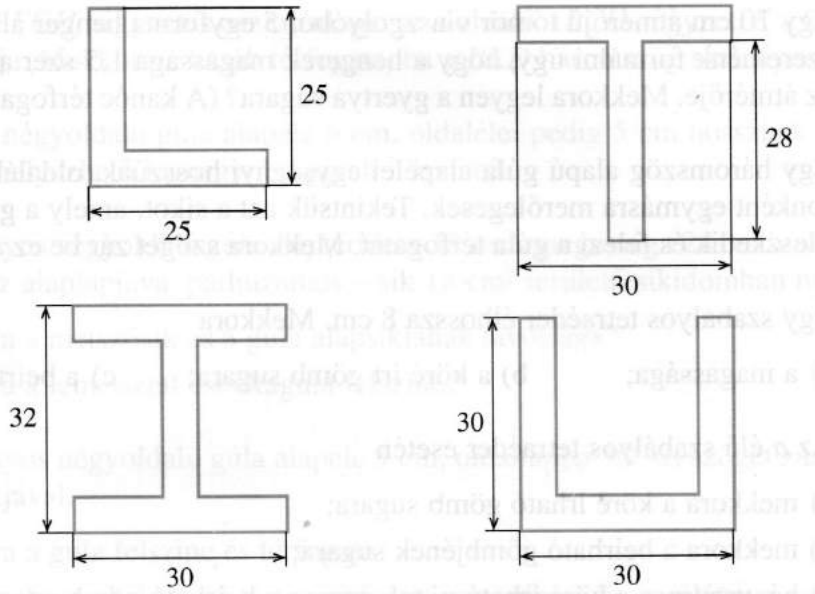


b) Ha az oldalél x, mindig ugyanaz az út lesz-e a legrövidebb?

1992. Határozza meg az ábrán látható alakú és méretű beton építőelem tömegét, ha a beton sűrűsége 1830 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$! (Az ábrán a méretek cm-ben vannak megadva.)



1993. Az következő ábrán különböző formájú vasgerendák keresztmetszetei láthatók, a méretekkel feltüntetve. Határozza meg az egyes gerendák tömegét, ha hosszuk 5 m és a falak vastagsága mindenütt 5 cm. A vas sűrűsége 7800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, az ábrán a méretek centiméterben vannak megadva.



1994. Egy forgáshenger magassága az alapkör sugarának a háromszorosa, a henger palástjának felszíne 150π területegység. Számítsa ki a henger térfogatát!

1995. Öntöttvasból készült, tömör, hengeres test mindkét végén félgömbökben végződik. A test teljes hossza 2 méter, a hengeres rész átmérője 0,6 méter. Mekkora a test tömege, ha az öntöttvas sűrűsége 7200 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? (A test tömege megkapható a térfogat és a sűrűség szorzataként is.)

1996. Hány másodperc alatt tölthető tele benzinnel egy 300 literes benzintartály, ha a töltés 30 mm belső átmérőjű csövön át történik és az ömlés sebessége 10 $\frac{\text{m}}{\text{perc}}$?

1997. Egy henger alakú edény belső átmérője 24 cm. Az edényben 10 cm magasan víz van. A vízbe egy tömör vasból készült téglatestet teszünk, melyet a víz teljesen ellep. A téglatest két éle 15 cm és 1 dm hosszúságú. Mekkora a harmadik éle, ha a vízszint a téglatest belemerülése után 21 mm-t emelkedik, de a víz nem ömlik ki az edényből?

1998. Egy 5 cm sugarú kör alakú lapra három henger alakú, 6 cm magasságú díszgyertyát tervezünk, melyek érintik egymást és állítva éppen ráférnek a körlapra.

a) Mekkora legyen a gyertyák alaplapjának sugara?

b) Milyen magas, 4 cm-es alapélű, négyzetes oszlop alakú tömör viaszból önthető ki a három gyertya? (A kanóc térfogata elhanyagolható.)

1999. Egy 10 cm átmérőjű tömör viaszgolyóból 5 egyforma henger alakú tömör gyertyát szeretnénk formálni úgy, hogy a hengerek magassága 1,5-szer akkora legyen, mint az átmérője. Mekkora legyen a gyertya sugara? (A kanóc térfogata elhanyagolható.)

2000. Egy háromszög alapú gúla alapélei egységnyi hosszúak, oldalélei egyenlők és páronként egymásra merőlegesek. Tekintsük azt a síkot, amely a gúla egyik alapélére illeszkedik és felezi a gúla térfogatát. Mekkora szöget zár be ez a sík az alapsíkkal?

2001. Egy szabályos tetraéder élhossza 8 cm. Mekkora

a) a magassága; b) a köré írt gömb sugara; c) a beírt gömb sugara?

2002. Az a élű szabályos tetraéder esetén

a) mekkora a köré írható gömb sugara;

b) mekkora a beírható gömbjének sugara;

c) hányszorosa a köré írható gömb sugara a beírható gömb sugarának?

2003. Egy 5,4 cm oldalú szabályos háromszög csúcsaitól a tér egy P pontja 8,2 cm távolságra van. Mekkora a P pontnak a háromszög síkjától való távolsága?

2004. Az $OABC$ háromoldalú gúla ABC alapja egyenlő szárú derékszögű háromszög ($\sphericalangle ACB = 90°$). Az OC oldalél merőleges az alaplap síkjára, hossza $\sqrt{3}$ egység. Az OAB oldallap az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be. Számítsa ki a gúla felszínét és térfogatát!

2005. Egy egyiptomi piramis (négyzet alapú szabályos gúla) magassága 150 m, alapterülete 0,04 km^2. Mekkora az oldallapok területe, és milyen meredekek az oldallapok?

2006. Egy négyzetes gúla alapéle 15 cm, az oldalélek egyenlő hosszúak. A szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Határozza meg a gúla térfogatát!

2007. a) Szerkessze meg annak a négyzet alapú egyenes gúla alaplapjának és egyik oldallapjának a szögét, amelyre igaz, hogy az oldalélei kétszer olyan hosszúak, mint azok vetületei az alaplapon!

b) Határozza meg ezt a szöget számítással is!

c) Mekkora a gúla felszíne, illetve térfogata, ha oldaléle 10 cm?

2008. Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle 10,4 cm, oldaléle 17,6 cm. Határozza meg a gúla magasságát!

2009. Az *ABCDEFGH* négyzetes oszlop alapja az *a* oldalú *ABCD* négyzet, *K* a *CG* oldalél felezőpontja. Mekkora a hasáb térfogata, ha a *BKD* háromszög szabályos?

2010. Szabályos négyoldalú gúla alapéle 6 cm, oldalélei pedig 5 cm hosszúak. Mekkora a benne elhelyezhető legnagyobb gömb felszíne?

2011. Egy szabályos négyoldalú gúla alapterülete 32 cm^2, magassága 28 cm hosszú. A gúlát egy – az alaplapjával párhuzamos – sík 18 cm^2 területű síkidomban metszi.

a) Mekkora a metszősík és a gúla alapsíkjának távolsága?

b) Mekkora a lemetszett csonkagúla felszíne?

2012. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 9 cm, oldallapjai 56°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Mekkora a gúla felszíne és térfogata?

b) Mekkora lesz a keletkező testek térfogatának aránya, ha a gúlát a magasságának felezőpontjában az alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk?

c) A gúlába olyan kockát helyezünk el, amelyiknek négy csúcsa a gúla alaplapján, másik négy csúcsa a gúla egy-egy oldallapjának szimmetriatengelyén van. Hány százaléka a kocka térfogata a gúla térfogatának?

d) Hány százaléka a gúla minden lapját érintő gömb térfogata a gúla térfogatának?

2013. Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle 30 cm, a gúlába 13 cm sugarú gömb írható. Mekkora a gúla térfogata?

2014. Egy piramis (négyzet alapú szabályos gúla) alapéle 230 m, magassága 150 m.

a) Hány m^3 követ használtak a felépítéséhez, ha belsejében 2500 m^3 helyet hagytak szabadon (járatok, sírkamra céljára)?

b) Hány fokos szögben hajlanak oldallapjai a vízszintes síkhoz?

2015. Egy *ABCD* téglalap *A* csúcspontjában a téglalap síkjára állítottunk merőlegest. Ezen kijelöltük az *A*-tól 4,4 cm távolságra a *P* pontot. Ekkor $PB = 6{,}0$ cm és $PC = 6{,}6$ cm. Mekkora

a) a téglalap két különböző oldala;

b) a *PD* távolság?

2016. Egy téglatest egy csúcsából kiinduló élei 4, 8, 12 cm hosszúak. Számítsa ki annak a négyoldalú gúlának a felszínét és térfogatát, melynek alaplapja a téglatest legnagyobb területű oldallapja, csúcsa pedig a téglatest középpontja!

2017. Egy középület belső udvarára díszként egy szabályos ötszög alapú egyenes gúlát akar készíteni egy szobrász, különleges alumínium lemezből. Úgy tervezi, hogy az ötszög oldala 5 m lesz, a gúla magassága szintén 5 m. A tervezett alumíniumlemezből csak 80 m^2-t tud beszerezni. El tudja-e készíteni ebből a kívánt méretekkel a gúlát?

2018. Egy szabályos nyolcoldalú tömör gúlát egyenes körkúppá csiszolunk. A gúla térfogatának legalább hány százaléka lesz a hulladék?

2019. Egy forgáskúp alapkörének az átmérője egyenlő az alkotó hosszával. Határozza meg a kúp felszínét és térfogatát, ha a magassága $8\sqrt{3}$ cm!

2020. Egy forgáskúp nyílásszöge 60°, magassága 1 dm. Mekkora a kiterített palástjának középponti szöge és területe?

2021. Egy egyenes körkúp kiterített palástja 18 cm sugarú félkörlap. Mekkora a kúp

a) felszíne; b) térfogata; c) nyílásszöge; d) beírt gömbjének térfogata?

2022. 24 cm átmérőjű körlapból 3 egyforma süveget szeretnénk készíteni úgy, hogy a körlapot 3 egybevágó körcikkre vágjuk. Milyen magasságú (körkúp alakú) süvegeket készíthetünk?

2023. Körcikk alakú sátorlapunk területe 18 m^2. A sátor alapkörének átmérője 3,6 m. Milyen magas a sátor?

2024. Kiöntött homok 31°-os természetes lejtéssel állapodik meg. Milyen magas és széles az a homokkúp, amelynek térfogata 12 m^3?

2025. Egyenlő szárú háromszög alapja 80 cm, szárainak hossza 104 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.

a) Mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge?

b) Mekkora felszínű az a gömb, amelyik érinti a kúp alaplapját és palástját?

c) Mekkora a kiterített palást területe és középponti szöge?

d) A kúp köré írt gömbje hányszor akkora térfogatú, mint a kúp?

2026. Csonkakúp-palást alakú lámpaernyőt készítünk ajándékba. Az adatok: $R = 7{,}5$ cm, $r = 5$ cm, az alkotó $a = 10$ cm.

a) Mekkorára kell választani a körlap sugarát, amelyből kivágható a lámpaernyő?

b) Elég-e egy negyed körlap az elkészítéshez?

2027. Karácsonyi készülődéskor hálás az ember a jó ötletért. Családi meglepetés lehet a csonkakúppalást alakú lámpaernyő. Legszebb festve, pergamenpapírból készítve. Felhasználható a régi, tönkrement ernyő drót merevítője, de ekkor is van változtatható adat (a magasság). Az alapkörök (adott) átmérői 40 cm és 20 cm, magasságát válasszuk 30 cm-nek. Mekkora sugarú és mekkora középponti szögű körcikkre van szükség?

2028. Egy csúcsával lefelé álló, kúp alakú tartóban 30 cm magasan áll a víz. Egy 3 cm sugarú rézgolyót beleejtve 2 cm-t emelkedik a vízszint, de a víz nem ömlik ki az edényből. Mekkora a kúp nyílásszöge?

2029. Egy egyenlő oldalú kúp (tengelymetszete szabályos háromszög) és egy gömb felszíne ugyanakkora. Melyik test térfogata a nagyobb, és hányszorosa a másiknak?

2030. Egy kocka alakú fadarabból kifaragunk egy lehető legnagyobb sugarú gömböt. A fadarab hány százaléka lesz hulladék?

2031. Egy narancs és a Föld egyenlítője köré (gondolatban) cérnaszálat feszítünk. Ezután mindkét cérnaszálba betoldunk 1 métert, és újra kifeszítjük köréjük úgy, hogy állandó magasságban fussanak körbe a narancs, illetve a Föld felszíne felett. Melyik esetben lesz nagyobb ez a magasság?

2032. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyben a középponttól 3 cm távolságra levő síkmetszet területe 50,26 cm^2?

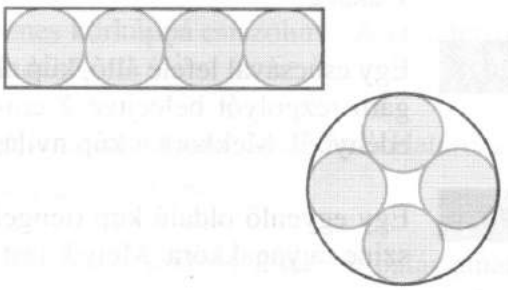
2033. Négy darab, 10 cm sugarú vasgolyót négyzet alakban elrendezünk az asztalon úgy, hogy a szomszédosak érintsék egymást. Egy ötödik, szintén 10 cm sugarú golyót ezek tetejére helyezünk úgy, hogy az mind a négy golyót érintse. (A golyókat megtámasztjuk, hogy ne csússzanak szét.) Milyen magas lesz az így kapott kupac?

2034. Három darab, 10 cm sugarú vasgolyót elrendezünk az asztalon úgy, hogy mindegyik érintse a másik kettőt. Egy negyedik, szintén 10 cm sugarú golyót ezek tetejére helyezünk úgy, hogy az mind a három golyót érintse. (A golyókat megtámasztjuk, hogy ne csússzanak szét.) Milyen magas lesz az így kapott kupac?

2035. Egy félgömbbe kockát helyezünk el úgy, hogy a kocka négy csúcsa a félgömb határkörének síkjába, négy csúcsa pedig a félgömbre essék. Mekkora a félgömb sugara, ha a kocka éle 20 cm?

2036. Egy gömböt két párhuzamos, egymástól 6 cm távolságra levő sík metsz. A síkmetszetek sugara 24, illetve 32 cm. Mekkora a gömb sugara?

2037. Egy játékforgalmazó miniteniszlabdák csomagolásához partnert keres. A teniszlabdákat négyesével kell dobozolni úgy, hogy a labdák ne lötyögjenek a dobozban. Két ajánlat érkezett, mindkettő henger alakú dobozra szólt; az egyik henger hosszúkás, a másik lapos, korong alakú volt. A vállalkozók egy-egy ábrát is mellékeltek az általuk javasolt csomagolási mód szemléltetésére. A dobozkészítéshez mindkét vállalkozó ugyanolyan minőségű és egységárú anyagot használna. Melyik vállalkozó ajánlata kedvezőbb a forgalmazó számára, ha a dobozok ára a készítésükhöz felhasznált anyag árával egyenesen arányos, és az arányossági tényező mindkét vállalkozó esetében ugyanannyi? (Egy teniszlabda átmérője legyen 6 cm.)



2038. Egy 50 cm hosszú, 8 mm falvastagságú és 30 mm belső átmérőjű ólomcsövet beolvasztanak, és 1,5 cm átmérőjű golyókat öntenek belőle. Hány golyót kapnak, ha a folyamat során 5% a veszteség?

2039. Mennyivel emelkedik a víz felszíne, ha egy tégla alakú edénybe – amelynek alapélei 16 és 12 cm – egy 5,4 cm átmérőjű, a vízben teljesen alámerülő golyót ejtünk?

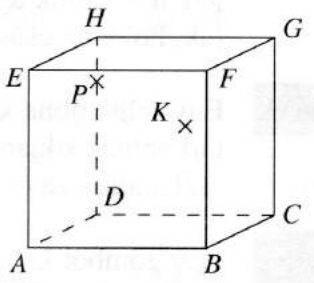
2040. Egy higanyos lázmérő eltörése után három, a padlóra esett higanycseppet próbálunk egy nagyobb cseppé formálni.

a) Mekkora lesz a belőlük alkotott egyetlen csepp átmérője, ha a higanycseppek 1, 2, illetve 3 mm átmérőjűek? (Tekintsük a cseppeket gömböknek!)

b) Hányszorosa lesz a végső egyetlen csepp felszíne az eredeti 3 csepp együttes felszínének?

2041. Egy téglatest egy csúcsból induló élei hosszának összege 12 cm, felszíne 94 cm^2. Mekkora a testátlója?

2042. A kocka éle 4 egység, P pont a HD él H-hoz közelebbi negyedelőpontja. Legyen K a $HDCG$ lap középpontja. Fektessen síkot az A, P, K pontokon keresztül! Milyen síkidomban metszi ez a sík a kockát? Mekkora ezen síkidom kerülete?



2043. Egy háromoldalú hasáb minden éle 5 cm hosszú. Az egyik oldallap négyzet, a másik kettő rombusz, amelyeknek egy-egy átlója szintén 5 cm. Mennyi a hasáb térfogata?

2044. Egy hasáb két lapja rombusz, a többi négy lapja négyzet. A hasáb minden éle 12 cm hosszú, a hasábnak van 45°-os lapszöge.

a) Mekkora a térfogata?

b) Mekkorák e hasáb magasságai?

2045. Egy tutaj 40 db, egyenként 14 m hosszú, csonkakúp alakú fenyőfa gerendából készült. A gerendák átmérője a vastagabb végükön 26 cm, a vékonyabb végükön 18 cm. Mekkora súlyú hasznos terhet képes a tutaj szállítani? (A fenyőfa sűrűsége $0{,}62\ \frac{g}{cm^3}$, a vízé $1\ \frac{g}{cm^3}$. Úszáskor a test térfogatának annyiad része merül vízbe, ahányad része a test sűrűsége a vízének.)

2046. Három darab, 10 cm sugarú vasgolyót elrendezünk az asztalon úgy, hogy mindegyik érintse a másik kettőt. Egy negyedik golyót ezek tetejére helyezünk úgy, hogy az mind a három golyót érintse. (A golyókat megtámasztjuk, hogy ne csússzanak szét.) Mekkora a negyedik golyó sugara, ha éppen érinti az első három golyóra tett (vízszintes) lapot?

2047. Egy téglatest átlós síkmetszeteinek területe 20 cm^2, 25 cm^2 , illetve 30 cm^2. Milyen hosszúak az élei?

2048. Egy forgáskúp felszíne kétszer akkora, mint a beírt gömbjének felszíne. Mekkora szöget zárnak be a kúp alkotói a kúp tengelyével?

Transzformációk

2049. a) Szabályos tetraéder sarkaiból levágjuk a feleakkora élű szabályos tetraédereket. Milyen test marad ezután?

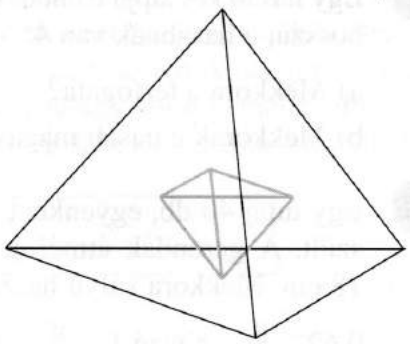
b) Összerakható-e néhány egybevágó szabályos tetraéderből újabb (nagyobb) szabályos tetraéder?

2050. Milyen forgásszimmetriákat mutat a kocka?

2051. Egy 3 cm élű kockát felvágunk 1 cm élű kockákra. Hány db keletkezik? Hányszorosa a kis kockák összfelszíne az eredeti kocka felszínének?

2052. a) Igazolja, hogy egy szabályos tetraéder lapközéppontjai ugyancsak szabályos tetraédert határoznak meg!

b) Számítsa ki a két tetraéder térfogatának és felszínének arányát!



2053. Egy forgáskúp felszíne 75,4 cm^2, kiterített palástjának középponti szöge 216°. Mekkora lesz a metszet területe, ha a magasságának a felében, az alappal párhuzamosan elmetsszük?

2054. Egy gúla alapterülete 900 cm^2. A magasságot három egyenlő részre osztottuk. Az osztópontokon keresztül az alaplappal párhuzamos síkot fektetünk. Mekkora a keletkezett

a) síkmetszetek területe;

b) testek térfogatának aránya?

2055. Hol kell az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszeni egy 80 cm magas gúlát, hogy a metszet területe az alaplap területének

a) fele; b) harmada; c) negyede

legyen?

2056. Bizonyítsa be, hogy a forgáskúp két körmetszete sugarának aránya egyenlő a metsző síkok csúcstól mért távolságának arányával!

2057. Egy kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal a csúcstól számítva a magasság $\frac{2}{3}$-ában elmetszettünk. Határozza meg a lemetszett kúp és az eredeti kúp térfogatának arányát!

2058. Ildikó az utcán hazafelé menet pattogatott kukoricát vett. A kúp alakúra összesodort papírtölcsért tele kapta. Eszegetés közben eszébe jutott, hogy húga, Zsuzsi is szereti ezt a csemegét. Jószívű lévén a kukorica egy részét haza akarja vinni. A tölcsérben a magasság hányad részéig hagyja meg a kukoricát, ha hazavinné

a) a felét; b) a 60%-át?

2059. Gergő a kúp alakú papírtölcsérből a pattogatott kukoricát a teli tölcsér magasságának felső ötödéig eszi meg. Öccsének viszi a többit. Kinek jutott több? Mennyivel?

2060. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, oldaléle 16,5 cm hosszúságú.

a) Mekkora a térfogata?

b) A gúla magasságát 3 egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokon át az alappal párhuzamos síkokkal elmetsszük a gúlát. Hogyan aránylik egymáshoz a kapott 3 test térfogata?

c) Mekkorák ezek a térfogatok?

2061. Egy csonkakúp alakú virágcserép alapja egy 5 cm sugarú kör, míg fedőkörének sugara 10 cm. A cserép 12 cm magas. Milyen magasan tegyünk bele földet, ha a cserép térfogatának a felét akarjuk kitölteni?

2062. Egy forgáskúpba éppen befér két gömb, ezek egymást és a kúppalástot is érintik. a gömbök sugara r és $2r$; a kúp alapkörének sugara R. Mekkora

a) a kúp magassága; b) a kúp nyílásszöge; c) $\frac{R}{r}$ értéke?

2063. Egy asztalon álló vasgolyót megvilágítunk egy, a golyó középpontja fölött, az asztallaptól 24 cm-re lévő pontszerű fényforrással. A golyó árnyéka egy 10 cm sugarú kör. Határozza meg a golyó átmérőjét!

2064. A Hold sugara $\frac{3}{11}$ része a Földének. Hányszor akkora a Föld felszíne és térfogata, mint a Holdé? (Tekintse mindkét égitestet gömb alakúnak.)

2065. Az $ABCD$ szabályos tetraéder A és B csúcsainak a velük szemben fekvő lapok súlypontjára vonatkozó tükörképei legyenek A' és B'. Bizonyítsa be, hogy $A'B' \parallel AB$, és $3 \cdot A'B' = 5 \cdot AB$!

2066. Egy csúcsával lefelé álló, felül nyitott kúpban magasságának $\frac{3}{5}$ részéig víz van. A kúp alapkörének sugara 2,8 dm, magassága 8,6 dm. E kúpba egy 1,2 dm sugarú gömböt ejtünk, mely teljesen elmerül a vízben. Mennyivel emelkedik a víz felszíne?

2067. Egy 2,4 dm magas, 10 cm sugarú egyenes körkúp alakú zárt edényben 2 dm^3 víz van. Milyen magasan áll az edényben a víz, ha a körlapra állítjuk, illetve ha tengelyével függőleges helyzetben a csúcsára állítjuk?

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS 3

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE 6

1. GONDOLKODÁSI MŰVELETEK 7
- 1.1. Halmazok 7
- 1.2. Logika 16
- 1.3. Kombinatorika 28
- 1.4. Gráfok 42
- 1.5. Módszerek 49

2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 55
- 2.1. Számok, műveletek 55
- 2.2. Hatvány 60
- 2.3. Gyök 64
- 2.4. Logaritmus 67
- 2.5. Számelmélet, oszthatóság 70
- 2.6. Polinomok, algebrai törtek 77
- 2.7. Közepek 87
- 2.8. Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek 93
- 2.9. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek 100
- 2.10. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek 110
- 2.11. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek 115
- 2.12. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek 118
- 2.13. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek 126
- 2.14. Egyenletrendszerek 130
- 2.15. Összetett feladatok 138

3. FÜGGVÉNYTAN 147
- 3.1. Függvénytípusok 147
  - Függvények megadása 147
  - Értékkészlet, helyettesítési érték, vegyes kérdések 152
  - Lineáris függvények 156
  - Racionális törtfüggvények 159
  - Abszolútértékes függvények 161
  - Egészrész, törtrész függvény 162
  - Másodfokú függvények 162
  - Magasabbfokú és gyökös függvények 164

Exponenciális és logaritmikus függvények 166
Trigonometrikus függvények 169
Összetettebb függvények 172
Alkalmazások 174
3.2. Függvénytranszformációk 183
3.3. Függvénytulajdonságok, -vizsgálat 204
Értelmezési tartomány, értékkészlet, ábra 204
Korlátosság 206
Paritás, periodicitás 206
Invertálhatóság 208
Zérushely 209
Szélsőérték és -hely 209
Növekedés, fogyás 210
Vegyes függvényvizsgálatok 211
Ábrafelismerés 216
Alkalmazások 223
Nehéz és emelt szintű példák 227
3.4. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása 229
3.5. Sorozatok 251
Sorozatok megadása 251
Számtani sorozatok 253
Mértani sorozatok 259
Vegyes feladatok 273

4. GEOMETRIA 277
4.1. Elemi síkgeometria 277
Alapfogalmak 277
Alakzatok és tulajdonságaik 283
Számítások 291
Bizonyítások 303
Transzformációk 305
4.2. Elemi térgeometria 313
Távolságok, szögek 313
Testek 316
Felszín, térfogat 317
Számítások 320
Transzformációk 331