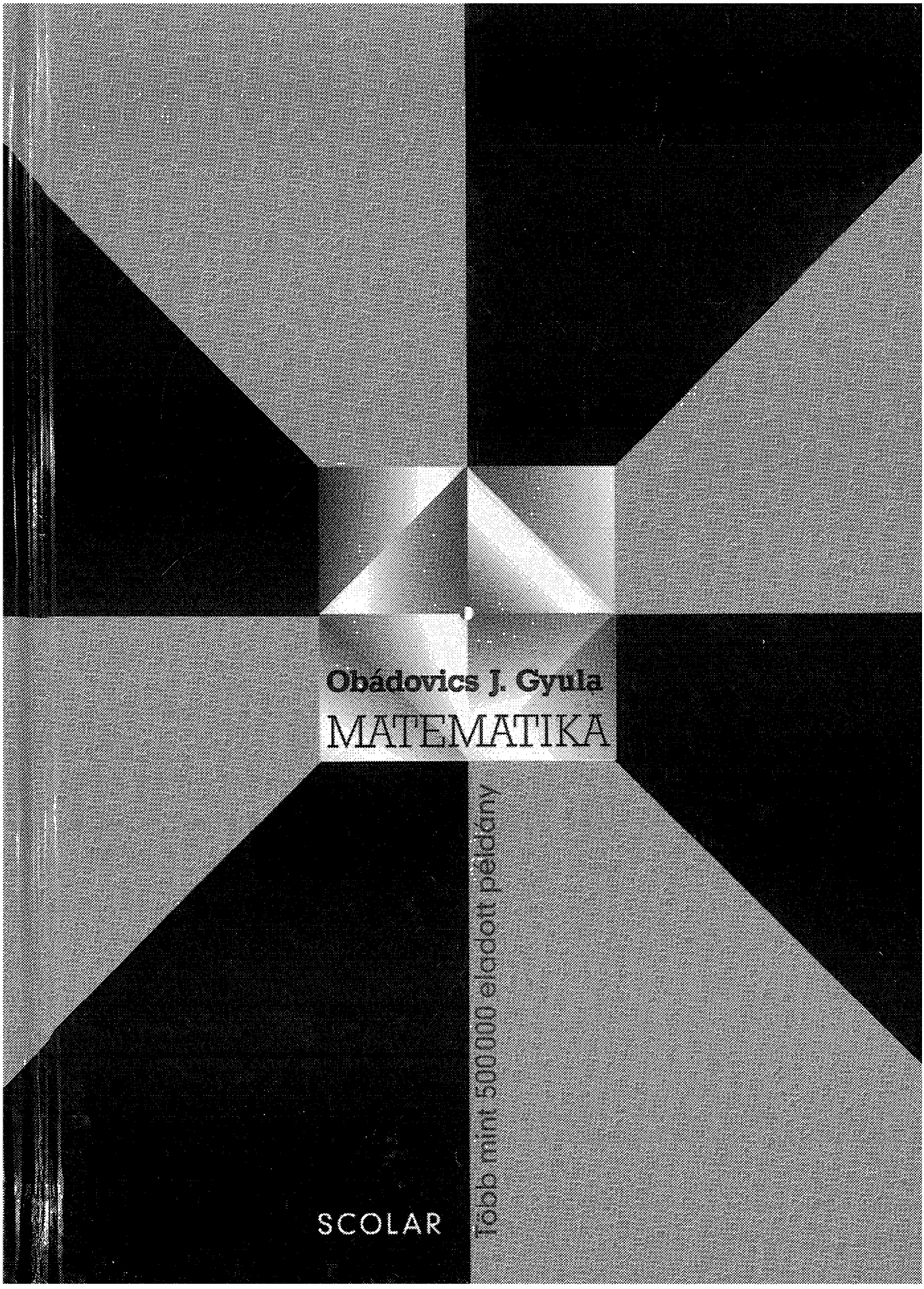


Obádovics J. Gyula

MATEMATIKA

Több mint 500 000 eladott példány

SCOLAR

Obádovics J. Gyula

MATEMATIKA

Lektorálta:
Dr. Szarka Zoltán

© Dr. Obádovics J. Gyula, 1958
© Dr. Obádovics J. Gyula, 1994
© Scolar Kiadó, 1994

ISBN: 963-9193-04-6

Kiadja a SCOLAR KIADÓ, 1114 Budapest, Bartók B. út 7.
Felelős kiadó és szerkesztő: Érsek Nándor

A könyv ábráit rajzolták:
Kazár Ágnes, Nagy Péter és Dr. Sági Ferenc
Ábrák száma: 499

A könyv formátuma: B6 Ívterjedelem: 35,5 (A5)
Betűcsalád: Times New Roman CE



Készült a Dürer Nyomda és Kiadó Kft.
a Cofinec Hungary Rt. Leányvállalatában, Gyulán
Ügyvezető igazgató: Beregszászi László

RÉSZLET AZ ELSŐ KIADÁS ELŐSZAVÁBÓL

E könyv írása közben sokszor gondoltam azokra a fáradságot nem ismerő, továbbtanuló munkásokra, akiket a Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium különböző tanfolyamain, a volt Műszaki Tanárképző Főiskolán és a Nehézipari Műszaki Egyetem esti tagozatán tanítottam. Ők ébresztették fel bennem e munka megírásának gondolatát, amikor olyan matematika könyvet kértek, mely a röviden összefoglalt általános iskolai és a részletesebb középiskolai matematika-anyagon túlmenően betekintést nyújt az egyetemen oktatott matematika néhány fejezetébe is.

Miskolc-Egyetemváros, 1957. december hó.

RÉSZLET A HARMADIK KIADÁS ELŐSZAVÁBÓL

Köszönetet mondok mindazoknak, akik hozzájárultak az első két kiadás pontatlanságainak és hibáinak felfedéséhez, és kérem az olvasókat, hogy észrevételeik közlésével a jövőben is segítsék elő a könyv jobbátételét. Külön kívánom megköszönni Varga Tamásnak didaktikai kritikai megjegyzéseit, melyeket a lehetőség adta keretek között maradéktalanul igyekeztem értékesíteni.

Miskolc-Egyetemváros, 1960. június hó.

ELŐSZÓ A TIZENHARMADIK KIADÁSHOZ

A Matematika tizenkét magyar és két német nyelvű kiadása több mint háromszázötvenezer példányban kelt el. Az utóbbi években igen sokan keresték a könyvet, s mivel sem könyvesboltban, sem antikváriumban nem tudták megvásárolni, hozzám fordultak a könyv beszerzését kérve. A kéréseknek azonban csak egy újabb kiadással lehet eleget tenni.

Az iskolai matematika oktatás hazai és nemzetközi tapasztalatait felhasználva fogtam hozzá a Matematika tizenkettedik kiadá-

sának teljes körű átdolgozásához. Azok a reformtörekvések, amelyek az oktatás egészére ill. egyes tárgyakra irányultak, a matematika tananyagára, módszertanára, jelölésrendszerére, néhány fogalmának pontosítására is hatottak. A hazai és a nemzetközi korszerű matematikai irodalom által használt jelölésrendszerből átvettem és alkalmaztam azokat a jeleket, amelyek a megértést elősegítik és meghonosodtak a középiskolai oktatásban is.

Az átdolgozás néhány újabb anyagrész ismertetését is igényelte. Ilyenek pl. a halmazelmélet, az algebrai struktúrák, a relációk elemei. Bővültek a valós számhalmazra, az egyenletekre, a síkgeometriára, a függvényekre, az integrálszámításra és a differenciálegyenletekre vonatkozó ismeretek. Ugyanakkor kihagyásra került a logaritmusléc használatát részletesen leíró pont és lecsökkent a trigonometrikus függvények logaritmustáblázatának felhasználásával megoldott feladatok száma, hiszen az ilyen feladatokat zsebszámológéppel ill. számítógéppel pillanatok alatt meg lehet oldani.

Arra törekedtem, hogy a könyv tartalmának frissítése mellett az egyes anyagrészek kiemelésével fokozzam a könyv használhatóságát. Így pl. a definíciók, a tételek és a képletek kék színű alányomással (15. kiadás Szerk.) kerültek kiemelésre.

Az egyes fogalmak, a fogalmakkal kapcsolatos tárgykörök, valamint a neves matematikusokra való hivatkozások megkeresését nagyon megkönnyíti a részletes név- és tárgymutató.

Köszönetet mondok Érsek Nándornak, aki a könyv megjelentetését szorgalmazta, a középiskolai tananyagra vonatkozó tapasztalatait átadta, és a kiadással járó igen fáradságos szervező és szerkesztő munkát maradéktalanul magára vállalta, valamint Szabó Bélának, aki a könyv tördelését nagy gondossággal végezte, és Vámosi Róbertnek sokoldalú számítástechnikai segítségéért.

Az Olvasókat arra kérem, hogy e kiadással kapcsolatos észrevételeiket is juttassák el hozzám, mert a könyv tökéletesítéséhez azokat örömmel felhasználom.

Budapest, 1994. szeptember hó.

Dr. Obádovics J. Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

Részlet az első kiadás előszavából 5
Részlet a harmadik kiadás előszavából 5
Előszó a tizenharmadik kiadáshoz 5
Általános matematikai jelölések 13

ELSŐ FEJEZET
A HALMAZELMÉLET ÉS AZ ABSZTRAKT ALGEBRA ELEMEI 19
1.1 Halmazok 19
1.2 Műveletek halmazokkal 23
1.3 A matematikai logika néhány fogalmának és jelölésének használatáról 29
1.4 Az absztrakt algebra elemei 30
1.5 A csoport fogalma, csoportaxiómák 31
1.6 A test fogalma, testaxiómák 32

MÁSODIK FEJEZET
SZÁMTAN (ARITMETIKA) 36
2.1 A valós számok halmaza 36
2.2 A valós számegyenes 36
2.3 A természetes számok halmaza (N) 39
2.4 Műveletek a természetes számok halmazában 40
2.5 A négy alapművelet sorrendje, zárójelek használata 48
2.6 Oszthatóság 49
2.7 Prímszám, összetett szám, prímtényezőkre bontás és hatványozás 51
2.8 A legnagyobb közös osztó 52
2.9 A legkisebb közös többszörös 54
2.10 A teljes indukció 55
2.11 Az egész számok halmaza (Z) 57
2.12 A számok abszolút értéke és nagysági viszonyai 59
2.13 Műveletek a Z halmazban (az egész számok halmazában) 60
2.14 Műveletek nullával 63
2.15 A racionális számok Q halmaza 64
2.16 Törtszámok egyszerűsítése és bővítése 67
2.17 Törtszámok összehasonlítása, közös nevezőre hozásuk 68
2.18 Műveletek a racionális számok halmazában 69
2.19 Műveletek tizedes törtekkel 73
2.20 Közönséges és tizedes törtek kapcsolata 74
2.21 Százalékszámítás 76
2.22 A közelítő számítás, és a kerekítés néhány szabálya 78

2.23 Arány és aránypár ... 81
2.24 Az irracionális és a valós számok halmaza (Q*, R) ... 84
2.25 Axiómák ... 85
2.26 Intervallum, távolság, környezet ... 87
2.27 A megszámlálható és a nem megszámlálható halmazok ... 91
2.28 Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes középarányos ... 95

HARMADIK FEJEZET
ALGEBRA ... 98
3.1 Az algebrai írásmód ... 98
3.2 Műveletek algebrai mennyiségekkel ... 99
3.3 Műveletek egytagú algebrai kifejezésekkel; többtagúak összeadása és kivonása ... 102
3.4 Többtagú algebrai kifejezések szorzása; nevezetes szorzatok ... 106
3.5 Az R halmazba tartozó számok négyzetének és köbének kiszámítása 111
3.6 Többtagú algebrai kifejezések osztása ... 112
3.7 Többtagú algebrai kifejezések szorzattá alakítása ... 115
3.8 Algebrai törtkifejezések ... 117
3.9 Műveletek hatványmennyiségekkel ... 121
3.10 Gyökvonás. Műveletek gyökmennyiségekkel ... 125
3.11 Algebrai összegek és valós számok négyzetgyöke ... 133
3.12 A kettes (bináris) és a nyolcas (oktális) számrendszer ... 136
3.13 Logaritmus ... 139
3.14 Egytagú algebrai kifejezések logaritmusa. A logaritmus azonosságai 142
3.15 Logaritmusrendszerek és összefüggéseik ... 145
3.16 Számolás 10-es alapú logaritmusokkal ... 147
3.17 Az egyenletek fogalma és osztályozása ... 151
3.18 Az egyenlet rendezésének szabályai ... 158
3.19 Az elsőfokú (lineáris) egyismeretlenes egyenlet ... 161
3.20 Szöveges egyenletek ... 165
3.21 Elsőfokú (lineáris) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása, és a determináns fogalma ... 172
3.22 Elsőfokú (lineáris) kettőnél több ismeretlenes egyenletrendszer megoldása ... 183
3.23 Elsőfokú (lineáris) homogén egyenletrendszer megoldása ... 187
3.24 Másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása ... 190
3.25 Összefüggés a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között ... 195
3.26 A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja ... 196
3.27 Magasabbfokú és négyzetgyökkifejezést tartalmazó egyenletek ... 199
3.28 Másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása ... 205
3.29 Exponenciális és logaritmikus egyenletek megoldása ... 207
3.30 Egyenlőtlenségek alaptulajdonságai ... 211
3.31 Első- és másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek megoldása ... 215

NEGYEDIK FEJEZET
A KOMBINATORIKA ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ELEMEI 223
4.1 Kombinatorika 223
4.2 Ismétlés nélküli és ismétléses permutációk 223
4.3 Ismétlés nélküli és ismétléses variációk 226
4.4 Ismétlés nélküli és ismétléses kombinációk 230
4.5 A binomiális tétel és a binomiális együtthatók tulajdonságai 234
4.6 A valószínűségszámítás elemei 240
4.7 Az eseményalgebra alapfogalmai 241
4.8 A valószínűség tapasztalati megközelítése 244
4.9 A valószínűség matematikai fogalma 244
4.10 A valószínűség klasszikus fogalma 246
4.11 Geometriai valószínűségek 250
4.12 Feltételes valószínűség és függetlenség 251
4.13 A valószínűségi változó fogalma 255
4.14 Néhány fontosabb eloszlás 260
4.15 A valószínűségi változók jellemző adatai 262

ÖTÖDIK FEJEZET
GEOMETRIA 267
5.1 SÍKMÉRTAN 267
5.1.1 A geometria tárgya, felosztása és fejlődése 267
5.1.2 A pont és vonal 269
5.1.3 Szögek és szögpárok 271
5.1.4 Háromszögek 277
5.1.5 Háromszögek egybevágósága 280
5.1.6 Négyszögek 284
5.1.7 Sokszögek 291
5.1.8 Egy ponton átmenő egyenesekre (egyenesseregre) vonatkozó tételek 291
5.1.9 A háromszögek hasonlósága 294
5.1.10 Osztókörző, léptékmérő és pantográf 296
5.1.11 Arányos távolságok a derékszögű háromszögben. Pitagorasz tétele 298
5.1.12 A kör 300
5.1.13 Arányos távolságok a körben 309
5.1.14 Körbe és kör köré írt háromszögek és négyszögek 311
5.1.15 A síkidomok kerülete és területe 315
5.1.16 Geometriai szerkesztések 335

5.2 TÉRGEOMETRIA (TÉRMÉRTAN; SZTEREOMETRIA) 343
5.2.1 Alapfogalmak 343
5.2.2 A testek osztályozása, poliéderek, Euler tétele, szabályos testek 347
5.2.3 Speciális poliéderek 350
5.2.4 Görbefelületű testek 357

5.3 TRIGONOMETRIA 373
5.3.1 Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése 373
5.3.2 Alapösszefüggések ugyanazon szög szögfüggvényei között 375
5.3.3 Néhány speciális szögfüggvényérték 379
5.3.4 Trigonometrikus függvényértékek és logaritmusuk táblázata 381
5.3.5 Derékszögű háromszög megoldása 385
5.3.6 Szögfüggvények általánosítása 393
5.3.7 Általános háromszög megoldása; szinusz- és koszinusztétel 398
5.3.8 Összegezési (addíciós) tételek 405
5.3.9 A kétszeres és a félszögek függvényei 407
5.3.10 Két szinusz- vagy koszinuszfüggvény összegének és különbségének átalakítása szorzattá 410
5.3.11 Trigonometrikus egyenletek 414
5.3.12 A gömbi trigonometria alapfogalmai 432
5.3.13 Gömbháromszög szinusztétele 435
5.3.14 Gömbháromszög koszinusztétele 436
5.3.15 Két földrajzi hely távolságának meghatározása 438

5.4 KOORDINÁTAGEOMETRIA (ANALITIKUS GEOMETRIA) 440
5.4.1 A pont derékszögű koordinátái a síkon 440
5.4.2 A pont koordinátáihoz kapcsolódó alapfeladatok 442
5.4.3 Az egyenes egyenletei 445
5.4.4 Az egyenessel kapcsolatos alapfeladatok 452
5.4.5 Koordinátatranszformáció 461
5.4.6 A kör és egyenletei 463
5.4.7 A kör érintőjének egyenlete 465
5.4.8 Az ellipszis és egyenletei 467
5.4.9 Az ellipszis érintőjének egyenlete 472
5.4.10 A hiperbola és egyenletei 474
5.4.11 A hiperbola érintőjének és aszimptotáinak egyenlete 480
5.4.12 A parabola és egyenletei 482
5.4.13 A parabola érintőjének egyenlete 486
5.4.14 Síkbeli polárkoordinátarendszer 488
5.4.15 Görbék paraméteres egyenletei 490
5.4.16 Másodrendű görbék 492
5.4.17 A pont Descartes-féle koordinátái a térben 496
5.4.18 A térbeli pont koordinátáihoz kapcsolódó alapfeladatok 498
5.4.19 A sík egyenletei 503
5.4.20 A térbeli egyenes egyenletei 507
5.4.21 Síkkal és egyenessel kapcsolatos alapfeladatok 512

HATODIK FEJEZET
VEKTORALGEBRA 520
6.1 Skaláris- és vektormennyiségek 520
6.2 Vektorok szorzása skaláris mennyiséggel. Egységvektor 521
6.3 Vektorok összege és különbsége 523
6.4 Vektorok derékszögű koordinátái 525
6.5 Két vektor skaláris szorzata 527
6.6 Két vektor vektoriális szorzata 531
6.7 Három vektor vegyes szorzata 534
6.8 A vektoralgebra geometriai alkalmazása 536
6.9 Példák a vektoralgebra mechanikai alkalmazására 544

HETEDIK FEJEZET
KOMPLEX SZÁMOK ALGEBRÁJA 548
7.1 A komplex számok bevezetése 548
7.2 A komplex számtest 549
7.3 A komplex számok algebrai alakja 552
7.4 A komplex számok ábrázolása, trigonometrikus alakja. Alapműveletek 554
7.5 Hatványozás és gyökvonás a komplex számtestben 560

NYOLCADIK FEJEZET
BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE 566
8.1 Relációk 566
8.2 Függvények 571
8.3 Injekció, szuperjekció és bijekció 574
8.4 A függvények leszűkítése, kompozíciója, inverze és ábrázolása 576
8.5 Számsorozatok 580
8.6 A sorozat határértéke 583
8.7 Számtani sorozat 587
8.8 Mértani sorozat 591
8.9 A függvény határértéke 597
8.10 A függvény folytonossága 606
8.11 Elemi függvények és grafikonjaik 609
8.12 Elemi függvénytranszformációk 629
8.13 Lineáris interpoláció, és az egyenletek numerikus és grafikus közelítő megoldása 634

KILENCEDIK FEJEZET
A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA 641
9.1 A differenciálhányados 641
9.2 A deriváltfüggvény 643
9.3 A differenciálás szabályai, és az elemi függvények differenciálhányadosai 645
9.4 Középértéktétel. A differenciál fogalma, geometriai jelentése és alkalmazása 657

9.5 Magasabbrendű deriváltak ... 662
9.6 Függvényvizsgálat, szélsőérték, inflexiós pont ... 664

TIZEDIK FEJEZET
AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA ... 671
10.1 A határozatlan integrál ... 672
10.2 A határozott integrál és tulajdonságai ... 677
10.3 Néhány függvénytípus integrálása ... 694
10.4 A határozott integrál, mint határérték ... 701
10.5 A határozott integrál alkalmazásai ... 705

TIZENEGYEDIK FEJEZET
KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ... 719
11.1 A differenciálegyenletek fogalma és osztályozása ... 719
11.2 A differenciálegyenlet megoldása ... 721
11.3 Görbesereg differenciálegyenlete ... 725
11.4 Szétválasztható változójú elsőrendű differenciálegyenlet ... 727
11.5 Néhány szétválasztható változójúra visszavezethető elsőrendű differenciálegyenlet ... 729
11.6 Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet ... 736
11.7 Bernoulli-féle differenciálegyenlet ... 738
11.8 Riccati-féle differenciálegyenlet ... 740
11.9 Egzakt differenciálegyenlet ... 742
11.10 Görbesereg burkológörbéje, és az elsőrendű differenciálegyenlet szinguláris megoldása ... 744
11.11 Lagrange- és Clairaut-féle differenciálegyenlet ... 748
11.12 Példák elsőrendű differenciálegyenletek műszaki alkalmazására ... 751
11.13 Hiányos másodrendű differenciálegyenletek ... 758
11.14 Másodrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet ... 762
11.15 Másodrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet ... 765
11.16 Másodrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kisérletező feltevéssel ... 769
11.17 Euler-féle lineáris másodrendű differenciálegyenlet ... 775
11.18 Példák másodrendű differenciálegyenletek műszaki alkalmazására . 779
11.19 Differenciálegyenlet-rendszer visszavezetése egy magasabbrendű differenciálegyenletre ... 784
11.20 Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer ... 787
11.21 Példák differenciálegyenlet-rendszerek műszaki alkalmazására ... 794
Gyakran előforduló állandók ... 797
Irodalom ... 798
Név- és tárgymutató ... 799

ÁLTALÁNOS MATEMATIKAI JELÖLÉSEK

Halmazelmélet és matematikai logika

$\{a_1, a_2, \ldots\}$	az $a_1, a_2, \ldots$ elemek halmaza
$\{x \mid T(x)\}$	mindazoknak az x elemeknek a halmaza, amelyekre a $T(x)$ tulajdonság érvényes
$\varnothing$	üres halmaz
$\in$	eleme ... nak (nek)
$\notin$	nem eleme ... nak (nek)
$\subseteq$	... részhalmaza ... nak (nek)
$\subset$	... valódi részhalmaza ... nak (nek)
$\not\subset$	... nem részhalmaza ... nak (nek)
$\cup$	halmazok egyesítésének jele
$\cap$	halmazok metszetének jele
$\setminus$	halmazok különbségképzésének (kivonásának) jele
$\overline{A}$	A halmaz komplementere
$\sim$	ekvivalencia jele
$P(A)$	A hatványhalmaza
$\times$	direkt vagy *Descartes*-féle szorzat jele
$\neg$	nem
$\wedge$	és
$\vee$	vagy
$\Rightarrow$	... állításból következik ... állítás
$\not\Rightarrow$	... állításból nem következik ... állítás
$\Leftrightarrow$	... állítás akkor és csak akkor, ha ... állítás (... állítás szükséges és elegendő feltétele ... állításnak)
$:=$	definíció szerint egyenlő
$\forall$	minden ... ra (re)
$\exists$	létezik olyan ..., amelyre érvényes ... (van legalább egy olyan ..., hogy ...)

Relációk és struktúrák

$=$	egyenlő
$\equiv$	azonosan egyenlő
$\neq$	nem egyenlő
$\approx$	közelítőleg egyenlő
$<$	kisebb, mint
$>$	nagyobb, mint
$\leq$	kisebb vagy egyenlő
$\geq$	nagyobb vagy egyenlő
(x_1, x_2)	rendezett pár
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	rendezett szám - n-es

$A \times B$	párok halmaza
$\rightarrow$	leképezés jele (pl. $f: A \rightarrow B$: A-nak B-re való leképezése f szerint)
$\mapsto$	hozzárendelés (pl. $x \mapsto f(x)$: x-hez $f(x)$ van hozzárendelve)
f^{-1}	f inverz leképezése
$(T, +)$	egyműveletes algebrai struktúra
$\sim$	azonos számosságú
$n(B)$	a B halmaz számossága (kardinalitása: card(B))
$\aleph_0$	alef index zérus (N halmaz számossága)

Számtan (aritmetika)

N	a természetes számok halmaza
Z	az egész számok halmaza
Q	a racionális számok halmaza
Q^*	az irracionális számok halmaza
R	a valós számok halmaza
C	a komplex számok halmaza
Z^+, Z^-	a pozitív ill. a negatív egész számok halmaza
Z_0^+, Z_0^-	a nem negatív ill. a nem pozitív egész számok halmaza
( ),[ ],{ }	zárójelek
$[a,b]$	a-tól b-ig terjedő zárt intervallum
$]a,b[$	a-tól b-ig terjedő nyílt intervallum
$\lvert a \rvert$	az a szám abszolút értéke
%	százalék
‰	ezrelék
(n, m)	az n és m szám legnagyobb közös osztója
$[n, m]$	az n és m szám legkisebb közös többszöröse
+	(plusz) összeadás
–	(mínusz) kivonás
·	szorzás
:, /, –	osztás

Algebra

a^m	a az m-edik hatványon
$\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$	négyzetgyök a, ill n-edik gyök
$\exp x$	jelentése: e^x
$\log_b$	b alapú logaritmus
lg	10-es alapú logaritmus
ln	természetes logaritmus (e alapú)
!	faktoriális: pl. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$(2n)!!$	páros számok szorzata $2n$-ig
$(2n+1)!!$	páratlan számok szorzata $2n+1$ -ig
$\binom{n}{k}$	binomiális együttható
	(n alatt a k) $= \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$	másodrendű determináns
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	valamennyi a_k összege
$\prod_{k=1}^{n} a_k$	valamennyi a_k szorzata

Kombinatorika és valószínűségszámítás

P_n	n számú elem ismétlés nélküli permutációinak száma ($= n!$)
$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)}$	n elem ismétléses permutációinak száma $k_1, k_2, \ldots, k_r$ számú ismétléssel
$V_{n,k}$	n különböző elem ismétlés nélküli k-ad osztályú variációinak száma
$V_{n,k}^i$	n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma
$C_{n,k}$	n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma
$C_{n,k}^i$	n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma
I	biztos esemény
$\varnothing$	lehetetlen esemény
$P(A)$	az A esemény valószínűsége
$P(A\|B)$	az A valószínűsége a B feltétel mellett (feltételes valószínűség)
$M(\xi)$	ξ valószínűségi változó várható értéke
$D(\xi)$	ξ valószínűségi változó szórása

Geometria

$\perp$	merőleges	$\overset{\frown}{AB}$,	ív(AB) az A, B ív
$\parallel$	párhuzamos	°, ', "	fok, perc, másodperc
Δ	háromszög	R,	a 90° jele
$\sim$	hasonló	□-öl	négyszögöl
$\cong$	egybevágó	ha	hektár
$\angle$, $\measuredangle$	szög	π	pi (3,1415...)
$\overline{AB}$	A, B szakasz	(x,y) $P(x,y)$	pont koordinátái a síkon
AB	A, B szakasz hosszúsága	(x,y,z) $P(x,y,z)$	pont koordinátái a térben

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

$\sin\alpha$	szinusz alfa	$\arcsin\alpha$	ársusz szinusz alfa
$\cos\alpha$	koszinusz alfa	$\arccos\alpha$	ársusz koszinusz alfa
$\operatorname{tg}\alpha$	tangens alfa	$\operatorname{arctg}\alpha$	ársusz tangens alfa
$\operatorname{ctg}\alpha$	kotangens alfa	$\operatorname{arcctg}\alpha$	ársusz kotangens alfa
$\sec\alpha$	szekáns alfa	$\operatorname{sh}\alpha$	szinusz hiperbolikusz alfa
$\operatorname{cosec}\alpha$	koszekáns alfa	$\operatorname{ch}\alpha$	koszinusz hiperbolikusz alfa

$\operatorname{th}\alpha$	tangens hiperbolikusz alfa	$\operatorname{arch}\alpha$	área koszinusz hiperbolikusz alfa
$\operatorname{cth}\alpha$	kotangens hiperbolikusz alfa	$\operatorname{arth}\alpha$	área tangens hiperbolikusz alfa
$\operatorname{arsh}\alpha$	área szinusz hiperbolikusz alfa	$\operatorname{arcth}\alpha$	área kotangens hiperbolikusz alfa

Vektoralgebra

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	vektormennyiségek
$\mathbf{a}^0$	az **a** egységvektora
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorok derékszögű koordinátarendszerben
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	az **a** hosszúsága (abszolút értéke)
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ vagy $(\mathbf{ab})$	az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vagy $[\mathbf{ab}]$	az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata
$\mathbf{abc}$ vagy $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$	három vektor vegyes szorzata
a_x, a_y, a_z	az **a** vektor koordinátái a *Descartes*-féle koordinátarendszerben

Komplex számok

$\mathbf{i}$ vagy $\mathbf{j}$	képzetes egység ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$)	$\arg z$	z árkusza
$\operatorname{Re} z$	z valós része	$\overline{z}$	z argumentuma
$\operatorname{Im} z$	z képzetes része		z konjugáltja
$\lvert z\rvert$	z abszolút értéke (modulusa)		

Matematikai analízis

(a_n)	számsorozat
$\lim$	határérték
$\to$	... tart ... hoz
∞	végtelen
	pl.: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
$\overline{\lim}\, a_n$	felső határérték
$\underline{\lim}\, a_n$	alsó határérték

$x \to a+$ vagy $x \to a+0$	x jobbról tart a-hoz
$x \to a-$ vagy $x \to a-0$	x balról tart a-hoz
f, g	függvény jelek
id_A	A-n értelmezett identikus függvény
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$f(x)$ határértéke, ha x tart az a-hoz

Δ	növekmény; pl. Δx	d	differenciál; pl. dx
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$	differenciahányados	ds	ívdifferenciál

$f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
$y', y'', \ldots, y^{(n)}$
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$

} az egyváltozós függvény első, második..., n - edik deriváltja

$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ általában az idő (t) szerinti első, második, harmadik derivált

$f_x', f_y', f_{xx}'', f_{xy}'', \ldots$
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ldots$

} a többváltozós f függvény parciális deriváltjai

$\int$	integráljel	$\Big\|_a^b$	a kettős behelyettesítés jele, pl. $f(x)\Big\|_a^b = f(b) - f(a)$
$\int f(x)dx$	határozatlan integrál	$T_é$	kamatoskamattal növelt összeg
$\int_{x=a}^{b} f(x)dx$	határozott integrál az $x=a$ alsó határtól az $x=b$ felső határig		

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ közönséges n- edrendű differenciálegyenlet

$G\left(u, x, y, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots\right) = 0$ parciális differenciálegyenlet

Görög ábécé

A α	alfa	H η	éta	N ν	nű	T τ	tau
B β	béta	Θ ϑ	théta	Ξ ξ	kszí	Y υ	üpszilon
Γ γ	gamma	I ι	ióta	O ο	omikron	Φ φ	fí
Δ δ	delta	K κ	kappa	Π π	pí	X χ	khí
E ε	epszilon	Λ λ	lambda	P ρ	ró	Ψ ψ	pszí
Z ζ	zéta	M μ	mű	Σ σ	szigma	Ω ω	ómega

ELSŐ FEJEZET

A HALMAZELMÉLET ÉS AZ ABSZTRAKT ALGEBRA ELEMEI

1.1 Halmazok

A halmaz és az elem alapfogalom, nem definiáljuk. A halmaz szót az osztály, a család, az összesség, a sokaság, a rendszer stb. köznyelvi szavak szinonimájaként használjuk, az elem szót pedig a tag, a pont, az objektum stb. szavak helyett.

A matematikában többnyire számok, függvények, pontok halmaza képezi vizsgálatunk tárgyát, de nem zárjuk ki, hogy halmazok halmazát vagy egy üzem erőgépeinek, az egyetemi hallgatóknak, egy középiskola lányhallgatóinak stb. halmazát vizsgáljuk. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha vele kapcsolatban minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy hozzátartozik-e a szóban forgó halmazhoz, vagy nem. Így például a "legokosabb fiúk" vagy a "legcsinosabb lányok" halmazáról nem beszélhetünk, mivel ezek a fogalmak nincsenek egyértelműen meghatározva, kinek-kinek egyéni értékítéletétől vagy ízlésétől függ, kit tart legokosabbnak vagy legcsinosabbnak.

A halmazokat általában az ábécé ékezet nélküli nagybetűivel, elemeit pedig kisbetűivel jelöljük. Konkrét halmazt leggyakrabban kapcsos zárójelben, az elemek vesszővel (egyes könyvekben pontosvesszővel) elválasztott felsorolásával (ha a halmaz elemeinek száma véges), szóbeli meghatározásával, tulajdonságuk megjelölésével adunk meg. Például $A := \{a, b, c\}$ (:= a *definiáló egyenlőség*

jele. A jelölje az a, b, c elemekkel adott halmazt). Ennek a halmaznak tehát három eleme van: a, b, c. $B := \{2,4,6,8\}$. A B négyelemű halmaznak a 2, 4, 6, 8 páros számok az elemei.

A halmazok az elemeik tulajdonságait pontosan leíró utasítással is megadhatók.

Példák

1. $B := \{x \mid x = 2n,\ n = 1,2,3,4\}$. Ez a B halmazt megadó szimbólum jelenti a 8-nál nem nagyobb páros számok halmazát.

2. $C := \{n \mid n \text{ egész szám, és } n > 0\}$. A C halmaz elemei a pozitív egész számok.

3. $D := \left\{x \mid x \text{ valós szám, és } x^2 - x - \frac{3}{4} = 0\right\}$. A D halmaz elemei tehát az $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ egyenlet gyökei: $-\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{2}$.

4. $E := \left\{x \mid x \text{ egész szám, és } x^2 - x - \frac{3}{4} = 0\right\}$. Az E halmaznak egyetlen eleme sincs, mivel a másodfokú egyenletet egyetlen egész szám sem elégíti ki.

Az ilyen, egyetlen elemet sem tartalmazó halmazt *üres halmaz*nak mondjuk, és jelölésére a $\varnothing$ szimbólumot használjuk.

Üres halmazra további példa: az $x^2 = -4$ egyenletet kielégítő valós számok F halmaza:

$$F := \left\{x \mid x \in R,\ \text{és } x^2 = -4\right\}.$$

Az A, B, D, E és F véges elemszámú halmazokat röviden *véges halmazoknak*, a C végtelen sok elemet tartalmazó halmazt pedig *végtelen halmaznak* nevezzük. A *halmazhoz tartozás* jele: $\in$.

Például $x \in A$ (olv.: x eleme A-nak). Az $x \notin A$ szimbólum jelentése: x *nem tartozik hozzá az* A halmazhoz (olv.: x nem eleme A-nak).

A gyakran előforduló számhalmazok szokásos jelölése:

N a természetes számok (2.3 pont) halmaza: $N := \{0,1,2,3,\ldots\}$,

Z az egész számok (2.11 pont) halmaza: $Z := \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,

Q a racionális számok (2.15 pont) halmaza (a véges és a szakaszos tizedes törtek):

$$Q := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in Z,\ q \in Z,\ \text{de } q \neq 0 \right\},$$

Q^* az irracionális számok (2.24 pont) halmaza (a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek),

R a valós számok halmaza: $R := Q \cup Q^*$, (a racionális és az irracionális számok halmazának egyesítése, uniója (1.2 pont)).

C a komplex számok (7. fejezet) halmaza.

Egyes részhalmazok jelölésére a Z_0^+, R^+, Z^- stb. szimbólumokat is használni fogjuk, amelyekkel értelemszerűen a

$Z_0^+ :=$ {nem negatív egész számok} $\equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$R^+ :=$ {pozitív valós számok} $\equiv \{x \mid x \in R \text{ és } x > 0\}$

$Z^- :=$ {negatív egész számok} $\equiv \{\ldots, -3, -2, -1\}$, stb. halmazokat jelöljük.

Két halmaz A és B *egyenlő egymással*, ha az A és a B halmaz elemei azonosak.

Jelölése: $A = B$.

Példák

1. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \mid x \in R \text{ és } x^2 - x - \frac{3}{4} = 0\right\}$,

2. A $\{4, 4, 4\}$ és a $\{4\}$ halmazok egyenlők egymással, azaz $\{4,4,4\} = \{4\}$, (mindkét halmaz eleme a 4 szám, és nincs más elemük. Ugyanaz az elem a halmazban csak egyszer fordulhat elő).

3. $\{5, 7, 9, 11\} = \{9, 7, 11, 5\}$, azaz a sorrendnek nincs jelentősége.

Az $A \neq B$ szimbólummal azt fejezzük ki, hogy a *két halmaz nem egyenlő egymással,* azaz a kettő közül legalább az egyiknek van olyan eleme, amely nem tartozik hozzá a másik halmazhoz.

Pl.: $\{P, T, G, E\} \neq \{P, T, G, É\}$; $N \neq Z^+$; $R \neq Z \cup Q$.

Az A halmaz a B halmaznak *részhalmaza*, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme.

Jelölése: $A \subseteq B$.

Pl.: {néggyel osztható számok} $\subseteq$ {kettővel osztható számok}

Az A halmaz a B halmaz *valódi részhalmaza*, ha az A halmaz részhalmaza a B-nek, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset B$. Ha viszont $A = B$, akkor *A nem valódi részhalmaza B*-nek.

Pl.: $Z^+ \subset N$, $Z_0^+ \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

A $Q \not\subset Z$ jelenti, hogy a Q nem részhalmaza a Z halmaznak. Az $\varnothing$ üres halmaz bármely halmaznak részhalmaza: $\varnothing \subseteq A$. Ha $A \neq \varnothing$, akkor $\varnothing \subset A$.

Legyen X, Y és V három halmaz. Ha $X \subseteq Y$ és $Y \subseteq V$, akkor $X \subseteq V$ is fennáll. (A részhalmaz-reláció *tranzitív* tulajdonságú.)

Ui. tetszőleges $x \in X$ esetén az $X \subseteq Y$ miatt $x \in Y$, és $Y \subseteq V$ miatt $x \in V$, ami azt jelenti, hogy $X \subseteq V$.

Pl.: Írjuk le a háromelemű $\{a,b,c\}$ halmaz összes részhalmazát:
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$.
Amint látjuk, a részhalmazok száma: $8 = 2^3$.

Megjegyzés: Igazolható (teljes indukcióval), hogy minden n elemű halmaz részhalmazainak száma: 2^n. Egy halmaz részhalmazai is halmazt alkotnak.

Bármely A halmaz összes részhalmazának halmazát *A hatványhalmazának* nevezzük, és $P(A)$-val jelöljük:

$$P(A) := \{H \mid H \subseteq A\} .$$

Példák

1. Az $\{a,b,c\}$ halmaz hatványhalmaza:
$$P(\{a,b,c\}) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

2. Az $\{5\}$ halmaz hatványhalmaza: $P(\{5\}) = \{\varnothing, \{5\}\}$.

3. Az üres halmaz hatványhalmaza: $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

4. A révésznek (R) csónakjával a folyó egyik oldaláról egyenként kell átszállítania a folyó túlsó oldalára a farkast (F), a gidát (G) és a káposztát (K), de úgy, hogy egyik oldalon sem maradhat kettesben a farkas és a gida, vagy a gida és a káposzta.

Képezzük az $A = \{R,F,G,K\}$ halmaz $P(A)$ hatványhalmazát, és válasszuk ki a $P(A)$ elemei közül azokat a halmazokat, amelyek kielégítik a feltételt!

$P(A) = \{\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{K}\}, \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\}, \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}\}, \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G},\boldsymbol{K}\}, \{F,G,K\}, \{R,F\}, \{\boldsymbol{R},\boldsymbol{G}\},$
$\{R,K\}, \{F,G\}, \{\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}\}, \{G,K\}, \{R\}, \{\boldsymbol{F}\}, \{G\}, \{\boldsymbol{K}\}, \varnothing\}.$

A vastagabban írt (félkövér) betűs részhalmazokat külön-külön a folyó egyik vagy másik partján létrehozhatjuk. Mivel a kételemű részhalmazok közül csak az $\{R,G\}$ és az $\{F,K\}$ megengedett, ezért először a révésznek a gidát kell átszállítania a túlsó partra. Másodszorra a farkas és a káposzta közül bármelyiket átszállíthatja, de a gidát vissza kell hoznia. Ha a farkast szállította át, akkor "gida vissza – káposzta át – gida át" a sorrend, ha pedig másodszorra a káposztát szállította át, akkor "gida vissza – farkas át – gida át" a szállítási sorrend.

1.2 Műveletek halmazokkal

Legyen A és B két tetszőleges halmaz.

A és B *uniója* (*egyesítése, összege*) azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek A és B közül legalább az egyikhez hozzátartoznak. A művelet jele: $\cup$, tehát

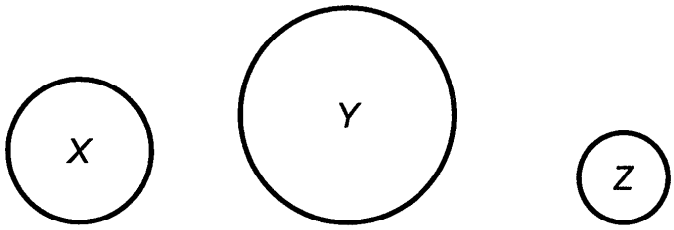
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

(olv.: A unió B vagy A és B egyesítése).

Pl.: $\{u, v, w\} \cup \{u, w, z\} = \{u, v, w, z\}$.

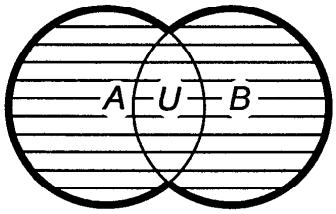
A halmazt szokás különböző zárt görbékkel határolt síkrésszel is szemléltetni. Az A halmazt szemléltető síkrész az ún. *Venn*-diagram. (J. *Venn* angol matematikus (1834–1923)).

Pl.: az X, Y, Z halmazokat körlapokkal az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. Halmazok ábrázolása *Venn*-diagramokkal

Az A és B halmazok unióját a 2. ábra szemlélteti:



2. ábra. Két halmaz uniója vagy egyesítése: $A \cup B$

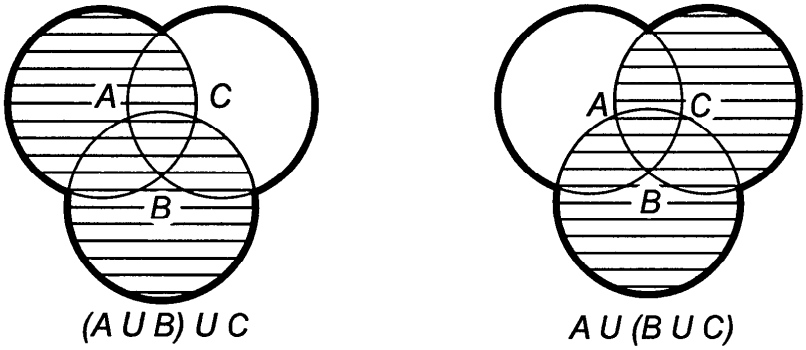
Pl.: ha $A = \{-4,\ -2,\ 0,\ 2\}$ és $B = \left\{ n \in Z^{+} \mid \text{és } n < 4 \right\}$,

akkor $A \cup B = \{-4,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Az unió halmazművelet tulajdonságai:

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup A = A \quad \text{idempotens,}$$
$$A \cup B = B \cup A \quad \text{kommutatív,}$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{asszociatív,}$$

ahol az A, B, C tetszőleges halmazok (3. ábra).

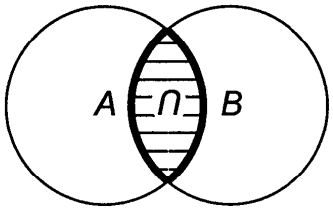


3. ábra. Az unióművelet asszociatív: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

A és B halmazok *metszete*, (*közös része*, *szorzata*) azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek hozzátartoznak mind az A, mind a B halmazhoz. A művelet jele: $\cap$, tehát

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$

(olv.: A metszet B vagy A és B metszete) (4. ábra).



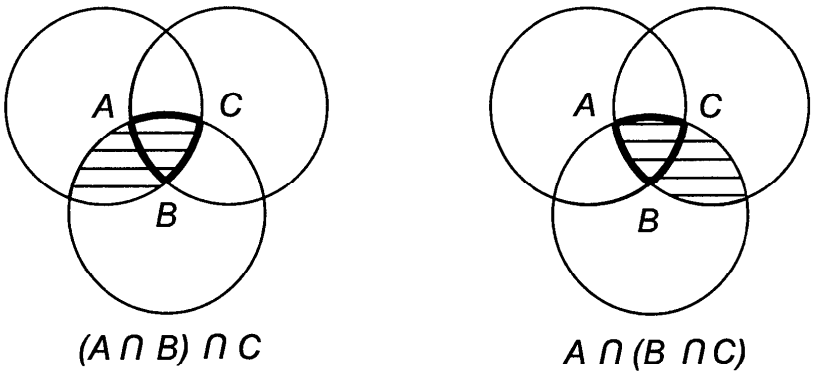
4. ábra. Két halmaz metszete (közös része, szorzata): $A \cap B$

Pl.: {rombuszok} ∩ { téglalapok} = { négyzetek}

Ha $A = \{1,2,3,4\}$ és $B = \{-1,0,2,4\}$, akkor $A \cap B = \{2,4\}$.

A metszet-halmazművelet tulajdonságai:

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cap A = A \quad \text{idempotens,}$$
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{kommutatív,}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{asszociatív, (5. á bra).}$$



5. ábra. A metszetművelet asszociatív: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Nyilvánvalóan igazak az alábbi összefüggések is:

$A \cap B \subseteq A$ és $A \cap B \subseteq B$, valamint

$A \subseteq B$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = A$.

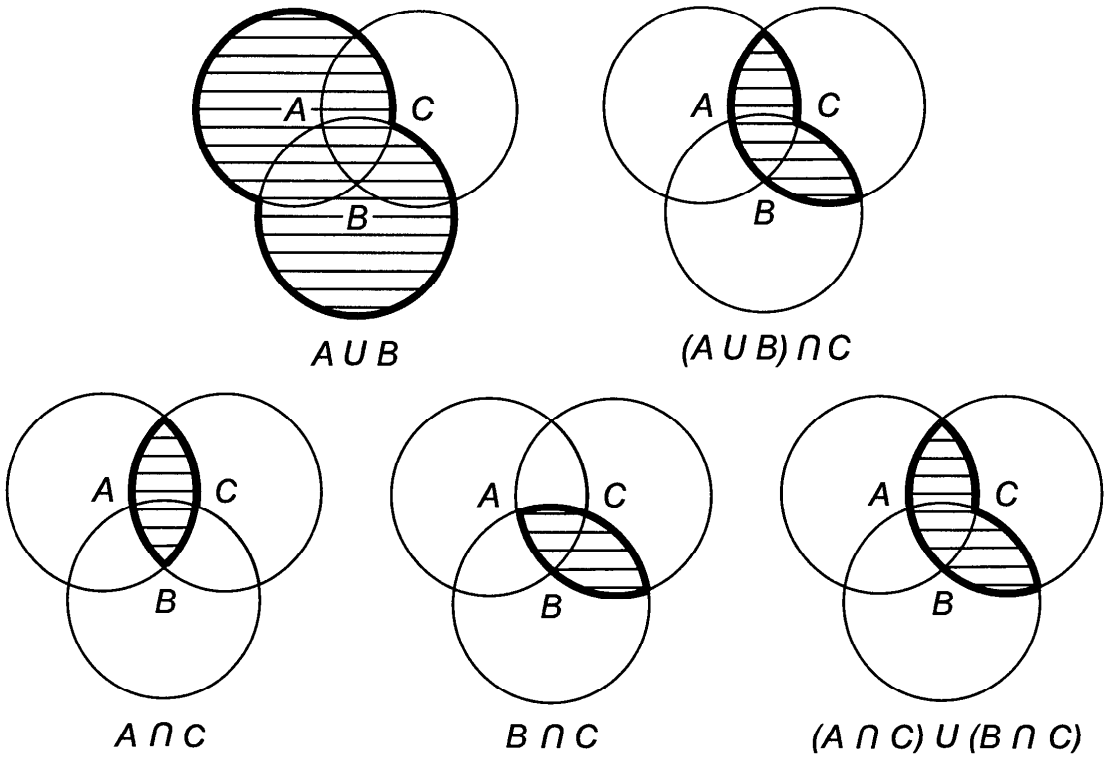
Az A és B halmazok *diszjunkt halmazok* , ha A-nak és B-nek nincs közös eleme, azaz metszetük üres halmaz:

$$A \cap B = \varnothing.$$

Az unió- és a metszet-műveletek egymásra vonatkozóan *disztributívak*, azaz $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

ahol A, B, C tetszőleges halmazok (6. ábra).



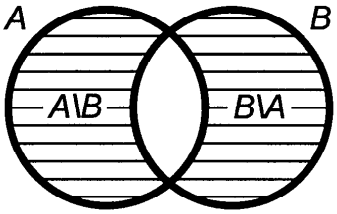
6. ábra. Az unió és a metszet disztributív tulajdonsága

Az A és B halmazok *különbséghalmazát* vagy *differenciáját* (ebben a sorrendben) azok és csak azok az elemek alkotják, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem. A különbség képzés jele: \, azaz

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

(olv.: A mínusz B egyenlő mindazon x elemekből álló halmazzal, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem elemei) (7. ábra).

Pl.: $\{-2, -1, 0, 3, 5\} \setminus \{-2, 0, 5\} = \{-1, 3\}$.



7. ábra. Az $A \setminus B$ és a $B \setminus A$ különbséghalmaz

A különbség műveletére vonatkozó fontosabb összefüggések:

$A \setminus B \neq B \setminus A$ nem kommutatív,

$A \setminus B \subset A$; $\quad B \setminus A \subset B$

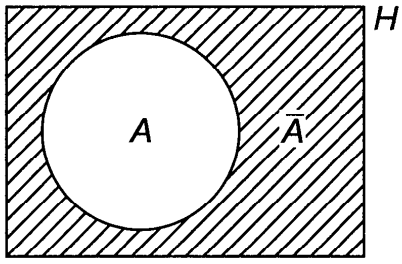
$A \setminus \varnothing = A$; $\quad \varnothing \setminus A = \varnothing$; $\quad A \setminus A = \varnothing$

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$; $\quad (A \setminus B) \cup B = A \cup B$

ha $A \cap B = \varnothing$, akkor $A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$

ha $A \neq B$, akkor $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \varnothing$.

Ha $A \subset H$, akkor a $H \setminus A$ különbséghalmazt A-nak H-ra vonatkozó *kiegészítő* vagy *komplementer halmazának* (*komplementumának*) nevezzük. Jele: $\overline{A}$. (H-t szokás *alaphalmaznak* is nevezni). Azaz $\overline{A} := H \setminus A = \{x \mid x \in H \text{ és } x \notin A\}$ (8. ábra).



8. ábra. A halmaz H-ra vonatkozó komplementere $\overline{A} = H \setminus A$

Például tekintsük a természetes számok N halmazát alaphalmaznak. Legyen A a pozitív páratlan egész számok halmaza, ekkor A komplementere a páros számok halmaza.

Valamely H alaphalmaz részhalmazaira alkalmazott unió, metszet ill. komplementer művelet, mindig H egy részhalmazát adja eredményül.

Venn-diagramokkal egyszerűen szemléltethetők az alábbi azonosságok:

$\overline{H} = \varnothing$; $\overline{\overline{A}} = A$ (Az A komplementerének komplementere egyenlő az A halmazzal).

$$A \cup \overline{A} = H; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing; \quad A \setminus B = A \cap \overline{B};$$

$$A \cup (B \cap \overline{B}) = A; \quad A \cap (B \cup \overline{B}) = A;$$

$$\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Az utóbbi két azonosságot *de Morgan* azonosságnak nevezzük. (*A. de Morgan* (1806–1878) angol matematikus.)

Két halmaz, A és B *direkt vagy Descartes-féle szorzata* az összes olyan rendezett (x, y) számpárból álló halmaz, amelyeknél $x \in A$ és $y \in B$. A direkt szorzat jele: $\times$; tehát

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\} \text{ (olv.: } A \text{ kereszt } B).$$

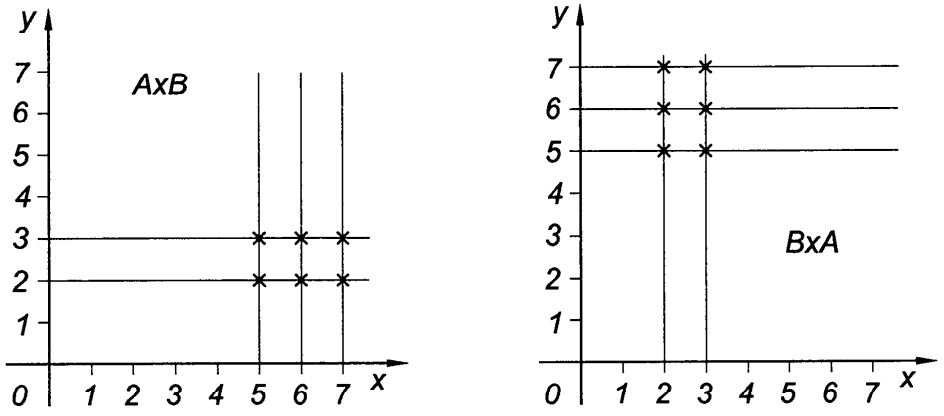
Ha A vagy B üres halmaz, akkor $A \times B = \varnothing$.

Pl.: $A = \{5,6,7\}$, $B = \{2,3\}$,

a) $A \times B = \{(5,2),(5,3),(6,2),(6,3),(7,2),(7,3)\}$

b) $B \times A = \{(2,5),(2,6),(2,7),(3,5),(3,6),(3,7)\}$.

A direkt szorzat nem kommutatív (9. ábra).



9. ábra. A direkt szorzat nem kommutatív

c) $A \times A = \{(5,5),(5,6),(5,7),(6,5),(6,6),(6,7),(7,5),(7,6),(7,7)\}$

1.3 A matematikai logika néhány fogalmának és jelölésének használatáról

A matematikai szöveg pontos és rövid írásához jól használható a matematikai logika néhány fogalma és jele.

A $q \Rightarrow p$ (olv.: ha q, akkor p) azt fejezi ki, hogy q logikai állításból következik a p logikai állítás. Ezt a relációt *logikai implikációnak* nevezzük, és

q elegendő feltétele p-nek, vagy
p szükséges feltétele q-nak, vagy
p a q állítás következménye, vagy
p, hacsak q értelemben használjuk.
A $q \not\Rightarrow p$ reláció jelentése, hogy q-ból nem következik p.

Ha $q \Rightarrow p$ és $p \Rightarrow q$, akkor ezt röviden $p \Leftrightarrow q$ szimbólummal fejezzük ki, és *logikai ekvivalenciának* nevezzük. Ezt a relációt a

p akkor és csak akkor, ha q vagy
q akkor és csak akkor, ha p vagy
p szükséges és elegendő feltétele q-nak, vagy
q szükséges és elegendő feltétele p-nek, vagy
p pontosan akkor, amikor q

értelemben használjuk, és p-t és q-t *ekvivalens állításoknak* nevezzük.

Példák

1. $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$, de $x^2 = 1 \not\Rightarrow x = -1$

2. $t > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} > 0$; $\frac{1}{t} > 0 \Rightarrow t > 0$; $t > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t} > 0$.

Matematikai állításokban gyakran előfordulnak "a *minden x-re*" vagy a "*létezik olyan x, hogy*" jellegű kifejezések.

A továbbiakban a

$\forall$ jelet a "*minden ...-re(-ra)*"
$\exists$ jelet pedig a "*létezik olyan ..., hogy*" vagy "*van legalább egy olyan ..., hogy*" szöveg helyett használjuk. Ezeket a jeleket *kvantoroknak* nevezzük. Az *első az univerzális, a második az egzisztenciális kvantor.*

Példák

1. A "minden n természetes számra igaz, hogy n kisebb, mint $n + 1$" helyett írható:

$$\forall\, n \in N\colon n < n + 1, \text{ vagy } \forall\, n\colon n \in N \Rightarrow n < n + 1.$$

2. A "természetes számhalmaz minden x, y, z elemére igaz, hogy $x < y$ esetén $x + z < y + z$" helyett írható:

$$\forall\, x, \forall\, y, \forall\, z\colon x, y, z \in N\colon x < y \Rightarrow x + z < y + z.$$

3. "Ha az A halmaznak van olyan x eleme, amely B-nek is eleme, akkor az A és B halmazok metszete nem üres halmaz" helyett írható:

$$\exists\, x\colon x \in A \text{ és } x \in B \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing.$$

1.4 Az absztrakt algebra elemei

Az absztrakt algebra vagy modern algebra tárgya az algebrai struktúrák (csoport, félcsoport, gyűrű, háló, test) valamint ezek általánosításainak vizsgálata. A halmazon értelmezett műveletek tulajdonságait elemzi, de figyelmen kívül hagyja a halmaz elemeinek konkrét jelentését. Az "absztrakt" jelzőt ez a szemléletmód magyarázza.

Evariste Galois (1811–1832) francia matematikus a halálos párbaja előtti éjszakán írta le az egyenletek megoldásával kapcsolatos vizsgálatainak eredményeit. A gyökök bizonyos permutációit vizsgálta, amelyek csoportot alkotnak. A csoport szerkezetéből vonta le következtetéseit az egyenlet gyökjelekkel való megoldhatóságára. A csoport fogalma az algebra fejlődésére igen nagy hatással volt, de a matematika más területein is jelentős szerepe van. Így a csoportelmélet az absztrakt algebra egyik legrégebbi ága.

Ebben a pontban a matematikai rendszerekkel, az algebrai struktúrákkal csak olyan mértékig foglalkozunk, hogy a számokról, számhalmazokról begyűjtött ismereteket rendezhessük. Erre igen nagy szükség van, mivel a számok a naponta ismétlődő pénzügyi, közgazdasági, technikusi, mérnöki munka alapeszközei.

1.5 A csoport fogalma, csoportaxiómák

Elemek nem üres halmazát algebrai struktúrának nevezzük, ha értelmezve vannak e halmazban bizonyos műveletek, és e műveletekre teljesülnek bizonyos azonosságok.

Pl.: egy A halmaz algebrai struktúra, ha elemei között értelmezve van legalább egy olyan művelet, amelynek eredményeként kapott elem szintén A-hoz tartozik.

A halmazban értelmezett művelet leggyakrabban *kétváltozós (binér) művelet*, mint pl. a valós számhalmazban az összeadás, szorzás, valamint a halmaz részhalmazai között az unió és a metszet. Tekintsük pl. a Z egész számok halmazát, és a halmaz elemeire alkalmazzuk az összeadás (+) műveletét.

Egy *matematikai rendszert* zárójeles kifejezéssel jelölünk: a zárójelek között vesszővel elválasztva felsoroljuk a halmazt és a definiált művelet jelét, így pl. a szóban forgó matematikai rendszer: $(Z,+)$. A $(Z,+)$ rendszer négy igen fontos – sok más rendszerrel is közös – tulajdonsággal rendelkezik.

1. A Z halmaz az összeadás műveletére zárt, azaz

$$\forall\, a, b \in Z: a + b \in Z.$$

Példák

$$-2,5 \in Z,\ -2+5=3 \in Z; \qquad 17,-17 \in Z,\ -17+17=0 \in Z$$

2. Az összeadás asszociatív a Z bármely három elemére, azaz

$$\forall\, a, b, c \in Z: (a+b)+c = a+(b+c).$$

Példák

$a)$ $(-8+2)+(-4) = -8 + (2+(-4))$,
$-6-4 = -8-2$,
$-10 = -10$

$b)$ $(7+3)+(-4) = 7+(3+(-4))$,
$10-4 = 7-1$,
$6 = 6$.

3. Létezik Z-ben neutrális elem (nullelem) az összeadásra vonatkozóan, azaz

$$\forall\, a \in Z:\ a+0=0+a=a.$$

Az összeadásra vonatkozóan a neutrális elem a zérus (nulla): 0. Az egész szám értéke nem változik meg, ha zérust adunk hozzá.

Példák

a) $-15+0=-15$, *b*) $0+32=32$, *c*) $0+(-9)=-9$, *d*) $21+0=21$.

4. Z minden elemének van inverze az összeadásra vonatkozóan (additív inverze). Egy a szám additív inverzét $-a$ jelöli. Bármely egész szám és additív inverzének összege a neutrális elemmel egyenlő, azaz

$$\forall a \in Z: \; a+(-a)=0$$

Példák

a) $-18+18=0$ (-18 inverze $+18$) *b*) $25+(-25)=0$ (25 inverze -25)

Minden matematikai rendszer, algebrai struktúra, amely – miként a $(Z,+)$ rendszer – rendelkezik a leírt négy tulajdonsággal, csoport.

Csoportaxiómák: Általában az elemek egy nem üres A halmazát csoportnak nevezzük, ha A-ra teljesül a következő négy axióma:

1. Az A halmaz zárt a halmazban értelmezett binér műveletre vonatkozóan.
2. Az A-ban értelmezett binér művelet asszociatív.
3. Az A tartalmaz neutrális elemet.
4. Az A minden elemének van inverze a binér műveletre vonatkozóan.

A négy csoporttulajdonságot a kulcsszavak (zárt, asszociatív, neutrális elem, inverz) kezdő betűiből alkotott "z a n i" szóval véshetjük emlékezetünkbe. A csoportban értelmezett művelet és jelölése tetszőleges lehet, a lényeg csak az, hogy a művelet rendelkezzék a négy (z a n i) tulajdonsággal. Ha a csoportban értelmezett művelet a csoportaxiómáknak eleget tesz, és a csoport elemeire vonatkozóan a művelet kommutatív is, akkor kommutatív *vagy Abel-féle csoportról* beszélünk. (*N. H. Abel* (1802–1829).)

A vizsgált $(Z,+)$ struktúra, mivel az összeadás kommutatív, *Abel*-féle csoport.

A $(Q,+)$, a $(R,+)$, a $(C,+)$ algebrai struktúrák mindegyike *Abel*-csoport, ha az adott számhalmazban a + a szokásos összeadás műveletét jelöli. A pozitív számok halmaza a közönséges szorzás műveletével is kommutatív, ill. *Abel*-csoport. Ui. a neutrális eleme az 1 (egységelem), és

$$\forall a \in R^{+} \text{ inverze } a^{-1}=\frac{1}{a}$$

1.6 A test fogalma, testaxiómák

Az általános iskolában a számrendszer tanulmányozása során négy alapművelettel ismerkedtünk meg: az összeadással, a szorzással, a kivonással és az osztással. Elegendő azonban két művelettel foglalkoznunk, mivel a kivonás az összeadás inverz művelete, az osztás pedig a szorzás inverz művelete.

A test olyan, legalább két elemet tartalmazó halmaz, amelyben két művelet van értelmezve:

a) egy asszociatív, kommutatív, invertálható összeadás és

b) egy asszociatív, kommutatív és az összeadás neutrális elemétől – 0-tól – különböző elemekre invertálható szorzás, amely az összeadásra nézve disztributív.

Pl.: Vizsgáljuk meg, hogy a $(Q,+,\cdot)$ algebrai struktúra kielégíti-e a test tulajdonságokat, ha Q a racionális számok halmaza, + a megszokott összeadás, a $\cdot$ pedig a megszokott szorzás művelete?

a) A $(Q,+)$ algebrai struktúra kommutatív csoport, mert

1. Q zárt az összeadásra nézve ;

2. az összeadás asszociatív a Q-ban;

3. az összeadás kommutatív a Q-ban;

4. van neutrális eleme: a 0;

5. Q minden eleme rendelkezik additív inverzzel.

b) A $(Q,\cdot)$ algebrai struktúra is kommutatív csoport, mert

1. Q zárt a szorzásra nézve;

2. a szorzás asszociatív a Q-ban;

3. a szorzás kommutatív a Q-ban;

4. a szorzás neutrális eleme az 1;

5. minden Q-ba tartozó a elemnek – a 0 kivételével – van multiplikatív inverze: $\frac{1}{a} \equiv a^{-1}$.

c) Mivel a Q minden a, b, c elemére $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, így a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

A fentiek értelmében tehát a $(Q,+,\cdot)$ algebrai struktúra test.

Testaxiómák: Egy $(T,+,*)$ algebrai struktúrát *testnek* nevezünk, ha

1. T zárt az + (összeadás) műveletre:

$$\forall\, a, b \in T:\ a + b \in T;$$

2. az + művelet asszociatív:

$$\forall\, a, b, c \in T:\ (a + b) + c = a + (b + c);$$

3. van neutrális elem az + műveletre:

$$\exists\, 0 \in T, \forall\, a \in T:\ a + 0 = a;$$

4. minden elemnek van additív inverze:

$$\forall\, a \in T, \exists\, (-a) \in T:\ a + (-a) = 0;$$

5. az + művelet kommutatív:

$$\forall\, a, b \in T:\ a + b = b + a;$$

6. T zárt a $*$ műveletre:

$$\forall\, a, b \in T:\ a * b \in T;$$

7. a $*$ művelet asszociatív:

$$\forall\, a, b, c \in T\colon\ (a * b) * c = a * (b * c);$$

8. létezik neutrális elem a $*$ műveletre:

$$\exists\, 1 \in T, \forall\, a \in T\colon\ a * 1 = a;$$

9. minden elemnek – a 0 kivételével – van multiplikatív inverze:

$$\forall\, a \in T, (a \neq 0), \exists\, a^{-1} \in T\colon\ a * a^{-1} = 1;$$

10. a $*$ művelet kommutatív:

$$\forall\, a, b \in T\colon\ a * b = b * a;$$

11. a $*$ művelet az $+$ műveletre nézve disztributív:

$$\forall\, a, b, c \in T\colon\ a * (b + c) = a * b + a * c.$$

A racionális számok mellett testet alkotnak pl. a valós számok, a komplex számok a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

A matematika alkalmazása szempontjából is igen fontos fogalom a struktúra, mivel a problémák megoldását leggyakrabban műveletek sorozatával létrehozott numerikus eredmények szolgáltatják. A matematikát alkalmazó szakembernek tehát ismernie kell a műveletek tulajdonságait, és azt is, hogy az általa végzett műveletek mikor nem vezetnek ki a kérdéses struktúrából.

Feladatok

1. Igaz-e, hogy ha $B = \{b \mid 4b = 12\}$, akkor $B = 3$?

[Nem igaz, B egyelemű halmaz, $B = \{3\}$, 3 eleme a B-nek, azaz $3 \in B$.]

2. Milyen halmazt definiál az A, B, C, ha $A = \{a \mid a^2 = 16 \text{ és } 3a = 9\}$, $B = \{a \mid a + 15 = 15\}$, $C = \{a \mid a \neq a\}$?

[$A = \varnothing$, $B = \{0\}$, C az üres halmazt definiálja: $\varnothing = \{a \mid a \neq a\}$.]

3. Egyenlők-e az $A = \varnothing$, $B = \{0\}$, $C = \{\varnothing\}$ halmazok?

[Nem egyenlők. A-nak nincs eleme, üres halmaz; B-nek egy eleme van a 0; C-nek egy eleme van az üres halmaz.]

4. Írjuk fel az adott halmazok elemeit:

a) $X = \{x \mid x \text{ a } \textit{fabatka} \text{ betűi}\}$. $[X = \{f, a, b, t, k\}.]$

b) $Y = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$. $[Y = \{-1, 3\}.]$

c) $Z = \{x \mid x^2 + 4 = 0,\ x \in R\}$. $[Z = \varnothing.]$

5. Legyen $X = \{2, 0\}$. A következő állítások közül melyek a hamisak:

a) $0 \subset X$; *b)* $0 \in X$; *c)* $\{0\} \subset X$; *d)* $\varnothing \in X$; *e)* $\{0\} \in X$?

[*a*) hamis; *b*) igaz; *c*) igaz; *d*) hamis; *e*) hamis.]

6. Legyen $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,7\}$, $C=\{2,5,6,7\}$. Határozzuk meg az *a)* $A\cup B$; *b)* $B\cap A$; *c)* $C\setminus B$ halmazok elemeit.

[*a)* $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$; *b)* $B\cap A=\{1,3,5\}$; *c)* $C\setminus B=\{2,6\}$.]

7. Legyen $A=\{x,y\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{4,5\}$. Határozzuk meg az *a)* $A\times(B\cup C)$; *b)* $A\times(B\cap C)$; *c)* $(A\times B)\cap(A\times C)$ halmazokat.

[*a)* $A\times(B\cup C)=\{(x,3),(x,4),(x,5),(y,3),(y,4),(y,5)\}$;

b) $A\times(B\cap C)=\{(x,4),(y,4)\}$; *c)* $(A\times B)\cap(A\times C)=\{(x,4),(y,4)\}$.]

8. Legyen $H=\{a,b,c,d,e\}$ alaphalmaz, és $A=\{a,b,d\}$, $B=\{b,d,e\}$. Határozzuk meg az $\overline{A}\cap B$ és $A\cup\overline{B}$ halmazok elemeit.

[$\overline{A}=\{c,e\}$; $\overline{A}\cap B=\{e\}$; $\overline{B}=\{a,c\}$; $A\cup\overline{B}=\{a,b,c,d\}$.]

9. Csoportot alkot-e $(Z,*)$, ha $Z=\{0,1,2,3\}$ és a $*$ műveletet a következő táblázat definiálja:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

[Igen, éspedig kommutatív csoportot alkot.
Zárt, asszociatív: pl. $(1*3)*2=1*(3*2)$; $0*2=1*1$; $2=2$;
neutrális elem a 0; inverz elem: 0-nak 0, 1-nek 3, 2-nek 2;
kommutatív: pl. $1*2=2*1$; $3=3$, tehát *Abel*-csoport.]

10. Csoportot alkot-e a $(Z,*)$, ha $Z=\{P,A,R,T\}$ és a $*$ művelet a következő táblázattal adott:

*	P	A	R	T
P	A	R	T	P
A	R	T	P	A
R	T	P	A	R
T	P	A	R	T

[Igen, kommutatív csoportot alkot.
Zárt, asszociatív: pl. $(P*R)*T=P*(R*T)$, $T*T=P*R$, $T=T$;
neutrális elem: T; inverz elem: T-nek T, R-nek P, A-nak A;
kommutatív: pl. $R*A=A*R$, $P=P$, tehát *Abel*-csoport.]

MÁSODIK FEJEZET

SZÁMTAN (ARITMETIKA)

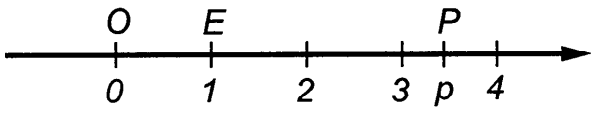
2.1 A valós számok halmaza

A szám fogalmának bővülése – az általános és középiskolai tanulmányok során absztrakciók útján – a természetes szám fogalmától fokozatosan vezet el a valós szám fogalmáig. A valós számok halmazát R jelöli. Ebben a fejezetben átismételjük, rendszerezzük és kiegészítjük a valós számhalmazra vonatkozó ismereteket.

Az R valós számhalmaz – miként az előző pontban megjegyeztük – a közönséges összeadás (+) és szorzás (·) műveletével algebrai struktúra, azaz az $(R,+,\cdot)$ test.

2.2 A valós számegyenes

Rajzoljunk egy egyenest, és jelöljünk ki rajta két pontot, az O-t és E-t. Az O-nak feleltessük meg a 0, E-nek az 1 számot. A nullától az egy felé haladó irányt nevezzük a pozitív, az ellentétes irányt pedig a negatív iránynak. Az OE távolság a *távolságegység*, O pont az *origó*. Az egyenes minden P pontjához rendeljük hozzá az $\frac{\overline{OP}}{OE} = p$ számot, ahol $\overline{OP}$ az OP szakasz előjeles hossza. Az ily módon meghatározott egyenes a *számegyenes* (10. ábra).



10. ábra. A számegyenes

Dedekind német matematikus (*Richard Dedekind* 1831–1916) 1876-ban mutatta ki, hogy a számegyenes pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van, azaz a számegyenes minden pontjához tartozik egy valós szám, és minden valós számhoz tartozik egy pont a számegyenesen. Más szóval: egy egyenes pontjainak halmaza és az R valós számhalmaz között *kölcsönösen egyértelmű leképezés létesíthető.*

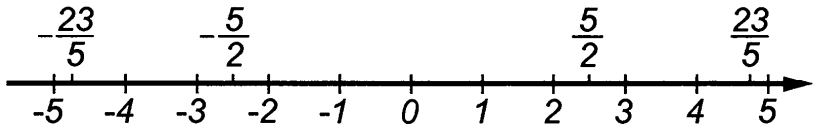
Általában egy $A \neq \varnothing$ halmaz $B \neq \varnothing$ halmazba (vagy halmazra) való *leképezésének* mondunk minden olyan megfeleltetést, amely az A halmaz minden egyes eleméhez a B halmaz meghatározott elemét rendeli. A B halmaznak nem kell feltétlenül különböznie az A halmaztól. Az A halmaznak a B *halmazba való leképezését*

$$A \to B$$

szimbólummal jelöljük. Tehát *a leképezés műveletének jele* a vízszintes nyíl: $\to$.

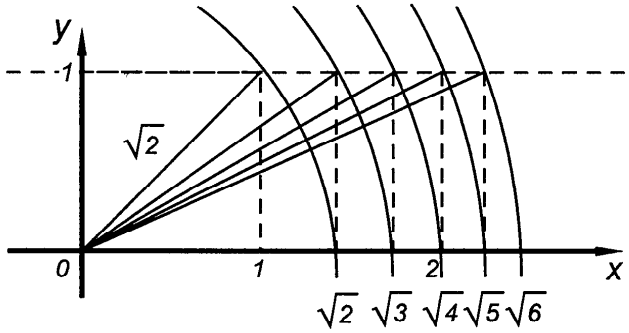
A leképezés *kölcsönösen egyértelmű*, más szóval *bijektív*, ha az A halmazt úgy képezzük le egy B halmazra, hogy az A különböző elemeihez a B halmaznak is különböző elemei tartoznak, az A elemeihez a B minden elemét hozzárendeljük, és egyetlen B-hez tartozó elem sincs, amely egynél több A-beli elemhez lenne rendelve (l. a 8.3 pontot).

A valós számhalmaz és a számegyenest alkotó ponthalmaz között tehát a leképezés bijektív. A racionális, ill. az irracionális számoknak megfelelő pontokat, a számegyenes racionális, ill. irracionális pontjainak is nevezzük. A számegyenesen például az origótól *pozitív* irányban az $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{23}{5}$ távolságra lévő pontok az $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{23}{5}$ racionális számokat, az origótól *negatív* irányban az $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{23}{5}$ távolságra levő pontok pedig a $-\frac{5}{2}$, -4, $-\frac{23}{5}$ racionális számokat ábrázolják (11. ábra).



11. ábra. Racionális számok a számegyenesen

Pl.: A $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ irracionális számok megfelelő pontjai a 12. ábra szerint szerkeszthetők.



12. ábra. Irracionális számok a számegyenesen

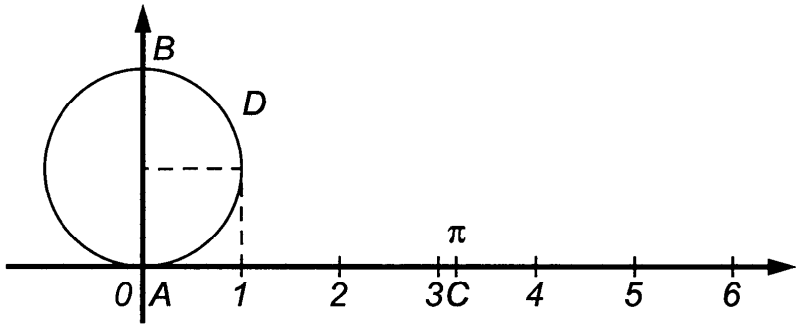
A transzcendens számok közül pl. a

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288...$

szám kijelölése a számegyenesen az egységsugarú kör fél kerületének a számegyenesre való lefejtésével valósítható meg, mivel a kör kerülete: $2 \cdot 1 \cdot \pi$ ($r = 1$).

Az A és C pontokkal meghatározott egyenes szakasz mértékét $m(AC)$-vel, az ADB pontokkal jelzett félkörív hosszának mértékét $\text{ív}(ADB)$-vel jelölve (13. ábra):

$$m(AC) = \text{ív}(ADB) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$$



13. ábra. A π transzcendens szám a számegyenesen

2.3 A természetes számok halmaza (N)

A természetes számok halmazát N-nel jelöljük (a latin eredetű naturális = természetes szó kezdőbetűjével).

Az N természetes számok halmaza a valós számok olyan részhalmaza, amelyre

a) $0 \in N$, $1 \in N$;

b) $k \in N \Rightarrow k+1 \in N$;

c) ha $N^* \subset N$ és kielégíti az *a*) és *b*) feltételeket, akkor $N^*=N$.

Más szóval, ha egy természetes számokból álló halmaz tartalmazza a 0, az 1, valamint minden k számhoz a rákövetkező számot, akkor tartalmazza az összes természetes számot. Ezen, vagyis az *a*)-*c*) tulajdonságon alapul a matematikának egyik nagyon fontos bizonyítási módszere, a *teljes indukció* (l. a 2.10 pontot). A természetes számok írására a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ún. *arab számjegyeket* használjuk. A számjegyeket *számnevekkel* (nulla – zérus –, egy, kettő, három, négy, öt, hat, hét, nyolc, kilenc) különböztetjük meg. A természetes számok minden elemének nem adhatunk másmás nevet és jegyet, hiszen végtelen sok van, ezért olyan elrendezést alkalmazunk, hogy kevés számnévvel és számjeggyel lehetőleg sok számot leírhassunk és kimondhassunk. A *számrendszert* bizonyos szabályok szerint rendezett számok alkotják. Ha a számokat tízesével csoportosítjuk, és tíz-tíz egységet egy-egy nagyobb rendű egységbe foglalunk, (pl. 10 db 1-es egy 10-es, 10 db 10-es egy 100-as, stb.), akkor az így előállított rendszert *tízes számrendszernek* nevezzük, amelynek 10 az *alapszáma*. Általában a tízes számrendszert használjuk, de pl. a kettes, nyolcas és a 16-os alapú számrendszerek is fontosak, mert bizonyos matematikai gépek ezekben, az ún. *bináris, oktális* ill. *hexadecimális* számrendszerekben végzik műveleteiket (l. a 3.12 pontot).

A *természetes számok leírásakor* jobbról az első helyre írjuk az egyeseket, ettől egy-egy hellyel balra a tízeseket, százasokat, ezre-

seket, tízezreseket, stb. Így a számjegy helye kifejezi, milyen rendű egységeknek felel meg, azaz megszabja a szám *helyi értékét.*

A *számjegy alakja* jelöli a szám *alaki értékét*, amely azt mutatja, hogy a helyi értéknek megfelelő egységből mennyit kell venni. Pl.: a 3474 (háromezer-négyszázhetvennégy) számban a 4 kétszer fordul elő, de míg jobbról az első helyen lévő 4-es négy egyest jelent, addig a jobbról harmadik helyen álló 4-es négy százast.

Ha valamely rendű egység hiányzik a leírandó szám első és utolsó jegye között, akkor annak helyére 0-t írunk. Pl.: 6045 (hatezer - negyvenöt), 5 981 603 (ötmillió - kilencszáznyolcvanegyezer - hatszázhárom), 71 240 802 512 370 (hetvenegybillió - kétszáznegyvenmilliárd - nyolcszázkétmillió - ötszáztizenkétezer - háromszázhetven). Az alábbi táblázat a tízes számrendszer felépítését és a helyi értékek szerinti elnevezéseit szemlélteti.

százbilliók	*tízbilliók*	*billiók*	*százmilliárdok*	*tízmilliárdok*	*milliárdok*	*százmilliók*	*tízmilliók*	*milliók*	*százezresek*	*tízezresek*	*ezresek*	*százasok*	*tízesek*	*egyesek*

2.4 Műveletek a természetes számok halmazában

a) Összeadás

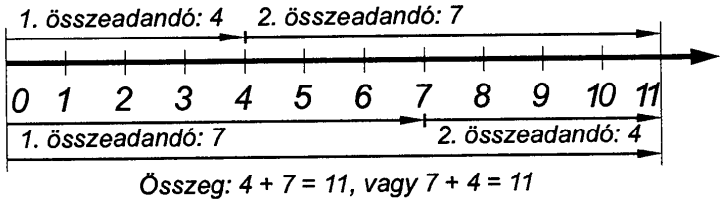
Két munkás közül az egyik egy óra alatt 34 szegecset illesztett be, a másik 27-et. Hány szegecset illesztettek be együtt egy óra alatt?

Annyi szegecset illesztettek be, mint amennyi 34 és 27 együttvéve, amelynek matematikai írásmódja: 34 + 27 = 61 (olv.: harmincnégy plusz huszonhét egyenlő hatvaneggyel). Ez a művelet az összeadás, műveleti jele: +. A 34-et és a 27-et összeadandóknak vagy tagoknak, az eredményt, a 61-et pedig összegnek nevezzük.

összeadandó + összeadandó = összeg.

Az *összeadandók sorrendje felcserélhető*, az összegük nem változik, azaz az összeg független az összeadás sorrendjétől. Ez az összeadás *felcserélési* (*kommutatív*) törvénye.

Pl.: $4 + 7 = 7 + 4 = 11$ (14. ábra).



14. ábra. Az összeadás kommutatív

Három összeadandó esetén bármelyik kettő összegéhez hozzáadhatjuk a harmadik tagot anélkül, hogy az összeg megváltoznék, azaz az összeadandókat tetszés szerint csoportosíthatjuk, az összeg nem változik. Ez az összeadás *csoportosítási* (*asszociatív*) törvénye.

Pl.: $(2 + 4) + 5 = 2 + (4 + 5) = 11$ (a zárójelek használatáról l. a 2.5 pontot).

Az összeadást többjegyű összeadandók esetén a következő módon végezzük: a számokat úgy írjuk egymás alá, hogy az azonos helyi értékű számjegyek egymás alá kerüljenek. Az utolsó összeadandót aláhúzzuk.

Pl.:
$$\begin{array}{r} 2435 \\ 247 \\ +1413 \\ \hline 4095 \end{array}$$

Az összeadást a legkisebb helyi értékű jegyeknél, vagyis az egyeseknél kezdjük: $3 + 7 + 5 = 15$.

Az eredmény 5 egyesét leírjuk az egyesek alá, 1 tízesét pedig a tízesekhez adjuk hozzá:

$$1 + 1 + 4 + 3 = 9.$$

A százasok összege: $4 + 2 + 4 = 10$, tehát a százasok oszlopa alá 0-t írunk, és az 1 ezrest az ezresekhez adjuk hozzá:

$$1 + 1 + 2 = 4.$$

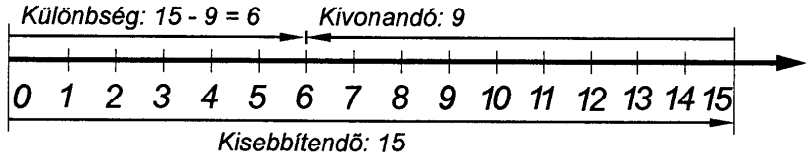
A 4-et az ezresek alá írjuk. A három adott többjegyű szám összege tehát 4095.

Az összeadást felülről lefelé is végezzük el, mert számításunk helyességét így ellenőrizhetjük.

b) Kivonás

15 m vörösréz huzalból elhasználtunk 9 m-t. Hány méter maradt?

Annyi maradt, amennyivel több a 15 m, mint a 9 m, ennek matematikai írásmódja: $15-9=6$ (olv.: tizenöt mínusz kilenc egyenlő hattal) (15. ábra). Ez a művelet a *kivonás*, *műveleti jele*: –.



15. ábra. Kivonás

Azt a számot kerestük, amelyet 9-hez adva összegül 15-öt kapunk. A kivonás az összeadás fordított művelete. Kivonásnál ismert az egyik összeadandó és az összeg és keressük a másik összeadandót. Az összeget *kisebbítendőnek*, az ismert összeadandót *kivonandónak*, az ismeretlen összeadandót *különbségnek* vagy *maradéknak* nevezzük.

kisebbítendő – kivonandó = különbség

A kivonás helyes elvégzésének próbája az összeadás:

kivonandó + különbség = kisebbítendő

A különbség értéke nem változik, ha a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz ugyanazt a számot hozzáadjuk vagy mindkettőből ugyanazt kivonjuk.

Pl.: $9-5=4$; $(9+2)-(5+2)=11-7=4$,
$(9-2)-(5-2)=7-3=4$.

A kisebbítendő növelésével ill. csökkentésével a különbség ugyanannyival nő, ill. csökken.

Pl.: $7-3=4$, $(7+2)-3=9-3=6=4+2$,
$(7-2)-3=5-3=2=4-2$.

A kivonandó növelésével a különbség ugyanannyival csökken, csökkentésével ugyanannyival nő.

Pl.: $11-5=6$, $11-(5+2)=11-7=4=6-2$,
$11-(5-2)=11-3=8=6+2$.

Több számjegyű számok kivonását úgy végezzük el, hogy a számokat helyi értéküknek megfelelően egymás alá írjuk és a kivonást az egyeseken kezdjük:

Pl.:
$$\begin{array}{r} 5832 \\ -3521 \\ \hline 2311 \end{array}$$

1 meg 1 az 2 (leírjuk az 1-et), 2 meg 1 az 3 (leírjuk az 1-et), 5 meg 3 az 8 (leírjuk a 3-at), 3 meg 2 az 5 (leírjuk a 2-t). A különbség: 2311.

Ellenőrzés: 2311 + 3521 = 5832.

Amikor a kisebbítendő valamely számjegye kisebb, mint a kivonandó ugyanolyan helyi értékű számjegye, akkor felhasználjuk a már említett tételt, amely szerint a különbség nem változik, ha a kisebbítendőt és kivonandót ugyanazzal a számmal növeljük.

Pl.:
$$\begin{array}{r} 3762 \\ -1835 \\ \hline 1927 \end{array}$$

Mivel 2 egyesből 5 egyest nem vonhatunk ki, a kisebbítendőhöz 10 egyest hozzáadunk, így 12 egyesünk lesz, és hogy a különbség ne változzék, ugyancsak 10 egyest, de 1 tízes alakjában hozzáadunk a kivonandó tízeseihez is. Hasonlóan járunk el a százasoknál is, ahol 10 százassal (1 ezressel) növeljük a kisebbítendőt és 1 ezressel a kivonandót. A kivonást tehát így végezzük: 5 meg 7 az 12 (leírjuk a 7-et), 1 meg 3 az 4 meg 2 az 6 (leírjuk a 2-t), 8 meg 9 az 17 (leírjuk a 9-et), 1 meg 1 az 2, 2 meg 1 az 3 (leírjuk az 1-et). A különbség vagy maradék: 1927.

$$\begin{array}{r} 1835 \\ +1927 \\ \hline 3762 \end{array}$$

Próba: ha a maradékot a kivonandóhoz hozzáadva a kisebbítendőt kapjuk, helyes az eredményünk.

Az N számhalmazban a kivonást csak akkor végezhetjük el, ha a *kisebbítendő* $\geq$ *kivonandó* feltétel teljesül (l. 2.13 pontot).

c) Szorzás

Ha az összeadandók egyenlők, akkor az eredményt összeadás helyett *szorzással* számítjuk ki. Pl.: 2 + 2 + 2 + 2 összeadás helyett $2 \cdot 4$ (olv.: kettő szorozva néggyel) szorzást írunk. Az egyenlő ösz-

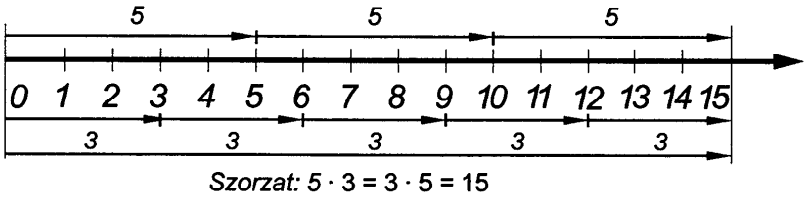
szeadandót, 2-t *szorzandónak*, az egyenlő összeadandók számát, 4-et *szorzónak*, e két szám mindegyikét közös néven *tényezőnek*, és az összeget *szorzatnak* nevezzük.

A szorzás műveleti jele: a félmagasságban elhelyezett pont · (régebben: ×):

szorzandó · szorzó = szorzat

tényező · tényező = szorzat

Pl.: $5 \cdot 3 = 15$, a szorzandó: 5, a szorzó: 3, a szorzat: 15 (16. ábra).



16. ábra. Szorzás

A szorzat értéke nem változik, ha a szorzandót és a szorzót felcseréljük: *a szorzat értéke független a tényezők sorrendjétől.* Ez a szorzás *felcserélési* (*kommutatív*) törvénye.

Pl.: $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 15$ (16. ábra).

Kettőnél több tényező esetén *a tényezőket tetszés szerint csoportosíthatjuk*, a szorzat értéke nem változik. Ez a szorzás *csoportosítási* (*asszociatív*) törvénye.

Pl.: $(4 \cdot 7) \cdot 2 = 4 \cdot (7 \cdot 2) = 56$

Ha a szorzandó többtagú, akkor vagy megszorozzuk a szorzóval a szorzandó minden tagját, és az így kapott részletszorzatokat összeadjuk, vagy a tagokat összeadjuk és azután szorzunk. Ez a szorzás *széttagolási* (*disztributív*) törvénye.

Pl.: $5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 15 + 20 = 35$, vagy $5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 7 = 35$

Többjegyű számot egyjegyű számmal úgy szorzunk, hogy a szorzandó mindegyik jegyét – az egyesektől kezdve – megszorozzuk a szorzóval, és a szorzatot az aláhúzott szorzandó alá írjuk.

Pl.: $\underline{376}\cdot 5$
1880

5-ször 6 az 30 egyes (3 tízes és 0 egyes), leírjuk a 0-t a 6-os alá, és a 3 tízest a tízesek szorzatához adjuk; 5-ször 7 az 35 meg 3 az 38 tízes, a 8 tízest leírjuk, és a 3 százast a százasok szorzatához adjuk; 5-ször 3 az 15 meg 3 az 18 százas, amit a szorzat eddigi jegyei elé írjuk. Az eredményül kapott szorzat: 1880.

Többjegyű számot többjegyű számmal úgy szorzunk, hogy a szorzandót a szorzó mindegyik számjegyével megszorozzuk, és az így kapott részletszorzatokat összeadjuk. A részletszorzatok egymás alá írásakor figyeljünk arra, hogy az azonos helyi értékű számjegyek egymás alá kerüljenek.

Pl.: $\underline{432}\cdot 56$ vagy $\underline{432}\cdot 56$
$2\,160$ 2592
$\underline{2592}$ $\underline{2160}$
24192 24192

Ha a szorzó legmagasabb helyi értékű jegyével kezdjük a szorzást, akkor az egymás utáni részletszorzatokat egy-egy hellyel jobbra írjuk (bal oldali művelet), ellenkező esetben pedig egy-egy hellyel balra (jobb oldali művelet). Ui. a 2160 a $432\cdot 5\cdot 10 = 21600$-nak felel meg, de az utolsó helyi érték pótló 0-át nem kell kiírni.

d) Osztás

Azt a műveletet, amellyel egy szorzatból és egyik tényezőjéből a másik tényezőt egyértelműen meghatározzuk, *maradék nélküli osztásnak* nevezzük. A szorzatot most *osztandónak*, az adott tényezőt *osztónak*, a keresett tényezőt pedig *hányadosnak* nevezzük. Az *osztás műveleti jele* az osztandó és osztó közé tett *kettőspont*: vagy *ferde törtvonal* /, vagy az egymás alá írt osztandó és osztó közé tett *vízszintes vonaldarab*.

osztandó : osztó = hányados,

osztandó / osztó = hányados,

$$\frac{\text{osztandó}}{\text{osztó}} = \text{hányados.}$$

Osztásról beszélünk akkor is, ha az osztandó és az osztó tetszőleges szám, azonban ilyenkor általában az osztandóban az osztó nincs meg maradék nélkül (l. a 2.18 pontot). Ha az osztót és a hányadost összeszorozzuk, az osztandót kell kapnunk eredményül, feltéve, hogy nincs maradék:

$$\text{hányados} \cdot \text{osztó} = \text{osztandó}.$$

Pl.: $21 : 7 = 3$ (olv.: huszonegy osztva héttel egyenlő hárommal).

$21 / 7 = 3$ vagy $\frac{21}{7} = 3$ (olv.: huszonegy per hét egyenlő hárommal). 21 az osztandó, 7 az osztó és 3 a hányados. Próba: $3 \cdot 7 = 21$.

Maradék nélküli osztás esetében:

1. A hányados értéke változatlan marad, ha az osztót és osztandót ugyanazzal a nullától különböző számmal megszorozzuk vagy elosztjuk.

Pl.: $8 : 2 = (8 \cdot 3) : (2 \cdot 3) = 24 : 6 = 4$.

2. Ha az osztandót egy pozitív egész számmal megszorozzuk, a hányados ugyanannyiszor lesz nagyobb, ha pedig az osztandót egy pozitív egész számmal elosztjuk, a hányados ugyanannyiad részre csökken.

Pl.: $6 : 2 = 3$;
$(6 \cdot 4) : 2 = 24 : 2 = 12$, ami éppen $3 \cdot 4$.

$12 : 3 = 4$;
$(12 : 2) : 3 = 6 : 3 = 2$, ami éppen $4 : 2$.

3. Az osztó szorzása (osztása) egy pozitív egész számmal a hányados ugyanannyiszoros csökkenését (növekedését) vonja maga után.

Pl.: $12 : 3 = 4$; $12 : (3 \cdot 2) = 12 : 6 = 2$, ami éppen $4 : 2$.
$12 : 4 = 3$; $12 : (4 : 2) = 12 : 2 = 6$, ami éppen $3 \cdot 2$.

Többjegyű osztandó és egyjegyű osztó esetén írásban az osztást a legmagasabb helyi értékű számjegyen kezdjük.

Pl.: 8432 : 7=1204
14
03
32
4

Nyolcban a 7 megvan 1-szer. Az 1-et a hányados első jegyéül leírjuk. 1-szer 7 az 7 meg 1 (ezt a 8-as alá írjuk) az 8. A következő jegyet mellé írjuk. 14-ben a 7 megvan 2-szer (a hányados második jegye), 2-szer 7 az 14 meg 0 (a 14 alá írjuk) az 14.

Melléírjuk a következő jegyet, a 3-at; 3-ban a 7 nincs meg, tehát a hányados következő jegyéül 0-t írunk. 0-szor 7 az 0 meg 3 az 3. Melléírjuk a következő jegyet, a 2-t. 32-ben a 7 megvan 4-szer (a hányados negyedik jegye). 4-szer 7 az 28 meg 4 (ezt a 32 alá írjuk) az 32. A 4 a maradék, mivel 8432-ben a 7 nincs meg maradék nélkül. A hányados tehát 1204, és maradt 4.

Próba: $\underline{1204} \cdot 7$
$\underline{8428}$
$\underline{+\quad 4}$
8432

Ha a hányadost az osztóval összeszorozzuk és a szorzathoz a maradékot hozzáadva az osztandót kapjuk, akkor helyes az eredményünk.

Ha az osztó is többjegyű, akkor az osztandóban elölről (a legmagasabb helyi értékű jegytől) kijelölünk annyi jegyet, hogy az így kapott számban az osztó legalább egyszer, de legfeljebb kilencszer meglegyen.

Pl.: 12456 : 24=519
045
216
0

124-ben a 24 megvan 5-ször. Az 5-ször 24-et kivonjuk a 124-ből, 5-ször 4 az 20 meg 4 az 24, maradt 2; 5-ször 2 az 10 meg 2 az 12 meg 0 az 12. A 4-es mellé leírjuk a következő jegyet, az 5-öt. 45-ben a 24 megvan 1-szer (a hányados második jegye) 1-szer 4 az 4 meg 1 az 5; 1-szer 2 az 2 meg 2 az 4. A 21 mellé leírjuk a következő jegyet a 6-ot. 216-ban a 24 megvan 9-szer (a hányados harmadik jegye). 9-szer 4 meg 0 az 36, maradt 3; 9-szer 2 az 18 meg 3 az 21 meg 0 az 21. Tehát 12456-ban a 24 megvan 519-szer maradék nélkül.

Próba: $\underline{519} \cdot 24$
$\underline{1038}$
$\underline{2076}$
12456

Az osztást jól végeztük el, mivel a szorzat az osztandóval egyenlő.

2.5 A négy alapművelet sorrendje, zárójelek használata

Több kijelölt művelet egymás után való elvégzése zárójelek használata nélkül nem feltétlen egyértelmű, vagy nem a szükséges sorrendet biztosítja. A számítógépek programozási nyelveiben a négy alapművelet elvégzésének sorrendjére az ún. "balról jobbra"-szabályt vezették be. A balról jobbra szabály szerint egy matematikai kifejezés műveleteit balról jobb felé haladva végezzük, és pedig előbb az összes szorzást, osztást, majd ugyancsak balról jobbra haladva az összeadást, kivonást, majd a kapott részeredményeket összegezzük. A műveletek más sorrendjét, ha annak betartása szükséges, egyértelműen zárójelekkel írhatjuk elő:

a) Ha összeadás és kivonás következik egymás után, akkor a sorrend tetszőleges.

Pl.: $6+3-2=9-2=7$ vagy $6+3-2=6+1=7.$

b) A szorzás és az osztás műveleti jele erősebben kapcsolja össze a számokat, mint az összeadás és kivonás.

Pl.: $7+5\cdot 6=7+30=37,$ $23-6:2=23-3=20.$

c) Ha az osztást szorzás követi, akkor a balról jobbra szabálytól eltérő műveleti sorrendet zárójellel kell jelezni.

Pl.: $(6:3)\cdot 2=2\cdot 2=4,$ $6:(3\cdot 2)=6:6=1.$

(Zárójelek elhagyása esetén a balról jobbra szabály 4-et ad eredményül.)

d) Ha az osztást törtvonal jelzi, az egyenértékű azzal, mintha az osztandó és az osztó zárójelben állna.

Pl.: $(40-5):(4+3)+4=\frac{40-5}{4+3}+4=\frac{35}{7}+4=5+4=9;$

$8-(50+4):(2+7)=8-\frac{50+4}{2+7}=8-\frac{54}{9}=8-6=2.$

e) A műveletek egyértelmű elvégzését tehát zárójelekkel adjuk meg. A zárójelet tartalmazó kifejezések kiszámításakor először a zárójelben levő műveleteket végezzük el. A zárójelen belül előbb a

szorzást és osztást a kijelölt sorrendben, majd az összeadást és a kivonást végezzük el. A zárójelen kívüli számokkal a visszamaradt műveleteket ismét szorzás, osztás, majd összeadás, kivonás sorrendben hajtjuk végre.

Pl.: $18+5\cdot(4-2)-3\cdot(24-20+2)+(14:2)=$
$=18+5\cdot 2-3\cdot 6+7=18+10-18+7=17.$

Az eddig használt *kerek zárójel* ( ) mellett használatos még a *szögletes zárójel* [ ] és a *kapcsos zárójel* { }. Ha több zárójelet egymásba skatulyázva tartalmaz egy kifejezés, akkor először a legbelső, majd rákövetkező, stb. zárójelben levő műveleteket végezzük el.

Pl.: $\{65-[42-(20-8)]-6\}=\{65-[42-(12)]-6\}=$
$=\{65-[30]-6\}=\{65-30-6\}=29.$

2.6 Oszthatóság

A természetes számhalmazban az osztás nem mindig végezhető el maradék nélkül.

Legyen $a, b \in N$. A b szám akkor osztható a-val, ha $\exists\, c \in N$ (olv.: van olyan c az N halmazban), amelyre $b = a \cdot c$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az a szám *osztója* a b számnak vagy röviden: b *osztható* a-val. Jele: $a \mid b$.

Egy természetes szám osztói tehát azok a számok, amelyek maradék nélkül meg vannak benne. Pl. 15-nek osztója 3, de nem osztója 4. Minden szám osztható 1-gyel és önmagával, ezért a szám ezen kívüli osztói a fontosak, amelyeket *valódi osztóknak*, míg az előbbi kettőt *nem valódi osztónak* nevezzük.

a) 2-*vel oszthatók*, más szóval *párosak* azok a számok, amelyeknél az egyesek helyén 0, 2, 4, 6 vagy 8-as számjegy áll; a többi szám pedig a *páratlan számok* halmazát alkotja.

Pl.: a 6848, 454, 320, 45896, 12 számok 2-vel oszthatók, párosak.

b) 3-mal az a szám osztható, amelynél a számjegyek összege 3-mal osztható.

Pl.: a 45618 szám osztható 3-mal, mert a számjegyek összege:
4 + 5 + 6 + 1 + 8 = 24 osztható 3-mal.

c) 4-gyel az a szám osztható, amelynek az utolsó két jegyéből álló szám osztható 4-gyel.

Pl.: a 3912 szám osztható 4-gyel, mert a 12 – az utolsó két jegyből álló szám – osztható 4-gyel.

d) 5-tel az a szám osztható, amelynek utolsó jegye 0 vagy 5.

Pl.: a 7630 vagy a 895 osztható 5-tel.

e) 6-tal az a szám osztható, amely páros és 3-mal osztható.

Pl.: a 738 osztható 6-tal, mert páros szám és 7 + 3 + 8 = 18 osztható 3-mal.

f) 7-tel osztható a szám, ha számjegyeit hátulról hármasával csoportosítva és váltakozó előjellel összeadva, a kapott szám abszolút értéke osztható 7-tel.

Pl.: a 6681647 osztható 7-tel, mert + 647 – 681 + 6 = – 28, és 28 osztható 7-tel

g) 8-cal az a szám osztható, amelynek az utolsó három jegyéből álló szám osztható 8-cal.

Pl.: a 2152 osztható 8-cal, mert 152 : 8 = 19.

h) 9-cel az a szám osztható, amelyben a számjegyek összege 9-cel osztható.

Pl.: a 62532 osztható 9-cel, mert 6 + 2 + 5 + 3 + 2 = 18 osztható 9-cel.

i) 10-zel az a szám osztható, amelynek az utolsó jegye 0.

Pl.: 9430 vagy 4657830.

j) 11-gyel az a szám osztható, amelynél a páros helyen álló jegyek összege megegyezik a páratlan helyen álló jegyek összegével, vagy ezen összegek különbsége 11-gyel osztható.

Pl.: az 587301 osztható 11-gyel, mivel a páros helyen álló jegyek összege: 8+3+1=12 megegyezik a páratlan helyen álló jegyek összegével: 5+7+0=12 (587301:11=53391).

A 7 263 619 szám osztható 11-gyel, mivel a páratlan helyen álló jegyek öszszegének: 7+6+6+9=28, és a páros helyen álló jegyek összegének:2+3+1=6 különbsége $28-6=22$ osztható 11-gyel. (7263619:11=660329)

Feladat: A megismert szabályok felhasználásával igazolja, hogy a 2520 szám 1-től 10-ig minden egész számmal osztható.

2.7 Prímszám, összetett szám, prímtényezőkre bontás és hatványozás

Minden olyan 1-nél nagyobb egész számot, amelynek nincsen valódi osztója *prímszámnak* (*törzsszámnak*), az olyant pedig, amelynek van valódi osztója, *összetett számnak* nevezzük.

Pl.: az 5, 11, 23, 421, 5233 prímszámok, a 4, 27, 180, 2486 összetett számok.

Az 1-et nem soroljuk sem a prím-, sem az összetett számok közé.

Az összetett szám összes osztóját a prímszámosztók meghatározásával tudjuk előállítani. A prímszámosztókat *prímtényezőknek* nevezzük.

A **számelmélet alaptétele**: Az összetett számok egyértelműen felírhatók prímszámok szorzataként (a tényezők sorrendjét nem vesszük figyelembe).

A prímtényezőkre bontás egyik módja, hogy az adott számot elosztjuk a legkisebb prímszámmal, amelyik a számnak osztója. A hányadost ismét elosztjuk a benne található legkisebb prímszámmal, és ezt addig ismételjük, amíg a hányados 1 lesz. Az így előállított prímszámok az adott szám prímtényezői. Az eljárás áttekinthető, ha az adott számot leírjuk és a szám mellé húzunk egy függőleges vonalat, majd mellé írjuk az első prímszámosztót. A há-

nyadost a szám alá írjuk, s az előbbi lépést addig ismételjük, míg hányadosul 1-et nem kapunk.

Példák

1. Írjuk fel 32 prímtényezős alakját.

Megoldás:

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

A 32 legkisebb prímtényezője 2. Mivel minden hányadosnak is 2 a legkisebb prímtényezője ezért, prímtényezős alakja: $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2. Határozzuk meg 1512 prímtényezőit.

Megoldás:

1512	2
756	2
378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Az adott szám prímszámtényezőkre bontva: $1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

Látjuk, hogy gyakran előfordul több közös tényező, ezért a prímtényezős alakban való felírás rövidíthető, ha az egyenlő tényezőket *hatvány* kifejezésként írjuk fel a következő jelölés bevezetésével: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (olv.: kettő a harmadikon vagy kettő a köbön); $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ (l. a 3.9 pontot). A közös tényezőt, pl. a 2-t vagy a 3-at *a hatvány alapjának*, a fölé írt számot, amely megmutatja, hogy az alapot hányszor kell tényezőül venni, *kitevőnek* nevezzük.

Pl.: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ (5 az alap, 4 a kitevő). Ezzel a rövidített írásmóddal a 32 és 1512 prímtényezős alakja: $32 = 2^5$, $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$.

2.8 A legnagyobb közös osztó

Azok a számok, amelyekkel két vagy több adott szám mindegyike maradék nélkül osztható, az adott számok *közös osztói*.

Pl.: 18 és 30 közös osztói: az 1, 2, 3 és 6.

Azokat a számokat, amelyeknek az egységen kívül más közös osztójuk nincsen, *relatív prímszámoknak* nevezzük.

Pl.: 8 és 9 relatív prímszámok, mivel 8-nak 1, 2 és 4 az osztója, 9-nek pedig 1 és 3, tehát az egységen kívül nincs közös osztójuk.

Az a legnagyobb szám, amely két vagy több adott szám mindegyikében maradék nélkül megvan, az adott számok *legnagyobb közös osztója*. Jelölése: kerek zárójelben az adott számok pontosvesszővel való elválasztása.

Pl.: $(18;30) = 6$ (olv.: 18 és 30 legnagyobb közös osztója egyenlő hattal) és $(8;9) = 1$, vagyis 8 és 9 relatív prímszámok.

Az adott számok valamennyi közös osztója egyben osztója a legnagyobb közös osztónak is, ezért a legnagyobb közös osztó prímtényezői az adott számok közös prímtényezői.

Több szám legnagyobb közös osztóját úgy kapjuk meg, hogy a számokat felbontjuk prímtényezőikre, és a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványkitevővel véve összeszorozzuk.

Pl.: Határozzuk meg a 432, az 1080 és az 1512 legnagyobb közös osztóját.

Megoldás:

432	2	1080	2	1512	2
216	2	540	2	756	2
108	2	270	2	378	2
54	2	135	3	189	3
27	3	45	3	63	3
9	3	15	3	21	3
3	3	5	5	7	7
1		1		1	

Az adott számok prímtényezős alakjai:

$$432 = 2^4 \cdot 3^3, \quad 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5, \quad 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$$

A közös tényezők 2 és 3, az előforduló legkisebb hatványkitevővel: 2^3 és 3^3, tehát $(432;1080;1512) = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

Két szám legnagyobb közös osztóját úgy is meghatározhatjuk, hogy a nagyobb számot elosztjuk a kisebbel, s ha az osztási maradék 0, akkor a kisebb szám egyúttal a legnagyobb közös osztó is.

Ha a maradék 0-tól különböző, akkor elosztjuk vele a volt osztót, az új maradékkal ismét az előző osztót. Ezt az ún. *láncosztást* mindaddig végezzük, amíg maradékul 0-t nem kapunk. Az utolsó osztó lesz a legnagyobb közös osztó. Ez az eljárás az ún. *euklideszi algoritmus*.

Pl.: Határozzuk meg a 252 és az 1080, valamint 43 és 68 legnagyobb közös osztóját az euklideszi-algoritmus alkalmazásával.

$$1080 = 252 \cdot 4 + 72$$
$$252 = 72 \cdot 3 + 36$$
$$72 = 36 \cdot 2 + 0$$

0 maradékot adó utolsó osztó a 36, tehát $(252;1080) = 36$.

$$68 = 43 \cdot 1 + 25$$
$$43 = 25 \cdot 1 + 18$$
$$25 = 18 \cdot 1 + 7$$
$$18 = 7 \cdot 2 + 4$$
$$7 = 4 \cdot 1 + 3$$
$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Mivel az utolsó osztó 1, így $(43;68) = 1$, tehát relatív prímszámok.

2.9 A legkisebb közös többszörös

Azok a számok, amelyekben két vagy több adott szám mindegyike maradék nélkül megvan, az adott számok *közös többszörösei.*

Pl.: 18 és 30 közös többszörösei: 90, 180, 270, 360.

A közös többszörösök közül a legkisebbet az adott számok *legkisebb közös többszörösének* nevezzük. *Jelölése*: szögletes zárójelben az adott számok pontosvesszővel elválasztott felsorolása.

Pl.: $[18;30] = 90$ (olv.: 18 és 30 legkisebb közös többszöröse 90).

A legkisebb közös többszörösnek az adott számok összes prímtényezőit kell tartalmaznia, mégpedig az előforduló legmagasabb hatványon, mert különben nem volna mindegyikkel osztható.

A legkisebb közös többszöröst úgy kapjuk meg, hogy az adott számok összes prímtényezőit az előforduló legnagyobb hatványkitevővel véve összeszorozzuk.

Pl.: Határozzuk meg 100, 35 és 40 legkisebb közös többszörösét.

Megoldás:

100 | 2	40 | 2	35 | 5
50 | 2	20 | 2	7 | 7
25 | 5	10 | 2	1 |
5 | 5	5 | 5	
1 |	1 |	

Prímtényezős alakban: $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $35 = 5 \cdot 7$, $40 = 2^3 \cdot 5$. A különböző prímtényezők 2, 5 és 7, az előforduló legmagasabb hatványok: 2^3, 5^2 és 7. Ezek szorzata a legkisebb közös többszörös: $[100;35;40] = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 8 \cdot 25 \cdot 7 = 1400$, tehát 1400 az a legkisebb szám, amelyben a 100 is, a 35 is és a 40 is maradék nélkül megvan.

Két szám legkisebb közös többszörösét úgy is meghatározhatjuk, hogy legnagyobb közös osztójukkal elosztjuk az egyik számot, és e hányadossal megszorozzuk a másikat. Az így kapott szorzat a legkisebb közös többszörös.

Pl.: Határozzuk meg 36 és 48 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.

Megoldás: $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$, tehát $(36;48) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Osszuk el a 36-ot a legnagyobb közös osztóval: $36:12 = 3$. A másik számot szorozzuk meg 3-mal: $48 \cdot 3 = 144$. Tehát 36 és 48 legkisebb közös többszöröse 144, azaz [36; 48] = 144.

Megjegyzés: Két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének szorzata egyenlő a két szám szorzatával: $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$.

Pl.: $(36; 48) \cdot [36; 48] = 12 \cdot 144 = 36 \cdot 48 = 1728$.

2.10 A teljes indukció

A természetes számok körében különböző állítások bizonyításához gyakran használjuk az ún. *teljes indukció módszerét.*

Tartozzék minden $n \in N^+$ számhoz egy-egy A_n állítás. Legyen az állítás n = 1-re igaz, vagyis A_1 igaz. Ha tetszőleges, de rögzített

$n \geq 1$ esetén az A_n igaz voltából következik az A_{n+1} állítás igaz volta, akkor az állítás minden $n \in N^+$-re igaz.

A teljes indukcióval való bizonyítás három lépése:

1. A bizonyítandó állítást igazoljuk $n = 1$-re, (igazoljuk az A_1 állítást);

2. Feltesszük, hogy az állítás egy tetszőleges $n = k \geq 1$-re igaz (feltételezzük, hogy A_k igaz).

3. Az előbbi feltételezést, mint igaz állítást felhasználva bizonyítjuk, hogy az állítás k+1-re igaz (bizonyítjuk, hogy A_{k+1} igaz).

Pl.: Bizonyítandó, hogy az első n számú páratlan szám összege n^2, vagyis az $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ $(n \in N^+)$ azonosság igaz.

Megoldás

1. Az $n = 1$-re az azonosság teljesül, mivel $1 = 1^2$ igaz (A_1 állítás)

2. Feltesszük, hogy az azonosság teljesül $n = k \geq 1$-re, azaz

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ (A_k állítás).

3. Az A_{k+1} állítás bizonyításához, vagyis az $n = k + 1$-re felhasználjuk az A_k állítást:

$$[1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

tehát $n = k + 1$-re az eredetileg felírt azonosság igaz, s így minden n-re is igaz.

Megjegyzés: Előfordul, hogy $n > 1$ egész számra van csak értelme az állításnak. Ekkor erre az n-re igazoljuk az állítást és a továbbiakban a fentiek szerint járunk el.

A teljes indukció elve vagy axiómája alapján belátható, hogy a természetes számok N halmaza végtelen halmaz.

Az N halmaz számosságát megszámlálhatónak (megszámlálhatóan végtelennek) nevezzük.

Feladatok

1. Bontsuk prímtényezők szorzatára az *a*) 1008; *b*) 630; *c*) 1512; *d*) 2772 számokat.

[*a*) $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$]; [*b*) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$];

[*c*) $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$]; [*d*) $2772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$].

2. Határozzuk meg az *a*) 1008 és 630; *b*) 1260, 1512 és 2772; *c*) 87 és 41; *d*) 25527 és 53667 számok legnagyobb közös osztóját.

[*a*) $(1008; 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$];

[*b*) $(1260; 1512; 2772) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$];

[*c*) $(87; 41) = 1$]; [*d*) $(25527; 53667) = 201$].

3. Határozzuk meg az *a*) 630 és 1008; *b*) 36, 40 és 126; *c*) 1260 és 3024 számok legkisebb közös többszörösét.

[*a*) $[630; 1008] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$]; [*b*) $[36; 40; 126] = 2520$];

[*c*) $[1260; 3024] = 15120$].

4. Bizonyítsuk be, hogy az első n pozitív egész szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$, azaz

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy az első n négyzetszám összege $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

azaz $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy az első n páros szám összege $(n + 1)n$.

2.11 Az egész számok halmaza (Z)

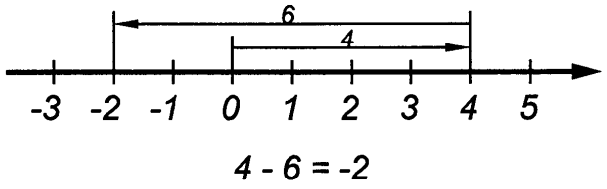
A természetes számok (nem negatív egész számok) mellett a mindennapi munkánk során is rendszeresen használjuk az ún. negatív számokat. Pl.: Hány °C-ot mutat hajnalban a hőmérő, ha este 4°C-ot mutatott, de hajnalra 6°C-kal alacsonyabb lett a hőmérséklet?

Ha a 4. fokbeosztástól 6 egységet haladunk lefelé, akkor fagypont alá jutunk 2°C-kal, és azt mondjuk, hogy –2°C (olv.: mínusz 2 Celsius fok van). Este még 4°C meleg volt, hajnalra pedig 2°C hideg lett. A meleg és a hideg ellentétes irányú mennyiségek; az egyik irányt *pozitívnak*, a másik irányt *negatívnak* mondjuk. A pozitív és a negatív mennyiségeket a szám elé írt + (plusz), illetve – (mínusz) előjellel különböztetjük meg. Pl.: +4°C = 4 fok meleg; –2°C = 2 fok hideg.

A nullánál nagyobb számot *pozitív*, a nullánál kisebb számot *negatív számnak* nevezzük. A természetes számok halmazát a 0 és a pozitív egész számok alkotják.

Negatív számot ad eredményül az $a - b = x$ különbség, ha $a < b$. Pl.: a fenti példát így írjuk le: $4 - 6 = -2$. Ha a kisebbítendő és a kivonandó egyenlő egymással, azaz $a = b$, akkor eredményül 0-t kapunk: $a - a = 0$. A 0 nem tartozik sem a negatív, sem a pozitív számokhoz, hanem azokat szétválasztja.

A negatív számok képét a számegyenes 0-tól balra (negatív irányban) jelöljük ki. A –2 képét megkapjuk, ha a számegyenes +4 pontjától 6 egységet mérünk fel negatív irányba (bal felé; 17. ábra).



17. ábra. Pozitív és negatív egész számok

A számegyenesen a 0-tól a egységet felmérve pozitív és negatív irányba, $+a$ pozitív ill. $-a$ negatív számok képét kapjuk. A $+a$ és a $-a$ számok egymás ellentettjei vagy egymás negatívjai: $a+(-a)=0$. *A 0-nál nagyobb természetes számok ellentettjeinek összessége a negatív egész számok halmaza.* A pozitív egész számok, a negatív egész számok és a 0 alkotják az *egész számok halmazát*, amelyet Z-vel jelölünk.

Az egész számok Z halmaza a valós számok R halmazának részhalmaza.

$$Z := \{x \in R \mid \exists\, m,n \in N : x = m - n\}$$

Az R, N és Z között $N \subset Z \subset R$ kapcsolat áll fenn. A Z halmazban a testaxiómák közül nem teljesül a 9., vagyis az osztás nem végezhető el minden esetben.

Az egész számok $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ halmazában tehát az összeadás invertálható, elvégezhető a kivonás, s így mindig megoldható az $x + b = a$ egyenlet úgy, hogy ha $a, b \in Z$, akkor $x \in Z$ $(x = a - b \in Z)$.

Az egész számok halmaza *megszámlálható számosságú* (l. a 2.27 pontot).

Megjegyzés: A negatív számok először *Diophantos* munkáiban jelennek meg kb. 250 körül. Alkalmazásukkal *M. Stifel* (1487–1567): *Arithmetica integra* (1544) c. írásában találkozunk, de az egész számok matematikai alapjait *H. Hankel* (1839–1874) munkáiban találjuk meg.

2.12 A számok abszolút értéke és nagysági viszonyai

Két ellentett szám a számegyenes 0 pontjától különböző irányban, de azonos távolságra van, s azt mondjuk, hogy abszolút értékük azonos. Az abszolút érték jele a számot közrefogó két függőleges vonal: | |.

Egy tetszőleges a szám abszolút értéke

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0 \\ 0, & \text{ha } a = 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

azaz pozitív szám abszolút értéke magával a számmal, negatív szám abszolút értéke ellentettjével, a nulla abszolút értéke pedig nullával egyenlő.

Pl.: $|+7| = 7$ (+ 7 abszolút értéke 7), $|+81| = 81$, $|-7| = 7$ (– 7 abszolút értéke 7), $|-35| = 35$.

Két ellentett szám abszolút értéke egyenlő:

$$|+4| = |-4|, \quad \text{mert } 4 = 4.$$

A számok nagysága, a számegyenesen tekintve, balról jobbra haladva (pozitív irányba) nő. A negatív számok tehát annál nagyobbak, mennél közelebb esnek a nullához.

Pl.: $-35 < -18 < -7 < -4 < -1 < 0.$

A negatív számok közül tehát az a nagyobb, amelynek abszolút értéke kisebb.

Pl.: $|-18| = 18;\ |-2| = 2,$ de $-18 < -2.$

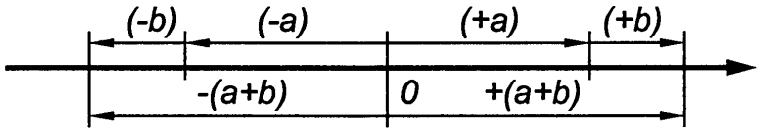
Minden negatív szám kisebb nullánál és bármely pozitív számnál. Minden pozitív szám nagyobb nullánál és bármely negatív számnál.

Pl.: $a < 0$ jelenti, hogy a negatív szám; és $b > 0$ jelenti, hogy b pozitív szám.

2.13 Műveletek a Z halmazban (az egész számok halmazában)

a) Összeadás

Egyező előjelű számokat úgy adunk össze, hogy abszolút értékük összegét a közös előjellel vesszük (18. ábra).



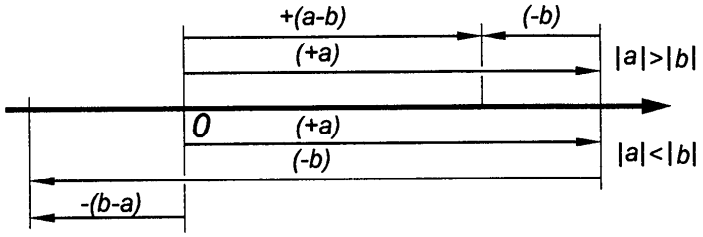
18. ábra. Két egyenlő előjelű szám összeadása

Pl.: $(+7) + (+18) = +(|+7| + |+18|) = +(7 + 18) = +25 = 25;$
$(-12) + (-5) = -(|-12| + |-5|) = -(12 + 5) = -17.$

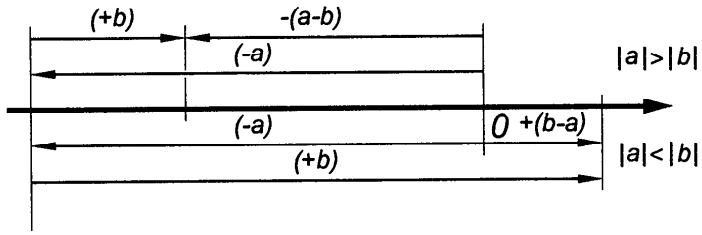
Általánosan $(a > 0;\ b > 0)$:

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b;$$
$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Két különböző előjelű számot úgy adunk össze, hogy a nagyobb abszolút értékű számból kivonjuk a kisebb abszolút értékű számot, és a különbséget a nagyobb abszolút értékű szám előjelével látjuk el (19. és 20. ábra).



19. ábra. Két különböző előjelű szám összeadása



20. ábra. Két különböző előjelű szám összeadása

Példák: $(+15)+(-4)=+(|+15|-|-4|)=+(15-4)=+11=11$;
$(+21)+(-27)=-(|-27|-|+21|)=-(27-21)=-6$;
$(-9)+(+2)=-(|-9|-|+2|)=-(9-2)=-7$;
$(-13)+(+25)=+(|+25|-|-13|)=+(25-13)=+12=12$.

Általánosan ($a>0$; $b>0$):

$$(+a)+(-b)=+(a-b), \text{ ha } a>b$$
$$(+a)+(-b)=-(b-a), \text{ ha } a<b$$
$$(-a)+(+b)=-(a-b), \text{ ha } a>b$$
$$(-a)+(+b)=+(b-a), \text{ ha } a<b.$$

b) Kivonás

Előjeles számoknál a *kivonás műveletét összeadásra vezethetjük vissza* azáltal, hogy a kivonandó előjelét ellenkezőre változtatva hozzáadjuk a kisebbítendőhöz.

Pl.: $(+9)-(+3)=(+9)+(-3)=+(9-3)=+6=6$;
$(+9)-(-3)=(+9)+(+3)=+9+3=+12=12$;
$(-9)-(-3)=(-9)+(+3)=-(9-3)=-6$.

Általánosan $(a > 0; b > 0)$:

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = a - b;$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = a + b.$$

Egy kifejezésben több előjeles szám összeadását és kivonását a következő módon végezhetjük el, vagy más szóval a kifejezés *algebrai összegét* a következő módon képezhetjük:

1. ha a zárójelben és a zárójel előtt egyező előjel van, akkor a számot zárójel nélkül + előjellel, ha különböző az előjel, akkor a számot zárójel nélkül – előjellel írjuk le; majd

2. összeadjuk külön a + előjelűek abszolút értékét, és külön a – előjelűek abszolút értékét;

3. a nagyobb összegből kivonjuk a kisebb összeget, s azt a nagyobb összeget adó számok előjelével látjuk el.

Pl.: $(-9) + (+4) - (+7) - (-21) + (-8) = -9 + 4 - 7 + 21 - 8,$
$|+4| + |+21| = 25; \quad |-9| + |-7| + |-8| = 24,$
s mivel $25 > 24$, ezért $+(25 - 24) = 1.$

Ha már ezeket a lépéseket jól begyakoroltuk, akkor a zárójelek felbontása után így folytathatjuk az összevonást: $-9 + 4 - 7 + 21 - 8$ esetén: mínusz 9 plusz 4 az mínusz 5 és mínusz 7 az mínusz 12, mínusz 12 plusz 21 az plusz 9, plusz 9 mínusz 8 az plusz 1. Az összevonás eredménye tehát 1.

c) Szorzás

Két előjeles számot úgy szorzunk össze, hogy abszolút értéküket összeszorozzuk, s azt egyenlő előjelű tényezők esetén plusz, különböző előjelű tényezők esetén mínusz jellel látjuk el.

Pl.: $(+9) \cdot (+5) = +(|+9| \cdot |+5|) = +(9 \cdot 5) = +45 = 45;$
$(-9) \cdot (+5) = -(|-9| \cdot |+5|) = -(9 \cdot 5) = -45;$
$(-9) \cdot (-5) = +(|-9| \cdot |-5|) = +(9 \cdot 5) = +45 = 45;$
$(+9) \cdot (-5) = -(|+9| \cdot |-5|) = -(9 \cdot 5) = -45.$

Általánosan $(a > 0; b > 0)$:

$$(+a)(+b) = +ab = ab; \quad (-a)(-b) = +ab = ab;$$
$$(-a)(+b) = -ab; \quad (+a)(-b) = -ab.$$

Megjegyzés: A szorzás jelét, a pontot, zárójeles vagy betű kifejezések közé a továbbiakban nem tesszük ki, hacsak azt az egyértelműség nem kívánja meg. Így pl. *ab* jelentése: $a \cdot b$.

Több tényezőből álló szorzat előjele +, ha a mínusz előjelű tényezők száma páros, és –, ha a mínusz előjelű tényezők száma páratlan.

Pl.: $(-3)(+2)(-1)(+4) = +(3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4) = +24 = 24;$
$(-3)(-2)(-1)(+4) = -(3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4) = -24.$

d) Osztás

Két számot úgy osztunk – ha az osztás a Z halmazban elvégezhető –, hogy abszolút értékük hányadosát egyenlő előjelű osztandó és osztó esetén plusz, különböző előjelű osztandó és osztó esetén pedig mínusz előjellel látjuk el.

Pl.: $(-12) : (-3) = +(|-12| : |-3|) = +(12 : 3) = +4 = 4;$
$(-8) : (+4) = -(|-8| : |+4|) = -(8 : 4) = -2.$

Általánosan $(a > 0; b > 0)$:

$$(+a) : (+b) = +(a : b) = a : b; \quad (-a) : (-b) = +(a : b) = a : b;$$
$$(-a) : (+b) = -(a : b); \quad (+a) : (-b) = -(a : b).$$

2.14 Műveletek nullával

a) Összeadás. Nullát bármely számhoz hozzáadva, összegül magát a számot kapjuk: $a + 0 = a$.

Pl.: $17 + 0 = 17; \quad 0 + 17 = 17; \quad -238 + 0 = -238.$

A nulla összeadandó elhagyható.

b) *Kivonás.* Nullát bármely számból kivonva, különbségül magát a számot kapjuk: $a - 0 = a$. Nullából pozitív számot kivonva negatív számot, negatív számot kivonva pedig pozitív számot kapunk: $0 - (+a) = -a$; $0 - (-a) = +a = a$

Pl.: $7 - 0 = 7$; $-16 - 0 = -16$; $178 - 0 = 178$.
$0 - (+5) = 0 - 5 = -5$; $0 - (-5) = +5 = 5$.

A nulla kivonandó elhagyható.

c) *Szorzás.* Ha nullát tetszőleges számmal szorzunk, szorzatul nullát kapunk: $a \cdot 0 = 0$, ill. $0 \cdot a = 0$.

Pl.: $12 \cdot 0 = 0$; $-324 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.

d) *Osztás.* Ha nullát tetszőleges – nullától különböző – számmal elosztjuk, hányadosul nullát kapunk: $0 : a = 0$, $(a \neq 0)$.

Pl.: $0 : 12 = 0$; $0 : (-12) = 0$; $0 / 1235 = 0$.

A nullával való osztás nincs értelmezve.

2.15 A racionális számok Q halmaza

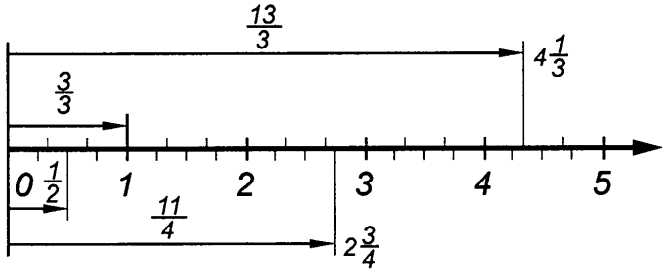
A természetes számok és az egész számok halmazában az osztás nem mindig végezhető el. Pl.: $10 : 2 = 5$, de $10 : 3 = 3$, és maradt 1. Az egész számok halmazát célszerű úgy kibővíteni, hogy az utóbbi osztás is elvégezhető legyen. Egy almát három egyenlő részre osztva, mindegyik rész az almának harmad része vagy egyharmada, amit 1/3 ill. $\frac{1}{3}$ alakban jelölünk. Ezekből a részekből kettő, az alma kétharmad részét jelenti, azaz $\frac{2}{3}$ (olv.: kétharmad vagy kettő per három).

Általában, ha a k egészet n egyenlő részre osztjuk, ahol $k, n \in Z$,

$n \neq 0$, akkor ezt $\frac{k}{n}$-nel jelöljük és a $\frac{k}{n}$ számot *törtszámnak vagy közönséges törtnek* nevezzük. A k a tört *számlálója*, n a *nevezője* és az osztás jele a *törtvonal*.

Az $ax = b$ egyenlőséghez most már megadhatjuk azt az x számot, amely kielégíti azt: $x = \frac{b}{a}$, $(a \neq 0)$, és ezt úgy értelmezzük, hogy $a \cdot \frac{b}{a} = b$ legyen. A két egész szám hányadosaként felírható számokat *racionális számoknak nevezzük. A racionális számok halmazát Q-val jelöljük.*

A fentiek alapján $Z \setminus \{0\}$ halmazba tartozó egész számok hányadosát törtszámnak, közönséges törtnek, más szóval racionális számnak nevezzük. Azt az $\frac{a}{b}$ törtszámot – ahol $a,b > 0$ –, amelynek számlálója kisebb, mint a nevezője, pl. $\frac{5}{6}$, $\frac{43}{51}$, *valódi törtnek* (pozitív tört) nevezzük. A valódi tört értéke 1-nél kisebb. Az *áltört* számlálója nagyobb, mint a nevezője vagy azzal egyenlő s így értéke 1-nél nagyobb vagy 1-gyel egyenlő. Pl.: $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{35}{35}$. Az egész számok is tört alakban írhatók, ha a nevezőjüket 1-nek vesszük. Pl.: $\frac{7}{1}$, $\frac{39}{1}$. Ha az áltört számlálója nem osztható maradék nélkül a nevezőjével, akkor az osztás eredménye egész részből és törtrészből áll.



21. ábra. Törtszámok

Pl.: $\frac{11}{4}$ egyenlő 2 egész és $\frac{3}{4}$, röviden $2\frac{3}{4}$, $\frac{13}{3}$ egyenlő 4 egész és $\frac{1}{3}$, azaz $4\frac{1}{3}$. A $\frac{11}{4}$ és $\frac{13}{3}$ áltörtet tehát $2\frac{3}{4}$ ill. $4\frac{1}{3}$ ún. *vegyes szám* alakjában írtuk fel (21. ábra).

Áltörtet úgy alakítunk át vegyes számmá, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel; a nevező egész számszorosa a vegyes szám egész része, a maradék pedig a törtrész számlálója.

Pl.: $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$, $\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$ (16 : 3 = 5 és marad 1; 32 : 5 = 6 és marad 2).

Vegyes számot úgy alakítunk át áltörtté, hogy a törtrész nevezőjével megszorozzuk az egész számot és hozzáadjuk a számlálót; ez lesz az áltört számlálója, a régi nevező pedig az áltört nevezője.

Pl.: $5\frac{2}{3} = \frac{3\cdot 5+2}{3} = \frac{17}{3}$; $12\frac{4}{5} = \frac{5\cdot 12+4}{5} = \frac{64}{5}$.

Összefoglalva, a racionális számokra érvényesek a következők:

A racionális számok Q halmaza a valós számok R halmazának

$$Q := \left\{ x \in R \mid \exists\, m,n \in Z\,(n \neq 0)\colon\ x = \frac{m}{n} \right\}$$

részhalmaza. (Q a latin quotiens = hányados szó kezdőbetűje.)

Az így definiált Q halmaz és az N, Z, R halmazok között az $N \subset Z \subset Q \subset R$ kapcsolat áll fenn.

A racionális számok halmazában a testaxiómák mindegyike teljesül, miként a valós számok R halmazában, de mint tudjuk és még meg is győződünk róla, $Q \neq R$. A racionális számok halmazában mindig megoldható az $ax = b$ egyenlet, úgy, hogy ha $a,b \in Q$ $(a \neq 0)$, akkor $x = \frac{b}{a} \in Q$. Minden racionális szám felírható $\frac{p}{q}$; $p,q \in Z$; $(q \neq 0)$ alakban. A racionális számok halmazáról azt mondjuk, hogy *mindenütt sűrű,* amelynek jelentése:

bármely két különböző racionális szám között mindig van racionális szám.

Pl.: $a, b \in Q$, $\frac{a+b}{2} \in Q$, vagyis az a és b között van $a \neq b$ szám.

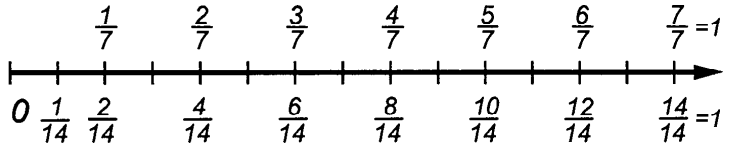
Ebből következik, hogy bármely két racionális szám között végtelen sok racionális szám van. A *Q végtelen halmaz megszámlálható számosságú* (l. a 2.27 pontot).

2.16 Törtszámok egyszerűsítése és bővítése

A tört értéke nem változik, ha mind a számlálót, mind a nevezőt ugyanazzal a nullától különböző számmal megszorozzuk.

Pl.: $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$; $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$.

Ez az eljárás a *tört bővítése*. Pl.: a 4/7 törtből a 20/35 tört ötös tényezővel; 8/14 tört kettes tényezővel való bővítéssel származik (22. ábra).



22. ábra. Azonos értékű törtek

A tört értéke nem változik, ha mind a számlálót, mind a nevezőt ugyanazzal a a nullától különböző számmal elosztjuk.

Pl.: $\frac{12}{14} = \frac{12:2}{14:2} = \frac{6}{7}$; $\frac{3}{12} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$.

Ez az eljárás a tört *egyszerűsítése* (22. ábra). Egyszerűsíteni a számláló és a nevező közös osztóival célszerű. A tört legegyszerűbb alakját úgy kapjuk meg, hogy a számláló és a nevező *legnagyobb közös osztójával* egyszerűsítünk.

Pl.: $\frac{105}{126}$ tört számlálója is és nevezője is osztható 3-mal, tehát

$$\frac{105}{126}=\frac{105:3}{126:3}=\frac{35}{42}$$

A számlálót és a nevezőt tovább oszthatjuk 7-tel:

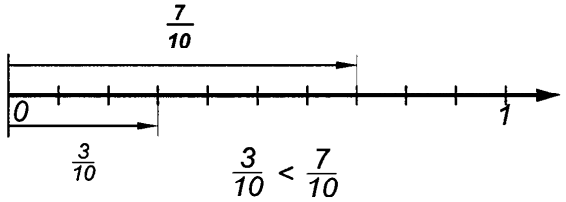
$$\frac{35}{42}=\frac{35:7}{42:7}=\frac{5}{6}.$$

Ha megkeressük 105 és 126 legnagyobb közös osztóját: $3\cdot 7=21$-et, és azzal egyszerűsítünk, akkor a tört legegyszerűbb, tovább már nem egyszerűsíthető alakját kapjuk:

$$\frac{105}{126}=\frac{105:21}{126:21}=\frac{5}{6}.$$

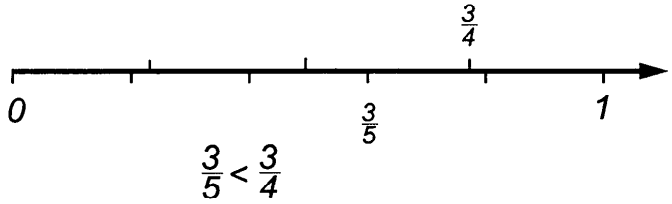
2.17 Törtszámok összehasonlítása, közös nevezőre hozásuk

Két egyenlő nevezőjű pozitív törtszám közül az a nagyobb, amelynek a számlálója abszolút értékben nagyobb. Pl.: $\frac{3}{10}<\frac{7}{10}$ (olv.: három tized kisebb, mint hét tized) (23. ábra). $\frac{6}{7}>\frac{3}{7}$ (olv.: hat heted nagyobb, mint három heted.)



23. ábra. Egyenlő nevezőjű törtek

Két egyenlő számlálójú pozitív törtszám közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője abszolútértékben kisebb (24. ábra).



24. ábra. Egyenlő számlálójú törtek

Például: $\frac{3}{5}<\frac{3}{4}$, $\frac{25}{31}>\frac{25}{37}$.

Különböző számlálójú és nevezőjű törteket először *közös nevezőre* hozunk, és azután hasonlítunk össze. Közös nevezőnek célszerű a nevezők legkisebb közös többszörösét választani. A tört értéke változatlan marad, ha az új számláló annyiszorosa a réginek, ahányszorosa az új nevező a réginek. Tehát *a közös nevező megkeresése után a törtek régi számlálóját rendre meg kell szorozni azzal a számmal, ahányszor a régi nevezőik a közös nevezőben megvannak.*

Pl.: Hozzuk közös nevezőre és hasonlítsuk össze az 1/6, 3/8 és 2/5 törteket. A nevezők legkisebb közös többszöröse: 120, mert $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2^3$; 5 pedig prímszám, tehát $[6; 8; 5] = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 3 \cdot 8 \cdot 5 = 120$, s így a közös nevező 120. A törtek nevezőivel osztjuk a közös nevezőt, és a hányadossal szorozzuk a számlálókat:

$120 : 6 = 20$, tehát $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 20}{120} = \frac{20}{120}$; $120 : 8 = 15$, tehát $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 15}{120} = \frac{45}{120}$;

$120 : 5 = 24$, tehát $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 24}{120} = \frac{48}{120}$.

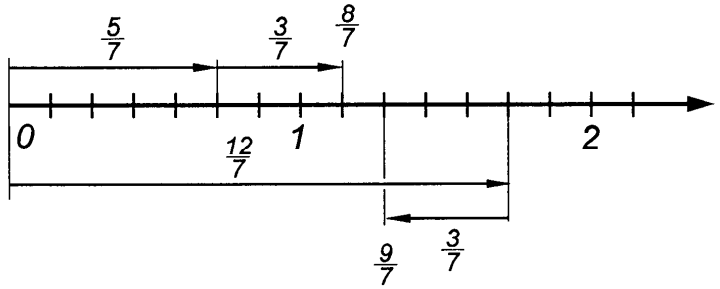
A három törtszám között a nagyságrend:

$\frac{48}{120} > \frac{45}{120} > \frac{20}{120}$, azaz $\frac{2}{5} > \frac{3}{8} > \frac{1}{6}$.

2.18 Műveletek a racionális számok halmazában

a) Összeadás és kivonás

Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze (vonunk ki), hogy számlálóikat összeadjuk (kivonjuk), nevezőiket pedig változatlanul hagyjuk.

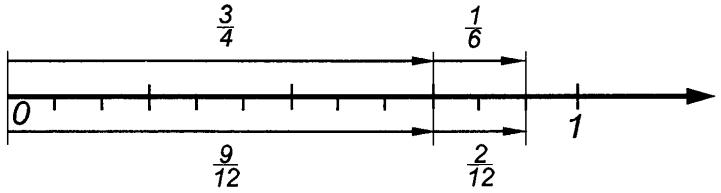


25. ábra. Egyenlő nevezőjű törtek összeadása és kivonása

Pl.: $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5+3}{7}=\frac{8}{7}$; $\frac{12}{7}-\frac{3}{7}=\frac{12-3}{7}=\frac{9}{7}$ (25. ábra).

Ha a nevezők különbözők, akkor a törteket először közös nevezőre hozzuk.

Pl.: $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$ (26. ábra), $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.



$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$

26. ábra. Különböző nevezőjű törtek összeadása

Pl.: Háromtagú kifejezések összegezése: $\frac{6}{17}+\frac{8}{17}-\frac{3}{17}=\frac{6+8-3}{17}=\frac{11}{17}$;

$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}=\frac{45+20-48}{120}=\frac{17}{120}$.

Vegyes számok összeadásánál és kivonásánál vagy elvégezzük a kijelölt műveletet az egészekkel és külön a törtekkel, vagy előbb áltörtekké alakítjuk őket, és a törtekre vonatkozó szabályok szerint járunk el.

Példák

1. $3\frac{2}{5}+8\frac{3}{10}=3+8+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=11+\frac{4+3}{10}=11\frac{7}{10}$, vagy előbb áltörtté alakítva: $3\frac{2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$, $8\frac{3}{10}=\frac{80+3}{10}=\frac{83}{10}$. 5 és 10 legkisebb közös többszöröse: 10, tehát $\frac{17}{5}=\frac{17\cdot 2}{10}=\frac{34}{10}$ és $3\frac{2}{5}+8\frac{3}{10}=\frac{34}{10}+\frac{83}{10}=\frac{117}{10}=11\frac{7}{10}$.

2. $14-8\frac{2}{3}=?$ Vagy a kisebbítendőből 1 egészet $\frac{3}{3}$ alakban írunk fel, vagy mindkét tagot áltörtté alakítjuk: $13\frac{3}{3}-8\frac{2}{3}=13-8+\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$ vagy

$\frac{14\cdot 3}{3}-\frac{8\cdot 3+2}{3}=\frac{42}{3}-\frac{26}{3}=\frac{42-26}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.

b) Szorzás és osztás

Egy nullától különböző *törtszám reciproka* az a szám, amellyel szorozva eredményül 1-et ad. Ezért egy *törtszám reciprokát úgy kapjuk meg, hogy a számlálót és a nevezőt felcseréljük.*

Pl.: 3/5 reciproka 5/3 , mert $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{15}{15}=1.$

Az $n\neq 0$ egész szám 1 nevezőjű törtszámként is felírható, tehát a reciproka: $\frac{1}{n}$.

A különböző törtalakban adott számok szorzási és osztási műveleteinek szabályai:

Törtszámot egész számmal úgy szorzunk, hogy vagy a számlálót szorozzuk az egésszel, és a nevezőt változatlanul hagyjuk, vagy a nevezőt osztjuk az egésszel (ha maradék nélkül osztható), és a számlálót változatlanul hagyjuk.

Pl.: $\frac{8}{15}\cdot 5=\frac{8\cdot 5}{15}=\frac{40}{15}=2\frac{10}{15}=2\frac{2}{3}$ vagy $\frac{8}{15}\cdot 5=\frac{8}{15:5}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$

Vegyes számot egész számmal úgy szorzunk, hogy előbb a vegyes számot áltörtté alakítjuk, és azután alkalmazzuk az előző szabályt, vagy *külön szorozzuk az egész számmal az egész részt, külön a tört részt, és a kapott szorzatokat összeadjuk.*

Pl.: $4\frac{2}{5}\cdot 6=\frac{4\cdot 5+2}{5}\cdot 6=\frac{22}{5}\cdot 6=\frac{22\cdot 6}{5}=\frac{132}{5}=26\frac{2}{5}$, vagy

$4\frac{2}{5}\cdot 6=4\cdot 6+\frac{2}{5}\cdot 6=24+\frac{12}{5}=24+2\frac{2}{5}=26\frac{2}{5}.$

Egész szám szorzása törtszámmal vagy vegyes számmal a tényezők felcserélhetősége miatt visszavezethető az előző részben tárgyalt esetekre.

Pl.: $8\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 8=\frac{3\cdot 8}{4}=\frac{24}{4}=6,\quad 4\cdot 5\frac{3}{7}=5\frac{3}{7}\cdot 4=\frac{38\cdot 4}{7}=\frac{152}{7}=21\frac{5}{7}.$

Törtszámot egész számmal úgy osztunk, hogy vagy a nevezőt

megszorozzuk az egész számmal, és a számlálót változatlanul hagyjuk, vagy a számlálót elosztjuk az egész számmal, és a nevezőt változatlanul hagyjuk (az utóbbit akkor használjuk, ha az osztás maradék nélkül elvégezhető).

Pl.: $\frac{4}{5}:2=\frac{4}{5\cdot 2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ vagy $\frac{4}{5}:2=\frac{4:2}{5}=\frac{2}{5}$.

Vegyes számot úgy osztunk egész számmal, hogy előbb átalakítjuk a vegyes számot áltörtté, és a fenti szabályt alkalmazzuk.

Pl.: $7\frac{5}{6}:4=\frac{7\cdot 6+5}{6}:4=\frac{47}{6}:4=\frac{47}{6\cdot 4}=\frac{47}{24}=1\frac{23}{24}$.

Törtszámot törtszámmal úgy szorzunk, hogy a számlálók szorzatát elosztjuk a nevezők szorzatával.

Pl.: $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 9}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$.

A *vegyes számokat* előbb áltörtekké alakítjuk:

Pl.: $4\frac{1}{7}\cdot 3\frac{2}{11}=\frac{4\cdot 7+1}{7}\cdot\frac{3\cdot 11+2}{11}=\frac{29}{7}\cdot\frac{35}{11}=\frac{29\cdot 35}{77}=\frac{1015}{77}=13\frac{2}{11}$.

Egész számot úgy osztunk törtszámmal, hogy az egész számot megszorozzuk a tört nevezőjével, és a szorzatot a tört számlálójával elosztjuk, vagy más megfogalmazásban, az egész számot a tört reciprok értékével szorozzuk.

Pl.: $24:\frac{3}{5}=\frac{24\cdot 5}{3}=\frac{120}{3}=40$.

Törtszámot törtszámmal úgy osztunk, hogy az osztandót az osztó reciprokával szorozzuk.

Pl.: $\frac{5}{7}:\frac{4}{9}=\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 9}{7\cdot 4}=\frac{45}{28}=1\frac{17}{28}$; $1\frac{3}{5}:3\frac{1}{5}=\frac{5+3}{5}:\frac{3\cdot 5+1}{5}=\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: A tört egyszerűsítését célszerű a szorzás kijelölésekor végrehajtani.

Pl.: $\frac{8\cdot 5}{5\cdot 16}=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

2.19 Műveletek tizedes törtekkel

Azokat a törtszámokat, amelyeknek a nevezője 10, 100, 1000 stb., *tizedes törteknek* nevezzük. Pl.: 2/10; 5/1000; 34/100. A tízes számrendszerben (a számrendszereket l. a 3.12 pontban) balról jobbra haladva, egy számjegy helyi értéke tízszer kisebb, mint a megelőző számjegyé. *Az egyesektől jobbra a tized, század, ezred, stb. helyi értéket vezetjük be, s az egyes helyi értékű számjegytől vesszővel (tizedesvesszővel) választjuk el.*

Pl.: $\frac{7}{10} = 0,7$ (olv.: nulla egész hét tized), $\frac{57}{100} = 0,57$ (nulla egész 57 század) $\frac{379}{1000} = 0,379$ (379 ezred), $\frac{2857}{100} = 28,57$ (28 egész 57 század).

Tehát az utolsó jegy helyi értéke mutatja a nevező nagyságát. Pl.: $5\frac{4}{10} = 5,4$ (5 egész 4 tized), $145\frac{35}{10000} = 145,0035$ (145 egész 35 tízezred).

Mindennapi munkánk során rendszerint tizedes törteket használunk. Pl.: ha egy ember 1 m és 74 cm magas, akkor azt gyakran 1,74 m alakban adjuk meg (olv.: 1 egész 74 század méter).

A tizedesvessző helyének kijelölése nagyon lényeges, mivel a tizedes tört értéke 10-, 100-, 1000-szeresére stb. nő, ha a tizedesvesszőt egy, két, három stb. hellyel jobbra toljuk el.

Pl.: 24,047 tízszerese: 240,47; százszorossa: 2404,7; azaz $24,047 \cdot 10 = 240,47$; $24,047 \cdot 100 = 2404,7$.

A tizedes tört értéke 10-, 100-, 1000-ed stb. részére csökken, ha a tizedesvesszőt egy, két, három stb. hellyel balra toljuk el.

Pl.: 240,8 tizedrésze 24,08; századrésze: 2,408; azaz $240,8 : 10 = 24,08$; $240,8 : 100 = 2,408$.

a) Összeadás, kivonás. Helyi értéküknek megfelelően egymás alá írt *tizedestörteket ugyanúgy adunk össze vagy vonunk ki*, mint egész számokat, de a tizedesvesszőt mind az összegben, mind a különbségben a megfelelő helyre ki kell tenni.

Pl.:
$$\begin{array}{r} 40{,}234 \\ +125{,}905 \\ \hline 166{,}139 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 321{,}048 \\ -115{,}536 \\ \hline 205{,}512 \end{array}$$

b) *Szorzás. Tizedes törteket úgy szorzunk*, mintha a tényezők egész számok lennének, de a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a tényezőkben együttvéve van.

Pl.:
$$\begin{array}{r} 3{,}41 \cdot 0{,}235 \\ \hline 682 \\ 1023 \\ 1705 \\ \hline 0{,}80135 \end{array}$$

Mivel a szorzandóban a tizedesjegyek száma kettő, a szorzóban három, ezért a szorzatban öt tizedesjegyet kell kijelölni.

c) *Osztás. Tizedes törtet egész számmal úgy osztunk*, mintha az osztandó is egész lenne, de amikor a maradékhoz az első tizedesjegyet leírjuk, akkor a hányadosban is kitesszük a tizedesvesszőt.

Pl.: 317,115 : 15 = 21,141

17	
21	
61	
15	
0	

0,36 : 45 = 0,008

03	
36	
360	
0	

Tizedes törtnek tizedes törttel való osztásakor mind az osztandót, mind az osztót megszorozzuk tíznek annyiadik hatványával, ahány tizedesjegy az osztóban van, s így a műveletet egész számmal való osztás esetére vezetjük vissza.

Pl.: 0,903 : 0,35 = ?

Mivel az osztóban két tizedesjegy van, ezért 100-zal szorozzuk mind az osztandót, mind az osztót:

$0{,}903 \cdot 100 = 90{,}3$; és $0{,}35 \cdot 100 = 35$.

90,3 : 35 = 2,58

203	
280	
0	

2.20 Közönséges és tizedes törtek kapcsolata

Minden közönséges törtszámot átírhatunk tizedes tört alakra, ha elvégezzük a közönséges törtben kijelölt osztást, azaz a számlálót elosztjuk a nevezővel. Ha az osztás valamelyik lépése után nem kapunk maradékot, akkor a hányados véges tizedes tört, ha akár-

hány lépés után sem zérus a maradék, akkor a hányados végtelen tizedes tört.

Pl.: $\frac{2}{5} = 2:5 = 0,4$ $\frac{4}{11} = 4:11 = 0,3636...$ $\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333...$

	40	10
	70	10
	40	10
	70	1
	4	

A 2/5 tört tizedes tört alakja véges, az 1/3 és 4/11 törtek tizedes tört alakja végtelen.

Az olyan tizedes törteket, amelyekben egy-egy jegy, vagy a jegyek egy csoportja minden határon túl ismétlődik, (végtelen) *szakaszos tizedes törteknek* nevezzük.

Közönséges törtek átalakításakor, vagy véges vagy szakaszos tizedes törtet kapunk. A szakasz ismételt leírása helyett úgy jelöljük az ismétlődést, hogy a szakasz első és utolsó jegye fölé pontot teszünk.

Pl.: A $0,3636... = 0,\dot{3}\dot{6}$; $0,333... = 0,\dot{3}$; $\frac{5}{37} = 0,135135... = 0,\dot{1}3\dot{5}$ törtek *tiszta szakaszos tizedes törtek.* Az $\frac{1}{6} = 1:6 = 0,1666... = 0,1\dot{6}$; a $\frac{12}{55} = 0,2\ 18\ 18\ 18... = 0,2\dot{1}\dot{8}$ törtek, mivel az ismétlődő szakaszt nem ismétlődő számjegy előzi meg, *vegyes szakaszos tizedes törtek.*

Véges tizedes törtet közönséges törtszámmá úgy alakítunk át, hogy a tizedesjegyekből álló számot beírjuk a számlálóba, a nevezőbe pedig 10 annyiadik hatványát írjuk, ahány jegy a tizedesvessző után áll, s ha lehet, a törtet egyszerűsítjük.

Pl.: $0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$; $5,025 = 5\frac{25}{1000} = 5\frac{1}{40}$.

Szakaszos (valódi) tizedes törtet közönséges törtszámmá úgy alakítunk át, hogy a számlálóban a szakaszt megelőző és a szakasz jegyeiből álló számból levonjuk a szakaszt megelőző jegyekből álló számot, a nevezőbe pedig annyi kilencest írunk, ahány jegyből

a szakasz áll, és utána annyi nullát teszünk, ahány jegy megelőzi a szakaszt.

Pl.: $0,62\dot{1}2\dot{3} = \frac{62\,123 - 62}{99\,900} = \frac{62061}{99900}$, $0,\dot{1}2\dot{3} = \frac{123}{999}$.

Nem szakaszos végtelen tizedes tört nem alakítható át közönséges törtté (l. a 2.24 pontot).

2.21 Százalékszámítás

A 100 nevezőjű törtek fontosak a gyakorlati életben, ezért a velük való számolásra külön elnevezést (*százalék)* és jelölést (%) vezettek be. A százalék *századrészt* jelent:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01 \quad \text{(1 százalék egyenlő 1 századrésszel);}$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25; \qquad 33\% = \frac{33}{100} = 0,33;$$

$$100\% = \frac{100}{100} = 1; \qquad 150\% = \frac{150}{100} = 1,5; \quad \text{stb.}$$

Valamely mennyiség 5%-a a mennyiség 5 századrészét jelenti, a 150%-a a mennyiség másfélszeresét.

Azt a számot, amely megmutatja, hogy egy mennyiség hány százalékát (századrészét) kell kiszámítani, *százaléklábnak* nevezzük és a továbbiakban p-vel jelöljük. Pl.: a 7% kifejezésben $p = 7$.

Azt a mennyiséget, amelynek a százalékát számítjuk, *alapértéknek* (a), az alapérték százalékát *százalékértéknek* (sz) nevezzük.

a) Számítsuk ki, hogy 125 kg csapágyfémben hány kg nikkel van, ha nikkel tartalma 13%-os! A számítást így végezhetjük el (a =125; p = 13):

125 kg 1%-a : 1,25 kg; 13%-a: 1,25 · 13 kg = 16,25 kg.

(Figyelem! Az alapérték 13%-a nem más, mint az alapérték 0,13-szorosa.) Tehát az adott minőségű 125 kg csapágyfém 16,25 kg nikkelt tartalmaz.

A százalékértéket tehát úgy számítjuk ki, hogy az alapérték századrészét (1 százalékát) megszorozzuk a százaléklábbal.

Ennek képletbe foglalt alakja:

$$sz = \frac{a}{100} \cdot p = \frac{a \cdot p}{100} \qquad (1)$$

b) Egy 256 kg-os hajtókar megmunkálás után 144 kg. Hány %-os a megmunkálási hulladék?

A hulladék 256 kg – 144 kg = 112 kg, ez a 256 kg-nak annyi százaléka, ahányszor kitelik a 112 kg-ból a 256 kg 1%-a, azaz 2,56 kg; tehát $p = 112 : 2{,}56 = 43{,}75$; vagyis a megmunkálási hulladék 43,75%.

A százaléklábat tehát úgy számítjuk ki, hogy a százalékértéket elosztjuk az alapérték 1%-ával (századrészével):

$$p = sz : \frac{a}{100} = \frac{sz \cdot 100}{a} \qquad (2)$$

c) Milyen hosszúra nyúlik egy rugó a megengedett maximális (100%-os) terhelés esetében, ha 28%-os terheléskor 13 cm volt, és a megnyúlás arányos a terheléssel?

A százalékérték 13, a százalékláb 28, keresendő az alapérték. 28%-os terheléskor 13 cm megnyúlás; 1%-os terheléskor 13/28 cm megnyúlás; 100%-os terheléskor $100 \cdot \frac{13}{28} \approx 46{,}43$ cm a megnyúlás, tehát a rugó maximális terheléskor megközelítőleg 46,43 cm hosszú (*megközelítőleg,* mert csak két tizedesjegy pontosságig számoltunk; az egyenlőségjel helyett, ha ezt tényt hangsúlyozni akarjuk, a *közelítőleg egyenlő* ≈ jelet használjuk).

Az alapot tehát úgy számítjuk ki, hogy a százalékérték és a százalékláb hányadosát (ez az alapérték 1%-a) megszorozzuk 100-zal:

$$a = \frac{sz}{p} \cdot 100 = \frac{sz \cdot 100}{p} \qquad (3)$$

Az (1), (2) és (3) képletek ugyanazon három mennyiség között fejeznek ki összefüggést. Bármelyik kettőt a harmadikból megkaphatjuk, ha azt a kívánt mennyiségre mint ismeretlenre rendezzük. (Az egyenletrendezés szabályait l. a 3.18 pontban.)

Példák

1. Valamely csapágyfém összetétele 80% ón, 12% antimon, 8% vörösréz. Ha 13 kg ónt akarunk felhasználni, hány kg csapágyfémet készíthetünk, és hány kg antimonra meg vörösrézre van szükségünk?

Megoldás: A 13 kg ón felhasználásával előállítható 80%-os óntartalmú csapágyfém tömege (p = 80; sz = 13):

$$a = \frac{sz \cdot 100}{p} = \frac{13 \cdot 100}{80} = 16{,}25.$$

Tehát 16,25 kg csapágyfémet készíthetünk. Ennek 12%-a antimon:

$$sz = \frac{a \cdot p}{100} = \frac{16{,}25 \cdot 12}{100} = 1{,}95,$$

tehát 1,95 kg antimonra van szükség.

A csapágyfém tömegének 8%-a a szükséges vörösréz:

$$sz = \frac{a \cdot p}{100} = \frac{16{,}25 \cdot 8}{100} = 1{,}30,$$

tehát 1,3 kg vörösrézre van szükség.

Ellenőrzés: 13 kg + 1,95 kg + 1,3 kg = 16,25 kg.

2. Egy akkumulátorban a higított kénsav sűrűsége töltött állapotban 27 Baumé-fok, kisütött állapotban pedig 21 Baumé-fok. Hány %-kal sűrűbb az oldat töltött állapotban, mint kisütött állapotban?

Megoldás: $sz = 27 - 21 = 6, \quad a = 27$

$$p = \frac{sz \cdot 100}{a} = \frac{6 \cdot 100}{27} = 600{:}27 = 22{,}\dot{2} \approx 22{,}22.$$

Tehát 22,22%-kal sűrűbb az oldat töltött állapotban (pl. a 21 Baumé-fokos kénsav sűrűsége: 1,171 g/cm^3).

3. Egy öntődében a leöntött darabok közül 2,2%, azaz 33 db a selejt. Hány öntvény készült összesen?

Megoldás: $sz = 33, \quad p = 2{,}2$

$$a = \frac{sz \cdot 100}{p} = \frac{33 \cdot 100}{2{,}2} = 1500,$$

tehát 1500 db öntvény készült.

Megjegyzés: A *kamatszámításnál* is a százalékszámítást alkalmazzuk. A *kamatláb* a 100 forint tőke után 1 évre járó kamatot adja meg. A *kamatoskamat-számítást* és a *járadékszámítást* l. a 8.3.3 pontban.

2.22 A közelítő számítás, és a kerekítés néhány szabálya

Gyakorlatban a számok többnyire nem pontosan, hanem csak közelítően fejezik ki a valóság mennyiségi viszonyait. A legpontosabb mérőeszközökkel végzett mérések is csak *közelítő értékeket* adnak. Az előzőekben, a tizedes törtek osztásától kezdve alkal-

maztuk a közelítő egyenlőség (≈) jelét. A közelítő számokkal végzett műveletek eredményei szintén közelítő értékek. Az eredményben pontatlan jegyek kerülhetnek azokra a helyekre is, amelyeken a műveletben részt vevő számok pontosak. Pl. szorozzuk össze 50,2 és 90,1 közelítő számokat. A szorzat 4523,02. Míg a műveletben részt vevő számok csak századokban, ezredekben stb. különböznek a valódi értékektől, addig a szorzat nemcsak a század és tized értékekben lehet pontatlan, hanem az egyesek helyén álló számjegy is pontatlan lehet. A tényezők pl. 50,24 és 90,14 pontos értékek kerekítéséből is adódhattak, amelyeknek a szorzata 4528,6336, úgyhogy a pontos szorzat és a közelítő szorzat egyes helyi értékű jegyei 5 egységgel különböznek egymástól.

A továbbiakban *értékes számjegynek* nevezzük a szám valamennyi jegyét, a szám elején álló nulla, ill. nullák kivételével. Pl. 456,070 szám minden jegye értékes, a 0,0045 számnak két értékes jegye van a 4 és az 5.

A *számok kerekítésére* az alábbi szabályokat célszerű figyelembe venni, hogy a műveletek eredményeiben a kerekítésekből adódó durvább hibahalmozódást elkerüljük.

a) Ha az első elhagyandó számjegy 5 vagy 5-nél nagyobb, akkor a meghagyott utolsó számjegyet egy egységgel megnöveljük.

Pl.: Kerekítsük a 135,763 számot négy értékes számjegyre (összesen négy számjegyre). Mivel az első elhagyandó szám 6 nagyobb 5-nél, ezért a negyedik számjegyet, a 7-et egy egységgel megnöveljük: 8. Tehát 135,8. Az adott számhoz a 135,8 közelebb van, mint a két utolsó jegy elhagyásával adódó nem kerekített szám, 135,7. Ugyanígy 28,351 három számjegyre kerekítve 28,4, mert az elhagyandó jegy 5. A 28,4 közelebb van az adott számhoz, mint a nem kerekített 28,3.

b) Ha az első elhagyandó számjegy 5-nél kisebb, akkor a meghagyott számjegyek változatlanok maradnak.

Pl.: 2,543 két értékes jegyre kerekített értéke 2,5; ez közelebb van az adott számhoz, mint 2,6.

Megjegyzés: Többműveletes számítást igénylő munkánál a kerekítési hibák halmozódása csökkenthető a következő szabály alkalmazásával:

c) Ha az elhagyandó számjegy 5, és utána nincs nullától különböző számjegy, akkor a meghagyott utolsó számjegyet, ha páros szám, változatlanul hagyjuk, ha páratlan szám, akkor egy egységgel megnöveljük.

Pl.: 0,0245 három tizedesjegy-pontossággal: 0,024, mivel 4 páros szám (0,024 és 0,025 egyaránt 0,0005 hibával közelíti meg az adott számot). 0,875 két tizedes pontossággal: 0,88, mivel 7 páratlan szám. (Az utóbbi szabállyal a kerekítés pontosságát nem növeljük, de többműveletes számítási munka esetén a hibák így nagyrészt kiegyenlítődnek és páros számmal néha könnyebb számolni.)

A számok leírásából azok pontosságára következtethetünk. Megállapodás szerint a 3,2 mást jelent, mint 3,20; ui. 3,2 csak az egészben és tizedben pontos, hiszen a valódi érték pl. 3,24 vagy 3,17 is lehet, de 3,20 már századig pontos, bár a valódi szám 3,204 ill. 3,197 is lehet, azonban 3,221 vagy 3,183 nem.

Az egész számok között is hasonló különbséget teszünk. Pl. 382 így leírva azt jelenti, hogy minden jegye pontos; ha az utolsó számjegy pontosságáért nem kezeskedhetünk, ugyancsak kerekíthetünk, de az így előálló számot nem 380, hanem $38 \cdot 10$ alakban írjuk, mert 380 azt jelentené, hogy az utolsó jegy a 0 is pontos (a kerekítési hibahatáron belül). Ha 6800 számból csak az első két jegy pontos, akkor $68 \cdot 10^2$ alakban kell írni vagy $6{,}8 \cdot 10^3$ stb.

Közelítő számításnál célszerű betartani a következőket:

1. Mérések eredményeiből mindenekelőtt a biztos számjegyeket vegyük tekintetbe, a nem megbízhatóak közül tartsunk meg egyet, a többit pedig hagyjuk el.

2. Közelítő számok összeadásakor és kivonásakor az eredményben annyi tizedesjegyet tartsunk meg, amennyi a legkevesebb tizedesjegyet tartalmazó összeadandóban van (egész számok esetén értelemszerűen alkalmazzuk a szabályt).

3. Közelítő számok szorzásakor és osztásakor a szorzatban vagy a hányadosban annyi értékes számjegyet tartsunk meg, ahány a kevesebb értékes jegyből álló számban van.

4. A közbeeső eredmények kiszámításakor egy-egy jeggyel mindig többet tartsunk meg, mint amennyit a fenti szabályok előírnak. A tartalék számjegyet a végeredményben elhagyjuk.

5. Ha ugyanazon művelet adataiban különböző számú tizedesjegy (összeadás és kivonás esetén) vagy értékes jegy (szorzás és osztás esetén) van, akkor a legkevesebbet vesszük alapul, és a többi adatban meghagyunk még egy tartalék jegyet.

Feladat: Az elmondottak szemléltetésére határozzuk meg a

$$\frac{(4\frac{5}{9}-4\frac{3}{7})\cdot 9\frac{1}{6}}{4\frac{5}{9}+4\frac{3}{7}}$$

kifejezés értékét *a*) a számítást közönséges törtekkel végezve; *b*) a számítást az ada-

tok századrész pontosságú tizedes törtté alakított értékeivel végezve. Hasonlítsuk össze a kétféle számítás eredményét.

Az *a)* esetben az utolsó osztás: $\frac{110}{849} = 0{,}129564... \approx 0{,}13$;

a *b*) esetben pedig: $\frac{1{,}19}{8{,}99} = 119:899 \approx 0{,}132369... \approx 0{,}13$,

tehát a szabályok alkalmazása két tizedesre kerekítve ugyanazon eredményre vezet, mint a törtekkel végzett számítás pontos eredménye.

2.23 Arány és aránypár

Arányt kapunk, ha két számot azért hasonlítunk össze, hogy megállapíthassuk, *hányszorosa* egyik a másiknak. Pl. $\frac{10}{5}$ vagy 10 : 5 (olv.: 10 aránya az 5-höz), s mint tudjuk, ennek a kijelölt osztásnak 2 az értéke, vagyis 10 kétszer akkora, mint 5, vagyis $\frac{10}{5} = 10:5 = 2$. Az arány: a hányados más neve. (A latin *ratio* olv.: ráció magyarul arányt is jelent.)

Általánosan jelölve: $a:b = q$ vagy $\frac{a}{b} = q$.

Két mennyiség egymással egyenesen arányos vagy egyenes arányban van, ha az egyik mennyiség növekedése a másik mennyiség ugyanannyiszoros növekedését vonja maga után.

Pl.: az áru mennyisége és ára vagy a tört értéke és a számlálója egyenesen arányosak.

Két mennyiség egymással fordítva arányos vagy fordított arányban van (l. a 8.11 pontot), ha az egyik mennyiség növekedésével a másik mennyiség ugyanannyiszorosára csökken, vagy csökkenésével a másik mennyiség ugyanannyiszorosára nő.

Pl.: a sebesség és a menetidő, a tört értéke és a nevező fordítottan arányosak.

Aránypárt akkor kapunk, ha két egyenlő értékű arányt az egyenlőség jelével összekapcsolunk. Pl.: a 6 : 3 = 2 és a 4 : 2 = 2 egyenlő értékű arányokat az egyenlőség jelével össze-

kötve a $6:3 = 4:2$ aránypárt kapjuk (olv.: 6 úgy aránylik a 3-hoz, mint 4 a 2-höz).

Általánosan: $a:b = c:d$ vagy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $(b \neq 0; d \neq 0)$

(olv.: a úgy aránylik a b-hez, mint c aránylik a d-hez) .

Az a és d az aránypár *kültagjai*, b és c pedig az aránypár *beltagjai*. *Az aránypárban a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával.* Pl.: a $6:3 = 4:2$ aránypárban $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$. Ennek következménye, hogy a két kültag felcserélhető; a két beltag felcserélhető; a bel- és kültagok egyidejűleg felcserélhetők.

Általánosan: ha $a:b = c:d$, akkor $ad = bc$, és $a:c = b:d$; $d:b = c:a$; $b:a = d:c$; stb.

Ha az aránypár egyik kültagja ismeretlen, azt úgy számítjuk ki, hogy a beltagok szorzatát elosztjuk az ismert kültaggal. Legyen pl. az aránypár: $x:b = c:d$, ahol x az ismeretlen, akkor ebben az esetben $x = \frac{bc}{d}$.

Pl.: $x:2 = 10:5$; aránypár ismeretlen első tagja: $x = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$, tehát $4:2 = 10:5$.

Ha az aránypár egyik beltagja ismeretlen, azt úgy számítjuk ki, hogy a kültagok szorzatát elosztjuk az ismert beltaggal. Legyen pl. az aránypár: $a:x = c:d$, akkor $x = \frac{ad}{c}$.

Pl.: $6:x = 3:4$; $x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8$, tehát $6:8 = 3:4$.

Aránypárral könnyen megoldhatjuk az olyan feladatokat, amelyekben egyenesen vagy fordítottan arányos mennyiségek kapcsolódnak össze.

Példák

1. Egy rugósszelep 147 N erő hatására 1,3 cm-re nyit. Hány N erőre van szükség a rugósszelep 1,9 cm-es nyitásához?

Megoldás: Ahányszor nagyobb az 1,9 cm az 1,3 cm-nél, annyiszor nagyobb az ismeretlen x erő a 147 N erőnél, s így $x : 147 = 1{,}9 : 1{,}3$;

$$x = \frac{147 \cdot 1{,}9}{1{,}3} \approx 214{,}85.$$

Tehát 1,9 cm-es nyitáshoz 214,85 N erőre van szükség (N = Newton).

2. Egy műszak alatt három automata 249 gépalkatrészt készít. Hány gépalkatrész készíthető egy műszak alatt, ha az előbbiekkel azonos teljesítményű hét automata dolgozik?

Megoldás: A mennyiségek egyenes arányban állnak, mivel több gép ugyananynyiszor több alkatrészt készít, tehát $x : 249 = 7 : 3$;

$$x = \frac{249 \cdot 7}{3} = 83 \cdot 7 = 581.$$

Tehát hét automata 581 gépalkatrészt készít egy műszak alatt.

3. Egy 80 cm átmérőjű munkatárcsa percenkénti fordulatszáma 130. Hány fordulatot végez percenként a szíjjal hajtott 50 cm átmérőjű géptárcsa?

Megoldás: Mivel a géptárcsa átmérője kisebb, ezért fordulatszáma nagyobb lesz. Az átmérő fordítva arányos a fordulatszámmal, tehát $x : 130 = 80 : 50$;

$$x = \frac{130 \cdot 80}{50} = 13 \cdot 16 = 208,$$

vagyis a géptárcsa percenkénti fordulatszáma 208.

4. Ha azt akarjuk, hogy a géptárcsa fordulatszáma percenként 200 legyen, milyen átmérőjű tárcsát kell felszerelnünk? (A munkatárcsa adatai az előző példa adataival megegyeznek.)

Megoldás: $x : 80 = 130 : 200$; $x = \frac{80 \cdot 130}{200} = 4 \cdot 13 = 52.$

Tehát az 52 cm átmérőjű géptárcsa percenként 200-at fordul. A gyakorlatban csúszás miatt 2%-kal csökkentett átmérőt vesznek:

$$52 \cdot \frac{2}{100} = 1{,}04; \quad 52 - 1{,}04 = 50{,}96 \approx 51,$$

vagyis a mi esetünkben 51 cm átmérőjű géptárcsát használnak.

5. Hány fogú fogaskereket kell készítenünk 1300/min fordulatszám eléréséhez, ha a hajtó fogaskerék fordulatszáma 560/min, fogszáma 130?

Megoldás: A fogaskerekek fogszáma a fordulatszámmal fordítottan arányos, tehát kevesebb fogszámmal érhető el nagyobb fordulatszám. Az aránypár $x:130=560:1300$;

$$x = \frac{130 \cdot 560}{1300} = 56.$$

Tehát 56 fogszámú fogaskereket kell készítenünk a kívánt 1300/min fordulat eléréséhez.

2.24 Az irracionális és a valós számok halmaza (Q^*, R)

Az irracionális számok a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek.

Pl.: $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $0{,}51\,511\,5111...$, $\pi = 3{,}141593...$, $e = 2{,}7182818...$
($\sqrt{2}$ olv.: négyzetgyök 2; l. a 3.10 pontot; az e szám a természetes logaritmus alapszáma; l. a 3.13 pontot.)

Állítás: Nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete egyenlő kettővel.

Bizonyítás: Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis, hogy

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad (1)$$

ahol p és q relatív prímszámok, vagyis legnagyobb közös osztójuk 1. Az (1)-ből:

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

írható, amelyből következik, hogy p^2 páros szám, ami csak akkor lehet, ha p is páros szám, vagyis $p = \pm 2n$ alakú ($n \in N$). A (2) egyenlőség helyett $4n^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2n^2$ írható, amelyből következik, hogy a q is páros szám. Ez azonban az (1) állításnak ellentmond, p-nek és q-nak van 1-nél nagyobb közös osztója. Ez viszont azt bizonyítja, hogy nincsen olyan racionális szám, amelynek négyzete egyelő 2-vel, azaz $\sqrt{2} \notin Q$.

Az irracionális számok Q^* számhalmaza a valós számok R halmazának

$$Q^* := \{x \mid x \in R \setminus Q\}$$ részhalmaza.

A Q^* irracionális számok halmaza mindenütt sűrű és *nem megszámlálható* (*kontinuum*) *számosságú* (l. a 2.27 pontot).

Az α irracionális számot algebrai számnak nevezzük, ha van olyan racionális együtthatójú n-ed fokú egyenlet, amelynek α gyöke. Ha nincs ilyen egyenlet, akkor α transzcendens szám (pl.: π, e).

Bizonyítható, hogy bármely két különböző racionális szám között van irracionális szám, valamint bármely két különböző irracionális szám között van racionális szám (l. a 2.26 pontot).

A racionális és az irracionális számok halmaza együttesen alkotják a valós számok halmazát:

$$R = Q \cup Q^*.$$

A valós számok halmaza – az összeadás és a szorzás műveletével – *számtest. Az R halmaz nem megszámlálható (kontínuum) számosságú* (l. a 2.27 pontot).

Műveletek végzésekor az irracionális számokat mint végtelen nem szakaszos tizedestörteket általában adott pontossággal, véges jegyszámú racionális tizedestörtekkel helyettesítjük, s így az azokra érvényes műveleti szabályok szerint járunk el.

Ha az irracionális számok hatvány, gyök, logaritmus stb. alakban adottak, akkor rendszerint átalakítás nélkül ezen mennyiségekre érvényes műveleti szabályok szerint számolunk. Ezeket a szabályokat az *Algebra* c. fejezetben tárgyaljuk (l. a Harmadik fejezetet).

2.25 Axiómák

A valós számok testet alkotnak, de ez a tulajdonság, mint láttuk, nemcsak a valós számokat jellemzi. (Pl.: számtestet alkotnak a racionális számok és látni fogjuk, hogy a komplex számok is, l. a Hetedik fejezetet.)

A valós számokat egyértelműen jellemzik és meghatározzák a teljesen rendezett test tulajdonságai. Ennek a fogalomnak a megértéséhez, a későbbiekben is felhasználható axiómákat és fogalmakat kell megismernünk.

a) Rendezési axiómák

1. $\forall a, b \in R$ számokra az $a > b$, $a = b$, $a < b$ relációk közül pontosan egy érvényes.
2. $\forall a, b, c \in R$ számokra, ha $a > b$ és $b > c$, akkor $\Rightarrow a > c$ (tranzitivitás);
3. $\forall a, b, c \in R$ számokra; ha $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.
4. $\forall a, b, c \in R$ számokra; ha $a > b$, $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ és $c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

Pl.: $5 \cdot 3 > 4 \cdot 3$, de $5 \cdot (-3) < 4 \cdot (-3)$ vagyis $-15 < -12$.

A valós számegyenesen a felsorolt állítások jól szemléltethetők.

A valós számtest rendezett. (*A racionális számtest is rendezett.*) A test rendezési axiómáiból következnek az egyenlőségekkel és az abszolút értékekkel való számolás szabályai.

b) Korlátosság

A számegyenes számainak valamely V halmazát felülről (ill. alulról) korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan K (ill. k) valós szám, hogy $\forall x \in V$ esetén az

$$x \leq K \quad (\text{ill. } x \geq k)$$

egyenlőtlenség teljesül. A K (ill. k) számot a V halmaz egy felső (ill. alsó) korlátjának nevezzük.

Egy alulról is és felülről is korlátos számhalmazt *korlátos számhalmaznak* mondunk. Természetesen, ha a V-nek van egy felső (alsó) korlátja, akkor végtelen sok van, mivel, ha K felső (k alsó) korlát, akkor minden K-nál nagyobb (k-nál kisebb) szám is az.

c) A felső és alsó határ axiómája

Ha a V felülről (alulról) korlátos számhalmaz, akkor létezik olyan H (h) valós szám, hogy

1. $\forall x \in V$ esetén $x \leq H$; $(x \geq h)$;

2. ha a K (k) szám a V halmaz felső (alsó) korlátja, akkor

$$H \leq K \quad (k \leq h).$$

Az axióma egy felülről korlátos V számhalmazra azt mondja ki, hogy a felső korlátok között van legkisebb. A *legkisebb felső korlátot* a V halmaz *felső határának* vagy *szuprémumának* nevezzük, és $\sup V := H$ jellel adjuk meg.

A h számot az alulról korlátos V számhalmaz *alsó határának* vagy *infimumának* nevezzük, és $\inf V := h$ jellel adjuk meg.

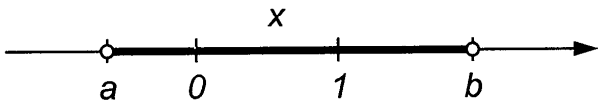
A korlátos számhalmaznak – miként az következik az eddig elmondottakból – létezik mind alsó, mind felső határa.

Pl.: A pozitív számok halmaza nem korlátos felülről, mivel bármely $K \in Z^+$ számhoz mindig megadható K-nál nagyobb pozitív szám. A pozitív számok halmaza alulról korlátos, de felülről nem.

2.26 Intervallum, távolság, környezet

Az intervallumok az R halmaz speciális részhalmazai. Általában kilenc intervallum típust különböztetünk meg. Legyen $a,b \in R$ és $a < b$, akkor az a és b számokhoz hozzárendeljük az alábbi részhalmaztípusokat:

1. Az $]a;b[:= \{x \in R \mid a < x < b\}$ számhalmaz az a, b által meghatározott *nyílt intervallum* (27. ábra).

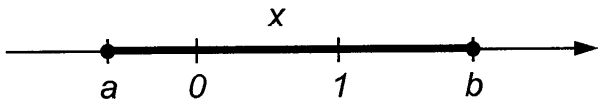


27. ábra. Az $]a; b[$ nyílt intervallum: $a < x < b$

A nyílt intervallumhoz tehát a végpontok nem tartoznak hozzá.

Pl.: A]2; 5[nyílt intervallum a 2-nél nagyobb és az 5-nél kisebb valós számhalmaz. Az 5 felső, a 2 alsó korlát, egyben felső és alsó határ, de nem tartoznak az adott számhalmazhoz.

2. Az $[a;b] := \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ számhalmaz az a, b által meghatározott *zárt intervallum*, amelyet *kompakt intervallumnak* is mondunk (28. ábra).

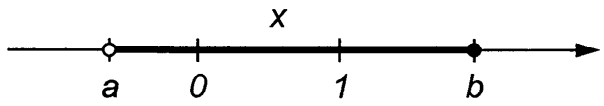


28. ábra. Az $[a; b]$ zárt intervallum: $a \leq x \leq b$

A zárt intervallumhoz a végpontok is hozzátartoznak.

Pl.: A [2; 5] zárt intervallum a 2-vel kezdődő és 5-tel végződő valós számhalmaz. Az 5 felső, a 2 alsó korlát, egyben felső és alsó határ, hozzátartoznak az adott számhalmazhoz.

3. Az $]a;b] := \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ számhalmaz az a, b által meghatározott balról nyílt, jobbról zárt vagy alulról nyílt, felülről zárt intervallum (29. ábra).

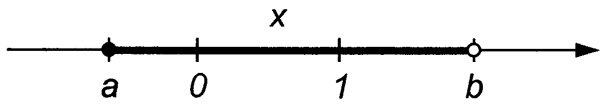


29. ábra. Az $]a; b]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $a < x \leq b$

A balról nyílt, jobbról zárt intervallumhoz a jobb oldali végpont hozzátartozik, a bal oldali nem.

Pl.: A]2; 5] intervallum a 2-nél nagyobb és 5-tel végződő valós számhalmaz.

4. Az $[a;b[:= \{x \in R \mid a \leq x < b\}$ számhalmaz az a, b által meghatározott *balról zárt, jobbról nyílt* vagy *alulról zárt, felülről nyílt intervallum* (30. ábra).



30. ábra. Az $[a; b[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $a \leq x < b$

Az intervallumok megadásában szereplő a szám az intervallumok bal oldali, a b szám pedig a jobb oldali végpontja. Valamely *intervallum hosszán* a jobb oldali és a bal oldali végpontok különbségét értjük, azaz az "a, b intervallum hossza": $b-a>0$ szám.

Megállapodás: Intervallumnak nevezzük az R részhalmazaiból alkotott következő számhalmazokat is:

5. $]r;+\infty[:= \{x \in R \mid r < x < +\infty\}$;

6. $]-\infty;r[:= \{x \in R \mid -\infty < x < r\}$;

7. $[r;+\infty[:= \{x \in R \mid r \leq x < +\infty\}$;

8. $]-\infty;r] := \{x \in R \mid -\infty < x \leq r\}$;

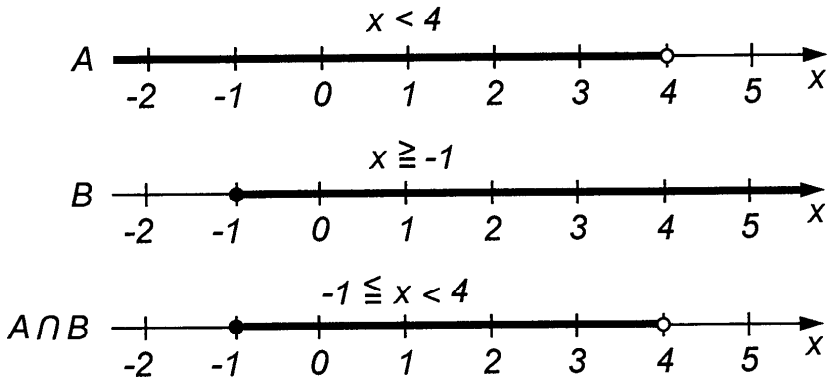
9. $]-\infty;+\infty[:= \{x \in R \mid -\infty < x < +\infty\} \equiv R$.

Amíg az 1.–4. részhalmazok korlátosak, addig az 5. jobbról nem korlátos nyílt, a 6. balról nem korlátos, nyílt, a 7. r kezdőpontú, balról zárt, jobbról nem korlátos nyílt, a 8. balról nem korlátos nyílt, jobbról r végpontú zárt, a 9. egyik irányban sem korlátos intervallum, maga az R valós számhalmaz, ill. számegyenes. Az 1.–4.

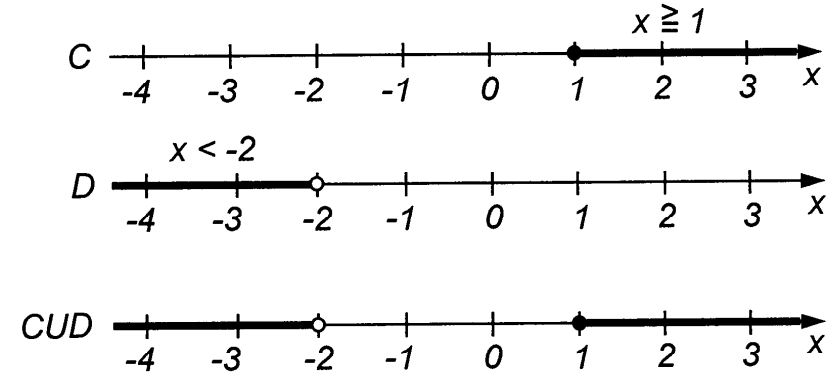
típusú intervallumokat *véges* vagy *korlátos*, az 5.-9. típusúakat pedig *végtelen* vagy *nem korlátos intervallumoknak* szoktuk nevezni.

Pl.: Adjuk meg az $A = \{x \in R \mid x < 4\}$ és a $B = \{x \in R \mid x \geq -1\}$ halmazok metszetét, valamint a $C = \{x \in R \mid x \geq 1\}$ és a $D = \{x \in R \mid x < -2\}$ halmazok unióját.

A megoldást a 31. és a 32. ábra szemlélteti.



31. ábra. $A \cap B = \{x \in R \mid -1 \leq x < 4\}$ halmaz



32. ábra. $C \cup D = \{x \in R \mid x < -2; x \geq 1\}$ halmaz

Egy S halmaz *sűrű*, ha bármely két eleme között van a halmaznak eleme.

Pl.: az $a = 7{,}4568219...$ és a $b = 7{,}4569921...$ irracionális számok közé illeszthető a $c = 7{,}45690$ racionális szám, és a $d = 7{,}4569821...$ végtelen nem szakaszos tizedes tört, azaz a d irracionális szám, vagyis $a < c < b$ és $a < d < b$.

Könnyen belátható, hogy bármely $]a;b[$ intervallumban $(a,b \in R;\ a \neq b)$ végtelen sok racionális és irracionális szám van, más szóval mind a Q, mind a Q^* mindenütt sűrű az R halmazban.

A számegyenes két pontjának, P-nek és S-nek a $\overline{PS} = t(p,s)$-sel jelölt *távolságán* a

$$\overline{PS} = t(p,s) = |p-s| \quad (p,s \in R)$$

számot értjük, ahol p a P, s pedig S ponthoz tartozó valós szám.

Az értelmezés szerint az $|x|$ geometriai jelentése: a számegyenesen az x pontnak a 0 ponttól való távolságával egyenlő. Nyilvánvaló, hogy $\forall\ x \in R$ esetében

$$|-x| = |x|, \text{ valamint } -|x| \le x \le |x|,$$

továbbá, ha $c \in R$, $c > 0$ és $-c \le x \le c$, akkor $|x| \le c$.

Legyen a P ponthoz tartozó valós szám p, és $r \in R^+$ tetszőleges szám. A P pont r sugarú *környezetén* az R halmaznak a

$$K_r(p) := \{x \in R \mid |x-p| < r\}$$

részhalmazát értjük.

Más szóval a P pont r környezetén a számegyenesen azt a $K_r(p)$ ponthalmazt értjük, amely az összes olyan s pontból áll, amelyre $t(p,s) < r$.

A definíció értelmében a P pont r sugarú *jobb oldali környezetén* a

$$K_r^+(p) := \{x \in R \mid 0 \le x-p < r\},$$

bal oldali környezetén pedig a

$$K_r^-(p) := \{x \in R \mid -r < x-p \le 0\}$$

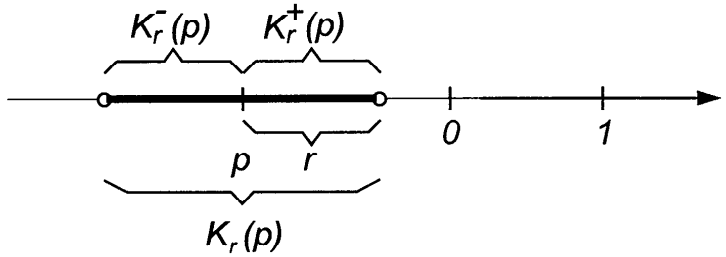
halmazt értjük.

Gyakran használhatjuk a fentieknek megfelelő:

$$K_r(p) =]p-r; p+r[;\ K_r^+ = [p; p+r[;\ K_r^- =]p-r; p]$$

jelöléseket is, amelyek alapján mondhatjuk, hogy a definiált környezeteket nyílt ill. félig nyílt intervallumokkal szemléltetjük, s így:

$$]p-r; p+r[= K_r(p) = K_r^-(p) \cup K_r^+(p) \quad \text{(33. ábra).}$$



33. ábra. Környezet, jobb és bal oldali környezet

Ha pusztán egy P pont környezetéről, annak létezéséről akarunk beszélni, akkor a sugár feltüntetését elhagyjuk.

2.27 A megszámlálható és a nem megszámlálható halmazok

Két nem üres halmazt, A-t és B-t, ekvivalensnek mondunk, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű (bijektív) leképezés létesíthető. Az ekvivalencia jele: ~. Ha A és B ekvivalens, akkor ezt így jelöljük: $A \sim B$ (olv.: A halmaz ekvivalens a B halmazzal).

Ekvivalens halmazoknak a következő tulajdonságai vannak:

1. $\forall A$ halmazra: $A \sim A$ (reflexivitás)
2. ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$ (szimmetria)
3. ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ (tranzitivitás).

Legyen pl. D egy n elemű véges halmaz, akkor a D halmaz ekvivalens az $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ halmazzal, mivel a D elemeinek megszámlálásakor bijektív leképezést valósítunk meg a D elemei és a számláláshoz használt természetes számok között. Így nyilvánvaló, hogy két véges halmaz akkor és csak akkor ekvivalens, ha elemeik száma egyenlő. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy véges halmaz nem lehet ekvivalens valamely valódi részhalmazával.

Általában, ha $G = B$, akkor $G \sim B$, de ha $G \sim B$ akkor lehet, hogy $G = B$, de az is lehet, hogy $G \neq B$.

A halmazelmélet hatékonyságát bizonyítja az is, hogy képes megkülönböztetni a különböző nagyságrendű végteleneket és lehetővé teszi a végtelenekkel való számolást is.

Galileo Galilei (1564–1642) olasz fizikus, matematikus és csillagász fő művében a "Discorsi ..."-ban (Beszélgetések két új tudományról... Leiden, 1638) megjegyzi, hogy "sem a négyzetszámok száma nem kisebb, mint az összes egész számok száma, sem pedig az utóbbi nem nagyobb az előbbinél". Itt a végtelen halmazok összehasonlíthatóságának problémája fogalmazódott meg. Erre a célra minden halmazhoz hozzárendelünk egy fogalmat, amelyet a *halmaz számosságának* nevezünk. Valamely A halmaz számosságát $n(A)$-val jelöljük. Két halmaz számosságának egyenlősége, azaz $n(A) = n(B)$, ugyanazt jelenti, mint az, hogy a két halmaz ekvivalens: $A \sim B$.

Jelölje N_n minden n-re az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazt. Egy A halmazról azt mondjuk, hogy

1. *véges*, ha A ekvivalens az N_n halmazzal, valamely n-re, vagyis, ha *véges számú eleme van, vagy, ha A az üres halmaz;*

2. *végtelen*, ha nem véges;

3. *megszámlálható vagy megszámlálhatóan végtelen*, ha A ekvivalens a természetes számok N halmazával;

4. *nem megszámlálható*, ha A se nem véges, se nem megszámlálhatóan végtelen.

Pl.: az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmaz számossága: $n(A) = 5$.

Hasonlítsuk össze a pozitív páratlan számok, a páros számok, és a pozitív egészekből képzett négyzetszámok végtelen halmazait.

$A = \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$

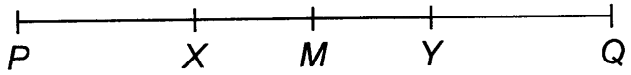
$B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$

$S = \{1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...\}$.

Mivel az A és N, a B és N, az S és N halmazok között a bijektív leképezés megvalósítható, ezért $n(A) = n(N)$; $n(B) = n(N)$; $n(S) = n(N)$, pedig mindegyik szóban forgó halmaz az N halmaz valódi részhalmaza. Így tehát a természetes számok végtelen halmaza ekvivalens az ugyancsak végtelen valódi részhalmazaival. *Galilei* az S és N halmazok összehasonlításából még nem vonta le azt a következtetést, hogy a két halmaz számossága megegyező. Csak fél évszázaddal később, *Bernard Bolzano* (1781–1848) cseh matematikus, filozófus és teológus vetette fel újra *Galilei* gondolatát, s paradoxonjaival hozzájárult a *végtelen* matematikai fogalmának tisztázásához.

Egy példával szemléltetjük gondolatmenetét.

Tekintsük a $\overline{PQ}$ egyenes szakaszt. Legyen M a szakasz középpontja. Az X pont P-ből kiindulva mozogjon egyenletes sebességgel M felé, az Y pont pedig ugyancsak P-ből kiindulva kétszer akkora sebességgel Q felé.



34. ábra. Különböző sebességgel mozgó pontok a $\overline{PQ}$ szakaszon

Minden időpillanatban az X minden egyes helyzetének megfelel az Y-nak egy és csak egy helyzete. Mialatt X befutja a $\overline{PM}$ szakaszt, addig az Y az egész $\overline{PQ}$ szakaszt. Másrészt $\overline{PX} : \overline{PY} = \overline{PM} : \overline{PQ} = 1:2$, amelyből, ha a $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ közül ismert az egyik, akkor kiszámítható a másik, úgy tűnik, hogy a $\overline{PQ}$ szakasz pontjainak száma nem több, mint a $\overline{PM}$ rész-szakasz pontjainak száma. Ezt a következtetést, azaz, hogy két végtelen halmaz számossága egyenlő, *Bolzano* nem merte levonni, mivel rá is igen erősen hatott a több ezer éve igaznak tartott állítás: "az egésznek szükségszerűen nagyobbnak kell lennie, azaz több elemmel is kell rendelkeznie bármelyik részénél."

Cantor volt, aki a merész gondolatot végigvezette és a végtelen halmazok, a *végtelen számok* (*transzfinit számok*), valamint a racionális számok egyik megalapozója volt (*G. Cantor* 1845–1918).

A végtelen számok *Cantor*-féle tulajdonsága: Egy A végtelen halmaz tartalmaz olyan B halmazt, amelynek számossága megegyező az A halmaz számosságával. Ha A végtelen halmaz és $B \subset A$, de $B \neq A$, akkor $n(B) \leq n(A)$.

Ha egy A halmazt leképezhetünk a B halmaz egy valódi részhalmazára, és megfordítva, akkor az A és B halmazok számossága egyenlő. (*Bernstein*-féle ekvivalenciatétel.)

A végtelen halmaz elemeinek a számát nyilván nem adhatjuk meg természetes számmal. Új számot kell bevezetnünk, amit *végtelen vagy transzfinit számnak* nevezünk.

A természetes számok halmazának számossága:

$n(N) := \aleph_0$ (olv.: alef null, $\aleph$ a héber ábécé első betűje)

Ha $n(A) = \aleph_0$, akkor az A halmaz megszámlálható számosságú, más szóval A és N ekvivalens halmazok: $A \sim N$.

Megjegyzések

1. A megszámlálható számosságú halmazok egyesítésével előállított halmaz ugyancsak megszámlálható.

Pl.: $Z \cup N = Z$ halmaz megszámlálható.

2. A racionális számok halmaza megszámlálható:

$$n(Q) = n(N) = \aleph_0.$$

A végtelen $\aleph_0$ szám igen különösen viselkedik a közönséges összeadásra és szorzásra:

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$	$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$
$\aleph_0 + 2 = \aleph_0$	$\aleph_0 \cdot 3 = \aleph_0$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$	$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen szám? *Cantor* bizonyította, hogy van $\aleph_0$-nál nagyobb végtelen szám.

Pl.: $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Ezt az új végtelen számot $\aleph_1$-nek nevezzük és $2^{\aleph_0} := \aleph_1$ alakban definiáljuk.

Most vizsgáljuk meg a valós számok R halmazát. Elegendő annyit bebizonyítanunk, hogy a]0; 1[nyílt intervallum számai nem megszámlálható halmazt alkotnak. Indirekt bizonyítást alkalmazunk.

Tegyük fel, hogy a]0; 1[intervallumba tartozó valós számok megszámlálhatók, azaz sorozatba rendezhetők, s kimutatjuk, hogy van a]0; 1[intervallumban olyan valós szám, amely nem szerepel a sorozatban.

Egy ilyen tizedestört alakú elemekből álló sorozat a következő:

1. $0,a_1a_2a_3...a_n...$
2. $0,b_1b_2b_3...b_n...$
3. $0,c_1c_2c_3...c_n...$

.....

.....

.....

Ha a halmaz megszámlálható, akkor ez a sorozat elkészíthető úgy, hogy a hal-

maz minden elemét tartalmazza. Most szerkesztünk egy olyan tizedes törtet, amely nem tartozik a sorozathoz.

Az új tizedes tört: α_1, α_2, α_3, ..., α_n, ... számjegyeit válasszuk a következő módon:

α_1 különbözzék a_1 - től

α_2 különbözzék b_2 - től

α_3 különbözzék c_3 - tól

.....

.....

.....

Az így képzett $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3....\alpha_n...$ tizedes tört a sorozat minden tizedes törtjétől különbözik. Természetesen nemcsak egy ilyen végtelen tizedestört szerkeszthető. Lehetetlen tehát olyan sorozatot szerkeszteni, amely]0; 1[intervallumba eső minden valós számot tartalmazna, s így a halmaz nem lehet megszámlálható.

A 0 és 1 közé eső valós számok halmaza nem megszámlálható. A $]0;1[$ halmazzal ekvivalens halmazokat nem megszámlálható vagy kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük.

Megjegyzések

1. A valós számok bármely véges intervalluma kontinuum számosságú.

2. A valós számok bármely végtelen intervalluma, tehát az összes valós számok halmaza is kontinuum számosságú. A valós számok folytonosan töltik ki a számegyenest ("continuus" latin szó megfelelője "folytonos").

3. Mivel $Q \cup Q^* = R$, de Q megszámlálható, R kontinuum számosságú, így az irracionális számok halmaza Q^* is kontinuum számosságú.

4. Az R és N halmazok elemei között bijektív leképezés nem létesíthető, így

$n(N) \neq n(R)$, de $n(N) \leq n(R)$; tehát $n(N) < n(R)$.

Jelöljük az $n(R)$ számosságot c-vel: $n(R) = c$.

5. A kontinuumnál nagyobb számosságú halmazok is vannak. Igazolható, hogy bármely halmaznál nagyobb számosságú a hatványhalmaza.

2.28 Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes középarányos

Két szám számtani (aritmetikai) középarányosa (közepe) egyenlő a két szám összegének felével.

Általában, adott a_1, a_2, a_3, ..., a_n számok S középarányosa :

$$S = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Ez olyan szám, amellyel mindegyik számot pótolva az összeg értéke változatlan marad.

Pl.: 3, 4, 9, 12 számok számtani közepe: $S = \frac{3+4+9+12}{4} = 7$.

Két nem negatív szám mértani (geometriai) középarányosa egyenlő a két szám szorzatának négyzetgyökével (l. 3.10 pontot).

Általában, adott a_1, a_2, a_3, ..., a_n nem negatív számok M mértani közepe:

$$M = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \; ; \quad (a_i \in R_0^+ ; \; i = 1,2,3,\ldots,n).$$

Ez olyan szám, amellyel mindegyik számot pótolva, a szorzat értéke változatlan marad.

Pl.: 3, 4, 9, 12 számok mértani közepe:

$$M = \sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 12} = \sqrt[4]{1296} = 6, \quad (\text{mert } 6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296).$$

Két nullától különböző szám harmonikus középarányosa egyenlő a két szám reciprok értéke számtani középarányosának reciprokával.

Általában, adott a_1, a_2, a_3, ..., a_n *nullától különböző* számok H harmonikus középarányosa:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Pl.: 3, 4, 9, 12 számok harmonikus közepe:

$$H = \frac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}} = \frac{4}{\frac{28}{36}} = \frac{4 \cdot 36}{28} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}.$$

Két nem negatív szám négyzetes (kvadratikus) középarányosa egyenlő a két szám négyzetösszege felének négyzetgyökével.

Általában, adott $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nem negatív számok N négyzetes közepe:

$$N = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Pl.: 3, 4, 9, 12 számok négyzetes közepe:

$$N = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 9^2 + 12^2}{4}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \sqrt{62{,}5} \approx 7{,}9.$$

A felsorolt középarányosok között fennállnak a következő relációk ($a_i > 0$):

$$H \leq M \leq S \leq N.$$

Példánk adataival: $5\frac{1}{7} < 6 < 7 < 7{,}9$.

Megjegyzés: A római birodalomban nem arab számjegyeket, hanem ún. *római számokat* használtak. Régebbi épületeken ma is láthatunk római számokat, amelyek az építés időpontját jelzik. Például MDCXLV, amely 1645-nek felel meg.

Tájékoztatásul felsoroljuk a római számokat

I	1	XX	20	CCC	300
II	2	XXX	30	CD	400
III	3	XL	40	D	500
IV	4	L	50	DC	600
V	5	LX	60	DCC	700
VI	6	LXX	70	DCCC	800
VII	7	LXXX	80	XCM	890
VIII	8	XC	90	CM	900
IX	9	C	100	XM	990
X	10	CC	200	M	1000

A számok képzési szabálya igen egyszerű: pl. az 500-nak megfelel a D, a 10-nek X. Az 500-ból 10-et elvéve 490-et kapunk, amelyet a D elé írt X együtt fejez ki vagyis 490 római számmal írva: XD. Amennyiben 540-et kell leírni, akkor az 500-hoz hozzá kell adni 40-et, vagyis az XL római számot, tehát az 540 római számmal írva: DXL, stb.

HARMADIK FEJEZET

ALGEBRA

3.1 Az algebrai írásmód

A százalékszámítás tárgyalásánál láttuk, hogy a százalékértéket (*sz*) a szóban elmondott számítási menet rövid jelölésével előálló – tetszőleges alapérték (*a*) és százalékláb (*p*) esetére is érvényes – képlet (formula) felhasználásával lehet kiszámítani:

$$sz = \frac{a \cdot p}{100}.$$

A számítást úgy hajtottuk végre, hogy a képlet *a* és *p* betűje helyett beírtuk a feladatban szereplő alap és százalékláb számértékét, majd a kijelölt műveleteket elvégeztük. A képletben a betűk számok helyett állnak. Ezzel az írásmóddal az egytípusú feladatokat egyszerűbben és gyorsabban oldhatjuk meg, mivel csak a számértékek különböznek, de az eljárás menete mindig ugyanaz.

Az ábécé betűivel bármilyen értékű számokat jelölhetünk. A számokat helyettesítő betűket és számokat *algebrai mennyiségeknek* nevezzük. Ha az algebrai mennyiségeket, valamint ezek egészkitevős hatványát és gyökét a négy alapművelet véges számú alkalmazásával kapcsoljuk össze, *algebrai kifejezést* kapunk.

Az "*algebra*" arab eredetű szó *Muhammad ibn Musza al-Hvárizmi,* "Kitab al-dzsabr valmukábala" (szó szerint "helyreállítás és az egyszerűsítés könyve") című, a IX. században írt könyvében fordul elő először. A könyv az első- és másodfokú egyenletek felállításával és megoldásával foglalkozik, minden algebrai betűjelölés nélkül.

Az "al-dzsabr" szó alakult át később algebrává, ami az egyenletek rendezését jelentette. Az egyenlet ismert és ismeretlen mennyiségek kapcsolatának matematikai alakja, segítségével az ismeretlen mennyiségeket meghatározhatjuk. A 3.17–3.29 pontokban részletesen tárgyaljuk az egyenletek és egyenletrendszerek megoldási eljárásait.

Az algebrai írásmód jelenlegi alakja a XVIII.–XIX. században alakult ki.

3.2 Műveletek algebrai mennyiségekkel

A előző fejezetben megismert matematikai műveleti jelek használatosak az algebrában is, azzal a kiegészítéssel, hogy két betű vagy szám és betű egymás mellé írva akkor is szorzást jelöl ki, ha a szorzás jelét, a pontot nem tesszük közéjük. Pl.:

$a + b$ (á plusz bé)

$a - b$ (á mínusz bé)

$a \cdot b$; vagy ab (ászor bé vagy röviden ábé)

$8a$ (nyolcszor á)

Két számtényező között a pontot nem hagyhatjuk el, mert pl. $7 \cdot 5 \neq 75$ (7-szer 5 nem egyenlő hetvenöttel).

$a \cdot a = aa = a^2$ (ászor á egyenlő á a négyzeten)

$a : b$ (á osztva bével) ($b \neq 0$)

$\frac{a}{b}$; vagy a/b (á per bé)

$a + a = 2a$ (á plusz á egyenlő két ával)

$a \neq b$ (á nem egyenlő bével)

$a > b$ (á nagyobb, mint bé)

$b < c$ (bé kisebb, mint cé).

Ha az algebrai mennyiségeket, valamint ezek egész kitevőjű hatványát és gyökét csak a szorzás és osztás véges számú alkalmazásával kapcsoljuk össze, *egytagú algebrai kifejezést* kapunk. Az algebrai kifejezésben szereplő betűket *határozatlanoknak* vagy *változóknak,* a betűk előtti számot *együtthatónak* nevezzük. Az 1 együtthatót általában nem írjuk ki.

Pl: Egytagú algebrai kifejezések: $7,\ x^3,\ -9axy^2,\ \frac{9}{13}p^3q^2z,\ 15u.$

Általában az ilyen, $ax^my^n\ldots z^q$ ($a \in R$, $m, n, \ldots, q \in N$ adott számok) alakú tagokból álló összeget az $x, y, \ldots, z$ *határozatlanok polinomjának* nevezzük. A polinom görög szó, jelentése többtagú.

Pl.: $7xy^2+9y^5z-5x^4-25$

Ha a határozatlanok helyére egy-egy valós számot írunk, akkor a kijelölt műveletek elvégzése után ismét egy valós számot kapunk, amit a *polinom helyettesítési értékének* nevezünk.

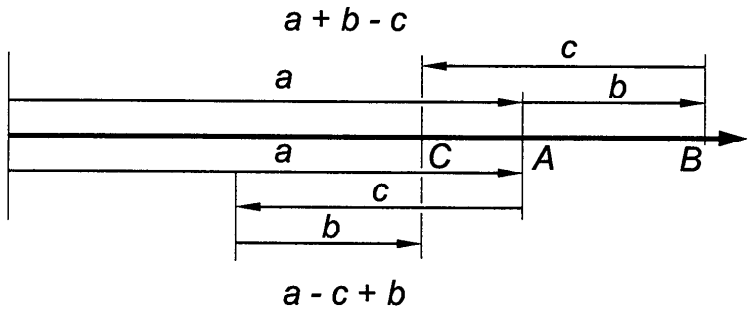
Pl.: ha $x = 1$, $y = -1$ és $z = 2$, akkor $7xy^2+9y^5z-5x^4-25 = 7\cdot1\cdot(-1)^2+$ $+9\cdot(-1)^5\cdot2-5\cdot1^4-25 = 7-18-5-25 = -41$, vagyis a helyettesítési érték: -41.

Azokat a számokat, amelyekkel a helyettesítési érték 0, a *polinom zérushelyeinek* nevezzük.

Pl.: Az x^2+x-2 polinom zérushelyei az $x = 1$ és az $x = -2$, mivel $1^2+1-2 = 0$ és $(-2)^2+(-2)-2 = 4-2-2 = 0$.

A többtagú algebrai kifejezésben az összeadás és a kivonás sorrendjét felcserélhetjük (35. ábra):

$$a+b-c = a-c+b.$$



35. ábra. A polinom tagjai egymással felcserélhetők

Pl.: $34a-25b-19a+48b = 34a-19a+48b-25b = 15a+23b.$

Egyenlő összeadandók esetén az R halmazban szorzást végezhetünk.

Pl.: $5+5+5 = 5\cdot3 = 15.$

A betűkre is hasonlóan értelmezzük a szorzást:

$$ab = a + a + a + \ldots + a$$

1. 2. 3. ... b-edik ($b \in N$)

Tehát ab azt jelenti, hogy a-t b-szer kell összeadandóul venni. Az egyenlő tényezők szorzatát röviden: tényező$^{\text{tényezők száma}}$ alakban jelöljük, s az ilyen kifejezést *hatványnak* nevezzük. Pl.: $x \cdot x \cdot x = x^3$; $a^2 = aa$ (az alap: a, a kitevő: 2), $b^4 = bbbb$; $x^n = xxx\ldots xx$ (x-et n-szer kell tényezőül venni, n egész).

Közös alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére hatványozzuk:

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n}.$$

Pl.: $x^3x^5 = x^{3+5} = x^8$, $2a^2 \cdot 5a^4 = 10a^{2+4} = 10a^6$.

Az osztás a szorzás fordított művelete. A szorzat és az egyik tényező ismeretében meg kell határozni a másik tényezőt: $ax : a = x$.

Pl.: $8b : 8 = b$; $8b : b = 8$; $25ab : 5b = 5a$; $(9x \cdot 6y) : 9y = 6x$

Egyenlő alapú hatványokat úgy osztunk egymással, hogy a közös alapot a kitevők különbségére hatványozzuk:

$$a^k : a^n = a^{k-n}.$$

Pl.: $x^4 : x^3 = x$, $6b^5 : 2b^2 = 3b^3$, $9{,}5x^2z^3 : 2xz^2 = 4{,}75xz$, $\frac{5}{6}u^2v : \frac{1}{3}u = \frac{5}{2}uv$.

Különböző alapú hatványok osztását nem tudjuk elvégezni, ezért legtöbbször csak kijelöljük: $a^k : b^n = \frac{a^k}{b^n}$, $(b \neq 0)$.

Pl.: $x^4 : y^2 = \frac{x^4}{y^2}$, $8x^2y : 2xz = \frac{4xy}{z}$, $(x, y, z \neq 0)$.

Különböző alapú, de azonos kitevőjű hatványok szorzása, osztása:

$$a^n b^n = (ab)^n; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Valamely racionális egész kifejezés fokszáma egyenlő az egy-egy tagban előforduló betűtényezők hatványkitevőinek összege közül a legnagyobbal.

Pl.: $x^n + bx$ n-ed fokú ($n \in Z^+$), $4x^4y^5 + z$ kilencedfokú ($4 + 5 = 9$), $5a^3 + 10^5 bc$ harmadfokú.

Az x n-edfokú (fogyó hatványai szerint) rendezett polinomja:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (a_0 \neq 0,\ n \in Z^+).$$

Megjegyzés: Ebben a pontban az egészkitevős hatványokra csak néhány alapvető műveleti szabályt adtunk meg, hogy a következő pontokban gyakorló példákat csinálhassunk. Részletesen foglalkozunk e témával a 3.9–3.10 pontokban.

3.3 Műveletek egytagú algebrai kifejezésekkel; többtagúak összeadása és kivonása

a) Egytagúak összeadása. Azokat az egytagú kifejezéseket, amelyek legfeljebb együtthatójukban különböznek, *egynemű tagoknak* nevezzük.

Pl.: $-6x^2yz^3$ és $18x^2yz^3$ egynemű algebrai kifejezések; $8ab^5$ és $8ab^4$ *különnemű* algebrai kifejezések.

Egynemű egytagúakat úgy adunk össze, hogy az együtthatókat összeadjuk, és e mellé a betűtényezőket változatlanul leírjuk.

Pl.: $18x^2yz^3 - 6x^2yz^3 = 12x^2yz^3$.

Ezt más szóval *összevonásnak* nevezzük.

Egytagú algebrai kifejezéseket úgy adunk össze, hogy azokat előjelükkel egymás után leírjuk, és az egyneműeket összevonjuk. Az egytagú előjelét az együtthatójának előjele adja.

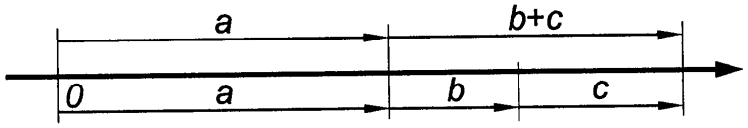
Pl.: Adjuk össze a $9x$; $-6y$; $+3{,}5x$; $-5y$ és $5z$ egytagúakat:

$$9x + (-6y) + (+3{,}5x) + (-5y) + (+5z) = \underline{9x} - \underline{\underline{6y}} + \underline{3{,}5x} - \underline{\underline{5y}} + 5z = 12{,}5x - 11y + 5z.$$

(Az egyneműeket *megegyező aláhúzásokkal* jelöltük.)

b) Többtagúak összeadása. Egy algebrai kifejezéshez többtagút úgy adunk hozzá, hogy a többtagú minden egyes tagját saját előjelével hozzákapcsoljuk, s ha vannak egynemű tagok, azokat összevonjuk.

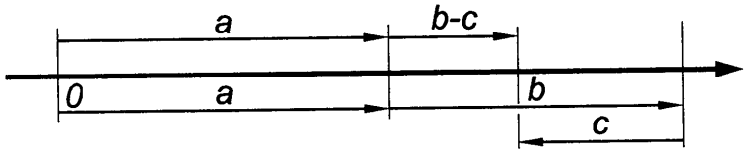
Összeg hozzáadása: $a+(b+c)=a+b+c$ (36. ábra).



36. ábra. $a+(b+c)=a+b+c$

Pl.: $25a+(31a^2b+8a+\frac{1}{2})=25a+31a^2b+8a+\frac{1}{2}=33a+31a^2b+\frac{1}{2}$.

Különbség hozzáadása: $a+(b-c)=a+b-c$ (37. ábra).



37. ábra. $a+(b-c)=a+b-c$

Pl.: $51a^2b+(9a^2b-4a^2b)=51a^2b+9a^2b-4a^2b=56a^2b$,

$4x^2-6xy+y^2+(5xy-y^2+8x^2)=\underline{4x^2}-\underline{\underline{6xy}}+y^2+\underline{\underline{5xy}}-y^2+\underline{8x^2}=12x^2-xy.$

A kifejezés első tagja, a zárójelben levő első tag, egyenlőségjel utáni első tag elé – amennyiben pozitív – nem tesszük ki a + jelet.

Két egynemű algebrai kifejezés összege akkor nulla, ha együtthatóik csak előjelben különböznek egymástól.

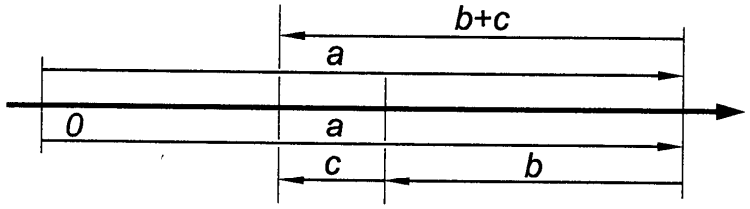
Pl.: $+y^2$ és $-y^2$ algebrai összege: $(+y^2)+(-y^2)=0$ és $-3xy^2+3xy^2=0$.

c) Egytagúak kivonása. Egytagú algebrai kifejezést úgy vonunk ki, hogy ellenkező előjellel a kisebbítendő után írjuk, és az egynemű tagokat (ha előfordulnak) összevonjuk.

Pl.: a $15xy$ egytagúból vonjuk ki a $-8xy$ egytagút:
$15xy-(-8xy)=15xy+8xy=23xy$.

d) Többtagúak kivonása. Egy algebrai kifejezésből többtagút úgy vonunk ki, hogy a többtagú minden tagját ellenkező előjellel kapcsoljuk hozzá, s az egynemű tagokat (ha előfordulnak) összevonjuk.

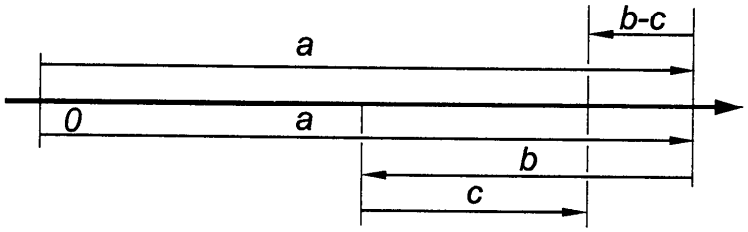
Összeg kivonása: $a-(b+c)=a-b-c$ (38. ábra).



38. ábra. $a-(b+c)=a-b-c$

Pl.: $7ax-(8y+9ax)=\underline{7ax}-8y-\underline{9ax}=-2ax-8y.$

Különbség kivonása: $a-(b-c)=a-b+c$ (39. ábra).



39. ábra. $a-(b-c)=a-b+c$

Pl.: $-13x^2-(18y^2z-15x^2)=\underline{-13x^2}-18y^2z+\underline{15x^2}=2x^2-18y^2z,$

$9x^2-3y^2+z^2-(x^2-5y^2-4z^2)+(5x^2+3y^2-6z^2)=$

$=\underline{9x^2}-\underline{\underline{3y^2}}+z^2-\underline{x^2}+\underline{\underline{5y^2}}+4z^2+\underline{5x^2}+\underline{\underline{3y^2}}-6z^2=$

$=13x^2+5y^2-z^2.$

e) Zárójelek felbontása. Ha az algebrai kifejezésben a zárójeles részek csak mint összeadandók vagy kivonandók fordulnak elő, akkor *a + előjelű zárójelet* úgy bontjuk fel, hogy elhagyjuk a zárójelet, és a zárójelben levő tagokat változatlan előjellel hagyjuk meg; *a – előjelű zárójelet* pedig úgy bontjuk fel, hogy a – jel és a zárójel elhagyásával egyidejűleg a zárójelben levő tagok előjelét ellenkezőre változtatjuk. *Egymásba skatulyázott* több zárójel

esetén a legbelső zárójelet bontjuk fel először, majd a következőt, s csak végül a külsőt.

Pl.: $2x-\{3y-[6x+(9x-5y)]+2x\}=2x-\{3y-[6x+9x-5y]+2x\}=$
$=2x-\{3y-6x-9x+5y+2x\}=\underline{2x}-\underline{\underline{3y}}+\underline{6x}+\underline{9x}-\underline{\underline{5y}}-\underline{2x}=$
$=15x-8y.$

f) Egytagú algebrai kifejezések szorzása egytagúval. Egytagút egytagúval úgy szorzunk, hogy az együtthatókat és a közös alapú hatványokat összeszorozzuk, a különböző alapú hatványok szorzását pedig kijelöljük.

Pl.: $4a^3b^2x^4\cdot(0{,}6a^2b^5y^2)=2{,}4a^{3+2}b^{2+5}x^4y^2=2{,}4a^5b^7x^4y^2;$
$\frac{1}{2}x^2y^3\cdot(-\frac{3}{4}x^3yz^2)=-\frac{3}{8}x^5y^4z^2.$

g) Egytagú algebrai kifejezések osztása egytagúval. Egytagú kifejezést egytagúval úgy osztunk, hogy az együtthatókat és a közös alapú hatványokat osztjuk egymással, a különböző alapú hatványok osztását pedig tört alakban kijelöljük.

Pl.: $(-42x^2y^3z):3pxy^2=-14x^{2-1}y^{3-2}\frac{z}{p}=-14xy\frac{z}{p},\quad (p,x,y\neq 0).$

$14a^5x^3y:(-5a^2xz^3)=-\frac{14}{5}a^{5-2}x^{3-1}\frac{y}{z^3},\quad (a,x,z\neq 0).$

(Az $x^2:x^5$ típusú osztásnál, vagyis amikor az osztó kitevője nagyobb, mint az azonos alapú osztandó kitevője, formálisan elvégezve az osztást, eredményül x^{-3} adódik. Az ilyen, negatív kitevőjű hatvány mennyiségeket a 3.9 pontban tárgyaljuk.)

h) Szorzat és hatvány hatványozása. Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezőket egyenként a kijelölt hatványra hatványozzuk, és a kapott eredményt összeszorozzuk.

Pl.: $(abc)^2=a^2b^2c^2.$

Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára hatványozzuk.

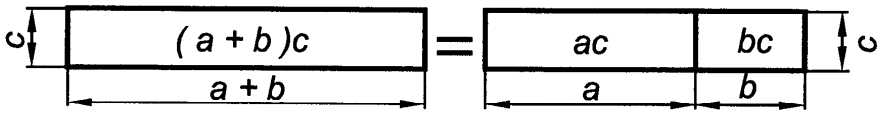
Pl.: $\left(a^3\right)^2=a^{3\cdot 2}=a^6,$ mert $\left(a^3\right)^2=a^3\cdot a^3=a^{3+3}=a^6.$

3.4 Többtagú algebrai kifejezések szorzása; nevezetes szorzatok

a) Többtagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval. Többtagú kifejezést egytagúval úgy szorzunk, hogy a többtagúnak minden tagját megszorozzuk az egytagúval, s az így kapott részletszorzatokat összegezzük.

Összeg szorozva egytagúval:

$(a+b)\,c = ac+bc$ ill. $c\,(a+b) = ca+cb$ (40. ábra).

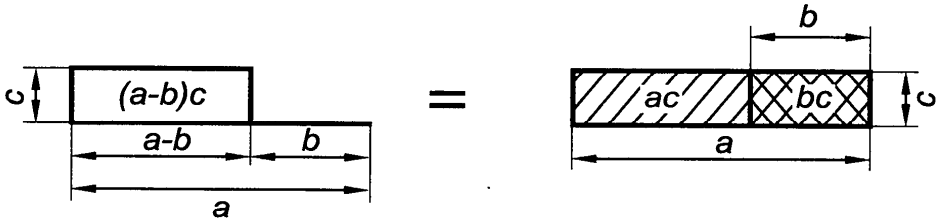


40. ábra. $(a + b)\,c = ac + bc$

Pl.: $\left(3xy^2+6x^3yz^4\right)\left(-4xy^3\right) = -12x^2y^5 - 24x^4y^4z^4.$

Különbség szorozva egytagúval:

$(a-b)\,c = ac-bc$ ill. $c\,(a-b) = ca-cb$ (41. ábra).



41. ábra. $(a - b)\,c = ac - bc$

Pl.: $-\left(5x^2-3y\right)2a = -(10ax^2-6ay) = -10ax^2+6ay,$

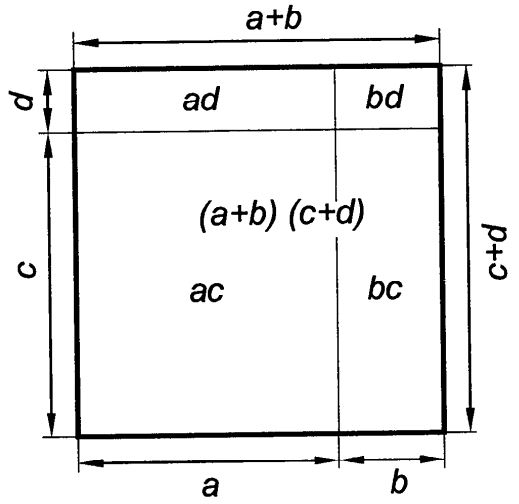
$\left(5u^2x-4u\right)\cdot 3u^2x-(7u^2x-9u)\cdot 2u =$

$= 15u^4x^2 - 12u^3x - 14u^3x + 18u^2 = 15u^4x^2 - 26u^3x + 18u^2$

b) Többtagú algebrai kifejezés szorzása többtagúval. Többtagú kifejezést többtagúval úgy szorzunk, hogy az egyik többtagú minden tagját megszorozzuk a másik többtagú mindegyik tagjával, és a részletszorzatokat összegezzük.

Többtagú szorozva többtagúval:

$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$ (42. ábra).



42. ábra. $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Pl.: $(2a+5b)(7a+4b) = 14a^2 + 35ab + 8ab + 20b^2 = 14a^2 + 43ab + 20b^2$,

$(5x-4y)(2x-9y) = 10x^2 - 8xy - 45xy + 36y^2 = 10x^2 - 53xy + 36y^2$.

Vigyázzunk, ne maradjon ki részletszorzat. Jó betartani a bemutatott sorrendet: a szorzandó minden tagját megszorozzuk a szorzó első tagjával, azután a másodikkal stb. Az egyneműek összevonását megkönnyíthetjük, ha az egynemű részletszorzatokat egymás alá írjuk.

Pl.: $\left(6a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - b^3\right)\cdot\left(a^2 + ab - 3b^2\right) =$

$$= 6a^5 - 18a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3$$
$$+ 6a^4b - 18a^3b^2 + 3a^2b^3 - ab^4$$
$$-18a^3b^2 + 54a^2b^3 - 9ab^4 + 3b^5$$

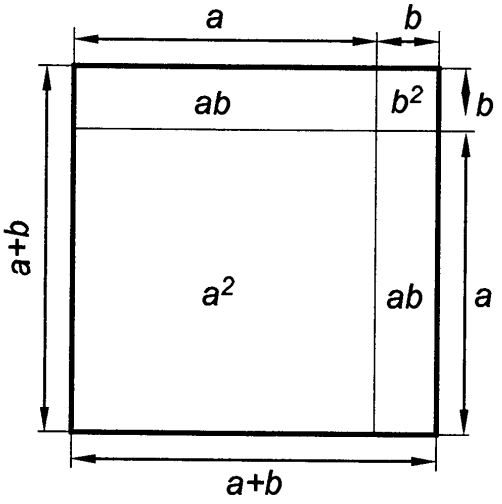
$$= 6a^5 - 12a^4b - 33a^3b^2 + 56a^2b^3 - 10ab^4 + 3b^5.$$

c) Nevezetes alakú szorzatok (*nevezetes azonosságok*). Itt olyan kéttagúak rövidített szorzását tárgyaljuk, amelyek gyakran előfordulnak:

$$(a+b)(a+b)=(a+b)^2, \qquad (a-b)(a-b)=(a-b)^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \qquad (a+b)^2(a+b)=(a+b)^3,$$
$$\text{és } (a-b)^2(a-b)=(a-b)^3.$$

1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$, tehát

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$ (43. ábra).



43. ábra. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Két tag összegének négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzethez hozzáadjuk az első és második tag kétszeres szorzatát és a második tag négyzetét.

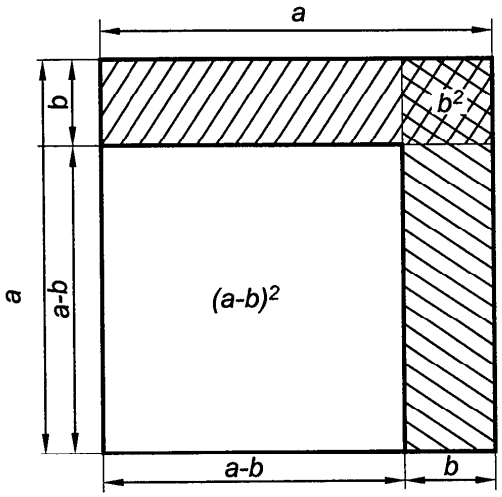
Pl.: $26^2=(20+6)^2=20^2+2\cdot 20\cdot 6+6^2=400+240+36=676.$

$$(3ax^3+0{,}5a^2x)^2=(3ax^3)^2+2\cdot 3ax^3\cdot 0{,}5a^2x+(0{,}5a^2x)^2=$$
$$=9a^2x^6+3a^3x^4+0{,}25a^4x^2.$$

2. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$, tehát

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$ (44. ábra).

(Magyarázat a 44. ábrához: az a^2 területből az ab terület kétszeres levonásával a kétszeresen bevonalkázott rész, a b^2 terület is kétszer vonódik le, ezért ugyanezt a területet hozzá is kell adni, hogy egyenlőségünk helyes maradjon.)



44. ábra. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Két tag különbségének a négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk az első és második tag kétszeres szorzatát, és hozzáadjuk a második tag négyzetét.

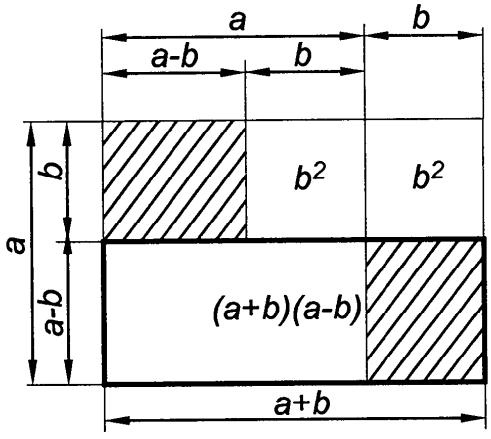
Pl.: $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

$$\left(9x^4 - 3ay^3\right)^2 = \left(9x^4\right)^2 - 2 \cdot 9x^4 \cdot 3ay^3 + \left(3ay^3\right)^2 =$$

$$= 81x^8 - 54ax^4y^3 + 9a^2y^6$$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2$, tehát

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$ (45. ábra).



45. ábra. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Két tag összegének és különbségének szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével.

Pl.: $31 \cdot 29 = (30+1)(30-1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899,$

$(0,7x^3y + x)(0,7x^3y - x) = (0,7x^3y)^2 - (x)^2 = 0,49x^6y^2 - x^2.$

4. $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Két tag összegének a köbét megkapjuk, ha az első tag köbéhez hozzáadjuk az első tag háromszoros négyzetének a második taggal való szorzatát, az első tag háromszorosának a második tag négyzetével alkotott szorzatát és a második tag köbét.

Pl.: $12^3 = (10+2)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \cdot 2^2 + 2^3 =$

$= 1000 + 600 + 120 + 8 = 1728,$

$(2x^2y + 5x^4)^3 = (2x^2y)^3 + 3(2x^2y)^2 \cdot 5x^4 + 3 \cdot 2x^2y \cdot (5x^4)^2 + (5x^4)^3 =$

$= 8x^6y^3 + 60x^8y^2 + 150x^{10}y + 125x^{12}.$

5. $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Két tag különbségének a köbét megkapjuk, ha az első tag köbéből kivonjuk az első tag háromszoros négyzetének a második taggal való szorzatát, hozzáadjuk az első tag háromszorosának a második tag négyzetével alkotott szorzatát, és levonjuk a második tag köbét.

Pl.: $19^3 = (20-1)^3 = 20^3 - 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1^3 - 1^3 =$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859,$

$(2a^2 - 5b)^3 = (2a^2)^3 - 3(2a^2)^2 5b + 3 \cdot 2a^2 (5b)^2 - (5b)^3 =$

$= (8a^6 - 60a^4b + 150a^2b^2 - 125b^3.$

6. *Többtagú algebrai kifejezés négyzete és köbe.* Kettőnél több tagból álló kifejezés négyzetét is, köbét is a már megismert eljárás ismételt alkalmazásával állíthatjuk elő. Természetesen elvégezhetjük a többtagúak szorzását nevezetes szorzatok felhasználása nélkül is.

$$(a+b+c)^2=\left[(a+b)+c\right]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

$$(a+b+c)^3=\left[(a+b)+c\right]^3=$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$$

3.5 Az *R* halmazba tartozó számok négyzetének és köbének kiszámítása

Egész számok és tizedes törtek négyzetre emelésének gyakorlati szabálya: az első számjegy négyzetéhez hozzáadjuk – mindig egy-egy hellyel jobbra alá írva – az első és második számjegy kétszeres szorzatát, a második számjegy négyzetét, majd az első és a második számjegyből álló szám és a harmadik számjegynek a kétszeres szorzatát és a harmadik számjegy négyzetét. Azután az első három számjegyből álló szám és a negyedik számjegy kétszeres szorzatát, meg a negyedik számjegy négyzetét stb. A tizedes törteknél az eredményül kapott számból kétszer annyi tizedes jegyet kell kijelölni, mint az eredeti számban volt.

Pl.: $3152^2 =$

9	3^2
6	$2\cdot3\cdot1$
1	1^2
3 1 0	$5\cdot31\cdot2$
2 5	5^2
1 2 6 0	$2\cdot315\cdot2$
4	2^2
9 9 3 5 1 0 4	

Röviden, s az egyjegyű részeredményt jobbra az előző mellé írva:

$315{,}2^2 =$ 961 310 25 12604 = 99351,04

$4{,}15^2 =$ 1681 410 25 = 17,2225

$0{,}89^2 =$ 64 144 81 = 0,7921

Egész számok és tizedes törtek köbre emelésének gyakorlati szabálya: az első számjegy köbéhez hozzáadjuk – mindig egy hellyel jobbra alá írva – az első számjegy háromszoros négyzetének a második számjeggyel való szorzatát, a második számjegy háromszoros négyzetének és az első számjegynek a szorzatát és a második számjegy köbét. Azután az első két számjegyből álló szám háromszoros négyzetének a harmadik számjeggyel való szorzatát, a harmadik számjegy háromszoros négyzetének és az első két számjegyből álló számnak a szorzatát, majd a harmadik számjegy köbét, stb. A tizedes törteknél az eredményül kapott számból háromszor annyi tizedes jegyet kell kijelölni, mint az eredeti számban volt.

Pl.: $215^3 =$

8	2^3
1 2	$3 \cdot 2^2 \cdot 1$
6	$3 \cdot 1^2 \cdot 2$
1	1^3
6 6 1 5	$3 \cdot 21^2 \cdot 5$
1 5 7 5	$3 \cdot 5^2 \cdot 21$
1 2 5	5^3
9 9 3 8 3 7 5	

Röviden, s az egyjegyű részeredményt jobbra, az első mellé írva:

$21{,}5^3 =$

8
1261
6615
1575
125
9938,375

$0{,}142^3 =$

1
12
48
64
1176
1688
0,002863288

Megjegyzések

1. A számok hatványozását célszerűbb számítógéppel végezni.
2. Negatív szám négyzete pozitív, köbe negatív.

3.6 Többtagú algebrai kifejezések osztása

a) Osztás egytagúval. Többtagú algebrai kifejezést egytagúval úgy osztunk, hogy a többtagú minden egyes tagját elosztjuk az egytagúval, s a kapott részlethányadosok összegét képezzük.

Pl.: $(a+b-c):x=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}$ vagy $\frac{a+b-c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}$.

Próbája: $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}\right)\cdot x=a+b-c.$

Pl.: $(18a^4-10a^2+4a):3a=6a^3-\frac{10}{3}a+\frac{4}{3}a^0=6a^3-3,\dot{3}a+1,\dot{3}.$

Az azonos alapú és kitevőjű hatványok hányadosa 1.

Pl.: $a^k:a^k=a^{k-k}=a^0=1.$

Ebből is láthatjuk, hogy – a permanenciaelv alapján – célszerű megállapodni abban, hogy bármely nullától különböző véges mennyiség nulladik hatványa 1. (0^0 értelmetlen.)

Pl.: $\frac{9x^2y+12x^5y^2-6x^3}{3x^2y}=\frac{9x^2y}{3x^2y}+\frac{12x^5y^2}{3x^2y}-\frac{6x^3}{3x^2y}=3+4x^3y-2\frac{x}{y}.$

b) *Többtagú osztása többtagúval.* Az osztás megkezdése előtt legcélszerűbb mind az osztandót, mind az osztót ugyanazon betű fogyó hatványai szerint rendezni. Rendezés után az osztandó első tagját elosztjuk az osztó első tagjával, ez adja a hányados első tagját. Ezzel megszorozzuk az osztó minden egyes tagját, és a szorzatot kivonjuk az osztandóból. A maradék rendezése után annak első tagját ismét osztjuk az osztó első tagjával, ami a hányados második tagját adja. A hányados második tagjával is megismételjük az előbbi eljárást, amelyet mindaddig folytatunk, amíg a maradék nullát vagy az osztónál alacsonyabb fokú algebrai kifejezést ad. Ha nullát kapunk maradékul, akkor azt mondjuk, hogy az osztandó többszöröse az osztónak.

Pl.: $(6x^2-5xy+4xz+2yz-4y^2):(2x+y)=3x-4y+2z$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(6x^2+3xy)} \\
\qquad -8xy+4xz+2yz-4y^2 \\
\underline{-(-8xy\qquad\qquad -4y^2)} \\
\qquad +4xz+2yz \\
\underline{-(+4xz+2yz)} \\
\qquad 0
\end{array}$$

Az osztó és a hányados első (2., majd 3.) tagjának szorzatát, amit az osztandó megfelelő tagjai alá írunk, mínusz előjeles zárójelbe tettük, hogy jelezzük a kivonást.

$$\begin{array}{l} (a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2 \\ \underline{-(a^3-a^2b)} \\ \quad a^2b-b^3 \\ \quad \underline{-(a^2b-ab^2)} \\ \quad\quad +ab^2-b^3 \\ \quad\quad \underline{-(ab^2-b^3)} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

A maradék nélküli osztás helyességéről meggyőződhetünk, ha az osztót megszorozzuk a hányadossal, s eredményül az osztandót kapjuk.

Pl.: $\underline{(a^2+ab+b^2)}\cdot(a-b)$

$$\begin{array}{l} a^3+a^2b+ab^2 \\ \quad -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline a^3+\ 0\ +\ 0\ -b^3 \end{array}$$

, tehát az osztást jól végeztük.

$$\begin{array}{l} 8x^3:(2x-1)=4x^2+2x+1 \\ \underline{-(8x^3-4x^2)} \\ \quad 4x^2 \\ \quad \underline{-(4x^2-2x)} \\ \quad\quad +2x \\ \quad\quad \underline{-(2x-1)} \\ \quad\quad\quad 1 \end{array}$$

Próba

$$\begin{array}{l} (4x^2+2x+1)\cdot(2x-1) \\ \hline 8x^3+4x^2+2x \\ \quad -4x^2-2x-1 \\ \hline 8x^3+\ 0\ +\ 0-1 \end{array}$$

Hozzáadva a maradékot:

$$8x^3-1+1=8x^3,$$

tehát az osztást jól végeztük el.

Mivel a maradék alacsonyabb fokú (nulladfokú), mint az osztó (elsőfokú), ezért az osztást nem folytatjuk tovább. Az eredményt így írhatjuk fel:

$$4x^2+2x+1+\frac{1}{2x-1}.$$

A hányados tehát ebben az esetben egy egész és egy törtkifejezésből áll (az algebrai törtekkel a 3.8 pontban foglalkozunk).

3.7 Többtagú algebrai kifejezések szorzattá alakítása

Az algebrai törtek is, miként a közönséges törtek, gyakran egyszerűsíthetők a számlálóban és a nevezőben előforduló közös tényezőkkel, ezért meg kell ismerkednünk azzal, hogyan lehet többtagú algebrai kifejezésből a közös tényezőt kiemelni, s így a többtagút szorzattá alakítani.

a) Ha a többtagú minden tagjának van közös tényezője, akkor annak kiemelésével végezzük a szorzattá alakítást:

$$(ak+bk-ck)=k(a+b-c).$$

Pl.: **1.** $8x^3+4x^2=(2x\cdot 4x^2)+(1\cdot 4x^2)=4x^2(2x+1)$

2. $(3a+4b)(x-y)-(2a+b)(x-y)=(x-y)\left[(3a+4b)-(2a+b)\right]=$
$=(x-y)(a+3b).$

b) Két négyzetes tag különbsége átalakítható két tag összegének és különbségének szorzatává:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Pl.: **1.** $4x^2-4=(2x)^2-2^2=(2x+2)(2x-2)=4(x+1)(x-1)$ vagy
$4(x^2-1^2)=4(x+1)(x-1).$

2. $9x^2-\frac{1}{4}=(3x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right).$

3. $p^4-q^4=\left(p^2\right)^2-\left(q^2\right)^2=\left(p^2+q^2\right)\left(p^2-q^2\right)=$
$=\left(p^2+q^2\right)(p+q)(p-q).$

4. $x^2-(y+z)^2=\left[x+(y+z)\right]\cdot\left[x-(y+z)\right]=(x+y+z)(x-y-z).$

c) Ha olyan háromtagú algebrai kifejezést kell szorzattá alakítani, amely két tag összegének vagy különbségének teljes négyzete, akkor a négyzetkifejezést az alap önmagával való szorzatára bontjuk:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b),$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b).$$

Pl.: **1.** $4x^2+4ax+a^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot a+a^2=(2x+a)^2=(2x+a)(2x+a)$
Mivel az elsőfokú tag a $4ax=2\cdot 2x\cdot a$, azaz a két négyzetes tag alapjának kétszeres szorzataként írható fel, ezért a háromtagú kifejezés teljes négyzet.

2. $a^4-4a^2+4=\left(a^2\right)^2-2\cdot 2a^2+2^2=\left(a^2-2\right)^2=\left(a^2-2\right)\left(a^2-2\right)$ de írhatunk $\left(2-a^2\right)\left(2-a^2\right)$ szorzatot is, mert $\left(a^2-2\right)^2=a^4-4a^2+4$ és $\left(2-a^2\right)^2=4-4a^2+a^4$, tehát csak a tagok sorrendjében van különbség.

3. $0{,}01-a+25a^2=(0{,}1)^2-2\cdot 5a\cdot 0{,}1+(5a)^2=(0{,}1-5a)^2=$
$=(0{,}1-5a)(0{,}1-5a).$

4. $x^2-4xy+4y^2=(x)^2-2\cdot 2xy+(-2y)^2=(x-2y)^2=$
$=(x-2y)(x-2y)$

d) A többtagú algebrai kifejezés néha csoportosítással, átrendezéssel, új tagok behozatalával vagy meglevők szétbontásával is szorzattá alakítható.

Pl.: **1.** $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)=$
$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$

2. $-6cz+3cy-15dy+30dz=3c(-2z+y)-15d(y-2z)=$
$=(y-2z)(3c-15d)=3(y-2z)(c-5d).$

3. $x^2+6xy+8y^2=x^2+2xy+4xy+8y^2=x(x+2y)+4y(x+2y)=$
$=(x+2y)(x+4y).$

4. $y^2+5y-6=y^2+6y-y-6=y(y+6)-(y+6)=(y+6)(y-1).$

5. $x^3-3x^2-4x+12=(x^3-3x^2)+(12-4x)=x^2(x-3)-4(x-3)=$
$=(x^2-4)(x-3)=(x-2)(x+2)(x-3).$

6. $a^2+b^2-2ab-c^2=(a^2+b^2-2ab)-c^2=(a-b)^2-c^2=$
$=[(a-b)+c][(a-b)-c]=(a-b+c)(a-b-c)$

7. $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=$

$=a^2(a-b)+b(a-b)(a+b)=(a-b)\left[a^2+b(a+b)\right]=$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

3.8 Algebrai törtkifejezések

Az $\frac{S}{N}$ hányadost, ahol S és N tetszőleges polinom, *algebrai törtkifejezésnek* (röviden: *algebrai törtnek*) nevezzük.

Pl.: $\frac{a}{b}$, $\frac{4x+y}{3x-2}$, $\frac{ax^2-bx-c}{x+p}$.

Egy algebrai tört *értelmezési tartományának* nevezzük azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyek az algebrai tört nevezőjének nem zérushelyei. Pl.: $\frac{4x+y}{3x-2}$ tört nevezőjének zérushelye az $x=\frac{2}{3}$, tehát a tört értelmezési tartománya az $R \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ halmaz.

Az algebrai törtekre mindazok a szabályok érvényesek, amelyek a közönséges törtekre.

a) Az algebrai tört bővítése és egyszerűsítése. Ha a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző mennyiséggel megszorozzuk vagy elosztjuk, értéke nem változik meg, de az értelmezési tartománya változhat, ezért azt jelölni kell.

Pl.: **1.** $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{ax^2}{bx^2}=\frac{a(x+y)}{b(x+y)}$, $(b\neq 0,\ c\neq 0,\ x\neq 0,\ x\neq -y)$.

2. $\frac{ax+bx}{cx+dx}=\frac{x(a+b)}{x(c+d)}=\frac{a+b}{c+d}$, $(x\neq 0,\ c+d\neq 0)$.

3. $\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$, $(a+b\neq 0)$.

4. $\dfrac{9x^2-6xy+y^2}{6xy-2y^2}=\dfrac{(3x-y)^2}{2y(3x-y)}=\dfrac{3x-y}{2y}$, $(3x-y\neq 0,\ y\neq 0)$.

Látjuk, hogy az algebrai törtek egyszerűsítéséhez elengedhetetlen a közös tényező kiemelésének, többtagú kifejezés szorzattá alakításának jó begyakorlása.

5. $\dfrac{15bx-10ax}{12ay-18by}=\dfrac{5x(3b-2a)}{6y(2a-3b)}=-\dfrac{5x(2a-3b)}{6y(2a-3b)}=-\dfrac{5x}{6y}$, $(2a-3b\neq 0)$.

b) A törtek összeadása és kivonása. Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze, hogy a számlálók összegét a közös nevezővel osztjuk.

Pl.: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{x+y+1}{a}$.

Egyenlő nevezőjű törteket úgy vonunk ki, hogy a számlálók különbségét osztjuk a közös nevezővel.

Pl.: $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{a}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{x-y-1}{a}$.

A különböző nevezőjű törteket közös nevezőre kell hozni, mert csak azután végezhetjük el az összeadást, ill. a kivonást. Közös nevezőnek általában az adott nevezők legkisebb közös többszörösét célszerű választani. (Ügyeljünk az értelmezési tartomány megváltozására.)

Pl.: **1.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{bx}{ab}+\dfrac{ay}{ab}=\dfrac{bx+ay}{ab}$, $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{bx}{ab}-\dfrac{ay}{ab}=\dfrac{bx-ay}{ab}$.

2. $\dfrac{a+b}{3ab}-\dfrac{a+c}{9ac}-\dfrac{b+c}{4bc}=\dfrac{12c(a+b)-4b(a+c)-9a(b+c)}{36abc}=$

$=\dfrac{12ac+12bc-4ab-4bc-9ab-9ac}{36abc}=\dfrac{3ac+8bc-13ab}{36abc}$.

3. $\dfrac{3x-1}{2x-2}+\dfrac{6x+4}{5x-5}-\dfrac{8x+1}{3x-3}=\dfrac{3x-1}{2(x-1)}+\dfrac{6x+4}{5(x-1)}-\dfrac{8x+1}{3(x-1)}=$

$=\dfrac{45x-15+36x+24-80x-10}{30(x-1)}=\dfrac{x-1}{30(x-1)}=\dfrac{1}{30}$.

4. $\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{a(a+b)-a(a-b)+(a-b)^2}{(a+b)(a-b)^2}=$

$$=\frac{a^2+ab-a^2+ab+a^2-2ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$$

(A törtek közös nevezője a nevezők legkisebb közös többszöröse: $(a+b)(a-b)^2$.)

c) Az algebrai törtek szorzása és osztása. A 2.18 pontban közölt szabályokat – amelyek az algebrai törtekre is érvényesek – röviden a következő képletekkel foglalhatjuk össze:

1. tört szorzása egésszel: $\dfrac{a}{b}\cdot x=\dfrac{ax}{b}$;

2. tört osztása egésszel: $\dfrac{a}{b}:x=\dfrac{a}{bx}$;

3. egész és tört szorzása törttel: $a\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{d}$, $\quad\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$;

4. egész és tört osztása törttel:

$$a:\frac{c}{d}=a\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{c},\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Pl.: **1.** $\dfrac{10xy}{18ab}\cdot 6ab=\dfrac{10xy\cdot 6ab}{18ab}=\dfrac{10xy}{3}$,

2. $\dfrac{15yz}{18(y^2-z^2)}\cdot 9(y+z)=\dfrac{15yz\cdot 9(y+z)}{18(y+z)(y-z)}=\dfrac{15yz}{2(y-z)}$,

3. $\dfrac{50a^2b}{15c}:30ab^2=\dfrac{50a^2b}{15c\cdot 30ab^2}=\dfrac{a}{9bc}$,

4. $\dfrac{48(x^2+xy)}{7(x^2+y^2)}:36(xy+y^2)=\dfrac{48(x+y)x}{7(x^2+y^2)\cdot 36y(x+y)}=\dfrac{4x}{21y(x^2+y^2)}$,

5. $4xyz\cdot\dfrac{6xy}{9z}=\dfrac{4xyz\cdot 6xy}{9z}=\dfrac{8x^2y^2}{3}$,

6. $\dfrac{18p}{a^2-16}\cdot\dfrac{a-4}{4q}=\dfrac{18p(a-4)}{(a+4)(a-4)\cdot 4q}=\dfrac{9p}{2q(a+4)}$,

7. $11a:\frac{22a^3}{5x}=\frac{11a\cdot 5x}{22a^3}=\frac{5x}{2a^2}$,

8. $\frac{x^2-25}{y^2-16}:\frac{x+5}{y-4}=\frac{(x-5)(x+5)}{(y-4)(y+4)}\cdot\frac{y-4}{x+5}=\frac{x-5}{y+4}$,

9. $\left(\frac{4}{3x}-\frac{1}{x-1}\right):\left[1-\frac{3(x-2)}{2(x-1)}\right]=\frac{4(x-1)-3x}{3x(x-1)}:\frac{2(x-1)-3(x-2)}{2(x-1)}=$

$=\frac{x-4}{3x(x-1)}\cdot\frac{2(x-1)}{-x+4}=-\frac{2}{3x}$.

d) "Emeletes" tört: törtkifejezések hányadosa:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Ha egy tört számlálója is és nevezője is külön-külön törtkifejezés, akkor azt célszerű egyszerű törtalakra hozni, hogy a számolási munkát kényelmesebbé tegyük. Ennek *egyik módja*, amint láttuk, hogy a törtet mint kijelölt osztást értelmezve, megszorozzuk a számlálót a nevező reciprokával, és ha lehet, egyszerűsítünk.

Pl.: **1.** $\frac{\frac{5xy}{3a^2b}}{\frac{10x^2y}{9ab}}=\frac{5xy}{3a^2b}\cdot\frac{9ab}{10x^2y}=\frac{3}{2ax}$.

Megjegyzés: Emeletes törtek felírásakor egyértelműen jelezzük a számlálót és a nevezőt elválasztó törtvonalat.

2. $\frac{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}=\frac{\frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a+b-(a-b)}{(a-b)(a+b)}}=\frac{2a}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{2b}=\frac{a}{b}$.

A számlálót és a nevezőt $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$-vel szorozva és egyszerűsítve is egyúttal, a számlálóban is és a nevezőben is egész kifejezést kapunk:

$$\frac{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}=\frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}.$$

3. $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\dfrac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)xy}{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}=\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=$

$=\dfrac{x-y}{x+y}.$

4. $1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1+\frac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\frac{x-1+x}{x-1}}=$

$=1-\dfrac{1}{\frac{2x-1}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{2x-1}=\dfrac{2x-1-(x-1)}{2x-1}=\dfrac{x}{2x-1}.$

3.9 Műveletek hatványmennyiségekkel

Hatványmennyiségekkel (egész kitevő esetén) a megelőző pontokban már foglalkoztunk. Most összefoglaljuk és kiegészítjük a hatványmennyiségekre vonatkozó szabályokat.

Egyenlő számok, betűkifejezések szorzatát rövidített alakba írva *hatványnak*, a műveletet, amellyel a hatványt meghatározzuk, *hatványozásnak* nevezzük: $a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a=a^n$ (az a-t n-szer vettük tényezőül), a a *hatványalap*, n a *hatványkitevő*, a^n a *hatvány*.

Nulla tetszőleges (véges) pozitív hatványa nulla: $0^n=0\ (n>0)$;

1 tetszőleges (véges) hatványa 1, azaz $1^n=1$.

a) Pozitív számot úgy hatványozunk, hogy azt a kijelölt hatványra hatványozzuk (pozitív szám hatványa is pozitív).

Negatív számot úgy hatványozunk, hogy abszolút értékének hatványa elé páros kitevő esetén pozitív, páratlan kitevő esetén negatív előjelet írunk.

$$(+a)^{2n}=+a^{2n},\quad (+a)^{2n+1}=+a^{2n+1};$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, \quad (a > 0);$$

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}.$$

Írható tehát: $(+a)^{2n} = (-a)^{2n}$ és $(+a)^{2n+1} = -(-a)^{2n+1}$; ($2n$ páros szám, $2n + 1$ páratlan szám, tetszőleges egész n esetén.)

Pl.: $3^2 = 9$, $(+3)^2 = +9$, $(-3)^2 = +9$, $4^3 = 64$, $(+4)^3 = +64$, $(-4)^3 = -64$, $(8-3)^2 = (3-8)^2 = 25$, $(8-3)^3 = -(3-8)^3 = 125$.

b) Összeadni és kivonni csak egynemű hatványmennyiségeket lehet. Egyneműeknek nevezzük azokat a hatványmennyiségeket, amelyeknek alapjuk és kitevőjük egyenlő.

Pl.: **1.** $5x^4 + 2x^4 = 7x^4$, $3a^2 - 5a^2 + 2 - 4a^2 = -6a^2 + 2$,

2. $7 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 = -7 \cdot 2^3 = -56$,

3. $9 \cdot (-3)^4 + 6 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^4 - 7 \cdot (-3)^4 = 3 \cdot (-3)^4 = 3 \cdot 3^4 = 3^5 = 243$,

4. $5x^3 + 4x^2 - 7x^5 = x^2(5x + 4 - 7x^3)$,

5. $4a^2b + 6a^2 + 2b^2cx - 2a^2b + 3b^2cx = 2a^2b + 6a^2 + 5b^2cx$.

c) Egyenlő alapú hatványokat úgy szorozhatunk egymással, hogy az alapot a kitevők összegére hatványozzuk:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a \in R \setminus \{0\};\ m, n \in Z).$$

Pl.: **1.** $2a^3 \cdot 5a^4 \cdot 3a^7 = 30a^{3+4+7} = 30a^{14}$, $-6x^2y^5 \cdot 4x^3y^2 = -24x^5y^7$,

2. $5x^{2a-b} \cdot 4x^{5a+2b} = 20x^{7a+b}$,

3. $(a+b)^m + (x-y)^2 - 3(a+b)^m + 7(x-y)^2 = -2(a+b)^m + 8(x-y)^2$.

Különböző alapú, de egyenlő kitevőjű hatványokat úgy szorozhatunk egymással, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre hatványozzuk:

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m, \quad (a, b \in R \setminus \{0\};\ m \in Z).$$

Pl.: $5x^2 \cdot 7z^2 = 35(xz)^2$.

Szorzatot úgy hatványozhatunk, hogy mindegyik tényezőt az adott kitevőre hatványozzuk, és a hatványokat összeszorozzuk:

$$(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \quad (a,b \in R\setminus\{0\};\ m \in Z).$$

Pl.: $8^2 \cdot 3^2 = (8\cdot 3)^2 = 24^2 = 576$, $5a^3 \cdot b^3 = 5(ab)^3$,
$(9xy)^2 = 9^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 81x^2y^2$.

d) Egyenlő alapú hatványokat úgy osztunk egymással, hogy az alapot a kitevők különbségére hatványozzuk:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ (ha } m<n, \text{ akkor } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}) \ (a \in R\setminus\{0\};\ m,n \in Z).$$

Pl.: **1.** $\frac{4x^3}{2x^2} = 2x^{3-2} = 2x$, $\frac{5^3}{5^7} = \frac{5^3}{5^3\cdot 5^4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$;

2. $\frac{x^4\cdot x^2\cdot x^5}{x^2\cdot x^6\cdot x^4} = \frac{x^{11}}{x^{12}} = \frac{1}{x}$, $\frac{(a-b)^5}{(a-b)^3} = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Különböző alapú, de egyenlő kitevőjű hatványokat úgy oszthatunk egymással, hogy az alapok hányadosát az adott kitevőre hatványozzuk:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad (a,b \in R\setminus\{0\};\ m \in Z).$$

Pl.: $\frac{12^3}{6^3} = \left(\frac{12}{6}\right)^3 = 2^3 = 8.$

Törtet úgy hatványozhatunk, hogy mind a számlálót, mind a nevezőt az adott kitevőre hatványozzuk:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad (a,b \in R\setminus\{0\};\ m \in Z).$$

Pl.: $\frac{32^2}{16^2} = \left(\frac{32}{16}\right)^2 = 2^2 = 4$, $\left(\frac{4abc}{5ax}\right)^3 = \frac{64a^3b^3c^3}{125a^3x^3} = \frac{64b^3c^3}{125x^3}$.

e) *Hatványt úgy hatványozunk,* hogy az alapot a kitevők szorzatára hatványozzuk:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}, \quad (a \in R\setminus\{0\};\ m,n \in Z).$$

Pl.: $\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$, $\left(-x^4\right)^5 = -x^{20}$, $\left(x^{a+b}\right)^{a-b} = x^{a^2-b^2}$.

f) *A nulla és a negatív kitevőjű hatványokat úgy értelmezzük,* hogy a pozitív egész kitevőjű hatványokra megismert műveleti szabályok a nulla és a negatív kitevőjű hatványokra is érvényesek maradjanak.

Negatív kitevőjű hatványokat kapunk, ha az egyenlő alapú hatványok osztásakor az osztandó kitevője kisebb, mint az osztó kitevője: $3^2:3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$, de $\frac{3^2}{3^5} = \frac{3^2}{3^2\cdot 3^3} = \frac{1}{3^3}$ is írható, vagyis $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$ és általánosan:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad (a \in R\setminus\{0\};\ n \in Z).$$

Pl.: $x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$ vagy $x^5 \cdot x^{-3} = x^5 \cdot \frac{1}{x^3} = x^2$;

$0{,}1^{-1} = \frac{1}{0{,}1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$; $\frac{1}{x^{-2}} = x^2$; $\left(x^2\right)^{-3} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad (a,b \in R\setminus\{0\};\ n \in Z).$$

Ha az osztandó és az osztó kitevője az egyenlő alapú hatványok osztásakor megegyezik, akkor *nulla kitevőjű hatványokat* kapunk.

Pl.: $6^3:6^3 = 6^{3-3} = 6^0 = 1$, s így írható: $6^0 = 1$, vagy általánosan:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^0 = 1, \quad (a \in R\setminus\{0\};\ n \in Z).$$

3.10 Gyökvonás. Műveletek gyökmennyiségekkel

Azt a műveletet, amellyel az adott hatványhoz és hatványkitevőhöz keressük a hatványalapot, *gyökvonásnak* nevezzük. A gyökvonás tehát a *hatványozás fordított művelete.* A gyökvonás *műveleti jele*: $\sqrt{\ }$, amely a latin "*radix*" (*gyök*) szó kezdőbetűjének, az *r*-nek az elnyújtásából származik: $\sqrt[n]{a} = b$ (olv.: ennedik gyöke az ának egyenlő bével), $(a \geq 0;\ n \in Z^+)$.

Az $\sqrt[n]{a}$ olyan nem negatív számot jelent, amelynek *n*-edik hatványa *a*-val egyenlő $(a \geq 0)$; *n* a *gyökkitevő*, *a* a *gyök alatti mennyiség*; *b* a *gyök.*

Ha a gyökkitevő 2, *akkor négyzetgyököt, ha* 3, *akkor köbgyököt mondunk.* A második gyök jelét a 2-t, nem írjuk ki, s valamely szám első gyöke, maga a szám. Tehát :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = b^n = a$$

Pl.: **1.** $\sqrt{25} = 5$, mert $5^2 = 25$, $\sqrt[3]{27} = 3$, mert $3^3 = 27$,

2. $\sqrt[n]{1} = 1$, mert $1^n = 1$, $\sqrt[n]{0} = 0$, mert $0^n = 0$,

3. $\sqrt[1]{a} = a$, mert $a^1 = a$.

A negatív mennyiségből vont páros gyök nem valós, hanem komplex mennyiség (l. a 7. fejezetet). Ha a gyökkitevő páratlan szám $(2n + 1)$, akkor a pozitív mennyiség gyöke pozitív, a negatív mennyiség gyöke negatív:

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}, \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, \quad (a > 0)$$

Pl.: **1.** $\sqrt[3]{+27} = +3$, mert $(+3)\cdot(+3)\cdot(+3) = (+3)^3 = +27 = 27$,

2. $\sqrt[3]{-27} = -3$, mert $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^3 = -27$,

3. $\left(\sqrt[5]{-6}\right)^5 = -6$.

Ezek szerint egy mennyiség értéke nem változik, ha gyököt vonunk belőle, azután ugyanannyiadik hatványra hatványozzuk (vagy előbb hatványozzuk és azután vonunk ugyanannyiadik gyököt), ha $a \geq 0$:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Páros n esetén fel kell tennünk, hogy $a \geq 0$.

Pl.: $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 = 27, \quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3, \quad \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{\left(x^2\right)^5} = x^2.$

Ha a gyökjel alatti szám valamilyen egész számnak vagy közönséges törtnek olyan hatványa, amelynek kitevője a gyökkitevővel egyenlő vagy annak egész számú többszöröse, akkor *teljes hatványnak* nevezzük; ilyen esetben tehát a *gyök értéke racionális*, ellenkező esetben pedig *irracionális szám.*

Hatvány gyökénél a gyökkitevőt és a hatványkitevőt ugyanazzal a pozitív számmal szorozhatjuk vagy oszthatjuk ($a > 0$):

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad (k,n,m \in N \setminus \{0,1\}).$$

(Itt és az alábbi azonosságokat bemutató képletekben feltesszük, hogy a gyökjel alatti mennyiség nem negatív.)

Pl.: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^4} = \sqrt[12]{16}, \quad \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[20]{a^{15}}, \quad \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}, \quad \sqrt[32]{a^8} = \sqrt[4]{a}.$

Hatványból úgy vonhatunk gyököt, hogy az alapot a hatványkitevő és a gyökkitevő hányadosára hatványozzuk:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

A törtkitevőjű hatvány tehát olyan gyökmennyiséggel egyenlő, amelynek gyökkitevője a törtkitevő nevezője, a gyök alatti mennyiség hatványkitevője pedig a törtkitevő számlálója.

Pl.: **1.** $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[4]{x^8} = x^{\frac{8}{4}} = x^2$, $\sqrt[3]{-y^6} = -y^{\frac{6}{3}} = -y^2$;

2. $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{3^{3\cdot 2}} = 3^3 = 27$, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^{3\cdot 2}} = 2^2 = 4$.

3. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $(a \in R^+,\ n \in Z^+)$.

Gyököt úgy hatványozhatunk, hogy a gyökjel alatti mennyiséget a kívánt hatványra hatványozzuk:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Pl.: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = \sqrt[3]{x^{2\cdot 5}} = \sqrt[3]{x^{10}}$, $\left(\sqrt[5]{-2x^2y^4}\right)^2 = \sqrt[5]{\left(-2x^2y^4\right)^2} = \sqrt[5]{4x^4y^8}$.

Szorzatból úgy vonhatunk gyököt, hogy a szorzat minden egyes tényezőjéből gyököt vonunk, és az eredményeket összeszorozzuk:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Fordítva: egyenlő gyökkitevőjű mennyiségeket úgy szorozhatunk, hogy a gyök alatti mennyiségek szorzatából a közös gyökkitevővel gyököt vonunk:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Pl.: **1.** $\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = 4x$, $\sqrt[3]{-8a^3b^6} = -2ab^2$;

2. $\sqrt{200x^3y^5} = \sqrt{2 \cdot 10^2 x^2 y^4 xy} = 10xy^2 \cdot \sqrt{2xy}$;

3. $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} = 6$, $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$.

A különböző gyökkitevőjű mennyiségeket szorzás előtt közös gyökkitevőjűvé alakítjuk. Közös gyökkitevőül általában a régi gyökkitevők legkisebb közös többszörösét célszerű választani. A gyökjel alatti mennyiség hatványkitevőjét annyiszorosára növeljük, ahányszorosára a gyökkitevőt növeltük.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^m b^n}.$$

Pl.: **1.** $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{x^5}$,

2. $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[15]{a^6}\cdot\sqrt[15]{a^{20}}=\sqrt[15]{a^{26}}$,

3. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$.

Törtből úgy vonhatunk gyököt, hogy mind a számlálóból, mind a nevezőből gyököt vonunk:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad (b\neq 0).$$

Pl.: **1.** $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1{,}5$;

2. $\sqrt{\frac{75}{27}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$;

3. $\sqrt{\frac{16x^4z^2}{25a^6y^8}}=\frac{\sqrt{16x^4z^2}}{\sqrt{25a^6y^8}}=\frac{4x^2z}{5a^3y^4}$;

4. $\sqrt[3]{\frac{3x^9y^6z^8}{8a^6b^{12}}}=\frac{\sqrt[3]{3x^9y^6z^8}}{\sqrt[3]{8a^6b^{12}}}=\frac{x^3y^2z^2\sqrt[3]{3z^2}}{2a^2b^4}=\frac{x^3y^2z^2}{2a^2b^4}\sqrt[3]{3z^2}$.

Egyenlő gyökkitevőjű gyökmennyiségeket úgy oszthatunk egymással, hogy a gyökjel alatt álló kifejezéseket egymással osztjuk, és a nyert hányadosból a közös gyökkitevővel gyököt vonunk:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad (b\neq 0).$$

Pl.: **1.** $\sqrt{24}:\sqrt{6}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$;

2. $\sqrt[5]{-6a^4c^3}:\sqrt[5]{3a^2c}=\sqrt[5]{\frac{-6a^4c^3}{3a^2c}}=\sqrt[5]{-2a^2c^2}$;

3. $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{x+y}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}=\sqrt{x-y}$.

A különböző gyökkitevőjű gyökmennyiségeket osztás előtt közös gyökkitevős alakra hozzuk:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}, \quad (b \neq 0).$$

Pl.: **1.** $\sqrt{6} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{6^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{54}$;

2. $\sqrt[4]{2x^2y^3} : \sqrt[6]{3x^3z^4} = \sqrt[12]{\left(2x^2y^3\right)^3} : \sqrt[12]{\left(3x^3z^4\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{8x^6y^9}{9x^6z^8}} = \sqrt[12]{\frac{8y^9}{9z^8}}$,
$(x, y > 0,\ z \neq 0)$;

3. $\sqrt[4]{a^4 - b^4} : \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt[4]{a^4 - b^4} : \sqrt[4]{\left(a^2 - b^2\right)^2} =$

$$= \sqrt[4]{\frac{\left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right)}{\left(a^2 - b^2\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}.$$

Gyökmennyiségekből úgy vonhatunk gyököt, hogy a gyökjel alatti mennyiségből a gyökkitevők szorzatával vonunk gyököt:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Pl.: **1.** $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

2. $\sqrt{\sqrt[3]{a^7b^5x^9}} = \sqrt[6]{a^7b^5x^9} = ax\sqrt[6]{ab^5x^3}$;

3. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2 - 2ab + b^2}} = \sqrt[6]{(a-b)^2} = \sqrt[3]{|a-b|}$.

Fordítva: *Ha a gyökkitevő szorzat,* akkor úgy vonhatunk gyököt, hogy a gyökkitevő tényezőivel egymás után gyököt vonunk:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Pl.: **1.** $\sqrt[6]{125} = \sqrt[2\cdot3]{125} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$;

2. $\sqrt[4]{\frac{81x^5}{16y^6}} = \sqrt{\sqrt{\frac{81x^5}{16y^6}}} = \sqrt{\frac{9x^2}{4y^3}\sqrt{x}} = \frac{3x}{2y}\sqrt{\frac{1}{y}\sqrt{x}}, \quad (y > 0).$

Gyökmennyiséget úgy szorozhatunk valamely mennyiséggel, hogy előbb azt a gyökkitevőre hatványozzuk, és a hatvánnyal megszorozzuk a gyökjel alatt álló kifejezést; és megfordítva: gyökjel alól tényezőt úgy emelünk ki, hogy az adott gyökkitevővel a tényezőből gyököt vonunk:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}; \quad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}, \quad (n \text{ páratlan vagy } a > 0).$$

Pl.: **1.** $\sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \sqrt{\sqrt{5^3}} = \sqrt[4]{5^3}$;

2. $x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x>0)$;

3. $\frac{1}{x+y}\sqrt{5\left(x^2-y^2\right)^3} = \frac{1}{x+y}\sqrt{5\left(x^2-y^2\right)^2\left(x^2-y^2\right)} =$

$$= \frac{x^2-y^2}{x+y}\sqrt{5\left(x^2-y^2\right)} = (x-y)\sqrt{5\left(x^2-y^2\right)}, \quad (x>y).$$

Összeadás és kivonás. Az egynemű gyökmennyiségeket összevonjuk, a különneműek összevonását csak jelöljük. Egyneműek azok a mennyiségek, amelyekben a gyökkitevő is meg a gyökjel alatti mennyiség is ugyanaz.

Pl.: **1.** $5\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$,

2. $a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x} = (a+b)\cdot\sqrt[n]{x}$,

3. $7\sqrt{5x^2y}-3\sqrt{5x^2y}+9\sqrt{5xy^2} = 4\sqrt{5x^2y}+9\sqrt{5xy^2}$,

4. $6\sqrt{27}-\sqrt{54}+\frac{5}{2}\sqrt{48}-3\sqrt{75} = 6\sqrt{3\cdot 9}-\sqrt{6\cdot 9}+\frac{5}{2}\sqrt{3\cdot 16}-3\sqrt{3\cdot 25} =$

$$= 18\sqrt{3}-3\sqrt{6}+10\sqrt{3}-15\sqrt{3} = 13\sqrt{3}-3\sqrt{6}.$$

A nevező gyöktelenítése

A törtkifejezéseket a kényelmesebb számolás érdekében célszerű úgy átalakítani, hogy nevezőjükben ne legyen négyzetgyökös kifejezés. Ez az eljárás *a nevező gyöktelenítése.*

a) Ha a törtkifejezés nevezője egytagú négyzetgyökös kifejezés, akkor a nevezőt úgy gyöktelenítjük, hogy a tört számlálóját és nevezőjét a nevezőben levő gyökkifejezéssel megszorozzuk. Más gyökkitevő esetén is gyöktelenítünk, de akkor a nevező megfelelő hatványával kell a törtet bővíteni.

Pl.: **1.** $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$,

2. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$,

3. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

4. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$,

5. $\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{(x-y)\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{(x-y)\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$,

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2}{\sqrt[3]{2x}\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{4x^2}}{2x}$.

b) Ha a tört nevezője kéttagú, és egyik vagy mindkét tagja négyzetgyökös kifejezés, akkor az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ nevezetes szorzat felhasználásával végezhetjük el a nevező gyöktelenítését.

Pl.: **1.** $\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{\left(b-\sqrt{c}\right)\left(b+\sqrt{c}\right)} = \frac{ab+a\sqrt{c}}{b^2-c}$;

2. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c}$;

3. $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = -\frac{5}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$;

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1;$

5. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}.$

c) *Ha a tört nevezője háromtagú kifejezés*, akkor két tagot zárójelbe foglalva, egy tagnak vesszük, és úgy járunk el, mintha a nevező kéttagú lenne:

Pl.: 1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}}=\dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}{[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]\cdot[(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{d}]}=$

$=\dfrac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}+a\sqrt{d}}{b+2\sqrt{bc}+c-d}.$

Az eljárást megismételve, a nevező már gyöktelen lesz.

2. $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{[(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}]\cdot[(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}=$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4-4\sqrt{2}+2-3}=\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3-4\sqrt{2}}=\dfrac{(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(3+4\sqrt{2})}{(3-4\sqrt{2})(3+4\sqrt{2})}=$

$=\dfrac{6+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-(4\cdot 2)-4\sqrt{6}}{9-16\cdot 2}=\dfrac{2-5\sqrt{2}+3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{23}.$

Ugyanígy járhatunk el, ha a nevezőben a gyökjel alatt még egy gyökös kifejezés áll:

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(3+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{9-3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{(3-\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{18}}{6}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

3.11 Algebrai összegek és valós számok négyzetgyöke

a) *Többtagú algebrai kifejezést* négyzetgyökvonás előtt az egyik betű fogyó hatványai szerint rendezzük. A többtagú algebrai kifejezés négyzetgyökének első tagja

egyenlő a gyök alatti kifejezés első tagjának négyzetgyökével. A gyök második tagját úgy kapjuk meg, hogy az első tag négyzetét kivonjuk a gyök alatti mennyiségből, és a maradékot osztjuk az első tag kétszeresével. Ez a hányados a gyök második tagja. Ezt a tagot hozzáadjuk az osztóhoz, s az így kapott összeget meg is szorozzuk vele. A szorzatot kivonjuk az osztandóból. A maradékot megint osztjuk az eddigi tagok kétszeresével stb. Ha végül a maradék nulla, akkor a gyök alatti többtagú kifejezés teljes négyzet, és így a gyök racionális. Ha végül maradékul nem kapunk nullát, akkor a gyök alatti kifejezés nem teljes négyzet, s így nem vonható belőle négyzetgyök: a gyök irracionális kifejezés (a betűk helyébe alkalmas számértékeket helyettesítve, speciális esetben racionális eredményt kaphatunk).

Pl.: **1.** $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=|a+b|$

$$\underline{-a^2}$$

$$2ab+b^2:(2a+b)\cdot b$$

$$\underline{-(2ab+b^2)}$$

$$0$$

2. $\sqrt{4x^4-20x^3y+41x^2y^2-40xy^3+16y^4}=\left|2x^2-5xy+4y^2\right|$

$$\underline{-4x^4}$$

$$-20x^3y+41x^2y^2-40xy^3+16y^4:(4x^2-5xy)(-5xy)$$

$$\underline{-(-20x^3y+25x^2y^2)}$$

$$16x^2y^2-40xy^3+16y^4:(4x^2-10xy+4y^2)\cdot 4y^2$$

$$\underline{-(16x^2y^2-40xy^3+16y^4)}$$

$$0$$

A többtagú algebrai kifejezés négyzetgyökének kiszámításával lényegileg azonos az egész és tizedes törtszámok négyzetgyökének meghatározása. A valós számok négyzetgyökének kiszámítását azzal kezdjük, hogy az adott számot a tizedesvesszőtől balra és jobbra kettős csoportokra osztjuk. Az első csoport így egyjegyű szám is lehet. Megkeressük azt a számot, amelynek négyzete alulról legjobban megközelíti az első csoportban álló számot, ez lesz a gyök első számjegye. Az ennek négyzetével kisebbített első csoport maradékához leírjuk a szám következő csoportját. Ezt a számot – utolsó jegye elhagyásával – elosztjuk a gyök első jegyének kétszeresével; így megkapjuk a gyök második számjegyét, amelyet az osztóhoz is hozzáírunk, s az így nyert számot megszorozzuk a gyök második számjegyével. A szorzatot kivonjuk a maradékból (a legalacsonyabb helyi értékű jegyét az elhagyott számjegy alá kell írni). Az új maradék mellé leírjuk a következő csoportot, s az így kapott számot egy jegy elhagyásával elosztjuk a gyök első két számjegyéből álló szám kétszeresével, s így megkapjuk a gyök harmadik számjegyét, a harmadik számjegyet hozzáírjuk az osztóhoz stb. Ezt az

eljárást addig folytatjuk, amíg a gyök kívánt pontosságát el nem értük. A tizedesvesszőt akkor kell kitenni a gyökben, amikor az első tizedes csoportot leírjuk.

Pl.: **1.**
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{11\,90\,25} = 345 \\ \hline 9 \\ \hline 29\,0 & :64\cdot 4 \\ 256 \\ \hline 342\,5 & :685\cdot 5 \\ 3425 \\ \hline 0 \end{array}$$

Begyakorolva a lépéseket, a kivonást azonnal elvégezzük, csak a maradékot írjuk le:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{11\,90\,25} = 345 \\ \hline 29\,0 & :64\cdot 4 \\ 342\,5 & :685\cdot 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,00\,24\,01} = 0,049 \\ \hline 80\,1 & :89\cdot 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2,00\,00\,00} = 1,414\ldots \\ \hline 100 & :24\cdot 4 \\ 400 & :281\cdot 1 \\ 1190 & :2824\cdot 4 \\ \hline 604 \end{array}$$

A gyökvonás algoritmusát csak a teljesség kedvéért közöljük, a gyakorlatban nehézkes, ezért általában nem használatos. A számok négyzetgyökét számítógéppel gyorsan meghatározhatjuk vagy a négyzetgyök értékét táblázatokból kiolvashatjuk, ha a táblázat pontossága, jegyszáma elegendő. A következő, viszonylag egyszerű fokozatos közelítő eljárással tetszőleges pontosságot is elérhetünk: Pl. egy $p > 0$ szám közelítő négyzetgyökének meghatározása:

1. Elosztjuk a p számot egy olyan pozitív számmal (a gyök első közelítésével), amelynek a négyzete közel egyenlő p-vel. A p szám gyökének második közelítését az osztó és a hányados számtani közepe adja..

2. Elosztjuk a p számot ezzel a számtani középpel (azaz a gyök második közelítésével). A p szám gyökének harmadik közelítését a mostani lépésben használt osztó és a kapott hányados számtani közepe szolgáltatja.

3. Ezt az eljárást mindaddig ismételjük, míg a kívánt pontosságot el nem érjük.

Az n-edik lépés utáni gyököt jelölje: a_{n+1}, akkor az eljárást az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right), \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

képlettel adott algoritmus szemlélteti. Ha a p szám közelítő értékét előre megadott 10^{-k} pontossággal ($k \in Z^+$) kell kiszámítani, akkor a számítást az

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 10^{-k}$$

egyenlőtlenség teljesüléséig ismételjük. A 10^{-k} pontosságú közelítő értéket az a_{n+1} számérték szolgáltatja.

Pl.: Számítsuk ki a $\sqrt{17}$ közelítő értékét 10^{-3} pontossággal. Válasszuk első közelítő értéknek a 4-et, mivel $4^2 = 16 \approx 17$, tehát $a_1 = 4$:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 8{,}25 = 4{,}125, \quad |4{,}125 - 4| = 0{,}125 > 10^{-3}\ (= 0{,}001),$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(4{,}125 + \frac{17}{4{,}125}\right) \approx 4{,}1231, \quad |4{,}1231 - 4{,}125| = 0{,}0019 > 0{,}001,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(4{,}123 + \frac{17}{4{,}1231}\right) \approx 4{,}1231, \quad |4{,}1231 - 4{,}1231| \leq 0{,}001.$$

Tehát a $\sqrt{17}$ értéke 10^{-3} pontossággal 4,123. (A $\sqrt{17}$ értéke 10^{-7} pontossággal: 4,1231056.) A műveletek elvégzéséhez használjunk zsebszámológépet.

Megjegyzés: Hasonló algoritmussal számíthatjuk ki a $\sqrt[3]{p}$ közelítő értékét:

$$\sqrt[3]{p} \approx a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{p}{a_n^2}\right)$$

és általában a $\sqrt[k]{p} \approx a_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right]$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

b) Példák a négyzetgyökvonás alkalmazására

1. Egy lejtő A pontjából kezdősebesség nélkül elengedünk egy m tömegű vasgolyót. Számítsuk ki a vasgolyó sebességét a lejtő B pontjában, ha az A és B pontok magasságkülönbsége $h = 19$ m.

A sebességet az $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ összefüggésből kapott $v = \sqrt{2gh}$ képlettel számítjuk ki, ahol $g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$ a szabadon eső test gyorsulása.

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 19\,\text{m}} = \sqrt{372{,}78}\ \text{m/s} \approx 19{,}31\ \text{m/s}.$$

Tehát a lejtő B végpontjában a vasgolyó sebessége közelítőleg 19,31 m/s.

2. Számítsuk ki a 120 cm hosszúságú fonálinga lengésidejét a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ képlet alkalmazásával:

$$T \approx 2 \cdot 3{,}1416 \cdot \sqrt{\frac{1{,}20\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 6{,}2832 \cdot \sqrt{0{,}1223}\,\mathrm{s} = 6{,}28232 \cdot 0{,}3497\,\mathrm{s} \approx 2{,}20\,\mathrm{s}.$$

Tehát a 120 cm hosszúságú fonálinga lengésideje 2,20 s.

3. Hány másodperc alatt ér földet a $h = 80$ m magas toronyból elejtett vasgolyó?

A megoldáshoz a $h = \frac{g}{2}t^2$ képletet használjuk, amelyből $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ és így

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = \sqrt{16{,}3099\,\mathrm{s}} \approx 4{,}04\,\mathrm{s}.$$

Tehát a 80 m magas toronyból elejtett vasgolyó 4,04 s alatt ér földet.

3.12 A kettes (bináris) és a nyolcas (oktális) számrendszer

Az általánosan használt tízes alapú ún. *tízes* (*decimális*) *számrendszerben* felírt $a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$ alakú szám jelentése:

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \ldots + a_{-m} 10^{-m},$$

ahol minden a_k számjegy a $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ jegyek bármelyike lehet.

Pl.: $824506{,}397 = 8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

Általánosságban a 2, 3, 4, ... egész számok bármelyikét választhatjuk egy helyértékes számrendszer alapjául. Így pl. a q alapú helyértékes számrendszerben a nullától $q-1$-ig egymás után következő egész számok jegyeinek segítségével írjuk le az összes többi számot, a következő alakban:

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \ldots = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots .$$

A legkevesebb különböző számjegyet a *kettes (bináris) helyértékes számrendszer* igényli, amelynek számjegyei a 0 és az 1. A bináris rendszer alapját, a kettőt már "10" (olv.: egy-nulla) alakban, két jeggyel írjuk le. Valamely szám bináris számrendszerben való felírása a számnak a 2 hatványai összegeként való előállítását jelenti. Egy számot a tízes rendszerből a bináris rendszerbe a következő módon írhatunk át:

Osztjuk a számot kettővel, a hányadost a számtól balra, a maradékot a szám alá írjuk; most osztjuk a hányadost kettővel, az új hányadost, ill. maradékot az előző hányadostól, ill. maradéktól balra írjuk stb. Ezt mindaddig folytatjuk, amíg hányadosul 1-et nem kapunk, amelyet azután az előző maradéktól szintén balra írunk. A maradékok sorozata adja a szám bináris rendszerbeli alakját.

Pl.: Írjuk fel 2-es számrendszerben a 10-es rendszerben adott 35-öt.

1	2	4	8	17	35
1	0	0	0	1	1

tehát $35_{10} = 100\ 011_2$ (az indexek a számrendszer alapszámát jelölik).

Az ellenőrzést a binárisan adott szám decimális rendszerbe való átírásával végezhetjük:

$$1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 35.$$

Az egyjegyű természetes számok bináris megfelelői:

decimális	bináris	decimális	bináris
0	0	5	101
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1000
4	100	9	1001

A bináris összeadás: $0+0=0$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=10$

Pl.: Végezzük el a 35 + 25 = 60 összeadást bináris rendszerben:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{25} \\ 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100011 \\ +\ 11001 \\ \hline 111100 \end{array}$$

Ellenőrzés: $111100_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 =$
$= 32 + 16 + 8 + 4 = 60_{10}$

A bináris szorzás: $0\cdot 0 = 0$
$0\cdot 1 = 0$
$1\cdot 0 = 0$
$1\cdot 1 = 1$

Pl.: A fenti két szám bináris szorzata:

$\underline{35}\cdot 25$	$100011\cdot 11001$
70	10001100
$\underline{175}$	$\underline{100011}$
875	1101101011

Ellenőrzés: $1101101011_2 = 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 =$
$= 512 + 256 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 875_{10}$

A *nyolcas (oktális) helyértékes számrendszer* alapszáma a nyolc, amelyet az "10" két jeggyel jelölünk. Az oktális rendszer nyolc különböző jegye: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. A decimális rendszerben adott szám oktális rendszerbeli alakját a bináris rendszerbeli előállításhoz hasonlóan kapjuk, csak az osztást 2 helyett 8-cal végezzük.

Pl.: Írjuk fel oktális rendszerben a 35-öt és a 245 -öt:

4	35	3	30	245
4	3	3	6	5

Tehát $35_{10} = 43_8$ ui.: $4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 32 + 3 = 35$ és

$245_{10} = 365_8$ ui.: $3\cdot 8^2 + 6\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 = 192 + 48 + 5 = 245.$

Mivel $8 = 2^3$, ezért a nyolcas és kettes rendszer között az átírás rendkívül egyszerű: kettes számrendszerben adott számot a "kettedesvesszőtől" (tizedesvesszőtől) kezdve három jegyből álló csoportokra osztjuk, és a csoportokat az alábbi táblázat szerinti megfelelő nyolcas számrendszerbeli jeggyel helyettesítjük. Fordítva: a 8-as rendszerben adott szám mindegyik jegyét a 2-es számrendszerben a táblázat szerinti három jegyű csoporttal helyettesítjük.

Nyolcas	Kettes számrendszer
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Pl.: $142375_8 = \underset{001}{1}\ \underset{100}{4}\ \underset{010}{2}\ \underset{011}{3}\ \underset{111}{7}\ \underset{101}{5}_2$

Mind a *bináris*, mind az oktális, valamint az itt részletesen nem tárgyalt 16-os alapú ún. *hexadecimális* helyértékes számrendszernek jelentős szerep jut az elektronikus digitális számítógépek felépítésénél, ill. a feladatok megoldásra való előkészítésénél.

3.13 Logaritmus

Egyenlő alapú hatványmennyiségek szorzásakor, osztásakor és hatványmennyiség hatványozásakor, gyökvonásakor tulajdonképpen a kitevőkkel végzünk műveleteket, mégpedig "alacsonyabb rendű" műveleteket. (Az összeadást a szorzásnál, a kivonást az osztásnál, a szorzást a hatványozásnál és az osztást a gyökvonásnál alacsonyabb rendű műveletnek nevezzük.)

Így, ha valamilyen alap hatványait táblázatba foglaljuk, akkor a felsorolt műveleteket igen könnyen elvégezhetjük. Pl. írjuk egymás alá az n és a 2^n számok összetartozó értékeit $(n \in N)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$q = 2^n$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	...

A táblázat felhasználásával kettőnek két pozitív egész kitevőjű hatványát, mondjuk 16-ot és 512-t úgy szorzunk össze, hogy a számok fölé írt kitevőket, 4-et és 9-et összeadjuk: 4 + 9 = 13; majd

megkeressük a 13 kitevőhöz tartozó számot, mely 8192. Tehát a két szám szorzata: $16 \cdot 512 = 8192$.

Ugyanilyen egyszerűen végezhető el a 2^n alakú számok körében az osztás, a hatványozás és a gyökvonás.

A felső sorban levő számokat az alsó sorban levő számok 2-es alapú *logaritmusainak* nevezzük, és jelölésükre az $n = \log_2 q$ kifejezést használjuk (olv.: en egyenlő kettő alapú logaritmusa a kúnak; *logaritmus = kitevő*; görög eredetű szó). 2-t a *logaritmus alapjának*, q-t *numerusának*, n-et pedig a q szám 2-*es alapú logaritmusának* mondjuk. Tehát a logaritmus mindig hatványkitevőt jelent.

Ha a táblázatot törtkitevőjű hatványokkal tetszés szerint bővítjük, akkor bármely pozitív számról megmondhatjuk, hogy az alapnak milyen kitevőjű hatványa, vagy bármely kitevőhöz megkereshetjük az alap ezen kitevővel vett hatványának értékét.

Azt a műveletet, amellyel adott hatványhoz és alapjához meghatározzuk a kitevőt, *logaritmuskeresésnek* mondjuk.

Pl.: Hányadik hatványra kell emelni 2-t, hogy 16-ot kapjunk?
Ezt röviden így jelöljük:

$\log_2 16 = x$ vagy $2^x = 16$ (x a meghatározandó kitevő).

$\log_2 16 = 4$, mert $2^4 = 16$; $\log_2 512 = 9$, mert $2^9 = 512$;

$\log_2 128 = 7$, mert $2^7 = 128$; $\log_2 1{,}414 \approx 0{,}5$, mert $2^{0{,}5} \approx 1{,}414$.

Elméletileg bármely pozitív szám, az 1 kivételével, választható logaritmus alapjául, a gyakorlatban azonban többnyire csak a 2-es alapú, a 10-es alapú és az e-alapú ún. *természetes logaritmus* használatos ($e = 2{,}7182818...$ végtelen nem szakaszos tizedes tört, transzcendens szám).

Általánosan az $a^n = q$ $(a > 0)$ hatványmennyiség kitevőjét $n = \log_a q$ képlettel adjuk meg, ahol n a logaritmus, és a a logaritmus alapja.

A logaritmus az a hatványkitevő, amelyre az alapot hatványozva, megkapjuk magát az adott számot, tehát:

$$a^{\log_a q} = q, \quad \left(a \in R^+ \setminus \{1\};\ q \in R^+\right)$$

Pl.: $5^{\log_5 25} = 25$, mert $\log_5 25 = 2$;

$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$, mert $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$, így $27^{\log_{27} 3} = 3$.

A logaritmus értelmezéséből következik:

a) Egynek bármely alapú logaritmusa zérussal egyenlő:

$$\log_a 1 = 0, \text{ mert } a^0 = 1 \ (a \neq 0).$$

b) A logaritmus alapjának ugyanolyan alapú logaritmusa egyenlő eggyel:

$$\log_a a = 1, \text{ mert } a^1 = a.$$

c) Az egy és az alapszám közé eső számok ugyanolyan alapú logaritmusai valódi törtszámok.

A továbbiakban a tetszőleges alapú logaritmus jelölésére a log jelet használjuk az alap feltüntetésével, a 10-es alapú logaritmust lg-vel, a természetes ill. *e*-alapú logaritmust pedig ln-nel jelöljük (ln a logaritmus naturális rövidítése).

Pl.: $\log_5 625 = 4$, mert $5^4 = 625$; $\ln e = 1$, mert $e^1 = e$;

$\lg 100 = 2$, mert $10^2 = 100$.

Megjegyzés: Az $\log_a x = \log_a y$ egyenlőségből következik, hogy $x = y$, mivel a logaritmus függvény szigorúan monoton függvény (l. a 8.11 pontot). Az állítás megfordítása viszont a logaritmus függvény értelmezési tartománya (l. a 3.17 pontot) miatt nem igaz.

3.14 Egytagú algebrai kifejezések logaritmusa. A logaritmus azonosságai

a) Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével:

$$\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n \quad \left(m,n\in R^+,\ a\in R^+\setminus\{1\}\right).$$

Ui. ha $x=\log_a m$, $y=\log_a n$ jelölést használunk, akkor a logaritmus értelmezése szerint $a^x=m$, $a^y=n$ és így $m\cdot n=a^{x+y}$, ahol az $(x+y)$ hatványkitevő $(m\cdot n)$-nek az a alapú logaritmusa, tehát $\log_a(m\cdot n)=x+y$, de x és y értékeinek visszahelyettesítésével:

$$\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n.$$

Pl.: $\log_2(8\cdot 32)=\log_2 8+\log_2 32$, $\qquad \lg 5uv=\lg 5+\lg u+\lg v.$

b) Hányados (tört) logaritmusa egyenlő az osztandó (számláló) és az osztó (nevező) logaritmusának a különbségével:

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n \quad m,n>0.$$

Ui. az $x=\log_a m$, $y=\log_a n$ jelöléssel az $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$, ahol az $(x-y)$ hatványkitevő az $\frac{m}{n}$ hányadosnak az a alapú logaritmusa, tehát $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=x-y$, de x és y értékét visszahelyettesítve:

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n.$$

Példák

1. $\log_2\left(\frac{256}{16}\right)=\log_2 256-\log_2 16=\log_2 2^8-\log_2 2^4=8-4=4.$

2. $\lg\frac{10x}{4y}=\lg 10x-\lg 4y=\lg 10+\lg x-\lg 4-\lg y=1+\lg x-\lg 4-\lg y.$

c) Hatvány logaritmusa egyenlő az alap logaritmusának és a hatványkitevőnek a szorzatával:

$$\log_a k^n = n \cdot \log_a k \quad \left(n \in R,\ k \in R^+\right).$$

Ui. $x = \log_a k$ jelöléssel $k = a^x$. Mindkét oldalt n-edik hatványra emelve: $k^n = a^{nx}$. nx, tehát k^n-nek a alapú logaritmusa: $\log_a k^n = n \cdot x$, és az x értékét visszahelyettesítve:

$$\log_a k^n = n \cdot \log_a k.$$

Példák

1. $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6.$
2. $\lg \frac{x^3}{y^4} = \lg x^3 - \lg y^4 = 3 \cdot \lg x - 4 \cdot \lg y.$

d) Gyökmennyiség logaritmusa egyenlő a gyökjel alatt levő kifejezés logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával:

$$\log_a \sqrt[n]{k} = \frac{\log_a k}{n} \quad \left(n \in N \setminus \{0,1\};\ k \in R^+\right).$$

Ui. $\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$ és így mindkét oldal a alapú logaritmusát véve:

$$\log_a \sqrt[n]{k} = \frac{1}{n} \log_a k = \frac{\log_a k}{n}.$$

Példák

1. $\log_2 \sqrt[3]{8} = \frac{\log_2 8}{3} = \frac{1}{3} \log_2 2^3 = \frac{3}{3} \log_2 2 = 1 \cdot 1 = 1.$
2. $\lg \sqrt{5xy} = \frac{1}{2} \lg(5xy) = \frac{1}{2}(\lg 5 + \lg x + \lg y).$

Példák

1. $\lg 3 = 0{,}4771$ és $\lg 5 = 0{,}6990$ felhasználásával határozzuk meg
   a) $\lg 15$; *b*) $\lg 0{,}6$; *c*) $\lg 9$; *d*) $\lg \sqrt{15}$ értékeket.

   Megoldás

   a) $\lg 15 = \lg(3 \cdot 5) = \lg 3 + \lg 5 = 0{,}4771 + 0{,}6990 = 1{,}1761$

   b) $\lg 0{,}6 = \lg\left(\frac{3}{5}\right) = \lg 3 - \lg 5 = 0{,}4771 - 0{,}6990 = -0{,}2219$

$c)\ \lg 9 = \lg 3^2 = 2 \cdot \lg 3 = 2 \cdot 0{,}4771 = 0{,}9542$

$d)\ \lg\sqrt{5} = \frac{1}{2}\lg 5 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6990 = 0{,}3495.$

2. Írjuk fel a következő kifejezések 10-es alapú logaritmusát:

$a)\ w = \frac{bh^2}{6}, \qquad b)\ d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}, \qquad c)\ x = \sqrt[3]{\frac{bc^2}{(k+1)^2 \cdot f}},$

$d)\ y = \frac{1}{\sqrt[5]{ac}}, \qquad e)\ z = \frac{\sqrt{x-y}}{x+y}, \qquad f)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$

Megoldás

$a)\ \lg w = \lg\frac{bh^2}{6} = \lg b + 2 \cdot \lg h - \lg 6$

$b)\ \lg d = \lg\left(12 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}}\right) = \lg 12 + \frac{1}{4}(\lg N - \lg n)$

$c)\ \lg x = \lg\sqrt[3]{\frac{bc^2}{(k+1)^2 \cdot f}} = \frac{1}{3}\left\{\lg b + 2 \cdot \lg c - \left[2 \cdot \lg(k+1) + \lg f\right]\right\}$

$d)\ \lg y = \lg\frac{1}{\sqrt[5]{ac}} = \lg 1 - \left[\frac{1}{5} \cdot (\lg a + \lg c)\right] = -\frac{1}{5}(\lg a + \lg c)$

$e)\ \lg z = \lg\frac{\sqrt{x-y}}{x+y} = \frac{1}{2}\lg(x-y) - \lg(x+y)$

$f)\ \lg T = \lg 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \lg 2 + \lg\pi + \frac{1}{2}(\lg l - \lg g).$

3. Az alábbi számokat és kifejezéseket írjuk fel egyetlen szám vagy kifejezés 10-es alapú logaritmusaként!

$a)\ 2, \qquad b)\ -1, \qquad c)\ \lg x - \lg y + \lg z, \qquad d)\ 1 - \lg x,$

$e)\ \frac{1}{3}\lg(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\lg(x-y) - \frac{1}{2}\lg(x+y),$

$f)\ \lg x + 2 \cdot \lg y - 5 \cdot \lg z, \qquad g)\ \frac{1}{2}\left[\lg u - (2 \cdot \lg v + 1)\right].$

Megoldás

$a)\ 2 = \lg 100, \qquad b)\ -1 = \lg\frac{1}{10}, \qquad c)\ \lg\frac{xz}{y},$

$d)\ 1 - \lg x = \lg 10 - \lg x = \lg\frac{10}{x},$

$e)\ \frac{1}{3}\lg(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\lg(x-y)-\frac{1}{2}\lg(x+y)=$

$$=\lg\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-y)(x+y)}}=\lg\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$f)\ \lg x+2\cdot\lg y-5\cdot\lg z=\lg\frac{xy^2}{z^5},$

$g)\ \frac{1}{2}[\lg u-(2\cdot\lg v+1)]=\lg\sqrt{\frac{u}{v^2\cdot 10}}.$

4. Az alábbi kifejezéseket hozzuk logaritmusmentes alakra:

$a)\ \log_5 5^x,$ $b)\ \log_a(a^x\cdot a^y),$ $c)\ \log_b\frac{b^x}{\sqrt{b}},$

$d)\ \ln e^{x^2},$ $e)\ e^{2\cdot\ln x},$ $f)\ 10^{\frac{1}{2}\lg(x+1)}.$

Megoldás

$a)\ x\cdot\log_5 5=x,$ $b)\ x+y,$ $c)\ x-\frac{1}{2},$

$d)\ \ln e^{x^2}=x^2\cdot\ln e=x^2\cdot 1=x^2,$ $e)\ e^{2\cdot\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2,$

$f)\ 10^{\frac{1}{2}\lg(x+1)}=10^{\lg\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}.$

3.15 Logaritmusrendszerek és összefüggéseik

A pozitív számok ugyanazon alapra vonatkoztatott logaritmusainak összességét logaritmusrendszernek nevezzük. A gyakorlatban kétféle logaritmusrendszert használunk: az egyik *John Napier* (1550–1617) skót földbirtokos matematikustól ered, ez a *természetes* vagy *e alapú* logaritmusrendszer (az *e* alapszám meghatározására a 8.9 pontban visszatérünk). Jelölése: ln, azaz $\ln x := \log_e x$. A másik a *tízes alapú logaritmusrendszer,* amely *Henry Briggs* (1561?–1630) angol matematikustól származik: jelölése: lg, azaz $\lg x := \log_{10} x$. Ez a rendszer gyakorlati szempontból igen célszerű, mert alapszáma: 10, számrendszerünk alapszámával megegyezik.

Ugyanannak a számnak a különböző logaritmusrendszerekben más és más a logaritmusa. Ha azonban egy logaritmusrendszer táblázata rendelkezésünkre áll, akkor valamely számnak bármely logaritmusát is kiszámíthatjuk.

Legyen ismeretes a k szám a alapú logaritmusa, és keressük ugyanennek a számnak a b alapú logaritmusát.

Ha $\log_b k = x$, akkor $b^x = k$, és mindkét oldal a alapú logaritmusát véve, $x \cdot \log_a b = \log_a k$, amelyből $x = \dfrac{\log_a k}{\log_a b}$, azaz

$$\log_b k = \frac{\log_a k}{\log_a b} \tag{1}$$

Valamely logaritmusrendszerből úgy térhetünk át bármely másik rendszerbe, hogy a kérdéses számnak az adott rendszerbeli logaritmusát elosztjuk az új rendszer alapszámának adott rendszerbeli logaritmusával.

Ha a kérdéses szám $k = a$, akkor (1)-ből kapjuk, hogy

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \tag{2}$$

mivel $\log_a a = 1$.

Az $\dfrac{1}{\log_a b}$ hányados a b alapú logaritmusrendszernek az a alapú rendszerre vonatkoztatott modulusa.

Ha a 10-es alapú rendszerről az e-alapú logaritmusrendszerre térünk át, akkor az

$$\ln k = \frac{\lg k}{\lg \mathrm{e}} \tag{3}$$

összefüggést használjuk, ha pedig az e alapúról térünk át a 10-es alapú logaritmusrendszerre, akkor az áttérési képlet:

$$\lg k = \frac{\ln k}{\ln 10} \tag{4}$$

A (2) képletből $a = e$ és $b = 10$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \tag{2a}$$

Ez a természetes logaritmusok tízes alapúakká való átalakításának *modulusa*, szokásos jele: M, és hét tizedesjegy pontossággal adott értéke:

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342945 \tag{5}$$

és M_1-gyel jelölve a 10-es alapú logaritmusok természetes logaritmusokká való átalakításának *modulusát*:

$$M_1 = \frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = 2{,}3025851 \tag{6}$$

3.16 Számolás 10-es alapú logaritmusokkal

A 10-es alapú logaritmusrendszerben csak azoknak a számoknak logaritmusai egészek, amelyek 10-nek pozitív, negatív egész kitevőjű, vagy zérus kitevőjű hatványai.

Példák

$\lg 1000 = 3$, mert $10^3 = 1000$, $\lg 100 = 2$, mert $10^2 = 100$,

$\lg 10 = 1$, mert $10^1 = 10$, $\lg 1 = 0$, mert $10^0 = 1$,

$\lg 0{,}1 = -1$, mert $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $\lg 0{,}01 = -2$, mert $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$,

$\lg 0{,}001 = -3$, mert $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$.

(*Megjegyzés*: Az lg$k$ a mínusz végtelenhez ($-\infty$) tart, ha k-val ($k > 0$) a 0-hoz közeledünk. L. a 8.5 és a 8.12 pontokat.)

A számok logaritmusai egész és tizedes törtrészből állnak. Az egész rész a *karakterisztika*, a törtrész a *mantissza*. A karakterisztika a szám nagyságrendjétől (a tizedesvessző helyétől) függ, a mantissza a szám nagyságrendjétől független.

Példáinkból is látható, hogy az 1-nél nagyobb számok 10-es

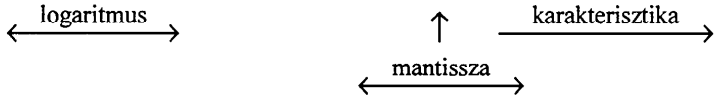
alapú logaritmusai pozitívak, a 0 és 1 közé eső számok logaritmusai pedig negatívak. A mantisszát mindig úgy határozzuk meg, hogy 0 és +1 közötti értéket vegyen fel. Ha a logaritmus negatív, akkor a karakterisztikát ennek megfelelően adjuk meg. A pozitív karakterisztikát a mantissza elé, a negatív karakterisztikát a mantissza után írjuk. Az 1 és 1-nél nagyobb számok karakterisztikája 1-gyel kisebb a tizedesvesszőtől balra álló jegyek számánál, a 0 és 1 közé eső számok karakterisztikája pedig egy negatív egész szám, melynek abszolút értéke a szám első nullától különböző számjegyét megelőző nullák számával egyenlő, beleértve a tizedesvessző előtti nullát is.

Példák

$$\lg 6 = 0,\ldots, \text{ mert } 10^0 < 6 < 10^1,$$
$$\lg 24 = 1,\ldots, \text{ mert } 10^1 < 24 < 10^2,$$
$$\lg 239 = 2,\ldots, \text{ mert } 10^2 < 239 < 10^3,$$
$$\lg 5432 = 3,\ldots, \text{ mert } 10^3 < 5432 < 10^4,$$
$$\lg 0,41 = \lg(4,1\cdot 10^{-1}) = \lg 4,1 + \lg 10^{-1} = 0,\ldots - 1, \text{ mert } 10^{-1} < 0,41 < 10^0,$$
$$\lg 0,05 = \lg(5\cdot 10^{-2}) = \lg 5 + \lg 10^{-2} = 0,\ldots - 2, \text{ mert } 10^{-2} < 0,05 < 10^{-1},$$
$$\lg 0,00121 = \lg(1,21\cdot 10^{-3}) = \lg 1,21 + \lg 10^{-3} = 0,\ldots - 3, \text{ mert } 10^{-3} < 0,00121 < 10^{-2}.$$

Példák

$$\lg 3 = \lg 3\cdot 10^0 = \lg 3 + \lg 10^0 = 0,4771$$
$$\lg 30 = \lg 3\cdot 10^1 = \lg 3 + \lg 10^1 = 1,4771$$
$$\lg 300 = \lg 3\cdot 10^2 = \lg 3 + \lg 10^2 = 2,4771$$
$$\lg 0,3 = \lg 3\cdot 10^{-1} = \lg 3 + \lg 10^{-1} = 0,4771 - 1$$
$$\lg 0,03 = \lg 3\cdot 10^{-2} = \lg 3 + \lg 10^{-2} = 0,4771 - 2$$
$$\lg 0,003 = \lg 3\cdot 10^{-3} = \lg 3 + \lg 10^{-3} = 0,4771 - 3$$



A számok logaritmusait tartalmazó táblázatokat általában az alábbi módon használhatjuk: a táblázatok adott pontosságú (az utolsó jegyre kerekített) adatokat tartalmaznak.

Meg kell győződnünk arról is, hogy a táblázat adatai megengedik-e a lineáris interpolációt (l. a 8.6 pontot). A számok logaritmusainak kikeresését és adott logaritmusértékhez a szám visszakeresését a mellékelt tizes alapú négyjegyű lineárisan interpolálható táblázatrészlet segítségével szemléltetjük (l. a középiskolák Négyjegyű függvénytáblázat-át).

N	0	1	2	3	...	...	9
2,0	3010	3032	3054	3075	...	...	3201
2,1	3222	3243	3263	3284	...	...	3404
2,2	3424	3444	3464	3483	...	...	3598
..	....	....	....	....	....	....	....

Példák

1. $\lg 213 = ?$

A karakterisztika 2, a mantisszát a 2,1-es sor és a 3-as fejrovatú oszlop találkozásánál olvashatjuk le: 3284. Tehát $\lg 213 = 2{,}3284$.

2. $\lg 0{,}0202 = ?$

A karakterisztika: –2, a mantissza a 2,0-as sor és a 2-es fejrovatú oszlop találkozásánál olvasható le: 3054, tehát $\lg 0{,}0202 = 0{,}3054 - 2$.

Ha az adott szám 1-gyel kezdődik és négynél több, ill. 2-vel kezdődik és háromnál több jegyből áll, akkor lineáris interpolációt kell alkalmaznunk.

Példák

1. $\lg 2127 = ?$

Mivel $2120 < 2127 < 2130$, és a táblázatból: $\lg 2130 = 3{,}3284$, $\lg 2120 = 3{,}3263$, ezért az $\lg 2127$-nek megfelelő mantisszát a következő módon kapjuk: megállapítjuk, hogy az adott számot közrefogó két szám különbségéhez (10) a mantisszák mekkora különbsége tartozik (táblabeli különbség), és aránypárral kiszámítjuk, hogy az adott szám és a két közrefogó szám kisebbike közti különbségre (utolsó jegy) mennyi jut. A mantisszák különbsége: 3284 – 3263 = 21, az adott szám és a közrefogó szám kisebbike közti különbség: 2127 – 2120 = 7, tehát $10:21 = 7:x$, amiből az arányos rész: $x = \frac{21}{10} \cdot 7 = 2{,}1 \cdot 7 = 14{,}7 \approx 15$, és így

$$\begin{array}{rr} \lg 2127 = & 3{,}3263 \\ + & \underline{\quad 15} \\ & 3{,}3278 \end{array}$$

2. $\lg 5{,}678 = ?$

Mivel $\lg 5{,}670 = 0{,}7536$ és $\lg 5{,}680 = 0{,}7543$, a táblabeli különbség: 7. A

szám utolsó jegye: 8, az arányos rész: $x = \frac{7}{10} \cdot 8 = 0,7 \cdot 8 = 5,6 \approx 6$, tehát $7536 + 6 =$ $= 7542$ és így $\lg 5,678 = 0,7542$.

Ha a logaritmusértékekből akarjuk a számot meghatározni, akkor az előző lépéseket fordított sorrendben végezzük el. Először a karakterisztikából megállapítjuk a numerus első értékes jegyének helyi értékét, majd (ha a mantissza a táblázatban fellelhető) leírjuk a mantissza sorából az N oszlophoz tartozó számot, és a mantissza fejrovatából még egy jegyet írunk hozzá (további egész jegyek helyébe nullát írunk).

Példák

1. $\lg x = 1,3444$, $x = ?$

A karakterisztika 1, tehát a számnak két egész jegye lesz: x = ..,... A mantissza 3444, fellelhető a 2,2-es sor 1 -es oszlopában, így $x = 22,1$.

2. $\lg x = 0,8075 - 2$, $x = ?$

A –2 karakterisztikából látjuk, hogy a nullától különböző első értékes jegy a századok helyén áll: x = 0,0... A mantissza a 6,4-es sor 2-es oszlopában van, tehát x = 0,0642.

Visszakereséskor legtöbbször nem találjuk meg táblázatban az adott mantisszát; ilyenkor interpolációt alkalmazunk.

Példák

1. $\lg x = 3,3278$, $x = ?$

A karakterisztika 3, a számnak 4 egész jegye lesz: x = ...,.. A 3278 mantissza a táblázatban nem lelhető meg. Ilyenkor a közrefogó mantisszákból megállapítjuk a táblabeli különbséget: $3284 - 3263 = 21$, és az adott mantissza meg a két közrefogó mantissza kisebbike közti különbséget: $3278 - 3263 = 15$. A 15 arányos résznek megfelelő számot aránypárral számítjuk ki: $21:10 = 15:y$, amelyből $y = \frac{10}{21} \cdot 15 = 150:21 \approx 7$.

Tehát a 3263 mantisszához tartozó 212-höz negyedik jegynek 7-et írunk, úgyhogy $x = 2127$.

2. $\lg x = 0,5744$, $x = ?$

Mivel a karakterisztika 0, így a számnak egy egész jegye lesz: x = .,... A táblabeli különbség: 5752 – 5740 = 12; az arányos rész: 5744 – 5740 = 4, az utolsó jegy: $\frac{10}{12} \cdot 4 = \frac{40}{12} \approx 3$; tehát a szám: $x = 3,753$.

3. A négyjegyű függvénytáblázat felhasználásával számítsuk ki az x értékeit:

$a) \; x = 0,5641 \cdot 0,06439$, $b) \; x = \frac{0,2537}{9,183}$, $c) \; x = 3,457^3$, $d) \; x = \sqrt[4]{0,7121}$.

Megoldás

a) $\lg x = \lg 0{,}5641 + \lg 0{,}06439 = 0{,}7514 - 1 + (0{,}8088 - 2) =$

$= 1{,}5602 - 3 \equiv 0{,}5602 - 2$ és $x = 0{,}03633.$

b) $\lg x = \lg 0{,}2537 - \lg 9{,}183 = 0{,}4043 - 1 - (0{,}9630) \equiv$

$\equiv 1{,}4043 - 2 - (0{,}9630) = 0{,}4413 - 2$ és $x = 0{,}02763.$

(Azt akarjuk, hogy a hányados mantisszája is pozitív maradjon, ezért a számláló logaritmusának karakterisztikáját 1-gyel növeltük, mantisszáját pedig 1-gyel csökkentettük, s a kivonást ezután végeztük el, így az értéke nem változott.)

c) $\lg x = \lg 3{,}457^3 = 3 \cdot \lg 3{,}457 = 3 \cdot 0{,}5387 = 1{,}6161$ és $x = 41{,}31.$

d) $\lg x = \lg \sqrt[4]{0{,}7121} = \frac{1}{4} \lg 0{,}7121 = \frac{1}{4} \cdot (0{,}8526 - 1) \equiv \frac{1}{4} \cdot (3{,}8526 - 4) =$

$= 0{,}9632 - 1$ és $x = 0{,}9188.$

(A negatív karakterisztikának osztás után is egész számnak kell lennie, ezért módosítottuk a karakterisztikát és a mantisszát, hogy ez teljesüljön.)

Megjegyzés: A számítási munkáinkhoz táblázatok helyett kényelmesebb zsebszámológépet vagy számítógépet használni. A számológépek elterjedése előtt a közelítő számítások igen fontos segédeszköze volt a logarléc is. A logarléc készítése és használata a logaritmusfüggvény tulajdonságain alapszik. Lényege, hogy a skálák logaritmusértékeknek megfelelő beosztást tartalmaznak, és ezen a numerus értékét tüntetik fel. [7]

3.17 Az egyenletek fogalma és osztályozása

a) Kifejezés, alaphalmaz és értelmezési tartomány

A 3.2 pontban definiáltuk az egytagú algebrai kifejezéseket, a határozatlan vagy más szóval a változó fogalmát. Ebben a pontban röviden minden számot és változót *kifejezésnek* nevezünk, valamint ezek összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, hatványát és gyökét is.

Pl.: 7, 3/5, a, b, x, y, $9a$, $15x + 4$, $3(x + y)$, $\frac{7x+2}{y}$, $\frac{p^6}{4}$, $\sqrt[5]{u+v}$.

Mindaddig, amíg mást nem mondunk a hatványkitevőt és a gyökkitevőt pozitív egésznek, a gyök alatti mennyiséget pedig pozitívnak tekintjük. A trigonometrikus, logaritmikus, exponenciális stb. függvénykifejezéseket is kifejezésnek, tagnak fogjuk nevezni.

Pl.: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\cos 2x$, $\lg x$, $\log_a x$, a^x, e^{2x}.

A kifejezések változói a megismert számhalmazok elemeit vehetik fel helyettesítési értékként. Ezek a számhalmazok: a természetes számok N, az egész számok Z, a racionális számok Q, az irracionális számok Q^*, és a valós számok R halmazát jelentik. Az egyenletek tárgyalása során a felsorolt számhalmazok bármelyikét, valamint a 7. fejezetben tárgyalásra kerülő komplex számok C halmazát *alaphalmaznak* fogjuk nevezni.

Pl.: az x, y, stb. változók alaphalmazait jelölje A_x, A_y, stb., akkor

$3x+2$ kifejezés x változójának alaphalmaza legyen: $A_x = Q$,

$\frac{2}{x-1}$ kifejezés x változójának alaphalmaza legyen: $A_x = R$,

$2x+y$ kifejezés x és y változójának alaphalmaza legyen: $A_x = A_y = R$.

Két kifejezés, K_1 és K_2 *ekvivalens* (*egyenértékű*) egy adott halmazon, ha a K_1 és a K_2 behelyettesítéssel előállított értékei (az adott halmaz elemeivel képezve) egyenlők egymással.

Pl.: Az R számhalmazon, az $x+7x$ és a $8x$ ekvivalens kifejezések, de az $\frac{a^2+a}{a}$ és az $a+1$ – bár az utóbbi a tört egyszerűsítésével állítható elő – nem ekvivalensek mivel az $a = 0$ értékre a törtkifejezés nincs definiálva, ugyanakkor az $a+1$ helyettesítési értéke 1, e két kifejezés viszont az $R \setminus \{0\}$ halmazon ekvivalens egymással.

Általában:

1. Minden K kifejezés ekvivalens önmagával.

2. Ha a K_1 ekvivalens K_2 kifejezéssel, akkor K_2 is ekvivalens a K_1 kifejezéssel.

3. Ha a K_1 ekvivalens a K_2-vel és a K_2 ekvivalens a K_3 kifejezéssel, akkor K_1 is ekvivalens a K_3-mal.

Valamely változót tartalmazó K *kifejezés* D *értelmezési tartományának* nevezzük azt a halmazt, amely a változó A alaphalmazának mindazon elemét tartalmazza, amelyek behelyettesítve K-nak egyértelműen meghatározott értéket adnak. A K értelmezési tar-

tománya megegyezhet a változó alaphalmazával, de annál szűkebb is lehet, azaz $D \subseteq A$.

Pl.: A $K_1 = 3x + 2$ kifejezésnek $A_x = Q$ alaphalmaz választással az értelmezési tartománya a változó alaphalmazával azonos: $D = Q$.

A $K_2 = \frac{2}{x-1}$ kifejezésnek $A_x = R$ alaphalmaz választással az értelmezési tartománya nem azonos az R-rel, mivel az $x = 1$ helyettesítéssel a K_2 nevezője 0, s így definiálatlan kifejezést ad, tehát az $x = 1$ kizárásával adhatjuk meg az értelmezési tartományt: $D = R \setminus \{1\}$.

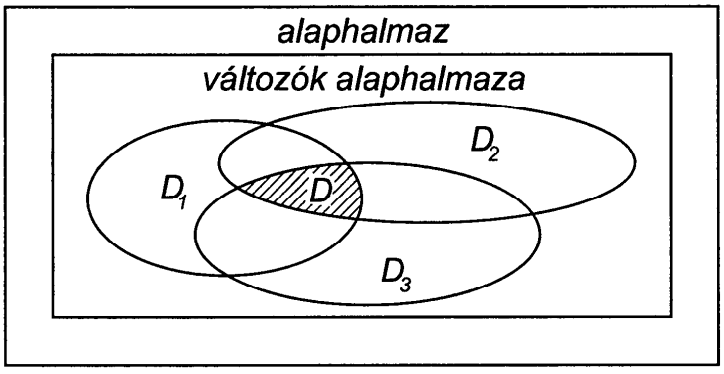
A $K_3 = 2x + y$ kifejezésnek $A_x = A_y = R$ alaphalmaz választással az értelmezési tartománya $D = R \times R$, azaz az (x_i, y_i) számpárok halmaza. (*Descartes*-féle szorzat, l. az 1.2 pontot.)

b) Egyenlet

Ha két kifejezést, K_1-et és K_2-t az egyenlőség jelével összekapcsolunk, s közülük legalább az egyik változót is tartalmaz, egyenletet kapunk: $K_1 = K_2$, ahol K_1 az egyenlet bal oldala, K_2 az egyenlet jobb oldala.

Az egyenlet értelmezési tartománya az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartományainak metszete (közös része) (46. ábra).

Pl.: legyen a K_1, K_2, és K_3 kifejezések értelmezési tartománya D_1, D_2, D_3, akkor a $K_1 = K_2 + K_3$ egyenlet D értelmezési tartománya: $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$.



46. ábra. A K_i egyváltozós kifejezések metszete

A matematikai logika szóhasználatának megfelelően az egyenletek *nyitott mondatok.* Az ebben szereplő *állításoknak* csak két értéke lehet: *igaz* vagy *hamis.* Tehát az egyenlet D értelmezési tartományának elemeit behelyettesítve az egyenletbe állításokat kapunk, amelyek lehetnek igazak vagy hamisak.

Például a $3x + 2 = 8$ egyenlet $x = 2$ helyettesítéssel $3 \cdot 2 + 2 = 8$; $8 = 8$; igaz állítást ad, de $x = 1$ helyettesítéssel hamis állítást kapunk: $3 \cdot 1 + 2 = 8$ állítás hamis. Az $(x+3)(x-5) = 0$ egyenlet $x = -3$ és $x = 5$ helyettesítéssel igaz állítást ad: $(-3+3)(-3-5) = 0$, $0 \cdot (-8) = 0$, valamint $(5+3)(5-5) = 0$; $8 \cdot 0 = 0$.

Az egyenlet értelmezési tartományának igaz állítást adó elemei alkotják az *igazsághalmazt*, amit az *egyenlet megoldáshalmazának* vagy *gyökeinek* nevezünk.

Tehát a $3x + 2 = 8$ egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{2\}$; vagyis az egyenletnek egy gyöke van az $x = 2$; az $(x+3)(x-5) = 0$ egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{-3; 5\}$, vagyis az egyenletnek két gyöke van az $x = -3$ és az $x = 5$.

A két-, három-, ..., n-ismeretlenes *egyenletrendszerek értelmezési tartományait* a bennük levő kifejezések értelmezési tartományainak *Descartes*-féle szorzatai adják. Pl. $R \times R = R^2$, $R \times R \times R = R^3$, ..., R^n; *megoldáshalmazait* pedig azok a rendezett számkettesek, számhármasok, ..., szám n-esek adják, amelyek behelyettesítésével az egyenletrendszer egyenletei igaz állításokká válnak.

Az olyan egyenletet, amely az értelmezési tartományának minden elemére igaz állítássá válik, *azonosságnak* nevezzük a szóban forgó értelmezési tartományra vonatkozólag.

Példák

1. Az $5x = -10$ egyenlet egyetlen megoldása az $x = -2$ valós szám. Az $5 \cdot (-2) = -10$ állítás igaz.

2. A $3x + 4y = 27$ kétismeretlenes egyenlet egy megoldása az (5;3) rendezett számpár, mivel kielégíti az egyenletet, azaz a $3 \cdot (5) + 4 \cdot (3) = 15 + 12 = 27$ igaz állítás. Az egyenletnek azonban végtelen sok megoldása van.

3. Az $x^2 = 3$ egyenletnek a Q racionális számhalmazt választva alaphalmaznak, nincs megoldása, mivel nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete 3-mal

lenne egyenlő. Ha azonban alaphalmaznak a valós számok halmazát választjuk, akkor az egyenletnek a $+\sqrt{3}$ és a $-\sqrt{3}$ megoldása.

4. Az $5x+4x=9x$ és az $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$ egyenletek azonosságok a valós számhalmazon, mivel minden $x \in R$ kielégíti az egyenleteket. Az $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, $A_x = A_y = R$; egyenlet azonosság az R halmazon, mivel minden $(x;y)$ valós számpár kielégíti az egyenletet.

Ha műveletek végzésével K_1 kifejezést vele ekvivalens K_2 kifejezéssé alakítunk, akkor $K_1 = K_2$ egyenlet azonosság.

5. A $K_1 = \frac{x^2-10x+25}{6x-12}$ kifejezést $\frac{x-2}{x^2-25}$ kifejezéssel szorozva és elvégezve az egyszerűsítést: $\frac{(x-5)^2}{6(x-2)} \cdot \frac{x-2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{6(x+5)} = K_2$ kifejezést kapjuk. A $K_1 = K_2$ azonban az R halmazon nem azonosság, csak az $R \setminus \{2, 5, -5\}$ halmazhoz viszonyítva azonosság, mivel nem ekvivalens átalakítást végeztünk.

c) Osztályozás

Matematikai szempontból az egyenleteket különféle fogalmak szerint szokás osztályozni. Az egyismeretlenes egyenletre megfogalmazottak értelemszerűen többismeretlenes egyenletekre is kiterjeszthetők.

Az egyenletet *határozottnak* mondjuk, ha az ismeretlennek csak véges számú értéke elégíti ki, ellenkező esetben pedig, ha végtelen sok értéke elégíti ki, *határozatlannak* nevezzük.

Pl.: A $2x=6$ egyenlet az x ismeretlent tartalmazza, s csak $x=3$ helyettesítési érték mellett igaz. Az $(x+1)(x-1)=0$ egyenlet csak $x=-1$ és $x=+1$ értékek mellett igaz. Mindkét egyenlet határozott.

Az $x+y=10$ egyenlet határozatlan, mert végtelen sok x és y szám van, amelyeknek összege 10. További határozatlan egyenletek:

$$x^2+y^2=4, \quad x^2-y^2=1, \quad y=5ax^2.$$

Ha az ismeretlennek semmilyen értékére sem teljesül az egyenlet, akkor *ellentmondó*.

Pl.: $|x|+25=0$ egyenlet is és az $x^2+16=0$ egyenlet is ellentmondó a valós

számhalmazon. A $4x + p = 7$ egyenlet határozott, ha ismeretlen az x mennyiség, és ismert a p mennyiség. Az egyenlet x-re megoldva: $x = \frac{7-p}{4}$.

A $4x + p = 7$ egyenletet *paraméteres egyenletnek*, p-t pedig *paraméternek* nevezzük, ha x értékét $\forall\, p \in R$ értékre vizsgáljuk.

Az olyan egyenletet, amellyel valamilyen általános (matematikai, fizikai, stb.) összefüggést, törvényszerűséget fejezünk ki, *képletnek* vagy *formulának* nevezzük.

Pl.: $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, $F = f \frac{mM}{r^2}$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$.

Az *egyenletek ismeretlen mennyiségeinek* jelölésére általában az ábécé utolsó betűit használjuk (t, u, v, x, y, z), míg az *ismert mennyiségeket* az ábécé első betűivel jelöljük (a, b, c, d).

Algebrai egyenlet az olyan egyenlőség, amelynek mindkét oldalán az ismert és ismeretlen mennyiségek a négy alapművelet és racionális kitevőjű hatványozás véges számú ismétlésével vannak összekapcsolva, a más felépítésű egyenlőség pedig általában *nem algebrai* (*transzcendens*) *egyenlet.*

Pl.: $x^2 + 2x = 5$, $ax^3 + bx + c = 0$ algebrai,

$a^x = b$, $2 \cdot \lg(x+1) = 3$ pedig transzcendens egyenletek.

Az algebrai egyenleteket az *ismeretlenek száma* és *hatványkitevője* szerint is osztályozzuk. Az ismeretlenek száma szerint megkülönböztetünk *egyismeretlenes*, *kétismeretlenes* és általában *n-ismeretlenes egyenleteket,* ill. *egyenletrendszereket*; *rendezett egyenleteknél* az előforduló ismeretlenek legmagasabb hatványa szerint pedig *elsőfokú, másodfokú* és általában *n-edfokú egyenleteket.*

Megjegyzés: Az n-edfokú egyismeretlenes egyenlet rendezett alakja:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (a_0 \neq 0).$$

Ez felírható az alábbi ún. gyöktényezős alakban is:

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) = 0,$$

ahol $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ az egyenlet (valós vagy komplex) gyökei. Ezek között lehetnek egyenlők is. Az egyenlő gyököket többszörös gyököknek nevezzük. Ha egy gyök pl. x_i, k számú gyöktényezőben szerepel, akkor azt mondjuk, hogy x_i k-szoros gyöke az egyenletnek (*multiplicitása*: k).

d) Az algebra alaptétele

Minden, legalább elsőfokú valós vagy komplex együtthatós algebrai egyenletnek van gyöke a komplex számok halmazán.

Az alaptétel következménye: minden olyan n-edfokú egyenletnek, amelynek együtthatói valós vagy komplex számok, n (valós vagy komplex) gyöke van, ha a többszörös gyököket többszörösen számítjuk.

Pl.: $(x-1)^3 = 0$ egyenletnek az $x=1$ háromszoros gyöke, azaz $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, más szóval megoldáshalmaza: $M = \{1\}$.

Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek:

$$3x+1=-2, \qquad ax+b=0, \qquad x \in R,\ a,b \in R$$

Elsőfokú egyenletek két vagy három ismeretlennel:

$$\begin{array}{lll} 3x+2y=1, & ax+by=c, & x,y,z \in R, \\ -2x+3y-5z=7, & ax+by+cz=d, & a,b,c,d \in R. \end{array}$$

Másodfokú egy- vagy kétismeretlenes rendezett egyenletek:

$$\begin{array}{lll} 2x^2+3x-4=0, & ax^2+bxy+cy^2=0, & x,y \in R, \\ 9xy=3, & ax^2+bx+c=0, & a,b,c \in R. \end{array}$$

Magasabb fokú rendezett egyenletek:

harmadfokú: $x^3+2x^2-x+9=0, \quad ax^3+bx^2+cx+d=0,$

n-edfokú: $2x^n+x^2-1=0, \quad ax^n+bx^{n-1}+cx^5+x^2=d$

(ahol $n>2,\ x \in R$) (ahol $n>5,\ x \in R$).

Az olyan egyenletet, amelynek egyik oldalán nulla áll, a másik

oldalán pedig egy rendezett polinom, *nullára redukált rendezett egyenletnek* nevezzük.

Pl.: $9x^2 - 3x - 6 = 0$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $x \in R$.

3.18 Az egyenlet rendezésének szabályai

Az egyenlet megoldásán az egyenlet gyökeinek meghatározását értjük. Az egyenletek elmélete számunkra azért fontos, hogy a gyakorlatban felmerülő egyenletek és egyenletrendszerek megoldáshalmazait biztonsággal meghatározhassuk.

Minden esetben meg kell vizsgálnunk, hogy létezik-e megoldáshalmaz, s ha igen, az egyetlen megoldáshalmaza-e az egyenletnek.

Az egyenlet gyökeit (gyökét, megoldáshalmazát) általában olyan *rendezési*, *átalakítási* lépéssorozattal határozzuk meg, amelyek egyszerűbb egyenletekre vezetnek, azonban minden lépésnél meg kell vizsgálni, hogy az eredeti és az új egyenlet *ekvivalens* (*egyenértékű*)-e, vagy sem. Két egyenlet akkor *ekvivalens,* ha *alaphalmazuk* és *megoldáshalmazuk* azonos, vagyis az első egyenlet minden gyöke a második egyenletnek is gyöke, és a második egyenlet minden gyöke az elsőnek is gyöke.

Az olyan átalakításokat, amelyek adott egyenletekből ekvivalens egyenleteket hoznak létre, *ekvivalens átalakításoknak* nevezzük.

Pl.: Az $x^2 = 16$ és az $x^3 = 64$ egyenletek a természetes számok N halmazán ekvivalensek, megoldásuk: $x = 4$, de az egész számok Z halmazán nem ekvivalensek, mert az első egyenletnek $x = 4$ is és az $x = -4$ is gyöke, míg a második egyenletnek változatlan: $x = 4$.

Ha az első egyenlet minden gyöke kielégíti a második egyenletet, akkor még csak annyit mondhatunk, hogy a második egyenlet az elsőnek *következménye*, s ha a másodiknak ezen kívül egyetlen más gyöke sincs, akkor a két egyenlet ekvivalens. Az egyenlet megoldása során arra kell törekednünk, hogy minden átalakítás

ekvivalens egyenletet hozzon létre, vagy ha ez nem valósítható meg, akkor minden egyenlet az előtte levőnek a következménye legyen. Ha az átalakítással nyert egyenlet az eredetinek csak következménye, akkor a meghatározott összes gyök közül csak az eredeti egyenletet kielégítő gyököket tartjuk meg, s az utolsó egyenletet kielégítő további ún. *hamis* gyököket az eredeti egyenlet megoldáshalmazába nem vesszük be.

Az egyenletrendezés négy alapszabálya:

1. A $K_1 = K_2$ egyenlet és a $K_1^* = K_2^*$ egyenlet ekvivalens, ha a K_1 és K_1^* valamint a K_2 és K_2^* kifejezések ekvivalensek.

2. Egy egyenlet két oldalának felcserélésével az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, azaz $K_1 = K_2$ és $K_2 = K_1$ egyenletek ekvivalensek.

3. Valamely $K_1 = K_2$ egyenlet mindkét oldalához hozzáadva vagy mindkét oldalából levonva egy, az egyenlet alaphalmazán definiált K_3 kifejezést, az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, azaz a $K_1 + K_3 = K_2 + K_3$, $K_1 - K_3 = K_2 - K_3$ és a $K_1 = K_2$ egyenletek ekvivalensek.

4. Valamely $K_1 = K_2$ egyenlet mindkét oldalát szorozva vagy osztva egy, az egyenlet alaphalmazán definiált zérustól különböző K_3 kifejezéssel, az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, azaz a $K_1 \cdot K_3 = K_2 \cdot K_3$, $\frac{K_1}{K_3} = \frac{K_2}{K_3}$ és a $K_1 = K_2$ egyenletek ekvivalensek.

Ha a K_3 kifejezésnek az alaphalmazon képzett helyettesítési értéke zérus értéket is felvesz, akkor a vele való szorzás, ill. osztás műveletével előálló egyenletek nem ekvivalensek az eredeti egyenlettel.

Az egyenletmegoldás gyakorlati lépései

A továbbiakban, ha mást nem kötünk ki, a valós számok R halmazát tekintjük alaphalmaznak.

1. Az $x-a=c$ egyenlet mindkét oldalához adjunk a-t:

$x-a+a=c+a$ és így $x=c+a$.

Ellenőrzés: a megoldást, az x értékét, behelyettesítjük az egyenletbe:

$(c+a)-a=c, \quad c=c.$

Az $x+b=d$ egyenlet mindkét oldalából vonjuk ki b-t:

$x+b-b=d-b$ és így $x=d-b$. (Ellenőrzés!)

2. Az $\frac{x}{a}=b$ egyenletet szorozzuk meg $a\neq 0$-val:

$$\frac{x}{a}\cdot a=b\cdot a \quad \text{és így} \quad x=b\cdot a.$$

Az $ax=c$ egyenletet osszuk el $a\neq 0$-val:

$$\frac{ax}{a}=\frac{c}{a} \quad \text{és így} \quad x=\frac{c}{a}.$$

3. Az $x-1=0$ egyenletnek $x_1=1$ az egyetlen gyöke, vagyis megoldáshalmaza: $M_1=\{1\}$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(x+1)$-gyel. A művelet végrehajtása után kapott $(x-1)(x+1)=0$ egyenletnek nemcsak $x_1=1$, hanem $x_2=-1$ is gyöke, tehát megoldáshalmaza: $M_2=\{1,-1\}$, és így $M_1\subset M_2$. Az eredeti egyenlet gyöke megmaradt, tehát a második egyenlet következménye az eredetinek, de a két egyenlet nem ekvivalens, mert egy új (hamis) gyök is megjelent. Ilyen esetben az eredeti egyenlet gyökét behelyettesítéssel választjuk ki.

4. Az $(x-5)(x+4)=(3-x)(x+4)$ egyenlet mindkét oldalát osszuk el $(x+4)$-gyel, akkor az $x-5=3-x$ egyenletet kapjuk, amelyből az $x=4$ egyetlen gyök adódik, pedig az eredeti egyenletnek az $x=-4$ is gyöke. Az átalakítással kapott egyenlet nem ekvivalens az eredetivel, és nem is következménye annak. Az osztásra használt kifejezés az alaphalmaz egy elemének behelyettesítése mellett nullával egyenlő. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza: $M_1=\{-4,4\}$, az átalakítással kapotté: $M_2=\{4\}$, tehát $M_1\supset M_2$.

Bizonyos esetekben, mint a mostani példánál is, azonos átalakításokkal az összes gyököt meghatározhatjuk:

$$(x-5)(x+4)=(3-x)(x+4),$$
$$[x-5-(3-x)](x+4)=0,$$
$$(2x-8)(x+4)=0,$$

ahol az egyenlet teljesül, ha $2x-8=0$ vagy, ha $x+4=0$ vagyis a gyökök:

$x_1=4$ és $x_2=-4$.

5. Az egyenlet mindkét oldalát ugyanannyiadik egészkitevős hatványra hatványozva az egyenlet következményét kapjuk, gyökvesztés nem következik be.

Pl.: $3x-2=-x+2$ egyenlet egyetlen gyöke: $x_1=1$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$(3x-2)^2=(-x+2)^2 \qquad 8x^2-8x=0$$
$$9x^2-12x+4=x^2-4x+4 \qquad 8x(x-1)=0$$

vagyis az egyenlet két gyöke $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$. Az eredeti egyenletet azonban az $x_2 = 0$ gyök nem elégíti ki, csak az $x_1 = 1$.

6. Ha az egyenlet mindkét oldalából ugyanannyiadik egészkitevős gyököt vonunk, akkor gyökvesztés következhet be.

Pl.: $(2x-5)^2 = (x+3)^2$ egyenlet mindkét oldalából négyzetgyököt vonva $2x-5 = x+3$ adódik, amiből $x_1 = 8$ gyököt kapjuk, pedig az eredeti egyenletnek két gyöke van, amelyeket zérusra redukálva és szorzattá alakítva az egyenletből meghatározhatunk:

$$[(2x-5)+(x+3)]\cdot[(2x-5)-(x+3)] = 0$$
$$(3x-2)(x-8) = 0$$
$$3x-2 = 0 \quad \text{és}$$
$$x-8 = 0$$

tehát a két gyök: $x_1 = 8$ és $x_2 = \frac{2}{3}$.

Nincs gyökvesztés akkor sem, ha a négyzetgyökvonás alapértelmezése szerint járunk el: $|2x-5| = |x+3|$;

ha $x < -3$, akkor $-(2x-5) = -(x+3)$, $-2x+5 = -x-3$, $x = 8$.
(nem tartozik a vizsgált számhalmazba)

ha $-3 < x < \frac{5}{2}$, akkor $-(2x-5) = x+3$, $3x = 2$, $x = \frac{2}{3}$.

ha $x > \frac{5}{2}$, akkor $2x-5 = x+3$, és $x = 8$.

3.19 Az elsőfokú (lineáris) egyismeretlenes egyenlet

Az olyan egyenletet, amelyben csak egy ismeretlen van, s az csak az első hatványon fordul elő, *elsőfokú* (*lineáris*) *egyismeretlenes egyenletnek* nevezzük.

Általános alakja:

$$ax+b = 0, \text{ ahol } a \neq 0, \quad (a,b,x \in R) \qquad (1)$$

Az *a*, *b* általában adott értékek, az *x* változó pedig az egyenlet ismeretlenje.

Az egyenletet akkor mondjuk megoldottnak, ha egyik oldalán csak az ismeretlen, a másik oldalán pedig csak ismert mennyiség áll. Az elsőfokú, egyismeretlenes egyenletnél ezt ekvivalens átala-

kítással érjük el, éspedig úgy, hogy az ismeretlent tartalmazó tagokat az egyik oldalra (rendszerint a bal oldalra), az ismert tagokat pedig a másik oldalra gyűjtjük. Azt is szokás mondani, hogy rendezzük az egyenletet.

A nullára redukált elsőfokú egyismeretlenes egyenlet (1) általános alakjának mindkét oldalából levonunk b-t:

$$ax + b - b = 0 - b, \quad \text{azaz} \quad ax = -b$$

alakot kapjuk. Most osszuk az egyenletet a-val:

$$\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}, \quad \text{amiből} \quad x = -\frac{b}{a}$$

az *egyenlet megoldása* vagy *gyöke*.

A kiszámított gyök akkor megoldás, ha azt az egyenlet eredeti alakjába helyettesítve igaz állítást kapunk. Ezt az eljárást *próbának* nevezzük:

$$a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0, \qquad -b + b = 0, \qquad 0 = 0.$$

Jelöljük az elsőfokú egyismeretlenes egyenlet gyökét x_1-gyel. Kimutatjuk, hogy más gyöke nem lehet.

Helyettesítsük x_1-et az (1) egyenletbe: $ax_1 + b = 0$, s tegyük fel, hogy x_2 is gyöke (1)-nek: $ax_2 + b = 0$

A két egyenlet megfelelő oldalainak különbsége:

$$ax_1 - ax_2 = 0, \quad a(x_1 - x_2) = 0,$$

amely csak akkor áll fenn ($a \neq 0$), ha $x_1 = x_2$, tehát más érték, mint x_1 az (1) egyenletet nem elégítheti ki.

Példák

1. $7x - 77 + 6x + 11 = 4x - 60 + 3x$.

Ekvivalens átalakításokkal rendezzük az egyenletet: az ismeretlenes tagokat a bal oldalra, az ismerteket jobb oldalra visszük:

$$7x + 6x - 4x - 3x = -60 + 77 - 11,$$

az összevonást elvégezzük:

$6x = 6$, osztunk 6-tal:

$$x = \frac{6}{6} = 1$$

Próba: $7\cdot 1-77+6\cdot 1+11=4\cdot 1-60+3\cdot 1,\quad -53=-53.$

Tehát $x=1$ valóban gyöke az egyenletnek, azaz a megoldáshalmaza: $M=\{1\}$.

2. $6x-[8-(3x-2)+4(5-9x)]=10x-[7-(11x-15)]+6.$

A zárójeleket felbontjuk:

$$6x-[8-3x+2+20-36x]=10x-[7-11x+15]+6,$$
$$6x-8+3x+-2-20+36x=10x-7+11x-15+6.$$

Bal és jobb oldalra csoportosítjuk az ismeretlen és ismert tagokat és összevonunk:

$$6x+3x+36x-10x-11x=-7-15+6+8+2+20,$$
$$24x=14,$$
$$x=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}.$$

Próba

$$6\cdot\frac{7}{12}-\left[8-\left(3\cdot\frac{7}{12}-2\right)+4\left(5-9\cdot\frac{7}{12}\right)\right]=10\cdot\frac{7}{12}-\left[7-\left(11\cdot\frac{7}{12}-15\right)\right]+6,$$
$$\frac{7}{2}-\left[8-\frac{7}{4}+2+20-21\right]=\frac{35}{6}-\left[7-\frac{77}{12}+15\right]+6,$$
$$\frac{7}{2}-\frac{29}{4}=\frac{35}{6}-\frac{187}{12}+6\quad|\cdot 12$$

(ez azt jelenti, hogy 12-vel szorozzuk az egyenlőséget),

$$42-87=70-187+72,$$
$$-45=-45.$$

3. $\frac{9x+7}{2}+\frac{x-2}{7}=36+x.$

A nevezők legkisebb közös többszörösével megszorozzuk az egyenlet minden tagját. Így a törteket kiküszöböljük, mivel a nevezőkkel egyszerűsíthetünk. A legkisebb közös többszörös: $2\cdot 7=14$.

$$(9x+7)\cdot 7+(x-2)\cdot 2=(36+x)\cdot 14.$$

Felbontjuk a zárójeleket:

$$63x+49+2x-4=504+14x.$$

Az ismeretlenes és ismert (konstans) tagokat szétválasztjuk:

$$63x+2x-14x=504-49+4.$$

Az összevonást elvégezzük:

$$51x=459.$$

Az ismeretlen együtthatójával, 51-gyel osztjuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$x=\frac{459}{51}=9.$$

Tehát az egyenlet gyöke: $x=9$.

Próba: $\frac{9\cdot 9+7}{2}+\frac{9-2}{7}=36+9,\quad \frac{88}{2}+\frac{7}{7}=45,\quad 44+1=45,\quad 45=45.$

4. $a(x-1)-b=x-a, \quad (a\neq 1)$.

Beszorzással felbontjuk a zárójelet: $ax-a-b=x-a$

$$ax-x=-a+a+b$$

x-et kiemeljük: $x(a-1)=b$

$(a-1)$-gyel osztunk: $x=\frac{b}{a-1} \quad (a\neq 1)$.

Próba

$$a\left(\frac{b}{a-1}-1\right)-b=\frac{b}{a-1}-a,$$

$$a\left(\frac{b-a+1}{a-1}\right)-b=\frac{b-a^2+a}{a-1}\ \Big|\cdot(a-1),$$

$$a(b-a+1)-b(a-1)=b-a^2+a,$$

$$ab-a^2+a-ab+b=b-a^2+a,$$

$$a-a^2+b=a-a^2+b.$$

5. $\frac{16}{5x-3}=\frac{8}{x}$.

Kiküszöböljük a törteket úgy, hogy $x(5x-3)$-mal szorozzuk az egyenletet, és a nevezőkkel egyszerűsítünk, feltéve, hogy $x\neq 0$, és $x\neq\frac{3}{5}$:

$$16x=8(5x-3)$$
$$16x=40x-24$$
$$16x-40x=-24$$
$$-24x=-24$$
$$x=1$$

Próba

$$\frac{16}{5\cdot 1-3}=\frac{8}{1}, \quad \frac{16}{2}=8, \quad 8=8.$$

A példákból láthatjuk, hogy egyenletek megoldása közben a következő lépések fordulnak elő:

1. eltávolítjuk a törteket (ha vannak);
2. elvégezzük a kijelölt műveleteket, felbontjuk a zárójeleket;
3. rendezzük az egyenletet;
4. összevonunk;
5. elosztjuk az ismeretlen együtthatójával mindkét oldalt;
6. elvégezzük a "próbát".

Feladatok

1. $13x+45=100-9x \quad \left[x=2\frac{1}{2}\right]$.

2. $2{,}3x+47-1{,}9x-34=1{,}8x+57-2{,}5x \quad [x=40]$.

3. $340x-(16+15x)=41-70x-(48-17x)$ $\left[x=\frac{1}{42}\right]$.

4. $11\frac{4}{5}x-\left(2\frac{4}{5}x-2\right)-\left(14\frac{1}{5}x+2\frac{1}{10}\right)+6\frac{3}{5}x=0$ $\left[x=\frac{1}{14}\right]$.

5. $\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{x+3}{2}$ $[x=0]$.

6. $\frac{7}{2x}-\frac{1}{3}-\frac{31-7x}{6x}=\frac{8}{3x}-\frac{9}{4x}$ $\left[x=2\frac{1}{2}\right]$.

7. $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x-4}{x+2}$ $[x=0,4]$.

8. $\frac{11c-ax}{6c}=\frac{7a-bx}{2a}-\frac{5b-cx}{3b}$ $\left[x=0,\ a^2b-3b^2c+2ac^2\neq 0\right]$.

9. $\frac{19-5x}{4-2x}-\frac{20-14x}{6-3x}=5$ $[x=1]$.

3.20 Szöveges egyenletek

Ha az ismert és ismeretlen mennyiség közötti összefüggést szavakkal írjuk le, akkor ún. "*szöveges egyenletet*" kapunk. Az ilyen egyenleteket előbb algebrai alakba írjuk át, azután a szokásos módon megoldjuk.

Az egyenletek felírásánál általában a következőképpen járunk el:

1. Legfontosabb a szöveges egyenlet helyes értelmezése, ezért jó, ha a magunk szavaival is megfogalmazzuk a feladatot.

2. Az ismeretlen mennyiséget valamilyen betűvel jelöljük. Ha több kérdés van, akkor azokat a már felvett ismeretlen segítségével igyekezzünk kifejezni.

3. A feladat ismert és ismeretlen mennyiségeit két egyenlő értékű algebrai kifejezésbe foglaljuk, amelyeket az egyenlőség jelével összekapcsolva, megkapjuk a szöveges egyenlet algebrai alakját.

4. Az így előállított egyenlet megoldása után a gyök, ill. a megoldáshalmaz helyességét a szöveg alapján is igazolnunk kell,

mert az egyenletbe való behelyettesítés, a próba csak azt mutatja, hogy a felállított egyenletet jól vagy rosszul oldottuk-e meg, de hibás meggondolással a szövegnek nem megfelelő egyenletet is felállíthattunk. (Jól felállított egyenlet is adhat a valóságban nem értelmezhető megoldást, pl. 4,5 ember.)

Példák

1. Melyik az a szám, amelynek ötszöröse 10-zel kisebbítve ugyanakkora számot ad, mint a szám háromszorosa 2-vel nagyobbítva?

Megoldás: A kérdezett szám legyen x, akkor ötszöröse: $5x$. A szám ötszörösének 10-zel kisebbített értéke: $5x-10$. A szám háromszorosának 2-vel nagyobbított értéke: $3x+2$. A feladat értelmében ezek egyenlők, ezért a szövegnek megfelelő egyenlet:

$$5x-10=3x+2, \quad 5x-3x=2+10, \quad 2x=12, \quad x=6.$$

A megoldás helyes, mert 6 ötszöröse 10-zel kisebbítve 20, és háromszorosa 2-vel nagyobbítva szintén 20.

2. Melyik az a szám, amelynek 10-zel nagyobbított kétszerese 3-mal osztva, hányadosul az egész számsorban rákövetkező számot adja?

Megoldás: Ha a számot y-nal jelöljük, akkor a rákövetkező szám $y+1$ lesz, s így az egyenlet:

$$\frac{2y+10}{3}=y+1, \quad 2y+10=3y+3, \quad -y=-7, \quad y=7.$$

A megoldás helyes, mert 7-nek kétszerese 10-zel nagyobbítva 24, ennek harmadrésze 8, amely valóban a 7 után következő egész szám.

3. Két testvér közül az egyik öt év híján kétszer annyi idős, mint a másik; tíz év múlva éveik száma úgy aránylik egymáshoz, mint 5 : 4. Hány évesek?

Megoldás: Ha a fiatalabb most x éves, akkor az idősebb $2x-5$ éves, így felírhatjuk: $(2x-5+10):(x+10)=5:4$, amiből a $4\cdot(2x+5)=5\cdot(x+10)$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása:

$$8x+20=5x+50, \quad 3x=30, \quad x=10.$$

Tehát a fiatalabb testvér most 10 éves, az idősebb pedig $2\cdot10-5=15$ éves. A megoldás helyes, mert tíz év múlva a fiatalabb 20, az idősebb 25 éves lesz, és

$$25:20=5:4.$$

4. Egy egyenlő szárú háromszög szára 3 m-rel nagyobb, mint az alapja; mekkorák az oldalak, ha a kerülete 18 m?

Megoldás: A háromszög kerülete a három oldal mérőszámának összegével egyenlő. Ha az alapot x-szel jelöljük, akkor a háromszög egyik szára $x+3$, úgyhogy

$$2(x+3)+x=18, \quad 2x+6+x=18, \quad 3x=12, \quad x=4.$$

Tehát a háromszög alapja 4 m, szára 7 m. A megoldás helyes, mert $4+7+7=18$.

5. Ha egy négyzet egyik oldalát a-val nagyobbítjuk, szomszédos oldalát pedig b-vel kisebbítjük, akkor vele egyenlő területű téglalapot kapunk. Mekkora a négyzet oldala?

Megoldás: A téglalapok területe az egy csúcshoz tartozó oldalak szorzatával egyenlő. Ha a négyzet oldala x, akkor a téglalap oldalai $x + a$ és $x - b$, tehát

$$(x+a)(x-b)=x^2,\ x^2+ax-bx-ab=x^2,\ x(a-b)=ab,\ x=\frac{ab}{a-b}.$$

A feladat értelmében az x értéke csak pozitív lehet, amit csak akkor kapunk, ha $a > b$.

A megoldás helyes, mert a téglalap területe:

$$\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)=\frac{ab+a(a-b)}{a-b}\cdot\frac{ab-b(a-b)}{a-b}=$$

$$=\frac{ab+a^2-ab}{a-b}\cdot\frac{ab-ab-b^2}{a-b}=\frac{a^2b^2}{(a-b)^2},$$

és ez egyenlő az $\frac{ab}{a-b}$ oldalú négyzet területével.

6. Hány kg vizet kell hozzáönteni 15 kg 96%-os alkoholhoz, hogy 50%-os alkoholunk legyen?

Megoldás: A 15 kg alkoholkeverékben $\frac{15\cdot 96}{100}$ kg tiszta alkohol van. Ha hozzáöntünk x kg vizet, akkor a keverék $(15 + x)$ kg lesz, ez 50%-os, tehát alkoholtartalma $\frac{(15+x)\cdot 50}{100}$ kg, és feltéve, hogy a keverés által az alkoholtartalom nem változik:

$$\frac{15\cdot 96}{100}=\frac{(15+x)\cdot 50}{100},\ 1440=750+50x,\ 50x=690,\ x=\frac{690}{50}=13{,}8$$

Tehát 13,8 kg vizet kell hozzáönteni a 15 kg 96%-os alkoholhoz, hogy 50%-os alkoholt kapjunk.

7. Hány kg 35%-os szeszt kell 20 kg 80%-os szeszhez önteni, hogy 45%-os szeszt kapjunk?

Megoldás:

$$\frac{(20+x)\cdot 45}{100}=\frac{35\cdot x}{100}+\frac{20\cdot 80}{100},\ 900+45x=35x+1600,\ 10x=700,\ x=70.$$

Tehát 70 kg 35%-os szeszt kell önteni a 20 kg 80%-os szeszhez, hogy 45%-os szeszt nyerjünk.

8. Hány liter víz és tömény kénsav kell 15 l 45%-os kénsav előállításához, és mi lesz a keverék sűrűsége, ha a tiszta kénsav sűrűsége 1,848 g/cm^3 ?

Megoldás: A tömény kénsav: $\frac{15\cdot 45}{100}$ l = 6,75 l, a víz $(15 - 6{,}75)$l = 8,25 l. Ha

a keverék sűrűsége x g/cm^3 akkor tömege $15x$ kg, a kénsav tömege $6,75 \cdot 1,848$ kg, a vízé 8,25 kg, tehát

$$15x = 6,75 \cdot 1,848 + 8,25, \quad x = \frac{20,724}{15} \approx 1,382;$$

vagyis a keverék sűrűsége: 1,382 g/cm^3.

9. Egy arany és ezüst ötvözetéből készült dísztárgy tömege 380 g, sűrűsége 17,2 g/cm^3. Mennyi arany és ezüst van benne, ha az arany sűrűsége 19,26 g/cm^3, az ezüsté pedig 10,53 g/cm^3?

Megoldás: A dísztárgyban levő arany legyen x g, akkor az ezüsté $(380–x)$ g. Mivel a dísztárgy térfogata egyenlő az alkotórészek együttes térfogatával

$$\left(\text{térfogat} = \frac{\text{tömeg}}{\text{sűrűség}}\right), \text{ ezért } \frac{x}{19,26} + \frac{380-x}{10,53} = \frac{380}{17,2}, \quad x = 325,1.$$

A dísztárgyban tehát 325,1 g arany és 54,9 g ezüst van.

10. Egy kettős vágányú vonalon egy gyorsvonat és egy személyvonat halad egymással szemben. 360 km távolság van köztük. Mikor találkoznak, ha a gyorsvonat ezt az utat 3 óra alatt, a személyvonat 5 óra alatt teszi meg?

Megoldás: A gyorsvonat sebessége $\frac{360}{3} = 120$ km/h, a személyvonat sebessége $\frac{360}{5} = 72$ km/h. Ha a két vonat x óra múlva találkozik, akkor

$$120x + 72x = 360, \quad 192x = 360, \quad x = \frac{360}{192} = 1,875.$$

Tehát a vonatok 1,875 óra múlva találkoznak.

Sok feladat megoldásához szakismeretre van szükség. Alább néhány fizikai alapegyenletet (képletet) közlünk. Ezeket a képleteket a bennük előforduló egyik változó mennyiség kiszámításánál elsőfokú egyismeretlenes egyenletként kezeljük.

1. *Sűrűség (fajlagos tömeg)*: $\rho = \frac{m}{V}$ (az m tömeget kg-ban, a V térfogatot m^3-ben mérve, a ρ sűrűséget kg/m^3-ben kapjuk).

Pl.: Mekkora a térfogata az 54,7 kg tömegű 2700 kg/m^3 sűrűségű testnek?

A $\rho = \frac{m}{V}$-ből $V = \frac{m}{\rho} = \frac{54,7 \text{ kg}}{2700 \text{ kg/m}^3} \approx 0,020259 \text{ m}^3 = 20,259 \text{ dm}^3$.

2. *Mozgásmennyiség (impulzus, lendület)*: $I = m \cdot v$ (az m tömeget kg-ban, a v sebességet m/s-ban mérve az I mozgásmennyiséget kgm/s-ban kapjuk).

Pl.: Mekkora a sebessége az 1150 kg tömegű testnek, ha mozgásmennyisége $I = 21019{,}4\ \text{kgm/s}$?

Az $I = m \cdot v$-ből $v = \frac{I}{m} = \frac{21019{,}4\ \text{kgm/s}}{1150\ \text{kg}} \approx 18{,}28\ \text{m/s}$, amely megfelel 65,8 km/h sebességnek.

3. *Erő*: $F = m \cdot a$ (az m tömeget kg-ban, az a gyorsulást m/s^2-ben mérve, az F erőt newtonban (N-ban) kapjuk. ($1\ \text{N} = 1\ \text{kgm/s}^2$)

Pl.: Mekkora erő hat a 950 kg tömegű testre, ha gyorsulása $21{,}5\ \text{m/s}^2$?

$$F = m \cdot a = 950\text{kg} \cdot 21{,}5\text{m/s}^2 = 20425\text{N}.$$

4. *Súly*: $G = m \cdot g$ (az m-et kg-ban mérve, a g-t $g = 9{,}80665\text{m/s}^2$-ben helyettesítve, a G súlyt N-ban kapjuk).

Pl.: Mekkora a tömege egy 830 N súlyú testnek?

A $G = m \cdot g$-ből $m = \frac{G}{g} = \frac{830\text{mkg/s}^2}{9{,}80665\text{m/s}^2} \approx 84{,}64\text{kg}$.

5. *Fajsúly*: $\gamma = \frac{G}{V}$ (a G súlyt N-ban, a V térfogatot m^3-ben mérve, a γ fajsúlyt N/m^3 egységben, azaz $\text{kg/m}^2\text{s}^2$-ben kapjuk).

Pl.: Mekkora a térfogata a 160 N súlyú testnek, ha fajsúlya $870\ \text{N/m}^3$?

A $\gamma = \frac{G}{V}$-ből $V = \frac{G}{\gamma} = \frac{160\text{N}}{870\text{N/m}^3} = 0{,}183908\text{m}^3$, azaz $183{,}908\text{dm}^3$

6. *Nyomás*: $p = \frac{F}{A}$ (az A felületre ható F nyomóerőt newtonban mérve az A felületet m^2-ben, a p nyomást pascalban (Pa-ban) kapjuk. ($1\ \text{Pa} = 1\ \text{kg/ms}^2$)

Pl.: Mekkora erőt kell alkalmazni egy $A = 50\ \text{cm}^2$ támasztó felületre, hogy a felületi nyomás $p = 98503$ Pa legyen?

A $p = \frac{F}{A}$-ból $F = p \cdot A = 98503\ \text{kg/ms}^2 \cdot 0{,}0050\ \text{m}^2 = 492{,}515\ \text{kgm/s}^2 =$

$$= 492{,}515\ \text{N}.$$

7. *Munka*: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ (az **F** erőt N-ban, az **s** utat m-ben mérve, a W munkát joule-ban (J-ban) kapjuk). ($1\ \text{J} = 1\ \text{Nm} = 1\ \text{m}^2\text{kg/s}^2$)

Pl.: Mekkora az emelő erő munkája, ha 145,3 kg tömegű testet $h = 6$ m magasra emelünk, egyenletesen?

$F = 145{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1425{,}393\ \text{kgm/s}^2 = 1425{,}393\ \text{N}$, és így

$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 1425{,}393\ \text{N} \cdot 6\ \text{m} = 8552{,}358\ \text{Nm} = 8552{,}358\ \text{J}$.

8. *Teljesítmény*: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t}$ (a W munkát J-ban mérve, a t időt s-ban mérve, a teljesítményt wattban (W-ban) kapjuk). ($1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{m^2 kg/s^3}$) A teljesítmény lóerőben (LE-ben): 1 LE = 735,49875 W.

Pl.: *a*) Mekkora az emelőerő teljesítménye az 5. pont példájában, ha az emelés időtartama 5 másodperc?

Mivel W = 8552,358 J; t = 5 s, így $P = \frac{W}{t} = \frac{8552{,}358\ \mathrm{J}}{5\ \mathrm{s}} = 1710{,}4716\ \mathrm{J/s}$,

amely $\frac{1710{,}4716\ \mathrm{J/s}}{735{,}49875} \approx 2{,}326$ LE-nek felel meg.

b) Mennyi víz szállítható h = 20 m magasra óránként egy 10 LE-s motor segítségével, ha súrlódás és egyéb tényezők okozta veszteség 25%?

A tényleges teljesítmény: $10\ \mathrm{LE} - \frac{10 \cdot 25}{100}\ \mathrm{LE} = 7{,}5\ \mathrm{LE}$. A $P = \frac{F \cdot h}{t} =$

$= \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$-ből $m = \frac{t \cdot P}{g \cdot h} = \frac{3600\ \mathrm{s} \cdot 7{,}5 \cdot 735{,}49875\ \mathrm{W}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 20\ \mathrm{m}} = \frac{3600\ \mathrm{s} \cdot 5516{,}24\ \mathrm{W}}{196{,}2\ \mathrm{m^2/s^2}} =$

$$= 101215{,}42 \frac{\mathrm{sm^2 kg/s^3}}{\mathrm{m^2/s^2}} = 101215{,}42\ \mathrm{kg}.$$

Tehát óránként 101215,42 kg, azaz 101,215 $\mathrm{m^3}$ víz szállítható 20 m magasra.

9. *Hatásfok*: $\eta = \frac{P_h}{P_{ö}} \cdot 100$ (a P_h hasznos teljesítményt és a $P_{ö}$ összes teljesítményt ugyanazon mértékegységben mérve az η hatásfokot %-ban kapjuk).

Pl.: Mekkora a dízelmotor hatásfoka, ha az összes teljesítménye 240 LE, a hasznos teljesítménye pedig 180 LE?

$$\eta = \frac{P_h}{P_{ö}} \cdot 100 = \frac{180}{240} \cdot 100 = 75\ \%.$$

10. *Erőnyomaték* (*forgatónyomaték*): $M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2pn}$ (Az ω szögsebesség és az n fordulatszám közötti összefüggés: $\omega = 2pn$. A P teljesítményt W-ban mérve, az ω szögsebességet rad/s-ban, ill. az n fordulatszámot ford/s ban mérve, az M forgatónyomatékot Nm-ben, azaz $\mathrm{m^2 kg/s^2}$-ben kapjuk.)

Pl.: Hány LE teljesítményű az a motor, amelynek percenkénti fordulatszáma n = 1400, forgatónyomatéka 7,5 Nm?

A fordulatszám: $\frac{1400}{60}\ \mathrm{/s} = 23{,}33\ \mathrm{/s}$, így az $M = \frac{P}{2pn}$-ből $P = 2pnM \approx$

$$\approx 2 \cdot 3{,}1416 \cdot \frac{23{,}33}{\mathrm{s}} \cdot 7{,}5\ \mathrm{m^2 kg/s^2} = 1099{,}56\ \mathrm{m^2 kg/s^3} = 1099{,}56\ \mathrm{W} = 1{,}495\ \mathrm{LE}$$

11. *Kerületi sebesség*: $v_{ker} = \omega \cdot r = 2p \cdot f \cdot r$ (Az r sugarat m-ben, az f fordulatszámot sec-ban mérve, a v_{ker} kerületi sebességet m/s-ban kapjuk.)

Pl.: Mennyi a fordulatszáma a $d = 2r = 320$ mm átmérőjű $v_{ker} = 16$ m/s kerületi sebességű ventillátornak?

$$v_{ker} = 2pfr \text{ - ből } f = \frac{v_{ker}}{2pr} = \frac{16 \text{ m/s}}{0{,}32 \text{ m} \cdot 3{,}1416} \approx 954{,}93 \text{ ford/perc.}$$

12. *Az egyenletes mozgás egyenlete*: $v = \frac{s}{t}$ (Az s utat km-ben, a t időt h-ban mérve, a v sebességet km/ h-ban kapjuk).

Pl.: Egy 110 km/h sebességgel haladó gépkocsi hány óra alatt tesz meg 537 km utat?

A $v = \frac{s}{t}$-ből $t = \frac{s}{v} = \frac{537 \text{ km}}{110 \text{ km/h}} \approx 4{,}88$ h.

13. *Ohm törvénye*: $U = I \cdot R$ (Az I áramerősséget A-ban (amperban), az R ellenállást Ω-ban (ohmban) mérve, az U feszültséget V-ban (voltban) kapjuk.)

Pl.: Egy zseblámpa izzón 0,2 A felírást látunk, a zseblámpa elem feszültsége 4 V, mekkora a zseblámpa izzó ellenállása?

Az $U = I \cdot R$ egyenletből $R = \frac{U}{I} = \frac{4 \text{ V}}{0{,}2 \text{ A}} = 20\ \Omega$.

14. *Vezetők ellenállása*: $R = \rho \frac{l}{q}$ (a ρ arányossági tényezőt $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$-ben, az l hosszúságot m-ben, a q keresztmetszetet mm^2-ben mérve, az R ellenállást Ω-ban kapjuk).

Pl.: A 0,8 mm átmérőjű konstantán drótból ($\rho = 0{,}51\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$) 24 Ω ellenállású melegítőtestet akarunk készíteni, milyen hosszú huzalt kell felhasználnunk?

$q = 0{,}4^2 \cdot 3{,}1416 \text{ mm}^2 \approx 0{,}5027 \text{ mm}^2$, az $R = \rho \frac{l}{q}$ egyenletből

$$l = \frac{R \cdot q}{\rho} = \frac{24\ \Omega \cdot 0{,}5027 \text{ mm}^2}{0{,}51\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}} \approx 23{,}66 \text{ m.}$$

15. *Egyenáram teljesítménye*: $P = I \cdot U$ (az I áramerősséget A-ban, az U feszültséget V-ban mérve, a P teljesítményt W-ban (watt) kapjuk).

Pl.: Mekkora teljesítményű egy 220 V feszültséget és 50 A áramerősséget adó egyenáramú generátor?

$$P = I \cdot U = 50\text{A} \cdot 220\text{V} = 11000 \text{ W} = 11 \text{ kW.}$$

16. *Joule-törvény*: $Q = U \cdot I \cdot t$ (Az U feszültséget V-ban, az I áramerősséget A-ban, a t időt s-ban mérve, a Q hőmennyiséget joule-ban kapjuk.)

Pl.: Egy elektromos fűtőkészülék 110 V feszültségnél 1 min alatt Q = 13200 J hőmennyiséget fejleszt. Mekkora az áramerősség?

A $Q = U \cdot I \cdot t$ egyenletből $I = \frac{Q}{U \cdot t} = \frac{13200\ \text{J}}{110\ \text{V} \cdot 60\ \text{s}} \approx 2\ \text{A}$.

17. *Rezgésszám*: $f = \frac{p \cdot n}{60}$ (p a pólusszám fele, n a percenkénti fordulatszám, f a másodpercenkénti rezgésszám; hálózati frekvencia).

Pl.: Hány pólusú az a váltakozóáramú motor, amelynél $f = 40$ ford/sec és $n = 600$ ford/perc?

Az $f = \frac{p \cdot n}{60}$ egyenletből $p = \frac{60 \cdot f}{n} = \frac{60 \cdot 40}{600} = 4$. Tehát a pólusszám: $2p = 8$.

18. *Ellenállások párhuzamos kapcsolása*: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (Az R_1 és R_2 párhuzamosan kapcsolt ellenállásokat Ω-ban mérve, az R eredő ellenállást Ω-ban kapjuk.)

Pl.: Egy 110 V-os áramkörbe párhuzamosan kapcsolunk egy 20 Ω-os főzőlapot, és egy 44 Ω-os vasalót. Mekkora áram halad át a párhuzamosan kapcsolt készülékeken egyenként, és mekkora ellenállással lehetne a két ellenállást helyettesíteni?

A főzőlapon $I = \frac{110\ \text{V}}{20\ \Omega} = 5{,}5\ \text{A}$, a vasalón $I = \frac{110\ \text{V}}{44\ \Omega} = 2{,}5\ \text{A}$ áram halad át.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{44} = \frac{4}{55} = \frac{1}{13{,}75} \quad \text{és} \quad R = 13{,}75\ \Omega.$$

Az áramerősséget az eredő ellenállásból számítva: $I = \frac{110\ \text{V}}{13{,}75\ \Omega} \approx 8{,}0\ \text{A}$, amely megegyezik az egyes ágakban folyó áramerősségek összegével.

3.21 Elsőfokú (lineáris) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása és a determináns fogalma

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenlet általános alakja:

$$ax + by = d, \quad x, y \in R, \quad a, b, d \in R \tag{1}$$

ahol a, b és d ismert, x és y ismeretlen mennyiségek.

Az egyenlet y-ra megoldva:

$$y = \frac{d - ax}{b}, \quad b \neq 0.$$

Ebben x helyére különböző értékeket helyettesítve, y-ra más és más értékeket kapunk. Az így adódó x, y értékpárok mindig kielégítik az (1) egyenletet; tehát az elsőfokú kétismeretlenes egyenletnek végtelen sok megoldása van, ezért *határozatlan egyenletnek* nevezzük. A két ismeretlen meghatározására egyidejűleg fennálló két elsőfokú kétismeretlenes egyenlet szükséges, amelyek együtt *elsőfokú* (*lineáris*) *egyenletrendszert* alkotnak.

Az *elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer általános alakja*:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= d_1 \quad x, y \in R \\ a_2x + b_2y &= d_2 \quad a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2 \in R \end{aligned} \tag{2}$$

A (2) egyenletrendszer csak akkor oldható meg egyértelműen, ha a két egyenlet egymástól független, és nincs ellentmondásban egymással $\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$. Ha az általános alakban felírt egyenletrendszer egyik egyenletét valamely számmal szorozva a másik egyenletet kapjuk, akkor a két egyenlet *nem független* $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{d_1}{d_2}\right)$, míg ha valamely számmal szorozva a másik egyenlet bal oldalát megkapjuk ugyan, egyidejűleg azonban a jobb oldalak nem egyeznek meg, akkor a két egyenlet *ellentmondó* $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{d_1}{d_2}\right)$. Az első esetben a két egyenlet lényegében nem különböző, a másik esetben pedig nem oldható meg.

Más megfogalmazásban: Ha az egyenletek megoldáshalmazát M_1 és M_2 jelöli, metszetüket pedig M, akkor a lehetséges esetek:

1. $M = M_1 \cap M_2 = \{(x_1, y_1)\}$, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van;

2. $M = M_1 \cap M_2 = \varnothing$, azaz az egyenletrendszer ellentmondó;

3. $M = M_1 \cap M_2 = M_1$ vagy M_2, azaz az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása létezik.

Pl.: (I) $5x-7y=4$

(II) $15x-21y=12$

Az (I) egyenlet háromszorosa a (II) egyenlet, tehát a két egyenlet függ egymástól. Grafikusan szemléltetve: a két egyenlethez tartozó két egyenes fedi egymást, s így végtelen sok pontjuk azonos.

Pl.: (I) $-2x+1{,}4y=6{,}2$

(II) $-x+0{,}7y=10$

egyenletrendszer ellentmondó, ami a második egyenlet kettővel való szorzása alapján belátható. Grafikusan szemléltetve: a két egyenlethez tartozó két egyenes párhuzamos, nincs metszéspontjuk (l. a 8.13 pontot).

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldására három eljárást ismertetünk: *a*) helyettesítő; *b*) egyenlő együtthatók és *c*) a determinánsok módszerét.

a) *A helyettesítő módszernél* valamelyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, s azt a másik egyenletbe ugyanannak az ismeretlennek a helyére helyettesítjük, majd az így kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk. Az egyik ismeretlen így meghatározott értékét az egyenletek egyikébe helyettesítjük, és az így kapott egyismeretlenes egyenletből kiszámítjuk a másik ismeretlen értékét is. Ezután ellenőrizzük a számítás helyességét (elvégezzük a próbát) oly módon, hogy a számított x, y értékpárt behelyettesítjük az egyenletrendszer mindkét egyenletébe s megvizsgáljuk a jobb és bal oldalt, ha azonosan egyenlők (a kerekítési hibakorláton belül) akkor a kiszámított gyökök alkotják az egyenletrendszer megoldáshalmazát.

Példák

1. $x-2y=-4$ (I)

$2x+y=-3$ (II)

Az (I) egyenletből $x=2y-4$, s ezt helyettesítve a (II) egyenletbe:

$$2(2y-4)+y=-3,\quad 4y-8+y=-3,\quad 5y=5,\quad y=\frac{5}{5}=1.$$

A kiszámított y értékét helyettesítsük az $x=2y-4$ egyenletbe:

$$x=2\cdot 1-4,\quad x=-2$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei: $x=-2$, $y=1$, vagyis $(-2,1)\in R\times R$ rendezett számpár. A megoldáshalmaz: $M=\{(-2,\,1)\}$

Próba

$-2-2\cdot 1=-4, \quad -4=-4.$

$2(-2)+1=-3, \quad -3=-3.$

2. $41x-24y=29 \qquad$ (I)

$7x-6y=-35 \qquad$ (II)

A (II) egyenletből $6y=7x+35$, $y=\frac{7x+35}{6}$, az (I)-be helyettesítve:

$$41x-24\cdot\frac{7x+35}{6}=29, \quad 41x-4(7x+35)=29, \quad 13x=169, \quad x=13.$$

x értékét az $y=\frac{7x+35}{6}$ egyenletbe helyettesítve:

$$y=\frac{7\cdot 13+35}{6}=\frac{126}{6}=21.$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei: $x=13$; $y=21$. A megoldáshalmaz $M\{(13,21)\}$.

Próba

$41\cdot 13-24\cdot 21=29, \quad 29=29.$

$7\cdot 13-6\cdot 21=-35, \quad -35=-35.$

b) *Az egyenlő együtthatók* módszerével a kétismeretlenes egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy az egyenleteket egy-egy alkalmasan választott számmal megszorozzuk azért, hogy a kiküszöbölendő ismeretlen együtthatója mindkét egyenletben egyenlő legyen.

Ezután a két egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk, ill. kivonjuk egymásból, így egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelynek megoldását az egyik egyenletbe helyettesítve, a másik ismeretlen értékét is meghatározhatjuk, majd elvégezzük a próbát.

Megjegyzés: Ennek az eljárásnak előnye, hogy azonnal leolvasható belőle, ha az egyenletek nem függetlenek, vagy ellentmondók. Amikor a két egyenlet egyik ismeretlenjének együtthatói megegyeznek, de a másik ismeretlené nem, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható; ha a másik ismeretlen együtthatói is megegyeznek, de a jobb oldali szabad tagok különböznek, akkor ellentmondásos; ha még a két szabad tag is egyező, akkor a rendszer határozatlan.

Példák

1. $5x+3y=19, \qquad$ (I)

$6x-2y=6. \qquad$ (II)

Ha az x együtthatóit akarjuk egyenlővé tenni, akkor az (I) egyenletet 6-tal, a (II) egyenletet 5-tel szorozzuk, ezt a továbbiakban így jelöljük:

$$\begin{array}{ll} 5x+3y=19 & |\cdot 6 \\ 6x-2y=6 & |\cdot 5 \\ \hline 30x+18y=114 & (\mathrm{I}a) \\ 30x-10y=30 & (\mathrm{II}a) \end{array}$$

(Ia) – (IIa): $28y=84$, és innen $y=3$. y értékét (I)-be helyettesítve:

$$5x+3\cdot 3=19, \quad 5x=10, \quad x=2.$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei: $x=2$; $y=3$. A megoldáshalmaz: $M=\{(2,3)\}$.

Próba

$$5\cdot 2+3\cdot 3=19, \quad 19=19.$$
$$6\cdot 2-2\cdot 3=6, \quad 6=6.$$

Az egyenletrendszer megoldását az y kiküszöbölésével is kezdhettük volna:

$$\begin{array}{ll} 5x+3y=19 & |\cdot 2 \\ 6x-2y=6 & |\cdot 3 \\ \hline 10x+6y=38 & \\ 18x-6y=18 & \end{array}$$

Most, mivel y együtthatói csak abszolút értékben egyenlők, de előjelben különbözők, a két egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk:

$$28x=56, \quad x=2.$$

x értékét (I)-be helyettesítve: $5\cdot 2+3y=19$, $3y=9$, $y=3$.

Tehát az előbbivel megegyező eredményt kaptunk.

2.

$$\begin{array}{ll} (a+b)x-(a-b)y=4ab & |\cdot(a-b) \\ (a-b)x-(a+b)y=0 & |\cdot(a+b) \\ \hline (a^2-b^2)x-(a-b)^2y=4ab(a-b) & \\ (a^2-b^2)x-(a+b)^2y=0 & \end{array}$$

A második egyenletet kivonva az elsőből: $y\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]=4ab(a-b)$

és így: $y=\dfrac{4ab(a-b)}{4ab}=a-b$. Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$(a-b)x-(a+b)(a-b)=0, \quad x=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b.$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei: $x=a+b$, $y=a-b$.

Ez a megoldás csak akkor helyes, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$ és $a\neq b$. A próba elvégzését és a fennmaradó négy eset vizsgálatát az Olvasóra bízzuk.

c) A determináns fogalma

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer általános alakjára alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét:

$$a_1x + b_1y = d_1 \quad | \cdot b_2 \quad \text{(I)}$$
$$\underline{a_2x + b_2y = d_2} \quad | \cdot b_1 \quad \text{(II)}$$

(I)$\cdot b_2 -$(II)$\cdot b_1$ eredménye: $(a_1b_2 - a_2b_1)x = d_1b_2 - d_2b_1$, s így

$$x = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$a_1x + b_1y = d_1 \quad | \cdot a_2 \quad \text{(I)}$$
$$\underline{a_2x + b_2y = d_2} \quad | \cdot a_1 \quad \text{(II)}$$

(II)$\cdot a_1 -$(I)$\cdot a_2$ eredménye: $(a_1b_2 - a_2b_1)y = d_2a_1 - d_1a_2$, s így

$$y = \frac{d_2a_1 - d_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Tehát az egyenletrendszer gyökei (néhány tényezőt felcserélve):

$$x = \frac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad y = \frac{a_1d_2 - d_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Ez a képlet természetesen csak akkor használható, ha

$$a_1b_2 \neq b_1a_2, \text{ azaz, ha } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Az együtthatók szorzatkülönbségére az alábbi jelölést vezetjük be:

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D;$$

$$d_1b_2 - b_1d_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x; \quad a_1d_2 - d_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = D_y$$

Az ilyen négyzetes alakba rendezett kifejezést "*másodrendű determináns*"-nak nevezzük. Az

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

másodrendű determináns elemei: a, b, c és d; első sora: $a\ b$; második sora: $c\ d$; első oszlopa: $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$; második oszlopa: $\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}$; főátlója: $\begin{matrix} a \\ & d \end{matrix}$; mellék átlója: $\begin{matrix} & b \\ c & \end{matrix}$ vonal.

A másodrendű determináns értékét megkapjuk, ha a főátlóban levő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban levő elemek szorzatát; tehát

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

A determináns jelölést használva az egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (D \neq 0).$$

Ez az ún. *Cramer*-szabály.

A nevezőben levő D determinánst, amely az egyenletrendszer x, y együtthatóiból áll, a *rendszer determinánsának* nevezzük. A rendszer determinánsából a számlálóban levő D_x és D_y determinánsokat úgy kapjuk, hogy D_x-nél az x együtthatói helyébe, D_y-nál pedig az y együtthatói helyébe az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokat (szabad tagokat) tesszük.

A determináns jelölésmód bevezetésének egyik előnye, hogy a megoldás jól áttekinthető és könnyen megjegyezhető. A többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek tárgyalásánál látni fogjuk, hogy az általánosítása sok haszonnal jár.

Példák

1. $2x-3y=9,$
$5x+4y=11.$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-3)\cdot 5=8+15=23,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}=9\cdot 4-(-3)\cdot 11=36+33=69,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}=2\cdot 11-9\cdot 5=22-45=-23.$$

Tehát $x=\frac{D_x}{D}=\frac{69}{23}=3, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-23}{23}=-1.$

A megoldáshalmaz: $M=\{(3,-1)\}$.

Próba

$2\cdot 3-3\cdot(-1)=9, \quad 9=9.$
$5\cdot 3+4\cdot(-1)=11, \quad 11=11.$

2. $2x-10y-3=0,$
$4x+5y-1=0.$

A szabad tagokat a jobb oldalra rendezzük:

$2x-10y=3,$
$4x+5y=1.$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=10+40=50, \quad D_x=\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=15+10=25,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2-12=-10.$$

Tehát $x=\frac{D_x}{D}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{50}=-\frac{1}{5}.$

A megoldáshalmaz: $M=\left\{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)\right\}$ A próba elvégzését az Olvasóra bízzuk.

A másodrendű determináns alaptulajdonságai:

1. A determináns értéke nem változik, ha elemeit a főátlóra tükrözzük:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

2. A determináns előjele megváltozik, ha a determinánsban két sort (vagy oszlopot) felcserélünk:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

3. A determináns értéke nulla, ha két sorában (vagy oszlopában) a megfelelő elemek megegyeznek, ill. az egyik sorában (vagy oszlopában) az összes elem nulla:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0.$$

4. A determinánst egy számmal úgy szorozzuk, hogy valamelyik sorának (vagy oszlopának) elemeit szorozzuk a számmal:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = k \cdot (ad - bc) = (ka)d - (kb)c = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Eszerint azt is mondhatjuk, hogy egy sor (vagy oszlop) elemeinek közös tényezője a determináns elé kiemelhető:

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

5. A 3. és 4. tulajdonság alapján, ha egy determináns két sora (vagy oszlopa) arányos, akkor a determináns értéke nulla:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

6. Ha a determinánsban egyik sor (vagy oszlop) minden eleme két tag összegeként írható fel, akkor a determináns két olyan determináns összegére bontható, amelyekben a megfelelő sor (vagy oszlop) az összeg egy-egy tagjából áll, a többi elem pedig mindkét determinánsban megegyezik az eredetivel:

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = (a+e)d-(b+f)c =$$

$$= (ad-bc)+(ed-fc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

7. A determináns értéke nem változik, ha egy tetszőleges sor (oszlop) valahányszorosát hozzáadjuk a másik sorhoz (oszlophoz):

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \cdot 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

A determináns tulajdonságai alapján is beláthatjuk, hogy

az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszernek csak akkor van egyetlen értékpárt adó megoldása, ha a rendszer determinánsa nullától különbözik,

azaz $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Példák

1. $2x+5y=9,$
$4x+10y=11.$

Mivel $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0, \quad D_x \neq 0, \quad D_y \neq 0,$

tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ez nyilvánvaló, ha a második egyenletet $2(2x+5y) = 2 \cdot 4{,}5+2$ alakban írjuk. A megoldáshalmaz: $M = \varnothing$.

2. $2x+5y=9,$
$4x+10y=18.$

Mivel: $D=0$ és $D_x = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 18 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0,$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0,$$

ezért az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, pl.: $(2;1)$, $(4{,}5;0)$, $(-0{,}5;2)$ ... A megoldáshalmaz: $M = \{(x,y) \mid 2x+5y=9\}$.

A második egyenlet az első kétszerese, tehát lényegében egyetlen egyenletünk van két ismeretlennel.

3. Két szám közül az elsőnek hatszorosa 7-tel nagyobb, mint a másiknak a tízszerese; ha pedig az első szám négyszeresét osztjuk a másodikkal, hányadosul 9-et kapunk. Melyik ez a szám?

Megoldás: Legyen x az első szám és y a második, akkor

$$6x-7=10y,$$

$$\frac{4x}{y}=9.$$

Az egyenleteket rendezve:

$$6x-10y=7 \quad |\cdot 2$$

$$4x-9y=0 \quad |\cdot 3$$

$$7y=14, \quad y=2, \quad 4x-9\cdot 2=0, \quad x=4{,}5.$$

Próba: Az egyik szám hatszorosa: $6\cdot 4{,}5=27$ valóban 7-tel nagyobb, mint a másik szám tízszerese: $10\cdot 2=20$; továbbá az egyik szám négyszerese: $4\cdot 4{,}5=18$, osztva a másikkal: $18:2=9$, tehát a megoldás helyes. A megoldáshalmaz: $M=\{(4{,}5,\ 2)\}$.

4. Kétféle kénsavat keverünk össze; ha az egyikből 9 l-t, a másikból 6 l-t veszünk, akkor 60%-osat kapunk; ha az elsőből 3 l-t, a másodikból 12 l-t keverünk össze, akkor 40%-os kénsavunk lesz. Hány %-os mindegyik kénsav?

Megoldás: Az első kénsav legyen x%-os, a második y%-os, akkor

$$\frac{9x}{100}+\frac{6y}{100}=\frac{15\cdot 60}{100},$$

$$\frac{3x}{100}+\frac{12y}{100}=\frac{15\cdot 40}{100}.$$

Az egyenletrendszert rendezve:

$$3x+2y=300,$$

$$x+4y=200 \quad |\cdot 3$$

$$10y=300$$

$$y=30, \quad x+4\cdot 30=200, \quad x=80.$$

Tehát az első kénsav 80%-os, a második 30%-os. A megoldáshalmaz: $M=\{(80,\ 30)\}$.

Feladatok

1. $7x-3y=13,$

$5x+6y=50.$ $\left[M=\{(4,\ 5)\}\right]$

2. $21x-25y=9,$

$45x+55y=41.$ $\left[M=\left\{\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{5}\right)\right\}\right]$

3. $\frac{x}{3}+2y=10,$
$2x-\frac{y}{2}=10.$ $[M=\{(6,\ 4)\}]$

4. $0{,}2x+0{,}5y=2,$
$0{,}6x-y=1.$ $[M=\{(5,\ 2)\}]$

5. $ax+by=2a,$
$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{2}{a}.$ $\left[x=\frac{a+b}{a},\ y=\frac{a-b}{b},\ a\neq 0,\ b\neq 0\right]$

3.22 Elsőfokú (lineáris) kettőnél több ismeretlenes egyenletrendszer megoldása

A kettőnél több ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenletrendszert is akkor tudjuk egyértelműen megoldani, ha azonos alaphalmazon annyi egymástól független és ellent nem mondó egyenletünk van, mint amennyi az ismeretlenek száma. A megoldásra *elsőfokú háromismeretlenes egyenletrendszer* példáin két utat mutatunk be: *a*) *a kétismeretlenes egyenletrendszerre való visszavezetést és b*) *a determinánsok módszerét.*

a) Az n-számú n-ismeretlenes egyenletről úgy térünk át $(n-1)$ számú $(n-1)$ ismeretlenes egyenletre, hogy az egyik ismeretlent vagy a kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásakor megismert helyettesítő módszerrel, vagy az egyenlő együtthatók módszerével kiküszöböljük.

Pl.: $x+y-z=1,$ (I) $\quad x\in R,\ y\in R,\ z\in R,$
$2x+3y-3z=0,$ (II) ill.: $(x,y,z)\in R\times R\times R.$
$3x-2y+z=6.$ (III)

A helyettesítő módszer elvének felhasználásával oldjuk meg az egyenletrendszert. Az (I) egyenletből x-et kifejezzük, és behelyettesítjük a (II) és a (III) egyenletbe:

$$x=1-y+z \qquad (Ia)$$
$$2(1-y+z)+3y-3z=0,$$
$$3(1-y+z)-2y+z=6,$$
$$y-z=-2 \quad |\cdot 5 \quad \text{(5-szörösét hozzáadjuk a másodikhoz)}$$
$$-5y+4z=3$$
$$z=7,\quad y-7=-2,\quad y=5.$$

A z és y értékét az (Ia)-ba helyettesítve: $x = 1 - 5 + 7 = 3$.

Tehát az egyenletrendszer gyökei: $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$; vagyis a megoldáshalmaz: $M = \{(3, 5, 7)\}$.

Próba

$3 + 5 - 7 = 1, \quad 1 = 1; \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 0, \quad 0 = 0;$

$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 7 = 6, \quad 6 = 6.$

b) A determinánsok módszerét az elsőfokú háromismeretlenes egyenletrendszer általános alakjára ugyanúgy bizonyítjuk, mint a kétismeretlenes egyenletrendszernél, ezért a számítások mellőzésével csak a megoldások képletét adjuk meg:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(x, y, z) \in R \times R \times R \\ &(a_i, b_i, c_i \in R) \end{aligned}$$

A rendszer D determinánsát az ismeretlenek együtthatóinak négyzetes elrendezése adja:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Amely a következő számot jelenti:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

A D *harmadrendű determináns* első sorához tartozó elemek egy-egy másodrendű determinánssal vannak szorozva. Ezeket az egyes elemekhez tartozó *aldeterminánsoknak* nevezzük. A D determináns bármely eleméhez tartozó aldeterminánst úgy kapjuk meg, hogy töröljük a D-ből azt a sort és oszlopot, amelyikben a kérdéses elem áll, és az így előálló eggyel alacsonyabb rendű determinánst $+1$-gyel szorozzuk (azaz változatlanul hagyjuk), ha az elem oszlop- és sorszámának összege páros, -1-gyel, ha páratlan.

Ezt könnyen megjegyezhetjük a következő elrendezéssel (ún. *sakktáblaszabály*):

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determináns számértékét megkapjuk ha bármely sorának vagy oszlopának elemeit szorozzuk a megfelelő előjeles aldeterminánssal, és a szorzatok összegét képezzük.

A másodrendű determinánsoknál megismert alaptulajdonságok értelemszerűen érvényesek a harmadrendű determinánsokra is.

Ha a D determináns oszlopait rendre felcseréljük a jobb oldalra rendezett szabad tagokkal, akkor a D_x, D_y, D_z harmadrendű determinánsokat kapjuk:

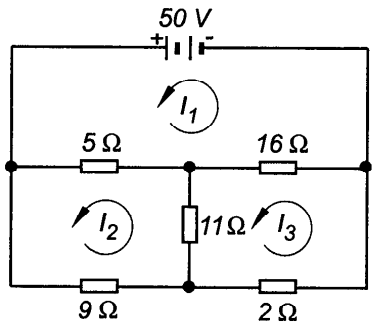
$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

A lineáris háromismeretlenes egyenletrendszer megoldásképlete:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Az egyenletrendszer egyértelműen csak akkor oldható meg, ha a $D \neq 0$ feltétel teljesül.

Pl.: Mekkora a 47. ábra szerinti kapcsolásban az egyes hurkok áramerőssége, azaz I_1, I_2 és I_3?



47. ábra. Áramkör

A három hurok egyenlete:

$$5I_1 - 5I_2 + 16I_1 - 16I_3 - 50 = 0,$$
$$5I_2 - 5I_1 + 9I_2 + 11I_2 - 11I_3 = 0,$$
$$11I_3 - 11I_2 + 2I_3 + 16I_3 - 16I_1 = 0.$$

Rendezve:

$$21I_1 - 5I_2 - 16I_3 = 50,$$
$$-5I_1 + 25I_2 - 11I_3 = 0,$$
$$-16I_1 - 11I_2 + 29I_3 = 0.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 21 & -5 & -16 \\ -5 & 25 & -11 \\ -16 & -11 & 29 \end{vmatrix} = 3799{,}00, \quad D_{I_1} = \begin{vmatrix} 50 & -5 & -16 \\ 0 & 25 & -11 \\ 0 & -11 & 29 \end{vmatrix} = 30200{,}00,$$

$$D_{I_2} = \begin{vmatrix} 21 & 50 & -16 \\ -5 & 0 & -11 \\ -16 & 0 & 29 \end{vmatrix} = 16050{,}00, \quad D_{I_3} = \begin{vmatrix} 21 & -5 & 50 \\ -5 & 25 & 0 \\ -16 & -11 & 0 \end{vmatrix} = 22750{,}00.$$

Tehát a megoldás:

$$I_1 = \frac{D_{I_1}}{D} = \frac{30200{,}00}{3799} = 7{,}95 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{D_{I_2}}{D} = \frac{16050}{3799} = 4{,}22 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{D_{I_3}}{D} = \frac{22750}{3799} = 5{,}99 \text{ A}. \qquad \text{(Próba!)}$$

Feladatok

1. $3x - 6y + z - 15 = 0,$
$x + 5y + 3z + 9 = 0,$
$2x - y + 4z - 4 = 0.$
$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = -2, \\ z = 0. \end{array}\right]$

2. $4x-3y=-2,$ $\quad 2y+5z=19,$ $\quad 5x-7z=-16.$ $\quad [x=1,\ y=2,\ z=3.]$

3. $x:y:z=3:4:7,$ $\quad 5x-2y+3z=28.$ $\quad [x=3,\ y=4,\ z=7.]$

4. $x+y=a,$ $\quad y+z=b,$ $\quad x+z=c.$ $\quad \left[x=\frac{a-b+c}{2},\ y=\frac{a+b-c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}.\right]$

3.23 Elsőfokú (lineáris) homogén egyenletrendszer megoldása

Egy egyenletrendszert akkor mondunk *homogénnek*, ha a szabad tagok mind nullával egyenlők. Ellenkező esetben az egyenletrendszer inhomogén.

Első esetként vizsgáljuk az elsőfokú háromismeretlenes, két egyenletből álló homogén egyenletrendszert, amely kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, és ezért általánosságban nem meghatározott.

Általános alakja: $a_1x+b_1y+c_1z=0, \quad (x,y,z\in R)$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0. \quad (a_i,b_i,c_i\in R)$$

Ennek az egyenletrendszernek egy azonnal látható ún. *közönséges* vagy *triviális megoldása* $x=y=z=0$.

Az összes megoldást úgy állítjuk elő, hogy bármelyik két ismeretlent kifejezzük a harmadikkal:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0, && |\cdot b_2\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0. && |\cdot(-b_1)\\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)z&=0, && \text{amiből} \end{aligned}$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\cdot z=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\cdot z=\frac{A_3}{C_3}z, \quad (C_3\neq 0).$$

Hasonlóan adódik:

$$y = -\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \cdot z = \frac{B_3}{C_3} z, \quad (C_3 \neq 0).$$

ahol z tetszőleges valós szám.

Példák

1. $3x + y - 5z = 0$
$2x + 3y - z = 0$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Tehát: $x = \frac{A_3}{C_3} z = \frac{14}{7} z = 2z, \quad y = \frac{B_3}{C_3} z = \frac{-7}{7} z = -z.$

Triviálistól különböző megoldást kapunk $\forall z \in R$, $z \neq 0$ esetén.
Például ha $z = -1$, akkor $x = -2$, $y = 1$,
ha $z = 4$, akkor $x = 8$, $y = -4$, stb.
Minden ilyen értékhármas megoldása az egyenletrendszernek.

2. $3x - 4y + 2z = 0$
$6x + y + 4z = 0.$

$$C_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 27, \quad A_3 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -18, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát $x = \frac{A_3}{C_3} z = \frac{-18}{27} z = -\frac{2}{3} z, \quad y = \frac{B_3}{C_3} z = \frac{0}{27} z = 0$ (z tetszőleges).

3. $4x - 2y + 3z = 0$
$2x - y + z = 0$

$$C_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Mivel $C_3 = 0$, $A_3 \neq 0$, $B_3 \neq 0$, ezért a $C_3x = A_3z$, $C_3y = B_3z$ egyenletek csak akkor elégülnek ki ($x \neq 0$, $y \neq 0$), ha $z = 0$, s így az egyenletrendszerből $y = 2x$ megoldás adódik, ahol x tetszőleges lehet.

Tehát az egyenletrendszer megoldása: $z = 0$, $y = 2x$.

Most a három elsőfokú egyenletből álló háromismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszert oldjuk meg.

Általános alakja: $a_1x + b_1y + c_1z = 0, \quad ((x,y,z) \in R \times R \times R)$

$a_2x + b_2y + c_2z = 0, \quad (a_i, b_i, c_i \in R)$

$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$

A homogén lineáris egyenletrendszernek – mint ránézéssel látható – *mindig megoldása az* $x = y = z = 0$ *triviális megoldás.*

Mivel a D_x, D_y, D_z determinánsok egy oszlopában levő elemei mind nullával egyenlők, ezért

$$D_x = D_y = D_z = 0.$$

A háromismeretlenes lineáris inhomogén egyenletrendszer megoldóképletéből felírhatjuk:

$$x = \frac{0}{D}, \quad y = \frac{0}{D}, \quad z = \frac{0}{D},$$

amiből következik: ha $D \neq 0$, akkor a homogén egyenletrendszert csak az $x = y = z = 0$ triviális megoldás elégíti ki.

A homogén lineáris egyenletrendszernek tehát csak akkor lehet a triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatóiból alkotott determináns $D = 0$.

Ha $D = 0$, és valamelyik elemhez tartozó aldeterminánsnem egyenlő nullával, akkor két független egyenletből mindig következik a harmadik (ennek igazolását elhagyjuk), s így két egyenletből álló háromismeretlenes homogén egyenletrendszert kell megoldanunk; ha nincs nullától különböző aldeterminánsa, akkor nincs két független egyenlet, vagyis lényegében egy egyenletünk van.

Pl.: $x - 3y - z = 0,$

$x + 2y + z = 0,$

$3x + y + z = 0.$

Azonnal látható, hogy az egyenletrendszernek az $x = y = z = 0$ megoldása.

Számítsuk ki a D determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-6+5=0.$$

Tehát létezik a triviálistól különböző megoldás is. A harmadik egyenlet az első kettő következménye, mivel a második egyenlet kétszeresét az elsőhöz adva a harmadik egyenletet kapjuk. A harmadik egyenlet tehát nem fejez ki új kapcsolatot a három ismeretlen között, s így az

$$x-3y-z=0,$$
$$x+2y+z=0,$$

egyenletrendszert kell megoldanunk a már megismert módon:

$$C_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_3=\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad B_3=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$x=\frac{A_3}{C_3}z=-\frac{1}{5}z,\quad y=\frac{B_3}{C_3}z=-\frac{2}{5}z.$$

A z különböző értékeivel képzett számhármasok az egyenletrendszer mindhárom egyenletét egyidejűleg kielégítik. (Próba!)

Feladatok

1. $3x+4y-6z=0,\ x+y-4z=0.$ $\left[x=10z,\ y=-6z.\right]$

2. $x-4y+z=0,\ 2x-8y-4z=0.$ $\left[x=4y,\ z=0.\right]$

3. $2x+y+3z=0,\ 9y+7z=0,\ x-4y-2z=0.$ $\left[x=-\frac{10}{9}z,\ y=-\frac{7}{9}z.\right]$

4. $2x-3y+6z=0,\ 3x+2y-4z=0,\ x+5y-10z=0.$ $\left[x=0,\ y=2z.\right]$

3.24 Másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása

Az olyan egyismeretlenes egyenletet, amelyben az ismeretlen legmagasabb hatványkitevője kettő, *másodfokú* (*kvadratikus*) *egyenletnek* nevezzük. Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános, *nullára redukált alakja*:

$$ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0,\ x\in R,\ a,b,c\in R). \qquad (1)$$

Ebben az egyenletben x a meghatározandó ismeretlen, a, b, c adott vagy adottnak tekinthető számok (esetleg paraméterek), ax^2 a másodfokú, bx az elsőfokú, c a szabad tag.

Az (1) egyenletet *vegyes másodfokú* egyenletnek nevezzük. Az (1) egyenletből $b = 0$ esetén az

$$ax^2 + c = 0 \tag{2}$$

ún. *tiszta másodfokú* egyenletet kapjuk, ha pedig $c = 0$, $b \neq 0$ akkor az

$$ax^2 + bx = 0 \tag{3}$$

ún. *hiányos másodfokú* egyenlet adódik.

a) Az $x^2 = k$, $(x \in R,\ k \geq 0)$ egyenletnek nemcsak az $x = \sqrt{k}$, hanem az $x = -\sqrt{k}$ is megoldása.

Így a tiszta másodfokú egyenlet valós megoldása (a fenti jelölésekkel):

$$x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \left(\frac{c}{a} \leq 0\right)$$

amelyből a két gyököt külön választva:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Az a mindig pozitívnak vehető, ha nem az, akkor az egyenletet szorozzuk (–1)-gyel, s így $c \leq 0$ esetben a (2) egyenletnek két valós gyöke van, $c = 0$ esetben $x_{1,2} = 0$; $c > 0$ esetben pedig nincs valós gyöke. (A nem valós gyökökkel bővebben foglalkozunk a Hetedik fejezetben.)

Példák

1. $2x^2 - 32 = 0$, $x \in R$; $x^2 = \frac{32}{2} = 16$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Tehát a két valós gyök: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. A megoldáshalmaz: $M = \{4, -4\}$.

Próba: $2\cdot(4)^2-32=0,\quad 2\cdot 16-32=0,\quad 0=0.$

$2\cdot(-4)^2-32=0,\quad 2\cdot 16-32=0,\quad 0=0.$

2. $3x^2+75=0,\quad x^2=-\frac{75}{3}=-25,\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-25}$, nincs valós gyök.

(Az $x\in R$ halmazon nincs megoldás, mivel $\sqrt{-25}\notin R$, tehát $M=\varnothing$, de $x\in C$ halmazon: $x_{1,2}=\pm 5i$, tehát $M=\{-5i,\ +5i\}$.

Próba: $3(\pm 5i)^2+75=0,\quad 3\cdot\left(\sqrt{-25}\right)^2+75=0,\quad 3\cdot(-25)+75=0,$ $-75+75=0,\ 0=0$. A $\pm 5i\in C$ valóban gyöke az egyenletnek.)

b) Az $ax^2+bx=0\ \left(a,b\neq 0;\ a,b,x\in R\right)$ hiányos másodfokú egyenletből x-et kiemelve:

$$x(ax+b)=0,$$

s mivel szorzat csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért vagy $x=0$, vagy $ax+b=0$, amiből a két gyök:

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

Példák

1. $2x^2+5x=0,\quad x(2x+5)=0,\quad x=0,\quad 2x+5=0,$

$x_1=0,\quad x_2=-\frac{5}{2},\quad M=\left\{0,\ -\frac{5}{2}\right\}.$

2. $6x^2-10x=0,\quad x(6x-10)=0,\quad x=0,\quad 6x-10=0,$

$x_1=0,\quad x_2=\frac{10}{6}=\frac{5}{3},\quad M=\left\{0,\ \frac{5}{3}\right\}.$ (Próba!)

c) Az $ax^2+bx+c=0\ \left(a,b,c\in R;\ a\neq 0;\ x\in R\right)$ vegyes másodfokú egyenlet megoldása:

A szabad tagot vigyük át a jobb oldalra (mindkét oldalhoz $-c$ hozzáadásával), és osszuk el az egyenletet a másodfokú ismeretlen együtthatójával, a-val:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

Az egyenlet mindkét oldalához adjunk hozzá $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ tagot, hogy a bal oldal teljes négyzet legyen:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}.$$

Vonjunk mindkét oldalból gyököt, és x-re oldjuk meg az egyenletet ($b^2-4ac\geq 0$):

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \text{és így}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}. \qquad (4)$$

A két gyök elkülönítve:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A gyökök helyességét az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

A gyökök jellege a gyök alatti

$$b^2-4ac \qquad (5)$$

mennyiségtől függ, ezt a másodfokú egyenlet *diszkriminánsának* (*megkülönböztetőnek*) nevezzük.

I. Ha $b^2-4ac>0$, azaz a diszkrimináns pozitív, akkor két egymástól különböző valós gyök van ($x_1\neq x_2$), ($x\in R$).

II. Ha $b^2 - 4ac = 0$, azaz a diszkrimináns nulla, akkor a gyökök egymással egyenlők $(x_1 = x_2)$, $(x \in R)$.

III. Ha $b^2 - 4ac < 0$, azaz a diszkrimináns negatív, akkor nincsenek valós gyökök. A másodfokú egyenletnek ez esetben két konjugált komplex gyöke van.

($x \in C$, gyökök: x_1 és $x_2 = \bar{x}_1$, pl., ha $x_1 = u + vi$, akkor $x_2 = u - vi$, l. a Hetedik fejezetet.)

Példák

1. $8x^2 + 2x = 1, \ x \in R$

Hozzuk nullára redukált alakra:

$$8x^2 + 2x - 1 = 0$$

A (4) gyökképletet felhasználva ($a = 8$; $b = 2$; $c = -1$):

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}.$$

Tehát

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} = -0{,}5. \quad M = \{0{,}25, \ -0{,}5\}.$$

Próba: x_1 helyettesítése:

$$8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad 1 = 1, \text{ tehát } \frac{1}{4} \in R \text{ megoldás.}$$

x_2 helyettesítése:

$$8 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = 1, \quad 2 - 1 = 1, \quad 1 = 1, \text{ tehát } -\frac{1}{2} \in R \text{ megoldás.}$$

(*Megjegyzés*: Ha $x \in N$ feltételt adunk meg, akkor az adott másodfokú egyenletnek nincs megoldása.)

2. $2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0, \ x \in R$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{25}{8}}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 25}}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

A diszkrimináns nullával egyenlő; az egyenletnek két egybeeső (kettős) gyöke van. A megoldáshalmaz: $M = \{1{,}25\}$.

Próba: $2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{25}{8}=0,\quad \frac{25}{8}-\frac{25}{4}+\frac{25}{8}=0,\quad 0=0.$

Tehát $\frac{5}{4}=1{,}25\in R$ valóban megoldás.

3. $5x^2-14x+10{,}6=0,\ x\in R.$

$$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot5\cdot10{,}6}}{2\cdot5}=\frac{14\pm\sqrt{196-212}}{10}=\frac{14\pm\sqrt{-16}}{10}.$$

Az egyenletnek nincs valós megoldása: $M=\varnothing$. (A diszkrimináns negatív.)
$x\in C$ alaphalmazt választva a konjugált komplex gyökök:

$x_1=1{,}4+0{,}4i,\quad x_2=\bar{x}_1=1{,}4-0{,}4i.$

A megoldáshalmaz: $M=\{1{,}4+0{,}4i,\ 1{,}4-0{,}4i\}$. (Próba!)

3.25 Összefüggés a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között

Ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet diszkriminánsa nem negatív, akkor az egyenletnek két egymástól nem feltétlen különböző gyöke van:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

a) Adjuk össze a két gyököt:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

Tehát

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

azaz a két gyök összege az elsőfokú tag együtthatójából és a másodfokú tag együtthatójából alkotott hányados –1-szeresével egyenlő.

b) Szorozzuk össze a két gyököt:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}.$$

(A számlálóban a szorzást nevezetes szorzatként végeztük: két tag összege szorozva ugyanazon két tag különbségével = a két tag négyzetének különbségével.)

Összevonva és $4a$-val egyszerűsítve:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

azaz a két gyök szorzata a szabad tag és a másodfokú tag együtthatójának hányadosával egyenlő.

Ha az (1) vegyes másodfokú egyenletet $a \neq 0$-val osztjuk, akkor

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

amelyből látható, hogy a gyökök ismeretében, a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján az egyenletet egyszerűen felírhatjuk.

Pl.: Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

Ha x^2 együtthatója 1, akkor x együtthatója: $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -(5-3) = -2$,

és a szabad tag: $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-3) = -15$.

Tehát a másodfokú egyenlet: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

3.26 A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

Az $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, $a \neq 0$; egyenlet bal oldala szorzattá alakítható a gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=$$

$$=x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2.$$

A jobb oldal első és második tagjából x-et, harmadik és negyedik tagjából $(-x_2)$-t emeljünk ki:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

ha szorozzuk a-val, akkor

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Az $(x-x_1)$-et és az $(x-x_2)$-t *gyöktényezőknek* nevezzük.

Tehát az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyöktényezős alakja:

$$a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0.$$

Példák

1. Írjuk fel az $x^2+8x+15=0$ egyenletet gyöktényezős alakban.

Az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{-8\pm2}{2},\quad x_1=-3,\quad x_2=-5.$$

Tehát $x^2+8x+15=(x-x_1)(x-x_2)=[x-(-3)][x-(-5)]=(x+3)(x+5)$.

2. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei: $x_{1,2}=4$.

Mivel $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)=0$ és $x_1=4$, $x_2=4$, ezért

$(x-4)(x-4)=0$, azaz $(x-4)^2=0$, vagyis $x^2-8x+16=0$.

3. Két szám összege 8, reciprok értékük összege $-\frac{2}{5}$. Melyik ez a két szám?

Megoldás: Ha az egyik szám x, akkor a másik $8-x$ és így

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{8-x}=-\frac{2}{5},\quad \frac{8-x+x}{x(8-x)}=-\frac{2}{5},\quad 5\cdot8=-2x(8-x)$$

$$2x^2-16x-40=0,\quad x^2-8x-20=0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = -2.$$

Ha az egyik szám 10, a másik 8 – 10 = –2; ha az elsőt –2-nek választjuk, akkor a második $8-(-2)=10$. Tehát az egyenlet gyökei a feltételnek megfelelnek.

4. Egy motorcsónak a víz folyásával egyirányban 28 km-t halad, majd megfordul, és kiindulási pontjához visszatér. Az indulástól a megérkezésig (a fordulási időt leszámítva) 7 óra telt el. Milyen km/h sebességgel haladna állóvízben a motorcsónak, ha a folyóvíz sebessége 3 km/h? (A motor teljesítménye állandó.)

Megoldás: Legyen a csónak sebessége állóvízben x km/h, akkor a folyóvízben lefelé $(x + 3)$ km/h sebességgel halad, s így lefelé a 28 km utat $\frac{28}{x+3}$ óra alatt, felfelé $\frac{28}{x-3}$ óra alatt tette meg, tehát

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7, \quad (x \in R^+, \ x \neq 3),$$

$$28(x-3)+28(x+3) = 7(x+3)(x-3), \quad 7x^2 - 56x - 63 = 0,$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = -1.$$

A feladatból következik, hogy a negatív gyöknek nincs értelme, ezért a motorcsónak sebessége állóvízben 9 km/h. (Próba!)

5. Egy négyzet egyik oldalát 2 cm-rel növeljük, a mellette levőt ugyanannyival csökkentjük. A nyert téglalap területe 21 cm^2. Mekkora volt a négyzet oldala?

Megoldás: Legyen x cm a négyzet oldala, akkor a téglalap oldalai: $(x+2)$ és $(x-2)$, tehát

$$(x+2)(x-2) = 21, \quad (x \in R^+), \quad x^2 - 4 = 21, \quad x^2 = 25, \quad x_{1,2} = \pm 5.$$

Tehát a négyzet oldala 5 cm. (A feladat szerint a negatív gyöknek itt sincs értelme.)

Feladatok

1. $4x^2 + 36 = 0.$ $\left[x_{1,2} = \pm 3\sqrt{-1}.\right]$

2. $(x+a)(x-a) = 3a^2.$ $\left[x_{1,2} = \pm 2a.\right]$

3. $6x^2 + x - 15 = 0.$ $\left[x_1 = \frac{3}{2}, \ x_2 = -\frac{5}{3}.\right]$

4. $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{x-1}{x} = \frac{3(x-2)}{x-1}.$ $\left[x_1 = 3, \ x_2 = -\frac{1}{5}.\right]$

5. $\frac{x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{5x^2-8}{x^2-1}.$ $\left[x_1 = 4, \ x_2 = -2.\right]$

3.27 Magasabb fokú és négyzetgyök-kifejezést tartalmazó egyenletek

Abel, Niels Henrik (1802–1829) norvég matematikus bizonyította be először, hogy általános esetben az ötödfokú vagy annál magasabb fokú algebrai egyenleteket algebrai úton (gyökképletekkel) nem lehet megoldani.

Ebben a pontban a másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek három típusát tárgyaljuk és bizonyítás nélkül ismertetjük a harmadfokú egyenlet megoldó képleteit. [1].

a) Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek

A másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek gyakrabban előforduló néhány típusával foglalkozunk. Ilyenek:

I. $ax^{2n}+bx^{n}+c=0, \quad (n\in N^{+},\ a,b,c,x\in R),$

II. $ax^{n+2}+bx^{n+1}+cx^{n}=0,$

III. $ax^{2n+k}+bx^{n+k}+cx^{k}=0,$ stb. $(k\in N).$

I. Az $ax^{2n}+bx^{n}+c=0,$ egyenletből $x^{n}=z$ helyettesítéssel z-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$a\left(x^{n}\right)^{2}+bx^{n}+c=az^{2}+bz+c=0,$$

amelynek z_1 és z_2 gyökét behelyettesítve az $x^{n}=z$ egyenletbe, megkapjuk az I. típusú magasabb fokú egyenlet gyökeit:

$$x_1=\sqrt[n]{z_1}, \quad x_2=\sqrt[n]{z_2}.$$

A komplex számok ismertetésénél majd látjuk, hogy $\sqrt[n]{z}$ n különböző számot jelent (ha $z\neq 0$), így megkapjuk az eredeti $2n$-ed fokú egyenletnek mind a $2n$ gyökét.

Pl.: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

$x^2 = z$ helyettesítéssel: $\left(x^2\right)^2 - 5x^2 + 4 = z^2 - 5z + 4 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása:

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \quad z_1 = 4, \quad z_2 = 1.$$

Az $x^2 = 4$ egyenletből $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, az $x^2 = 1$ egyenletből pedig $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. A negyedfokú egyenlet négy gyöke: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. (Próba!)

II. Az $ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n = 0$ egyenletből kiemelhetjük x^n-t:

$$x^n(ax^2 + bx + c) = 0,$$

amiből az $x^n = 0$ és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletek megoldására térhetünk át. Az $x^n = 0$ egyenletnek az $x = 0$ n-szeres gyöke, azaz

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0,$$

amelyekhez hozzávéve az $ax^2 + bx + c = 0$ vegyes másodfokú egyenlet gyökeit, megkapjuk az $(n+2)$-edfokú egyenlet összes megoldását.

Pl.: $x^5 - 3x^4 - 10x^3 = 0.$

$x^3(x^2 - 3x - 10) = 0, \quad x^3 = 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0,$

$x^2 - 3x - 10 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = -2.$

Tehát az ötödfokú egyenlet összes gyöke: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = -2$. (Próba!)

III. Az $ax^{2n+k} + bx^{n+k} + cx^k = 0$ egyenletből x^k-t kiemelve, a másik tényező megegyezik az I. típusú egyenlet bal oldalával:

$$x^k(ax^{2n} + bx^n + c) = 0,$$

amiből $x^k = 0$, azaz $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0$ k-szoros gyököt

kapjuk, amelyek az $ax^{2n}+bx^n+c=0$ egyenlet gyökeivel együtt megadják a $2n+k$ -adfokú egyenlet összes megoldását.

Pl.: $x^9-2x^7-3x^5=0.$

$x^5(x^4-2x^2-3)=0, \quad x^5=0, \quad x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0,$

$x^4-2x^2-3=0, \; x^2=z,$ helyettesítéssel: $z^2-2z-3=0,$

$z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}, \quad z_1=3, \quad z_2=-1,$

tehát $x_{6,7}=\pm\sqrt{3}, \; x_{8,9}=\pm\sqrt{-1}.$ (Próba!)

b) Harmadfokú egyenlet

Az $$ax^3+bx^2+cx+d=0, \; x\in C, \; a,b,c,d\in R, \; a\neq 0 \qquad (1)$$

általános egyismeretlenes harmadfokú egyenlet megoldóképlete *Geronimo Cardano* (1501–1576) nevéhez fűződik, bár *Niccolo Tartaglia* (kb 1500–1557) ismertette meg *Cardanoval* a formulát, azzal a kikötéssel, hogy azt titokban fogja tartani. *Cardano* azonban nem tett eleget *Tartaglia* kérésének és 1545-ben közzé tette a formulát könyvében, s így az *Cardano*-képlete néven vált ismertté.

Az (1) egyenletből

$$\frac{b}{a}=r; \quad \frac{c}{a}=s; \quad \frac{d}{a}=t$$

helyettesítéssel kapjuk az ún. *normál* alakot:

$$x^3+rx^2+sx+t=0, \qquad (2)$$

amelyből

$$x=y-\frac{r}{3} \qquad (*)$$

helyettesítéssel kiküszöböljük a másodfokú tagot, és így az

$$y^3+py+q=0 \qquad (3)$$

ún. *redukált egyenletet* kell megoldanunk, ahol

$$p = s - \frac{r^2}{3}; \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t. \tag{4}$$

A (3) egyenlet gyökeinek milyensége a

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{5}$$

kifejezés pozitív, zérus, negatív voltától függ.

1. Ha $D>0$, akkor a (3) egyenletnek egy valós és két konjugált komplex gyöke van.

2. Ha $D=0$, akkor a (3) egyenletnek három valós gyöke van, de legalább kettő egybeesik.

A megoldást a *Cardano*-képlet szolgáltatja:

$$y_1 = u_1 + v_1; \quad y_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3}; \tag{6}$$

ahol $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

3. Ha $D<0$, akkor a (3) egyenletnek három egymástól különböző valós gyöke van, éspedig:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}; \quad y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right);$$
$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right); \tag{7}$$

ahol $$\cos\varphi = \frac{-\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Az (1) általános egyenlet gyökei:

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3}; \quad x_2 = y_2 - \frac{r}{3}; \quad x_3 = y_3 - \frac{r}{3}.$$

Megjegyzés: A három valós gyök meghatározásához a komplex számok trigonometrikus alakját kellett felhasználni. A komplex számok bevezetését – többek között – ez az eset, az ún. *casus irreducibilis* tette szükségessé.

Példa: Oldjuk meg a $3x^3 + 3x^2 - 80x - \frac{971}{9} = 0$ harmadfokú egyenletet.

Megoldás: Mivel $r = \frac{b}{a} = \frac{3}{3} = 1$; $s = \frac{c}{a} = \frac{-80}{3}$; $t = \frac{d}{a} = \frac{-971}{3 \cdot 9}$, ezért a normál egyenlet: $x^3 + x^2 - \frac{80}{3}x - \frac{971}{27} = 0$.

A redukált egyenlethez számítsuk ki p és q értékét:

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -\frac{80}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{81}{3} = -27;$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \frac{2 \cdot 1}{27} - \frac{1 \cdot \left(-\frac{80}{3}\right)}{3} + \frac{-971}{27} = \frac{2 + 240 - 971}{27} = -\frac{729}{27} = -27,$$

tehát $y^3 + py + q = y^3 - 27y - 27 = 0$.

Számítsuk ki D értékét:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-27}{2}\right)^2 + \left(\frac{-27}{3}\right)^3 = -364{,}5 < 0.$$

Mivel a D negatív, ezért a redukált egyenletnek három valós gyöke van.

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{27}{2\sqrt{-\frac{(-27)^3}{27}}} = \frac{27}{2\sqrt{27^2}} = \frac{27}{2 \cdot 27} = \frac{1}{2}, \text{ tehát } \varphi = 60°.$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{-27}{3}} \cdot \cos\frac{60°}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 20° = 6 \cdot 0{,}9397 \approx 5{,}64.$$

$$y_2 = 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) = 6 \cdot \cos 140° = -6 \cdot \cos 40° = -6 \cdot 0{,}7660 \approx -4{,}60.$$

$$y_3 = 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) = 6 \cdot \cos 260° = -6 \cdot \cos 80° = -6 \cdot 0{,}1736 \approx -1{,}04.$$

Az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 5{,}64 - \frac{1}{3} = 5{,}31$; $x_2 = y_2 - \frac{1}{3} = -4{,}93$;

$$x_3 = y_3 - \frac{1}{3} = -1{,}37. \text{ (Próba!)}$$

c) Négyzetgyök-kifejezést tartalmazó (irracionális) egyenletek

Ebben a pontban olyan egyenletek megoldásával foglalkozunk, amelyekben az ismeretlen a gyökjel alatt is előfordul. Pl.: $\sqrt{x+1}=6$.

Az ilyen egyenleteket úgy oldjuk meg, hogy pl. négyzetre emeléssel az ismeretlent tartalmazó gyökmennyiségeket eltávolítjuk, s az így kapott algebrai egyenlet gyökeit meghatározzuk, majd *a helyes megoldást az eredeti egyenletbe való helyettesítéssel kiválasztjuk.* A gyökök behelyettesítéssel való kiválasztására azért van szükség, mert a négyzetre emelés csak akkor ekvivalens átalakítás, ha az egyenlet mindkét oldala az egyenlet alaphalmazán nem negatív függvény.

Példák

1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-3}=1 \quad (x\geq 2)$.

Rendezzük az egyenletet úgy, hogy csak egy gyökkifejezés maradjon a bal oldalon:

$\sqrt{2x-3}=1-\sqrt{x-2}$.

Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(1-\sqrt{x-2}\right)^2, \quad 2x-3=1-2\sqrt{x-2}+x-2,$$

Rendezve és ismét négyzetre emelve:

$$(x-2)^2=\left(-2\sqrt{x-2}\right)^2, \quad x^2-4x+4=4(x-2), \quad x^2-8x+12=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}, \quad x_1=6, \quad x_2=2.$$

Próba: Az $x_1=6$ érték helyettesítésével:

$\sqrt{6-2}+\sqrt{2\cdot 6-3}=2+3=5$, $5\neq 1$, tehát $x_1=6$ nem megoldás.

Az $x_2=2$ helyettesítésével:

$\sqrt{2-2}+\sqrt{2\cdot 2-3}=1$, $1=1$, tehát az adott irracionális egyenletnek csak az $x=2$ a gyöke, $x=6$ pedig hamis gyök.

2. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+19}=\dfrac{3x+32}{\sqrt{x+19}} \quad (x\geq -0{,}25)$.

Szorozzunk $\sqrt{x+19}$-cel:

$$\sqrt{4x+1}\cdot\sqrt{x+19}+x+19=3x+32, \quad \left(\sqrt{4x^2+77x+19}\right)^2=(2x+13)^2$$

$$4x^2+77x+19=4x^2+52x+169, \quad 25x=150, \quad x=6.$$

Próba: $\sqrt{4\cdot 6+1}+\sqrt{6+19}=\frac{3\cdot 6+32}{\sqrt{6+19}}, \quad 10=10.$

Az $x=6$ valóban gyöke az egyenletnek.

3. Egy derékszögű háromszög kerülete 10 m, az egyik befogója 2 m. Számítsuk ki az átfogó és a másik befogó hosszát!

Megoldás: Ha az ismeretlen befogó x m, akkor *Pitagorasz* tételének felhasználásával az átfogó: $\sqrt{2^2+x^2}$, úgyhogy

$$2+x+\sqrt{4+x^2}=10, \quad \left(\sqrt{4+x^2}\right)^2=(8-x)^2,$$

$$4+x^2=64-16x+x^2, \quad 16x=60, \quad x=3{,}75.$$

Tehát a befogó 3,75 m. Az átfogó: $\sqrt{4+3{,}75^2}=4{,}25$ m. (Próba!)

Megjegyzés: Gyakran célszerűbb abszolút értékes egyenletre visszavezetni a négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletet.

3.28 Másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása

Az általános másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \quad (x,y\in R)$$
$$a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0, \quad (a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,f_i\in R)$$

az általunk ismertetett megoldási eljárások alapján nem oldható meg minden esetben (az egyik ismeretlen kiküszöbölése után kapott egyismeretlenes negyedfokú egyenlet megoldását bonyolultsága miatt nem ismertettük [1]), ezért csak néhány egyszerűbben megoldható esetre mutatunk be példát.

Példák

1. $3x^2-2xy+6y^2-29x+y=0, \quad$ (I)

$2x-y=4. \quad$ (II)

Az egyenletrendszer egy másod- és egy elsőfokú egyenletből áll. Ilyen esetben az elsőfokú egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, és azt a másodfokú egyenletbe helyettesítve, egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk.

(II)-ből: $y = 2x - 4$, (I)-be helyettesítve és rendezve:

$$23x^2 - 115x + 92 = 0, \quad | :23$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$$

Az x_1 és x_2 értékét (II)-be helyettesítve:

$$y_1 = 2 \cdot 4 - 4 = 4, \quad y_2 = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

Tehát az adott másodfokú egyenletrendszer gyökei:

egyik megoldás: $x_1 = 4, \quad y_1 = 4, \quad$ másik megoldás: $x_2 = 1, \quad y_2 = -2.$

Próba

(I) $3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 4^2 - 29 \cdot 4 + 4 = 0, \quad 148 - 148 = 0, \quad 0 = 0.$

$3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 6 \cdot (-2)^2 - 29 \cdot 1 + (-2) = 0, \quad 31 - 31 = 0, \quad 0 = 0.$

(II) $2 \cdot 4 - 4 = 4, \quad 4 = 4, \quad 2 \cdot 1 - (-2) = 4, \quad 4 = 4.$

2. $x^2 + y^2 = 17, \quad$ (I)

$xy = 4. \quad$ (II)

Mindkét egyenlet másodfokú. A (II) egyenletből fejezzük ki y-t, és helyettesítsük az (I) egyenletbe:

$$y = \frac{4}{x}, \quad x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 17 \quad | \cdot x^2, \quad (x \neq 0), \quad x^4 - 17x^2 + 16 = 0,$$

$x^2 = z$ helyettesítéssel: $z^2 - 17z + 16 = 0,$

$$z_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2}, \quad z_1 = 16, \quad z_2 = 1,$$

azaz $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1,$ továbbá a talált gyökök (II)-be helyettesítésével: $y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = -4.$

Ez az egyenletrendszer más úton is megoldható. Pl. a (II) egyenlet kétszeresét hozzáadva (I)-hez, majd pedig levonva belőle:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9,$$

amelyből

$$x + y = \pm 5,$$

$$x - y = \pm 3$$

egyenletrendszer írható fel, s így

1. $x + y = 5$ $\quad$ $x - y = 3,$ $\quad$ **2.** $x + y = 5$ $\quad$ $x - y = -3,$ $\quad$ **3.** $x + y = -5$ $\quad$ $x - y = 3,$ $\quad$ **4.** $x + y = -5$ $\quad$ $x - y = -3,$

négy elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldására vezettük vissza az eredeti egyenletrendszert. A gyökök az 1. egyenletből $x_1 = 4, \quad y_1 = 1,$ a 2.

egyenletből $x_2 = 1$, $y_2 = 4$, a 3. egyenletből $x_3 = -1$, $y_3 = -4$, a 4. egyenletből $x_4 = -4$, $y_4 = -1$. (Próba!)

Feladatok

1. $x^2 + y^2 = 65$,
$x^2 - y^2 = 63$. $[x_{1,2} = \pm 8, y_{1,2} = \pm 1.]$

2. $x - y = 1$,
$xy = 6$. $[x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = -2, y_2 = -3.]$

3. $x^2 + y^2 = 37$,
$x + y = 7$. $[x_1 = 6, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 6.]$

4. $x^2 - xy + y^2 = 7$,
$2x - y = 1$. $[x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = -1, y_2 = -3.]$

3.29 Exponenciális és logaritmikus egyenletek megoldása

Az olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen a kitevőben fordul elő, *exponenciális egyenletnek*, amelyben pedig az ismeretlen logaritmusa szerepel, *logaritmikus egyenletnek* nevezzük. Pl.

$$2^{x+2} - 2^x = 96 \text{ exponenciális egyenlet,}$$
$$2 \cdot \lg x = \lg(5x - 4) \text{ logaritmikus egyenlet.}$$

Az exponenciális és a logaritmikus egyenlet ún. *transzcendens (nem algebrai) egyenlet.* Ezen egyenletek mindegyikére nem tudunk olyan eljárást adni, amely véges számú lépésben a pontos gyököt előállítaná, ilyenkor a közelítő eljárások valamelyikével kell a gyök előre megadott pontosságú értékét kiszámítani (l. a 8.6 pontot). [10]. A továbbiakban olyan exponenciális és logaritmikus egyenletekre mutatunk néhány példát, amelyek visszavezethetők algebrai egyenletekre.

I. *a*) Ha az exponenciális egyenlet mindkét oldala egytagú kifejezés, akkor vagy logaritmálással, vagy a hatvány és alap egyenlőségéből a kitevők egyenlőségére való következtetéssel algebrai egyenletet írhatunk fel a kitevőkre.

Példák

1. $9^x = 27.$

Logaritmálva: $x\lg 9 = \lg 27$, tehát $x = \frac{\lg 27}{\lg 9} = \frac{1{,}4314}{0{,}9542} \approx 1{,}5.$

A hatvány és az alap egyenlősége alapján: mivel $9^x = \left(3^2\right)^x$, és $27 = 3^3$, ezért $3^{2x} = 3^3$, amiből $2x = 3$, $x = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

Próba: $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{9 \cdot 9^2} = 3 \cdot 9 = 27$, tehát $27 = 27$. Az $x = 1{,}5$ valóban gyöke az egyenletnek.

2. $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$

$\left(2^2\right)^{\sqrt{x+1}} = 2^6 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$, $2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}}$, és így

$2\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+1} = 6$, $x + 1 = 36$, $x = 35.$

(Próba! A gyökök behelyettesítését mindig a kiindulási egyenletbe végezzük, ill. ellenőrizzük, hogy a kiindulási egyenlet értelmezhető-e a talált gyökökkel.)

3. $\sqrt[3]{x-1\sqrt{3^{10x+5}}} - \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}} = 0.$

$3^{\frac{10x+5}{3(x-1)}} = 3^{\frac{3(3x-7)}{3x-9}}$, $\frac{10x+5}{x-1} = \frac{3(3x-7)}{x-3}$,

$x^2 + 5x - 36 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -9.$ (Próba!)

b) Ha az exponenciális egyenlet

$$ma^{px+q} + na^{px+s} = m_1 b^{p_1 x+q_1} + n_1 b^{p_1 x+s_1}$$

alakú, vagy $a^{2x} + a^x + b = 0$ alakúra hozható, akkor átalakításokkal egytagú exponenciális egyenletre vezethető vissza.

Példák

1. $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345.$

$7^x \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^x \cdot 7^{-1} = 345$, $7^x\left(7^2 + \frac{2}{7}\right) = 345$, $7^x = 7$, $x = 1.$ (Próba!)

2. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$

$3^x \cdot (7 \cdot 3 - 3^4) = 5^x \cdot (5^2 - 5^3)$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$, $x = -1.$ (Próba!)

3. $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0.$

$2^{2(x-2)}-17\cdot 2^{x-4}+1=0, \quad 2^{2x}\cdot 2^{-4}-17\cdot 2^{x}\cdot 2^{-4}+1=0.$

Helyettesítés: $2^x=z$:

$z^2-17z+16=0, \quad z_1=16, \quad z_2=1.$

A z_1 és z_2 helyettesítve $2^x=z$ egyenletbe:

$2^x=16, \quad 2^x=2^4, \quad x_1=4,$

$2^x=1, \quad 2^x=2^0, \quad x_2=0.$ (Próba!)

4. $3\cdot\sqrt[x]{81}-10\cdot\sqrt[x]{9}=-3.$

$3\cdot\sqrt[x]{9^2}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0, \quad 3\cdot\left(\sqrt[x]{9}\right)^2-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0.$

Helyettesítés: $\sqrt[x]{9}=z$:

$3z^2-10z+3=0, \quad z_1=3, \quad z_2=\frac{1}{3}.$

A kapott értékeket visszahelyettesítve a $9^{\frac{1}{x}}=z$ egyenletbe:

$9^{\frac{1}{x}}=3, \quad 3^{\frac{2}{x}}=3, \quad x_1=2,$ és

$9^{\frac{1}{x}}=3, \quad 3^{\frac{2}{x}}=\frac{1}{3}, \quad x_2=-2.$ (Próba!)

(Vegyük észre, hogy a kiindulási egyenletnek –2 nem gyöke, de törtkitevős alakjának: a $3\cdot 9^{\frac{2}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}=-3$ egyenletnek gyöke.)

II. *a*) Ha egy logaritmikus egyenletben csak ugyanannak a kifejezésnek a logaritmusa fordul elő, akkor erre a logaritmusra, mint ismeretlenre, algebrai egyenletet kapunk.

Példák

1. $\frac{1}{2}(\lg x)^2=2-\frac{3}{2}\lg x, \quad (x>0).$

Helyettesítés: $\lg x=y$:

$\frac{1}{2}y^2=2-\frac{3}{2}y, \quad y^2+3y-4=0, \quad y_1=1, \quad y_2=-4.$

Visszahelyettesítve y_1 és y_2 értékét az $\lg x=y$ egyenletbe:

$\lg x=1, \quad x_1=10, \quad \lg x=-4, \quad x_2=0{,}0001.$ (Próba!)

2. $3\sqrt{\lg x}+2\cdot\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2,\quad (x>0).$

Mivel $2\cdot\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=\lg\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2=\lg\frac{1}{x}=-\lg x$, kapjuk, hogy $3\sqrt{\lg x}-\lg x=2.$

A $\sqrt{\lg x}=z$ helyettesítéssel: $3z-z^2=2$. Rendezve:

$$z^2-3z+2=0,\quad z_1=2,\quad z_2=1.$$

A $z=\sqrt{\lg x}$ egyenletbe helyettesítve z_1 és z_2 értékét, és négyzetre emelve:

$$\lg x=4,\quad x_1=10^4=10000,\quad \lg x=1,\quad x_2=10^1=10.\quad \text{(Próba!)}$$

b) Ha az egyenlet mindkét oldalát a logaritmusokra vonatkozó azonosságok segítségével egy-egy kifejezés azonos alapú logaritmusává tudjuk átalakítani, akkor egyszerűbb egyenlet megoldására vezethetjük vissza a problémát (a logaritmus „elhagyása" a logaritmus függvény monotonitása miatt lehetséges l. 8.11 pontot).

Példák

1. $\lg(2x+1)-\lg x=2,\quad (x>0).$

Mivel $2=\lg 100$, ezért $\lg\frac{2x+1}{x}=\lg 100$, amiből $\frac{2x+1}{x}=100$, $x=\frac{1}{98}$. (Próba!)

2. $0{,}5\cdot\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1,\quad (x>9).$

$$\lg\sqrt{2x-1}+\lg\sqrt{x-9}=1,\quad \lg\left(\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-9}\right)=1,$$

$$\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x-9}=10.$$

Racionálissá téve és rendezve:

$$2x^2-19x-91=0,\quad x_1=13,\quad x_2=-\frac{7}{2}\quad \text{(Próba!)}$$

Az egyenletet csak az $x_1=13$ gyök elégíti ki.

3. $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7,\quad (x>0).$

$\log_{16} x=z$ helyettesítéssel $x=16^z$, úgyhogy

$$\log_4 x=\log_4 16^z=z\cdot\log_4 16=z\cdot\log_4 4^2=2z,$$

$$\log_2 x=\log_2 16^z=z\cdot\log_2 16=z\cdot\log_2 2^4=4z.$$

Az egyenlet tehát $z+2z+4z=7$, $z=1$, azaz $x=16$. (Próba!)

4. $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}} x-\log_{\frac{1}{3}} x=6,\quad (x>0).$

Közös alapra térve át:

$$\log_3 x+\frac{\log_3 x}{\log_3 \sqrt{x}}-\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}}=6, \qquad \log_3 x+\frac{\log_3 x}{\frac{1}{2}\log_3 x}+\frac{\log_3 x}{\log_3 3}=6.$$

Rendezve: $2\cdot\log_3 x=4$, $\log_3 x=2$, $x=3^2=9$. (Próba!)

Feladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1. $4^{x+1}+2^{2x+2}-16=0$. $\left[x=\frac{1}{2}.\right]$ **2.** $2^{x+1}-5\cdot 2^x+3\cdot 2^{x-1}+6=0$. $[x=2.]$

3. $10\cdot 2^x-4^x=16$. $[x_1=3,\ x_2=1.]$ **4.** $\frac{\lg(x+1)}{\lg x}=2$. $\left[x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.\right]$

5. $\lg(25x+3)+\lg x-2\lg(x+3)=1$. $[x=5.]$

6. $\log_{125} x+\log_{25} x+\log_5 x=\frac{11}{6}$. $[x=5.]$

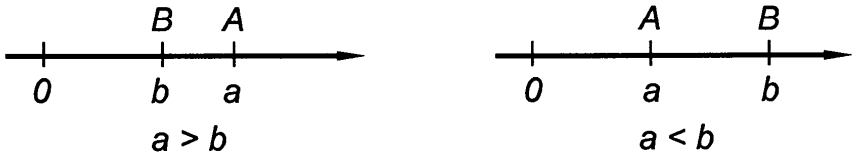
3.30 Egyenlőtlenségek alaptulajdonságai

Ha két szám vagy algebrai kifejezés > (nagyobb); < (kisebb); ≠ (nem egyenlő); ≥ (nagyobb vagy egyenlő); ≤ (kisebb vagy egyenlő) jelek valamelyikével van összekapcsolva, akkor azt *egyenlőtlenségnek* nevezzük.

Pl. az a és b szám közül az a szám akkor nagyobb vagy kisebb b-nél, ha különbségük, $a-b$ pozitív vagy negatív. Jelekkel:

$$a>b, \text{ ha } a-b>0, \qquad a<b, \text{ ha } a-b<0.$$

Az elmondottakat geometriailag szemléletessé tehetjük, ha az a-nak megfelelő A pontot és a b-nek megfelelő B pontot a számegyenesen kijelöljük. (A számegyenest a szokásos módon, jobbra pozitív irányítással vesszük fel 48. *a*, *b* ábra.)



48. *a*, *b* ábra. Egyenlőtlenségek

Az egyenlőtlenségek alaptulajdonságai:

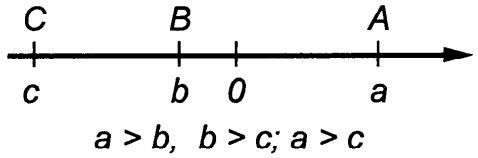
1. *Az egyenlőtlenség értelme ellenkezőre változik,* ha a jobb oldalt a bal oldallal felcseréljük, azaz,

ha $a > b$, akkor $b < a$, vagy ha $c < d$, akkor $d > c$.

Pl.: $-4 > -7$, tehát $-7 < -4$.

2. Az egyenlőtlenség ún. *tranzitív tulajdonsága*:

ha $a > b$ és $b > c$, akkor $a > c$ (49. ábra).



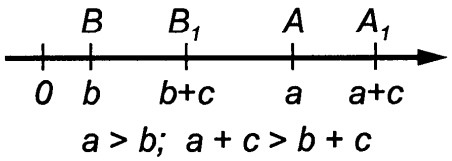
49. ábra. Az egyenlőtlenség tranzitivitása

Pl.: $5 > 3$ és $3 > 0{,}5$, tehát $5 > 0{,}5$.

3. *Az egyenlőtlenség mindkét oldalát tetszés szerinti számmal növelhetjük vagy csökkenthetjük* anélkül, hogy az egyenlőtlenség értelme megváltoznék, azaz,

ha $a > b$, akkor $a + c > b + c$ és $a - c > b - c$, (50. ábra)

vagy ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$ és $a - c < b - c$.



50. ábra. Valós szám hozzáadása egyenlőtlenséghez

Pl.: $5 > -1$. Adjunk mindkét oldalhoz -3-at:

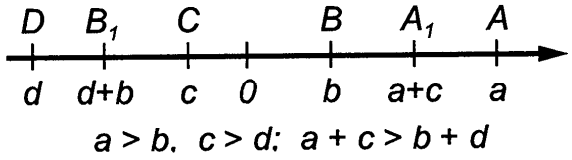
$5 + (-3) > -1 + (-3)$, azaz $2 > -4$.

Vonjunk ki mindkét oldalból -3-at:

$5 - (-3) > -1 - (-3)$, azaz $8 > 2$.

4. *Megegyező értelmű egyenlőtlenségek bal és jobb oldalait külön-külön összeadva,* az egyenlőtlenség értelme nem változik meg (51. ábra), azaz,

ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a + c > b + d$, vagy
ha $x < t$ és $y < u$, akkor $x + y < t + u$.

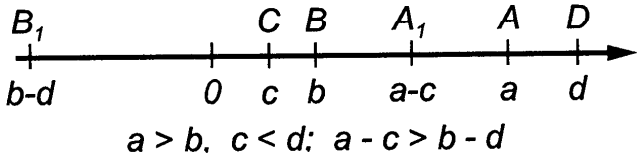


51. ábra. Két egyenlőtlenség összege

Pl.: $7 > 3$ és $-2 > -5$, tehát $5 > -2$.
$-9 < -4$ és $-1 < 1$, tehát $-10 < -3$.

5. *Két ellentétes értelmű egyenlőtlenség bal és jobb oldalait kivonva egymásból,* a kisebbítendővel megegyező értelmű egyenlőtlenséget kapunk (ha kisebb számból többet vonunk ki, akkor annál inkább kisebb lesz) (52. ábra), azaz,

ha $a > b$ és $c < d$, akkor $a - c > b - d$, vagy
ha $a < b$ és $c > d$, akkor $a - c < b - d$.

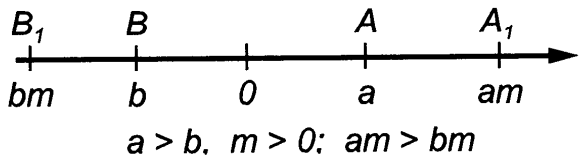


52. ábra. Két egyenlőtlenség különbsége

Pl.: $11 > 4$ és $2 < 13$, tehát $11 - 2 > 4 - 13$, azaz $9 > -9$.
$-3 < 5$ és $1 > -7$, tehát $-3 - 1 < 5 - (-7)$, azaz $-4 < 12$.

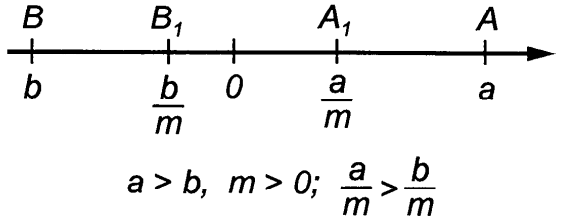
6. *Az egyenlőtlenség értelme nem változik,* ha mindkét oldalát egy tetszés szerinti pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk (53. és 54. ábra), azaz

ha $a > b$ és $m > 0$, akkor $am > bm$ és $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.



Pl.: $4 > -2$,
$3 \cdot 4 > -2 \cdot 3$,
$12 > -6$.

53. ábra. Egyenlőtlenség szorzása pozitív számmal

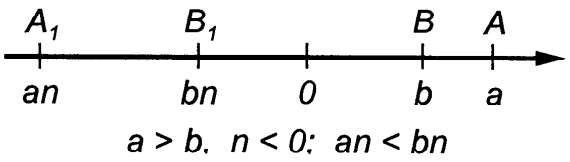


Pl.: $10 > -2$,
$\frac{10}{2} > \frac{-2}{2}$,
$5 > -1$.

54. ábra. Egyenlőtlenség osztása pozitív számmal

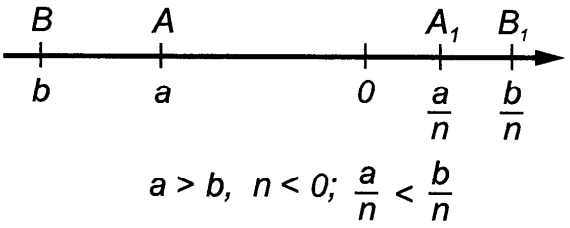
7. *Az egyenlőtlenség mindkét oldalát egy tetszőleges negatív számmal szorozva vagy osztva,* ellenkező értelmű egyenlőtlenséget kapunk (55. és 56. ábra), azaz,

$$\text{ha } a > b \text{ és } n < 0, \text{ akkor } an < bn \text{ és } \frac{a}{n} < \frac{b}{n}.$$



Pl.: $2 > -5$,
$2(-1) < -5(-1)$,
$-2 < 5$.

55. ábra. Egyenlőtlenség szorzása negatív számmal

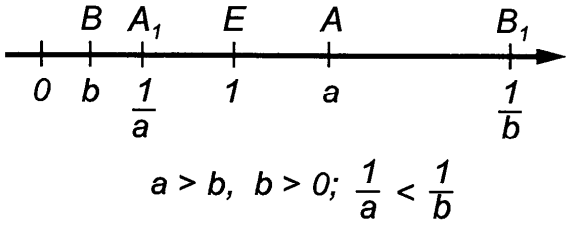


Pl.: $-4 > -10$,
$\frac{-4}{-2} < \frac{-10}{-2}$,
$2 < 5$.

56. ábra. Egyenlőtlenség osztása negatív számmal

8. *Ha az egyenlőtlenség két oldala egyező előjelű, és a két oldal reciprokát vesszük,* akkor az egyenlőtlenség értelme ellenkezőre változik (57. ábra), azaz,

$$\text{ha } a > b, \text{ akkor } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$



57. ábra. Egyenlőtlenség reciprok értéke

Pl.: $2 > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} < \frac{1}{\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2} < 4$.

$-3 > -9$, $\frac{1}{-3} < \frac{1}{-9}$, $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{9}$.

9. *Ha az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív számértékű mennyiség,* akkor mindkét oldal tetszőleges pozitív egész kitevőjű hatványát képezve, vagy mindkét oldalból tetszőleges pozitív egész gyökkitevőjű gyököt vonva, az egyenlőtlenség értelme nem változik, azaz,

ha $a > b > 0$ és $n > 0$ egész, akkor $a^n > b^n$ és $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Pl.: $9 > 4 > 0$, $2 > 0$, $9^2 > 4^2$, azaz $81 > 16$ és $\sqrt{9} > \sqrt{4}$, azaz $3 > 2$.

3.31 Első- és másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek megoldása

Az egyenletekhez hasonlóan az egyenlőtlenségekben is lehetnek ismeretlen mennyiségek, amelyek jelölésére általában az ábécé utolsó betűit használjuk (x, y, z stb.). Az egyenlőtlenségek osztályozása megegyezik az egyenletek osztályozásával. Pl.: $x - 7 < 2x + 5$ *algebrai elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség*; $x^2 - 4x + 3 > 0$ *algebrai másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség*; $3^x - 1 > 8$ *transzcendens egyenlőtlenség.*

Ha adott alaphalmazon, két, ugyanazon ismeretlenre felírt egyenlőtlenség az ismeretlen azonos értékeire áll fenn, akkor a két egyenlőtlenség *egyenértékű* (ekvivalens). Pl.: a $4x + 4 < x + 13$ és $4x < x + 9$ egyenlőtlenségek egyenértékűek, mert $x < 3$ értékekre, és csak ezekre áll fenn mindkettő. Az egyenlőtlenséget megoldjuk, ha megadjuk az ismeretlen mindazon értékeit, amelyekre az egyenlőtlenség teljesül. A megoldást az alaptulajdonságoknak megfelelő átalakításokkal (egyszerűbb egyenértékű egyenlőtlenségek felírásával) tudjuk megadni.

a) Az elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek átalakításokkal $ax > b$ alakra hozhatók, amelyeknek megoldása:

$$x > \frac{b}{a}, \text{ ha } a > 0 \text{ és } x < \frac{b}{a}, \text{ ha } a < 0.$$

Ha R az alaphalmaz, akkor a megoldás egy intervallum.

Példák

1. $9x + 8 < 7x + 15, \ x \in R.$

Rendezve: $9x - 7x < 15 - 8, \quad 2x < 7, \quad x < \frac{7}{2}. \quad M = \left\{ x \mid x \in R \text{ és } x < \frac{7}{2} \right\}.$

Tehát az egyenlőtlenség az összes $\frac{7}{2}$-nél kisebb valós számra teljesül.

2. $x + 5 < x + 6$, ha $x \in R$, akkor $M = R.$

3. $3x > 4x$, az $x \in N$ esetén $M = \varnothing.$

4. $3x - 2 > 5x + 8, \quad -2x > 10, \quad x < -5.$

Az egyenlőtlenség értelme ellenkezőre változott, mert (–2)-vel osztottuk mindkét oldalt. $M = \{x \mid x \in R \text{ és } x < -5\}$ (Próba!)

5. $(x-2)^2 < x^2 + 16.$

$x^2 - 4x + 4 < x^2 + 16, \quad -4x < 12, \quad x > -3. \quad M = \{x \mid x \in R \text{ és } x > -3\}.$

6. $y^2 > 0$, ha $y \in N$, akkor $M = \{1,2,3,4,5,...\}.$

$y^2 < 0, \ y \in N$ esetén $M = \varnothing.$

b) *Két elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségből álló egyenlőtlenség-rendszer* megoldásának nevezzük az ismeretlen mindazon értékeit, amelyekre a választott alaphalmazon mindkét egyenlőtlenség egyidejűleg teljesül.

Példák

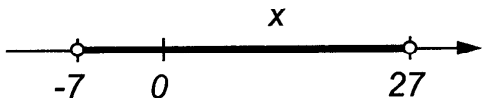
1. $11x + 17 > 9x + 3, \quad$ (I)

$x - 9 > 2x - 36. \quad$ (II)

(I) egyenlőtlenség megoldása: $2x > -14, \quad x > -7.$

(II) egyenlőtlenség megoldása: $-x > -27, \quad x < 27.$

Mivel az (I) egyenlőtlenség minden (–7)-nél nagyobb, a (II) egyenlőtlenség pedig minden 27-nél kisebb x-re teljesül, ezért az egyenlőtlenség-rendszer minden –7 és 27 közé eső x értékre fennáll, tehát megoldása: $-7 < x < 27$ ill. $]-7;\ 27[$ nyílt intervallum, (58. ábra), tehát $M = \{x \mid x \in R \text{ és } -7 < x < 27\}.$



$-7 < x < 27$ vagy $]-7\,;\,27[$

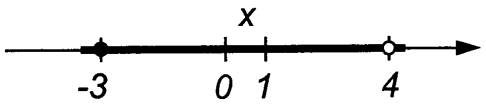
58. ábra. Nyílt intervallum

2. $6x+2 \geq -16,$ (I)
$5x-3<17.$ (II)

(I) egyenlőtlenség megoldása: $6x \geq -18, \quad x \geq -3.$

(II) egyenlőtlenség megoldása: $5x < 20, \quad x < 4.$

Mivel az (I) egyenlőtlenség (-3) és annál nagyobb x-ekre, a (II) egyenlőtlenség pedig minden 4-nél kisebb x-re teljesül, ezért a megoldás: $-3 \leq x < 4$, ill. $[-3;\ 4[$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum (59. ábra).



$-3 \leqq x < 4$ vagy $[-3\,;\,4[$

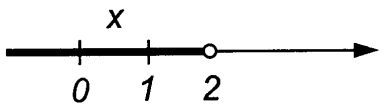
59. ábra. Balról zárt, jobbról nyílt intervallum

3. $\frac{2x}{5}+4 > x-\frac{1}{2},$ (I)
$9x-8+3(x-2)<2(x+3).$ (II)

(I) egyenlőtlenség megoldása: $4x+40>10x-5, \quad -6x>-45, \quad x<7{,}5.$

(I) egyenlőtlenség megoldása: $12x-14<2x+6, \quad 10x<20, \quad x<2.$

Mivel az (I) egyenlőtlenség megoldása $x<7{,}5$; a (II)-é pedig $x<2$, ezért az egyenlőtlenség-rendszer megoldása: $x<2$, amely más alakban: $-\infty<x<2$, ill. $]-\infty;\ 2[$. A megoldáshalmaz: $M=\{x \mid x \in R \text{ és } x<2\}$ (60. ábra).



$-\infty < x < 2$ vagy $]-\infty\,;\,2[$

60. ábra. Végtelen intervallum

4. $\frac{x-1}{3}-2(1-4x)>\frac{1}{4}x-\frac{7-52x}{6},$ (I)
$2x-3<3x-5.$ (II)

(I) megoldása: $4x-4-24+96x>3x-14+104x, \quad -7x>14, \quad x<-2.$

(II) megoldása: $-x<-2, \quad x>2.$

Mivel az (I) egyenlőtlenség megoldása ($x<-2$) ellentmond a (II) egyenlőtlenség megoldásának ($x>2$), ezért ennek az egyenlőtlenség-rendszernek nincs megoldása.

5. $\frac{x+4}{x-2}>3; \quad x\in R\setminus\{2\}.$

Első esetben:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-2}&>3 && \text{és } x-2>0\\ x+4&>3(x-2) && \text{és } x>2\\ x+4&>3x-6 && \text{és } x>2\\ 10&>2x && \text{és } x>2\\ x&<5 && \text{és } x>2 \end{aligned}$$

Tehát az első esethez tartozó megoldáshalmaz: $M_1=\{x \mid x\in R \text{ és } 2<x<5\}.$

Második esetben:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-2}&>3 && \text{és } x-2<0\\ x+4&<3(x-2) && \text{és } x<2\\ x+4&<3x-6 && \text{és } x<2\\ 10&<2x && \text{és } x<2\\ x&>5 && \text{és } x<2 \end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a második esetben nincs megoldás: $M_2=\varnothing.$

A törtes egyenlőtlenség megoldása: $M=M_1\cup M_2=M_1.$

6. $|x+6|<3, \quad x\in Z.$ (Alaphalmaz az egész számok halmaza.)

Most is két esetet kell megvizsgálni: az abszolút érték definíciója szerint:

$|x+6|=x+6$, ha $x+6\geq 0$, vagy $|x+6|=-(x+6)$, ha $x+6\leq 0.$

Első eset:

$$\begin{aligned} x+6&<3 && \text{és } x+6\geq 0\\ x&<-3 && \text{és } x\geq -6 \end{aligned}$$

Tehát $M_1=\{-6,-5,-4\}.$

Második eset:

$$\begin{aligned} -(x+6)&<3 && \text{és } x+6\leq 0\\ -x-6&<3 && \text{és } x\leq -6\\ -x&<9 && \text{és } x\leq -6\\ x&>-9 && \text{és } x\leq -6 \end{aligned}$$

Tehát a megoldáshalmaz: $M_2=\{-8,-7,-6\}.$ Az eredeti abszolút értékes egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M=M_1\cup M_2=\{-8,-7,-6,-5,-4\}.$ A megoldás helyességéről behelyettesítéssel győződhetünk meg.

c) Másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek átalakításokkal

$$x^2 < k \qquad (1)$$

$$x^2 > k \qquad (2)$$

típusú egyenlőtlenségre vezethetők vissza $(x \in R)$.

Az (1) egyenlőtlenség megoldása:

ha $k > 0$, akkor $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$,

ha $k < 0$, akkor nincs valós megoldás, hiszen valós szám négyzete nem lehet negatív.

A (2) egyenlőtlenség megoldása:

ha $k > 0$, akkor $x > \sqrt{k}$ vagy $x < -\sqrt{k}$,

ha $k = 0$, akkor $x > 0$ vagy $x < 0$,

ha $k < 0$, akkor a (2) egyenlőtlenség minden x-re fennáll.

Példák

1. $x^2 < 16$, $x \in R$. Megoldás: $-\sqrt{16} < x < \sqrt{16}$, $-4 < x < 4$.

Tehát az egyenlőtlenség a $]-4;\ 4[$ intervallum minden értékére teljesül.

$$M = \{x \mid x \in R \text{ és } -4 < x < 4\}.$$

A feladatot visszavezethetjük elsőfokú egyenlőtlenségekre is:

$$x^2 - 16 < 0, \quad (x-4)(x+4) < 0.$$

Két tényező szorzata akkor és csak akkor lehet negatív, ha a tényezők ellentétes előjelűek, így két esetet kell vizsgálni:

Első eset:

$x - 4 < 0$ és $x + 4 > 0$

$x < 4$ és $x > -4$

$-4 < x < 4$

Második eset:

$x - 4 > 0$ és $x + 4 < 0$

$x > 4$ és $x < -4$

Ellentmondásra jutottunk.

Tehát a megoldáshalmaz a $]-4;\ 4[$ nyílt intervallum minden valós értéke.

$$M = \{x \mid x \in R \text{ és } -4 < x < 4\}.$$

2. $x^2 < -1$, $x \in R$. Az egyenlőtlenségnek nincs valós megoldása.

3. $x^2 > 16$, $x \in R$. Megoldás: $x > \sqrt{16}$ vagy $x < -\sqrt{16}$, azaz $x > 4$ vagy $x < -4$. Az egyenlőtlenség tehát a 4-nél nagyobb vagy –4-nél kisebb x-ekre teljesül.

Ezt a feladatot is visszavezethetjük elsőfokú egyenlőtlenségekre:

$$x^2 - 16 > 0, \quad (x-4)(x+4) > 0.$$

A szorzat pozitív, ha a tényezők azonos előjelűek, így két esetet kell vizsgálni:

Első eset:

$x-4>0$ és $x+4>0$

$x>4$ és $x>-4$

tehát $x>4$.

Második eset:

$x-4<0$ és $x+4<0$

$x<4$ és $x<-4$

tehát $x<-4$.

4. $x^2>-5$, $x\in R$. Az egyenlőtlenség minden valós x-re teljesül. $M=R$.

Az általános másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség:

$$ax^2+bx+c\lessgtr 0$$

megoldását a következő átalakítással kapjuk: az egyenlőtlenséget x^2 együtthatójával osztva, $x^2+px+q\lessgtr 0$ alakra jutunk, amelynek mindkét oldalához hozzáadjuk a $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ kifejezést:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2\lessgtr\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

amiből

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\lessgtr\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Ha $\left(x+\frac{p}{2}\right)=z$ és $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=k$ helyettesítést végzünk, akkor a $z^2<k$ vagy $z^2>k$ egyenlőtlenségeket kapjuk. Így (1) vagy (2) típusú egyenlőtlenségre jutottunk, amelynek megoldása után x-et meghatározhatjuk.

Példák

1. $5x^2-8x-4<0$.

$x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}<0$, $x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}+\left(\frac{8}{10}\right)^2+\frac{4}{5}<\left(\frac{8}{10}\right)^2+\frac{4}{5}$,

$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2<\frac{36}{25}$, $x-\frac{4}{5}=z$ helyettesítéssel $z^2<\frac{36}{25}$, s így

$-\frac{6}{5} < z < \frac{6}{5}$, azaz $-\frac{6}{5} < x - \frac{4}{5} < \frac{6}{5}$, $\quad -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} < x < \frac{6}{5} + \frac{4}{5}$.

Tehát $-\frac{2}{5} < x < 2$.

2. $2x^2 - 3x + 4 > x^2 + 2x - 2$, $x \in R$.

$x^2 - 5x + 6 > 0$, $\quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$, $\quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}$.

$z^2 > \frac{1}{4}$, $\quad z > \frac{1}{2}$ vagy $z < -\frac{1}{2}$, és így

$x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$, $\quad x > 3$, $\quad x - \frac{5}{2} < -\frac{1}{2}$, $\quad x < 2$.

Tehát az egyenlőtlenség 3-nál nagyobb vagy 2-nél kisebb x-ekre teljesül.

3. $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} > 0$, $x \in R$.

Egy tört akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjele megegyező, tehát az

$$(A)\ \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0, & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 > 0. & \text{(II)} \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 < 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

egyenlőtlenség-rendszereket kell megoldani.

(A / I) megoldása: $(x+1)^2 > 4$, $x + 1 > 2$, $x + 1 < -2$, tehát $x > 1$, $x < -3$.

(A / II) megoldása: $(x-1)^2 > -7$, azaz x tetszőleges értéket vehet fel.

(B / I) megoldása: $(x+1)^2 < 4$, $-2 < x + 1 < 2$, tehát $-3 < x < 1$.

(B / II) megoldása: $(x-1)^2 < -7$, az R számhalmazon egy négyzetszám nem lehet negatív, vagyis ennek az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

Az eredeti törtegyenlőtlenség tehát (mivel az (I) és (II) feltételnek egyszerre kell teljesülni) az $x > 1$ és az $x < -3$ értékekre áll fenn.

4. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x + 1} < 0$, $x \in R \setminus \{-1\}$.

Egy tört akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele különböző, vagyis az

$$(A)\ \begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0, & \text{(I)} \\ x + 1 > 0. & \text{(II)} \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} x^2 + 2x - 15 > 0, & \text{(I)} \\ x + 1 < 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

egyenlőtlenség-rendszereket kell megoldani.

(A / I) megoldása: $(x+1)^2 < 16$, $-4 < x + 1 < 4$, $-5 < x < 3$.

(A / II) megoldása: $x + 1 > 0$, $x > -1$.

Az (A / I) és (A / II) egyenlőtlenség egyidejűleg a $-1 < x < 3$ értékekre teljesül.

(B / I) megoldása: $(x+1)^2 > 16$, $x+1>4$, vagy $x+1<-4$, $x>3$ vagy $x<-5$.
(B / II) megoldása: $x+1<0$, $x<-1$.
A *(B / I)* és *(B / II)* egyenlőtlenség $x<-5$ értékekre teljesül egyidejűleg.
A tört egyenlőtlenség tehát a $-1<x<3$ és $x<-5$ értékekre áll fenn.

Feladatok

1. $(3x-1)+\frac{2x}{5}<14x+20{,}2.$ $[x>-2.]$

2. $\frac{3-2x}{5}+8>\frac{5x+2}{2}-x.$ $[x<4.]$

3. $6-3x>\frac{5}{4}-\frac{4x-3}{3}.$ $\left[x<\frac{9}{4}.\right]$

4. $\begin{cases}4x-3>5x-5,\\ 2x+4<8x.\end{cases}$ $\left[\frac{2}{3}<x<2.\right]$

5. $\begin{cases}(x-3)(x-4)<(x+1)(x+2),\\ x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3).\end{cases}$ $\left[1<x<\frac{3}{2}.\right]$

6. $\begin{cases}\frac{7-x}{6}-1<\frac{3+4x}{15}-\frac{4}{3},\\ 5x+15(4-x)<6(4-x).\end{cases}$ $[x>9.]$

7. $x^2-5x+4<0.$ $[1<x<4.]$

8. $3x^2-5x-2>0.$ $\left[x>2,\ x<-\frac{1}{3}.\right]$

9. $\frac{x^2-3x+2}{x-3}>0,\ x\neq 3.$ $[1<x<2,\ x>3.]$

10. $2-\frac{x-3}{x-2}>\frac{x-2}{x-1}.$ $[1<x<1{,}5,\ x>2.]$

NEGYEDIK FEJEZET

A KOMBINATORIKA ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ELEMEI

4.1 Kombinatorika

A *kombinatorika* (*kapcsolástan*) a matematikának az az ága, amely a tárgyaknak, számoknak, betűknek, játékmező figuráinak, stb. közös elnevezéssel véges számú elemnek bizonyos szabály szerinti csoportosításával, rendezésével foglalkozik.

A *kombinatorika feladata*, hogy meghatározott szabály szerint előállítsa adott véges számú elem bizonyos csoportjait, és hogy az így előállítható csoportok számát meghatározza. Az elemeket az ábécé különböző betűivel, a pozitív egész számok jegyeivel, vagy indexekkel ellátott betűkkel jelöljük. Pl. az a, b, c, d elemeknek *bacd* és *bdac* egy-egy rendezett elem 4-ese.

A következőkben a kombinatorika legegyszerűbb és legfontosabb alapfogalmaival foglalkozunk: a *permutációkkal*, a *variációkkal* és a *kombinációkkal.*

4.2 Ismétlés nélküli és ismétléses permutációk

Ha n számú elemet minden lehetséges sorrendben elrendezünk, akkor a kombinatorika nyelvén azt mondjuk, hogy az illető elemeket *permutáljuk*; az egyes elrendezéseket pedig az elemek *permutációinak* nevezzük.

Ha az elemek mind különbözők, akkor ismétlés nélküli, ha az elemek között egyenlők is vannak, akkor ismétléses permutációról beszélünk.

a) Írjuk fel két, három, majd négy elem ismétlés nélküli permutációit.

Két elem *a*, *b* összes lehetséges permutációi: *ab* és *ba*. A két elem permutációinak száma tehát: $P_2 = 2$.

Három elem, *a*, *b*, *c* összes lehetséges permutációi:

abc; *acb*; *bac*; *bca*; *cab*; *cba*.

A permutációk száma: $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Négy elem *a*, *b*, *c*, *d* összes lehetséges permutációi:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

A négy elemből képezhető permutációk száma: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ha öt elem összes permutációit képezzük, azt tapasztaljuk, hogy azok száma:

$P_5 = 5 \cdot P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ezek után azt várjuk, hogy n elem összes permutációinak száma $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, amire a rövidebb $n!$ (kimondva: *n faktoriális*) jelölést vezetjük be, amely az *1-től n-ig terjedő egész számok szorzatát* jelenti. Megállapodás szerint $0! = 1$ és $1! = 1$.

Jelölje n elem permutációinak számát: P_n, és bizonyítsuk a teljes indukció módszerével, hogy:

$$P_n = n!$$

azaz, hogy n különböző elem $n!$-féleképpen rendezhető sorba.

1. $n = 1$-re állításunk igaz, hiszen egy elem csak egyféleképpen rendezhető el: $P_1 = 1!$

2. Feltesszük, hogy $P_{n-1} = (n-1)!$ összefüggés igaz;

3. a 2. felhasználásával bizonyítjuk, hogy a tétel n-re is igaz.

Ha az 1, 2, 3, ..., n elem összes permutációit felírjuk, akkor az első elem annyi permutációban áll az első helyen, amennyi a 2, 3,

4, ..., n elem permutációinak száma, azaz P_{n-1} permutációban. 2-vel ugyancsak P_{n-1} permutáció kezdődik stb., tehát ha az első helyen álló elem alapján n oszlopban írjuk fel a permutációkat, akkor mindegyik oszlopba P_{n-1} számú permutáció kerül, s így n elem összes permutációinak száma:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Mivel indukciós feltevésünk szerint $P_n = n \cdot P_{n-1} = n(n-1)! = n!$, ezért valóban minden pozitív egész n-re igaz a tételünk.

Tehát n különböző elem permutációinak számát a

$$P_n = n! \quad (n \in N^+)$$

képlettel határozzuk meg, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Példák

1. Egy 9 tagú család hányféleképpen foglalhat helyet egy hosszú padon, ha minden lehetséges elrendezést figyelembe veszünk (szimmetriát is beszámítjuk)?

Megoldás: Az egy sorban való elrendezés lehetőségei kilenc elem összes permutációival adhatók meg, tehát

$$P_9 = 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880.$$

2. Hány hétjegyű szám képezhető a 0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 számjegyekből?

Megoldás: Mivel a 0-val kezdődő számot nem tekintjük hétjegyűnek, ezért hét elem összes permutációinak számából le kell vonni a 0-val kezdődő permutációk számát: $P_7 = 7! = 5040$; a 0-val kezdődő permutációk száma annyi, amennyi az utána álló elemek permutációinak száma: $P_6 = 6! = 720$.

Tehát 5040 – 720 = 4320 hétjegyű szám képezhető a 0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 számjegyekből.

b) Ha a permutálandó elemek között ismétlődők is vannak, akkor *ismétléses permutációról* beszélünk.

Legyen adott n elem, amelyek közül k elem egyenlő. Képzeljük el, hogy felírtuk az ily módon készíthető összes különböző permutációkat. Ha a k elem is különböző lenne, akkor minden egyes ismétléses permutációból annyi ismétlés nélküli permutációt tudnánk előállítani, amennyi a k elem permutációinak száma, azaz $k!$-t s így n elem ismétlés nélküli permutációinak számát kapnánk: $n!$-t.

Jelöljük az ismétléses permutációk számát P_n^k-val, akkor tehát a $k!P_n^k = n!$ egyenlőségből

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}, \quad (n \in N^+, \ k \in N^+, \ k \leq n).$$

vagyis, ha n elem között k megegyező van, akkor ezeknek az elemeknek $\frac{n!}{k!}$ számú ismétléses permutációja van. Hasonló meggondolással juthatunk a következő általános eredményhez:

Ha n elem között r-féle különböző elem szerepel úgy, hogy az egymással megegyező elemek száma $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r$, ($k_i$ 1 is lehet), akkor az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!},$$

ahol $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ $(n, k_1, k_2, \ldots, k_r \in N^+)$.

Példák

1. Hány nyolcjegyű egész szám alkotható az 1, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6 számjegyekből?

Megoldás: Nyolc elem ismétléses permutációit kell kiszámítani, ha $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$ és $k_4 = 2$: $P_8^{(1,3,2,2)} = \frac{8!}{1!3!2!2!} = \frac{40320}{1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2} = 1680.$

2. Hány permutáció képezhető a KATIKA szó betűiből?

Megoldás: Hat elem ismétléses permutációit kell képezni $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$: $P_6^{(2,2,1,1)} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = \frac{720}{4} = 180.$

4.3 Ismétlés nélküli és ismétléses variációk

a) Ha n különböző elem közül minden lehetséges módon kiválasztunk k elemet, s ezek összes permutációit képezzük, akkor megkapjuk n elem k-ad osztályú variációit. Ezek számát jelölje:

$$V_{n,k} \quad (k \leq n \in N^+).$$

Az értelmezés szerint n különböző elem n-ed osztályú variációi ugyanazokat az elrendezéseket adják mint az n elem permutációi, hiszen n elemből csak egyféleképpen választhatunk ki n elemet, ezért azt mondhatjuk, hogy a permutáció a variáció speciális esete.

Írjuk fel az a, b, c, d elemek első-, másod-, harmad- és negyedosztályú variációit.

Négy elemnek négy elsőosztályú variációja van, a négy elem külön-külön:

a, b, c, d; $V_{4,1} = 4$.

Négy elem másodosztályú variációit megkapjuk, ha az elsőosztályú variációkhoz második elemként a másik három elem mindegyikét hozzáírjuk:

ab	*ba*	*ca*	*da*
ac	*bc*	*cb*	*db*
ad	*bd*	*cd*	*dc*

$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Négy elem harmadosztályú variációit úgy állíthatjuk elő, hogy a másodosztályú variációkhoz harmadik elemként hozzáírjuk a bennük nem szereplő másik két elem bármelyikét:

abc	*bac*	*cab*	*dab*
abd	*bad*	*cad*	*dac*
acb	*bca*	*cba*	*dba*
acd	*bcd*	*cbd*	*dbc*
adb	*bda*	*cda*	*dca*
adc	*bdc*	*cdb*	*dcb*

Látjuk, hogy minden másodosztályú variációból két harmadosztályú variációt kapunk, tehát

$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Négy elem negyedosztályú variációit megkapjuk, ha a harmadosztályú variációk mindegyikéhez hozzáírjuk a bennük elő nem forduló elemet, úgyhogy a negyedosztályú variációk száma is 24 lesz, azaz

$V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

vagyis a négy elem összes permutációinak számával egyenlő.

A tapasztalatok alapján és a teljes indukció módszerével igazolhatjuk, hogy

n különböző elem ismétlés nélküli k-ad osztályú variációinak száma:

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (n, k \in N^+, \; k \leq n).$$

I. $k = 1$-re a tétel igaz, mert n elemnek n számú elsőosztályú variációja van: $V_{n,1} = n$.

II. Feltesszük, hogy $(k-1)$-re igaz az összefüggés:

$$V_{n,k-1} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-2)].$$

Mivel minden $(k-1)$-ed osztályú variációból $n-(k-1)$ számú k-ad osztályút tudunk képezni a benne nem szereplő egy-egy elem melléírásával, ezért a k-ad osztályú variációk száma:

$$V_{n,k} = V_{n,k-1}[n-(k-1)] = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)].$$

s ezzel a tétel helyességét igazoltuk.

Példák

1. A 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám képezhető, amelyben a számjegyek különböznek?

Megoldás: Hét elem negyedosztályú variációinak számát kell kiszámítani:

$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

2. Hány különböző dobás lehetséges három különböző színű kockával (ha azt vesszük számításba, amikor a három számjegy különböző) ?

Megoldás: Minden kocka lapjai 1-től 6-ig vannak megszámozva, tehát összesen hat elem van. A kockák színe legyen piros, fehér és zöld, akkor pl. a piros 1-es, a fehér 5-ös, a zöld 6-os dobás különbözik a fehér 1-es, piros 5-ös, zöld 6-os dobástól, de kizárjuk azokat az eseteket, amikor két vagy három kocka ugyanazt a számot mutatja. Pl. dobjunk először a piros kockával, ennek 6 különböző eredménye lehet. A fehér kockával ezek mindegyikéhez már csak öt eredményt kaphatunk (ha az első kockával azonos számot dobunk, akkor a dobás érvénytelen és megismételjük). A zöld kockával pedig minden esetben csak 4 féle eredmény lehetséges. Így hat elem harmadosztályú variációit kell kiszámítanunk: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

3. Hány négyjegyű szám írható fel a 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9 számjegyekből, ha egy jegy sem ismétlődhet meg egy számon belül?

Megoldás: Hét elem negyedosztályú variációinak számából le kell vonni a 0-val kezdődő négyjegyű számok számát, ami az 1, 3, 4, 6, 7, 9 elemek harmadosztályú variációinak számával egyező, tehát: $V_{7,4} - V_{6,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 - 120 = 720$.

b) Ha n elem k-ad osztályú variációinak képzésekor megengedjük, hogy ugyanaz az elem akárhányszor (de legfeljebb k-szor) szerepeljen, akkor k-ad osztályú ismétléses variációkról beszélünk. Ezek számát jelölje: $V_{n,k}^{i}$.

Vegyük pl. az *a*, *b* elemek első-, másod- és harmadosztályú ismétléses variációit:

1.	*a*	*b*	$V_{2,1}^{i} = 2,$
2.	*aa*	*ba*	
	ab	*bb*	$V_{2,2}^{i} = 2^2 = 4,$
3.	*aaa*	*baa*	
	aab	*bab*	
	aba	*bba*	
	abb	*bbb*	$V_{2,3}^{i} = 2^3 = 8.$

Általában n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_{n,k}^{i} = n^k$$

A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezhetjük el.

I. $k = 1$-re a tétel igaz:

$$V_{n,1}^{i} = n^1,$$

mivel minden elrendezésben csak egy elem van.

II. Feltesszük, hogy $V_{n,k-1}^{i} = n^{k-1}$ és ezt felhasználva igazoljuk $V_{n,k}^{i} = n^k$ állítás helyességét.

Mivel a $(k-1)$-ed osztályú ismétléses variációkból a k-ad osztályú ismétléses variációkat úgy kapjuk, hogy az előbbiek mindegyik elrendezéséhez k-adik elemként hozzáírjuk az n elem mindegyikét, ezért a k-ad osztályú ismétléses variációk száma n-szerese a $(k-1)$-ed osztályú ismétléses variációk számának, azaz $V_{n,k}^{i} = n \cdot V_{n,k-1}^{i}$, de feltevésünk szerint $V_{n,k-1}^{i} = n^{k-1}$, tehát

$$V_{n,k}^{i} = n \cdot n^{k-1} = n^k \quad (n,k \in N^+)$$

igazolást nyert.

Példák

1. Hány különböző háromjegyű szám képezhető az 1, 3, 4, 5, 6, 8 számjegyekből, ha egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás: Hat elem harmadosztályú ismétléses variációinak számát kell kiszámítanunk, azaz: $V_{6,3}^{i} = 6^3 = 216.$

2. A "totó"-ban a biztos 13 ill. 13 + 1 találathoz hány tipposzlopot kell kitölteni?

Megoldás: Mivel az 1, *x*, 2 elemek bármelyikét elhelyezhetjük a megadott 13 ill. 14 helyre, ezért 3 elem 13-ad ill. 14-ed osztályú ismétléses variációit kell kiszámítani:

$$V^{i}_{3,13} = 3^{13} = 1594323 \text{ és } V^{i}_{3,14} = 3 \cdot 3^{13} = 3^{14} = 4782969.$$

4.4 Ismétlés nélküli és ismétléses kombinációk

a) Ha n különböző elem közül minden lehetséges módon kiválasztunk k $(k \leq n)$ elemet, de nem permutáljuk az egyes elrendezés elemeit, mert az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem k-ad osztályú kombinációit kapjuk. Ezek számát jelölje: $C_{n,k}$.

Azt is mondhatjuk, hogy n elem k-ad osztályú kombinációit az n elemből kiválasztott k elemű csoportok alkotják. A variációk és a kombinációk között tehát mindössze annyi a különbség, hogy az előbbinél a kiválasztott k elemet permutáljuk is, míg az utóbbinál nem.

Pl.: Egy egyesület kéttagú elnökséget, elnököt és titkárt választ négy jelölt közül. Hányféle összeállítás lehetséges?

Jelöljük a jelölteket *A*, *B*, *C*, *D* betűkkel, s legyen mondjuk az első helyen álló személy az elnök, a második a titkár, akkor

AB	*BA*	*CA*	*DA*
AC	*BC*	*CB*	*DB*
AD	*BD*	*CD*	*DC*

esetek lehetségesek, s ezek négy elem másodosztályú variációi: $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$.

Ha csak azt vizsgáljuk, hogy kik kerülnek az elnökségbe, de eltekintünk attól, ki az elnök, ki a titkár, akkor pl. az *AB* és *BA* eset ugyanazon személyeket jelenti, tehát nem számítanak különbözőknek, s így feleannyi összeállítás lehetséges; ez kombináció. Tehát négy elem másodosztályú kombinációi:

AB	*BC*	*CD*
AC	*BD*	
AD		

vagyis: $C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$

Írjuk most fel az *a*, *b*, *c*, *d* elemek harmadosztályú kombinációit:

abc *abd* *acd* *bcd*

$C_{4,3} = 4.$

Ha a négy elem harmadosztályú variációit kiszámítjuk: $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, és ezzel adjuk meg a kombinációk számát, akkor

$$C_{4,3} = \frac{V_{4,3}}{6} = \frac{V_{4,3}}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

A négy elem negyedosztályú kombinációja egyetlen elrendezés: *abcd*; $C_{4,4} = 1$, s mivel $V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, így

$$C_{4,4} = \frac{V_{4,4}}{24} = \frac{V_{4,4}}{4!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1.$$

A felismert összefüggés alapján meghatározzuk n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak számát. Ugyanis ha n elem k-ad osztályú kombinációiból a lehetséges permutációkat képezzük, akkor $k!$ elrendezést kapunk; ha ezt a $C_{n,k}$ számú elrendezés mindegyikénél elvégezzük, akkor összesen $k! \cdot C_{n,k}$ elrendezést állítunk elő, ami n elem k-ad osztályú variációinak a számát adja, azaz $k! \cdot C_{n,k} = V_{n,k}$, amiből

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A $C_{n,k}$ helyett szokásos az $\binom{n}{k}$ jelölést is használni (olv.: en alatt a ká vagy en a ká fölött), amelyet *binomiális együtthatónak* is nevezünk (l. a 4.5 pontot), tehát

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}, \qquad \text{ahol:}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n, k \in N^+,\ k \leq n).$$

Példák

1. Hány különböző dobás lehetséges négy egyszínű kockával? (Itt kizárjuk azokat az eseteket, midőn egyenlő számot mutató lapok kerülnek felülre.)

Megoldás: Mivel a kockák lapjait jelölő hat szám közül négy kockával minden dobásnál négy szám kerül felülre, s a dobások közül csak azokat vesszük számításba, amelyeknél különböző számú lapok kerülnek felülre, ezért a kombinációk számát hat elem negyedosztályú kombinációi adják:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15,$$

azaz négy egyszínű kockával 15 különböző dobás lehetséges.

2. A lottószelvényen 1-től 90-ig vannak a számok felírva, amelyek közül öt szám "eltalálása" szükséges a legnagyobb összeg elnyeréséhez. Hány szelvényen kellene tervszerűen öt-öt számot megjelölni, hogy biztosan legyen egy ötös találat?

Megoldás: 90 elem ötödosztályú kombinációit kell kiszámítani, s az adja meg a kitöltendő szelvények számát:

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268.$$

Tehát "csak" 43 949 268 szelvény kitöltése szükséges egy biztos ötös találathoz.

b) Ha n elem k-adosztályú kombinációinak képzésénél megengedjük, hogy ugyanaz az elem akárhányszor (de legfeljebb k-szor) szerepeljen a kombinációkban, akkor n elem k-adosztályú ismétléses kombinációit kapjuk. Ezek számát jelölje: $C^i_{n,k}$.

Képezzük az *a*, *b*, *c*, *d* elemek első-, másod- és harmadosztályú ismétléses kombinációit:

1. *a* *b* *c* *d* $C^i_{4,1} = \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1} = 4.$

2. *aa* *bb* *cc* *dd*
   ab *bc* *cd*
   ac *bd*
   ad

   $$C^i_{4,2} = \frac{4+2-1}{2} C^i_{4,1} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \binom{5}{2} = 10.$$

3. *aaa* *abb* *acc* *add* *bbb* *bcc* *bdd* *ccc* *cdd* *ddd*
   aab *abc* *acd* *bbc* *bcd* *ccd*
   aac *abd* *bbd*
   aad

   $$C^i_{4,3} = \frac{4+3-1}{3} C^i_{4,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{6}{3} = 20$$

n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma a bemutatott példák alapján:

$$C_{n,k}^{i} = \binom{n+k-1}{k} \quad (n,k \in N^{+}).$$

A tételt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk:

I. A tétel $k = 1$-re igaz:

$$C_{n,1}^{i} = \binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1} = n.$$

mert n elemből egyet kiválasztani valóban n-féleképpen lehet.

II. Feltesszük, hogy

$$C_{n,k-1}^{i} = \binom{n+k-2}{k-1}$$

igaz, és ezt felhasználva bizonyítjuk k-ra.

Mivel $C_{n,k}^{i} = \frac{n+k-1}{k} C_{n,k-1}^{i}$ összefüggés érvényes a $(k-1)$-edosztályú és k-adosztályú ismétléses kombinációk között, ezért

$$C_{n,k}^{i} = \frac{n+k-1}{k}\binom{n+k-2}{k-1} = \frac{n+k-1}{k} \cdot \frac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

ami valóban a $C_{n,k}^{i} = \binom{n+k-1}{k}$ képlettel azonos.

Példák

1. Hányféle eredményt kaphatunk, ha négy egyforma kockát egyszerre dobunk fel s a kockák sorrendje nem számít?

Megoldás: Hat elem negyedosztályú ismétléses kombinációinak számát kell meghatározni, mivel egy dobás az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok közül négy számot határoz meg, amelyek között egyenlők is lehetnek:

$$C_{6,4}^{i} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

2. Négy ötforintossal hány különböző dobás lehetséges (fej, írás)?

Megoldás: A lehetséges esetek számát két elem (fej, írás) negyedosztályú (négy érme) ismétléses kombinációi adják:

$$C_{2,4}^{i} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

Tehát négy ötforintost feldobva, öt különböző eset lehetséges.

3. Hét versenyző hányféleképpen vihet el öt első díjat egy öttusabajnokságon? (Egy versenyző több versenyszámot is megnyerhet, és nem tekintjük lényegesnek azt, hogy melyikben vitte el az első díjat.)

Megoldás: A lehetséges esetek számát hét elem ötödosztályú ismétléses kombinációi adják:

$$C_{7,5}^{i} = \binom{7+5-1}{5} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462.$$

Tehát hét versenyző között az öt első díjat 462-féleképpen oszthatják ki.

4.5 A binomiális tétel és a binomiális együtthatók tulajdonságai

A kéttagú algebrai kifejezést *binomnak* nevezzük. Binom pl. $(5x+8y)$ vagy $(a+b)$. A binom négyzetének és köbének (második és harmadik hatványának) felírását már szabályba foglaltuk (l. a 3.4 pontot). Most megismerkedünk a binomok magasabb hatványainál fellépő törvényszerűségekkel. E célból írjuk egymás alá $(a+b)$ binom nulladik, első, második, harmadik, negyedik, ötödik és hatodik hatványát:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Pl.: $(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$, $(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$, stb. alapján képezhetők.

Pascal (1623–1662) francia matematikus vette észre, hogy az együtthatók háromszögsémába egymás alá írva, a következő törvényszerűséget mutatják: a háromszög külső szárai mentén csupa

egyes áll, belül pedig bármely szám megkapható a közvetlen felette jobbra és balra álló két szám összegeként:

0. sor							1							
1. sor						1		1						
2. sor					1		2		1					
3. sor				1		3		3		1				
4. sor			1		4		6		4		1			
5. sor		1		5		10		10		5		1		
6. sor	1		6		15		20		15		6		1	
7. sor	1		7		21		35		35		21		7	1

A fenti, ún. *Pascal-féle háromszög* segítségével $(a+b)^n$ tetszőleges, nem negatív egész szám esetében közvetlenül felírható polinom alakban: az n-edik sorban az n-edik hatvány együtthatóit találjuk, az együtthatók mellé pedig rendre a fogyó hatványait (n-től 0-ig) és b növekvő hatványait (0-tól n-ig) írjuk tényezőül ($a^0 = 1$, $b^0 = 1$).

Bevezetve az $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ jelölést, az

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

tételt írhatjuk fel, ahol $\sum$ az összegzés jele (olv.: szumma) és az $\binom{n}{k}$ együtthatók az

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1;$$
$$(n, k \in N, \text{ de } n \geq 1, \ 1 \leq k \leq n)$$

ún. *rekurziós* összefüggéssel adottak. Ez a *binomiális tétel*, amelyet

megalkotójáról, *Newton* (1643–1727) angol fizikusról és matematikusról, *Newton*-féle binomiális tételnek is nevezünk, az $\binom{n}{k}$ együtthatókat pedig *binomiális együtthatóknak* mondjuk.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók értelmezése, mint már láttuk:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-2)][n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k},$$

mely egyszerűbb alakra hozható, ha a számlálót és a nevezőt $(n-k)!$-sal megszorozzuk:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-2)][n-(k-1)](n-k)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ezt felhasználva, a *Pascal*-háromszögben kifejezett rekurziós összefüggést könnyen igazolhatjuk.

Ugyanis $\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}$ és $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, tehát

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{k\cdot n!+[n-(k-1)]\cdot n!}{k![n-(k-1)]!}=\frac{n!(k+n-k+1)}{k![n-(k-1)]!}=$$

$$=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}.$$

A kapott eredmény pedig valóban egyenlő a rekurziós összefüggés bal oldalával:

$$\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

A binomiális tételt n-szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk:

I. $n=1$-re a tétel igaz:

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b.$$

II. Feltesszük, hogy a tétel n-re is igaz, és ebből vezetjük le érvényességét $(n + 1)$-re:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(a + b)$-vel:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n +$$
$$+ \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

Mivel $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ és $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$, ezért az első és utolsó tag együtthatóját ezek felhasználásával átírhatjuk. A rekurziós összefüggés alapján pedig az egyneműek együtthatói:

$$\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n b = \binom{n+1}{1}a^n b$$

$$\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 = \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 \qquad \text{stb.}$$

Tehát valóban

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

s ezzel a tételt igazoltuk.

Az $\binom{n}{n-k}$ binomiális együttható értéke egyenlő $\binom{n}{k}$ értékével. Ugyanis

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

azaz

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Ez a binomiális együtthatók ún. *szimmetriatétele*, és azt fejezi ki, hogy a *Pascal*-féle háromszög bármely sorában a sor két szélső elemétől egyenlő távolságban levő elemek egymással egyenlők,

Pl.: $\binom{6}{4}=\binom{6}{6-4}$, mert $\binom{6}{4}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=15$ és $\binom{6}{6-4}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15.$

Példák

1. $(1-x)^5=?$ Megoldás: Mivel $n=5$, $a=1$ és $b=-x$, ezért

$$(1-x)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}(-x)+\binom{5}{2}(-x)^2+\binom{5}{3}(-x)^3+\binom{5}{4}(-x)^4+\binom{5}{5}(-x)^5=$$
$$=1-\frac{5}{1}x+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^2-\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5=$$
$$=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5.$$

2. $1{,}02^4=?$

Megoldás: Mivel $1{,}02=1+0{,}02$, ezért $a=1$, $b=0{,}02$ és $n=4$, tehát

$$1{,}02^4=(1+0{,}02)^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}0{,}02+\binom{4}{2}0{,}02^2+\binom{4}{3}0{,}02^3+\binom{4}{4}0{,}02^4=$$
$$=1+4\cdot0{,}02+6\cdot0{,}0004+4\cdot0{,}000008+16\cdot10^{-8}=1{,}08243216.$$

3. $(0{,}99)^6=?$

Megoldás: Mivel $0{,}99=1-0{,}01$, ezért $a=1$, $b=-0{,}01$ és $n=6$, tehát

$$(0{,}99)^6=(1-0{,}01)^6=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}(-0{,}01)+\binom{6}{2}(-0{,}01)^2+\binom{6}{3}(-0{,}01)^3+$$
$$+\binom{6}{4}(-0{,}01)^4+\binom{6}{5}(-0{,}01)^5+\binom{6}{6}(-0{,}01)^6=$$
$$=1-6\cdot0{,}01+15\cdot0{,}0001-20\cdot0{,}000001+15\cdot0{,}00000001-$$
$$-6\cdot10^{-10}+10^{-12}\approx0{,}9415.$$

4. Határozzuk meg x-et, ha a $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^6$ kifejtés 5. tagja $\frac{5}{9}$-del egyenlő.

Megoldás: Mivel a kifejtés 5. tagja $\binom{6}{4}(\sqrt{x})^2(x^{-1})^4$, ezért a

$\binom{6}{4}(\sqrt{x})^2(x^{-1})^4=\frac{5}{9}$ egyenletet kell megoldanunk: $15x\cdot x^{-4}=\frac{5}{9}$,

$x^3=27,\ x=3.$

Feladatok

1. Egy 10 személyes család hányféleképpen foglalhat helyet egy padon, ha minden lehetséges sorrendet figyelembe veszünk? $\left[P_{10}=3628800\right]$

2. Hány hétjegyű szám képezhető a 0, 2, 2, 5, 5, 5, 9 számjegyekből?
$\left[P_7^{(2,3)}-P_6^{(2,3)}=360\right]$

3. Hány különböző lapú dobást tehetünk három különböző színű kockával?
$\left[V_{6,3}=120\right]$

4. Hány különböző háromjegyű szám alkotható az 1, 4, 5, 7, 9 számjegyekből, ha egy-egy számjegyet akárhányszor felhasználhatunk? $\left[V_{5,3}^{i}=125\right]$

5. Egy 15 főből álló osztályból hányféle módon lehet háromtagú küldöttséget választani? $\left[C_{15,3}=455\right]$

6. Hány különböző dobás tehető három egyszínű kockával? $\left[C_{6,3}^{i}=56\right]$

7. Oldjuk meg a $12C_{x,1}+C_{(x+4),2}=162$ egyenletet. $[x=8]$

Felhasználva: $C_{x,1}=\binom{x}{1}$, $C_{(x+4),2}=\binom{x+4}{2}$.

8. Oldjuk meg a $\frac{V_{x,4}\cdot P_{x-4}}{P_{x-2}}=42$ egyenletet. $[x=7]$

Felhasználva: $V_{x,4}=x(x-1)(x-2)(x-3)$, $P_{x-4}=(x-4)!$,

$P_{x-2}=(x-2)!=(x-4)!\,(x-3)(x-2).$

9. Határozzuk meg $(a^2+b^3)^{13}$ kifejtésének hatodik tagját. $\left[1287a^{16}b^{15}\right]$

10. A binomiális tétel felhasználásával számítsuk ki $1{,}1^7$ értékét négy tizedes pontossággal. $\left[1{,}1^7\approx 1{,}9487\right]$

11. A *Pascal*-féle háromszög "n-edik" sorában lévő binomiális együtthatók összege 2^n. $\left[(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\right]$

4.6 A valószínűségszámítás elemei

A *valószínűségszámítás* a matematikának az a fejezete, amely véletlen tömegjelenségekre vonatkozó általános szabályok felállításával foglalkozik.

Kialakulása idejében, a XVI–XVII. században csak a szerencsejátékokkal kapcsolatos valószínűségek, a várható nyeremények kiszámításával foglalkozott, bár széles körű alkalmazhatóságát a természet és társadalom véletlentől függő jelenségeinek vizsgálatára már a nagy számok törvényének felfedezője, *Jakob Bernoulli* (1654–1705) is felismerte.

A valószínűségszámítás klasszikus elméletét *P. S. Laplace* (1749–1827) és *S. D. Poisson* (1781–1840) dolgozta ki. Szabatos matematikai elméletét (axiómáit) *A. N. Kolmogorov* 1933-ban fektette le.

A valószínűségszámítás szoros kapcsolatban áll a gyakorlati élettel. Pl. egy üzemben azonos feltételek mellett készített gyártmánysorozatból több alkalommal minőségileg ellenőriznek 1000-1000 darabot, s azt találják, hogy a minőségi előírásoknak meg nem felelő darabok száma 20 körül – azaz a minta selejthányada 2% körül – ingadozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a gyártási folyamat selejtgyártásának valószínűsége 2%, vagy másképpen $\frac{2}{100}$, azaz 0,02.

Egy hibátlan és egyenletes anyageloszlású (továbbiakban: szabályos) pénzérme feldobásakor annak valószínűsége, hogy írás kerül felülre, 50%, vagy $\frac{1}{2}$. Egy szabályos kocka feldobásakor annak valószínűsége, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal megjelölt lapok közül az 5-ös kerül felülre, azaz 5-öst dobunk, $\frac{1}{6}$.

Mind a pénzérme, mind a kocka feldobásakor a valószínűség feltételezett értékét csak úgy ellenőrizhetjük, hogy igen nagy számú dobást végzünk. Néhány dobás alapján nem juthatunk megnyugtató eredményre, mert előfordulhat pl. hogy pénznél az írás, kockánál az 5-ös szám véletlen folytán többször egymás után is felülre kerül.

Ezért hangsúlyozzuk, hogy *a valószínűségszámítás nagyszámú véletlen kísérlet, tömegjelenség vizsgálatával foglalkozik.* Minden olyan jelenség vizsgálatát, amely azonos körülmények között megismétlődik (ill. megismételhető) általános értelemben *kísérletnek* nevezzük.

Minden valószínűségszámítási problémában egy kísérlettel kapcsolatos *események* összességével foglalkozunk. Ha kockával dobunk, akkor az esemény egy szám, pl. az 5-ös szám dobása, amely az {1, 2, 3, 4, 5, 6} halmaz, más szóval *eseménytér* egy eleme. A kockadobás lehetséges kimenetelei, az *elemi események.* A továbbiakban az *eseményeket A, B, C,* ... betűkkel jelöljük.

Az esemény, az eseménytér részhalmaza, s így az események között – a halmazokhoz hasonlóan – értelmezhetők bizonyos műveletek, amelyek sok valószínűségszámítási probléma megoldásában felhasználhatók. A következőkben ezek alapjait ismertetjük.

4.7 Az eseményalgebra alapfogalmai

Ha az A és B események közül *legalább az egyik bekövetkezik,* akkor ezt az újabb eseményt

$$A + B$$

alakban jelöljük és az A, B események *összegének* nevezzük. Az $A \cup B$ jelölést is alkalmazhatjuk.

Ha mind az A, mind a B esemény *egyidejűleg bekövetkezik,* akkor ezt az újabb eseményt

$$AB$$

alakban jelöljük, és az A, B események *szorzatának* mondjuk. Halmazelméleti jelölése: $A \cap B$.

Azt az eseményt, hogy az A esemény nem következik be, $\overline{A}$ -sal (olv.: á felülvonás) jelöljük és az A esemény *kiegészítő* (*komplementer*) vagy *ellentétes eseményének* nevezzük.

Az A és B események *különbségét* $A\overline{B}$-sal definiáljuk, azaz

$$A - B = A\overline{B},$$

melynek jelentése, hogy A bekövetkezik, de B nem.

Ha az A esemény bekövetkezése *maga után vonja* a B esemény bekövetkezését is, akkor azt

$$A \subset B$$

alakban jelöljük. Ez a szorzás műveletével $AB = A$ alakban fejezhető ki.

Példák

Kockadobásnál legyen A az az esemény, hogy páros számot dobunk: $A = \{2, 4, 6\}$; B a kettőnél nagyobb szám dobásának eseménye: $B = \{3, 4, 5, 6\}$; C pedig a négynél nagyobb szám dobásának eseménye: $C = \{5, 6\}$.

Értelmezzük az A és B események

1. összegét; **2.** szorzatát; **3.** különbségét; **4.** $C \subset B$ relációt!

Megoldás

1. Az A és B esemény összege azt az eseményt jelenti, amikor a dobás eredménye páros szám vagy kettőnél nagyobb szám, tehát

$$A + B = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. Az AB szorzat azt az eseményt jelenti, hogy páros és egyúttal kettőnél nagyobb számot dobunk, vagyis csak a 4 és a 6 jöhet számításba:

$$AB = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}.$$

3. Az $A - B$ és $B - A$ különbségeket A-nak és B-nek a komplementere segítségével adjuk meg: $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{1, 2\}$.

$$A - B = A\overline{B} = \{2,4,6\} \cap \{1,2\} = \{2\}.$$

$$B - A = B\overline{A} = \{3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{3,5\}.$$

Tehát az $A - B$ különbség azt az eseményt jelenti, hogy A teljesül, de B nem; a $B - A$ különbség pedig azt az eseményt jelenti, hogy B teljesül, de A nem.

4. Az $A \subset B$ reláció nem teljesül, mivel $AB \neq A$. Mivel a C teljesülése maga után vonja a B bekövetkezését, hiszen

$$BC = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{5, 6\} = \{5, 6\} = C, \text{ tehát } C \subset B.$$

Az az esemény, amely egy kísérlet során biztosan bekövetkezik a *biztos esemény*; amely pedig sohasem következhet be, a *lehetetlen esemény*. A biztos esemény jele: I, a lehetetlen esemény jele: $\varnothing$. Egy eseménytér minden egyes elemi eseményét tartalmazó esemény, a definíció értelmében, biztos esemény.

Pl.: A kockadobás eseménytere a hat különböző szám dobásának megfelelően 6 elemi esemény halmaza: $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Az elemi eseményeket jelölje K_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, (pl. K_5 jelenti az 5-ös dobás eseményét), akkor a biztos esemény: $I = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6$, mivel minden dobásnál az egyik elemi esemény biztosan bekövetkezik. Tehát az összes elemi esemény összege alkotja az I biztos eseményt. Így mondható, hogy minden lehetséges esemény az I biztos eseményt alkotó elemi események valamilyen részhalmaza.

Valamely n számú esemény *teljes eseményrendszert* alkot, ha ezen események páronként kizárják egymást és közülük valamelyik biztosan bekövetkezik, azaz összegük a biztos esemény. Pl. a kockadobás 6 lehetséges K_i eseménye teljes eseményrendszert alkot, mivel egy közülük minden dobásnál bekövetkezik, de kettő egyszerre nem teljesülhet.

Az I biztos esemény komplementere a $\varnothing$ lehetetlen esemény, és $\varnothing$ komplementere pedig az I:

$$\overline{I} = \varnothing \quad \text{és} \quad \overline{\varnothing} = I.$$

Az eseményekre vonatkozó műveleti szabályok:

$$A + B = B + A \qquad AB = BA$$
$$A + A = A \qquad AA = A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$AB + A = A \qquad AB + B = B$$
$$A + \overline{A} = I \qquad A\overline{A} = \varnothing$$
$$A + \varnothing = A \qquad AI = A$$
$$A + I = I \qquad A\varnothing = \varnothing.$$

Valamely kísérletnek *végtelen sok elemi eseménye* is lehet, pl. egy kocka dobási sorozatában különböző elemi eseménynek tekintjük azt, hogy hatos először az első, a második, ... elvileg akárhányadik dobásnál lép fel.

Végtelen sok esemény összegének értelmezése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots,$$

vagyis az A_1, A_2, A_3, ... események közül legalább egy bekövetkezik.

Végtelen sok esemény szorzatának értelmezése:

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 A_2 A_3 \ldots,$$

vagyis az A_1, A_2, A_3, ... események mindegyike bekövetkezik.

4.8 A valószínűség tapasztalati megközelítése

Valamely véletlen esemény valószínűségéről tapasztalati úton, nagy számú, egymástól függetlenül elvégzett kísérlet alapján kaphatunk tájékoztatást. Ha a véletlen A esemény n számú kísérlet során k-szor következett be, akkor k-t az A esemény *gyakoriságának*, a $\frac{k}{n}$ hányadost pedig az A esemény *relatív gyakoriságának* nevezzük. A relatív gyakoriság értéke a véletlentől függ: ha a kísérletsorozatot azonos feltételek mellett megismételjük, a másodszorra kapott érték általában az elsőtől különböző lesz. A kísérletsorozat elegendő nagy számú ismétlése esetén azonban azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság már bizonyos stabilitást mutat, egy konstans számérték körül ingadozik, s az n értékének növelésével az ingadozás egyre csökken. Ezt a számértéket az A esemény $P(A)$ *tapasztalati valószínűségének* nevezzük.

4.9 A valószínűség matematikai fogalma

A valószínűség matematikai fogalmát a következő módon adhatjuk meg:

a valószínűség egy – az összes lehetséges események összességén értelmezett – valós értékű függvény. Minden A eseményhez hozzárendelünk egy $P(A)$ számot, amelyet az A esemény valószínűségének nevezünk, és amelyre a következő kikötéseket tesszük:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (A véletlen A esemény P(A) valószínűsége a [0; 1] intervallumba eső szám.)

2. $P(I) = 1$ (A biztos esemény valószínűsége 1.)

3. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, ha $AB = \varnothing$. (A páronként egymást kizáró események összegének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek összegével.)

A fenti axiómákat *Kolmogorov*-féle axiómáknak nevezzük.

Tételek. Néhány – a valószínűség 1.–3. axiómájából levezethető – tétel:

1. A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz

$$P(\varnothing) = 0.$$

Ui. a 3. tulajdonság alapján, ha $B = \varnothing$, akkor $AB = \varnothing$, és így

$$P(A) = P(A+\varnothing) = P(A) + P(\varnothing),$$

amiből $P(\varnothing) = 0$ következik.

2. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként kizárják egymást, vagyis $A_i A_k = \varnothing \ (i \neq k)$, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Ezt a 3. tulajdonság alapján teljes indukcióval igazolhatjuk.

3. Az $\overline{A}$ komplementer esemény valószínűsége az A esemény valószínűségének ismeretében a

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

összefüggéssel határozható meg.

Ui. $I = A + \overline{A}$, 2. szerint $P(I) = 1$, tehát 3. alapján:

$$1 = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}), \text{ és ebből } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

4. Ha az A esemény bekövetkezése maga után vonja a B esemény bekövetkezését, akkor

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

Ui. $P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B) =$

$$= P(A) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(B - A).$$

5. Ha az A esemény bekövetkezése maga után vonja a B esemény bekövetkezését, akkor

$$P(A) \leq P(B).$$

6. Tetszőleges A és B eseményre fennáll a

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

egyenlőség.

Ui. mindig igaz, hogy

$$A + B = A + (B - AB) \text{ és } A(B - AB) = \varnothing,$$

tehát $P(A + B) = P(A) + P(B - AB)$. Alkalmazva a második tagra a 4. tételt:

$$P(A + B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

4.10 A valószínűség klasszikus fogalma

Az olyan speciális esetekben, amikor az eseménytér véges számú (n) elemi eseményből áll s ezek mindegyike egyenlő valószínűséggel következhet be, *klasszikus valószínűségi mezőről* beszélünk. Más szóval,

klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük azt az eseményteret, melyet véges számú, egyenlően valószínű elemi események teljes rendszere alkot.

Ekkor nyilván mindegyik elemi esemény valószínűsége: $\frac{1}{n}$

Ha az A esemény k elemi eseményből áll, akkor a 3. tulajdonságból

$$P(A) = \frac{k}{n} \qquad (1)$$

következik.

Mivel a valószínűségszámítás kialakulásának kezdeti időszakában főként szerencsejátékokkal összefüggő kérdéseket oldottak meg, ezért k rendszerint a "kedvező" esetek számát, n pedig a lehetséges esetek számát jelentette, és minden egyes lehetséges kimenetel egyenlően valószínű volt. Így mondhatták, hogy valamely A esemény valószínűsége a kedvező esetek számának és a lehetséges esetek számának hányadosával egyenlő.

Klasszikus valószínűségi mező esetén bármely esemény valószínűsége a kombinatorika eszközeivel kiszámítható. (Ne feledjük, hogy ha egy esemény valószínűsége $\frac{k}{n}$ akkor n kísérletből a kedvező eset k-nál többször is, kevesebbszer is bekövetkezhet, de ha n elegendő nagy, a kedvező eset valóban közel k-szor következik be.)

Itt nyilvánvaló, hogy a valószínűség értéke általában valódi tört, mivel a kedvező esetek száma legfeljebb annyi, mint a lehetséges esetek száma. Ha $k = n$, akkor $P(A) = 1$, a valószínűség bizonyossággá válik; ha $k = 0$, akkor $P(A) = 0$, a kedvező esemény bekövetkezése lehetetlen. Ez összhangban van az 1. tulajdonsággal.

Mennyi annak valószínűsége, hogy a várt esemény nem következik be?

Pl.: Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos kockával nem ötöst dobunk?

Mivel annak valószínűsége, hogy 5-öst dobunk $P(A) = \frac{1}{6}$, ezért annak valószínűsége, hogy nem dobunk 5-öst, a 3. tétel értelmében, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; ez

közvetlenül is belátható, hiszen nem 5-öst ötféleképpen dobhatok, a lehetséges esetek száma pedig 6.

Általában, ha n a lehetséges esetek száma, k a kedvező eseteké, akkor a várt esemény be nem következésének valószínűségét a

$$P(\overline{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A)$$

képlettel adhatjuk meg. Tehát egy esemény be nem következésének valószínűségét megkapjuk, ha 1-ből kivonjuk az eredeti esemény bekövetkezésének valószínűségét.

Példák

1. Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kockával 9-et dobunk?

Megoldás: A lehetséges esetek számát hat elem másodosztályú ismétléses variációi adják, hiszen azonos lapú dobások is előfordulhatnak:

$$n = V_{6,2} = 6^2 = 36.$$

E dobások közül 9-et a következők adnak: 3 és 6; 6 és 3; 4 és 5; 5 és 4; tehát a kedvező esetek száma $k = 4$, s így

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

2. Mi a valószínűsége annak, hogy egy csomag magyar kártyából alsót húzunk?

Megoldás: Egy csomag magyar kártya 32 lapos, ezért a lehetséges esetek száma $n = 32$, s mivel a lapok között mindössze négy alsó van, így a kedvező esetek száma $k = 4$, tehát

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

3. Egy urnában 12 fehér és bizonyos számú fekete golyó van. Mennyi a fekete golyók száma, ha annak valószínűsége, hogy feketét húzunk, $\frac{2}{5}$?

Megoldás: A fekete golyók száma legyen x, akkor annak a valószínűsége, hogy fekete golyót húzunk: $\frac{x}{12+x}$, ezért $\frac{x}{12+x} = \frac{2}{5}$, amiből $x = 8$.

A 2. tétel értelmében annak a valószínűsége, hogy egymást kizáró $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül valamelyik bekövetkezzék, egyenlő az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események külön-külön számított valószínűségeinek összegével. Ez természetes is. Jelölje ui. az

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre a kedvező esetek számát $k_1, k_2, \ldots, k_n$, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$; akkor az n számú esemény valamelyikének bekövetkezési valószínűségére, $P(A)$-ra azt kapjuk – mivel a kedvező esetek száma: $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ –, hogy

$$P(A) = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} + \ldots + \frac{k_n}{n} =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Példák

1. Egy urnában 2 piros, 5 fehér, 1 zöld és 8 fekete golyó van. Mi a valószínűsége annak, hogy vagy pirosat, vagy feketét húzunk?

Megoldás: A lehetséges esetek száma $n = 16$, a kedvező eset a piros golyóra $k_1 = 2$, a feketére $k_2 = 8$, tehát $P(A_1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ és $P(A_2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Mivel egymást kizáró eseményekről van szó, így vagy piros, vagy fekete golyó húzásának valószínűsége:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{16} + \frac{8}{16} = \frac{2+8}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

2. Mi a valószínűsége annak, hogy két kockával nyolcat, vagy tízen felül dobunk?

Megoldás: A lehetséges dobások száma, mint már láttuk: $n = V_{6,2}^{i} = 6^2 = 36$. Nyolcat a 2 és 6; 6 és 2; 3 és 5; 5 és 3; 4 és 4 dobások adnak, $k_1 = 5$; tízen felüli dobást pedig az 5 és 6; 6 és 5; 6 és 6 lapok adnak, $k_2 = 3$, tehát $P(A_1) = \frac{5}{36}$ és $P(A_2) = \frac{3}{36}$, s így annak valószínűsége, hogy vagy nyolc, vagy tízen felüli dobásunk lesz, mivel az események egymást kizáróak:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

3. Egy csomag magyar kártyából vegyük ki a piros alsót. Mi a valószínűsége annak, hogy ebből a hiányos csomagból vagy alsót, vagy piros lapot húzunk? Miként oldjuk meg a feladatot hiánytalan csomag esetén?

Megoldás: A hiányos csomagban 3 alsó és 7 piros lap van, a lehetséges esetek száma pedig $n = 31$, tehát

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{3}{31} + \frac{7}{31} = \frac{10}{31},$$

mert a két esemény egymást kizárja.

Más problémával állunk szemben teljes kártyacsomag esetén, ui. akkor a piros húzására a kedvező esetek száma nyolc, az alsó húzására pedig négy, de piros alsót is húzhatunk, tehát a két esemény nem zárja ki egymást. Ilyenkor az összeadási tétel nem alkalmazható, mert a kedvező esetek száma nem 12, hanem 11, hiszen a piros alsót kétszer nem számíthatjuk; ezért $P(A) = \frac{11}{32}$ a valószínűsége annak, hogy hiánytalan csomagból vagy piros lapot, vagy alsót húzunk.

4.11 Geometriai valószínűségek

Az eddigiekben olyan véletlen jelenségekkel foglalkoztunk, ahol az elemi események száma véges. Vannak azonban bonyolultabb véletlen jelenségek is. Így pl. ha adott egy ponthalmaz alkotta geometriai alakzat (tartomány), a kísérlet egy pont találomra való kiválasztása, egy esemény pedig azt jelenti, hogy ez a pont beletartozik a tartomány bizonyos kijelölt résztartományába.

Ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége arányos a részhalmaz mértékszámával (terület, térfogat), akkor *geometriai valószínűségről* beszélünk.

Itt az elemi eseményeknek az alakzat pontjai felelnek meg, biztos eseménynek (eseménytérnek) pedig az egész alakzat. Ilyen esetben a valószínűségi mező előzőekben adott definíciója már nem kielégítő.

Nyilvánvaló ui., hogy az elemi események valószínűsége most is egyenlő. Ha ez pozitív lenne, akkor a valószínűség összegezési szabálya alapján a biztos esemény valószínűségére ∞ adódna. Ha viszont 0, akkor a biztos esemény valószínűségére 0-t kapnánk.

A valószínűségszámítás axiomatikus felépítését az ilyenfajta nehézségek tették szükségessé. A fenti esetben a problémát úgy oldják meg, hogy az eseményeket nem akármilyen ponthalmazokkal kapcsolatban értelmezik, hanem csak olyanokra, amelyek mértékszáma megadható.

Példa

Egy négyzet alakú, a oldalhosszúságú céltáblára lövéseket adunk le. Tegyük fel, hogy a céltáblára leadott minden lövés talál, és hogy a találatok egyenletesen oszlanak el, azaz bármely résztartományba esés valószínűsége arányos a résztartomány területével. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy egy a oldalú négyzetbe rajzolt $r \le \frac{a}{2}$ sugarú körbe talál a leadott lövés. Határozzuk meg az A esemény valószínűségét, $P(A)$-t.

Megoldás: Mivel feltételeztük, hogy minden lövés a céltáblába talál, így H-val jelölve ezt a biztos eseményt:

$$P(H) = 1$$

De a $P(H)$ valószínűség arányos a négyzet területével is, így

$$1 = P(H) = \alpha \cdot a^2, \text{ amelyből } \alpha = \frac{1}{a^2}.$$

Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy az r sugarú körbe találunk (egy eseménytérre azonos arányossági tényezőt véve):

$$P(A) = \alpha \cdot r^2 \cdot \pi,$$

és a kérdéses valószínűség a két terület hányadosa:

$$P(A) = \frac{r^2 \pi}{a^2},$$

ami $\frac{\pi}{4}$-nél kisebb, mivel feltettük, hogy $r \le \frac{a}{2}$.

4.12 Feltételes valószínűség és függetlenség

Gyakran előfordul az a feladat, hogy keressük az A esemény bekövetkezésének a valószínűségét, feltéve, hogy valamely más B esemény már bekövetkezett. Ilyenkor *feltételes valószínűségről* van szó.

Általában minden valószínűség "feltételes"-nek fogható fel, mivel egy véletlen eseménynek csak meghatározott feltételek között van meghatározott valószínűsége.

A valószínűségszámítás *Kolmogorov-féle* elméletében a feltételek egy bizonyos összességét azonban adottnak vesszük, s valamely esemény erre vonatkozó valószínűségét nem tekintjük feltételesnek.

Valamely A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott *feltételes valószínűségén* a

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost, vagyis a két esemény együttes bekövetkezéséhez tartozó valószínűségnek és a B esemény valószínűségének hányadosát értjük, ahol $P(B) > 0$.

A feltételes valószínűség közelítő értékét adja – elegendően nagy n számú független kísérlet elvégzése esetén – a $\frac{k_{AB}}{k_B}$ hányados, amelyet az A esemény B eseményre vonatkoztatott *feltételes relatív gyakoriságának* nevezünk. Ui.

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

A feltételes valószínűséget kifejező hányadosból a *valószínűségek szorzási szabályát* kapjuk:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Az A és B esemény független, ha egyiknek a bekövetkezése esetén a másik bekövetkezése nem lesz sem valószínűbb, sem kevésbé valószínű. Ekkor együttes bekövetkezésük valószínűsége egyenlő valószínűségeik szorzatával, azaz ha

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Ez ekvivalens azzal, hogy az A eseményeknek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége az A esemény valószínűségével egyenlő, azaz

$$P(A|B) = P(A).$$

Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független események, akkor

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Ha az A_1, A_2, ..., A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, és B tetszőleges esemény, akkor fennáll a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k) \qquad (2)$$

összefüggés, amelyet a *teljes valószínűség tételének* nevezünk.

A fentiekből következik a

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

összefüggés, amelyből a teljes valószínűség tétele alapján *Bayes tételét* kapjuk:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)}.$$

Legyen a klasszikus esetben az egyes A_1, A_2, ..., A_n események kedvező eseteinek száma k_1, k_2, ..., k_n; a lehetséges esetek száma n_1, n_2, ..., n_n; az események valószínűségei tehát

$$P(A_i) = \frac{k_i}{n_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az n esemény együtt akkor következik be, ha mindegyik eseménynek valamelyik kedvező esete megvalósul. Mivel az események függetlenek egymástól, akármelyik összes kedvező esete társulhat a többi összes kedvező esetével, ezért az események egyidejű bekövetkezésének $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ kedvező esete van. A lehetséges esetek száma hasonló meggondolással: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_n$. Ha mind az n esemény bekövetkezésének valószínűségét $P(A)$-val jelöljük, akkor

$$P(A) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_n} = \frac{k_1}{n_1} \cdot \frac{k_2}{n_2} \cdot \ldots \cdot \frac{k_n}{n_n} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Tehát erre a speciális esetre közvetlenül belátható a független események valószínűségének szorzási szabálya.

Példák

1. Két urna áll egymás mellett. Az egyikben 7 piros és 3 fehér golyó van, a másikban pedig 4 piros és 6 fehér. Mi a valószínűsége annak, hogy a két urnából egyszerre egy-egy piros golyót húzunk ki?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első urnából pirosat húzunk, $P(A_1)=\frac{7}{10}$; annak pedig, hogy a másikból húzunk pirosat, $P(A_2)=\frac{4}{10}$. Annak valószínűsége tehát, hogy mindkét urnából egy-egy piros golyót húzunk ki, mivel az események egymástól függetlenek:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{28}{100}=\frac{7}{25}\quad(=0{,}28).$$

2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha három szabályos pénzérmét feldobunk, vagy mindhárommal írást vagy mindhárommal fejet dobunk?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy mindhárom írás, a szorzási tétel értelmében: $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, mivel az események egymástól függetlenek és mindegyik $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be. A mindhárommal való fej dobásának is $\frac{1}{8}$ a valószínűsége, így, mivel a fej és írás dobása egymást kizáró események:

$$P(A)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\quad(=0{,}25).$$

3. Egy gép által gyártott 100 db gyártmány között 4 db selejtes. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ebből a 100 db-ból 10-et találomra kiválasztva, azok között 2 db selejtest találunk?

Megoldás: A lehetséges esetek száma annyi, ahányféleképpen 100 elemből 10 kiválasztható, azaz $n=\binom{100}{10}$. Számunkra az a "kedvező", ha a 10 kiválasztott gyártmány közül kettőt a selejtesekből és nyolcat a hibátlanokból választottunk. Mivel 100 db gyártmány közül 4 db a selejtes, ezért ebből a 4 db-ból kell kiválasztani a 2 db selejtest és 96 db-ból a 8 db hibátlant. Az előbbit $\binom{4}{2}$-féleképpen, az utóbbit $\binom{96}{8}$-féleképpen végezhetjük el, és így a kedvező esetek száma: $k=\binom{4}{2}\binom{96}{8}$, mivel minden egyes selejtpár kiválasztásához a $\binom{96}{8}$ kiválasztás bármelyike tartozhat. A keresett valószínűség tehát

$$\mathrm{P(A)}=\frac{\binom{4}{2}\binom{96}{8}}{\binom{100}{10}}=0{,}0459.$$

4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy lottószelvényen hármas találatunk legyen?

Megoldás: Hármas találatot egy számötösből $\binom{5}{3} = 10$-féle számhármas adhat; a számötös kihúzásának összes lehetséges esete: $\binom{90}{5}$. A számhármashoz a negyedik és ötödik számot 85-ből $\binom{85}{2}$-féleképpen választhatjuk, ezért a kedvező esetek száma (hármas találat: A esemény): $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$ s így a hármas találat valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = 0{,}000271$$

5. Egy irodában 100-an dolgoznak: 60 férfi és 40 nő. A férfiak közül 4, a nők közül 3 kék szemű. Mi a valószínűsége annak, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy nőt az kék szemű lesz?

Megoldás: Ha A jelenti azt az eseményt, hogy kék szeműt, B pedig azt, hogy nőt választunk ki, akkor AB, mint esemény a kék szemű nő kiválasztását jelöli. Annak a valószínűsége, hogy ha a találomra kiválasztott személy nő, akkor az kék szemű az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségével egyenlő.

Kék szeműek közül 3 a nő, tehát $P(AB) = \frac{3}{100}$ és 100-ból 40 a nő, tehát $P(B) = \frac{40}{100}$, így

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{3}{40} = 0{,}075.$$

4.13 A valószínűségi változó fogalma

Valószínűségi változónak nevezzük az olyan változó mennyiséget, amelynek értéke a véletlentől függ. Ilyen pl. a kockadobás eredménye, egy telefon központba bizonyos idő alatt beérkező hívások száma, egy bizonyos útszakaszon meghatározott idő alatt áthaladó járművek száma, stb.

A valószínűségi változókat a görög ξ, η, ζ, ... betűkkel jelöljük. Jelölje pl. ξ a kockadobásnál kapott pontszámot. Ekkor ξ értéke attól függ, hogy hányast dobunk, vagyis melyik elemi esemény következik be. Ha pl. 4-est dobunk, akkor $\xi = 4$. ξ tehát olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya az elemi események halmaza. Így mondható az, hogy *valószínűségi változón az eseménytéren értelmezett valós értékű függvényt értünk.* A kockadobásnál a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értéket veheti fel.

Az elemi eseményeket jelöljük A_1, A_2, ..., A_6-tal, akkor annak valószínűsége, hogy $\xi = i$, az A_i esemény valószínűségével egyenlő, vagyis

$$P(\xi = i) = P(A_i) = \frac{1}{6}, \text{ ha } i = 1, 2, \ldots, 6$$

és ez a valószínűség 0 minden más i értékre.

Ha egy kísérlet lehetséges kimeneteleiként nem adódnak közvetlenül számértékek – pl. egy pénzérme feldobásakor, amelynek eredménye fej vagy írás –, akkor a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazhatósága érdekében ezekhez sokszor hozzárendelünk valamilyen számértéket (valószínűségi változót). Pl. a fej eseménynek 1 értéket, az írás eseménynek pedig a 0 értéket feleltetjük meg, és így felírhatjuk, hogy

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}.$$

Valamely valószínűségi változót *diszkrétnek* nevezünk, ha lehetséges értékei véges vagy végtelen számsorozatot alkotnak, és *folytonosnak* mondjuk, ha lehetséges értékei a számegyenes egy véges vagy végtelen intervallumát folytonosan kitöltik.

Annak valószínűségét, hogy egy kockával legfeljebb négyet dobunk, $P(\xi \leq 4)$ vagy $P(\xi < 5)$ alakban jelöljük. A $\xi < 5$ esemény az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es dobásokkal jön létre; jelöljük ezeket az elemi eseményeket A_1, A_2, A_3, A_4-gyel, akkor

$$P(\xi < 5) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = \frac{2}{3} \approx 0,6666.$$

Legyen ξ egy valószínűségi változó, x pedig egy tetszőleges valós változó, akkor az

$$F(x) = P(\xi < x)$$

függvényt, amely minden x valós számra megadja, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel ξ az x-nél kisebb számértéket, a ξ valószínűségi változó *valószínűségeloszlás-függvényének*, röviden *eloszlásfüggvényének* nevezzük.

Ebből következően annak valószínűsége, hogy ξ értéke b-nél kisebb, de a-nál nem kisebb értéket vesz fel:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Ha az x és y valós számok tetszőleges választása mellett is a $\xi < x$ és az $\eta < y$ események egymástól függetlenek, akkor a ξ és η valószínűségi változókat *függetleneknek* nevezzük. Az

$$F(x|B) = P(\xi < x|B), \quad P(B) > 0$$

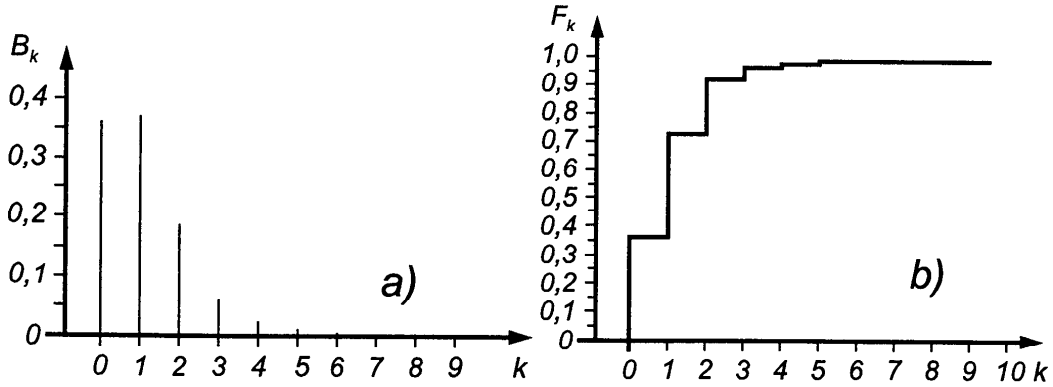
függvényt a ξ valószínűségi változó B feltételre vonatkozó *feltételes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

Aszerint, hogy a ξ valószínűségi változó diszkrét, ill. folytonos, *diszkrét,* ill. *folytonos eloszlásról* beszélünk. A diszkrét esetben, ha ξ az $x_1, x_2, \ldots$ értékeket veheti fel bizonyos $P_1, P_2, \ldots$ valószínűségekkel, akkor a $P_k = P(\xi = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ valószínűségek összességét ξ *valószínűségeloszlásának* nevezzük.

A P_k értékek és az $F(x)$ eloszlásfüggvény között az

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_k < x} P_k$$

összefüggés áll fenn, ahol az összegezést minden olyan k-ra kell kiterjeszteni, amelyre $x_k < x$ (61. ábra).



61. ábra. Diszkrét valószínűségi változó: *a*) eloszlása; *b*) eloszlásfüggvénye

Tekintsük pl. ξ valószínűségi változónak a két kocka feldobásánál kapott pontszámokat. Így ξ lehetséges értékei 2, 3, ..., 12 egész számok, vagyis

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ \ldots,\ x_{11} = 12 \quad \text{és} \quad P_k = P(\xi = x_k),\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 11.$$

Mivel a két kocka feldobásakor a lehetséges esetek száma 36, ezért

$$P_1 = P(\xi = x_1) = \frac{1}{36},\ P_2 = \frac{2}{36},\ \ldots,\ P_6 = \frac{6}{36},\ P_7 = \frac{5}{36},\ \ldots,\ P_{11} = \frac{1}{36}$$

A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2 \\ \sum\limits_{x_k < x} P_k, & \text{ha } 2 \le x \le 12 \\ 1, & \text{ha } x > 12 \end{cases}$$

Pl.: $F(5) = P(\xi < 5) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = P_1 + P_2 + P_3 =$

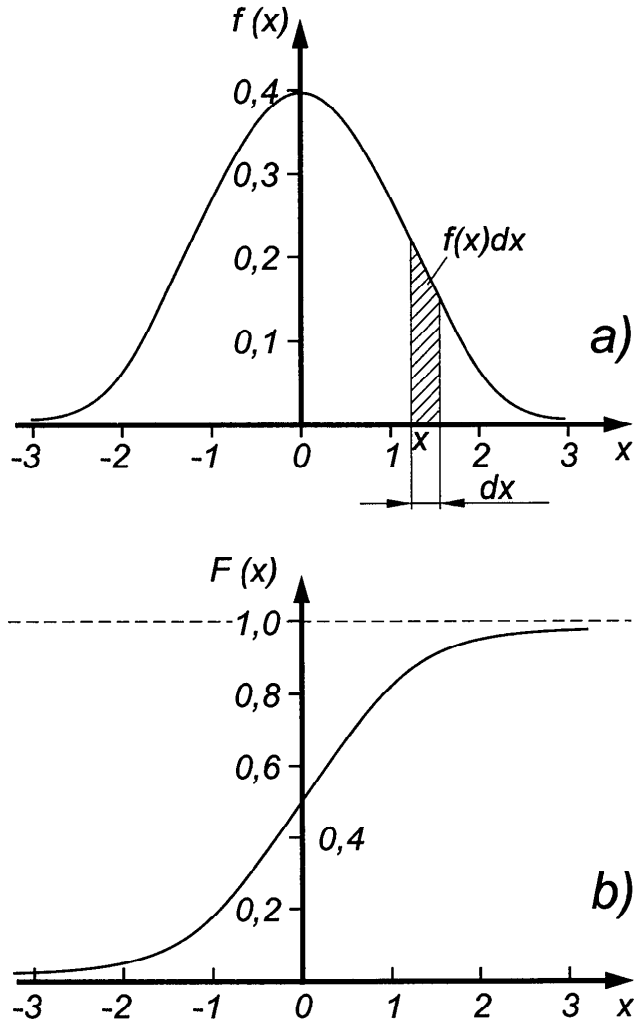
$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (= 0{,}1\dot{6}).$$

Folytonos eloszlásokra a $P(\xi = x)$ valószínűségek értéke a valószínűségi változó minden felvehető értékére 0; ezért helyettük célszerűen a *sűrűségfüggvény* fogalmát vezetik be.

Az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az *eloszlásfüggvény deriválásával* kapjuk meg, (l. a 9.2 pontot), azaz

$$f(x) = F'(x).$$

Szemléletesen annak valószínűsége, hogy ξ valamely igen kis $(x,\ x + \mathrm{d}x)$ intervallumba essék, közelítően $f(x)\,\mathrm{d}x$ értékével egyenlő (62. ábra).



62. ábra. Folytonos valószínűségi változó *a*) sűrűségfüggvénye; *b*) eloszlásfüggvénye

Az utóbbi tulajdonságokból tetszőleges sűrűségfüggvényre következik, hogy a koordinátarendszerben adott görbéje alatti terület egységnyi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Mint az eloszlásfüggvény értelmezéséből következik, tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton, nem csökkenő, balról folytonos függvény, melynek határértéke a $-\infty$-ben 0, és a $+\infty$-ben 1.

4.14 Néhány fontosabb eloszlás

a) Binomiális eloszlás

Tekintsünk egy olyan kísérletet, amelynek csak két kimenetele van: A és B. Legyen $P(A) = p$, $P(B) = q = 1 - p$. Ha azonos körülmények között n független kísérletet végzünk, mekkora annak a valószínűsége, hogy az A esemény pontosan k esetben következik be, azaz $\xi = k$. Annak valószínűsége, hogy az első k kísérletnél az A esemény fordul elő és a többi $n - k$ kísérletnél nem fordul elő:

$$p^k q^{n-k}.$$

Minden olyan sorrend valószínűsége, amelyben A esemény k-szor fordul elő, ugyanennyi, s mivel az összes különböző sorrendek száma $\binom{n}{k}$, ezért a keresett valószínűséget

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

képlettel adhatjuk meg.

Binomiális eloszlást kapunk pl. visszatevéses mintavételnél.

b) Hipergeometrikus eloszlás

Hipergeometrikus eloszlás adja meg pl. annak valószínűségét, hogy az M piros és $N - M$ fehér golyót tartalmazó urnából találomra egyszerre kiválasztott n golyó között k piros és $n - k$ fehér lesz:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad k \le M \le n.$$

Ezzel az eloszlással a visszatevés nélküli mintavételnél találkozunk.

c) *Elsőrendű negatív binomiális eloszlásnak* nevezzük azt az eloszlást, amelynél

$$P_k = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ilyen eloszlást kapunk pl. ha azt vizsgáljuk, hogy egy p valószínűségű esemény egy kísérletsorozat hányadik kísérletében következik be először. Például kockadobásnál annak valószínűsége, hogy a harmadik dobásra dobunk először hatost, a fenti képlet szerint

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}.$$

d) *A Poisson-eloszlásnak* igen fontos szerepe van pl. a gyártmányok hibáinak, telefonközpontok beérkezett hívásainak, kozmikus részecskék becsapódásainak leírásánál. A *Poisson*-eloszlás esetében

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

e) *Normális eloszlás.* A folytonos eloszlások közül talán a legfontosabb és legismertebb. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t,$$

ahol μ és σ paraméterek.

A normális eloszlás a gyakorlati élet számos jelenségének leírására alkalmas. Pl. automatagépen előállított gyártmányok mére-

tei gyakran normális eloszlással közelíthetők (62. ábra egy normális eloszlást ábrázol, amelyre $\mu = 0$, és $\sigma = 1$).

f) Exponenciális eloszlás. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Például egy radioaktív anyag atomjainak élettartama exponenciális eloszlású.

4.15 A valószínűségi változók jellemző adatai

A valószínűségi változó jellemzésére szolgáló legfontosabb számadat az ún. *várható érték.* Legyen a ξ valószínűségi változó diszkrét eloszlású, amely az $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékeket $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel veszi fel. Akkor az

$$M(\xi) = \sum_k x_k p_k$$

összeget ξ *várható értékének* nevezzük.

Folytonos ξ valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x, \text{ ha } \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergens,}$$

ahol $f(x)$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

A várható érték tehát az a centrum, amely körül a valószínűségi változó értéke ingadozik.

Az $M(\xi)$ várható értéket úgy becsülhetjük meg, hogy többször elvégezzük a kísérletet, és a ξ-re kapott értékek számtani közepét vesszük.

Egy ξ valószínűségi változó *ingadozásának mértékéül a*

$$D(\xi) = \sqrt{M\left[(\xi - M(\xi))^2\right]} = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)}$$

mennyiséget tekintjük, s ezt a ξ valószínűségi változó szórásának, ennek négyzetét, a $D^2(\xi)$ mennyiséget pedig varianciának vagy szórásnégyzetnek nevezzük.

Ha ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(\xi) = \sum_k p_k [x_k - M(\xi)]^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2$$

ha folytonos, úgy

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \right)^2 .$$

A várható érték és a szórás kizárólag a valószínűségi változó eloszlásától függ. Így ezeket az eloszlások várható értékeinek és szórásainak is nevezhetjük.

A binomiális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$

szórása:

$$D(\xi) = \sqrt{npq}, \quad \text{ahol} \quad q = 1 - p.$$

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n\frac{M}{N},$$

szórása:

$$D(\xi) = \sqrt{npq\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}, \quad \text{ahol } p = \frac{M}{N} \text{ és } q = 1-p$$

Az elsőrendű negatív binomiális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{1}{p},$$

szórása:

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{q}{p^2}}, \quad \text{ahol } q = 1-p.$$

Tehát kis p értékre a szórás közelítően egyenlő a várható értékkel.

A *Poisson*-eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \lambda,$$

szórása:

$$D(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

Tehát a *Poisson*-eloszlás szórásnégyzete mindig megegyezik várható értékével.

A normális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \mu,$$

szórása:

$$D(\xi) = \sigma.$$

Az exponenciális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda},$$

szórása:

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda},$$

tehát a várható érték és a szórás megegyezik.

Megjegyzés: Tapasztalati tény, hogy ha elegendő nagy számú független véletlen hatás összegeződik, akkor az egyes véletlentől függő mennyiségek ingadozásai bizonyos mértékig kiegyenlítődnek, és így az összeg értéke elég nagy pontossággal előre látható. Ezt a tapasztalati tényt írják le az ún. *nagy számok törvényei.* A legrégibb *Bernoulli törvénye*, amely azt mondja ki, hogy *egy esemény relatív gyakorsága és valószínűsége közti eltérés tetszőleges nagy biztonsággal tetszőleges kicsi lesz, ha a kísérletek száma elég nagy.* (Bizonyításokat l. pl. *Rényi A.*: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1954.)

Feladatok

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy csomag bridzskártyából a pikk dámát húzzuk? [$n = 52$; $k = 1$; $P(A) = \frac{1}{52}$.]

2. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockával 9-nél többet dobunk? [$n = 36$; $k = 6$; $P(A) = \frac{1}{6}$.]

3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockával vagy hatot, vagy tízen felül dobunk? [$n = 36$; $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $P(A) = \frac{2}{9}$.]

4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy csomag magyar kártyából tízest, alsót vagy felsőt húzunk ki? [$n = 32$; $k_1 = 4$, $k_2 = 4$, $k_3 = 4$, $P(A) = \frac{3}{8}$.]

5. Két urna közül az egyikben 4 piros és 5 zöld, a másikban 6 piros és 4 zöld golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy vaktában a két urna közül az egyikbe nyúlva piros golyót húzunk ki? [$P(A) = P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) = \frac{47}{90}$.]

6. Valamely urnában együttvéve 10 sárga és kék golyó van.Mennyi a sárga és a kék golyók száma külön-külön, ha annak valószínűsége, hogy először egy sárga golyót, másodszor pedig egy kék golyót húzunk ki, 6/25 (az először kihúzott golyót visszatesszük az urnába)? [$n = 10$, $k_1 = x$, $k_2 = 10 - x$, a sárga golyók száma 4 vagy 6, a kék golyók száma 6 vagy 4.]

7. Egy iroda 100 dolgozója közül 10-en beszélnek angolul. Mi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen lerakott személyi kartonok közül találomra 10-et kiválasztva pontosan egy angolul beszélő személy kartonja közte lesz?

$$[P(A)=\frac{10\binom{90}{9}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}41.]$$

8. Mi a valószínűsége annak, hogy az egyszerre feldobott három kocka mindegyikén négynél nagyobbat dobunk?

$$[P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.]$$

9. Valamely fegyver lövedékének célbajuttatása, bizonyos feltételek mellett $\frac{4}{5}$ valószínűséggel teljesül. Mi annak a valószínűsége, hogy 7 lövésből 5 célba talál?

$$[P_5=\binom{7}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)^2\approx 0{,}25.]$$

ÖTÖDIK FEJEZET

GEOMETRIA

5.1 SÍKMÉRTAN

5.1.1 A geometria tárgya, felosztása és fejlődése

A *geometria* a pontok, vonalak, felületek és testek alakjával, nagyságával, egymáshoz való viszonyával és mérésével foglalkozik.

A tárgyak tanulmányozása közben a geometria csak a térbeli tulajdonságokkal foglalkozik, minden más tulajdonságot (szín, keménység stb.) mellőz. Pl. egy 10 cm átmérőjű gumilabda és egy 10 cm átmérőjű vasgolyó – mivel térbeli tulajdonságai megegyeznek – geometriailag egyaránt 10 cm átmérőjű gömb.

A geometriai *testeknek* háromirányú kiterjedésük van. Ilyen pl. egy tégla alakú test hosszúsága, szélessége, magassága. A geometriai testet *felület* határolja. A felületet vastagság nélkülinek képzeljük el. A felület két szomszédos részét egymástól *vonal* választja el, ennek csak hosszúsága van. A vonal két szomszédos szakaszát *pont* választja el egymástól. Elképzelésünk szerint a pontnak semmilyen kiterjedése nincsen. A pontok, vonalak, felületek vagy testek bizonyos kapcsolatát *geometriai alakzatnak* nevezzük. A *síkmértan* (*planimetria*) a síkban levő alakzatokkal, a *térmértan* (*sztereometria*) pedig a térben levő alakzatokkal foglalkozik. A pont, az egyenes, a sík együttes neve: *térelemek.*

A geometria kialakulását a mindennapi élet szükségleteinek kielégítése ösztönözte. Az írott emlékek is ezt tanúsítják. Egyiptomban és Babilóniában kb. 4000 évvel ez-

előtt a terület és térfogat mérésére szabályokat állítottak össze. A *geometria* (földméréstan) szó is erre utal. A babilóniaiaktól és egyiptomiaktól a görögök vették át a geometriai ismereteket, és ők jutottak arra a gondolatra, hogy a tapasztalati úton szerzett geometriai ismereteket logikai ellenőrzéssel lehet megbízhatóvá és pontosabbá tenni.

A geometria fejlődésének e második szakaszában a görög matematikusok közül nevezetesebbek: *Thalész* (i.e. kb. 624?–548?), *Anaxagorasz* (i.e. 499–428), *Pitagorasz* (i.e. 560?–480?), *Platón* (i.e. 427–347), *Eukleidész* (i.e. 365?–300?), *Arkhimédész* (i.e. 287?–212), *Apolloniosz* (i.e. kb. 260?–190?), és *Ptolemaiosz* (i.sz. 100?–170?). Közülük *Eukleidész* "*Elemek*" című művében a geometriai ismereteket rendszerbe foglalta, s ennek a 13 könyvből álló műnek volt a geometria fejlődésében a legnagyobb jelentősége. *Eukleidész* az első könyvben geometriai rendszerét alapfogalmakról szóló alaptételekre (*axiómákra,* amelyek közül egyeseket *posztulátumoknak* nevez) és meghatározásokra (*definíciókra)* építette fel. Ilyen alapfogalmak pl. a pont, az egyenes, a szög stb., és a róluk szóló posztulátumok a következők:

I. Minden pontból minden ponthoz húzható egyenes.
II. Minden egyenesdarab folyamatosan meghosszabbítható.
III. Minden középpont körül tetszőleges sugárral kör rajzolható.
IV. A derékszögek egymással mind egyenlők.
V. Ha két egyenest egy harmadik metsz, akkor azok a metszőnek azon az oldalán találkoznak, amelyen a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

Az V. posztulátum okozta a legnagyobb matematikai problémát, amelynek az I.–IV. axiómák alapján való bizonyításával évszázadokon át eredménytelenül próbálkoztak a tudósok. *Eukleidész* 17. tételének (a háromszög bármelyik két szögének összege kisebb két derékszögnél) a megfordítása az V. posztulátum, és a 17. tételt *Eukleidész* a többi axióma alapján le tudta vezetni. A 17. tétel megfordítását azonban *Eukleidész* sem tudta levezetni a többi axióma alapján, s ma már tudjuk, hogy nem is vezethető le.

A XIX. sz. első felében vette észre (kb. egyidőben és egymástól függetlenül) *Bolyai János* (1802–1860) magyar, *N. I. Lobacsevszkij* (1792–1856) orosz és *C. F. Gauss* (1777–1855) német matematikus, hogy az V. posztulátum elhagyásával levezethető geometriában sem jelentkezik ellentmondás.

Az V. posztulátum az "*Elemek*" egyik kiadásában a XI. sorszámot kapta, így utal rá *Bolyai János* is híres munkájában, az "*Appendix*"-ben, ahol ezen axiómától független "*abszolút*" tételek megállapítására törekedett, és kimutatta, hogy az V. posztulátum elhagyásával felépített geometria sem tartalmaz ellentmondást. Az így nyert geometriát nevezzük *abszolút geometriának.*

Az V. posztulátumot gyakran helyettesítik a következővel: a háromszög szögeinek összege két derékszög összegével egyenlő. *Lobacsevszkij a "szögösszeg* < $2R$" geometriát dolgozta ki részletesen ($R = 90°$), s ezt a geometriai rendszert nevezzük *hiperbolikus vagy Lobacsevszkij-féle geometriának. Bolyai* pedig *Lobacsevszkijtől* függetlenül, de vele egyidőben a *hiperbolikus és az eukleidészi geometriát együtt* tárgyalja (szögösszeg $\leq 2R$).

Bolyai és *Lobacsevszkij* munkái mutatták meg, hogy a geometriai kutatást az axiómarendszer ellentmondásnélküliségének vizsgálatára kell alapozni (l. a *Megjegyzést*), amivel megnyitották az általános matematikai térfogalom kialakulásához vezető utat. Ebben az irányban a XIX. században nagyobb eredményt értek el: *Cayley* (1821–1895) angol, *Cauchy* (1789–1857) francia, *Grassmann* (1809–1877) és *Riemann* (1826–1866) német matematikusok.

Az *általános matematikai tér fogalmát* pedig csak a XX. sz. elején *Riesz Frigyes* (1880–1956) magyar és *M. Frechet* (1878–1973) francia matematikusok definiálták (különböző módon), s ez az absztrakt matematikai térfogalom vezetett el az ún. *Hilbert-féle tér* felépítéséhez, amelyet *D. Hilbert* (1862–1943) német matematikusról neveztek el.

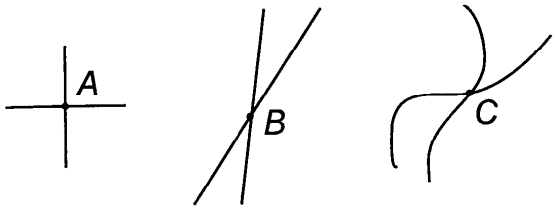
Megjegyzés: Az axiómarendszertől megkívánjuk, hogy az axiómák *a*) egyszerűek; *b*) egymástól függetlenek legyenek; valamint az axiómarendszer *c*) ellentmondásnélküli és *d*) teljes legyen.

A gyakorlati életben az Eukleidész-féle geometriát használjuk.

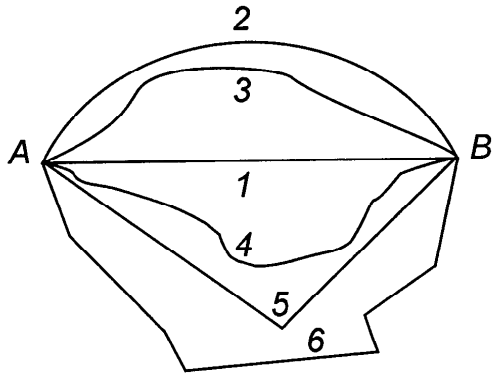
5.1.2 A pont és vonal

A pont és a vonal geometriai alapfogalmak (l. az előző pontot). A pont megjelölésére a dőlt latin nagybetűket használjuk. Két vonal közös pontját *metszéspontnak* nevezzük (63. ábra).

A sík két pontja – *A* és *B* – különféle vonalakkal köthető össze (64. ábra).



63. ábra. Metszéspontok



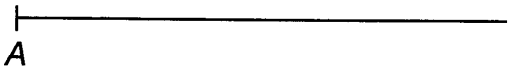
64. ábra. A sík két pontját összekötő vonalak

A 64. ábrán a két pont között a legrövidebb az 1 *egyenes* vonaldarab. A 2, 3, 4 görbe vonalak közül a 2 *körív*. Az 5 és 6 vonalat, amely egyenes darabokból áll, *törött vonalnak* mondjuk.

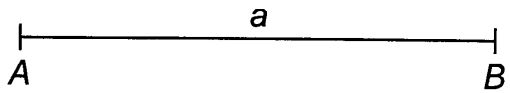
A tér két pontján keresztül csak egy egyenes húzható, tehát ha egy egyenes két pontja egy másik egyenes két pontjával egybeesik, a két egyenes fedi egymást. Két különböző egyenesnek csak *egy* metszéspontja lehet. Az egyenest végtelennek képzeljük; az egyik oldalról határolt egyenest *félegyenesnek,* a mindkét oldalról határolt egyenesdarabot *szakasznak* nevezzük (65.–68. ábra).

A szakaszt a két végpontjához írt két dőlt latin nagybetűvel, vagy a szakasz közepére írt dőlt latin kisbetűvel jelöljük. Pl. *AB* vagy *a* (olv.: ábé vagy á szakasz) (67. ábra).

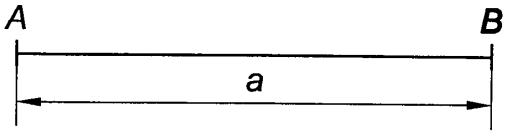
65. ábra. Egyenes



66. ábra. Félegyenes



67. ábra. Szakasz

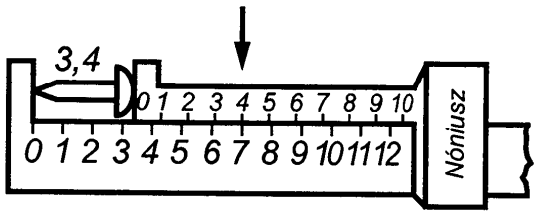


68. ábra. Szakasz műszaki jelölése

A szakasz műszaki jelölését a 68. ábra mutatja. A szakasz *hosszát* (két pont távolságának a szokásos jelölése: *AB* vagy $\overline{AB}$ vagy *d*(*AB*)), *méréssel* határozhatjuk meg. A *hosszúság* egysége a *méter*: m, amely közelítőleg a Föld egyenlítőjének 40 milliomod része (l. az 5.1.15 pontot). Kisebb távolságok mérésére a decimétert (dm), a centimétert (cm) és a millimétert (mm), nagyobb távolságok mérésére pedig a kilométert (km) használjuk:

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;1 km = 1000 m.

Hosszúságmérő eszközeink pl. a *mérőléc* és a *mérőszalag.*

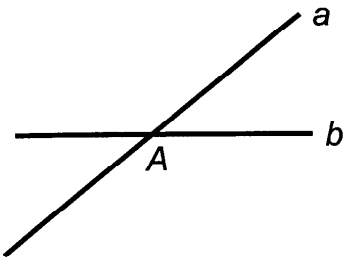


69. ábra. Nóniusz

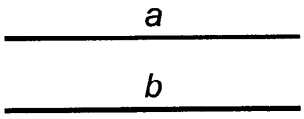
Ha kis távolságokat tizedmilliméter pontossággal akarunk mérni, akkor *nóniuszt* használunk. A nóniusz lényegében egy állómércére szerelt, elcsúsztatható másik mérce, amelyen az állómérce 9 egységének megfelelő hosszúság (9 mm) 10 egyenlő részre van felosztva. Ha mérésnél a nóniusz 0-vonala

nem esik egybe az állómérce valamely osztóvonalával, akkor megnézzük, hogy a nóniusz hányadik osztóvonala esik egybe az állómérce egyik osztóvonalával. Ez adja a hosszúságegység tizedrészeit (69. ábra).

A sík két egyenese vagy metszi egymást (70. ábra), vagy párhuzamos egymással (71. ábra).

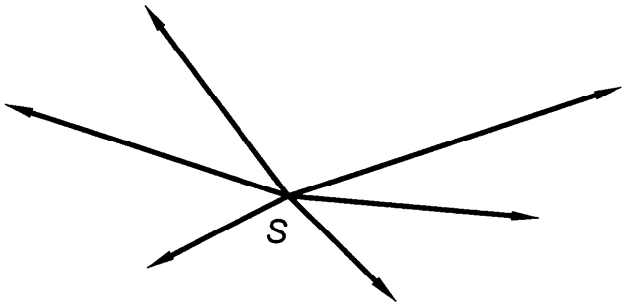


70. ábra. Metsző egyenesek

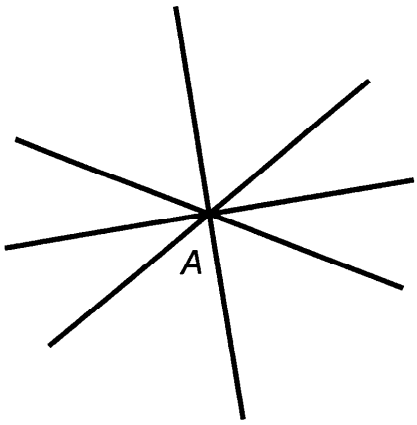


71. ábra. Párhuzamos egyenesek

Ha az a és b egyenes párhuzamos egymással, akkor azt így jelöljük: $a \parallel b$. Egy pontból végtelen sok félegyenes húzható (72. ábra). Egy ponton keresztül végtelen sok egyenes húzható, ezt *egyenesseregnek* (*sugársornak*) nevezzük (73. ábra).



72. ábra. Félegyenesek

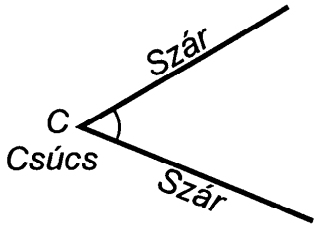


73. ábra. Egyenessereg

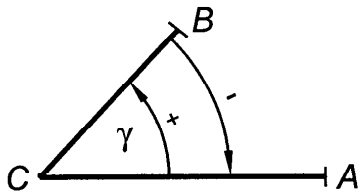
5.1.3 Szögek és szögpárok

A szög olyan síkrész, amelyet egy pontból kiinduló két félegyenes határol. A szöget alkotó félegyenesek a szög *szárai*, közös pontjuk a szög *csúcsa* (74. ábra). A szög szárai a síkot két részre osztják,

ezeket *szögtartományoknak* nevezzük, s ezek közül a szóba jövő szöget körívvel jelöljük meg. A *szög* jele: $\angle$. A szöget vagy három nagybetűvel adjuk meg oly módon, hogy egy betűt a csúcshoz, egyet-egyet pedig a szög szárait helyettesítő egyenesszakaszok másik végpontjához írunk, pl. $ACB\ \angle$ (a szög csúcsát jelölő betű középen van; 75. ábra), vagy csak a csúcshoz írt nagybetűvel, pl. $C\ \angle$ vagy a szög nyílásába írt, a csúcs latin betűjének megfelelő görög kisbetűvel, pl. γ .



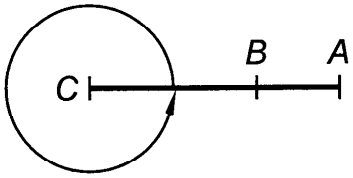
74. ábra. Szög



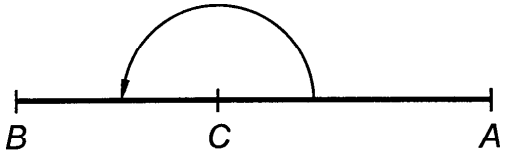
75. ábra. A szög megadása

A szöget származtathatjuk forgásból is úgy, hogy két közös kezdőpontú egymást fedő félegyenes közül az egyiket a kezdőpont körül elforgatjuk. Ha a mozgó szár elforgatása az *óramutató járásával ellenkező irányú* akkor a szöget *pozitívnak*, ha pedig *egyező irányú, negatívnak* mondjuk (75. ábra). A szög nagyságát az elforgatás nagyságával mérjük, a forgatási irány figyelmen kívül hagyásával.

Ha a *CA* szárból kiindulva, egy teljes körülforgást tesz meg a *CB* szár, akkor *teljes-* (76. ábra), ha félkörforgást tesz meg, akkor *egyenes-* (77. ábra), ha pedig negyed körforgást végez, akkor *derékszöget* (78. ábra) kapunk. A derékszöget a latin *Rectus* (egyenes, merőleges) szó kezdőbetűjével, *R*-rel szokás jelölni. Ábrán beírt ponttal is jelöljük.

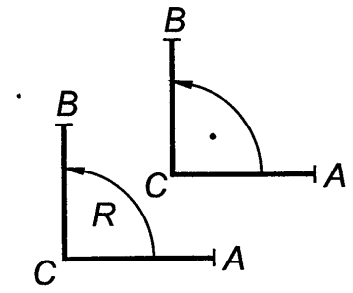


76. ábra. Teljesszög

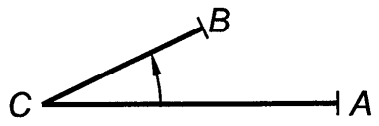


77. ábra. Egyenesszög

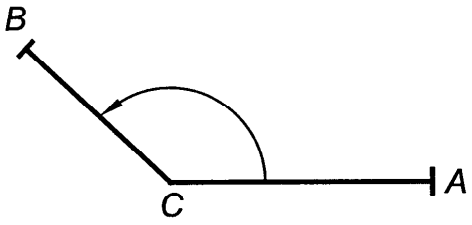
A derékszögnél kisebb szöget *hegyes-* (79. ábra), a derékszögnél nagyobbat, de az egyenesszögnél kisebbet *tompa-*, (80. ábra), ezeket együttesen *domborúszögeknek (konvex szögek)*, az egyenesszögnél nagyobbat pedig *homorúszögnek* (81. ábra) nevezzük.



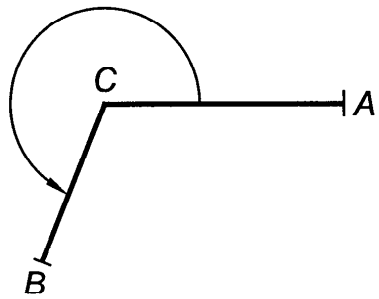
78. ábra. Derékszög



79. ábra. Hegyesszög, domborúszög



80. ábra. Tompaszög, domborúszög



81. ábra. Homorúszög

A szögmérés mértékegysége az 1 fok, jele: 1°; ez a teljes szög 360-ad része. A fok 60-ad része a perc ('), a perc 60-ad része a másodperc ("), tehát: 1° = 60' = 3600"; 1' = 60"; $1' = \frac{1°}{60} \approx 0{,}0167°$

$1'' = \frac{1°}{3600} \approx 0{,}0003°$ és 0,1° = 6' továbbá 0,01° = 36".

Pl. 25° 36' 18" = 25,605°; kimondva: 25 fok 36 perc 18 másodperc egyenlő 25 egész 605 ezred fokkal. A teljesszög $4R = 360°$, az egyenesszög $2R = 180°$, a derékszög $R = 90°$.

A szög mérésére használatos még az ún. *újfok* (*grádus*), jele 1^g, amely a teljesszög 400-ad része, tehát a teljesszög= 400^g; az egyenesszög= 200^g; a derékszög= 100^g.

Az újfok 100-ad része az *újperc*, jele: 1^c, az újperc 100-ad része az *újmásodperc*, jele: 1^{cc}, tehát $1^g = 100^c = 10000^{cc}$; és $1^c = 100^{cc}$.

Így valamely újfok, újperc, újmásodperc egységekkel adott szög minden külön számítás nélkül tizedes alakban felírható. Pl. $58^g32^c41^{cc}$ helyett $58{,}3241^g$ írható.

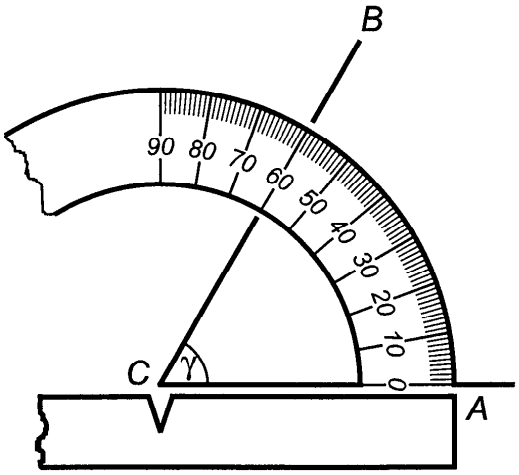
(A szögmérés speciális egysége a *vonás*, a teljesszög 6000-ed része. A tüzérségi lövéstanban használták: $1^- = \frac{360°}{6000} = 0{,}06°$.)

A szög *ívmértékének* vagy *abszolút mértékének* az egysége az 1 *radián*. Jele: 1 rad.

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \approx \frac{3{,}141592654}{180}\,\text{rad} \approx 0{,}017453293\,\text{rad}$$

(bővebben l. a 5.1.15 pontban).

A szögek mérésére *szögmérőt* használunk, mely egy 180°-ra felosztott félkörből áll. Szögmérővel a szög mérését a 82. ábrán látható módon végezzük.



82. ábra. Szögmérő

Példák

1. Adjuk össze a 39°48'25" és a 81°23'54" szögeket!

Megoldás:
$$\begin{array}{r} 39°48'25" \\ +\ 81°23'54" \\ \hline 120°71'79" \end{array} = 121°12'19".$$

2. Vonjunk ki 180°-ból 115°41'29"-et!

Megoldás:

$$\left.\begin{array}{r} 180°\ 0'\ 0" \\ -\ 115°41'29" \end{array}\right\} \text{ helyett } \left\{\begin{array}{r} 179°59'60" \\ -\ 115°41'29" \\ \hline 64°18'31". \end{array}\right.$$

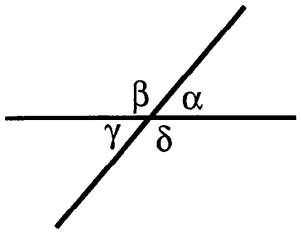
Nevezetesebb szögpárok:

a) Két egyenes metszéspontja körül keletkező szögek (83. ábra) közül azok, amelyeknek a szárai egymás meghosszabbításai: *csúcsszögek* (α és γ; β és δ) azok pedig, amelyeknek egyik szára közös, másik szára egymás meghosszabbítása: *mellékszögek* (α és β; β és γ; γ és δ; δ és α).

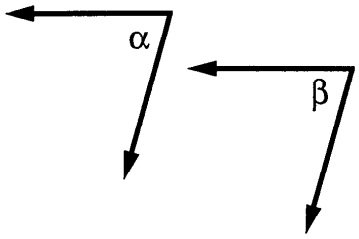
A mellékszögek összege 180°; a csúcsszögek egyenlők.

Azokat a szögeket, amelyek 180°-ra egészítik ki egymást, *kiegészítő szögeknek* nevezzük. Tehát a mellékszögek kiegészítő szögek: pl. α és β; ui. α + β = 180°, stb.

b) Azok a szögek, amelyeknek szárai egymással párhuzamosak és megegyező irányúak: *egyállású szögek* (84. ábra α és β szög).

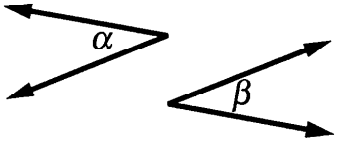


83. ábra. Csúcsszögek és mellékszögek

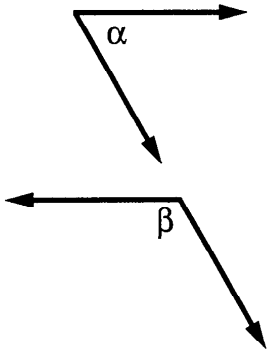


84. ábra. Egyállású szögek

Azok a szögek, amelyeknek szárai egymással párhuzamosak és ellentétes irányúak, *váltószögek* (85. ábra α és β szög); azok az egymással párhuzamos szárú szögek pedig, amelyeknek az egyik száruk megegyező, a másik száruk azonban ellentétes irányú: *társszögek* (86. ábra α és β szög).



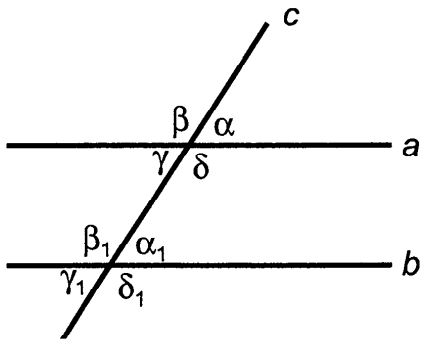
85. ábra. Váltószögek



86. ábra. Társszögek

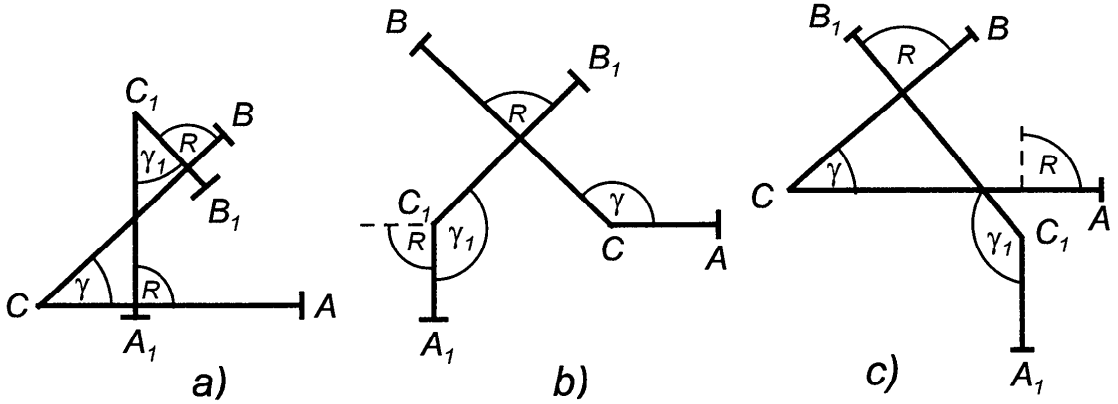
Az egyállású szögek és a váltószögek egyenlők, a társszögek pedig kiegészítő szögek.

Megjegyzés: Ha két párhuzamost egy harmadik egyenessel metszünk (87. ábra), akkor az ott keletkező szögek közül is a fenti definícióknak megfelelőket váltószögeknek (pl. α_1 és γ), egyállású szögeknek (pl. α_1 és α); és társszögeknek (pl. α_1 és δ) nevezzük. A szögek helyzete szerint szokás *külső szögekről* (pl. α és δ_1), valamint *belső szögekről* (pl. γ és β_1) beszélni.



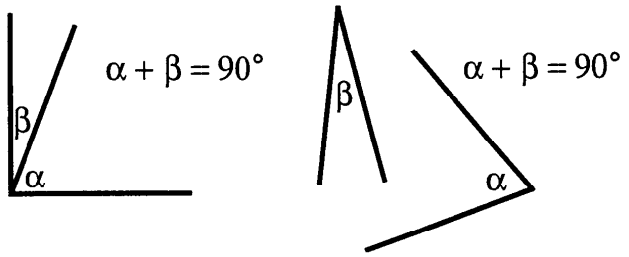
87. ábra. Váltószögek (pl. α_1 és γ); egyállású szögek (pl. α_1 és α); társszögek (pl. α és δ_1)

c) Ha két szög szárai merőlegesek egymásra, és a szögpár mindkét szöge hegyes- vagy mindkét szöge tompaszög, akkor a két szög egymással egyenlő (88. *a* és *b* ábra), ha az egyik hegyes-, a másik tompaszög, akkor pedig 180°-ra egészítik ki egymást (88. *c* ábra). (Mindhárom eset igazolható, ha egyik szögüket 90°-kal elforgatjuk, és a csúcsokat fedésbe hozzuk.)



88. ábra. Merőleges szárú szögek; *a*) mindkettő hegyesszög; *b*) mindkettő tompaszög; *c*) az egyik hegyesszög, a másik tompaszög

Megjegyzés: Az olyan szögpárokat, amelyeknek összege 90°, *pótszögeknek* nevezzük (89. ábra).



89. ábra. Pótszögek

5.1.4 Háromszögek

A sík három nem egy egyenesre eső pontját jelölje *A*, *B* és *C*. Az *AB*, *BC* és *CA* egyenesszakaszokkal határolt *síktartományt*, *síkalakzatot háromszögnek* nevezzük.

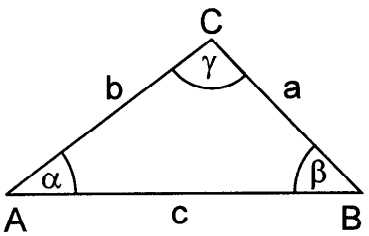
A *háromszög* (90. ábra) csúcsait latin nagybetűkkel, a szögeket a csúcsokhoz írt betűknek megfelelő görög kisbetűkkel, az oldalakat a szemben levő csúcsoknak megfelelő latin kisbetűkkel jelöljük. Az oldalak és a szögek a háromszög *alkotórészei.* A háromszögeket szögeik és oldalaik szerint is megkülönböztetjük.

Egy háromszög szögei szerint lehet:

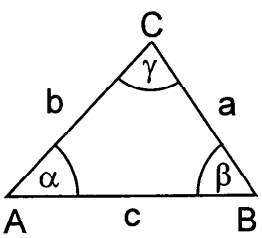
a) *hegyesszögű*, amelyben mindhárom szög hegyes (91. ábra);

b) *derékszögű*, amelyben az egyik szög derékszög (92. ábra). A derékszöget bezáró oldalak a *befogók*, a derékszöggel szemben fekvő oldal az *átfogó*;

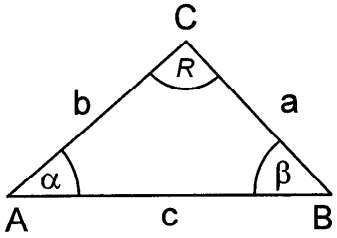
c) *tompaszögű*, amelyben az egyik szög tompaszög (93. ábra).



90. ábra. Háromszög



91. ábra. Hegyesszögű háromszög

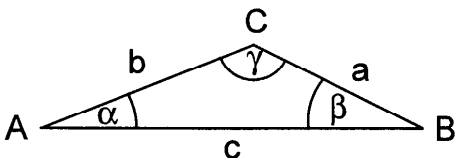


92. ábra. Derékszögű háromszög

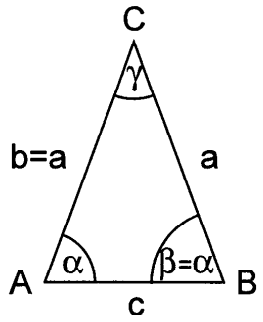
Egy háromszög oldalai szerint lehet:

a) *egyenlő szárú*, ha két oldala egyenlő (94. ábra $a = b$). A két egyenlő oldal a *háromszög szárai*, a harmadik oldal az *alap*;

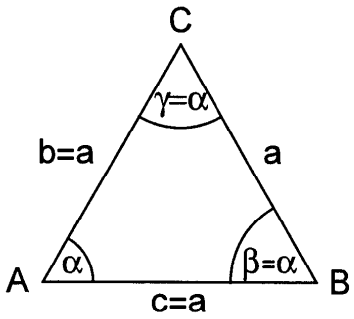
b) *egyenlő oldalú*, ha mindhárom oldala egyenlő (95. ábra $a = b = c$).



93. ábra. Tompaszögű háromszög



94. ábra. Egyenlő szárú háromszög



95. ábra. Egyenlő oldalú háromszög

A háromszög alkotórészei között fennálló összefüggések:

a) Két oldal összege mindig nagyobb a harmadik oldalnál,

mivel két pont között a legrövidebb út az egyenes (96. ábra):

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b.$$

b) Két oldal különbsége mindig kisebb a harmadik oldalnál.

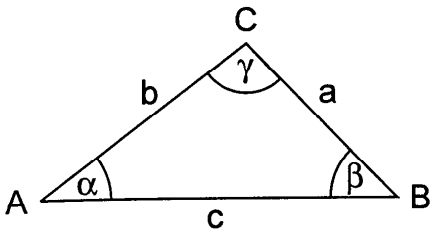
Ez az *a*) pontban felírt egyenlőtlenségekből következik:

$$|c - a| < b, \quad |a - b| < c, \quad |b - c| < a.$$

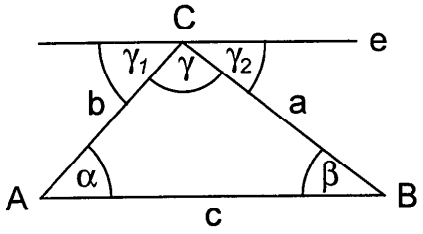
c) A szögek összege minden háromszögben 180°, azaz $2R$

(97. ábra). Húzzunk az $ABC\Delta$ C csúcspontján keresztül a c oldallal párhuzamos egyenest (e), akkor a C csúcsnál γ_1 és γ_2 szög keletkezik: $\gamma_1 + \gamma + \gamma_2 = 180°$, de $\gamma_1 = \alpha$ és $\gamma_2 = \beta$, mert váltószögek, ezért

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = 2R.$$



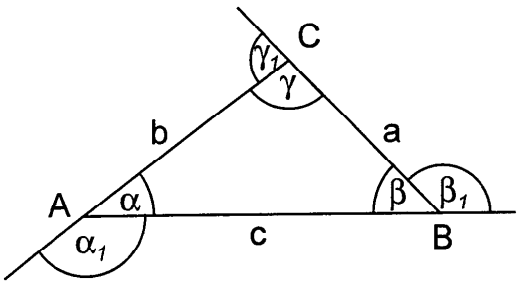
96. ábra. Háromszög



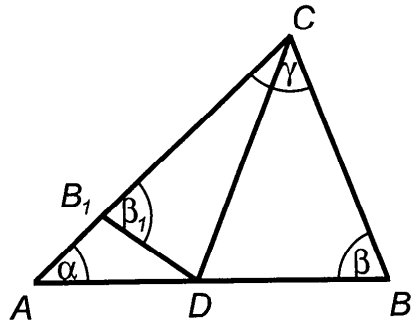
97. ábra. A háromszög szögeinek összege 180°

d) A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette levő két belső szög összegével.

A háromszög bármely oldalának meghosszabbításakor keletkező mellékszöget nevezzük *külső szögnek* (98. ábra α_1, β_1, γ_1).



98. ábra. Összefüggés a külső és belső szögek között



99. ábra. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik

Ui.: $\alpha_1 + \alpha = 180°$, mert mellékszögek és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, tehát $\alpha_1 + \alpha = \alpha + \beta + \gamma$, amiből $\alpha_1 = \beta + \gamma$ és hasonlóan $\beta_1 = \alpha + \gamma$, $\gamma_1 = \alpha + \beta$.

A külső szögek összege 360°.

Ui.: $(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)=540°$, s mivel $\alpha+\beta+\gamma=180°$, ezért $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=540°-180°=360°$.

e) Minden háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik

(99. ábra). Legyen az $ABC\Delta$-ben $AC > BC$, és CD felezze a γ szöget. Az AC oldalra mérjük rá a C csúcsból a CB oldalt, s az így kapott B_1 pontot kössük össze a D ponttal. $\beta_1 > \alpha$, mert az $AD B_1\Delta$ külső szöge, s mivel $\beta_1 = \beta$ (l. az 5.1.5 pontot), ezért $\beta > \alpha$.

A tétel megfordítva is fennáll, vagyis

a háromszögekben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

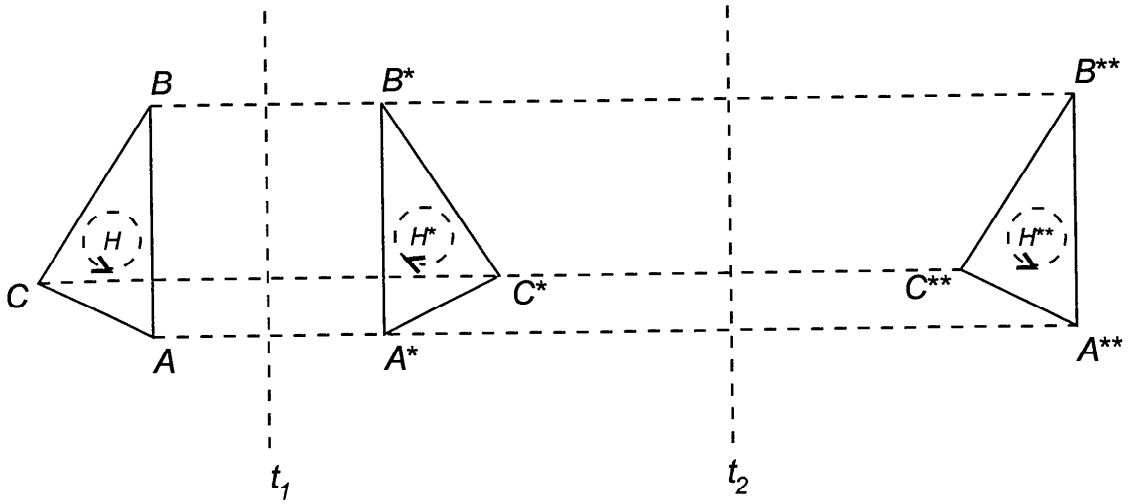
A fentiekből következik, hogy *a háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek fekszenek*; tehát az egyenlő szárú háromszögekben az alapon fekvő szögek mindig egyenlők, az egyenlő oldalú háromszögekben pedig mindhárom szög egyenlő, azaz mindegyik 60°-os.

5.1.5 Háromszögek egybevágósága

A sík valamely geometriai alakzatának ponthalmazához egy egyértelműen megadott előírás szerint hozzárendelhetünk egy másik ponthalmazt. A síkalakzat ponthalmazaihoz egy másik ponthalmaz hozzárendelését *geometriai transzformációnak* vagy *leképezésnek* nevezzük. Ilyen előírás lehet pl. az alakzat eltolása (99. *a* ábra H és H^{**} háromszög), egy pont körüli elforgatása (99. *b* ábra H és H^* háromszög), tengelyes tükrözése (99. *a* ábra H és H^* háromszög) és középpontos tükrözése (99. *b* ábra L és L^* háromszög). A felsorolt transzformációk a sík két pontja által meghatározott

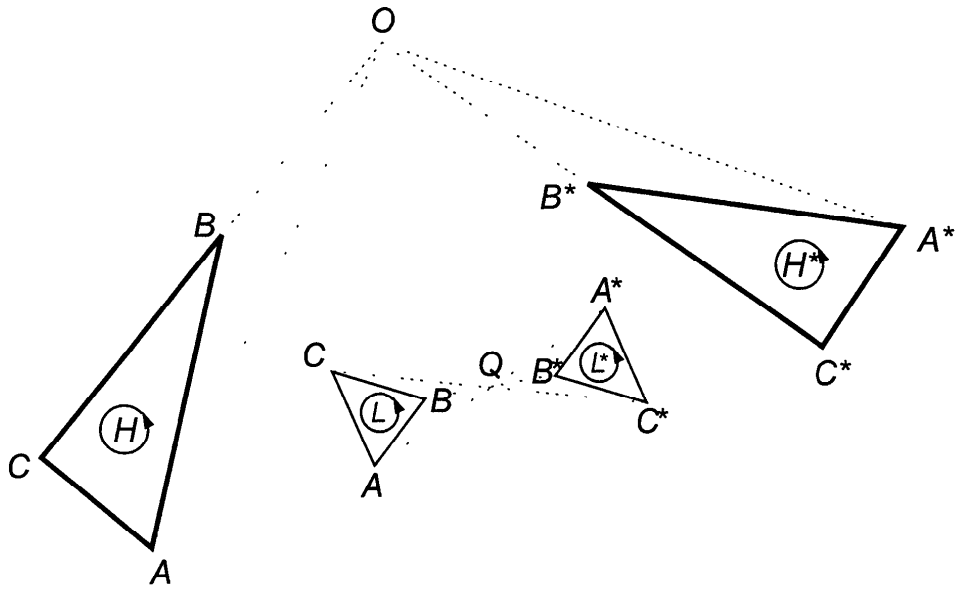
szakasz hosszát nem változtatják meg, ezért az ilyen tulajdonságú transzformációkat *távolságtartó* vagy *egybevágósági transzformációknak* nevezzük. A transzormációval előállított alakzatot az eredeti alakzat *képének* mondjuk.

Az A pont A^* pontba való leképezését $A \rightarrow A^*$ szimbólummal jelöljük.



99. *a*) ábra. Eltolás és tengelyes tükrözés

(A t_1 és t_2 párhuzamos tengelyekre való tükrözés egymás után végrehajtva eltolást valósít meg: H és H^*, valmint H^* és H^{**}.)



99. *b*) ábra. O pont körüli forgatás, Q középpontos tükrözés

Egybevágósági vagy távolságtartó transzformációnak nevezzük azokat a geometriai transzformációkat, amelyeknél az $A \rightarrow A^*$ és $B \rightarrow B^*$ leképezésből következik, hogy $AB = A^*B^*$, azaz bármely szakasz képe azonos hosszúságú szakasz.

Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan távolságtartó transzformáció, amely az egyik alakzatot a másik alakzatba viszi át.

Más megfogalmazásban: A síkban két mértani alakzat akkor *egybevágó* (*kongruens*), ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást. Az egymást fedő alkotórészeket *megfelelő* alkotórészeknek nevezzük. Mondhatjuk tehát, hogy az egybevágó alakzatok összes megfelelő alkotórészei egyenlők. Az *egybevágóság jele*: $\cong$.

Az egybevágó háromszögeknek mind a hat alkotórésze kölcsönösen egyenlő, azonban az egybevágóság bizonyításakor nem szükséges mind a hat megfelelő alkotórész egyenlőségét kimutatni, elegendő három olyan alkotórész kölcsönös egyenlőségének megvizsgálása, amely egyértelműen meghatározza a háromszöget.

Két háromszög egybevágó, ha

I. két megfelelő oldal és a közbezárt szög páronként egyenlő nagyságú;

II. mindhárom megfelelő oldal páronként egyenlő nagyságú;

III. egy megfelelő oldal és a rajta levő két szög páronként egyenlő nagyságú;

IV. két megfelelő oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög páronként egyenlő nagyságú.

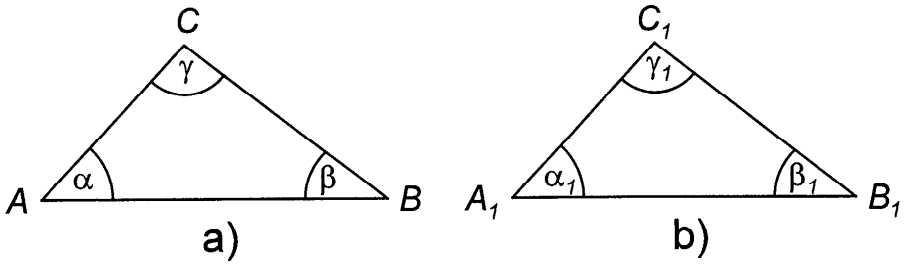
I. tétel igazolása (100. *a*, *b* ábra):

Feltétel: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\alpha = \alpha_1$.

Állítás: $ABC\Delta \cong A_1B_1C_1\Delta$.

Bizonyítás: Az $ABC\Delta$-et illesszük $A_1B_1C_1\Delta$-re úgy, hogy az A pont fedje az A_1 pontot és az AB oldal az A_1B_1 oldalt; így ezeknek az oldalaknak az egyenlősége miatt az AC és az A_1C_1 oldalak is fedésbe kerülnek, de ezeknek az oldalaknak az

egyenlősége miatt a C pont is fedi a C_1-et, s így a BC oldal is egybeesik a B_1C_1-gyel, tehát a két háromszög fedi egymást, azaz egybevágó.



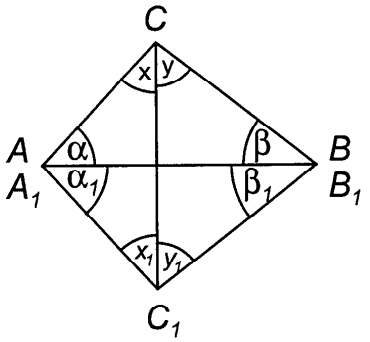
100. ábra. Egybevágó háromszögek: *a*) $ABC\Delta$; *b*) $A_1B_1C_1\Delta$

II. tétel igazolása (101. ábra):

Feltétel: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Állítás: $ABC\Delta \cong A_1B_1C_1\Delta$.

Bizonyítás: az $A_1B_1C_1\Delta$-et helyezzük az $ABC\Delta$ mellé, ellenkező oldalára fordítva úgy, hogy a leghosszabb oldaluk, AB és A_1B_1 fedjék egymást..



101. ábra. Egybevágó háromszögek: $ABC\Delta \cong A_1B_1C_1\Delta$

A C és C_1 csúcsokat egyenessel összekötve, két egyenlőszárú háromszöget kapunk, az ACC_1 és BCC_1 háromszöget, a két háromszögnek CC_1 a közös alapja (101. ábra). Az egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlőségét felhasználva:

$$x\angle = x_1\angle$$

$$y\angle = y_1\angle$$

$$(x+y)\angle = (x_1+y_1)\angle$$

tehát az egybevágóság I. tétele szerint, mivel két megfelelő oldal és a közbezárt szög egyenlő, a két háromszög egybevágó.

III. tétel igazolása (100. ábra):

Feltétel: $AB = A_1B_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$.

Állítás: $ABC\Delta \cong A_1B_1C_1\Delta$.

Bizonyítás: Az ABC háromszöget helyezzük $A_1B_1C_1$ háromszögre úgy, hogy az A pont fedje az A_1-et, az AB oldal az A_1B_1 oldalt. Az oldalak egyenlősége miatt a B pont egybeesik a B_1 ponttal, az $\alpha=\alpha_1$ és $\beta=\beta_1$ szögegyenlőségekből pedig következik, hogy az AC oldal fedi az A_1C_1 oldalt, a BC oldal fedi a B_1C_1 oldalt, s mivel két egyenes csak egy pontban metszheti egymást, így a C csúcs egybeesik a C_1-gyel, tehát a háromszögek fedik egymást, azaz egybevágók.

IV. tétel igazolását a II. tétel szerint végezhetjük el, ha a két háromszöget egymás mellé fektetjük, hosszabbik egyenlő oldaluk összeillesztésével.

A háromszögek egybevágósági tételeiből következik, hogy az *egyenlő szárú háromszögekben*:

a) a csúcsnál levő szöget felező egyenes felezi az alapot és merőleges rá;

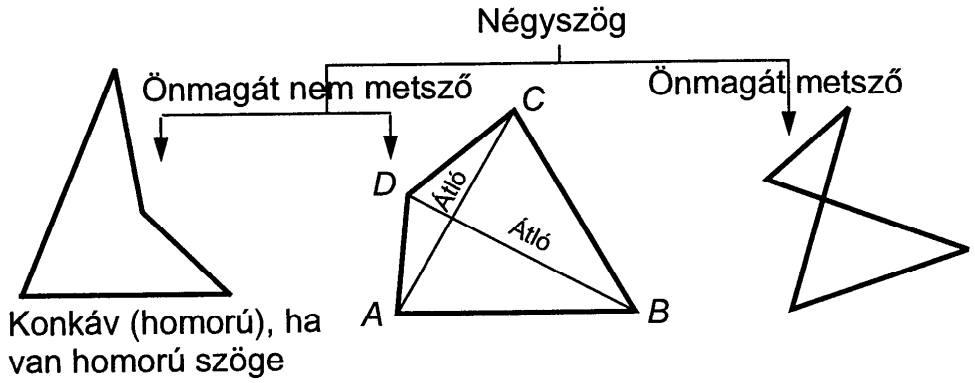
b) a csúcsot az alap felezőpontjával összekötő egyenes merőleges az alapra, és felezi a csúcsnál levő szöget;

c) a csúcsból az alapra bocsátott merőleges felezi az alapot és a csúcsnál levő szöget.

5.1.6 Négyszögek

Legyen a sík négy pontja A, B, C és D. A pontokat összekötve AB, BC, CD és DA egyenes szakaszokkal zárt töröttvonalat kapunk, amelyek közül az önmagát át nem metsző töröttvonalat az általa határolt síktartománnyal együtt *négyszögnek* nevezzük.

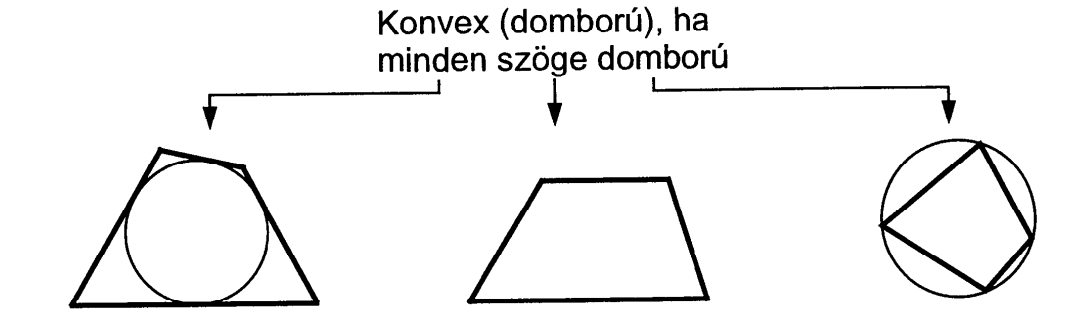
A négyszögnek négy oldala, négy csúcsa és négy szöge van. E könyvben csak *konvex négyszögekkel* foglalkozunk, azaz olyan négyszögekkel, amelyeknek szögei egyenként 180°-nál kisebbek (konvexek). (Egy alakzatot konvexnek nevezünk, ha bármely két pontját véve, az azokat összekötő szakasz része az alakzatnak.)



102. ábra. Konkáv (homorú) négyszög

103. ábra. Konvex (domború) négyszög

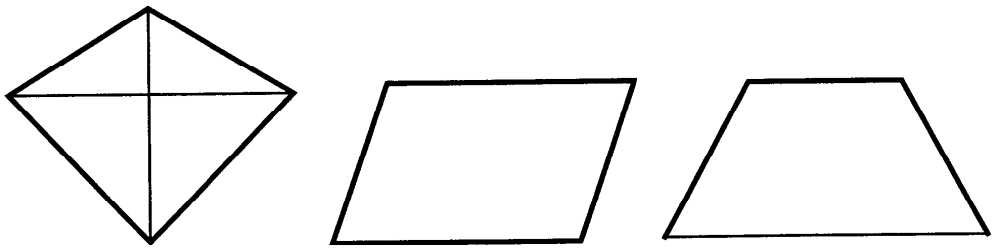
104. ábra. Önmagát metsző négyszög



105. ábra. Érintőnégyszög

106. ábra. Trapéz

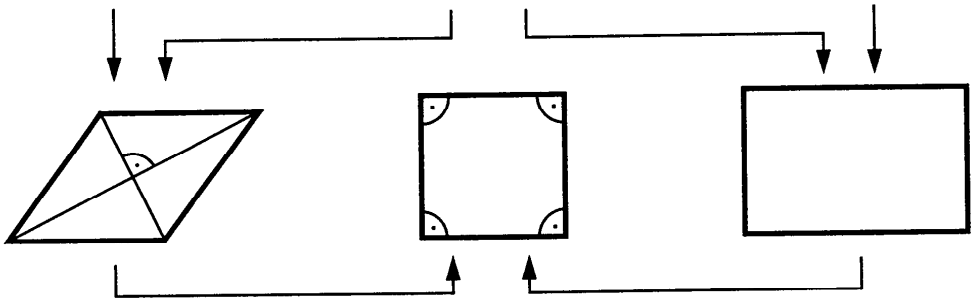
107. ábra. Húrnégyszög



108. ábra. Deltoid

109. ábra. Paralelogramma

110. ábra. Egyenlő szárú trapéz



111. ábra. Rombusz

112. ábra. Négyzet

113. ábra. Téglalap

A négyszög szemben levő csúcsait összekötő szakaszt *átlónak* nevezzük. A négyszögnek tehát két átlója van (103. ábra). Egy átló a négyszöget két háromszögre bontja, ezért a négyszög szögeinek összege $180° + 180° = 360°$.

Az olyan négyszöget, amelybe minden oldalt érintő kör rajzolható, *érintőnégyszögnek* (105. ábra), az olyat pedig, amely köré a négy csúcsra illeszkedő kör rajzolható, *húrnégyszögnek* (107. ábra) nevezzük (l. még az 5.1.14 pontot). Az olyan négyszöget, amelynek van párhuzamos oldalpárja, *trapéznek* (106. ábra), amelynek pedig mindkét pár szemközti oldala párhuzamos, *paralelogrammának* nevezzük (109. ábra). A négyszögek alakjait és elnevezésüket a 102.–113. ábrák tartalmazzák.

Megjegyzés: A síkban való középpontos tükrözést (180°-os elforgatást, 99. *b* ábra) *középpontos szimmetriának* is nevezzük.

A) Paralelogrammák

Azokat a négyszögeket, amelyeknek szemközti oldalai párhuzamosak, paralelogrammáknak nevezzük.

Más megfogalmazásban a középpontosan tükrös négyszögek paralelogrammák. A paralelogrammák tulajdonságai:

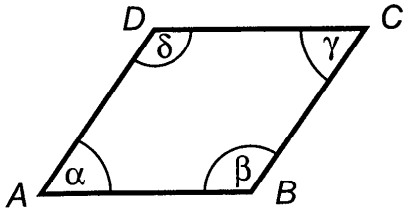
a) Minden paralelogrammában a szemben levő szögek egyenlők, az egymás mellett levők pedig 180°-ra egészítik ki egymást.

Bizonyítás (114. ábra): $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, mert váltószögek,

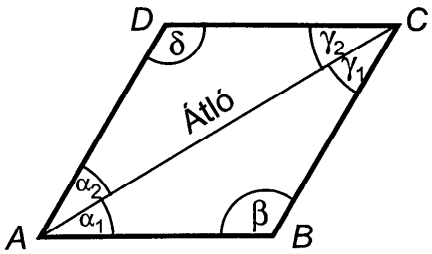
$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$$

b) A paralelogrammát bármely átlója két egybevágó háromszögre bontja.

Bizonyítás (115. ábra): $\alpha_1 = \gamma_2$, $\alpha_2 = \gamma_1$, mert váltószögek, $AC = AC$, mert közös oldal, ezért $ABC\Delta \cong ACD\Delta$, az egybevágóság III. tétele alapján.



114. ábra. Paralelogramma



115. ábra. A paralelogrammát bármely átlója két egybevágó háromszögre bontja

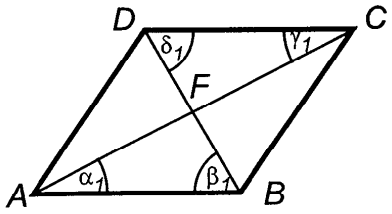
c) A paralelogrammákban a szemben levő oldalak egyenlők.

Ez a megállapítás az előző tételből következik.

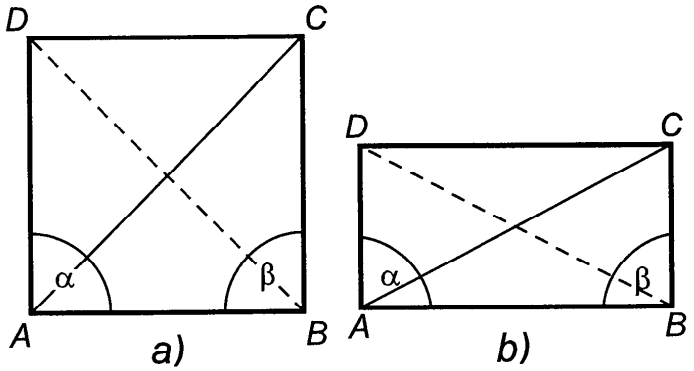
d) A paralelogramma átlói felezik egymást.

Bizonyítás (116. ábra): A két átló a négyszöget négy háromszögre bontja, amelyek közül a két-két szemben levő egybevágó háromszög. $ABF\Delta \cong CDF\Delta$, mert $AB = DC$ (szemben levő oldalak), $\alpha_1 = \gamma_1$, $\beta_1 = \delta_1$ (váltószögek).

Az egybevágóság miatt pedig minden megfelelő alkotórész egyenlő, azaz $AF = FC$; $BF = FD$.



116. ábra. A paralelogramma átlói felezik egymást

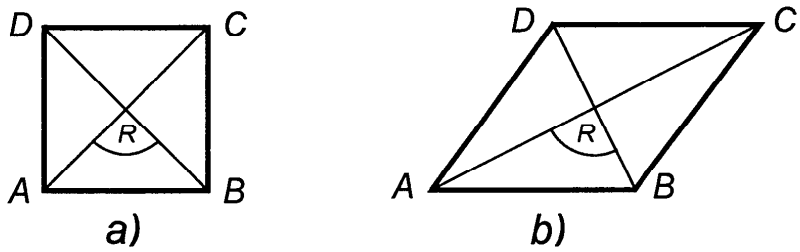


117. ábra. Derékszögű paralelogrammák: *a*) négyzet, *b*) téglalap

e) A derékszögű paralelogramma (téglalap) átlói egyenlők.

Bizonyítás (117. *a*, *b* ábra): $ABC\Delta \cong ABD\Delta$, mert $AB = AB$ (közös oldal), $AD = BC$ (szemben levő oldalak), $\alpha = \beta = 90°$. De ha két háromszög egybevágó, akkor a többi megfelelő alkotórészei is egyenlők, azaz $AC = BD$.

f) Az egyenlő oldalú paralelogrammák átlói merőlegesek egymásra és felezik a csúcspontnál levő szögeket.



118. ábra. Egyenlő oldalú paralelogrammák: *a*) négyzet, *b*) rombusz

Bizonyítás (118. *a*, *b* ábra): Mivel $ABD\Delta$ és $BCD\Delta$ közös alapú, egyenlő szárú háromszögek, így az 5.1.5 *b*) és az 5.1.6 *d*) alapján a tétel igazolható.

Az elmondottak szerint a nevezetes paralelogrammák a következő módon jellemezhetők:

A *téglalap* olyan paralelogramma, amelynek szemben levő oldalai egyenlők, szögei egyenlők, tehát derékszögek, átlói egyenlők és felezik egymást (a téglalap húrnégyszög).

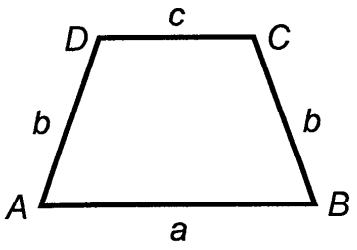
A *rombusz* olyan paralelogramma, amelynek oldalai és szemben levő szögei egyenlők, átlói merőlegesek egymásra, felezik egymást és a csúcsnál levő szögeket (a rombusz érintő négyszög).

A *négyzet* tehát egyesíti a téglalap és a rombusz tulajdonságait. Azt is mondhatjuk, hogy a négyzet egyenlő oldalú téglalap (a négyzet érintő- és húrnégyszög).

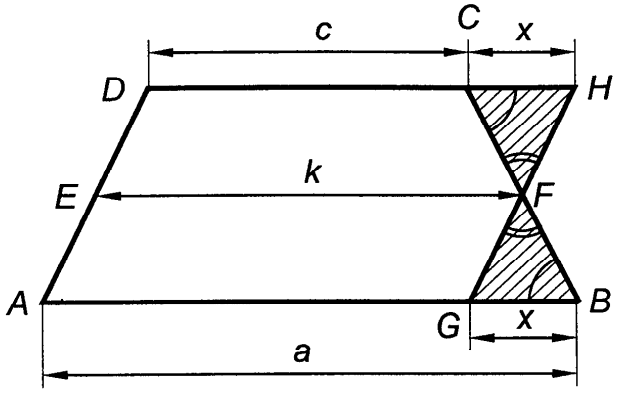
B) Trapéz

Azt a négyszöget, amelynek van két párhuzamos oldala *trapéznak* nevezzük (106. ábra).

A párhuzamos oldalak a trapéz alapjai, a másik két oldal a trapéz szárai. Ha a trapéz *tengelyszimmetrikus* , akkor *egyenlő szárú* (*szimmetrikus*) *trapézról* beszélünk (119. ábra). A szimmetrikus trapéz átlói egyenlők egymással (a szimmetrikus trapéz húrnégyszög). A párhuzamos oldalak egymástól való távolsága a trapéz magassága.



119. ábra. Egyenlő szárú trapéz



120. ábra. A trapéz középvonala

a) A trapéz szárainak felezőpontjait összekötő *EF* egyenes *a trapéz középvonala.* Ez párhuzamos az alapvonalakkal és egyenlő számtani középarányosukkal.

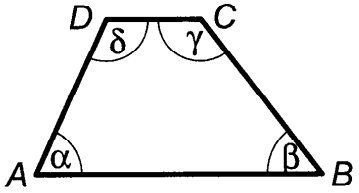
Feltétel: $AE = DE$; $BF = CF$.

Állítás: $EF \parallel AB$ és $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a+c}{2}$ (120. ábra).

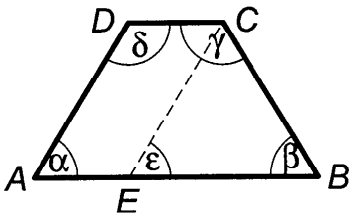
Bizonyítás: *AD*-vel húzzunk párhuzamost a *BC* oldal felezőpontján, *F*-en keresztül. $AD \parallel GH$, $BF = FC$, $GBF\angle = HCF\angle$ (váltószögek), $GFB\angle = CFH\angle$ (csúcsszögek), ezért $GFB\Delta \cong HFC\Delta$ (a III. tétel alapján). Így $GB = HC = x$ és $GF = HF = \frac{1}{2}GH$, de $GH = AD$ (az *AGHD* paralelogramma szemben levő oldalai), ezért $GF = AE$ és $HF = DE$, tehát *AGFE* és *DHFE* paralelogrammák, amiért $EF \parallel AG$, $EF \parallel DH$ (azaz a középvonal párhuzamos az alappal), és $EF = AG = a - x$, másrészt $EF = DH = c + x$, s így $2(EF) = a + c$, amiből $EF = \frac{a+c}{2}$.

b) A trapéz bármely szárán levő két szög összege 180°.

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$ mert társszögek (121 ábra).



121. ábra. Trapéz



122. ábra. Egyenlő szárú trapéz

c) Az egyenlő szárú trapézban az alapokon fekvő két-két szög egyenlő egymással.

Feltétel: $AD = BC$.
Állítás: $\alpha = \beta$ és $\gamma = \delta$ (122. ábra).

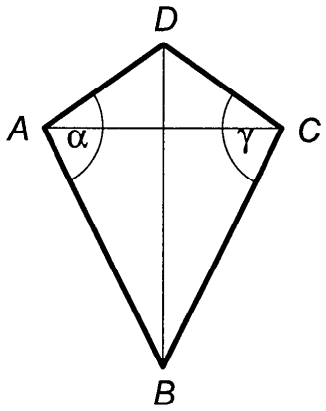
Bizonyítás: Húzzunk párhuzamost az AD oldallal a C csúcspontból. $AD = EC$ (az $AECD$ paralelogramma szemben levő oldalai), így $BC = EC$, tehát az $EBC\Delta$ egyenlő szárú, s így $\varepsilon = \beta$, de $\varepsilon = \alpha$ mert megfelelő szögek, tehát $\alpha = \beta$. Mivel a száron levő két szög összege 180°: $\alpha + \delta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$, $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, de $\alpha = \beta$, ezért $\delta = \gamma$.

C) Deltoid

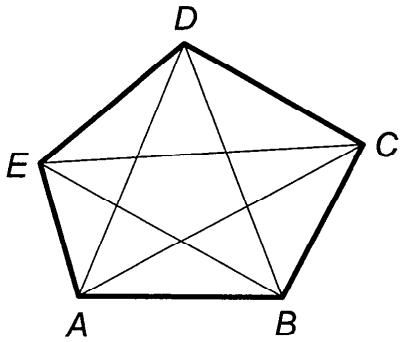
Az olyan konvex négyszöget, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő, *deltoidnak* nevezzük (123. ábra). (A deltoid érintőnégyszög.)

a) A deltoid nem egyenlő oldalai által bezárt szögek egyenlők, azaz $\alpha = \gamma$ (a BD átlóval két egybevágó háromszögre bontjuk a deltoidot). A BD átlót *főátlónak*, az AC átlót *mellékátlónak* nevezzük.

b) A deltoid átlói merőlegesek egymásra, a főátló felezi a mellékátlót és az egyenlő oldalak által bezárt szögeket (mivel a mellékátló két egyenlő szárú háromszögre bontja a deltoidot).



123. ábra. Deltoid



124. ábra. Sokszög

5.1.7 Sokszögek

Legyen a sík n pontja A, B, C, D, ..., Y, Z. A pontokat összekötve AB, BC, CD, ..., YZ és ZA egyenes szakaszokkal zárt töröttvonalat kapunk, amelyek közül az önmagát át nem metsző töröttvonalat az általa határolt síktartománnyal együtt *sokszögnek* nevezzük.

Az n-oldalú sokszöget *n-szögnek* nevezzük. Pl. háromszög, négyszög, ötszög stb. (124. ábra).

A sokszög bármely csúcsából hárommal kevesebb átló húzható, mint amennyi a csúcspontja, mert magához és a két szomszédos csúcsponthoz nem húzhatunk átlókat. Eszerint az n oldalú sokszög minden csúcspontjából $(n-3)$ átlót húzhatunk, tehát a csúcspontokból összesen húzható volna $n(n-3)$, s mivel mindegyik átló két csúcspontot köt össze, így az n-szög átlóinak száma:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Az egy csúcsból húzható $(n-3)$ átló a konvex sokszöget $(n-2)$ háromszögre bontja fel, így a konvex n-szög szögeinek összege:

$$(n-2)\cdot 180°.$$

Ha a sokszög *szabályos*, azaz oldalai és szögei egyenlők, akkor egyik szöge:

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}.$$

5.1.8 Az egy ponton átmenő egyenesekre (egyenesseregre) vonatkozó tételek

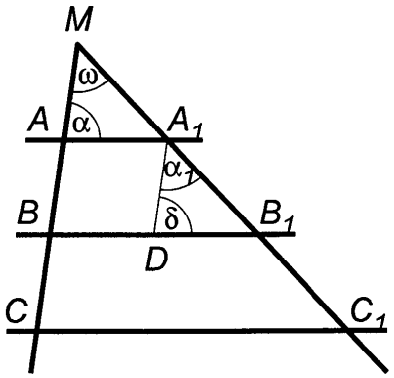
a) Ha az egyenessereget párhuzamos egyenesekkel metszük, és az egyik egyenesen nyert részek egyenlők, akkor a többi egyenesen is egyenlő részeket kapunk (125. ábra). Ezt a tételt a *párhuzamos szelők* tételének is szokás nevezni.

Feltétel: $MA = AB = BC$ és $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

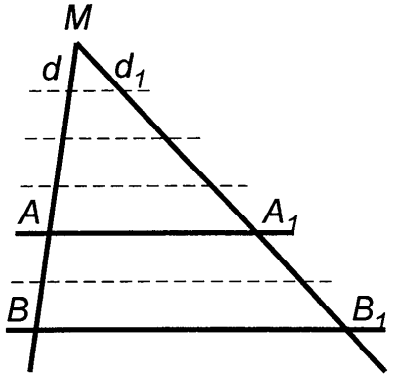
Állítás: $MA_1 = A_1B_1 = B_1C_1$.

Bizonyítás: A_1 pontból húzzunk párhuzamost MC egyenessel, akkor $MAA_1\Delta \cong$ $\cong A_1DB_1\Delta$, mert $\omega = \alpha_1$, $\alpha = \delta$ (megfelelő szög) és $MA = AB = A_1D$ (III. egybevágósági tétel), tehát $MA_1 = A_1B_1$.

Az eljárást megismételve azt kapjuk, hogy $MA_1 = A_1B_1 = B_1C_1$.



125. ábra. Egyenessereg



126. ábra. Egyenessereg

b) Ha az egyenessereget párhuzamos egyenesekkel metszük, akkor az egyik egyenesen kapott részek aránya egyenlő a többi egyenes megfelelő részeinek arányával.

Feltétel: $AA_1 \parallel BB_1$.

Állítás (126. ábra): $MA : AB = MA_1 : A_1B_1$.

Bizonyítás: Ha valamely d sszakasz MA-ra p-szer, AB-re q-szor mérhető rá, azaz $MA = pd$; $AB = qd$, akkor $MA : AB = pd : qd$, s így

$$MA : AB = p : q \tag{1}$$

Ha az osztópontokon keresztül párhuzamosokat húzunk AA_1-gyel, akkor a másik egyenesen is egyenlő részeket kapunk. Jelöljük ezeket d_1-gyel, akkor $MA_1 = pd_1$, $A_1B_1 = qd_1$, amiből $MA_1 : A_1B_1 = pd_1 : qd_1$, s így

$$MA_1 : A_1B_1 = p : q. \tag{2}$$

Az (1) és (2) alapján írhatjuk, hogy

$$MA : AB = MA_1 : A_1B_1.$$

Ezen utóbbi aránypárból következik még, hogy

$$MA:(MA+AB) = MA_1:(MA_1 + A_1B_1),$$ s mivel

$$MA+AB = MB,\quad MA_1 + A_1B_1 = MB_1,$$ ezért

$$MA:MB = MA_1:MB_1.$$

Megjegyzés: Ha nem létezik a fenti tulajdonságot kielégítő d szakasz (azaz MA és AB nem "összemérhető", amire példa a négyzet oldala és átlója), a bizonyítás akkor is elvégezhető, csak körülményesebben.

Tehát ha egy egyenessereget párhuzamosokkal metszünk, akkor az egyik egyenes metszetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a másik egyenes megfelelő metszetei.

c) Ha az egyenessereget párhuzamos egyenesekkel metszük, akkor a párhuzamos egyeneseknek az egyenessereg közé eső metszetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az egyenessereg megfelelő metszetei (127. ábra).

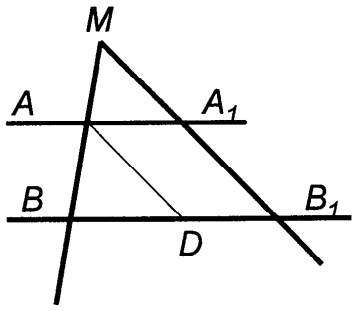
Feltétel: $AA_1 \parallel BB_1$.

Állítás: $BB_1:AA_1 = MB:MA = MB_1:MA_1$.

Bizonyítás: Ha az A pontból MB_1-gyel párhuzamost húzunk, és a B pontot tekintjük az egyenessereg kezdőpontjának, akkor az előző tétel szerint:

$$BM:AM = BB_1:DB_1,$$

s mivel $DB_1 = AA_1$, ezért $BM:AM = BB_1:AA_1$;



127. ábra. Egyenessereg

átrendezve:

$$BB_1:AA_1 = MB:MA,$$

s hasonlóan

$$BB_1:AA_1 = MB_1:MA_1.$$

5.1.9 A háromszögek hasonlósága

a) A távolságtartó vagy egybevágósági transzformáció általánosításaként definiálhatjuk a hasonlósági transzformációt.

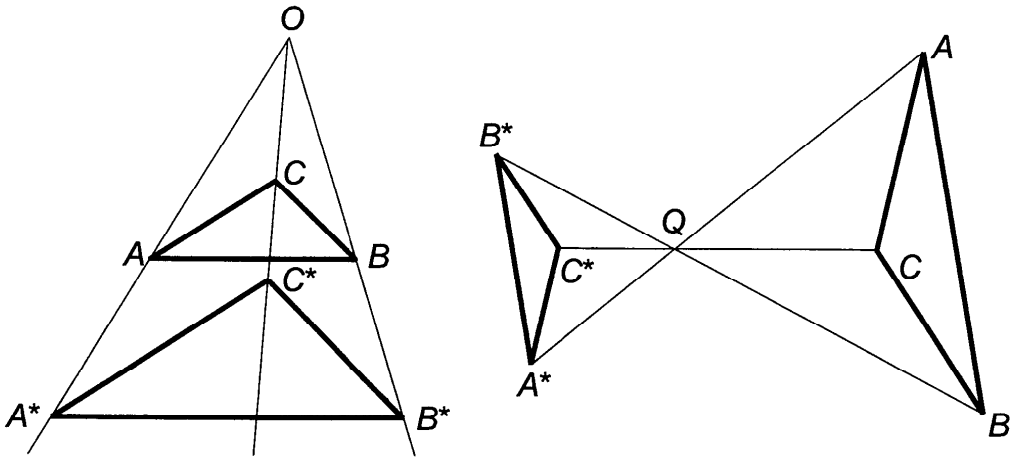
Legyen A és B a sík két pontja és $k > 0$ tetszőleges valós szám. Azokat a geometriai transzformációkat nevezzük hasonlósági transzfomációknak vagy hasonlóságoknak, amelyeknél:

$$\text{ha } A \to A^* \text{ és } B \to B^*, \text{ akkor } A^*B^* = k \cdot AB,$$

azaz az A^*B^* szakasz hossza k-szorosa az AB szakasz hosszának. A hasonlóság jele: ~.

A k állandó a hasonlóság aránya, ha $k = 1$, akkor minden AB szakasz egyenlő az A^*B^* szakasszal, vagyis *egybevágóságról*, ha $k > 1$, akkor *nagyításról*, ha $0 < k < 1$, akkor *kicsinyítésről* beszélünk. A hasonlóság egyenest egyenesbe, párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe, metsző egyeneseket metsző egyenesekbe visz át, és megtartja a szögek nagyságát.

Két geometriai alakzat hasonló, ha az egyikből a másikat egy vagy több hasonlósági transzformációval előállíthatjuk. Pl. a 128. *a* ábra egy középpontos hasonlóságot szemléltet.



128. *a*) ábra. Középpontos hasonlóság

b) Vizsgáljuk meg, hogy két háromszög hasonlóságához az alkotórészeknek milyen feltételeket kell kielégíteniük? Azokat a há-

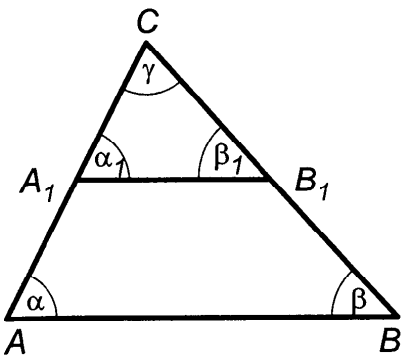
romszögeket, amelyek alakra megegyeznek, *hasonló* háromszögeknek nevezzük. Tekintsük az $ABC\Delta$-et (128. ábra). Húzzunk párhuzamos egyenest az AB alappal. Az így előálló $A_1B_1C\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz, azaz

$$A_1B_1C\Delta \sim ABC\Delta.$$

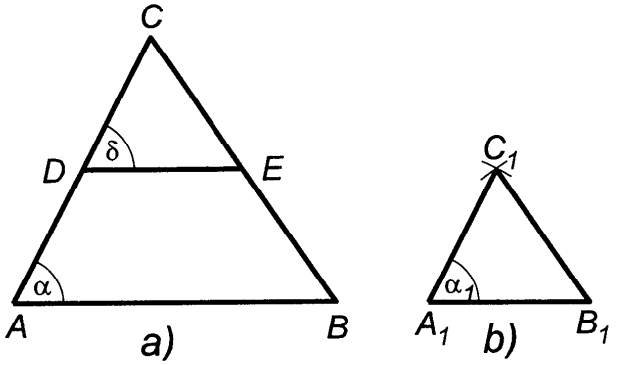
Ebben a két hasonló háromszögben $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ (megfelelő szögek), és $\gamma = \gamma$, továbbá a C kezdőpontú egyenesseregben:

$$AB : A_1B_1 = CA : CA_1 = CB : CB_1 = k,$$

tehát a megfelelő szögek egyenlők, a megfelelő oldalak pedig arányosak.



128. ábra. Háromszög



129. ábra. Hasonló háromszögek *a*) $ABC\Delta$ *b*) $A_1B_1C_1\Delta$

Két háromszög hasonló:

I. ha két-két megfelelő oldaluk aránya és a közbezárt szög egyenlő;

II. ha a megfelelő oldalak aránya egyenlő;

III. ha két-két megfelelő szög egyenlő;

IV. ha két-két megfelelő oldal aránya és a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög egyenlő.

I. tétel igazolása (129. ábra):

Feltétel: $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$ és $\alpha = \alpha_1$.

Állítás: $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Bizonyítás: A C csúcsból mérjük fel a CA oldalra a C_1A_1 oldalt, és a kapott D pontból húzzunk párhuzamost AB-vel, akkor – mint fentebb láttuk – $ABC\Delta \sim DEC\Delta$, tehát

$AB : DE = AC : DC$, de $DC = A_1C_1$, s így

$AB : DE = AC : A_1C_1$.

A feltétellel összehasonlítva következik, hogy $DE = A_1B_1$, s ezért

$DEC\Delta \cong A_1B_1C_1\Delta \quad (\alpha_1 = \alpha = \delta)$.

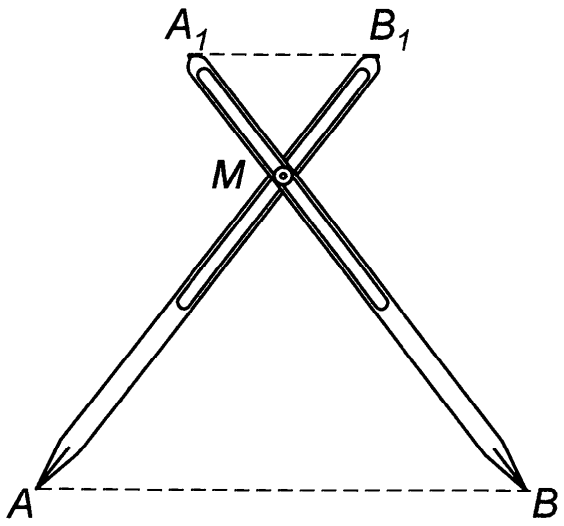
De azt láttuk, hogy $DEC\Delta \sim ABC\Delta$, tehát

$ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

A II., III., IV. tétel hasonló meggondolással igazolható.

5.1.10 Osztókörző, léptékmérő és pantográf

Az *osztókörző* használata a háromszögek hasonlóságán alapul. Segítségével adott távolságokat egyenlő részekre oszthatunk. Ez az eszköz két hegyesvégű AB_1 és BA_1 lábból áll (130. ábra). A lábak mentén levő nyílásban szorítócsavart tolhatunk el, és különböző helyen rögzíthetjük.



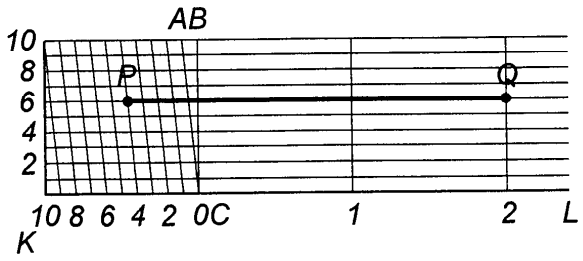
130. ábra. Osztókörző

A lábak a csavar körüli forgatással egymáshoz közelebb vagy egymástól távolabb állíthatók be. Ha pl. az AB távolságot négy egyenlő részre akarjuk felosztani, akkor a csavart a lábak peremén levő beosztás segítségével olyan M pontban rögzítjük, hogy az AM távolság négyszer legyen nagyobb az MB_1 távolságnál. Ezután az ábrán látható módon körzőnyílásba vesszük az AB távolságot, s így az A_1B_1 távolság az AB negyedét adja, ami az ABM és A_1B_1M háromszögek hasonlóságából következik:

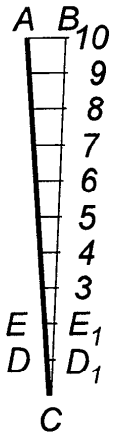
$A_1B_1 : AB = MB_1 : MA = 1:4$.

Ezek után a körzőt átforgatjuk, és az AB távolságra négyszer rámérjük az A_1B_1 távolságot.

A *léptékmérő* készítése is a hasonló háromszögek tulajdonságain alapszik. A KL vonal (131. ábra) nagyobb beosztásai kicsinyítve a métert, kisebb beosztásai a decimétert jelképezik. Ha centimétert akarnánk mérni, akkor a kisebb beosztásokat is tíz egyenlő részre kellene osztani, ami a vonalas mérőlécen már nem oldható meg. A léptékmérő azonban lehetővé teszi a centiméterek leolvasását is, amelynek megértéséhez rajzoljuk meg kinagyítva az ABC keskeny derékszögű háromszöget (132. ábra).



131. ábra. Léptékmérő



132. ábra. Léptékmérő leolvasó része nagyítva

A párhuzamos egyenesekkel kimetszett hasonló háromszögek alapján:

$DD_1 : AB = CD_1 : CB = 1:10,$

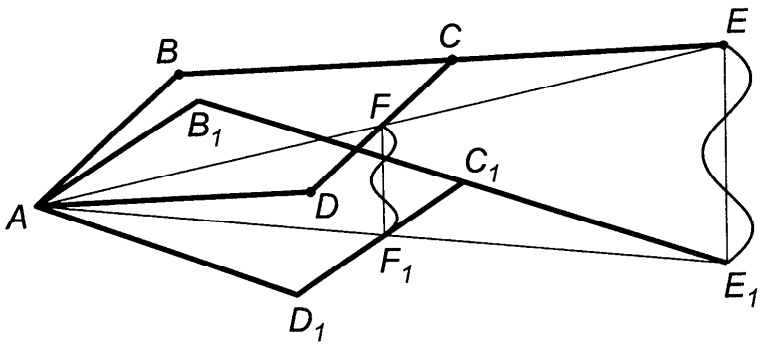
$EE_1 : AB = CE_1 : CB = 2:10,$

és így tovább, amiből

$$DD_1 = \frac{1}{10} AB, \quad EE_1 = \frac{2}{10} AB \quad \text{stb.}$$

Így pl. a PQ távolság 2,46 m.

A *pantográf* síkidomok (tervrajzok) különböző méretű lemásolására használatos műszer. Működési elve a hasonló háromszögek tulajdonságai alapján érthető meg (133. ábra). Az $ABCD$ paralelogramma oldalai a csúcsok körül sarkokon elforgatható fémrudak, az F pont az AE és a CD egyenesek metszéspontja.

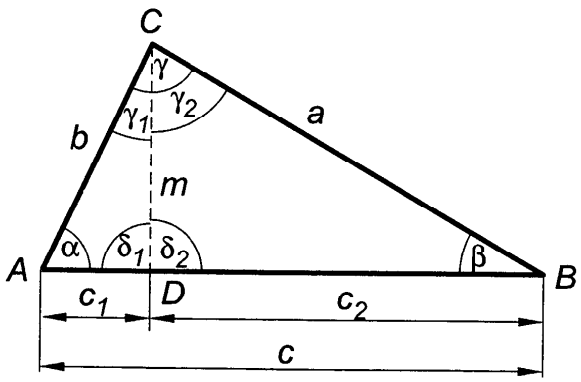


133. ábra. Pantográf

Az F pont az E pont által leírt idomhoz hasonlót ír le. Az idomok hasonlósági együtthatója a $BE : BC$ aránnyal egyenlő. Ha az E pontba helyezett tűvel végig megyünk egy idom kerületén, akkor az F pontba helyezett grafithegy az alája tett papírlapra hasonló idom kerületét rajzolja le.

5.1.11 Arányos távolságok a derékszögű háromszögben. Pitagorasz tétele

A derékszögű háromszöget a derékszög csúcspontjából az átfogóra húzott merőleges két olyan háromszögre bontja, amelyek az eredeti háromszöghöz és egymáshoz is hasonlók.



134. ábra. Derékszögű háromszög

A 134. ábrán az ABC háromszög derékszögű, $\gamma = 90°$ és $CD \perp AB$ (olv.: CD merőleges az AB-re). CD a háromszög magassága, jelöljük m-mel.

a) $ADC\Delta \sim ABC\Delta$, mert $\alpha = \alpha$ (közös szög); $\gamma = \delta_1 = 90°$.

b) $BCD\Delta \sim ABC\Delta$, mert $\beta = \beta$ (közös szög); $\gamma = \delta_2 = 90°$.

c) $ADC\Delta \sim BCD\Delta$, mert $\alpha = \gamma_2$, (merőleges szárú hegyesszögek), $\delta_1 = \delta_2 = 90°$.

A fentiekből következik, hogy:

I. A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani középarányos az átfogó két metszete között (*magasságtétel*).

Bizonyítás: Az $ADC\Delta \sim BCD\Delta$ – *c*) szerint –, tehát a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $m : c_1 = c_2 : m$, amiből:

$$m^2 = c_1 \cdot c_2$$

II. A derékszögű háromszögben bármelyik befogó mértani középarányos az egész átfogó és az átfogón levő vetülete között (*befogótétel*).

Bizonyítás: Az $ADC\Delta \sim ABC\Delta$ – *a*) szerint –, tehát a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $b:c_1 = c:b$, s így

$$b^2 = c_1 \cdot c.$$

Hasonlóan a $BCD\Delta \sim ABC\Delta$ – *b*) szerint – megfelelő oldalainak arányából $a:c_2 = c:a$, amiből

$$a^2 = c_2 \cdot c.$$

Adjuk össze a két utóbbi egyenlőséget: $a^2 + b^2 = c_2 c + c_1 c$, és emeljük ki *c*-t: $a^2 + b^2 = c(c_2 + c_1)$, de $c_1 + c_2 = c$, tehát

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{vagyis}$$

a derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogójának négyzetösszegével. Ez *Pitagorasz* tétele.

Pitagorasz tételének megfordítása: Ha egy háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő, akkor az derékszögű háromszög.

Bizonyítás: Legyen adott egy *a*, *b*, *c* oldalú háromszög, amelyre

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

teljesül. Tekintsünk egy *a*, *b* befogójú derékszögű háromszöget, amelynek átfogója *d*, akkor *Pitagorasz* tétele értelmében:

$$a^2 + b^2 = d^2. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségből következik, hogy:

$$d^2 = c^2,$$

s mivel *d* és *c* pozitív valós szám, ezért

$$d = c,$$

tehát a két háromszög egybevágó, így megfelelő szögeik egyenlők, vagyis az a, b, c oldalú háromszög is derékszögű.

Ha a derékszögű háromszög két oldalát ismerjük, akkor *Pitagorasz* tételét felhasználva, meghatározhatjuk a harmadik oldalt.

Példák

1. Legyenek egy derékszögű háromszög befogói: $a = 10$ cm; $b = 7$ cm; számítsuk ki az átfogó hosszát.

Megoldás: Mivel $a^2 + b^2 = c^2$, ezért:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} \approx 12{,}2 \text{ cm}.$$

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $a = 14$ cm; átfogója $c = 19$ cm; számítsuk ki a másik befogó b hosszát.

Megoldás: Az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggésből:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{19^2 - 14^2} = \sqrt{165} \approx 12{,}8 \text{ cm}.$$

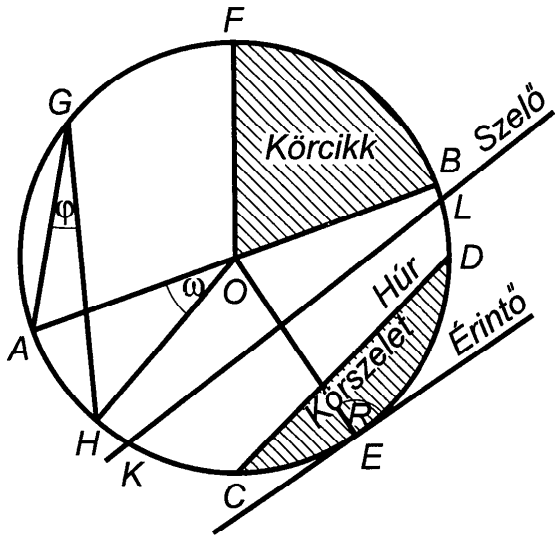
5.1.12 A kör

A kör (körvonal) a sík mindazon pontjainak mértani helye, amelyeknek távolsága a sík egy adott pontjától állandó.

Az állandó távolság a *sugár* (*rádiusz*, jele: r), az adott pont a *középpont* (origó, jele: O) (135. ábra). Kör tehát a sík azon pontjainak halmaza, amelyek az O ponttól r távolságra vannak.

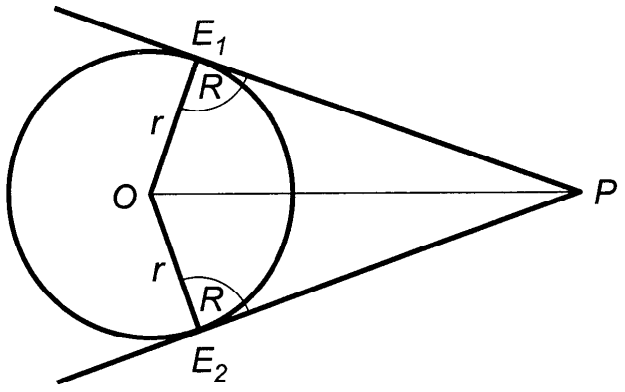
A kör két pontján átmenő egyenest *szelőnek*, a két pont közé eső szakaszt pedig *húrnak* nevezzük. A középponton átmenő húr a kör *átmérője* (*diamétere*). A körvonal által határolt síkrész a *körlap* (körlemez; ha nem okozhat félreértést, röviden kör), a körvonal két pontja közé eső vonaldarab az *ív* (jele: a végpontoknak megfelelő betűk fölé tett: ívecske pl. $\overset{\frown}{CD}$ vagy utánuk írt ív szó, pl. CD ív). A körlapnak a két sugár közé eső része a *körcikk* (*szektor*), a körlapból a szelő által lemetszett rész a *körszelet* (*szegmentum*). Az ív két végpontjához húzott két sugár közé eső

szöget *középponti*, a körvonal egy pontjából az ív két végpontjához húzott húrok közé eső szöget pedig *kerületi szögnek* nevezzük (az egyik húrt az érintő is helyettesítheti). A kör sugara az *érintési pontban* merőleges az érintőre.

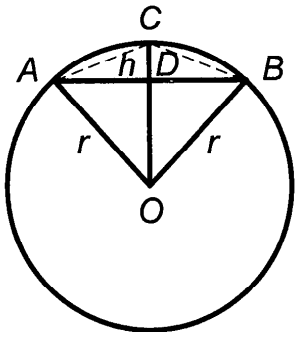


135. ábra. A kör részei: $OF = r$ = sugár; $AB = d = 2r$ = átmérő; ω = középponti szög; φ = kerületi szög; $\overset{\frown}{CD}$ = ív

A kör adott pontjához csak egy érintő, a körön kívül fekvő bármely pontból két érintő húzható. A két érintődarab, PE_1 és PE_2 egyenlő egymással (136. ábra), mivel $PE_1O\Delta \cong PE_2O\Delta$.



136. ábra. A kör érintői



137. ábra. Kör húrja és sugara

Ugyanabban a körben vagy egyenlő sugarú körökben egyenlő hosszúságú húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, mert a húrok fedésbe

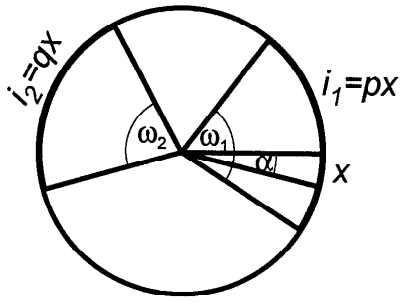
hozhatók egymással, és a sugarak egyenlősége miatt ekkor az íveknek is fedniök kell egymást. A kör húrjára merőlegesen húzott sugár felezi a húrt és a húrhoz tartozó ívet, mivel (137. ábra) az ABO egyenlő szárú háromszögben $OD \perp AB$, tehát $AD = DB = \frac{h}{2}$, és az ABC háromszög ugyancsak egyenlő szárú, tehát $AC = CB$, de egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak (egy körön belül), tehát

$$\widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

a) Ugyanabban a körben vagy egyenlő sugarú körökben a középponti szögek aránya egyenlő a szögekhez tartozó ívek arányával.

Bizonyítás: Legyen az ω_1 középponti szöghöz tartozó ív i_1, az ω_2-höz tartozó i_2 (138. ábra). Ha valamely x ív az i_1 -re p-szer, i_2 -re q-szor mérhető rá, akkor $i_1 = px$, $i_2 = qx$, s így

$$i_1 : i_2 = p : q \tag{1}$$



138. ábra. Körívek és középponti szögek

Ha az x ívhez tartozó szöget α-val jelöljük, akkor $\omega_1 = p\alpha$ és $\omega_2 = q\alpha$, amiből

$$\omega_1 : \omega_2 = p : q \tag{2}$$

s így az (1) és (2) aránypárból következik, hogy

$$\omega_1 : \omega_2 = i_1 : i_2.$$

Ha $\omega_1 = \omega_2$, akkor $i_1 = i_2$, tehát ugyanabban a körben, vagy egyenlő sugarú körökben az egyenlő középponti szögekhez egyen-

lő ívek tartoznak. (Ha az x ív és i_1 ill. i_2 nem összemérhető, a bizonyítás akkor is elvégezhető.)

b) Bármely kerületi szög fele az ugyanazon körívhez tartozó középponti szögnek.

Bizonyítás: A tételt a lehetséges négy eset megvizsgálásával igazoljuk.

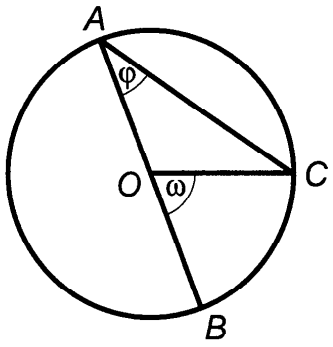
1. Ha a kör középpontja a kerületi szög egyik szárán fekszik (139. ábra), akkor az ω középponti szög az AOC egyenlő szárú háromszögnek külső szöge, tehát

$$\omega = \varphi + \varphi = 2\varphi, \text{ amiből } \varphi = \frac{\omega}{2}.$$

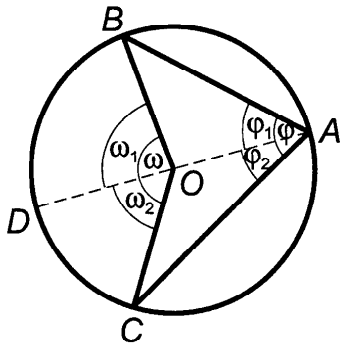
2. Ha a kör középpontja a kerületi szög szárai között fekszik (140. ábra), akkor az AD átmérőt meghúzva, a φ_1 és φ_2 kerületi szögre az 1. szerint írhatjuk, hogy

$$\varphi_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\omega_2}{2}, \text{ amiből } \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \text{ de}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega, \text{ ezért } \varphi = \frac{\omega}{2}$$



139. ábra. Középponti és kerületi szög



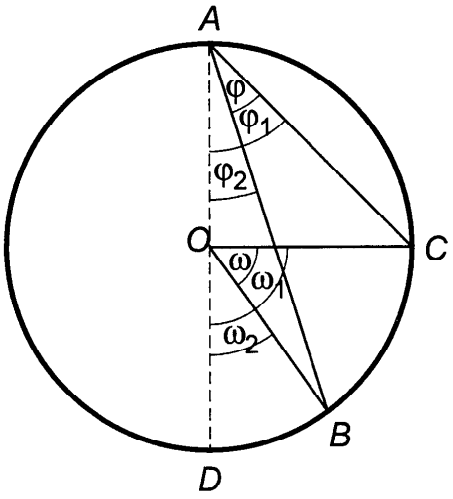
140. ábra. Középponti és kerületi szög

3. Ha a kör középpontja a kerületi szög szárain kívül fekszik (141. ábra), akkor az AD átmérő φ_1, φ_2 új kerületi és ω_1, ω_2 új középponti szögeket létesít, úgyhogy a kör középpontja a φ_1, és φ_2 kerületi szögek szárán van, tehát

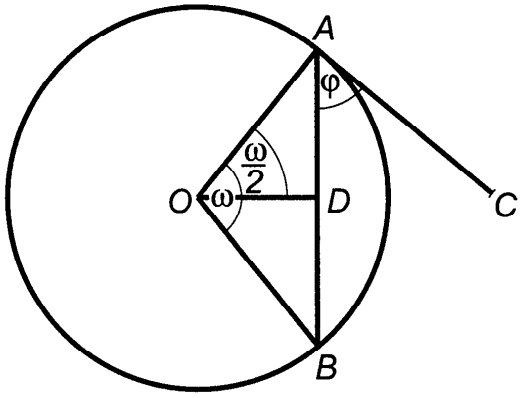
$$\varphi_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\omega_2}{2}, \text{ amiből } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \text{ de}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi, \quad \omega_1 - \omega_2 = \omega, \text{ ezért } \varphi = \frac{\omega}{2}.$$

4. Kerületi szögnek nevezzük azt a határesetet is, amikor a szög egyik szára érintő (142. ábra), akkor a húrra húzott OD merőleges felezi az ω középponti szöget, s így $\varphi = \frac{\omega}{2}$, mert φ és $\frac{\omega}{2}$ merőleges szárú hegyesszögek. Mivel minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, a tétel általános érvényű.



141. ábra. Középponti és kerületi szög

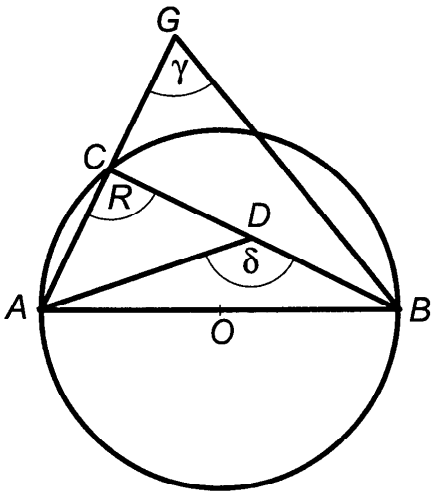


142. ábra. Középponti és kerületi szög

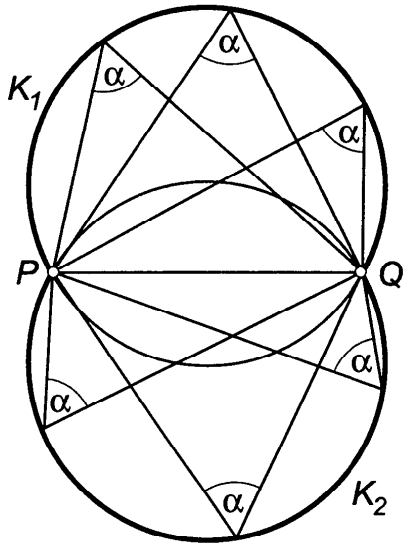
Thalész tétele: a félkörívhez tartozó minden kerületi szög derékszög.

Ez a *b*) tételből következik: ui. a félkörön nyugvó középponti szög egyenesszög, azaz $\omega = 2R$, tehát az ugyanazon körívhez tartozó kerületi szög:

$$\varphi = \frac{\omega}{2} = R.$$



142. *a*) ábra. *Thalész* tétele: *AB* átmérő, *ABC* derékszögű háromszög



142. *b*) ábra. Látókörívek: K_1, K_2

A 142. *a* ábra szemlélteti, hogy a körön levő C csúcs derékszög, a körön belüli D csúcsnál levő szög nagyobb, a körön kívül levő G csúcsnál levő szög pedig kisebb 90°-nál.

A fentiek alapján kimondható a *kerületi szögek tétele*:

Egy körben az azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.

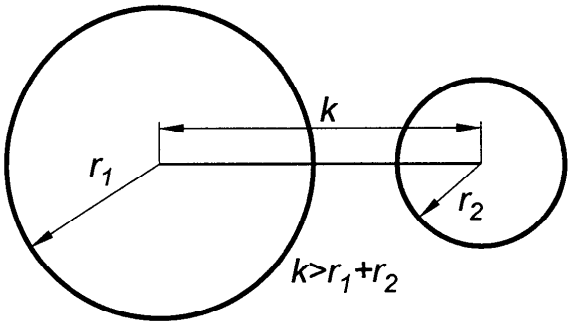
Megjegyzés: Az elmondottak alapján arra a kérdésre is válaszolhatunk, hogy a sík milyen ponthalmazából látszik azonos szög alatt egy adott PQ szakasz?

Látókörívek-tétele: A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott PQ szakasz 180°-nál kisebb, adott szög alatt látszik, a szakasz egyenesére tengelyszimmetrikus két körív.

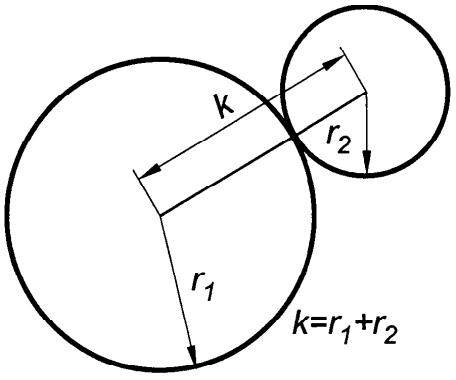
A szakasz végpontjai nem tartoznak a látókörívekhez. Az adott PQ szakasz a két körív közös húrja (142. *b* ábra).

Két kör kölcsönös helyzetét a sugarak nagysága és a két középpont egymástól való távolsága határozza meg. Jelöljük r_1-gyel és r_2-vel a körök sugarát és k-val a középpontok egymástól való távolságát (centrális távolságot). A két középponton átmenő egyenest *középvonalnak* nevezzük. Ha $r_1 > r_2$, akkor hat eset lehetséges:

1. $k > r_1 + r_2$; a két kör egymáson kívül fekszik (143. ábra);
2. $k = r_1 + r_2$; a két kör egymást kívülről érinti (144. ábra);



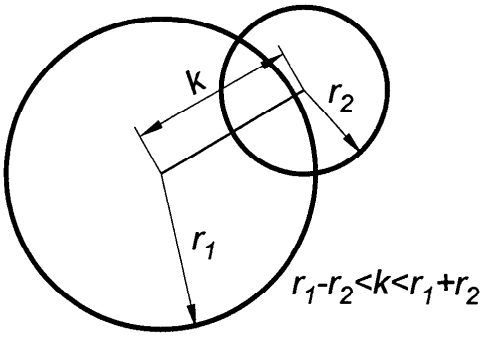
143. ábra. Két kör kölcsönös helyzete



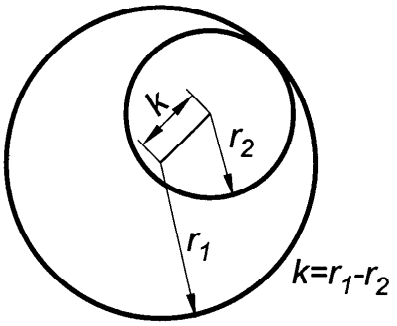
144. ábra. Két kör kölcsönös helyzete

3. $k < r_1 + r_2$ de $k > r_1 - r_2$; a két kör egymást két pontban metszi (145. ábra);

4. $k = r_1 - r_2$; a két kör belülről érintkezik (146. ábra);



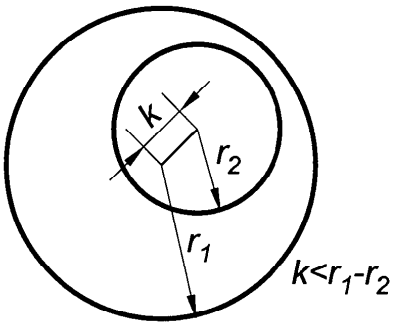
145. ábra. Két kör kölcsönös helyzete



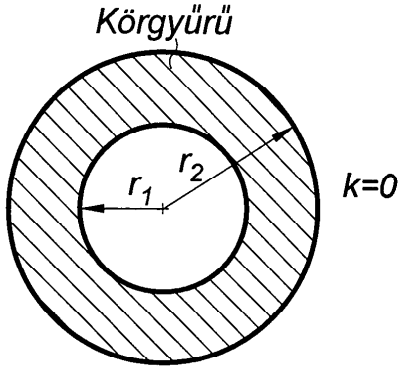
146. ábra. Két kör kölcsönös helyzete

5. $k < r_1 - r_2$; a kisebb kör a nagyobb körön belül fekszik (147. ábra);

6. $k = 0$; a két kör középpontja egybeesik, a körök koncentrikusak (148. ábra). A síknak két koncentrikus körvonal közé eső része a *körgyűrű.*



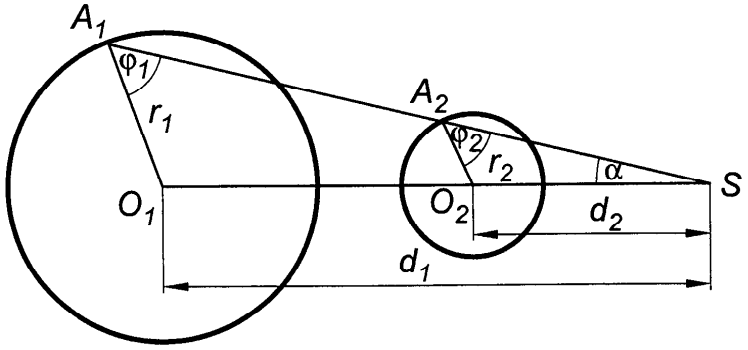
147. ábra. Két kör kölcsönös helyzete



148. ábra. Két kör kölcsönös helyzete

Két kör hasonlóságpontjai.

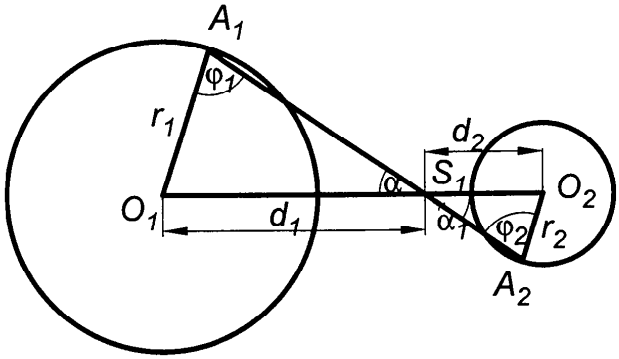
a) Ha két egymáson kívül fekvő körben ($r_1 \neq r_2$) egymással párhuzamos és egyirányú sugarakat rajzolunk, és végpontjaikon át egyeneseket fektetünk, akkor azok a középvonalat a párhuzamos sugarak irányától függetlenül mindig ugyanabban a pontban metszik. Ez a pont a *körök külső hasonlóságpontja* (149. ábra).



149. ábra. Két kör külső hasonlóságpontja

Bizonyítás: Az $SA_1O_1\Delta \sim SA_2O_2\Delta$, mert $\alpha=\alpha$ (közös szög); $\varphi_1 = \varphi_2$ (egyállású szögek), tehát $d_1:d_2 = r_1:r_2$; ebből következik $(d_1 - d_2):d_2 = (r_1 - r_2):r_2$ s mivel $d_1 - d_2 = k$, így $k:d_2 = (r_1 - r_2):r_2$ amiből $d_2 = \frac{k \cdot r_2}{r_1 - r_2}$. d_2 a párhuzamos sugarak helyzetétől független mennyiség, tehát az S külső hasonlósági pontnak a kör középpontjától való távolsága független a párhuzamos sugarak irányától.

b) Ha két, egymáson kívül fekvő körben egymással párhuzamos és ellentétes irányú sugarakat rajzolunk, és végpontjaikon át egyeneseket fektetünk, akkor azok a középvonalat a párhuzamos sugarak irányától függetlenül mindig ugyanabban a pontban metszik. Ez a pont a *körök belső hasonlóságpontja* (150. ábra).



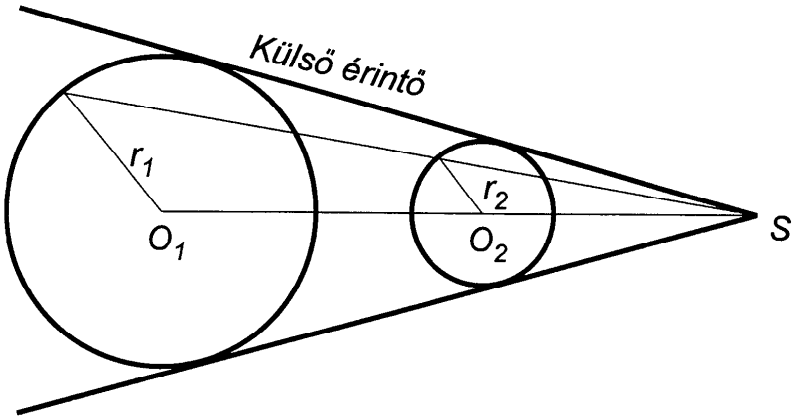
150. ábra. Két kör belső hasonlóságpontja

Bizonyítás: Az $S_1O_2A_2\Delta$ és $S_1O_1A_1\Delta$, hasonlóak, mert $\alpha = \alpha_1$ (csúcsszögek), tehát $d_1:d_2 = r_1:r_2$, ebből pedig $(d_1 + d_2):d_2 = (r_1 + r_2):r_2$ s mivel $d_1 + d_2 = k$, így $k : d_2 = (r_1 + r_2) : r_2$, amiből $d_2 = \frac{k \cdot r_2}{r_1 + r_2}$. A d_2 értéke független a pár-

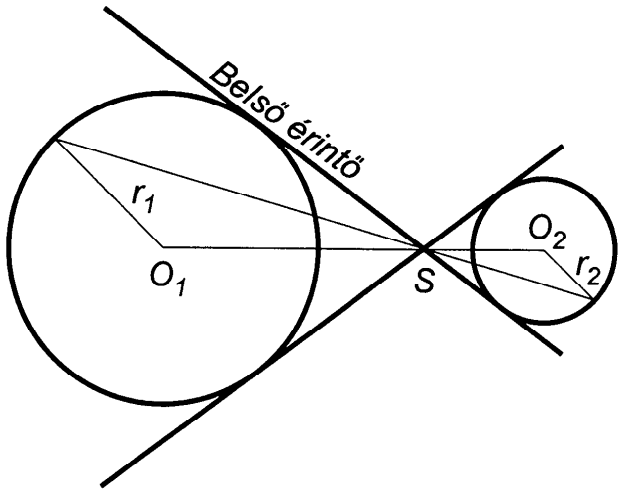
huzamos sugarak helyzetétől, ezért a d_2 távolság s így az S_1 belső hasonlósági pont helyzete mindig ugyanaz marad.

Ha egyik körhöz valamelyik hasonlóságpontból érintőt rajzolunk, akkor az a másik körnek is érintője lesz. A külső hasonlóságponton átmenő érintők a két kör *külső érintői* (151. ábra), a belső hasonlóságponton átmenők pedig a kör *belső érintői* (152. ábra).

Ezek ismerete felhasználható két kör közös érintőinek szerkesztéséhez is.



151. ábra. Két kör külső érintői



152. ábra. Két kör belső érintői

5.1.13 Arányos távolságok a körben

Húrtétel. Egy körben két, egymást metsző húr metszeteinek szorzata egyenlő.

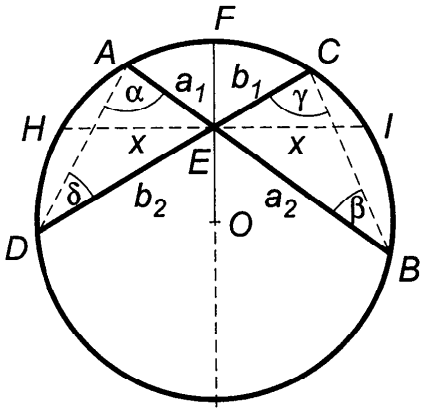
Bizonyítás: Ha az A pontot (153. ábra) D-vel, a B pontot C-vel összekötjük, akkor $ADE\Delta \sim CBE\Delta$, mert $\alpha = \gamma$ és $\delta = \beta$ (ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek) és így $AE : ED = CE : EB$, amiből

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED$$

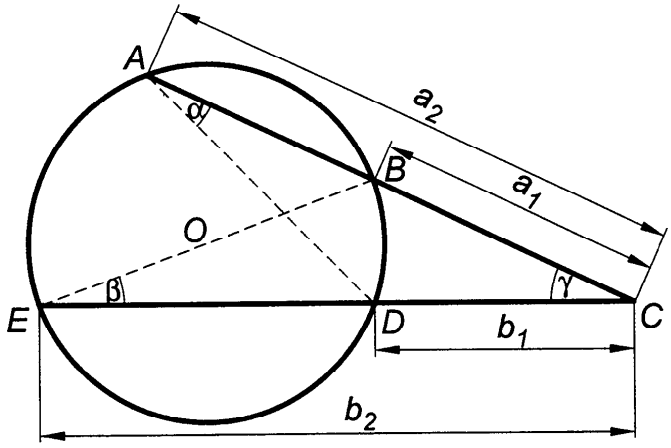
Ha az E ponton átmenő FG átmérőre az E pontban merőleges húrt szerkesztünk (HI), a tétel értelmében (az $EI = \frac{HI}{2} = x$ jelölést használva)

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED = x^2$$

Vagyis a kör egy meghatározott belső E pontján átmenő húrok metszeteinek szorzata egy állandó szám, amely az E ponton átmenő legkisebb húr felének négyzetével egyenlő. Ez az állandó szám *az E pontnak a körre vonatkozó hatványa.*



153. ábra. Húrtétel



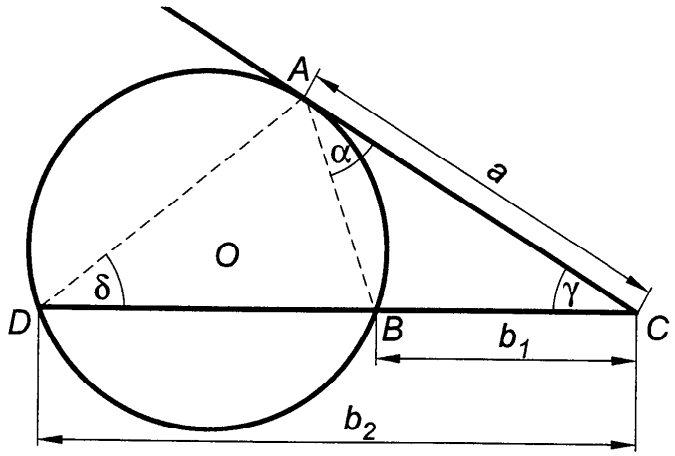
154. ábra. Szelőtétel

Szelőtétel. Ha egy körhöz valamely kívül fekvő pontból két szelőt húzunk, akkor a két szelő metszeteinek szorzata egyenlő.

Bizonyítás: Ha az A pontot D-vel, a B pontot E-vel összekötjük, akkor $CAD\Delta \sim CBE\Delta$ (154. ábra), mert $\alpha = \beta$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek); $\gamma = \gamma$ (közös szög), s így $AC : DC = EC : BC$ amiből:

$$BC \cdot AC = DC \cdot EC, \text{ azaz } a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2.$$

Érintőtétel. Ha egy körhöz valamely kívül fekvő pontból szelőt és érintőt húzunk, akkor az érintődarab mértani középarányos a szelő két metszete között.



155. ábra. Érintőtétel

Bizonyítás: Ha az A pontot B-vel és D-vel összekötjük, akkor $ABC\Delta \sim ADC\Delta$ (155. ábra), mert $\alpha = \delta$ (azonos köríven nyugvó kerületi szögek); $\gamma = \gamma$ (közös szög) s így

$$AC : CD = BC : AC,$$

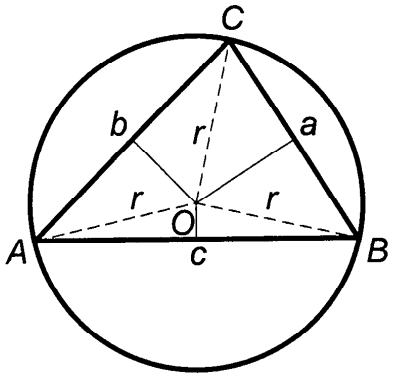
amiből $$\overline{AC}^2 = BC \cdot DC, \text{ azaz } a^2 = b_1 \cdot b_2.$$

Ez a Szelőtételből is levezethető, ha az AC szelőt C pont körül az óramutató járásával megegyezően addig forgatjuk, amíg a kör érintőjévé nem válik. Akkor $BC = AC = a$, úgyhogy $a^2 = b_1 \cdot b_2$, azaz egy meghatározott C külső pontból a körhöz húzható szelők metszeteinek szorzata állandó szám, mely a C pontból húzható érintőszakasz négyzetével egyenlő. Ez az állandó szám a *C külső pontnak a körre vonatkozó hatványa.*

5.1.14 Körbe és kör köré írt háromszögek és négyszögek

A körbe írt háromszögek és négyszögek oldalait a kör húrjai, a kör köré írt háromszögek és négyszögek oldalait a kör érintői alkotják. Az előbbieket *húr-*, az utóbbiakat *érintőháromszögeknek,* illetve *-négyszögeknek* mondjuk.

a) Bármely háromszöget *húrháromszögnek* tekinthetünk, mert az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a három csúcstól egyenlő távolságra van.



156. ábra. Háromszög köré írt kör, húrháromszög

Bizonyítás: Az *a* és *b* oldalt felező merőlegesek metszéspontját, *O*-t kössük össze a háromszög csúcspontjával (156. ábra). Az így kapott *AOC*, *BOC* és *ABO* háromszög közül az *AOC* és a *BOC* háromszögek a szerkesztés értelmében egyenlő szárúak, ezért $OA = OC$ és $OB = OC$, amiből következik, hogy $OA = OB$, azaz $AOB\Delta$ is egyenlő szárú, tehát az *O* pont a *c* oldalfelező merőlegesén is rajta van.

De ha $OA = OB = OC$, akkor az *O* pont az *A*, *B*, *C* csúcspontoktól egyenlő távolságra van, tehát az *O* pont a három csúcspontón átmenő kör középpontja. Így szerkeszthető tehát a *háromszög köré írt kör.*

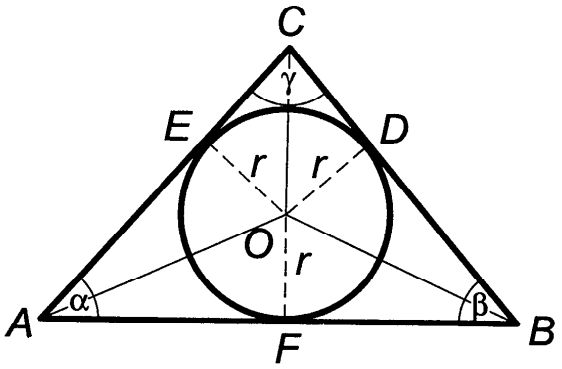
b) Bármely háromszöget *érintőháromszögnek* tekinthetünk mert a szögfelező egyenesek metszéspontja az oldalaktól egyenlő távolságra van.

Bizonyítás: Az α és β szög szögfelezőjének metszéspontját jelöljük *O*-val (157. ábra). *O*-ból mindhárom oldalra húzzunk merőlegest (*OD*, *OE*, *OF*).

I. $AOE\Delta \cong AOF\Delta$, mert derékszögűek és $AO = AO$ (közös oldal); $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

II. $BOF\Delta \cong BOD\Delta$.

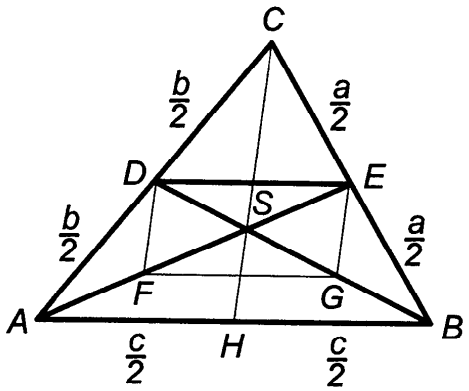
I.-ből $OE = OF$, II.-ből $OF = OD$, s így $OD = OE = OF$, azaz az O középpontú, OD sugarú kör a háromszög mindhárom oldalát érinti. Ha megrajzoljuk az OC egyenest, akkor az $OCE\Delta$ és $OCD\Delta$ egybevágóságából (derékszögűek és $OE = OD$, $OC = OC$) következik, hogy a γ szögfelezője is az O ponton megy keresztül. Ezzel az eljárással szerkeszthető egy háromszögbe a *beírt kör*.



157. ábra. Beírt kör, érintőháromszög

A *háromszög köré írt kör középpontja* és a *háromszögbe írt kör középpontja* a háromszög két *nevezetes pontja.* Most még két nevezetes ponttal ismerkedünk meg: a *háromszög súlypontjával* és *magasságpontjával.*

c) Azt az egyenes szakaszt, amely a háromszög valamelyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával köti össze, *súlyvonalnak* nevezzük. A háromszög súlyvonalai egy pontban, a *súlypontban* metszik egymást úgy, hogy a súlypont mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja (a nagyobbik rész a csúcs felé esik, 158. ábra).



158. ábra. A háromszög súlyvonalai és súlypontja

Bizonyítás: Az A és B csúcspontból kiinduló súlyvonalak metszéspontját jelöljük S-sel. Kössük össze a D és E oldalfelező pontokat. A C csúcspontú egyenesseregre felírható, hogy

$$DE:AB = \frac{1}{2}a:a, \text{ vagyis } DE:AB = 1:2, \text{ s így}$$

$$DE = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}.$$

A DE szakaszt a *háromszög középvonalának* nevezzük. DE a c oldallal párhuzamos, mert CA és CB oldalakat 1 : 1 arányban osztja. Minden háromszögre igaz, hogy bármely két oldalának felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos a harmadik oldallal, és annak felével egyenlő.

Ha megismételjük a szerkesztést az ABS háromszögre, akkor azt kapjuk, hogy

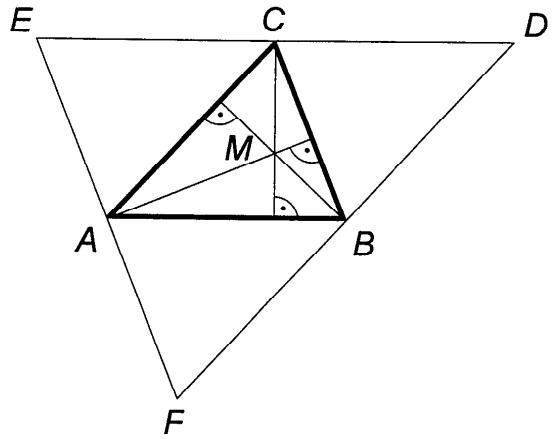
$$FG = \frac{1}{2}AB, \quad FG \parallel AB.$$

Az $EDFG$ négyszög két szemben levő oldala egyenlő és párhuzamos, tehát paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, tehát $FS = SE$ és $GS = SD$. A szerkesztés szerint pedig $AF = FS$ és $BG = GS$; azaz $AF = FS = SE$ és $BG = GS = SD$, tehát

$$ES = \frac{AS}{2} \text{ és } DS = \frac{BS}{2}.$$

A C csúcspontot és a szemben fekvő oldal H felezőpontját összekötő CH súlyvonal az AE és BD súlyvonalakat szintén 1 : 2 arányban osztja. De az AE és BD oldalfelezőket csak az S metszéspont osztja 1 : 2 arányban, ezért a CH súlyvonalnak is át kell mennie az S ponton. Ezt az S pontot a *háromszög súlypontjának* nevezzük.

d) A háromszög bármely csúcsából a szemközti oldalra vagy annak meghosszabbítására bocsátott merőlegest a háromszög *magasságvonalának* nevezzük. A három magasságvonal egy pontban, a *magasságpontban* metszi egymást.



159. ábra. A háromszög magasságvonalai és magasságpontja

Bizonyítás: Az *A*, *B*, *C* csúcspontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat a szemben fekvő oldalakkal, akkor az így előálló *EFD* háromszög oldalait az adott háromszög csúcspontjai felezik (159. ábra). Az *ABCE* és *ABDC* négyszögek ui. a szerkesztés következtében paralelogrammák, s így egyrészt $AB = EC$, másrészt $AB = CD$, amiből következik: $EC = CD$.

Hasonlóan bizonyítható az $EA = AF$, $FB = BD$ egyenlőségek helyessége is. Másrészt az *EFD* háromszögnek az *ABC* háromszög magasságvonalai egyben oldalfelező merőlegesei, s így azok az *a*) tétel szerint egy pontban metszik egymást, tehát az adott háromszög magasságvonalai is egy pontban metszik egymást. A derékszögű háromszög két magasságvonala megegyezik a befogókkal, s ebből már következik, hogy magasságpontja a derékszögű csúcspont.

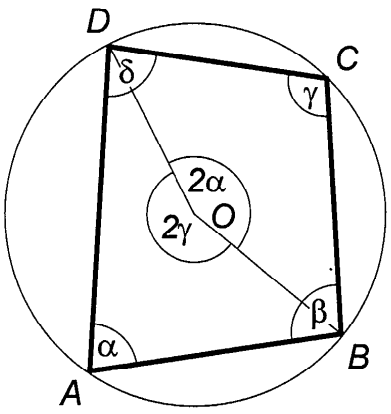
e) Minden húrnégyszögben 180° a szemben fekvő két szög összege.

Bizonyítás: Az α kerületi szög ívéhez a *DOB* középponti szög tartozik, tehát $DOB\angle = 2\alpha$. Ugyanúgy $BOD\angle = 2\gamma$. A $DOB\angle$ és a $BOD\angle$ együtt teljes szöget alkotnak (160. ábra):

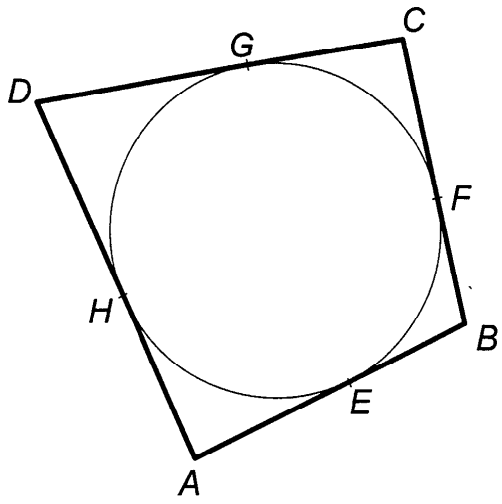
$$DOB\angle + BOD\angle = 360°, \text{ s így } 2\alpha + 2\gamma = 360°, \text{ amiből}$$

$$\alpha + \gamma = 180°.$$

Ugyanígy igazoljuk a $\beta + \delta = 180°$ egyenlőség helyességét is. A tétel megfordítva is igaz, azaz, ha egy négyszög két szemközti szögének összege 180°, akkor az *húrnégyszög*.



160. ábra. Húrnégyszög



161. ábra. Érintőnégyszög

f) Minden érintőnégyszögben a szemben fekvő oldalak összege egyenlő.

Bizonyítás: Az *ABCD* érintőnégyszögben (161. ábra) $AE = AH$; $BE = BF$; $CG = CF$; $DG = DH$, mert a körön kívül fekvő bármely pontból a körhöz húzható két érintődarab egymással egyenlő. Összeadva a bal és jobb oldalt:

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH$$

$$AB + CD = AD + BC.$$

A tétel megfordítva is igaz:

ha egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az érintőnégyszög.

5.1.15 A síkidomok kerülete és területe

A síkidomot határoló vonal az idom *kerülete*; a kerület hosszának mértékszámát is gyakran kerületnek nevezzük. A kerület határolta síkrészt is gyakran a terület mértékszáma helyett röviden az idom *területének* nevezzük. Mind a kerületmérés, mind a területmérés összehasonlításon, alapszik. Kerületméréskor a síkidom kerületét

összehasonlítjuk a mértékegységül választott hosszúságegységgel az 1 méterrel. (A méter definíciója: a 86-os tömegszámú kriptonatom $2p_{10}$ és $5d_5$ energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő, vákuumban terjedő sugárzás hullámhosszának 1 650 763.73-szorosa. Újabb meghatározása: A vákuumban terjedő fény 1 s alatt megtett útjának 1 : 299 792 458-ad része.)

A méterben kifejezett hosszúságegységek:

1 examéter (1 Em) $= 10^{18}$ m	1 petaméter (1 Pm) $= 10^{15}$ m
1 teraméter (1 Tm) $= 10^{12}$ m	1 gigaméter (1 Gm) $= 10^{9}$ m
1 megaméter (1 Mm) $= 10^{6}$ m	1 kilométer (1 km) $= 10^{3}$ m
1 deciméter (1 dm) $= 10^{-1}$ m	1 centiméter (1 cm) $= 10^{-2}$ m
1 milliméter (1 mm) $= 10^{-3}$ m	1 mikrométer (1 μm) $= 10^{-6}$ m
1 nanométer (1 nm) $= 10^{-9}$ m	1 pikométer (1 pm) $= 10^{-12}$ m
1 femtométer (1Fm) $= 10^{-15}$ m	1 attométer (1 am) $= 10^{-18}$ m

Megjegyzés: Angol nyelvterületeken használatos mértékegységek:

1 inch = 0,0254 m;	1 láb = 0,3048 m
1 yard = 0,9144 m ;	1 mérföld = 1609,344 m

1 nemzetközi tengeri mérföld = 1 853,181 m
1 US tengeri mérföld = 1 852 m.

Területméréskor a síkidom területét hasonlítjuk össze a *területmérés mértékegységével.* A terület mértékegységéül az 1 m oldalhosszúságú négyzet területét választjuk, melynek jele: $1\ m^2$ (olv.: egy négyzetméter).

A síkalakzatok területe tehát a mértékegységben kifejezett pozitív szám. A területszámítás alapja:

a) egybevágó alakzatok területe egyenlő;

b) részekre osztott alakzat területe a részek területének összegével egyenlő.

Négyzetméterben kifejezett mértékegységek:

négyzetkilométer	$1\ km^2 = 10^6\ m^2 = 1000000\ m^2$
hektár	$1\ ha = 100\ a = 10^4\ m^2 = 10000\ m^2$
ár	$1\ a = 100\ m^2$
négyzetdeciméter	$1\ dm^2 = 10^{-2}\ m^2 = 0,01\ m^2$

négyzetcentiméter $1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2 = 0{,}0001\ \text{m}^2$

négyzetmilliméter $1\ \text{mm}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2 = 0{,}000001\ \text{m}^2$

$$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = 10000\ \text{cm}^2 = 1000000\ \text{mm}^2.$$

Megjegyzés: A föld területének mérésére hivatalosan a hektárt használják, de a föld területének nagyságát a földet művelők még gyakran négyszögölben, kataszt-rális holdban, magyar holdban (láncban), kis magyar holdban, kvadrátföldben adják meg. A felsoroltak hektárban ill. négyzetméterben:

1 négyszögöl (□-öl) $\approx 3{,}596\ \text{m}^2$; (1 öl = 1,896 m);

1 katasztrális hold (kh) = 1600 □-öl $\approx 5754\ \text{m}^2 \approx 0{,}575$ ha;

Lánc területmérték (magyar hold) = 1200 □-öl;

Kis magyar hold = 1000 □-öl;

Kvadrátföld területe = 400 □-öl.

Az *egyenesvonalú síkalakzatok kerületét* megkapjuk, ha az egyes oldalak hosszúsági mértékszámát (röviden: oldalakat) összeadjuk.

Pl.: Egy a, b, c oldalú háromszög kerülete (k) a három oldal összegével egyenlő:

$$k = a + b + c.$$

a) Az a oldalú *négyzet területe* (t) az egyik oldal négyzetével egyenlő:

$$t = a^2.$$

Pl.: Egy víztartály négyzet alakú alapjának oldala 23 dm. Hány méter hosszú az egész kerülete? Hány négyzetméter vaslemezre van szükség az alapjához?

Megoldás: 23 dm = 2,3 m tehát $k = 4a = 4 \cdot 2{,}3 = 9{,}2$ m.

$t = a^2 = 2{,}3^2 = 5{,}29\ \text{m}^2$.

b) A *téglalap* (117. *b* ábra) *területe* a két szomszédos oldal szorzatával egyenlő:

$$t = a \cdot b$$

Pl.: Egy téglalap kerülete 14 m, területe $12\ \text{m}^2$. Mekkorák a téglalap oldalai?

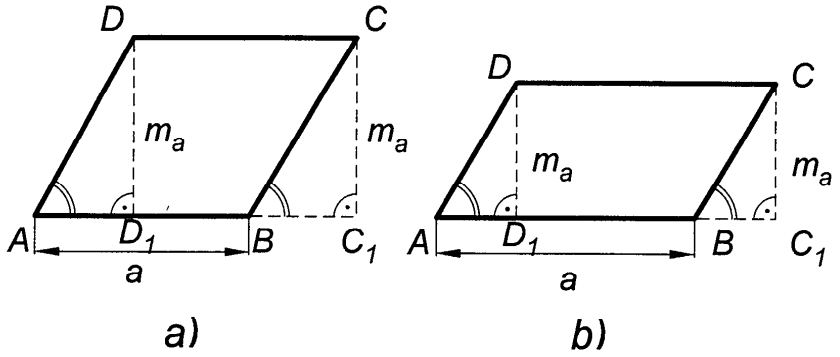
Megoldás: Legyenek a téglalap szomszédos oldalai: a és b, akkor:

$$2(a+b) = 14,\quad b = 7 - a,\quad ab = 12,\quad a(7-a) = 12,\quad a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3, \end{cases} \quad b = 7 - a = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

Tehát a téglalap szomszédos oldalai 3 m és 4 m.

c) A *ferdeszögű paralelogrammák* (162. *a* és *b* ábra) *területét* úgy számítjuk ki, hogy velük egyenlő területű téglalapokká alakítjuk át. Az alapra, ill. a meghosszabbított alapra húzzunk merőlegest a D és C csúcsból.



162. *a*) és *b*) ábra. Ferdeszögű paralelogrammák

$AD_1D\Delta \cong BC_1C\Delta$, mert $\overline{AD} = \overline{BC}$ és $A\angle = B\angle$, tehát területük is egyenlő, ezért $ABCD$ ferdeszögű paralelogramma területe = $= D_1C_1CD$ derékszögű paralelogramma területe = $a \cdot m_a$ és így

$$t = a \cdot m_a$$

Mivel a téglalapnál a magasság az oldallal helyettesíthető, ezért mondhatjuk, hogy

minden paralelogramma területe az alap és az alaphoz tartozó magasság szorzatával egyenlő.

Pl.: Valamely ferdeszögű paralelogramma területe 54 cm^2, alapjának és magasságának aránya pedig 3 : 2, mekkora az alapja és a magassága?

Megoldás: Az alapja legyen x, a magassága pedig y, akkor $x \cdot y = 54$ és $x : y = 3 : 2$. Az egyenletrendszert megoldva: $x = 9$ és $y = 6$ cm.

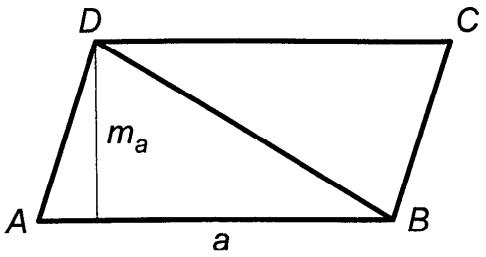
d) A *háromszög területét* a paralelogramma területével való összehasonlítás alapján állapíthatjuk meg. Az $ABCD$ paralelogrammát (163. ábra) BD átlója két egybevágó háromszögre bontja:

$$ABD\Delta \cong CDB\Delta.$$

Ha paralelogramma területét T-vel jelöljük és az egyik háromszög területét t-vel, akkor:

$t = \frac{T}{2}$, de $T = a \cdot m_a$, tehát

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2}, \qquad \text{azaz}$$



163. ábra. Háromszög területe

a háromszög területe az egyik oldal és az ehhez tartozó magasság szorzatának felével egyenlő.

Héron képlete. A háromszög területét a három oldal hosszának ismeretében is kiszámíthatjuk.

A háromszög kerületének felét jelöljük s-sel: $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Az $ADC\Delta$-re (164. ábra) írjuk fel *Pitagorasz* tételét:

$b^2 = m_c^2 + q^2$ vagy $m_c^2 = b^2 - q^2 = (b+q)(b-q)$, s így

$$m_c = \sqrt{(b+q)(b-q)} \qquad (1)$$

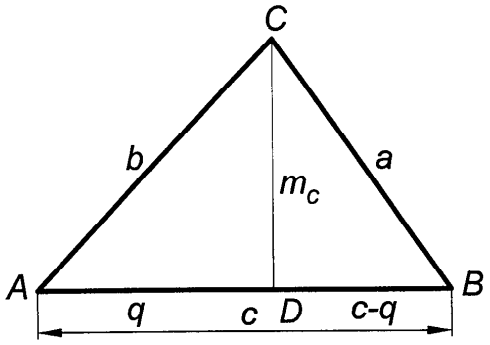
A $DBC\Delta$-re alkalmazzuk *Pitagorasz* tételét:

$a^2 = m_c^2 + (c-q)^2 = m_c^2 + c^2 - 2cq + q^2$.

Helyettesítsük be q^2 helyére az $ADC\Delta$-ből $q^2 = b^2 - m_c^2$ értékét:

$$a^2 = m_c^2 + c^2 - 2cq + b^2 - m_c^2,$$

amiből $q = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$.



164. ábra. Háromszög

Ezt (1)-be téve:

$$m_c = \sqrt{\left(b + \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Az így kapott m_c-t helyettesítsük be a háromszög területképletébe:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ s így}$$

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ez *Héron* képlete.

Példák

1. Számítsuk ki annak a derékszögű háromszögnek a kerületét és területét, amelynek befogói $a = 13{,}2$ cm és $b = 5{,}7$ cm.

Megoldás

$$k = a + b + c = 13{,}2 + 5{,}7 + \sqrt{13{,}2^2 + 5{,}7^2} = 13{,}2 + 5{,}7 + 14{,}4 = 33{,}3 \text{ cm}.$$

$$t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{13{,}2 \cdot 5{,}7}{2} = 37{,}62 \text{ cm}^2.$$

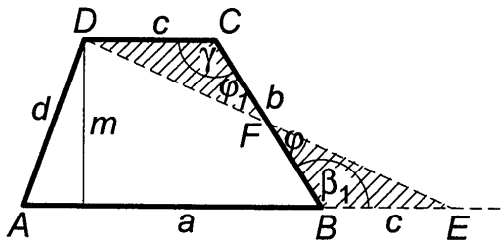
2. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelynek oldalai: $a = 24$ m , $b = 15$ m, $c = 20$ m.

Megoldás: $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{24+15+20}{2} = 29{,}5$; tehát a terület:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{29{,}5(29{,}5-24)(29{,}5-15)(29{,}5-20)} \approx$$

$$\approx 149{,}5 \text{ m}^2.$$

e) A *trapéz* (165. ábra) *területét* a háromszög területével való összehasonlításból állapíthatjuk meg. Húzzunk a D csúcsból a CB oldal F felezőpontján át egy egyenest, amely E pontban metszi az alap meghosszabbítását. Az így keletkezett $FBE\Delta \cong FCD\Delta$, mert $CF = FB$, $\varphi = \varphi_1$ (csúcsszögek) és $\beta_1 = \gamma$ (váltószögek), tehát az $ABCD$ trapéz területe egyenlő az AED háromszög területével.



165. ábra. Trapéz

Így: $$t = \frac{a+c}{2} \cdot m,$$ azaz

a trapéz területe a két párhuzamos oldal félösszegének és a magasságnak szorzatával egyenlő.

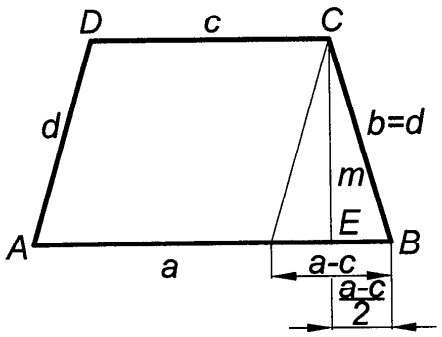
Mivel a trapéz középvonalának hossza $\frac{a+c}{2}$, azt is mondhatjuk, hogy a trapéz területe a középvonal és a magasság szorzatával egyenlő.

Pl.: Valamely egyenlő szárú trapéz két párhuzamos oldala $a = 64$ m, $c = 40$ m; szára $b = d = 37$ m. Mekkora a kerülete és területe?

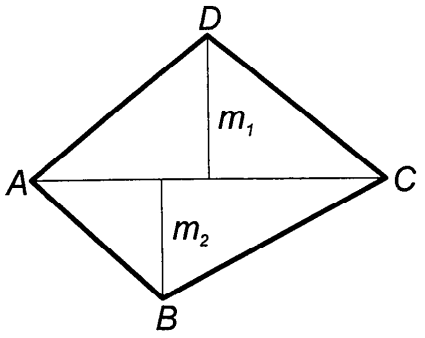
Megoldás: $k = a+b+c+b = 64+40+2\cdot 37 = 178$ m.

Az egyenlő szárú trapéz magasságát a BCE derékszögű háromszögből (166. ábra) határozhatjuk meg: $m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$, tehát

$$t = \frac{a+c}{2} m = \frac{64+40}{2} \cdot 35 = 1820 \text{ m}^2.$$



166. ábra. Egyenlő szárú trapéz



167. ábra. Általános négyszög

f) Az *általános négyszög területét* úgy számítjuk ki, hogy az egyik átlóval két háromszögre bontjuk, ezek területét kiszámítjuk és összeadjuk (167. ábra).

$t = \frac{1}{2} AC \cdot m_1 + \frac{1}{2} AC \cdot m_2$ vagy $\frac{1}{2} AC$ kiemelése után:

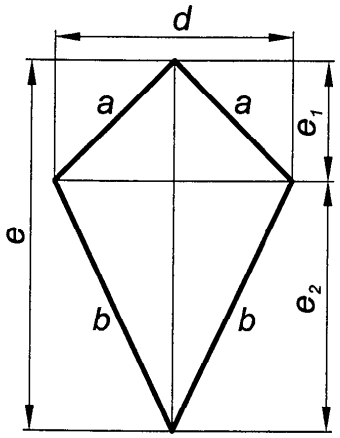
$$t = \frac{1}{2} AC (m_1 + m_2).$$

g) A *deltoid* (168. ábra) *területe* a 168. ábra alapján a két átló szorzatának felével egyenlő:

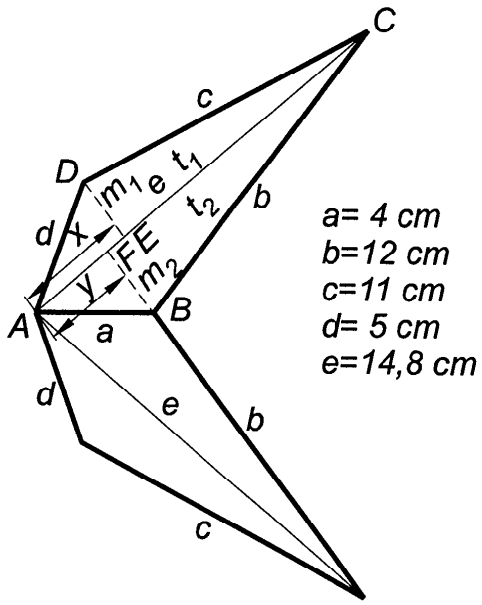
$t = \frac{1}{2} de_1 + \frac{1}{2} de_2 = \frac{1}{2} d(e_1 + e_2)$, de $e_1 + e_2 = e$, tehát

$$t = \frac{d \cdot e}{2}.$$

Így számítható mindazoknak a négyszögeknek is a területe, amelyeknél az átlók merőlegesek (pl. négyzet, rombusz).



168. ábra. Deltoid



169. ábra. *AB* tengelyre szimmetrikus idom

Pl.: Számítsuk ki a 169. ábra adataival megadott szimmetrikus idom területét.

Megoldás: Az m_1 kiszámításához x-re, m_2 kiszámításához y-ra van szükségünk. x-et az *AED* és az *ECD* háromszögre alkalmazott *Pitagorasz*-tétellel számítjuk ki:

$$m_1^2 = d^2 - x^2 = c^2 - (e-x)^2, \text{ s így}$$

$$x = \frac{d^2 - c^2 + e^2}{2e} = \frac{5^2 - 11^2 + 14{,}8^2}{2 \cdot 14{,}8} \approx 4{,}15 \text{ cm}.$$

y-t hasonlóan kapjuk az *ABF* és *BCF* háromszögre alkalmazott *Pitagorasz*-tétellel:

$$m_2^2 = a^2 - y^2 = b^2 - (e-y)^2, \text{ amiből}$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 + e^2}{2e} = \frac{4^2 - 12^2 + 14{,}8^2}{2 \cdot 14{,}8} \approx 3{,}07 \text{ cm}.$$

Tehát

$$m_1 = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 4{,}15^2} \approx 2{,}79 \text{ cm és}$$

$$m_2 = \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{4^2 - 3{,}07^2} \approx 2{,}56 \text{ cm},$$

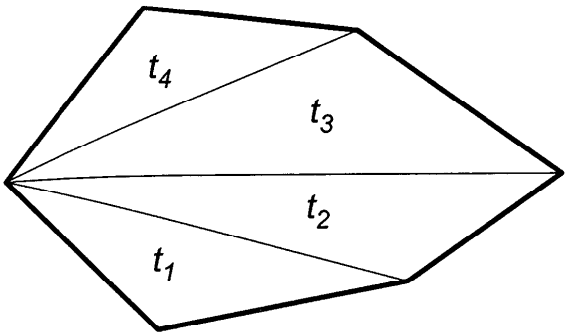
$$\frac{t}{2} = \frac{e \cdot m_1}{2} + \frac{e \cdot m_2}{2}, \text{ és így}$$

$$t = e(m_1 + m_2) = 14{,}8 \cdot (2{,}79 + 2{,}56) = 14{,}8 \cdot 5{,}35 \approx 79{,}18 \text{ cm}^2.$$

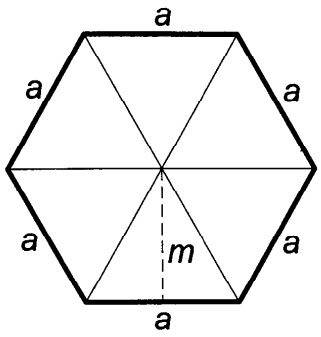
A feladat megoldható a *Héron*-képlet alkalmazásával is.

h) Az *n-szög területét* úgy számíthatjuk ki, hogy egy csúcsból rajzolt átlók segítségével $(n-2)$ háromszögre bontjuk és a háromszögek területét összeadjuk (pl. $n=6$; 170. ábra):

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2}$$



170. ábra. Sokszög háromszögekre bontása



171. ábra. Szabályos hatszög

A *szabályos n-szög területét* úgy határozzuk meg, hogy a csúcspontokat összekötjük a sokszög középpontjával (171. ábra) és az így előállított egyenlő szárú háromszögek egyikének területét *n*-szer vesszük:

$$t = \frac{a \cdot m}{2} n = \frac{k \cdot m}{2}, \qquad (n \cdot a = k \text{ a kerület}).$$

Pl.: Számítsuk ki az a oldalú négyzetbe rajzolt szabályos nyolcszög (172. ábra) kerületét és területét.

Megoldás: Mivel $a = s + 2x$ és $x^2 + x^2 = s^2$, amiből $x = \frac{\sqrt{2}}{2} s$, ezért

$$a = s(\sqrt{2}+1) \text{ és}$$

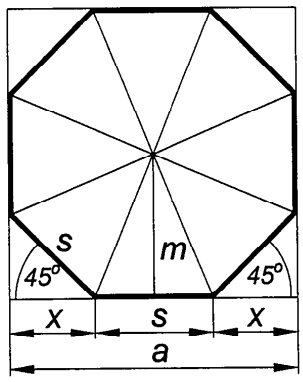
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

$$= a(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}4142a$$

tehát $k = 8s \approx 3{,}3136\, a$; és

$$t = 8\frac{s \cdot m}{2} \approx \frac{8 \cdot 0{,}4142a \cdot \frac{a}{2}}{2} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}4142a^2 = 0{,}8284a^2.$$



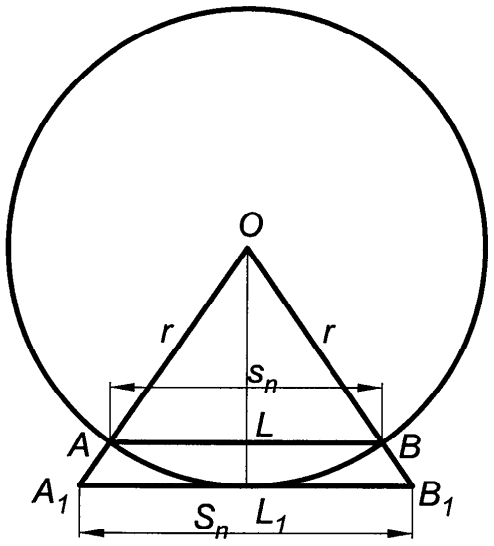
172. ábra. Szabályos nyolcszög

i) A *kör kerületét* tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk a körbe és a kör köré írt szabályos sokszögek kerületéből.

Legyen a körbe írt szabályos n-szög egy oldala s_n, a kör köré írt szabályos n-szög egy oldala pedig S_n (173. ábra). A két oldal között a következő összefüggés áll fenn:

$$S_n : s_n = r : OL, \text{ de } OL = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = r\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}.$$

Így $S_n : s_n = r : r\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}$, amiből $s_n = S_n\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}$.



173. ábra. A kör kerületének és területének meghatározása

Ha mindkét oldalt megszorozzuk n-nel, akkor a körbe és a kör köré írt szabályos sokszög kerülete közötti összefüggést kapjuk:

$$k_n = K_n\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}},$$

ahol $k_n = n \cdot s_n$ a körbe, $K_n = n \cdot S_n$ pedig a kör köré írt szabályos n-szög kerülete. A sokszög oldalszámának növelésével s_n egyre csökken (0-hoz tart), tehát a második tényező egyre jobban közelít 1-hez; a körbe írt sokszög kerülete növekszik, a kör köré írt sokszög kerülete csökken, közös értékhez közelítenek. Ha a szabályos hatszög kerületéből indulunk ki, és az oldalak számát folytonosan megkettőzzük, akkor k_n és K_n a következő értéket veszi fel $n = 1536$-ig:

n	k_n	K_n
6	$3{,}0000000 \cdot 2r$	$3{,}4641016 \cdot 2r$
12	$3{,}1058285 \cdot 2r$	$3{,}2153903 \cdot 2r$
24	$3{,}1326286 \cdot 2r$	$3{,}1596600 \cdot 2r$
48	$3{,}1393502 \cdot 2r$	$3{,}1460863 \cdot 2r$
96	$3{,}1410320 \cdot 2r$	$3{,}1427147 \cdot 2r$
192	$3{,}1414525 \cdot 2r$	$3{,}1418731 \cdot 2r$
384	$3{,}1415577 \cdot 2r$	$3{,}1416628 \cdot 2r$
768	$3{,}1415839 \cdot 2r$	$3{,}1416102 \cdot 2r$
1536	$3{,}1415905 \cdot 2r$	$3{,}1415971 \cdot 2r$

A kör k kerülete k_n és K_n között van, tehát $k_n < k < K_n$, azaz

$$3{,}1415905 \cdot 2r < k < 3{,}1415971 \cdot 2r,$$

s ha $d = 2r$-rel osztjuk az egyenlőtlenséget, akkor a kör kerületének és átmérőjének arányszámát öt tizedesjegy pontosságig felírhatjuk:

$$\frac{k}{2r} = 3{,}14159.$$

Ezt az arányszámot *Ludolf van Ceulen* (1540–1610) német matematikus 35 tizedesig terjedő pontossággal kiszámította, ezért *Ludolf*-féle számnak is nevezik. Jele:π (olv.: pi), a "periferia" görög szó kezdőbetűje. Érdekességként megemlíthető, hogy 1958-ban elektronikus számítógéppel π értékét 10000 tizedesjegyig pontosan kiszámították, ez azonban csak elméleti jelentőségű, mert a gyakorlatban általában legfeljebb négy-öt tizedesjegyet használunk. ($\pi \approx 3{,}1416$, ill. 3,142; az első húsz tizedesjeggyel adott értéke: $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$ ...)

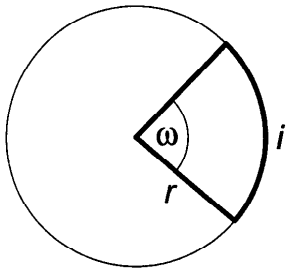
A π számról *Ferdinánd von Lindemann* (1852–1939) német matematikus 1882-ben kimutatta, hogy végtelen, nem szakaszos tizedes tört, mégpedig ún. *transzcendens szám*, amelyre (szemben az ún. algebrai irracionális számokkal, mint pl. $\sqrt{2}$) nincs olyan egész együtthatós *n*-edfokú algebrai egyenlet, amelynek π gyöke volna.

A kör kerülete egyenlő a sugár kétszeresének és π-nek szorzatával vagy az átmérő és π szorzatával:

$$k = 2r\pi = d\pi.$$

Pl.: Számítsuk ki a $d = 23{,}1$ cm átmérőjű kör kerületét.
Megoldás: $k = d\pi = 23{,}1 \cdot 3{,}142 = 72{,}6$ cm = 0,726 m.

Az 5.1.12 pont *a*) tétele szerint írhatjuk (174. ábra), hogy $i:2r\pi = \omega°:360°$, amiből az *i* körív hossza:



174. ábra. Körív és középponti szög

$$i = \frac{2r\pi\omega°}{360°} = \frac{r\pi\omega°}{180°}$$

A bal és jobb oldalt *r*-rel osztva, az

$$\frac{i}{r} = \frac{\pi\omega°}{180°}$$

egyenlőséget kapjuk, amelynek bal oldala az ív és sugár hányadosa: megnevezetlen szám. Az *i*/*r* hányadosra az $\widehat{\omega}$ (vagy arc ω°) jelölést használjuk (arc a latin arcus (ív) szó rövidítése; olv.: árkusz).

Tehát

$$\frac{\text{ív}}{\text{sugár}} = \frac{i}{r} = \widehat{\omega} = arc\omega° = \frac{\pi}{180°}\omega°$$

Az egységnyi sugarú körben

az 1°-hoz tartozó körívhossz: $\text{arc } 1° = \frac{\pi}{180°}$,

az 1'-hez tartozó: $\text{arc } 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60'}$,

az 1"-hez tartozó: $\text{arc } 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$.

Az egységnyi sugarú körben az *egységnyi ívhosszhoz tartozó középponti szög*:

$$\omega° = \frac{180°}{\pi} = 57{,}29578° = 57°17'44{,}8'' \approx 57°17'45''$$

Ezt a szöget is szokás egységül választani, és az angolok után *radiánnak* nevezzük. Jele: 1 rad, tehát 1 radián az ívmértéke az 57°17'45" nagyságú szögnek. Néhány fontosabb szög értéke fokban és radiánban a következő:

Fok	30°	45°	57°17'45"	60°	90°	180°	270°	360°
Radián	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Példák

1. Számítsuk át

a) az $\alpha° = 53°48'15''$ szöget tizedestört alakra;

b) a $\beta° = 123{,}92138°$ szöget fok, perc, másodperc alakra.

Megoldás

a) $48' = \frac{48°}{60} = 0{,}8°$, $15'' = \frac{15°}{3600} = 0{,}004167°$, tehát

$\alpha° = 53°48'15'' = 53{,}804167°$

b) $0{,}92138° = 0{,}92138 \cdot 60' = 55{,}2828'$,

$0{,}2828' = 0{,}2828 \cdot 60'' = 16{,}968''$, tehát

$\beta° = 123{,}92138° \approx 123°55'17''$.

2. Számítsuk át az $\omega° = 42°50'$-et és az $\alpha° = 175{,}4°$-ot radiánba.

Megoldás: $\widehat{\omega} = \frac{\pi}{180} \cdot 42{,}83 \approx 0{,}748$, $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \cdot 175{,}4 \approx 3{,}061$.

3. Írjuk át az $\widehat{\omega} = 0{,}68$ és $\widehat{\alpha} = 30$ radiánt fokokba.

Megoldás: $\omega° = \frac{180°}{\pi} \cdot 0{,}68 \approx 39°$, $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot 30 \approx 1720°$.

A fentiek alapján mondhatjuk:

a körív hosszát úgy számítjuk ki, hogy a kör sugarát szorozzuk a körívhez tartozó középponti szög radiánban kifejezett mértékszámával:

$$i = r \cdot \widehat{\alpha}$$

j) A *kör területét* is a körbe és a kör köré írt szabályos sokszög területéből határozhatjuk meg.

Legyen a körbe írt szabályos n-szög egy oldala s, akkor egy háromszög területe: $\frac{s \cdot m}{2}$; az n oldalú sokszög területe tehát $n\frac{s \cdot m}{2} = n \cdot s \cdot \frac{m}{2}$.

Ha a sokszög oldalainak a számát folytonosan növeljük, akkor – mint már láttuk – az $n{\cdot}s$ szorzat a kör $2r\pi$ kerületét, az m pedig a kör sugarát közelíti meg tetszés szerinti pontossággal, úgyhogy helyettük $2r\pi$-t ill. r-et írva, a *kör területének meghatározására a következő képletet kapjuk*:

$$t = 2r\pi\frac{r}{2} = r^2\pi.$$

A technikában a sugár helyett gyakrabban adott (vagy pontosabban mérhető) az átmérő, $2r = d$, ezért a

$$t = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$$

képletet használjuk a kör területének kiszámításához.

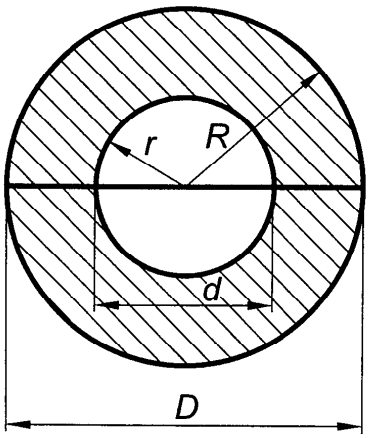
A kör területét megkapjuk, ha a sugár négyzetét szorozzuk π-vel, vagy ha az átmérő négyzetét szorozzuk $\frac{\pi}{4}$-gyel.

Pl.: Számítsuk ki egy cső átáramlási keresztmetszetét, ha $d = 200$ mm.

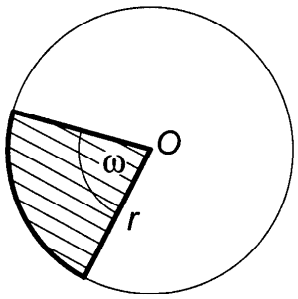
Megoldás: $t = \frac{d^2\pi}{4} \approx \frac{200^2 \cdot 3{,}142}{4} = 31420 \text{ mm}^2 = 0{,}03142 \text{ m}^2$.

A *körgyűrű* (175. ábra) *kerülete* a két kör kerületével egyenlő:

$$k = 2r\pi + 2R\pi = 2\pi(r + R) = \pi(d + D).$$



175. ábra. Körgyűrű



176. ábra. Körcikk vagy körszektor

A *körgyűrű területét* úgy számítjuk ki, hogy a nagyobbik kör területéből kivonjuk a kisebbik kör területét:

$$t = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$

Pl.: Egy cső belső átmérője 250 mm, falvastagsága 10 mm. Számítsuk ki a cső falvastagsága által alkotott körgyűrű területét.

Megoldás: $t = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}\left[(250 + 2\cdot 10)^2 - 250^2\right] \approx 8169{,}2 \text{ mm}^2 =$

$= 81{,}692 \text{ cm}^2.$

A *körcikk* vagy *körszektor* (176. ábra) *kerülete:*

$$k = \frac{r\pi\omega^\circ}{180^\circ} + 2r$$

vagy radiánban mérve a szöget:

$$k = r\cdot\widehat{\omega} + 2r.$$

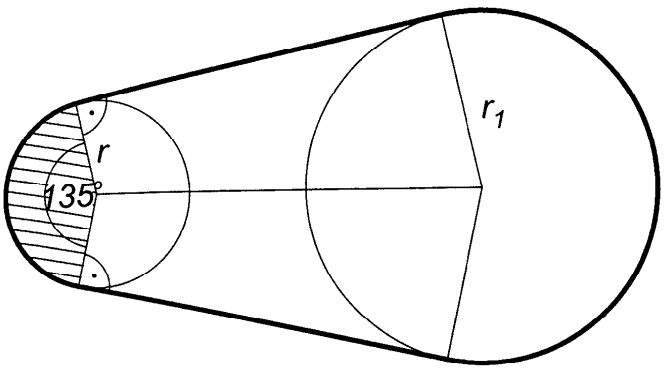
A *körcikk* vagy *körszektor területe* annyiszor van meg a kör területében, mint a körcikkhez tartozó körív a kör kerületében:

$$r^2\pi : t = 2r\pi : i, \text{ s így } t = \frac{r^2\pi i}{2\pi r}, \qquad \text{azaz}$$

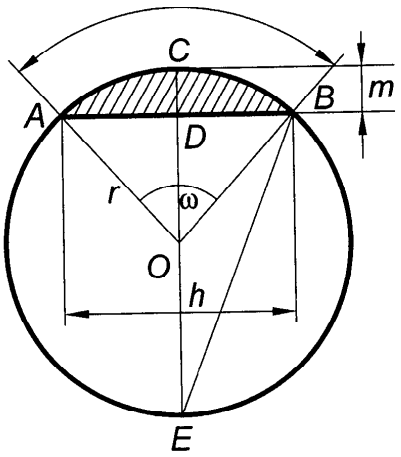
$$t = \frac{i\cdot r}{2} = \frac{i\cdot d}{4}.$$

Ha a középponti szöget radiánban mérjük, akkor $i = r \cdot \widehat{\omega}$, tehát

$$t = \frac{r^2 \cdot \widehat{\omega}}{2} = \frac{d^2 \cdot \widehat{\omega}}{8}.$$



177. ábra. Szíjtárcsák



178. ábra. Körszelet vagy körszegmentum

Pl.: Egy áttétel kisebbik szíjtárcsájának átmérője 20 cm (177. ábra). Mekkora a súrlódási felület hossza és a bevonalkázott körszektor területe, ha a szíj 135°-os középponti szöghöz tartozó íven tapad?

Megoldás:

$$i = r \cdot \operatorname{arc}\omega^\circ = 10 \cdot \operatorname{arc}135^\circ = 10\frac{3\pi}{4} \approx 23{,}565 \text{ cm};$$

$$t = \frac{i \cdot d}{4} \approx \frac{23{,}565 \cdot 20}{4} = 117{,}825 \text{ cm}^2.$$

A *körszelet* vagy *körszegmentum kerületét* (178. ábra) a körív és a húrhossz mértékszámának összege adja meg. Az EBC háromszögben $\frac{h}{2}$ mértani középarányos m és $(2r - m)$, azaz $d - m$ között: $\frac{h}{2} = \sqrt{m(d-m)}$, vagyis $h = 2\sqrt{m(d-m)}$, s így

$$k = i + h = \frac{d}{2}\operatorname{arc}\omega^\circ + h = \frac{d}{2}\operatorname{arc}\omega^\circ + 2\sqrt{m(d-m)}$$

Megjegyzés: Trigonometrikus összefüggések alapján (l. az 5.3 pontot) h is kifejezhető r és ω segítségével.

A *körszelet területét* megkapjuk, ha a körcikk területéből kivonjuk az $OBA\Delta$ területét:

$$t = \frac{i \cdot r}{2} - \frac{h}{2}(r - m),$$

ahol m és h kiszámítható r-ből és ω-ból.

A körszelet magasságát, m-et az OBD derékszögű háromszögből *Pitagorasz* tételével számítjuk ki:

$$(r-m)^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}, \quad r^2 - 2rm + m^2 = r^2 - \frac{h^2}{4},$$

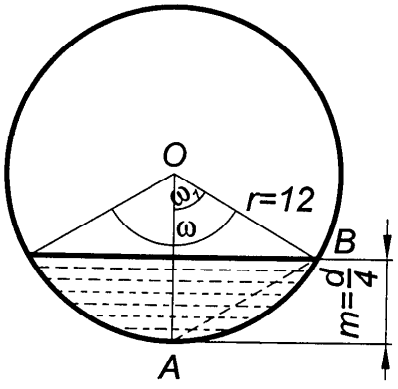
$$m^2 - 2rm + \frac{h^2}{4} = 0, \quad m = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} = r \pm \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - h^2}.$$

Ha $m > r$, akkor a + jel érvényes; ha $m < r$, akkor a – jel érvényes.

A kör sugarát kifejezhetjük a körszelet magasságával és a húrral a $h = 2\sqrt{m(d-m)}$ egyenletből:

$$d = 2r = \frac{h^2 + 4m^2}{4m} \quad \text{vagy} \quad r = \frac{h^2 + 4m^2}{8m}.$$

Pl.: Egy vízszintesen elhelyezett $r = 12$ cm sugarú hengeres cső függőleges átmérőjének 1/4 részéig van vízzel töltve (179. ábra). Mekkora a vízzel töltött keresztmetszet?



179. ábra. Hengeres cső

Megoldás: Mivel $m = \frac{d}{4} = \frac{24}{4} = 6$ cm,

$h = 2\sqrt{m(d-m)} = 2\sqrt{6(24-6)} \approx 20{,}78$ cm.

Az ω_1 szög 60°-os, mert az ABO egyenlő oldalú háromszög, úgyhogy $\omega° = 120°$, így

$$i = r \cdot \text{arc}\,\omega° = 12 \cdot \text{arc}\,120° = 12 \cdot \frac{2\pi}{3} \approx$$

$$\approx 25{,}133 \text{ cm}.$$

Tehát a körszelet területe:

$$t = \frac{r(i-h) + hm}{2} \approx$$

$$\approx \frac{12 \cdot (25{,}13 - 20{,}78) + 20{,}78 \cdot 6}{2} = 88{,}44 \text{ cm}^2.$$

Példák

1. A 180. ábrán $a = 50$ cm, az L alakú idom területe 736 cm^2. Meghatározandó b és x.

Megoldás: A belső négyzet területe:

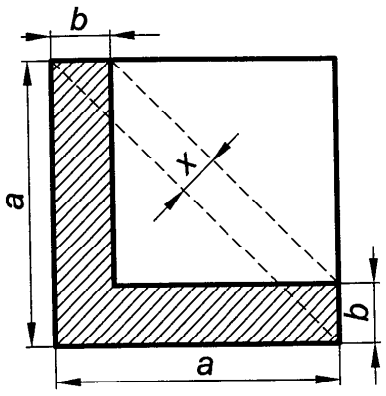
$(a-b)^2 = 2500-736=1764$, amiből

$b = a-\sqrt{1764} = 50-42 = 8$ cm

A b befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $b\sqrt{2}$. Az átfogóhoz tartozó x magasság mértani középarányos az átfogó két metszete között, tehát

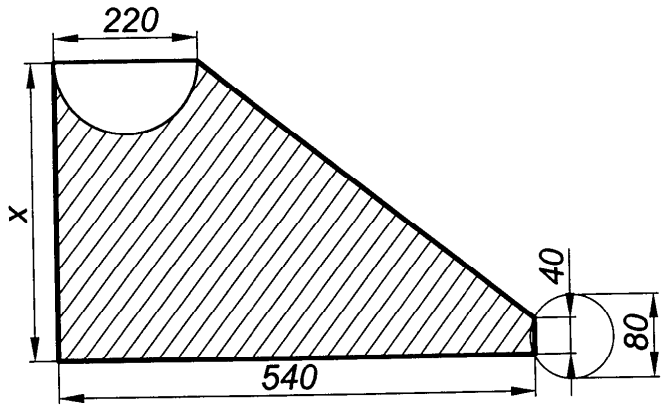
$$x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{b^2}{2}, \text{ azaz}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 8 = 4\cdot\sqrt{2} \approx 5{,}657\,\text{cm}.$$



180. ábra. L idom

2. A 181. ábrán az ötszög területe 12,80 dm^2. Meghatározandó x és a bevonalkázott terület. (Az ábra adatai mm-ben értendők).



181. ábra. Idom

Megoldás: Az ötszög területe egy téglalap és egy trapéz területének összege:

$$5{,}4\cdot 0{,}4 + \frac{5{,}4+2{,}2}{2}\cdot(x-0{,}4) = 12{,}80 \quad \text{s így} \quad x = 3{,}2\ \text{dm} = 320\ \text{mm}.$$

A felső félkör területe: $t_1 = \frac{d^2\pi}{4\cdot 2} \approx \frac{2{,}2^2}{8}\cdot 3{,}142 = 1{,}90\ \text{dm}^2$.

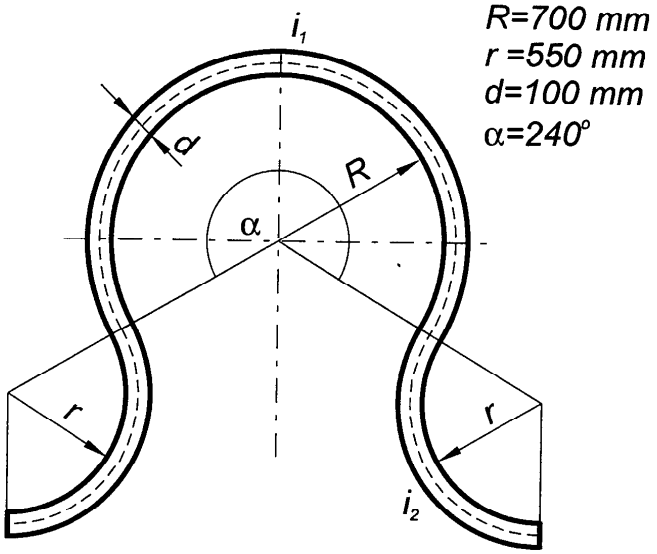
A körszelet területe, mivel $i = 0{,}4\cdot \text{arc}\,60° = 0{,}419$ dm és

$$m = r-\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}} = 0{,}4-\sqrt{0{,}4^2-\frac{0{,}4^2}{4}} \approx 0{,}0536\ \text{dm},$$

$$t = \frac{r(i-h)+hm}{2} \approx \frac{0{,}4\cdot(0{,}419-0{,}4)+0{,}4\cdot 0{,}0536}{2} = 0{,}0145\ \text{dm}^2.\text{A}$$

bevonalkázott terület: $t = 12{,}80-1{,}90-0{,}0145 \approx 10{,}89\ \text{dm}^2$.

3. Számítsuk ki a 182. ábrán látható kiegyenlítőcső középvonalának hosszát.



182. ábra. Kiegyenlítőcső

Megoldás: $i_1 = \left(R + \frac{d}{2}\right)\text{arc}240° = 750 \cdot \frac{4\pi}{3} = 1000\pi,$

$$i_2 = \left(r + \frac{d}{2}\right)\text{arc}120° = 600 \cdot \frac{2\pi}{3} = 400\pi,$$

$$i = i_1 + 2i_2 = 1000\pi + 2 \cdot 400\pi = 1800\pi \approx 5656 \text{ mm}.$$

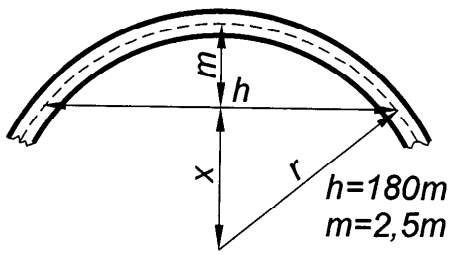
4. Határozzuk meg egy körívben húzódó vasúti pálya görbületi sugarát a 183. ábra adatai alapján.

Megoldás:

$r = x + m$, de $x = r - m = \sqrt{r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$, négyzetre emelve:

$$r^2 - 2rm + m^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}, \text{ azaz}$$

$$r = \frac{h^2 + 4m^2}{8m} = \frac{180^2 + 4 \cdot 2{,}5^2}{8 \cdot 2{,}5} = 1621{,}25 \text{ m}.$$



183. ábra. Pályaív

5. Számítsuk ki a 184. ábrán látható ovális (tojásgörbe) kerületét és területét, ha $r = 100$ mm.

Megoldás:

a) $i_1 = r\pi$, $i_2 = i_4 = 2r \cdot \frac{\pi}{4}$ és

$$i_3 = (2r - r\sqrt{2}) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

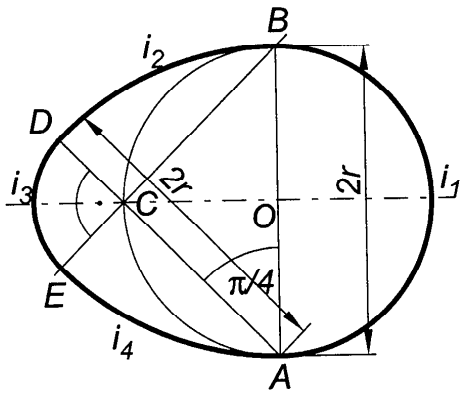
Az egész kerület (k):

$$k = i_1 + 2i_2 + i_3 =$$

$$= r\pi + r\pi + (2r - r\sqrt{2})\frac{\pi}{2} =$$

$$= r\pi\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx$$

$$\approx 100 \cdot 3{,}142 \cdot (3 - 0{,}707) = 720{,}46 \text{ mm}.$$



184. ábra. "Tojásprofil" vagy ovális

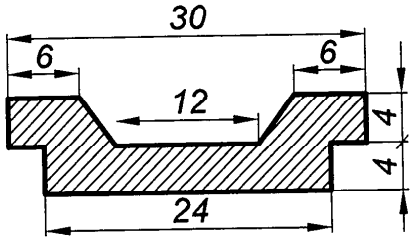
b) $t = t_1 + 2\,ABD$ szektor ter. $- ABC\Delta$ ter. $+ CDE$ szektor ter. $=$

$$= \frac{r^2\pi}{2} + r^2\pi - r^2 + (2r - r\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} = r^2(3\pi - 1 - \pi\sqrt{2}) \approx$$

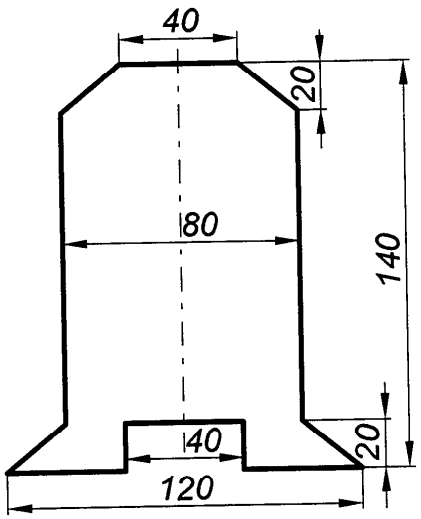
$$\approx 100^2 \cdot (3 \cdot 3{,}142 - 1 - 3{,}142 \cdot 1{,}414) \approx 39832 \text{ mm}^2.$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a betontartó keresztmetszetének területét (185. ábra). Az adatok cm-ben értendők. [156 cm^2.]

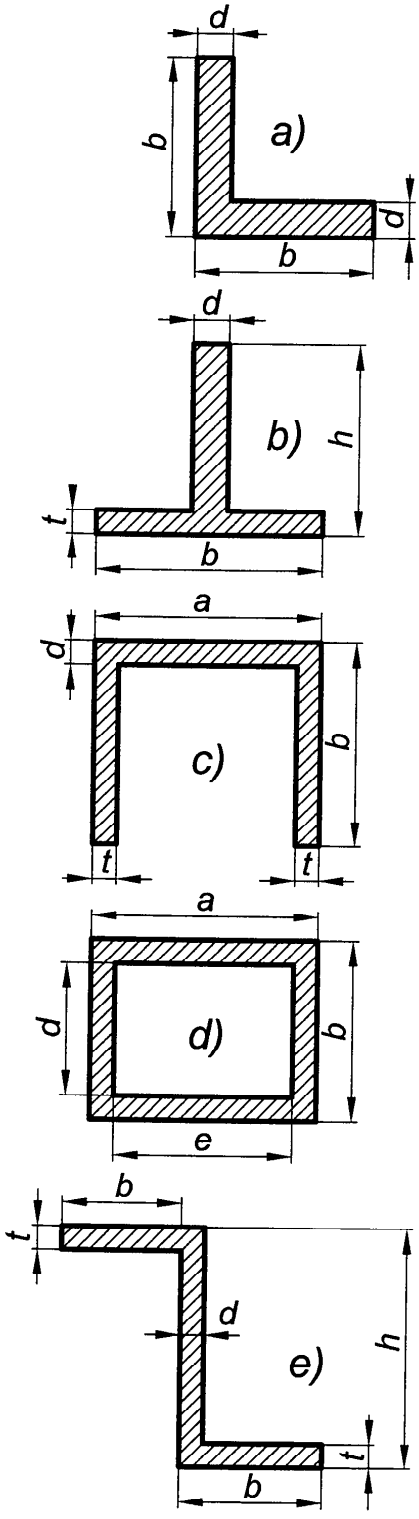


185. ábra. Betontartó



186. ábra. Idomszer

2. A 186. ábrán látható idomszert 120×140-es (mm) acéllemezből készítjük el. Mekkora területű acéllemez kerül hulladékba? [64 cm^2.]



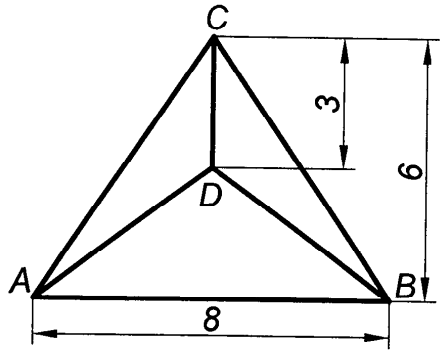
187. ábra. Szelvények: *a*) L; *b*) T; *c*) U; *d*) zárt; *e*) Z

3. Számítsuk ki a 187. *a*-*e* ábrán látható tartók keresztmetszeteinek területét.

[*a*) $d(2b-d)$]; [*b*) $bt+d(h-t)$];
[*c*) $ad+2t(b-d)$]; [*d*) $ab-de$];
[*e*) $2bt+d(h-2t)$]

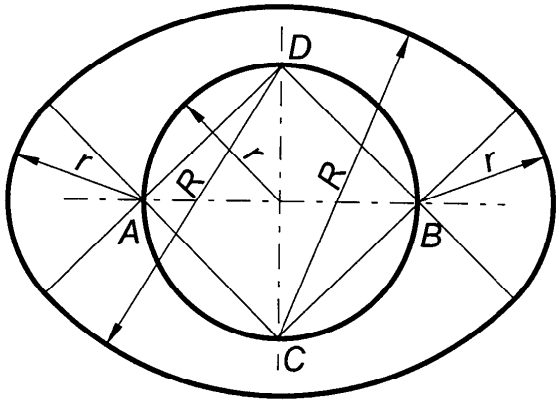
4. Számítsuk ki a tetőszerkezet (188. ábra) $AC = BC$ felső és $AD = BD$ alsó gerendáinak hosszát (a mértékegység m).

[$AC = BC$ =7,2 m; $AD = BD$ = 5 m.]



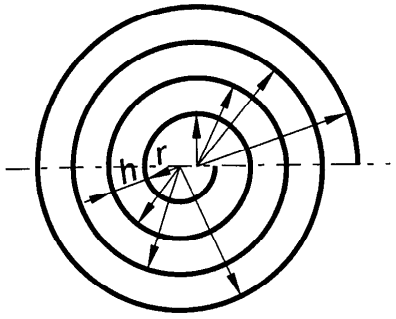
188. ábra. Tetőszerkezet

5. Számítsuk ki a 189. ábra szerint szerkesztett ún. kosárgörbe kerületét, ha $r = 10$ mm. [$r\pi(2+\sqrt{2}) \approx 107$ mm.]

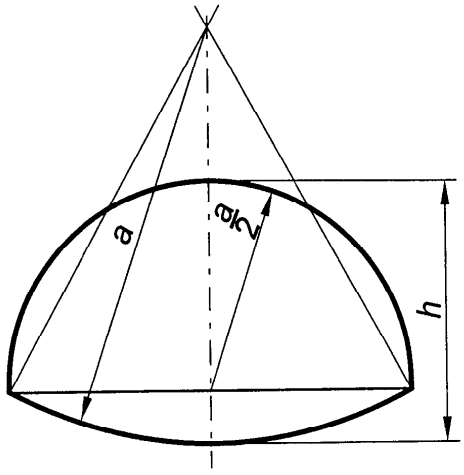


189. ábra. Kosárgörbe

6. Egy spirális két pont körüli koncentrikus félkörívekből áll (190. ábra). Milyen hosszú a nyolc félkörből álló spirális, ha $r=5$ mm és $h=r$? [$110\pi \approx 345{,}6$ mm.]



190. ábra. Spirális



191. ábra. Csatorna keresztmetszet

7. Számítsuk ki a 191. ábra szerint szerkesztett csatornakeresztmetszet kerületét, területét és h magasságát, ha $a = 0{,}6$ m.

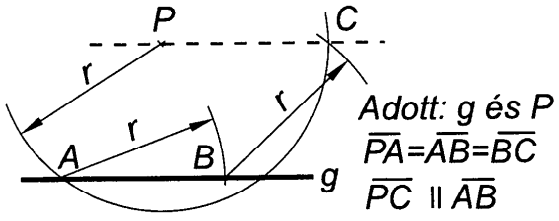
$$[k = \frac{5}{6}\pi a \approx 1{,}57 \text{ m}]; \quad [t = \frac{a^2}{24}(7\pi - 6\sqrt{3}) = 0{,}174 \text{ m}^2];$$

$$[h = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0{,}38 \text{ m}].$$

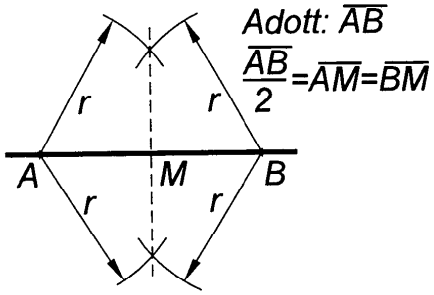
8. Egy síkdomború lencse átmérője $d = 84$ mm, vastagsága $m = 25$ mm. Mekkora a görbületi sugár? $[r = \frac{d^2 + 4m^2}{8m} = 47{,}78 \text{ mm}.]$

5.1.16 Geometriai szerkesztések

1. Adott ponton átmenő és adott egyenessel párhuzamos egyenest a 192. ábra szerint szerkesztünk.



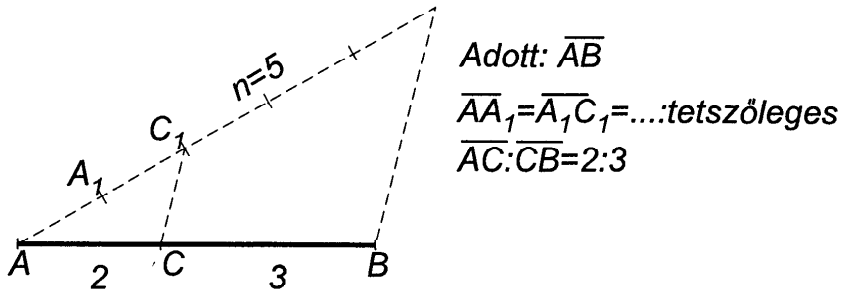
192. ábra. Párhuzamos egyenes szerkesztése



193. ábra. Távolság felezése

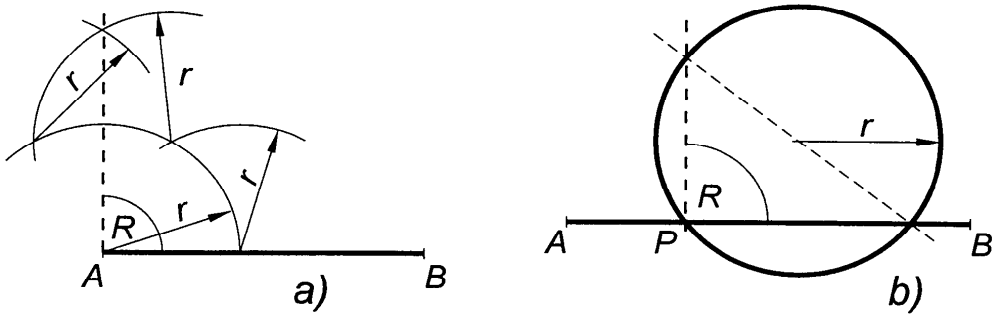
2. Adott egyenesszakasz felezését a 193. ábra szemlélteti.

3. Adott egyenesszakasz felosztása adott számú egyenlő részre vagy adott arányban a 194. ábra szerint végezhető el.

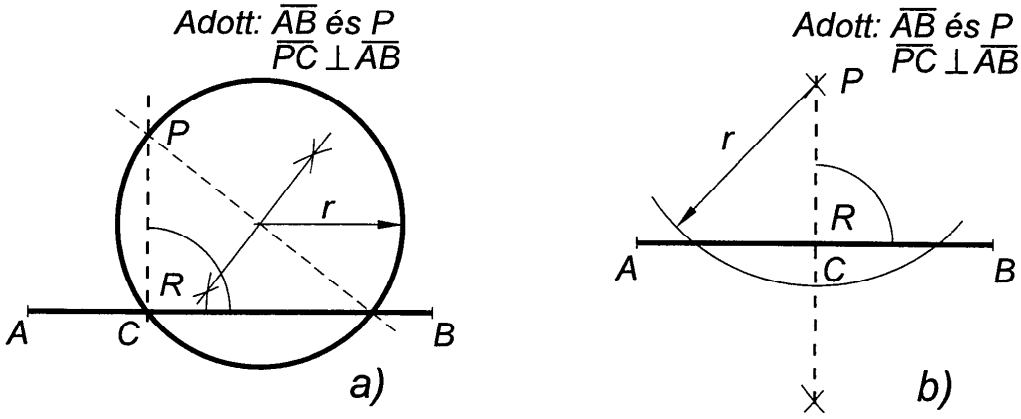


194. ábra. Távolság osztása adott arány szerint

4. Merőleges egyenes szerkesztése egy egyenes adott pontjában (195. *a*, *b* ábra), és adott pontból adott egyenesre (196. *a*, *b* ábra).

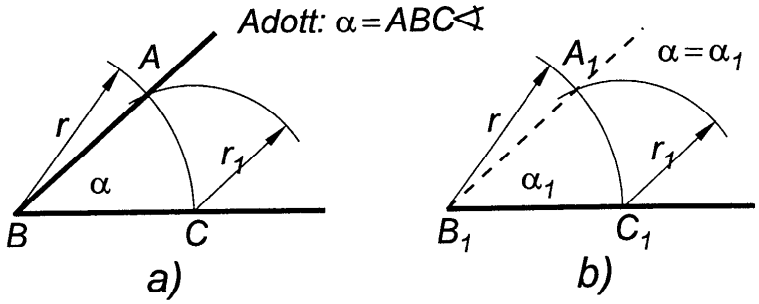


195. ábra. Merőleges szerkesztése egyenes adott pontjában: *a*) szögfelezés alapján; *b*)*Thalész* tétele alapján



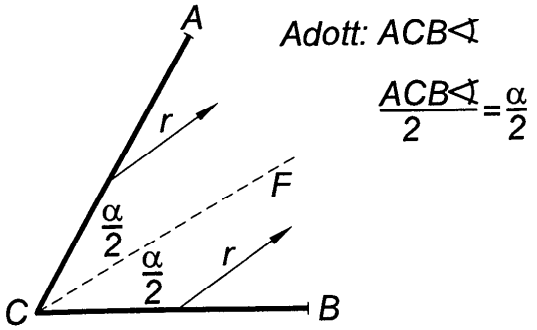
196. ábra. Merőleges szerkesztése adott pontból adott egyenesre: *a*) *Thalész* tétele alapján; *b*) távolság felezése alapján

5. Adott szöggel egyenlő szög szerkesztése 197. *a*, *b* ábra szerint.

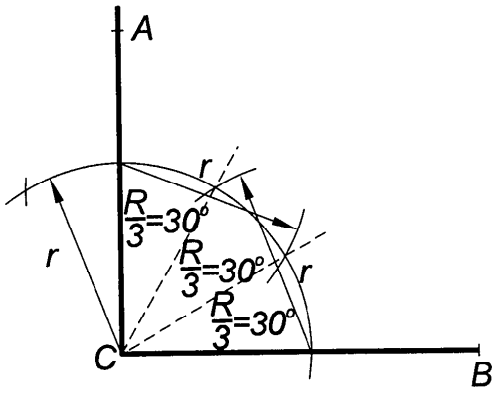


197. ábra. Szög átmásolása: *a*) $ABC\angle$; *b*) $A_1B_1C_1\angle = ABC\angle$

6. Adott szög felezése (198. ábra) és 90°-os szög felosztása három egyenlő részre (199. ábra).

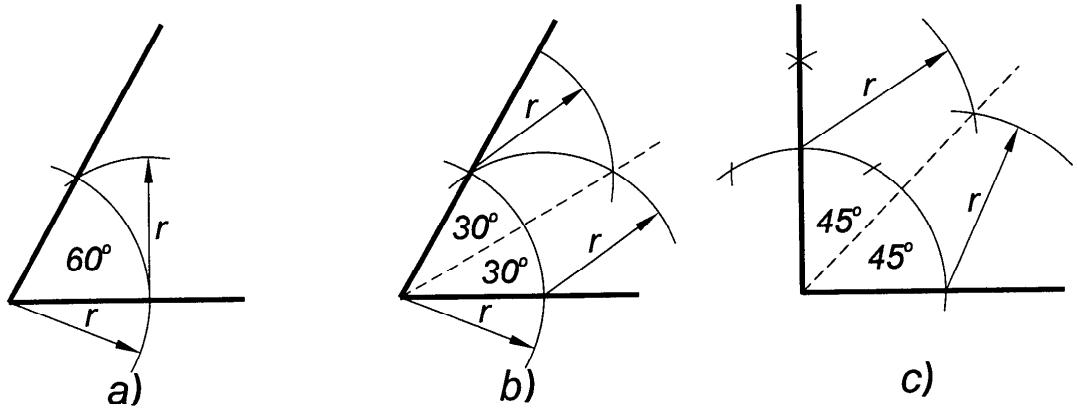


198. ábra. Szög felezése

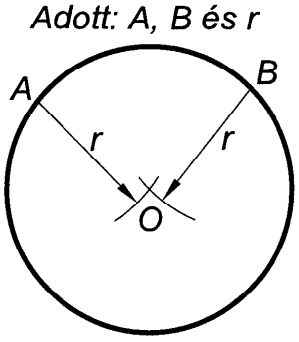


199. ábra. Derékszög felosztása három egyenlő részre

7. 60°-os, 30°-os és 45°-os szög szerkesztése (200. *a-c* ábra).



200. ábra. Speciális szögek szerkesztése: *a*) 60°-os; *b*) 30°-os; *c*) 45°-os szög

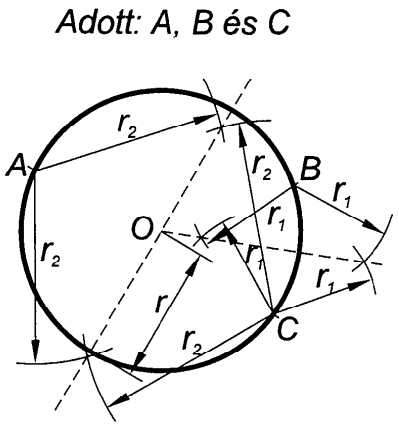


201. ábra. Kör szerkesztése

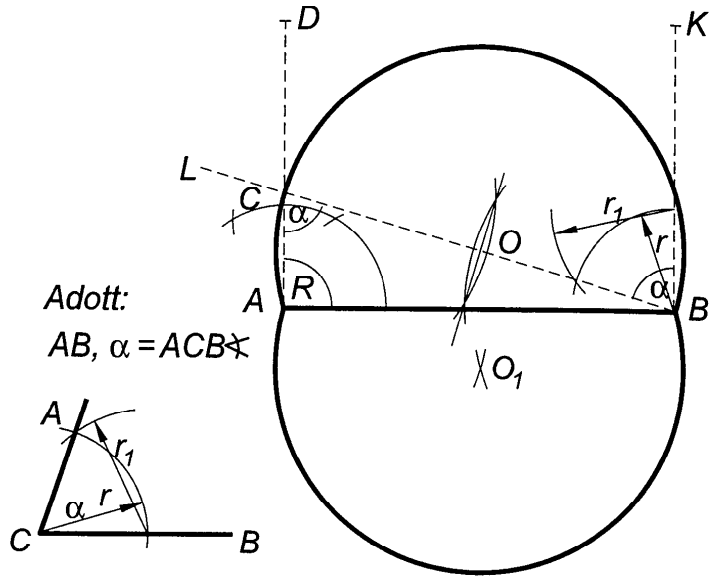
8. Két adott ponton keresztülmenő és adott sugarú kör szerkesztése (201. ábra).

9. Három ponttal adott kör szerkesztése (202. ábra). A három ponttal meghatározott háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja a kör középpontja.

10. Körközéppont szerkesztése adott körívből. A köríven felveszünk három pontot (lehetőleg távol egymástól), és a 202. ábra szerint megszerkesztjük a középpontot.



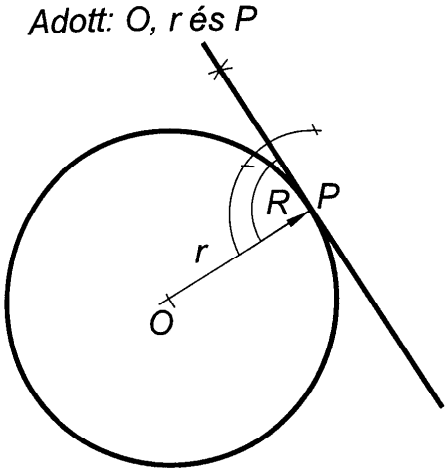
202. ábra. Kör szerkesztése



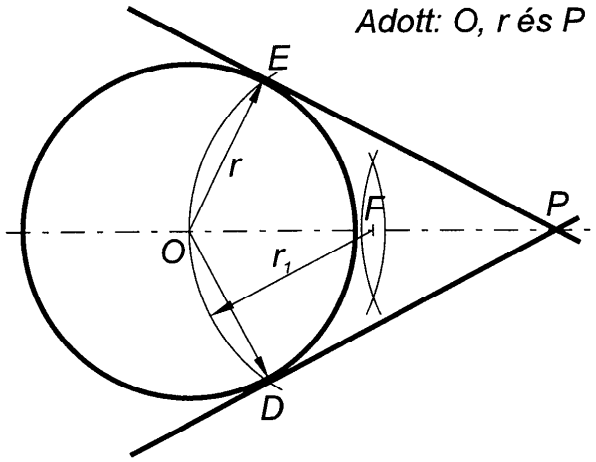
203. ábra. Látókörívek szerkesztése

11. Megszerkesztendők azok a pontok, amelyekből egy adott egyenesszakasz adott szög alatt látszik. Az *AB* egyenesszakaszt (203. ábra) két olyan körív pontjaiból látjuk állandó α szög alatt, amelyek *AB* végpontjaira illeszkednek. Az *O* középpont meghatározásához az *A* és a *B* pontban szerkesszünk merőlegest, és másoljuk le az ábra szerint az α szöget. Az *AD* és *BL* egyenesek met-

széspontja C. A BC szakasz O felezőpontja az egyik körív középpontja. A másik körív középpontját hasonlóan szerkesztjük meg.



204. ábra. Érintő szerkesztése

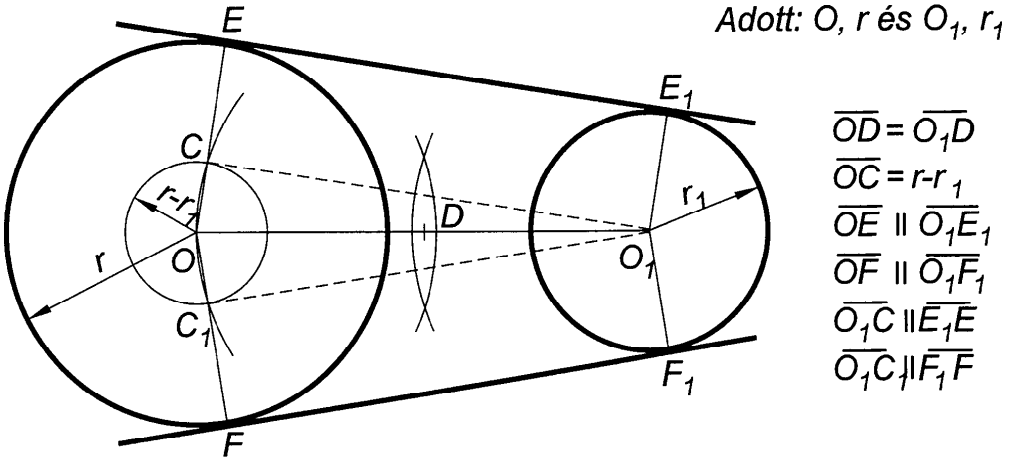


205. ábra. Érintők szerkesztése

12. Körhöz adott pontjában érintő szerkesztése (204. ábra).

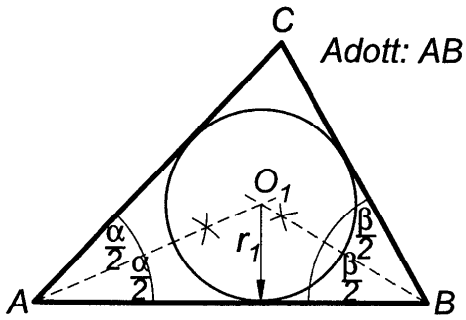
13. Körhöz érintők szerkesztése a körön kívül fekvő pontból (205. ábra).

14. Két adott kört érintő egyenes szerkesztése (206. ábra).

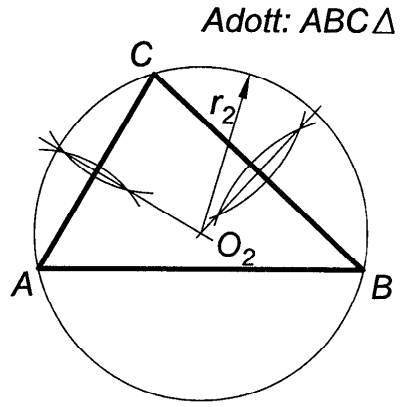


206. ábra. Két kört érintő egyenes szerkesztése

15. Kör szerkesztése adott háromszögbe (207. ábra) és adott háromszög köré (208. ábra).



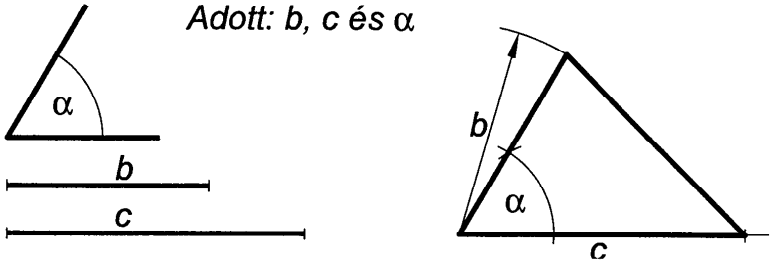
207. ábra. Háromszögbe írt kör szerkesztése



208. ábra. Háromszög köré írt kör szerkesztése

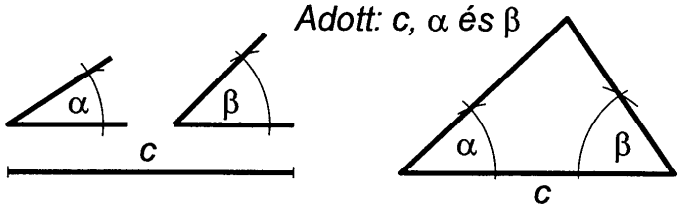
16. Háromszög szerkesztése:

a) adott két oldal és a közbezárt szög (209. ábra);



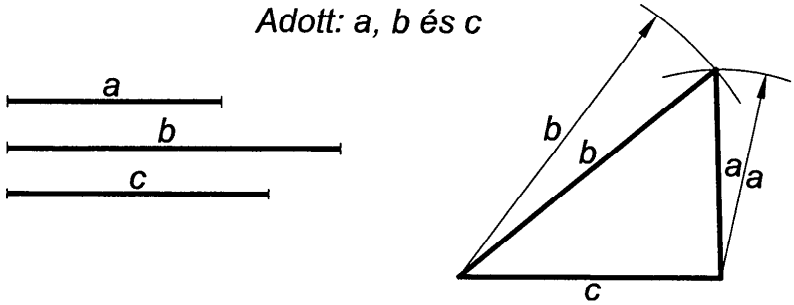
209. ábra. Háromszög szerkesztése

b) adott egy oldal és a rajta fekvő két szög (210. ábra);



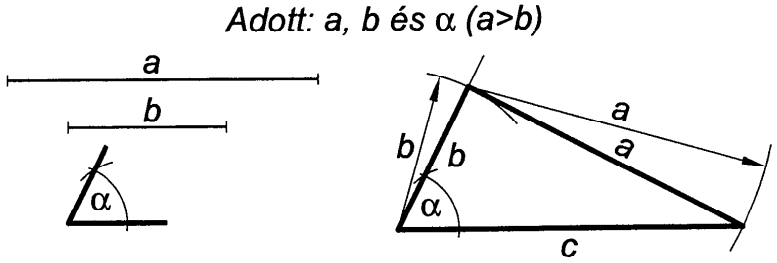
210. ábra. Háromszög szerkesztése

c) adott három oldal (211. ábra);



211. ábra. Háromszög szerkesztése

d) adott két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög (212. ábra).

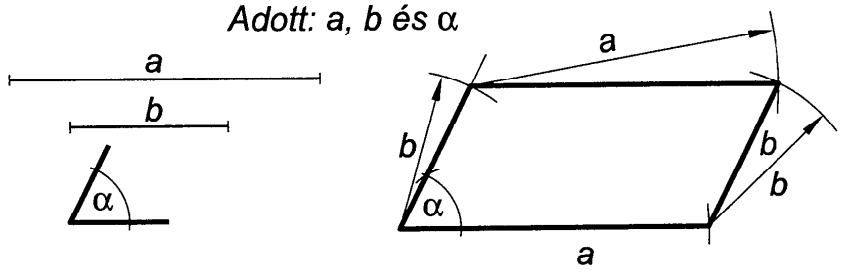


212. ábra. Háromszög szerkesztése

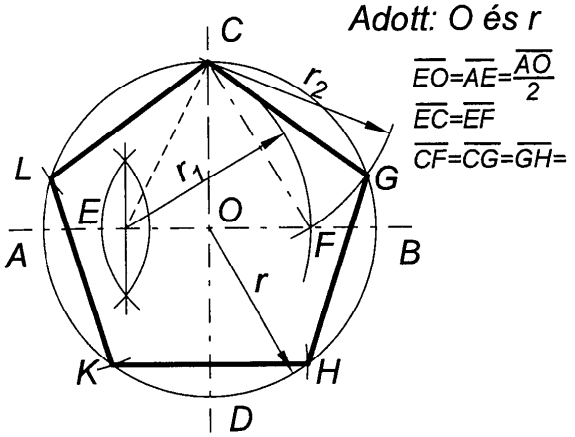
17. Paralelogramma szerkesztése, ha adott az *a*, *b* oldal és az α szög (213. ábra).

18. Szabályos ötszög szerkesztése adott körbe (214. ábra).

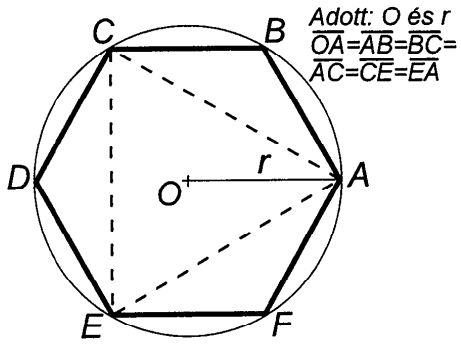
19. Szabályos hatszög és háromszög szerkesztése adott körbe (215. ábra).



213. ábra. Paralelogramma szerkesztése



214. ábra. Szabályos ötszög szerkesztése

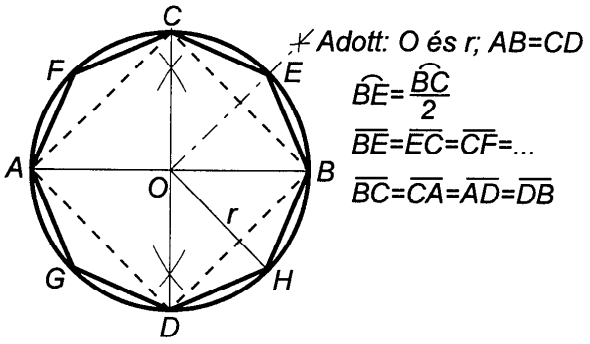


215. ábra. Szabályos hatszög és háromszög szerkesztése

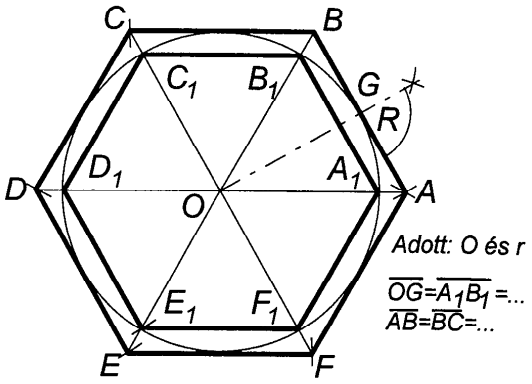
20. Szabályos nyolcszög és négyszög szerkesztése adott körbe (216. ábra).

21. Szabályos tízszög szerkesztése adott körbe. A 214. ábra szerint megszerkesztjük a *CF* távolságot; *OF* adja a szabályos tízszög oldalát.

22. Szabályos három-, öt-, nyolc- és tízszög szerkesztése adott kör köré. A körbe szerkesztett szabályos három-, öt-, hat-, nyolc- és tízszög oldalaival párhuzamos körérintők adják a megfelelő kör köré szerkeszthető hasonló sokszög oldalait. Pl.: kör köré szerkesztett szabályos hatszög (217. ábra).

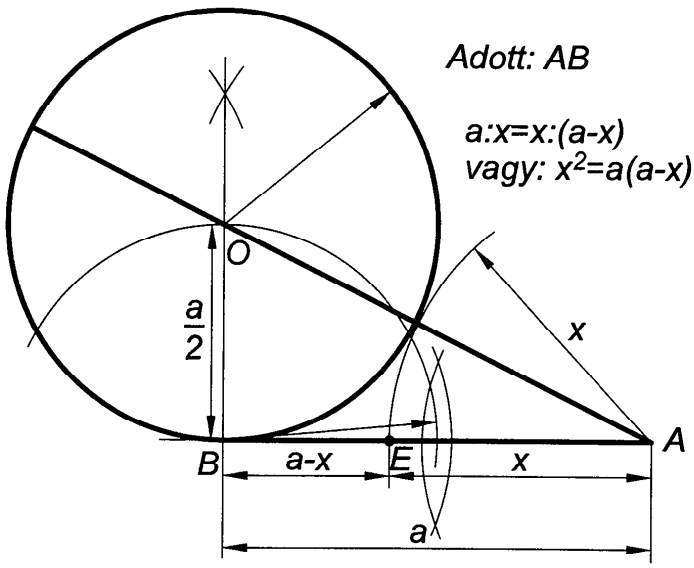


216. ábra. Szabályos nyolcszög és négyszög szerkesztése



217. ábra. Szabályos hatszög szerkesztése

23. *Aranymetszés* vagy egy szakasznak *folytonos arány* szerinti felosztása. Ha egy szakaszt (távolságot) úgy osztunk két részre, hogy a nagyobbik rész mértani középarányos az egész szakasz és a kisebbik rész között, akkor a szakaszt folytonos arány szerint osztottuk fel. Ezt a felosztást úgy végezzük el, hogy az adott *a* szakasz egyik végpontjában (*B*) emelt merőlegesre rámérjük az adott szakasz felét (*a*/2) (218. ábra) és



218. ábra. Aranymetszés

az O pontból az $a/2$ sugárral kört rajzolunk, majd a kör középpontján és az adott szakasz másik végpontján keresztül (A) szelőt húzunk. A szelőnek a körön kívüli x részével az A pontból körívet rajzolunk, amely az a szakaszt E pontban metszi. Ez az E pont a keresett osztópont, ui. az érintő szakasz mértani középarányos a szelő két metszete között: $a^2 = (a+x)\cdot x$. A szorzást elvégezve és x^2-re megoldva: $x^2 = a^2 - ax$; a-t kiemelve:

$$x^2 = a\cdot(a-x) \quad \text{vagy} \quad a:x = x:(a-x).$$

5.2 TÉRGEOMETRIA
(TÉRMÉRTAN; SZTEREOMETRIA)

5.2.1 Alapfogalmak

A *térgeometria* vagy *sztereometria* tárgya a testek és más térbeli alakzatok geometriai vizsgálata.

Az egyenest a térben is két pont határozza meg. A tér egy pontján keresztül végtelen sok egyenes fektethető. A tér két egyenesének kölcsönös helyzete háromféle lehet:

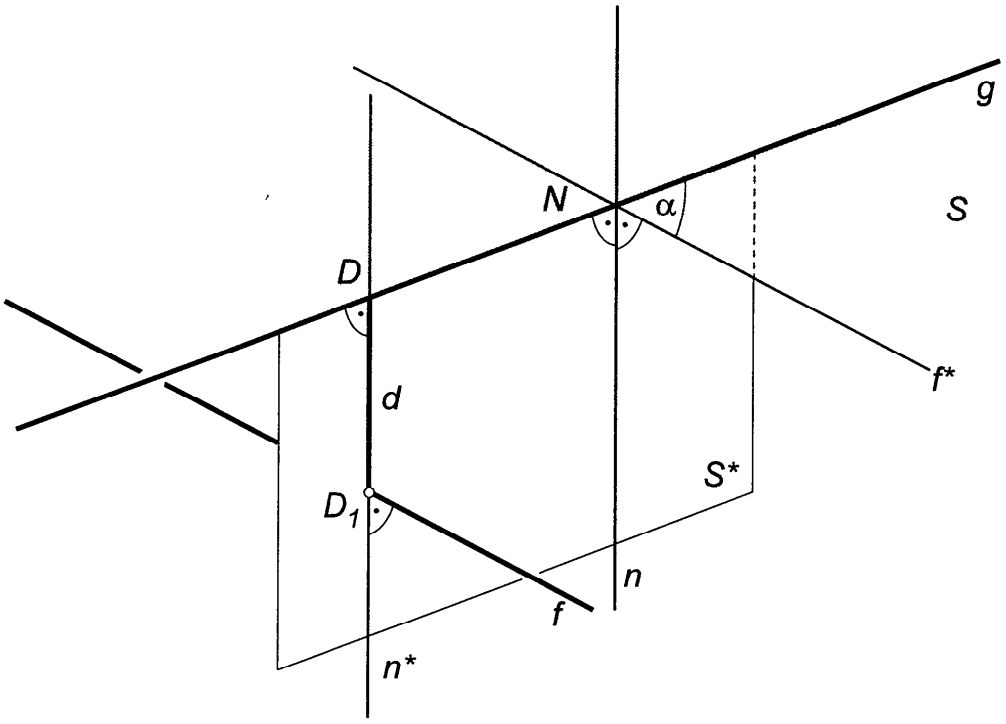
a) a két egyenes *metszi* egymást, ha van egy közös pontjuk. Két metsző egyenesen mindig átfektethető egy sík;

b) a két egyenes *párhuzamos* egymással, ha közös pontjuk nincsen, de van egy olyan sík amely mindkét egyenest tartalmazza;

c) a két egyenes *kitérő*, ha nem is metszik egymást és nem is párhuzamosak. A két kitérő egyenesen nem fektethető át egy sík.

Két kitérő egyenes f és g *hajlásszögén* azt a szöget értjük, amelyet a tér egy tetszés szerinti pontján átmenő és az adott egyene-

sekkel párhuzamos egyenesek bezárnak. Vegyük fel az *f*-fel párhuzamos és *g*-*t* metsző *f** egyenest (219. ábra). A *g* és *f** egyenesekre illesztett *S* síkban mért α szög a kitérő egyenesek *hajlásszöge*.



219. ábra. Két kitérő egyenes hajlásszöge és távolsága

Két kitérő egyenes egymástól mért *távolságát* a mindkettőt metsző és mindkettőre merőleges *n** egyenesen mérjük (219. ábra). Vegyük fel a *g* és *f** *N* metszéspontjára illeszkedő és mindkét egyenesre merőleges *n* egyenest. A *g* és *n* egyenesre illesszük az *S** síkot. Az *S** sík és az *f* egyenes D_1 döféspontjára illesszük az *n*-nel párhuzamos *n** egyenest. Az *n** és *g* metszéspontja *D*. A metszéspontok $d = DD_1$ távolságát nevezzük a két kitérő egyenes távolságának.

Az *n** egyenest a két kitérő egyenes *normáltranszverzálisának* nevezzük.

A tér egy pontján át végtelen sok síkot fektethetünk. A tér két pontján, vagyis a két pont által meghatározott egyenesen át is végtelen sok sík fektethető.

A tér három, nem egy egyenesben fekvő pontja egyértelműen meghatároz egy síkot.

Két sík kölcsönös helyzete a térben háromféle lehet:

a) a két sík fedésben van, minden pontjuk közös;

b) a két síknak van közös pontja, de nem fedik egymást, akkor a két sík egy egyenesben metszi egymást;

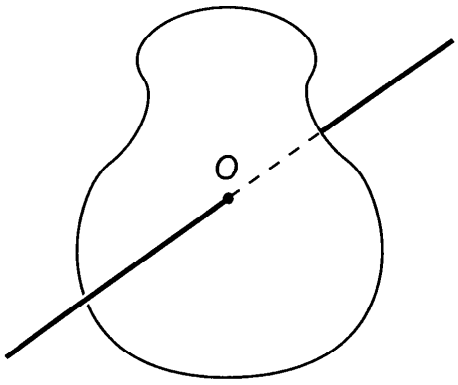
c) a két síknak nincs közös pontja, azaz a két sík párhuzamos egymással.

Az *egyenes és a sík kölcsönös helyzete* a térben háromféle lehet:

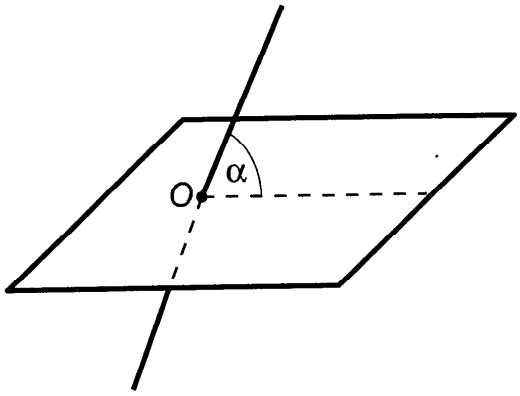
a) az egyenes teljes egészében benne fekszik a síkban: az egyenesnek minden pontja közös a síkkal;

b) az egyenesnek a síkkal csak egy pontja közös: az egyenes a síkot átdöfi. A közös pont az egyenes döféspontja (220. ábra);

c) az egyenesnek a síkkal nincs közös pontja, vagyis az egyenes párhuzamos a síkkal.



220. ábra. Egyenes döféspontja



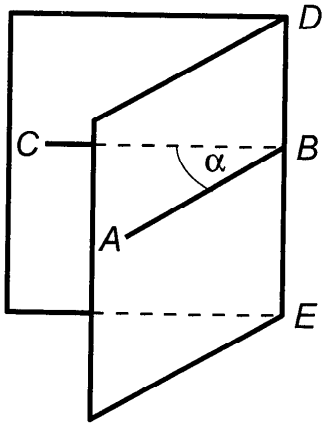
221. ábra. Egyenes és sík hajlásszöge

Az *egyenesnek a síkkal bezárt szögén* azt a hegyesszöget értjük, amelyet az egyenes a síkon való vetületével bezár (221. ábra). Az egyenes akkor merőleges a síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges. Ez teljesül, ha két tetszőleges egymást metsző egyenesére merőleges.

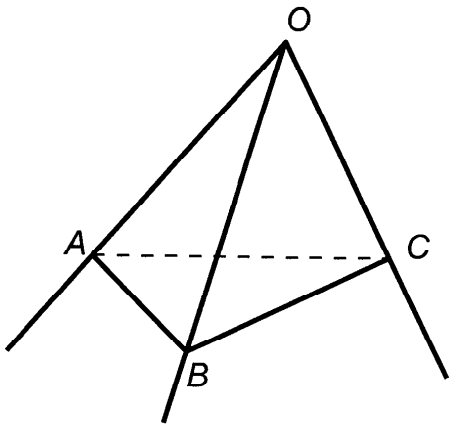
Egy egyenesből kiinduló két félsík *lapszöget* alkot (222. ábra). A két félsíkot a lapszög *lapjainak* vagy *oldalainak*, metszésvonalukat pedig a lapszög *élének* nevezzük. A lapszög nagyságát a két

sík hajlásszögével, vagyis azzal az ABC síkbeli szöggel mérjük, amelyet a DE él tetszőleges B pontjában mindkét lapban az élre emelt merőlegesek zárnak be egymással.

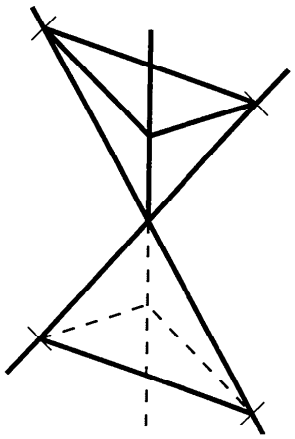
Azt a térbeli alakzatot, amelyet három vagy több, egymást ugyanabban a pontban metsző sík határol, *testszögletnek* (szögletnek, testszögnek) nevezzük (223. ábra). A síklapok a szöglet oldalai, közös metszőpontjuk a szöglet csúcsa, a szomszédos síkok metszésvonalai a szöglet élei, a szomszédos élek által bezárt szögek a szöglet élszögei, a szomszédos oldalak által bezárt szögek pedig a szöglet lapszögei.



222. ábra. Lapszög



223. ábra. Testszöglet



224. ábra. Két szimmetrikus testszöglet

Az élszögeket a testszöglet oldalainak, a lapszögeket a testszöglet szögeinek nevezzük. *Két testszöglet akkor egybevágó*, ha a megfelelő alkotóelemek páronként rendre egyenlők, és ugyanabban a sorrendben következnek egymás után. Ha a két testszöglet megfelelő alkotóelemei páronként rendre egyenlők ugyan, de fordított sorrendben következnek egymás után, akkor a két testszöglet szimmetrikus, de nem helyezhetők egymásra (224. ábra).

Azt a testszögletet, amelyik teljes egészében egy tetszőleges lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszik, *konvexnek* nevezzük.

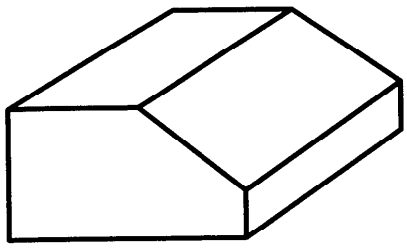
Bármely konvex testszög oldalainak (élszögeinek) összege $4R$-nél kisebb,

azaz $AOB\angle + BOC\angle + COA\angle < 4R.$ (223. ábra)

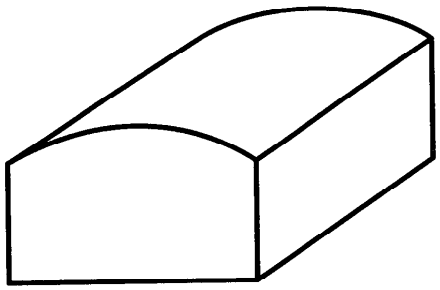
A háromoldalú testszöglet elnevezése: *háromél* vagy *triéder.*

5.2.2 A testek osztályozása, poliéderek, Euler tétele, szabályos testek

Ha a testet csak síklapok határolják, akkor a test *szögletes*, vagy *síkfelületű* (225. ábra), ha pedig sík- és görbelapok, vagy csak görbefelületek határolják, akkor a test *gömbölyű* vagy *görbefelületű* (226. ábra).

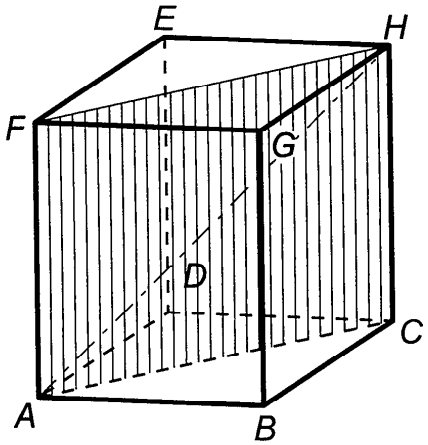


225. ábra. Szögletes test



226. ábra. Görbefelületű test

A szögletes testet vagy *poliédert* határoló síklapok a *test lapjai*, a szomszédos lapok metszésvonalai a *test élei*, az élek metszéspontjai a *test csúcsai.* Azt az egyenest, amely a test két nem ugyanazon lapján levő csúcsát köti össze, a *test átlójának* (pl. *AH*), azt a síkot pedig, amely a test nem szomszédos oldalélén megy keresztül, *átlós síknak* (pl. *ACHF*) nevezzük (227. ábra).



227. ábra. Poliéder

Az a poliéder, amely teljes egészében bármelyik lapján átfektetett síknak ugyanazon oldalán fekszik, *konvex* test. A poliéder lehet szabályos és szabálytalan. A *szabályos* test valamennyi lapja egybevágó szabályos sokszög és minden szög-

lete egybevágó. A szabályos test középpontja a lapoktól is, az élektől is, és a csúcsoktól is egyenlő távolságra van.

A *test felszínén* a határoló lapok területének összegét értjük, jele: *F*. A *test térfogatán* vagy *köbtartalmán* a test lapjaival bezárt térrész nagyságát értjük, jele: *V*.

A *felszín mértékegységéül* a területszámításnál alkalmazott egységeket használjuk. A *térfogat mérésekor* olyan kockát választunk egységül, amelynek éle a hosszúságegység: az 1 m élhosszúságú kocka térfogata: 1 m^3 (1 köbméter).

Ha a kocka éle:	térfogata:	elnevezése:
1 km	1 km^3	köbkilométer
1 m	1 m^3	köbméter
1 dm	1 dm^3	köbdeciméter
1 cm	1 cm^3	köbcentiméter
1 mm	1 mm^3	köbmilliméter

Összefüggés a térfogategységek között:

$1\ km^3 = 10^9\ m^3 = 10^{12}\ dm^3$

$1\ m^3 = 1\ m^3 = 10^3\ dm^3$

$1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3 = 1\ dm^3$

$1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3 = 10^{-3}\ dm^3$

$1\ mm^3 = 10^{-9}\ m^3 = 10^{-6}\ dm^3$

Űrmérték: 1 dm^3 térrész űrtartalma 1 liter. Jele: l.

1 hektoliter	1 hl = 100 l
1 centiliter	1 cl = 0,01 l
1 milliliter	1 ml = 0,001 l

Angol nyelvterületen gyakrabban használt űrmérték a *gallon*:
1 nemzetközi gallon = 4,546 l, 1 USA gallon = 3,788 l.

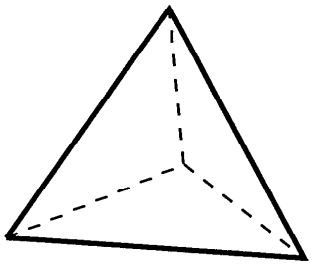
Két testet egybevágónak mondunk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át. Az egybevágó testek térfogata egyenlő. Ha egy testet részekre bontunk, akkor megköveteljük, hogy a részek térfogatának összege az eredeti test térfogatával legyen egyenlő.

A konvex szögletes testek csúcsainak, lapjainak és éleinek a száma között *Euler tétele* ad összefüggést, amely szerint

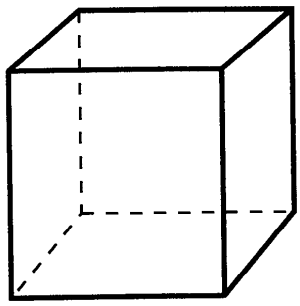
minden konvex testen a csúcsok és lapok számának összege kettővel nagyobb az élek számánál.

Ha a konvex test csúcsainak száma c, lapjainak száma l és éleinek száma $é$, akkor *Euler* tétele értelmében:

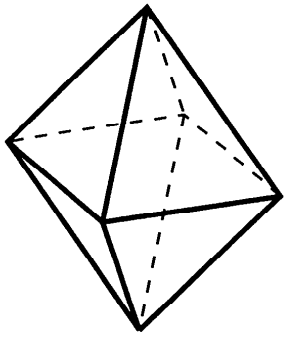
$$c + l = é + 2.$$



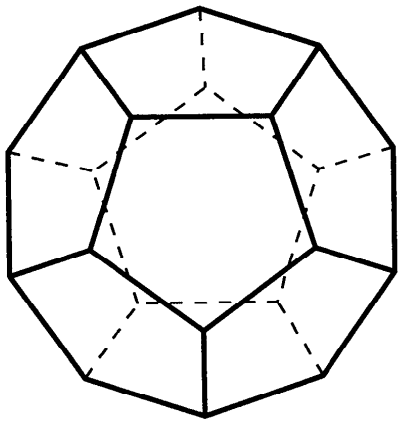
228. ábra. Tetraéder



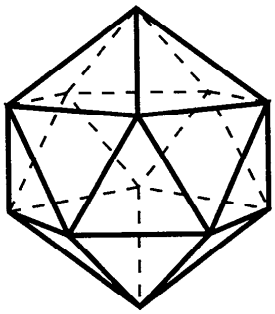
229. ábra. Hexaéder



230. ábra. Oktaéder



231. ábra. Dodekaéder



232. ábra. Ikozaéder

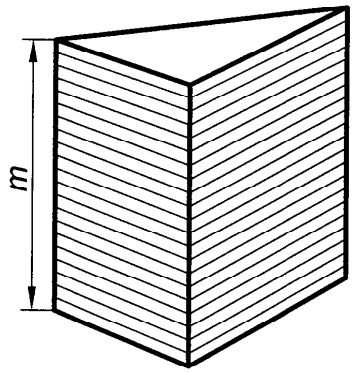
Euler tételének felhasználásával bizonyítható, hogy a szabályos testek száma öt. Ezek nevét és adatait táblázatba foglaltuk:

A szabályos test neve	Lapok alakja	Lapok száma (l)	Élek száma ($é$)	Csúcsok száma (c)
Tetraéder (228. ábra) (négylap)	háromszög	4	6	4
Hexaéder (229. ábra) (hatlap, kocka)	négyzet	6	12	8
Oktaéder (230. ábra) (nyolclap)	háromszög	8	12	6
Dodekaéder (231. ábra) (tizenkétlap)	ötszög	12	30	20
Ikozaéder (232. ábra) (húszlap)	háromszög	20	30	12

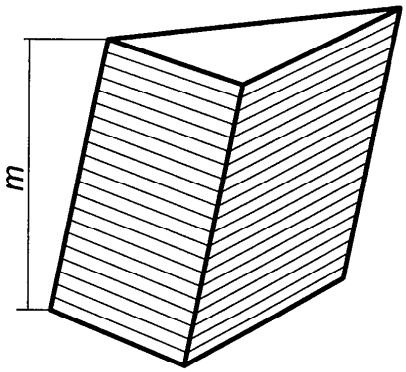
5.2.3 Speciális poliéderek

a) A *hasáb* (*prizma*) olyan test, amelyet két párhuzamos és egybevágó sokszög és annyi paralelogramma határol, ahány oldala van a sokszögnek (233. és 234. ábra).

A két egymással párhuzamos és egybevágó sokszög a hasáb alsó, ill. felső alapja (*alap-* és *fedőlap*). A többi lap a hasáb *oldala.* Az alap- és fedőlap egymástól mért merőleges távolsága a hasáb *magassága.* Ha a hasáb oldalélei merőlegesek az alapra, akkor a hasáb *egyenes* (233.ábra), ellenkező esetben *ferde* (234. ábra).

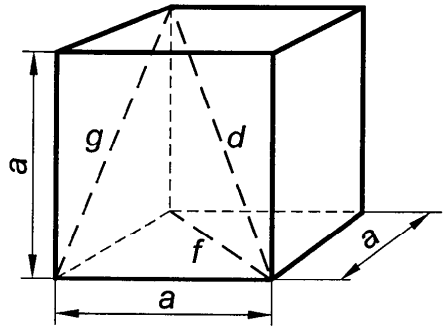


233. ábra. Egyenes hasáb

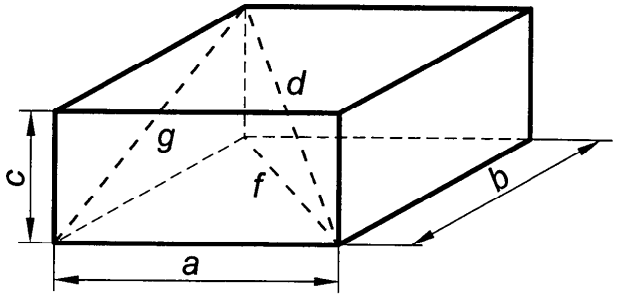


234. ábra. Ferde hasáb

A szabályos sokszög alapú egyenes hasábot *oszlopnak* mondjuk.



235. ábra. Kocka



236. ábra. Téglatest

A paralelogramma alapú hasáb neve *paralelepipedon* (*egyenlőközű hatlap*). Azt az egyenes paralelepipedont, amelynek alapja téglalap, *téglatestnek* nevezzük. Azt a különleges téglát, amelynek valamennyi éle egyenlő, *kockának* mondjuk (235. ábra).

A kocka lapátlója: $f = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$;

testátlója: $d = \sqrt{f^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

A téglatest alaplapjának lapátlója: $f = \sqrt{a^2 + b^2}$

oldallapjának lapátlója: $g = \sqrt{b^2 + c^2}$

testátlója: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

A *hasáb felszínét* úgy kapjuk meg, hogy a kétszeres alapterülethez hozzáadjuk az oldalfelszínt:

$$F = 2a_t + O_f.$$

ahol a_t az alapterület mértékszáma és O_f az oldalfelszín mértékszáma.

A *hasáb térfogata* (*köbtartalma*) az alapterület és a magasság szorzatával egyenlő:

$$V = a_t \cdot m.$$

A *téglatest* (236. ábra)

felszíne: $F = 2(ab + ac + bc)$,

térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$.

A *kocka* (235. ábra)

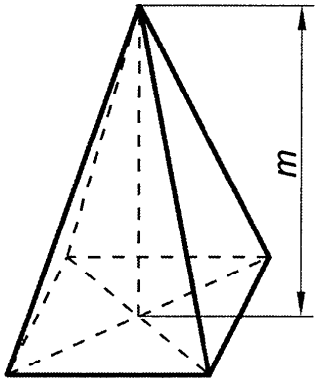
felszíne: $F = 6a^2$,

térfogata: $V = a^3$.

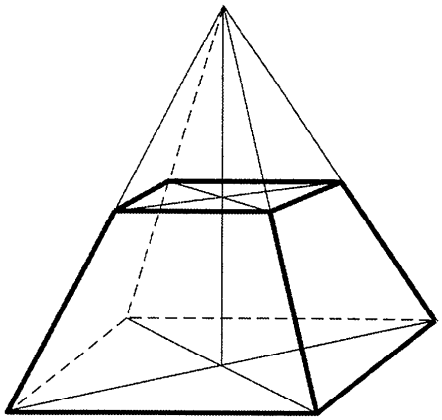
b) A *gúla* (*piramis*) olyan test, amelyet egy sokszöglap és annyi egy csúcsban összefutó háromszöglap határol, ahány oldala van a sokszögnek (237. ábra).

A gúla *egyenes* vagy *ferde* aszerint, hogy az oldalélek egyenlő hosszúak-e vagy sem. A *szabályos gúla* alaplapja szabályos sok-

szög, oldalélei egyenlő hosszúak, tehát oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek és az alappal alkotott hajlásszögeik is egyenlők. A gúla *magassága* a csúcsból az alapra bocsátott merőleges hosszával egyenlő.



237. ábra. Gúla



238. ábra. Csonkagúla

A gúla az oldallapok száma szerint három-, négy- vagy többoldalú. Az n oldalú gúlának $(n+1)$ számú lapja, $(n+1)$ számú csúcsa és $2n$ számú éle van.

Ha a gúlát az alappal párhuzamos síkkal metsszük, akkor az alap és a síkmetszet közötti részt *csonkagúlának*, a másik részt pedig *kiegészítő gúlának* nevezzük (238. ábra).

A csonkagúla tehát olyan test, amelyet két párhuzamos és hasonló sokszög alap-, ill. fedőlap és annyi trapéz alakú oldallap határol, ahány oldala van a sokszögnek.

A *gúla felszínét* úgy kapjuk meg, hogy az alap területéhez hozzáadjuk az oldalfelszínt:

$$F = a_t + O_f.$$

A *gúla térfogata* egyenlő az alapterület és a magasság szorzatának harmadrészével (l. a 10.5 pontot):

$$V = \frac{a_t \cdot m}{3}.$$

A *csonkagúla felszínét* megkapjuk, ha az alap- és a fedőlap területéhez hozzáadjuk az oldalfelszínt:

$$F = A_t + a_t + O_f$$

ahol A_t az alap területe; a_t a fedőlap területe.

A *csonkagúla térfogata* a teljes gúla és a kiegészítő gúla térfogatának különbségével egyenlő.

Legyen m a csonkagúla és x a kiegészítő gúla magassága (239. ábra), akkor a csonkagúla térfogata: $V = \frac{1}{3}A_t(m+x) - \frac{1}{3}a_t x = \frac{1}{3}A_t m + \frac{1}{3}x(A_t - a_t)$.

Felhasználva, hogy a két párhuzamos síkmetszet területének aránya egyenlő a csúcstól mért megfelelő távolságok négyzetének arányával, azaz:

$A_t : a_t = (m+x)^2 : x^2$, vagyis $A_t x^2 = a_t (m+x)^2$.

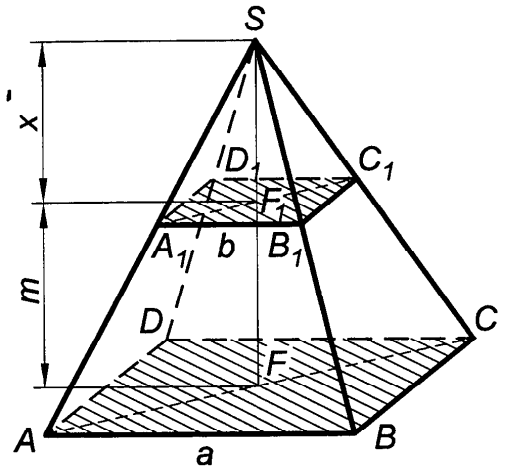
Gyököt vonva, rendezve és a nevezőt racionálissá téve: $x = \frac{m\sqrt{A_t a_t} + m a_t}{A_t - a_t}$.

Helyettesítsük ezt az x értéket V-be:

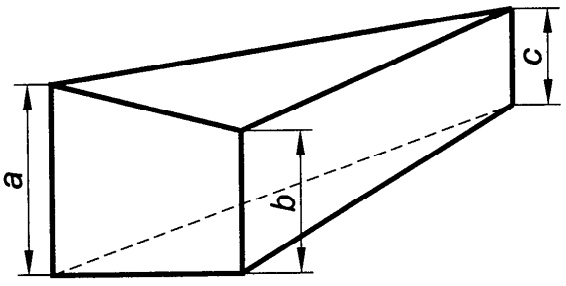
$V = \frac{1}{3}A_t m + \frac{1}{3}\frac{m\sqrt{A_t a_t} + m a_t}{A_t - a_t}(A_t - a_t)$; egyszerűsítés, kiemelés után,

a csonkagúla térfogata:

$$V = \frac{1}{3}m(A_t + \sqrt{A_t \cdot a_t} + a_t).$$



239. ábra. Csonkagúla



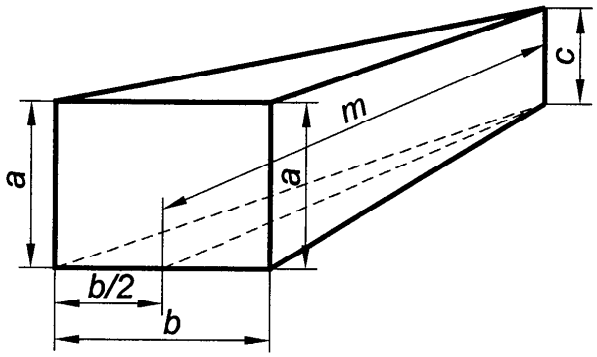
240. ábra. Szabálytalan ék

A *szabálytalan ék* (240. ábra) térfogatát megkapjuk, ha alapterületét szorozzuk a három oldalél számtani közepével:

$$V = a_t \frac{a+b+c}{3}.$$

A *szabályos ék* (241. ábra) olyan ék amelynek három oldala közül kettő egymással egyenlő, s így térfogata:

$$V = a_t \frac{a+a+c}{3} = a_t \frac{2a+c}{3}.$$



241. ábra. Szabályos ék

Ha az alapháromszögben a b oldalhoz tartozó magasság m, akkor

$$a_t = \frac{b \cdot m}{2}, \quad \text{tehát}$$

$$V = \frac{1}{6} bm(2a+c).$$

c) A *szabályos testek felszíne és térfogata,* ha a az él hosszúsága:

Tetraéder:
$$F = \sqrt{3}\, a^2 \approx 1,7321 a^2$$
$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2}\, a^3 \approx 0,1179 a^3$$

Hexaéder (kocka):
$$F = 6a^2$$
$$V = a^3$$

Oktaéder:
$$F = 2a^2\sqrt{3} \approx 3,4641 a^2$$
$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2} a^3 \approx 0,4714 a^3$$

Dodekaéder:
$$F = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \approx 20,6457 a^2$$
$$V = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) \approx 7,6631 a^3$$

Ikozaéder: $F = 5a^2\sqrt{3} \approx 8{,}6603a^2$

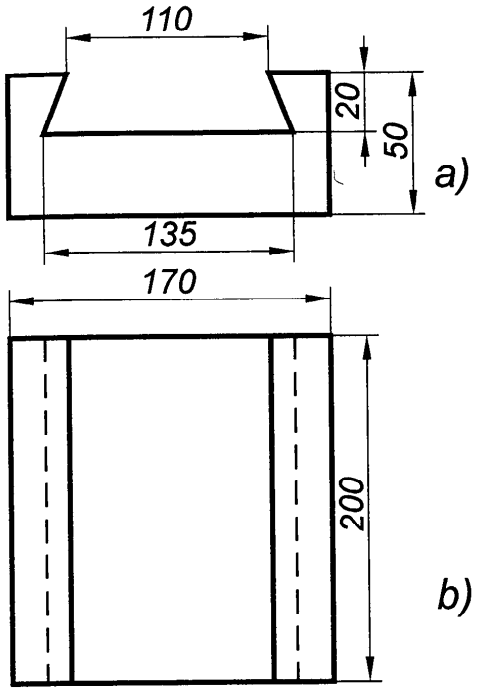
$$V = \frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5}) \approx 2{,}1817a^3$$

Példák

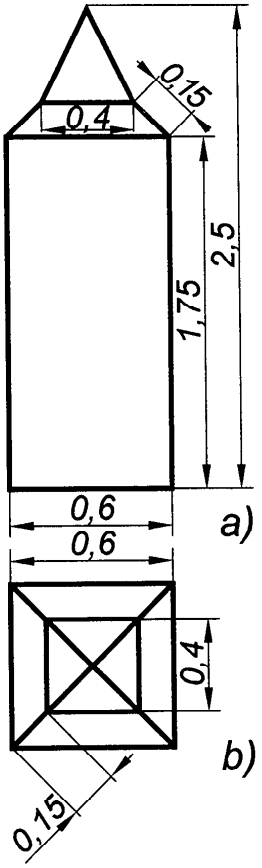
1. Számítsuk ki az $a = 50$ mm élű acél kocka G súlyát, ha az acél fajsúlya $\gamma = 76982{,}20\,\text{N/m}^3$!

Megoldás: A $\gamma = \frac{G}{V}$ - ből $G = \gamma \cdot V = 76982{,}20\ \text{N/m}^3 \cdot 0{,}05^3\ \text{m}^3 = 9{,}6228\ \text{N}$.

2. Számítsuk ki a 242. ábrán vázolt vezetőlap anyagának fajsúlyát, ha súlya 86,59 N (a méretek mm-ben értendők)!



242. ábra. Vezetőlap:
a) elölnézet; *b*) felülnézet



243. ábra. Márványkő:
a) elölnézet; *b*) felülnézet

Megoldás: $\gamma = \frac{G}{V} = \frac{G}{a_t \cdot m}$.

$$a_t = t_1 - t_2 = \left(17{,}0 \cdot 5{,}0 - \frac{13{,}5+11{,}0}{2} \cdot 2{,}0\right)\text{cm}^2 = 60{,}5\ \text{cm}^2.$$

Térfogat:

$$V = a_t \cdot m = 60{,}5 \text{ cm}^2 \cdot 20{,}0 \text{ cm} = 1210{,}0 \text{ cm}^3 = 1{,}210 \text{dm}^3 = 0{,}001210 \text{ m}^3.$$

Fajsúly: $\gamma = \frac{G}{V} = \frac{86{,}59 \text{ N}}{0{,}001210 \text{ m}^3} \approx 71561{,}98 \text{ N/m}^3.$

3. Egy felül nyitott bádogtartály hosszúsága 11 dm, szélessége 9 dm és magassága 8 dm. Hány N súlyú terhet rakhatunk a tartályba, ha azt akarjuk, hogy a vízben 6 dm-nyire merüljön el? (Egy dm^2 bádog súlya 1,23 N.)

Megoldás: A bádogtartály olyan hasáb, amelynek fedőlapja hiányzik, tehát felszíne:

$$F = a_t + O_f = (9 \cdot 11) \text{ dm}^2 + 2(8 \cdot 11 + 8 \cdot 9) \text{ dm}^2 = 419 \text{ dm}^2;$$

súlya:

$$G = F \cdot 1{,}23 \text{ N} = 515{,}37 \text{ N}.$$

A teherrel megrakott tartály súlya egyenlő a helyéből kiszorított víz súlyával, ezért ha a teher x N és a víz fajsúlya $9{,}80665 \text{ N/dm}^3$, akkor

$$515{,}37 + x = 11 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 9{,}80665, \text{ amelyből}$$

$$x = (5825{,}1501 - 515{,}37) \text{ N} = 5309{,}7801 \text{ N},$$

tehát a bádogtartályba 5309,78 N súlyú terhet rakhatnak, ha 6 dm-nyire akarjuk a vízbe süllyeszteni.

4. Egy négyzet alapú márványkő teljes magassága 2,5 m és alapéle 0,6 m; az alsó része 1,75 m magas hasáb; a középső része 0,15 m oldalélű és 0,4 m felső élű négyzet alapú csonkagúla; felső része szabályos gúla (243. ábra). Mekkora az egész kő súlya, ha fajsúlya $25{,}9876 \text{ N/dm}^3$?

Megoldás: A négyzetes hasáb térfogata: $V_1 = a^2 \cdot m = 0{,}6^2 \cdot 1{,}75 = 0{,}634 \text{ m}^3$.

A négyzetes alapú csonkagúla térfogata:

$$V_2 = \frac{1}{3} m(A_t + \sqrt{A_t \cdot a_t} + a_t) = \frac{1}{3} m(a^2 + a \cdot b + b^2), \text{ s mivel}$$

$$m = \sqrt{0{,}15^2 - (0{,}1)^2 - (0{,}1)^2} = 0{,}05 \text{ m, tehát}$$

$$V_2 = \frac{0{,}05}{3}(0{,}6^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4^2) \approx 0{,}01 \text{ m}^3.$$

A szabályos gúla térfogata:

$$V_3 = \frac{a_t \cdot m}{3} = \frac{b^2 \cdot m}{3} = \frac{0{,}4^2[2{,}5 - (1{,}75 + 0{,}01)]}{3} \approx 0{,}016 \text{ m}^3.$$

Tehát a teljes márványkő térfogata:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0{,}630 + 0{,}01 + 0{,}034 = 0{,}674 \text{ m}^3.$$

Súlya: $G = \gamma \cdot V = (25{,}9876 \text{ N/dm}^3) \cdot 674 \text{ dm}^3 = 17515{,}6424 \text{ N}.$

Feladatok

1. Egy kétemeletes ház építéséhez 18 m hosszú, 12 m széles és 2 m mély alapra volt szükség. Hány köbméter földet kellett kiásni? [432 m^3.]

2. Egy 23 mm élű alumínium kockának mekkora a felszíne és a súlya?

[$F = 31{,}74\ cm^2$, $V = 12{,}167\ cm^3$, $\gamma = 26{,}4780\ N/dm^3$, $G = 0{,}32216\ N$.]

3. Mennyire merül el a vízben az a négyoldalú egyenes hasáb, amelynek magassága 40 cm, ha fajsúlya $7{,}84532\ N/dm^3$? [3,2 dm.]

4. Milyen magasságig kell valamely 30 cm hosszú, 20 cm széles és 25 cm magas, felül nyitott bádogedényt vízzel megtölteni, hogy a $17{,}6520\ N/dm^3$ fajsúlyú kénsavban 15 cm-nyire merüljön el, ha 1 cm^2 bádog súlya 0,0196 N? [16,66 cm.]

5. Egy 4 méter magas 12 m felső szélességű és 5,66 m rézsűhosszúságú vasúti töltést a sínekre merőlegesen 15 m hosszúságú szakaszon keresztül kell vágni. Hány köbméter földet távolítunk el? [960 m^3.]

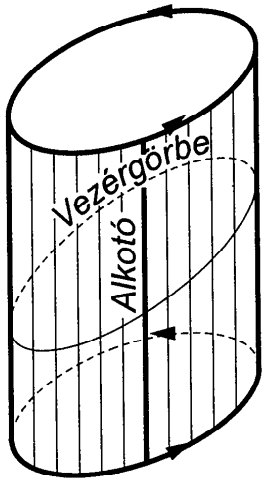
6. Hány négyzetméter bádog szükséges olyan négyzetes gúla alakú torony bevonásához, amelynek alapéle 2 m, és magassága 3 m? $\left[4 \cdot \sqrt{10}\ m^2 \approx 12{,}65\ m^2.\right]$

5.2.4 Görbefelületű testek

a) A henger

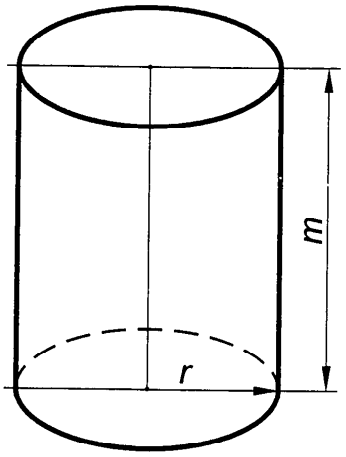
Ha egy egyenest valamely síkgörbe mentén úgy mozgatunk, hogy mozgás közben eredeti helyzetével párhuzamos marad, akkor az egyenes *végtelen hengerfelületet* ír le.

(Az egyenes nem fekszik a síkgörbe síkjában). A görbét *vezérgörbének*, az egyenest minden egyes párhuzamos helyzetében *alkotónak* mondjuk. Ha egy zárt vezérgörbéjű hengerfelületet az alkotóval nem párhuzamos két síkkal elmetszünk, akkor *hengert* kapunk (244. ábra).



244. ábra. Hengerfelület

A henger tehát olyan test, amelyet két párhuzamos és egybevágó síklap és egy zárt vezérgörbéjű hengerfelület határol.



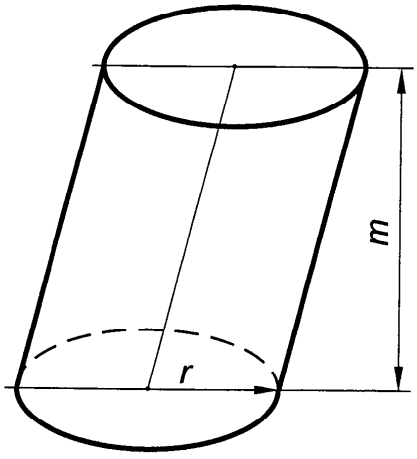
245. ábra. Egyenes henger

Az utóbbit palástnak nevezzük.

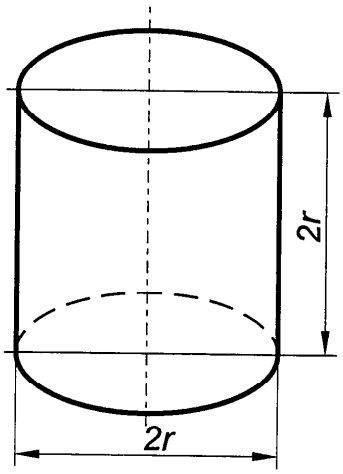
A továbbiakban csak olyan hengerekkel foglalkozunk, amelyeknek vezérgörbéje kör.

A körhenger (röviden henger) alap- és fedőlapjának középpontját összekötő egyenes a henger *tengelye*, a két lapnak egymástól való távolsága a henger *magassága*. Ha a henger tengelye merőleges az alapra, akkor a henger *egyenes* (245. ábra), ellenkező esetben *ferde* (246. ábra).

Egyenlő oldalú henger az olyan henger, amelynek magassága egyenlő az alap átmérőjével (247. ábra).



246. ábra. Ferde henger



247. ábra. Egyenlő oldalú henger

A *henger felszínét* megkapjuk, ha az alapterület kétszereséhez hozzáadjuk a palást területét:

$$F = 2a_t + P$$

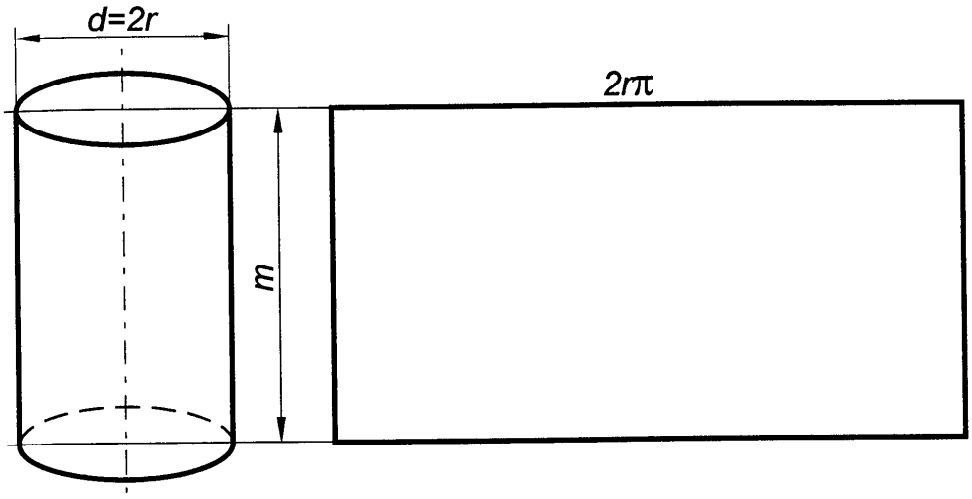
ahol P a palást területe.

Az egyenes körhenger palástja lefejtve olyan téglalap, amelynek alapja a henger alapkörének kerülete, magassága pedig a henger magassága (248. ábra), területe tehát

$$P = 2\pi rm$$

s így az egyenes körhenger felszíne:

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi rm = 2\pi r(r+m)$$



248. ábra. Az egyenes körhenger kiterített palástja

Az *egyenlő oldalú henger felszíne*, mivel $m = 2r$;

$$F = 2\pi r(r+2r) = 6\pi r^2.$$

A *henger* (egyenes vagy ferde) *térfogata* az alapterület és a magasság szorzatával egyenlő:

$$V = \pi r^2 m = \frac{\pi d^2}{4} m.$$

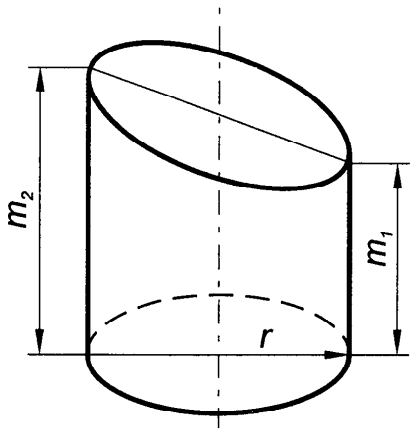
(Ennek a képletnek és az e fejezetben közölt minden további képletnek az igazolása, amennyiben itt nem szerepel, "10.5 A határozott integrál alkalmazásai" c. pontban megtalálható, ill. az ott közöltek alapján igazolható.)

Az *egyenlő oldalú henger térfogata*, minthogy $m = 2r$:

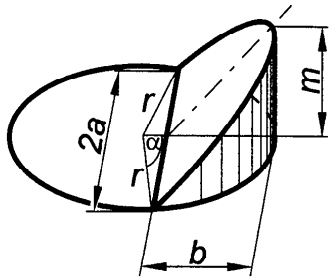
$$V = r^2 \pi 2r = 2r^3 \pi = \pi \frac{d^3}{4}.$$

A *csonkahenger* (249. ábra) *térfogata*:

$$V = \pi r^2 \frac{m_1 + m_2}{2}.$$



249. ábra. Csonkahenger



250. ábra. Hengerszelet

A *hengerszelet* (250. ábra) *térfogata* (α-t radiánban mérve):

$$V = \frac{m}{3b}\left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\alpha\right].$$

Ha a metsződik az alapkör átmérőjére illeszkedik, akkor $a = b = r$, s így

$$V = \frac{2}{3}mr^2.$$

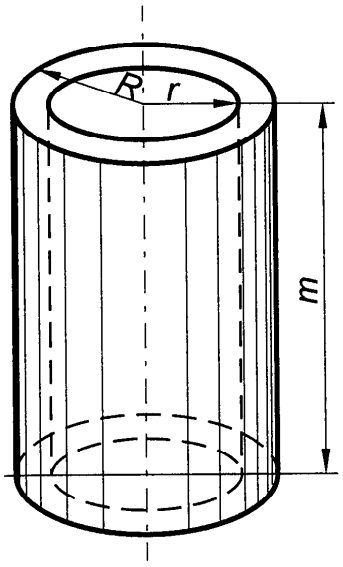
A *hengergyűrű* (251. ábra) *térfogata*:

$$V = \pi m(R^2 - r^2),$$

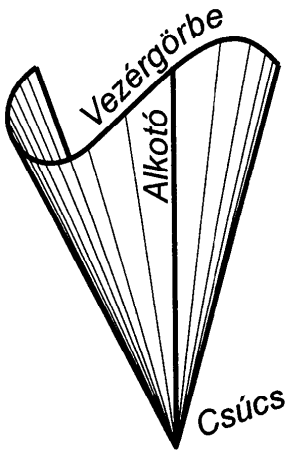
ahol R a külső, r a belső sugár.

b) A kúp

Kúpfelületet ír le az olyan egyenes, amely egy adott görbe mentén mozog oly módon, hogy közben egyik (görbén kívüli) pontja állandóan rögzített marad.

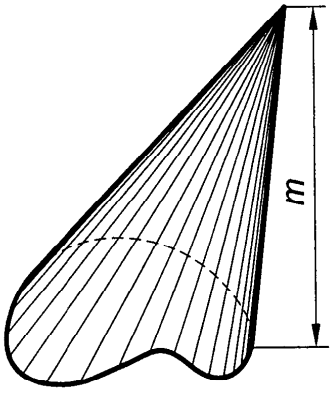


251. ábra. Hengergyűrű

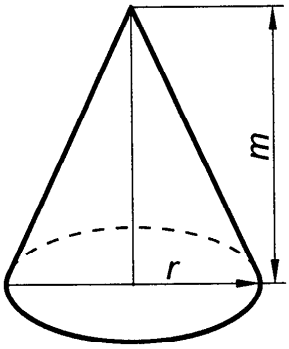


252. ábra. Kúpfelület

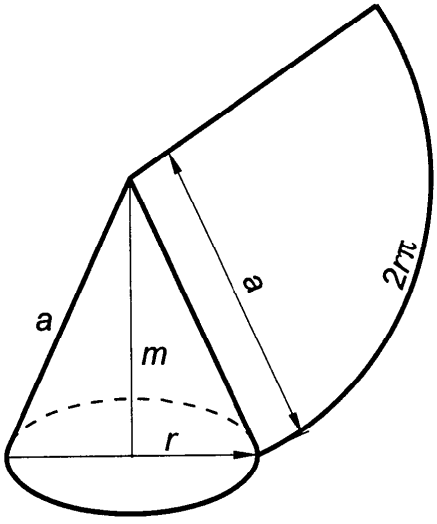
Ezt az egyenest minden helyzetében *alkotónak* nevezzük (252. ábra).



253. ábra. Kúp



254. ábra. Egyenes körkúp



255. ábra. Kúppalást

A kúp olyan test (253., 254. ábra), amelyet egy zárt vezérgörbéjű kúpfelület és egy – e kúpfelület minden alkotóját átmetsző – sík határol.

A továbbiakban csak kör vezérgörbéjű kúpokkal foglalkozunk. A csúcsot és az alap középpontját összekötő egyenes a kúp *tengelye*, a csúcsnak az alaptól mért távolsága a kúp *magassága.*

Ha a kúp tengelye merőleges az alapra, akkor a kúp egyenes, ellenkező esetben ferde (253. ábra). Az olyan egyenes körkúpot, amelynek tengelyét tartalmazó keresztmetszete egyenlő oldalú háromszög, *egyenlő oldalú kúpnak* mondjuk.

Az *egyenes körkúp* (254. ábra) felszínét úgy kapjuk meg, hogy az alapterületéhez hozzáadjuk a palást területét:

$$F = a_t + P$$

A palást lefejtve olyan körcikk, amelynek íve a kúp alapjának kerületével, sugara pedig az alkotó hosszával egyenlő (255. ábra), tehát a *palást területe*:

$$P = \frac{2r\pi a}{2} = \pi r a,$$

ahol a az alkotó hossza.

Az *egyenes körkúp felszíne* tehát:

$$F = \pi r^2 + \pi r a = \pi r(r + a).$$

Az *egyenlő oldalú kúp felszíne*, mivel $a = 2r$:

$$F = \pi r(r + 2r) = 3r^2\pi.$$

A ferde kúp felszínét elemi úton nem tudjuk meghatározni.

A *kúp* (egyenes vagy ferde) *térfogata* az alapterület és a magasság szorzatának harmadrészével egyenlő:

$$V = \frac{a_t \cdot m}{3}.$$

Az *egyenes körkúp térfogata*:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot m}{3} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot m}{12}$$

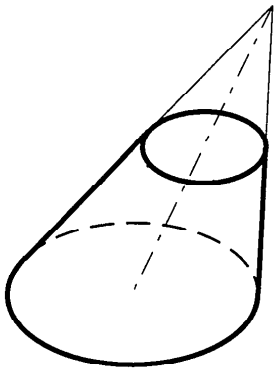
Ha az egyenes körkúp a oldalvonala adott, akkor $m=\sqrt{a^2-r^2}$ felhasználásával: $V=\frac{\pi r^2}{3}\sqrt{a^2-r^2}$, s ha a kúp egyenlő oldalú, akkor $a=2r$, tehát

$$V=\frac{\pi r^2}{3}\sqrt{(2r)^2-r^2}=\frac{\pi r^3}{3}\sqrt{3}.$$

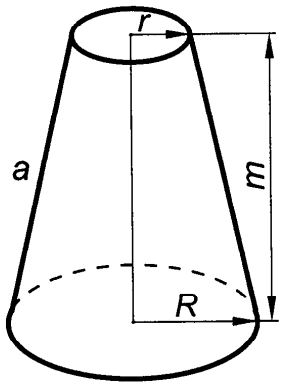
A *csonkakúp* (256. ábra). Ha a kúpot az alappal párhuzamos síkkal metszük, két testet kapunk: a kúpnak az alap és a síkmetszet között levő része a *csonkakúp*, a másik része a *kiegészítő kúp*.

Az *egyenes csonkakúp* (257. ábra) *felszínét* megkapjuk, ha az alap és fedőlap területéhez hozzáadjuk a palást területét:

$$F=A_t+a_t+P.$$



256. ábra. Ferde csonkakúp



257. ábra. Egyenes csonkakúp

Az alap területe $A_t=R^2\pi$, a fedőlap területe: $a_t=r^2\pi$. A palást lefejtve olyan körgyűrűcikk (258. ábra), amelynek két íve az alsó és felső alapkör kerülete ($2r\pi$, ill. $2R\pi$) és szélessége a csonkakúp oldala (a), tehát területe:

$$P=\frac{2R\pi+2r\pi}{2}a=(R\pi+r\pi)a=\pi a(R+r),$$

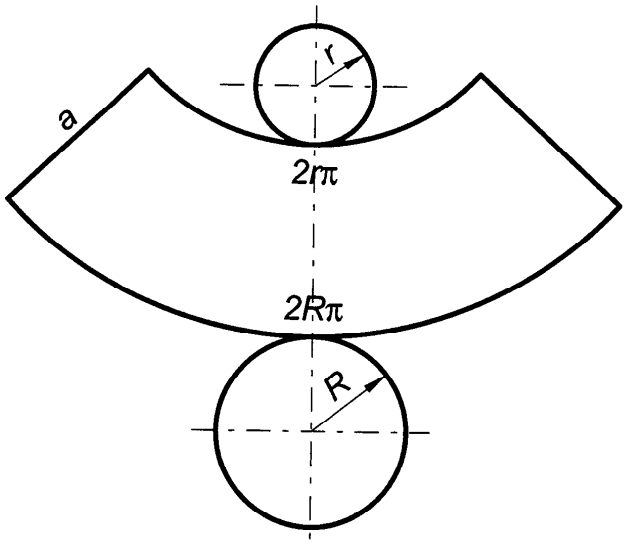
s így az *egyenes csonkakúp felszíne*:

$$F = R^2\pi + r^2\pi + \pi a(R+r) = \pi\left[R^2 + r^2 + a(R+r)\right].$$

A ferde csonkakúp felszíne elemi úton nem határozható meg.

Az *egyenes csonkakúp térfogata*:

$$V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + R\cdot r + r^2) = \frac{\pi m}{12}(D^2 + D\cdot d + d^2).$$



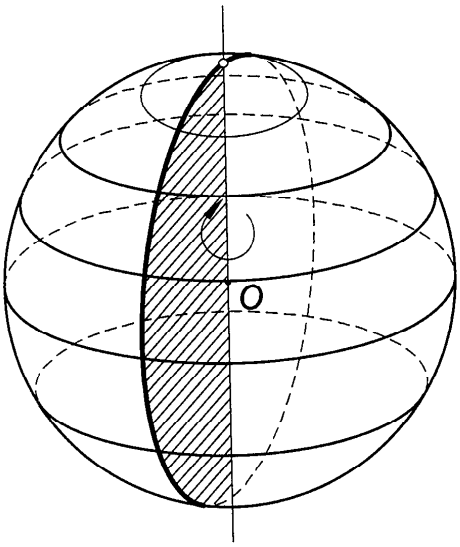
258. ábra. Lefejtett csonkakúppalást

c) A gömb

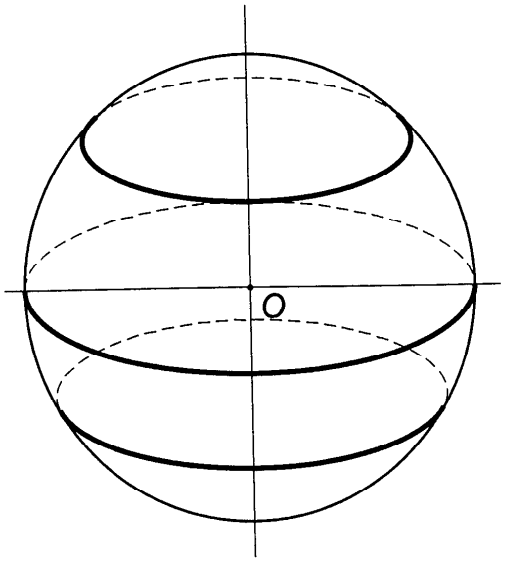
Gömbfelület akkor keletkezik, ha egy félkört átmérője körül addig forgatunk, amíg eredeti helyzetébe vissza nem tér.

A gömbfelülettel határolt testet *gömbnek* nevezzük (259. ábra). Az a pont, (*O*) amelytől a gömbfelületnek minden egyes pontja egyenlő távolságra van, a *gömb középpontja* (*centruma*). A középpontnak a gömbfelülettől való távolsága a *gömb sugara* (*r*; *rádiusz*).

A gömb – más megfogalmazásban – a tér egy *O* pontjától *r* távolságra levő pontok halmaza.



259. ábra. Gömb

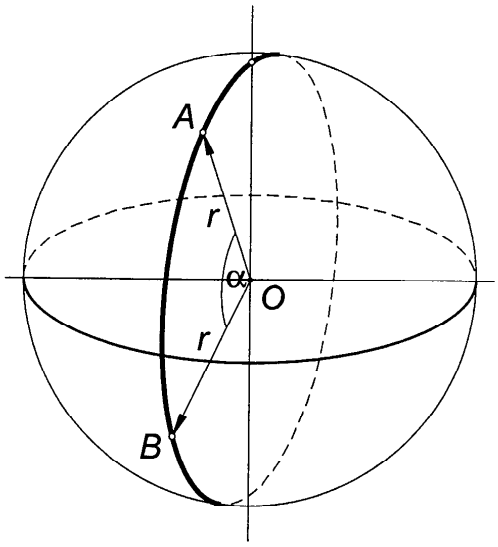


260. ábra. Gömbkörök

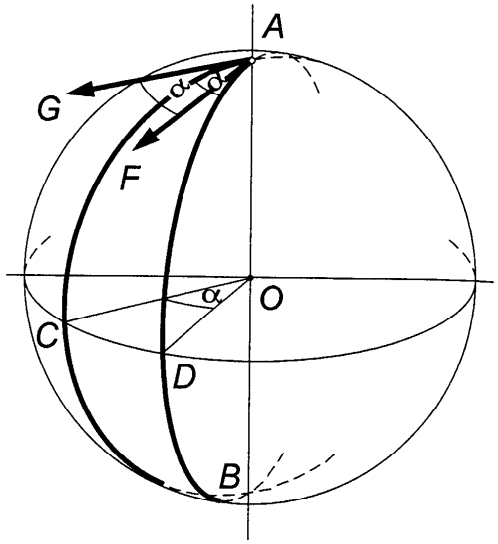
A gömbfelület két pontját összekötő egyenes darab a *gömb húrja*, a gömb középpontján átmenő húr (d) a *gömb átmérője* (*diaméter*), az átmérő végpontjai pedig a gömbfelület *átellenes pontjai*. Az átmérő (d) a gömb sugarának (r) kétszerese: $d = 2r$.

A gömbnek minden síkmetszete kör. Ennek sugara annál nagyobb, mennél közelebb van síkja a gömb középpontjához (260. ábra). Legnagyobb sugarú köröket – *főköröket* – akkor kapunk, ha a gömböt a középpontján átmenő síkokkal metsszük.

A főkör sugara a gömb sugarával egyenlő, és középpontja egybeesik a gömb középpontjával. A gömbfelület két átellenes pontján keresztül végtelen sok főkör húzható, mert a két pontot összekötő átmérőn át végtelen sok sík fektethető, amelyeknek mindegyike a gömböt főkörben metszi. A gömbfelület két, nem átellenes pontján keresztül, pl. A-n és B-n csak egy főkör húzható, mert a két adott ponton és a gömb középpontján át csak egy síkot fektethetünk (261. ábra). Az A és B pontok a rajtuk keresztül menő főkört két részre osztják; a kisebbik részt a két pont *gömbi* vagy *szférikus távolságának* nevezzük. A szférikus távolságot fokban vagy radiánban mérjük. Pl. a gömbfelület két átellenes pontjának szférikus távolsága $180°$ vagy π radián.

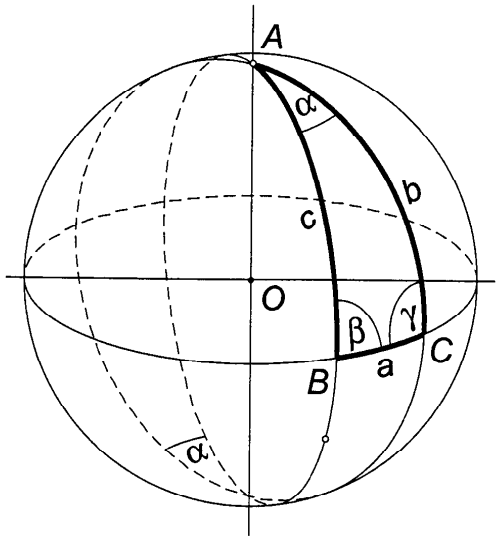


261. ábra. Szférikus távolság

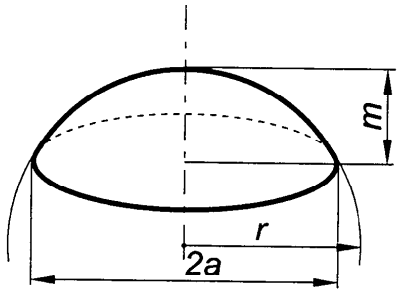


262. ábra. Gömbszög és gömbkétszög

A gömbfelület két, egymást metsző főköre által bezárt szög a *gömbszög* vagy *szférikus szög* (262. ábra). A gömbszög nagyságát a csúcspontban a főkörhöz húzott érintőkkel bezárt szög határozza meg (pl. $\alpha = FAG\angle$). A gömbfelületnek két legnagyobb félkörrel határolt részét *gömbkétszögnek* vagy *szférikus kétszögnek* nevezzük (pl. gömbkétszög a 262. ábrán a gömbfelület *ACBDA* része). A gömbfelületnek olyan része, amelyet három főkör íve határol, *gömbháromszög* (263. ábra).



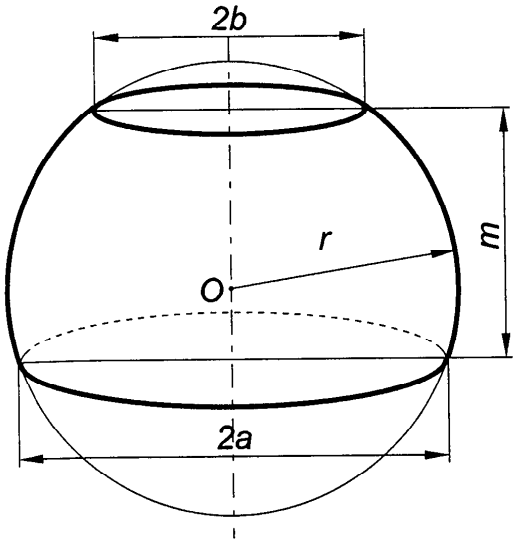
263. ábra. Gömbháromszög



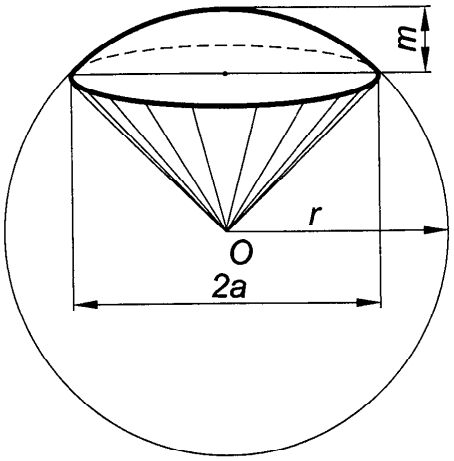
264. ábra. Gömbszelet vagy gömbszegmentum

A gömbnek valamely síkkal lemetszett része a *gömbszelet* vagy *gömbszegmentum* (264. ábra). A gömbszeletet a körlap és a lemetszett gömbfelület – *gömbsüveg* – határolja. A gömb két párhuzamos síkkal kimetszett része a *gömbkorong* vagy *gömbréteg* (265. ábra). A gömbfelületnek a két párhuzamos sík közé eső része a *gömböv*.

A gömbnek az a része, amely egy gömbszeletből és egy olyan kúpból van összetéve, amelynek alapja a gömbszelet alapjával, csúcsa pedig a gömb középpontjával esik egybe: a *gömbcikk* vagy *gömbszektor* (266. ábra).



265. ábra. Gömbkorong vagy gömbréteg és gömböv



266. ábra. Gömbcikk vagy gömbszektor

A *gömb felszíne* az egyik főkör területének négyszeresével egyenlő:

$$F = 4\pi r^2 \approx 12{,}57\, r^2 \quad \text{vagy} \quad F = \pi d^2 \approx 3{,}142\, d^2 .$$

A *gömb térfogata* a gömb felszínének és a sugár harmadának szorzatával egyenlő:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}189\, r^3 \quad \text{vagy} \quad V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 0{,}5236\, d^3 .$$

A *gömbcikkben* (266. ábra) a *Pitagorasz*-tétel alapján fennáll az $a^2 = 2rm - m^2$ összefüggés. Ennek figyelembevételével

felszíne: $$F = \pi r(2m + a);$$

térfogata: $$V = \frac{2}{3}\pi r^2 m = \frac{1}{6}\pi d^2 m.$$

A *gömbszeletre* (264. ábra) ugyancsak az $a^2 = 2rm - m^2$ összefüggést felhasználva

felszíne: $$F = \pi(2rm + a^2) = \pi m(4r - m);$$

térfogata: $$V = \frac{\pi m^2}{3}(3r - m) = \frac{\pi m}{6}\left(3a^2 + m^2\right).$$

A *gömbkorong* vagy *gömbréteg* (265. ábra), magassága az ábra jelöléseivel $m = \sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - b^2}$, tehát a

felszíne: $$F = \pi(2rm + a^2 + b^2);$$

térfogata: $$V = \frac{\pi m}{6}(3a^2 + 3b^2 + m^2).$$

A *gömböv felszíne*: $F = \pi(2rm + a^2 + b^2)$.

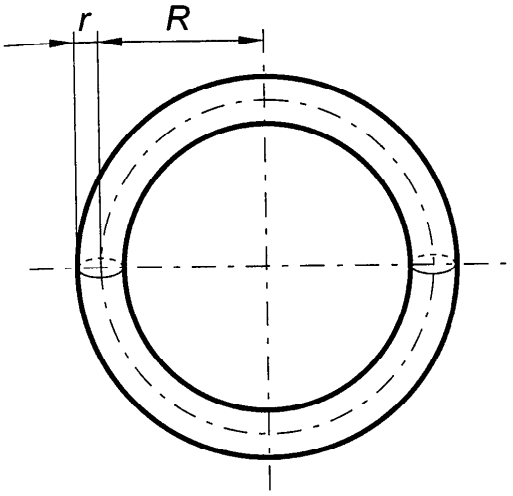
A *gömbsüveg felszíne*: $F = 2\pi rm = \pi(a^2 + m^2)$

Gyűrűfelület keletkezik akkor, ha a kört olyan tengely körül forgatjuk, amely a körrel egy síkban fekszik, de nem metszi.

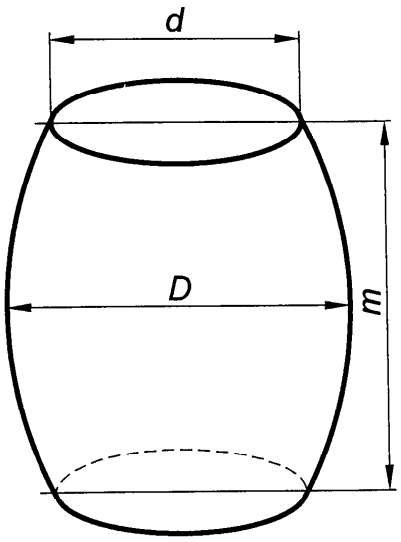
A *gyűrűfelület* által határolt test a *tórusz* (267. ábra). A *tórusz*

felszíne: $$F = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48\,Rr, \quad \text{vagy}$$
$$F = \pi^2 Dd \approx 9{,}87\,Dd$$

térfogata: $$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74\,Rr^2, \quad \text{vagy}$$
$$V = \frac{\pi^2 Dd^2}{4} \approx 2{,}467\,Dd^2.$$



267. ábra. Gyűrűfelület



268. ábra. Hordó

A *hordó* (268. ábra) *térfogata*, ha dongáját parabolaívvel közelítjük:

$$V = \frac{\pi m}{60}(8D^2 + 4Dd + 3d^2) \approx 0{,}05236m(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

Példák

1. Hány N súlyú a 250 m hosszú és 3 mm keresztmetszetű alumíniumdrót, ha fajsúlya 27,4586 N/dm^3?

Megoldás

Térfogat: $V = \frac{\pi d^2}{4}m \approx \frac{3{,}1416 \cdot 0{,}3^2 \text{ cm}^2}{4} \cdot 25000 \text{ cm} = 1767{,}15 \text{ cm}^3$.

Súly: $G = V \cdot \gamma = 1{,}76715 \text{ dm}^3 \cdot 27{,}4586 \text{ N/dm}^3 \approx 48{,}5235 \text{ N}$.

2. Egy 3 m hosszú négyzet keresztmetszetű gerendából a lehető legnagyobb átmérőjű hengert kell készíteni. Hány köbdeciméter a fahulladék, ha a négyzet oldala 80 cm? A fahulladék százalékát és a henger felszínét is számítsuk ki.

Megoldás: A fahulladék térfogata: $V = V_1 - V_2 = a^2 \cdot m - \frac{\pi d^2}{4}m \approx$

$$\approx 8^2 \cdot 30 - \frac{3{,}142 \cdot 8^2}{4} \cdot 30 = 1920 - 1508{,}16 = 411{,}84 \text{ dm}^3.$$

Százalékban kifejezve: $p = \frac{sz \cdot 100}{a} = \frac{411{,}84 \cdot 100}{1920} \approx 21{,}45\%$.

A henger felszíne: $F = 2\pi r(r + m) \approx 2 \cdot 3{,}142 \cdot 4 \cdot (4 + 30) = 854{,}624 \text{ dm}^2$.

3. Egy egyenes vaskúp tömege 446,6 kg, sűrűsége 7,8 kg/dm^3, alapkörének átmérője 4 dm. Mekkora a felszíne?

Megoldás: A sűrűség: $\rho = \frac{m}{V}$, amiből $V = \frac{m}{\rho} = \frac{446{,}6\ \text{kg}}{7{,}8\ \text{kg/dm}^3} = 57{,}2564\ \text{dm}^3$.

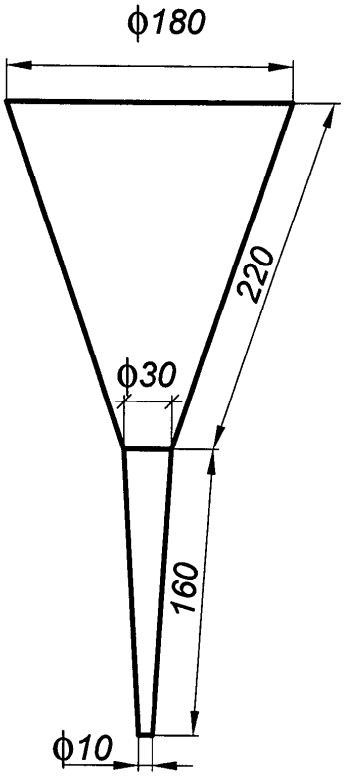
A kúp térfogata: $V = \frac{\pi d^2 m}{12}$, amiből $m = \frac{12 \cdot V}{\pi d^2} \approx \frac{12 \cdot 57{,}2564\,\text{dm}^3}{3{,}1416 \cdot 4^2\,\text{dm}^2} = 13{,}6689\,\text{dm}$.

A kúp felszíne: $F = \pi r(r + a)$, ahol

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{13{,}6689^2\ \text{dm}^2 + 2^2\ \text{dm}^2} = \sqrt{190{,}8388}\ \text{dm} \approx 13{,}8144\ \text{dm},$$

tehát $F = 3{,}1416 \cdot 2\ \text{dm}(2\ \text{dm} + 13{,}8144\ \text{dm}) \approx 99{,}3650\ \text{dm}^2$.

4. Számítsuk ki, hogy a 269. ábrán feltüntetett tölcsér (méretek mm-ben) elkészítéséhez hány négyzetdeciméter lemezt használunk fel. Hány liter víz fér bele, ha elzárjuk a kiömlőnyílást? A lemez vastagsága 2 mm.



269. ábra. Tölcsér

Megoldás: A két csonkakúppalást felszíne adja a felhasznált lemez területét:

$$P_1 = \pi a(R + r) \approx 3{,}142 \cdot 22{,}0 \cdot (9{,}0 + 1{,}5) \approx$$
$$\approx 725{,}80\ \text{cm}^2.$$

$$P_2 = 3{,}142 \cdot 16{,}0 \cdot (1{,}5 + 0{,}5) \approx 100{,}54\ \text{cm}^2.$$

Tehát a felhasznált lemez területe:

$$F = P_1 + P_2 = 725{,}80 + 100{,}54 = 826{,}34\,\text{cm}^2 \approx$$
$$\approx 8{,}26\ \text{dm}^2.$$

A tölcsérbe annyi víz fér, amennyi a belső térfogata:

$$V_1 = \frac{\pi m}{12}(D^2 + D \cdot d + d^2), \text{ ahol}$$

$$m = \sqrt{22{,}0^2 - 7{,}5^2} \approx 20{,}7\ \text{cm}, \text{ tehát:}$$

$$V_1 \approx \frac{3{,}142 \cdot 20{,}7}{12}(17{,}6^2 + 17{,}6 \cdot 2{,}6 + 2{,}6^2) \approx$$
$$\approx 1963{,}52\ \text{cm}^3.$$

A másik csonkakúp magassága:

$$m = \sqrt{16^2 - 1{,}0^2} \approx 15{,}9\ \text{cm}, \text{ tehát:}$$

$$V_2 \approx \frac{3{,}142 \cdot 15{,}9}{12}(2{,}6^2 + 2{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6^2) \approx 36{,}14\ \text{cm}^3;$$

$V_1 + V_2 = 1963{,}52 + 36{,}14 = 1999{,}66\ \text{cm}^3 = 1{,}99966\ \text{dm}^3$, azaz a tölcsérbe közel 2 liter víz fér.

5. Egy 40 cm átmérőjű, belül üres vasgolyó felényire merül alá a vízben. Hány cm a golyó falvastagsága, ha a vas sűrűsége 7,4 g/cm^3. Számítsuk ki a golyó külső felszínét is.

Megoldás: Az egész gömb tömege megegyezik a félgömb által kiszorított víz tömegével (jelölje D a külső, d a belső átmérőt):

$$\frac{V}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi D^3\approx\frac{1}{12}\cdot 3{,}1416\cdot 40^3\,\text{cm}^3\approx 16755{,}20\ \text{cm}^3.$$

A vasgolyó tömege, a víz sűrűségét egynek véve: m = 16 755,20 g, de $m=\rho\cdot V=\rho(V_1-V_2)$, $V_1=\frac{1}{6}\pi D^3$ a külső, $V_2=\frac{1}{6}\pi d^3$ a belső gömbfelülettel határolt gömb térfogata, úgyhogy $m=\frac{1}{6}\pi(D^3-d^3)\rho$, amiből

$$d=\sqrt[3]{D^3-\frac{6m}{\rho\pi}}\approx\sqrt[3]{40^3\,\text{cm}^3-\frac{6\cdot 16755{,}20\ g}{7{,}4\ g/\text{cm}^3\cdot 3{,}1416}}\approx$$

$$\approx\sqrt[3]{64000-4324{,}3243}\ \text{cm}\approx\sqrt[3]{59675{,}6757}\ \text{cm}\approx 39{,}08\ \text{cm}.$$

Tehát a golyó falvastagsága közel :

$$\frac{D-d}{2}=\frac{40\ \text{cm}-39{,}08\ \text{cm}}{2}=0{,}46\ \text{cm}.$$

A gömb felszíne: $F=\pi D^2=3{,}1416\cdot 40^2\,\text{cm}^2=5026{,}56\ \text{cm}^2$.

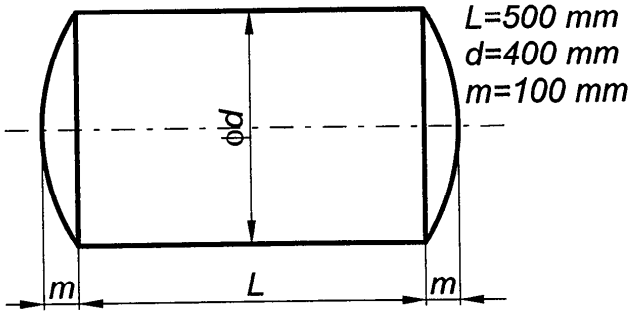
6. A 270. ábrán feltüntetett hengeres úszótest fenék- és fedőlapja gömbsüveg. Számítsuk ki az úszótest felszínét és térfogatát.

Megoldás: Az úszótest felszíne a hengerpalástnak és egy gömbsüveg kétszeres területének összegével egyenlő:

$$P=2\pi\frac{d}{2}L\approx$$

$$\approx 2\cdot 3{,}142\cdot\frac{400}{2}\cdot 500=$$

$$=628400\ \text{mm}^2;$$



270. ábra. Úszótest

$$F_1=\pi(a^2+m^2)=\pi\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2+m^2\right]\approx 3{,}142\cdot\left[\left(\frac{400}{2}\right)^2+100^2\right]=$$

$$=157100\ \text{mm}^2,$$

$$F=P+2F_1=628400+2\cdot 157100=942600\ \text{mm}^2=94{,}26\ \text{dm}^2.$$

A térfogat egy hengernek és egy gömbszelet kétszeres térfogatának összegével egyenlő: $V_1=\pi\frac{d^2}{4}L\approx 3{,}142\cdot\frac{4{,}0^2}{4}\cdot 5{,}0=62{,}84\ \text{dm}^3$;

$$V_2 = \frac{\pi m}{6}(3a^2 + m^2) \approx 0{,}5236 \cdot 1{,}0 \cdot (3 \cdot 2{,}0^2 + 1{,}0^2) = 6{,}8068 \text{ dm}^3,$$

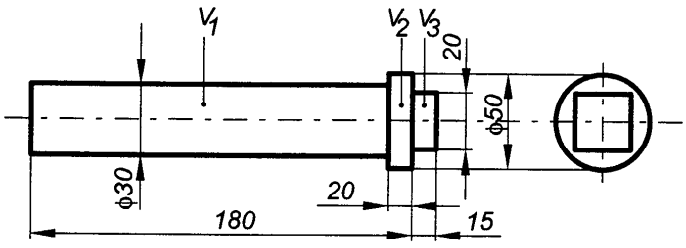
$$V = V_1 + 2V_2 = 62{,}84 + 2 \cdot 6{,}8068 = 76{,}4536 \text{ dm}^3.$$

Feladatok

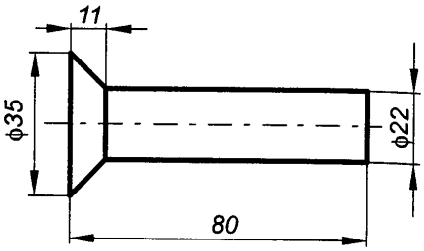
1. Számítsuk ki a 271. ábrán vázolt csapszeg tömegét, ha 7,85 g/cm^3 sűrűségű acélból készült!

$$\left[V_1 = \frac{\pi d_1^2 \cdot h_1}{4} \approx 113{,}11 \text{ cm}^3\right]; \quad \left[V_2 = \frac{\pi d_2^2 \cdot h_2}{4} \approx 39{,}3 \text{ cm}^3\right];$$

$$\left[V_3 = a_t \cdot h_3 = 6{,}0 \text{cm}^3\right]; \quad \left[m = (V_1 + V_2 + V_3)\text{cm}^3 \cdot 7{,}85 \text{g/cm}^3 \approx 1243{,}52 \text{g}\right]$$



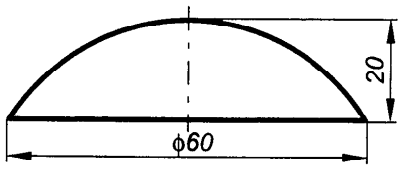
271. ábra. Csapszeg



272. ábra. Szegecs

2. Hány kg tömegű 100 db 22 mm átmérőjű szegecs (272. ábra), ha sűrűsége 7,86 g/cm^3? $[m = 26{,}2 \text{ kg}]$

3. Mekkora annak a kúpnak a térfogata, amelynek palástja 40 cm sugarú negyedkörlemezből készült? $\left[V = 4{,}55 \text{ dm}^3\right]$



273. ábra. Síkdomború lencse

4. Mennyi a 273. ábrán vázolt síkdomború flintüveglencse tömege, ha sűrűsége 3 g/cm^3? $[m = 97 \text{ g}]$

5. Számítsuk ki egy 1 kg tömegű sárgarézgömb átmérőjét, ha sűrűsége 8,5 g/cm^3! $[d = 61 \text{ mm}]$

6. Egy gömbcikk alakú fadarab, ha egyenes állásban tartjuk, annyira merül el a vízben, hogy csak a gömbcikkhez tartozó gömbszelet áll ki a vízből. Mekkora a fának a sűrűsége, ha a vízből kiálló rész magassága 3 cm és a gömb sugara 15 cm?

$\left[\rho = 0{,}72 \text{ g/cm}^3\right]$

7. Egy edény, amelyet gömböv határol, szájánál 4 dm, aljánál 3,2 dm átmérőjű, magassága pedig 2,8 dm. Mekkora a térfogata? $\left[V = 40{,}33 \text{ dm}^3\right]$

5.3 TRIGONOMETRIA

5.3.1 Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése

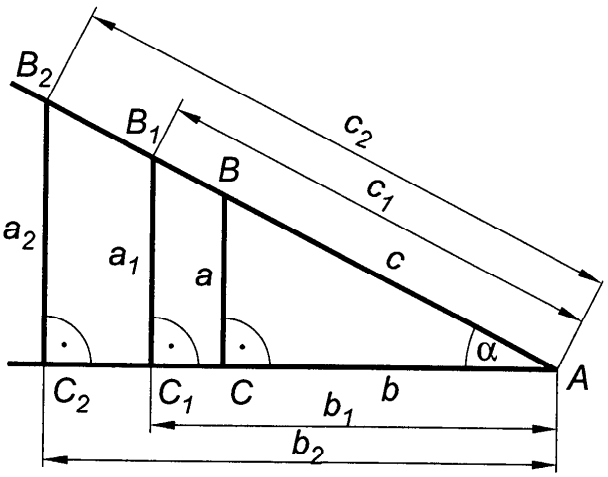
A síkgeometriában tárgyaltuk, hogy a háromszög megszerkesztéséhez elegendő három független alkotórész. Azt is láttuk, hogy a háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételek és a derékszögű háromszögekre érvényes *Pitagorasz*-tétel lehetővé teszi megadott távolságokból ismeretlen háromszögtávolságok kiszámítását. A háromszög két szögét ismerve, kiszámíthatjuk a harmadik szöget, mert a háromszög szögösszege 180°. Az említett ismeretek azonban nem tették lehetővé, hogy a megadott három független alkotórészből a másik hármat kiszámíthassuk, mert a háromszög oldalai és szögei különnemű mennyiségek, s így egy feladaton belül szögekkel és oldalakkal nem számolhatunk.

A háromszög szögeinek és oldalainak összefüggését a *trigonometria* (*háromszögmértan*; görögül *tri* három, *gonü* szög, *metron* mérés) tárgyalja. A trigonometria tehát azokkal az összefüggésekkel foglalkozik, amelyek lehetővé teszik, hogy a háromszögek ismert alkotórészeiből az ismeretleneket számítással meghatározhassuk. Mivel minden egyenesekkel határolt síkidom háromszögekre, és minden háromszög derékszögű háromszögekre bontható, ezért a derékszögű háromszög vizsgálata alapvetően fontos.

A 274. ábra hasonló háromszögeinek megfelelő oldalaira hat arányt írhatunk fel:

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2},\quad \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2},\quad \frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2},\quad \frac{c}{b}=\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2},\quad \frac{c}{a}=\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}.$$



274. ábra. Hasonló háromszögek

A megfelelő oldalak aránya, akárhány hasonló derékszögű háromszöget szerkesztenénk az α szög szárai közé, mindaddig változatlan marad, amíg az α szög nem változik és megfordítva.

Ezeket az arányokat, mivel értékük csak az α szög nagyságától függ, *szögfüggvényeknek* vagy *trigonometrikus függvényeknek* nevezzük (l. az 5.3.6 és a 8.5 pontokat). Az egyes arányok megjelölésére a *szinusz*, *koszinusz*, *tangens*, *kotangens*, *szekáns* és *koszekáns* szavak rövidítését használjuk:

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha \text{ (külföldi irodalomban } \tan\alpha),$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \text{ (vagy } \cot\alpha),\ \sec\alpha,\ \mathrm{cosec}\,\alpha.$$

Vagyis az α hegyesszög szögfüggvényei:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\text{átfogó}},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}{\text{átfogó}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}},$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{átfogó}}{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}},$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{átfogó}}{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}.$$

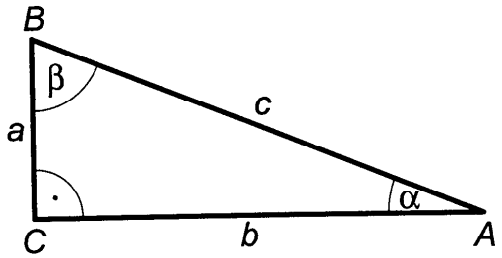
A háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldásához ele-

gendő egy szögfüggvény ismerete is, azonban a számítások megkönnyítésére a gyakorlatban az első négyet használjuk. A továbbiakban mi is csak a $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ szögfüggvényekkel foglalkozunk.

Az ABC derékszögű háromszögből (275. ábra) a β szögre írjuk fel a szögfüggvényeket:

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\quad \cos\beta = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a};\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$



275. ábra. Derékszögű háromszög

Az α és a β szög szögfüggvényeit összehasonlítva:

$$\sin\alpha = \cos\beta;\quad \cos\alpha = \sin\beta;\quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta;\quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

De $\beta = 90° - \alpha$, azaz β az α-nak pótszöge, tehát

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),\qquad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha),$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha),\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha).$$

Ha a szinuszt, tangenst, (szekánst) főfüggvényeknek, a koszinuszt, kotangenst, (koszekánst) pótfüggvényeknek nevezzük, akkor mondhatjuk, hogy

bármely hegyesszög főfüggvénye pótszögének pótfüggvényével egyenlő.

5.3.2 Alapösszefüggések ugyanazon hegyesszög szögfüggvényei között

Az ABC derékszögű háromszögre (275. ábra) írjuk fel *Pitagorasz* tételét: $a^2 + b^2 = c^2$. Az egyenlőség mindkét oldalát c^2-tel osztva: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$, vagyis $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Az $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$

helyettesítést elvégezve: $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$, $(\sin\alpha)^2$-et és $(\cos\alpha)^2$-et $\sin^2\alpha$-val és $\cos^2\alpha$-val jelölve:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad \text{(I)}$$

azaz valamely szög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege eggyel egyenlő.

A $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ és $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$ összehasonlítása alapján írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \text{ és } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \text{vagyis}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1, \qquad \text{(II)}$$

azaz egy szög tangense ugyanazon szög kotangensének reciprokával egyenlő és viszont.

A $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ függvények hányadosát felírva, újabb összefüggést kapunk:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \text{vagyis}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \text{(III)}$$

azaz valamely szög tangense egyenlő ugyanazon szög szinuszának és koszinuszának hányadosával; s egy szög kotangense egyenlő ugyanazon szög koszinuszának és szinuszának hányadosával.

Az (I), (II), és (III) alapösszefüggést felhasználva, bármely szögfüggvénnyel kifejezhetjük ugyanazon szög másik három szögfüggvényét.

Ha $\sin\alpha$ adott, akkor

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ha $\cos\alpha$ adott, akkor

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Ha $\operatorname{tg}\alpha$ adott, akkor (I)-ből $\cos^2\alpha$-val való osztás után a $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ egyenlőséget kapjuk, amiből

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ha $\operatorname{ctg}\alpha$ adott, akkor (I)-ből $\sin^2\alpha$-val való osztás után $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ adódik, amiből:

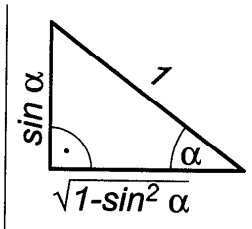
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Ezek az összefüggések könnyen megjegyezhetők négy alkalmasan választott derékszögű háromszög segítségével. Pl. ha a derékszögű háromszög átfogóját egységnyi

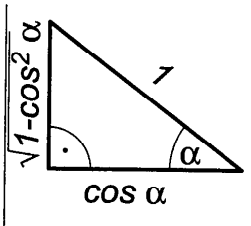
hosszúságúra választjuk, akkor a $\sin\alpha$-t az α szöggel szemben fekvő befogó mértékszáma mint nevezetlen szám szolgáltatja (276. ábra). Az α szög mellett fekvő befogó pedig *Pitagorasz* tétele alapján $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Így ebből a háromszögből a szögfüggvények definíciója alapján az α szög minden függvényét $\sin\alpha$-val kifejezhetjük.

Teljesen hasonló meggondolással állítjuk elő és használjuk a 277., a 278., és a 279. ábrát. Az ábrák alatt a megfelelő összefüggéseket táblázatba foglaltuk.



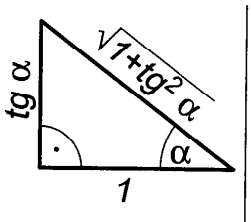
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha=$
$\cos\alpha=$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=$
$\operatorname{ctg}\alpha=$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=$

276. ábra.



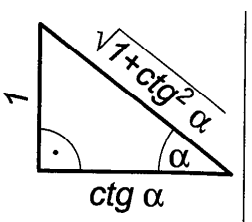
$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$
$\cos\alpha=$	$\cos\alpha=$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=$
$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=$

277. ábra.



$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=$	$\operatorname{ctg}\alpha$

278. ábra.



279. ábra.

Példa: Számítsuk ki $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

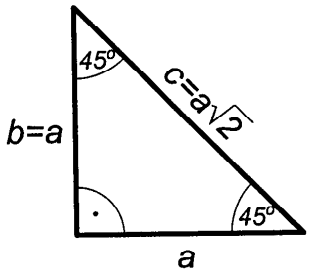
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5.3.3 Néhány speciális szögfüggvényérték

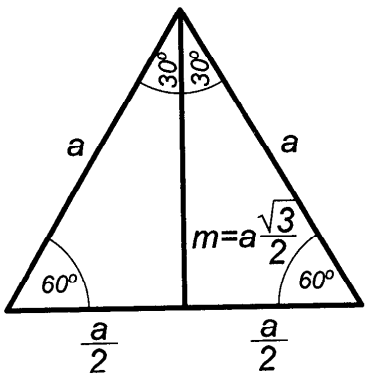
Az egyenlő befogójú (szárú) derékszögű háromszögből a 45°-os szög szögfüggvényei (280. ábra):

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1, \qquad \operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$



280. ábra. Egyenlő szárú háromszög



281. ábra. Egyenlő oldalú háromszög

A 30°-os és 60°-os szög szögfüggvényeit az egyenlő oldalú háromszög magasságvonalának megrajzolásával nyert derékszögű háromszögek egyikéből számíthatjuk ki (281. ábra).

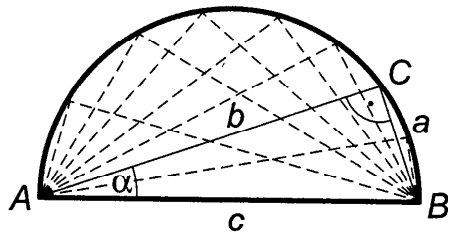
$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A 0°-os és 90°-os szögek szögfüggvényeinek meghatározása: Az ABC derékszögű háromszöget úgy vegyük fel, hogy c átfogója egybeessék egy kör átmérőjével, a C csúcs pedig feküdjék a kör kerületén (282. ábra); akkor *Thalész* tétele szerint a C csúcsnál levő szög derékszög. Ha a C csúcsot a B csúcshoz közelítjük, akkor az a befogó az α szöggel együtt mind kisebb és kisebb lesz; ha C-t fedésbe hozzuk B-vel, akkor $\alpha = 0°$; $a = 0$; $b = c$ és a 0°-os szög szögfüggvényei:



282. ábra. Körbe írt derékszögű háromszög

$$\sin 0° = \frac{0}{c} = 0, \qquad \cos 0° = \frac{c}{c} = 1, \qquad \operatorname{tg} 0° = \frac{0}{c} = 0,$$

$\operatorname{ctg}\alpha$ minden határon túl nő, ha α zérushoz közeledik. (Jelölése: $\lim\limits_{\alpha \to +0} \operatorname{ctg}\alpha = \infty$; l. a 8.12 és a 8.5 pontokat.)

Ha a C csúcsot az A csúcs felé közelítjük, akkor a b befogó lesz mind kisebb és kisebb, s fedésbe hozva C-t A-val: $\alpha = 90°$; $a = c$; $b = 0$, tehát a 90°-os szög szögfüggvényei:

$$\sin 90° = \frac{c}{c} = 1, \qquad \cos 90° = \frac{0}{c} = 0, \qquad \operatorname{ctg} 90° = \frac{0}{c} = 0,$$

$\operatorname{tg}\alpha$ minden határon túl nő, ha α 90°-hoz közeledik. (Jelölése: $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\alpha = \infty$; l. a 8.12 és a 8.5 pontokat.)

A 0°, 30°, 45°, 60° és 90°-os szögek szögfüggvényértékeit a következő táblázatból olvashatjuk ki:

$\alpha°$ $\hat{\alpha}$	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2} = 0,5000$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$	$\frac{1}{2} = 0,5000$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5774$	1	1,7321	
ctg		$\sqrt{3} = 1,7321$	1	0,5774	0

5.3.4 Trigonometrikus függvényértékek és logaritmusuk táblázata

A középiskolákban rendszeresített "Négyjegyű függvénytáblázatok..." c. kiadvány táblázatain szemléltetjük azok használatát. A 7. és 8. táblázat a szögfüggvények értékeit, a 11. és 12. táblázat pedig a szögfüggvényértékek logaritmusait tartalmazzák. A táblázatok a fő- és pótfüggvények összefüggése alapján készültek, így a szinusz és koszinusz, ill. a tangens és kotangens függvények értékei egy-egy táblázatból olvashatók ki. A szinusz és koszinusz szögfüggvényértékek 10'-enként növekvő szögekhez tartoznak, a tangens 0°–75°-ig ill. a kotangens 15°–90°-ig terjedő intervallumokban 10'-enként, valamint a tangens 75°–90°-ig ill. a kotangens 0°–15°-ig 1 percenként növekvő szögekhez tartoznak. A táblázatok értékei közé eső értékek lineáris interpolációval számíthatók ki, azonban ezek kiszámításától eltekinthetünk, mivel ezeket a segédtáblázatok is tartalmazzák. Az interpolációval számított értéket szinusz- és tangensfüggvényeknél a kikeresett kisebb szögfüggvényértékhez hozzáadjuk, mert a nagyobb hegyesszög szinusza és tangense is nagyobb; koszinusz- és kotangensfügvényeknél pedig levonjuk, mert nagyobb hegyesszöghöz kisebb koszinusz-,

és kotangensérték tartozik. Adott szög szögfüggvényértékének kikeresését, valamint adott szögfüggvényértékhez a szög meghatározását szinusz és koszinusz táblázat részletén szemléltetjük:

↓ sin 45°-90°→

	0°	10'	20'	...	40'	50'	60'	
45°	0,7071	7092	7112	...	7153	7173	7193	44
46	7193	7214	7234	...	7274	7294	7314	43
47	7314	7333	7353	...	7392	7412	7431	42
...	...	...	...	...	...	...	...	...
89	0,9998	9999	9999	...	1,0000	1,0000	1,0000	0°
	60'	50'	40'	...	20'	10'	0'	

← cos 0°-45° ↑

Példák

1. Adott szög szinuszának és koszinuszának meghatározása:

$\alpha = 45°50'$; $\sin 45°50' = 0,7173$; (a szám a bal oldali 45° jelű sornak az 50' felső fejrovatú oszlopában található);

$\alpha = 47°20'$; $\sin 47°20' = 0,7353$;

$\alpha = 44°10'$; $\cos 44°10' = 0,7173$, (a szám a jobb oldali 44 jelű sornak a 10' alsó fejrovatú oszlopában található. Vegyük észre, hogy $\cos 44°10' = \sin 45°50'$).

$\alpha = 42°40'$; $\cos 42°40' = 0,7353$.

2. Adott szög szinuszának és koszinuszának meghatározása interpolációval.

a) $\alpha = 47°56'$; $\sin 47°56' = ?$

Megoldás: Kikeressük sin 47°50' és sin 47°60' értékét:

$\sin 47°50' = 0,7412$; $\sin 47°60' = 0,7431$.

A kikeresett szögek különbsége: $47°60' - 47°50' = 10'$.

A szögfüggvényértékek táblabeli különbsége: $0,7431 - 0,7412 = 0,0019$.

Tehát amíg a szög 10'-cel növekszik, addig szinuszának értéke 19 tízezreddel nő. Arányosnak tekintve a változást, az 1' növekedésnek 19/10 = 1,9 tízezred s így az adott szög és a kikeresett kisebb szög különbségének $47°56' - 47°50' = 6'$, azaz 6' növekedésnek $6 \cdot 1,9 = 11,4 \approx 11$ tízezred szinusznövekedés felel meg, vagyis

$\sin 47°56' = 0,7412 + 0,0011 = 0,7423$

b) $\alpha = 42°14'$; $\cos 42°14' = ?$

Megoldás: A táblázatban most is két olyan szöget keresünk, amelyek a kérdéses szöget közrefogják: $\cos 42°10' = 0,7412$; $\cos 42°20' = 0,7392$ (a kisebb hegyesszög koszinusza nagyobb); a táblabeli különbség: $0,7412 - 0,7392 = 0,0020$; a szögkülönbség: 10'. A kérdéses szög 4'-cel nagyobb a kikeresett kisebb szögnél. A változást arányosnak tekintve: ha 10' növekedésnek 20 tízezred koszinusz-érték-

csökkenés felel meg, akkor 1' növekedésnek 20/10 = 2 tízezred és 4' növekedésnek $4 \cdot 2 = 8$ tízezred koszinuszfüggvény értékcsökkenés felel meg, tehát

$$\cos 42°14' = 0,7412 - 0,0008 = 0,7404$$

A tangens- és kotangensfüggvények értékeire az interpolációt hasonlóan végezzük ill. a segédtáblázatból kiolvassuk a megfelelő értéket.

Ha egy trigonometrikus függvény értékéből a szöget kell meghatároznunk, akkor az előbbiekhez képest fordított sorrendben következtetünk.

Példa: Adott szinuszértékből és koszinuszértékből a szög meghatározása.

a) $\sin \alpha = 0,7092$; $\alpha = ?$

Mivel a 45°-os sor 10'-es oszlopában van a 7092 szám, ezért $\alpha = 45°10'$.

b) $\sin \alpha = 0,7199$; $\alpha = ?$

Megoldás: Mivel a szinusz táblázatban nem található 0,7199, ezért interpolációval határozzuk meg az α szög értékét. Az adott értéket közrefogó két érték:

$0,7214 = \sin 46°10'$ és $0,7193 = \sin 46°00'$.

A táblabeli különbség: 0,7214 – 0,7193 = 0,0021. A 21 tízezred szinusznövekedésnek 10' szögnövekedés felel meg, tehát 1 tízezred szinusznövekedésnek megfelel 10'/21 szögnövekedés és így 0,7199 – 0,7193 = 0,0006 szinusznövekedésnek $6 \cdot \frac{10'}{21} = \frac{60'}{21} \approx 3'$ szögnövekedés felel meg, tehát $\alpha = 46°00' + 3' = 46°03'$.

c) $\cos\alpha = 0,7404$; $\alpha = ?$

Megoldás: A táblázatból a közrefogó értékek: $\cos 42°10' = 0,7412$ és $\cos 42°20' = 0,7392$; a táblabeli különbség a két kiolvasott érték különbsége: 20 tízezred, tehát 20 tízezred koszinusznövekedésnek megfelel 10' csökkenés; 1 tízezrednek pedig 10'/20; és 0,7404 – 0,7392 = 0,0012 különbségnek pedig $12 \cdot \frac{10'}{20} = \frac{120'}{20} = 6'$ csökkenés, vagyis $\alpha = 42°20' - 6' = 42°14'$.

A trigonometrikus függvényértékek logaritmusainak felhasználása is nélkülözhetetlen a műszaki számításokban, bár a számítógépek széleskörű alkalmazása nem teszi szükségessé az ún. magasabbrendű műveletek visszavezetését alacsonyabbrendű műveletekre.

A "Négyjegyű függvénytáblázatok..." kiadvány 11. táblázata a szinusz és koszinusz függvényértékek 10 alapú logaritmusait, a 12. táblázata pedig a tangens és kotangens függvényértékek 10 alapú logaritmusait tartalmazza. Mivel a 0 és 1 közé eső függvényértékek karakterisztikáinak beírása terjedelmessé és áttekinthetetlenné tenné a táblázatot, ezért a 0 és 1 közötti függvényértékek logaritmusait úgy alakították át, hogy mindegyiknek –10 legyen a közös karakterisztikája. Ezt úgy valósítják meg, hogy a karakterisztikákat –10-re egészítik ki, s így egyidejűleg ugyanannyi pozitív egészet is hozzáadnak a logaritmus egész részéhez. Pl. 0, ... –2 helyett 8, ...

−10 található, azonban a logaritmus egységes −10 tagját nem tünteti fel a táblázat, ezt magunknak kell mindig hozzáírnunk a táblázatból kikeresett értékhez. A táblázatban egy-egy sor karakterisztikái rendszerint megegyeznek, ezért elegendő a sor elején és végén feltüntetni az egész részt. Ha sor közben a karakterisztika eggyel változik, akkor azt a törtrész fölé húzott vonal jelzi.

Visszakereséskor a trigonometrikus függvényértékek logaritmusainak karakterisztikáit, ahol szükséges, ki kell egészíteni −10-re.

Tekintsük pl. a tangens és kotangens függvényértékek logaritmusainak a 20°-kal és a 21°-kal jelölt sorának egy részletét:

↓ lgtg 14°- 45° →

	0'	10'	20'	...	50'	60'	
...	...	...	...	...	...	...	...
20°	9,5611	5650	5689	...	5804	9,5842	69°
21°	5842	5879	5917	...	6028	6064	68°
...	...	...	...	...	...	...	...
	60'	50'	40'	...	10'	0'	

← lgctg 45°- 76° ↑

1. Szögfüggvény logaritmusának kikeresése (interpoláció nélkül):
   $\lg \operatorname{tg} 20°50' = 9,5804 - 10,$ $\lg \operatorname{ctg} 68°10' = 9,6028 - 10.$
2. A szög visszakeresése (interpoláció nélkül):
   $\lg \operatorname{tg} \alpha = 9,5917 - 10$ $(\alpha = 21°20')$ $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 9,5879 - 10$ $(\alpha = 68°50').$

Az *interpolációt* e táblázatoknál is ugyanúgy végezzük, mint a többinél. A kisebb szöghöz tartozó logaritmus értéket a főfüggvényeknél (sin, tg) az arányos részszel növeljük, pótfüggvényeknél (cos, ctg) pedig csökkentjük.

Példák

1. $\lg \operatorname{tg} 21°16' = ?$

   Megoldás: Az adott szöget közrefogó két szögfüggvényérték logaritmusa:
   $\lg \operatorname{tg} 21°10' = 9,5879 - 10;$ $\lg \operatorname{tg} 21°20' = 9,5917 - 10,$

Az adott szög és a kikeresett kisebb szög különbsége: 6'. A változást arányosnak tekintve: mivel 10' szögnövekedésnek 38 tízezred lgtg -növekedés felel meg, ezért 1' növekedésnek 38/10 és 6' növekedésnek $6 \cdot \frac{38}{10} = \frac{228}{10} = 22,8 \approx 23$ tízezred lgtg növekedés felel meg, azaz 9,5879 −10 + 0,0023 = 9,5902 −10

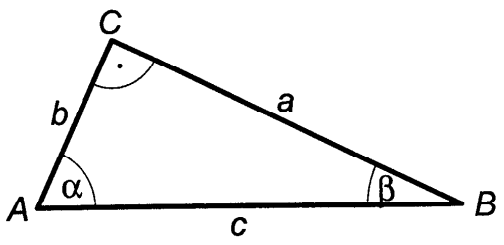
2. $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 9,5660 - 10;$ $\alpha = ?$

Megoldás: A szög visszakeresése a logaritmus kikeresésének fordított művelete. A közrefogó két érték: 9,5689 −10 = lgctg 69°40'; 9,5650 − 10 = lgctg 69°50'.

Táblabeli különbség: 39 tízezred; a 69°50' csökkentését $29 \cdot \frac{10'}{39} = \frac{290'}{39} \approx 7'$ adja, tehát α = 69°50' − 7' = 69°43'.

5.3.5 Derékszögű háromszög megoldása

Szögfüggvény segítségével a derékszögű háromszögben két oldal és egy szög között összefüggést fejezhetünk ki. Ha bármely derékszögű háromszögben e három alkotórész közül kettő ismert, akkor a harmadik az összefüggés alapján kiszámítható. A derékszögű háromszög meghatározásához, mivel egyik szöge ismert (90°), elegendő két független alkotórész. A két ismert független alkotórészből tehát a derékszögű háromszög bármelyik ismeretlen alkotórészét kiszámíthatjuk a következő négy alapfeladat útmutatása szerint (283. ábra):



283. ábra. Derékszögű háromszög

I. Adott: a két befogó a és b. Meghatározandó: c átfogó, α és β szög, valamint a t terület.

Megoldás: *Pitagorasz* tételének felhasználásával: $c=\sqrt{a^2+b^2}$; szögfüggvények felhasználásával: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $\beta=90°-\alpha$, $t=\frac{1}{2}ab$.

Pl.: $a=4{,}357$ m, $b=8{,}501$ m.

$$c=\sqrt{4{,}357^2+8{,}501^2}=9{,}55 \text{ m}, \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{4{,}357}{8{,}501}=0{,}5125,$$

$$\alpha=27°8', \quad \beta=90°-27°8'=62°52',$$

$$t=\frac{ab}{2}=\frac{4{,}357\cdot 8{,}501}{2}=18{,}52 \text{ m}^2.$$

Logaritmus-táblázatokkal:

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$

$\lg a = \quad 0{,}6392$
$\lg b = \quad 0{,}9294$
$\lg\operatorname{tg}\alpha = \quad 9{,}7098-10$
$\alpha=27°8'$
$\beta=62°52'$

$c=\frac{a}{\sin\alpha}$

$\lg a=0{,}6392$
$\lg\sin\alpha=9{,}6591-10$
$\lg c=0{,}9801$
$c=9{,}55$ m

$t=\frac{1}{2}ab$

$\lg 0{,}5=0{,}6990-1$
$\lg a=0{,}6392$
$\lg b=0{,}9294$
$\lg t=1{,}2676$
$t=18{,}52 \text{ m}^2$

II. Adott: az átfogó, c és egy befogó, a. Meghatározandó: b, α, β és t.

Megoldás: $b=\sqrt{c^2-a^2}$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=90°-\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ és $t=\frac{1}{2}ac\cos\alpha$.

Pl.: $c=25{,}34$ cm; $a=16{,}72$ cm, akkor

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{16{,}72}{25{,}34}=0{,}6598,\quad \alpha=41°17',\quad \beta=90°-41°17'=48°43',$$

$$b=c\cos\alpha=25{,}34\cdot\cos41°17'=25{,}34\cdot0{,}7515=19{,}04\text{ cm},$$

$$t=\frac{ac\cos\alpha}{2}=\frac{16{,}72\cdot25{,}34\cdot0{,}7515}{2}=159{,}20\text{ cm}^2.$$

Logaritmus-táblázatok felhasználásával az I.-hez hasonló elrendezésben végezhetjük a számításokat.

III. Adott: a c átfogó és az α szög. Meghatározandó: a, b, β és t.

Megoldás: $\beta=90°-\alpha$, $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$, $t=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Pl.: $c=0{,}6439$ m; $\alpha=41°22'$.

$$\beta=90°-41°22'=48°38',$$

$$a=c\sin\alpha=0{,}6439\sin41°22'=0{,}6439\cdot0{,}6608=0{,}4255\text{ m},$$

$$b=c\cos\alpha=0{,}6439\cos41°22'=0{,}6439\cdot0{,}7506=0{,}4833\text{ m},$$

$$t=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}=\frac{0{,}6439^2\cdot0{,}6608\cdot0{,}7506}{2}=0{,}1028\text{ m}^2.$$

IV. Adott az a befogó és az α szög. Meghatározandó: b, c, β és t.

Megoldás: $\beta=90°-\alpha$, $c=\frac{a}{\sin\alpha}$, $b=a\operatorname{ctg}\alpha$, $t=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$.

Pl.: $a=3{,}485$ dm; $\alpha=58°28'$.

$$\beta=90°-\alpha=90°-58°28'=31°32',$$

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{3{,}485}{\sin58°28'}=\frac{3{,}485}{0{,}8523}=4{,}089\text{ dm},$$

$$b=a\operatorname{ctg}\alpha=3{,}485\cdot\operatorname{ctg}58°28'=3{,}485\cdot0{,}6136=2{,}138\text{ dm},$$

$$t=\frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha}{2}=\frac{3{,}485^2\cdot0{,}6136}{2}=3{,}726\text{ dm}^2.$$

Logaritmus-táblázatokkal: $\beta=90°-\alpha=31°32'$.

$$c=\frac{a}{\sin\alpha} \qquad b=a\operatorname{ctg}\alpha \qquad t=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$$

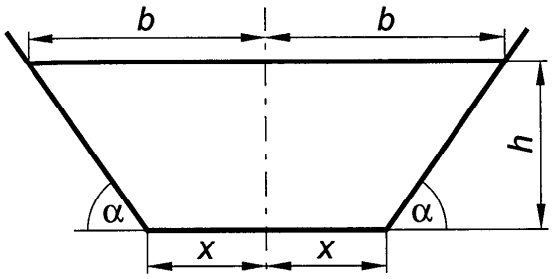
$$\lg a=0{,}5422 \qquad \lg a=0{,}5422 \qquad \lg 0{,}5=0{,}6990-1$$
$$\lg\sin\alpha=9{,}9306-10 \qquad \lg\operatorname{ctg}\alpha=9{,}7879-10 \qquad 2\lg a=1{,}0844$$
$$\lg c=0{,}6116 \qquad \lg b=0{,}3301 \qquad \lg\operatorname{ctg}\alpha=9{,}7879-10$$
$$c=4{,}089\ \text{dm} \qquad b=2{,}138\ \text{dm} \qquad \lg t=0{,}5713$$
$$t=3{,}726\ \text{dm}^2$$

Példák

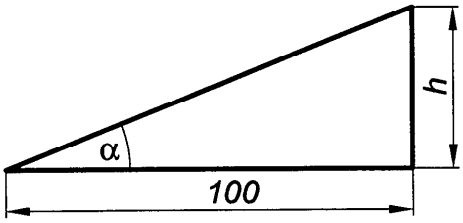
1. Számítsuk ki a 284. ábrán feltüntetett csatornakeresztmetszet területét és a folyadék által nedvesített kerületét, ha $b=65{,}8$ cm, $h=41{,}5$ cm és $\alpha=43°27'$.

Megoldás

$$t=2bh-h^2\operatorname{ctg}\alpha=h(2b-h\operatorname{ctg}\alpha)=41{,}5(2\cdot 65{,}8-41{,}5\operatorname{ctg}43°27')=$$
$$=41{,}5(131{,}6-41{,}5\cdot 1{,}056)=3642{,}7\ \text{cm}^2$$
$$k=2b-2h\operatorname{ctg}\alpha+\frac{2h}{\sin\alpha}=2\left[b+\frac{h}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)\right]=$$
$$=2\left[65{,}8+\frac{41{,}5}{\sin 43°27'}(1-\cos 43°27')\right]=$$
$$=2\left[65{,}8+\frac{41{,}5}{0{,}6877}(1-0{,}7260)\right]=164{,}67\ \text{cm}.$$



284. ábra. Csatornakeresztmetszet



285. ábra. Lejtő

2. Az utak emelkedését százalékosan szokás megadni. Ha vízszintesen mért 100 m-en az út h m-t emelkedik a vízszintesre merőlegesen mérve (285. ábra), akkor

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{100}\ \text{ vagy }\ h\%.$$

Számítsuk ki az emelkedés szögét, ha az út emelkedése 40%-os.

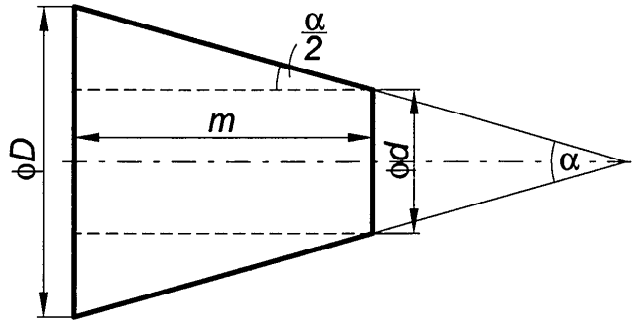
Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{40}{100}=\frac{4}{10}=0{,}4,\ \ \alpha=21°48'.$

3. A félkúp szögének tangensét kúposságnak nevezzük.

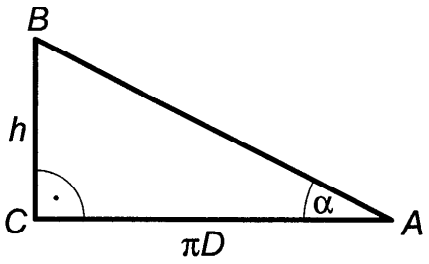
$$\text{Kúposság}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{D-d}{2m}.$$

Számítsuk ki egy csonkakúp alakú gépalkatrész (286. ábra) kúposságának szögét, ha $D = 125$ mm, $d = 110$ mm és $m = 84$ mm.

Megoldás: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2m} = \frac{125-110}{2\cdot 84} = 0{,}0893$, $\frac{\alpha}{2} = 5°6'$.



286. ábra. Csonkakúp



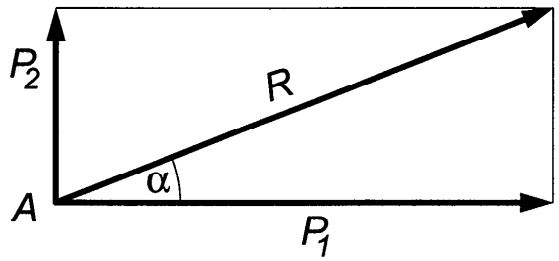
287. ábra. Csavarmenet rajza síkban

4. Az ABC háromszög (287. ábra) egy csavarmenetet ábrázol síkban kiterítve. Az α a csavarmenet emelkedési szöge; h egy menet magassága; D a henger átmérője. Számítsuk ki egy menet magasságát, ha a csavar átmérője 47 mm és az emelkedési szög 5,2°.

Megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi D}$, amiből

$$h = \pi D \operatorname{tg}\alpha = 3{,}142\cdot 47\cdot \operatorname{tg}5{,}2° = 3{,}142\cdot 47\cdot 0{,}0910 = 13{,}44 \text{ mm}.$$

5. Az A pontban ható P_1 és P_2 erők merőlegesek egymásra (288. ábra). Számítsuk ki az R eredő erő nagyságát és az R és P_1 erők által bezárt α szöget, ha $P_1 = 543{,}2884$ N és $P_2 = 426{,}5893$ N.



288. ábra. Erőparalelogramma

Megoldás: Az R eredő erő nagysága a P_1 és P_2 oldalú, ún. erőparalelogramma átlójával egyenlő:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{543{,}2884^2 + 426{,}5893^2}\ \text{N} = \sqrt{477140{,}7165}\ \text{N} \approx 690{,}7537\ \text{N},$$

és

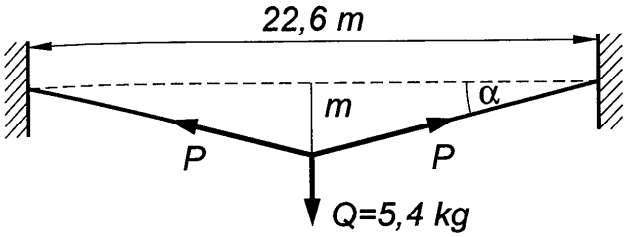
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_2}{P_1} = \frac{426{,}5893\,\text{N}}{543{,}2884\,\text{N}} = 0{,}7852, \qquad \alpha = 0{,}665667\,\text{rad}.$$

Az A pontban egymásra merőleges $P_1 = 543{,}2884$ N és $P_2 = 426{,}5893$ N erők a P_1 erővel $\alpha = 0{,}665667$ rad szöget bezáró egyetlen $R = 690{,}7537$ N erővel helyettesíthetők.

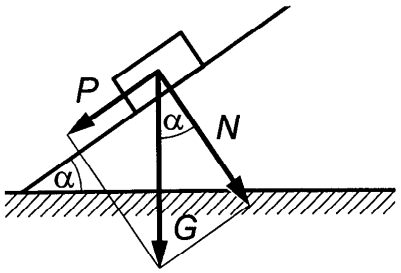
6. Egy 5,4 kg tömegű utcai lámpa két felfüggesztési pontjának távolsága 22,6 m, a lámpa a fesztávolság felezőjében függ. Mekkora a lámpa vízszintestől mért belógása, és mekkora a függesztő kötelekben ébredő erők nagysága, ha a függesztő köteleknek a vízszintessel bezárt szöge $\alpha = 10°$ (289. ábra)?

Megoldás: A belógás: $m = 11{,}3 \text{ m} \cdot \text{tg}10° = 1{,}99$ m. A P erő:

$$P = \frac{Q/2}{\sin\alpha} = \frac{Q}{2\sin\alpha} = \frac{5{,}4 \text{ kg} \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 0{,}1736} = 152{,}52 \text{ N}.$$



289. ábra. Erő felbontása



290. ábra. Erő felbontása

7. Valamely $\alpha = 31°24'$ hajlásszögű lejtőn (290. ábra) $m = 945$ kg tömegű testet milyen nagyságú, lejtőirányú P erővel lehet egyensúlyban tartani, és mekkora a lejtőre merőleges N erő nagysága? (A súrlódást nem vesszük figyelembe.)

Megoldás: $P = G \cdot \sin\alpha = 945 \text{ kg} \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2 \cdot \sin\alpha \approx$

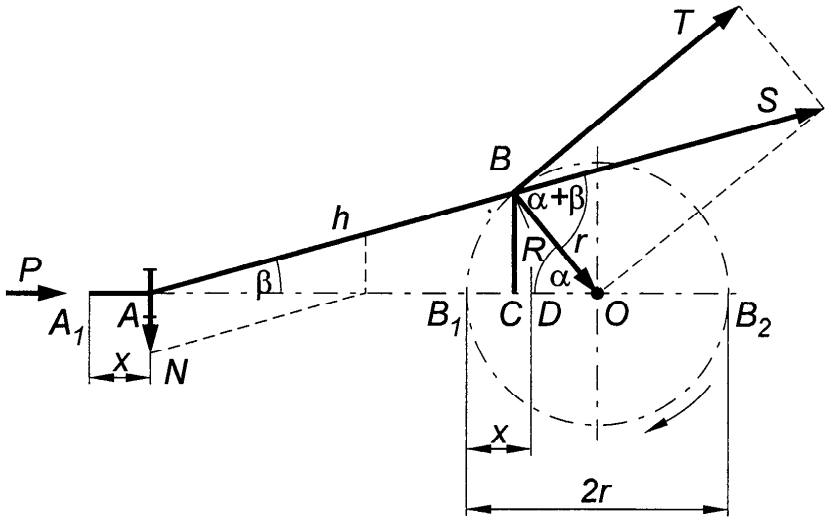
$\approx 9267{,}2842 \text{ N} \cdot 0{,}5210 = 4828{,}2551$ N.

$N = G \cdot \cos\alpha = 9267{,}2842 \text{ N} \cdot 0{,}8536 = 7910{,}5537$ N.

8. Egy hajtómű forgattyúkarja $r = 250$ mm, hajtókarja $h = 1250$ mm, az irányítótengely és a forgattyútengely által bezárt szög $\alpha = 30°$, a keresztfejre ható nyomóerő $P = 49033{,}25$ N (291. ábra). A keresztfej A pontjának helyzetét az $\alpha = 0$ rad esetén az A_1 pont jelöli. Számítsuk ki a β szöget, a keresztfej által megtett $AA_1 = x$ útszakaszt és az N, S, T, R erők nagyságát.

Megoldás: Az ABC derékszögű háromszögből: $\sin\beta = \frac{BC}{h}$, $BC = h\sin\beta$; az OBC derékszögű háromszögből: $\sin\alpha = \frac{BC}{r}$, $BC = r\sin\alpha$, tehát $h\sin\beta = r\sin\alpha$ azaz $\sin\beta = \frac{r}{h}\sin\alpha = \frac{250}{1250}\sin 0{,}5236 \text{ rad} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1002$ rad. A keresztfej által megtett út:

$$x = A_1A = B_1D = B_1C + CD = B_1C + AD - AC =$$
$$= B_1O - CO + AD - AC = r - r\cos\alpha + h - h\cos\beta, \quad \text{vagyis}$$
$$x = r(1 - \cos\alpha) + h(1 - \cos\beta) =$$
$$= 250(1 - \cos 0{,}5236 \text{ rad}) + 1250(1 - \cos 0{,}1002 \text{ rad}) =$$
$$= 250(1 - 0{,}8660) + 1250(1 - 0{,}9950) = 39{,}75 \text{ mm}.$$



291. ábra. Hajtómű forgattyúkarja

Az N, S, T és R erők nagysága:

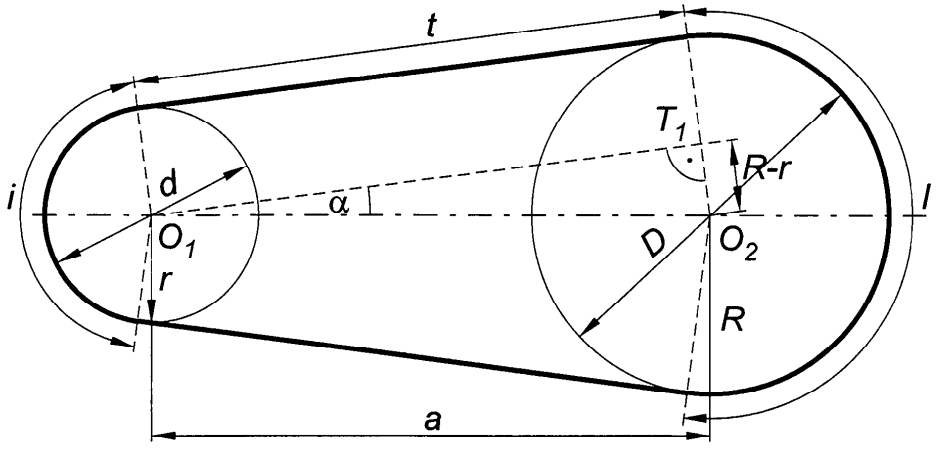
$$N = P\,\mathrm{tg}\beta = 49033{,}25\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{tg}\,0{,}1002\ \mathrm{rad} = 49033{,}25\ \mathrm{N} \cdot 0{,}1004 = 4922{,}98\ \mathrm{N},$$

$$S = \frac{P}{\cos\beta} = \frac{49033{,}25\ \mathrm{N}}{\cos 0{,}1002\ \mathrm{rad}} = 49279{,}65\ \mathrm{N},$$

$$T = S\sin(\alpha+\beta) = 4979{,}65\ \mathrm{N} \cdot \sin 0{,}6237\ \mathrm{rad} = 49279{,}65\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5840 = 28779{,}32\ \mathrm{N},$$

$$R = S\cos(\alpha+\beta) = 49279{,}65\ \mathrm{N} \cdot \cos 0{,}6237\ \mathrm{rad} = 49279{,}65\ \mathrm{N} \cdot 0{,}8117 = 40000{,}29\ \mathrm{N}.$$

9. Egy D = 850 mm és egy d = 250 mm átmérőjű tárcsa középpontjainak távolsága a = 2150 mm. Számítsuk ki az elméletileg szükséges szíj hosszúságát (L) egyenes és keresztezett szíjhajtás esetén.



292. ábra. Egyenes szíjhajtás

Megoldás: Egyenes szíjhajtás esetén (292. ábra): $L = I + i + 2t$. Az $O_1O_2T_1$ derékszögű háromszögből α meghatározható, mert

$$\sin\alpha = \frac{D-d}{2a} = \frac{850-250}{2\cdot 2150} = 0{,}1395, \quad \alpha = 0{,}1400 \text{ rad},$$

$$t = a\cos\alpha, \quad I = \frac{D}{2}(\pi + 2\alpha), \quad i = \frac{d}{2}(\pi - 2\alpha), \text{ tehát}$$

$$L = \frac{D}{2}(\pi + 2\alpha) + \frac{d}{2}(\pi - 2\alpha) + 2a\cos\alpha, \text{ vagy}$$

$$L = \frac{\pi}{2}(D+d) + (D-d)\alpha + 2a\cos\alpha, \text{ s így}$$

$$L \approx \frac{3{,}142}{2}(850+250) + (850-250)\cdot 0{,}140 + 2\cdot 2150\cos 0{,}1400 \text{ rad} =$$

$$= 1728{,}1 + 84{,}0 + 4300\cdot 0{,}9902 = 6069{,}96 \text{ mm}.$$

Keresztezett szíjhajtás esetén (293. ábra) az $O_1O_2T_1$ derékszögű háromszögből:

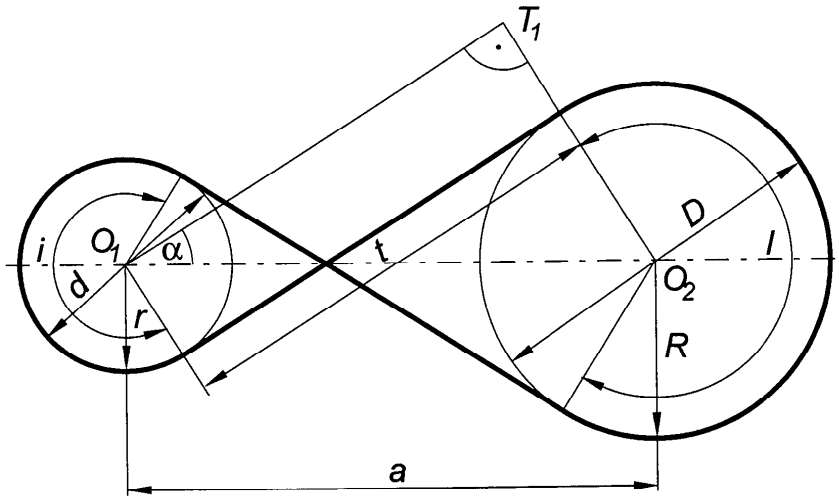
$$\sin\alpha = \frac{D+d}{2a} = \frac{850+250}{2\cdot 2150} = 0{,}2558, \quad \alpha = 0{,}2587 \text{ rad}$$

$$L = I + i + 2t = \frac{D}{2}(\pi + 2\alpha) + \frac{d}{2}(2\pi - 2\alpha) + 2a\cos\alpha$$

$$L = (\pi + 2\alpha)\frac{D}{2} + d(\pi - \alpha) + 2a\cos\alpha, \text{ úgyhogy}$$

$$L = (3{,}142 + 2\cdot 0{,}2587)\frac{850}{2} + 250\cdot(3{,}142 - 0{,}2587) +$$

$$+2\cdot 2150\cos 0{,}2587 \text{ rad} = 6433{,}03 \text{ mm}.$$

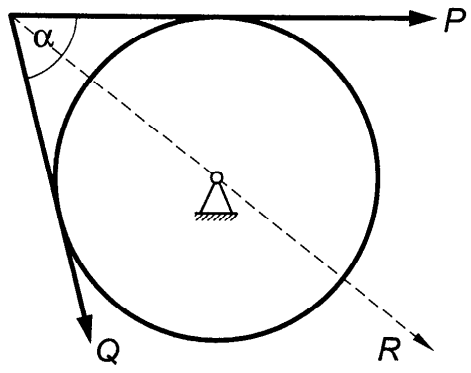


293. ábra. Keresztezett szíjhajtás

Feladatok

1. Egy testre két egymásra merőleges erő hat, mégpedig P = 71,0982 N és Q = 101,0085 N nagyságú. Számítsuk ki az R eredő erő nagyságát és R-nek a Q összetevővel bezárt szögét! [R = 123,5638 N; α = 0,6132 rad.]

2. Számítsuk ki az $R = 629{,}59$ N súlyú erő P és Q egymásra merőleges erőkomponenseit, ha a Q és R által bezárt szög 0,7389 rad. [423,65 N és 465,82 N.]



294. ábra. Tengelycsapnyomás meghatározása

3. Számítsuk ki az R tengelycsapnyomást, ha $P = Q = 1471{,}0$ N és a két erő által bezárt szög 1,0472 rad (294. ábra). [2547,77 N.]

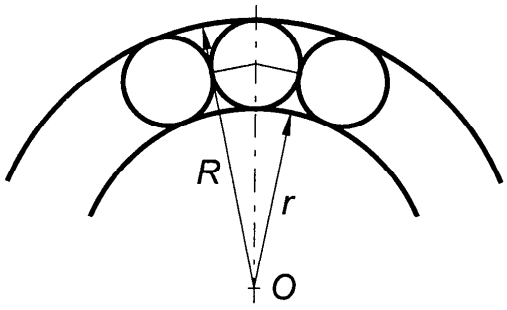
4. Határozzuk meg az $\alpha = 0{,}1251$ rad nyílásszögű kúpból készített csonkakúp kisebb átmérőjének hosszát, ha nagyobb átmérője $D = 12{,}8$ mm és a csonkakúp magassága $m = 40$ mm. [7,7 mm.]

5. Egy $\alpha = 0{,}4451$ rad hajlásszögű lejtőre 1961,33 N súlyú testet helyezünk. A lejtőt súrlódásmentesnek feltételezve milyen nagyságú lejtőirányú erővel lehet a test lecsúszását meggátolni? [844,35 N.]

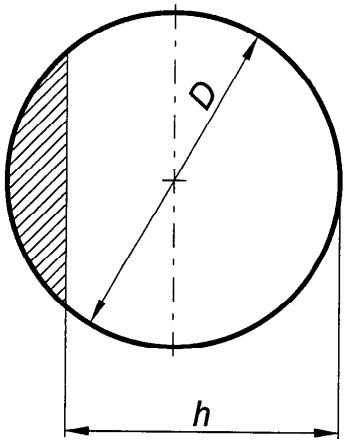
6. Egyenes szíjhajtás esetén elméletileg milyen hosszú szíj szükséges 50 és 35 cm átmérőjű tárcsákhoz, ha a tárcsák középponti távolsága 120 cm? [374 cm.]

7. Határozzuk meg az elméletileg szükséges szíjhosszúságot keresztezett szíjhajtás esetén, ha a motortárcsa átmérője 200 mm, a hajtott tárcsa átmérője 680 mm és a tárcsák középpontjainak távolsága 1100 mm. [3760 mm.]

8. A 295. ábra szerint egy r sugarú kör kerületén 20 db, egyenként 15 mm átmérőjű érintőkört tudunk elhelyezni. Számítsuk ki r és R értékét! [80,9 mm; 110,9 mm.]



295. ábra. Érintőkörök



296. ábra. Korong

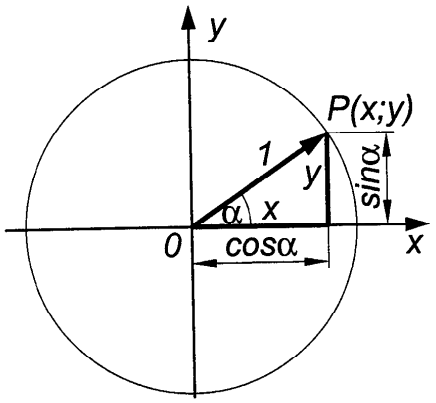
9. Egy $D = 80$ mm átmérőjű korongból a vonalkázott részt lereszeljük úgy, hogy $h = 70$ mm legyen (296. ábra). Hány százalék a hulladék? [7,3 %.]

10. Egy hegy csúcsának emelkedési szöge $\alpha = 0{,}5713$ rad. Ha $a = 132$ m-rel vízszintes úton közelebb megyünk hozzá, akkor az emelkedési szög $\beta = 0{,}6533$ rad. Milyen magas a hegy? [535,9 m.]

5.3.6 Szögfüggvények általánosítása

Az 5.3.1 pontban a hegyesszögek szögfüggvényeit a derékszögű háromszögek oldalainak arányaival definiáltuk. Ebben a pontban a szögfüggvényeket tetszés szerinti forgásszögekre definiáljuk.

A síkbeli *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszerben az x- ill. y- tengely pozitív irányát jelölje **i** ill. **j** egységvektor (l. az 5.4 pontot és a 6. fejezetet). Az **1** egységvektort előállíthatjuk, ha az **i** egységvektort elforgatjuk pozitív irányba α szöggel (297. ábra). Az **1** egységvektorhoz az α irányszöggel együtt bármely $\alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$ irányszöget is hozzátartozónak tekinthetünk. Az **1** egységvektor összetevőire bontva: $\mathbf{1} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.



297. ábra. Az **1** egységvektor és koordinátái

Az α szög szinuszán az α irányszögű egységvektor ordinátáját (y koordinátáját), koszinuszán pedig az α irányszögű egységvektor abszcisszáját (x koordinátáját) értjük.

A $\sin\alpha$ és a $\cos\alpha$ hányadosát tangens α-nak ($\operatorname{tg}\alpha$); a $\cos\alpha$ és a $\sin\alpha$ hányadosát pedig kotangens α-nak ($\operatorname{ctg}\alpha$) nevezzük.

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad (\cos\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (\sin\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in Z).$$

Mivel az **1** egységvektor hossza 1, ezért bármely irányszög mellett végpontja az origó középpontú egységsugarú körön van. Ennek figyelembe vételével a P pont koordinátáival és az egység-

nyi sugárral a hegyesszögek szögfüggvény-definícióihoz hasonlóan is definiálhatjuk a szögfüggvényeket:

$$\sin\alpha = \frac{\text{ordináta}}{\text{sugár}} = \frac{y}{1} = y, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{abszcissza}}{\text{sugár}} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{ordináta}}{\text{abszcissza}} = \frac{y}{x}, \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{abszcissza}}{\text{ordináta}} = \frac{x}{y}, \quad (\alpha \neq k\pi,\ k \in Z).$$

azaz $\sin\alpha$ a szöggel szembeni befogónak és az átfogónak a hányadosa, stb. (a befogók és az átfogó értékei előjeles mennyiségek).

Ezek a definíciók tehát nemcsak hegyesszögekre alkalmazhatók, hanem tetszőleges α szögre is, mivel az **1** egységvektor P végpontja bármely szög mellett az egységsugarú körön fekszik.

A definíciókból következik, hogy:

1. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,$

$k \in Z$, tehát a sin és cos függvények periódusai 2π k-szorosai $(k \neq 0)$, valamint

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$k \in Z$, tehát a tg és a ctg függvények periódusai π k-szorosai $(k \neq 0)$.

2. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

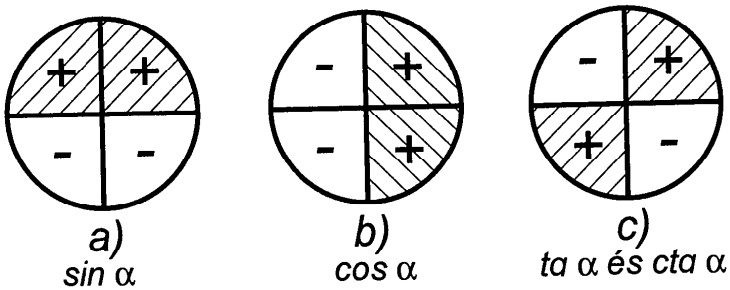
$\left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$, valamint

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

A szögfüggvények síknegyedenkénti előjelváltását táblázatba foglaltuk:

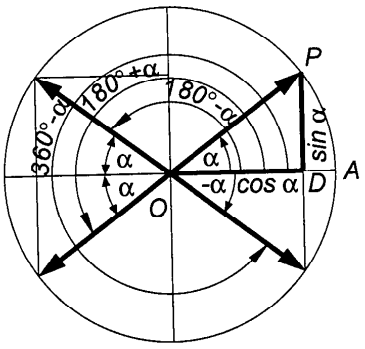
Sík - negyed	Az α szög nagysága	sin α	cos α	tg α	ctg α
I.	0°-tól 90°-ig	+	+	+	+
II.	90°-tól 180°-ig	+	−	−	−
III.	180°-tól 270°-ig	−	−	+	+
IV.	270°-tól 360°-ig	−	+	−	−

A szögfüggvények előjelét az egyes negyedekben a 298. *a*, *b*, *c* ábra is szemlélteti:



298. ábra. Szögfüggvények előjele

Az I. síknegyedben levő szög minden szögfüggvénye pozitív. A II., III. és IV. negyedben levő szög szögfüggvényeit az alábbi táblázatba foglalt képletekkel vezethetjük vissza az I. negyedben levő szög függvényeire (299. ábra):



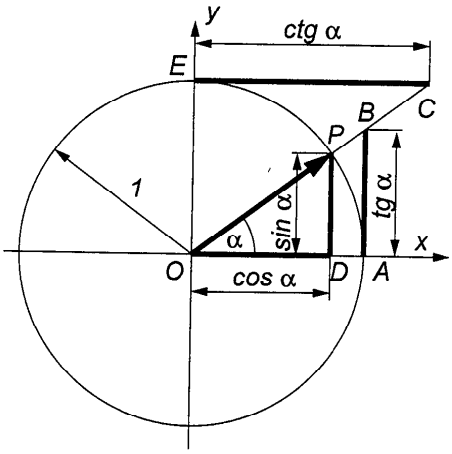
299. ábra. Szögek

II. negyed	III. negyed	IV. negyed
$\sin(180°-\alpha) = +\sin\alpha$	$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(360°-\alpha) = +\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(180°-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(180°+\alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(360°-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(180°-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180°+\alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(360°-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

A tangens és a kotangens függvényértékek előjelváltását is szemléltethetjük, ha az egységkörhöz (300.–303. ábrák) az *A* és *E* pontban érintőt húzunk, és az **1** egységvektor által meghatározott

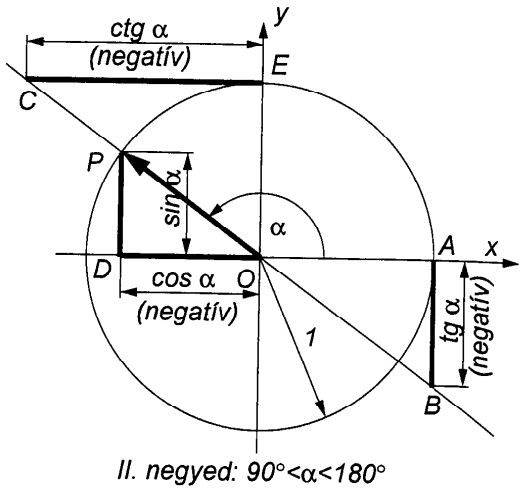
egyenest felvesszük, mint a szög mozgó szárát. Ui. az így kapott $ODP\Delta \sim OAB\Delta$ és $ODP\Delta \sim OEC\Delta$, amiből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{1} = AB \text{ és } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{CE}{1} = CE.$$



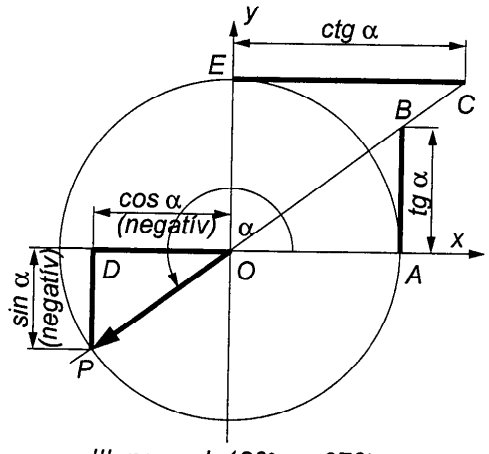
I. negyed: 0°<α<90°

300. ábra. Szögfüggvények



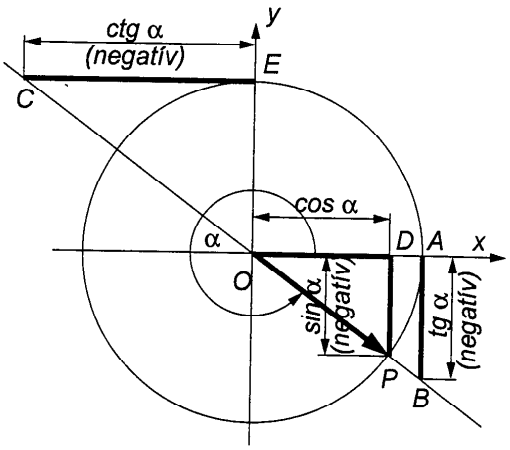
II. negyed: 90°<α<180°

301. ábra. Szögfüggvények



III. negyed: 180°<α<270°

302. ábra. Szögfüggvények



IV. negyed: 270°<α<360°

303. ábra. Szögfüggvények

Pl.: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = +\sin 60°$
$\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30°$
$\sin 315° = \sin(360° - 45°) = -\sin 45°$
$\cos 105° = \cos(180° - 75°) = -\cos 75°$
$\cos 190° = \cos(180° + 10°) = -\cos 10°$
$\cos 295° = \cos(360° - 65°) = +\cos 65°$

$\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45°$
$\operatorname{tg} 250° = \operatorname{tg}(180° + 70°) = +\operatorname{tg} 70°$
$\operatorname{tg} 315° = \operatorname{tg}(360° - 45°) = -\operatorname{tg} 45°$
$\operatorname{ctg} 140° = \operatorname{ctg}(180° - 40°) = -\operatorname{ctg} 40°$
$\operatorname{ctg} 225° = \operatorname{ctg}(180° + 45°) = +\operatorname{ctg} 45°$
$\operatorname{ctg} 355° = \operatorname{ctg}(360° - 5°) = -\operatorname{ctg} 5°$

Az általános értelmezés szerint a IV. negyedbe eső $(360°-\alpha)$ szögfüggvényei megegyeznek $(-\alpha)$ szögfüggvényeivel, tehát

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = +\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

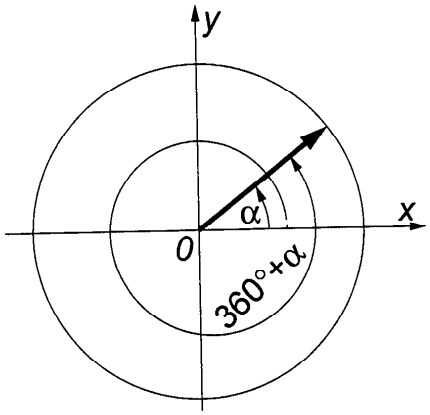
azaz negatív hegyesszögnek csak a koszinusza pozitív.

Pl.: $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-45°) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}(-45°) = -1$, $\operatorname{ctg}(-45°) = -1$.

Ha az **1** egységvektor egy teljes körülforgást végzett, vagyis 360°-os szöget írt le, akkor az **i** egységvektorral fedésbe kerül. Az α szög két szárának egymáshoz viszonyított helyzete ugyanaz, mint a 0°-os szögnél volt. Általában k-szoros $(k \in Z)$ körülforgás esetén is a két vektor helyzete ugyanaz, tehát

$$\sin(k \cdot 360°) = \sin 2k\pi = \sin 0° = 0,$$
$$\cos(k \cdot 360°) = \cos 2k\pi = \cos 0° = 1.$$

Ha az **1** egységvektor k teljes körülfordulás után még α szögelfordulást is végez $(\alpha < 360°)$, akkor az **i** egységvektorral bezárt szöge ismét α (304. ábra), szögfüggvényei az α szög szögfüggvényeivel egyenlők:



304. ábra. Forgásszög

$$\sin(k \cdot 360° + \alpha) = \sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(k \cdot 360° + \alpha) = \cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(k \cdot 360° + \alpha) = \operatorname{tg}(2k\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(k \cdot 360° + \alpha) = \operatorname{ctg}(2k\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Az ilyen függvényeket – mint már említettük – *periodikus függvényeknek* nevezzük.

Pl.: $\sin 450° = \sin(360° + 90°) = \sin 90° = 1,$
$\cos 845° = \cos(2 \cdot 360° + 125°) = \cos 125° = -\cos 55° = -0{,}5736,$
$\operatorname{tg} 1450° = \operatorname{tg}(4 \cdot 360° + 10°) = \operatorname{tg} 10° = 0{,}1763,$
$\operatorname{ctg} 560° = \operatorname{ctg}(360° + 200°) = \operatorname{ctg} 20° = 2{,}7475.$

5.3.7 Általános háromszög megoldása; szinusz- és koszinusztétel

A szögfüggvények általános értelmezése alapján akkor is felírhatunk trigonometriai összefüggéseket az általános háromszögekre, ha valamelyik szög tompaszög. Ebben a pontban az általános háromszögek megoldására szolgáló legfontosabb két tétellel ismerkedünk meg: a *szinusz-* és a *koszinusztétellel.*

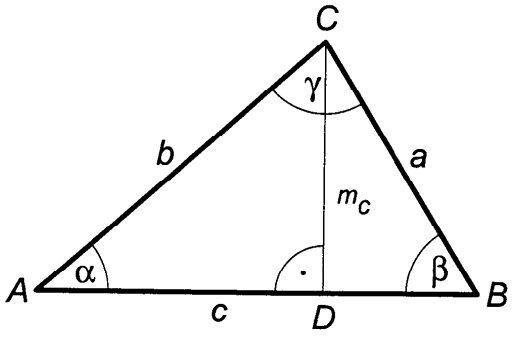
Szinusztétel. Ha az általános háromszögben megrajzoljuk a magasságot, akkor két derékszögű háromszöget kapunk (305. ábra). A magasság mindkét derékszögű háromszögből meghatározható:

$$ADC\Delta\text{-ből: } m_c = b\sin\alpha, \quad BCD\Delta\text{-ből: } m_c = a\sin\beta$$

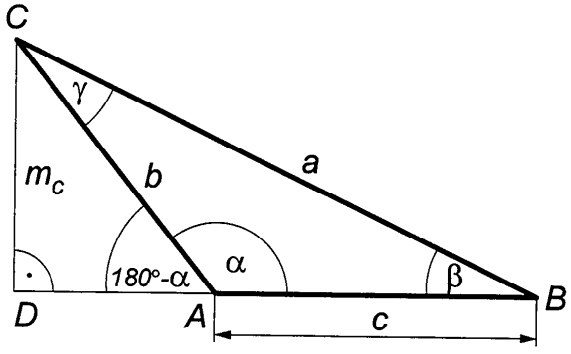
A két egyenlőség alapján felírható, hogy $a\sin\beta = b\sin\alpha$, azaz

$$a:b = \sin\alpha:\sin\beta \qquad \text{vagy}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$



305. ábra. Általános háromszög



306. ábra. Tompaszögű háromszög

Ha m_a-ra is és m_b-re is megismételjük eljárásunkat, akkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$b\sin\gamma = c\sin\beta \quad \text{vagy} \quad c:\sin\gamma = b:\sin\beta,$$

$$c\sin\alpha = a\sin\gamma \quad \text{vagy} \quad c:\sin\gamma = a:\sin\alpha.$$

Mindhármat egybefoglalva, a szinusztétel a következő alakot kapja:

$$a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma \qquad \text{vagy}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

A szinusztétel tompaszögű háromszögben is érvényes (306. ábra), ui. $m_c = b\sin(180° - \alpha) = a\sin\beta$, de $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, tehát $b\sin\alpha = a\sin\beta$ stb.

A szinusztétel szerint tehát

az általános háromszögben bármely két oldal aránya az oldalakkal szemben levő szögek szinuszának arányával egyenlő.

Az általános háromszögek megoldására a szinusztételt általában akkor használjuk, ha ismert két szög és egy oldal vagy két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög.

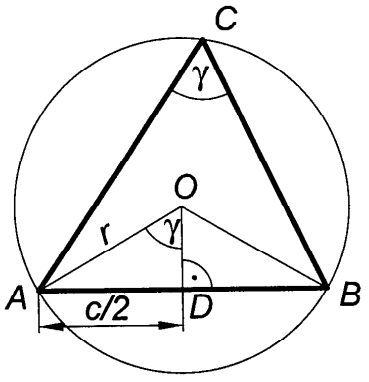
Megjegyzések

1. A háromszög köré írt kör átmérője a 307. ábra alapján számítva:

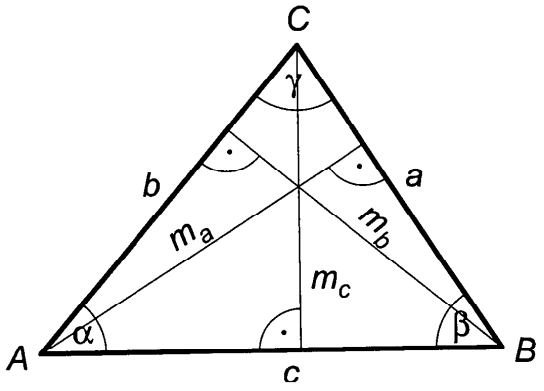
$$\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}, \text{ azaz } d = 2r = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

A számítást α-val és β-val megismételve: $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$, $2r = \frac{b}{\sin\beta}$ összefüggések adódnak, úgyhogy a szinusztétel újabb bizonyítását, ill. az ott szereplő hányadosnak geometriai értelmet adtunk:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$



307. ábra. Háromszög köré írt kör



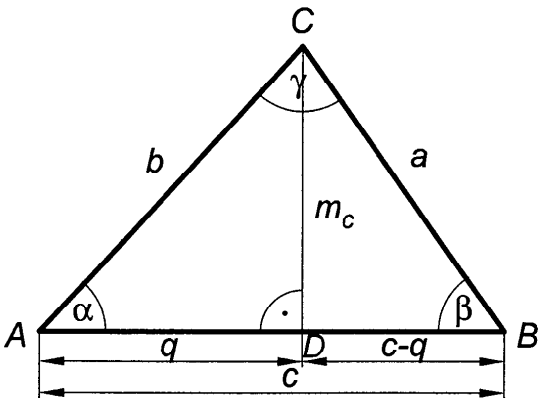
308. ábra. Magasságvonalak

2. A háromszög területének meghatározására szolgáló képletekbe,

$$t = \frac{1}{2}am_a = \frac{1}{2}bm_b = \frac{1}{2}cm_c,$$

helyettesítsük az $m_a = b\sin\gamma$, $m_b = c\sin\alpha$, $m_c = a\sin\beta$ értékeket (308. ábra), akkor

$$t = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$



309. ábra. Általános háromszög

Koszinusztétel. Az *ABC* általános háromszögben az m_c magasságvonalat megrajzolva, két derékszögű háromszöget kapunk (309. ábra). *Pitagorasz* tételével:

$$ADC\Delta\text{-ből: } m_c^2 = b^2 - q^2,$$

$$DBC\Delta\text{-ből: } m_c^2 = a^2 - (c-q)^2,$$

vagyis

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c-q)^2,$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2,$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cq,$$

de

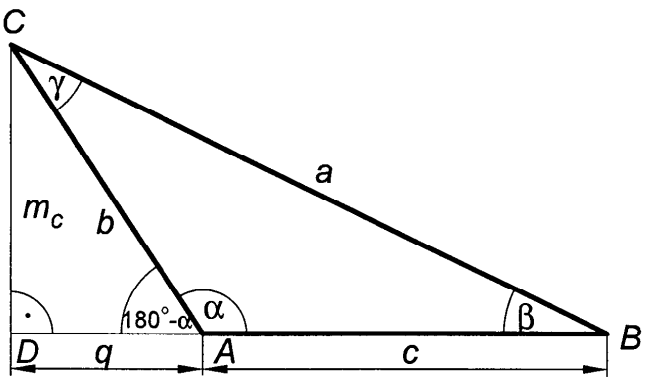
$$q = b\cos\alpha,$$

úgyhogy

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

amiből

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



310. ábra. Tompaszögű háromszög

A koszinusztétel tompaszögű háromszögre is érvényes (310. ábra), ui.

$$m_c^2 = b^2 - q^2,$$

$$m_c^2 = a^2 - (c+q)^2,$$

tehát

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c+q)^2,$$

azaz $$b^2 = a^2 - c^2 - 2cq,$$

de $$q = b\cos(180° - \alpha) = -b\cos\alpha,$$

tehát $$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

vagy $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Teljesen hasonló eljárással kapható:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

A koszinusztétel szerint, tehát

az általános háromszög bármely oldalának négyzetét úgy kapjuk meg, hogy a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk ugyanazon két oldalnak és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

A koszinusztételt az általános háromszög ismeretlen alkotórészeinek meghatározására akkor használhatjuk, ha ismert két oldal és a közbezárt szög, vagy három oldal.

Megjegyzések

1. Derékszögű háromszögben pl. $\gamma = 90°$, akkor $\cos\gamma = \cos 90° = 0$, s így $c^2 = a^2 + b^2$, vagyis a koszinusztétel a *Pitagorasz*-tételt is magába foglalja, annak általánosítása.

2. A szinusz- és koszinusztétel mellett, a háromszög oldalai és szögei közötti összefüggést fejez ki az ún. *tangenstétel*:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Típusfeladatok *általános háromszög* ismeretlen alkotórészeinek meghatározására.

I. Adott a c oldal, az α és β szög. Meghatározandó a γ szög, az a és b oldal valamint a t terület.

Megoldás: $$\gamma = 180° - (\alpha + \beta),$$

$$\text{az } a:c=\sin\alpha:\sin\gamma \text{ egyenletből: } a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

$$\text{a } b:c=\sin\beta:\sin\gamma \text{ egyenletből: } b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$\text{a terület: } t=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Pl.: $c=451{,}4$ m; $\alpha=32°13'$; $\beta=68°35'$.

$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-(32°13'+68°35')=79°12'$

$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$, $t=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

A $\frac{c}{\sin\gamma}$ kétszer fordul elő, ezért ennek megfelelő sorrendben végezzük a számítást:

$\lg c=2{,}6546$
$\lg\sin\gamma=\underline{9{,}9922-10}$
$\lg(c/\sin\gamma)=2{,}6624$

$\lg(c/\sin\gamma)=2{,}6624$
$\lg\sin\alpha=\underline{9{,}7268-10}$
$\lg a=2{,}3892$
$a=245{,}0$ m

$\lg(c/\sin\gamma)=2{,}6624$
$\lg\sin\beta=\underline{9{,}9689-10}$
$\lg b=2{,}6313$
$b=427{,}9$ m

$\lg a=2{,}3892$
$\lg b=2{,}6313$
$\lg\sin\gamma=\underline{9{,}9922-10}$
$\lg ab\sin\gamma=5{,}0127$
$\lg 2=\underline{0{,}3010}$
$\lg t=4{,}7117$
$t=51490$ m^2

II. Adott az a és c oldal és a nagyobbik oldallal szemben levő α szög. Meghatározandó: γ, β, b és t.

Megoldás

$\sin\gamma=\frac{c\sin\alpha}{a}$, amelyből γ -t meghatározva: $\beta=180°-(\alpha+\gamma)$,

$$b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad t=\frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Pl.: $a=18$ cm, $c=13{,}64$ cm és $\alpha=93°10'$.

A számításokat az I. példájához hasonlóan végezhetjük. Eredmények: $\gamma=49°9'$, $\beta=180°-(93°10'+49°9')=37°41'$, $b=11{,}02$ cm, $t=75{,}06$ cm^2.

Megjegyzés: Ha a szinusztételt használjuk fel valamely ismeretlen szög meghatározására, akkor általában két eredményt kapunk: egy hegyes- és egy tompaszöget. A feladatnak megfelelő eredményt úgy tudjuk kiválasztani, pl. a II. feladatnál, hogy $c<a$ miatt $\gamma<\alpha$, tehát a lg sin γ = 9,8788-10 egyenletből adódó $\gamma_1=49°9'$ és $\gamma_2=180°-\gamma_1=130°51'$ megoldások közül csak $\gamma_1=49°9'$ lehet helyes.

Két oldal és a kisebbik oldallal szemközti szög ismerete esetén a feladatnak vagy két megoldása van: egy hegyes- és egy tompaszögű háromszög; vagy egyáltalán nincs megoldása: a szög szinusza 1-nél nagyobb értékként adódik.

III. Adott két oldal: b és c meg a közbezárt α szög. Meghatározandó: a, β, γ és t.

Megoldás: Az ismeretlen oldalt koszinusztétellel, majd a szögeket szinusztétellel számítjuk ki:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad \text{azaz} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha},$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}, \quad \sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}, \quad t = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Pl.: $b = 28$ cm; $c = 58{,}44$ cm; és $\alpha = 27°30'$.

A számításokat négyjegyű logaritmus-táblázat felhasználásával végezve:

$a = 36{,}0$ cm; $\beta = 21°3'$, mert $\beta < \alpha$; $\gamma = 131°27'$; $t = 377{,}8$ cm^2.

($\gamma = 48°33'$ vagy $131°27'$. Mindkét esetben teljesül $\gamma > \alpha$, azonban az $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ feltételt csak a $\gamma = 131°27'$ elégíti ki, tehát ez a helyes eredmény.)

IV. Adott a három oldal: a, b és c. Meghatározandó: α, β, γ és t.

Megoldás: Egyik szöget koszinusztétellel, a másik kettőt szinusztétellel számítjuk ki.

$$\text{Az } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ egyenletből } \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}, \quad \sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}, \quad t = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Pl.: $a = 6{,}415$ m; $b = 2{,}872$ m és $c = 4{,}939$ m.

A számításokat négyjegyű logaritmus-táblázattal végezve; a koszinusztételből:

$b^2 = 8{,}249$; $c^2 = 24{,}390$; $a^2 = 41{,}153$; $b^2 + c^2 - a^2 = -8{,}514$;

$\lg 2bc = 1{,}4528$; $2bc = 28{,}37$;

$\lg(-\cos\alpha) = 9{,}4773 - 10$; $\alpha = 180° - 72°32' = 107°28'$. A szinusztételből:

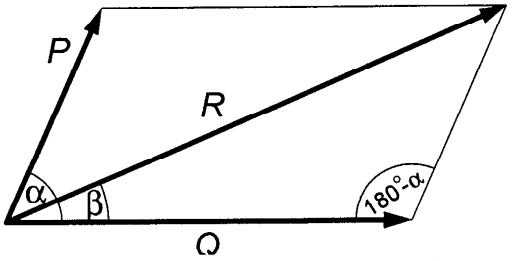
$\lg\sin\beta = 9{,}6305 - 10$; $\beta = 25°17'$; $\lg\sin\gamma = 9{,}8658 - 10$; $\gamma = 47°15'$ és

$\lg 2t = 1{,}1313$; $t = 6{,}765\,\text{m}^2$. Próba: $\alpha + \beta + \gamma = 107°28' + 25°17' + 47°15' = 180°$

Megjegyzés: Három adott oldal esetén célszerűbb a legkisebb oldallal szemközti szöget kiszámítani a koszinusztétellel.

Példák

1. Egy anyagi pontra két erő hat: $P = 36$ N, $Q = 83$ N. A két erő által bezárt szög $\alpha = 77°12'$. Számítsuk ki az R eredő erőt és azt a szöget, amelyet R a Q-val bezár (311. ábra).



311. ábra. Eredő meghatározása

Megoldás: R-t koszinusztétel, a β szöget szinusztétel alkalmazásával számítjuk ki:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(180° - \alpha) = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha,$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{36^2 + 83^2 + 2 \cdot 36 \cdot 83 \cdot \cos 77°12'}$$

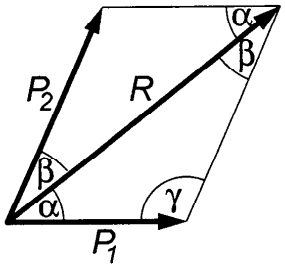
$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0{,}3010 \\ \lg P &= 1{,}5563 \\ \lg Q &= 1{,}9191 \\ \lg\cos\alpha &= \underline{9{,}3455 - 10} \\ \lg 2PQ\cos\alpha &= 3{,}1219 \\ 2PQ\cos\alpha &= 1324 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^2 &= 1296 \\ Q^2 &= 6889 \\ 2PQ\cos\alpha &= \underline{1324} \\ R^2 &= 9509 \\ \lg R^2 &= 3{,}9781 \\ R &= 97{,}5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\sin\beta = \frac{P\sin(180° - \alpha)}{R} = \frac{P\sin\alpha}{R}$$

$$\begin{aligned} \lg P &= 1{,}5563 \\ \lg\sin\alpha &= \underline{9{,}9891 - 10} \\ \lg(P \cdot \sin\alpha) &= 1{,}5454 \\ \lg R &= \underline{1{,}9890} \\ \lg\sin\beta &= 9{,}5564 - 10 \\ \beta &= 21°6'. \end{aligned}$$

2. Az $R = 1176{,}798$ N nagyságú erő felbontandó két olyan P_1 és P_2 összetevőre, hogy P_1 az R-rel $\alpha = 44°15'$-es, P_2 az R-rel $\beta = 29°5'$-es szöget zárjon be (312. ábra)



312. ábra. Komponensek meghatározása

Megoldás: A komponenseket kétszer alkalmazott szinusztétellel számítjuk ki:

$$\frac{P_1}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}, \quad \frac{P_1}{\sin 29°5'} = \frac{1176{,}798}{\sin 73°20'},$$

amiből

$$P_1 = \frac{1176{,}798 \cdot \sin 29°5'}{\sin 73°20'} = 597{,}13 \text{ N}$$

és hasonlóan

$$P_2 = \frac{1176{,}798 \cdot \sin 44°5'}{\sin 73°20'} = 857{,}10 \text{ N}.$$

3. Számítsuk ki a 313. ábra adataiból a torony h magasságát, ahol az $ABC\Delta$-et a sík terepen vettük fel.

Megoldás: $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}$,

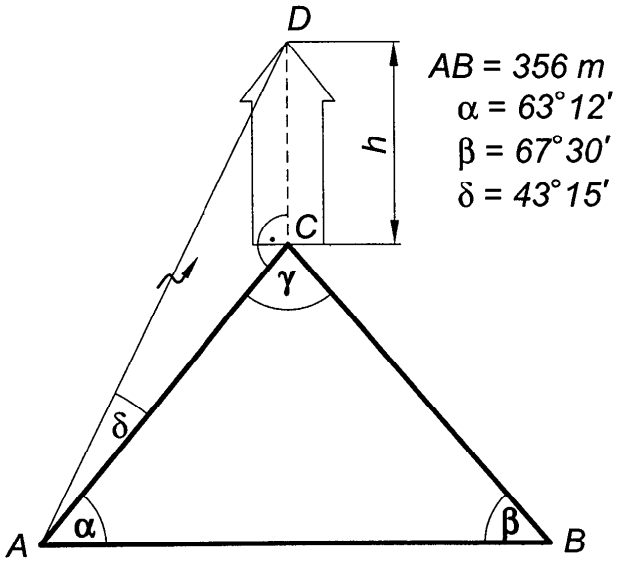
$$AC = \frac{356 \cdot \sin 67°30'}{\sin 49°18'} =$$

$$= 433{,}8$$

$$h = AC \cdot \operatorname{tg}\delta =$$

$$= 433{,}8 \cdot \operatorname{tg} 43°15' =$$

$$= 433{,}8 \cdot 0{,}9407 \approx 408{,}1 \text{ m}.$$



313. ábra. Torony

Feladatok

1. A P = 686,47 N és Q = 196,13 N nagyságú erők által bezárt szög $\alpha = 150°$. Számítsuk ki az R eredő erőt és P-nek az R-rel bezárt β szögét.

[R = 525,83 N; $\beta = 10°45'$.]

2. Bontsuk fel az R = 156,91 N nagyságú erőt P_1, P_2 összetevőre úgy, hogy az R és P_1 által bezárt szög $\alpha = 34°30'$, az R és P_2 által bezárt szög pedig $\beta = 80°$ legyen! [P_1 = 169,66 N; P_2 = 97,67 N.]

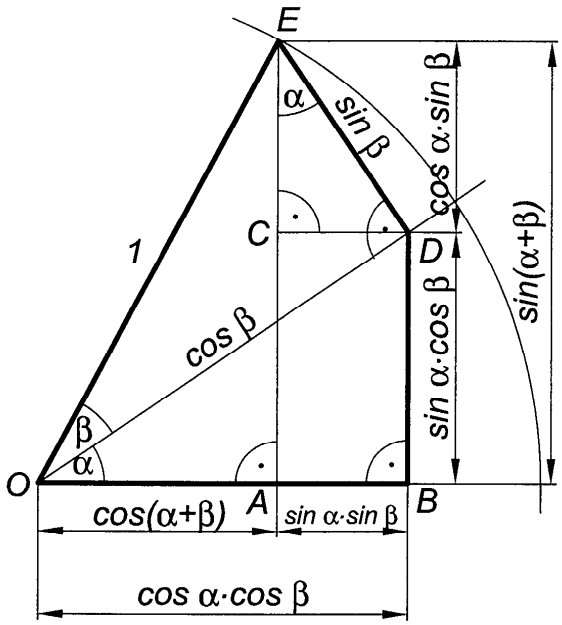
3. A P = 686,47 N; Q = 294,20 N nagyságú erők eredője R = 539,37 N nagyságú. Mekkorák a Q, P; P, R; és R, Q erők által bezárt szögek?

[131°21'; 24°10'; 107°11'.]

4. Számítsuk ki az általános háromszög b, c oldalát és t területét, ha a = 245 m; $\beta = 68°35'$ és $\gamma = 79°12'$. [b = 427,8 m; c = 451,4 m; t = 51 480 m^2.]

5.3.8 Összegezési (addíciós) tételek

E pontban két szög összegének és különbségének szögfüggvényeit az egyes szögek szögfüggvényeinek segítségével adjuk meg. Egy egységsugarú körben vegyünk fel olyan α és β középponti hegyes szöget, amelyeknek összege 90°-nál kisebb (314. ábra) és a β szög mozgó szárának az egységsugarú körrel való E metszéspontjából



314. ábra. Összegezési tételek

húzzunk merőlegest az α szög mindkét szárára. Az α szög mozgó szárára rajzolt merőleges D talppontjából is húzzunk merőlegest az α szög nyugvó szárára és az EA egyenesre.

Mivel $OE = 1$, tehát

$OAE\Delta$-ből: $AE = \sin(\alpha+\beta)$,

$ODE\Delta$-ből: $ED = \sin\beta$,

$OD = \cos\beta$,

$ECD\Delta$-ből: $EC = \cos\alpha\sin\beta$,

$OBD\Delta$-ből:

$DB = AC = \sin\alpha\cos\beta$,

s mivel $$AE = AC + CE,$$

ezért $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

Hasonlóan kapjuk az ábrából $OA = OB - AB$ miatt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Helyettesítsünk (1) és (2) képletekbe β helyett $(-\beta)$-t, akkor a $\cos(-\beta) = \cos\beta$ és $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ összefüggést felhasználva, két szög különbségének szinuszát és koszinuszát kapjuk:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Az (1), (2), (3) és (4) összefüggések felhasználásával két szög összegének és különbségének tangensét és kotangensét is könnyen meghatározhatjuk:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

A számlálót és a nevezőt $\cos\alpha\cos\beta$-val osztva:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{5}$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{6}$$

Ugyanígy

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}.$$

A számlálót és nevezőt $\sin\alpha\sin\beta$-val osztva:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha} \tag{7}$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} \tag{8}$$

Kimutatható, hogy az (1), ..., (8) képletek tetszőleges α és β szögre is érvényesek (nevező $\neq 0$).

5.3.9 A kétszeres és a félszögek függvényei

Ha az (1), (2), (5) és (7) összefüggésekben β helyett is α-t írunk, akkor a kétszeres szögek függvényeit kapjuk:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{9}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{11}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \tag{12}$$

Vagy α helyett $\frac{\alpha}{2}$-t írva:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (9a) \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (10a)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (11a) \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} \qquad (12a)$$

A megfelelő alakban felírt négyzetes összefüggésekhez hozzáadva, ill. azokból kivonva a (10) és (10*a*) egyenletet, kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \quad \text{és:}$$
$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{és:}$$
$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ezekből az egyenletekből $\cos\alpha$-t és $\sin\alpha$-t ill. $\cos\frac{\alpha}{2}$-t és $\sin\frac{\alpha}{2}$-t kifejezve:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \qquad (13) \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (13a)$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad (14) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (14a)$$

(A két előjel közül az α nagyságától függően csak az egyik érvényes.)

A fenti egyenlőségek hányadosát képezve:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \qquad (15) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (15a)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} \quad (16) \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad (16a)$$

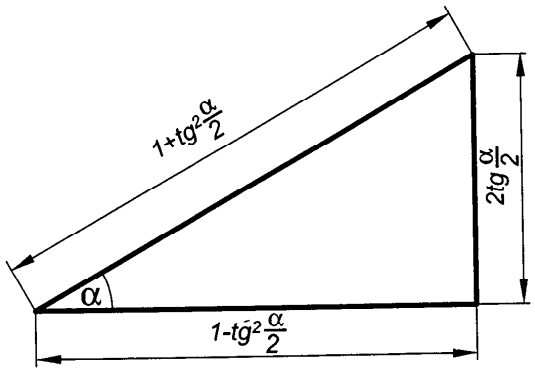
Az integrálszámításban $\sin\alpha$-t és $\cos\alpha$-t gyakran $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ segítségével kell kifejezni. (9*a*)-ból: $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Osszuk el mindkét oldalt: $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$-gyel:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ha a jobb oldal számlálóját és nevezőjét $\cos^2\frac{\alpha}{2}$-vel elosztjuk, akkor a kívánt összefüggést kapjuk:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \quad (17)$$



315. ábra. Derékszögű háromszög

A (15*a*) összefüggést oldjuk meg $\cos\alpha$-ra:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad (1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha,$$

s ebből $\cos\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, azaz

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{18}$$

A (11*a*), (17) és a (18) összefüggéseket a 315. ábra szerinti derékszögű háromszög alapján könnyen megjegyezhetjük.

5.3.10 Két szinusz- vagy koszinuszfüggvény összegének és különbségének átalakítása szorzattá

Írjuk egymás alá az (1) és (3) összefüggéseket:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

Összeadva:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.$$

Kivonva egymásból:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Ugyanezeket a műveleteket elvégezve a (2) és (4) összefüggésekkel:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Összeadva:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Kivonva egymásból:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

Ha az $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor ebből

$$\alpha=\frac{x+y}{2},\qquad \beta=\frac{x-y}{2},$$

tehát a talált négy összefüggés a következő alakot ölti:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{19}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{20}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{21}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{22}$$

Példák

1. Számítsuk ki sin 75° és sin 15° értékét!

Megoldás: 75° = 30° + 45°. Felhasználva az (1) összefüggést:

$$\sin 75° = \sin(30°+45°) = \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0{,}9659.$$

A (3) összefüggés alapján:

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}2588.$$

2. Mivel egyenlő $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ és $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$?

Megoldás: (2) és (4) felhasználásával:

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - 1\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha.$$

3. Fejezzük ki $\sin 3\alpha$-t az α függvényei segítségével!

Megoldás: Az (1), (9), (10) és (I) alapösszefüggés felhasználásával:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha.$$

A szorzást és az összevonást elvégezve:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

4. Igazoljuk, hogy $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

Megoldás: (6), (I) és (9) felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=$$
$$=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

5. Igazoljuk, hogy $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. (Ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$.)

Megoldás: $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4}=\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

6. Számítsuk ki $\cos 15°-\sin 45°$ értékét.

Megoldás: A (22) összefüggés szerint:

$$\cos 15°-\cos 45°=-2\sin\frac{15°+45°}{2}\sin\frac{15°-45°}{2}=$$

$$=+2\sin 30°\sin(+15°)=2\cdot\frac{1}{2}\sin 15°=\sin 15°,\ \text{és (14) szerint:}$$

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\approx 0{,}2588.$$

7. Mivel egyenlő $\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha)$?

Megoldás: Legyen $60°+\alpha=x$; $60°-\alpha=y$, akkor $\frac{x+y}{2}=60°$ és $\frac{x-y}{2}=\alpha$, tehát (20) szerint

$$\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha)=2\cos 60°\sin\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

8. Fejezzük ki $\frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}$-et $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ segítségével.

Megoldás: Felhasználva a (17) és (18) összefüggést:

$$\frac{2\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{2\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{4z}{1+2z-z^2}.$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a sin 105° és cos 135° függvényértékeket!
   [$\sin(60°+45°)\approx 0{,}9659$; $\cos(180°-45°)\approx -0{,}7071$.]
2. Fejezzük ki $\cos 3\alpha$ -t α függvényeivel! [$3\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.]
3. Igazoljuk a következő összefüggések helyességét:

   a) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, *b*) $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$,

   c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, *d*) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$.

4. Alakítsuk szorzattá az $1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}$ kifejezést!

   [$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ helyettesítése után: $2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$, majd $\cos 60°=\dfrac{1}{2}$ helyettesítéssel és (21) felhasználásával: $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}+30°\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}-30°\right)$.]

5. Alakítsuk szorzattá a $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$ kifejezést!

   [$2\sin^2\alpha-1=-\cos 2\alpha$ helyettesítés után $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$ alakra jutunk, amelyben a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$ és $\dfrac{1}{2}=\sin 30°$ átalakítást elvégezve, a $2\sin(2\alpha-30°)$ eredményt kapjuk, ha felhasználjuk a (3) összefüggést.]

6. Mivel egyenlő $\sin(30°+\alpha)+\sin(30°-\alpha)$ és $\cos(30°+x)-\cos(30°-x)$?
   [$\cos\alpha$; $-\sin x$.]
7. Számítsuk ki sin 22°30' értékét $\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ felhasználásával.

   [A (14) összefüggés szerint: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0{,}383$.]

8. Fejezzük ki $\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos x-1}$-et $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ segítségével! $\left[-\dfrac{1}{2}(1+t)\right]$.

5.3.11 Trigonometrikus egyenletek

Ebben a pontban olyan transzcendens egyenletekkel foglalkozunk, amelyekben az ismeretlennek valamely trigonometrikus függvénye fordul elő és az ismeretlenek elemi módszerekkel meghatározhatók.

Pl.: $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = 0.$

A legegyszerűbb *trigonometrikus* (vagy más elnevezéssel *goniometrikus*) *egyenletek* alakja:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a,$$

ahol a adott valós szám.

Megoldásoknak vagy gyököknek nevezzük azokat az x értékeket, amelyek kielégítik a trigonometrikus egyenletet.

Pl.: A $\cos x = \frac{1}{2}$ trigonometrikus egyenlet gyökei fokokban:

$x_1 = 60°, \; x_2 = 300°, \; x_3 = 420°, \; x_4 = 660°$ stb. vagy radiánokban:

$x_1 = \frac{\pi}{3}, \; x_2 = \frac{5\pi}{3}, \; x_3 = \frac{7\pi}{3}, \; x_4 = \frac{11\pi}{3}$ stb.,

minthogy

$\cos 60° = \cos 300° = \cos 420° = \ldots = \frac{1}{2}$ vagy

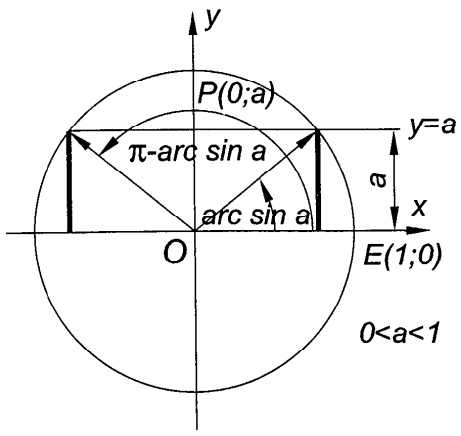
$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{7\pi}{3} = \ldots = \frac{1}{2}.$

A trigonometrikus egyenlet megoldása tehát az összes gyök kiszámítását jelenti. Mivel a trigonometrikus egyenletek megoldása gyakran a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletekre való visszavezetéssel megy végbe, ezért részletesen megvizsgáljuk a fenti négy egyenletet.

I. $\sin x = a.$

Láttuk, hogy $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin(x + 2k\pi)$, tehát egyetlen gyök segítségével végtelen sok gyököt írhatunk fel. Vizsgáljuk az egyenlet megoldását a különböző értékeinél:

1. a legyen 1-nél kisebb pozitív szám: $0 < a < 1$. Vegyük fel az (x,y) derékszögű koordinátarendszerben az origó közepű egységsugarú kört (l. az 5.4.6 pontot), és húzzuk meg az x tengellyel párhuzamos $y = a$ egyenest (316. ábra). Az x tengellyel bezárt (abszolút értékben) legkisebb szöget, melynek szinusza a-val egyenlő, "$\arcsin a$"-val jelöljük. Az ábrából látható hogy $(\pi - \arcsin a)$ szög szinusza is egyenlő a-val. Az x szög összes értékét, amelynek szinusza a-val egyenlő, megkapjuk, ha a már meghatározott két szöghöz hozzáadjuk 2π egész számú többszörösét. (Megjegyzendő, hogy bármely más olyan szögből kiindulva, amelynek szinusza a, ezen képlet alapján szintén megkapjuk az összes megoldást.)



316. ábra. $0 < a < 1$

Tehát a $\sin x = a$ egyenlet összes megoldása $0 < a < 1$ esetén a következő formulákkal adható meg:

$$x = \arcsin a + 2k\pi$$
$$x = \pi - \arcsin a + 2k\pi = \pi(2k+1) - \arcsin a$$

vagy fokokban:

$$x = (\arcsin a)^\circ + 180^\circ \cdot 2k,$$
$$x = -(\arcsin a)^\circ + 180^\circ (2k+1),$$

ahol k tetszőleges egész szám ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$).

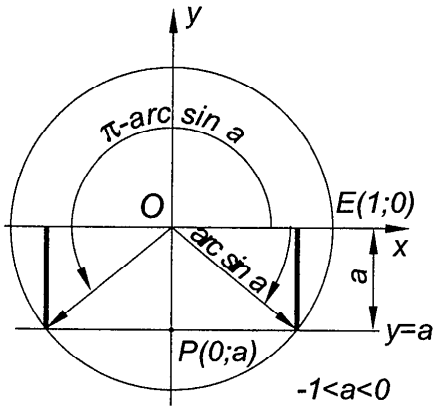
Példa: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Megoldás: $x = \arcsin\frac{1}{2} + 2k\pi$, $x = -\arcsin\frac{1}{2} + (2k+1)\pi$, de $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$,

tehát $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = 30^\circ + 2k \cdot 180^\circ$ és

$x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$ vagy $x = -30^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ$.

2. a legyen negatív szám, de abszolút értékben 1-nél kisebb: $-1 < a < 0$. Az előző szerkesztéshez hasonlóan járunk el (317. ábra). Ha $\arcsin a$-val jelöljük most is azt az abszolút értékben legkisebb szöget, amelynek szinusza a-val egyenlő, akkor a másik szög, amelynek szinusza szintén a, ez esetben is $(\pi - \arcsin a)$.



317. ábra. $-1 < a < 0$

Tehát a $\sin x = a$ egyenlet összes gyökét a következő képletekkel adhatjuk meg:

$$x = \arcsin a + 2k\pi$$
$$x = \pi - \arcsin a + 2k\pi = -\arcsin a + (2k+1)\pi$$

vagy fokokban:

$$x = (\arcsin a)^\circ + 2k \cdot 180^\circ$$
$$x = -(\arcsin a)^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ \qquad \text{ahol } k \in Z.$$

Példa: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Megoldás: Mivel $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, így az általános megoldás:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) + (2k+1)\pi = \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi.$$

3. Legyen $a = 1$, akkor $\sin x = 1$. A geometriai szerkesztésből (318. ábra) az egyenlet egyik gyöke azonnal adódik: $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, az összes gyököt az

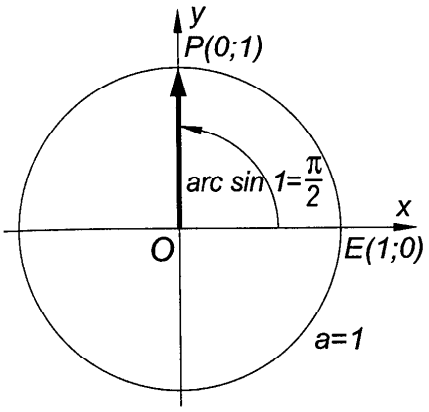
$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ$$

képlet adja meg, ahol $k \in Z$.

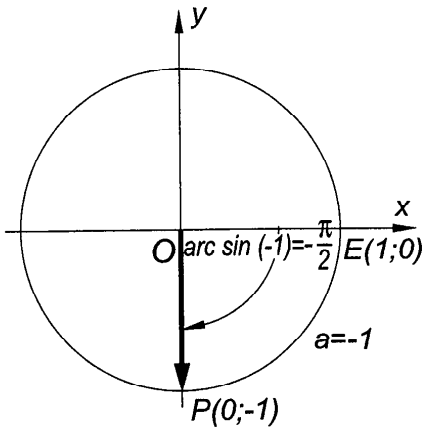
4. Teljesen hasonló az $a=-1$ eset (319. ábra). A $\sin x=-1$ egyenlet egy gyöke $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, tehát az összes gyök az

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{vagy} \quad x=-90°+2k\cdot 180°$$

képlettel adható meg, ahol $k\in Z$.



318. ábra. $a=1$



319. ábra. $a=-1$

5. Legyen $a=0$, azaz $\sin x=0$, akkor az egyenlet általános megoldása:

$$x=k\pi \quad \text{vagy} \quad x=k\cdot 180°, \qquad \text{ahol } k\in Z.$$

6. Legyen a abszolút értékben 1-nél nagyobb, $|a|>1$, ez esetben a $\sin x=a$ egyenletnek nincs valós megoldása.

II. $\cos x=a$.

Ismeretes, hogy $\cos x\equiv\cos(-x)\equiv\cos(x+2k\pi)$. Vegyük szemügyre a minden értékét.

1. Legyen $0<a<1$. A szerkesztést elvégezve (320. ábra), $\cos x=\cos(-x)$ miatt nyilvánvaló, hogy két egyenlő abszolút értékű, de előjelben különböző szöget kapunk, melynek koszinusza a-val egyenlő. Ha a pozitív szöget $\arccos a$-val, a negatív szöget $(-\arccos a)$-val jelöljük, akkor az x szög összes értéke, amelynek koszinusza a-val egyenlő, ezekből a szögekből $2k\pi$ hozzáadásával

származtatható, ahol k tetszőleges egész szám. Tehát a $\cos x = a$ egyenlet összes gyöke, ha $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi$$

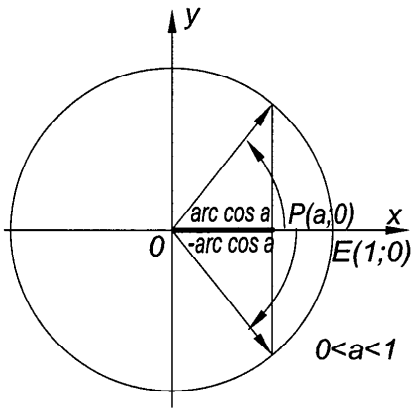
vagy fokokban:

$$x = \pm(\arccos a)° + 2k \cdot 180° \qquad \text{ahol } k \in Z.$$

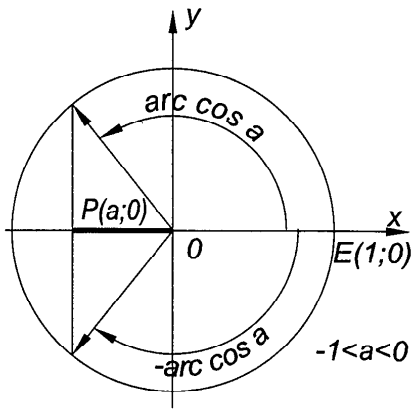
Példa: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Megoldás: Mivel $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, ezért az adott egyenlet általános megoldása:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm 45° + 2k \cdot 180°.$$



320. ábra. $0 < a < 1$



321. ábra. $-1 < a < 0$

2. Legyen a negatív, de abszolút értékben 1-nél kisebb: $-1 < a < 0$. Az előzőhöz hasonlóan végezve a szerkesztést (321. ábra), ismét abszolút értékben egyező, de előjelben különböző szögeket kapunk, amelyek koszinusza a-val egyenlő. A pozitív tompaszöget $\arccos a$-val, a negatívot $(-\arccos a)$-val jelölve, a

$$\cos x = a, \quad -1 < a < 0$$

egyenlet megoldásainak általános képlete:

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi$$

vagy fokokban mérve:

$$x = \pm(\arccos a)° + 2k \cdot 180° \qquad \text{ahol } k \in Z.$$

Példa: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Megoldás: Mivel $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, ezért a megoldás általános alakja:

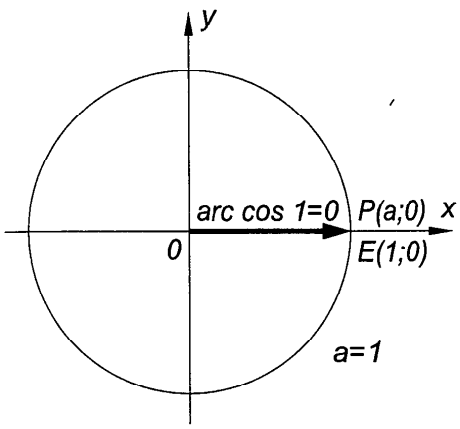
$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, vagy fokokban mérve $x = \pm 150° + 2k \cdot 180°$.

3. Legyen $a = 1$, akkor $\cos x = 1$. A geometriai szerkesztésből (322. ábra) látható, hogy a legkisebb pozitív szög, amelynek koszinusza 1, $\arccos 1 = 0$. Tehát az egyenlet általános megoldása:

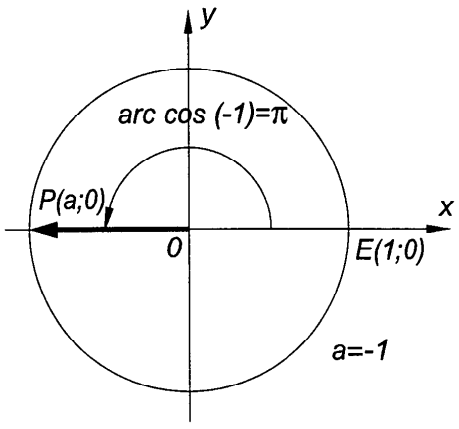
$$x = 2k\pi$$

vagy fokokban mérve:

$$x = 2k \cdot 180° \qquad (k \in Z).$$



322. ábra. $a = 1$



323. ábra. $a = -1$

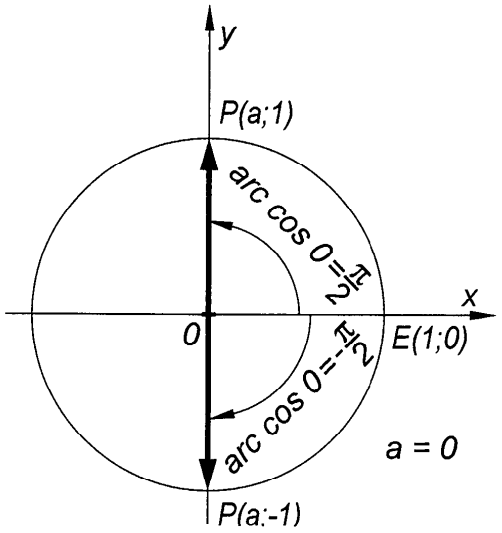
4. Legyen $a = -1$, akkor $\cos x = -1$. A geometriai szerkesztésből látható (323. ábra), hogy a legkisebb pozitív szög, melynek koszinusza (–1), π-vel egyenlő. Az egyenlet összes gyökeinek képlete tehát

$$x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$$

vagy fokokban mérve:

$$x = (2k+1) \cdot 180° \qquad (k \in Z).$$

5. Legyen $a = 0$, akkor $\cos x = 0$. A geometriai szerkesztés (324. ábra) két abszolút értékben egyenlő, de előjelben különböző szöget ad, amelynek koszinusza 0-val egyenlő: $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$. Az egyenlet megoldásának általános alakja:



324. ábra. $a = 0$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

vagy fokokban mérve:

$$x = \pm 90° + 2k \cdot 180° \qquad (k \in Z).$$

Az általános képlet egyszerűsíthető

$$x = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (1+4k)\frac{\pi}{2} \text{ és } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (-1+4k)\frac{\pi}{2}$$

felhasználásával. Mivel az $(1+4k)$ és a $(-1+4k)$ kifejezés felöleli a páratlan számok összességét, amit $(2k+1)$-gyel jelölhetünk, így az általános megoldás:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (k \in Z).$$

6. Legyen a abszolút értékben egynél nagyobb: $|a| > 1$. Ekkor $\cos x = a$ egyenletnek nincs valós megoldása. Nincs olyan szög, amelynek koszinusza $|a| > 1$ értéket adna.

III. $\operatorname{tg} x = a$.

Láttuk, hogy $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$ és $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$. A $\operatorname{tg} x = a$ egyenlet egyik gyökét a tetszőleges értéke esetén $x = \operatorname{arctg} a$ alakban írhatjuk. Mindazokat az x értékeket, amelyeknek tangense a-val egyenlő, az

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi$$

vagy fokokban mérve:

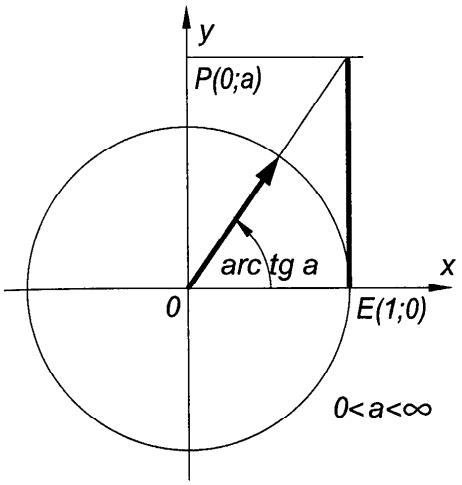
$$x = (\operatorname{arctg} a)° + k \cdot 180°,$$

($k \in Z$) képletekkel állítható elő. Ha $a = 0$, akkor $\operatorname{tg} x = 0$ egyenlet összes gyökét

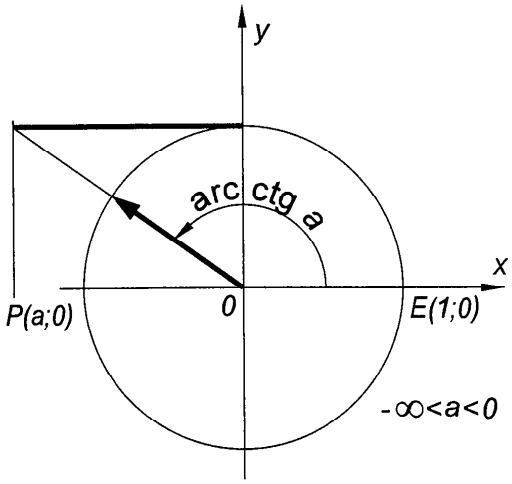
$$x = k\pi,$$

($k \in Z$) képlet adja, mivel $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Az előzőkhöz hasonlóan ábrákat készíthetünk. Szemléltetjük a $0 < a < \infty$ esetet (325. ábra).



325. ábra. $0 < a < \infty$



326. ábra. $-\infty < a < 0$

Példa: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Megoldás: Mivel $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, ezért az adott egyenlet általános megoldása:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{6k+1}{6}\pi \quad \text{vagy} \quad x = 30° + k \cdot 180°.$$

IV. $\operatorname{ctg} x = a$.

Tudjuk, hogy $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(-x)$ és $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$. Az előzőhöz hasonlóan az egyenlet összes megoldását az

$$x = \operatorname{arcctg} a + k\pi$$

vagy fokokban mérve:

$$x = (\operatorname{arcctg} a)° + k \cdot 180°,$$

$(k \in Z)$ alakban adhatjuk meg.

Szemléltetjük a $-\infty < a < 0$ esetet (326. ábra).

Példa: $\operatorname{ctg} x = -1$.

Megoldás: Mivel $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, ezért az összes megoldás:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{4} \quad \text{vagy} \quad x = 135° + k \cdot 180° \quad (k \in Z).$$

Példák

1. $3\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 2.$

Megoldás: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{2}{3}$,

$$\frac{\pi}{3} + x = \arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi \quad \text{és} \quad \frac{\pi}{3} + x = -\arcsin\frac{2}{3} + (2k+1)\pi, \quad \text{tehát:}$$

$$x = \arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{és} \quad x = -\arcsin\frac{2}{3} + (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Összevonva:

$$x = \arcsin\frac{2}{3} + (6k-1)\frac{\pi}{3},$$

$$x = -\arcsin\frac{2}{3} + (6k+2)\frac{\pi}{3}, \quad (k \in Z).$$

Függvénytáblázat felhasználásával a megoldást fokokban is megadhatjuk. Mivel $(\arcsin\frac{2}{3})° \approx (\arcsin 0{,}6667)° \approx 41°49'$, ezért a gyököknek csak közelítő értékét adhatjuk meg.

$$x \approx 41°49' + (6k-1) \cdot 60° \quad \text{és} \quad x \approx -41°49' + (6k+2) \cdot 60°.$$

(A továbbiakban, hacsak más kikötést nem teszünk, k mindig tetszőleges egész szám.)

2. $\cos(a - bx) = c.$

Megoldás: Az egyenletnek csak $|c| \leq 1$ esetén lehet valós gyöke:

$$a - bx = \pm\arccos c + 2k\pi, \quad x = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{b}\arccos c + \frac{2k\pi}{b}.$$

3. $\cos(x^2) = \frac{1}{2}.$

Megoldás: $x^2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in N$. $k = 0$ esetén x^2 értékére csak a $+\frac{\pi}{3}$ jöhet

számításba, ezért $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, és az összes megmaradt esetnél 2π-t pozitív egésszel kell szorozni, tehát ha $k \in N$, akkor:

$$x=\pm\sqrt{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi},\ (k \in N).$$

4. $\cos(5\cos 5x)=0$.

Megoldás: $5\cos 5x=(2k+1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\cos 5x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$.

Minthogy $|\cos 5x|\le 1$, ezért k csak 1, 0, –1, –2 lehet.

a) ha $k=0$, akkor $\cos 5x=\frac{\pi}{10}$, $x=\pm\frac{1}{5}\arccos\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi$.

b) ha $k=1$, akkor $\cos 5x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$, $x=\pm\frac{1}{5}\arccos\frac{3\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi$.

c) ha $k=-1$, akkor $\cos 5x=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{10}$,

$$x=\pm\frac{1}{5}\arccos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{2}{5}k\pi.$$

d) ha $k=-2$, akkor $\cos 5x=\frac{\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}=-\frac{3\pi}{10}$,

$$x=\pm\frac{1}{5}\arccos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+\frac{2}{5}k\pi.$$

5. $2\cos^2 x+\cos x-1=0$.

Megoldás: $\cos x=t$ helyettesítéssel a $2t^2+t-1=0$ vegyes másodfokú egyenletet kell megoldanunk:

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1}{2}\ \text{és}\ t_2=\frac{-1-3}{4}=-1.$$

Tehát $\cos x_1=\frac{1}{2}$ és $\cos x_2=-1$ egyenleteket kell megoldani:

$\cos x_1=\frac{1}{2}$-ből $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ és $\cos x_2=-1$-ből $x_2=\pi+2k\pi$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-4\operatorname{tg} x=0$.

Megoldás: Felhasználva az $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ összefüggést,

$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$ egyenletre jutunk, melynek megoldása:

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\sqrt{3}}=\frac{4\pm 2}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pm 1}{\sqrt{3}},$$

Tehát az egyenlet gyökei:

$$(\operatorname{tg} x)_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{és} \quad (\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Most olyan trigonometrikus egyenleteket tárgyalunk, amelyeknek bal oldala két vagy több trigonometrikus függvény szorzatából áll, a jobb oldal pedig nullával egyenlő. Ahhoz, hogy a két vagy több tényezőből álló szorzat nulla legyen, elegendő a következő két feltétel egyidejű teljesülése:

a tényezők közül legalább egy nulla legyen;

a többi tényező pedig mind értelmezve legyen.

(Kizárjuk azokat az eseteket, amikor az egyik tényező végtelenné válik.)

Példák

1. $\sin x(1+2\cos x) = 0.$

Megoldás

a) $\sin x = 0, \quad x_1 = k\pi,$

b) $1+2\cos x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$

A megoldások mindkét sorozata lehetséges, mivel $\sin x$ és $\cos x$ tetszőleges valós argumentum mellett véges.

2. $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0.$

Megoldás

a) $\operatorname{tg} 3x = 0, \quad 3x = k\pi, \quad x_1 = k\frac{\pi}{3}.$

Ez a megoldás kielégíti az egyenletet, mert a másik tényező ($\cos x$) véges minden valós argumentum esetére.

b) $\cos x = 0, \quad x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$

Ezt a sorozatot kizárjuk, mert $\operatorname{tg} 3x_2 = \operatorname{tg}\left[\frac{3\pi}{2}(2k+1)\right]$ végtelen.

A megoldás tehát: $x_1 = k\frac{\pi}{3}.$

3. $\sin 2x \operatorname{tg} x = 0.$

Megoldás

a) $\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, \quad x_1 = k\frac{\pi}{2}.$

E megoldásseregből nem felelnek meg azok, amelyek páratlan k-ból származnak, mert a második tényező akkor végtelenné válik. Tehát $k = 2m$ alakú lehet csak:

$$x_1 = 2m\frac{\pi}{2} = m\pi.$$

b) $\operatorname{tg} x = 0$, $x_2 = k\pi$.

E gyököket figyelembe kell vennünk, mert $\sin 2k\pi$ véges. A két megoldássereg egybeesik, tehát:

$$x = m\pi.$$

4. $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$.

Megoldás: $2\sin x(\sin x + 1) - \sqrt{3}(\sin x + 1) = 0$, $(\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$.

a) $\sin x + 1 = 0$, $\sin x = -1$, $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k-1)\frac{\pi}{2}$.

b) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ és $x_3 = -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$.

Mindhárom gyöksorozat kielégíti az egyenletet. (A trigonometrikus egyenletek gyakran többféle úton oldhatók meg. Itt is alkalmazhattuk volna pl. $\sin x$ -re nézve a másodfokú gyökképletet stb.)

Most olyan egyenletek megoldására mutatunk példát, ahol a bal oldal tört és a jobb oldal 0. Ahhoz, hogy egy tört nullával legyen egyenlő, elegendő a következő két feltétel egyidejű teljesülése:

a számláló legyen egyenlő nullával;

a nevező nullától különböző véges érték legyen.

(Azokat az eseteket, amikor a nevező nulla, kizárjuk.)

Példák

1. $\frac{1+2\cos x}{2+\cos x} = 0$.

Megoldás: $1 + 2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Ezek a gyökök kielégítik az egyenletet, mivel a nevező:

$$2 + \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) > 0 \quad \text{véges.}$$

2. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$.

Megoldás: $\operatorname{tg} x = 0$, $x = k\pi$, azonban $\sin 3x = \sin 3k\pi = 0$, ezért ezek az értékek nem jönnek számításba. Az egyenletnek nincs megoldása.

3. $\dfrac{\cos^2 x + \sin x \cos x - 1}{\cos x} = 0.$

Megoldás: $\dfrac{1-\sin^2 x + \sin x \cos x - 1}{\cos x} = 0,\quad \dfrac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos x} = 0,$

$\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x},\quad \sin x(1 - \operatorname{tg} x) = 0.$

(Vigyázat! $\sin x$-szel nem oszthatunk, hiszen $\sin x = 0$ is lehet. Ezáltal egy gyöksorozatot elvesztenénk, mivel az egyenlet az előzőnek nem lenne következménye.)

a) $\sin x = 0,\quad x = k\pi,$

b) $\cos x = \sin x,\quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$ (Mindkét gyöksorozat kielégíti az egyenletet.)

4. $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0.$

Megoldás: $\cos 2x = 0,\quad 2x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi,$

$x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\quad x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

Megvizsgáljuk, hogy a nevező nem válik-e zérussá ezeknél a gyököknél:

$$1 - \sin 2x_1 = 1 - \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 - 1 = 0,$$

$$1 - \sin 2x_2 = 1 - \sin 2\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 + 1 = 2.$$

Tehát csak a második sorozat jöhet számításba: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

Ha a trigonometrikus egyenletet olyan alakra tudjuk hozni, hogy ugyanazon trigonometrikus függvény áll az egyenlet mindkét oldalán, akkor az argumentumokra vonatkozóan algebrai egyenlet írható fel.

Két szög szinuszának, koszinuszának, tangensének, kotangensének egyenlőségére az alábbi tételeket mondhatjuk ki:

I. $\sin x = \sin x_0$ csak akkor áll fenn, ha vagy $x = x_0 + 2k\pi,$ amelyből:

$$x - x_0 = 2k\pi$$

vagy $x = -x_0 + (2k+1)\pi,$ amiből:

$$x + x_0 = (2k+1)\pi.$$

II. $\cos x = \cos x_0$ csak akkor áll fenn, ha vagy $x = x_0 + 2k\pi$, amiből:

$$x - x_0 = 2k\pi$$

vagy $x = -x_0 + k\pi$, amiből:

$$x + x_0 = 2k\pi.$$

III. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ csak akkor áll fenn, ha $x = x_0 + k\pi$ azaz

$$x - x_0 = k\pi.$$

Kizárjuk azt az esetet, amikor a szög $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

IV. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$ csak akkor áll fenn, ha $x = x_0 + k\pi$ vagyis

$$x - x_0 = k\pi \qquad (x \neq k\pi).$$

Megjegyzés: A fenti állításokat igazolhatjuk közvetlenül a $\sin x = \sin x_0$, $\cos x = \cos x_0$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$ egyenletek megoldásával is.

Például: $\sin x = \sin x_0$, $\sin x - \sin x_0 = 0$. Szorzattá alakítva: $2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2} = 0$.

a) $\sin\frac{x - x_0}{2} = 0$, $\frac{x - x_0}{2} = k\pi$, $x - x_0 = 2k\pi$.

b) $\cos\frac{x + x_0}{2} = 0$, $\frac{x + x_0}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x + x_0 = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$,

tehát $\sin x = \sin x_0$ csak akkor áll fenn, ha $x - x_0 = 2k\pi$ vagy $x + x_0 = (2k+1)\pi$.

Példák

1. $\sin 7x = \sin 5x$.

Megoldás

a) $7x + 5x = (2k+1)\pi$, $12x = (2k+1)\pi$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{12}$.

b) $7x - 5x = 2k\pi$, $2x = 2k\pi$, $x = k\pi$.

A gyökök mindkét sorozata kielégíti az egyenletet.

2. $\cos 5x = \cos 4x$.

Megoldás

a) $5x + 4x = 2k\pi$, $9x = 2k\pi$, $x = 2k\frac{\pi}{9}$.

b) $5x-4x=2k\pi$, $x=2k\pi$.

Mivel $k=9m$ esetén az *a*) megoldás *b*)-t is tartalmazza, ezért az egyenlet összes megoldását megadja az $x=\frac{2k\pi}{9}$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

Megoldás: A két szög szinuszának egyenlősége alapján

a) $\frac{\pi}{3}+x+\frac{\pi}{6}-x=(2k+1)\pi$ *b*) $\frac{\pi}{3}+x-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2k\pi$.

Mivel az első feltétel ellentmondásos egyenlőségre vezet, ezért csak a másodikból kapunk megoldást:

$2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$.

4. $\operatorname{tg}(2x-30°)-\operatorname{tg}(x+60°)=0$.

Megoldás: $\operatorname{tg}(2x-30°)=\operatorname{tg}(x+60°)$. Két szög tangensének egyenlőségi feltétele alapján:

$2x-30°-(x+60°)=k\cdot 180°$, $x=k\cdot 180°+90°$,

$x=(2k+1)\cdot 90°$, vagyis $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

5. $\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}7x=1$.

Megoldás: Egyik tényező sem lehet 0, tehát oszthatunk pl. $\operatorname{tg}3x\neq 0$ kifejezéssel:

$\operatorname{tg}7x=\frac{1}{\operatorname{tg}3x}=\operatorname{ctg}3x$, felhasználva a $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ összefüggést:

$\operatorname{tg}7x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$, $7x-\frac{\pi}{2}+3x=k\pi$, $10x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{20}$.

Minthogy $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}(2k+1)$ és a $\operatorname{tg}7x=\operatorname{tg}\frac{7\pi}{20}(2k+1)$ kifejezéseknek van értelme, ezért a talált gyökök kielégítik az egyenletet.

6. $\cos(x^2)=\cos x$.

Megoldás:

a) $x^2+x=2k\pi$, $x^2+x-2k\pi=0$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8k\pi}}{2}$.

Mivel x valós szám, ezért $k\geq 0$ lehet.

b) $x^2-x=2k\pi$, $x^2-x-2k\pi=0$, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8k\pi}}{2}$, $k\geq 0$.

7. $\sin x-\cos x=4\sin x\cos^2 x$.

Megoldás: A jobb oldalon $2\sin x\cos x=\sin 2x$ átalakítást elvégezve:

$\sin x-\cos x=2\sin 2x\cos x$.

A jobb oldalt összeggé alakítjuk a $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ képlet felhasználásával:

$$\sin x - \cos x = \sin 3x + \sin x, \quad \sin 3x = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(\pi - x).$$

a) $\frac{\pi}{2} - 3x + \pi - x = 2k\pi, \quad -4x = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$

b) $\pi - x - \frac{\pi}{2} + 3x = 2k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

A feladatmegoldások során különböző módszereket ismertünk meg, amelyek gyakran ugyanazon feladat megoldásakor is használhatók. Arra kell törekedni, hogy a többféle eljárás közül a legegyszerűbb módszert tudjuk kiválasztani, ügyelve arra, hogy ekvivalens egyenleteket hozzunk létre, vagy az átalakított egyenlet következménye legyen az előzőnek. Evégett vizsgáljuk meg a következő egyenletet:

$$a\sin x + b\cos x = c, \quad (a,b \neq 0) \tag{1}$$

A következő módszerekkel kereshetjük a megoldást:

1. vagy a $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ vagy $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ átalakítással kapott irracionális egyenlet megoldására térünk át

2. vagy a $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ átalakításokkal $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-re vonatkozólag másodfokú egyenletre térünk át, kikötve: $x \neq (2k+1)\pi$.

3. Az $(a\sin x + b\cos x)^2 + (b\sin x - a\cos x)^2 = a^2 + b^2$ (2) azonosság felhasználásával is megoldhatjuk az (1) egyenletet. Mivel $a\sin x + b\cos x = c$, (2)-be helyettesítve és rendezve:

$$b\sin x - a\cos x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \tag{3}$$

Az (1) és (3) $\sin x$-re és $\cos x$-re lineáris egyenletrendszert ad, amelyből

$$\sin x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}, \quad \cos x = \frac{bc \pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

A $0 \le x_0 < 2\pi$ feltételt kielégítő egyetlen megoldás elegendő az általános gyökképlethez: $x = x_0 + 2k\pi$.

4. Kiemeljük a $\sqrt{a^2+b^2}$ -et az (1)-ből:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = c.$$

Mivel $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, ezért létezik olyan φ szög, amelyre

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$$

vagy $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ és $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

Tehát az (1) egyenlet a következőbe megy át:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Az egyenletnek $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ vagy $a^2+b^2 \ge c^2$ feltétel mellett van megoldása.

Ennek az ún. "kisegítőszög bevezetése" módszernek az előnye nemcsak a trigonometrikus egyenletek gyors és hiánytalan megoldásában jelentkezik, hanem a trigonometrikus függvények vizsgálatánál is egyszerű átalakításokat tesz lehetővé, amelyek az elektromosságtanban gyakran felhasználhatók.

Pl.: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

Megoldás: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$, és

$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$, ezért $\varphi=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, tehát $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{x}{2}$.

Felhasználva a $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ összefüggést, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\frac{x}{2}$.

a) $\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{2}=2k\pi$, $-\frac{1}{2}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$.

b) $\frac{\pi}{4}-x-\frac{x}{2}=2k\pi$, $-\frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}k\pi$.

Megjegyzés: Az ismeretlen trigonometrikus és algebrai kifejezését is tartalmazó ún. vegyes trigonometrikus egyenlet (pl.: $\operatorname{tg}x-2x=0$) megoldására nincs általános elemi módszer. Az ilyen típusú egyenletek megoldását grafikus vagy numerikus közelítő eljárások segítségével állítjuk elő (l. a 8.6 pontot). [10].

Feladatok

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket ($k\in Z$):

1. $\sin^2 x-\sin x=0$. $\left[k\pi \text{ és } \frac{\pi}{2}+2k\pi.\right]$

2. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$. $\left[2k\pi \text{ és } \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.\right]$

3. $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0$. $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ és } \frac{\pi}{3}+k\pi.\right]$

4. $3\cos^2 x-\sin x+1=0$. $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi.\right]$

5. $\sin(30°+x)+\sin(30°-x)=\frac{1}{2}$. $\left[\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.\right]$

6. $\cos(45°+x)\cos(x-45°)=-0{,}5$. $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi.\right]$

7. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$. $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ és } \frac{5\pi}{6}+2k\pi.\right]$

8. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$. $\left[\pm\frac{\pi}{3}+k\pi.\right]$

9. $\sin x\sin(x+1)=\cos x\cos(x+1)$. $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{2}.\right]$

10. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$. $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ és } \frac{5\pi}{6}+2k\pi.\right]$

11. $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$. $\left[\frac{k\pi}{4}.\right]$

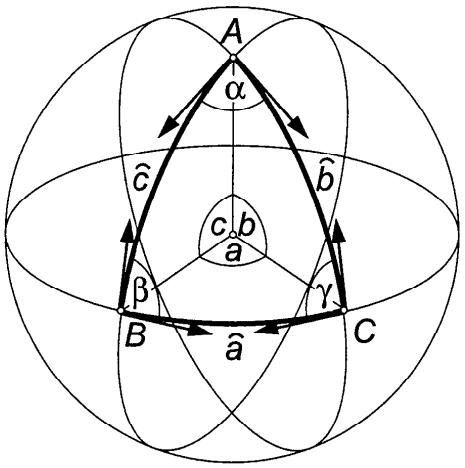
12. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$. $\left[\frac{4k-1}{4}\pi,\ 2k\pi \text{ és } \frac{4k-1}{2}\pi.\right]$

13. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$. $\left[\frac{4k-1}{4}\pi \text{ és } k\pi.\right]$

14. $\frac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$. $\left[\frac{\pi}{3}+4k\pi \text{ és } \frac{5\pi}{3}+4k\pi.\right]$

5.3.12 A gömbi trigonometria alapfogalmai

A gömbfelület három főkörének íve által határolt részét *gömbháromszögnek* nevezzük (327. ábra). A gömbháromszögnek három oldala: a, b, c; három szöge: α, β, γ és három csúcsa: A, B, C van. A gömbháromszöget előállító főkörök síkjai olyan háromélt (triédert) határoznak meg, amelynek élszögei a gömbháromszög oldalaival, lapszögei pedig annak szögeivel egyenlők. Így a triéder oldalaira és szögeire megállapított tételek a gömbháromszög oldalaira és szögeire is alkalmazhatók. E tételek bizonyítás nélkül összefoglalva a következők:



327. ábra. Gömbháromszög

1. A gömbháromszög bármelyik oldala kisebb, mint a másik két oldalának összege.

2. A gömbháromszög egyenlő oldalaival szemben egyenlő szögek, és egyenlő szögeivel szemben egyenlő oldalak fekszenek. A gömbháromszög nagyobb oldalával szemben nagyobb szög, nagyobb szögével szemben nagyobb oldal fekszik.

3. A gömbháromszög oldalainak összege 0°-nál nagyobb és 360°-nál kisebb,

azaz $$0° < a + b + c < 360°.$$

4. A gömbháromszög szögeinek összege pedig 180°-nál mindig nagyobb és 540°-nál kisebb,

azaz $$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°.$$

Azt a szögértéket, amellyel a gömbháromszög három szögének összege meghaladja a 180°-ot, *gömbi fölöslegnek* vagy *szferikus excesszusnak* mondjuk, és ε-nal jelöljük, azaz:

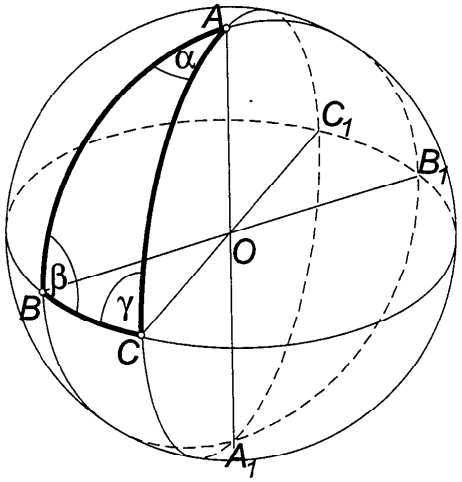
$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon.$$

Az oldalak nagysága szerint megkülönböztetünk egyenlő oldalú, egyenlő szárú és különböző oldalú; a szögek nagysága szerint pedig derékszögű és ferdeszögű vagy általános gömbháromszöget.

A gömbháromszögpárok közül megemlítjük a mellék-, a csúcs-, az átellenes és a sarkgömbháromszögeket (polárgömbháromszögeket).

A *mellékgömbháromszög* az adott gömbháromszöget gömbkétszöggé egészíti ki, pl. az ABC gömbháromszögnek mellékháromszögei az A_1BC, B_1AC és C_1AB gömbháromszögek (328. ábra). A mellékgömbháromszögnek egy oldala mindig közös az adott gömbháromszöggel.

A *csúcsgömbháromszögek* mindegyikének egy csúcsa közös az eredeti gömbháromszög egy csúcsával. Pl. az ABC gömbháromszög csúcsgömbháromszögei az AC_1B_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 gömbháromszögek.



328. ábra. Mellékgömbháromszög

Az *átellenes gömbháromszögek* megfelelő csúcspontjai átellenes pontok, pl. az ABC és $A_1B_1C_1$ gömbháromszögek átellenes háromszögek. Az átellenes gömbháromszögek egymáshoz szimmetrikusak és egyenlő felületűek.

Sarkgömbháromszöget a következő szerkesztéssel állíthatunk elő: a gömbháromszög triéderének mindhárom oldalsíkjára a gömb középpontján átmenő és a triéder belseje felé haladó egy-egy merőlegest állítunk (329. ábra). Ezek a merőlegesek a gömböt A_1, B_1, C_1 pontban döfik. A merőlegesek által meghatározott triédert az adott triéder sarktriéderének nevezzük. A szerkesztés alapján azt is látjuk, hogy a sarktriédernek sarktriédere az eredeti triéder. Ha az A_1, B_1, C_1 pontokat főkörök íveivel összekötjük úgy, hogy mindegyik ív 180°-nál kisebb legyen, akkor megkapjuk az adott gömbháromszög sarkgömbháromszögét. Tehát az ABC gömbháromszög sarkgömbháromszöge az $A_1B_1C_1$ gömbháromszög és fordítva.

A sarkgömbháromszög megfelelő szögei és az eredeti gömbháromszög oldalai egymást 180°-ra egészítik ki,

azaz: $$a + \alpha_1 = b + \beta_1 = c + \gamma_1 = 180°.$$

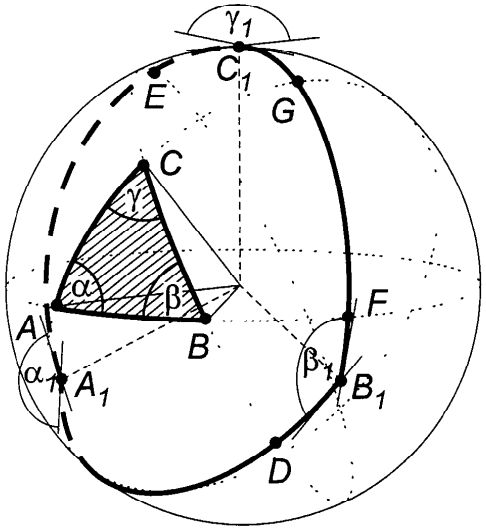
Ugyanis $a + \alpha_1 = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{DC}$, de a szerkesztés szerint: $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DC} = 90°$, így $a + \alpha_1 = 2 \cdot 90° = 180°$ stb.

A sarkháromszög megfelelő oldalai az adott gömbháromszög szögeit ugyancsak 180°-ra egészítik ki:

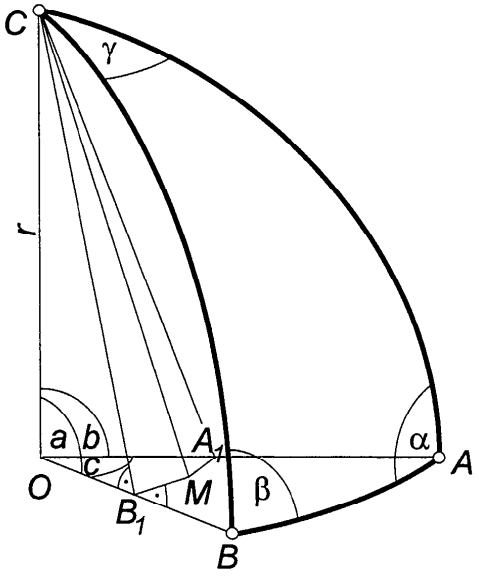
$$a_1 + \alpha = b_1 + \beta = c_1 + \gamma = 180°.$$

Az előző mintájára: $a_1 + \alpha = \overset{\frown}{B_1C_1} + \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{B_1F} + \overset{\frown}{FC_1} + \overset{\frown}{FG} =$
$= \overset{\frown}{B_1G} + \overset{\frown}{FC_1}$, de a szerkesztés szerint: $\overset{\frown}{B_1G} = \overset{\frown}{FC_1} = 90°$, tehát:

$$a_1 + \alpha = 2 \cdot 90° = 180°.$$



329. ábra. Sarkgömbháromszög



330. ábra. Gömbháromszög

5.3.13 Gömbháromszög szinusztétele

A gömbháromszög szinusztétele összefüggést ad a gömbháromszög oldalainak és szögeinek szinusza között. Legyen az ABC gömbháromszög az O középpontú r sugarú gömb felületén (330. ábra).

A gömbháromszög C csúcsából a triéder OAB lapjára bocsátott merőleges talppontja M, a C, ill. M pontból az OB élre bocsátott merőleges talppontja legyen B_1. Az így előálló OB_1C derékszögű síkháromszögből: $B_1C = r\sin a$, a B_1CM derékszögű síkháromszögből pedig:

$$CM = B_1C \cdot \sin\beta = r\sin a\sin\beta.$$

Az OA_1C és az A_1CM derékszögű síkháromszögből hasonlóan adódik: $CM = r\sin b\sin\alpha$.

A kapott két kifejezést egyenlővé téve, és r-rel egyszerűsítve:

$$\sin a\sin\beta = \sin b\sin\alpha \qquad \text{vagy}$$

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Hasonló meggondolással kaphatunk még két összefüggést:

$$\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma \qquad \text{és}$$
$$\sin c : \sin a = \sin\gamma : \sin\alpha .$$

Tehát a szinusztétel szerint

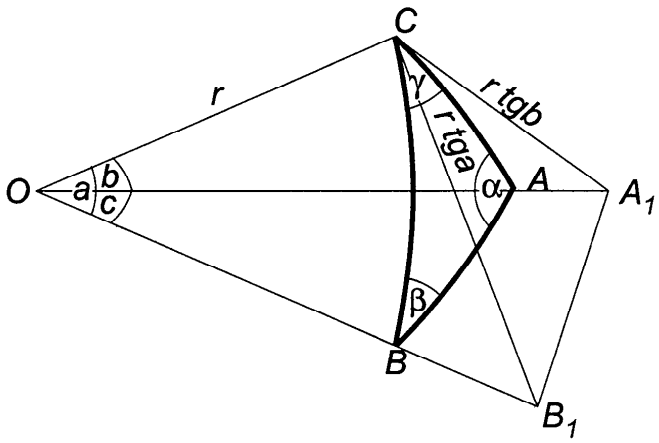
bármely gömbháromszögben két oldal szinuszának aránya egyenlő az oldalakkal szemben fekvő szögek szinuszainak arányával.

Mindhármat egybefoglalhatjuk:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \qquad (1)$$

5.3.14 Gömbháromszög koszinusztétele

A gömbháromszögben megkülönböztetjük az oldalak és a szögek koszinusztételét. Az oldalak koszinusztétele a gömbháromszög három oldalának és egyik szögének, a szögek koszinusztétele pedig a gömbháromszög három szögének és egyik oldalának koszinusza között állapít meg összefüggést.



331. ábra. Gömbháromszög

Legyen az ABC gömbháromszög az r sugarú O középpontú gömb felületén (331. ábra). A gömbháromszög C csúcsában az oldalakhoz rajzolt érintők a triéder OAB síkját döfjék az A_1, ill. B_1 pontban.

Az OA_1C és az OB_1C derékszögű síkháromszögekből:

$$OA_1 = \frac{r}{\cos b}, \quad OB_1 = \frac{r}{\cos a}, \quad A_1C = r\,\mathrm{tg}\,b, \quad B_1C = r\,\mathrm{tg}\,a$$

A síkháromszög koszinusztételét felhasználva, fejezzük ki $\overline{A_1B_1}^2$ értékét az OB_1A_1 és CB_1A_1 síkháromszögekből!

$OB_1A_1\Delta$-ből: $$\overline{A_1B_1}^2 = \frac{r^2}{\cos^2 a} + \frac{r^2}{\cos^2 b} - \frac{2r^2}{\cos a \cos b}\cos c,$$

$CB_1A_1\Delta$-ből: $$\overline{A_1B_1}^2 = r^2\mathrm{tg}^2 a + r^2\mathrm{tg}^2 b - 2r^2\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\cos\gamma.$$

A két jobboldalt egyenlővé téve, r^2-tel egyszerűsítve és az $\frac{1}{\cos^2 a} - \mathrm{tg}^2 a = 1$ összefüggést felhasználva:

$$2 - \frac{2\cos c}{\cos a \cos b} = -2\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\cos\gamma,$$

amelynek rendezésével:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \qquad (2)$$

Hasonló módon származtatható:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \qquad (3)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \qquad (4)$$

Ez a három képlet az *oldalak koszinusztétele*, mely szerint

a gömbháromszög bármely oldalának koszinuszát megkapjuk, ha a másik két oldal koszinuszának szorzatához ugyanezen két oldal szinuszának és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát hozzáadjuk.

Ha az adott gömbháromszöghöz tartozó $A_1B_1C_1$ sarkháromszögre (329. ábra) alkalmazzuk a koszinusztételt, akkor

$$\cos c_1 = \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos\gamma_1 \qquad (2^*)$$

Felhasználva az $a_1 + \alpha = b_1 + \beta = c_1 + \gamma = 180°$ és $c + \gamma_1 = 180°$ összefüggéseket, $a_1 = 180° - \alpha$, $b_1 = 180° - \beta$, $c_1 = 180° - \gamma$ és $\gamma_1 = 180° - c$.

Ezen értékek (2*)-ba való helyettesítése és $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ stb. figyelembevétele után:

$$-\cos\gamma = -\cos\alpha(-\cos\beta) + \sin\alpha\sin\beta(-\cos c), \qquad \text{s így}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c \qquad (5)$$

Hasonló módon származtatható:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \qquad (6)$$

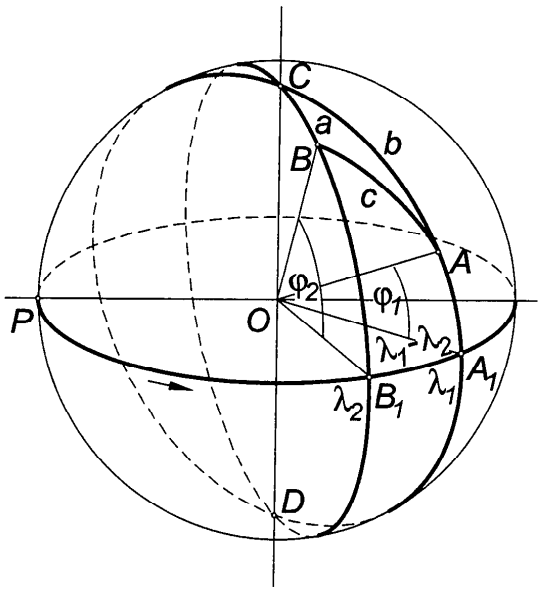
$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b \qquad (7)$$

Ez a három képlet a szögek koszinusztétele, amely szerint

a gömbháromszög bármely szögének koszinuszát megkapjuk, ha a másik két szög koszinuszának negatív szorzatához hozzáadjuk ugyanezen két szög szinuszának és a kérdéses szöggel szemben fekvő oldal koszinuszának a szorzatát.

5.3.15 Két földrajzi hely távolságának meghatározása

A gömbi trigonometria gyakorlati alkalmazására példa két földrajzi hely távolságának meghatározása. Ha számításaink közben feltételezzük, hogy a Föld alakja tökéletes gömb, akkor az A és B helynek (332. ábra) egymástól való távolságát a rajtuk keresztül menő főkör kisebbik íve adja meg. Méréseinket általában Greenwichen vagy Párizson áthaladó délkörtől kezdjük. Ha az A és B helyeken át délköröket rajzolunk, akkor az ABC gömbháromszögre felírva az oldalak koszinusztételét, az $\widehat{AB}$ gömbi távolságot meghatározhatjuk:



332. ábra. Szférikus távolság

$$\cos c = \cos\widehat{AB} = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma.$$

Ha bevezetjük a $\widehat{B_1B} = \varphi_2$, $\widehat{A_1A} = \varphi_1$ *északi szélességet* és $\widehat{PA_1} = \lambda_1$, $\widehat{PB_1} = \lambda_2$ *keleti hosszúságot*, akkor az $a = 90° - \varphi_2$, $b = 90° - \varphi_1$ és $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$ helyettesítés elvégzése után:

$$\cos\widehat{AB} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \qquad (8)$$

Ezt a képletet a következő átalakított alakban is szokás használni:

$$\cos\widehat{AB} = \frac{\sin\varphi_1 \sin(\varphi_2 + \omega)}{\cos\omega} \qquad (9)$$

ahol ω a

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \qquad (10)$$

képletből számítandó.

Ha a Föld délköreinek negyedrészét kereken 10000 km-nek vesszük, akkor 1°-nak $\frac{10000 \text{ km}}{90} \approx 111{,}11$ km felel meg, azaz a fokokban kiszámított $\widehat{AB}$ távolságot a 111,11 számmal kell szorozni, hogy a két hely földrajzi távolságát kilométerekben kapjuk meg.

Számításoknál a keleti hosszúságot és az északi szélességet pozitívnak, a nyugati hosszúságot és a déli szélességet negatívnak vesszük.

Példa: Számítsuk ki, hány km távolság van Miskolc és Szentpétervár között, ha Szentpétervár földrajzi fekvése: keleti hosszúság $\lambda_1 = 30°17'48"$, északi szélesség $\varphi_1 = 59°56'30"$ és Miskolc adatai: keleti hosszúság $\lambda_2 = 20°47'55"$, északi szélesség $\varphi_2 = 48°6'10"$.

Megoldás: $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$, ahol:

$\lambda_1 - \lambda_2 = 30°17'48" - 20°47'55" = 9°29'53"$

A számításokat hatjegyű logaritmus értékekkel végezve:

$$\begin{aligned} \lg\operatorname{ctg}\varphi_1 &= 9{,}762460 - 10 \\ \lg\cos(\lambda_1 - \lambda_2) &= 9{,}994005 - 10 \\ \lg\operatorname{tg}\omega &= \overline{9{,}756465 - 10} \\ \omega &= 29°43' \end{aligned}$$

$\cos\widehat{AB} = \frac{\sin\varphi_1 \sin(\varphi_2 + \omega)}{\cos\omega}$,

$$\varphi_2 + \omega = 48°6'10" + 29°43' = 77°49'10"$$

$$\begin{aligned} \lg \sin \varphi_1 &= 9{,}937275 - 10 \\ \lg \sin(\varphi_2 + \omega) &= 9{,}990112 - 10 \\ \lg \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \omega) &= 9{,}927387 - 10 \\ \lg \cos \omega &= 9{,}938763 - 10 \\ \lg \cos \widehat{AB} &= 9{,}988624 - 10 \\ \widehat{AB} &= 13°3'26" \approx 13{,}057° \end{aligned}$$

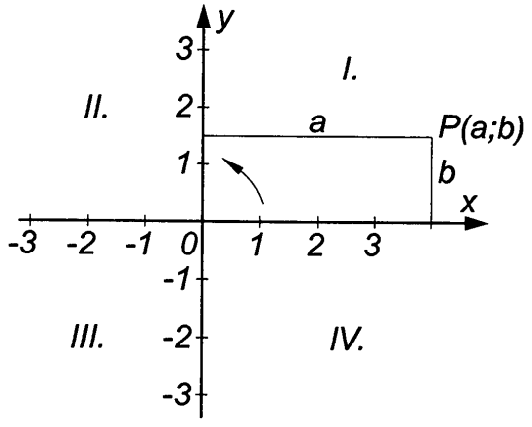
tehát Szentpétervár távolsága Miskolctól: $13{,}057° \cdot \frac{10000}{90°} = \frac{13057}{9} \approx 1450{,}8$ km.

Feladat: Milyen messze van Amszterdam Budapesttől, ha Budapest: északi szélesség 47°29'36", keleti hosszúság 19°3'48"; Amszterdam: északi szélesség 52° 22'30", keleti hosszúság 4°53'15"? [1147 km.]

5.4 KOORDINÁTAGEOMETRIA (ANALITIKUS GEOMETRIA)

5.4.1 A pont derékszögű koordinátái a síkon

A pont helyzetének a síkon való meghatározásához vegyünk fel két egymásra merőleges, irányított, egységgel ellátott egyenest (számegyenest). Az egyeneseket *koordinátatengelyeknek*, az *O* metszéspontjukat koordinátakezdőpontnak vagy röviden kezdőpontnak, *origónak* mondjuk (333. ábra). Az így előállított tengelyrendszer *derékszögű* vagy *Descartes*-féle koordinátarendszer (*R. Descartes* (1596–1650), francia filozófus és matematikus). A "vízszintes" tengely az *abszcissza-*, a



333. ábra. Descartes-féle koordinátarendszer

"függőleges" tengely az *ordinátatengely*. Az abszcisszatengelyt általában *x-tengelynek*, az ordinátatengelyt pedig *y-tengelynek* nevezzük. Az x-tengelyen a pozitív irányt rendszerint jobbra, az y-tengelyen pedig felfelé szokás felvenni. A sík bármely P pontjának helyzetét a pontnak a koordinátarendszer két tengelyétől mért előjeles távolságával határozzuk meg. A pontnak a tengelyektől mért előjeles távolságai a *pont koordinátái*. Az x-tengellyel párhuzamos koordináta az *abszcissza*, az y-tengellyel párhuzamos koordináta pedig az *ordináta*. Az abszcissza az origótól jobbra pozitív, balra negatív, az ordináta az origótól felfelé pozitív, lefelé negatív.

A két tengellyel létrehozott síknegyedekben az abszcissza és ordináta előjelét a táblázat szemlélteti:

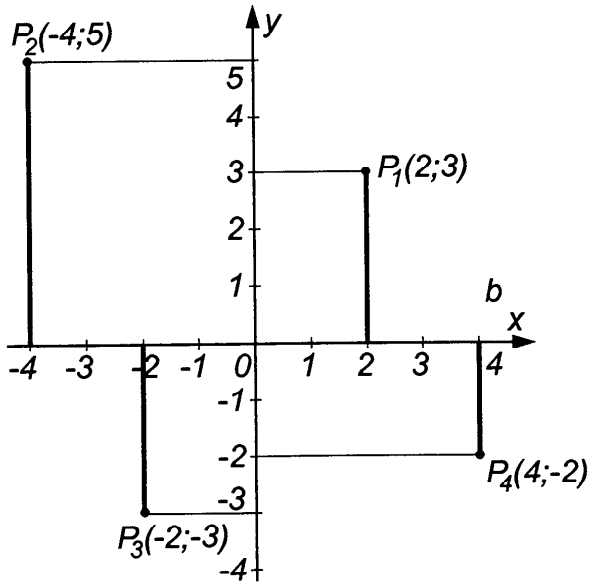
Síknegyed	I.	II.	III.	IV.
Abszcissza: x	+	−	−	+
Ordináta: y	+	+	−	−

Ha a P pont abszcisszája $x = a$, ordinátája $y = b$, akkor a P pontot koordinátáival röviden így jelöljük: $P(a,b)$.

A koordinátarendszerben a szögmérés pozitív irányát az óramutató járásával ellentétesen vesszük fel.

Az abszcissza tengelyen fekvő pontok ordinátája nullával egyenlő, az ordináta tengelyen fekvő pontoknak pedig az abszcisszája egyenlő nullával. Az origóval egybeeső pont mindkét koordinátája nulla.

Példa: Szerkesszük meg a $P_1(2,3)$, $P_2(-4,5)$, $P_3(-2,-3)$, $P_4(4,-2)$ pontokat. Megoldás: 334. ábra.



334. ábra. Pontok a koordinátarendszerben

5.4.2 A pont koordinátáihoz kapcsolódó alapfeladatok

a) Két pont egymástól való távolsága

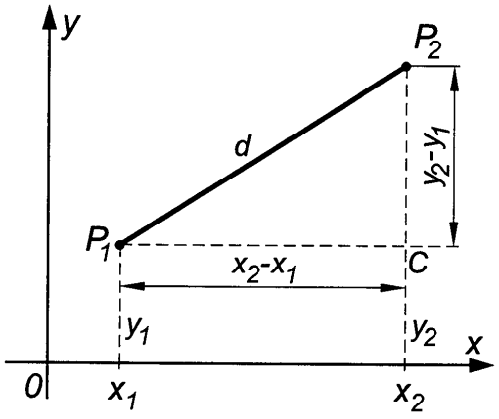
Legyenek adva a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontok (335. ábra), és jelöljük a P_1P_2 távolságot d-vel; akkor a P_1CP_2 derékszögű háromszögre alkalmazva *Pitagorasz* tételét:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

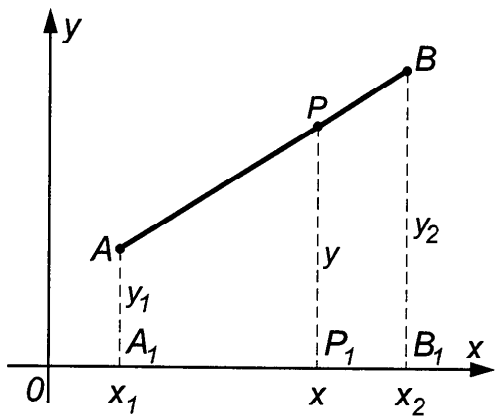
vagyis a két pont koordinátáiból a két pont távolsága meghatározható. Ha egy $P(x, y)$ pontnak az origótól való távolságát akarjuk kiszámítani, akkor az (1) képlet

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

alakra egyszerűsödik.



335. ábra. Két pont távolsága



336. ábra. Távolságot adott arányban osztó pont

Példa: Számítsuk ki az AB távolságot, ha $A(-3, 2)$ és $B(1, -1)$.

Megoldás: Az (1) képlet szerint: $x_1 = -3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, tehát

$$AB = d = \sqrt{[1-(-3)]^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ hosszúságegység.}$$

b) Valamely távolságot adott arányban osztó pont koordinátái

Legyen az $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pontok távolsága AB (336. ábra). Az AB távolságot a $P(x, y)$ pont úgy osztja, hogy:

$$\frac{AP}{PB} = k \quad (k > 0).$$

Számítsuk ki a P pont koordinátáit az A és B pontok koordinátái segítségével. Az ábrából az elemi geometria tétele szerint írhatjuk:

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} = \frac{AP}{PB}, \text{ de } \frac{AP}{PB} = k, \text{ tehát } \frac{A_1P_1}{P_1B_1} = k.$$

Az ábrából viszont:

$$A_1P_1 = OP_1 - OA_1 = x - x_1,$$
$$P_1B_1 = OB_1 - OP_1 = x_2 - x,$$

ezért

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k, \text{ amiből } x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k},$$

s teljesen hasonló meggondolással adódik:

$$y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Tehát az AB távolságot k arányban osztó $P(x, y)$ pont koordinátái:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}. \tag{2}$$

Ha P az AB távolság felező pontja, akkor $k = \frac{AP}{PB} = 1$, mert $AP = PB$ s így az AB távolságot felező $P(x_f, y_f)$ pont koordinátái:

$$x_f = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_f = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Példák

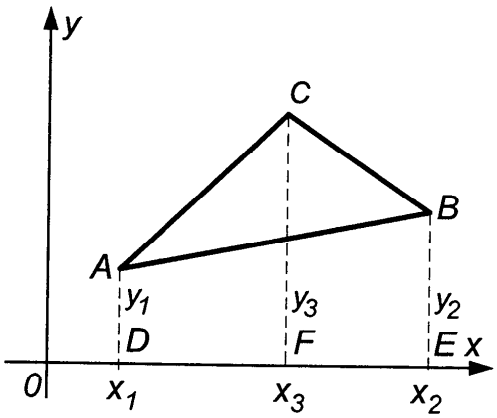
1. Számítsuk ki az $A(-5,-3)$ és $B(4,-6)$ pontok távolságát 3/2 arányban osztó $P(x,y)$ pont koordinátáit.

Megoldás: Mivel $k = 3/2$, ezért (2) alapján:

$$x = \frac{-5+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \text{ és } y = \frac{-3+\frac{3}{2}\cdot(-6)}{1+\frac{3}{2}} = -4\frac{4}{5},$$

vagyis a kérdéses pont $P\left(\frac{2}{5},-4\frac{4}{5}\right)$.

2. Számítsuk ki az m_1 tömegű $M_1(x_1,y_1)$ és m_2 tömegű $M_2(x_2,y_2)$ anyagi pontokból álló rendszer súlypontjának koordinátáit.



337. ábra. Háromszög

Megoldás: Az $S(x,y)$ súlypont az M_1M_2 távolságot $\frac{m_2 g}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}$ arányban osztja (g a nehézségi erő gyorsulása), tehát

$$x = \frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y = \frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

c) A háromszög területe

Az $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ csúcspontokkal adott háromszög (337. ábra) területét megkapjuk, ha az $ACFD$ és $BCFE$ trapézok területösszegéből kivonjuk az $ABED$ trapéz területét, azaz

$$t_\Delta = \frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_2-x_3)-\frac{y_2+y_1}{2}(x_2-x_1).$$

A szorzások, az összevonás és x_1-nek, x_2-nek, x_3-nak két-két tagból való kiemelése után:

$$t_\Delta = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right] \qquad (3)$$

ami a harmadrendű determináns kifejtésével összevetve, az alábbi alakban is írható:

$$t_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Megjegyzés: A (3) és (4) képlet előjeles területi mérőszámot ad.

Példa: Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha $A(2, -1)$; $B(1, 4)$ és $C(-3, 2)$.

Megoldás: A (3) képlet szerint:

$$t_\Delta = \frac{1}{2}\{2(4-2)+1[2-(-1)]+(-3)(-1-4)\} =$$

$$= \frac{1}{2}(4+3+15) = \frac{22}{2} = 11 \text{ területegység.}$$

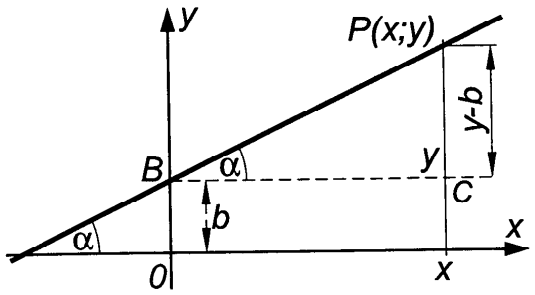
A (4) képlet felhasználásával:

$$t_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[2(4-2)+1(1+3)+1(2+12)] =$$

$$= \frac{1}{2}(4+4+14) = \frac{22}{2} = 11 \text{ területegység.}$$

5.4.3 Az egyenes egyenletei

a) Az egyenes egyenletének iránytényezős alakja



338. ábra. Egyenes: $y = mx + b$

Az y-tengelyt a $B(0,b)$ pontban metsző egyenesnek az x-tengely pozitív irányával bezárt szöge (iránytényezője) legyen α (338. ábra). Az egyenesnek egy tetszőleges pontja legyen $P(x,y)$, akkor a BCP derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}, \quad y - b = x\operatorname{tg}\alpha \quad \text{vagy} \quad y = x\operatorname{tg}\alpha + b.$$

A $\operatorname{tg}\alpha$-t *iránytényezőnek* nevezzük, és m-mel jelöljük, így az egyenes egyenlete

$$y = mx + b \tag{1}$$

Ha az egyenes az origón megy át, akkor $b = 0$, tehát az origón átmenő egyenes egyenlete:

$$y = mx$$

Ha ez az egyenes a koordinátarendszer I. és III. negyedét felezi, akkor $m = \operatorname{tg} 45° = 1$, tehát

$$y = x.$$

A II. és IV. negyedet felező egyenes egyenlete:

$$y = -x,$$

mivel $m = \operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

Az x-tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete:

$$y = b$$

($m = \operatorname{tg} 0° = 0$; b az x-tengelytől mért távolság).

Ha az egyenes az y-tengellyel párhuzamos, akkor minden pontjának abszcisszája állandóan ugyanaz, tehát egyenlete:

$$x = a$$

alakú (a az y-tengelytől mért távolság).

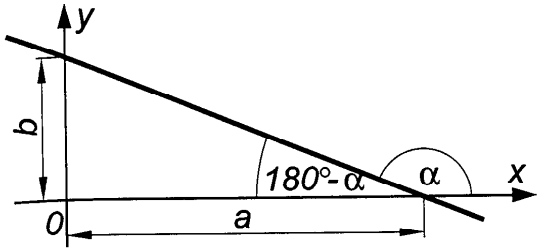
Az y-tengely egyenlete: $x = 0$.

Az x-tengely egyenlete: $y = 0$.

b) Az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakja

Vegyünk fel egy olyan egyenest, amely az x-tengelyt $(a, 0)$, az y-tengelyt pedig $(0, b)$ pontban metszi (339. ábra). Mivel $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, ezért ennek az egyenesnek az irány-tangense:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{b}{a}.$$



339. ábra. Egyenes

Ezt az (1) képletbe helyettesítve:

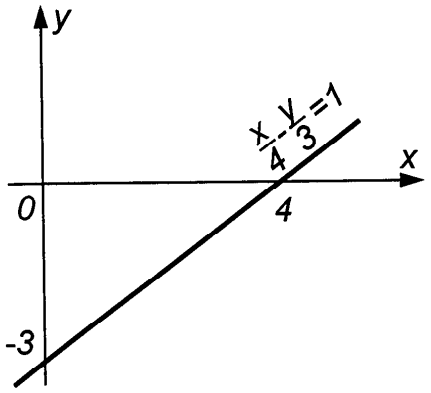
$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

osztva b-vel és rendezve:

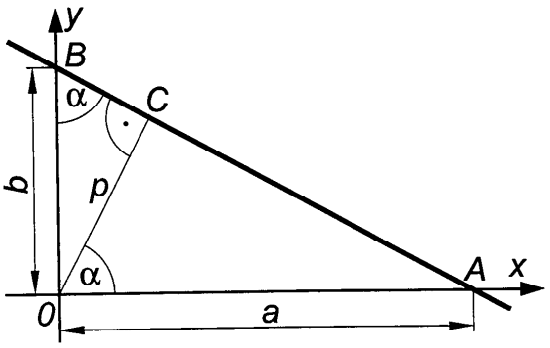
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

Példa: Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az x-tengelyt az origótól 4, az y-tengelyt pedig –3 egységnyi távolságban metszi (340. ábra)!

Megoldás: Mivel $a = 4$ és $b = -3$, ezért az egyenes egyenlete: $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$.



340. ábra. Egyenes



341. ábra. Egyenes

c) Az egyenes egyenletének Hesse-féle normálalakja (*Ludwig Otto Hesse* 1811–1874)

Az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenesre húzzunk az origóból merőlegest (341. ábra). Ha a merőlegesnek az x-tengellyel bezárt szöge α, hossza pedig p ($p \geq 0$, $0 \leq \alpha < 360°$), akkor az $OAC\Delta$-ből $a = \frac{p}{\cos\alpha}$ és az $OBC\Delta$-ből $b = \frac{p}{\sin\alpha}$, tehát $\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$ amiből

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (3)$$

Példa: Számítsuk ki az $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ egyenesnek az origótól való távolságát.

Megoldás: Az $a=\frac{p}{\cos\alpha}$ és $b=\frac{p}{\sin\alpha}$ összefüggésből:

$$\cos^2\alpha=\frac{p^2}{a^2},\quad \sin^2\alpha=\frac{p^2}{b^2} \text{ és } \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1=\frac{p^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2} \text{ amiből}$$

$$p=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}=2{,}4 \text{ hosszúságegység.}$$

d) Az egyenes egyenletének általános alakja

Az egyenesnek mind az irányténye zős, mind a *Hesse*-féle egyenlete kétismeretlenes elsőfokú egyenlet. Most megmutatjuk, hogy minden kétismeretlenes elsőfokú egyenlet:

$$Ax+By+C=0 \qquad (4)$$

(ahol A, B és C állandó) egyenest határoz meg. Ha ui. $B=0$, de $A\neq 0$, akkor $Ax+C=0$, amiből $x=-\frac{C}{A}$. Ez pedig az y-tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete.

Ha $B\neq 0$, akkor a (4) egyenlet y-ra megoldva:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

amely a $-\frac{A}{B}=m$ és $-\frac{C}{B}=b$ helyettesítéssel az $y=mx+b$ irányténye zős alakba megy át, tehát valóban egyenes egyenlete. Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletet, mivel mindig egyenest ábrázol, *lineáris egyenletnek* nevezzük.

Példa: Írjuk fel a $3x-5y=10$ egyenes irányténye zős és tengelymetszetes egyenletét.

Megoldás: Az adott egyenlet y-ra feloldva:

$y=\frac{3}{5}x-2$ (irányténye zős alak).Az adott egyenlet 10-zel osztva:

$\frac{3}{10}x-\frac{5}{10}y=1$, amiből $\frac{x}{\frac{10}{3}}+\frac{y}{-2}=1$ (tengelymetszetes alak)

e) Az egy adott ponton átmenő, adott irányú és a két adott ponton átmenő egyenes egyenlete

Az egyenes egyenlete a pont koordinátáinak felhasználásával közvetlenül is felírható. Ha az $y = mx + b$ egyenes a $P_1(x_1, y_1)$ ponton keresztül megy, akkor a P_1 pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, azaz $y_1 = mx_1 + b$. Az $y - y_1$ különbség szolgáltatja az egy adott pontra illeszkedő, adott irányú egyenes egyenletét:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (5)$$

Ha ebben az egyenletben m különböző értékeket vesz fel, akkor (5) a P_1 ponton átmenő egyenessereg egyenletét jelenti.

Példa: Írjuk fel a $P_1(-3,1)$ pontra illeszkedő és $\alpha = 30°$-os irányszögű egyenes egyenletét.

Megoldás: $x_1 = -3$, $y_1 = 1$ és $m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tehát

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}[x - (-3)] \text{ vagy } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} + 1.$$

Ha az egyenes keresztülmegy még a $P_2(x_2, y_2)$ ponton is, akkor a P_2 pont koordinátái szintén kielégítik az (5) egyenletet, azaz $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, amiből $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Ezt (5)-be helyettesítve megkapjuk a $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ adott pontokon átmenő egyenes egyenletét:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (6)$$

A (6) egyenletet determináns alakban is felírhatjuk. Ui. $(x_2 - x_1)$-gyel szorozva és minden tagot bal oldalra rendezve, az

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

alakra jutunk, amelynek bal oldala megegyezik az

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

harmadrendű determináns kifejtésével, tehát a két adott ponton átmenő egyenes egyenletének determinánsos alakja:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Példa: Határozzuk meg a $P_1(2,-1)$ és $P_2(3,4)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

Megoldás: A (6) képlet felhasználásával, mivel $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$:

$$y-(-1)=\frac{4-(-1)}{3-2}(x-2), \text{ amiből } y = 5x-11.$$

(7) szerint:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ azaz } x\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$-5x+y+11=0$ vagyis $y = 5x-11$.

f) Az egyenes vektoregyenlete

Az egyenes egyenletét a vektorokra vonatkozó ismeretekkel is megadhatjuk. (l. még a 6.8 pontot.)

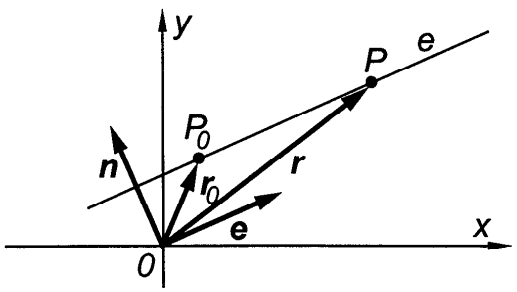
Az *e* egyenessel párhuzamos **e**(a,b) vektor az egyenes *irányvektora* (341.*a* ábra), az egyenesre merőleges **n**(A, B) vektor pedig az egyenes *normálvektora*, tehát $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}$.

A merőlegesség feltétele:

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = aA + bB = 0;\ (b \neq 0,\ A \neq 0), \text{ amelyből } \frac{a}{b} = -\frac{B}{A}.$$

Ennek jelentése: egy adott vektorra merőleges vektor koordinátáit úgy állíthatjuk elő, hogy az adott vektor koordinátáit

felcseréljük és az egyiket –1-gyel szorozzuk. Pl. ha az **u** vektor koordinátái (2,3), akkor a rá merőleges **v** vektor koordinátái: (–3, 2) vagy (3,–2).



341*a* ábra. Egyenes

A $P_0(x_0,y_0)$ pontra illeszkedő **e** vektorral párhuzamos egyenest a $P(x,y)$ ponthoz tartozó **r** vektor akkor írja le, ha a $\mathbf{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor merőleges az **n** vektorra. A merőlegesség feltétele szerint:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \qquad (27a)$$

Ez az *egyenes vektoregyenlete*. A skaláris szorzat koordinátákkal felírt alakja:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0 \quad \text{ill.}$$

$$Ax + By = Ax_0 + By_0, \qquad (27b)$$

amely az egyenes általános egyenlete. Az **r** vektor végpontjával akkor is leírja az egyenest, ha $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{e}$, azaz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{e} \qquad (27c)$$

teljesül, ahol $t \in R$. Ez az egyenlet az egyenes paraméteres vektoregyenlete, amelyből

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \qquad (27d)$$

az egyenes ún. paraméteres egyenletrendszerét is felírhatjuk.

Példák

1. Írjuk fel a $P_0(-3,1)$ pontra illeszkedő és $\mathbf{e}(3,\sqrt{3})$ irányvektorú egyenes egyenletét.

Megoldás: Mivel $\mathbf{e}(3,\sqrt{3})$, ezért $\mathbf{n}(-\sqrt{3},3)$, és így $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot(-\sqrt{3},3) = 0$;

$-\sqrt{3}(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0$; $-\sqrt{3}x + \sqrt{3}x_0 + 3y - 3y_0 = 0$;

$$-\sqrt{3}x+3y=-\sqrt{3}x_0+3y_0=-\sqrt{3}(-3)+3\cdot 1=3\sqrt{3}+3;$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}+1.$$

2. Írjuk fel a $P_0(2,-3)$ pontra illeszkedő és a $8x-2y+3=0$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

Megoldás: A P_0 pont helyvektora: $\mathbf{r}_0(2,-3)$; az egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(8,-2)$ és irányvektora: $\mathbf{e}(2,8)$, tehát a kérdéses egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{r}=(2,-3)+(2,8)t;$$

paraméteres egyenletrendszere:

$$x=2+2t,$$
$$y=-3+8t.$$

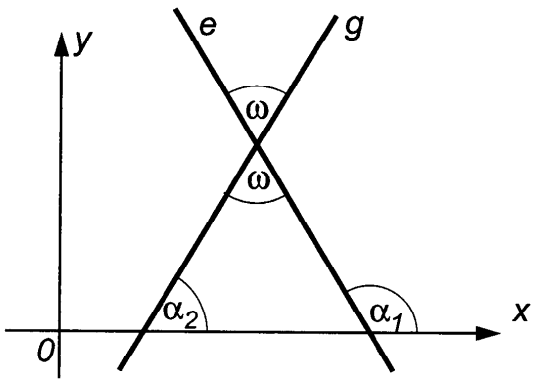
Az egyenes általános egyenletét a paraméter kiküszöbölésével kapjuk:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8},\ \text{amelyből}\ 4x-y=11.$$

5.4.4 Az egyenessel kapcsolatos alapfeladatok

a) Két egyenes hajlásszögének meghatározása; a párhuzamosság és merőlegesség feltétele

Az e és g egyenesek ω hajlásszögén (342. ábra) azt a szöget értjük, amellyel a g egyenes az e egyenesbe pozitív forgási értelemben átvihető.



342. ábra. Két egyenes hajlásszöge

Az y-tengellyel nem párhuzamos e egyenes egyenlete legyen $y=m_1x+b_1$; a g egyenlete pedig $y=m_2x+b_2$, ahol $m_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $m_2=\operatorname{tg}\alpha_2$. Tehát a két egyenes által bezárt szög: $\omega=\alpha_1-\alpha_2$ és ennek tangense:

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}$$

vagy m_1 és m_2 behelyettesítésével

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \tag{8}$$

Az iránytényező értelmezéséből következik, hogy két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha meredekségeik egyenlőek

azaz $$m_1 = m_2. \tag{9}$$

(8)-ból $\operatorname{ctg}\omega = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$. Ha $1 + m_1 m_2 = 0$, vagyis $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, akkor $\operatorname{ctg}\omega = 0$, amiből $\omega = \frac{\pi}{2}$, tehát a *két egyenes merőleges egymásra*. Megfordítva: ha két egyenes merőleges egymásra, akkor $\alpha_1 = 90° + \alpha_2$, s így $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(90° + \alpha_2) = -\operatorname{ctg}\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = -\frac{1}{m_2}$ tehát a merőlegesség feltétele:

Két egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha meredekségeik szorzata -1,

másképpen $$m_1 = -\frac{1}{m_2}. \tag{10}$$

Példák

1. Számítsuk ki az $5x - y + 2 = 0$ és $2x - 3y + 1 = 0$ egyenesek hajlásszögét.

Megoldás: Az első egyenletből: $y = 5x + 2$, a másodikból $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, az $m_1 = 5$ és $m_2 = \frac{2}{3}$ értékeket a (8) képletbe helyettesítve:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}} = 1, \text{ azaz } \omega = 45°.$$

2. Írjuk fel a $P(-1,3)$ ponton átmenő és az $y = -\frac{4}{3}x + 5$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás: Mivel $m = -\frac{4}{3}$, ezért az adott egyenesre merőleges egyenes iránytényezője: $m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{3}{4}$. Tehát az (5) képlet szerint $y - 3 = \frac{3}{4}(x + 1)$, vagyis

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

b) Két egyenes metszéspontja

Legyen a két egyenes egyenlete: $Ax + By = C$, $A_1x + B_1y = C_1$ alakban adott. Mivel a metszéspont a két egyenes közös pontja, ezért koordinátái mindkét egyenes egyenletét kielégítik, tehát a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása útján megkaphatók. A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldását determinánsok módszerével végezve, a metszéspont x_m, y_m koordinátái:

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}, \qquad y_m = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}.$$

Ha $AB_1 - A_1B \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek van megoldása, azaz a két egyenesnek egyetlen metszéspontja van.

Ha $AB_1 - A_1B = 0$, és $CB_1 - C_1B \neq 0$, $AC_1 - A_1C \neq 0$, akkor az egyenletrendszert egyetlen x, y értékpár sem elégíti ki; az egyenletrendszernek nincs megoldása, azaz a két egyenes nem metszi egymást, párhuzamos. Így a *párhuzamosság feltételét* új alakban kapjuk, $AB_1 = A_1B$-ből:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}.$$

Vagyis a két általános egyenlettel adott egyenes párhuzamos, ha a megfelelő változók együtthatóinak aránya egyenlő.

Ha $AB_1 - A_1B = 0$, és a számlálóban levő valamelyik determináns 0, pl. $CB_1 - C_1B = 0$, akkor $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$ és $\frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, vagyis

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

ami viszont azt jelenti, hogy az egyik egyenlet a másiknak következménye; az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, tehát *a két egyenes egybeesik.*

Pl.: Számítsuk ki a $3x - 8y + 34 = 0$ és $2x + y - 9 = 0$ egyenesek metszéspontjának koordinátáit.

Megoldás

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} -34 & -8 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 2, \qquad y_m = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -34 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 5.$$

A két egyenes metszéspontja: $P(2; 5)$. (Próba!)

c) Határozzuk meg annak feltételét, hogy három egyenes egy ponton menjen át

$$Ax + By = C$$
$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2.$$

A három egyenes csak akkor megy át egy ponton, ha pl. a második és harmadik egyenes metszéspontjának koordinátái:

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_m = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

kielégítik az első egyenes egyenletét is. x_m és y_m behelyettesítése és az egyenlet rendezése után:

$$A\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} - C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

amelynek bal oldalát harmadrendű determináns alakjában írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a három egyenes egy ponton megy át.

Pl.: Állapítsuk meg, hogy a $4x-6y+15=0$, $5x+4y+13=0$ és $x+12y-3=0$ egyenesek egy pontban metszik-e egymást?

Megoldás: $\begin{vmatrix} 4 & -6 & -15 \\ 5 & 4 & -13 \\ 1 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 4(12+156)+6(15+13)-15(60-4)=0,$

tehát a három egyenes egy ponton megy át.

d) Határozzuk meg annak feltételét, hogy a $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontok egy egyenesen feküdjenek

Ha a három pont egy egyenesen fekszik, akkor a P_1 és P_2 pontokon átmenő egyenes egyenletét a P_0 pont koordinátáinak is ki kell elégíteni. A P_0 pont koordinátáit helyettesítsük az egyenes determinánsos (7) egyenletébe:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

s ha ez a feltétel teljesül, akkor a három pont egy egyenesen fekszik.

Példa: Állapítsuk meg, hogy a (3, –5), (–2, 4) és (8, –14) pontok egy egyenesen fekszenek-e, s ha igen, írjuk fel az egyenes egyenletét.

Megoldás: $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -14 & 1 \end{vmatrix} = 3(4+14)+5(-2-8)+1(28-32)=0.$

Tehát a három pont egy egyenesen fekszik, melynek egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -14 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{azaz} \quad 18x + 10y - 4 = 0.$$

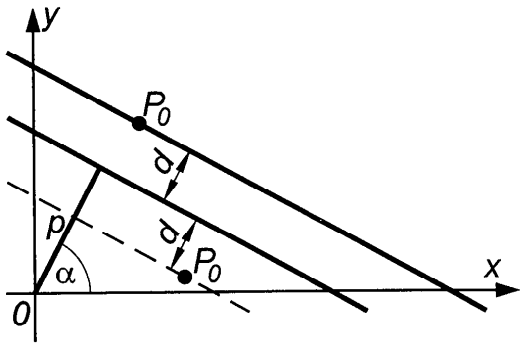
e) Adott pontnak adott egyenestől való távolsága

Az adott pont $P_0(x_0, y_0)$, az egyenes egyenlete pedig(343. ábra):

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Ha a P_0 pont távolsága az egyenestől d, akkor az adott egyenessel párhuzamos és a P_0 ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (d + p) = 0,$$



343. ábra. Pont és egyenes távolsága

amelyből d – a P_0 pont koordinátáit az egyenes egyenletének *Hesse*-alakjába (3) behelyettesítve – meghatározható:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p \tag{13}$$

Ebből a képletből d-re pozitív értéket kapunk, ha az O pont és P_0 pont az egyenes különböző oldalán van, míg negatív érték adódik akkor, ha O és P_0 az egyenesnek ugyanarra az oldalára esik.

Ha az egyenes egyenlete az $Ax + By + C = 0$ általános alakban adott, akkor áttérhetünk a normál alakra: $kA = \cos\alpha$ és $kB = \sin\alpha$ helyettesítéssel, ahol

$$k^2\left(A^2 + B^2\right) = 1 \quad \text{vagy} \quad k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

tehát

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

amiből a (13) egyenlet szerint:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{14}$$

A $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ előjelét C előjelével ellentétesen kell megválasztani, hogy a konstans tag a normálalaknak megfelelően negatív legyen.

Pl.: Határozzuk meg a $P_0(5,3)$ pont távolságát $3x + 4y - 7 = 0$ egyenestől.

Megoldás: $d = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 - 7}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$ hosszegység.

f) Két adott egyenes: $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ metszéspontján átmenő egyenessereg egyenlete $\left(\frac{A}{B} \neq \frac{A_1}{B_1}\right)$

$$Ax + By + C + q(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \tag{15}$$

ahol q a $-\infty$-től a $+\infty$-ig változik.

Ugyanis (15) egyenlet x és y koordinátákban elsőfokú, tehát egyenes egyenlete. Másrészt a metszéspont koordinátái tetszőleges q mellett kielégítik a (15) egyenletet, mert a metszéspont koordinátáinak behelyettesítésével mind $Ax + By + C$, mind $A_1x + B_1y + C_1$ nullával egyenlő.

Így q különböző értékéhez a metszésponton átmenő más és más egyenes tartozik.

Ha a két egyenlet normálalakban adott, akkor a $q = \pm 1$ értékek a *két egyenes szögfelezőinek egyenletét adják.* Az

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0 \text{ és } x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

egyenesek szögfelező egyeneseinek egyenlete

$$(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) \pm (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) = 0,$$

vagy összevonva:

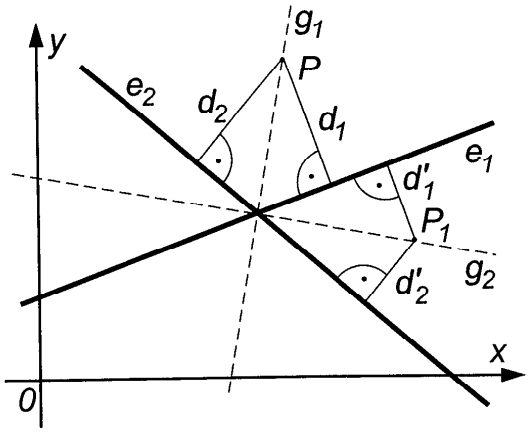
$$x(\cos\alpha_1 \pm \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_1 \pm \sin\alpha_2) - (p_1 \pm p_2) = 0 \quad (16)$$

A 344. ábrából ui. az e_1 és e_2 egyenesek szögfelezőjén a $P(x,y)$ pont d ill. d_1 távolsága az adott e_1 és e_2 egyenesektől:

$d_1 = \pm(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)$ és

$d_2 = \pm(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)$

de az elemi geometriából tudjuk, hogy a szögfelező minden pontjára $d_2 = d_1$, tehát a g_1 szögfelező egyenes egyenlete:



344. ábra. Két egyenes szögfelezői

$$d_1 - d_2 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 - (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) = 0$$

Hasonlóan kereshetjük meg a g_2 szögfelező egyenletét. A g_1-re és a g_2-re adódó eredményt a (16) egyenlet foglalja egybe.

Példák

1. Írjuk fel a $3x-4y+2=0$ és a $2x+5y-1=0$ egyenesek metszéspontján átmenő egyenessereg egyenletét és az egyenessereg azon egyenesének egyenletét, amely átmegy az origón.

Megoldás: $3x-4y+2+q(2x+5y-1)=0$. Az origón átmenő egyenes egyenletéhez tartozó q-t megkapjuk, ha $x=y=0$ értéket helyettesítünk az egyenessereg egyenletébe: $3\cdot0-4\cdot0+2+q(2\cdot0+5\cdot0-1)=0$, amiből $q=2$, tehát a két egyenes metszéspontján és az origón átmenő egyenes egyenlete:

$$3x-4y+2+2(2x+5y-1)=0, \text{ vagyis } 7x+6y=0.$$

2. Határozzuk meg a $2x+9y-14=0$ és a $6x+7y+20=0$ egyenesek szögfelezőinek egyenletét.

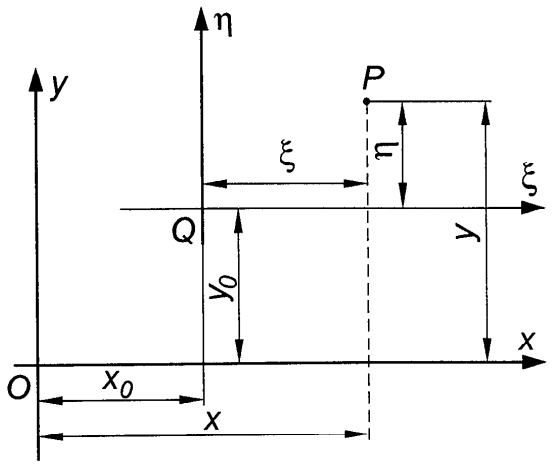
Megoldás: A *Hesse*-féle normálalak:

$$\frac{2x}{\sqrt{85}}+\frac{9y}{\sqrt{85}}-\frac{14}{\sqrt{85}}=0 \text{ és } \frac{6x}{-\sqrt{85}}+\frac{7y}{-\sqrt{85}}+\frac{20}{-\sqrt{85}}=0.$$

Az egyik szögfelező g_1: $\dfrac{6x+7y+20}{-\sqrt{85}}-\dfrac{2x+9y-14}{\sqrt{85}}=0$, amiből

5.4.5 Koordinátatranszformáció

ont koordinátáit egy koordinátarendszerben ismerjük, 'unk térni egy másik rendszerre, és abban ıeghatározni a pont it, akkor a koordinátását, *transzformáció*ük. Most két esettel nk: a síkbeli derékrdinátarendszer tengeırhuzamos eltolásával elyek φ szöggel való ival.



345. ábra. Koordinátatengelyek eltolása

elyek párhuzamos eltolása

tt koordinátarendszer tengelyei x, y; a tengelyek párhulásával keletkezett új koordinátarendszer tengelyei ξ, η endszer origójának, Q-nak koordinátái a régi rendszer$_0$, akkor a P pont régi rendszerre vonatkozó x, y koraz új rendszerre vonatkozó ξ, η koordinátái között a kapcsolat áll fenn (345. ábra):

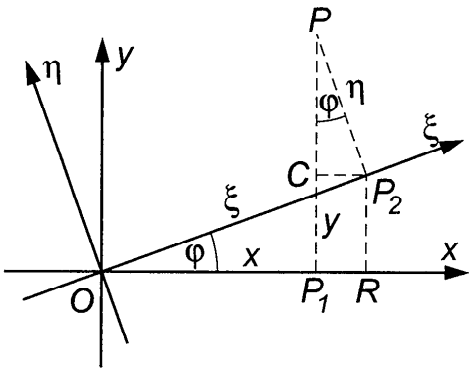
$$\xi = x - x_0, \qquad \eta = y - y_0 \tag{17}$$

$$x = \xi + x_0, \qquad y = \eta + y_0. \tag{18}$$

elyek φ szöggel való elforgatása

tt x, y koordinátarendszerhez képest az új rendszer ξ, η φ szöggel vannak elforgatva, de a két kezdőpont egybeır a P pont régi és új koordinátái között a következő és áll fenn (346. ábra):

$$x = OP_1 = OR - CP_2 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi$$
$$y = PP_1 = RP_2 + CP = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi$$



346. ábra. Koordinátatengelyek elforgatása

Ha az első egyen
vel, a másodikat sin
rozzuk, és a két egy
felelő oldalait összea
megkapjuk ξ-t, ha p
sőt $(-\sin\varphi)$-vel, a
$\cos\varphi$-vel szorozzuk
juk a két egyenlete
juk η-t:

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Példák

1. Írjuk fel az $y = 2x + 5$ egyenes egyenletét abban az új (párl lással keletkezett) ξ, η koordinátarendszerben, amelynek origója a rég a (0, 5) értékpárral adott pont.

Megoldás: Mivel $x_0 = 0$, $y_0 = 5$, ezért (18) szerint:

$$x = \xi, \quad y = \eta + 5, \quad \text{tehát} \quad \eta + 5 = 2\xi + 5 \quad \text{azaz} \quad \eta = 2\xi.$$

2. Mi lesz a $\sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ egyenes egyenlete a pozitív irá szöggel elforgatott új koordinátarendszerben?

Megoldás: (19) felhasználásával:

$$x = \xi\cos 60° - \eta\sin 60° = \xi\frac{1}{2} - \eta\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y = \xi\sin 60° + \eta\cos 60° = \xi\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta\frac{1}{2}, \quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right) - 3\left(\frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\right) - 2\sqrt{3} = 0,$$

amiből összevonás után: $2\sqrt{3}\eta = 2\sqrt{3}$, vagyis $\eta = 1$, azaz az egyenes párhuzamos és attól +1 távolságra van.

5.4.6 A kör és egyenletei

ík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík egy ától (a középponttól) nullától különböző egyenlő távol-ak.

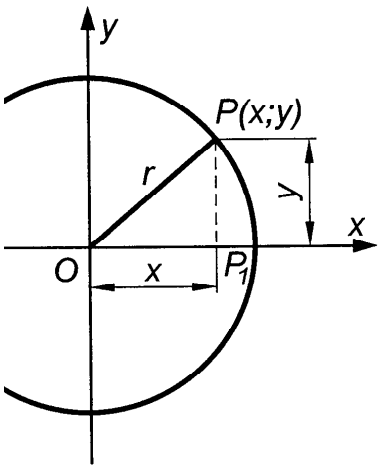
ó középpontú, r sugarú kör egyenlete az $OP_1P\Delta$-ből *Pitagorasz* tételének felhasználásával adódik:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{21}$$

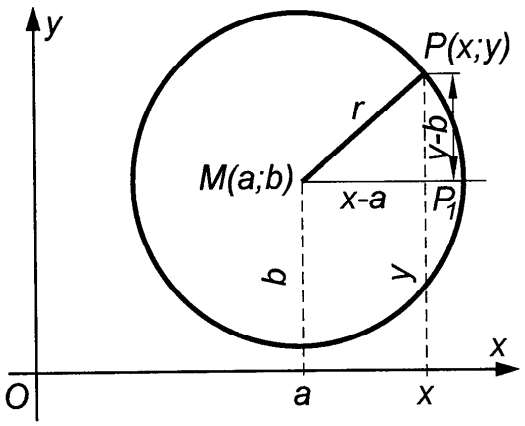
és szerinti $M(a,b)$ középpontú, r sugarú kör egyenletét -ből (348. ábra) ugyancsak *Pitagorasz* tételével kapjuk 2 pont *Megjegyzés*-ét):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{22}$$

kör általános egyenletének szokás nevezni, amelyből 0 esetén az origó középpontú kör egyenletét kapjuk.



a. Origó középpontú kör



348. ábra. Általános helyzetű kör

általános egyenletében a négyzetre emelés elvégzése és endezése után az

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

alakú másodfokú kétismeretlenes egyenletet kapju egyenletet az általános másodfokú kétismeretlenes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

egyenlettel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a másodfokú kétismeretlenes egyenlet csak akkor lehet lete, ha $A = C$ és $B = 0$, azaz $Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2$ alakú. A-val való osztás és $\frac{2D}{A} = d$, $\frac{2E}{A} = e$, $\frac{F}{A} = f$ után a kör egyenletének alakja:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

amelyet a *kör normálegyenletének* nevezünk.

A (22*a*) egyenletről a (22) egyenletre áttérhetünk, *négyzetté való kiegészítés"* elvét alkalmazzuk. Ad mindkét oldalához $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$-t, akkor az x-et tartal $\left(\frac{d}{2}\right)^2$-nel, az y-t tartalmazó tagok $\left(\frac{e}{2}\right)^2$-nel teljes né szíthetők ki: $\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}$, amit

$$a = -\frac{d}{2},\quad b = -\frac{e}{2} \quad \text{és} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}.$$

Ha $4f > d^2 + e^2$, akkor a (22*a*) egyenlet nem állít lyen valós görbét. (Ilyen esetben *képzetes körről* bes $4f = d^2 + e^2$, akkor az egyenlet csak a $P(a,b)$ pon (Ezt *nullkörnek* mondjuk.)

Példák

1. Írjuk fel az $M(-3,2)$ középpontú és $d = 8$ hosszúságegysé egyenletét, és számítsuk ki az abszcissza tengellyel való metszéspontj

Megoldás: $r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$, $a = -3$, $b = 2$, tehát $(x+3)^2 + (y-2$

sszatengellyel való metszéspontban $y = 0$, tehát

$)^2 + (0-2)^2 = 16$, $x_1 \approx 0{,}464$, $x_2 \approx -6{,}464$.

ítsuk meg az $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ egyenlettel adott kör közép-
rdinátáit és sugarát!

: Áttérünk a (22) alakra:

$-4x+4) + (y^2 - 2y + 1) = 20 + 4 + 1$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,

$= 1$ és $r = \sqrt{25} = 5$ hosszúságegység.

ozzuk meg az $A(-2,-1)$, $B(0,-5)$, $C(6,3)$ pontokon átmenő kör

: Mivel a három pontnak ki kell elégítenie az $x^2 + y^2 + dx + ey + f =$
t, ezért a három pont koordinátáinak behelyettesítésével d-re, e-re és
enletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyből
ıtározható:

$^2 + (-1)^2 - 2d - e + f = 0$, $\quad 0 + (-5)^2 - 0 - 5e + f = 0$,

$6^2 + 3^2 + 6d + 3e + f = 0$.

sokat elvégezve: $d = -6$, $e = 2$, és $f = -15$.

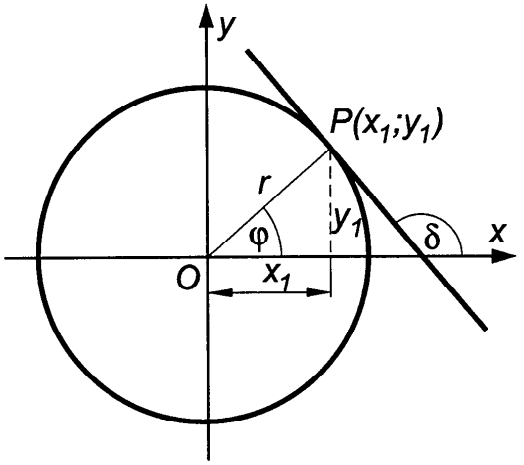
yenlete: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$, tehát $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$, a
$M(3,-1)$, a sugara: $r = 5$.

5.4.7 A kör érintőjének egyenlete

$= r^2$ kör $P_1(x_1, y_1)$ pontjára illeszkedő érintő egyen-
tkező módon adódik.
ból az érintőre húzott
(349. ábra) az x-
ρ szöget zár be, akkor

s így az érintő irány-

$$\text{)} = \frac{-1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{x_1}{y_1}$$



349. ábra. Kör érintője

tehát az érintő egyenlete:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

amiből $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$, mivel $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ (mer rajta van a körön), tehát

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Az $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kör $P_1(x_1, y_1)$ pontj érintő egyenletét a (17) transzformációs képletek felh (23)-ból származtathatjuk. A kör egyenletei ui. a $\eta = y - b$ párhuzamos eltolás után a (ξ, η) koordinátai $\xi^2 + \eta^2 = r^2$, az érintő egyenlete pedig $\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = r^2$

Visszahelyettesítve a ξ, η, ξ_1 és η_1 értékeket,

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$$

alakban kapjuk az érintő egyenletét.

Példák

1. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 5$ kör $P_1(1,-2)$ pontjához húz egyenletét.

Megoldás: Mivel a P_1 pont rajta van a körön, (23)-ba helye $y_1 = -2$, $r = \sqrt{5}$: $x - 2y = 5$.

2. Írjuk fel az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ kör $P_1(5,5)$ pontjáho jének egyenletét.

Megoldás: Mivel P_1 pont rajta van a körön, ezért (24)-be helye $x_1 = 5$, $y_1 = 5$, $r = 5$, $(x-1)(5-1) + (y-2)(5-2) = 25$, vagy $4x + 3y - 35 = 0$.

3. Határozzuk meg a $P(7,1)$ pontból az $x^2 + y^2 = 25$ l érintők egyenletét.

Megoldás: A P pont nincs a körön. Az érintési pont x_0, y_0 meghatározásához az $xx_0 + yy_0 = 25$ és $x_0^2 + y_0^2 = 25$ egyenleteket

$$7x_0 + y_0 = 25, \quad y_0 = 25 - 7x_0, \quad x_0^2 + y_0^2 = 25,$$

$+(25-7x_0)^2=25,\ x_0^2-7x_0+12=0,$
$=4,\ x_{02}=3,\ y_{01}=-3,\ y_{02}=4.$
intő egyenlete: $4x-3y=25,\ 3x+4y=25.$

ör következő egyenletéből határozzuk meg középpontját és sugarát:
$x^2+y^2-4x=0.\ [M(2,0), r=2.]$
$x^2+y^2+6y-7=0.\ [M(0,-3), r=4.]$
$x^2+y^2+2x-10y+1=0,\ [M(-1,5), r=5.]$
$3x^2+3y^2-4x-6y-15=0,\ \left[M\left(\frac{2}{3},1\right), r=\frac{\sqrt{58}}{3}.\right]$
ározzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja érintője az $5x-12y-24=0$ egyenes. $\left[(x-6)^2+(y-7)^2=36.\right]$
k fel az $x^2+y^2-2x-3y=0$ kör $P(0,3)$ pontjához húzott érintő $[2x-3y+9=0.]$
mítsuk ki a $(0,1)$, $(-2,0)$ és $(0,-1)$ csúcspontokkal adott háromszög ör egyenletét. $\left[2x^2+2y^2+3x-2=0.\right]$
ározzuk meg az $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ kör középpontján átmenő és $1=0$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét. $[2x+y-3=0.]$

5.4.8 Az ellipszis és egyenletei

is a sík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík két tjától vett távolságainak összege állandó és az összeg a két pont távolságánál.

két pont, F_1 és F_2 az ellipszis gyújtópontjai (fókuszai;); az ellipszis valamely pontját a gyújtópontokkal összenesek a vezérsugarak (r_1 és r_2 rádiuszvektorok).
ipszis kanonikus egyenlete. A fókuszok távolságát jelöl: $F_1F_2=2c$. Ha feltesszük, hogy a P pont az ellipszis

$$-8x-16y-6=0, \text{ azaz } 4x+8y+3=0.$$

A másik szögfelező g_2: $\dfrac{6x+7y+20}{-\sqrt{85}}+\dfrac{2x+9y-14}{\sqrt{85}}=0$, amiből

$$-4x+2y-34=0, \text{ azaz } 2x-y+17=0.$$

Feladatok

1. Határozzuk meg az $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ és $C(11,-6)$ c adott háromszög oldalainak hosszát. [$AB=5$, $BC=13$, $CA=8\sqrt{2}$.]

2. Határozzuk meg az $A(3,-7)$, $B(5,2)$ és $C(-1,0)$ csúcsp háromszög oldalainak felezőpontjait. [$F_1(4,-2,5)$, $F_2(2,1)$ és $F_3(1,$

3. Számítsuk ki az $A(4,2)$, $B(9,4)$ és $C(7,6)$ csúcspontokka szög területét. [$t=7$ területegység.]

4. Egy homogén fémpálca súlypontja $S(5,1)$ egyik végpont Számítsuk ki a másik végpont koordinátáit. [$B(11,5)$.]

5. Írjuk fel a $P(2,-3)$ ponton átmenő és a $8x-2y+3=$ párhuzamos egyenes egyenletét. [$4x-y-11=0$.]

6. Írjuk fel a $P(-1,4)$ ponton átmenő és az $x-3y+8=0$ egye ges egyenes egyenletét. [$3x+y-1=0$.]

7. Határozzuk meg a $P(2,0)$ ponton átmenő és a $2x-5y-6=$ 45°-os szöget bezáró egyenesek egyenletét. [$7x-3y-14=0$ és $3x+$

8. Határozzuk meg a $3x-2y-1=0$ és $x+3y+4=0$ egyen pontján átmenő és a második egyenesre merőleges egyenes egyen hogy kiszámítanánk a metszéspont koordinátáit.

[Az egyenessereg egyenletét használjuk: $q=0,3$ és $33x-11$

9. Határozzuk meg a $3x+y-5=0$ egyenesen azt a pontot, ar nesnek az $x_0=1$ abszcisszájú pontjától $\sqrt{10}$ távolságra van.

[$y_0=2$, $P_1(0,5)$ és $P_2(2,-1)$.]

10. Számítsuk ki a $6x-8y+3=0$ és $12x+9y-5=0$ egyenesek h [$\omega=90°$.]

11. Számítsuk ki a $P(3,-1)$ pont távolságát a $3x-4y+2=0$ eg [$d=3$.]

12. Határozzuk meg a $3x+4y+13=0$ és $-8x-6y+43=$ szögfelezőinek egyenletét. [g_1: $2x-2y-69=0$, g_2: $14x+14y-17$

egy tetszőleges pontja, akkor a definíció szerint $r_1 + r_2$ állandó. Ez az állandó legyen $2a$, azaz $r_1 + r_2 = 2a$. (Ha a P pont egybeesik a D ponttal, akkor $r_1 = r_2 = a$.)

Az elemi geometriából tudjuk, hogy minden háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, tehát $r_1 + r_2 = 2a > 2c$, amiből $a > c$.

A 350. ábra PP_1F_1 és PP_1F_2 derékszögű háromszögéből, *Pitagorasz* tételét felhasználva:

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (c-x)^2} \quad \text{és} \quad r_2 = \sqrt{y^2 + (c+x)^2},$$

$$r_1 + r_2 = \sqrt{y^2 + (c-x)^2} + \sqrt{y^2 + (c+x)^2} = 2a, \qquad (24a)$$

$$\sqrt{y^2 + (c-x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (c+x)^2}.$$

Négyzetre emelve, rendezve és 4-gyel egyszerűsítve:

$$a\sqrt{y^2 + (c+x)^2} = a^2 + cx \qquad (24b)$$

Ismét négyzetre emelve:

$$a^2y^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2, \qquad (24c)$$

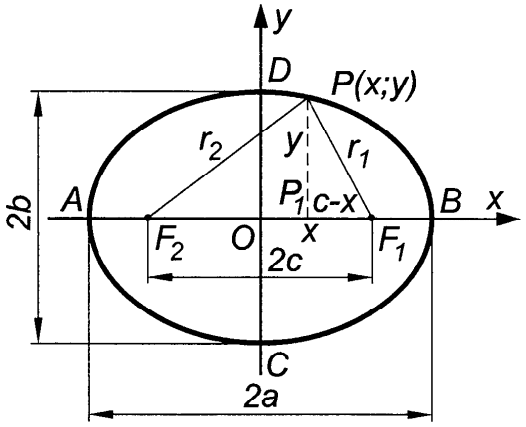
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Mivel $a^2 > c^2$, ezért $a^2 - c^2 > 0$. Jelöljük b^2-tel: $a^2 - c^2 = b^2$, Ekkor $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ebből a^2b^2-tel való osztás után az ellipszis kanonikus egyenletét kapjuk (l. az 5.4.12 pont *Megjegyzés*-ét):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (25)$$

(Ez az egyenlet azért kanonikus, mert abból könnyen leolvashatók a görbe – jelen esetben az ellipszis – főbb adatai. Az ellipszisnél pl. a két féltengely hossza.)

Itt x és y az ellipszis tetszőleges pontjának koordinátái, a és b az ellipszis *nagy,* ill. *kis tengelyének* fele. A gyújtópontoknak a középponttól való c távolságát az ellipszis *lineáris excentricitásának,* a lineáris excentricitás és a fél nagytengely hányadosát pedig *numerikus excentricitásnak* mondjuk, és e-vel jelöljük, azaz



350. ábra. Origó középpontú ellipszis

$$e = \frac{c}{a} \tag{26}$$

Mivel $c < a$, ezért $e < 1$. Ha felhasználjuk a $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ összefüggést, akkor

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{26a}$$

Az ellipszis gyújtópontján átmenő és az x-tengelyre merőleges húr félhosszúságát az ellipszis *paraméterének* nevezzük. A p paramétert az ellipszis (25) egyenletéből $x = \pm c$ helyettesítéssel kapjuk meg:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ és így}$$

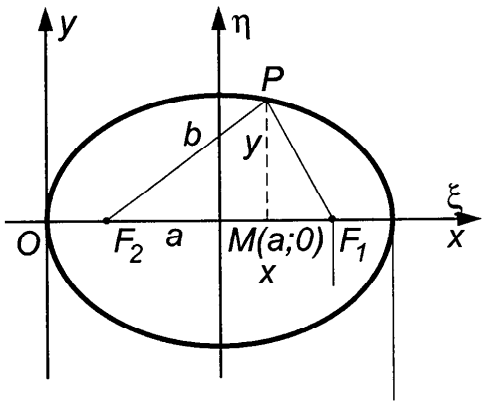
$$p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b}{a}b.$$

Tehát a paraméter:

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{27}$$

Az *ellipszis csúcsegyenlete.* A 351. ábra szerint elhelyezett (ξ, η) koordinátarendszerben az ellipszis egyenlete: $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$

Felhasználva a $\xi = x - a$, $\eta = y$ transzformációs képleteket:



351. ábra. Origó csúcspontú ellipszis

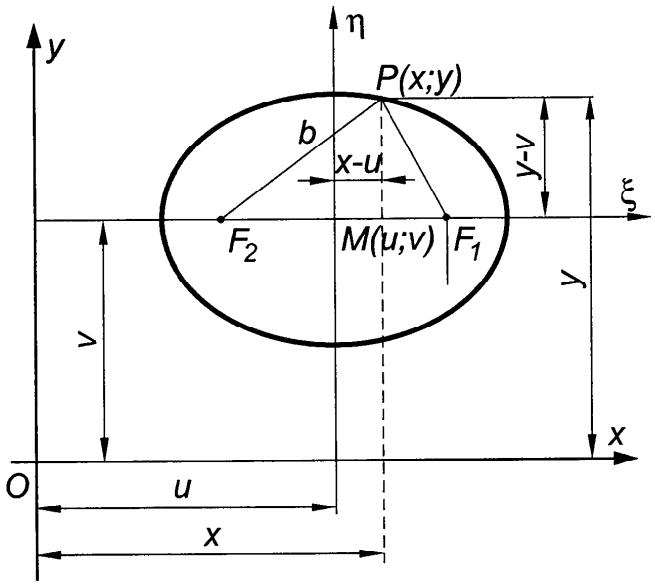
$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$y^2=\frac{a^2-(x-a)^2}{a^2}b^2=$$

$$=\frac{2b^2x}{a}-\frac{b^2x^2}{a^2},$$

amelyből a $\frac{b^2}{a}=p$ helyettesítéssel megkapjuk az ellipszis csúcsegyenletét:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2 \tag{28}$$



352. ábra. Eltolt középpontú ellipszis

Az $M(u,v)$ *középpontú ellipszis egyenlete.* Az előzőhöz hasonlóan (352. ábra) a

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

egyenletből a

$$\xi = x-u,\ \eta = y-v$$

helyettesítéssel megkapjuk az ellipszis $M(u,v)$ középpontú egyenletét:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1 \tag{29}$$

Ha a kijelölt műveleteket elvégezzük, akkor

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2ux-2a^2vy+(a^2v^2+b^2u^2-a^2b^2)=0,$$

vagy $$b^2x^2 + a^2y^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (29a)$$

alakú egyenletre jutunk. Ez olyan másodfokú kétismeretlenes egyenlet, amelyben a másodfokú tagok együtthatói egyenlő előjelűek és az xy-os tag hiányzik. (Ha $a = b$, akkor az ellipszis egyenlete speciális eseteként a köregyenlet adódik.)

Példák

1. Számítsuk ki az $5\xi^2 + 9\eta^2 = 45$ ellipszis *a*) féltengelyeit, *b*) fókuszait, *c*) numerikus excentricitását és *d*) csúcsegyenletét.

Megoldás

a) Az adott egyenletet (25) alakra hozzuk: $\frac{\xi^2}{9} + \frac{\eta^2}{5} = 1$, amiből

$a = 3,\ b = \sqrt{5}$.

b) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$, s így $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$.

c) $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ vagy $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$.

d) A csúcsegyenlethez a p félparamétert kell kiszámítani:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{5}{3},\ \text{tehát (28) szerint } y^2 = 2 \cdot \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}x^2 = \frac{10}{3}x - \frac{5}{9}x^2.$$

2. Írjuk fel $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ ellipszis (29) alakú egyenletét, és számítsuk ki M középpontjának koordinátáit.

Megoldás: $\left(16x^2 + 32x + 16\right) + \left(25y^2 - 100y + 100\right) - 284 = 116$

$$\left(4x+4\right)^2 + \left(5y-10\right)^2 = 400,\ \frac{4^2(x+1)^2}{400} + \frac{5^2(y-2)^2}{400} = 1,\ \text{amiből}$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1,\ \text{s így } u = -1,\ v = 2,\ \text{tehát } M(-1,2).$$

3. Határozzuk meg a 26 nagytengelyű, $F_1(14,0)$ és $F_2(-10,0)$ fókuszpontú ellipszis egyenletét.

Megoldás: $2a = 26,\ a = 13,\ c = \frac{F_1F_2}{2} = \frac{14-(-10)}{2} = \frac{24}{2} = 12,$ s így

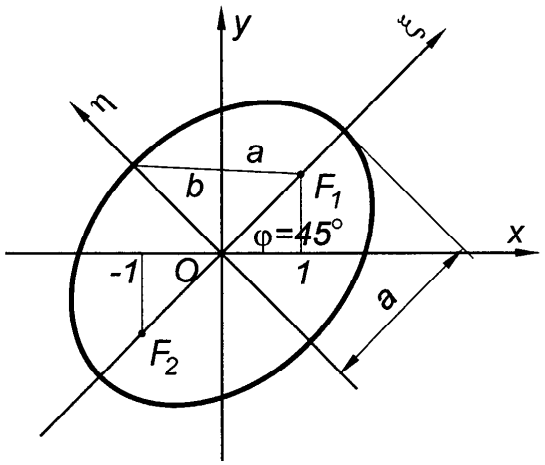
$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$

Az ellipszis középpontjának abszcisszája: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{14 + (-10)}{2} = \frac{4}{2} = 2,$

ordinátája: $y_0 = 0$, tehát a (29) egyenlet szerint: $\frac{(x-2)^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$

4. Határozzuk meg a 4 egységnyi kistengelyű, $F_1(1,1)$ és $F_2(-1,-1)$ fókuszpontú ellipszis egyenletét.

Megoldás: Mivel az ellipszis a 353. ábra szerint helyezkedik el az x, y koordinátarendszerben, ezért előbb a ξ, η rendszerbeli egyenletét írjuk fel, s abból térünk át az x, y koordinátás alakra a (20) transzformációs képletek felhasználásával:



353. ábra. Elforgatott ellipszis

$$b = 2, \quad c = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6},$$

tehát $\frac{\xi^2}{6} + \frac{\eta^2}{4} = 1$

vagy $2\xi^2 + 3\eta^2 - 12 = 0.$

Az elforgatás szöge: $\varphi = 45°$, tehát (20) szerint:

$$\xi = x\cos 45° + y\sin 45° = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \qquad \eta = -x\sin 45° + y\cos 45° = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\xi^2 = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \quad |\cdot 2 \qquad \eta^2 = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} \quad |\cdot 3$$

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{5x^2}{2} - xy + \frac{5y^2}{3} - 12 = 0 \quad \text{vagy} \quad 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 24 = 0.$$

5.4.9 Az ellipszis érintőjének egyenlete

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontján keresztülmenő ún. szelőegyenes egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

A P_1 és P_2 pont koordinátái azonban kielégítik az ellipszis egyenletét is, azaz

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

Ha ennél a két egyenletnél a megfelelő oldalak különbségét vesszük, akkor a rendezés után

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$$

alakra jutunk. Ezt behelyettesítve a két ponton átmenő egyenes egyenletébe,

$$y-y_1=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x-x_1)$$

alakban kapjuk a szelő egyenletét. Ha a *szelő és az ellipszis két metszéspontja egybeesik*, akkor a szelőből érintő lesz, melynek egyenlete az előzőből $x_1=x_2$ és $y_1=y_2$ felhasználásával adódik:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

rendezve és a^2b^2-tel osztva:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{30}$$

A (29) egyenletű ellipszis érintőjének egyenlete pedig

$$\frac{(x-u)(x_1-u)}{a^2}+\frac{(y-v)(y_1-v)}{b^2}=1. \tag{31}$$

Pl.: Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ellipszis $x_1=2$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintők egyenletét.

Megoldás: Az ellipszis egyenletéből x_1 behelyettesítésével kiszámítjuk y_1-et:

$$y_1 = \pm\sqrt{12\left(1-\frac{2^2}{16}\right)} = \pm 3.$$

A két érintő egyenlete: $\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$, vagyis $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ és

$\frac{2x}{16}+\frac{-3y}{12}=1$, vagyis $\frac{x}{8}-\frac{y}{4}=1$.

Feladatok

1. Számítsuk ki a $9\xi^2+25\eta^2=225$ ellipszis féltengelyeit, fókuszait, numerikus excentricitását és írjuk fel csúcsegyenletét.

$$\left[a=5,\ b=3,\ F_1(4,0),\ F_2(-4,0),\ e=\frac{4}{5},\ y^2=\frac{18}{5}x-\frac{9}{25}x^2.\right]$$

2. Írjuk fel az $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ ellipszis (29) alakú egyenletét, M középpontjának koordinátáit, féltengelyeit és numerikus excentricitását.

$$\left[M(3,-1),\ a=3,\ b=\sqrt{5},\ e=\frac{2}{3}.\right]$$

3. Határozzuk meg annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek csúcspontjai: $A(4,0)$, $B(-4,0)$ és egyik fókusza $F_1(2,0)$. $\left[3x^2+4y^2=48.\right]$

4. Határozzuk meg az $F_1\left(2,-\frac{2}{3}\right)$, $F_2\left(-2,\frac{3}{2}\right)$ fókuszpontú és $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ numerikus excentricitású ellipszis egyenletét. $\left[68x^2+48xy+82y^2-625=0.\right]$

5. Határozzuk meg a $4x^2+9y^2=676$ ellipszis $x_1=5$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintők egyenletét. $[5x+18y=169,\ 5x-18y=169.]$

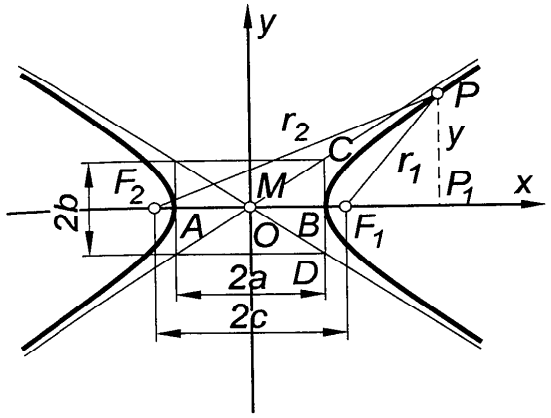
6. Határozzuk meg a $25x^2+169y^2-100x-4125=0$ ellipszis $P(2,5)$ pontjához húzott érintőjének egyenletét. $[y=5.]$

5.4.10 A hiperbola és egyenletei

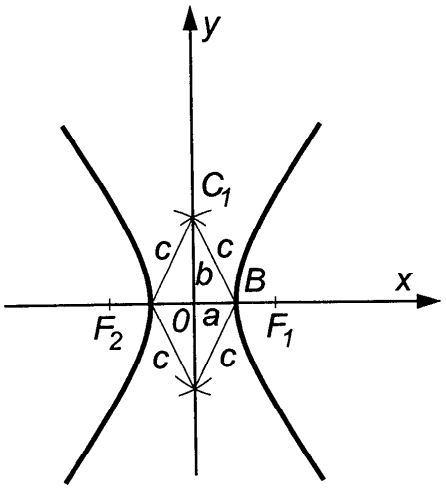
A hiperbola (354. ábra) a sík azon pontjainak mértani helye, amelyeknek a sík két adott pontjától mért távolságkülönbsége abszolút értékben - a két pont távolságánál kisebb - állandó,

azaz $$|F_2P-F_1P|=2a \text{ vagy } |r_2-r_1|=2a.$$

Az adott F_1 és F_2 pontok a hiperbola *gyújtópontjai, fókuszai*, amelyek távolsága: $F_1F_2=2c$. Mivel $F_1F_2>|F_2P-F_1P|$, ezért $c>a$.



354. ábra. Origó középpontú hiperbola



355. ábra. A hiperbola képzetes tengelyének megszerkesztése

Az A és B pontok a hiperbola csúcspontjai. Ezek távolsága: $AB=2a$ a hiperbola *valós tengelyének hossza.*

Ha a valós tengelyre AB átlójú, c oldalhosszúságú rombuszt rajzolunk (355. ábra), akkor a rombusz másik átlója a *hiperbola képzetes tengelye*, amelynek felét b-vel szokás jelölni. M a hiperbola középpontja, a gyújtóponton átmenő és a valós tengelyre merőleges húr fele a *p paraméter.* Az $OF_1=OF_2=c$ távolságot *lineáris excentricitásnak*, az

$$e=\frac{c}{a} \tag{32}$$

értéket pedig *numerikus excentricitásnak* nevezzük, $e>1$. A numerikus excentricitás és a két féltengely közötti összefüggést az $OBC_1\Delta$-ből kapjuk (355. ábra):

$$c^2=a^2+b^2 \tag{33}$$

A *hiperbola kanonikus egyenlete.* A PP_1F_2 és $PP_1F_1\Delta$-ből:

$$r_2 = \sqrt{y^2 + (c+x)^2} \quad \text{és} \quad r_1 = \sqrt{y^2 + (y-c)^2},$$

$$r_2 - r_1 = \sqrt{y^2 + (c+x)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = 2a,$$

s így $$\sqrt{y^2+(c+x)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x-c)^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve és rendezve:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2},$$

4-gyel egyszerűsítve és újra négyzetre emelve:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2,$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Az $a^2 - c^2 = -b^2$ helyettesítéssel:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{34}$$

ahol x és y a hiperbola tetszőleges pontjainak koordinátái, a és b pedig a hiperbola féltengelyei (l. az 5.4.12 pont *Megjegyzés*-ét).

A p paramétert megkapjuk, ha $x = \pm c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ -et helyettesítünk a hiperbola egyenletébe:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{amelyből} \quad y = p = \frac{b^2}{a} \tag{35}$$

Ha a hiperbola valós és képzetes tengelye egyenlő, $a = b$, akkor a hiperbolát *egyenlő oldalú hiperbolának* nevezzük, amelynek egyenlete:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

A *hiperbola csúcsponti egyenlete.* A 356. ábra szerint elhelyezett ξ, η koordinátarendszerben a hiperbola egyenlete:

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1.$$

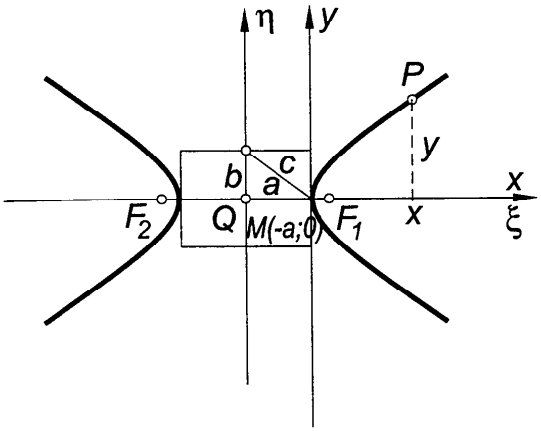
Felhasználva a $\xi = x+a$, $\eta = y$ transzformációs képleteket:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=\frac{2b^2x}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2},$$

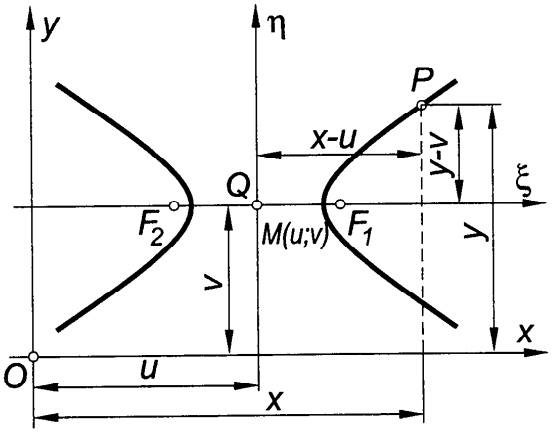
amelyből $\frac{b^2}{a}=p$ helyettesítéssel a hiperbola csúcsegyenlete:

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2 \tag{36}$$

Az $M(u,v)$ *középpontú hiperbola egyenlete.* Az előzőhöz hasonlóan (357. ábra) a $\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1$ hiperbola egyenletéből a $\xi = x-u$, $\eta = y-v$ helyettesítéssel megkapjuk a hiperbola $M(u,v)$ középpontú egyenletét:



356. ábra. Origó csúcspontú hiperbola



357. ábra. Eltolt középpontú hiperbola

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}=1 \tag{37}$$

Ha a kijelölt műveleteket elvégezzük, akkor

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2ux + 2a^2vy + \left(b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2\right) = 0$$

vagyis $$b^2x^2 - a^2y^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (37a)$$

alakú egyenletre jutunk. Ez olyan másodfokú kétismeretlenes egyenlet, amelyben a másodfokú tagok együtthatói ellenkező előjelűek, és az xy-os tag hiányzik.

Példák

1. Számítsuk ki a $9\xi^2 - 16\eta^2 = 144$ hiperbola *a*) féltengelyeit; *b*) fókuszait; *c*) numerikus excentricitását és *d*) csúcsponti egyenletét.

Megoldás

a) Az adott egyenletet (34) alakra hozzuk: $\frac{\xi^2}{16} - \frac{\eta^2}{9} = 1$ s így

$a = 4, \quad b = 3.$

b) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad F_1(5,0), \quad F_2(-5,0).$

c) $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$

d) A csúcsponti egyenlethez ki kell számítani a p paramétert:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \text{ tehát } y^2 = 2 \cdot \frac{9}{4}x + \frac{\frac{9}{4}}{4}x^2 = \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2.$$

2. Írjuk fel a $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ hiperbola (37) alakú egyenletét, és számítsuk ki az M középpontú koordinátáit.

Megoldás: $\left(9x^2 + 90x + 15^2\right) - \left(16y^2 - 32y + 4^2\right) - 367 = 15^2 - 4^2,$

$(3x+15)^2 - (4y-4)^2 = 576, \quad \frac{3^2(x+5)^2}{576} - \frac{4^2(y-1)^2}{576} = 1,$ amiből

$\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1,$ úgyhogy $u = -5, \quad v = 1,$ tehát $M(-5,1).$

3. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek tengelyei egybeesnek a koordinátatengelyekkel, valós tengelye 6 egység és a hiperbola átmegy a $P(9, 4)$ ponton.

Megoldás: $2a = 6$, $a = 3$ s így $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

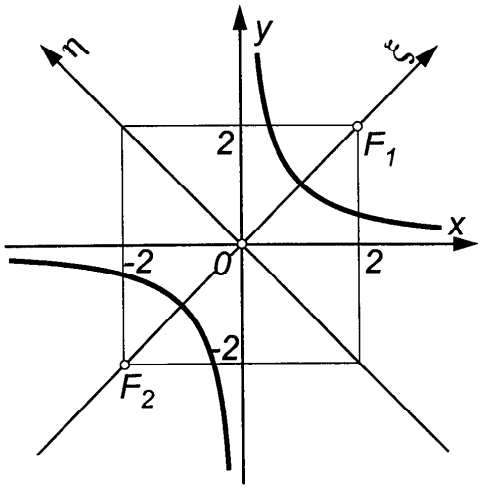
A P pont koordinátái kielégítik a hiperbola egyenletét, tehát behelyettesítésükkel b meghatározható:

$$\frac{9^2}{9}-\frac{4^2}{b^2}=1,\quad b^2=\frac{4^2}{8}=2,\quad b=\sqrt{2},$$ s így a hiperbola egyenlete:

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1.$$

4. Határozzuk meg az $F_1(2,2)$, $F_2(-2,-2)$ fókuszpontú hiperbola egyenletét, ha a képzetes tengely hossza 4 egység.

Megoldás: Mivel a hiperbola a 358. ábra szerint helyezkedik el az x, y koordinátarendszerben, ezért előbb a ξ, η rendszerbeli egyenletét írjuk fel, és abból térünk át az x, y koordinátás alakra a (20) transzformációs képletek felhasználásával:



358. ábra. Hiperbola

$$2b=4,\quad b=2,\quad c=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8},$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=2,$$

tehát

$$\frac{\xi^2}{4}-\frac{\eta^2}{4}=1,\quad \text{vagy}\quad \xi^2-\eta^2=4.$$

Az elforgatás szöge: $\varphi = 45°$, tehát (20) szerint

$$\xi=x\cos 45°+y\sin 45°=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}},\qquad \eta=-x\sin 45°+y\cos 45°=-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\xi^2=\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2},\qquad \eta^2=\frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}$$

A hiperbola egyenlete:

$$2xy=4,\quad \text{amiből}\quad xy=2\quad \text{vagy}\quad y=\frac{2}{x}.$$

5.4.11 A hiperbola érintőjének és aszimptotáinak egyenlete

Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P_1(x_1,y_1)$ pontjához tartozó érintőjének egyenletére az ellipszis érintőjénél alkalmazott módszerhez hasonló eljárással kapjuk:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{38}$$

Hasonlóan adódik az $\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ egyenletű hiperbola $P_1(x_1, y_1)$ pontjához tartozó érintőjének egyenlete az ellipszis érintőjének (31) egyenletéből, $+b^2$ helyett $-b^2$ beírásával:

$$\frac{(x-u)(x_1-u)}{a^2} - \frac{(y-v)(y_1-v)}{b^2} = 1 \tag{39}$$

Azokat az egyeneseket, amelyekhez a hiperbola ágai a végtelenbe tartva minden határon túl közelednek, a hiperbola *aszimptotáinak* nevezzük.

Az *aszimptoták egyenlete*.A (34) egyenlet átalakítás és rendezés után $\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}$ alakban írható. Ha x minden határon túl nő, akkor $\frac{b^2}{x^2}$ igen kicsi érték, amelynek elhanyagolásával az $\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$ egyenletet kapjuk, amelyből a két aszimptota egyenlete:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x, \text{ ill.}$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{40}$$

alakban adódik.

Példák

1. Írjuk fel az $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbola $x_1 = -4$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintők egyenletét.

Megoldás: A hiperbola egyenletéből x_1 behelyettesítésével számítjuk ki y_1-et:

$$y_1 = \pm\sqrt{9\left[\frac{(-4)^2}{8}-1\right]} = \pm 3.$$

A két érintő egyenlete:

$$\frac{-4x}{8}-\frac{3y}{9}=1 \text{ vagy } -\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \text{ és}$$

$$\frac{-4x}{8}-\frac{-3y}{9}=1 \text{ vagy } -\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$$

2. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$ aszimptotáinak egyenletét.

Megoldás: $a=7$, $b=5$, tehát az aszimptoták egyenlete (40) szerint:

$$y=\frac{5}{7}x \text{ és } y=-\frac{5}{7}x.$$

Feladatok

1. Határozzuk meg a $4\xi^2-9\eta^2=36$ hiperbola *a*) féltengelyeit, *b*) fókuszait, *c*) numerikus excentricitását, *d*) csúcsegyenletét és *e*) az aszimptoták egyenletét.

$$\left[a)\ a=3,\ b=2;\ b)\ F_1(\sqrt{13},0),\ F_2(-\sqrt{13},0);\ c)\ e=\frac{\sqrt{13}}{3};\right]$$

$$\left[d)\ y^2=\frac{8}{3}x+\frac{4}{9}x^2;\ e)\ 2\xi\pm 3\eta=0.\right]$$

2. Határozzuk meg az $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ fókuszpontú és hat egységnyi valós tengelyű hiperbola egyenletét. $\left[7x^2-9y^2=63.\right]$

3. Írjuk fel a $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$ hiperbola (37) alakú egyenletét, határozzuk meg féltengelyeit és az M középpont koordinátáit.

$\left[a=5,\ b=3,\ M(1,-2).\right]$

4. Határozzuk meg az $F_1(3,4)$, $F_2(-3,-4)$ fókuszpontú és nyolc egységnyi képzetes tengelyű hiperbola egyenletét. $\left[24xy+7y^2-144=0.\right]$

5. Írjuk fel az $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ hiperbola $P(5,-4)$ pontjához húzott érintőjének egyenletét. $\left[x+y=1.\right]$

6. Írjuk fel az $x^2-4y^2+6x+5=0$ hiperbola $x_1=1$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintők egyenletét. $\left[x\pm y\sqrt{3}+2=0.\right]$

5.4.12 A parabola és egyenletei

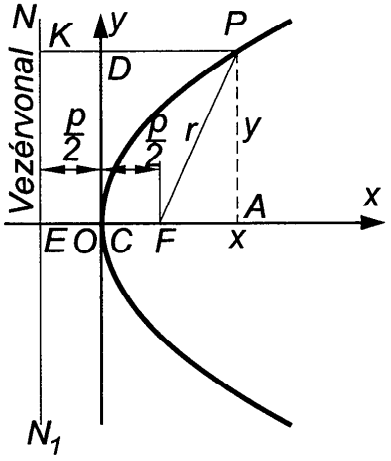
A parabola a sík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík egy adott pontjától és egy ezen a ponton át nem haladó adott egyenestől egyenlő távolságra vannak.

A 359. ábrán vázolt parabola minden $P(x,y)$ pontjára

$$FP = KP.$$

Az F pont a parabola *gyújtópontja* (*fókusza*) az NN_1 egyenes a parabola *vezérvonala* (*direktrix*); a fókusznak a vezéregyenestől való (irányított) távolsága, $EF = p$ a parabola *paramétere*. A parabola C csúcspontja, amely most egybeesik az origóval, felezi az FE távolságot:

$$EC = CF = \frac{p}{2}.$$



359. ábra. Origó csúcspontú parabola

A parabola tengelye az adott esetben az abszcisszatengellyel esik egybe.

A *parabola kanonikus egyenlete*. A 359. ábra alapján

$$\overline{PF}^2 = r^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{és} \quad \overline{KP}^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

tehát

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

A négyzetre emelést elvégezve:

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

azaz

$$y^2 = 2px \tag{41}$$

ahol x és y a parabola tetszőleges pontjainak koordinátái, p pedig a parabola paramétere (l. a *Megjegyzés*-t). A parabola vezérvonalának egyenlete:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Ha a koordinátatengelyeket felcseréljük, akkor a parabola egyenlete:

$$x^2 = 2py \qquad (41a)$$

A $C(u,v)$ *csúcspontú parabola egyenlete.* A 360. ábra szerint elhelyezett parabolának a ξ, η koordinátarendszerbeli egyenlete:

$$\eta^2 = 2p\xi.$$

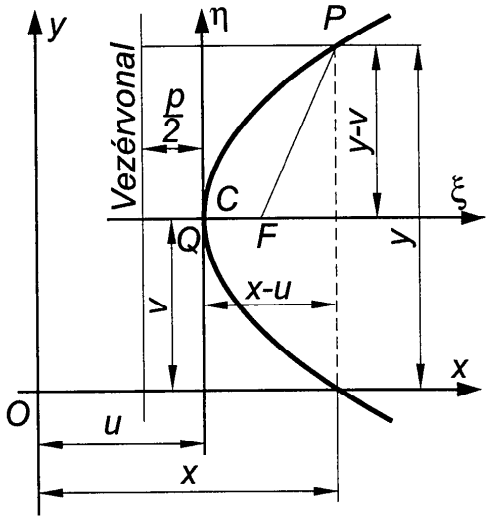
A $\xi = x-u$, $\eta = y-v$ transzformációs képletek felhasználásával:

$$(y-v)^2 = 2p(x-u) \qquad (42)$$

Ha a kijelölt műveleteket elvégezzük, akkor rendezés után:

$$y^2 - 2vy - 2px + \left(v^2 + 2up\right) = 0,$$

vagy általánosan:



360. ábra. Eltolt csúcspontú parabola

$$by^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (43)$$

alakú egyenletre jutunk. Ez olyan másodfokú kétismeretlenes egyenlet, amelyben az x^2-es tag és az xy-os tag hiányzik.

Megjegyzés: A megismert egyenletek a görbék minden pontjára érvényesek; azt is ki lehet mutatni, hogy a sík pontjai közül csakis a kérdéses görbék pontjai elégítik ki az egyenleteket.

Példák

1. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek csúcspontja az

origóban van, valamint *a*) szimmetrikus az x-tengelyre, és átmegy az $A(-1,3)$ ponton; *b*) szimmetrikus az y-tengelyre, és átmegy a $B(4,-8)$ ponton.

Megoldás

a) A parabola egyenletének $y^2 = 2px$ alakjából p meghatározható az A pont koordinátáinak behelyettesítésével: $3^2 = 2p(-1)$, $p = -\frac{9}{2}$, tehát $y^2 = -9x$.

b) A parabola egyenletének $x^2 = 2py$ alakjában az előzőhöz hasonlóan meghatározhatjuk p-t: $4^2 = 2p(-8)$, $p = -1$, tehát $x^2 = -2y$.

2. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek fókusza $F(-7,0)$ és vezérvonalának egyenlete $x - 7 = 0$.

Megoldás: A vezérvonal általános egyenlete: $x = -\frac{p}{2}$ s így $-\frac{p}{2} = 7$, $p = -14$, tehát a parabola egyenlete $y^2 = -28x$.

3. Határozzuk meg az $y^2 - 10x^2 - 2y - 19 = 0$ parabola csúcspontjának koordinátáit, a paraméter nagyságát és tengelyének irányát.

Megoldás: $(y^2 - 2y + 1) = 10x + 19 + 1$, $(y-1)^2 = 10(x+2)$, tehát

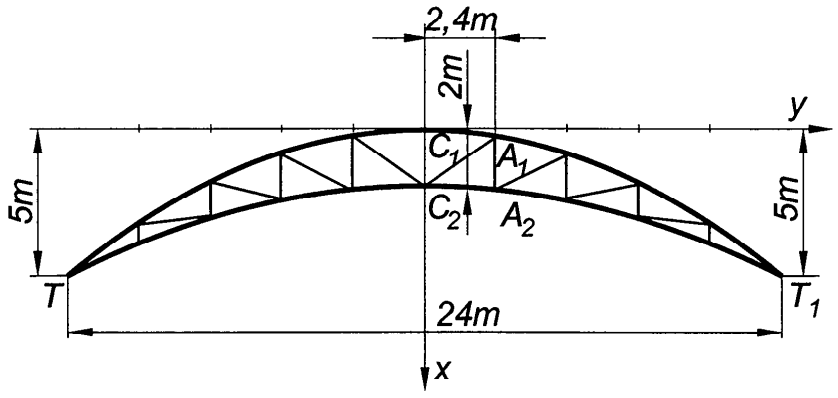
$u = -2$, $v = 1$, azaz $C(-2,1)$ és $p = \frac{10}{2} = 5$.

A parabola tengelye az x-tengellyel párhuzamos és azzal megegyezően irányított.

4. Számítsuk ki a 361. ábrán vázolt parabolikus tartószerkezet

a) felső és alsó parabolaívének egyenletét;

b) az A_1A_2 és az A_1C_2 rudak hosszát.



361. ábra. Tartószerkezet

Megoldás

a) Az ábra szerint felvett koordinátarendszerben a felső parabola egyenletét (41) alakban kapjuk: $12^2 = 2p \cdot 5$, $p = 14{,}4$ s így $y^2 = 28{,}8x$.

Az alsó parabola egyenletét pedig (42) alakban állítjuk elő:

$$(12-0)^2 = 2p(5-2),\quad p = \frac{144}{6} = 24,\quad \text{s így}\quad y^2 = 48(x-2).$$

b) A rudak hosszának kiszámításához előbb az A_1, A_2 és C_2 pontok koordinátáit kell meghatároznunk, C_2 koordinátáit leolvashatjuk: $C_2(2,0)$, A_1-et a felső, A_2-t az alsó parabola egyenletéből számítjuk:

A_1: $2{,}4^2 = 28{,}8 \cdot x$, $x_1 = 0{,}2$, úgyhogy $A_1(0{,}2;2{,}4)$,

A_2: $2{,}4^2 = 48(x-2)$, $x_2 = 2{,}12$, úgyhogy $A_2(2{,}12;2{,}4)$.

Az A_1A_2 távolságot a két abszcissza különbsége adja:

$A_1A_2 = 2{,}12 - 0{,}2 = 1{,}92$ m.

A_1C_2 távolságot az (1) képlettel számítjuk:

$$A_1C_2 = \sqrt{(2-0{,}2)^2 + (0-2.4)^2} = 3 \text{ m}.$$

5.4.13 A parabola érintőjének egyenlete

Az $y^2 = 2px$ parabolának $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontjain átmenő egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

A két pont koordinátái még a parabola egyenletét is kielégítik:

$$y_1^2 = 2px_1 \quad \text{és} \quad y_2^2 = 2px_2.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$y_2^2 - y_1^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1),$$

és ebből

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

A kapott eredményt helyettesítsük a két ponton átmenő egyenes egyenletébe:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

Ez a parabola szelőjének egyenlete. Ha a két metszőpont egybeesik, akkor $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$; a szelőből érintő lesz, amelynek egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

vagy $$yy_1 - y_1^2 = yy_1 - 2px_1 = px - px_1,$$

s így $$yy_1 = p(x + x_1) \tag{44}$$

Az $(y-v)^2 = 2p(x-u)$ parabola $P_1(x_1, y_1)$ pontjához tartozó érintőjének egyenlete a (17) transzformációs képletek felhasználásával (44)-ből adódik. A parabola egyenlete ui. a $\xi = x - u$, $\eta = y - v$ párhuzamos eltolás után a ξ, η koordinátarendszerben: $\eta^2 = 2p\xi$; az érintő egyenlete pedig $\eta\eta_1 = p(\xi + \xi_1)$. Visszahelyettesítve az η, ξ, η_1 és ξ_1 értékeket:

$$(y-v)(y_1-v) = p(x-u+x_1-u),$$

azaz $$(y-v)(y_1-v) = p(x+x_1-2u) \tag{45}$$

alakban kapjuk az érintő egyenletét.

Pl.: Számítsuk ki az $y^2 = 18x$ parabola és a $6x + y - 6 = 0$ egyenes metszéspontjait, és írjuk fel a metszésponthoz tartozó érintők egyenletét.

Megoldás: Az egyenes egyenletéből $y^2 = 36 - 72x + 36x^2$. A metszéspontban az ordináták egyenlők, tehát $18x = 36 - 72x + 36x^2$.

$36x^2 - 90x + 36 = 0$ vagy $2x^2 - 5x + 2 = 0$, amiből

$x_1 = 2$ és $x_2 = \frac{1}{2}$, s így $y_1 = -6$ és $y_2 = 3$.

A $P_1(2, -6)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete, mivel $p = \frac{18}{2} = 9$:

$-6y = 9(x+2)$, vagyis $3x + 2y + 6 = 0$.

A $P_2(\frac{1}{2}, 3)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete pedig:

$3y = 9\left(x + \frac{1}{2}\right)$, vagyis $3x - y + \frac{3}{2} = 0$.

Feladatok

1. Határozzuk meg annak a parabolának az egyenletét, amely átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján, csúcspontja $C(2,3)$ és tengelye párhuzamos az x tengellyel. $[2y^2-12y+9x=0.]$

2. Határozzuk meg az $y^2+4y-6x+7=0$ parabola csúcspontjának és fókuszának koordinátáit, tengelyének és vezérvonalának egyenletét.

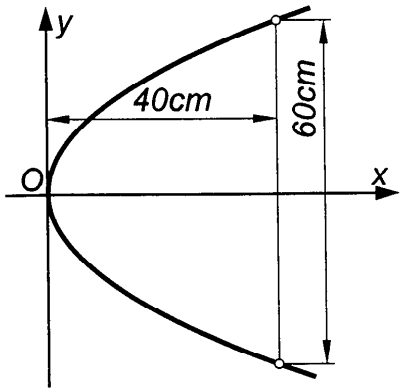
$$\left[C\left(\frac{1}{2},-2\right),\ F(2,-2),\ y+2=0,\ x+1=0.\right]$$

3. Egy híd íve parabola alakú. Határozzuk meg ezen parabola p paraméterét, ha a fesztávolság 24 m, az ív magassága pedig 6 m. $[p=12.]$

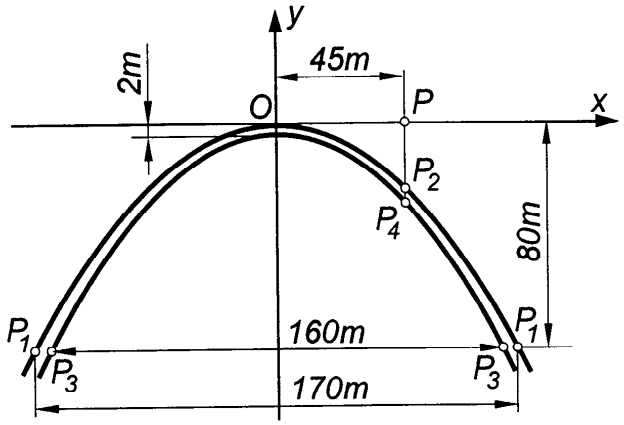
4. A 362. ábra egy parabolikus tükör keresztmetszetét tünteti fel. Az ábra adatai alapján számítsuk ki a fókusz abszcisszáját. $[x=5{,}625.]$

5. Egy vasúti hídnál a pályatestre merőleges tartók parabolikus sarlótartókon nyugszanak. A felső parabolaív fesztávolsága 170 m, az alsóé 160 m, a két csúcspont távolsága 2 m. Számítsuk ki a felső és alsó parabolaív egyenletét és a PP_2, PP_4 tartók hosszát (363. ábra). $\left[x^2=-\frac{1445}{16}y,\ x^2=-\frac{3200}{39}(y+2),\ PP_2=22{,}42\text{m},\ PP_4=26{,}68\text{m}.\right]$

6. Határozzuk meg az $y^2=12x$ parabola *a)* $x_1=3$ abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők egyenletét; *b)* a $3x-y+5=0$ egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét. $[a)\ x+y+3=0;\ x-y+3=0;\ b)\ y=3x+1]$.



362. ábra. Parabolikus tükör

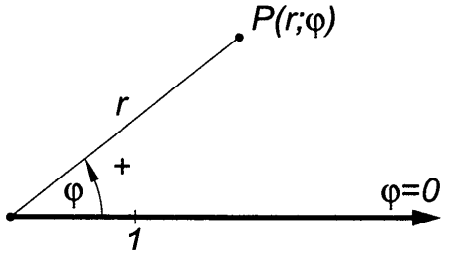


363. ábra. Parabolikus sarlótartók

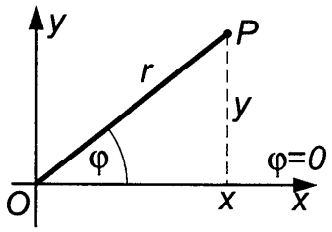
5.4.14 Síkbeli polárkoordináta-rendszer

Az eddig tárgyalt *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszer mellett a *polárkoordináta-rendszernek* is fontos szerepe van a

technikai alkalmazásokban. Vegyünk fel a síkon egy O pontot és egy, az O-ból kiinduló irányított félegyenest. Az *O pontot pólusnak*, az irányított félegyenest *sarktengelynek* vagy *polártengelynek* mondjuk. A sík valamely P pontjának *polárkoordinátái* a P pontnak a pólustól mért távolsága; az $OP = r$ rádiuszvektor és az OP egyenesnek a polártengellyel bezárt szöge: φ. Ezt a polárszöget a $\varphi = 0$ polártengelytől számítva az óramutató járásával ellenkező irányban pozitívnak, az óramutató járásával megegyező irányban negatívnak tekintjük (364. ábra). Az r és φ koordinátájú P pont megjelölésére a $P(r, \varphi)$ írásmódot használjuk.



364. ábra. Polárkoordináta-rendszer



365. ábra. Koordináta-transzformáció

A polárkoordinátákkal, a derékszögű koordinátákhoz hasonlóan, a sík minden pontja jellemezhető.

Ha a pólus a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjával, a polártengely pedig az abszcisszatengellyel egybeesik, és a hosszúságegységek is egyenlők, akkor a P pont derékszögű és polárkoordinátái között a következő összefüggés áll fenn (365. ábra):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{46}$$

illetve:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \tag{47}$$

Ha a derékszögű rendszerről polárkoordináta-rendszerre térünk át, akkor a (46) összefüggést, fordított esetben pedig a (47) összefüggést használjuk.

Példák

1. Az $r=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$ koordinátákkal adott P pontnak számítsuk ki a derékszögű koordinátáit.

Megoldás: A (46) képlet szerint:

$$x=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1,\quad y=2\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

2. Egy P pont derékszögű koordinátái $x=2$, $y=-2$. Számítsuk ki polárkoordinátáit.

Megoldás: A (47) képlet szerint: $r=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{2}{2}=-1$, amelyből φ-re két érték adódik: $\varphi=135°$ és $\varphi=-45°$. Mivel a kérdéses P pont a IV. negyedben van, ezért a második érték jöhet csak számításba, azaz $\varphi=-45°$ vagy $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, s így a pont polárkoordinátái: $P\left(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Írjuk át a következő görbék egyenletét polárkoordinátás alakra:

a) $x^2+y^2=a^2$, *b*) $x^2+y^2=2ax$, *c*) $x^2-y^2=a^2$.

Megoldás:

a) $r=a$ az origó középpontú a sugarú kör egyenlete.

b) $r^2=2a\cdot r\cdot\cos\varphi$, amiből $r=2a\cdot\cos\varphi$ a $P(a,0)$ középpontú, a sugarú kör egyenlete, amely átmegy a póluson.

c) $r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi=a^2$, amiből $r^2\cos2\varphi=a^2$ és $r=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}$ az egyenlő oldalú hiperbola egyenlete.

5.4.15 Görbék paraméteres egyenletei

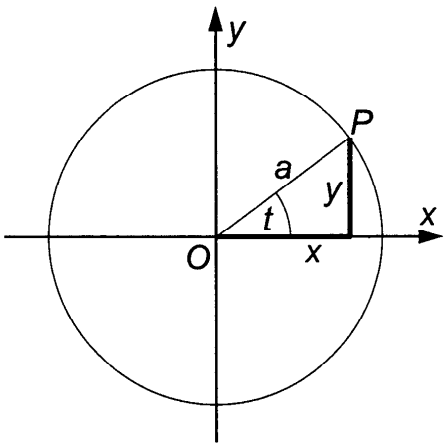
Ha valamely görbe pontjainak abszcisszáját is és ordinátáját is egy tetszőleges t paraméter függvényeként adjuk meg, azaz $x=x(t)$; $y=y(t)$ alakban, akkor azt mondjuk, hogy *a görbe egyenlete paraméteres alakban* (*paraméteres egyenletrendszerrel*) *adott.* A paraméter jelentése más és más lehet, így pl. idő, szög, terület, ívhossz stb. A paraméteres egyenletrendszerből kiküszöbölve a paramétert (ha lehetséges), megkapjuk az abszcisszák és ordináták közötti közvetlen összefüggést, azaz a görbe egyenletét.

Példák

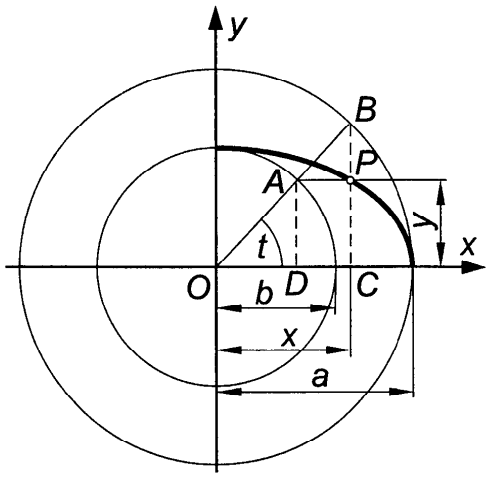
1. Fizikában a vízszintesen elhajított tömegpont pályáját az $x=vt$, $y=-\frac{1}{2}gt^2$ paraméteres egyenletrendszerrel adjuk meg, ahol t időt jelent. A paraméter kiküszöbölésével állapítsuk meg a pályagörbe alakját.

Megoldás: Az első egyenletből $t=\frac{x}{v}$, ezt a második egyenletbe helyettesítve: $y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2}$ vagy $x^2=-\frac{2v^2}{g}y$. Ez pedig egy – y-tengelyre szimmetrikus – lefelé nyitott parabola csúcsegyenlete.

2. Az origó közepű, a sugarú kör paraméteres egyenletrendszere (366. ábra): $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, ahol t a $P(x,y)$ ponthoz húzott sugárnak az x-tengellyel bezárt szögét jelenti. Küszöböljük ki a t paramétert.



366. ábra. Kör



367. ábra. Ellipszis

Megoldás: Mindkét oldalt emeljük négyzetre, és az így kapott két egyenlet megfelelő oldalait adjuk össze:

$$x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2.$$

3. Határozzuk meg azt a görbét, amelynek tetszőleges P pontja a 367. ábra szerinti szerkesztéssel adódik.

Megoldás: Az $OBC\Delta$-ből $x=a\cos t$, az $OAD\Delta$-ből, mivel $AD=y$, $y=b\sin t$.

A paramétert kiküszöbölhetjük, ha az első egyenletet a-val, a másodikat b-vel osztjuk, az egyenletek mindkét oldalát négyzetre emeljük, és a megfelelő oldalakat összeadjuk:

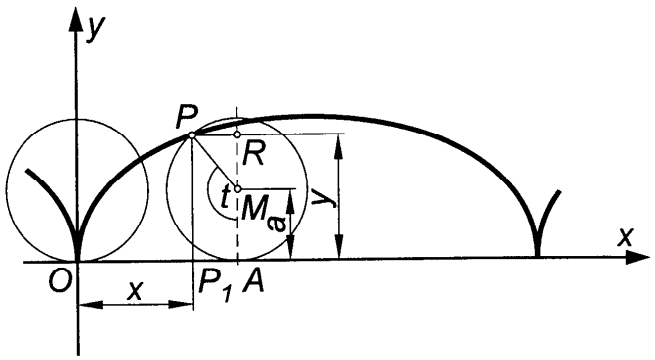
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

ez pedig az ellipszis kanonikus egyenlete. Tehát ennek az ellipszisnek a paraméteres előállítása:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t.$$

4. Az egyenesen csúszás nélkül gördülő kör kerületének valamely pontja ún. *cikloisgörbét* ír le. Határozzuk meg a cikloisgörbe egyenletét, ha a kör sugara a.

Ha a koordinátarendszert és a t paramétert a 368. ábrán jelzett módon választjuk meg, akkor az $\overset{\frown}{AP} = AO$ egyenes szakasz, úgyhogy



368. ábra. Ciklois

$$x = OP_1 = OA - P_1A =$$

$$= \overset{\frown}{AP} - PR = at - a\sin t,$$

$$y = P_1P = AR = AM + MR = a - a\cos t,$$

azaz a ciklois paraméteres egyenlete:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t).$$

Feladatok

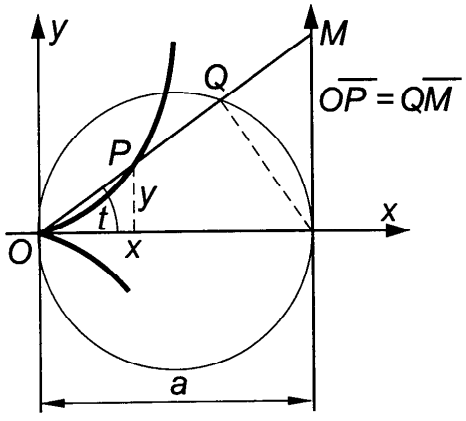
1. Számítsuk ki az $A(5,0)$, $B\left(6,\frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(4,\frac{5\pi}{4}\right)$ polárkoordinátákkal adott pontok derékszögű koordinátáit.

$\left[A(5,0),\ B(3\sqrt{2},3\sqrt{2}),\ C(0,2),\ D(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}).\right]$

2. Számítsuk ki az $A(2\sqrt{3},-2)$, $B(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ derékszögű koordinátákkal adott két pont polárkoordinátáit. $\left[A\left(4,-\frac{\pi}{6}\right),\ B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4}\right).\right]$

3. Az $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$ egyenletet írjuk át polárkoordinátás alakra. $\left[r^2 = a^2\cos 2\varphi.\right]$

4. Határozzuk meg a 369. ábra szerint szerkesztett P pontok mértani helyét, amelyekre $OP = QM$.



369. ábra. Cisszoid

$$\left[x = a\sin^2 t,\quad y = \frac{a\sin^3 t}{\cos t},\ \text{vagy}\right.$$

$$\left.y^2 = \frac{x^3}{a-x}\text{: ez az ún. cisszoidgörbe.}\right]$$

5. Az $r=\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ egyenletet írjuk át derékszögű koordinátákra.

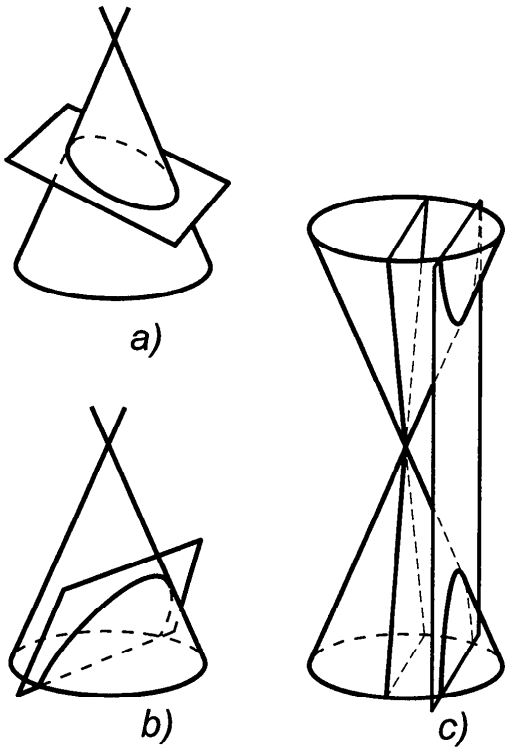
$\left[y^2=\frac{x^3}{a-x}.\right]$

6. Írjuk fel az $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ paraméteres görbe derékszögű koordinátás egyenletét. $\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right.$ hiperbola.$\left.\right]$

5.4.16 Másodrendű görbék

a) Másodrendű görbék, mint kúpszeletek

Ha egy egyenes körkúpfelületet olyan síkkal metszünk amely nem illeszkedik a körkúp csúcspontjára, akkor a metszésvonal vagy kör vagy ellipszis vagy parabola vagy hiperbola.



370. ábra. Kúpszeletek

Ezeket a metszetgörbéket kúpszeleteknek nevezzük.

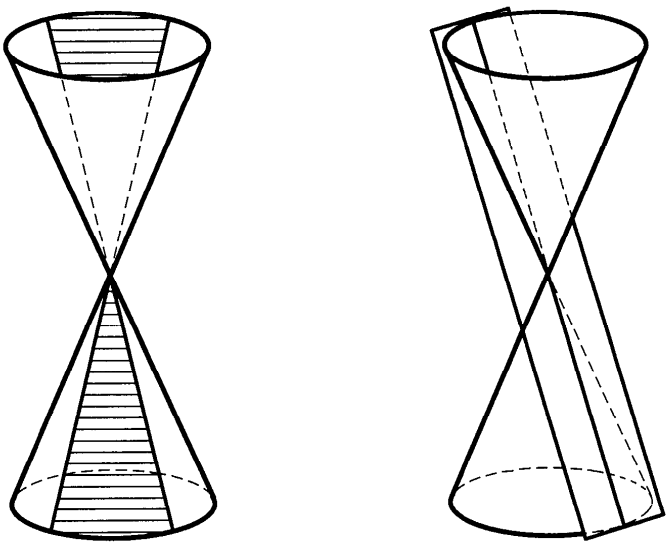
A kúpszelet ellipszis, ha a metszősík a kúp egyik alkotójával sem párhuzamos (370. *a* ábra).

Ha a kúp tengelyére merőleges a metszősík, akkor a síkmetszet kör, s így láthatjuk, hogy a kör az ellipszis egy speciális esete.

Ha a metszősík a kúp egyetlen alkotójával párhuzamos, akkor parabola keletkezik (370. *b* ábra), ha pedig két alkotójával, akkor a síkmetszet *hiperbola* (370. *c* ábra).

Ha a kúp csúcspontjára illesz-

kedő metszősíkot veszünk fel, akkor ún. *elfajult kúpszeletet* kapunk, mégpedig ellipszis helyett *pontot*, hiperbola helyett *metsző egyenespárt* (371. *a* ábra) és parabola helyett egy *egyenest*, amelynek mentén a sík érinti a kúpot (371. *b* ábra). Ezt az egyenest két egybeeső egyenesnek tekinthetjük.



371. ábra. Elfajult kúpszeletek

b) Másodrendű görbék általános egyenlete

A másodrendű görbék közös általános egyenletének szokásos alakja:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

vagy – az együtthatókat másképp jelölve –

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2)$$

Az xy, az x és az y együtthatóiban a kettes tényező csak azért szerepel, hogy a későbbi számításainkban használt képletek alakja egyszerűbb legyen, mivel ott ezeknek az együtthatóknak felére lesz csak szükségünk.

A továbbiakban a (2) egyenletet használjuk vizsgálatainkhoz, és feltesszük, hogy $a_{11} \geq 0$ (ha nem az, akkor az egyenletet megszorozzuk -1-gyel).

Ha $a_{11} = 0$, akkor feltesszük, hogy $a_{22} \geq 0$. Az $a_{12} = 0$ esettel már az előző pontokban foglalkoztunk, ui. akkor a megfelelő tagok

teljes négyzetté való kiegészítésével hoztuk kanonikus alakra az általános másodfokú egyenletet.

A (2) egyenlet együtthatóiból képzett – a főátlóra szimmetrikus – harmadrendű

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik} = a_{ki},\ a_{11} \geq 0)$$

és az

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

másodrendű determinánsoktól függően a következő görbék egyenletét adja:

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Centrális kúpszeletek</td><td>Nem centrális kúpszeletek</td></tr>
<tr><td>$A_{33} > 0$</td><td>$A_{33} < 0$</td><td>$A_{33} = 0$</td></tr>
<tr><td>$A > 0$</td><td>Képzetes ellipszis</td><td rowspan="2">Hiperbola</td><td rowspan="2">Parabola</td></tr>
<tr><td>$A < 0$</td><td>Valós ellipszis</td></tr>
<tr><td>$A = 0$</td><td>Képzetes egyenespár valós metszésponttal</td><td>Valós metsző egyenespár</td><td>Egyenespár, amely, ha $A_{11} + A_{22}$
< 0, valós párhuzamos;
> 0, képz. párhuzamos;
$= 0$, egybeeső (kettős).</td></tr>
</table>

A centrális kúpszeletek középpontjának koordinátái:

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}}, \quad (A_{33} \neq 0).$$

Példák

1. Állapítsuk meg, hogy az $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ másodfokú kétismeretlenes egyenlet milyen kúpszelet egyenlete.

Megoldás: $a_{11}=5,\ a_{12}=a_{21}=\frac{8}{2},\ a_{22}=5,\ a_{13}=a_{31}=-\frac{18}{2}=-9,$

$a_{23}=a_{32}=-\frac{18}{2}=-9,\ a_{33}=9.\ A_{33}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,$ tehát $A_{33}>0,$

$$A=\begin{vmatrix}5 & 4 & -9\\ 4 & 5 & -9\\ -9 & -9 & 9\end{vmatrix}=-81,$$ vagyis $A<0$ és $A_{33}>0,$

tehát az adott egyenlet valós ellipszis egyenlete. A középpont koordinátái:

$$x_0=\frac{A_{31}}{A_{33}}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -9\\ 5 & -9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}}=\frac{9}{9}=1,\quad y_0=\frac{A_{32}}{A_{33}}=\frac{-\begin{vmatrix}5 & -9\\ 4 & -9\end{vmatrix}}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

(Az eltolt és 45°-kal elforgatott ξ, η koordinátarendszerben az ellipszis egyenlete: $\frac{\xi^2}{1}+\frac{\eta^2}{9}=1$).

2. Állapítsuk meg, hogy a $2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0$ másodfokú kétismeretlenes egyenlet milyen kúpszelet egyenlete?

Megoldás: $a_{11}=2,\ a_{12}=a_{21}=-2,\ a_{22}=2,\ a_{13}=a_{31}=4,$

$a_{23}=a_{32}=-4,\ a_{33}=-17,$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A=\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ -2 & 2 & 4\\ 4 & -4 & -17\end{vmatrix}=0,$$

tehát elfajult kúpszeletről, egyenespárról van szó, mégpedig, mivel

$$A_{11}+A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -4 & -17\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & -17\end{vmatrix}=-68,$$

azaz $A_{11}+A_{22}<0$, ezért valós párhuzamos egyenespár egyenlete.

Feladatok

1. Állapítsuk meg, hogy a felsorolt másodfokú kétismeretlenes egyenletek milyen kúpszelet egyenletét jelentik.

a) $14x^2-4xy+11y^2-36x+48y+6=0.$

$[A_{33}=150,\ A=-9000,$ ellipszis.$]$

b) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0.$ $[A_{33}=0,\ A=-225,$ parabola.$]$

c) $x^2+2xy-y^2+8x+4y-8=0.$ $[A_{33}=-2,\ A=44,$ hiperbola.$]$

d) $2x^2 - 7xy - 15y^2 - 10x + 54y - 48 = 0$.

$\left[A_{33} = -\frac{109}{2},\ A = 0,\ \text{metsző egyenespár.}\right]$

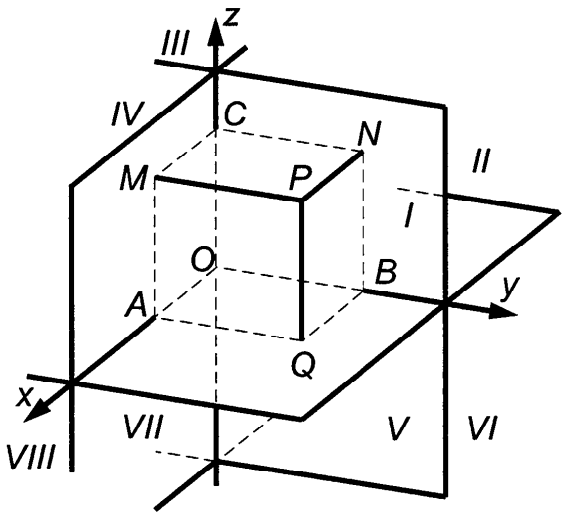
5.4.17 A pont Descartes-féle koordinátái a térben

A pont helyzetének térbeli meghatározásához vegyünk fel három – egy pontra illeszkedő, egymásra merőleges, irányított és egységgel ellátott – egyenest (számegyenest, 372. ábra). A három egymásra merőleges egyenes (az x-, y- és z-koordinátatengely) három egymásra merőleges ún. *koordinátasíkot* határoz meg. A tér egy tetszőleges P pontjának x, y és z koordinátáit a P pontnak a koordinátasíkoktól mért és meghatározott előjellel vett távolságai adják meg, amelyek megegyeznek az OP távolság vetületeivel a koordinátatengelyeken.

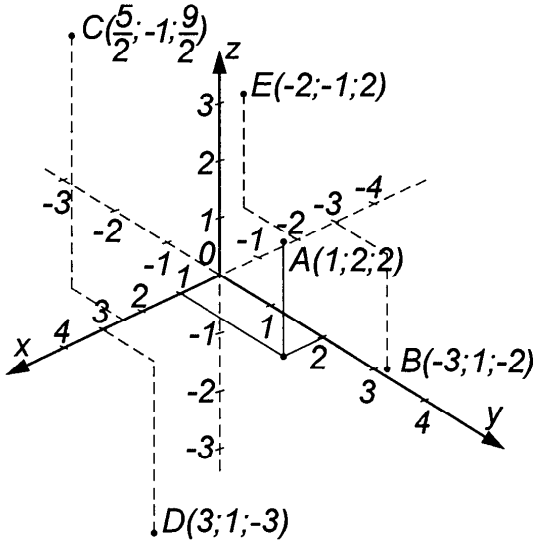
A térbeli P pont *Descartes*-féle derékszögű koordinátái (*René Descartes* 1596–1650):

$$x = NP = OA,\quad y = MP = OB,\quad z = QP = OC.$$

A koordináták előjele attól függ, hogy a pont a koordinátasíkok által létrehozott nyolc térnyolcad melyikében van.



372. ábra. Térbeli derékszögű koordinátarendszer



373. ábra. Pontok

Koordináta	Térnyolcad							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Ha a $P(x,y,z)$ pont az (yz) síkban van, akkor $x=0$; ha az (xz) síkban, akkor $y=0$; ha pedig az (xy) síkban, akkor $z=0$; ha az x-tengelyre illeszkedik, akkor $y=z=0$ stb.

Példa: Ábrázoljuk az $A(1,2,2)$, $B(-3,1,-2)$, $C\left(\frac{5}{2},-1,\frac{9}{2}\right)$, $D(3,1,-3)$ és $E(-2,-1,2)$ pontokat.

Megoldás: A 373. ábra szemlélteti.

Megjegyzés: A koordinátatengelyek irányításától függően kétféle koordinátarendszert használhatunk: *jobbsodrású* és *balsodrású rendszert.* Mi ebben a könyvben a jobbsodrású rendszert használjuk. Ha az x-tengely pozitív felét a kisebb szög mentén az y-tengely pozitív felébe forgatjuk, és egyidejűleg elmozgatjuk a rendszert a z-tengely pozitív irányába, akkor *jobbsodrású* rendszer esetén jobbmenetű csavarmozgás keletkezik (az ellentétes rendszert *balsodrásúnak* mondjuk).

Bizonyítás nélkül közöljük a térbeli derékszögű koordináták transzformációs képleteit.

Párhuzamos eltolás esetén, ha a Q új kezdőpont koordinátái a régi rendszerben $Q(x_0,y_0,z_0)$, az új koordináták pedig ξ, η és ζ, akkor

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0 \tag{1}$$

vagy

$$x = \xi + x_0 \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0 \tag{2}$$

Elforgatás esetén, ha a koordinátarendszerek kezdőpontja azonos marad, de az új rendszer tengelyei a régi rendszer x-tengelyével α, α_1, α_2; y-tengelyével β, β_1, β_2; z-tengelyével γ, γ_1, γ_2 szögeket zárnak be, akkor

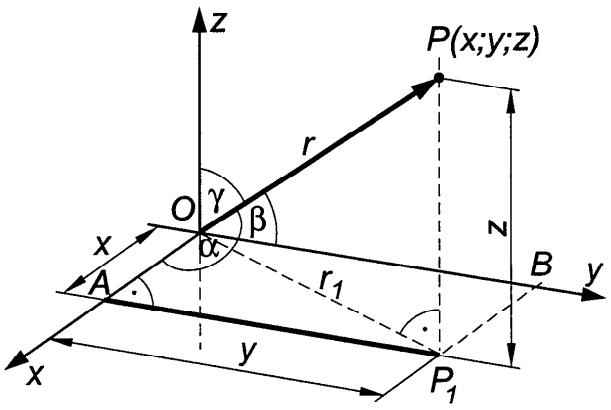
$$\begin{aligned}\xi &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ \eta &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 \\ \zeta &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2\end{aligned} \tag{3}$$

vagy

$$\begin{aligned}x &= \xi\cos\alpha + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2 \\ y &= \xi\cos\beta + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2 \\ z &= \xi\cos\gamma + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2\end{aligned} \tag{4}$$

5.4.18 A térbeli pont koordinátáihoz kapcsolódó alapfeladatok

a) Két pont távolsága



374. ábra. Pont távolsága az origótól

A $P(x,y,z)$ pontnak a koordinátarendszer kezdőpontjától való távolságát az OAP_1 és az OP_1P derékszögű háromszögből kapjuk (374. ábra):

$$OP = r = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P}^2} = \sqrt{r_1^2 + z^2}$$

de $$\overline{OP_1}^2 = r_1^2 = x^2 + y^2,$$

tehát $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{5}$$

Két tetszőleges pont, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$, d távolságát (5)-ből az (1) transzformációs képlet felhasználásával kapjuk. Ha ui. a koordinátarendszert párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a kezdőpont a P_1 ponttal fedésbe kerüljön, és a P_2 pont koordinátáit az új rendszerben ξ, η, ζ -val jelöljük, akkor (5) szerint

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

de (1) alapján:

$$\xi = x_2 - x_1, \quad \eta = y_2 - y_1, \quad \zeta = z_2 - z_1,$$

tehát a $P_1P_2 = d$ távolság:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{6}$$

Pl.: Számítsuk ki a $P_1(-2,3,5)$ és $P_2(-3,4,0)$ pontok távolságát.

Megoldás: A (6) képlet szerint:

$$d = \sqrt{(-3+2)^2 + (4-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

b) Távolságot adott arányban osztó pont koordinátái

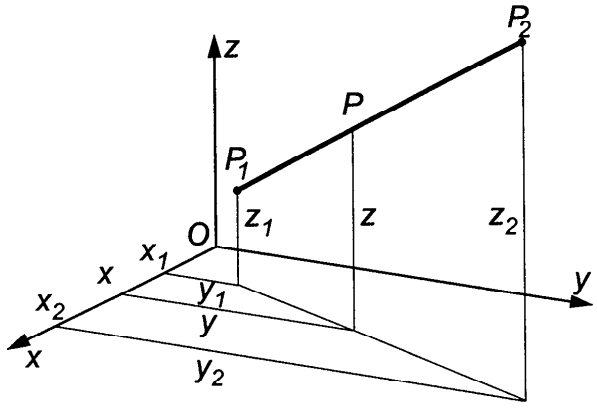
Legyen adott a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pont. Meghatározandó az a $P(x, y, z)$ pont, amelyre $\frac{P_1P}{PP_2} = k$ (375. ábra). A P_1P és PP_2 távolságok vetülete az x-tengelyen:

$$x - x_1 = P_1P\cos\alpha,$$

$$x_2 - x = PP_2\cos\alpha,$$

amiből:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{P_1P}{PP_2} = k,$$



375. ábra. Távolságot adott arányban osztó pont

s ez utóbbi x-re megoldva:

$$x = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k} \tag{7}$$

hasonlóan

$$y = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k} \quad \text{és} \quad z = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}$$

Ha $k = 1$, akkor a $P_1 P_2$ távolságot felező pont koordinátáit kapjuk:

$$x_f = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_f = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_f = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Példa: Számítsuk ki annak a pontnak a koordinátáit, amely a $P_1(0,-1,3)$ és $P_2(2,3,-4)$ pontok közötti szakaszt 1 : 2 arányban osztja.

Megoldás: $k = \frac{1}{2}$, tehát

$$x = \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot (-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

vagyis a kérdéses pont $P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

c) Irányított egyenesszakasz iránykoszinuszai és két irány által bezárt szög meghatározása

Ha az $OP = r$ egyenesszakasznak (374. ábra) a tengelyekkel bezárt szöge α, β, γ, akkor

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma.$$

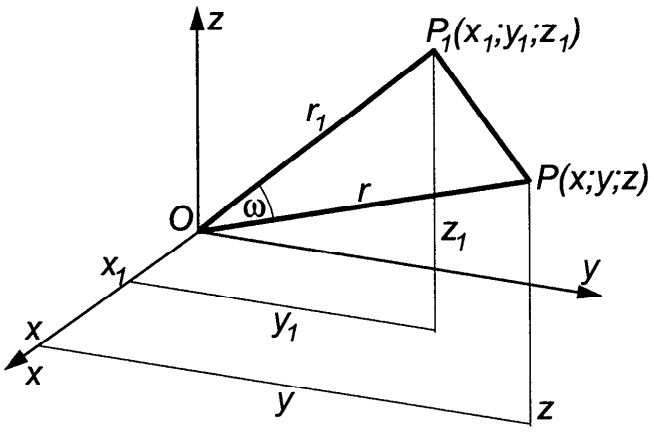
Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, és a megfelelő oldalakat adjuk össze:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right),$$

s mivel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ezért

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (8)$$

összefüggést kapjuk, ahol $\cos\alpha$, $\cos\beta$ és $\cos\gamma$ az $OP = r$ egyenesszakasz *iránykoszinuszai*. Ha valamely iránynak két tengellyel bezárt szöge ismeretes, akkor a (8) egyenletből meghatározhatjuk a harmadik tengellyel bezárt szögét is. Legyen a térben két irány adott, amelyek a tengelyekkel α, β, γ és α_1, β_1, γ_1 szögeket zárnak be. Ha a koordinátarendszer kezdőpontjából az adott irányokkal párhuzamos két egyenest húzunk, akkor az általuk bezárt ω szög megegyezik a két irány által bezárt szöggel. Legyen $OP = r$ az egyik és $OP_1 = r_1$ a másik egyenesszakasz (376. ábra), akkor



376. ábra. Két irány által bezárt szög

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\cos\beta \\ z &= r\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= r_1\cos\alpha_1 \\ y_1 &= r_1\cos\beta_1 \\ z_1 &= r_1\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

A (6) képlet szerint:

$$\overline{PP_1}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

másrészt az $OPP_1\Delta$-re alkalmazott koszinusztétel szerint:

$$\overline{PP_1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2r\,r_1\cos\omega.$$

A két jobboldalt egyenlővé téve:

$$r^2 + r_1^2 - 2r\,r_1\cos\omega = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

A négyzetre emelést elvégezve és rendezve:

$$r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos\omega =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1).$$

(5) szerint azonban:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;\ r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

tehát $$r r_1 \cos\omega = (xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

vagy az (I) összefüggéseket felhasználva és $r r_1$-gyel egyszerűsítve:

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \qquad (9)$$

alakban kapjuk a két irány által bezárt szög koszinuszát.

Ha a két irány merőleges egymásra, azaz $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos\omega = 0$, úgyhogy a *merőlegesség feltétele*:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0 \qquad (10)$$

Ha a *két irány párhuzamos egymással*, azaz $\omega = 0$, és $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, akkor (9)-ből a

$$\cos\omega = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

összefüggést kapjuk.

Példák

1. Megadható-e a térben olyan irány, amely a koordinátatengelyekkel *a*) 120°, 45°, 30° és *b*) 30°, 60°, 90° szögeket zár be?

Megoldás: Megállapítjuk, hogy a (8) feltétel teljesül-e.

a) $\cos^2 120° + \cos^2 45° + \cos^2 30° = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \neq 1.$

Tehát ilyen irány nem adható meg.

b) $\cos^2 30° + \cos^2 60° + \cos^2 90° = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 1.$

Tehát ilyen irány megadható.

2. Határozzuk meg a 30°, 60°, 90° és 150°, 120°, 90° szögekkel adott két irány által bezárt szöget.

Megoldás: (9) szerint:

$$\cos\omega = \cos 30°\cos 150° + \cos 60°\cos 120° + \cos 90°\cos 90° = -1.$$

Tehát $\omega = 180°$.

Feladatok

1. Meghatározandó az $A(-2,1,3)$ és $B(0,-1,2)$ pontok közötti távolság és a két pontot összekötő egyenes iránykoszinuszai.

$$\left[AB = 3 \text{ hosszegység}, \cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{1}{3}.\right]$$

2. Határozzuk meg a z-tengelynek azt a pontját, amely az $A(-4,1,7)$ és $B(3,5,-2)$ pontoktól egyenlő távolságra van. $\left[0,0,\frac{14}{9}.\right]$

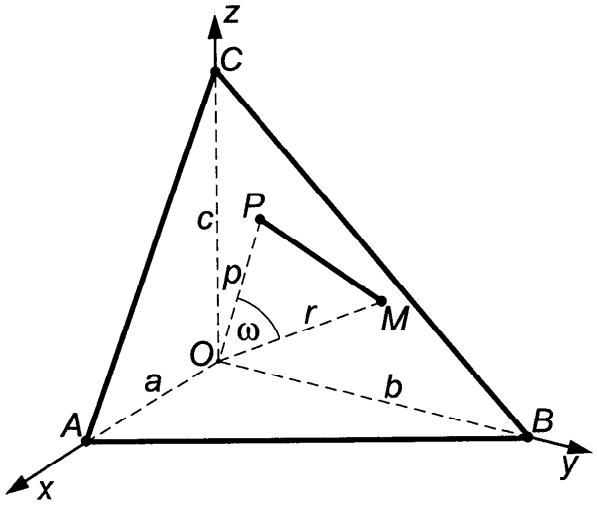
3. Az AF szakasz öt egyenlő részre van felosztva. Az első osztópont $B(3,-5,7)$, az utolsó osztópont $E(-2,4,-8)$. Határozzuk meg a szakasz végpontjait és a többi osztópontot. $\left[A\left(\frac{14}{3},-8,12\right), F\left(-\frac{11}{3},7,-13\right), C\left(\frac{4}{3},-2,2\right), D\left(-\frac{1}{3},1,-3\right).\right]$

4. Határozzuk meg a 150°, 90°, 120° és 60°, 90°, 150° szögekkel adott két irány által bezárt szöget. $\left[\omega = \frac{\pi}{2}.\right]$

5.4.19 A sík egyenletei

a) A sík normál egyenlete

Legyen adott az ABC sík (377. ábra). Az origóból a síkra bocsátott $OP = p$ merőleges zárjon be α, β és γ szöget a tengelyekkel. $M(x,y,z)$ legyen az ABC sík tetszőleges pontja. Az $OM = r$ szakasz, α_1, β_1 és γ_1 szöget zárjon be a koordinátatengelyekkel. Mivel mind a P mind az M pont az ABC síkon fekszik, ezért a PM szakasz is ugyanezen a síkon fekszik és PM merőleges az OP-re. Ha p és r ω szöget zár be, akkor az OMP derékszögű háromszögből



377. ábra. Sík

$$p = r\cos\omega. \qquad \text{(I)}$$

Másrészt

$$x = r\cos\alpha_1, \quad y = r\cos\beta_1, \quad z = r\cos\gamma_1 \tag{II}$$

Szorozzuk meg a (9) képlet mindkét oldalát r-rel:

$$r\cos\omega = r\cos\alpha_1\cos\alpha + r\cos\beta_1\cos\beta + r\cos\gamma_1\cos\gamma$$

innen (I) és (II) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

vagy

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{11}$$

Ez a sík *normálegyenlete*. Mivel a sík egyenlete az x, y, z koordinátákban elsőfokú (lineáris), ezért a síkot *elsőrendű felületnek* mondjuk.

Pl.: Határozzuk meg az origótól öt egységnyi távolságra fekvő sík egyenletét, ha normálisa az x-tengellyel 30°-os, az y-tengellyel 60°-os és a z-tengellyel 90°-os szöget zár be.

Megoldás: Mivel $p = 5$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, ezért

$$\cos\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \cos 90° = 0.$$

A $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ feltétel teljesül, így a sík egyenlete:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0.$$

A sík a z-tengellyel párhuzamos. (Ezt onnan is tudjuk, hogy normálisa merőleges a z-tengelyre.)

b) A sík általános egyenlete

Vizsgáljuk meg az

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{12}$$

általános elsőfokú háromismeretlenes egyenletet, ahol az A, B, C és D együtthatók tetszőleges valós számok, de A, B és C egyidejűleg nem egyenlők nullával. Kimutatjuk, hogy a (12) egyenlet sík egyenlete.

Szorozzuk meg (12) minden tagját egy olyan k állandóval, hogy $Ak = \cos\alpha$, $Bk = \cos\beta$, $Ck = \cos\gamma$ és $Dk = -p$ legyen.

Ekkor az első három egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és a megfelelő oldalakat összeadva:

$$\left(A^2 + B^2 + C^2\right)k^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\text{-nek}$$

kell teljesülnie, amiből

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{13}$$

ahol a négyzetgyök előtti előjelet a D előjelével ellentétesen határozzuk meg ui. mivel p-t pozitívnak vesszük, a

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{14}$$

kifejezésből látjuk, hogy az csak úgy teljesíthető, ha a gyök előjelét a D együttható előjelével ellentétesnek választjuk. A (12) egyenlet tehát valóban a sík általános egyenlete, mert a (13) alakban választott k tényezővel szorozva, azonosan megegyezik a sík (11) egyenletével.

A sík normálisának iránykoszinuszai az $Ak = \cos\alpha$ stb. egyenletekből adódnak, ha (13)-ból k-t behelyettesítjük:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
\cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
\cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Ha a sík (12) alakú általános egyenletében $A = 0$, akkor a $By + Cz + D = 0$ alakú egyenletet kapjuk. Ez esetben a (15) kép-

letekből $\cos\alpha = 0$ és így $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tehát a sík normálisa merőleges az x-tengelyre, azaz a sík párhuzamos az x-tengellyel.

Ha $B = 0$, akkor a sík egyenlete $Ax + Cz + D = 0$. Ez esetben a előzőkhöz hasonló meggondolással kapjuk, hogy a sík az y-tengellyel párhuzamos.

Ha $C = 0$, akkor a sík egyenlete $Ax + By + D = 0$. Ez esetben a sík a z-tengellyel párhuzamos.

Ha $D = 0$, akkor a sík egyenlete $Ax + By + Cz = 0$. Ez esetben (14) szerint $p = 0$, tehát a sík átmegy az origón.

Ha $A = B = 0$, akkor a sík egyenlete $Cz + D = 0$ vagy $z = \frac{-D}{C}$. Ez esetben a sík az (xy) síktól állandó távolságra van, azaz párhuzamos azzal.

Ha $A = D = 0$, akkor a sík egyenlete $By + Cz = 0$. A sík amellett, hogy áthalad az origón, párhuzamos az x-tengellyel, vagyis az x-tengelyre illeszkedik.

Példa: Határozzuk meg a $\sqrt{2}x + y - z = 15$ egyenlettel adott sík normálisának a tengelyekkel bezárt szögét és az origótól való távolságát.

Megoldás: Mivel a $A = \sqrt{2}$, $B = 1$, $C = -1$, $D = -15$, ezért

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ és így}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ vagyis } \alpha = 45°; \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \text{ vagyis } \beta = 60°;$$

$$\cos\gamma = -\frac{1}{2} \text{ vagyis } \gamma = 120°.$$

A sík origótól mért merőleges távolsága: $p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-(-15)}{2} = 7{,}5.$

c) A sík egyenletének tengelymetszetes alakja

Tegyük fel, hogy a (12) egyenletben $D \neq 0$. Vigyük át D-t a jobb oldalra, és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $-D$-vel; akkor a sík általános egyenletéből az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (16)$$

alakú egyenletet kapunk, ahol

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}.$$

(16) a sík egyenletének tengelymetszetes alakja, amelyben a, b és c azok az előjeles távolságok, amelyeket a sík a tengelyekből lemetsz (377. ábra)

Példa: Határozzuk meg a $4x-2y+3z+12=0$ egyenlettel adott sík tengelymetszetes egyenletét.

Megoldás: Mivel $A=4$, $B=-2$, $C=3$, $D=12$, ezért

$$a=-\frac{D}{A}=-\frac{12}{4}=-3,\quad b=-\frac{D}{B}=-\frac{12}{-2}=6,\quad c=-\frac{D}{C}=-\frac{12}{3}=-4,$$

tehát a sík egyenletének tengelymetszetes alakja:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-4}=1 \text{ vagy } -\frac{x}{3}+\frac{y}{6}-\frac{z}{4}=1.$$

5.4.20 A térbeli egyenes egyenletei

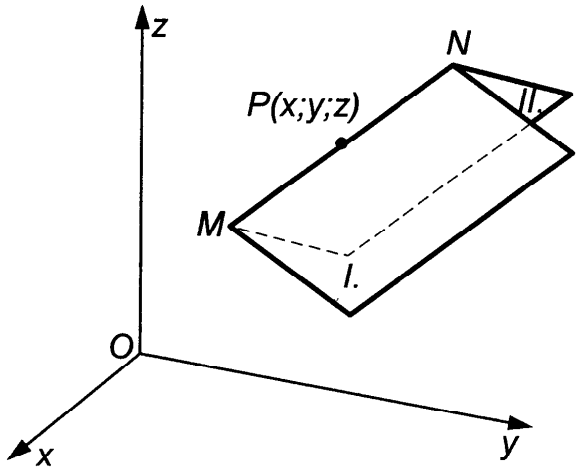
a) Az egyenes általános egyenletrendszere

A koordinátageometriában bármely térbeli egyenes egy síkpár metszésvonalaként szemlélhető (378. ábra), ezért az egyenes általános egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} &\text{(I. sík)} && Ax+By+Cz+D=0 \\ &\text{(II. sík)} && A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{aligned} \qquad (17)$$

A két sík MN metszésvonalán vegyünk fel egy $P(x,y,z)$ pontot. Mivel ez a P pont mindkét síkon rajta van, ezért a (17) egyenletrendszert kielégíti. Másrészt minden $P(x,y,z)$ pont, amely a (17) egyenletrendszert kielégíti, rajta van mindkét síkon, tehát a

két sík metszésvonalán helyezkedik el. Ezért a (17) lineáris egyenletrendszer valóban a térbeli egyenes általános egyenletrendszere.



378. ábra. Térbeli egyenes

Példa: Írjuk fel az S_1: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=1$ és az S_2: $x-4y-9z+7=0$ síkok metszésvonalának egyenletét.

Megoldás: Az S_1 sík általános egyenlete:

$$6x+15y-10z-30=0,$$

és így a két sík metszésvonalának egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 6x+15y-10z-30&=0,\\ x-4y-9z+7&=0. \end{aligned}$$

b) Az egyenes két vetítősíkjával adott egyenletrendszere

Ha a (17) egyenletrendszert x-re és y-ra megoldjuk, akkor

$$x=az+p,\quad y=bz+q \tag{18}$$

alakú egyenletrendszert kapunk. Az első egyenlet y-tengellyel párhuzamos sík, a második egyenlet x-tengellyel párhuzamos sík egyenlete, azaz az első sík az egyenesnek az (xz) síkra, a második pedig az (yz) síkra merőleges vetítősíkja, ill. az egyenes vetületének egyenlete a megfelelő koordinátasíkokban (379. ábra). Ha az egyenes párhuzamos az (xy) síkkal, akkor a másik két koordinátasíkon való vetületét kell venni.

Példa: Határozzuk meg a $\begin{aligned} 4x-3y+4z-2&=0\\ -2x+9y-6z+1&=0 \end{aligned}$ egyenletrendszerrel adott egyenes vetületének egyenletét az (xz) és az (yz) síkban.

Megoldás: Az adott egyenletrendszerből fejezzük ki az x-et is és az y-t is a z segítségével. Az első egyenlet háromszorosát adjuk hozzá a második egyenlethez:

$10x+6z-5=0$, vagyis $x=-0,6z+0,5$.

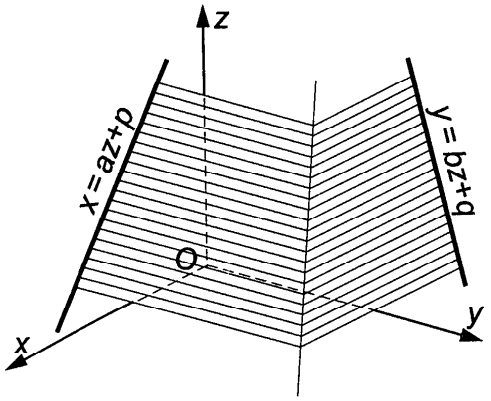
A második egyenlet kétszeresét adjuk hozzá az első egyenlethez:

$15y-8z=0$, vagyis $y=\frac{8}{15}z$.

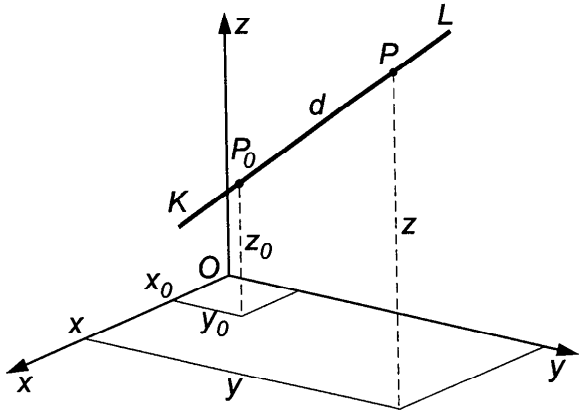
Tehát a térbeli egyenes (xz) síkbeli vetületének egyenlete:

$$x = -0,6z + 0,5$$

és az (yz) síkbeli vetületének egyenlete: $y = \frac{8}{15}z$.



379. ábra. Egyenes vetítősíkjai



380. ábra. Egyenes

c) Adott ponton átmenő, adott irányú egyenes egyenletrendszere

A KL egyenes menjen át a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton és zárjon be a tengelyekkel α, β, γ szöget (egyik sem lehet $\frac{\pi}{2}$, 380. ábra). A P_0 pont és az egyenes egy tetszőleges $P(x,y,z)$ pontja közötti irányított távolság legyen d: $P_0P = d$; akkor

$$x - x_0 = d\cos\alpha \text{ vagy } \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = d,$$

$$y - y_0 = d\cos\beta \text{ vagy } \frac{y - y_0}{\cos\beta} = d,$$

$$z - z_0 = d\cos\gamma \text{ vagy } \frac{z - z_0}{\cos\gamma} = d.$$

A három egyenlőségből az

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} \qquad (19)$$

egyenletrendszert kapjuk, amely két elsőfokú egyenletet foglal magába. Ez az adott ponton átmenő, adott irányú egyenes egyenletrendszere, amit a *térbeli egyenes kanonikus egyenletrendszerének* is szokás nevezni.

Ha a (19) egyenletrendszert $1/k$ -val szorozzuk, akkor

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{20}$$

alakban írhatjuk, ahol

$$m=k\cos\alpha,\quad n=k\cos\beta,\quad p=k\cos\gamma,$$

vagy négyzetre emelve és összeadva a megfelelő oldalakat:

$$m^2+n^2+p^2=k^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)=k^2,$$

azaz

$$k=\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2} \tag{21}$$

úgyhogy az iránykoszinuszok:

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\beta&=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{p}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\end{aligned} \tag{22}$$

(A két előjel közül mindig az egyik, a megfeleltetés szerint.)

Példa: Határozzuk meg a $P_0(-1,2,-7)$ pontra illeszkedő, és a tengelyekkel $\alpha=135°$-os, $\beta=120°$-os és $\gamma=60°$-os szögeket bezáró egyenes egyenletét.

Megoldás: Mivel $\cos\alpha=\cos135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\cos120°=-\frac{1}{2}$, $\cos\gamma=$ $=\cos60°=\frac{1}{2}$, (a $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ feltétel teljesül), és

$x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -7$, így az egyenes (19) alakú egyenlete:

$$\frac{x-(-1)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y-2}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-(-7)}{\frac{1}{2}}, \text{ vagy egyszerűsítve: } -\frac{x+1}{\sqrt{2}} = 2 - y = z + 7.$$

d) A térbeli egyenes egyenletrendszerének paraméteres alakja

Ha a (20) egyenletrendszerben a hányadosok közös értékét t-vel jelöljük, akkor három egyenletet írhatunk fel:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \tag{23}$$

Ez a térbeli egyenes *paraméteres egyenletrendszere*, ahol a t paraméter $-\infty$-től $+\infty$-ig minden értéket felvehet.

Példa: Határozzuk meg az $\frac{x-1}{2} = \frac{4-y}{3} = \frac{z}{9}$ egyenletrendszerrel adott egyenes paraméteres egyenletét.

Megoldás: Az egyenletrendszert tegyük egyenlővé t-vel, akkor

$$\frac{x-1}{2} = t, \text{ vagyis } x = 2t + 1, \qquad \frac{4-y}{3} = t, \text{ vagyis } y = -3t + 4,$$

$$\frac{z}{9} = t, \text{ vagyis } z = 9t,$$

tehát az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= -3t + 4 \qquad (-\infty < t < +\infty) \\ z &= 9t \end{aligned}$$

5.4.21 Síkkal és egyenessel kapcsolatos alapfeladatok

a) Határozzuk meg a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ponton átmenő síkok általános egyenletét

Minden sík egyenletének általános alakja:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad A, B, C, D \in R.$$

Ha a sík átmegy a P_1 ponton, akkor ennek koordinátái kielégítik a sík egyenletét:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

A két egyenlet megfelelő oldalait kivonva egymásból, megkapjuk az adott ponton átmenő síkok általános egyenletét:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (24)$$

Példa: Írjuk fel a $P_1(-4,5,-1)$ ponton átmenő síkok egyenletét.

Megoldás: $A(x+4) + B(y-5) + C(z+1) = 0.$

b) Határozzuk meg a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét

A P_1 ponton átmenő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

Ha ez az egyenes P_2 - n is átmegy, akkor a P_2 pont koordinátái is kielégítik az egyenletrendszert:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Az első és második egyenletrendszer megfelelő tagjait osztva egymással, megkapjuk a két ponton átmenő egyenes egyenletrendszerét:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (25)$$

Példa. Írjuk fel a $P_1(4,-2,0)$ és $P_2(1,5,-4)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét.

Megoldás: A (25) képlet szerint

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y+2}{5+2} = \frac{z-0}{-4-0} \quad \text{vagy} \quad \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{7} = \frac{z}{-4}.$$

c) **Határozzuk meg az $Ax+By+Cz+D=0$ és $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ síkok által bezárt szöget**

Az első sík normálisának a tengelyekkel bezárt szöge legyen α, β és γ, a másodikénak α_1, β_1 és γ_1, akkor a (15) képletek szerint (az előjelek közül vagy a + vagy a − érvényes):

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\alpha_1=\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma_1=\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

A (9) képlet szerint pedig megkapjuk a két sík normálisa, ill. a két sík által bezárt ω szög koszinuszát:

$$\cos\omega=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \tag{26}$$

Ha a két sík *merőleges egymásra*, akkor $\cos\omega=0$, ami csak akkor lehetséges, ha

$$AA_1+BB_1+CC_1=0 \tag{27}$$

Ez a *merőlegesség feltétele.*

Ha két sík *párhuzamos*, akkor a normálisok iránya vagy megegyezik, vagy ellentétes egymással, azaz

$$\cos\alpha=\pm\cos\alpha_1,\quad \cos\beta=\pm\cos\beta_1,\quad \cos\gamma=\pm\cos\gamma_1,$$

vagyis

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

amiből az együtthatókra a következő arány adódik:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \tag{28}$$

Ez a *párhuzamosság feltétele.*

Példák

1. Határozzuk meg a $P(2,-1,0)$ pontra illeszkedő és a $2x-3y+7z-3=0$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.

Megoldás: Az adott ponton átmenő sík egyenlete: $A(x-2)+B(y+1)+Cz=0.$

A (28) feltétel szerint:

$\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{7}$, vagyis $A=2k,\ B=-3k,\ C=7k.$

Ezeket az értékeket az adott ponton átmenő sík egyenletébe helyettesítve és k-val egyszerűsítve:

$2(x-2)-3(y+1)+7z=0,$ vagyis $2x-3y+7z-7=0.$

2. Határozzuk meg a $P(4,0,-2)$ pontra illeszkedő és az $5x-3y+2z-4=0,$ $y-5z-1=0$ síkokra merőleges sík egyenletét.

Megoldás: Az adott ponton átmenő sík egyenlete: $A(x-4)+By+C(z+2)=0.$

A merőlegesség (27) feltétele szerint:

$5A-3B+2C=0,\ B-5C=0.$

Ezekből az egyenletekből $A=\frac{13}{5}C,\ B=5C.$

Helyettesítsük be az A és B értékét az adott pontra illeszkedő sík egyenletébe, és C-vel egyszerűsítsünk:

$\frac{13}{5}(x-4)+5y+(z+2)=0,$ amiből $13x+25y+5z-42=0.$

3. Határozzuk meg a $P_1(2,-1,4),\ P_2(-1,3,-2),\ P_3(0,2,3)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét.

Megoldás: A P_1 ponton átmenő sík egyenlete:

$A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0.$

Ezen a síkon azonban a másik két pont is rajta van, tehát azok koordinátái is kielégítik a sík egyenletét, amiből

$$-3A+4B-6C=0$$
$$-2A+3B-C=0.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $A=-14C$, $B=-9C$.

A P_1 ponton átmenő sík egyenletébe behelyettesítve és $-C$-vel egyszerűsítve:

$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$, vagyis $14x+9y-z-15=0$.

d) Határozzuk meg az $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ és az $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ egyenesek által bezárt szöget

Az első egyenesnek a tengelyekkel bezárt szöge legyen α_1, β_1 és γ_1, a másodiké α_2, β_2 és γ_2. A (22) egyenletek szerint:

$$\cos\alpha_1=\frac{m_1}{\pm\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{m_2}{\pm\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\ \text{stb.}$$

Ezeket a (9) képletbe helyettesítve, kapjuk a két egyenes ω szögének koszinuszát:

$$\cos\omega=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\pm\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{29}$$

A *merőlegesség feltétele*:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \tag{30}$$

A *párhuzamosság feltétele*:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{31}$$

Példa: Határozzuk meg a $P(2,-1,4)$ pontra illeszkedő és az $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-2}=z+2$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

Megoldás: A P pontra illeszkedő egyenes egyenlete: $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-4}{p}$.

(31) szerint $\frac{m}{3}=\frac{n}{-2}=\frac{p}{1}$, ahonnan $m=3k$, $n=-2k$, $p=k$.

Ezeknek az értékeknek a P pontra illeszkedő egyenes egyenletébe való behelyettesítése és k-val való egyszerűsítése után a kérdéses egyenes egyenlete:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{1}.$$

e) Határozzuk meg az $Ax+By+Cz+D=0$ sík és az $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ egyenes merőlegességének és párhuzamosságának feltételét

Az egyenes akkor merőleges a síkra, ha a sík normálisával párhuzamos. Mivel a sík normálisának iránykoszinuszai az A, B és C együtthatókkal arányosak, az egyenes iránykoszinuszai pedig m, n és p-vel, ezért az *egyenes és sík merőlegességének feltétele*:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{32}$$

és *párhuzamosságának feltétele*:

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{33}$$

Példák

1. Határozzuk meg a $P(2,4,-1)$ pontra illeszkedő és a $4x-5y-z-6=0$ síkra merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás: Az adott ponton átmenő egyenes egyenlete: $\frac{x-2}{m}=\frac{y-4}{n}=\frac{z+1}{p}$.

A merőlegesség feltétele szerint $\frac{m}{4}=\frac{n}{-5}=\frac{p}{-1}$, azaz m, n és p a 4, -5 és -1 számokkal arányosak, $m=4k$, $n=-5k$ és $p=-k$. Behelyettesítés és k-val való egyszerűsítés után az egyenes egyenlete:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{-1}.$$

2. Határozzuk meg a $P(-4,3,5)$ pontra illeszkedő és az $x-2y+5=0$, $4x+6y-3z-7=0$ síkokkal párhuzamos egyenes egyenletét.

Megoldás: A P ponton átmenő egyenes egyenlete: $\frac{x+4}{m}=\frac{y-3}{n}=\frac{z-5}{p}$.

A (33) feltétel szerint:

$$m-2n=0,\quad 4m+6n-3p=0,\quad \text{ahonnan}\quad m=\frac{3}{7}p \quad \text{és}\quad n=\frac{3}{14}p.$$

Behelyettesítve és p-vel való egyszerűsítés után megkapjuk a keresett egyenes egyenletét:

$$\frac{x+4}{\frac{3}{7}}=\frac{y-3}{\frac{3}{14}}=\frac{z-5}{1}.$$

3. Határozzuk meg a $P(-1,-4,3)$ pontra illeszkedő, továbbá a

$$\left.\begin{aligned}2x-4y+z-1&=0\\ x+3y+5&=0\end{aligned}\right\} \text{ és az } \left.\begin{aligned}x&=2+4t\\ y&=-1-t\\ z&=-3+2t\end{aligned}\right\}$$

egyenesekre merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás: A P ponton átmenő egyenes egyenlete: $\frac{x+1}{m}=\frac{z+4}{n}=\frac{z-3}{p}$.

Az első egyenes egyenletrendszerét írjuk át (20) alakra, hogy az irányítényezőket megállapíthassuk: $x=-3y-5$, $z=10y+11$, úgyhogy

$$\frac{x+5}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z-11}{10},\quad \text{tehát}\quad m_1=-3,\quad n_1=1,\quad p_1=10.$$

A második egyenletből: $m_2=4$, $n_2=-1$, $p_2=2$.

A merőlegesség (30) feltétele szerint:

$$-3m+n+10p=0$$
$$4m-n+2p=0,\quad \text{ahonnan}\quad m=-12p \quad \text{és}\quad n=-46p.$$

A P ponton átmenő egyenes egyenletébe helyettesítve és $-p$-vel egyszerűsítve, megkapjuk a kérdéses egyenes egyenletrendszerét:

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}.$$

f) Határozzuk meg a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pont távolságát az $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ síktól

A P_1 pont előjeles távolságát az adott síktól jelöljük d-vel, akkor a P_1 pontra illeszkedő és az adott síkkal párhuzamos sík egyenlete:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (p+d) = 0,$$

amelyből a P_1 pont koordinátáinak behelyettesítésével d kiszámítható:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \tag{34}$$

Ha a P_1 pont és a kezdőpont a sík különböző oldalain van, akkor $d > 0$, ellenkező esetben $d < 0$.

Az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű síknak a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ponttól való d távolsága:

$$|d| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \tag{34a}$$

Példa: Határozzuk meg a $P(-2,-4,3)$ pont távolságát a $2x - y + 2z + 3 = 0$ síktól.

Megoldás: $|d| = \left| \frac{2\cdot(-2) - (-4) + 2\cdot 3 + 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right| = \frac{9}{3} = 3.$

Feladatok

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amelyik
a) a $(2,-5,3)$ pontra illeszkedik és párhuzamos az (xz) síkkal;
b) a $(3,1,-2)$ pontra és a z-tengelyre illeszkedik;
c) a $(4,0,-2)$ és $(5,1,7)$ pontokra illeszkedik, és párhuzamos az x-tengellyel.
$[a)\ y + 5 = 0,\ b)\ -x + 3y = 0,\ c)\ 9y - z - 2 = 0.]$

2. Határozzuk meg az $5x + 2y - 3z - 10 = 0$ síknak a koordinátasíkokkal való metszésvonalait. $[5x + 2y = 10,\ 5x - 3z = 10,\ 2y - 3z = 10.]$

3. Határozzuk meg a $P(2,-1,-1)$ pont távolságát a $16x - 12y + 15z - 4 = 0$ síktól. $[|d| = 1.]$

4. Írjuk fel a $2x - 2y - z - 3 = 0$ síkkal párhuzamos és tőle öt egységre levő sík egyenletét. $[2x - 2y - z - 18 = 0$ és $2x - 2y - z + 12 = 0.]$

5. Számítsuk ki az $x - 2y + 2z - 8 = 0$ és $x + z - 6 = 0$ síkok által bezárt szöget. $[\omega = 45°.]$

6. Számítsuk ki az $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ egyenesnek a koordinátasíkokkal alkotott döféspontjait. $\left[\left(4,-\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{13}{3},0,-\frac{1}{3}\right),\ \left(0,-\frac{13}{2},4\right).\right]$

7. Határozzuk meg a $P_1(0,-1,2)$, $P_2(1,2,2)$, $P_3(2,0,-3)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét. $[3x-y+z-3=0.]$

8. Határozzuk meg a $P_1(2,3,1)$, és $P_2(0,-3,2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét. $\left[\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-1}{-1}.\right]$

9. Határozzuk meg a $2x-y+6z-3=0$ síkra merőleges és a $P_1(1,-2,1)$ pontra illeszkedő egyenes egyenletét. $\left[\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{6}.\right]$

10. Határozzuk meg a $P_1(3,-1,0)$ és $P_2(-2,4,-3)$ pontokra illeszkedő és a $4x-y+3=0$ síkra merőleges sík egyenletét. $[x+4y+5z+1=0.]$

11. Határozzuk meg a $P(-3,2,-5)$ pontra illeszkedő és az $x-4z-3=0$, $2x-y-5z-1=0$ síkokkal párhuzamos egyenes egyenletét.

$\left[\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{1}.\right]$

12. Határozzuk meg a $P(0,-4,2)$ pontra illeszkedő és az $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-1}=z$, $\left.\begin{matrix}x-y+4=0\\3x-2y+3z=0\end{matrix}\right\}$ egyenesekre merőleges egyenes egyenletét.

$\left[\frac{x}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-2}{-9}.\right]$

13. Számítsuk ki az $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ és az $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ egyenesek által bezárt szöget. $[\omega=60°.]$

14. Írjuk fel a $\left.\begin{matrix}2x+3y-z-4=0\\3x-5y+2z+1=0\end{matrix}\right\}$ egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

$[x=t+1,\ y=-7t,\ z=-19t-2.]$

15. Határozzuk meg az $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ egyenesre és a $P(2,-2,1)$ pontra illeszkedő sík egyenletét. $[4x+6y+5z-1=0.]$

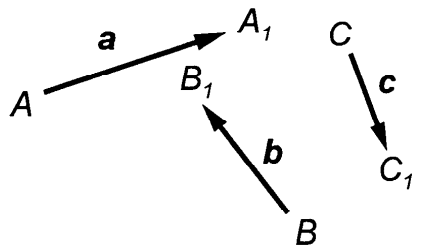
HATODIK FEJEZET

VEKTORALGEBRA

6.1 Skaláris- és vektormennyiségek

A matematika, fizika és más műszaki tudományok által vizsgált mennyiségek két nagy csoportba oszthatók. Egyik csoportba tartoznak azok a mennyiségek, amelyek kizárólag számértékkel jellemezhetők, a másikba pedig azok, amelyek jellemzéséhez a számértéken kívül a mennyiségek irányára és irányítására is szükség van.

Az első csoportba tartoznak a *skaláris-*, a második csoportba az *irányított* vagy *vektormennyiségek.* Skaláris mennyiség pl. a hosszúság, terület, térfogat, tömeg, sűrűség, munka stb.; vektormennyiség pl. az erő, elmozdulás, sebesség, gyorsulás, forgatónyomaték, elektromos és mágneses térerősség stb. A skaláris mennyiségek jelölésére a latin és a görög betűket használjuk. A vektormennyiségeket (konkrét fizikai jelentésüktől eltekintve) megfelelő irányú egyenesszakaszokkal ábrázoljuk, amelyeken az irányítást nyíl jelzi (381. ábra). Az ilyen meghatározott irányú és irányítású (az irányítást az irányba néha beleértik) egyenesdarab a *vektormennyiség*, röviden *vektor.*



381. ábra. Vektorok

A vektor jelölésmódjai könyvekben általában félkövér betűk: pl.: $\mathbf{AA_1}$, $\mathbf{BB_1}$, $\mathbf{CC_1}$, ... vagy **a**, **b**, **c**, ...

A vektort ábrázoló egyenesszakasz hossza a vektor *abszolút értéke* (*modulusa*); jelölése: $|\mathbf{a}| = a$.

Azt a vektort, amelyiknek kezdő- és végpontja egybeesik, *nullvektornak* nevezzük, és **0** jellel jelöljük. A nullvektor abszolút értéke 0, iránya tetszőleges. A nullvektortól különböző két vektort akkor és csak akkor tekintünk *egyenlőnek*, ha irányuk, irányításuk és abszolút értékük megegyezik, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \text{ és } \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b} \text{ és } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

Az így értelmezett vektorokat *szabadvektoroknak* nevezzük, mert a térben önmagukkal párhuzamosan bárhova eltolhatók anélkül, hogy megváltoznának.

A mechanikai, elektromosságtani és egyéb alkalmazásokban olyan vektorokat is használunk, amelyeknek kezdőpontja a térben egy adott (fix) pont (ezeket *kötött* vagy *helyvektoroknak* nevezzük), vagy pedig saját irányegyenesük mentén mozgathatók (ún. csúsztatható vektorok).

A "vektor" szón a továbbiakban mindaddig szabadvektort értünk, míg más feltételt nem kötünk ki. (Az alkalmazásokban szükség esetén a kezdőpont rögzített, ill. a vektor csúsztatható voltát figyelembe vesszük.)

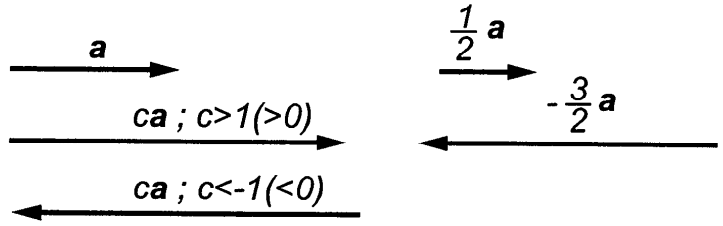
Az ugyanazon egyenessel párhuzamos vektorok *kollineárisak*, az ugyanazon síkkal párhuzamos vektorok pedig *komplanárisak*.

6.2 Vektorok szorzása skaláris mennyiséggel. Egységvektor

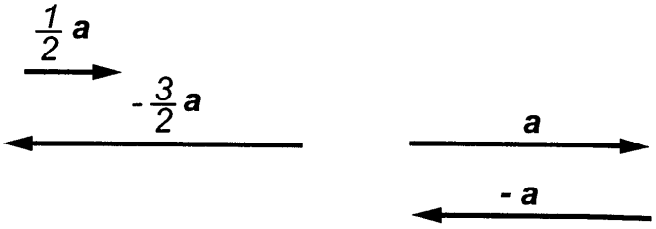
Az **a** vektornak a c skaláris számmal való szorzata az a **b** vektor, amelynek abszolút értéke az **a** vektor abszolút értékének $|c|$-szerese, iránya párhuzamos az **a** vektor irányával és irányítása azonos vagy ellentétes az **a** vektor irányításával, attól függően, hogy $c > 0$ vagy $c < 0$ (382. ábra). Ha $c = 0$, akkor a $0 \cdot \mathbf{a}$ vektor abszolút

értéke (hossza) 0, tehát a szorzat a **0** vektorral egyenlő. Ha $c = -1$, akkor a $-1 \cdot \mathbf{a}$ olyan **b** vektor, amely párhuzamos az **a** vektorral, azzal ellentétes irányítású, és abszolút értéke egyenlő az **a** vektor abszolút értékével (383. ábra). Az ilyen vektort – **a** vektor alakban jelöljük, és az **a** vektor *ellentett vektorának* nevezzük:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}.$$



382. ábra. Vektor szorzása skaláris számmal



383. ábra. Ellentett vektorok

Ha az **a** vektort hosszának reciprok értékével, a $c = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$ értékkel szorozzuk, akkor az így adódó új vektor $\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ párhuzamos és azonos irányítású az **a** vektorral és abszolút értéke 1:

$$|\mathbf{b}| = \left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = 1.$$

Az ilyen **b** vektort az **a** vektor *egységvektorának* nevezzük, jele: $\mathbf{a}^0$, tehát

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}^0 \qquad (1)$$

Ebből következik, hogy minden vektor felírható abszolút értékének és egységvektorának szorzataként:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0 \qquad (2)$$

A derékszögű koordinátarendszerben az *x, y* és *z tengely pozitív irányába mutató egységvektorok jelei*: **i**, **j** és **k**.

6.3 Vektorok összege és különbsége

a) Vektorok összeadása

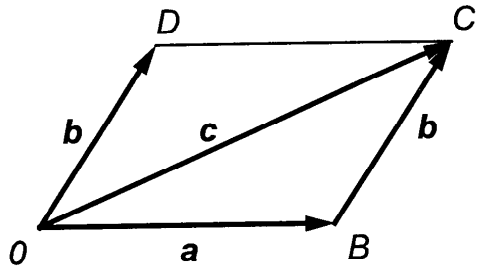
A mechanikában tapasztalati tény, hogy azonos pontban ható **a** és **b** erővektorok helyettesíthetők ugyanazon pontban ható egyetlen meghatározott **c** erővektorral, amelynek szerkesztését a 384. ábra szemlélteti. A szerkesztéssel meghatározott **c** vektort nevezzük az **a** és **b** vektorok összegének. Jelölése: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

Az $\mathbf{OB}=\mathbf{a}$ és az $\mathbf{OD}=\mathbf{b}$ vektorok összegén azt az $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ vektort értjük, amely az *OBCD* paralelogrammának az *O* csúcsból kiinduló átlóját alkotja.

A 384. ábra *OBC* háromszögéből felírható a vektorokra vonatkozó *háromszögegyenlőtlenség*:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,$$

ahol csak akkor állhat egyenlőség, ha az **a** és **b** vektorok kollineárisak és egyező irányításúak.



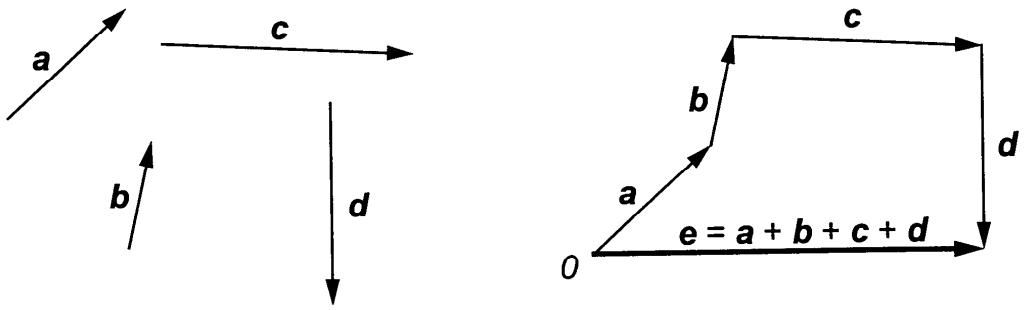
384. ábra. Két vektor összege

Az összeadás értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy a vektorok összeadása kommutatív: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,

és asszociatív (pl. három vektor esetére):

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

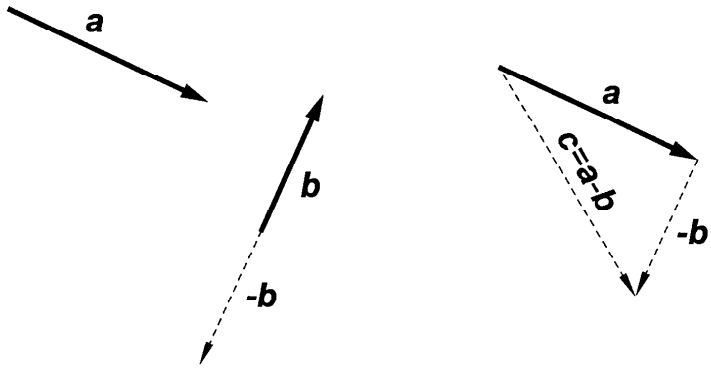
Több vektor, pl. az **a**, **b**, **c** és **d** vektor vektorösszegét, az **e** vektort legcélszerűbben a 385. ábra szerint szerkesztjük meg.



385. ábra. Vektorok összeadása

Tehát az első vektor végpontjából irány és nagyság szerint felmérjük a második vektort, ennek végpontjából a harmadikat és így tovább. A vektorösszeg a szabad kezdőponttól a szabad végponthoz húzott és ugyanúgy irányított záróvektor lesz. Ha az öszszegezendő vektorok kezdő- és végpontja egybeesik, a vektorok összege **0**. Az eredményül **0** vektort adó vektorösszeg zárt sokszöget alkot.

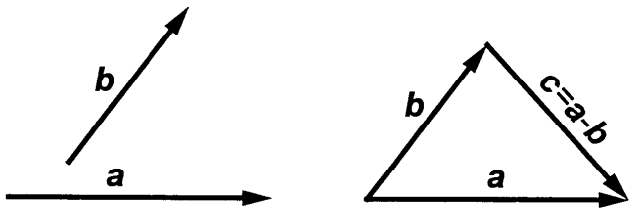
b) Vektorok kivonása



386. ábra. Két vektor különbsége

Két vektor különbségét a kivonandó vektornak (-1)-gyel való szorzása alapján két vektor összeadására vezethetjük vissza (386. ábra):

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-1)\cdot\mathbf{b}=$$
$$=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{c}$$



387. ábra. Két vektor különbsége

Az **a** és **b** vektorok különbségét úgy is megkapjuk, hogy keressük azt a **c** vektort (387. ábra), amely a **b** vektorhoz adva eredményül az **a** vektort adja, azaz $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$ amiből $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

Az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ különbségvektor tehát a közös kezdőpontból felrajzolt **a** és **b** vektorok végpontját összekötő vektor, amely a kisebbítendő vektor végpontja felé mutat.

Az elmondottakból következik, hogy

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0} \quad \text{és} \quad |\mathbf{a}-\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|.$$

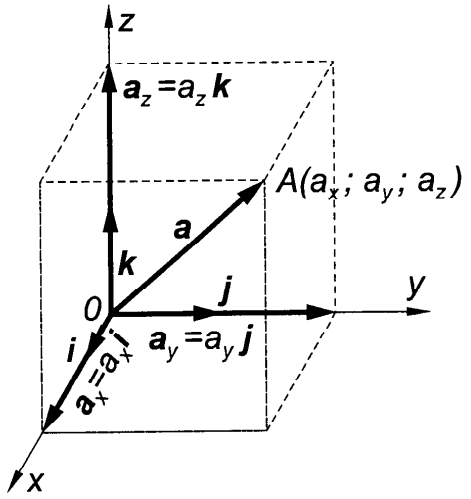
6.4 Vektorok derékszögű koordinátái

Vegyünk fel a *Descartes*-féle térbeli koordinátarendszerben az O origóból kiinduló és a tengelyek pozitív irányításával megegyező irányítású három egységvektort. A három egységvektort az x-, y- és z-tengelynek megfelelően jelölje: **i**, **j** és **k**. A tér valamely A pontjának koordinátái legyenek a_x a_y és a_z, vagyis $A(a_x, a_y, a_z)$ (388. ábra). Ha az $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$ vektor x-, y-, z-tengely irányába eső összetevői $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ és $\mathbf{a}_z$, akkor az **a** vektor a vektorösszegezés szabálya szerint $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ alakban írható fel.

A (2) szerint azonban $\mathbf{a}_x = a_x\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = a_y\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = a_z\mathbf{k}$ és így

$$\mathbf{a} = \mathbf{OA} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{3}$$

Szokásos jelölés még: $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$; $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Az $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$, vektorokat az **a** vektor *vektoriális komponenseinek* (*összetevőinek*), az a_x, a_y, a_z, skalárokat pedig az **a** vektor *skaláris komponenseinek* vagy az **a** *vektor koordinátáinak* nevezzük. Ha a vektorok koordinátáival akarunk számolni, akkor a vektorok kezdőpontját mindig az origóba eltolva vesszük figyelembe. Az **a** vektor hossza a skaláris komponensek négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel egyenlő, azaz



388. ábra. Vektoriális és skaláris komponensek

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{4}$$

Ha α, β és γ jelöli az **a** vektornak az x-, y- és z-tengely pozitív irányával bezárt szögét, akkor

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \tag{5}$$

és $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1.$$

Az (1) összefüggés alapján az **a** vektor egységvektora komponensekben kiírva:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}\mathbf{k} \tag{6}$$

vagy (5) felhasználásával:

$$\mathbf{a}^0 = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k} \tag{7}$$

A komponensekkel adott vektorok összeadását és kivonását az algebra műveleti szabályai szerint végezzük.

Pl.: Képezzük az $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ vektorok összegét és különbségét:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) + (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) =$$
$$= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} = \left(a_x + b_x,\, a_y + b_y,\, a_z + b_z\right)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) - (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) =$$
$$= (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k} = \left(a_x - b_x,\, a_y - b_y,\, a_z - b_z\right)$$

Példák

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ egységvektorát és az α, β, γ szögeket.

Megoldás: $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right).$

(5) szerint:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = 60°;\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \beta = 45°;\quad \cos\gamma = -\frac{1}{2},\ \gamma = 120°.$$

2. Határozzuk meg az $A(2,4,6)$ és a $B(-1,8,-6)$ pontok közötti távolságot, mint az **AB** vektor abszolút értékét.

Megoldás

$\mathbf{a} = \mathbf{OA} = (2,4,6) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$,

$\mathbf{b} = \mathbf{OB} = (-1,8,-6) = -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

Az **AB** vektort $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbségvektorral adhatjuk meg:

$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$.

A két pont távolsága:

$$d = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (+4)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

3. Igazoljuk. hogy a háromszög súlyvonalai – mint az oldalak felé irányított vektorok – zárt vektorháromszöget alkotnak.

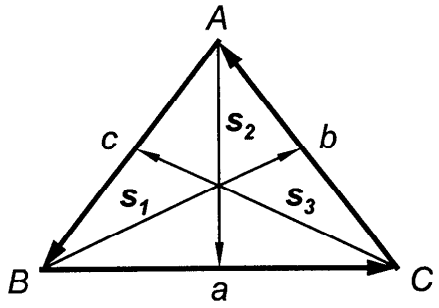
Megoldás: A 389. ábrából $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, mivel zárt vektorháromszög:

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 =$$

$$= \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) + \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0},$$

vagyis $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}$, tehát a háromszög három súlyvonalvektora zárt vektorháromszöget alkot.



389. ábra. Súlyvonalvektorok

6.5 Két vektor skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzatának nevezzük a két vektor abszolút értékéből és az általuk bezárt szög koszinuszából képzett szorzatot.

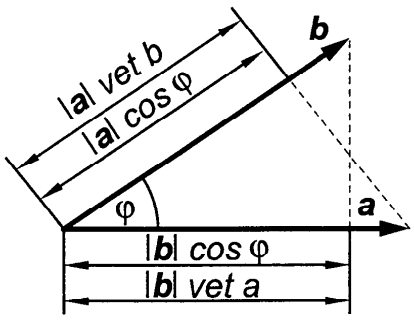
(Az általuk bezárt szögön a 0 és π közé eső szöget értjük.) Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatának jele: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (olv.: á pont bé) vagy **a b** vagy (**a**, **b**).

Ha az **a** és **b** vektorok által bezárt szög φ (390. ábra), akkor

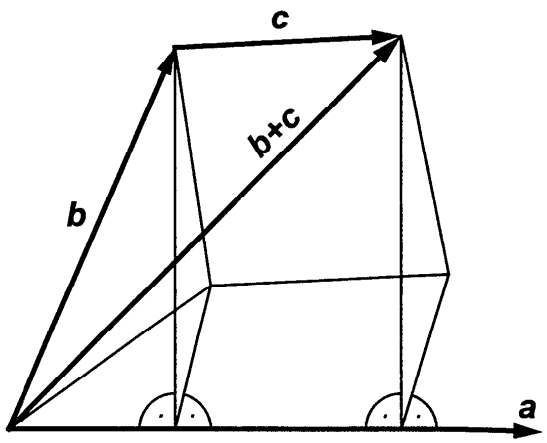
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi \qquad (8)$$

A skaláris szorzat eredménye skaláris mennyiség.

Pl.: Legyen $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 4$ és $\varphi = 60°$, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5 \cdot 4\cos 60° = 10$.



390. ábra. Két vektor skaláris szorzata



391. ábra. A skaláris szorzás disztributív

A skaláris szorzás *kommutatív*:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

Ez következik a skaláris szorzás definíciójából vagy a 390. ábra két háromszögének hasonlósága alapján, mivel $|\mathbf{b}|\cos\varphi=|\mathbf{b}_{\text{vet a}}|$, (ahol $\mathbf{b}_{\text{vet a}}$ a $\mathbf{b}$ vektor vetülete az $\mathbf{a}$ vektorra), és $|\mathbf{a}|\cos\varphi=|\mathbf{a}|_{\text{vet b}}$, úgyhogy

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi=|\mathbf{a}||\mathbf{b}_{\text{vet a}}|=|\mathbf{b}||\mathbf{a}_{\text{vet b}}|=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

A skaláris szorzás egy c skaláris tényezővel *asszociatív*:

$$c(\mathbf{ab})=(c\mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Igazolását az előbbi módon végezhetjük el.

A skaláris szorzás *disztributív*:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Ez a 391. ábra szerint a vektorok vetületével igazolható.

Ha két kollineáris vektort szorzunk össze, akkor a közbezárt szög $\varphi=0°$ vagy 180°, tehát $\cos\varphi=\pm1$, s így $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=+|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, vagy $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Ezek szerint $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos0°=|\mathbf{a}|^2$, azaz

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2 \qquad (9)$$

Ha két vektor merőleges egymásra, skaláris szorzatuk nulla.

Ui. akkor $\varphi = 90°$, tehát $\cos\varphi = 0$, és így

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cdot 0 = 0 \qquad (10)$$

Megfordítva: ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, akkor vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tehát

két, nullvektortól különböző vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorok skaláris szorzatai az előzőek szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= 1, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= 0, \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} &= 1, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} &= 0, \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} &= 1, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= 0. \end{aligned}$$

Az elmondottak felhasználásával megalkothatjuk a komponensekkel adott vektorok skaláris szorzásakor követendő szabályt:

Ha $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x\cdot 1 + a_yb_y\cdot 1 + a_zb_z\cdot 1 + a_xb_y\cdot 0 + \ldots = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \qquad (11)$$

Tehát két, koordinátákkal adott vektor skaláris szorzata a megfelelő komponensek szorzatösszegével egyenlő.

Két – koordinátákkal megadott – vektor által közbezárt szöget az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ képletből számíthatjuk ki:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (12)$$

Példák

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ skaláris szorzatot, ha $\mathbf{a} = 0{,}6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Megoldás: A (11) képlet szerint: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0{,}6\cdot 5 - 4\cdot 2 - 3\cdot 2 = -11$.

2. A koszinusztételt bizonyíthatjuk egy zárt vektorháromszög felhasználásával is. Egy ABC csúcspontokkal adott háromszög oldalai legyenek $\mathbf{CB}=\mathbf{a}$; $\mathbf{CA}=\mathbf{b}$ és $\mathbf{AB}=\mathbf{c}$ vektorokkal adottak.

Megoldás: $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Szorozzuk meg mindkét oldalt önmagával:

$$\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \text{ és így } \mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma, \text{ vagyis}$$

$$\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}\cos\gamma.$$

3. Számítsuk ki az $\mathbf{a}=(1,1,-4)$ és $\mathbf{b}=(1,-2,2)$ vektorok által bezárt szöget.

Megoldás: A (12) képlet szerint:

$$\cos\varphi=\frac{(1,1,-4)\cdot(1,-2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1-2-8}{\sqrt{18\cdot 9}}=-\frac{9}{9\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi=135°.$$

4. Egy háromszög $A(-1,2,3)$, $B(1,1,1)$ és $C(0,0,5)$ csúcspontokkal adott. Számítsuk ki az α és β szöget.

Megoldás: A csúcspontokhoz rendelt helyvektorok:

$\mathbf{a}=(-1,2,3)$, $\mathbf{b}=(1,1,1)$ és $\mathbf{c}=(0,0,5)$.

Az oldalvektorok:

$\mathbf{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=(2,-1,-2)$, $\mathbf{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=(1,-2,2)$ és $\mathbf{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=(-1,-1,4)$.

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AC}|}=\frac{2+2-4}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AC}|}=0,\ \alpha=90°, \text{ azaz } \mathbf{AB}\perp\mathbf{AC}.$$

A β szöget a $\mathbf{BA}=-\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BC}$ vektorok zárják be:

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{BA}\cdot\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}||\mathbf{BC}|}=\frac{2-1+8}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=\frac{9}{9\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta=45°.$$

5. Határozzuk meg az $\mathbf{a}=(2,y_0,z_0)$ vektort úgy, hogy merőleges legyen a $\mathbf{b}=(-1,4,2)$ és $\mathbf{c}=(3,-3,-1)$ vektorokra.

Megoldás: A (10) képlet szerint: mivel $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$, ezért $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ és $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$, amiből a $-2+4y_0+2z_0=0$; $6-3y_0-z_0=0$ kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk. Megoldva: $y_0=5$, $z_0=-9$, tehát $\mathbf{a}=(2,5,-9)$.

6. Határozzuk meg a $\mathbf{P}=(5,-3,7)$ erőnek az $\mathbf{s}=(1,1,1)$ elmozdulási vektor irányába eső vetületvektorát.

Megoldás: A $\mathbf{P}$ vektor $\mathbf{s}$ irányára való vetületének hosszát $\mathbf{s}^0\cdot\mathbf{P}$ szolgáltatja, amely az $\mathbf{s}^0$ egységvektorral szorozva megadja a kívánt vetületvektorát:

$$\mathbf{s}^0=\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}},$$

$$\left(\mathbf{s}^0\cdot\mathbf{P}\right)\cdot\mathbf{s}^0=\frac{1}{\sqrt{3}}(5-3+7)\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}=3\cdot(1,1,1)=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}.$$

6.6 Két vektor vektoriális szorzata

Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata egy olyan **c** vektor (392. ábra), amelynek

1. abszolút értéke az **a** és **b** vektorokkal szerkesztett paralelogramma területének mértékszámával egyenlő;

2. iránya merőleges mind **a**, mind **b** irányára;

3. irányítása olyan, hogy az **a, b, c** vektorok ilyen sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzatát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ módon jelöljük, és "á kereszt bé"-nek mondjuk. Használatos ezen kívül az $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ jelölés is.

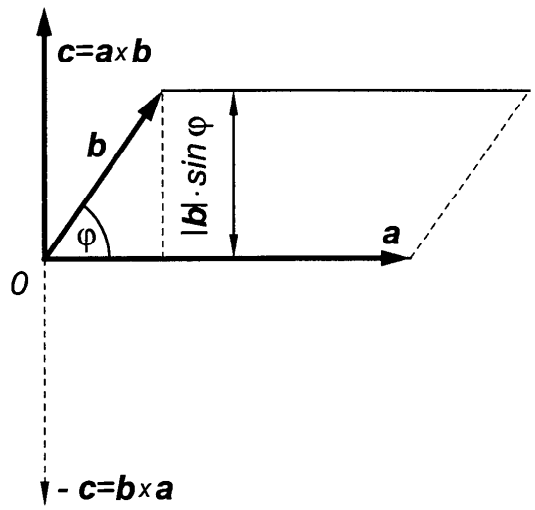
A definícióból következik, hogy

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi \qquad (13)$$

és hogy a tényezők felcserélésével a vektorszorzat előjelet vált, azaz

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) \qquad (14)$$

vagyis a *vektoriális szorzat nem kommutatív.*



392. ábra. Két vektor vektoriális szorzata

Ha két vektor egymással párhuzamos, vagyis az **a** és **b** vektorok kollineárisak, akkor $\varphi = 0$ vagy π, s így $\sin\varphi = 0$, tehát

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ ha } \mathbf{a}\parallel\mathbf{b} \qquad (15)$$

Ez két (nullvektortól különböző) vektor *párhuzamossági feltétele.*

Ha a két vektor merőleges egymásra, akkor $\sin\varphi = 1$, s ekkor a vektoriális szorzat abszolút értéke a vektorok abszolút értékének szorzatával egyenlő, azaz

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \quad \text{ha } \mathbf{a}\perp\mathbf{b} \tag{16}$$

A (13), (14) és (15) összefüggések szerint az **i**, **j** és **k** egységvektorok vektoriális szorzata:

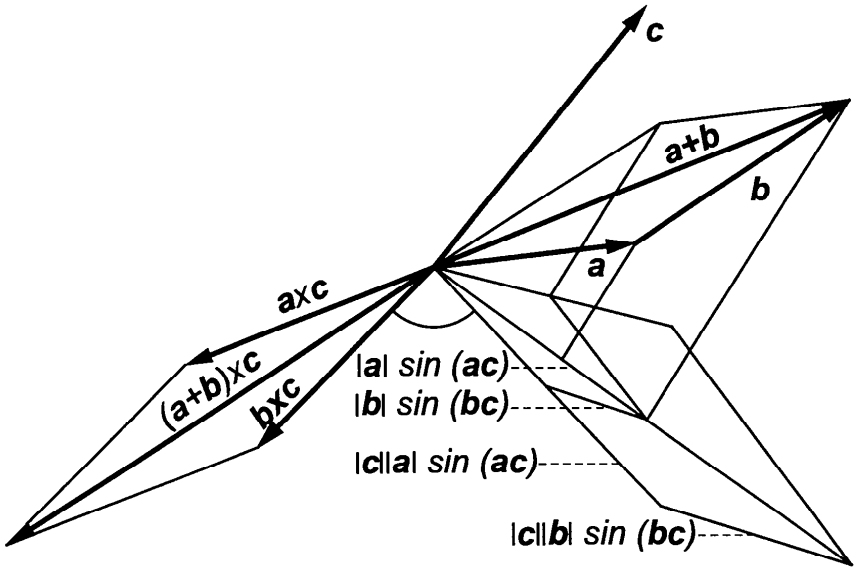
$$\begin{aligned} \mathbf{i}\times\mathbf{j} &= -(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) = \mathbf{k}, & \mathbf{i}\times\mathbf{i} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} &= -(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}, & \mathbf{j}\times\mathbf{j} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} &= -(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) = \mathbf{j}, & \mathbf{k}\times\mathbf{k} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{17}$$

A vektoriális szorzatra a *disztributivitás törvénye érvényes*:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} \text{ és } (\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}.$$

Ábrázoljuk az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ vektoriális szorzatot. Vetítsük az **a** és **b** vektorokra szerkesztett paralelogrammát a **c** vektorra merőleges síkra (393. ábra). Az így kapott paralelogramma oldalai $|\mathbf{a}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{c})$ és $|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{b},\mathbf{c})$ [(**a**,**c**), stb. jelöli a két vektor által bezárt szöget]. Nagyítsuk meg e paralelogramma oldalait $|\mathbf{c}|$: 1 arányban, és forgassuk el **c** körül ebben a síkban **c** irányából nézve $+\frac{\pi}{2}$ szöggel, akkor az így kapott paralelogramma oldalai $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, átlója pedig $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, úgyhogy

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$



393. ábra. A vektoriális szorzás disztributív

Eredményeinket felhasználva, a vektoriális szorzat komponenseit előállíthatjuk a két vektor koordinátáival. Legyen $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, akkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) +$$
$$+a_xb_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + a_xb_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + a_yb_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + a_yb_y(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) +$$
$$+a_yb_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + a_zb_x(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + a_zb_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + a_zb_z(\mathbf{k}\times\mathbf{k}).$$

A (17) összefüggéseket felhasználva és rendezve:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} \quad (18)$$

amit egy harmadrendű determináns alakjában is felírhatunk:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (19)$$

Példák

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektorok vektoriális szorzatát.

Megoldás: (A determináns kifejtését első sora szerint végezzük):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

2. Számítsuk ki az $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$ csúcspontokkal adott háromszög területét.

Megoldás: A csúcspontokhoz tartozó helyvektorok:

$\mathbf{a} = (7,3,4)$, $\mathbf{b} = (1,0,6)$, $\mathbf{c} = (4,5,-2)$.

Az A csúcspontból kiinduló két oldalvektor:

$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-6,-3,2)$ és $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (-3,2,-6)$.

Az $ABC\Delta$ területe e két oldalvektor vektoriális szorzata abszolút értékének a fele:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = (14,-42,-21),$$

$$t = \frac{1}{2}|\mathbf{f}| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2}\cdot 49 = 24{,}5 \text{ területegység.}$$

3. Határozzuk meg azt a $\mathbf{c}$ vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}=(4,3,-2)$ és a $\mathbf{b}=(-8,-3,3)$ vektorokra, azokkal jobbsodrású koordinátarendszert alkot és abszolút értéke $|\mathbf{c}|=26$.

Megoldás: $\mathbf{c}=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\cdot 26.$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 3 & -2\\ -8 & -3 & 3\end{vmatrix}=(3,4,12),$

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{9+16+144}=13,$ tehát

$$\mathbf{c}=26\cdot\frac{(3,4,12)}{13}=2\cdot(3,4,12)=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}+24\mathbf{k}.$$

6.7 Három vektor vegyes szorzata

Legyen adott az $\mathbf{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}(b_x,b_y,b_z)$ és a $\mathbf{c}(c_x,c_y,c_z)$ vektor. Szorozzuk meg skalárisan az $\mathbf{a}$ vektorral a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ vektoriális szorzatot, azaz képezzük az $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ún. *vegyes szorzatot*:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Az $\mathbf{a}$ vektorral úgy szorozzuk a determinánst, hogy pl. első sorának minden elemét megszorozzuk vele. Figyelembe véve, hogy $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ és $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$, a vegyes szorzat kiszámítására a következő hamadrendű determinánst kapjuk:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (20)$$

A vegyes szorzat abszolút értéke geometriailag az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ élekkel alkotott paralelepipedon térfogati mérőszámát adja. Ezt könnyen beláthatjuk a 394. ábra alapján.

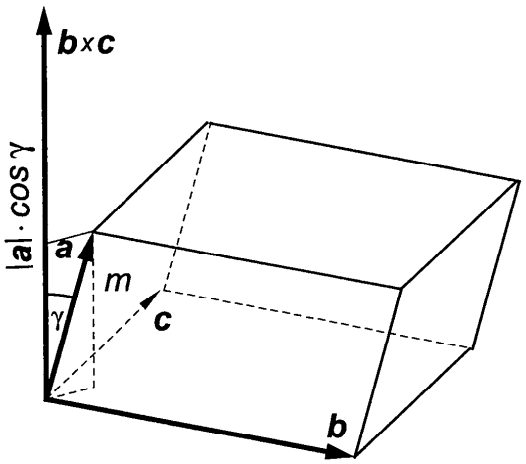
A $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ vektor merőleges a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, és $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. A $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ vektori szorzat

abszolút értéke a paralelepipedon alapterületének mértékszámával egyenlő. Viszont az

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=|\mathbf{a}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\gamma$$

egyenlőségnek a jobb oldalán az $|\mathbf{a}|\cos\gamma$ tényező a paralelepipedon magassága, úgyhogy a paralelepipedon V térfogata:

$$V=|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \qquad (21)$$



394. ábra. Három vektor vegyes szorzata

A (20) determinánsra vonatkozó tulajdonságokból következik, hogy

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=$$
$$=-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

A vegyes szorzat szokásos jelölése még:

$$\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{abc})=\mathbf{abc}.$$

Ha három vektor: **a**, **b** és **c** komplanáris, (egy síkba esik) akkor vegyes szorzatuk 0, azaz $(\mathbf{abc})=0$.

Ha $(\mathbf{abc})=0$, akkor vagy **0** az egyik vektor vagy párhuzamos két vektor. Mindkét eset azt jelenti: **a**, **b** és **c** *komplanáris* (egy síkba esik), úgyhogy kimondhatjuk:

a, **b** és **c** vektorok akkor és csak akkor komplanárisak, ha vegyes szorzatuk nulla,

azaz $$(\mathbf{abc})=0 \qquad (22)$$

Példák

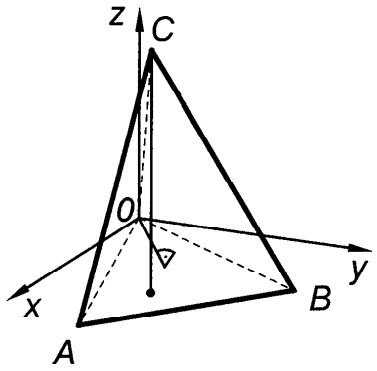
1. Számítsuk ki az $\mathbf{a}=(2,-3,1)$, $\mathbf{b}=(1,1,2)$ és $\mathbf{c}=(3,1,-1)$ vektorok vegyes szorzatát.

Megoldás: $$(\mathbf{abc})=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&2\\3&1&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-3)+3\cdot(-7)+1\cdot(-2)=-29.$$

2. Számítsuk ki az $O(0,0,0)$, $A(3,2,0)$, $B(1,4,0)$, $C(2,2,5)$ csúcspontok-

kal adott tetraéder térfogatát, és az O csúcsból az ABC lapra bocsátott magasságának a hosszúságát.

Megoldás: A tetraéder térfogata az $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$ és $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ vektorokra szerkesztett paralelepipedon térfogatának $\frac{1}{6}$ része:



395. ábra. Tetraéder

$$V=\frac{1}{6}(\mathbf{abc})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3&2&0\\1&4&0\\2&2&5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 50=\frac{25}{3}$$ térfogategység.

Az ABC laphoz tartozó magasságot az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ vektorra való vetületével számíthatjuk (395. ábra).

$\mathbf{b}-\mathbf{a}=(-2,2,0)$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}=(-1,0,5)$,

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&2&0\\-1&0&5\end{vmatrix}=(10,10,2)\quad \mathbf{n}^0=\frac{1}{\sqrt{204}}(10,10,2),$$

s így $m=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0=(3,2,0)\frac{1}{\sqrt{204}}(10,10,2)=\frac{25}{\sqrt{51}}$ hoszszúságegység.

3. Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{a}=(-1,3,2)$, $\mathbf{b}=(4,-6,2)$ és $\mathbf{c}=(-3,12,11)$ vektorok komplanárisak, és az $\mathbf{a}$ vektort bontsuk fel $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkre.

Megoldás: Ha a három vektor komplanáris, akkor (22) szerint $(\mathbf{abc})=0$.

$$(\mathbf{abc})=\begin{vmatrix}-1&3&2\\4&-6&2\\-3&12&11\end{vmatrix}=90-150+60=0,$$

tehát $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\mathbf{c}$ valóban komplanáris vektorok.

Az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ irányú összetevőkkel $\mathbf{a}=p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ amiből az egyes komponensekre a $-1=4p-3q$, $3=-6p+12q$, $2=2p+11q$ egyenletek írhatók fel. Ezek közül kettő elegendő p és q meghatározására: $p=-\frac{1}{10}$ és $q=\frac{1}{5}$; tehát az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor irányú összetevői: $p\mathbf{b}=\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $q\mathbf{c}=\left(-\frac{3}{5},\frac{12}{5},\frac{11}{5}\right)$.

6.8 A vektoralgebra geometriai alkalmazása

a) A sík egyenlete

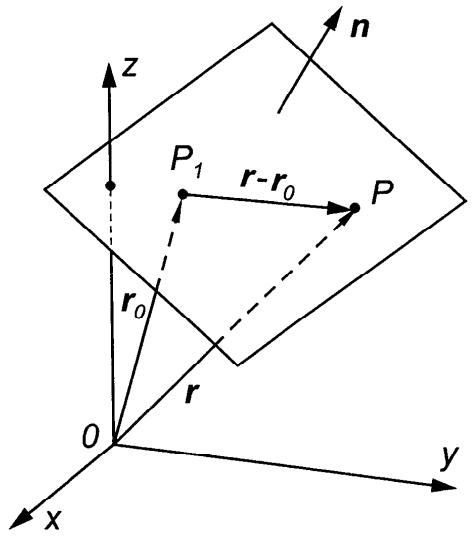
A sík legyen merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra és illeszkedjék az $\mathbf{r}_0$ helyvektorral adott $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontra.

Vegyünk fel a síkon egy tetszőleges $\mathbf{r}$ helyvektorú $P(x,y,z)$ pontot. A $\mathbf{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor a kérdéses síkban fekszik, tehát az $\mathbf{n}$ vektorra merőleges (396. ábra). A vektorok merőlegességi feltétele (10) szerint

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad (23)$$

Ez a sík vektoregyenlete, amely az $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = -D$ helyettesítéssel

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0 \qquad (24)$$



396. ábra. Sík

alakba megy át.

Az $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$ és $\mathbf{n} = (a,b,c)$ koordináták felhasználásával az $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, vagy $ax+by+cz+D=0$, ismert síkegyenletek adódnak. Az $\mathbf{n}$ vektor a sík *normálisa* vagy *normálvektora*.

b) Két sík által bezárt szög meghatározása

Legyen az egyik sík egyenlete: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0$, a másiké pedig: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + D_1 = 0$. Mivel a két sík által bezárt szög megegyezik a két sík normálvektora által bezárt szöggel, ezért ha $\mathbf{n} = (a,b,c)$ és $\mathbf{n}_1 = (a_1,b_1,c_1)$, akkor (12) szerint

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{n}_1|} = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \qquad (25)$$

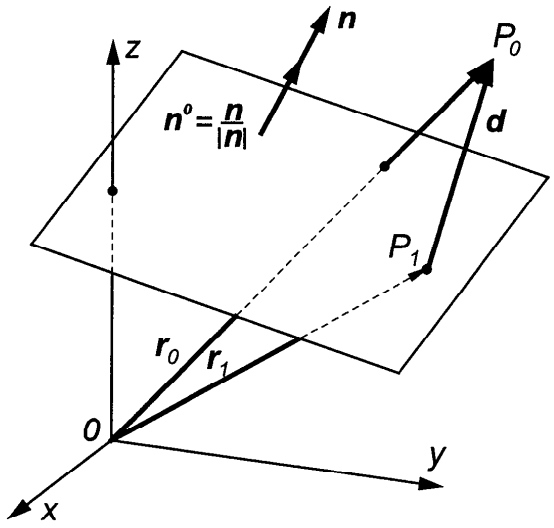
A két sík párhuzamos, ha $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{0}$ $\left(\text{tehát } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}\right)$, és merőleges egymásra, ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$.

c) Pont távolsága síktól

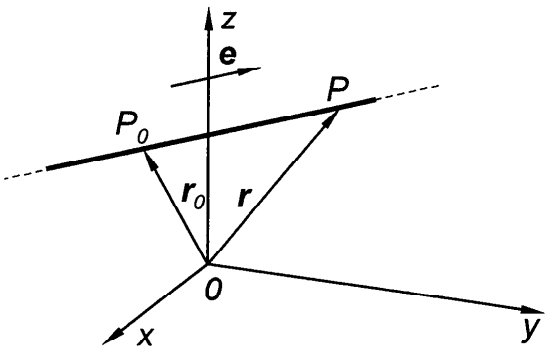
Legyen az $\mathbf{r}_0$ helyvektorú $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont távolsága az $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0$ síktól $P_1P_0 = d$ (397. ábra), akkor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = \pm d \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$. Szorozzuk meg skalárisan mindkét oldalt az $\mathbf{n}$ vektorral: $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = \pm d|\mathbf{n}|$. A P_1 pont a síkon fekszik, tehát $-\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = D$, úgyhogy $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} + D = \pm d|\mathbf{n}|$, amiből a

$$d = \pm \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} + D}{|\mathbf{n}|} = \pm \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + D}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{26}$$

képlet adódik a pont síktól való távolságának kiszámítására. (A két előjel közül azt választjuk, amellyel $d > 0$.)



397. ábra. Pont és sík távolsága



398. ábra. Egyenes a térben

d) Az egyenes egyenlete

Az egyenes legyen párhuzamos az $\mathbf{e} = (m, n, p)$ vektorral és illeszkedjék az $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ helyvektorral adott $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontra (398. ábra). Az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjához tartozó helyvektor legyen $\mathbf{r} = (x, y, z)$, akkor a $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

vektor párhuzamos az **e** vektorral. A két vektor párhuzamossági feltétele (15) szerint:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{e}=\mathbf{0} \tag{27}$$

Ez az *egyenes vektoregyenlete.*

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ és az **e** vektor párhuzamosságából következik a koordináták arányossága:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Ez pedig az egyenes egyenletének ismert kanonikus alakja; t paraméterrel jelölve az arányt, a paraméteres egyenletrendszert kapjuk:

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt.$$

Az elsőt **i**, a másodikat **j**, a harmadikat **k** egységvektorral szorozva és a megfelelő oldalakat összeadva, az *egyenes vektoregyenletének paraméteres alakját kapjuk*:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\,\mathbf{e} \tag{28}$$

e) Két egyenes, valamint sík és egyenes által bezárt szög meghatározása

Két egyenes által bezárt szög a két egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő s így, ha az egyik egyenes egyenlete $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{e}_1=\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\,\mathbf{e}_1$, a másiké $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{e}_2=\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+t\,\mathbf{e}_2$, akkor a közbezárt φ szög koszinusza (12) szerint:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{29}$$

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{e}=\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\,\mathbf{e}$ egyenes és az $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}+D=0$ sík által bezárt φ szöget abból a meggondolásból számíthatjuk ki,

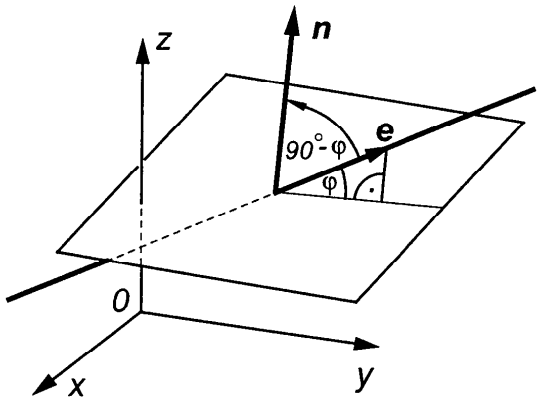
hogy az **n** vektor az **e** vektorral $90° \pm \varphi$ szöget zár be (399. ábra), s így

$$\sin\varphi = \pm\cos(90° \pm \varphi) = \pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{n}||\mathbf{e}|} = \\ = \pm\frac{am+bn+cp}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{30}$$

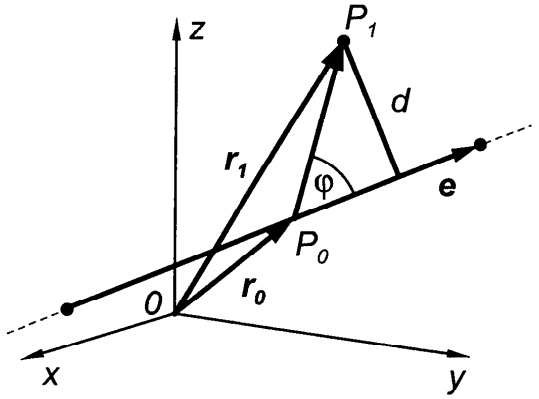
(A $\pm$ előjelek közül azt kell választani, amelyikre $\sin\varphi \geq 0$.)

f) Pont és egyenes távolsága

Az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontnak az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{e}=\mathbf{0}$ egyenestől való d távolságát a következőképpen számíthatjuk ki (400. ábra):



399. ábra. Egyenes és sík által bezárt szög



400. ábra. Pont és egyenes távolsága

$$d = |\mathbf{P_0P_1}|\sin\varphi = |\mathbf{P_0P_1}|\frac{|\mathbf{P_0P_1}\times\mathbf{e}|}{|\mathbf{P_0P_1}||\mathbf{e}|},$$

azaz

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{e}|}{|\mathbf{e}|} \tag{31}$$

Ugyanezt a képletet használjuk akkor is, ha az egyenes egyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{e}$ alakban adott.

g) Két kitérő egyenes távolsága

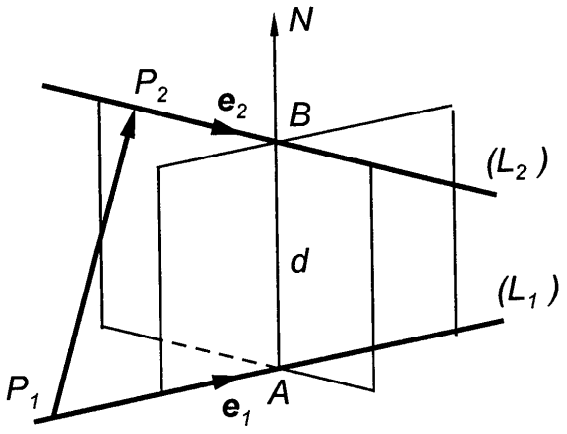
Ha a két egyenes egyenlete

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{e}_1=\mathbf{0},$$
$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{e}_2=\mathbf{0}$$

vagy

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\,\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+t\,\mathbf{e}_2$$

alakban adott, akkor a mindkét egyenesre merőleges – ún. *normáltranszverzális* – egyenes irányvektorát, az **N** vektort, a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzata szolgáltatja (401. ábra):



401. ábra. Két kitérő egyenes távolsága

$$\mathbf{N}=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2.$$

Két kitérő egyenes $AB=d$ távolságát a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ vektornak az **N** vektor irányára való vetülete adja:

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|}=\left|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2|}\right|. \qquad (32)$$

Példák

1. Határozzuk meg az $A(-1,3,2)$ pontra illeszkedő és az $\mathbf{e}_1=(3,-4,5)$, $\mathbf{e}_2=(-1,3,-10)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét.

Megoldás: Mivel a sík $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokkal párhuzamos, ezért normálvektora az $\mathbf{n}=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$ vektori szorzattal határozható meg:

$$\mathbf{n}=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&-4&5\\-1&3&-10\end{vmatrix}=(25,25,5),\quad \mathbf{r}_1=(-1,3,2),\ \text{tehát}$$

$$\big(\mathbf{r}-(-1,3,2)\big)\cdot(25,25,5)=0,\ \text{azaz}$$

$$25x+25y+5z-60=0.$$

2. Határozzuk meg a $4x+2y-2z+5=0$ és $x+3y+5z-2=0$ síkok hajlásszögét.

Megoldás: A sík normálvektorának komponenseit x, y és z együtthatói adják, tehát $\mathbf{n}_1 = (4,2,-2)$, $\mathbf{n}_2 = (1,3,5)$; (25) szerint

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{4\cdot 1 + 2\cdot 3 - 2\cdot 5}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = 0, \quad \varphi = 90°,$$

azaz a két sík merőleges egymásra.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{r}_0 = (2,-1,1)$ vektor végpontjának távolságát az $\mathbf{r}\cdot(3,0,4) + 5 = 0$ síktól.

Megoldás: (26) szerint:

$$d = \frac{|(2,-1,1)\cdot(3,0,4) + 5|}{\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

4. Határozzuk meg az $A(-1,3,-5)$ és $B(2,-4,6)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét, és a $P_1(1,2,-1)$ pontnak az egyenestől való távolságát.

Megoldás: Az egyenes irányvektora $\mathbf{c} = \mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (3,-7,11)$. Az egyenes egy adott pontjához tartozó helyvektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{a} = (-1,3,-5)$.

Az egyenes egyenlete (27) szerint:

$(\mathbf{r} - (-1,3,-5)) \times (3,-7,11) = \mathbf{0}$, és (28) szerint:

$\mathbf{r} = (-1,3,-5) + t(3,-7,11)$.

Paraméteres egyenletrendszere, mivel $\mathbf{r} = (x,y,z)$:

$x = -1 + 3t$, $y = 3 - 7t$, $z = -5 + 11t$.

A $P_1(1,2,-1)$ pont távolsága az egyenestől (31) szerint:

$$d = \frac{|((1,2,-1) - (-1,3,-5)) \times (3,-7,11)|}{|(3,-7,11)|} = \frac{\sqrt{510}}{\sqrt{179}} \approx 1{,}7.$$

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (3,-2,1) + t(-1,3,-4)$ egyenes és az $\mathbf{r}\cdot(2,-5,2) + 7 = 0$ sík döféspontját.

Megoldás: A döféspont a síkon is és az egyenesen is rajta van, s így ha t_0 -val jelöljük a döfésponthoz tartozó paraméterértéket, akkor:

$((3,-2,1) + t_0(-1,3,-4))\cdot(2,-5,2) + 7 = 0$, amiből

$$t_0 = \frac{-7 - (3,-2,1)\cdot(2,-5,2)}{(-1,3,-4)\cdot(2,-5,2)} = +1.$$

A döféspont helyvektora: $\mathbf{r}_D = (3,-2,1) + 1\cdot(-1,3,-4) = (2,1,-3)$; tehát a döféspont koordinátái: $D(2,1,-3)$.

Feladatok

1. Adott két vektor $\mathbf{a} = (3,-2,6)$ és $\mathbf{b} = (-2,1,0)$. Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektorokat. [(1,−1,6), (5,−3,6) és (0,−1,12).]

2. Határozzuk meg, milyen α, β érték mellett lesznek kollineárisak az $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektorok. $[\alpha = 4, \beta = -1.]$

3. Az egy pontból felvett $\mathbf{a} = (2,-3,6)$ és $\mathbf{b} = (-1,2,-2)$ vektorokhoz határozzuk meg a $3\sqrt{42}$ hosszúságú szögfelező vektort. $[(-3,15,12).]$

4. Adott az $\mathbf{a} = (2,-3)$ és $\mathbf{b} = (1,2)$ síkvektor. Írjuk fel a $\mathbf{c} = (9,4)$ vektornak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok irányába eső összetevőit. $[\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}.]$

5. Bontsuk fel a $\mathbf{c} = (11,-6,5)$ vektort a $\mathbf{p} = (3,-2,1)$, $\mathbf{q} = (-1,1,-2)$ és $\mathbf{r} = (2,1,-3)$ vektorok irányába eső összetevőkre. $[\mathbf{c} = 2\mathbf{q} - 3\mathbf{p} + \mathbf{r}.]$

6. Határozzuk meg azt az $\mathbf{x}$ vektort, amely merőleges az $\mathbf{a} = (2,3,-1)$ és $\mathbf{b} = (1,-2,3)$ vektorokra, és eleget tesz az $\mathbf{x} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -6$ feltételnek.

$[\mathbf{x} = (-3,3,3).]$

7. Adott az $M(-5,7,-6)$ és $N(7,-9,9)$ pont. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1,-3,1)$ vektornak az **MN** vektorra való vetületét. [3 hosszúságegység.]

8. Számítsuk ki az $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$ és $C(5,2,6)$ csúcspontokkal adott háromszög területét. $[t = 14$ területegység.$]$

9. Számítsuk ki az $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ és $D(4,1,3)$ csúcspontokkal adott tetraéder térfogatát. $[V = 3.]$

10. Írjuk fel az M_1 pontra illeszkedő és az $\mathbf{M_1M_2}$ vektorra merőleges sík egyenletét, ha $M_1(3,-1,2)$ és $M_2(4,-2,1)$. $[x - y - z - 2 = 0.]$

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $M_1(1,-1,-2)$ és $M_2(3,1,1)$ pontokra illeszkedik és merőleges az $x - 2y + 3z - 5 = 0$ síkra.

$[4x - y - 2z - 9 = 0.]$

12. Írjuk fel az $M_1(1,-1,-3)$ pontra illeszkedő és az $x = 2t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 1$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét. $[x = 1 + 2t,\ y = -1 + 5t,\ z = -3.]$

13. Számítsuk ki az $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ és az $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$ egyenesek által bezárt szöget. $[\varphi = 60°.]$

14. Határozzuk meg az $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ egyenes és az $\mathbf{r} \cdot (2,3,1) - 1 = 0$ sík döféspontját. $[D(2,-3,6).]$

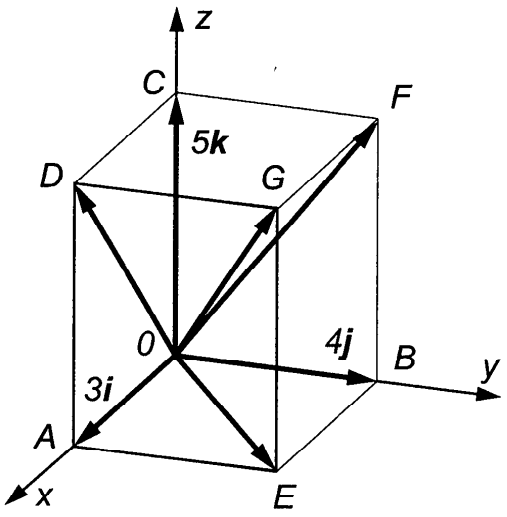
15. Számítsuk ki az $x = 2t - 4$, $y = -t + 4$, $z = -2t - 1$ és az $x = 4t - 5$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 5$ egyenesek egymástól mért legrövidebb távolságát.

$[d = 3$ hosszúságegység.$]$

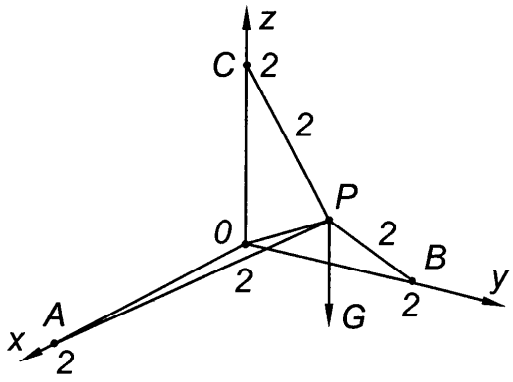
6.9 Példák a vektoralgebra mechanikai alkalmazására

1. Egy paralelepipedonnak a három – egy pontból kiinduló – élvektora $\mathbf{OA} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{OB} = 4\mathbf{j}$ és $\mathbf{OC} = 5\mathbf{k}$. Határozzuk meg az O pontban támadó, a lapátlók által képzett erők eredőjét.

Megoldás: A 402. ábra alapján $\mathbf{OD} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{OE} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{OF} = 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ s így $\mathbf{OD} + \mathbf{OE} + \mathbf{OF} = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) + (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 2(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$, ahol $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \mathbf{OG}$ az O pontból kiinduló testátlóvektor.



402. ábra. Paralelepipedon



403. ábra. Csuklós szerkezet

2. Az A, B, C pontokban csuklósan rögzített három, egyenként $h = 2$ m hosszúságú rúd a P pontban ugyancsak csuklósan találkozik (403. ábra). A P pontban $|\mathbf{G}| = 8$ N erő hat, amely párhuzamos a z-tengellyel. Határozzuk meg a rúderőket, ha $OA = OB = OC = 2$ m.

Megoldás: $\mathbf{OP} = p \cdot \mathbf{OP}^0 = p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a szimmetria miatt. A $p = |\mathbf{OP}|$ mennyiség az OPC vektorháromszögből meghatározható: $\mathbf{CP} = \mathbf{OP} - 2\mathbf{k}$, úgyhogy

$$|\mathbf{CP}|^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{p}{\sqrt{3}} - 2\right)^2 = 2^2, \text{ amiből}$$

$$p = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (p > 0), \text{ tehát } \mathbf{OP} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

$$\mathbf{AP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OA} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - 2\mathbf{i} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

$$\mathbf{BP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OB} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - 2\mathbf{j} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

$$\mathbf{CP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - 2\mathbf{k} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

A $\mathbf{G} = -8\mathbf{k}$ erő **AP**, **BP** és **CP** irányú összetevői adják a rúderőket.

$$\mathbf{AP}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{BP}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{CP}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{G} = \alpha \cdot \mathbf{AP}^0 + \beta \cdot \mathbf{BP}^0 + \gamma \cdot \mathbf{CP}^0 \qquad (\mathbf{G} = -8\mathbf{k}).$$

Az α-t kiszámíthatjuk, ha ezt az egyenletet skalárisan szorozzuk a $\left(\mathbf{BP}^0 \times \mathbf{CP}^0\right)$ vektorszorzattal:

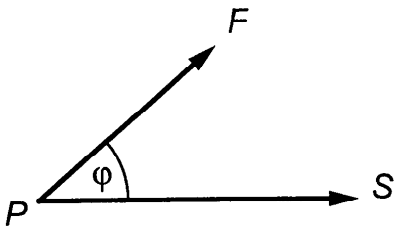
$$\mathbf{G} \cdot (\mathbf{BP}^0 \times \mathbf{CP}^0) = \alpha \mathbf{AP}^0 \cdot (\mathbf{BP}^0 \times \mathbf{CP}^0), \text{ amiből } \alpha = \frac{\left(\mathbf{G}\ \mathbf{BP}^0\ \mathbf{CP}^0\right)}{\left(\mathbf{AP}^0\ \mathbf{BP}^0\ \mathbf{CP}^0\right)}.$$

$$\left(\mathbf{AP}^0\ \mathbf{BP}^0\ \mathbf{CP}^0\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{27}{27} = 1,$$

$$\left(\mathbf{G}\,\mathbf{BP}^0\,\mathbf{CP}^0\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -8 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -8 \cdot \frac{6}{9} = -\frac{16}{3}, \quad \text{tehát} \quad \alpha = -\frac{16}{3}.$$

Az egyenletből $\left(\mathbf{CP}^0 \times \mathbf{AP}^0\right)$-vel ill. $\left(\mathbf{AP}^0 \times \mathbf{BP}^0\right)$-vel való szorzással, hasonlóan kapjuk a $\beta = -\frac{16}{3}$ és $\gamma = \frac{8}{3}$ értékeket. A kapott eredmények azt mutatják, hogy az *AP* és *BP* rudak nyomottak; e rúderők nagysága: $\frac{2}{3}|\mathbf{G}| = \frac{2}{3} \cdot 8\ \text{N} = \frac{16}{3}\ \text{N}$, a *CP* rúd húzott; a rúderő nagysága: $\frac{1}{3}|\mathbf{G}| = \frac{1}{3} \cdot 8\ \text{N} = \frac{8}{3}\ \text{N}$.

3. Az $\mathbf{F} = (2 \cdot 9{,}80665,\ 4 \cdot 9{,}80665,\ 6 \cdot 9{,}80665)\ \text{N}$ állandó erő hatására a *P* pont elmozdulása $\mathbf{S} = (3, 2, -1)$ m. Számítsuk ki az **F** erő által végzett *M* munkát és az **F** vektornak az **S** vektorral bezárt φ szögét.



404. ábra. Egy erő munkája

Megoldás: A mechanika törvényei szerint, ha a *P* pont az **F** állandó erő hatására **S** elmozdulást végez, akkor

az **F** erő által végzett munka (404. ábra) az

$$M = |\mathbf{F}||\mathbf{S}| \cdot \cos\varphi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \tag{33}$$

skaláris szorzattal számítható. Tehát $M = (\mathbf{FS}) = (6+8-6) \cdot 9{,}80665\,\text{Nm} = 78{,}45\,\text{J}$

és $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{4 \cdot 14 \cdot 14}} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$, $\varphi = 1{,}2822$ rad.

4. Egy ajtó forgástengelyének iránya rossz szerelés következtében eltér a függőlegestől. A tengely az (yz)-síkban fekszik és β szöget zár be az y-tengely pozitív irányával (405. ábra). Határozzuk meg a G súlyú, a szélességű és b magasságú ajtó O pontra vonatkoztatott és az e tengely irányába eső forgatónyomatékát.

Megoldás: A mechanika törvényei szerint a tér P pontjában támadó **F** erővektornak az O pontra vonatkoztatott nyomatékát az **OP** = **r** vektor és az **F** vektor vektoriális szorzata adja (406. ábra), azaz

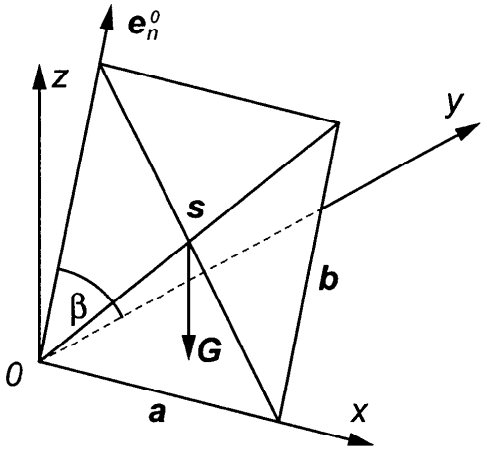
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{34}$$

Az O ponton átmenő, **e** irányú tengelyre vonatkozó nyomatékot pedig az $\mathbf{M}_0$ nyomatékának a tengely irányába eső összetevője szolgáltatja, azaz

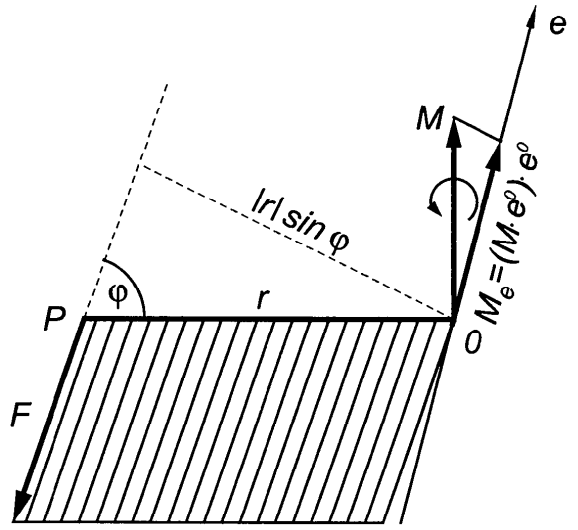
$$\mathbf{M}_e = \left(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{e}^0\right) \cdot \mathbf{e}^0 = \left[(\mathbf{r} \times \mathbf{F})\mathbf{e}^0\right] \cdot \mathbf{e}^0 \tag{35}$$

Ha a szorzat előjele pozitív, akkor a tengely irányvektorával szembenézve, a forgató hatás az óra járásával ellenkező értelmű; ha pedig a szorzat negatív előjelű, akkor a forgató hatás az előbbivel ellentétes.

A tengely irányát meghatározó $\mathbf{e}^0$ egységvektor: $\mathbf{e}^0 = \cos\beta\,\mathbf{j} + \sin\beta\,\mathbf{k}$



405. ábra. Ferdetengelyű ajtó



406. ábra. Nyomatékszámítás

$$\mathbf{OS} = \frac{1}{2}a\mathbf{i} + \frac{1}{2}b\mathbf{e}^0 = \frac{1}{2}(a\mathbf{i} + b\cos\beta\,\mathbf{j} + b\sin\beta\,\mathbf{k}), \quad \mathbf{G} = -G\mathbf{k},$$

tehát (34) szerint:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{OS} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b\cos\beta & \frac{1}{2}b\sin\beta \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -G\left(\frac{1}{2}b\cos\beta\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}a\,\mathbf{j}\right),$$

vagyis $\mathbf{M}_0 = -\frac{G}{2}b\cos\beta\,\mathbf{i} + \frac{G}{2}a\,\mathbf{j}$.

Az e tengelyre vonatkozó nyomaték (35) szerint:

$$\mathbf{M}_0 = \left(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{e}^0\right)\mathbf{e}^0 = \frac{G}{2}a\cos\beta(\cos\beta\,\mathbf{j} + \sin\beta\,\mathbf{k}).$$

A nyomatékvektor abszolút értéke: $|\mathbf{M}_0| = \frac{G}{2}a\cos\beta$.

HETEDIK FEJEZET

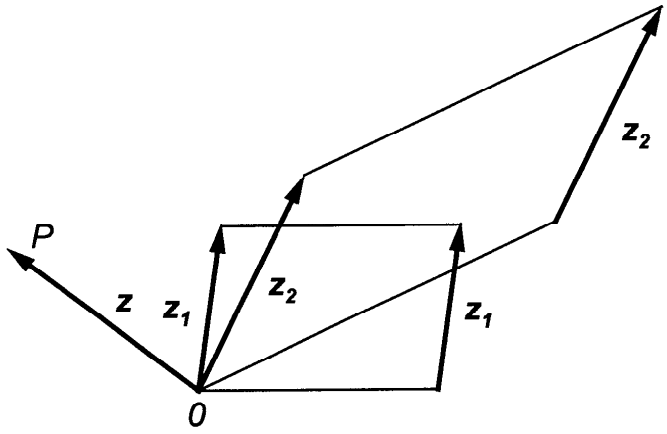
KOMPLEX SZÁMOK ALGEBRÁJA

7.1 A komplex számok bevezetése

Az algebrában láttuk, hogy nincsen olyan valós szám, amelynek páros hatványa negatív számot adna eredményül. A negatív számokból tehát a valós számhalmazban nem lehet pl. négyzetgyököt vonni. E fejezetben a valós számhalmazt úgy bővítjük ki, hogy minden szám páros gyöke is értelmezhető legyen. Ezek a számok a valós számokkal együtt a komplex számhalmazt alkotják.

A valós számokat a számegyenes pontjaiként ábrázoltuk. Állapodjunk meg most abban, hogy a sík mindegyik pontja egy bevezetésre kerülő komplex szám geometriai képét jelentse.

Mivel a sík minden egyes pontjához vektort rendelhetünk, amelynek kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig a szóban forgó pont, ezért az új számokat, amelyekkel a valós számhalmazt bővíteni fogjuk, vektorokkal is szemléltethetjük. Az összeadás, kivonás és a skalárral való szorzás a komplex számokat ábrázoló síkvektorokra a Hatodik fejezetben megismert módon végezhető el, de az ottanitól lényegesen eltérő szorzást, valamint az osztást, hatványozást és gyökvonást a következő pontokban értelmezzük. A komplex számok síkját *komplex számsíknak* fogjuk nevezni. Ily módon bármely z komplex szám az őt jellemző síkvektor végpontjával, $P(a,b)$-vel egyértelműen meghatározott, és megfordítva; a sík bármely $P(a,b)$ pontja (407. ábra) a z komplex számot ábrázoló $z = \boldsymbol{OP} = (a,b)$ síkvektorral egyértelműen meghatározott.



407. ábra. Komplex számok

Mivel a síkvektorok és a sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, így a síkvektor, ill. pont egyaránt szemlélteti az általa ábrázolt komplex számot.

7.2 A komplex számtest

Az $a,b \in R$ számokból álló (a,b) alakú rendezett számpárt komplex számnak nevezzük. A komplex számok halmazát C-vel jelöljük és így $(a,b) \in C$.

Az a-t első, a b-t második komponensnek is mondjuk. A definícióban a "rendezett" szó azt jelenti, hogy az (a,b) és a (b,a), ha $a \neq b$, különböző komplex számot jelöl (összhangban a bevezetőben mondottakkal).

Két komplex szám, $z_1 = (a_1,b_1)$ és $z_2 = (a_2,b_2)$ akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$,

melynek jelölése: $z_1 = z_2$.

A komplex számhalmazban az összeadás és a szorzás műveletét úgy definiáljuk, hogy a valós számhalmazban definiált összeadás és szorzás műveletének tulajdonságai változatlanul megmaradjanak (*permanenciaelv*).

Két komplex szám, $z_1 = (a_1, b_1)$ és $z_2 = (a_2, b_2)$ összege a

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

szorzata a

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

komplex szám.

A komplex számok C halmaza a definiált összeadással és szorzással testet alkot.

Bizonyítás: A testaxiómák teljesülésének igazolásához felhasználjuk azt, hogy az R valós számhalmaz test.

Legyen $z = (a,b)$, $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_3 = (a_3, b_3)$.

Az összeadás definíciójából közvetlenül látható, hogy:

1. $\forall z_1, z_2 \in C$: $z_1 + z_2 \in C$ (zárt)
2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asszociatív), ui.
   $(z_1 + z_2) + z_3 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2) + (a_3 + b_3) =$
   $= (a_1 + a_2 + a_3,\ b_1 + b_2 + b_3) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3,\ b_2 + b_3) =$
   $= z_1 + (z_2 + z_3)$.
3. Neutrális (zérus) elem a $(0,0)$: $\exists\ \mathbf{0} \in C$, $\forall z \in C$: $z + \mathbf{0} = z$, ui.
   $z + \mathbf{0} = (a,b) + (0,0) = (a + 0,\ b + 0) = (a,b) = z$.
4. Minden elemnek van additív inverze: $\forall z \in C$, $\exists (-z) \in C$: $z + (-z) = \mathbf{0}$.
   Legyen $-z = (-a, -b)$, ekkor $z + (-z) = (a - a,\ b - b) = (0,0) = \mathbf{0}$.
5. Az összeadás művelete kommutatív: $\forall z_1, z_2 \in C$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, ui.
   $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2) = (a_2 + a_1,\ b_2 + b_1) = z_2 + z_1$.

A szorzás definíciójából közvetlenül látható, hogy:

6. A C zárt a szorzás műveletére: $\forall z_1, z_2 \in C$: $z_1 \cdot z_2 \in C$
7. A szorzás művelete asszociatív:
   $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, ui.
   $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)(a_3, b_3) =$
   $= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3,\ a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + a_2 b_1 a_3) =$
   $= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3,\ a_2 b_3 + b_2 a_3) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
8. Neutrális- (egység-) elem az $(1,0)$: $\exists\ \mathbf{1} \in C$, $\forall z \in C$: $\mathbf{1} \cdot z = z$.

9. Ha $z_1 \neq 0$, azaz $(a_1, b_1) \neq (0,0)$, akkor létezik egy és csak egy olyan $z = (a,b)$ komplex szám, hogy $z_1 z = z_2$.

A z komplex szám a z_2 és z_1 hányadosa, azaz $\frac{z_2}{z_1} = z$.

Mivel $(a_1 a - b_1 b,\ a_1 b + b_1 a) = (a_2, b_2)$, így $a_1 a - b_1 b = a_2$ és $a_1 b + b_1 a = b_2$.

A $z_1 \neq 0$ feltételből következik, hogy $a_1^2 + b_1^2 > 0$, tehát a két utóbbi egyenletből

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \qquad b = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

vagyis, ha $z_1 \neq 0$, akkor az $(a_1, b_1)(a,b) = (a_2, b_2)$ egyenletnek az egyetlen megoldása:

$$z = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right).$$

Ha $z_2 = (1,0) = 1$, akkor $\frac{1}{z_1} = (a,b) = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right)$.

Mivel $z_1 \in C$ tetszőleges, így létezik multiplikatív inverze:

$$\forall\, z \in C\ (z \neq 0),\ \exists\, \frac{1}{z} = z^{-1} \in C\colon\ z \cdot z^{-1} = 1,\ \text{ui.}$$

$$z \cdot \frac{1}{z} = (a,b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1,0).$$

10. A szorzás kommutatív: $\forall\, z_1, z_2 \in C\colon\ z_1 z_2 = z_2 z_1$, ui.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2) =$$
$$= (a_2 a_1 - b_2 b_1,\ b_2 a_1 + a_2 b_1) = (a_2 a_1 - b_2 b_1,\ a_2 b_1 + b_2 a_1) = z_2 \cdot z_1.$$

11. A szorzás az összeadásra disztributív:

$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in C\colon\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, ui.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a_1, b_1)(a_2 + a_3,\ b_2 + b_3) =$$
$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3,\ a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3,\ a_1 b_3 + b_1 a_3) =$$
$$= z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a komplex számok a definiált összeadással és szorzással testet alkotnak.

7.3 A komplex számok algebrai alakja

Az előbbiekben megismert műveleteket alkalmazzuk olyan komplex számokra, amelyeknek a második komponense zérus:

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$$
$$(a_1,0)-(a_2,0)=(a_1-a_2,0)$$
$$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1a_2,0)$$
$$(a_1,0)/(a_2,0)=(a_1/a_2,0) \qquad (a_2\neq 0).$$

Az eredményekből látható, hogy a $z=(a,0)$ alakú komplex számok aritmetikai tulajdonságai azonosak a valós számokéval. Így az $(a,0)$ komplex számot az a valós számmal azonosíthatjuk, vagyis ennek a megfeleltetésnek értelmében:

$$R\subset C \quad \text{és} \quad (a,0)=a$$

A $(0,1)$ komplex számot *imaginárius egységnek* nevezzük és i-vel jelöljük, azaz $i:=(0,1)$.

Az i komplex szám négyzete -1, azaz $i^2=-1$.

Bizonyítás: $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$

Ha $a,b\in R$, akkor minden (a,b) komplex szám előállítható $(a,b)=a+bi$ alakban, amelyet az (a,b) komplex szám algebrai (kanonikus) alakjának nevezünk.

Bizonyítás: Mivel $(a,0)=a$ és $(b,0)=b$, ezért
$(a,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=(a,0)+(0,b)=a+bi.$

Alkalmazzuk a $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ algebrai alakban adott komplex számokra az összeadás, kivonás, szorzás és osztás műveletét. Ekkor a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$z_1\pm z_2=(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i,$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_2 + b_2 i}{a_1 + b_1 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1^2 + b_1^2} i, \qquad (z_1 \neq 0).$$

Ha $a, b \in R$ és $z = a + bi$, akkor

a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot a z szám *konjugáltjának* nevezzük,

és megfordítva,

$\bar{z}$ komplex szám konjugáltja a z komplex szám, azaz $\bar{\bar{z}} = z$.

Az a valós számot a z komplex szám *valós részének* nevezzük és $\mathrm{Re}\, z$-vel jelöljük, a b valós számot a z komplex szám *képzetes részének* nevezzük és $\mathrm{Im}\, z$-vel jelöljük, azaz

$$a = \mathrm{Re}\ z, \quad b = \mathrm{Im}\ z.$$

Az $(a, 0) = a$ megállapodás alapján, ha $\mathrm{Im} z = 0$, akkor a z valós szám.

Ha $\mathrm{Re}\, z = 0$, akkor azt mondjuk, hogy z *tiszta képzetes* szám.

A

$$\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im} z = z$$
$$\mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im} z = \bar{z}$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Ha $z, z_1, z_2 \in C$, akkor

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3. $z\bar{z} \in \boldsymbol{R}$ és pozitív, ha $z \neq 0$.

Bizonyítás: A definíciók felhasználásával közvetlenül beláthatók az állítások. A $z = a + bi$ esetén a 3. állítás $z\bar{z} = a^2 + b^2$ alakból következik.

A $z \in C$ abszolút értékének nevezzük a $z\bar{z}$ négyzetgyökét és $|z|$ szimbólummal jelöljük, vagyis

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

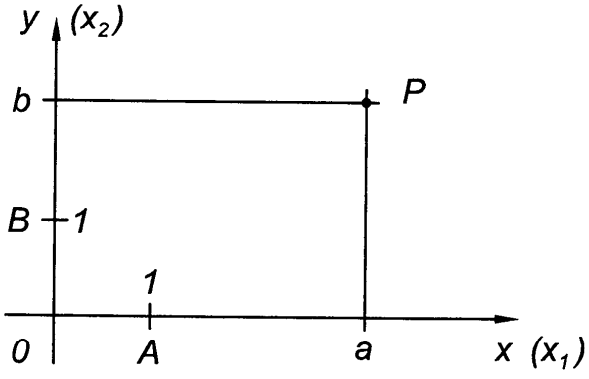
A valós a számra $\bar{a} = a$, ezért $|a| = \sqrt{a^2}$, tehát a valós számok abszolút értékének definíciójával megegyezően

$$|a| = a, \text{ ha } a \geq 0 \text{ és } |a| = -a, \text{ ha } a < 0.$$

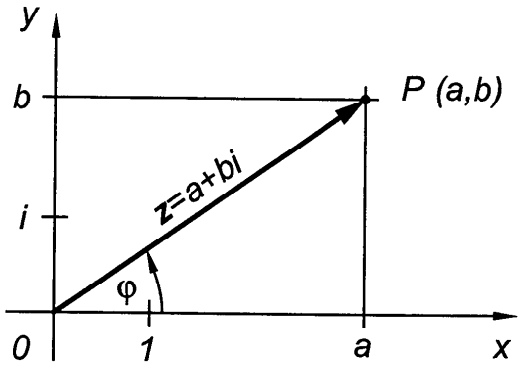
7.4 A komplex számok ábrázolása, trigonometrikus alakja. Alapműveletek

Ha R a valós számegyenes pontjainak halmaza, akkor $R \times R$ a sík, $(R \times R) \times R = R^3$ pedig a tér pontjainak halmaza.

Vegyük fel a *Descartes*-féle koordinátarendszert (408. ábra). A P pontnak megfeleltetjük az $(a,b) \in R^2$ rendezett párt.



408. ábra. A Descartes-féle koordináta-rendszer



409. ábra. A $z = a + bi$ komplex szám ábrázolása

A komplex számokat jellemezhetjük a sík pontjaival, ha az $a + bi$ komplex számnak megfeleltetjük az $(a,b) \in R^2$ koordinátájú pontot. Ha a komplex számokat a síkon ábrázoljuk, akkor *Gauss*-féle vagy *komplex számsíkról* beszélünk. (*Karl Fridrich Gauss,* német matematikus, 1777–1855).

A komplex számok és a sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű azaz bijektív leképezést létesítünk. A komplex számsík x-tengelyét *valós*, y-tengelyét ($\boldsymbol{i}$ egységgel) *képzetes* vagy *imaginárius tengelynek nevezzük.*

Bármely $z = a + b\boldsymbol{i}$ komplex számot ábrázolhatjuk azzal a síkvektorral, amely az origótól az (a,b) pontba mutat (409. ábra). Az **OP** *vektor hosszát* a $z \neq \boldsymbol{0}$ *komplex szám abszolút értékének,* az x-tengellyel bezárt szögét pedig z *árkuszának* (*amplitúdójának, argumentumának*) nevezzük.

Az a, b befogójú derékszögű háromszögből:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A z komplex szám árkuszát az egyértelműség biztosításához

$$-\pi \leq \arc z < +\pi$$

egyenlőtlenségnek megfelelően választjuk. A $\varphi = \arc z$ szöghöz természetesen hozzáadható a 2π egész számú többszöröse. Szokás az árkuszt a $0 \leq \arc z < 2\pi$ egyenlőtlenségnek megfelelően is választani.

A 409. ábra alapján: $a = |z| \cdot \cos\varphi$, $b = |z| \cdot \sin\varphi$ és így

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + \boldsymbol{i} \sin\varphi)$$

kifejezést kapjuk, amelyet a komplex szám *trigonometrikus alakjának* nevezünk.

Általában egy tetszőleges $\boldsymbol{0}$-tól különböző $z = (x,y) = x + \boldsymbol{i}\, y$ komplex szám *trigonometrikus alakja*:

$$z = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i} \sin\varphi),$$

ahol $$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \varphi = \arc z.$$

Két, trigonometrikus alakban adott komplex szám akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha abszolút értékük egyenlő, és ár-

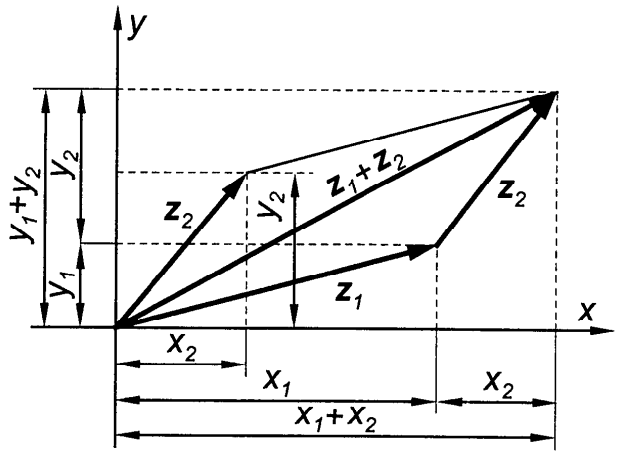
kuszuk különbsége 2π egész számú többszörösével egyenlő, azaz

$$z_1 = z_2, \text{ ha } r_1 = r_2 \text{ és } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \qquad (k \in Z)$$

Legyen $z_1 = x_1 + \boldsymbol{i}\, y_1$ és $z_2 = x_2 + \boldsymbol{i}\, y_2$. A vektorok összeadási szabálya szerint a

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \boldsymbol{i}(y_1 + y_2)$$

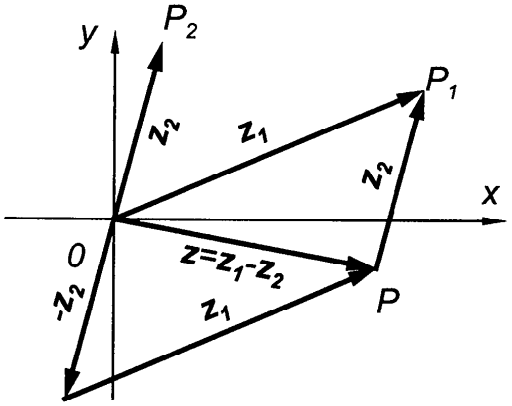
összeg a 410. ábra alapján értelmezhető.



410. ábra. A $z = z_1 + z_2$ geometriai szemléltetése

Az $OP_1P\Delta$-ből következik az összeg abszolút értékére vonatkozó, ún. *háromszög egyenlőtlenség*:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$



411. ábra. A $z = z_1 - z_2$ geometriai szemléltetése

A $z = z_1 - z_2$ különbséget a $z = z_1 + (-z_2)$ összeg alakjában állíthatjuk elő (411. ábra).

Az $OPP_1\Delta$-ből közvetlenül adódik a

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$$

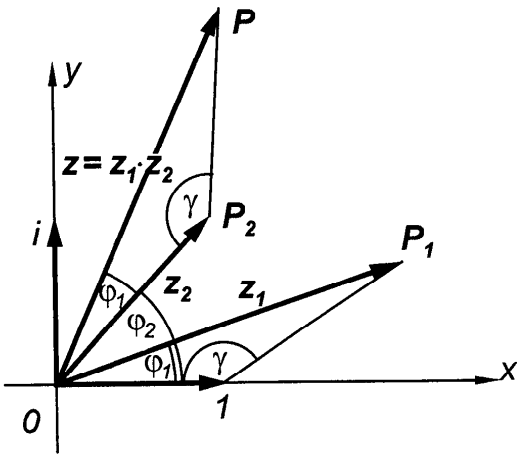
egyenlőtlenség, mivel a háromszögben két oldal különbsége kisebb a harmadik oldalnál.

A $z = z_1 z_2$ szorzatot ábrázoló vektort a 412. ábra szerint szerkesztett hasonló háromszögek alapján kaphatjuk meg, ui.

$$O1P_1\Delta \sim OP_2P\Delta,$$

tehát $|z_1| : 1 = |z| : |z_2|$

amiből $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$.



412. ábra. A $z = z_1 z_2$ geometriai szemléltetése

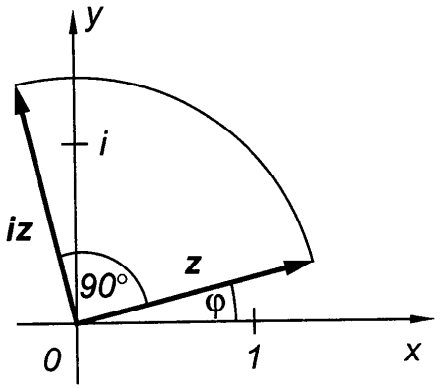
A szerkesztésből adódik, hogy $\arc z = \arc z_1 + \arc z_2$ és így a *szorzat trigonometrikus alakja*:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

vagyis a szorzáskor az abszolút értékeket összeszorozzuk, az árkuszokat pedig összeadjuk.

Abban a speciális esetben, ha $|z_1| = 1$, a $z = z_1 z_2$ komplex szám vektorát a z_2 vektorának φ_1 szöggel való elforgatásával kapjuk.

Így pl. egy tetszőleges komplex számnak i-vel való szorzata a z-nek $\frac{\pi}{2}$-vel való elforgatását jelenti, hiszen $|i| = 1$ és $\arc i = \frac{\pi}{2}$ (413. ábra).



413. ábra. Az iz szemléltetése

A $z = \frac{z_2}{z_1}$ hányadost ábrázoló vektort a 414. ábra szerint szerkesztett hasonló háromszögek alapján kaphatjuk meg; ui. $O1P_1\Delta \sim OPP_2\Delta$, tehát

$$|z_1| : 1 = |z_2| : |z|, \text{ amiből } |z| = \frac{|z_2|}{|z_1|}.$$

A szerkesztésből adódik, hogy

$$\arg z = \arg z_2 - \arg z_1$$

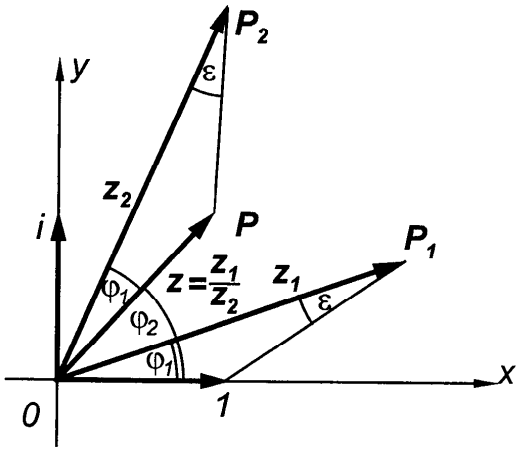
és így a *hányados trigonometrikus alakja*:

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)],$$

vagyis trigonometrikus alakú komplex számok osztásakor a számláló abszolút értékét osztjuk a nevező abszolút értékével, a számláló árkuszából pedig kivonjuk a nevező árkuszát.

Példák

1. Számítsuk ki a $z_1 + z_2$ és a $z_1 - z_2$ értékét, ha $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ és a z_2 a z_1 konjugáltja: $z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.



414. ábra. A $z = z_2 / z_1$ geometriai szemléltetése

Megoldás

$$z_1 + z_2 =$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i + \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) = -2\sqrt{2},$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) = 2\sqrt{2}i.$$

2. Írjuk fel a $z = -1 + \sqrt{3}i$ komplex számot trigonometrikus alakban.

Megoldás: Mivel $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{4} = 2$ és $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

vagy $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, amiből $\varphi = \arg z =$

$= \frac{2\pi}{3}$, mert z a második síknegyedben van, tehát a trigonometrikus alak:

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \text{ vagy a } \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ értékkel:}$$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right),$$

3. Számítsuk ki a $z_1 = 2 - 2i$ és $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ komplex számok szorzatát.

Megoldás: $z_1 z_2 = (2-2i)\ (3+\sqrt{3}i) = 6-6i+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2 =$

$= (6+2\sqrt{3})+(2\sqrt{3}-6)i.\ \ (i^2=-1.)$

Trigonometrikus alakban:

$$|z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{2}{2} = -1, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc} z_1 = \frac{7\pi}{4},$$

tehát $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$

$|z_2| = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi_2 = \operatorname{arc} z_2 = \frac{\pi}{6},$ tehát

$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 4\sqrt{6}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

4. Számítsuk ki a $z = \frac{z_2}{z_1}$ hányadost, ha $z_1 = 2\sqrt{3}+2i$ és $z_2 = 1-i.$

Megoldás

$$z = \frac{1-i.}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{(2\sqrt{3}-2i)\ (1-i)}{(2\sqrt{3}+2i)\ (2\sqrt{3}-2i)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2} - \frac{2\sqrt{3}+2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}i = \frac{\sqrt{3}-1}{8} - \frac{\sqrt{3}+1}{8}i.$$

Trigonometrikus alakban:

$$z = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

5. Válasszuk szét a $z = \dfrac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{i\omega L}}$ komplex kifejezés valós és képzetes részét.

Megoldás

$$z = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{i\omega L}} = \frac{1}{\frac{i\omega L+R}{i\omega LR}} = \frac{i\omega LR}{R+i\omega L} = \frac{i\omega LR(R-i\omega L)}{(R+i\omega L)(R-i\omega L)} =$$

$$= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R^2 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} i, \text{ tehát}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{R^2 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

7.5 Hatványozás és gyökvonás a komplex számtestben

a) Hatványozás

A trigonometrikus alakban adott komplex számokra értelmezett szorzási szabályt alkalmazzuk arra az esetre, amikor n azonos tényező van, azaz

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

vagyis

$$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = r \text{ és } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = \varphi.$$

Ekkor

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = r^n \text{ és } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n = n\varphi,$$

tehát

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (n \in N).$$

Ez az ún. *Moivre*-féle képlet (*Abraham de Moivre*, 1667–1754; Angliában letelepedett francia matematikus), amely szerint

egy komplex számot úgy emelünk n-edik hatványra, hogy az abszolút értékét n-edik hatványra emeljük, az árkuszát pedig megszorozzuk a hatványkitevővel, n-nel ($n \in N$).

Mivel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi),$$

ezért

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]^n.$$

A $z = x + iy$ algebrai alakban adott komplex szám n-edik hatványának előállításához célszerű felhasználni a binomiális tételt:

$$z^n = (x+iy)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}(iy) + \binom{n}{2}x^{n-2}(iy)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(iy)^n.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i,$$
$$i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = +1, \quad \text{... stb.}$$

amiből – tekintettel az $i^{4n+k} = i^k$ egyenlőségre –, általánosan:

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

b) Gyökvonás

Az $\sqrt[n]{z} = w$ olyan komplex szám, amelynek n-edik hatványa z-vel egyenlő. Ha $w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ ahol R és ϕ ismeretlen, akkor a $z = w^n$ egyenletből a *Moivre*-képlet felhasználásával R és ϕ meghatározható:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Ez az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$r = R^n \text{ és } \varphi + 2k\pi = n\phi \qquad (k \in Z)$$

és így

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad \phi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Tehát, ha $n \in N$, akkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

A gyökvonás tehát a komplex számtestben nem egyértelmű.

Egy zérustól különböző komplex számnak n különböző n-edik gyöke van. Ezek abszolút értéke egyenlő, vagyis a számsíkon az origó közepű, $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön, egy szabályos n-szög csúcspontjaiban helyezkednek el.

Így két szomszédos n-edik gyök egymáshoz képest $\frac{2\pi}{n}$ szöggel van elforgatva. (A $k = n, n+1, \ldots$ nem jelent az előzőktől különböző komplex számot.)

A $z^n = 1$ binom egyenlet $z = \sqrt[n]{1}$ összes megoldása:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

A z_k gyököket *n-edik egységgyököknek nevezzük.*

Példák

1. Számítsuk ki a $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex szám 5. hatványát: *a*) binominális tétellel, *b*) trigonometrikus alakra áttérve.

Megoldás

$$a)\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 +$$

$$+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5\sqrt{3}}{32}i - \frac{15}{16} - \frac{5\sqrt{3^3}}{16}i + \frac{45}{32} + \frac{\sqrt{3^5}}{32}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

b) Számításainkat egyszerűbben végezhetjük el, ha előbb trigonometrikus alakra térünk át:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \text{ tehát}$$

$$z^5 = 1^5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2. Határozzuk meg a $w = \sqrt[3]{z}$ értékeit, ha $z = -1 + i$ és ábrázoljuk a gyököket.

Megoldás: Áttérünk trigonometrikus alakra:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

és felhasználva az $\arc z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ összefüggést (415. ábra.):

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)+i\sin(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right).$$

Ha $k=0$, akkor

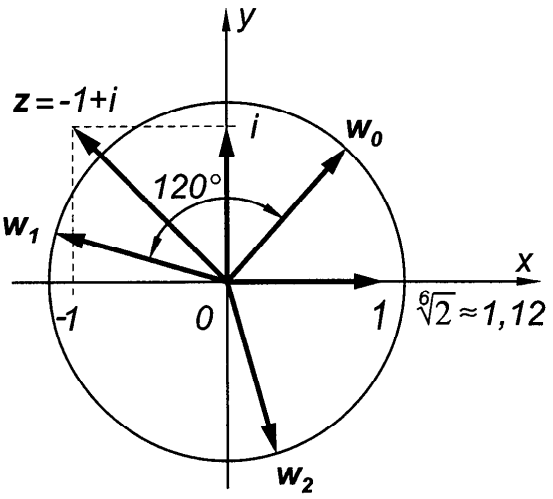
$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\approx 0,7937(1+i).$$

Ha $k=1$, akkor

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\approx$$

$$\approx 1,12(-0,9659+0,2588i).$$



415. ábra. Komplex szám gyökei

Ha $k=2$, akkor

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\cdot 2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\cdot 2\pi}{3}\right)\right]\approx 1,12(0,2588-0,9659i).$$

3. Állítsuk elő a $\sin 3x$-et tisztán $\sin x$, és a $\cos 3x$-et tisztán $\cos x$ segítségével.

Megoldás: A *Moivre*-képlet $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ alakját $n=3$-ra alkalmazva, majd a valós és a képzetes részek egyenlőségéből a megoldás előállítható:

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x$$

$$\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x+3i^2\sin^2 x\cos x+i^3\sin^3 x=\cos 3x+i\sin 3x$$

Mivel $i^2=-1$, $i^3=-i$, így

$$\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x+i(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x)=\cos 3x+i\sin 3x$$

A valós részek egyenlőségéből:

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x\equiv\cos x(\cos^2 x-3\sin^2 x)=$$

$$=\cos x(4\cos^2 x-3),$$

és a képzetes részek egyenlőségéből:

$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x\equiv\sin x(3\cos^2 x-\sin^2 x)=$$

$$=\sin x(3-4\sin^2 x).$$

4. Oldjuk meg az *a)* $z^4 = -1$ és *b)* $z^3 = 8$ egyenleteket.

Megoldás

a) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, tehát

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad (k = 0,1,2,3)$$

vagyis $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$,

$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, $z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

b) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$, tehát

$$z = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right), \quad (k = 0,1,2) \text{ vagyis}$$

$z_0 = 2$, $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$.

Megjegyzés: Az e^{ix} hatványsora alapján igazolható (l. a matematikai analízis ill. a komplex függvénytan tankönyveit), a következő ún. *Euler-féle formula*:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \qquad (*)$$

Az 1 abszolút értékű φ arkuszú komplex szám trigonometrikus alakja: $\cos\varphi + i\sin\varphi$, melyet (*) alapján $e^{i\varphi}$ exponenciális alakban is megadhatunk és így egy tetszőleges r abszolút értékű komplex szám ún. *exponenciális alakja*:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \qquad (**)$$

A komplex számok exponenciális alakjával a szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás a hatványmennyiségek azonosságai szerint végezhetők el:

$$r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi}, \quad \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}},$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

Feladatok

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$(2+3i)(3-2i)$; $(1+i)^3$; $\frac{2i}{1+i}$. $[12+5i, -2+2i, +1+i.]$

2. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $(\cos 45° + i\sin 45°)^8$; *b*) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$;

c) $\sqrt{5+i\sqrt{15}}$; *d*) $\sqrt[4]{\cos 120° + i\sin 120°}$.

$[a)\ 1]$; $[b)\ 1]$; $\left[c)\ \pm\left(\frac{\sqrt{30}}{2} + \frac{\sqrt{20}}{2}i\right)\right]$;

$$\left[d)\ w_0 = \cos 30° + i\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ w_1 = \cos 120° + i\sin 120°,\right.$$
$$\left. w_2 = \cos 210° + i\sin 210°,\ w_3 = \cos 300° + i\sin 300°\right].$$

3. Oldjuk meg az *a*) $z^5 = -243$, *b*) $z^2 - 2iz - 5 = 0$ egyenleteket.

$$\left[a)\ z = 3\big(\cos(36° + k\cdot 72°) + i\sin(36° + k\cdot 72°),\ \text{tehát}\right.$$
$$z_0 = 3(0{,}8090 + i0{,}5878),\ z_1 = 3(-0{,}3090 + i0{,}9511),\ z_2 = -3,$$
$$\left. z_3 = 3(-0{,}3090 - i0{,}9511),\ z_4 = 3(0{,}8090 - i0{,}5878),\right]$$

$[b)\ z_{1,2} = i \pm 2]$.

4. Válasszuk szét a $z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}} + \frac{1}{i\omega C}$ valós és képzetes részét.

$$\left[\operatorname{Re} z = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2},\ \operatorname{Im} z = \frac{R^2 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}.\right]$$

NYOLCADIK FEJEZET

BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE

A matematikai analízis a változó mennyiségekkel és az azok között fennálló összefüggésekkel, vagy más szóval függvénykapcsolatokkal foglalkozik. A természeti jelenségek leírásakor *állandónak olyan mennyiséget nevezünk, amely vizsgálatunkban számértékét nem változtatja; változónak pedig azt, amely a vizsgálat alatt különböző számértékeket vesz vagy vehet fel.*

Állandó pl. minden kör kerületének az átmérőjéhez való viszonya (π-vel egyenlő), vagy minden négyzet átlójának oldalához való viszonya ($\sqrt{2}$-vel egyenlő), de változó a kör kerülete és területe, ha sugara változik, s ugyancsak változó a négyzet kerülete és területe, ha oldala változik. Az állandó mennyiségek jelölésére az ábécé betűi közül általában az első (a, b, c, ...), a változó mennyiségek jelölésére pedig az utolsó (t, u, v, x, y, z) betűket használjuk. A változók számértékeinek halmazát a 2.26 pontban leírt módon szokás megadni, jelölni és – ha lehet – ábrázolni a számegyenesen.

8.1 Relációk

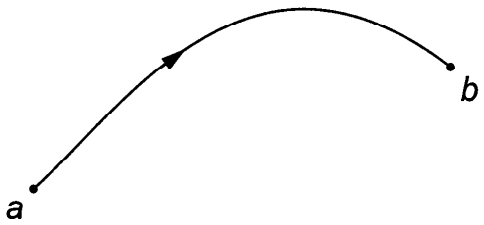
Amíg a számok közötti kapcsolatokat a "nagyobb, mint", "kisebb, mint", "tényezője", "osztója", stb. szavakkal, addig a tárgyak közötti kapcsolatokat a "fölött", "alatt", "mellett", stb. szavakkal, az emberi kapcsolatokat pedig a "hivatalos", "baráti", "rokoni" stb. szavakkal szoktuk kifejezni.

A sík pontjai és a számok közötti kapcsolatot *rendezett*

számpárokkal fejezzük ki, így pl. $(3,5) \neq (5,3)$. Általában az (a,b) rendezett pár kifejezésben a-t első, b-t második komponensnek vagy koordinátának nevezzük. (Első elem, második elem elnevezés is használatos.)

1. Tétel. Legyen $x,y,u,v \in A$. Ezen A halmaz elemeiből képzett (x,y) és (u,v) rendezett párok egyenlők, ha $x=u$ és $y=v$; és megfordítva, ha $x=u$, és $y=v$, akkor (x,y) és (u,v) egyenlők. Az egyenlőség jele: $(x,y)=(u,v)$.

Egy (a,b) rendezett pár, ahol a és b tetszőleges dolgot jelenthet, ábrázolható egy a kezdőpontú és b végpontú irányított vonalszakasszal (416. ábra). Az "(a,b) rendezett pár" helyett az "(a,b) nyíl" szóhasználattal is élhetünk. Ilyen értelmezéssel az **1. Tétel** közvetlenül is belátható.



416. ábra. Az (a, b) rendezett pár vagy nyíl

A rendezett pároknak egy halmaza reláció.

A relációt általában nagybetűvel jelöljük.

Legyen pl. $m,n \in Z^+$ és tekintsük az $m<n$ feltételt kielégítő párok halmazát, azaz a $Z^+ \times Z^+$ *Descartes*-szorzat olyan (m,n) elemeit, amelyekre $m<n$ teljesül, vagyis a

$$T = \left\{(m,n) \in Z^+ \times Z^+ \mid m<n\right\}$$

halmazt. A T halmaz, amely a $Z^+ \times Z^+$ *Descartes*-szorzat részhalmaza, reláció.

A T reláció elemeit az

$(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ \ldots$

$(2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ \ldots$

.....

.....

rendezett párok alkotják. Ha a reláció rendezett párjait nyilakkal adjuk meg, akkor a nyilakkal képzett alakzatot a *reláció nyíldiagramjának* (*gráfjának*) nevezzük.

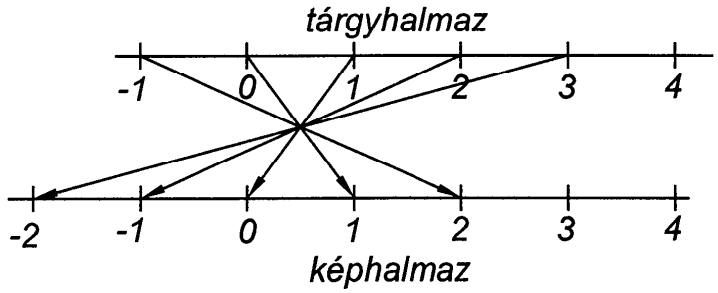
Tekintsük az

$$A=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \text{ és a } B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

halmazokat és a

$$T=\{(x,y)\in A\times B \mid x+y=1\}$$

relációt. Az $A\times B=\{(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),\ldots,(4,2),(4,3)\}$ halmazból a T reláció azokat a párokat tartalmazza, amelyek eleget tesznek az $x+y=1$ feltételnek, azaz a $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,-1)$, $(3,-2)$ párokat. A T reláció nyíldiagramját a 417. ábra szemlélteti.



417. ábra. Reláció nyíldiagramja

Az A halmazt a reláció *tárgyhalmazának* (jele: *TH*), *B-t* pedig *képhalmazának* (*KH*) nevezzük. A nyilak a tárgyhalmaz elemeitől a képhalmaz megfelelő elemei felé mutatnak. Amint látható a T reláció az $A\times B$ részhalmaza, azaz $T\subset A\times B$. Általában, ha A és B tetszőleges halmaz, akkor az $A\times B$ *Descartes*-szorzat bármely részhalmazának minden eleme rendezett pár, vagyis az $A\times B$ bármely részhalmaza reláció.

Legyen T egy reláció. A T reláció *értelmezési tartománya* a T-hez tartozó rendezett párok kezdőpontjainak (első komponenseinek) a halmaza, a T reláció *értékkészlete* a T-hez tartozó rendezett párok végpontjainak (második komponenseinek) a halmaza.

Egy reláció *értelmezési tartományát* D-vel, az *értékkészletet* E-vel jelöljük. (E helyett R a szokásos jelölés, de azt már lefoglaltuk a valós számhalmaz számára.) Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy melyik reláció értelmezési tartományáról és értékkészletéről van szó, akkor a reláció jelét indexként a D és E mellé írjuk. Pl. D_T, E_T. Bármely reláció D, TH, E, KH halmazaira a

$$\begin{array}{ll} D \subset TH & E \subset KH \\ D \subset TH & E = KH \\ D = TH & E \subset KH \\ D = TH & E = KH \end{array}$$

relációpárok egyike fennáll.

Valamely T relációnak a T^{-1} szimbólummal jelölt *inverzét*

$$T^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in T\}$$

$$E_T = D_{T^{-1}} \text{ és } D_T = E_{T^{-1}}$$

módon értelmezzük.

Amint látható, T értékkészlete lesz inverzének értelmezési tartománya, és T értelmezési tartománya lesz inverzének értékkészlete.

A T^{-1} *inverz reláció* nyíldiagramját a T reláció nyíldiagramjából úgy nyerjük, hogy az irányítást minden nyílnál megfordítjuk.

Ha egy T reláció elemeihez (a rendezett párokhoz) hozzárendeljük a sík pontjait, akkor az így nyert alakzatot a *reláció gráfjának* nevezzük. Jele: graf T.

Példák

1. Legyen $H = \{1, 2, 3, 4\}$. Adjuk meg az

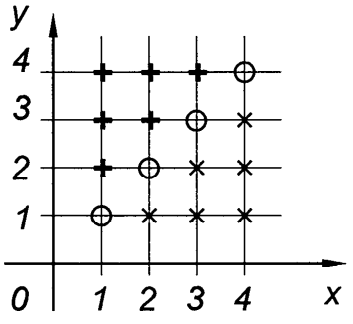
a) $T_1 = H \times H$ *b)* $T_2 = \{(x,y) \in H \times H \mid y = x\}$

c) $T_3 = \{(x,y) \in H \times H \mid y > x\}$ *d)* $T_4 = \{(x,y) \subset H \times H \mid y < x\}$

relációk gráfjait, az értelmezési tartományokat és az értékkészleteket.

Megoldás

a) $T_1 = H \times H = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$



418. ábra. A T_1 reláció gráfja

Így a T_1 reláció értelmezési tartománya:

$$D_{T_1} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Az értékkészlete: $E_{T_1} = \{1, 2, 3, 4\}$.

A graf T_1 (418. ábra) a pontokkal, körökkel és + jelekkel ábrázolt 16 izolált pontból áll.

b) Mivel $T_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$, ezért

$$D_{T_2} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ és } E_{T_2} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

A graf T_2 a 418. ábrán körökkel jelölt 4 pontból áll. $T_2 \subset H \times H$.

c) Mivel $T_3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$; így

$$D_{T_3} = \{1, 2, 3\} \text{ és } E_{T_3} = \{2, 3, 4\}.$$

A graf T_3 a 418. ábrán a + jellel jelölt 6 pontból áll.

d) Mivel $T_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$; így

$$D_{T_4} = \{2, 3, 4\} \text{ és } E_{T_4} = \{1, 2, 3\}.$$

A graf T_4 a 418. ábrán *x* jellel jelölt 6 pontból áll. $T_4 \subset H \times H$.

2. Vizsgáljuk meg az

$A_1 = \{(x,y) \in Z \times Z \mid x = 5\}$ és az $A_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid x = 5\}$ valamint az $A_3 = \{(x,y) \in Z \times Z \mid y = 3\}$ és az $A_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3\}$ relációkat.

Megoldás: Az A_1 reláció elemeit az $(5,n) \in Z \times Z$, $n \in Z$ rendezett párok alkotják, s mivel Z végtelen halmaz, így az A_1 is az:

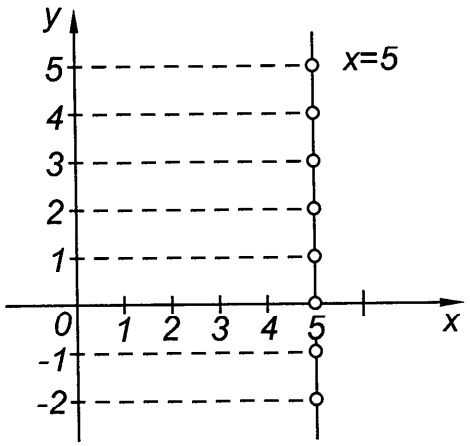
$$A_1 = \{(5,0), (5,1), (5,-1), (5,2), (5,-2), \ldots\}.$$

A graf A_1-nek egy részletét a 419. ábrán körökkel jelölt izolált pontokkal szemléltetjük.

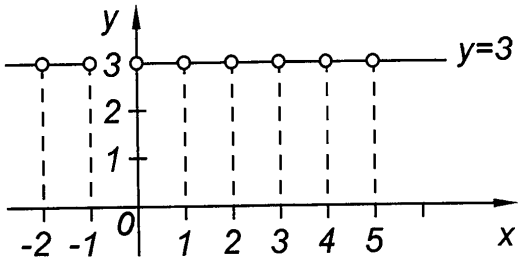
$D_{A_1} = \{5\}$, $E_{A_1} = Z$.

Az A_2 reláció elemeit az $(5,r) \in R \times R$, $r \in R$ rendezett párok alkotják, A_2 végtelen halmaz így a graf A_2 megegyezik az *y*-tengellyel párhuzamos, attól 5 egységre levő egyenessel (419. ábra). $D_{A_2} = \{5\}$, $E_{A_2} = R$.

Az A_3 reláció elemeit az $(n,3) \in Z \times Z$, $n \in Z$ rendezett párok alkotják. Az A_3 végtelen halmaz, a graf A_3 egy részletét a 420. ábrán körökkel jelölt izolált pontokkal szemléltetjük. $D_{A_3} = Z$, $E_{A_3} = \{3\}$.



419. ábra. Az A_1 és az A_2 reláció gráfja



420. ábra. Az A_3 és az A_4 reláció gráfja

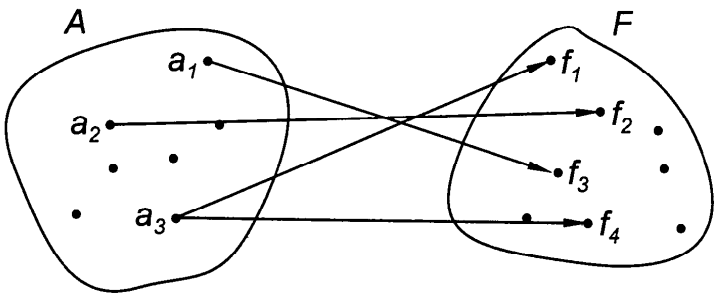
Az A_4 reláció elemeit $(x,3) \in R \times R$, $x \in R$ rendezett párok alkotják. Az A_4 végtelen halmaz, a graf A_4, az x-tengellyel párhuzamos, 3 egységre fekvő egyenes (420. ábra). $D_{A_4} = R$, $E_{A_4} = \{3\}$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az A_1 és az A_2 relációk értelmezési tartományai azonosak, de értékkészleteik különbözőek; az A_3 és az A_4 relációk értelmezési tartományai különbözőek, de értékkészleteik azonosak. A relációk is és a gráfjaik is egymástól különböznek.

8.2 Függvények

Jelölje az apák halmazát A, a fiúk halmazát pedig F. Vizsgáljuk meg a

$$T_1 = \{(a,f) \in A \times F \mid f \text{ fia } a\text{-nak}\}$$

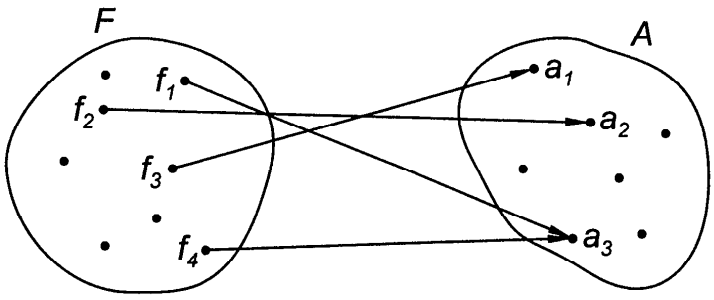


421. ábra. A T_1 reláció nyíldiagramja

relációt és nyíldiagramját (421. ábra), valamint a

$$T_2 = \{(f,a) \in F \times A \mid a \text{ apja } f\text{-nek}\}$$

relációt és nyíldiagramját (422. ábra).



422. ábra. A T_2 reláció nyíldiagramja

A T_1 és a T_2 relációk között van egy alapvető különbség. A T_1 reláció A értelmezési tartományának egy-egy eleméhez az F képhalmazból több elem is tartozhat, míg a T_2 reláció F értelmezési tartományának minden egyes eleméhez az A képtartományból pontosan egy-egy elem tartozhat. A T_2 *tulajdonságú relációt függvénynek nevezzük.*

A T reláció *függvény*, ha $\forall\, x \in D_T$-hez egyetlen olyan $y \in E_T$ létezik, hogy $(x,y) \in T$.

Az y elemet $T(x)$-szel jelöljük és a T függvény által az x-hez hozzárendelt elemnek nevezzük. Azt is mondjuk, hogy T az x-et $T(x)$-re képezi le, vagy $T(x)$ az x képe a T leképezésnél vagy a T függvény x-en felvett értéke. Az értelmezési tartomány tetszőleges elemét a függvény *argumentumának* nevezzük.

Általában, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a szóban forgó reláció függvény, akkor jelölésére leggyakrabban az f, g, h kisbetűk valamelyikét használjuk.

Az f A-ból B-be vezető függvény (vagy leképezés), ha

$$f \subset A \times B, \text{ és}$$
$$D_f = A \text{ és } E_f \subset B$$

más szóval

f A-t B-be vivő függvény (vagy leképezés), ha

$$f\colon A \to B$$

$$D_f = A \text{ és } E_f \subset \text{B}.$$

Más megfogalmazásban: ha az A halmaz minden egyes elemének megfeleltetjük a B halmaz egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

A $\to$ jel az $f\colon A \to B$ írásmódban azt jelöli, hogy f az A-t B-be vivő leképezés. A $\mapsto$ jel az $x \mapsto f(x)$ írásmódban azt jelöli, hogy az f függvény az x elemet az $f(x)$ elemre képezi le.

Legyen f értelmezési tartománya $D_f = A$, képhalmaza pedig B, akkor az f értékkészletén az

$$E_f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A, \text{ hogy } f(x) = y\}$$

halmazt értjük.

Az értelmezési tartomány x változóját hagyományosan *független változónak*, az értékkészlet y elemét pedig *függő változónak* nevezzük.

Megjegyzés: A való világ jelenségeinek leírására használt függvényeknél, különösen a természettudomány és műszaki tudomány területén, nagyon fontos tudnunk, hogy mi a független változó. Ui. nem mindegy, hogy a jelenség lefolyását az időtől, hőmérséklettől, sebességtől, gyorsulástól stb.-től függően vizsgáljuk.

Egy *függvény akkor adott*, ha ismert

a) az értelmezési tartomány,
b) a képhalmaz (az értékkészlet lehet szűkebb halmaz is),
c) a hozzárendelési szabály.

Pl. azt, hogy "$\forall\, x \in R$ számhoz rendeljük hozzá azt a számot amely az x kétszeresénél 3-mal nagyobb", röviden

$$f\colon R \to R, \quad x \mapsto 2x + 3$$

szimbólummal fejezzük ki. Az f valóban függvény, mivel $D_f = R$, $KH_f = E_f = R$ és a hozzárendelési szabály: $2x + 3$.

Megjegyzés: A rendezett párokból álló halmaz függvény, ha nincs a halmazban két egyenlő első komponensű rendezett pár.

Állapodjunk meg abban, hogy ha valamely függvénynek az értelmezési tartománya és a képhalmaza a valós számok R halmaza, akkor a függvényt az értelmezési tartomány és a képhalmaz megadása nélkül röviden csak így írjuk:

$$f: x \mapsto f(x) \text{ vagy}$$
$$f: x \mapsto y = f(x) \text{ vagy}$$
$$x \mapsto f(x)$$

vagy ha nem okoz félreértést egyszerűen $f(x)$, $y(x)$, $f(t)$, $y(t)$, stb. alakot használunk.

Azokat a függvényeket, amelyeknek R a képhalmaza, *valós értékű* vagy *valós függvényeknek*, amelyeknek R az értelmezési tartománya, *valós változójú függvényeknek*, az $R \to R$ típusú függvényeket pedig *valós-valós függvényeknek* nevezzük.

Két függvény $f: A \to B$ és $g: V \to S$ akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha $A = V$ és $B = S$ valamint $\forall a \in A$ esetében $f(a) = g(a)$.

Pl.: $f: x \in R^+$, $x \mapsto x$ és $g: x \in R^+$, $x \mapsto \sqrt{x^2}$ függvények egyenlőek, mivel $D_f = D_g$, $E_f = E_g$ és $\forall a \in R^+$ esetében $f(a) = a$, $g(a) = \sqrt{a^2} = a$, tehát $f(a) = g(a)$, $(a \in R^+)$.

Az f konstans függvény, ha az E_f halmaznak egyetlen eleme van.

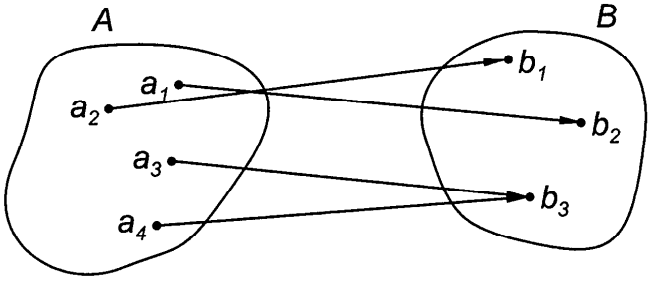
Pl.: $x \mapsto 4{,}5$; $f: x \mapsto -3$

8.3 Injekció, szuperjekció és bijekció

A következő három definícióval az A halmazon értelmezett és B halmazbeli értékeket felvevő függvények igen fontos három osztályát adjuk meg.

Az $f\colon A \to B$, A-t B-re vivő függvény *szuperjekció*, más szóval *szürjektív leképezés*, ha $D_f = A$ és $E_f = B$; más megfogalmazásban, ha B minden eleme valamely A-beli elemnek a képe.

Pl.: Az $f\colon A \to B$ szürjektív leképezést a 423. ábra szemlélteti, ha $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.



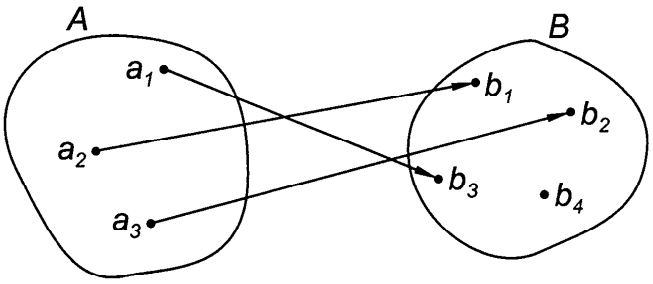
423. ábra. Szürjektív leképezés

Az $f\colon A \to B$, A-t B-be vivő függvény *injekció* vagy *injektív leképezés*, ha

$$\forall\, a_1, a_2 \in D_f\colon a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2),$$

azaz különböző argumentumokhoz különböző függvényértékek tartoznak.

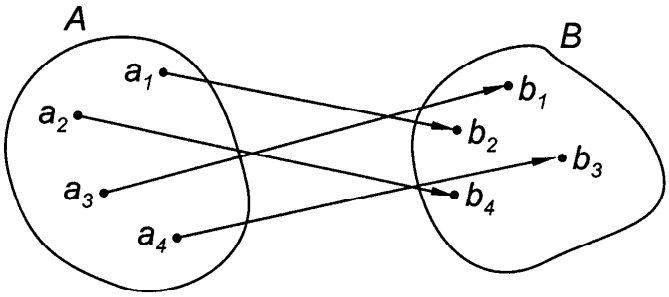
Pl.: Az $f\colon A \to B$ injektív leképezést a 424. ábra szemlélteti, ha $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.



424. ábra. Injektív leképezés

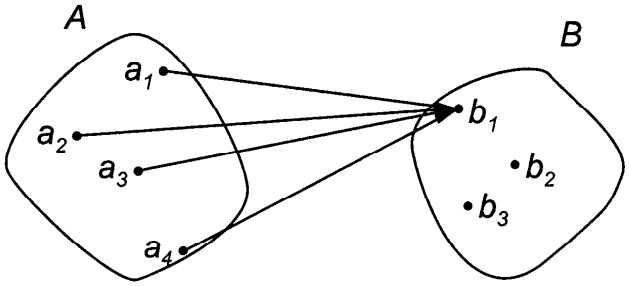
Az $f\colon A \to B$, A-t B-re vivő függvény *bijekció* vagy *bijektív leképezés*, ha az $f\colon A \to B$ egyben injekció és szuperjekció (injektív és szuperjektív ill. szürjektív); más megfogalmazásban, az A és B között *a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű.*

Pl.: Az $f\colon A \to B$ bijektív leképezést a 425. ábra szemlélteti, ha $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.



425. ábra. Bijektív leképezés

A 426. ábra a *konstans leképezést* szemlélteti, amely se nem szürjektív, se nem injektív.



426. ábra. Konstans leképezés

Injektív leképezést valósít meg bármely nem üres A halmazon az $f\colon A \to A,\ x \mapsto x$ függvény, amelyet A-n értelmezett *identikus függvénynek* nevezünk és id_A-val jelölünk, azaz

$$\mathrm{id}_A\colon A \to A,\ x \mapsto x \text{ ill. } \mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid x \in A\}.$$

8.4 A függvények leszűkítése, kompozíciója, inverze és ábrázolása

Tekintsük a $q\colon R \to R,\ x \mapsto q(x) = x^2$ függvényt. A q függvény nem injektív mivel pl. $q(1) = q(-1)$, de $1 \neq -1$.

A q értékkészlete: $E_q = \{x \in R \mid x \geq 0\} = R_0^+$, így a $q\colon R \to R_0^+$

függvény szürjektív. Ha a q függvény értelmezési tartományát is leszűkítjük R_0^+ halmazra, akkor az így értelmezett

$$f\colon R_0^+ \to R_0^+,\quad x \mapsto f(x) = x^2$$

új függvény bijektív. Amint a példa szemlélteti, ilyen eljárással új függvényeket hozhatunk létre.

Legyen $f\colon A \to B$, $S \subset A = D_f$, $S \neq \varnothing$. Azt a g függvényt, amelynek értelmezési tartománya S, képhalmaza B és $\forall\, s \in S$-re $g(s) = f(s)$, az f függvény S halmazra vonatkozó *leszűkítésének* nevezzük és $f\big|_S$-sel jelöljük, azaz

$$g = f\big|_S\colon S \to B,\quad x \mapsto f(x).$$

Pl.: A $\sin\colon R \to R$ szinusz függvény nem szürjektív, mivel pl. $2 \neq \sin x$ bármely $x \in R$-re. Az értékkészlete az $A = [-1, 1]$ intervallum. A sin függvény nem is injektív, minthogy $\sin 0 = \sin \pi$, de $0 \neq \pi$.

Azonban, ha a sin függvényt a $B = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra leszűkítjük, azaz a $g = \sin\big|_B$ függvényt vizsgáljuk, akkor ez a $g\colon B \to A$ függvény már bijektív.

Legyen g és h függvény, továbbá g legyen a h valamely leszűkítése, akkor azt mondjuk, hogy h a g függvénynek egy *kiterjesztése.*

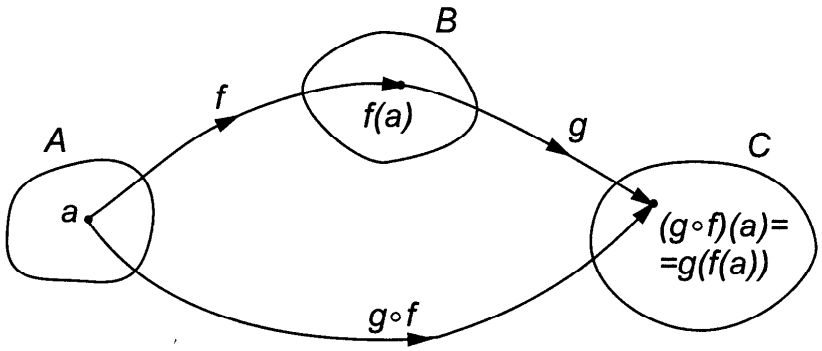
Pl.: Az $x \mapsto x+1$ függvény az $x \in R \setminus \{1\}$, $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ függvénynek az R halmazra vonatkozó egy kiterjesztése.

Legyen $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to S$ két adott függvény, akkor a $g \circ f\colon A \to S$ jelölésű új függvényt a g külső és az f belső függvény *összetett* vagy *közvetett függvényének*, a g és f *kompozíciójának* (olv.: gé kör ef vagy ef után gé) nevezzük és

$$\forall\, a \in A\colon\ (g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$$

formulával definiáljuk.

Az összetett függvény leképezéseit a 427. ábra szemlélteti.



427. ábra. A g és f függvény kompozíciója: $g \circ f$

Az összetett függvény definíciója értelmében az $u\colon A \to B$ és $v\colon S \to F$ függvényekből csak akkor képezhető $v \circ u$ összetett függvény, ha v értelmezési tartományának és u értékkészletének metszete nem üres halmaz, azaz

$$E_u \cap D_v \neq \varnothing \quad (D_v = S).$$

Pl.: Tekintsük a log és a sin függvényt: log: $R^+ \to R$, sin: $R \to [-1, 1]$.

A $\sin \circ \log\colon R^+ \to [-1, 1]$ összetett függvény $\forall x \in R^+$-hoz hozzárendeli a $\sin(\log x)$ értékeket, ugyanakkor a $\log \circ \sin(x)$ nincs definiálva minden x-re (pl. ha $x = \frac{3\pi}{2}$), és amelyre definiálva van, ott általában $\sin(\log x) \neq \log(\sin x)$. A $g \circ f$ művelet tehát g-re és f-re nem kommutatív.

Megjegyzés: Ha az $f\colon A \to B$; $g\colon B \to C$ függvények mindegyike

a) injektív, akkor a $g \circ f$ is injektív,

b) bijektív, akkor a $g \circ f$ is bijektív.

1. Tétel. Legyen az $f\colon A \to B$ függvény bijektív, akkor létezik egy olyan $g\colon B \to A$ függvény, hogy

$$a)\ g \circ f = \mathrm{id}_A \quad b)\ f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Ui. mivel a bijektív függvény szürjektív és injektív, ezért egy adott $b \in B$-hez létezik egy $a \in A$ úgy, hogy $f(a) = b$, és minden $a^* \in A$-ra $f(a^*) = b$, ha $a = a^*$.

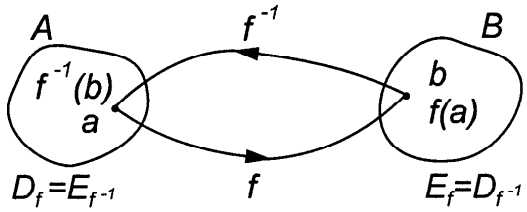
Így minden adott b-hez egyetlen a tartozik, tehát ha a-t $g(b)$-vel jelöljük a $g\colon B \to A$ függvényt kapjuk.

Ha egy $f\colon A \to B$ függvény bijektív, akkor az f-et *invertálható függvénynek* nevezzük. Ha az f invertálható, akkor értelmezhetünk f-hez egy az **1. Tételt** kielégítő g függvényt, amelyet az f *inverz függvényének* nevezünk és f^{-1} szimbólummal jelölünk:

$$g = f^{-1}\colon B \to A.$$

Amint látjuk, az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya egyenlő az f függvény értékkészletével, értékkészlete pedig az f értelmezési tartományával (428. ábra), azaz

$$f^{-1}\colon E_f \to D_f.$$



428. ábra. Az f és az f^{-1} függvények értelmezési tartománya és értékkészlete

Megjegyzés

1. Ha egy h függvény invertálható, akkor invertálható annak inverze is, azaz
$\left(h^{-1}\right)^{-1} = h.$

2. Az f függvény inverzét $f^{-1}(x)$-et ne cseréljük fel reciprokával:
$\left(f(x)\right)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$-szel

Pl.: $x \mapsto f(x) = e^x$ $(x \in R)$ exponenciális függvény inverze:

$f^{-1}(x) = \ln x$ $(x \in R^+)$ és reciproka: $\left(f(x)\right)^{-1} = \frac{1}{e^x}$.

Értékeik pl. az $x = 1$ helyen: $f^{-1}(1) = \ln 1 = 0$, $\left(f(1)\right)^{-1} = \frac{1}{e}$.

3. Ha az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ invertálható függvények, akkor a $g \circ f\colon A \to C$ függvény is invertálható, és

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\colon C \to A.$

A reláció gráfjának definíciójával összhangban, bármely $f\colon X \to Y$ függvény grafikonján a graf f szimbólummal jelölt

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

ponthalmazt értjük.

Megjegyzés: Az $f\colon R \to R$ típusú függvény grafikonját az $R \times R$ síkon ábrázolva az f függvény *görbéjének* is nevezzük, és az $y = f(x)$, $x \in D_f \subset R$ algebrai kifejezést a görbe egyenletének mondjuk.

8.5 Számsorozatok

A pozitív természetes számok N^+ halmazán, vagy egy részhalmazán értelmezett függvényt sorozatnak nevezünk.

Ha az értelmezési tartomány egy véges részhalmaz, akkor *véges* sorozatról, máskülönben *végtelen* sorozatról vagy röviden sorozatról beszélünk.

Az $a\colon N^+ \to R$, $n \mapsto a(n)$ függvénnyel általánosan adott sorozatot röviden (a_n) alakban adjuk meg.

Pl.: az $a\colon N^+ \to R$, $n \mapsto \frac{1}{n}$ sorozat elemei: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

A sorozatot $n \in N^+$ számhoz tartozó a_n általános elemre vonatkozó képlettel is megadhatjuk $a_n = \frac{1}{n}$, vagy $\left(\frac{1}{n}\right)$, vagy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ elemeinek olyan felsorolásával, amelyből az elemek képzési szabálya egyértelműen felismerhető.

Pl.: $1, 3, 5, \ldots, (2n - 1), \ldots$

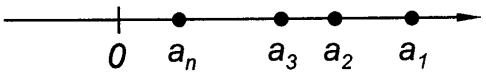
Gyakran találkozunk a sorozatok rekurzív megadásával, különösen akkor, amikor a műszaki számításokhoz a közelítő módszerek algoritmusait alkalmazzuk. Ebben az esetben az általános

(a_n) elem képlete csak akkor használható a sorozat elemeinek kiszámításához, ha az $i < n$ indexű elemek közül egyet vagy többet megadunk.

Pl.: $x_1 = 1,\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{17}{x_{n-1}}\right),\ (n \in N \setminus \{0,1\})$ vagy

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ (n \in N \setminus \{1,2\})$.

A sorozat elemeit a számegyenesen ábrázolhatjuk. Így a számsorozattal ekvivalens pontsorozatot kapunk (429. ábra).



429. ábra. Számsorozat ábrázolása

Az (a_n) valós számsorozat *monoton növekvő*, ha bármely n esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

Pl.: Ha $a_n = \left[\frac{n}{3}\right],\ n \in N^+$ (egész függvény, l. a 8.11 pontot), akkor $a_1 = 0$, $a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 1,\ a_6 = 2,\ a_7 = 2,$ ..., tehát a sorozat monoton növekvő.

Az (a_n) valós számsorozat *monoton csökkenő*, ha bármely n szám esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Pl.: Ha $a_n = \frac{1}{\left[\frac{n}{3}+1\right]},\ n \in N^+$, akkor $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{2},\ a_5 = \frac{1}{2},$

$a_6 = \frac{1}{3},\ a_7 = \frac{1}{3},$ ..., tehát a sorozat monoton csökkenő.

Ha $a_n < a_{n+1}$ ill. $a_n > a_{n+1}$, akkor azt mondjuk, hogy a valós számsorozat *szigorúan monoton növekvő* ill. *szigorúan monoton csökkenő*.

Pl.: Ha $a_n = n^2,\ n \in N^+$ akkor a sorozat: 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ... szigorúan monoton növekvő.

Ha $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N^+$ akkor a sorozat: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{n}$, ... szigorúan monoton csökkenő.

Az (a_n) valós számsorozat *felülről korlátos,* ha $\exists\, K$ szám, hogy $\forall\, n$ esetén $(n \in N^+)$ $a_n \leq K$.

Pl.: Az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ sorozat felső korlátjai: 2; 1,5; 1,2; stb.

Az (a_n) valós számsorozat *alulról korlátos*, ha $\exists\, k$ szám, hogy $\forall\, n$ esetén $(n \in N^+)$ $a_n \geq k$.

Pl.: Az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat egyik alsó korlátja: 0.

Az (a_n) valós számsorozat *korlátos*, ha $\exists\, H > 0$ szám, hogy $\forall\, n$ esetén $|a_n| \leq H$.

Egy valós számsorozat, ha korlátos, akkor felülről is és alulról is korlátos. Ezzel szemben egy felülről (vagy alulról) korlátos sorozat nem biztos, hogy korlátos.

Ha egy felülről korlátos sorozat egyik korlátja K, akkor minden $K^* > K$ szám is felső korlátja a sorozatnak. Ha egy alulról korlátos sorozat egyik alsó korlátja k, akkor minden $k^* < k$ szám is alsó korlátja a sorozatnak.

A t számot az (a_n) sorozat *torlódási pontjának* (*torlódási értékének*) nevezzük, ha a t szám akármilyen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme van, azaz, ha minden $\varepsilon \in R^+$ szám mellett végtelen sok a_n elemre teljesül az $|a_n - t| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Egy sorozatnak több torlódási pontja is lehet. Ezzel kapcsolatos a *Bolzano-Weierstrass*-tétel speciális esete:

Minden korlátos végtelen sorozatnak van legalább egy torlódási pontja.

(*Bernard Bolzano* 1781–1848; *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* 1815–1897.)

Pl.: Az $1+\frac{1}{2}$, $2+\frac{1}{2}$, $3+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{3}$, $2+\frac{1}{3}$, $3+\frac{1}{3}$, ..., $1+\frac{1}{n}$, $2+\frac{1}{n}$, $3+\frac{1}{n}$, ... sorozatnak mind az 1, mind a 2, mind a 3 szám környezetében végtelen sok elem van, tehát az 1 is, a 2 is és a 3 is torlódási pont.

Az $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ sorozatnak egyetlen torlódási pontja van az 1.

Megjegyzés

1. A sorozatok monotonitásának megállapításához gyakran elegendő az $a_{n+1}-a_n$ különbség, ill. az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados vizsgálata, ui. ha $\forall$ n-re

$$a_{n+1}-a_n \begin{cases} \geq 0, \text{ akkor } (a_n) \text{ monoton növekvő,} \\ \leq 0, \text{ akkor } (a_n) \text{ monoton csökkenő,} \end{cases}$$

továbbá, ha $a_n > 0$ és $\forall$ n-re

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} \geq 1, \text{ akkor } (a_n) \text{ monoton növekvő,} \\ \leq 1, \text{ akkor } (a_n) \text{ monoton csökkenő.} \end{cases}$$

2. A monotonitás vizsgálatához gyakran felhasználható az ún. *Bernoulli-egyenlőtlenség* is. (*Johann Bernoulli* 1667–1748; svájci matematikus).

Ha $r > -1$ valós szám, akkor $\forall$ $n \in N$-re:

$$(1+r)^n \geq 1+nr \tag{1}$$

A bizonyítás teljes indukcióval végezhető.

8.6 A sorozat határértéke

Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat *határértéke* a véges A szám, ha minden $\varepsilon \in R^+$-hoz létezik olyan $K(\varepsilon) > 0$ küszöbszám, hogy minden $n > K$-ra $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*.

A határérték jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, vagy $a_n \to A$, ha $n \to \infty$.

(Olv.: limesz á index en egyenlő nagy ával, ha en tart a végtelenhez; vagy á index en tart a nagy ához, ha en tart a végtelenhez; limesz = határ, határérték.)

A határérték létezése szemléletesen azt jelenti, hogy a sorozatban mindig található olyan a_n elem, amelytől kezdve a sorozat valamennyi eleme az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumba esik, azaz a sorozatnak ezek az elemei A-tól ε-nál kevesebbel térnek el. Ebben az esetben az A szám a sorozatnak (egyetlen) torlódási pontja.

Konvergens sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, a határérték.

Ennek fordítottja is igaz:

ha a (korlátos) sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor a sorozat konvergens és a torlódási pont a határérték.

A határérték definíciójából következik, hogy a határérték tetszőleges kis környezete véges számú elemtől eltekintve, a sorozat valamennyi elemét tartalmazza.

Ha a számsorozat határértéke 0, akkor a sorozatot *nulla-sorozatnak* (*zérus-sorozatnak*) is nevezzük.

Pl.: Az $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ határértéke 0, mivel $\forall \varepsilon \in R^+$ mellett $|a_n - 0| =$

$= \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ minden $n > K(e) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ esetén.

Ha az (a_n) sorozat konvergens és határértéke A, akkor bármely (végtelen) részsorozata is konvergens és bármely részsorozatának határértéke ugyancsak A.

A nem konvergens sorozatot divergensnek mondjuk (konvergens = összetartó; divergens = széttartó).

Az (a_n) sorozatról azt mondjuk, hogy határértéke $+\infty$, ha minden $P \in R$ számhoz létezik olyan $K > 0$ szám, hogy minden $n > K$-ra $a_n > P$.

Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty$. Az ilyen sorozat divergens.

Ugyancsak divergens az (a_n) sorozat akkor is, ha határértéke $-\infty$, azaz ha minden $P \in R$ számhoz létezik olyan $K > 0$ szám, hogy minden $n > K$-ra $a_n < -P$.

Ha egy számsorozatnak nincs véges torlódási pontja vagy több torlódási pontja van, akkor a sorozat divergens.

Konvergenciakritériumok. Hogy egy sorozat konvergens-e vagy sem, azt az alábbi tételek segítségével dönthetjük el.

Cauchy-féle *konvergenciakritérium*:

Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon \in R^+$-hoz létezik olyan $K(\varepsilon)$ szám, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n, m > K(\varepsilon)$. (Ez szükséges és elégséges feltétel.)

Sokszor alkalmazhatjuk a monoton sorozatokra vonatkozó tételt.

A monoton és korlátos sorozat mindig konvergens (elégséges feltétel).

A korlátosság szükséges a konvergenciához, azaz minden konvergens sorozat korlátos.

Pl.: Az $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$ korlátos, de nem monoton $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \ldots\right)$. A *Cauchy*-kritérium alkalmazásával igazolható, hogy a sorozat konvergens. (Vegyük figyelembe, hogy $|a_n - a_m| = |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, ha $n, m > K(\varepsilon)$.)

Leibniz-kritérium:

Ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ valós számsorozatnál az $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots$ különbségek váltakozó előjelűek és abszolút értékük monoton csökkenve nullához tart, akkor a sorozat konvergens (elégséges feltétel).

A határérték kiszámítása. A számsorozat határértékének kiszámításához, felhasználva ismert sorozatok határértékeit, gyakran alkalmazhatjuk az előbb felsorolt tételeket. Ezek alkalmazása előtt gyakran ekvivalens átalakításokat végzünk. A számsorozat határértékének kiszámítását néha egyenletmegoldásra vezetjük vissza. A számsorozat határértéke független az elemek sorrendjétől. A konvergens sorozatok határértékének kiszámítását megkönnyítő tételek:

1. Tétel. (Rendőr-elv.) Ha az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatok kielégítik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ és $a_n \le c_n \le b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ feltételeket, akkor a (c_n) sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

2. Tétel. Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, akkor

$$\lim(a_n + b_n) = A + B,$$

azaz összeg határértéke egyenlő az egyes határértékek összegével és $\lim(a_n - b_n) = A - B$, azaz különbség határértéke egyenlő a határértékek különbségével, továbbá $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, azaz a szorzat határértéke egyenlő a határértékek szorzatával.

3. Tétel. Ha $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$, és $B \neq 0$, akkor

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

azaz a hányados határértéke, ha a nevező határértéke létezik és nullától különböző, egyenlő az egyes határértékek hányadosával.

4. Tétel. Ha $a_n \le b_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $A \le B$.

Példák

1. Állapítsuk meg, hogy az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat konvergens-e?

Megoldás: Mivel a sorozat monoton csökkenő és korlátos, tehát konvergens. A sorozat nulla-sorozat, mert határértéke nulla: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2. Határozzuk meg $\left(\frac{5n-8}{3n+1}\right)$ sorozat határértékét.

Megoldás: A sorozat határértékének meghatározásához a számlálót és nevezőt osztjuk $n\neq 0$-val, majd a számláló és nevező határértékének hányadosát vesszük:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-8}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{8}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{8}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{5}{3}.$$

3. A $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ sorozat határértéke 2. Hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a $]2-0{,}001,\ 2+0{,}001[$ intervallumba?

Megoldás: Az $|a_n-A|<\varepsilon$ egyenlőtlenségből n-et kell kiszámítani, ha $\varepsilon=0{,}001$.

$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0{,}001$, $\frac{2}{n+1}<0{,}001$, ahonnan $n>1999=K$.

Tehát a sorozat elemei a 2000. tagtól kezdve esnek az említett intervallumba.

8.7 Számtani sorozat

Ha egy (a_n) számsorozathoz $\exists\, d$ szám, amelyre $\forall\, n>1$ esetén $a_n=a_{n-1}+d$, akkor ezt *számtani sorozatnak* nevezzük. A d számot a *sorozat differenciájának* (különbségének) mondjuk.

Más megfogalmazásban: *a számtani (aritmetikai) sorozat* a számok olyan sorozata, amelyben bármelyik számból kivonva az előzőt, a különbség állandó.

Pl.: A 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... számok számtani sorozatot alkotnak, mert $5-2=8-5=11-8=14-11=17-14=20-17=\ldots=3$.

A sorozatot alkotó számok *a számtani sorozat elemei.* Ha a sorozat különbsége pozitív $(d>0)$, akkor a számtani sorozat *növekvő*, ha pedig negatív $(d<0)$, akkor *csökkenő.*

Pl.: Az 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...; sorozat növekvő, mivel $d=2>0$.
A 6, 2, -2, -6, -10, ...; sorozat csökkenő, mivel $d=-4<0$.

A számtani sorozat bármelyik elemét meg tudjuk adni, ha ismerjük az első elemet és a különbséget. Legyen a számtani sorozat első eleme a_1, az állandó különbség d, akkor a második eleme: $a_2 = a_1 + d$, a harmadik eleme: $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, ..., az n-edik eleme:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

A számtani sorozat n-edik elemét tehát úgy kapjuk meg, hogy az első elemhez hozzáadjuk a különbség $(n-1)$-szeresét.

Pl.: Számítsuk ki a 2, 5, 8, 11, ... számtani sorozat 20. elemét.

Megoldás: Mivel $d = 5-2 = 8-5 = ... = 3$, $a_1 = 2$ és $n = 20$, ezért

$a_{20} = 2 + (20-1)\cdot 3 = 2 + 19 \cdot 3 = 59.$

A számtani sorozat elemeit összeadva, megkapjuk a számtani sorozat elemeiből képzett *számtani sor összegét*, amit s_n-nel jelölünk (az n pozitív egész szám mutatja, hogy hány elemet adtunk össze):

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_n - d) + a_n.$$

Az s_n kiszámítását kevesebb művelettel is elvégezhetjük. Ui. írjuk fel az s_n jobb oldalán levő összeget az előbbi alakban és az elemek fordított sorrendjében is és adjuk össze az egymás alá kerülő elemeket:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_n - d) + a_n$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_1 + d) + a_1$$
$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n),$$

amiből $2s_n = n(a_1 + a_n)$, s így

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

A számtani sorozat első n elemének összegét tehát úgy kapjuk meg, hogy az elemek számának a felét megszorozzuk az első és utolsó elem összegével.

Pl.: Számítsuk ki az 1, 3, 5, 7, ... számtani sorozat első 11 eleméből képzett számtani sor összegét.

Megoldás: Mivel $d = 3-1 = 7-5 = \ldots = 2$, $n = 11$, $a_1 = 1$ és

$$a_{11} = 1+(11-1)\cdot 2 = 21, \text{ ezért } s_{11} = \frac{11}{2}(1+21) = \frac{11\cdot 22}{2} = 121.$$

Ha az $a_n = a_1 + (n-1)d$ kifejezést behelyettesítjük az s_n képletébe, akkor a számtani sor összegének kiszámítására az

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

módosított képletet használhatjuk.

Példák

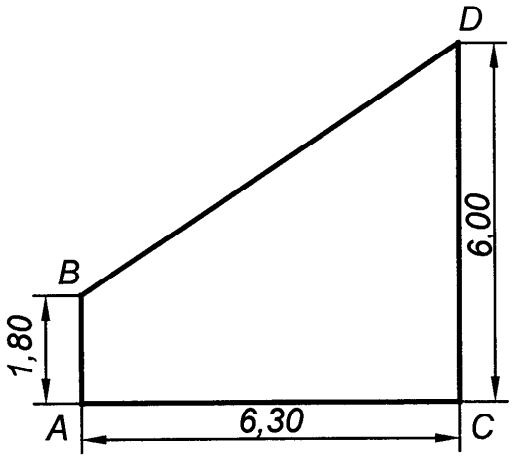
1. Egy szabadon eső test mekkora utat fut be a hetedik másodpercben? (A levegő ellenállását figyelmen kívül hagyjuk.)

Megoldás: A szabadon eső test az első másodpercben 4,9 m-t tesz meg, minden továbbiban a megelőzőnél 9,8 m-rel többet, ezért

$a_1 = 4{,}9$; $d = 9{,}8$; $n = 7$; tehát

$$a_7 = 4{,}9 + (7-1)\cdot 9{,}8 = 4{,}9 + 6\cdot 9{,}8 = 63{,}7 \text{ m}.$$

2. A 430. ábra szerint elhelyezett *AB* és *CD* vaspálca közé helyezzünk el egymástól 45 cm távolságra további vaspálcákat oly módon, hogy a *BD* vaspálca alá helyezkedjenek. Hány vaspálcára van szükség, s azok milyen hosszúak legyenek egyenként, ha *AC* = 6,30 m, *AB* = 1,80 m, *CD* = 6,00 m?



430. ábra. Keret

Megoldás: A vaspálcák darabszáma (az *AB* és *CD* pálcákkal együtt):

$$1 + \frac{630}{45} = 1 + 14 = 15.$$

A vaspálcák hossza számtani sorozatot alkot. Az *AB* vaspálca hossza a számtani sorozat első, *CD* hossza a számtani sorozat utolsó eleme, azaz $a_1 = 1{,}80$, $a_n = 6{,}00$ és az elemek száma: $n = 15$. Az $a_n = a_1 + (n-1)d$ összefüggésből d-t kell meghatároznunk:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{6{,}00 - 1{,}80}{15-1} = \frac{4{,}20}{14} = 0{,}30.$$

Tehát mindegyik vaspálca az előtte levőnél 0,30 m-rel hosszabb:

1,80; 2,10; 2,40; ...; 5,70; 6,00.

Az előző feladatban a számtani sorozat két ismert eleme közé beiktattunk több új elemet; ezt az eljárást *interpolációnak* nevezzük.

3. Milyen hosszú a 4 cm sugarú dobra 25-ször körülcsavart $\frac{3}{2}$ mm vastagságú szíjszalag?

Megoldás: Az első réteg hossza $2\cdot 40\pi$ mm, mert $r=40$ mm sugarú dobra csavarjuk a szíjszalagot. A második réteg már 3/2 mm-rel nagyobb sugarú dobra csavarodik, tehát annak hossza $2\cdot\left(40+\frac{3}{2}\right)\pi = 2\cdot 40\pi + 3\pi$. A második réteg tehát 3π mm -rel hosszabb, a harmadik – ugyanilyen meggondolással – ismét 3π mm -rel hosszabb stb. Így olyan számtani sor összegét kell kiszámítani, amelynek első eleme $a_1 = 2\cdot 40\cdot 3{,}14 = 251{,}20$ és differenciája: $d = 3\cdot 3{,}14 = 9{,}42$, s az elemek száma: $n=25$.

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[2a_1+(n-1)d\right] = \frac{25}{2}(2\cdot 251{,}20+24\cdot 9{,}42) = 12{,}5\cdot 728{,}48 = 9106.$$

Tehát a szíjszalag hossza 9106 mm, vagyis 9,106 m.

4. Egy ifjúsági sportcsapat 72000 Ft jutalmat kapott. Hány tagja volt a csapatnak, ha a teljesítmény sorrendjében az első 11000 Ft-ot kapott, s minden további 750-750 Ft-tal kevesebbet?

Megoldás: $s_n = 72000$, $a_1 = 11000$ és $d=-750$, $n=?$

Az $s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$ képletből n-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$d\,n^2+(2a_1-d)n-2s_n=0,\quad -750n^2+(2\cdot 11000+750)n-2\cdot 72000=0.$$

–250-nel egyszerűsítve: $3n^2-91n+576=0$, amelyből $n_1=21{,}3$ $n_2=9$.

A feladat természetének csak az $n_2=9$ gyök felel meg, tehát a csapatnak 9 tagja van. Hány Ft-ot kapott a csapat kilencedik tagja?

$$a_9 = 11000+(9-1)(-750) = 11000-6000 = 5000 \text{ Ft.}$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a 3, 7, 11, ... számtani sorozat 30. elemét. $[a_{30}=119.]$

2. Számítsuk ki az első n páratlan szám összegét.

$[1, 3, 5, \ldots, 2n-1,\ s_n=n^2.]$

3. Az 5, 9, 13, ... számtani sorozat hány elemét kell vennünk, hogy összegük 10 877-et adjon? $[n=73.]$

4. Hány eleme van annak a számtani sorozatnak, amelynél $d=12$, $a_n=15$ és $s_n=456$? $[n=8.]$

5. A c és d számok közé helyezzünk el k számot úgy, hogy azok c-vel és d-vel számtani sorozatot alkossanak. Írjuk fel a számtani sorozat első három elemét.

$$\left[a_1 = c,\ a_2 = \frac{ck+d}{k+1},\ a_3 = \frac{c(k-1)+2d}{k+1}.\right]$$

8.8 Mértani sorozat

Ha egy (a_n) számsorozathoz $\exists\, q \neq 0$ szám, hogy $\forall\, n \in N \setminus \{0,1\}$ esetén $a_n = a_{n-1}q$, akkor ezt *mértani sorozatnak* nevezzük. A q szám a sorozat *kvóciense* (*hányadosa*).

Más megfogalmazásban: *a mértani* (*geometriai*) *sorozat* a számok olyan sorozata, amelyben bármelyik számot az előzővel osztva, a hányados állandó.

Pl.: 2, 4, 8, 16, ... számok mértani sorozatot alkotnak, mert $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots = 2$.

A sorozatot alkotó számok a mértani sorozat *elemei*. Ha a sorozat első eleme pozitív és hányadosa egynél nagyobb $(q > 1)$, akkor a mértani sorozat növekvő; ha pedig a hányados egynél kisebb, de pozitív $(0 < q < 1)$, akkor a sorozat csökkenő. Ha a hányados negatív $(q < 0)$, akkor az elemek váltakozó előjelűek, ha $q = 1$, akkor a sorozat elemei azonosak.

Pl.: 1, 2, 4, 8, ..., $q = 2$, $q > 1$, a sorozat növekvő,

80, 40, 20, 10, ..., $q = \frac{1}{2}$, $0 < q < 1$, a sorozat csökkenő,

3, −9, 27, −81, ..., $q = -3$, $q < 0$, a sorozat váltakozó előjelű,

5, 5, 5, ..., $q = 1$, az elemek egyenlők egymással.

A mértani sorozat bármely elemét megadhatjuk, ha ismerjük az első elemet és a hányadost. Legyen a sorozat első eleme a_1, az állandó hányados q, akkor a mértani sorozat egymás után következő elemei:

$$a_1,\ a_2 = a_1q,\ a_3 = a_2q = a_1q^2,\ a_4 = a_1q^3,\ \ldots$$

A mértani sorozat n-edik eleme:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

A mértani sorozat n-edik elemét tehát úgy kapjuk meg, hogy az első elemet megszorozzuk a hányados $(n-1)$-edik hatványával.

Pl.: Számítsuk ki a 3, 6, 12, ... mértani sorozat 9. elemét.

Megoldás: Mivel $q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = ... = 2$, $a_1 = 3$ és $n = 9$, tehát

$a_9 = 3 \cdot 2^{9-1} = 3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768.$

Ha a mértani sorozat elemeit összeadjuk, akkor megkapjuk a mértani sorozat elemeiből képzett *mértani sor összegét*, amit s_n-nel jelölünk (n tetszőleges pozitív egész szám, mutatja, hogy hány elemet adunk össze):

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1}.$$

Ha ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát megszorozzuk q-val és képezzük az $s_n - q\,s_n$ különbséget, akkor a mértani sor összegének egyszerűbb kiszámítására az alábbi képletet kapjuk:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + ... + a_1 q^{n-1}$$

$$q\,s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n,$$

$s_n - q\,s_n = a_1 - a_1 q^n$, amiből, ha $q \neq 1$,

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

A mértani sorozat első n elemének összegét tehát úgy kapjuk meg, hogy az első elemét megszorozzuk egy olyan törttel, amelynek számlálója a hányados n-edik hatványa eggyel kisebbítve, nevezője pedig az eggyel kisebbített hányados.

Ha a mértani sorozat *elemeinek a száma végtelen*, akkor a *végtelen mértani sorozatról* beszélünk. A végtelen mértani sorozat elemeiből képzett *végtelen mértani sor összegét* az

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1,$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol a_1 a mértani sor első tagja, q pedig a hányados.

Pl.: Számítsuk ki a 3, 6, 12, ... mértani sorozat első hat elemének összegét.

Megoldás: Mivel $q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \ldots = 2$, $a_1 = 3$ és $n = 6$, ezért

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{63}{1} = 189.$$

Ha ismerjük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ értékét, akkor s_n kiszámítására az

$$s_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

összefüggést használjuk.

Példák

1. Számítsuk ki a mértani sorozat hányadosát és az elemek összegét, ha $a_1 = 74\frac{2}{3}$ és $a_6 = 2\frac{1}{3}$.

Megoldás: Az $a_n = a_1 q^{n-1}$ összefüggésből:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6-1]{\frac{2\frac{1}{3}}{74\frac{2}{3}}} = \sqrt[5]{\frac{7}{224}} = \frac{1}{2}, \text{ és}$$

$$s_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{74\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{441}{6}}{\frac{1}{2}} = 147.$$

2. Számítsuk ki a mértani sorozat első elemét és az elemek összegét, ha $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$ és $a_{10} = 7$.

Megoldás: Az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képletből:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 3584, \qquad s_{10} = \frac{3584 - 7 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 7161.$$

3. Számítsuk ki a mértani sorozat első és utolsó elemét, ha $n = 8$, $q = 2$ és $s_8 = 765$.

Megoldás. Az $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képletből:

$$a_1 = \frac{(q-1)s_n}{q^n - 1} = \frac{(2-1) \cdot 765}{2^8 - 1} = 3, \text{ tehát } a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

4. Számítsuk ki a mértani sorozat elemszámát, ha $q = 2$, $a_n = 96$, $s_n = 189$.

Megoldás. Az $s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$ képletből

$$a_1 = a_n q - s_n(q-1) = 96 \cdot 2 - 189 \cdot (2-1) = 3.$$

Az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képletből $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$, és így

$$2^{n-1} = \frac{96}{3} = 32 = 2^5, \text{ tehát } n - 1 = 5, \; n = 6.$$

5. Egy 120000 Ft értékű gépi berendezés mekkora értékűnek tekinthető nyolc évvel a beszerzés után, ha az értékcsökkenés mindig az előző évi érték 10%-a?

Megoldás. A beszerzési árat jelöljük a_0-val, akkor az első évi értékcsökkenés $\frac{a_0 \cdot 10}{100} = \frac{1}{10} a_0$, s így egy év múlva a csökkent érték:

$$a_1 = a_0 - \frac{1}{10} a_0 = a_0 \left(1 - \frac{1}{10}\right) = a_0 \cdot \frac{9}{10}.$$

A következő évben ez az a_1 csökken $\frac{9}{10}$ részére s így tovább; tehát olyan mértani sorozat nyolcadik elemét kell kiszámítani, amelynek az első eleme: $a_1 = a_0 \cdot \frac{9}{10}$ és hányadosa: $q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$, tehát

$$a_8 = 120000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 = 120000 \left(\frac{9}{10}\right)^8 = 51656{,}0652.$$

Tehát a gépi berendezés értéke nyolc év múlva 51 656 Ft-ra csökken.

Megjegyzés. Számos pénzügyi problémát az 5. példa gondolatmenetének megfelelő alkalmazásával mértani sorozatra visszavezetve oldunk meg.

1. Kamatoskamat-számítás. A kamatoskamattal növelt $T_é$ összeg kiszámítását a

$$T_é = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^é \qquad \text{(I)}$$

képlettel számítjuk, ahol t a betét összege, p a kamatláb, $é$ a letelt teljes évek száma. Itt a mértani sorozat első eleme: t, a kvóciens:

$$q = 1+\frac{p}{100},$$

amelyet *kamattényezőnek* nevezünk, n pedig $é$-vel egyenlő.

Példa: 19,5%-os tartós betétre elhelyezett 100 Ft tőke hány forintra növekszik a huszadik év végére?

Megoldás: $t = 100$; $p = 19{,}5$; $é = 20$, tehát

$$T_{20} = 100\left(1+\frac{19{,}5}{100}\right)^{20} = 100\cdot 1{,}195^{20} = 3526{,}62 \text{ Ft.}$$

Ha minden év elején t összeget évi $p\%$-os kamatra helyezünk el a bankban, akkor $é$ év elteltével a

$$tq+tq^2+tq^3+\ldots+tq^é = tq(1+q+q^2+\ldots+q^{é-1}),\quad q = 1+\frac{p}{100}$$

mértani sor ill. ennek összegképlete:

$$T_{sé} = tq\frac{q^é-1}{q-1},\quad \left(q = 1+\frac{p}{100}\right) \qquad \text{(II)}$$

adja meg a rendelkezésünkre álló összeget.

Példa: Minden év elején 200 Ft-ot teszünk a bankba 19,5%-os kamatra. Hány forintunk lesz a hetedik és a 20. év végén?

Megoldás: $t = 200$; $p = 19{,}5$; $é = 7$, ill. $é = 20$, a kamattényező:

$q = 1+\frac{19{,}5}{100} = 1{,}195$, tehát

$$T_{s7} = 200 \cdot 1{,}195 \cdot \frac{1{,}195^7 - 1}{1{,}195 - 1} = 3039{,}55 \text{ Ft}$$

$$T_{s20} = 200 \cdot 1{,}195 \cdot \frac{1{,}195^{20} - 1}{1{,}195 - 1} = 41998{,}00 \text{ Ft.}$$

Ha *é* éves időtartamra T Ft hitelt veszünk fel évi p%-os kamatra és évenként a Ft törlesztést vállalunk, akkor az *é*-edik év végi $T_{té}$ tartozásunkat a

$$T_{té} = Tq^{é} - \left(a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{é-1}\right)$$

összeg ill. a mértani sor összegképletét felhasználva:

$$T_{té} = Tq^{é} - a\frac{q^{é} - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p}{100} \qquad \text{(III)}$$

képlet adja meg.

Ha a felvett hitelt *é* év alatt akarjuk visszafizetni, akkor az *é*-edik év végén 0 Ft lesz a tartozásunk, azaz $T_{té} = 0$, s így a (III) képletből

$$a = Tq^{é}\frac{q - 1}{q^{é} - 1}, \quad q = 1 + \frac{p}{100} \qquad \text{(IV)}$$

az évenkénti törlesztési összeg (*annuitás*).

Pl.: Egy vállalkozó évi 26%-os kamatra 7000000 Ft hitelt kap a banktól, amelyet nyolc év alatt, évenként egyenlő részletekben kell visszafizetnie. Mennyi az évenként fizetendő részlet összege?

Megoldás: $T = 7000000$, $q = 1{,}26$, $é = 8$; $a = ?$ Az évenkénti törlesztés összegét megkapjuk, ha a (IV) képletbe az adatokat behelyettesítjük és elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$a = 7000000 \cdot 1{,}26^8 \cdot \frac{1{,}26 - 1}{1{,}26^8 - 1} = 2160009{,}73 \text{ Ft.}$$

Amint látható a hitel összegéhez képest igen magas a törlesztési részlet. A vállalkozónak alaposan meg kell fontolnia, hogy milyen feltételek mellett, milyen időtartamra, mennyi hitelt vesz fel.

2. Járadék-számítás. Gyakran azért helyeznek el a bankban egy bizonyos összeget, hogy minden év végén jövedelem kiegészí-

tésként a kamattal növelt betett összeg egy részét felvegyék. Az évenként felvett összeget *járadéknak* nevezzük. Ha T Ft-ot helyezünk el a bankban p%-os kamatra és minden év végén kiveszünk j Ft-ot, akkor az $é$-edik év végén a bankkal szembeni követelésünk:

$$Tq^{é} - \left(j + jq + jq^2 + \ldots + jq^{é-1}\right), \quad q = 1 + \frac{p}{100}$$

és a mértani sor összegképletét felhasználva a bankkal szembeni $T_{ké}$ követelésünk képlete:

$$T_{ké} = Tq^{é} - j\frac{q^{é} - 1}{q - 1}, \quad q = 1 + \frac{p}{100}. \qquad \text{(V)}$$

Pl.: Ha 15 éven keresztül minden év végén 120000 Ft járadékot akarunk felvenni, akkor mekkora tőkét kell elhelyeznünk a bankban, ha a kamat 17%-os?

Megoldás: $j = 120000$, $é = 15$, $p = 17\%$, $q = 1{,}17$, s mivel 15 évre tervezzük a járadék felvételt, ezért az utolsó járadék felvétele után, a 15. év végén a bankkal szembeni követelésünk $T_{ké} = 0$, így az (V) képletből T tőke összege meghatározható:

$$T = j\frac{q^{é} - 1}{q^{é}(q - 1)} = 120000 \cdot \frac{1{,}17^{15} - 1}{1{,}17^{15}(q - 1)} = 638902{,}47 \text{ Ft.}$$

8.9 A függvény határértéke

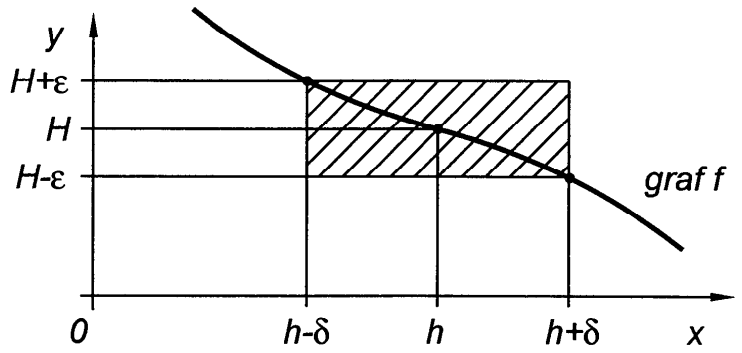
A továbbiakban, ha mást nem mondunk, akkor S intervallumot jelöl, amely R részhalmaza, azaz $S \subset R$. A $t \in S$ pont ε sugarú nyílt környezetét $t\,]\varepsilon[$; zárt környezetét $t[\varepsilon]$ jelöli. Legyen $H \in R$; f az S intervallumon értelmezett függvény, valamint $h \in S$ az S torlódási pontja.

Az $f(x)$ függvény tart a H-hoz x tart h esetén, ha $\forall \varepsilon \in R^+$-hoz $\exists \delta \in R^+$, hogy $\forall x \in S$-re

$$0 < |x - h| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - H| < \varepsilon.$$

A H számot az $f(x)$ függvény h helyen vett *határértékének* nevezzük. Ez más megfogalmazásban azt jelenti, hogy a h δ sugarú nyílt környezetébe eső x-ekre az $f(x)$ a H ε sugarú nyílt környezetébe tartozik, azaz

$$\forall x \in h]\delta[\quad \Rightarrow \quad f(x) \in H]\varepsilon[\qquad \text{(431. ábra).}$$



431. ábra. A határérték fogalom geometriai szemléltetése

A δ az ε megadásától függhet, ezt – ha hangsúlyozni akarjuk – $\delta(\varepsilon)$-nal jelöljük.

Ha h az S végpontja, pl. ha $S =]a,b[$ és $h = a$, akkor $|x-h| = x-a$; ill. ha $h = b$, akkor $|x-h| = b-x$.

A határérték jelölése:

$$\lim_{x \to h} f(x) = H \text{ vagy } f(x) \to H, \text{ ha } x \to h.$$

(Olv.: limesz ef iksz, ha iksz tart hához egyenlő nagy há.)

Példák

1. Az $x \mapsto x^2$ függvény határértéke nulla, ha x tart a nullához; $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, mivel $|x^2 - 0| < \varepsilon$ minden x-re, amely kielégíti az $|x-0| < \delta(\varepsilon) \le \sqrt{\varepsilon}$ egyenlőtlenséget, pl. ha $\varepsilon = \frac{1}{4}$, akkor $\delta = \frac{1}{2}$, vagyis, ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $x^2 < \frac{1}{4}$ valóban fennáll.

2. Az $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x^2\right) = \begin{cases} +1, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, de $f(0) = 0$, vagyis a határérték nem egyenlő a helyettesítési értékkel (432. ábra).

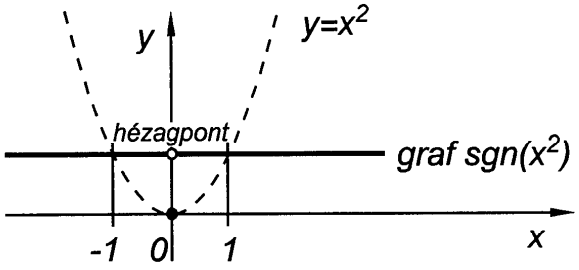
3. Az $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ függvény az $x=3$ helyen nincs definiálva, mivel ott mind a számláló mind a nevező egyidejűleg zérus. Ha $x\neq 3$, akkor

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2}(x+3)=\frac{1}{2}\cdot 6=3,$$

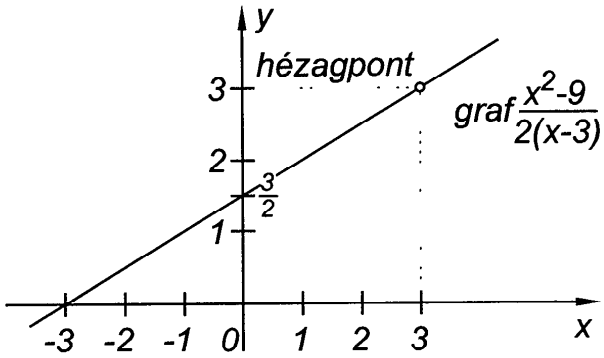
ui. $\left|\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}-3\right|=\left|\dfrac{1}{2}(x+3)-3\right|=$

$$=\frac{1}{2}|x-3|<\varepsilon$$

fennáll minden x-re, amely kielégíti az $\frac{1}{2}|x-3|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ egyenlőtlenséget. A (3,3) pont nem tartozik a függvény grafikonjához, ezért ezt a pontot az $y=\frac{1}{2}(x+3)$ egyenletű egyenes pontjai közül kizárjuk, s így a függvénygörbe *hézagpontjának* nevezhetjük. (433. ábra).



432. ábra. A $\operatorname{sign}(x^2)$ függvény grafikonja



433. ábra. Az $f(x)$ függvény grafikonja

Könnyen belátható, hogy ha létezik H határérték, akkor az *egyetlen.*

A függvény jobb oldali ill. bal oldali határértékét is értelmezhetjük attól függően, hogy x a h számtól mindig jobbra, ill. balra van a $h\,]\delta[$ környezetben. A jobb oldali határérték jelölése a c pontban:

$$\lim_{x\to c+0} f(x)=H_j$$

és hasonlóan a bal oldali határérték jelölése a c pontban:

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=H_b.$$

A függvénynek akkor van határértéke egy pontban, ha ott a jobb és bal oldali határértéke létezik és azok egyenlők.

Megjegyzés: Ha $\lim_{x\to h} f(x)=H$ és $\lim_{x\to h} g(x)=H$, továbbá a h környezetében teljesül az $f(x)\le t(x)\le g(x)$ egyenlőtlenség, akkor a $t(x)$ függvénynek is H a határértéke a h helyen, azaz $\lim_{x\to h} t(x)=H$.

A határérték lehet $+\infty$ vagy $-\infty$ is. Ez akkor következik be, ha $|f(x)|$ a h hely környezetében tetszőlegesen nagy.

Az $f: S \to R$ függvényről azt mondjuk, hogy $x \to h$ esetén tart a végtelenhez, ha bármely $V \in R^+$-hoz $\exists\, \delta \in R^+$, hogy $\forall\, x \in S$-re

$$0 < |x - h| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > V.$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to h} f(x) = \infty$ vagy $f(x) \to \infty$, ha $x \to h$.

A $\lim\limits_{x \to h} f(x) = -\infty$ határértéket a $\lim\limits_{x \to \mathrm{h}} \big(-f(x)\big) = \infty$ alapján értelmezzük.

Pl.: Az $x \mapsto y = \operatorname{tg} x$ függvény az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen nincs definiálva, de van jobb és bal oldali végtelen határértéke: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$ és $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

A határértéket a végtelenben is értelmezhetjük.

Legyen $S =]a, \infty[$. Az $f: S \to R$ függvényről azt mondjuk, hogy H a határértéke $x \to \infty$ esetén, ha $\forall\, \varepsilon \in R^+$-hoz $\exists\, V \in R$, hogy

$$x > V \quad \Rightarrow \quad |f(x) - H| < \varepsilon.$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = H$ ill. $f(x) \to H$, ha $x \to \infty$.

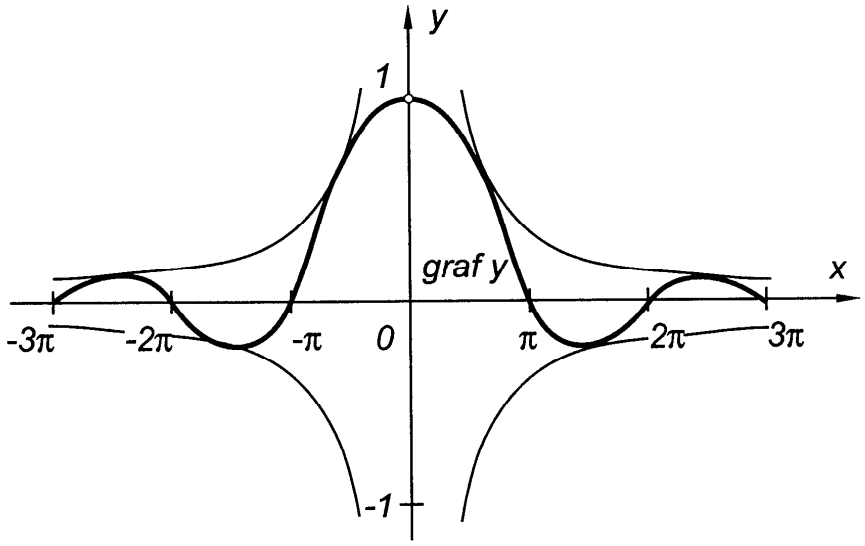
Hasonlóan értelmezzük a határértéket, ha $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = H.$$

Példák

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, mivel $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ $\forall x$-re, amely kielégíti az $x > \frac{1}{\varepsilon}$ egyenlőtlenséget.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, mivel $\mathrm{E}_{\sin x} = [-1, 1]$ és $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, de $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, amiből állításunk következik (434. ábra).



434. ábra. Az $y = \frac{\sin x}{x}$ grafikonja

Az $f: S \to R$ függvényről azt mondjuk, hogy a végtelenben végtelen a határértéke, azaz $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ha $\forall\, V \in R$-hez $\exists\, X \in R$, hogy

$$x > X \quad \Rightarrow \quad f(x) > V.$$

Hasonlóan értelmezzük a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ határértékeket.

Megjegyzés: A számsorozatok monotonitására vonatkozó definíciók kiterjeszthetők a függvényekre is.

Az $f: S \to R$ függvény

a) monoton növekvő az S intervallumon, ha
$\forall\, x_1, x_2 \in S$-re $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$,

b) monoton csökkenő az S intervallumon, ha
$\forall\, x_1, x_2 \in S$-re $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$,

c) szigorúan monoton növekedő, az S intervallumon, ha
$\forall\, x_1, x_2 \in S$-re $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$,

d) szigorúan monoton csökkenő, az S intervallumon, ha $\forall x_1, x_2 \in S$-re $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Megjegyzés: A szigorúan monoton függvények invertálhatók.

A függvény határértékének kiszámítását elősegítő néhány szabály (a bizonyításokat lásd, a matematikai analízis tankönyveiben):

1. Az állandó határértéke önmagával egyenlő.

2. Az S intervallumon értelmezett véges számú tagból álló függvényösszeg határértéke egyenlő a tagok határértékeinek összegével:

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)-\lim_{x\to c}h(x).$$

3. Az S intervallumon értelmezett véges számú tényezőből álló függvényszorzat határértéke egyenlő a tényezők határértékeinek szorzatával:

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}h(x).$$

4. Az S intervallumon értelmezett függvényhányados határértéke, ha a nevező (osztó) határértéke nullától különböző, a számláló és a nevező (osztandó és az osztó) határértékének hányadosával egyenlő:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c}f(x)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)},\qquad \lim_{x\to c}g(x)\neq 0.$$

A 2., 3. és 4. esetben hallgatólagosan feltesszük, hogy a szereplő határértékek léteznek és végesek.

Példák.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x-4)\sin x+\cos 2x\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-4)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin x+\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=-4\cdot 0+1=1.$

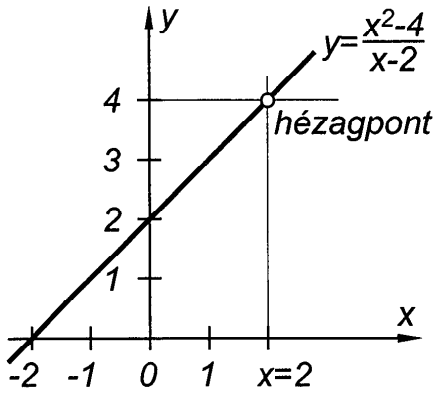
2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{4}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pi}\cos x}{\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}}=\dfrac{-1}{1}=-1.$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=?$

A függvény az $x=2$ helyen határozatlan (nincs definiálva), mert a helyettesítési érték $\dfrac{0}{0}$ alakot ad. A függvénynek azonban van határértéke $x\to 2$ esetén is, mert a függvény minden $x\neq 2$ helyen $x+2$-vel egyenlő, s így

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$



435. ábra. A függvény hézagpontja

A függvény grafikonja az $y=x+2$ egyenletű egyenessel megegyezik, ha abból az $x=2$ abszcisszájú pontot kitöröljük (435. ábra). Azt mondjuk, hogy az $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ függvénynek az $x=2$ helyen hézagpontja van.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x}{2x^2+3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$, mert $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=?$

A 436. ábrán szemléltetett három terület összehasonlítása alapján:

az $O1A\Delta$ területe: $\dfrac{1\cdot\sin x}{2}$;

az $O1A$ körcikk területe: $\dfrac{1\cdot x}{2}$;

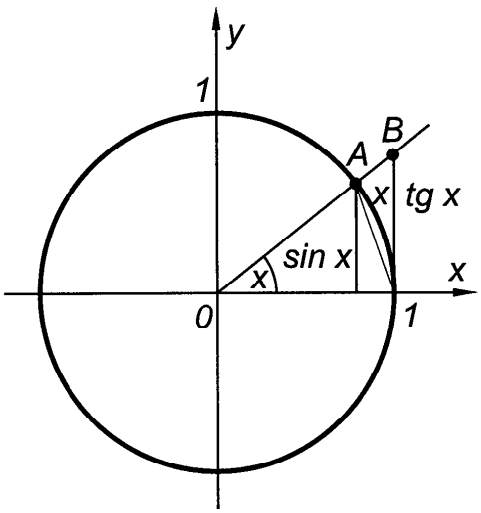
az $O1B\Delta$ területe: $\dfrac{1\cdot\operatorname{tg}x}{2}$

és így $\dfrac{1\cdot\sin x}{2}<\dfrac{1\cdot x}{2}<\dfrac{1\cdot\operatorname{tg}x}{2}$,

azaz $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, osztva $\sin x$-szel

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\ \text{amiből}$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x\ \text{ s mivel }\lim_{x\to 0}\cos x=1,$$



436. ábra. Egységkör a $(\sin x)/x$ határérték meghatározásához

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

Ha x helyett $-x$-et veszünk, akkor $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Az eredmény felhasználásával: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=?$

E függvényre a következő egyenlőtlenség írható fel:

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Az $\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$ függvény növekvő, az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ pedig csökkenő. A bizonyítást nem végezzük el, csak szemléltetjük. Pl. $x=2$ helyettesítéssel:

$\left(1+\frac{1}{3}\right)^2<\left(1+\frac{1}{2}\right)^2<\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$ vagyis $1{,}77<2{,}25<3{,}375$, továbbá:

x	$\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$
5	2,16	2,49	2,986
10	2,387	2,59	2,85
100	2,678	2,705	2,7319
1000	2,7142	2,717	2,7198
5000	2,71801	...	2,71828
....	...	...	...

amiből $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2{,}718...$

Ezt a nevezetes határértéket e-vel jelöljük:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (2)$$

Az *e transzcendens szám*, a természetes logaritmus alapszáma, értéke hét tizedesjegy pontossággal: $e=2{,}7182818...$

(2)-ből $x=\frac{1}{t}$ helyettesítéssel $x\to\infty$ esetén t $\to 0$, s így (2)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ alakban írható.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=?\quad (a>0).$

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(Az utolsó lépés a logaritmusfüggvény folytonossága miatt megengedett. A függvény folytonosságáról l. a 8.10 pontot.) A 6. példa alapján:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e. \tag{3}$$

Ha a logaritmusfüggvény alapjául az e számot választjuk (az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezzük és ln-nel jelöljük, mint azt már korábban is tárgyaltuk), akkor

$$\log_e e=\ln e=1 \text{ azaz } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

8. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=?$

Ha az $a^h-1=x$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor $a^h=x+1$, amiből $h=\log_a(1+x)$ vagy $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}$, s így

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}=\lim_{x\to 0}\left[(\ln a)\frac{x}{\ln(1+x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(\ln a)\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right]=\ln a$$

azaz

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$$

9. Az előzőek alapján bizonyítsuk a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a$ [pl. helyettesítsünk $x=\dfrac{a}{t}$-t],

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ [szorozzunk $\dfrac{\cos x+1}{\cos x+1}$-gyel].

Az (1), (2), (3) és (4) határértékek felhasználást nyernek "A differenciálszámítás és néhány alkalmazása" c. 9. fejezetben.

8.10 A függvény folytonossága

1. Az $f: S \to R$ függvényt a $c \in S$ pontban folytonosnak nevezzük, ha

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

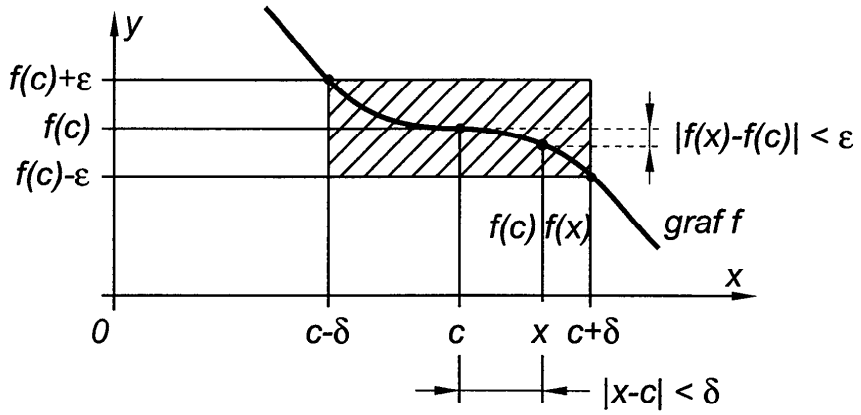
azaz, ha f-nek a c-ben van határértéke és az egyenlő az $f(c)$ helyettesítési értékkel.

Ha f folytonos az S minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f folytonos az S intervallumon.

Az 1. definícióval ekvivalens a következő:

2. Az $f: S \to R$ függvény legyen definiálva a $c\,]\delta[$ környezetében (437. ábra), akkor az f függvényt a c pontban folytonosnak mondjuk, ha $\forall \varepsilon \in R^+$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) \in R^+$, hogy $\forall x \in S$-re

$$0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$



437. ábra. A függvény folytonosságának geometriai szemléltetése

Pl.: Az $f(x) = 2x^2 - 1$ függvény folytonos minden $x = c \in R$ pontban. Ui. az 1. definíció szerint $\lim_{x \to c}(2x^2 - 1) = 2c^2 - 1 = f(c)$, és mivel ez minden $c \in R$-re fennáll, ezért $f(x)$ folytonos. (A határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.)

A függvény jobb ill. bal oldali határértékéhez hasonlóan definiálhatjuk a jobb ill. bal oldali folytonosság fogalmát.

3. Az $f: S \to R$ függvény a $c \in S$ helyen *jobbról folytonos*, ha $\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c)$; és *balról folytonos*, ha $\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c)$.

Ha egy függvény folytonos egy c pontban, akkor ott jobbról is és balról is folytonos.

Pl.: Az $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ függvényre $\lim_{x \to 3+0} f(x) = 6$, és $\lim_{x \to 3-0} f(x) = 6$, tehát a függvénynek létezik jobb és bal oldali határértéke, a két határérték egyenlő egymással, de az $x = 3$ helyen a függvény nincs is definiálva.

A folytonos függvények tulajdonságaira vonatkozó tételek közül felsorolunk néhányat, amelyek elősegítik a gyakorlatban felmerülő problémák elemzését. E tételek bizonyítása az analízis tankönyveiben megtalálhatók.

a) Ha az $f: S \to R$ és a $g: S \to R$ folytonosak a $c \in S$ pontban, akkor ugyanebben a c pontban folytonosak az

$$f + g, \text{ az } f - g, \text{ az } f \cdot g, \text{ az } \frac{f}{g} \ (\text{ha } g(c) \neq 0), \ k \cdot f \ (k \in R)$$

függvények is.

Folytonos függvényekre az f leképezés és a határérték képzés felcserélhető, azaz

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = f(\lim_{x \to c} x).$$

b) Ha $f(x)$ folytonos a c helyen és $g(x)$ is folytonos az $f(c)$ helyen, akkor a $g[f(x))]$ összetett függvény is folytonos a c helyen.

c) Ha az $f: S \to R$ folytonos a $c \in S$ helyen és $f(c) > 0$, akkor

$\exists\, c]\delta[$ környezete, hogy $\forall\, x \in c]\delta[$ -ra $f(x) > 0$.

d) Jelölje $C(S)$ az S halmazon folytonos függvények halmazát. Ha az $f, g \in C(S)$ és $f(c) > g(c)$, vagy $f(c) < g(c)$, akkor $\exists\, c]\delta[$ környezete, hogy

$\forall\, x \in c]\delta[$ -ra $f(x) > g(x)$ vagy $f(x) < g(x)$.

e) Ha f folytonos egy zárt intervallumon, akkor ugyanott korlátos is.

f) Ha f folytonos egy $[a,b]$ zárt intervallumon és az intervallum végpontjaiban a függvényértékek különböző előjelűek, akkor az (a,b) nyílt intervallumban van olyan c pont, amely f-nek zérushelye, azaz amelyben $f(c) = 0$. (*Bolzano*-tétel.)

g) Ha f egy $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos, akkor *e*) szerint korlátos és az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó függvényértékek között van legnagyobb (M) és legkisebb (m), azaz $m \leq f(x) \leq M$.

h) Ha f egy $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos, akkor ezen intervallumon minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz.

4. Ha az $f: S \to R$ függvény a $c \in R$ helyen *nem folytonos*, akkor a függvény a c helyen *szakadásos és c az f szakadási helye.*

Az f-nek a c helyen *elsőfajú szakadása* van, ha f-nek létezik véges jobb és bal oldali határértéke c-ben, de f a c helyen nem folytonos. A szakadást *megszüntethetőnek nevezzük*, ha az f-nek a c helyen a jobb és bal oldali véges határértéke egyenlő, azaz az f-nek a c helyen van határértéke. Ebben az esetben f-nek a c helyhez tartozó függvényértékéül a határértéket választva, f-et c-ben folytonossá tehetjük, azaz a szakadást megszüntethetjük.

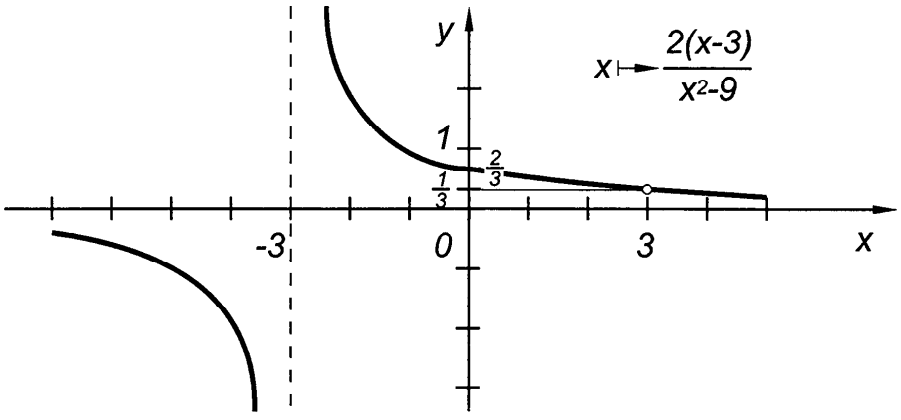
A függvény nem elsőfajú szakadásait *másodfajú* szakadásoknak nevezzük.

Példák

1. Az $x \mapsto y = [x]$ egészrész-függvénynek $\forall x \in Z$ helyen elsőfajú szakadása van (459. ábra), mivel pl. ha k egész szám, akkor

$$\lim_{x \to k+0} [x] = k \quad \text{és} \quad \lim_{x \to k-0} [x] = k-1.$$

2. Az $x \mapsto \dfrac{2(x-3)}{x^2-9}$ függvénynek az $x=3$ helyen elsőfajú, éspedig megszüntethető szakadása van, mivel $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{1}{3}$.



438. ábra. $x \mapsto \dfrac{2(x-3)}{x^2-9}$ függvény grafikonja

Az $x=-3$ helyen pedig másodfajú szakadása van, mivel

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{2(x-3)}{x^2-9}=\lim_{x\to -3+0}\frac{2}{x+3}=\infty \text{ és } \lim_{x\to -3-0}\frac{2}{x+3}=-\infty.$$

A függvénynek $x=3$ helyen hézagpontja, $x=-3$ helyen pólusa van. (438. ábra)

8.11 Elemi függvények és grafikonjaik

Ebben a pontban összefoglaljuk és kibővítjük a középiskolai matematika anyagába tartozó függvényekre vonatkozó ismereteket, és kiegészítjük a hiperbolikus függvények és inverzeik leírásával.

A) Algebrai függvények

Ha $F(x,y)$ az x és y R-beli polinomja, akkor $\{(x,y)|(x,y)\in R\times R \text{ és } F(x,y)=0\}$ algebrai reláció. Az algebrai függvények az algebrai reláció részhalmazát képezik.

Pl.: az $\{(x,y)|(x,y)\in R\times R \text{ és } y^2-x=0\}$ algebrai reláció algebrai függvényei:

$g_1: R^+\to R^+, x\mapsto\sqrt{x}$; $g_2: R^+\to R^-, x\mapsto\sqrt{x}$ függvény algebrai, de a

$$g_3(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{ha } x\in Q^+\\ -\sqrt{x}, & \text{ha } x\in R^+\setminus Q^+\end{cases}$$ nem algebrai.

Az $F(x,y)=0$ módon definiált függvényt *implicit függvénynek* nevezzük.

***a)* Racionális egész függvények.** Az $x\mapsto g_n(x)$ függvényt, ahol

$$g_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0,\ n\in Z^+),$$

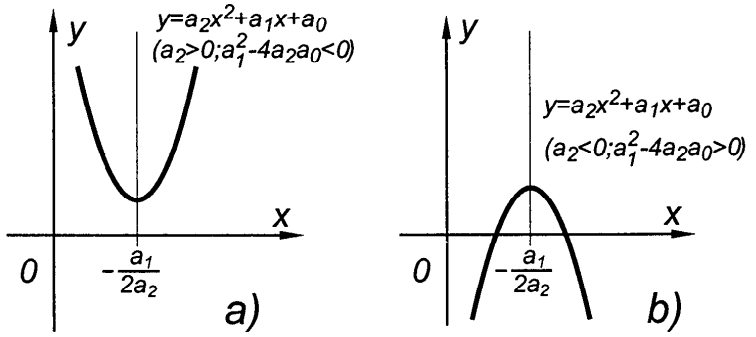
$a_i\in R$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, *n-edfokú racionális egész függvénynek*, vagy *polinomfüggvénynek* nevezzük. $D_g=R$, $E_g=R$. Ha $n=0$, $a_i\neq 0$, akkor *nulladfokú* polinomról, ha $\forall a_i=0$, akkor pedig *zéruspolinomról* beszélhetünk.

A polinomfüggvény határértéke $x\to\infty$ esetén: $\lim_{x\to\infty} g_n(x)=\begin{cases}\infty, & \text{ha } a_n>0\\ -\infty, & \text{ha } a_n<0\end{cases}$, mert

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x)=\lim_{x\to\infty} a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=a_n\cdot\infty.$$

grafikonja az a_1 iránytangensű és az y-tengely $(0, a_0)$ nenő egyenes. Ennek egyenlete: $y = a_1 x + a_0$ (440.

a_0, a_1, a_2 együtthatók kivételével a többi mind 0-val kkor az $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ másodfokú racionális egész kapjuk, amelynek grafikonja az y-tengellyel párhuzamos arabola. Ennek egyenlete: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (441. *a*, *b* parabola tengelyének egyenletét és csúcspontjának t a következő módon határozhatjuk meg:



1. ábra. Másodfokú parabolák *a*) a_2 pozitív; *b*) a_2 negatív

es négyzetté alakítással:

$$+ a_0 = a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right) =$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2} \Bigg] = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2},$$

csúcspont koordinátái: $C\left(\frac{-a_1}{2a_2}, -\frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2} \right)$.

ıszformációval: tegyük fel, hogy a parabola csúcspontdinátái α és β, akkor az $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ transzl a parabola egyenletét $\eta = a_2 \xi^2$ alakra hozhatjuk.

Határértéke $x \to -\infty$ esetén:

$$\text{ha } a_n > 0, \text{ akkor } \lim_{x \to -\infty} g_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\text{ha } a_n < 0, \text{ akkor } \lim_{x \to -\infty} g_n(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

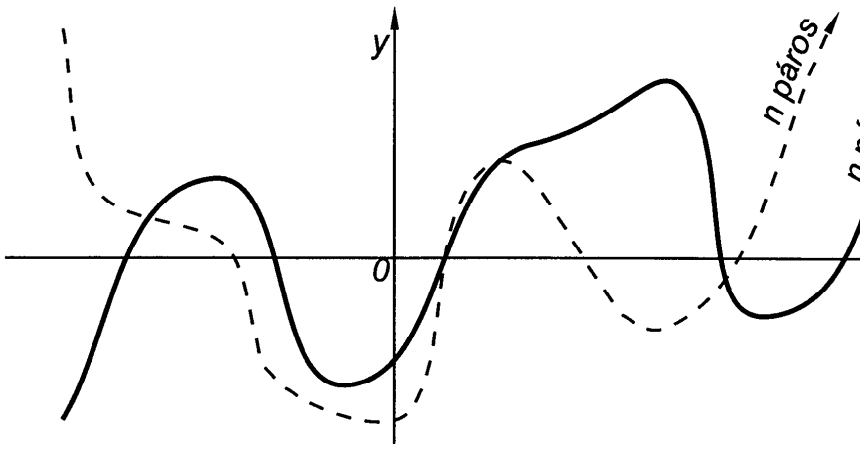
Ezek bizonyítása az előzőek alapján végezhető el.

A polinomfüggvény az értelmezési tartományában folytonos.

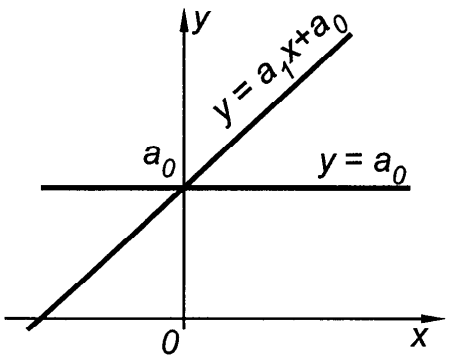
A racionális egész függvény grafikonját a

$$G = \{(x, y) \in R \times R \mid y = g_n(x)\}$$

halmaz pontjai alkotják, amely az ún. parabolikus típusú görbe; röviden: *n-edrendű parabola* (439. ábra).



439. ábra. Páros és páratlan n-edrendű parabola, $a_n > 0$



440. ábra. Az állandó függvény és a elsőfokú racionális egész függvény

Ha a polinom együtth vételével mind 0-val eg kor az a_0 *állandó* (*kons* vényt kapjuk, amelynek az x-tengellyel párhuza nes. Ennek egyenlete: pedig az a_1 együttható i zik 0-tól, akkor az $a_1x + a$ racionális egész függvé

A helyettesítés elvégzése és az egyenlet rendezése után:

$$\eta+\beta=a_2\xi^2+(2a_2\alpha+a_1)\xi+\left(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0\right).$$

Az $\eta=a_2\xi^2$ alakhoz az α-t és β-t úgy kell megválasztani, hogy a $2a_2\alpha+a_1=0,\quad a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=\beta$ egyenletrendszert kielégítsék, tehát $\alpha=-\frac{a_1}{2a_2}$, $\beta=-\frac{a_1^2-4a_2a_0}{4a_2}$,

s így a parabola csúcspontja: $C\left(\frac{-a_1}{2a_2},-\frac{a_1^2-4a_2a_0}{4a_2}\right)$;

a parabola tengelyének egyenlete: $x=-\frac{a_1}{2a_2}$.

***b*) Racionális törtfüggvényeknek** nevezzük az

$$x\mapsto r(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\frac{g_n(x)}{h_m(x)}$$

alakú függvényeket (két polinomfüggvény hányadosát) ahol $b_m\neq0$, $m\geq1$, $n,m\in N$. Az $r(x)$ $D_r=R$ értelmezési tartományából, a $(-\infty,\infty)$ intervallumból, ki vannak zárva azok az x helyek, ahol $h_m(x)=0$. Az $r(x)$ függvény ezen x helyek kivételével mindenütt folytonos. Az $r(x)$ határértéke:

1. $n>m$ esetén: $\lim\limits_{x\to\infty}r(x)=\begin{cases}\infty, & \text{ha } \frac{a_n}{b_m}>0\\ -\infty, & \text{ha } \frac{a_n}{b_m}<0\end{cases}$

ha $\frac{a_n}{b_m}>0$, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty}r(x)=\begin{cases}\infty, & \text{ha } n-m \text{ páros}\\ -\infty, & \text{ha } n-m \text{ páratlan}\end{cases}$

ha $\frac{a_n}{b_m}<0$, akkor $\lim\limits_{x\to-\infty}r(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{ha } n-m \text{ páros}\\ \infty, & \text{ha } n-m \text{ páratlan}\end{cases}$

2. $n < m$ esetén: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0.$

3. $n = m$ esetén: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}.$

Állításainkat az

$$r(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m} \cdot \frac{1}{x^m}}$$

átalakítás és a

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \cdot \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m} \cdot \frac{1}{x^m}} = 1$$

határérték felhasználásával igazolhatjuk.

4. Ha feltesszük, hogy $\frac{g_n(x)}{h_m(x)}$ tört nem egyszerűsíthető, akkor azokon az x helyeken, ahol $h_m(x) = 0$, az $r(x)$ függvény határértéke ∞ vagy $-\infty$. A $h_m(x)$ nevezőnek ezen zérushelyeit az $r(x)$ racionális törtfüggvény *pólushelyeinek* nevezzük. A pólushelyeken a függvénynek másodfajú (végtelen) szakadása van.

Ha a $\frac{g_n(x)}{h_m(x)}$ függvény számlálójának és nevezőjének van közös $x - c$ lineáris tényezője, akkor az $x = c$ helyen a függvény nincs definiálva.

Ha a $g_n(x) = (x - c)^i \cdot p(x),$

és $h_m(x) = (x - c)^k \cdot q(x)$

alakban előállítható, ahol $p(c) \neq 0$, $q(c) \neq 0$ és $i > k$, akkor a függvénynek a c helyen megszüntethető szakadása van, és

$$r(x) = \begin{cases} (x-c)^{i-k} \cdot \dfrac{p(x)}{q(x)}, & \text{ha } x \neq c \text{ (folytonos)} \\ 0, & \text{ha } x = c \text{ (hézagpont)} \end{cases}$$

Ha $i = k$, akkor a szakadás szintén megszüntethető, de az $x=c$ helyen hézagpont van és

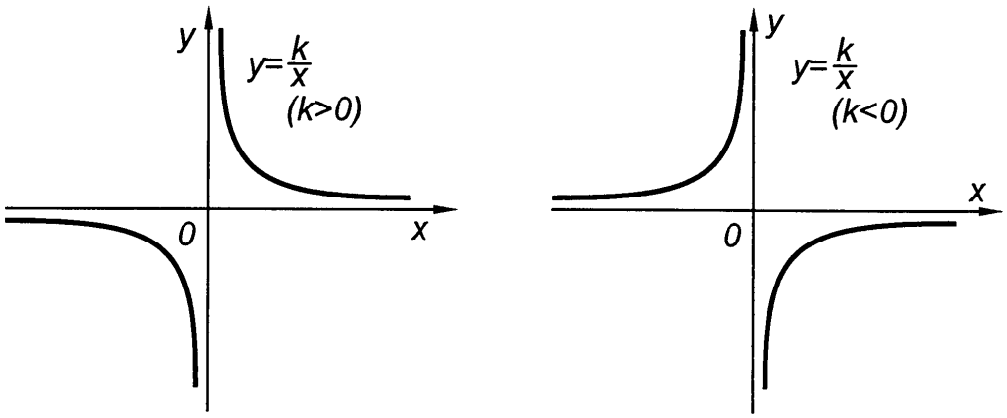
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ ha } x \neq c, \text{ (folytonos).}$$

Ha $i < k$, akkor az

$$r(x) = (x-c)^{i-k} \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$$

helyettesítő függvénynek az $x=c$ pontban $(i-k)$-adrendű pólusa van, a függvény szakadásos. A függvény grafikonjának vizsgálatához megállapítjuk a számláló és a nevező fokszámát: ha $n < m$ (valódi törtfüggvény), akkor a függvénygörbe a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben aszimptotikusan simul az x-tengelyhez; ha $n \geq m$ (áltörtfüggvény), akkor elvégezzük az osztást; eredményül egy egész függvényt és egy törtfüggvényt kapunk. A végtelenben a függvénygörbe az egész függvényhez simul aszimptotikusan.

Ha $n=m$, akkor az egész függvény egyenlete: $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.



442. ábra. A fordított arányosság függvényének grafikonja

Példák

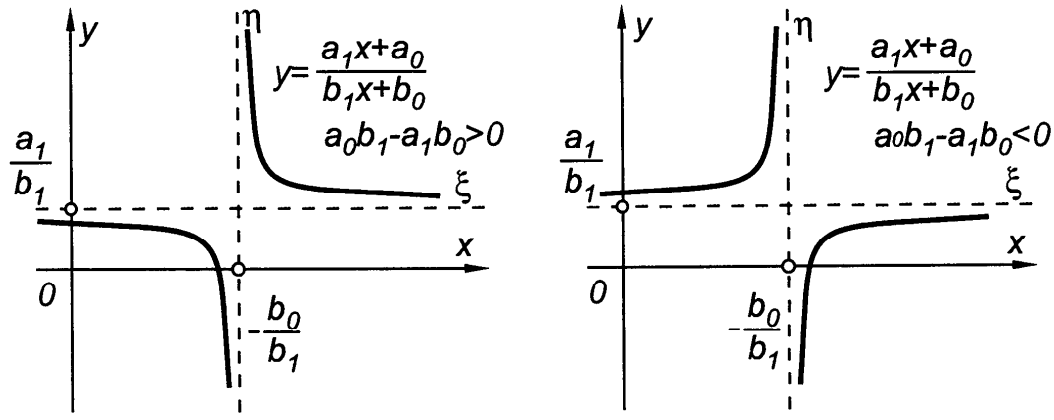
1. A *fordított arányosság függvénye*: $x \mapsto f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in R \setminus \{0\}$, $x \in R \setminus \{0\}$ grafikonja az $y = \frac{k}{x}$ egyenletű hiperbola (442. ábra). A függvénynek az $x = 0$ helyen egyszeres pólusa van, aszimptotái az x- és y-tengely. $D_f = R \setminus \{0\}$; $E_f = R \setminus \{0\}$.

2. A *lineáris törtfüggvény*: $y = f(x) = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$ $(b_1 \neq 0, a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0)$ melynek aszimptotája (áltörtfüggvény, a számláló és nevező fokszáma = 1): $y = \frac{a_1}{b_1}$; póluspontja a nevező zérushelye: $x = -\frac{b_0}{b_1}$. Ezeket az értékeket a következő átalakítással előálló alakból közvetlenül is kiolvashatjuk:

$$\frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{\frac{a_1}{b_1}(b_1 x + b_0) - \frac{a_1 b_0}{b_1} + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{\frac{1}{b_1}(a_1 b_0 - a_0 b_1)}{b_1 x + b_0} = \frac{\frac{1}{b_1^2}(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{x + \frac{b_0}{b_1}} + \frac{a_1}{b_1}.$$

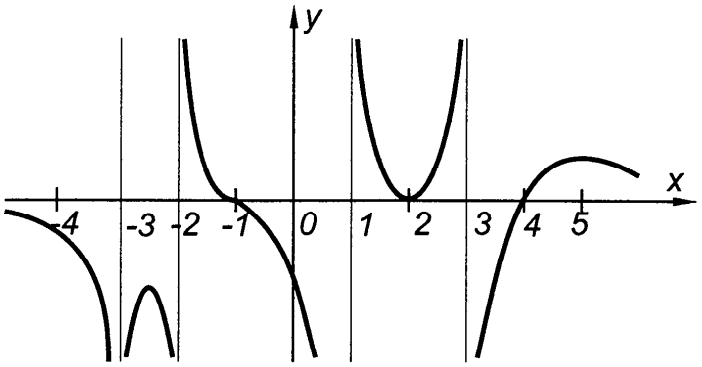
A függvény grafikonja a koordinátatengelyekkel párhuzamos aszimptotájú és a $\left(-\frac{b_0}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}\right)$ középpontú egyenlő oldalú hiperbola (443. ábra).

Ui. az $x = \xi - \frac{b_0}{b_1}$, $y = \eta + \frac{a_1}{b_1}$ transzformáció és $\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2} = A$ jelölés bevezetése után $\eta = \frac{A}{\xi}$ alakú egyenletet kapunk.



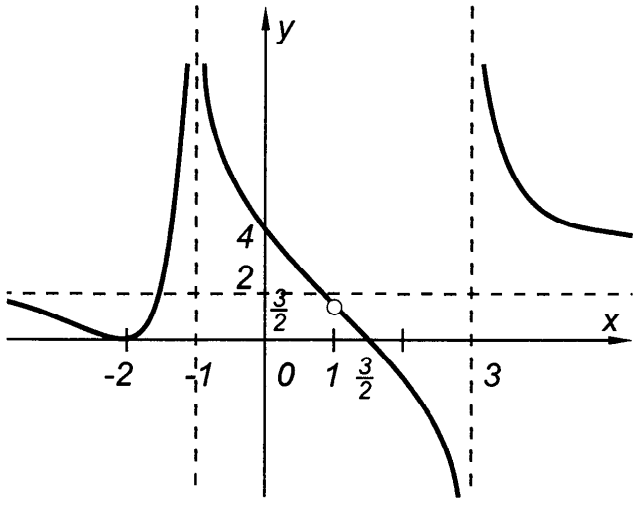
443. ábra. Hiperbolák: *a*) $a_0 b_1 - a_1 b_0 > 0$, *b*) $a_0 b_1 - a_1 b_0 < 0$.

3. Az $x \mapsto r(x) = \dfrac{4(x-2)^2(x-4)(x+1)^3}{3(x-3)^3(x+3)^2(x+2)(x-1)}$ függvénynek az $x=2$ kétszeres, $x=4$ egyszeres, az $x=-1$ háromszoros zérushelye; a nevező polinomfüggvényének $x=3$ háromszoros, $x=-3$ kétszeres, $x=-2$ egyszeres, és az $x=1$ egyszeres zérushelye. Mivel a számlálónak és a nevezőnek nincs azonos zérushelye, ezért a függvénynek a nevező zérushelyein pólusa van. A páros multiplicitású pólus helyeken a függvény jobb és bal oldali határértéke azonos előjelű végtelen, a páratlan multiplicitású pólus helyeken pedig ellentétes előjelű végtelen. A számláló fokszáma $n=6$, a nevező fokszáma $m=7$ (összeszorzás után az x legmagasabb kitevői), tehát $n<m$, ezért a függvénygörbe aszimptotája az x-tengely, amelyhez a $+\infty$-ben felülről, a $-\infty$-ben pedig alulról simul a görbe (444. ábra).



444. ábra. A racionális törtfüggvény grafikonjának jellege

4. Az $x \mapsto y = \dfrac{(2x-3)(x+2)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)(x-3)}$ függvénynek az $x=\dfrac{3}{2}$ hely egyszeres, az $x=-2$ hely kétszeres zérushelye. Az $x=-1$ hely kétszeres, az $x=3$ hely egyszeres pólusa. Az $x=-1$ és az $x=3$ egyenesek a függvénygörbe y-tengellyel párhuzamos aszimptotái. A függvény számlálója és nevezője az $x=1$ helyen azonos multiplicitással válik zérussá, tehát hézagpontja van. A számláló és a nevező polinomja azonos fokszámú, a hányados egész része: 2, tehát a függvénygörbe a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben az $y=2$ egyenlettel adott egyeneshez, mint aszimptotához simul (445. ábra).

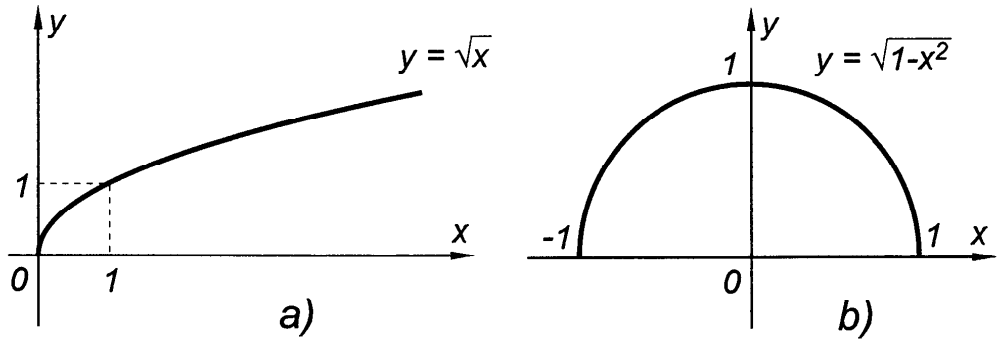


445. ábra. A racionális törtfüggvény jelleggörbéje

c) **Irracionális függvények** azok az algebrai függvények, amelyekben a független változó gyök alatti mennyiségként is előfordul.

Pl.: A *négyzetgyökfüggvény*: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in R_0^+$ $(R_0^+ = R^+ \cup \{0\})$, grafikonja az $y = \sqrt{x}$ egyenletű *félparabola* (446. *a* ábra), az $y = x^2$, $x \in R_0^+$ *félparabola inverze*, amelynek grafikonjából az $y = x$ szögfelező egyenesre tükrözve is előállíthatjuk a négyzetgyökfüggvény grafikonját.

Pl. az $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$; $x \in [1,-1]$ függvény grafikonja az $y = \sqrt{1-x^2}$ egyenletű félkör (446. *b* ábra).



446. ábra. A négyzetgyökfüggvény grafikonja *a*) félparabola; *b*) félkör

B) Transzcendens függvények

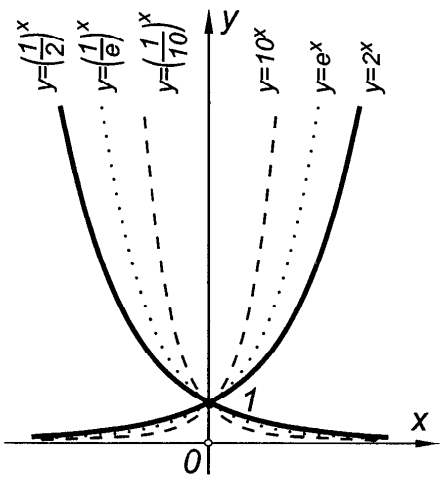
***a*) Exponenciális függvénynek** az $x \mapsto a^x$, $a \in R^+ \setminus \{1\}$; alakú függvényt nevezzük, amelynek értelmezési tartománya: $D_{a^x} = R$, és értékkészlete: $E_{a^x} = R^+$. Az *a*-t az exponenciális *függvény alapjának* nevezzük. Igazolható, hogy a függvény az értelmezési tartományában *mindenütt folytonos*.

Ha $a > 1$, akkor a függvény a $]-\infty, +\infty[$ intervallumban *szigorúan monoton nő* 0-tól ∞-ig, ha pedig

$0 < a < 1$, akkor a függvény a $]-\infty, +\infty[$ intervallumban *szigorúan monoton fogy* ∞-től 0-ig.

Az a alapú és az $\frac{1}{a}$ alapú exponenciális függvények grafikonjai az y-tengelyre szimmetrikusak és az y-tengelyt a $(0,1)$ pontban metszik.

Összefoglalva: $y = a^x \begin{cases} \text{növekedő, ha } a > 1 \\ \text{csökkenő, ha } 0 < a < 1 \end{cases}$



447. ábra. Exponenciális függvények grafikonjai

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a > 1 \\ 0, & \text{ha } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } a > 1 \\ \infty, & \text{ha } 0 < a < 1 \end{cases}$$

A matematika alkalmazási területein leggyakrabban az $f(x) = e^x$ exponenciális függvényt használjuk. Az e a *természetes logaritmus alapszáma.*

A különböző alapú exponenciális függvények grafikonjait a 447. ábra szemlélteti.

***b)* Logaritmusfüggvény:** az $x \mapsto a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *exponenciális függvény inverz függvénye* a

$$\log_a : R^+ \to R, \quad x \mapsto \log_a x$$

függvény, melyet *a alapú logaritmusfüggvénynek* nevezünk. Az értelmezés alapján fennállnak az

$$x = a^{\log_a x} \ (0 < x < \infty) \quad \text{és} \quad y = \log_a a^y \ (-\infty < y < \infty)$$

azonosságok. Igazolható, hogy a logaritmusfüggvény az értelmezési tartományában *mindenütt folytonos.*

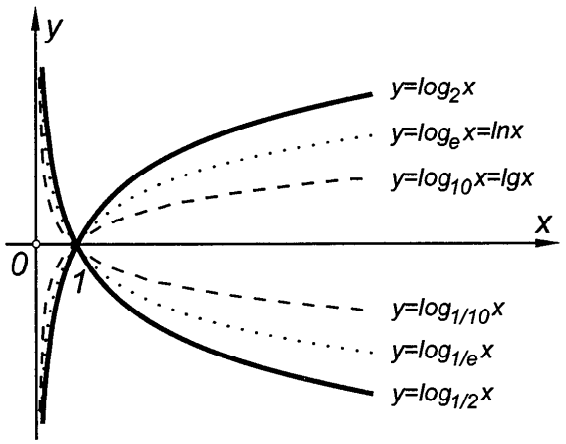
$$\log_a x \begin{cases} \text{növekedő, ha } a > 1 \\ \text{csökkenő, ha } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ és $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.

Ha $0 < a < 1$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \infty$.

A logaritmusfüggvény grafikonja az exponenciális függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozó tükörképe (448. ábra).

A 10 alapú logaritmusfüggvény jelölési módja: $f(x) = \lg x$, az e alapúé pedig $f(x) = \ln x$.



448. ábra. Logaritmusfüggvények

c) Trigonometrikus függvények és inverzeik

1. Az f függvényt *páros függvénynek* nevezzük, ha
$\forall x \in D_f \Leftrightarrow \forall (-x) \in D_f$ és $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$.

A páros függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. Páros függvények pl. az $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$.

2. Az f függvényt *páratlan függvénynek* nevezzük, ha
$\forall x \in D_f \Leftrightarrow \forall (-x) \in D_f$ és $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

A páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Páratlan függvények pl. az $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Az f függvényt p *szerint periodikusnak* nevezzük, ha

$$\forall\, x \in S\text{-re} \quad (x+p) \in S \quad \text{is teljesül,}$$

$$\text{és} \quad \forall\, x \in S\text{-re} \quad f(x+p) = f(x);\ p > 0\,.$$

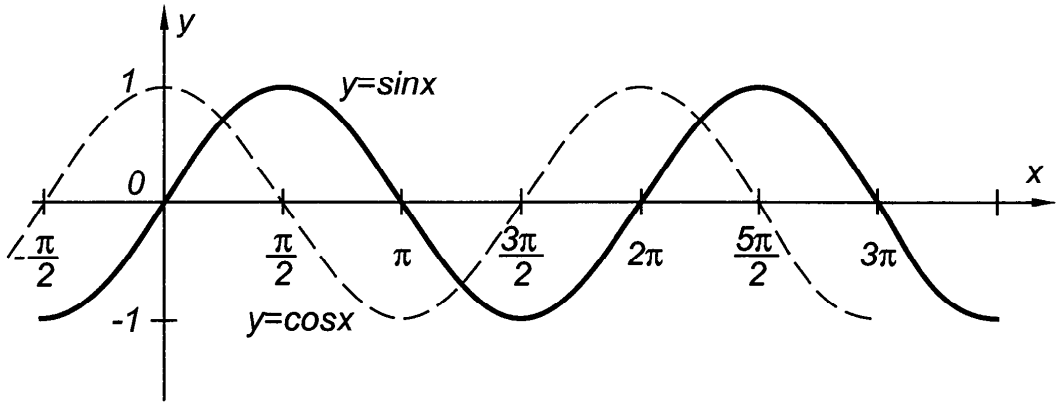
A p számot az f függvény *periódusának* mondjuk. A periodikus függvény *alapperiódusának* nevezzük azt a legkisebb p számot, amely szerint a függvény még periodikus. Periodikus függvény pl. az $f(x) = x - [x]$, $x \in R$ függvény, periódusa: 1. Ui.

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = x + 1 - [x] - 1 = f(x).$$

A legismertebb periodikus függvények a trigonometrikus függvények.

A trigonometrikus függvények geometriai értelmezésével már az 5.3 fejezetben megismerkedtünk. A matematikai analízisben az x argumentumokat radiánban mérjük. A trigonometrikus függvények értelmezéséből következik, hogy az $x \mapsto \sin x$ szinuszfüggvény valamint a $x \mapsto \cos x$ koszinuszfüggvény értelmezési tartománya: $D = R$; értékkészlete: $E = [-1, 1]$. Mindkét függvény folytonos az értelmezési tartományon és 2π szerint periodikus.

A $\sin x$ függvény páratlan, a $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ intervallumban szigorúan növekedő, a $\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$ intervallumban pedig szigorúan csökkenő; k tetszőleges egész szám $(k \in Z)$.



449. ábra. A szinusz- és koszinuszfüggvény grafikonja

A $\cos x$ függvény páros; a $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ összefüggésből következik, hogy a $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$ intervallumban szigorúan növekedő, és a $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ intervallumban pedig szigorúan csökkenő. A sin és a cos függvények grafikonjait, azaz az $y = \sin x$, $y = \cos x$ egyenletű görbéket a 449. ábra szemlélteti.

Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvényt a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ egyenlőséggel értelmezzük. Mivel $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$, ezért a $\operatorname{tg} x$:

értelmezési tartománya: $D_{\text{tg}} = \left\{ x \in R \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$ és

értékkészlete: $E_{\text{tg}} = R$.

A $\operatorname{tg} x$ páratlan és minden $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ nyílt intervallumban folytonos ($\sin x$ és $\cos x$ folytonos függvények), szigorúan monoton növekedő és π szerint periodikus függvény,

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

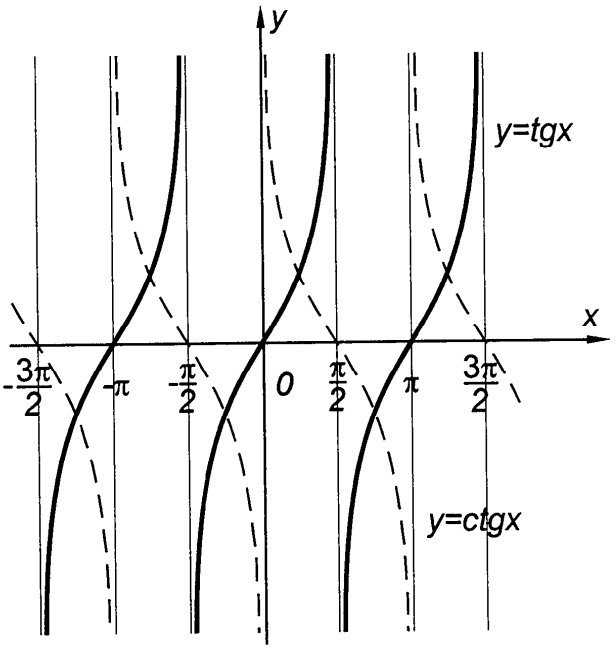
Határértékei:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = \infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

és a periodicitás folytán

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$



450. ábra. A tangens- és kotangensfüggvény grafikonjai

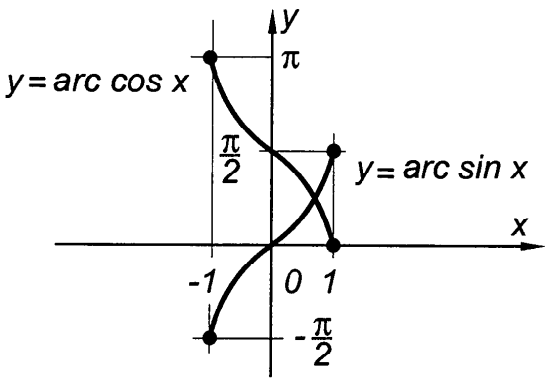
Az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ egyenesek az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonjának aszimptotái.

Az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvényt a $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ értelmezés alapján a $\operatorname{tg} x$ függvényhez hasonlóan vizsgálhatjuk. Értelmezési tartománya: $D_{\text{ctg}} = \{x \in R \mid x \neq k\pi,\ k \in Z\}$; értékkészlete: $E_{\text{ctg}} = R$.

A $\operatorname{tg} x$ és az $\operatorname{ctg} x$ függvények grafikonját (vagyis az $y = \operatorname{tg} x$ és az $y = \operatorname{ctg} x$ egyenletű görbéket) a 450. ábra szemlélteti.

Árkuszfüggvények. A trigonometrikus függvények inverzét értelmezési tartományuk egészére nem lehet képezni, azonban ha ezeket olyan intervallumra szűkítjük le, amelyen már szigorúan monoton és folytonos függvények, akkor definiálhatjuk inverzeiket.

A sin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a cos $[0, \pi]$, a tg $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a ctg $]0, \pi[$ intervallumra szűkítésével előállított függvényeknek már van inverze. A trigonometrikus függvények ezen inverzeit *árkuszfüggvényeknek* (vagy *ciklometrikus függvényeknek*) nevezzük és a függvények elé tett arc (olv.: árkusz) szórövidítéssel jelöljük.



451. ábra. Az arcsin és az arccosfüggvény grafikonja

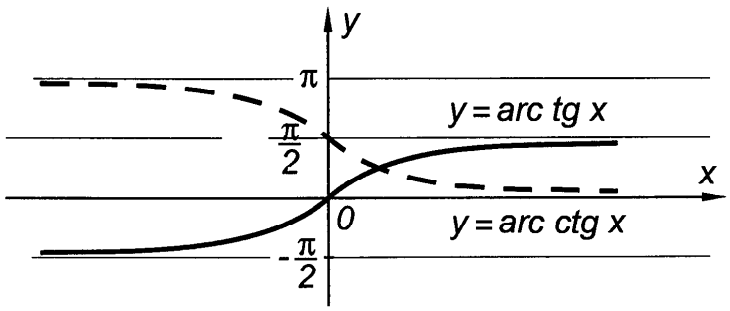
A sin függvény leszűkítésének inverze az árkuszszinusz függvény. Jele: $\arcsin x$. (451. ábra)

Értelmezési tartománya: $D_{\arcsin} = [-1, 1]$; értékkészlete: $E_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tehát az $\arcsin x$ azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső szöget jelöli (radiánban mérve), amelynek szinusza x-szel egyenlő

Pl.: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A cos függvény leszűkítésének inverze az árkuszkoszinusz függvény. Jele: $\arccos x$. Értelmezési tartománya: $D_{\arccos} = [-1, 1]$; értékkészlete: $E_{\arccos} = [0, \pi]$, tehát az $\arccos x$ azt a 0 és π közé eső szöget jelöli, amelynek koszinusza x-szel egyenlő (451. ábra).

Pl.: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.



452. ábra. Az arctg és az arcctg függvény grafikonja

A tg függvény leszűkítésének inverze az árkusztangens függvény. Jele: $\operatorname{arctg} x$. Értelmezési tartománya: $D_{\operatorname{arctg}} =]-\infty, \infty[$; értékkészlete: $E_{\operatorname{arctg}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tehát az $\operatorname{arctg} x$ azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső szöget jelöli, amelynek tangense x-szel egyenlő (452. ábra).

Pl. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

A ctg függvény leszűkítésének inverze az árkuszkotangens függvény. Jele: $\operatorname{arcctg} x$. Értelmezési tartománya: $D_{\operatorname{arcctg}} =]-\infty, \infty[$ értékkészlete: $E_{\operatorname{arcctg}} =]0, \pi[$, tehát az $\operatorname{arcctg} x$ azt a 0 és π közé eső szöget jelöli, amelynek tangense x-szel egyenlő (452. ábra).

Pl.: $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

***d)* Hiperbolikus függvények és inverzeik (áreafüggvények).**

Az $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ exponenciális függvényt *szinusz hiperboli-*

kusznak nevezzük és $\operatorname{sh} x$-szel jelöljük, azaz

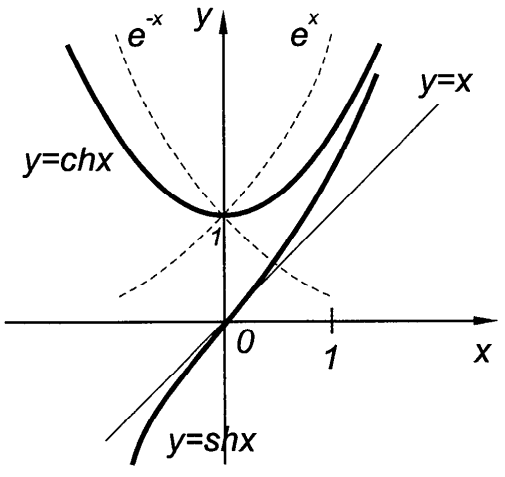
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Értelmezési tartománya: $D_{\text{sh}} = R$; értékkészlete: $E_{\text{sh}} = R$. Az $\operatorname{sh} x$ páratlan, mindenütt folytonos és szigorúan növekedő függvény (453. ábra).

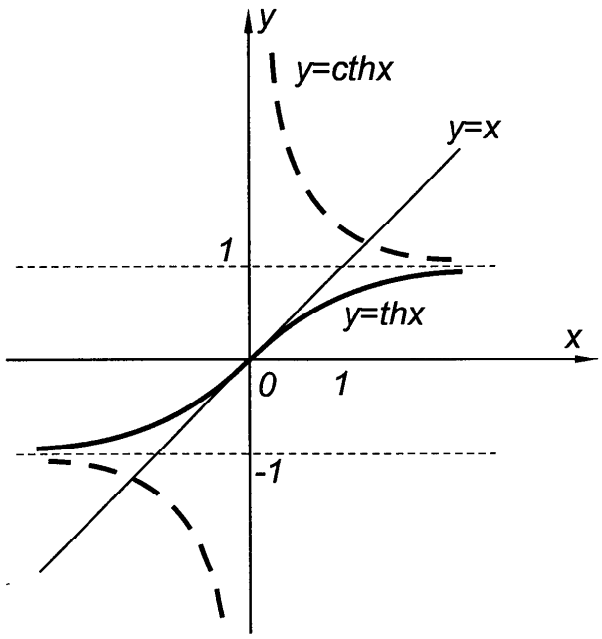
Az $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ exponenciális függvényt *koszinusz hiperbolikusznak* nevezzük és $\operatorname{ch} x$-szel jelöljük, azaz

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Értelmezési tartománya: $D_{\text{ch}} = R$, értékkészlete: $E_{\text{ch}} = R^+ \setminus [0,1[$. A $\operatorname{ch} x$ páros, mindenütt folytonos és negatív x-ekre szigorúan csökkenő, pozitív x-ekre szigorúan növekedő függvény, grafikonját *láncgörbének* nevezzük (453. ábra).



453. ábra. Az sh és a ch függvény grafikonja



454. ábra. A th és a cth függvény grafikonja

A $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ hányadosként definiált függvényt *tangens hiperbolikusznak* nevezzük és $\operatorname{th} x$-szel jelöljük, azaz

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Értelmezési tartománya: $D_{\text{th}} = R$, értékkészlete: $E_{\text{th}} =]-1, 1[$ nyílt intervallum. A $\operatorname{th} x$ páratlan, mindenütt folytonos és szigorúan növekedő függvény (454. ábra). $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{th} x = 1$ és $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$, vagyis a függvény grafikonjának aszimptotái az $y = 1$ és az $y = -1$ egyenesek.

A $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ hányadosként definiált függvényt *kotangens hiperbolikusznak* nevezzük és $\operatorname{cth} x$-szel jelöljük, azaz

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Értelmezési tartománya: $D_{\text{cth}} = R \setminus \{0\}$; az értékkészlete: $E_{\text{cth}} = R \setminus [-1, 1]$ intervallum. A $\operatorname{cth} x$ páratlan, az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos, az $x = 0$ helyen végtelen szakadása van; a $]-\infty, 0[$ és a $]0, \infty[$ nyílt intervallumokban szigorúan csökkenő függvény (454. ábra).

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{cth} x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x = -1,$$

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{cth} x = \infty, \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{cth} x = -\infty.$$

vagyis a függvénygörbe aszimptotái $x = 0$, $y = 1$ és az $y = -1$ egyenesek. A hiperbolikus függvényekre a trigonometrikus függvényekhez hasonló összefüggések, képletek érvényesek. Ezek közül a legfontosabbak:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}.$$

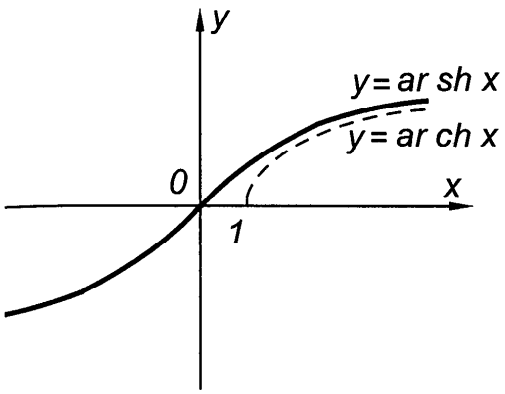
A hiperbolikus függvények inverzeit *áreafüggvényeknek nevezzük* és a függvények elé írt ar szórövidítéssel jelöljük.

A $\operatorname{sh} x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért létezik inverze, amelyet $\operatorname{arsh} x$ módon jelölünk (olv.: área-szinuszhiperbolikusz x). Értelmezési tartománya: $D_{\text{arsh}} = R$; értékkészlete: $E_{\text{arsh}} = R$. Az $\operatorname{arsh} x$ páratlan, mindenütt folytonos és szigorúan növekedő függvényt (455. ábra) a $\operatorname{sh} x$ definícióját felhasználva az $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, ill. $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ egyenlet y-ra való megoldásával számítások elvégzésére alkalmas képlettel is kifejezhetjük:

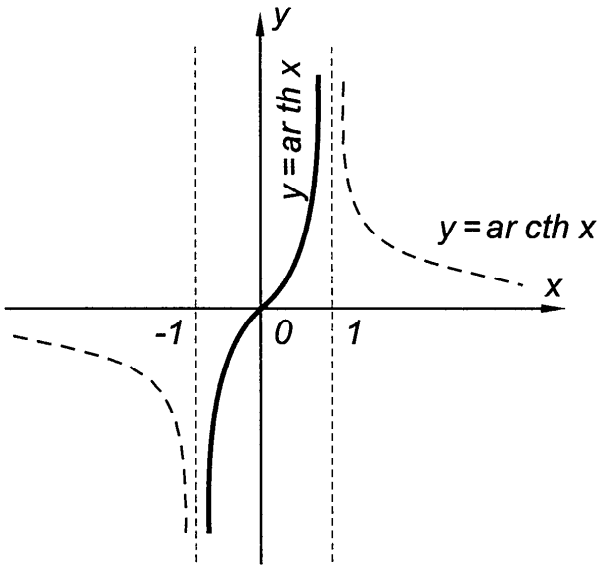
$$y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

A $\operatorname{ch} x$ függvény a $]0, \infty[$ intervallumban szigorúan növekedő, ezért ezen intervallumhoz tartozó függvénynek létezik inverze, amelynek jele: $\operatorname{arch} x$ (olv.: área-koszinuszhiperbolikusz x). Értelmezési tartománya: $D_{\text{arch}} = [1, \infty[$; értékkészlete: $E_{\text{arch}} = R^+ \cup \{0\}$. Az $\operatorname{arch} x$ az értelmezési tartományában mindenütt folytonos és szigorúan növekedő függvényt (455. ábra) a $\operatorname{ch} x$ definícióját felhasználva az előbbi módon számítások elvégzésére alkalmas képlettel is kifejezhetjük:

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad (x \geq 1).$$



455. ábra. Az arsh és az arch függvények grafikonja



456. ábra. Az arth és az arcth függvények grafikonja

Az $\operatorname{th} x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért létezik inverze a $]-1, 1[$ intervallumban, amelynek jele: $\operatorname{arth} x$ (olv.: área-tangenshiperbolikusz x). A $\operatorname{th} x$ függvény grafikonját a 456. ábra szemlélteti. Értelmezési tartománya: $D_{\text{arth}} =]-1, 1[$; értékkészlete: $E_{\text{arth}} = R$. Az $\operatorname{arth} x$ páratlan, értelmezési tartományában mindenütt folytonos és szigorúan növekedő függvény. A $\operatorname{th} x$ definícióját felhasználva, az exponenciális alakból számításra alkalmas képletet kaphatunk:

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad |x| < 1.$$

Az $\operatorname{arth} x$ függvény grafikonjának két aszimptotája: $y = 1$ és $y = -1$ egyenlettel adott egyenes (456. ábra).

A $\operatorname{cth} x$ függvény a $]-\infty, 0[$ és a $]0, \infty[$ nyílt intervallumban szigorúan csökkenő, ezért ezen intervallumhoz tartozó függvénynek létezik inverze, amelynek jele: $\operatorname{arcth} x$ (olv.: área-kotangens-hiperbolikusz x). Értelmezési tartománya: $D_{\text{arcth}} = R \setminus [-1,1]$; értékkészlete: $E_{\text{arcth}} = R \setminus \{0\}$. Az $\operatorname{arcth} x$ páratlan, értelmezési tar-

tományában mindenütt folytonos és az $x < -1$ valamint az $x > 1$ intervallumon külön-külön szigorúan csökkenő függvény. A $\operatorname{cth} x$ definícióját felhasználva, az exponenciális alakból számításra alkalmas képletet kaphatunk:

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad |x| > 1.$$

Az $\operatorname{arcth} x$ függvény grafikonjának aszimptotái: $y = 0$; $x = 1$; $x = -1$ egyenesek (456. ábra).

e) Szakaszonként egyenesvonalú függvények

1. Az *abszolút érték* függvény definíciója:

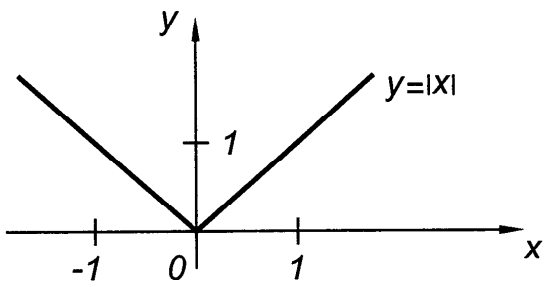
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$D_{|x|} = R$, $E_{|x|} = R^+ \cup \{0\}$. A függvény grafikonját a 457. ábra szemlélteti.

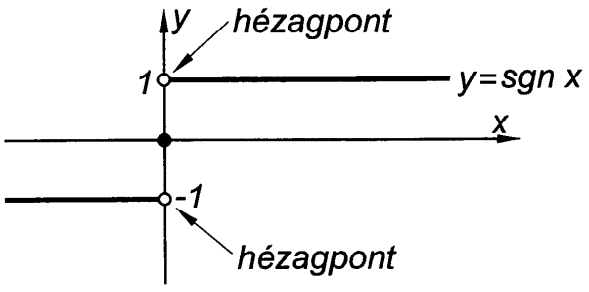
2. Az *előjel* vagy *szignum* függvény definíciója:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$D_{\operatorname{sgn}} = R$; $E_{\operatorname{sgn}} = \{-1, 0, 1\}$. A függvény grafikonját a 458. ábra szemlélteti.



457. ábra. Az $|x|$ függvény grafikonja



458. ábra. A szignum függvény grafikonja

3. Az *egészrész* vagy *entier* (olv.: antyié) függvény definíciója:

$$[x] = \max\{n \in Z \mid n \leq x\}.$$

$D_{[x]} = R$, $E_{[x]} = Z$, jelölése: $y = [x]$ (459. ábra).

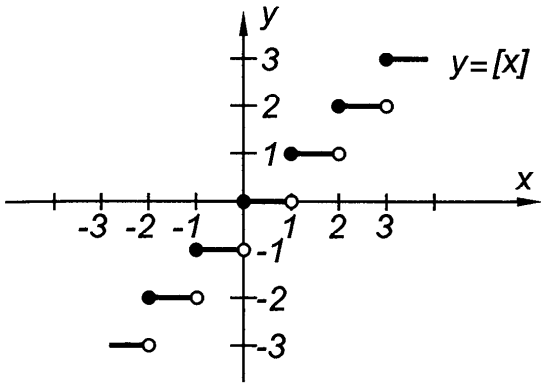
Pl.: $[x] = 5$, ha $x \in [5, 6[$, vagyis a balról zárt, jobbról nyílt $[5, 6[$ intervallum minden értékéhez $[x] = 5$, továbbá, ha $x = 3{,}7$: $[3{,}7] = 3$, ha $x = -3{,}7$: $[-3{,}7] = -4$, ui. $-4 < -3{,}7$.

4. A *törtrész* (jelölése: $\{x\}$) függvény definíciója:

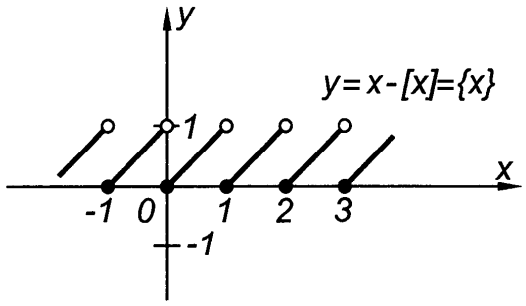
$$x \mapsto y = x - [x],$$

$D_y = R$, $E_y = [0, 1[$ (460. ábra).

Pl.: $3{,}7 - [3{,}7] = 3{,}7 - 3 = 0{,}7$; $-3{,}7 - [-3{,}7] = -3{,}7 - (-4) = 0{,}3$.



459. ábra. Az egészrész függvény grafikonja



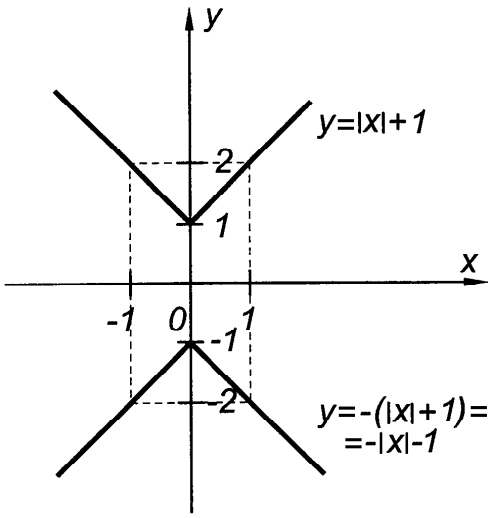
460. ábra. A törtrész függvény grafikonja

8.12 Elemi függvénytranszformációk

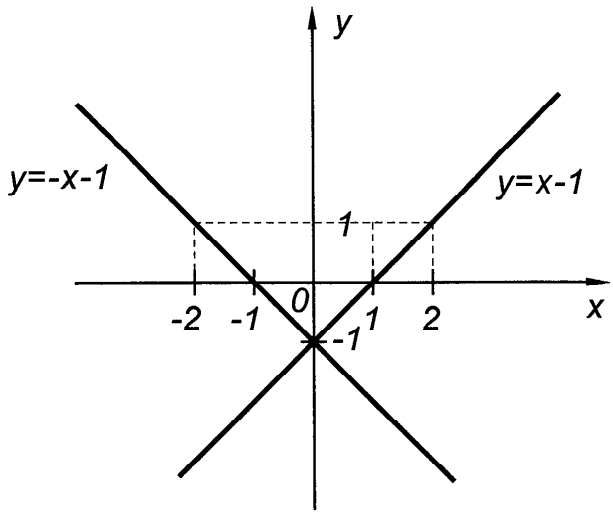
a) Tükrözés

Legyen $f: S \to R$, $S \subset R$, függvény grafikonja adott, akkor a $-f(x)$ függvény grafikonja a graf $f(x)$-nek az *x-tengelyre való*

tükörképe (461. ábra); az $f(-x)$ függvény grafikonja pedig a graf $f(x)$-nek az *y-tengelyre való tükörképe* (462. ábra).

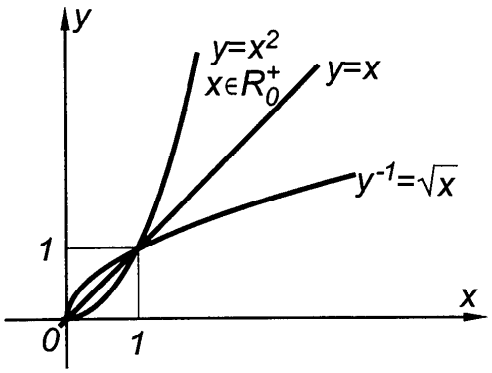


461. ábra. Tükrözés az x-tengelyre

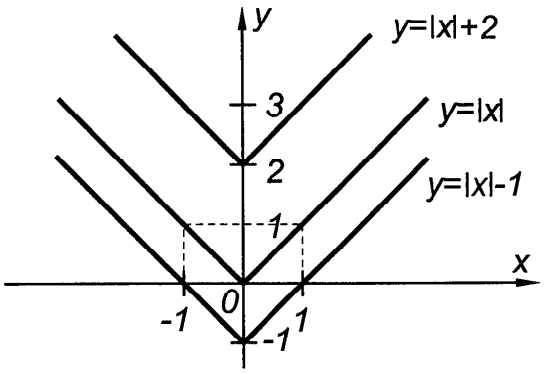


462. ábra. Tükrözés az y-tengelyre

Megjegyzés: Ha az f függvény invertálható, akkor az f^{-1} inverzfüggvény grafikonja a graf f-nek az $y=x$ egyenletű szögfelező egyenesre való tükörképe (463. ábra).



463. ábra. Az $x \mapsto y = x^2$ $x \geq 0$, függvény és az $y^{-1} = \sqrt{x}$ inverz függvény grafikonja



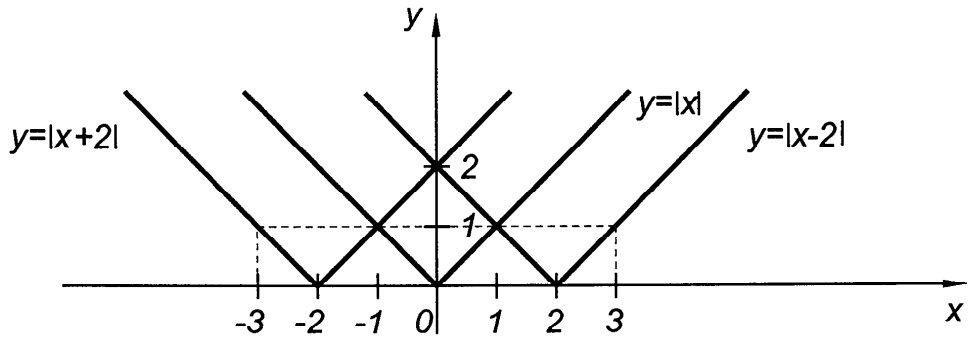
464. ábra. Az $x \mapsto y = |x|$ grafikonjának eltolása az y-tengely mentén

b) Eltolás

Legyen az $f: S \to R$, $S \subset R$, függvény grafikonja adott, akkor

$f(x)+c$, $c \in R$ függvény grafikonja a graf $f(x)$-nek az *y-tengely mentén c egységgel való eltolásával* származtatható. (Ha $c>0$, akkor az y-tengely pozitív irányításával megegyező, ha $c<0$, akkor pedig azzal ellentétes az eltolás, amelynek mértéke $|c|$ egység.) (464. ábra.)

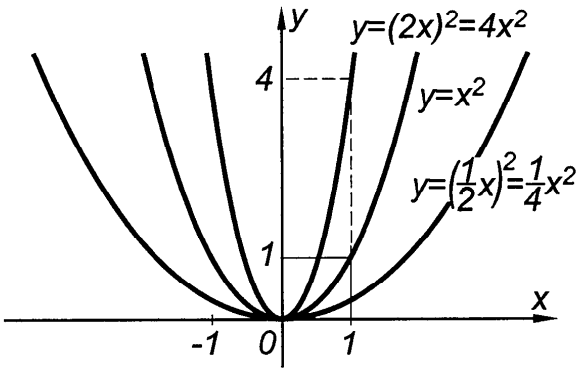
Az $f(x+c)$, $c \in R$; $x+c \in S$ függvény grafikonja a graf $f(x)$-nek az x-tengely mentén c egységgel való eltolásával származtatható. (Ha $c<0$, akkor az x-tengely pozitív irányításával megegyező, ha $c>0$, akkor pedig azzal ellentétes az eltolás, amelynek mértéke $|c|$ egység.) (465. ábra.)



465. ábra. Az $x \mapsto y = |x|$ függvény grafikonjának eltolása az x-tengely mentén

c) Nyújtás, zsugorítás

Legyen az $f: S \to R$; $S \subset R$ függvény adott, akkor a $c \cdot f(x)$, $c \in R^+$ függvény grafikonja a graf $f(x)$-nek az *y-tengely menti c-szeres nyújtásával* ill. $a<c<1$ esetén *zsugorításával származtatható*. (Ha $c \in R^-$, akkor a graf $c \cdot f$ a graf $|c| \cdot f(x)$ tükörképe az x-tengelyre.)



466. ábra. Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjának x-tengely menti zsugorítása és nyújtása

Az $x \mapsto f(c \cdot x)$, $c \in R^+$, $c \cdot x \in S$ függvény grafikonja a graf $f(x)$-nek az x-tengely menti $1/c$-szeres nyújtásával $(0<c<1)$ ill. $c>1$ esetén zsugorításával származtatható (466. ábra).

Összefoglalva: Az $f(x)$ függvény grafikonjának ismeretében az $a \cdot f(bx+c)+d \equiv a \cdot f\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]+d$ függvény grafikonját a következő lépésekkel célszerű létrehozni:

1. vegyük fel a koordinátarendszert és rajzoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját;

2. az x-tengely mentén $|b|$-szeresre nyújtsuk ill. zsugorítsuk;

3. toljuk el az x-tengely mentén pozitív irányba $\left(\frac{c}{b}<0\right)$, ill. negatív irányba $\left(\frac{c}{b}>0\right)$ $\left|\frac{c}{b}\right|$ távolságra;

4. az y-tengely mentén nyújtsuk ill. zsugorítsuk $|a|$-szorosra;

5. az $a<0$ esetén tükrözzük az x-tengelyre.

6. az y-tengely mentén toljuk el pozitív $(d>0)$ ill. negatív $(d<0)$ irányba $|d|$ távolságra;

Példa: Állítsuk elő az $\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1$ függvény grafikonját az $f(x)=\cos x$ függvény fokozatos átalakításával.

Megoldás: A függvényt $y=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1=\frac{1}{2}\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]-1$ egyenletű görbe ábrázolja:

1. megrajzoljuk az $y=\cos x$ függvény grafikonját;

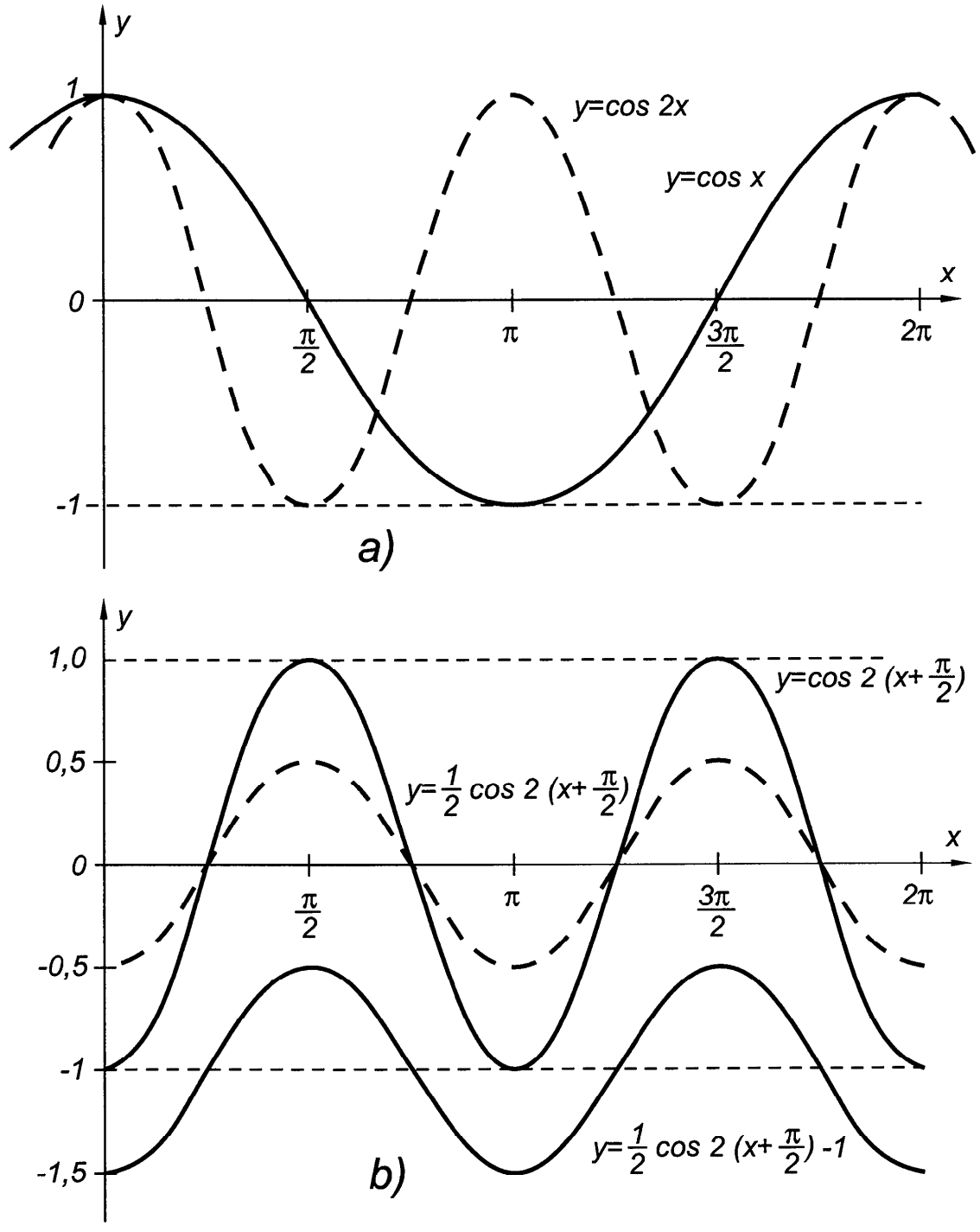
2. az x-tengely mentén felére zsugorítjuk a görbét;

3. az x-tengely negatív irányába $\frac{\pi}{2}$ távolságra eltoljuk;

4. az y-tengely mentén felére zsugorítjuk;

5. az y-tengely negatív irányába eltoljuk 1 egységnyi távolságra.

A megoldást a 467. ábra szemlélteti.

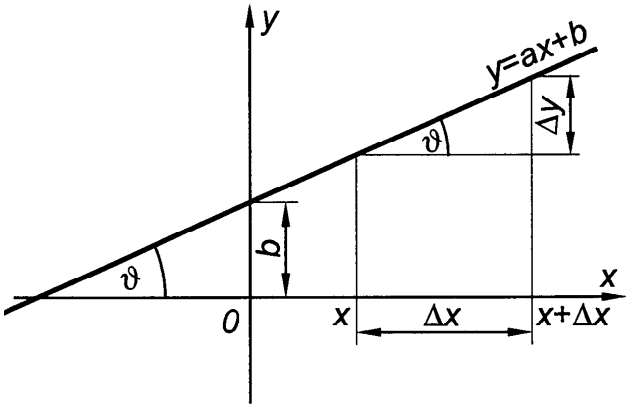


467. ábra. Függvénytranszformáció több lépésben

8.13 Lineáris interpoláció és az egyenletek numerikus és grafikus közelítő megoldása

a) Lineáris interpoláció

Az $x \mapsto y = ax + b$ lineáris függvény fontos tulajdonsága, hogy a függvény megváltozása (növekménye) arányos a független változó megváltozásával (növekményével). Ennek igazolására jelöljük az x független változó növekményét Δx-szel (olv.: delta iksz), a függvény megfelelő növekményét pedig Δy-nal (468. ábra). Ekkor az $x + \Delta x$ helyen a függvény értéke $y + \Delta y$, úgyhogy az $y = ax + b$ egyenletből az $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$ egyenletet kapjuk. A két egyenlet különbsége: $\Delta y = a \cdot \Delta x$, vagyis a növekmények valóban arányosak egymással. Szemléletesen ez következik abból is, hogy a függvény grafikonja egyenes. A lineáris függvény e tulajdonsága lehetőséget nyújt arra, hogy a függvénygörbe két pontjának ismeretében a függvényértéket bármely – a két pont közé eső – x helyen meghatározhassuk a függvény ismerete nélkül.



468. ábra. Lineáris függvény

Pl.: Határozzuk meg a lineáris függvény értékét az $x = 4$ helyen, ha az egyenes két pontja: $P_1(2,5)$ és $P_2(6,8)$.

Megoldás: $\Delta x_0 = x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$; $\Delta y_0 = y_2 - y_1 = 8 - 5 = 3$ és $\Delta x = 4 - 2 = 2$, $\Delta y = y - 5$. Mivel a növekmények arányosak:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta y}{2} = \frac{3}{4}, \text{ vagyis } \Delta y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ tehát } y = 5 + \Delta y = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Ezt a számítási eljárást nevezzük lineáris interpolációnak.

Jelentősége abban áll, hogy egy $x \mapsto f(x)$ nemlineáris függ-

vényre is alkalmazhatjuk abban az intervallumban, ahol folytonos, ha feltételezzük, hogy a függvénynövekmény közelítően arányos a független változó növekményével, a kérdéses intervallumon belül. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény $y = f(x)$ egyenletű görbéjének ívét a kérdéses intervallumban egyenesszakasszal, a görbe húrjával helyettesítjük (469. ábra).

A lineáris interpoláció képletét a két ponton átmenő egyenes egyenlete adja:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{1}$$

Ha a fordított problémával állunk szemben, azaz valamely y koordinátához kell az x abszcisszát meghatározni, akkor az (1) képletből x és y felcserélésével adódó

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1) \tag{2}$$

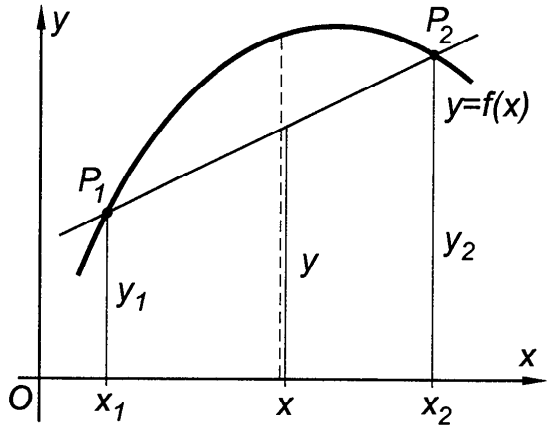
képletet használjuk.

b) Egyenletek numerikus megoldása

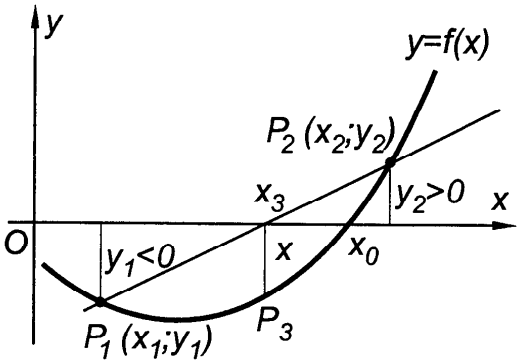
Az interpolációs képletek felhasználhatók az $f(x) = 0$ alakú egyenlet közelítő megoldására, mivel az $f(x)$ folytonos függvény zérushelyei megegyeznek az $f(x) = 0$ egyenlet valós gyökeivel. Ha az $f(x)$ folytonos függvény két pontjának, $P_1(x_1, y_1)$-nek és $P_2(x_2, y_2)$-nek az ordinátái közül az egyik negatív, a másik pedig pozitív, pl. $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke x_1 és x_2 közé esik (470. ábra).

Az x_0 gyököt az x_1 és x_2 értékeknél általában jobban megközelíti a lineáris interpolációval számított x_3. Mivel általában $f(x_3) \neq 0$, azaz $x_3 \neq x_0$, ezért az eljárást mindaddig megismételjük, amíg $f(x_n) = 0$ lesz, ill. a gyök kívánt pontosságát el nem

érjük, amit az intervallum hosszával mérhetünk. Ezt a gyökkereső eljárást "*regula falsi*"-nak is nevezik.



469. ábra. Lineáris interpoláció



470. ábra. Regula falsi

Példa: Határozzuk meg az $x^3+2x^2-3x-2=0$ egyenletnek azt a gyökét, amely az $x=1$ hely közelébe esik, 10^{-2} pontossággal.

Megoldás: Az $x=1$ környezetében megkeressük azt a két pontot, amelyekhez tartozó ordináták ellenkező előjelűek:

x	0	1	2
$y=f(x)$	-2	-2	$+8$

tehát az x_0 gyök az $x_1=1$ és $x_2=2$ értékek között van.

A gyök közelítő értékének meghatározásához az

$$x_3 = x_1 - y_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

képletet használjuk, amelyet (2)-ből $y=0$, $x=x_3$ helyettesítéssel kapunk:

$$x_3 = 1-(-2)\cdot\frac{2-1}{8+2} = 1{,}2.$$

A pontosság még nem kielégítő, ismételjük meg az előző lépéseket:

x	1,2	1,3	1,4
$y=f(x)$	$-0{,}992$	$-0{,}323$	$+0{,}464$

tehát a gyök 1,3 és 1,4 között van:

$$x_4 = 1{,}3-(-0{,}323)\cdot\frac{1{,}4-1{,}3}{0{,}464+0{,}323} \approx 1{,}3+0{,}04 = 1{,}34;$$

A számítást megismételjük:

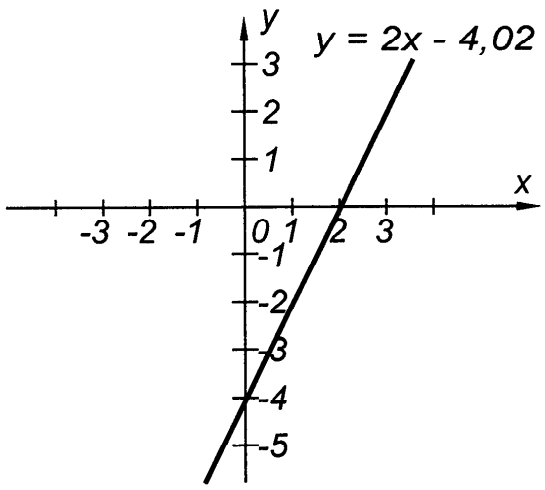
x	1,34	1,35
$y=f(x)$	$-0{,}02$	$+0{,}05$

tehát $1{,}34 < x_0 < 1{,}35$; $x_5 = 1{,}34 + \frac{0{,}01}{0{,}07}\cdot 0{,}02 \approx 1{,}34+0{,}003 = 1{,}343.$

Az $x_5 = 1{,}343$ a kívánt század pontosságot eléri (1 század hosszúságú intervallumba esik a pontos gyök és a közelítő gyök), tehát $x_0 \approx x_5 = 1{,}343$.

c) Egyenletek grafikus megoldása

A) Az $ax + b = 0$, $a \neq 0$ *elsőfokú egyismeretlenes egyenlet* megoldása (gyöke) az $y = ax + b$, $a \neq 0$ egyenlettel adott függvény zérushelyével egyenlő. A függvény zérushelyét a *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszerben ábrázolt függvénygrafikon x-tengellyel való metszéspontja szolgáltatja, s amely rajzbeli pontossággal az ábrából leolvasható.



470. *a*) ábra. A $2x - 4{,}02 = 0$ egyenlet grafikus megoldása: $x \approx 2$

Példa: Oldjuk meg grafikusan a $2x - 4{,}02 = 0$ egyenletet.

Megoldás

Ábrázoljuk az $y = 2x - 4{,}02$ függvényt és olvassuk le grafikonjának az x-tengellyel való metszéspontját (470. *a* ábra):

B) Az $a_1x + b_1y = c_1$,

$a_2x + b_2y = c_2$; $(x, y \in R;\ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R)$

elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldását a két egyenlettel meghatározott egyenes metszéspontja adja, amennyiben

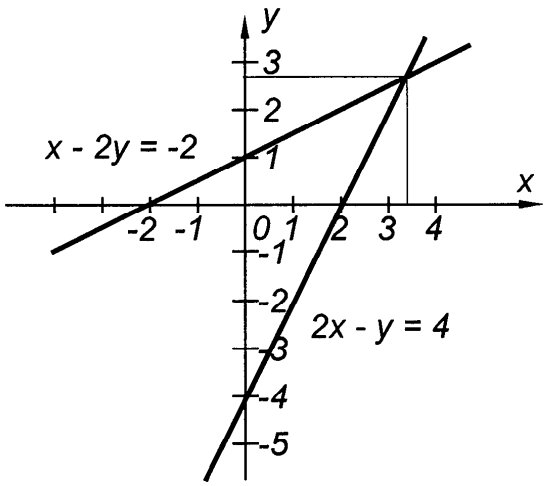
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ill. } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, akkor a két egyenes párhuzamos, tehát nincs megoldása az egyenletrendszernek, $M = \varnothing$.

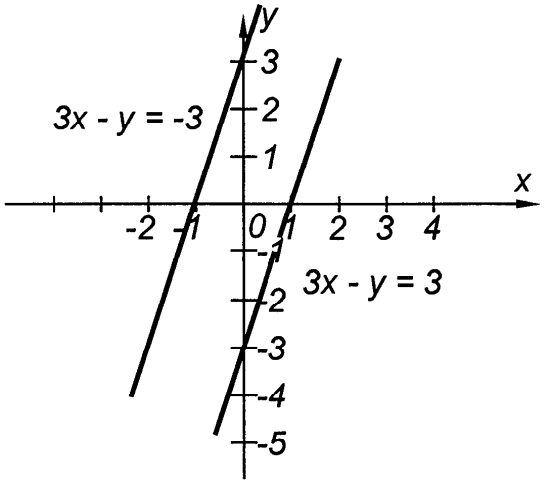
Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, akkor két egybeeső egyenest kapunk, tehát végtelen sok (x, y) értékpár kielégíti az egyenletrendszert.

Példák: Oldjuk meg grafikusan az

1. $x - 2y = -2$, $2x - y = 4$; **2.** $3x - y = -3$, $3x - y = 3$; **3.** $x + 2y = 4$, $5x + 10y = 20$ egyenletrendszereket.



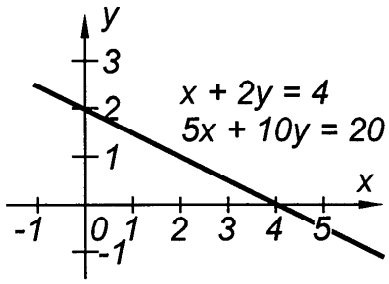
470. *b*) ábra. Az $x - 2y = -2$, $2x - y = 4$ egyenletrendszer grafikus megoldása: $x \approx 3{,}3$, $y \approx 2{,}6$



470. *c*) ábra. A $3x - y = -3$, $3x - y = 3$ egyenletrendszernek nincs megoldása

Megoldás

1. A 470. *b* ábra szerint a két egyenletnek megfelelő egyenes metszéspontjának koordinátái: $x \approx 3{,}3$, $y \approx 2{,}6$. (Pontos gyökök: $x = 3{,}\dot{3}$; $y = 2{,}\dot{6}$.)



470. *d*) ábra. Az egyenletek két egybeeső egyenest határoznak meg. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van

2. A $3x - y = -3$, $3x - y = 3$ egyenletek által meghatározott két egyenes nem metszi egymást, párhuzamos egyenesek (470. *c* ábra). Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

3. Az $x + 2y = 4$, $5x + 10y = 20$ egyenletek két egybeeső egyenest határoznak meg (470. *d* ábra). Az egyenletrendszernek végtelen sok (x, y) számpár a megoldása.

C) Az $x^2 + px + q = 0$, $x \in R$, $p, q \in R$ *másodfokú egyenlet grafikus megoldását* az $y = x^2 + px + q$ egyenletű parabola zérushelyei (az x-tengellyel való metszéspontjai) adják, amennyiben $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$.

Ha $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, akkor az x-tengely nem metszi a parabolát, a parabolának nincs zérushelye, vagyis az egyenletnek nincs valós gyöke.

Az $y = x^2 + px + q$ egyenletű parabola ábrázolása helyett célszerűbb az $y = x^2$ és az $y = -px - q$ egyenletekkel adott grafikonokat ábrázolni. Ebben az esetben a grafikonok metszéspontjaihoz tartozó x értékek adják a megoldást, ha az egyenletnek léteznek valós gyökei (e pontokban a grafikonok y ordinátái egyenlők).

Ha az $y = x^2$ parabola és az $y = -px - q$ egyenes nem metszik egymást, akkor a szóbanforgó másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása.

Példák: Oldjuk meg grafikusan az

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$,

2. $x^2 - 4x + 4 = 0$,

3. $x^2 + 2x + 3 = 0$ másodfokú egyenleteket.

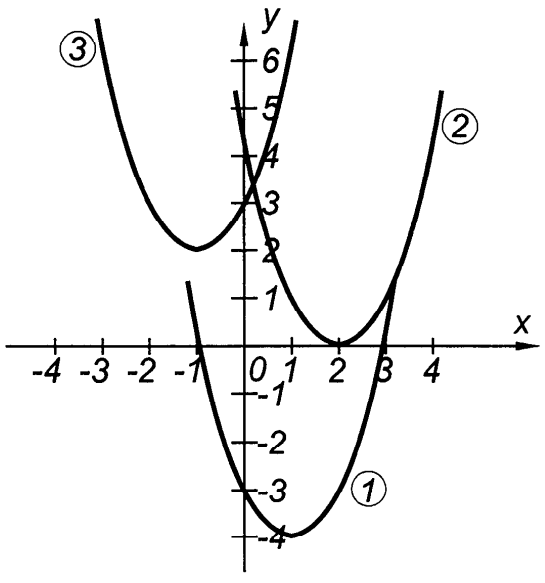
Megoldás: Mindkét ismertetett módszert szemléltetjük.

Az első módszer szerint az adott egyenletek grafikus megoldásait az

1. $y = x^2 - 2x - 3$,

2. $y = x^2 - 4x + 4$ és

3. $y = x^2 + 2x + 3$ egyenletű parabolák ábrázolásával keressük. Ezt szemlélteti a 470. *e* ábra.



470. *e*) ábra. Másodfokú egyenletek grafikus megoldása

Az 1. parabola és az x-tengely metszéspontjai: $(-1,0)$, $(3,0)$, ezért a gyökök:

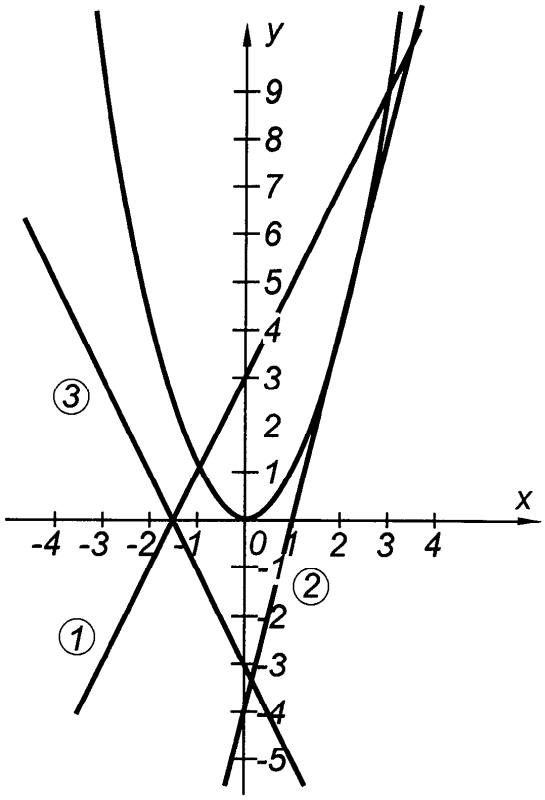
$x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

A 2. parabola érinti az x-tengelyt az $x = 2$ pontban, tehát a gyökök: $x_{1,2} = 2$.

A 3. parabolának az x-tengellyel nincs közös pontja, az egyenletnek nincs valós megoldása.

A második módszer szerint a megoldásokat az

1. $y = x^2$, $y = 2x + 3$, 2. $y = x^2$, $y = 4x - 4$, 3. $y = x^2$, $y = -2x - 3$ páronkénti grafikonok metszéspontjai alapján keressük (470. *f* ábra).



470. *f)* ábra. Másodfokú egyenletek grafikus megoldása

Az 1. egyenlet megoldása: az egyenes és a parabola metszéspontjai $(-1,0)$, $(3,0)$, tehát $M = \{-1, 3\}$; a 2. egyenlet megoldása: az egyenes érinti a parabolát a $(2,4)$ pontban, tehát $M = \{2\}$; a 3. egyenletnek nincs valós megoldása: $M = \varnothing$.

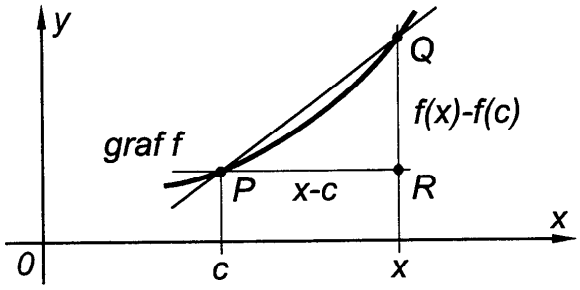
KILENCEDIK FEJEZET

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

A matematikai analízisnek ebbe a fejezetébe tartozó elemei a 16. század végén jelentek meg. Az elmélet első változatát a 17. század második felében *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716; német filozófus és matematikus) és *Isaac Newton* (1643–1727; angol természettudós) dolgozták ki, egymástól függetlenül. *Leibniz* az érintő problémák, *Newton* pedig a fizikai problémák vizsgálata közben jutott el a differenciálszámításhoz. A differenciálszámítás legfontosabb fogalmai: a differenciahányados, a differenciálhányados, a derivált függvény, a differenciálhatóság és a differenciál. A differenciálszámítás ismeretanyaga kiemelkedően fontos szerepet játszik mind a műszaki- és természettudományok elméletében, mind azok gyakorlati alkalmazásában.

9.1 A differenciálhányados

a) Legyen S adott intervallum. Az $f: S \to R$ függvény grafikonjának két pontját jelölje a $P(c, f(c))$ és $Q(x, f(x))$, ahol $c \in S$ (471. ábra).



471. ábra. A gráf és PQ szelője

A PQ szelő meredekségét

a PQ és az Ox tengely pozitív iránya által bezárt szög tangense adja, s mivel PR párhuzamos az x-tengellyel, ezért ez a szög a QPR szöggel egyenlő, tehát

$$\operatorname{tg} QPR\angle = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Ha ez a differenciahányados egy m határértékhez tart, miközben $x \in S$ tart a c-hez, akkor a szelő a P pontra illeszkedő m meredekségű egyeneshez tart, melyet az $y = f(x)$ egyenletű görbe c *abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének* nevezzük.

A geometriai szemlélettől függetleníthetjük azt az eljárást, amely szerint az f és c ismeretében meghatározzuk az m számértéket.

Az $f: S \to R$ függvénynek a *differenciálhányadosa* a $c \in S$ helyen m (akkor és csak akkor), ha

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = m. \tag{1}$$

Ekkor röviden azt mondjuk, hogy f *differenciálható* a c pontban.

Lényeges megjegyezni, hogy először megköveteltük a határérték létezését (s ez egyetlen); másodszor, hogy az legyen egyenlő m-mel; harmadszor a határérték fogalom nem hivatkozik arra, hogy mi történik az $x=c$ helyen, s ez fontos az alkalmazás szempontjából, mivel az

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

ún. *differencia- vagy különbségi hányados* nincs definiálva az $x=c$ helyen.

b) *A differenciálhányados fizikai jelentése.* Tekintsünk egy egyenesvonalú mozgást végző anyagi pontot. Ha a pont által t idő alatt megtett utat az $s(t)$ *útfüggvénnyel* adjuk meg, akkor $t+\Delta t$ idő alatt $s(t+\Delta t)$ és Δt idő alatt $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ utat tesz meg a

pont. A $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ hányadost a pont átlagos vagy közepes sebességének nevezzük. Ha a pont v sebességét a t időpillanatban akarjuk meghatározni, akkor a

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

határértéket kell kiszámítanunk, ami az $s(t)$ útfüggvény differenciahányadosának határértéke, tehát v az $s(t)$ függvény differenciálhányadosa.

Példa: Határozzuk meg az $s = \frac{g}{2}t^2$ útképlet szerint szabadon eső test sebességét.

Megoldás: $s(t+\Delta t) = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 = \frac{g}{2}(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$;

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{g}{2}\left(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2\right) - \frac{g}{2}t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = gt.$$

Tehát a szabadon eső test sebessége a t időpillanatban $v = gt$. Mint látjuk, a szabadon eső test sebessége is függ az időtől, ezért azt mondjuk, hogy az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa a $v(t)$ sebességfüggvény. Beszélhetünk a Δt időközre eső átlagos vagy közepes sebességváltozásról is, azaz a *gyorsulásról.*

Az a gyorsulást a $v = v(t)$ sebességfüggvényből ugyanúgy számítjuk ki, mint az $s(t)$ útfüggvényből a sebességet, vagyis az

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

határérték megadja a gyorsulást a t időpillanatban.

9.2 A függvény deriváltja

Ha az $f: S \to R$ függvénynek $\forall\, c \in S$ pontban létezik differenciálhányadosa, akkor az f függvényt *differenciálható függvénynek* nevezzük (az S intervallumon).

Ha az f differenciálható, akkor azt az új $g: S \to R$ függvényt, amelynek $\forall\, c \in S$ pontban felvett értéke megegyezik az f függvény c helyhez tartozó differenciálhányadosával, az f függvény *deriváltjának* nevezzük a c helyen.

Az f függvény deriváltjának szokásos *jelölése*:

$$f',\ \dot{f},\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Az $y = f(x)$ egyenlettel adott függvény deriváltját y'-vel jelöljük. A $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ klasszikus jelölés *Leibniz*-től származik, és a $\Delta f = f(x) - f(c)$ valamint a $\Delta x = x - c$ szimbólumokat használva, a differenciálhányadost definiáló (1) határérték

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

alakban írható.

A függvény deriváltjának $x_0 \in S$ pontban felvett értékét

$$f'(x_0),\ \dot{f}(x_0),\ \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ y'(x_0)$$

kifejezésekkel jelöljük, s így $g(x_0) = f'(x_0)$.

A deriválást meghatározását deriválásnak vagy differenciálásnak nevezzük.

Megjegyzés

1. Ha a $c \in S$ pontban az f függvény differenciahányadosának csak jobb oldali ill. csak bal oldali határértéke létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek a c helyen csak jobb oldali, ill. csak bal oldali deriváltja van (f jobbról ill. balról deriválható).

2. Ha a $c \in S$ pontban az f függvény differenciálható, akkor a c pontban folytonos is. De az állítás megfordítása nem igaz. Pl. az $x \mapsto |x|$ függvény az R halmazon mindenütt folytonos, de az $x = 0$ helyen nem differenciálható. Vannak olyan függvények is, amelyek mindenütt folytonosak, de sehol sem differenciálhatók. Igazolható, hogy a folytonosság a differenciálhatóság szükséges, de nem elegendő feltétele, továbbá: a differenciálhatóság a folytonosság elegendő, de nem szükséges feltétele.

3. Az f' szokásos jelölése még: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Példa: Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ deriváltját az $x = x_0$ pontban.

Megoldás: Az 1. definíció szerint

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

tehát $f'(x_0) = 2x_0$. Mivel $\forall x \in R$-re létezik a derivált, ezért az új g függvény, a derivált függvény: $g = f'(x) = 2x$.

9.3 A differenciálás szabályai és az elemi függvények deriváltjai

Ebben a pontban a szabályok megfogalmazásához használt függvényekről (f, g, h, u, v, stb.) feltesszük, hogy deriválhatók, továbbá az elemi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét nem írjuk ki, mivel azokat már az előző fejezetben részletesen tárgyaltuk.

a) Az $x \mapsto y = c$ állandó függvény deriváltja 0-val egyenlő, mivel bármely Δx-hez $\Delta y = 0$, tehát

$$(c)' = 0. \tag{1}$$

b) Az $u(x) = f(x) \pm g(x)$ függvény deriváltja:

$$u'(x) = [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{2}$$

vagyis az összegfüggvény tagonként deriválható.

Ui. $u + \Delta u = f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)$, amiből

$\Delta u = [f(x + \Delta x) - f(x)] \pm [g(x + \Delta x) - g(x)]$, tehát

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \pm g'(x).$$

c) Ha $u(x) = f(x) \cdot g(x)$, akkor

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \tag{3}$$

Ui. $u + \Delta u = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x)$,

$$\Delta u = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) =$$
$$= f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)],$$

tehát a differenciahányados:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x + \Delta x)\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{és}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) = f'g + fg'.$$

Ha $g = c$ (konstans), akkor

$$(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x), \tag{4}$$

mert $c' = 0$.

d) Ha $u(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{5}$$

Ui. $u + \Delta u = \dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)}$ amiből

$$\Delta u = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$$
$$= \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x) - [g(x + \Delta x) - g(x)] \cdot f(x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)},$$

tehát a differenciahányados:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)},$$

amiből a derivált:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}; \quad g(x) \neq 0.$$

e) Ha az $f(x)$ függvény deriválható az S halmazon, és a $g(x)$ függvény deriválható a T halmazon, ahol $E_f \subset T$, akkor a $g(f(x))$ *összetett függvény is deriválható* az S halmazon és deriváltja:

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

vagyis az ún. *összetett függvény deriváltját* megkapjuk, ha az adott függvénynek a közbenső argumentum szerinti deriváltját szorozzuk az argumentum független változó szerinti deriváltjával. (Ezt *láncszabálynak* szokás nevezni.) A bizonyítás a derivált definíciója alapján végezhető el.

Legyen $y = f(x)$ és $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Ekkor az $y = f\big(\varphi(t)\big)$ összetett függvény a t paraméter függvénye.

A láncszabály alkalmazásával a t szerinti differenciálhányadosa:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Ha $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ deriválható t szerint valamint $\varphi'(t) \neq 0$, akkor a *paraméteres előállítású függvény deriváltja*:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}. \tag{6a}$$

f) Az $x \mapsto y = x^n$ $(n \in Z^+)$, hatványfüggvény deriváltja:

$$\big(x^n\big)' = nx^{n-1}. \tag{7}$$

Ui. ha x növekményét h-val jelöljük, akkor

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.$$

Pl.: $x \mapsto y = 5x^4 - 2(x^2+3)^6$.

$$y' = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 6\left(x^2+3\right)^5 \cdot 2x = 20x^3 - 24\left(x^2+3\right)^5 x.$$

Az $y = x^{-n}$ negatív egész kitevőjű $(n>0)$ hatványfüggvény deriváltját a hányados deriválási szabályának felhasználásával kaphatjuk meg:

$$y' = \left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)'\cdot x^n - 1\cdot\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1},$$

vagyis
$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}. \qquad (7a)$$

g) Ha $x \mapsto y = \log_a x$, akkor

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}. \qquad (8)$$

Ui. $$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

A $\frac{h}{x} = \frac{1}{n}$ helyettesítéssel, ha $h \to 0$, akkor $n \to \infty$, s így

$$y' = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{x} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x}\log_a e \text{ (l. a 8.9 pontot).}$$

Ezek szerint az *e alapú logaritmusfüggvény deriváltja*, mivel $\ln e = 1$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (9)$$

Pl.: **1.** $x \mapsto y = \log_a\left(x^2+2x^3\right)$ $\left(x > -\frac{1}{2},\ x \neq 0\right)$. A (8), (6), (2) képletekkel:

$$y' = \frac{\log_a e}{x^2+2x^3}\cdot\left(2x+6x^2\right) = \frac{2x+6x^2}{x^2+2x^3}\log_a e = \frac{(2+6x)\log_a e}{x+2x^2}.$$

2. $x \mapsto y = \ln\left(5x^4-3x\right)^2$ $\left(x \neq 0,\ x \neq \sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)$.

$$y' = \frac{1}{\left(5x^4-3x\right)^2}\cdot 2\left(5x^4-3x\right)\cdot\left(20x^3-3\right) = \frac{2\left(20x^3-3\right)}{5x^4-3x}.$$

h) Trigonometrikus függvények deriváltjai.

Az $x \mapsto y = \sin x$ függvény deriváltja:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{10}$$

Ui. $$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x,\ \text{(l. a 8.9 pontot).}$$

Az $x \mapsto y = \cos x$ függvény deriváltja:

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{11}$$

Ui. $$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -1\cdot\sin x,\ \text{(l. a 8.9 pontot).}$$

Az $x \mapsto y = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x. \tag{12}$$

Ui. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Az $x \mapsto y = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x). \qquad (13)$$

Ui. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Példák: Határozzuk meg az

1. $y = \sin 2x$, **2.** $y = \sin^2 x$, **3.** $y = x \cos x$,

4. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, **5.** $y = \ln(\operatorname{ctg} x)$, **6.** $x = a\cos t$, $y = a \sin t$

egyenletekkel adott függvények deriváltjait.

7. Az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ paraméteres függvény grafikonját *cikloisnak* nevezzük. Számítsuk ki a ciklois $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterértékkel jellemzett pontban az érintő iránytangensét.

Megoldás

1. $y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$

2. $y' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$

3. $y' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x.$

4. $y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - 1 \cdot \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$

5. $y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$

6. $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\cos t}{a(-\sin t)} = -\operatorname{ctg} t.$

7. $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$, $\operatorname{tg}\vartheta_{t_0}=y'(t_0)=\frac{\sin 60°}{1-\cos 60°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

i) Inverz trigonometrikus függvények deriváltjai. Az inverz függvény differenciálási szabályát az inverz függvény értelmezéséből származtathatjuk. Legyen f inverz függvénye f^{-1}. Legyen f a c helyen deriválható, $f'(c)\neq 0$ és f^{-1} az $f(c)$ helyen folytonos, akkor f^{-1} is deriválható az $f(c)$ helyen és

$$\left(f^{-1}\right)'\Big|_{f(c)}=\frac{1}{f'(c)}$$

vagy a *Leibniz*-féle jelöléssel:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Ha $y=f(x)$ akkor a változók felcserélésével kapott $x=f(y)$ függvény explicit alakja $y=g(x)$, melynek deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}\quad\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\neq 0\right). \tag{14}$$

Az $\arcsin x$ függvény deriváltja:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{15}$$

Ui. $y=\arcsin x$-ből $x=\sin y$, melynek y-szerinti deriváltja

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$, s ezt a (14)-be helyettesítve:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Az $y = \arccos x$ függvény deriváltja:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{16}$$

Mivel $x = \cos y$ és $\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$, ezért $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény deriváltja:

$$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{17}$$

Mivel $x = \operatorname{tg} y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, ezért $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény deriváltja:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{18}$$

Mivel $x = \operatorname{ctg} y$ és $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -\left(1+\operatorname{ctg}^2 y\right) = -\left(1+x^2\right)$, tehát $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.

Példák: Határozzuk meg az

1. $y = \arcsin\frac{1}{x}$, **2.** $y = \arccos(1-2x)$,

3. $y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, **4.** $y = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln\left(x^2 + a^2\right)$

egyenletekkel adott függvények deriváltjait.

Megoldás

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

2. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} \cdot (1-2x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-4x+4x^2\right)}} \cdot (-2) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

3. $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(1-x)+1+x}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=$

$$=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y'=1\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+x\cdot\left(-\dfrac{1}{1+(x/a)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2}\cdot 2x=$

$$=\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}-\frac{ax}{a^2+x^2}+\frac{ax}{x^2+a^2}=\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}.$$

j) $x\mapsto y=a^x$ *exponenciális függvény deriváltja*:

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a. \tag{19}$$

Ui. $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$ (l. a 8.9 pontot).

Ha az alapszám $a=e$, akkor $\ln e=1$ és így

$$\left(e^x\right)'=e^x. \tag{19a}$$

Nevezetes függvény, deriváltja önmagával egyenlő.

Az $x\mapsto y=x^n$ hatványfüggvény deriváltját tetszőleges n esetére (19*a*) felhasználásával határozhatjuk meg.

Ui. $x^n=e^{n\ln x}$ $(x>0)$, s így

$$\left(x^n\right)'=\left(e^{n\ln x}\right)'=e^{n\ln x}\cdot(n\ln x)'=e^{n\ln x}\cdot\frac{n}{x}=x^n\cdot\frac{n}{x}=nx^{n-1}.$$

Ha $x<0$, akkor $x=-t$ helyettesítéssel, $t=-x$ és így $t>0$.

$$y'=\left[(-1)^n t^n\right]'=(-1)^n nt^{n-1}\cdot t'=(-1)^n\cdot nt^{n-1}\cdot(-1)=(-1)^{n+1}nt^{n-1},$$

s mivel $(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}$, ezért

$$y'=n(-1)^{n-1}t^{n-1}=n(-t)^{n-1}=nx^{n-1}.$$

Tehát a hatványfüggvény deriváltja tetszőleges n esetére:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \tag{20}$$

Példák: Határozzuk meg az

1. $y = 10^{\sin x}$, **2.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, **3.** $y = \sqrt[3]{x}$,

4. $y = \sqrt{f(x)}$, **5.** $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ függvények deriváltjait.

Megoldás

1. $y' = 10^{\sin x} \ln 10 \cdot \cos x.$

2. $y' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}.$

3. $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

4. $y' = \dfrac{\mathrm{d}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left[f(x)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$

5. $y' = \dfrac{(\operatorname{tg} x)'}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \dfrac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

k) Implicit függvény deriváltja. Ha az $y(x)$ függvény $F(x, y(x)) = 0$ implicit alakban adott, és $y(x)$-et nem akarjuk vagy nem is tudjuk kifejezni, akkor az x szerinti deriválás közben figyelembe kell venni, hogy y az x függvénye, tehát a láncszabályt kell alkalmazni. Az implicit függvénynek ily módon előállított deriváltjából az y' általában kifejezhető, s így a derivált helyettesítési értékei kiszámíthatók.

Példák

1. $x^2 + y^2 = a^2 \quad (y > 0, x \neq a)$. Az egyenlet mindkét oldalát deriváljuk x szerint:

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \text{ amiből}$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha előbb y-ra megoldjuk az egyenletet (ha y-ra megoldható), és azután deriválunk:

$y=\sqrt{a^2-x^2}$, amiből $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. $y\sin x-e^x+e^y=0$. Az egyenlet x szerint deriválva:

$$y'\sin x+y\cos x-e^x+e^y\cdot y'=0, \text{ amiből } y'=\frac{e^x-y\cos x}{e^y+\sin x}.$$

l) Logaritmikus deriválás. Az $x\mapsto y=[a(x)]^{b(x)}$ alakú ún. *exponenciális hatványfüggvény* deriváltját célszerűen úgy képezzük, hogy előbb mindkét oldal e alapú logaritmusát vesszük, azután mindkét oldalt deriváljuk, s az eredményül kapott egyenlőségből y'-t kifejezzük:

Logaritmálva: $\ln y=b(x)\cdot\ln a(x)$. Deriválva:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=b'(x)\cdot\ln a(x)+b(x)\cdot\frac{1}{a(x)}\cdot a'(x), \quad \text{amelyből}$$

$$y'=y\cdot\left(b'(x)\cdot\ln a(x)+b(x)\cdot\frac{1}{a(x)}\cdot a'(x)\right), \quad \text{és így}$$

$$y'=[a(x)]^{b(x)}\cdot\left(b'(x)\cdot\ln a(x)+b(x)\cdot\frac{1}{a(x)}\cdot a'(x)\right).$$

Az eljárást összetettebb szorzat és törtfüggvény deriváltjának képzéséhez is felhasználjuk.

Példák

1. $x\mapsto y=x^x$. $\ln y=x\ln x$, amiből az implicit függvény deriválási szabálya szerint: $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1$ és $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

2. $x\mapsto y=(\sin x)^{\cos x}$. $\ln y=\cos x\ln(\sin x)$, és ebből:

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x, \text{ rendezve:}$$

$$y'=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln(\sin x)\right].$$

3. $x \mapsto y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$; $\ln y = \dfrac{1}{3}\left[\ln x + \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln\left(x^2-1\right)\right]$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1}\right) \quad \text{és} \quad y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{x^4+6x^2+1}{x(1-x^4)}.$$

Megjegyzés: Az egyváltozós függvényre ismertetett differenciálási szabályok felhasználhatók a **többváltozós függvény** egy kiválasztott független változója szerint képzett ún. *"parciális differenciálhányados"*-ának ill. *"parciális derivált"*-jának előállításához is. Azt mondjuk, hogy az $f(x,y,z,\ldots,t)$ *függvény az* $(x_0,y_0,z_0,\ldots,t_0)$ *helyen v szerint differenciálható, ha az egyváltozós* $f(x_0,y_0,z_0,\ldots,v,\ldots,t_0)$ *függvény a* $v = v_0$ *helyen differenciálható. Ennek az egyváltozós függvénynek a differenciálhányadosát az* $f(x,y,z,\ldots,t)$ *függvény* $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$ *helyen vett v szerinti parciális differenciálhányadosának vagy parciális deriváltjának nevezzük.* Ez azt jelenti, hogy a többváltozós függvényt egy kiválasztott változója szerint úgy kell differenciálni, hogy az összes többi változót a differenciáláskor állandónak tekintve, mint egyváltozós függvényt a megismert szabályok alapján differenciáljuk. Az $x, y, z, \ldots, t$ szerinti parciális deriváltak megadására a

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t},$$ (olv.: f parciális deriváltja x szerint, stb.) ill.

$$f_x'(x,y,z,\ldots,t),\ f_y'(x,y,z,\ldots,t),\ f_z'(x,y,z,\ldots,t),\ \ldots,\ f_t'(x,y,z,\ldots,t)$$

(olv. röviden: f vesszős x szerint, stb.) jelöléseket használjuk. Ezeket az ún. elsőrendű parciális deriváltakat, amelyek általában ismét többváltozós függvények, még egyszer deriválva, a másodrendű parciális deriváltakat kapjuk. Ha pl. az x szerinti elsőrendű parciális deriváltat még egyszer deriváljuk x szerint, akkor azt

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y,z,\ldots,t)$$

alakban jelöljük; ha pedig másodszor egy másik változó szerint deriváljuk, pl. y szerint, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}''(x,y,z,\ldots,t)$$

jelöléseket használjuk. A magasabbrendű parciális deriváltakat is hasonlóan jelöljük.

Példák

1. $z = 3x + 4y + 5$. x szerinti parciális derivált: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3$, ill. $z_x' = 3$.

y szerinti parciális derivált: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4$, ill. $z_y' = 4$.

2. Ha $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, akkor $f_x'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

és $f_y'=\dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

3. Ha $z=\dfrac{h}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, akkor $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{h}{2\pi}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{hy}{2\pi(x^2+y^2)}$

és $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{h}{2\pi}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{hx}{2\pi(x^2+y^2)}$.

9.4 Középértéktétel. A differenciál fogalma, geometriai jelentése és alkalmazása

***a)* Középértéktétel.** Ha egy f függvény az $[a,b]$-ban folytonos és az $]a,b[$-ban differenciálható, akkor van olyan $c\in]a,b[$ pont, amelyre

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

A tétel azt mondja ki, hogy az $y=f(x)$ függvénygörbének van olyan $c\in]a,b[$ abszcisszájú pontja , amelyhez tartozó érintője párhuzamos a görbe $x=a$ és $x=b$ abszcisszájú pontjain átmenő szelővel.

A középértéktétel következménye:

Ha az f deriváltja az $[a,b]$ intervallum minden pontjában nullával egyenlő és $a<x_1<x_2<b$, akkor $f'(c)=$ $=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$, amiből $f(x_1)=f(x_2)$ következik, vagyis az intervallumban az f állandó: $f(x)=c$.

***Rolle-tétel*:** Ha az f az $[a,b]$ -ban folytonos és $]a,b[$-ban differenciálható, valamint $a < x < b$ és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in]a,b[$ pont, amelyben a derivált nulla, azaz $f'(c) = 0$.

***b*) Differenciál.** Legyen f differenciálható függvény. A c pontbeli differenciahányados és az $f'(c)$ derivált közötti különbség a Δx növekménytől függ, azaz

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} - f'(c) = g(\Delta x).$$

A függvény Δy növekménye tehát

$$\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c) = f'(c)\cdot\Delta x + g(\Delta x)\cdot\Delta x\,.$$

A jobb oldali kéttagú kifejezés közül az első tag Δx-ben lineáris, a második pedig magasabb fokú. Az első tag Δx-szel azonos rendben tart a nullához, míg a második tag "magasabb rendben". A Δy lineáris részét az f függvény c pontbeli *differenciáljának* nevezzük, és e függvény jelölésére

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(c) = f'(c)\cdot\mathrm{d}x \qquad (1)$$

formulát használjuk. A $\mathrm{d}x = \Delta x$ mennyiséget a *független változó differenciáljának* nevezzük.

Általában egy deriválható $f(x)$ függvény differenciálja tehát formálisan előállítható a függvény deriváltjának és a független változó differenciáljának szorzatával, azaz:

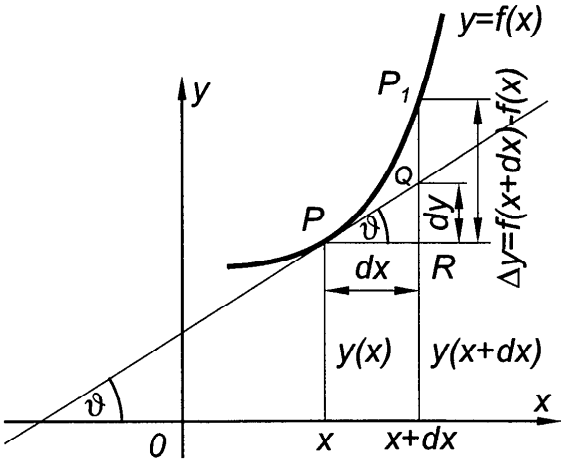
$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x. \qquad (1a)$$

A deriválási szabályokból adódnak a differenciálképzés megfelelő szabályai, pl.: ha $y = u(x) + v(x)$, akkor

$$\mathrm{d}(u+v) = (u+v)'\,\mathrm{d}x = u'\,\mathrm{d}x + v'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \text{ stb.}$$

***c*) Az $f(x)$ függvény differenciáljának a geometriai jelentése.** Az $y = f(x)$ egyenlettel adott görbe x abszcisszájú P pontjához húzott érintő, a P pontból az x-tengellyel párhuzamosan húzott

egyenes, valamint az $x+\mathrm{d}x$ helyhez tartozó ordináta egyenes Q, P és R csúcspontokkal derékszögű háromszöget határoz meg; $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ befogókkal. Mivel $f'(x)=\operatorname{tg}\vartheta$, ezért $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=\operatorname{tg}\vartheta\,\mathrm{d}x$, ami az $f(x)$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének ordináta növekményével egyenlő. A $\Delta y=f(x+\mathrm{d}x)-f(x)$ az $y=f(x)$ egyenletű görbe ordináta növekménye az $x+\mathrm{d}x$ helyen. A QPR derékszögű háromszöget, melyben a PQ átfogó és a $PR=\mathrm{d}x$ befogó által bezárt szög egyenlő az érintő irányszögével, ϑ-val, *Leibniz-féle háromszögnek* nevezzük (472.ábra).



472. ábra. Függvény differenciálja

***d)* A függvény közelítő értéke.** Gyakran előfordul, hogy az $x\mapsto y=f(x)$ függvénynek és $f'(x)$ deriváltjának az $x=x_0$ helyen könnyen kiszámíthatjuk az értékét, de az x_0 környezetében már e függvényértékek kiszámítása nagyobb fáradságba kerül. Ilyenkor a differenciálok tulajdonságát felhasználva az

$$f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0)h \qquad (2)$$

közelítő képlettel végezhetjük számításainkat, ha h eléggé kicsi.

Példák

1. Számítsuk ki $\sqrt{3654}$ közelítő értékét.

Megoldás: Meg kell határoznunk az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény értékét az $x=3654$ helyen. Mivel $f(x)$ és $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ értéke $x_0=3600$ helyen könnyen kiszámítható, ezért a (2) közelítő képletet használva, $h=54$ helyettesítéssel:

$$\sqrt{3654}\approx 60+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot 54=60{,}45.$$

2. Számítsuk ki táblázat használata nélkül a tg 46° értékét.

Megoldás: $f(x)=\operatorname{tg}x$; $x_0=45°$, $\operatorname{tg}45°=1$, $h=1°$ azaz 0,0175 radián:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f'(45°)=\frac{1}{\cos^2 45°}=2,\ \text{tehát}$$

$\operatorname{tg}46°\approx 1+2\cdot 0{,}0175=1{,}0350$. A táblázatból $\operatorname{tg}46°=1{,}0355$.

***e)* A függvény ill. a képlet hibája**. Méréseink mindig tartalmaznak bizonyos hibát, ami a mérőműszerek pontatlanságából ered. Egy x számnak és x_0 közelítő értékének különbségét a *közelítő érték hibájának* nevezzük. Ha ismeretes, hogy $|x-x_0|<d$, akkor a d mennyiséget az x_0 közelítő érték *abszolút hibakorlátjának*, a $\frac{d}{|x_0|}$ hányadost *relatív hibakorlátjának*, s ennek 100-szorosát: $100\frac{d}{|x_0|}$ értéket pedig *százalékos hibakorlátjának* nevezzük.

Pl.: Egy vaspálca hosszát milliméter beosztású mérőléccel mérve 17,9 cm hosszúnak találjuk. A mérés hibáját nem ismerjük ugyan, de tudjuk, hogy 0,1 cm-nél kisebb, tehát hibakorlátnak 0,1 cm-t vehetünk.

A relatív hiba: $\approx\frac{0{,}1}{17{,}9}$. A százalékos hiba: $\approx 100\cdot\frac{0{,}1}{17{,}9}=0{,}56\%$.

Ha az $x\mapsto y=f(x)$ függvény grafikonjának y ordinátáját az $y=f(x)$ egyenletből pontosan ki tudjuk számítani, de az x érték mérési hibával adott, akkor a függvény $|\Delta y|$ *abszolút hibakorlátját* közelítően a

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|f'(x)||\mathrm{d}x|=|f'(x)||\Delta x| \tag{3}$$

képlettel számítjuk, ahol $|\Delta x|$ az argumentum hibakorlátja.

A *relatív* hiba: $\approx\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|=|\mathrm{d}\ln y|$,

A *százalékos* hiba: $\approx 100\cdot\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|$.

Pl.: Számítsuk ki a kör területének meghatározásakor elkövetett relatív és százalékos hiba közelítő értékét, ha $r = 76$ cm és $|\Delta r| = 0{,}2$ cm.

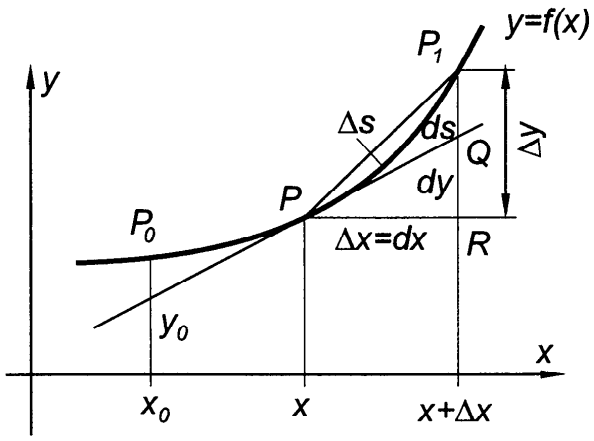
Megoldás: A függvény, a kör területszámítási képlete: $t = r^2\pi$ alakban adott, ahol t a függő és r a független változó. A relatív hiba:

$$\left|\frac{\Delta t}{t}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}t}{t}\right| = \frac{2r\pi\,\mathrm{d}r}{r^2\pi} = \frac{2\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\cdot 0{,}2}{76} = 0{,}005.$$

A százalékos hiba: $100\cdot 0{,}005 = 0{,}5\%$.

***f)* Ívdifferenciál.** Az $x \mapsto y = f(x)$ függvény grafikonjának $s = \overset{\frown}{PP_0}$ ívhossza rögzített P_0 esetén P-től és így a P pont abszcisszájától függ, tehát $s = s(x)$ függvénykapcsolat áll fenn (473. ábra). A differenciálhányados definíciója szerint:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}.$$



473. ábra. Ívdifferenciál

A PRP_1 derékszögű háromszögből a PP_1 húr hossza:

$$PP_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Bizonyítható, hogy a $\overset{\frown}{PP_1}$ ív és a PP_1 húr hányadosának határértéke 1, azaz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\overset{\frown}{PP_1}}{PP_1} = 1$. Mivel

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{PP_1}}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{PP_1}}{PP_1}\cdot\frac{PP_1}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{PP_1}}{PP_1}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x},$$

tehát $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} = 1\cdot\sqrt{1 + y'^2},$$ és így

a függvény differenciáljának definíciója szerint az ívdifferenciál:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x, \qquad (4)$$

ill. paraméteresen adott függvény esetén:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t. \tag{4a}$$

9.5 Magasabbrendű deriváltak

Az $f(x)$ függvény $f'(x)$ deriváltja is lehet differenciálható függvény, de nem kell minden függvény deriváltjának differenciálhatónak lenni. Az $f(x)$ deriváltjának a deriváltját *második deriváltnak* nevezzük; jelölése: $f''(x)$ (olv.: f kétvesszős x), vagy $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$ (olv.: d kettő f x per dx négyzet). Az $f''(x)$ deriváltja a *harmadik derivált*: $f'''(x)$ stb. Ezek az ún. *magasabbrendű deriváltak*, amelyeket az alábbi módon jelöljük:

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$

(olv.: ef en vesszős iksz),

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4 f(x)}{\mathrm{d}x^4},\ \ldots,\ \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

(olv.: dé en ef iksz per dé iksz az enediken),

$$y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \ldots,\ y^{(n)} \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\ \ldots,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

A t paraméter szerinti második deriváltakat a függvény fölé írt két ponttal is jelöljük, pl. $\ddot{y}$, $\ddot{f}(t)$.

A mondottakkal egybehangzóan a függvényt magát 0-adik deriváltnak, a deriváltját pedig első deriváltnak is nevezzük.

Az $f: S \to R$ függvényt *n-szer folytonosan differenciálhatónak* mondjuk ($n \in N$) az $s \in S$ pontban (S intervallumban), ha a függvény ott n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ még folytonos.

Ha minden $n \in N$-re differenciálható egy függvény, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *végtelen sokszor differenciálható.*

Példák

1. Határozzuk meg az $x \mapsto y = x^3$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

Megoldás: $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

2. Határozzuk meg az $x \mapsto y = \sin x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

Megoldás:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x + \pi),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \ \ldots, \ y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

3. Határozzuk meg az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres alakban adott függvény x szerinti második deriváltját.

Megoldás: $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$.

Az összetett függvény és az inverz függvény valamint a hányados függvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}}, \quad \text{tehát} \quad y'' = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$

4. Számítsuk ki az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ paraméteres egyenletrendszerrel adott függvény x szerinti második deriváltját $t_0 = \pi$ helyen.

Megoldás

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = a\sin t, \quad \dot{y} = a\sin t, \quad \ddot{y} = a\cos t,$$

$$\dot{y}\dot{x} = a^2(\cos t - \cos^2 t), \quad \dot{y}\dot{x} = a^2\sin^2 t, \quad (\dot{x})^3 = a^3(1 - \cos t)^3,$$

$$y'' = \frac{a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t)}{a^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1 - \cos t}{a(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

$$y''(t_0) = -\frac{1}{a(1 - \cos\pi)^2} = -\frac{1}{4a}.$$

Feladatok

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f''' = ?$ $\quad [f''' = 0]$

2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f'' = ?$ $\quad \left[f'' = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}\right]$

3. $f(x) = e^{\sin x}$; $f''' = ?$ $\quad \left[f''' = -\dfrac{1}{2}e^{\sin x}\sin 2x(3 + \sin x)\right]$

9.6 Függvényvizsgálat, szélsőérték, inflexiós pont

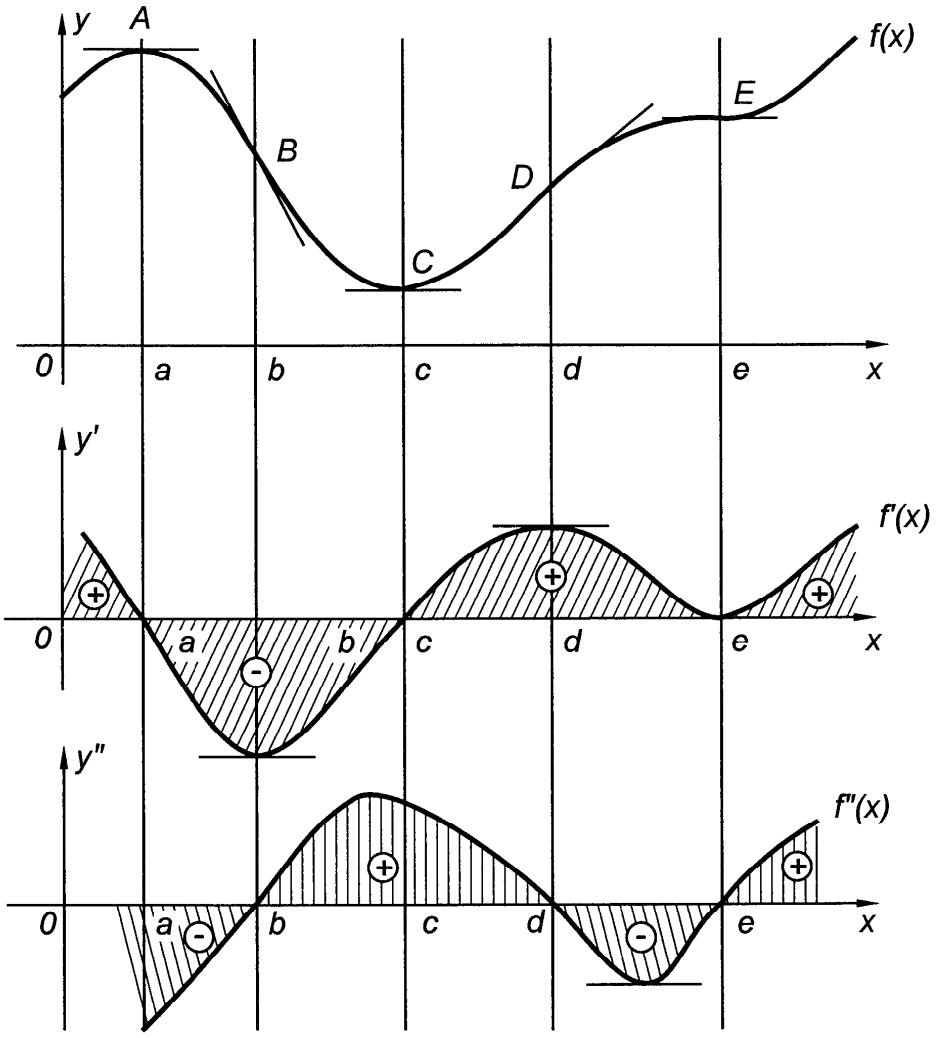
A függvény és a függvény grafikonjának tulajdonságaira, amennyiben a függvény deriválható, a deriváltakból következtetéseket vonhatunk le (l. a 9.4 pontot).

Az $f: S \to R$ függvénynek a $p \in S$ helyen *helyi maximuma* (legnagyobb értéke) van, ha a p hely kicsiny környezetében, azaz minden elég kis abszolút értékű – pozitív vagy negatív – h-ra $f(p+h) < f(p)$, és *helyi minimuma* (legkisebb értéke) van, ha $f(p+h) > f(p)$. ("*Helyi*" más szóval "*lokális*", mert a p hely környezetén kívül a függvény tetszőleges nagy vagy kicsi értéket is felvehet.) Az így definiált maximumok és minimumok közös néven a *függvény helyi szélsőértékei* vagy *extrémumai.*

Az $f(x)$ függvény $P(q; f(q))$ pontját *inflexiós pontnak* nevezzük, ha az f grafikonjának P pontjához tartozó érintőjét a görbe ugyanezen pontban átmetszi. Az inflexiós pontra illeszkedő érintőt *inflexiós érintőnek* mondjuk.

A többször deriválható *függvény helyi szélsőértékeinek és inflexiós pontjainak helyét a magasabbrendű deriváltak vizsgálata alapján meghatározhatjuk.* A 474. ábrán vázoltuk az $f(x)$, az $f'(x)$ és az $f''(x)$ grafikonját. A differenciálhányados geometriai jelentése szerint az $f(x)$ görbe érintőjének iránytangensét az $f'(x)$ függvénynek az adott helyen vett értéke szolgáltatja, és hasonló összefüggés áll fenn az $f'(x)$ és az $f''(x)$ függvények között. *Az első és a második deriváltak pozitív, negatív voltából, előjelváltásaiból, zérushelyeiből az $f(x)$ függvény tulajdonságaira következtetéseket vonunk le.* Ezek a szemlélet alapján megfogalmazott következtetések matematikailag bizonyíthatóak, a bizonyítások a matematikai analízis tankönyveiben megtalálhatók. [1].

Pl. a 474. ábra $f(x)$ függvényére a következőket mondhatjuk:



474. ábra. Függvény és deriváltjai: *a*) függvénygörbe; *b*) első derivált görbéje; *c*) második derivált görbéje

Az $f(x)$ függvénynek

1. *helyi maximuma* van az x_0 helyen, ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)<0$ (az ábrán $x_0=a$);

2. *helyi minimuma* van az x_0 helyen, ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)>0$ (az ábrán $x_0=c$);

3. *inflexiós pontja* az x_0 abszcisszájú pont, ha $f''(x_0)=0$ és $f''(x)$ az x_0 helyen előjelet vált, azaz a függvény harmadik deriváltja $f'''(x_0)\neq 0$.

(Az ábra f grafikonján ilyen pont a B, D és E. Az E pontban a görbe inflexiós érintője párhuzamos az x-tengellyel, amit $f'(e)=0$, $f''(e)=0$ és az $f''(x)$ függvény jelváltása jelez.)

Összefoglalva: Az $y=f(x)$ egyenlettel adott görbe maximum és minimum pontjában az első derivált, inflexiós pontjában pedig a második derivált előjelet vált.

Az $f: S \to R$ függvényt az $[a,b] \subset S$ intervallumon *alulról konvexnek* nevezzük, ha f az $]a,b[$-ben folytonos és minden $c,d \in [a,b]$-re teljesül az

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{f(c)+f(d)}{2}$$ egyenlőtlenség.

Ha az egyenlőtlenség fordított irányú, akkor a függvény az $[a,b]$-ben alulról *konkáv.*

A függvény intervallumonkénti konvexitását, konkávitását a deriváltak alapján is eldönthetjük, ui., ha az f a $[p,q]$-ban kétszer folytonosan differenciálható és

$f''(x) \geq 0$ (ill. f' monoton növekvő) minden $x \in]p,q[$-ra, akkor az f a $[p,q]$-ban *alulról konvex,*

$f''(x) \leq 0$ (ill. monoton csökkenő f') esetén pedig f *alulról konkáv.*

(A 474. ábrán a $[0,b]$ és a $[d,e]$ intervallumokban a függvény alulról konkáv; a $[b,d]$ és $x \geq e$ intervallumokban pedig alulról konvex.)

Az első derivált vizsgálata alapján eldönthetjük, hogy a függvény *milyen intervallumokban monoton*, ui.

ha az $f: [p,q] \to R$ függvény folytontos, $]p,q[$-ban differenciálható és $f'(x) \geq 0$ (ill. $f'(x) > 0$) minden $x \in]p,q[$-ra, akkor az f *monoton* (ill. *szigorúan monoton*) *növekvő függvény.*

Ha a deriváltra vonatkozó egyenlőtlenség fordított irányítású, akkor a függvény *monoton* (ill. *szigorúan monoton*) *csökkenő.* (Pl.

a 474. ábrán az f függvény az $]a,c[$ intervallumban monoton csökkenő, a $]c,e[$-ben pedig monoton növekvő.)

Példák

1. Határozzuk meg az $x \mapsto y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ függvény szélsőértékeit, inflexiós pontját és inflexiós érintőjének egyenletét.

Megoldás: A függvénynek szélsőértéke az $y' = 0$ egyenlet gyökhelyeinél lehet: $y' = 3x^2 - 18x + 24$. A $3x^2 - 18x + 24 = 0$ egyenlet megoldása:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad \text{vagyis } y'(2) = 0, \quad y'(4) = 0.$$

Képezzük a második deriváltat: $y'' = 6x - 18 = 6(x-3)$; az y'' értékei a kiszámított gyököknél: $y''(2) = 6(2-3) = -6 < 0$, tehát a függvénynek az $x = 2$ helyen helyi maximuma van: $y_{\max} = y(2) = 13$. $y''(4) = 6(4-3) = 6 > 0$, tehát a függvénynek az $x = 4$ helyen helyi minimuma van: $y_{\min} = y(4) = 9$.

A függvénynek inflexiós pontja az $y''(x) = 0$ egyenlet gyökhelyeinél lehet: $6(x-3) = 0$, $x_0 = 3$. Mivel $y''' = 6 \neq 0$, ezért a függvénynek az $x_0 = 3$ helyen inflexiós pontja van: $y_{\text{infl}} = y(3) = 11$. Az inflexiós érintő a $P(3,11)$ pontra illeszkedő, és $y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3$ iránytangensű egyenes, melynek egyenlete (az $y - y_1 = m(x - x_1)$ alakú egyenes egyenletének megfelelően):

$$y - 11 = -3(x-3) \quad \text{vagyis } y = -3x + 20.$$

A függvény alulról konkáv, ha $x < 3$ és alulról konvex, ha $x > 3$; monoton növekvő, ha $x < 2$ és $x > 4$; monoton csökkenő, ha $2 < x < 4$.

2. Hogyan kell megválasztani a hengeres konzervdoboz méreteit, ha a térfogat adott, hogy a felhasznált lemez minimális legyen?

Megoldás: Ha a henger magasságát h-val, alapkörének sugarát r-rel és felszínét F-fel jelöljük, akkor $F = 2r\pi h + 2r^2\pi$, amelynek a minimumát kell kiszámítani a $V = r^2\pi h$ feltétel mellett. Ebből $h = \dfrac{V}{r^2\pi}$, így F-et r függvényeként kifejezhetjük:

$$F(r) = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right).$$

Az $F(r)$ függvény minimumát kell meghatároznunk $(0 < r < \infty)$.

A $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = 2\left(-\dfrac{V}{r^2} + 2\pi r\right) = 0$ egyenlet egyetlen valós gyöke: $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Mivel r_0 környezetében a függvény folytonos és a deriváltja ennél kisebb értékekre negatív, nagyobb értékekre pedig pozitív, ezért a függvénynek az r_0 pontban helyi minimuma van s így

$$h=\frac{V}{r^2\pi}=\frac{V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2\cdot\pi}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}}=2r.$$

Tehát a hengeres konzervdobozhoz felhasznált lemez adott térfogat mellett akkor minimális, ha az alapkör átmérője megegyezik a henger magasságával (egyenlő oldalú henger).

Megjegyzés: **Kétváltozós valós függvénynek** az olyan függvényt nevezzük, amelynek értelmezési tartománya része R^2 - nek, értékkészlete pedig R-nek. $f(x,y)$ helyi (lokális) szélsőértékhelyei meghatározhatók, a parciális deriváltak vizsgálatával, amennyiben léteznek f első és második parciális deriváltjai.

Az $f(x,y)$ függvénynek az (x_k,y_k) pontok a *szélsőértékhelyei*, ha e pontokban $f'_x=0$, $f'_y=0$ és $D=(f''_{xx}\cdot f''_{yy}-f''^2_{xy})>0$; a szélsőértékpontok közül azokban van *maximuma* az f-nek, amelyekben $f''_{xx}<0$ és azokban van *minimuma*, amelyekben $f''_{xx}>0$. (Ha $D<0$ akkor nincs szélsőértéke f-nek, ha $D=0$, akkor a függvény további vizsgálatával dönthetjük el, hogy a kérdéses pontban miként viselkedik az f függvény.)

Példa

1. Vizsgáljuk meg az $f(x,y)=x^2+2y^2-xy+x-4y-10$ függvény szélsőérték helyeit.

Megoldás: Szélsőértékek ott lehetnek, ahol az első deriváltak nullával egyenlők:

$$f'_x=2x-y+1=0 \qquad f'_y=4y-x-4=0$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x=0$; $y=1$, tehát f-nek a $(0,1)$ pontban lehet szélsőértéke. A második deriváltak:

$f''_{xx}=2$, $f''_{yy}=4$, $f''_{xy}=-1$, tehát $D=(2\cdot 4-(-1)^2)=7>0$ vagyis f-nek a $(0,1)$ pontban van szélsőértéke, s mivel $f''_{xx}=2>0$ ezért a kérdéses helyen minimuma van. A függvény minimumát az adott függvényből, $(0,1)$ behelyettesítésével kapjuk:

$$f_{\min}=f(0,1)=0^2+2\cdot 1^2-0\cdot 1+0-4\cdot 1-10=-12.$$

Feladatok

a) Határozzuk meg a következő függvények deriváltjait (az értelmezési tartományoktól eltekintünk, mivel pusztán a deriválási szabályok formális begyakorlásához állítottuk össze a feladatokat):

1. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5.$ $\left[y'=x^2-4x+4.\right]$

2. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$. $\left[y' = \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2.\right]$

3. $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. $\left[f'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}.\right]$

4. $f(x) = \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^3}{x}$, $f'(1) = ?$ $[f'(1) = -2.]$

5. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. $\left[y' = \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}.\right]$

6. $s = a\cos^2 \frac{t}{a}$, $\frac{ds}{dt} = ?$ $\left[\frac{ds}{dt} = -\sin \frac{2t}{a}.\right]$

7. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$ $\left[y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4.\right]$

8. $y = \ln(1 + \cos x)$. $\left[y' = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\right]$

9. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left[y' = -\frac{2\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}.\right]$

10. $y = x^2 e^{-2x}$. $\left[y' = 2x(1 - x)e^{-2x}.\right]$

11. $y = x^{\sin x}$. $\left[y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).\right]$

12. $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}\right)$. $\left[y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}}.\right]$

13. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$. $\left[y' = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.\right]$

14. $y = \operatorname{arctg} x + \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$. $\left[y' = \frac{2}{1 - x^4}.\right]$

15. $y = x\arccos x - \sqrt{1 - x^2}$. $[y' = \arccos x.]$

16. $y = \sqrt{4x - 1} + \operatorname{arcctg}\sqrt{4x - 1}$. $\left[y' = \frac{\sqrt{4x - 1}}{2x}.\right]$

17. $y = x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$. $[y' = x\operatorname{ch} x.]$

18. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$. $\left[y' = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}.\right]$

19. $y = \operatorname{arsh}\sqrt{1-x^2}$. $\left[y' = -\dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2+x^4}}.\right]$

20. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$. $\left[y' = \dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}.\right]$

21. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. $\left[y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}.\right]$

22. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$. $\left[y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}.\right]$

23. $x = 1-t^2$, $y = t-t^3$. $\left[y' = \dfrac{3t^2-1}{2t}.\right]$

24. $x = \ln\left(1+t^2\right)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$. $\left[y' = \dfrac{t}{2}.\right]$

25. $y = \operatorname{lntg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1+\sin x) - x$. $\left[y' = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}.\right]$

b) Határozzuk meg az egyenletekkel adott görbék adott pontjához tartozó érintők egyenletét:

26. $y = \dfrac{8}{4+x^2}$, $x_0 = 2$. $\left[y = -\dfrac{x}{2} + 2.\right]$

27. $y = \sin x$, $x_0 = \pi$. $[y = \pi - x.]$

28. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$, $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$. $[4x + 2y - 3 = 0.]$

29. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. $\left[y = x + \dfrac{(4-\pi)a}{2}.\right]$

c) Határozzuk meg az adott függvények szélsőértékeit:

30. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. $\left[y_{\max} = y(-1) = \dfrac{5}{3},\ y_{\min} = y(3) = -9.\right]$

31. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$. $\left[y_{\text{infl}} = y(0) = 0,\ y_{\text{infl}} = y(2) = -4,\ y_{\min} = y(3) = -\dfrac{27}{4}.\right]$

32. $y = \sin 2x - x$ a $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban.

$$\left[y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0{,}34,\ y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx -0{,}34.\right]$$

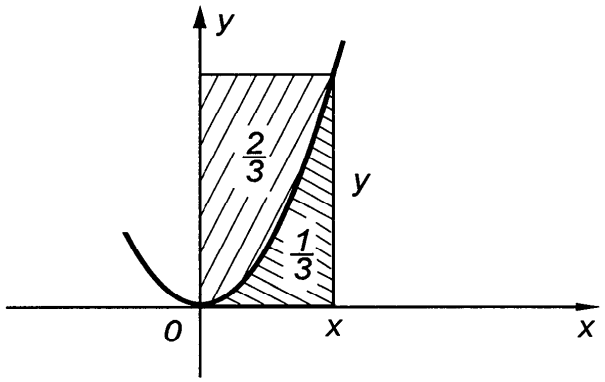
33. Hogyan kell megválasztani az r sugarú gömbbe beírható legnagyobb térfogatú henger magasságát? $\left[m = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}.\right]$

TIZEDIK FEJEZET

AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Jelöljük az $[a,b] = S \to R$ függvények halmazát $R(S)$-sel, az S intervallumon folytonos függvények halmazát $C(S)$-sel, a differenciálható függvények halmazát pedig $D(S)$-sel. Az $]a,b[$ nyílt intervallumot S_0-val fogjuk jelölni.

A gyakorlat által felvetett problémák közül a legalapvetőbbnek az $y = f(x)$ egyenletű görbe (graf f), az x-tengely $\overline{ab}$ szakasza, valamint az $f(a)$ és az $f(b)$ ordinátaegyenesek által közrezárt terület meghatározását tekintjük. A területmérés és a térfogatszámítás problémája már a régi görög matematikusok munkáiban megtalálható. Így pl. *Archimedes* (i. e. 287–212) ismerte, hogy a parabola (475. ábra) az ábrán kirajzolt téglalapot 1 : 2 arányban osztja.



475. ábra. A téglalap felosztása parabolával

Azokat a feladatokat, amelyek valamely síkidomhoz a vele azonos területű négyzetnek a megszerkesztését tűzték ki célul *kvadratúra problémának* nevezték. Ma kvadratúrán, valamely integrál kiszámítását értjük. A terület és a térfogatszámítás el-

járásait, az integrálszámítás alapjait, *Leibniz* (1646–1716) és *Newton* (1643–1727) egyidőben, de egymástól függetlenül dolgozták ki. Az integrálszámítás műveleti jelét: $\int$, az *S* betű nyújtott alakját, *Leibniz* vezette be 1675-ben.

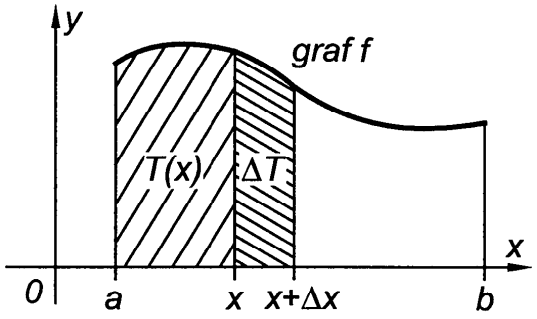
10.1 A határozatlan integrál

a) A primitív függvény és a határozatlan integrál

Tekintsük az $f: S \to R$ függvényt és tegyük fel, hogy $E_f \subset R^+$, akkor az

$$\left\{(x,y) \in R \times R \;\middle|\; x \in S,\ y \in [0, f(x)]\right\}$$

halmaz nem más mint az f grafikonja, az x-tengely, az a és b pontokhoz tartozó ordinátaegyenesek által határolt síkidom (476. ábra).



476. ábra. A $T(x)$ területfüggvény

Azokra a kérdésekre, hogy mit értsünk a területen, milyen f függvény esetében beszélhetünk e síkidom területéről, hogyan számítsuk ki a területét, s ha a területet $f(b)$ helyett egy tetszőleges $x \in S$ ponthoz tartozó ordináta egyenessel határoljuk, akkor a $T(x)$ területfüggvénynek létezik-e deriváltja, a XIX. század matematikusai választ adtak *Bernhard Riemann* (1826–1866; német matematikus) és *Cauchy* munkáinak felhasználásával. A XX. század elején pedig a *Riemann*-integrál fogalmát *Henri Lebesgue* (1875–1941; francia matematikus) messzemenően általánosította.

A 476. ábra jelöléseinek megfelelően, ha az x-et $x + \Delta x$-re növeljük, akkor a $T(x)$ függvény $T(x) + \Delta T$-re növekszik, ahol

$\Delta T \approx f(x)\Delta x$ és így $\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx f(x)$. A

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = f(x)$$

azaz $T(x)$ olyan függvénye az x-nek, melynek deriváltja $f(x)$-et adja és az a helyen $T(a) = 0$. Így tehát olyan $T \in D(S)$ függvényt kell keresnünk, amely kielégíti a következő két feltételt:

$$T' = f, \quad T(a) = 0. \tag{1}$$

1. Az integrálszámítás alaptétele. Legyen $f: S \to R$ az $S = [a,b]$ valódi intervallumon folytonos, valós értékű függvény. Ekkor létezik olyan folytonosan differenciálható F: $S \to R$ függvény, amelyre

$$F' = f.$$

A fenti tulajdonságú függvényeket f *primitív függvényeinek* nevezzük. A primitív függvényekből alkotott függvényhalmazt f *határozatlan integráljának* mondjuk, és hagyományosan

$$\int f(t)\mathrm{d}t$$

szimbólummal jelöljük (olv.: integrál efté dété).

Azt az eljárást, műveletet, amellyel meghatározzuk az F függvényt az f ismeretében, f *integrálásának* nevezzük. Ilyen értelemben az integrálás a deriválás fordított művelete.

Az f függvényt *integrandusnak* mondjuk.

Ha F és H az f-nek két tetszőleges primitív függvénye, akkor csak egy konstansban különbözhetnek egymástól, vagyis az egész halmaz $F + C$, $C \in R$ függvényekből áll. Ui. a feltétel szerint $F' = f$, $H' = f$, így a $(H - F)' \equiv 0$, tehát a differenciálszámítás középértéktétele értelmében (l. a 9.4 pontot) $H - F$ =konstans, vagyis $H = F + C$.

Legyen pl. $F(x) = x^3$, ekkor $F'(x) = 3x^2$, vagy $\mathrm{d}F(x) = 3x^2\mathrm{d}x$, ezért $\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C$, mert $(x^3 + C)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$.

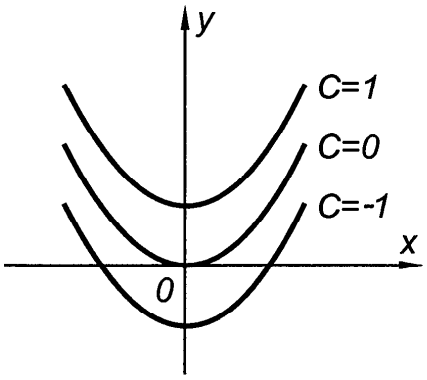
Pl.: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$; $\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln|1+x| + C$.

Az eredmények helyességéről differenciálással győződhetünk meg.

A következő két probléma is a differenciálás műveletének megfordításához vezet.

1. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél az érintő iránytangense bármely pontban megegyezik a pont abszcisszájával.

Megoldás: Ha a görbe egyenlete $y = f(x)$, akkor az érintő m iránytangense $f(x)$ deriváltjával adható meg: $m = y' = f'(x)$.



477. ábra. Parabolasereg

A feladat értelmében a kérdéses görbénél minden x-re $y' = x$, azaz összefüggést kaptunk az ismeretlen függvény deriváltja és x között. Feladatunk az, hogy y-t adjuk meg, mint x függvényét. Ez integráláshoz vezet.

Ha $y' = x$, akkor $y = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$, amelynek helyességét egyszerű próbával ellenőrizhetjük. Az egyenlettel meghatározott görbe rögzített C-nél, mint ismeretes, y-tengelyű parabola. C-nek különböző értékeket adva, az y-tengely mentén eltolt parabolasereg áll elő.

2. Egy pont az idővel arányosan növekvő sebességgel egyenesvonalú mozgást végez. Meghatározandó egy bizonyos időközben a pont által megtett út hossza.

Megoldás: Ismeretes, hogy az útfüggvény idő szerinti differenciálhányadosa a mozgás sebességét adja. Ha az utat s-sel, a sebességet v-vel, a mozgás kezdete óta eltelt időt t-vel jelöljük, akkor $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. A feladat szerint: $v = kt$.

Ez az egyenlet összefüggést ad az idő és a pont által megtett út között, de még nem közvetlenül jelentkezik s a t függvényeként, hanem s-nek t-szerinti differenciálhányadosa adott, mint t függvénye; s-et t függvényeként előállíthatjuk, ha a differenciálhányados primitív függvényét meghatározzuk, azaz integrálunk:

$$s = \int kt\,\mathrm{d}t = \frac{kt^2}{2} + C.$$

Valamely $t = t_1$ időpillanatban a megtett út $s_1 = \frac{kt_1^2}{2} + C$, és egy másik $t = t_2$ időpillanatban $s_2 = \frac{kt_2^2}{2} + C$.

Tehát a $t_2 - t_1$ időközben megtett út: $s_2 - s_1 = \frac{k}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$.

b) Az alapintegrálok táblázata

Az elemi alapfüggvények differenciálási szabályainak megfordításaival összeállíthatjuk az ún. *alapintegrálok táblázatát*, amelynek felhasználásával összetettebb integrandusokhoz is meghatározhatjuk a határozatlan integrálokat, ha azokat átalakításokkal vissza tudjuk vezetni az alapintegrálok valamelyikére. Ilyen esetekben az előállított primitív függvény deriválásával meggyőződhetünk az integrálás helyességéről. A gyakorlatban sokszor egyszerűnek látszó elemi függvényekből álló integrandushoz sem tudjuk megadni a létező primitív függvényt elemi függvényekkel. Az ilyen ún. *zárt alakban ki nem fejezhető integrálok* pl.:

$$\int x \operatorname{tg} x \, dx, \quad \int \sqrt{1+x^4} \, dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Az ilyen integrálok kiszámítására (pl. függvények sorbafejtésével) a numerikus matematikában találhatunk hatékony módszereket.

Hatványfüggvények:

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$, mert $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = x^n$,

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, mert $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$. $(x \neq 0)$

Exponenciális függvények:

3. $\int e^x dx = e^x + C$, mert $\left(e^x\right)' = e^x$,

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, mert $\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = a^x$. $(0 < a \neq 1)$

Trigonometrikus függvények:

5. $\int \sin x \, dx = -\cos + C$, mert $(-\cos x)' = \sin x$,

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$, mert $(\sin x)' = \cos x$,

7. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$, mert $\left(-\ln|\cos x|\right)' = \operatorname{tg} x$,

8. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$, mert $\left(\ln|\sin x|\right)' = \operatorname{ctg} x$,

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, mert $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, mert $(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Hiperbolikus függvények:

11. $\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$, mert $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,

12. $\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$, mert $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$,

13. $\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \ln\operatorname{ch} x + C$, mert $(\ln\operatorname{ch} x)' = \operatorname{th} x$,

14. $\int \operatorname{cth} x\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sh} x| + C$, mert $\left(\ln|\operatorname{sh} x|\right)' = \operatorname{cth} x$,

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, mert $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, mert $(-\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. $(x \neq 0)$

Racionális függvények:

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, mert $\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a^2 + x^2}$,

18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $(|x| < a)$,

mert $\left(\frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}\right)' = \left(\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\right)' = \frac{1}{a^2 - x^2}$,

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcth}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(|x| > a)$,

mert $\left(-\frac{1}{a}\operatorname{arcth}\frac{x}{a}\right)' = \left(\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{x^2 - a^2}$.

Irracionális függvények:

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < a,$

mert $\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$

21. $\int \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + C,\ |x| < a,$

mert $\left(\arccos\frac{x}{a}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C_1,$

mert $\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right)' = \left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},$

23. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1,\ (|x| > |a|),$

mert $\left(\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right)' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

Az alapintegrálokat érdemes jól emlékezetünkbe vésni, mert ez az integrálszámítás technikájának alapja.

10.2 A határozott integrál és tulajdonságai

a) Határozott integrál

Azt a H speciális primitív függvényt, amely az a helyen zérus, azaz $H(a) = 0$, *f határozott integráljának* nevezzük és

$$H(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

szimbólummal jelöljük (olv.: integrál ától ikszig efté dété).

Az alaptétel tehát *először* azt mondja ki, hogy létezik a

$$H(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ szám } \forall x\in S\text{-re és}$$

$$H(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$$

másodszor pedig azt, hogy $H\in D(S_0)$ differenciálható az x szerint, és differenciálhányadosa

$$H'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x). \qquad (3a)$$

Legyen G az f tetszőleges primitív függvénye, s mivel $H(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ szintén primitív függvénye az f-nek, ezért

$H(x)=G(x)+C$, de $H(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$, tehát

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=H(b)=G(b)+C=G(b)-G(a).$$

A $G(b)-G(a)$ kettős behelyettesítés szokásos jelölése: $\left[G(t)\right]_a^b$ és így:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\left[G(t)\right]_a^b=G(b)-G(a), \qquad (4)$$

ahol G az f primitív függvénye. Az $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ kifejezésben a az alsó, b pedig a felső *határ*. Szokásos jelölés: $\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ (olv.: integrál té egyenlő ától béig efté dété).

Ha $f(x) \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumban, akkor az $y = f(x)$ egyenlettel adott görbe alatti terület $\int_{x=a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$-szel egyenlő (l. a 10.4 pontot).

Példák

1. $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1.$

2. $\int_{x=0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

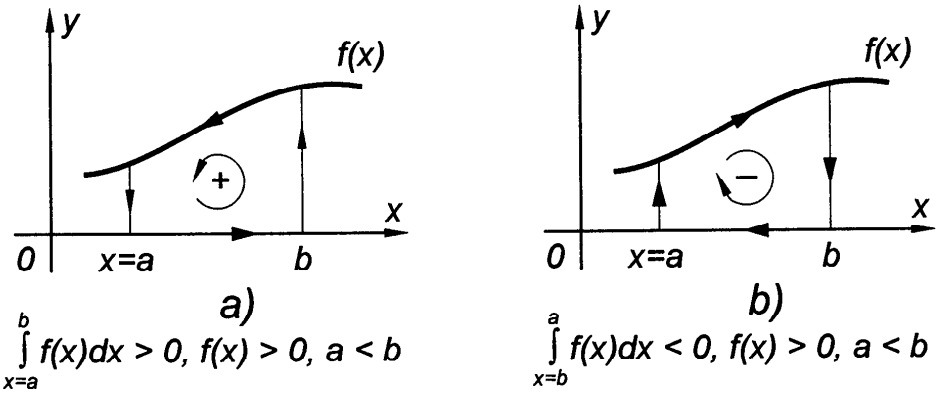
b) A határozott integrál tulajdonságai

Ha az alsó és felső határt felcseréljük, akkor a (4)-re való tekintettel, az integrál előjelet vált (478. *a*, *b* és 478. *c*, *d* ábra):

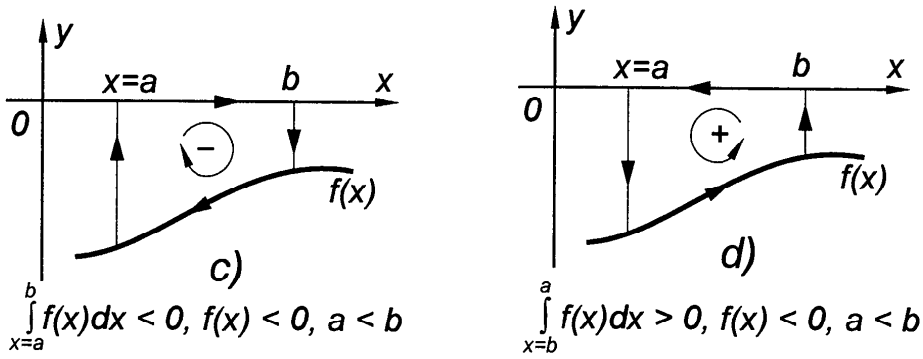
$$\left[G(x)\right]_b^a = G(a) - G(b) = -\big(G(b) - G(a)\big) = -\left[G(x)\right]_a^b,$$

és így

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$



478. *a*, *b* ábra. Pozitív értékű függvény határozott integrálja: *a*) $x=a$-tól $x=b$-ig; *b*) $x=b$-től $x=a$-ig



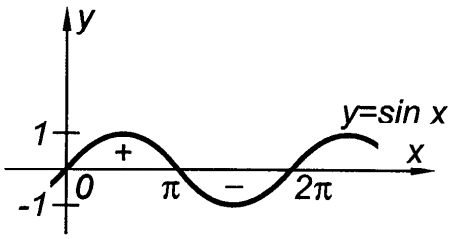
478. *c*, *d* ábra. Negatív értékű függvény határozott integrálja: *c*) $x=a$-tól $x=b$-ig; *d*) $x=b$-től $x=a$-ig

Példák

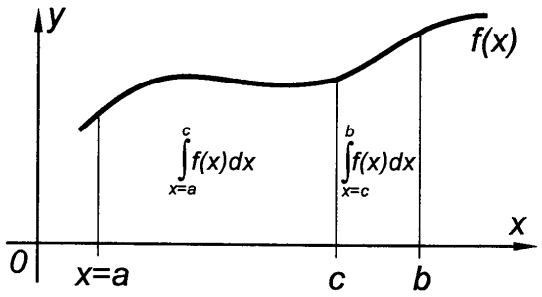
1. $\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = +1+1 = 2$

2. $\int_{x=\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos\pi = -1-1 = -2.$

Viszont, ha 0-tól 2π-ig integrálunk, akkor $\int_{x=0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0.$



479. ábra. A szinuszfüggvény integrálja



480. ábra. Az integrálás szakaszonként végezhető el

Az (1) és (2) példa azt mutatja, hogy amennyiben az integrálandó függvény az integrációs intervallumban előjelet vált (479. ábra), akkor nem a függvény grafikonja és az x-tengely közötti terület abszolút mértékszámát kapjuk meg a határozott integrál eredményeként, hanem az integrál automatikusan a görbe alatti és a görbe feletti területek előjellel vett algebrai összegét adja. Ilyen esetben a terület abszolút mértékszámát úgy határozzuk meg, hogy

az integrációs intervallumot az $f(x) \leq 0$ és $f(x) \geq 0$ eseteknek megfelelően részekre bontjuk, és a részintervallumok integráljainak abszolút értékeit összegezzük.

2. Tétel. Ha $f, g \in C(S)$ adott függvények és $c, k \in R$ adott konstansok, akkor

$$\int_a^x \big(cf(t) + kg(t)\big)\mathrm{d}t = c\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + k\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \qquad (5)$$

Bizonyítás: Az $f, g \in C(S)$ és így $cf + kg$ is a $C(S)$ halmazba tartozik, tehát az integrálja létezik. A deriválási szabályok felhasználásával [l. a (3*a*) ill. az 5. tétel (12*b*) képletét] kapjuk egyrészt, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \big(cf(t) + kg(t)\big)\mathrm{d}t = cf(x) + kg(x)$$

másrészt, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + k\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t =$$
$$= cf(x) + kg(x).$$

Mivel az (5) egyenlet két oldalának deriváltjai egyenlők egymással és az *a* helyen mindkét függvény zérussal egyenlő, ezért az (5) teljesül.

A tétel azt mondja ki, hogy

integrálható függvények algebrai összegének az integrálja egyenlő az egyes tagok integráljainak algebrai összegével, továbbá hogy az integrandus konstans szorzója kiemelhető az integráljel elé.

3. Tétel. Ha $a < c < b$ és az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon integrálható, akkor az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumon is integrálható és

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (6)$$

Ez akkor is érvényes, ha $b < c < a$ (480. ábra).

Bizonyítás: Ha $F'=f$, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ és $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=F(c)-F(a)$,

továbbá $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(c)$, így $F(b)-F(a)=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$.

Példa: $\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=$

$=(1+1)+(-1-1)=2-2=0$ (479. ábra).

Megjegyzés: Az $[a,b]$ intervallumon integrálható $f(x)$ és $g(x)$ függvények azonos intervallumra vonatkozó integráljainak összege egyenlő a két függvény összegének a szóban forgó intervallumra vonatkozó integráljával, azaz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Példa: $\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}1\,\mathrm{d}x=\left[x\right]_0^{\pi}=\pi.$

4. Tétel. Ha $f,g\in C(S)$ és $f(x)\geq g(x)$ $\forall\, x\in S$-re, akkor

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\geq\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

Bizonyítás: Legyen $h(x)=\int_a^x\left(f(t)-g(t)\right)\mathrm{d}t$, akkor h létezik, és az alaptétel értelmében $C(S)$-hez tartozik, tehát $f-g\in C(S)$. Továbbá, feltevésünk szerint $h'(x)=f(x)-g(x)\geq 0$, vagyis $h(x)$ monoton növekvő függvény, s mivel $h(a)=0$, így $h(x)\geq 0$, ha $x\in S$, amiből a (7) egyenlőtlenség következik.

5. Tétel. *Az integrálszámítás középértéktétele.* Tegyük fel, hogy $f,g\in C(S)$ és $g\geq 0$, akkor az S-be tartozó $p\leq q$ értékek között $\exists\, c\in S$, hogy

$$\int_p^q f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t=f(c)\int_p^q g(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

Bizonyítás: A $[p,q]$ intervallumban létezik f-nek olyan m és M értéke, hogy

$$m \le f(t) \le M \qquad \forall\, t \in [p,q]\text{-ra.}$$

A $g(t) \ge 0$ feltétel alapján:

$$m \cdot g(t) \le f(t)\,g(t) \le M \cdot g(t).$$

Így a 2. és a 4. Tétel értelmében:

$$m\int_p^q g(t)\,\mathrm{d}t \le \int_p^q f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \le M\int_p^q g(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Az $m, M \in E_f$, így $K\cdot m, K\cdot M \in E_{K\cdot f}$ a $[p,q]$ intervallumban, ahol

$$K = \int_p^q g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mivel a $K\cdot F$ függvény a $K\cdot m$ és $K\cdot M$ között felvesz minden értéket, ezért az

$$r = \int_p^q f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

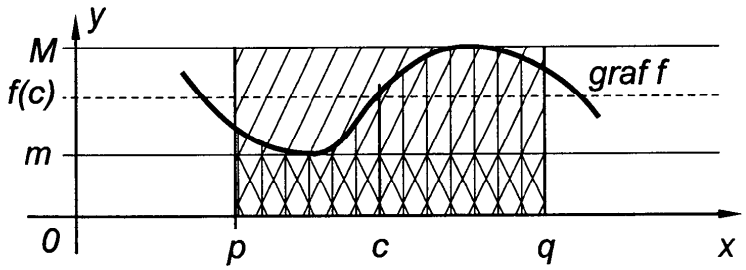
értéket is, így $\exists\, c \in S$ a p és q között, hogy $r = f(c)K$, vagyis a (8) állítás teljesül.

Megjegyzés

1. Ha $g(t) \equiv 1$ az S intervallumban, akkor a (9) helyett az

$$m(q-p) \le \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \le M(q-p) \tag{10}$$

összefüggést kapjuk. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az f grafikonja alatti terület két olyan téglalap területe közé esik, amelyek közös alapja $q-p$, magasságuk pedig m és M (481. ábra).



481. ábra. Az integrál középérték szemléltetése

A (8) helyett pedig

$$\int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)(q-p) \tag{11}$$

összefüggést kapjuk.

Geometriai jelentése: van olyan c pont a p és q között, hogy a $[p,q]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti terület egyenlő a $q-p$ alapú, $f(c)$ magasságú téglalap területével.

Az $f(c)$ számot az f függvény $[p,q]$ *intervallumra vonatkozó közönséges integrálközépértékének* nevezzük, és kiszámítását:

$$f(c) = \frac{1}{q-p}\int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

vagy, mivel $c = p + \vartheta(q-p)$, ahol $0 \le \vartheta \le 1$:

$$f[p+\vartheta(q-p)] = \frac{1}{q-p}\int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le \vartheta \le 1 \tag{12a}$$

integrállal végezzük.

2. A (12*a*) felhasználásával igazolhatjuk, hogy az integrálás a differenciálás inverz művelete.

Ui. legyen az f folytonos függvény integrálja F, azaz $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Mivel $F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$, a (12*a*) szerint pedig $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \Delta x \cdot f(x+\vartheta\Delta x)$,

így $$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x+\vartheta\Delta x).$$

A bal és jobb oldal határértékét véve:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\vartheta\Delta x) = f(x)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az integrál felső határa szerinti deriváltja megegyezik

az integrandus felsőhatárral képzett helyettesítési értékével, azaz ha $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, akkor

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x) \qquad (12b)$$

Példa: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x-\sin\frac{\pi}{2})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x-1)=\cos x.$

3. A műszaki gyakorlatban az ún. *négyzetes integrálközép-érték* is használatos:

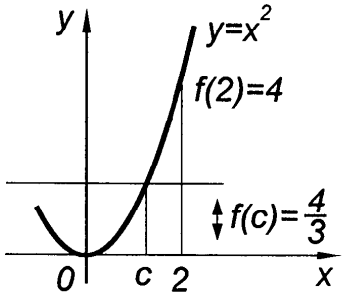
$$Q=\sqrt{\frac{1}{q-p}\int_p^q (f(t))^2\,\mathrm{d}t} \qquad (13)$$

Példa: Határozzuk meg az $y=x^2$ egyenlettel adott függvény $[0,2]$ intervallumához az $f(c)$ értékét (482. ábra).

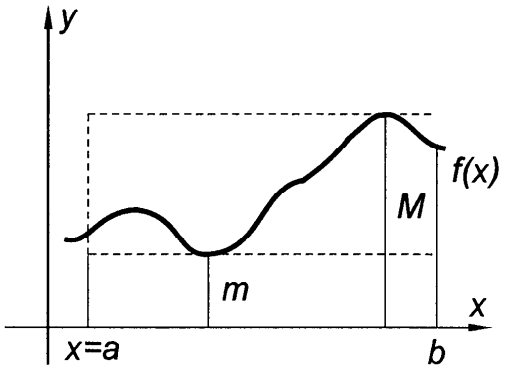
Megoldás:

$$f(c)=\frac{1}{2-0}\int_{x=0}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-0\right)=\frac{4}{3},\ \text{és mivel}$$

$c^2=\frac{4}{3}$, így $c=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



482. ábra. Másodfokú parabola



483. ábra. Határozott integrál becslése

6. Tétel. *A határozott integrál becslése.* Legyen $f \in C(S)$ és $x \in [a,b]$. Ha az adott intervallumban a függvény minimumát és maximumát megszorozzuk az intervallum hosszával, akkor a határozott integrál értékét ez a szorzat közrefogja (l. az 5. tételt):

$$m(b-a) \leq \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a) \tag{14}$$

ahol az $f(x)$ függvény $[a,b]$ intervallumbeli minimuma m, maximuma M (483. ábra).

Bizonyítás

Az $\int_{x=a}^{b} (M-f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$, mert az integrandus ≥ 0, és az $\int_{x=a}^{b} (m-f(x))\,\mathrm{d}x \leq 0$, mert az integrandus ≤ 0, ezért

$$\int_{x=a}^{b} M\,\mathrm{d}x - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \text{ azaz } M(b-a) \geq \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ és}$$

$$\int_{x=a}^{b} m\,\mathrm{d}x - \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0, \text{ azaz } m(b-a) \leq \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ tehát}$$

$$m(b-a) \leq \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Az integrál becslése annál élesebb, mennél kisebb az integrációs intervallum, és mennél kevésbé tér el az $y = f(x)$ görbe egy x-tengellyel párhuzamos egyenestől.

Megjegyzés: Ha f, g, h integrálható függvények az $a \leq x \leq b$ intervallumban és eleget tesznek az $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ egyenlőtlenségnek, akkor

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{b} h(x)\,\mathrm{d}x \tag{14a}$$

Ezt az egyenlőtlenséget jól használhatjuk, ha g integrálja nem ismert vagy nehezen számítható ki, de f és h integrálja ismert vagy könnyen meghatározható.

Példák

1. Becsüljük meg az $\int_{x=4}^{9} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ integrált (484. ábra).

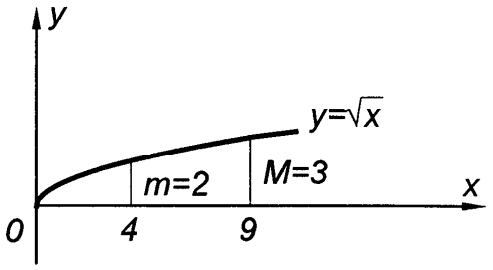
Megoldás: Mivel a függvény a $[4,9]$ intervallumban monoton nő, ezért

$m=\sqrt{4}=2,\ M=\sqrt{9}=3,$

$b-a=5,$ tehát

$2\cdot 5 \le \int_{x=4}^{9} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \le 3\cdot 5,$ vagyis

$10 \le \int_{x=4}^{9} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \le 15.$



484. ábra. Parabola

Közelítőleg: $T \approx \frac{10+15}{2} = 12{,}5$ területegység. (A pontos érték 12,6 te.)

2. Becsüljük meg az $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ határozott integrál értékét.

Megoldás: Mivel a $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban a függvény monoton csökken, ezért

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},\quad M=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \text{ és } b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}, \text{ tehát}$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \le \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}, \text{ vagyis } 0{,}5=\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7.$$

Jelölje a $C^1(S)$ az S intervallumon értelmezett egyszer folytonosan deriválható függvények halmazát.

7. Tétel. *Parciális integrálás* (szorzatintegrálás). Ha $f,g \in C^1(S)$, és $x \in S$, akkor

$$\left[f(t)\,g(t)\right]_a^x = \int_a^x f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (15)$$

Bizonyítás: Az $(f\cdot g)'=f'g+fg'$ mindkét oldalát integrálva a-tól x-ig a (15) képlet adódik. A feltétel értelmében $f,g\in C(S)$ is fennáll, így $f'g$, fg' és $(f\cdot g)'$ is eleme a $C(S)$ halmaznak, vagyis az integrálok mindegyike létezik.

A parciális integrálás (15) képletét általában

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\left[f(t)g(t)\right]_a^x-\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (16)$$

ill. rövidebb jelöléssel

$$\int_a^x f\,\mathrm{d}g=\left[fg\right]_a^x-\int_a^x g\,\mathrm{d}f \qquad (16a)$$

alakban alkalmazzuk.

Példák

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x=?$

Megoldás: Legyen $f=x$, és $\mathrm{d}g=\cos x\,\mathrm{d}x$, akkor $\mathrm{d}f=f'\mathrm{d}x=1\cdot\mathrm{d}x$ és $g=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x$ (a tetszőleges állandót itt elhagyjuk, határozott integrálhoz képeztük a primitív függvényt), tehát

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1-0\right)-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

2. $\int_{x=0}^{1} xe^x\mathrm{d}x=?$

Megoldás: $f=x$, $\mathrm{d}g=e^x\mathrm{d}x$, és $\mathrm{d}f=\mathrm{d}x$, $g=e^x$, tehát

$$\int_{x=0}^{1} xe^x\mathrm{d}x=\left[xe^x\right]_0^1-\int_{x=0}^{1}e^x\mathrm{d}x=e-(e-1)=1.$$

A parciális integrálás képlete *határozatlan integrálra*:

$$\int f\,\mathrm{d}g=fg-\int g\,\mathrm{d}f \quad \text{ill.} \quad \int fg'\mathrm{d}x=fg-\int gf'\mathrm{d}x \qquad (17)$$

ahol a konstansok benne vannak a határozatlan integrálokban.

Általában a parciális integrálás képletét a következő módon alkalmazzuk: az integrál alatti kifejezést előállítjuk két tényező, f és $\mathrm{d}g$ (vagy f és $g'\mathrm{d}x$) szorzataként, majd meghatározzuk g-t: $g=\int \mathrm{d}g$ (vagy $g=\int g'\mathrm{d}x$); és meghatározzuk az $\int g\,\mathrm{d}f$ integrált (vagy $\int f'g\,\mathrm{d}x$-et). Megeshet, hogy az eredeti integrált nem tudjuk meghatározni vagy csak fáradságos munka árán, viszont az előállított új integrált valamely ismert módszerrel könnyen kiszámíthatjuk. Ha az átalakítást így sikerül elvégezni, célunkat elértük. Gyakran előfordul, hogy $\int g\,\mathrm{d}f$-re (vagy $\int f'g\,\mathrm{d}x$-re) ismét alkalmazni kell a parciális integrálás képletét.

Példák

1. $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Legyen $f=\ln x$ és $\mathrm{d}g=x^2\mathrm{d}x$, akkor

$$\mathrm{d}f=\frac{\mathrm{d}x}{x};\quad g=\int \mathrm{d}g=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3},\ \text{tehát}$$

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C=\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C.$$

2. $\int xe^{ax}\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Legyen $f=e^{ax}$ és $\mathrm{d}g=x\,\mathrm{d}x$, akkor $\mathrm{d}f=ae^{ax}\mathrm{d}x$ és $g=\frac{x^2}{2}$,

tehát $\int xe^{ax}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}e^{ax}-\int\frac{ax^2}{2}e^{ax}\mathrm{d}x=\frac{x^2e^{ax}}{2}-\frac{a}{2}\int x^2e^{ax}dx.$

Azt tapasztaljuk, hogy a fenti választás mellett a kapott integrandus $\left(x^2e^{ax}\right)$ még összetettebb, mint az eredeti xe^{ax}, tehát rosszul választottuk meg a tényezőket. A fenti választás helyett legyen $f=x$ és $\mathrm{d}g=e^{ax}\mathrm{d}x$, akkor $\mathrm{d}f=\mathrm{d}x$ és $g=\int e^{ax}\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a}$, tehát

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x=x\frac{e^{ax}}{a}-\int\frac{e^{ax}}{a}\mathrm{d}x=\frac{xe^{ax}}{a}-\frac{e^{ax}}{a^2}+C=\frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)+C.$$

Érdemes megjegyezni, hogy *könnyebben integrálható függvényre* csak f és $\mathrm{d}g$ helyes megválasztásával juthatunk.

3. $\int x^2 e^{ax}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Legyen $f = x^2$ és $\mathrm{d}g = e^{ax}\mathrm{d}x$, akkor

$$\mathrm{d}f = 2x\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad g = \int e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}, \quad \text{tehát}$$

$$\int x^2 e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int x e^{ax}\mathrm{d}x.$$

Az utolsó tagra még egyszer kell alkalmazni a parciális integrálás formuláját, amelynek eredménye, mint az előző példában láttuk:

$$\int x e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C, \quad \text{tehát}$$

$$\int x^2 e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\cdot\frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$$

4. $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Legyen $f = \ln x$ és $\mathrm{d}g = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, akkor $\mathrm{d}f = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ és $g = \ln x$, tehát

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.$$

Látjuk hogy a kiinduló integrálra jutottunk, ezt az egyenlőséget $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$-re, mint egyismeretlenes algebrai egyenletet megoldjuk:

$$2\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = (\ln x)^2 + C_1, \quad \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \quad \left(\text{ahol } C = \frac{C_1}{2}\right).$$

Megjegyzés: Néha a többszöri parciális integrálás is az eredeti integrálra vezet vissza. Ezzel egyszer semmitmondó azonosságot kapunk, máskor pedig olyan egyenletet, amelyből a keresett integrál meghatározható.

8. Tétel. *Integrálás helyettesítéssel.* A $g \in \mathrm{C}^1(S_0)$ monoton függvényre teljesüljön a $g(p) = a$ és a $g(q) = b$ egyenlőség. Ha $f \in C^1(g(S_0))$, akkor

$$\int_{t=p}^{q} f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

Bizonyítás: A bal oldali integrál létezik, mivel $f \circ g$ folytonos, a g'-ről feltettük, hogy folytonos, így szorzatuk is folytonos, tehát az alaptétel szerint van integrálja. Az alaptétel szerint f-nek is van integrálja, jelöljük ezt F-fel, azaz $f = F'$. Ekkor

$$\int_{t=p}^{q} f\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=p}^{q} F'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=p}^{q} \big(f\circ g\big)'(t)\,\mathrm{d}t =$$

(láncszabály)

$$= \big[(F\circ g)(t)\big]_p^q = F\big(g(q)\big) - F\big(g(p)\big) = F(b) - F(a) = \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(10.1 pont (4) és $(F\circ g)'$ folytonos)

Példa: $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Helyettesítsünk x helyébe olyan függvényt, amelynek segítségével négyzetgyök mentes integrálható intengrandust állítunk elő:

$$x = \sin t,\quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Számítsuk ki az új változónak megfelelő határokat:

ha $x = 0$, akkor $0 = \sin t$, és ebből az alsó határ: $t = 0$;

ha $x = 1$, akkor $1 = \sin t$, és ebből a felső határ: $t = \frac{\pi}{2}$, tehát

$$\int_{x=0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big[t\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{4}.$$

A helyettesítés módszere határozatlan integrálra is alkalmazható: ha feltesszük, hogy $F'(x) = f(x)$ és az $x = g(t)$ az S intervallumon differenciálható, és itt létezik az $F\big(g(t)\big)$ összetett függvény, akkor a helyettesítés módszerének képlete:

$$\int f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Big(= F\big(g(t)\big) + C\Big). \qquad (19)$$

Általános szabály az $x = g(t)$ megválasztására nem adható, a lényeges szempont, hogy a helyettesítés elvégzése után kapott integrált egyszerűbben számíthassuk ki, mint az eredetit.

Példák

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = ?$

Megoldás: Helyettesítés: $e^x = t$; $x = \ln t$ és $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, tehát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} = \left[\operatorname{arctg} t + C\right]_{t=e^x} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

2. $\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Helyettesítés: $x = \sin t$, $(-1 \le x \le 1$ és $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$, akkor $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, tehát

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C,$$

és t helyébe visszahelyettesítve az x változó függvényét, $t = \arcsin x$-et:

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2x\sqrt{1 - x^2}, \text{ azaz}$$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + C.$$

3. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás: Szorozzuk a számlálót, nevezőt $\sqrt{1 + x}$-szel:

$$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C,$$

mert $1 - x^2 = t^2$ helyettesítéssel $-2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ és így

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2}} = -\int \mathrm{d}t = -t + C = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = ?$

Megoldás: Helyettesítés: $\cos x = t$ $(|t| < 1)$, akkor $x = \arccos t$ és $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$,

tehát $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} =$$

$$= -\operatorname{arth} t + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

s ha a C-t $\ln K$ alakban vesszük fel $(K > 0)$, akkor a megoldás $\ln \left| K \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$ alakban is felírható.

Megjegyzendő, hogy más átalakítással, helyettesítéssel is megoldhatók a feladatok; pl. az utolsó feladatnál a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel,

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = 2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \text{ tehát}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot 2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \text{ vagy}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = ?$

Megoldás: Helyettesítés: $x = \frac{1}{t}$, akkor $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, tehát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right) = -\int \frac{t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= -\sqrt{1+t^2} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Megjegyzés: Az integrálást megkönnyítő összefüggéseket nyerhetünk, ha a (19) képletben az $F(x)$-et elemi alapfüggvénynek választjuk, és az alapintegrálok táblázatát használjuk, pl.:

$$\int f^n \cdot f' \mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{f'}{f} \mathrm{d}x = \ln|f| + C,$$

$$\int f' \cdot \sin f \, \mathrm{d}x = -\cos f + C,$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \mathrm{d}x = \arcsin f + C,$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int \frac{nx^{n-1}}{x^n + a} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \ln\left|x^n + a\right| + C \qquad \text{stb.}$$

Az összefüggések helyességét deriválással ellenőrizhetjük.

Példák

1. $\int \sin^5 x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^6 x}{6} + C,$
2. $\int \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \ln\left(1+x^2\right) + C,$
3. $\int 2x \cos x^2 \mathrm{d}x = \sin x^2 + C,$
4. $\int \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} \mathrm{d}x = \arcsin 4x + C.$

10.3 Néhány függvénytípus integrálása

***a*) A racionális egész függvény integrálása** tagonkénti integrálással oldható meg:

$$\int \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C.$$

***b*) Racionális törtfüggvények integrálása** résztörtekre bontással.

Ha a $P(x)$ polinom fokszáma kisebb, mint a $Q(x)$ polinomé,

akkor a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *racionális törtfüggvényt valódi*, ellenkező esetben pedig *áltörtfüggvénynek* nevezzük. Minden áltörtfüggvény előállítható egy polinom és egy valódi törtfüggvény összegeként. Ha tehát $P(x)$ fokszáma nagyobb, mint a $Q(x)$ fokszáma, akkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = U(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol $U(x)$ polinom, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ pedig valódi racionális törtfüggvény.

Mivel egy $U(x)$ polinom integrálása egyszerű módon elvégezhető, elegendő a valódi racionális törtfüggvények integrálásával foglalkozni.

Ha a nevezőt gyöktényezős alakban írjuk fel és a konjugált gyököket tartalmazó gyöktényezők szorzatát másodfokú kifejezésekké alakítjuk, vagyis

$$Q(x) = C(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \ldots (x-a_r)^{\alpha_r}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1} \ldots \ldots \left(x^2+b_sx+c_s\right)^{\beta_s},$$

alakra hozzuk, akkor bizonyítható, hogy $\frac{R(x)}{Q(x)}$ a következő módon felbontható ún. *résztörtekre* (*parciális törtekre*):

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1i}}{(x-a_1)^i} + \ldots + \sum_{j=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rj}}{(x-a_r)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1}\frac{B_{1k}x+C_{1k}}{\left(x^2+b_1x+c_1\right)^k} + \ldots + \sum_{l=1}^{\beta_s}\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{\left(x^2+b_sx+c_s\right)^l},$$

ahol az indexszel ellátott A, B, C betűk megfelelő valós számokat jelölnek. Ezek értéke az ún. *együtthatók egyeztetése* (*határozatlan együtthatók*) *módszerével* határozhatók meg, amelyet négy típuspélda kapcsán mutatunk be.

1. típus. A nevezőben csak valós és egyszeres gyökök fordulnak elő.

Pl.: $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x} = ?$

Megoldás: A nevező gyöktényezős alakja:

$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = x(x-1)(x+2)$, mivel

$x^2+x-2=0$ egyenlet gyökei: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Tehát: $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$.

Minthogy ez azonosság, a jobb oldal közös nevezőre hozása után a számlálók

$$2x+3 \equiv A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \qquad (*)$$

azonosságából következik, hogy az egyenlő kitevőjű x-ek együtthatói a jobb és a bal oldalon szükségszerűen megegyeznek, s így a

$$2x+3 \equiv (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

azonosságból három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$A+B+C=0,\quad A+2B-C=2,\quad -2A=3.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$A=-\frac{3}{2}$, $B=\frac{5}{3}$, $C=-\frac{1}{6}$, tehát

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}, \text{ és így}$$

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}\right|.$$

Megjegyzés: Egyszeres valós gyökök esetén egyszerűbb módszerrel is meghatározhatók az A, B, C konstansok értékei. A (*) azonosságba helyettesítve $x=0$ értéket, $3=-2A$, azaz $A=-\frac{3}{2}$ adódik. Az $x=1$ helyettesítéssel $5=3B$, vagyis $B=\frac{5}{3}$, és $x=-2$ helyettesítéssel $-1=6C$, azaz $C=-\frac{1}{6}$. Az eredmény, mint látjuk, megegyezik a határozatlan együtthatók módszerével számított értékekkel.

2. típus. A nevező gyökei valósak, de közöttük többszörös gyök is előfordul.

Pl.: $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = ?$

Megoldás: Mivel $x-1$ háromszoros gyöktényező, ezért

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

alakban keressük a részlettörteket. Közös nevezőre hozás után:

$$x^3+1 \equiv A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2 \equiv$$
$$\equiv (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A.$$

Az azonos kitevőjű x-ek együtthatóit egyenlővé téve, négyismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$A+D=1,\ -3A+C-2D=0,\ 3A+B-C+D=0,\ -A=0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2$, tehát

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C = -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C.$$

3. típus. A nevező valós gyökei mellett egyszeres komplex gyökök is előfordulnak.

Pl.: $\int \frac{4\,dx}{x^3+4x} = ?$

Megoldás: Mivel $x^3+4x = x(x^2+4)$, ezért

$$\frac{4}{x^3+4x} = \frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

A jobb oldal közös nevezőre hozása után a számlálók azonossága:

$4 \equiv A(x^2+4) + x(Bx+C) \equiv (A+B)x^2 + Cx + 4A$, s így

$A+B=0,\ C=0,\ 4A=4$, ahonnan $A=1,\ B=-1,\ C=0$, tehát

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^3+4x} = \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x(x^2+4)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+4} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \ln C = \ln\left|\frac{Cx}{\sqrt{x^2+4}}\right|.$$

4. típus. A nevezőben többszörös komplex gyök is előfordul.

Pl.: $\int \frac{(x^3+x^2+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = ?$

Megoldás: Mivel $\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$, ezért

$$x^3+x^2+2 \equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2+2) \equiv$$

$$\equiv Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+B+2D,$$

amiből

$$C=1,\ D=1,\ A+2C=0,\ B+2D=2,$$

vagyis

$$A=-2,\ B=0,\ C=1,\ D=1,$$

tehát

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Megjegyzés: A valódi törtfüggvény résztörtekre bontására nincs minden esetben szükség; néha jól választott helyettesítéssel egyszerűbben kapjuk az integrált.

Pl.: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = ?$

Megoldás. $x^2 = t$ helyettesítéssel $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, tehát

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$$

(l. a 19. alapintegrált.)

c) **Trigonometrikus függvények integrálása.** Ha az integrandus $\sin x$-ben és $\cos x$-ben racionális függvény, akkor a $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ általános helyettesítéssel az integrandust t-ben mindig racionálissá tehetjük. A trigonometriából ismert képletek:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Mivel $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$-ből $x=2\operatorname{arctg} t$, ezért $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Pl.: $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=?$

Megoldás: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ helyettesítésével az integrál alakja:

$$\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{\left(1+t^2+2t\right)2\mathrm{d}t}{2t\left(1+t^2+1-t^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2t+1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Megjegyzés: Ha az ilyen típusú integrálban $\sin x$ és $\cos x$ csak páros hatványon fordul elő, akkor célszerűbb a $\operatorname{tg} x=t$ helyettesítést alkalmazni.

Feladatok

I. Egyszerű átalakítással alapintegrálokra vezető feladatok:

1. $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{1}{2}(x+\sin x).\right]$

2. $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{x^2}{2}+2\ln x-\frac{1}{2x^2}+C.\right]$

3. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.\right]$

II. Az alábbi feladatokat parciális integrálás módszerével oldjuk meg:

1. $\int xe^{-x}\mathrm{d}x.$ $\left[-e^{-x}(x+1)+C.\right]$

2. $\int x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C.\right]$

3. $\int x\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x.$ $\left[x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C.\right]$

4. $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$ $\left[x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+C.\right]$

III. A következő feladatokat új változó bevezetésével oldjuk meg:

1. $\int \frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}x\right|\right)^2+C.\right]$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}.$ $\left[\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.\right]$

3. $\int \frac{\operatorname{ctg}x}{\ln\sin x}\mathrm{d}x.$ $\left[\ln\left|\ln\left|\sin x\right|\right|+C.\right]$

4. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x.$ $\left[-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.\right]$

IV. Racionális törtfüggvények integrálása:

1. $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x+1}.$ [Előbb elvégezzük az osztást, majd tagonként integrálunk.]
$\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln\left|x+1\right|+C.\right]$

2. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-7x+10}.$ $\left[\frac{1}{3}\ln\frac{\left|(x-5)^5\right|}{(x-2)^2}+C.\right]$

3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x.$ $\left[-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C.\right]$

4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x.$ $\left[x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.\right]$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}.$ $\left[\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.\right]$

6. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)}+\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.\right]$

V. Trigonometrikus függvények integrálja:

1. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)+C.\right]$

2. $\int \frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\mathrm{d}x.$ $\left[\ln|\sin x+\cos x|+C.\right]$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}.$ $\left[\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.\right]$

4. $\int \sin 3x\cos x\,\mathrm{d}x.$ $\left[-\frac{1}{8}\left(\cos 4x+2\cos 2x\right)+C.\right]$

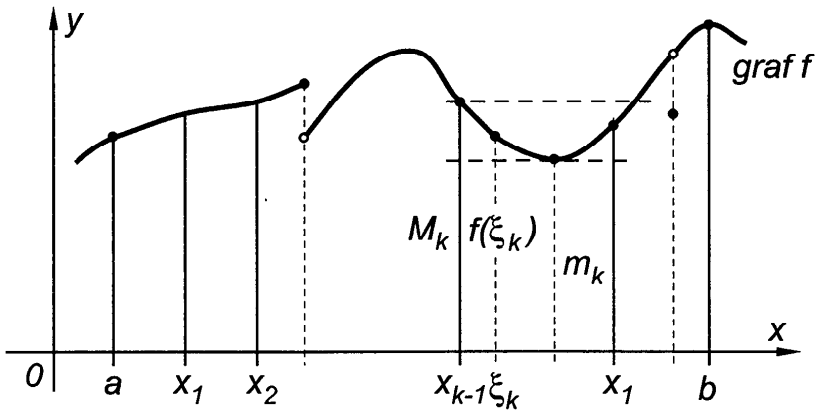
10.4 A határozott integrál, mint határérték

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ zárt intervallumon korlátos függvény (485. ábra). Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$$

osztópontokkal, n számú részintervallumra. Szorozzuk meg mindegyik részintervallum hosszát a benne felvett függvényértékek alsó ill. felső határával és alkossuk meg a felosztáshoz tartozó *A alsó összeget* ill. *F felső összeget*:

$$A=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k, \quad \text{ill.} \quad F=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$



485. ábra. Az alsó- és felső összeg szemléltetése

Itt $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, m_k az $[x_{k-1}, x_k]$ zárt intervallumhoz tartozó függvényértékek alsó határa, M_k pedig e függvényértékek felső határa. Nyilvánvaló, hogy $A \leq F$. Ha az intervallum felosztását finomítjuk, vagyis az osztópontokhoz újabbakat veszünk, akkor az alsó összeg nem csökkenhet, a felső összeg nem nőhet. Ez könnyen belátható, hiszen elegendő egyetlen új osztópontot a régiekhez hozzávenni. Az is könnyen bizonyítható, hogy tetszőleges felosztáshoz tartozó alsó összeg nem lehet nagyobb, mint bármilyen (más) felosztáshoz tartozó felső összeg.

A felosztás minden határon túli finomításával – f korlátos volta miatt – az *alsó összegek halmazának létezik felső határa*, és a *felső összeg halmazának pedig létezik alsó határa.* Ezeket nevezzük f függvény $[a,b]$-re vonatkozó *Darboux-féle alsó* ill. *felső integrálnak.* A felosztás minden határon túli finomítása azt jelenti, hogy az osztópontok száma minden határon túl nő, és a leghosszabb részintervallum hossza is zérushoz tart.

Ha a *Darboux*-féle alsó és felső integrál megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy a korlátos f függvény az $[a,b]$ intervallumon *Riemann* szerint integrálható.

E közös alsó és felső integrált az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett határozott integráljának (*Riemann* integráljának) nevezzük; jele, és az előbbiek szerinti értelmezése:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Ha a *Riemann*-integrál létezik, akkor az előbbi felosztáshoz tartozó bármely $P = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, téglalap összegnek (integrálközelítő összegnek), ahol $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, szintén van véges határértéke, mivel $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ s így a P téglalapösszeg az alsó és a felső összeg közé esik, azaz $A \le P \le F$, ezért

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

A *korlátos függvény határozott integrálján*, tehát *az integrálközelítő összeg határértékét értjük*, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, (feltéve, hogy létezik véges határérték). Az integrálban szereplő a és b számokat most is az integrálás határainak nevezzük.

Nem minden korlátos függvény integrálható *Riemann szerint.*

Ha a függvény az $[a,b]$ zárt intervallumban korlátos és véges számú hely kivételével folytonos, akkor abban az intervallumban integrálható.

Ebből következik, hogy

zárt intervallumon folytonos függvény ott integrálható.

Az értelmezésből az is következik, hogy ha a függvény értékét véges számú helyen megváltoztatjuk, az nem befolyásolja a függvény integrálhatóságát (vagy nem-integrálhatóságát), sőt az integrál értékét sem.

A téglalapösszeg megalkotásánál az $f(\xi_k)\Delta x_k$ szorzat annak a téglalapnak a területét jelenti, amelynek alapja Δx_k, magassága

pedig $f(\xi_k)$. Az alsó és felső összeg tagjai is téglalapokkal szemléltethetők. Éppen ezért az így értelmezett határozott integrál $f(x) \geq 0$ esetén (a szemlélet alapján) annak a tartománynak a területi mérőszámát (területét) adja, amelyet az x-tengely, az $y = f(x)$ egyenletű görbe, valamint az a és b abszcisszákhoz tartozó ordinátaegyenesek határolnak. Ezt a területet a *görbe alatti területnek* is mondjuk, s ez összhangban van a 10.1 pontban mondottakkal. A határozott integrál tehát jól használható területszámításra. Ezen kívül számos geometriai és technikai alkalmazása van.

A korlátos függvény határozott integrálja és primitív függvénye közötti kapcsolatot az ún. *Newton-Leibniz* szabály fejezi ki.

Legyen az $[a,b]$ intervallumban korlátos és *Riemann* szerint integrálható $f(x)$ függvény egy primitív függvénye $F(x)$, azaz $F'(x) = f(x)$, ha $x \in [a,b]$.A differenciálszámítás középértéktételének felhasználásával igazolható, hogy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b.$$

A határozott integrált tehát most is, mint a folytonos függvény esetén, a primitív függvény (határozatlan integrál) segítségével kiszámíthatjuk.

Feladatok

1. $\int_{a=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 a}{\cos^2 a}\,\mathrm{d}a.$ $\left[2-\frac{\pi}{4}.\right]$

2. $\int_{x=0}^{1} \left(e^x-1\right)^4 e^x\,\mathrm{d}x.$ $\left[0{,}2(e-1)^5.\right]$

3. $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\frac{\pi}{2}-1.\right]$

4. $\int_{x=0}^{e-1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$ $[1.]$

5. $\int_{x=4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x.$ $[7+2\ln 2.]$

6. $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos x+3}.$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.\right]$

7. Határozzuk meg az alábbi függvény középértékét az $[1;1,5]$ intervallumban:

$f(x)=\frac{1}{x^2+x}$. $[\approx 0,3646.]$

10.5 A határozott integrál alkalmazásai

***a)* Síkidomok T területének kiszámítása** a *Descartes*-féle derékszögű koordinátarendszerben a

$$T=\int_{x=a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

képlettel végezhető (l. a 10.2 pontot).

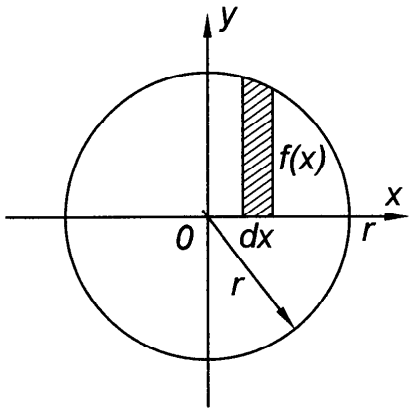
Példák

1. Határozzuk meg az r sugarú kör területét.

Megoldás: A számítást az általánosság megsértése nélkül az origó közepű körre végezhetjük, amelynek egyenlete: $x^2+y^2=r^2$; amiből $y=\sqrt{r^2-x^2}$. (486. ábra). Az első síknegyedbe eső negyedkör területe:

$$\frac{T}{4}=\int_{x=0}^{r}+\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad x=r\sin t$$

helyettesítéssel $\mathrm{d}x=r\cos t\,\mathrm{d}t$.



486. ábra. Kör

Az új változónak megfelelő határok:

ha $x=0$, akkor $t=\arcsin\frac{0}{r}=0$,

ha $x=r$, akkor

$t=\arcsin\frac{r}{r}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.

Tehát

$$\frac{T}{4}=\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,\mathrm{d}t=r^2\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=r^2\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2t)\mathrm{d}t}{2}=$$

$$=\frac{r^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-(0+0)\right]=\frac{r^2\pi}{4},\quad \text{és így } T=4\cdot\frac{r^2\pi}{4}=r^2\pi.$$

2. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis területét.

Megoldás: Sokszor célszerűbb a görbe egyenletét $x=x(t)$, $y=y(t)$ paraméteres alakra átírni. A területszámítás képletét (1)-ből az $y=\big(f(x)\big)=y(t)$, $\mathrm{d}x=\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel kapjuk:

$$T=\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{t=t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere, mint már láttuk,
$x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

Most is elegendő az ellipszis negyed területét kiszámítani:

$\mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t$, a határok pedig $t_1=\frac{\pi}{2}$ és $\mathrm{t}_2=0$.

$$\frac{T}{4}=\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\big(-a\sin t\big)\mathrm{d}t=-ab\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=-ab\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{ab}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{ab\pi}{4} \quad \text{és} \quad T=ab\pi.$$

***b)* A görbe *L* ívhosszának kiszámítása.** Az $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ egyenlettel adott görbe ívhosszát

$$L=\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

képlettel, az $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1\le t\le t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát pedig

$$L=\int_{t=t_1}^{t_2}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

képlettel számítjuk ki.

Példák

1. Számítsuk ki az r sugarú kör kerületét.

Megoldás: A kör egyenletének $x^2+y^2=r^2$ alakjából

$y=\sqrt{r^2-x^2}$, $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, és így a ds ívdifferenciál:

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

A számítást negyed körívre végezve, a határok: $x=0$ és $x=r$, tehát

$\dfrac{L}{4}=\displaystyle\int_{x=0}^{r}\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, az integrál az $x=rt$, $dx=r\,dt$ új változó bevezetésével alapintegrálra vezethető vissza. Az új változónak megfelelő határok: ha $x=0$, akkor $t=0$ és ha $x=r$, akkor $t=r/r=1$; vagyis

$$\frac{L}{4}=r^2\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{r^2-r^2t^2}}=r\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=r\left[\arcsin t\right]_0^1=r\frac{\pi}{2},$$

úgyhogy a kör teljes kerülete: $L=4\cdot\dfrac{r\pi}{2}=2r\pi$.

2. Számítsuk ki az $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ciklois egy ívének hosszát.

Megoldás: $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$.

$$(\dot{x})^2+(\dot{y})^2=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)+a^2\sin^2 t=a^2(2-2\cos t)=$$

$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},\ \text{tehát}$$

$$L=\int_{t=t_1}^{t_2}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt=2a\int_{t=0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2a\left[-\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi}=$$

$$=4a\left(-\cos\frac{2\pi}{2}+\cos\frac{0}{2}\right)=4a(1+1)=8a.$$

Tehát a ciklois egy ívének hossza a gördülő kör sugarának nyolcszorosával egyenlő.

***c)* Forgástestek térfogatának kiszámítása.** Egy r sugarú, m magasságú egyenes körhenger alapkörébe írt n-szög területét jelöljük t_n-nel, a megfelelő köré írt sokszög területét pedig T_n-nel. A t_n, ill. T_n területű sokszögre szerkesztett m magasságú egyenes hasábot a hengerbe beírt, ill. a henger köré írt hasábnak nevezzük. Az előbbi térfogata: $V_b=mt_n$, az utóbbié: $V_k=mT_n$. Ha a henger

térfogatát V-vel jelöljük, akkor $mt_n < V < mT_n$, de $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = r^2\pi$; $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = r^2\pi$, tehát

$$V = mr^2\pi$$

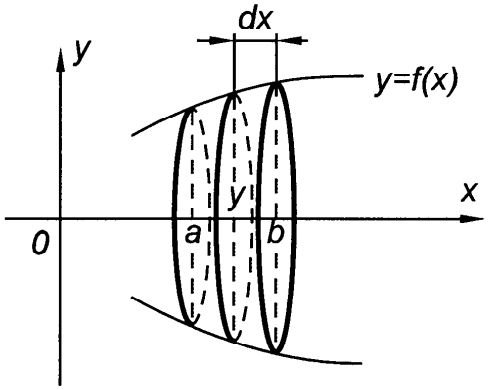
vagyis az egyenes körhenger térfogata az alapkör területének és a magasságának szorzatával egyenlő. Ennek felhasználásával az $y = f(x)$ egyenletű görbe x-tengely körüli forgatásával előállított forgástest V térfogatát az a és b határok között (487. ábra)

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

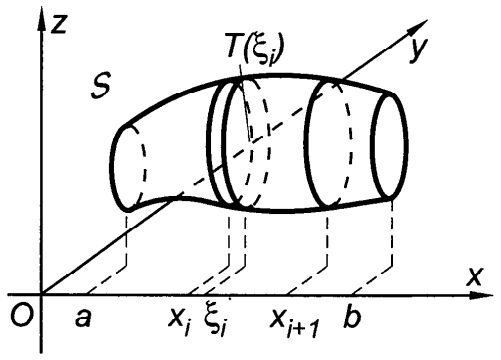
képlettel számíthatjuk, ahol a $\pi y^2(x)\,\mathrm{d}x$ térfogat-elemet az y alapkörsugarú, dx magasságú henger térfogata szolgáltatja.

Ha a görbe az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor $y = y(t)$, $\mathrm{d}x = \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$, tehát

$$V = \pi\int_{t=t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$



487. ábra. Forgástest térfogata



488. ábra. Test térfogata

A tetszőleges zárt felülettel határolt test (488. ábra) térfogatát is ki tudjuk számítani, ha ismerjük egy adott S síkkal párhuzamos és

attól x távolságra levő metszetének $T(x)$ területét. A két szélső metszősík távolsága S-től legyen a és b. Osszuk fel a testet rétegekre az S síktól

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

távolságra haladó metszősíkokkal. Az i-edik réteg térfogatát közelítőleg a $T(\xi_i)$ alapterületű és $(x_{i+1} - x_i)$ magasságú hengerrel adhatjuk meg: $T(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, ha ξ_i az x_i és x_{i+1} között alkalmasan van választva. Az egész réteges test térfogatának értékére a

$$\sum_{i=0}^{n-1} T(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

összeget kapjuk, amelynek határértéke adja a test térfogatát. Az összeg határértéke pedig a

$$V = \int_{x=a}^{b} T(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

integrállal egyenlő.

Példák

1. Számítsuk ki az r alapkörsugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatát.

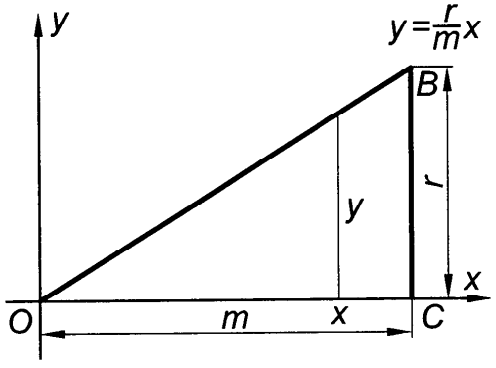
Megoldás: A körkúpot célszerűen a 489. ábrán vázolt OBC derékszögű háromszögnek az x-tengely körüli forgatásával származtathatjuk.

Az OB egyenes egyenlete: $y = \frac{r}{m}x$,

s így a kúp térfogata:

$$V = \pi \int_{x=0}^{m} \frac{r^2}{m^2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{m^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m =$$

$$= \frac{\pi r^2 m^3}{3m^2} = \frac{\pi r^2 m}{3}.$$



489. ábra. Derékszögű háromszög

2. Számítsuk ki az r sugarú gömb térfogatát.

Megoldás: Ha a gömböt az $x^2+y^2=r^2$ kör x-tengely körüli forgatásával származtatjuk, akkor $y=\sqrt{r^2-x^2}$, s így

$$V=\pi\int_{x=-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4r^3\pi}{3}.$$

3. Számítsuk ki az $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ellipszis x-tengely körüli forgatásával előállított ellipszoid térfogatát.

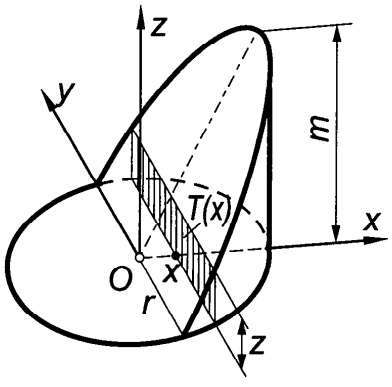
Megoldás: $y^2=b^2\sin^2 t$, $\mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t$, $t_1=\pi$, $t_2=0$, tehát

$$V=-\pi\int_{t=\pi}^{0}ab^2\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-ab^2\pi\int_{t=\pi}^{0}\sin t(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=$$

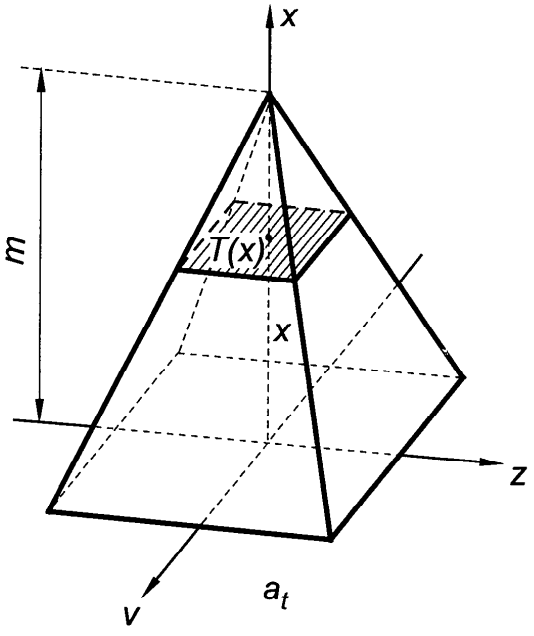
$$=-\pi ab^2\int_{t=\pi}^{0}\left(\sin t-\cos^2 t\sin t\right)\mathrm{d}t=-\pi ab^2\left[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{\pi}^{0}=$$

$$=-\pi ab^2\left(-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}+\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}\right)=$$

$$=-\pi ab^2\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4ab^2\pi}{3}.$$



490. ábra. Hengerszelet



491. ábra. Gúla

4. Számítsuk ki a 490. ábrán vázolt hengerszelet térfogatát.

Megoldás: A henger alapkörének egyenlete: $x^2+y^2=r^2$. A $T(x)$ területű

téglalap alapja: $2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, z magassága az $x:z = r:m$ aránypárból számítható: $z = \frac{mx}{r}$, és $T(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{mx}{r}$. A hengerszelet térfogata (7) szerint

$$V = \int_{x=a}^{b} T(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2m}{r} \int_{x=0}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2m}{3r}\left[\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r =$$

$$= -\frac{2m}{3r}\left(-r^3\right) = \frac{2mr^2}{3}.$$

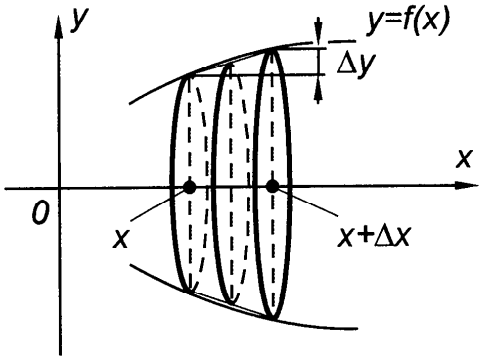
5. Számítsuk ki a 491. ábrán vázolt gúla térfogatát, ha alapterülete a_t, magassága m.

Megoldás: $a_t : T(x) = m^2 : (m-x)^2$, $T(x) = \frac{a_t \cdot (m-x)^2}{m^2}$, tehát

$$V = \int_{x=0}^{m} \frac{a_t (m-x)^2}{m^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a_t}{m^2} \int_{x=0}^{m} (m-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_t}{m^2}\left[-\frac{(m-x)^3}{3}\right]_0^m = \frac{a_t}{m^2}\frac{m^3}{3} = \frac{a_t m}{3}.$$

d) Forgástestek palástjának felszíne

Az $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ egyenlettel adott ív x-tengely körüli forgatásával előálló forgástest palástjának felszínét közelítően a 492. ábrán feltüntetett csonkakúpok palástfelszínének összegével adhatjuk meg.



492. ábra. Forgástest felszíne

Egy csonkakúp palástfelszíne:

$$\Delta F = \frac{2\pi\, y(x) + 2\pi\, y(x+\Delta x)}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \pi\left(y(x) + y(x+\Delta x)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x,$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2},$$

úgyhogy az egész test palástfelszíne:

$$F = 2\pi \int_{x=a}^{b} |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x \tag{8}$$

Ha a görbeív az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor $y = y(t)$, $\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, \mathrm{d}t$ s így a (8) felszínszámítási képlet

$$F = 2\pi \int_{t=t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, \mathrm{d}t \tag{9}$$

alakot ölt.

Példák

1. Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét.

Megoldás: Ha a gömböt az $x^2 + y^2 = r^2$ kör x-tengely körüli forgatásával állítjuk elő, akkor

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{r\, \mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

A határok $x_1 = -r$, $x_2 = r$, tehát

$$F = 2\pi \int_{x=-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \frac{r\, \mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi r \int_{x=-r}^{r} \mathrm{d}x = 2\pi r \left[x\right]_{-r}^{r} = 2\pi r (2r) = 4r^2\pi.$$

2. Számítsuk ki annak a testnek a felszínét, amelyet az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ciklois egyik ívének az x-tengely körüli forgatásakor kapunk.

Megoldás: $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$, $\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, \mathrm{d}t = 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$.

A határok: $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, tehát

$$F = 2\pi \int_{t=0}^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = 4a^2\pi \int_{t=0}^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t =$$

$$= 8a^2\pi \int_{t=0}^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t = 8a^2\pi \int_{t=0}^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= 8a^2\pi\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 8a^2\pi\left(-2(-1)+\frac{2}{3}(-1)+2\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{64}{3}a^2\pi.$$

***e)* Mechanikai és fizikai alkalmazások.** Az alábbiakban a mechanika és a fizika néhány integrálszámítással kapcsolatos képletét közöljük.

1. Homogén síkrész elsőrendű vagy statikai nyomatéka az x-tengelyre:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} y^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

az y-tengelyre:

$$M_y = \int_{x=a}^{b} x\,y(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

Homogén lemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} x\,y(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} y(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_{x=a}^{b} y^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} y(x)\,\mathrm{d}x} \tag{12}$$

2. Homogén görbeív elsőrendű vagy statikai nyomatéka:

$$M_x = \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$M_y = \int_{x=a}^{b} x\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Az ívsúlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} x\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} \sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}, \qquad y_s = \frac{\int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} \sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x} \tag{15}$$

3. A homogén forgástest elsőrendű vagy statikai nyomatéka az (y,z)-síkra, ha az x-tengely a forgástengely:

$$M_{yz} = \pi \int_{x=a}^{b} x\,y^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

A forgástengelyen levő súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} x\,y^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} y^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{17}$$

4. Homogén forgásfelület elsőrendű vagy statikai nyomatéka az (y,z)-síkra (a forgástengely az x-tengely):

$$M_{yz} = 2\pi \int_{x=a}^{b} x\,y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

A forgástengelyen levő súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int_{x=a}^{b} x\,y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x} \tag{19}$$

Példák

1. Számítsuk ki a negyed körlap súlypontját.

Megoldás: Az $x^2+y^2=r^2$ körre végezve a számítást, (10) szerint

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{x=a}^{b}y^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{r^3}{3}.$$

(11) szerint:

$$M_y=\int_{x=a}^{b}x\,y(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r=\frac{r^3}{3},$$

mint ez várható volt. Mivel a negyed körlap területe $\frac{r^2\pi}{4}$, (12) szerint:

$$x_s=\frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2\pi}{4}}=\frac{4r}{3\pi},\quad y_s=\frac{4r}{3\pi}.$$

2. Számítsuk ki az $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ellipszis x-tengely feletti fél lapjának súlypontját.

Megoldás: A (10), (11) és (12) formulákat értelmezés szerint átírhatjuk paraméteres egyenletrendszerrel adott görbék esetére:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{x=a}^{b}y^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{t=t_1}^{t_2}y^2(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t=\pi}^{0}b^2\sin^2 t(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{2}ab^2\int_{t=\pi}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}ab^2\left[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_\pi^0=\frac{2ab^2}{3}.$$

Mivel az ellipszis félterülete $\frac{ab\pi}{2}$, ezért

$$y_s=\frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{ab\pi}{2}}=\frac{4b}{3\pi},\quad x_s=0\ \text{(az}\ y\text{-tengelyre vonatkozó szimmetria miatt).}$$

3. Határozzuk meg az $y=\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ láncgörbe $x_1=-1$ és $x_2=1$ közötti ívének súlypontját.

Megoldás

$$M_x = \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{x=-1}^{1}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=-1}^{1} = 1+\frac{e^2-e^{-2}}{4} \approx 2{,}815.$$

$$L = \int_{x=a}^{b}\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{x=-1}^{1} = e-e^{-1} \approx 2{,}350.$$

$$y_s = \frac{M_x}{L} \approx \frac{2{,}815}{2{,}350} \approx 1{,}21, \quad x_s = 0 \text{ (az } y\text{-tengelyre szimmetrikus).}$$

Megjegyzés: A számításokat hiperbolikus függvények felhasználásával is elvégezhetjük ($y = \operatorname{ch}x$; $y' = \operatorname{sh}x$):

$$M_x = \int_{x=a}^{b} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}2x}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{sh}2}{2}+1-\left[\frac{\operatorname{sh}(-2)}{2}-1\right]\right\} =$$

$$= 1+\frac{\operatorname{sh}2}{2} \approx 1+\frac{3{,}63}{2} \approx 2{,}815.$$

$$L = \int_{x=a}^{b}\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{sh}x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{sh}1-\operatorname{sh}(-1) = 2\operatorname{sh}1 \approx 2\cdot 1{,}175 = 2{,}350.$$

4. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x>0$ ellipszisív x-tengely körüli forgatásával előállított fél ellipszoid súlypontját.

Megoldás: $y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Határok: $x=0$ és $x=a$, tehát (16) szerint:

$$M_{yz}=\pi\int_{x=a}^{b}xy^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi b^2\int_{x=0}^{a}x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi b^2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a=\frac{\pi b^2a^2}{4}.$$

A fél ellipszoid térfogata: $\frac{2ab^2\pi}{3}$; és $x_s=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{\frac{\pi b^2a^2}{4}}{\frac{2ab^2\pi}{3}}=\frac{3}{8}a.$

5. Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ egyenletű parabola $(0\le x\le 2)$ ívének az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgási paraboloidfelület súlypontját.

Megoldás: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x,$

$$M_{yz}=2\pi\int_{x=a}^{b}xy(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{x=0}^{2}x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi\int_{x=0}^{2}x\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Helyettesítés: $x+\frac{1}{4}=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

Határok: ha $x=0$, akkor $t=\frac{1}{2}$, ha $x=2$, akkor $t=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$, tehát az integrál:

$$M_{yz}=2\pi\int_{t=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}2\left(t^2-\frac{1}{4}\right)t^2\,\mathrm{d}t=4\pi\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{12}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\approx 4\pi\cdot 1{,}2417$$

és (8) szerint:

$$F=2\pi\int_{x=0}^{2}\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{x=0}^{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\approx$$

$$\approx 2\pi\cdot 2{,}1667,\ \text{tehát}\ x_s=\frac{M_{yz}}{F}=\frac{4\pi\cdot 1{,}2417}{2\pi\cdot 2{,}1667}=\frac{2{,}4834}{2{,}1667}\approx 1{,}15.$$

Feladatok

1. Határozzuk meg az $y^2=2px$ egyenletű parabola és az $x=h$ egyenessel határolt síklap területét. $\left[t=\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}.\right]$

2. Határozzuk meg az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ciklois egy íve és az x-tengely által határolt síklap területét. $\left[T = 3a^2\pi.\right]$

3. Számítsuk ki az $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ görbe $x = \pm a$ egyenesek közé eső ívének hosszát. $\left[L \approx 2{,}35a.\right]$

4. Számítsuk ki az $x = r(\cos t + t\sin t)$, $y = r(\sin t - t\cos t)$ körevolvens ívhosszát a $0 \le t \le \pi$ határok között. $\left[L = \frac{r\pi^2}{2}.\right]$

5. Határozzuk meg az $y = \sin x$ függvény egyik félhullámának az x-tengely körüli forgatásával előállított forgástest térfogatát. $\left[V = \frac{\pi^2}{2}.\right]$

6. Határozzuk meg az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ciklois egy ívének az x-tengely körüli megforgatása által keletkezett forgástest térfogatát. $\left[V = 5a^3\pi^2.\right]$

7. Határozzuk meg az $y^2 = 4ax$ függvénygörbe $0 \le x \le 3a$ ívének az x-tengely körüli megforgatása által keletkezett forgástest felszínét. $\left[F = \frac{56}{3}a^2\pi.\right]$

8. Határozzuk meg az $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ csillaggörbe x-tengely körüli megforgatása által keletkezett forgástest felszínét. $\left[F = \frac{12}{5}a^2\pi.\right]$

9. Határozzuk meg az $y^2 = 4px$ parabola $y \ge 0$ íve, az x-tengely és az $x = h$ egyenes közé eső síkrész súlypontjának koordinátáit. $\left[x_s = \frac{3}{5}h,\ y_s = \frac{3}{4}\sqrt{ph}.\right]$

10. Határozzuk meg az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ciklois egyik ívének súlypontját. $\left[x_s = a\pi,\ y_s = \frac{4a}{3}.\right]$

11. Határozzuk meg az $y = \frac{r}{m}x$, $0 \le x \le m$ egyenesszakasz x-tengely körüli megforgatásával előállított körkúptest súlypontját. $\left[x_s = \frac{3}{4}m,\ y_s = 0.\right]$

12. Határozzuk meg az $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ kör első negyedbeli ívének az x-tengely körüli megforgatásával előállított félgömbfelület súlypontját.

$\left[x_s = \frac{a}{2},\ y_s = 0.\right]$

TIZENEGYEDIK FEJEZET

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

11.1 A differenciálegyenletek fogalma és osztályozása

Vizsgáljuk meg, milyen görbéknél számíthatjuk ki úgy az érintőegyenes iránytangensét, hogy az érintési pont ordinátáját elosztjuk az érintési pont abszcisszájának felével. Röviden azt a választ adhatjuk, hogy minden olyan $y(x)$ deriválható függvénynél, amelyre fennáll a következő egyenlet:

$$\operatorname{tg}\vartheta = y' = \frac{y}{\frac{x}{2}},$$

amiből

$$y' = 2\frac{y}{x} \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x}.$$

Bár a függvényt még nem ismerjük, de a függvény, a deriváltja és a független változó közötti kapcsolatot igen. Ezt a kapcsolatot, a $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ mennyiségeket formálisan tényezőknek tekintve,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (*)$$

alakban is írhatjuk. A felírt egyenletek mindegyike ún. differenciálegyenlet.

Általában az olyan egyenletet, amelyben az állandókon kívül független változók, ezek függvényei és a függvények deriváltja vagy deriváltjai fordulnak elő, *differenciálegyenletnek* nevezzük.

Az $$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

alakú differenciálegyenletet, amelyben csak egyetlen $y(x)$ egyváltozós valós függvény, ennek y', y'', ..., $y^{(n)}$ deriváltjai és x változója lép fel, *közönséges differenciálegyenletnek*, a

$$G\left(u,\, x,\, y,\, z,\, \ldots,\, \frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y},\, \frac{\partial u}{\partial z},\, \ldots,\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\, \ldots\right) = 0 \qquad (2)$$

alakú differenciálegyenletet pedig, amelyben az $u(x, y, z, \ldots)$ egyetlen többváltozós függvény, ennek első, második, ... parciális deriváltjai és $x, y, z, \ldots$ független változói fordulnak elő, *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha az ismeretlen függvények száma egynél több, de mind ugyanazon egyetlen változónak a függvényei, akkor a megoldáshoz annyi differenciálegyenletre van szükség, amennyi az ismeretlen függvények száma. Ezek a differenciálegyenletek együtt *differenciálegyenlet-rendszert* alkotnak. Ha a független változók száma is több, mint egy, akkor *parciális differenciálegyenlet-rendszerről* beszélünk.

Mind a differenciálegyenleteket, mind a differenciálegyenlet-rendszereket az ismeretlen függvény (függvények) előforduló legmagasabb deriváltja (deriváltjai) szerint is osztályozzuk. Így beszélhetünk *első-*, *másod-*, ..., *n-edrendű differenciálegyenletről* vagy *differenciálegyenlet-rendszerről.*

Ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és annak deriváltjai csak első hatványon fordulnak elő, és ezek szorzatai sem szerepelnek, akkor a differenciálegyenletet *lineárisnak*, ellenkező esetben pedig *nemlineárisnak* nevezzük. Ugyanilyen megkülönböztetést alapul véve beszélünk lineáris vagy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerről.

Példák

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; közönséges *elsőrendű lineáris* differenciálegyenlet.

2. $xyy'=1-x^2$; $x\frac{dy}{dx}+y=y^2$; $y=xy'+y'^2$; $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$

közönséges *elsőrendű nemlineáris* differenciálegyenletek.

3. $y''-4y'+4y=e^x$; $x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0$; $y''+3y'+y\sin x=\cos x$

közönséges *másodrendű lineáris* differenciálegyenletek.

4. $y''^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$; $4y'''y''=y$ közönséges *harmadrendű nemlineáris* differenciálegyenletek.

5. $\frac{dx}{dt}=-x+y$, $\frac{dy}{dt}=-y+4z$, $\frac{dz}{dt}=-4z+x$ közönséges *elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer*. (A három egyenlet egyidejűleg fennáll.)

6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ *parciális másodrendű lineáris* differenciálegyenlet.

A továbbiakban csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

11.2 A differenciálegyenlet megoldása

Integráljuk a 11.1 pontban (*)-gal jelölt közönséges elsőrendű lineáris differenciálegyenlet mindkét oldalát (az integrációs konstanst elegendő csak az egyik oldalon kiírni):

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}$$

vagyis

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln|c|,$$

tehát

$$y=cx^2, \qquad (1)$$

ahol c tetszőleges állandó. Helyettesítsük be az (1) függvényt deriváltjával, $y'=2cx$- szel együtt a (*) differenciálegyenletbe:

$$2cx=2\frac{cx^2}{x}, \quad (x\neq 0)$$

így a $2cx=2cx$ azonosság áll elő, ezért az $y=cx^2$ függvényről azt mondjuk, hogy az adott differenciálegyenlet *megoldása* vagy

integrálja, az általa előállított *egyparaméteres görbesereget* (*c* különböző értékeihez tartozó *parabolák seregét*) pedig a *differenciálegyenlet integrálgörbéinek* nevezzük.

(*Figyelem!* Amíg pl. egy algebrai egyenletnél az ismeretlen változó egyenletet kielégítő *értékhalmaza*, addig egy differenciálegyenletnél az egyenletet kielégítő *függvények halmaza* adja a megoldást.)

Általában minden olyan függvényt, amely deriváltjaival együtt a differenciálegyenletet azonosan kielégíti, a differenciálegyenlet megoldásának vagy integráljának, az általa értelmezett görbét pedig a differenciálegyenlet integrálgörbéjének nevezzük.

A közönséges differenciálegyenletek megoldásai között *általános*, *partikuláris* és *szinguláris megoldásokat* különböztetünk meg.

Általános megoldásnak nevezzük azt a függvényt, amely amellett, hogy azonosan kielégíti a differenciálegyenletet, pontosan annyi, – egymástól független – tetszőleges állandót (paramétert, integrációs konstanst) tartalmaz, ahányadrendű a hozzátartozó differenciálegyenlet.

Partikuláris megoldásnak nevezzük azt a függvényt, amely a differenciálegyenletet azonosan kielégíti, és legalább eggyel kevesebb, egymástól független állandót tartalmaz, mint ahányadrendű a differenciálegyenlet.

Szinguláris megoldásnak nevezzük a differenciálegyenlet olyan megoldását, amely egyik pontjában sem tesz eleget az ún. *unicitás feltételének* (l. az 1. tételt).

Amíg a partikuláris megoldásokat az általános megoldás tartalmazza, hiszen az állandók speciális megválasztásával abból származtathatók, addig a szinguláris megoldást az általános megoldás nem tartalmazza, abból az állandók speciális megválasztásával nem származtatható. Az általános és a szinguláris megoldások összessége adja a differenciálegyenlet *teljes megoldását*. Általában az általános megoldást keressük, de pl. a mechanika stabilizációs és a folyamatok elágazási problémáinál a szinguláris megoldások vizsgálata is lényegessé válik.

A továbbiakban ismertetjük, hogy az

$$y' = f(x,y) \tag{2}$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek milyen feltételek mellett létezik egy és csak egy megoldása és összefoglaljuk (2)-re az előzőekben elmondottakat.

1. Tétel. Ha a (2) differenciálegyenletben az $f(x,y)$ függvény és y szerinti parciális deriváltja y szerint folytonos az x,y-sík valamely T tartományában, amelynek (x_0,y_0) egy tetszőleges belső pontja, akkor a (2) differenciálegyenletnek egy és csak egy $y = g(x)$ megoldása létezik, amely eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek. (*Egzisztencia és unicitás tétel. Cauchy-tétele.*)

A tétel geometriailag egyrészt azt mondja ki, hogy létezik megoldás (egzisztencia tétel), másrészt egy és csak egy $y = g(x)$ megoldás létezik (unicitás tétel), amelynek görbéje átmegy az (x_0,y_0) ponton.

A tételben a $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ parciális derivált folytonosságát kívántuk meg, azonban ettől gyengébb feltétel esetén is biztosítva van a megoldás egzisztenciája és unicitása. Ha pl.

az $f(x,y)$ függvény (folytonos a zárt T tartományban és ott) az y változóra nézve kielégíti az

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| < M|y_2 - y_1| \quad (M > 0)$$

ún. *Lipschitz-feltételt*, ahol y_2 és y_1 ugyanahhoz az x értékhez tartó, a tartományban levő pontok ordinátái, akkor egy és csak egy olyan megoldás van, amely átmegy az (x_0,y_0) ponton.

Ha az $f(x,y)$ függvényre a folytonosságon kívül egyéb megszorító feltételt nem szabunk ki, akkor csak azt mondhatjuk, hogy a differenciálegyenletnek van legalább egy olyan megoldása amely

átmegy az (x_0, y_0) ponton (*Peano-tétele*). Ekkor tehát az unicitás nincs biztosítva.

Azt a feltételt, hogy az $x = x_0$ helyen az y-nak a megadott y_0 értéket kell felvennie, *kezdeti feltételnek* nevezzük, melyet

$$y(x_0) = y_0 \text{ vagy } y|_{x=x_0} = y_0 \tag{3}$$

alakban jelölünk.

A (2) elsőrendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldásának* azt a C paramétertől függő

$$y = g(x, C) \tag{4}$$

függvényt nevezzük, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

a) a C paraméter tetszőleges értékére kielégíti a (2) differenciálegyenletet,

b) tetszőleges $(x_0, y_0) \in T$ pont esetén, az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételhez található olyan $C = C_0$ érték, hogy $g(x_0, C_0) = y_0$.

Az általános megoldást gyakran

$$G(x, y, C) = 0 \tag{5}$$

implicit alakban kapjuk, amely y-ra nem fejezhető ki minden esetben elemi függvények segítségével. Az (5) alakot *a differenciálegyenlet általános integráljának* nevezzük.

A (4) általános megoldás az x, y-derékszögű koordinátarendszerben *a sík egyparaméteres görbeseregét állítja elő*. Ezt a görbesereget (2) differenciálegyenlet *integrálgörbéinek* nevezzük.

Az $y = g(x, C_0)$ függvény a (2) differenciálegyenlet *partikuláris megoldása*, ha az a (4) általános megoldásból úgy keletkezett, hogy a tetszőleges C paraméternek C_0 értéket adtunk. A

$$G(x, y, C_0) = 0$$

egyenletet az előzőek értelmében a (2) differenciálegyenlet *partikuláris integráljának* mondjuk. A partikuláris integrál a görbesereg egyetlen görbéjét határozza meg, éspedig azt, amelyik a sík adott pontján áthalad.

A továbbiakban a (2) típusú differenciálegyenlet partikuláris megoldásán nemcsak az $y = g(x, C_0)$ függvényt fogjuk érteni, hanem az ezzel megegyező integrálgörbét is. Így az "(x_0, y_0) ponton áthaladó megoldás" szóhasználattal is élünk.

A differenciálegyenlet megoldásán, más szóval integrálásán tehát az általános megoldás vagy az általános integrál előállítását, ill. ha kezdeti feltétel is adott, akkor a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás előállítását, ill., ha a feltételek megkívánják, akkor a szinguláris megoldás előállítását értjük.

Példák

1. Határozzuk meg a (*) differenciálegyenlet $y(-1) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

Megoldás: Az $y = Cx^2$ általános megoldásba behelyettesítve $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ értékeket, a C meghatározható:

$$1 = C(-1)^2 \quad \text{vagyis} \quad C = 1,$$

és így az $y(-1) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás: $y = x^2$, azaz a $(-1,1)$ pontra illeszkedő origó csúcspontú normálparabola.

2. Tekintsük az $y - xy' - y'^2 = 0$ elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletet.

Általános megoldása: $y = Cx + C^2$ $(C \in R)$, amely egy egyenessereg egyenlete. Pl. az $y = x + 1$, $y = 2x + 4$, $y = -x + 1$ $(x \in R)$ a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, értékek mellett.

A differenciálegyenletnek megoldása az

$$y = -\frac{x^2}{4}, \quad (x \in R)$$

függvény is, amiről behelyettesítéssel egyszerűen meggyőződhetünk, de ez a megoldás nem tartozik az általános megoldás egyenesseregéhez. Ez a függvény az $y = Cx + C^2$ egyenletű egyenessereg burkoló görbéjének egyenlete, *a differenciálegyenlet szinguláris megoldása.*

11.3 Görbesereg differenciálegyenlete

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet általános megoldása, mint azt láttuk az előző pontokban, egy görbesereg egyenlete.

Vajon hogyan állítható elő egy adott görbesereg differenciálegyenlete?

Legyen az $$y = g(x, C) \tag{1}$$ olyan egyparaméteres görbesereg egyenlete, amelyre fennáll, hogy a sík vagy annak egy tartománya bármely pontján a görbeseregnek csak egyetlen görbéje megy át. *A görbesereg differenciálegyenletének nevezzük azt a differenciálegyenletet, amelynek* $y = g(x, C)$ *az általános megoldása.*

Deriváljuk az (1) függvényt x szerint:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'_x(x, C). \tag{2}$$

Mivel a sík bármely pontján a görbeseregnek csak egyetlen görbéje megy át, ezért tetszőleges (x, y) számpárhoz az (1) egyenletből csak egyetlen C határozható meg. Behelyettesítve az így meghatározott C értéket a (2) egyenletbe, megkapjuk a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-et, mint x és y függvényét, s ezzel előállítottuk azt a differenciálegyenletet, amelyet az (1) görbesereg minden függvénye kielégít.

Az (1) görbesereg differenciálegyenlete tehát úgy állítható elő, hogy az

$$\left.\begin{aligned} y &= g(x, C) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= g'_x(x, C) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük a C paramétert.

Ha a görbesereg egyenlete

$$F(x, y, C) = 0$$

implicit alakban adott, akkor

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, C) &= 0 \\ F'_x(x, y, C) + F'_y(x, y, C) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kell a C paramétert kiküszöbölni, hogy a görbesereg differenciálegyenletét megkapjuk.

Példa: Határozzuk meg az $y = \frac{C}{x}$ görbesereg differenciálegyenletét.

Megoldás: Az egyenletet x szerint deriválva: $y' = -\frac{C}{x^2}$.

A görbesereg egyenletéből $C = xy$, melyet a deriváltba helyettesítve:

$y' = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ a görbesereg differenciálegyenletét kapjuk.

11.4 Szétválasztható változójú elsőrendű differenciálegyenlet

Ebben és a további pontokban olyan elsőrendű differenciálegyenlet-típusokat tárgyalunk, amelyek megoldhatók elemi integrációs módszerekkel.

Tekintsük az

$$y' = f(x)\,g(y) \quad \text{azaz} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,g(y) \tag{1}$$

differenciálegyenletet, ahol a jobb oldal egyik tényezője csak x, a másik tényezője csak y függvénye és tegyük fel, hogy $g(y) \neq 0$, akkor az (1) egyenlet

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \tag{1*}$$

alakra hozható. Az (1*) két differenciál egyenlőségének tekinthető, így határozatlan integráljuk csak egy additív konstansban különbözhet egymástól, azaz

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{2}$$

A (2) kifejezés, amely az y megoldást, az x független változót és a C tetszőleges állandót kapcsolja össze, az (1) egyenlet általános integrálja.

Az (1) differenciálegyenlet-típus, amely

$$F(x)\mathrm{d}x + G(y)\mathrm{d}y = 0 \qquad (3)$$

alakban is felírható, *szétválasztható változójú* vagy más szóval *szeparábilis differenciálegyenlet.*

Általános integrálja:

$$\int F(x)\mathrm{d}x + \int G(y)\mathrm{d}y = C.$$

Példák

1. Határozzuk meg a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-x}{y}$ differenciálegyenlet általános és az $y(1) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

Megoldás: A változókat szétválasztva:

$$y\,\mathrm{d}y = (1-x)\,\mathrm{d}x$$

és mindkét oldalt integrálva, (az integrál jelekkel való művelet kijelölést elhagyjuk) kapjuk az általános megoldást:

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} + C_1$$

Rendezve (mindkét oldalhoz adjunk 1-et):

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2C_1 + 1;\ (x-1)^2 + y^2 = 2C_1 + 1.$$

Jelöljük a $2C_1 + 1$ tetszőleges állandót C-vel, akkor: $(x-1)^2 + y^2 = C$ általános megoldás, $C > 0$ esetet tekintve, az $M(1,0)$ középpontú koncentrikus körsereg egyenlete (493. ábra).

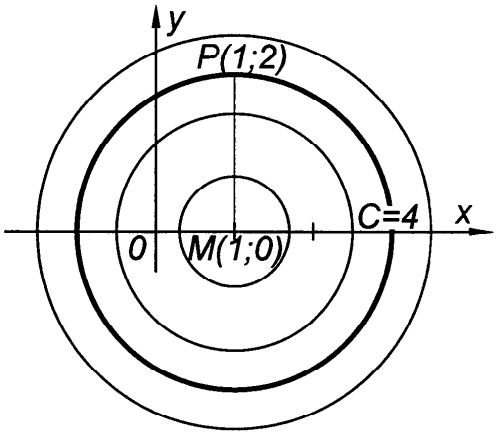
A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldáshoz $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ behelyettesítéssel meghatározzuk C-t:

$$(1-1)^2 + 2^2 = C,\ C = 4$$

s így a partikuláris megoldás, a $P(1,2)$ ponton átmenő integrálgörbe egyenlete:

$$(x-1)^2 + y^2 = 4,\ \text{az } r = 2$$

sugarú, $M(1,0)$ középpontú kör.



493. ábra. Az $y' = \frac{1-x}{y}$ differenciálegyenlet integrálgörbéi

2. Határozzuk meg az $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Felhasználjuk a trigonometrikus függvények addíciós összefüggését:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}.$$

Most már a változók szétválaszthatók:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin\frac{y}{2}}=-2\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x;\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{\sin\frac{y}{2}}=2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{y}{4}\right|+C_1,\ \text{és mivel}$$

$$-2\int\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-4\sin\frac{x}{2}+C_2,\ \text{ezért}$$

$$2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{y}{4}\right|=-4\sin\frac{x}{2}+2\ln C\ \text{ vagyis }\ \mathrm{tg}\frac{y}{4}=Ce^{-2\sin\frac{x}{2}},$$

ami explicit alakban:

$$y=4\,\mathrm{arctg}\left(Ce^{-2\sin\frac{x}{2}}\right).$$

11.5 Néhány szétválasztható változójúra visszavezethető elsőrendű differenciálegyenlet

Az elsőrendű differenciálegyenletek néhány típusa új változó bevezetésével szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethető vissza.

a) A
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c) \tag{1}$$
típusú differenciálegyenlet, ahol a, b és c állandók a $z(x)=ax+by+c$ új változó bevezetésével $\left(y=y(x)\right)$, visszavezethető szétválasztható változójú differenciálegyenletre, ui.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

és az (1) egyenletbe való helyettesítés után

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(z),$$

tehát

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + bf(z), \qquad (1^*)$$

vagy a változókat szétválasztva:

$$\frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} = \mathrm{d}x.$$

Az integrálás után:

$$x = \int \frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} + C$$

alakban nyerjük az általános megoldást.

Példa: Határozzuk meg az $y' = y - 5x + 2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Vezessük be a $z(x) = y - 5x + 2$ új ismeretlen függvényt, akkor $y = z + 5x - 2$ és x szerint deriválva: $y' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 5.$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: z-t és y'-t, a

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 5 = z$$

egyenletet kapjuk. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z-5} = \mathrm{d}x; \quad \ln|z-5| = x + \ln|C| \quad \text{vagyis}$$

$$z - 5 = Ce^x \quad \text{ill.} \quad (y - 5x + 2) - 5 = Ce^x,$$

tehát az általános megoldás explicit alakja:

$$y = Ce^x + 5x + 3.$$

b) Az $f(x,y)$ függvény x és y változók *k-adrendű homogén függvénye*, ha tetszőleges, nullától különböző t érték mellett fennáll az

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y) \qquad \text{azonosság.}$$

A *nulladrendű homogén függvény* az

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

azonosságnak tesz eleget, amely

$$t=\frac{1}{x} \tag{2}$$

helyettesítéssel

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)\equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakban is írható.

Az $y'=f(x,y)$ elsőrendű differenciálegyenletet változóiban *homogén differenciálegyenletnek* nevezzük, ha az $f(x,y)$ függvény az x és y változók nulladrendű homogén függvénye, vagyis

$$y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right) \tag{2*}$$

alakra hozható.

A (2*) homogén differenciálegyenletből

$$u(x)=\frac{y}{x} \quad \text{ill.} \quad y=u\cdot x$$

helyettesítéssel, és

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x+u$$

felhasználásával:

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(1,u)$$

egyenletre jutunk.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(1,u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x};$$

és mindkét oldalt integrálva:

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(1,u)-u}+C=\ln|x|$$

ill. $x = Ke^{\int \frac{du}{f(1,u)-u}}$, ahol $K = e^C$

alakot kapjuk. Az u helyébe $\frac{y}{x}$-et téve, a (2*) homogén differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk, miután integráltunk.

Példa: Határozzuk meg az $(x+y)\mathrm{d}x-(y-x)\mathrm{d}y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Rendezzük:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{y-x}.$$

A jobb oldalon osszuk el a számlálót és nevezőt x-szel $(x\neq 0)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}.$$

Végezzük el az $\frac{y}{x}=u$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ helyettesítéseket:

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u-1};\ \text{rendezve:}\ x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u-1}-u=\frac{1+2u-u^2}{u-1}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{(u-1)\mathrm{d}u}{1+2u-u^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln C,\ \text{szorozva –2-vel és rendezve:}$$

$$\left(1+2u-u^2\right)=\frac{C}{x^2}.$$

Visszahelyettesítve az $u=\frac{y}{x}$-et és rendezve, megkapjuk az általános megoldást:

$$x^2+2xy-y^2=C.$$

c) A

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{3}$$

típusú differenciálegyenlet az $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ tetszőleges állandók értékeitől függően visszavezethető vagy az (1) vagy a (2*) típusú differenciálegyenletre.

Ha $c_1 = c_2 = 0$, akkor nyilvánvaló, hogy a (3) egyenlet változókban homogén differenciálegyenlet, tehát (2*) típusú.

Tegyük fel, hogy a c_1, c_2 konstansok közül legalább az egyik zérustól különböző, akkor két esetet különböztetünk meg annak megfelelően, hogy az

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{és} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

egyenletekkel értelmezett egyenesek metszik-e egymást, azaz

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

vagy párhuzamosak-e egymással, azaz

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

1. Ha $D \neq 0$, akkor kiszámítjuk az egyenes metszéspontjának koordinátáit, (x_1, y_1)-et, és a koordinátarendszer kezdőpontját párhuzamos eltolással a metszésponttal fedésbe hozzuk, vagyis az

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1$$

transzformációs képletet alkalmazzuk, amelyből

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}.$$

A behelyettesítések és rendezés után a (3) egyenlet a

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) \qquad (3^*)$$

alakot veszi fel, amely már homogén differenciálegyenlet.

2. Ha $D = 0$, akkor a két egyenlettel adott két egyenes párhuzamos, s így az x-ek, ill. y-ok együtthatói arányosak egymással:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = h,$$

vagyis $a_1x + b_1y = h(a_2x + b_2y)$, tehát a (3) egyenlet

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{h(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (3^{**})$$

alakra hozható, amely (1) típusú differenciálegyenlet, ui. a jobb oldal $\varphi(a_2x+b_2y)$ jellegű függvény. Így

$$z(x) = a_2x+b_2y$$

új ismeretlen függvény bevezetésével szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk. Ui.

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}, \text{ és ebből } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2}$$

és így a (3**) egyenletbe való helyettesítés után

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2} = f\left(\frac{hz+c_1}{z+c_2}\right),$$

amely szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

Példák

1. Határozzuk meg az $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A $-x+2y-5=0$

$2x-y+4=0$ egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a két egyenes metszéspontjának koordinátáit:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1, \qquad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Tehát a koordinátarendszer kezdőpontját a $P(-1,2)$ pontba toljuk:

$$x = X-1, \quad y = Y+2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}.$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2(Y+2)-(X-1)-5}{2(X-1)-(Y+2)+4}, \quad \frac{dY}{dX} = \frac{2Y-X}{2X-Y} \quad \text{vagy} \quad \frac{dY}{dX} = \frac{2\frac{Y}{X}-1}{2-\frac{Y}{X}}.$$

Az $\frac{Y}{X}=u$, $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$ helyettesítéssel: $u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{2u-1}{2-u}$.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{(2-u)\mathrm{d}u}{u^2-1}=\frac{\mathrm{d}X}{X}.$$

Integrálva:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-1+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln C,\quad |\cdot(-2),$$

$$\ln\left|u^2-1\right|-2\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=-2\ln|X|+\ln C,$$

$$\left(u^2-1\right)\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2=\frac{C}{X^2},$$

$$X^2(u+1)^3=C(u-1).$$

Visszahelyettesítve az $u=\frac{Y}{X}$, $Y=y-2$, $X=x+1$ mennyiségeket, az általános megoldás alakja:

$$(y+x-1)^3=C(y-x-3).$$

2. Határozzuk meg az $(x+y+1)\mathrm{d}x=(2x+2y-1)\mathrm{d}y$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+1}{2x+2y-1},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+1}{2(x+y)-1},\quad \text{vagyis } D=0.$$

Helyettesítés:

$$z=x+y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-1,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-1=\frac{z+1}{2z-1}.$$

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{(2z-1)\mathrm{d}z}{z}=3\mathrm{d}x;\quad 2z-\ln|z|=3x-C.$$

A $z=x+y$ visszahelyettesítése után:

$$2(x+y)-\ln|x+y|=3x-C\quad |\cdot(-1).$$

Az általános megoldás:

$$x-2y+\ln|x+y|=C.$$

11.6 Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Az $$a(x)y'+b(x)y=f(x) \qquad (1)$$
alakú elsőrendű differenciálegyenlet lineáris, mert a keresendő $y(x)$ függvény, valamint deriváltja, $y'(x)$ csak elsőfokon szerepel, és ezek szorzata sem fordul elő, $a(x)\neq 0$, $b(x)$ és $f(x)$ adott folytonos függvények.

Az (1) általános alakot rendszerint elosztjuk az $a(x)\neq 0$ együtthatóval, és

$$y'+p(x)y=r(x) \qquad (2)$$

alakban írjuk, ahol $p(x)$ és $r(x)$ az x változó adott folytonos függvényei. (Egyikük, vagy mindkettő konstans is lehet.)

Ha a (2)-ben $r(x)\equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet homogén:

$$y'+p(x)y=0, \qquad (3)$$

ellenkező esetben inhomogén.

A (3) elsőrendű lineáris homogén egyenlet mindig szétválasztható. A változók szétválasztása után:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{és} \quad \ln|y|=-\int p(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

amelyből az *általános megoldás explicit alakja*:

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \qquad (4)$$

A (2) lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldását Lagrange szerint az állandó variálásának módszerével állíthatjuk elő.

A megoldás menete: A (2) egyenlet jobb oldali $r(x)$ függvényét, az ún. *zavaró tagot* elhagyjuk, és megoldjuk a (2) egyenlethez ilyen módon *hozzárendelt* (3) alakú homogén egyenletet. A (3) egyenlet (4) általános megoldásában a C állandó helyébe egy $C(x)$ ismeretlen függvényt írunk és az

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

kifejezéseket (2) egyenletbe helyettesítve kapjuk a $C(x)$ meghatározására alkalmas differenciálegyenletet:

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = r(x).$$

Összevonás után:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = r(x)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kell C-re megoldani:

$$\mathrm{d}C = r(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

integrálva:

$$C(x) = \int r(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1.$$

A C-re kapott megoldást a (4) homogén egyenletbe helyettesítve megkapjuk a (2) elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C_1 + \int r(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x) \qquad (5)$$

Példák

1. Határozzuk meg $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{ctg}x = 2x\sin x$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás: Előbb a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\operatorname{ctg}x = 0$ homogén egyenletet oldjuk meg:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \operatorname{ctg}x\,\mathrm{d}x;\quad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C$$

tehát a homogén egyenlet általános megoldása: $y = C\sin x$,

Az inhomogén egyenlet megoldását $y = C(x)\sin x$ alakban feltételezve:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\sin x + C\cos x, \text{ s így } \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\sin x + C\cos x - C\sin x \operatorname{ctg} x = 2x\sin x,$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad \mathrm{d}C = 2x\,\mathrm{d}x, \quad C(x) = x^2 + C_1,$$

tehát az adott elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \left(x^2 + C_1\right)\sin x = C_1 \sin x + x^2 \sin x.$$

2. Határozzuk meg az $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ differenciálegyenlet $y_0 = 1$, $x_0 = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást.

Megoldás: Az $y' + y\cos x = 0$ homogén egyenlet általános megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x\,\mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + \ln C, \quad y = Ce^{-\sin x}.$$

Az állandó variálása:

$$y' = C'e^{-\sin x} - Ce^{-\sin x}\cos x,$$

$$C'e^{-\sin x} - Ce^{-\sin x}\cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x},$$

$$C' = 1, \quad \mathrm{d}C = \mathrm{d}x, \quad C = x + C_1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = \left(x + C_1\right)e^{-\sin x}.$$

A kezdeti feltételnek megfelelő C_1 az $1 = (0 + C_1)e^{-\sin 0}$ egyenletből számítható: $C_1 = 1$, és így az adott egyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása:

$$y = \left(x + 1\right)e^{-\sin x}.$$

11.7 Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Az $$y' + p(x)y = r(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \qquad (1)$$

elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletet, amely feltéve hogy $y \neq 0$:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = r(x) \qquad (1^*)$$

alakban is írható, *Bernoulli*-féle differenciálegyenletnek nevezzük.

Az $y^{1-n} = z(x)$ új ismeretlen függvény bevezetésével:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Az (1*) egyenlet a behelyettesítés után az

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)z = r(x)$$

alakot veszi fel, amely a $z(x)$ függvényre nézve már elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása az előző pont (5) képlete szerint:

$$z = y^{1-n} = e^{(n-1)\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C_1 + (1-n)\int r(x)e^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right),$$

tehát az (1) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C_1 + (1-n)\int r(x)e^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1-n}}, \qquad (2)$$

Ha $n > 0$, akkor az $y = 0$ függvény is megoldása (1)-nek.

Példa

1. Határozzuk meg az $y' + 2xy = 2x^3y^3$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás: A differenciálegyenlet nemlineáris, *Bernoulli típusú.* A helyettesítés kényelmesebben elvégezhető, ha y^{-3}-nal szorozzuk az egyenletet:

$y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3$; az $y^{-2} = z(x)$ helyettesítést alkalmazva:

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, amiből $y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{-2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

Behelyettesítve az új $z(x)$ függvényt az egyenletbe, a

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2xz = 2x^3 \quad |\cdot(-2)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 4xz = -4x^3$$ lineáris inhomogén differenciálegyenletre jutunk.

A $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 4xz = 0$ homogén egyenlet általános megoldása: $z = Ce^{2x^2}$.

Az állandó variálásával:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{2x^2}+4xCe^{2x^2}.$$

Az inhomogén egyenletbe való behelyettesítés és összevonás majd integrálás után:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{2x^2}=-4x^3,\quad C=x^2e^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}+C_1,$$

és így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$z=x^2+\frac{1}{2}+C_1e^{2x^2},\quad \text{amiből a } z=y^{-2} \text{ egyenlőség alapján:}$$

$$\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{2}+C_1e^{2x^2},$$

vagyis az adott *Bernoulli*-féle differenciálegyenlet általános megoldása explicit alakban:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+C_1e^{2x^2}}}.$$

Mivel $n=3>0$, ezért $y=0$ is megoldás.

11.8 Riccati-féle differenciálegyenlet

Az $$y'+p(x)y=r(x)y^2+h(x) \qquad (1)$$ elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletet *Riccati-féle differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha $r(x)\equiv 0$, akkor lineáris, ha $h(x)\equiv 0$, akkor *Bernoulli*-féle differenciálegyenletet kapunk. Az általános *Riccati*-féle differenciálegyenlet általában integrálással nem oldható meg, de ha ismeretes az (1) egyenlet egyetlen $y=y_1(x)$ partikuláris megoldása, akkor az $y=z(x)+y_1(x)$ új ismeretlen függvény bevezetésével már az általános megoldás is előállítható. Mi csak ezzel az esettel foglalkozunk.

Legyen az (1) egyenlet egy partikuláris megoldása $y=y_1(x)$, akkor fennáll az

$$y_1' + p(x)y_1 = r(x)y_1^2 + h(x) \qquad (2)$$

azonosság. Vonjuk ki (1)-ből (2) megfelelő oldalát:

$$y' - y_1' + p(x)(y - y_1) = r(x)(y^2 - y_1^2),$$

és vezessük be az $y = z(x) + y_1(x)$ új ismeretlen függvényt, akkor a

$$z' + p(x)z = r(x)z(z + 2y_1)$$

alak áll elő. Rendezve

$$z' + \big(p(x) - 2r(x)y_1\big)z = r(x)z^2 \qquad (3)$$

egyenletre jutunk, amely az új $z(x)$ függvényre *Bernoulli*-féle differenciálegyenlet. Ennek megoldását az előző pontban ismertetett módon kapjuk, az $\frac{1}{z} = u(x)$ új ismeretlen függvény bevezetésével ui. lineáris inhomogén differenciálegyenletet kapunk, amely integrálással megoldható.

Példa

Határozzuk meg az $y' - \frac{y}{x} = y^2 + \frac{1}{x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy egy partikuláris megoldásának típusa $y_1 = \frac{c}{x}$.

Megoldás: A partikuláris megoldásnak a differenciálegyenletet azonosan ki kell elégíteni, tehát y_1-et és $y' = -\frac{c}{x^2}$-et behelyettesítve, c meghatározható:

$$-\frac{c}{x^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{c^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}, \quad c^2 + 2c + 1 = 0, \quad \text{amelyből} \quad c_{1,2} = -1.$$

A partikuláris megoldás: $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Vezessük be az $y = z(x) - \frac{1}{x}$ helyettesítéssel a $z(x)$ új ismeretlen függvényt, amelyből $y' = z' + \frac{1}{x^2}$; ekkor az egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$z' + \frac{1}{x^2} - \left(z - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \left(z - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Elvégezve a műveleteket, és rendezve az egyenletet

$$z'+\frac{z}{x}=z^2, \text{ ill. } z^{-2}z'+\frac{1}{x}z^{-1}=1$$

alakú *Bernoulli*-féle differenciálegyenletet kapunk, amely a $y^{-1}=u(x)$, $-z^{-2}z'=u'$ új ismeretlen függvény bevezetésével a

$$-u'+\frac{u}{x}=1$$

lineáris inhomogén differenciálegyenletté alakul át. A megfelelő homogén egyenlet általános megoldása:

$$u=Cx.$$

Az állandó variálásának módszerét alkalmazva:

$$u'=C'x+C;$$

$$-C'x-C+\frac{Cx}{x}=1, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}, \quad C=-\ln|x|+C_1,$$

$$u=C_1x-x\ln|x|, \text{ de } u=\frac{1}{z}=\frac{1}{y+\frac{1}{x}}, \text{ tehát } \frac{1}{y+\frac{1}{x}}=C_1x-x\ln|x|,$$

és így az adott *Riccati*-féle differenciálegyenlet általános megoldása explicit alakban:

$$y=\frac{1}{C_1x-x\ln|x|}-\frac{1}{x}.$$

11.9 Egzakt differenciálegyenlet

A $$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \qquad (1)$$

egyenletet akkor nevezzük *egzakt differenciálegyenletnek*, ha a $P(x,y)$ és a $Q(x,y)$ függvények folytonosak, deriválhatók, és P függvény y szerinti parciális deriváltja azonosan egyenlő a Q x szerinti parciális deriváltjával, azaz ha

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (2)$$

valamint a $\frac{\partial P}{\partial y}$ és $\frac{\partial Q}{\partial x}$ a tekintett tartományon szintén folytonosak.

Ekkor a $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ kifejezés ún. *teljes differenciál.*

Ha a feltételek teljesülnek, akkor *van olyan kétváltozós* $F(x,y)$ függvény, amelynek x szerinti parciális deriváltja $P(x,y)$-nal, y szerinti parciális deriváltja pedig $Q(x,y)$-nal egyenlő, vagyis

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \tag{3}$$

Ha az $F(x,y)$ függvényt (3) alapján meghatározzuk, akkor az általános megoldást

$$F(x,y) = C \tag{4}$$

alakban kapjuk. Az általános megoldás előállítását a (3) bármelyik egyenletével kezdhetjük. Ha a (3) első egyenletéből indulunk ki, akkor mindkét oldalt x szerint integrálva, az

$$F(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + C(y) \tag{5}$$

egyenletet kapjuk, ahol $C(y)$ ismeretlen függvénye az y-nak. A $C(y)$ függvény (3) második egyenletének felhasználásával határozható meg, ui. (5) y szerinti parciális deriváltjának $Q(x,y)$-t kell adnia:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x\right) + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

ahonnan

$$C(y) = \int\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y = C_1,$$

s így az általános megoldás:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \int\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y = C_1. \tag{6}$$

Ha a (3) második egyenletéből indulunk ki, akkor az általános megoldás:

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\mathrm{d}y + \int\left(P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)\mathrm{d}y\right)\right)\mathrm{d}x = C_2. \tag{7}$$

Példa: Határozzuk meg az $\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(y^3+3x^2y\right)\mathrm{d}y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a (2) feltétel:

$$\frac{\partial\left(x^3+3xy^2\right)}{\partial y}=6xy, \qquad \frac{\partial\left(y^3+3x^2y\right)}{\partial x}=6xy$$

Amint látjuk a (2) feltétel teljesül, ezért

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x^3+3xy^2 \text{ és } \frac{\partial F}{\partial y}=y^3+3x^2y,$$

Az első egyenletből:

$$F(x,y)=\int\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+C(y), \text{ amiből}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2y+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y}=y^3+3x^2y \text{ és ebből } \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y}=y^3, \text{ tehát}$$

$$C(y)=\frac{y^4}{4}+C_1$$

vagyis az általános megoldás:

$$\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C.$$

11.10 Görbesereg burkológörbéje és az elsőrendű differenciálegyenlet szinguláris megoldása

a) *A görbesereg burkológörbéje.* Tekintsük a

$$G(x,y,C)=0 \qquad (1)$$

egyenletet, ahol x és y változók, C paraméter pedig tetszőleges rögzített értéket vehet fel.

Az (1) egyenlet – a C paraméter különböző lehetséges értékeit figyelembe véve – egyparaméteres görbesereg egyenlete.

A *görbesereg burkolója* az a görbe, amely a görbesereg mindegyik görbéjét érinti és amelynek mindegyik pontja érintési pont.

A görbesereg burkolójának $B(x,y)=0$ egyenlete a

$$\left.\begin{aligned} G(x,y,C)&=0\\ \frac{\mathrm{d}G(x,y,C)}{\mathrm{d}C}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

egyenletrendszerből a C kiküszöbölésével állítható elő.

A (2) egyenletrendszerből a C kiküszöbölésével nyert $E(x,y)=0$ lehet a burkoló egyenlete, de a burkológörbén kívül még más görbéket is tartalmazhat. Ha pl. az (1) görbeseregnek kettőspontjai vagy csúcspontjai vannak, akkor az $E(x,y)=0$ egyenlet megadja ezen pontok mértani helyét is. Ebben az esetben $B(x,y)$-t az $E(x,y)$ tényezőként tartalmazza. Az $E(x,y)$ egyenlet előállítása után tehát meg kell győződnünk, hogy az valóban burkoló görbe egyenlete-e vagy sem.

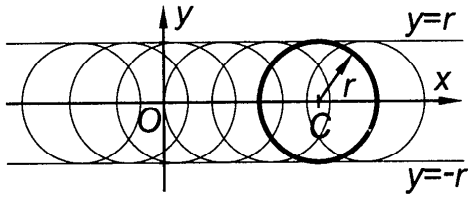
Példa: Határozzuk meg az $(x-C)^2+y^2-r^2=0$ egyparaméteres görbesereg (körsereg) burkolóját.

Megoldás: Deriváljuk az egyenletet C szerint: $-2(x-C)=0$.

A két egyenletből küszöböljük ki a C-t:

$$y^2-r^2=0, \text{ ill. } y=\pm r.$$

Geometriai értelmezés szerint az $y=r$ és $y=-r$ egyenespár a körsereg burkolója (494. ábra).



494. ábra. Az $(x-C)^2+y^2-r^2=0$ görbesereg és burkolója

b) *A differenciálegyenlet szinguláris megoldása.* Legyen az

$$F(x,y,y')=0 \tag{3}$$

differenciálegyenlet általános megoldása a

$$G(x,y,C)=0 \tag{4}$$

egyparaméteres görbesereg. A (4) integrálgörbesereg burkolója a (3) differenciálegyenlet *szinguláris megoldása.* A burkológörbe minden egyes pontjában az érintő iránya megegyező az ugyanazon

ponton keresztül menő (4) egyenletű görbe érintőjének irányával, vagyis a burkoló (x,y) pontja és érintőjének e pontbeli iránya, y', kielégíti a (3) differenciálegyenletet.

A szinguláris megoldás tehát az általános megoldásból a C paraméter változtatásával – mint azt már definiáltuk – nem származtatható, tetszőleges konstanst nem tartalmaz, meghatározása a burkológörbe egyenletének előállítását kívánja meg.

A differenciálegyenletből közvetlenül is meghatározhatjuk általában a szinguláris megoldást. Ui. a burkológörbe bármely pontjában az

$$F(x,y,y')=0 \tag{5}$$

mellett a

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0 \tag{6}$$

is fennáll. A két egyenletből kiküszöbölve y'-t, kapjuk az $E(x,y)$-t, amely vagy tényezőként tartalmazza a $B(x,y)$-t, vagy megegyezhet azzal.

Példa: Határozzuk meg az $(x-C)^2+(y-C)^2=r^2$ körsereg (7)

a) differenciálegyenletét;

b) a (7) görbesereg burkológörbéjét;

c) a differenciálegyenletből követlenül a szinguláris megoldást.

Megoldás

a) A differenciálegyenletet (7)-ből x szerinti deriválással és a két egyenletből a C paraméter kiküszöbölésével kapjuk:

$$2(x-C)+2(y-C)y'=0,\ \text{amelyből}\ C=\frac{x+yy'}{1+y'}.$$

A C-re kapott kifejezést helyettesítsük (7)-be:

$$\left(x-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2+\left(y-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2=r^2.$$

Átalakítások után a differenciálegyenlet alakja:

$$\left((y-x)^2-r^2\right)\left(1+y'^2\right)=2r^2y' \tag{8}$$

b) A (7) görbesereg burkolójának meghatározásához (7)-et C szerint deriváljuk, és a két egyenletből kiküszöböljük C-t:

$-2(x-C)-2(y-C)=0$, és

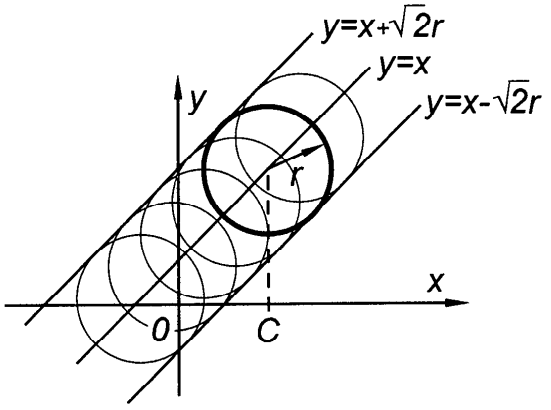
ebből $C=\dfrac{x+y}{2}$.

Helyettesítsük a C-re kapott mennyiséget (7)-be:

$$\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2=r^2,$$

amelyből $y=x\pm\sqrt{2}\,r$.

Geometriai értelmezés szerint a (7) körseregnek a kapott egyenespár valóban burkolója (495. ábra).



495. ábra. Az $(x-C)^2+(y-C)^2=r^2$ körsereg burkolója és a (8) differenciálegyenlet szinguláris megoldása

c) A (8) *differenciálegyenlet szinguláris megoldását közvetlenül* (8)*-ból is megkaphatjuk*, ha y' szerint deriváljuk és a két egyenletből kiküszöböljük az y'-*t*, majd ellenőrizzük, hogy a kapott egyenlet a burkológörbe egyenlete-e, ill. kielégíti-e a differenciálegyenletet.

A (8) differenciálegyenlet y' szerinti deriváltja:

$$\left((y-x)^2-r^2\right)\cdot 2y'=2r^2,\quad \text{amelyből}\quad y'=\frac{r^2}{(y-x)^2-r^2}.$$

Behelyettesítve (8)-ba:

$$\left((y-x)^2-r^2\right)\left(1+\left(\frac{r^2}{(y-x)^2-r^2}\right)^2\right)=2r^2\frac{r^2}{(y-x)^2-r^2}.$$

Rendezve:

$$(y-x)^2-r^2=r^2,\quad \text{amelyből}\quad y=x\pm\sqrt{2}\,r.$$

Látjuk, hogy az eredmény megegyezik a burkológörbe egyenletével. Ellenőrizzük, hogy kielégíti-e a (8) differenciálegyenletet:

Deriváltja: $y'=1$, behelyettesítve a (8)-ba:

$$\left(\left(x\pm\sqrt{2}\,r-x\right)^2-r^2\right)\left(1+1^2\right)=2r^2\cdot 1,\quad \text{azaz}\quad 2r^2=2r^2,$$

tehát a (8) differenciálegyenlet szinguláris megoldása az $y=x\pm\sqrt{2}\,r$ egyenespár.

11.11 Lagrange- és Clairaut-féle differenciálegyenlet

a) Az
$$y = x\varphi(y') + f(y') \tag{1}$$
alakú egyenletet, amely az x-ben, y-ban lineáris és az együtthatók y' ismert függvényei, *Lagrange-féle differenciálegyenletnek* nevezzük.

A *Lagrange*-féle differenciálegyenlet megoldását lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldására vezethetjük vissza, ha az egyenlet x szerinti deriválása után $y' = p$ paramétert helyettesítünk be, és az $x = x(p)$ új ismeretlen függvényt keressük.

Az $y' = p$ helyettesítés elvégzése után kapott
$$y = x\varphi(p) + f(p) \tag{1*}$$
egyenletet deriváljuk x szerint; így adódik
$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + f'(p)\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$
ill.
$$p - \varphi(p) = \left(x\varphi'(p) + f'(p)\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{1**}$$
és átrendezés után a
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{f'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{2}$$
elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk az $x(p)$ függvény meghatározására. A (2) egyenlet $x(p, C)$ általános megoldását (1*) egyenletbe helyettesítve, y-t is a p paraméter függvényeként kapjuk.

A *Lagrange*-féle differenciálegyenlet *általános megoldása* paraméteres alakban:
$$x = x(p, C), \qquad y = x\varphi(p) + f(p) \tag{3}$$
A p paramétert a két egyenletből kiküszöbölve az általános megoldást
$$F(x, y, C) = 0$$
implicit alakban is megadhatjuk.

Az (1**) egyenletből is kaphatunk megoldást, ha van olyan $p = p_0$ konstans, amelyre

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

teljesül, ui. ekkor $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \equiv 0$, és így (1**) egyenlet mindkét oldala zérus. A megoldás lineáris függvénye x-nek, ui. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p_0$, és csak a lineáris függvény deriváltja konstans. Ezt a lineáris függvényt (1*) egyenletnek megfelelően vehetjük fel, $p = p_0$ helyettesítés elvégzésével:

$$y = x\varphi(p_0) + f(p_0).$$

Ha ezt a megoldást az általános megoldás nem tartalmazza, akkor ez az (1) differenciálegyenlet *szinguláris megoldása.*

Példa: Határozzuk meg az $y = xy'^2 + y'^2$ differenciálegyenlet általános és szinguláris megoldását.

Megoldás: Az $y' = p$ helyettesítéssel kapjuk az

$$y = xp^2 + p^2 \qquad (*)$$

alakot; x szerint deriválva:

$$p = p^2 + (2xp + 2p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \qquad (**)$$

Szinguláris megoldást adhat a $p - p^2 = 0$ egyenletet kielégítő $p_0 = 0$ és $p_0 = 1$ érték, amellyel (*) egyenletből az

$y = x \cdot 0^2 + 0^2$, azaz $y = 0$ és az $y = x + 1$

megoldást kapjuk. A két megoldás szinguláris vagy partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek, ennek eldöntését az általános megoldás alapján végezzük.

A (**) egyenletet átrendezve:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - x\frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

egyenletet kapjuk, amely az $x(p)$ változóra lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Általános megoldása:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2} \qquad (***)$$

A (*) és (***) egyenletek együtt a differenciálegyenlet megoldását paraméteres alakban adják. A két egyenletből a p paraméter kiküszöbölésével

$y=\left(C+\sqrt{1+x}\right)^2$ alakban áll elő az általános megoldás.

Ebből könnyen belátható, hogy $y=0$ a differenciálegyenlet szinguláris megoldása, mert kielégíti az egyenletet és az általános megoldásból C semmilyen értéke mellett sem állítható elő; az $y=x+1$ függvény pedig a $C=0$ értékhez tartozó partikuláris megoldás.

b) A *Lagrange*-féle differenciálegyenletnek az a speciális esete, amikor $\varphi(y')\equiv y'$, azaz a differenciálegyenlet

$$y=xy'+f(y') \tag{4}$$

alakú, az ún. *Clairaut-féle differenciálegyenlet.*

Az $y'=p$ jelölés bevezetésével

$$y=xp+f(p), \tag{4*}$$

s ebből x szerinti deriválással a

$$p=p+\left(x+f'(p)\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

ill. a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x+f'(p)\right)=0 \tag{5}$$

differenciálegyenletet kapjuk.

Két eset lehetséges: az *első esetben*

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0, \text{ azaz } p=y'=C.$$

Ezt behelyettesítve (4)-be:

$$y=Cx+f(C) \tag{6}$$

alakban kapjuk az általános megoldást. Ez geometriailag olyan egyenessereget jelent, amelynek C az iránytangense és $f(C)$ az y tengelyből lemetszett szakasz.

A *második esetben*

$$x+f'(p)=0 \text{ vagyis } x=-f'(p),$$

tehát a megoldást az

$$\left.\begin{aligned} y &= xp + f(p) \\ x &= -f'(p) \end{aligned}\right\}$$

paraméteres egyenletrendszer adja, amelyből a p paramétert kiküszöbölve, az

$$F(x,y) = 0$$

szinguláris megoldást kapjuk. A szinguláris megoldás a (6) egyenessereg burkolója. A burkoló egyenletét (6)-ból is megkaphatjuk, ha (6)-ot C szerint deriváljuk

$$x + f'(C) = 0 \qquad (7)$$

és (6)-ból meg (7)-ből kiküszöböljük C-t.

Példa: Határozzuk meg az $y = xy' + y'^2$ differenciálegyenlet általános és szinguláris megoldását.

Megoldás: Az $y' = p$ helyettesítéssel $y = xp + p^2$. x szerint deriválva:

$$p = p + (x + 2p)\frac{dp}{dx}, \text{ amelyből } \frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0.$$

A $\frac{dp}{dx} = 0$ egyenletből $p = C$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Cx + C^2.$$

A szinguláris megoldást az

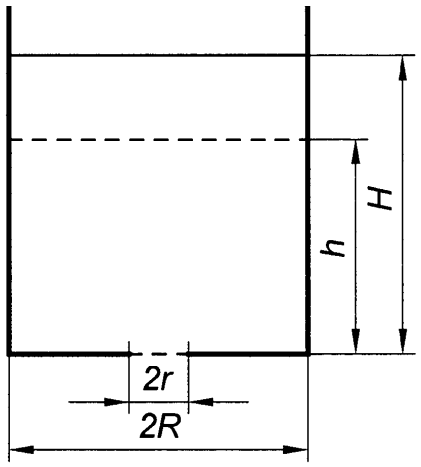
$$\left.\begin{aligned} y &= xp + p^2 \\ x + 2p &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kapjuk a p paraméter kiküszöbölésével. Az így kapott $y = -\frac{x^2}{4}$ parabola az $y = Cx + C^2$ egyenessereg burkolója.

11.12 Példák elsőrendű differenciálegyenletek műszaki alkalmazására

1. Egy R belső sugarú hengeres tartály H magasságig vízzel van megtöltve. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály, ha a vizet a tartály fenekén egy r sugarú, kör alakú nyíláson engedjük ki (496. ábra)?

Megoldás: A kifolyás sebessége, ha a víz h cm magasságú, $v = c\sqrt{2gh}$, ahol a c súrlódási tényező kör alakú nyílás esetén kb. 0,6 ($g = 981\ \mathrm{cm/s^2}$ a nehézségi gyorsulás). A tartály fenekétől mért h távolságú víztükör süllyedésének a sebessége $\left(-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, t \text{ az idő}\right)$ úgy aránylik a kifolyási sebességhez (v), mint a kifolyónyílás keresztmetszete ($r^2\pi$) aránylik a tartály keresztmetszetéhez ($R^2\pi$).



496. ábra. Víztartály

Az elmondott összefüggések alapján felírható a

$$\frac{-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}{v} = \frac{r^2}{R^2}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely a $K = \frac{cr^2}{R^2}\sqrt{2g}$ jelölés bevezetésével $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -K\sqrt{h}$ alakra hozható.

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -K\,\mathrm{d}t,\quad 2\sqrt{h} = -Kt + C_1,\quad \text{ahonnan az idő: } t = -\frac{2}{K}\sqrt{h} + C.$$

A C integrációs konstanst a $t = 0$; $h = H$ kezdeti feltételből meghatározva:

$C = \frac{2}{K}\sqrt{H}$, és így a kifolyás kezdetétől számított idő:

$$t = \frac{2}{K}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

A teljes kifolyáshoz szükséges T időt ebből $h \to 0$ határátmenettel kapjuk:

$$T = \frac{2\sqrt{H}}{K}\,s.$$

2. Egy tartályban 100 liter 8 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba 4 liter/min sebességgel tiszta vizet engedünk, miközben a tartályból 2 liter/min sebességgel oldatot engedünk ki. (Az oldat mindenkori sókoncentrációjának egyenletességét keveréssel biztosítjuk.) Mennyi tiszta só marad az oldatban egy órával a folyamat megkezdése után?

Megoldás: Az oldatban t perc múlva legyen x kg só. Mivel a tartályban ekkor $100 + 2t$ liter oldat van, ezért a sókoncentráció: $\frac{x}{100+2t}$ kg/l.

A tartályba $\mathrm{d}t$ idő alatt 4 $\mathrm{d}t$ liter tiszta víz folyik, és 2 $\mathrm{d}t$ liter oldat folyik ki a tartályból, ami $\frac{2x}{100+2t}\mathrm{d}t$ kg sót visz magával. Így a tartályban levő oldat sótartalmának változása a

$$\frac{2x\,\mathrm{d}t}{100+2t}=-\mathrm{d}x$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlettel adható meg, melynek megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}t}{50+t}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|50+t|=-\ln|x|+\ln C,\quad 50+t=\frac{C}{x},\quad \text{vagyis}\quad x=\frac{C}{50+t}.$$

Az $x=8;\ t=0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás:

$$8=\frac{C}{50},\quad C=400,\quad x=\frac{400}{50+t}.$$

A folyamat megkezdése után egy órával $t=60$ (perc), tehát a tiszta sótartalom:

$$x_0=\frac{400}{50+60}\approx 3{,}6\ \text{kg}.$$

3. Határozzuk meg annak a forgásfelület alakú tükörnek az alakját, amely a forgástengely egy adott pontjából érkező fénynyalábot a forgástengellyel párhuzamosan veri vissza.

Megoldás: Legyen a forgástengely az x-tengely, az adott pont pedig essék egybe a koordinátarendszer kezdőpontjával (497. ábra). Az x,y-sík és a felület metszési görbéjének egyenlete legyen $y=y(x)$.

A fénysugarak visszaverődési törvénye alapján:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}2\vartheta=\frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{1-\operatorname{tg}^2\vartheta},$$

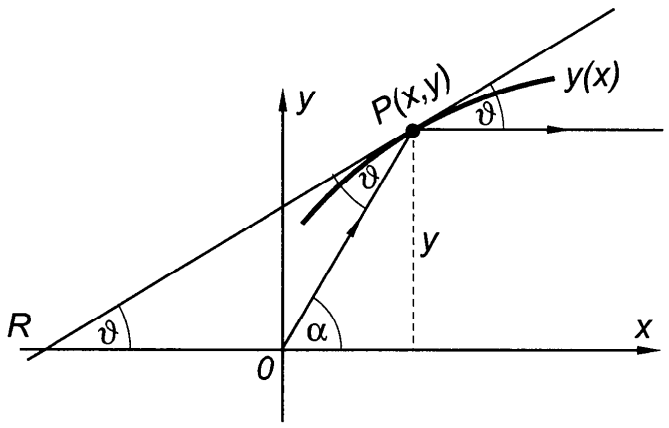
vagyis

$$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-y'},\quad \text{amelyből az}$$

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y},\quad \text{ill.}$$

$$y'=\frac{-1+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}$$

homogén differenciálegyenletet kapjuk.



497. ábra. Forgásfelület alakú tükör meghatározása

A differenciálegyenlet megoldása:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C, \text{ ill. } y^2=2Cx+C^2,$$

tehát egy parabolasereg egyenletét kapjuk, melynek fókusza az origóban van, vagyis a keresett tulajdonságú tükör forgási paraboloid.

4. Az elektrotechnika törvényei szerint egy R ellenállású, L önindukciójú lineáris zárt vezetőben az $E=E(t)$ forrásfeszültség és az $I=I(t)$ áramerősség között az

$$L\frac{\mathrm{d}I}{dt}+RI=E, \text{ vagyis } \frac{\mathrm{d}I}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$$

összefüggés áll fenn. Határozzuk meg e differenciálegyenlet általános és partikuláris megoldását, ha feltételezzük, hogy $E=$állandó, és $t=0$-nál $I=0$.

Megoldás: A homogén lineáris egyenlet megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}I, \quad \frac{\mathrm{d}I}{I}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t; \quad \ln|I|=-\frac{R}{L}t+\ln C, \text{ és így } I=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az állandók variálásával kapjuk az általános megoldást:

$$I=\left(\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C_1\right)e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}+C_1e^{-\frac{R}{L}t}.$$

A partikuláris megoldáshoz $t=0$, $I=0$, kezdeti értéket használva:

$$0=\frac{E}{R}+C_1e^{-\frac{R}{L}\cdot 0}, \text{ amiből } C_1=-\frac{E}{R}, \text{ s így a partikuláris megoldás:}$$

$$I=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right), \text{ amiből azt olvashatjuk ki, hogy a } t=0 \text{ időpillanatban}$$

az áramerősség nulla, majd a t idő növekedésével rohamosan nő az $\frac{E}{R}$ állandó értékhez.

Feladatok

I. Határozzuk meg az adott görbesereg differenciálegyenletét:

1. $y^2=2Cx$. $[-2xy'y=0,\ y\neq 0.]$

2. $y=Ce^x$, $[y'=y.]$

3. A $P(0,0)$ és $Q(q,0)$ pontokon átmenő parabolasereg, melynek tengelye az y-tengellyel párhuzamos.

[Egyparaméteres egyenlete: $y=Cx(x-q)$, $y'x(x-q)-y(2x-q)=0.$]

4. $y=\sin Cx$. $\left[y'=\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\arcsin y.\right]$

II. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1. $x(1+y^2)\mathrm{d}x - y(1+x^2)\mathrm{d}y = 1.$ $\left[y = \sqrt{C(1+x^2)-1}.\right]$

2. $\operatorname{tg} y\,\mathrm{d}x - \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}y = 0.$ $[\sin y \cos x = C.]$

3. $\operatorname{tg} t \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = 5.$ $[x = C\sin t - 5.]$

4. $(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2 y)\mathrm{d}y = 0.$ $\left[1 + y^2 = C(1-x^2).\right]$

5. $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0.$ $\left[2\sqrt{y} - \ln y + 2\sqrt{x} = C.\right]$

6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 2x.$ $\left[y = Ce^x - 2x - 2.\right]$

7. $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1.$ $\left[(x-y)^2 + 2x = C.\right]$

8. $\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x = 2xy\,\mathrm{d}x.$ $\left[y = \sqrt{x(C+x)}.\right]$

9. $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x.$ $\left[Cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}.\right]$

10. $xy' = y(\ln y - \ln x).$ $\left[y = xe^{1+Cx}.\right]$

11. $(6x + y - 1)\mathrm{d}x + (4x + y - 2)\mathrm{d}y = 0.$ $\left[(2x+y-3)^2 = C\left(3x + y - \frac{5}{2}\right).\right]$

12. $y'(y - x + 3) + x - y + 2 = 0.$ $\left[(x-y-3)^2 + 10x = C.\right]$

13. $xy' + y = x^3.$ $\left[y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x^3}{4}.\right]$

14. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = \sin t.$ $\left[x = Ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).\right]$

15. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$ $\left[y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right).\right]$

16. $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x.$ $\left[y = C\cos x - 2\cos^2 x.\right]$

17. $y' + ay = b\sin cx.$ $\left[y = \dfrac{b}{a^2+b^2}(a\sin cx - c\cos cx) + C_1 e^{-ax}.\right]$

18. $y' + y = xy^3.$ $\left[y^2\left(x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}\right) = 1.\right]$

19. $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = x^5 y^2.$ $\left[y\left(\frac{1}{3}x^5 + Cx\right) = 1.\right]$

20. $xy'+y=y^2\ln x.$ $\left[y\left(1+\ln|x|+Cx\right)=1.\right]$

21. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0.$ $\left[y=\frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|.\right]$

22. $y'+y^2=2x^{-2},\ y_1=\frac{c}{x}.$ $\left[c_1=2,\ c_2=-1,\ y=\frac{2x^3-C}{x^4+Cx}.\right]$

23. $x^2y'+(xy-2)^2=0,\ y_1=\frac{c}{x}.$ $\left[c_1=1,\ c_2=4,\ \left(x^4+Cx\right)y=4x^3+C.\right]$

24. $y'+y^2=\frac{4}{x^2}-\frac{y}{x},\ y_1=\frac{c}{x}.$ $\left[c_{1,2}=\pm2,\ y(x^5+Cx)=2x^4-2C.\right]$

25. $y=2xy'+y'^2.$ $\left[x=\frac{C}{p^2}-\frac{3p}{2},\ y=2px+p^2,\ y=0.\right]$

26. $y=xy'+y'-y'^2.$ $\left[y=Cx+C-C^2,\ y=\frac{(x-1)^2}{4}.\right]$

27. $y=x(1+y')+y'^2.$ $\left[x=Ce^{-p}+2(1-p),\ y=x(1+p)+p^2.\right]$

28. $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}.$ $\left[y=Cx+\sqrt{1+C^2},\ x^2+y^2=1.\right]$

29. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{2y\,\mathrm{d}y}{x}=0.$ $\left[x-\frac{y^2}{x}=C.\right]$

30. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0.$ $\left[x+ye^{\frac{x}{y}}=C.\right]$

31. $\left(3x^2y-2x^3+y^3\right)\mathrm{d}x-\left(2y^3-3xy^2-x^3\right)\mathrm{d}y=0.$

$\left[x^3y-\frac{x^4}{2}+y^3x-\frac{y^4}{2}=C.\right]$

32. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél az érintőnek az x- és y-tengelyekből lemetszett szakaszával szerkesztett téglalap területe négyszerese az érintési pont koordinátáival szerkesztett téglalap területének.

[Az $y=y(x)$ egyenletű görbe $P(x,y)$ pontjához húzott érintő egyenlete: $\eta=y'(\xi-x)+y$, ahol az érintő egyenes futó koordinátáit ξ és η jelöli.

A z-tengelyből lemetszett szakasz $\xi=0$ helyettesítéssel: $\eta=-xy'+y.$

Az x-tengelyből lemetszett szakasz $\eta=0$ helyettesítéssel: $\xi=x-\frac{y}{y'}$

A feltételt kielégítő differenciálegyenlet: $\left(x-\frac{y}{y'}\right)(-y'x+y)=4xy$.

Az általános megoldás: $xy=C$.]

33. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél az érintőnek a tengelyek közötti szakaszát az érintési pont két egyenlő részre osztja.

[A feltételt kielégítő differenciálegyenlet: $\frac{x-\frac{y}{y'}}{2}=x$. Általános megoldása: $y=\frac{C}{x}$.]

III. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását:

1. $2y'\sqrt{x}=y,\ x=4,\ y=1.\ \left[y=e^{\sqrt{x}-2}.\right]$

2. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg}x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.\ \left[y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}.\right]$

3. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2},\ y(1)=0,\ \left[y=\frac{x^2-1}{2}.\right]$

4. $t^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2ts-3,\ s(-1)=1.\ \left[s=2t^2+\frac{1}{t}.\right]$

5. $3y^2y'+y^3=x+1,\ y(1)=-1.\ \left[y^3=x-2e^{1-x}.\right]$

6. $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0)=1.\ \left[y=2e^{-\sin x}+\sin x-1.\right]$

7. $t(1+t^2)\mathrm{d}x=\left(x+xt^2-t^2\right)\mathrm{d}t,\ x(1)=-\frac{\pi}{4}.\ [x=-t\operatorname{arctg}t.]$

8. Egy C kapacitású kondenzátort egy R ohmos ellenállással sorbakötve rákapcsolunk egy U feszültségű áramforrásra. A Q töltést a t időpontban az $R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=U$ differenciálegyenlet határozza meg. Határozzuk meg a töltést az idő függvényében, állandó U-t feltételezve, és $t=0$ időpontban Q legyen 0.

$$\left[Q=CU\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right).\right]$$

IV. Határozzuk meg a C paraméterrel adott görbesereg burkológörbéjét:

1. $x\cos C+y\sin C-p=0.\ \left[x^2+y^2=p^2\ \text{kör.}\right]$

2. $y^3-(x-C)^2=0.$

[A C kiküszöbölésével kapott $y=0$ nem a burkológörbe egyenlete, hanem a görbesereg szihguláris pontjainak (csúcspontainak) geometriai helye.]

3. $(y-C)^3=(x-C)^2$.

[A C kiküszöbölésével $y=x$ és $y=x+\frac{4}{27}$ egyenletet kapjuk. Az első egyenlet a szinguláris pontok geometriai helye, a második egyenlet a burkológörbe egyenlete.]

11.13 Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenlet általános ún. *implicit alakja*:

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

a másodrendű deriváltra kifejezett ún. *explicit alakja:*

$$y''=f(x,y,y'). \tag{2}$$

E pontban olyan másodrendű differenciálegyenletekkel foglalkozunk, amelyekben az f függvény argumentumai közül egy vagy kettő hiányzik, ezeket nevezzük *hiányos másodrendű differenciálegyenleteknek.*

I. Ha a másodrendű differenciálegyenletből y és y' hiányzik, akkor (2)-ből az

$$y''=f(x) \tag{3}$$

típusú legegyszerűbb hiányos másodrendű differenciálegyenletet kapjuk, amelynek általános megoldása két egymás utáni integrálással nyerhető.

A (3) első integrálja:

$$y'=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

melynek integrálja szolgáltatja (3) második integrálját és egyben *általános megoldását*:

$$y=\int\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)+C_1x+C_2 \tag{3a}$$

Példa: Határozzuk meg az $y''=a\sin kx$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az első integrál:

$$y'=-\frac{a}{k}\cos kx+C_1.$$

Második integrál, azaz az általános megoldás:

$$y = -\frac{a}{k^2}\sin kx + C_1 x + C_2 .$$

II. Ha a másodrendű differenciálegyenletből csak az y változó hiányzik, akkor (2)-ből az

$$y'' = f(x, y') \tag{4}$$

típusú hiányos másodrendű differenciálegyenletet kapjuk, amelyből az

$$y' = p(x)$$

új ismeretlen függvény bevezetésével a

$$p' = f(x, p) \tag{5}$$

elsőrendű differenciálegyenletre jutunk, ahol

$$y'' = p'.$$

(5)-ből a $p = p(x, C_1)$ meghatározása után az $y' = p(x, C_1)$ elsőrendű differenciálegyenlet integrálásával kapjuk (4) általános megoldását:

$$y = \int p(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2 . \tag{4*}$$

Példák

1. Határozzuk meg az $(1-x^2)y'' + xy' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A differenciálegyenletből az y hiányzik, tehát $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ behelyettesítésével az

$$(1-x^2)p' + xp = 0$$

elsőrendű differenciálegyenletre jutunk, amely szétválasztható változójú:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2},$$

$$\ln|p| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln C_1, \quad p = C_1\sqrt{1-x^2}, \text{ de } p = y', \text{ tehát az}$$

$$y' = C_1\sqrt{1-x^2}$$

elsőrendű differenciálegyenlet megoldása van még hátra.

$$\mathrm{d}y = C_1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x; \text{ és } y = C_1\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

A jobb oldali integrált pl. $x=\sin t$ helyettesítéssel kiszámítva, és $t=\arcsin x$-et visszahelyettesítve, az általános megoldást

$$y=\frac{C_1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C_2 \text{ alakban kapjuk.}$$

2. Határozzuk meg az $y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$ differenciálegyenlet $y(0)=a$; $y'(0)=0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását.

Megoldás: Először az általános megoldást állítjuk elő, majd a két kezdeti feltétel felhasználásával az általános megoldás két paraméterét számítjuk ki.

Az $y'=p(x)$ helyettesítéssel $y''=p'$ és így a

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$$

elsőrendű differenciálegyenletre jutunk, melyből a p függvényt kell meghatározni. A változok szétválasztásával:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a} \quad \text{s ebből} \quad \ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1, \text{ és így:}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}-e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right)+C_2$$

egyenletet kapjuk. Mivel $p=y'$, ezért ismét integrálva megkapjuk az általános megoldást:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}+e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right)+C_2. \text{ (Ez az ún. } \textit{láncgörbe} \text{ egyenlete.)}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldáshoz a C_1 és C_2 értékek meghatározására van szükség:

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=\frac{a}{2}\left(e^{C_1}+e^{-C_1}\right)+C_2=a \\ y'(0)&=\frac{1}{2}\left(e^{C_1}-e^{-C_1}\right)=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből $C_1=C_2=0$ adódik, tehát a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

III. Ha a másodrendű differenciálegyenletből csak az x változó hiányzik, akkor (2)-ből az

$$y''=f(y,y') \qquad (6)$$

típusú hiányos másodrendű differenciálegyenletet kapjuk, amely az

$$y' = p(y)$$

új ismeretlen függvény bevezetésével (p az y függvénye!) elsőrendű differenciálegyenletté alakítható, ui. ekkor

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p,$$

és így (6) alakja

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = f(y,p). \qquad (7)$$

Ha ebből a $p = p(y, C_1)$ függvényt meghatározzuk, akkor (6) általános megoldását a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y, C_1)$$

szétválasztható változójú elsőrendű differenciálegyenlet adja

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0$$

alakban.

Példa: Határozzuk meg az $y'' + \frac{2(y')^2}{1-y} = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az egyenletből az x változó hiányzik. Helyettesítsük az $y' = p(y)$ új ismeretlen függvényt az egyenletbe; akkor $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$ s így a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p + \frac{2p^2}{1-y} = 0$$

elsőrendű differenciálegyenletre jutottunk, amelynek megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{2}{1-y}\mathrm{d}y, \quad \ln|p| = 2\ln|1-y| + \ln C_1,$$

$$p = C_1(1-y)^2.$$

Mivel $p = y'$, ezért

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1(1-y)^2, \quad \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2} = C_1\mathrm{d}x,$$

tehát az általános megoldás:

$$\frac{1}{1-y} = C_1 x + C_2, \text{ ill. explicit alakban: } y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

11.14 Másodrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet

Az $$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

egyenletet, amelyben a_1 és a_2 állandó, *másodrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

A differenciálegyenletek elméleti tankönyveiben bizonyított, hogy ha y_1 és y_2 két olyan partikuláris megoldása (1)-nek, amelyeknek hányadosa nem állandó, azaz $\frac{y_1}{y_2} \neq$konstans, akkor az általános megoldást az

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (2)$$

függvénnyel adhatjuk meg, ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandók.

Az y_1 és y_2 megoldásokat, ha az $\frac{y_1}{y_2} \neq$konstans feltételnek eleget tesznek, *lineárisan függetleneknek* nevezzük.

Az (1) egyenlet partikuláris megoldásait *Euler* eljárása szerint az $y = e^{rx}$ alakban próbáljuk megkeresni; ekkor

$$y' = re^{rx} \text{ és } y'' = r^2 e^{rx}.$$

Az így kapott kifejezéseket helyettesítsük (1)-be:

$$r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0,$$

s mivel $e^{rx} \neq 0$, ezért azzal egyszerűsíthetünk:

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \qquad (3)$$

Ha r kielégíti az így kapott másodfokú algebrai egyenletet,

melyet a továbbiakban *karakterisztikus egyenletnek* fogunk nevezni, akkor $y = e^{rx}$ valóban (1) partikuláris megoldása.

A karakterisztikus egyenlet gyökei alapján három esetet különböztetünk meg.

I. *Két különböző r_1 és r_2 valós gyök esetében*

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ és } y_2 = e^{r_2 x}$$

két egymástól lineárisan független megoldás, ui. $\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x}$ nem állandó mennyiség, mivel $r_1 \neq r_2$. E két megoldás együtt a *differenciálegyenlet alaprendszere.*

Az (1) egyenlet általános megoldása tehát:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \qquad (4)$$

Példa: Határozzuk meg az $y''+2y'-3y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet a differenciál egyenletből közvetlenül felírható, ha a keresendő függvényt és annak deriváltjait r megfelelő hatványaival helyettesítjük (a függvényt 0-ik deriváltnak tekintve):

$r^2 + 2r - 3 = 0$, a másodfokú egyenlet megoldása:

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -3,$$

tehát az alaprendszer: $y_1 = e^x$ és $y_2 = e^{-3x}$, s így az általános megoldás:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

II. *Két egybeeső $r_1 = r_2$ valós gyök esetén* az (1) egyenletnek csak egy partikuláris megoldását kapjuk. Azonban kimutatható, hogy ilyen esetben a másik partikuláris megoldás

$$y_2 = x e^{r_1 x}$$

alakú; ekkor ui.

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}$$

és $$y_2'' = r_1 e^{r_1 x} + r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$$

A deriváltakat behelyettesítve az (1)-be:

$$2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x}+a_1\left(e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x}\right)+a_2xe^{r_1x}=0;$$

rendezve:

$$xe^{r_1x}\left(r_1^2+a_1r_1+a_2\right)+e^{r_1x}\left(2r_1+a_1\right)=0.$$

Mivel a feltétel szerint $r_1^2+a_1r_1+a_2=0$ és a diszkrimináns $a_1^2-4a_2=0$, ezért $r_1=-\frac{a_1}{2}$, amiből $2r_1+a_1=0$ következik, vagyis az egyenlet bal oldala azonosan egyenlő nullával, ami éppen azt bizonyítja, hogy $y_2=xe^{r_1x}$ egy másik partikuláris megoldás.

Tehát két egyenlő valós gyök esetében a lineárisan független két partikuláris megoldás, vagyis az alaprendszer:

$$y_1=e^{r_1x} \text{ és } y_2=xe^{r_1x},$$

és így az általános megoldás:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}. \qquad (5)$$

Példa: Határozzuk meg az $y''-2y'+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: $r^2-2r+1=0$, $r_{1,2}=1$, tehát $y_1=e^x$, és az egybeeső valós gyökök miatt $y_2=xe^x$, s így az általános megoldás:

$$y=\left(C_1+C_2x\right)e^x.$$

III. *Konjugált komplex gyökök esetén* az

$$r_1=\alpha+\beta i \text{ és } r_2=\alpha-\beta i$$

jelölést használva, a két partikuláris megoldás:

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x} \text{ és } y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$$

alakban írható fel, amelyek egymástól lineárisan függetlenek, mivel $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha-\beta i)x}}=e^{2\beta ix}$ nem állandó, hiszen $2\beta i\neq 0$.

Az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}\right). \qquad (6)$$

Ha felhasználjuk a komplex számokra vonatkozó *Euler*-féle képleteket (l. a 7.5 pontot):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

akkor a (6) megoldás valós alakra hozható. Ugyanis

$$C_1 e^{\beta x i} + C_2 e^{-\beta x i} = C_1(\cos\beta x + i \sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i \sin\beta x) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x.$$

A $C_1 + C_2 = K_1$ és $i(C_1 - C_2) = K_2$ jelölés bevezetésével az általános megoldás:

$$y = e^{\alpha x}(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x). \qquad (7)$$

így az új partikuláris megoldások alakja:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x \text{ és } y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

Példa: Határozzuk meg az $y''+6y'+13y = 0$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás

$$r^2 + 6r + 13 = 0, \; r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i, \; r_1 = -3+2i, \; r_2 = -3-2i,$$

és így az általános megoldás (6) szerint:

$$y = e^{-3x}\left(C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}\right), \text{ ill. (7) szerint:}$$

$$y = e^{-3x}(K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x).$$

11.15 Másodrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet

Az $$y''+a_1 y'+a_2 y = r(x) \qquad (1)$$

egyenletet, amelyben az a_1, a_2 állandók, és $r(x)$ adott függvény, *másodrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

Az (1) inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását a következő tételben foglaltak alapján képezhetjük:

Az (1) általános megoldása mindig előállítható, mint az (1) egyenletet kielégítő y_0 partikuláris megoldás és az (1)-hez tartozó

$$Y''+a_1Y'+a_2Y=0 \tag{2}$$

homogén egyenlet $Y=Y(x)$ általános megoldásának összege, azaz

$$y=Y+y_0 \tag{3}$$

Bizonyítás: Deriváljuk (3)-at kétszer:

$$y'=Y'+y_0', \quad y''=Y''+y_0'',$$

és helyettesítsük (2)-be:

$$Y''+y_0''+a_1\left(Y'+y_0'\right)+a_2(Y+y_0)=(Y''+a_1Y'+a_2Y)+\left(y_0''+a_1y_0'+a_2y_0\right).$$

A jobb oldal első zárójeles kifejezése nullával egyenlő, mivel Y a (2) homogén egyenlet általános megoldása, s a második zárójeles kifejezés $r(x)$, mivel y_0 az (1) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. A (3) függvény tehát kielégíti az (1) egyenletet, azaz annak megoldása, sőt általános megoldása, mert a (3)-ban szereplő Y függvény a (2) általános megoldása, tehát két tetszőleges állandót tartalmaz.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásához tehát a hozzárendelt homogén egyenlet általános megoldását és egy partikuláris megoldását kell meghatározni. A homogén egyenlet általános megoldását az előző pontban megismert módszer szerint határozzuk meg, az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása pedig pl. az alábbi *Lagrange-féle ún. állandók variálásának módszerével* állítható elő. Ennek lényege, hogy az (1)-hez rendelt (2) egyenlet megoldásában az

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2$$

függvényben az állandókat x függvényeiként úgy választjuk meg, hogy az

$$y=C_1(x)Y_1+C_2(x)Y_2 \tag{4}$$

függvény kielégítse az (1) egyenletet.

(4)-et deriválva:

$$y' = C_1' Y_1 + C_2' Y_2 + C_1 Y_1' + C_2 Y_2'. \qquad (4^*)$$

A C_1 és C_2 között fennálló egyik kapcsolat az, hogy (4)-nek ki kell elégítenie az (1) differenciálegyenletet, a másik összefüggéssel még szabadon rendelkezünk. Tegyük fel, hogy a (4*) jobb oldalán az első két tagból álló összeg nullával egyenlő, azaz

$$C_1' Y_1 + C_2' Y_2 = 0, \qquad (5)$$

akkor $$y' = C_1 Y_1' + C_2 Y_2',$$

amelyből $$y'' = C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_1' Y_1' + C_2' Y_2'.$$

Helyettesítsük az (1) egyenletbe:

$$C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_1' Y_1' + C_2' Y_2' + a_1 (C_1 Y_1' + C_2 Y_2') + a_2 (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) = r(x).$$

Rendezve:

$$C_1 (Y_1'' + a_1 Y_1' + a_2 Y_1) + C_2 (Y_2'' + a_1 Y_2' + a_2 Y_2) + C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = r(x).$$

Mivel Y_1 és Y_2 a homogén egyenlet egy-egy partikuláris megoldása, ezért a zárójeles részek nullával egyenlők, tehát

$$C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = r(x). \qquad (6)$$

Ily módon a C_1 és C_2 függvényeknek az (5) és (6) feltételt, azaz a

$$\begin{aligned} C_1' Y_1 + C_2' Y_2 &= 0 \\ C_1' Y_1' + C_2' Y_2' &= r(x) \end{aligned} \qquad (7)$$

egyenletrendszert kell kielégíteniök ahhoz, hogy a (4) függvény az (1) egyenlet megoldása legyen.

Az egyenletrendszer C_1'-re és C_2'-re megoldható. Legyen a megoldás

$$C_1' = \varphi_1(x) \text{ és } C_2' = \varphi_2(x),$$

akkor

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x + K_1 = \phi_1(x) + K_1,$$

$$C_2 = \int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x + K_2 = \phi_2(x) + K_2,$$

ahol K_1 és K_2 tetszőleges állandók.

A C_1 és C_2 kifejezéseket (4)-be helyettesítve, az (1) általános megoldását

$$y = K_1Y_1 + K_2Y_2 + \phi_1(x)Y_1 + \phi_2(x)Y_2 \qquad (8)$$

alakban adja.

Ez valóban (3) alakú, ui. $Y = K_1Y_1 + K_2Y_2$, és (8)-ból $K_1 = K_2 = 0$ helyettesítéssel $y_0 = \phi_1(x)Y_1 + \phi_2(x)Y_2$.

Példa: Határozzuk meg az $y''+y'-6y = 5e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A hozzárendelt homogén egyenlet: $Y''+Y'-6Y = 0$; a karakterisztikus egyenlet: $r^2 + r - 6 = 0$, és ebből

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -3.$$

A lineárisan független két partikuláris megoldás:

$$Y_1 = e^{2x}, \quad Y_2 = e^{-3x}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}.$$

Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszerével

$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-3x}$. alakban keressük.

$Y_1' = 2e^{2x}$ és $Y_2' = -3e^{-3x}$, tehát a (7) egyenletrendszer:

$$C_1'e^{2x} + C_2'e^{-3x} = 0,$$

$$2C_1'e^{2x} - 3C_2'e^{-3x} = 5e^{2x}.$$

Az első egyenlet háromszorosát a másodikhoz adva:

$5C_1'e^{2x} = 5e^{2x}$, $C_1' = 1$, $\mathrm{d}C_1 = \mathrm{d}x$ és így $C_1 = x + K_1$.

C_1' értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve és C_2'-re megoldva:

$$C_2' = -\frac{e^{2x}}{e^{-3x}}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\mathrm{d}C_2 = -e^{5x}\mathrm{d}x, \text{ és integrálva } C_2 = -\frac{1}{5}e^{5x} + K_2.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \left(x + K_1\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{5}e^{5x} + K_2\right)e^{-3x} \text{ ill.}$$

$$y = K_1e^{2x} + K_2e^{-3x} + \left(x - \frac{1}{5}\right)e^{2x}.$$

11.16 Másodrendű állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kisérletező feltevéssel

Az előző pontban láttuk, hogy az

$$y'' + a_1y' + a_2y = r(x), \quad (a_1, a_2 \in R) \tag{1}$$

másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0$$

alakban állítható elő, ahol $Y = Y(x)$ az

$$Y'' + a_1Y' + a_2Y = 0$$

homogén differenciálegyenlet általános megoldása, y_0 pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Ott az y_0 partikuláris megoldást az állandók variálásának módszerével határoztuk meg. Most olyan módszert ismertetünk, amely bizonyos típusú $r(x)$ függvények esetén módot nyújt az y_0 partikuláris megoldás közvetlen meghatározására. Ezt *próbafüggvény-módszernek* is nevezzük.

I. Ha a jobb oldali $r(x)$ függvény

$$r(x) = g_n(x)e^{kx} \tag{2}$$

alakú, ahol $g_n(x)$ n-edfokú polinom, és k nem gyöke az

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{3}$$

karakterisztikus egyenletnek, akkor a partikuláris megoldást

$$y_0 = h_n(x) e^{kx} \tag{4}$$

alakúnak feltételezzük, ahol $h_n(x)$ egy teljes n-edfokú polinom, határozatlan együtthatókkal. A $h_n(x)$ polinom együtthatóit az ún. *együtthatók egyeztetése* ill. *határozatlan együtthatók módszerével számítjuk ki* (l. a 10.5 pontot).

Megjegyzések

1. Ha $g_n(x)$ 0-adfokú polinom, azaz állandó mennyiség, akkor $h_n(x)$ szintén állandó, s így a (4)

$$y_0 = A e^{kx}$$

alakú, ahol A konstans.

2. Ha $k = 0$, vagyis $r(x)$ polinom, akkor a feltételezett partikuláris megoldás szintén polinom, tehát

$$y_0 = h_n(x)$$

alakú.

Példák

1. Határozzuk meg az $y''-y'-6y = 7e^{5x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az $Y''-Y'-6Y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása, a karakterisztikus egyenlet alapján:

$$r^2 - r - 6 = 0,\ r_1 = 3,\ r_2 = -2,\ Y = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-2x}.$$

A $k = 5$ érték nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, továbbá $g_n(x) = 7$ állandó, ezért a feltételezett partikuláris megoldás alakja:

$$y_0 = A e^{5x} \text{ és így}$$

$$y_0' = 5A e^{5x},\ y_0'' = 25A e^{5x}.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe és e^{5x}-et kiemelve:

$$(25A - 5A - 6A) e^{5x} = 7e^{5x}.$$

Az e^{5x} együtthatóit egyenlővé téve: $14A=7$, vagyis $A=\frac{1}{2}$, s így a keresett partikuláris megoldás: $y_0=\frac{1}{2}e^{5x}$.

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=Y+y_0=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{5x}.$$

2. Határozzuk meg az $y''-3y'-4y=x^2-5x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A hozzárendelt homogén differenciálegyenlet:

$Y''-3Y'-4Y=0.$

A karakterisztikus egyenlet és a gyökök:

$r^2-3r-4=0$, $r_1=4$, $r_2=-1$, tehát az általános megoldás:

$Y=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$.

Az inhomogén egyenletből (2)-nek megfelelően: $g_n(x)=x^2-5x$ és $k=0$, ami nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A feltételezett partikuláris megoldást: $y_0=Ax^2+Bx+C$ alakban keressük, amelyből $y_0'=2Ax+B$, $y_0''=2A$.

Behelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe és rendezve:

$$-4Ax^2+(-6A-4B)x+2A-3B-4C=x^2-5x.$$

Az azonos kitevőjű x-ek együtthatóit egyenlővé téve, a

$$-4A=1,\ -6A-4B=-5,\ 2A-3B-4C=0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelyből

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{13}{8},\ C=-\frac{43}{32},$$

és így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_0=-\frac{1}{4}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{43}{32}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y=Y+y_0=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{43}{32}.$$

II. Legyen az (1) egyenlet jobb oldala

$$r(x)=g_n(x)e^{kx} \tag{5}$$

alakú, ahol $g_n(x)$ n-edfokú polinom, és k *gyöke* az

$$r^2+a_1r+a_2=0$$

karakterisztikus egyenletnek.

Ha k egyszeres gyök, akkor az inhomogén egyenlet egy feltételezett partikuláris megoldása:

$$y_0 = x h_n(x) e^{kx} \tag{6}$$

alakú, ahol $h_n(x)$ n-edfokú polinom; ha pedig *k kétszeres gyök*, akkor az inhomogén differenciálegyenlet egy feltételezett partikuláris megoldását

$$y_0 = x^2 h_n(x) e^{kx} \tag{7}$$

alakban keressük.

Az **I.** ponthoz fűzött megjegyzések itt is érvényesek.

Példák

1. Határozzuk meg az $y'' - \frac{3}{2}y' = 2x^2 - x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A hozzárendelt homogén egyenlet:

$$Y'' - \frac{3}{2}Y' = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet és gyökei:

$$r^2 - \frac{3}{2}r = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{3}{2},$$

tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = C_1 + C_2 e^{\frac{3}{2}x}.$$

Az (5)-nek megfelelően $g_n(x) = 2x^2 - x$, és $k = 0$ a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke ($e^{0x} = e^0 = 1$), tehát a feltételezett partikuláris megoldás (6) alakú:

$$y_0 = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \text{ és így}$$

$$y_0' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_0'' = 6Ax + 2B.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe és rendezve:

$$-\frac{9}{2}Ax^2 + (6A - 3B)x + 2B - \frac{3}{2}C = 2x^2 - x.$$

Az azonos kitevőjű x-ek együtthatóit egyenlővé téve:

$$-\frac{9}{2}A = 2, \quad 6A - 3B = -1, \quad 2B - \frac{3}{2}C = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$A = -\frac{4}{9}, \quad B = -\frac{5}{9}, \quad C = -\frac{20}{27},$$

tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{27}x,$$

és így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_0 = C_1 + C_2 e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{27}x.$$

2. Határozzuk meg az $y''-4y'+4y=(x-3)e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A hozzárendelt homogén egyenlet: $Y''-4Y'+4Y=0$.

A karakterisztikus egyenlet: $r^2-4r+4=0$, amelynek gyökei az $(r-2)^2=0$ alakra hozott egyenletből $r_{1,2}=2$, tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

Mivel $r(x)=(x-3)e^{2x}$, és $k=2$ kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát a feltételezett partikuláris megoldás (7) alakú:

$$y_0 = x^2(Ax+B)e^{2x}.$$

Az y_0, y_0' és y_0'' értékeket behelyettesítve az inhomogén egyenletbe, azt látjuk, hogy x másodfokú és harmadfokú tagjainak algebrai összege 0, s így a

$(6Ax+2B)e^{2x}=(x-3)e^{2x}$ egyenletet kapjuk, amelyből

$6A=1$, $2B=-3$, azaz $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{3}{2}$.

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y_0 = x^2\left(\frac{1}{6}x-\frac{3}{2}\right)e^{2x} = \left(\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)e^{2x},$$

s így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_0 = (C_1+C_2x)e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)e^{2x}.$$

III. Ha az (1) egyenlet jobb oldala

$$r(x) = e^{\alpha x}(g_n(x)\cos\beta x + p_m(x)\sin\beta x) \qquad (8)$$

alakú, ahol $g_n(x)$ és $p_m(x)$ n-edfokú ill. m-edfokú polinomok, és az $\alpha \pm \beta i$ komplex szám nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet feltételezett partikuláris megoldása:

$$y_0 = e^{\alpha x}\left(h(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right) \qquad (9)$$

alakú, ahol a $h(x)$ és $q(x)$ polinomok fokszáma az n és m kitevők közül a nagyobbal egyenlő.

Amennyiben az $\alpha \pm \beta i$ komplex szám gyöke a karakterisztikus egyenletnek, úgy a feltételezett partikuláris egyenlet alakja:

$$y_0 = xe^{\alpha x}\left(h(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right). \qquad (10)$$

Példa: Határozzuk meg az $y''+4y = 5e^{\frac{x}{2}}\cos 3x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A hozzárendelt homogén egyenlet: $Y''+4Y = 0$, a karakterisztikus egyenlet: $r^2 + 4 = 0$; a gyökök: $r_{1,2} = \pm 2i$.

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} = K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x.$$

Az $r(x) = 5e^{\frac{x}{2}}\cos 3x$ kifejezésből $g_n(x) = 5$ és $p_m(x) = 0$ (vagyis nulladfokú polinomok); $\alpha = \frac{1}{2}$ és $\beta = 3$, vagyis az $\frac{1}{2} \pm 3i$ komplex szám nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, tehát az inhomogén egyenlet feltételezett partikuláris megoldása:

$$y_0 = e^{\frac{x}{2}}(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Az inhomogén egyenletbe helyettesítve y_0, y_0' és y_0'', majd rendezve:

$$\left(\left(-\frac{19}{4}A + 3B\right)\cos 3x + \left(-3A - \frac{19}{4}B\right)\sin 3x\right)e^{\frac{x}{2}} = 5e^{\frac{x}{2}}\cos 3x, \text{ ahonnan}$$

$$-\frac{19}{4}A + 3B = 5, \quad -3A - \frac{19}{4}B = 0$$

egyenletrendszer adódik, amelynek gyökei: $A = -\frac{76}{101}$, $B = \frac{48}{101}$, s így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = e^{\frac{x}{2}}\left(-\frac{76}{101}\cos 3x + \frac{48}{101}\sin 3x\right).$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_0 = K_1\cos 2x + K_2\sin 2x + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{101}(-76\cos 3x + 48\sin 3x).$$

11.17 *Euler*-féle lineáris másodrendű differenciálegyenlet

Az $$x^2y''+a_1xy'+a_2y=r(x) \qquad (1)$$
alakú differenciálegyenletet, ahol a_1 és a_2 állandók, *Euler-féle lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.*

Ha $r(x)\equiv 0$, akkor az egyenlet *homogén*. Ennek alakja tehát:

$$x^2Y''+a_1xY'+a_2Y=0. \qquad (2)$$

Az *Euler*-féle differenciálegyenlet az előző pontokban megismert módszerekkel is megoldható, ui.

$$x=e^t, \quad \text{ill.} \quad t=\ln x \qquad (3)$$

helyettesítéssel állandó együtthatójú differenciálegyenletre vezethető vissza. A (3)-ból

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x}$$

és
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

Behelyettesítve pl. (2)-be, a

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_2y=0,$$

ill.
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(a_1-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_2y=0$$

állandó együtthatójú differenciálegyenletet kapjuk.

Az *Euler*-féle homogén differenciálegyenlet az

$$Y=x^k \qquad (4)$$

kísérletező feltevéssel is megoldható. Ekkor

$$Y'=kx^{k-1}, \quad Y''=k(k-1)x^{k-2};$$

behelyettesítve (2)-be és x^k -val egyszerűsítve, a

$$k(k-1)+a_1k+a_2=0 \tag{5}$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk.

Ha (5)-nek két különböző valós gyöke van: k_1 és k_2, akkor x^{k_1} és x^{k_2} lineárisan függetlenek, ezért alaprendszert alkotnak. Így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y=C_1x^{k_1}+C_2x^{k_2}. \tag{6}$$

Ha (5)-nek két egybeeső gyöke van, akkor a (3) helyettesítés értelmében $x^k=e^{kt}$, s így – ha k_1-gyel jelöljük a kétszeres gyököt –

$$e^{k_1t} \text{ és } te^{k_1t}$$

lesz a két lineárisan független megoldás, aminek

$$x^{k_1} \text{ és } x^{k_1}\ln x$$

felel meg, vagyis az általános megoldás:

$$Y=(C_1+C_2\ln x)x^{k_1}. \tag{7}$$

Ha az (5) egyenletnek $\alpha\pm\beta i$ konjugált komplex gyöke van, akkor a két lineárisan független megoldás: $x^{\alpha+\beta i}$ és $x^{\alpha-\beta i}$.

Az általános megoldás:

$$Y=C_1x^{\alpha+\beta i}+C_2x^{\alpha-\beta i} \tag{8}$$

amelynek egyszerűbb alakot adhatunk a következő átalakítással:

$$Y=x^{\alpha}\left(C_1x^{\beta i}+C_2x^{-\beta i}\right)=x^{\alpha}\left(C_1e^{\beta i\ln x}+C_2e^{-\beta i\ln x}\right),$$

s mivel $$e^{\beta i\ln x}=e^{i\ln x^{\beta}}=\cos\left(\ln x^{\beta}\right)+i\sin\left(\ln x^{\beta}\right),$$

$$e^{-\beta i\ln x}=e^{-i\ln x^{\beta}}=\cos\left(\ln x^{\beta}\right)-i\sin\left(\ln x^{\beta}\right),$$

ezért $$Y=x^{\alpha}\left(K_1\cos\left(\ln x^{\beta}\right)+K_2\sin\left(\ln x^{\beta}\right)\right). \tag{9}$$

Példák

1. Határozzuk meg az $x^2y''+\frac{10}{3}xy'-2y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Ha a megoldást $Y=x^k$ alakban keressük, akkor $Y'=kx^{k-1}$, $Y''=k(k-1)x^{k-2}$. Behelyettesítve és x^k-nal egyszerűsítve, a

$$k(k-1)+\frac{10}{3}k-2=0, \text{ ill. } k^2+\frac{7}{3}k-2=0$$

egyenletet kapjuk k-ra, amelynek gyökei: $k_1=\frac{2}{3}$, $k_2=-3$ és így

$$Y_1=x^{\frac{2}{3}}, \quad Y_2=x^{-3},$$

vagyis az általános megoldás:

$$y=C_1Y_1+C_2Y_2=C_1x^{\frac{2}{3}}+C_2x^{-3}.$$

2. Határozzuk meg az $x^2y''-xy'+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az $Y=x^k$, $Y'=kx^{k-1}$, $Y''=k(k-1)x^{k-2}$ behelyettesítés és x^k-nal való egyszerűsítés után a

$$k(k-1)-k+1=0, \text{ ill. } (k-1)(k-1)=0$$

egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $k_{1,2}=1$.

Az egybeeső gyököknek megfelelő lineárisan független két partikuláris megoldás: $Y_1=x$; $Y_2=x\ln x$, tehát az általános megoldás:

$$y=(C_1+C_2\ln x)x.$$

3. Határozzuk meg az $x^2y''-3xy'+13y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: Az $Y=x^k$, $Y'=kx^{k-1}$, $Y''=k(k-1)x^{k-2}$ behelyettesítés és x^k-nal való egyszerűsítés után:

$$k(k-1)-3k+13=0, \text{ ill. } k^2-4k+13=0,$$

melynek gyökei: $k_1=2+3i$ és $k_2=2-3i$.

A lineárisan független két partikuláris megoldás:

$$Y_1=x^{2+3i} \text{ és } Y_2=x^{2-3i}.$$

Az általános megoldás:

$$y=C_1x^{2+3i}+C_2x^{2-3i}=x^2\left(K_1\cos(\ln x^3)+K_2\sin(\ln x^3)\right).$$

4. Határozzuk meg az $x^2y''-3xy'+3y=x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás: A megoldást két eljárással is előállítjuk.

a) Visszavezetjük állandó együtthatójú differenciálegyenletre $x=e^t$, ill. $t=\ln x$ helyettesítéssel:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \text{ és így}$$

$$x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-3x\cdot\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}+3y=e^{2t},$$

vagyis az új differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=e^{2t}.$$

A hozzárendelt $\frac{d^2Y}{dt^2}-4\frac{dY}{dt}+3Y=0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete: $r^2-4r+3=0$, melynek gyökei: $r_1=3$, $r_2=1$.

A homogén egyenlet általános megoldása: $Y=C_1e^{3t}+C_2e^t$.

Az inhomogén egyenlet egy feltételezett partikuláris megoldása: $y_0=Ae^{2t}$, és így $y_0'=2Ae^{2t}$, $y_0''=4Ae^{2t}$.

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe: $-Ae^{2t}=e^{2t}$.

Ebből $A=-1$, tehát $y_0=-e^{2t}$. Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$y=Y+y_0=C_1e^{3t}+C_2e^t-e^{2t}$; és visszatérve az x változóra ($e^t=x$):

$y=C_1x^3+C_2x-x^2$.

b) Az eredeti differenciálegyenlethez rendelt $x^2Y''-3xY'+3Y=0$ homogén egyenletből $Y=x^k$, $Y'=kx^{k-1}$, $Y''=k(k-1)x^{k-2}$ helyettesítéssel és x^k-nal való egyszerűsítés után a

$k(k-1)-3k+3=0$, ill. $k^2-4k+3=0$

karakterisztikus egyenletre jutunk, melynek gyökei: $k_1=3$ és $k_2=1$.

A két lineárisan független megoldás: $Y_1=x^3$ és $Y_2=x$; a homogén egyenlet általános megoldása:

$Y=C_1x^3+C_2x$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását most az állandók variálásának módszerével keressük meg.

Az egyenletet y'' együtthatójával osztva:

$$y''-3\frac{y'}{x}+3\frac{y}{x^2}=1,$$

és így $r(x)=1$, tehát a

$$\left.\begin{aligned} C_1'x^3+C_2'x&=0\\ 3C_1'x^2+C_2'&=1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az első egyenletet x-szel osztva, majd kivonva a második egyenletből, $2C_1'x^2=1$, amelyből $\mathrm{d}C_1=\frac{\mathrm{d}x}{2x^2}$; $C_1=-\frac{1}{2x}+K_1$.

Az első egyenletbe helyettesítve és integrálva:

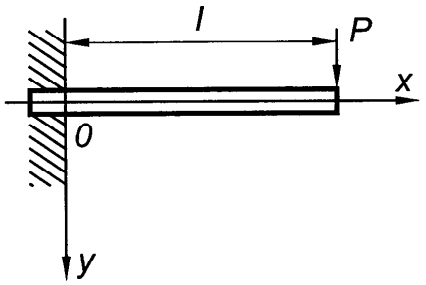
$$C_2'=-\frac{1}{2x^2}\cdot x^2=-\frac{1}{2};\quad C_2=-\frac{1}{2}x+K_2.$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=\left(-\frac{1}{2x}+K_1\right)x^3+\left(-\frac{1}{2}x+K_2\right)x=K_1x^3+K_2x-x^2.$$

11.18 Példák másodrendű differenciálegyenletek műszaki alkalmazására

1. Ha a 498. ábra szerint egyik végén mereven befogott l hosszúságú, állandó keresztmetszetű, homogén vízszintes rúdra a másik végén P = állandó függőleges irányú terhelés hat, akkor a rugalmas (súlyponti) szálat az $y''=\frac{P(l-x)}{IE}$ másodrendű differenciálegyenlettel jellemezhetjük, ahol I a keresztmetszetnek a súlypontján átmenő vízszintes tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka és E a rugalmassági modulus. Mekkora a rúd végének lehajlása és szögelfordulása?



498. ábra. Végpontjában terhelt rúd

Megoldás: A differenciálegyenletet kétszer integrálva, megkapjuk az általános megoldást:

$$y'=\frac{P}{IE}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C_1;\quad y=\frac{P}{IE}\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_1x+C_2.$$

Az $y(0)=0$ és $y'(0)=0$ kezdeti feltételek behelyettesítésével $C_1=0$ és $C_2=0$ adódik, tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y=\frac{P}{IE}\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

A végpontban $x=l$, tehát a rúd lehajlása:

$$y(l)=\frac{P}{IE}\left(l\frac{l^2}{2}-\frac{l^3}{6}\right)=\frac{Pl^3}{3IE}.$$

A szögelfordulás:

$$y'(l)=\frac{Pl^2}{2IE}.$$

2. Az x-tengelyen mozgó m tömegpontra egy, az origóból a pont felé mutató $\frac{ma^2}{x^3}$ nagyságú taszítóerő hat. Határozzuk meg az $x=x(t)$ függvényt, ha a $t=0$ időpillanatban $x=b$ és $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{b}$.

Megoldás: Mivel az erő a tömeg és a gyorsulás szorzata, ezért az

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{ma^2}{x^3},\quad \text{vagyis}\quad \ddot{x}=\frac{a^2}{x^3}$$

másodrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk.

A megoldást most nem az általános módszer szerint végezzük, mert egyszerűbben is eljárhatunk:

Szorozzuk meg mindkét oldalt $2\dot{x}\mathrm{d}t$ kifejezéssel:

$$2\dot{x}\ddot{x}\mathrm{d}t=2a^2\frac{\dot{x}\mathrm{d}t}{x^3},\quad \text{amit}$$

$$\mathrm{d}\left(\dot{x}^2\right)=2a^2\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=a^2\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\quad \text{alakban írhatunk, ahonnan}$$

$$(\dot{x})^2=a^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{C_1}\right)=\frac{a^2}{C_1}\cdot\frac{x^2-C_1}{x^2},\quad \text{és}\quad \dot{x}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2-C_1}}{x}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-C_1}}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\mathrm{d}t.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\sqrt{x^2-C_1}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}(t+C_2),\quad \text{ahonnan}\quad x^2=\frac{a^2}{C_1}(t+C_2)^2+C_1.$$

A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldáshoz C_1, C_2 meghatározása:

$$\frac{a^2}{b^2}=a^2\left(-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{C_1}\right);\quad C_1=\frac{b^2}{2}.$$

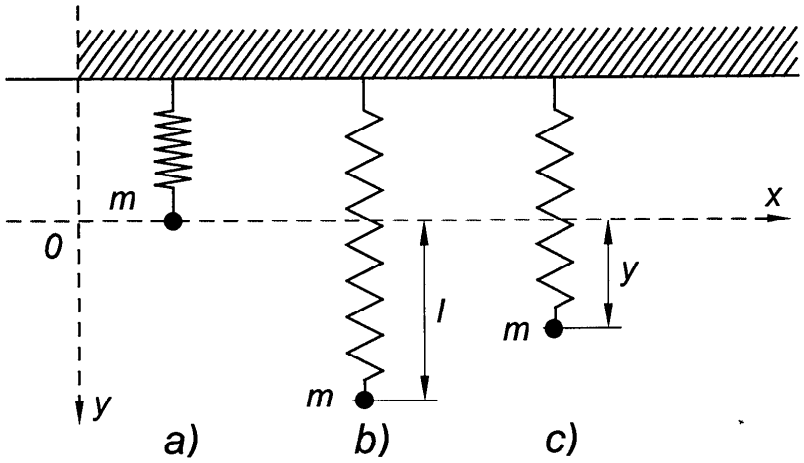
A $b^2=\dfrac{a^2}{\dfrac{b^2}{2}}=(C_2)^2+\dfrac{b^2}{2}$ egyenletből $C_2=\dfrac{b^2}{2a}$, és így

$$x^2=\frac{2a^2}{b^2}\left(t+\frac{b^2}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{2}=\frac{b^4+\left(2at+b^2\right)^2}{2b^2},$$

vagyis a partikuláris megoldás:

$$x=\sqrt{\frac{b^4+\left(2at+b^2\right)^2}{2b^2}}.$$

3. Egyik végén befogott rugó másik végére pontszerű m tömeget erősítünk, és nyugalmi helyzetéből l hosszúságúra feszítve, $t=0$ időpillanatban elengedjük (499. *a*, *b*, *c* ábra). Határozzuk meg az m tömegpont mozgását a t idő függvényében, ha eltekintünk a súrlódástól és a rugó tömegétől.



499. ábra. Rugó tömegponttal

Megoldás: Mivel a gyorsulás arányos a kitéréssel, de azzal ellenkező irányú, a mozgást leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-a^2y,\quad \text{az } a^2=\frac{k}{m},\ \text{ahol } k \text{ az ún. } \textit{rugóállandó}.$$

Az egyenlet átrendezve a

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+a^2y=0 \text{ alakban írható,}$$

melynek karakterisztikus egyenlete:

$r^2 + a^2 = 0$, a gyökök: $r_1 = ai$, $r_2 = -ai$.

Az általános megoldás:

$y = C_1 e^{ait} + C_2 e^{-ait}$ ill. $y = K_1 \cos at + K_2 \sin at$.

Az integrációs állandók az $y(0) = l$ és $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0$ kezdeti feltételekből számítva: $C_1 = l$, $C_2 = 0$, ill. $K_1 = l$, $K_2 = 0$.

Az m tömegpont mozgását tehát az $y = l\cos at = l\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ partikuláris megoldás írja le, mely az l amplitúdójú, $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ periódusú csillapítatlan, harmonikus rezgés egyenlete.

Feladatok

I. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1. $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = t\sin t$. $\left[s = \frac{t^2}{6} - \sin t + C_1 t + C_2.\right]$

2. $y'' = \ln x$. $\left[y = \frac{x^2}{2}\left(\ln|x| - \frac{3}{2}\right) + C_1 x + C_2.\right]$

3. $y'' = y' + x$. $\left[y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}.\right]$

4. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$. $\left[y = (1+C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1 x + C_2.\right]$

5. $y'' = \frac{1+(y')^2}{2y}$. $\left[(x+C_2)^2 = 4C_1(y - C_1).\right]$

6. $yy' + (y')^2 = 1$. $\left[(x+C_2)^2 - y^2 = C_1.\right]$

7. $y'' - y' - 6y = 0$. $\left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.\right]$

8. $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0$. $\left[y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.\right]$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$. $\left[y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x).\right]$

10. $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 8x = 0$. $\left[x = e^{-2t}(C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t).\right]$

11. $3y''-2y'-8y=0.$ $\left[y=C_1e^{2x}-C_2e^{-\frac{4}{3}x}.\right]$

12. $4y''-8y'+5y=0.$ $\left[y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right).\right]$

13. $y''+9y=x+\frac{1}{2}.$ $\left[y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{x}{9}+\frac{1}{18}.\right]$

14. $y''-2y'-3y=2x+1.$ $\left[y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}.\right]$

15. $y'-4y'+4y=e^{-x}.$ $\left[y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{9}e^{-x}.\right]$

16. $y''+y=\cos x.$ $\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x.\right]$

17. $2y''+5y'=100xe^{-x}\cos x.$

$\left[y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+e^{-x}\left((10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x\right).\right]$

18. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}.$ $\left[y=e^x(C_1+C_2x)-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg}x.\right]$

19. $y''-2y'+5y=10\sin x.$ $\left[y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+2\sin x+\cos x.\right]$

20. $x^2y''-9xy'+21y=0.$ $\left[y=x^3\left(C_1+C_2x^4\right).\right]$

21. $x^2y''+xy'+y=x.$ $\left[y=C_1\cos(\ln|x|)+C_2\sin(\ln|x|)+\frac{x}{2}.\right]$

22. $x^2y''+7xy'+13y=x\ln x.$

$\left[y=\frac{1}{x^3}\left(C_1\cos\ln x^2+C_2\sin\ln x^2\right)+\frac{x}{20}\ln|x|-\frac{x}{50}.\right]$

23. $x^2y''-y'x+y=x\ln^2 x.$ $\left[y=C_1x+C_2x\ln|x|+\frac{x}{12}\ln^4|x|.\right]$

II. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldásait:

24. $\frac{d^2s}{dt^2}-4s=4,\ s(0)=1,\ \frac{ds(0)}{dt}=0.$ $\left[s_0=e^{2t}+e^{-2t}-1.\right]$

25. $y''-5y'+6y=2e^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ $\left[y_0=e^x.\right]$

26. $y''+2y'+2y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-3.\ \left[y_0=3e^{-x}\cos x.\right]$

27. $y''+y=2\cos x,\ y(0)=2,\ y'(0)=0.\ [y_0=2\cos x+x\sin x.]$

III. Fizikai feladatok

28. Az m tömegpont az x-tengely mentén mozog, miközben az origó felé irányuló mk^2x nagyságú erő hat rá. Határozzuk meg az $x=x(t)$ függvényt az $x(0)=a,\ \dot{x}(0)=0$ kezdeti feltételek figyelembevételével. $[x=a\cos kt.]$

29. Egy homogén, állandó keresztmetszetű súlyos fonalat függesszünk fel az A és B pontok között. Határozzuk meg a saját súlyával terhelt fonál egyensúlyi alakját.

[Differenciálegyenlete: $y''=k\sqrt{1+y'^2}$; megoldása: $y=\frac{1}{k}\operatorname{ch}k(x+C_1)+C_2$.]

11.19 Differenciálegyenlet-rendszer visszavezetése egy magasabbrendű differenciálegyenletre

Az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános alakja két ismeretlen függvény esetén:

$$\begin{aligned} a_0(x)y'+b_0(x)z'+c_0(x)y+d_0(x)z&=f_0(x),\\ a_1(x)y'+b_1(x)z'+c_1(x)y+d_1(x)z&=f_1(x),\end{aligned} \qquad (1)$$

ahol $y=y(x)$ és $z=z(x)$ az x független változó ismeretlen függvényei, az a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1 együtthatók, valamint az f_0 és f_1 szabad tagok pedig ugyancsak az x változó ismert függvényei.

Az $y=y(x)$ és $z=z(x)$ ismeretlen függvényeket úgy kell meghatároznunk, hogy az (1) rendszer mindkét egyenletét kielégítsék.

Az (1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásának menete: az egyenletrendszerből az egyik ismeretlen függvényt kifejezzük a független változó, a másik ismeretlen függvény és annak deriváltja függvényeként. (Feltesszük, hogy az ismeretlen függvények kétszer folytonosan deriválhatók.) Az így kapott kifejezést és a

független változó szerinti deriváltját az egyenletrendszerbe behelyettesítve, általában egy ismeretlen függvény másodrendű differenciálegyenletét kapjuk, amelynek megoldása után a másik ismeretlen függvényt integrálás nélkül (deriválással) állíthatjuk elő. Ily módon az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása két tetszőleges állandót tartalmaz.

Példák

1. Határozzuk meg a

$$\left.\begin{aligned} z'-z+3y&=-x \\ y'-3z+5y&=0 \end{aligned}\right\}$$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

Megoldás: A második egyenletből

$$z=\frac{y'+5y}{3}, \tag{2}$$

ahonnan

$$z'=\frac{1}{3}\left(y''+5y'\right).$$

A z és z' kifejezéseit behelyettesítve az első egyenletbe és rendezve:

$$y''+4y'+4y=-3x;$$

előállítottunk egy állandó együtthatójú lineáris másodrendű inhomogén differenciálegyenletet.

A hozzárendelt homogén egyenlet:

$$Y''+4Y'+4Y=0.$$

Karakterisztikus egyenlete (a megoldást $Y=e^{kx}$ alakban keresve):

$$k^2+4k+4=0, \text{ a gyökök: } k_{1,2}=-2.$$

A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy feltételezett partikuláris megoldása: $y_0=Ax+B$, amelyből $y_0'=A$ és $y_0''=0$. Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$4A+4Ax+4B=-3x, \text{ amelyből } A=-\frac{3}{4}, \; B=\frac{3}{4},$$

tehát az inhomogén másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása, amely az egyenletrendszer egyik ismeretlen függvényét állítja elő:

$$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}.$$

A másik ismeretlen függvény (z) integrálás nélkül y' képzése után, a (2) kifejezésbe való behelyettesítéssel állítható elő:

$$y' = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} - \frac{3}{4}, \text{ és így}$$

$$z = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{C_2}{3}e^{-2x} - \frac{5}{4}x + 1.$$

2. Határozzuk meg a

$$\left.\begin{aligned} z' + y' + z - y &= 3 \\ z' - y' - z - y &= -3 \end{aligned}\right\}$$ differenciálegyenlet-rendszernek azt a megoldását,

amely kielégíti a $z\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ és $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ kezdeti feltételeket.

Megoldás: A két egyenlet összeadásával és kivonásával a

$$\left.\begin{aligned} z' - y &= 0 \\ y' + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. A második egyenletből $z = 3 - y'$; deriváltja: $z' = -y''$, és az első egyenletbe helyettesítve: $y'' + y = 0$.

Így egy homogén másodrendű differenciálegyenletet kaptunk, melyből a karakterisztikus egyenlet és megoldása:

$k^2 + 1 = 0$, a gyökök: $k_{1,2} = \pm i$, és így az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = K_1 \cos x + K_2 \sin x.$$

Ennek deriváltja: $y' = -K_1 \sin x + K_2 \cos x$, és behelyettesítve a $z = 3 - y'$ egyenletbe, megkapjuk a z függvényt:

$$z = 3 + K_1 \sin x - K_2 \cos x.$$

Felhasználva a kezdeti feltételeket:

$$0 = K_1 \cos\frac{\pi}{3} + K_2 \sin\frac{\pi}{3}, \quad 4 = 3 + K_1 \sin\frac{\pi}{3} - K_2 \cos\frac{\pi}{3}, \text{ ill.}$$

$$\frac{1}{2}K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_2 = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}K_1 - \frac{1}{2}K_2 = 1.$$

Az így kapott egyenletrendszerből: $K_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $K_2 = -\frac{1}{2}$.

A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x; \quad z_0 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x.$$

11.20 Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$\text{A} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_1 y + b_1 z &= f_1(x) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + a_2 y + b_2 z &= f_2(x) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

alakú egyenletrendszert, ahol $y = y(x)$; $z = z(x)$ az ismeretlen függvények, $f_1(x)$ és $f_2(x)$ ismert függvények, a_1, b_1, a_2, b_2 állandók, *állandó együtthatójú inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.*

Ha $f_1(x) \equiv 0$ és $f_2(x) \equiv 0$, akkor homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerről beszélünk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} + a_1 Y + b_1 Z &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + a_2 Y + b_2 Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Amennyiben a (1) és (2) rendszerek együtthatói megegyeznek egymással, úgy (2)-t az (1) inhomogén rendszerhez *hozzárendelt homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek* nevezzük.

A lineáris differenciálegyenlet-rendszerre érvényes a következő *négy tétel* (a bizonyítások megtalálhatók a differenciálegyenletek elméleti tankönyveiben):

1. Ha $Y_1(x)$ és $Z_1(x)$ partikuláris megoldásai a (2) homogén lineáris egyenlet-rendszernek, akkor a CY_1 és CZ_1 is megoldásai a (2) egyenletrendszernek.

2. Ha $Y_1(x)$, $Z_1(x)$ és $Y_2(x)$, $Z_2(x)$ két partikuláris megoldása a (2) homogén lineáris rendszernek, akkor $Y_1(x) + Y_2(x)$ és $Z_1(x) + Z_2(x)$ is megoldása a (2) rendszernek.

3. Ha $Y_1(x)$, $Z_1(x)$ és $Y_2(x)$, $Z_2(x)$ két partikuláris megoldása a (2) rendszernek, és ezek lineárisan függetlenek egymástól, (a belőlük képzett másodrendű determináns zérustól különböző) azaz

$$\begin{vmatrix} Y_1(x) & Z_1(x) \\ Y_2(x) & Z_2(x) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

akkor a (2) homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását

$$\begin{aligned} Y &= C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x), \\ Z &= C_1 Z_1(x) + C_2 Z_2(x) \end{aligned} \tag{4}$$

alakban megkapjuk.

4. Ha az (1) inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek ismeretes egy $y_0(x)$, $z_0(x)$ partikuláris megoldása, akkor az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását az (1)-hez hozzárendelt (2) homogén rendszer általános megoldásának és (1) partikuláris megoldásának összege állítja elő:

$$\begin{aligned} y &= Y + y_0 = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + y_0(x), \\ z &= Z + z_0 = C_1 Z_1(x) + C_2 Z_2(x) + z_0(x). \end{aligned} \tag{5}$$

A (2) állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy partikuláris megoldását

$$Y = \alpha e^{kx}; \quad Z = \beta e^{kx} \tag{6}$$

alakban keressük, ahol α, β és k úgy határozandó meg, hogy a (6) függvények a (2) egyenletrendszert azonosan kielégítsék.

Behelyettesítve (2)-be az Y, Z, $Y' = \alpha k e^{kx}$, $Z' = \beta k e^{kx}$ kifejezéseket, majd $e^{kx} \neq 0$ tényezővel egyszerűsítve és rendezve, a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + k)\alpha + b_1\beta &= 0 \\ a_2\alpha + (b_2 + k)\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

A (7) egyenletrendszer α-ra és β -ra lineáris homogén egyenletrendszer, amelynek az $\alpha = \beta = 0$ triviális megoldástól különböző megoldása csak akkor van, ha feltesszük, hogy az egyenletrendszer k-tól függő determinánsa 0-val egyenlő, azaz

$$\begin{vmatrix} a_1 + k & b_1 \\ a_2 & b_2 + k \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Ezt a k-ra másodfokú algebrai egyenletet a (2) homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer karakterisztikus egyenletének nevezzük.

A karakterisztikus egyenlet gyökei alapján három esetet különböztetünk meg:

1. Ha a karakterisztikus egyenlet k_1 és k_2 gyökei valósak és különbözők, akkor a (7) egyenletrendszerből k_1 behelyettesítésével számított α_1 és β_1 értékekkel az

$$Y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \quad Z_1 = \beta_1 e^{k_1 x} \tag{9}$$

megoldásokat kapjuk; a k_2 helyettesítéssel számított α_2 és β_2 értékekkel pedig az

$$Y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \quad Z_2 = \beta_2 e^{k_2 x} \tag{10}$$

megoldásokat kapjuk.

2. Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplex számok, azaz

$$k_1 = a + bi, \quad k_2 = a - bi,$$

akkor a az 1. esetnek megfelelő módon számított α_1, β_1, α_2, β_2 értékekkel

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 e^{(a+bi)x}, & Z_1 &= \beta_1 e^{(a+bi)x}, \\ Y_2 &= \alpha_2 e^{(a-bi)x}, & Z_2 &= \beta_2 e^{(a-bi)x}, \end{aligned} \tag{11}$$

alakú megoldásokat kapunk.

k megoldás:

$2\beta_2 e^{3x}$ és $Z_2 = \beta_2 e^{3x}$, ahol β_2 tetszőleges állandó.

ios megoldást az első és második megoldás összege szolgáltatja:

$$y = -2\beta_1 e^{-x} + 2\beta_2 e^{3x};\quad z = \beta_1 e^{-x} + \beta_2 e^{3x},$$

tetszőleges állandók.

·ozzuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y' + 7y - z &= 0 \\ z' + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

: Az $Y = \alpha e^{kx}$, $Z = \beta e^{kx}$, $Y' = \alpha k e^{kx}$, $Z' = \beta k e^{kx}$ behelyettesíté-

$\neq 0$ tényezővel való egyszerűsítés után:

$$\left.\begin{aligned} (7)\alpha - \beta &= 0 \\ (k+5)\beta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

risztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ & k+5 \end{vmatrix} = 0,\ \text{ill.}\ k^2 + 12k + 37 = 0,$$

$k_1 = -6 + i,\ k_2 = -6 - i.$

$-6 + i$ gyökkel:

$$\left.\begin{aligned} (+i)\alpha_1 - \beta_1 &= 0 \\ +(-1+i)\beta_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszert kapjuk.

gyenletből: $\beta_1 = (1+i)\alpha_1$, a másodikból: $\beta_1 = -\dfrac{2\alpha_1}{-1+i} = (1+i)\alpha_1$.

megoldás:

$\alpha_1 e^{(-6+i)x}$ és $Z_1 = (1+i)\alpha_1 e^{(-6+i)x}$.

$6 - i$ gyökkel:

$$\left.\begin{aligned} -i)\alpha_2 - \beta_2 &= 0 \\ (-1-i)\beta_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

gyenletből: $\beta_2 = (1-i)\alpha_2$, a másodikból: $\beta_2 = \dfrac{2\alpha_2}{1+i} = (1-i)\alpha_2$.

ios megoldás:

$x_1 e^{(-6+i)x} + \alpha_2 e^{(-6-i)x}$, $\quad z = (1+i)\alpha_1 e^{(-6+i)x} + (1-i)\alpha_2 e^{(-6-i)x}$,

$e^{-6x}(A\cos x + B\sin x)$, $\quad z = e^{-6x}\big((A+B)\cos x - (A-B)\sin x\big)$.

3. Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei egybeesők (k_1-gyel), akkor a megoldást

$$Y = e^{k_1 x}(A_1 + B_1 x), \qquad Z = e^{k_1 x}(A_2 + B_2 x)$$

alakban keressük.

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer általános meg hozzárendelt homogén egyenletrendszer általános megol ismeretében az állandók variálásának módszerével állíth melynek alkalmazása itt is úgy megy végbe, mint egyetlen differenciálegyenlet esetében.

Példák

1. Határozzuk meg a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y - 4z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - y - z = 0 \end{aligned}\right\}$$ differenciálegyenlet-rendszer általános m

Megoldás: A differenciálegyenlet-rendszer homogén, a megoldást $Z = \beta e^{kx}$ alakban keressük, ekkor $Y' = \alpha k e^{kx}$, $Z' = \beta k e^{kx}$.

Az egyenletrendszerbe való behelyettesítés, $e^{kx} \neq 0$ tényezővel való sítés és rendezés után a

$$\left.\begin{aligned} (k-1)\alpha - 4\beta = 0 \\ -\alpha + (k-1)\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

algebrai egyenletendszert kapjuk, amelyből a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} k-1 & -4 \\ -1 & k-1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ill. } k^2 - 2k - 3 = 0; \text{ a gyökök: } k_1 = -1, k_2 =$$

A (*) egyenletrendszerbe helyettesítve a $k_1 = -1$ gyököt és egyszerű

$$\alpha_1 + 2\beta_1 = 0, \text{ vagyis } \alpha_1 = -2\beta_1,$$

tehát az első megoldás:

$$Y_1 = -2\beta_1 e^{-x} \text{ és } Z_1 = \beta_1 e^{-x}, \text{ ahol } \beta_1 \text{ tetszőleges állandó mar}$$

A karakterisztikus egyenlet második, $k_2 = 3$ gyökét helyettesítve a letrendszerbe és egyszerűsítve:

$$\alpha_2 - 2\beta_2 = 0,$$
$$-\alpha_2 + 2\beta_2 = 0, \text{ vagyis } \alpha_2 = 2\beta_2,$$

3. Határozzuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y'+3y+z=0 \\ z'-y+z=0 \end{aligned}\right\}$$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását és az $y(0)=0$, $z(0)=1$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást.

Megoldás: Az $Y=\alpha e^{kx}$, $Z=\beta e^{kx}$, $Y'=\alpha k e^{kx}$, $Z'=\beta k e^{kx}$ behelyettesítésével és $e^{kx}\neq 0$ tényezővel való egyszerűsítés, rendezés után

$$\left.\begin{aligned} (k+3)\alpha+\beta=0 \\ -\alpha+(k+1)\beta=0 \end{aligned}\right\}$$ algebrai egyenletrendszert kapjuk.

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 \\ -1 & k+1 \end{vmatrix}=0, \text{ ill. } k^2+4k+4=0,$$

amelyből $k_{1,2}=-2$ egybeeső gyök adódik, tehát a megoldást

$Y=(A_1+B_1x)e^{-2x}$, $Z=(A_2+B_2x)e^{-2x}$ alakban kell keresnünk:

$Y'=\big(B_1-2(A_1+B_1x)\big)e^{2x}$; $Z'=\big(B_2-2(A_2+B_2x)\big)e^{-2x}$.

Ezeket a differenciálegyenlet-rendszerbe helyettesítve, majd összevonást és rendezést végezve, az

$$\begin{aligned} A_1+B_1+A_2+(B_1+B_2)x=0 \\ -A_1-A_2+B_2-(B_1+B_2)x=0 \end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk, ahonnan egyrészt $B_1+B_2=0$, ill. $B_1=-B_2$, másrészt $A_1+B_1+A_2=0$, $-A_1-A_2+B_2=0$, amelyből $A_1=B_2-A_2$, s így a megoldás:

$$y=(B_2-A_2-B_2x)e^{-2x};\quad z=(A_2+B_2x)e^{-2x},$$

ahol A_2 és B_2 tetszőleges állandók.

A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldáshoz $x=0$, $y=1$, $z=1$ behelyettesítésével meghatározzuk A_2 és B_2 értékét:

$1=B_2-A_2$; $1=A_2$, és a két egyenletből: $B_2=2$,

tehát a partikuláris megoldás:

$$y_0=(1-2x)e^{-2x};\quad z_0=(1+2x)e^{-2x}.$$

4. Határozzuk meg az

$$\left.\begin{aligned} y'-z=0 \\ z'+y=\frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$ inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását az állandók variálásának módszerével.

Megoldás: Az inhomogén egyenletrendszerhez hozzárendelt homogén rendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} Y'-Z=0 \\ Z'+Y=0 \end{aligned}\right\}$$

A megoldást $Y=\alpha e^{kx}$, $Z=\beta e^{kx}$ alakban keresve:

$$\left.\begin{aligned} \alpha k-\beta=0 \\ \alpha+\beta k=0 \end{aligned}\right\}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix}=0,\quad k^2+1=0,$$

amelynek gyökei: $k_1=i$, $k_2=-i$.

A $k_1=i$ esetben az $\alpha_1 i-\beta_1=0$, $\alpha_1+\beta_1 i=0$ egyenletrendszert kapjuk, ahonnan: $\beta_1=\alpha_1 i$, tehát

$$Y_1=\alpha_1 e^{ix};\quad Z_1=\alpha_1 i e^{ix}.$$

A $k_2=-i$ esetben a $-\alpha_2 i-\beta_2=0$, $\alpha_2-\beta_2 i=0$ egyenletrendszert kapjuk, amelyből $\beta_2=-\alpha_2 i$, tehát

$$Y_2=\alpha_2 e^{-ix};\quad Z_2=-\alpha_2 i e^{-ix}.$$

A homogén egyenletrendszer általános megoldása:

$$Y=\alpha_1 e^{ix}+\alpha_2 e^{-ix},\qquad Z=\alpha_1 i e^{ix}-\alpha_2 i e^{-ix},\qquad \text{ill.}$$

$$Y=K_1\cos x+K_2\sin x,\qquad Z=-K_1\sin x+K_2\cos x$$

ahol $K_1=\alpha_1+\alpha_2$, $K_2=i(\alpha_1-\alpha_2)$.

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer megoldását

$$y=K_1(x)\cos x+K_2(x)\sin x;\quad z=-K_1(x)\sin x+K_2(x)\cos x$$

alakban keressük. $K_1(x)$ és $K_2(x)$ a

$$\left.\begin{aligned} K_1'(x)\cos x+K_2'(x)\sin x=0 \\ -K_1'(x)\sin x+K_2'(x)\cos x=\frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszerből határozható meg.

Az első egyenlet sin x-szel, a második cos x-szel szorozva és a kettő összeadva:

$K_2'(x)=1$, integrálva: $K_2(x)=x+C_2$.

Ennek felhasználásával az elsőből:

$$K_1'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x},\ \text{és integrálva:}\ K_1(x)=\ln|\cos x|+C_1,$$

tehát az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása:

$$y = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x,$$
$$z = -(\ln|\cos x| + C_1)\sin x + (x + C_2)\cos x,$$

illetve

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x,$$
$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \cdot \ln|\cos x| + x \cos x.$$

11.21 Példák differenciálegyenlet-rendszerek műszaki alkalmazására

1. Egy L induktivitású tekercscsel (kapacitástól és ohmos ellenállástól eltekintünk) $t = 0$ időpontban zárjuk rövidre az U_0 feszültségre feltöltött C állandó kapacitású kondenzátort (önindukciótól és ohmos ellenállástól eltekintünk). Határozzuk meg az áramkörben folyó I áramerősséget és a kondenzátor U feszültségét mint a t idő függvényét.

Megoldás: Az elektrotechnika törvényei szerint a kérdéses folyamatot az

$$I = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}, \quad U = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

lineáris elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer határozza meg $I(0) = 0$, $U(0) = U_0$ kezdeti feltételekkel.

A második egyenletből $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}$.

Az első egyenletbe helyettesítve másodrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$I = -CL\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}, \text{ amely az } \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \text{ jelölés bevezetése után}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 I = 0$$

alakban írható, amelynek általános megoldása:

$$I = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,$$

és így a második egyenlet alapján:

$$U = L(-C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega \cos\omega t),$$

vagy $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$ behelyettesítése után rendezve:

$$U = \sqrt{\frac{L}{C}}(C_2 \cos\omega t - C_1 \sin\omega t).$$

A kezdeti feltételeket felhasználva:

$$C_1 = 0,\ U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot C_2,\ C_2 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Tehát az áramerősség:

$$I = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{CL}}$$

és a feszültség:

$$U = U_0 \cos \frac{t}{\sqrt{CL}}.$$

2. Egy rögzített függőleges tengely körül állandó ω szögsebességgel forgó vízszintes síkon mozogjon egy m tömegű P pont, amelyre a tengely és a sík O döféspontjában $m\omega^2 r$ vonzerő hat ($r = OP$). Mutassuk ki, hogy a P a kezdeti feltételektől függetlenül állandó 2ω szögsebességgel kört ír le (a súrlódástól eltekintünk).

Megoldás: A P pont mozgásának differenciálegyenlete egyszerűsítve és a t idő szerint integrálva koordinátákban az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega y + a \\ \dot{y} &= -2\omega x + b \end{aligned}\right\}$$

differenciálegyenlet-rendszerrel adható meg.

Az első differenciálegyenletből $\dot{y} = \frac{1}{2\omega}\ddot{x}$; ezt a második egyenletbe helyettesítve és rendezve:

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 2b\omega.$$

A hozzárendelt $\ddot{X} + 4\omega^2 X = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$X = C_1 \cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy közvetlenül leolvasható partikuláris megoldása: $x_p = \frac{b}{2\omega}$, tehát általános megoldása:

$$x = C_1 \cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t + \frac{b}{2\omega}.$$

Ebből képezve az $\dot{x} = -2\omega C_1 \sin 2\omega t + 2\omega C_2 \cos 2\omega t$ deriváltat, és a differenciálegyenlet-rendszer első egyenletébe téve, majd rendezve:

$$y = C_2 \cos 2\omega t - C_1 \sin 2\omega t - \frac{a}{2\omega}.$$

Ha elvégezzük a megoldásokban az "egy rezgéssé" alakítást, akkor

$$x = A\cos(2\omega t - \varphi) + \frac{b}{2\omega},\quad y = -A\sin(2\omega t - \varphi) - \frac{a}{2\omega},$$

alakot kapjuk, ahonnan azonnal látható, hogy a P pont pályája olyan A sugarú kör, amelynek középpontja: $\left(\frac{b}{2\omega}, -\frac{a}{2\omega}\right)$.

Feladatok

1. $\left.\begin{aligned} y'-z&=0\\ z'-y&=2\operatorname{ch}x\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} y&=C_1e^{x}-C_2e^{-x}-\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x,\\ z&=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+x\operatorname{ch}x.\end{aligned}\right]$

2. $\left.\begin{aligned} y'&=2y+4z+\cos x\\ z'&=-y-2z+\sin x\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} y&=A(1+2x)-2B-2\cos x-\sin x,\\ z&=-Ax+B+2\sin x.\end{aligned}\right]$

3. $\left.\begin{aligned} y'+5y+z&=e^{x}\\ z'-y-3z&=e^{2x}\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} &y=C_1e^{\left(-1+\sqrt{15}\right)x}+C_2e^{\left(-1-\sqrt{15}\right)x}+\frac{2}{11}e^{x}+\frac{1}{6}e^{2x},\\ &z\text{ - t az első egyenletből kapjuk: }z=e^{x}+y'-5y.\end{aligned}\right]$

4. $\left.\begin{aligned} y'-z-y&=1\\ z'-z+y&=\cos x\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} &y=e^{x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x,\\ &z\text{ - t az elsőből kapjuk: }z=y'-y-1.\end{aligned}\right]$

5. $\left.\begin{aligned} 4z'-y'+3z&=\sin x\\ z'+y&=\cos x\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} y&=C_1e^{-x}+3C_2e^{-3x}+\cos x,\\ z&=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.\end{aligned}\right]$

6. $\left.\begin{aligned} y'&=-z \quad y(0)=1\\ z'&=y \quad z(0)=0\end{aligned}\right\}$ $\left[y=\cos x,\ z=\sin x.\right]$

7. $\left.\begin{aligned} y'-z+y&=0 \quad y(0)=1\\ z'+3z+y&=0 \quad z(0)=1\end{aligned}\right\}$ $\left[\begin{aligned} &z_0=e^{-2x}(1-2x),\\ &y_0\text{ a második egyenletből kapható.}\end{aligned}\right]$

8. $\left.\begin{aligned} y'-z+y&=-2 \quad y(0)=0\\ z'-z-y&=0 \quad\ \ z(0)=1\end{aligned}\right\}$

$$\left[\begin{aligned} &y=C_1\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}x}-C_2\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}x}-1,\\ &z=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+1,\ C_1=\frac{\sqrt{2}}{4},\ C_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}\right]$$

Gyakran előforduló állandók

n		lg *n*	n		lg *n*
jelzése ill. kifejezése	számértéke		jelzése ill. kifejezése	számértéke	
π	3,1416	0,4971	π^2	9,8696	0,9943
2π	6,2832	0,7982	$4\pi^2$	39,4784	1,5964
3π	9,4248	0,9743	$\pi^2/4$	2,4674	0,3922
4π	12,5664	1,0992	$1/\pi^2$	0,1013	0,0057-1
$\pi/2$	1,5708	0,1961	$1/(4\pi^2)$	0,0253	0,4036-2
$\pi/3$	1,0472	0,0200	$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486
$\pi/4$	0,7854	0,8951-1	$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991
$\pi/6$	0,5236	0,7190-1	$\sqrt{\pi/2}$	1,2533	0,0981
$\pi/180°$	0,0175	0,2419-2	$1/\sqrt{\pi}$	0,5642	0,7514-1
$2\pi/3$	2,0944	0,3211	$1/\sqrt{2\pi}$	0,3989	0,6009-1
$4\pi/3$	4,1888	0,6221	$1/\sqrt{2/\pi}$	0,7979	0,9019-1
$\pi\sqrt{2}$	4,4429	0,6477	e	2,7183	0,4343
$\pi\sqrt{3}$	5,4414	0,7357	$1/e$	0,3679	0,5657-1
$\pi/\sqrt{2}$	2,2214	0.3466	M	0,4343	0,6378-1
$\pi/\sqrt{3}$	1,8138	0,2586	$1/M$	2,3026	0,3622
$1/\pi$	0,3183	0,5029-1	e^2	7,3891	0,8686
$1/(2\pi)$	0,1592	0,2018-1	$1/e^2$	0,1353	0,1314-1
$1/(3\pi)$	0,1061	0,0257-1	$\sqrt{e}$	1,6487	0,2171
$1/(4\pi)$	0,0796	0,9008-2	g	9,81m/s^2	0,9917
$2/\pi$	0,6366	0,8039-1	g^2	96,236	1,9833
$3/\pi$	0,9549	0,9800-1	$1/g$	0,1019	0,0083-1
$4/\pi$	1,2732	0,1049	$\sqrt{g}$	3,1321	0,4958
$6/\pi$	1,9099	0,2810	$1/\sqrt{g}$	0,3193	0,5042-1
$180°/\pi$=1rad	57,2958°	1,7581	$\pi\sqrt{g}$	9,8398	0,9930

IRODALOM

[1] Matematikai kisenciklopédia. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1968.
[2] Mathematics at a Glance. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1975.
[3] Banach, S.: A differenciál- és integrálszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest 1967.
[4] Császár Ákos: Valós analízis I., II. Tankönyvkiadó, Budapest 1983.
[5] Hajós György: Bevezetés a geometriába. IV. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 1966.
[6] Kemény, J. H. – Snell, J. L. – Thomson: A modern matematika alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971.
[7] Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számítási eljárások. Gondolat Kiadó, Budapest 1972.
[8] Obádovics J. Gyula: Közönséges differenciálegyenletek I–II. LSI, Budapest 1989.
[9] Obádovics J. Gyula: Lineáris algebra I–II. LSI, Budapest 1989.
[10] Obádovics J. Gyula: Numerikus módszerek és programozásuk. 2. kiadás. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest 1977.
[11] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán: Felsőbb matematikai összefoglaló műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1973.
[12] Prékopa András: Valószínűségelmélet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1962.
[13] Reinhardt, F. – Soeder, H.: Matematika, SH atlasz. Springer-Verlag, Budapest – Berlin stb. 1993.
[14] Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. 2. átd. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 1966.
[15] Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei. I–II. Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest 1951.
[16] Szele Tibor: Bevezetés az algebrába. V. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 1967.
[17] Sztyepanov, V. V.: A differenciálegyenletek tankönyve. Tankönyvkiadó, Budapest 1952.
[18] Obádovics J. Gyula: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Scolar Kiadó. Budapest 1995.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

A, Á

Abel, N. H., 32; 199
Abel-féle csoport, 32; 35
abszcissza, 441
– tengely, 441
abszolút érték
– geometria, 268
– hibakorlát, 660
– – függvény, 628
– – jele, 59
– – vektor, 521
absztrakt algebra, 30
addíciós tételek, 405
additív inverz, 33; 35; 550
adott arányban osztó pont koordinátái, 500
alaki érték, 40
alakzat, 267
–, egybevágó (kongruens), 282
– elforgatása, 281
– eltolása, 281
–, hasonló, 295
– képe, 281
alapérték, 77
alap- és fedőlap, 350; 359
alaphalmaz, 27; 152
alapintegrálok táblázata, 675
alapperiódus, 620
alapszám, 39
aldeterminánsz, 184
algebra alaptétele, 157
algebrai
– függvények, 609
– kifejezés, 98
– –, egytagú, 99
– – szorzattá alakítása, 115
– –, többtagú, 100; 113
– mennyiség, 98
– struktúra, 33, 36
– összeg, 62
– – integrálja, 681
– szám, 84
– tört bővítése, 117
– – egyszerűsítése, 117
– – értelmezési tartománya, 117
– – szorzása és osztása, 119
algoritmus, 135
– k-adik gyökvonásra, 135
– köbgyökvonásra, 135
– négyzetgyökvonásra, 135
alkotórész
–, megfelelő, 282
állandó, 566
állítás, 154
–, igaz, hamis, 154
alsó határ (infimum), 86
– integrál, 702
– összeg, 702
– – szemléltetése, 702
általános négyszög területe, 321
– megold. explicit alakja, 736
áltört, 65
– függvény, 695
analízis
–, matematikai, 641
Anaxagorasz, 268
annuitás, 597
Apolloniosz, 268
Appendix, 268
ár, 316
arab számjegyek, 39
arány, 81, 82
–, egyenes, 82
–, fordított, 82
aranymetszés, 343
aránypár, 82
– beltagjai, 82
– kültagjai, 82
arccos *a*, 418
arcctg *a*, 422
arcsin *a*, 415
arctg *a*, 421
area függvények, 626 – 628
Arkhimédész, 268; 671
arkusz függvények, 622, 623
aszimptota, 616
asszociatív, 41, 528
átellenes gömbháromszögek, 434
átfogó, 277
átló, 286
átlós sík, 347
átmérő (diaméter), 301
attométer, 316
axiómák, 85; 268
–, rendezési, 85
axiómarendszer, 269
azonosság, 154

B

"balról jobbra"-szabály, 48
Bayes tétele, 253
befogó, 277
– -tétel, 298
belső szögek, 276
Bernoulli törvénye, 265
– -féle diff. egyenlet, 739
Bernoulli, J., 240
Bernstein-féle ekvivalencia tétel, 93
betét összeg, 595
bijektív függvény, 575, 579
– leképezés, 555, 576
bináris szorzás, 138
binér művelet, 31; 32
binom, 234
binomiális együtthatók, 231; 236
– eloszlás, 260
– – szimmetriatétele, 238
– tétel, 235
– –, *Newton*-féle, 236
biztos esemény, 243, 250
– – valószínűsége, 245

Bolyai János, 268; 269
Bolzano, B., 93; 583
Bolzano–Weierstrass-tétel, 583
Briggs, H., 145

C

Cantor, G., 93
Cardano, G., 201
Cardano-képlet, 202
casus irreducibilis, 203
Cauchy, A. L., 269, 672
Cauchy tétele, 723
Cayley, A., 269
centiméter, 316
centrális kúpszeletek, 494
Ceulen, L. van, 325
ciklois, 491
ciklometrikus függvények, 622
cisszoidgörbe, 491
Clairaut-féle diff.egyenlet, 750
Cramer-szabály, 178
csapszeg, 372
csatornakeresztmetszet, 335; 387
csavarmenet emelkedési szöge, 388
csonkagúla, 352
– felszíne, 353
– térfogata, 353
csonkahenger térfogata, 360
csonkakúp, 363
– felszíne, 364
– térfogata, 364
csoport, 32; 33
– -axiómák, 32
– -elmélet, 31
– fogalma, 32
– -tulajdonságok, 32
csúcsgömbháromszögek, 433
csúcsszögek, 275

D

Darboux-féle integrál
–, alsó, 702
–, felső, 702
de *Morgan, A.*, 29
de Morgan azonosság, 28
deciméter, 316
Dedekind, R., 37
definiáló egyenlőség, 19
definíciók, 268
deltoid, 290
– területe, 321
derékszög jelölése, 272; 273
derékszögű és polárkoordináta-rendszer kapcsolata, 488
derékszögű háromszög 298, 373
– alkotórészeinek kiszámítása, 385
– meghatározása, 385
deriválás, 644
–, logaritmikus, 655
derivált jelölése, 644
– jobb ill. bal oldali, 644
– függvény, 644
Descartes-féle
– derékszögű koordináták, 441, 496
– szorzat, 28; 153; 567
Descartes, R., 496
determináns, 177, 178
– alaptulajdonságai, 180
– elemei, 178
– értéke, 178
– főátlója, 178
– mellékátlója, 178
–, harmadrendű, 184
–, másodrendű, 178
determinánsok módszere, 184
differenciahányados, 642
differenciál, 658
– geometriai jelentése, 658
–, teljes, 742
differenciálás, 644
differenciálegyenlet, 719
– alaprendszere, 763
– teljes megoldása, 722
– általános integrálja, 724
– általános megoldása, 724
–, *Bernoulli*-féle, 738
–, *Clairaut*-féle, 750
–, egzakt, 742
–, elsőrendű, 736
–, *Euler*-féle, 775
–, homogén, 731
– integrálgörbéi, 722
–, közönséges, 720
–, *Lagrange*-féle, 748
–, lineáris, 720
– megoldása, 722
– nemlineáris, 720
–, parciális, 720
– partikuláris megoldása, 722
–, *Riccati*-féle, 740
–, szétválasztható változójú, 728
– szinguláris megoldása, 722; 746; 747
differenciálegyenlet-rendszer, 720; 784
–, elsőrendű, 787
differenciálhányados, 642
– fizikai jelentése, 642
differenciálható
– függvény, 644
–, végtelen sokszor, 663
Diophantos, 59
direkt szorzat, 28
diszjunkt halmazok, 26
diszkrimináns, 194
disztributív, 528
disztributívitás törvénye, 532
divergens sorozat, 585
dodekaéder, 349
domborúszög, 273
döféspont, 345

E, É

egész számok halmaza, 58
– – – megszámlálható számosságú, 59
egybevágó alakzat, 282
– testek, 348
egybevágóság, 294
– jele, 282
egyenáram teljesítménye, 171
egyenes, 270
– általános egyenlete, 451
– – egyenletrendszere, 508
– egyenlete, 446
– egyenletének általános alakja, 448
– – determinánsos alakja, 450
– – tengelymetszetes alakja, 446

egyenes és sík által bezárt szög, 345; 539
– – – kölcsönös helyzete, 345
– – – merőlegessége, 516
– – – párhuzamossága, 516
– irányvektora, 450
– két ponton átmenő egyenlete, 449
– normálvektora, 450
– paraméteres egyenlet-rendszere, 451; 539
– – vektoregyenlete, 451
– térbeli általános egyenletrendszere, 507
– – kanonikus egyenlet-rendszere, 510
– – paraméteres egyenlet-rendszere, 511
– vektoregyenlete, 451; 539
– – paraméteres alakban, 539
– vetítősíkokkal adott egyenletrendszere, 508
egyenes csonkakúp, 363; 364
– körkúp, 361-363
– szíjhajtás, 390
egyenesek
– által bezárt szög, 515; 539
–, egybeeső, 455
– hajlásszöge, 452
–, kitérő, 343
– metszéspontja, 454
–, metsző, 271, 343
–, merőleges, 453
– merőlegességi feltétele, 515
–, párhuzamos, 271; 343; 453;
– párhuzamossági feltétele, 515
– szögfelezőinek egyenlete, 459
egyenessereg, 271; 292
– egyenlete, 449; 458
egyenesszakasz
–felezése, 335
– felosztása, 336
– iránykoszinuszai, 501
egyenesszög, 272
egyenlet, 99; 153
–, algebrai, 157
– bal oldala, 153
–, ellentmondó, 155
–, elsőfokú egyismeretlenes, 161
–, elsőfokú kétismeretlenes, 173
–, exponenciális, 207
– értelmezési tartománya, 153
– gyöke, 154
– gyöktényezős alakban, 156
–, határozatlan, 155; 173
–, határozott, 155
–, irracionális, 204
– jobb oldala, 153
– következménye, 158
– közelítő megoldása, 636
–, logaritmikus, 209
– másodfokú, 190
– megoldáshalmaza, 154
–, nem algebrai (transzcendens), 156
–, nullára redukált, 163
–, nullára redukált rendezett, 162
–, paraméteres, 156
– rendezett alakja, 156
– -rendezés, 159; 162
–, szöveges, 165
–, transzcendens, 207
egyenletek
–, ellentmondó, 173
–, független, 173
–, nem független, 173
– numerikus megoldása, 636
– osztályozása, 155
egyenletes mozgás, 171
egyenletrendszer, 154
– általános alakja, 173
– értelmezési tartománya, 153
– grafikus megoldása, 638
– determinánsa, 178
–, háromismeretlenes, 183
– –, lineáris, 173
–, homogén, 187; 189
–, inhomogén, 187
–, másodfokú kétismeretlenes, 205
– megoldáshalmaza, 154
– megoldhatóságának feltétele, 185
egyenlő együtthatók módszere, 175; 183
– nevezőjű törtek, 118
– oldalú háromszög, 278
– – henger, 359
– – kúp, 362
– szárú háromszög, 278; 284
– – trapéz, 289; 290
egyenlőtlenség, 211
–, algebrai elsőfokú, 215
–, algebrai másodfokú, 215
– – – megoldása, 219
–, egyenértékű (ekvivalens), 215
– geometriai szemléltetése, 211
–, transzcendens, 215
– tranzitív tulajdonsága, 212
egyenlőtlenségek
– alaptulajdonságai, 212
– osztályozása, 215
egyenlőtlenségrendszer, 216
– megoldása, 216
egyismeretlenes egyenlet gyöke, 162
egynemű
– gyökmennyiségek, 130
– tagok, 102
egyparaméteres görbesereg, 722; 724
egységsugarú kör, 393; 395
egységvektor, 393; 522
– abszcisszája, ordinátája, 393
– hossza, 393
– komponensei, 526
egységgyökök, 562
egytagú algebrai kifejezések, 99
együttható, 99
egzakt differenciálegyenlet, 742
egzisztencia és unicitás tétel, 723
ék, 354
ekvivalencia, 91
– reláció, 91
ekvivalens 152
– állítások, 29
– átalakítások, 158
– egyenletek, 158
– halmazok, 91

elem, 19
elemi esemény, 241; 250
ellenállások párhuzamos kapcsolása, 172
ellentett számok, 59
ellipszis, 467
– csúcsegyenlete, 469; 470
– érintőjének egyenlete, 473
– fókuszai, 467
– kanonikus egyenlete, 468
– középponti egyenlete, 470
– lineáris excentricitása, 469
– numerikus excentricitása, 469
– paramétere, 469
– paraméteres egyenlet-rendszere, 491
–, elforgatott, 472
ellipszoid térfogata, 710
eloszlás
–, diszkrét, 257
–, elsőrendű negatív binomiális, 261
–, exponenciális, 262
–, folytonos, 257
–, hipergeometrikus, 261
–, normális, 262
–, binomiális, 260
–, *Poisson-*, 261
– várható értéke, szórása, 262
– – –, binomiális, 263
– – –, elsőrendő negatív binomiális, 264
– – –, exponenciális, 265
– – –, hipergeometrikus, 264
– – –, *Poisson-*, 264
eloszlásfüggvény, 257
– deriválása, 258
–, feltételes, 257
előjel (szignum) függvény, 268
elsőfokú egyismeretlenes egyenlet, 161
– – – grafikus megoldása, 637
– – egyenlőtlenség, 216
– tag, 191
elsőrendű diff.egyenlet, 736
– lineáris diff.egyenlet, 720
– – – -rendszer, 721
– nemlineáris diff.egyenlet, 721; 738
eltolás, 631
emeletes tört, 120
érintési pont, 301
érintő, 642
– egyenlete, 466
– háromszögek, 311; 312
– -négyszögek, 311; 315
– probléma, 641
érintőtétel, 310
erő, 169
erőnyomaték (forgatónyomaték), 170
értékcsökkenés, 594
értékes számjegy, 79
értékkészlet, 569
értelmezési tartomány, 118; 153; 569
esemény, 241
– gyakorisága, 244
– relatív gyakorisága, 244
– tapasztalati valószínűsége, 244
– valószínűsége, 248
–, biztos, 242
–, elemi, 241
–, ellentétes, 241
–, kiegészítő (komplementer), 241
–, lehetetlen, 242
eseményalgebra, 241
események
– különbsége, 242
– összege, 241
– szorzata, 242
eseményrendszer
–, teljes, 243
eseménytér, 241
északi szélesség, 439
Eukleidész, 268
euklideszi-algoritmus, 54
Euler eljárás, 762
Euler tétele, 348
Euler-féle diff.egyenletek, 775
Euler-féle formula, 564
Euler-féle képletek, 765
examéter, 316
exponenciális egyenlet, 207; 208
– eloszlás, 262
– függvény deriváltja, 653
– – grafikonja, 618
– – inverz függvénye, 619
– – integrálja, 675
– hatványfüggvény deriváltja, 655

F

fajsúly, 169
faktoriális, 224
félegyenes, 270
felező pont koordinátái, 500
felső határ (szuprémum), 86
– összeg, 701
felszín
– mértékegysége, 348
félszögek szögfüggvényei, 409
feltételes valószínűség, 251; 252
felület, 267
–, elsőrendű, 504
femtométer, 316
ferde hasáb, 350
fizikai alapegyenlet, 168
fok, 273
fókuszok távolsága, 469
folytonos függvények 606; 607
fordított arányosság függvénye, 615
forgástestek palástjának felszíne, 712
forgástestek térfogata, 708
forgásszög szögfüggvényei, 397
formula, 156
főátló, 290
földméréstan, 268
Frechet, M., 269
független események, 253
– változó, 573
függő változó, 573
függvény, 572; 573
–, abszolút érték, 628
– abszolút hibakorlátja, 660
–, állandó (konstans), 610
– argumentuma, 572
–, balról folytonos, 607
– deriváltja, 645

függvény
– –, állandó, 645
– –, hányados-, 646
– –, hatvány-, 647; 654
– –, implicit, 654
– –, inverz trigonometrikus, 651
– –, logaritmus-, 648
– –, összeg-, 645
– –, összetett, 647
– –, paraméteres előállítású, 647
– –, szorzat-, 646
– –, trigonometrikus, 649
–, differenciálható, 642
–, egészrész vagy entier, 629
–, előjel- vagy szignum-, 628
–, elsőfokú racionális egész, 611
– értékkészlete, 573
– értelmezési tartománya, 573
–, exponenciális, 618
– extrémumai, 664
–, folytonos, 606
– grafikonja, 580; 599; 603
– határértéke, 597; 598
– határértékének kiszámítása, 602
–, identikus, 576
–, invertálható, 579
–, inverz-, 579
–, irracionális, 617
–, jobbról folytonos, 607
–, kétváltozós, 669
– kiterjesztése, 577
–, konstans, 576
–, koszekáns-, 374
–, koszinusz-, 374
–, kotangens-, 374
– közelítő értéke, 659
–, közvetett, 577
– leszűkítése, 577
–, logaritmus-, 619
–, másodfokú racionális egész, 611
– megadása, 573
–, monoton csökkenő, 601; 666
–, monoton növekvő, 601; 667
–, összetett, 577
–, páratlan, 620
–, páros, 621
–, periodikus, 620
–, racionális egész, 609
–, racionális tört-, 612
–, szakadásos, 608; 613
–, szekáns-, 374
– szélsőértékei, 664
–, szigorúan monoton, 601; 602
–, szinusz-, 374
–, tangens-, 374
–, törtrész-, 629
– -transzformációk, 629
–, trigonometrikus, 374
–, valós, 574
–, valós értékű, 574
–, valós változójú, 574
–, valós-valós, 574
– -vizsgálat, 664
függvények
–, área, 626
–, árkusz, 622; 623
–, hiperbolikus, 624; 625
– kompozíciója, 577
–, szakaszonként egyenesvonalú, 628
–, trigonometrikus, 620; 621
függvénygörbe egyenlete, 580

G

Galilei, G., 92
gallon, 348
Galois, E., 30
Gauss, C. F., 268
geometria, 267
–, abszolút, 268
geometriai
– alakzat, 267
– felület, 267
– leképezés, 280
– pont, 267
– rendszer
– –, euklideészi, 268; 269
– –, hiperbolikus, 268
– szerkesztések, 335
– test, 267
– transzformáció, 280
– valószínűség, 250
– vonal, 267
gigaméter, 316
gömb, 365
– átmérője (diaméter), 365
– felszíne, 367; 712
– főkörök, 365
– húrja, 365
– középpontja, 364
– sugara, 364
– térfogata, 367; 709
gömbcikk vagy gömbszektor, 367
– felszíne, 368
– térfogata, 368
gömbfelület, 364
– átellenes pontjai, 365
gömbháromszög, 366; 432
–, átellenes, 434
–, csúcs-, 433
–, mellék-, 433
– oldalainak összege, 433
– oldalak koszinusztétele, 436; 437
–, polár-, 433
–, sark-, 434
– szinusztétele, 435
– szögeinek összege, 433
– szögek koszinusztétele, 436; 438
gömbháromszögpár, 433
gömbi fölösleg, 433
– távolság, 438
gömbkétszög, 366
gömbkorong vagy gömbréteg, 367
– felszíne, 368
– térfogata, 368
gömböv, 367
– felszíne, 368
gömbréteg, 367
gömbsüveg, 367
gömbszelet vagy gömbszegmentum, 367
– felszíne, 368
– térfogata, 368
gömbszektor, 367
gömbszög, 366

görbe
– alatti terület, 679; 704
– ívhossza, 706
– paraméteres egyenletrendszere, 489
görbesereg
– burkológörbéje, 745
– burkolója, 725, 745
– differenciálegyenlete, 726
– egyenlete, 726
gráf, 568
Grassmann, 269
gúla (piramis), 352
–, csonka-, 353
– felszíne, 352
–, kiegészítő, 353
– térfogata, 353, 711

GY

gyök, 125
–, hamis, 159
–, többszörös, 157
gyökkitevő, 125
gyökmennyiségek 127-130
– logaritmusa, 143
gyökök
– jellege, 193
– összege, 195
– szorzata, 196
gyökvonás, 125
– algoritmusa, 134
– műveleti jele, 125
gyűrűfelület, 368

H

hajlásszög, 344
hajtómű forgattyúkarja, 390
halmalmazműveletek tulajdonságai, 24
halmaz, 19
–, ekvivalens, 91
– jelölése, 19
–, kiegészítő, 27
–, komplementer, 27
–, különbség, 26
–, megszámlálható, 92
–, nem megszámlálható, 92
–, rész-, 22
– részhalmazai, 22
– részhalmazainak száma, 22
–, sűrű, 89
– számossága, 92; 94
–, véges, 20; 92
–, végtelen, 20; 92
–, üres, 20
halmazhoz
– nem tartozás, 20
– tartozás, 20
halmazművelet
–, metszet (szorzat), 25
–, unió, 24
halmazok, 21; 23
– ábrázolása, 23; 24
–, egyenlő, 21
–, nem egyenlő, 21
– uniója, egyesítése, 23
Hankel, H., 59
hányados 45,
– előjele, 63
– határértéke, 586
– trigonometrikus alakja, 558
– logaritmusa, 142
harmadfokú egyenlet, 201
– – gyökei, 203
– –, normál alakú, 201
– –, redukált, 202
harmadrendű determináns 184; 445; 450
– számértéke, 185
–, szimmetrikus, 494
– nemlineáris diff.egyenlet, 721
háromél (triéder), 347; 432
háromismeretlenes egyenletrendszer, 184
háromszög, 277
– alkotórészei, 277
– – közötti összefüggés, 278
– alkotórészeinek meghatározása, 402
– egyenlőtlenség, 556
– köré írt kör, 311, 399
– középvonala, 313
– külső szöge, 279
– magasságpontja, 314
– magasságvonala, 314
– nevezetes pontja, 312
– súlypontja, 312; 313
– súlyvonalai, 312; 527
– szerkesztése, 340
–, derékszögű, 277
–, egyenlő oldalú, 278
–, egyenlő szárú, 278
–, hegyesszögű, 277
– kerülete, 317
– területe, 319; 400; 445
–, tompaszögű, 278
háromszögbe írt kör, 312
háromszög-egyenlőtlenség, 523
háromszögek
–, egybevágó, 282, 283
–, egyenlő szárú, 284
–, hasonló, 295
hasáb (prizma), 350
–, egyenes, 350
– felszíne, 351
–, ferde, 350
– térfogata, 351
hasonló alakzat, 295
– háromszögek, 295; 296; 373
hasonlóság aránya, 294
– jele, 294
hasonlósági transzformáció, 294
határ
–, alsó, 678
–, felső, 678
határérték geometriai szemléltetése, 598
– jelölése, 598
– kiszámítása, 586
– létezése, 584
határozatlan
– együtthatók módszere, 695; 770
– integrál, 673
határozott integrál, 677
– – becslése, 686
– – tulajdonságai, 679
hatásfok, 170
hatszög szerkesztése, 342
hatvány, 52; 55; 101; 121
– alapja, 52
– gyöke, 126
– hatványa, 124

hatvány
– logaritmusa, 143
– műveletek, 101
–, teljes, 126
–, törtkitevőjű, 127
hatványalap, 121
hatványhalmaz, 22
hatványkitevő, 121
hatványok szorzata, 122; 123
hatványozás, 121
hegyesszög, 273
– szögfüggvényei, 374
hektár, 316
helyettesítő módszer, 174
helyi
– érték, 40
– maximum, 664; 665
– minimum, 664; 665
helyvektor, 521
henger, 357
– alkotója, 357
–, egyenes, 358
–, egyenlő oldalú, 358
– felszíne, 358
– felület, 357
–, ferde, 358
– palást, 359
– tengelye, 358
– térfogata, 359
– vezérgörbéje, 357
hengergyűrű térfogata, 361
hengerszelet térfogata, 360; 711
Henrik, N., 199
Héron képlete, 319, 320
Hesse, L. O., 447
Hesse-féle normálalak, 447
hexadecimális, 39
hexaéder, 349
hézagpont, 599; 603; 614
hibakorlát
–, abszolút, 660
–, relatív, 660
–, százalékos, 660
Hilbert, D., 269
Hilbert-féle tér, 269
hiperbola, 474; 492; 493; 615
– aszimptoták egyenlete, 480
– csúcsponti egyenlete, 477
– csúcspontjai, 475
–, egyenlő oldalú, 476
– érintőjének egyenlete, 480
– gyújtópontjai, fókuszai, 475
– kanonikus egyenlete, 475
– képzetes tengelye, 475
– középponti egyenlete, 477
– lineáris excentricitása, 475
– numerikus excentricitása, 475
– paramétere, 476
– valós tengelyének hossza, 475
hiperbolikus geometria, 268
– függvény, 623
– – integrálja, 676
– – inverze, 626 – 628
hipergeometrikus eloszlás, 260; 264
hitel törlesztése, 596
homogén diff.egyenlet, 732, 762
– – -rendszer, 787
– egyenletrendszer, 187; 189
homorúszög, 273
hordó térfogata, 369
hosszúságegység, 270
hosszúságegységek, 316
hozzárendelés
–, kölcsönösen egyértelmű, 91
húr, 301
– -háromszögek, 311
– -négyszögek, 286; 311; 314
húrtétel, 309

I

i komplex szám, 552
igazsághalmaz, 154
ikozaéder, 349
imaginárius egység, 552
implicit függvény, 609
– – deriváltja, 654
inch, 316
infimum, 86
inflexiós
– érintő, 664
– pont, 664; 665
injektív leképezés, 575; 576
integrál
– alaptétel, 673; 677; 678
–, exponenciális függvény, 675
–, határozatlan, 673
–, határozott, 677
–, hatványfüggvény, 675
–, hiperbolikus függvény, 676
–, irracionális függvény, 677
–, racionális függvény, 676
–, trigonometrikus függvény, 675; 699
integrálás, 673
– a differenciálás inverz művelete, 684
– helyettesítéssel, 690; 691
– trigonometrikus függvények, 699
integrálközépérték
–, négyzetes, 685
integrálszámítás
– középértéktétele, 682
– műveleti jele, 673
integrandus, 673
interpoláció, 384; 590
intervallum, 87
– hossza, 88
–, kompakt, 87
–, nyílt, 87
–, véges, 89
–, végtelen, 89
–, zárt, 87
invertálható függvény, 579
inverz
–, additív, 33
– elem, 33
– függvény, 579
– – értelmezési tartománya, 579
– – értékkészlete, 579
–, multiplikatív, 34
– reláció nyíldiagramja, 569
irányított vonalszakasz, 567
iránykoszinuszok, 510
irányszög, 445
iránytényező, 446
irracionális
– számok, 84; 126
– – ábrázolása, 38
– függvény integrálja, 677

irracionális számok
– – halmaza mindenütt sűrű, 84
– – – nem megszámlálható számosságú, 84
ismétlés nélküli kombinációk száma, 231
ismétléses
– kombinációk száma, 233
– permutációk száma, 226
– variációk száma, 229
ív, 300
ívdifferenciál, 662
ívsúlypont koordinátái, 714

J

járadékszámítás, 78, 597
Joule-törvény, 171

K

k-adrendű homogén függvény, 730
k-szoros gyök, 157
kamatláb, 78; 595
kamatoskamat-számítás, 78; 595
kamatszámítás, 79
kamattényező, 595
karakterisztika, 147; 148
karakterisztikus egyenlet, 763; 776; 789
katasztrális hold (kh), 317
kedvező esetek, 247; 248
keleti hosszúság, 439
képhalmaz, 568
képlet, 98; 156
– hibája, 660
képzetes tengely, 554
keresztezett szíjhajtás, 391
kerület, 317
–, háromszög, 317
– mérés, 315
–, kör, 325
–, körcikk (körszektor), 328
–, körgyűrű, 328
–, körszelet (körszegmentum), 329
kerületi sebesség, 171
– szög, 301; 303
– szögek tétele, 305
két egyenes által bezárt szög, 452
– – szögfelezőinek egyenlete, 458
– földrajzi hely távolsága, 438
– irány által bezárt szög koszinusza, 501
– kitérő egyenes távolsága, 541
– komplex szám egyenlősége, 549
– pont távolsága, 442; 499
– ponton átmenő egyenes egyenletrendszere, 512
– sík által bezárt szög, 513
kétszeres szögek szögfüggvényei, 407
kétváltozós függvény, 668
– szélsőértékhelyei, 668
kezdeti feltétel, 724
kicsinyítés, 294
kiegészítő szögek, 276
kiegyenlítőcső, 332
kifejezés, 151
–, ekvivalens, 152
– értelmezési tartománya, 152
kilométer, 316
kis magyar hold, 317
kisebbítendő, 42
kisegítőszög bevezetése, 430
kísérlet, 241
kitérő egyenesek
– – hajlásszöge, 343; 344
– – távolsága, 344
kitevő, 55
kivonandó, 43
kivonás, 42
– műveleti jele, 42
– *Z* halmazban, 61
klasszikus valószínűségi mező, 246
kocka, 350
– felszíne, 351
– térfogata, 351
kollineáris vektorok, 521
Kolmogorov, A. N., 240
Kolmogorov-féle axiómák, 245
– – elmélet, 251
kombinációk, 230
–, ismétlés nélküli, 231
–, ismétléses, 232
kombinatorika, 223
– feladata, 223
kommutatív csoport, 32; 35
komplanáris vektorok, 535
komplementer esemény valószínűsége, 245
komplex szám
– – -halmaz, 548
– – -sík, 548; 554
– – -test, 550
– – ábrázolása, 549; 554
– – abszolút értéke, 554
– – algebrai alakja, 552
– – árkusza, 555
– – exponenciális alakja, 564
– – gyöke, 561
– – hatványa, 560
– – képzetes része, 553
– – konjugáltja, 553
– – trigonometrikus alakja, 555
– – valós része, 553
konjugált komplex gyök, 194
konkáv
– alulról, 666
kontinuum számosságú, 84; 85
– – halmazok, 95
konvergenciakritérium, 585
–, *Cauchy*-féle, 585
–, *Leibniz*-kritérium, 585
konvergens sorozat, 584
konvex
–, alulról, 666
– négyszög, 285
– test, 347; 348
– testszöglet, 346
koordináta rendszer 440; 496
– kezdőpont, origó, 440
– –, balsodrású, 497
– –, jobbsodrású, 497
koordináta-transzformáció
– – origó körüli elforgatás, 461; 498
– – párhuzamos eltolás, 461; 498

koordinátatengelyek, 440
– egységvektorai, 525
kosárgörbe, 334
koszekáns függvény, 374
koszinusz függvény, 374; 620
– hiperbolikusz, 624
koszinusztétel, 400; 401
kotangens függvény, 374; 621
– hiperbolikusz, 625
köb
– -centiméter, 348
– -deciméter, 348
– -kilométer, 348
– -méter, 348
– -milliméter, 348
köbre emelés, 110
– három tag, 111
köbtartalom, 348
kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, 575
kör, 300; 463; 492
– általános egyenlete, 464
– érintő egyenlete, 466
– érintői, 301; 465
– érintő szerkesztése, 339
–, háromszög köré írt, 311
–, háromszögbe írt, 312
– kerülete, 325
–, képzetes, 464
– normálegyenlete, 464
– paraméteres egyenletrendszere, 490
– szerkesztése, 338
– – háromszögbe, 340
– – háromszög köré, 340
– területe, 327
körcikk (szektor), 300
– kerülete, 328
– területe, 328
körgyűrű, 306
– kerülete, 328
– területe, 328
körhenger, 358
körív, 269
– hossza, 325; 327
körkúp, 361
körlap, 300
környezet, 90
körök
– belső érintői, 308
– belső hasonlóságpontja, 307
– kölcsönös helyzete, 305; 306
– külső érintői, 308
– külső hasonlóságpontja, 306
körszelet (szegmentum), 301
– kerülete, 329
– területe, 330
körvonal, 300
közelítő érték, 78
– – hibája, 660
közelítőleg egyenlő, 77; 79
középarányos, 96
–, harmonikus, 96
–, mértani, 96
–, négyzetes, 97
–, számtani, 96
középértéktétel, 657
középpont (origó), 300
középponti szög, 301; 302
középvonal, 305; 313
közönséges diff.egyenlet, 720
– integrálközépérték, 684
– tört, 65; 75
közös nevező, 69; 118
– osztó, 53
– többszörös, 54
közvetett függvény, 577
kúp
– alkotója, 361
–, csonka-, 363
–, egyenlő oldalú, 362
– felszíne, 362
–, kiegészítő, 363
– -palást területe, 362
– tengelye, 361
– térfogata, 362
– test, 361
kúpfelület, 361
kúpszeletek, 492
–, elfajult, 493
különbség, 42
különbségi hányados, 642
különnemű algebrai kifejezések, 102
külső pont körre vonatkozó hatványa, 310
– szög, 279
kvadrátföld, 317
kvadratúra probléma, 671
kvantor, 30
–, egzisztenciális, 30
–, univerzális, 30

L

láb, 316
Lagrange módszer, 736
Lagrange-féle állandók variálásának módszere, 766
– – diff.egyenlet, 748
láncgörbe, 624
láncosztás, 54
láncszabály, 647
lánc területmérték, 317
lapátló, 351
Laplace, P. S., 240
lapszög, 345
– éle, 345
– lapjai, 345
– oldalai, 345
látókörív szerkesztése, 338
látókörívek-tétele, 305
Lebesgue, H., 672
legkisebb közös többszörös, 55
legnagyobb közös osztó, 53
lehetetlen esemény, 242
lehetséges esetek, 247
Leibniz, G. W., 641
Leibniz-féle háromszög, 659
leképezés, 37; 280; 572
–, bijektív, 37; 575
–, injektív, 575
–, konstans, 576
–, kölcsönösen egyértelmű, 37
– műveletének jele, 37
–, szürjektív, 575
léptékmérő, 296
lg x, 145
Lindemann, F. von, 325
lineáris diff.egyenlet, 736
– -rendszer, 787
lineáris egyenlet, 448
– függvény, 634
– interpoláció, 149; 634
Lipschitz-feltétel, 723

liter, 348
–, centi-, 348
–, hekto-, 348
–, milli-, 348
$\ln x$, 145
Lobacsevszkij, N. I., 268
lóerő, 169
logaritmikus deriválás, 655
logaritmus, 149
– alapja, 140
– azonosságai, 142
– függvény, 619
– – deriváltja, 648
– jelölése, 140
–, 2-es alapú, 140
– numerusa, 140
– táblázat, 149
–, természetes, 140
– visszakeresés, 150
logaritmuskeresés, 140
logaritmusrendszer, 145
–, e-alapú, 146
– modulusa, 147
–, tízes alapú, 147
logikai
– állítás, 29
– ekvivalencia, 29
– implikáció, 29
Ludolf-féle szám, 325

M

magasabbfokú egyenletek, 199
magasabbrendű deriváltak, 662
magasságtétel, 298
magyar hold, 317
mantissza, 147
maradék, 43, 47
másodfokú (kvadratikus) egyenlet, 190
– – diszkriminánsa, 193
– – grafikus megoldása, 639
– – gyöktényezős alakja, 197
– –, hiányos, 191
– – megoldása, 192
– – megoldóképlete, 193
– – nullára redukált alakja, 190
– –, tiszta, 191
– –, vegyes, 192
– egyismeretlenes egyenlőtlenségek, 219
– – – megoldása, 219
másodfokú függvény, 611
– tag, 191
másodperc, 273
másodrendű differenciálegyenlet
– – explicit alakja, 758
– –, hiányos, 758
– –, homogén, 762
– – implicit alakja, 758
– –, inhomogén, 765
– görbék általános egyenlete, 493
matematikai
– logika, 29
– rendszer, 31
– tér, 269
megaméter, 316
megoldáshalmaz, 154
mellékátló, 290
mellékgömbháromszög, 433
mérföld, 316
–, nemzetközi tengeri, 316
–, tengeri, 316
–, US tengeri, 316
merőlegesség feltétele, 453; 502; 513; 515
mérőléc, 270
merőleges egyenes, 453
– szerkesztése, 336
mértani sor összege, 592
mértékegységek
–, terület-, 316
méter definíciója, 316
metszéspont, 269
mikrométer, 316
milliméter, 316
modulus, 148
Moivre, Abraham de, 560
Moivre-féle képlet, 561
monoton sorozat, 581
monotonitás vizsgálata, 583
mozgásmennyiség (impulzus), 168
Muhammad ibn Musza al-Hvárizmi, 98
multiplikatív inverz, 551
munka, 169
művelet, 31
–, kétváltozós, binér, 31
műveletek
–, alacsonyabb fokú, 139
– komplex számhalmazban, 549; 550
– 0-val, 63
– sorrendje, 48
– tizedes törtekkel, 73
– törtekkel, 69;72
műveleti jelek, 99

N

nagy számok törvénye, 265
nagyítás, 294
nanométer, 316
Napier, J., 145
n-ed fokú racionális függvény, 609
n-ed rendű parabola, 610
n elem permutációinak száma, 224
n-szög
– átlóinak száma, 291
–, szabályos, 323
– szögeinek összege, 291
– területe, 323
negatív egész számok halmaza, 58
– irány, 37
– kitevőjű hatványok, 124
– számok, 57
– – hatványa, 121
négyszög, 284
–, érintő-, 286
–, húr-, 286
–, konvex, 284
négyszögöl (□), 317
négyzet, 288
– területe, 317
négyzetcentiméter, 317
négyzetdeciméter, 316
négyzetgyökfüggvény, 617
négyzetgyökvonás, 133
négyzetkilométer, 316
négyzetméter, 316

négyzetmilliméter, 317
négyzetre emelés, 111
neutrális elem (nullelem), 31; 33; 35; 550
nevezetes
– alakú szorzatok, 107
– azonosságok, 107 – 109
– szögek szögfüggvényei, 379
– – szögfüggvényértékei, 381
nevező gyöktelenítés, 130 – 132
Newton, I., 236; 641; 672
Newton-Leibniz szabály, 704
nóniusz, 270
normális eloszlás, 261
normáltranszverzális, 344; 541
nulla, 64
– kitevőjű hatványok, 124
nulladfokú polinom, 611
nullkör, 464
nullvektor, 521

NY

nyitott mondat, 154
nyolcszög szerkesztése, 342
nyújtás, 631
nyomás, 169

O

Ohm-törvénye, 171
oktaéder, 349
ordináta, 441
– -tengely, 441
origó, 36; 440
oszlop, 350
osztás, 46
– műveleti jele, 45
– *Z* halmazban, 63
oszthatóság, 49
osztó, 49
–, nem valódi, 51
–, valódi, 51
osztókörző, 296
ovális, 333

Ö

összeadás, 40
– bináris rendszerben, 137
– műveleti jele, 40
– *Z* halmazban, 60
összefüggések
– szög szögfüggvényei között, 375
összegfüggvény deriváltja, 645
összegzés jele (Σ), 235
összetett függvény, 577
– – deriváltja, 647
– – leképezése, 578
– szám, 51
összevonás, 102
ötszög szerkesztése, 341

P

pályagörbe, 490
pantográf, 297
parabola, 482; 492
– csúcsponti egyenlete, 483
– csúcspontjának koordinátái, 612
– érintőjének egyenlete, 486
– gyújtópontja (fókusza), 482
– kanonikus egyenlete, 482
–, *n*-edrendű, 610
– paramétere, 482; 483
– szelőjének egyenlete, 486
– tengelyének egyenlete, 612
– vezérvonala (direktrix), 482
– – egyenlete, 483
paralelepipedon (egyenlőközű hatlap), 350
paralelogramma, 286
–, derékszögű, 287
– tulajdonságai, 286
paralelogrammák
– szerkesztése, 341
– területe, 318
paraméteres egyenletrendszer, 489
páratlan számok, 49
– függvény grafikonja, 620
– multiplicitású pólus, 616
parciális integrálás (szorzatintegrálás), 688
párhuzamos szelők tétele, 291; 292
párhuzamosság feltétele, 454; 502; 513; 515
páros függvény grafikonja, 620
– multiplicitású pólus, 616
– számok, 49
Pascal, B., 234
Pascal-féle háromszög, 235
Peano-tétele, 724
perc, 273
periodikus függvény, 397; 620
periódus, 620
permanenciaelv, 549
permutáció, 223
–, ismétlés nélküli, 225
–, ismétléses, 226
petaméter, 316
pi szám (π), 38; 325
pikométer, 316
Pitagorasz, 268
Pitagorasz-tétel, 299; 401
Platón, 268
Poisson, S. D., 240
polárgömbháromszögek, 433
polárkoordináta-rendszer, 487; 488
polárkoordináták, 488
polárszög, 488
polártengely, 488
poliéder, 347
polinom, 100
– helyettesítési értéke, 100
–, rendezett, 102
– zérushelyei, 100
polinomfüggvény, 609
pólus, 488
pont, 269
– koordinátái, 441
– körre vonatkozó hatványa, 309
– távolsága egyenestől, 457; 540
– távolsága síktól, 538
–, távolságot adott arányban osztó, 443
–, távolságot felező, 443
posztulátumok, 268
pótfüggvények, 375
pótszögek, 277
primitív függvény, 672

prímszám (törzsszám), 51
prímtényezők, 51
prímtényezőkre bontás, 51
próbafüggvény-módszer, 769
Ptolemaiosz, 268

R

racionális
– egész függvény grafikonja, 610
– – – integrálja, 676; 694
– számok, 37; 64
racionális számok
– – ábrázolása, 37
– – halmaza, 64
– – – megszámlálható számosságú, 67
– – – mindenütt sűrű, 66
– törtfüggvény, 612
– – értelmezési tartománya, 612
– –, valódi, 695
radián, 274; 326
reflexivitás, 91
regula falsi, 636
rekurziós összefüggés, 236
reláció, 567
– elemei, 567
– gráfja, 568
– inverze, 569
– nyíldiagramja, 568
relatív gyakoriság
– –, feltételes, 252
– prímszámok, 53
rendezett számpárok, 567
Rényi A., 265
részhalmaz, 22
–, nem valódi, 22
–, valódi, 22
résztörtekre bontás, 695 – 698
rezgésszám, 172
Riccati-féle diff.egyenlet, 740
Riemann integrál, 702
Riemann, B., 269; 672
Riesz Frigyes, 269
Rolle-tétel, 658
római számok, 97
rombusz, 288

S

sakktábla szabály, 185
sarkgömbháromszögek, 433
sarktengely, 488
sarktriéder, 434
sebességfüggvény, 643
sík, 503
– általános egyenlete, 504
– egyenlete, 536
– és pont távolsága, 518
– normálegyenlete, 504
– normálisa, normálvektora, 537
– tengelymetszetes egyenlete, 507
– vektoregyenlete, 537
síkalakzat, 277
– kerülete, 317
síkdomború lencse, 335
síkidom
– kerülete, 315
– területe, 315; 705
síkmértan (planimetria), 267
síkok
– által bezárt szög, 537
– általános egyenlete, 511
– kölcsönös helyzete, 345
– merőlegességi feltétele, 513
– párhuzamossági feltétele, 513
síktartomány, 277
síkvektor, 549
skaláris
– mennyiségek, 520
– szorzat, 527
sokszög, 291
– átlóinak száma, 291
–, szabályos, 291
sorozat, 580
– általános eleme, 580
–, alulról korlátos, 582
–, divergens, 585
– elemeinek ábrázolása, 581
–, felülről korlátos, 582
– határértéke, 583
–, konvergens, 584
–, korlátos, 582
–, mértani, 591
–, monoton csökkenő, 581
–, monoton növekvő, 581
–, nulla, 584
– rekurzív megadása, 580
–, számtani, 587
–, végtelen, 580
–, végtelen mértani, 593
speciális szögek szögfüggvényértékei, 380
spirális, 334
statikai nyomaték, 713
Stifel, M., 59
struktúra
–, algebrai, 31
sugár (rádiusz), 301
sugársor, 271
súly, 169
súlypont, 313
– koordinátái, 713
súlyvonal, 312
sűrűség, 168
sűrűségfüggvény, 258

SZ

szabad tag, 191
szabadon eső test gyorsulása, 136
szabadvektor, 521
szabályos gúla, 351
– *n*-szög területe, 323
– poliéder, 348
– sokszög, 290
– testek, 349
– – felszíne, 354
– – térfogata, 354
szakadás
–, elsőfajú, 608
szakadás, 608
–, másodfajú, 608
–, megszüntethető, 608; 614
szakasz, 270
– hossza, 270
– műszaki jelölése, 270
szakaszos tizedes tört, 75
szám
– abszolút értéke, 59
–, komplex, 548
–, transzcendens, 325

szám
–, végtelen (transzfinit), 93; 94
–, vegyes, 66
számegyenes, 36; 58
számelmélet alaptétele, 51
számhalmaz, 21
–, egész, 21
– jelölése, 21
–, komplex, 21
–, korlátos, 86
–, racionális, 21
–, természetes, 21
–, valós, 21
számnevek, 39
számok, 111
– kerekítése, 79
– köbre emelése, 112
– négyzetre emelése, 111
– négyzetgyöke, 134
számrendszer, 39
–, helyértékes, 137
–, hexadecimális, 139
–, kettes (bináris), 137
–, nyolcas (oktális), 138
–, tízes (decimális), 39; 136
számsorozat határértéke, 585; 586
számtani sor összege, 588
– sorozat, 587
– – elemei, 588
– – első *n* elemének összege, 588; 589
számtest, 85
százalék, 76
– -érték, 76
– -láb, 76
százalékos hibakorlát, 660
szegmentum, 300
szekánsfüggvény, 374
szektor, 301
szelő, 300
szelők, 292
–, párhuzamos, 292
szelőtétel, 310
szeparábilis differenciálegyenlet, 728
szerkesztés
–, geometriai, 335
–, háromszög, 340
–, hatszög, 341
–, látókörív, 338
–, merőleges egyenes, 336
–, nyolcszög, 342
–, ötszög, 341
–, paralelogramma, 341
–, tízszög, 342
széttagolási törvény, 44
szférikus
– excesszus, 433
– kétszög, 366
– távolság, 365
szimmetria, 91
–, középpontos, 286
– tétel, 238
szinguláris megoldás, 749; 751
szinuszfüggvény, 374
szinuszhiperbolikusz, 624
szinusztétel, 398; 399
szórásnégyzet, 263
szorzás, 43
– műveleti jele, 44
– *Z* halmazban, 62
szorzat
– előjele, 62; 63
– -függvény deriváltja, 646
– gyöke, 127
– hatványa, 105; 123
– határértéke, 586
– -integrálás, 687
– logaritmusa, 142
szorzó, 44
szög, 271
– abszolút mértéke, 274
– csúcsa, 271
–, derék-, 272
–, domború-, 273
–, egyenes-, 272
– felezése, 337
–, hegyes-, 273
–, homorú-, 273
– ívmértéke, 274
– jele, jelölése, 272
–, kerületi, 301; 303
–, középponti, 301; 302
– mérése radiánban, 326
–, negatív, 272
–, pozitív, 272
– szára, 271
– szerkesztése, 337
–, szférikus-, 366
–, teljes-, 272
–, tompa-, 273
szögek
–, belső, 276
–, csúcs-, 275
–, egyállású, 275
–, kiegészítő, 275
–, külső, 276
–, mellék-, 275
–, pót-, 277
–, társ-, 275
–, váltó-, 275
szögfüggvények, 374
– általánosítása, 393
– definíciói, 374; 394
– előjelváltása, 395
– közötti összefüggések, 376; 377; 406
– összegének szorzattá alakítása, 411
– periódusai, 397
– táblázata, 382
szögfüggvényértékek
– 10 alapú logaritmusai, 384
szöglet élei, 345
– élszögei, 345
– lapszögei, 345
szögmérés mértékegysége, 273
szögmérő, 274
szögpárok, 275
szögtartomány, 272
szöveges egyenlet, 165
szuperjekció, 575
szuprémum, 86
szürjektív leképezés, 575

T

táblabeli különbség, 382
tangensfüggvény, 374
tangens hiperbolikusz, 625
tangenstétel, 401
tárgyhalmaz, 568
társszögek, 275
Tartaglia, N., 201

távolság, 90
távolságegység, 36
téglalap, 288
– területe, 317
téglatest, 350
– felszíne, 351
– térfogata, 351
teljes
– eseményrendszer, 243
– indukció módszere, 56
– négyzetté való kiegészítés, 464
– valószínűség tétele, 253
teljesítmény, 169
teljesszög, 272
tengelyszimmetrikus trapéz, 289
tényező, 44
teraméter, 316
térelemek, 267
térfogat
– mértékegysége, 348
térgeometria (sztereometria), 343
térmértan (sztereometria), 267
természetes szám osztói, 49
– számok, 39
terület, 316
–, általános négyszög, 321
–, deltoid, 321
–, ferdeszögű paralelogramma, 318
–, háromszög, 318
–, kör, 327
–, körcikk (körszektor), 328
–, körgyűrű, 328
–, körszelet (körszegmentum), 329
– mérés, 316
–, *n*-szög, 323
–, négyzet, 317
–, téglalap, 317
–, trapéz, 320
területmérés, 316; 671
– mértékegysége, 316
területszámítás alapja, 316
test, 33; 267
– átlója, 347
– csúcsai, 347
– élei, 347
– felszíne, 348
–, gömbölyű vagy görbefelületű, 347
– lapjai, 347
–, szabályos, 348
–, szögletes, 347
– térfogata (köbtartalma), 348
testaxiómák, 33
testszöglet, 346
–, egybevágó, 346
–, szimmetrikus, 346
tetraéder, 349
– térfogata, 536
Thalész, 268
Thalész tétele, 304
tiszta képzetes szám, 553
tizedes tört, 73; 74
–, nem szakaszos végtelen, 76; 85
–, szakaszos, 75
tizedesvessző, 73
tízes számrendszer, 40
tízszög szerkesztése, 342
tojásgörbe, 333
torlódási pont, 582
tórusz, 368
– felszíne, 368
– térfogata, 368
többtagú algebrai kifejezés, 106; 112
– négyzetgyöke, 133
többváltozós függvény, 656
törött vonal, 269
tört, 65
–, ál-, 65
– bővítése, 67
– egyszerűsítése, 67
– gyöke, 128
– hatványa, 124
–, közönséges, 65
– logaritmusa, 142
–, valódi, 65
törtek közös nevezője, 118
– összeadása, kivonása, 118
törtfüggvény
– deriváltja, 646
–, lineáris, 615
– pólushelye, 613
törtkifejezés
–, algebrai, 117
törtrész függvény, 629
törtszám, 65
– reciproka, 71
törtvonal, 46; 65
transzcendens
– egyenletek, 414
– szám, 38; 84; 325; 604
transzfinit szám, 93
transzformáció
–, egybevágósági, 281; 282
– eltolás, 630; 631
–, hasonlósági, 294
–, koordináta, 461
–, nyújtás, zsugorítás, 631
–, távolságtartó, 281; 282
– tükrözés, 630
tranzitív tulajdonság, 22
tranzitivitás, 91
trapéz, 286; 288
–, egyenlő szárú, 288
– középvonala, 289; 321
– területe, 320
triéder, 432
trigonometria (háromszögmértan), 373
trigonometrikus egyenlet, 414; 424
– – megoldása, 414
trigonometrikus függvény, 620
– – deriváltjai, 649
– – integrálása, 675; 699
– – inverze, 622; 623
triviális megoldás, 187; 189
tükrözés, 630
–, középpontos, 280
–, tengelyes, 280

Ú

újfok (grádus), 273
újmásodperc, 273
újperc, 273
unió halmazművelet, 24
útfüggvény, 642; 674

Ű

űrmérték, 348

V

valós számok halmaza, 85
– –, nem megszámlálható számosságú, 85
valós függvény, 574
– tengely, 555
valószínűség
– értéke, 247
–, feltételes, 251
–, geometriai, 250
– matematikai fogalma, 245
valószínűségek szorzási szabálya, 252
valószínűségeloszlás, 257
valószínűségi mező
– –, klasszikus, 246
valószínűségi változó, 256
– –, diszkrét, 256
– –, folytonos, 256
– valós értékű függvény, 256
– szórása, 263
– –, független, 257
valószínűségszámítás, 240
váltószögek, 275
változó, 99; 566
várható érték, 262
variáció, 226
–, ismétlés nélküli, 227
–, ismétléses, 228
variációk száma, 228
variancia, szórásnégyzet, 263
véges halmaz, 20
végtelen halmaz, 20
– határérték, 600
– mértani sor összege, 593
– sok esemény összege, 244
– – – szorzata, 244
végtelen, nem szakaszos tizedestörtek, 84
vegyes szám, 66; 70
– szorzat, 535
vektor
– abszolút értéke (modulusa), 521
–, egység-, 522
–, ellentett, 522
– felbontása összetevőkre, 536
– hossza, 525
– koordinátái, 525
–, kötött, 521
– -mennyiségek, 520
– összetevői, 525
– skaláris komponensei, 525
– skaláris szorzata, 521; 527
–, szabad-, 521
– vektoriális komponensei, 525
vektorháromszög
–, zárt, 527
vektoriális szorzat, 521
– determináns alakban, 533
– komponensei, 533
vektorok
– által közbezárt szög, 529
– egyenlősége, 521
– kollineárisak, 521
– komplanárisak, 521
– különbsége, 524
– merőlegességi feltétele, 529
– összeadása, kivonása komponensekkel, 526
– összege, 523
– párhuzamossági feltétele, 531
– skaláris szorzata, 527
– vegyes szorzata, 534
– vektoriális szorzata, 531
Venn, J., 23
Venn-diagram, 24
vetületvektor, 530
vezérsugarak, 467
vezetők ellenállása, 171
vonal, 269
vonás, 274

W

Weierstrass, K. T. W., 583

Y

y-tengely, 441
– egyenlete, 446
y-tengelyre való tükörkép, 630
yard, 316

Z

zárójel
–, kapcsos, 49
–, kerek, 49
–, szögletes, 49
zárójelek felbontása, 104
– használata, 48
zárt alakban ki nem fejezhető integrálok, 675
– vektorháromszög, 527
zavaró tag, 736
zérus polinom, 610
zsugorítás, 632

Obádovics J. Gyula–Szarka Zoltán: Felsőbb matematika

Akinek szélesebb elméleti ismeretekre van szüksége a *Felsőbb matematikai feladatgyűjteményben* található elméleti összefoglalóban olvashatónál, megtalálja ezeket a közel 700 oldalas *Felsőbb matematika* című könyvünkben. Minden új fogalmat definiálunk. A tételek megértését bőséges ábraanyag, kidolgozott példák és ezekhez hasonló gyakorló feladatok segítik.

Kilenc nagy fejezetben ismerkedhetnek az alkalmazások szempontjából leglényegesebbnek ítélt anyagrészekkel:

- Egy- és többváltozós függvények
- Differenciálszámítás
- Integrálszámítás
- Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
- Lineáris algebra, térgörbék, vektoranalízis
- Közönséges differenciálegyenletek
- Parciális differenciálegyenletek
- Komplex függvények
- Numerikus módszerek

Elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak ajánljuk a vizsgákra való felkészüléshez, de haszonnal forgathatják tanárok, mérnökök, közgazdászok, számítástechnikát alkalmazók és mindazok akik a felsőbb matematika iránt érdeklődnek.

Mindkét szerzőt sokéves oktatási tapasztalat köti a matematikához. Egyetemi oktatóként hallgatók ezreit vezették be a matematikába, és segítették át vizsgákon, szigorlatokon. A hallgatók több alkalommal is aranygyűrűvel tüntették ki mindkettőjüket. A szerzők tudják, érzik mit kell és mit lehet megírni, és azt milyen stílusban kell tárgyalni.

Bízzanak bennük!

Terjedelem: 708 oldal Formátum: 124 × 183 mm

Obádovics J. Gyula: Felsőbb matematikai feladatgyűjtemény

A feladatgyűjteményben fejezetenként elméleti összefoglaló és képletgyűjtemény, minden feladat végeredménye és az új feladattípus megjelenésekor részletesen kidolgozott mintafeladat található. A felsőbb matematikai feladatgyűjtemény egy kötetben három könyv anyagát tartalmazza.

Első könyv – A halmazelmélet és az absztrakt algebra elemei
– Lineáris algebra
– Függvények
– Differenciálszámítás
– Integrálszámítás

Második könyv – Végtelen sorok
– Többváltozós függvények
– Többváltozós függvények differenciálszámítása
– Többváltozós függvények integrálszámítása. Vonalmenti integrálok
– Vektoranalízis
– Vegyes feladatok

Harmadik könyv – Közönséges differenciálegyenletek
– Parciális differenciálegyenletek
– Vegyes feladatok

Terjedelem: 560 oldal *Formátum: 124 × 183 mm*

◆◆◆

A kiadványok megrendelhetők telefonon, faxon, levélben, illetve megvásárolhatók a könyvesboltokban és a kiadóban.

SCOLAR 🕮 KIADÓ
1114 Budapest, Bartók Béla út 7.
Tel./fax: (06-1) 466-76-48

Az *Obádovics–Matematika* az évek során naponta használatos kézikönyvvé vált. Áttekinthető felépítése, világos magyarázatai, gördülékeny stílusa, bőséges ábra- és példaanyaga méltán emeli a világ legjobb matematika-tárgyú könyvei közé.



A szerző 1927-ben született Baján. Hobbija a kertészkedés, horgászás és az írás. Jelenleg Balatonszárszón él feleségével. Tizenegy unokája van, három lánya szintén matematikával foglalkozik.

Természettudományi, műszaki doktor, a matematika tudományok kandidátusa. 11 könyv, 30 egyetemi jegyzet, 52 tudományos publikáció szerzője. A magyar számítástechnika egyik megteremtője.

OBÁDOVICS TANODA
matematikaoktatás
alap-, közép- és felsőfokon
telefon: 385-32-80

