Bartha Gábor–Bogdán Zoltán–Csúri József–Duró
Lajosné dr.–dr. Gyapjas Ferencné–dr. Kántor
Sándorné–dr. Pintér Lajosné

Matematika feladatgyűjtemény

I.

a középiskolák tanulói számára

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

A kiadvány 2007. 10. 30-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a 14789–7/2007 számú határozattal.

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [28/2000 (IX.21.)] és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002 (V.24.)].

Lektorálták:
ELŐD ISTVÁNNÉ
ny. felelős szerkesztő

GÁBOS ADÉL
gimn. vezető tanár

LÁNG HUGÓ
középiskolai tanár

SOLTI LAJOS
középiskolai tanár

Szerkesztette:
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ

A rajzokat készítette:
FRIGYESI MIKLÓS és VIDÉKI GUSZTÁV

Fedélrajz:
SAJDIK FERENC

Felelős szerkesztő:
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

© Bartha Gábor–Bogdán Zoltán–Csúri József–Duró Lajosné dr.–dr. Gyapjas Ferencné–dr. Kántor Sándorné–dr. Pintér Lajosné, Nemzeti Tankönykiadó, 1987

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, illetve utánközlése a kiadó engedélye nélkül tilos!

ISBN 978-963-19-4813-4

Tartalom

Előszó 7
I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei ... 11

1. Halmaz, részhalmaz fogalma 11
2. Műveletek halmazokkal 16
3. Halmaz elemeinek száma 23
4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok 27
5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel 29
6. Logikai függvények 33
7. Következtetések 35

II. Számelmélet és aritmetika 39

1. Természetes számok 39
2. Oszthatóság az egész számok halmazában 44
3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ... 60
4. Diofantoszi problémák 66
5. Számrendszerek 69
6. Racionális számok 76
7. Irracionális számok 82
8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány feladat 87
9. Komplex számok 89

III. Az algebra elemei 95

1. Műveletek polinomokkal 95
2. Polinomok szorzattá alakítása 111

3. Algebrai törtek 115
4. Negatív egész kitevőjű hatványok 125
5. A négyzetgyök 128
6. Az *n*-edik gyök 143
7. Törtkitevőjű hatványok 149
8. A logaritmus 153

IV. Egyenletek és egyenlőtlenségek 159

1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek 159
2. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek 197
3. Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek 224
4. Nevezetes egyenlőtlenségek és alkalmazásuk 233
5. Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek 240
6. Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek 255

V. Egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek 267

1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek 267
2. Másod- és magasabb fokú egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek 305
3. Exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek 322
4. Lineáris programozási feladatok 332

VI. Kombinatorika 337

1. Permutációk 337
2. Variációk 339
3. Kombinációk 342
4. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből 343
5. A permutáció inverziói 367
6. A binomiális együtthatóra vonatkozó összefüggések 369

VII. Gráfelmélet 373

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok 373
2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfiája. Részgráfok 379
3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix ... 384
4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők 388
5. Gráf éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör 395
6. Páros gráfok, teljes részgráfok 405
7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula 410
8. Színezési feladatok 413
9. Algoritmusok. Játékok 416
10. Vegyes feladatok 423

Útmutatások és eredmények 425

I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei .. 425
II. Számelmélet és aritmetika 437
III. Az algebra elemei 448
IV. Egyenletek és egyenlőtlenségek 472
V. Egyenletrendszerek, egyenlőtlenség-rendszerek 522
VI. Kombinatorika 547
VII. Gráfelmélet 551

Előszó

E feladatgyűjtemény a gimnáziumok tanterveinek (a matematika tagozat kivételével), valamint a szakközépiskolák tanterveinek matematika tananyagához illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy a jelenlegi tananyag minden témájához – a geometria kivételével – megtalálhatók a gyűjteményben a megértést és gyakorlást szolgáló feladatok (ezek vannak túlsúlyban) és az ötletet igénylő, nehezebb feladatok is. Ez utóbbiakat csillaggal jelöltük. Néhány fejezetben olyan feladatok találhatók, amelyek túlmutatnak a tananyagon. A különböző tantervekhez kapcsolódó feladatokhoz nem tettünk jelzést, így természetes, hogy a más-más tantervek alapján tanulók – felkészültségüktől függetlenül – sem tudhatnak minden feladatot megoldani. Javasoljuk ezért, hogy a diákok – önálló, otthoni munkájukhoz, a feladatok kiválasztásához – kérjenek tanácsot tanáraiktól. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a csillaggal megjelölt feladatok nem azért „nehezebbek", mert a több órában matematikát tanulók számára ajánlottak, hanem azért, mert a megoldásuk különleges ötlet felhasználását, illetve az ismert összefüggések észrevételét igénylik.

A feladatgyűjtemény végén, az „Útmutatások és eredmények" című részben a tanulók vagy segítséget kapnak a megoldásokhoz, vagy pedig – az eredmények megkeresésével – ellenőrizhetik munkájukat. Nem minden feladat megoldásához adtunk útmutatást vagy eredményt; amikor például a segítséggel már magát a megoldást is közöltük volna.

Ezek után összefoglaljuk azokat a legfontosabb jelöléseket, amelyek az utóbbi években a középiskolai matematikaoktatásban – elsősorban az újabb tankönyvek hatására – elterjedtek. Elöljáró-

ban is hangsúlyozzuk, hogy nem helyes merev, egyedül alkalmazható jelölések rögzítése. A matematikai szakirodalom jelölései soha nem voltak egységesek, különösen nem azok az alkalmazásokban előforduló jelölések. Bizonyos célokra az egyik jelölés, másokra pedig egy másik jelölés lehet egyszerűbb, alkalmasabb, a lényeget jobban megmutató. Érdemes megismerni többféle, a gyakorlatban előforduló jelölést akkor is, ha a matematikaórán esetleg csak egyfajtát használunk.

A feladatgyűjteményben előforduló jelölések közül a szokásosakat, azokat, amelyeket hosszú idő óta változatlanul használnak a középiskolai matematikában, nem soroljuk fel. Így zömmel a halmazok jelöléseivel foglalkozunk. Megemlítünk még néhány, a matematikai logikában használt jelölést. Ahol többféle jelölés is elfogadott, használatos, ott ezeket feltüntetjük akkor is, ha a feladatgyűjteményben ezek közül csak az egyik szerepel.

A jelölések és azok magyarázata

$x \in A$: az x eleme az A halmaznak;
$A \cup B$: az A és B halmaz egyesítése (uniója);
$A \cap B$: az A és B halmaz közös része (metszete);
$A \setminus B$ vagy $A - B$: az A és B halmaz különbsége;
$A \subset B$ vagy $A \subseteq B$: az A halmaz a B részhalmaza;
$\emptyset$: üres halmaz;
$|A|$: az A véges halmaz elemeinek száma (végtelen A halmaz esetén a halmaz számossága);
$\mathbf{N}$: a természetes (nemnegatív egész) számok halmaza;
$\mathbf{Z}$: az egész számok halmaza;
$\mathbf{Q}$: a racionális számok halmaza;
$\mathbf{R}$: a valós számok halmaza;
$\mathbf{C}$: a komplex számok halmaza;
$[a; b]$: az $a \leqq x \leqq b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az $a; b$ zárt intervallum);
$]a; b[$ vagy $(a; b)$: az $a < x < b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az $a; b$ nyílt intervallum).

Számhalmazok jelölésekor gyakran használjuk például a következőt:

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$ jelöli azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyek kielégítik a | után álló feltételt, példánkban az egyenlő a $]2; 3[$ intervallummal.

Függvényeket általában a következőképpen jelölünk:

Legyenek A és B adott számhalmazok, ekkor például

f: $A \to B$, $x \mapsto 2x$, vagy

f: $A \to B$, $f(x) = 2x$ jelöl egy A-n értelmezett, B-beli értékeket felvevő függvényt.

Ha $A = B = \mathbf{R}$, akkor $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ típusú függvényről is beszélünk, ekkor nem mindig írjuk ki külön az értelmezési tartományt és a képhalmazt. Ha $A \subset \mathbf{R}$ és $B \subset \mathbf{R}$, akkor célszerű alkalmazni azt az egyszerűsítést, hogy egy képlettel definiált függvény esetében – amennyiben A azonos azoknak a valós számoknak a halmazával, amelyre a képletnek értelme van – külön nem írjuk ki az értelmezési tartományt. Például f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ jelöli azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $[1; +\infty[$, egy képhalmaza $\mathbf{R}$.

A jól ismert függvények jelölésére önállóan használhatjuk a sin, cos, tg, ctg, $\log_a$ jelöléseket, de ugyanilyen értelemben az $\exp_a$ jelölést is az $x \mapsto a^x$ függvényre, de használatos a rövidebb a^x jelölés is, ha a szövegösszefüggésből világos, hogy függvényről van szó.

A matematikai logika jelöléseiből a következőket használjuk:

$A, B, C, \ldots$: állítások (kijelentések); a gyakorlatban az állításokat sokszor azok logikai értékével szoktuk azonosítani.
$\neg A$ vagy $\bar{A}$: A negációja;
$A \wedge B$: A, B konjunkciója;
$A \vee B$: A, B diszjunkciója;
$A \to B$: A implikáció B;
$A \leftrightarrow B$: A ekvivalencia B;
$\exists$: egzisztenciális kvantor („van olyan”);
$\forall$: univerzális kvantor („minden”).

I. HALMAZOK TULAJDONSÁGAI ÉS A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy-egy halmazt?

1. {osztályunk tanulói};
2. {egy tetszőleges osztály tanulói};
3. {osztályunk fiútanulói};
4. {osztályunk magas tanulói};
5. {Magyarország városai ma};
6. {Arany János versei};
7. {a természetes számok};
8. {a természetes számok halmaza};
9. {az $x^2-5x+6=0$ egyenlet};
10. {az $x^2-5x+6=0$ egyenlet valós gyökei};
11. {egy egyenlet gyökei};
12. {az $x^2+1=0$ egyenlet valós gyökei};
13. {az $x^5-2x^4+1=0$ egyenlet valós gyökei};
14. {az elsőfokú egyenletek, osztályunk tanulói};
15. {egy adott egyenlet, melynek 2 az egyik gyöke};
16. {egy olyan egyenlet, melynek egy valós gyöke van};
17. {tetszőleges három egész szám};
18. {a prímszámok};
19. {a legnagyobb prímszám};
20. {néhány prímszám}.

2. Soroljunk fel a következő halmazok elemei közül legalább kettőt:

1. {a 0,5-nél kisebb egész számok};
2. {Petőfi versei};

3. {az 50-nél nagyobb prímszámok};
4. {a prímszámokból álló halmazok};
5. {az $x^3-4x=0$ egyenlet valós gyökei};
6. {az olyan elsőfokú egyenletek, melyeknek a gyöke 100};
7. {1986 prímosztói};
8. {192 és 729 közös osztói};
9. {a szabályos testek};
10. {2^{40} értékének különböző számjegyei}.

3. Soroljuk fel a következő halmazok elemeit:

1. {a 100-nál kisebb négyzetszámok};
2. {a 10-nél kisebb négyzetszámok száma};
3. $\left\{\text{az } \frac{x-1}{x}=2 \text{ egyenlet pozitív gyökei}\right\}$;
4. $\left\{\text{az } \frac{x-1}{x}=2 \text{ egyenlet pozitív gyökeinek száma}\right\}$;
5. {az $x^2-2x \leqq 0$ egyenlőtlenség egész gyökei};
6. {az $x^2+4x<0$ egyenlőtlenség egész gyökeinek száma};
7. {a háromjegyű páros számok száma};
8. {az olyan kétjegyű számok, melyek számjegyeinek összege 9};
9. {az olyan háromjegyű számok száma, melyek számjegyeinek összege 9};
10. {729 pozitív osztói}.

4. Válasszuk ki a következő halmazok közül az egyenlőket:

1. {a legkisebb prímszám};
2. {egy prímszám pozitív osztóinak száma};
3. {az $x^3-2x^2=0$ egyenlet valós gyökei};
4. {az $x^3-2x^2=0$ egyenlet valós gyökeinek a száma};
5. {a (0; 2) számpár};
6. {a -1 és 3 közé eső páros számok};
7. {a $10^{10}+1$ szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege};
8. {az $x^{100}=1$ egyenlet valós gyökei};
9. {az $x=0$ és $y=2$ egyenletű egyenesek metszéspontjának koordinátái};
10. {$(-1)^n$ különböző értékei, ahol n tetszőleges pozitív egész szám}.

5. Vizsgáljuk meg, hogy a következő állítások közül melyek igazak:

1. $2 \in$ {a prímszámok}.
2. A négyzet eleme a trapézok halmazának.
3. 2^{40}, $2^{40}-1$ és $2^{40}+1$ eleme az összetett számok halmazának.
4. Ha $a \in A$ és $b \in B$, akkor $(a+b) \in B$, ahol A a prímszámok halmaza, B az összetett számok halmaza.
5. $A \in A$.
6. $A \in \{A\}$.
7. Az $x^n-1=0$ egyenlet valós gyökei elemei a pozitív egész számok halmazának, tetszőleges n egész szám esetén.
8. $1{,}\dot{9} \in$ {a 2-hatványok}.
9. Ha $a \in A$ és $A \in B$, akkor $a \in B$.
10. $A=B$ esetén $A \in \{B\}$.

6. Jelölje **N**, P, **Z**, **Q**, **I**, **R** rendre a természetes számok, a prímszámok, az egész számok, a racionális számok, az irracionális számok, a valós számok halmazát. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz:

1. Ha $a \in \mathbf{N}$ és $b \in \mathbf{N}$, akkor $(a+b) \in \mathbf{N}$.
2. Ha $a \in P$ és $b \in P$, akkor $(a+b) \in P$.
3. Ha $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Z}$, akkor $ab \in \mathbf{Z}$.
4. Ha $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Q}$, akkor $ab \in \mathbf{Z}$.
5. Van olyan a és b szám, hogy $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Q}$ esetén $ab \in \mathbf{Z}$.
6. Ha $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{I}$, akkor $(a-b) \in \mathbf{I}$.
7. Ha $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{R}$, akkor $ab \in \mathbf{I}$.
8. Van olyan a és b, hogy $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{I}$ esetén $ab \in \mathbf{N}$.
9. $\frac{a}{b} \in \mathbf{R}$, ha $a \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{R}$.
10. $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Q}$ esetén $\frac{a^2}{1+b^2} \in \mathbf{Q}$.

7. Legyen $a \in X$ és $b \in X$. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben igazak a következő állítások:

1. $(a+b) \in X$. 2. $(a-b) \in X$. 3. $ab \in X$.
4. $\frac{a}{b} \in X$, ha $b \neq 0$, ahol X helyébe rendre az előző feladatban szereplő

$\mathbf{N}$, P, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ halmazokat helyettesítjük és a, illetve b az X halmaz tetszőleges eleme lehet.

8. Jelölje az A halmaz elemeinek számát $|A|$. Határozzuk meg $|A|$ értékét a következő esetekben:

1. $A = \{$a 20-nál kisebb prímszámok$\}$;
2. $A = \{$36 pozitív osztói$\}$;
3. $A = \{$a 100-nál kisebb négyzetszámok$\}$;
4. $A = \{$az $x^2 < 100x$ egyenlőtlenség egész gyökei$\}$;
5. $A = \{$az $x^2 + x + 2 = 0$ egyenlet valós gyökei$\}$;
6. $A = \{\emptyset, 2\}$;
7. $A = \{$a legkisebb egész szám$\}$;
8. $A = \{$a legkisebb természetes szám$\}$;
9. $A = \{11^4$ különböző számjegyei$\}$;
10. $A = \{$a $10^2 < x^3 < 10^4$ egyenlőtlenségrendszer egész gyökei$\}$.

9. Az a és b egymástól különböző egész eleme az A halmaznak. Tudjuk, hogy A-nak eleme bármely két különböző elemének összege is. Határozzuk meg $|A|$ értékét, ha az A halmaz véges és minden eleme egész szám.

10. Soroljuk fel a következő halmazok közül azokat, melyeknek végtelen sok elemük van:

$A = \{$a prímszámok$\}$; $B = \{$egy sík félsíkjai$\}$;
$C = \{$egy sokszög csúcsai$\}$; $D = \{$a páros prímszámok$\}$;

$$E = \left\{\text{az } \frac{x^2-1}{x+1} = x-1 \text{ egyenlet valós gyökei}\right\};$$

$$F = \left\{\text{azok az } x \text{ egész számok, amelyekre } \frac{x+100}{x} \text{ is egész szám}\right\};$$

$G = \{$csak az 1 számjegyet tartalmazó számok$\}$;
$H = \{$azok a számok, amelyek számjegyeinek összege 2$\}$;
$I = \{$a természetes számok számjegyei$\}$;
$J = \{$a valós számok halmaza$\}$.

11. Az A halmaznak eleme az 1 és -1. A halmaz bármely két elemének számtani közepe is eleme a halmaznak. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaznak végtelen sok eleme van.

12. Egy véges számhalmaz bármely elemének a reciproka is eleme

a halmaznak, az adott elem -1-szeresével együtt. Igazoljuk, hogy a halmaz elemszáma páros.

13. Az A számhalmaz elemeinek száma 2. A halmaz bármely két elemének szorzata is az A halmaz eleme. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz elemei között szerepel a 0, vagy az 1.

14. Tekintsük alaphalmaznak a valós számok halmazát ($\mathbf{R}$). Határozzuk meg a következő halmazok komplementerét:

1. $\mathbf{Q} = \{$a racionális számok$\}$;
2. $\mathbf{I} = \{$az irracionális számok$\}$;
3. $\{$a pozitív valós számok$\}$;
4. $\mathbf{R}$;
5. $\emptyset$.

15. Mivel egyezik meg egy adott halmaz komplementerének komplementere, illetve a kapott halmaz komplementere?

***16.** Lehet-e egy véges halmaz komplementere is véges halmaz?

17. Adjuk meg az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz kételemű részhalmazait.

18. *a)* Hány háromelemű részhalmaza van egy hat elemet tartalmazó halmaznak?

b) Hány valódi részhalmaza van egy egyelemű halmaznak?

19. Bizonyítsuk be, hogy az $A = \{1; 3; 5; 7\}$ halmaznak összesen 2^4 számú részhalmaza van. Írjuk fel külön-külön a 0; 1; 2; 3; 4 elemű részhalmazokat.

20. Legyen T a téglalapok, R a rombuszok, N a négyzetek, P a paralelogrammák halmaza. Melyik halmaz melyiknek részhalmaza T, R, N, P közül?

***21.** A **6.** feladat jelöléseit használva döntsük el, hogy melyik igaz a következő állítások közül:

1. $P \subset \mathbf{Q}$.
2. $\mathbf{Z} \subset \mathbf{I}$.
3. $P \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.
4. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
5. $\mathbf{N} \subset \mathbf{I}$.
6. $\mathbf{N} \subset P \subset \mathbf{R}$.
7. $P \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
8. $\bar{Z} \subset \mathbf{Q}$, ahol $\mathbf{R}$ az alaphalmaz.
9. $\bar{Q} \subset \mathbf{R}$, ahol $\mathbf{R}$ az alaphalmaz.
10. $\bar{\mathbf{R}} \subset \bar{\mathbf{Q}} \subset \bar{\mathbf{Z}}$, ha az alaphalmaz $\mathbf{R}$.

22. Igaz-e, hogy $a \in A$ esetén $\{a\} \subseteq A$?

23. Bizonyítsuk be, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ esetén $A = B$.

***24.** Határozzuk meg az A halmazt, ha $A \subset \bar{A}$.

25. Bizonyítsuk be, hogy a részhalmazképzés tranzitív művelet, azaz $A \subset B$ és $B \subset C$ esetén $A \subset C$.

26. Milyen feltétel mellett igaz, hogy $A \subset B$ esetén $|A| < |B|$?

27. Bizonyítsuk be, hogy n elemű halmaz összes részhalmazának száma 2^n.

***28.** Igazoljuk, hogy $A \subset B$ esetén $\bar{B} \subset \bar{A}$.

2. Műveletek halmazokkal

29. Legyenek az A halmaz elemei 16 pozitív osztói, a B halmaz elemei 24 pozitív osztói, a C halmaz elemei 12 pozitív osztói. Határozzuk meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ halmazokat. Lesz-e a kapott halmazok között két egyenlő halmaz?

30. Írjunk fel olyan negyedfokú egyenletet, melynek gyökei az A és B halmaz uniójának elemei, ahol $A = \{\text{az } x^3 = x \text{ egyenlet valós gyökei}\}$, B pedig az $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza.

31. Az A halmaz legyen a (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) koordinátapárokkal adott négyszöglap pontjainak halmaza; a B ponthalmaz legyen a (0; 0), (1; 1), (0; 2) koordinátájú csúcsok által meghatározott háromszöglap pontjainak halmaza; a C halmaz pedig legyen a (0; −1), (1; 0), (0; 1) csúcspontokkal adott háromszöglap pontjainak halmaza. Milyen alakzatokat határoznak meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ és $(A \cup B) \cup C$ halmazok?

32. Jelölje A és B az S sík két különböző félsíkját. Milyen esetben lehet $A \cup B = S$?

***33.** Jelölje A, B és C az S sík három páronként különböző félsíkját. Adjunk példát olyan esetre, amikor $A \cup B \cup C \neq S$.
Lehet-e az $\overline{A \cup B \cup C}$ halmaz az S sík korlátos tartománya?

34. Bizonyítsuk be, hogy $A \subset B$ esetén $A \cup B = B$.

35. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B véges halmaz, akkor

$$|A| + |B| \geqq |A \cup B|.$$

36. Ha A és B véges halmaz, akkor $|A| + |B| = |A \cup B|$ esetén hány közös eleme van az A és B halmaznak?

***37.** Legyen A és B az S sík két olyan korlátos tartományának pontjaiból álló nem üres halmaz, melyekre $A \cup B = B$. Igazak-e a következő állítások:
1. $A \cup \bar{B} = S$. 2. $A \cup \bar{A} = S$. 3. $B \cup \bar{A} = S$. 4. $\bar{A} \cup \bar{B} = S$.
5. $\overline{A \cup B} \cup A = S$. 6. $\overline{A \cup B} \cup B = S$.
Ahol az S sík pontjainak halmaza az alaphalmaz.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B halmaz véges halmaz, akkor $|A \cup B| = |A|$ esetén $A \supseteq B$.

39. Mondjunk példát olyan A és B halmazra, hogy $|A \cup B| = |A|$ esetén ne teljesüljön az $A \supseteq B$ összefüggés.

40. Legyen A a 2-vel osztható kétjegyű számok halmaza, B a 3-mal osztható 100-nál kisebb pozitív számok halmaza, C pedig a 30-cal osztható egész számok halmaza. Határozzuk meg az A és B, B és C, C és A halmaz közös részét.

41. Adjunk példát olyan A, B és C halmazra, hogy teljesüljenek a következő feltételek: $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A| = |B| = |C| = 2$ és $A \neq B$, valamint $B \neq C$.

42. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B = B$ esetén $B \subseteq A$.

43. Jelöljük $(x; y)$-nal a koordinátasík tetszőleges pontjának koordinátáit. Legyen A, B és C rendre az olyan $(x; y)$ koordinátákkal rendelkező pontok halmaza, melyekre $|x + y| \leqq 1$, $|x - y| \leqq 1$, illetve $|y| \leqq \frac{1}{2}$. A sík milyen tartományait határozzák meg az $A \cap B$ és $(A \cap B) \cap C$ halmazok?

44. Legyen $D = \left\{(x; y) \in S \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R} \text{ és } |x| \leqq \frac{1}{2}\right\}$. A **43.** feladat feltételeit használva határozzuk meg az $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ halmazt.

45. Bizonyítsuk be, hogy $A \cup B = A \cap B$ esetén $A = B$.

46. Igazoljuk, hogy ha A és B véges halmazok, akkor $|A \cap B| \leqq \frac{|A| + |B|}{2}$.

47. Legyen A és B a sík két tetszőleges téglalaptartománya pont-

jainak halmaza. Legfeljebb hány részre osztja a síkot az A és B „halmaz"?

48. Tekintsük a koordinátasík tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapokat. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n téglalap, ha $n = 1, 2, 3, 4$?

49. Az előző feladat $n=3$ esetében határozzuk meg az $A\cap B\cap C$, $A\cap B\cap \bar{C}$, $A\cap \bar{B}\cap C$, $\bar{A}\cap B\cap C$, $\bar{A}\cap \bar{B}\cap C$, $\bar{A}\cap B\cap \bar{C}$, $A\cap \bar{B}\cap \bar{C}$, $\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}$ halmazokat, ahol A, B, C olyan téglalaptartományok pontjaiból álló halmazok, melyek a síkot a lehető legtöbb részre bontják.

***50.** Bizonyítsuk be, hogy n olyan téglalap, melynek megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, a síkot legfeljebb $2n^2-2n+2$ tartományra osztja.

51. Tekintsünk két olyan körlapot, melyek a síkot négy részre osztják. A két körlap pontjaiból álló halmaz legyen az A és B halmaz. Bizonyítsuk be, hogy a négy tartomány pontjai a következő ponthalmazok: $A\cap B$, $\bar{A}\cap B$, $A\cap \bar{B}$, $\bar{A}\cap \bar{B}$.

***52.** Adjunk meg négy olyan A, B, C, D ponthalmazt a síkon, hogy az egyes halmazok határvonala zárt görbe legyen és a halmazok a síkot 16 részre osszák úgy, hogy a 16 tartomány mindegyike $X\cap Y\cap Z\cap V$ alakban legyen felírható, ahol X, Y, Z és V rendre A vagy $\bar{A}$, B vagy $\bar{B}$, C vagy $\bar{C}$, D vagy $\bar{D}$ halmazzal egyenlő. (Az ilyen típusú diagramokat nevezik Venn-diagramoknak.)

***53.** Legyen a természetes számok halmaza ($\mathbf{N}$) az alaphalmaz és legyen A, B, illetve C a 2-vel, 3-mal, illetve 6-tal osztható számok halmaza. Adjuk meg az A, B, C halmazok által meghatározott atomokat, ha atomnak nevezzük az olyan $X\cap Y\cap Z$ alakban felírható halmazokat, ahol X, Y és Z helyébe rendre A vagy $\bar{A}$, B vagy $\bar{B}$, C vagy $\bar{C}$ kerülhet és egyik halmaz sem üres.

54. Két különböző sugarú koncentrikus körlap pontjainak halmazát jelöljük A-val, illetve B-vel. Határozzuk meg az $A\setminus B$ és $B\setminus A$ halmazokat, ha az A halmaz „sugara" a nagyobb.

55. Jelöljük rendre A-, B-, C-, D-, E-vel a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 6-tal osztható pozitív egész számok halmazát. Határozzuk meg a következő halmazokat:

1. $A\setminus B$; 2. $B\setminus A$; 3. $A\setminus C$; 4. $C\setminus A$; 5. $(C\setminus A)\setminus B$; 6. $D\setminus C$; 7. $D\setminus A$; 8. $(D\setminus C)\setminus B$; 9. $(E\setminus D)\setminus A$; 10. $(E\setminus D)\setminus (C\setminus B)$.

56. Legyen az S koordinátasík pontjaiból álló halmaz az alaphalmaz. Jelölje A, B és C rendre a $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ középpontú egységnyi sugarú zárt körlapok pontjainak halmazát. Szemléltessük a következő halmazokat:

1. $\bar{A}\setminus B$; 2. $\bar{A}\setminus \bar{C}$; 3. $(B\cap C)\setminus A$;
4. $(A\setminus C)\setminus B$; 5. $A\setminus (C\setminus B)$; 6. $\bar{A}\setminus \bar{B}$;
7. $(\bar{A}\setminus \bar{B})\cup(\bar{B}\setminus \bar{C})\cup(\bar{C}\setminus \bar{A})$; 8. $(A\setminus \bar{B})\cap(B\setminus \bar{C})\cap(C\setminus \bar{A})$.

57. Bizonyítsuk be, hogy ha $A\setminus B = \emptyset$, akkor $A\subseteq B$.

58. Milyen feltétel teljesülése esetén lesz az A, B és C halmazra igaz, hogy $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) = \emptyset$?

59. Legyen $A=B=\{0; 1; 2\}$. Határozzuk meg az $A\times B$ halmazt.

60. Hány elemből áll az $(A\times A)\times A$ halmaz, ha $A=\{0; 1; 2; 3\}$?

61. Legyen $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\leqq 1\}$, $B=\{y\in\mathbf{R}\mid |y|\leqq 1\}$. Milyen ponthalmazt határoznak meg azon $(x; y)$ koordinátapárok, amelyek elemei az $A\times B$ halmaznak?

62. Hány közös eleme van az $A\times B$ és $B\times A$ halmaznak, ha $A=\{0; 1; 2; 3\}$, $B=\{0; 1; 2; 4\}$?

63. Határozzuk meg az $(A\times B)\cap(B\times A)$ és $(A\times B)\setminus(B\times A)$ halmazt, ha $A=B$.

64. Bizonyítsuk be, hogy $A\times B = B\times A$ esetén $A=B$.

65. Igazoljuk, hogy $\emptyset\subset A\subset B$ esetén $A\times B\subset B\times B$.

66. Legyen $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{2; 3; 4\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát:

1. $(A\setminus B)\times(B\setminus A)$; 2. $(A\cup B)\times(A\cap B)$;
3. $(A\setminus B)\times(A\cap B)$; 4. $(B\setminus A)\times(B\cup A)$.

***67.** A és B olyan halmazok, melyekre teljesül, hogy $|A\times B| = 100$. Határozzuk meg $|A\cup B|$ és $|A\cap B|$ minimumát, illetve maximumát.

***68.** Legyen $x\in A\subset\mathbf{N}$, $y\in B\subset\mathbf{N}$, ahol $\mathbf{N}$ a természetes számok halmazát jelöli. Ha az x és y számokra teljesül, hogy $y^2-x^2 = 80$, akkor $x\in A$ és $y\in B$. Határozzuk meg az A és B halmazt, ha az összetartozó értékpárokra $x<y$ teljesül.

69. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A\cup B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A\setminus B=\{2; 4; 6\}$, $A\cap B=\{1; 3\}$. Határozzuk meg az A és B halmazt.

70. Bizonyítsuk be, hogy az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazok ismeretében egyértelműen meghatározható az A és B halmaz.

71. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $A \setminus B = \{4; 6; 8\}$, $B \setminus C = \{2; 5; 9; 10\}$, $C \setminus A = \{3; 7; 11\}$, $A \cap B \cap C = \{1\}$,

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11\},$$
$$C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11\}.$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat, ha $|C| = 5$.

72. Adjunk meg három olyan kételemű halmazt, melyeknek páronként vett metszete nem üres halmaz, de mindhárom halmaznak nincs közös eleme.

73. Adjunk meg öt olyan halmazt, amelyekre teljesül, hogy bármely négy halmaz metszete nem üres halmaz, de az öt halmaznak nincs közös eleme.

74. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$.

75. Az A, B, C ponthalmazok az S síkot nyolc tartományra bontják szét. Írjuk fel a nyolc tartományt az unióképzés és különbségképzés segítségével.

76. Írjunk fel hat olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek van közös eleme, de semelyik háromnak nincs.

***77.** Bizonyítsuk be, hogy A, B, C tetszőleges halmazok esetén az

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) =$$
$$= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

78. Legyen $f(x) = x(x-1)(x+2)$ és $g(x) = x(x+1)(x+2)$, ahol $x \in \mathbf{R}$.

a) Írjuk fel f és g zérushelyeinek halmazát.

b) Határozzuk meg az $x \mapsto fg$, illetve az $x \mapsto \frac{f}{g}$ függvény zérushelyeinek halmazát.

c) Lássuk be, hogy f és g zérushelyei halmazának uniója az fg függvény zérushelyeinek halmaza, illetve azt, hogy az első két halmaz különbsége az $\frac{f}{g}$ függvény zérushelyeinek halmaza.

Jelöljük az f és g polinomfüggvények zérushelyeinek halmazát F-fel, illetve G-vel. Bizonyítsuk be, hogy igazak a következő állítások:

d) Az fg függvény zérushelyeinek halmaza az $F \cup G$ halmaz.

e) $\frac{f}{g}$ zérushelyeinek halmaza az $F \setminus G$ halmaz.

f) Az $f^2(x) + g^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza az $F \cap G$ halmaz.

g) Az $f(x) \pm g(x) = 0$ egyenlet gyökei halmazának részhalmaza az $F \cap G$ halmaz, ha az alaphalmaz mindegyik esetben a valós számok halmaza.

79. Az a, b, c polinomfüggvények zérushelyeinek halmaza legyen rendre az $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{0; 2; 4\}$ halmaz. Határozzuk meg a következő egyenletek gyökeinek halmazát;

a) $a(x)\,b(x)\,c(x) = 0$;

b) $\frac{a(x)\,b(x)}{c(x)} = 0$;

c) $\frac{a(x)}{b(x)\,c(x)} = 0$;

d) $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0$.

Az f, g, h polinomfüggvények valós zérushelyeinek halmazát rendre F-, G-, H-val jelöljük. Adjuk meg a következő egyenletek valós gyökeinek halmazát:

e) $f(x)g(x)h(x) = 0$;

f) $\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0$;

g) $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0$;

h) $f^2(x) + g^2(x) + h^2(x) = 0$.

80. Legyen az $a(x) = 0$ és $b(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza A és B. Igaz-e, hogy az $a(x)b(x) = 0$, illetve $\frac{a(x)}{b(x)} = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $A \cup B$, illetve $A \setminus B$?

***81.** Az $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ egyenletek valós gyökeinek halmazát rendre A, B, C-vel jelöljük. Mondjunk példát olyan $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ egyenletekre, amelyek valós gyökeire teljesül, hogy az $a(x)b(x)c(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza nem egyezik meg az $A \cup B \cup C$ halmazzal. Igaz-e, hogy az $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza $A \cap B \cap C$?

***82.** Bizonyítsuk be, hogy az $a(x) = 0$ és $b(x) = 0$ egyenletből képzett $a(x)b(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza lehet az üres

halmaz is, függetlenül attól, hogy hány gyöke van az eredeti egyenleteknek.

83. *a)* Tekintsük az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1}$ függvényt $(x \neq 1)$ és az $x \mapsto \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvényt $(x \neq 0$ és $x \neq -2)$. Határozzuk meg az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvény értelmezési tartományát úgy, hogy az a lehető legbővebb halmaz legyen.

b) Legyen az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya az A, illetve B halmaz. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto f(x)g(x)$ függvény értelmezési tartománya az $A \cap B$ halmaz.

84. Tekintsük a lehető legbővebb halmazon értelmezett $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvényeket, ahol $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$, illetve $g(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

a) Határozzuk meg az $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmezési tartományát.

b) Adjuk meg az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmazát.

c) Mi lesz az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmaza?

d) Az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya legyen az A, illetve B halmaz. Legyen továbbá az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletek valós gyökeinek halmaza F, illetve G. Mutassuk meg, hogy az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $(A \cap G) \cup (B \cap F)$.

85. Tekintsük a számegyenes következő zárt intervallumaiból álló ponthalmazokat: $I_1 = [0; 2]$, $I_2 = [1; 3]$, $I_3 = [2; 4]$, $I_4 = [0; 3]$. Határozzuk meg az $I_1 \cap I_2 \cap I_3$; $I_1 \cap I_2 \cap I_4$; $I_1 \cap I_3 \cap I_4$; $I_2 \cap I_3 \cap I_4$ halmazokat.

86. Mi a **85.** feladatban szereplő négy halmaz közös része, illetve uniója?

87. Határozzuk meg az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ intervallumsorozat egy közös pontját.

88. Bizonyítsuk be, hogy a $\left[0; \frac{1}{n}\right] = I_n$ intervallumsorozat tagjainak egy közös pontja van.

89. Bizonyítsuk be, hogy ha a számegyenes négy intervallumából álló négy ponthalmaz közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor a négy halmaz metszete nem lehet üres.

90. Igazoljuk, hogy a számegyenes tetszőleges számú zárt intervallumának pontjaiból álló halmazokra teljesül a következő állítás:

Ha a halmazok közül bármelyik kettőnek van közös eleme, akkor mindegyik halmaznak van.

91. Mondjunk példát olyan esetre, hogy a **90.** feladat állítása ne legyen igaz akkor, ha zárt intervallumok helyett nyílt intervallumokat veszünk.

3. Halmaz elemeinek száma

92. Legyen az A halmaz a 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, a B halmaz pedig a 200-nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg $|A \setminus B|$, $|B \setminus A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$ értékét.

93. Jelöljük A-val 72 pozitív osztóinak, B-vel 120 pozitív osztóinak halmazát. Adjuk meg $|A \setminus B|$; $|B \setminus A|$; $|A \cap B|$ értékét.

94. Legyen A, illetve B a koordinátasík azon egész koordinátájú pontjainak halmaza, melyekre $A = \{P(x; y) | 0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 6\}$, illetve $B = \{P(x; y) | -2 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 5\}$. Határozzuk meg a következő számokat:

1. $|A|$; 2. $|B|$; 3. $|A \setminus B|$; 4. $|B \setminus A|$; 5. $|A \cap B|$; 6. $|A \cup B|$.

95. Jelöljön A és B két olyan halmazt, melyekre $|A| = 2$, $|B| = 4$. Határozzuk meg a következő mennyiségek minimumát, illetve maximumát:

1. $|A \setminus B|$; 2. $|B \setminus A|$; 3. $|A \cap B|$; 4. $|A \cup B|$.

96. Az A és B halmazról tudjuk, hogy $|A| = 5$, $|B| = 8$, $|A \setminus B| = 3$. Határozzuk meg $|A \cap B|$ és $|A \cup B|$ értékét.

97. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges véges halmaz, akkor $|A| - |A \setminus B| = |A \cap B|$.

98. Legyen $A = \{$a 100-nál kisebb négyzetszámok$\}$, $B = \{$a 9-cel osztható legfeljebb kétjegyű pozitív egészek$\}$. Határozzuk meg az $|A|$; $|B|$; $|A \setminus B|$; $|B \setminus A|$; $|A \cap B|$; $|A \cup B|$ értékeket.

99. Egy osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{5}$ része közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztály létszáma 30?

100. A **99.** feladatban szereplő osztálynak mi a tanulmányi átlaga, ha a közepesnél jobb tanulók tanulmányi eredményének átlaga 4, a közepesnél gyengébbeké pedig 2,5?

101. Legyenek A, B és C tetszőleges véges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy:

1. $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$;
2. $|B\cup C| = |B\setminus C|+|C\setminus B|+|B\cap C|$;
3. $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+$ $+|A\cap B\cap C|$;
4. $|A\cup B\cup C| = |A\setminus(B\cup C)|+|B\setminus(C\cup A)|+|C\setminus(A\cup B)|+$ $+|(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)|$.

102. Az A, B, C, D halmazokról a következőket tudjuk: $|A|=|B|=|C|=|D| = 8$, bármely három halmaznak egy közös eleme van, bármely két halmaznak három közös eleme van és $|A\cap B\cap C\cap D| = 0$. Határozzuk meg az $|A\cup B\cup C\cup D|$ értéket. Adjunk példát a fenti tulajdonságú halmazokra.

103. Bizonyítsuk be, hogy ha az A, B, C, D véges halmazokra teljesülnek az előző feladat feltételei az $|A|=|B|=|C|=|D| = 8$ feltételtől eltekintve, akkor mindegyik halmaznak legalább 6 darab eleme van.

104. Legyenek A, B, C tetszőleges véges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $|A\cap B\cap C| \leqq \frac{1}{3}(|A|+|B|+|C|)$.

105. Igazoljuk a **104.** feladat általánosítását, azaz ha $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tetszőleges véges halmazok, akkor mutassuk meg, hogy

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| \leqq \frac{1}{k}(|A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_k|).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

***106.** Az A, B, C véges halmazok közül semelyik nem tartalmazza

a másik két halmaz bármelyikét. A három halmazra teljesül, hogy

$$|A\cap B\cap C|+1 = \frac{1}{3}(|A|+|B|+|C|).$$

1. Hány elemű az $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)$ halmaz?
2. Bizonyítsuk be, hogy $|A|=|B|=|C|$.
3. $|A\cup B\cup C| = 10$ esetén mekkora az $|A\cap B\cap C|$ értéke?

107. Legyen A a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 200-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza. Hány eleme van az $(A\times B)\setminus(B\times A)$ és a $(B\times A)\setminus(A\times B)$ halmaznak?

108. Mutassuk meg, hogy ha A és B véges, nem üres halmazok, akkor

$$|(A\times B)\setminus(B\times A)| = |(B\times A)\setminus(A\times B)|.$$

109. Ha az A és B halmaz elemszáma 3, illetve 4, akkor legfeljebb hány eleme lehet az $(A\times B)\cap(B\times A)$ halmaznak?

110. Bizonyítsuk be, hogy ha a véges A és B halmaznak két közös eleme van, akkor $|(A\times B)\cap(B\times A)| = 4$.

111. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B véges és nem üres halmazokra igaz az $|(A\times B)\cap(B\times A)| = |A\cap B|^2$ összefüggés.

112. Adjunk meg négy olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek egy közös eleme van, bármely három halmaz metszete üres, továbbá a halmazok elemszáma megegyezik.

***113.** Bizonyítsuk be, hogy ha az A, B, C, D, E halmazokra teljesül, hogy bármely kettőnek egy közös eleme van, de bármely háromnak már nincs közös eleme, akkor bármelyik halmaz elemszáma nem lehet 4-nél kisebb.

114. Legalább hány eleme van hat olyan véges halmaz uniójának, amelyek közül bármely kettőnek egy közös eleme van és bármely háromnak nincs közös eleme.

115. Legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ véges halmazok olyanok, amelyekre teljesül, hogy bármely kettőnek egy közös eleme van, de bármely három halmaz metszete üres. Bizonyítsuk be, hogy

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k| \geqq \frac{k(k-1)}{2}.$$

116. Az A, B és C halmazok elemszáma 3. Legalább hány eleme van az $A \cup B \cup C$ halmaznak, ha $|A \cap B \cap C| = 1$?

***117.** Az A, B és C halmazokra teljesül, hogy

$$|A| = |B| = |C| = 2k+1 \text{ és } |A \cap B \cap C| = 1.$$

Határozzuk meg $|A \cup B \cup C|$ minimális és maximális értékét.

118. Három véges halmaz közös része 4 elemet tartalmaz. Lehet-e mindegyik halmaz elemszáma 8?

***119.** Bizonyítsuk be, hogy ha az A, B és C halmazok végesek és $|A| = |B| = |C| = k+n$, továbbá $|A \cap B \cap C| = k$, akkor $|A \cup B \cup C| \geqq \geqq \frac{3n+2k}{2}$.

120. Öt halmaz közül bármelyik kettőnek van közös eleme, de az öt halmaz metszete üres. Adjunk meg a feltételeknek megfelelő négyelemű halmazokat.

121. Mutassuk meg, hogy öt darab, páronként különböző, négyelemű halmaz uniójának legalább 5 eleme van, ha a halmazok közül bármely kettőnek van közös eleme, de az öt halmaz metszete üres.

***122.** Bizonyítsuk be, hogy n darab, páronként különböző, $n-1$ elemű halmaz uniójának elemszáma legalább n, ha $n \geqq 3$ és a halmazok közül bármely kettőnek van közös eleme, de az n darab halmaz metszete az üres halmaz.

***123.** n számú $n-1$ elemű halmaz közül bármelyik $n-1$ darab halmaznak van közös eleme, de az n halmaz közös része az üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha a halmazok különbözők, akkor a halmazok uniójának pontosan n darab eleme van.

***124.** Adjunk meg az előző feladat feltételeinek megfelelő n darab halmazt.

125. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 7$, $|B| = 8$, $|C| = 9$, továbbá $|A \cap B \cap C| = 3$. Határozzuk meg $|A \cup B \cup C|$ lehetséges értékeit. Adjunk olyan példát, amikor $|A \cup B \cup C| = 15$.

4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok

126. Igaz-e, hogy $A \cup B \subseteq C$, $A \cap B \subseteq C$, $A \setminus B \subseteq C$, ha az A és B halmaz a C halmaz két tetszőleges részhalmaza?

127. Bizonyítsuk be, hogy $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, ahol A és B két tetszőleges halmaz.

128. Mutassuk meg, hogy az A és B tetszőleges halmazokra igaz az $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ egyenlőség.

129. Milyen esetekben igazak a következő egyenlőségek:
1. $A \cup B = A \cap B$; 2. $A \setminus B = B \setminus A$; 3. $A = A \cup B$;
4. $B = A \cap B$; 5. $A \cap B = A \setminus B$; 6. $A \times B = A \times C$.

130. Mondjunk példát olyan A, B és C halmazokra, melyekre

$$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C.$$

131. Bizonyítsuk be, hogy az $A \setminus B \setminus C$ műveletsor nem zárójelezhető tetszőlegesen, azaz nem minden esetben teljesül, hogy

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

132. Bizonyítsuk be, hogy az $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ egyenlőség azonosság.

133. Igazoljuk, hogy az $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$ halmaz a B halmazzal egyezik meg.

134. Adjunk meg olyan A, B és C nem üres halmazokat, melyekre

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

135. Legyen N a négyzetek halmaza, T a téglalapok, P pedig a paralelogrammák halmaza. Igaz-e, hogy

$$P \setminus (T \cup N) = P \setminus N, \text{ illetve } P \setminus T = P \setminus (T \cup N)?$$

136. Milyen feltételek teljesülése esetén igaz az A, B, C halmazra, hogy $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B$?

137. Legyen az alaphalmaz a valós számok halmaza (**R**), és A, valamint B két olyan tetszőleges számhalmaz, melyek közös része nem üres. Fejezzük ki az $\overline{A \cap B}$ halmazt a különbség- és komplementerképzés segítségével.

*138. Mutassuk meg, hogy az $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$ halmazok megadhatók az **R** alaphalmazzal és az A, illetve B halmazokkal végzett metszet- és komplementerképzés segítségével.

139. Az S síkot két egymást metsző körlap négy tartományra osztja. A körlapok pontjainak halmazát jelöljük A-val, illetve B-vel. Adjuk meg A, B és S segítségével a négy tartományt a komplementer- és unióképzést használva.

140. Bizonyítsuk be halmazelméleti megfontolásokkal az

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ és } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

úgynevezett de Morgan-féle azonosságokat.

141. Bizonyítsuk be az unió- és metszetképzés egymásra vonatkozó disztributív tulajdonságát, azaz mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazok esetén

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{és} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

142. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ esetén az $A \cap B$ és $A \cap C$ halmazok mindegyike az üres halmaz.

143. Győződjünk meg grafikus úton az

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ és az } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

azonosságok helyességéről.

*144. Mivel egyenlők az A és B halmazra vonatkozó alábbi kifejezések:

1. $A \setminus A$; 2. $A \setminus \emptyset$; 3. $\emptyset \setminus A$; 4. $A \cup \bar{A}$; 5. $A \cap \bar{A}$;
6. $(A \setminus B) \cap B$; 7. $A \cap \bar{B}$; 8. $(A \cup B) \cap \bar{A}$; 9. $(\bar{B} \setminus \bar{A}) \cup (A \cap B)$;
10. $(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$.

145. Igazoljuk a következő egyenlőségek helyességét:

1. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

146. Mutassuk meg, hogy az $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ halmaz az üres halmazzal egyezik meg.

147. Bizonyítsuk be, hogy egy adott halmaz összes részhalmazán értelmezett valamennyi halmazművelet korlátlanul és egyértelműen elvégezhető, ha alaphalmaznak az adott halmazt tekintjük.

5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel

148. Döntsük el, hogy a következő kijelentések igazak-e;

1. A prímszámok között van páros szám.
2. Ha egy pozitív egész számnak két pozitív osztója van, akkor az prímszám.
3. Ha a és b prímszám, akkor összegük is az.
4. Van olyan a és b prímszám, hogy $a+b$ is prímszám.
5. Minden pozitív egész számnak van prímosztója.
6. Ha egy pozitív egész számnak van prímosztója, akkor az összetett szám.
7. Ha egy pozitív egész számnak csak egy prímosztója van, akkor a szám prímszám.
8. Minden prímszámnak csak egy prímosztója van.
9. Nincs olyan összetett szám, melynek csak két pozitív osztója van.
10. Minden pozitív egész számnak legalább két prímosztója van.

149. Határozzuk meg a következő nyitott mondatok igazsághalmazának három-három elemét, ha az alaphalmaz a természetes számok halmaza:

a) $5x+3 < 20$; *b)* $5x+1$ páros szám;
c) $5x+1$ prímszám; *d)* $5x+1$ négyzetszám;
e) $5x+1$ 4-gyel osztva 1 maradékot ad;
f) $5x+1$-nek négy pozitív osztója van;
g) $5x > x^2$; *h)* $x<2$, vagy $x>5$;
i) x négyzetszám és x-nek három osztója van;
j) az x szám páros szám, vagy négyzetszám, és az x szám nem osztható 4-gyel.

150. Tekintsük a következő ítéleteket:

A: Az n szám hattal osztható; B: az n szám páros szám.
C: Az n szám 12-re végződik; D: az n szám prímszám.
E: Az n szám 4-gyel osztható; F: az n szám nem osztható 9-cel.
G: Az n szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Írjuk le az előző ítéletekből a következő műveletekkel megfogalmazott új ítéleteket:

1. $A \to C$;
2. $\neg B \to D$;
3. $(B \wedge D) \to F$;
4. $(B \vee A) \to (A \wedge G)$;
5. $\neg D \leftrightarrow F$;
6. $(\neg G \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A$;
7. $(D \vee \neg D) \leftrightarrow (\neg A \wedge F)$;
8. $(E \wedge B) \to \neg D$.

151. Tegyük fel, hogy a **150.** feladatban szereplő A, B, C, D, E, F, G ítéletek logikai értéke mind megegyezik.
Határozzuk meg az 1., ..., 8. ítéletek logikai értékét mindkét esetben.

152. Függ-e az $A \wedge \neg A$; $A \vee \neg A$; $A \to \neg A$; $\neg A \to A$; $A \to A$; $A \leftrightarrow A$; $A \leftrightarrow \neg A$ ítéletek logikai értéke az A ítélet logikai értékétől?

153. Legyen p, q és r logikai változó. Jelöljük i-vel, illetve h-val az igaz, illetve hamis logikai értéket. Oldjuk meg p, q, r-re a következő egyenleteket:

1. $p \wedge q \wedge \neg r = i$;
2. $p \wedge \neg q \wedge \neg r = h$;
3. $(\neg p \vee q) \wedge \neg r = i$;
4. $(p \wedge q) \to r = h$;
5. $(\neg p \wedge q) \to \neg r = h$;
6. $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q) = h$;
7. $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg r) = i$;
8. $[(p \wedge i) \vee (\neg p \wedge h)] \leftrightarrow (q \wedge r) = h$.

154. A konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia műveletek közül:
a) melyik nem kommutatív; *b)* melyik nem asszociatív?

155. Írjunk a $(p\ q)\ p$ logikai változókat jelölő betűk közé két olyan műveleti jelet, hogy az eredmény értéktáblázata a következő legyen:

p	q	$(p\ q)\ p$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	h

156. Fejezzük ki két logikai változó konjunkcióját a változókra alkalmazott negáció és diszjunkció segítségével.

157. Mutassuk meg, hogy a $p \to q = \neg(p \wedge q)$ egyenlőség azonosság.

158. Következik-e a $p \wedge q = i$ formulából, hogy $\neg p \vee q = i$?

159. Igaz-e, hogy $(p \to q) = h$ esetén $(p \wedge \neg q) = h$?

***160.** Mi mondható $p \to q = p \leftrightarrow q$ esetén a $q \to p$ művelet eredményéről?

161. Igazoljuk értéktáblázat segítségével az úgynevezett de Morgan-féle azonosságokat:

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q, \quad \text{valamint}$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

***162.** Legyen x tetszőleges természetes szám, $P(x)$; $Q(x)$; $R(x)$; $T(x)$ pedig rendre a P, Q, R, T ítéletekhez tartozó nyitott mondat: $2|x$, $3|x$, $4|x$, $6|x$. Határozzuk meg $x = 3$, 4, 5, 6, 12, 24 esetén a következő műveletek eredményét:
a) $(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$; *b)* $(Q(x) \vee T(x)) \leftrightarrow (P(x) \vee R(x))$;
c) $(Q(x) \wedge R(x)) \leftrightarrow (P(x) \wedge T(x))$; *d)* $(P(x) \vee R(x) \vee T(x)) \to Q(x)$.

163. A következő logikai egyenletek közül melyek azonosságok:
a) $p \vee q = \neg p \wedge q$; *b)* $p \wedge i = p$; *c)* $p \vee q \vee i = i$;
d) $p \wedge \neg q = \neg p \wedge q$; *e)* $\neg p \vee q = p \to q$; *f)* $\neg p \wedge q = p \leftrightarrow q$.

164. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok:
a) $\neg p \wedge \neg q = \neg(\neg p \to q)$; *b)* $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \leftrightarrow q$;
c) $p \wedge \neg q = \neg(p \to q)$.

***165.** Jelölje $A(x)$ és $B(x)$ az A, illetve B ítéletekhez tartozó nyitott mondatokat, ahol x egy adott H alaphalmaz eleme. Legyen továbbá C_1 és C_2 az $A(x)$, illetve $B(x)$ nyitott mondat igazsághalmaza $(C_1, C_2 \subset H)$. Ábrázoljuk Venn-diagrammal a következő nyitott mondatok igazsághalmazát:
a) $A(x) \wedge B(x)$; *b)* $A(x) \vee B(x)$;
c) $A(x) \to B(x)$; *d)* $A(x) \leftrightarrow B(x)$.

***166.** A **165.** feladat jelöléseit használva szemléltessük Venn-diagrammal, hogy az implikáció nem kommutatív művelet, azaz

$$A(x) \to B(x) \neq B(x) \to A(x)$$

x lehetséges értékeire.

167. Szemléltessük az $A(x)$ és $B(x)$nyitott mondatok segítségével

képzett $\neg(A(x)\wedge B(x))\wedge(\neg A(x)\wedge\neg B(x))$ nyitott mondat igazsághalmazát, ha $A(x)$ és $B(x)$ igazsághalmaza a C_1, illetve C_2 halmaz.

***168.** Mutassuk meg Venn-diagram segítségével a megfelelő nyitott mondatok igazsághalmazának ábrázolása útján, hogy $(A(x)\to B(x))\to C(x)\neq A(x)\to(B(x)\to C(x))$, ha x az alaphalmaz tetszőleges eleme és az A, B, C ítéleteknek megfelelő nyitott mondatok igazsághalmaza D_1, D_2, D_3.

169. Igazoljuk ábrázolás nélkül, hogy az $(A(x)\wedge\neg A(x)\to$ $\to(A(x)\wedge B(x))$ nyitott mondat igazsághalmaza az egész alaphalmaz.

170. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ jelölje rendre a következő nyitott mondatokat: $2|x$, $3|x$, $4|x$, $6|x$, ahol x az
$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 24\}$
alaphalmaz tetszőleges eleme lehet.
Határozzuk meg az $A(x)\wedge B(x)\wedge C(x)$; $B(x)\wedge C(x)\wedge D(x)$; $C(x)\wedge D(x)\wedge A(x)$, illetve az $A(x)\wedge B(x)\wedge C(x)\wedge D(x)$ nyitott mondatokhoz tartozó igazsághalmazokat.

***171.** A **170.** feladatban szereplő $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nyitott mondatokból képzett újabb nyitott mondatok legyenek a következők:
a) $(A(x)\vee(B(x))\wedge C(x)$; *b)* $(\neg A(x)\vee C(x))\wedge B(x)$;
c) $(B(x)\wedge C(x))\leftrightarrow(A(x)\wedge D(x))$; *d)* $(A(x)\vee C(x))\to(B(x)\vee D(x))$.
Határozzuk meg az egyes esetekben a felírt nyitott mondatok igazsághalmazának elemszámát.

172. Legyen x a valós számhalmaz (**R**) tetszőleges eleme. Jelölje $A(x)$, $B(x)$ és $C(x)$ rendre a következő nyitott mondatokat: $x\leqq 0$; $-2\leqq x\leqq 4$; $x>3$. Határozzuk meg az

$$(A(x)\wedge B(x))\vee(B(x)\wedge C(x))$$

nyitott mondat igazsághalmazát.

6. Logikai függvények

173. Jelöljük A-val a következő ítéletet: Egy adott szám pozitív. Tekintsük az $A(x)$: $x>0$, $x\in\mathbf{R}$ nyitott mondatot és képezzük az

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{ha } A(x) \text{ hamis}\end{cases}$$

függvényt.
Rajzoljuk meg az $x\mapsto f(x)$ függvény grafikonját.

174. Az $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nyitott mondatok legyenek rendre a következők: $|x|\leqq 1$, $2x-6>0$, $\sin x\leqq 0$, $x^2+x-6<0$. Legyen mindegyik esetben **R** az alaphalmaz.
Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{ha } A(x) \text{ hamis};\end{cases}$ *b)* $g(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{ha } B(x) \text{ hamis};\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } C(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{ha } C(x) \text{ hamis};\end{cases}$ *d)* $l(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } D(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{ha } D(x) \text{ hamis}.\end{cases}$

175. Legyen $A(x)$ és $B(x)$ a következő két nyitott mondat: $0\leqq x\leqq 4$, illetve $-1\leqq x\leqq 2$. Ábrázoljuk a következő logikai függvényeket:

a) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x)\wedge B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{különben};\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x)\vee B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{különben};\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x)\to B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{különben};\end{cases}$

d) $l(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x)\leftrightarrow B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{különben},\end{cases}$

(ahol az alaphalmaz minden esetben **R**).

176. Az x szám racionális, legyen az $A(x)$ nyitott mondat és legyen $B(x)=\neg A(x)$. Ábrázoljuk a következő függvényeket.

a) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } A(x)\wedge B(x) \text{ igaz},\\ 0, & \text{különben};\end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \vee B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \leftrightarrow B \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Igaz-e, hogy $x \in \mathbf{R}$ esetén vannak a függvények között egyenlők?

177. Az $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nyitott mondatok legyenek rendre a következők: $2|x$; $3|x$; $4|x$; $6|x$, ahol $x \in H$ és a H alaphalmaz azon pozitív egész számokból áll, melyekre $1 < x < 16$. Tekintsük az

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \wedge B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } B(x) \wedge C(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } C(x) \wedge D(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$

$l(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (A(x) \vee D(x)) \wedge (C(x) \vee D(x)) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

függvényeket. Az egyes függvények zérushelyeiből álló halmazokat jelöljük rendre F, G, H, L-lel. Határozzuk meg a következő értékeket:

1. $|F \cap G \cap H|$; 2. $|G \cap H \cap L|$; 3. $|H \cap L \cap F|$;
4. $|L \cap F \cap G|$; 5. $|F \cap G \cap H \cap L|$; 6. $|F \cup G \cup G \cup L|$.

***178.** Tudjuk, hogy egy adott logikai függvény értéke konstans. Lehet-e az **R** alaphalmazon értelmezett adott függvény értékeit meghatározó nyitott mondat a következő:

a) $x^2 \geqq 0$; *b)* az x szám racionális;
c) $x^2 - 2 < 0$; *d)* $x^2 + 1 \leqq 0$;
e) $x^2 - 5x + 6 = 0$; *f)* $x^2 - 3x + 5 \geqq 0$;
g) az $x \sin x$ kifejezés értéke nem 0;
h) $\sin x \leqq x$; *i)* $|\sin x| \leqq |x|$;
j) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} \in \mathbf{R}$; *k)* x racionális vagy irracionális;
l) x nullánál nagyobb vagy kisebb;
m) x egész szám vagy nem az; *n)* $x < 3$ és $x > 5$;
o) ha $x = 2$, akkor $x^2 \geqq 0$;
p) x^2 akkor és csak akkor negatív, ha $x^2 + 2 < 0$;

r) ha $|x - 1| < 0$, akkor $|x + 1| > 0$;
s) $x < 3$ és $x > 5$, ugyanakkor $|x| \geqq 0$;
t) x vagy 2-nél kisebb, vagy 3-nál nagyobb, vagy 5-nél kisebb;
u) ha x nem nagyobb 2-nél és prímszám, akkor $2 = x$.

7. Következtetések

E fejezeten belül a következő szóhasználattal élünk: a feltételeket premisszáknak, a következményt konklúziónak nevezzük.

179. Tekintsük a következő két kijelentést:

1. Ha esik az eső, ernyőt viszek magammal.
2. Ma ernyőt vittem magammal.

Logikai következménye-e 1. és 2.-nak a következő állítás: Ma esett az eső.

180. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi következtetés nem helyes:
premisszák: 1. Ha egy háromszög szabályos, akkor van 60°-os szöge.
2. Az ABC háromszögnek van 60°-os szöge,
konklúzió: Az ABC háromszög szabályos.

181. Ellenőrizzük értéktáblázattal, hogy helyes-e a következtetés:
premisszák: 1. Ha egy szám páratlan, akkor prímszám.
2. Az n szám nem prímszám,
konklúzió: Az n szám nem páratlan szám.

***182.** Mutassuk meg általánosan, hogy ha a p és q ítéletekkel képzett premisszák $p \to q$, illetve $\neg q$, akkor e premisszák következménye a $\neg p$ konklúzió.

***183.** Igazoljuk, hogy a $p \to q$, illetve q premisszákból nem következik p.

184. Tudjuk, hogy ha Péter moziba megy, akkor másnap nem megy iskolába. Péter ma nem volt iskolában (holott tanuló). Péter azt híreszteli magáról, hogy ő egyáltalán nem jár moziba. Hihető-e Péter állítása?

185. Tetszőleges sokszögről tudjuk, hogy ha szabályos, akkor

van beírt köre. Az A sokszög szabályos. Igaz-e, hogy A szükségképpen érintősokszög?

***186.** Bizonyítsuk be általánosan, hogy q logikai következménye a $p \to q$ és p premisszáknak.

***187.** Tudjuk, hogy ha egy pozitív egésznek nem két darab osztója van, akkor nem prímszám. Az a pozitív egész prímszám. Helyes-e logikailag az a következtetés, hogy az a számnak két osztója van?

188. Igazoljuk, hogy helyes az alábbi következtetés:
Ha a b pozitív egész szám nem osztható kettővel, akkor prímszám.
A b szám nem prímszám – ezt tudjuk.
Ezekből következik, hogy $2|b$.

189. Igazoljuk általánosan is a **188.** feladatban alkalmazott következtetési séma helyességét, azaz mutassuk meg, hogy $\dfrac{(\neg p \to q) \wedge \neg q}{p}$. Szavakban: a $(\neg p \to q)$ és $\neg q$ premisszák logikai következménye p.

190. Tudjuk, hogy Panni szőke vagy barna, továbbá azt is, hogy Panni kékszemű. Ha valaki kékszemű, akkor a haja színe nem lehet sem barna, sem fekete. Igaz-e, hogy Panni szőke hajú?

***191.** Jelöljük a **190.** feladatban szereplő nyelvi formákat a következő módon;
a: valaki szőke, b: valaki barna, c: valaki fekete,
d: valaki kékszemű, e: Panni valaki.
Írjuk fel az előző feladat következtetési sémáját az a, b, c, d, e betűk és a megfelelő logikai jelek segítségével.

***192.** Döntsük el, hogy helyes-e az alábbi következtetésforma:

$$\frac{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge (p \to \neg r) \wedge (p \wedge s)}{p \wedge q}.$$

193. Az alábbi következtetésformák közül melyek helyesek:

1. $\dfrac{(p \vee q) \wedge \neg p}{q}$; 2. $\dfrac{p \wedge q}{p \vee q}$; 3. $\dfrac{p}{p \vee q}$; 4. $\dfrac{p \wedge \neg q}{\neg p \vee q}$;

5. $\dfrac{(p \leftrightarrow q) \wedge p}{q}$; 6. $\dfrac{(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q}{p \vee q}$; 7. $\dfrac{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}{p \to q}$;

8. $\dfrac{(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)}{p}$.

194. Bizonyítsuk be, hogy a $\dfrac{p \to q}{\neg(p \wedge \neg q)}$ következtetésforma megfordítható, azaz helyes a $\dfrac{\neg(p \wedge \neg q)}{p \to q}$ következtetésforma is.

***195.** Milyen konklúzióra juthatunk a következő premisszákból:
a) p és $p \wedge q$; *b)* $\neg p \vee q$ és $p \vee \neg q$;
c) $\neg p$ és $p \to q$; *d)* $p \wedge q$ és $p \vee \neg q$?

196. Vizsgáljuk meg, hogy helyes-e az alábbi következtetés: Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor vannak egyenlő szögei. Az ABC háromszögnek azonban nincsenek egyenlő szögei.
Tehát ez a háromszög nem egyenlő szárú.

197. Formalizáljuk a **196.** feladat következtetését és írjuk fel a következtetésforma megfordítását. Helyes következtetéshez jutunk-e így?

***198.** Antal, Béla és Csaba is az iskolából hazaérve otthon azt mesélte, hogy ma ötöst kapott. Béla még azt is mondta, hogy Antallal együtt kapta az ötöst. Az „ügyről" a következőket tudjuk biztosan: van olyan tanuló, aki igazat mondott, és ha Antal ötöst kapott, akkor Béla nem; ha Béla kapott ötöst, akkor Csaba nem kapott, és ha Csaba kapott ötöst, akkor Antal nem kapott.
a) Hány tanuló kapott ötöst?
b) Melyik tanuló nem mondott biztosan igazat?
c) Hány tanuló mondott igazat egyáltalán?

II. SZÁMELMÉLET ÉS ARITMETIKA

1. Természetes számok

1. Írjuk fel a három darab
a) kettes; *b)* hármas; *c)* ötös
segítségével megalkotható legnagyobb természetes számot.

2. Hány jegyű szám a $10^{10^{10}}$?

3. Legalább hány számjegyből áll a 2^{1000}? (Igyekezzünk minél jobb becslést adni!)

4. Hány számjegy kell az 1–1986-ig terjedő természetes számok leírásához?

5. 1-től a természetes számokat egymás után írjuk a következőképpen: 1234...91011... . Milyen számjegy áll az 1986-odik helyen?

6. Fel lehet-e bontani két egymás után következő természetes szám szorzatára a 12; 1122; 111222; $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ db}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ db}}$; $n \in \mathbf{N}$ számokat?
Ha igen, hogyan.

7. Soroljuk fel az összes olyan számjegyet, amelyre két egymás után következő természetes szám szorzata végződhet.

8. Bizonyítsuk be, hogy
a) $4n^2+1$; *b)* $3n^3+2n^2+n+1$
egyetlen n természetes szám esetén sem lesz két egymást követő természetes szám szorzata.

9. Igaz-e, hogy ha $n>1$ páratlan természetes szám, akkor $\frac{n^2-1}{4}$ két egymás után következő természetes szám szorzataként előállítható?

10. Igaz-e, hogy $\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{4}$ minden n természetes szám esetén két egymást követő természetes szám szorzata?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a két egymást követő természetes szám szorzata, akkor $9a+2$ is két egymást követő természetes szám szorzata.

12. Hány 1000-nél kisebb pozitív egész szám létezik, amelyik osztható 93-mal?

13. Hány olyan legfeljebb 3-jegyű pozitív egész szám van, amelyik nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel?

14. Határozzuk meg 7-nek azt a legmagasabb hatványát, amelylyel az 1-től 1000-ig terjedő természetes számok szorzata osztható.

15. Hány 0-ra végződik az 1000!?

***16.** Tetszőleges, 1000-nél kisebb p prímszám az 1000!-ban hányadik hatványon fordul elő?

17. Adott négy sorozat az általános tagjával:

$$a_n = [n]+1;\ b_n = \left[\frac{n}{2}\right];\ c_n = \left[\frac{n+1}{2}\right];\ d_n = \left[\frac{n-1}{2}\right],\ \text{ahol } n \in \mathbf{N}.$$

Ezek közül melyik a 0; 1; 1; 2; 2; 3; 3; ...; n; n; ... sorozat? (A [ ] egészrészt jelöl.)

18. Milyen valós x számra teljesül, hogy

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right] = x?$$ (A [ ] egészrészt jelöl.)

19. Végezzük el a következő szorzásokat és számítsuk ki a szorzat számjegyeinek összegét:

$12 \cdot 99$;	$132 \cdot 99$;	$1637 \cdot 99$;
$12 \cdot 999$;	$132 \cdot 999$;	$1637 \cdot 999$;
$12 \cdot 9999$;	$132 \cdot 9999$;	$1637 \cdot 9999$;
$12 \cdot 99999$;	$132 \cdot 99999$;	$1637 \cdot 99999$.

Mit figyelhetünk meg?

***20.** Mutassuk meg: bármely a természetes számhoz végtelen sok olyan 0-t nem tartalmazó b természetes szám található, hogy b és ab számjegyeinek összege megegyezik. (a és b tízes számrendszerbeli számok.)

21. Határozzuk meg azt a legkisebb 1-gyel kezdődő természetes számot, amely olyan tulajdonságú, hogy ha az elejéről kitöröljük az

1-est és beírjuk a végére, akkor az így kapott szám az eredetinek háromszorosa lesz.

22. Felírjuk egy papírra az 1; 2; 3; ...; 1986 számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörölünk, és helyettük a különbségüket írjuk fel. Ezt a műveletet addig ismételjük, amíg csak egyetlen 0-tól különböző szám marad. Igaz-e, hogy ez a szám páratlan?

23. Határozzuk meg, milyen számjegyek állnak a pontok helyén a következő szorzásban:

a)

$$\begin{array}{r} \ldots \cdot \ldots \\ \hline .0.. \\ \ldots 5 \\ \hline .1.. \\ \hline \ldots\ldots 8 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} ..5 \cdot 6.. \\ \hline .... \\ \ldots 0 \\ \hline \ldots \\ \hline \ldots 25 \end{array}$$

24. Keressük meg az összes olyan n természetes számot, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek szorzata $n^2-10n-22$.

25. Találomra megadunk 1988 egész számot, amelyek összegének abszolútértéke 1. Kiválaszthatunk-e közülük néhány számot úgy, hogy a kiválasztott számok összege egyenlő legyen a ki nem választott számok összegével?

26. Keressük meg azt a tízes számrendszerben felírt legnagyobb háromjegyű páros számot, amelyik nem változik meg, ha felcseréljük az egyesek és százasok helyén álló számjegyeit.

27. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyik nem változik, ha az egyesek és százasok helyén álló számjegyeket felcseréljük? Van-e közöttük négyzetszám?

28. Egy 16×16-os „sakktábla" lefedhető-e 2×1-es dominóval úgy, hogy a bal alsó és a jobb felső sarok fedetlen maradjon?

29. Hány gyermeke van, és milyen idősek? Ezt kérdezte Péter bácsitól vendége, egy okos matematikus. Három fiam van – mondta Péter bácsi –, életkoruk szorzata 72, összege pedig a házszám. A vendég, aki ismerte a házszámot, kis gondolkodás után azt mondta, hogy ebből még nem tudhatja a választ. Igen, mondta Péter bácsi, remélem, hogy legidősebb fiam majd megnyeri a Kürschák versenyt. Ekkor a matematikus megmondta a gyermekek életkorát. Hogyan találta ki?

30. Két ember születési évét meg tudjuk-e határozni a következő adatokból: tudjuk, hogy mindketten ebben a században születtek, mindkettő évszáma ugyanazokból a számjegyekből áll, a két ember között a korkülönbség 9 év?

31. Egy körvonalon 44 fa helyezkedik el. Mindegyik fán ül egy majom. Adott jelre valamelyik két majom átugrik a szomszéd fára, egyik az óramutató járásával azonos, a másik az óramutató járásával ellentétes irányba. Ilyen ugrásokkal elérhető-e, hogy minden majom ugyanazon a fán legyen?

32. Egy autó rendszáma a következő két kétjegyű számból áll: 90–91. Ha az első kétjegyű számhoz a második számjegyeinek összegét hozzáadjuk, 100-at kapunk, ha a második kétjegyű számhoz az első számjegyeinek összegét adjuk, ugyancsak 100-at kapunk. Hány ilyen kétjegyű számpár van? Határozzuk meg mindegyiket.

33. Egy természetes szám harmadik hatványa olyan hatjegyű természetes szám, melynek első számjegye 2, utolsó 5. Melyik ez a szám?

34. Tudjuk, hogy a 121 teljes négyzet. Igaz-e, hogy 10 201, 1 002 001, 100 020 001 is teljes négyzet? Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

35. Bizonyítsuk be, hogy ha az 1331 szám számjegyei közé mindenütt ugyanannyi nullát írunk, akkor teljes köbszámot kapunk.

36. Lehet-e négyzetszám az az egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában 510 db 1-es és valahány 0 szerepel?

37. Írjuk fel azt a 7-jegyű négyzetszámot, amelynek számjegyei az 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8 számok, valamilyen sorrendben.

38. Van-e olyan négyzetszám, amelynek számjegyei a 0; 2; 3; 5 számok, valamilyen sorrendben?

39. Tudjuk, hogy

$$9^2 = 81;$$
$$99^2 = 9801;$$
$$999^2 = 998001;$$
$$9999^2 = 99980001.$$

Igaz-e, hogy $A = \underbrace{99\ldots9}_{n\text{ db}}\underbrace{8000\ldots01}_{n\text{ db}}$ szám négyzetszám? ($n \in \mathbf{N}^+$)

40. Keressünk olyan *abcde* ötjegyű természetes számot, hogy $\overline{ab}$; $\overline{bc}$; $\overline{cd}$; $\overline{de}$ természetes szám négyzete legyen!

41. Határozzuk meg azt a tízes számrendszerbeli $\overline{xyxyxz}$ alakú négyzetszámot, amely páros, és amelyben x; y; z egymást követő számjegyek ($x < y < z$).

42. A tízes számrendszerben $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű számok között van-e négyzetszám?

43. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely természetes szám négyzete 6-ra végződik, akkor a tízesek helyén páratlan szám áll.

44. Igaz-e, hogy a nem 6-ra végződő természetes számok négyzetében a tízesek helyén páros szám áll? Az állításunkat bizonyítsuk!

45. Bizonyítsuk be, hogy a legalább kétjegyű teljes négyzetek legalább két különböző számjegyet tartalmaznak.

***46.** Egy egész szám négyzete négy egyenlő számjegyre végződik. Melyik lehet ez a számjegy?

47. Adott egy poliéder, amelynek minden lapja háromszög. A poliéder csúcsait négy szín valamelyikére színezzük. Bizonyítsuk be, hogy azon oldallapok száma, amelyeknek csúcsai különböző színűre vannak festve, páros.

48. Milyen számjegyre végződik az $1+2+3+\ldots+n$ szám $n \in \mathbf{N}$, ha az $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ szám 1-re végződik?

49. Határozzuk meg az $N = 7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^{4n}$ szám utolsó két számjegyét (n pozitív egész szám).

50. Mutassuk meg, hogy minden szám ötödik hatványában az utolsó számjegy megegyezik az eredeti szám utolsó számjegyével.

51. Bizonyítsuk be, hogy az a természetes szám és az a^{4n+1} $n \in \mathbf{N}$ utolsó számjegye megegyezik.

52. Mi lesz az utolsó két számjegye a 2^{1990} számnak?

53. Mutassuk meg, hogy 10 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa előállítható két négyzetszám összegeként.

54. Adottak a következő számok:

$A = 1+2^{1987}+3^{1987}+\ldots+n^{1987}$;

$B = 1987+1987^2+1987^3+\ldots+1987^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Az $A+B$ összeg páros vagy páratlan szám?

2. Oszthatóság az egész számok halmazában

55. Döntsük el, hogy a következő számok közül melyik melyiknek osztója:

2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 24; 32; 128; 256; 342; 4032; 5472.

56. Igaz-e, hogy minden páros szám kifejezhető a következő formában:

a) $2k+4$; *b)* $4m+2$; *c)* $8m-1$;
d) $2-2l$; *e)* n^2+4; *f)* $6n+2$,

ahol k, l, m, n egész számok.

57. Igaz-e, hogy minden páratlan szám kifejezhető a következő formában:

a) $2k-1$; *b)* $2l+7$; *c)* $4n+1$;
d) $2k-9$; *e)* $2n^2+2n-1$; *f)* $2l^2+3$,

ahol k, l, m, n egész számok.

58. Legyen a, b pozitív egész szám, akkor a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Ha $a+b$ páros, akkor a és b páros.
B: Ha $a+b$ páros, akkor a vagy b páros.
C: Ha $a+b$ páros, akkor a vagy b páratlan.
D: Ha $a+b$ páratlan, akkor a vagy b páros.
E: Ha $a \cdot b$ páros, akkor a és b páros.
F: Ha $a \cdot b$ páros, akkor a vagy b páros.

59. Legyen a és b pozitív egész szám, akkor a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Létezik olyan a szám, hogy bármely b számra $a>b$.
B: Bármely b-hez létezik a úgy, hogy $a>b$.
C: Bármely b-hez létezik $a>1$, $a \neq b$ szám úgy, hogy a osztója b-nek.
D: Létezik olyan a, hogy $\frac{a+2}{a+1}$ természetes szám.

60. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója az a és b számoknak, akkor osztója az összegüknek, különbségüknek is. Igaz-e az állítás megfordítása?

61. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója két egész szám összegének és az egyik számnak, akkor osztója kell legyen a másik számnak is.

62. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója egy a egész számnak, akkor a minden többszörösének is osztója. Igaz-e az állítás megfordítása?

63. Bizonyítsuk be, hogy ha a páratlan egész szám, akkor a osztója $2b$-ből, a osztója b következik.

64. Bizonyítsuk be, hogy ha egy c páratlan egész szám osztója a és b egész számok összegének és különbségének, akkor c osztója a-nak is és b-nek is.

65. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a+9b$ osztható 17-tel, akkor $33a+89b$ is osztható 17-tel.

66. Négy különböző egész szám összege osztható 4-gyel. Lehet-e, hogy közülük

a) egyik sem osztható 4-gyel;
b) egyik osztható 4-gyel a másik három nem;
c) kettő osztható 4-gyel, kettő nem;
d) három osztható 4-gyel, egy nem;
e) mindegyik osztható 4-gyel?

67. Igaz-e, hogy ha két szám mindegyike 3-mal osztva 1-et ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk 3-mal osztva ugyancsak 1-et ad maradékul?

68. Igaz-e, hogy ha két szám mindegyike 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk is 2-t ad maradékul 3-mal osztva?

69. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b 3-mal nem osztható egész számok, akkor az összegük vagy a különbségük 3-nak többszöröse.

70. Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

71. Bizonyítsuk be, hogy ha a 5-tel nem osztható egész szám, akkor a^2+1 vagy a^2-1 osztható 5-tel.

72. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

73. Valamely természetes szám 7-tel osztva 3-at ad maradékul. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

74. Van-e olyan négyzetszám, amely 8-cal osztva 3-at ad maradékul?

75. A 6-tal osztva maradékul 2-t adó számok között van-e négyzetszám?

76. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzetszámok
a) 3-mal; *b)* 4-gyel; *c)* 5-tel
osztva milyen maradékot adnak.

77. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

78. Igaz-e, hogy bármely egész szám négyzetének 12-es maradéka négyzetszám?

79. Melyek azok a kétjegyű A számok, melyekre a következő négy állítás közül kettő igaz, kettő hamis?
1. A osztható 5-tel; 2. A osztható 23-mal;
3. $A+7$ teljes négyzet; 4. $A-10$ teljes négyzet.

Prímszám, összetett szám

80. Állapítsuk meg, hogy a következő számok közül melyek prímszámok, melyek összetett számok:

12; 17; 121; 203; 217: 251; 329; 348; 713; 757; 943; 991.

81. Adott 4 darab 10-nél nagyobb szomszédos természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő összetett szám. Mondhatnánk-e kettő helyett hármat? Igaz-e, hogy legfeljebb három lehet közülük összetett szám?

82. Adott 12 darab 100-nál nagyobb szomszédos egész szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább nyolc összetett szám.

83. Hány összetett szám következik egymás után 182-től 190-ig?

84. Keressünk 11 egymás után következő összetett számot.

85. Prímszám-e
a) az idei naptári év;
b) az olvasó születési éve?

86. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot úgy, hogy minden számjegyet felhasználjunk, de mindegyiket csak egyszer.

87. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a; $a+4$; $a+14$ számok prímszámok legyenek.

88. Adjuk meg mindazokat a p prímszámokat, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prímszám.

89. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2+1$ is prímszám.

90. Valaki kipróbálta, hogy n^2+n+41, $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$-ra prímszám. Most azt állítja, hogy n^2+n+41 minden természetes számra prímszám. Igaza van-e?

91. Bizonyítsuk be, hogy ha 2^n-1 prímszám, $n \in \mathbf{N}$, akkor n is prímszám. Igaz-e az állítás megfordítása?

92. Legyen a p prímszám, és $p-1$ négyzetmentes (azaz nincsen négyzetszám osztója). Határozzuk meg, hogy a p 4-gyel osztva milyen maradékot ad.

93. Mutassuk meg, hogy egy 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul.

94. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges prímszámot 30-cal osztva a maradék vagy prímszám, vagy 1.

95. Ikerprímszámoknak nevezzük azokat a prímszámokat, amelyek szomszédos páratlan számok. Keressünk ilyen prímszámokat.

96. Bizonyítsuk be, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel.

97. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

98. Lehet-e egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma három olyan egész szám, amelyek közül a két kisebb ikerprímszám?

***99.** Legyen az a és b természetes szám. Mutassuk meg, hogy ha $\frac{a^3+b^3}{2}$ prímszám, akkor $3a^2-6a+4$ és $3b^2-6b+4$ is az.

100. Az 1; 2;...; 100 számok két csoportra oszthatók-e úgy, hogy minden számot valamelyik csoportba teszünk, a két csoportnak nincs közös eleme, és az egy-egy csoportban levő számok szorzata megegyezik?

***101.** Legyen p valamely prímszám, M pedig p darab egymás után következő természetes szám halmaza. Fel lehet-e bontani M-et két M_1 és M_2 halmazra úgy, hogy $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, és az

M_1-ben levő számok szorzata egyenlő legyen az M_2-ben levő számok szorzatával?

102. Határozzuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a^4+4 prímszám.

103. Legyen p és q két ikerprímszám. Mutassuk meg, hogy ha $2a = p+q$, akkor a összetett szám.

104. Igazoljuk, hogy $1999^{2000}+24$ összetett szám.

Összetett számok prímtényezőkre bontása

105. Bontsuk fel prímszámok szorzatára a következő számokat:

a) 6912; *b)* 476; *c)* 348; *d)* 441;
e) 1840; *f)* 2184; *g)* 3400; *h)* 4550;
i) 7875; *j)* 7623; *k)* 8505; *l)* 16865.

106. A páros számok közül tekintsük azokat, amelyek nem írhatók fel két páros szám szorzataként, például 10, 18, 22 stb. Az ilyen számokat „páros prímeknek" nevezzük. Igaz-e, hogy minden páros szám, amelyik nem páros prím, felbontható páros prímek szorzatára? Egyértelmű ez a felbontás?

107. Írjuk fel a 60, 360, 800, 640, 540 számok összes „páros prímtényezős" felbontását.

108. Határozzuk meg a következő számok összes osztóját:

a) 240; *b)* 1024; *c)* 161; *d)* 997; *e)* 1800;
f) 5704; *g)* 10428; *h)* 18612; *i)* 6045; *j)* 6867.

109. Hogyan lehet a prímtényezős felbontásból megállapítani, hogy egy egész szám

a) páros-e vagy páratlan;
b) osztható-e 4-gyel vagy 8-cal;
c) négyzetszám-e?

110. Igaz-e, hogy ha egy szám osztója a^2-nek, akkor osztója a-nak is ($a \in \mathbf{N}$)?

111. Igaz-e, hogy ha egy szám osztója a^n-nek, akkor osztója a-nak is (a; $n \in \mathbf{N}$)?

112. Határozzuk meg azt az *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5 legkisebb egymás után következő pozitív egész számot, amelyek összege teljes négyzet és egyben teljes harmadik hatvány.

113. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív n számot, amelyre $\frac{n}{2}$ teljes négyzet, $\frac{n}{3}$ teljes köb, $\frac{n}{5}$ teljes ötödik hatvány.

114. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{abcd}$ és $\overline{dcba}$ négyjegyű számok összegének négyzete 121 többszöröse.

115. Hány olyan egész szám van 1000 és 2000 között, amely kettőn és ötön kívül más prímszámmal nem osztható?

***116.** A $(n+1)\,(n+2)\ldots 2n$ szorzat prímtényezős felbontásában a kettes hányadik hatványon szerepel?

***117.** Mutassuk meg, hogy az $A = \sqrt{22\underbrace{99\ldots9}_{(k-2)\text{ db}}\underbrace{00\ldots09}_{k\text{ db}}} + 3$, ha $k \geqq 2$ számnak a prímtényezői 2; 3; 5.

118. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám osztója két egész szám szorzatának és a szorzat egyik tényezőjéhez relatív prím, akkor a szám osztója a másik tényezőnek.

119. Írjunk fel egy négyjegyű számot a tízes számrendszerben és írjuk mellé ugyanezt a számot. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott 8-jegyű szám osztható 73-mal és 137-tel.

Oszthatósági szabályok

120. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye páros; akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.

121. Mennyi

a) 2563-nak a 100-zal való osztási maradéka;
b) 13 625-nek az 1000-rel való osztási maradéka;
c) $10a+b$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
d) $100a+10b+c$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
e) $1000a+100b+10c+d$-nek az 1000-rel való osztási maradéka;
f) $100a+10b+c$-nek a 100-zal való osztási maradéka;
g) $1000a+100b+10c+d$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
h) $1000a+100b+10c+d$-nek a 100-zal való osztási maradéka (ahol a, b, c számjegyek)?

122. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a tízes számrendszerben a 4-gyel, 25-tel, 8-cal, 125-tel való oszthatóság szabályát.

123. Határozzuk meg a következő számok 9-cel való osztási maradékát:

234; 512; 106; 113; 240; 4132; 9503; 3426.

Adjuk össze a számok számjegyeit, és azok 9-cel való osztási maradékát is állapítsuk meg. Mit figyelhetünk meg? Hogyan általánosíthatunk? Állapítsuk meg és bizonyítsuk be egy tízes számrendszerbeli szám 9-cel való oszthatóságának szabályát.

124. Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Ha egy szám 9-nek többszöröse, többszöröse-e 3-nak?

b) Ha egy szám 9-cel osztható, osztható-e 3-mal?

c) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 0, osztható-e 3-mal?

d) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 0, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

e) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 1, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

f) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 2, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

g) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 3, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

h) Mennyi a következő számok 9-cel és 3-mal való osztási maradéka:

279; 280; 281; 282; 283; 284; 285; 286; 287; 288?

i) Ha egy szám 3-mal való osztási maradéka 0, mennyi a 9-cel való osztási maradéka? Fogalmazzuk meg a 3-mal való oszthatóság szabályát a tízes számrendszerben.

125. Melyik az a 3-mal osztható 3-jegyű páros szám, amelynek középső számjegye 0, az első számjegye pedig az utolsónál 1-gyel kisebb?

126. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal. Mondjuk ki az állítás megfordítását és igazoljuk.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szám osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel. Igaz-e az állítás megfordítása?

***128.** Keressünk a tízes számrendszerben a 11-gyel való oszthatóságra szabályt.

129. Mikor osztható egy tízes számrendszerbeli szám 37-tel?

130. Bizonyítsuk be, hogy a $37^{37}-23^{23}$ szám osztható 10-zel.

131. Hány 8-cal osztható tízes számrendszerbeli $\overline{3xyz136}$ alakú szám van?

132. Keressük meg az összes $\overline{2yz}$ alakú tízes számrendszerbeli 6-tal osztható háromjegyű számot.

133. Osztható-e az a szám 9-cel, amelyről tudjuk, hogy számjegyeinek összege nem változik, ha a számot 5-tel megszorozzuk?

134. Lehet-e a 9-cel való oszthatóság szabálya az, hogy 9-cel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha számjegyeinek összege nem változik meg, amikor 5-tel megszorozzuk a számot?

135. Mutassuk meg, hogy ha az $\overline{abc}$ háromjegyű természetes szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ háromjegyű számok is oszthatók 37-tel.

136. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész szám esetén $A = 10^n+98$ szám osztható 18-cal.

137. Igazoljuk, hogy ha két egész szám összege osztható 10-zel, akkor a számok négyzetei ugyanarra a számjegyre végződnek.

138. Melyik az a tízes számrendszerbeli legkisebb négyzetszám, amelyik 14-re végződik?

139. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{10^{4n-1}+2}{3}+\dfrac{10^{3n-3}+2^3}{9}$ egész szám.

Oszthatósági feladatok

140. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal.

141. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata osztható 24-gyel.

142. Melyik az a legnagyobb szám, amellyel bármely öt egymás után következő természetes szám szorzata osztható?

143. Bizonyítsuk be, hogy két egymás utáni páros szám szorzata osztható 8-cal.

144. Melyik az a legnagyobb szám, amellyel bármely három egymást követő páros szám szorzata osztható?

145. Hány egymást követő természetes számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat biztosan osztható legyen 567-tel?

146. Bizonyítsuk be, hogy

a) 15 osztója $2^{16}-1$-nek;

b) 17 osztója $2^{16}-1$-nek;

c) 6 osztója 17^n-11^n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

d) 9 osztója 100^n-1-nek, $n \in \mathbf{N}$;

e) 11 osztója 100^n-1-nek, $n \in \mathbf{N}$;

f) 15 osztója $2^{4n}-1$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

g) 5 osztója $4 \cdot 6^n+5^n-4$-nek, ha $n \geqq 1$, $n \in \mathbf{N}$;

h) 8 osztója $3^{2n}+7$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

i) 2 osztója n^2-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

j) 2 osztója a^n+a-nak, ahol $a; n \in \mathbf{N}^+$;

k) 24 osztója n^3+23n-nek, ha n 8-cal osztható természetes szám;

l) 4 osztója $n^4-2n^3+n^2$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

m) 3 osztója n^3+2n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

n) 5 osztója n^5-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

o) 30 osztója n^5-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

p) 57 osztója $7^{n+2}+7^{n+1}+7^n$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

r) 1986 osztója $1985^{1985}+1988-1987^{1987}$-nek;

s) $\underbrace{100\ldots01}_{1984 \text{ darab } 0}$ osztható 100001-gyel;

t) 7 osztója $3^{2n+1}+2^{n+2}$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

u) 3 osztója $2 \cdot 7^n+1$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

v) 99 osztója $3^{n+3} \cdot 2^{2n+2}-108$-nak, $n \in \mathbf{N}$;

w) 360 osztója $n^6-5n^4+4n^2$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

x) 37 osztója $1+2^{19}+3^{19}+\ldots+36^{19}$-nek;

y) $2a+1$ osztója $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+\ldots+(2a)^{2n+1}$-nek, $a; n \in \mathbf{N}$;

z) 27 osztója $10^n+18n-1$-nek, $n \in \mathbf{N}$.

147. Lehet-e 46 darab egymást követő természetes szám összege 46-tal osztható?

148. Milyen n esetén lesz n darab egymást követő természetes szám összege osztható n-nel?

149. 11 darab, egyenként 1; 2; 3; 4; ...; 11 kg súlyú csomagot lehet-e három egyenlő súlyú részre bontani?

***150.** Általánosítsuk az előző feladatot. Adott n darab tárgy, melyek súlya 1; 2; ...; n egység. Milyen n esetében tudjuk három egyenlő súlyú részre bontani ezeket?

151. Milyen n természetes szám esetén lesz

a) 9 osztója 11^n+7^n-nek;

b) 16 osztója 17^n+n-nek;

c) 120 osztója $n^6+2n^5-n^2-2n$-nek;

d) $\dfrac{64^n+16 \cdot 8^n+63}{8^{n+1}+56}$ egész szám;

e) 3 osztója $2n^3+2n^2+1$-nek;

f) 6 osztója $1^n+2^n+3^n$-nek;

g) 48 osztója n^3+3n^2-n-3-nak;

h) 121 osztója n^2+3n+5-nek?

***152.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges páratlan n természetes szám esetén $1+2+3+\ldots+a$ osztója $1^n+2^n+3^n+\ldots+a^n$-nek.

153. Van-e olyan n és $k \in \mathbf{N}^+$, hogy 5^k-1 osztója 5^n+1-nek?

***154.** Ha $A = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ nem osztható 5-tel, akkor mennyi a $B = 1+2+\ldots+n$ szám 5-tel való osztási maradéka?

155. Bizonyítsuk be, hogy

a) $5^{20}-1$ osztható 24-gyel;

b) $3^{105}+4^{105}$ osztható 181-gyel;

c) $2^{60}+7^{30}$ osztható 13-mal.

156. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqq 1$ természetes számra

a) 6 osztója n^3+5n-nek;

b) 6 osztója n^3+11n-nek;

c) 9 osztója 7^n+3n-1-nek;

d) 81 osztója $10^n \cdot (9n-1)+1$-nek;

e) 64 osztója $3^{2n+2}-8n-9$-nek;

f) 21 osztója $5^{2n+1}+4^{n+2}$-nek;

g) 13 osztója $4^{2n+1}+3^{n+2}$-nek;

h) 11 osztója $3^{2n+2}+2^{6n+1}$-nek;

i) 19 osztója $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1}+3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$-nek.

157. Milyen n egész számra lesz

a) $\dfrac{3n-9}{n+3}$ egész szám?

b) $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$ egész szám?

158. Milyen n természetes szám esetén lesz $\frac{n^2+14n+40}{n^2+10n+24}$ természetes szám?

159. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges páros n természetes számra

a) 48 osztója n^3+20n-nek;

b) 323 osztója $20^n+16^n-3^n-1$-nek.

160. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a természetes szám esetén a^7-a osztható 42-vel.

161. Mutassuk meg, hogy

a) 2-nek; *b)* 3-nak; *c)* 4-nek; *d)* 5-nek; *e)* 1986-nak van olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll.

***162.** Igaz-e, hogy bármely n természetes számnak van olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll?

***163.** Van-e olyan 1986-ra végződő egész szám, amelyik osztható 67-tel?

***164.** Az 1; 2; 3; ...; 300 számok közül válasszunk ki tetszőlegesen 151 darabot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig található kettő, melyek között az egyik osztója a másiknak.

165. Igazoljuk, hogy bármely 200-jegyű számhoz található olyan 1986-tal osztható szám, amelynek első 200 számjegye az eredeti szám.

***166.** Mutassuk meg, hogy bármely a páratlan természetes számhoz található olyan b természetes szám, hogy 2^b-1 osztható a-val.

***167.** Mutassuk meg, hogy bármely n; a; b természetes számhoz, ahol $(a; b) = 1$, találhatók olyan x; y egész számok, hogy $n = ax+by$ fennáll.

168. Valaki azt állítja, hogy bárhogy is adunk meg nyolc darab háromjegyű számot, mindig kiválasztható közülük kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott hatjegyű szám 7-tel osztható. Igaza van?

169. Mutassuk meg, hogy ha n és $k>1$ pozitív egész számok, akkor $3^{n^k}+1$ nem osztható 5-tel.

170. Mutassuk meg, hogy különböző a; b; c számjegyekkel felírható összes háromjegyű szám összege osztható $a+b+c$-vel. (Minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel.)

171. Keressünk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy n darab páratlan egész szám négyzetének összege 8-cal osztható legyen.

***172.** Bizonyítsuk be, hogy különböző prímszámok reciprokainak összege nem lehet egész szám, sem egy egész szám reciproka.

173. Írjunk fel olyan egész együtthatós $p(x)$ polinomot, melyre $p(7) = 17$ és $p(11) = 19$.

174. Van-e olyan nem egész együtthatós polinom, amely minden egész helyen egész értéket vesz fel?

175. Mutassuk meg, hogy ha a $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, ahol a, b, c, d, e egész számok, minden egész x-re osztható 5-tel, akkor 5 osztója az a, b, c, d, e együtthatók mindegyikének. Igaz-e hasonló ötödfokú polinomra?

176. Legyen $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, ahol a, b, c, d egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $p(x)$ minden egész x-re osztható 3-mal, ha létezik három egymás után következő egész szám úgy, hogy ezekre $p(x)$ osztható 3-mal. Kihasználtuk-e azt, hogy $p(x)$ negyedfokú polinom? Igaz-e az állítás tetszőleges $n \geqq 2$ fokú polinomra?

177. Gabi felírt egy lapra egy egész együtthatós polinomot és azt mondta: ma van a húgom születésnapja. Ha életkorát a-t beírjuk x helyébe, a-t kapunk, vagyis $p(a) = a$. Tudjuk, hogy $p(0) = p$, ahol $p>a$ prímszám. Hány éves Gabi húga?

***178.** Két tanuló, Gabi és Zsuzsi, a következő játékot találta ki: Gabi felírt egy egész együtthatós polinomot és azt mondta: Éveim száma (egész) a polinom gyöke. Hány éves vagyok, találd ki.

Zsuzsi: Nem lehet nehéz. Próbálkozzunk $x=7$. Ez nem jó, mert $p(7) = 77$.

Gabi: Ilyen kicsinek látszom?

Zsuzsi: Nézzünk valami nagyobbat, A-t. Ez nem jó, mert $p(A) = 85$.

Gabi: (Belenézve a számolásba) Oh, de én még A-nál is idősebb vagyok!

Zsuzsi ebből megmondta, hogy Gabi hány éves. Hogyan találta ki?

179. A $0<n\leqq 100$ egész számok halmazának minden eleméhez rendeljük hozzá a szám pozitív osztóinak számát. Függvényt kapunk-e így? Miért?

180. Legyen a d függvény a pozitív egész számok halmazán értelmezve úgy, hogy $d(n)$ jelentse az n pozitív osztóinak számát. Határozzuk meg a $d(1)$; $d(2)$; $d(5)$; $d(12)$; $d(16)$; $d(28)$; $d(30)$; $d(64)$; $d(70)$ függvényértékeket.

181. Hány pozitív osztója van:
a) $2^3 \cdot 3$; *b)* $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$; *c)* $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
számoknak?

182. Igazoljuk, hogy
a) $d(2^3 \cdot 3^2) = d(2^3)\, d(3^2)$;
b) $d(2^a)\, d(3^b) = d(2^a \cdot 3^b)$,
ahol d a **180.** feladatban szereplő függvényt jelenti.

183. Bizonyítsuk be, hogy az $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (ahol $a_1; \dots; a_k$ pozitív egész számok, $p_1; \dots; p_k$ prímszámok), szám pozitív osztóinak száma $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$.

184. Határozzuk meg
a) 81; *b)* 256; *c)* 400; *d)* 576; *e)* 625; *f)* 10 000
pozitív osztóinak számát.

185. 24 fős zenekar a sportpályán téglalap alakú alakzatban menetel.
(pl. 1×24; 24×1; 2×12; 3×8 stb.)
a) Hány ilyen különböző téglalap alakú alakzat lehetséges?
b) Legalább hány ember szükséges ahhoz, hogy

4-féle; 5-féle; 10-féle

téglalap alakú alakzatban meneteljenek?

186. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek pontosan
a) 7; *b)* 8; *c)* 9; *d)* 10; *e)* 11; *f)* 12; *g)* 20
pozitív osztója van.

187. Adjunk meg néhány olyan pozitív egész számot, amelyek pozitív osztóinak száma két páratlan szám szorzata.

188. Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy egész szám osztóinak száma
a) páratlan legyen;
b) páros legyen.

189. Határozzuk meg, hogy

a) 48-nak hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 6-tal.
b) 120-nak hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 4-gyel.
c) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$-nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 15-tel.
d) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$-nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 21-gyel?

190. Bizonyítsuk be, hogy egy szám pozitív osztóinak száma nem nagyobb, mint a szám négyzetgyökének kétszerese.

191. Hány x; y egész megoldása van az
a) $x^2 - y^2 = 15$ egyenletnek;
b) $x^2 - y^2 = 12$ egyenletnek;
c) $x^2 - y^2 = 21$ egyenletnek;
d) $x^2 - y^2 = 19$ egyenletnek;
e) $x^2 - y^2 = a$ egyenletnek, ahol a páratlan egész szám?

192. Keressük meg, hogy hány osztópárja van ($k_1; k_2 \in \mathbf{N}^+$ osztópárjai n-nek, ha $n = k_1 k_2$ és $k_1 \leqq k_2$):
a) 18; *b)* 36; *c)* 96; *d)* 121; *e)* 200; *f)* 576;
g) 1024; *h)* 10 000; *i)* $n \in \mathbf{N}^+$-nak ha n nem négyszetszám;
j) $n \in \mathbf{N}^+$-nak, ha n négyzetszám.

193. Határozzuk meg
a) 72; *b)* 16; *c)* 180; *d)* 525; *e)* 289; *f)* 625;
g) n tetszőleges pozitív egész
pozitív osztóinak a szorzatát.

194. Határozzuk meg azt a pozitív egész számot, amelynek 6 osztója van, és pozitív osztóinak szorzata 91 125.

195. A $0 < n \leqq 20$ egész számok halmazának minden eleméhez rendeljük hozzá n pozitív osztóinak összegét. Függvényt kapunk-e így? Miért?

196. Legyen S a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény, amely a halmaz minden eleméhez hozzárendeli az elem pozitív osztóinak összegét. Határozzuk meg:
a) $S(2)$; *b)* $S(4)$; *c)* $S(6)$; *d)* $S(8)$; *e)* $S(9)$;
f) $S(12)$; *g)* $S(16)$; *h)* $S(18)$; *i)* $S(19)$
függvényértékeket.

197. Határozzuk meg
a) 81; *b)* 256; *c)* 196; *d)* 243; *e)* 540; *f)* 1000
pozitív osztóinak összegét.

198. Mennyi a következő számok pozitív osztóinak összege:
a) 2^7; *b)* 5^3; *c)* 3^4; *d)* $2^3 \cdot 3^2$; *e)* $5^4 \cdot 7$; *f)* $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$?

199. Igazoljuk, hogy pozitív egész számokhoz pozitív osztói összegét rendelő S függvényre fennáll, hogy
a) $S(2^3 \cdot 3^2) = S(2^3)\,S(3^2)$; *b)* $S(2^a \cdot 3^b) = S(2^a)\,S(3^b)$,
ahol a és $b > 0$ egész számok.

***200.** *a)* Általánosítsuk az előző feladatot a következő módon: ha $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$, akkor $S(n) = S(p_1^{a_1}) \cdot S(p_2^{a_2})$,
ahol $p_1; p_2 > 0$ prímszámok, $a_1; a_2 > 0$ egész számok.
b) Hogyan lehetne kimondani további általánosítást? (Bizonyítás nélkül.)

201. Határozzuk meg a következő számok pozitív osztóinak összegét: *a)* 240; *b)* 2025; *c)* $2^8 \cdot 3^5$; *d)* 1988.

202. Határozzuk meg
a) $S(2^8)$; *b)* $S(3^{15})$; *c)* $S(2^{31})$; *d)* $S(p^4)$; *e)* $S(p^{11})$;
f) $S(p^{16})$; *g)* $S(p^{21})$; *h)* $S(p^k)$
(ahol $p > 0$ prímszám, $k > 0$ egész szám, S a **199.** feladatban szereplő függvény).
Keressünk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy $S(n)$ páratlan szám legyen.

203. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy szám páratlan osztóinak összege nagyobb legyen a páros osztói összegénél?

204. Az n pozitív egész számot tökéletes számnak nevezzük, ha pozitív osztóinak összege a szám kétszeresével egyenlő. Például 6 tökéletes szám, mert $S(6) = 1+2+3+6 = 12$. Keressünk további tökéletes számokat.

205. Állapítsuk meg, hogy prímszám lehet-e tökéletes szám.

206. Bizonyítsuk be, hogy nincsen $4k+3$ alakú tökéletes szám ($k \in \mathbf{N}$).

207. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a $A = 2^{p-1}(2^p - 1)$, ahol p és $2^p - 1$ prímszám, tökéletes szám.
b) Fogalmazzuk meg az előbbi állítás megfordítását.

208. Bizonyítsuk be, hogy minden páros tökéletes szám 6-ra vagy 8-ra végződik.

***209.** Mutassuk meg, hogy minden 6-nál nagyobb páros tökéletes szám 9-cel osztva 1-et ad maradékul.

***210.** Igazoljuk, hogy egy tökéletes szám osztói reciprokának összege kettő.

211. Figyeljük meg a következő összeadásokat:

a) $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; *b)* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$;

c) $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$; *d)* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6}$;

e) $1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$; *f)* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

Milyen általános tételt lehetne leolvasni ebből?

***212.** Legyen n egy pozitív egész szám, osztói pedig $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{S(n)}{n},$$

ahol $S(n)$ az $n > 0$ egész szám pozitív osztóinak összegét jelenti.

213. Határozzuk meg a 220 és 284 pozitív osztóinak összegét. Milyen érdekességet tapasztalunk? Keressünk további ilyen számpárokat.

214. Határozzuk meg, hogy a 0; 1; 2; ...; 11 számok közül a 12-höz hány relatív prímszám van.

215. Állapítsuk meg, hogy a 0; 1; 2; ...; 24 számok közül a 25-höz hány relatív prímszám van.

216. A pozitív egész számok halmazán értelmezzük azt a φ függvényt, amely bármely $n > 0$ egész számhoz a 0; 1; 2; ...; $n-1$ sorozatból az n-hez relatív prímszámok számát rendeli.
Határozzuk meg mennyi:
a) $\varphi(1)$; *b)* $\varphi(2)$; *c)* $\varphi(18)$; *d)* $\varphi(2^5)$; *e)* $\varphi(3^7)$;
f) $\varphi(7^9)$; *g)* $\varphi(p^{10})$;
h) $\varphi(p^k)$, ahol $p > 0$ prímszám, $k > 0$ egész szám;
i) $\varphi(2^5 \cdot 3^4)$; *j)* $\varphi(3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$.

217. Az előző feladatban értelmezett φ függvényre igaz-e, hogy *a)* $\varphi(2^5 \cdot 3^4) = \varphi(2^5)\varphi(3^4)$; *b)* $\varphi(p_1^{a_1}p_2^{a_2}) = \varphi(p_1^{a_1})\varphi(p_2^{a_2})$? A *b)* feladat állítását hogyan lehetne általánosítani?

218. Számítsuk ki, hogy mennyi *a)* $\varphi(450)$; *b)* $\varphi(650)$; *c)* $\varphi(1986)$ (ahol φ a **216.** feladatban szereplő függvény).

219. Vizsgáljuk meg, hogy milyen $n>0$ egész számokra lesz páros, illetve páratlan a φ függvény értéke.

220. Milyen pozitív egész x számra teljesül, hogy $\varphi(2^x)=128$?

221. Mutassuk meg, hogy ha $n=2^k$, ahol $k>0$ egész szám, akkor $\varphi(n) = \frac{n}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

***222.** Milyen $p, q > 0$ különböző prímszámokra teljesül, hogy $\varphi(p^2q^2) = 2200$?

3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

223. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

a) 36; 96, *b)* 128; 512, *c)* 101; 211, *d)* 567; 1053,
e) 629; 799, *f)* 754; 221, *g)* 840; 1560, *h)* 875; 2625.

224. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis: Két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója

1. kisebb mindkét számnál;
2. kisebb a nagyobbik számnál;
3. osztója a két szám összegének;
4. osztója a két szám különbségének.

225. Tudjuk, hogy b osztója a-nak. Mivel egyenlő *a)* $(a; a+b)$; *b)* $(b; a+b)$; *c)* $(a; a-b)$; *d)* $(b; a-b)$. $a; b \in \mathbf{N}^+$.

226. Határozzuk meg *a)* $(a; a+1)$; *b)* $(a; a+2)$ értékét.

227. Határozzuk meg 5627 és 1986 legnagyobb közös osztóját. Euklidesz a következő algoritmussal számolta ezt ki:

$$5627 = 1986 \cdot 2 + 1655,$$
$$1986 = 1655 \cdot 1 + 331,$$
$$1655 = 331 \cdot 5 + 0.$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nem 0 maradék, azaz 331. Igazoljuk az eljárás helyességét. Igaz-e, hogy

$$(1986; 1655) = (5627; 1986) = (1655; 331)?$$

228. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>b>0$ egész számok, akkor

$$(a; b) = (b; a-b);$$
$$(a; b) = (b; a-2b);$$
$$(a; b) = (b; a-qb);$$
$$(a; b) = (b; r),$$

ahol $a = qb+r$ $q>0$ egész szám, $0 \leqq r < b$, r egész szám.

229. A **228.** feladat alapján igazoljuk az Euklideszi algoritmust.

230. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

a) 438; 126, *b)* 598; 1599, *c)* 1985; 4764,
d) 4096; 4608, *e)* 1512; 1080, *f)* 9713; 737.

231. A **227.** feladatban azt kaptuk, hogy (5627; 1986) = 331. A leírt eljárásból adódott, hogy $1986 = 1 \cdot 1655 + 331$. Ebből

$$1655 =$$

$= 1986 - 331$ és ezt az első egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy $331 = 3 \cdot 1986 - 5627$. A két szám legnagyobb közös osztóját előállítottuk úgy, hogy az adott számokat egy-egy alkalmas egész számmal szorozva összeadtuk. Állítsuk elő ilyen módon a **230.** feladatban kiszámított legnagyobb közös osztókat.

***232.** Bizonyítsuk be, hogy ha $d = (a; b)$, ahol $a, b > 0$ egész számok, akkor $d = ax+by$, ahol x, y egész számok. Azaz bizonyítsuk be, hogy d előállítható az a és b lineáris kombinációjaként.

233. Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{840}{1800}$; *b)* $\frac{535}{1819}$; *c)* $\frac{3857}{6061}$; *d)* $\frac{7395}{9860}$.

234. Két egész számról a következőt tudjuk: legnagyobb közös

osztójuk 15; a legnagyobb közös osztó megkeresésekor az euklideszi algoritmusban 3 osztást végeztünk, ahol hányadosként három egymást követő páros számot kaptunk, amelyeknek az összege 12. Hogyan határozható meg ebből a két szám?

235. Két természetes szám összege 1323, legnagyobb közös osztója 147. Melyek ezek a számok?

236. Keressük meg az $A = 11111111$, $B = \underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ darab 1-es}}$ számok legnagyobb közös osztóját.

237. Legyen a; b két egész szám, melyre $(a; b) = 1$. Határozzuk meg $(a+b; a-b)$-t.

238. Igazoljuk, hogy ha a, b páratlan egész számok, akkor

$$(a; b) = \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}\right).$$

239. Adott a $\frac{3n+2}{4n+1}$ tört, ahol n természetes szám. Határozzuk meg az n értékét úgy, hogy a tört egyszerűsíthető legyen.

240. Van-e olyan $n \in \mathbf{N}$ szám, amelyre a $\frac{2n-5}{3n-7}$ tört egyszerűsíthető?

241. A következő számok közül keressük ki a relatív prímpárokat:

3; 4; 6; 10; 15; 21; 28; 35; 42; 63.

242. Bizonyítsuk be, hogy bármely két egymást követő egész szám relatív prím.

243. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív egész szám, akkor

$$(2^a+1; 2^a-1) = 1.$$

***244.** Mutassuk meg, hogy ha $a, b > 0$ egész szám és a páratlan, akkor

$$(2^a-1; 2^b+1) = 1.$$

245. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív egész szám, akkor

$$(2^{2a}+1; 2^a+1) = 1.$$

246. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a; 4) = 2$ és $(b; 4) = 2$, akkor

$$(a+b; 4) = 4.$$

247. Igazoljuk, hogy nincsen olyan a és b egész szám, amelyekre

$$(a; b) = 7 \quad \text{és} \quad a+b = 100.$$

248. Hány olyan a; b egész számpár létezik, amelyikre

$$(a; b) = 4 \quad \text{és} \quad a+b = 100?$$

249. Határozzuk meg:

a) (12; 24; 40); *b)* (49; 77; 133); *c)* (30; 75; 630);
d) (17; 34; 263); *e)* (187; 323; 391).

250. Írjunk fel három olyan számot, amelyek relatív prímek, de páronként nem relatív prímek.

251. Mutassuk meg, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor $11a+2b$ és $18a+5b$ legnagyobb közös osztója 19 vagy 1.

252. Két természetes szám négyzetének különbsége 2023. Legnagyobb közös osztjójuk 17. Melyik ez a két szám?

253. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek legnagyobb közös osztója 10 és szorzatuk 2400.

254. Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:

a) 16; 28, *b)* 45; 150, *c)* 105; 180,
d) 348; 476 *e)* 475; 570, *f)* 1840; 3400.

255. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:
Két pozitív szám legkisebb közös többszöröse
1. mindkét számnál kisebb;
2. mindkét számnál nagyobb;
3. a nagyobb számnál kisebb;
4. a kisebb számnál nagyobb;
5. a két szám szorzatánál kisebb;
6. a két szám szorzatánál nagyobb.

256. Határozzuk meg a következő számpárok
1. szorzatát;
2. legnagyobb közös osztóját;
3. legkisebb közös többszörösét;

4. legnagyobb közös osztójának és a legkisebb közös többszörösének szorzatát:
a) 9; 12, *b)* 15; 20, *c)* 11; 19, *d)* 128; 1024, *e)* 187; 323, *f)* 1988; 2000. Milyen érdekességet figyelhetünk meg?

257. Egy kikötőben 1988. január 2-án együtt van négy hajó. Tudjuk, hogy az első hajó négyhetenként, a második nyolchetenként, a harmadik 12 hetenként, a negyedik 16 hetenként tér vissza a kikötőbe. Találkoznak-e még 1988-ban mind a négyen ebben a kikötőben?

258. Egy kerékpár nagyobbik fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék újra a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza? (A pedál a nagyobbik fogaskerék tengelyén van.)

259. Egy versenypályán egy irányba egyszerre indul három futó. Az első 1 min 2 s alatt, a második 1 min 3 s, a harmadik 1 min 6 s alatt tesz meg egy kört. Voltak-e az indulás helyén egyszerre, ha a győztes futó 44 min 6 s idővel nyerte a versenyt? (Tételezzük fel, hogy a futók sebessége állandó!)

260. Egy országút egyik oldalát fasor szegélyezi. A fák 12 méterenként állnak. Az út másik oldalán távíróoszlopok sorakoznak, 75 méteres közökben. Egy bizonyos helyen az út két oldalán egymással szemben áll egy oszlop és egy fa. Milyen távolságonként ismétlődik meg ez a találkozás?

261. Egy autóbuszmegállóban 8 óra 20 perckor egyszerre áll egy 17-es és egy 71-es busz. A 17-es 12 percenként, a 71-es 20 percenként közlekedik. Hány órakor lesz ismét egyszerre a megállóban egy 17-es és egy 71-es autóbusz?

262. Két relatív prímszám legkisebb közös többszöröse:
a) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; *b)* $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; *c)* 180; *d)* 256; *e)* 2600.
Mi lehet a két szám?

263. Hány olyan háromjegyű tízes számrendszerbeli természetes szám van, amelyet ha sorban 111-gyel, 222-vel, 333-mal osztunk, ugyanazt a maradékot kapjuk?

264. Bizonyítsuk be, hogy az a, $b>0$ egész számok legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata a két szám szorzatával egyenlő.

265. Milyen x-ekre teljesülnek a következő egyenlőségek?
a) $[123; 126] = x$; *b)* $(899; 1147) = x$;
c) $(945; 1386; 1701) = x$; *d)* $[1188; 1368] = x$;
e) $(x;8) = 80$; *f)* $[x; 16] = 48$;
g) $(x; 60) = 15$; *h)* $(x; 20) = 1$.

266. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számok legkisebb közös többszöröse kifejezhető az a és b számok lineáris kombinációjaként, azaz $ax+by$ alakban, ahol x, y egész számok.

267. Keressünk olyan a, b pozitív egész számokat, amelyeknek legkisebb közös többszöröse az összegükkel egyenlő.

***268.** Határozzuk meg az a és b természetes számokat és a p prímszámot úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$[a; b]+(a; b) = a+b+p.$$

269. Milyen $a, b \in \mathbf{N}$-re teljesül, hogy
a) $(a; b) = 13$ és $[a; b] = 1989$;
b) $a+b = 36$ $(a; b)$ és $[a; b] = 3850$;
c) $(a; b) = 26$ és $[a; b] = 4784$;
d) $a+b = 370$ és $[a; b] = 270 \cdot (a; b)$;
e) $a+b = 98$ és $[a; b] = 720$;
f) $a+b = 667$ és $\dfrac{[a; b]}{(a; b)} = 120$.

270. Határozzuk meg azokat az a, b, $c>0$ egész számokat, amelyekre

$$(a; b; c) = 4 \text{ és } [a; b; c] = 240.$$

271. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, $c>0$ egész számok, akkor

$$\frac{[a; b]+(b; c)}{b} + \frac{[b; c]+(c; a)}{c} + \frac{[c; a]+(a; b)}{a} \geqq 6.$$

272. Melyik az a háromjegyű szám, amelyből ha elveszünk 6-ot, akkor 7-tel osztható számot kapunk, ha 7-et veszünk el belőle, akkor 8-cal osztható, ha pedig 8-at veszünk el belőle, akkor 9-cel osztható számot kapunk?

273. Gábor elfelejtette barátjának hatjegyű telefonszámát. Csak arra emlékezett, hogy 7...2., továbbá hogy a telefonszám páratlan,

és 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel, 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezekből az adatokból meg tudja-e határozni a telefonszámot?

274. Határozzuk meg annak a két legkisebb pozitív számnak a különbségét, amelyiket ha bármelyik $2 \leqq k \leqq 11$ természetes számmal osztunk, 1 maradékot kapunk.

4. Diofantoszi problémák

275. Két természetes szám összege 10. Melyek lehetnek ezek a számok?

276. Határozzuk meg azokat a nemnegatív 3-mal osztható egész számokat, amelyek 7-tel osztva 2 maradékot adnak.

277. Keressük meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek 3-mal osztva 2-t, 5-tel osztva pedig 3-at adnak maradékul.

278. Van-e olyan x, y pozitív egész szám, amelyre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$?

279. A 24 és 36 legnagyobb közös osztóját fejezzük ki ezek lineáris kombinációjaként, azaz $24x+36y$ alakban, ahol x, y egész számok.

280. Az $x^3+y^3+z^3=u^3$ egyenletnek létezik-e olyan megoldása, ahol $x<y<z<u$ egymást követő egész számok?

281. Adjuk meg azokat az x és y egész számokat, amelyekre $x>y>0$ és $x^3+7y=y^3+7x$.

282. Van-e olyan x, y egész szám, amelyre $x^3+6x^2+5x=27y^3+9y^2+9y+1$ egyenlőség teljesül?

283. Van-e olyan x, y egész szám, amelyre
a) $x^2-2xy=1998$; *b)* $x^3=2+3y^2$?

284. Mutassuk meg, hogy nincsen olyan x, y egész szám, amelyre $x^2+y^2=1998$ teljesül.

285. Lehet-e egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának mértékszáma páratlan természetes szám?

286. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynél két oldal mértékszáma páros természetes szám és a harmadik oldal páratlan természetes szám?

287. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög két befogójának mértékszáma nem lehet egyidejűleg páratlan egész szám, ha az átfogó is egész szám.

288. Keressünk olyan egész számokból álló számhármasokat, amelyek derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai lehetnek.

289. Bizonyítsuk be, hogy minden pitagoraszi számhármas valamelyik tagja osztható 5-tel.

290. Bizonyítsuk be, hogy ha $x=2mn$; $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, ahol m; $n>0$ egész számok, akkor $x^2+y^2=z^2$.

291. Határozzuk meg az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet összes pozitív egész megoldását, ahol $(x; y; z)=1$. Az egyenlet megoldásait pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.

292. Határozzuk meg mindazokat a pitagoraszi számhármasokat, amelyeknél a legnagyobb szám nem nagyobb 100-nál.

293. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma egész szám, akkor befogóinak szorzata osztható 12-vel.

294. Vannak-e olyan pitagoraszi számhármasok, amelyek
a) számtani sorozatot; *b)* mértani sorozatot
alkotnak?

295. Bizonyítsuk be, hogy ha 3 egész számra fennáll, hogy $a^2+b^2=c^2$, akkor az abc szorzat osztható 60-nal.

296. Tudjuk, hogy $3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$; $7^2+24^2=25^2$; $9^2+40^2=41^2$. Milyen sejtést olvashatunk ki ezekből a példákból? Keressünk ilyen tulajdonsággal rendelkező további számhármasokat.

297. Határozzuk meg a 84 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok relatív prím számok.

298. Határozzuk meg a 120 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok egész számok.

299. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok, és területe 78 egység?

300. Határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy egész számok és a háromszög kerülete 80 egység.

301. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok és kerülete 88 egység?

302. Bizonyítsuk be, hogy nincsen olyan derékszögű háromszög, amely oldalainak mértékszáma egész szám, és területének mértékszáma megegyezik az átfogó mértékszámával.

303. Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma egész szám. A háromszög kerületének és területének mértékszáma megegyezik. Határozzuk meg az oldalak mértékszámát.

304. $3^2+4^2 = 5^2$; $20^2+21^2 = 29^2$; $119^2+120^2 = 169^2$. Mutassuk meg, hogy ha valamely a és c egész szám eleget tesz az $a^2+(a+1)^2 = c^2$ egyenlőségnek, akkor $(3a+2c+1)^2+(3a+2c+2)^2 = (4a+3c+2)^2$. Így az első három példa alapján további pitagoraszi számhármasokat nyerünk. Keressünk néhányat.

305. Tudjuk, hogy $10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$. Van-e még más olyan számötös, ahol a számok egymást követő egész számok, és 3 szám négyzetének összege megegyezik két szám négyzetének összegével?

306. Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan x, y egész számok, amelyekre $15x^2-7y^2 = 9$ teljesül.

307. Határozzuk meg azokat az x; y; $z>0$ egész számokat, amelyek kielégítik az $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ egyenlőséget.

308. Értelmezzük az f függvényt a pozitív egész számokból alkotott számpárok halmazán a következőképpen: ha a, $b>0$ egész számok, akkor

$$f(a;b) = \begin{cases} [a;b], & \text{ha } a;b \text{ mindkettő páratlan,} \\ & [\ ] \text{ a legkisebb közös többszörös,} \\ (a;b), & \text{ha } a;b \text{ mindkettő páros,} \\ & (\ ) \text{ a legnagyobb közös osztó,} \\ ab, & \text{ha } a;b \text{ különböző paritású.} \end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy az f függvény a 0 kivételével minden természetesszám-értéket felvesz.

b) Keressük meg az összes olyan a, b számpárt, amelyre $f(a;b) = -2a+6b$.

5. Számrendszerek

309. *A* és *B* a következő játékot játssza:
A hat cédulára 1 és 63 közötti egész számokat ír úgy, hogy az elsőre azok a számok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában az egyesek helyén 1 áll. A másodikra azok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában a kettesek helyén 1 áll. A harmadikra azok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában a négyesek helyén 1 áll és így tovább. (Ugyanaz a szám több cédulán is szerepelhet.) Ezután átadja a cédulákat *B*-nek, és felszólítja, hogy válasszon ki egy számot és adja vissza azokat a cédulákat, amelyeken a kiválasztott szám rajta van. *A* rápillantva a visszaadott cédulákra, azonnal megmondja a választott számot.
Hogyan találta ki? Hány cédulára volna szükség, ha 1–500-ig terjedő egész számok közül szeretnénk választani? Játszhatnánk-e ezt más alapú számrendszerben is?

310. Hány jegyű lesz a tízes számrendszerben felírt 3251 a kettes számrendszerben? Négyes számrendszerben? Nyolcas számrendszerben? Írjuk fel.

311. A következő tízes számrendszerbeli számokat írjuk át 2-es, 4-es, 5-ös és 12-es alapú számrendszerbe:
a) 12; *b)* 154; *c)* 236; *d)* 361; *e)* 981;
f) 984; *g)* 425; *h)* 1000; *i)* 675; *j)* 1024.

312. Egy tanuló a 7352 tízes számrendszerbeli számot a következőképpen írta át 6-os alapú számrendszerbe:
7352-t elosztotta 6-tal és feljegyezte a maradékot, majd a hányadost osztotta 6-tal és feljegyezte a maradékot és így tovább, míg 0 hányadost kapott.
A maradékokat fordított sorrendben egymás mellé írta, és ez lett a 7352-nek a 6-os számrendszerbeli alakja.
Helyes volt ez az eljárás? Indokoljuk.

313. Úgy akarjuk megtudni a barátunk telefonszámát, hogy olyan kérdéseket teszünk fel, melyekre ő *igen*nel vagy *nem*mel válaszol. Keressünk módszert arra, hogy a lehető legkevesebb kérdéssel tudjuk meg a telefonszámot. Legfeljebb hány kérdés szükséges ahhoz, hogy a hatjegyű telefonszámot kitaláljuk?

314. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 0$ természetes szám előállítható a 2 különböző nemnegatív egész kitevőjű hatványának összegeként.

315. *a)* Az 1241_5 szám milyen alapú számrendszerben írható 304_x alakban?

b) 41_8 milyen alapú számrendszerben írható 201_x alakban?

c) $57\,896_{10}$ milyen alapú számrendszerben írható $3\,323\,041_x$ alakban?

d) $10\,110\,001_2$ milyen alapú számrendszerben írható 342_x alakban?

316. Írjuk át tízes számrendszerbe a következő, más számrendszerben felírt számokat:

a) 111_3; 1000_3; 1020_3; *b)* 30_{12}; 211_{12}; 1039_{12}; *c)* 123_4; 100_4; 303_4; *d)* 130_{13}; 1112_{13}; 210_{13}.

317. Melyik szám nagyobb: $213\,230_4$ vagy $11\,027_8$?

318. Egy szám hármas számrendszerben 12 112 211 122 211 112 222 alakú. Mennyi ennek a számnak a kilences számrendszerbeli alakjában balról az első számjegy?

319. *a)* Egy számrendszerben $4^2 = 20$. Mennyi ebben a számrendszerben 5^2?

b) Milyen alapú számrendszerben lesz 13_x és 31_x kettőnek egymás után következő hatványa?

320. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $23\,334_6 + 33\,020_6 + 444_6 + 12\,341_6$;

b) $43(10)(11)5_{12} + 3(10)6_{12} + 4(11)25_{12}$ (ahol például $(10)(11)3_{12} = 10 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 3$);

c) $234\,134_7 \cdot 123_7$;

d) $471\,222_8 : 27_8$.

321. Milyen alapú számrendszerben igazak a következő egyenlőségek:

a) $12_x + 13_x = 30_x$; $17_x + 38_x = 54_x$; $89_x + 69_x = 103_x$;

b) $100_x - 1_x = 11_x$;

c) $12_x \cdot 7_x = 80_x$; $6_x \cdot 6_x = 51_x$; $13_x \cdot 22_x = 1012_x$;

d) $55_x : 13_x = 4_x$; $1520_x : 12_x = 123_x$.

322. Hányszorosára nő egy hetes számrendszerben felírt szám értéke, ha a végére egy 0-t írunk; ha két 0-t írunk a végére?

323. Végezzük el a következő osztásokat:

a) $98\,765\,432_{10} : 8_{10}$; *b)* $8\,765\,432_9 : 7_9$; *c)* $5432_6 : 4_6$;

d) $(g-1)(g-2)(g-3)\ldots432_g : (g-2)_g$, ahol $(g-1)(g-2)(g-3)\ldots$ $\ldots432$ g alapú számrendszerben felírt számot jelent.

324. Bizonyítsuk be, hogy 144_g tetszőleges 4-nél nagyobb g alapú számrendszerben teljes négyzet.

325. Igaz-e, hogy 1331_n tetszőleges $n > 3$ alapú számrendszerben teljes köb?

326. Milyen alapú számrendszerben igaz az, hogy ha 4616-ot elosztjuk 66-tal a hányados 55 és a maradék 20?

327. Igaz-e, hogy minden számrendszerben az alapot megelőző szám kétszeresét és négyzetét ugyanazon számjegyekkel, de fordított sorrendben írjuk? Észrevesszük, hogy $2 \cdot 9 = 18$ és $9^2 = 81$ a tízes számrendszerben.

328. Milyen alapú számrendszerben érvényes a következő szorzás? A * helyén álló számjegyeket határozzuk meg!

$$\begin{array}{r} **2 \cdot *2 \\ \hline **0* \\ ***1 \\ \hline ****1 \end{array}$$

329. A 8-as alapú számrendszerben egy szám négyzetét írtuk fel. (Különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.)

$$\begin{array}{r} ABC \cdot ABC \\ \hline B*D \\ E**C \\ A**D \\ \hline ***** \end{array}$$

Melyik ez a szám?

330. Írjuk fel tízes számrendszerben az

a) kettes számrendszerbeli 0,101; 0,1101101; 11,11; 1011,001 kettedestörteket;

b) hármas számrendszerbeli 2,21; 11,11; 101,201; 22,01 harmadostörteket.

331. Melyik az a legkisebb g alapú számrendszer, amelyben véges „g-edes"-törtekben írható fel $\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{36}; \frac{1}{25}$?

332. Írjuk fel két egész szám hányadosaként

a) a kettes számrendszerben írt $0,\dot{1}$; $0,0\dot{1}$; $0,10\dot{1}$; $0,110\dot{1}$ végtelen kettedestörteket;

b) a hármas számrendszerben felírt $0,\dot{2}$; $0,0\dot{2}$; $0,1\dot{2}$; $0,12\dot{1}$ végtelen harmadostörteket.

333. $A = 0,101\,001\,000\,1\ldots$ kettes számrendszerbeli nem szakaszos kettedestört. Lehet-e a tízes számrendszerbeli felírása szakaszos?

334. Pontosan hány 0-val kezdődik az $\frac{1}{a}$ racionális szám ($a = 1, 2, 3\ldots$) kettedestörtjének törtrésze?

335. Válasszuk ki a következő törtek közül melyiknek lesz véges, melyiknek végtelen szakaszos

1. kettedes-;
2. harmadostört alakja:

a) $\frac{3}{8}; \frac{7}{16}; 1\frac{5}{8}; 7\frac{3}{4}; \frac{15}{32}; \frac{2}{9}; \frac{5}{27}; \frac{4}{81}; 6\frac{2}{9}; 19\frac{5}{27}$;

b) $\frac{1}{6}; \frac{2}{15}; \frac{3}{10}; \frac{7}{18}; 2\frac{5}{8}; 3\frac{1}{6}; \frac{6}{35}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; 5\frac{1}{14}$.

Lesz-e közöttük végtelen nem szakaszos, kettedes- vagy harmadostört?

336. Határozzuk meg a $\overline{0,abcd}$ 6-os számrendszerbeli törtet, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $\frac{8993}{31\,671}$.

337. Keressük meg a következő feladatokban a g, f számrendszer-alapszámokat úgy, hogy az egyenlőségek teljesüljenek:

a) $1,3_g = 1,6_f$; *b)* $10,11_g = 2,3_f$; *c)* $101,01_g = 11,1_f$.

***338.** Írjuk fel tizedestört alakban $\frac{1}{9^2}$-t, nyolcadostört alakban $\frac{1}{7^2}$-t, hetedestört alakban $\frac{1}{6^2}$-t. Milyen érdekességet figyelhetünk meg? Bizonyítsuk a sejtésünket.

339. Milyen alapú számrendszerben lesznek a következő számok prímszámok:

a) $10\,201_g$; *b)* $10\,101_g$; *c)* 111_g; *d)* $11\,312_g$?

340. Bizonyítsuk be, hogy $g > 1$ természetes szám esetén $N = 10\,101_g$ szám páratlan összetett szám. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

341. Bizonyítsuk be, hogy a 6-os alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha utolsó jegye 0, 2 vagy 4; akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha utolsó jegye 0 vagy 3. A tízes alapú számrendszerben milyen számokkal való oszthatósági szabály felel meg ennek? Hogyan lehetne általánosítani a szabályt tetszőleges g alapú számrendszerre?

342. Bizonyítsuk be, hogy a 13-as alapú számrendszerben *azok és csak azok* a számok oszthatók 12-vel, amelyeknél a számjegyek összege osztható 12-vel.

343. Bizonyítsuk be, hogy a 13-as alapú számrendszerben *azok és csak azok* a számok oszthatók 3-mal, illetve 4-gyel, amelyeknél a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 4-gyel.

344. Keressük meg azokat a számrendszereket, amelyekben tetszőleges egész szám a-val való oszthatóságának feltétele a számjegyek összegének a-val való oszthatósága ($a > 1$ egész szám).

345. Mekkora a maradék, ha a 15-ös számrendszerben felírt

$$123456789(10)\,(11)\,(12)\,(13)\,(14)$$

(lásd **320.** *b)* feladatot) számot 7-tel osztjuk?

346. A 9-es alapú számrendszerben felírt $N = 34\,780\,160_g$ szám osztható-e 27-tel? Hogyan lehetne megfogalmazni a 9-es számrendszerben a 27-tel való oszthatóság szabályát?

347. Milyen g alapú számrendszerben érvényes a következő oszthatósági szabály: egy szám akkor és csak akkor osztható a-val, ha a szám utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható a-val?

348. Határozzuk meg azt a legkisebb alapú számrendszert, amelyben a következő oszthatósági szabályok egyszerre teljesülnek:

1. Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 5-tel, akkor a szám is osztható 5-tel.

2. Ha egy szám utolsó két jegyéből képzett kétjegyű szám osztható 7-tel, akkor a szám maga is osztható 7-tel.

349. A következő (különböző alapú számrendszerben felírt) számok hiányzó jegyeit pótoljuk úgy, hogy

a) $2465._8$ osztható 7-tel és 4-gyel;
b) $1827._9$ osztható 8-cal és 3-mal;
c) $24.3._6$ osztható 5-tel és 2-vel;
d) $25.6._8$ osztható 7-tel és 4-gyel;
e) $392.._{12}$ osztható 11-gyel és 3-mal;
f) $45.31._6$ osztható 15-tel;
g) $35.2._6$ osztható 10-zel;
h) $47.3._8$ osztható 14-gyel;
i) $5.34._9$ osztható 12-vel;
j) $1..3._5$ osztható 20-szal.

350. Van-e olyan g alapú számrendszer, amelyben 45_g és 55_g egymást követő egész számok?

351. A nyolcas számrendszerben egy teljes négyzet $\overline{ab3c}$ alakú, ahol $a \neq 0$. Határozzuk meg, hogy milyen szám lehet a c?

352. Bizonyítsuk be, hogy bármely $g > 3$ természetes szám esetén az $N = 1320_g$ szám osztható 6-tal.

353. Határozzuk meg a számrendszer g alapszámát, ha $A = 1111_g$ szám osztható 5-tel.

354. Határozzuk meg azt az $\overline{acb}$ 9-es alapú számrendszerben felírt háromjegyű számot, amely a 7-es számrendszerben felírva $\overline{bca}$ alakú.

355. *a)* Igaz-e, hogy az $A = 231\,504_7$ szám osztható 24-gyel?
b) Milyen g alapú számrendszerben lesz 111_g osztója $10\,101_g$-nek?

356. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan alapú számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan jegyet tartalmaz.

357. Egy szám a tízes alapú számrendszerben $\overline{aaaa}$ alakú. Egy más alapú számrendszerben $\overline{a(3a)(4a)(2a)a}$ alakú. Melyik ez a szám?

358. Határozzuk meg x, a, b értékét úgy, hogy fennálljon a

$$234_x + 456_{x-1} = \overline{4ab}_{10}$$

egyenlőség (x a számrendszer alapszáma, a és b tízes számrendszerbeli számjegyek).

***359.** Egy számrendszer alapszáma kétjegyű szám. Melyik az a tízes számrendszerbeli szám, amely a szóban forgó számrendszerben 1234 alakban írható, ha tudjuk, hogy a keresett szám osztható 35-tel?

360. Egy ötjegyű, tízes számrendszerben felírt páratlan négyzetszámban a páros, valamint a páratlan helyen álló számjegyek összege külön-külön 9. A négyzetszám alapja a nyolcas számrendszerben olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 14. Melyik ez a négyzetszám?

***361.** Milyen alapú számrendszerben lehet egyenlő egy háromjegyű szám a számjegyek fordított sorrendbe írásával keletkező szám kétszeresével?

362. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzetszámok

a) 2-es; *b)* 3-as; *c)* 4-es;
d) 5-ös; *e)* 8-as; *f)* 12-es; *g)* 16-os

alapú számrendszerben milyen számjegyre végződnek.

***363.** Bizonyítsuk be, hogy csak a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 8-as, 12-es és 16-os alapú számrendszerek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az ezekben felírt négyzetszámok utolsó számjegye szintén négyzetszám.

***364.** Adottak a következő 6-os számrendszerben felírt végtelen szakaszos hatodostörtek:

$$A_1 = 0{,}0\dot{2}_6;$$
$$A_2 = 0{,}0\dot{0}\dot{2}_6;$$
$$A_3 = 0{,}0\dot{0}\dot{0}\dot{2}_6;$$
$$A_n = 0{,}\underbrace{0\dot{0}\ldots\dot{0}}_{(n-1)\text{ darab }0}\dot{2}_6.$$

Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben írt

$B = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \ldots + \frac{1}{A_n}$ szám osztható 5-tel.

6. Racionális számok

365. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-7$;

b) $7\frac{5}{8}+4\frac{7}{12}+5\frac{5}{21}+\frac{3}{7}+\frac{5}{12}+1\frac{3}{8}$;

c) $6\frac{4}{9}+7\frac{8}{25}+1\frac{11}{36}+3\frac{3}{100}$;

d) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{14}{25}\cdot\frac{12}{49}\cdot 12\frac{1}{2}$;

e) $\frac{8}{21}+1\frac{1}{3}\cdot\left(29\frac{11}{48}-25\frac{19}{42}\right)$;

f) $49:\left(1\frac{2}{7}+1\frac{1}{21}\right)$;

g) $\left(6\frac{1}{3}-7{,}5\right):1{,}4$;

h) $16{,}92:\left(3\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)$;

i) $\left(2\frac{3}{7}-3\frac{1}{3}\right)-1\frac{1}{3}\cdot 2$;

j) $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{16}}$;

k) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$;

l) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$.

366. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{5}{72\cdot 77}$;

b) $\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 17}+\ldots+\frac{4}{81\cdot 85}$.

367. Hogyan változik az 1-nél nagyobb tört értéke, ha a számlálójához és a nevezőjéhez ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk?

368. Hogyan változik az 1-nél kisebb tört értéke, ha a számlálójához és a nevezőjéhez ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk?

369. Igaz-e, hogy ha egy 1-nél kisebb tört nem egyszerűsíthető, akkor azt a törtet sem lehet egyszerűsíteni, amelyet úgy kapunk, hogy ezt a törtet 1-ből kivonjuk?

370. Legyen $n>2$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ páros számú nem egyszerűsíthető törtet tartalmaz.

371. Állapítsuk meg az a, b számjegyeket úgy, hogy $\frac{\overline{9a7b}}{24}$ tört egyszerűsíthető legyen. Hány ilyen törtet kapunk?

372. Írjuk fel normálalakban a következő számokat:

a) a Föld tömege; *b)* a Nap tömege; *c)* 345628,398;
d) 0,0000023907; *e)* az elektron töltése *f)* 456,92606;
g) 0,00065000067; *h)* 23478,234; *i)* 56,43
j) 8,00061.

373. A következő racionális számok közül melyik nagyobb:

a) 17,586631 vagy 17,586817; *b)* −2,37561 vagy −2,37571;
c) −0,786 vagy 0,687; *d)* 0,244444444 vagy 0,244.

374. Tudjuk, hogy a $\frac{381}{\overline{5x}}$ és $\frac{565}{\overline{8y}}$ (ahol $\overline{5x}$ és $\overline{8y}$ tízes számrendszerben felírt kétjegyű számok) törtek egyszerűsíthetők és nem nagyobbak 7-nél. Melyik nagyobb a két tört közül?

375. Rendezzük nagyság szerinti sorrendbe a következő racionális számokat:

a) $\frac{7}{3}; \frac{23}{30}; -\frac{3}{7}; -\frac{29}{11}$;
b) $\frac{17}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{7}{5}; 0; \frac{36}{11}; \frac{29}{15}$.

376. A számegyenesen ábrázoljuk a következő számokat:

a) $-2{,}5; -\frac{4}{3}; -1; 0; \frac{4}{3}; 2{,}5$;
b) $\frac{5}{7}; \frac{71}{21}; -\frac{41}{21}; 2; -1{,}5; \frac{7}{2}$.

Van-e közöttük két olyan, amelyiknek távolsága 5; 3,5; $2\frac{2}{3}$?

377. Melyek azok az a racionális számok, amelyeknek a számegyenesen

a) -1-től való távolsága 3,5-nél kisebb;

b) a 2-től való távolsága nagyobb, mint $\frac{1}{100}$;

c) a 15-től való távolsága kisebb, mint $\frac{1}{10}$?

Ábrázoljunk néhányat a számegyenesen.

378. Milyen n pozitív egész szám esetén lesz az $\frac{1}{n}$ számnak a 0-tól való eltérése $\frac{1}{100}$-nál kisebb?

379. Határozzuk meg az $n>0$ egész számot úgy, hogy a $\frac{2n-1}{n}$ számnak a 2-től való eltérése $\frac{1}{100}$-nál kevesebb legyen.

380. Adjunk meg néhány olyan racionális számot, amelyik

a) -1 és 1; *b)* $-\frac{1}{3}$ és $2\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{1}{2}$ és 1; *d)* $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$;

e) $\frac{1}{8}$ és $\frac{1}{4}$; *f)* $\frac{1}{100}$ és $\frac{1}{10}$

közé esik.

381. Lehet-e a $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ közé 10 darab racionális számot írni? Lehet-e 10-nél több racionális számot közéjük írni? Keressünk eljárást, amelynek segítségével akárhány racionális számot közéjük tudunk írni.

382. Van-e a számegyenesen olyan szakasz, amelynek minden pontja racionális számot szemléltet?

383. Jelöljünk meg a számegyenesen egy

a) a egész számot

b) $\frac{a}{b}$ törtszámot (a, b egész számok).

Van-e a számegyenesen a után következő első racionális szám? És $\frac{a}{b}$ után következő első racionális szám?

384. Van-e legkisebb pozitív racionális szám? Van-e legkisebb nemnegatív racionális szám? Van-e legnagyobb racionális szám?

385. Bővítsük a következő törteket úgy, hogy nevezőjük 10 hatvány legyen:

a) $\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{4}{30}$; *c)* $\frac{7}{20}$; *d)* $\frac{9}{25}$; *e)* $\frac{3}{8}$;

f) $\frac{11}{125}$; *g)* $\frac{5}{128}$; *h)* $\frac{7}{30}$; *i)* $\frac{8}{15}$; *j)* $\frac{6}{7}$.

386. Válasszuk ki a következő racionális számok közül amelyek véges, amelyek tiszta szakaszos vagy vegyes szakaszos tizedestört alakúak:

a) $\frac{5}{18}$; *b)* $\frac{7}{20}$; *c)* $\frac{5841}{3200}$ *d)* $\frac{428}{625}$ *e)* $\frac{9}{200}$;

f) $\frac{89}{1024}$; *g)* $\frac{1}{12}$; *h)* $\frac{1}{7}$; *i)* $\frac{210}{729}$; *j)* $\frac{71}{294}$.

387. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

Az $\frac{a}{b}$ ($a; b \in \mathbf{Z}$, $(a; b) = 1$) véges tizedestört.

1. Akkor és csak akkor, ha b-nek csak 2-es prímtényezője van.
2. Csak akkor, ha b 2-n kívül más prímszámmal nem osztható.
3. Ha b 2-n kívül más prímszámmal nem osztható.
4. Akkor és csak akkor, ha 3 nem osztója b-nek.
5. Ha 3 nem osztója b-nek.
6. Csak akkor, ha 3 nem osztója b-nek.
7. Akkor és csak akkor, ha b-nek 2-n *vagy* 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.
8. Ha b-nek 2-n és 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.
9. Csak ha b-nek 2-n és 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.

Az állításunkat indokoljuk.

388. Meseországban a táblás csokoládét úgy árulják, hogy a csokoládé mellé egy szelvényt is csomagolnak, és 10 összegyűjtött

szelvény egy újabb tábla csokoládét ér. Teljes csomagolásban menynyit ér valójában egy ilyen tábla csokoládé?

389. Írjuk fel a következő szakaszos tizedestörteket végtelen mértani sor alakban:

a) $0,\dot{3}$; *b)* $0,\dot{6}$; *c)* $0,\dot{9}$; *d)* $0,\dot{3}\dot{5}$; *e)* $0,\dot{1}\dot{3}\dot{4}$; *f)* $9,62\dot{4}$.

390. Írjuk fel két egész szám hányadosaként;

a) 0,12; *b)* 0,00298; *c)* 0,035; *d)* 0,1263; *e)* $1,\dot{2}\dot{4}$

f) $15,13\dot{8}$.

391. Igazoljuk, hogy a $0,\dot{a}_1\ldots\dot{a}_k$ tiszta szakaszos tizedestört (a szakasz k jegyből áll) a következő alakú: $\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k-1}$. $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ k-jegyű számot jelent.

392. Igazoljuk, hogy a $0, b_1\ldots b_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_k$ vegyes szakaszos tizedestört $\frac{b\cdot 10^k+a-b}{10^n(10^k-1)}$ alakú, ahol $b = \overline{b_1\ldots b_n}$ n-jegyű tízes számrendszerbeli szám, $a = \overline{a_1\ldots a_k}$ k-jegyű tízes számrendszerbeli szám.

393. Írjuk fel az összes $\frac{a}{b}$ számot $((a; b) = 1)$ amelynek tizedestört alakja *a)* $0, \dot{x}\ldots$; *b)* $0, x\dot{y}\ldots$ alakú. (x; y számjegyek.)

394. Mutassuk meg, hogy ha x, y racionális számok és $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 1$, akkor $\sqrt[3]{x}$ és $\sqrt[3]{y}$ is racionális számok.

395. Egy derékszögű háromszög területének mérőszáma racionális szám. A következő állítások közül lehet-e mindegyik igaz?

1. Mind a három oldal mérőszáma racionális.
2. Két oldal mérőszáma racionális.
3. Egy oldal mérőszáma racionális.
4. Nincsen olyan oldal, amelynek mérőszáma racionális.

396. Mutassuk meg, hogy ha $\cos\alpha = \frac{p}{q}$ ahol $p; q \neq 0$ egész számok, akkor $q^n \cos n\alpha$ (n pozitív egész szám) egész szám.

***397.** Ha a és b egész számok, akkor $\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$ csak véges sok pozitív egész n-re lehet egész szám. Bizonyítsuk be.

398. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Miért?

1. Ha az a, b racionális számok összege egész szám, akkor a is és b is egész szám.
2. Ha az a, b racionális számok szorzata egész szám, akkor a is és b is egész szám.
3. Ha az a, b racionális számok $a-b$ különbsége egész szám, akkor a is és b is egész szám.
4. Ha az a racionális szám négyzete egész szám, akkor a is egész.
5. Ha a b racionális szám, akkor b^2 is racionális szám.

*6. Ha az a és b racionális számok összege és szorzata egész szám, akkor a is és b is egész.

399. Bizonyítsuk be, hogy 3-nak nincsen olyan racionális kitevőjű hatványa, amely egyenlő lenne 5-tel.

400. Legyen $p, q>0$ egész szám olyan, hogy egyszerre teljesüljön a következő két feltétel:

$$90 < p+q < 100; \qquad 0,9 < \frac{p}{q} < 0,91.$$

Határozzuk meg a p, q számokat. Hány megoldást kaptunk?

401. Bizonyítsuk be, hogy az a szám akkor és csak akkor racionális, ha létezik olyan pozitív k egész szám, hogy $[ka] = ka$. (A [ ] egészrészt jelent.)

402. Mutassuk meg, hogy az $\frac{n+2}{2}$; $\frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2}$; $\frac{n+1}{n}$ (ahol $n>0$ egész szám) törtek szorzata természetes szám.

403. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2n^2-1}$, ahol $n>0$ egész szám, nem írható fel véges tizedestört alakban.

***404.** Legyenek a és c pozitív egész számok és b egy számjegy a tízes számrendszerben. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c számhármast, amelyre egyszerre teljesülnek a következő feltételek: $(\overline{a, bbb\ldots})^2 = \overline{c, 7}\ldots$ ($\overline{a, \dot{b}\ldots}$ és $\overline{c, 7}$ végtelen tizedestörtek) és $\frac{c+a}{c-a}$ egész szám.

405. Az összes természetes szám egymás után írásával keletkező szám (0,123456789101112...) lehet-e szakaszos tizedestört?

7. Irracionális számok

406. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{17}$; *d)* $\sqrt{101}$; *e)* $\sqrt{120}$; *f)* $\sqrt{a}$, ahol $a>0$ egész és nem négyzetszám, irracionális számok.

407. Mutassuk meg, hogy

a) $\sqrt[3]{72}$; *b)* $\sqrt[5]{4}$; *c)* $\sqrt[6]{2}$; *d)* $\sqrt[4]{32}$; *e)* $\sqrt[10]{10}$ irracionális számok.

408. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\sqrt[k]{a}$ szám nem k-adik hatványa egy természetes számnak, akkor a irracionális szám.

***409.** Igaz-e, hogy $\sqrt{a^2+1}$ irracionális szám, bármely $a>0$ egész szám esetén?

410. Mutassuk meg, hogy

a) $\log_2 3$; *b)* $\log_5 10$; *c)* $\log_8 32$; *d)* $\lg 12$ irracionális szám.

411. Mutassuk meg, hogy $\lg(2^k5^k)$ nem irracionális ($k\geqq 0$ egész).

412. Mutassuk meg, hogy ha k és l két különböző nemnegatív egész szám, akkor $\lg(2^k5^l)$ irracionális szám.

413. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ irracionális szám.

***414.** Igaz-e, hogy $\sin 10°$ nem racionális szám?

***415.** Bizonyítsuk be, hogy $\cos 20°$ irracionális szám.

416. Igazoljuk, hogy ha $\sin 3\alpha$ irracionális szám, akkor $\sin\alpha$ is irracionális szám.

417. Igaz-e, hogy

a) ha $\cos\alpha$ racionális szám, akkor $\cos 3\alpha$ is racionális szám;

b) ha $\cos 3\alpha$ irracionális szám, akkor $\cos\alpha$ is irracionális szám?

418. Bizonyítsuk be, hogy a $\cos\frac{\pi}{2^n}$, $(n\geqq 2)$ irracionális szám.

419. Négyzetes pontrácson tudunk-e olyan egyenest rajzolni, amely egyetlen rácsponton megy át?

420. Melyik a legkisebb pozitív szám a következő számok közül:

a) $10-3\sqrt{11}$; *b)* $3\sqrt{11}-10$; *c)* $18-5\sqrt{13}$;

d) $51-10\sqrt{26}$; *e)* $10\sqrt{26}-51$.

421. Állapítsuk meg, hogy a következő számok közül melyek irracionálisak, melyek racionálisak:

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-5)}{2}}$;

d) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$;

e) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

f) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

422. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. Két irracionális szám összege irracionális szám.
2. Két irracionális szám különbsége irracionális szám.
3. Két irracionális szám szorzata irracionális szám.
4. Van olyan irracionális és racionális szám, melyek összege racionális.
5. Van olyan irracionális és racionális szám, amelyek szorzata racionális.
6. Egy irracionális és egy nem 0 racionális szám hányadosa irracionális.
7. Van olyan irracionális és racionális szám, amelyek különbsége irracionális.

423. Mutassuk meg, hogy ha u és v két olyan irracionális szám, amelyre $u+v$ racionális szám, akkor $u-v$ és $u+2v$ irracionális.

424. Van-e a számegyenesnek olyan szakasza, amelynek minden pontja irracionális számot szemléltet?

425. Állapítsuk meg, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. Bármely két irracionális szám között van racionális szám.
2. Bármely két irracionális szám között van irracionális szám.
3. Van 10 után következő első irracionális szám.
4. Van legkisebb pozitív irracionális szám.
5. Van legnagyobb irracionális szám.

426. Szerkesszük meg a számegyenesen a $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ helyét.

427. Hány olyan egész szám van, amelynek a

a) $\sqrt{3}$-tól; *b)* $\sqrt{10}$-től; *c)* $\sqrt{26}$-tól; *d)* $\sqrt{125}$-től; *e)* $-\sqrt{330}$-tól való eltérése abszolútértékben $\frac{1}{2}$-nél kisebb? Határozzuk meg mindegyik esetben az egész számot.

428. Igaz-e, hogy bármely v irracionális számhoz egyetlen olyan k egész szám található, amelyre $|v-k| < \frac{1}{2}$?

429. Írjunk fel olyan racionális számokat, amelyeknek a $\sqrt{2}$-től való eltérése

a) $\frac{1}{10}$-nél; *b)* $\frac{1}{100}$-nál; *c)* $\frac{1}{10^5}$-nél;

d) $\frac{1}{20}$-nál; *e)* $\frac{1}{200}$-nál; *f)* $\frac{1}{2\cdot 10^5}$-nél kevesebb.

430. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ (p, q egész számok) alakú racionális számokat, amelyeknek a $\sqrt{2}$-től való eltérése $\frac{1}{2q}$-nál kisebb. Legyen $q=1; 5; 6; 7; 8$.

***431.** Bizonyítsuk be, hogy az u irracionális számhoz található olyan $\frac{p}{q}$ racionális szám, hogy $\left|u-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$.

432. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ racionális számot, amelynek

a) $\sqrt{3}$-tól; *b)* $\pi=3{,}1415928$-tól

való eltérése $\frac{1}{2q}$-nál kisebb, ahol $q=1; 5; 6; 9; 10$.

433. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ racionális számot, amelynek

a) $\sqrt{2}$-től; *b)* $\sqrt{3}$-tól; *c)* π-től

való eltérése $\frac{1}{q}$-nál kisebb. $q=15; 25; 75$.

434. Bizonyítsuk be, hogy az u irracionális számhoz található olyan $\frac{p}{q}$ racionális szám, amelyre

$$\left|u-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}.$$

***435.** Mutassuk meg, hogy a $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; \ldots; 10\sqrt{3}$ számok között van legalább egy olyan, amely valamelyik egész számtól $\frac{1}{10}$-nél kevesebbel különbözik.

***436.** Mutassuk meg, hogy az e; $2e$; $3e$; …; $1000e$ számok között van legalább egy olyan, amely valamelyik egész számtól $\frac{1}{100}$-nál kevesebbel tér el ($e=2{,}71\ldots$ irracionális szám). Milyen számot írhatnánk még az e helyébe?

437. Ábrázoljuk gondolatban a számegyenesen azokat a racionális számokat, amelyek a $\sqrt{2}$-t alulról és felülről

$$\frac{1}{10}\text{-nél; } \frac{1}{100}\text{-nál; } \frac{1}{1000}\text{-nél}$$

kisebb hibával közelítik meg. Milyen intervallumokat kaptunk? Ha tovább folytatnánk a közelítő racionális számok felírását, mit mondhatnánk az intervallumokról és azok hosszáról?

438. Ábrázoljuk a számegyenesen az

$$A_n = \frac{2n-1}{n}; \quad B_n = \frac{2n+1}{n} \text{ (ahol } n \geqq 1 \text{ egész szám)}$$

számok közül néhányat. Igaz-e, hogy az $[A_i; B_i] \subset [A_k; B_k]$-nak? Tetszőlegesen megadva egy pozitív számot, van-e ennél kisebb hosszúságú $[A_m; B_m]$ intervallum? Van-e olyan szám, és hány, amelyik mindegyik $[A_k; B_k]$ intervallumban benne van?

439. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{és} \quad B_n = A_n + \frac{1}{n}$$

számok a számegyenes egymásba skatulyázott intervallumainak végpontjai és az intervallumok hossza 0-hoz tart. Melyik valós számot határozhatjuk meg így?

***440.** Mutassuk meg, hogy

$$[2;4];\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{3}{2}\right)^3\right];\ldots;\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right] \qquad n=1,2,3\ldots$$

intervallumsorozat a számegyenesen egyetlen valós számot határoz meg.

441. Három tizedesjegy pontossággal $\lg 2=0{,}301$ és $\lg 3=0{,}477$. Ennek alapján határozzuk meg, hogy

a) $\frac{8}{7}$; *b)* $\frac{9}{7}$; *c)* $\frac{10}{7}$; *d)* $\frac{11}{7}$; *e)* $\frac{12}{7}$

számok közül melyik közelíti meg legjobban $\log_5 10$ értékét.

442. Melyik az a legkisebb pozitív n egész szám, amelyre $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01$?

443. Bizonyítsuk be, hogy $[(\sqrt{2}+1)^n]$, ahol $n\in\mathbf{N}$ szám, felváltva páros vagy páratlan ([ ] a szám egészrészét jelöli).

444. Mutassuk meg, hogy a $(7+\sqrt{50})^3$ szám tizedestört alakjában a tizedesvessző után három 0 áll.

***445.** Milyen számjegy áll az

$$A=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$$

szám tízes számrendszerbeli alakjában az egyesek helyén?

446. Bizonyítsuk be, hogy n darab valós számból kiválasztható néhány úgy, hogy a kiválasztottak összege valamely egész számtól $\frac{1}{n+1}$-nél kevesebbel tér el.

8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány feladat

447. A valós számok halmazában legyen a szokásos két művelet az összeadás és szorzás, továbbá definiáljuk a $*$ műveletet a következőképpen: $a*b=ab-2(a+b)+6$.

a) Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet kommutatív, asszociatív és létezik olyan α, illetve $e\in\mathbf{R}$, hogy bármely valós a szám esetén $a*\alpha=\alpha*a=\alpha$ továbbá $a*e=a$.

b) Az a valós számhoz határozzunk meg olyan p elemet, amelyre $a*p=e$.

448. A valós számok halmazában legyen a szokásos négy alapművelet, továbbá definiáljuk az alábbi műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a definiált műveletek kommutatívok, asszociatívok-e?

a) $a\circ b=2a-b+ab$; *b)* $a*b=ab-2a-2b+5$;

c) $a\circledcirc b=|b-a|$; *d)* $a\otimes b=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$;

e) $a\boxdot b=\frac{a}{b}+1$; $b\neq 0$.

449. Definiáljuk a valós számok halmazában a következő műveletet $a\circ b=(a+1)(b+1)-1$. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. $a\circ b=b\circ a$ minden valós a, b-re.
2. $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)+(a\circ c)$ minden valós a, b, c-re.
3. $(a-1)\circ(a+1)=(a\circ a)-1$ minden valós a-ra.
4. $a\circ 0=a$ minden valós a-ra.
5. $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ minden valós a, b, c-re.

450. A valós számok halmazában értelmezhető-e olyan $*$ művelet, melyre igaz a következő két tulajdonság:

1. Bármely valós a számra és 0-ra $a*0=a^2$.
2. Bármely valós a, b, c esetén $(a+c)*(b+c)=a*b$, ahol a „+” jelenti a valós számok halmazában az összeadást.

451. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x\circ y=a(x+y)-xy$ művelet

kommutatív, asszociatív legyen, továbbá legyen olyan e szám, hogy $x \circ e = x$ teljesüljön.

452. A pozitív valós számok halmazán értelmezzük a $*$ -gal jelölt műveletet a következőképpen: $a * b = \frac{a^2+b}{a+b^2}$ ahol „+" az összeadást, a törtvonal az osztást jelenti. Kommutatív, asszociatív-e ez a művelet? Keressük meg az $a * x = b * b$; $b * x = a * a$ egyenletek x_1, x_2, illetve x_3, x_4 gyökeit. Igazoljuk, hogy fennáll ezekre a gyökökre az $x_1 * x_2 = x_3 * x_4 = 1$.

453. Legyen d pozitív valós szám, és tekintsük a d-nél kisebb nemnegatív valós számok L halmazát. Az L halmazban definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen: bármely $x, y \in L$-re $x * y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{d^2}}$. Vizsgáljuk meg, hogy

a) $x * y$ eleme-e L-nek;
b) asszociatív-e a művelet;
c) igaz-e, hogy $x * y_1 = x * y_2$-ből $y_1 = y_2$ és $x_1 * y = x_2 * y$-ból $x_1 = x_2$ következik?

454. Legyen a, b tetszőleges racionális szám. Tekintsük az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok M halmazát.

a) Mutassuk meg, hogy bármely két M-beli szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa is eleme M-nek.

b) Jelöljük K-val azon számok halmazát, amelyek $u + v\sqrt{3}$ alakúak, ahol $u, v \in M$-nek. Igaz-e, hogy a K-beli elemek összege, különbsége, szorzata, hányadosa szintén eleme K-nak?

c) A K halmaz bővebb-e, mint az M halmaz?

d) A következő számok benne vannak-e M-ben: 18; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{2}$?

9. Komplex számok

A komplex szám fogalma, ábrázolása

455. Végezzük el a következő négyzetgyökvonásokat:

a) $\sqrt{-25}$; *b)* $\sqrt{-9}$; *c)* $\sqrt{-\frac{16}{49}}$; *d)* $\sqrt{-5\frac{1}{16}}$.

456. Az x milyen értékeire képzetesek a következő kifejezések?

a) $\sqrt{5-x}$; *b)* $\sqrt{2x+8}$; *c)* $\sqrt{1-\frac{x}{3}}$; *d)* $\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{x}{2}}$.

457. Határozzuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$$

egyenlőség fennálljon.

458. A komplex számok egyenlőségének feltétele alapján határozzuk meg az x és y valós számokat, ha

a) $2+ix-3iy = 14i+3x-5y$;

b) $\frac{8i}{x}+iy-2 = 7i-\frac{10}{x}+y$;

c) $aix+biy-a = i-a^2x-b^2y$, ha $a \neq b$, és $a \neq 0$.

459. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő komplex számokat:

a) i; *b)* $-i$; *c)* $1+i$; *d)* $1-i$; *e)* $2-i$;
f) $1+2i$; *g)* $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; *h)* $\frac{3}{4}-2i$; *i)* $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

460. Határozzuk meg a c, d valós számokat úgy, hogy teljesüljön:

a) $c+di = 10-3i$; *b)* $2c+di = 3-2i$; *c)* $\frac{1}{2}c+3di = 1$;

d) $\frac{1}{3}c-5di = 2i$; *e)* $2+(5c-3d)i = 3c-5d+14i$.

461. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő másodfokú egyenleteket, és ábrázoljuk a gyököket a komplex számsíkon.

a) $x^2-2x+10=0$; *b)* $x^2-4x+29=0$;
c) $x^2-6x+25=0$; *d)* $x^2+121=0$.

462. Egy téglalap középpontja az origó, oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, és egyik csúcsa $-5+3i$. Írjuk fel a téglalap többi csúcsát.

Műveletek komplex számokkal

463. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $3i+4i$; *b)* $5i-\sqrt{-36}$; *c)* $\frac{1}{2}i+\sqrt{-\frac{1}{4}}$;

d) $4i\cdot 3i$; *e)* $(-3i)(-6i)$; *f)* $(a+b)i\cdot(a-b)i$;

g) $\frac{-14i}{2i}$; *h)* $\frac{7i}{-28i}$; *i)* $\frac{\frac{3}{4}i}{-\frac{9}{2}i}$.

464. Számítsuk ki és ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő műveletek eredményeit:

a) $(5+5i)+(10+4i)+(6-5i)$; *b)* $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)$;
c) $(5+3i)-(2-i)$; *d)* $2(3+5i)-5(4-2i)$;
e) $i(1+6i)-i(-4+5i)$; *f)* $(1+i)(1-i)$;
g) $(1+5i)(2-5i)$; *h)* $\frac{5i}{2+3i}$; *i)* $\frac{3-5i}{4+7i}$.

465. Végezzük el a következő műveleteket:
a) $(2+i)-(1-i)+(3-6i)$;
b) $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$;
c) $(2+3i)(4-i)+(2+5i)$;
**d)* $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

466. Határozzuk meg az x, y valós számokat úgy, hogy
a) $(4+5i)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
b) $(2-i)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
c) $(3+8i)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;
d) $(6-7i)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;

e) $(a+bi)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
f) $(a+bi)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;
g) $(2+i)(x+yi)$ szorzat valós szám legyen;
h) $(a+bi)(x+yi)$ szorzat valós szám legyen;
i) $(a+bi)(x+yi)$ szorzat képzetes szám legyen;
j) $(a+bi)$ és $(x+yi)$ komplex számok összege és szorzata is valós szám legyen.
Az egyes feltételeknek adjunk geometriai jelentést is.

467. Mi a feltétele annak, hogy két komplex szám összege valós szám legyen?

468. Adjunk meg két olyan komplex számot, amelynek az *a)* összege; *b)* szorzata; *c)* összege és szorzata valós szám.

469. Mutassuk meg, hogy az

$$x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$$

komplex együtthatós másodfokú egyenlet gyökei a $2+i$ és $1-3i$ komplex számok.

470. Igazoljuk, hogy az

$$x^3-9x^2+18x+28=0$$

harmadfokú egyenlet gyökei a -1; $5+i\sqrt{3}$; $5-i\sqrt{3}$ komplex számok.

471. Mutassuk meg, hogy az

$$x^4-30x^2+289=0$$

negyedfokú egyenlet gyökei a $4+i$; $4-i$; $-4+i$; $-4-i$ komplex számok.

472. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6;\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

b) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i;\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i.\end{cases}$

A komplex szám konjugáltja és abszolútértéke

473. Írjuk fel a következő számok konjugáltját, és ábrázoljuk a komplex számsíkon:

a) 5; *b)* $2i$; *c)* $-5i$;
d) $1+i$; *e)* $-2+3i$; *f)* $8-7i$.

474. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolútértékét:

a) $3i$; *b)* $-2i$; *c)* $2-i$;
d) $5+2i$; *e)* $6-3i$; *f)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$.

475. Számítsuk ki a következő komplex számok konjugáltjának abszolútértékét. Ábrázoljuk a komplex számot és a konjugáltját is a komplex számsíkon:

a) $3-2i$; *b)* $2+7i$; *c)* $-5-3i$;
d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i$; *f)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$.

476. Milyen hosszúak az

$$1-i\sqrt{3};\quad 2i;\quad -1-i\sqrt{3}$$

csúcspontú háromszög oldalai?

477. Bontsuk fel komplex tényezők szorzatára a következő kifejezéseket:

a) a^2+b^2; *b)* a^2+4; *c)* a^2+2.

478. Igazoljuk, hogy két komplex szám összegének konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak összegével, a szorzatuk konjugáltja egyenlő a tényezők konjugáltjainak szorzatával.
Mit mondhatunk két komplex szám hányadosának konjugáltjáról?

479. Adjuk meg azokat a számokat, amelyeknek konjugáltja az eredeti szám

a) négyzete; *b)* köbe.

480. Igazoljuk, hogy ha $z = a+bi$, akkor

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leqq |z| \leqq |a|+|b|.$$

481. Bizonyítsuk be, hogy ha z_1 és z_2 komplex számok, akkor igazak a következő állítások:

a) $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$; *b)* $|z_1-z_2| \geqq ||z_1|-|z_2||$;
c) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$; *d)* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

482. Igazoljuk, hogy egy komplex szám valós számszorosának vektora egyenlő a komplex szám vektorának valós számszorosával.

484. Igazoljuk, hogy egy komplex szám i-szeresét úgy ábrázolhatjuk, hogy a komplex szám vektorát $+90°$-kal elforgatjuk.

485. Igazoljuk, hogy

a) két komplex szám szorzatához rendelt vektor hossza egyenlő a komplex számok vektorai hosszának szorzatával.
b) két komplex szám szorzatához rendelt vektor irányszöge egyenlő a komplex számok vektorai irányszögének összegével.

A komplex számok trigonometrikus alakja

486. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

a) 1; *b)* -1; *c)* i;
d) $-i$; *e)* $2i$; *f)* $1+i$;
g) $-1+i$; *h)* $1-i$; *i)* $1+i\sqrt{3}$;
j) $\sqrt{3}-i$; *k)* $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; *l)* $3+i$.

487. Számítsuk ki a $z_1 z_2$ szorzatot és a $\frac{z_1}{z_2}$ hányadost, ha

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\qquad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

488. Írjuk fel algebrai alakban a következő komplex számokat:

a) $6(\cos 0°+i\sin 0°)$; *b)* $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
c) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; *d)* $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

489. Igazoljuk, hogy

a) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.
b) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$.
c) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha+i\sin n\alpha$, ha $n \in \mathbf{N}^+$.

490. Számítsuk ki i nulla és pozitív egész kitevős hatványait.

491. Számítsuk ki:

a) $i+i^2+i^3+i^4$; *b)* $(1-i)^4$; *c)* $(1+i)^4$.

492. Milyen pozitív egész n-re lesz $(1+i)^n = (1-i)^n$?

493. Legyen a z komplex szám abszolútértéke 1. Határozzuk meg, hogy milyen kapcsolat van z és $\frac{1}{z}$ között. Írjuk fel mindkettőt trigonometrikus alakban is.

494. Milyen z komplex számra teljesül a következő egyenlőség:

a) $|z|-z = 1+2i$; *b)* $|z|-2z = -1-8i$; *c)* $2|z|-3z = 1-12i$;

d) $|\bar{z}| = -4z$; *e)* $z^2+|z| = 0$.

495. Legyen $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Határozzuk meg a $z = x+yi$ komplex számot úgy, hogy $z_1^2-z_1 = z^2-1$ teljesüljön.

496. Hol helyezkednek el a síkban azok a z komplex számok, amelyekre

a) $|z-z_1| = 2$; *b)* $|z-z_1| > 2$; *c)* $|z-z_1| < 2$, ahol

1. $z_1 = 2+3i$; 2. $z_1 = -1+2i$;

3. $z_1 = a+bi$, $(a, b \in \mathbf{R})$.

497. Végezzük el a következő hatványozásokat:

a) $(1+i\sqrt{3})^3$; *b)* $(1+i)^8$.

Végezzük el a hatványozást úgy is, hogy a hatvány alapját trigonometrikus alakban írjuk fel.

498. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{1}$; *b)* $\sqrt[3]{2-2i}$.

499. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket: *a)* $x^3=1$; *b)* $x^4=1$; *c)* $x^5=1$; *d)* $x^6=1$; *e)* $x^2=i$; *f)* $x^2 = 1+i$.

500. Igazoljuk, hogy az $x^n=1$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ egyenlet gyökei az

$$x_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i \sin k\frac{2\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

alakú komplex számok, és $x_k = x_1^k$.

501. Bizonyítsuk be, hogy az $x^n=1$ egyenlet gyökeinek összege zérus, ha $n \geqq 2$.

III. AZ ALGEBRA ELEMEI

1. Műveletek polinomokkal

Rendezés, fokszám

1. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő változó növekedő hatványkitevői szerint:

a) $5x^3-2x+4x^4+x^2-5$;

b) $3y^2-4y^5+5y^3+2y^4+6-y$;

c) $5x^6+2-4x^2-x$.

2. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő változó csökkenő hatványkitevői szerint:

a) $x^4-3x^2+5-x+2x^3$;

b) $\frac{1}{2}y+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}y^3+3y^2$;

c) $2{,}5z^2+0{,}5-3z+5z^4$.

3. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő valamely változó növekvő hatványkitevői szerint:

a) $x^3y^2+2xy^4-x^2y^3+x^4y+5$;

b) $y^2z-3yz^3-z^2+y^3-7z^4$;

c) $xz+2x^2-3z+x^5$.

4. Melyek az egynemű algebrai kifejezések a következő egytagok között?

a) $3a^2b$; $-2ab$; $-a^2b$; $2a^3b$; $1{,}3a^2b$;

b) $\frac{1}{5}xy^3$; x^2y; $-3xy^3$; $4x^3y$;

c) xy^2z; $5xyz$; xyz^2; x^2yz; $-3xy^2z$; $2xyz^2$.

5. Melyek az egytagúak a következő algebrai kifejezések között?

a) $3a^2b$; $4a-2b$; $5b+2a$; $-\frac{a^2}{3}$; a^3b; $3a^2+2$;

b) x^2+y^2; $(x+y)^2$; $-2x^2$; $5xy$; $3(x-y)^2$;

c) $\frac{2}{5}pq$; $3p-2q+5$; $2p(p-q)^2$; $q(p-q)^2$; $5p$.

6. Hányadfokúak a következő egytagú kifejezések?

a) $3x^2$; $-x^3$; $2x$; 3; $5x^4$;

b) $3x$; $-4y$; $2xy$; $5xy^2$; $6x^3y^4$; x^4y;

c) $2xyz$; x^2y^2z; xyz^3; xy^4z; x^5y;

d) $3x(y-z)$; $2x^2(y-z)$; $x(y-z)^2$; $-x^2(y-z)^2$.

7. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét, ha $a=\frac{1}{2}$; $b=-2$; $c=2$; $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{4}$.

a) $2ab$; $-3a^3$; $0{,}6x^2$; $-\frac{2}{5}y$; $-3b$;

b) $3x^2y$; $2xy^2$; $-x^3y$; $-x^2y^2$; $5xy$;

c) abc; $2a^2bc^2$; $-3ab^3$; $4abc^2$; $4a^2bc$.

Egytagú egész kifejezések összevonása

8. Adjuk össze az egynemű tagokat a következő kifejezésekben:

a) $5x-2x$; *b)* $4y-6y+2y$;

c) $-3a^2-4a^2$; *d)* $5x^3-x^3+2x^3$.

9. *a)* $2xy-3xy+xy$; *b)* $6p^3q+2p^3q$.

10. *a)* $6x^2-3x+x^2$; *b)* $a^2-b^2+a^2+b^2$.

11. *a)* $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{5}x^2+y^3-2x^2$;

b) $3ab-4a^2b+7ab-2a^2b+5ab-ab^2$;

c) $3{,}89a+0{,}11a-2{,}5a-b-a+1{,}5b$.

12. *a)* $\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2-a^2b-\frac{1}{5}ab^2+2a^2b$;

b) $\frac{4}{5}xy-\frac{2}{3}xyz+\frac{2}{5}xyz+0{,}3xy$;

c) $0{,}75p^2qr-0{,}5pq^2r-1{,}2p^2qr+1{,}3pq^2r-pqr$.

13. *a)* $3(x^2-y^2)-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{2}{3}(x^2-y^2)$;

b) $(a-b)^2+2(a-b)^2-4(a-b)^2$;

c) $\frac{2}{3}(x+y)^2-\frac{5}{2}(x+y)^2-\frac{5}{6}(x+y)^2$.

14. *a)* $3a^n-2a^n+4a^{n+1}-a^n-2a^{n+1}$;

b) $5x^2-3x^k+7x^2+8x^k-x^k$.

Többtagú egész kifejezések összevonása

15. Végezzük el a következő egész kifejezések összeadását:

a) $8a+(3b-2a)+5a$;

b) $5x-3+(5x+3)-7$;

c) $(12a+2b)+(4a-3b)$;

d) $(3a^2b-3ab^2)+(2ab^2-4a^2b)$;

e) $(x^2+3x-5)+(2x^2-x-1)$;

f) $(x^2+3xy+y^2)+(2x^2-4xy+2y^2)$;

g) $(10a-3b+5c)+(3a+5b-2c)$;

h) $(3x^2-ax+2a^2)+(a^2+3ax+x^2)+(x^2+a^2)$;

i) $(2a^3+3a^2b-2ab^2+b^3)+(4a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$;

j) $(5x^4-3x^3y+2x^2y^2+5xy^3+y^4)+(2x^3y-2x^2y^2-y^4)$;

k) $(2a^n-5b^m+c)+(5a^n+3b^m+3c)$.

16. Végezzük el A, B és C, illetve A és B összeadását:

a) $A=5a^4+3a^3b-2a^2b^2-4ab^3$,
$B=3a^4-8a^3b-9a^2b^2+ab^3$,
$C=6a^4+a^3b+5a^2b^2+9ab^3$;

b) $A=\frac{5}{6}x^2+1\frac{2}{3}xy+\frac{3}{4}y^2$,
$B=\frac{5}{12}x^2-\frac{4}{3}xy-\frac{7}{4}y^2$,
$C=2\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}xy-y^2$;

c) $A = 0{,}8x^4 - 1{,}2x^3y + 0{,}8x^2y^2 + 5{,}7xy^3 - 0{,}9y^4$,
$B = 0{,}2x^4 - 0{,}1y^4 + 2{,}3x^3y - 0{,}12x^2y^2 - 4{,}2xy^3$.

17. Határozzuk meg az $A+B+C$ számértékét, ha

$a=4$; $b=2{,}5$; $c=\frac{1}{2}$; $x=\frac{11}{4}$; $y=\frac{7}{3}$; $z=\frac{7}{2}$.

a) $A = 3a^2b + 3b^2c + 3ac^2$, $B = 3a^2b - 3b^2c + 3ac^2$,
$C = 3b^2c - 3a^2b - 3ac^2$;

b) $A = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z$, $B = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z$,
$C = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z$.

18. Végezzük el a kivonásokat és a lehetséges összevonásokat:

a) $3a-(3a)$; *b)* $4x-(-7x)$;
c) $2a^3-(5a^3)$; *d)* $-a^4-(-3a^4)$;
e) $2xy-(10xy)$; *f)* $3x^2y-(2x^2y)$;
g) $6ab^2-(-2ab^2)$; *h)* $3abc-(-2abc)$;
i) $\frac{1}{2}a-(-a)$; *j)* $\frac{1}{5}x-\left(-\frac{2}{3}x\right)$;
k) $\frac{4}{3}x^2y-\left(-\frac{2}{5}x^2y\right)$; *l)* $-\frac{3}{4}ab^2-\left(\frac{2}{3}ab^2\right)$;
m) $3a^n-(-5a^n)$; *n)* $3x^{n+1}-(8x^{n+1})$.

19. *a)* $3x-(x+2y)$; *b)* $4a-(3+a)$;
c) $(3a-2b)-(a+b)$; *d)* $(3a^2-a)-(a^2-a)$;
e) $(3a^2b-2b^2)-(-2a^2b+b^2)$; *f)* $(x^3y-x^2)-(x^2+x^3y)$.

20. *a)* $(12a+5b-3c)-(-5a-7b+3c)$;
b) $(8a^2-4ab+b^2)-(b^2+2ab-a^2)$;
c) $(5ab-3bc+2ac)-(ab+bc+ac)$;
d) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)$;
e) $\left(\frac{1}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab+\frac{3}{14}bc-\frac{1}{5}ac\right)$;
f) $\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$.

21. *a)* $[5(a-x)^2-10(a-x)^3+3(a-x)^4]-[2(a-x)^2+8(a-x)^4-15(a-x)^3]$;
b) $[10(a+b)^4-2(a+b)^3-9(a+b)^2]-[7(a+b)^2-6(a+b)^4-12(a+b)^3-(a+b)]-4(a+b)$.

22. *a)* $(4a^2-2ab-b^2)-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)$;
b) $(-8x^3+4x^2-x+1)-(5x^3-8x^2-3x-1)+(2x^3-3+x^2-6x)$.

23. *a)* $3x-[5x-(2x-1)]$; *b)* $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]$.

24. *a)* $5x+\{3y+[6z-2x-(x-z)]\}-[9x-(7y+z)]$;
b) $2a-\{2a-[2a-(2a)-2a]-2a\}-2a$.

25. Írjuk fel az $5a^2-3a-2ab+b^2$ kifejezést
a) két tag összegeként; *b)* két tag különbségeként.

26. Határozzuk meg az $A-[B-2A-(A-B)]$ kifejezést, ha:

$$A = a^2+2ab+b^2 \quad \text{és} \quad B = a^2-2ab-b^2.$$

27. Számítsuk ki az $5abc-\{2a^2b-[3abc-(4ab^2+a^2b)]\}$ kifejezés értékét, ha

a) $a=-2$; $b=-1$; $c=3$;
b) $a=0{,}25$; $b=0{,}5$; $c=0{,}75$.

28. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

1. Ha két szám összegéhez hozzáadjuk a különbségüket, akkor az első szám kétszeresét kapjuk.
2. Ha két szám összegéből kivonjuk a különbségüket, a második szám kétszeresét kapjuk.

29. A természetes számok sorozatában egymást követő három szám közül a legkisebb $2k$. Írjuk fel ennek a három számnak az összegét.

30. Egymás után következő négy természetes szám közül a legkisebb $2k+1$. Írjuk fel a két középső szám összegének és a két szélső szám összegének különbségét.

31. Egy háromszög kerülete $5a+b$. Egyik oldala $a+b$, a másik oldala ennél $2a$-val kisebb. Mekkora a harmadik oldal?

32. Egy négyszög kerülete $5a+b$. Egyik oldala b, a második oldala az elsőnél $(b-a)$-val nagyobb, a harmadik oldal a másodiknál $3a$-val kisebb. Mekkora a negyedik oldal?

33. A következő kifejezések közül melyek azok, amelyek a bennük lévő betűk bármely értékénél

1. pozitívok; 2. negatívok.

a) a^2+b^2; *b)* a^2-b^2; *c)* $-a^2b^2$;
d) $(a-b)^2$; *e)* a^2+1; *f)* a^3+1;
g) $-a^2-1$; *h)* $a^2+b^2+c^2$; *i)* a^2+b^2+1;
j) a^3-1; *k)* a^4+a^2-2; *l)* $2a^2+3a^4+1$.

Egytagú egész kifejezések szorzása

Végezzük el a következő szorzásokat:

34. *a)* a^2a; *b)* $x^2(-x^3)$;
c) $(-a)a^3$; *d)* $x^n(-x^2)$;
e) $a^{n+1}a^{n-1}$; *f)* $a^{3n}a^{3n-1}$.

35. *a)* $2x^25x^3$; *b)* $-3p^2(-2p^5)$;
c) $5p^33p^5$; *d)* $-5b^24b^4$;
e) $(-2a)(-3a^4)$; *f)* $-3a^n\frac{6}{5}a^{n+1}$;
g) $3x^{n+1}\left(-\frac{1}{3}x^{n-1}\right)$; *h)* $\frac{2}{5}x^{p+1}\frac{5}{2}x^{p-1}$.

36. *a)* $2ab(-3ab^3)$; *b)* $-3x^2y(-5xy^3)$;
c) $\frac{2}{5}a^3b(-10a^2b^2)$; *d)* $-k^2l^3\frac{2}{3}kl$;
e) $0{,}6x^2y^2(-0{,}5xy)$; *f)* $2{,}4a^3b^4(-0{,}5ab^2)$.

37. *a)* $(-4a^2b^3c)(-2ab^2c^4)$; *b)* $\left(-\frac{2}{5}x^2y^3z\right)\left(-\frac{5}{2}xyz\right)$;
c) $(-2{,}5x^3y^2z)(-3{,}4x^2y^3z)$; *d)* $(-5x^{k+1})(-2x^2)$;
e) $4a^2b(-6a^{n-1}b^{n+1})$; *f)* $2(a+b)^3\,4(a+b)$.

38. *a)* $3x^2y(-2xy)\left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$;

b) $\frac{1}{3}a^2(-6a^3b)(4a^2b^2)\left(-\frac{7}{2}ab\right)$;

c) $(-2{,}5pq)\left(-\frac{2}{5}p^2q^3\right)(-0{,}1pq^3)$;

d) $2a^{n+1}(-3a^n)\left(-\frac{2}{3}a^{n-1}\right)$.

Többtagú egész kifejezés szorzása egytagú egész kifejezéssel

Végezzük el a következő szorzásokat:

39. *a)* $(a+2)3$; *b)* $(3b-3)5$;
c) $-2(3a-2b)$; *d)* $(3x-4y)8$;
e) $3(0{,}6x^2-0{,}2y^3)$; *f)* $(x^2+y)\frac{2}{3}$.

40. *a)* $(a-b)c$; *b)* $(3c-4d)x$;
c) $2a(-3a-2b)$; *d)* $-4x(5y+3x)$;
e) $(2a+3b-4c)(-5)$; *f)* $(x-y+2z)\left(-\frac{1}{2}\right)$;
g) $(2x^2-5x+3)(-2x)$; *h)* $(y^2-y+1)2y$;
i) $(3x^2-5xy+y^2)2xy$.

41. *a)* $(3x^3-5x^2+4x+3)2x^2y^2$;
b) $(a^3-2a^2b^2-2ab^3+b^3)(-3ab^2)$;
c) $(-2a^3+5a^2x^2-5ax^3+3x^4)(-3ax^2)$.

42. *a)* $(a^k+2a^2)a^n$; *b)* $(3a^{n+1}-2a^n)5a$;
c) $(4x^{2l-1}-3x^{l+1})(-3x^{l+1})$; *d)* $6x^{n-1}\left(\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{3}{4}x\right)$.

43. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $x(x+y)-y(x-y)$;
b) $3(3a-3b)+5(a+b)$;
c) $6(3p+4q)-8(5p-q)+p-3q$;
d) $4(x-y+z)-2(x+y-z)-3(-x-y-z)$;
e) $2a^2-a(5b-2a)+b(b-2a)$;
f) $6a^2-5a(2b-a)+4a\left(-3a+2\frac{1}{2}b\right)$;
g) $5(2{,}4-0{,}9x+0{,}16x^2)-4(0{,}2x^2+1{,}5x-1)$;
h) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)6x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)12y$;
i) $4a-2(a-3)-3[a-3(4-2a)+8]$.

Többtagú egész kifejezés szorzása többtagú egész kifejezéssel

44. Végezzük el a következő szorzásokat:

a) $(a+b)(c+d)$; *b)* $(a-b)(c-d)$;
c) $(a+2)(a+3)$ *d)* $(2x-1)(5-3x)$;
e) $(3x+2y)(2x+3y)$; *f)* $(3a^2-2b)(2a^2+3b)$;
g) $(3ab-4a^2)(5a+2b)$; *h)* $(7x^3y^2-xy)(5xy^2-2x^2y^2)$;

i) $\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{2}{3}xy-1\frac{1}{2}x^2y\right)$;

j) $(0{,}01a^2b^3+0{,}25a^3b^3)(6a^2b^3-4a^3b^3)$;
k) $(a^2-3ab+b^2)(a^2-2ab)$.

45. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)$, ha $x=\frac{7}{4}$;

b) $(a-5)(a-1)-(a+2)(a-3)$, ha $a=-\frac{13}{5}$;

c) $(k-2)(k-3)+(k+6)(k-5)-2(k^2-7k+13)$, ha $k=5{,}6$.

46. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(x-2)(x+3)+(x+2)(x-3)$;
b) $(a-3)(a+4)-(a-2)(a+5)$;
c) $(4b^2+2a^2-4ab)(2a^2+3ab-3b^2)$;
d) $(x-a)(x-b)(x-c)$;
e) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$;
f) $(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$;
g) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$;
h) $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$.

47. A következő egyenlőségek közül melyek azok, amelyek a bennük szereplő betűk minden valós értékénél fennállnak?

a) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;
b) $(a+b)^2-(a+b)(a-b)=2b(a+b)$;
c) $(a-b)(a+b)-3ac-3bc=(a-b-3c)(a+b)$;
d) $(a-b)^2+a(a+b)=(a+b)^2+a^2$;
e) $2ab=a(a+1)+b(b-1)-(a-b)(a-b+1)$.

Nevezetes szorzatok

48. Végezzük el a következő szorzásokat:

a) $(a+b)(a-b)$; *b)* $(x-y)(x+y)$;
c) $(a+2)(a-2)$; *d)* $(x-1)(x+1)$;
e) $(2x+y)(2x-y)$; *f)* $(2b-3a)(2b+3a)$;

g) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$; *h)* $\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{3}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}b^2\right)$;

i) $(2xy-1)(2xy+1)$; *j)* $(3a^2+2b)(3a^2-2b)$;
k) $(0{,}2a-0{,}5b)(0{,}2a+0{,}5b)$; *l)* $(x^k+y)(x^k-y)$.

49. Végezzük el az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosság felhasználásával a következő műveleteket:

a) $31\cdot 29$; *b)* $61\cdot 59$; *c)* $199\cdot 201$;
d) $2{,}1\cdot 1{,}9$; *e)* $19{,}9\cdot 20{,}1$; *f)* $56\cdot 64$;
g) 35^2-25^2; *h)* 64^2-36^2; *i)* 328^2-172^2.

50. Melyek azonosságok a valós számok halmazán a következő egyenlőségek közül?

a) $(1+a)(1-a)(1+a^2)=1-a^4$;
b) $5a^2-3(a+1)(a-1)=2a^2+3$;
c) $7(x^2-2)-4(x+3)(x-3)=3x^2+42$;
d) $10(x^2-15)-12(x-4)(x-4)=42-2x^2$.

Végezzük el a következő szorzásokat:

51. *a)* $(a+b)(a-b)$;
b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
c) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$;
d) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
e) $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$.

52. *a)* $(a-b)(a+b)$;
b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;
d) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
e) $(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

53. Az **51.** és **52.** feladat eredményeit felhasználva, számítsuk ki a következő szorzásokat:

a) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
b) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

c) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$;
d) $(2x^2+3y^2)(4x^4-6x^2y^2+9y^4)$;
e) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$.

Egytagú algebrai kifejezések hatványa

Számítsuk ki a következő hatványokat:

54. a) $(x^2)^3$; b) $(-x^2)^3$; c) $-(x^2)^3$;
d) $(a^5)^{10}$; e) $(-a^5)^{10}$; f) $-(a^5)^{10}$;
g) $(a^n)^k$; h) $(-a^n)^k$; i) $-(a^n)^k$.

55. a) $(2a^2)^2$; b) $(2a^3)^2$; c) $(-3a)^3$;
d) $(ab)^3$; e) $[(-x)y]^2$; f) $[(-x)y]^3$;
g) $(abc)^2$; h) $(a^2bc^3)^2$; i) $(5ab^2)^2$;
j) $\left(\frac{1}{3}x^2\right)^3$; k) $\left(-\frac{1}{3}x^3\right)^2$; l) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^3$.

56. Végezzük el a következő szorzásokat:

a) $(a^2b^3)^2(-2a^3b^2)^2$; b) $(-3a^3)^3\left(-\frac{2}{3}a^5\right)^3$;

c) $\left(\frac{3}{2}x^2y^3z\right)^2(-2xy^2z^3)^2$; d) $(a^{k+1})^2(a^{k-1})^2$;

e) $[2(x-y)^n]^4(x-y)^n$.

57. Számítsuk ki a következő hatványokat:

a) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^2$; b) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3$; c) $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^5$;

d) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; e) $\left(\frac{-2a^2}{5b^3}\right)^2$; f) $\left(\frac{2a^2b}{3ab^2}\right)^2$.

58. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\frac{a}{x}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2$; b) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4\left(\frac{3ab}{2c}\right)^3$;

c) $\left(\frac{4x^2y^3}{3a^2b^4}\right)^2\left(\frac{-9a^4b^5}{16x^4y^6}\right)^3$; d) $\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^3\left(\frac{x^3}{y^3}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^4$.

59. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\frac{2a^2b}{3cd^3}\right)^3:\left(\frac{2ab^2}{3c^3d}\right)^3$; b) $\left(\frac{2x^4y^5}{a^2b^3}\right)^3:\left(\frac{2x^4y^5}{a^2b^3}\right)^2$.

Többtagú kifejezések négyzete

Végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

60. a) $(a+b)^2$; b) $(a-b)^2$; c) $(x+y)^2$;
d) $(a+3)^2$; e) $(b-2)^2$; f) $(x+1)^2$;
g) $(2x+1)^2$; h) $(3a-b)^2$; i) $(3y+x)^2$;
j) $(3x-2y)^2$; k) $(5a+3b)^2$; l) $(a^2+1)^2$;
m) $(x^3+1)^2$; n) $(x^2+y^2)^2$; o) $(a^3-b^3)^2$.

61. a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$; c) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$;
d) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)^2$; e) $\left(\frac{2a}{3}-3b\right)^2$; f) $\left(1\frac{2}{3}a+2b\right)^2$;
g) $\left(-1\frac{1}{5}a+1\frac{1}{6}b\right)^2$.

62. a) $(0{,}2a^2-5b)^2$; b) $(0{,}3x^2+4y)^2$;
c) $\left(\frac{3}{4}a^2-0{,}5b^3\right)^2$; d) $\left(1\frac{1}{3}x^2+0{,}6y^4\right)^2$;
e) $(a^k+a)^2$; f) $(x^n-x)^2$;
g) $(a^{k+1}+a^k)^2$.

63. a) $\left(\frac{3}{4}a^4b-\frac{2}{3}ab^3\right)^2$; b) $\left(\frac{5}{6}x^3y^2+\frac{3}{5}xy\right)^2$;
c) $\left(\frac{2}{3}a^3b^4-2\frac{1}{2}a^5b\right)^2$; d) $\left(\frac{4}{5}a^3b^3-1\frac{1}{4}a^2b^3\right)^2$.

64. a) $(a+b+c)^2$; b) $(a-b+c)^2$;
c) $(x+2y+z)^2$; d) $(2x-y-z)^2$.

65. Írjuk fel a következő háromtagú kifejezéseket kéttagú kifejezések négyzeteiként:

a) a^2+2a+1; b) $4x^2-4xy+y^2$;
c) $b^2-6bc+9c^2$; d) $25x^2+20xy+4y^2$;

e) $4x^6-12x^3y^2+9y^4$; *f)* $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$;

g) $\frac{16}{9}a^6b^6-2a^5b^6+\frac{9}{16}a^4b^6$; *h)* $0{,}09x^4-2{,}4x^2y+16y^2$.

66. Egészítsük ki a következő kifejezéseket úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzetével legyenek egyenlők:

a) $x^2+2xy+\ldots$; *b)* $a^2-2ab+\ldots$;

c) $4c^2+4cd+\ldots$; *d)* $\frac{4}{9}k^2-kl+\ldots$;

e) $25a^2+\ldots+16b^2$; *f)* $1+\ldots+25x^2$;

g) $36p^2+\ldots+25q^2$; *h)* $\frac{1}{4}x^2+\ldots+\frac{4}{9}z^2$;

i) $4+\ldots+36a^2b^2$; *j)* $\frac{4}{9}x^2y^2+\ldots+1$.

67. Írjuk fel a következő háromtagú kifejezéseket egy kéttagú kifejezés és egy szám összegeként:

a) $x^2+6x+13$; *b)* $x^2-10x+26$;

c) $x^2+4x+17$; *d)* $-3-2x+x^2$;

e) $\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{5}a+\frac{11}{25}$; *f)* $32+28a+49a^2$.

68. A $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$ azonosságot felhasználva végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

a) 25^2; *b)* 45^2; *c)* 65^2; *d)* 125^2; *e)* 145^2; *f)* 165^2.

69. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(a+b)^2-(a-b)^2$; *b)* $(x+2)^2+3(x+1)^2$;

c) $2(y-2)^2-3(y+3)^2$; *d)* $5(3-5a)^2-5(3a-7)(3a+7)$;

e) $(a-1)^2-3(a+1)^2-5(a-1)(a+1)$;

f) $-(2+x)^2-3(1-x)^2+2(1-x)(1+x)$;

g) $(a+1)(a-1)(a^2-1)$; *h)* $(a+2)^2(a-2)^2$;

i) $(a+b+c)(a+b-c)$; *j)* $(a-b+c)(a-b-c)$;

k) $(x+2y+3z)(x-2y+3z)$; *l)* $(a+2b-4c)(a-2b-4c)$;

m) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

70. A következő egyenlőségek közül melyek az azonosságok a valós számok halmazán?

a) $(a-b)^2+(a+b)(a-b)=2a(a-b)$;

b) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a-b-c)^2=8ac$;

c) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad+bc)^2$;

d) $25(a^2+b^2)=(3a+4b)^2+(4a-3b)^2$;

e) $(a-b)^2-(b-a)^2=1$.

Többtagú kifejezések köbe

Végezzük el a következő köbre emeléseket:

71. *a)* $(a+b)^3$; *b)* $(a-b)^3$; *c)* $(c+d)^3$;

d) $(p-q)^3$; *e)* $(a+2)^3$; *f)* $(3-a)^3$;

g) $(a-2b)^3$; *h)* $(2a+3b)^3$; *i)* $\left(4a+\frac{b}{2}\right)^3$;

j) $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^3$; *k)* $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^3$; *l)* $(a^2+b^2)^3$;

m) $(x^2-y^2)^3$.

72. *a)* $(4a^3+5b^2)^3$; *b)* $(7k^3+2l^2)^3$;

c) $(0{,}5x+0{,}1y)^3$; *d)* $(0{,}2a-0{,}1b)^3$;

e) $\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{3}x^2y\right)^3$; *f)* $\left(0{,}2a^2b-\frac{5}{3}ab^2\right)^3$;

g) $(x^n-1)^3$.

Egytagú kifejezés osztása egytagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat:

73. *a)* $8a:4$; *b)* $30x:(-3)$;

c) $(-12x):(-4)$; *d)* $\left(-\frac{3}{4}a\right):\frac{2}{3}$;

e) $\frac{6}{7}x^2:(-3)$; *f)* $\left(-2\frac{3}{4}a^3\right):3$;

g) $1\frac{5}{6}a:\left(-\frac{5}{6}\right)$; *h)* $\left(-1\frac{1}{2}x^2\right):\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

74. *a)* $10a:2a$; *b)* $(-6x):2x$;

c) $1{,}5b:0{,}5b$; *d)* $0{,}3a^2:(-0{,}01a^2)$.

75. *a)* $8ab:4b$; *b)* $6xy:(-2x)$;

c) $4abc:2a$; *d)* $8a^2b^2:2a^2$.

76. *a)* $a^6 : a^2$; *b)* $x^5 : x^3$;
c) $c^5 : (-c)$; *d)* $a^{10} : (-a^5)$.

77. *a)* $a^k : a^n$; *b)* $a^{k+1} : a^k$;
c) $x^{2k+1} : x^{k+1}$; *d)* $x^{n+1} : x^{n-1}$.

78. *a)* $6a^3b : 2ab$; *b)* $-9xy^2 : 3xy$;
c) $16x^2y^2 : 4x^2y$; *d)* $2a^4b^3 : 5a^2b^3$;
e) $15a^2b^2c : (-5abc)$; *f)* $-6a^3b^2c : (-2abc)$.

79. *a)* $6(x+y)^3 : 2(x+y)$; *b)* $12(a-b)^4 : [-3(a-b)^2]$;
c) $4(x-y)^5 : \frac{1}{2}(x-y)^3$; *d)* $8(x+2y)^{k+1} : 2(x+2y)^k$.

Többtagú kifejezés osztása egytagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat, és vizsgáljuk meg azt is, hogy a változók milyen értékeire van értelmezve a hányados:

80. *a)* $(6a+15b) : 3$; *b)* $(10+20x) : 5$;
c) $(3ab+12ac) : 3a$; *d)* $(15xy-10xz) : 5x$;
e) $(16x^3y-24x^2y^2) : 8x^2y$;
f) $(9xy^2+15x^3y^4) : (-3xy^2)$.

81. *a)* $(4a+6b-8) : 2$; *b)* $(10x^3-5x^2+20x) : 5x$;
c) $(12a^4-8a^3+4a^2) : 4a^2$;
d) $(3a^2b^3-15a^2b^2+18a^3b^2) : 3a^2b^2$;
e) $(12x^3y^2-4x^2-16x^4y^3) : (-4x^2)$;
f) $(15a^3b^5-10a^4b^4-25a^5b^3) : 5a^3b^3$.

82. *a)* $(2x^2-4x+2) : \frac{1}{2}$;
b) $(3x^3+6x^2-2x) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$;
c) $(4xy^2-16x^2y^2-12x^3y) : \frac{4}{3}xy$;
d) $\left(4a^5b^2-\frac{4}{9}a^4b^5+\frac{2}{3}a^3b^6\right) : \frac{2}{3}a^3b^2$;
e) $(0{,}01a^4-0{,}02a^3+0{,}04a^2+0{,}002a) : 0{,}01a$;
f) $[5(a-b)^4-10(a-b)^3+25(a-b)^2] : 5(a-b)^2$.

Többtagú kifejezés osztása többtagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat:

83. *a)* $(3a+3b) : (a+b)$; *b)* $(5a-5b) : (a-b)$;
c) $(ax+ay) : (x+y)$; *d)* $(xy-xz) : (y-z)$.

84. *a)* $(x^2-8x+7) : (x-7)$; *b)* $(a^2-2a-15) : (a-5)$;
c) $(6x^2+5x-6) : (2x+3)$; *d)* $(12a^2+a-20) : (4a-5)$.

85. *a)* $(x^3-6x^2-5x+30) : (x-6)$;
b) $(x^3-x^2-x+1) : (x+1)$;
c) $(6a^3+a^2-29a+21) : (2a-3)$;
d) $(x^2y^2+x^4-x^3y-xy^3) : (x^2+y^2)$.

86. *a)* $(15a^4-a^3-a^2+41a-70) : (3a^2-2a+7)$;
b) $(4a^4-24a^2b^2-14a^3b-54b^4) : (a^2-3ab-9b^2)$;
c) $(17x^2-6x^4+5x^3-23x+7) : (7-3x^2-2x)$.

Azonosságok alkalmazásával írjuk fel a következő osztások hányadosait:

87. *a)* $(a^2-b^2) : (a+b)$; *b)* $(a^2-b^2) : (a-b)$;
c) $(a^4-b^4) : (a+b)$; *d)* $(a^4-b^4) : (a-b)$;
e) $(a^3+b^3) : (a+b)$; *f)* $(a^5+b^5) : (a+b)$.

88. *a)* $(x^2-1) : (x+1)$; *b)* $(x^3+1) : (x+1)$;
c) $(x^3-1) : (x-1)$; *d)* $(x^4-1) : (x-1)$;
e) $(x^5+1) : (x+1)$; *f)* $(x^6-1) : (x-1)$.

89. *a)* $(x^2-9) : (x+3)$; *b)* $(x^2-16) : (x-4)$;
c) $(25-a^2) : (5+a)$; *d)* $(1-4x^2) : (1+2x)$.

90. *a)* $(16a^2-9b^2) : (4a+3b)$; *b)* $(49x^2-81y^2) : (7x+9y)$;
c) $(100a^2-64b^2) : (10a-8b)$.

91. *a)* $(x^4-y^4) : (x^2+y^2)$; *b)* $(x^4-y^4) : (x^2-y^2)$;
c) $(a^6-1) : (a^3+1)$; *d)* $(a^{10}-b^8) : (a^5-b^4)$.

92. *a)* $(a^2+2ab+b^2) : (a+b)$; *b)* $(x^2-2xy+y^2) : (x-y)$;
c) $(a^4-2a^2b^2+b^4) : (a^2-b^2)$.

93. *a)* $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) : (a+b)$;
b) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3) : (x-y)$;
c) $(c^3+3c^2d+3cd^2+d^3) : (c^2+2cd+d^2)$.

94. *a)* $(a^3+8) : (a+2)$; *b)* $(a^3-27) : (a-3)$;

III.

c) $(8x^3-1):(2x-1)$; *d)* $(8y^3+27):(2y+3)$;

e) $(x^9-y^3):(x^3-y)$; *f)* $\left(\frac{x^3}{8}+1\right):\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

g) $\left(b^3-\frac{1}{8}\right):\left(b-\frac{1}{2}\right)$; *h)* $\left(\frac{8}{27}+x^3\right):\left(\frac{2}{3}+x\right)$.

95. *a)* $(a^3+b^3):(a^2-ab+b^2)$; *b)* $(c^3-d^3):(c^2+cd+d^2)$;

c) $(x^3-1):(x^2+x+1)$.

Ismétlő feladatok polinomokkal való műveletekre

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

96. *a)* $2(a-b)^2-2(a+b)^2-4(a+b)(a-b)$;

b) $(4x+13)(x^2+1)-(4x-3)(x+2)^2$;

c) $(1-a)(1+a^2)+(1+a)(1+a^2)-2(1+a)(a-1)$;

d) $(x^2+2)^2-(x-2)(x+2)(x^2+4)$;

e) $3(a-2)-\frac{2}{3}(6a+1)(6a-1)+5a^2$;

f) $(a^3-3)^3-(a-2)(a^2+4)(a+2)$.

97. *a)* $\{[ax-2(a+2)][a(x-1)+2]+(4-a^2)+3a^2x\}:2ax$;

b) $[3(x-a)-3(x-c)+4(a-c)]:\frac{1}{2}(x-a)$;

c) $[9(x-1)-5(3x-1)+2(3x+2)]:(x^2-2)$;

d) $[a(a+2b)+b^2][a^2-b(2a-b)]:[(a-b)(a+b)]$;

e) $[a^2(a-3b)-b^2(b-3a)]:(a-b)$;

f) $\{(x^2-1)[x^2(x^2+1)+1]\}:\{(x+1)[x^2-(x-1)]\}$;

g) $[(2x-3)^3-(2x-3)^2-(2x-3)-(2x-3)(2x+3)-$
$-(2x+3)(4x^2-6x+9)]:2(2x-3)$;

h) $(64a^2-9b^2):(8a-3b)-(4a^2-b^2):(2a+b)$;

i) $(64x^3-27y^3):(4x-3y)-(2x+3y)^2$.

98. A természetes számok sorozatában két egymást követő egész szám négyzetének különbsége 33. Melyik ez a két szám?

99. A természetes számok sorozatában két egymást követő páros szám négyzetének különbsége 28. Melyik ez a két szám?

100. Két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége 64. Melyik ez a két szám?

***101.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$ és $a^3+b^3+c^3=0$, akkor $a^n+b^n+c^n=0$, ha $n>0$, páratlan szám.

2. Polinomok szorzattá alakítása

A tényezők kiemelése

102. Határozzuk meg a következő kifejezések legnagyobb közös osztóját:

a) a^2b; ab^2; *b)* $3a^2b^3$; $12a^3b^2$;

c) $x^5y^4z^2$; $x^6y^3z^4$; *d)* $15x^3y^2z^4$; $20x^2y^3z^5$;

e) $3ab$; $6a^2b^2$; $12a^3b^3$; *f)* $2abc^2$; $3a^2bc$; $4ab^2c^2$.

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

103. *a)* $3a+3b$; *b)* $10x-5y$;

c) $ax+bx$; *d)* a^2+a;

e) $ca-cb$; *f)* $4-6x$;

g) $5ab+5ac$; *h)* $3xy-6xz$;

i) $15ax-10ay$; *j)* $-2xy-4ay$.

104. *a)* x^2+xy; *b)* $ab-b^2$;

c) a^4-a^3; *d)* x^3-x^4;

e) $5x^3+10x^2$; *f)* $8a^4-12a^2$;

g) $15y^3-5y$; *h)* $18x^6-24x^3$;

i) $ab^2+a^2b^3$; *j)* $a^4x^2+a^3x^4$.

105. *a)* a^n+a^{n+1}; *b)* $x^{k+n}-x^k$;

c) $a^{3k}-a^{2k}$; *d)* $5a^{k+2}-10a^2$.

106. Mely x értékekre

1. pozitív; 2. nulla; 3. negatív

a következő kifejezések helyettesítési értéke?

a) x^2+2x; *b)* $2x^2-6x$; *c)* $12x-3x^2$.

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

107. *a)* $ax+bx+cx$; *b)* a^3-2a^2-a;

c) $5x^2y-10xy+5xy^2$; *d)* $-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^3$;

e) $10a^4b^3-15a^4b^2+20a^3b^4$.

108. *a)* $a(x+y)+b(x+y)$; *b)* $x(a+2)-y(a+2)$;

c) $2a(a-b)+5b(a-b)$; *d)* $3x(a+b)+2y(a+b)$;

e) $x(a-b)+y(b-a)$; *f)* $x(y-z)-a(z-y)$;
g) $2a(x-5)-3b(5-x)$; *h)* $6(x-2)+2b(2-x)$.

109. *a)* $5a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$;
b) $x(a^2+b^2)-3y(a^2+b^2)-2z(a^2+b^2)$;
c) $a(x-2)+b(2-x)+c(x-2)$;
d) $a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$.

Szorzattá alakítás csoportosítással

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

110. *a)* $3a(x+y)+x+y$; *b)* $3b(x-y)+x-y$;
c) $2a(x+y)-x-y$; *d)* $4x(a-b)-a+b$;
e) $b(a+b)-ax-bx$; *f)* $2y(x-y)-ax+ay$.

111. *a)* $ax+ay+bx+by$; *b)* $ax-ay+bx-by$;
c) $a^2+ab+ac+bc$; *d)* x^3+3x^2+3x+9;
e) $x^2-xy-2x+2y$.

112. *a)* $3ax-4by-4ay+3bx$;
b) $5bx-6ax-5by+6ay$;
c) $10a^2+21xy-14ax-15ay$;
d) $12a^2-6ab+3b^2-6ab$;
e) $x+x^2-x^3-x^4$.

113. *a)* x^2+5x+6; *b)* x^2-6x+8;
c) x^2-x-12; *d)* $a^2-2a-15$.

114. Számítsuk ki – szorzattá alakítás után – az $x^2-11x+10$ kifejezés helyettesítési értékeit, ha $x=0$; 1; 2; 3; 4; 5; 5,5; 6; 7; 8.

115. A változó mely értékeire
nagyobb nullánál; kisebb nullánál; nulla
a következő polinomok helyettesítési értéke?
a) x^2+4x+3; *b)* $x^2+7x+10$; *c)* $x^2+7x-30$;
d) $2x^2-4x-6$; *e)* $-x^2+6x-8$; *f)* $-x^2+2x+3$.

Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

116. *a)* a^2-b^2; *b)* x^2-y^2; *c)* k^2-1^2;
d) a^2-4; *e)* a^2-9; *f)* $25-x^2$;

g) a^2-1; *h)* $1-x^2$; *i)* $4a^2-9$;
j) a^2-9b^2; *k)* $\frac{1}{4}a^2-b^2$; *l)* $y^2-\frac{1}{16}x^2$;
m) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$; *n)* $4x^2-\frac{1}{25}y^2$; *o)* $\frac{64}{81}a^2-\frac{9}{64}b^2$.

117. *a)* a^2b^2-9; *b)* $16-x^2y^2$; *c)* $\frac{1}{16}x^2y^2-25$;
d) $a^2x^2-\frac{b^2}{4}$; *e)* $\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{25}y^2$; *f)* $1-0{,}01a^2$.

118. *a)* $4a^4-9$; *b)* $4-a^4b^4$; *c)* $a^2-x^2y^2$;
d) x^2-y^4; *e)* $16a^4-9b^2$; *f)* $36a^4-49b^6$.

119. A változó mely értékeire
pozitív; negatív; nulla
a következő különbségek értéke?
a) a^2-9; *b)* $25-b^2$; *c)* $1-a^2$; *d)* $\frac{1}{25}-x^2$.

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

120. *a)* $(x+3y)^2-z^2$; *b)* $(3a+2b)^2-9c^2$;
c) $(x+y)^2-9y^2z^4$; *d)* $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$;
e) $(x+1)^2-\frac{1}{4}x^2$; *f)* $(a-b)^2-0{,}04a^2$.

121. *a)* $a^2-(2b+c)^2$; *b)* $9a^2-(x-y)^2$;
c) $0{,}25x^2-(1{,}2a+b)^2$; *d)* $1-(2a-3b)^2$.

122. *a)* $1-(a^2+b^2)^2$; *b)* $x^4y^2-(x-y)^2$;
c) $(a+2b)^2-(c+3d)^2$; *d)* $(1+x)^2-(y-z)^2$.

123. *a)* $4(x+y)^2-z^2$; *b)* $25(a-b)^2-16$;
c) $\frac{4}{9}(x-y)^2-81$; *d)* $\frac{16}{49}(a+b)^2-25$.

124. *a)* $4(a-b)^2-(a+b)^2$; *b)* $(3a-2b)^2-(a+b)^2$;
c) $(b+5c)^2-9(b-c)^2$; *d)* $(x-2y)^2-4(x+y)^2$;
e) $16(x-y)^2-25(x+y)^2$; *f)* $4(3x+5y)^2-16(2x-y)^2$.

125. *a)* $a^2+2ab+b^2$; *b)* x^2+y^2-2xy;
c) a^2-6a+9; *d)* x^2-2x+1;

e) $4a^2+4a+1$; *f)* $9x^2-6x+1$;
g) $-a^2-2a-1$; *h)* $a^4+2a^2b+b^2$;
i) $25y^4-10y^2x+x^2$; *j)* $-x^4+2zx^2-z^2$;
k) $9a^4+6a^2b^2+b^4$; *l)* $25x^4-10x^2y^2+y^4$.

126. *a)* x^3+y^3; *b)* x^3-y^3; *c)* p^3+q^3; *d)* a^3+8;
e) x^3-1; *f)* y^3+1; *g)* a^3+27; *h)* $1-p^3$;
i) $1+8b^3$; *j)* $27x^3-8y^3$.

127. *a)* $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
b) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$;
c) $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3$;
d) $b^3-6b^2c+12bc^2-8c^3$.

128. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos páros szám négyzetének különbsége osztható 4-gyel.

129. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal.

Tényezőkre bontás különböző módszerek alkalmazásával

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

130. *a)* $3a^2-3b^2$; *b)* $5p^2-5$;
c) x^3-x^2; *d)* a^3b-ab^3;
e) $5a^2-20b^2$; *f)* $x^4y^2-x^2y^4$.

131. *a)* $2x^2+4xy+2y^2$; *b)* $3a^2-6a+3$;
c) $3xy^2+6xy+3x$; *d)* $2a-4ab+2ab^2$;
e) $4ax-8ax^2+4ax^3$; *f)* $4x^2-4xz-3x+3z$.

132. *a)* $a^2-2ab+b^2-c^2$; *b)* $x^2-2xy+y^2-4$;
c) $9-x^2+2xy-y^2$; *d)* $1-p^2-2pq-q^2$;
e) $4a^2-20ab+25b^2-16$; *f)* $25x^2-4a^2+12ab-9b^2$.

133. *a)* a^2-b^2-a-b; *b)* x^2-y^2+x+y;
c) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$; *d)* $a^2+2ab+b^2-ac-bc$;
e) $x^5-x^3+x^2-1$; *f)* a^3-8+6a^2-12a;
g) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$; *h)* $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

134. *a)* a^4-b^4; *b)* a^6-b^6;
c) $(a+b)^3-(a-b)^3$; *d)* $a^6-a^4+2a^3+2a^2$.

***135.** *a)* a^4+a^2+1; *b)* a^8+a^4+1;

c) $x^3+6x^2+11x+6$; *d)* $2x^3+x^2-4x+12$;
e) $x^3+8x^2+17x+10$; *f)* $x^4+x^3+6x^2+5x+5$;
g) $x^4-12x^3+47x^2-60x$; *h)* $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

***136.** Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:
a) $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$;
b) $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$;
c) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

***137.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x+y+z=0$, akkor

$$x^3+x^2z+y^2z-xyz+y^3=0.$$

3 Algebrai törtek

Az algebrai tört fogalma, egyszerűsítése

138. Az ismeretlenek mely értékeire lesz nulla a következő törtek helyettesítési értéke?

a) $\frac{x}{y}$; *b)* $\frac{x+2}{x}$; *c)* $\frac{a-5}{b}$;
d) $\frac{x(x+2)}{x+3}$; *e)* $\frac{a(b-2)}{b-3}$; *f)* $\frac{5x^2-x}{2y}$;
g) $\frac{a^2-4}{a+3}$; *h)* $\frac{6q^2+3q}{5q+1}$; *i)* $\frac{(a+b)^2}{2a}$;
j) $\frac{(a-b)^3}{a+b}$; *k)* $\frac{a+2b}{a+5}$.

139. Az ismeretlenek mely értékeinél nem értelmezhetők a következő törtek?

a) $\frac{5}{x-1}$; *b)* $\frac{3}{2x}$; *c)* $\frac{a}{a-3}$;
d) $\frac{x-2}{x}$; *e)* $\frac{x-3}{x+3}$; *f)* $\frac{a+3}{a^2}$;

g) $\frac{b}{b^2+3}$; h) $\frac{b-2}{b^2-4}$; i) $\frac{a+2}{a(a-2)}$;

j) $\frac{x-a}{x+a}$; k) $\frac{a+2}{(a-3)(a+1)}$; l) $\frac{x-a}{(x+a)(x-3a)}$;

m) $\frac{x-a}{x^2+a^2}$.

140. Hogyan változik a következő kifejezések értéke, ha az a és b értékét ötszörösére növeljük?

a) $\frac{a}{b}$; b) $\frac{a-b}{a}$; c) $\frac{a-b}{a+b}$;

d) $\frac{a^3}{b^2}$; e) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; f) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

141. Megváltozik-e a következő kifejezések előjele, ha a változók helyére azok (-1)-szeresét helyettesítjük?

a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{5}{x^2}$; c) $\frac{7}{x^3}$;

d) $\frac{x^2+2}{x}$; e) $\frac{a}{a^2+3}$; f) $\frac{a^2}{a^2+2}$;

g) $\frac{x^2+5}{x^2+2}$; h) $\frac{a^3}{a^6+1}$; i) $\frac{a^2+a^4}{a^3-a}$.

142. Egyszerűsítsük a következő törteket. Változik-e a törtek értelmezési tartománya?

a) $\frac{6a}{9b}$; b) $\frac{-2a}{4b}$; c) $\frac{ab}{ac}$;

d) $\frac{5ax^2}{10a}$; e) $\frac{12ab^3}{4ab}$; f) $\frac{8ax}{12ay}$;

g) $\frac{5ax}{-5ax^2}$; h) $\frac{2axy}{3ay}$; i) $\frac{12a^3}{4a^2b}$;

j) $\frac{6a^3b^5}{2a^2b}$; k) $\frac{12x^2y^3z}{16xy^2z^3}$; l) $\frac{3(x+y)^2}{x+y}$;

m) $\frac{x^2-y^2}{x-y}$; n) $\frac{5a}{5a+15b}$; o) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$;

p) $\frac{5x(y+3)}{6y+18}$; r) $\frac{x-y}{y-x}$; s) $\frac{a(x-a)}{b(a-x)}$;

t) $\frac{7xy^3(2a-3b)}{14xy(3b-2a)}$; u) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$; v) $\frac{2ac-4bc}{a^3c-4acb^2}$.

143. Egyszerűsítsük a következő törtkifejezéseket a változók megengedett értékei mellett:

a) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$; b) $\frac{x+2}{x^2-4}$; c) $\frac{3a^2-3}{7a+7}$;

d) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$; e) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; f) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$;

g) $\frac{3a^2-3b^2}{2a^2-4ab+2b^2}$; h) $\frac{9x^2+18xy+9y^2}{12x^2-12y^2}$; i) $\frac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}$;

j) $\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; k) $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$; l) $\frac{3a+6}{a^3+8}$;

m) $\frac{4x^3y+4xy^3}{x^4-y^4}$; n) $\frac{a^2+2ab+b^2}{3a^4-3b^4}$; o) $\frac{25a^2-25b^2}{(5a-5b)^2}$;

p) $\frac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}$; q) $\frac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ax-cx}$; r) $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$;

s) $\frac{(x+y)^2-a^2}{x+y+a}$; sz) $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$; t) $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$;

u) $\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}$; v) $\frac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$; w) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$;

*x) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; *y) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$; *z) $\frac{x^4-x^3-4x^2+4x}{2x-x^2}$.

144. A változók milyen értékeire teljesülnek a következő egyenlőségek?

a) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{x+c}{2x+y}$; b) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\frac{x+z}{(1-y)^2}$;

c) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{1}{3a^2-b^2}$.

145. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$, ha $a=113$ és $b=6$;

b) $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^2+3ab+2b^2}$, ha $a=57$ és $b=24$.

146. Milyen n pozitív egész számra lesz a következő törtkifejezések értéke is pozitív egész szám?

a) $\dfrac{5n^2+20}{n}$; *b)* $\dfrac{5n^2+8n+12}{n}$; *c)* $\dfrac{(n-3)^3}{n}$.

Az algebrai törtek összevonása

147. Végezzük el a következő összeadásokat és kivonásokat a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}$; *b)* $\dfrac{a}{4}-\dfrac{a}{6}$; *c)* $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}$;

d) $\dfrac{3x-2}{5}+\dfrac{2x+3}{3}$; *e)* $\dfrac{2a+5}{4}-\dfrac{2a-3}{5}$;

f) $\dfrac{2c+7}{a}-\dfrac{7}{a}$; *g)* $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x-3}{4}$;

h) $\dfrac{5a+2b}{8b}-\dfrac{5a-3b}{8b}$; *i)* $\dfrac{3x-2y}{2x}+\dfrac{5x-3y}{2x}-\dfrac{x-4y}{2x}$;

j) $\dfrac{a+b}{a+x}-\dfrac{a-b}{a+x}$; *k)* $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{1-x}$;

l) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a+2b}{b-a}$; *m)* $\dfrac{a}{x-y}-\dfrac{b}{y-x}+\dfrac{c}{x-y}$;

n) $\dfrac{x}{ab}+\dfrac{x}{ac}$; *ny)* $\dfrac{2a-3b}{a}+\dfrac{4a^2-5b^2}{ab}$;

o) $\dfrac{5x}{ab}+\dfrac{2y}{3a^2b}-\dfrac{3}{6a^2y^2}$; *p)* $\dfrac{5a}{6b^2c}+\dfrac{11c}{18a^2b}-\dfrac{7b}{12ac^2}$;

q) $\dfrac{2a-3b}{a^2b}-\dfrac{4a-5b}{ab^2}$; *r)* $\dfrac{5x^2-2x-1}{x^2y}-\dfrac{3x-2}{xy}$;

s) $2a-\dfrac{a-b}{5}$; *sz)* $a+\dfrac{a-ab}{b}$;

t) $\dfrac{3}{a-1}+\dfrac{2}{a}$; *ty)* $\dfrac{2x}{3(x-1)}+\dfrac{5x}{x-1}$;

u) $\dfrac{2a^2}{3(a+1)}+\dfrac{5a^2}{3(a+1)}$; *ü)* $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$;

v) $\dfrac{1}{3x+y}+\dfrac{2}{3x-y}$; *w)* $\dfrac{2a}{5a+5b}+\dfrac{3a}{5a-5b}$;

x) $\dfrac{5b}{ax+ay}-\dfrac{2a}{bx+by}$; *y)* $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a}{b-a}$;

z) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{2x^2-2}$; *zs)* $\dfrac{7a-1}{2a^2+6a}+\dfrac{5-3a}{a^2-9}$.

148. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{3}{2a+6}-\dfrac{a-2}{a^2+6a+9}$; *b)* $\dfrac{5+b}{b^2-8b+16}+\dfrac{6}{5b-20}$;

c) $\dfrac{5}{2x-4}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$; *d)* $\dfrac{5}{2a^2+6a}-\dfrac{4-3a^2}{a^2-9}-3$;

e) $\dfrac{7}{8a^2-18b^2}+\dfrac{1}{2a^2+3ab}-\dfrac{1}{4ab-6b^2}$;

f) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}$;

g) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{x-2}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{2x+6}$;

h) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3x}{(x-1)^2}$; *i)* $\dfrac{7}{a}-\dfrac{4}{a-2b}-\dfrac{a-b}{4b^2-a^2}$;

j) $\dfrac{3x+2}{x^2-2x+1}-\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$;

k) $\dfrac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}+\dfrac{6}{1-a}$;

l) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$;

m) $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}$; *n)* $\dfrac{x^2-2ax}{a+x}+a+x$;

**o)* $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$;

*p) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

*q) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$;

*r) $\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} + \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}$.

149. Milyen a és b érték mellett állnak fenn a következő egyenlőségek?

a) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} - \frac{b}{x+3}$;

b) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} - \frac{b}{x+2}$.

150. Milyen a értékre lesznek egyenlők az A-val, illetve B-vel jelölt kifejezések?

a) $A = \frac{2x}{x+3}$; $B = \frac{a}{x+3} + 2$;

b) $A = \frac{2x}{3-x}$; $B = \frac{a}{3-x} - 2$;

c) $A = \frac{x}{x-5}$; $B = \frac{a}{x-5} + 1$;

d) $A = \frac{x+2}{5-x}$; $B = \frac{a}{5-x} - 1$.

Algebrai törtek szorzása, osztása

151. Mivel kell megszorozni a következő kifejezéseket, hogy a szorzat értéke 1 legyen?

a) a; b) $\frac{a-b}{a}$; c) $\frac{a+b}{a-b}$;

d) $\frac{x+y}{2x}$; e) $x + \frac{1}{y}$; f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

152. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{a}{10} \cdot \frac{5}{a}$; b) $\frac{3a^2}{x^2} \cdot \frac{a^3}{16x^3}$;

c) $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6a^2}{7b^2} \cdot \frac{b^3}{a^3}$; d) $\frac{45a^3}{14x^2} : \left(-\frac{18a^2}{49x^4}\right)$;

e) $\left(\frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay}\right) : \frac{9b^2z}{8a^2xy}$; f) $\left(\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3}\right) \cdot \frac{14a^4}{3b^2}$;

g) $\frac{x^2-ax}{a^2} \cdot \frac{a}{x^2}$; h) $\frac{a-b}{4b^3} : \frac{a^2-ab}{8b^4}$;

i) $\frac{7}{4x^3-36x} \cdot \frac{x^2-9}{14}$; j) $\frac{x^2+xy}{x} \cdot \frac{y}{xy+y^2}$;

k) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy} : \frac{xy}{x^2y+xy^2}$; l) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2+ab}{2a^2-2b^2}$;

m) $\frac{a^2-b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$; n) $\frac{x^2-25}{x^2-3x} : \frac{x^2+5x}{x^2-9}$;

o) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a+3b}{5a-5b}$; p) $\frac{(x+y)^2}{xy-y^2} : \left(-\frac{xy+y^2}{(x-y)^2}\right)$;

q) $\frac{x^2-4y^2}{35xy} \cdot \frac{28x^2}{x^2-4xy+4y^2}$;

r) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{2x-2y}{ax^2+2axy+ay^2}$;

s) $\frac{ab^2-ac^2}{b^2+2bc+c^2} : \frac{ab^2-2abc+ac^2}{3b+3c}$; t) $\frac{a^3-8}{5a+15} \cdot \frac{7a+21}{a^2+2a+4}$;

u) $\frac{x^3+27}{8x+6} \cdot \frac{12x+9}{x^2+6x+9}$; v) $\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3} : \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

153. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1}$; b) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$;

d) $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$;

e) $\dfrac{\dfrac{2}{a}-5a}{\dfrac{3}{a}+5a}$;

f) $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}+a}{\dfrac{a}{a-1}-a}$;

g) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+a}}$;

h) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$;

i) $\dfrac{1-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-1}$;

j) $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$.

154. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

b) $\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)$;

c) $\left(\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2b}{a}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2b}-\dfrac{2b}{a}\right)^2$;

d) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\dfrac{4a^2-4}{3}$;

e) $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$;

f) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$;

g) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$;

h) $\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)^2-\left(\dfrac{3a}{b}-1\right)\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)$;

i) $\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\left(a-b-\dfrac{a^2}{a+b}\right)$;

j) $\dfrac{a^2-6a+8}{a^2+4a+3}:\dfrac{a^2-4a+4}{5a+15}$.

155. Mutassuk meg, hogy ha $a\neq 0$, $y\neq -b$

$x=\dfrac{2b^2-a^2+c^2}{3a}$ és $y=\dfrac{2a^2-b^2+c^2}{3a}$, akkor $\dfrac{x+a}{y+b}=\dfrac{b}{a}$.

156. Számítsuk ki a következő törtkifejezések helyettesítési értékét:

a) $\left(\dfrac{x+5}{2x-10}-\dfrac{x-5}{2x+10}-\dfrac{50}{25-x^2}\right)\cdot\dfrac{x-5}{5x}$, ha $x=-\dfrac{1}{4}$;

b) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}:\left(\dfrac{2xy}{y^2-x^2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}\right)$, ha $x=8{,}4$, $y=-0{,}6$;

c) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$, ha $x=-2{,}5$, $y=0{,}5$.

Műveletek algebrai törtkifejezésekkel

157. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(a+b+\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right):\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$, $a\neq\pm b$;

b) $\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right):\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}\right)$, $a\neq\pm 1$; $a\neq 0$;

c) $\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{b^2+ab}\right)$, $a\neq\pm b$;

d) $\dfrac{a+6b}{a^2-3ab}-\dfrac{9b-a}{2ab-6b^2}-\dfrac{1}{2b}$, $a\neq 0$; $b\neq 0$; $a\neq 3b$;

e) $\left(\dfrac{2a+2}{a^2+2a}+\dfrac{a}{2a+4}\right)\dfrac{2a+2}{a+2}-\dfrac{1}{a}$, $a\neq 0$; $a\neq -2$;

*f) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$,

$x\neq 0;\ x\neq -1;\ x\neq -2;\ x\neq -3;\ x\neq -4;\ x\neq -5;$

g) $\left(\frac{xy+y^2}{5x^2-5xy}+xy+y^2\right)\frac{5x}{x+y}-\frac{y}{x-y}$, $x\neq 0,\ |y|\neq|x|;$

h) $\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)(x^2-y^2)^2\cdot$

$\cdot\frac{1}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}$, $|x|\neq|y|,\quad x\neq 0.$

158. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, akkor $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

159. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$,

akkor $\frac{a^2+2bc+2ac+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{c^2}$, $abc\neq 0;\ a+b\neq 0.$

***160.** Bizonyítsuk be, hogy ha $(a+b)(b+c)=0$ és $abc\neq 0$, akkor $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

***161.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ és $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, akkor $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $abc\neq 0;\quad xyz\neq 0.$

***162.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$, $a\neq\pm b$; $a\neq\pm c$ és $b\neq\pm c$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)=9.$$

***163.** Bizonyítsuk be, hogy ha n nullától különböző természetes szám, akkor a

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)$$

kifejezés értéke is természetes szám.

4. Negatív egész kitevőjű hatványok

A negatív egész kitevőjű hatvány fogalma

164. Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) $3^{-2};\ 5^{-1};\ 2^{-4};\ 10^{-3};\ 7^{-2};$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2};\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{-3};\quad\left(\frac{2}{5}\right)^{-1};\quad 0{,}1^{-4};\quad 0{,}01^{-3};$

c) $\frac{1}{3^{-2}};\quad\frac{2}{5^{-3}};\quad\frac{3}{(0{,}1)^{-1}};\quad\frac{5}{2^{-2}};\quad\frac{0{,}02}{5^{-3}}.$

165. Állapítsuk meg, hogy a következő két-két szám közül melyik a nagyobb:

a) $\frac{7}{8}$ vagy $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{4}$ vagy $(0{,}6)^{-4}$;

b) 5^{-3} vagy 7^{-3}; $(2{,}9)^{-10}$ vagy $(3{,}1)^{-10}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ vagy $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

166. Negatív hatványkitevő alkalmazásával írjuk fel a következő kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{1}{2};\quad\frac{1}{8};\quad\frac{1}{32};\quad\frac{1}{9};\quad\frac{1}{64};$

b) $0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad 0{,}0001;\quad 0{,}00001;$

c) $\frac{3}{8};\quad\frac{2}{25};\quad\frac{7}{16};\quad 1\frac{2}{3};\quad 2{,}5;$

d) $\frac{1}{a^2};\quad-\frac{1}{b^4c^2};\quad\frac{1}{x^2y^3};\quad\frac{a+2}{(a-2)^2};\quad\frac{(b-5)^3}{b+5}.$

167. Írjuk fel olyan alakban a következő kifejezéseket – a változók lehetséges értékeinél –, hogy ne legyen bennük tört:

a) $\frac{a}{b^2}$; $\frac{2x}{a^{-3}}$; $\frac{2xy^2}{x^{-2}y^{-1}}$; $\frac{a^2b^{-3}}{cb^{-1}}$; $\frac{5a^{-2}b^{-1}}{2a^2b^{-2}}$;

b) $\frac{15x}{a^3b^{-1}c^{-3}}$; $\frac{9a^{-2}b^{-3}c}{4ab^{-1}c^{-2}}$; $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$; $\frac{xy}{x^{-n}y^k}$;

c) $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}}$.

168. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy – a változók lehetséges értékeinél –, hogy ne tartalmazzanak negatív kitevőjű hatványt:

a) $3x^{-5}$; a^0b^{-2}; $2y^{-3}$; $5a^{-3}b^3$; $2x^{-2}y^3$;

b) $2ab^{-3}c^{-2}$; $5a^{-1}b^{-2}c$; $a(b+c)^{-1}$; $(x+y)(x-y)^{-1}$;

c) $\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$; $\frac{a^{-3}}{b^{-2}}$; $\frac{3a^{-2}b^{-1}}{x^2}$; $\frac{x^{-1}yz^{-2}}{a^{-3}bc^{-4}}$; $\frac{a^{-2}b^3}{c^{-3}b^{-2}}$;

d) $\left(\frac{a}{x^2}\right)^{-1}$; $\left(\frac{2a}{3x}\right)^{-2}$; $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$; $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}$;

$\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1}$;

e) $a^{-2}+b^{-2}$; $2x^{-1}-xy^{-2}$; $a^3x^{-5}+a^{-2}x^3-2a^{-4}x^{-3}$;

f) $(a+b^{-1})(a^{-1}-b)$; $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$.

169. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $0{,}2a^{-2}b^4 5a^3b^{-3}$, ha $a=-0{,}125$ és $b=8$;

b) $\frac{x^{-2}y}{2x^{-5}y^{-2}}$, ha $x=\frac{1}{4}$ és $y=-8$.

Műveletek negatív egész kitevőjű hatványokkal

170. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) x^2x^{-3}; $a^{-2}a^{-3}$; $a^{-2}a^3$; a^0a^{-1}; x^3x^{-3};

b) $a^{-2}a^3a^{-4}$; $x^3x^{-2}x^{-4}$; $y^2y^{-2}y^{-1}$; $2xx^{-2}x^{-3}$;

c) $(x+x^{-1}+x^{-2})2x^2$; *d)* $(2x^2+3x^{-1}+x^{-2})x^{-2}$;

e) $(x^{-2}+y^{-2})2x^{-1}y$; *f)* $(a^{-1}+b^{-1})5a^{-1}b^{-1}$;

g) $(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})$; *h)* $(a^{-2}+b^{-1})(a^{-2}-b^{-1})$;

i) $(x^2+xy)(x^2-y^2)^{-1}(xy-y^2)$; *j)* $(a+1)(a^2-1)^{-1}a^3$;

k) $(x^{-2})^3$; $(x^3)^{-2}$; $(a^{-4})^{-2}$; $(2a^{-1})^{-2}$; $\left(\frac{1}{3}a^{-1}b^{-2}\right)^2$;

l) $(0{,}1a^{-2}b)^{-3}$; $(-0{,}2a^{-1}b^{-2})^{-1}$; $(3x^{-2}y^{-1})^{-2}$;

m) $\left(\frac{a^{-2}}{b^2}\right)^{-1}$; $\left(\frac{a^2b^{-3}}{c^{-2}}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2x^2y}{a^{-2}b}\right)^{-3}$; $\left(\frac{0{,}1a^{-1}b^{-2}}{x^{-2}y^{-1}}\right)^{-1}$;

n) $(a^{-1}+b^{-1})^2$; *o)* $(a^{-2}-b^{-1})^2$; *p)* $(a^{-1}+b^{-1})^{-2}$;

q) $x^{-2}:x^2$; $x^{-2}:x^{-3}$; $a^{-3}:a^{-3}$; $a^{-3}:a^{-2}$;

r) $(x^2+x+x^{-1}+x^{-2}):x^{-1}$;

s) $(a^3b^{-3}-3ab^{-1}+3a^{-1}b-a^{-3}b^3):a^2b^{-2}$;

t) $(x^{-1}+y^{-1})^{-2}:(x+y)^{-2}$; *u)* $(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})$;

v) $ab(a^{-1}+b^{-1})(b^2-a^2)^{-1}$; *x)* $(x^{-2}-a^{-2})(a^{-1}-x^{-1})^{-1}$;

y) $(b+b^{-2})[(b^2+1)b^{-2}-b^{-1}]^{-1}$; *z)* $(ab^{-1}-a^{-1}b)(a^{-1}-b^{-1})^{-1}$.

171. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, és számítsuk ki a helyettesítési értékeket:

a) $\left(1+\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}$, ha $a=3$; $b=\frac{3}{4}$;

b) $(a+b)^{-2}(a^{-1}+b^{-1})+2(a-b)^{-2}(b^{-2}-a^{-2})$, ha $a=2$; $b=-1$.

A számok normálalakja

172. Írjuk fel a következő számok normálalakját:

135; 895; 1618; 15,3; 142,13; 0,5; 5000;
7 000 000; 1 001 000; 0,0012; 0,000 036; 0,005 200.

173. Írjuk le helyiértékes számírással a következő számokat:

10^3; 10^4; 10^5; 10^{-1}; 10^{-2}; $2\cdot10^3$; $1{,}2\cdot10^4$; $2{,}5\cdot10^{-2}$.

174. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $36\,000\cdot0{,}000\,000\,52$; $0{,}0031\cdot0{,}000\,14$;

b) $0{,}000\,000\,86:0{,}000\,21$; $42\,000:0{,}007$; $0{,}000\,138:24\,000$;

c) $12\,000^2$; $0{,}0005^4$; $1\,280\,000^2$; $0{,}000\,11^3$.

175. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $1{,}6\cdot10^{-5}\cdot2{,}5\cdot10^7$; $1{,}25\cdot10^4\cdot3{,}2\cdot10^{-3}$;

b) $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}$;

c) $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^3}$; $\dfrac{1{,}45 \cdot 10^4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}}{5{,}4 \cdot 10^{-5}}$;

d) $\dfrac{7{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-3}}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-5}}$; $\dfrac{6{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 4{,}05 \cdot 10^{-2}}{3{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}3 \cdot 10^{-4}}$;

e) $3 \cdot 10^{-2} + 4{,}1 \cdot 10^{-3}$; $7{,}83 \cdot 10^5 + 3{,}91 \cdot 10^7$;

f) $4{,}0856 \cdot 10^3 + 9{,}98 \cdot 10^{-1}$; $2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-1} + 4{,}2 \cdot 10^{-5}$.

5. A négyzetgyök

A négyzetgyök fogalma

176. Számítsuk ki:

a) $\sqrt{196}$; $\sqrt{1986}$; $\sqrt{8650}$; $\sqrt{10\,500}$;

b) $\sqrt{15{,}45}$; $\sqrt{121{,}5}$; $\sqrt{94{,}06}$; $\sqrt{267{,}5}$;

c) $\sqrt{6304{,}36}$; $\sqrt{0{,}831\,744}$; $\sqrt{518\,400}$; $\sqrt{802\,816}$;

d) $\sqrt{\dfrac{289}{1024}}$; $\sqrt{\dfrac{121}{14\,641}}$; $\sqrt{1\dfrac{31}{225}}$; $\sqrt{6\dfrac{235}{361}}$.

177. Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\sqrt{x+1}$; $\sqrt{x+3}$; *b)* $\sqrt{x+2}-3$; $\sqrt{2x+1}$;

c) $\sqrt{2x-1}+2$; $\sqrt{4x+2}$; *d)* $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{(x-1)^2}$;

e) $\sqrt{-x^2}$; $\sqrt{-(x-1)^2}$; *f)* $\sqrt{1+x^2}$; $\sqrt{1-x^2}$;

g) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$; *h)* $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$; $\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x-1}}$;

i) $\sqrt{-4-x^2}$; $\sqrt{-1+2x-x^2}$; *j)* $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$; $\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}}$

k) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$; $\sqrt{\dfrac{x-2}{2-x}}$; *l)* $\sqrt{\dfrac{ax+b}{a}}$; $\sqrt{\dfrac{ax+5}{a+2}}$.

178. Írjuk fel a négyzetgyök jele nélkül a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{(a-1)^2}$; *b)* $\sqrt{(b+2)^2}$;

c) $\sqrt{x^2+2x+1}$; *d)* $\sqrt{4y^2-4y+1}$;

e) $\sqrt{(x-4)^2}$, ha $x \geqq 4$; *f)* $\sqrt{(7+x)^2}$, ha $x < -7$;

g) $\sqrt{(a-2)^2}$, ha $a < 2$; *h)* $\sqrt{(3-a)^2}$, ha $a \geqq 3$.

179. A változók mely értékeire áll fenn az egyenlőség:

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$; *b)* $\sqrt{a^2-6a+9} = 3-a$;

c) $\sqrt{4a^2+4a+1} = 1+2a$; *d)* $\sqrt{x^4+2x^2+1} = x^2+1$;

e) $\sqrt{x^2-4x+4} = |2-x|$; *f)* $\sqrt{x^2+2x+1}+x-1 = 2x$?

180. Melyik állítás igaz, ha $a > b > 0$?

a) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a+\sqrt{b^2} = 2a$;

b) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a+\sqrt{b^2} = 2b$.

Négyzetgyökvonás egytagú kifejezésekből

181. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{100 \cdot 49}$; $\sqrt{81 \cdot 400}$; $\sqrt{121 \cdot 64}$;

b) $\sqrt{121 \cdot 0{,}49}$; $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}16}$; $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{25}{81} \cdot \dfrac{16}{49}}$; $\sqrt{\dfrac{64}{225} \cdot \dfrac{1}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{25}{16}}$;

d) $\sqrt{810 \cdot 40}$; $\sqrt{75 \cdot 48}$; $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$;

e) $\sqrt{72 \cdot 32}$; $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

f) $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{6^2}$;

g) $\sqrt{(-5)^4}$; $\sqrt{1{,}05^6}$; $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^4}$.

182. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{a^2}$; *b)* $\sqrt{b^2}$; *c)* $\sqrt{c^4}$;

d) $\sqrt{y^6}$; *e)* $\sqrt{x^{10}}$; *f)* $\sqrt{(-a)^2}$;

g) $\sqrt{9a^2}$, ha $a \geqq 0$; *h)* $\sqrt{25c^4}$, ha $c > 0$;

i) $\sqrt{0{,}36b^2}$, ha $b < 0$; *j)* $\sqrt{81y^{10}}$, ha $y < 0$;

k) $\sqrt{a^2c^2}$, ha $a > 0$ és $c > 0$; *l)* $\sqrt{\dfrac{a^6b^4}{9}}$, ha $a < 0$ és $b < 0$;

m) $\sqrt{a^8b^2c^4}$;
o) $\sqrt{9(a+b)^2}$;
q) $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{81c^2d^6}}$;
s) $\sqrt{\frac{3a^3b}{27ab^3}}$;
u) $\sqrt{\frac{25(a-b)^2}{(x+y)^4}}$;
x) $\sqrt{\frac{16a^2b^{2n}}{25x^2y^2}}$;
n) $\sqrt{a^2b^6c^{12}}$;
p) $\sqrt{2{,}89(x+y)^4}$;
r) $\sqrt{\frac{64a^8b^4}{225x^6y^4}}$;
t) $\sqrt{\frac{0{,}1a^7b^{11}}{10a^5b^7}}$;
v) $\sqrt{\frac{16(x+y)^3}{64(x+y)^7}}$;
y) $\sqrt{\frac{0{,}25x^{4n}y^2}{a^2b^2}}$.

Négyzetgyökös kifejezések átalakításai

183. Hozzuk ki a négyzetgyökjel elé a következő számokból a lehető legnagyobb természetes számot:
a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{108}$;
b) $\sqrt{3{,}36}$; $\sqrt{0{,}0018}$.

184. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:
(Emeljük ki a négyzetgyökjel elé, amit lehet.)
a) $\sqrt{x^2y}$, ha $x>0$, $y>0$, és ha $x<0$, $y>0$;
b) $\sqrt{xy^3}$, ha $x>0$, $y>0$, és ha $x<0$, $y<0$;
c) $\sqrt{9a^2b}$, ha $a<0$, $b>0$;
d) $\sqrt{25a^2b^3}$, ha $a>0$, $b>0$;
e) $\sqrt{144a^3b^3}$, ha $a<0$, $b<0$;
f) $\sqrt{32a^4b^3}$, ha $a<0$, $b>0$;
g) $\sqrt{75a^3b^6}$, ha $a>0$, $b<0$;
h) $\sqrt{8a^5b^7}$, ha $a<0$, $b<0$.

185. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, figyelembe véve a változók lehetséges értékeit:
a) $\sqrt{36a}$; $\sqrt{x^5}$;
b) $\sqrt{8a^4}$; $\sqrt{72a^3}$;
c) $\sqrt{0{,}25a^7}$; $\sqrt{25a^4b}$;

d) $\sqrt{0{,}16a^3b^3c^6}$; $\sqrt{1{,}44a^7b^8c^9}$;
e) $\sqrt{9{,}72a^3b^2c^3}$; $3\sqrt{16x^2yz^3}$;
f) $\frac{9a^2}{b}\sqrt{128b^3c^5}$; $\frac{3}{2}b\sqrt{\frac{8}{27}b^4c^3}$;
g) $\sqrt{\frac{a^2b}{9}}$; $\sqrt{\frac{25a^3b^2}{9}}$;
h) $\sqrt{\frac{32a^9b^8}{63c^2}}$; $\sqrt{\frac{3a}{27a^3b}}$;
i) $\sqrt{3(a+1)^2}$; $\sqrt{27(a-2)^3}$;
j) $\sqrt{x^3-x^2}$; $\sqrt{16a^3-32a^2}$;
k) $\sqrt{48a^5-96a^4}$; $\sqrt{x^2+2x+1}$;
l) $\sqrt{2a^2+12ab+18b^2}$; $\sqrt{18x^2y-9y^2-9x^4}$;
m) $\sqrt{a^3+3ab^2-3a^2b-b^3}$; $\sqrt{16(x^3-2x^2y+xy^2)}$;
n) $\sqrt{\frac{5(a+b)^2}{16}}$; $\sqrt{\frac{96(a-b)^3}{121}}$;
o) $\sqrt{\frac{3x^3-3x^2y}{3(x-y)^3}}$; $\sqrt{\frac{16a^4-96a^3}{98a^3-49a^2}}$;
p) $\sqrt{\frac{x^4y^2+x^4z^2}{y^4z^2+z^2x^4}}$; $\sqrt{\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}}$.

186. A négyzetgyökvonás elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy melyik szám nagyobb a következő két-két szám közül:
a) $3\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{20}$;
b) $\sqrt{80}$ vagy $4\sqrt{5}$;
c) $4\sqrt{8}$ vagy $8\sqrt{2}$;
d) $4\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{45}$;
e) $3\sqrt{2}$ vagy $5\sqrt{0{,}5}$;
f) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ vagy $\frac{1}{5}\sqrt{150}$.

187. Négyzetgyökjel alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:
a) $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $1{,}2\sqrt{2}$; $0{,}1\sqrt{10}$;
b) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$; $7\sqrt{\frac{2}{7}}$; $5\sqrt{\frac{3}{7}}$; $9\sqrt{\frac{4}{3}}$; $15\sqrt{\frac{7}{30}}$;

c) $3\sqrt{x}$; $5\sqrt{a}$; $7\sqrt{b}$; $x\sqrt{2}$; $a^2\sqrt{3}$;

d) $a\sqrt{a}$; $b\sqrt{b^2}$; $x^2\sqrt{x}$; $a^3\sqrt{a}$; $x\sqrt{x^3}$;

e) $2a\sqrt{ab}$; $2x^2\sqrt{3xy}$; $3a^2\sqrt{2ab}$; $11x\sqrt{2x^3y}$;

f) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; $x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$;

g) $a\sqrt{1-\frac{1}{a}}$; h) $x\sqrt{1+\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}$; i) $2b\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2}}$;

j) $\frac{5}{7}a\sqrt{\frac{1}{5a}-\frac{1}{12a}}$; k) $(x+y)\sqrt{\frac{2}{x+y}}$; l) $(x-y)\sqrt{\frac{2}{x^2-y^2}}$;

m) $\frac{1}{1-a}\sqrt{\frac{1-3a+3a^2-a^3}{b+c}}$; n) $\frac{1}{a^2-1}\sqrt{a^3-a^2-a+1}$;

o) $(x+2)\sqrt{\frac{2}{x^2+5x+6}}$.

Négyzetgyökös kifejezések összevonása

188. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$; b) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$;

c) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$; d) $5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{48}$;

e) $\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{45}$; f) $3\sqrt{32}-\sqrt{50}+2\sqrt{18}+3\sqrt{8}$;

g) $0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$;

h) $5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{5}$.

189. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $5\sqrt{4a}+4\sqrt{a}-8\sqrt{2a}-6\sqrt{9a}$; b) $8\sqrt{\frac{x}{4}}+4\sqrt{8x+1}$;

c) $3\sqrt{8a}-\sqrt{18a}-5\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{50a}-\sqrt{32a}+\sqrt{72a}+3\sqrt{\frac{a}{2}}$;

d) $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$, ha $a\geqq 0$ és $b\geqq 0$;

e) $4a\sqrt{\frac{b}{a^3}}+\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a}}-3b\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$, ha $a>0$ és $b>0$.

190. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{4x^2-4y^2}+\sqrt{(x+y)^2}-5\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{9x^2-9y^2}-\sqrt{(x-y)^2}$, ha $|x|\geqq|y|$;

b) $\sqrt{2a^2-4a+2}-\sqrt{4b^2-8b+4}+\sqrt{2a^2+4a+2}+\sqrt{9b^2-18b+9}$, ha $a, b\in\mathbf{R}$;

c) $\sqrt{9a^2-9b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-3\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$, ha $|a|\geqq|b|$;

d) $\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\sqrt{a^4-a^6}-(1+a)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$, ha $-1<a\leqq 1$;

e) $\sqrt{\frac{18a}{a^2-2ab+b^2}}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{8a^3}{a^4-2a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{450a}{a^2+2ab+b^2}}$, ha $a\geqq 0$, $b\in\mathbf{R}$ $|a|\neq|b|$;

f) $\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}-2a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}+3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}$, ha $a>x>0$.

Négyzetgyökös kifejezések szorzása

191. Írjuk fel egyszerűbb alakban a következő szorzatokat:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}$;

b) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{20}$; $\sqrt{50}\cdot\sqrt{125}$; $\sqrt{20}\cdot\sqrt{72}$; $\sqrt{15}\cdot\sqrt{32}$; $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$; $\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}$; $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; $\sqrt{16{,}9}\cdot\sqrt{10}$; $\sqrt{48}\cdot\sqrt{27}$;

d) $5\sqrt{8}\cdot 3\sqrt{2}$; $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$; $\frac{3}{4}\sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}$; $11\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{13{,}31}$.

192. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{18a}$; $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{50x}$; $\sqrt{8a}\cdot\sqrt{18a}$; $\sqrt{20a^3}\cdot\sqrt{45a^3}$;

b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$; $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab^2}$; $\sqrt{5x^2y}\cdot\sqrt{4xy^2}$;

c) $6\sqrt{5x}\cdot 0{,}4\sqrt{5x}$; d) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{15b}\cdot\sqrt{75ab}$;

e) $3\sqrt{x}\cdot 2x\sqrt{\frac{a}{x}}$; f) $\frac{13}{12}\sqrt{\frac{8(x+y)}{13(x-y)}}\cdot\sqrt{\frac{18}{13}\,\frac{x-y}{x+y}}$;

g) $\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}}\,\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$;

*h) $\sqrt{\frac{7a^2+7b^2}{a^3-ab^2}}\,\sqrt{\frac{a^6-b^6-3a^2b^2(a^2-b^2)}{28a(a^2+b^2)}}$.

193. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(\sqrt{2}+3\sqrt{18}+9\sqrt{50})\sqrt{2}$; b) $(\sqrt{108}+\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75})\sqrt{3}$;

c) $(4\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98})2\sqrt{2}$; d) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$;

e) $(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})$; f) $(\sqrt{32}-\sqrt{12})(\sqrt{32}+\sqrt{12})$;

g) $(4\sqrt{3}+\sqrt{54})(3\sqrt{6}-4\sqrt{3})$; h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{18}-\sqrt{3})$;

i) $(3\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{20}+3\sqrt{12})$; j) $(3\sqrt{2}-3\sqrt{2})(3\sqrt{8}+8\sqrt{3})$;

k) $(\sqrt{125}+\sqrt{175}+\sqrt{245}+\sqrt{343})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$;

l) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$;

m) $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})$; n) $(\sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{8}-\sqrt{2})$;

o) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\,\sqrt{7-\sqrt{13}}$; p) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\,\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;

r) $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}\,\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}$;

*s) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

t) $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}$.

194. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket:

a) $(\sqrt{3}+a)(\sqrt{3}-a)$; b) $(3\sqrt{a}+b)(3\sqrt{a}-b)$;

c) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$; d) $(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})$;

e) $(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})$; f) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$;

g) $(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})$;

h) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

i) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}+1+\sqrt{\frac{a}{b}}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}+1-\sqrt{\frac{a}{b}}}\right)$;

j) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\,\sqrt{a-\sqrt{b}}$;

k) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\,\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}$;

l) $\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\,\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$;

m) $\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}\,\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}$.

195. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket.

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$;

b) $(3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}-\sqrt{x})(3\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}-\sqrt{x})$;

c) $(\sqrt{a^3b^3}+a\sqrt{b}+\sqrt{ab^2}+1)(\sqrt{ab}-1)$;

d) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a^2+ab+b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

196. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $2a\sqrt{a}+9-(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)$, ha $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)-(\sqrt{a}-3)(a+3\sqrt{a}+9)$, ha $\sqrt{a}=\frac{1}{4}$.

III.

Négyzetgyökös kifejezések osztása

197. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $12\sqrt{2}:4$; $15\sqrt{5}:5$; $132\sqrt{7}:12$;

b) $6\sqrt{5}:2\sqrt{5}$; $\sqrt{10}:\sqrt{5}$; $2\sqrt{15}:\sqrt{5}$;

c) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{\frac{5}{7}}}{\sqrt{\frac{7}{15}}}$;

d) $(\sqrt{12}+\sqrt{27}):\sqrt{3}$; $(6\sqrt{63}-2\sqrt{175}):2\sqrt{7}$;

e) $(5\sqrt{48}-10\sqrt{27}+15\sqrt{12}):5\sqrt{3}$.

198. Alakítsuk szorzattá a következő összegeket:

a) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; $\sqrt{42}-\sqrt{3}$; $\sqrt{21}+\sqrt{28}$;

b) $\sqrt{40}-\sqrt{30}+\sqrt{20}$.

199. Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{\sqrt{35}+\sqrt{14}}$; *b)* $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$;

c) $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$; *d)* $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12{,}1}}{\sqrt{10}+\sqrt{6{,}05}}$.

200. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, ha a négyzetgyökjel alatti kifejezések pozitívok:

a) $12\sqrt{a}:3$; $\frac{10}{3}\sqrt{x}:5$; $2\sqrt{b}:4$;

b) $\sqrt{3a}:\sqrt{a}$; $\sqrt{8x}:\sqrt{x}$; $\sqrt{12a}:\sqrt{3a}$;

c) $\frac{\sqrt{a^2x}}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sqrt{5a^3}}{\sqrt{15a}}$; $\frac{\sqrt{144c}}{\sqrt{c^3}}$;

d) $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{x-y}$;

e) $\sqrt{x^4-y^4}:\sqrt{x^2+y^2}$; *f)* $\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{x-y}$;

g) $\sqrt{\frac{2ax}{3yz}}:\sqrt{\frac{xz}{9ay}}$; *h)* $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}:\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}$;

i) $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$; *j)* $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}:\sqrt{\frac{y-x}{y+x}}$;

k) $\sqrt{\frac{x}{y}-1}:\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-1}$; *l)* $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}+1}:\sqrt{1-\frac{x-y}{x+y}}$;

m) $\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}:\sqrt{x+\frac{1}{x}}$; *n)* $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;

o) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}-xy):\sqrt{xy}$; *p)* $\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{x}\right):x\sqrt{x}$.

201. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket, ha a négyzetgyökjel alatti kifejezések pozitívok:

a) $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$; *b)* $\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}$;

c) $a+\sqrt{a}$; *d)* $ab-\sqrt{a}$;

e) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$; *f)* $a+b-\sqrt{a^2-b^2}$;

g) $\sqrt{a^3-b^3}+\sqrt{a-b}$; *h)* $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

i) $a+\sqrt{a}-a^2-\sqrt{a^3}$; *j)* $x+5\sqrt{x}+6$;

k) $a-\sqrt{a}-6$; * *l)* a^2+a+1.

Négyzetgyökös kifejezések hatványozása

202. Végezzük el a következő hatványozásokat:

a) $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt{(-5)^2})^2$; $(\sqrt{-5})^2$; $(-\sqrt{5})^2$;

b) $(2\sqrt{3})^2$; $(5\sqrt{2})^2$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)^2$;

c) $(\sqrt{2})^3$; $(\sqrt{5})^4$; $(\sqrt{5^2})^3$;

d) $(-\sqrt{3})^3$; $(-2\sqrt{5})^4$; $(-3\sqrt{7})^3$;

e) $(\sqrt{2}+1)^2$; *f)* $(\sqrt{5}-1)^2$;

g) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; *h)* $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$;

i) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2$; *j)* $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$;

k) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$; *l)* $\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$;

m) $(\sqrt{3+\sqrt{2}}-1)^2$; *n)* $(2+\sqrt{3-\sqrt{2}})^2$;

**o)* $(\sqrt{12}+\sqrt{3}+1)^2$; **p)* $(3\sqrt{15}+2\sqrt{5}-5\sqrt{10})^2$;

q) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$; *r)* $(\sqrt{2+2\sqrt{3}}-\sqrt{2-2\sqrt{3}})^2$;

s) $(\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{7}}-\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{7}})^2$; *sz)* $(\sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}})^2$;

t) $\sqrt{\sqrt{5}+4}+\sqrt{4-\sqrt{5}})^2$; *u)* $(\sqrt{15+\sqrt{200}}-\sqrt{15-10\sqrt{2}})^2$;

v) $(\sqrt{3}-1)^3$; *x)* $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3$;

y) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$; *z)* $\left(\sqrt{15}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3$.

203. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, a változók lehetséges értékeinél:

a) $(\sqrt{a})^2$; *b)* $(\sqrt{a^3})^2$;

c) $(\sqrt{a^5})^4$; *d)* $(\sqrt{x^4})^3$;

e) $(3\sqrt{a})^3$; *f)* $(-2\sqrt{a^3})^3$;

g) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^3}\right)^3$; *gy)* $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{a^5}\right)^2$;

h) $(\sqrt{x^2y})^2$; *i)* $(-\sqrt{x^2y})^2$;

j) $(a\sqrt{ab})^3$;

k) $\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$;

l) $\left(2x\sqrt{\frac{a}{2x}}\right)^3$;

m) $\left(\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2(x-y)^4}}\right)^3$;

n) $(\sqrt{a})^n$;

ny) $(\sqrt{a^n})^3$;

o) $(\sqrt{a^3})^n$;

p) $(\sqrt{a^{n-1}})^{n+1}$;

q) $[\sqrt{(a+b)^2}]^n$;

r) $[\sqrt{a-b)^3}]^n$;

s) $(x-\sqrt{x})^2$;

sz) $\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$;

t) $\left(a\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;

ty) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{ab}+2\sqrt{a}\right)^2$;

u) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$;

ü) $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y}}\right)^2$;

v) $(\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}})^2$;

w) $(3\sqrt{a-2\sqrt{b}}-2\sqrt{a+2\sqrt{b}})^2$;

x) $(\sqrt{5\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{5\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2$;

y) $(\sqrt{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{y}})^2$;

z) $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^3$;

zs) $\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3$.

204. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$; $\quad a\geqq 0;\ b\geqq 0;\ a^2\geqq b$;

b) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a-\sqrt{b}}$; $\quad a\geqq 0;\ b\geqq 0;\ a^2\geqq b$.

Az *a)*, illetve *b)* egyenlőséget felhasználva alakítsuk át a következő kifejezéseket:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\quad\sqrt{5-\sqrt{21}}$, $\quad\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

205. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{17-4\sqrt{15}}=2\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{30(4-\sqrt{15})}=5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$;

d) $\sqrt{546-84\sqrt{42}}=6\sqrt{7}-7\sqrt{6}$;

e) $\sqrt{5(9-4\sqrt{5})}=5-2\sqrt{5}$.

206. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül?

a) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$ vagy $30-12\sqrt{6}$;

b) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$.

A tört számlálójának, vagy nevezőjének gyöktelenítése

207. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét, a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; $\frac{12}{\sqrt{6}}$; $\frac{5}{\sqrt{10}}$; $\frac{7}{\sqrt{7}}$; $\frac{25}{\sqrt{10}}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$; $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{12}{7\sqrt{3}}$; $\frac{35}{4\sqrt{7}}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$; $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;

d) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{x}{\sqrt{y}}$; $\frac{a^2}{\sqrt{ab}}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\frac{ax}{\sqrt{x}}$;

e) $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$; $\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b}}$; $\frac{5x}{3\sqrt{xy}}$; $\frac{2xy^2}{\sqrt{xy}}$;

f) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$;

g) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$;

h) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$;

i) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$;

j) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$;

k) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$;

l) $\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}$;

m) $\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$;

n) $\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

o) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;

p) $\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$; *q)* $\dfrac{10}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$;

r) $\dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; *s)* $\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$.

208. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét, a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{9}{\sqrt{19}-4}$; *c)* $\dfrac{12}{5-\sqrt{17}}$; *d)* $\dfrac{28}{\sqrt{5}-1}$;

e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; *f)* $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; *g)* $\dfrac{6}{2\sqrt{3}-3}$; *gy)* $\dfrac{6}{3\sqrt{2}-4}$;

h) $\dfrac{42\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+6}$; *i)* $\dfrac{18\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$; *j)* $\dfrac{15}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$; *k)* $\dfrac{12}{7\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$;

l) $\dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}$; *m)* $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$; *n)* $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; *ny)* $\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$;

o) $\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$; *p)* $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$; *q)* $\dfrac{a}{\sqrt{a}-2}$; *r)* $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

s) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; *sz)* $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

t) $\dfrac{a+b\sqrt{b}}{a-b\sqrt{b}}$; *ty)* $\dfrac{2}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$;

u) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; *ü)* $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}$;

v) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{y}}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$; *w)* $\dfrac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$;

x) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$; **y)* $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

**z)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; **zs)* $\dfrac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

209. Gyöktelenítsük a következő törtek számlálóját, a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{9}$;

c) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; *d)* $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy}$;

e) $\dfrac{a-b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}$; *f)* $\dfrac{\sqrt{(a-b)^3}}{a^2-b^2}$.

210. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\sqrt{50}-\sqrt{12}=\dfrac{20-\sqrt{96}}{2\sqrt{2}}$; *b)* $\sqrt{160}-\sqrt{120}=\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$;

c) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

211. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$;

b) $\sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$;

c) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$;

d) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

e) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$;

f) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x\neq y$;

g) $\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}$, $y\geqq 0,\ x\neq 0,\ y\neq 1$;

h) $\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$, $|a|>|b|$, $b\neq 0$;

i) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a}{\sqrt{ab}+b}\right)$, $a>0$, $b\geqq 0$, $a\neq b$;

j) $\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{a-\sqrt{a^2-4a}}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{a+\sqrt{a^2-4a}}$, $a\geqq 4$;

k) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $a\neq b$;

l) $\frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9}\,\frac{\sqrt{a^3}-27}{\sqrt{a}+3}-\sqrt{a}$, $a\geqq 0$;

m) $\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{8}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}+\sqrt{2a}\right)\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2}\right)^2$, $a\geqq 0$, $a\neq 2$.

212. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $4a^3-8a^2+2a+3$, ha $a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

b) $\frac{(a-1)\sqrt{3}}{\sqrt{a^2-a+1}}$, ha $a=2-\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, ha $a=\frac{5}{4}$;

d) $\frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}}+\frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$, ha $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$;

e) $\left(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$, ha $a=4$ és $b=2$;

f) $\frac{2a}{1-a^2}$, ha $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

213. Igazoljuk, hogy ha $x>0$ és $x\neq 2$, akkor

$$\frac{\sqrt{2x}-\frac{2x}{x+\sqrt{2x}}}{\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}}=x.$$

214. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x|\geqq 1$ és $|y|\geqq 1$, akkor

$$\frac{1+(x+\sqrt{x^2-1})^2\,(y+\sqrt{y^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})\,(y+\sqrt{y^2-1})}=2(xy+\sqrt{(x^2-1)\,(y^2-1)}).$$

215. Bizonyítsuk be, hogy ha $x\neq y$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, akkor

$$\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{y^2}}{y}\right)=1.$$

216. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>b>0$ és $x=\sqrt{ab}$, akkor

a) $\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=1$;

b) $\frac{\sqrt{(a+x)\,(x+b)}+\sqrt{(a-x)\,(x-b)}}{\sqrt{(a+x)\,(x+b)}-\sqrt{(a-x)\,(x-b)}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

III.

6. Az *n*-edik gyök

Az *n*-edik gyök fogalma

217. Végezzük el a következő gyökvonásokat.

a) $\sqrt{9}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{81}$;

b) $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[12]{1}$; $\sqrt[3]{0{,}027}$; $\sqrt[4]{0{,}0625}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; $\sqrt[5]{\frac{32}{100\,000}}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$;

d) $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[7]{-1}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$;

e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

f) $\sqrt[4]{(-1)^2}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{-81}$.

218. A változó milyen értékére áll fenn a következő egyenlőség?

a) $\sqrt{a^2} = a$; *b)* $\sqrt[3]{a^3} = a$;

c) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; *d)* $\sqrt[5]{a^5} = -a$;

e) $\sqrt[6]{a^6} = |a|$; *f)* $\sqrt[10]{a^{10}} = |a|$.

219. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[4]{a^4}$, ha $a \geqq 0$; *b)* $\sqrt[6]{a^6}$, ha $a < 0$;

c) $\sqrt[5]{a^5}$, ha $a > 0$; *d)* $\sqrt[8]{a^8}$, ha $a < 0$.

220. Hozzuk egyszerűbb alakra – a gyökjel alól való kiemeléssel – a következő kifejezéseket.
(A gyökjel alatti kifejezésekben szereplő változók csak pozitív értéket vehetnek fel.)

a) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{72}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{256}$;

b) $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[4]{48}$; $\sqrt[5]{96}$; $\sqrt[5]{1215}$;

c) $\sqrt[3]{8a^2}$; $\sqrt[5]{5a^5}$; $\sqrt[3]{24x^4}$; $\sqrt[4]{a^5b^8}$; $\sqrt[3]{3a^4b^3}$;

d) $\sqrt[n]{x^{n+2}}$; $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n}}$; $\sqrt[n]{x^{2n+1}}$; $\sqrt[n+1]{a^{n+3}}$; $\sqrt[n-1]{a^{2n+3}}$.

221. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy a gyökjel előtt álló kifejezéseket vigyük a gyökjel alá (a kifejezések pozitívok):

a) $3\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[5]{3}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; $\frac{1}{3}\sqrt[4]{9}$;

b) $a\sqrt[3]{a}$; $a^2\sqrt[3]{a}$; $a^2\sqrt[3]{ab}$; $2a\sqrt[3]{2a}$; $ax\sqrt[5]{a}$;

c) $ax\sqrt[4]{\frac{b}{a^2}}$; $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $\frac{3a}{x}\sqrt[3]{\frac{2x}{9a^2}}$; $\frac{a^3b}{c^2}\sqrt[3]{\frac{1}{ab}}$;

d) $2ax\sqrt[3]{\frac{1}{2x}+\frac{1}{a}}$; $(x-y)\sqrt[3]{\frac{1}{x-y}}$; $(x+y)\sqrt[3]{\frac{3}{(x+y)^2}}$;

e) $2x\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}$; $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{a^2-2ab+b^2}{(a+b)^2}}$;

f) $a\sqrt[n]{ab}$; $ab\sqrt[n]{ab}$; $x^k\sqrt[n]{x}$; $a^nb\sqrt[n]{ab^n}$.

Műveletek gyökös kifejezésekkel

222. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; $\sqrt[4]{625 \cdot 16}$; $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$;

b) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 125}$; $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 81}$; $\sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}$;

c) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; $\sqrt[4]{54 \cdot 24}$; $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$;

d) $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10}$; $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{36}$; $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{20}$;

e) $\sqrt[4]{25 \cdot 2} \cdot \sqrt[4]{25 \cdot 8}$; $\sqrt[6]{7^4 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[6]{7^2 \cdot 2^3}$;

f) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$; $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

g) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[3]{a^5b} \cdot \sqrt[3]{a^3b^3}$; $\sqrt[4]{2a} \cdot \sqrt[4]{8a^3}$;

h) $\sqrt[3]{\frac{24a^2}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{a^7}{b^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^7}{a^3}}$; $\sqrt[5]{\frac{a^2x^3}{3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{96a^3}{x^2}}$;

i) $\sqrt[3]{a-b}\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}$; $\sqrt[3]{a^2-b^2}\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a+b}}$.

223. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{64} : \sqrt[4]{4}$; $\sqrt[3]{100\,000} : \sqrt[3]{100}$;

b) $\sqrt[3]{0{,}001} : \sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{0{,}04} : \sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{\frac{9}{8}} : \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$;

c) $\sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a}$; $\sqrt[3]{2a^7} : \sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[4]{3x^5} : \sqrt[4]{x}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{12a^5}{b^2}} : \sqrt[3]{\frac{3a^2}{2b}}$; $\sqrt[4]{\frac{4a^7}{3b^2}} : \sqrt[4]{\frac{9a^3}{4b^7}}$; $\sqrt[5]{\frac{2a^3}{b}} : \sqrt[5]{\frac{4a}{b^2}}$.

224. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3$; $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3$; $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$;

b) $(\sqrt{a})^4$; $\left(\sqrt[3]{a}\right)^9$; $\left(2\sqrt[3]{a^2}\right)^3$; $\left(a\sqrt[3]{ax}\right)^4$;

c) $\left(a\sqrt[3]{a}\right)^3$; $(x\sqrt{xy})^4$; $\left(x^2\sqrt[3]{x^2y}\right)^2$;

d) $\left(\frac{a}{b}\sqrt[4]{a^2b^3}\right)^3$; $\left(\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^3$; $\left(\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y^2}{x}}\right)^4$;

e) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n+1}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n+1}$; $\left(\sqrt[2n]{x^n}\right)^6$; $\left(\sqrt[4n]{x^{2n}}\right)^4$.

225. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)$;

b) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16}\right)\left(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}\right)$;

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$;

e) $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$.

Gyökös kifejezések átalakításai

226. Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4b}}$;

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$; $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt[5]{25}}$;

d) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}$;

e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;

f) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$.

227. Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt[6]{25^3}$; $\sqrt[4]{36^2}$; $\sqrt[9]{27^3}$; $\sqrt[20]{625^5}$;

b) $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[8]{16}$; $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[6]{1000}$;

c) $\sqrt[4]{a^{12}}$; $\sqrt[8]{a^4}$; $\sqrt[12]{x^6}$; $\sqrt[25]{a^{15}}$;

d) $\sqrt[4]{4a^6b^4}$; $\sqrt[6]{8a^6b^9c^3}$; $\sqrt[10]{32x^5y^{15}z^{10}}$.

228. Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{4}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{3}$;

b) $\sqrt{a}\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[5]{a}\sqrt[10]{b}$; $\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}$;

c) $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$;

d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$;

e) $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt[6]{\frac{1}{a}}$; $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt[6]{x}$.

229. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$; $\frac{15}{\sqrt[4]{125}}$; $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$;

b) $\frac{x}{\sqrt[4]{x}}$; $\frac{2a}{\sqrt[4]{a^3}}$; $\frac{a}{\sqrt[5]{a}}$; $\frac{x}{\sqrt[n]{x}}$;

c) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$; $\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}$; $\frac{a+1}{\sqrt[5]{a+1}}$;

**d)* $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a}+1}$; $\frac{a-1}{\sqrt[4]{a}-1}$.

III.

230. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8}\right)\sqrt{2}$;

b) $\left(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{25}\right)\sqrt[4]{2}$;

c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}-\sqrt{27}\right)\sqrt{3}$;

d) $(\sqrt{2}+1)\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$;

e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)$;

f) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}\sqrt{2+\sqrt{5}}$;

g) $\left(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3}\right)$;

h) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(0{,}5\sqrt{x}-1{,}5\sqrt[6]{x^5}\right)$;

i) $\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[3]{3}}$;

j) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a}}$; $\dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[10]{a}}$;

k) $\sqrt{a}:\sqrt{\dfrac{a}{8}}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}:\sqrt[6]{a}$; $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}:\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

231. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^4}{(a+b)^8}}$, $a\neq\pm b$;

**b)* $\left[\left(\dfrac{1}{a}-\sqrt[6]{\dfrac{1}{a}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^2-\dfrac{2}{a^2}\sqrt[6]{a^5}-\dfrac{3}{a}\sqrt[3]{a^2}\right]:a\sqrt[3]{a}$, $a>0$;

c) $\left[\sqrt{b}-\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{a}{\sqrt{ac}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{c}\right]\sqrt[3]{\dfrac{1}{c^2}}$, $a>0$, $b\geqq 0$, $c>0$;

d) $\left[\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}-a\right)^2+\dfrac{7}{4}a\sqrt{a}-a^2\right]:a\sqrt{a}$, $a\geqq 0$;

**e)* $\left(\sqrt[3]{8a^9-8a^6b^3}-a\sqrt[3]{a^6-a^3b^3}+b\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^3}-1}\right):\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$, $b\neq 0$;

**f)* $a^3\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$, $a>0$, $b\geqq 0$;

**g)* $\left[\dfrac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$, $a>0$, $b>0$;

**h)* $\left[\dfrac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right]\cdot\dfrac{a+b}{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}$,

$a\neq -b$, $a\neq\pm 2b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

***232.** Számítsuk ki a következő kifejezés értékét, ha

$x=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$ és $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$:

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}-4\sqrt[n]{x^2-1}+1.$$

***233.** Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ egész szám.

7. Törtkitevőjű hatványok

A törtkitevőjű hatvány fogalma

234. Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) $100^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $8^{\frac{4}{3}}$; $0^{\frac{4}{9}}$;

b) $27^{-\frac{1}{3}}$; $8^{-\frac{2}{3}}$; $32^{-\frac{4}{5}}$; $16^{1,5}$; $100^{-\frac{5}{2}}$;

c) $0{,}25^{-\frac{3}{2}}$; $0{,}01^{-2,5}$; $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$; $\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

235. Írjuk fel gyökjel segítségével a következő törtkitevőjű hatványokat (a hatványok alapja pozitív):

a) $3^{\frac{1}{7}}$; $7^{\frac{3}{5}}$; $2^{\frac{2}{3}}$; $6^{-\frac{1}{3}}$; $10^{-0,5}$;

b) $2{,}5^{-\frac{2}{3}}$; $(0{,}5)^{0,5}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$;

c) $a^{\frac{1}{3}}$; $b^{\frac{2}{5}}$; $a^{1,2}$; $a^{-\frac{3}{5}}$; $a^{-1,5}$;

d) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(3x)^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{5}a^{\frac{1}{5}}$; $2y^{-\frac{2}{3}}$; $-4x^{\frac{2}{5}}$;

e) $(ab)^{\frac{2}{3}}$; $ab^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; $(a+b)^{\frac{2}{3}}$.

236. Írjuk fel törtkitevő segítségével a következő gyökös kifejezéseket:

a) $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{4x}$; $\sqrt[4]{b^3}$; $\sqrt[3]{ab}$;

b) $\sqrt[3]{a^2b}$; $\sqrt{2xy^3}$; $\sqrt[4]{0{,}1a^4b^2}$; $\sqrt[5]{32x^{10}y^5}$;

c) $\sqrt{x\sqrt{x}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; $\sqrt{b\sqrt[3]{b}}$; $\sqrt{x\sqrt[2]{x}}$.

Műveletek törtkitevőjű hatványokkal

237. Végezzük el a kijelölt műveleteket (a hatványok alapja pozitív):

a) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}$; $3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{3}}$; $5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}$; $7^{\frac{2}{3}}\cdot 7^{\frac{4}{3}}$;

b) $aa^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$;

c) $a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{4}}$; $2x^{\frac{2}{3}}x^{-1}$; $5x^{-\frac{1}{4}}x^{-2}$;

d) $3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}2a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$; $5x^2y^{\frac{2}{5}}2x^{-\frac{1}{2}}y^{1,5}$;

e) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; $\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}\right)4a^{\frac{3}{2}}b^{-1}$;

f) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$;

g) $\left(2a^{\frac{1}{3}}+b^{-1}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}-b^{-1}\right)$; $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

h) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2$; $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^3$;

i) $\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$;

j) $\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$;

k) $\left(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

l) $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a}$; $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{2x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; $\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{ab}$; $\frac{2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$;

m) $\frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}$; $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{x^{\frac{1}{2}}-3}{x-9}$; $\frac{x-2}{(x^2)^{\frac{1}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+(2^2)^{\frac{1}{3}}}$;

n) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^4$; $\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{5}}$;

o) $\left(x^2y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^6$; $\left(2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(x^{12}y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$;

p) $\left(x^{\frac{3}{2}}x\right)^{-\frac{3}{5}}$; $\left(\frac{4a^4}{9b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{64b^{-3}}{125a^6}\right)^{\frac{1}{3}}$.

238. Végezzük a kijelölt műveleteket (a hatványok alapja pozitív):

a) $\left(2a^{\frac{1}{2}}-1\right)2-\left(3a^{\frac{1}{3}}+6\right):3$; *b)* $\left(3x^{\frac{2}{3}}-x\right)x^{\frac{1}{2}}+2x\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)$;

c) $\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)+\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$;

d) $5a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)-2\left(b-a^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

e) $(a+2)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2\right)(a+4)$;

f) $\left(x^{\frac{3}{5}}+1\right)^2-\left(x^{\frac{2}{5}}+1\right)\left(x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+1\right)$;

g) $\frac{a-x}{a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}$, $a\neq x$;

h) $\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}-1}{3x-3}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{2x^{\frac{1}{2}}+2}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{3x^{\frac{1}{2}}-3}, \quad x\neq 1.$

Feladatok törtkitevőjű hatványokkal

239. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket (a hatványok alapja pozitív):

a) $\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{2}}}\sqrt[3]{y^{-1}y^{\frac{2}{3}}}$; *b)* $\left[8a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}a\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right]^{\frac{1}{3}}$;

c) $\left[\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right]\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-y}-\dfrac{2y}{x-y}, \quad x\neq y;$

**d)* $\left[\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right]\dfrac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}, \quad a\neq b;$

e) $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}\dfrac{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}{x-a}, \quad x\neq a;$

**f)* $\left[\dfrac{4x-9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{x-4+3x^{-1}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]^2, \quad x\neq 1, \dfrac{3}{2};$

g) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(a^{-1}+b^{-1})+\dfrac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^3}\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right).$

240. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $\left(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}}\right)$, ha $x=1{,}2$ és $y=4$;

**b)* $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$, ha $a=5$.

8. A logaritmus

A logaritmus fogalma

241. Írjuk fel hatványalakban a következő egyenlőségeket:

a) $\lg 100=2$; $\lg 10=1$; $\lg 1=0$; $\lg 0{,}01=-2$;

b) $\lg 2=0{,}3010$; $\lg 5=0{,}6990$; $\lg \pi=0{,}4971$; $\lg 0{,}096 = 0{,}9823-2$;

c) $\lg 10^{-1}=-1$; $\lg 5^0=0$; $\lg 10^3=3$; $\lg\sqrt{10^3} = 1{,}5$;

d) $\log_3 9 = 2$; $\log_5 125 = 3$; $\log_{10}\dfrac{1}{10} = -1$; $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$;

e) $\log_2\dfrac{1}{64} = -6$; $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$; $\log_{81}\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{4}$; $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$;

f) $\log_3\sqrt[3]{9} = \dfrac{2}{3}$; $\log_5\sqrt[3]{5} = \dfrac{1}{3}$; $\log_3(\lg 10) = 0$; $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3} = -2$;

g) $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_b b^2 = 2$; $\log_b\dfrac{1}{b} = -1$;

h) $\log_a\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}$; $\log_{a^2} a = \dfrac{1}{2}$; $\log_{a^n} a = \dfrac{1}{n}$; $\log_{\sqrt{a}} a = 2$.

242. Írjuk fel a következő egyenlőségeket a log jelöléssel:

a) $10^1=10$; $10^2=100$; $10^3=1000$; $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$;

b) $10^{0{,}3010}=2$; $10^{1{,}3010}=20$; $10^{0{,}4971}=\pi$; $\sqrt{10}=3{,}162$;

c) $2^3=8$; $2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$; $3^{-3} = \dfrac{1}{27}$; $25^{\frac{1}{2}}=5$;

d) $5^0=1$; $0{,}01^{-1{,}5}=1000$; $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$; $8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$;

e) $a^0=1$; $a^1=a$; $a^b=c$; $a^c=b$.

243. Adjuk meg a következő kifejezések értékét:

a) $\lg 10$; $\lg 100$; $\lg 0{,}1$; $\lg 1$;

b) $\lg\sqrt{1000}$; $\lg\sqrt[3]{100}$; $\lg\sqrt{0{,}1}$; $\lg 2$;

c) $\lg 50$; $\lg 1{,}5$; $\lg 22{,}3$; $\lg(-0{,}5)$;

d) $\log_2 2$; $\log_2 4$; $\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_{\sqrt{2}} 4$;

e) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27$; $\log_{16} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$;

f) $\log_a \sqrt[3]{a}$; $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$; $\log_a \frac{1}{a}$; $\log_a \sqrt[n]{a}$.

244. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\log_2 a = 4$; $\log_3 b = 2$; $\log_5 b = 3$;

b) $\lg b = -2$; $\log_{\frac{1}{2}} a = -1$; $\log_{11} b = 0$;

c) $\log_4 b = 1{,}5$; $\log_6 b = 3$; $\lg c = 0{,}3010$;

d) $\log_a x = 2$; $\log_b y = -1$; $\log_a x = -1{,}5$.

245. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\log_a 8 = 3$; $\log_a 16 = 2$; $\log_c 15 = 1$;

b) $\log_a 81 = 4$; $\log_a 64 = 2$; $\log_a \frac{1}{9} = -1$;

c) $\log_a 0{,}25 = -2$; $\log_b \sqrt{2} = \frac{1}{4}$; $\log_c \sqrt[3]{3} = \frac{1}{6}$;

d) $\log_a \frac{1}{25} = -2$; $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$; $\log_a 2 = 3$;

e) $\log_a x = 1$; $\log_b a^n = n$; $\log_c a^n = 2n$.

A logaritmus azonosságai

246. A logaritmus azonosságainak felhasználásával írjuk fel a következő kifejezések logaritmusát, a benne szereplő számok és változók logaritmusával kifejezve.

a) $x = abc$; $x = 5bc$; $x = 100(a+b)$;

b) $x = a^2 b$; $x = \frac{2ab}{3}$; $x = \frac{10}{abc}$;

c) $x = \frac{2a^3}{bc}$; $x = 12ab^2c^4$; $x = \frac{4r^3\pi}{3}$;

d) $x = 3a - 6b$; $x = \frac{a^2 - ab}{2bc}$; $x = \frac{3a^3 b}{2a + 2b}$;

e) $x = a\sqrt{b}$; $x = a\sqrt[3]{b}$; $x = a^2 b\sqrt{2c}$;

f) $x = a^2\sqrt[3]{b^2}$; $x = \frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}$; $x = \frac{2a^2 b\sqrt[3]{cd^2}}{3nl^3}$;

g) $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$; $x = \left(\sqrt[5]{\frac{2a}{b^2}}\right)^3$;

h) $x = \sqrt{a\sqrt[3]{ab}}$; $x = \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b}}$; $x = 3\lg 2$.

247. Fejezzük ki x-et a következő egyenlőségekből:

a) $\lg x = \lg 2{,}4 + \lg 15$; $\lg x = 2\lg 12 - \lg 18$;

b) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 8 - \frac{1}{2}\lg 2$; $\lg x = -2\lg 5 + 3\lg 2$;

c) $\log_a x = \log_a b + \log_a c$; $\log_a x = k\log_a b$;

d) $\log_a x = 2\log_a b - 4\log_a c$; $\log_a x = \frac{2}{3}(\log_a b - \log_a d)$;

e) $\log_a x = \frac{2}{5}\log_a b - \frac{1}{3}\log_a c$; $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a(b-d)$.

248. Egyenlők-e a következő kifejezések?

a) $\lg(5+6)$ és $\lg 5 + \lg 6$;

b) $\lg 0{,}2 + \lg 0{,}5$ és $\lg 0{,}7$;

c) $\lg(x(x-2))$ és $\lg x + \lg(x-2)$, ha $x > 2$;

d) $\lg \frac{x}{x-5}$ és $\lg x - \lg(x-5)$, ha $x > 5$;

e) $\lg x^2$ és $2\lg x$, ha $x > 0$;

f) $\lg\sqrt{x}$ és $\frac{1}{2}\lg x$, ha $x > 0$.

249. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $3^{\log_3 7}$; $4^{\log_2 3}$; $2^{\log_4 5}$;

b) $10^{1-\lg 2{,}5}$; $10^{-\lg 5}$; $10^{\lg 6 + \lg 5}$;

c) $10^{\lg 3-\lg 30}$; $(\sqrt{10})^{2+\lg 25}$; $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}$;

d) $25^{\log_5 3}$; $36^{\log_6 2}$; $81^{\log_3 2}$;

e) $5^{1-\log_5 7}$; $100^{1-\lg \frac{5}{2}}$; $5^{1+\log_{25} 7}$;

f) $7^{\log_{\sqrt{7}} 5+\log_{49} 9}$; $13^{\log_{\sqrt{13}} 3+\log_{13} 2}$;

g) $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; $100^{\frac{1}{2}-\lg \sqrt[4]{4}}$;

h) $\lg\sqrt{275}+\lg\sqrt{44}-\lg 11$;

i) $2\lg 2+6\lg\sqrt{5}+\lg 18-2\lg 3$;

j) $\frac{\lg 5+\lg 2}{\lg 6}(\lg 9+2\lg 2)$.

250. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$, $a, b, c>0$ és $a, b, c\neq 1$;

b) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, $a>0$, $a\neq 1$ és $b>0$, $n\neq 0$;

c) $\log_{b^n} a^n = \log_b a$, $a, b>0$, $b\neq 1$ és $n\neq 0$;

d) $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1+\log_a b$, $a, b, c>0$, $a\neq 1$, $c\neq 1$ és $ab\neq 1$;

e) $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$, $a, b, x, y>0$ és $a, b, y\neq 1$;

f) $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+\frac{1}{\log_{a^4} b} = 10\log_b a$,
$a, b>0$ és $a, b\neq 1$;

g) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$, $a>1$ és $b>1$;

h) $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = \lg a$, $a>0$ és $a\neq 1$;

i) $\log_{bn} an = \frac{\log_b a+\log_b n}{1+\log_b n}$, $a, b>0$, $b\neq 1$ és $bn\neq 1$;

j) $\log_{a^n b} a^{n+1} = \frac{(n+1)\log_b a}{1+n\log_b a}$, $a, b>0$, $b\neq 1$ és $a^n b\neq 1$;

k) $\log_{b^{n+1}} ab^n = \frac{n+\log_b a}{n+1}$, $a, b>0$ és $b\neq 1$, $n\neq -1$;

l) $m^{\log_a n} = n^{\log_a m}$, $a>0$, $a\neq 1$, $n>0$ és $m>0$;

m) $\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}$, $a>0$, $a\neq 1$, $k\neq 0$.

Számolás logaritmussal

251. A logaritmus azonosságainak és a lg függvény táblázatának felhasználásával számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $311 \cdot 25{,}6$; $143 \cdot 0{,}872 \cdot 1{,}76$;

b) $\frac{3{,}264}{0{,}078}$; $\sqrt[3]{574{,}2^2}$;

c) $\frac{154{,}8 \cdot 5{,}436}{12{,}72}$; $\frac{0{,}763 \cdot 12{,}87}{1{,}009 \cdot 86{,}4}$;

d) $4{,}92 \cdot \sqrt{158{,}4}$; $1{,}086 \cdot \sqrt[3]{7{,}108}$;

e) $2{,}48^3 \cdot 0{,}962^5$; $\frac{2\pi \cdot 5{,}13^2}{3}$;

f) $\frac{139{,}5\sqrt[3]{12{,}8 \cdot 7{,}63}}{2{,}5 \cdot 1{,}16^2}$; $\frac{0{,}93^3\sqrt[4]{1{,}876}}{5\sqrt{4{,}71}}$;

g) $\frac{1}{2\pi}\sqrt[4]{\frac{46{,}8^3}{1{,}46 \cdot 0{,}931}}$; $\sqrt[3]{\frac{1{,}951\sqrt{12{,}6}}{3{,}88^2}}$;

h) $\sqrt[4]{\lg 0{,}37}$; $\sqrt[3]{-19{,}46}$;

i) $\frac{\lg 3241}{\lg 2}$; $\sqrt{\lg 5{,}46 \cdot \lg 9{,}86}$;

j) $\frac{2{,}8 \sin 42° 10'}{0{,}381}$; $\sqrt[3]{3{,}96 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$.

k) $\sqrt[3]{52{,}46}+\sqrt[3]{43{,}52}$; $\sqrt[4]{15{,}42+\sqrt[3]{3{,}57}}$;

l) $\dfrac{1{,}438^2}{\sqrt{2{,}96}} + \sqrt[3]{31{,}87}$; $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{71{,}42}{5{,}86} - \dfrac{0{,}731^2}{\sqrt{317}}}$.

Vegyes feladatok

252. A változó milyen értékénél állnak fenn a következő egyenlőtlenségek?

a) $\lg x > \frac{1}{2}\lg x$; $\qquad$ *b)* $\lg \frac{x}{2} < \lg x$;

c) $\lg \frac{x}{2} > \frac{1}{2}\lg x$; $\qquad$ *d)* $\lg \frac{x+1}{2} \geqq \frac{1}{2}\lg x$.

253. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>0$, $b>0$ és $a \neq b$, akkor

$$\frac{\lg a + \lg b}{2} < \lg \frac{a+b}{2}.$$

254. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül?

a) 90^{10} vagy $[5(1-\lg 0{,}1)]^{20}$;

b) $100^{2\lg 2}$ vagy $\sqrt{10^{2+0{,}5\lg 16}}$.

255. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3^n]{3^{3^{n-1}}\sqrt{\ldots \sqrt[9]{3^3\sqrt{3}}}} =$$

256. Számítsuk ki logaritmustábla nélkül lg 2, lg 3 és lg 5 értékét, ha adott lg 12 = 1,0792 és lg 18 = 1,2553.

257. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor fennáll a következő egyenlőség:
$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \log_{c-b} a$, ha $b+c \neq 1$, és $c-b \neq 1$.

258. Bizonyítsuk be, hogy $a>0$, $c>0$, $a \neq 1$, $ac \neq 1$, és b az a és c mértani közepe, akkor minden n ($n \neq 1$) pozitív számra igaz, hogy

$$\frac{\log_a n}{\log_c n} = \frac{\log_a n - \log_b n}{\log_b n - \log_c n}.$$

259. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 = 7ab$, akkor

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \qquad a>0,\ b>0.$$

IV. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyváltozós egyenletek

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

1. *a)* $-3x=0$; $\qquad$ *b)* $4\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$.

2. *a)* $5x-1=0$; $\qquad$ *b)* $-3x+2=0$.

3. *a)* $2x+5=2x-1$; $\qquad$ *b)* $2x-2=1-x$.

4. *a)* $\frac{x}{6}=0$; $\qquad$ *b)* $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=0$.

5. *a)* $2x-\frac{3}{5}x=\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{2}{5}x\right)$;

b) $\left(\frac{7}{3}x-\frac{7}{2}x\right)+1=\left(x-\frac{16}{3}x\right)+\frac{16}{5}x$.

6. *a)* $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{7}{12}x-\frac{3}{10}\right)=\frac{29}{5}$;

b) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(2x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$.

Egyenértékűek-e a következő egyenletek a racionális számok halmazán?

7. $4x+16=10$ és $2x+8=5$.

8. $x-5=5-x$ és $x-5+3x=10-x+2x$.

9. $\frac{x-2}{6}+\frac{3x+2}{2}+6=0$ és $2x-8=0$.

Egyenértékűek-e a következő egyenletek a valós számok halmazán?

10. $2x+1=3$ és $2x=2$.

11. $x-2=4-x$ és $x-2+\frac{5}{x-3}=4-x+\frac{5}{x-3}$.

12. $x-2=0$ és $(x-2)(x+3)=0$.

13. $3x+1=7$ és $(3x+1)(x-1)=7(x-1)$.

***14.** Egyenértékű-e a következő két egyenlet:

$$\frac{7x+5}{2}=9{,}5 \quad \text{és az} \quad x(x-1)=2$$

a) a természetes számok halmazán;
b) a valós számok halmazán?

***15.** Egyenértékűek-e a következő egyenletek:

$$x-1=0 \quad \text{és} \quad (x-1)(x^2-3)=0$$

a) a természetes számok halmazán;
b) a valós számok halmazán?

Mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenletek?

16. $(2x-7)+(8+3x)=26$.
17. $8x-(5-4x)=6-(4x+9)$.
18. $(6x+3)-(3x-4)=(x-4)-(x+1)$.
19. $(0{,}4x-1{,}8)-(1{,}5x+1)-(-4x-0{,}8)=3{,}8$.
20. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$.
21. $3x(x+1)-x(3x-1)=x-7$.
22. $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)+8]=-1$.
23. $(3x-1)(2x+5)-3(2x-1)(x+2)=24$.
24. $(x-3)(x-4)-(1-x)(2-x)=0$.
25. $2[3(4-x)-2(3+2x)-2]=44$.
26. $-\{-x-[-x-(-x)]\}=1$.
27. $2[3(x+4)-7]+1=8x-11$.
28. $2[4-5(3x-5)]=60-15x$.
29. $2[3(x-2)-1]+1=(2x+1)3+7$.
30. $3[4-2(x-1)x]-2x(1-3x)=2-3(x-1)$.

31. $1-2[5(3x-1)-5(1+2x)]=3(7-3x)-x$.
32. $3\{3[4-x-2(3+2x)]-1\}=69$.
33. $15\{1-2[x-(3-x)]\}=72$.
34. $\frac{3}{2}\left\{x-\left[3\left(x+\frac{7}{3}\right)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=3(x-48)$.
35. $2x-\{-2x-[-2x-(-2x)-2x]-2x\}-2x=\frac{11}{3}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

36. $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$.
37. $6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3=32$.
38. $5x(x-3)^2-5(x-1)^3+15(x+2)(x-2)=5$.
39. $(x+2)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)=42$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

40. *a)* $\frac{x}{2}+\frac{x}{9}=44$; *b)* $\frac{x+1}{6}-\frac{x-1}{4}=0$;
c) $2x-\left(\frac{5}{7}x-\frac{3}{4}x\right)=57$; *d)* $2x-10=1\frac{2}{3}(x-3)$;
e) $\frac{3x}{8}-\left(\frac{5}{3}+\frac{1-x}{6}\right)=\frac{7}{8}$.

41. $6-\frac{6x-4}{5}=2x+\frac{2-5x}{3}$.
42. $3x-\frac{x+2}{4}-\frac{3x-2}{2}=1-\frac{x-1}{3}$.
43. *a)* $1-\frac{6-2x}{3}=x-\frac{x+3}{2}$; *b)* $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}-\frac{5x-1}{6}=2$.
44. $x-\frac{6-2x}{3}=2x-4-\frac{x+3}{2}$.
45. $x+\frac{x+1}{4}=2x+\frac{5-3x}{2}-\frac{x-3}{8}$.

46. $2\frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{3x}{2}\right)=\frac{7}{20}$.

47. $0{,}7\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{4}{5}(0{,}9x-3)=\frac{7}{15}$.

48. $14\frac{1}{2}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{3x}{2}-\frac{2(x-7)}{3}$.

49. $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{7}(5x-6)=\frac{22x-63}{105}-\frac{1}{5}(3x-4)$.

50. $\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}$.

51. $\frac{2(2-3x)}{0{,}01}-2{,}5=\frac{0{,}02-2x}{0{,}02}-7{,}5$.

Van-e a következő egyenleteknek megoldása a természetes számok halmazában?

52. *a)* $\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}$; *b)* $\frac{x}{x-4}=\frac{8}{x-4}$.

53. *a)* $\frac{2}{x}+\frac{5}{x}=1$; *b)* $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-2}=\frac{1}{3}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

54. $\frac{x+3}{4x}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{12x}+\frac{1}{12}$.

55. $\frac{12x-9}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=2$.

56. $2x+\frac{x^2-4}{x+2}=1$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

57. $\frac{x^2+4x+4}{x+2}=2x+6$.

58. $\frac{9-x}{x-4}=\frac{5}{x-4}+3$.

Van-e a következő egyenleteknek megoldása a racionális számok halmazán?

59. $\frac{x-1}{2x}-\frac{2x}{x-1}=-\frac{3}{2}$.

60. $2-\frac{3x}{3x-2}=\frac{2x-9}{2x-5}$.

61. $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{2x+3}{5}$.

Milyen valós számokra teljesülnek a következő egyenletek?

62. $\frac{7-x}{x-6}-5=\frac{1}{x-6}$.

63. $\frac{1}{x-4}=\frac{x-2}{2x-8}$.

64. $\frac{10-x}{x-7}-4=\frac{15+2x}{x-7}$.

65. $\frac{4x+6}{5x-7}=9-\frac{3x-19}{5x-7}$.

66. $\frac{3}{x(2x-1)}+\frac{5}{x}=\frac{1}{2x-1}$.

67. $\frac{7}{2(x-1)}+\frac{5}{x-1}=3$.

68. $\frac{7}{5x+5}-\frac{3}{10x+10}=\frac{11}{120}$.

69. $\frac{2x+7}{x}-2=\frac{7}{9x+2}$.

70. $\frac{8x-3}{6x-3}\cdot\frac{3x-4}{4x-5}=1$.

71. $\frac{x-1}{5}\cdot\frac{x-3}{x}=\frac{2x+3}{x}+\frac{x}{5}$.

72. $\frac{4x+3}{x-2}\cdot\frac{x-5}{6}=\frac{2}{3}x+7$.

73. $\frac{2x+1}{3x+1}:\frac{4}{x}=\frac{x+1}{6}$.

74. $\frac{10(x-5)}{x-2}:\frac{3x-2}{x-2}=2$.

75. $\frac{x+1}{x+7}:\left(\frac{1}{2}-\frac{x+1}{x+7}\right)=-4$.

76. $\frac{18x+2}{x-4}-\frac{15x+1}{x+5}=3$.

77. $\frac{2x}{x-1}-\frac{7}{2}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{5}{2-2x}$.

78. $\frac{2x+1}{x-3}-6=\frac{4x-5}{3-x}$.

79. $\frac{x+1}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{3(3x-1)}{x^2-9}$.

80. $\frac{2-6x}{3-x}=3+\frac{3x+4}{x-3}$.

81. $\frac{x-4}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{16x}{x^2-16}=0$.

82. $\frac{x^2}{4-x^2}-\frac{x+2}{2-x}=\frac{6}{x+2}$.

83. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$.

84. $\frac{x}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-2x}-\frac{4}{x^2+2x}=0$.

85. $\frac{5x-3}{x^2+3x}-\frac{x+1}{3x^2+9x}+\frac{3}{x}=\frac{2}{x+3}$.

86. $\frac{x+1}{2-2x^2}-\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{6}{x+1}+\frac{1}{2-2x}=0$.

87. $\frac{3}{1-x^2}=\frac{2}{1+2x+x^2}-\frac{5}{1-2x+x^2}$.

88. $\frac{3}{4x^2+20x+25}+\frac{4}{4x^2+4x+1}=\frac{7}{4x^2+12x+5}$.

89. $\frac{2x-7}{2x^2-4x+2}+\frac{x+1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{3-3x}=\frac{2}{x-1}$.

Elsőfokú egyenletre vezető szöveges feladatok

90. Egy Zöldért-raktárban kétszer annyi burgonyát tároltak, mint egy másikban. Miután az első raktárból 75 tonna burgonyát elszállítottak és a másikba 35 tonnányit hoztak, a burgonya mennyisége a két raktárban egyenlő lett. Hány tonna burgonya volt eredetileg az egyes raktárakban?

91. Két TÜZÉP-telep közül az egyiken kétszer annyi szén van, mint a másikon. Ha az első telepre még 8 tonna szenet hoznak, a másikra pedig még 14,5 tonnát, akkor mindkét telepen egyenlő mennyiségű szén lesz. Hány tonna szén van az egyes telepeken?

92. Egy tízforintost felváltunk 10 és 20 filléresekre. Hány darabot kapunk mindegyikből, ha összesen 90 pénzdarabot kapunk vissza?

93. 525 Ft-ot egyenlő számú 5 Ft-os és 10 Ft-os pénzérmékkel fizettünk ki. Hány 5 Ft-ossal és 10 Ft-ossal fizettünk?

94. Egy osztálykirándulásra mindenkinek 50 Ft-ot kellett eredetileg hoznia, viszont 3 tanuló költségét a többiek adták össze, így fejenként 5 Ft-tal többet fizettek be. Hány tanulója volt az osztálynak?

95. Egy kutya 80 m távolságban meglát egy nyulat, és elkezdi üldözni. A két állat egyszerre kezd futni a kutyát a nyúllal összekötő egyenes mentén. A nyúl 10-et, a kutya 9-et ugrik másodpercenként. Mennyi idő alatt éri utol a kutya a nyulat, ha a kutyaugrás 1 m hosszú, a nyúlugrás pedig csak 80 cm?

96. Egy kutya 30 m távolságra levő nyulat kezdett üldözni. Egyszerre kezdték a futást, és a kutya egyenes vonalú pályán 3 perc alatt elfogta a nyulat, mert átlagsebessége 10 m/min-nel nagyobb volt, mint a nyúlé. Mekkora utat futott be a nyúl az üldözés közben?

97. Karcsi jutalmul egy bizonyos pénzösszeget kap. Takarékos-

kodik, és miután ezt a pénzösszeget megkétszerezi, elkölt belőle 40 forintot. A megmaradt pénzt ismét megkétszerezi, majd elkölt belőle 100 forintot. Az így megmaradt pénzt ismét megkétszerezi, és elkölt belőle 480 forintot. Ekkor annyi pénze marad, mint amennyit jutalmul kapott. Mennyi volt a jutalom?

98. Gondoljatok egy számot, szorozzátok meg 2-vel, a szorzathoz adjatok hozzá 50-et, a kapott számot osszátok el 2-vel, és a hányadosból vegyétek el a gondolt számot.
Igaz-e, hogy az eredmény mindig 25 lesz?

99. Egy iskolai ünnepély rendezésével 6000 Ft bevételt szeretnénk biztosítani. Ezért háromféle jegyet készítünk 5–5 Ft árkülönbséggel, a legolcsóbb jegyből 200-at, a közepes árú jegyből 160-at és a legdrágább jegyből 80-at. Mennyi legyen a legolcsóbb jegy ára?

100. 18 pénzdarabom van, csupa 2 Ft-os és 5 Ft-os. Ha annyi 5 Ft-osom volna, ahány 2 Ft-osom van, és annyi 2 Ft-osom volna, ahány 5 Ft-osom van, akkor kétszer annyi pénzem volna, mint így. Mennyi pénzem van?

101. Egy apának, az anyának és a lányának az életkora összesen 85 év. Az apa 5 évvel idősebb, a lány 25 évvel fiatalabb az anyánál. Hány évesek külön-külön?

102. Egy 27 éves apának 3 éves a fia. Hány év múlva lesz az apa háromszor annyi idős, mint a fia?

103. Hány éves az, aki azt mondja: „3 év múlva félannyi idős leszek, mint amennyi *A* 6 évvel ezelőtt volt, amikor én harmadannyi éves voltam, mint amennyi *A* most"?

104. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az alapon fekvő szöge 36°-kal nagyobb a szárak szögénél?

105. Mekkorák egy háromszög szögei, ha az egyik szöge 20°-kal nagyobb a másodiknál és a harmadik szöge pedig 10°-kal kisebb az elsőnél?

106. Egy háromszög kerülete 48 cm, oldalai hosszának aránya 3 : 4 : 5. Határozzuk meg az egyes oldalak hosszúságát.

107. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 24 cm. Az alapja 1,5 cm-rel hosszabb a száránál. Milyen hosszúak a háromszög oldalai?

108. Egy 12 cm kerületű egyenlő szárú háromszögben az alap

hossza a szárak hosszának a $\frac{2}{3}$ része. Mekkorák a háromszög oldalai?

109. Egy város területe 5 egybevágó négyzetből áll olyan elrendezésben, hogy az alaprajza *L* alakú. A várost övező kőfal annyi km hosszú, mint ahány km² a város területe. Milyen hosszú a kőfal?

110. Melyik az a szám, amelynek $\frac{3}{4}$ része 5-tel nagyobb, mint az $\frac{1}{3}$ része?

111. Két szám összege 76, különbsége 18. Melyik ez a két szám?

112. Egy tört nevezője 5-tel nagyobb a számlálójánál. Ha a tört számlálójához 14-et hozzáadunk, a nevezőjéből pedig 1-et elveszünk, akkor a tört reciprokával egyenlő nagyságú törtet kapunk eredményül. Melyik ez a tört?

113. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 2. Ha a kisebbik számot elosztjuk 4-gyel, a nagyobbikat pedig 9-cel, akkor az első hányados 4-gyel lesz nagyobb a másodiknál. Melyik ez a két szám?

114. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$, különbségük pedig 12. Melyik ez a két szám?

115. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetihez képest feleakkora számot kapunk. Az eredeti szám első számjegye kétszerese a második számjegynek. Melyik ez a szám?

116. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó számjegyével, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

117. Egy háromjegyű szám első és harmadik számjegyének az összege 8, a második számjegye 2. Ha felcseréljük az első és a harmadik számjegyet és az így kapott számból kivonjuk az eredeti számot, 594-et kapunk. Melyik az eredeti szám?

118. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 12. Ha számjegyeit felcseréljük, 18-cal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

119. Egy kétjegyű számban a tízesek száma 3-mal nagyobb, mint az egyeseké. Ha a kétjegyű számhoz hozzáadjuk azt a számot,

amelyik számjegyeinek a megfordításával keletkezik, akkor 143-at kapunk. Melyik ez a szám?

120. Melyik az a kétjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 9, és amelyet a számjegyei felcserélésével nyert kétjegyű számból kivonva az eredeti szám $\frac{1}{5}$ részét kapjuk?

121. Egy kétjegyű számban 3-mal több egyes van, mint tízes. Ha a számjegyei közé számjegyeinek az összegét iktatjuk be harmadik jegyül, az eredeti szám 11-szeresét kapjuk. Melyik kétjegyű számból indultunk ki? Hány ilyen szám van?

122. Egy könyv ára vászonkötésben 168 Ft, ami 68%-kal több, mint papírfedéllel. Mennyi az ára a papírfedelű könyvnek?

123. Ha egy szám 15%-ához hozzáadunk $\frac{9}{5}$-öt, akkor a szám 18%-át kapjuk. Melyik ez a szám?

124. Egy tanuló két hanglemezt adott el azonos áron. Az egyiken 20%-ot nyert, a másikon 20%-ot vesztett, így összesen 10 forinttal kapott kevesebbet értük, mint amennyiért vette őket. Mennyiért adta és vette a hanglemezeket?

125. Egy téglalap egyik oldalát 25%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a területe ne változzék?

126. Két üzemnek a terv szerint egy hónapban 360 db szerszámgépet kellett készítenie. Az első üzem 112%-ra teljesítette a tervet, a második pedig 110%-ra, és így a két üzem egy hónap alatt 400 db szerszámgépet gyártott. Hány szerszámgépet készített terven felül külön-külön a két üzem?

127. Két brigád együtt 8200 transzformátortekercset készített. Az ellenőrzés az egyik brigád által készített tekercseknek a 2%-át, a másikénak pedig 3%-át hibásan szigeteltnek találta, összesen 216 darabot. Hány darab hibátlan tekercset készített mindegyik brigád?

128. Egy benzinkút 1800 liter űrtartalmú tankját egyszerre két tartálykocsiból töltik fel. Az első tartálykocsiból percenként 20 literrel kevesebb benzint lehet áttölteni, mint a másikból. 15 perc alatt a benzinkút tankja 75%-ig telik meg. Hány liter benzin folyik át a benzinkútba az első, illetve a második tartálykocsiból percenként?

***129.** Az ország középiskolai tanulóinak $1\frac{2}{3}$%-a foglalkozik a KÖMAL feladatainak a megoldásával, mégpedig a fiúknak a $2\frac{1}{3}$%-a, a lányoknak a $\frac{2}{3}$%-a. A 90 000 középiskolai tanuló közül mennyi fiú és mennyi lány KÖMAL feladatmegoldó?

***130.** 850-et osszunk szét két részre úgy, hogy az első rész 8%-ának és a második rész 24%-ának az összege 850-nek a 12%-a legyen.

***131.** Két egymással szembe haladó repülőgép közül az egyik *A*-ból a tőle 3600 km-re levő *B*-be repül. A másik repülőgép *B*-ből megy *A*-ba. Mindkét repülőgép időjárási problémák miatt egy közbenső *C* repülőtéren 2 órát vesztegelt. Utána mind az első, mind a második gép 25%-kal fokozta a sebességét, és így az első repülőgép *B*-be 48 perc, a második repülőgép *A*-ba 1 óra 36 perces késéssel érkezett meg. Mekkora a két repülőgép eredeti sebessége, ha a második repülőgép sebessége 200 km/h-val nagyobb, mint az elsőé?

132. Hány kilogramm 410 Ft-os, illetve 520 Ft-os egységárú kávéfajtából tud a Compack Kereskedelmi Vállalat 200 kilogramm 480 Ft-os egységárú kávékeveréket előállítani?

133. 0,15 kg 15%-os sóoldatból mennyi vizet kell elpárologtatni, hogy 20%-os sóoldat maradjon vissza?

134. 1,3 kg sóoldathoz 0,8 kg 15%-os sóoldatot öntünk, így 10%-os sóoldat jön létre. Hány %-os volt az eredeti oldat?

135. Mennyivel több kénsav van 2,2 kg 24%-os kénsavoldatban, mint ugyanennyi 15%-osban?
A 2,2 kg 24%-os kénsavoldatnak hány grammját kellene tiszta vízzel kicserélnünk, hogy 15%-os kénsavoldatot kapjunk belőle?

136. Mennyi 26%-os kénsavat kell hozzákeverni 40 kg 68%-os kénsavhoz, hogy 32%-os koncentrációjú kénsavat állítsunk elő?

137. 10 liter 87°-os alkoholunk van. Mennyi vizet kell hozzáöntenünk, hogy 80°-os alkoholt kapjunk?

138. Ugyanabból az anyagból két különböző töménységű oldat áll a rendelkezésünkre, mégpedig 20 liter 45%-os és 30 liter 60%-os. Hány %-os oldatot tudunk előállítani összekeverésükkel?

139. Összekeverünk 3 liter 12%-os, 5 liter 18%-os és 2 liter 22%-os alkoholt. Hány százalékos keveréket állítottunk elő?

140. Egy cink–réz ötvözetben 82% réz van. Ha az ötvözetbe még újabb 18 kg cinket rakunk bele, akkor az ötvözet réztartalma 70%-ossá válik. Mennyi cinket és rezet tartalmaz külön-külön a régi és az új ötvözet?

141. Egy ezüst–réz ötvözetben 0,8 kg ezüst van. Hány kg réz van benne, ha az ötvözet sűrűsége $10{,}2 \cdot 10^3$ kg/m^3, az ezüst sűrűsége $10{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, a rézé $8{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3?

***142.** Két arany–ezüst ötvözet van. Az elsőben 2:3, a másodikban 3:7 ezen fémek aránya. Mennyit kell venni mindegyik ötvözetből, hogy 80 kg olyan új ötvözetet kapjunk, amelyben az arany és az ezüst tömegének aránya 5:11?

143. Egy üzemben a hűtőfolyadék két csapon keresztül engedhető egy tartályba. Ha csak az első csapot nyitjuk meg, a tartály 6 perc alatt telik meg, a másik csapon keresztül pedig 10 perc alatt. Hány perc alatt telik meg a tartály, ha egyszerre mindkét csapot megnyitjuk?

144. Egy kád csupán a melegvizes csapból 20 perc alatt telik meg, csak a hidegvizes csapból pedig 25 perc alatt. Mennyi idő alatt telt meg a kád, ha a melegvizes csap 4 perccel kevesebb ideig volt nyitva, mint a hidegvizes csap?

145. Egy úszómedencébe három cső torkollik. Az első kettőn a medencébe befolyik a víz, a harmadikon pedig kifolyik belőle. Egyedül az első csövön keresztül a medence 2 óra alatt telik meg, a másodikon keresztül 5 óra alatt, a tele medencéből pedig a harmadik csövön át 10 óra alatt tud kifolyni az összes víz. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha egyszerre mind a három csapot megnyitjuk?

146. Egy medencébe 3 cső vezet. Az elsőn át 2,5 óra alatt, a másodikon 3 óra alatt, a harmadikon 1,5 óra alatt telik meg a medence. Egy alkalommal mindhárom csövet együttesen működtetik, de 22,5 perc után a harmadik csövet elzárják. Mennyi idő alatt telik meg így a medence?

147. Egy víztároló 2 csövön át tölthető meg, mégpedig egyedül az első cső 4 óra alatt, egyedül a második cső 3 óra alatt tölthetné meg. Egy harmadik csövön keresztül a víztároló 1 óra alatt ürül ki.

Mennyi idő alatt ürül ki a tároló, ha mindhárom cső egyszerre van nyitva?

148. Egy építkezésnél a talajvíz kiszivattyúzására 3 szivattyút állítottak be. Egyedül az első szivattyúval 3 óra alatt, a másodikkal 4 óra alatt, a harmadikkal 6 óra alatt lehet a vizet kiszivattyúzni. A 3 szivattyú 0,5 órás együttes munkája után a maradék vizet az első és a harmadik szivattyúval szivattyúzzák ki. Összesen mennyi időbe telik a víz kiszivattyúzása?

***149.** Két vízcsapot egyszerre kinyitva $\frac{2}{3}$ óra alatt töltenek meg egy medencét. Az általuk szolgáltatott vízmennyiségek aránya 3:4. Mikor telik meg a medence, ha az első csapot 6 órakor, a másodikat 6 óra 25 perckor nyitják meg?

150. Egy gyárban két munkás vállalja, hogy együttes munkával 6 nap alatt elkészít egy munkagépet. Tudják-e a vállalásukat teljesíteni, ha külön-külön dolgozva az egyik munkás 10 nap alatt, a másik munkás 15 nap alatt készülne el vele?

151. Egy kertet az apa 3,5 óra, a fia 6 óra alatt ásná fel egyedül. Mennyi idő alatt készülnek el a kert felásásával, ha mindketten dolgoznak?

152. Egy apa 1 óra 40 perc alatt, felesége 3 óra 20 perc alatt, kisfia 6 óra 40 perc alatt ássa fel a kertjüket. Mennyi idő alatt készülnek el a kert felásásával, ha egyszerre mindhárman ásnak?

153. Szőlőtelepítés előtt a talajt meg kell forgatni. Erre a műveletre 12 nap áll rendelkezésre. Napi 1 m^3-rel többet sikerült megforgatni a tervezettnél, így 8 nap alatt készült el a munka. Hány m^3 földet kellett megforgatni?

154. Egy üzemben az egyik sajtológép 120 m^2 lemezt 5 óra alatt munkál meg, egy másik gép pedig 4,5 óra alatt. Hány óra alatt munkálják meg együttesen a lemezt?

155. Egy asztalosüzemnek a vártnál gyorsabb almaérés miatt a megrendelt gyümölcsösládákat 5 hét helyett 4 hét alatt kellett elkészítenie, ezért napi 175 ládával megemelte a termelést. Mennyi láda készült el az üzemben 1 nap alatt, ha minden héten 6 napot dolgoztak?

156. Egy 50 m/s sebességgel haladó test és egy 12 m/s sebességgel

haladó test egy helyről, egy időben indulva egy irányban mozog. Hány másodperc múlva lesz a távolságuk 209 m?

157. Egy 36 m/s és egy 20 m/s sebességgel haladó test ugyanarról a helyről, egy időben indulva ellenkező irányban haladva távolodik egymástól. Hány másodperc múlva lesz a távolságuk 574 m?

158. Egy 5,3 km hosszú ellipszis alakú ügetőpálya startpontjától egyszerre indul el két zsoké egymással ellenkező irányban. Az egyik átlagsebessége 12,5 km/h, a másiké 14 km/h. Mennyi idő múlva találkoznak?

159. Egy 5,3 km hosszú ellipszis alakú ügetőpálya startpontjától egyszerre indul el két zsoké egymással megegyező irányban. Az egyik zsoké sebessége 12,5 km/h, a másiké 14 km/h. Mennyi idő múlva találkoznak?

160. Két pontszerű test ugyanazon körpályán kering ugyanabban az irányban. Sebességük aránya 6:10. Valamely időpontban találkoznak a körpálya egy bizonyos pontján. Ugyanebben a pontban a legutóbbi találkozás 3 perccel azelőtt volt. Számítsuk ki a testek keringési idejét. (Oldd meg következtetéssel!)

161. Egy hajó két végállomása közti utat 4 óra 40 perc alatt tette meg oda-vissza. A sebessége a folyón lefelé menet 16 km/h volt, a folyón felfelé pedig 12 km/h. Milyen messze van egymástól a két végállomás?

162. Egymástól 17 km távolságból egymás felé egyszerre indul el egy 60 km/h átlagsebességű motorcsónak és egy 8 km/h átlagsebességű evezős csónak. Mennyi idő múlva találkoznak állóvízben? Mennyi idő múlva találkoznak, ha a 4 km/h sebességű folyón a motorcsónak felfelé halad? Mi történik, ha az evezős csónak megy felfelé a folyón?

163. Egy folyón fölfelé haladva 8 km/h-val kisebb egy hajó sebessége, mint lefelé haladva. A két kikötő között felfelé 15 óráig, lefelé 10 óráig tart az út. Hány kilométert tesz meg ez a hajó fölfelé és lefelé óránként? Milyen távol van egymástól a két kikötő?

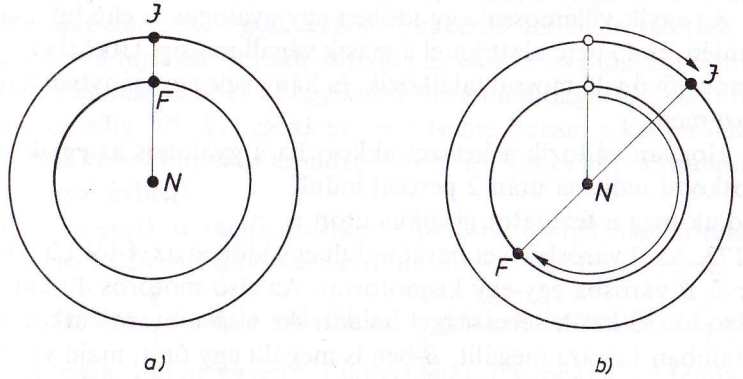
164. Egy felfelé evező csónakból kiesik egy labda, de ezt csak 10 perc múlva veszik észre. Ekkor azonnal megfordulnak és utána eveznek. A csónak megfordulása után mennyi idővel érik utol a labdát, ha a folyó folyásának sebessége 4 km/h, és a csónak állóvízen

8 km/h sebességgel haladna? Változtassátok meg először a folyó, azután a csónak sebességét, és figyeljétek meg, hogy ez hogyan befolyásolja az eredményt.

165. Két város közti távolságot egy gépkocsi 1,5 nap alatt teszi meg. Az első félnap a teljes távolság $\frac{3}{8}$-át, a második félnapon az $\frac{5}{12}$-ét teszi meg. A harmadik félnap 65 km-rel tesz meg többet a teljes távolság $\frac{1}{6}$ részénél. Mekkora a városok közti távolság?

166. Az országúton két kerékpáros halad egymással szemben. Az egyik sebessége 5 m/s, a másiké 7 m/s. Induláskor 300 méterre voltak egymástól. Mennyi idő múlva lesz köztük ismét 300 m a távolság? Lehet-e 500 m a köztük levő távolság?

167. A Jupiter bolygó Nap körüli keringési ideje 11,86 év. Mennyi idő telik el, míg a Föld és a Jupiter egymáshoz legközelebbi *a)* helyzetükből az egymástól legtávolabbi *b)* helyzetbe kerülnek *(1. ábra)*?



1. ábra

168. Valaki elindult az *A* tanyáról a *B* faluba 3 km/h sebességgel. Két óra múlva az *A* tanyáról ugyanazon az úton elindult a *B* faluba egy másik gyalogos 4,5 km/h sebességgel. Az *A* tanyától mekkora

távolságra, és mennyi idő múlva fogja utolérni a másik gyalogos az elsőt? A feladat megoldását grafikus úton is végezzük el.

169. Az A és B turistaházból, amelyek egymástól 10 km távolságra vannak, egyszerre indul el egy-egy turista egymással szembe. Az egyik óránként 4 km-t, a másik 6 km-t halad. Határozzuk meg grafikus úton, hogy mennyi idő múlva és hol találkoznak.

170. Egy 99 km/h sebességgel haladó személygépkocsi 9 óra 53 perckor érkezik meg, míg a 63 km/h sebességgel haladó tehergépkocsi ugyanazon az útvonalon 11 óra 11 perckor érkezik meg ugyanarra a célállomásra. Hány kilométerrel a cél előtt előzte meg a személyautó a teherautót?

171. Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg az utat a kiinduló állomástól a végállomásig. A kiinduló állomásról 2 percenként indítják az autóbuszokat. Egyik autóbusszal egy időben indul a kiinduló állomásról egy autó, amelynek sebessége négyszer akkora, mint az autóbuszé. Hány autóbuszt előz meg az autó a végállomásig? A feladatot oldjuk meg grafikus úton is.

172. 3 km hosszú villamosvonal két végállomásáról 5 percenként egyszerre indítanak egy-egy villamost. A villamosok menetideje 10 perc.

a) Az egyik villamossal egy időben egy gyalogos is elindul a sínek mentén, és 45 perc alatt jut el a másik végállomásig. Útközben hány szembejövő villamossal találkozik, és hány vele egy irányban haladó előzi meg?

b) Hogyan változik a helyzet akkor, ha a gyalogos az egyik villamoskocsi indítása után 2 perccel indul?

Oldjuk meg a feladatot grafikus úton is.

173. Az A városból két barát indult egy időben az A-tól 120 km-re fekvő B városba egy-egy kismotorral. Az első motoros 40 km/h, a második 30 km/h sebességgel haladt. Az első motoros útközben a C faluban 1 órára megállt, B-ben is megállt egy órát, majd visszaindult. A második motoros csak B-ben állt meg 0,5 órára, azután visszaindult A-ba. Állapítsuk meg, hogy oda-vissza út folyamán hol találkozott egymással a két motoros. A feladat megoldását grafikus úton végezzük el.

174. Két egyenlő magasságú gyertyát egyszerre gyújtunk meg.

Az első 4 óra alatt, a másik 3 óra alatt ég el. Hány óra múlva lesz az első gyertyacsonk kétszer olyan magas, mint a második, ha a gyertyák magassága egyenletesen csökken? Oldjuk meg a feladatot grafikus úton is.

175. Két pont mozog egyenletesen két kör kerületén, amelyek sugarainak aránya 1:6. A nagyobb sugarú körön mozgó pont 10 s alatt 2 m-rel többet halad és így ötödannyi fordulatot tesz meg, mint a másik. Határozzuk meg a két pont sebességét.

176. Egy traktor hátsó kerekének a sugara kétszer akkora, mint az első keréké. Ha az első kerék kerülete 1 m-rel nagyobb, a hátsóé 1 m-rel kisebb volna, akkor az első kerék 300 méteren ugyanannyit fordulna, mint a hátsó 375 méteren. Mekkora a két kerék sugara?

***177.** Az óra mutatói 6 órakor egy egyenesbe esnek és ellentétes irányba mutatnak. 6 óra után legközelebb mikor következik be ez a helyzet, és 6 óra előtt?

***178.** Déli 12 órakor az óra mutatói fedik egymást. Hány órakor fogják egymást legközelebb ismét fedni?

***179.** 3 óra után mikor találkozik és mikor merőleges egymásra először az óra két mutatója?

***180.** Egy tangazdaságban különböző gabonafajták termesztésével foglalkoznak. Az egyik évben 2 egyenlő területet vetettek be ugyanazzal a fajtával. A termésátlagot az előző évivel összehasonlítva azt tapasztalták, hogy az egyik terület termésátlaga 10%-kal nőtt, a másiké pedig 10%-kal csökkent, és a terméshozam a két területen 30 kg-mal kevesebb, mint az előző évben. Mekkora volt a termésátlag az előző évben?

***181.** Az egyik termelőszövetkezet 1430 ha földjét három részre osztja, mert három különböző növényt akar rajta termeszteni. Ha az első terület $\frac{1}{3}$-ával, a másodikat $\frac{3}{8}$-ával, a harmadikat $\frac{2}{5}$-ével csökkentenék, akkor egyenlő földterületeket kapnának. Mennyi a három földdarab területe?

***182.** Nyáron az utcákat öntözőkocsikból locsolják. A kocsi vezetőjének ügyelnie kell arra, hogy a víz más járművet ne érjen, viszont fontos, hogy csak addig zárja el a csapot, ameddig szükséges. Hány méteres útszakasz marad szárazon

a) ha vele egyirányban,
b) ha vele ellentétes irányban
haladó 4,5 m hosszú autó mellett halad el, feltéve, hogy az öntözőkocsi sebessége 25,2 km/h, az autó sebessége 21,6 km/h?

***183.** Az A-ból 60 km/h sebességgel haladó személyvonatot az ugyancsak A-ból induló és 120 km/h sebességgel haladó gyorsvonat menetrend szerint B-ben éri utol. Egy alkalommal a személyvonat az út $\frac{3}{4}$-ének megtétele után sebességét pályajavítási munkák miatt $\frac{2}{3}$-ára csökkentette, így a gyorsvonat B előtt 48 km-rel érte utol. Milyen távol van a B az A-tól? A feladatot grafikus úton oldjuk meg!

***184.** Az A faluból egy tanuló 15 óra 33 perckor indult el kerékpáron a B falu felé, ahová 18 óra 45 perckor érkezett meg. Ugyanezen a napon egy másik tanuló B-ből 14 óra 15 perckor indult el ugyanazon az úton, és állandó sebességgel haladva 16 óra 55 perckor ért A-ba. Útközben egyszerre érkeztek meg egy hídhoz, amelyet az első tanuló 1 perccel később hagyott el, mint a második tanuló. Mikor értek a hídhoz és hol vannak a híd végpontjai?

***185.** Két város, A és B egymástól s ($s>0$) távolságban egy hajózható folyó mellett fekszik, és a folyóparton vasútvonal vezet. A-ból elindul egy vonat 75 km/h sebességgel B felé, ugyanakkor B-ből két hajó indul el ellentétes irányban, de egyenlő sebességgel. A vonat a szemben jövő hajóval félannyi idő múlva találkozik, mint amennyi idő alatt utoléri a másik hajót. Mekkora a hajók sebessége?

***186.** Három játékos sakkozik. A játék feltételei a következők:
a) mindegyik játszmában ketten nyernek, egy veszít;
b) a vesztes köteles a nyerők meglévő pénzét megkétszerezni.
Mennyi pénzzel kezdtek hozzá a játékhoz, ha három játszma után, amiből mindegyik játékos egyet vesztett, egyformán 104–104 Ft-juk volt?

***187.** Több testvér osztozik az örökségen. A végrendelet értelmében A kap 20 000 Ft-ot és a maradék tizedrészét, B kap 40 000 Ft-ot és a maradék tizedrészét, és így tovább. Az osztozkodás után kitűnt, hogy a testvérek mindegyike egyenlő összeget kapott. Hányan voltak a testvérek, mennyit kapott mindegyik külön-külön, és mekkora volt az örökség?

***188.** Három gyerek: A, B, C ügyességi játékot játszik, és mivel mindhárman golyógyűjtők, abban állapodnak meg, hogy a mindenkori vesztes a másik két játékos golyóállományát megháromszorozza (vagyis kétszer annyi golyót ad mindegyiknek, mint ahány golyója volt az illetőnek). Három játszma után, amelyeket rendre A, B, C vesztett el, mindegyik játékosnak egyenlő számú golyója van. Hány golyója volt eredetileg mindegyiknek, ha az első játszma után C-nek 54 golyóval volt többje, mint A-nak?

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó, elsőfokúra visszavezethető egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

189. *a)* $2|x|-5=7-|x|$; *b)* $\frac{1}{3}|x|-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

190. *a)* $2|x|-4{,}5=5-\frac{3}{8}|x|$; *b)* $0{,}3|x|-1=3-0{,}5|x|$.

191. $|x|=x+2$.
192. $|x-2|=3$.
193. $|x-4|=5$.
194. $|4-x|=5$.
195. $|x+8|=1$.
196. $|7+x|=5$.
197. $|2x-1|=3$.
198. $|x+3|=|x-5|$.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

199. *a)* $x+|x|=4$; *b)* $x\cdot|x|=-9$.
200. $|x-5|=|x+4|$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

201. $|3x-4|=-x+4$.

202. $|2x-5| = x-1$.

203. $|3+x| = 2x+3$.

204. $\dfrac{3\,|x|-2}{|x|-1} = 2$.

205. $\big||x|+3\big| = 3$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

206. $1-|x| = \dfrac{1}{2}$.

207. $1+|x| = \dfrac{1}{2}$.

208. $2-|x| = 1{,}5$.

209. $|x| = 2x+1$.

210. $|2-x| = 2x+1$.

211. $|x+2| = 2(3-x)$.

212. $\dfrac{7x+4}{5} - x = \dfrac{|3x-5|}{2}$.

213. $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4}\right| = x-1$.

214. $|5-x| = |x+4|$.

215. $\left|\dfrac{3x-2}{x-1}\right| = 2$.

216. $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3$.

***217.** $\left|\dfrac{3\,|x|-2}{|x|-1}\right| = 2$.

***218.** $\left|\dfrac{3\,|x|+2}{|x|-1}\right| = 3$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

219. $3\,|x|+2 = 3\,|x|-3$.

220. $|3x-2|+x = 11$.

221. $|x| = x$.

222. $|x|-|x-2| = 2$.

223. $|x-1|+|x-2| = 1$.

224. $|x-1|+|x-2| = 2$.

225. $|x-3| = x-3$.

226. $|x-3| = |3-x|$.

227. $|x-3| = x$.

228. $|2x-3|+|2x+3| = 14$.

229. $|2x-3|+|2x+3| = 6$.

***230.** $|2x-1|+|3x+2|+|x| = 3$.

***231.** $|x-1|-2\,|x-2|+3\,|x-3| = 4$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

232. $\dfrac{2-3\,|x|}{1+|x|} = 1$.

233. $\left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right| = 1$.

***234.** $\left|\dfrac{2-3\,|x|}{1+|x|}\right| = 1$.

***235.** $|x-2|+|x-3|+|2x-8| = 9$.

***236.** $|4x-1|-|2x-3|+|x-2| = 0$.

***237.** $|x-1|+|x+2|-|x-3| = 4$.

***238.** $|x-2|+|x-3|+2\,|x-8| = 9$.

***239.** $|x-2|+|x-4|-|2x-6| = 2$.

***240.** $|1-2x|+|3x+2|+|x| = 5$.

241. $\big||x|-1\big| = 4+x$.

242. $\big||x|-2\big| = 1$.

*243. $\big||x+2|-3\big| = 1$.

*244. $\big|2-\big|1-|x|\big|\big| = 1$.

*245. $\big|3-2\,|x|\big| = |2-x|-3$.

*246. $\Big|\big||x|-2\big|-1\Big|-2\Big| = 2$.

*247. $\big||3x-1|-|2x+1|\big| = 1$.

248. Határozzuk meg azt a legkisebb x egész számot, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$|x-3|+2\,|x+1| = 4.$$

249. Oldjuk meg az $\mathbf{R}^+$ halmazon a következő egyenletet:

$$x^{\frac{|x|}{x}} = -2\,|x|+3.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol a p paraméter valós szám:

250. $|x-p| = 2$.

251. $|x-p| = |x-4|$.

252. $|3-x| = p$.

253. A p valós paraméter mely értékeire lesz kettőnél több gyöke a valós számok halmazán a következő egyenletnek?

$$|2x+3|+|2x-3| = px+6.$$

Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető paraméteres egyenletek.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán, ha a p paraméter racionális szám:

254. *a)* $px = p^2$; *b)* $(p^2-9)x = p+3$.

255. *a)* $(p-2)x = p^2-4$; *b)* $p^2x+2 = p(x+2)$.

256. *a)* $(p^2-9)x = p^3+27$; *b)* $(p^2-4)x = 3p^2+p-10$.

257. *a)* $(p^2-2p+1)x = p-1$; *b)* $(2p-1)x = 3p+(p+2)x$.

258. *a)* $p^2x-9x = p^2+6p+9$; *b)* $p(px-1) = 3(px-1)$.

259. Oldjuk meg az x egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a},$$

ahol az $a \neq 0$, $b \neq 0$ paraméterek egész számok.

260. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-n}{m} - a = \frac{2x-m}{m},$$

ahol a, n, m paraméterek egész számok és $m \neq 0$.

261. Oldjuk meg a racionális számok halmazán y-ra a következő egyenletet, ahol az a, m paraméterek pozitív egész számok:

$$a - \frac{m+y}{m} = m - \frac{a+y}{a}.$$

262. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{a+x}{d} - 2 = \frac{x-d}{a},$$

ahol az a és d paraméterek valós számok.

*263. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x}{p-3} - \frac{1}{p} = \frac{6+4x}{p^2-3p},$$

ahol a p paraméter valós szám.

264. Az a és b valós paraméterek mely értékeinél lesz az $ax+b = 0$, $(a^2+b^2 > 0)$ lineáris egyenlet x_0 gyöke
a) zérus; *b)* negatív; *c)* pozitív
valós szám?

265. Az $ax+by = 0$ egyenletnek az a és b valós paraméterek mely értékeire
a) nincs megoldása;
b) végtelen sok megoldása van;
c) pontosan egy gyöke van
a valós számok halmazán?

266. A p valós paraméter mely értékeire van a $2(3+x) = px$ egyenletnek
a) pozitív;
b) negatív
gyöke a valós számok halmazán?

267. A p valós paraméter mely értékeinél van a

$$6x = 4p - 11$$

egyenletnek nemnegatív valós gyöke?

268. A p valós paraméter mely értékeire lesz
a) pozitív valós szám; *b)* nulla; *c)* negatív valós szám a

$$3(x-p) = \frac{3x-7p}{5} + 1$$

egyenlet gyöke?

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ha a, b, c, és d valós paramétereket jelölnek:

269. $ax+b = \frac{3x+2ab}{3} + \frac{1}{2}$.

270. $a(ab+1)x+b^2 = a^2+(a^3+b)x$.

271. $a(1-ax) = 4b-2ax$.

272. $a+(ab+2)x = 2b+(b+2a)x$.

273. $(a^2b^2+36)x+a^2 = b^2+(9a^2+4b^2)x$.

274. $\frac{a+x}{a} - c = \frac{b+x}{b} - d$.

275. $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = \frac{2x+a}{2a} - \frac{a}{x}$.

276. $\frac{a+b}{x} - c = d - \frac{a-b}{x}$.

277. $\frac{a}{x+b} - c = \frac{a}{x+b} - d$.

278. $\frac{x+1}{x-1} = -\frac{a}{b}$.

279. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán, ha az a, b és c paraméterek egész számok:

$$2bx+ax = x(a+b)+a+cx.$$

***280.** Oldjuk meg a következő egyenletet az x valós számok halmazán, ha a p paraméter valós szám:

$$\frac{2p+x}{2p-x} = \frac{8p^2-3x}{x^2-4p^2} - \frac{x+p}{2p+x}.$$

A p ($p \in \mathbf{R}$) paraméter mely értékeire nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán?

***281.** Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x+p-2p^2}{p^2-x^2} = \frac{x+p}{p-x} + \frac{x}{p+x},$$

ahol a p paraméter valós szám.
A p ($p \in \mathbf{R}$) paraméter mely értékeire lesz az egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

282. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint $a : b$, különbségük pedig c. Határozzuk meg a két számot, ha $a > b$ és $c > 0$.

283. Egy apa most a éves, a fia b éves. Hány év múlva lesz az apa m-szer annyi idős, mint a fia ($a > b > 0$, $m > 1$)?

284. Egy munkát egy munkás a nap alatt végezne el egyedül, egy másik munkás pedig b nap alatt. Mennyi idő alatt készülnek el ugyanazzal a munkával együtt ($a, b > 0$)?

285. Egy üzemnek a terv szerint n nap alatt m munkadarabot kellett készítenie. Az üzem a tervet túlteljesítve t nappal a határidő előtt befejezte a munkát, és k darabbal többet gyártott az előírtnál. Hány munkadarabbal készítettek többet naponta a tervezettnél ($n > t > 0$, $m, k > 0$)?

286. Két munkás közül az egyik naponta a, a másik b munkadarabot készít el. Eddig az első p, a második q munkadarabot készített el. Hány nap múlva lesz egyenlő a két munkás által elkészített munkadarabok száma, ha naponta egyenlő ideig dolgoznak?

287. Hány %-os oldatot kapunk, ha a liter p%-os töménységű kénsavat b liter vízhez öntöttünk ($a, b, p > 0$)?

288. Egy tartály egy csapon keresztül a óra alatt telik meg, a tele tartály a lefolyón keresztül b óra alatt ürül ki. Mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha egyszerre nyitjuk meg a csapot is, a lefolyót is $(a, b > 0)$?

289. Két falu közti autóbuszjáraton az autóbuszok átlagsebessége az egyik irányban v_1 km/h, a másik irányban v_2 km/h. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulóra vonatkozólag $(v_1, v_2 > 0)$?

290. Az A és B autók induláskor egymástól $d>0$ távolságra vannak. Az A autó sebessége u km/h, a B autó sebessége v km/h, ahol $u>v>0$. Mikor találkozik az A autó a B autóval

a) ha egy irányban haladnak;

b) ha ellentétes irányban haladnak?

291. Az A és a B autók egymástól $d>0$ távolságra vannak az induláskor. Az A sebessége u km/h, a B sebessége v km/h, ahol $u>v>0$. Mikor előzi meg A a vele egyirányban haladó B-t $k>0$ távolsággal?

292. Egy vonat, amely Budapestről Debrecenbe megy, C-től pályaépítési munkák miatt n-ed részére csökkentette a sebességét, így a órát késik. Ha sebességét Debrecenhez b kilométerrel közelebb csökkentette volna, akkor a késése c óra lenne. Hány kilométert tett meg a vonat eredetileg óránként $(a>0, b>0, c>0, n \in \mathbf{Z}^+)$?

293. Két helyről egy-egy jármű indul el egymással szemben egyenletes mozgással. Ha az első jármű m perccel előbb indul, mint a második, akkor a második jármű indulása után t perccel találkoznak. Ha viszont a második jármű indul n perccel előbb, mint az első, akkor az első jármű indulása után r perccel találkoznak. Hány perc múlva találkoznak, ha a két jármű egyszerre indul?

Diofantikus egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

294. $xy = x+y$.

295. $3x+7y = 13$.

296. $14x-5y = 19$.

297. $17x+12y = 5$.

298. $139x+11y = 15$.

299. $102x+45y = 53$.

Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán a következő egyenleteket:

300. $3x+7y = 13$.

301. $14x-5y = 19$.

302. $6x+7y = 22$.

303. $17x+10y = 384$.

304. $29x-23y = 123$.

305. Határozzuk meg azokat az egytől különböző egyjegyű természetes számokból alkotott számpárokat, amelyeknek szorzatában az egyik számjegy megegyezik az egyik tényezővel.

306. Egy téglalap oldalainak a hossza centiméterben kifejezve két különböző pozitív egész szám. Kerülete ugyanannyi centiméter, mint ahány négyzetcentiméter a területe. Mekkorák a téglalap oldalai?

307. Melyik az a kétjegyű szám, melyet az egyesek helyén álló számmal osztva hányadosul 9-et, maradékul 6-ot kapunk?

308. Melyik az a kétjegyű szám, amely számjegyeinek kétszeres szorzatával egyenlő?

309. Ha két egész szám szorzatához hozzáadjuk az összegüket, akkor 34-et kapunk. Melyik ez a két szám?

310. Bontsuk fel 283-at két pozitív egész számra úgy, hogy az egyik rész osztható legyen 13-mal, a másik rész 17-tel.

311. Valakinek 3-féle bora van, az elsőből 72 Ft, a másodikból 48 Ft, a harmadikból 32 Ft egy liter ára. Mennyit kell mindegyik fajtából kivennie, hogy 40 liter, literenként 40 Ft-os bort kapjon, feltéve, hogy egész számú litereket óhajt összekeverni?

312. Egy négyjegyű szám 132-vel osztva 105-öt, 133-mal osztva 91-et ad maradékul. Melyik ez a szám?

313. 100-at bontsuk fel két olyan részre, melyek közül az egyik 5-tel osztva kettőt, a másik 7-tel osztva négyet ad maradékul.

314. Melyik az a háromjegyű szám, amely eggyel kisebb, mint a szélső számjegyeinek a felcserélésével adódó szám kétszerese?

***315.** Egy tanuló azt állítja, hogy dédapja születési évszámának hétszerese 13-mal osztva 11-et, tizenháromszorosa 11-gyel osztva hetet ad maradékul. Mikor született a dédapa?

***316.** Fémgyűjtésnél az úttörők 1. csapata versenyre hívta ki a 2. csapatot. A két csapat összesen 2831 kg fémet gyűjtött. Az 1. csapat

tagjai személyenként 95 kg-ot, a 2. csapat tagjai pedig 74 kg-ot gyűjtöttek átlagban. Hány tagja volt az 1. csapatnak és a 2. csapatnak, mennyi fémet gyűjtött külön-külön a két csapat?

***317.** Egy számlán a következő elmosódott tétel olvasható:

$$*24 \text{ db} \quad \text{à } 19* \text{ Ft} = *3808 \text{ Ft}.$$

A csillagok helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Milyen számjegyek állhatnak a *-ok helyén?

***318.** Házunk előtt egyik nap háromszor annyi kerékpár és autó haladt el együttesen, mint ahány traktor. A kerékpárok és kerekeik, az autók és kerekeik száma együttesen 100. Hány kerékpár, autó és traktor haladt el a ház előtt a megfigyelés napján?

***319.** Egy futóversenyen 12, rajtszámokkal jelzett versenyző indult. Mi volt a beérkezés sorrendje, ha a rajtszám és a helyezési szám szorzata minden esetben eggyel volt nagyobb, mint egy 13-mal osztható szám?

***320.** Hogyan lehet 768 Ft illetéket 1 Ft-os, 5 Ft-os és 10 Ft-os illetékbélyegben felragasztani, ha az 5 Ft-os illetékbélyegből kétszer annyit vásároltunk, mint a másik kettőből együttvéve?

321. Egy építkezéshez egy teherautó x nap alatt ($x \in \mathbf{N} \mid x > 3$) tudja kiszállítani az anyagot. Mivel az építkezést a határidőnél hamarabb akarják befejezni, a szállítást meggyorsították és a negyedik napon még további két teherautót állítottak be, amelyek közül az egyik teljesítménye $\frac{5}{6}$-a, a másiké pedig 1,5-e az eredeti teherautóénak, így y nap alatt szállították el az építési anyagot. Mely $x < 50$ pozitív természetes szám esetén lesz y is pozitív természetes szám?

***322.** Egy galambtulajdonos arra a kérdésre, hogy hány galambja van, így felelt: Galambjaim száma 300-nál több, de 900-nál kevesebb. Ha páronként bocsátom ki őket, akkor utoljára egy marad, ha hármasával, akkor kettő, ha négyesével, akkor három, ha ötösével, akkor négy, ha hatosával, akkor öt galamb marad a galambdúcban, de ha hetesével engedem ki őket, akkor egy sem marad vissza. Hány galambja volt a tulajdonosnak?

***323.** Jóska 500 Ft-jából vett egy sakktáblát. A pénztárnál csupa aprópénzt kapott vissza. Otthon a maradék pénzt még egyszer megszámolta és kirakta a sakktáblára úgy, hogy minden mezőre ugyanannyi pénz került. Másnap visszament a boltba és megvette a figurákat. A futóért, a huszárért háromszor, a bástyáért négyszer, a vezérért kilencszer, a királyért tizenhatszor annyit fizetett, mint egy gyalogért, és a végén 150 Ft-ja maradt. Mennyi pénze volt Jóskának, és mennyibe kerültek az egyes bábuk?

***324.** Egy kiránduláson 150-en vettek részt. A 15 300 Ft-os összköltséghez a férfiak 170 Ft-tal, a nők 140 Ft-tal, a gyermekek 90 Ft-tal járultak hozzá személyenként. A gyermekek száma nem érte el a 120-at. Hány férfi, nő, illetve gyermek vett részt a kiránduláson?

325. Ha egy kétjegyű szám kétszereséből egyet levonunk, akkor az eredeti szám számjegyeit kapjuk meg fordított sorrendben. Melyik ez a szám?

***326.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek az összege 20. Ha a számból 16-ot levonunk, az így nyert különbség fele olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei fordított sorrendben megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel. Melyik ez a szám?

327. Egy négyjegyű szám számjegyei egymásután következő természetes számok. Ha a százasok és az ezresek helyén álló számjegyeket felcseréljük, teljes négyzetet kapunk. Melyik ez a szám?

328. Melyek azok a szabályos sokszögek, amelyekkel a sík hézag és átfedés nélkül lefedhető? Mutassuk meg, hogy ez a feladat egyenértékű azzal, hogy keressük meg az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

egyenlet pozitív egész megoldásait.

***329.** Pista néhány osztálytársának kérésére ceruzákat vásárolt, összesen 11 darabot. Az üzletben 2 Ft-os, 4 Ft-os és 5 Ft-os ceruzák voltak. Hány darabot vásárolt az egyes fajtákból, ha összesen 27 Ft-ot fizetett?

***330.** Hány olyan természetes szám van, melynek a 9-es és a 11-es számrendszerbeli alakja egyaránt háromjegyű? Határozzuk meg közülük azokat, amelyeknek e két előállításában ugyanazok a számjegyek lépnek fel, de fordított sorrendben.

***331.** Melyik az a két, legalább kétjegyű pozitív természetes szám,

amelynek összegéből, nemnegatív különbségéből, szorzatából és hányadosából alkotott összeg 576?

*332. Mutassuk meg, hogy az $5x+3y=k$, $(k \in \mathbf{N}, k>7)$ egyenletnek van megoldása a természetes számok halmazán. Keressünk olyan természetes számot, amelynél nagyobb k esetén az egyenlet a pozitív egész számok halmazán megoldható.

Elsőfokú egyváltozós egyenlőtlenségek

Mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

333. *a)* $2x \geqq -3$; *b)* $\frac{1}{2}x < -1$.

334. *a)* $2x-3 > 1$; *b)* $\frac{1}{2}x-3 \geqq 2$.

335. *a)* $-2x \geqq 3$; *b)* $-\frac{1}{2}x \leqq 3$.

336. *a)* $2-x < 3$; *b)* $1-\frac{1}{2}x > 3$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazukat a számegyenesen:

337. *a)* $x+4 > 2-3x$; *b)* $6x+2 > 3x-4$.

338. *a)* $x+6 > 2-3x$; *b)* $2x+1 > 4x-7$.

339. *a)* $4(x-1) \leqq 2+7x$; *b)* $2(2x-1) \geqq 3(1+x)$.

340. *a)* $3(x-2) \geqq 4x-9$; *b)* $2(1-2x) \geqq 6(1-x)+x$.

341. *a)* $2(3+5x) < 3(7x-4)-4$; *b)* $\frac{1}{2}(2-x) < \frac{3}{4}x-4$.

Állapítsuk meg, hogy mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

342. *a)* $4x-7 < 3+4x$; *b)* $9x+8 < 15+7x$.

343. *a)* $5x-4 > 7+5x$; *b)* $-3(x+20) \leqq -20$.

344. *a)* $(x-3)^2-11 \geqq (x+2)^2$; *b)* $(2x-1)^2-8x < (3-2x)^2$.

345. *a)* $(x-2)^2-2x+10 < (3-x)^2$;

b) $(3x-1)^2-6x < (2-3x)^2$.

346. *a)* $(x-1)^2-2x+10 < (2-x)^2$,

b) $(x+4)^2-6 \geqq (x+3)^2+2x$.

347. *a)* $(x-1)^2-5 \leqq (x+4)^2$;

b) $(1+x)^2+3x^2 < (2x-1)^2-18$.

348. *a)* $\frac{3x+5}{4} \leqq 2x+5$; *b)* $\frac{2(x+3)}{11} > 3+\frac{3}{11}$.

349. *a)* $-\frac{x}{2} < 3x-\frac{3+2x}{4}$; *b)* $2x-\frac{x}{3}+\frac{1}{2} \geqq 3x-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$.

350. *a)* $\frac{5x-2}{3}-\frac{1-3x}{4} < \frac{9x+4}{2}$;

b) $x-\frac{x-1}{2} \geqq \frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

351. *a)* $\frac{4-3x}{3} < \frac{2x-1}{4}-\frac{5x-2}{6}$;

b) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$.

352. Milyen pozitív egész számok teljesítik a következő egyenlőtlenségeket?

a) $3(x-2) < 1+x$; *b)* $6(x+1) < 1+3(2-x)$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a pozitív valós számok halmazán:

353. *a)* $(2x+1)^2-8 \geqq (3-2x)^2$;

b) $8x^2+(x+1)^2 > (2-3x)^2+4$.

354. *a)* $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5} < 4x-3$; *b)* $\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4} > 0$.

355. *a)* $\frac{37-2x}{3}+x \leqq \frac{3x-8}{4}-9$;

b) $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3} < -2$.

356. *a)* $\frac{7-6x}{2}+10x < \frac{20x+1}{3}+2$;

b) $3-\frac{7x-2}{6} \geqq \frac{5-13x}{9}$.

357. *a)* $\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4}\geqq 0$;

b) $\frac{2x+3}{4}+\frac{5x-2}{5}>1-\frac{4x-3}{10}$.

Állapítsuk meg, hogy milyen intervallumba esik az x, ha:

358. *a)* $2{,}5<5x<10$; *b)* $-4\leqq 4x\leqq 8$.

359. *a)* $-28\leqq -14x\leqq 84$; *b)* $-15<-3x<-3$.

360. *a)* $1\leqq x-2<2$; *b)* $0\leqq x-1\leqq 4$.

361. Határozzuk meg, hogy x mely egész értékei elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket:

a) $6\geqq x>2$; *b)* $-8\leqq x<-3$; *c)* $-2<x<2$;

d) $3\frac{1}{2}<x<5\frac{3}{4}$; *e)* $8\leqq x<12{,}5$; *f)* $-7<x<-1$;

g) $\frac{1}{4}<x<\frac{8}{7}$; *h)* $2{,}7<x\leqq 3\frac{1}{3}$; *i)* $0{,}5\leqq x\leqq 4{,}25$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket

a) algebrai úton;
b) grafikusan:

362. $\frac{x-3}{-2}>0$.

363. $\frac{1}{x}\leqq 1$.

364. $\frac{1}{x}>1$.

365. $\frac{1}{x}>-1$.

366. $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő törtes egyenlőtlenségeket:

367. $\frac{-1}{5-2x}<0$.

368. $\frac{3x+1}{2x+3}>0$.

369. $\frac{5-a}{2-3a}\geqq 0$.

370. $\frac{3(4-x)}{1-3x}>0$.

371. $\frac{2-z}{z-4}\geqq 0$.

372. $\frac{2x-3}{3x-6}>0$.

373. $\frac{x-4}{2x-3}\leqq 0$.

374. $\frac{2x+1}{3x+2}<0$.

375. $\frac{1-2z}{-3z+4}\leqq 0$.

376. $\frac{5-y}{y-4}\leqq 0$.

377. $\frac{x+2}{(x-3)^2}>0$.

378. $\frac{2x-7}{4-x}>1$.

379. $\frac{3x}{2x+1}>1$.

380. $\frac{5x-5}{3x-2}>1$.

381. $\frac{4x+6}{7x-2}\leqq 1$.

382. $\frac{3-6x}{2x+1}>-5$.

383. $\frac{2x+3}{3x+2}\leqq 2$.

384. $\frac{3x+1}{2x-5}>2$.

385. $\frac{3(1-4a)}{2a+1}\geqq -9$.

386. $\frac{3-5x}{2x-5}<-3$.

387. $\frac{x+4}{2x+3}\leqq -2$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

388. $\frac{3}{x-1}<\frac{2}{2x+5}$.

389. $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{x-2}$.

390. Határozzuk meg azt a legnagyobb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1.$$

391. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-1}{x-2} < \frac{x+3}{x}.$$

392. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geqq 2, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

393. Bizonyítsuk be, hogy

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

394. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+2}{a} + \frac{a+2}{2} \geqq 4, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

395. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \text{ahol} \quad a, b \in \mathbf{R}^+.$$

396. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2+b^2+c^2+3 \geqq 2(a+b+c), \quad \text{ahol} \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő paraméteres egyenlőtlenségeket x-re:

397. $\frac{a}{x-1} > 1$, ahol $a \in \mathbf{R}$.

398. $\frac{a}{x+1} \geqq -1$, ahol $a \in \mathbf{R}$.

399. $x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

400. $a(x-3) > x-5$, ahol $a \in \mathbf{R}$.

401. $\frac{x+1}{3a} + \frac{2x-3}{2} > \frac{3x+1}{6a}$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

402. Az a valós paraméter mely értékeire lesz a $2(x-a) = \frac{4x-9a}{5} + 1$ egyenlet gyöke

a) pozitív;
b) zérus;
c) negatív;
d) egész szám?

403. Az a paraméter mely értékeinél van az $\frac{x+2a}{3} = 4(x-a)$ egyenletnek

a) pozitív gyöke;
b) pozitív egész gyöke?

404. Az a paraméter mely értékeinél van a $3(x-2a)+4(x-a) = 5x$ egyenletnek 7-nél nagyobb gyöke? Mely a értéknél van egész gyök?

Abszolútértéket tartalmazó egyenlőtlenségek

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait és ábrázoljuk a megoldáshalmazokat a számegyenesen:

405. $|x| \leqq 3$.

406. $|x+8| < 1$.

407. $|x+7| < 5$.

408. $|x-5| < 3$.

409. $|3-x| \leqq 1$.

410. $|x-4| < 5$.

411. $|2-x| \leqq 4$.

412. $|5-2x| < 1$.

413. $|2x-3| < 2$.

414. $|x| > 3$.

415. $|x-4| > 5$.

416. $|x+3| > 2$.

417. $|x-5| \geqq 8$.

418. $|2x-4| \geqq 2$.

419. $|2-2x| \geqq 1$.

420. $|3x-2{,}5| \geqq 2$.

421. $|3x+6| > 3$.

422. $\dfrac{|x-3|}{x-3} > 0$.

423. $\left|\dfrac{2}{x-4}\right| > 1$.

***424.** $\dfrac{1}{|x|-3} < \dfrac{1}{2}$.

***425.** $\dfrac{|x-1|}{x+2} < 1$.

426. $\dfrac{2}{|x+2|} \leqq 1$.

***427.** $\dfrac{2}{|x-2|} > \left|\dfrac{-3}{2x-1}\right|$.

***428.** Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}.$$

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

***429.** $|x-2| < \dfrac{x-1}{2}$.

***430.** $2|x+1| > x+4$.

***431.** $|x+2| > |x|$.

***432.** $|1-x| < |x|$.

***433.** $|x-2| \leqq |x+4|$.

***434.** $|2x-3|-|3x+7| > 0$.

***435.** $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

***436.** $|x+2|+|x+1|+|x-4| > 9$.

***437.** $|x-1|+|x+2|-|x-3| > 4$.

***438.** $|x+2|-|x+1|+|x|-|x-1|+|x-2| < 3$.

***439.** $||2x-1|-3| > 2$.

***440.** Melyek azok az egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\left|\frac{1}{x-15}\right| > \frac{4}{9}?$$

***441.** Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$|x+1|+|x-4| > 7?$$

***442.** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geqq 1.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő paraméteres egyenlőtlenségeket x-re:

443. $a|x| > b$, ahol $a, b \in \mathbf{R}^+$.

444. $|x| < a$, ahol $a \in \mathbf{R}^+$.

445. $|x-a| < \varepsilon$, ahol $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

Egészrésszel kapcsolatos feladatok

Jelölje $[a]$ *a-nak az egészrészét. Bizonyítsuk be, hogy*

446. $[x+k] = [x]+k$, ahol $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$.

***447.** $[x+y] \geqq [x]+[y]$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$.

***448.** $[kx] \geqq k[x]$, ahol $x \in \mathbf{R}^+$, $k \in \mathbf{N}$.

***449.** $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, ahol $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

***450.** $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$.

***451.** $[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$.

***452.** $\left[\frac{1}{[x]}\right] = \left[\frac{1}{|x|}\right]$, ahol $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

***453.** $[ax] = m$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbf{Z}$.

***454.** $\frac{x}{a} = x-[x]$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

***455.** $x-1 = \left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]$.

2. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek

Másodfokú egyváltozós egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket
a) a természetes számok halmazán; b) az egész számok halmazán:

456. $3x^2 = 0$.
457. $x^2 - 4x = 0$.
458. $x^2 + x = 0$.
459. $3x^2 - 27 = 0$.
460. $x^2 + 25 = 0$.
461. $(x-2)^2 = 121$.
462. $3x^2 + 6x = 8x^2 - 9x$.
463. $\frac{3x^2-11}{4} + \frac{74-2x^2}{6} = 20$.
464. $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 2$.
465. $(x+3)^3 - (x+2)^3 = 19$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket
a) a racionális számok halmazán; b) a valós számok halmazán:

466. $x^2 - 2 = 0$.
467. $\frac{x^2}{4} = 49$.
468. $4x^2 = 11$.
469. $\frac{15}{4}x^2 - 303{,}75 = 0$.
470. $4x^2 - 0{,}64 = 0$.
471. $100x^2 - 1000 = 0$.
472. $x^2 + 1 = 0$.
473. $x(x-3) = 4x - 6x^2$.
474. $5x^2 - 8x + 3(x+2)x = 0$.
475. $(x-3)^3 + 2x(5x+1) = x^3 - (2x-1)^2 - 26$.

Oldjuk meg teljes négyzetté való kiegészítéssel a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

476. *a)* $x^2-4x+4=0$; *b)* $x^2-4x+3=0$.
477. *a)* $x^2-4x-96=0$; *b)* $x^2-2x+1=0$.
478. *a)* $x^2-2x-3=0$; *b)* $x^2-2x+8=0$.
479. *a)* $x^2+x+0{,}25=0$; *b)* $x^2+x=30$.
480. *a)* $x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}=0$; *b)* $9x^2+24x+16=0$.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

481. *a)* $x^2-1=0$; *b)* $x^2+1=0$;
c) $(x-2)^2-1=0$.
482. *a)* $x^2-4=0$; *b)* $x^2+4=0$;
c) $(x+1)^2+2=0$.
483. *a)* $\frac{1}{3}x^2-3=0$; *b)* $3x^2+5=0$;
c) $-0{,}5x^2+2=0$.
484. *a)* $-x^2=x$; *b)* $x^2-2x=0$;
c) $x^2=-2x$.
485. *a)* $x^2-5x+6=0$; *b)* $x^2-8x+16=0$;
c) $-x^2+2x+5=0$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a megoldóképlet segítségével a valós számok halmazán:

486. $x^2-6x+8=0$.
487. $x^2+9x+20=0$.
488. $x^2+x-12=0$.
489. $x^2-5x+6=0$.
490. $5x^2+7x+2=0$.
491. $5x^2-26x-24=0$.
492. $2x^2-3x+8=0$.
493. $3x^2-8x+4=0$.
494. $8x^2-16x+9=0$.
495. $16x^2+16x+3=0$.

Egyenértékűek-e a valós számok halmazán a következő egyenletek:

496. $x^2-2x=0$ és $x^2-\frac{2x^2}{x}=0$?
497. $x^2-5x+6=0$ és $2x-6=0$?
498. $x(x-1)-2(x-1)=0$ és $(x-1)(x-2)=0$?
499. $x^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=x$ és $x^3=x$?
500. $(x-2)^2=(7-2x)^2$ és $x-2=7-2x$?
501. $\frac{x^2-1}{x-1}=4$ és $x+1=4$?
502. $\frac{x^2-1}{x-1}=3$ és $x+1=3$?
503. $\frac{x^2-1}{x+1}=2$ és $x-1=2$?
504. Egyenértékűek-e a következő egyenletek
a) a racionális számok halmazán; *b)* a valós számok halmazán

$$x^2+1=0 \quad \text{és} \quad x^4+1=0?$$

505. Egyenértékűek-e a következő egyenletek
a) az egész számok halmazán; *b)* a valós számok halmazán

$$x^2=4 \quad \text{és} \quad x^4=16?$$

Számítsuk ki a következő egyenletek gyökeit:

506. $x^2-2(1+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0$.
507. $\sqrt{6}x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+2=0$.
508. $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.
509. $(2x+2)(x-1)=5x+6$.
510. $x(2x+3)=-12x-6$.
511. $8x(x+2)+3(x+1)+1=0$
512. $(1+2x)(3-x)+x^2=9$.
513. $\frac{x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{3x^2-10x}{15}$.
514. $\frac{7{,}2y+8{,}3}{7{,}2}=\frac{59{,}76}{51{,}84-y}$.

515. $\frac{x^2-7x}{3}-1=\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}$.

516. $1-\frac{2x^2-3x}{2}=\frac{(3x-1)^2}{5}-\frac{(x+3)^2}{5}$.

***517.** $\frac{2+x^2-x}{x}=\frac{1}{9}(5x-1)+\frac{1}{5}(3x-1)$.

518. $\frac{3{,}4x+2{,}7}{x-3{,}4}=\frac{x-2{,}7}{x+3{,}4}$.

519. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{4(1+x^2)}{x^2}-\frac{6}{x}$.

520. $\frac{2}{x+1}-2=\frac{x}{x-1}$.

521. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{3(3x-7)}=\frac{2}{x}$.

522. $\frac{6}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=3$.

523. $\frac{2(3x+4)}{x^2-4}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$.

524. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{64}{x^2-16}$.

***525.** $\frac{14}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}+\frac{4-x}{x+3}=\frac{7}{x+3}$.

***526.** $\frac{6-x}{3x^2-12}-\frac{1}{x-2}=1-\frac{1}{2-x}$.

***527.** $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$.

528. $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}=1$.

***529.** $\frac{1}{2(1-a)}+\frac{5}{4a^2+4a+4}=\frac{3a}{a^3-1}$.

***530.** $\frac{x}{x-10}-\frac{8}{x-6}=\frac{4x}{x^2-16x+60}$.

***531.** $\frac{x}{x+3}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{4x}{x^2+4x+3}$.

***532.** $\frac{6}{x^2-9}+\frac{13-x}{3+x}=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{3-x}$.

***533.** $\frac{9x^2-18x}{x^2-9}+\frac{6x}{3+x}-\frac{3+x}{3-x}=\frac{6(3x-3)}{x^2-9}$.

***534.** $\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}+\frac{36+x}{x^3-1}=-\frac{x+6}{1-x}$.

***535.** $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{4}{x-1}$.

Az egyenletek gyökeinek a kiszámolása nélkül döntsük el, hogy megoldhatók-e a valós számok halmazán a következő egyenletek:

536. $x^2+6x+16=0$.
537. $x^2+6x-16=0$.
538. $x^2-6x+16=0$.
539. $x^2-6x-16=0$.

Az egyenlet megoldása nélkül állapítsuk meg, hogy hány gyöke van a következő egyenleteknek és milyen előjelűek a gyökök:

540. $6x^2+2x-11=0$.
541. $4x^2-x-9=0$.
542. $3x^2+13x+9=0$.
543. $2x^2-13x+12=0$.
544. $6x^2+18x+12=0$.

545. Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek a következő számpárok a gyökei:

a) (5; 8); *b)* (−4; −5); *c)* $\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{8}\right)$;

d) $(3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2})$; *e)* $(\sqrt{7};\ -\sqrt{2})$.

546. Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

a) m^2-2m-3; *b)* $2x^2-7x+3$; *c)* $6a^2+5a-6$;
d) $72y^2-67y+15$; *e)* $-20x^2+7x+6$.

*547. Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{2x^2-9x+10}{2x^2+x-15}$; b) $\frac{2x^2+7x+6}{12+5x-2x^2}$;

c) $\frac{6a^2+5a-4}{3a^2+19a+20}$; d) $\frac{a^2-9a+14}{2a^2-2a-4}$;

e) $\frac{2a^2-a-3}{4a^2-7{,}5a+2{,}25}$; f) $\frac{2x^2-xy-3y^2}{4x^2-7{,}5xy+2{,}25y^2}$.

548. Milyen $k \in \mathbf{R}$ értéknél lesz az

a) $x^2-7x+k=0$ egyenlet egyik gyöke -2?
b) $x^2+kx-15=0$ egyenlet egyik gyöke 5?
c) $5x^2-19x+k=0$ egyenlet egyik gyöke 3?
d) $kx^2-19x-2=0$, $(k\neq 0)$ egyenlet egyik gyöke $-0{,}1$?
e) $x^2-kx+a^2-b^2=0$ egyenlet egyik gyöke $(a+b)$?

549. Határozzuk meg az m-et ($m \in \mathbf{R}$) úgy, hogy a $2x^2-11x+m=0$ egyenlet gyökei között a következő összefüggés álljon fenn:

$$2x_1-x_2=2.$$

550. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy a $4x^2-5x+c=0$ egyenlet gyökeinek az aránya $-\frac{3}{4}$ legyen.

551. Határozzuk meg a p-t úgy, hogy az $x^2+px+20=0$ egyenlet két gyökének a különbsége 1 legyen.

552. Milyen összefüggésnek kell p és q között fennállni, hogy az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyök n-szerese ($n \in \mathbf{Z}^+$, $n>1$) lehessen?

553. Határozzuk meg c-t úgy, hogy a $4x^2-8x+c=0$ egyenletnek

a) két egyenlő gyöke legyen;
b) két pozitív gyöke legyen;
c) egy pozitív és egy negatív gyöke legyen;
d) egyik gyöke 0 legyen;
e) ne legyen valós gyöke.

554. Határozzuk meg a k-t úgy, hogy az $x^2-7x+2k=0$ egyenlet egyik gyöke az $x^2-5x-k=0$ egyenlet egyik gyökének a kétszerese legyen.

555. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ egyenlet gyökeinek

a) ellentettjei;
b) n-szeresei ($n \in \mathbf{Z}^+$, $n>1$);
c) reciprokai.

556. Határozzuk meg a $2x^2-3x-3=0$ egyenlet

a) gyökeinek négyzetösszegét;
b) a gyökök négyzetének különbségét;
c) a gyökök köbeinek az összegét;
d) a gyökök köbeinek a különbségét

az egyenlet megoldása nélkül.

557. Mekkorának válasszuk c-t, hogy az $x^2+(3c+1)x+4c=0$ egyenlet gyökei négyzetének összege $\frac{1}{3}$ legyen?

558. Létezik-e olyan racionális p paraméter, hogy a

$$(p^2-5p+3)x^2+(3p-1)x+2=0$$

másodfokú egyenlet egyik gyöke fele a másiknak?

559. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+p_1x+q_1=0$ és az $x^2+p_2x+q_2=0$ egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha $p_1p_2=2(q_1+q_2)$.

560. Milyen összefüggés áll fenn p és q között, ha az

$$x^2+px+q=0 \quad \text{és a} \quad px+q^2=0, \quad (p\neq 0)$$

egyenleteknek van közös gyöke?

*561. A p valós paraméter milyen értékeinél lesz a

$$9x^2-(2-p)x-6-p=0$$

másodfokú egyenletnek

a) két különböző gyöke;
b) két egyenlő abszolútértékű gyöke;
c) két egyenlő gyöke?

Oldjuk meg x-re a következő egyenleteket, ahol a p paraméter valós szám:

562. $x^2-2(p+1)x+4p=0$.

563. $x(x+3)+p(p-3) = 2(px-1)$.

564. Mely racionális számokra igaz, hogy

$$(a-b)x^2-(a^2+ab+b^2)x+ab(2a+b) = 0,$$

ha az a, b paraméterek racionális számok.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán, ha az a, b paraméterek racionális számok:

565. $bx^2-a = (a-b)x$.

566. $\dfrac{x(x+2b)}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{2x}{a+b} = \dfrac{b-a}{a+b}$.

567. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x+\frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$$

egyenletet, ahol az $a \neq \pm b$ paraméterek valós számok.

568. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x}, \quad \text{ahol } a, b, x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

569. Bizonyítsuk be, hogy az $ax^2+bx+c = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a reciprokai gyökei a $cx^2+bx+a = 0$ egyenletnek, ha $a, c \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

570. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2 = 0$ egyenlet gyökei valós számok, ha $a, b, c \in \mathbf{R}$.

571. A valós p paraméter mely értékeinél lesz valós gyöke a

$$(p+3)x^2+(2p+3)x+p+5 = 0$$

egyenletnek ?

572. Létezik-e olyan $p \in \mathbf{Z}$ paraméter, amelynél a következő másodfokú egyenletnek két egyenlő gyöke van:

a) $x^2-(5+p)x+4 = 0$;

b) $x^2+2(p-4)x+p^2+6p+3 = 0$;

c) $(p-1)x^2-2(p+1)x+p+4 = 0, \quad (p \neq 1)$;

d) $px^2+6px+4p = -2x^2-1, \quad (p \neq -2)$?

***573.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $ax^2+bx-c = 0$ egyenletben az a, b, c pozitív valós számok és $a^2 = bc$, akkor

$$(x_1+1)(x_2+1) < -1,$$

ahol x_1 és x_2 az egyenlet két gyöke. Határozzuk meg az $(x_1+1)(x_2+1)$ szorzat maximális értékét. Mekkora lesz ebben az esetben a, b, c értéke?

574. Milyen feltételt elégítenek ki az $x^2+px+q = 0$ másodfokú egyenlet p, q együtthatói, ha $x_1(2x_2-1) = x_2+2$, ahol x_1, és x_2 a másodfokú egyenlet gyökei?

575. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c racionális számok és $a+b+c \neq 0$, akkor az

$$(a+b+c)x^2-2(a+b)x+a+b-c = 0$$

egyenlet gyökei racionálisak.

576. Határozzuk meg azokat a valós p értékeket, amelyekre a

$$(p-3)x^2-2px+6p = 0$$

egyenlet gyökei pozitív valós számok.

577. A p paraméter mely értékei mellett teljesül az $x^2-\dfrac{15}{4}x+p^3 = 0$ egyenlet gyökeire, hogy $x_1^2 = x_2$?

***578.** A p paraméter mely értékeinél lesz legalább egy pozitív gyöke az

$$x^2+2(p-1)x+p+5 = 0$$

egyenletnek?

***579.** Adjuk meg azokat a valós p paramétereket, amelyekre az

$$x^2+\frac{p}{2}x+\frac{p^2-5}{2} = 0$$

egyenlet mindkét gyöke

a) kisebb, mint egy; *b)* nagyobb, mint -1.

***580.** Milyen valós p paraméter esetén lesz a

$$px^2+x+p-1 = 0$$

egyenletnek két olyan különböző x_1 és x_2 gyöke, melyekre

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$$

teljesül?

***581.** A valós p paraméter mely értékeinél lesznek a

$$px^2+(p^3-p-1)x+1-p^2=0$$

egyenlet gyökei a $[-1;1]$ intervallumban?

***582.** Határozzuk meg, hogy mikor teljesül az

$$ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0)$$

másodfokú egyenlet x_1 és x_2 gyökeire, hogy

$$x_1^2-x_2^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

***583.** Milyen feltételek teljesülése esetén lesz az

$$x^2+px+q=0$$

egyenlet gyökeinek a különbsége m, $(m\in\mathbf{R})$?

***584.** Milyen valós p paraméterérték esetén esnek az

$$x^2-2(p+1)x+p(p-1)=0$$

egyenlet gyökei által meghatározott intervallumba az

$$x^2-2x-p^2+1=0$$

egyenlet gyökei?

Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok

585. Két egymás után következő természetes szám szorzata 552. Melyik ez a két szám?

586. Egy ballagó osztályban mindenki megajándékozta minden osztálytársát a saját fényképével. Mennyi volt az osztálylétszám, ha 1056 fénykép cserélt gazdát?

587. Bontsuk fel a 240-et két olyan tényezőre, amelyek összege 31.

588. Egy tört számlálója 2-vel kisebb, mint a nevezője. Ha ehhez a törthöz hozzáadjuk a reciprok értékét, akkor $\frac{34}{15}$-öt kapunk. Melyik ez a törtszám?

589. Egy tört nevezője 4-gyel nagyobb a számlálójánál. Ha a számlálót 3-mal csökkentjük és a nevezőt ugyanannyival növeljük, a tört értéke felére csökken. Melyik ez a tört?

590. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 9. Ha a számjegyeket felcseréljük és az így kapott számot az eredetivel megszorozzuk, szorzatul 2268-at kapunk. Melyik ez a szám?

591. Határozzuk meg azt a kétjegyű számot, amelyben az egyesek száma 2-vel nagyobb a tízesek számánál, és ha a számot megszorozzuk a számjegyeinek az összegével, akkor 144-et kapunk. Melyik ez a szám?

592. Egy tanuló két számot szorzott össze. A két szám közül az egyik 10-zel nagyobb volt, mint a másik. A tanuló a szorzásnál hibázott, mert a szorzatban a tízesek száma 4-gyel kevesebb lett. A szorzás ellenőrzésekor a kisebbik tényezővel való osztásnál hányadosul 39-et, maradékul 22-t kapott. Milyen számokat szorzott össze a tanuló?

593. Egy vállalat januárban 60 dolgozóval 3 millió forint értéket termelt. Februárban a termelési érték 15,5%-kal emelkedett, mégpedig azért, mert az 1 főre eső termelési érték kétszer annyi %-kal nőtt, mint ahány %-kal emelkedett a vállalat létszáma. Mennyi volt a vállalat létszáma februárban?

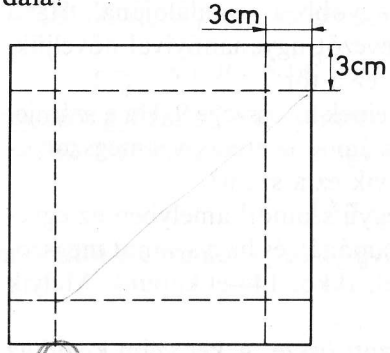
594. Egy 12 cm × 18 cm-es méretű fénykép körül egyenlő szélességű keret van. Határozzuk meg a keret szélességét, ha területe egyenlő a kép területének a 75%-ával.

595. Egy áru árát felemelték, majd később – mivel nem fogyott – kétszer annyi százalékkal csökkentették, mint ahány százalékkal felemelték annak idején. Így az eredeti áránál 5,5%-kal lett olcsóbb. Hány százalékkal emelték fel az árát eredetileg?

596. Két kénsavoldat közül az első 0,8 kg, a második 0,6 kg tömény kénsavat tartalmaz. Ha a két oldatot összeöntjük, akkor 10 kg harmadik töménységű kénsavoldatot kapunk. Mekkora volt az első és a második oldat tömege, ha a kénsavtartalom százaléka az első oldatban 10-zel több, mint a másodikban?

597. Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszor akkora, mint a másik, a területe pedig 7,5 cm^2. Mekkorák a háromszög befogói?

598. Hány oldalú sokszögnek van annyi átlója, mint ahány oldala?



2. ábra

599. Négyzet alakú lemezből dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkaiból 3 cm-es négyzeteket vágunk ki, és azután az oldalakat felhajtjuk. A dobozt 1500 cm^3 térfogatúra tervezzük. Milyen nagyságú négyzet alakú lemezből lehet a dobozt elkészíteni *(2. ábra)*?

600. Egy téglalap kerülete 42 cm, átlója 15 cm. Mekkorák az oldalai?

601. Egy téglalap területe 192 cm^2, kerülete 56 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

602. Egy téglalap kerülete 40 cm. A téglalap oldalai fölé írt négyzetek területeinek az összege 208 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai?

603. Egy sakkverseny minden résztvevője pontosan egy játszmát játszott a többi résztvevő mindegyikével. Ezen a versenyen összesen 153 partit játszottak le. Hányan vettek részt a sakkversenyen?

604. Két kombájn együtt 4 nap alatt learatta a szövetkezet búzatábláját. Az egyik kombájn egyedül 6 nappal hosszabb idő alatt végezte volna el ugyanazt az aratási munkát mint a másik. Hány napig aratott volna külön-külön a két kombájn?

605. Egy tartály két csövön keresztül 6 óra alatt telik meg. Az egyik csövön át 5 órával hamarabb telik meg, mint a másikon keresztül. Mennyi idő alatt töltené meg külön-külön a két cső a tartályt?

606. Két útjavító brigád együttesen naponta 4,5 km hosszú utat tud megjavítani. A 2. brigád 2 nappal kevesebbet dolgozott, de mindkét brigád 20 km hosszú szakaszt javított meg külön-külön.

Hány km-es szakaszt javított meg egy-egy brigád külön-külön naponta?

607. Két munkás együtt dolgozva 8 óra alatt tud befejezni egy munkát. Mennyi idő alatt lenne készen egyedül ezzel a munkával az első, illetve a második munkás, ha az utóbbinak 12 órával több időre lenne szüksége, mint az elsőnek?

608. Egy építkezésen 8000 m^3 földet kellett kitermelni meghatározott idő alatt. A markológép naponta 50 m^3-rel tudott kiemelni a tervezett mennyiségnél, és így a munka 8 nappal hamarabb lett készen. Hány napig tartott volna a munka az eredeti tervezet szerint?

609. A ruhagyárban az egyik brigád 810 szoknyát, a másik brigád ugyanennyi idő alatt 900 szoknyát varrt meg. Az 1. brigád 3 nappal, a 2. brigád 6 nappal a határidő előtt már kész volt a munkával. Hány szoknyát varrtak meg naponta, ha az 1. brigád mindennap 4 szoknyával kevesebbet varrt meg, mint a 2. brigád?

610. Egy építkezéshez 30 tonna anyagot kell kiszállítani. A szállításhoz a megrendeltnél 2 tonnával kisebb teherbírású teherautókat küldtek, de 4-gyel többet, így a szállítást időben elvégezhették. Hány teherautó végezte a szállítást és hány tonnásak voltak?

611. Két folyóparti város távolsága 240 km. Ezt az utat a menetrend szerinti hajó oda-vissza 25 óra alatt teszi meg. Mekkora sebességgel haladna ez a hajó álló vízben, ha a folyó 4 km/h sebességgel folyik?

612. Két kikötő között a távolság egy folyón 21 km. Egy motorcsónak elindul az egyik kikötőből a másikba, ott 30 percet áll, majd visszaindul, és így az első indulás után 4 órával ér vissza a kikötőbe. A folyó vizének sebessége 2,5 km/h. Mekkora a motorcsónak sebessége állóvízben?

613. Két gyalogos egyszerre indul *A*-ból *B*-be. Az első, aki óránként 2 km-rel többet tesz meg, éppen egy órával hamarabb ér céljához. Hány kilométert tesznek meg óránként, ha *B* 24 km-re van *A*-tól?

614. Egy kerékpárosnak 30 km-es utat kell megtennie. Mivel a kitűzött időnél 3 perccel később indult, ahhoz, hogy idejében megérkezzék, óránként 1 km-rel többet kellett megtennie, mint ahogy eredetileg tervezte. Mekkora sebességgel haladt?

615. Egy gyorsvonat tilos jelzés miatt 16 percig vesztegelt, és hogy késését behozza, a következő 80 km-t az előírtnál 10 km-rel nagyobb óránkénti sebességgel kellett megtennie. Mennyi volt a menetrendben előírt sebessége?

616. Az A vasútállomásról reggel 5 órakor tehervonat indul B-be, mely A-tól 1080 km távolságra van. 8 órakor B-ből gyorsvonat indul A-ba, ez óránként 15 km-rel többet tesz meg a tehervonatnál. Félúton találkoznak. Hány órakor történik ez?

617. Az A város 78 km-re van B-től. A-ból elindult egy kerékpáros B-be. Egy órával később pedig egy másik kerékpáros B-ből A-ba. Ez utóbbi sebessége 4 km/h-val több, mint az elsőé, így B-től 36 km-re találkoztak. Mennyi ideig kerékpározott mindegyik az indulástól a találkozásig és mekkora sebességgel?

618. Két város között 960 km a távolság. A személyvonat sebessége 20 km/h-val több, mint a tehervonaté. Határozzuk meg a vonatok sebességét, ha tudjuk, hogy a személyvonat menetideje 4 órával kevesebb a két város között.

619. Reggel 5 órakor elindul egy szállítókocsi A-ból B felé. Ugyanekkor B-ből is elindul egy teherautó A felé. Pontosan 11 órakor haladnak el egymás mellett. A teherautó 30 perccel hamarabb ér A-ba, mint a szállítókocsi B-be. Mikor érkezik meg a teherautó?

620. Egy egymástól 480 km-re levő A és B városból egyszerre indult el egymással szemben két vonat. Három óra 15 perc múlva még 51 km távolságban voltak egymástól. Ha B-ből 40 perccel később indult volna el ez a vonat, mint az A-ból induló, akkor félúton találkoztak volna. Határozzuk meg mindkét vonat sebességét.

621. Egy 120 m hosszú körpályán két sportoló korcsolyaedzést tart. Mindketten egy irányban haladnak és 20 percenként találkoznak. Az egyik korcsolyázó a kört 1 perccel rövidebb idő alatt futja le, mint a másik. Határozzuk meg mindkét korcsolyázó sebességét.

622. Egy kocsi első kereke 60 m-es távolságon 9-cel többet fordul, mint a hátsó kereke 63 m-en. A két kerék kerületének az összege 5 m. Mekkora a kerekek kerülete és a sugaruk?

623. Két gyalogos közül az egyik A-ból B-be, a másik B-ből A-ba

tart. Az első 6 órával később indul, ezért amikor találkoznak, 12 km-rel kisebb utat tett meg, mint a második. A találkozás után mindegyik a régi sebességgel folytatja az útját, és így az első 8 óra múlva ér B-be, a második pedig 9 óra múlva ér A-ba. Határozzuk meg mindkét gyalogos sebességét.

624. Egy kerékpáros mindennap 30 km-es utat tesz meg. Az egyik napon 3 perccel hamarabb indult el, de 1 km/h-val kisebb sebességgel hajtott, mint máskor. Így is időre megérkezett. Mennyi volt ekkor a sebessége?

***625.** Menetrend szerint az A és B helységek közti 20 km-es távolságot a tehervonat állandó sebességgel teszi meg. A valóságban félútig ezzel a sebességgel haladt, de ott a jelző 3 percre megállította és így az út másik felén óránként 10 km-rel gyorsabban ment, hogy időben megérkezzen. Másnap ugyanott a jelző 5 percre állította meg. Mennyivel kellett ekkor megnövelnie a sebességét, hogy tartani tudja a menetrend szerinti érkezési időt? Mekkora a vonat menetrend szerinti sebessége?

***626.** Pista naponta 30 km-t kerékpározik A-ból indulva B felé. Miután 72 km-t megtett, Bandi is elindul B-ből A felé ugyanazon az úton, és naponta az egész út 0,1-ed részét teszi meg. Miután Bandi annyit ment, mint az általa km-ben megtett út mérőszámának a 0,125 része, találkozik Pistával. Mekkora az A és B helységek távolsága?

***627.** Az A és B kerékpárosok az M, illetve N helységekből indultak el egymással szemben. Amikor találkoztak, kiderült, hogy A 6 km-rel többet tett meg, mint B. Ha mindketten ugyanazzal a sebességgel folytatják tovább az útjukat, akkor A N-be 4,5 órával, B M-be 8 órával a találkozás után fog megérkezni. Milyen távol van M-től N?

***628.** Két kerékpáros egyidejűleg indul el az A községből a B és C község felé. Az AC távolság 30 km-rel nagyobb, mint az AB távolság. Mindegyik kerékpáros 10 óra alatt teszi meg az utat. Mekkora az AB távolság, ha a második kerékpárosnak 21 km megtevéséhez 10 perccel kevesebb időre van szüksége, mint az első kerékpárosnak?

***629.** Egy ABC derékszögű háromszög B és C csúcsából egyszerre

indul el egy-egy légy a BA átfogón, illetve a CA befogón az A pont felé. A BA átfogón mozgó légy sebessége 8,5 m/s, a CA befogón mozgó légy sebessége 5 m/s. Mikor lesz a két légy távolsága 26 méter, ha $d_{BA}=c=85$ m, $d_{CA}=b=75$ m?

630. Bontsuk fel 30-at két összeadandóra úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen.

631. Bontsunk fel egy 20 cm hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy az egyes részek fölé rajzolt négyzetek területének az összege minimális legyen.

632. Bontsuk fel a 10-et két olyan összeadandóra, amelyek szorzata maximális.

633. Bontsuk fel a p számot két részre úgy, hogy a részek szorzata a legnagyobb legyen.

634. Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyek befogóinak az összege 12 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

635. Egy gyár udvarán 40 m hosszú kerítéssel kell bekeríteni egy téglalap alakú rakodási területet három oldalról (a negyedik oldalon épület áll). Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy a bekerített terület a lehető legnagyobb legyen?

636. 24 m hosszú dróttal téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldala egy ház falához csatlakozzék. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha azt akarjuk, hogy az elkerített rész maximális területű legyen?

637. Az olyan téglalapok közül, melyeknek a kerülete k, melyiknek a legnagyobb a területe?

638. Egy trapéz egyik párhuzamos oldala 4, másik párhuzamos oldalának és m magasságának az összege 10. Hogyan válasszuk meg a trapéz méreteit, ha azt akarjuk, hogy területe maximális legyen?

639. Mekkorák az 10 cm-es és 15 cm-es befogójú derékszögű háromszögbe írható maximális területű téglalapok oldalai, ha a téglalap egyik szöge a háromszög derékszögével esik egybe?

Másodfokú kifejezést tartalmazó abszolútértékes egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

640. $x^2-|x|=6$.

641. $x^2+2{,}5\,|x|-1{,}5=0$.

642. $x^2-6\,|x|+8=0$.

643. $x^2+6\,|x|+8=0$.

644. $9x^2-18\,|x|+5=0$.

645. $0{,}25x^2-|x|-3=-4$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

646. $|0{,}25x^2-x-3|=2$.

647. $\left|0{,}25x^2-|x|-3\right|=2$.

648. $|x^2-4|=x^2-4$.

649. $|-x^2+1|=-x^2+1$.

650. $(|x|+1)^2=4\,|x|+9$.

651. $(3\,|x|-3)^2=|x|+7$.

652. $|x-3|=(x-3)^2$.

653. $|x^2-3x+2|=3x-x^2-2$.

654. $|2x+3|-1=|2x^2-x-1|$.

655. $|x^2-2x-3|=|2x-5|+1$.

656. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$.

657. $|x^2-5x+6|=5x-x^2-6$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

658. $3\,|x^2-4x+2|=5x+16$.

659. $3\,|x^2-2x-1|=5x+1$.

660. $3\,|x^2-4x+2|=5x-4$.

661. $3\,|x^2-6x+7|=5x-9$.

662. $|x^2-2x-3|=|x^2-2x+5|$.

663. $x^2-|x-1|=1$.

**664.* $|x^2-1|=-|x|+1$.

*665. Oldjuk meg a racionális számok halmazán az

$$|x^2-4x+3|+|x^2-6x+8| = 1{,}5$$

egyenletet.

Másodfokúra redukálható magasabbfokú egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

666. $16x^4-625 = 0.$
667. $x^4-5x^2+4 = 0.$
668. $x^4-125x^2+484 = 0.$
669. $4x^4-17x^2+4 = 0.$
670. $x^8-13x^4+36 = 0.$
671. $x^6-2x^3-8 = 0.$
672. $16x^8-257x^4+16 = 0.$
673. $8x^6-9x^3+1 = 0.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán – alkalmas helyettesítés bevezetésével – a következő egyenleteket:

674. $(x-1)^2-5(x-1)+6 = 0.$
675. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x) = 24.$
676. $(x^2+2x)^2-14x^2 = 15+28x.$
677. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 6.$
678. $(x-2)^4-5(x-2)^2+4 = 0.$
679. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6 = 0.$
*680. $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11.$

Oldjuk meg a következő, úgynevezett reciprok egyenleteket a valós számok halmazán, felhasználva, hogy

ha $x+\dfrac{1}{x} = a$, *akkor* $x^2+\dfrac{1}{x^2} = a^2-2.$

*681. $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) = 7\left(x+\dfrac{1}{x}\right).$

*682. $2\left(x^2+\dfrac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\dfrac{5}{x}\right)+74 = 0.$
*683. $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6 = 0.$
*684. $12x^4-16x^3-11x^2-16x+12 = 0.$
*685. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30 = 0.$

Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása a komplex számok halmazán

Oldjuk meg a következő valós együtthatós másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán:

686. *a)* $x^2 = -1$; *b)* $x^2 = -2.$
687. *a)* $x^2+4 = 0$; *b)* $x^2+9 = 0.$
688. *a)* $x^2-x+6 = 0$; *b)* $x^2+6x+36 = 0.$
689. *a)* $x^2+2x+2 = 0$; *b)* $x^2-2x+5 = 0.$
690. *a)* $x^2+x+2 = 0$; *b)* $x^2+3x+4 = 0.$
691. *a)* $2x^2+x+1 = 0$; *b)* $2x^2-x+3 = 0.$

Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek a gyökei:

692. *a)* $x_1 = 1-3i$; $x_2 = 1+3i$; *b)* $x_1 = \sqrt{2}-i$; $x_2 = \sqrt{2}+i.$
693. *a)* $x_1 = 2-i\sqrt{5}$; $x_2 = 2+i\sqrt{5}$;
b) $x_1 = \sqrt{3}-i\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{3}+i\sqrt{2}.$

Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő másodfokúra redukálható egyenleteket:

694. $x^4+x^2+1 = 0.$
*695. $8x^6-9x^3+1 = 0.$
*696. $16x^8-257x^4+16 = 0.$
697. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12.$
698. $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10 = 0.$
699. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3) = 1.$
700. $(8x+7)^2(8x+6)(8x+8) = 72.$

Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő komplex együtthatós egyenleteket:

701. $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}-1\right)=0.$

702. $x^2-(3i+2)x-2+4i=0.$

703. $(1+i)x^2-2(2-i)x-2{,}5-1{,}5i=0.$

704. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az $x^2+|x|=0$ egyenletet.

***705.** Mekkora lehet a z komplex szám abszolútértékének a maximuma, ha

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1?$$

Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a számegyenesen a megoldáshalmazt:

706. $x^2>1.$
707. $x^2\geqq 1.$
708. $x^2<1.$
709. $x^2\leqq 1.$
710. $x^2-9>0.$
711. $x^2-9\geqq 0.$
712. $x^2-9<0.$
713. $x^2-9\leqq 0.$
714. $5(x^2-16)>0.$
715. $x(x-3)>0.$
716. $3x(x+5)<0.$
717. $2x(2-x)<0.$
718. $4x^2+x\geqq 0.$
719. $7x^2-3x<0.$
720. $15x^2>4x.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán
a) algebrai úton;
b) grafikus úton:

721. $x^2-2x-3>0.$

722. $x^2+2x+3\geqq 0.$

723. $x^2-2x+1\geqq 0.$
724. $x^2-3x-10\leqq 0.$
725. $x^2-5x+6>0.$
726. $x^2-5x+8>0.$
727. $-x^2+x+6\geqq 0.$
728. $2x^2+3x-2\leqq 0.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

729. $-x^2-6x+27\leqq 0.$
730. $2x^2-4x+13>0.$
731. $2x^2-x+4<0.$
732. $2x^2-13x+20<0.$
733. $-3x^2-x+2\geqq 0.$
734. $-3x^2+5x+2\geqq 0.$
735. $3x^2-5x-2<0.$
736. $4x^2-4x+1>0.$
737. $9x^2+6x+1>0.$
738. $-x^2+12x-36<0.$
739. $-x^2+12x-36\leqq 0.$
740. $-x^2+12x-36>0.$
741. $-x^2+12x-36\geqq 0.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a pozitív valós számok halmazán:

742. $\dfrac{x^2-15x}{3}>108-5x.$

743. $\dfrac{2x^2-3}{2}-\dfrac{x^2+3}{4}>3.$

Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek? Ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

744. $\dfrac{x(x+1)}{x-1}>3.$

745. $\dfrac{x(x+1)}{x-1}>6.$

746. $\frac{(x-3)(x+4)}{x-2} > 0.$

747. $\frac{x^2-25}{x-4} < 0.$

748. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$

749. $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} < \frac{4}{3}.$

750. $\frac{2}{x-3} > \frac{x}{1-x}.$

751. $\frac{x-2}{x+2} \geqq \frac{2x-3}{4x-1}.$

752. $\frac{1}{x-1} - 3 < \frac{2}{x-3}.$

753. $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}.$

754. $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0.$

755. $\frac{(8-x)(-x+5)}{x^2-5x+6} < 0.$

756. $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0.$

757. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0.$

***758.** $\frac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7.$

759. Határozzuk meg azt a legkisebb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-5}{x^2+5x-14} > 0.$$

Határozzuk meg azt a legnagyobb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

760. $\frac{x-2}{x^2-9} < 0.$

761. $\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{-3x-x^2}.$

***762.** $(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) < 0.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és állapítsuk meg, hogy a]9; 10] *intervallum részhalmaza-e a megoldáshalmaznak:*

763. $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2 > 0.$

***764.** $\frac{(x-3)(x-5)(8-x)^3}{(x-2)(5x-7)^2} < 0.$

765. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0.$$

766. Milyen $p \in \mathbf{R}$ értékeknél teljesül minden valós x-re a $px^2 + 12x - 5 < 0$ egyenlőtlenség?

***767.** Határozzuk meg azokat a valós p paramétereket, amelyekre az

$$\frac{x^2+p^2}{p(6+x)} \geqq 1$$

egyenlőtlenség minden $-1 < x < 1$ értékre fennáll.

***768.** Adott egy tört, amelynek számlálója p, nevezője p^2-1 ($|p| \neq 1, p \in \mathbf{Z}$). Ha mind a számlálóhoz, mind a nevezőhöz 2-t adunk hozzá, akkor a tört értéke $\frac{1}{3}$-nál nagyobb lesz. Ha mind a számlálóból, mind a nevezőből 3-at elveszünk, akkor a tört értéke pozitív marad, de $\frac{1}{10}$-nél kisebb lesz. Melyik ez a tört?

***769.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$1 \leqq \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leqq 3$$

egyenlőtlenség minden valós x-re fennáll.

***770.** A p valós paraméter mely értékeire lesz igaz, hogy a

$$-2 < \frac{x^2+px-2}{-x^2+x-1} < 3$$

egyenlőtlenség $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén teljesül?

***771.** Milyen p valós paraméter esetén lesz az $x^2-x-2 < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazának részhalmaza a $px^2-4x-1 \leqq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza?

***772.** A p valós paraméter mely értékeinél esnek a $px^2+2x-3 = 0$ egyenlet gyökei az [1; 3] intervallumba?

***773.** Milyennek válasszuk a valós p paramétert, hogy a

$$(p-1)x^2-2px+p+3 = 0, \quad (p \neq 1)$$

másodfokú egyenlet mindkét gyöke pozitív legyen?

***774.** Milyen p valós paraméter mellett elégítik ki a $2x^2+6x+p = 0$ másodfokú egyenlet gyökei az

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 2$$

feltételt?

Milyen valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

***775.** $(2x-1)(3x+2)(x+1) < 0.$

***776.** $\frac{2}{2x+1} > x^2 - \frac{5}{2}x + 2.$

***777.** $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}.$

***778.** $(2x+3)^2(3x-5)^3(x+1)(x-3) < 0.$

***779.** $2(x^3+1)^2 > (x^2+1)^3.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán x-re a következő paraméteres egyenlőtlenségeket:

780. $x^2-a^2 < 0, \quad a \in \mathbf{R}.$

781. $ax^2 - \frac{1}{a} > 0, \quad a \in \mathbf{R}^+.$

782. $x^2-4a^2-12ab-9b^2 < 0,$ ahol $a, b \in \mathbf{R}^+, \quad a > b.$

783. $(x+a)(x-b)+(x+b)(x-a) < 2a^2+2b^2,$ ahol $a, b \in \mathbf{R}^+.$

784. $(a+x)(2x+a)+(x-a)(a-2x) > (a+2x)^2-a^2, \quad a \in \mathbf{R}^+.$

785. $\frac{(a-x)(x-b)}{ax-b} < 0, \quad a, b \in \mathbf{R}^+, \quad a > b.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő, abszolútértékes kifejezést tartalmazó egyenlőtlenségeket:

786. $|x^2-4x| < 5.$

787. $|x^2+x|-5 < 0.$

788. $|x^2-x-6| > 4.$

789. $|x^2-x-3| < 9.$

790. $x^2-5|x|+6 < 0.$

791. $|x^2-5x| < 6.$

792. $|2x^2-9x+15| \geqq 20.$

793. $|2x^2-9x+15| \geqq 0.$

794. $|x^2-2x| < x.$

795. $|x^2-2x-3| < 3x-3.$

796. $|x^2-3x|+x-2 < 0.$

797. $|x^2-3x+2| > 3x-x^2-2.$

798. $|x^2-2x-8| > 2x.$

799. $x^2-|5x+8| > 0.$

800. $x^2+4 \geqq |3x+2|-7x.$

801. $|x-6| > |x^2-5x+9|.$

802. $(|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0.$

803. $(|x|-1)^2 > 2.$

804. $x^2+3|x|+2 > 6x|x|.$

805. $|x^2-1|+|x^2-9| < 8.$

806. $\frac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0.$

807. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqq 2x.$

808. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqq 2.$

*809. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| < 3.$

*810. $\left|\frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2}\right| < 3.$

Vegyes feladatok

811. Oldjuk meg a prímszámok halmazán az $x^2-2y^2 = 1$ egyenletet.

812. Határozzuk meg azokat a pozitív egész x és y számokat, amelyekre $x^2-y^2 = 133$.

*813. Az $x^2-y^2 = 1980$ egyenletet hány olyan különböző $(x; y)$ számpár elégíti ki, amelynek elemei pozitív egész számok?

*814. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x+y = x^2-xy+y^2 \quad \text{egyenletet.}$$

815. Hány megoldása van az egész számok halmazán az

$$x^2-y^2 = 2xyz \quad \text{egyenletnek?}$$

*816. Hány megoldása van a természetes számok halmazán a

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{1960} \quad \text{egyenletnek?}$$

*817. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-y^2 = p^2$ egyenletnek mindig van pozitív egész megoldása, ha $p>2$ egész szám.

*818. Oldjuk meg a pozitív természetes számok halmazán a

$$19x^2-65y^2 = 1965 \quad \text{egyenletet.}$$

*819. Határozzuk meg azokat a pozitív természetes számokat, amelyek kielégítik az $xy^2+2xy+x-243y = 0$ egyenletet.

820. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan x, y egész számok, amelyek kielégítenék a $15x^2-7y^2 = 9$ egyenletet.

821. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $3x^2+4xy+y^2 = p$ egyenletet, ahol p prímszám.

*822. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet

$$\frac{x-1}{1+(x-1)y}+\frac{y-1}{2y-1} = \frac{x}{x+1}.$$

823. Három egymás után következő páratlan szám négyzetének összege négyjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Melyek ezek a számok?

824. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek mindegyike 9-cel nagyobb számjegyei négyzetének az összegénél?

*825. Hány megoldása van a pozitív egész számok halmazán az

$$\frac{1}{1970} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \text{egyenletnek?}$$

*826. Megoldható-e az egész számok halmazán az

$$x^2+y^2 = 1977 \quad \text{egyenlet?}$$

*827. Keressünk olyan kétjegyű számot, amely egyenlő a tízesek helyén álló számjegy köbének és az egyesek helyén álló számjegy négyzetének az összegével.

*828. Két kétjegyű szám összegének négyzete egyenlő azzal a négyjegyű számmal, amely a két kétjegyű szám egymás mellé írásával keletkezik. Melyek ezek a kétjegyű számpárok?

*829. Adjuk meg azokat az $(x; y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ számpárokat, amelyekre

$$4x^2-4x-y^2 = 20.$$

*830. Négy asszony, mindegyik a lányával együtt, egy üzletben szőnyegszegőt vásárol. Mindegyik anya kétszer annyi métert vásárol, mint a lánya, és a 8 személy mindegyike annyi métert vesz, ahány forintot fizet egy-egy méterért. Egy méter szőnyegszegő ára forintban kifejezve egész szám. Bárányné 76 Ft-tal többet fizet, mint Zöldné, Nóra 3 m-rel kevesebbet vásárol, mint Feketéné, Ági 2 m-rel többet, mint Vali, aki 48 Ft-tal kevesebbet fizet, mint Szabóné. Hogy hívják Margit anyját?

831. Létezik-e megoldása a természetes számok halmazán az

$$x^3-5x^2 = 13 \quad \text{egyenletnek?}$$

832. Adjuk meg azokat az $(x; y)$ egész számpárokat, amelyekre

$$x^3+7y = y^3+7x \quad \text{teljesül.}$$

833. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $y^3-x^3 = 91$ egyenletet.

3. Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek

Irracionális egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

834. $\sqrt{x}=x$.
835. $\sqrt{x}=-x$.
836. $\sqrt{x} = x-2$.
837. $\sqrt{x+2} = x-4$.
838. $\sqrt{x} = 2x-6$.
839. $\sqrt{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$.
840. $\sqrt{x^2-7} = 3$.
841. $\sqrt{x}+1 = 2x$.
842. $\sqrt{x}+6 = x$.
843. $\sqrt{x+1}+1 = x$.
844. $\sqrt{x^2-12} = \sqrt{x}$.
845. $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x^2}$.
846. $\sqrt{x-3} = x-9$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

847. *a)* $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$; *b)* $\sqrt{-x} = -\frac{1}{2}x$; *c)* $\sqrt{x} = x-2$.

848. *a)* $\sqrt{x}=x^2$; *b)* $\sqrt{-x}=x^2$; *c)* $\sqrt{x} = 2x^2-1$.

849. *a)* $\sqrt{x} = \frac{1}{x}+\frac{7}{4}$; *b)* $\sqrt{x+2} = \frac{4}{x}$.

850. *a)* $\sqrt{3x-5} = x^2-7$; *b)* $\sqrt{4-x} = 3-\sqrt{5+x}$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

851. *a)* $x\sqrt{x}+\sqrt{x}-4 = 4(\sqrt{x}-1)$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{2}{9}-x} = \frac{1}{3}$.

852. *a)* $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2} = 4$; *b)* $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-x} = 2$.

853. *a)* $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20} = -2$; *b)* $\sqrt[5]{\frac{2}{3}x-9} = 2$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

854. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$.
855. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x} = 3$.
856. $\sqrt{x^2-9} = x^2-21$.
857. $\sqrt{9+x}+\sqrt{25-x} = 2$.
858. $\sqrt{9+x}+\sqrt{25-x} = 0$.
859. $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$.
860. $\sqrt{x^2+9} = 2x-3$.
861. $\sqrt{x^2-9} = 3x-11$.
862. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1} = 1$.
863. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} = 5$.
864. $\sqrt{5x+20}+\sqrt{x+8} = 2$.
865. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = 1$.
866. $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5+x} = 3$.
867. $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2} = x+1$.
868. *a)* $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{2}+4$; *b)* $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x} = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.
869. *a)* $\sqrt[3]{x-4} = 2$; *b)* $\sqrt[3]{x-4} = -2$; *c)* $\sqrt[3]{x(x+6)} = x$.
870. *a)* $\sqrt[4]{x-2} = 1$; *b)* $\sqrt[4]{x-2} = -1$; *c)* $\sqrt[4]{x^2-36} = 2\sqrt{2}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

871. *a)* $\sqrt{x+5} = -3$; *b)* $\sqrt{x+2}+2 = 0$.
872. *a)* $\sqrt{4x-3} = -4$; *b)* $\sqrt{2x}-\sqrt{18x} = 2$.
873. *a)* $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} = 0$; *b)* $x-3\sqrt{x}-4 = 0$.

874. *a)* $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$; *b)* $\sqrt{8-x^2} = -x$.

875. *a)* $\sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} = 1$; *b)* $\sqrt{x^2-4x+4} = x-2$.

876. *a)* $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2x-1} = -2$; *b)* $\sqrt{100-x^2} = x-10$.

877. *a)* $\sqrt{x-7} + \sqrt{6-x} = 3$; *b)* $\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$.

878. *a)* $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = -1$; *b)* $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = -1$.

879. *a)* $\sqrt{x} - \sqrt{-3-x} = 1$; *b)* $\frac{21}{\sqrt{2x+1}} - 2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = 0$.

880. *a)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + 4 = 0$; *b)* $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{x-3}}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

881. $\sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{3x-1}$.

882. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$.

883. $\sqrt{4+x} + \sqrt{9+x} = \sqrt{x+25}$.

884. $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$.

885. $\sqrt{20+x} + \sqrt{20-x} = \sqrt{6x}$.

886. $\sqrt{4x+5} + \sqrt{10x+6} = \sqrt{24x+25}$.

Van-e a racionális számok halmazán megoldása a következő egyenleteknek?

887. $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

888. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$.

889. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$.

890. $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2$.

Megoldhatók-e a következő egyenletek a pozitív valós számok halmazán?

891. $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

892. $\frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3-x}{x-4}}$.

893. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$.

894. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$.

895. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+19}$.

***896.** $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$.

***897.** $\sqrt{23 + \sqrt{2x - \sqrt{5x^2-21x-68}}} = 5$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

***898.** $\sqrt{x+5} = x^2-5$.

899. $4\sqrt{1-x+x^2} = 8-x$.

900. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}$.

901. $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + 1$.

902. $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} = 0$.

***903.** $\sqrt{4x^2-3x+15} + \sqrt{4x^2-3x+8} = 7$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen:

904. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$.

905. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$.

906. $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 5$.

907. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

908. $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x^2+4x+4}$.

909. $\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{x^2-2x+1}$.

910. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}$.

***911.** $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$.

***912.** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

***913.** $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

***914.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

915. $5x-3\sqrt{x}=14$.

916. $|2\sqrt{2|x|-1}-1|=3$.

917. $|\sqrt{x}-3|=1+|\sqrt{5-x}-1|$.

918. $\sqrt{x^2+17x+4}-\sqrt{x^2+11x+7}=\frac{2x-1}{5}$.

919. $2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}=5$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő másodfokú egyenletekre visszavezethető egyenleteket:

920. $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$.

921. $2\sqrt[3]{x}+5=\frac{63}{\sqrt[3]{x}}$.

922. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

923. $x^3-3x\sqrt{x}+2=0$.

924. $x^5-33x^2\sqrt{x}+32=0$.

Milyen számok elégítik ki a következő egyenleteket?

***925.** $\sqrt{1-x^2}=(1-\sqrt{x})^2$.

***926.** $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2$.

***927.** $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

928. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=2{,}5$.

929. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=2$.

930. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

931. $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4$.

932. $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$.

***933.** $\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{x}{2}\sqrt[7]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$.

Mely valós x-ekre teljesülnek a következő egyenletek:

***934.** $1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}=\sqrt{1+\frac{x}{a}}$, ahol $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

***935.** $\sqrt{a+x}+\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$, $(a\in\mathbf{R}^+)$.

***936.** $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\frac{x}{2a}$, $(a\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$.

***937.** $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=-1$, $(a,\,b\in\mathbf{R})$.

***938.** $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}$, $(a\in\mathbf{R}^+)$.

***939.** $x+\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $(a\in\mathbf{R})$.

***940.** $x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$, $\left\{a\in\mathbf{R}\,|\,0\leqq a\leqq\frac{1}{4}\right\}$

***941.** $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$, $(a\in\mathbf{R})$.

***942.** $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$, $(a\in\mathbf{R})$.

***943.** $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$, $(a,\,b\in\mathbf{R})$.

Irracionális egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen:

944. $\sqrt{x} > -1$.

945. $\sqrt{2x-5} > 7$.

946. $\sqrt{x^2} < x+1$.

947. $2\sqrt{x-1} < x$.

948. $\sqrt{x+2} > x$.

949. $\sqrt{x+12} < x$.

950. $\sqrt{2x+1} > 1-x$.

951. $\sqrt{x+3} \leqq 1-x$.

952. $\dfrac{\sqrt{3-x}+1}{x} < 1$.

953. $\sqrt{x^2-1} > x-3$.

Határozzuk meg azt a legkisebb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

954. $\sqrt{x+3} \leqq x+1$.

955. $\sqrt{2x+9} < 3-x$.

956. $\sqrt{x-5}+\sqrt{x} \leqq 5$.

957. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

Milyen egész számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket:

958. $\sqrt{-x^2+4x-3} < x-2$.

959. $x+\sqrt{2-x} > 0$.

960. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

961. $\sqrt{3x+13} \leqq x+1$.

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

962. $\sqrt{x^2-4x} \geqq x-4$.

963. $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$.

964. $\sqrt{x^2-1} < 5-x$.

965. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

966. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.

**967.* $\sqrt{\left|\dfrac{1}{4}-x\right|} \geqq x+\dfrac{1}{2}$.

968. $\sqrt{3x+1} > \sqrt{2-x}$.

969. $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$.

970. $x^2 > 2\sqrt{x^2-4x+4}$.

971. $x^2+2x+1 < 3\sqrt{x^2-4x+4}$.

972. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8} > 3$.

973. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2} > 3$.

974. $\sqrt{20-x}-\sqrt{10-x} > 2$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

975. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$.

976. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$.

977. $\sqrt{1-\dfrac{x+2}{x^2}} < \dfrac{2}{3}$.

978. $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x} < 2$.

**979.* $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

980. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

981. $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$.

982. $\sqrt{x^2-x-12} < x$.

983. $\sqrt{x(x+6)+9}-\sqrt{x^2-6x+9} > 1$.

984. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

985. $\sqrt{x^4-2x^2+1} \geqq 1-x$.

***986.** $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$.

Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

***987.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1$.

***988.** $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{-x^3+4}} \geqq 0$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán x-re a következő paraméteres egyenlőtlenségeket, ahol a p valós paramétert jelöl:

***989.** $x-\sqrt{p-2x} < 0$.

***990.** $x+4p \geqq 5\sqrt{px}$.

***991.** $\sqrt{p-x}+\sqrt{p+x} > p$.

***992.** $\sqrt{x(2p-x)} \geqq p-x$.

***993.** $(p+1)\sqrt{2-x} < 1$.

4. Nevezetes egyenlőtlenségek és alkalmazásuk

994. Bizonyítsuk be, hogy $\forall a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ valós számra igaz, hogy

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \geqq 2.$$

995. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{2ab}{a+b} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

996. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqq \sqrt{ab}.$$

Milyen geometriai jelentést adhatunk az egyenlőtlenségnek?

997. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}$, akkor

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Milyen geometriai jelentése van az egyenlőtlenségnek $a, b \in \mathbf{R}^+$ esetén?

998. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqq \frac{a^3+b^3}{2}.$$

999. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}.$$

*1000. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$, akkor

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \leqq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}.$$

1001. Mutassuk meg, hogy $a^n+b^n \leqq (a+b)^n$, $(n \in \mathbf{N}^+)$ teljesül $\forall a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ számra.

1002. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $n \geqq m \geqq 2$; $n, m \in \mathbf{N}^+$, akkor

$$\sqrt[m]{a^m+b^m} \geqq \sqrt[n]{a^n+b^n}.$$

1003. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b pozitív valós számra teljesül, hogy

$$a^4+b^4 \geqq ab(a^2+b^2).$$

1004. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív a, b, c valós számra igaz, hogy

$$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c).$$

1005. Igazoljuk, hogy bármely valós számra teljesül, hogy

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac.$$

1006. Igazoljuk, hogy bármely pozitív a, b, c valós számra igaz, hogy

$$a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc.$$

1007. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}, \quad \text{ha } a, b, c, d \in \mathbf{R}^+.$$

*1008. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}, \quad \text{ha } a, b, c \in \mathbf{R}^+.$$

*1009. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad \text{ha } a_1, a_2, \ldots, a_n \geqq 0 \text{ és } n \in \mathbf{N}^+.$$

*1010. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, akkor

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqq n, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

1011. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 a_2 \ldots a_n > 0$, akkor

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geqq n, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

1012. Igaz-e minden pozitív a valós számra, hogy

$$a^2+2 \geqq 2\sqrt{a^2+1}\,?$$

1013. Teljesül-e minden pozitív x valós számra, hogy

$$\frac{4}{x^2}+x \geqq 3\,?$$

1014. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b = 1$, akkor $a^4+b^4 \geqq \frac{1}{8}$.

1015. Igaz-e az a, b, c tetszőleges pozitív valós számra, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}\,?$$

1016. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $a+b = c$, akkor

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2} > \sqrt[3]{c^2}.$$

1017. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad a, b \in \mathbf{R}^+.$$

Bizonyítsuk be, hogy:

1018. $2a^2 = 1+a^4$, ha $a \in \mathbf{R}$.

*1019. $(a+b)^n \leqq 2^{n-1}(a^n+b^n)$, ha $a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ és $n \in \mathbf{N}^+$.

*1020. $2^n-1 \geqq n\sqrt{2^{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^+$,

1021. $(n!)^2 > n^n$, ha $n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$.

1022. $2^n n! < (n+1)^n$, $n \in \mathbf{N}^+$.

1023. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$, $a, b, c, \in \mathbf{R}^+$.

1024. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqq 3$, $a, b, c \in \mathbf{R}^+$.

1025. Igazoljuk, hogy ha $0<a<1$ és $0<b<1$, akkor

$$0 < a+b-ab < 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy

1026. $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geqq ac+bd$, ha $a, b, c, d\in \mathbf{R}^+$.

1027. $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, ha $a, b, c, d\in \mathbf{R}^+$.

1028. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$, ha $a, b, c\in \mathbf{R}^+$.

Igazoljuk, hogy minden a, b valós számra teljesül, hogy:

1029. $|a+b|\leqq|a|+|b|$.

1030. $|a-b|\leqq|a|+|b|$.

1031. $|a+b|\geqq\big||a|-|b|\big|$.

1032. Bizonyítsuk be, hogy ha $|a|<1$ és $|b|<1$, akkor

$$|a+b| < |1+ab|.$$

1033. Bizonyítsuk be, hogy ha $|b|<\frac{|a|}{2}$, akkor $\frac{1}{|a-b|}<\frac{2}{|a|}$.

1034. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x|<1$ és $n\in\mathbf{N}^+\setminus\{1\}$, akkor

$$(1-x)^n+(1+x)^n < 2^n.$$

1035. Igazoljuk, hogy bármely a, b, c valós számra teljesül, hogy

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqq|a|+|b|+|c|.$$

***1036.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x\geqq-1$ és $0<n<1$, akkor $(1+x)^n\leqq 1+nx$, ha pedig $n<0$ vagy $n>1$, akkor $(1+x)^n\geqq 1+nx$ egyenlőség csak az $x=0$ esetén áll fenn. (Bernoulli-féle egyenlőtlenség).

***1037.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y\in\mathbf{R}^+$, akkor $x^y+y^x>1$.

***1038.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqq\sqrt{a_1^2+a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}\text{ és }b_1=b_2=\ldots=b_n\neq 0,\text{ vagy }b_1=b_2=\ldots=b_n=0.$$

(Cauchy egyenlőtlenség).

1039. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x, y valós számok esetén teljesül, hogy

$$x^2+y^2-xy-x-y+1\geqq 0.$$

1040. Igazoljuk, hogy $\forall\, x\in\mathbf{R}$ esetén

$$2x^4-2x^3-x^2+1\geqq 0.$$

1041. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c tetszőleges valós számok, akkor

$$(a+b)(a+b-2c)+(b+c)(b+c-2a)+(c+a)(c+a-2b)\geqq 0.$$

1042. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Igaz-e, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$?

1043. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},\qquad n\in\mathbf{N}^+\setminus\{1\}.$$

1044. Bizonyítsuk be, hogy ha $n\in\mathbf{N}^+$, akkor

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2.$$

1045. Bizonyítsuk be, hogy ha $n\in\mathbf{N}^+$, akkor

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

*1046. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbf{N}^+$, akkor

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

*1047. Mutassuk meg, hogy $\forall n \in \mathbf{N}^+$ számra igaz, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leqq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

1048. Legyen a, b, c egy háromszög három oldalának a hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2.$$

1049. Bizonyítsuk be, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\sin 2\alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} \geqq 3.$$

1050. Az egyenlő átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb az átfogóhoz tartozó magassága?

1051. Azok közül a derékszögű háromszögek közül, amelyeknek egyenlő az átfogóhoz tartozó magassága, melyiknek a legkisebb az átfogója?

1052. Adott körlap tetszőleges pontjából két egymásra merőleges egyenes szakaszt húzunk a körvonalig. Mikor lesz e két szakasz összege a legnagyobb?

1053. Az egyenlő kerületű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a területe?

1054. Egy 900 m^2 területű téglalap alakú sportpályát 120 000 Ft-ból körül lehet-e keríteni, ha az egyik pár párhuzamos oldalának a kerítése méterenként 500 Ft-ba, a másik pár párhuzamos oldalának a kerítése pedig méterenként 200 Ft-ba kerül?

1055. Egy a oldalú négyzet alakú papírlapból – a sarkokból kis egybevágó négyzetek kivágása után – dobozt hajtogatunk. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldala, hogy a hajtogatással maximális térfogatú dobozt kapjunk?

*1056. Határozzuk meg az $f(x) = x + \frac{a}{x}$ $(a>0)$ függvény minimumát a $]0; +\infty[$ intervallumon.

*1057. Adott felszínű téglatestek közül melyiknek a legkisebb a testátlója?

*1058. Az egyenlő térfogatú paralelepipedonok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

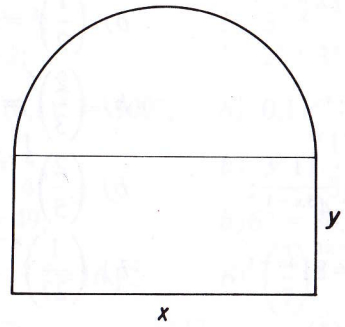
*1059. Hogyan válasszuk meg az adott oldalélű szabályos négyoldalú gúla alapélét és magasságát, hogy a gúla térfogata maximális legyen?

*1060. Adott egy egyenes körkúp alapkörének a sugara és a magassága. Írjunk a kúpba maximális térfogatú hengert. Határozzuk meg ezen henger alapkörének a sugarát és a magasságát. Mekkora lesz a maximális térfogat?

*1061. Adott sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú kúpot. Mekkora lesz ennek a kúpnak a térfogata, a magassága, az alapkörének a sugara?

*1062. Adott sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert. Mekkora lesz a henger alapkörének a sugara, a henger magassága és a térfogata?

*1063. Adott egy k kerületű ablak, melynek alakja egy téglalap és felette egy félkör *(3. ábra)*. Milyennek válasszuk a téglalap két oldalának az arányát, ha azt akarjuk, hogy az ablak maximális mennyiségű fényt engedjen be?



3. ábra

5. Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Exponenciális egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

1064. *a)* $3^x = 27$; *b)* $2^x = 8$.

1065. *a)* $3^{3x} = 27$; *b)* $2^{3x} = 8$.

1066. *a)* $3^{5x-3} = 81$; *b)* $2^{5x-3} = 16$.

1067. *a)* $3^{4x-5} = 729$; *b)* $2^{4x-5} = 64$.

1068. *a)* $3^{|x|} = 27$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2} = 81$.

1069. *a)* $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$; *b)* $2^{-4x} = \frac{1}{4}$.

1070. *a)* $4^x = \frac{1}{4}$; *b)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} = 1$.

1071. *a)* $10^x = 0{,}01$; *b)* $10^x = 0{,}01 \cdot 10^{3x+3}$.

1072. *a)* $4^x = 32$; *b)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x} = \frac{27}{8}$.

1073. *a)* $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 128$; *b)* $(0{,}125)^{3-4x} = \frac{1}{32}$.

1074. *a)* $7^x = 0$; *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

1075. *a)* $5^x = 3^x$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.

1076. *a)* $2^{-4x} = \frac{1}{4^{5x-1}}$; *b)* $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2x} = \frac{125}{8}$.

1077. *a)* $3^{2-3x} = 81^{4x+1}$; *b)* $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$.

1078. *a)* $2^{x^2-7x+12} = 1$; *b)* $\left(\frac{1}{64}\right)^{\sqrt{x+2}} = 0{,}5$.

1079. *a)* $5^{x^2-8x+12} = 1$; *b)* $4^x = 8^{2x-1}$.

1080. *a)* $4^{2x} = \sqrt[3]{128}$; *b)* $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{5}\right)^{9-x}$.

1081. *a)* $\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{3x+1}}$; *b)* $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3x-7}{x-3}} = \frac{1}{2}$.

1082. *a)* $\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{8}{27}$; *b)* $3^{-4x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1083. *a)* $100 \cdot 2^x = 10^{3x+3} \cdot 5^{-x}$;

b) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

1084. *a)* $2^{x-2} = 5^{2-x}$; *b)* $3^{3^x} = 27^{27}$.

1085. *a)* $8^{5-x} = 7^{x-5}$; *b)* $5^{x^2} = 5^{3x}$.

1086. *a)* $3^{x-4} = 2^{x-4}$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

1087. *a)* $4^{2x-3} = 7^{x-1{,}5}$; *b)* $7^{x-3} = 4^{2x-6}$.

1088. *a)* $0{,}5^{\sqrt{x-3}} = 1$; *b)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x-2} = 1$.

1089. *a)* $\frac{1}{8} \cdot 2^{x^2} = 4^x$; *b)* $3^{x^2} = 27 \cdot 9^x$.

1090. *a)* $9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$; *b)* $3^{-\frac{x}{2}+1} = 9$.

1091. *a)* $2^x = -2$; *b)* $2^x + 3^x = 0$.

1092. *a)* $1000 \cdot (0{,}1)^{\frac{1}{x}} = 100^x$; *b)* $0{,}11^{x^3-5} = 0{,}001\,331$.

1093. *a)* $4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{4}$; *b)* $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

1094. *a)* $7^{1-|x|} = 49$; *b)* $6^{|x|} = 36$.

1095. *a)* $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$; *b)* $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

1096. *a)* $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} = 9$.

1097. *a)* $0{,}1^{-(x^2-5x+8)}=100$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{4x-3}=\frac{4096}{531\,441}$.

1098. *a)* $2\cdot\left(\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=4$; *b)* $5^{(x^2+x-2)(3-x)}=1$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1099. $3^x=6$.
1100. $3^x=2x+3$.
1101. $2^x=4x$.
1102. $2^x=x^2$.
1103. $2^{-x}=-x+2$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1104. *a)* $3^x=8$; *b)* $3^x=6$.
1105. *a)* $15^x=236$; *b)* $14^{x-1}=19$.
1106. *a)* $18^{3x+1}=475$; *b)* $0{,}17^{x+2}=9$.
1107. *a)* $3^{2x-3}=11^{1-x}$; *b)* $17^{x-2}=19^{x-3}$.
1108. *a)* $3^{2(x+2)}=13^{2x-1}$; *b)* $5^{x+3}\cdot 2^{x-1}=375$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1109. $2^{x+3}-2^x=112$.
1110. $10^x+10^{x-1}=0{,}11$.
1111. $2^{x+2}+2^{x-2}=34$.
1112. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=896$.
1113. $2\cdot 3^{x+3}-5\cdot 3^{x-2}=1443$.
1114. $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$.
1115. $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$.
1116. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$.
1117. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}$.
1118. $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$.
1119. $5^{4x-3}-4\cdot 5^{4x-1}+8\cdot 5^{4x+1}=24\,505$.
1120. $25\cdot 5^{x+1}+4\cdot 5^x+5^{x-1}=646$.

1121. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.
1122. $5^{2x+1}+7^{x+1}=35+175^x$.
1123. *a)* $\sqrt{2^{x+14}}-\sqrt{2^{x+12}}=64$; *b)* $\sqrt{3^{x-54}}-7\cdot\sqrt{3^{x-58}}=162$.

Oldjuk meg a következő másodfokúra visszavezethető egyenleteket:

1124. *a)* $4^x+2^{x+1}=8$; *b)* $3^{x+2}+9^{x+1}=810$.
1125. *a)* $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$; *b)* $4^x-9\cdot 2^x+8=0$.
1126. *a)* $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29$; *b)* $2^{2+x}-2^{2-x}=15$.
1127. *a)* $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$; *b)* $3^{2x+2}-12\cdot 3^{x+1}+27=0$.
1128. *a)* $5^x+\frac{125}{5^x}=30$; *b)* $4\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^{x+1}-25=0$.
1129. *a)* $5^x+0{,}2^x=4{,}8$; *b)* $10^x-10^{-x}=\frac{8}{3}$.
1130. *a)* $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0$;
b) $4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2=0$.
1131. *a)* $9^{x-1}+3^{x+2}=90$; *b)* $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$.
***1132.** *a)* $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$; *b)* $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$.
***1133.** *a)* $5^{3x}+9\cdot 5^x+27\cdot 5^{-3x}=64-27\cdot 5^{-x}$;
b) $3^{\sqrt[3]{x^2}}=3\cdot 3^{\sqrt[3]{x}+1}$.

Logaritmikus egyenletek

1134. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_2 x=4$; *b)* $\log_3 x=2$; *c)* $\log_5 x=-2$ *d)* $\log_5 x=23$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1135. *a)* $\lg x=-1$; *b)* $\log_{0,1} x=-1$;
c) $\log_{100} x=\frac{2}{3}$; *d)* $\log_{1000} x=-\frac{2}{3}$.

1136. *a)* $\lg x = 0{,}3010$; *b)* $\lg x = -0{,}4437$;
c) $\lg x = 2{,}4298$; *d)* $\lg x = 0{,}3817 - 2$.

1137. *a)* $\log_{0,3} x = 3$; *b)* $\log_{0,25} x = \frac{1}{4}$;
c) $\lg x = 0$; *d)* $\lg x = 0{,}4343$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

1138. *a)* $x = \log_2 2$; *b)* $x = \log_3 81$;
c) $x = \lg 10^6$; *d)* $x = \log_5 1$;
e) $x = \log_2 \sqrt{2}$; *f)* $x = \log_{\sqrt{2}} 2$.

1139. *a)* $x = \log_2 8$; *b)* $x = \log_4 8$;
c) $x = \log_{16} 8$; *d)* $x = \log_7 \left(\frac{1}{7}\right)$;
e) $x = \log_{49} \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; *f)* $x = \log_{343} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

1140. *a)* $\log_3 (x-12) = 2$; *b)* $\log_5 (x+10) = 3$.

1141. *a)* $\log_{0,5} (5x-1) = -2$; *b)* $\log_{36} (x^2-10) = \frac{1}{2}$.

1142. *a)* $\log_3 |x| = 2$; *b)* $\log_2 |x| = 4$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

1143. *a)* $|\log_3 x| = 1$; *b)* $|\log_3 |x|| = 1$.

1144. *a)* $\log_2 |x-2| = 0$; *b)* $\lg |x-1| = 1$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1145. *a)* $\log_3 (x-4)(x-2) = 1$; *b)* $\log_8 (x^2-2x-34) = 0$.

1146. *a)* $\log_{0,5} (x^2-5x+8) = -1$;
b) $\log_2 (x^2-5x+8) = 1$.

1147. *a)* $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$; *b)* $\log_5 \log_{0,5} \log_{0,25} x = 1$.

1148. *a)* $\lg \lg \lg p = 0$, $p \in \mathbf{R}^+$;
b) $\log_a \log_b \log_c x = p$, $a, b, c \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$.

Határozzuk meg a logaritmus alapszámát a következő esetekben:

1149. *a)* $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; *b)* $\log_x 8 = -\frac{1}{2}$.

1150. *a)* $\log_x 0{,}125 = -2$; *b)* $\log_x 36 = \frac{3}{2}$.

1151. *a)* $\log_x \frac{1}{64} = -3$; *b)* $\log_x (x+6) = 2$.

1152. *a)* $\log_x 16 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$; *b)* $\log_x (6x+5x^2) = 3$.

1153. Határozzuk meg a következő egyenletek egész gyökét:

a) $\frac{\lg (2x+1)}{\lg (x-1)} = 2$; *b)* $\frac{\lg (x^2-20)}{\lg (x+10)} = 1$; *c)* $\frac{\log_x (35-x^3)}{\log_x (5-x)} = 3$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a logaritmus azonosságainak a felhasználásával:

1154. *a)* $\lg x = \lg 2 + \lg 4$; *b)* $\lg x = -2 \lg 5$.

1155. *a)* $2 - \lg x = \lg 2 + \lg 4 + \lg 25$; *b)* $\lg 2 + \lg x = \lg (x+3)$.

1156. *a)* $2 \lg x = \lg 16 + \lg 4$; *b)* $2 \lg 5 + \lg x = 1 - \lg 2$.

1157. *a)* $\lg (x-9) + \lg (2x-1) = 2$;
b) $\lg (x-4) + \lg (x+3) = \lg (5x+4)$.

1158. $\ln (x^3+1) - \frac{1}{2} \ln (x^2+2x+1) = \ln 3$.

1159. $\lg (x-3) + \lg (x-2) = 1 - \lg 5$.

1160. $2 \log_3 (x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0$.

1161. $\frac{\lg (2x+5) - \lg x}{2 + \lg 100} = \frac{1}{4}$.

1162. $2 \log_2 \left(\frac{x-7}{x-1}\right) + \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

1163. *a)* $\frac{\lg x}{\lg x - \lg 2} = 3$; *b)* $\frac{\lg 2x}{\lg |4x-15|} = 2$.

Egyenértékűek-e a valós számok halmazán a következő egyenletek?

1164. $3x-2=6-x$ és
$3x-2+\lg(1-x^2)=6-x+\lg(1-x^2)$.

1165. $5x-2=2x+4$ és
$5x-2+\lg(x^2+3)=2x+4+\lg(x^2+3)$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1166. *a)* $\log_2 x=\frac{1}{3}(x+1)$; *b)* $\log_2 x=\frac{6}{x}$.

1167. *a)* $\log_2 x=\frac{1}{x-1}+1$; *b)* $\lg(x+1)=x-1$.

1168. *a)* $\lg x=\sqrt{x}$; *b)* $\lg x=\sqrt{x}-1$.

1169. *a)* $\lg x=2^{-x}$; *b)* $\log_2 x=x^2-1$.

Van-e megoldása a pozitív racionális számok halmazán a következő egyenleteknek? Ha igen, akkor adjuk meg.

1170. $\lg\sqrt{x^2-4x}-\lg\sqrt{4-x}=0$.

1171. $\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\lg(2x+15)=1$.

1172. $\lg\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\lg(2x+3)=\lg 15$.

1173. $\lg^2 3-\lg^2 2=(1-\lg x)\lg\frac{3}{2}$.

***1174.** $\log_3\log_4\log_3^2(x-3)=0$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1175. *a)* $\log_5 5^x=\frac{1}{x^{-1}}$; *b)* $\lg 10^x=\frac{1}{x^{-1}}$.

1176. *a)* $\frac{\lg 3^x}{x}=\lg 3$; *b)* $\frac{\lg 2^x}{x}=\lg 2$.

1177. *a)* $\log_x 3x=3$; *b)* $\log_x 2x=2$.

1178. *a)* $\frac{\log_x 4}{\log_x 3}=\frac{\lg 4}{\lg 3}$; *b)* $\frac{\log_x 3}{\log_x 2}=\frac{\lg 3}{\lg 2}$.

1179. *a)* $\log_x 2+\log_x 3=\frac{1}{3}$; *b)* $\log_x x^2=1$.

1180. *a)* $\lg(7x-9)^2+\lg(3x-4)^2=2$;

b) $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{\sqrt{2x}}\right)=1$.

1181. *a)* $\lg^2 x+\lg x^2=\lg^2 2-1$;

b) $\frac{1}{2}\lg 2x=\lg(3-x)-\lg\sqrt{x+1}$.

1182. *a)* $\lg(x-1)^3-3\lg(x-3)=\lg 8$;

b) $\lg(x^2-1)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$.

***1183.** *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:*

a) $|1+\log_{\frac{1}{3}} x|-3=|2-\log_{\frac{1}{3}} x|$;

b) $|1-\log_{\frac{1}{5}} x|+2=|3-\log_{\frac{1}{5}} x|$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, felhasználva, hogy $\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}$; $a, b, c\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$:

1184. *a)* $\log_2 x+\log_8 x=8$; *b)* $\log_2 x+\log_4 x=1$.

1185. *a)* $\log_9 x=0{,}5\log_x 3$; *b)* $\log_2(x-1)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=9$.

1186. *a)* $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$;

b) $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$.

1187. *a)* $\log_4 x+\log_x 4=2$; *b)* $\log_4 x+\log_x 4=\frac{5}{2}$.

1188. *a)* $\log_9 x+\log_{x^2} 3=1$; *b)* $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$.

1189. *a)* $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

b) $\log_3 x-6\log_x 3=5$.

1190. *a)* $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$;

b) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$.

1191. *a)* $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$;

b) $\log_{\sqrt{x}} x + \log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 8$.

1192. *a)* $\log_4^2 (x-1)^4 - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 5$;

b) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

1193. Hány egynél nagyobb gyöke van a

$$\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1 \text{ egyenletnek?}$$

Ha léteznek ilyen gyökök, akkor határozzuk meg az értéküket.

Vegyes feladatok

1194. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2n} = 0{,}04^{-28}$$

egyenletet, ahol $n \in \mathbf{N}^+$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*1195. $4^{\frac{1}{x}} + 2x \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 6x = 9, \quad (x \in \mathbf{R}^+)$.

1196. $2^{3+\log_2 24} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$.

1197. $5^{1+\log_5 \cos x} = 2{,}5$.

1198. $3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2$.

1199. *a)* $x^{\lg x} = 1$;

b) $x^{\lg x} = 100x$.

1200. $x^x = x$.

1201. $x^{1-\lg x} = 0{,}01$.

1202. $x^{\lg \sqrt{x}} = 100$.

1203. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

1204. $\sqrt[3]{x^x} = x^{\sqrt[3]{x}}$.

1205. Van-e megoldása a pozitív racionális számok halmazán az

$$x^{2+\log_3 x} = 3^8 \text{ egyenletnek?}$$

1206. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^{\log_{3x} 6} - 2^{\log_{3x} 6} - 2 = 0.$$

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

1207. *a)* $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$; *b)* $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;

c) $x^{\frac{1}{2} + \lg x} = \sqrt{x^5}$.

1208. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$25^{\log_x 2} - 26 \cdot 5^{1+\log_x 2} + 625 = 0.$$

1209. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $3^{1+\log_{\sqrt{2}} x} + 9^{\log_{\sqrt{2}} x} = 108$;

b) $7^{\log_x 9} - 7^{\log_x 3} - 42 = 0$.

1210. Hány elemű halmaz a $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}$ egyenlet megoldáshalmaza?

Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenleteket:

*1211. *a)* $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$;

b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

*1212. *a)* $2^{\log_2^2 x + 1} = (x^2)^{\log_2 x} - 48$;

b) $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\lg x} = \sqrt{x}$.

*1213. *a)* $\log_{x^2 - x - 2} x = 1$;

b) $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6 \cdot 3^x + 3^{2(x+1)}}$.

Adjuk meg a következő egyenletek megoldáshalmazát:

1214. $a^1 \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot \ldots \cdot a^{2x-1} = p$, ahol $a \in \mathbf{R}^+$ és $a > 1$, $p \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{N}^+$.

1215. $1 + a + a^2 + \ldots + a^{x-1} + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$, ahol $x \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$.

1216. $\log_p \log_p x = 1 + \log_p a - \log_p b$, ahol $a, b \in \mathbf{R}^+$, $p \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbf{R}^+$.

*1217. $\frac{\lg x}{\lg (x-a)} = 2, \quad (x \in \mathbf{R}^+, a \in \mathbf{R}, x > a).$

*1218. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}, \quad (x \in \mathbf{R}^+; a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}).$

*1219. A pozitív valós p paraméter mely értékeire oldható meg a

$$2 \lg x - \lg (x-1) = \lg p$$

egyenlet? Adjuk meg az egyenlet megoldáshalmazát.

*1220. Oldjuk meg x-re a következő paraméteres egyenletet:

$\log_a x + \log_x a = b$, ahol $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$.

*1221. A valós a és b paramétereknek milyen feltételt kell kielégíteniük, hogy az

$$1 + \log_b (2 \lg a - x) \log_x b = \frac{2}{\log_b x}, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+, b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$$

egyenletnek legalább egy megoldása legyen? Adjuk meg az egyenletnek ezt a gyökét.

Keressük meg, hogy milyen feltételek mellett oldhatók meg a következő paraméteres egyenletek. Adjuk meg a megoldáshalmazt x-re nézve.

*1222. $\log_3 p - \log_x p = \log_{\frac{x}{3}} p.$

*1223. $\log_{p^2 - x^2} ((px)^2 - 1) = 1.$

Exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán, és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

1224. *a)* $3^x \geqq 81$; *b)* $2^x \leqq 8$.

1225. *a)* $3^x > 4$; *b)* $0{,}1^x < 100$.

1226. *a)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqq \frac{1}{9}$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqq 1$.

1227. *a)* $0{,}5^{\frac{2}{x}} < 0{,}0625$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqq \frac{1}{27}$.

1228. *a)* $2^{\frac{x-1}{x+1}} > 1$; *b)* $3^{1-x} \geqq 81$.

1229. *a)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+3}{x-3}} < 1$; *b)* $5^{2x-1} < 25$.

1230. *a)* $6^{x^2-7x+12} > 1$; *b)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} < \left(\frac{4}{9}\right)^x$.

1231. *a)* $3^{-x^2+5x-8} < \frac{1}{9}$; *b)* $2^{(x-1)(x+2)} < 1$.

1232. *a)* $(x+3)^{x^2-5x+6} > 1$; *b)* $2^{x^2-8x+18} > 8$.

1233. *a)* $2^x + 2^{1-x} < 3$; *b)* $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

1234. Melyek azok a valós számok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$5^x - 5^{3-x} \leqq 20\,?$$

1235. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. A $[-1; 1]$ intervallum része-e a megoldáshalmaznak?

$$3^{2x} < 7 \cdot 3^x + 9 \cdot \log_3 9.$$

1236. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. A $]0; 1]$ intervallum mely része tartozik a megoldáshalmazhoz?

$$x^{\log_2 x} < 32.$$

1237. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a pozitív valós számok halmazán:

$$2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}.$$

*1238. Oldjuk meg a

$$0{,}5^{2-\frac{x-3}{x-2}} > 0{,}5^{\frac{x-2}{x-1}}$$

egyenlőtlenséget

a) a valós számok halmazán;

b) a pozitív valós számok halmazán;

c) a negatív valós számok halmazán.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

1239. $\log_2 (x+3) > \log_2 4$.

1240. $\log_{\frac{1}{3}} 5x \leqq \log_{\frac{1}{3}} 25$.

1241. $\log_4 (2x-4) > 0$.

1242. $\log_4 (2x-4) < 0$.

1243. $\log_{\frac{1}{2}} (5x-12) < 0$.

1244. $\log_{\frac{1}{2}} (5x-12) > 0$.

1245. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{3x-1} < 0$.

1246. $\lg \frac{x-1}{2-x} > 0$.

1247. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

1248. $\log_{0,3} (x+1) < 1$.

1249. $\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > 1$.

1250. $\log^2_{\frac{1}{2}} x > 36$.

***1251.** $1+\log_2 (x+1) > -\log_{0,5} (4-x^2)$.

***1252.** $|\log_2 x| < 1$.

***1253.** $|\log_{\frac{1}{2}} x| > 2$.

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

1254. $\lg_{x^2-3} 729 > 3$.

1255. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x$.

1256. $\log (x+8) \geqq \lg (x^2-3x-4)$.

***1257.** $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.

1258. $\log_x \sqrt{20-x} > 1$.

1259. $\log_2 (3-x) - \log_2 (x-1) < \log_{\sqrt{2}} 3$.

1260. $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1$.

***1261.** $(2x^2-11x-13) \log_{\frac{1}{2}} (7-x) > 0$.

1262. $\log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2-5)) > 0$.

1263. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (2^x - 4^x) \leqq 1$.

1264. $x^{\frac{1}{\lg x}} > 10x^4$.

1265. $(x^2+x+1)^x < 1$.

1266. $x^{\lg^2 x + \lg x - 4} > 10\,000$

1267. Melyek azok a pozitív valós számok, amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek?

$$\log_3 (x^2-5x+6) < 0.$$

1268. Oldjuk meg az

$$\log_{\frac{1}{3}} (6x^2-x-1) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget

a) a pozitív valós számok halmazán;

b) a negatív valós számok halmazán;

c) a valós számok halmazán.

Megoldhatóak-e a következő egyenlőtlenségek a pozitív valós számok halmazán? Adjuk meg az egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

***1269.** $\log_{3-x} x < -1$.

***1270.** $\log_x \left(\frac{5}{2}x - 1\right) \geqq 2$.

Milyen valós x-ekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

***1271.** $\log_{x^2-3} (4x+2) \geqq 1$.

***1272.** $\log_{|x|} (x-1) < 2$.

***1273.** $\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geqq 0$.

1274. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a

$$\log_p x + \log_p (x+1) < \log_p (2x-6)$$

egyenlőtlenséget, ahol a $p > 1$ paraméter valós szám.

1275. Határozzuk meg a valós p paraméter mindazon értékeit, amelyekre a következő egyenlőtlenség megoldható a valós számok halmazán. Adjuk meg a megoldáshalmazt.

$$x^{\log_p x+1} > p^2 x.$$

Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

***1276.** $\log_{9-x^2} \cos x \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) > 1$.

***1277.** $\log_{\cos x} \log_{\sin x} \operatorname{tg} x > 0$.

***1278.** Oldjuk meg az

$$x^{\sin x - a} > 1$$

egyenlőtlenséget, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ és $a \in \mathbf{R}$.

Határozzuk meg a sík azon pontjainak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

***1279.** $\log_{\cos x}(|y|-2) > 0$.

***1280.** $\log_{\sin x} y > \log_{\sin x}(\operatorname{tg} x)$.

6. Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Trigonometrikus egyenletek

Létezik-e olyan szög, melynek a

a) szinusza; b) koszinusza; c) tangense; d) kotangense a következő értékekkel egyenlő?

1281. 0,85.

1282. $\frac{7}{6}$.

1283. $-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

1284. $-1{,}05$.

1285. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1286. $\sqrt{10}$.

1287. $-\sqrt{0{,}5}$.

1288. $\sqrt{2}$.

1289. Felvehet-e negatív értéket

a) $\sin\alpha$; *b)* $\cos\alpha$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha$,

ha α egy háromszög szöge?

A szögfüggvények definíciójának a felhasználásával döntsük el a következő szorzatok előjelét:

1290. $\sin 110° \cdot \sin 130°$.

1291. $\cos 220° \cdot \sin 220°$.

1292. $\cos 200° \cdot \sin 100°$.

1293. $\operatorname{tg} 140° \cdot \operatorname{tg} 210°$.

1294. $\cos 325° \cdot \operatorname{tg} 215°$.

Létezik-e olyan x szög, amelyre teljesül, hogy

1295. $\sin x = \frac{12}{13}$ és $\cos x = \frac{5}{13}$.

1296. $\sin x = 0{,}3$ és $\operatorname{tg} x = 3$.

1297. $\cos x = \frac{40}{202}$ és $\operatorname{tg} x = 4{,}95$.

Döntsük el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek:

1298. $\cos(-\pi)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

1299. $\sin(-\pi)+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}(-\pi) = 1$.

1300. $4\sin\pi\cos 2\pi + 5\operatorname{tg}\pi - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$.

1301. $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{4}-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

1302. $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1303. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1304. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1305. $\sin x = \frac{1}{2}$.

1306. $\cos x = -1$.

1307. $\cos x = -0{,}5$.

1308. $\operatorname{tg} x = -1$.

1309. $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1310. $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

1311. $\sin 3x = 0$.

1312. $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

1313. $\sin\frac{x}{2} = -0{,}65$.

1314. $\cos(2x-18°) = \frac{1}{2}$.

1315. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

1316. $\sin\left(5x+\frac{\pi}{9}\right) = -1$.

1317. $\sqrt{2}\cos 3x = 1$.

1318. $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = 0$.

1319. $\operatorname{tg} x^2 = 1$.

1320. $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.

1321. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

1322. $\sin\pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1323. $\cos x^2 = 1$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1324. $\cos x = 0{,}5$.

1325. $\sin x = x$.

1326. $\sin x = x^2$.

1327. $\sin 2x = \cos x$.

Létezik-e olyan valós szám, amelyre teljesül, hogy:

1328. $\sin x\cos x = \sin 45°$.

1329. $2^{\sin^2 x} = \sin x$.

1330. $3^{\sin^2 x} = \cos x$.

1331. Bizonyítsuk be, hogy ha $\cos x \neq 0$, akkor

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1332. Igazoljuk, hogy $\cos x + \sin x \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x} = 0$, ha $\cos x \neq 0$.

1333. Mutassuk meg, hogy ha $|\cos x| \neq 1$, akkor

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}.$$

1334. Igazoljuk, hogy ha $\sin x \neq 0$, akkor

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

1335. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ valós szám, akkor

$$1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = (1 + \cos x)(1 + \operatorname{tg} x), \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

1336. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

1337. Bizonyítsuk be, hogy ha x valós szám és $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2}{\sin x}.$$

1338. Mutassuk ki, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

1339. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x.$$

1340. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $|\operatorname{tg} x| \neq 1$, akkor

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \sin x + \cos x.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1341. $\sin^2 x - 2\sin x = 0$.

1342. $\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x$.

1343. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

1344. $\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

1345. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 1$.

Mely valós számokra teljesül, hogy:

1346. $\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x = 5$.

1347. $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1$.

1348. $\sin x - \cos x = 0$.

1349. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$.

1350. $\operatorname{tg} x \cos x + \operatorname{tg} x - \cos x - 1 = 0$.

1351. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

1352. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

1353. $4\cos^2 x + 17\sin x = 8$.

***1354.** $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{1}{4}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1355. $\sin x + \cos x = 1$.

1356. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

1357. $3\sin x + 4\cos x = 4$.

1358. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

1359. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

1360. $1-\cos x = \sin\frac{x}{2}$.

1361. $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (1-\cos^2 x)\frac{1}{\sin 2x}$.

1362. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

1363. $2\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{tg} 3x+3 = 0$.

1364. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

1365. $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$.

1366. $2\cos x \cos 2x = \cos x$.

1367. $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$.

***1368.** $\cos 3x = \sin 4x - \sin 2x$.

Mely valós x-ekre igaz, hogy:

1369. *a)* $\sin 4x = \sin 3x$; *b)* $\cos 2x = \cos x$.

1370. $\cos x = \sin 3x$.

1371. $\cos 5x = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1372. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$.

1373. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = 0$.

1374. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

***1375.** $\cos x = \sin|x|$.

***1376.** $\sqrt{3}\,|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x| = 4$.

Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén

1377. $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2 = 2$.

1378. $8\cos^4 x = 3+4\cos 2x+\cos 4x$.

1379. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x \operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x = 0.$$

1380. Mutassuk ki, hogy $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{k\pi\}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ esetén igaz, hogy

$$(\operatorname{ctg} x+1)^2+(\operatorname{ctg} x-1)^2 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

***1381.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq \frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1382. $\sin x = \frac{1}{\cos x}$.

1383. $\cos 2x = 2-5\cos x$.

1384. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1+\sin 2x$.

***1385.** $2\operatorname{ctg} 2x-3\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

***1386.** $1+\sin x-\sin 2x = \cos x+\cos 2x-\cos 3x$.

***1387.** $\sin 2x \cos x+\cos 2x \sin x = 0$.

***1388.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos x+\sin 2x = 0$.

***1389.** $2+\cos x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

***1390.** $5(1+\cos x) = 2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

***1391.** $\sin(\pi(x^2+2)) = 0$.

***1392.** $4^{\sin^2 x}+5\cdot 4^{\cos^2 x} = 12$.

***1393.** $5^{-\cos 2\pi x}+6 = 11\cdot 5^{-\cos^2 \pi x}$.

***1394.** $\sqrt{\cos(x+1)} = \sqrt{\cos x}$.

***1395.** $\sin(\pi\cos x) = 0$.

***1396.** $\sqrt{1-\cos^2 x} = 1-\sin|x|$.

1397. $\cos \pi x^2 = 1$.

1398. Oldjuk meg a

$$\sqrt{1-\cos x} = \sin x \quad \text{egyenletet, ha } \pi < x < 3\pi.$$

***1399.** Oldjuk meg a racionális számok halmazán a

$$4 \sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5 \quad \text{egyenletet.}$$

***1400.** Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenletet?

$$\pi \sqrt{3} \operatorname{ctg} x = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \left| x + \frac{\pi}{2} \right|.$$

***1401.** Van-e az egész számok halmazán megoldása az

$$x^{\lg \operatorname{tg} x} + x^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2 \quad \text{egyenletnek?}$$

***1402.** Megoldható-e a valós számok halmazán a

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2 \quad \text{egyenlet?}$$

***1403.** Hány megoldása van a valós számok halmazán a

$$|\sin x| = \frac{2x}{201\pi} \quad \text{egyenletnek?}$$

***1404.** Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$\sin 3x = p \sin x.$$

Milyen határok között változzon a p paraméter, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán legalább két megoldása legyen?

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol p valós paraméter:

***1405.** $\sin (x+p) \cos x = 1$.
***1406.** $|\cos 2x| = |\sin^2 x - p|$.
***1407.** A p valós paraméter mely értékeinél oldható meg a valós számok halmazán a

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 + 3p^2 = 4p(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$$

egyenlet? Adjuk meg a megoldáshalmazt.

***1408.** Oldjuk meg x-re a következő egyenletet, ahol $a, b \in \mathbf{R}$ és $a, b \neq 0$:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}.$$

***1409.** Határozzuk meg a

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$$

egyenletnek a [0,75; 1] intervallumba eső megoldásait.
***1410.** Adjuk meg a sík azon pontjainak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátáira teljesül, hogy

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0.$$

***1411.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ és $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, akkor

$$2\beta + \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{esetén.}$$

Trigonometrikus egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

1412. $\sin x > 0$.
1413. $\sin x \leqq -1$.
1414. $\cos x > 1$.
1415. $\sin x > \frac{1}{2}$.
1416. $\sin x < \frac{1}{2}$.
1417. $\sin x \leqq \frac{1}{2}$.
1418. $|\sin x| > \frac{1}{2}$.
1419. $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1420. $\operatorname{tg} x > 0$.

1421. $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

1422. $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$.

1423. $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket?

1424. *a)* $\sin x < \cos x$; *b)* $3 \sin x < \sqrt{3} \cos x$.

1425. *a)* $|\sin x| > \cos^2 x$; *b)* $\sin x < |\cos x|$.

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

1426. $\sin 2x > 1$.

1427. $\sin 2x < -\frac{1}{2}$.

1428. $\sin \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$.

1429. $\sin 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1430. $\sin (x+\pi) < 0$.

1431. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$.

1432. $\operatorname{tg} 2x < -1$.

1433. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}-x\right) > 0$.

Milyen valós x-ekre teljesül, hogy

1434. *a)* $-2 < \operatorname{tg} x < 3$; *b)* $-4 < \operatorname{ctg} x \leqq 1{,}5$.

1435. *a)* $\frac{1}{3} \leqq \sin x < \frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2} < \cos x \leqq -\frac{1}{4}$.

Mely valós számokra igaz, hogy:

1436. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqq 0$.

1437. $\operatorname{tg}^2 x + (2-\sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$.

1438. $2 \sin^2 x + 3 \sin x > 2$.

1439. $\cos 2x \geqq \sin 2x$.

1440. $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \geqq 0$.

***1441.** $\sin 3x < \sin x$.

***1442.** $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$.

***1443.** $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0$.

1444. $\operatorname{tg} \frac{1}{x} > 0$.

1445. $\lg \sin x \leqq 0$.

***1446.** $\cos x \, |\cos x| \leqq \frac{1}{2}$.

***1447.** $\operatorname{ctg} 2^{-\sqrt{x-1}} < 1$.

***1448.** Igazoljuk, hogy minden valós x-re igaz:

$$(\sin x + 2 \cos 2x)(2 \sin 2x - \cos x) < 4{,}5.$$

***1449.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $0 < x < \pi$, akkor

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} > 0.$$

***1450.** Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

***1451.** Mutassuk meg, hogy ha $x+y+z = \pi$, akkor

$$\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} < \frac{1}{4}.$$

Milyen geometriai jelentése lehet a feladatnak?

V. EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGRENDSZEREK

1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek

1. Mely pozitív egészekből álló számpárok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $x+y=4$; *b)* $2x+3y=5$; *c)* $2x+y=15$; *d)* $2x-y=8$.

2. Zsófinak csupa 10 Ft-os és 20 Ft-os van a pénztárcájában. Hány tízforintosa lehet, ha összesen 100 Ft van a pénztárcában?

3. Egy radír ára 2 Ft, egy ceruzáé 3 Ft. Hány darab radírt és ceruzát vásárolhatunk 37 Ft-ért, ha mindkét cikkből veszünk legalább egyet?

4. Válogassuk ki a következő rendezett számpárok közül azokat, amelyek a $3x-4y=7$ egyenlet megoldásai:

$$(-1;-1),\ \left(0;-\frac{7}{4}\right),\ (3;2),\ (1;-1),\ (-3;-4),\ (5;2),\ (0;0),\ (-2;-3{,}25).$$

5. Hozzuk a következő egyenleteket (ha lehet) $ax+by=c$ alakra:

a) $x-2=3x-y$; *b)* $3(x+y)=2x-4$;

c) $(x-3)(y+2)-1=xy$; *d)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

6. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ egyenlet megoldásait.

7. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ és $x+2y=8$ egyenletek egész számpár megoldásait. Van-e a két megoldáshalmaznak közös része?

8. Két szám összege tíz, a két szám különbsége pedig 2. Melyik ez a két szám?

9. Egy szállodában 68 szoba van, mindegyik 2 vagy 3 személyes. Hány 2, illetve 3 személyes szoba van, ha összesen 161 vendéget tudnak elhelyezni?

10. Határozzuk meg a következő egyenletrendszert kielégítő számpárt mind grafikus, mind algebrai úton:

$$\begin{cases} y = 2x+2; \\ y = 4x-5. \end{cases}$$

Oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *halmazon a következő egyenletrendszereket:*

11. *a)* $\begin{cases} x = 2+y; \\ 3x-2y = 9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y = 2-4x; \\ 8x+3y = 5. \end{cases}$

12. *a)* $\begin{cases} x-2y = 0; \\ x-3y = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y = 2; \\ x+y = 3. \end{cases}$

13. *a)* $\begin{cases} 3x-y = 4; \\ 3y-5x = 5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y = -0{,}5; \\ 5x+3y = -2. \end{cases}$

14. *a)* $\begin{cases} x+y = 2; \\ 3{,}5x-7 = -3{,}5y. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-y = 7; \\ 0{,}5y = x-7. \end{cases}$

15. *a)* $\begin{cases} x+2y = 4; \\ x-y = 11. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y = 8; \\ 2x+y = 10. \end{cases}$

16. *a)* $\begin{cases} x+\frac{3}{4}y = 9; \\ \frac{x}{2}-\frac{2y}{3} = \frac{1}{3}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{2y}{3} = \frac{1}{3}; \\ 11x+2y = -1. \end{cases}$

17. *a)* $\begin{cases} 2x+y = 8; \\ 3x+4y = 7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7x+9y = 8; \\ 9x-8y = 69. \end{cases}$

18. *a)* $\begin{cases} 2x-3y = 4; \\ 1{,}5x-y = 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y = -2; \\ 3x+4y = -3{,}2. \end{cases}$

19. *a)* $\begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{2b}{5} = 1; \\ 5a-6b = 15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{a}{2}-\frac{b}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a}{5}+\frac{b}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

20. *a)* $\begin{cases} \frac{a-1}{2}-\frac{b+4}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a-1}{5}+\frac{b+4}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{a+3}{2}-\frac{b-5}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a+3}{5}+\frac{b-5}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *kiindulási halmazon a következő egyenletrendszereket:*

21. *a)* $\begin{cases} 2x+y = 11; \\ 3x-y = 9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+5y = 7; \\ x-3y = -1. \end{cases}$

22. *a)* $\begin{cases} x-3y = 4; \\ 5x+3y = -1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+3y = 6; \\ 2x+y = 4. \end{cases}$

23. *a)* $\begin{cases} 2x+5y = 25; \\ 4x+3y = 15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+3y = -4; \\ 6x+5y = -7. \end{cases}$

24. *a)* $\begin{cases} 7x-3y = 15; \\ 5x+6y = 27. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 12x+16y+1 = 0; \\ 15x+20y+10 = 0. \end{cases}$

25. *a)* $\begin{cases} 28x+35y+3 = 0; \\ 12x+15y+25 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 21x-9y+3 = 0; \\ 4x-5y+17 = 0. \end{cases}$

26. *a)* $\begin{cases} 15x+23y+10 = 0; \\ 9x+12y+6 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 25x-4y+1 = 0; \\ 31x-5y+16 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2(x+y)+4(x-y) = 3; \\ 3(x+y)+6(x-y) = 4{,}5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5(3x+5y)-9(6x+5y) = -5; \\ 2(3x+5y)+4(6x+5y) = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{2x+1}{5}+\frac{2-y}{4} = -0{,}1; \\ \frac{x+2}{3}+\frac{5y-7}{2} = 3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{2} - \dfrac{5x+y}{3} = 16; \\ x+y+12 = \dfrac{x-3y}{8}. \end{cases}$

31. *a)* $\begin{cases} \dfrac{a+3}{2} - \dfrac{b-2}{3} = 2; \\ \dfrac{a-1}{4} + \dfrac{b+1}{3} = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{c+d}{3} + \dfrac{d}{5} = -2; \\ \dfrac{2c-d}{3} - \dfrac{3c}{4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

32. *a)* $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8); \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1). \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{y}{3} = 1; \\ \dfrac{x-5}{4} + \dfrac{y-3}{7} = -1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2y+1}{3} - \dfrac{x-2y+1}{2} = 0; \\ 7x-2y = 27. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2a-5b}{5} - \dfrac{3a-2b}{3} = -3; \\ (5a-1)(2b+1) = (2a-4)(5b+4). \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{3(a-b)}{5} + \dfrac{5(a+b)}{3} = 18; \\ \dfrac{2(a+2b)}{11} + \dfrac{5(a-2b)}{3} = 7. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x+y-2}{5} + \dfrac{x-y-1}{3} = -\dfrac{8}{15}; \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$

Az eddigi példákban mindig megadtuk vagy valamilyen módon jeleztük azt a kiindulási halmazt, amelyben az egyenlet(rendszer)ek megoldásait kerestük. A továbbiakban a kiindulási halmazt nem mindig írjuk föl, ilyenkor azt a lehető legtágabbnak kell tekintenünk. A lehető legbővebb kiindulási halmazt az egyenlet(rendszer) értelmezési tartományának nevezzük. Hasonló megállapodás vonatkozik egyenlőtlenség(rendszer)ek megoldására.

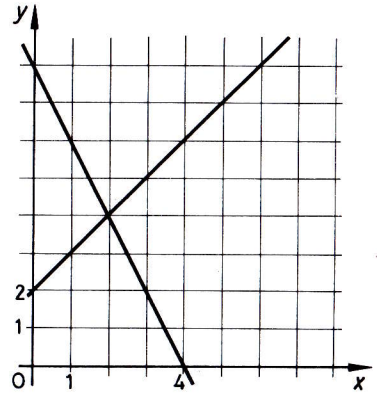
33. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} y = x+1; \\ y = -x+3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y = 3x; \\ y = -2x+5. \end{cases}$

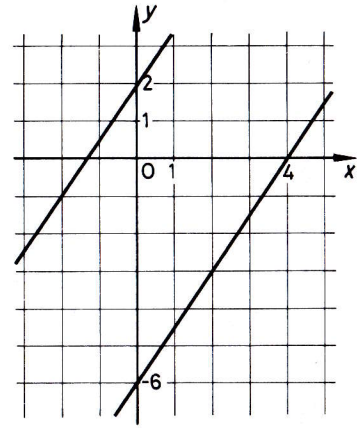
c) $\begin{cases} y = 2x-1; \\ x+y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+y = \dfrac{3}{2}; \\ 2x-3y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y = 4; \\ x-2y = -4. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y = 0; \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}y = 5. \end{cases}$

34. A *4. ábrán* két egyenes látható. Írjuk föl az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert, és annak megoldását.



4. ábra



5. ábra

35. Az *5. ábrán* két egyenes látható. Írjuk föl az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert, és annak megoldását.

36. Van-e megoldása a következő egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} 2x+y=1; \\ x+2y=-1; \\ x+y=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+6y=7; \\ x-y=5; \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y=\frac{3}{2}; \\ 4x-y=8; \\ 5x+3y=2. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+5y=25; \\ x-\frac{2}{3}y=3; \\ \frac{1}{2}x+\frac{y}{2}=4. \end{cases}$

37. Mely racionális számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

a) $\begin{cases} \frac{x+1}{y+2}=5; \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5}; \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x. \end{cases}$

38. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

a) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3y+2}=\frac{15x-2}{9y+4}; \\ 3(3y+2)+4(5x-4)=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{2x-3}{2y-5}=\frac{3x+1}{3y-4}; \\ 3(y+2)-2(x-3)=16. \end{cases}$

39. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{3}+\frac{4x-3y}{2}=y+1; \\ \frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}=4; \\ \frac{3x-4y+3}{4}+\frac{4x-2y-9}{3}=4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+4):(y+1)=2:1; \\ (x+2):(y-1)=3:2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\frac{4x-y}{10}=\frac{3x+0{,}5y}{30}+\frac{x-y}{5}; \\ \frac{3x+2y-1}{8}=3-\frac{0{,}8x-5y}{41}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}5-y=\left\{\frac{1}{2}[x-3(y-0{,}4)]+1{,}4\right\}\cdot 0{,}75; \\ 2\left[1-\frac{1-2(x-y)}{5}\right]-1{,}4=3(2x+3). \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2-\frac{x+2y}{5}=7x-5y+4; \\ 7x-5y+4=-\frac{1}{3}[5+3(x-3)-y]. \end{cases}$

Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével vagy új ismeretlen bevezetésével a következő egyenletrendszereket.
Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

40. *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}; \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{8}{y}=8; \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=51. \end{cases}$

41. *a)* $\begin{cases} x+\frac{5}{y}=15; \\ 2x-\frac{25}{y}=23. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{15}{x}-\frac{7}{y}=9; \\ \frac{4}{x}+\frac{9}{y}=35. \end{cases}$

42. *a)* $\begin{cases} \frac{3}{5x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{3}; \\ \frac{7}{10x}-\frac{5}{6y}=\frac{1}{15}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{7}{6y}+\frac{2}{x}=3{,}5; \\ \frac{2}{3x}-\frac{1}{6y}=2\frac{5}{6}. \end{cases}$

43. *a)* $\begin{cases} \frac{10}{x-5}+\frac{1}{y+2}=1; \\ \frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{2}{x+4}-\frac{3}{y-1}=5; \\ \frac{5}{x+4}-10=\frac{7{,}5}{y-1}. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7; \\ \dfrac{45}{2x-y}+1=\dfrac{48}{x+3y}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2y}-\dfrac{3}{2x+3y}=5; \\ \dfrac{9}{5(2x+3y)}-\dfrac{6}{5(x-2y)}=-3. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13; \\ \dfrac{27}{3x-2y}+\dfrac{2}{3y-2x}=1. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{5}{3x-2}-\dfrac{2}{5y+1}=10; \\ \dfrac{3}{3x-2}+\dfrac{3}{5y+1}=1{,}8. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0{,}1; \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0{,}3. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y+1}+\dfrac{1}{2-2x+y}=7; \\ \dfrac{4}{2x+y+1}+\dfrac{1}{2x-y-2}=-3. \end{cases}$

50. Van-e olyan racionális számokból álló számpár, amely megoldása a következő egyenletrendszernek?

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5; \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y=2; \\ (1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y=2\sqrt{3}. \end{cases}$

51. Az

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

egyenletrendszerben a, b, c, d, e és f racionális számok. Van-e olyan megoldás, amelyben x vagy y irracionális?

52. Az előző feladatban az együtthatók közül egyik se nulla és c irracionális, a többi racionális. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy a megoldásszámpár mindkét száma irracionális.

53. Van-e a következő egyenletrendszernek a $-3 \leqq x < 0$, $0 \leqq y < 6$ feltételeket kielégítő megoldása?

$$\begin{cases} 3x+2y=1; \\ 7x+5y=4. \end{cases}$$

54. Határozzuk meg azokat az $(x; y)$ valós számpárokat, amelyek kielégítik az $x+y=7$ vagy $x-y=2$ egyenletek valamelyikét. (Tehát olyan egyenletrendszerről van szó, amelynek egyenleteit *vagy* kötőszóval fűzzük össze.)

55. Határozzuk meg azokat az egészekből álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre $0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 6$, és kielégítik a következő egyenletek valamelyikét:

$$x-y=-2 \text{ vagy } x+y=6.$$

56. Tekintsük az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ kiindulási halmazon a következő egyenleteket:

$$3x-4y=2; \quad x+\frac{3}{4}y=9; \quad \frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=\frac{1}{3}; \quad 11x+2y=-1.$$

Válasszunk ki közülük kettőt ahányféleképpen csak lehetséges, és határozzuk meg 2–2 egyenlet konjunkciójának megoldáshalmazát. Keressük meg 2–2 egyenlet diszjunkciójának megoldáshalmazát is. Lesz-e azonos a kétféleképpen képzett megoldáshalmazok között?

57. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében vannak, és kielégítik a következő egyenletek legalább egyikét:

$$3x+4y=12 \text{ vagy } x-y=2.$$

58. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek a derékszögű koordináta-rendszer második síkne-

gyedében helyezkednek el, és kielégítik az előző példa egyenleteinek valamelyikét.

59. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert diszjunktíven (tehát úgy, hogy meghatározzuk az összes olyan valós számpárt, amely legalább az egyik egyenletet kielégíti).

a) $\begin{cases} x-3y=2; \\ x+2y=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-5y=3; \\ 3x+y=1. \end{cases}$

60. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

Legyen az első egyenlet megoldáshalmaza M_1 a másodiké M_2. Fejezzük ki a két egyenlet konjunkciójának és diszjunkciójának megoldáshalmazát M_1 és M_2 segítségével.

Állapítsuk meg, hány megoldása van a következő egyenletrendszereknek:

61. *a)* $\begin{cases} x+y=6; \\ x-y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=1; \\ -x-y=5. \end{cases}$

62. *a)* $\begin{cases} 2x+y=5; \\ y=3x. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x=1-y; \\ y=x-5. \end{cases}$

63. *a)* $\begin{cases} 2x+2y=8; \\ x+y=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=2; \\ 2x+y=10. \end{cases}$

64. *a)* $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=5; \\ \frac{3x}{2}-\frac{3y}{2}=15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=5; \\ 2x=5-2y. \end{cases}$

65. *a)* $\begin{cases} x-y=4; \\ 2x-2y=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=3; \\ y+x=5. \end{cases}$

66. *a)* $\begin{cases} x+y=5; \\ x-2y=-4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-x=4; \\ 2y+3=x. \end{cases}$

67. Két szám összege 10, ugyanezen számok kétszereseinek összege 20. Melyek ezek a számok?

68. A következő egyenletrendszerek megoldása nélkül állapítsuk meg, hogy melyeknek van egy megoldása, végtelen sok megoldása, 0 megoldása.

a) $\begin{cases} 2x+y=11; \\ x+3y=18. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=4; \\ 4x+6y=8. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-9y=4; \\ 4x-6y=9. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 4x+10y=12; \\ 6x+15y=18. \end{cases}$

Három- és többismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek

69. Keressünk olyan valós számokból álló $(x; y; z)$ számhármast, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$2x+5y-3z=3.$$

70. Hány megoldása lehet az előző feladatban fölírt egyenletnek? Hány paraméterrel fejezhető ki az összes megoldás?

71. Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0; \\ 3x+y-z=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=5; \\ 2y+z=6. \end{cases}$

Hány megoldása van a feladatnak?

72. Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+2y-z=0; \\ 4x-y+3z=0. \end{cases}$$

Hány megoldása van a feladatnak?
Hány paraméterrel fejezhető ki az összes megoldás?

Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *halmazon a következő egyenletrendszereket:*

73. *a)* $\begin{cases} x+2y=9; \\ y-3z=-5; \\ 5z-x=+14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=1; \\ z-5y=2; \\ 2z-x=1{,}4. \end{cases}$

74. *a)* $\begin{cases} x+y=13; \\ x-z=5; \\ y-z=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y=-2; \\ x+z=0{,}9; \\ y-z=-1{,}9. \end{cases}$

75. *a)* $\begin{cases} x+2y=2; \\ 2x+2z=-2; \\ 2y+3z=-3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=11; \\ 3x+2z=13; \\ 3y+4z=29. \end{cases}$

76. *a)* $\begin{cases} x+y-z=11; \\ x-y+z=1; \\ y+z-x=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x+y-z=-4; \\ x+y+z=-6. \end{cases}$

77. *a)* $\begin{cases} 3x+2y+3z=110; \\ 5x+y-4z=0; \\ 2x-3y+z=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y-z=12; \\ x+2y+z=0; \\ -x-1{,}5y+0{,}5z=-6. \end{cases}$

78. *a)* $\begin{cases} x+\dfrac{y}{4}+z=-6; \\ \dfrac{x}{5}+y-z=1; \\ y-\dfrac{z}{6}-x=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=36\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=27; \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{7}=18. \end{cases}$

79. *a)* $\begin{cases} 2x+y-z=3; \\ x-y+2z=-1; \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y+3z=4; \\ x-y-z=3; \\ 3x-y+2z=5. \end{cases}$

80. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{4}+\dfrac{5z}{3}=45; \\ 5{,}1x+\dfrac{6y}{5}-4z=15; \\ 0{,}1x-0{,}4y+\dfrac{4z}{5}=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-3y+z=-1; \\ x+2y-z=6; \\ x-1{,}5y+0{,}5z=1. \end{cases}$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a lehető legbővebb kiindulási halmazon:

81. *a)* $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{z}=4; \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-5; \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{z}=4; \\ \dfrac{4}{y}+\dfrac{2}{z}=-9. \end{cases}$

82. *a)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12}; \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=-\dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{2}{z}=-2\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=-5; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9; \\ \dfrac{1}{z}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=-4. \end{cases}$

83. *a)* $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{y+3z}=2; \\ \dfrac{15}{x+y}-\dfrac{4}{x-2z}=\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{10}{y+3z}-\dfrac{7}{x-2z}=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{2}{y+z}=15; \\ \dfrac{4}{y+z}-\dfrac{3}{5x+z}=-13; \\ \dfrac{6}{5x+z}+\dfrac{1}{2x-y}=11. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dfrac{7}{2x-3y}-\dfrac{2}{10z-3y}+\dfrac{3}{3y-8z}=8 \\ \dfrac{2}{2x-3y}-\dfrac{3}{10z-3y}+\dfrac{1}{3y-8z}=0 \\ \dfrac{5}{2x-3y}-\dfrac{4}{10z-3y}+\dfrac{7}{3y-8z}=8 \end{cases}$

Oldjuk meg a következő többismeretlenes egyenletrendszereket:

85. *a)*
$$\begin{cases} x+2y=5; \\ y+2z=8; \\ z+2u=11; \\ u+2x=6. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x-2y=1; \\ u-y=1; \\ 2u-3z=4; \\ 6x+z=1. \end{cases}$$

86. *a)*
$$\begin{cases} 2x+y=11; \\ y-2z=-9; \\ 2z+3u=11; \\ 3u+x=6. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-2y+3z-u=5; \\ y-2z+3u-x=0; \\ z-2u+3x-y=0; \\ u-2x+3y-z=5. \end{cases}$$

87. *a)*
$$\begin{cases} 6x-2y-3z=25; \\ 3y+z-2v=20; \\ 4x-3y-2t=13; \\ x-2v+t=4; \\ 2y+v=17. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x-2y-3z=25; \\ 3y+z-2v=24; \\ 4x-3y-2v=13; \\ x-2v-u=4; \\ 2y+v=15. \end{cases}$$

88. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-5x_4=5; \\ 2x_2+3x_3-x_4=12; \\ x_3-4x_4=-1; \\ x_4=1. \end{cases}$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével. (Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerének ismételt alkalmazásával olyan alakra hozzuk, mint a **88.** feladatban lévő egyenletrendszer. Ezt a módszert Gauss-féle kiküszöbölési eljárásnak is nevezik.):

89.
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5; \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2; \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2; \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$$

90.
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=5; \\ 4x_1-7x_2+13x_3+12x_4=22; \\ 2x_1-3x_2+6x_3+7x_4=10; \\ 3x_1-6x_2+10x_3+6x_4=18. \end{cases}$$

91.
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=8; \\ 4x_1-x_2-6x_3+2x_4=1; \\ 5x_1-3x_2+x_3-\frac{1}{2}x_4=2; \\ x_1-2x_2-x_3-3x_4=-8. \end{cases}$$

Mutassuk meg a következő egyenletrendszerekről, hogy nincs megoldásuk:

92.
$$\begin{cases} 2x+3y-7z=10; \\ x-8y-15z=-3; \\ x+1{,}5y-3{,}5z=7. \end{cases}$$

93.
$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{3}x_2+2x_3-\frac{1}{2}x_4=1; \\ 5x_1-x_2+9x_3-4x_4=1; \\ 3x_1+2x_2+6x_3-7x_4=11; \\ 3x_1-x_2+6x_3-1{,}5x_4=2. \end{cases}$$

94. Módosítsuk az előző két feladatban a harmadik, illetve a negyedik egyenlet jobb oldalát olyképpen, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

Egyenletrendszerrel megoldható feladatok

95. Teheráru elszállítására vasúti kocsikat állítanak be. Ha egy kocsira 15,5 tonna terhet raknak, akkor 4 tonnát nem tudnak berakni. Ha viszont egy kocsira 16,5 tonnát raknak, akkor a kocsik megtöltéséhez még 8 tonna teher kellene. Hány vasúti kocsit állítottak be, és hány tonna volt a teher?

96. Egy rakomány meghatározott időn belüli elszállításához több egyforma teherautóra van szükség. Ha két kocsival kevesebb lenne, akkor a szállítás két órával tovább tartana. Ha viszont 4 autóval több lenne, a szállítást a megszabott időnél két órával hamarább tudnák elvégezni. Hány teherautó végzi a szállítást, és mennyi idő alatt kell készen lenniök?

97. Az egyvágányú vasútvonal 20 km-es szakaszán síneket fektetnek. Ehhez 25 m és 12,5 m hosszú sínek állnak rendelkezésre. Ha a

25 m-es síneket használják föl előbb, akkor a 12,5 m-es síneknek csak az 50%-ára lesz szükség; ha viszont a 12,5 m-es síneket használják föl előbb, akkor a 25 m-es síneknek csak a $66\frac{2}{3}$%-ára lesz szükség, hogy a tervezett vasútvonalat megépítsék. Hány darabot használtak föl az egyes esetekben a különféle sínszálakból?

98. Két brigád együttesen 22 400 m^3 tűzifa kitermelését kezdi meg. Úgy tervezik, hogy 40 munkanap alatt befejezik a munkát. 10 napi közös munka után az első brigád teljesítménye 30%-kal, a másiké 16%-kal nőtt, ezért sikerült a munka hátralevő részét 24 nap alatt befejezni. Napi hány m^3 fa kitermelését tervezték a brigádok?

99. Egy épület tatarozását bizonyos számú munkás meghatározott számú nap alatt képes elvégezni. Ha 3 emberrel kevesebb dolgozik, a munkaidő 6 nappal megnövekszik; ha viszont 2 munkással több van, 2 nappal a határidő előtt elkészülnek. Hány munkás, hány nap alatt tudja a munkát elvégezni?

100. Egy műhely munkásai meghatározott idő alatt néhány darab egyforma alkatrészt készítenek. Ha naponta 10 darabbal többet készítenek el, akkor 4,5 nappal hamarabb fejezik be a munkát. Ha viszont naponta 5 darabbal kevesebbet készítenének, akkor 3 napot késnének. Hány alkatrészt kellett elkészíteniök, és hány nap alatt?

101. A fizikaterembe padokat állítanak be. Ha minden padba két tanulót ültetnek, akkor 8 tanulónak nem jut hely. Ha viszont minden padba 3 tanuló ül, akkor 7 hely üresen marad. Hány padot állítanak a terembe? Hány tanuló van az osztályban?

102. Egy társaság vacsorához készülődik. Ha a teremben lévő asztalok mindegyikéhez 10 ember ül, akkor 4 hely üresen marad, ha mindegyikhez 8-an ülnek, 3 embernek nem jut hely. Hány asztal van a teremben, és hányan akarnak vacsorázni?

***103.** Egy táncmulatságon 37 személy vett részt, lányok és fiúk. A mulatság után kiderült, hogy az első lány 8, a második 9, a harmadik 10 fiúval és így tovább, az utolsó lány valamennyi fiúval táncolt. Hány leány és fiú volt a mulatságon?

104. Egy kirándulásra pénzt gyűjtünk össze. Ha minden résztvevő 75 Ft-ot hoz, akkor a költségből még 440 Ft hiányzik; ha viszont

mindenki 80 Ft-ot ad be, akkor 440 Ft többlet lesz. Hány fő vesz részt a kiránduláson?

105. Két dolgozó egy közösen elvégzett munkáért 3294,40 Ft-ot kapott. Az első 30 napig, a másik 28 napig dolgozott. Az első 4 napra 137,60 Ft-tal kapott többet, mint a második 3 napra. Mennyit kerestek naponta?

106. Tizenhat év múlva az apa kétszer idősebb lesz fiánál. Hány évesek most, ha 4 évvel ezelőtt az apa hatszor annyi idős volt, mint a fia?

***107.** András kétszer olyan idős, mint amilyen Béla volt, amikor András olyan idős volt, mint Béla most. Amikor Béla olyan idős lesz, mint most András, éveik számának összege 140 lesz. Milyen idős most a két férfi?

***108.** Egy ember így szól a másikhoz: „Én most kétszer annyi idős vagyok, mint Ön volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint Ön most. Amikor Ön olyan idős lesz, mint én vagyok most, akkor nekem hét évem fog hiányozni ahhoz, hogy kétszer annyi idős legyek, mint Ön most." Hány évesek?

109. Ha egy téglalap hosszúságát 6 m-rel növeljük, szélességét pedig 3 m-rel csökkentjük, a téglalap területe nem változik. Nem változik a terület akkor se, ha eredeti hosszát 3 m-rel kisebbítjük, szélességét pedig 2,4 m-rel növeljük. Határozzuk meg a téglalap méreteit.

110. Ha egy derékszögű háromszög egyik befogóját 2 cm-rel, a másikat 5 cm-rel megnöveljük, az így létrejött háromszög területe 51 cm^2-rel több lesz. Ha viszont mindkét befogót 2 cm-rel csökkentjük, a terület 32 cm^2-rel kisebb lesz. Mekkorák a befogók?

111. Egy társaság közösen vásárolt egy ajándékot, azonban a számla kifizetésekor négyen hiányoztak, és így mindenki 36 forinttal többet fizetett a tervezettnél. Ezután három távollevő megérkezett. és a költségek újrafelosztása után a befizetők visszakaptak egyenként 30 forintot. Hányan voltak a társaságban, és mennyibe került az ajándék?

112. Egy fiúnak ugyanannyi nővére van, mint fivére, és nővérének fele annyi nővére van, mint fivére. Hány fivér és nővér van a családban?

113. Egy öszvér és egy szamár terhet cipelve beszélgetett. A szamár így szólt: „Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd." Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi súlyt cipelnék, mint te." Hány kg-ot vitt az egyik, és hányat a másik?

114. Ha egy tört számlálójához és nevezőjéhez is 3-at adunk, értéke $\frac{1}{2}$ lesz, ha viszont nevezőjéből egyet elveszünk, értéke $\frac{1}{3}$ lesz. Melyik ez a tört?

115. Ha két szám mindegyikéből 3-at elveszünk, akkor az első szám háromszorosa lesz a másodiknak. Ha viszont mindkét számhoz kettőt hozzáadunk, akkor az első szám kétszerese lesz a másodiknak. Melyik ez a két szám?

116. Ha egy tört számlálójából 3-at elveszünk, nevezőjéhez pedig kettőt hozzáadunk, értéke $\frac{1}{3}$ lesz; ha viszont számlálójához 20-at adunk, és a kapott számot az eredeti tört nevezőjével osztjuk, akkor hányadosul kettőt, maradékul szintén kettőt kapunk. Melyik ez a tört?

117. Ha egy tört számlálóját kettővel megnöveljük, akkor 1-et, ha pedig a nevezőjét növeljük 3-mal, akkor $\frac{1}{2}$-et kapunk. Melyik ez a tört?

118. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, az eredmény 77 lesz. Ha viszont az eredeti számot elosztjuk a felcserélés után kapott számmal, akkor mind a hányados, mind a maradék 2 lesz. Melyik ez a kétjegyű szám?

119. Egy kétjegyű szám 45-tel nagyobb a jegyei felcserélésével nyert számnál. Ha a számot 12,5%-kal megnöveljük, és ezután elosztjuk az eredeti szám jegyeinek összegével, hányadosul 9-et kapunk. Melyik ez a szám?

120. Melyik az a szám, amelyiket 7-tel osztva a maradék 2; 15-tel osztva, a maradék 6 lesz? Tudjuk továbbá, hogy az első hányados úgy aránylik a másodikhoz, mint 7:3.

***121.** Ha egy háromjegyű szám jegyeit fordított sorrendben írjuk,

és az eredetiből kivonjuk, a különbség 500 és 600 között lesz. A középső számjegy 3-mal kisebb a másik kettő összegénél, a százasok helyén álló számjegy négyzete 4-gyel nagyobb a második számjegy 9-szeresénél. Melyik ez a szám?

***122.** A gépkocsi utasa egy kilométerkövön egy kétjegyű számot olvas le. Útját ugyanolyan sebességgel folytatva, egy órával később olyan kilométerkő mellett halad el, amelyen ugyanazon számjegyeket fordított sorrendben látja. Ezután egy órával olyan kilométerkőhöz érkezik, amelyen ugyanaz a két számjegy van, mint az elsőn, de köztük egy nullával. Mekkora a gépkocsi átlagsebessége?

***123.** Pista vásárolt egy körzőt, egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző az ötödébe, egy ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 8 Ft-ot; ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 12 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző vagy a ceruza a drágább?

***124.** Öt házaspár közös kirándulást szervez, amelynek költségeit közösen fedezik. A hozzájárulás mértékét a társaság egyik jól számoló tagja a következőképpen határozza meg:
A névsor szerinti első házaspár férfitagja fizet valamekkora összeget, a felesége pedig az ezután fennmaradó költség hatodrészét.
A következő házaspárból a férj az előző férfinál 10 Ft-tal többet fizet, felesége pedig ismét a még fennmaradó költség hatodrészét; és így tovább.
A végén kiderül, hogy minden házaspár azonos összeget fizet. Mennyi a kirándulás költsége? Mennyi a házaspáronkénti hozzájárulás?

***125.** Péter és öccse, Miklós versenyt futottak 1 km-es távon. Péter 50 másodperc előnyt adott, és így még 50 m-re volt a céltól, amikor öccse befutott. „Lebecsültem erődet – szólt –, holnap csak 100 m előnyt kapsz." Másnap Miklós 16 másodperccel bátyja után ért célba. A versenytáv mely pontján előzte meg a második napon Péter az öccsét? (Feltesszük, hogy teljesítményük a két napon ugyanaz volt.)

126. Bizonyos mennyiségű 78%, illetve 58% vasat tartalmazó ércet összekeverve 62% vasat tartalmazó keveréket kapunk. Ha mindkét fajta ércből még 15–15 kg-ot hozzáteszünk a keverékhez, akkor 63,25%-os lesz. Mennyi ércet tartalmaz a keverék az egyes fajtákból?

127. 84% és 70% töménységű alkoholból 75%-os keveréket készítünk. Ezután a keverékhez még hozzáöntünk 5 cm^3-t az első fajtából és 135 cm^3-t a másodikból. Így a keverék 72%-os lesz. Hány cm^3-t vettünk az egyes fajtákból az első alkalommal?

128. Kétfajta alkoholból készítünk keveréket. Az elsőből 10 litert, a másodikból 24 litert véve, 40%-os alkoholt kapunk. Ha az elsőből 18 litert, a másodikból 7 litert veszünk, a keverék 30%-os lesz. Hány százalékos a két összetevő?

129. Két edényben különböző hőmérsékletű víz van. Ha az elsőből 240 g-ot összekeverünk a másodikból vett 260 g-mal, a keverék hőmérséklete 52 °C lesz. Ha viszont a keverékhez az első edényből 180 g, a másodikból 120 g vizet veszünk, a kapott keverék hőmérséklete 46 °C lesz. Határozzuk meg a két edényben levő víz hőmérsékletét.

130. Van két fémrudunk. Az első 270 g aranyat és 30 g rezet, a másik 400 g aranyat és 100 g rezet tartalmaz. Hány g-ot vegyünk egyik, illetve a másik fajtából, hogy 400 g 825 ezrelékes finomságú ötvözetet kapjunk?

131. Összeöntöttünk 6%-os és 30%-os sósavat, s így 24 liter 15%-os töménységű sósavat kaptunk. Hány litert vettünk az egyes összetevőkből?

132. Kétfajta konzervet akarunk venni 330 Ft-ért; az egyik darabja 18 Ft, a másiké 10 Ft. Árleszállítás folytán az első árát 30%-kal, a másikét 20%-kal csökkentik, s így 84 Ft-tal kevesebbet költünk. Hány konzervet veszünk az egyes fajtákból?

133. Egy készülék elkészítésének energiaköltsége az anyagköltség 3,5-szerese. Egy újítás bevezetésével az anyagköltségnél 12%-os, az energiaköltségnél 18%-os megtakarítást értek el, összesen 1500 Ft-ot. Mekkora a készülék újítás előtti energia- és anyagköltsége?

134. Ha vízszintes talajon $m = 5$ kg tömegű testet F erővel húzunk, akkor az $a_1 = 1\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással; ha kétszer akkora erővel húzzuk, akkor pedig $a_2 = 5\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozog. Mekkora az F erő, és mekkora a talaj és a test közötti súrlódási együttható?

135. Két ember korcsolyán áll, egymástól d távolságra. Az egyik m tömegű labdát dob a másiknak, aki t idő múlva kapja el azt. Mekkora sebességgel kezd el csúszni a labdát dobó M tömegű ember?

136. Hány százalék káliumkloridot tartalmaz a káliumkloridból és nátriumkloridból álló sókeverék, amelynek klórtartalma 56,26%?

137. Adva van egy kétértékű sav kétféle káliumsója. Molekulatömegük aránya 68:87. Mennyi a sav molekulatömege? (A kálium atomtömege 39.)

138. Egy háromértékű és egy kétértékű sav nátriumsójának molekulatömeg-különbsége 22. Mit állíthatunk a savak molekulatömegéről?

139. Na és K ötvözetének 3,58 g tömegű darabjával 1,2 dm^3 20 °C-os 10^5 Pa nyomású hidrogént sikerült fejleszteni. Az ötvözet atomjainak hány százaléka nátrium?

140. Két brigádnak egy földterületről 16 óra alatt kellett volna fölszednie a burgonyát. Először csak az első brigád állt munkába, 36 órát dolgozott, s ezután 4 óra alatt a két brigád befejezte a munkát. Hány óra alatt tudta volna egyik-egyik brigád fölszedni a burgonyát az egész területről?

141. Két csövön át egy medence 1 óra 20 perc alatt telik meg. Ha az első csövet 10 percre, a másikat pedig 12 percre nyitjuk meg, a medence csak $\frac{2}{15}$ részéig telik meg. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét külön az egyik, illetve a másik cső?

142. Egy tartályba két cső vezet. Ha a tartályt először félig megtöltjük az első csövön át, azután teleengedjük a második csövön át, a töltési idő 2 óra. Ha viszont az első csövön csak harmadáig töltjük, a második csövön ezután tele, akkor a töltési idő 2 óra 10 perc lesz. Mennyi idő alatt tölti meg a tartályt külön az egyik vagy a másik cső?

143. Két munkás készít egy munkadarabot. Ha az első munkás 9 órát dolgozik, a második 15 órát, akkor időre elkészülnek. Akkor is időre készen lesznek, ha az első 16 órát, a másik 10 órát dolgozik. Mennyi idő alatt végeznének külön-külön?

144. Egy kerékpáros meghatározott sebességgel haladva, a meg-

szabott időre ér A-ból B-be. Ha sebességét 3 km/h-val növeli, akkor 1 órával hamarább ér célba; ha viszont óránként 2 km-rel kevesebbet halad, akkor 1 órát késik. Mekkorra az AB távolság, és a kerékpáros sebessége?

145. A személyvonatnak, amelynek sebessége 15 km/h-val nagyobb a tehervonaténál, 9 órával kevesebb időre van szüksége, hogy A-ból B-be érjen, mint a tehervonatnak. A gyorsvonat viszont, amelynek sebessége 10 km/h-val nagyobb a személyvonaténál, ugyanezen a távon 3 órával rövidebb idő alatt fut végig, mint a személyvonat. Határozzuk meg az AB távolságot, és a vonatok sebességét.

146. Egy 100 m hosszúságú körpályán két test kering. Egy irányban haladva 20 másodpercenként, ellenkező irányban haladva 4 másodpercenként találkoznak. Mekkora a testek sebessége?

***147.** Egy lovas és egy gyalogos egyszerre indulnak A-ból B felé. A lovas, aki 50 perccel előbb ér B-be, mint a gyalogos, megérkezése után rögtön visszafordul, és így B-től 2 km-re szembetalálkozik a gyalogossal. A lovas az utat A-tól B-ig és vissza 1 óra 40 perc alatt teszi meg. Mekkora az AB távolság, valamint a lovas és a gyalogos sebessége?

148. Két, egymástól 9 km távolságra levő pontból egyszerre indul el egy-egy kerékpáros. Ha egymással szembe mennek, 20 perc múlva, ha egy irányban haladnak, 3 óra múlva találkoznak. Mekkora a sebességük?

149. Az egyik várostól a faluig az út eleinte sík területen megy, azután hegynek fölfelé. Egy kiránduló az út sík részén kerékpáron 8 km/h sebességgel, a hegynek föl pedig gyalog 3 km/h sebességgel haladva 1 óra 55 perc alatt ér a városból a faluba. Visszafelé a lejtőn 15 km/h-val, a sík részen pedig 12 km/h sebességgel kerékpározva 58 percig tart az út. Hány kilométerre van a falu a várostól?

150. Az AB úton – amelyen 28 km sík rész, valamint emelkedők és lejtők vannak – kerékpáros halad. A sík részeken a kerékpáros sebessége 12 km/h, az emelkedőkön 8 km/h, a lejtőkön pedig 15 km/h. Az egész utat A-tól B-ig 5 óra alatt, B-től A-ig pedig 4 óra 39 perc alatt teszi meg. Mekkora az AB út?

151. Egy gyalogos indul A-ból B felé. 20 perc múlva A-ból egy

kerékpáros indul utána, s indulása után 10 perccel elhalad a gyalogos mellett. Elmegy B-ig, onnan megállás nélkül visszafordul, és az első találkozás után 50 perccel találkozik ismét ugyanazzal a gyalogossal. Az AB távolság 10 km. Mekkora a gyalogos és a kerékpáros sebessége?

152. A-ból 9 óra 9 perckor indul egy MÁVAUT-járat a 24 km-re lévő B-be. Megérkezése után 1 óra 13 perccel indul vissza. B-ből 8 órakor indult A felé egy gyalogos, aki ezzel a járattal először 9 óra 40 perckor, másodszor 11 óra 20 perckor találkozott. Hol voltak a találkozások, és mekkora a MÁVAUT-járat átlagos sebessége?

153. Két egyenes út O-ban keresztezi egymást; egyiken Péter halad, a másikon Pál. Amikor Péter O-ban van, Pál 500 m-re van O-tól. 2 perc múlva egyenlő távolságra lesznek a kereszteződéstől, és további 8 perc elteltével ismét egyenlő távolságra lesznek O-tól. Mekkora Péter, illetve Pál sebessége?

154. Nyílt pályán haladó személyvonat ablakából egy 70 m hosszú gyorsvonatot látunk elrobogni. Ha a két vonat szembe halad, 3,2 másodperc; ha egy irányban haladnak, 10 másodperc alatt robog el a gyorsvonat az ablak előtt. Mekkora a két vonat sebessége?

155. Egy uszály halad a Dunán a parttal párhuzamosan. Meg akarjuk határozni a hosszát. Ha az uszállyal egy irányban haladunk egyenletes sebességgel, akkor hosszát 250 lépésnek találjuk, ellenkező irányban haladva, az uszály 60 lépés után elhalad mellettünk. Hány lépés az uszály hossza?

156. Egy gépkocsizó-egység kocsijai között motoros küldönc tartja menet közben a kapcsolatot. A motoros az utolsó kocsitól az elsőig 1 perc 20 másodperc, az elsőtől az utolsóig 14 másodperc alatt teszi meg az utat. A gépkocsioszlop hossza 500 m. Milyen sebeséggel halad az oszlop és a küldönc?

157. Négy személy A-ból a 36 km-re lévő B-be utazik; olyan gépkocsijuk van, amelyik óránként 36 km-t tesz meg, és a vezetőn kívül csak két személyt szállíthat. Az utasok közül 2 fiatal, és ők óránként 6 km-t, míg kettő idősebb, akik óránként 4 km-t tesznek meg gyalog. Abban egyeznek meg, hogy a gépkocsi először a két idősebbet elviszi az út egy C pontjáig, ahonnan azok gyalog mennek tovább. A kocsi C-ből azonnal visszafordul, hogy felvegye a két

fiatal utast; velük az út valamely D pontjában találkozik, eddig gyalog jönnek, s innen viszi őket B-be. Hol kell lenniök a C és D pontoknak, hogy a négy utas egyszerre indulva el A-ból, egyszerre érkezzen B-be?

158. Három szám összege 80. A második szám $2\frac{3}{4}$-szerese az elsőnek, a harmadik pedig az első két szám összegének harmada. Melyek ezek a számok?

159. Három szám összege 100. Ha az első számot elosztjuk a másodikkal, a hányados 5, a maradék 1 lesz; ha a harmadik számot osztjuk az elsővel, ugyanaz a hányados is, a maradék is mint az előbb. Melyek ezek a számok?

160. Egy medencébe 3 csapon folyhat a víz. Az első és a második csapon együtt 1,2 óra alatt tudjuk megtölteni a medencét; a második és harmadikon együtt 2 óra alatt; az elsőn és harmadikon együtt 1 óra 30 perc alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét egy-egy csap külön? Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha egyszerre mind a három csapot megnyitják?

161. Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, amelyben két-két oldal összege 26, 32 és 34 egység?

162. Mekkorák annak a négyszögnek az oldalai, amelyben három-három oldal összege 22, 24, 27 és 20 egység?

163. Egy munkát az A és B brigád együtt 9 nap alatt, az A és C brigád együtt 12 nap alatt, a B és C 11 nap alatt végezne el. Hány nap alatt készülnek el, ha mindhárom brigád egyszerre dolgozik?

164. Egy gépkocsi a vízszintes úton 80 km/h, az emelkedőn 56 km/h, a lejtőn 120 km/h sebességgel halad. A 320 km hosszú utat oda 4 óra, vissza 4,25 óra alatt teszi meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok?

165. Egy lóversenyen 3 lóra fogadnak. Ha az első nyer, akkor a reá tett összeg kétszeresét; ha a második nyer, az erre tett összeg négyszeresét; ha a harmadik, az erre tett összeg nyolcszorosát kapják. Mekkora összeget kell tenni egy-egy lóra, hogy bármelyik fusson is be elsőnek, 100 Ft nyeresége legyen a fogadónak?

Paraméteres elsőfokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg x-re és y-ra a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást:

166. *a)* $\begin{cases} x+y=2a; \\ x-y=2b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 8x+5y=9a; \\ 3x-5y=13a. \end{cases}$

167. *a)* $\begin{cases} x+by=c; \\ ax+y=d. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=c+4d; \\ 3x+2y=3c-4d. \end{cases}$

***168.** *a)* $\begin{cases} ax-by=a^2-b^2; \\ ax+by=a^2+b^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2; \\ x+y=2a. \end{cases}$

169. *a)* $\begin{cases} ax+y=a^2; \\ x+ay=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (a+c)x-(a-c)y=2ab; \\ (a+b)y-(a-b)x=2ac. \end{cases}$

***170.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{x+a}{y}=b; \\ \dfrac{x+b}{y}=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2cx}{a}-\dfrac{y}{a}=5c; \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{c}=a. \end{cases}$

***171.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=1; \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}; \\ \dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b}. \end{cases}$

***172.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a; \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m; \\ \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n. \end{cases}$

***173.** *a)* $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=2a; \\ (a^2-b^2)(x-y)=4ab. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=c; \\ (a-b)x+(a+b)y=c. \end{cases}$

***174.** *a)* $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta; \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha+y=\sin(\alpha+\beta); \\ x-y\operatorname{tg}\alpha=\cos(\alpha+\beta). \end{cases}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \quad k\in\mathbf{Z}\right)$

***175.** Határozzuk meg azokat az $(a; b; c)$ számhármasokat, amelyekre az

$$y = ax+b;$$
$$y = bx+c;$$
$$y = cx+a$$

egyenletrendszernek van megoldása.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást (**176–182.**):

176. *a)* $\begin{cases} x+y = 3a; \\ x+z = 4a; \\ y+z = 5a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y+z = a; \\ x+z = b; \\ x+y = c. \end{cases}$

177. *a)* $\begin{cases} x+y = a; \\ y+z = b; \\ z+x = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y-z = a; \\ x-y+z = b; \\ -x+y+z = c. \end{cases}$

178. *a)* $\begin{cases} 5x-y+3z = a; \\ 3x+5y-z = b; \\ 3y-x+5z = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-2y-3z = a; \\ x+4y+2z = 7a; \\ 3x-y+z = 0. \end{cases}$

***179.** *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = a; \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = b; \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z} = 3; \\ \frac{p}{x}+\frac{q}{y}-\frac{r}{z} = 1; \\ \frac{2p}{x}-\frac{q}{y}-\frac{r}{z} = 0. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4a_1; \\ x_1+x_2-x_3-x_4 = 4a_2; \\ x_1-x_2+x_3-x_4 = 4a_3; \\ x_1-x_2-x_3+x_4 = 4a_4. \end{cases}$

***181.** $\frac{x-y}{z-1} = a; \quad \frac{y-z}{x-1} = b; \quad \frac{z-x}{y-1} = c.$

182. $\begin{cases} x+2y+3z+4v = a; \\ 2x+3y+4z+v = b; \\ 3x+4y+z+2v = c; \\ 4x+y+2z+3v = d. \end{cases}$

***183.** Határozzuk meg az összes olyan $(a; b; c)$ valós számhármast, amelyre a következő egyenletrendszernek van az $x=y=z=0$ esettől különböző megoldása.

$$\begin{cases} ax+by+cz = 0; \\ bx+cy+az = 0; \\ cx+ay+bz = 0. \end{cases}$$

184. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete a egység, alapjának és szárának összege b egység. Mekkorák az oldalai? Mikor megoldható a feladat?

185. Kétféle cukorkából, amelyek közül az egyiknek kg-ja a Ft, a másik kg-ja b Ft, m kg keveréket készítünk. A keverék ára kilogramonként c Ft. Hány kg kell a keverékhez a két fajtából?

186. Két vásárló közül az egyik a méter selymet és b méter szövetet vett, és összesen d forintot fizetett. A másik ugyanazokból a fajtákból m méter selymet és n méter szövetet vásárolt, és ugyancsak d forintot fizetett. Mennyi a selyem, illetve a szövet ára méterenként?

187. Egy textilüzem az egyik tervidőszakban meghatározott mennyiségű szövetet tud előállítani. Ha a véggel többet készítenek naponta, akkor n nappal hamarább; ha b véggel kevesebbet, akkor m nappal később készülnek el. Mennyi szövetet akarnak az adott tervidőszakban készíteni, és hány nap alatt?

188. Kétfajta alkoholunk van. Ha az első fajtából a litert, a másikból b litert összekeverünk, akkor k %-os keveréket kapunk. Ha viszont a második fajtából veszünk a litert, és az elsőből b litert, akkor t %-os lesz a keverék. Hány százalékos töménységűek az összetevők?

189. Kétféle konzervet vásárolunk, az egyikből a darabot, a másikból b darabot, összesen f forintért. Árleszállítás folytán az egyik p, a másik q százalékkal olcsóbb lett. Így ugyanazért a konzervmennyiségért csak h forintot fizetünk. Mennyi volt az egyes konzervek ára az árleszállítás előtt?

190. Egy gőzhajó a folyón lefelé t óra alatt ért egyik kikötőből a másikba. Visszafelé ugyanehhez az úthoz a órával többre volt szüksége. Határozzuk meg a folyó sebességét, és a gőzhajó saját sebességét, ha a két kikötő távolsága d km.

191. Két, egymástól a km-re levő turista egyszerre indul A pontból és B pontból az AB egyenesen egy irányba haladva, és b óra múlva találkoznak. Ha szembe mennének, akkor c óra múltán találkoznának. Mekkora a sebességük?

192. Két, egymástól d km távolságra lévő autó indul egymással szemben. Ha az első m perccel előbb indul, mint a második, akkor a másik indulása után a perccel találkoznak; ha viszont a másik indul n perccel előbb, mint az első, akkor az első autó indulása után b perccel találkoznának. Határozzuk meg a két autó sebességét.

193. Nyílt pályán haladó személyvonat ablakából egy d méter hosszú gyorsvonatot látunk elrobogni. Ha a két vonat szembehalad, t_1 másodperc, ha egy irányba, t_2 másodperc alatt halad el a gyorsvonat az ablak előtt. Mekkora a vonatok sebessége?

194. Két munkás együtt dolgozva egy bizonyos munkát b nap alatt végezne el. Az egyik munkás egyedül az egész munkát fele annyi nap alatt tudja elvégezni, mint a másik. Hány nap alatt végezné el a munkát a másik egyedül?

195. A és B együtt m nap alatt végezne el egy munkát. Miután n napig együtt dolgoztak, A-nak távoznia kellett, és B még p napig dolgozott, hogy a munka elkészüljön. Hány nap alatt végeznék el a munkát külön-külön?

196. Egy futópályán két futó tart edzést. Ha egy irányba haladnak, akkor a, ha ellentétes irányba, b másodpercenként találkoznak. Mennyi idő alatt futják végig a pályát?

197. Egy munkát A és B együtt a nap alatt, A és C együtt b nap alatt, B és C együtt c nap alatt végezne el. Hány nap alatt készülnek el, ha mindhárman egyszerre dolgoznak?

198. Egy medencébe három (A, B és C) csapon át folyik a víz. B és C csapok együtt a óra alatt, C és A csapok együtt b óra alatt, A és B csapok c óra alatt töltik meg a medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence egy-egy csapon keresztül? Mennyi idő alatt telik meg, ha egyszerre mindhárom csapot megnyitják?

199. Háromfajta borból, amelyeknek literje a Ft, b Ft és c Ft, n liter keveréket akarunk előállítani. Az első és második fajtából összesen annyit veszünk a keverékhez, mint a harmadikból. Hány litert kell vennünk az egyes fajtákból, hogy a keverék literje d Ft-ba kerüljön?

***200.** Három játékos, A, B és C olyan feltétellel játszik, hogy a vesztesnek a másik kettő pénzét meg kell duplázni. Az első játszmát A, a másodikat B, a harmadikat C veszíti el, és ekkor mindegyiküknek n forintja van. Hány forintja volt az egyes játékosoknak a játék előtt?

201. Az a paraméter mely értékeinél nincs gyöke a következő egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} ax-5y=9; \\ 2x-3y=15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2ay=1; \\ (3a-1)x-ay=1. \end{cases}$

202. Az a paraméter mely értékeire van végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} (a+1)x+y=a+1; \\ x+(a+1)y=a+3. \end{cases}$$

Mikor nincs megoldása?

203. Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszernek egyetlen megoldása legyen:

a) $\begin{cases} 2x-y=5; \\ x+3y=4; \\ x+y=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=8; \\ (a+1)x+y=2; \\ 2x+3y=10. \end{cases}$

Ábrázoljuk a három – egyenlettel megadott – függvényt.

204. Az m milyen értékeinél lesz a következő egyenletrendszert kielégítő számpár mindkét tagja pozitív?

a) $\begin{cases} 3x+(2m-3)y=4; \\ -5x+4y=8. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (m+2)x-8y=3m-1; \\ 7x+3y=16. \end{cases}$

205. A k milyen értékei mellett lesz a következő egyenletrendszert kielégítő számpár mindkét tagja negatív?

a) $\begin{cases} 2kx+y=7; \\ 5x-4y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (2+k)x-2y=7k; \\ 4x-y=12. \end{cases}$

Elsőfokú egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

206. *a)* $\begin{cases} 4<3x+1; \\ 3x+1<10. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}<1-\dfrac{x+2}{4}; \\ 3x-4>2(x-1). \end{cases}$

207. *a)* $\begin{cases} 5(x+1)+6(x+2) > 9(x+3); \\ 7x-3(2x+3) > 2(x-18). \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-3)(x-4) \leqq (x+1)(x+2); \\ x(x+1)+x(x+2) > (2x-1)(x+3). \end{cases}$

208. *a)* $\begin{cases} 2-\dfrac{5+x}{7} < 1-\dfrac{9-x}{14}; \\ 12-\dfrac{1}{3}\left(47-\dfrac{60}{x}\right) > 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3 \leqq \dfrac{3+4x}{5}-4; \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x) < 2(4-x). \end{cases}$

209. *a)* $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5} \leqq \dfrac{2x+7}{3}-8; \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6} < \dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2} > 4-\dfrac{7-3x}{5}; \\ 7(3x-6)+4(17-x) > 11-5(x-3). \end{cases}$

210. *a)* $\begin{cases} 3x+7 > 2x+1; \\ 2x-8 \leqq \dfrac{1}{3}x+1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-3 \leqq 5x+2; \\ \dfrac{x+6}{5} > 3-2x. \end{cases}$

211. *a)* $\begin{cases} 3x-4 < 2x+5; \\ 7-x > \dfrac{3x+1}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-1 > 4x+3; \\ \dfrac{5-x}{3} < \dfrac{2+x}{5}. \end{cases}$

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszerek egész megoldásait:

212. *a)* $\begin{cases} 3x-10 > 0; \\ 5\dfrac{1}{3}x-51 < 6x. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7} \geqq 5x; \\ 4x+5-\dfrac{1}{6}\left(25x+29\dfrac{1}{2}\right) < 0. \end{cases}$

213. *a)* $\begin{cases} \dfrac{2x+15}{9} \geqq \dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3}; \\ \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2} < 2x. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2 < \dfrac{2x-8}{6}-\dfrac{18-4x}{3}; \\ 9-\left(\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2}{3}\right) > x. \end{cases}$

214. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x+3)(x+2) \geqq 0$; *b)* $(x-4)(x+3) > 0$;

c) $(x+1)(x-5) \leqq 0$; *d)* $(x-5)(x-3) < 0$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

215. *a)* $\dfrac{x}{x-2} < 0$; *b)* $\dfrac{x}{x-4{,}5} > 0$; *c)* $\dfrac{8-x}{x} \leqq 0$.

216. *a)* $\dfrac{2x+1}{x+7} \leqq 0$; *b)* $\dfrac{2x-3}{x+9} > 0$; *c)* $\dfrac{3x+2}{x+5} \geqq 0$;

d) $\dfrac{4x-7}{x+3} < 0$; *e)* $\dfrac{3x-4}{2x+1} \geqq 0$; *f)* $\dfrac{4x+7}{3x-2} < 0$.

217. *a)* $\dfrac{2x-1}{x+7} \geqq 3$; *b)* $\dfrac{2x+3}{x-5} \leqq -2$;

c) $\dfrac{4x-9}{2-3x} \leqq 1$; *d)* $\dfrac{5x+18}{7-4x} \geqq 4$.

***218.** *a)* $\dfrac{4x-2}{x+2} > 5-x$; *b)* $\dfrac{2}{x-5} > \dfrac{1}{x+2}$;

c) $\dfrac{x-3}{x+1} \geqq \dfrac{x}{x-2}$; *d)* $\dfrac{x-5}{x+3} \geqq \dfrac{x+1}{x-2}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszereket, és ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

219. *a)* $\begin{cases} 2(x-1)+2x > 3x+5; \\ 4x \leqq 5(x+1); \\ x+7 < 3x-2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2(x+3)+5 \geqq 3x-7; \\ x+5 < 2x-1; \\ (x-5)2 > x-9. \end{cases}$

220. *a)* $\begin{cases} 5(x+1)+2x < -3x; \\ x-12 > 2x+7; \\ 4(x+5)+8 \leqq 3x+2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2(x+6)-8 > x+15; \\ 4x < 3x-7; \\ 5x+12 > -3+4x. \end{cases}$

221. Egy kétjegyű számban a tízesek száma kettővel kisebb az egyesek számánál. A szám 21-nél nagyobb, de 36-nál kisebb. Melyik ez a szám?

222. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a felét, 128-nál nagyobb, de 130-nál kisebb számot kapunk eredményül. Melyik ez a szám?

223. Ha a turista naponta 20 km-rel többet haladna a tervezettnél, akkor 8 nap alatt több mint 900 km-t jutna előre. Ha viszont naponta 12 km-rel kevesebbet haladna, akkor 10 nap alatt se tenne meg 900 km-t. Hány km az egy napra tervezett út?

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a derékszögű koordináta-rendszerben:

224. *a)* $2x+y > 7$; *b)* $3x < 4y-5$.

225. *a)* $2(x+2) \geqq 3(y+1)$; *b)* $x-8 \leqq y+\frac{1}{2}$.

226. *a)* $4y+5x+8 > 0$; *b)* $2(x+2y)-3x < 2y$.

227. *a)* $3x-4y > 3$; *b)* $4x+y-8 < 0$.

228. *a)* $2x \leqq 5y-12$;

b) $5\left(x+\frac{1}{4}\right)+3x-3(y-2) > 5$.

229. *a)* $4\left(x-\frac{1}{3}\right)+3(2y-8) < 10x$;

b) $3x+2-4(y+x) \geqq 3y+1$.

230. *a)* $2y-5 \geqq 0$; *b)* $5x+3 \leqq 0$.

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

231. *a)* $\begin{cases} 2x-y < 3; \\ 4x-2y > -2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+2 < 2y; \\ 2x-y \geqq 3. \end{cases}$

232. *a)* $\begin{cases} 3y+5x \geqq 15; \\ 6y > -10x+12. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3y < -5x+15; \\ 6y+10x \geqq 12. \end{cases}$

233. *a)* $\begin{cases} 4x-9 > 0; \\ 3x+2 < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x-9 \leqq 0; \\ 3x+2 \geqq 0. \end{cases}$

234. *a)* $\begin{cases} 3y+15 > 0; \\ 2y+2 \leqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3y+15 < 0; \\ 2y+2 < 0. \end{cases}$

235. *a)* $\begin{cases} 2y-5x < 0; \\ 2y-x > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-5x > 0; \\ 2y-x > 0. \end{cases}$

236. *a)* $\begin{cases} 2y-5x > 0; \\ 2y-x < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-5x < 0; \\ 2y-x < 0. \end{cases}$

Hasonlítsuk össze az ebben a feladatban és a **235.**-ben szereplő négy egyenlőtlenségrendszer megoldását.

237. *a)* $\begin{cases} 3x-2y+4 \leqq 0; \\ x+2y > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y+4 \leqq 0; \\ x+2y < 0. \end{cases}$

238. *a)* $\begin{cases} 2y+x < -4; \\ x+2 < 0; \\ y-x+2 > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y+2 < 0; \\ 4y-6x+24 < 0; \\ y+2x > -2. \end{cases}$

239. *a)* $\begin{cases} y-2 > 0; \\ 2y > 6x+7; \\ y-7 < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-2 > 0; \\ x-5 < 0; \\ y-x-3 < 0. \end{cases}$

240. *a)* $\begin{cases} y > 0; \\ x > 0; \\ 3y+2x < 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y-2x \leqq 2; \\ y \geqq 0; \\ 2y+x \leqq 4. \end{cases}$

241. *a)* $\begin{cases} y+x < 3; \\ 3y+12 \geqq 4x; \\ x \geqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y > 0; \\ 2y-x < 1; \\ x-3 < 0. \end{cases}$

242. *a)* $\begin{cases} y-x-2 < 0; \\ x > 0; \\ y > 0; \\ 4y+6x < 24. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y-1 > 0; \\ y-4 < 0; \\ y-x < 0; \\ y-x+5 > 0. \end{cases}$

243. *a)* $\begin{cases} 2y-x \leqq 6; \\ 2y-x \geqq 0; \\ 3y+4x \leqq 12; \\ 3y+4x+12 \geqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y < 0; \\ x-1 > 0; \\ y+2x > 0; \\ 2y+10 > x. \end{cases}$

244. *a)* $\begin{cases} y-x>0; \\ 4y-x>0; \\ y+x=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x>0; \\ 2y+3x>6; \\ y-x<3; \\ y-x=0. \end{cases}$

245. *a)* $\begin{cases} y+x>0; \\ y+2x<5; \\ y-x-2>0; \\ 2y-3x-10=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y<0; \\ y-x+1<0; \\ 2y+x+2>0; \\ x-2=0. \end{cases}$

246. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszereket.

a) $1 < x+y < 2$;

b) $-1 < 2x-y < 1$.

247. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek a következő egyenlőtlenségrendszerek mindkettejét kielégítik?

$$-2 \leqq y-x \leqq 2;$$
$$-2 \leqq y+x \leqq 2.$$

Ábrázoljuk a megoldásokat.

***248.** Az a, b, c és d számok pozitívak, és tudjuk, hogy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mely $(x; y)$ számpárokra teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer?

$$\frac{a}{b} < \frac{ax-cy}{bx-dy} < \frac{c}{d}.$$

***249.** Mely valós x-ekre teljesül a

$$\frac{2x+a}{3x+a} \geqq 0$$

egyenlőtlenség, amelyben $a<0$?

250. András és Ferenc egy szakasz hosszát becsléssel állapítja meg. Ha András 10%-kal kevesebbre becsüli, akkor eltalálja a pontos értéket. Ha Ferenc becslése 10%-kal több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket. Melyik becslésnél kisebb a hiba abszolútértéke?

***251.** Tegyük fel, hogy $a^2+b^2 \leqq 1$ és $x^2+y^2 \leqq 1$, ahol a, b, x, y valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $ax+by \leqq 1$.

***252.** Határozzuk meg mindazokat az $\frac{a}{b}$ törteket (a, b pozitív egészek), amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségrendszereknek:

$$90 < a+b < 100;$$
$$0{,}9 < \frac{a}{b} < \frac{82}{90}.$$

***253.** Az a_0, a_1, ..., a_{100} számok mindegyike pozitív egész szám. Tudjuk, hogy $a_1 > a_0$ és $a_2 = 3a_1-2a_0$; $a_3 = 3a_2-2a_1$; ...; $a_{100} = 3a_{99}-2a_{98}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{100} > 2^{99}$.

***254.** Egy háromszög a, b és c oldalainak hossza a következő határok között változhat:

$$0 < a \leqq 1 \leqq b \leqq 2 \leqq c \leqq 3.$$

A lehetséges háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?

***255.** Egy háromszög minden oldalának mértékszáma egész. Mekkorák lehetnek az oldalak, ha összegük 200, a legnagyobb oldal ötszöröse és a másik két oldal háromszoros összege közötti különbség 120-szal nagyobb, mint a legkisebb oldal négyszerese?

***256.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ valós számokra teljesül az alábbi 100 egyenlőtlenség:

$$a_1-3a_2+2a_3 \geqq 0;$$
$$a_2-3a_3+2a_4 \geqq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{98}-3a_{99}+2a_{100} \geqq 0;$$
$$a_{99}-3a_{100}+2a_1 \geqq 0;$$
$$a_{100}-3a_1+2a_2 \geqq 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100}$.

***257.** Az $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \leqq 0$ egyenlőtlenség minden olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számra fennáll, amelyre

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n \leqq 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor van egy olyan nemnegatív c szám, amelyre

$$a_1 = cb_1;\ a_2 = cb_2;\ \ldots;\ a_n = cb_n.$$

*258. Hány megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4 = 48$ egyenletnek a nemnegatív egészek körében, ha

$$x_1>5, \quad x_2>6, \quad x_3>7 \text{ és } x_4>10.$$

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó feladatok

259. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens. (Milyen kötőszó kapcsolja össze a rendszer egyenlőtlenségeit?)

a) $|x+2| < 2$; *b)* $|2x-3| < 1$.

260. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens. (Milyen kötőszó kapcsolja össze a rendszer egyenlőtlenségeit?)

a) $|x+2| > 2$; *b)* $|2x-3| > 1$.

261. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

a) $|x| > |x-4|$; *b)* $\frac{2}{3}|x| > 2|x+2|$;

c) $3-|x| \geqq |x+1|$; *d)* $|x-1|+3 < \frac{2}{3}|x+2|$.

262. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

a) $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 3$; *b)* $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 1{,}1$; *c)* $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 1{,}01$.

*263. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $|x|-|y| = 1$; *b)* $|x|+|y| = 1$.

*264. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $||x|-|y|| = 1$; *b)* $|x|+|y|+|x+y| = 2$.

*265. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $|x|-|y| < 1$; *b)* $|x|+|y| < 1$.

*266. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $||x|-|y|| < 1$; *b)* $|x|+|y|+|x+y| < 2$.

267. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldást:

a) $|x+2y| < 3$; *b)* $|x-y| < 1$.

268. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

$$1 < |x+y| < 3.$$

269. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} |x-1|+|y-5| = 1; \\ y = 5+|x-1|. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| - y - 3 = 0; \\ x+|y|-3 = 0. \end{cases}$

270. Mely valós számokra teljesül a következő két egyenlőtlenség egyszerre?

$$5-2x < 7 \quad \text{és} \quad |x-3| > 2.$$

271. Jelöljük meg a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x| \leqq |y|$; *b)* $|x| \leqq 2$ és $|y| \leqq 2$.

272. Legyen A a sík azon pontjainak halmaza, amelyek $(x; y)$ koordinátáira fennáll az $y \geqq x^2-1$ egyenlőtlenség. A B halmazba azok a pontok tartozzanak, amelyekre $y \leqq 3-|x|$, a c halmazba pedig azok, amelyekre $|x| \leqq 1$ és $|y-1| \leqq 1$ teljesül. Ábrázoljuk az $(A \cap B) \setminus C$ halmazt.

273. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az $|x|+|y| \leqq 10$ egyenlőtlenséget?

274. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} |x-y| = 3; \\ |x+y| = 3. \end{cases}$$

***275.** Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} |x-y| \leqq 1; \\ |x+y| \leqq 1; \\ x+|y| \leqq 1. \end{cases}$$

***276.** Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő két egyenlőtlenséget:

$$\begin{cases} |x|+|y| < 3; \\ |x+y|+|x-y| < 4. \end{cases}$$

***277.** Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldásokat:

$$1 < |x|+|y| < 2.$$

***278.** Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre a következő egyenlőtlenségrendszer teljesül:

$$\begin{cases} x-|y-1| > -2; \\ x+\left|y-\frac{3}{2}\right| < 2. \end{cases}$$

279. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az $(x; y)$ számpárokat, amelyekre:

$$|x+1|+|x-1| = |y+1|+|y-1|.$$

280. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0.$$

2. Másod- és magasabb fokú egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Másod- és magasabb fokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszereket:

281. *a)* $\begin{cases} x+y = 5; \\ xy = 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y = 3; \\ xy = 10. \end{cases}$

282. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 5; \\ x-y = -1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y = 8; \\ x-y = 2. \end{cases}$

283. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 1; \\ y+x^2 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 25; \\ x^2-y^2 = 7. \end{cases}$

284. *a)* $\begin{cases} x^2-y = 3; \\ x-y = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy = 8; \\ y = x^2. \end{cases}$

285. *a)* $\begin{cases} 2x+3y = -15; \\ xy = -9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x+4y = -18; \\ xy = 6. \end{cases}$

286. *a)* $\begin{cases} x-y-3xy = -47; \\ xy = 14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y+3xy = -3; \\ xy+1 = 0. \end{cases}$

287. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 5; \\ xy = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2 = 64; \\ xy = 60. \end{cases}$

288. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 12; \\ x-y = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2 = 8; \\ x-y = 2. \end{cases}$

289. *a)* $\begin{cases} x^2+xy = 40; \\ x-y = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x = 40; \\ x+y = 10. \end{cases}$

290. *a)* $\begin{cases} x^2-xy-y^2 = 19; \\ x-y = 7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x^2-3y^2 = 5; \\ 2x-y+4 = 0. \end{cases}$

291. *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = -\frac{4}{5}; \\ x-y = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \\ x+y = 5. \end{cases}$

292. *a)* $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ xy=\dfrac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y^2=7; \\ xy^2=12. \end{cases}$

293. *a)* $\begin{cases} xy+y^2=55; \\ 2x+y=17. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1; \\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$

294. *a)* $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3; \\ x+y=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x+4}{y-1}=3; \\ (x-2)(y-4)=6. \end{cases}$

295. *a)* $\begin{cases} x+2y=14; \\ x^2+4y^2=100. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=14; \\ 2xy=48. \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy=24; \\ x^2+4y^2=100. \end{cases}$

296. *a)* $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+x+20y=13; \\ x-y=5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2-48x+4y-4=0; \\ 3x+y=2. \end{cases}$

297. *a)* $\begin{cases} (x-1)(y+2)=0; \\ (x+3)(y-1)=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (x-2)(y-1)=0; \\ 2x^2-3xy+5y-5=0. \end{cases}$

298. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2-3x+5y=0; \\ x^2+y^2+2x-3y=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18; \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$

299. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=136; \\ x^2-y^2=64. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^4-y^4=5; \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$

300. *a)* $\begin{cases} x^2+xy=35; \\ y^2+xy=14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x+y=29; \\ xy-2x-2y=2. \end{cases}$

301. *a)* $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2; \\ xy+y^2=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0; \\ 5x^2-10y^2-5=0. \end{cases}$

302. *a)* $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1; \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=17; \\ x^2-y^2=-16. \end{cases}$

303. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15}; \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}; \\ x^2-y^2=7. \end{cases}$

304. *a)* $\begin{cases} x^2y+xy^2=2; \\ xy+3x+3y=7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2+x-y=10; \\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=16. \end{cases}$

305. *a)* $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{10}{\sqrt{y-1}}=5{,}25; \\ \dfrac{8}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{10}{\sqrt{y-1}}=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}=1\dfrac{3}{4}; \\ \dfrac{2}{\sqrt{x-y}}+\dfrac{6}{\sqrt{x+3y}}=2{,}5. \end{cases}$

V.

Határozzuk meg azokat a valós számokból álló számhármasokat, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszereket:

306. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=29; \\ xy+yz+xz=-10; \\ x+y=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=169; \\ x+y+z=19; \\ x-y=1. \end{cases}$

307. *a)* $\begin{cases} xy+xz+yz=752; \\ x:y:z=3:4:5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+yz=9; \\ yz+xz=5; \\ xy+xz=-16. \end{cases}$

308. $\begin{cases} (x+1)(3-4y)=(6x+1)(3-2y); \\ (4x-1)(z+1)=(x+1)(z-1); \\ (3-y)(z-2)=(1-3y)(z-6). \end{cases}$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

309. *a)* $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=4; \\ \sqrt{xy}=2. \end{cases}$

310. *a)* $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=14; \\ x^2+y^2=2696. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2\sqrt{y-6x}=x+3; \\ \sqrt{y-1}=x+2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{y+4}=5; \\ x+y=28 \end{cases}$

311. *a)* $\begin{cases} x^3-y^3=7; \\ x-y=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

312. *a)* $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^3+y^3=7; \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

313. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=3; \\ x^3+y^3=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y+1=-2xy; \\ (x+y)^4+x=2. \end{cases}$

314. *a)* $\begin{cases} x^2-2xy+2x-1=0; \\ y^2-2xy+2y-1=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x+y=34; \\ x^2+y^2-x-y=42. \end{cases}$

***315.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $x>0$, $y>0$:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=1; \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+\sqrt{xy^3}=336; \\ y^2+x\sqrt{xy}=112. \end{cases}$

***316.** Melyek azok a természetes számokból álló számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletet? $y^3-x^3=91$.

***317.** Írjunk föl y-ra egy olyan egyenletet, amelynek gyökeihez találhatók olyan x értékek, hogy az $(x; y)$ számpár kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x^2+3x+y-2=0; \\ 2x+y+3=0. \end{cases}$$

***318.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

a) $\begin{cases} (x+y)(x^3+y^3)=27; \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{8}{y^2}=2x+y; \\ \dfrac{8}{x^2}=x+2y. \end{cases}$

***319.** Melyek azok a pozitív számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y-2}=14; \\ \dfrac{x^2y^2}{5}-xy=10. \end{cases}$$

***320.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x-2y=1; \\ x^3y+4xy^3=33\,215. \end{cases}$$

***321.** Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesülnek az

$$\begin{cases} x+y+z=9; \\ xy+yz+zx=24 \end{cases}$$

egyenlőségek, akkor az x, y, z számok egyike sem lehet 1-nél kisebb, sem 5-nél nagyobb.

322. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x+y=2; \\ xy-z^2=1 \end{cases}$$

egyenletrendszer valós gyökeit.

***323.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{x}{y}=6; \\ (x^2-y^2)\dfrac{y}{x}=1. \end{cases}$$

324. Határozzuk meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y-z=2; \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

***325.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} |x^2-5x+7|^{|y|}=|y|^{|x^2-5x+7|}; \\ |x^2-5x+7|^{\frac{2}{|x^2-5x+7|}}+|y|^{\frac{1}{|y|}}=2. \end{cases}$$

Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható feladatok

326. Két szám szorzata 60, négyzetük összege 169. Melyik ez a két szám?

327. Két szám összege 25, négyzetük összege 373. Melyik ez a két szám?

328. Két szám különbsége 2, köbük különbsége 98. Melyik ez a két szám?

329. Két szám összege 14, köbük összege 854. Melyik ez a két szám?

330. Két szám négyzetösszege 8,5. A két szám szorzata 3,75. Melyik ez a két szám?

331. Két szám szorzata 36, négyzetük összege 97. Melyik ez a két szám?

332. Két szám összege 10, szorzata 9. Mennyi e számok negyedik hatványainak összege?

333. Egy tört számlálójának és nevezőjének a szorzata 42. Ha a tört számlálóját eggyel megnöveljük, nevezőjét pedig eggyel csökkentjük, a tört reciprokát kapjuk. Melyik ez a tört?

334. Pistától megkérdezték, mikor van a születésnapja. Így válaszolt: „Ha a születésem hónapjának és napjának sorszámát összeszorzom, 120-at, ha számtani közepüket képezem, 13-at kapok." Mikor van Pista születésnapja?

335. Melyik az a kétjegyű szám, amely eggyel nagyobb, mint számjegyeinek négyzetösszege, és 5-tel nagyobb, mint a számjegyek kétszeres szorzata?

336. Melyik az a kétjegyű szám, amely 18-cal nagyobb a számjegyeinek felcserélésével kapott számnál, és $\frac{8}{3}$-szor akkora, mint a számjegyeinek a szorzata?

337. Ha egy kétjegyű számot megszorzunk a számjegyek fölcserélésével nyert számmal, akkor 1612-t kapunk. A keresett szám számjegyeinek négyzetösszege 40. Melyik ez a szám?

338. Ha egy kétjegyű számot elosztunk számjegyeinek összegével, hányadosul 6-ot, maradékul 2-t kapunk. Ha viszont e számot számjegyeinek szorzatával osztjuk el, akkor hányadosul 5-öt, maradékul 2-t kapunk. Melyik ez a szám?

339. Ha egy kétjegyű számot osztunk számjegyeinek összegével, majd az eredeti szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk, és az így nyert számot ismét osztjuk a számjegyek összegével, a két hányados különbsége egyenlő az eredeti szám számjegyeinek különbségével. A két hányados szorzata viszont megadja az eredeti számot. Melyik ez a kétjegyű szám?

340. Melyik az a kétjegyű szám, amely 45-tel nagyobb annál a számnál, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti szám számjegyeit fölcseréljük; és $5\frac{1}{7}$-szer akkora, mint számjegyeinek szorzata?

341. Két szám összege, szorzata, hányadosa ugyanaz. Melyik ez a két szám?

342. Határozzuk meg azt a háromjegyű számot, amelynek harmadik számjegye az elsőnél 2-vel, a második számjegyének négyzete a harmadik négyzeténél 20-szal nagyobb, továbbá ha a számból levonjuk számjegyeinek összegét, olyan számhoz jutunk, amelynek számjegyei az eredeti szám jegyeinél rendre 0-val, 1-gyel, 2-vel kisebbek.

343. Két szám mértani közepe 3-mal nagyobb a kisebbik számnál, számtani közepük 4,5-del kisebb a nagyobbik számnál. Melyik ez a két szám?

344. Két konvex sokszög összes átlóinak száma 158, belső szögeik összege 4320°. Hány oldalúak a sokszögek?

345. Két sokszög belső szögeinek összege fokokban kifejezve 39 híján 21-szerese az összes oldalak és összes átlók száma összegének. Az összes átlók száma 99-cel nagyobb az összes oldalak számánál. Hány oldalúak a sokszögek?

346. Hány oldalú az a két sokszög, amelyben az oldalak számának összege 20, az átlóké 79?

347. Két szám harmonikus közepe 1, számtani közepe 1,5. Melyik ez a két szám?

348. 7500 m távolságon egy kocsi első kereke 1000-rel többet fordul, mint a hátsó. Ha mindkét kerék kerülete 1 m-rel nagyobb lenne, akkor ugyanezen a távon az első kerék 625-tel többet fordulna, mint a hátsó. Mekkorák a kerületek?

349. 1500 méter távolságon egy kocsi hátsó kereke 250-nel többet

fordul, mint az első. Ha mindkét kerék kerülete 0,5 méterrel kisebb volna, akkor a hátsó kerék ezen a távolságon 400-zal fordulna többet, mint az első. Mekkora a kerekek kerülete?

350. Egy 2 km hosszú, kör alakú pályán két korcsolyázó halad egy irányban. A gyorsabbik, aki 1 perccel rövidebb idő alatt fut körül a pályán, mint a másik, 20 percenként elmegy társa mellett. Mekkora a sebességük?

351. Egy teremben minden sorban ugyanannyi szék van. Ha soronként 3-mal több széket helyezünk el, és a sorok számát is megnöveljük kettővel, akkor 364 helyett 480 ülőhely lesz. Hány sor van a kétféle elrendezésben?

352. Egy 150 km hosszú úton az egyik gépkocsi 10 km/h-val gyorsabban haladt, mint a másik, és ezért félórával előbb ért célba, bár egyszerre indultak. Mekkora a két autó sebessége?

353. Egy gépírónőnek120 oldalt kellett legépelnie. Ha óránként 2 oldallal többet írt volna le, két órával hamarabb lett volna készen. Hány óra alatt írta le a szöveget?

354. 8000 m^3 föld elhordásával a munkacsapat 8 nappal előbb lett készen, mert naponta a tervezettnél 50 m^3-rel többet szállítottak el. Hány nap alatt lettek készen, és a tervezett napi teljesítményt hány százalékkal teljesítették túl?

355. Két osztály színházjegyeket vett. Az egyik osztály 384 forintot fizetett a jegyekért, a másik pedig, amelyik 4 darabbal kevesebbet vett, de 3 forinttal drágább jegyeket, összesen 420 forintot fizetett. Hány jegyet vett egyik-egyik osztály, és darabonként milyen áron?

356. Három rugalmas golyót úgy függesztettünk föl, hogy a felfüggesztési pontok egy egyenesen vannak, és két-két golyó érinti egymást. A tömegek: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 0{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}1$ kg. Az m_1 tömegű golyót $h = 5$ cm magasságból elengedjük. Milyen magasra emelkedik az m_3 tömegű golyó, ha az ütközések teljesen rugalmasak?

357. Egy munka elvégzését két brigádra bízták. Először az első dolgozott feleannyi ideig, mint amennyi a második brigádnak az egész munka elvégzésére kellett volna, ezután a második dolgozott a munkán harmadannyi ideig, mint amennyi az első brigádnak kellett volna az egész munka elvégzéséhez. Így a két brigád az egész

munka $\frac{11}{12}$ részét végezte el. A két brigád együtt $3\frac{3}{7}$ óra alatt tudta volna elvégezni a munkát. Hány órára van szükségük külön-külön?

358. Derékszögű háromszög területe 55 cm^2, átfogója $\sqrt{221}$ cm. Mekkorák a befogói?

359. Derékszögű háromszög átfogója $3\sqrt{5}$ méter. Ha az egyik befogót $133\frac{1}{3}$ százalékkal, a másikat $16\frac{2}{3}$ százalékkal növeljük, akkor a két befogó együtt 14 méter hosszú lesz. Mekkorák az eredeti háromszög befogói?

360. Egy téglalap kerülete 85 cm, átlója 32,5 cm. Mekkora a területe?

361. Egy derékszögű háromszög kerülete 24 cm, területe 24 cm^2. Mekkorák az oldalai?

362. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 8 cm-rel több, mint az átfogó hossza. A háromszög kerülete 48 cm. Mekkorák az oldalak?

363. Egy rombusz kerülete 52 cm, területe 120 cm^2. Mekkorák az átlói?

364. Két egymásra helyezett különböző kocka együttes magassága 1,7 m, térfogatuk összege 1,853 m^3. Mekkorák az élek?

365. Egy 1925 m^2 területű téglalap alakú telket 180 m hosszú kerítéssel tudtunk bekeríteni. Mekkorák a telek méretei?

366. A folyó partján levő *A* és *B* városok távolsága 9 km. A hajó az oda-vissza utat összesen 2 óra 15 perc alatt teszi meg. Ha a folyó sebessége kétszer akkora volna, a hajó ugyanezt az utat 3 óra alatt tenné meg. Mekkora a hajó saját sebessége, és mekkora a folyó sebessége?

367. *A* állomásról 13 órakor indult el egy vonat *B* felé. 19 órakor hófúvás miatt meg kellett állnia. A pálya megtisztításához két órára volt szükség. A mozdonyvezető, hogy behozza a késést, az út hátralevő részén a vonat eredeti sebességét 20%-kal növelte. A vonat így 1 óra késéssel ért *B*-be. A következő napon az *A*-ból *B* felé ugyanabban az időpontban induló vonat *A*-tól 150 km-rel távolabb ütközött hótorlaszba, mint az előző napon. Két órai állás után ugyancsak

20%-kal nagyobb sebességgel haladt tovább, de csak $\frac{1}{2}$ órát sikerült behoznia, s így 1,5 óra késéssel érkezett B-be. Mekkora a távolság A és B között?

368. Egy kerékpárverseny útvonala 6 km. Egyik versenyző, nevezzük A-nak, 2 perccel előbb ért célba, mint B. Ha A percenként 0,1 km-rel kevesebbet, B pedig ugyanennyivel többet tett volna meg, akkor B ért volna 2 perccel előbb a célba. Mekkora a kerékpárosok sebessége?

369. Az egymástól 200 km távolságra levő A és B városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy vonat. Az a vonat, amely A-ból indult, a két vonat találkozása után 3 órával ér B-be, a másik pedig a találkozás után 1 óra 20 perccel ér A-ba. Mekkora a vonatok sebessége?

370. Az egymástól 600 km-re levő A és B városokból egyszerre indult el egymással szemben két vonat. 5 óra múlva a vonatok közt a távolság 150 km, és még nem találkoztak. Ha B-ből másfél órával előbb indult volna el a vonat, mint A-ból, akkor a két vonat az út felénél találkozott volna. Mekkora a vonatok sebessége?

371. Az A és B pontok közti út emelkedőből és lejtőből áll. Egy kerékpáros – aki a lejtőn óránként 6 km-rel több utat tesz meg, mint az emelkedőn – 2 óra 40 perc alatt ér A-ból B-be. Visszafelé 20 perccel kevesebb időre van szüksége. Állapítsuk meg a kerékpáros sebességét az emelkedőn és a lejtőn, valamint az út emelkedőjének vagy lejtőjének hosszúságát A felől nézve, ha az egész út 36 km.

372. Két test egyenletes sebességgel távolodik egy derékszög egy-egy szárán a csúcsponttól. Az egyik sebessége 3 m/s, a másiké 4 m/s. Kezdetben egymástól való távolságuk 10 m volt, 2 másodperc múlva pedig 20 m. Mekkora távolságra voltak kezdetben a derékszög csúcsától?

***373.** Egy kör kerületére öt számot írtak. Ezután mindegyik számot négyzetre emelték, és a négyzetét megszorozták az óramutató járása szerint rákövetkező számmal, sorba járva a számokat a kör kerületén. Így a következő öt számhoz jutottak:

$$\frac{1}{2};\quad 1;\quad 32;\quad 4\sqrt{2};\quad 2.$$

Mi volt az eredetileg fölírt öt szám?

***374.** Mely x, y természetes számokra lehet az x^2+y és az $x+y^2$ számok mindegyike négyzetszám?

Paraméteres magasabb fokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást: (a, b, c, m adott valós számok.):

375. *a)* $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=-2a^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=2a; \\ xy=-3a^2. \end{cases}$

376. *a)* $\begin{cases} x-y=b; \\ xy=2b^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=a+2b; \\ xy=ab+b^2. \end{cases}$

377. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5m^2}{4}; \\ xy=\dfrac{m^2}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{13a^2}{36}; \\ xy=\dfrac{a^2}{6}. \end{cases}$

378. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{10a^2}{9}; \\ xy=\dfrac{a^2}{3}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2=a^2+4b^2; \\ xy=2ab. \end{cases}$

379. *a)* $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=a; \\ x^2+y^2=c. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x^2+y^2=a; \\ xy=c. \end{cases}$

380. *a)* $\begin{cases} x+y^2=a; \\ y+x^2=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=a; \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=b. \end{cases}$

381. *a)* $\begin{cases} xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a}; \\ xy-\dfrac{x}{y}=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=a^2; \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=b^2. \end{cases}$

A következő feladatokban (**382–389**) *a, b, c adott valós számokat jelent.*

382. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $abc \neq 0$:

$$\begin{cases} xy = a; \\ yz = b; \\ zx = c. \end{cases}$$

383. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

a) $\begin{cases} x^2+xy+xz = a; \\ y^2+xy+yz = b; \\ z^2+xz+yz = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+xy-xz = a; \\ y^2+xy-yz = b; \\ -z^2+xz+yz = c. \end{cases}$

***384.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx} = c; \\ \dfrac{xz}{az+cx} = b; \\ \dfrac{yz}{bz+cy} = a. \end{cases}$$

385. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a^2; \\ y(x+y+z) = b^2; \\ z(x+y+z) = c^2. \end{cases}$$

***386.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $a \neq -1$, $b \neq -1$ és $c \neq -1$. Mi a megoldhatóság feltétele?

$$\begin{cases} y+z+yz = a; \\ x+z+xz = b; \\ x+y+zy = c. \end{cases}$$

387. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha a, b, c mindegyike pozitív.

$$\begin{cases} yz = ax; \\ zx = by; \\ xy = cz. \end{cases}$$

***388.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást, ha $abc \neq 0$:

$$\begin{cases} x(y+z) = a^2; \\ y(x+z) = b^2; \\ z(x+y) = c^2. \end{cases}$$

389. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y+z = a; \\ xy+yz+zx = 0; \\ xyz = 0. \end{cases}$$

390. Három szám számtani közepe a, a négyzetük számtani közepe b. Ha a számokat x, y, z jelöli, mi lesz az xy, xz, yz számok számtani közepe?

391. Egy kör c méter hosszúságú kerületén két test kering; az egyik t másodperccel hamarabb futja be a kört, mint a másik. Ha egy irányban haladnak, n másodpercenként találkoznak. Mekkora a sebességük?

***392.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha p adott valós szám:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3px+p^2} - \sqrt{y^2+3py+p^2} = x-y; \\ xy = p^2. \end{cases}$$

***393.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha a adott valós szám. Diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} x+y = a(\sqrt{x}-\sqrt{y}), \\ x^2+y^2 = a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2. \end{cases}$$

***394.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges valós x, y, u, v-re és bármely pozitív egész n-re érvényes a következő: Ha

$$x+y = u+v \quad \text{és} \quad x^2+y^2 = u^2+v^2, \quad \text{akkor} \quad x^n+y^n = u^n+v^n.$$

Másod- és magasabb fokú egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket! Ábrázoljuk a két egyenlőtlenség közös megoldását a számegyenesen:

395. *a)* $\begin{cases} 2x^2-7x+5>0; \\ x-2<0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-x-6>0; \\ x^2-3x-4>0. \end{cases}$

396. *a)* $\begin{cases} (x+3)^2(x-1)<0; \\ x^2-4x+6>x(x-5). \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2-6x+9)(2x-10)<0; \\ 6+x(7-x)<x^2+2x(5-x). \end{cases}$

397. *a)* $\begin{cases} (x-1)(x+2)>0; \\ (x+5)(x+2)<0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (x+3)(x-5)<0; \\ (x-2)(x-4)>0. \end{cases}$

398. $\begin{cases} (x+3)(x-4)\geqq 5(x-3); \\ (2x-1)(x-4)(3x+2)\leqq 0. \end{cases}$

399. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2-2x-35}}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-60}{x^2+x+10}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{x^2+25x+114}{x^2+7x+10}}$; *d)* $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}}$.

400. Az m paraméter mely valós értékeire teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer mindkét egyenlőtlensége minden valós x-re?

a) $\begin{cases} x^2+2x+m>0; \\ x^2+2x+m>7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3<0; \\ (4-m)x^2-3x+m+4>0. \end{cases}$

401. Melyek azok a valós számok, amelyek mindkét következő egyenlőtlenséget kielégítik?

$$\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|<1; \qquad \frac{4}{x-2}<0.$$

402. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $|x^2-4|<2$; *b)* $|x^2-4|<\frac{1}{2}$; *c)* $|x^2-4|<\frac{1}{100}$.

403. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $|x^3-1|<1$; *b)* $|x^3-1|<0{,}5$; *c)* $|x^3-1|<0{,}02$.

404. Írjuk föl, és oldjuk meg a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást a számegyenesen:

a) $(x^2-4)(x^2-1)>0$; *b)* $(x^2-3x+2)(x^2+3x+2)>0$.

405. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $(x^2-2x+3)(x^2+4x+7)>0$;

b) $(x^2-6x+10)(x^2-10x+25)\leqq 0$.

***406.** Mely valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenséget?

$$\frac{10x-2}{x+3}<\frac{3-5x}{x-2}.$$

***407.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\leqq\left|\frac{3-2x}{2+x}\right|.$$

408. Mely valós x-ekre esik az $\dfrac{x^2+3x-1}{4-x^2}$ kifejezés értéke a $[-1;1[$ intervallumban?

409. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

410. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^3+b^3\geqq\frac{(a+b)^3}{4}, \quad \text{ha} \quad a>0 \quad \text{és} \quad b>0.$$

411. A p paraméter mely valós értéke mellett igaz tetszőleges valós x-re, hogy

$$\left|\frac{x^2-px+1}{x^2+x+1}\right| < 3?$$

412. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)>g(x)>0$ egyenlőtlenség ekvivalens az $f^2(x)>g^2(x)$; $f(x)>0$; $g(x)>0$ egyenlőtlenségrendszerrel; feltéve, hogy x hozzátartozik mindkét függvény értelmezési tartományához.

413. Legyen M_1 az $x+1 \geqq 0$; M_2 pedig az $x-3 \leqq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza. Írjunk föl egy $ax^2+bx+c \geqq 0$ alakú egyenlőtlenséget úgy, hogy megoldáshalmaza $M_1 \cap M_2$ legyen.

414. A $2x-1 > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza legyen M_1, a $4-3x > 0$ egyenlőtlenségé pedig M_2. Írjunk föl egy olyan $ax^2+bx+c > 0$ alakú egyenlőtlenséget, amelynek megoldáshalmaza $M_1 \cup M_2$ legyen.

415. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $\begin{cases} y > x^2; \\ x > y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y > x^2-5x+6; \\ y < 4. \end{cases}$

416. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségrendszert:

a) $\begin{cases} x > y^2; \\ x < 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x < y^2; \\ -x \leqq y^2; \\ y < 4. \end{cases}$

417. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

$$(x^2-x)(y^2-y) > 0.$$

418. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a) $(x^2-1)(y+2) < 0$; *b)* $(1-x^2)(1-y^2) \geqq 0$.

419. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} y \geqq x^2; \\ x-y \geqq -2. \end{cases}$$

420. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. A megoldáshalmaz mely pontjában lesz $x-y$ minimális?

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 5x; \\ y \leqq x-2. \end{cases}$$

421. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 2x; \\ 3x-y \geqq 0. \end{cases}$$

422. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-4y \leqq 18; \\ x-y \geqq 2. \end{cases}$$

423. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y \leqq 15; \\ 4x-3y \geqq 38. \end{cases}$$

***424.** Határozzuk meg az összes olyan x, y, n pozitív egész számhármast, amelyben x és y a tízes számrendszerben egyaránt n-jegyű és $x^2=y^3$.

425. Határozzuk meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1; \\ x^2+y^2-6x \leqq 0. \end{cases}$$

Az így meghatározott ponthalmazon keressük meg annak az $(x; y)$ pontnak a koordinátáit, amelyekre $x+y$ a legnagyobb, illetve a legkisebb.

426. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást:

$$\begin{cases} -2 \leqq x+y \leqq 2; \\ -1 \leqq xy \leqq 1. \end{cases}$$

***427.** Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az

$$a+2b+3c \geqq 14$$

egyenlőtlenség, akkor érvényes az

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 14$$

egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Exponenciális és logaritmikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

428. *a)* $\begin{cases} 9^{x+y}=729; \\ 3^{x-y-1}=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4^{x-y}=16; \\ 2^{xy}=256. \end{cases}$

429. *a)* $\begin{cases} 2^x-2^y = 768; \\ 2^{x-1}+2^{y-1} = 640. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}} = 2; \\ 2y-x = 1. \end{cases}$

430. *a)* $\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1; \\ x+y = 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y^{x^2-8x+15} = 1; \\ \lg(2x-y) = 1. \end{cases}$

431. *a)* $\begin{cases} 14^x-63y = 0; \\ 17^x-87y = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7^x-12y = 0; \\ 3^x-7y = 0. \end{cases}$

432. *a)* $\begin{cases} x^y-y^x = 0; \\ x^2-y^3 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^y=y^x; \\ x^p=y^q. \end{cases}$ (p, q adott valós számok)

***433.** *a)* $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y; \\ y^{\sqrt{y}}=x^4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12}; \\ y^{x+y}=x^3. \end{cases}$

434. *a)* $\begin{cases} xy=40; \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy=1000; \\ y^{\lg x}=100. \end{cases}$

435. *a)* $\begin{cases} 3\cdot 3^x-2^y = 5; \\ 5\cdot 3^x+2\cdot 2^y = 23. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2^x+5\cdot 7^y = 7; \\ 2^x-3\cdot 7^y = -1. \end{cases}$

436. *a)* $\begin{cases} 3^x\cdot 5^x = 75; \\ 3^y\cdot 5^x = 45. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7^{x+1}-6^{y+3} = 1; \\ 6^{y+2}-7^x = 5(6^y+1). \end{cases}$

437. *a)* $\begin{cases} x^y=9; \\ \sqrt[y]{324} = 2x^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}; \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$

438. *a)* $\begin{cases} xy=y^x; \\ x^3=y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y} = 12; \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

439. *a)* $\begin{cases} x^{2y} = 16+6\cdot x^y; \\ x^{2y}+5 = y\cdot x^y+5y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y} = 457; \\ 6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y} = -890. \end{cases}$

440. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} 9^{x^2} \leqq 3^{-x}; \\ x^2+\dfrac{x}{2} \geqq 0. \end{cases}$$

441. Mely valós számokból álló $(x; y)$ számpárok elégítik ki a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}}+2^{\sqrt{1-y}} \leqq 2; \\ |x|+|y| \leqq 1. \end{cases}$$

442. Bizonyítsuk be, hogy ha $x>0$ és $p>q$ és $p, q \in \mathbf{Z}^+$, akkor

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} > 1+\frac{p}{q}x.$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg előre a legtágabb kiindulási halmazt. Paraméteres feladatoknál írjuk föl a paraméterre szóló kikötéseket:

443. *a)* $\begin{cases}\lg x+\lg y=5;\\ \lg x-\lg y=3.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\lg x+\lg y=a;\\ \lg x-\lg y=b.\end{cases}$

444. *a)* $\begin{cases}\log_3(2x+y)+\log_3(2x-y)=1;\\ \log_2(2x+y)+\log_2(2x-y)=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\log_2\log_3(x+y)=1;\\ \lg x+\lg y=3\lg 2.\end{cases}$

445. *a)* $\begin{cases}\lg x-\lg y=2;\\ x-10y=900.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x+y)-\lg(x-y)=2\lg 2+\lg 3;\\ \lg(x^2+y^2+10)=2+\lg 3.\end{cases}$

446. *a)* $\begin{cases}\log_2 xy=5;\\ \log_{0,5}\dfrac{x}{y}=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2-\lg 5;\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1.\end{cases}$

447. *a)* $\begin{cases}\log_a x+\log_a y=2;\\ \log_b x-\log_b y=4.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1;\\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$

448. *a)* $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0;\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_a x+\log_{a^2} y=1{,}5;\\ \log_{b^2} x-\log_b y=1{,}5.\end{cases}$

449. *a)* $\begin{cases}xy=27;\\ x^{\log_3 y}=9.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\lg^2 x+\lg^2 y=7;\\ \lg x-\lg y=2.\end{cases}$

450. *a)* $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2;\\ x^2+y=12.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_x ay=p;\\ \log_y bx=q.\end{cases}$

451. *a)* $\begin{cases}\log_a\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=2-\log_a y;\\ \log_b x+\log_b y=4.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\log_a x-\log_{\frac{1}{a}} y=2;\\ \log_{\frac{1}{a}} x+\log_a y=1.\end{cases}$

452. *a)* $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1;\\ 2^x-4\cdot 8^y=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^{\log_3 x}\cdot y^{\log_3 y}=243;\\ x^{\log_3 y}\cdot y^{\log_3 x}=81.\end{cases}$

453. *a)* $\begin{cases}xy=300;\\ x^{\lg y}=9.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^y=y^x;\\ 3x=2y.\end{cases}$

454. *a)* $\begin{cases}\log_{xy}(x^2-y^2)=0;\\ \log_{xy}(x^2+y^2)=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}y=10^{(\lg x)^{\lg x}};\\ \dfrac{1}{\lg y}(\lg x)^{\lg 2x}=10^{(\lg\lg x)^2}.\end{cases}$

455. *a)* $\begin{cases}x^2+y^2=136;\\ \log_{0,5}(x-y)+\log_2\dfrac{\cdot 1}{x+y}=-6.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)-\lg xy-\lg 2=0;\\ (1-2^{x+2})^y=2^{y^2+2x};\end{cases}$

456. *a)* $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lg x+\dfrac{1}{2}\lg y-\lg(4-\sqrt{x})=0;\\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}}-125\cdot 5^{\sqrt{y}}=0.\end{cases}$

b) $\begin{cases}xy=256;\\ 7\left(\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}\right)=50.\end{cases}$

457. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2;\\ \log_9 x+\log_3 y+\log_9 z=2;\\ \log_{16} x+\log_{16} y+\log_4 z=2.\end{cases}$

458. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszert. A valós számhalmaz mely részhalmaza lesz a legtágabb kiindulási halmaz?

$$\begin{cases}\log_2 x>x-1;\\ |x-1|<1.\end{cases}$$

459. Mely valós x értékekre teljesülnek egyszerre a következő egyenlőtlenségek?

$$\log_{\frac{1}{3}} x+6\log_x 3+1>0;\qquad 0<x\leqq 10.$$

***460.** Keressük meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$x+y>0; \quad x+y\neq 1; \quad x-y>0 \quad \text{és}$$
$$\log_{x+y}(x-y)\geqq 1.$$

***461.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a>1$ és $b>2$, akkor az

$$x^2\log_a 4b+2x\log_a\frac{2}{b}+\log_a\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$$

egyenlőtlenség minden valós x értékre teljesül.

***462.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a\geqq 2; \quad b\geqq 2; \quad c\geqq 2, \quad \text{akkor}$$
$$\log_{b+c}a^2+\log_{c+a}b^2+\log_{a+b}c^2\geqq 3.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

***463.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a>0$, $c>0$, $N>0$, továbbá az a, c, ac, N számok egyike se 1, és $a\neq c$, akkor a

$$b=\sqrt{ac} \quad \text{és}$$
$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}$$

egyenlőségek ekvivalensek.

Trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

464. *a)* $\begin{cases}x+y=45°;\\ 2\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=120°;\\ \sin x+\sin y=1{,}5.\end{cases}$

465. *a)* $\begin{cases}x-y=60°;\\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\sqrt{3}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=75°;\\ \sin^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

466. *a)* $\begin{cases}\sin(x+y)=0;\\ \sin(x-y)=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin(x+y)=0{,}454;\\ \sin(x-y)=0{,}3523.\end{cases}$

467. *a)* $\begin{cases}\sin x+\sin y=\frac{7}{12};\\ \sin x\sin y=\frac{1}{12}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\cos x+\cos y=\frac{14}{15};\\ \cos x\cos y=\frac{1}{5}.\end{cases}$

468. *a)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3};\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=\frac{2\pi}{3};\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

469. *a)* $\begin{cases}\cos x\sin y=0;\\ (\cos x+\sin^2 x)\cos^2 y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0;\\ \sin x\sin y=0.\end{cases}$

470. *a)* $\begin{cases}\sin^2 x-\cos y=1;\\ \sin^2 x+\cos y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2};\\ \cos^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

471. *a)* $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4};\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin(x+y)=\frac{1}{2};\\ \sin 2x+\sin 2y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

472. *a)* $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y);\\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}2\cos x+\cos y=1;\\ 2\sin x-\sqrt{3}\sin y=0.\end{cases}$

473. *a)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2;\\ \operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2;\\ 2\cos x\cos y=1.\end{cases}$

474. *a)* $\begin{cases}9\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=4;\\ 2\operatorname{ctg}x+4\operatorname{ctg}y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\cos x-\cos y=0{,}5;\\ \cos 2x+\cos 2y=-1{,}5.\end{cases}$

475. *a)* $\begin{cases}2^{x-2}=4^{y-1};\\ \sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=1-\cos x.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^{\operatorname{tg}y}=\frac{1}{8};\\ x^{\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}}=4.\end{cases}$

476. *a)* $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}=0; \\ \sin x=\sin y. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin \pi x\cos \pi y=0; \\ x+y=0. \end{cases}$

477. *a)* $\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{3}{2}; \\ \cos x-\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{\sin x+\sin y}{2}=\sqrt{\sin x\sin y}; \\ \cos(x+3y)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

478. *a)* $\begin{cases} xy=n, \text{ (n egész szám);} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}=1; \\ \sin xy=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

479. *a)* $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{4}{3}; \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin(x-y)=\dfrac{1}{2}; \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

480. *a)* $\begin{cases} \sin x+\cos y=0; \\ \cos x+\sin y=-2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}; \\ \cos x\sin y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

481. *a)* $\begin{cases} \sin 2x+\cos y=0; \\ \cos 2x-\sin y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y; \\ \cos^4 x=\cos y. \end{cases}$

482. Az α mely valós értékeire nincs megoldása a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin 2\alpha-1=0; \\ x\sin\alpha+y\cos 2\alpha-1=0. \end{cases}$$

483. Milyen feltétel teljesül az a, a_1, b, b_1 valós paraméterekre, ha azok nullától különbözőek, és

$$\begin{cases} a\sin^2 x+a_1\cos^2 x=b; \\ a_1\sin^2 y+a\cos^2 y=b_1 \end{cases}$$

egyenletek gyökei kielégítik az

$$a\operatorname{tg}x=a_1\operatorname{tg}y$$

egyenletet?

484. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{cases} \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0; \\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0. \end{cases}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{cases} 1+\cos x+\cos y=0; \\ \sin x+\sin y=0 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Oldjuk meg az egyenletrendszert.

485. Ekvivalens-e a következő két egyenletrendszer?

$$\begin{cases} x+y=0; \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=0; \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

486. Mely valós számokból álló (x, y, z) számhármasok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} xy=1; \\ x+y-\cos^2 z=-2. \end{cases}$$

487. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amely egyszerre elégíti ki a következő egyenleteket.

$$\sin\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}=0;$$
$$\sin\sqrt{\log_{\sqrt{2}}x}=0.$$

488. Határozzuk meg $x+y$ értékét, ha tudjuk, hogy

$$\operatorname{tg}x=\frac{n}{n+1} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}y=\frac{1}{2n+1}.$$

489. Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a$ és $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b$. Fejezzük ki $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y$ értékét a és b-vel.

490. Legyen $\cos x+\cos y = a$ és $\sin x+\sin y = b$, ahol $a^2+b^2 > 0$, a és b adott valós számok. Fejezzük ki $\sin(x+y)$ értékét a és b-vel.

491. Mely valós t értékekre teljesül egyszerre a következő két egyenlőtlenség?

$$\cos t \leqq \frac{3}{4} + \frac{\cos 2t}{4};$$

$$\sin t \leqq \frac{5}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

492. Melyek azok a valós számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletet?

$$(2+\sin 3x)(2-\sin 5y) = 1.$$

493. Az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmaz mely részhalmazán értelmezhető a következő kifejezés?

$$\sqrt{(1-2\sin x)(1+3\cos y)}.$$

494. A $\sqrt{\dfrac{\sin x-1}{\cos x}}$ kifejezés értelmezhető

a) a $-\infty < x < \infty$ intervallumon;

b) a $-\infty < x \leqq 0$ intervallumon;

c) a $\frac{\pi}{2}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(4k+3)$, ($k$ egész) intervallumokon;

d) a $\frac{\pi}{2}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(4k+3)$, ($k$ pozitív egész) intervallumokon;

e) a $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumon.

Döntsük el, melyik a helyes válasz. Indokoljuk a döntést.

495. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a következő kifejezés?

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}}.$$

Határozzuk meg a kifejezés értékkészletét.

496. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$\frac{\sqrt{\cos^2 x-1}}{\sqrt{\cos x+1}}$$

kifejezés?

497. Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelyben – a szokásos jelölésekkel – fennáll

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \quad \text{és}$$
$$\alpha > \beta?$$

498. Határozzuk meg azoknak a valós számokból álló $(x; y)$ számpároknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi; \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi; \\ \sin(x-y) \leqq \sin(x+y). \end{cases}$$

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a kapott ponthalmazt.

499. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira fennáll a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi; \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi; \\ \cos(x-y) \leqq \cos(x+y). \end{cases}$$

500. Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \pi; \\ 0 \leqq y \leqq \pi; \\ \cos x \leqq \cos y. \end{cases}$$

501. Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelyben – a szokásos jelölésekkel – fennáll a következő két egyenlőség:

$$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2 \quad \text{és}$$

$$\sin\alpha \sin\beta=\frac{3}{4}?$$

4. Lineáris programozási feladatok

502. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases}2y-3x<1;\\ 2y-x>3;\\ 2x+y<11.\end{cases}$$

503. Határozzuk meg azokat a valós számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases}2x+y\leqq 3;\\ y-x\leqq 1;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$$

Hány megoldás van? Írjunk föl három megoldást.

504. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

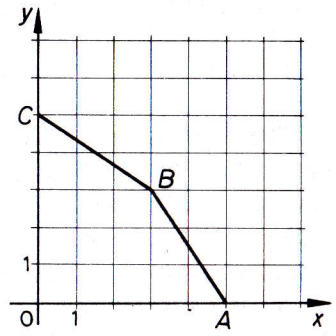
$$\begin{cases}x\leqq 3;\\ 2y+x\leqq 5;\\ y\leqq 2;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0.\end{cases}$$

Van-e olyan megoldás, amely illeszkedik az $x+y=2$ egyenletű

egyenesre? Van-e olyan megoldás, amely illeszkedik az $x+y=5$ egyenletű egyenesre? Keressük meg azt a megoldást, amelyik illeszkedik az $x+y=c$ egyenletű egyenesre, és c maximális. (Másképpen mondva, az $f(x; y)=x+y$, úgynevezett célfüggvény maximumát keressük a megengedett megoldások halmazán. Megengedett megoldásoknak nevezzük a feltételrendszert kielégítő számpárok halmazát.)

505. Írjuk föl azt az egyenlőtlenségrendszert, amelynek megoldásai a *6. ábra* $OABC$ négyszöglemezén levő pontok koordinátái.

Melyik a négyszögnek az a pontja, amelynek koordinátái kielégítik az $x+y=c$ egyenletet, és c értéke maximális? Mikor lesz c értéke minimális? (A legnagyobb vagy legkisebb c értéket eredményező megengedett megoldást optimális megoldásnak nevezzük.)



6. ábra

506. A következő feladatokban megadtunk egy egyenlőtlenségrendszert és egy célfüggvényt. Határozzuk meg a célfüggvény szélsőértékét.

a) $\begin{cases}3x+5y\leqq 15;\\ 5x+2y\leqq 10;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $5x+3y$ maximuma?

b) $\begin{cases}x+y\leqq 4;\\ 3x+y\geqq 8;\\ x+5y\geqq 4;\\ x\leqq 3;\\ y\leqq 3;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $2x+3y$ minimuma?

c) $\begin{cases}x-y\geqq -1;\\ -\frac{1}{2}x+y\leqq 2;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $x+y$ maximuma?

d) $\begin{cases}x+y\leqq 50;\\ y+z\geqq 80;\\ x+z\leqq 100;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0; \quad z\geqq 0.\end{cases}$

Melyik az a megoldás, amelyben x maximális?

507. Egy üzem kétféle terméket gyárt. Havonta legalább 5 vagon készül az I. fajtából, és 2 vagonnal a II. fajtából, legfeljebb 360 munkás részvételével. Az üzem össztermelése 15 vagonnál nem több.

Az I. termékből 1 vagon 60 000 Ft tiszta nyereséget eredményez, és ehhez mindössze 10 munkásra van szükség.

A II. termékből 1 vagon előállítása 80 000 Ft tiszta nyereséget hoz, de ehhez 40 munkásra van szükség.

Hogyan szervezzük meg a termelést, hogy a nyereség havonta *a)* félmillió Ft; *b)* másfélmillió Ft; *c)* a lehető legnagyobb legyen?

508. Egy összejövetelre szendvicseket készítünk, mégpedig két fajtát. Az I. fajtához 2 dkg vaj, 2 dkg sonka, 3 dkg franciasaláta és egy szelet kenyér kell, a II. fajtához pedig 1 dkg vaj, 3 dkg sonka, 2 dkg sajt és egy szelet kenyér. Kenyér van korlátlanul, de a többi összetevőből csak a következő mennyiségek állnak rendelkezésünkre: 50 dkg vaj, 80 dkg sonka, 60 dkg franciasaláta és 40 dkg sajt. Maximálisan hány szendvicset készíthetünk?

509. A III. b osztály a klubestre szendvicseket készít. Egy sajtos szendvicshez 5 dkg kenyér, 1 dkg vaj, és 2 dkg sajt kell, egy szalámishoz 5 dkg kenyér, $\frac{5}{3}$ dkg vaj és 1 dkg szalámi. Rendelkezésre áll 2 kg kenyér, fél kg vaj, 60 dkg sajt és 20 dkg szalámi.

Hány szendvics készíthető maximálisan, és hány lesz közöttük a sajtos? Ha a sajtost 1,40 Ft-ért, a szalámist 1,90 Ft-ért adják, mikor lesz a legtöbb a bevétel?

510. Egy űrhajós kétféle ételt vihet magával. Összetételük: Az I. fajtának 40%-a szénhidrát, 20%-a fehérje és 40%-a víz. A II. fajtának 40%-a szénhidrát, 50%-a zsír és 10%-a víz. 100 gramm szénhidrát vagy zsír, vagy fehérje energiatartalma rendre 1680 J, 4200 J, illetve 3360 J. Az űrhajós napi minimális szükséglete 400 gramm víz és 20 160 J. A kalóriamennyiségben a szénhidrát, a zsír és a fehérje aránya 2 : 1 : 1 kell, hogy legyen. Az I. fajta étel térfogata 100 grammonként négyszer akkora, mint a másiké. Az I. fajta étel kétszer olyan gyorsan szívódik föl, mint a másik. Naponta minimálisan hány gramm ételt kell elfogyasztania az űrhajósnak?

Milyen összetétel esetén lesz a magával vitt étel térfogata minimális?

Milyen esetben lesz a felszívódás ideje minimális? Van-e olyan összetétel, amely mindhárom minimumot egyszerre biztosítja?

511. Három zöldségbolt két tsz-től rendelhet burgonyát. Az egyik tsz-nek 8 t, a másiknak 7 t a készlete. Az *A* bolt 5, a *B* bolt 6, a *C* bolt 4 tonnát igényel. A szállítási költség az *A* boltba az I. tsz-ből 1500, a II.-ból 1000 Ft tonnánként, *B* bolt esetén ugyanezek a költségek 2500 Ft, illetve 500 Ft, *C* esetén 1000 Ft, illetve 1500 Ft. Melyik tsz-ből melyik boltba szállítsák a burgonyát, ha azt akarják, hogy a szállítási költség a lehető legkisebb legyen?

512. Az állatállomány etetésében két takarmányféleség között választhatunk. Az első 10%-ot tartalmaz az *A* tápanyagból, 10%-ot a *C*-ből, 20%-ot a *D*-ből; a második 10%-ot a *B*-ből, 20%-ot a *C*-ből, 10%-ot a *D*-ből. Tapasztalatból tudjuk, hogy egy-egy állatnak az egyes tápanyagokból naponta rendre legalább 0,4 kg; 0,6 kg; 2 kg; 1,7 kg-ot kell kapnia. Határozzunk meg olyan takarmányozási tervet, amelynek költsége minimális, ha az első fajta takarmány kg-ja 2 Ft, a másiké 0,5 Ft.

***513.** Egy munkahelyen a munka zavartalan elvégzéséhez négy napszakban legalább a következő létszámokra van szükség: 0 órától 6 óráig: 20 fő; 6–12 óráig: 40 fő; 12–18 óráig: 30 fő; 18–24 óráig: 25 fő. A dolgozók egyfolytában 12 órát dolgoznak, utána 36 óra pihenőjük van. Mekkora az a legkisebb létszám, amely mellett a munkát meg lehet szervezni?

***514.** Egy üzem négyféle terméket gyárt. Az egyes termékeket két gépen munkálják meg, és tapasztalatból tudják, hogy az I. terméknek a megmunkálásához az 1. gépen 1 perc, a 2. gépen 1 perc szükséges; a II. termék esetén az 1. gépen 2 perc; a III. termék esetén a 2. gépen 3 perc; a IV. termék esetén pedig az 1. gépen 1 perc, a 2. gépen 1 perc szükséges. Az 1. gép naponta 450 percig, a 2. gép 300 percig működik. A négy termék tiszta hozama rendre 2, 2, 3, 2 egység. Hogyan tervezzék meg a gyártást, hogy

a) maximális tiszta hozamra tegyenek szert;

b) maximális mennyiséget termeljenek?

***515.** Jakab testvérével, Jánossal és annak fiával Dániellel családi óragyárat létesít, ahol négyféle órát gyárthatnak. Az 1. fajta óra elkészítéséhez Jakabnak 2 órát, Jánosnak 1 órát és Dánielnek 3 órát

kell dolgoznia. A 2. fajtához 2 óra, 2 óra, 1 óra kell, a 3.-hoz 1 óra, 1 óra, 3 óra, a 4.-hez 3 óra, 4 óra, illetve 1 óra. Egy héten Jakab 50 órát, János 60 órát, Dániel 40 órát dolgozik. Az egyes órákon az előbbi sorrendben 6, 4, 5, illetve 8 egység nyereség képződik. Hány darabot gyártsanak az egyes fajtákból hetenként, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen; ha még az is ismeretes, miszerint az 1. és 2. fajtából együtt heti 6 darabnál többet nem tudnak eladni?

VI. KOMBINATORIKA

1. Permutációk

1. Anna, Bea, Csilla és Dóra együtt megy moziba. Hányféleképpen helyezkedhetnek el egymás mellett lévő négy széken? Írjuk le a lehetséges elhelyezkedéseket.

2. Írjuk fel a DIÁK szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

3. Négy labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással. Hányféle sorrendben végezhetnek a csapatok?

4. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

5. Egy futóversenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges?

6. Hány olyan 1-gyel kezdődő ötjegyű számot lehet felírni az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelyeknek az utolsó számjegye 5, ha a felírás során egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk?

7. Hány 15-tel kezdődő ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

8. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

9. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

10. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

11. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

12. Nyolc ember hányféleképpen tud elhelyezkedni egy padon?

13. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* és *B* egymás mellett üljön?

14. Egy nyolc főből álló társaság egy kör alakú asztal körül elhelyezett nyolc széken akar helyet foglalni. Hányféleképpen történhet ez, ha két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző?

15. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* és *B* egymás mellett üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

16. Írjuk fel a BABA szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

17. Írjuk fel a TOLL szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

18. Egy dobozba öt cédulát teszünk, melyeken rendre a következő betűk állnak: A, L, M, M, O. Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és helyezzük el azokat egymás mellé a kihúzás sorrendjében. Hány esetben jöhet ki a MALOM szó?

19. A 4, 5, 4, 5, 6 számjegyekből hány 56-tal kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

20. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány 12-vel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

21. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány 21-gyel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

22. A 4, 4, 5, 5, 6 számjegyekből hány 45-tel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

23. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány 13-mal kezdődő hétjegyű számot lehet készíteni?

24. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány 34-re végződő ötjegyű szám készíthető?

25. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?

26. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?

27. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az iskola szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I	S	K	O
S	K	O	L
K	O	L	A

28. A MATEMATIKA szó betűinek hány permutációja van?

29. Egy dobozba tíz cédulát teszünk, melyeken rendre a következő betűk állnak: A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és helyezzük el egymás mellé a kihúzás sorrendjében. Hány esetben jöhet ki a MATEMATIKA szó?

30. Adott n különböző elem. Mekkora n értéke, ha az egymástól különböző elemek számát 2-vel megnövelve (ezek egymástól és az előbbiektől is különbözők), a permutációk száma 156-szorosára nő?

2. Variációk

31. Írjuk fel a 0, 6, 9 számjegyek felhasználásával képezhető összes háromjegyű

a) páros számot;

b) páratlan számot;

c) 4-gyel osztható számot;

d) 3-mal osztható számot;

e) 9-cel osztható számot.

32. Hány ötjegyű szám készíthető az 1-es és a 2-es számjegyek felhasználásával? Írjuk fel ezeket.

33. Hány négyjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával? Írjuk fel ezeket.

34. Hány 5-tel osztható négyjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet? Írjuk fel ezeket.

35. Hány háromjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepel?

36. Hány négyjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepel?

37. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani három különböző tárgyat, ha egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat?

38. Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Az első három helyezett kap díjat. Hányféle kimenetele lehet a versenynek?

39. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. A tombolajegy-tulajdonosok között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez?

40. Egy 36-os létszámú osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

41. Egy 30-as létszámú osztály vezetőséget választ: titkárt, titkárhelyettest, kultúrfelelőst, sportfelelőst és gazdasági felelőst. Hányféleképpen történhet ez?

42. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány ötjegyű számot állíthatunk elő, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

43. Egy szabályos játékkockával négyszer dobunk egymás után, és a dobások eredményét a dobások sorrendjében egymás mellé írjuk. Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így?

44. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat úgy, hogy egy tanuló több tárgyat is kaphat?

45. Hányféleképpen lehet öt tanuló között tíz különböző tárgyat szétosztani?

46. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a TANULÓ szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

T	A	N	U	L	Ó
A	N	U	L	Ó	
N	U	L	Ó		
U	L	Ó			
L	Ó				
Ó					

47. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az ISKOLAI szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I	S	K	O	L	A	I
S	K	O	L	A	I	
K	O	L	A	I		
O	L	A	I			
L	A	I				
A	I					
I						

48. Csupa páratlan számjegyből hány 1-gyel kezdődő ötjegyű számot készíthetünk?

49. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csupa páratlan számjegyből áll?

50. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?

51. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

52. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csupa páros számjegyből áll?

53. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5-ös előfordul?

54. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után kihúzunk 6 lapot. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a kihúzott lapok sorrendje is számít?

a) visszatevés nélkül;

b) és minden húzás után a kihúzott lapot visszatesszük?

55. n elem másodosztályú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 10 : 11. Határozzuk meg n értékét.

3. Kombinációk

56. Egy hatelemű halmaznak hány háromelemű részhalmaza van? Írjuk le ezeket.

57. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei növekvő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg? Írjuk le ezeket.

58. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?

59. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány ötelemű részhalmaza van?

60. Egy hatelemű halmaznak hány részhalmaza van?

61. Egy nyolcelemű halmaznak hány valódi részhalmaza van?

62. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legalább hételemű?

63. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek negyedosztályú kombinációit.

64. Egy hétszemélyes társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez összesen?

65. Hány egyenest határoznak meg a szabályos tizenkétszög csúcspontjai?

66. Egy pályázatra 15 pályamű érkezett. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 3000 Ft-tal. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha a díjakat megosztani nem lehet?

67. Egy futóverseny előfutamának egyik csoportjában tíz versenyző indul. Az első négy versenyző jut tovább a középdöntőbe. Hányféleképpen alakulhat a továbbjutók csoportja?

68. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?

69. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben kapunk olyan számötöst, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?

70. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát visszatevés nélkül. Hány olyan eset van, amelyben az így kapott számötösökben a számok nem csökkenő sorrendben következnek?

71. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány esetben lesznek a számok növekvő sorrendben a kihúzott számötösökben?

72. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek másodosztályú ismétléses kombinációját.

73. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek harmadosztályú ismétléses kombinációját.

74. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek harmadosztályú ismétléses kombinációját.

75. Egy dobozban tíz cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 10 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány olyan eset van, amelyben az így kapott számötösökben a számok nem csökkenő sorrendben következnek?

4. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből

76. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\frac{n!}{(n-3)!}$; *b)* $\frac{n!}{n(n-1)}$;

c) $\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+1)!}$; *d)* $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$.

77. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $(n+2)\cdot(n+1)!$; *b)* $\frac{(n-2)!}{n-2}$;

c) $\frac{n!}{(n-1)!}$; *d)* $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$;

e) $n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!$; *f)* $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$;

g) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-2)!}$; *h)* $\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n-1)!}$.

78. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}-\frac{(n-2)!}{n!}$; *b)* $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}$;

c) $n(n-3)!-\frac{1}{(n-1)(n-2)}$; *d)* $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$;

e) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; *f)* $\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)n!}{(n+2)!}$.

79. Írjuk fel azokat a négyjegyű számokat, melyeknek számjegyei 7-nél nagyobbak, és egymás mellett nem fordul elő két 9-es.

80. Piros, fehér, zöld és kék színű anyagokból zászlókat készítünk. Minden zászló vízszintes csíkokból áll, és a szomszédos csíkok nem lehetnek azonos színűek. Hány különböző zászlót készíthetünk, ha

a) egy-egy zászlón négy csíknak kell lennie;
b) egy-egy zászlón három csíknak kell lennie;
c) egy-egy zászlón két csíknak kell lennie?

81. Hány átlója van egy konvex húszszögnek?

82. Egy konvex sokszögbe összesen 77 átló húzható. Hány oldalú a sokszög?

83. Néhány labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Hány csapat játszott, ha összesen 45 mérkőzésre került sor? Hányféle sorrendben végezhettek a részt vevő csapatok?

84. 15 labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Átlagosan hány néző volt kint egy-egy mérkőzésen, ha összesen 249 000 ember nézte meg azokat?

85. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hányan voltak a társaságban, ha összesen 136 kézfogás volt?

86. Egy IV. osztályban az érettségi előtt minden tanuló kapott egy-egy fényképet minden társától. Hányan érettségiztek az osztályban, ha összesen 992 fénykép cserélt gazdát?

87. Egy labdarúgó-bajnokságon, amelyen minden csapat egy alkalommal játszott a többi csapattal, 120 mérkőzést játszottak le. Hány csapat vett részt a bajnokságon?

88. Néhány ponton át, amelyek úgy helyezkednek el, hogy közülük bármely három nem illeszkedik egy egyenesre, meghúzzuk a pontokat páronként összekötő egyeneseket. Hány pont van, ha 105 egyenest tudunk húzni?

89. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a BUDAPEST szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

90. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a KIRÁNDULÁS szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

K	I	R	Á	N	D
I	R	Á	N	D	U
R	Á	N	D	U	L
Á	N	D	U	L	Á
N	D	U	L	Á	S

91. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a KIRÁNDULÁS szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük, de minden lépésben irányt változtatunk?

K	I	R	Á	N	D
I	R	Á	N	D	U
R	Á	N	D	U	L
Á	N	D	U	L	Á
N	D	U	L	Á	S

92. Hány olyan 3-mal osztható kétjegyű szám van, amelynek számjegyei páratlan számok?

93. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát négyszer egymás után. A dobások eredményét a dobások sorrendjében írjuk egymás mellé.

a) Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így?

b) Hányféle 1-re végződő négyjegyű számot kaphatunk?

94. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát ötször egymás után és a dobások eredményét írjuk rendre egymás mellé. Hányféle 10-zel osztható ötjegyű számhoz juthatunk így?

95. Egy dobozban 15 cédula van 1-től 15-ig számozva. Kihúzunk öt cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5-nél?

96. Egy szabályos játékkockával egymás után ötször dobunk. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben legalább egyszer hatost dobunk?

97. Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZOLNOK szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?

```
      S
    Z Z
  O O O
L L L L
  N N N
    O O
      K
```

98. Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZIGETVÁR szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?


```
        S
      Z Z Z
    I I I I I
  G G G G G G G
E E E E E E E E E
  T T T T T T T
    V V V V V
      Á Á Á
        R
```

99. 15 tanuló között hányféleképpen lehet szétosztani 15 különböző tárgyat úgy, hogy:

a) egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat;

b) egy tanuló több tárgyat is kaphat?

100. Egy 32-es létszámú osztályban klubdélutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha:

a) a tárgyak egyenlőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet;

b) a tárgyak egyenlőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet;

c) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet;

d) a tárgyak különbözőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet?

101. Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket rendre egymás mellé írjuk.

a) Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

b) Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul?

102. Piros, fehér és fekete színű játékkockánk van, amelyeket egy dobozba helyezünk el. Egyet kiveszünk és dobunk vele. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

103. Piros, fehér és fekete játékkockát helyeztünk el egy dobozba. Kettőt kiveszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

104. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek egyik számjegye sem 0?

105. Hány 5-re végződő ötjegyű szám van?

106. Hány olyan 5-re végződő ötjegyű szám van, amely 25-tel is osztható?

107. Gondoltam egy háromjegyű számot, melynek minden számjegye 2-nél nagyobb és 5-nél kisebb. Mi lehet a gondolt szám?

108. Hány olyan n jegyű szám van, amelynek mindegyik számjegye 2-nél nagyobb és 5-nél kisebb?

109. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben

a) csupa egyenlő;

b) két különböző;

c) három különböző

számjegy van? Hogyan lehetne egyszerűen ellenőrizni a kapott eredményeket?

110. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 9-cel osztható

a) nyolcjegyű; *b*) kilencjegyű

számot készíthetünk?

111. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 6-tal osztható

a) négyjegyű; *b*) ötjegyű

számot készíthetünk?

112. Hány hatjegyű 3-mal osztható szám képezhető az 1, 2, 2, 3, 3, 5 számjegyekből?

113. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű számot készíthetünk, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek? Ezek közül hány kezdődik 12-vel? Hány olyan szám van köztük, amelyben az első helyen 1-es és az utolsó helyen 2-es áll?

114. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan különböző számjegyeket tartalmazó négyjegyű számot készíthetünk, amelyben a 3-as számjegy szerepel?

115. Hány hatjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

116. Hány hatjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

117. Hány hatjegyű 4-gyel osztható szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

118. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám képezhető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?

119. Egy 32-es létszámú osztály az iskolai küldöttértekezletre hat küldöttet választ. Hányféleképpen történhet ez?

120. Egy 25-ös létszámú közösség háromtagú vezetőséget választ: titkárt és két vezetőségi tagot.

a) Hányféleképpen történhet ez?

b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági legyen a titkár?

c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági tagja legyen a vezetőségnek?

121. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után nem tesszük vissza. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy király?

122. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?

123. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot nem tesszük vissza. Hány esetben lesz mindkét kihúzott lap ász?

124. Egy 25 főből álló társaság tagjai között egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha egy személy több tárgyat is nyerhet?

125. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány olyan nyolcjegyű számot készíthetünk, amelyben a 4-esek száma egyenlő az 5-ösök számával?

126. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű szám készíthető?

127. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű páros szám készíthető?

128. Hány egyenest határoz meg 25 olyan pont, amelyek közül 3–3 nem esik egy egyenesbe?

129. Hány egyenest határoz meg n olyan pont, amelyek közül 3–3 nem illeszkedik egy egyenesre?

130. Adott a síkban 25 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?

131. Adott a síkban n pont, melyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?

132. Hány háromszöget határoz meg 12 olyan, egy síkban fekvő egyenes, amelyek között nincs párhuzamos és közülük bármely három nem illeszkedik egy pontra?

133. Adott a térben 12 pont, amelyek közül bármely négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg?

134. Adott a térben n ($n \geqq 4$) pont, melyek közül bármely négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg?

135. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből készíthető ötjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es számjegy, ha egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7. ábra

136. A BKV járművein a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelik, melyek a *7. ábrán* látható négyzethálózatból 2, 3, illetve 4 mezőt kilyukasztanak. Hányféleképpen állíthatók be ezek a lyukasztók a fenti követelményeknek megfelelően?

137. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A*, *B* és *C* egymás mellett üljön?

138. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* a *B* mellé és *C* a *D* mellé ül?

139. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* ne kerüljön *B* mellé?

140. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* a pad szélére ül?

141. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* ne kerüljön a pad szélére?

142. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett négy férfi és három nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

143. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett öt férfi és hat nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

144. Egy padra leül n ember ($n > 4$). Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha *A* a *B* mellett és *C* a *D* mellett akar ülni?

145. Nyolc ember – jelöljük őket rendre *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-, *G*-, *H*-val – leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy *A* a *B* mellett és *E* az *F* mellett üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

146. Egy kerek asztal mellé leül n ember ($n > 4$). Hányféleképpen helyezkedhetnek el az asztal mellett, ha *A* a *B* mellett és *C* a *D* mellett akar ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van a társaságban legalább egy olyan ember, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

147. Egy kör alakú asztal körül elhelyezett 12 széken hat férfi és hat nő akar helyet foglalni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el (egymáshoz viszonyítva), ha nem ülhet férfi mellé férfi, illetve nő mellé nő?

148. Négy házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el (egymáshoz viszonyítva), ha sem férfiak, sem nők, sem házastársak nem ülhetnek egymás mellé?

149. Hány különböző gyöngyöt lehet készíteni 20 gyöngyszemből, ha van:

a) 10 fehér és 10 kék;

b) 5 fehér és 15 kék;

c) 8 fehér és 12 kék?

Az azonos színű gyöngyszemek teljesen egyformák.

150. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 6 piros és 9 fehér golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

151. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzásokat tekintjük különbözőknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

152. 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellett legyen?

153. 5 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

154. 7 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

155. 8 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

156. Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben a kapott pontok összege 8?

157. Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány esetben lehet az így kapott pontok összege legalább 8?

158. Hány „szót" képezhetünk az *A*, *E*, *I*, *O*, *U* magán- és a *B*, *C*, *D*, *F* mássalhangzókból úgy, hogy minden „szóban" 4 magán- és 3 mássalhangzó legyen, két magán-, illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen?

159. Egy dobozban 1-től 20-ig számozott 20 darab cédula van. Hányféleképpen húzhatunk ki öt cédulát úgy, hogy ezek közül:
a) egy cédulán meghatározott szám legyen;
b) három cédulán meghatározott szám legyen;
c) mind az öt cédulán meghatározott szám legyen?

160. Egy-egy cédulára írjuk fel rendre a 0, 1, 2 számokat. A cédulákat tegyük egy dobozba. Húzzunk ki egy cédulát, és jegyezzük fel a kihúzott számot. Ezután tegyük vissza a cédulát és ismételjük meg az eljárást még négyszer. Hány esetben lehet az ötödik húzás után a kihúzott számok összege:
a) éppen 6; *b)* 6-nál nagyobb?

161. Az 1, 2, 3, ..., 15 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben
a) az 1, 2 számok; *b)* az 1, 2, 3 számok
csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?

162. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az
a) 1, 2, 3, ..., 10 számok; *b)* az 1, 2, 3, ..., 15 számok
egymás mellé kerülnek növekvő sorrendben?

163. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az
a) 1, 2, 3, ..., 10 számok; *b)* 1, 2, 3, ..., 15 számok
egymás mellé kerülnek?

164. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az
a) 1, 2, 3 számok; *b)* 1, 2, 3, ..., k számok $(k<n)$
növekvő sorrendben egymás mellé kerülnek, ha $n>3$?

165. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az
a) 1, 2, 3, 4, 5 számok; *b)* 1, 2, 3, ..., k számok $(k<n)$
egymás mellé kerülnek, ha $n>5$?

166. Az iskolában rendezett matematika-háziverseny döntőjébe a IV. évfolyam tanulói közül hatan kerülnek: Anna, Béla, Csilla, Dezső, Endre és Ferenc. Egy-egy első, második és harmadik díjat adnak ki.
a) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a helyezések szempontjából?
b) Hány esetben lehet lány az első helyezett?
c) Hány esetben lehet Ferenc az első helyezett?
d) Hány esetben lehet Anna a helyezettek között?

167. Adott egy síkban 10 egyenes. Az egyenesek közül legfeljebb kettő metszi egymást egy pontban. Hány metszéspontjuk van, ha:
a) nincs köztük párhuzamos;
b) az egyenesek közül 4 párhuzamos;
c) az egyenesek közül 5 párhuzamos;
d) az egyenesek közül 8 párhuzamos?

168. 15 fehér, illetve 18 kék cédulát megszámoztunk 1-től 15-ig, illetve 1-től 18-ig. Dobjunk fel egy pénzérmét; fej dobása esetén a fehér, írás dobása esetén a kék cédulák közül húzzunk egyet ki. Ismételjük meg az eljárást még kilencszer. Az így kapott tíz cédulát a húzás sorrendjében tegyük az asztalra. Hányféle sorozatot kaphatunk így?

169. Hány 5-tel osztható hétjegyű szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?

170. Hány hétjegyű páratlan szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?

171. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány olyan hétjegyű számot lehet készíteni, amelyben a kettes számjegyek egymás mellett állnak?

172. Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?

173. A 0, 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány hatjegyű páros szám képezhető?

174. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki találomra öt lapot. Hány esetben lesz a kihúzott öt lap közül három hetes?

175. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát négy játékos között szétosztani úgy, hogy mindegyik nyolc lapot kapjon?

176. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani öt lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között:
a) ne legyen alsó, felső, király és ász;
b) 2 ász és egy király legyen?

177. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy ász és piros is legyen a kiválasztott lapok között?

178. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy
a) legalább egy zöld színű lap;
b) legfeljebb három hetes;
c) a zöld hetes
a kiválasztott lapok között legyen?

179. Egy rejtjeles lakaton hat forgatható közös tengelyű korong van, amelyek mindegyikén a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek találhatók. A zár csak a korongok bizonyos állásánál nyílik ki, amikor a korongokon egy bizonyos „hatjegyű" szám (kezdődhet 0-val is) a meghatározott helyzetbe van állítva.
a) Hányféle nyitási lehetőség adható meg?
b) Hányféle olyan nyitási utasítás adható, amelyben legalább egy 9-es szerepel?

180. Hány rendszámtábla készíthető 26 betű és a 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám két betűből és az utána következő „négyjegyű" számból (a 0-val kezdődő számokat is megengedjük) áll?

181. Egy hegy csúcsára hat út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint nem különböztetjük meg és:
a) egy-egy utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer;
b) egy-egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;
c) mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?

182. Egy hegy csúcsára hat út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint is megkülönböztetjük és:
a) egy-egy utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer;
b) egy-egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;
c) mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?

183. Hány olyan különböző számjegyekből álló négyjegyű szám van, melyben két páros és két páratlan számjegy szerepel?

184. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő:
a) egy számjegy felhasználásával;
b) két különböző számjegy felhasználásával;
c) három különböző számjegy felhasználásával;
d) négy különböző számjegy felhasználásával?

185. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de e három számjegy mindegyikét legalább egyszer?

186. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is osztjuk két csoportba az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, legalább az egyik csoportban van két olyan szám, melyek különbsége is ugyanabban a csoportban van.

187. Egy dobozban 100 cédula van, rendre 1-től 100-ig megszámozva. Hányféleképpen lehet ezek közül kiválasztani nyolc cédulát úgy, hogy
a) egyiken se legyen;
b) négy cédulán legyen;
c) nyolc cédulán legyen
páratlan szám?

188. Egy dobozban 20 cédula van, rendre 1-től 20-ig megszámozva. Kihúzunk öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

189. Egy dobozban 10 cédula van, rendre 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után négy cédulát húzunk ki úgy, hogy a kihúzott cédulákat a húzás után nem tesszük vissza. A kihúzott cédulákon lévő számjegyeket a kihúzás sorrendjében írjuk egymás mellé. Hány esetben kapunk:

a) páratlan négyjegyű számot;

b) 10-zel osztható négyjegyű számot;

c) 25-tel osztható négyjegyű számot?

190. 16 csapatot területi alapon két nyolcas csoportba osztottak. Az egyes csoportok első, második, illetve harmadik helyezettje játszik az első-második, harmadik-negyedik, illetve ötödik-hatodik helyért a döntőben. Hányféle döntő lehetséges?

191. 15 csapatot egy nyolcas és egy hetes csoportba osztottak. Mindegyik csoportban körmérkőzésekkel döntik el a sorrendet. A döntőben a csoportgyőztesek mérkőznek az első-második, a csoportmásodikok a harmadik-negyedik, a csoportharmadikok az ötödik-hatodik és végül a csoportnegyedikek a hetedik-nyolcadik helyért. Adott csoportbeosztás esetén hányféle döntő jöhet létre?

192. 16 csapatot sorsolással 4 négyes csoportba osztanak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kerülnek a négyes döntőbe, ahol újabb egyfordulós körmérkőzéssel döntik el az első három helyezést.

a) Hányféle összetételű döntő lehetséges?

b) Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

193. 16 csoportot sorsolással 4 négyes csoportba osztanak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kerülnek a négyes döntőbe, ahol kieséses rendszerben folytatják a küzdelmet. A párosítás sorsolás útján történik. A két győztes csapat játszik az első-második, s a két vesztes a harmadik-negyedik helyért.

a) Hányféle összetételű döntő jöhet létre?

b) Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

194. 16 csapatot – területi alapon – 4 négyes csoportba (*A*, *B*, *C*, *D*) osztottak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kieséses rendszerben folytatják a küzdelmet. Az *A* és *B* csoport, illetve a *C* és *D* csoport első helyezettjei játszanak egymással. A győztesek jutnak a döntőbe és a vesztesek mérkőznek a harmadik helyért.

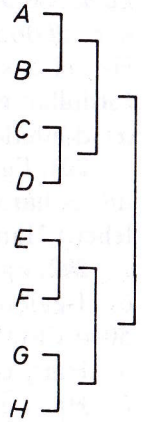
a) Hányféle összetételű döntő lehetséges?

b) Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

195. 8 röplabdacsapat (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*) kieséses rendszerben játszik egymással. A párosítást a *8. ábra* mutatja.

a) Hányféle döntő lehetséges?

b) Hányféleképpen alakulhat ki a döntő párosítása?



8. ábra

196. Egy sakkversenyen az egyik versenyzőnek az ötödik forduló után 3 pontja van. Hányféleképpen érhette el a versenyző ezt a 3 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el eredményeit? (A sakkversenyen győzelem esetén 1, döntetlen esetén 0,5 pontot kapnak.)

197. Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra, összesen 123-ra került sor. Az egész körmérkőzésen 253 játszma volt. Hány játékos indult az egyik és mennyi a másik iskolából?

198. Valamely sakkversenyen egy játékosnak a hatodik forduló után 4 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyert játszma 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vesztett játszma 0 pont.)

199. Két sakkozó, *A* és *B* játszik egymás ellen a következő szabályok szerint: ha valamelyik legfeljebb 6 játszmából több mint 3 pontot szerez, akkor a játékot az első ilyen esetben befejezik, és az illető nyert. Ha az első hat játszma során ez nem következik be, akkor mindannyiszor két partit játszanak, míg valamelyikük több pontot szerez. Hányféleképpen jöhet létre az

a) 3,5 : 2,5; *b)* 4,5 : 3,5

végeredmény?

200. Egy szabályos játékkocka szemközti oldalain rendre *a*, *b*, illetve *d* betű szerepel. Ketten játszanak: *A* és *B*. Aszerint, hogy a kockával *a*-t vagy *b*-t dobnak, *A* 1 és *B* 0, illetve *B* 1 és *A* 0 pontot kap; *d* dobása esetén mindketten 0,5 pontot kapnak. Hatszor dobják fel a kockát és az győz, aki több pontot kap. Hány esetben fordulhat elő:

a) döntetlen eredmény; *b)* *A* győzelme?

201. Egy pályázatra 20 pályamunka érkezett. Egy első, két második és három harmadik díjat adnak ki. (A díjakat megosztani nem lehet.) Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni?

202. Egy pályázatra 20 pályamű érkezett, amelyek közül 9-et nők és 11-et férfiak küldtek be. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 5000 Ft-tal. (A díjakat megosztani nem lehet.)

a) Hány eset lehetséges a díjazás szempontjából?

b) Hány esetben lehet a díjazottak között egy nő?

c) Hány esetben lehet a díjazottak között három férfi?

203. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben mindhárom páratlan számjegy szerepel legalább egyszer?

204. Három szabályos játékkockával dobunk. Hány esetben lesz a kapott pontok összege 10?

205. Hány olyan különböző számjegyekből álló hatjegyű szám van, amelyben:

a) négy páratlan számjegy szerepel;

b) legalább négy páratlan számjegy szerepel;

c) legfeljebb négy páratlan számjegy szerepel?

206. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet szétosztani három egyenlő tárgyat úgy, hogy egy tanuló:

a) legfeljebb egy tárgyat kaphat;

b) több tárgyat is kaphat;

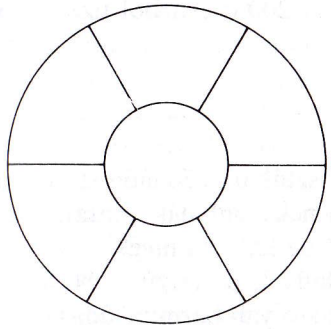
c) legfeljebb két tárgyat kaphat?

207. Egy dobozban hat különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy egyet sem, vagy lehet mindet is). Hány különböző eset jöhet létre?

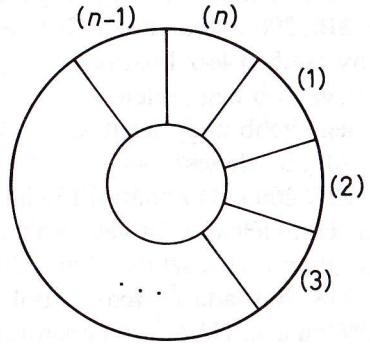
208. Egy dobozban 15 különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre?

209. Egy dobozban *n* különböző tárgy van. Találomra kiveszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre? Határozzuk meg az eredményt kétféle úton és az eredményeket hasonlítsuk össze.

210. Hányféleképpen színezhetjük ki a *9. ábrán* látható alakzatot három színnel, ha a szomszéd tartományokat nem színezhetjük ki azonos színnel?



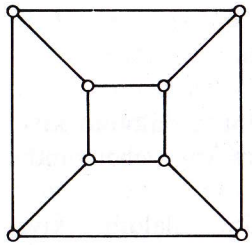
9. ábra



10. ábra

211. Hányféleképpen színezhető ki a *10. ábrán* látható alakzat három színnel, ha a szomszédos tartományokat nem színezhetjük ki azonos színnel?

212. Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka nyolc csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?



11. ábra

213. Hány olyan ponthármast lehet kiválasztani a *11. ábrán* megadott alakzatról, melyben nincs olyan kék-két pont, amely össze lenne kötve?

214. 12 cédulára írjuk fel rendre 1-től 12-ig a számokat.
a) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy egyenlő paritású számok ne kerüljenek egymás mellé?
b) Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy az első hat helyen csak páros szám álljon?
c) Hány különböző hetes csoport alkotható úgy, hogy a csoportban három páros szám társul négy páratlannal?

215. Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc különböző tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt és a többi egy-egy tárgyat kapjon?

216. 200 csavar közül 20 selejtes. A 200 csavarból tízet kivéve, hány esetben lesz köztük:
a) legalább négy selejtes;
b) legfeljebb négy selejtes;
c) 20%-a selejtes?

217. 200 láda almából 150 láda I. osztályú és 50 láda II. osztályú áru. Hányféleképpen vehetünk olyan negyvenládás mintát, hogy e mintában a II. osztályú áru a 20%-ot ne haladja meg?

218. 200 láda őszibarackból 120 láda I. osztályú és 80 láda II. osztályú áru. Hányféleképpen vehetünk olyan harmincládás mintát, hogy e mintában a II. osztályú áru az 50%-ot meghaladja?

219. Egy 11 egység hosszúságú szakasz tíz csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra vannak. A csuklós szerkezetet hajlítsuk meg két pontban úgy, hogy háromszöget kapjunk. Hány háromszög jöhet létre ily módon? (Az egybevágókat csak egyszer számoljuk!)

220. Egy 12 egység hosszúságú szakasz tizenegy csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra vannak. A csuklós szerkezetet hajlítsuk meg két pontjában úgy, hogy háromszöget kapjunk.
a) Hány egyenlő szárú háromszög jöhet létre ily módon?
b) Hány hegyes-, tompaszögű háromszöget kaphatunk így?

221. Pontból és vízszintes vonalakból hány jelet állíthatunk össze, ha a jelek összeállítására legfeljebb három pontot és három vonalat használhatunk fel?

222. Egy szabályos játékkockát tízszer egymás után feldobunk. A kapott eredményeket a dobások sorrendjében írjuk le. Hány olyan dobássorozat lehetséges, melyben egytől hatig minden szám előfordul?
Oldjuk meg a feladatot általánosan is!

223. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

egyenletet.

224. Egy osztály klubdélutánt rendez. A klubdélutánon 15 leány és 15 fiú vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol, és a lányok egymással, illetve a fiúk egymással nem táncolnak?

225. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Testnevelési órán kettesével sorakoznak 15 különböző eszközért úgy, hogy két leány, illetve két fiú nem állhat egymás mellé. Az eszközöket meghatározott sorrendben osztják ki, és minden pár egyet kap. Hányféleképpen történhet a szétosztás?

226. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Kettesével ülnek le a padokba. Hányféle ülésrend készíthető, ha két lány, illetve két fiú nem ülhet egymás mellé? (A kétszemélyes padokat tekintsük egyetlen oszlopban elhelyezve.)

227. Hányféleképpen helyezkedhet el 15 tanuló három darab ötszemélyes csónakban, ha egy-egy csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?

228. 11 tanuló három csónakot bérel: egy kétülésest, egy négyülésest és egy ötülésest.
a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló egy csónakba akar kerülni?

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha öt tanuló szeretne egy csónakba kerülni?

(A csónakokon belüli elhelyezkedés közömbös.)

229. Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy két napra. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négyszemélyes és egy háromszemélyes szobát kapnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?

b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést is figyelembe vesszük?

230. Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn valaki úgy megy fel, hogy minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép egyszerre. Határozzuk meg a lehetséges felmenetelek számát, ha a lépcsőfokok száma: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

231. Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn valaki úgy megy fel, hogy minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép egyszerre. Jelölje $f(n)$ a lehetséges felmenetelek számát

a) Határozzuk meg $f(n)$-t.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $n>2$, akkor

$$f(n) = f(n-1)+f(n-2).$$

232. Mekkora azoknak a különböző számjegyeket tartalmazó háromjegyű számoknak az összege, amelyeket a 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával képezhetünk?

233. Kettőnek hányadik hatványával osztható:

a) 8!; *b)* 14!; *c)* 30!; *d)* 75!; *e)* 85!; *f)* 100!.

234. Háromnak hányadik hatványával osztható:

a) 5!; *b)* 11!; *c)* 25!; *d)* 50!; *e)* 75!; *f)* 100!.

235. Hány nullára végződik:

a) 5!; *b)* 15!; *c)* 23!; *d)* 60!; *e)* 100!; *f)* 170!.

236. Hány pozitív osztója van:

a) 540-nek; *b)* 41 580-nak.

237. Hány pozitív osztója van:

a) 2730-nak; *b)* 30 030-nak.

238. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány 25-tel osztható négyjegyű szám képezhető, ha egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel? Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét.

239. Hány néggyel osztható ötjegyű szám képezhető az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden „megadott számjegyet" csak egyszer használhatunk fel? Számítsuk ki ezek összegét.

240. Az 1, 3, 5 számjegyek felhasználásával hány 5-re végződő ötjegyű szám képezhető? Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét.

241. Határozzuk meg azoknak az ötjegyű számoknak az összegét, amelyeknek minden számjegye páratlan.

242. Egy játékkockával négyszer dobunk egymás után és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé írjuk. Így egy négyjegyű számot kapunk. Határozzuk meg az így nyerhető négyjegyű számok összegét.

243. Egy árusító automatában öt oszlop mindegyikében nyolcnyolc tárgy van egymásra helyezve. Mindig csak a legalsót lehet kivenni. Hányféleképpen lehet kiüríteni az automatát?

244. A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány

a) kéttalálatos; *b)* háromtalálatos;

c) négytalálatos; *d)* öttalálatos

szelvény van?

245. Töltsünk ki gondolatban minden lehetséges módon egy lottószelvényt, amelyen 90 szám közül ötöt kell megjelölni. Hány öt-, négy-, illetve háromtalálatos szelvényünk lesz ezek között, ha a lottósorsoláson tíz számot húznak ki?

246. 150 darab készülék között öt darab hibás van. Hányféleképpen lehet húsz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között

a) nulla; *b)* egy; *c)* négy; *d)* öt

hibás legyen?

247. 200 csavar közül nyolc selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki közülük öt csavart úgy, hogy:

a) ne legyen köztük egyetlen selejtes csavar sem;
b) egy selejtes és négy hibátlan legen;
c) két selejtes és három hibátlan legyen;
d) mind az öt selejtes legyen?

248. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül ötöt húznak ki. Tekintsük az összes így képezhető számötöst. Adjuk össze az egy-egy számötösben szereplő számokat. Mi lesz ezeknek az összegeknek az átlaga?

249. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt. Tekintsük az így keletkezett számötösöket. Ezek hány százalékában fordul elő egy rögzített szám?

250. A következő táblázat azt adja meg, hogy a 648-adik lottóhúzás után melyik számot milyen gyakorisággal húzták ki. Számítsuk ki a táblázat alapján, hogy átlagosan mennyi az egy héten kihúzott lottószámok összege. Hasonlítsuk össze a **248.** feladat eredményével.

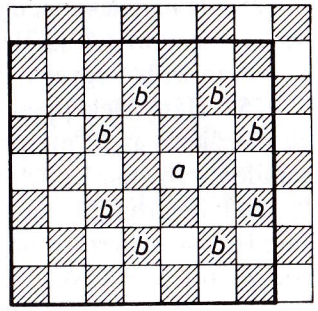
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
43	28	46	32	34	40	38	29	36	34	30	48	41	41	34
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
27	32	37	35	33	36	33	43	41	34	36	29	40	42	26
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
29	30	41	43	37	38	41	43	33	29	35	45	32	30	36
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
35	40	32	46	35	47	24	38	29	31	37	28	26	31	34
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
31	29	31	36	42	36	46	35	47	41	48	31	40	40	46
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
35	40	34	30	30	33	41	38	46	35	42	32	25	30	37

251. A **250.** feladat táblázata alapján számítsuk ki, hogy egy számot átlagosan hányszor húztak ki. Egy rögzített számot átlagosan az esetek hány százalékában húztak ki? A kapott eredményt hasonlítsuk össze a **249.** feladat eredményével.

252. Egy 8×8-as sakktáblán hány bástyát lehet elhelyezni úgy, hogy egyik se üthesse a másikat? Hány ilyen elhelyezés lehetséges? (A bástya sor–oszlop mentén mozoghat.)

253. A 64 mezőből álló sakktáblából letakarjuk az egyik szélső sort és az egyik szélső oszlopot. Bejárhatjuk-e a le nem takart részt

egyetlen huszárral lóugrásokban úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk, és az utolsónak érintett mező lóugrásnyira legyen attól a mezőtől, amelyről indultunk? (A *12. ábrán* pl. az *a*-val megjelölt mezőtől a *b*-vel megjelöltek a lóugrásnyira fekvők.)

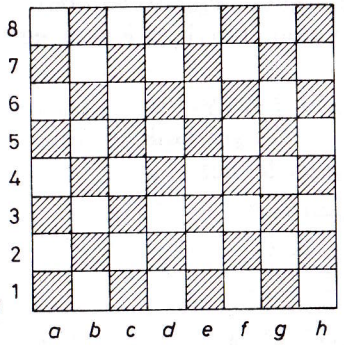


12. ábra

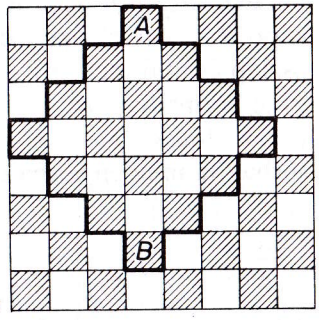
254. A sakktábla bal alsó sarokmezőjéről hányféleképpen juthatunk el a jobb felső sarokba lóugrásokkal, ha minden sorba pontosan egyszer lépünk? (A lóugrásokat a *12. ábra* mutatja.)

255. Eljuthatunk-e huszárral a sakktábla *a*1 mezőjéről
a) az *a*8 mezőre; *b)* az *e*8 mezőre,
ha minden lépésnél a következő sorba lépünk? (A jelölést a *13. ábra* mutatja, a huszár mozgását pedig a *12. ábra*.)

256. A sakktábla *d*8 mezőjéről hányféleképpen juthat hét lépésben a futár az *e*1 mezőre, minden lépéssel a célhoz közeledve? (A futár csak átlósan mozoghat. A jelölést a *13. ábra* mutatja.)



13. ábra



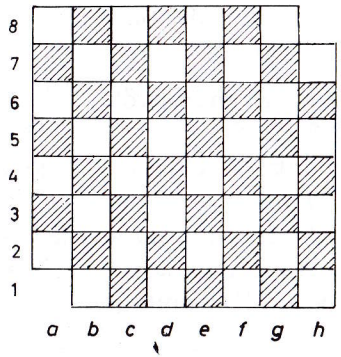
14. ábra

257. A sakktábla *A*-val jelölt mezőjéről hányféleképpen juthat el a király hat lépésben a *B*-vel jelölt mezőre, ha csak a kijelölt részen mozoghat? (A király bármilyen irányba léphet egyet; sor, oszlop és átlós irányban egyaránt.) A kijelölt részt a *14. ábra* mutatja.

258. Hányféleképpen juthat el a király két lépésben a *c*8 mezőről az *e*1 mezőre? (A jelölést a *13. ábra* mutatja. A király minden irányban léphet egyet.)

259. Hányféleképpen juthat el a király hét lépésben a sakktábla *c*8 mezőjéről az *f*1 mezőre? (A jelölést a *13. ábra* mutatja. A király minden irányban léphet egyet.)

260. Bejárhatjuk-e a királlyal a sakktábla sötét mezőit úgy, hogy minden sötét mezőre pontosan egyszer lépünk? (A király minden irányban léphet egyet.)



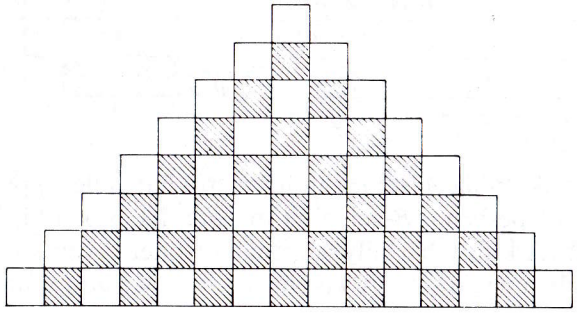
15. ábra

261. A 8 × 8-as sakktáblából elvesszük a „bal alsó" és a „jobb felső" sarokmezőt. (A *15. ábra* mutatja.) Lefedhető-e a megcsonkított sakktábla hézagmentesen és egyrétűen 1 × 2-es dominókkal, ha azt sem engedjük meg, hogy a dominók túlnyúljanak a táblán?

262. A *16. ábrán* látható „sakktábla" legfelső sorából hányféleképpen juthat el egy király (minden irányban léphet egyet; sor, oszlop és átló mentén)

a) a harmadik; *b)* a negyedik;
c) az ötödik; *d)* a nyolcadik

sorba, ha minden sorba csak egyszer léphet.


16. ábra

5. A permutáció inverziói

263. Határozzuk meg az ISKOLA szóban az inverziót alkotó elempárok számát, ha alapsorrendnek az ábécé sorrendet vesszük.

264. Határozzuk meg a ZOLTÁN szóban az inverziók számát, ha alapsorrendnek az ábécé sorrendet vesszük.

265. Határozzuk meg a következő számokban az inverziót alkotó elempárok számát, ha alapsorrendnek a növekvő sorrendet tekintjük:

a) 14 352; *b)* 106 327; *c)* 765 123;
d) 12 345; *e)* 123 450; *f)* 9 876 543 210.

266. Van-e az 1, 2, 3, ..., *n* elemeknek olyan permutációja, amelyben bármely két elem inverzióban van egymással, s hány ilyen permutáció van? (Az alapsorrend a számok növekvő sorrendje.)

267. Határozzuk meg az *n*, *n* − 1, *n* − 2, ..., 2, 1 permutáció inverzióinak a számát, ha az alapsorrend a számok növekvő sorrendje.

268. Bizonyítsuk be, hogy ha *n* különböző elem egy permutációjában két szomszédos elemet felcserélünk, akkor az inverziók számának paritása ellenkezőre változik.

269. Bizonyítsuk be, hogy ha *n* különböző elem egy permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziók számának paritása ellenkezőre változik.

270. Bizonyítsuk be, hogy *n* különböző elem ($n \geqq 2$) páros és páratlan permutációinak a száma megegyezik.

271. A *17. ábrán* látható 4 × 4-es keretben 15 darab 1-től 15-ig számozott fémlapocskát helyezünk el tetszés szerinti elrendezésben. Így valamelyik négyzet üresen marad. Az üres négyzet melletti fémlapok bármelyikét szabad arra átcsúsztatni. Ha az első, második, harmadik és negyedik sor elemeit – az elemek sorrendjének megváltoztatása nélkül – rendre egymás mellé írjuk, ak-

2	5	3	1
4	7		8
6	14	10	13
12	15	11	9

17. ábra

kor az 1, 2, 3, ..., 15 elem egy permutációját kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha a fémlapocska az átcsúsztatással:

a) ugyanabban a sorban marad, akkor a fent meghatározott permutációban az inverziók száma nem változott;

b) a szomszédos sorba kerül, akkor az így kapott permutációban az inverziók száma az előzőhöz viszonyítva páratlan számmal változik meg.

272. A **271.** feladatban leírt játékban a fémlapocskákat helyezzük úgy el, hogy a 16-odik négyzet maradjon üresen. A játék célja, hogy a megengedett mozgatásokkal a lapocskákat a *18. ábrán* látható helyzetbe hozzuk.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor oldható meg, ha a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

18. ábra

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

19. ábra

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

20. ábra

2	7	4	5
9	1	8	3
6	12	11	13
10	14	15	

21. ábra

megadott elrendezéshez tartozó permutációban az inverziók száma páros.

b) Hogyan lehet eldönteni azt, hogy a játék megoldható-e, ha az üres négyzet nem a 16-odik mező?

c) Átrendezhetők-e a *18. ábrán* látható elrendezésbe a lapocskák, ha az ábrán látható elrendezésben a 14-es lapocskát felcseréljük a 15-össel?

d) Megoldható-e a feladat a *19.*, *20.* és a *21. ábrán* látható elrendezés esetén?

6. A binomiális együtthatóra vonatkozó összefüggések

273. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; *b)* $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

274. Igazoljuk algebrai úton, hogy:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

275. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$;

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

276. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \frac{3\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} + \ldots + \frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{n}.$$

277. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}.$$

278. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k-2}+3\binom{n}{k-1}+3\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+3}{k+1}.$$

279. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=2^{n-1}n.$$

280. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0.$$

281. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0}+\binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1}+\binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{k}{0}\binom{n-k}{k}=\binom{n}{k}.$$

282. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

283. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n-1}{k-1}$ osztható k-val, ha n és k relatív prímszámok.

284. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\ldots+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Vizsgáljuk meg, mit ad az összefüggés $k=1$ esetén.

285. Számítsuk ki a következő összegeket:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8+8\cdot 9$;

b) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+97\cdot 98\cdot 99+98\cdot 99\cdot 100$;

c) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;

d) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)\,(n+2)$.

286. Számítsuk ki a következő összegeket:

a) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$;

b) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\ldots$
$\ldots+10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14$;

c) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$;

d) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)$.

287. Legyen $\alpha_k(n)=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+l}+\binom{n}{k+2l}+\ldots$; $\quad 0\leqq k\leqq l$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\alpha_k(n+1)=\begin{cases}\alpha_{k-1}(n)+\alpha_k(n), & \text{ha } k\geqq 1;\\ \alpha_{l-1}(n)+\alpha_0(n), & \text{ha } k=0.\end{cases}$$

VI.

288. Az úgynevezett Pascal-háromszög képzési szabálya a következő: minden sor első és utolsó eleme 1, és a második sortól kezdve a közbülső elemeket úgy kapjuk, hogy a rézsút fölötte levő két elem összegét vesszük.

0. sor						1				
1. sor					1		1			
2. sor				1		2		1		
3. sor			1		3		3		1	
4. sor		1		4		6		4		1
5. sor	1		5		10		10		5		1
6. sor		1		6		15		20		15		6		1
7. sor	1		7		21		35		35		21		7		1
8. sor	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában rendre az $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ binomiális együtthatók állnak.

289. Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög (**288.** feladat) n-edik sorának első, harmadik, ötödik, ... elemének összege 2^{n-1}.

VII. GRÁFELMÉLET

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok.

1. Egy klubesten a fiúk és a lányok feljegyezték, hogy hány partnerrel táncoltak.

a) Igaz-e, hogy a fiúk által feljegyzett számok összege egyenlő a lányok által feljegyzett számok összegével?

b) Mi a válasz ugyanerre a kérdésre, ha mindenki azt jegyezte fel, hogy hányszor táncolt a klubesten?

2. Egy térképen pontokkal vannak feltüntetve a városok, amelyek páronkénti távolságai mind különbözőek. Mindegyik várost összekötjük a hozzá legközelebbi várossal (egy szakasszal).

a) Mutassuk meg, hogy nem jöhet létre zárt töröttvonal.

b) Mutassuk meg, hogy két szakasz nem metszheti egymást.

c) Mutassuk meg, hogy nem létezhet olyan város, amelyik ötnél több másikkal össze lenne kötve.

3. Öt város között telefon-összeköttetést akarunk létesíteni. Ennek érdekében bizonyos városok telefonközpontjai között kábelt fektetünk.

a) Legalább hány kábelt kell fektetni, hogy bármelyik városból bármelyik másikba lehessen telefonálni?

b) Legalább hány kábelt kell fektetnünk akkor, ha biztonsági okokból azt akarjuk, hogy bármely két város között legalább két független (közös kábel nélküli) vonalon is lehessen telefonálni?

Készítsünk tervrajzokat a hálózatok építéséhez.

4. Rajzoljuk meg a családfánkat ötödíziglen visszamenőleg, és döntsük el, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazon személyek-e. (Feltesszük, hogy felmenő ágon legalább ötödíziglen nem volt rokonházasság.)

5. Be lehet-e járni
a) egy tetraéder,
b) egy kocka,
c) egy szabályos oktaéder
éleit egy-egy csúcsukból kiindulva úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk végig és a végén visszatérjünk abba a csúcsba, amelyikből indultunk? Ha igen, rajzoljunk néhány ilyen bejárást.

6. Be lehet-e járni
a) egy tetraéder,
b) egy kocka,
c) egy szabályos oktaéder
csúcsait egy csúcsból kiindulva, az élek mentén haladva úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érintsünk és a végén visszatérjünk abba a csúcsba, amelyikből indultunk? Ha a bejárás lehetséges, rajzoljunk meg közülük néhányat.

7. Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik, s már lezajlott az első két forduló. Feleltessünk meg a sakkozóknak a síkon egy-egy pontot. Egy mérkőzés lejátszását úgy jelöljük a rajzon, hogy a szóban forgó játékosoknak megfelelő pontokat összekötjük egy szakasszal. Figyeljük meg, hogy létrejön-e a rajzon zárt töröttvonal. Azt tapasztaljuk, hogy igen. Bizonyítsuk be, hogy ez törvényszerű.

8. Szervezzünk 8 csapat körmérkőzéses versenyéhez első három fordulót, ha az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kell lejátszani. Ábrázoljuk a tervezeteket gráf segítségével.

9. Egy n oldalú, konvex ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$) sokszögben húzzunk meg minden átlót. Maximálisan hány metszéspont jöhet létre?

10. Egy sakk csapatversenyen több csapat vett részt. (Minden játékos pontosan egyszer játszik minden, vele nem azonos csapatban levő játékossal.) A verseny végén a sakkozóknak ünnepi ebédet adnak. A szakácsnak elfelejtették leadni a csapatok létszámát. A szakács mindössze annyit tud, hogy a legnagyobb létszámú csapatban 12 versenyző van, és hogy a verseny során 42 sakkozó szerzett pontot. Hány ebédet kell főznie a szakácsnak, hogy biztosan jusson minden sakkozónak?

11. Egy négyzetet hat egyenessel felosztottunk 16 kisebb négyzetre. Hány úton juthatunk el a négyzet egyik csúcsából a szemközti

csúcsba, ha csak a kis négyzetek élein haladhatunk és mindig közeledni kell a célhoz? Készítsünk ábrát és rajzoljunk fel néhány különböző utat.

12. Egy négyzetet 6 egyenessel felosztunk 16 kisebb négyzetre. A négyzet két szemközti csúcsában van egy-egy állatka és helyet akarnak cserélni. Egyszerre indulnak el, mindig a kis négyzetek élein, egyenlő sebességgel haladnak, s mindig közelednek céljukhoz.
a) Összesen hány különböző módon mehet végbe ez a helycsere? (Két helycsere akkor és csak akkor számít különbözőnek, ha legalább az egyik állatka útja a két esetben különböző.)
b) Hány olyan helycsere lehetséges, melynek során a két állatka találkozik egymással?

13. Egy kockát 9 síkkal felosztottunk 64 kisebb kockára. Hány különböző úton juthatunk el a kocka egyik csúcsából a szemközti csúcsba, ha csak a kis kockák élein haladhatunk és mindig közelednünk kell a célhoz?

***14.** Egy kockát 9 síkkal felosztottunk 64 kisebb kockára. A kocka két szemközti csúcsában van egy-egy állatka, és helyet akarnak cserélni. Egyszerre indulnak el, mindig a kis kockák élein, egyenlő sebességgel haladnak és mindig közelednek a célhoz.
a) Összesen hány különböző módon mehet végbe ez a helycsere?
b) Hány olyan helycsere lehetséges, melynek során az állatkák találkoznak?

15. Egy gráf csúcsait azonosítjuk a 0; 1;. . .; 11; 12 számokkal. Az x csúcsot akkor és csak akkor kötjük össze az y csúccsal, ha 4 osztója $x^2 - y^2$-nek.
a) Rajzoljuk meg a gráfot.
b) Hogyan lehet egyszerűbben megadni ugyanezt a gráfot?
c) Hány éle van a megadott gráfnak?

16. Egy 5 tagú társaságban lehet-e mindenkinek pontosan 3 ismerőse? (Az ismeretségek kölcsönösek.)

17. 8 csapat körmérkőzéses versenye során előfordulhat-e, hogy az egyes csapatok eddig rendre 1; 2; 2; 2; 4; 5; 7; 7 mérkőzést játszottak?

18. Egy klubesten 7 fiú és 7 lány vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy a klubesten hány partnerrel

táncolt. A felírt számok a következők voltak: 3; 3; 4; 4; 2; 1; 4; 5; 6; 2; 7; 4; 0; 6. Mutassuk meg, hogy valaki tévedett.

19. Egy táncmulatságon 7 fiú és 7 lány vett részt. Mindenki felírta egy cédulára, hogy hány partnerrel táncolt. A számok a következők voltak: 3; 3; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6. Mutassuk meg, hogy valaki tévedett.

20. Hat röplabdacsapat körmérkőzést játszik. Jelöljük a csapatokat *A*-, *B*-, *C*-, *D*-, *E*-, *F*-fel és feleltessünk meg nekik a síkon egy-egy pontot. Azt a tényt, hogy pl. az *A* csapat legyőzte a *B* csapatot, a rajzon úgy jelöljük, hogy meghúzzuk az *AB* szakaszt és arra egy *B* felé irányuló (mutató) nyilat helyezünk. Az egyes mérkőzések eredményét döntsük el pl. pénzfeldobással, és készítsük el a körmérkőzéseket reprezentáló rajzot, irányított gráfot.

a) Hányszor kellett feldobni a pénzt?

b) Hogyan jelentkezik a rajzon az a tény, hogy egy csapat mindig győzött, illetve hogy mindig kikapott?

c) Hogyan jelentkezik a rajzon, hogy nincs veretlen csapat?

d) Igaz-e, hogy ha *A*-ból vezet nyíl *B*-be és *B*-ből vezet nyíl *C*-be, akkor *A*-ból vezet nyíl *C*-be?

21. Igazoljuk, hogy ha n csapat ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$) körmérkőzéses versenyén (legalább) $n+1$ mérkőzést már lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik már legalább háromszor játszott.

22. Hány olyan 5 szögpontú, egyszerű gráf van, melyben a szögpontok fokszámai 1; 2; 2; 2; 3? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a szögpontokat megszámozzuk, és úgy is, hogy nem.

23. Rajzoljunk olyan 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek két harmadfokú és két negyedfokú csúcsa van. Hány ilyen gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem számozzuk meg;

b) a csúcsokat megszámozzuk?

Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

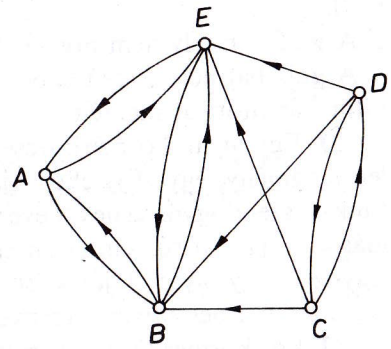
24. Egy 6 csúcsú, egyszerű gráf csúcsainak a fokszámai: 2; 2; 3; 3; 5; 5. Hány ilyen gráf van, ha a csúcsokat megszámozzuk, és hány van akkor, ha nem? Számítsuk ki a gráfok éleinek a számát.

25. Hány n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \neq 0$), különböző, egyszerű gráf van, ha a csúcsait megszámozzuk?

26. n vállalat közül ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) bármelyik kettőnek van kapcsolata: legalább az egyik szállít árut a másiknak. Bizonyítsuk be, hogy sorba lehet rendezni a vállalatokat úgy, hogy bármely vállalat kap árut a sorrendben közvetlen előtte állótól, és szállít árut a sorrendben közvetlen utána állónak.

Adjuk meg a vállalatok közti kapcsolatokat $n = 5$ esetén egy irányított gráffal, és készítsünk el egy lehetséges sorbaállítást.

27. A *22. ábrán* 5 várost tüntettünk fel: *A*; *B*; *C*; *D*; *E*. A köztük vezető, nyíllal ellátott szakaszok a köztük fennálló hírközlési kapcsolatokat jelzik: az pl., hogy *A*-ból vezet nyíl *B*-be, azt jelenti, hogy az *A* városból hírt lehet továbbítani a *B* városba.



22. ábra

a) Egy *B* városban történt esemény híre eljuthat-e minden másik városba?

b) Van-e olyan város, amelyből minden másikba továbbítható egy hír?

28. A terepen n ($n \in \mathbf{N}^+$) megfigyelési pont van. Mindegyik távíróvonallal van összekötve minden másikkal, és minden vonalon csak az egyik irányban lehet táviratozni. Van-e olyan megfigyelési pont, amelynek a híreit bármelyik másik megfigyelési pontra el lehet juttatni?

29. A terepen n ($n \in \mathbf{N}^+$) megfigyelési pont van, és közülük bizonyos párok között egyirányú hírközlési lehetőség áll fenn. Igazoljuk, hogy a következő rájuk vonatkozó három állítás ekvivalens:

1. Bárhogyan jelöljük is ki a megfigyelési pontoknak egy nem üres, valódi részhalmazát, annak valamelyik pontjából legalább egy további (a kijelölt részhalmazokhoz nem tartozó) pontra tudunk továbbítani egy hírt.

2. Bárhogyan jelöljük is ki a megfigyelési pontoknak egy nem üres, valódi részhalmazát, annak valamelyik pontja tud hírt kapni egy további (a kijelölt részhalmazhoz nem tartozó) pontból.

3. Bármely megfigyelési pontból bármelyik másikba el lehet juttatni egy hírt.

30. Adott egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) teljes, irányított gráf. (Minden élnek csak egy irányítása van.) Bizonyítsuk be, hogy a gráfra vonatkozó, következő három állítás ekvivalens.

1. A gráf csúcsainak bármely nem üres, valódi részhalmazából vezet ki él.
2. A gráf bármely nem üres, valódi részhalmazába vezet be él.
3. A gráf bármely X csúcsából bármely másik Y csúcsába el lehet jutni irányított út mentén.

31. Egy olyan körmérkőzéses versenyen, ahol nem lehet döntetlen eredmény, egy A játékost (játékos helyett csapatot is mondhatunk) pszeudogyőztesnek nevezünk, ha a verseny végén bármely másik X játékosról elmondhatja, hogy vagy legyőzte X-et, vagy legyőzött egy olyan Y játékost, amelyik legyőzte X-et. Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen versenyen van pszeudogyőztes.

32. Egy körmérkőzéses versenyen, ahol nem lehet döntetlen eredmény, egy A játékost (játékos helyett csapatot is mondhatunk) pszeudovesztesnek nevezünk, ha róla bármelyik X játékos elmondhatja, hogy vagy megverte A-t, vagy megvert egy olyan Y játékost, aki megverte A-t. Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen versenyen van pszeudovesztes.

33. n vívó ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$) egy körmérkőzésen vett részt. A verseny végén kiderült, hogy nincs veretlen játékos.

a) Bizonyítsuk be, hogy van két pszeudogyőztes.
b) Bizonyítsuk be, hogy van három pszeudogyőztes.
c) Igaz-e, hogy $n \geqq 4$ esetén mindig van 4 pszeudogyőztes?

34. Adott egy n szögpontú, teljes, irányított gráf ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$). Bizonyítsuk be, hogy van olyan szögpontja a gráfnak, amelyből bármelyik másik szögpontba vezet legfeljebb 2 hosszúságú, irányított út.

35. Egy 5 résztvevős körmérkőzéses versenyen:

a) pszeudogyőztes lehet-e egyúttal pszeudovesztes is;
b) lehet-e minden versenyző pszeudogyőztes?

2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfiája. Részgráfok

36. Igazoljuk, hogy bármely gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

37. Igazoljuk, hogy ha egy gráf csúcsainak a száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

38. Hány olyan 5 csúcsú, egyszerű gráf van, amelyben minden csúcs legalább harmadfokú, és a csúcsokat megkülönböztetjük egymástól?

39. Rajzoljunk olyan 6 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek öt harmadfokú és egy elsőfokú csúcsa van. Hány megoldása van a feladatnak, ha

a) a csúcsokat megszámozzuk?
b) a csúcsokat nem számozzuk meg?

40. Hány csúcsú az a teljes, egyszerű gráf, amelynek kevesebb éle van, mint a csúcsok számának a 6-szorosa, de több, mint a csúcsok számának az 5-szöröse?

41. Hány csúcsa lehet annak a teljes, egyszerű gráfnak, amelyben az élek száma a csúcsok számának legalább 11-szerese, de legfeljebb 12-szerese?

42. Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak 8 éle van. Mekkorák lehetnek a csúcsok fokszámai?

43. Öt sziget közül bármelyik kettőt hajó-, illetve repülőjárat köt össze (de csak az egyik) úgy, hogy egyik járattal sem lehet három szigetet körbejárni. Mutassuk meg, hogy minden szigetről két hajó- és két repülőjárat indul.

44. Egy körmérkőzéses sakkversenyen legalább 6 versenyző vesz részt. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely pillanatában vagy van három olyan versenyző, akik az egymás elleni mérkőzéseiket már mind lejátszották, vagy van három olyan versenyző, akik közül még semelyik kettő nem játszott egymással.

45. Igaz-e a **44.** feladat állítása 6 versenyző helyett 5 versenyző esetén?

46. Egy sakkversenyen két iskola tanulói vesznek részt. Minden tanuló minden másikkal egyszer játszik. Tudjuk, hogy eddig minden tanuló páros számú mérkőzést játszott. Mutassuk meg, hogy akkor eddig a különböző iskolák tanulói között is páros számú mérkőzés fejeződött be.

47. A **46.** feladatban leírt verseny egy pillanatában számoljuk meg, hogy hány olyan mérkőzés fejeződött be, amelyet különböző iskola tanulói játszottak, és hogy az egyik iskolában hány olyan tanuló van, akik addig páratlan számú mérkőzést játszottak. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szám azonos paritású.

48. Egy vívóversenyen 8 versenyző vesz részt. Az eredményjelző táblán megjelent, hogy az egyes versenyzők addig hány mérkőzést vívtak. Ezek a számok a következők: 2; 3; 1; 5; 7; 6; 4; 2. Az egyik szakember rápillant a táblára – s meg sem várva az eredmények további részletezését –, óvást jelent be. Elfogadnánk-e az óvást anélkül, hogy tudnánk, hogy a szakember miért óvott? Miért?

49. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$) egyszerű gráfban a 0 kivételével minden lehetséges fokszám előfordul, akkor a gráfban két $\left[\frac{n}{2}\right]$-fokú csúcs van.

50. Egy gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ pontok. Két különböző A_i és A_j pontot akkor és csak akkor kötünk össze éllel, ha $|i-j| \geqq 3$. Rajzoljuk fel a gráf komplementerét. Számítsuk ki mindkét gráf éleinek a számát.

51. Hány 5 csúcsú, legalább 8 élű, egyszerű gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem különböztetjük meg;

b) a csúcsokat megkülönböztetjük?

52. Hány 5 csúcsú 3, illetve 7 élű, egyszerű gráf van, ha:

a) a csúcsokat nem különböztetjük meg;

b) a csúcsokat megkülönböztetjük?

53. Rajzoljunk olyan 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelynek két harmadfokú és két másodfokú csúcsa van. Oldjuk meg a feladatot azzal a módosítással is, hogy a „két másodfokú" helyett „legalább két másodfokú"-t írunk.

54. Van-e olyan 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely a csúcsok számozásától eltekintve, nem különböztethető meg a komplementerétől?

55. Hány 6 csúcsú, legalább 12 élű, egyszerű gráf van, ha a csúcsait megkülönböztetjük, és hány, ha nem?

56. Hány 7 csúcsú és legalább 18 élű, egyszerű gráf van. Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a csúcsokat megkülönböztetjük, és úgy is, hogy nem.

57. Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább 5 szögpontú, egyszerű gráfban vagy a komplementerében van zárt töröttvonal.

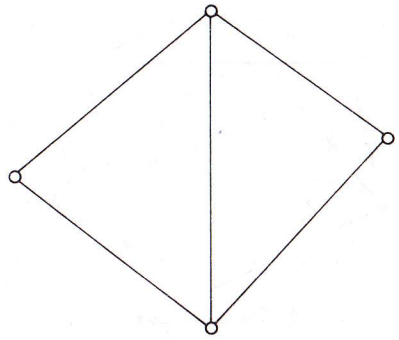
58. Mutassuk meg, hogy van olyan 6 szögpontú, egyszerű gráf, hogy benne is és a komplementerében is (pontosan) egy „háromszög" van.

***59.** Gráfok segítségével oldjuk meg a következő feladatot:
Tudjuk, hogy Tamás, János és István feleségei Judit, Mária és Zsuzsa, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Mindegyik házaspárnak van egy gyermeke. A gyerekek nevei: Emmi, András és Miska. Állapítsuk meg, hogy kik tartoznak egy-egy családba, ha tudjuk még a következő információkat:
1. Mária és István gyermekei együtt fociznak az iskola focicsapatában.
2. Tamás fiát nem Andrásnak hívják.
3. János feleségét nem Zsuzsának hívják.

60. Van-e olyan 4, illetve 5 csúcsú, egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével?

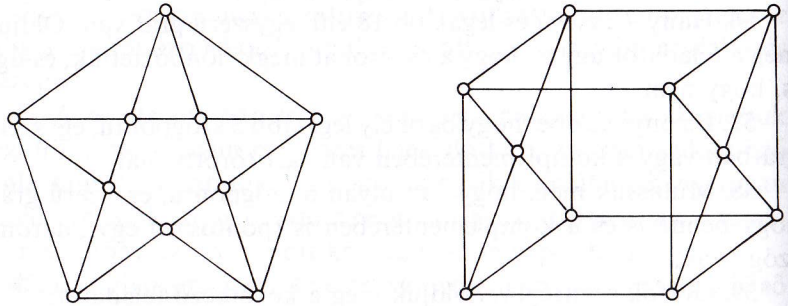
61. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráf csúcsainak a száma páros, de 4-gyel nem osztható, akkor nem lehet olyan részgráfja, amely izomorf a komplementerével.

62. Hány olyan számozott szögpontú gráf van, amely a *23. ábra* gráfjával izomorf?



23. ábra

63. A *24. ábrá*ról könnyen leolvasható az *a)* és *b)* gráf származtatása. Mindkét gráfnak 10 csúcsa van és minden csúcsuk negyedfokú, s így élszámuk is egyenlő. Izomorf-e a két gráf?



a) *b)*

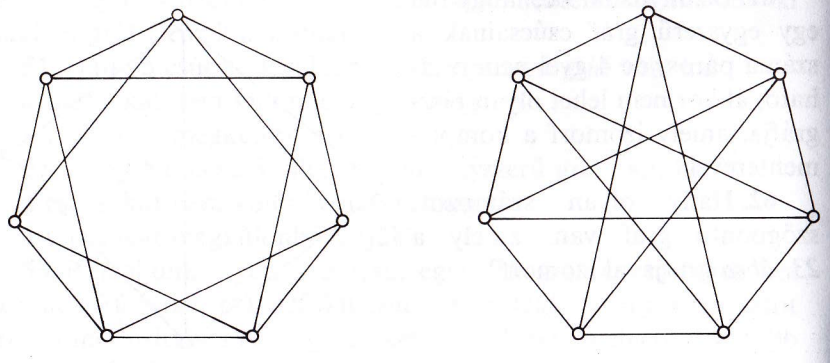
24. ábra

64. Rajzoljunk két 5 csúcsú, egyszerű gráfot, amelyekben a csúcsok fokszámai 1; 2; 2; 2; 3, de a két gráf nem izomorf.

65. Tekintsük egy kocka csúcsait egy gráf csúcsainak, éleit a gráf éleinek. Hagyjuk most el a kocka két szemközti (párhuzamos) élét, s helyettük húzzuk meg az elhagyott élek által meghatározott téglalap átlóit a gráf éleiként. Izomorf-e az így kapott gráf az eredetivel?

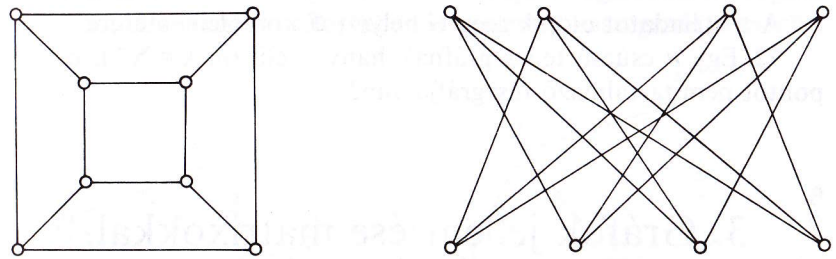
66. Izomorf-e bármely két olyan 8 csúcsú gráf, melyeknek minden csúcsa harmadfokú?

67. Izomorf-e a *25. ábra a)* és *b)* gráfja?



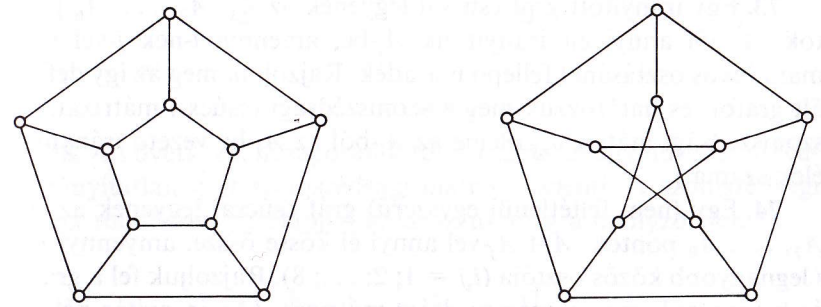
a) *25. ábra* *b)*

68. Izomorf-e a *26. ábra a)* és *b)* gráfja?



a) *26. ábra* *b)*

69. Izomorf-e a *27. ábra a)* és *b)* gráfja?

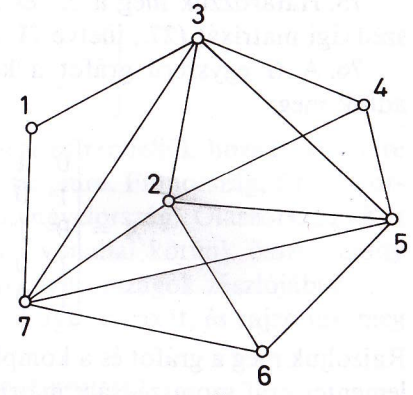


a) *27. ábra* *b)*

70. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz zárt töröttvonalat, akkor G komplementerének legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van.

71. A *28. ábrán* egy 7 csúcsú G gráfot adtunk meg.

a) Rajzoljuk meg G-nek az 1; 2; 3; 5; 6 csúcshalmaz által feszített részgráfját.



28. ábra

b) Maximálisan hány csúcsát lehet kijelölni G-nek, hogy azok teljes részgráfot feszítsenek ki?

c) A *b)* feladatot oldjuk meg G helyett G komplementerére.

72. Egy n csúcsú teljes gráfnak hány k élű ($n, k \in \mathbf{N}^+$), izolált pontot nem tartalmazó részgráfja van?

3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix

73. Egy irányított gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pontok. A_i-ből annyi élt irányítunk A_j-be, amennyi i-nek j-vel való maradékos osztásánál fellépő maradék. Rajzoljuk meg az így definiált gráfot, és határozzuk meg a szomszédsági (csúcs-) mátrixát. (A szomszédsági mátrix $a_{i,j}$ eleme az A_i-ből az A_j-be vezető irányított élek száma.)

74. Egy (nem feltétlenül egyszerű) gráf csúcsai legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_8$ pontok. A_i-t A_j-vel annyi él kösse össze, amennyi i és j legnagyobb közös osztója ($i,j = 1; 2; \ldots; 8$). Rajzoljuk fel a gráfot és határozzuk meg a szomszédsági mátrixát. (Az irányítás nélküli éleket úgy tekintjük, hogy azok mindkét módon irányítva vannak.)

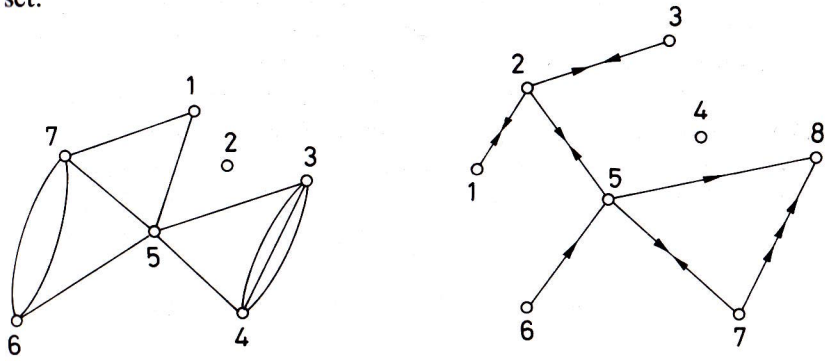
75. Határozzuk meg a *22.* és *28. ábrán* megadott gráfok szomszédsági mátrixát (**27.**, illetve **71.** feladat).

76. A G egyszerű gráfot a következő A-val jelölt mátrixával adtuk meg:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rajzoljuk meg a gráfot és a komplementerét, majd írjuk fel a komplementer gráf szomszédsági mátrixát.

77. A *29. ábrán* két gráfot adtunk meg (*a)* és *b)*). Írjuk fel mindkét gráf szomszédsági mátrixát, és adjuk meg a mátrixok egyes soraiban, illetve egyes oszlopaiban lévő elemek összegének a jelentését.



a) *b)*

29. ábra

78. A következő, hézagosan kitöltött táblázat egy hurokél nélküli, irányítatlan gráf szomszédsági mátrixát jelenti. A szomszédsági mátrix tulajdonságai alapján határozzuk meg a hiányzó elemeit.

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & . & 0 \\ . & . & . & 2 & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . \end{bmatrix}$$

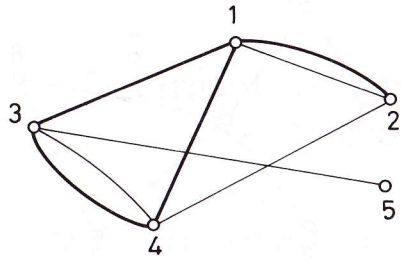
79. Vegyünk fel a síkon 8 pontot és rendeljük hozzájuk rendre a következő országokat: Ausztria, Belgium, Finnország, Franciaország, Hollandia, Magyarország, Lengyelország, Olaszország. Két különböző pontot (országot) annyi vonallal kötünk össze, ahány közös szín szerepel a pontokhoz rendelt országok zászlójában.

a) Irjuk fel a kapott gráf szomszédsági mátrixát, és rajzoljuk meg a gráfot.

b) Döntsük el, hogy helyes-e a következtetés:

Ha a kapott mátrix i-edik sorának j-edik eleme, valamint a j-edik sorának a k-adik eleme pozitív, akkor az i-edik sorának k-adik eleme is pozitív.

80. Legyen A egy egyszerű gráf szomszédsági mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy az $A \cdot A(= A^2)$ mátrix főátlójának elemei éppen a gráf csúcsainak a fokszámai.



30. ábra

81. A *30. ábrán* 5 várost ábrázoltunk 1-től 5-ig számozott pontokkal. Két várost vékony vonallal kötöttünk össze, ha van köztük autóbuszjárat, és vastag vonallal, ha van köztük vasúti összeköttetés. Irjuk fel mindkét gráf (vékony vonalas és vastag vonalas) szomszédsági mátrixát és jelöljük őket A-val, illetve B-vel.

a) Mit jelentenek az $A+B$ mátrix elemei?

b) Mit jelentenek az $A \cdot B$, illetve $B \cdot A$ mátrixok elemei?

c) Mit jelentenek az A^2, illetve B^2, valamint az A^2+B^2 mátrix elemei?

82. Készítsünk egy 5 csúcsú, teljes, irányított gráfot. Az élek irányítását pl. pénzfeldobással döntsük el.

a) Határozzuk meg a gráf A szomszédsági mátrixát.

b) Határozzuk meg az A^2 mátrixot, és keressük meg elemeinek a jelentését.

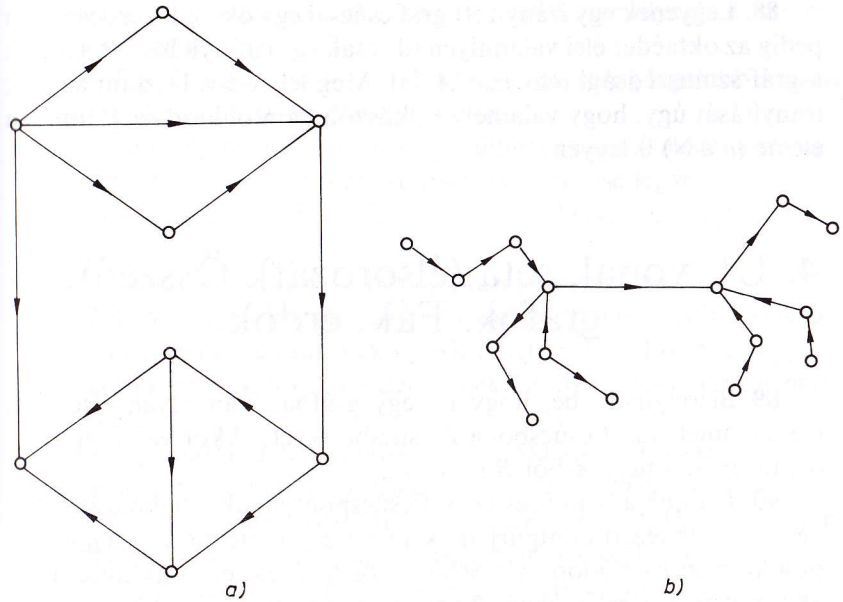
c) Határozzuk meg az A^3 mátrixot, és keressük meg elemeinek a jelentését.

d) Adjuk meg az $A+A^2+A^3+A^4$ mátrix elemeinek a jelentését.

83. Bizonyítsuk be, hogy ha A egy teljes, irányított gráf (többszörös él is megengedett) szomszédsági mátrixa, akkor az $A+A^2$ mátrixának van olyan sora és olyan oszlopa, amelynek minden eleme pozitív.

84. Határozzuk meg a *31. ábrán* megadott *a)* és *b)* gráfok szomszédsági mátrixának a 10. hatványát.

85. Egy 3 szögpontú teljes gráf éleinek tetszés szerinti irányítása

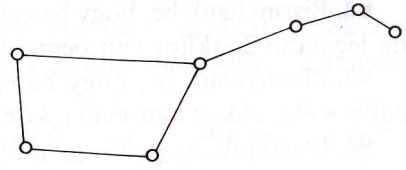


31. ábra

esetén adjuk meg a gráf szomszédsági mátrixának n-edik hatványát ($n \in \mathbf{N}^+$).

86. Lássuk el egy fagráf minden élét egy (és csak egy) irányítással, és jelöljük A-val az így kapott irányított gráf szomszédsági mátrixát. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $n_0(\in \mathbf{N})$ küszöbszám, hogy ha $n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq n_0$, akkor az A^n mátrix minden eleme 0. Milyen felső korlátot tudunk adni n_0-ra? Igaz-e a feladat állítása fa helyett erdőre, s ha igen, akkor hogyan módosul az n_0-ra adott felső korlát?

87. Adjunk tetszés szerinti irányítást a *32. ábrán* megadott gráf minden élének (de csak egyet). Határozzuk meg az így kapott irányított gráf szomszédsági mátrixának n-edik hatványát ($n \in \mathbf{N}^+$).


32. ábra

88. Legyenek egy irányított gráf csúcsai egy oktaéder csúcsai, élei pedig az oktaéder élei valamilyen (de csak egy) irányítással, s jelöljük a gráf szomszédsági mátrixát A-val. Meg lehet-e választani az élek irányítását úgy, hogy valamely n_0 küszöbszámtól kezdve A^n minden eleme ($n \in \mathbf{N}$) 0 legyen?

4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők

89. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van olyan élsorozat (séta), amely az A csúcsból a B csúcsba vezet, akkor van a gráfban olyan út is, amely A-ból B-be vezet.

90. Jelöljük a nem üres G gráf csúcspontjainak a halmazát $S(G)$-vel. $S(G)$ rendezett pontpárjainak a halmazán értelmezzük a ϱ relációt a következő módon: $A \in S(G)$ és $B \in S(G)$ esetén A akkor és csak akkor van a ϱ relációban B-vel, ha A-ból vezet út B-be vagy ha $A = B$. Vizsgáljuk meg az alábbi következtetéseket:

$$A \in S(G) \Rightarrow A \varrho A;$$
$$A \in S(G),\ B \in S(G),\ A \varrho B \Rightarrow B \varrho A;$$
$$A \in S(G),\ B \in S(G),\ C \in S(G),\ A \varrho B,\ B \varrho C \Rightarrow A \varrho C.$$

Értelemszerű módosítással vizsgáljuk meg az analóg kérdéseket irányított gráfok esetén is.

91. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kör két különböző pontját olyan út köt össze, amelynek nincs közös éle a körrel, akkor a kör és az út együtt legalább három kört határoz meg. Igaz-e hasonló állítás irányított gráfok esetén?

92. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább 2, akkor van benne kör.

93. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú gráfnak van legalább n éle, akkor van benne kör.

94. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma 2, akkor az vagy egyetlen kör, vagy több, közös csúcs nélküli (pontfüggetlen) körre esik szét.

95. Milyen szerkezetűek azok a gráfok, amelyekben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2?

96. Egy öttagú társaság minden tagja a társaság legalább 3 másik tagjával (kölcsönös) ismeretségben van.

a) Bizonyítsuk be, hogy a társaság leülhet egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek mindkét szomszédja ismerőse legyen.

b) Igaz-e a feladat állítása öttagú társaság helyett hattagú társaság esetén is?

c) Igaz-e a feladat állítása héttagú társaság esetén is?

97. Egy öttagú társaságban mindenkinek van legalább 3 ismerőse (az ismeretségek kölcsönösek). Leültethető-e közülük négy egy kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

98. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 barátja van. Egy alkalommal 6 mozijegyet kaptak, három moziba, mindegyikbe kettőt. Mindenki csak valamelyik barátjával együtt hajlandó moziba menni. Meg tudják-e szervezni a mozilátogatást?

99. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n szögpontú, egyszerű gráf minden pontjának a fokszáma legalább k, akkor van a gráfban legalább $k+1$ hosszúságú kör ($n, k \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$, $k \geqq 2$).

100. Igaz marad-e az előző feladat állítása, ha benne a „legalább $k+1$" helyett csak „$k+1$"-et írunk?

101. Bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráf két leghosszabb útja metszi egymást.

102. Van-e olyan gráf, amelynek minden csúcsa legalább harmadfokú, és minden körének hossza osztható egy, 2-nél nagyobb egész számmal?

103. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz hurokélt, és minden pontjának a fokszáma legalább 3, akkor van benne páros hosszúságú kör.

104. Igaz-e, hogy ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább k ($k \in \mathbf{N}$ és $k \geqq 2$), akkor a gráf minden csúcsát tartalmazza legalább egy kör?

105. Egy 5, illetve 6 csúcsú teljes gráfban hány olyan kör van, amely tartalmazza a gráfnak egy kijelölt csúcsát?

106. Egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$; $n \geqq 3$) teljes gráfban hány olyan kör van, amely tartalamzza a gráfnak egy kijelölt csúcsát?

107. Egy n csúcsú, teljes gráfnak ($n \in \mathbf{N}$; $n \geqq 3$) hány különböző köre van?

108. Adott egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$), teljes gráf. Lehet-e úgy irányítani az éleit (mindegyiket csak egyik irányban), hogy az így kapott irányított gráfban egyetlen irányított kör se legyen?

109. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő gráf bármely körének egy tetszőleges élét elhagyva, összefüggő gráf marad vissza.

110. Legyen e a G összefüggő gráfnak olyan éle, amelyet elhagyva G-ből, a kapott részgráf nem összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy e nem lehet G-beli kör éle.

111. Bizonyítsuk be, hogy ha az összefüggő G gráfban nincs olyan kör, amely a G-beli e élt tartalmazná, akkor G-ből e-t elhagyva, a kapott gráf nem lehet összefüggő.

112. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$), összefüggő gráfnak n-nél kevesebb éle van, akkor van a gráfnak elsőfokú csúcsa.

113. Van-e olyan, legfeljebb 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely nem összefüggő, és minden csúcsa másodfokú?

114. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf minden csúcsa másodfokú, akkor a gráf egyetlen kör.

115. Az összefüggő G gráf csúcsait piros és kék színnel kiszíneztük. (Mindkét színt használtuk.) G éleit a következőképpen színezzük: ha az él két végpontja azonos színű, akkor az él is ugyanazt a színt kapja, ellenkező esetben feketére színezzük. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van fekete éle.

116. Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő G gráfnak egy nem üres G' részgráfja nem tartalmazza G-nek minden pontját, akkor van G-nek olyan éle, amely nem éle G'-nek és egyik végpontja G'-beli, a másik nem.

117. Bizonyítsuk be, hogy az n szögpontú ($n \in \mathbf{N}^+$), összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

118. Egy nemzetközi konferencián az n résztvevő meg tudja érteni egymást, esetleg közülük felkért tolmácsok segítségével. Mutassuk meg, hogy akkor legalább $n-1$ különböző pár résztvevő tolmács nélkül is tud beszélgetni.

119. Rajzoljunk 7 szögpontú, nem összefüggő, 15 élű, egyszerű gráfot.

120. Hány olyan 8, illetve 9 csúcsú, nem összefüggő, egyszerű gráf van, amelynek minden csúcsa legalább harmadfokú? (A csúcsok számozásától tekintsünk el.)

121. Egy nemzetközi konferencián 20 küldött vett részt. Minden küldött legalább 10 társával címet váltott (megadták egymásnak a címüket). Később bármelyikük tudja-e értesíteni egy eseményről az összes többit, ha:

a) minden küldött hajlandó közvetítésre;

b) egy küldött nem hajlandó közvetítésre?

122. Egy felügyelő nyomoz. A teremben 12 gyanús személy van. A felügyelő tudja, hogy a gyanús társaság minden tagja legalább 6 másik taggal ismeretségben van. A felügyelő a társaság névsorát odateszi egyikük elé és megkéri, hogy azon jelölje meg, akiket ismer, majd a megjelölt személyeket kéri ugyanerre. A felügyelő ezután ránéz a névsorra, látja, hogy van rajta megjelöletlen név, s ebből tudja, hogy valami nincs rendben. Honnan tudhatta?

123. Igazoljuk, hogy ha egy $2n$ csúcsú G, egyszerű gráf minden csúcsának a fokszáma legalább n ($n \in \mathbf{N}^+$), akkor G összefüggő. Igaz-e, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet legfeljebb 2 hosszúságú út?
Igaz-e, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet 2 hosszúságú út?

124. Adott a síkon $2n$ pont ($n \in \mathbf{N}^+$), s ezeket lefedjük körlapokkal. Mutassuk meg, hogy ha minden körlap legalább $n+1$ megadott pontot fed, akkor a $2n$ pont közül bármelyik kettő összeköthető körlapokkal lefedett töröttvonallal.

125. Egy ország n városa közül ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$) bármely kettőt vagy közvetlen repülőjárat, vagy közvetlen hajójárat köt össze. Bizonyítsuk be, hogy vagy a hajójáratokat, vagy a repülőjáratokat meg lehet szüntetni úgy, hogy bármely két város között fennmaradjon az összeköttetés.

126. Igaz-e bármely egyszerű gráfra, hogy vagy (maga) a gráf, vagy a komplementere összefüggő? Állításunkat indokoljuk.

127. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 4$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan n csúcsú, összefüggő gráf, amelynek a komplementere is összefüggő.

128. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráf egy G' nem üres

részgráfja nem tartalmazza G minden élét, akkor van G-nek olyan éle, amely nincs benne G'-ben, de legalább az egyik végpontja G'-ben van.

129. Legyen G összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy létezik olyan élsorozat (séta), amely G minden élét pontosan kétszer tartalmazza.

130. Az egyik megye 22 települése közül ötben van kórház. Legalább hány olyan utat kell megépíteni, amely két-két települést köt össze azért, hogy bármely településről legalább az egyik kórházba el lehessen jutni kiépített úton?

131. Legalább hány élük van az n csúcsú és k komponensű $(n,k \in \mathbf{N}^+)$ gráfoknak?

132. 4, 5, illetve 6 város között összefüggő vasúthálózatot akarunk kiépíteni. Hány különböző módon tehetjük ezt meg, ha felesleges vonalat nem akarunk megépíteni?

133. Bizonyítsuk be, hogy ha egy k komponensű gráf csúcsainak a száma n, éleinek a száma e, $(e,n,k \in \mathbf{N}^+)$, akkor van benne legalább $e-n+k$ kör.

134. Tudjuk, hogy az n szögpontú $(n \in \mathbf{N},\ n \geqq 2)$, egyszerű gráf bármely két, nem szomszédos csúcsának a fokszámösszege legalább n. Mutassuk meg, hogy a szóban forgó gráf összefüggő.

135. Igazoljuk, hogy ha az n csúcsú, egyszerű, G gráf egy G' részgráfja az alább felsorolt négy tulajdonság közül hárommal rendelkezik, akkor a negyedik tulajdonsággal is rendelkezik:

1. összefüggő;
2. körmentes;
3. csúcsainak száma n;
4. éleinek a száma $n-1$, $(n \in \mathbf{N}^+)$.

136. Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább 2 csúcsú fagráfnak van elsőfokú csúcsa. Igaz-e, hogy legalább két elsőfokú csúcsa is van?

137. Mutassuk meg, hogy ha egy vegyület molekuláris modellje fagráf, akkor minden molekula tartalmaz legalább két egyvegyértékű atomot.

138. Bizonyítsuk be, hogy bármely, legalább 2 csúcsú fagráfban

legalább 2-vel több az elsőfokú csúcsok száma, mint a legalább harmadfokúaké.

139. Milyenek azok a fagráfok, amelyekben az elsőfokú csúcsok száma pontosan 2-vel nagyobb a legalább harmadfokú csúcsok számánál?

140. Bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráfnak van olyan fa részgráfja, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza (faváza).

141. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráfban van kör, akkor annak legalább három különböző faváza van.

142. Igazoljuk, hogy bármely fagráf két összefüggő részgráfjának közös éleiből és azok végpontjaiból álló gráf ugyancsak fa.

***143.** Bizonyítsuk be, hogy bármely fagráfnak van olyan csúcsa, amelyen az összes leghosszabb útja áthalad (van lefogó pontja).

144. Tudjuk, hogy egy egyszerű gráfnak minden csúcsa legfeljebb másodfokú. Jellemezzük a gráfot.

145. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú és n élű, egyszerű, összefüggő gráfban $(n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3)$ pontosan egy kör van.

146. Rajzoljuk meg negyedíziglen visszamenőleg a családfánkat piros vonalakkal, majd rajzoljuk meg kék vonalakkal a kapott gráf komplementerét. (Feltesszük, hogy rokonházasság nem volt.)

a) Hány csúcsa van a felrajzolt gráfnak?

b) Hány piros, illetve hány kék éle van a felrajzolt gráfnak?

c) Hány olyan kör van a felrajzolt piros-kék gráfban, amelynek egyetlen kék éle van, a többi éle piros?

d) Általánosítsuk a feladatot n-edíziglen felrajzolt $(n \in \mathbf{N}^+)$ családfára.

147. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

148. Hány különböző, 5 csúcsú fa van, ha a csúcsait nem különböztetjük meg?

149. Rajzoljuk meg az összes lehetséges 5 csúcsú erdőt, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg. Hány különböző „látványt" nyújthat az erdő?

150. Hány éle van egy 4 fából álló, 12 szögpontú erdőnek? Soroljuk fel, hogy hány szögpontja lehet egy-egy fának, ha mindegyiknek van legalább egy éle.

151. Hány olyan erdő van, amelynek 5 éle van és minden fájának van legalább egy éle? (A fáknak sem a sorrendjét, sem a szögpontjait nem különböztetjük meg.)

152. Rajzoljuk meg azokat a 6, illetve 7 szögpontú, összefüggő gráfokat, amelyben nincs kör.

153. Hány különböző erdőt képezhet négy, 6 szögpontú fa, ha a fák sorrendjétől eltekintünk és csúcsaikat sem különböztetjük meg?

154. Egy 20 szögpontú fának 18 elsőfokú pontja van.

a) Hányadfokú lehet a további két pont?

b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?

c) Hány megoldása van a feladatnak, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

155. Hány olyan 8 csúcsú egyszerű gráf van, amelynek minden csúcsa másodfokú, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

156. Egy társaságban mindenkinek két ismerőse van. A társaság egyik tagja megsúg egy hírt egyik ismerősének. Mindenkinek, aki a hírt megtudja, tovább kell adnia.

a) A hír elindítója visszahallja-e az általa elindított hírt?

b) Eljut-e a társaság minden tagjához a hír?

c) Módosulnak-e az *a)*, illetve *b)* kérdésre adott válaszok, ha a feladatban a „két ismerőse" helyett azt írjuk, hogy „legalább két ismerőse"?

157. Egy 5 csúcsú gráf csúcsait az 1; 2; . . .; 5 számokkal jelöltük, élei az 1; 2 és a 2; 3 csúcsokat kötik össze. Egészítsük ki az 1; 2; 3 csúcsok által feszített részgráfot az öt csúcs által meghatározott, teljes gráf favázává. Hány különböző módon tehetjük ezt meg?

158. Az 1; 2; . . .; 8 számokkal számozott, 8 csúcsú teljes gráf egy körmentes részgráfja legyen az a G' gráf, melynek csúcsai 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8 csúcsok, élei pedig az (1; 2), (2; 3), (5; 6), (7; 8) élek. Egészítsük ki G'-t a teljes gráf favázává. Hány különböző módon tehetjük ezt meg?

159. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő gráf minden körmentes részgráfja a gráf favázává bővíthető.

160. Bináris fák segítségével keressük meg a következő infix kifejezések prefix és postfix alakját.

a) $(a+b)c$; *b)* $ac+b$; *c)* $a+(b+c)d-e$; *d)* $ac+b(d+e)-f$.

161. A $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ polinom ($a,b,c,d,e \in \mathbf{R}$) helyettesítési értékét szokás a $P(x) = [((ax+b)x+c)x+d]x+e$ alakból (Horner-elrendezés) számítani. Írjuk fel $P(x)$-et, utóbbi alakjából kiindulva, prefix és postfix alakban, bináris fájának felhasználásával.

162. Bináris fa segítségével írjuk fel az $ax^2+bx+c = 0$ egyenlet (a, b, $c \in \mathbf{R}$) gyökeit prefix és postfix alakban.

163. Készítsünk bináris fát egy 4-résztvevős, körmérkőzéses ping-pongverseny abszolút győztesének a keresésére.

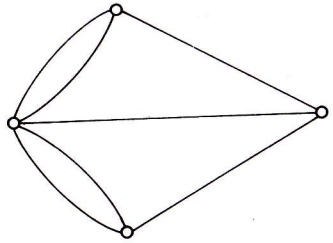
164. Írjuk le bináris fával azt az algoritmust, amely az x_1, x_2, x_3, x_4 valós számok közül kiválaszt egy legnagyobbat.

165. Írjuk le bináris fával azt az algoritmust, amely az x_1, x_2, x_3 valós számokat nemcsökkenő sorozatba rendezni.

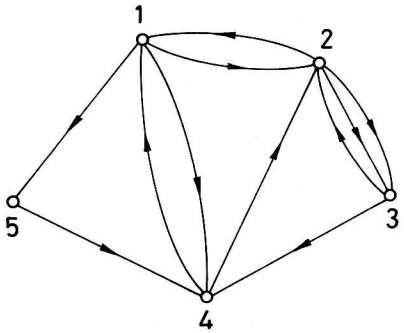
166. 6 szál gyufa van az asztalon. *A* és *B* felváltva vesz el belőle legalább 1-et, de legfeljebb 3-at. Az nyer, aki az utolsó gyufát veszi el. Rajzoljuk meg a játék fáját, és döntsük el, hogy a kezdőnek vagy a másiknak van nyerő stratégiája. Oldjuk meg a feladatot 6 helyett 7 gyufaszál esetére is.

5. Gráf éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör

167. Legalább hány hidat kellene építeni a „königsbergi hidak" mellé, hogy lehessen olyan körsétát tenni, amelynek során minden hídon pontosan egyszer haladunk át (*33. ábra*)?



33. ábra



34. ábra

168. Egy éjjeliőrnek az 1; 2; 3; 4; 5 számokkal jelölt pontokat kell ellenőriznie. Egy alkalommal a szállásáról indulva a *34. ábrán* látható utat járta be a nyilakkal jelzett irányban. Hol van a szállása, és hol van most?

169. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráfnak minden csúcsa páros fokszámú, és A_0 nem izolált pontja G-nek, akkor a G tartalmaz A_0-on áthaladó kört.

170. Rajzoljunk a síkban egy 7 csúcsú, teljes gráfot a ceruza felemelése nélkül.

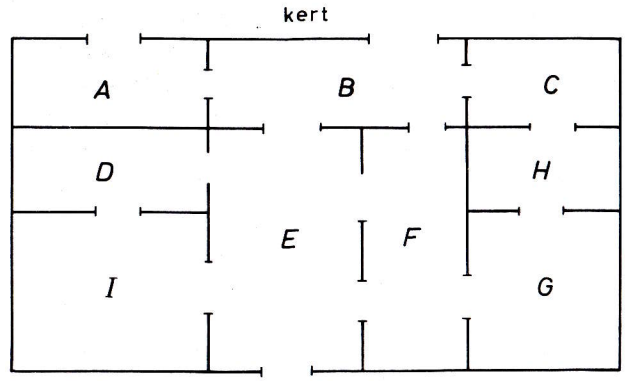
171. Igazoljuk, hogy ha egy nem üres gráf minden csúcsának a fokszáma páros, akkor kijelölhetők a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle a kijelölt körök közül pontosan egyben szerepeljen.

172. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf összefüggő és minden csúcsának a fokszáma páros, akkor van olyan zárt vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza (Euler-vonal). Fogalmazzuk meg a tétel megfordítását és bizonyítsuk be, feltéve, hogy G nem tartalmaz izolált pontot.

173. Mutassuk meg, hogy ha G összefüggő gráf, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van, akkor van olyan nyitott vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (Nyitott Euler-vonal.) Fogalmazzuk meg a tétel megfordítását és bizonyítsuk be, feltéve, hogy G nem tartalmaz izolált pontot.

174. Kovács úr házának az alaprajzát a *35. ábra* mutatja. Kovács úr elégedetten nézegeti a tapétát a falon. Éppen most fejezte be szokásos ellenőrző körútját, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladt át. Hol van most?

175. A dominólapokra a 0; 1; . . .; 8 számokból képezett számpárok vannak felírva, és minden lehetséges számpár csak egy lapon szerepel. Hány lap van egy készletben?

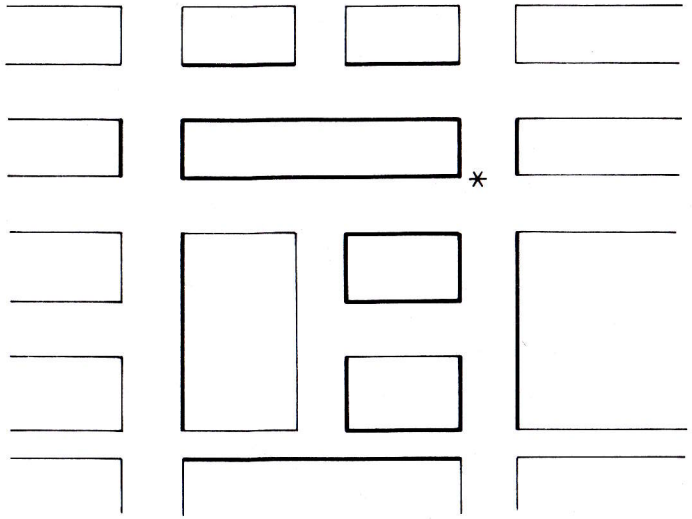


35. ábra

176. A 0-tól 8-ig számozott dominókészlet minden lapja elhelyezhető-e, a kirakás szabályai szerint, egyetlen „körben"? („Nyaklánccá" lehet-e „fűzni" a dominókészlet minden tagját, a szomszédos lapokra előírt szabályok szerint?)

177. A dominókészlet lapjait jellemezzük a koordinátasík bizonyos rácspontjaival, és annak alapján is adjunk algoritmust a dominókészlet lapjainak egyetlen körbe való beillesztésére.

178. A *36. ábrán* egy városrész térképe látható. Az újságkihordónak a vastag vonallal megjelölt járdákon kell végighaladnia. Készít-



36. ábra

sünk számára leggazdaságosabb bejárási tervet, ha a „*”-gal megjelölt helyről kell indulnia és oda is kell visszatérnie. (Az útkereszteződésekben az úttesten való áthaladást hagyjuk figyelmen kívül.)

179. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden csúcsa negyedfokú, akkor élei megszínezhetők pl. pirossal és kékkel (minden él egy és csak egy színnel) úgy, hogy minden csúcshoz két piros és két kék él illeszkedjen.

180. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráf minden csúcsa negyedfokú, akkor a gráfban két, közös él nélküli Euler-vonal létezik?

181. A G gráfot úgy konstruálták, hogy egy m csúcsú teljes gráfból elhagytuk az XY élt, az n csúcsú teljes gráfból pedig az UV élt, majd meghúztuk az UX és VY éleket ($m,n \in \mathbf{N}^+$).
m és n milyen értékei esetén lesz G-ben
a) Euler-vonal?
b) csak nyitott Euler-vonal?

182. Lehet-e a königsbergi hidakon olyan körsétát tenni, hogy minden hídon pontosan kétszer haladjunk át, egyszer az egyik, egyszer a másik irányban?
A feladat általánosításaként bizonyítsuk be, hogy bármely összefüggő gráf éleit be lehet járni úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladjunk át, egyszer az egyik, egyszer a másik irányban, és a végén visszatérjünk abba a pontba, amelyikből indultunk.

183. Egy 3 egységnyi élű kockát 6 síkkal 27 egységkockára osztottunk fel. A szomszédos egységkockák közös lapjain egy-egy ajtót vágunk. Lehet-e olyan körsétát tenni, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladunk át, s a szomszédos egységkockák között csak ajtón közlekedünk?

184. Egy kocka minden lapjára mint alaplapra helyezzünk egy gúlát. Az így kapott poliéder csúcsai és élei értelemszerűen egy gráfot határoznak meg. Van-e ennek a gráfnak Euler-vonala, illetve Hamilton-köre?

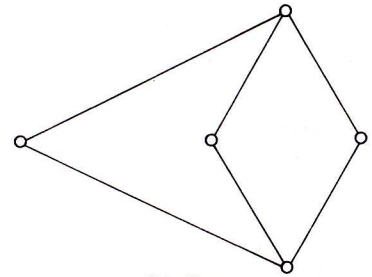
185. Oldjuk meg a **46.** feladatot az Euler-vonal segítségével.

186. Adjunk meg olyan 5 csúcsú gráfot, melynek minden csúcsa legalább másodfokú, de nincs Hamilton-köre.

187. Egy 7 tagú társaságban mindenkinek van legalább 4 ismerőse. Leültethető-e közülük 6 egy kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

188. Igaz-e, hogy ha egy 7 tagú társaságban mindenkinek van legalább 4 ismerőse, akkor közülük bármelyik 6 leültethető kerek asztal köré úgy, hogy mindegyiknek mindkét szomszédja ismerőse legyen?

189. A *37. ábrán* egy 5 csúcsú gráfot adtunk meg, amelynek nincs Hamilton-köre. Lesz-e Hamilton-köre a gráfnak, ha a komplementerének:
a) egy tetszés szerinti élét hozzácsatoljuk;
b) két tetszés szerinti élét hozzácsatoljuk?



37. ábra

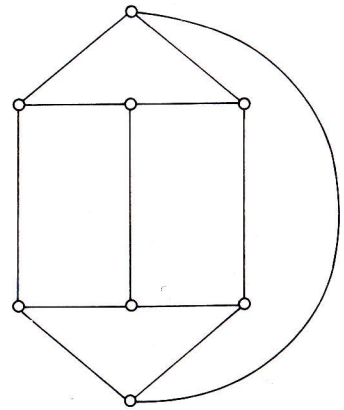
190. Igaz-e, hogy bármely 5 csúcsú és 8 élű gráfban van Hamilton-kör?

191. Legalább hány élt kell csatolni ahhoz az 5 csúcsú gráfhoz – a saját komplementeréből –, amelynek 4 éle van, hogy biztosan legyen benne Hamilton-kör?

192. Adjunk meg olyan 6 csúcsú és 11 élű, egyszerű gráfot, amelynek nincs Hamilton-köre.

193. Van-e Hamilton-köre bármely 6 csúcsú és 12 élű, egyszerű gráfnak?

194. Van-e Hamilton-köre a *38. ábrán* megadott gráfnak?



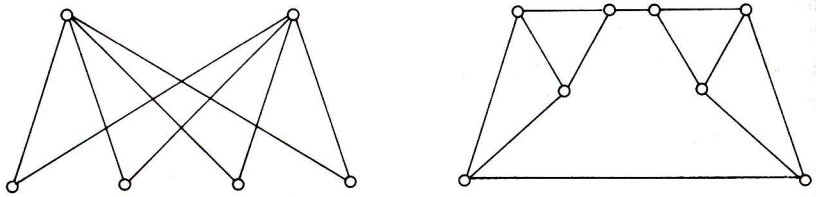
38. ábra

195. Jelentsék az előző feladatban megadott gráf élei egy körmérkőzéses verseny eddig lejátszott mérkőzéseit. Le lehetett-e bonyolítani a mérkőzéseket három fordulóban úgy, hogy az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kellett lejátszani?

196. Hány Hamilton-köre van a tetraéder, illetve a hexaéder csúcsai és élei által meghatározott egyszerű gráfnak?

197. Van-e Hamilton-köre az oktaéder, a dodekaéder, illetve az ikozaéder csúcsai, valamint élei által meghatározott egyszerű gráfnak?

198. Hány Hamilton-körük van a *39. ábrán* megadott *a)*, illetve *b)* gráfoknak?



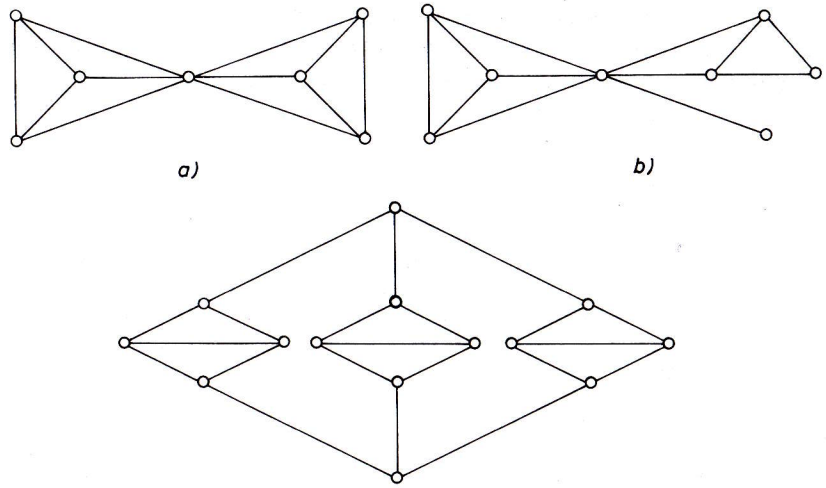
39. ábra

199. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf egy K körének bármely élét törölve a gráf egy leghosszabb útját nyerjük, akkor K Hamilton-köre a gráfnak.

200. Bizonyítsuk be, hogy ha az összefüggő G gráfból k számú pontjának törlése révén k-nál több komponensből álló gráfot kapunk, akkor G-nek nincs Hamilton-köre; ha pedig $k+1$-nél is több komponensből álló gráfot kapunk, akkor G-nek nincs Hamilton-útja sem.

201. Van-e Hamilton-körük, illetve Hamilton-útjuk a *40. ábrán* megadott *a)*, *b)*, *c)* gráfoknak?

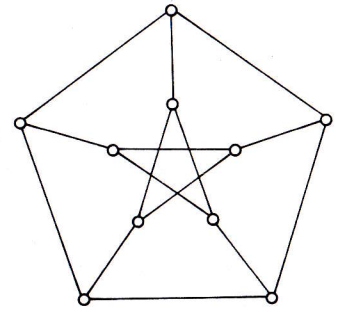
202. Be lehet-e járni a 4×4-es sakktáblát a huszárral (a sakk szabályai szerint) úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk, és a végén visszatérjünk arra a mezőre, amelyikről indultunk? Elvégezhető-e a bejárás, ha nem kell visszatérnünk arra a mezőre, amelyről indultunk?



40. ábra

203. Bizonyítsuk be, hogy ha $n(\in \mathbf{N})$ páratlan, akkor az $n \times n$-es sakktábla nem járható be huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk, és a végén visszatérjünk arra mezőre, amelyről indultunk.

***204.** Határozzuk meg a *41. ábrán* megadott gráfban (Petersen-gráf) található körök hosszának a minimumát és maximumát. Ábrázolhatja-e a szóban forgó gráf egy 10 résztvevős, körmérkőzéses verseny első három fordulóját, ha az egyes fordulók mérkőzéseit egy időben kell lejátszani?



41. ábra

205. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 2$), egyszerű gráf egy leghosszabb útja két végpontjának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráf leghosszabb útjai között olyan, amelynek végpontjai szomszédosak.

206. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$), egyszerű gráf bármely két, nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.

***207.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geqq 3$), egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ éle van, akkor van Hamilton-köre.

***208.** Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú ($n \geqq 3$), egyszerű gráf minden csúcsának a foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak Hamilton-köre. (Lásd a **199.** és **205.** feladatot!)

209. Legyen $\vec{G}$ egy tetszőleges teljes gráf éleinek tetszés szerinti irányításával nyert irányított gráf. Mutassuk meg, hogy $\vec{G}$-ben van irányított Hamilton-út.

210. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 2 szögpontú teljes gráfnak egy élét töröljük, akkor az így kapott gráfnak van olyan irányítása (minden élt egy és csak egy módon irányítunk), amely nem tartalmaz (irányított) Hamilton-utat.

211. Igazoljuk, hogy ha egy élt is tartalmazó, irányított gráf minden pontjába annyi él fut be, mint amennyi abból kifut, akkor kijelölhetők a gráfban irányított körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

212. Igazoljuk, hogy ha a G összefüggő gráf élei úgy vannak irányítva, hogy bármely csúcsába ugyanannyi él fut be, amennyi onnan ki, akkor az így nyert irányított gráfnak van olyan irányított zárt vonala, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. (Irányított Euler-vonal.)

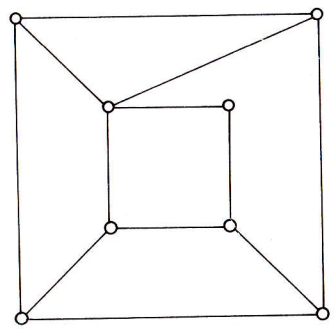
213. Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet irányított út. Igaz-e, hogy erősen összefüggő gráf bármely irányított körének egy tetszőleges élét elhagyva, erősen összefüggő gráf marad vissza?

214. Legyen $\vec{G}$ a G összefüggő gráf éleinek tetszőleges irányítása révén kapott irányított gráf, $\vec{G}'$ pedig $\vec{G}$-nek olyan részgráfja, amely nem tartalmazza $\vec{G}$-nek minden élét. Bizonyítsuk be, hogy van $\vec{G}$-nek $\vec{G}'$-be nem tartozó, olyan irányított éle, melynek kezdőpontja vagy végpontja $\vec{G}'$-ben van.

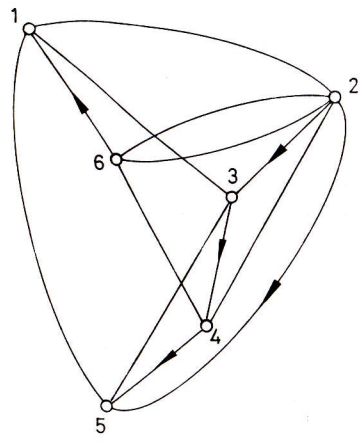
215. Legyen $\vec{G}$ erősen összefüggő gráf, $\vec{G}'$ pedig egy olyan részgráfja, amely nem tartalmazza $\vec{G}$ minden csúcsát. Bizonyítsuk be, hogy akkor van $\vec{G}$-nek olyan, $\vec{G}'$-be nem tartozó éle, amelynek kezdőpontja $\vec{G}'$-ben van, de végpontja nem, és van olyan is, amelynek a végpontja van $\vec{G}'$-ben, de a kezdőpontja nem.

216. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráfnak nincs olyan éle, amelyet elhagyva az összefüggőség megszűnne (hídja), akkor G éleit lehet úgy irányítani (mindegyiket csak egyik irányban), hogy a kapott, irányított gráf erősen összefüggő legyen.

217. Irányítsuk a *42. ábrán* megadott gráf éleit (csak egyik irányban) úgy, hogy a gráf erősen összefüggő legyen.



42. ábra



43. ábra

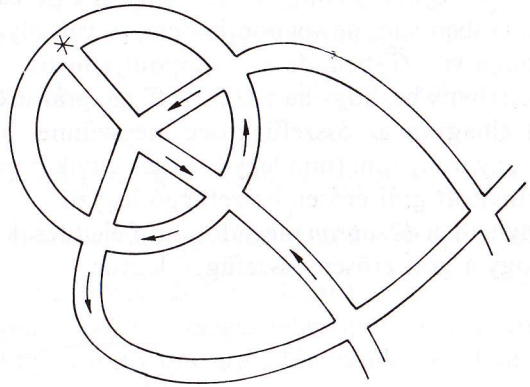
218. A *43. ábrán* látható gráf néhány élét már irányítottuk. Lehet-e a további éleket is – mindegyiket csak az egyik irányban – irányítani úgy, hogy a kapott irányított gráf:

a) tartalmazzon irányított Euler-vonalat;

b) erősen összefüggő legyen?

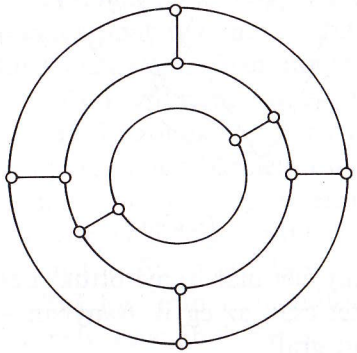
219. A *44. ábrán* látható városrész utcáit egy locsolóautónak végig kell locsolnia. Az egyirányú utcákon csak egyszer kell végighaladnia, a kétirányúakon viszont kétszer. A locsolóautónak is be kell tartania a közlekedési szabályokat. A „*”-gal jelölt helyről kell

indulnia és oda is kell visszatérnie. Tervezzük meg a bejárás gazdaságos útvonalát.



44. ábra

220. Egyirányúsítsuk az előző feladatban szereplő, kétirányú utcákat is úgy, hogy bármelyik útkereszteződésből bármelyik másikba el lehessen jutni a közlekedési szabályok megsértése nélkül.



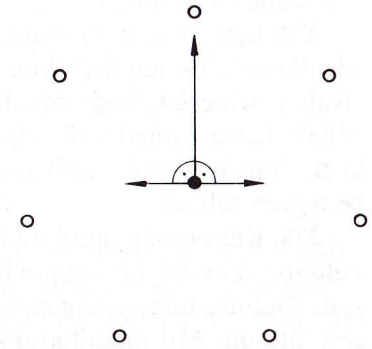
45. ábra

221. Egyirányúsítsuk a *45. ábrán* látható „térképen" az utakat úgy, hogy minden útkereszteződésből minden másikba el lehessen jutni a közlekedési szabályok megsértése nélkül. Vannak-e olyan utak, amelyeket tetszésünk szerint irányíthatunk?

222. Legyen $\vec{G}$ egy legalább 3 szögpontú, teljes gráf irányítása során nyert irányított gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\vec{G}$ akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha van irányított Hamilton-köre.

6. Páros gráfok, teljes részgráfok

223. A *46. ábrán* egy 7 oldalú, szabályos sokszög középpontja és csúcsai vannak feltüntetve. A középpont körül forgatni tudjuk (a síkban) a merev, *T* betű alakú „mutatót". A leírt szerkezet segítségével szervezzük meg 8 csapat körmérkőzéses versenyének a párosítását.

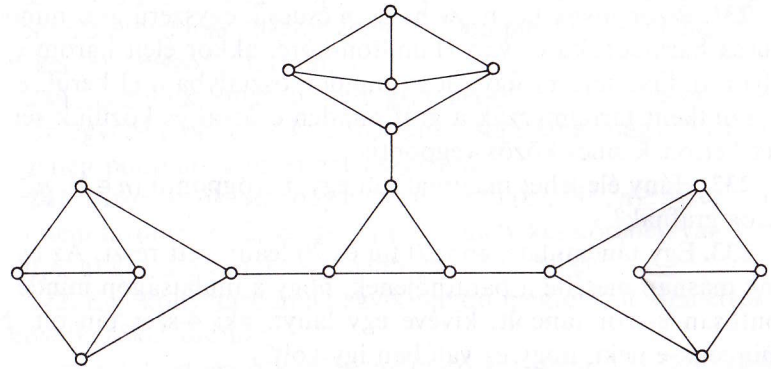


46. ábra

224. Az előző feladatban leírt szerkezettel hogyan lehet megszervezni körmérkőzéses verseny párosítását páratlan számú csapat esetén? Vissza lehet-e vezetni a párosítás megszervezését a páros számú csapat esetén kapott megoldásra?

225. Szervezzük meg 6, illetve 7 csapat körmérkőzéses versenyét 5, illetve 7, egy időben lejátszandó fordulóban.

226. A *47. ábrán* egy 18 csúcsú gráfot adtunk meg.



47. ábra

a) Van-e olyan részgráfja, amely egy 18 résztvevős, körmérkőzéses verseny egy fordulóját rögzítheti?
b) Rögzítheti-e a gráf az *a)*-ban leírt verseny három, egy időben lejátszandó fordulóját?

227. Egy vállalat 10 munkakörbe keres dolgozókat. 10 dolgozó jelentkezett, és mindegyikük két munkakört jelölt meg, amelyet elvállal. Kiderült, hogy minden munkakört pontosan két dolgozó vállalt. Lehet-e mind a 10 dolgozót foglalkoztatni úgy, hogy mindenki az általa megjelölt munkakörben dolgozzon és minden munkakör be legyen töltve?

228. Két osztály tanulói között sakkversenyt rendeznek. Csak a különböző osztályok tanulói játszanak egymás ellen egy-egy mérkőzést. Tudjuk, hogy eddig minden tanuló pontosan $k(\in \mathbf{N}^+)$ mérkőzést játszott. Mit mondhatunk az osztályok létszámáról?

229. 5 fiúból és 5 leányból álló társaságban minden fiúnak 4 leányismerőse, és minden leánynak 4 fiúismerőse van. Tudnak-e egyszerre táncolni párosával úgy, hogy mindenki ismerősével táncoljon?

230. Egy folyóiratban kitűzött 8 feladat mindegyikére 2-2 közlésre alkalmas megoldás érkezik. A szerkesztő észreveszi, hogy a 16 megoldás 8 megoldótól származik, mégpedig úgy, hogy mindegyiküknek 2-2 megoldása szerepel a kiválasztottak között. Közölhet-e a szerkesztő minden feladatra egy-egy megoldást úgy, hogy minden megoldónak is közölje egy megoldását?

231. Bizonyítsuk be, hogy ha a $2n$ csúcsú, egyszerű gráf minden csúcsa harmadfokú és van Hamilton-köre, akkor éleit három osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy minden osztályba n él kerül, ezek végpontként tartalmazzák a gráf minden csúcsát és közülük semelyik kettőnek sincs közös végpontja.

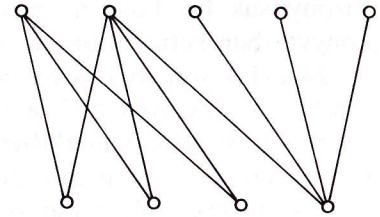
232. Hány éle lehet maximálisan egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$), páros gráfnak?

233. Egy táncmulatságon 20 fiú és 20 leány vett részt. Az egyik lány másnap mesélte a barátnőjének, hogy a mulatságon mindenki pontosan 8-szor táncolt, kivéve egy lányt, aki 4-szer táncolt. Mi elhinnénk-e neki, hogy ez valóban így volt?

234. Van-e olyan páros gráf, amely nem tartalmaz izolált pontot

és egy kivétellel minden pont foka egyenlő, a kivételes pont foka pedig kevesebb a többi fokszámánál?

235. Van-e 4 független éle (közös végpont nélküli éle) a *48. ábrán* megadott gráfnak?



48. ábra

236. Egy városrészben, az egyik utcakereszteződésből indulva, olyan körsétát tettünk, amelynek során páratlan számú utcán haladtunk végig (minden utca két kereszteződést köt össze). Mutassuk meg, hogy közben bejártunk egy páratlan számú utcából álló kört is. Fogalmazzuk meg az állítást gráfokra vonatkozó tétel formájában.

237. Tudjuk, hogy egy gráfban nincs páratlan hosszúságú kör. Mutassuk meg, hogy akkor csúcsainak a halmazát két diszjunkt részhalmazra lehet bontani úgy, hogy az azonos részhalmazba tartozó csúcsok a gráfban nem szomszédosak.

238. Bizonyítsuk be, hogy az összefüggő páros gráfok feszítő csúcshalmazai – sorrendtől eltekintve – egyértelműen meghatározottak.

239. Mutassuk meg, hogy van olyan 6 csúcsú, egyszerű gráf, amely nem tartalmaz háromszöget, a komplementere pedig pontosan két háromszöget tartalmaz.

240. Igazoljuk, hogy ha egy gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor egyetlen pontjának a fokszáma sem lehet nagyobb a gráf független pontjainak maximális számánál.

***241.** Bizonyítsuk be, hogy ha az n pontú ($n \in \mathbf{N}^+$, $n \geqq 5$), egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget és bármely két körének van közös pontja, akkor a gráfnak legfeljebb $3n-9$ éle lehet.

242. Egy könyvtárban az egyik napon megfordult személyekről a következőket tudjuk:
a) bármely 8 látogató között található két olyan személy, akik a könyvtárban találkoztak egymással;

b) két olyan személy nem találkozott egymással a könyvtárban, akiknek mindegyike találkozott egy harmadikkal is.
Bizonyítsuk be, hogy azon a napon senki sem találkozhatott a könyvtárban hétnél több személlyel.

243. Hat iskolából összesen 34 tanulót kell behívni egy sakkversenyre. A versenyen csak a különböző iskolák tanulói játszanak egymás ellen egy-egy mérkőzést. Hány tanulót kell behívni az egyes iskolákból, hogy a lehető legtöbb mérkőzésre kerüljön sor?

244. 38 sakkozót 5 csoportra kell osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belüli körmérkőzéses versenyek során lejátszandó mérkőzések száma (együttesen) minimális legyen. Milyen létszámú csoportokba osztanánk a sakkozókat?

245. Fiatal, tehetséges bokszolókat toboroznak. Egy alkalommal 4 súlycsoportból összesen 15-en jelentkeztek. Az egyes súlycsoportokon belül körmérkőzést rendeznek. Minimálisan hány mérkőzésre kell számítani?

246. Maximálisan hány élük lehet az n csúcspontú és k komponensű ($n,k \in \mathbf{N}^+$, $k \leqq n$), egyszerű gráfoknak?

247. Egy 5 csúcsú gráfban a független pontok maximális száma kisebb 3-nál. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van legalább 4 éle.

248. Legfeljebb hány éle lehet egy n szögpontú ($n \in \mathbf{N}^+$), nem összefüggő, egyszerű gráfnak?

249. Legfeljebb hány éle lehet egy n szögpontú, egyszerű gráfnak ($n \in \mathbf{N}^+$), ha nincs benne páratlan hosszúságú kör?

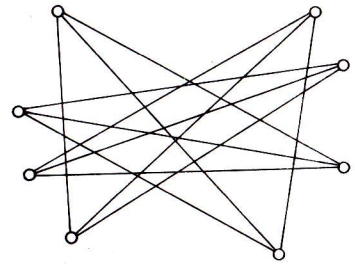
250. Maximálisan hány éle lehet egy n szögpontú, egyszerű gráfnak, ha:
a) nem tartalmaz 2 hosszúságú utat;
b) nem tartalmaz 3 hosszúságú utat?

***251.** Bizonyítsuk be, hogy bármely 6 szögpontú gráfban és a komplementerében együtt legalább két háromszög van.

252. Mekkora lehet maximálisan egy egyszerű gráf csúcspontjainak a száma, ha sem a gráf, sem a komplementere nem tartalmaz háromszöget?

253. Legyen G egy n csúcsú, egyszerű gráf, s jelöljük $\bar{G}$-sal a komplementerét. Adjunk meg továbbá két pozitív egész számot: k, l. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k-tól és l-től függő $f(k,l)$ küszöbszám, hogy ha $n \geqq f(k, l)$, akkor vagy van G-ben k csúcsú teljes gráf, vagy van $\bar{G}$-ban l csúcsú teljes gráf.

254. A *49. ábrán* látható gráf felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $f(3, 4) \geqq 9$.



49. ábra

255. Mutassuk meg, hogy $f(3, 4) = 9$.

256. Igazoljuk, hogy
a) $f(3, 4) < f(2, 4) + f(3, 3)$;
b) $f(k-1, l) + f(k, l-1) \geqq f(k, l)$.

257. Egy egységnyi élű kocka csúcsai közül kössük össze azokat, amelyek távolsága $\sqrt{2}$. Van-e az így kapott gráfban, illetve a komplementerében háromszög? Van-e az így kapott gráfban, illetve a komplementerében teljes négyszög?

258. Igazoljuk, hogy ha S a G egyszerű gráf maximális független ponthalmaza, akkor G bármely X pontjára igaz, hogy vagy X, vagy X-nek valamely szomszédja S-ben van.

259. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf bármely pontjához van olyan maximális független ponthalmaz, amely vagy tartalmazza a szóban forgó pontot, vagy tartalmazza annak legalább két szomszédját.

***260.** Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő, egyszerű gráf csúcsainak a száma legalább $2k + 1$ és minden csúcsa legalább k-adfokú ($k \in \mathbf{N}^+$), akkor van a gráfban $2k$ hosszúságú út.

7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula

261. Bizonyítsuk be konvex poliéderekre a következő állításokat:
1. Páros azoknak a csúcsoknak a száma, amelyekhez páratlan számú él csatlakozik.
2. A páratlan oldalú lapok száma páros.
3. Van legalább két lap, amelyet ugyanannyi él határol.

262. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliédernek van háromszög lapja, vagy van olyan csúcsa, amelyből három él indul ki.

***263.** Jelöljük egy konvex poliéder lapjainak a számát l-lel, csúcsainak számát c-vel, éleinek számát e-vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$c+l = e+2.$$

264. Két gráfról tudjuk, hogy izomorfok és síkba rajzolhatók. Tetszés szerinti módon síkba rajzolva őket, azonos számú részre osztják-e a síkot?

265. Síkba rajzolható-e az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes 5 csúcsú gráfból egy élt elhagyunk?

266. Bizonyítsuk be, hogy az 5 szögpontú teljes gráf nem rajzolható síkba.

267. Sík terepen három ház és három kút van. Minden házból minden kúthoz egy-egy utat szeretnénk építeni úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Lehetséges ez?

268. Ki lehet-e színezni az előző feladatban szereplő gráf éleit három színnel úgy, hogy három-három él legyen azonos színű és egyik csúcshoz se csatlakozzon két azonos színű él?

269. Maximálisan hány éle lehet egy 7 szögpontú, síkba rajzolható gráfnak? Rajzoljunk meg egy ilyen, maximális élszámú gráfot.

270. Egy sík terepen 20 sátor van. A sátrakat utakkal akarják összekötni úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Maximálisan hány út építhető ki?

271. Bizonyítsuk be, hogy ha az n csúcsú gráf síkba rajzolható, akkor maximálisan $3n-6$ éle lehet.

272. Igaz-e, hogy ha az n csúcsú egyszerű gráf éleinek a száma legfeljebb $3n-6$, akkor a gráf síkba rajzolható?

273. Síkba rajzolható-e az a gráf, amelynek csúcsai egy kocka csúcsai és a kocka éleinek felezőpontjai, éleit pedig úgy kapjuk, hogy a kocka csúcsait összekötjük a csúcshoz nem illeszkedő élek felezőpontjaival?
Síkba rajzolható-e a gráf komplementere?

274. Adott a síkon 6 pont. Össze lehet-e kötni mindegyiket másik néggyel úgy, hogy az összekötő (esetleg görbe) vonalak ne messék egymást?

275. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladat síkba rajzolható gráfjának minden „országát" (tartományát) három él határolja.

***276.** Igazoljuk, hogy az olyan 7 csúcsú gráf, amelynek minden csúcsa negyedfokú, nem síkgráf.

277. Létezik-e 8 csúcsú és 18, illetve 19 élű, síkba rajzolható gráf?

278. Tudjuk, hogy egy térképen n csomópont van. Hány ország lehet rajta maximálisan?

279. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliéder esetén érvényesek az

$$a)\ \frac{e}{3} < l \leqq \frac{2}{3}e \quad \text{és} \quad b)\ \frac{e}{3} < c \leqq \frac{2}{3}e$$

egyenlőtlenségek, ahol e a konvex poliéder éleinek, l a lapjainak, c pedig a csúcsainak a száma.

280. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelynek 7 éle van.

281. Jelentsen e egy tetszés szerinti, 7-nél nagyobb egész számot. Igaz-e, hogy ha $c \geqq 4$, $l \geqq 4$, $c,l \in \mathbf{N}^+$, továbbá

$$c+l = e+2,$$

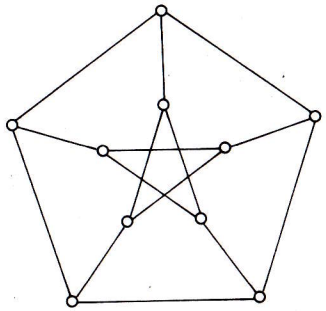
akkor létezik c szögpontú, l lapú és e élű poliéder?

282. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliédernek van legfeljebb ötoldalú lapja.

283. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan konvex poliéder, melynek minden csúcsába 5-nél több él futna be.

***284.** Síkba rajzolható-e az *50. ábrán* látható (ún. Petersen-féle) gráf?

285. Keressünk az *50. ábrán* adott gráfnak olyan részgráfját, amely a három ház–három kút gráffal izomorf gráffá húzható



50. ábra

össze. Mit mondhatunk ennek alapján a Petersen-féle gráf síkba rajzolhatóságáról?
(Egy gráf összehúzásán a következő átalakítás véges számú alkalmazását értjük: A gráf egy másodfokú csúcsát töröljük és a belőle kiinduló élek addig össze nem kötött végpontjait éllel összekötjük.)

286. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan térkép, amelyen 5 ország páronként szomszédos lenne.

287. Bizonyítsuk be, hogy ha az n szögpontú gráfot ($n \geqq 5$) síkon ábrázoljuk, akkor az élek nem szögpontbeli metszéspontjainak a száma legalább $\frac{\binom{n}{5}}{n-4}$. (A metszéspontokat többszörösségükkel együtt kell számolni.)

288. Jelentsen e egy tetszés szerinti, 7-től különböző, 5-nél nagyobb egész számot. Mutassuk meg, hogy létezik olyan poliéder, amelynek éppen e éle van.

289. Legyen a G gráf egy legalább 11 csúcsú konvex poliéder élhálózata. Bizonyítsuk be, hogy G komplementere nem síkgráf.

290. Az Euler-formula felhasználásával bizonyítsuk be, hogy pontosan öt szabályos, konvex poliéder létezhet. Mindegyikkel kapcsolatban határozzuk meg a lapok, a csúcsok és az élek számát, valamint a lapok oldalainak és az egy csúcsból kiinduló éleknek a számát.

291. Döntsük el, hogy melyik szabályos poliéder élhálózatában van:

a) Euler-vonal; *b)* nyitott Euler-vonal;
c) Hamilton-kör; *d)* Hamilton-vonal.

292. Készítsük el a szabályos poliéderek élhálózatának, mint síkgráfnak a duális gráfját. Milyen kapcsolatokat fedezünk fel köztük?

8. Színezési feladatok

293. Húzzunk a síkon egyeneseket. Igazoljuk, hogy a kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy két síkrész különböző színű legyen, ha van közös határoló vonaluk.

294. Bizonyítsuk be, hogy ha a síkra tetszés szerint köröket rajzolunk, a kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők.

***295.** Bizonyítsuk be, hogy egy térkép akkor és csak akkor színezhető ki két színnel, ha minden csomópontjában páros számú határvonal találkozik.

296. Egy térkép bármely csomópontjában páros számú határvonal találkozik. Egy utazó bejárt néhány országot és visszatért abba az országba, amelyből indult. Bizonyítsuk be, hogy páros számú határátkelést végzett. (Csomópontban nincs határátkelőhely.)

297. A **295**. feladat segítségével bizonyítsuk be, hogy az a 7 csúcsú gráf, melynek minden csúcsa negyedfokú, nem síkgráf.

298. Mutassuk meg, hogy bármely fagráf csúcsai legfeljebb két színnel kiszínezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

***299.** Színezzük ki a 6 csúcsú teljes gráf éleit két színnel. Mutassuk meg, hogy legalább két olyan háromszög van, amelynek oldalai azonos színűek (egy-egy háromszögön belül).

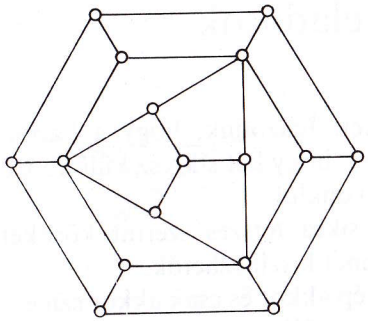
300. Adott a síkban egy tízszög. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a tízszög csúcsai, élei a tízszög élei és a tízszög minden második csúcsát összekötő vonal.

a) Igazoljuk, hogy a gráf síkgráf.

b) Határozzuk meg, hogy a gráf mint síkgráf által létrehozott térkép minimálisan hány színnel színezhető ki.

301. Ki lehet-e színezni az előző feladatban adott gráf éleit 4 színnel úgy, hogy 5–5 él legyen azonos színű, és azonos csúcsra illeszkedő élek mind különböző színűek legyenek?

302. Igaz-e, hogy ha egy térkép két színnel kiszínezhető, akkor a duálja páros gráf?



51. ábra

303. Színezzük ki az *51. ábrán* adott gráf csúcsait úgy, hogy bármely él két végpontja különböző színű legyen. Minimálisan hány színre van szükségünk? Van-e a gráfnak Hamilton-köre vagy Hamilton-vonala?

***304.** Adott a síkon egy sokszög. Daraboljuk fel a belsejét háromszögekre úgy, hogy két háromszögnek vagy ne legyen közös pontja, vagy csak egy csúcsuk, vagy csak egy oldaluk legyen közös. Mutassuk meg, hogy ha a háromszögek csúcsait meg lehet számozni a 0, 1, 2 számokkal úgy, hogy bármely oldal két végpontja különböző számot kapjon, akkor a kapott háromszögek két színnel helyesen színezhetők.

305. Bizonyítsuk be, a **304.** feladatban szereplő tétel megfordítását.

***306.** Tekintsünk egy olyan térképet, amelynek minden csomópontjából három határvonal indul ki. Mutassuk meg, hogy a térkép akkor és csak akkor színezhető helyesen három színnel, ha minden országot páros számú határvonal vesz körül.

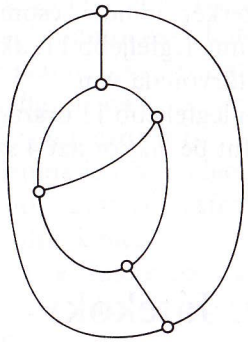
***307.** Helyezzünk a síkra köröket és mindegyikbe egy húrt úgy, hogy két különböző kör húrjainak legfeljebb egy közös pontja legyen. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott térkép három színnel helyesen színezhető.

308. Minimálisan hány színnel lehet kiszínezni a szabályos testek lapjait, illetve csúcsait úgy, hogy ne legyen két szomszédos lap, illetve szomszédos csúcs azonos színű?

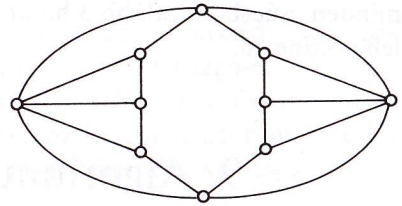
309. Legalább hány színre van szükség az *52. ábrán* lévő térkép színezéséhez?

310. Legalább hány szín szükséges az *53. ábrán* lévő térkép színezéséhez?

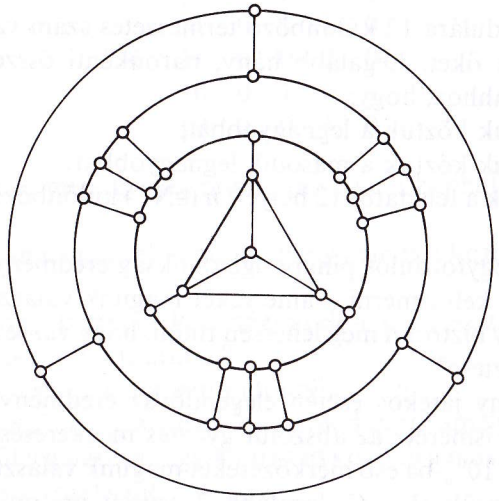
311. Legalább hány színnel lehet kiszínezni az *54. ábrán* adott térképet?



52. ábra



53. ábra



54. ábra

312. Minimálisan hány színnel lehet kiszínezni az egyes szabályos testek éleit úgy, hogy az egy csúcshoz illeszkedő élek mind különböző színűek legyenek?

313. Bizonyítsuk be, hogy minden térkép legfeljebb 6 színnel helyesen kiszínezhető.

314. Legyen egy poligonháló minden lapja háromszög. Színezzük ki a csúcsait tetszés szerint három színnel. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a lapoknak a száma, amelyeknek mindhárom csúcsa különböző színű.

315. Bizonyítsuk be, hogy ha egy térkép minden csomópontja legalább harmadfokú és az országok száma legfeljebb 11, akkor van olyan ország, amelynek legfeljebb 4 határvonala van.

***316.** Igazoljuk, hogy ha egy térképen legfeljebb 11 ország van, és minden csúcsba legalább 3 határvonal fut be, akkor azt 4 színnel ki lehet színezni.

9. Algoritmusok. Játékok

317. 12 cédulára 12 különböző természetes szám van felírva, de nem ismerjük őket. Legalább hány, páronkénti összehasonlításra van szükség ahhoz, hogy:

a) megtaláljuk köztük a legnagyobbat;

b) megtaláljuk köztük a második legnagyobbat?

Általánosítsuk a feladatot 12 helyett n ($\in \mathbf{N}^+$) különböző természetes számra.

318. Egy egyfordulós pingpongbajnokság eredményei közül legalább hányat kell ismerni – amelyeket magunk választhatunk meg – ahhoz, hogy biztosan meg lehessen tudni, hogy van-e a versenynek abszolút győztese?

Legalább hány játékos esetén elegendő az eredmények legfeljebb 10%-ának az ismerete az abszolút győztes megkereséséhez, feltéve, hogy van? (A 10%-ba eső mérkőzéseket magunk választhatjuk meg.)

319. Végezzük el a G, legalább 2 csúcsú gráfon a következő átalakítást: Válasszuk ki G két, tetszés szerinti, szomszédos csúcsát, s jelöljük őket X-szel, illetve Y-nal.

1. X-et kössük össze G minden olyan Z csúcsával, amely Y-nal össze van kötve, de X-szel nincs összekötve.
2. Töröljük G-ből Y-t és a belőle induló éleket.

(A leírt átalakítást szokás a gráf összehúzásának nevezni.)

Igazoljuk, hogy az így kapott gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha G összefüggő. Hogyan módosul a gráf szomszédsági mátrixa az átalakítás folytán?

320. Vegyünk fel a síkon 8 pontot és pénzdobással döntsük el, hogy két-két pontot összekötünk-e. A **321.** feladatban leírt átalakítás ismételt alkalmazásával döntsük el, hogy a kapott gráf összefüggő-e. Kísérjük figyelemmel az egyes átalakítások során kapott gráfok szomszédsági mátrixát is.

321. Írjunk le olyan algoritmust, amely egy szomszédsági mátrixával adott, egyszerű gráfról eldönti, hogy összefüggő-e.

322. Adjunk meg olyan algoritmust, amely egy gráf szomszédsági mátrixának ismeretében két csúcs között legrövidebb utat keres.

323. Az A mátrix 5 megfigyelési pont közötti hírközlési lehetőséget rögzíti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Van-e olyan megfigyelési pont, amely nem kaphat hírt semelyik másiktól?

b) Van-e olyan megfigyelési pont, amely nem tud közölni hírt semelyik másikkal?

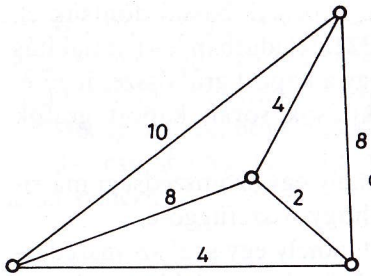
c) Igaz-e, hogy bármely két megfigyelési pont között kölcsönös hírközlési kapcsolat létesíthető?

Állításainkat a mátrix alapján indokoljuk meg.

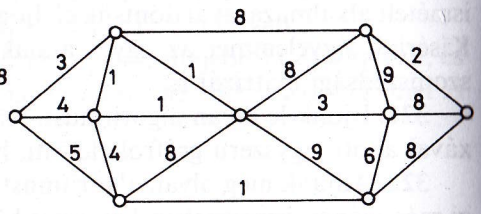
324. Tekintsünk olyan hírközlési rendszert, amelyben bármely két pont közül legalább az egyik hírt tud közölni a másikkal. Jelöljük C-vel a rendszer mátrixát.

Írjunk le olyan algoritmust, amely C ismeretében eldönti, hogy a két pont között létesíthető-e egyirányú, illetve kétirányú hírközlési kapcsolat.

325. Négy város között telefon-összeköttetést kell létesíteni. Biztonsági okokból szükséges, hogy bármely két város között legalább két független úton is lehessen kapcsolatot teremteni. Az egyes városok között fektetett telefonvonalakat és azok költségeit (valamilyen egységben) az *55. ábra* mutatja. Tervezzük meg a legolcsóbb hálózatot.



55. ábra

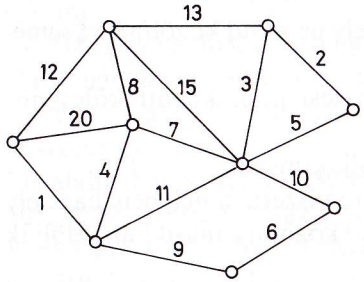


56. ábra

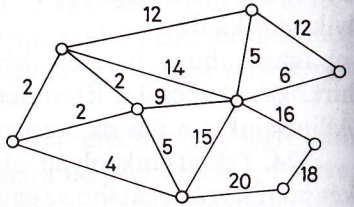
***326.** Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő gráf minden éle különböző költségű, akkor egy és csak egy gazdaságos faváza van.

327. Keressünk maximális és minimális költségű favázakat az *56. ábrán* megadott gráfban. (Az élekre ráírtuk azok költségeit.)

328. Keressünk minimális költségű favázakat az *57. a)*, illetve *b) ábrán* megadott gráfokban. Milyen lényeges különbség van a két feladat megoldása között?



a)

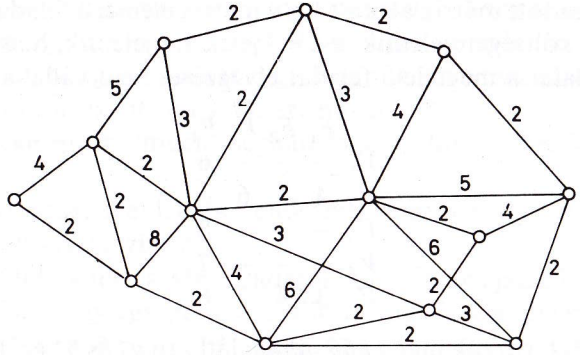


b)

57. ábra

329. Bizonyítsuk be, hogy ha a G összefüggő gráf egy l hosszúságú körének minden éle k költségű és nincs a gráfban k-nál kisebb költségű él, akkor van G-nek legalább l különböző, minimális költségű faváza.

330. Legalább hány különböző, minimális költségű faváza van az *58. ábrán* (az élek költségeivel együtt) megadott gráfnak?



58. ábra

331. 8 várost összekötő úthálózat megépítésére két vállalat, A és B nyújtott be pályázatot. Mindkét vállalat egy-egy költségmátrixot mellékelt, amelyek magyarázataként a városokat A_i-vel jelölték ($i = 1, 2, \ldots, 8$). A mátrix elemeként használt „$-$” jel azt jelenti, hogy a megfelelő városok közt nem építhető út.

Készítsük el a megfelelő gráfokat és döntsük el, hogy melyik ajánlat az olcsóbb. Rajzoljuk fel mindkét javaslat egy-egy legolcsóbb megvalósítását.

A

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	0	4	–	–	6	–	–	5
A_2	4	0	–	8	3	6	–	4
A_3	–	–	0	4	–	7	3	1
A_4	–	8	4	0	2	–	2	8
A_5	6	3	–	2	0	–	–	5
A_6	–	6	7	–	–	0	–	6
A_7	–	–	3	2	–	–	0	5
A_8	5	4	1	8	5	6	5	0

B

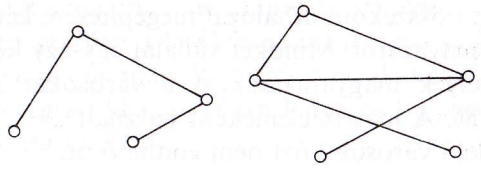
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	0	6	–	–	6	–	–	4
A_2	6	0	–	6	4	5	–	4
A_3	–	–	0	5	–	6	4	2
A_4	–	6	5	0	2	–	3	6
A_5	6	4	–	2	0	–	–	6
A_6	–	5	6	–	–	0	–	5
A_7	–	–	4	3	–	–	0	4
A_8	4	4	2	6	6	5	4	0

332. El lehet-e végeztetni az F_1, F_2, F_3, F_4 feladatokat a V_1, V_2, …, V_5 vállalatokkal, ha a vállalatok által beadott pályázatokból az

alább megadott mátrix alakult ki (*a* mátrix elemei a feladatok elvégzésének a költségeit jelentik, a „ – ” jelek azt jelentik, hogy a szóban forgó vállalat a megfelelő feladat elvégzését nem vállalja el.)

	F_1	F_2	F_3	F_4
V_1	–	–	–	6
V_2	4	5	6	–
V_3	–	–	–	8
V_4	–	–	–	7
V_5	3	4	7	6

333. Határozzuk meg az *59. ábrán* látható *a)* és *b)* gráfok független pontjainak a maximális számát.



59. ábra *a)* *b)*

334. *A* és *B* játszanak. Felvesznek a síkon 5 pontot és felváltva összekötnek két-két pontot egy síkbeli görbe vonallal úgy, hogy egyetlen, addig már meghúzott vonalat sem szabad metszeni. Az veszít, aki előbb nem tud két csúcsot összekötni, amikor sorra kerülne. Van-e nyerő stratégiája a kezdőnek? Függ-e a játék kimenetele attól, hogy a pontokat hogyan helyezik el a síkon?

335. Adott n oldalú konvex sokszög belsejében vegyünk fel k pontot (n, $k \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$) úgy, hogy az $n+k$ pont közül semelyik három ne legyen egy egyenesen. A pontokat kössük össze egymással és a sokszög csúcsaival szakaszokkal úgy, hogy az összekötő szakaszok ne messék egymást, és több pontpárt már ne lehessen összekötni (metszés nélkül).

a) Bizonyítsuk be, hogy így a sokszöget háromszögekre daraboltuk fel.

b) Hány háromszög keletkezett a sokszögben?

c) Hány éle van az így kapott gráfnak?

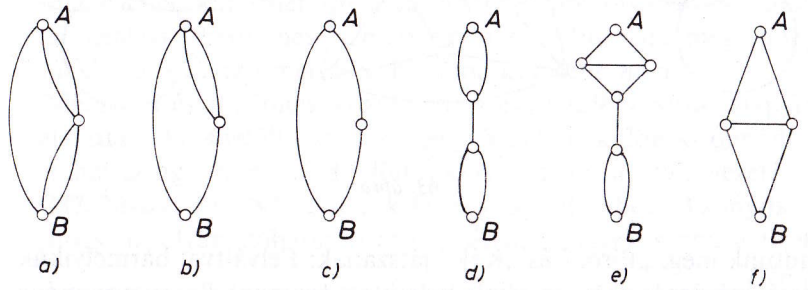
336. Adott a síkon n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$) pont úgy, hogy semelyik három ne legyen egy egyenesen. *A* és *B* játszanak: Felváltva összekötnek két-két pontot egy szakasszal úgy, hogy azok ne messék egymást. Az nyer, aki utolsóként tud szakaszt húzni.

a) n értéke egyértelműen meghatározza-e, hogy a kezdő nyer vagy veszít?

b) Adott n esetén el lehet-e rendezni a pontokat úgy, hogy a kezdő nyerjen, illetve veszítsen?

337. Oldjuk meg a **336.** feladatot, ha 4 játékos játszik, és felváltva kötnek össze egy-egy pontpárt. Előre megadott n esetén bármelyik játékos el tudja-e rendezni a pontokat úgy, hogy ő nyerjen?

338. A *60. ábrán* összefüggő gráfokat adtunk meg, amelyeknek két csúcsát *A*-val, illetve *B*-vel jelöltük. Két játékos, „Nyit” és „Zár” felváltva „lép”. Nyit, ha a lépésben sorra kerül, törli a gráf egy élét, Zár pedig „lefoglalja” a gráf egy élét. (Nyit nem törölhet már lefoglalt élt és Zár nem foglalhat le addig már törölt élt.) Zár nyer, ha sikerül lefoglalnia egy *A*-t *B*-vel összekötő utat (Nyit nyer, ha ezt meg tudja akadályozni).



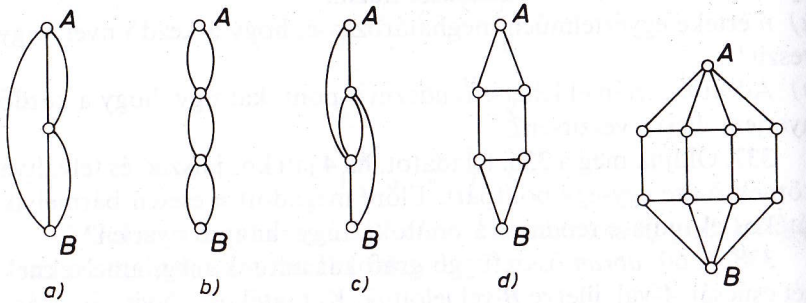
60. ábra

Döntsük el, hogy a *60. ábrán* megadott gráfok esetén melyiknek van nyerő stratégiája, illetve hogy melyik esetben nyer és melyik esetben veszít a kezdő.

339. Oldjuk meg a **338.** feladatot a *61. ábrán* megadott gráfokra vonatkoztatva.

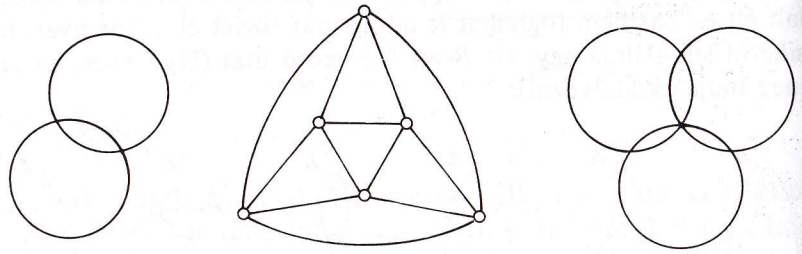
340. Mutassuk meg, hogy a *62. ábrán* megadott gráf esetén a „Nyit-Zár játékban" Zárnak van nyerő stratégiája.

341. A *63. ábrán* két színnel helyesen kiszínezhető térképeket



61. ábra

62. ábra



63. ábra

adtunk meg. „Piros" és „Kék" játszanak: Felváltva, bármelyikük a saját színére festhet egy általa választott országot, ügyelve arra, hogy közös határvonallal rendelkező országok nem lehetnek azonos színűek. Az veszít, aki már nem tud országot festeni az előírás szerint, amikor rá kerülne a sor. Döntsük el, hogy a *63. ábra* térképei közül melyik esetben van nyerő stratégiája a kezdőnek, illetve a másiknak.

10. Vegyes feladatok

342. Fessük ki négy egybevágó kocka lapjait négy színnel úgy, hogy minden kockán mind a négy szín előforduljon, és minden kocka egyik csúcsához illeszkedő három lapja pl. piros legyen. Egymásra lehet-e helyezni a kockákat úgy, hogy a kapott négyzet alapú hasáb minden oldallapján mind a négy szín szerepeljen?

343. Egy új sakkfigurát vezetünk be, amely egy lépésben a tábla egyik élével párhuzamosan 3, a rá merőleges irányban pedig 1 mezővel mozdul el. Eljuthat-e ez a figura a 8×8-as sakktábla egyik sarkából a többibe?

344. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szerelőlapon legalább négy forrcsúcs van és bármely négy forrcsúcs között van olyan, amelyik a másik hárommal össze van kötve, akkor van olyan forrcsúcs, amely a szerelőlap minden forrcsúcsával össze van kötve.

***345.** Egy $2n$ tagú társaságról a következőket tudjuk:
Van olyan d szám, hogy a társaság minden tagja a társaságban legfeljebb d másikat ismer, továbbá van d-nél több olyan ember, akik közül semelyik kettő nem ismeri egymást. Mutassuk meg, hogy bármekkora is d, az ismeretségek száma kevesebb n^2-nél.

346. Az A és B jelöltek közül kell az egyiket 9 szavazat alapján kiválasztani. Az A jelölt 1 szavazattal győz. Hány különböző módon történhet ez úgy, hogy az A jelölt a szavazás során végig vezet?

***347.** $2n$-szer ($n \in \mathbf{N}^+$) dobunk fel egy pénzdarabot. Bizonyítsuk be, hogy az olyan dobássorozatok száma, amelyek során a fejek száma egyetlen alkalommal sem haladja meg az írások számát $\binom{2n}{n}$.

***348.** Jelöljük $g(m, k)$-val ($m, k \geqq 1$) azt a legkisebb egész számot, amelyre fennáll, hogy bármely $g(m, k)$ pontú, egyszerű gráf tartalmaz m hosszúságú utat, vagy a komplementere tartalmaz k hosszúságú utat. Mutassuk meg, hogy $g(m, k) \leqq m+k$.

***349.** Egy város autóbuszhálózatáról a következőket tudjuk:
1. Bármelyik megállóból bármelyik másikba eljuthatunk átszállás nélkül.

2. Bármely két autóbuszjáratnak pontosan egy közös megállója van.
3. Minden járatnak n megállója van.
Hány autóbuszjárat van a városban?

350. Egy teljes gráf csúcsait az 1, 2, ..., n számokkal jelöltük. A gráf éleinek a költségeit a végpontjaikhoz tartozó számok különbségének az abszolútértékével definiáltuk.
a) Határozzuk meg a gráf minimális költségű Hamilton-köreinek a számát.
b) Mennyi a minimális költségű Hamilton-kör költsége?

351. Igazoljuk, hogy az n csúcsú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 5$) teljes gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy minden csúcs „pszeudogyőztes" és ugyanakkor „pszeudovesztes" is legyen.

***352.** Legyen adott egy különböző számokból álló, $mn+1$ tagú (m, $n \in \mathbf{N}$) számsorozat. Igazoljuk, hogy vagy létezik egy m-nél több tagú monoton növekvő, vagy létezik egy n-nél több tagú monoton csökkenő részsorozata.

***353.** Igazoljuk, hogy az A_1, A_2, ..., A_n csúcsokra építhető olyan gráfok száma, amelyekben két rögzített csúcs nincs összekötve s nincs $n-1$-edfokú csúcsuk, páratlan.

354. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráfnak végtelen sok csúcsa van, akkor bármilyen hosszú út is van benne?

355. Igaz-e, hogy ha egy gráfban bármilyen hosszú út van, akkor végtelen hosszú út is van benne?

356. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráfban bármilyen hosszú út van, akkor végtelen hosszú út is van benne?

357. Végtelen gráfokra igaz marad-e a véges gráfok esetére bebizonyított tétel: Ha egy gráf minden csúcsának fokszáma páros, akkor van a gráfban kör.

***358.** Egy végtelen, összefüggő gráf minden csúcsának a fokszáma véges. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban végtelen hosszú út.

***359.** Tekintsünk egy végtelen sok csúcsú teljes gráfot, és színezzük ki az éleit két színnel tetszés szerint. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfnak egy végtelen, egyszínű teljes részgráfja.

***360.** Színezzük ki két színnel a derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjait. A lehetséges színezések halmaza leképezhető-e kölcsönösen egyértelmű módon a racionális számok halmazára?

ÚTMUTATÁSOK ÉS EREDMÉNYEK

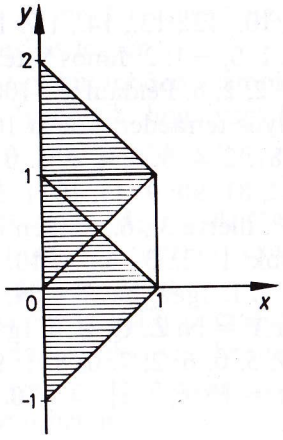
I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 12., 13., 14., 15., 18., 19. egyértelműen meghatározottak. **2.** 1. 0, -1; 2. János Vitéz, Nemzeti dal; 3. 53, 59; 4. $\{3\}$, $\{3; 5\}$; 5. 0, -2, 2; 6. Például $x-100=0$, $2x-1=199$; 7. 2, 3; 8. 3, 1; 9. szabályos tetraéder, kocka 10. 1, 6. **3.** 1. 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; 2. 4; 3. $\emptyset$; 4. 0; 5. 0, 1, 2; 6. 3; 7. 450; 8. 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90; 9. 45; 10. 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6. **4.** Egyenlők: 1., 2., 4., 7., illetve 3., 6., ezeken kívül 5., 9., valamint 8., 10. **5.** Igaz állítások: 1., 2., 3., 6., 8., 10. **6.** Igaz állítások: 1., 3., 5., 6., 8., 10. **7.** 1. Igaz, ha $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 2. Igaz, ha $X = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 3. Igaz, ha $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$; 4. Igaz, ha $X = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$. **8.** 1. 8; 2. 9; 3. 10; 4. 99; 5. 0; 6. 2; 7. 0; 8. 1; 9. 3; 10. 17. **9.** 2, ha $A = \{0, b\}$, 3, ha $A = \{0, a, -a\}$. **10.** A, B, E, G, H. **11.** Például $\frac{1}{2^n} \in A$, ahol $n \in \mathbf{N}$. **12.** és **13.** Vizsgáljuk meg az elemek lehetséges értékeit! **14.** 1. **I**; 2. **Q**; 3. 0 és a negatív számok; 4. $\emptyset$; 5. **R**. **15.** Az eredeti halmazzal, illetve a halmaz komplementerével. **16.** Igen, ha az alaphalmaz véges. **17.** $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{1; 5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$, $\{4; 5\}$. **18.** *a)* 20, *b)* 1. **19.** A részhalmazok: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 5\}$, $\{1; 7\}$, $\{3; 5\}$, $\{3; 7\}$, $\{5; 7\}$, $\{1; 3; 5\}$, $\{1; 3; 7\}$, $\{1; 5; 7\}$, $\{3; 5; 7\}$, $\{1; 3; 5; 7\}$. **20.** $N \subset T \subset P$ és $N \subset R \subset P$. **21.** Igazak: 1., 3., 4., 7., 9., 10. **22.** Igaz. **23.** Bizonyítsunk indirekt módon! **24.** $A = \emptyset$. **25.** Használjuk a részhalmaz definícióját! **26.** A halmazok végesek. **27.** Igazoljunk például teljes indukcióval! **28.** Készítsünk ábrát!

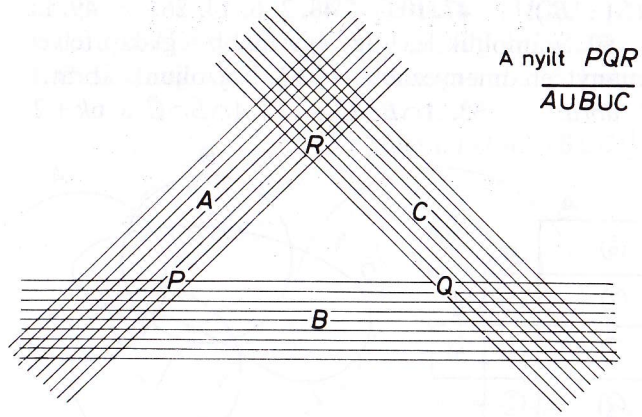
2. Műveletek halmazokkal

29. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24\}$, $B \cup C = B$, $C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16\}$, nincsenek egyenlők. **30.** $x(x+2) \cdot (x^2-1) = 0$. **31.** $A \cup B$ olyan derékszögű trapéz, melynek csúcsai: (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 2), $B \cup C$ a *64. ábrán* látható, $C \cup A$ egy derékszögű trapéz, melynek csúcsai (0; −1), (1; 0), (1; 1), (0; 1),



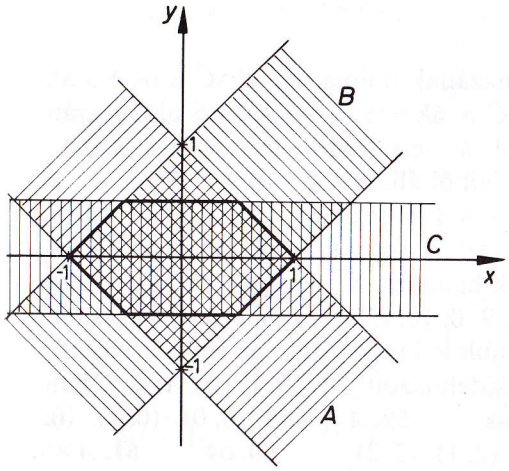
64. ábra

$A \cup B \cup C$ olyan szimmetrikus trapéz, melynek csúcsai: (0; −1), (1; 0), (1; 1), (0; 2). **32.** Ha A és B határvonala párhuzamos vagy egybeeső és a félsíkok ellentétes irányításúak. **33.** Lásd a *65. ábrát!* **34.** Tekintsük az összes lehetséges esetet! **35.** Nézzük végig, hogy milyen elemekből állnak az egyes halmazok! **36.** 0. **37.** 1., 4., 5. nem igaz, 2., 3., 6. igaz. **38.** Igazoljunk indirekt módon! **39.** $A = \{$a 2-nél nagyobb természetes számok$\}$, $B = \{$a természetes számok$\}$. **40.** $A \cap B = \{$a 6-tal osztható kétjegyű számok$\}$, $B \cap C = \{30; 60; 90\}$, $C \cap A = \{\pm 30; \pm 60; \pm 90\}$. **41.** $A = \{1; 2\}$, $B\{2; 3\}$, $C = \{2; 4\}$. **42.** Használjuk az adott művelet definícióját!



A nyílt PQR háromszöglap: $\overline{A \cup B \cup C}$

65. ábra

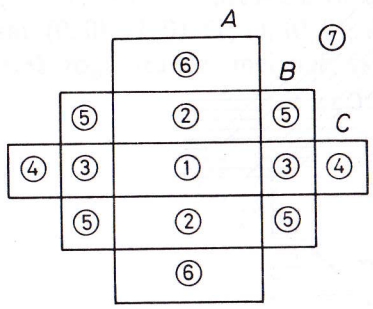


$A \cap B \cap C$ a „vastagított" hatszöglap pontjainak halmaza

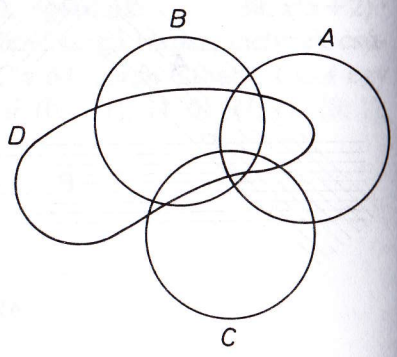
66. ábra

43. Lásd a *66. ábrát.* **44.** $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ egy négyzetlap, melynek csúcsai: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **45.** Használjuk a megfelelő definíciókat! **46.** Használjuk fel, hogy

$|A \cap B| \leqq \min(|A|, |B|)$! **47.** 10. **48.** 2, 6, 14, 26. **49.** Lásd a *67. ábrát!* **50.** Számoljuk le, hogy egy újabb téglalap felvétele hány új tartományt eredményezhet. **51.** Rajzoljunk ábrát! **52.** Lásd a *68. ábrát!* **53.** $A \cap B \cap C = C$, $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ a $6k+2$ és



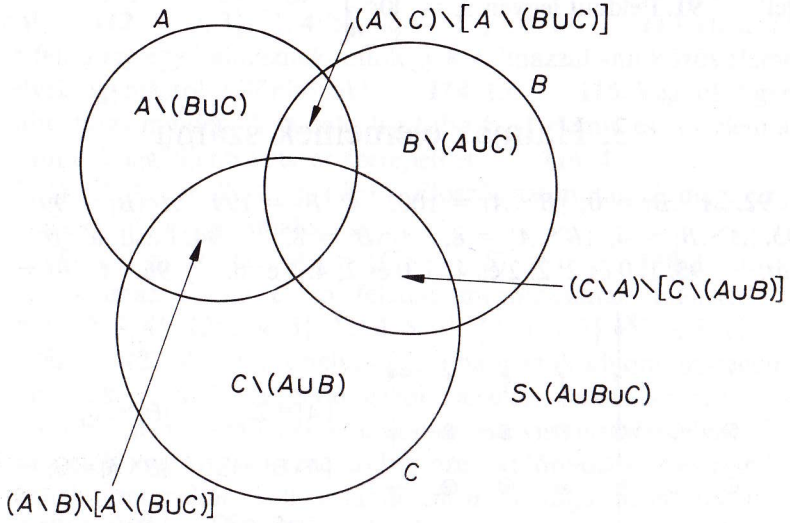
67. ábra



68. ábra

$6k+4$ alakú számok halmazának uniója, $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ a $6k+3$ alakú számok halmaza, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ a $6k+1$, illetve $6k+5$ alakú számok halmazának uniója, ahol k tetszőleges természetes szám. **54.** $A \setminus B$ a körgyűrű pontjaiból áll, $B \setminus A = \emptyset$. **55.** 1. $A \setminus B = \{6k+2\} \cup \{6n+4\}$; 2. $B \setminus A = \{6k+3\}$; 3. $A \setminus C = \{4k+2\}$; 4. $C \setminus A = \emptyset$; 5. $\emptyset$; 6. az olyan $5k$ alakú számok halmaza, ahol $4 \nmid k$; 7. az ötre végződő számok halmaza; 8. az olyan $5k$ alakú számok halmaza, ahol $4 \nmid k$ és $3 \nmid k$; 9. $\emptyset$; 10. $E \setminus D$, ahol k tetszőleges természetes szám. **56.** Rajzoljuk le külön-külön az egyes eseteket! **57.** Használjuk a műveletek definícióit! **58.** Ha az A, B, C halmazok páronként diszjunktak. **59.** $A \times B = \{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2)\}$. **60.** 64. **61.** $A \times B$ a $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$ csúcspontokkal rendelkező négyzetlap pontjainak halmaza. **62.** 9. **63.** $A \times A$, illetve $\emptyset$. **64.** Igazoljunk indirekt módon! **65.** Bizonyítsunk a műveletek definíciói alapján! **66.** 1. 1; 2. 8; 3. 2; 4. 4. **67.** $10 \leqq |A \cup B| \leqq 101$, $0 \leqq |A \cap B| \leqq 10$. **68.** $A = \{1; 8; 19\}$, $B = \{9; 12; 21\}$. **69.** $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$. **70.** Rajzoljunk Venn-diagramokat! **71.** $A = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 5; 9; 10; 11\}$,

$C = \{1; 3; 4; 7; 11\}$. **72.** Például: $\{1; 2\}$, $\{2; 3\}$, $\{3; 1\}$. **73.** $\{a; c; d; e\}$, $\{a; b; d; e\}$, $\{a; b; c; d\}$, $\{a; b; c; e\}$, $\{b; c; d; e\}$. **74.** Használjuk a műveletek definícióit! **75.** Lásd a *69. ábrát!*



69. ábra

76. $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, $\{1; 6; 7; 8; 9\}$, $\{2; 6; 10; 11; 12\}$, $\{3; 7; 10; 13; 14\}$, $\{4; 8; 11; 13; 15\}$, $\{5; 9; 12; 14; 15\}$. **77.** Mutassuk meg, hogy mindkét oldalon ugyanazok az elemek szerepelnek!

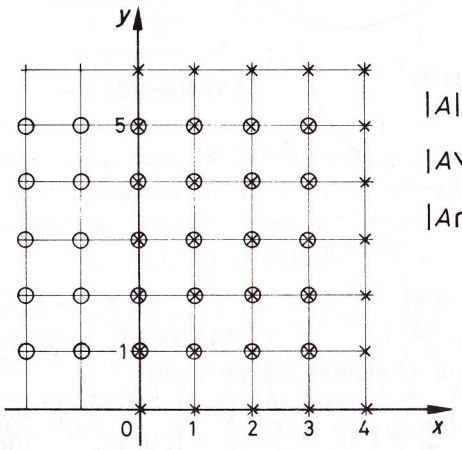
78. *a)* $\{-2; 0; 1\}$, illetve $\{-2; -1; 0\}$, *b)* $\{-2; -1; 0; 1\}$, illetve $\{1\}$. *c)* $\{-2; 0; 1\} \cup \{-2; -1; 0\} = \{-2; -1; 0; 1\}$, illetve $\{-2; 0; 1\} \setminus \{-2; -1; 0\} = \{1\}$. **79.** *a)* $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, *b)* $\{1; 3\}$, *c)* $\emptyset$, *d)* $\{2\}$, *e)* $F \cup G \cup H$; *f)* $(F \cup G) \setminus H$; *g)* $F \setminus (G \cup H)$; *h)* $F \cap G \cap H$. **80.** Nem, például $a(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, $b(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$.

81. $a(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $b(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $c(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. **82.** Például $b(x) = \dfrac{1}{a(x)}$ esetén teljesül az állítás. **83.** *a)* $\mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 1\}$. **84.** *a)* $\mathrm{R} \setminus \{0; 1\}$, illetve $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. *b)* $\{-2; 2\}$, illetve $\{-1; 0\}$. *c)* $\{-1; 2\}$. **85.** $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \{2\}$, $I_1 \cap I_2 \cap I_4 = [1; 2]$, $I_1 \cap I_3 \cap I_4 = \{2\}$, $I_2 \cap I_3 \cap I_4 =$

$= [2; 3]$. **86.** A metszet: $\{2\}$, az unió: $[0; 4]$. **87.** 0. **88.** Ez a pont az origó. **89.** Először igazoljuk az állítást három intervallumra! **90.** Bizonyítsunk például a teljes indukció módszerével! **91.** Például legyen $I_n = \left]0; \frac{1}{n}\right[$.

3. Halmaz elemeinek száma

92. $|A \setminus B| = 0$, $|B \setminus A| = 100$, $|A \cup B| = 199$, $|A \cap B| = 99$. **93.** $|A \setminus B| = 4$, $|B \setminus A| = 8$, $|A \cap B| = 8$. **94.** Lásd a *70. ábrát!* **95.** 1. 0 és 2; 2. 2 és 4; 3. 0 és 2; 4. 4 és 6. **96.** $|A \cap B| = 2$,



$|A| = 35$, $|B| = 30$,
$|A \setminus B| = 15$, $|B \setminus A| = 10$,
$|A \cap B| = 20$, $|A \cup B| = 45$.

70. ábra

$|A \cup B| = 11$. **97.** Használjunk Venn-diagramot! **98.** $|A| = 10$, $|B| = 11$, $|A \setminus B| = 7$, $|B \setminus A| = 8$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 18$. **99.** 8. **100.** 3,2$\dot{3}$. **101.** Rajzoljuk meg három halmaz Venn-diagramját a lehetséges módokon! **102.** 18. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; a; b\}$, $B = \{1; 2; 6; 7; 8; 10; c; d\}$, $C = \{4; 5; 7; 8; 9; 10; e; f\}$, $D = \{2; 3; 4; 6; 7; 8; g; h\}$. **103.** Rajzoljuk meg a feladathoz tartozó diagramot! **104.** és **105.** Használjuk fel, hogy $|A_i| \geqq |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$, $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Egyenlőség az

$A_1 = A_2 = \ldots = A_k$ esetben van. **106.** 1. 3; 2. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = A \cap B \cap C$; 3. 7. **107.** Mindkettőnek 10 000. **108.** Használjuk fel, hogy $|A \times B| = |B \times A|$. **109.** 9. **110.** és **111.** Vizsgáljuk meg, hogy milyen elempárok lehetnek a metszetben! **112.** $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 4; 5\}$, $\{2; 4; 6\}$, $\{3; 5; 6\}$. **113.** Használjuk fel, hogy egy halmaznak mindegyik halmazzal van közös eleme, melyek egymástól különbözők! **114.** 15. **115.** Vegyük figyelembe, hogy mindegyik halmaz legalább $k-1$ elemű, és egy elem az „unióban" legfeljebb kétszer szerepelhet. **116.** 4. **117.** $3k+1 \leqq |A \cup B \cup C| \leqq 6k+1$. Először azt mutassuk meg, hogy $|A \cup B \cup C|$ akkor minimális, ha $|A \setminus (B \cup C)| = |B \setminus (C \cup A)| = |C \setminus (A \cup B)| = 0$. **118.** Igen. **119.** Alkalmazzuk az előző feladat megoldásának menetét! **120.** $\{1; 2; 3; 4\}$, $\{2; 3; 4; 5\}$, $\{3; 4; 5; 6\}$, $\{4; 5; 6; 7\}$, $\{5; 6; 7; 1\}$. **121.** és **122.** Az állítás helyessége a halmazok különbözőségéből következik. **123.** Elegendő igazolni az előző feladat szerint, hogy n-nél több eleme nem lehet az uniónak. Ha viszont bármelyik $n-1$ halmaznak van közös eleme, akkor ezek különbözők is és minden elemnek szerepelnie kell valamilyen $n-1$ tagú metszetben. **124.** Tekintsük az $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ halmaz $(n-1)$ elemű részhalmazait! **125.** $11 \leqq |A \cup B \cup C| = 18$, $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 4$ alapján például tetszőleges esetet mondhatunk.

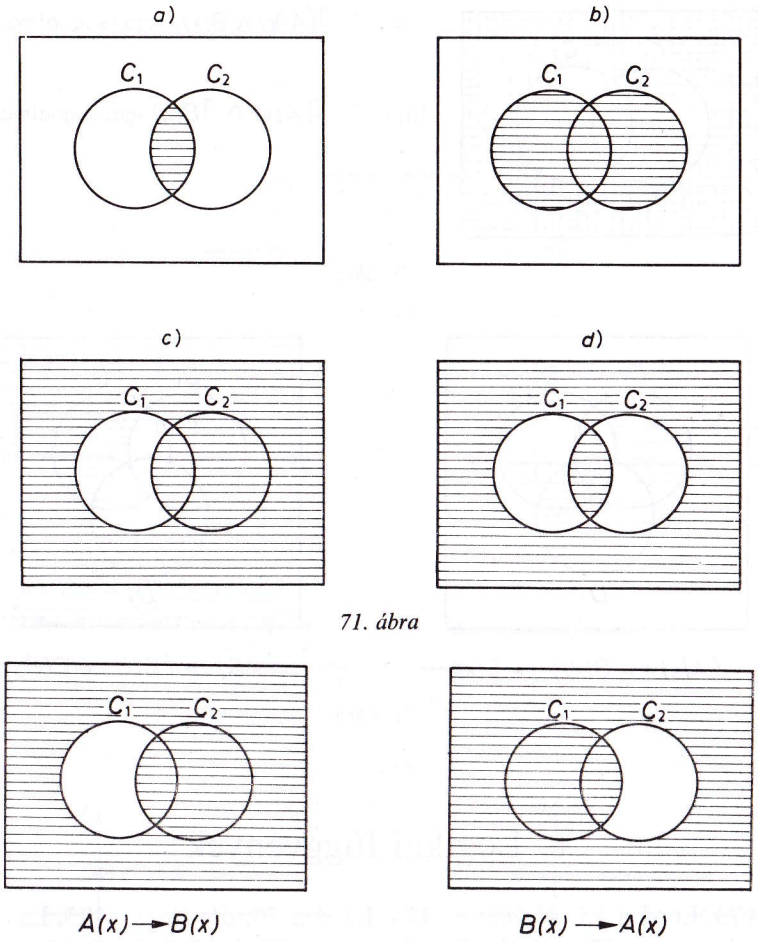
4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok

126. Az állítások igazak. **127.** Bizonyítsunk indirekt módon! **128.** Mutassuk meg, hogy mindkét halmaz A és B mindegyik elemét tartalmazza! Rajzoljunk Venn-diagramot is! **129.** 1. $A = B$; 2. $A = B$; 3. $B \subseteq A$; 4. $B \subseteq A$; 5. $A = \emptyset$; 6. $B = C$. **130.** Például $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 4\}$. **131.** Egy ellenpélda: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{3\}$. Zárójelezhető például az $A = \{1; 2; 3\}$, $B = C = \{1\}$ esetben. **132.** Igazoljuk, hogy a bal oldal A és B közös elemeit tartalmazza, más elemét pedig nem! **133.** Rajzoljunk Venn-diagramokat! **134.** Például $A = \{2; 3\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{5; 6\}$. **135.** Nem, illetve igen. **136.** Ha $(A \cap C) \setminus B = \emptyset$.

137. $\overline{A \cap B} = \overline{A \setminus (A \setminus B)} = \overline{B \setminus (B \setminus A)} = R \setminus [A \setminus (A \setminus B)]$. **138.** Például: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, $B \setminus A = B \cap \bar{A}$, $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = R \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$. **139.** Rajzoljunk Venn-diagramot! A négy tartomány: $\overline{A \cup B}$, $\overline{\bar{A} \cup B}$, $\overline{A \cup \bar{B}}$, $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$. **140.** Bizonyítsuk, hogy az egyes halmazok minden eleme a másik oldalon levő halmaznak is eleme és fordítva! **141.** Lásd a **140.** feladat megoldását! **142.** Készítsünk Venn-diagramot! **143.** Gondoljunk az összes lehetséges esetre! **144.** 1. $\emptyset$; 2. A; 3. $\emptyset$; 4. az alaphalmaz; 5. $\emptyset$; 6. $\emptyset$; 7. $A \setminus B$; 8. $B \setminus A$; 9. A; 10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. **145.** Rajzoljunk szemléltető ábrát! **146.** Szemléltessük A-t, B-t Venn-diagrammal és mutassuk meg, hogy a kapott négy tartomány tetszőleges „pontjai" nem elemei a felírt halmaznak! **147.** Tekintsük az egyes műveletek definícióit!

5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel

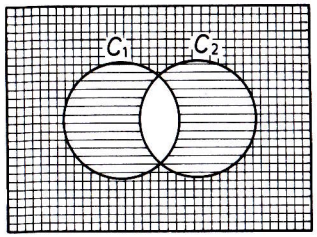
148. Igazak: 1., 2., 4., 8., 9. **149.** *a)* 0; 1; 2; *b)* 1; 3; 5; *c)* 2; 6; 8; *d)* 0; 3; 7; *e)* 0; 4; 8; *f)* 1; 4; 5; *g)* 1; 2; 3; *h)* 0; 1; 6; *i)* 4; 9; 25; *j)* 2; 9; 10. **151.** Ha az A, B, ..., G ítéletek logikai értéke igaz, akkor az új ítéletek közül igaz logikai értékű: 1., 2., 3., 4., 6., ha az eredeti ítéletek hamisak, akkor igaz lesz: 1., 3., 4., 6., 8. **152.** Az A ítélet értékétől függ: $A \to \neg A$, $\neg A \to A$. **153.** 1. $p = i$, $q = i$, $r = h$; 2. csak a $p = i$, $q = r = h$ eset nem lehetséges; 3. $(i; i; h)$, $(h; h; h)$, $(h; i; h)$; 4. $(i; i; h)$; 5. $(h; i; i)$; 6. $p = i$, $q = h$, vagy $p = h$, $q = i$; 7. $(i; i; h)$, $(i; h; h)$, $(h; i; i)$, $(h; i; h)$; 8. $(i; i; h)$, $(i; h; i)$, $(i; h; h)$, $(h; i; i)$. **154.** Az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív művelet. **155.** $(p \vee q) \wedge p$ például. **156.** $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$. **157.** Azt nézzük meg, hogy a műveletek eredménye mikor hamis! **158.** Igen. **159.** Nem. **160.** Minden esetben igaz. **161.** Mindkét oldal logikai értékét külön-külön számoljuk ki! **162.** *a)* $i; i; i; h; i; i;$ *b)* $h; h; i; i; i; i;$ *c)* $i; i; i; h; i; i;$ *d)* $i; h; i; i; i; i.$ **163.** Azonosságok: *b)*, *c)*, *e)*. **164.** Használjunk például érték-



71. ábra

72. ábra

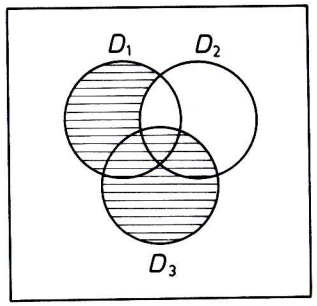
táblázatot! **165.** Lásd a *71. ábrát!* **166.** Lásd a *72. ábrát!* **167.** Lásd a *73. ábrát!* **168.** Lásd a *74. ábrát!* **169.** Ha $x \in H$, ahol H az alaphalmaz, akkor elegendő csak $A(x) \wedge \neg A(x)$-et vizsgálni x értékeire. **170.** {12; 24}, {12; 24}, {12; 24}, {12; 24}. **171.** *a)* 4; *b)* 4; *c)* 11; *d)* 8. **172.** A $-2 \leqq x \leqq 0$ és a $3 < x \leqq 4$ egyenlőtlenségek által meghatározott intervallumok uniója.



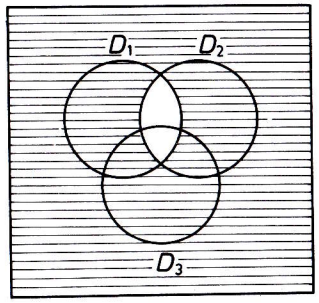
: $\neg(A(x) \wedge B(x))$ igazsághalmaza

: $\neg A(x) \wedge \neg B(x)$ igazsághalmaza

73. ábra



$(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow C(x)$

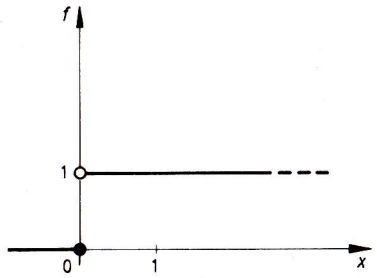


$A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x))$

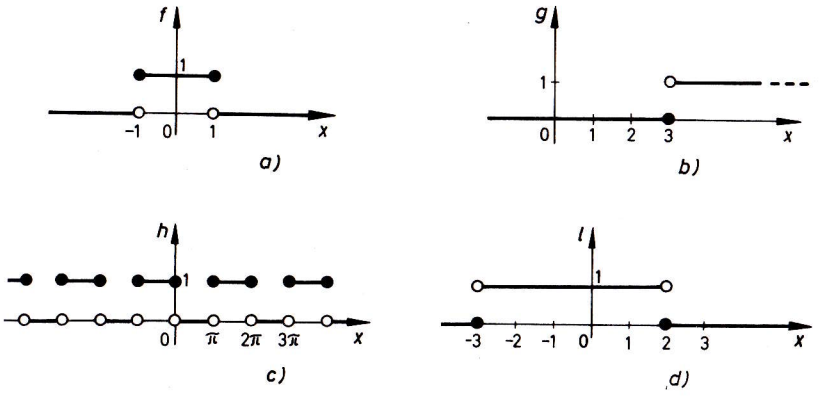
74. ábra

6. Logikai függvények

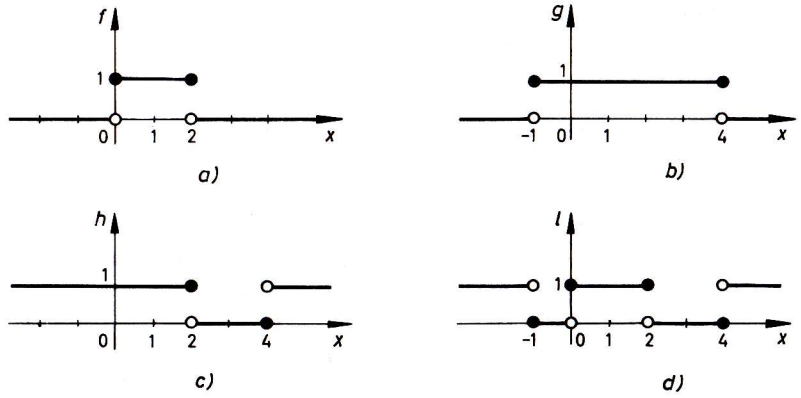
173. Lásd a *75. ábrát!* **174.** Lásd a *76. ábrát!* **175.** Lásd a *77. ábrát!* **176.** Lásd a *78. ábrát!* **177.** 1. 12; 2. 10; 3. 10; 4. 10; 5. 10; 6. 13; **178.** *a)* igen; *b)* nem; *c)* nem; *d)* igen; *e)* nem; *f)* igen; *g)* nem; *h)* nem; *i)* igen; *j)* nem; *k)* igen; *l)* nem; *m)* igen; *n)* igen; *o)* igen; *p)* igen; *r)* igen; *s)* igen; *t)* igen; *u)* igen.



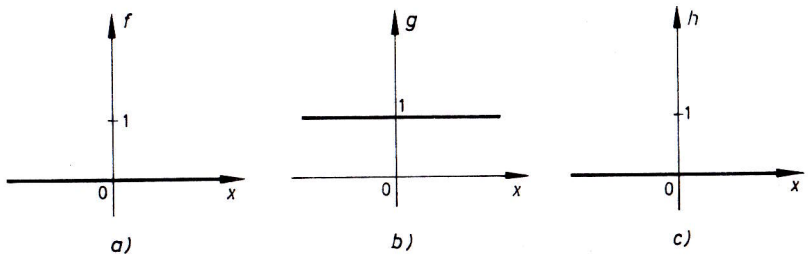
75. ábra



76. ábra



77. ábra



78. ábra

7. Következtetések

179. Nem. **180.** Előfordulhat, hogy helyes a következmény, de logikailag nem helyes a következtetés. Ha 1. hamis, akkor (1. → 2.) ∧ 2., 2. igaz volta esetén szintén igaz és 1. mégis hamis. **181.** Az értéktáblázatból kiderül, hogy a következtetés helyes. **182.** Használjunk értéktáblázatot! **183.** Lásd a **180.** feladatot! **184.** Péter állítása lehet igaz is, hamis is. **185.** Igen. **186.** Készítsünk értéktáblázatot! **187.** Igen. **188.** Legyen p: egy szám osztható 2-vel, q: a szám prímszám, jelöléseinkkel a következtetés: $\dfrac{(\neg p \to q) \wedge \neg q}{p}$. A következtetés helyességéről könnyen meggyőződhetünk a logikai értékek helyettesítésével. **189.** Lásd az előző feladatot! **190.** Igen. **191.** $\dfrac{[(e \wedge a) \vee (e \wedge b)] \wedge (e \wedge d) \wedge (d \to \neg b) \wedge (d \to \neg c).}{e \wedge a}$. **192.** Helyes, az utolsó helyen szereplő változóktól haladjunk előre! **193.** Helyes következtetések: 1., 2., 3., 5., 8. **194.** Vizsgáljuk meg, hogy a „számlálók" mikor igazak! **195.** *a)* Például q; *b)* $p \leftrightarrow q$; *c)* $\neg p$; *d)* $p \wedge q$. **196.** Helyes. **197.** $\dfrac{(p \to q) \wedge \neg q}{\neg p}$, megfordítva: $\dfrac{\neg p}{(p \to q) \wedge \neg q}$, a következtetés nem helyes. **198.** *a)* pontosan egy; *b)* Béla; *c)* egy.

II. Számelmélet és aritmetika

1. Természetes számok

1. *a)* 2^{22}; *b)* 3^{3^3}; *c)* 5^{5^5}. **2.** $10^{10}+1$. **3.** Legalább 301 számjegyből. **4.** 6837. **5.** 8. **6.** $\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ db}} \cdot \underbrace{33\ldots34}_{n\text{ db}}$. **7.** 0; 2; 6. **9.** Igaz. **10.** Igaz. **12.** 10. **13.** 400. **14.** 164. **15.** 249. **16.** $\dfrac{1000}{p}+\dfrac{1000}{p^2}+\dfrac{1000}{p^3}+\ldots+\dfrac{1000}{p^k}$, k az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $p^k < 1000$. **17.** c_n. **18.** -5; -4; -3; -2; -7; 0. **19.** pl. ha $a=12$, $b=99$; b számjegyeinek összege 18 és ab számjegyeinek összege is 18. **21.** 142 857; 285 714. **22.** Igaz. **23.** *a)* $131 \cdot 958$; *b)* $125 \cdot 689$. **24.** 12. **25.** Igen. **26.** 898. **27.** 90; Igen: 121, 484, 676. **28.** Nem. **29.** 3; 3; 8 évesek. **30.** Nem. **31.** Nem érhető el. **32.** 87–85; 86–86; 89–83; 88–84, és fordítva. **33.** 65. **34.** Igen; $(10^{n+1}+1)^2$. **36.** Nem. **37.** Nincsen ilyen. **38.** $3025=55^2$. **39.** $(10^{n+1}-1)^2$. **40.** 81 649. **41.** 232 324. **42.** Nincsen. **44.** Igaz. **46.** 0. **48.** 1-re. **49.** ...00. **52.** ...24. **54.** Páros és páratlan is lehet.

MII.

2. Oszthatóság az egész számok halmazában

56. *a)* igen; *b)* nem; *c)* nem; *d)* igen; *e)* nem; *f)* nem. **57.** *a)* igen; *b)* igen; *c)* nem; *d)* igen; *e)* nem; *f)* nem. **58.** *A*: nem igaz; *B*: nem igaz; *C*: nem igaz; *D*: igaz; *E*: nem igaz; *F*: igaz. **59.** *A*: nem igaz; *B*: igaz; *C*: nem igaz; *D*: nem igaz. **66.** *a)* igen; *b)* igen; *c)* igen; *d)* nem; *e)* igen. **67.** Szorzatra igaz. **68.** Nem. **70.** Igaz. **73.** Nem lehet. **74.** Nincsen. **75.** Nincsen. **76.** *a)* 0; 1; *b)* 0; 1; *c)* 0; 1; 4. **78.** Igaz. **79.** 35; 46. **80.** 17; 251; 757; 991 prímszámok. **83.** 9. **84.** 661–673-ig. **86.** (61; 83; 47; 59; 2), (13; 47; 89; 5; 2), (2; 5; 7; 389; 461),

(17; 43; 89; 5; 2) stb. **87.** 3. **88.** 3. **89.** 3. **90.** Nincsen. **91.** A megfordítás nem igaz. **92.** 3. **95.** Például 11; 13 vagy 17; 19. **97.** 3. **98.** Nem lehet. **100.** Nem. **101.** Nem lehet. **102.** -1; 1. **105.** *a)* $2^8 \cdot 3^3$; *b)* $2^2 \cdot 7 \cdot 17$; *c)* $2^2 \cdot 3 \cdot 29$; *d)* $3^2 \cdot 7^2$; *e)* $2^4 \cdot 5 \cdot 23$; *f)* $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$; *g)* $2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$; *h)* $2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$; *i)* $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; *j)* $3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$; *k)* $3^5 \cdot 5 \cdot 7$; *l)* $5 \cdot 3373$. **106.** Igaz. Nem egyértelmű, pl. $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 18$. **107.** $2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$; $6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 6 \cdot 30 = 2 \cdot 10 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 90$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 = 2^4 \cdot 50$; $2^6 \cdot 10$; $54 \cdot 10 = 2 \cdot 270$. **108.** *a)* $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; *b)* 2^{10}; *c)* $7 \cdot 23$; *d)* 997; *e)* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; *f)* $2^3 \cdot 23 \cdot 31$; *g)* $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 79$; *h)* $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 47$; *i)* $3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$, *j)* $3^2 \cdot 7 \cdot 109$. A prímtényezős felbontásból adódnak az osztók. **110.** Nem. **111.** Nem. **112.** *a)* 242; 243; 244; *b)* nincsen; *c)* 3123; 3124; 3125; 3126; 3127. **113.** $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. **115.** 6. **116.** n-edik. **117.** $A = 15 \cdot 10^k$. **119.** $73 \cdot 137 = 10^4 + 1$. **121.** *e)* $100b + 10c + d$; *f)* $10b + c$; *g)* d; *h)* $10c + d$. **123.** 0; 8; 7; 5; 6; 1; 8; 6. **124.** *a)* igen; *b)* igen; *c)* igen; *d)* 0; *e)* 1; *f)* 2; *g)* 0; *h)* 0, 0; 1, 1; 2, 2; 3, 0; 4, 1; 5, 2; 6, 0; 7, 1; 8, 2; 0, 0; *i)* 0 vagy 3, vagy 6. **125.** 708; 504. **129.** $37 \cdot 27 = 999$, $999 + 1 = 1000$ alapján. **131.** 10^3. **132.** 210; 240; 270; 222; 252; 282; 204; 234; 264; 294; 216; 246; 276; 228; 258; 288. **133.** Igen. **134.** Nem, pl. $486 \cdot 5 = 2430$. **138.** Nincsen ilyen négyzetszám. **142.** 20. **144.** 48. **145.** Legalább 9-et. **147.** Nem lehet. **148.** Ha n páratlan szám. **149.** Első: 1, 4, 6, 11; második: 2, 3, 7, 10; harmadik: 5, 8, 9. **150.** Ha n vagy $n+1$ 3-nak többszöröse. **151.** *a)* n páratlan; *b)* $n = 16k - 1$ alakú; *c)* bármely n természetes számra; *d)* nincsen ilyen n; *e)* nincsen ilyen n; *f)* n páratlan természetes szám; *g)* n páratlan természetes szám; *h)* nincsen ilyen n. **153.** Nincsen ilyen n és k. **154.** 1. **157.** *a)* -12; -9; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 3; 6; 9; 15; *b)* -12; -7; -4; -3; -1; 0; 3; 8. **158.** Nincsen ilyen természetes szám. **162.** Igaz. **163.** Igen. **168.** Igen. **171.** 8 osztója n-nek. **173.** Nincsen ilyen polinom. **174.** pl. $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. **175.** Ötödfokú

polinomra nem igaz hasonló, pl. $p(x) = x^5 - x$. **176.** Az állítás tetszőleges n-ed fokú polinomra igaz. **177.** 1 éves. **178.** 14 éves. **179.** Igen. **180.** 1; 2; 2; 6; 5; 6; 8; 7; 8. **181.** *a)* 8; *b)* 36; *c)* 60. **184.** *a)* 5; *b)* 9; *c)* 15; *d)* 21; *e)* 5; *f)* 25. **185.** *a)* 8; *b)* 6; 16; 48. **186.** *a)* 2^6; *b)* 24; *c)* 36; *d)* 48; *e)* 1024, *f)* 60; *g)* 240. **187.** Négyzetszámok szorzata. **189.** *a)* 6; *b)* 8; *c)* 25; *d)* 160. **191.** *a)* 8; *b)* 4; *c)* 8; *d)* 4; *e)* $2 \cdot d(a)$, ahol $d(a)$ az a pozitív osztóinak számát jelenti. **192.** *a)* 3; *b)* 5; *c)* 6; *d)* 2; *e)* 6; *f)* 11; *g)* 6; *h)* 13; *i)* $\frac{d(n)}{2}$; *j)* $\frac{d(n)+1}{2}$. **193.** *a)* 72^6; *b)* 4^5; *c)* 180^9; *d)* 525^6; *e)* 17^3; *f)* 25^5; *g)* $n^{\frac{d(n)}{2}}$. **194.** 45. **195.** Igen. **196.** *a)* 3; *b)* 7; *c)* 12; *d)* 15; *e)* 13; *f)* 28; *g)* 31; *h)* 39; *i)* 20. **197.** *a)* 121; *b)* 511; *c)* 399; *d)* 364; *e)* 720; *f)* 1092. **198.** *a)* 255; *b)* 156; *c)* 121; *d)* 195; *e)* 6248; *f)* 1860. **201.** *a)* 744; *b)* 3751; *c)* 186 004; *d)* 4032. **202.** *a)* 511; *b)* 21 523 360; *c)* $2^{32} - 1$; *d)* $\frac{p^5 - 1}{p - 1}$; *e)* $\frac{p^{12} - 1}{p - 1}$; *f)* $\frac{p^{17} - 1}{p - 1}$; *g)* $\frac{p^{22} - 1}{p - 1}$; *h)* $\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$. **204.** pl. 28; 496. **205.** Nem. **213.** (284; 220), (1184; 1210), (2620; 2924), (5020; 5564). **214.** 4. **215.** 20. **216.** *a)* 1; *b)* 1; *c)* 5; *d)* 16; *e)* 1458; *f)* 34 588 806; *g)* $p^{10} - p^9$; *h)* $p^k - p^{k-1}$; *i)* 96; *j)* 19 440. **217.** Igaz. **218.** *a)* 120; *b)* 240; *c)* 840. **219.** $\varphi(n)$ páros, ha $n > 2$, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$. **220.** $x = 8$. **222.** $p = 5$; $q = 11$.

3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

223. *a)* 12; *b)* 128; *c)* 1; *d)* 81; *e)* 17; *f)* 13; *g)* 120; *h)* 875.

224. 2., 3., 4. igaz. **225.** *a)* *b*; *b)* *b*; *c)* *b*; *d)* *b*. **226.** *a)* 1; *b)* ha a páros, akkor 2, ha páratlan, akkor 1.
227. Igaz. **230.** *a)* 6; *b)* 13; *c)* 397; *d)* 512; *e)* 216; *f)* 11.
231. *a)* $7 \cdot 126 - 2 \cdot 438 = 6$; *b)* $3 \cdot 1599 - 8 \cdot 598 = 13$;
c) $5 \cdot 1985 - 2 \cdot 4764 = 397$; *d)* $4608 - 4096 = 512$;
e) $3 \cdot 1080 - 2 \cdot 1512 = 216$; *f)* $28 \cdot 9713 - 369 \cdot 737 = 11$.
233. *a)* $\frac{7}{15}$; *b)* $\frac{5}{17}$; *c)* $\frac{7}{11}$; *d)* $\frac{3}{4}$. **234.** 375, 840. **235.** 147, 1176; 294, 1029; 588, 735 és fordítva. **236.** 1111. **237.** 1 vagy 2.
239. $n = 5k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ alakú. **240.** Nincsen. **241.** (3; 4), (3; 10), (3; 28), (3; 35), (4; 15), (4; 21), (4; 35), (4; 63), (6; 35), (10; 21), (10; 63), (15; 28). **248.** Végtelen sok. **249.** *a)* 4; *b)* 7; *c)* 15; *d)* 1; *e)* 17. **250.** Például: (36; 48; 53). **252.** 68; 51.
253. 10, 240; 30, 80. **254.** *a)* 112; *b)* 450; *c)* 1260; *d)* 5916; *e)* 2850; *f)* 156 400. **255.** 4. igaz. **256.** *a)* 108; 3; 36; 108; *b)* 300; 5; 60; 300; *c)* 209; 1; 209; 209; *d)* 131 072; 128; 1024; 131 072; *e)* 60 401; 17; 3553; 60 401; *f)* 3 976 000; 4; 994 000; 3 976 000.
257. Igen. **258.** $3k$-szor $k \in \mathbf{N}^+$. **259.** Nem. **260.** 300 méterenként. **261.** 1 óra múlva. **262.** *a)* 2, 105; 3, 70; 5, 42; 7, 30; 6, 35; 10, 21; 14, 15; 1, 210; *b)* 9, 175; 25, 63; 7, 225; 1, 1575; *c)* 4, 45; 5, 36; 9, 20; 1, 180; *d)* 1, 256; *e)* 8, 325; 25, 104; 13, 200; 1, 2600. **263.** 122 darab. **265.** *a)* 5166; *b)* 31; *c)* 63; *d)* 45 144; *e)* Nincsen ilyen x; *f)* 3; 6; 12; 24; 48; *g)* $(2k+1) \cdot 15$, $k \in \mathbf{N}$; *h)* $2k$, $5l$ alakú számok kivételével minden egész szám ($k, l > 0$, egész). **267.** Nincsenek ilyen egész számok. **268.** $a=2$, $b=3$, $p=2$; $a=3$, $b=2$, $p=2$. **269.** *a)* 117; 221; *b)* 154; 350; *c)* 208; 598; *d)* 270; 100; *e)* 18; 80; *f)* 552; 115; 435; 232. **270.** 16; 12; 20, 4; 12; 80, 4; 20; 80, 4; 4; 240. **272.** 503. **273.** 720 721. **274.** 27 720

4. Diofantoszi problémák

275. 0, 10; 1, 9; 2, 8; 3, 7; 4, 6; 5, 5 és fordítva. **276.** $21n-12$, $n>0$, egész. **277.** $15m+8$, $m \in \mathbf{N}$. **278.** Nincsen. **279.** $2 \cdot 24 - 36 = 12$. **280.** $x=3$; $y=4$; $z=5$; $u=6$. **281.** $x=2$; $y=1$.

282. Nincsen megoldás. **283.** *a)* Nincsen megoldás. *b)* Nincsen megoldás. **285.** Nem. **286.** Nincsen. **288.** 3, 4, 5; 8, 15, 17 b. **292.** A relatív prím számhármasok száma 16. **294.** *a)* Igen; *b)* Nincsen. **296.** $(2n+1)^2 + (2n(n+1))^2 = (2n(n+1)+1)^2$, ahol n természetes szám. **297.** 24; 7; 25. **298.** 24; 10; 26.
299. Nincsen ilyen háromszög. **300.** 16; 30; 34. **301.** Nincsen ilyen háromszög. **303.** 5; 12; 13 vagy 6; 8; 10. **304.** Például 696; 697; 985. **305.** (0; 1; 2; 3; 4), (−2; −1; 0; 1; 2), (−10; −11; −12; −13; −14) **308.** *b)* $a=2$, $b=1$; $a=3$, $b=2$; $a=5$, $b=10$.

5. Számrendszerek

309. 9; Igen. **310.** 12, 6, 4; 110010110011_2, 302303_4, 6263_8.
311. *a)* 1100_2; 30_4; 22_5; 10_{12}; *b)* 10011010_2; 2122_4; 1104_5; $10(10)_{12}$; *c)* 11101100_2; 3230_4; 1421_5; 178_{12}; *d)* 101101001_2; 11221_4; 2421_5; 261_{12}; *e)* 1111010101_2; 3311_4; 12411_5; 699_{12}; *f)* 1111011000_2; 33120_4; 12414_5; $6(10)0_{12}$; *g)* 110101001_2; 12221_4; 3200_5; $2(11)5_{12}$; *h)* 1111101000_2; 33220_4; 13000_5; $6(11)4_{12}$; *i)* 1010100011_2; 22203_4; 10200_5; 483_{12}; *j)* 10000000000_2; 100000_4; 13044_5; 714_{12}.
312. Igen. **313.** 20 kérdés. **315.** *a)* 8-as; *b)* 4-es; *c)* 5-ös; *d)* 7-es. **316.** *a)* 13; 27; 33; *b)* 36; 301; 1773; *c)* 27; 16; 51; *d)* 208; 2381; 351. **317.** 11027_8. **318.** 5. **319.** *a)* 31_8; *b)* 5.
320. *a)* 114023_6; *b)* 49204_{12}; *c)* 32465145_7; *d)* 15476_8.
321. *a)* 5-ös; 11-es; 15-ös; *b)* 2-es; *c)* 14-es; 7-es; 4-es; *d)* 7-es; 6-os. **322.** 7-; 49-szeresére! **323.** *a)* 12345679_{10}; *b)* 1234568_9; *c)* 1235_6; *d)* $\overline{123\ldots(g-3)\,(g-1)}$. **325.** Igen. **326.** 8-as.
328. $112_3 \cdot 22_3$. **329.** 256_8. **330.** *a)* 0,625; 0,84375; 3,75; 11,125; *b)* $2,\dot{7}$; $4,\dot{4}$; 10,7037; $8,\dot{1}$. **331.** 6; 2; 6; 5.
332. *a)* 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; *b)* 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{18}$. **333.** Nem. **334.** ha $2^n < a \leqq 2^{n+1}$, akkor pontosan n nullával. **335.** 1. *a)* $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{16}$; $1\frac{5}{8}$; $7\frac{3}{4}$; $\frac{15}{32}$; *b)* $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{27}$; $\frac{4}{81}$; $6\frac{2}{9}$; $19\frac{5}{27}$; 2. *a)* $2\frac{5}{8}$, végtelen nem szakaszos tizedestört nem lesz közöttük. **336.** $0{,}1412_6$. **337.** *a)* $g>3$

egész szám $f=2g$; *b)* Nincsen ilyen g, f; *c)* $f=g^2$.

338. $0{,}\dot{0}12345679\dot{0}$; $0{,}\dot{0}12345\dot{7}_8$; $0{,}\dot{0}1234\dot{6}_7$; $\overline{0{,}01234\ldots(b-3)\,(b\dot{-}1)}_b$. **339.** *a)* nincsen olyan g; *b)* nincsen olyan g; *c)* 2; 3; 5; 6; 8...; *d)* Nincsen. **344.** $ak+1$, ahol $k\geqq 1$ egész szám. **345.** 0. **346.** Igen. **347.** $g^2=ak$, $k>0$, egész szám. **348.** 21. **349.** *a)* 24654_8; *b)* 18276_9; *c)* 24130_6; 24234_6; 24432_6; *d)* 25160_8; 25464_8; *e)* 39280_{12}; 39253_{12}; 39226_{12}; $392(10)9_{12}$; *f)* 452310_6; 454313_6; *g)* 35020_6; 35322_6; 35124_6; 35520_6; *h)* 47030_8; 47532_8; 47334_8; 47136_8; 47730_8; *i)* 50340_9; 54340_9; 58340_9; 51343_9; 55343_9; 52346_9; 56346_9; *j)* 10030_5; 10430_5; 11330_5; 12230_5; 13130_5; 14030_5. **350.** Nincsen ilyen. **351.** 1. **353.** $g=5k+2$; $g=5k+3$; $g=5k+4$ (k pozitív egész szám). **354.** 305_9. **355.** *a)* Nem; *b)* Bármely $g>1$. **357.** 13421_5. **358.** $x=9$, $a=9$, $b=5$. **359.** A számrendszer alapja: 11; 46; 81 lehet. A keresett számok 1610; 101 710; 544 810. **360.** 53 561. **361.** $\overline{abc}_g$, ahol $a=2c+1$; $b=3c+1$; $g=3c+2$; $c\geqq 1$ egész. **362.** Négyzetszámra.

6. Racionális számok

365. *a)* $-\frac{1}{64}$; *b)* $19\frac{2}{3}$; *c)* $18\frac{1}{10}$; *d)* 1; *e)* $5\frac{35}{84}$; *f)* 21; *g)* $-\frac{5}{6}$; *h)* $9\frac{9}{140}$; *i)* $-3\frac{4}{7}$; *j)* $5\frac{16}{49}$; *k)* $1\frac{3}{4}$; *l)* $2\frac{5}{12}$. **366.** *a)* $\frac{75}{154}$; *b)* $\frac{16}{85}$. **367.** Csökken. **368.** Növekszik. **369.** Igaz. **371.** 57 db. **372.** *c)* $3{,}45628398\cdot 10^5$; *d)* $2{,}3907\cdot 10^{-6}$; *e)* $4{,}5692606\cdot 10^2$; *f)* $6{,}5000067\cdot 10^{-4}$; *g)* $2{,}3478234\cdot 10^4$; *h)* $5{,}643\cdot 10$; *i)* 8,00061. **373.** *a)* 17,586817; *b)* $-2{,}37561$; *c)* 0,687; *d)* 0,244444444. **374.** $\frac{381}{57}>\frac{565}{85}$. **375.** *a)* $-\frac{29}{11}$; $-\frac{3}{7};\frac{23}{30};\frac{7}{3}$; *b)* $-\frac{5}{3};-\frac{7}{5};0;\frac{29}{15};\frac{36}{11};\frac{17}{4}$. **377.** *a)* $-4{,}5<a<2{,}5$ racionális számok; *b)* $a<1{,}99$ vagy $a>2{,}01$ racionális számok; *c)* $14{,}9<a<15{,}1$ racionális számok. **378.** 100-nál nagyobb.

379. $n>100$. **381.** Igen, pl. $\frac{17}{24};\frac{33}{48};\frac{35}{48};\frac{65}{96};\frac{67}{96};\frac{69}{96};\frac{71}{96};\frac{129}{192};\frac{131}{192};\frac{133}{192}$; $k_1<k_1+\frac{k_2-k_1}{2}<k_2$; k_1, k_2 racionális számok. **382.** Nincsen. **383.** Nincsen. **384.** Nincsen. Igen a nulla. Nincsen. **385.** *a)* $\frac{2}{10}$; *b)* $\frac{75}{10^3}$; *c)* $\frac{35}{10^2}$; *d)* $\frac{36}{10^2}$; *e)* $\frac{375}{10^3}$; *f)* $\frac{88}{10^3}$; *g)* $\frac{5^8}{10^7}$; *h), i), j)* nem lehet. **386.** Véges tizedestört alakúak: *b), c), d), e), f)*. Tiszta szakaszos tizedestört alakúak *h), i)*. Vegyes szakaszos tizedestört alakúak *a), f), g), j)*. **387.** 1. hamis; 2. hamis; 3. igaz; 4. hamis; 5. hamis; 6. hamis; 7. igaz; 8. igaz; 9. igaz.

388. $1{,}1\ldots=1\frac{1}{9}$. **389.** *a)* $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots$; *b)* $\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\ldots$; *c)* $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots$; *d)* $\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+\frac{35}{10^6}+\ldots$; *e)* $\frac{134}{10^3}+\frac{134}{10^6}+\frac{134}{10^9}+\ldots$; *f)* $9+\frac{6}{10}+\frac{24}{10^3}+\frac{24}{10^5}+\frac{24}{10^7}+\ldots$.

390. *a)* $\frac{12}{10^2}$; *b)* $\frac{298}{10^5}$; *c)* $\frac{35}{10^3}$; *d)* $\frac{1263}{10^4}$; *e)* $\frac{123}{99}$; *f)* $\frac{13625}{900}$.

393. *a)* $\frac{x}{9}$; *b)* $\frac{9x-y}{90}$, x, y, számjegyek. **395.** Igen, pl.: 1. 3; 4; 5; 2. 1; 2; $\sqrt{5}$; 3. $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2; 4. $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$. **398.** 1. hamis; 2. hamis; 3. hamis; 4. igaz; 5. igaz; 6. igaz. **400.** $p=46$, $q=51$; $p=47$, $q=52$. **404.** $a=1$; $b=6$; $c=2$.

7. Irracionális számok

409. Igaz. **414.** Igaz. **417.** *a)* Igaz; *b)* Igaz. **419.** Igen, pl. $y=\sqrt{2}x$ egyenletű egyenes. **420.** *d)*. **421.** *a)* irracionális; *b)* racionális; *c)* racionális; *d)* racionális; *e)* racionális; *f)* irracionális. **422.** 1. hamis; 2. hamis; 3. hamis; 4. hamis; 5. igaz; 6. igaz; 7. igaz. **424.** Nincsen. **425.** 1. igaz; 2. igaz; 3. hamis; 4. hamis;

5. hamis. **427.** Mindegyik esetben egy. *a)* 2; *b)* 3; *c)* 5; *d)* 11; *e)* -18. **428.** Igaz. **429.** Ilyen pl.: *a)* 1,4; 1,5; *b)* 1,41; 1,42; *c)* 1,41421; 1,41422; *d)* 1,4; 1,41; *e)* 1,41; 1,414; *f)* 1,41421.

8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány feladat

430. 1; $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{11}{8}$. **432.** *a)* 2; $\frac{9}{5}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{17}{10}$;

b) 3; $\frac{16}{5}$; $\frac{19}{6}$; $\frac{28}{9}$; $\frac{31}{10}$. **433.** *a)* $\frac{21}{15}$; $\frac{35}{15}$; $\frac{106}{75}$; *b)* $\frac{26}{15}$; $\frac{43}{25}$; $\frac{130}{75}$;

c) $\frac{47}{15}$; $\frac{79}{25}$; $\frac{236}{75}$. **434.** $\frac{1}{2q} < \frac{1}{q}$, $q>0$. **438.** ha i nagyobb, mint k, akkor igaz. Igen. Egyetlen szám van. **441.** *c)* . **442.** 2501. **445.** 9-es.

***447.** *b)* $p = \frac{2a-3}{a-2}$, ha $a \neq 2$. **448.** *a)* nem, nem; *b)* igen, igen; *c)* igen, nem; *d)* igen, nem; *e)* nem, nem. **449.** 1. igaz; 2. hamis; 3. igaz; 4. igaz; 5. igaz. **450.** Van ilyen művelet és egy van. **451.** $a=0$, $e=-1$, $a=1$, $e=0$. **452.** Nem, nem. **453.** *a)* $x*y \in L$; *b)* asszociatív; *c)* igaz. **454.** *c)* Igaz; *d)* igen, nincsen, nincsen.

9. Komplex számok

455. *a)* $5i$; *b)* $3i$; *c)* $\frac{4}{7}i$; *d)* $\frac{9}{4}i$. **456.** *a)* $x>-5$; *b)* $x<-4$; *c)* $x>3$; *c)* $x>\frac{4}{5}$. **457.** $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$.

458. *a)* $x=-16$; $y=-10$; *b)* $x=2$; $y=3$; *c)* $x=\frac{1}{a}$; $y=0$, ha $b\neq 0$;

és $x=\frac{1}{a}$, $y \in \mathbf{R}$, ha $b=0$. **460.** *a)* $c=10$, $d=-3$; *b)* $c=\frac{3}{2}$, $d=-2$; *c)* $c=2$, $d=0$; *d)* $c=0$, $d=-\frac{2}{5}$; *e)* $c=4$, $d=2$.

461. *a)* $x_{1,2}=1\pm 3i$; *b)* $x_{1,2}=2\pm 5i$; *c)* $x_{1,2}=3\pm 4i$; *d)* $x_{1,2}=\pm 11i$. **462.** A téglalap csúcsai: $5+3i$; $5-3i$; $-5-3i$. **463.** *a)* $7i$; *b)* $-i$; *c)* i, *d)* -12; *e)* -18; *f)* b^2-a^2; *g)* -7; *h)* $-\frac{1}{4}$; *i)* $-\frac{1}{6}$. **464.** *a)* $21+4i$; *b)* $\frac{17}{12}-\frac{3}{10}i$; *c)* $3+4i$; *d)* $-14+20i$; *e)* $-1+5i$; *f)* 2; *g)* $27+5i$; *h)* $\frac{15}{13}+\frac{10}{13}i$; *i)* $-\frac{23}{65}-\frac{41}{65}i$. **465.** *a)* $4-4i$; *b)* $3a+3bi$; *c)* $13+15i$; *d)* x^4+4. **466.** *a)* x bármely valós szám, $y=-5$; *b)* x bármely valós szám, $y=1$; *c)* $x=-3$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{-8\}$; *d)* $x=-6$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{7\}$; *e)* $x \in \mathbf{R}$, $y=-b$; *f)* $x=-a$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$; *g)* $x+2y=0$; *h)* $bx+ay=0$; *i)* $ax-by=0$ és $ay+by \neq 0$; *j)* $x=a$, $y=-b$.

467. A komplex számok képzetes részei ellentett előjelűek legyenek. **468.** *a)* pl. $z_1=3+5i$ és $z_2=2-5i$; *b)* pl. $z_1=2+3i$ és $z_2=6-9i$; *c)* pl. $z_1=1+i$ és $z_2=1-i$. **469., 470., 471.** A gyököket az egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. **472.** *a)* $x=2+i$; $y=2-i$; *b)* $x=1+i$; $y=i$. **473.** *a)* 5; *b)* $-2i$; *c)* $5i$; *d)* $1-i$; *e)* $-2-3i$; *f)* $8+7i$. **474.** *a)* 3; *b)* 2; *c)* $\sqrt{5}$; *d)* $\sqrt{29}$; *e)* $3\sqrt{5}$; *f)* $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

475. *a)* $\sqrt{13}$; *b)* $\sqrt{53}$; *c)* $\sqrt{34}$; *d)* $\frac{5}{12}$; *e)* $\frac{\sqrt{7}}{2}$; *f)* $\frac{5}{6}$.

476. A háromszög oldalainak hossza: 2; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **477.** *a)* $(a+bi)(a-bi)$; *b)* $(a+2i)(a-2i)$; *c)* $(a+i\sqrt{2})(a-i\sqrt{2})$. **478.** Két komplex szám hányadosának konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak hányadosával, ha a nevező nullától különböző. **479.** *a)* 0; 1; $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; *b)* -1; 0;

1; i; $-i$. **486.** *a)* $\cos 0° + i \sin 0°$; *b)* $\cos\pi + i \sin\pi$; *c)* $\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$; *d)* $\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}$; *e)* $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$; *f)* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$, *g)* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$; *h)* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)$; *i)* $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$; *j)* $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)$; *k)* $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$; *l)* $\sqrt{10}(\cos 18°26' + i \sin 18°26')$. **487.** $z_1 z_2 = -2$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

488. *a)* 6; *b)* $2\sqrt{3}+2i$; *c)* $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$; *d)* $\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

490. $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; ...; $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$, $(k \in \mathbf{N})$. **491.** *a)* 0; *b)* -4; *c)* -4.

492. $n = 4k$, k pozitív egész szám. **493.** $\frac{1}{z} = \bar{z}$. **494.** *a)* $\frac{3}{2} - 2i$; *b)* $3+4i$; *c)* $3+4i$; *d)* 0; *e)* $\pm i$; 0. **495.** $\sqrt{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $-\sqrt{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

496. *a)* z_1 középpontú 2 egység sugarú körön; *b)* z_1 középpontú 2 egység sugarú körön kívül; *c)* z_1 középpontú 2 egység sugarú körön belül. **497.** *a)* -8; *b)* 16. **498.** *a)* a gyökök: 1; $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

b) gyökök: $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$; $-1-i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

499. *a)* $x_0 = 1$; $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; *b)* $x_0 = 1$;

$x_1 = i$; $x_2 = -1$; $x_3 = -i$; *c)* $x_0 = 1$; $x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$; $x_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}$; $x_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i \sin\frac{6\pi}{5}$; $x_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i \sin\frac{8\pi}{5}$; *d)* $x_0 = 1$; $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_3 = -1$; $x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

e) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$; *f)* $x_1 = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$.

III. Az algebra elemei

1. Műveletek polinomokkal

1. *a)* $-5-2x+x^2+5x^3+4x^4$; *b)* $6-y+3y^2+5y^3+2y^4-4y^5$; *c)* $2-x-4x^2+5x^6$. **2.** *a)* $x^4+2x^3-3x^2-x+5$; *b)* $-\frac{1}{6}y^3+3y^2+\frac{1}{2}y+\frac{2}{5}$; *c)* $5z^4+2{,}5z^2-3z+0{,}5$. **3.** *a)* $5+2xy^4-x^2y^3+x^3y^2+x^4y$ vagy $5+x^4y+x^3y^2-x^2y^3+2xy^4$; *b)* $y^3+y^2z-z^2-3yz^3-7z^4$ vagy $-z^2-7z^4-3yz^3+y^2z+y^3$; *c)* $-3z+xz+2x^2+x^5$ vagy $2x^2+x^5-3z+xz$. **4.** *a)* $3a^2b$, $-a^2b$ és $1{,}3a^2b$; *b)* $\frac{1}{5}xy^3$ és $-3xy^3$; *c)* xy^2z és $-3xy^2z$, illetve xyz^2 és $2xyz^2$.

5. *a)* $3a^2b$; $-\frac{a^2}{3}$; a^3b; *b)* $(x+y)^2$; $-2x^2$; $5xy$; $3(x-y)^2$; *c)* $\frac{2}{5}pq$; $2p(p-q)^2$; $q(p-q)^2$; $5p$. **6.** *a)* Másod-, harmad-, első-, nullad-, negyedfokú; *b)* Első-, első-, másod-, harmad-, heted-, ötödfokú; *c)* Harmad-, ötöd-, ötöd-, hatod-, hatodfokú; *d)* Másod-, harmad-, harmad-, negyedfokú. **7.** *a)* -2; $-\frac{3}{8}$; $0{,}15$; $-\frac{1}{10}$; 6; *b)* $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}$; $-\frac{2}{27}$; $-\frac{1}{36}$; $\frac{5}{6}$; *c)* -2; -4; 12; -16; -4. **8.** *a)* $3x$; *b)* 0; *c)* $-7a^2$; *d)* $6x^3$. **9.** *a)* 0; *b)* $8p^3q$. **10.** *a)* $7x^2-3x$; *b)* $2a^2$.

11. *a)* $-\frac{11}{10}x^2+\frac{2}{3}y^3$; *b)* $10ab-6a^2b+4ab^2$; *c)* $0{,}5a+0{,}5b$.

12. *a)* $\frac{3}{2}a^2b-\frac{7}{15}ab^2$; *b)* $1{,}1xy-\frac{4}{15}xyz$; *c)* $-0{,}45p^2qr+0{,}8pq^2r-pqr$. **13.** *a)* $\frac{19}{6}(x^2-y^2)$; *b)* $-(a-b)^2$; *c)* $-\frac{8}{3}(x+y)^2$.

14. *a)* $2a^{n+1}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *b)* $12x^2+4x^k$, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$;
15. *a)* $11a+3b$; *b)* $10x-7$; *c)* $16a-b$; *d)* $-a^2b-ab^2$; *e)* $3x^2+2x-6$; *f)* $3x^2-xy+3y^2$; *g)* $13a+2b+3c$; *h)* $5x^2+2ax+4a^2$;

i) $6a^3+a^2b$; *j)* $5x^4-x^3y+5xy^3$; *k)* $7a^n-2b^m+4c$, $n>0$, $m>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$.

16. *a)* $14a^4-4a^3b-6a^2b^2+6ab^3$; *b)* $\frac{15}{4}x^2+\frac{19}{12}xy-2y^2$; *c)* $x^4-y^4+1{,}1x^3y+0{,}68x^2y^2+1{,}5xy^3$. **17.** *a)* $132{,}375$; *b)* $-\frac{5}{36}$.

18. *a)* 0; *b)* $11x$; *c)* $-3a^3$; *d)* $2a^4$; *e)* $-8xy$; *f)* x^2y; *g)* $8a^2b$; *h)* $5abc$; *i)* $\frac{3}{2}a$; *j)* $\frac{13}{15}x$; *k)* $\frac{26}{15}x^2y$; *l)* $-\frac{17}{12}ab^2$; *m)* $8a^n$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *n)* $-5x^{n+1}$, $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$. **19.** *a)* $2x-2y$; *b)* $3a-3$; *c)* $2a-3b$; *d)* $2a^2$; *e)* $5a^2b-3b^2$; *f)* $-2x^2$. **20.** *a)* $17a+12b-6c$; *b)* $9a^2-6ab$; *c)* $4ab-4bc+ac$; *d)* $\frac{7}{6}x+\frac{7}{6}y-\frac{9}{20}z$; *e)* $ab-\frac{1}{14}bc-\frac{7}{15}ac$; *f)* $-\frac{7}{3}x^3-\frac{8}{3}x^2y+\frac{9}{4}xy^2-2{,}5y^3-\frac{1}{3}$. **21.** *a)* $3(a-x)^2+5(a-x)^3-5(a-x)^4$; *b)* $16(a+b)^4+10(a+b)^3-16(a+b)^2-3(a+b)$. **22.** *a)* $8a^2-ab-b^2$; *b)* $-11x^3+13x^2-4x-1$.
23. *a)* -1; *b)* $15a^2-a$. **24.** *a)* $-7x+10y+8z$; *b)* $-2a$.
25. *a)* pl.: $(2a^2-3a-ab)+(3a^2-ab+b^2)$; *b)* pl.: $(a^2-2ab)-(-4a^2+3a-b^2)$. **26.** $2a^2+12ab+6b^2$. **27.** *a)* 68; *b)* $\frac{13}{32}$.

28. 1. $(a+b)+(a-b)=2a$; 2. $(a+b)-(a-b)=2b$, a, $b\in\mathbf{R}$.
29. $6k+3$, $k\in\mathbf{N}$. **30.** 0. **31.** $5a-b$. **32.** $10a-4b$.
33. 1. *e), i), l);* 2. *g).* **34.** *a)* a^3; *b)* $-x^5$; *c)* $-a^4$; *d)* $-x^{n+2}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *e)* a^{2n}; $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$; *f)* a^{6n-1}; $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$. **35.** *a)* $10x^5$; *b)* $6p^7$; *c)* $15p^8$; *d)* $-20b^6$; *e)* $6a^5$; *f)* $-\frac{18}{5}a^{2n+1}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *g)* $-x^{2n}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *h)* x^{2p}, $p>1$, $p\in\mathbf{Z}$.

36. *a)* $-6a^2b^4$; *b)* $15x^3y^4$; *c)* $-4a^5b^3$; *d)* $-\frac{2}{3}k^3l^4$; *e)* $-0{,}3x^3y^3$; *f)* $-1{,}2a^4b^6$. **37.** *a)* $8a^3b^5c^5$; *b)* $x^3y^4z^2$; *c)* $8{,}5x^5y^5z^2$; *d)* $10x^{k+3}$, $k\geqq 0$, $k\in\mathbf{Z}$; *e)* $-24a^{n+1}b^{n+2}$, $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$; *f)* $8(a+b)^4$.
38. *a)* $3x^6y^3$; *b)* $28a^8b^4$; *c)* $-0{,}1p^4q^7$; *d)* $4a^{3n}$, $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$.
39. *a)* $3a+6$; *b)* $15b-15$; *c)* $-6a+4b$; *d)* $24x-32y$; *e)* $1{,}8x^2-$

$-0{,}6y^3$; *f)* $\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}y$. **40.** *a)* $ac-bc$; *b)* $3cx-4dx$; *c)* $-6a^2-4ab$; *d)* $-20xy-12x^2$; *e)* $-10a-15b+20c$; *f)* $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z$; *g)* $-4x^3+10x^2-6x$; *h)* $2y^3-2y^2+2y$; *i)* $6x^3y-10x^2y^2+2xy^3$. **41.** *a)* $6x^5y^2-10x^4y^2+8x^3y^2+6x^2y^2$; *b)* $-3a^4b^2+6a^3b^4+6a^2b^5-3ab^5$; *c)* $6a^4x^2-15a^3x^4+15a^2x^5-9ax^6$. **42.** *a)* $a^{k+n}+2a^{n+2}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$; *b)* $15a^{n+2}-10a^{n+1}$ $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$; *c)* $-12x^{3l}+9x^{2l+2}$, $l>0$, $l\in\mathbf{Z}$. *d)* $3x^{2n}-\frac{9}{2}x^n$, $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$. **43.** *a)* x^2+y^2; *b)* $14a-4b$; *c)* $21p+29q$; *d)* $5x-3y+9z$; *e)* $4a^2-7ab+b^2$; *f)* $-a^2$; *g)* $16-10{,}5x$; *h)* $3x^2-8xy-4y^2$; *i)* $18-19a$. **44.** *a)* $ac+bc+ad+bd$; *b)* $ac-bc-ad+bd$; *c)* a^2+5a+6; *d)* $-6x^2+13x-5$; *e)* $6x^2+13xy+6y^2$; *f)* $6a^4+5a^2b-6b^2$; *g)* $7a^2b-20a^3+6ab^2$; *h)* $35x^4y^4-5x^2y^3-14x^5y^4+2x^3y^3$; *i)* $\frac{35}{24}x^3y^2-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}x^4y^2$; *j)* $0{,}06a^4b^6+1{,}46a^5b^6-a^6b^6$; *k)* $a^4-5a^3b+8a^2b^2-2ab^3$. **45.** *a)* $\frac{3}{2}$; *b)* 24; *c)* 6. **46.** *a)* $2x^2-12$; *b)* $-2a-2$; *c)* $4a^4-2a^3b-10a^2b^2+24ab^3-12b^4$; *d)* $x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc$; *e)* x^6-1; *f)* $-a^3-b^3-c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-2abc$; *g)* x^4-y^4; *h)* x^5+y^5. **47.** *a), b), c), e).* **48.** *a)* a^2-b^2; *b)* x^2-y^2; *c)* a^2-4; *d)* x^2-1; *e)* $4x^2-y^2$; *f)* $4b^2-9a^2$; *g)* $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$; *h)* $\frac{4}{9}a^4-\frac{9}{16}b^4$; *i)* $4x^2y^2-1$; *j)* $9a^4-4b^2$; *k)* $0{,}04a^2-0{,}25b^2$; *l)* $x^{2k}-y^2$, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$. **49.** *a)* 899; *b)* 3599; *c)* 39 999; *d)* 3,99; *e)* 399,99; *f)* 3584; *g)* 600; *h)* 2800; *i)* 78 000. **50.** *a), b).* **51.** *a)* a^2-b^2; *b)* a^3+b^3; *c)* a^4-b^4; *d)* a^5+b^5; *e)* a^6-b^6. **52.** *a)* a^2-b^2; *b)* a^3-b^3; *c)* a^4-b^4; *d)* a^5-b^5; *e)* a^6-b^6. **53.** *a)* x^3-y^3; *b)* x^3+y^3; *c)* $8a^3-b^3$; *d)* $8x^6+27y^6$; *e)* $\frac{1}{8}x^3-\frac{8}{27}y^3$. **54.** *a)* x^6; *b)* $-x^6$; *c)* $-x^6$; *d)* a^{50}; *e)* a^{50}; *f)* $-a^{50}$; *g)* a^{nk}, $n>0$, $k>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$; *h)* a^{nk}, ha $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k>0$, páros szám, illetve $-a^{nk}$, ha $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k>0$ páratlan szám. *i)* $-a^{nk}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$. **55.** *a)* $4a^4$; *b)* $4a^6$; *c)* $-27a^3$; *d)* a^3b^3; *e)* x^2y^2; *f)* $-x^3y^3$; *g)* $a^2b^2c^2$; *h)* $a^4b^2c^6$; *i)* $25a^2b^4$; *j)* $\frac{1}{27}x^6$; *k)* $\frac{1}{9}x^6$; *l)* $\frac{27}{64}a^6b^9$. **56.** *a)* $4a^{10}b^{10}$; *b)* $8a^{24}$; *c)* $9x^6y^{10}z^8$; *d)* a^{4k}, $k>1$, $k\in\mathbf{Z}$; *e)* $16(x-y)^{5n}$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$. **57.** *a)* $\frac{a^2}{b^4}$; $b\neq0$; *b)* $\frac{a^6}{b^9}$, $b\neq0$; *c)* $-\frac{a^{10}}{b^{20}}$, $b\neq0$; *d)* $\frac{4a^2}{9b^2}$, $b\neq0$; *e)* $\frac{4a^4}{25b^6}$, $b\neq0$; *f)* $\frac{4a^2}{9b^2}$, $a\neq0$, $b\neq0$. **58.** *a)* $\frac{a^2}{b^2}$, $x\neq0$, $b\neq0$; *b)* $\frac{2a^7}{3bc^3}$, $b\neq0$, $c\neq0$; *c)* $-\frac{81a^8b^7}{256x^8y^{12}}$, $a\neq0$, $b\neq0$, $x\neq0$, $y\neq0$; *d)* $\frac{x^8}{y^8}$, $y\neq0$, $x\neq0$. **59.** *a)* $\frac{a^3c^6}{b^3d^6}$, $abcd\neq0$; *b)* $\frac{2x^4y^5}{a^2b^3}$, $abxy\neq0$. **60.** *a)* $a^2+2ab+b^2$; *b)* $a^2-2ab+b^2$; *c)* $x^2+2xy+y^2$; *d)* a^2+6a+9; *e)* b^2-4b+4; *f)* x^2+2x+1; *g)* $4x^2+4x+1$; *h)* $9a^2-6ab+b^2$; *i)* $9y^2+6xy+x^2$; *j)* $9x^2-12xy+4y^2$; *k)* $25a^2+30ab+9b^2$; *l)* a^4+2a^2+1; *m)* x^6+2x^3+1; *n)* $x^4+2x^2y^2+y^4$; *o)* $a^6-2a^3b^3+b^6$. **61.** *a)* $x^2+x+\frac{1}{4}$; *b)* $y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$; *c)* $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$; *d)* $\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{16}$; *e)* $\frac{4a^2}{9}-4ab+9b^2$; *f)* $\frac{25}{9}a^2+\frac{20}{3}ab+4b^2$; *g)* $\frac{36}{25}a^2-\frac{14}{5}ab+\frac{49}{36}b^2$. **62.** *a)* $0{,}04a^4-2a^2b+25b^2$; *b)* $0{,}09x^4+2{,}4x^2y+16y^2$; *c)* $\frac{9}{16}a^4-\frac{3}{4}a^2b^3+0{,}25b^6$; *d)* $\frac{16}{9}x^4+\frac{8}{5}x^2y^4+0{,}36y^8$; *e)* $a^{2k}+2a^{k+1}+a^2$, $k\in\mathbf{Z}^+$; *f)* $x^{2n}-2x^{n+1}+x^2$, $k\in\mathbf{Z}^+$; *g)* $a^{2k+2}+2a^{2k+1}+a^{2k}$, $k\in\mathbf{Z}^+$. **63.** *a)* $\frac{9}{16}a^8b^2-a^5b^4+\frac{4}{9}a^2b^6$; *b)* $\frac{25}{36}x^6y^4+x^4y^3+\frac{9}{25}x^2y^2$; *c)* $\frac{4}{9}a^6b^8-\frac{10}{3}a^8b^5+\frac{25}{4}a^{10}b^2$; *d)* $\frac{16}{25}a^6b^6-2a^5b^6+\frac{25}{16}a^4b^6$. **64.** *a)* $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; *b)* $a^2+b^2+c^2-$

$-2ab-2bc+2ac$; *c)* $x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2xz$; *d)* $4x^2+y^2+$ $+z^2-4xy+2yz-4xz$. **65.** *a)* $(a+1)^2$ vagy $(-a-1)^2$; *b)* $(2x+$ $+y)^2$ vagy $(-2x-y)^2$; *c)* $(b-3c)^2$ vagy $(-b+3c)^2$; *d)* $(5x+2y)^2$ vagy $(-5x-2y)^2$; *e)* $(2x^3-3y^2)^2$ vagy $(-2x^3+3y^2)$; *f)* $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^2$ vagy $\left(-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)^2$; *g)* $\left(\frac{4}{3}a^3b^3-\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2$ vagy $\left(-\frac{4}{3}a^3b^3+\right.$ $\left.+\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2$; *h)* $(0{,}3x^2-4y)^2$ vagy $(-0{,}3x^2+4y)^2$. **66.** *a)* x^2+ $+2xy+y^2$; *b)* $a^2-2ab+b^2$; *c)* $4c^2+4cd+d^2$; *d)* $\frac{4}{9}d^2-kl+\frac{9}{16}l^2$; *e)* $25a^2+40ab+16b^2$; *f)* $1+10x+25x^2$; *g)* $36p^2+60pq+25q^2$; *h)* $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}xz+\frac{4}{9}z^2$; *i)* $4+24ab+36a^2b^2$; *j)* $\frac{4}{9}x^2y^2+\frac{4}{3}xy+1$.

67. *a)* $(x+3)^2+4$ vagy $(-x-3)^2+4$; *b)* $(x-5)^2+1$ vagy $(-x+5)^2+1$; *c)* $(x+2)^2+13$ vagy $(-x-2)^2+13$; *d)* $(x-1)^2-4$ vagy $(-x+1)^2-4$; *e)* $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{25}$ vagy $\left(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{25}$; *f)* $(7a+2)^2+28$ vagy $(-7a-2)^2+28$. **68.** *a)* $(10\cdot 2+5)^2=625$; *b)* $(10\cdot 4+5)^2=2025$; *c)* $(10\cdot 6+5)^2=4225$; *d)* $(10\cdot 12+5)^2=$ $=15\,625$; *e)* $(10\cdot 14+5)^2=21\,025$; *f)* $(10\cdot 16+5)^2=27\,225$.

69. *a)* $4ab$; *b)* $4x^2+10x+7$; *c)* $-y^2-26y-19$; *d)* $80a^2-150a+$ $+290$; *e)* $-7a^2-8a+3$; *f)* $-6x^2+2x-5$; *g)* a^4-2a^2+1; *h)* a^4- $-8a^2+16$; *i)* $a^2+2ab+b^2-c^2$; *j)* $a^2-2ab+b^2-c^2$; *k)* x^2+6xz+ $+9z^2-4y^2$; *l)* $a^2-8ac+16c^2-4b^2$; *m)* $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.

70. Azonosság az *a), b), d).* **71.** *a)* $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; *b)* a^3- $-3a^2b+3ab^2-b^3$; *c)* $c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$; *d)* $p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$; *e)* $a^3+6a^2+12a+8$; *f)* $27-27a+9a^2-a^3$; *g)* $a^3-6a^2b+12ab^2-$ $-8b^3$; *h)* $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$; *i)* $64a^3+24a^2b+3ab^2+\frac{b^3}{8}$; *j)* $\frac{8}{27}x^3-4x^2y+18xy^2-27y^3$; *k)* $\frac{a^3}{8}-\frac{a^2b}{4}+\frac{ab^2}{6}-\frac{b^3}{27}$; *l)* a^6+ $+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$; *m)* $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$. **72.** *a)* $64a^9+$ $+240a^6b^2+300a^3b^4+125b^6$; *b)* $343k^9+294k^6l^2+84k^3l^4+8l^6$;

c) $0{,}125x^3+0{,}075x^2y+0{,}015xy^2+0{,}001y^3$; *d)* $0{,}008a^3-0{,}012a^2b+$ $+0{,}006ab^2-0{,}001b^3$; *e)* $\frac{x^3y^3}{8}+\frac{x^4y^3}{4}+\frac{x^5y^3}{6}+\frac{x^6y^3}{27}$;

f) $0{,}008a^6b^3-0{,}2a^5b^4+\frac{5}{3}a^4b^5-\frac{125}{27}a^3b^6$; *g)* $x^{3n}-3x^{2n}+3x^n-1$, $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$. **73.** *a)* $2a$; *b)* $-10x$; *c)* $3x$; *d)* $-\frac{9}{8}a$; *e)* $-\frac{2}{7}x^2$; *f)* $-\frac{11}{12}a^3$; *g)* $-\frac{11}{5}a$; *h)* $\frac{9}{16}x^2$. **74.** *a)* 5; *b)* -3; *c)* 3; *d)* -30.

75. *a)* $2a$; *b)* $-3y$; *c)* $2bc$; *d)* $4b^2$. **76.** *a)* a^4; *b)* x^2; *c)* $-c^4$; *d)* $-a^5$.

77. *a)* a^{k-n}, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$; $n>0$, $n\in\mathbf{Z}$, $k>n$; *b)* a, $k>1$, $k\in\mathbf{Z}$; *c)* x^k, $k\in\mathbf{N}$; *d)* x^2, $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$. **78.** *a)* $3a^2$; *b)* $-3y$; *c)* $4y$; *d)* $\frac{2}{5}a^2$; *e)* $-3ab$; *f)* $3a^2b$. **79.** *a)* $3(x+y)^2$; *b)* $-4(a-b)^2$; *c)* $8(x-y)^2$; *d)* $4(x+2y)$, $k>0$, $k\in\mathbf{Z}$. **80.** *a)* $2a+5b$; *b)* $2+4x$; *c)* $b+4c$; *d)* $3y-2z$; *e)* $2x-3y$; *f)* $-3-5x^2y^2$. **81.** *a)* $2a+3b-4$; *b)* $2x^2-$ $-x+4$; *c)* $3a^2-2a+1$; *d)* $b-5+6a$; *e)* $-3xy^2+1+4x^2y^3$; *f)* $3b^2-$ $-2ab-5a^2$. **82.** *a)* $4x^2-8x+4$; *b)* $-6x^2-12x+4$; *c)* $3y-$ $-12xy-9x^2$; *d)* $6a^2-\frac{2}{3}ab^3+b^4$; *e)* $a^3-2a^2+4a+0{,}2$; *f)* $(a-b)^2-$ $-2(a-b)+5$. **83.** *a)* 3; *b)* 5; *c)* a; *d)* x. **84.** *a)* $x-1$; *b)* $a+3$; *c)* $3x-2$; *d)* $3a+4$. **85.** *a)* x^2-5; *b)* $(x-1)^2$; *c)* $3a^2+5a-7$; *d)* x^2-xy. **86.** *a)* $5a^2+3a-10$; *b)* $4a^2-2ab+6b^2$; *c)* $2x^2-3x+1$.

87. *a)* $a-b$; *b)* $a+b$; *c)* $(a^2+b^2)(a-b)$; *d)* $(a^2+b^2)(a+b)$; *e)* a^2- $-ab+b^2$; *f)* $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$. **88.** *a)* $x-1$; *b)* x^2-x+1; *c)* x^2+x+1; *d)* $(x^2+1)(x+1)$; *e)* $x^4-x^3+x^2-x+1$; *f)* x^5+x^4+ $+x^3+x^2+x+1$. **89.** *a)* $x-3$; *b)* $x+4$; *c)* $5-a$; *d)* $1-2x$.

90. *a)* $4a-3b$; *b)* $7x-9y$; *c)* $10a+8b$. **91.** *a)* x^2-y^2; *b)* x^2+y^2; *c)* a^3-1; *d)* a^5+b^4. **92.** *a)* $a+b$; *b)* $x-y$; *c)* a^2-b^2.

93. *a)* $(a+b)^2$; *b)* $(x-y)^2$; *c)* $c+d$. **94.** *a)* a^2-2a+4; *b)* a^2+ $+3a+9$; *c)* $4x^2+2x+1$; *d)* $4y^2-6y+9$; *e)* $x^6+x^3y+y^2$; *f)* $\frac{x^2}{4}-$

$-\frac{x}{2}+1$; *g)* $b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{4}$; *h)* $\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x+x^2$. **95.** *a)* $a+b$; *b)* $c-d$; *c)* $x-1$. **96.** *a)* $4b^2-8ab-4a^2$; *b)* 25; *c)* 4; *d)* $4x^2+20$; *e)* $-19a^2+3a-\frac{16}{3}$; *f)* $a^9-9a^6-a^4+27a^3-11$. **97.** *a)* $\frac{ax}{2}-1$; *b)* -2; *c)* 0; *d)* a^2-b^2; *e)* $(a-b)^2$; *f)* x^3-1; *g)* $-11x-0{,}5$, marad -51; *h)* $6a+4b$; *i)* $12x^2$. **98.** 16 és 17. **99.** 8 és 6. **100.** 15 és 17.

2. Polinomok szorzattá alakítása

102. *a)* ab; *b)* $3a^2b^2$; *c)* $x^5y^3z^2$; *d)* $5x^2y^2z^4$; *e)* $3ab$; *f)* abc.
103. *a)* $3(a+b)$; *b)* $5(2x-y)$; *c)* $x(a+b)$; *d)* $a(a+1)$; *e)* $c(a-b)$; *f)* $2(2-3x)$; *g)* $5a(b+c)$; *h)* $3x(y-2z)$; *i)* $5a(3x-2y)$; *j)* $-2y(x+2a)$. **104.** *a)* $x(x+y)$; *b)* $b(a-b)$; *c)* $a^3(a-1)$; *d)* $x^3(1-x)$; *e)* $5x^2(x+2)$; *f)* $4a^2(2a^2-3)$; *g)* $5y(3y^2-1)$; *h)* $6x^3(3x^3-4)$; *i)* $ab^2(1+ab)$; *j)* $a^3x^2(a+x^2)$. **105.** *a)* $a^n(1+a)$; *b)* $x^k(x^n-1)$; *c)* $a^{2k}(a^k-1)$; *d)* $5a^2(a^k-2)$. **106.** *a)* $x<-2 \vee x>0$; $x=-2$, $x=0$; $-2<x<0$; *b)* $x<0 \vee x>3$; $x=0$, $x=3$; $0<x<3$; *c)* $0<x<4$; $x=0$, $x=4$; $x<0 \vee x>4$. **107.** *a)* $x(a+b+c)$; *b)* $a(a^2-2a-1)$; *c)* $5xy(x-2+y)$; *d)* $2x^2y(-2x+3y-4x^2y^2)$; *e)* $5a^3b^2(2ab-3a+4b^2)$. **108.** *a)* $(x+y)(a+b)$; *b)* $(a+2)(x-y)$; *c)* $(a-b)(2a+5b)$; *d)* $(a+b)(3x+2y)$; *e)* $(a-b)(x-y)$; *f)* $(y-z)(x+a)$; *g)* $(x-5)(2a+3b)$; *h)* $2(x-2)(3-b)$.
109. *a)* $(x-1)(5a-2b+c)$; *b)* $(a^2+b^2)(x-3y-2z)$; *c)* $(x-2)(a-b+c)$; *d)* $(x+y-z)(a-3b-5c)$. **110.** *a)* $(x+y)(3a+1)$; *b)* $(x-y)(3b+1)$; *c)* $(x+y)(2a-1)$; *d)* $(a-b)(4x-1)$; *e)* $(a+b)(b-x)$; *f)* $(x-y)(2y-a)$. **111.** *a)* $(a+b)(x+y)$; *b)* $(a+b)(x-y)$; *c)* $(a+b)(a+c)$; *d)* $(x+3)(x^2+3)$; *e)* $(x-y)(x-2)$. **112.** *a)* $(a+b)(3x-4y)$; *b)* $(x-y)(5b-6a)$; *c)* $(5a-7x)(2a-3y)$; *d)* $3(2a-b)^2$; *e)* $x(1-x)(1+x)^2$.
113. *a)* $(x+2)(x+3)$; *b)* $(x-2)(x-4)$; *c)* $(x+3)(x-4)$; *d)* $(a+3)(a-5)$. **114.** $(x-1)(x-10)$, 10; 0; -8; -14; -18; -20; $-20{,}25$; -20; -18; -14. **115.** *a)* $x<-3 \vee x>-1$; $-3<x<-1$; $x=-3$, $x=-1$; *b)* $x<-5 \vee x>-2$; $-5<x<-2$; $x=-5$, $x=-2$; *c)* $x<-10 \vee x>3$; $-10<x<3$; $x=-10$, $x=3$; *d)* $x<-1 \vee x>3$; $-1<x<3$; $x=-1$, $x=3$; *e)* $2<x<4$; $x<2 \vee x>4$; $x=2$, $x=4$; *f)* $-1<x<3$; $x<-1 \vee x>3$; $x=-1$, $x=3$. **116.** *a)* $(a-b)(a+b)$; *b)* $(x-y)(x+y)$; *c)* $(k-1)(k+1)$; *d)* $(a-2)(a+2)$; *e)* $(a-3)(a+3)$; *f)* $(5-x)(5+x)$; *g)* $(a-1)(a+1)$; *h)* $(1-x)(1+x)$; *i)* $(2a-3)(2a+3)$; *j)* $(a-3b)(a+3b)$; *k)* $\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)$; *l)* $\left(y-\frac{x}{4}\right)\left(y+\frac{x}{4}\right)$; *m)* $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$; *n)* $\left(2x-\frac{y}{5}\right)\left(2x+\frac{y}{5}\right)$; *o)* $\left(\frac{8}{9}a-\frac{3}{8}b\right)\left(\frac{8}{9}a+\frac{3}{8}b\right)$. **117.** *a)* $(ab-3)(ab+3)$; *b)* $(4-xy)(4+xy)$; *c)* $\left(\frac{xy}{4}-5\right)\left(\frac{xy}{4}+5\right)$; *d)* $\left(ax-\frac{b}{2}\right)\left(ax+\frac{b}{2}\right)$; *e)* $\left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y\right)$; *f)* $(1-0{,}1a)(1+0{,}1a)$.
118. *a)* $(2a^2-3)(2a^2+3)$; *b)* $(2-a^2b^2)(2+a^2b^2)$; *c)* $(a-xy)(a+xy)$; *d)* $(x-y^2)(x+y^2)$; *e)* $(4a^2-3b)(4a^2+3b)$; *f)* $(6a^2-7b^3)(6a^2+7b^3)$.
119. *a)* $a<-3 \vee a>3$; $-3<a<3$; $a=-3$, $a=3$; *b)* $-5<b<5$; $b<-5 \vee b>5$; $b=-5$, $b=5$; *c)* $-1<a<1$; $a<-1 \vee a>1$; $a=-1$, $a=1$; *d)* $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}$; $x<-\frac{1}{5} \vee x>\frac{1}{5}$; $x=-\frac{1}{5}$, $x=\frac{1}{5}$.
120. *a)* $(x+3y-z)(x+3y+z)$; *b)* $(3a+2b-3c)(3a+2b+3c)$; *c)* $(x+y-3yz^2)(x+y+3yz^2)$; *d)* $(x^2-y^2)^2$; *e)* $\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{3x}{2}+1\right)$; *f)* $(0{,}8a-b)(1{,}2a-b)$. **121.** *a)* $(a-2b-c)(a+2b+c)$; *b)* $(3a-x+y)(3a+x-y)$; *c)* $(0{,}5x-1{,}2a-b)(0{,}5x+1{,}2a+b)$; *d)* $(1-2a+3b)(1+2a-3b)$. **122.** *a)* $(1-a^2-b^2)(1+a^2+b^2)$; *b)* $(x^2y-x+y)(x^2y+x-y)$; *c)* $(a+2b-c-3d)(a+2b+c+3d)$; *d)* $(1+x-y+z)(1+x+y-z)$. **123.** *a)* $(2x+2y-z)(2x+2y+z)$; *b)* $(5a-5b-4)(5a-5b+4)$; *c)* $\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-9\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+9\right)$; *d)* $\left(\frac{4}{7}a+\frac{4}{7}b-5\right)\left(\frac{4}{7}a+\frac{4}{7}b+5\right)$. **124.** *a)* $(3a-b)(a-3b)$;

b) $(4a-b)(2a-3b)$; *c)* $4(2b+c)(4c-b)$; *d)* $-3x(x+4y)$; *e)* $(9x+y)(-x-9y)$; *f)* $4(7x+3y)(7y-x)$. **125.** *a)* $(a+b)^2$; *b)* $(x-y)^2$; *c)* $(a-3)^2$; *d)* $(x-1)^2$; *e)* $(2a+1)^2$; *f)* $(3x-1)^2$; *g)* $-(a+1)^2$; *h)* $(a^2+b)^2$; *i)* $(5y^2-x)^2$; *j)* $-(x^2-z)^2$; *k)* $(3a^2+b^2)^2$; *l)* $(5x^2-y^2)^2$. **126.** *a)* $(x+y)(x^2-xy+y^2)$; *b)* $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; *c)* $(p+q)(p^2-pq+q^2)$; *d)* $(a^2+2)(a^2-2a^2+4)$; *e)* $(x-1)(x^2+x+1)$; *f)* $(y+1)(y^2-y+1)$; *g)* $(a+3)(a^2-3a+9)$; *h)* $(1-p)(1-p+p^2)$; *i)* $(1+2b)(1-2b+4b^2)$; *j)* $(3x-2y)(9x^2-6xy+4y^2)$.

127. *a)* $(a+b)^3$; *b)* $(x-y)^3$; *c)* $(p+2q)^3$; *d)* $(b-2c)^3$.

130. *a)* $3(a+b)(a-b)$; *b)* $5(p+1)(p-1)$; *c)* $x^2(x-1)$; *d)* $ab(a+b)(a-b)$; *e)* $5(a+2b)(a-2b)$; *f)* $x^2y^2(x+y)(x-y)$.

131. *a)* $2(x+y)^2$; *b)* $3(a-1)^2$; *c)* $3x(y+1)^2$; *d)* $2a(1-b)^2$; *e)* $4ax(1-x)^2$; *f)* $(x-z)(4x-3)$. **132.** *a)* $(a-b+c)(a-b-c)$; *b)* $(x-y+2)(x-y-2)$; *c)* $(3+x-y)(3-x+y)$; *d)* $(1+p+q)(1-p-q)$; *e)* $(2a-5b+4)(2a-5b-4)$; *f)* $(5x+2a-3b)(5x-2a+3b)$. **133.** *a)* $(a+b)(a-b-1)$; *b)* $(x+y)(x-y+1)$; *c)* $(x+y)^2(x-y)$; *d)* $(a+b)(a+b-c)$; *e)* $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$; *f)* $(a-2)(a^2+8a+4)$; *g)* $(a+b)^2(a-b)$; *h)* $(x+y)(x-y)^2$. **134.** *a)* $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$; *b)* $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; *c)* $2b(3a^2+b^2)$; *d)* $a^2(a+1)(a^3-a^2+2)$. **135.** *a)* $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$; *b)* $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$; *c)* $(x+1)(x+2)(x+3)$; *d)* $(x-2)(2x^2+5x+6)$; *e)* $(x+1)(x+2)(x+5)$; *f)* $(x^2+5)(x^2+x+1)$; *g)* $x(x-3)(x-4)(x-5)$; *h)* $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. **136.** *a)* $(ay+bx)(ax-by)$; *b)* $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$; *c)* $(a+b)(a+c)(b+c)$. **137.** Alakítsuk szorzattá az állítás bal oldalát!

3. Algebrai törtek

138. *a)* $x=0,\ y\neq 0$; *b)* $x=-2$; *c)* $a=5;\ b\neq 0$; *d)* $x=0 \vee x=-2$; *e)* $a=0 \vee b=2$; *f)* $x=0 \vee x=\frac{1}{5},\ y\neq 0$; *g)* $a=2 \vee a=-2$; *h)* $q=0 \vee q=-\frac{1}{2}$; *i)* $a=-b,\ a\neq 0$; *j)* $a=b,\ a\neq 0$; *k)* $a=-2b,\ a\neq -5$.

139. *a)* $x=1$; *b)* $x=0$; *c)* $a=3$; *d)* $x=0$; *e)* $x=-3$; *f)* $a=0$; *g)* b minden értékére értelmezett; *h)* $b=-2,\ b=2$; *i)* $a=0,\ a=2$; *j)* $x=-a$; *k)* $a=3,\ a=-1$; *l)* $x=-a,\ x=3a$; *m)* $x=0,\ a=0$.

140. Nem változik az *a)*, *b)*, *c)*. Ötszörösére változik a *d)*, *f)*. Ötödrészére csökken az *e)*. **141.** *b)*, *f)*, *g)*-nek nem változik az előjele. **142.** *a)* $\frac{2a}{3b}$; *b)* $\frac{-a}{2b}$; *c)* $\frac{b}{c}$; *d)* $\frac{x^2}{2}$; *e)* $3b^2$; *f)* $\frac{2a}{3y}$; *g)* $-\frac{1}{x}$; *h)* $\frac{2x}{3}$; *i)* $\frac{3a}{b}$; *j)* $3ab^4$; *k)* $\frac{3xy}{4z^2}$; *l)* $3(x+y)$; *m)* $x+y$; *n)* $\frac{a}{a+3b}$; *o)* $\frac{2}{3}$; *p)* $\frac{5x}{3}$; *r)* -1; *s)* $-\frac{a}{b}$; *t)* $-\frac{y^2}{2}$; *u)* $-\frac{x}{y}$; *v)* $\frac{2}{a(a+2b)}$. Az *a)*, *b)* és *n)*-nek nem változik az értelmezési tartománya. **143.** *a)* $a+b$; *b)* $\frac{1}{x-2}$; *c)* $\frac{3(a-1)}{7}$; *d)* $\frac{x}{x-1}$; *e)* $\frac{a-b}{a+b}$; *f)* a^2+ab+b^2; *g)* $\frac{3(a+b)}{2(a-b)}$; *h)* $\frac{3(x+y)}{4(x-y)}$; *i)* $\frac{x-y}{2(x^2-xy+y^2)}$; *j)* $\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}$; *k)* a^2+b^2; *l)* $\frac{3}{a^2-2a+4}$; *m)* $\frac{4xy}{x^2-y^2}$; *n)* $\frac{a+b}{3(a-b)(a^2+b^2)}$; *o)* $\frac{a+b}{a-b}$; *p)* $\frac{a+b}{7}$; *q)* $\frac{a+c}{a-x}$; *r)* $\frac{a-b}{a+b}$; *s)* $x+y-a$; *sz)* $\frac{x+y-z}{x-y+z}$; *t)* $\frac{1}{a+1}$; *u)* $\frac{b+c-a}{a+b+c}$; *v)* $\frac{a}{a+b}$; *w)* $\frac{x+1}{x+7}$; *x)* $\frac{x+2}{x+3}$; *y)* $x+1$; *z)* $(1-x)(x+2)$.

144. *a)* $a\neq -b \wedge y\neq -2x$; *b)* $y\neq 1$; *c)* $a\neq 2b,\ b^2\neq 3a^2,\ a\neq 0,\ b\neq 0$.

145. *a)* $\frac{119}{107}$; *b)* $\frac{11}{315}$. **146.** *a)* $n=1, 2, 4, 5, 10, 20$; *b)* $n=1, 2,$

3, 4, 6, 12; *c)* $n = 1, 3, 9, 27$. **147.** *a)* $\frac{a+b}{5}$; *b)* $\frac{a}{12}$; *c)* $\frac{2x-5y}{10}$; *d)* $\frac{19x+9}{15}$; *e)* $\frac{2a+37}{20}$; *f)* $\frac{2c}{a}$; *g)* $\frac{2x+3}{4}$; *h)* $\frac{5}{8}$; *i)* $\frac{7x-y}{2x}$; *j)* $\frac{2b}{a+x}$; *k)* $\frac{a-b}{x-1}$; *l)* $\frac{2a+3b}{a-b}$; *m)* $\frac{a+b+c}{x-y}$; *n)* $\frac{xc+xb}{abc}$; *ny)* $\frac{4a^2+2ab-8b^2}{ab}$; *o)* $\frac{30xay^2+4y^3-3b}{6a^2by^2}$; *p)* $\frac{30a^3c+22bc^3-21b^3a}{36a^2b^2c^2}$; *q)* $\frac{7ab-4a^2-3b^2}{a^2b^2}$; *r)* $\frac{2x^2-1}{x^2y}$; *s)* $\frac{9a+b}{5}$; *sz)* $\frac{a}{b}$; *t)* $\frac{5a-2}{a(a-1)}$; *ty)* $\frac{17x}{3(x-1)}$; *u)* $\frac{7a^2}{3(a+1)}$; *ü)* $\frac{2a}{(a+b)(a-b)}$; *v)* $\frac{9x+y}{9x^2-y^2}$; *w)* $\frac{5a^2+ab}{5(a^2-b^2)}$; *x)* $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; *y)* $\frac{a+b}{a-b}$; *z)* $\frac{x^2+2x+2}{2x(x^2-1)}$; *zs)* $\frac{a^2-12a+3}{2a(a^2-9)}$. **148.** *a)* $\frac{a+13}{2(a+3)^2}$; *b)* $\frac{11b+1}{5(b-4)^2}$; *c)* $\frac{1}{4-2x}$; *d)* $\frac{3(17a-5)}{2a(a^2-9)}$; *e)* $\frac{(a-b)(3b-a)}{ab(4a^2-9b^2)}$; *f)* $\frac{-14x}{(x-2)^2(x+2)}$; *g)* $\frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)}$; *h)* $\frac{1-7x}{(x+1)(x-1)^2}$; *i)* $\frac{4a^2-9ab-28b^2}{(a^2-4b^2)a}$; *j)* $\frac{10(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; *k)* $\frac{12a}{1-a^3}$; *l)* $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$; *m)* $\frac{1}{1+x}$; *n)* $\frac{a^2+2x^2}{a+x}$; *o)* 0; *p)* $\frac{1}{abc}$; *q)* 0; *r)* -3. **149.** *a)* $a=2$, $b=-3$; *b)* $a=8$, $b=3$.

150. *a)* $a=-6$; *b)* $a=6$; *c)* $a=5$; *d)* $a=7$. **151.** *a)* $\frac{1}{a}$; *b)* $\frac{a}{a-b}$; *c)* $\frac{a-b}{a+b}$; *d)* $\frac{2x}{x+y}$; *e)* $\frac{y}{xy+1}$; *f)* $\frac{xy}{x+y}$. **152.** *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3a^5}{16x^5}$; *c)* $\frac{4}{7}$; *d)* $\frac{35ax^2}{4}$; *e)* $\frac{16a^4xy}{27b^3z^2}$; *f)* $\frac{64a^2}{9}$; *g)* $\frac{x-a}{ax}$; *h)* $\frac{2b}{a}$; *i)* $\frac{1}{8x}$; *j)* 1; *k)* $x-y$; *l)* $\frac{2(a+b)}{a}$; *m)* $\frac{a^2(a-b)}{a+b}$; *n)* $\frac{(x+3)(x-5)}{x^2}$; *o)* $\frac{3}{5}$; *p)* $\frac{y^2-x^2}{y^2}$; *q)* $\frac{4x(x+2y)}{5y(x-2y)}$; *r)* $\frac{2}{x^2-y^2}$; *s)* $\frac{3}{b-c}$; *t)* $\frac{7(a-2)}{5}$; *u)* $\frac{3(x^2-3x+9)}{2(x+3)}$;

v) $\frac{(a+x)^2(a-x)}{x^2+ax+a^2}$. **153.** *a)* $x-1$; *b)* $x+y$; *c)* $\frac{y+x}{y-x}$; *d)* $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; *e)* $\frac{2-5a^2}{3+5a^2}$; *f)* $\frac{a}{2-a}$; *g)* $\frac{a+1}{a+2}$; *h)* $\frac{a+b}{ab}$; *i)* $\frac{a-b}{a+b}$; *j)* $\frac{x}{2x-1}$.

154. *a)* $\frac{1-a}{1-2a}$; *b)* $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}$; *c)* 4; *d)* $\frac{20}{3}$; *e)* $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$; *f)* $\frac{1}{a+b}$; *g)* 5; *h)* $\frac{6a+2b}{b}$; *i)* $a-b$; *j)* $\frac{5(a-4)}{(a+1)(a-2)}$. **156.** *a)* -8; *b)* 9; *c)* 3,75. **157.** *a)* $2a$; *b)* a; *c)* $\frac{b}{b-a}$; *d)* $-\frac{2}{a}$; *e)* 1; *f)* $\frac{5}{x^2+5x}$; *g)* $5xy$; *h)* 1.

4. Negatív egész kitevőjű hatványok

164. *a)* $\frac{1}{9}; \frac{1}{5}; \frac{1}{16}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{49}$; *b)* $9; \frac{27}{8}; \frac{5}{2}$; 10 000; 100^3; *c)* 9; 250; 0,3; 20; 2,5. **165.** *a)* $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1} > \frac{7}{8}$; $(0{,}6)^{-4} > \left(\frac{3}{5}\right)^4$; *b)* $5^{-3} > 7^{-3}$; $(2{,}9)^{-10} > (3{,}1)^{-10}$; *c)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

166. *a)* $2^{-1}; 2^{-3}; 2^{-5}; 3^{-2}; 4^{-3}$; *b)* $10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}$; *c)* $\left(\frac{8}{3}\right)^{-1}; \left(\frac{25}{2}\right)^{-1}; \left(\frac{16}{7}\right)^{-1}; \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}; \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; *d)* a^{-2}; $-b^{-4}c^{-2}$; $x^{-2}y^{-3}$; $(a+2)(a-2)^{-2}$; $(b-5)^3(b+5)^{-1}$. **167.** *a)* ab^{-2}; $2xa^3$; $2x^3y^3$; $a^2b^{-2}c^{-1}$; $\frac{5}{2}a^{-4}b$; *b)* $15xa^{-3}bc^3$; $9\cdot 4^{-1}a^{-3}b^{-2}c^3$; $a^{-2}+b^{-2}$; $x^{n+1}y^{1-k}$; *c)* $ab(b-a)^{-1}$; $(a^2+b^2)a^{-1}b^{-1}(b-a)^{-1}$; $(b^4-a^3)a^{-1}b^{-1}(a^2+b^3)^{-1}$. **168.** *a)* $\frac{3}{x^5}; \frac{1}{b^2}; \frac{2}{y^3}; \frac{5b^3}{a^3}; \frac{2y^3}{x^2}$; *b)* $\frac{2a}{a^3c^2}; \frac{5c}{ab^2}; \frac{a}{b+c}; \frac{x+y}{x-y}$; *c)* $\frac{b}{a}; \frac{b^2}{a^3}; \frac{3}{x^2a^2b}; \frac{ya^3c^4}{xz^2b}; \frac{b^5c^3}{a^2}$; *d)* $\frac{x^2}{a}; \frac{9x^2}{4a^2}; \frac{x-1}{x+1}; \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2; \frac{ab}{b-a}$; *e)* $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}; \frac{2}{x}-\frac{x}{y^2}; \frac{a^3}{x^5}+\frac{x^3}{a^2}; -\frac{2}{a^4x^3}$;

f) $\frac{1}{ab} - ab; \frac{1}{ab}$. **169.** *a)* -1; *b)* -4. **170.** *a)* $\frac{1}{x}; \frac{1}{a^5}; a; \frac{1}{a}; 1;$ *b)* $\frac{1}{b^3}; \frac{1}{x^3}; \frac{1}{y}; \frac{2}{x^4}$; *c)* $2x^3+2x+2$; *d)* $\frac{2x^4+3x+1}{x^4}$; *e)* $\frac{2(x^2+y^2)}{x^3y}$; *f)* $\frac{5(a+b)}{a^2b^2}$; *g)* $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$; *h)* $\frac{b^2-a^4}{a^4b^2}$; *i)* xy; *j)* $\frac{a^3}{a-1}$; *k)* $\frac{1}{x^6}; \frac{1}{x^6}; a^8;$ $\frac{1}{4}a^2; \frac{1}{9a^2b^4}$; *l)* $\frac{1000a^6}{b^3}; -5ab^2; \frac{1}{9}x^4y^2$; *m)* $a^2b^2; \frac{b^6}{a^4c^4}; \frac{b^3}{8a^6x^6y^3};$ $\frac{10ab^2}{x^2y}$; *n)* $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$; *o)* $\frac{(b-a^2)^2}{a^4b^2}$; *p)* $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$; *q)* $\frac{1}{x^4}; x; 1; \frac{1}{a};$ *r)* $\frac{x^4+x^3+x+1}{x}$; *s)* $\frac{(a^2-b^2)^3}{a^5b}$; *t)* x^2y^2; *u)* a^2b^2; *v)* $\frac{1}{b-a};$ *x)* $-\frac{a+x}{ax}$; *y)* $b+1$; *z)* $-(a+b)$. **171.** *a)* $\frac{9}{4}$; *b)* $-\frac{1}{3}$.

172. $1{,}35 \cdot 10^2$; $8{,}95 \cdot 10^2$; $1{,}618 \cdot 10^3$; $1{,}53 \cdot 10$; $1{,}4213 \cdot 10^2$; $5 \cdot 10^{-1}$; $5 \cdot 10^3$; $7 \cdot 10^6$; $1{,}001 \cdot 10^6$; $1{,}2 \cdot 10^{-3}$; $3{,}6 \cdot 10^{-5}$; $5{,}2 \cdot 10^{-3}$. **173.** 1000; 10 000; 100 000; 0,1; 0,01; 2000; 12 000; 0,025. **174.** *a)* $1{,}872 \cdot 10^{-2}$; $4{,}34 \cdot 10^{-7}$; *b)* $4{,}1 \cdot 10^{-3}$; $6 \cdot 10^6$; $5{,}75 \cdot 10^{-9}$; *c)* $1{,}44 \cdot 10^8$; $6{,}25 \cdot 10^{-14}$; $1{,}638 \cdot 10^{12}$; $1{,}331 \cdot 10^{-12}$. **175.** *a)* 400; 40; *b)* 0,2; *c)* $7{,}5 \cdot 10^{-9}$; $5{,}64 \cdot 10^5$; *d)* 279; 6585,365; *e)* $3{,}41 \cdot 10^{-2}$; $3{,}9883 \cdot 10^7$; *f)* $4{,}086\,598 \cdot 10^3$; $9{,}33 \cdot 10^{-4}$.

5. A négyzetgyök

176. *a)* 14; 44,56; 93,01; 102,47; *b)* 3,93; 11,02; 9,698; 16,355; *c)* 79,4; 0,912; 720; 896; *d)* 0,531 25; 0,090; 1,066; 2,578.

177. *a)* $x \geqq -1$; $x \geqq -3$; *b)* $x \geqq -2$; $x \geqq -\frac{1}{2}$; *c)* $x \geqq \frac{1}{2}$; $x \geqq -\frac{1}{2}$; *d)* $x \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{R}$; *e)* $x=0$; $x=1$; *f)* $x \in \mathbf{R}$; $|x| \leqq 1$; *g)* $x>0$; $x<2$; *h)* $x \leqq -3 \vee x>1$; $x<\frac{1}{3} \vee x \geqq \frac{3}{2}$; *i)* nem értelmezhető; $x=1$; *j)* $x \geqq -1 \wedge x \neq 1$; $x>-2$; *k)* $x>-3 \wedge x \neq 3$; nem értelmezhető; *l)* ha $a>0$, akkor $x \geqq -\frac{b}{a}$, ha $a<0$, akkor $x \leqq -\frac{b}{a}$; ha $a>-2$, akkor $x \geqq -\frac{5}{a}$, ha $a<-2$, akkor $x \leqq -\frac{5}{a}$. **178.** *a)* $|a-1|$; *b)* $|b+2|$; *c)* $|x+1|$; *d)* $|2y-1|$; *e)* $x-4$; *f)* $-x-7$; *g)* $2-a$; *h)* $a-3$.

179. *a)* $x \geqq 1$; *b)* $a \leqq 3$; *c)* $a \geqq -\frac{1}{2}$; *d)* $x \in \mathbf{R}$; *e)* $x \in \mathbf{R}$; *f)* $x \geqq -1$.

180. *a)* igaz. **181.** *a)* 70; 180; 88; *b)* 7,7; 0,48; 144; *c)* $\frac{20}{63}; \frac{8}{45}; \frac{15}{8}$; *d)* 180; 60; 6; *e)* 48; 42; 24; *f)* 25; 27; 6; *g)* 25; 1,158; $\frac{9}{16}$. **182.** *a)* $|a|$; *b)* $|b|$; *c)* c^2; *d)* $|y^3|$; *e)* $|x^5|$; *f)* $|a|$; *g)* $3a$; *h)* $5c^2$; *i)* $-0{,}6b$; *j)* $-9y^5$; *k)* ac; *l)* $\frac{-a^3b^2}{3}$; *m)* $a^4|b|c^2$; *n)* $c^6|ab^3|$; *o)* $3|a+b|$; *p)* $1{,}7(x+y)^2$; *q)* $\frac{2|a|b^2}{9|cd^3|}$; *r)* $\frac{8a^4b^2}{15y^2|x^3|}$; *s)* $\frac{1}{3}\left|\frac{a}{b}\right|$; *t)* $\frac{|a|b^2}{10}$; *u)* $\frac{5|a-b|}{(x+y)^2}$; *v)* $\frac{1}{2(x+y)^2}$; *x)* $\frac{4|ab^n|}{5|xy|}$; *y)* $\frac{0{,}5x^{2n}|y|}{|ab|}$. **183.** *a)* $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $3\sqrt{6}$; $5\sqrt{3}$; $9\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; *b)* $4\sqrt{0{,}21}$; $3\sqrt{0{,}0002}$. **184.** *a)* $x\sqrt{y}$; $-x\sqrt{y}$; *b)* $y\sqrt{xy}$; $-y\sqrt{xy}$; *c)* $-3a\sqrt{b}$; *d)* $5ab\sqrt{b}$; *e)* $12ab\sqrt{ab}$; *f)* $4a^2b\sqrt{2b}$; *g)* $-5ab^3\sqrt{3}$; *h)* $-2a^2b^3\sqrt{2ab}$. **185.** *a)* $6\sqrt{a}$, ha $a \geqq 0$; $x^2\sqrt{x}$, ha $x \geqq 0$; *b)* $2a^2\sqrt{2}$, ha $a \in \mathbf{R}$; $6a\sqrt{2a}$, ha $a \geqq 0$; *c)* $0{,}5a^3\sqrt{a}$, ha $a \geqq 0$; $5a^2\sqrt{b}$, ha $a \in \mathbf{R}$, $b \geqq 0$; *d)* $0{,}4abc^3\sqrt{ab}$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \in \mathbf{R}$, vagy $a \leqq 0$, $b \leqq 0$, $c \in \mathbf{R}$; $1{,}2a^3b^4c^4\sqrt{ac}$, $a \geqq 0$, $c \geqq 0$, $b \in \mathbf{R}$, $-1{,}2a^3b^4c^4\sqrt{ac}$, ha $a<0$, $c<0$, $b \in \mathbf{R}$; *e)* $18abc\sqrt{0{,}03ac}$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $-18abc\sqrt{0{,}03ac}$, ha $a<0$, $b<0$, $c<0$; $12xz\sqrt{yz}$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, vagy $x<0$, $y<0$, $z<0$; *f)* $72a^2c^2\sqrt{2bc}$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $-72a^2c^2\sqrt{2bc}$, ha $a<0$, $b<0$, $c<0$; $b^3c\sqrt{\frac{2}{3}c}$, ha $b \in \mathbf{R}$, $c \geqq 0$; *g)* $\frac{|a|\sqrt{b}}{3}$, ha $a \in \mathbf{R}$, $b \geqq 0$; $\frac{5}{3}a|b|\sqrt{a}$, ha $a \geqq 0$, $b \in \mathbf{R}$; *h)* $\frac{4}{3}\frac{a^4b^4}{|c|}\sqrt{\frac{2}{7}a}$, ha $a \geqq 0$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $\frac{1}{3|a|}\sqrt{\frac{1}{b}}$, ha $b>0$ és $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

i) $|a+1|\sqrt{3}$, ha $a \in \mathbf{R}$; $3(a-2)\sqrt{3(a-2)}$, ha $a \geqq 2$; *j)* $x\sqrt{x-1}$, ha $x \geqq 1$; $4a\sqrt{a-2}$, ha $a \geqq 2$; *k)* $4a^2\sqrt{3a-6}$, ha $a \geqq 2$; $|x+1|$, ha $x \in \mathbf{R}$; *l)* $|a+3b|\sqrt{2}$, ha $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$; $3\sqrt{-(x^2-y)^2}$, ha $x^2 = y$; *m)* $(a-b)\sqrt{a-b}$, ha $a \geqq b$; $4|x-y|\sqrt{x}$, ha $x \geqq 0$, $y \in \mathbf{R}$; *n)* $\frac{|a+b|}{4}\sqrt{5}$, ha $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$; $\frac{4}{11}(a-b)\sqrt{6(a-b)}$, ha $a \geqq b$; *o)* $\left|\frac{x}{x-y}\right|$, ha $x \neq y$; $\frac{4}{7}\sqrt{\frac{a(a-6)}{2a-1}}$, ha $a \geqq 6 \vee 0 \leqq a < \frac{1}{2}$; *p)* $\frac{x^2}{|z|}\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^4+y^4}}$, ha $xyz \neq 0$; $\frac{1}{|y-1|}\sqrt{x+z}$, ha $y \neq 1$, $x \geqq -z$. **186.** *a)* $3\sqrt{5} > 2\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; *c)* $4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$; *d)* $4\sqrt{5} > \sqrt{45}$; *e)* $3\sqrt{2} > 5\sqrt{0{,}5}$; *f)* $\frac{1}{3}\sqrt{54} = \frac{1}{5}\sqrt{150}$.

187. *a)* $\sqrt{18}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{2{,}88}$; $\sqrt{0{,}1}$; *b)* $\sqrt{6}$; $\sqrt{14}$; $\sqrt{\frac{75}{7}}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{\frac{105}{2}}$; *c)* $\sqrt{9x}$, ha $x \geqq 0$; $\sqrt{25a}$, ha $a \geqq 0$; $\sqrt{49b}$, ha $b \geqq 0$; $\sqrt{2x^2}$, ha $x \geqq 0$, $-\sqrt{2x^2}$, ha $x < 0$, $\sqrt{3a^4}$, ha $a \in \mathbf{R}$; *d)* $\sqrt{a^3}$, ha $a \geqq 0$; $\sqrt{b^4}$, ha $b \geqq 0$, $-\sqrt{b^4}$, ha $b < 0$; $\sqrt{x^5}$, ha $x \geqq 0$; $\sqrt{a^7}$, ha $a \geqq 0$; $\sqrt{x^5}$, ha $x \geqq 0$; *e)* $\sqrt{4a^3b}$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; $-\sqrt{2a^3b}$, ha $a < 0$, $b < 0$; $\sqrt{12x^5y}$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, vagy $x < 0$, $y < 0$; $\sqrt{18a^3b}$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, vagy $a < 0$, $b < 0$; $\sqrt{242x^5y}$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, vagy $-\sqrt{242x^5y}$, ha $x < 0$, $y < 0$; *f)* $\sqrt{ab}$, ha $a > 0$, $b \geqq 0$; $-\sqrt{ab}$, ha $a < 0$, $b \leqq 0$; $\sqrt{ab^3}$, ha $a > 0$, $b \geqq 0$, vagy ha $a < 0$, $b \leqq 0$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$, ha a > 0, $b > 0$, vagy ha $a < 0$, $b < 0$; $\sqrt{x^3}$, ha $x > 0$; *g)* $\sqrt{a(a-1)}$, ha $a \geqq 1$, vagy $-\sqrt{a(a-1)}$, ha $a < 0$; *h)* $|x+y|$, ha $x > 0$, vagy $-|x+y|$, ha $x < 0$; *i)* $\sqrt{4(b-1)}$, ha $b \geqq 1$; *j)* $\sqrt{\frac{5a}{84}}$, ha $a > 0$; *k)* $\sqrt{2(x+y)}$, ha $x+y > 0$; *l)* $\sqrt{\frac{2(x-y)}{x+y}}$, ha $x \geqq y$; *m)* $\sqrt{\frac{1-a}{b+c}}$, ha $a < 1$, $b+c > 0$, vagy $-\sqrt{\frac{1-a}{b+c}}$, ha $a > 1$, $b+c < 0$; *n)* $\sqrt{\frac{1}{a+1}}$, ha $a > 1$, vagy $-\sqrt{\frac{1}{a+1}}$, ha $-1 < a < 1$; *o)* $\sqrt{\frac{2x+4}{x+3}}$, ha $x > -2$, vagy $-\sqrt{\frac{2x+4}{x+3}}$, ha $x < -3$.

188. *a)* $\sqrt{3}$; *b)* $-3\sqrt{2}$; *c)* $3\sqrt{2}$; *d)* $2\sqrt{3}$; *e)* $14\sqrt{5}$; *f)* $19\sqrt{2}$; *g)* $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$; *h)* $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$. **189.** *a)* $-8\sqrt{2a}-4\sqrt{a}$, ha $a \geqq 0$; *b)* $4\sqrt{x}+8\sqrt{2x}+1$, ha $x \geqq 0$; *c)* $10\sqrt{2a}-2\sqrt{\frac{a}{2}}$, ha $a \geqq 0$; *d)* $10ab\sqrt{7ab}$; *e)* $4\sqrt{\frac{b}{a}}$. **190.** *a)* $|x+y|-|x-y|$; *b)* $\sqrt{2}(|a+1|+|a-1|)+|b-1|$; *c)* $|a+b|+|a-b|$; *d)* $\sqrt{1-a^2}\left(\frac{1}{|a|}-a^2-1\right)$; *e)* $\sqrt{2a}\left(\frac{3}{|a-b|}+\frac{3}{|a+b|}-\frac{2}{|a^2-b^2|}\right)$; *f)* $(a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

191. *a)* 4; 9; 12; 25; 12; *b)* $10\sqrt{6}$; $25\sqrt{10}$; $12\sqrt{10}$; $4\sqrt{30}$; nem értelmezett; *c)* $3\sqrt{5}$; $11\sqrt{3}$; 14; 13; 36; *d)* 60; $42\sqrt{2}$; 6; $11\sqrt{1{,}331}$.

192. *a)* $6a$; $10x$; $12a$; $30a^3$; ha $a \geqq 0$, $x \geqq 0$; *b)* $a\sqrt{b}$; a^2b; $2xy\sqrt{5xy}$; ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; *c)* $12x$, ha $x \geqq 0$; *d)* $75ab$, ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; *e)* $6x\sqrt{a}$, ha $a \geqq 0$ $x > 0$; *f)* 1, ha $\frac{x+y}{x-y} > 0$; *g)* 1, ha $|a| > |b|$; *h)* $\frac{|a^2-b^2|}{2|a|}$, ha $a > 0$, $|a| > |b|$. **193.** *a)* 110; *b)* 30; *c)* 32; *d)* -4; *e)* 7; *f)* 20; *g)* 6; *h)* $3+2\sqrt{6}$; *i)* 44; *j)* 0; *k)* 24; *l)* 8; *m)* $2\sqrt{6}$; *n)* 5; *o)* 6; *p)* 3; *r)* 3; *s)* 1; *t)* $\frac{17+7\sqrt{2}}{12}$. **194.** *a)* $3-a^2$; *b)* $9a-b^2$, ha $a \geqq 0$; *c)* $4x-y$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; *d)* $9x-4y$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; *e)* -1, ha $a \geqq 0$; *f)* a, ha $b \geqq 0$, $a \geqq -b$; *g)* $1-2x$, ha $0 \leqq x \leqq 1$; *h)* $2b$, ha $a \geqq b \geqq 0$; *i)* 1, ha $ab > 0$; *j)* $\sqrt{a^2-b}$, ha $a \geqq \sqrt{b}$; *k)* $|x-y|$, ha $x \geqq 0$, $y \geqq 0$; *l)* $|b|$, ha $|a| > |b| a > 0$; *m)* $2|b|$, ha $|a| > \sqrt{2}|b|$.

195. *a)* $a+2\sqrt{ab}+b-c$, ha $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $c\geqq 0$; *b)* $7x-6x\sqrt{2}$, ha $x\geqq 0$; *c)* $a^2b^2+ab\sqrt{a}+ab\sqrt{b}+\sqrt{ab}-ab\sqrt{ab}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-1$, ha $a\geqq 0$, $b\geqq 0$; *d)* a^3-b^3, ha $a\geqq 0$, $b\geqq 0$; **196.** *a)* $\frac{65}{8}$; *b)* 26.

197. *a)* $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$; $11\sqrt{7}$; *b)* 3; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; *c)* 6; 9; $\frac{3\sqrt{5}}{7}$; *d)* 5; 4; *e)* 4.

198. *a)* $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$; $\sqrt{3}(\sqrt{14}-1)$; $\sqrt{7}(\sqrt{3}-2)$; *b)* $\sqrt{10}(2-\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

199. *a)* $\sqrt{\frac{3}{7}}$; *b)* $\frac{\sqrt{5}}{2}$; *c)* $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; *d)* $\sqrt{2}$. **200.** *a)* $4\sqrt{a}$; $\frac{2}{3}\sqrt{x}$; $\frac{\sqrt{b}}{2}$; *b)* $\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$; 2; *c)* a; $\frac{a}{\sqrt{3}}$; $\frac{12}{c}$; *d)* $\sqrt{x+y}$; *e)* $\sqrt{x^2-y^2}$; *f)* $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x-y}}$; *g)* $\frac{|a|}{|z|}\sqrt{6}$; *h)* $\left|\frac{x}{y}\right|$; *i)* $|x-y|$; *j)* $\frac{|x+y|}{|xy|}$; *k)* $\sqrt{\frac{y}{x+y}}$; *l)* $\sqrt{\frac{x(x+y)}{y(x-y)}}$; *m)* $\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$; *n)* $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; *o)* $x+y-\sqrt{xy}$; *p)* $\frac{1-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}}$. **201.** *a)* $\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})$; *b)* $\sqrt{ab}(|a|-|b|)$; *c)* $\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$; *d)* $\sqrt{a}(b\sqrt{a}-1)$; *e)* $\sqrt{a+b}(1-\sqrt{a-b})$; *f)* $\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$; *g)* $\sqrt{a-b}(\sqrt{a^2+ab+b^2}+1)$; *h)* $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$; *i)* $(a+\sqrt{a})(1-a)$; *j)* $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)$; *k)* $(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+2)$; *l)* $(a+\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)$. **202.** *a)* 5; 25; nem értelmezhető; 5; *b)* 12; 50; 2; *c)* $2\sqrt{2}$; 25; 125; *d)* $-3\sqrt{3}$; 400; $-189\sqrt{7}$; *e)* $3+2\sqrt{2}$; *f)* $6-2\sqrt{5}$; *g)* $5-2\sqrt{6}$; *h)* $30+12\sqrt{6}$; *i)* $38+12\sqrt{10}$; *j)* 3; *k)* 3; *l)* $\frac{36}{5}$; *m)* $4+2\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{2}$; *n)* $7+4\sqrt{3-\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; *o)* $28+6\sqrt{3}$; *p)* $405+60\sqrt{3}-150\sqrt{6}-100\sqrt{2}$; *q)* 14; *r)* nincs értelmezve; *s)* $2\sqrt{11}-4$; *sz)* $4\sqrt{3}-4$; *t)* $8+2\sqrt{11}$; *u)* 20; *v)* $6\sqrt{3}-10$; *x)* $14\sqrt{5}+18\sqrt{3}$; *y)* $36\sqrt{3}+38\sqrt{2}$; *z)* $19\sqrt{15}-\frac{278}{9}\sqrt{3}$. **203.** *a)* a; *b)* a^3; *c)* a^{10}; *d)* x^6; *e)* $27a\sqrt{a}$; *f)* $-8a^4\sqrt{a}$; *g)* $\frac{x^4\sqrt{x}}{8}$; *gy)* $\frac{a^5}{9}$; *h)* x^2y; *i)* x^2y; *j)* $a^4b\sqrt{ab}$; *k)* $\frac{x}{y}$;

l) $4ax^2\sqrt{\frac{a}{2x}}$; *m)* $\frac{x^3}{|x|^3(x-y)^3}$; *n)* $\sqrt{a^n}$; *ny)* $\sqrt{a^{3n}}$; *o)* $\sqrt{a^{3n}}$; *p)* $\sqrt{a^{n^2-1}}$; *q)* $|a+b|^n$; *r)* $(a-b)^n\sqrt{(a-b)^n}$; *s)* $x^2-2x\sqrt{x}+x$; *sz)* $4a+2\sqrt{ab}+\frac{b}{4}$; *t)* $a^3-2a+\frac{1}{a}$; *ty)* $\frac{ab}{16}+a\sqrt{b}+4a$; *u)* $\frac{(x-y)^2}{xy}$; *ü)* $\frac{4x}{x-y^2}$; *v)* $2x+2\sqrt{x^2-y}$; *w)* $13a-10\sqrt{b}-12\sqrt{a^2-4b}$; *x)* $10\sqrt{a}-2\sqrt{25a-b}$; *y)* $4\sqrt{x}+2\sqrt{4x-y}$; *z)* $a^3b\sqrt{b}-3a^2b^2\sqrt{a}+3a^2b^2\sqrt{b}-ab^3\sqrt{a}$; *zs)* $\frac{a^3}{b^3}+3\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **204.** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $2+\frac{2}{\sqrt{2}}$.

206. *a)* egyenlők; *b)* $\sqrt{30-12\sqrt{6}} > 2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$. **207.** *a)* $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\sqrt{7}$; $\frac{5}{2}\sqrt{10}$; *b)* $\frac{\sqrt{10}}{5}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$; $\frac{\sqrt{30}}{6}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{21}$; *c)* $\frac{4\sqrt{3}}{7}$; $\frac{5\sqrt{7}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{5\sqrt{6}}{3}$; $5\sqrt{10}$; *d)* $\sqrt{a}$; $\frac{x\sqrt{y}}{y}$; $\frac{a\sqrt{ab}}{b}$; $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; $a\sqrt{x}$; *e)* $\sqrt{ab}$; $\frac{\sqrt{a}}{a}$; $\frac{5\sqrt{xy}}{3y}$; $2y\sqrt{xy}$; *f)* $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$; *g)* $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$; *h)* $\sqrt{a-b}$; *i)* $(a-b)\sqrt{a+b}$; *j)* $\sqrt{a-b}$; *k)* $\sqrt{a+b}$; *l)* $\frac{25\sqrt{2}-4\sqrt{5}}{10}$; *m)* $\frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$; *n)* $\frac{5\sqrt{3}+3}{3}$; *o)* 2; *p)* $\sqrt{\sqrt{5}}$; *q)* $5\sqrt{\sqrt{2}}$; *r)* $2\sqrt{xy}$; *s)* $\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$. **208.** *a)* $2-\sqrt{2}$; *b)* $3\sqrt{19}+12$; *c)* $\frac{15+3\sqrt{17}}{2}$; *d)* $7\sqrt{5}+7$; *e)* $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; *f)* $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$; *g)* $4\sqrt{3}+6$; *gy)* $9\sqrt{2}+12$; *h)* $30-18\sqrt{2}$; *i)* $36+18\sqrt{3}$; *j)* $\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$; *k)* $\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{7}$; *l)* $\frac{16+5\sqrt{7}}{9}$; *m)* $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; *n)* $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$; *ny)* $12+\sqrt{143}$; *o)* $\frac{53+12\sqrt{10}}{37}$; *p)* $5-2\sqrt{6}$; *q)* $\frac{a\sqrt{a}+2a}{a-4}$; *r)* $\frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-b}$; *s)* $\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

sz) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$; *t)* $\frac{a^2+2ab\sqrt{b}+b^3}{a^2-b^3}$; *ty)* $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$;

u) $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$; *ü)* $\frac{a^2+1+\sqrt{a^4-1}}{2}$; *v)* $\frac{(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2-y}}{x^2-y}$;

w) $\frac{a^2x-2ab\sqrt{xy}+b^2y}{a^2x-b^2y}$; *x)* $4x\sqrt{x^2-1}$; *y)* $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

z) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$; *zs)* $5\sqrt{30}+15\sqrt{2}-10\sqrt{3}$. **209.** *a)* $\frac{1}{6-3\sqrt{3}}$;

b) $\frac{1}{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$; *c)* $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; *d)* $\frac{x-y}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$; *e)* $\frac{a^2-b^2x}{a^2+2ab\sqrt{x}+b^2x}$;

f) $\frac{a-b}{(a+b)\sqrt{a-b}}$. **211.** *a)* 6; *b)* 4; *c)* -2; *d)* 2; *e)* -115;

f) $\frac{x+y}{x-y}$; *g)* $\frac{2}{x-xy}$; *h)* $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *i)* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; *j)* $\sqrt{a^2-4a}$; *k)* 1;

l) $a-7\sqrt{a}+9$; *m)* 1. **212.** *a)* 1; *b)* $-\sqrt{2}$; *c)* 2; *d)* 1; *e)* $4-2\sqrt{2}$; *f)* 1.

6. Az *n*-edik gyök

217. *a)* 3; 3; 5; 2; 3; *b)* 4; 2; 1; 0,3; 0,5; *c)* $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; *d)* -1; -2; -2; -1; $-0{,}1$; *e)* $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; *f)* 1; a többi nem értelmezett. **218.** *a)* $a \geqq 0$; *b)* $a \in \mathbf{R}$; *c)* $a \leqq 0$; *d)* $a=0$; *e)* $a \in \mathbf{R}$; *f)* $a \in \mathbf{R}$. **219.** *a)* a; *b)* $-a$; *c)* a; *d)* $-a$. **220.** *a)* $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{9}$; $3\sqrt[3]{3}$; $4\sqrt[3]{4}$; *b)* $2\sqrt[4]{2}$; $2\sqrt[4]{3}$; $2\sqrt[5]{3}$; $3\sqrt[5]{5}$; *c)* $\sqrt[3]{a^2}$; $a\sqrt[5]{5}$; $2x\sqrt[3]{3x}$; $ab^2\sqrt[4]{a}$; $ab\sqrt[3]{3a}$; *d)* $x\sqrt[n]{x^2}$, $n>1$, $n \in \mathbf{Z}$; $ab^2\sqrt[n]{a}$, $n>1$, $n \in \mathbf{Z}$; $x^2\sqrt[n]{x}$, $n>1$, $n \in \mathbf{Z}$; $a\sqrt[n+1]{a^2}$; $n>0$, $n \in \mathbf{Z}$; $a^2\sqrt[n-1]{a^5}$, $n>2$, $n \in \mathbf{Z}$. **221.** *a)* $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{54}$;

$\sqrt[3]{96}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; *b)* $\sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[3]{a^7}$; $\sqrt[3]{a^7b}$; $\sqrt[3]{16a^4}$; $\sqrt[5]{a^6x^5}$; *c)* $\sqrt[4]{a^2bx^4}$; $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$;

$\sqrt[3]{\frac{6a}{x^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^8b^2}{c^6}}$; *d)* $\sqrt{4a^3x^2+8a^2x^3}$; $\sqrt[3]{(x-y)^2}$; $\sqrt[3]{3(x+y)}$;

e) $\sqrt[3]{8x^4+8x^2+4x}$; $\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$; *f)* $\sqrt[n]{a^{n+1}b}$; $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{n+1}}$; $\sqrt[n]{x^{kn+1}}$; $\sqrt[n]{a^{n^2+1}b^{2n}}$,

$n>1$, $n \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{Z}$. **222.** *a)* 6; 10; 15; *b)* 0,5; 0,6; $\frac{3}{2}$; *c)* 6; 6; 15; *d)* 10; $3\sqrt[4]{4}$; $2\sqrt[5]{5}$; *e)* 10; 14; *f)* 4; 3; *g)* a^2; $a^2b\sqrt[3]{a^2b}$; $2a$; *h)* $2a$; ab; $2a\sqrt[5]{x}$; *i)* $a-b$; $a-b$. **223.** *a)* 2; 2; 10; *b)* $\frac{1}{50}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; *c)* $a\sqrt[3]{3}$; $a\sqrt[3]{2}$; $x\sqrt[4]{3}$; *d)* $\frac{2a}{\sqrt[3]{b}}$; $2ab\sqrt[4]{\frac{b}{27}}$; $\sqrt[5]{\frac{a^2b}{2}}$. **224.** *a)* $2\sqrt[3]{2}$; 4; $\sqrt[5]{8}$; 2; *b)* a^2; a^3; $8a^2$; $a^5x\sqrt[3]{ax}$; *c)* a^4; x^6y^2; $x^5\sqrt[3]{xy^2}$; *d)* $\frac{a^4}{b}\sqrt[4]{a^2b}$; $\frac{a^2}{b^2}\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}}$; $\frac{x^3}{y^3}\sqrt[5]{xy^3}$;

e) $x\sqrt[n]{x}$; $x^2\sqrt[n]{x}$; x^3; x^2, $n>1$, $n \in \mathbf{Z}$. **225.** *a)* 7; *b)* 1; *c)* 6; *d)* $a+b$; *e)* $a-b$. **226.** *a)* $\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[10]{3}$; $\sqrt[6]{7}$; $\sqrt[12]{3}$; *b)* $\sqrt[6]{a^2}$; $\sqrt[12]{a^2b}$; $\sqrt[15]{a^4b}$; *c)* $\sqrt[6]{12}$; $\sqrt[10]{8}$; $\sqrt[15]{800}$; *d)* $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt[9]{a^3b}$; *e)* $\sqrt[8]{128}$; $\sqrt[24]{2^{17}}$; $\sqrt[8]{a^7}$; *f)* $\sqrt[24]{a^{23}}$; $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$.

227. *a)* 5; 6; 3; 5; *b)* $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; *c)* a^3; $\sqrt{a}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[5]{x^3}$; *d)* $\sqrt{2a^3b^2}$; $\sqrt{2a^2b^3c}$; $\sqrt{2xy^3z^2}$; **228.** *a)* $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{5^3 \cdot 3^2}$; *b)* $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[10]{a^2b}$; $\sqrt{x}$; *c)* $\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[12]{\frac{a}{x}}$; *d)* $2\sqrt[12]{2}$; $\sqrt[4]{27}$; *e)* $\sqrt[6]{\frac{1}{b}}$; $\sqrt[12]{\frac{y^3}{x}}$. **229.** *a)* $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $3\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{a}$; *b)* $\sqrt[4]{x^3}$; $2\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[5]{a^4}$; $\sqrt[n]{x^{n-1}}$, $n>1$, $n \in \mathbf{Z}$; *c)* $\sqrt[3]{a+b}$; $(a+1)\sqrt[4]{(a-1)^3}$;

$\sqrt[5]{(a+1)^4}$; *d)* $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1$; $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1$.

230. *a)* $2-2\sqrt[6]{2}+2\sqrt[4]{2}$; *b)* $3\sqrt[4]{200}-2\sqrt[12]{2048}+\sqrt[4]{50}$; *c)* $3+3\sqrt[6]{3}-3\sqrt[4]{3}$; *d)* $1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{72}$; *e)* $\sqrt{6}-\sqrt[4]{27}+\sqrt[6]{32}-\sqrt[12]{432}$; *f)* 1; *g)* $a^2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a^5}-a^3\sqrt[4]{a^3}-a\sqrt[12]{a^{11}}$; *h)* $x-0{,}5x\sqrt[6]{x}-3x\sqrt[3]{x}+1{,}5x\sqrt{x}$; *i)* 1; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[6]{3}$; *j)* $\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$; $\sqrt{a}$; $\sqrt[10]{a^7}$; *k)* $2\sqrt[6]{a}$; $\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}}$; $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$. **231.** *a)* $\sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}}$;

b) $\frac{\sqrt[3]{a^2}+a^4-2a^3\sqrt[6]{a}}{a^4}$; *c)* $\frac{1}{\sqrt[6]{c}}$; *d)* $\sqrt[4]{a}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$; *e)* $(a^2+1)\sqrt[3]{a-b}$;

f) $32a$; *g)* $\frac{a-b}{ab}$; *h)* 1. **232.** 1. **233.** 3.

7. Törtkitevőjű hatványok

234. *a)* 10; 2; 27; 16; 0: *b)* $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; 64; $\frac{1}{10^5}$; *c)* 8; 10^5; $\frac{243}{32}$; $\frac{27}{125}$; $\frac{3}{2}$. **235.** *a)* $\sqrt[7]{3}$; $\sqrt[5]{7^3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt[5]{\frac{16}{81}}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{\frac{27}{64}}$;

c) $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[5]{b^2}$; $\sqrt[5]{a^6}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$; $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$; *d)* $3\sqrt{x}$; $\sqrt{3x}$; $\frac{1}{5}\sqrt[5]{a}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{y^2}}$; $-4\sqrt[5]{x^2}$; *e)* $\sqrt[3]{a^2b^2}$; $a\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[3]{(a+b)^2}$. **236.** *a)* $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{2}{3}}$; $4^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}}$; $b^{\frac{3}{4}}$; $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; *b)* $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; $2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$; $0{,}1^{\frac{1}{4}}ab^{\frac{1}{2}}$; $2x^2y$; *c)* $x^{\frac{3}{4}}$; $a^{\frac{1}{2}}$; $b^{\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{3}{4}}$. **237.** *a)* 4; 9; 5; 49; *b)* $a^{\frac{2}{5}}$; $a^{\frac{5}{6}}$; x^2; x; *c)* $a^{\frac{1}{6}}$; $a^{\frac{5}{12}}$; $2x^{-\frac{1}{3}}$; $5x^{-\frac{9}{4}}$; *d)* $6a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{4}}$; $10x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{19}{10}}$; *e)* $ab^{\frac{1}{2}}-ba^{\frac{1}{2}}$; $8a^{\frac{5}{2}}b^{-1}+12a^2b^{-1}$; *f)* $a-b$; x^3-y; *g)* $4a^{\frac{2}{3}}-b^{-2}$; $1+2a^{\frac{1}{2}}+a$;

h) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$; $a-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b$; *i)* $x\sqrt{x}+1$; $a-b$; *j)* $x-y$; *k)* $4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; *l)* $a^{-\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{1}{6}}$; $2x^{-\frac{19}{6}}$; $a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{5}}$; $2x^{-\frac{1}{12}}y^{\frac{5}{6}}$; *m)* $a^{\frac{1}{2}}-1$; $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+3}$; $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$; *n)* a^6; $a^{\frac{10}{3}}$; x; $x^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{10}}$; *o)* x^6y; $3^6x^2y^3$; $8a^2x$; $x^2y^{\frac{1}{18}}$;

p) $x^{-\frac{3}{2}}$; $\frac{3}{2}\frac{b}{a^2}$; $\frac{4}{5a^2b}$. **238.** *a)* $4\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}-4$; *b)* $3x\sqrt[6]{x}+x\sqrt{x}+2x^2$;

c) $2x-\sqrt{x}-7$; *d)* $4b\sqrt{a}-5b\sqrt[3]{a^2}+3a-2b^2$; *e)* $4a+20$; *f)* $2\sqrt[5]{x^3}$;

g) $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$; *h)* $\frac{1}{6}$. **239.** *a)* $\sqrt[18]{x^{12}y}$; *b)* 2; *c)* $\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^2}$;

d) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; *e)* $\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}}$; *f)* $9x$; *g)* $\frac{1}{ab}$. **240.** *a)* 4,3; *b)* $-0{,}5$.

8. A logaritmus

241. *a)* $10^2=100$; $10^1=10$; $10^0=1$; $10^{-2}=0{,}01$; *b)* $10^{0{,}3010}=2$; $10^{0{,}6990}=5$; $10^{0{,}4971}=\pi$; $10^{0{,}9823-2}=0{,}096$; *c)* $10^{-1}=10^{-1}$; $10^0=5^0$; $10^3=10^3$; $10^{1{,}5}=\sqrt{10^3}$; *d)* $3^2=9$; $5^3=125$; $10^{-1}=\frac{1}{10}$; $4^{\frac{1}{2}}=2$; *e)* $2^{-6}=\frac{1}{64}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$; $(81)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$; $(\sqrt{2})^6=8$; *f)* $3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}$; $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$; $3^0=\lg 10$; $(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{3}$; *g)* $a^1=a$, $a>0$; $a\neq 1$; $a^0=1$, $a>0$, $a\neq 1$; $b^2=b^2$, $b>0$, $b\neq 1$; $b^{-1}=\frac{1}{b}$, $b>0$, $b\neq 1$; *h)* $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$, $a>0$, $a\neq 1$; $(a^2)^{\frac{1}{2}}=a$, $a>0$, $a\neq 1$; $(a^n)^{\frac{1}{n}}=a$, $a>0$, $a\neq 1$, $(\sqrt{a})^2=a$, $a>0$, $a\neq 1$. **242.** *a)* $\lg 10=1$; $\lg 100=2$; $\lg 1000=3$; $\lg\frac{1}{10}=-1$;

b) $\lg 2=0{,}3010$; $\lg 20=1{,}3010$; $\lg \pi=0{,}4971$; $\lg 3{,}162=\frac{1}{2}$;

c) $\log_2 8=3$; $\log_2 \frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$; $\log_3 \frac{1}{27}=-3$; $\log_{25} 5=\frac{1}{2}$;

d) $\log_5 1=0$; $\log_{0{,}01} 1000=-1{,}5$; $\log_3 \sqrt[3]{3^2}=\frac{2}{3}$; $\log_8 \frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$;

e) $\log_a 1=0$, $a>0$, $a\neq 1$; $\log_a a=1$, $a>0$, $a\neq 1$; $\log_a c=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$; $\log_a b=c$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$. **243.** *a)* 1; 2; -1; 0; *b)* $\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}$; 0,3010; *c)* 1,6990; 0,1761; 1,3483; nem értelmezett, *d)* 1; 2; -2; 4; *e)* -2; -6; $-\frac{1}{4}$; 2; *f)* $\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{n}$, $a>0$, $a\neq 1$, $n>1$, $n\in \mathbf{Z}$. **244.** *a)* $a=16$; $b=9$; $b=125$; *b)* $b=0{,}01$; $a=2$; $b=1$; *c)* $b=8$; $b=216$; $c=2$; *d)* $x=a^2$; $y=\frac{1}{b}$; $x=\frac{1}{\sqrt{a^3}}$.

245. *a)* $a=2; a=4$; *c)* $=15$; *b)* $a=3; a=8; a=9$; *c)* $a=2; b=4; c=9$; *d)* $a=5$; $a=\frac{1}{16}$; $a=\sqrt[3]{2}$; *e)* $a=x$; $a>0$, $a\neq 1$; $b=a$, $b>0$, $b\neq 1$; $c=\sqrt{a}$, $c>0$, $c\neq 1$. **246.** A logaritmus alapszáma k, $k>0$, $k\neq 1$, és a kifejezésekben lévő változók pozitívok.

a) $\log_k x=\log_k a+\log_k b+\log_k c$; $\log_k x=\log_k 5+\log_k b+\log_k c$; $\log_k x=\log_k 100+\log_k (a+b)$; *b)* $\log_k x=2\log_k a+\log_k b$; $\log_k x=\log_k 2+\log_k a+\log_k b-\log_k 3$; $\log_k x=\log_k 10-\log_k a-\log_k b-\log_k c$; *c)* $\log_k x=\log_k 2+3\log_k a-\log_k b-\log_k c$; $\log_k x=\log_k 12+\log_k a+2\log_k b+4\log_k c$; $\log_k x=\log_k 4+3\log_k r+\log_k \pi-\log_k 3$; *d)* $\log_k x=\log_k 3+\log_k (a-2b)$; $\log_k x=\log_k a+\log_k (a-b)-\log_k 2-\log_k b-\log_k c$; $\log_k x=\log_k 3+3\log_k a+\log_k b-\log_k 2-\log_k (a+b)$; *e)* $\log_k x=\log_k a+\frac{1}{2}\log_k b$; $\log_k x=\log_k a+\frac{1}{3}\log_k b$; $\log_k x=2\log_k a+\log_k b+\frac{1}{2}(\log_k 2+\log_k c)$; *f)* $\log_k x=2\log_k a+\frac{2}{3}\log_k b$;

$\log_k x=\frac{1}{4}\log_k a-2\log_k b$; $\log_k x=\log_k 2+2\log_k a+\log_k b+\frac{1}{3}\log_k c+\frac{2}{3}\log_k d-\log_k 3-\log_k n-3\log_k l$; *g)* $\log_k x=\frac{1}{2}(\log_k a-\log_k b)$; $\log_k x=\frac{2}{3}\log_k a-\frac{1}{3}\log_k b$; $\log_k x=\frac{3}{5}(\log_k 2+\log_k a-2\log_k b)$; *h)* $\log_k x=\frac{2}{3}\log_k a+\frac{1}{6}\log_k b$; $\log_k x=\frac{2}{3}\log_k a+\frac{1}{12}\log_k b$; $\log_k x=\log_k 3+\log_k \lg 2$.

247. A logaritmus alapszáma a, $a>0$, $a\neq 1$ és a kifejezésekben szereplő változók pozitívok. *a)* $x=36$; $x=8$; *b)* $x=2$; $x=\frac{8}{25}$; *c)* $x=bc$; $x=b^k$; *d)* $x=\frac{b^2}{c^4}$; $x=\sqrt[3]{\frac{b^2}{d^2}}$; *e)* $x=\frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[3]{c}}$; $x=\sqrt[3]{(b-d)^2}$.

248. Egyenlők *c)*, *d)*, *e)*, *f)*.

249. *a)* 7; 9; $\sqrt{5}$; *b)* 4; $\frac{1}{5}$; 30; *c)* $\frac{1}{10}$; 50; $\frac{10}{3}$; *d)* 9; 4; 16; *e)* $\frac{5}{7}$; 16; $5\sqrt{7}$; *f)* 75; 18; *g)* 22,5; 5; *h)* 1; *i)* 3; *j)* 2. **251.** *a)* 7961,6; 219,5; *b)* 41,8; 69,05; *c)* 66,15; 0,1127; *d)* 61,92; 2,087; *e)* 12,57; 55,08; *f)* 190,06; 0,08676; *g)* 2,637; 0,772; *h)* nincs értelmezve; $-0{,}2689$; *i)* 11,66; 0,8561; *j)* 4,933; 1,889; *k)* 7,260; 2,029; *l)* 4,373; 2,299.

252. *a)* $x>1$; *b)* $x>0$; *c)* $x>4$; *d)* $x>0$.

254. *a)* $90^{10}<[5(1-\lg 0{,}1)]^{20}$; *b)* $100^{2\lg 2}<\sqrt{10^{2+0{,}5\lg 16}}$.

255. $\frac{n(n+1)}{2}$. **256.** $\lg 2=\frac{1}{3}(2\lg 12-\lg 18)=0{,}3010$, $\lg 3=\frac{1}{3}(2\lg 18-\lg 12)=0{,}4771$, $\lg 5=\lg 10-\lg 2=0{,}6990$.

IV. Egyenletek és egyenlőtlenségek

1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek

1. *a)* 0; *b)* $\frac{1}{3}$. **2.** *a)* $\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{2}{3}$. **3.** *a)* $\emptyset$; *b)* 1. **4.** *a)* 0; *b)* $-1{,}5$. **5.** *a)* 5; *b)* 30. **6.** *a)* $\frac{127}{25}$; *b)* $-\frac{4}{11}$. **7.** Igen. **8.** Igen. **9.** Nem. **10.** Igen. **11.** Nem. **12.** Nem. **13.** Nem. **14.** *a)* Igen; *b)* Nem. **15.** *a)* Igen; *b)* Nem. **16.** 5. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** -4. **19.** 2. **20.** $-\frac{4}{11}$. **21.** $-\frac{7}{3}$. **22.** 1. **23.** 5,75. **24.** 2,5 **25.** $-\frac{18}{7}$. **26.** 1. **27.** 11. **28.** $-\frac{2}{15}$. **29.** $\emptyset$. **30.** -1. **31.** $\forall x \in \mathbf{R}$. **32.** -2. **33.** $\frac{11}{20}$. **34.** 44. **35.** $\frac{11}{6}$. **36.** 2. **37.** 5. **38.** 2. **39.** 3. **40.** *a)* 72; *b)* 5; *c)* 28; *d)* 15; *e)* 5. **41.** 4. **42.** $\frac{10}{19}$. **43.** *a)* -3; *b)* $\frac{31}{5}$. **44.** -21. **45.** 3. **46.** $\frac{158}{205}$. **47.** 120. **48.** 7. **49.** 1. **50.** 0,1. **51.** 0,808. **52.** *a)* Nincs. *b)* Igen, $x=8$. **53.** *a)* Igen, $x=7$; *b)* Igen, $x=23$. **54.** 2. **55.** 1. **56.** 1. **57.** -4. **58.** $\emptyset$. **59.** Igen, $x=0{,}2$. **60.** Igen, $x=-0{,}25$. **61.** Igen, $x=-\frac{2}{3}$. **62.** $\emptyset$. **63.** $\emptyset$. **64.** $\frac{23}{7}$. **65.** 1. **66.** $\frac{2}{9}$. **67.** $\frac{23}{6}$. **68.** 11. **69.** $-0{,}25$. **70.** 3. **71.** $-\frac{6}{7}$. **72.** $\frac{23}{17} \approx 1{,}353$. **73.** $-0{,}4$. **74.** 11,5. **75.** 11.

76. $-0{,}5$. **77.** 2. **78.** $\emptyset$. **79.** $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \neq 3\}$. **80.** $\emptyset$. **81.** $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \neq 4\}$. **82.** 8. **83.** $\frac{4}{3}$. **84.** $\frac{4}{3}$. **85.** -1. **86.** 2. **87.** $-\frac{3}{7}$. **88.** $-8{,}5$. **89.** 2,5. **90.** 220 tonna; 110 tonna. **91.** 13 tonna; 6,5 tonna. **92.** 80 db; 10 db. **93.** 35 db. **94.** 33 tanuló. **95.** 80 s. **96.** $\forall x \in \mathbf{R}^+$. **97.** 120 Ft. **98.** Igen, mert azonosságot kapunk. **99.** 10 Ft. **100.** 16 db kétforintos, 2 db ötforintos; 42 Ft. **101.** 40, 35 és 10 évesek. **102.** 9 év múlva. **103.** 30 éves. **104.** 36°; 72°; 72°. **105.** 70°; 50°; 60°. **106.** 12 cm; 16 cm; 20 cm. **107.** 7,5 cm; 7,5 cm; 9 cm. **108.** 3 cm; 4,5 cm; 4,5 cm. **109.** 28,8 km. **110.** 12. **111.** 47 és 29. **112.** $\frac{4}{9}$. **113.** 72; 48. **114.** 42; 30. **115.** Nincs ilyen szám. **116.** 76. **117.** 127. **118.** 57. **119.** 85. **120.** 45. **121.** 14; 25; 36. **122.** 100 Ft. **123.** 60. **124.** 120 Ft-ért adta; 100 Ft; 150 Ft. **125.** 20%. **126.** 24 db; 16 db. **127.** 2940 db; 5044 db. **128.** 35 liter; 55 liter. **129.** 1260 fiú; 240 leány. **130.** 637,5; 212,5. **131.** 400 km/h; 600 km/h. **132.** 72,7 kg á 410 Ft; 127,3 kg á 520 Ft. **133.** 0,0375 kg. **134.** 7%-os. **135.** 0,198 kg; 825 g. **136.** 240 kg. **137.** 0,875 liter. **138.** 54%. **139.** 17%. **140.** A régi ötvözetben: 18,9 kg cink és 86,1 kg réz van. Az újban: 36,9 kg cink és 86,1 kg réz van. **141.** 0,14 kg. **142.** 10 kg; 70 kg. **143.** 3,75 perc. **144.** 13 perc 20 s. **145.** 1 óra 40 perc. **146.** $1\frac{1}{44}$ óra. **147.** 2,4 óra. **148.** $1\frac{3}{4}$ óra. **149.** 6 h 54′ 17″. **150.** Igen. **151.** 2,21 óra. **152.** $57\frac{1}{7}$ perc. **153.** 24 m^3. **154.** $\frac{45}{19}$ óra. **155.** 875 db. **156.** 5,5 s. **157.** 10,25 s. **158.** 12 perc. **159.** 212 perc. **160.** 1 perc; 0,6 perc. **161.** 32 km. **162.** Mindhárom esetben $\frac{1}{4}$ óra múlva

találkoznak. **163.** Fölfelé 16 km/h, lefelé 24 km/h; 240 km. **164.** 10 perc, az eredmény független mind a csónak, mind a víz sebességétől. **165.** 1560 km. **166.** 50 s; igen $66\frac{2}{3}$ s múlva. **167.** 0,546 év. **168.** 18 km-re A-tól; 4 óra múlva. **169.** 1 óra múlva; A-tól 4 km-re. **170.** Kb. 225 km-rel. **171.** 12 autóbuszt előz meg. **172.** *a)* 10; 7; *b)* 11; 7. **173.** A két autó először C-ben, másodszor B-ben, harmadszor a visszafelé úton B-től 60 km-re találkozott (az A-beli indulást nem tekintve). **174.** 2,4 óra. **175.** 1 m/s; 1,2 m/s. **176.** 0,48 m; 0,96 m. **177.** 7 óra $\frac{60}{11}$ perc; 4 óra $54\frac{6}{11}$ perc. **178.** 13 óra után 5,5 perccel. **179.** 3 óra $16\frac{4}{11}$ perckor fedik egymást; 3 óra $32\frac{8}{11}$ perckor merőlegesek egymásra. **180.** 1485 kg. **181.** 450 ha; 480 ha; 500 ha. **182.** *a)* 31,5 m; *b)* 2,42 m. **183.** 192 km. **184.** Az 1. tanuló elindulásától 42 perc múlva értek a hídhoz, a híd elejéig az 1. tanuló 7 hídhossznyi utat tett meg. **185.** 25 km/h. **186.** 169 Ft; 91 Ft; 52 Ft. **187.** 9-en voltak testvérek; 180 000 Ft-ot kaptak különkülön; az örökség 1 620 000 Ft volt. **188.** A-nak 165; B-nek 57; C-nek 21 golyója volt. **189.** *a)* $\{-4; 4\}$; *b)* $\{-3; 3\}$. **190.** *a)* $\{-4; 4\}$; *b)* $\{-5; 5\}$. **191.** $\{-1\}$. **192.** $\{-1; 5\}$. **193.** $\{-1; 9\}$. **194.** $\{-1; 9\}$. **195.** $\{-9; -7\}$. **196.** $\{-12; -2\}$. **197.** $\{-1; 2\}$. **198.** $\{1\}$. **199.** *a)* $\{2\}$; *b)* $\{-3\}$. **200.** $\{0{,}5\}$. **201.** $\{0; 2\}$. **202.** $\{2; 4\}$. **203.** $\{0\}$. **204.** $\{0\}$. **205.** $\{0\}$. **206.** $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **207.** $\emptyset$. **208.** $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **209.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. **210.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **211.** $\left\{\frac{4}{3}\right\}$. **212.** $\left\{\frac{17}{19}; 3\right\}$. **213.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **214.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **215.** $\left\{0; \frac{4}{5}\right\}$. **216.** $\left\{\frac{1}{6}\right\}$. **217.** $\left\{-\frac{4}{5}; 0; \frac{4}{5}\right\}$. **218.** $\left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right\}$. **219.** $\emptyset$. **220.** $\left\{-\frac{9}{2}; \frac{13}{4}\right\}$.

221. $[0; \infty[$. **222.** $[2; \infty[$. **223.** $[1; 2]$. **224.** $\{0{,}5; 2{,}5\}$. **225.** $[3; \infty[$. **226.** $]-\infty; 3]$. **227.** $\{1{,}5\}$. **228.** $\{-3{,}5; 3{,}5\}$. **229.** $[-1{,}5; 1{,}5]$. **230.** $\left[-\frac{2}{3}; 0\right]$. **231.** $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqq x \leqq 2, \quad x = 5\}$. **232.** $\left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\}$. **233.** $\left\{\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\}$. **234.** $\left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\}$. **235.** $\left\{1; \frac{11}{2}\right\}$. **236.** $\left\{0; \frac{2}{5}\right\}$. **237.** $\{-8; 2\}$. **238.** $\emptyset$. **239.** $\{3\}$. **240.** $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$. **241.** $\{-2{,}5\}$. **242.** $\{-3; -1; 1; 3\}$. **243.** $\{-6; -4; 0; 2\}$. **244.** $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$. **245.** $\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$. **246.** $\{-7; -3; -1; 1; 3; 7\}$. **247.** $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 1; 3\right\}$. **248.** $\{-1\}$. **249.** $\{1\}$. **250.** $\{p-2; p+2\}$. **251.** $]-\infty; \infty[$, ha $p=4$; $\frac{p}{2}+2$, ha $p \neq 4$. **252.** $p \geqq 0$ esetén $\{3-p; 3+p\}$. **253.** $\{0\}$.

MIV.

254. *a)* Ha $p \neq 0$, akkor $x = p$; ha $p = 0$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök. *b)* Ha $p \neq 3$ és $p \neq -3$, akkor $x = \frac{1}{p-3}$; ha $p = 3$, akkor nincs gyök; ha $p = -3$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök. **255.** *a)* Ha $p \neq 2$, akkor $x = p+2$; ha $p = 2$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök. *b)* Ha $p \neq 0$ és $p \neq 1$, akkor $x = \frac{2}{p}$; ha $p = 1$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök; ha $p = 0$, akkor nincs gyök.

256. *a)* Ha $|p| \neq 3$, akkor $x = \frac{p^2 - 3p + 9}{p-3}$; ha $p = -3$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök; ha $p = 3$, akkor nincs megoldás. *b)* Ha $p \neq 2$ és $p \neq -2$, akkor $x = \frac{3p-5}{p-2}$; ha $p = 2$, akkor nincs gyök; ha $p = -2$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$

gyök. **257.** *a)* Ha $p \neq 1$, akkor $x = \frac{1}{p-1}$; ha $p=1$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök. *b)* Ha $p \neq 3$, akkor $x = \frac{3p}{p-3}$; ha $p=3$, akkor nincs gyök.

258. *a)* Ha $|p| \neq 3$, akkor $x = \frac{p+3}{p-3}$; ha $p=-3$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök; ha $p=3$, akkor nincs gyök. *b)* Ha $p \neq 0$ és $p \neq 3$, akkor $x = \frac{1}{p}$; ha $p=0$, akkor nincs gyök; ha $p=3$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ gyök. **259.** Ha $a \neq b$, akkor $x = a+b$; ha $a=b$, akkor $\forall x \in \mathbf{Z}$ gyök. **260.** $x = m-am-n$. **261.** Ha $m \neq a$, akkor $y = am$; ha $m=a$, akkor $\forall y \in \mathbf{Z}^+$ megoldás. **262.** Kezdeti feltétel: $a \neq 0$, $d \neq 0$. Ha $a \neq d$, akkor $x = d-a$; ha $a=d$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás. **263.** Kezdeti feltétel: $p \neq 0$ és $p \neq 3$. Ha $p \neq 0$, $p \neq 3$ és $p \neq 4$, akkor $x = \frac{p+3}{p-4}$, ha $p=4$, akkor nincs megoldás. **264.** *a)* Ha $a \neq 0$, $b=0$, akkor $x_0=0$. *b)* Ha $\frac{b}{a} > 0$, akkor $x_0 < 0$. *c)* Ha $\frac{b}{a} < 0$, akkor $x_0 > 0$. **265.** *a)* Ha $a=0$ és $b \neq 0$, akkor nincs megoldás. *b)* Ha $a=0$ és $b=0$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás. *c)* Ha $a \neq 0$, akkor $x = -\frac{b}{a}y$. **266.** *a)* Ha $p > 2$. *b)* Ha $p < 2$. **267.** Ha $p \geqq \frac{11}{4}$.

268. *a)* $p > -\frac{5}{8}$; *b)* $p = -\frac{5}{8}$; *c)* $p < -\frac{5}{8}$. **269.** Ha $a \neq 1$, akkor $x = \frac{3-2b(3-2a)}{6(a-1)}$; ha $a=1$ és $b=\frac{3}{2}$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás; ha $a=1$ és $b \neq \frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás. **270.** Ha $a \neq b$ és $|a| \neq 1$, akkor $x = \frac{a+b}{1-a^2}$; ha $|a|=1$ és $|b| \neq 1$, akkor nincs megoldás; ha $b=a$, vagy $|a|=1$ és $b=-a$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás. **271.** Ha $a \neq 0$ és $a \neq 2$, akkor $x = \frac{a-4b}{a(a-2)}$; ha $a=0$ és $b=0$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$

megoldás; ha $a=2$ és $b \neq \frac{1}{2}$, vagy $a=0$ és $b \neq 0$, akkor nincs megoldás; ha $a=2$ és $b=\frac{1}{2}$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás. **272.** Ha $a \neq 1$, és $b \neq 2$, akkor $x = \frac{2b-a}{(b-2)(a-1)}$; ha $b=2$ és $a=4$, vagy ha $a=1$ és $b=0{,}5$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás; ha $a=1$ és $b \neq 0{,}5$, vagy $a \neq 4$ és $b=2$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. **273.** Ha $|a| \neq 2$ és $|b| \neq 3$, akkor $x = \frac{b^2-a^2}{(a^2-4)(b^2-9)}$; ha $|a|=2$ és $|a|=|b|$, vagy $|a|=3$ és $|a|=|b|$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás; ha $|a|=2 \neq |b|$, vagy $|a|=3 \neq |b|$, akkor nincs megoldás. **274.** Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, akkor $x = \frac{ab(c-d)}{b-a}$; ha $a=b \neq 0$, $c=d$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás; ha $a=b=0$, vagy $a=b \neq 0$, $c \neq d$, akkor nincs megoldás. **275.** Ha $a \neq 0$, akkor $x=a$; ha $a=0$, akkor nincs megoldás. **276.** Ha $a \neq 0$, $c+d \neq 0$, akkor $x = \frac{2a}{c+d}$; ha $c+d=0$, $a=0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás; ha $c+d=0$, $a \neq 0$, akkor nincs megoldás. **277.** Ha $c=d$, akkor $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$ megoldás; ha $c \neq d$, akkor nincs megoldás.

278. Ha $b \neq 0$, $a+b \neq 0$, akkor $x = \frac{a-b}{a+b}$; ha $a+b=0$, $b \neq 0$, akkor nincs gyök. **279.** Ha $b \neq c$, akkor $x = \frac{a}{b-c}$; ha $b=c$ és $a=0$, akkor $\forall x \in \mathbf{Q}$ megoldás; ha $b=c$ és $a \neq 0$, akkor nincs megoldás.

280. Kezdeti feltételek: $x \neq 2p$, $x \neq -2p$. Ha $p \neq \frac{3}{5}$, akkor $x = \frac{14p^2}{3-5p}$; ha $p=\frac{3}{5}$, vagy $p=\frac{1}{4}$, vagy $p=-\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás.

281. Kezdeti feltételek: $p \neq x$, $p \neq -x$. Ha $p=\frac{1}{3}$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldása az egyenletnek. **282.** $x = \frac{ac}{a-b}$, $y = \frac{bc}{a-b}$, $a \neq b$.

283. $x = \frac{a-bm}{m-1}$ év; $m>1$, $a, b>0$. **284.** $x = \frac{ab}{a+b}$; $a, b>0$. **285.** $x = \frac{mt+kn}{n(n-t)}$ db; $n>t>0$; $n, k>0$.

286. $x = \frac{q-p}{a-b}$ nap, ha $a \neq b$; $a, b, p, q>0$. Ha $a>b$, akkor $q>p$; ha $a<b$, $q<p$. Ha $a=b>0$, $q=p>0$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}^+$ megoldás. Ha $a=b>0$ és $q \neq p$, de $q>0$, $p>0$, akkor nincs megoldás.

287. $x = \frac{ap}{a+b}\%$, $a, b, p>0$. **288.** $x = \frac{ab}{b-a}$ óra, $b>a>0$.

289. $v = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ (harmonikus közép). **290.** *a)* $x = \frac{d}{u-v}$; *b)* $x = \frac{d}{u+v}$. **291.** $x = \frac{k+d}{u-v}$. **292.** $x = \frac{b(n-1)}{a-c}$ km/h, $a>c>0$, $n>1$, $b>0$. **293.** A feladat megoldását célszerű grafikus úton elvégezni. $x = \frac{mn+mr+nt}{m+n}$. **294.** $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=2$, $y_2=2$. **295.** $x = 2+7t$, $y = 1-3t$, $t \in \mathbf{Z}$. **296.** $x = 1+5v$, $y = -1+14v$, $v \in \mathbf{Z}$. **297.** $x = 1+12k$, $y = -1-17k$, $k \in \mathbf{Z}$. **298.** $x = 10+11k$, $y = -125-139k$, $k \in \mathbf{Z}$. **299.** $\emptyset$. **300.** $x=2$, $y=1$. **301.** $x = 1+5v$, $y=-1+14v$, $v \in \mathbf{Z}^+$. **302.** $\emptyset$.

303.

x	2	12	22
y	35	18	1

304.

x	9	32	55	...
y	6	35	64	...

305. (5; 3), (5; 5), (5; 7), (5; 9), (6; 2), (6; 4), (6; 6), (6; 8).
306. A téglalap oldalainak a hossza: 3 cm, 6 cm, illetve 4 cm, 4 cm.
307. 78. **308.** 36.

309.

x	−36	−8	−6	−2	0	4	6	34
y	−2	−6	−8	−36	34	6	4	0

310. A két rész: 130 és 153.

311.

1. fajta bor	2. fajta bor	3. fajta bor
2 liter	15 liter	23 liter
4 liter	10 liter	26 liter
6 liter	5 liter	29 liter

312. 1953. **313.** (82; 18), (47; 53), (12; 88). **314.** 793, **315.** 1868. **316.** Az 1. csapatnak 15 tagja volt, teljesítménye 1425 kg. A 2. csapatnak 19 tagja volt, teljesítménye 1406 kg.
317. A számla alakja a következő volt: 124 db à 192 Ft = 23 808 Ft.

318.

A kerékpárok száma	Az autók száma	A traktorok száma
10	14	8
25	5	10

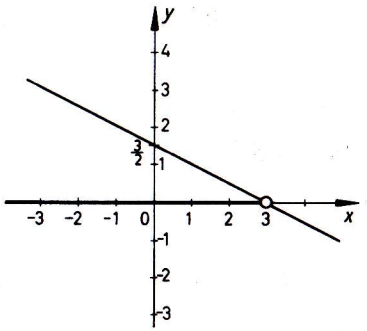
319. A beérkezés sorrendje a rajtszámok szerint: 1; 7; 9; 10; 8; 11; 2; 5; 3; 4; 6; 12.

320.

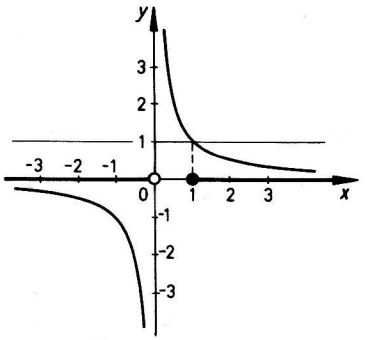
Az 1 Ft-os illetékbélyegek száma	68	48	28	8
A 10 Ft-os illetékbélyegek száma	1	12	23	34
Az 5 Ft-os illetékbélyegek száma	138	120	102	84

321. 13; 23; 33; 43. **322.** 539. **323.** Jóskának 350 Ft-ja volt, a figurákért összesen 106 Ft-ot fizetett. Egy gyalogos ára 1 Ft, egy futó, illetve huszár ára 3 Ft, egy bástya ára 4 Ft, egy vezér ára 9 Ft, egy király ára 16 Ft. **324.** A férfiak száma 5, a nők száma 28, a gyermekek száma 117. **325.** 37. **326.** 974. **327.** 3456.
328. A sík szabályos háromszögekkel, négyzetekkel és szabályos hatszögekkel fedhető le hézag és átfedés nélkül. Az egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{3; 4; 6\}$. **329.** Pista a 2 Ft-os ceruzából kilencet, a 4 Ft-osból egyet és az 5 Ft-osból is egyet vásárolt. **330.** A háromjegyű számok száma mindkét számrendszerben: 608. Két szám felel meg a feladat feltételeinek: $302_9 = 203_{11} = 245_{10}$; $604_9 = 406_{11} = 490_{10}$. **331.** (11; 44), (23; 23). **332.** $k>15$.

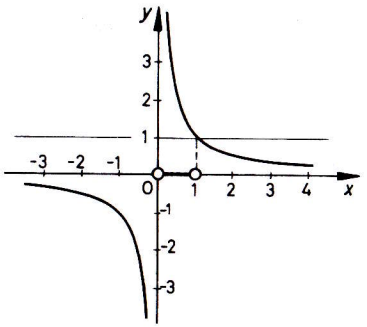
333. *a)* $x \geqq -1{,}5$; *b)* $x < -2$. **334.** *a)* $x > 2$; *b)* $x \geqq 10$.
335. *a)* $x \leqq -1{,}5$; *b)* $x \geqq -6$. **336.** *a)* $-1 < x$; *b)* $x < -4$.
337. *a)* $]-0{,}5; +\infty[$; *b)* $]-2; +\infty[$. **338.** *a)* $]-1; +\infty[$;
b) $]-\infty; 4[$. **339.** *a)* $[-2; +\infty[$; *b)* $[5; +\infty[$.
340. *a)* $]-\infty; 3]$; *b)* $[4; +\infty[$. **341.** *a)* $]2; +\infty[$; *b)* $]4; +\infty[$.
342. *a)* $]-\infty; +\infty[$; *b)* $]-\infty; 3{,}5[$. **343.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\left]-\frac{40}{3}; +\infty\right[$.
344. *a)* $]-\infty; -0{,}6]$; *b)* $]-\infty; +\infty[$. **345.** *a)* $\emptyset$; *b)* $]-\infty; +\infty[$.
346. *a)* $\emptyset$; *b)* $\forall x \in \mathbf{R}$. **347.** *a)* $[-2; +\infty[$; *b)* $]-\infty; -3[$.
348. *a)* $[-3; +\infty[$; *b)* $]15; +\infty[$. **349.** *a)* $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$;
b) $\left]-\infty; \frac{5}{9}\right]$. **350.** *a)* $\left]-\frac{7}{5}; +\infty\right[$; *b)* $[-1; +\infty[$.
351. *a)* $\left]\frac{15}{8}; +\infty\right[$; *b)* $]-\infty; 1[$. **352.** *a)* $\{1; 2; 3\}$; *b)* $\emptyset$.
353. *a)* $[1; +\infty[$; *b)* $]0{,}5; +\infty[$. **354.** *a)* $]0{,}96; +\infty[$; *b)* $\left]0; \frac{11}{5}\right[$.
355. *a)* $[56; +\infty[$; *b)* $\left]0; \frac{1}{5}\right[$. **356.** *a)* $\emptyset$; *b)* $]0; +\infty[$.
357. *a)* $]0; 2{,}2]$; *b)* $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. **358.** *a)* $]0{,}5; 2[$; *b)* $[-1; 2]$.
359. *a)* $[-6; 2]$; *b)* $]1; 5[$. **360.** $[3; 4[$; *b)* $[1; 5]$.
361. *a)* $\{3; 4; 5; 6\}$; *b)* $\{-8; -7; -6; -5; -4\}$; *c)* $\{-1; 0; 1\}$;
d) $\{4; 5\}$; *e)* $\{8; 9; 10; 11; 12\}$; *f)* $\{-6; -5; -4; -3; -2\}$; *g)* $\{1\}$;
h) $\{3\}$; *i)* $\{1; 2; 3; 4\}$. **362.** $]-\infty; 3[$ *(79. ábra).*
363. $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$ *(80. ábra).* **364.** $]0; 1[$ *(81. ábra).*
365. $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ *(82. ábra).* **366.** $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
(83. ábra). **367.** $]-\infty; 2{,}5[$. **368.** $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
369. $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[\cup [5; +\infty[$. **370.** $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\cup]4; +\infty[$.
371. $[2; 4[$. **372.** $]-\infty; 1{,}5[\cup]2; +\infty[$. **373.** $]1{,}5; 4]$.
374. $\left]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right[$. **375.** $\left[\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right[$. **376.** $]-\infty; 4[\cup [5; +\infty[$.



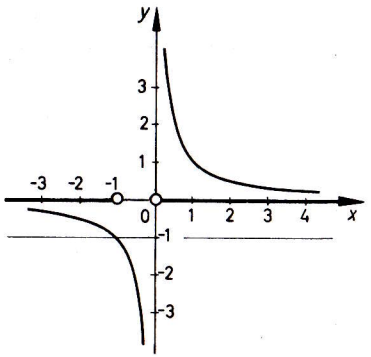
79. ábra



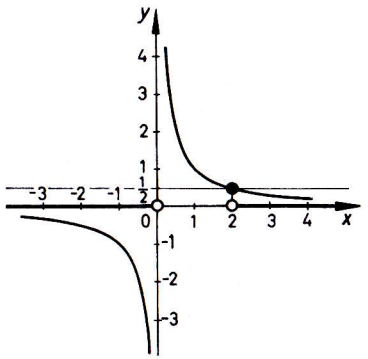
80. ábra



81. ábra



82. ábra



83. ábra

377. $]-2;\ 3[\cup]3;\ +\infty[$. **378.** $\left]\frac{11}{3};\ 4\right[$.

379. $]-\infty;\ -0{,}5[\cup]1;\ +\infty[$. **380.** $\left]-\infty;\ \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{2};\ +\infty\right[$.

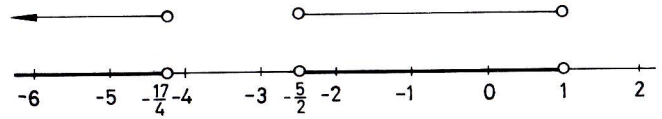
381. $\left]-\infty;\ \frac{2}{7}\right[\cup \left[\frac{8}{3};\ +\infty\right[$. **382.** $]-\infty;\ -2[\cup]-0{,}5;\ +\infty[$.

383. $\left]-\infty;\ -\frac{2}{3}\right[\cup \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right[$. **384.** $]2{,}5;\ 11[$.

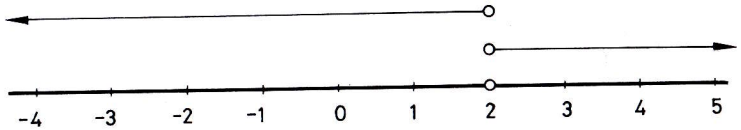
385. $]-\infty;\ -2] \cup]-0{,}5;\ +\infty[$. **386.** $]2{,}5;\ 12[$.

387. $[-2;\ -1{,}5[$. **388.** $\left]-\infty;\ -\frac{17}{4}\right[\cup \left]-\frac{5}{2};\ 1\right[$, *(84. ábra)*.

389. $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$, *(85. ábra)*. **390.** -1. **391.** 1.



84. ábra



85. ábra

397. $]a+1;\ 1[$, ha $a<0$; $\emptyset$, ha $a=0$; $]1;\ 1+a[$, ha $a>0$.

398. $]-\infty;\ -1[\cup [-1-a;\ +\infty[$, ha $a<0$; $]-\infty;\ -1-a] \cup]-1;\ +\infty[$, ha $a>0$; $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$, ha $a=0$. **399.** $]-\infty;\ 2[$, ha $a<0$, vagy $a>\frac{2}{3}$; $]2;\ +\infty[$, ha $0<a<\frac{2}{3}$; $\emptyset$, ha $a=\frac{2}{3}$.

400. $\left]-\infty;\ \frac{3a-5}{a-1}\right[$, ha $a<1$; $\left]\frac{3a-5}{a-1};\ +\infty\right[$, ha $a>1$; $\forall x \in \mathbf{R}$, ha $a=1$. **401.** $\left]\frac{9a-1}{6a-1};\ +\infty\right[$, ha $a<0$, vagy $a>\frac{1}{6}$; $\left]-\infty;\ \frac{9a-1}{6a-1}\right[$,

ha $0<a<\frac{1}{6}$; $\emptyset$, ha $a=1$. **402.** *a)* $a>-5$; *b)* $a=-5$; *c)* $a<-5$; *d)* ... $-11;\ -5;\ 1;\ 7;$ ...; **403.** *a)* $a>0$; *b)* $a=11k$, $k \in \mathbf{Z}^+$ esetén $x=14k$. **404.** $a>\frac{7}{5}$ esetén van az egyenletnek 7-nél nagyobb gyöke. Ha $a=\frac{k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $x=k$. **405.** $[-3;\ 3]$.

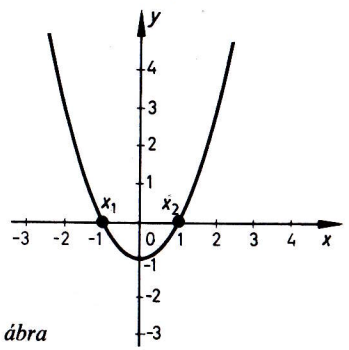
406. $]-9;\ -7[$. **407.** $]-12;\ -2[$. **408.** $]2;\ 8[$.
409. $[2;\ 4]$. **410.** $]-1;\ 9[$. **411.** $[-2;\ 6]$. **412.** $]2;\ 3[$.
413. $]0{,}5;\ 2{,}5[$. **414.** $]0{,}5;\ 2{,}5[$. **415.** $]-\infty;\ -3[\cup]3;\ +\infty[$.
415. $]-\infty;\ -1[\cup]9;\ +\infty[$. **416.** $]-\infty;\ -5[\cup]-1;\ +\infty[$.
417. $]-\infty;\ -3] \cup [13;\ +\infty[$. **418.** $]-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty[$.
419. $]-\infty;\ 0{,}5] \cup [1{,}5;\ +\infty[$. **420.** $\left]-\infty;\ \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\ +\infty\right[$.
421. $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ +\infty[$. **422.** $]3;\ +\infty[$.
423. $]2;\ 4[\cup]4;\ 6[$. **424.** $]-\infty;\ -5[\cup]-3;\ 3[\cup]5;\ +\infty[$.
425. $]-\infty;\ -2[\cup]-0{,}5;\ +\infty[$. **426.** $]-\infty;\ -4[\cup [0;\ +\infty[$.
427. $]-\infty;\ -4[\cup \left]\frac{8}{7};\ 2\right[\cup]2;\ +\infty[$. **428.** $\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$.
429. $\left]\frac{5}{3};\ 3\right[$. **430.** $]-\infty;\ -2[\cup]2;\ +\infty[$. **431.** $]-1;\ +\infty[$.
432. $]0{,}5;\ +\infty[$. **433.** $[-1;\ +\infty[$. **434.** $\left]-10;\ -\frac{4}{5}\right[$.
435. $]-\infty;\ 0[\cup]6;\ +\infty[$. **436.** $\left]-\infty;\ -\frac{8}{3}\right[\cup]2;\ +\infty[$.
437. $]-\infty;\ -8[\cup]2;\ +\infty[$. **438.** $]-3;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ 3[$.
439. $]-\infty;\ -2[\cup]0;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$. **440.** $\{13;\ 14;\ 16;\ 17\}$.
441. 6. **442.** $\left]-2;\ -\frac{1}{3}\right] \cup]8;\ +\infty[$.
443. $\left]-\infty;\ -\frac{b}{a}\right[\cup \left]\frac{b}{a};\ +\infty\right[$. **444.** $]-a;\ a[$. **445.** $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$.
450. $\left\{\frac{7}{15};\ \frac{4}{5}\right\}$. **451.** $x \in [3;\ 5[$. **452.** $[-1;\ -0{,}5[\cup \{1\}$.

453. $\frac{m+r}{a}$, ahol $0 \leqq r < 1$. **454.** $x = \frac{a}{a-1}[x]$, ha $a<0$, ahol $[x] = 0; -1; -2; \ldots; [a]$; $x=0$, ha $0<a<1$, vagy $1<a\leqq 2$; $x = \frac{a}{a-1}[x]$, ha $a>2$, ahol $[x] = 0; 1; 2; \ldots; [a-2]$. **455.** $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ alakú számok ($k \in \mathbf{Z}$).

2. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek

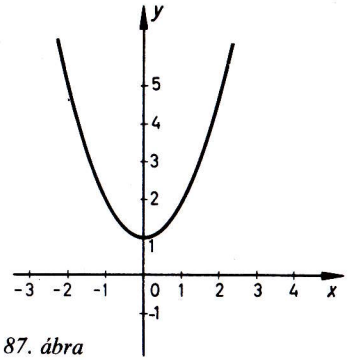
456. *a)* $\{0\}$; *b)* $\{0\}$. **457.** *a)* $\{0; 4\}$; *b)* $\{0; 4\}$. **458.** *a)* $\{0\}$; *b)* $\{-1; 0\}$. **459.** *a)* $\{3\}$; *b)* $\{-3; 3\}$. **460.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$.
461. *a)* $\{13\}$; *b)* $\{-9; 13\}$. **462.** *a)* $\{0; 3\}$; *b)* $\{0; 3\}$.
463. *a)* $\{5\}$; *b)* $\{-5; 5\}$. **464.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$.
465. *a)* $\{0\}$; *b)* $\{-5; 0\}$. **466.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.
467. *a)* $\{-14; 14\}$; *b)* $\{-14; 14\}$. **468.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\left\{-\frac{\sqrt{11}}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right\}$.
469. *a)* $\{-9; 9\}$; *b)* $\{-9; 9\}$. **470.** *a)* $\{-0{,}4; 0{,}4\}$; *b)* $\{-0{,}4; 0{,}4\}$.
471. *a)* $\emptyset$; *b)* $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$. **472.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$.
473. *a)* $\{0; 1\}$; *b)* $\{0; 1\}$. **474.** *a)* $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$; *b)* $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$.
475. *a)* $\{-5; 0\}$; *b)* $\{-5; 0\}$. **476.** *a)* $x_1 = x_2 = 2$; *b)* $\{1; 3\}$.
477. *a)* $\{-8; 12\}$; *b)* $x_1 = x_2 = 1$. **478.** *a)* $\{-1; 3\}$; *b)* $\emptyset$.
479. *a)* $x_1 = x_2 = -0{,}5$; *b)* $\{-6; 5\}$.
480. *a)* $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$; *b)* $x_1 = x_2 = -\frac{4}{3}$.

481. *a)* $x_1=-1$, $x_2=1$



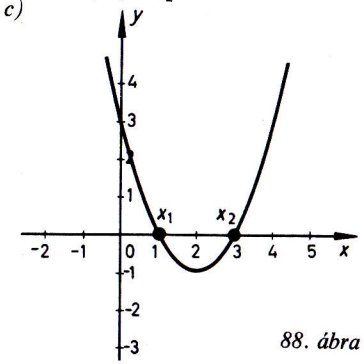
86. ábra

Ø



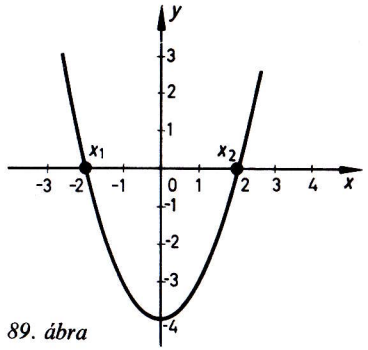
87. ábra

c) $x_1=1$, $x_2=3$



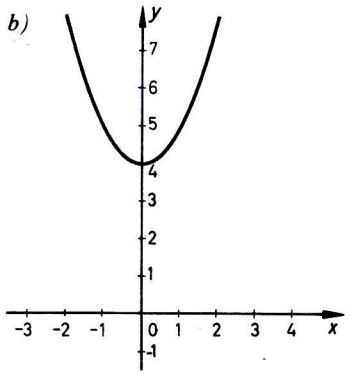
88. ábra

482. *a)* $x_1=-2$, $x_2=2$



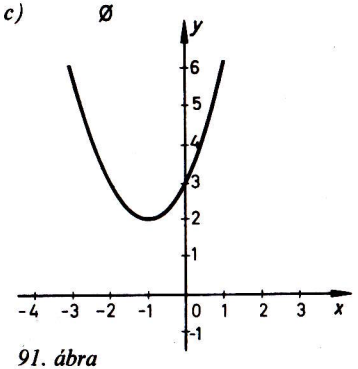
89. ábra

b) Ø



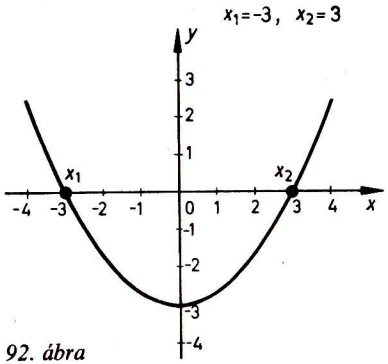
90. ábra

c) Ø



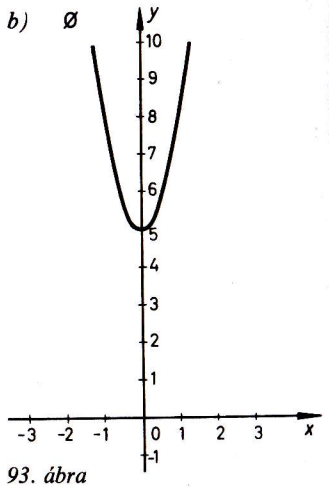
91. ábra

483. *a)*



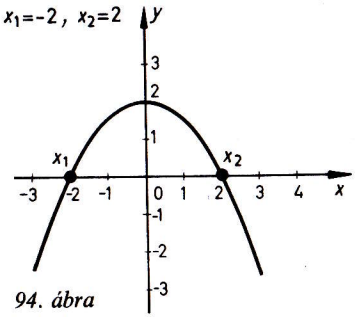
92. ábra

b) Ø



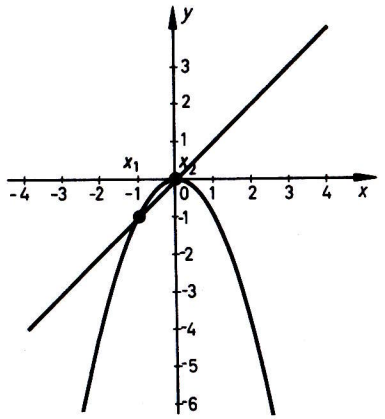
93. ábra

c) $x_1=-2$, $x_2=2$



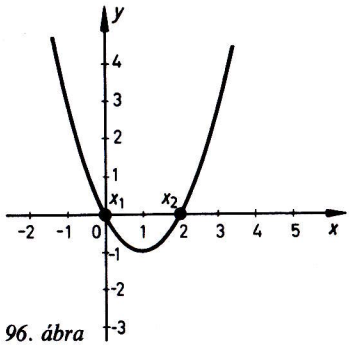
94. ábra

484. *a)* $x_1=-1$, $x_2=0$



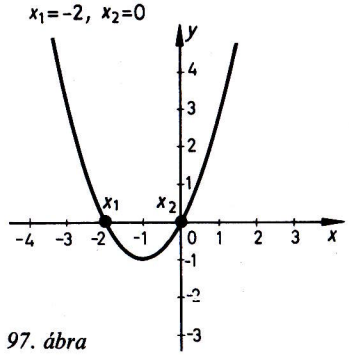
95. ábra

b) $x_1=0$, $x_2=2$



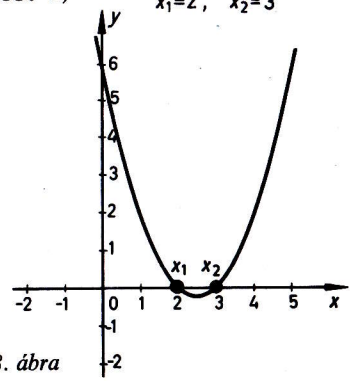
96. ábra

c) $x_1=-2$, $x_2=0$



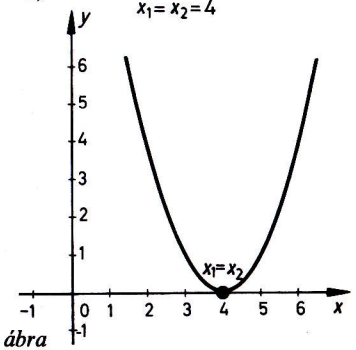
97. ábra

485. *a)* $x_1=2$, $x_2=3$



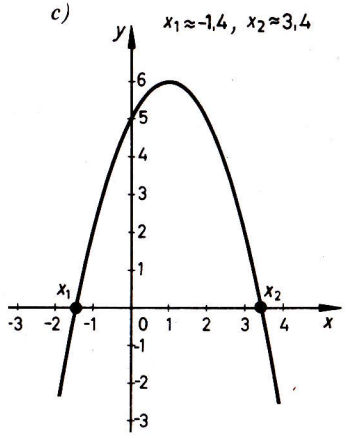
98. ábra

b) $x_1=x_2=4$



99. ábra

c)



100. ábra

486. $\{2; 4\}$. **487.** $\{-5; -4\}$. **488.** $\{-4; 3\}$.
489. $\{2; 3\}$. **490.** $\{-1; -0{,}4\}$. **491.** $\{-0{,}8; 6\}$. **492.** $\emptyset$.
493. $\left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$. **494.** $\emptyset$. **495.** $\{-0{,}75; -0{,}25\}$. **496.** Nem, $D_{f_1} \neq D_{f_2}$, $M_1 = \{0; 2\}$, $M_2 = \{2\}$. **497.** Nem, $D_{f_1} = D_{f_2}$, $M_1 = \{2; 3\}$, $M_2 = \{3\}$. **498.** Igen, $D_{f_1} = D_{f_2}$, $M_1 = M_2 = \{1; 2\}$. **499.** Nem, $D_{f_1} \neq D_{f_2}$, $M_1 = \{-1; 1\}$, $M_2 = \{-1; 0; 1\}$. **500.** Nem, $D_{f_1} = D_{f_2}$, $M_1 = \{3; 5\}$, $M_2 = \{3\}$. **501.** Nem, $D_{f_1} \neq D_{f_2}$, $M_1 = M_2 = \{3\}$. **502.** Nem, $D_{f_1} \neq D_{f_2}$, $M_1 = M_2 = \{2\}$. **503.** Nem, $D_{f_1} \neq D_{f_2}$, $M_1 = M_2 = \{3\}$. **504.** *a), b)* Igen, $D_{f_1} = D_{f_2}$, $M = \emptyset$. **505.** *a), b)* Igen, $D_{f_1} = D_{f_2}$, $M = \{-2; 2\}$.
506. $\{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}; 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\}$ vagy $\{0{,}682; 4{,}146\}$.
507. $\{0{,}707; 1{,}155\}$ vagy $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. **508.** $\{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$.
509. $\{-1{,}108; 3{,}608\}$. **510.** $\{-7{,}076; -0{,}424\}$.
511. $\{-2{,}1415; -0{,}2335\}$. **512.** $\{2; 3\}$. **513.** $\left\{-\frac{5}{6}; 5\right\}$.
514. $\{0; 50{,}69\}$. **515.** $\{-0{,}7; 10\}$. **516.** $\{-0{,}5; 2\}$.
517. $\left\{-\frac{45}{7}; 2\right\}$. **518.** $\left\{-8\frac{29}{60}; 0\right\}$. **519.** $\{0{,}75; 1\}$.

520. $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$. **521.** $\left\{\frac{28}{11}; 3\right\}$. **522.** $\left\{-\frac{5}{3}; 2\right\}$. **523.** $\{0; 3\}$.
524. $\emptyset$. **525.** $\{-5; 4\}$. **526.** $\left\{-3; \frac{2}{3}\right\}$. **527.** $\{2\}$.
528. $\{1\}$. **529.** $\{-3{,}5; -1\}$. **530.** $\{8\}$. **531.** $\{1; 2\}$.
532. $\{5; 6\}$. **533.** $\left\{\frac{3}{4}; \frac{9}{4}\right\}$. **534.** $\left\{-\frac{7}{9}; 2\right\}$. **535.** $\{2{,}5; 5\}$.
536. Nem. **537.** Igen. **538.** Nem. **539.** Igen.
540. 2 gyök van, a nagyobb abszolútértékű negatív. **541.** 2 gyöke van, a nagyobb abszolútértékű pozitív. **542.** 2 gyöke van, mindkét gyök negatív. **543.** 2 gyöke van, mindkét gyök pozitív.
544. 2 gyöke van, mindkét gyök negatív. **545.** *a)* $(x-5)(x-8) = x^2-13x+40 = 0$; *b)* $(x+4)(x+5) = x^2+9x+20 = 0$; *c)* $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{8}\right) = 0$; $32x^2-4x-3 = 0$; *d)* $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2}) = x^2-6x+7 = 0$; *e)* $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}) = x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{7})x-14 = 0$. **546.** *a)* $(m-3)(m+1)$; *b)* $(x-3)(2x-1)$; *c)* $(2a+3)(3a-2)$; *d)* $(8y-3)(9y-5)$; *e)* $(5x+2)(3-4x)$.
547. *a)* $\frac{x-2}{x+3}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3; 2{,}5\}$; *b)* $\frac{x+2}{4-x}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1{,}5; 4\}$; *c)* $\frac{2a-1}{a+5}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-5; -\frac{4}{3}\right\}$; *d)* $\frac{a-7}{2(a+1)}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1; 2\}$; *e)* $\frac{4(a+1)}{8a-3}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{8}; \frac{3}{2}\right\}$; *f)* $\frac{4(x+y)}{8x-3y}$, $x \neq \frac{3}{2}y$, $x \neq \frac{3}{8}y$, $x, y \neq 0$.
548. *a)* $k = -18$; *b)* -2; *c)* 12; *d)* 10; *e)* $2a$, ha $a \neq -b$. **549.** $m = 15$.
550. $c = -75$. **551.** $\{-9; 9\}$. **552.** $p^2n = (n+1)^2q$.
553. *a)* 4; *b)* $0 < c < 4$; *c)* $c < 0$; *d)* $c = 0$; *e)* $c > 4$. **554.** $\{-4; 0\}$.
555. *a)* $ax^2-bx+c = 0$; *b)* $ax^2+bnx+cn^2 = 0$; *c)* $cx^2+bx+a = 0$. **556.** *a)* $\frac{21}{4}$; *b)* $|x_1^2-x_2^2| = \frac{3}{4}\sqrt{33}$; *c)* $\frac{81}{8}$; *d)* $|x_1^3-x_2^3| = \frac{15}{8}\sqrt{33}$. **557.** $\emptyset$. **558.** $p = \frac{2}{3}$. **560.** $q^3-p^2q+p^2 = 0$.
561. *a)* $p < -22 \vee p > -10$; *b)* $\{-22; -10; 2\}$; *c)* $\{-22; -10\}$.

MIV.

562. $\{2p;\ 2\}$. **563.** $\{p-2;\ p-1\}$. **564.** Ha $a=b\neq 0$, $x=a$; ha $a=b=0$, $\forall x\in\mathbf{Q}$; ha $a\neq b$, akkor $x_1=a$, $x_2=\dfrac{(2a+b)b}{a-b}$.

565. Ha $a=0$, $b=0$, $\forall x\in\mathbf{Q}$; ha $a\neq 0$, $b=0$, $x=-1$; ha $b\neq 0$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{a}{b}$. **566.** $a\neq -b$, $x_1=a+b$, $x_2=a-b$.

567. $\left\{\dfrac{a+b}{a-b};\ \dfrac{a-b}{a+b}\right\}$. **568.** $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, ha $b=-a\neq 0$; $x_1=-b$, $x_2=-a$, ha $b\neq -a$, $a\neq b\neq 0$. **571.** $p\leqq -\dfrac{51}{20}$. **572.** *a)* Igen, -9; -1; *b)* nincs; *c)* 5; *d)* 2. **573.** A maximális érték -1, ekkor $a=b=c$ és így az egyenlet $x^2+x-1=0$ alakban is felírható.

574. $2q+p=2$. **576.** $3\leqq p\leqq 3{,}6$. **577.** $\left\{-\dfrac{5}{2};\ \dfrac{3}{2}\right\}$. **578.** $p\leqq -1$.

579. *a)* $\left[-\sqrt{\dfrac{40}{7}};\ -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ \sqrt{\dfrac{40}{7}}\right]$;

b) $\left[-\sqrt{\dfrac{40}{7}};\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};\ \sqrt{\dfrac{40}{7}}\right]$.

580. $]0;\ 1[\cup]1;\ \dfrac{6}{5}[$. **581.** $\{0\}\cup[-\sqrt{2};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{2}]$.

582. $c^4-b^4+4ab^2c=0$. **583.** $p^2\geqq 4q$. **584.** $]-\dfrac{1}{4};\ 1[$.

585. 23; 24. **586.** 33 fő. **587.** 15; 16. **588.** $\dfrac{3}{5}$. **589.** $\dfrac{8}{12}$ és $-\dfrac{3}{1}$. **590.** 63; 36. **591.** 24. **592.** 31; 41. **593.** 63 fő.

594. 2,3 cm. **595.** 5%. **596.** 4 kg; 6kg. **597.** 2,2 cm; 6,6 cm. **598.** 5. **599.** A négyzet oldala $\approx 28{,}4$ cm. **600.** 9 cm; 12 cm. **601.** 12 cm; 16 cm. **602.** 8 cm; 12 cm. **603.** 18 fő. **604.** 6 nap; 12 nap. **605.** 10 óra; 15 óra. **606.** 2 km; 2,5 km. **607.** 12 óra; 24 óra. **608.** 40 nap. **609.** 1. brigád: 20 db szoknya, 2. brigád: 24 db szoknya.

610. 6 db 5 tonnás autó. **611.** 20 km/h. **612.** 12,5 km/h. **613.** 8 km; 6 km. **614.** 25 km/h. **615.** 50 km/h. **616.** 17 órakor. **617.** 14 km/h; 18 km/h; 3 óra; 2 óra. **618.** 80 km/h; 60 km/h. **619.** kb. 16 óra 45 perckor. **620.** 60 km/h; 72 km/h. **621.** 24 m/perc; 30 m/perc. **622.** 2 m; 3 m; 0,318 m; 0,478 m. **623.** 4 km/h; 6 km/h. **624.** 24 km/h. **625.** 20 km/h-val, 60 km/h. **626.** 320 km vagy 180 km. **627.** 42 km. **628.** 180 km. **629.** 4 s múlva. **630.** $x_1=x_2=15$. **631.** A szakaszt két egyenlő részre kell osztani.

632. $x_1=x_2=5$. **633.** $x_1=x_2=\dfrac{p}{2}$. **634.** Az egyenlő szárú derékszögű háromszög. **635.** $a=10$ m; $b=20$ m; $T_{max}=200$ m^2. **636.** $a=6$ m; $b=12$ m; $T_{max}=72$ m^2. **637.** A $\dfrac{k}{4}$ oldalú négyzet. **638.** 3; 7. **639.** 7,5 cm; 5 cm. **640.** $\{-3;\ 3\}$. **641.** $\emptyset$. **642.** $\emptyset$ **643.** $\{-4;\ -2;\ 2;\ 4\}$. **644.** $\emptyset$. **645.** $\{-2;\ 2\}$. **646.** $\{2-2\sqrt{6};\ 2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{6}\}\approx\{-2{,}90;\ -0{,}83;\ 4{,}83;\ 6{,}90\}$. **647.** $\{-2-2\sqrt{6};\ -2-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{6}\}\approx$ $\approx\{-6{,}90;\ -4{,}83;\ 4{,}83;\ 6{,}90\}$. **648.** $]-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty[$. **649.** $[-1;\ 1]$. **650.** $\{-4;\ 4\}$. **651.** $\left\{-2;\ -\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{9};\ 2\right\}$. **652.** $\{2;\ 3;\ 4\}$. **653.** $[1;\ 2]$.

654. $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{4}\right\}$. **655.** $\{-3;\ 1;\ \sqrt{7};\ 2+\sqrt{3}\}$. **656.** $]-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty[$. **657.** $[2;\ 3]$. **658.** $\{-2;\ 1\}$. **659.** $\{1;\ 4\}$. **660.** $\{2;\ 5\}$. **661.** $\{3;\ 6\}$. **662.** $\{1\}$. **663.** $\{-2;\ 1\}$. **664.** $\{-1;\ 0;\ 1\}$. **665.** $\left\{\dfrac{7}{4};\ \dfrac{5}{2};\ \dfrac{13}{4}\right\}$. **666.** $\{-2{,}5;\ 2{,}5\}$. **667.** $\{-2;\ -1;\ 1;\ 2\}$. **668.** $\{-11;\ -2;\ 2;\ 11\}$. **669.** $\{-2;\ -0{,}5;\ 0{,}5;\ 2\}$. **670.** $\{-\sqrt{3};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{3}\}$. **671.** $\{-\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4}\}$. **672.** $\{-2;\ -0{,}5;\ 0{,}5;\ 2\}$. **673.** $\{0{,}5;\ 1\}$. **674.** $\{3;\ 4\}$. **675.** $\{-6;\ -4;\ -1;\ 1\}$. **676.** $x_1=x_2=-1$; $x_3=-5$; $x_4=3$. **677.** $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **678.** $\{0;\ 1;\ 3;\ 4\}$.

679. $\{1; 3\}$. **680.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$. **681.** $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **682.** $\{1; 2; 2{,}5; 5\}$.

683. $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$. **684.** $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. **685.** $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{2}{5}; 3; -\frac{1}{3}\right\}$.

686. *a)* $\pm i$; *b)* $\pm i\sqrt{2}$. **687.** *a)* $\pm 2i$; *b)* $\pm 3i$.

688. *a)* $\frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}$; *b)* $-3 \pm i3\sqrt{3}$. **689.** *a)* $-1 \pm i$; *b)* $1 \pm 2i$.

690. *a)* $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; *b)* $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. **691.** *a)* $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$; *b)* $\frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4}$.

692. *a)* $x^2 - 2x + 10 = 0$; *b)* $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$.

693. *a)* $x^2 - 4x + 9 = 0$; *b)* $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5 = 0$.

694. $\pm\sqrt{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$. **695.** $x_1 = 1$; $x_2 = 0{,}5$; $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$:

$x_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$. **696.** $\left\{\pm 2; \pm 0{,}5; \pm \frac{i}{2}; \pm 2i\right\}$.

697. $\left\{1; -2; \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}\right\}$. **698.** $\left\{\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{4}; \frac{1 \pm i\sqrt{95}}{4}\right\}$.

699. $\left\{2; 3; \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$. **700.** $\left\{-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}i\right\}$.

701. $x_1 = 1 + i$; $x_2 = \sqrt{2} - i$. **702.** $x_1 = 2i$; $x_2 = 2 + i$.

703. $\left\{-\frac{1+i}{2}; \frac{3-5i}{2}\right\}$. **704.** $\{0; i; -i\}$. *Útmutatás:* A komplex számok trigonometrikus alakját használjuk.

705. $|z|_{max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Útmutatás:* A komplex számok trigonometrikus alakját használjuk fel. **706.** $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

707. $]-\infty; -1]\cup[1; +\infty[$. **708.** $]-1; 1[$. **709.** $[-1; 1]$.

710. $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$. **711.** $]-\infty; -3]\cup[3; +\infty[$.

712. $]-3; 3[$. **713.** $[-3; 3]$. **714.** $]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$.

715. $]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$. **716.** $]-5; 0[$. **717.** $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

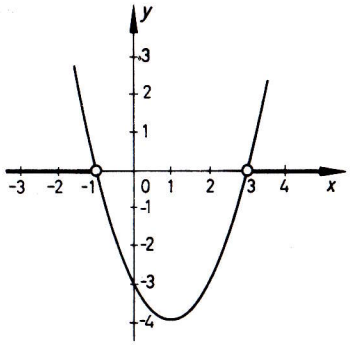
718. $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right]\cup[0; +\infty[$. **719.** $\left]0; \frac{3}{7}\right[$.

720. $]-\infty; 0[\cup\left]\frac{4}{15}; +\infty\right[$. **721.** $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$. *(101. ábra.)* **722.** $\forall x \in \mathbf{R}$. *(102. ábra.)* **723.** $\forall x \in \mathbf{R}$. *(103. ábra.)*

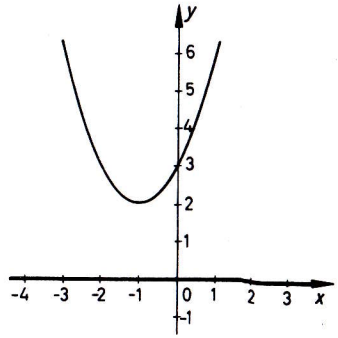
724. $[-2; 5]$. *(104. ábra.)* **725.** $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$. *(105. ábra.)*

726. $\forall x \in \mathbf{R}$. *(106. ábra.)* **727.** $[-2; 3]$. *(107. ábra.)*

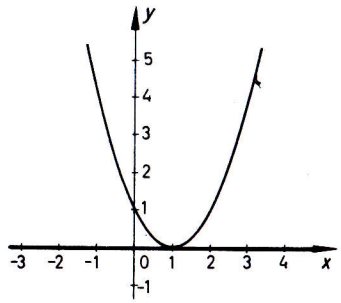
728. $[-2; 0{,}5]$. *(108. ábra.)*



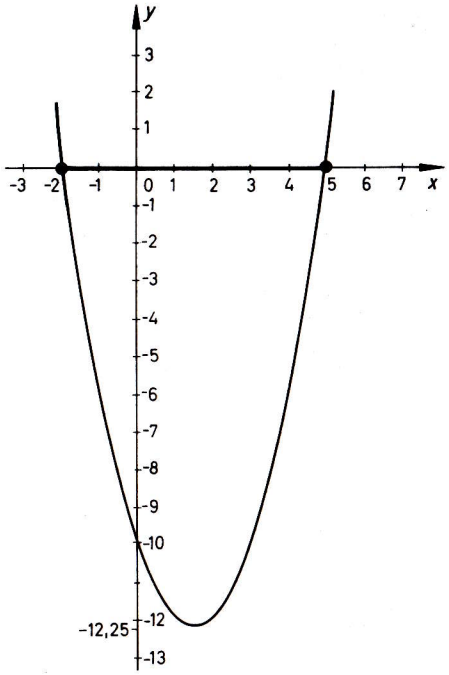
101. ábra



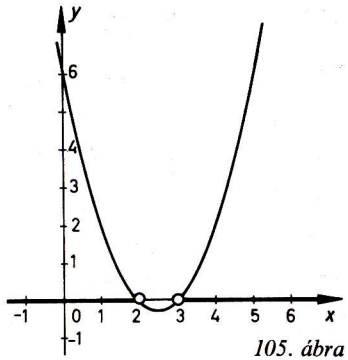
102. ábra



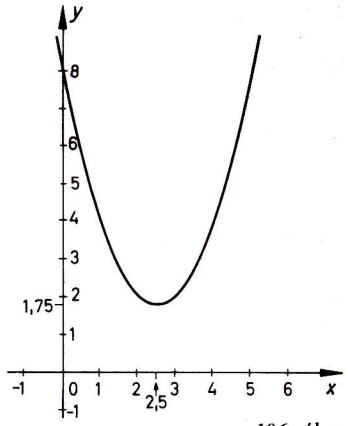
103. ábra



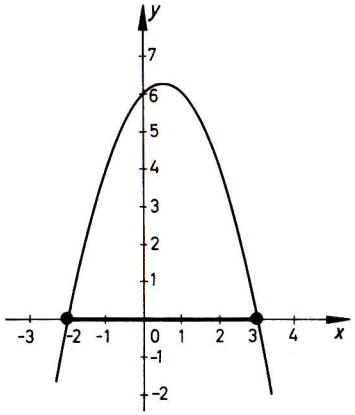
104. ábra



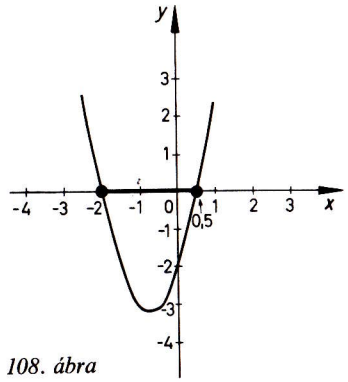
105. ábra



106. ábra



107. ábra



108. ábra

729. $]-\infty; -9[\cup]3; +\infty[$. **730.** $\forall x \in \mathbf{R}$. **731.** $\emptyset$.

732. $]2{,}5; 4[$. **733.** $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$. **734.** $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$.

735. $\left]-\frac{1}{3}; 2\right[$. **736.** $]-\infty; 0{,}5[\cup]0{,}5; +\infty[$.

737. $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$. **738.** $]-\infty; 6[\cup]6; +\infty[$.

739. $\forall x \in \mathbf{R}$. **740.** $\emptyset$. **741.** $\{6\}$. **742.** $]18; +\infty[$.

743. $]\sqrt{7}; +\infty[$. **744.** $]1; +\infty[$. **745.** $]1; 2[\cup]3; +\infty[$.

746. $]-4; 2[\cup]3; +\infty[$. **747.** $]-\infty; -5[\cup]4; 5[$. **748.** $]1; 3[\cup]3; 5[$.

749. $]-\infty; -2[\cup]0; 6[$. **750.** $]-\infty; -1[\cup]1; 2[\cup]3; +\infty[$.

751. $]-\infty; -2[\cup\left]\frac{1}{4}; 1\right[\cup[4; +\infty[$.

752. $]-\infty; 1[\cup\left]\frac{5}{3}; 2\right[\cup]3; +\infty[$. **753.** $]-2; 1{,}5[\cup]5; +\infty[$.

754. $]-\infty; 1[\cup]2; 3[\cup]4; +\infty[$. **755.** $]2; 3[\cup]5; 8[$.

756. $]-\infty; -3[\cup]-1; +\infty[$. **757.** $]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

758. $\left]1; \frac{8}{3}\right[$. **759.** $\{-6\}$. **760.** $\{-4\}$. **761.** $\{2\}$.

762. $\{2\}$. **763.** $\left]\frac{1}{3}; 1{,}5\right[\cup]1{,}5; 4[$, nem.

764. $]-\infty; 1{,}4[\cup]1{,}4; 2[\cup]3; 5[\cup]8; +\infty[$, igen. **765.** $\{2\}$.

766. $p < -7{,}2$. **767.** $\left]\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ **768.** $\frac{4}{15}$.

770. $]-1; 2[$. **771.** $p > \frac{9}{4}$. **772.** $p = -\frac{1}{3}$.

773. $]-\infty; -3[\cup\left]1; \frac{3}{2}\right[$. **774.** $p < 0$.

775. $]-\infty; -1[\cup\left]-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right[$. **776.** $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$.

777. $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$. **778.** $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2}; -1\right[\cup\left]\frac{5}{3}; 3\right[$.

779. $]-\infty;\ -2{,}297[\cup]-0{,}435;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. **780.** $-|a|<x<|a|$.

781. $x<-\frac{1}{a},\ x>\frac{1}{a}$. **782.** $-(2a+3b)<x<2a+3b$.

783. $]-\sqrt{a^2+ab+b^2};\ \sqrt{a^2+ab+b^2}[$ **784.** $\left]0;\ \frac{a}{2}\right[$.

785. $\left]\frac{b}{a};\ b\right[\cup]a;\ +\infty[$. **786.** $]-1;\ 5[$.

787. $\left]\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right[$.

788. $\left]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{41}}{2}\right[\cup]-1;\ 2[\cup\left]\frac{1+\sqrt{41}}{2};\ +\infty\right[$.

789. $]-3;\ 4[$. **790.** $]-3;\ -2[\cup]2;\ 3[$. **791.** $]-1;\ 2[\cup]3;\ 6[$.

792. $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]5;\ +\infty[$. **793.** $]-\infty;\ +\infty[$. **794.** $]1;\ 3[$.

795. $]2;\ 5[$. **796.** $]1-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2}[$. **797.** $]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$.

798. $]-\infty;\ 2\sqrt{2}[\cup]2+2\sqrt{3};\ +\infty[$.

799. $\left]-\infty;\ \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right[\cup\left]\frac{5+\sqrt{57}}{2};\ +\infty\right[$.

800. $]-\infty;\ -5-\sqrt{19}]\cup[-2+\sqrt{2};\ +\infty[$. **801.** $]1;\ 3[$.

802. $]-7;\ -2[\cup]3;\ 4[$. **803.** $]-\infty;\ -1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2};\ +\infty[$.

804. $]-\infty;\ 1[$. **805.** $\emptyset$. **806.** $]-7;\ -4[\cup]-4;\ 1[$.

807. $]-\infty;\ 3[$. **808.** $\left[\frac{3}{2};\ 2\right[\cup]2;\ 3[$. **809.** $]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ +\infty[$.

810. $]-\infty;\ 0[\cup\left]\frac{11}{4};\ +\infty\right[$. **811.** $x=3,\ y=2$.

$\sqrt{\frac{x}{10}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\sqrt{\frac{y}{10}}$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210	1440	1690	1960
y	1960	1690	1440	1210	1000	810	640	490	360	250	160	90	40	10	0

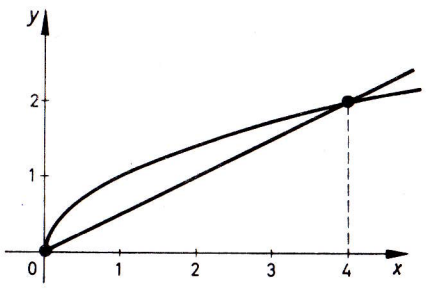
812. $x_1=13,\ y_1=6;\ x_2=67,\ y_2=66$.
813. (496; 494), (168; 162), (104; 94), (64; 46), (56; 34), (48; 18).
814. (0; 0), (1; 0), (2; 1), (2; 2), (1; 2), (0; 1). **815.** Nincs megoldása. **816.** 15 megoldása van. Lásd a táblázatot az előző oldalon!
818. Nincs megoldása. **819.** (24; 8), (54; 2).

821. $x_1=\frac{p-1}{2},\ y_1=\frac{3-p}{2};\ x_2=\frac{1-p}{2},\ y_2=\frac{p-3}{2};\ x_3=\frac{1-p}{2},$ $y_3=\frac{3p-1}{2};\ x_4=\frac{p-1}{2},\ y_4=\frac{1-3p}{2}$, ahol $p\neq 2$. **822.** (0; 0), (2; 2). **823.** 41; 43; 45 és $-45;\ -43;\ -41$. **824.** 10; 11; 34; 74; 90; 91. **825.** 53 megoldása van. **826.** Nem oldható meg.
827. 24. **828.** 20 és 25, illetve 30 és 25. **829.** $(-5;\ 10)$, $(-5;\ -10)$, $(-2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$, $(3;\ 2)$, $(3;\ -2)$, $(6;\ 10)$, $(6;\ -10)$.
830. Margit anyja Bárányné. **831.** Nincs. **832.** $x_1=1,\ y_1=2;$ $x_2=2,\ y_2=1$. **833.** $x_1=5;\ y_1=6;\ x_2=-6,\ y_2=-5;\ x_3=-4,$ $y_3=3;\ x_4=-3,\ y_4=4$.

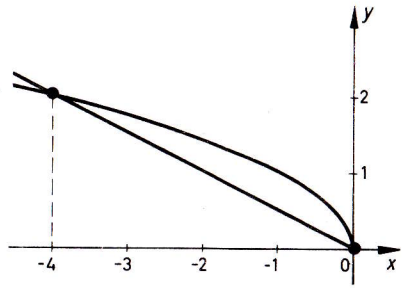
3. Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek

834. $\{0;\ 1\}$. **835.** $\{0\}$. **836.** $\{4\}$. **837.** $\{7\}$.
838. $\{4\}$. **839.** $\{2\}$. **840.** $\{4\}$. **841.** $\{1\}$. **842.** $\{9\}$.
843. $\{3\}$. **844.** $\{4\}$. **845.** $\{2\}$. **846.** $\{12\}$.

847. *a)* $\{0;\ 4\}$; *b)* $\{-4;\ 0\}$;

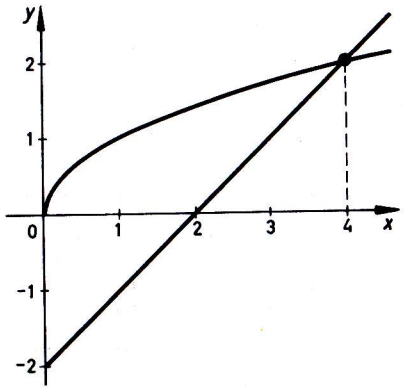


109. ábra



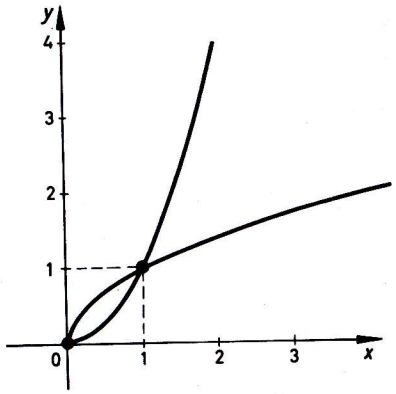
110. ábra

c) {4}.



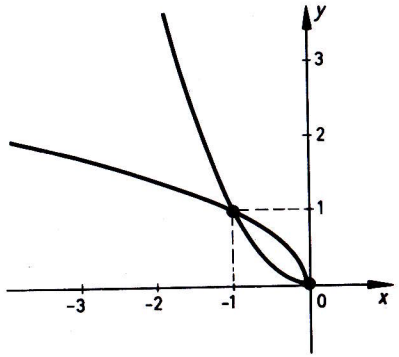
111. ábra

848. *a)* {0; 1};



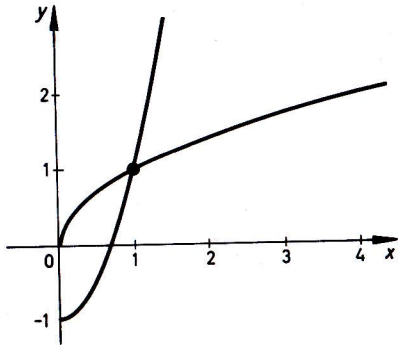
112. ábra

b) {−1; 0};



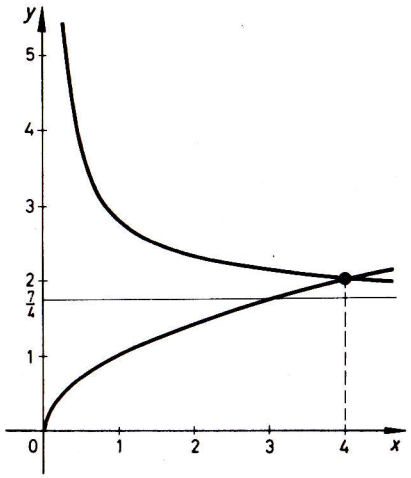
113. ábra

c) {1}.



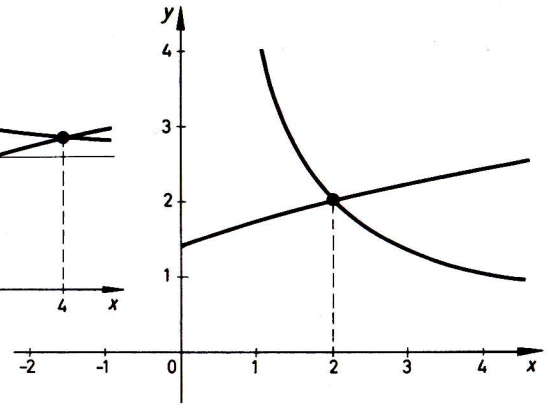
114. ábra

849. *a)* {4};



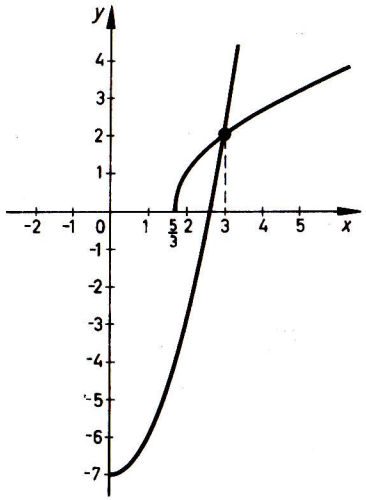
115. ábra

b) {2}.



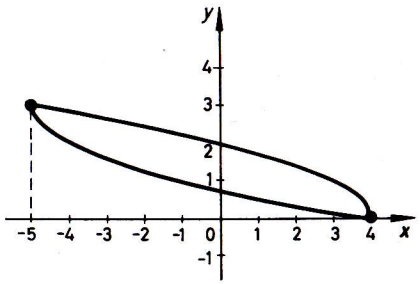
116. ábra

850. *a)* {3};



117. ábra

b) {−5; 4}.



118. ábra

851. *a)* $\{0; 3\}$; *b)* $\left\{\frac{5}{27}\right\}$. **852.** *a)* $\left\{\frac{17}{16}\right\}$; *b)* $\left\{-\frac{31}{2}\right\}$.

853. *a)* $\{1\}$; *b)* $\left\{\frac{123}{2}\right\}$. **854.** $\{-2; 2\}$. **855.** $\{-5; 4\}$.

856. $\{-5; 5\}$. **857.** $\emptyset$. **858.** $\emptyset$. **859.** $\{3\}$. **860.** $\{4\}$.
861. $\{5\}$. **862.** $\{1; 5\}$. **863.** $\{5\}$. **864.** $\{-4\}$. **865.** $\emptyset$.
866. $\emptyset$. **867.** $\{7\}$. **868.** *a)* $\{81\}$; *b)* $\{0\}$. **869.** *a)* $\{12\}$; *b)* $\{-4\}$; *c)* $\{-2; 0; 3\}$. **870.** *a)* $\{3\}$; *b)* $\emptyset$; *c)* $\{-10; 10\}$.
871. *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **872.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **873.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\{16\}$.
874. *a)* $\emptyset$; *b)* $\{-2\}$. **875.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqq x\}$. **876.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\{10\}$. **877.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **878.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$.

879. *a)* $\emptyset$; *b)* $\{4\}$. **880.** *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **881.** $\left\{\frac{6+\sqrt{23}}{2}\right\}$.

882. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **883.** $\{0\}$. **884.** $\{7; 8\}$. **885.** $\{12\}$. **886.** $\{1\}$.

887. $\left\{-\frac{8}{3}; 1\right\}$. **888.** $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **889.** $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

890. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **891.** $\{3\}$. **892.** $\emptyset$. **893.** $\{5; 6\}$.

894. $\{1\}$. **895.** $\{2\}$. **896.** $\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right\}$. **897.** $\{12\}$.

898. $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$. **899.** $\left\{-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$. **900.** $\{1\}$.

901. $\emptyset$. **902.** $\{-4; 1\}$. **903.** $\{-0{,}25; 1\}$. **904.** $[0; 3]$.
905. $[-1; 0]$. **906.** $[2; 11]$. **907.** $[5; 10]$. **908.** $\{1; 3\}$.
909. $\emptyset$. **910.** $\{-3; -1\}$. **911.** $[3{,}5; 7]$. **912.** $\{15\}$.
913. $\{2\}$. **914.** $\{5\}$. **915.** $\{4\}$. **916.** $\{-2{,}5; 2{,}5\}$.

917. $\{1; 4\}$. **918.** $\left\{-\frac{141}{8}; \frac{1}{2}; 3\right\}$. **919.** $\{-1{,}5; 1\}$.

920. $\{16\}$. **921.** $\left\{-343; 91\frac{1}{8}\right\}$. **922.** $\{-5; 5\}$.

923. $\left\{1; \sqrt[3]{4}\right\}$. **924.** $\{1; 4\}$. **925.** $\{0; 1\}$.

926. $\{-2; 2\}$. **927.** $\{-109; 80\}$. **928.** $\left\{-\frac{5}{511}; 2\right\}$.

929. $\{1\}$. **930.** $\{1; 1{,}5; 2\}$. **931.** $\{-24; 2\}$. **932.** $\{-7; 7\}$.

933. $\{-1; 1\}$. **934.** $a\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **935.** $\emptyset$. **936.** $2|a|$.

937. $\pm\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}$; $b>0$ és $2a>b$, vagy $b<0$ és $2a<b$. **938.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

939. $]-\infty; 0[$, ha $a=0$; $\frac{4}{3}|a|$, ha $a \neq 0$.

940. $\left\{\frac{1}{2}-a-\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}; \frac{1}{2}-a+\sqrt{a^2-a+\frac{3}{16}}\right\}$, $0 \leqq a \leqq \frac{1}{4}$;

$\left\{-\frac{1}{2}-a-\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}; -\frac{1}{2}-a+\sqrt{a^2-a-\frac{13}{16}}\right\}$, ha

$a \leqq \frac{-\sqrt{17}-2}{4}$, vagy $a \geqq \frac{\sqrt{17}+2}{4}$. **941.** $\left\{-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2; \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2\right\}$,

$a \in]0; 1]$. **942.** $\left\{0; \frac{63}{65}a\right\}$. **943.** $[0; +\infty[$, ha $a=b=0$;

$\left\{a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\right\}$, ha $b \neq 0$ és $a^2 \geqq \frac{(b-2a)^3}{27b}$. **944.** $[0; +\infty[$.

945. $]27; +\infty[$. **946.** $]-0{,}5; +\infty[$. **947.** $[1; 2[\cup]2; +\infty[$.
948. $[-2; 2[$. **949.** $]4; +\infty[$. **950.** $]0; +\infty[$.

951. $\left[-3; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]$. **952.** $]-\infty; 0[\cup]2; 3]$.

953. $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. **954.** 1. **955.** -4. **956.** 5.
957. 0. **958.** 3. **959.** $\{-1; 0; 1; 2\}$. **960.** 0.
961. $\{4, 5, 6, \ldots\}$. **962.** $]-\infty; 0] \cup]4; +\infty[$. **963.** $]0{,}5; +\infty[$.

964. $]-\infty; -1] \cup [1; 2{,}6[$. **965.** $]-\infty; -2] \cup \left[5; \frac{74}{13}\right[$.

966. $]-\infty; -2] \cup]14; +\infty[$. **967.** $]-\infty; 0]$. **968.** $]0{,}25; 2]$.

969. $\left]\frac{2}{3}; 3\right]$. **970.** $]-\infty; -1-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}-1; +\infty[$.

971. $\left]\frac{-5-3\sqrt{5}}{2};\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}\right[$. **972.** $[8;12[\cup]24;+\infty[$.
973. $]0;3[$. **974.** $]7{,}75;10]$. **975.** $]0{,}5;2]$. **976.** $]0{,}75;2[$.
977. $]-1{,}2;-1]\cup[2;3[$. **978.** $]-\infty;1[$. **979.** $[-0{,}5;0[\cup]0;0{,}5]$.
980. $]-\infty;0{,}75[\cup]4;7[$. **981.** $]-\infty;-10[\cup]1;+\infty[$.
982. $[4;+\infty[$. **983.** $]0{,}5;+\infty[$. **984.** $]-\infty;-2]\cup\left[5;5\frac{9}{13}\right[$.
985. $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$. **986.** $\left]-\frac{\sqrt{2}}{4};0\right[\cup\left]0;\frac{1}{3}\right[$.
987. $\left[\sqrt{2\sqrt{3}-3};1\right[$. **988.** $\left[-1;\sqrt[3]{4}\right[$. **989.** $]-\infty;0[$, ha $p=0$;
$\left]-\infty;\frac{p}{2}\right]$, ha $p<0$; $]-\infty;\sqrt{p+1}-1[$, ha $p>0$.
990. $[0;p]\cup]16p;+\infty[$, $p\geqq 0$. **991.** $[-p;p]$, ha $0<p<2$;
$\left]-\frac{p}{2}\sqrt{4p-p^2};\frac{p}{2}\sqrt{4p-p^2}\right[$, ha $2\leqq p<4$. **992.** $\left[p-p\frac{\sqrt{2}}{2};2p\right]$,
ha $p\geqq 0$; $\left[p+p\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$, ha $p<0$. **993.** $]-\infty;2]$,
ha $p\in]-\infty;-1]$; $\left]2-\frac{1}{(p+1)^2};2\right]$, ha $p\in]-1;+\infty[$.

4. Nevezetes egyenlőtlenségek és alkalmazásuk

994. *Útmutatás:* Az $a>0$ és $a<0$ esetén külön-külön végezzük el a bizonyítást. **995.** *Útmutatás:* Az $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}$ különbséget hozzuk egyszerűbb alakra. **996.** *Útmutatás:* Alakítsuk át ekvivalensen az egyenlőtlenséget! $\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ab}$ négyzetre emelése után vizsgáljuk meg a két oldal különbségét. **997.** *Útmutatás:* Válasszuk szét az $a+b\geqq 0$ és az $a+b<0$ eset tárgyalását.

Megjegyzés: A **996–997.** feladatokban említett geometriai jelentést egy trapéz alapjaival párhuzamos és a szárakat metsző különböző helyzetű egyenes szakaszok adják meg. **998.** *Útmutatás:* Az $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ kifejezést alakítsuk tovább ekvivalensen.
999. *Útmutatás:* Emeljük mindkét oldalt hatodik hatványra, és vizsgáljuk meg a két oldal különbségét. **1000.** *Útmutatás:* Mindkét oldalt emeljük az $n(n+1)$-edik hatványra. A szimmetria miatt az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $\frac{a}{b}=t>1$. Ezzel a helyettesítéssel a $(t^{n+1}+1)^n\geqq(t^{n+1}+t)^n-(t^{n+1}+1)^n$ azonosságot kell bebizonyítani. **1001.** *Útmutatás:* Alkalmazzuk az $(a+b)^n$-re a binominális tételt! **1002.** *Útmutatás:* Legyen $a\geqq b$, ezért $\frac{b}{a}=c\leqq 1$. A $\frac{b}{a}=c$ helyettesítés alkalmazásával, mn-edik hatványra való emeléssel és ekvivalens átalakításokkal lehet bebizonyítani az állítást. **1003.** *Útmutatás:* Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveletet, majd a két oldal különbségét vizsgáljuk tovább. A feladatban szereplő állítás élesíthető. **1004.** *Útmutatás:* A feladat megoldását visszavezethetjük a számtani és a mértani közép közti összefüggésre, figyelembe véve, hogy

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}.$$

1005. *Útmutatás:* Használjuk fel, a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget a^2 és b^2, b^2 és c^2, c^2 és a^2-re vonatkozólag.
1006. *Útmutatás:* Az $a^3+b^3+c^3-3ab$ kifejezést alakítsuk szorzattá, és használjuk fel az **1005.** feladat állítását. **1007.** *Útmutatás:* Vezessük vissza a feladat megoldását az $\frac{a+b}{2}$ és $\frac{c+d}{2}$ számok számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenségre. **1008.** *Útmutatás:* Használjuk fel az **1007.** feladat eredményét. Legyen $d=\frac{a+b+c}{3}$.
1009. *Útmutatás:* A feladatot $n=2^k$-ra teljes indukcióval lehet bebizonyítani. Ha $n=k$, akkor van olyan k, hogy $2^{k-1}<n<2^k$. Az

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat egészítsük ki $(2^k - n)$ darab $\sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ számmal, és erre a 2^k darab számra alkalmazzuk a már bebizonyított egyenlőtlenséget. Utána vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét is. **1010.** *Útmutatás:* Alkalmazzuk az **1009.** feladat eredményét.

1011. *Útmutatás:* Az $\frac{a_1}{a_2} \ldots \frac{a_n}{a_1} = 1$ miatt az **1010.** feladatból következik az állítás. **1012.** Igen. *Útmutatás:* Emeljük mindkét oldalt négyzetre! **1013.** Igen. *Útmutatás:* Az egyenlőtlenség két oldalának a különbségét vizsgáljuk meg. Alakítsuk át a tört számlálóját szorzattá! **1014.** *Útmutatás:* Vegyük figyelembe, hogy $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$, illetve $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. **1015.** Igen. *Útmutatás:* Használjuk fel az **1008.** feladat állítását! **1016.** *Útmutatás:* Az $a + b = c$-ből következik, hogy $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$ és $0 < \frac{b}{c} < 1$, $0 < \frac{a}{c} < 1$. Ezután használjuk fel, hogy ha $x_1 < x_2$ és $0 < d < 1$, akkor $d^{x_1} > d^{x_2}$. **1017.** *Útmutatás:* Először gyöktelenítsük a bal oldalon álló tört nevezőjét, majd utána a két oldal különbségét alakítsuk át ekvivalensen. **1018.** *Útmutatás:* Az állítás azonnal adódik, ha a két oldal különbségét ekvivalensen átalakítjuk. **1019.** *Útmutatás:* Használjuk fel, hogy $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$. **1020.** *Útmutatás:* Használjuk fel az **1009.** feladatban bebizonyított egyenlőtlenséget. Legyen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2^2$, ..., $x_n = 2^{n-1}$. **1021.** *Útmutatás:* $(n!)^2 = (1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n)(1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n) = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \ldots (n \cdot 1)$. Mutassuk meg, hogy $(n - k + 1)\, k \geqq n$. **1022.** *Útmutatás:* A számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával először azt bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$. **1023.** *Útmutatás:* Az **1005.** feladat állítását alkalmazzuk az $\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}$ számokra. **1024.** *Útmutatás:* Az **1008.** feladat állítását alkalmazzuk az $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ számokra. **1025.** *Útmutatás:*

A $0 < a < 1$ egyenlőtlenséget szorozzuk meg az $1 - b > 0$ számmal. **1026.** *Útmutatás:* Használjuk fel, hogy $\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}$ alakban is felírható. **1027–1028.** *Útmutatás:* A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk fel. **1029–1031.** *Útmutatás:* A vektorok közti összeadás és kivonás tulajdonságai alapján könnyen beláthatók az állítások. **1032.** *Útmutatás:* Az állítást négyzetreemeléssel és ekvivalens átalakítások segítségével bizonyíthatjuk be. **1033.** *Útmutatás:* A feladatot esetszétválasztással oldhatjuk meg. **1034.** *Útmutatás:* $(1+x)^n + (1-x)^n$-t a binominális tétel felhasználásával alakítsuk át. **1035.** *Útmutatás:* A feladatot négyzetreemeléssel oldhatjuk meg. **1037.** *Útmutatás:* Az állítást az **1036.** feladatban szereplő egyenlőtlenség alkalmazásával bizonyíthatjuk be. **1039–1042.** A bal oldal átalakítható négyzetösszeggé. **1043.** *Útmutatás:* Használjuk fel, hogy $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n}$, illetve $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n-1}$.

1044. *Útmutatás:* Legyen $S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$. Vizsgáljuk meg az $S_{n+1} - S_n$ különbséget. **1045.** *Útmutatás:* Használjuk fel, hogy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. **1046.** *Útmutatás:* A bal oldal értékét alkalmasan növeljük meg! **1047.** *Útmutatás:* A bizonyítást teljes indukcióval is elvégezhetjük. **1048.** *Útmutatás:* Használjuk fel a **994.** feladat állítását. **1050.** Az egyenlő szárú derékszögű háromszögé. **1051.** Az egyenlő szárú derékszögű háromszögé. **1052.** Az átmérő fölé rajzolt egyenlő szárú derékszögű háromszög esetén. **1053.** A négyzeté. **1054.** Csak akkor, ha az 500 Ft-os kerítésből készülő oldal hossza 60 m. **1055.** $\frac{a}{6}$.

1056. $f(x)_{\min} = 2\sqrt{a}$, melyet a függvény az $x = \sqrt{a}$ helyen vesz fel.

1057. A kocka esetén. **1058.** A kockáé. **1059.** $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}, m = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

$V_{max} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$. **1060.** $r = \frac{2R}{3}$, $m = \frac{M}{3}$, $V_{max} = \frac{4R^2\pi M}{27}$.

1061. $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$, $m = \frac{4R}{3}$, $V_{max} = \frac{32R^3\pi}{81}$.

1062. $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $m = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$, $V_{max} = \frac{4\sqrt{3}R^3\pi}{9}$. **1063.** $x = 2y$.

5. Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek

1064. *a)* 3; *b)* 3. **1065.** *a)* 1; *b)* 1. **1066.** *a)* $\frac{7}{5}$; *b)* $\frac{7}{5}$.

1067. *a)* 2,75; *b)* 2,75. **1068.** *a)* $\{-3; 3\}$; *b)* $-\frac{2}{3}$.

1069. *a)* $\frac{8}{7}$; *b)* $\frac{1}{2}$. **1070.** *a)* -1; *b)* 4. **1071.** *a)* -2; *b)* $-\frac{1}{2}$. **1072.** *a)* 2,5; *b)* $-\frac{3}{2}$. **1073.** *a)* $\frac{7}{6}$; *b)* $\frac{1}{3}$.

1074. *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **1075.** *a)* 0; *b)* 0. **1076.** *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* 3.

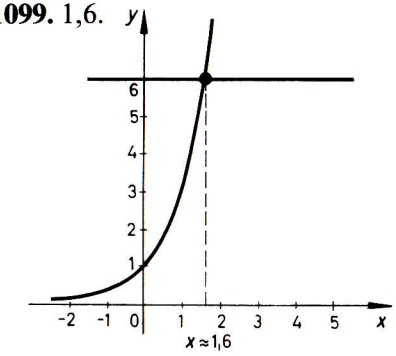
1077. *a)* $-\frac{2}{19}$; *b)* 3. **1078.** *a)* $\{3; 4\}$; *b)* $-\frac{71}{36}$.

1079. *a)* $\{2; 6\}$; *b)* $\frac{3}{4}$. **1080.** *a)* $\frac{7}{12}$; *b)* $\{-2,5; 3\}$.

1081. *a)* $-0,6$; *b)* $\frac{9}{4}$. **1082.** *a)* $-\frac{3}{2}$; *b)* $\frac{1}{8}$. **1083.** *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* 0. **1084.** *a)* 2; *b)* 4. **1085.** *a)* 5; *b)* $\{0; 3\}$.
1086. *a)* 4; *b)* 3. **1087.** *a)* $\emptyset$, *b)* 3. **1088.** *a)* 3; *b)* $\{-1, 2\}$.
1089. *a)* $\{-1; 3\}$; *b)* $\{-1; 3\}$. **1090.** *a)* 9; *b)* -2.
1091. *a)* $\emptyset$; *b)* $\emptyset$. **1092.** *a)* 1; *b)* 2. **1093.** *a)* 1; *b)* -1.
1094. *a)* $\emptyset$; *b)* $\{-2; 2\}$. **1095.** *a)* $\{-1; 7\}$; *b)* 1.

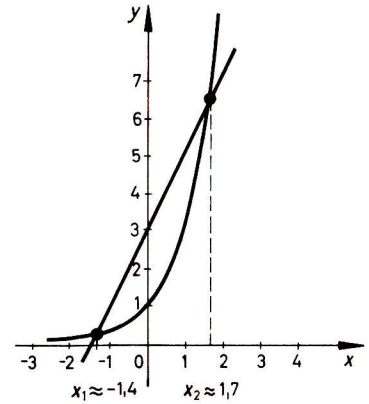
1096. *a)* 10; *b)* $\{1; 2\}$ **1097.** *a)* $\{2; 3\}$; *b)* 0. **1098.** *a)* 9; *b)* $\{-2; 1; 3\}$.

1099. 1,6.



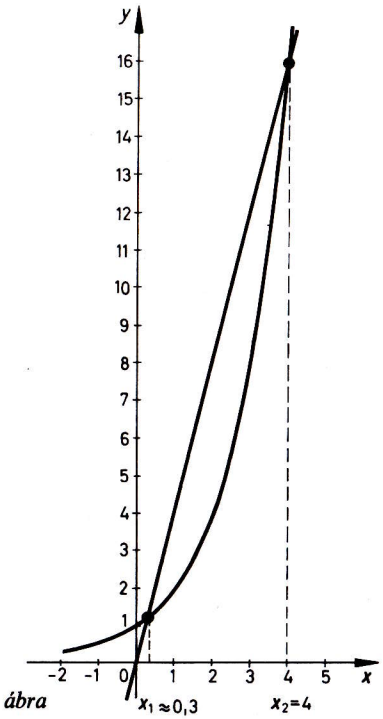
119. ábra

1100. $\{-1,4; 1,7\}$.



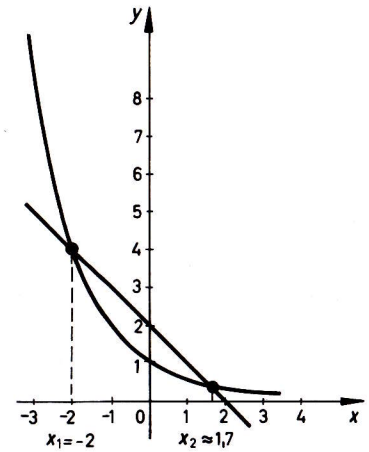
120. ábra

1101. $\{0,3; 4\}$.



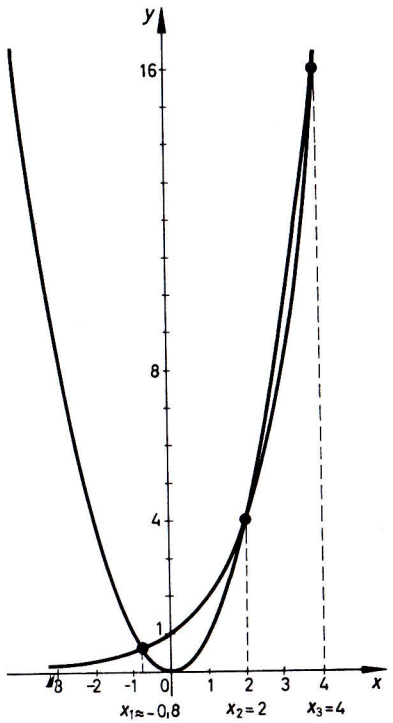
121. ábra

1102. $\{-0,8; 2; 4\}$.



122. ábra

1103. $\{-2;\ 1{,}7\}$.



123. ábra

1104. *a)* $\approx 1{,}89$; *b)* $\approx 1{,}63$. **1105.** *a)* $\approx 2{,}02$; *b)* $\approx 2{,}12$.

1106. *a)* $\approx 0{,}38$; *b)* $\approx -3{,}24$. **1107.** *a)* $\dfrac{\lg 11+3\lg 3}{2\lg 3+\lg 11}\approx 1{,}24$;

b) 28,42. **1108.** *a)* $\dfrac{4\lg 3+\lg 13}{2(\lg 13+\lg 3)}\approx 2{,}37$; *b)* $\lg 6\approx 0{,}78$.

1109. 4. **1110.** -1. **1111.** 3. **1112.** 10. **1113.** 3.
1114. 3. **1115.** 0. **1116.** 0,38 **1117.** $-1{,}75$. **1118.** 9.
1119. 1. **1120.** 1. **1121.** $\{-0{,}5\}$. **1122.** $\{\log_7 5;\ \log_{25} 7\}$.
1123. *a)* 2; *b)* 66. **1124.** *a)* 1; *b)* 2. **1125.** *a)* $\{0;\ \log_7 5\}$;
b) $\{0;\ 3\}$. **1126.** *a)* $\left\{2;\ \log_3 \dfrac{2}{3}\right\}$; *b)* 2. **1127.** *a)* 2; *b)* $\{0;\ 1\}$.
1128. *a)* $\{1;\ 2\}$; *b)* 1. **1129.** *a)* 1; *b)* $\lg 3\approx 0{,}48$.

1130. *a)* $\{-1;\ 1\}$; *b)* $\{0;\ 1\}$. **1131.** *a)* 2; *b)* $\left\{0;\ \dfrac{1}{4}\right\}$. **1132.** *a)* 4;
b) $\{-3;\ 2\}$. **1133.** *a)* $\{0;\ \log_5 3\}$; *b)* $\{-1;\ 8\}$.

1134. *a)* 16; *b)* 9; *c)* $\dfrac{1}{25}$; *d)* 5^{23}. **1135.** *a)* $\dfrac{1}{10}$; *b)* 10;

c) $10\sqrt[3]{10}$; *d)* $\dfrac{1}{100}$. **1136.** *a)* 2; *b)* 0,36; *c)* 269,03; *d)* 0,0241.

1137. *a)* 0,027; *b)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* 1; *d)* $2{,}718\approx e$. **1138.** *a)* 1; *b)* 4;

c) 6; *d)* 0; *e)* $\dfrac{1}{2}$; *f)* 2. **1139.** *a)* 3; *b)* $\dfrac{3}{2}$; *c)* $\dfrac{3}{4}$; *d)* -1; *e)* $-\dfrac{1}{4}$;

f) $-\dfrac{2}{9}$. **1140.** *a)* 21; *b)* 115. **1141.** *a)* 1; *b)* $\{-4;\ 4\}$.

1142. *a)* $\{-9;\ 9\}$; *b)* $\{-16;\ 16\}$. **1143.** *a)* $\left\{3;\ \dfrac{1}{3}\right\}$;

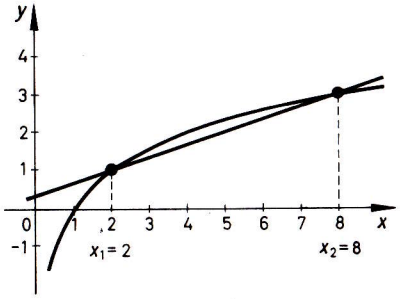
b) $\left\{-3;\ -\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3};\ 3\right\}$. **1144.** *a)* $\{1;\ 3\}$, *b)* $\{-9;\ 11\}$.
1145. *a)* $\{1;\ 5\}$; *b)* $\{-5;\ 7\}$. **1146.** *a)* $\{2;\ 3\}$; *b)* $\{2;\ 3\}$.
1147. *a)* 64; *b)* $\dfrac{1}{\sqrt[16]{2}}$. **1148.** *a)* 10^{10}; *b)* c^{ba^p}. **1149.** *a)* $\dfrac{1}{4}$; *b)* $\dfrac{1}{64}$.

1150. *a)* $2\sqrt{2}$; *b)* $6\sqrt[3]{6}$. **1151.** *a)* 4; *b)* 3. **1152.** *a)* 64; *b)* 6.
1153. *a)* $\{4\}$; *b)* $\{-5;\ 6\}$; *c)* $\{2;\ 3\}$. **1154.** *a)* 8; *b)* $\dfrac{1}{25}$.
1155. *a)* $\dfrac{1}{2}$; *b)* 3. **1156.** *a)* 8; *b)* $\dfrac{1}{5}$. **1157.** *c)* 13; *d)* 8.

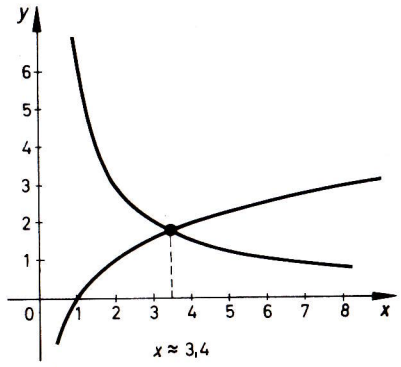
1158. 2. **1159.** 4. **1160.** $\{3;\ 3+\sqrt{2}\}$. **1161.** $\dfrac{5}{8}$. **1162.** -17.

1163. *a)* $2\sqrt{2}$; *b)* $\left\{\dfrac{25}{8};\ \dfrac{9}{2}\right\}$. **1164.** nem, $D_{f_1}\neq D_{f_2}$.
1165. igen, $D_{f_1}=D_{f_2}$, $M_1=M_2=\{2\}$.

1166. *a)* $\{2; 8\}$; *b)* $\{3,4\}$.

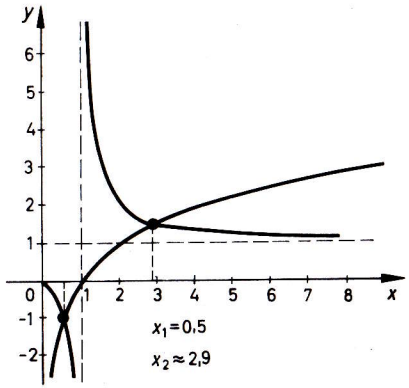


124. ábra



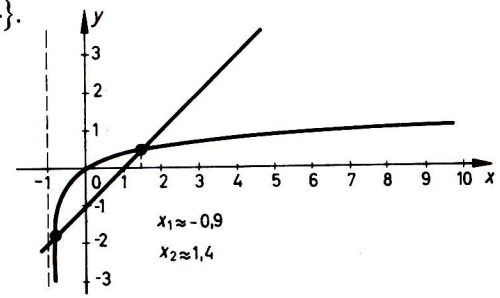
125. ábra

1167. *a)* $\{0{,}5; 2{,}9\}$;



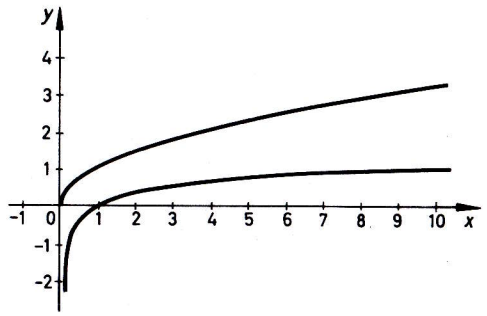
126. ábra

b) $\{-0{,}9; 1{,}4\}$.



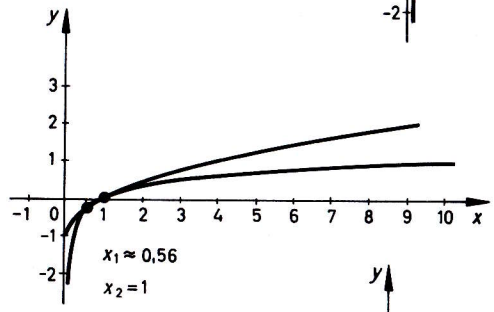
127. ábra

1168. *a)* $\emptyset$;



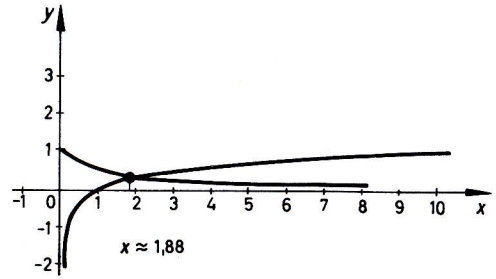
128. ábra

b) $\{0{,}56; 1\}$.



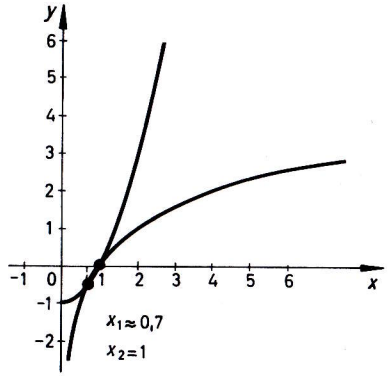
129. ábra

1169. *a)* $x \approx 1{,}8$;



130. ábra

b) $\{0{,}7; 1\}$.



131. ábra

1170. $\emptyset$. **1171.** 5. **1172.** $\emptyset$. **1173.** $\frac{5}{3}$.

1174. $\left\{\frac{28}{9}; 12\right\}$. **1172.** *a), b)* $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. **1173.** *a), b)* $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

1177. *a)* $\sqrt{3}$; *b)* 2. **1178.** *a), b)* $x \in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$. **1179.** *a)* 216; *b)* $\emptyset$ **1180.** *a)* $\left\{\frac{13}{21}; 2\right\}$; *b)* 18. **1181.** *a)* $\{0{,}05; 0{,}2\}$; *b)* 1.

1182. *a)* 5; *b)* $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}$. **1183.** *a)* $\left]0; \frac{1}{9}\right]$; *b)* $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$.

1184. *a)* 64; *b)* $\sqrt[3]{4}$. **1185.** *a)* $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$; *b)* 2^9+1.

1186. *a)* $\{25^{-1}; 25^{\frac{2}{3}}\}$; *b)* 16. **1187.** *a)* 4; *b)* $\{2; 2^4\}$.

1188. *a)* 3; *b)* $\{5^{-2}; 5^{\frac{4}{3}}\}$. **1189.** *a)* 27; *b)* $\left\{\frac{1}{3}; 3^6\right\}$.

1190. *a)* $\left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$; *b)* $\left\{3^{-\frac{1}{2}}; 3^{-\frac{4}{3}}\right\}$. **1191.** *a)* $\left\{4; 2^{-\frac{1}{3}}\right\}$; *b)* 9.

1192. *a)* $\left\{3; 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right\}$; *b)* $\left\{4^{-\frac{1}{3}}; 8\right\}$. **1193.** 2.

1194. 7. **1195.** $\frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0{,}63$. **1196.** $\frac{1}{6}$. **1197.** $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. **1198.** $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **1199.** *a)* 1; *b)* $\{0{,}1; 100\}$.

1200. 1. **1201.** $\{0{,}1; 100\}$. **1202.** $\{0{,}01; 100\}$. **1203.** $\{1; 4\}$.

1204. $\{1; 3\sqrt{3}\}$. **1205.** igen, $\left\{\frac{1}{81}; 9\right\}$. **1206.** 2.

1207. *a)* $\{2; 64\}$; *b)* 0; *c)* $\{1; 100\}$. **1208.** $\{\sqrt[3]{2}; 2\}$.

1209. *a)* 2; *b)* 3. **1210.** $\emptyset$. **1211.** *a)* $\frac{\lg 2}{\lg(\sqrt{2}+1)}$; *b)* $\{-2; 2\}$.

1212. *a)* $\{2^{-\sqrt{3}}; 2^{\sqrt{3}}\}$; *b)* $\{1; 100\}$. **1213.** *a)* $1+\sqrt{3}$; *b)* $\log_3(6+\sqrt{33})-1$. **1214.** $\sqrt{\frac{\lg p}{\lg a}}$. **1215.** 15.

1216. $p^{\frac{ap}{b}}$. **1217.** $\emptyset$, ha $a=0$; $\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$, ha $a>0$; $\frac{2a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$, ha $-\frac{1}{4} \leqq a < 0$. **1218.** $x=a$, $a \in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$.

1219. $x_1=x_2=2$, ha $p=4$, $x_{1,2} = \frac{p\pm\sqrt{p^2-4p}}{2}$, ha $p>4$.

1220. $x=a$, ha $b=2$; $x=\frac{1}{a}$, ha $b=-2$. Két gyök van ha $|b|>2$, $x_1 = a^{\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}}$, $x_2 = a^{\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}}$. **1221.** $\lg a \pm \sqrt{\lg^2 a - b^2}$, ha $a \geqq 10^b$; $\emptyset$ ha $a < 10^b$.

1222. Ha $p \in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$, $\left\{3^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; 3^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}$; $]0; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$ ha $p=1$. **1223.** $\{-1; 1\}$, ha $|p|>1$, $|p| \neq \sqrt{2}$.

1124. *a)* $[4; +\infty[$; *b)* $]-\infty; 3]$. **1225.** *a)* $]\log_3 4; +\infty[$; *b)* $]-2; +\infty[$.
1226. *a)* $[2; +\infty[$; *b)* $[0; +\infty[$. **1227.** *a)* $]0; 0{,}5[$; *b)* $[3; +\infty[$.
1228. *a)* $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; *b)* $]-\infty; 5]$.

1229. *a)* $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$; *b)* $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.

1230. *a)* $]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[$; *b)* $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$.

1231. *a)* $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$; *b)* $]-2; 1[$.
1232. *a)* $]-2; 2[\cup]3; +\infty[$; *b)* $]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$. **1233.** *a)* $]0; 1[$; *b)* $]2; 3[\cup]4; +\infty[$. **1234.** $]-\infty; 2]$. **1235.** igen, $[-1; 1] \subset]-\infty; 2[$. **1236.** $]2^{-\sqrt{5}}; 1]$. **1237.** $]0; 1[\cup]3; +\infty[$.
1238. *a)* $]-\infty; 1[\cup]1{,}5; 2[$; *b)* $]0; 1[\cup]1{,}5; 2[$; *c)* $]-\infty; 0[$.
1239. $]1; +\infty[$. **1240.** $[5; +\infty[$. **1241.** $]2{,}5; +\infty[$.

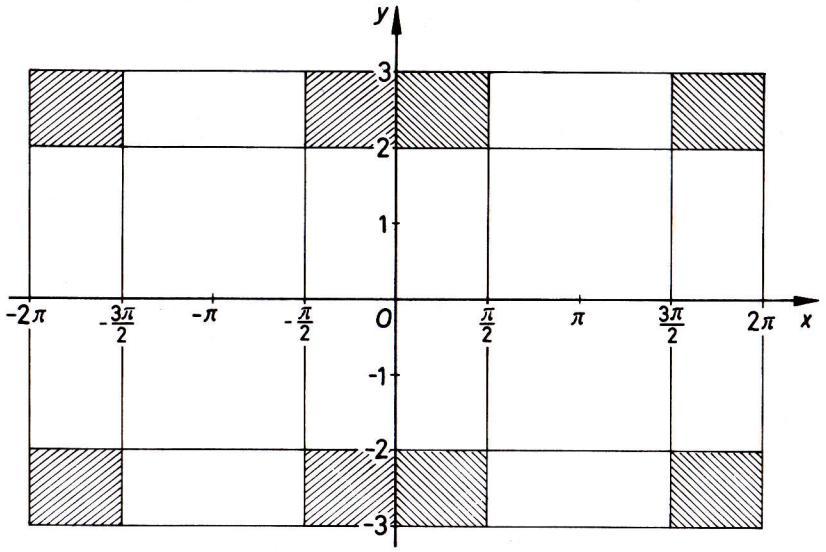
1242. $]2; 2{,}5[$. **1243.** $\left]\frac{13}{5}; +\infty\right[$. **1244.** $\left]\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right[$.

1245. $\left]\frac{1}{3}; 1\right[$. **1246.** $]1{,}5; 2[$. **1247.** $]-\infty; -2[\cup\left]\frac{5}{8}; +\infty\right[$.

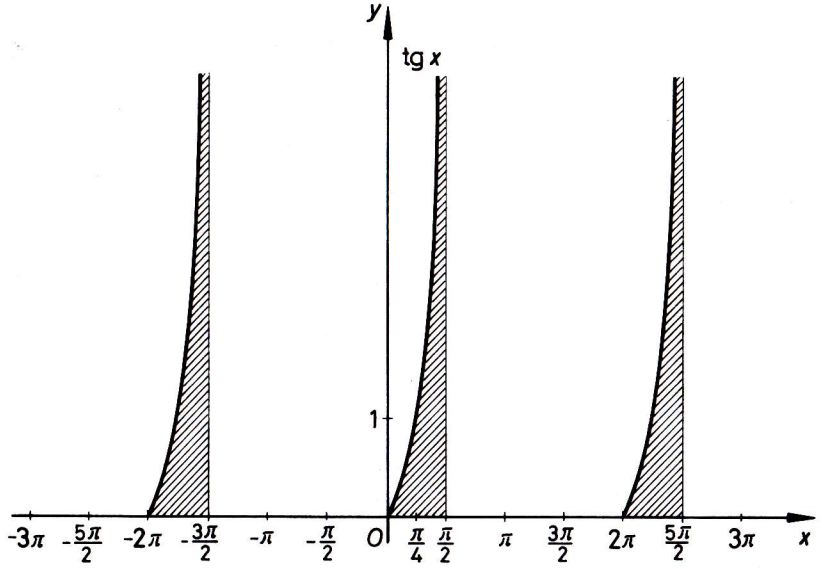
1248. $]-0{,}7; +\infty[$. **1249.** $]0; 2[\cup]3; 4[\cup]6; +\infty[$.

1250. $\left]0; \frac{1}{64}\right[\cup]64; +\infty[$. **1251.** $]-1+\sqrt{3}; 2[$. **1252.** $]0{,}5; 2[$.

1253. $]0;\ 0{,}25[\cup]4;\ +\infty[$. **1254.** $]-2\sqrt{3};\ -2[\cup]2;\ 2\sqrt{3}[$.
1255. $]3;\ 4{,}5[$. **1256.** $[-2;\ -1[\cup]4;\ 6]$. **1257.** $]0;\ 3^{-\log_{1,5}2}[$.
1258. $]1;\ 4[$. **1259.** $]1{,}2;\ 3[$. **1260.** $]0;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$.
1261. $]-1;\ 6[\cup]6{,}5;\ 7[$. **1262.** $]-3;\ -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};\ 3[$.
1263. $\{-1\}$. **1264.** $]0;\ 1[$. **1265.** $]-\infty;\ -1[$.
1266. $]0{,}01;\ 0{,}1[\cup]100;\ +\infty[$. **1267.** $\left]\frac{5-\sqrt{5}}{2};\ 2\right[\cup\left]3;\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[$.
1268. *a)* $\left]\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$; *b)* $\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right[$; *c)* $\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$.
1269. Igen, mert $M=\left]0;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]2;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$. **1270.** Igen, mert $M=\left]\frac{2}{5};\ \frac{1}{2}\right]\cup]1;\ 2]$. **1271.** $]2;\ 5]$. **1272.** $]1;\ +\infty[$.
1273. $\left[-1;\frac{1}{2}\right[\cup[1;2[\cup\left]2;\frac{7}{2}\right[$. **1274.** $]0;\ 3[$. **1275.** Ha $p\in]0;\ 1[$, akkor $M=]p^{\sqrt{2}};\ p^{-\sqrt{2}}[$; ha $p>1$, akkor $M=]0;\ p^{-\sqrt{2}}[\cup]p^{\sqrt{2}};\ +\infty[$.
1276. $\left]-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right[$. **1277.** $2n\pi<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.
1278. Ha $a\leqq 0$, $\left]1;\ \frac{\pi}{2}\right[$; ha $0<a\leqq\sin 1$, $]0;\ \arcsin a[\cup\left]1;\ \frac{\pi}{2}\right[$; ha $\sin 1<a<1$, $]0;\ 1[\cup\left]\arcsin a;\ \frac{\pi}{2}\right[$; ha $a\geqq 1$, akkor $]0;\ 1[$.
1279. $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x\neq 2\pi n\ k$, $n\in\mathbf{Z}$ és $-3<y<-2$, vagy $2<y<3$ *(132. ábra)*.
1280. $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ és $0<y<\operatorname{tg} x$, $k\in\mathbf{Z}$. *(133. ábra)*.



132. ábra



133. ábra

6. Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

1281. *a)* és *b)* igen; *c)* és *d)* igen. **1282.** *a)* és *b)* nem, *c)* és *d)* igen. **1283.** *a)* és *b)* igen, *c)* és *d)* igen. **1284.** *a)* és *b)* nem, *c)* és *d)* igen. **1285.** *a)* és *b)* igen, *c)* és *d)* igen. **1286.** *a)* és *b)* nem, *c)* és *d)* igen. **1287.** *a)* és *b)* igen, *c)* és *d)* igen. **1288.** *a)* és *b)* nem, *c)* és *d)* igen. **1289.** *a)* nem, *b), c), d)* igen. **1290.** pozitív. **1291.** pozitív. **1292.** negatív. **1293.** negatív. **1294.** pozitív. **1295.** igen. **1296.** nem. **1297.** igen. **1298.** igaz. **1299.** hamis. **1300.** igaz. **1301.** igaz. **1302.** hamis. **1303.** igaz.

1304. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ x_2 = 3\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1305. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x_2 = 5\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1306. $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1307.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

1308. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1309.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

1310. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$ **1311.** $x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}.$

1312. $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1313. $x_1 = 441°6' + 2k360°;\ x_2 = 638°54' + 2n360°, k, n \in \mathbf{Z}.$

1314. $x_1 = 39° + k180°;\ x_2 = 159° + n180°, k, n \in \mathbf{Z}.$

1315. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1316.** $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}.$

1317. $x_1 = 15° + k120°;\ x_2 = 105° + n120°, k, n \in \mathbf{Z}.$

1318. $x_1 = \frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3};\ x_2 = \frac{17\pi}{30} + \frac{2n\pi}{3},\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1319. $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi},\ k \in \mathbf{N}.$ **1320.** $\emptyset$. **1321.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,$

$k \in \mathbf{Z}.$ **1322.** $x_1 = \frac{1}{4} + 2k,\ x_2 = \frac{3}{4} + 2n,\ k,\ n \in \mathbf{Z}.$

1323. $x = \pm\sqrt{2k\pi},\ k \in \mathbf{Z}.$ **1328.** Nem. **1329.** Nem.

1330. Igen, $x = 0$. **1341.** $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1342.** $x_1 = k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$ $x_2 = 63{,}43° + n180°, n \in \mathbf{Z}.$ **1343.** $x_1 = k\pi, k \in \mathbf{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2},$ $n \in \mathbf{Z}.$ **1344.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1345.** $x_1 = 71°34' + k180°;$ $x_2 = 63°26' + n180°,\ n, k \in \mathbf{Z}.$ **1346.** $x_1 = 63{,}43° + k\,180°;$ $x_2 = 71{,}56° + n180°, k, n \in \mathbf{Z}.$ **1347.** $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

1348. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1349.** $x_1 = (2k+1)\pi;$ $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$ **1350.** $x_1 = (2k+1)\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi,$ $k, n \in \mathbf{Z}.$ **1351.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1352. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1353.** $x_1 = 14°29' + k360°;$ $x_2 = 165°31' + (2n+1)360°, k, n \in \mathbf{Z}.$ **1354.** $\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

1355. $x_1 = 2j\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ j, k \in \mathbf{Z}.$ **1356.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$ $k \in \mathbf{Z}.$ **1357.** $x_1 = k360°;\ x_2 = 73{,}74° + n360°, k, n \in \mathbf{Z}.$

1358. $x_1 = (2k+1)\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1359. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$ **1360.** $x_1 = 2k\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi;$ $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2h\pi,\ k, n, h \in \mathbf{Z}.$ **1361.** $x = \pm 75{,}52° + k360°, k \in \mathbf{Z}.$

1362. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}.$

1363. $x_1 = 38{,}85° + k60°; x_2 = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{3}, k, n \in \mathbf{Z}$.

1364. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. **1365.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi;$

$x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, \quad k, n, m \in \mathbf{Z}$. **1366.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi;$

$x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, k, n \in \mathbf{Z}$. **1367.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

1368. $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}$. **1369.** *a)* $x_1 = 2k\pi; \quad x_2 = (2n+1)\frac{\pi}{7},$

$k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

1370. $x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{4}; \quad x_2 = (4n+1)\frac{\pi}{8}; k, n \in \mathbf{Z}$.

1371. $x_1 = (8k+1)\frac{\pi}{24}; \quad x_2 = (8n-1)\frac{\pi}{16}; k, n \in \mathbf{Z}$.

1372. $x = k\frac{\pi}{4}, k \neq (4n+2), k, n \in \mathbf{Z}$. **1373.** $\emptyset$.

1374. $\emptyset$. **1375.** $x = \pm\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right), n \in \mathbf{N}$.

1376. $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n, k \in \mathbf{Z}$. **1382.** $\emptyset$.

1383. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **1384.** $x_1 = k\pi, k \in \mathbf{Z};$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. **1385.** $\emptyset$. **1386.** $x_1 = k\pi;$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi; x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2m\pi; x_4 = \frac{\pi}{3} + 2p\pi; x_5 = -\frac{\pi}{3} + 2q\pi,$

$k, m, n, p, q \in \mathbf{Z}$ **1387.** $x = k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$. **1388.** $x_1 = 2k\pi;$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi, k, n \in \mathbf{Z}$. **1389.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

1390. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **1391.** $x = \pm\sqrt{n-2}, n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$.

1392. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. **1393.** $x = 0{,}5 + n, n \in \mathbf{Z}$.

1394. $x = -0{,}5 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. **1395.** $x_1 = k\pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi,$

$k, n \in \mathbf{Z}$. **1396.** $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, \; x_{3,4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \; k, n \in \mathbf{Z}$.

1397. $x = \pm\sqrt{2n}, n \in \mathbf{N}$. **1398.** $x_1 = 2\pi; \; x_2 = \frac{5\pi}{2}$.

1399. $x = 0{,}5$. **1400.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + n\pi; \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad n \in \mathbf{Z}^-,$

$k \in \mathbf{N}^+$. **1401.** Igen, $x = 1$. **1402.** Nem. **1403.** 202.

1404. $x = 0, p \in [-1; 3]$. **1405.** $x = n\pi, p = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, n, k \in \mathbf{Z}$.

1406. Ha $-1 \leqq p < 0, x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{p+1}{3}} + k\pi;$

ha $0 \leqq p \leqq 1, x_1 = \pm\arcsin\sqrt{\frac{p+1}{3}} + n\pi, x_2 = \pm\arcsin\sqrt{1-p} + k\pi;$

ha $1 < p \leqq 2, x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{p+1}{3}} + m\pi, k, n, m \in \mathbf{Z}$.

1407. Ha $\frac{2}{3} \leqq |p| < 2, x_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{3p \pm \sqrt{9p^2-4}}{2} + n\pi$; ha $|p| \geqq 2,$

$x_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{3p \pm \sqrt{9p^2-4}}{2} + m\pi, x_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2} + h\pi,$

ha $|p| < \frac{2}{3}$, $\emptyset$; $n, m, h \in \mathbf{Z}$. **1408.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

1409. $x = \frac{\pi}{4}$. **1410.** $x = n, y = k, k, n \in \mathbf{Z}$.

1412. $2k\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. **1413.** $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

1414. $\emptyset$. **1415.** $\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1416. $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1417. $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **1418.** $\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **1419.** $\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1420. $k\pi < x < (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$. **1421.** $\frac{2n-1}{2}\pi < x < \frac{3n-1}{3}\pi,\ n\in\mathbf{Z}$. **1422.** $-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1423. $-\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **1424.** *a)* $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; *b)* $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1425. *a)* $38{,}17°+n180° < x < 141{,}83°+n180°, n\in\mathbf{Z}$;

b) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x < 9\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. **1426.** $\emptyset$.

1427. $\frac{7\pi}{12}+k\pi < x < \frac{11\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1428. $\frac{\pi}{3}+4k\pi < x < \frac{5\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1429. $\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$.

1430. $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1431. $-\frac{3\pi}{8}+k\pi < x < \frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1432. $-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$.

1433. $-\frac{3\pi}{10}+k\pi < x < \frac{\pi}{5}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1434. *a)* $n\pi-1{,}11 < x < n\pi+1{,}25,\ n\in\mathbf{Z}$;

b) $n\pi+0{,}58 < x < 2{,}896+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

1435. *a)* $2n\pi+0{,}34 \leqq x < 2n\pi+\frac{\pi}{6}, 2n\pi+\frac{4\pi}{3} < x \leqq (2n+1)\pi-0{,}34,\ n\in\mathbf{Z}$; *b)* $(2n+1)\pi-1{,}32 < x < 2n+\frac{2\pi}{3}, 2n\pi+4\frac{\pi}{3} < x < (2n+1)\pi+1{,}32,\ n\in\mathbf{Z}$.

1436. $\pi n < x \leqq \pi n+\frac{\pi}{2} \cup \pi n+\frac{3\pi}{4} \leqq x < (n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

1437. $n\pi-1{,}07 < x < n\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

1438. $\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1439. $-\frac{3\pi}{8}+\pi k \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1440. $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1441. $-\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < 2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi, (2k+1)\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1442. $\left\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

1443. $-\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1444. $\frac{1}{k\pi} > x > \frac{2}{(2k+1)\pi},\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\},\ x > \frac{2}{\pi}$.

1445. $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1446. $\frac{\pi}{4}+2n\pi \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

1447. $1 < x < 1+(2-\log_2\pi)^2$. **1451.** x, y, z egy háromszög szögei, amelyekre érvényes, hogy $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}=\frac{\varrho}{4r}$, ahol ϱ a háromszögbe, r a háromszög köré írt kör sugara.

V. Egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek

1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

1. *a)* (1; 3), (2; 2), (3; 1); *b)* (1; 1); *c)* (1; 13), (2; 11), (3; 9), ..., (7; 1); *d)* Például (5; 2), (6; 4) megoldások. Általánosan, ha $x>4$ és egész, minden megoldás: $(x; 2x-8)$. **2.** A tízforintosok lehetséges száma: 2, 4, 6, 8. **3.** A radírok száma: 2, 5, 8, 11, 14, 17, a ceruzáké az összetartozás sorrendjében: 11, 9, 7, 5, 3, 1. **4.** $\left(0; -\frac{7}{4}\right)$, (1; −1), (−3; −4), (5; 2), (−2; −3,25). **5.** *a)* $2x-y=-2$; *b)* $x+3y=-4$; *c)* $2x-3y=7$; *d)* Nem lineáris egyenlet.

7. Közös pont a (4; 2). **8.** (6; 4). **9.** (43; 25). **10.** $\left(\frac{7}{2}; 9\right)$.

11. *a)* (5; 3); *b)* $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **12.** *a)* (0; 0); *b)* (2,5; 0,5).

13. *a)* $\left(\frac{17}{4}; \frac{35}{4}\right)$; *b)* (0,5; −1,5). **14.** *a)* $(x_0; 2-x_0)$, $x_0 \in \mathbf{R}$; *b)* Nincs gyöke. **15.** *a)* $\left(8\frac{2}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; *b)* (4; 2). **16.** *a)* (6; 4); *b)* $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. **17.** *a)* (5; −2); *b)* (5; −3). **18.** *a)* (2; 0); *b)* (−1,6; 0,4). **19.** *a)* $\left(a_0; \frac{5a_0-15}{6}\right)$, $a_0 \in \mathbf{R}$; *b)* $\left(\frac{7}{19}; \frac{1}{19}\right)$.

20. *a)* $\left(\frac{26}{19}; -\frac{75}{19}\right)$; *b)* $\left(-\frac{50}{19}; \frac{96}{19}\right)$. **21.** *a)* (4; 3); *b)* (2; 1).

22. *a)* $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$; *b)* (3; −2). **23.** *a)* (0; 5); *b)* $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

24. *a)* (3; 2); *b)* Nincs gyöke. **25.** *a)* Nincs gyöke; *b)* (2; 5).

26. *a)* $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; *b)* (59; 369). **27.** Végtelen sok gyöke van: $(x_0; 3x_0-1,5)$. **28.** $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{5}\right)$. **29.** (−0,5; 2,4). **30.** Végtelen sok gyöke van: $\left(x_0; \frac{-96-7x_0}{11}\right)$. **31.** *a)* (5; 8); *b)* (2; −5).

32. *a)* (3; 1); *b)* (1; 3); *c)* (4; 0,5); *d)* (5; 0); *e)* (7; 2); *f)* (0,5; 0,5).

33. *a)* (1; 2); *b)* (1; 3); *c)* (0,5; 2); *d)* (0,5; 0,5); *e)* (4; 4); *f)* (4; 3).

34. Az egyenletek: $y=x+2$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$. A közös pont: (2; 4).

35. Az egyenletek: $y=\frac{3}{2}x+2$; $y=\frac{3}{2}x-6$. Közös pont nincs.

36. *a)* (1; −1); *b)* Nincs megoldás; *c)* Nincs megoldás; *d)* (5; 3).

37. *a)* (4; −1); *b)* (11; 6). **38.** *a)* Nincs gyöke; *b)* (7; 6).

39. *a)* (3; 2); *b)* (7; 5); *c)* (−8; −3); *d)* (5; 9); *e)* $\left(\frac{6}{19}; \frac{170}{19}\right)$; *f)* (1; 2). **40.** *a)* (2; 3); *b)* (0,1; 4). **41.** *a)* (14; 5); *b)* $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

42. *a)* (3; 5); *b)* $\left(\frac{2}{7}; -\frac{1}{3}\right)$. **43.** *a)* (10; −3); *b)* Nincs gyöke.

44. (5; 1). **45.** Végtelen sok gyöke van. **46.** (5; 3).

47. $\left(\frac{7}{8}; -0,4\right)$. **48.** (7; 4). **49.** (0,7; −0,4). **50.** *a)* Nincs racionális megoldás; *b)* Van racionális megoldás: (1; 1). **51.** Ha végtelen sok megoldás van, x vagy y lehet irracionális. **52.** Ha a két egyenes párhuzamos, nincs megoldás. Egybeesőek nem lehetnek (miért?). Egyéb esetben $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$; $y=\frac{cd-af}{bd-ae}$ és látható, hogy mindkét szám irracionális. **53.** Igen, (−3; 5). **54.** $(x_1; 7-x_1)$ vagy $(x_2; x_2-2)$ az összes megoldások, ahol $x_1 \in \mathbf{R}$, és $x_2 \in \mathbf{R}$.

55. (0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5), illetve (0; 6), (1; 5), (3; 3), (4; 2), (5; 1), (6; 0). **56.** Az első és harmadik egyenlet ugyanaz, ezért ezek konjunkciója és diszjunkciója ugyanaz. **57.** (0; 3) vagy (4; 0), vagy $(x_0; x_0-2)$, utóbbinál $x_0 \geqq 2$ és egész szám. **58.** $\left(\frac{12-4y_0}{3}; y_0\right)$, ahol $y_0 \geqq 3$ és hárommal osztható egész szám.

59. *a)* $\left(x_1; \frac{x_1-2}{3}\right)$, $\left(x_2; \frac{5-x_2}{2}\right)$, $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$; *b)* $\left(x_1; \frac{x_1-3}{5}\right)$, $(x_2; 1-3x_2)$, $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$. **60.** $M_1 \cap M_2$, illetve $M_1 \cup M_2$. **61.** *a)* egy gyök van: (4; 2); *b)* nincs gyöke. **62.** *a)* egy gyök van: (1; 3); *b)* egy gyök van: (2; −3). **63.** *a)* végtelen sok gyöke van; *b)* nincs gyöke. **64.** *a)* végtelen sok gyöke van; *b)* nincs gyöke. **65.** *a)* nincs gyöke; *b)* nincs gyöke. **66.** *a)* egy gyök van: (2; 3); *b)* nincs gyöke. **67.** Végtelen sok ilyen számpár van. **68.** *a)* egy megoldás van; ; *b)* végtelen sok megoldás van; *c)* nincs megoldás; *d)* végtelen sok megoldás van. **69.** Például egy megoldás: $x=2$; $y=3$; $z=\frac{16}{3}$. **70.** Végtelen sok megoldás van. Az összes megoldás két paraméterrel fejezhető ki: $x=x_0$; $y=y_0$; $z=\frac{2x_0+5y_0-3}{3}$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 \in \mathbf{R}$. **71.** *a)* $(0; y_0; y_0)$, $y_0 \in \mathbf{R}$; *b)* $\left(\frac{5-y_0}{2}; y_0; 6-2y_0\right)$, $y_0 \in \mathbf{R}$. Mindkét egyenletrendszernek (a fölírt) végtelen sok megoldása van. **72.** $x=x_0$; $y=-\frac{7x_0}{5}$; $z=-\frac{9x_0}{5}$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. Tehát végtelen sok megoldás van, amelyek egy paraméterrel kifejezhetők. **73.** *a)* (1; 4; 3); *b)* (0,6; −0,2; 1). **74.** *a)* (8; 5; 3); *b)* (−1,5; 0,5; 2,4). **75.** *a)* $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; *b)* (1; 3; 5). **76.** *a)* (6; 8; 3); *b)* (−2; −3; −1). **77.** *a)* (11; 13; 17); *b)* $\left(\frac{12-5y_0}{3}; y_0; \frac{-12-y_0}{3}\right)$, ahol $y_0 \in \mathbf{R}$. **78.** *a)* (−5; 0,8; −1,2); *b)* (30; 12; 70). **79.** *a)* (1; 0; −1); *b)* (4; 3; −2). **80.** *a)* (10; 20; 15); *b)* Nincs gyöke. **81.** *a)* (2; 3; 1); *b)* $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **82.** *a)* (−4; −6; 3); *b)* $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; 1\right)$. **83.** *a)* (4; 2; 1); *b)* (0,4; 0,6; −1). **84.** (5; 3; 1). **85.** *a)* $x=1$; $y=2$; $z=3$; $u=4$; *b)* $x=0,3$; $y=-0,2$; $z=-0,8$; $u=0,8$. **86.** *a)*

$x=5$; $y=1$; $z=5$; $u=\frac{1}{3}$; *b)* $x=1$; $y=3$; $z=4$; $u=2$. **87.** *a)* $x=9$; $y=7$; $z=5$; $v=3$; $t=1$; *b)* $x=9$; $y=7$; $z=5$; $u=3$; $v=1$. **88.** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=1$. **89.** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=-1$. **90.** Nincs gyöke. **91.** $x_1=x_2=x_3=1$; $x_4=2$. **92.** Nincs gyöke. **93.** Nincs gyöke. **94.** A **92.** feladatban a harmadik egyenletben 7 helyett 5-öt írunk. A **93.** feladatban a negyedik egyenletben 2 helyett 3-at írunk. **95.** 12 kocsi, 190 tonna. **96.** 8 kocsi, 6 óra. **97.** 1200 db és 800 db, illetve 800 db és 1600 db. **98.** 360 m^3, 200 m^3. **99.** 8 munkás, 10 nap. **100.** 50 db, 27 nap. **101.** 15 pad, 38 tanuló. **102.** Nincs megoldása. **103.** 15 leány, 22 fiú. **104.** 176 fő. **105.** 68 Ft, illetve 44,8 Ft. **106.** 34, illetve 9 éves. **107.** András $62\frac{2}{9}$, Béla $46\frac{2}{3}$ éves. **108.** 28, illetve 21 éves. **109.** 18 m, 12 m. **110.** 8 cm, 26 cm. **111.** 10 fő, 540 Ft. **112.** 4 fiú, 3 lány. **113.** 220 kg-ot, 260 kg-ot. **114.** $\frac{2}{7}$. **115.** 18; 8. **116.** $\frac{8}{13}$. **117.** $\frac{5}{7}$. **118.** A szám: 52. **119.** A szám: 72. **120.** A szám: 51. **121.** A szám: 751. **122.** 45 km/h. **123.** 28 Ft. A körző a drágább. **124.** 250 Ft, 50 Ft. **125.** 600 méternél. **126.** 22,8 kg; 91,2 kg. **127.** 25 cm^3; 45 cm^3. **128.** 23,4%; 46,9%. **129.** 26 °C; 76 °C. **130.** 100 g; 300 g. **131.** 15 liter; 9 liter. **132.** 10 db illetve 15 db. **133.** 2000 Ft, 7000 Ft. **134.** 20 N; 0,3. **135.** $\frac{md}{Mt}$. **136.** 29,8% KCl. **137.** 98. **138.** A két molekulatömeg azonos. **139.** 20% nátrium. **140.** 48 óra; 24 óra. **141.** 2 óra, 4 óra. **142.** 1,5 óra; 2,5 óra. **143.** 30 óra; $\frac{150}{7}$ óra. **144.** 60 km; 12 km/h. **145.** 600 km; 25 km/h; 40 km/h; 50 km/h. **146.** 15 m/s; 10 m/s. **147.** 6 km; 7,2 km/h; 3,6 km/h. **148.** 15 km/h; 12 km/h. **149.** 12 km. **150.** 44 km. **151.** $76\frac{12}{13}$ méter/perc; $230\frac{10}{13}$ méter/perc. **152.** A

találkozások helye A-tól 18,6 km, illetve 13,2 km-re volt. A busz sebessége 36 km/h. **153.** 100 méter/perc; 150 méter/perc. **154.** $\frac{231}{16}$ m/s; $\frac{119}{16}$ m/s. **155.** $157\frac{17}{19}$ lépés, illetve $96\frac{24}{31}$ lépés. **156.** 53 km/h; 75,53 km/h. **157.** A C pont 30,5 km-re, a D pedig 8,7 km-re lesz A-tól. **158.** A három szám: 16; 44; 20. **159.** A három szám: 16; 3; 81. **160.** A töltési idők: 2 óra; 3 óra; 6 óra. A három csapon együtt 1 óra alatt. **161.** 12; 14; 20 egység. **162.** 11; 4; 7; 9 egység. **163.** 7 nap. **164.** 110 km; 91,9 km; 118,1 km. **165.** 400 Ft; 200 Ft; 100 Ft. **166.** *a)* $x = a+b$; $y = a-b$; *b)* $x=2a$; $y=-\frac{7}{5}a$. **167.** *a)* $x = \frac{c-bd}{1-ab}$; $y = \frac{d-ac}{1-ab}$, ha $ab\neq 1$. Ha $ab=1$ és $c=bd$ végtelen sok megoldás van, éspedig $(x_0; d-ax_0)$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. Ha $ab=1$ és $c\neq bd$ (ekkor $d\neq ac$ is) nincs gyök; *b)* $x = c-4d$; $y=4d$. **168.** *a)* $x=a$; $y=b$, ha $a\neq 0$, és $b\neq 0$. Ha $a=0$ és $b\neq 0$, akkor $x=x_0$, $(x_0 \in \mathbf{R})$ és $y=b$. Ha $a\neq 0$ és $b=0$, akkor $x=a$ és $y=y_0$, $(y_0 \in \mathbf{R})$. Ha $a=b=0$, akkor $x=x_0$, $y=y_0$, ahol x_0, $y_0 \in \mathbf{R}$. *b)* $x = a+b$; $y = a-b$, ha $a+b \neq 0$. Ha $a+b = 0$, akkor $x=x_0$; $y = 2a-x_0$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. **169.** *a)* $x = \frac{1+a+a^2}{1+a}$; $y = -\frac{a}{1+a}$, ha $a\neq 1$, $a\neq -1$. Ha $a=1$, akkor $x=x_0$; $y = 1-x_0$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. Ha $a=-1$, nincs megoldás; *b)* $x = a+b-c$; $y = a-b+c$, ha $b+c \neq 0$ és $a\neq 0$. Ha $b+c = 0$ mellett $a+c = 0$ és $a-c = 0$, akkor $a=b=c=0$ és bármely valós számokból álló $(x; y)$ számpár megoldás. Ha $b+c = 0$ és pl. $a-c \neq 0$, akkor $x=x_0$, $(x_0 \in \mathbf{R})$ és $y = \frac{(a+c)x_0+2ac}{a-c}$ a megoldás. (Az $a+c \neq 0$ eset teljesen hasonló.) Ha $a=0$ és $b\neq 0$ vagy $c\neq 0$, akkor $x=x_0$, $(x_0 \in \mathbf{R})$ és $y=-x_0$. Ha $a\neq 0$ és $b=c=0$, akkor $x=x_0$; $y=x_0$, $(x_0 \in \mathbf{R})$. **170.** *a)* $x = -a-b$; $y=-1$, ha $a-b \neq 0$. Ha $a=b$, akkor bármely valós számokból álló $(x; y)$ számpár gyök, feltéve, hogy $y\neq 0$; *b)* $x=3a$; $y=ac$, ha $a\neq 0$ és $c\neq 0$. Ha $a=0$ vagy $c=0$, nincs gyök. **171.** *a)* $x = \frac{a^2}{a-b}$; $y = \frac{b^2}{b-a}$, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$, $|a|\neq|b|$. Ha $a\neq 0$ és

$a=-b$, akkor $x=x_0$; $y = b-\frac{b}{a}x_0$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. Ha $a-b$, a, b bármelyike zérus, nincs gyöke; *b)* $x = \frac{a}{a-b}$; $y = \frac{b}{a+b}$, ha $|a|\neq|b|$. Egyébként nincs gyök. **172.** *a)* $x = \frac{2}{a+b}$; $y = \frac{2}{a-b}$, ha $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$. Egyébként nincs gyöke; *b)* $x = \frac{bc-ad}{bn-dm}$; $y = \frac{bc-ad}{cm-an}$, ha az $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{m}{n}$ hányadosok páronként különbözőek. Nincs gyöke, ha a fenti hányadosok közül bármelyik kettő azonos, a harmadik pedig eltér tőlük. Ha $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$, akkor végtelen sok megoldás van: $x=x_0$; $y = \frac{bx_0}{mx_0-a}$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0\neq 0$ és $b\neq 0$. Mindehhez megkívánjuk, hogy a hányadosoknak legyen értelmük. **173.** *a)* $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{a-b}{a+b}$, ha $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$ és $a\neq 0$. Ha $a=0$ és $b\neq 0$, akkor minden $(x_0; x_0)$ számpár gyök, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$. Ha $a=b=0$, akkor minden valós számokból álló $(x; y)$ számpár gyök. Ez áll fenn akkor is, ha $a+b$ vagy $a-b$ zérus; *b)* $x = \frac{ac}{a^2+b^2}$; $y = \frac{bc}{a^2+b^2}$, ha $a^2+b^2 \neq 0$. Ha $a=b=0$ és $c\neq 0$ nincs gyöke. Ha $a=b=c=0$, bármely valós számokból álló $(x; y)$ számpár gyök. **174.** *a)* $x = \cos(\beta-\alpha)$; $y = \sin(\beta-\alpha)$; *b)* $x = \cos\alpha\cos\beta$; $y = \cos\alpha\sin\beta$. **175.** $a=b=c$. **176.** *a)* $x=a$; $y=2a$; $z=3a$; *b)* $x = \frac{c+b-a}{2}$; $y = \frac{a-b+c}{2}$; $z = \frac{a+b-c}{2}$. **177.** *a)* $x = \frac{a-b+c}{2}$; $y = \frac{a+b-c}{2}$; $z = \frac{-a+b+c}{2}$; *b)* $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a+c}{2}$; $z = \frac{b+c}{2}$. **178.** *a)* $x = \frac{2a+b-c}{14}$; $y = \frac{2b-a+c}{14}$;

$z = \frac{2c+a-b}{14}$; *b)* $x=a$; $y=2a$; $z=-a$. **179.** *a)* $x = \frac{2}{a+b-c}$; $y = \frac{2}{a-b+c}$; $z = \frac{2}{b-a+c}$, ha $a+b \neq c$, $a+c \neq b$ és $b+c \neq a$. Egyébként nincs gyök; *b)* $x=p$; $y=q$; $z=r$, ha $pqr \neq 0$. Ha $pqr=0$, nincs gyöke. **180.** $x_1 = a_1+a_2+a_3+a_4$; $x_2 = a_1+a_2-a_3-a_4$; $x_3 = a_1-a_2+a_3-a_4$; $x_4 = a_1-a_2-a_3+a_4$. **181.** A megoldhatóság feltétele: $abc+a+b+c = 0$. Ekkor a megoldások: $x=x_0$; $y = \frac{b+c-x_0(b+1)}{c-1}$; $z = \frac{bc+c-x_0(bc+1)}{c-1}$, ahol $x_0 \in \mathbf{R}$, és $x \neq 1$; $y \neq 1$; $z \neq 1$. **182.** $x = \frac{11d-9a+b+c}{40}$; $y = \frac{11c-9d+a+b}{40}$; $z = \frac{11b-9c+d+a}{40}$; $v = \frac{11a-9b+c+d}{40}$. **183.** A keresett $(a; b; c)$ számhármasokra $a+b+c = 0$ vagy $a=b=c$. **184.** $a-b$; $2b-a$. A megoldhatóság feltétele: $\frac{4}{3}b < a < 2b$. **185.** $\frac{m(c-b)}{a-b}$; $\frac{m(a-c)}{a-b}$, ha $a<c<b$ vagy $a>c>b$. Ha $a=b=c$ bármely $(x_0; y_0)$ valós számpár megfelel, amelyre $x_0+y_0 = m$. Egyébként nincs megoldás. **186.** $\frac{d(n-b)}{an-bm}$; $\frac{d(a-m)}{an-bm}$, ha $n>b$ és $a>m$, vagy $n<b$ és $a<m$. Ha $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq 1$, nincs megoldás. Ha $a=b=m=n$, akkor végtelen sok megoldás van. **187.** $\frac{abnm(n+m)(a+b)}{(am-bn)^2}$; $\frac{mn(a+b)}{am-bn}$, ha $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$, különben nincs megoldás. **188.** $\frac{ak-bt}{a-b}$; $\frac{at-bk}{a-b}$, ha $a>b$ és $\frac{a}{b} > \frac{t}{k}$ és $\frac{a}{b} > \frac{k}{t}$, vagy $a<b$ és $\frac{a}{b} < \frac{t}{k}$ és $\frac{a}{b} < \frac{k}{t}$. Ha $a=b$ és $k=t$ végtelen sok megoldás van, éspedig az $x_0+y_0 = 2k$ egyenletnek eleget tevő számpárok. (Hallgatólagosan föltettük, hogy x, y, a, b, k, t pozitívak.) Egyéb esetben nincs megoldás.

189. $\frac{100(f-h)-qf}{a(p-q)}$; $\frac{pf-100(f-h)}{b(p-q)}$, ha $p > \frac{100(f-h)}{f} > q$ vagy $p < \frac{100(f-h)}{f} < q$. Ha $p=q$ és $pf = 100(f-h)$ végtelen sok megoldás lesz, egyébként nincs megoldás. **190.** $\frac{d(2t+a)}{2t(t+a)}$; $\frac{da}{2t(t+a)}$. (Az adatokról föltettük, hogy pozitív számok.) **191.** $\frac{a(c+b)}{2bc}$; $\frac{a(b-c)}{2bc}$, ha $b>c$, különben nincs megoldás. **192.** $\frac{(b+n-a)d}{mb+mn+an}$; $\frac{(a+m-b)d}{mb+mn+an}$, ha $b+n > a$ és $a+m > b$, egyébként nincs megoldás. (Föltettük, hogy az adatok és a megoldások pozitív számok.) **193.** $\frac{d(t_1+t_2)}{2t_1t_2}$; $\frac{d(t_2-t_1)}{2t_1t_2}$, ha $t_2>t_1$, egyébként nincs megoldás. (Az adatokról és a megoldásról föltesszük, hogy pozitív számok.) **194.** $3b$. **195.** $\frac{mp}{m-n}$; $\frac{mp}{n+p-m}$, ha $p+n>m>n$, különben nincs megoldás. (Az adatokról föltesszük, hogy pozitív számok.) **196.** $\frac{2ab}{a+b}$; $\frac{2ab}{a-b}$, ha $a>b$, különben nincs megoldás. **197.** $\frac{2abc}{bc+ac+ab}$. **198.** $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$; $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$; $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$; $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$, föltéve, hogy az első három tört nevezője pozitív, különben nincs megoldás. **199.** $\frac{n(2d-c-b)}{2(a-b)}$; $\frac{n(a+c-2d)}{2(a-b)}$; $\frac{n}{2}$, ha $a \neq b$ és $b+c \leqq 2d \leqq a+c$ vagy $b+c \geqq 2d \geqq a+c$. Ha $a=b$, akkor szükségképpen $2d = a+c$, ekkor a megoldás: $x=x_0$; $y = \frac{n}{2} - x_0$; $z = \frac{n}{2}$, ahol $0 \leqq x_0 \leqq \frac{n}{2}$, egyébként x_0 tetszőleges valós szám. Különben nincs megoldás. **200.** $\frac{13n}{8}$; $\frac{7n}{8}$; $\frac{4n}{8}$.

201. *a)* $a = \frac{10}{3}$; *b)* $a = \frac{1}{6}$. **202.** $a = -2$, illetve $a = 0$.

203. *a)* $a = 3\frac{1}{7}$; *b)* $a = 0$. **204.** *a)* $\frac{3}{10} < m < \frac{25}{10}$; *b)* $-13\frac{8}{9} < m < 7\frac{4}{5}$. **205.** *a)* $k < -\frac{5}{8}$; *b)* $3\frac{3}{7} < k < 6$. **206.** *a)* $1 < x < 3$; *b)* Nincs megoldás. **207.** *a)* $5 < x < 27$; *b)* $1 \leqq x < 1{,}5$. **208.** *a)* Nincs megoldás; *b)* $x > 9$. **209.** *a)* $x \geqq 10$; *b)* $x > 0$. **210.** *a)* $-6 < x \leqq 5{,}4$; *b)* $x > \frac{9}{11}$. **211.** *a)* $x < 2{,}6$; *b)* Nincs megoldás. **212.** *a)* $x \geqq 4$ és $x \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = 1$, $x = 2$. **213.** *a)* $x = 3$; 4; 5; 6; *b)* Nincs megoldás. **214.** *a)* $x \leqq -3$ vagy $x \geqq -2$; *b)* $x < -3$ vagy $x > 4$; *c)* $-1 \leqq x \leqq 5$; *d)* $3 < x < 5$. **215.** *a)* $0 < x < 2$; *b)* $x < 0$ vagy $x > 4{,}5$; *c)* $x < 0$ vagy $x \geqq 8$. **216.** *a)* $-7 < x \leqq -\frac{1}{2}$; *b)* $x < -9$ vagy $x > 1{,}5$; *c)* $x < -5$ vagy $x \geqq -\frac{2}{3}$; *d)* $-3 < x < 1{,}75$; *e)* $x < -\frac{1}{2}$ vagy $x \geqq \frac{4}{3}$; *f)* $-1{,}75 < x < \frac{2}{3}$. **217.** *a)* $-22 \leqq x < -7$; *b)* $1{,}75 \leqq x < 5$; *c)* $x < \frac{2}{3}$ vagy $x \geqq \frac{11}{7}$; *d)* $\frac{10}{21} \leqq x < \frac{7}{4}$. **218.** *a)* $x > 3$ vagy $-4 < x < -2$; *b)* $-9 < x < -2$ vagy $x > 5$; *c)* $x < -1$ vagy $1 \leqq x < 2$; *d)* $x < -3$ vagy $\frac{7}{11} \leqq x < 2$. **219.** *a)* $x > 7$; *b)* $6 < x \leqq 18$. **220.** *a)* $x \leqq -26$; *b)* Nincs megoldás. **221.** 24; 35. **222.** 86. **223.** $92{,}5 < x < 102$. **224.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 > -2x_0 + 7$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 > \frac{3x_0 + 5}{4}$. Grafikusan a megoldások egy félsík pontjainak megfelelő számpárok, a félsík határegyenesének pontjai nem számítanak. **225.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \leqq \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \geqq x_0 - \frac{17}{2}$. **226.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 > -\frac{5}{4}x_0 - 2$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < \frac{1}{2}x_0$.

227. *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < \frac{3}{4}x_0 - \frac{3}{4}$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < -4x_0 + 8$.

228. *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \geqq \frac{2}{5}x_0 + \frac{12}{5}$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < \frac{8}{3}x_0 + \frac{3}{4}$.

229. *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < x_0 + \frac{38}{9}$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \leqq -\frac{1}{7}x_0 + \frac{1}{7}$.

230. *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \geqq 2{,}5$; *b)* $x_0 \leqq -\frac{3}{5}$; $y_0 \in \mathbf{R}$. **231.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $2x_0 - 3 < y_0 < 2x_0 + 1$; Grafikusan a megoldások két párhuzamos egyenes közötti sáv pontjaihoz tartozó számpárok, a két egyenes pontjai nélkül. *b)* Nincs megoldás. **232.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 \geqq -\frac{5}{3}x_0 + 5$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $-\frac{5}{3}x_0 + 2 \leqq y_0 < -\frac{5}{3}x_0 + 5$.

233. *a)* Nincs megoldás; *b)* $-\frac{2}{3} \leqq x_0 \leqq \frac{9}{4}$; $y_0 \in \mathbf{R}$.

234. *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $-5 < y_0 \leqq -1$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$; $y_0 < -5$. **235.** *a)* $x_0 > 0$; $\frac{x_0}{2} < y_0 < \frac{5}{2}x_0$; *b)* Ha $x_0 \geqq 0$, akkor $y_0 > \frac{5}{2}x_0$; ha $x_0 < 0$, akkor $y_0 > \frac{1}{2}x_0$. **236.** *a)* $x_0 < 0$; $\frac{5}{2}x_0 < y_0 < \frac{1}{2}x_0$; *b)* Ha $x_0 \leqq 0$, akkor $y_0 \leqq \frac{5}{2}x_0$; ha $x_0 > 0$, akkor $y_0 < \frac{1}{2}x_0$. Az összehasonlítás: A négy egyenlőtlenségrendszer megoldásai a koordinátasík pontjaihoz tartozó számpárok, kivéve a $2y - 5x = 0$ és a $2y - x = 0$ egyenesek pontjait. **237.** *a)* $y_0 \geqq \frac{3}{2}x_0 + 2$, ha $x_0 \geqq -1$; vagy $y_0 > -\frac{1}{2}x_0$, ha $x_0 < -1$; *b)* $\frac{3}{2}x_0 + 2 \leqq y_0 < -\frac{1}{2}x_0$ és $x_0 \leqq -1$. **238.** *a)* $x_0 - 2 < y_0 < -\frac{1}{2}x_0 - 2$ és $x_0 < -2$; *b)* $-2x_0 - 2 < y_0 < \frac{3}{2}x_0 - 6$, ha $\frac{8}{7} < x_0 \leqq \frac{8}{3}$; vagy $-2x_0 - 2 < y_0 < -2$, ha $x_0 \geqq \frac{8}{3}$.

239. *a)* $2<y_0<7$, ha $x_0 \leqq -0{,}5$; vagy $3x_0+\frac{7}{2}<y_0<7$, ha $-0{,}5<x_0<\frac{7}{6}$. *b)* $y_0<x_0+3$ és $2<x_0<5$. **240.** *a)* $0<y_0<-\frac{2}{3}x_0+2$ és $0<x_0<3$; *b)* $0 \leqq y_0 \leqq 2x_0+2$, ha $-1 \leqq x_0 \leqq 0$; vagy $0 \leqq y_0 \leqq -\frac{1}{2}x_0+2$, ha $0 \leqq x_0 \leqq 4$.

241. *a)* $\frac{4}{3}x_0-4 \leqq y_0 \leqq -x_0+3$ és $0 \leqq x_0 \leqq 3$. *b)* $0<y_0<\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}$ és $-1<x_0<3$. **242.** *a)* $0<y_0<x_0+2$, ha $0<x_0 \leqq \frac{8}{5}$; vagy $0<y_0<-\frac{3}{2}x_0+6$, ha $\frac{8}{5}<x_0<4$; *b)* $1<y_0<x_0$, ha $1<x_0 \leqq 4$; vagy $1<y_0<4$, ha $4<x_0<6$; vagy $x_0-5<y_0<4$, ha $6 \leqq x_0<9$.

243. *a)* $-\frac{4}{3}x_0-4 \leqq y_0 \leqq \frac{1}{2}x_0+3$, ha $-3\frac{9}{11} \leqq x_0 \leqq -2\frac{2}{11}$; vagy $\frac{1}{2}x_0 \leqq y_0 \leqq \frac{1}{2}x_0+3$, ha $-2\frac{2}{11}<x_0<\frac{6}{11}$; vagy $\frac{1}{2}x_0 \leqq y_0 \leqq -\frac{4}{3}x_0+4$, ha $\frac{6}{11} \leqq x_0 \leqq 2\frac{2}{11}$; *b)* $-2x_0<y_0<0$, ha $1<x_0<2$; vagy $\frac{1}{2}x_0-5<y_0<0$, ha $2 \leqq x_0<10$. **244.** *a)* $y_0=-x_0+5$ és $x_0 \leqq \frac{5}{2}$; *b)* $y_0=x_0$ és $x_0 \geqq 1{,}2$. **245.** *a)* $y_0=\frac{3}{2}x_0+5$ és $-2<x_0<0$; *b)* $-2<y_0<0$ és $x_0=2$. **246.** *a)* $x_0 \in \mathbf{R}$ és $-x_0+1<y_0<-x_0+2$; *b)* $x_0 \in \mathbf{R}$ és $2x_0-1<y_0<2x_0+1$.

247. A megoldások a $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 0)$ és $(0; -2)$ csúcsokkal meghatározott négyzetlemezre eső rácspontok. **248.** $x_0>0$ és $y_0<0$; vagy $x_0<0$ és $y_0>0$, $(x_0 \in \mathbf{R}; y_0 \in \mathbf{R})$. **249.** $-\infty<x_0<-\frac{a}{3}$ vagy $-\frac{a}{2} \leqq x_0<\infty$. **250.** Ferenc becslésénél kisebb a hiba abszolútértéke. **252.** $\frac{46}{51}; \frac{47}{52}$. **254.** $a=1$; $b=2$ és a háromszög derékszögű. **255.** 95, 95, 10; 96, 92, 12; 97, 89, 14; 98, 86, 16; 99, 83, 18 tehát öt megoldás van. **258.** 969 megoldás van.

259. *a)* $-2<x+2<2$; „és” kötőszó kell; $-4<x_0<0$. *b)* $-1<2x-3<1$; „és” kötőszó kell; $1<x_0<2$. **260.** *a)* $x+2>2$ vagy $x+2<-2$; $x_0>0$ vagy $x_0<-4$; *b)* $2x-3>1$ vagy $2x-3<-1$; $x_0>2$ vagy $x_0<1$. **261.** *a)* $x_0>2$; *b)* $-3<x_0<-1{,}5$; *c)* $-2<x_0<1$; *d)* Nincs megoldás.

262. *a)* $x_0>5$ vagy $x_0<2$; *b)* és *c)* megoldása hasonlóan történhet, mint az *a)* példa. **263.** *a)* $x \geqq 0$ és $y \geqq 0$ esetén $y=x-1$; $x \geqq 0$ és $y<0$ esetén $y=-x+1$, $x<0$ és $y \geqq 0$ esetén $y=-x-1$; $x<0$ és $y \leqq 0$ esetén $y=x+1$. A négy félegyenest ábrázoljuk is; *b)* A vizsgálatot az előző feladathoz hasonlóan végezhetjük. A megoldások: az $(1; 0)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$ és $(0; 1)$ csúcsokkal meghatározott négyzet kerületén levő pontok. **264.** *a)* A **263.** feladat *a)* részében kapott megoldást ábrázoltuk. Tekintsük ezt a grafikont, és ennek 90°-kal való elforgatottját. A két alakzat egyesítése adja a megoldást; *b)* A megoldások: a $(-1; 0)$, $(0; -1)$, $(1; -1)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ és $(-1; 1)$ csúcsokkal meghatározott hatszög kerületén lévő pontok.

265. *a)* Lásd a **263.** *a)* feladatot! Az ott kapott megoldás négy félegyenese a koordinátasíkot három részre osztja. A megoldás most az a síkrész, amelyben az origó is van. A négy félegyenes pontjai nem tartoznak hozzá a megoldáshoz; *b)* Lásd a **263.** *b)* feladatot. A megoldás most a négyzet belsejében lévő pontok halmaza.

266. *a)* Lásd a **264.** *a)* feladatot. A megoldás most a 8 félegyenes meghatározta síkrészek közül az, amelyikben az origó van.
A határoló félegyenesek nem tartoznak hozzá a megoldáshoz; *b)* Lásd a **264.** *b)* feladatot. A megoldások: A hatszög belső pontjai.

267. *a)* $-\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{2}<y_0<-\frac{1}{2}x_0+\frac{3}{2}$ és $x_0 \in \mathbf{R}$; *b)* $x_0-1<y_0<x_0+1$ és $x_0 \in \mathbf{R}$. **268.** Vezessük be a következő jelöléseket:
$A := \{(x; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid -x-3<y<-x+3\}$;
$B := \{(x; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y>-x+1\}$;
$C := \{(x; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y<-x-1\}$. A feladat megoldása:
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

269. *a)* $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right), \left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$; *b)* $(0;-3)$.

270. $x>5$ vagy $-1<x<1$. **271.** *a)* Az $y=x$ és $y=-x$ egyenesek a koordinátasíkot négy síkrészre bontják. A feladat megoldása annak a két síkrésznek az egyesítési halmaza, amely tartalmazza az ordináta tengelyt. A két egyenes pontjai hozzátartoznak a megoldáshoz; *b)* A megoldás: a $(-2;2)$, $(2;2)$ $(2;-2)$ és $(-2;-2)$ pontok meghatározta négyzet belső- és határpontjai. **273.** 221 megoldás van. **274.** $(0;3)$, $(3;0)$, $(-3;0)$, $(0;-3)$. **275.** A megoldások a $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ és $(0;-1)$ csúcsokkal meghatározott négyzetlemez pontjai. A négyzet határpontjai hozzátartoznak a megoldáshoz. **276.** A megoldás a $(2;1)$, $(1;2)$, $(-1;2)$, $(-2;1)$, $(-2;-1)$, $(-1;-2)$, $(1;-2)$, $(2;-1)$ csúcsokkal meghatározott nyolcszög belső pontjai. **277.** Legyen A a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ és $(0;-1)$ csúcsokkal meghatározott négyzeten kívül vannak. Legyen B a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;0)$ és $(0;-2)$ csúcsokkal meghatározott négyzet belsejében vannak. A feladat megoldása: $A\cap B$. **278.** $(-1;1)$, $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;2)$, $(1;1)$, $(1;2)$. **279.** $|x|\leqq 1$ és $|y|\leqq 1$, vagy $|x|=|y|$, ha $|x|>1$. **280.** A második és negyedik negyed pontjai, a koordinátatengelyekre eső pontok nélkül. **281.** *a)* $(2;3)$, $(3;2)$; *b)* $(5;2)$, $(-2;-5)$. **282.** *a)* $(1;2)$, $(-2;-1)$; *b)* $(3;1)$, $(-2;-4)$. **283.** *a)* $(0;1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$; *b)* $(4;3)$, $(4;-3)$, $(-4;3)$, $(-4;-3)$. **284.** *a)* Nincs megoldás; *b)* $(2;4)$.

285. *a)* $(-9;1)$, $\left(\frac{3}{2};-6\right)$; *b)* $(-2;-3)$, $\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$.

286. *a)* $(2;7)$, $(-7;-2)$; *b)* $(1;-1)$, $(-1;1)$. **287.** *a)* $(1;2)$, $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(-1;-2)$; *b)* $(10;6)$, $(-10;-6)$.

288. *a)* $\left(\frac{1+\sqrt{23}}{2};\frac{-1+\sqrt{23}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{-1-\sqrt{23}}{2}\right)$; *b)* $(3;1)$.

289. *a)* $(5;3)$, $(-4;-6)$; *b)* Nincs megoldás. **290.** *a)* $(17;10)$, $(4;-3)$; *b)* $\left(\frac{-24+\sqrt{46}}{10};\frac{-4+\sqrt{46}}{5}\right), \left(\frac{-24-\sqrt{46}}{10};\frac{-4-\sqrt{46}}{5}\right)$.

291. *a)* $(5;1)$, $(-1;-5)$; *b)* $(3;2)$, $(2;3)$. **292.** *a)* $\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{2}};\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{2}};-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)$; *b)* $(4;\sqrt{3})$, $(4;-\sqrt{3})$, $(3;2)$, $(3;-2)$. **293.** *a)* $(6;5)$, $(19{,}5;-22)$; *b)* $(3;4)$, $\left(-10;-\frac{14}{3}\right)$. **294.** *a)* $(4;2)$, $(16;-10)$; *b)* $(8;5)$, $(-1;2)$. **295.** *a)* $(8;3)$, $(6;4)$; *b)* $(8;3)$, $(6;4)$; *c)* $(8;3)$, $(6;4)$, $(-8;-3)$, $(-6;-4)$. **296.** *a)* $(4;-1)$, $(22;17)$; *b)* $(4;-10)$, $\left(\frac{2}{11};\frac{16}{11}\right)$. **297.** *a)* $(1;1)$, $(-3;-2)$; *b)* $(2;3)$, $(0;1)$, $\left(\frac{3}{2};1\right)$. **298.** *a)* $(0;0)$, $\left(-\frac{8}{89};-\frac{5}{89}\right)$; *b)* $(-4;-3)$, $(3;2)$, $(-4;2)$, $(3;-3)$. **299.** *a)* $(10;6)$, $(-10;6)$, $(10;-6)$, $(-10;-6)$; *b)* $(\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{2})$. **300.** *a)* $(5;2)$, $(-5;-2)$; *b)* $(4;5)$, $(5;4)$. **301.** *a)* $(3;1)$, $(-3;-1)$, $(-\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$; *b)* $(3;2)$, $(-3;-2)$, $\left(\frac{25}{\sqrt{113}};\frac{-16}{\sqrt{113}}\right), \left(\frac{-25}{\sqrt{113}};\frac{16}{\sqrt{113}}\right)$.

302. *a)* $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$; *b)* $\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3}\right)$, $(3;5)$, $(-3;-5)$. **303.** *a)* $(5;3)$, $(-5;-3)$, $(3;5)$, $(-3;-5)$; *b)* $(4;3)$, $(-4;-3)$. **304.** *a)* $(1;1)$; *b)* $\left(4\frac{1}{8};-3\frac{7}{8}\right)$, $(3;1)$. **305.** *a)* $\left(13;\frac{29}{4}\right)$; *b)* $(7;3)$ **306.** *a)* $(-3;2;4)$, $(2;-3;4)$; $(3;-4;-2)$, $(-4;3;-2)$; *b)* $(4;3;12)$, $\left(9\frac{2}{3};8\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **307.** *a)* $(12;16;20)$, $(-12;-16;-20)$; *b)* $(-2;3;5)$, $(2;-3;-5)$. **308.** $(0;0;0)$, $\left(\frac{10}{19};\frac{25}{7};\frac{25}{4}\right)$. **309.** *a)* $(9;4)$, $(4;9)$; *b)* $(4;1)$.

310. *a)* (50; 14), (50; −14); *b)* (1; 10), $\left(3\frac{2}{3}; 33\frac{1}{9}\right)$; *c)* (5; 23), (24; 4). **311.** *a)* (2; 1), (−1; −2); *b)* (3; 2), (2; 3). **312.** *a)* (3; 2), (2; 3); *b)* (2; −1), (−1; 2). **313.** *a)* (1; 1); *b)* (1; −2).

314. *a)* (1; 1), $\left(\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}; \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}; \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right)$; *b)* (4; 6), (6; 4). **315.** *a)* Nincs megoldása; *b)* (18; 2). **316.** (5; 6). **317.** $y^2+5y-4=0$ egy ilyen egyenlet. **318.** *a)* (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2), $\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}; \frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}; \frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}+2}{2}; \frac{-\sqrt{6}-2}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{6}-2}{2}; \frac{-\sqrt{6}+2}{2}\right)$; *b)* $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}; \sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)$ $\left(\sqrt[3]{-8\sqrt{5}+16}; \sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}\right)$, $\left(\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}; \sqrt[3]{-8\sqrt{5}+16}\right)$.

319. (1; 10), (10; 1). **320.** $\left(14; \frac{13}{2}\right)$, (−13; −7).

322. (1; 1; 0). **323.** $x = \pm\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$; $y = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$; vagy $x = \pm\sqrt[4]{8}$; $y = \pm\sqrt[4]{2}$. **324.** (2; 2; 2). **325.** (2; 1), (2; −1), (3; −1), (3; 1). **326.** (5; 12), (−5; −12). **327.** (18; 7). **328.** (5; 3), (−3; −5). **329.** (9; 5). **330.** $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

331. (4; 9), (−4; −9). **332.** 6562. **333.** A tört: $\frac{6}{7}$, illetve $\frac{-7}{-6}$. **334.** Pista VI. 20-án született. **335.** 75; 35. **336.** 64.

337. 62. **338.** 32. **339.** 18. **340.** 72. **341.** A két szám: $\frac{1}{2}$; −1. **342.** 264. **343.** 12; 3. **344.** Az oldalak száma: 16; 12. **345.** Az oldalak száma: 17; 3. **346.** Az oldalak száma: 13; 7. **347.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. **348.** 3, illetve 5 méter. **349.** 3,

illetve 2 méter. **350.** 30 km/h, 24 km/h. **351.** 28, illetve 30 sor. **352.** 50 km/h, 60 km/h. **353.** 12 óra. **354.** 32 nap, 25%. **355.** 32 jegy; 12 Ft, illetve 28 jegy; 15 Ft. **356.** 16 cm. **357.** 6 óra, 8 óra, illetve $10\frac{2}{7}$ óra; $5\frac{1}{7}$ óra. **358.** 10 cm; 11 cm.

359. 3 m; 6 m. **360.** 375 cm². **361.** 6 cm, 8 cm és 10 cm. **362.** 12 cm, 16 cm és 20 cm. **363.** 10 cm és 24 cm. **364.** 1,2 m és 0,5 m. **365.** 55 m és 35 m. **366.** $8\frac{2}{3}$ km/h; $\frac{\sqrt{52}}{3}$ km/h.

367. 600 km. **368.** 36 km/h; 30 km/h. **369.** 40 km/h; 60 km/h. **370.** 50 km/h; 40 km/h. **371.** 12 km/h; 18 km/h, az AB úton az emelkedő hossza 24 km. **372.** 6 m; 8 m. **373.** Az eredeti számok: $1; \frac{1}{2}; 4; 2; \sqrt{2}$. **374.** $x=k^2$; $y=0$, vagy $x=0$; $y=k^2$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. **375.** *a)* $x=2a$, $y=-a$; $x=-a$, $y=2a$; *b)* $x=3a$, $y=-a$; $x=-a$, $y=3a$. **376.** *a)* $x=2b$, $y=b$; $x=-b$, $y=-2b$; *b)* $x=a+b$, $y=b$; $x=b$, $y=a+b$. **377.** *a)* $x=m$, $y=\frac{m}{2}$; $x=-m$, $y=-\frac{m}{2}$; $x=\frac{m}{2}$, $y=m$; $x=-\frac{m}{2}$, $y=-m$; *b)* $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{2}$; $x=-\frac{a}{3}$, $y=-\frac{a}{2}$; $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{3}$; $x=-\frac{a}{2}$, $y=-\frac{a}{3}$. **378.** *a)* $x=a$, $y=\frac{a}{3}$; $x=-a$, $y=-\frac{a}{3}$; $x=\frac{a}{3}$, $y=a$; $x=-\frac{a}{3}$, $y=-a$; *b)* $x=a$, $y=2b$; $x=-a$, $y=-2b$; $x=2b$, $y=a$; $x=-2b$, $y=-a$. **379.** *a)* $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$; $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$, ha $a^2 \geqq 4b$; *b)* $x=\frac{a\pm\sqrt{2c-a^2}}{2}$; $y=\frac{a\mp\sqrt{2c-a^2}}{2}$, ha $a^2 \leqq 2c$; *c)* $x=\frac{\pm\sqrt{a+2c}\pm\sqrt{a-2c}}{2}$; $y=\frac{\pm\sqrt{a+2c}\mp\sqrt{a-2c}}{2}$, ha $a \geqq 2|c|$. Az összetartozó x, y értékekre $xy=c$ kell! **380.** *a)* $x=\frac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$;

$y = \frac{1 \mp \sqrt{4a-3}}{2}$, ha $a \geqq \frac{3}{4}$; vagy $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} = y$, ha $a \geqq -\frac{1}{4}$.

b) $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $y = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, $y = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, ha $a \geqq 0$ és $b \geqq 0$ és $a^2+b^2 \neq 0$; $x = -y$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, ha $a = b = 0$. Nincs gyöke, ha $a < 0$ vagy $b < 0$. **381.** *a)* $x = \pm \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$, $y = \pm \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$, ha $a \neq 0$; *b)* $x = \pm a\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$; $y = \pm b\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}$, ha $ab > 0$; $x = \pm |a|\sqrt{\frac{-ab}{a^2+b^2}}$; $y = \pm |b|\sqrt{\frac{-ab}{a^2+b^2}}$, ha $ab < 0$.

382. $x = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$; $y = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$; $z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$, ha $abc > 0$. **383.** *a)* $x = \frac{a}{\pm\sqrt{a+b+c}}$; $y = \frac{b}{\pm\sqrt{a+b+c}}$; $z = \frac{c}{\pm\sqrt{a+b+c}}$, ha $a+b+c > 0$; *b)* $x = \frac{a}{\pm\sqrt{a+b-c}}$; $y = \frac{b}{\pm\sqrt{a+b-c}}$; $z = \frac{c}{\pm\sqrt{a+b-c}}$, ha $a+b-c > 0$. **384.** $x = \frac{2a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}$; $y = \frac{2b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}$; $z = \frac{2c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$, ha $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ és $\frac{1}{c}$ közül semelyik kettő összege nem egyenlő a harmadikkal, továbbá $abc \neq 0$.

385. $x = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $y = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $z = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, ha a, b, c nem egyszerre zérus. Ha $a = b = c = 0$, akkor minden (x_0, y_0, z_0) megoldása $x_0 + y_0 + z_0 = 0$.

386. $x = -1 \pm \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$, $y = -1 \pm \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$,

$z = -1 \pm \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$, ha $(a+1)(b+1)(c+1) > 0$, különben nincs megoldás. **387.** $x : y : z = \pm\sqrt{bc} : (\pm\sqrt{ac} : (\pm\sqrt{ab})$, ahol az előjelet úgy kell megválasztani, hogy vagy mind a három helyen pozitív előjel legyen, vagy egyetlen négyzetgyök előtt.

388. $x = \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2(b^2+c^2-a^2)}}$, és analóg módon kapjuk y és z értékét. A megoldhatóság feltétele: $(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2) > 0$. **389.** $(0; 0; a)$, $(0; a; 0)$, $(a; 0; 0)$. **390.** $\frac{3a^2-b}{2}$. **391.** $\frac{tc+c\sqrt{t^2+4nt}}{2nt}$; $\frac{-tc+c\sqrt{t^2+4nt}}{2nt}$, feltesszük, hogy $c > 0$, $n > 0$, $t > 0$. **392.** Ha $p = 0$; $x = 0$; $y \geqq 0$, $y \in \mathbf{R}$, vagy $x > 0$; $y = 0$, $x \in \mathbf{R}$; Ha $p \neq 0$, akkor $x = y = p$. **393.** Tetszőleges valós a esetén $x = y = 0$ mindig megoldás. $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{a}+\sqrt{2-a})(\sqrt{a}-\sqrt{2(a-1)})$,

$y = \frac{1}{2}a(\sqrt{a}-\sqrt{2-a})(\sqrt{a}-\sqrt{2(a-1)})$, ha $1 \leqq a < 2$. **395.** *a)* $x < 1$; *b)* $x > 4$ vagy $x < -2$. **396.** *a)* $-6 < x < -3$ vagy $-3 < x < 1$; *b)* $2 < x < 3$ vagy $3 < x < 5$. **397.** *a)* $-5 < x < -2$; *b)* $4 < x < 5$ vagy $-3 < x < 2$. **398.** $x \leqq -\frac{2}{3}$ vagy $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3-\sqrt{6}$. **399.** *a)* $x > 7$ vagy $x < -5$, vagy $1 \leqq x \leqq 3$; *b)* $x \leqq -6$ vagy $x \geqq 10$; *c)* $x \leqq -19$ vagy $x > -2$, vagy $-6 \leqq x < -5$; *d)* $x \geqq 1$ vagy $x \leqq -3$. **400.** *a)* $m > 8$; *b)* $-\frac{\sqrt{55}}{2} < m < -2$. **401.** $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < 2$.

402. *a)* $\sqrt{2} < |x| < \sqrt{6}$; *b)* $\sqrt{3{,}5} < |x| < \sqrt{4{,}5}$; *c)* $\sqrt{3{,}99} < |x| < \sqrt{4{,}01}$.

403. *a)* $0 < x < \sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt[3]{0{,}5} < x < \sqrt[3]{1{,}5}$; *c)* $\sqrt[3]{0{,}98} < x < \sqrt[3]{1{,}02}$. **404.** *a)* $x < -2$ vagy $x > 2$, vagy $-1 < x < 1$; *b)* $x < -2$ vagy $x > 2$, vagy $-1 < x < 1$. **405.** *a)* $x = x_0$, $x_0 \in \mathbf{Z}$;

MV.

b) $x=5$. **406.** $-3<x<-\frac{1}{3}$ vagy $1<x<2$. **407.** $x<-2$ vagy $x \geqq 1+\sqrt{2}$, vagy $-2<x \leqq -\sqrt{\frac{5}{3}}$, vagy $1-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}$. **408.** $-1 \leqq x<1$ vagy $x<-\frac{5}{2}$. **411.** $-5<p<1$. **413.** Egy megoldás pl.: $(x+1)(3-x) \geqq 0$. **414.** Egy megoldás pl.: $x^2+x++1>0$. **417.** $x>1$ és $y>1$; $x>1$ és $y<0$; $x<0$ és $y>1$; $x<0$ és $y<0$; $0<x<1$ és $0<y<1$. A feladat megoldása a felsorolt feltételpárok meghatározta halmazok uniója. **418.** *a)* $|x|>1$ és $y<-2$; vagy $|x|<1$ és $y>-2$; *b)* $|x| \leqq 1$ és $|y| \leqq 1$; vagy $|x| \geqq 1$ és $|y| \geqq 1$. **420.** A keresett minimum: $-\frac{5}{\sqrt{8}+2}$. **423.** $(5; -6)$. **424.** $(1; 1; 1)$, $(8; 4; 1)$, $(64; 16; 2)$. **425.** A keresett maximum: $3(1+\sqrt{2})$, a minimum: $3(1-\sqrt{2})$. **426.** $-2 \leqq x+y \leqq 2$ egyenlőtlenségnek eleget tévő $(x; y)$ számpárok. **428.** *a)* $(2; 1)$; *b)* $(4; 2)$, $(-2; -4)$. **429.** *a)* $(10; 8)$; *b)* $(9; 5)$. **430.** *a)* $(5; 1)$, $(7; -1)$, $(-3; 9)$, $(-4; 10)$; *b)* $(5; 0)$, $(3; -4)$. **431.** *a)* $(1{,}66; 1{.}27)$; *b)* $(0{,}6362;\ 0{,}2874)$. **432.** *a)* $(1; 1)$, $(3{,}375; 2{,}25)$; *b)* $x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$; $y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$, ha $p \neq q$; $x=y$ $(y>0)$, ha $p=q$. **433.** *a)* $(1; 1)$, $(2; 4)$, *b)* $(4; 2)$, $(1; 1)$, $(9; -3)$, $(1; -1)$, $(0{,}028; -6{,}028)$. **434.** *a)* $(10; 4)$, $(4; 10)$; *b)* $(10; 100)$, $(100; 10)$. **435.** *a)* $(1; 2)$; *b)* $(1; 0)$. **436.** *a)* $(1{,}59; 1{,}13)$; *b)* $(3{,}6; 2)$. **437.** *a)* $(3; 2)$, $(-3; 2)$; *b)* $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{4}{11}; \frac{8}{11}\right)$. **438.** *a)* $(1; 1)$, $(1; -1)$, $\left(\frac{5}{3}; \sqrt{\frac{125}{27}}\right), \left(\frac{5}{3}; -\sqrt{\frac{125}{27}}\right)$, *b)* $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$. **439.** *a)* $(2; 3)$, $\left(\sqrt[46]{\frac{1}{8^{10}}};\ -4{,}6\right)$; *b)* $(0; 6)$. **440.** $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$. **441.** $(0; 1)$. **443.** *a)* $(10\,000; 10)$; *b)* $\left(10^{\frac{a+b}{2}}; 10^{\frac{a-b}{2}}\right)$.

444. *a)* Nincs gyöke; *b)* $(8; 1)$, $(1; 8)$. **445.** *a)* $(1000; 10)$; *b)* $(13; 11)$. **446.** *a)* $(4; 8)$, $(-4; -8)$; *b)* $(4; 2)$, $(4; -2)$. **447.** *a)* $\left(ab^2; \frac{a}{b^2}\right)$, ha $0<a \neq 1$; $0<b \neq 1$; *b)* $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **448.** *a)* $(4; 2)$, $(1; 1)$; *b)* $\left(\sqrt[5]{a^6b^3}; \sqrt[5]{\frac{a^3}{b^6}}\right)$, ha $0<a \neq 1$; $0<b \neq 1$. **449.** *a)* $(9; 3)$, $(3; 9)$; *b)* $(10^{1+\sqrt{2{,}5}}; 10^{-1+\sqrt{2{,}5}})$, $(10^{1-\sqrt{2{,}5}}; 10^{-1-\sqrt{2{,}5}})$. **450.** *a)* $(3; 3)$; *b)* $x=(a^qb)^{\frac{1}{pq-1}}$; $y=(ab^p)^{\frac{1}{pq-1}}$, ha $a>0$, $b>0$, $a^qb \neq 1$, $ab^p \neq 1$. **451.** *a)* $0<a \neq 1$ és $0<b \neq 1$ esetén $x=\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4-4b^4}}{2}$; $y=\frac{2b^4}{a^2 \pm \sqrt{a^4-4b^4}}$, ha $|a| \geqq |b|\sqrt{2}$; *b)* $(\sqrt{a}; a\sqrt{a})$, ha $0<a \neq 1$. **452.** *a)* $(5; 1)$; *b)* $(9; 3)$, $(3; 9)$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$. **453.** *a)* $(100; 3)$, $(3; 100)$; *b)* $\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right)$. **454.** *a)* Nincs gyöke; *b)* $(100; 10\,000)$. **455.** *a)* $(10; 6)$, $(10; -6)$; *b)* $(-3; -3)$. **456.** *a)* $(1; 9)$, $(4; 1)$; *b)* $(2; 128)$, $(128; 2)$. **457.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3}\right)$. **458.** A megoldáshalmaz $M=\{x \mid 1<x<2 \wedge x \in \mathbf{R}\}$. **459.** $0<x<\frac{1}{9}$ vagy $\frac{1}{9}<x \leqq 10$. **460.** $y>-x$ és $y<x$ és $y<-x+1$ és $y \geqq 0$; vagy $x>y$ és $y>-x+1$ és $y \leqq 0$. **464.** *a)* $x=26{,}57°+k_1\ 180°$, $y=18{,}43°+k_2\ 180°$; $x=-71{,}57°+k_1\ 180°$, $y=116{,}57°+k_2\ 180°$; $k_1+k_2=0$; $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$; *b)* $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $y=\frac{\pi}{6}-2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $y=\frac{\pi}{3}-2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **465.** *a)* $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$; $y=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $x=\pi-k\pi$; $y=\frac{2\pi}{3}-k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$; *b)* $x=45°+k\ 180°$; $y=30°-k\ 180°$, $k \in \mathbf{Z}$. $x=120°+k\ 180°$; $y=-45°-k\ 180°$, $k \in \mathbf{Z}$. **466.** *a)* $x=(k+l)\frac{\pi}{2}$,

$y = (k-l)\frac{\pi}{2}$, $k, l \in \mathbf{Z}$. (Megoldásunk azt jelenti, hogy $\frac{\pi}{2}$-nek bármely két azonos paritású többese egy-egy megoldás.) *b)* $x = 23{,}8° + k\,180°, y = 3{,}2° + l\,180°; x = 86{,}8° + k\,180°, y = 66{,}2° + l\,180°;$ $x = 93{,}2° + k\,180°, \quad y = -66{,}2° + l\,180°;$ $x = 156{,}2° + k\,180°, y = -3{,}2° + l\,180°$, ahol mindegyik megoldásban $k, l \in \mathbf{Z}$, és k, l paritása azonos. **467.** *a)* $x = 19{,}47° + k\,360°$, $y = 14{,}47° + l\,360°$; $x = 19{,}47° + k\,360°, y = 165{,}53° + l\,360°; x = 160{,}53° + k\,360°, y = 14{,}47° + l\,360°; x = 160{,}53° + k\,360°, y = 165{,}53° + l\,360°$, ahol mindegyik megoldásban $k, l \in \mathbf{Z}$. További megoldásokat kapunk, ha x és y szerepét fölcseréljük. *b)* $x = 53{,}13° + k\,360°, \quad y = 70{,}53° + l\,360°; \quad x = 53{,}13° + k\,360°, \quad y = 289{,}47° + l\,360°; \quad x = 306{,}87° + k\,360°, y = 70{,}53° + l\,360°; x = 306{,}87° + k\,360°, \quad y = 289{,}74° + l\,360°$, mindegyik megoldásban $k, l \in \mathbf{Z}$. További négy megoldást kapunk, ha x és y szerepét fölcseréljük. **468.** *a)* $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, y = \frac{\pi}{3} + n\pi, k, n \in \mathbf{Z};$

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad y = \frac{\pi}{3} - k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}.$ **469.** *a)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$

$y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$

$y = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, y = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, ahol mindegyik megoldásban $k, n \in \mathbf{Z}$. Továbbá $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, y = k\pi; x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi,$

$y = k\pi, k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = k\pi; y = \frac{\pi}{2} + n\pi, k, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi;$

$y = k\pi, n \in \mathbf{Z}, k$ páratlan, $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi; y = k\pi, n \in \mathbf{Z}, k$ páros.

470. *a)* $x = 90° + k\,360°; \quad y = 90° + n\,180°, \quad k, \quad n \in \mathbf{Z},$
$x = 270° + k\,360°; y = 90° + n\,180°, k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = 45° + n\,90°;$
$y = k\,180°, n, k \in \mathbf{Z}$. **471.** *a)* $x = \frac{\pi}{6} + m\pi; y = \frac{\pi}{6} + n\pi, m, n \in \mathbf{Z}$

és azonos paritású, $x = \frac{5\pi}{6} + m\pi; y = \frac{5\pi}{6} + n\pi, m, n \in \mathbf{Z}$ és azonos paritású; *b)* $x = 45° + k\,180°, y = -15° + n\,180°;$
$x = 165° + k\,180°, y = -135° + n\,180°; x = 105° + k\,180°,$
$y = 45° + n\,180°; x = 225° + k\,180°, y = -75° + n\,180°.$ Mindegyik megoldásban $k, n \in \mathbf{Z}$ és azonos paritásúak.
472. *a)* $x = 45° + k\,180°; y = n\,180°, k, n \in \mathbf{Z}, x = 63{,}43° + k\,180°;$
$y = 45° + n\,180°, k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi; y = \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbf{Z}, k$

páros; $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi; y = \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbf{Z}, k$ páratlan, $x = 2n\pi;$
$y = (2k+1)\pi, \quad n, k \in \mathbf{Z}.$ **473.** *a)* $x = 75{,}36° + k\,180°,$
$y = -61{,}32° + n\,180°; x = -61{,}32° + k\,180°, y = 75{,}36° + n\,180°,$
mindkét megoldásnál $k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{\pi}{4} + n\pi; y = \frac{\pi}{4} + m\pi, n,$
$m \in \mathbf{Z}$. **474.** *a)* $x = 53{,}1° + k\,180°; y = 97{,}12° + n\,180°, k, n \in \mathbf{Z},$
$x = 33{,}69° + k\,180°; y = 116{,}57° + n\,180°, k, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$

$y = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi; \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$y = \frac{\pi}{2} + n\pi; x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, mindegyik megoldásban

$k, \quad n \in \mathbf{Z}.$ **475.** *a)* $x = 2k\pi; \quad y = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$

$y = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{1}{2}; \quad y = 71{,}6° + k\,180°, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x = 64;$
$y = -26{,}6° + k\,180°, k \in \mathbf{Z}.$ **476.** *a)* $x = y_0 + 2k\pi; y = y_0, y_0 \in \mathbf{R}$
és $k \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = k; \quad y = -k; \quad k \in \mathbf{Z}, \quad x = k + \frac{1}{2}; \quad y = -k - \frac{1}{2},$

$k \in \mathbf{Z}.$ **477.** *a)* $x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,$

$y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, mindkét esetben $m, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,$

$y = \frac{\pi}{6} + 2t\pi$; $x = \frac{4\pi}{6} + 2n\pi$, $y = \frac{4\pi}{6} + 2t\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $y = \frac{\pi}{3} + 2t\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2t\pi$, mindegyik megoldásban $n, t \in \mathbf{Z}$. Továbbá $x = \frac{5\pi}{6} + 2t\pi$; $y = \frac{\pi}{6} + 2s\pi$, $t, s \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2t\pi$; $y = \frac{5\pi}{6} + 2s\pi$, $t, s \in \mathbf{Z}$. **478.** *a)* $x = 8k+6$; $y = \frac{n}{8k+6}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

b) $x = \pm\pi\sqrt{\left(k+\frac{1}{4}\right)\left(2n+\frac{5}{6}\right)}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2n+\frac{5}{6}}{k+\frac{1}{4}}}$, ahol a k, n egészekre $k \geqq 0$ és $n \geqq 0$, vagy $k \leqq -1$ és $n \leqq -1$. Továbbá $x = \pm\pi\sqrt{\left(k+\frac{1}{4}\right)\left(2n+\frac{7}{6}\right)}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2n+\frac{7}{6}}{k+\frac{1}{4}}}$, ahol a k, n egészekre $k \geqq 0$, és $n \geqq 0$, vagy $k \leqq -1$ és $n \leqq -1$.

479. *a)* $x = 26{,}57° + k\,180°$; $y = 26{,}57° + n\,180°, k, n \in \mathbf{Z}$;

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{12} + n\pi$; $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $y = \frac{3\pi}{4} + n\pi$; $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{4} + n\pi$; $x = \frac{15\pi}{12} + k\pi$, $y = \frac{5\pi}{12} + n\pi$, mindegyik megoldásban k és n egyező paritású egészek.

480. *a)* $x = \pi + 2n\pi$, $y = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{3\pi}{4} + n\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + n\pi$, mindkét esetben $k, n \in \mathbf{Z}$. **481.** *a)* $x = m\pi$, $y = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$; *b)* $x = n\pi$, $y = 2m\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, mindkét esetben $m, n \in \mathbf{Z}$.

482. $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $\alpha = \frac{5\pi}{6} + k\pi$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

483. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}$. **484.** $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $y = -\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$; $x = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $y = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, mindkét esetben $m, n \in \mathbf{Z}$.

485. A két egyenletrendszer ekvivalens. **486.** $x = y = -1$ és $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **487.** $x = 1$. **488.** $x + y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

489. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = \frac{2a(1-b)}{(b+1)^2 - a^2}$, ha $a^2 \geqq 4b$, továbbá föl kell tennünk azt is, hogy a szereplő tangensfüggvények mindegyike értelmezve van. **490.** $\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$. **491.** Minden valós t-re.

492. $x = 90° + k\,120°$; $y = 18° + n\,72°, k, n \in \mathbf{Z}$.

493. $150° + k\,360° \leqq x$; $x \leqq 390° + k\,360°$ és $-109{,}5° + n\,360° \leqq y \leqq 109{,}5° + n\,360°$; vagy $30° + k\,360° \leqq x \leqq 150° + k\,360°$ és $109{,}5° + n\,360° \leqq y \leqq 250{,}5° + n\,360°$, mindkét esetben $k, n \in \mathbf{Z}$.

494. A *c)* válasz a helyes.

495. A kifejezés az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, és $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ helyek kivételével, ahol $k, n \in \mathbf{Z}$; minden egyéb valós helyen értelmezhető. Minden 1-nél nem kisebb értéket fölvesz. **496.** $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **497.** A háromszög derékszögű. **501.** A háromszög szabályos. **502.** (2; 3), (3; 4). **503.** Végtelen sok megoldás van. Például (0; 0), (1,5; 0), (1; 0,5). **504.** Az $x + y = 2$ egyenesre illeszkedő megoldás pl. a (0; 2) vagy a (2; 0), sőt e két pont meghatározta szakasz minden pontja. Az $x + y = 5$ egyenesre illeszkedő megoldás nincs. $c_{max} = 4$, a keresett megoldás a (3; 1). **505.** $2x + 3y \leqq 15$; $3x + 2y \leqq 15$; $x \geqq 0$; $y \geqq 0$. $x + y$ maximális a (3; 3) pontban; minimális a (0; 0) pontban. **506.** *a)* 12,37; *b)* 6; *c)* Nincs véges maximum; *d)* $x = 35$; $y = 15$; $z = 65$ megoldásban x maximális.

507. *a)* A félmilliós nyereség elérhető, ha pl. az I. fajtából 5, a II-ból 2,5 vagonnal gyártunk; *b)* Másfél millió Ft-os nyereség nem érhető

el; *c)* A maximális nyereség: 1 040 000 Ft. **508.** 32. **509.** A szendvicsek maximális száma: 40; ebből 25 a sajtos. A maximális bevétel: 63,5 Ft. **510.** A $\left(\frac{2500}{3}; \frac{2000}{3}\right)$ számpárral mindhárom célfüggvény értéke optimum. **511.** A szállítási terv a következő: *A* boltba viszünk az I. tsz-ből 4 tonna, a II. tész-ből 1 tonna burgonyát; *B* boltba a II. tsz-ből 6 tonnát; végül *C*-be az I. tsz-ből 4 tonnát. (A minimális szállítási költség 14 000 Ft.) **512.** Az első fajta takarmányból 4 kg-ot, a másikból 9 kg-ot használva a költség minimális lesz, éspedig 12,5 Ft. **513.** A minimális létszám: 65. **514.** *a)* 750 egység; *b)* 375 db naponta. **515.** Az egyes fajtákból hetenként gyártandó mennyiség: $\frac{30}{11}$; 0; $\frac{70}{11}$; $\frac{140}{11}$. Ezt úgy is érthetjük, hogy 11 hét alatt 30; 0; 70, illetve 140-et kell gyártani az optimumhoz.

VI. Kombinatorika

1. 24. **2.** 6. **3.** 24. **4.** 120. **5.** 40 320. **6.** 6. **7.** 6. **8.** 24. **9.** 216. **10.** 60. **11.** 36. **12.** 40 320. **13.** 10 080. **14.** 2520. **15.** 1440. **16.** 2. **17.** 1. **18.** 2. **19.** 3. **20.** 3. **21.** 6. **22.** 6. **23.** 30. **24.** 3. **25.** 20. **26.** 60. **27.** 10. **28.** 151 200. **29.** 24. **30.** 11. **32.** 32. **33.** 36. **34.** 24. **35.** 60. **36.** 120. **37.** 720. **38.** 2730. **39.** $150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot \ldots \cdot 141$. **40.** 45 239 040. **41.** 17 100 720. **42.** 3125. **43.** 1296. **44.** 759 375. **45.** 9 765 625. **46.** 32. **47.** 64. **48.** 625. **49.** 15 625. **50.** 100. **51.** 162. **52.** 12 500. **53.** 61. **54.** *a)* 652 458 240; *b)* 1 073 741 824. **55.** $n = 11$. **56.** 20. **57.** 36. **58.** 120. **59.** 252. **60.** 64. **61.** 255. **62.** 176. **64.** 21. **65.** 66. **66.** 455. **67.** 210. **68.** 43 949 268. **69.** 3003. **70.** 3003. **71.** 3003. **75.** 2002. **80.** *a)* 108; *b)* 36; *c)* 12. **81.** 170. **82.** 14 oldalú a sokszög. **83.** 10 csapat vett részt és ezek 3 628 800 féle sorrendben végezhettek. **84.** 2371. **85.** 17. **86.** 32. **87.** 16. **88.** 15. **89.** 35. **90.** 126. **91.** 1. **92.** 8. **93.** *a)* 54; *b)* 18. **94.** 54. **95.** 252. **96.** 4651. **97.** 20. **98.** 1107. **99.** *a)* $15!$; *b)* 15^{15}. **100.** *a)* 35 960; *b)* 52 360; *c)* 863 040; *d)* 1 048 576. **101.** *a)* 46 656; *b)* 720. **102.** 18. **103.** 108. **104.** 531 441. **105.** 9000. **106.** 1800. **108.** 2^n darab van. **109.** *a)* 9; *b)* 243; *c)* 648. **110.** *a)* 70; *b)* Nem képezhető. **111.** *a)* 3; *b)* 5. **112.** Nincs megoldás. **113.** 360; 12; 12. **114.** 96. **115.** 324. **116.** 162. **117.** 162. **118.** 505. **119.** 906 192. **120.** *a)* 6900; *b)* 276; *c)* 828. **121.** 236. **122.** 240. **123.** 12. **124.** 9 765 625.

125. 70. **126.** 70. **127.** 35. **128.** 300. **129.** $\binom{n}{2}$.

130. 2300. **131.** $\binom{n}{3}$. **132.** $\binom{66}{3}$. **133.** 495.

134. $\binom{n}{4}$. **135.** 1800. **136.** 246. **137.** 4320. **138.** 2880.
139. 30 240. **140.** 10 080. **141.** 30 240. **142.** 144.
143. 86 400. **144.** $4(n-2)!$. **145.** 480. **146.** $4(n-3)!$.
147. 86 400. **148.** 12. **149.** *a)* 184 756; *b)* 15 504; *c)* 125 970. **150.** 5005. **151.** 360 360. **152.** 168.
153. 840. **154.** 20. **155.** Nincs megoldás. **156.** 5.
157. 15. **158.** 15 000. **159.** *a)* 3876; *b)* 136; *c)* 1.
160. *a)* 45; *b)* 51. **161.** *a)* 87 178 291 200; *b)* 6 227 020 800.
162. *a)* 20 922 789 888 000; *b)* 39 916 800. **163.** *a)* $16! \cdot 10!$; *b)* $11! \cdot 15!$. **164.** *a)* $(n-2)!$; *b)* $(n-k+1)!$.
165. *a)* $(n-4)! \cdot 5!$; *b)* $(n-k+1)! \cdot k!$. **166.** *a)* 120; *b)* 40; *c)* 20; *d)* 60. **167.** *a)* 45; *b)* 39; *c)* 35; *d)* 17. **168.** $33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 24$.
169. 180. **170.** 900. **171.** 60. **172.** 35.
173. 36. **174.** 1512. **175.** $\frac{32!}{(8!)^4}$. **176.** *a)* 4368; *b)* 6624.
177. 6 878 214. **178.** *a)* 9 782 829; *b)* 10 497 825; *c)* 2 629 575. **179.** *a)* 1 000 000; *b)* 468 559. **180.** 6 760 000.
181. *a)* 90; *b)* 225; *c)* 441. **182.** *a)* 360; *b)* 900; *c)* 1296.
183. 2160. **184.** *a)* 5; *b)* 140; *c)* 360; *d)* 120. **185.** 540.
187. *a)* 536 878 650; *b)* 53 038 090 000; *c)* 536 878 650.
188. 8568. **189.** *a)* 2240; *b)* 504; *c)* 154. **190.** 112 896.
191. 1 411 200. **192.** *a)* 1820; *b)* 3360. **193.** *a)* 1820; *b)* 3360. **194.** *a)* 64; *b)* 1024. **195.** *a)* 16; *b)* 64. **196.** 45.
197. 10, illetve 13 tanuló indult. **198.** 90. **199.** *a)* 96; *b)* 282. **200.** *a)* 141; *b)* 294. **201.** 2 325 600. **202.** *a)* 1140; *b)* 495; *c)* 165. **203.** 108. **204.** 27. **205.** *a)* 33 600; *b)* 37 080; *c)* 132 600. **206.** *a)* 120; *b)* 220; *c)* 210.
207. 64. **208.** 32 768. **209.** 2^n. **210.** 6. **211.** 6, ha n páros. Ha n páratlan, akkor nincs megoldás. **212.** 8. **213.** 8.
214. *a)* 1 036 800; *b)* 518 400; *c)* 300. **215.** 907 200.
216. *a)* $\binom{200}{10} - \left[\binom{180}{10} + \binom{20}{1}\binom{180}{9} + \binom{20}{2}\binom{180}{8} + \binom{20}{3}\binom{180}{7}\right]$; *b)* $\binom{180}{10} + \binom{20}{1}\binom{180}{9} + \binom{20}{2}\binom{180}{8} + \binom{20}{3}\binom{180}{7} + \binom{20}{4}\binom{180}{6}$; *c)* $\binom{20}{2}\binom{180}{8}$.

217. $\binom{150}{40} + \binom{50}{1}\binom{150}{39} + \binom{50}{2}\binom{150}{38} + \ldots + \binom{50}{8}\binom{150}{32}$.
218. $\binom{120}{14}\binom{80}{16} + \binom{120}{13}\binom{80}{17} + \ldots + \binom{120}{1}\binom{80}{29} + \binom{120}{0}\binom{80}{30}$.
219. 4. **220.** *a)* 2; *b)* hegyesszögű háromszög 2; tompaszögű háromszög 0. **221.** 68.
222. $6^{10} - \left[\binom{6}{1} \cdot 5^{10} - \binom{6}{2} \cdot 4^{10} + \binom{6}{3} \cdot 3^{10} - \binom{6}{4} \cdot 2^{10} + \binom{6}{5} \cdot 1^{10}\right]$. Általánosan: $6^n - \left[\binom{6}{1} \cdot 5^n - \binom{6}{2} \cdot 4^n + \binom{6}{3} \cdot 3^n - \binom{6}{4} \cdot 2^n + \binom{6}{5} \cdot 1^n\right]$, ha $n \geqq 6$. **223.** (2; 3; 6), (2; 4; 4), (3; 3; 3) számhármasok permutációi adják az $(x; y; z)$ megoldásokat. **224.** 1 307 674 368 000. **225.** $15! \cdot 15!$.
226. $(15!)^2 \cdot 2^{15}$. **227.** 756 756. **228.** *a)* 6930; *b)* 2142; *c)* 15. **229.** *a)* 15 765 750; *b)* 1 307 674 368 000. **230.** A lehetséges felmenetelek száma rendre: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 és 89.

MVI.

231. *a)* $f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$, ha n páros;

b) $f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$, ha n páratlan.

232. 39 960. **233.** *a)* 7; *b)* 11; *c)* 26; *d)* 71; *e)* 81; *f)* 97.
234. *a)* 1; *b)* 4; *c)* 10; *d)* 22; *e)* 35; *f)* 48. **235.** *a)* 1; *b)* 3; *c)* 4; *d)* 24; *e)* 24; *f)* 41. **236.** *a)* 24; *b)* 96. **237.** *a)* 32; *b)* 64.
238. 29 050. **239.** 299 940. **240.** 2 700 135.
241. 173 609 375. **242.** 5 039 496. **243.** $\frac{40!}{(8!)^5}$.

244. *a)* 987 700; *b)* 35 700; *c)* 425; *d)* 1. **245.** 252; 16 800; 379 200. **246.** *a)* $\binom{145}{20}\binom{5}{0}$; *b)* $\binom{145}{19}\binom{5}{1}$; *c)* $\binom{145}{16}\binom{5}{4}$; *d)* $\binom{145}{15}\binom{5}{5}$. **247.** *a)* 2 063 130 048; *b)* 438 963 840; *c)* 32 515 840; *d)* 56. **248.** 227,5. **249.** 5,56‰. **250.** 227,1. **251.** $\frac{100}{18}$‰. **252.** 8 bástyát 40 320-féleképpen. **253.** Nem. **254.** Nincs megoldás. **255.** Nem. **256.** 35. **257.** 141. **258.** 266. **259.** 161. **260.** Nem. **261.** Nem. **262.** *a)* 9; *b)* 27; *c)* 81; *d)* 2187. **263.** 9 **264.** 11. **265.** *a)* 4; *b)* 4; *c)* 12; *d)* 0; *e)* 5; *f)* 45. **266.** 1. **267.** $\frac{n(n-1)}{2}$.

285. *a)* 240; *b)* 24 497 550; *c)* $2\binom{n+2}{3}$; *d)* $3!\binom{n+3}{4}$.

286. *a)* $24\binom{14}{5}$; *b)* $120\binom{15}{6}$; *c)* $4!\binom{n+4}{5}$; *d)* $5!\binom{n+5}{6}$.

VII. Gráfelmélet

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok

1. *a)* Igaz; *b)* Igaz. **3.** *a)* 4; *b)* 5. **4.** Nem. **5.** *a)* Nem; *b)* Nem; *c)* Igen. **6.** *a)* Igen; *b)* Igen; *c)* Igen. **9.** $\binom{n}{4}$. **10.** 54. **11.** 70. **12.** *a)* 4900; *b)* 1810. **13.** $\binom{12}{4}\binom{8}{4}$. **14.** *a)* $34\,650^2$; *b)* $7959 \cdot 10^4$. **15.** *b)* x és y azonos paritású; *c)* 49. **16.** Nem. **17.** Nem. **20.** *a)* 15; *d)* Nem. **22.** 120 illetve 2. **23.** *a)* 1; *b)* 30. Az élek száma 8. **24.** 90 illetve 1. Az élek száma 10. **25.** $2^{\binom{n}{2}}$. **27.** *a)* Nem; *b)* Igen, pl.: *D*. **28.** Igen. **35.** *a)* Lehet; *b)* lehet.

2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfiája. Részgráfok

38. 11. **39.** *a)* 180; *b)* 1. **40.** 12. **41.** 23; 24; 25. **42.** 4 harmadfokú és 1 negyedfokú vagy 2 negyedfokú, 2 harmadfokú és 1 másodfokú. **45.** Nem. **46.** Alkalmazzuk a **36.** feladat állítását! **47.** Alkalmazzuk a **36.** feladat állítását! **48.** Igen. **50.** A gráfnak 45, a komplementerének 21 éle van. **51.** *a)* 4; *b)* 56. **52.** *a)* 4; *b)* 120. **53.** Az első esetben nincs megoldás, a második esetben két megoldás van. **54.** Nincs. **55.** 676, illetve 9. **56.** 1562, illetve 9. **59.** A három család a következő: János, Judit, Emmi; Tamás, Mária, Miska; István, Zsuzsa, András. **60.** Igen. 4 csúcs esetén két 3 hosszúságú út. 5 csúcs esetén a teljes gráf két élfüggetlen, 5–5 hosszú körre bontható. **62.** 6.

63. Nem. **64.** Két megoldás van. **65.** Igen. **66.** Nem.
67. Igen. **68.** Igen. **69.** Nem. **71.** *b)* 4; *c)* 3.

72. $\left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right)$.

3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix

73.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

74.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

75. *a)*
$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ E & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

77. *a)*
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

77. *b)*
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

79. *a)*
$$\begin{array}{c|cccccccc} & A & B & Fr & H & L & M & O & Fi \\ A & . & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ B & 1 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ Fr & 2 & 1 & . & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ H & 2 & 1 & 3 & . & 2 & 2 & 2 & 2 \\ L & 2 & 1 & 2 & 2 & . & 2 & 2 & 1 \\ M & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & . & 3 & 1 \\ O & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & . & 1 \\ Fi & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & . \end{array}.$$

79. *b)* Nem.

81.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) $A+B$ elemei azt jelentik, hogy a szóban forgó városból együttesen hány autóbuszjárat és vasútvonal indul ki. **84.** Mindkét gráf esetén 0–mátrix. **85.** Csak két lényegesen különböző irányítás lehetséges: *a)* Van a gráfban irányított kör; *b)* Nincs. **87.** Két esetet kell vizsgálni: *a)* Van irányított kör a gráfban; *b)* Nincs. **88.** Igen. Csak azt kell elérni, hogy a gráfban ne legyen irányított kör.

4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők

90. Irányított gráfok esetén az $AQB \Rightarrow BQA$ nem helyes. **95.** A gráf utakra és/vagy körökre esik szét, továbbá izolált pontjai is lehetnek. **96.** *b)* Igen; *c)* Nem. **97.** Igen. **98.** Igen. **100.** Nem. **102.** Nincs. **104.** Nem. **105.** 5 csúcs esetén 30; 6 csúcs esetén 160. **106.** $\sum_{k=3}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2}$.

107. $\sum_{k=3}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2k}$. **108.** Igen. **113.** Igen.

119. A gráf egy 6 csúcsú teljes gráfból és egy izolált pontból áll. **120.** 8 csúcs esetén két teljes 4-gráf; 9 csúcs esetén 4 megoldás van. **121.** *a)* Igen; *b)* Igen. **122.** Nem lehet megjelöletlen név. **123.** Nem igaz, hogy bármely csúcsból bármely másikba vezet 2 hosszúságú út. **125.** Igaz. **126.** Igaz. **130.** 17. **131.** $n-k$. **132.** 16; 125; 1296. **136.** Igaz. **139.** Minden csúcs fokszáma legfeljebb 3. **144.** A gráf komponensei lehetnek: izolált pontok, utak, körök. **146.** *a)* 31; *b)* 30; *c)* 435;

d) $2^{n+1}-1$; $2^{n+1}-2$; $2^{2n+1}-2^{n+2}-2^n+3$. **147.** 21. **148.** 3. **149.** 10. **150.** Az élek száma 8. A fák 2, 2, 2, 6; 2, 2, 3, 5; 2, 2, 4, 4; 2, 3, 3, 4 vagy 3, 3, 3, 3 szögpontúak lehetnek. **151.** 14. **152.** 6, illetve 10 megoldása van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg. **153.** 126. **154.** *a)* A fokszám 2 és 18 között változhat; *b)* 3; *c)* 9. **155.** 3. **156.** *a)* Igen; *b)* Nem; *c)* Igen, illetve nem. **157.** 3. **158.** 684. **160.** *a)* $**+abc$; $ab+c*$; *b)* $+*acb$; $ac*b+$; *c)* $-++*+bcdae$; $abc+d*+e-$; *d)* $-+*ac*b+def$; $ac*bde+*+f-$. **161.** $+*+*+*+*+*axbxcxdxe$; $ax*b+x*c+$ $+x*d+x*e+$. **162.** $/\pm-0b\uparrow-*bb**4ac0.5*2a;$ $0b-bb*4a*c*-0.5\uparrow\pm 2a*/$, ha $a\neq 0$ **166.** Mindkét esetben a kezdőnek van nyerő stratégiája.

5. Gráfok éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör

167. 2. **168.** Szállása az 1-es pontban van. Most a 4-es pontban van. **174.** Kovács úr a *B*-vel jelölt helyiségben van. **175.** 45. **176.** Igen. **180.** Nem. **181.** *a)* m és n páratlan és legalább 3; *b)* $m=2$ és n páratlan vagy fordítva. **183.** Nem. **184.** Mindkettő létezik. **187.** Igen. **188.** Igen. **189.** *a)* Nem; *b)* Igen. **190.** Igen. **191.** 4-et. **193.** Igen. **194.** Igen. **195.** Igen. **196.** 3, illetve 6. **197.** Igen. **198.** *a)* Nincs Hamilton-kör; *b)* 4. **201.** *a)* Hamilton-köre nincs, Hamilton-útja van; *b)* Egyik sincs; *c)* Hamilton-köre nincs, Hamilton-útja van. **202.** Nem. **204.** 5, illetve 9. **213.** Nem. **218.** *a)* Nem; *b)* Igen. **221.** Vannak több módon irányítható utak.

6. Páros gráfok, teljes részgráfok

226. *a)* Igen; *b)* Nem. **227.** Igen. **228.** Egyenlőek. **229.** Igen. **230.** Igen. **231.** Igen. **232.** $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$. **233.** Nem igaz. **234.** Nincs. **235.** Nincs. **243.** A létszámok között legfeljebb 1 eltérés lehet. **244.** Lásd **243.** **245.** 21. **246.** $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$. **248.** $\binom{n-1}{2}$. **249.** $\left[\frac{n^2}{4}\right]$. **250.** *a)* $\left[\frac{n}{2}\right]$; *b)* $n=3k$ esetén n, $n=3k\pm 1$ esetén $n-1$. **252.** 5. **254.** A gráfban nincs háromszög, a komplementerében nincs teljes négyszög. **257.** A gráfban van háromszög és teljes négyszög is, a komplementerében egyik sincs.

7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula

264. Igen. **265.** Igen. **267.** Nem. **268.** Igen. **269.** 15. **270.** 54. **272.** Nem. **273.** Egyik sem síkgráf. **274.** Igen. **277.** 18 élű igen, 19 élű nem. **278.** $2n-4$. **281.** Nem. **284.** Nem. **291.** *a)* oktaédernek; *b)* oktaédernek; *c)* minden szabályos testnek; *d)* minden szabályos testnek.

MVII.

8. Színezési feladatok

300. *b)* 2; *c)* Igen. **301.** Igen. **302.** Igen. **303.** Két színnel színezhetők a csúcsok. Sem Hamilton-köre, sem Hamilton-útja nincs. **308.** tetraéder: 4; 4; kocka: 3; 2; oktaéder: 2; 3; dodekaéder: 4; 3; ikozaéder: 3; 4. **309.** 4. **310.** 3. **311.** 4. **312.** tetraéder: 3; kocka: 3; oktaéder: 4; dodekaéder: 3; ikozaéder: 5.

9. Algoritmusok. Játékok

317. *a)* 11; *b)* 14; *c)* $n+\lceil\log_2 n\rceil-2$. **318.** $2n-3$; $n\geqq 40$. **323.** *a)* Nincs; *b)* Nincs; *c)* Igen. **325.** 20. **327.** 59; 23. **328.** *a)* 40; *b)* 62. **330.** 9. **331.** Az A vállalat ajánlata az olcsóbb (21). **332.** Nem. **333.** *a)* 2; *b)* 3. **334.** Igen. Nem függ. **335.** *b)* $n+2k-2$; *c)* $2n+3k-3$. **336.** *a)* $n=3$ esetén igen, egyébként nem; *b)* $n=3$ esetén a kezdő nyer, $n>3$ esetén igen. **337.** $n=5$ esetén a második nem tudja elrendezni, $n=3$ esetén csak a harmadik nyerhet. $n\geqq 6$ esetén bármelyik el tudja rendezni. **338.** *a)* Kezdő nyer; *b)* Zár nyer; *c)* Kezdő nyer; *d)* Kezdő nyer; *e)* Nyit nyer; *f)* Zár nyer. **339.** *a)* Zár nyer; *b)* Zár nyer; *c)* Zár nyer; *d)* Nyit nyer. **341.** Mindhárom esetben a kezdő veszít.

10. Vegyes feladatok

342. Nem **343.** A szomszédosakba nem, a szemköztibe igen. **346.** 14. **349.** $n(n-1)+1$. **350.** *a)* 2^{n-2}; *b)* $2n-2$. **354.** Nem. **355.** Nem. **356.** Nem. **357.** Nem. **360.** Nem.

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 13135/I
Utánnyomásra előkészítette: Szloboda Tiborné
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea
Terjedelem: 35 (A/5) ív
A könyv tömege: 640 gramm
18. kiadás, 2010

Nyomtatta és kötötte a Kaposvári Nyomda Kft. – 100475
Felelős vezető: Pogány Zoltán igazgató