

OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

Matematika

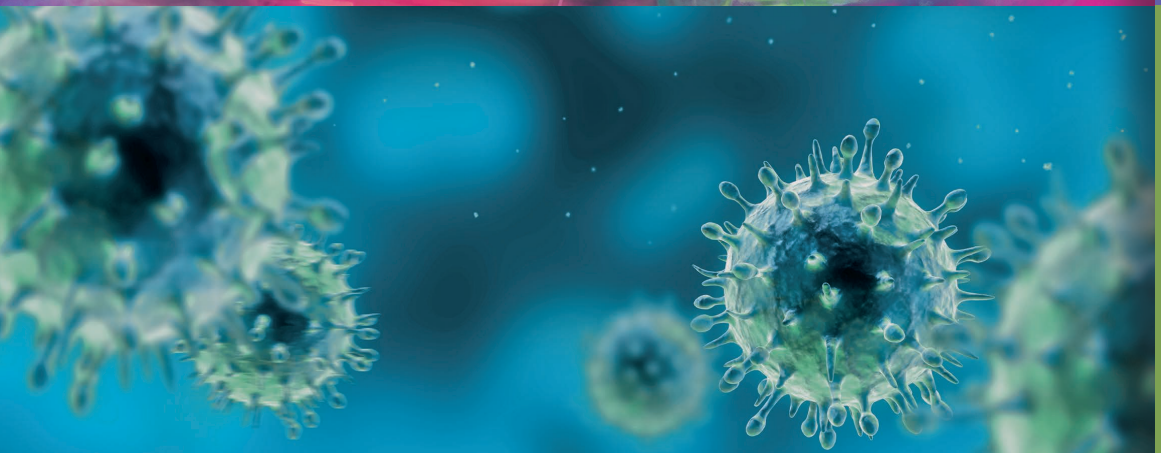
Függvénytáblázatok

Matematikai, fizikai, kémiai, biológiai összefüggések

Fizika



Kémia



Biológia

A függvénytáblázat TKV/20-9/2024. engedélyszámon 2024. február 21-től 2029. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Kondor Lászlóné (matematika, fizika), Botka Lajosné (kémia), Szegediné Gonda Zsófia (biológia).

A függvénytáblázat megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült, 2020. 01. 31. után kiadott matematika, fizika, kémia és biológia tantárgy kerettanterveinek és a matematika, fizika, kémia és biológia érettségi vizsgatárgyak vizsgakövetelményeinek.

Tananyagfejlesztők: Ujházy Márton, dr. Csapodi Csaba (matematika), Horányi Gábor, Varga Balázs (fizika), Berek László (kémia) és Horváth Zsolt (biológia).

Lektorok: Berecz János (matematika, fizika) és Réti Mónika (kémia, biológia).

Főszerkesztő: Csajági Sándor

Szerkesztők: dr. Wintsche Gergely (matematika), Csajági Sándor (fizika), Csorba László, Kincses Ildikó (kémia, biológia).

Grafikai szerkesztő: Matheisz-Róth Ágnes

Ábrák: Bánáti János, Becski Nóra 81/1., 84/1., 3., 85/1., 2., 4., 86/2., 3. 93/2., 96, 97, 102/2., 3., 111/1., 114/1–3., 115/1., 123/3., 4., 124/1., 135/3., 136/3., 4., 137/4., 138/1., 3., 144/2., 148/2., 157/1., 179/2., 341, 342. Shutterstock 148/2., 172, 178/3., 181/1., 343. NASA: 182/2.

Tipográfia és fedélterv: Bánáti János, Slezák Ilona

© Oktatási Hivatal, 2024

A kötet megjelenését a Belügyminisztérium támogatta.

Belügyminisztérium

ISBN 978-963-328-484-1

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-FGV912GY
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó • Nyomdai előkészítés: Gados László, Pattantyus Gergely
Terjedelem: 32,18 (A/5) ív • Tömeg: 620 gramm • 2. kiadás, 2025

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen • Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma: 3815.49.01

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Bevezetés

A *Függvénytáblázatok. Matematikai, fizikai, kémiai, biológiai össszefüggések* című kiadványunk a matematika és a természettudományos tantárgyak tanításának kiegészítője. A *Függvénytáblázatok*ban szereplő információkat tematikusan csoportosítottuk, hogy könnyebben áttekinthetőek legyenek.
Három szintnek megfelelően különböztettük meg az ismereteket. A középszintű érettségi ismereteit tartalmazó részek nem kaptak kiemelést. Az emelt szintű érettségi ismereteit tartalmazó részeket halványsárga alnyomással jelöltük. Az emelt szinten is túlmutató ismereteket, képleteket KIEGÉSZÍTÉS-ként, fölül és alul léniával lezárt halványsárga alnyomattal jelöltük.

A **matematika** részt néhány statisztikai tudnivalóval egészítettük ki, mert azok bekerültek a legújabb kerettantervbe. Sok helyen táblázatokba rendeztük az ábrákat, hogy megkönnyítsük a tájékozódást az egyes részek között.

A **fizika** részben az elméleti összefoglalókat külön alfejezetben követik a táblázatok. A fejezetek felosztása a hagyományos Mechanika, Hőtan, Elektromágnesség, Optika, Atomfizika, atommagfizika és Csillagászat fejezeteket tartalmazza. A fizikai táblázatok fejezet a középiskolai tanításhoz szükséges adatokat tartalmazza. A közép-, emelt és kiegészítő szintű tananyagok jelölése a tanulók és tanárok számára a könnyebb tájékozódást segíti.

A **kémia** rész az atomok és elemek kémiai és fizikai szempontból is fontos tulajdonságainak bemutatása után áttekintést ad a kémiai kötések és rácstípusok jellemzőiről (térszerkezet, kötési energiák), majd a többkomponensű rendszerek, oldatok tulajdonságairól. A kémiai reakciókat a redoxirendszerek (elektrokémia) és a sav-bázis reakciók jellemzői alapján foglalja össze. Külön egység a szerves kémia, ebben néhány fontos szerves molekula tulajdonságai mellett az elnevezés főbb szabályairól is áttekintést ad. Mindkét vizsgaszinten mind a kémiai számításokhoz, mind a struktúra-funkció elemzésekhez jól bevált, hasznos segédeszköz diákok és tanárok számára.

A **biológia** rész szerveződési szintek, részben vizsgálati módszerek alapján elkülönítve mutat be egy sor biológiai összefüggést. A biokémiai részek nemcsak sejtszintű, hanem ökológiai, genetikai és evolúciós kapcsolatok elemzésére is módot adnak. Néhány fontos biokémiai folyamat lépéseinek bemutatása segítséget ad a középiskolai szinten csak nagy vonalakban vázolt reakciósorok lépéseinek elmélyültebb tanulmányozásához. Az írásbeli és szóbeli vizsgákon is sokszor használt táblázatok (kodonszótár, ökológiai mutatók) önálló és csoportos munkát is lehetővé tesznek.

Reméljük, hogy az új kerettantervnek megfelelően összeállított *Függvénytáblázatok* segítséget nyújt a diákoknak és a tanároknak az ismeretek rendszerezésében.

A kiadvány szerzői és szerkesztői

Matem

Matematika

Fontosabb matematikai jelek, jelölések

1. táblázat

Szimbólum	Jelentése, neve	Olvasása	Példa
$\mathbf{N}$ $\mathbb{N}$	Természetes számok halmaza		
$\mathbf{N}^+$ $\mathbb{N}^+$	Pozitív egész számok halmaza		
$\mathbf{Z}$ $\mathbb{Z}$	Egész számok halmaza		
$\mathbf{Q}$ $\mathbb{Q}$	Racionális számok halmaza		
$\mathbf{Q}^*$ $\mathbb{Q}^*$	Irracionális számok halmaza		
$\mathbf{R}$ $\mathbb{R}$	Valós számok halmaza		
$\mathbf{C}$ $\mathbb{C}$	Komplex számok halmaza		
$\varnothing$, $\{\,\}$, $\emptyset$	Üres halmaz		
$+$	Pozitív szám előjele, összeadás	plusz, meg	$+5$, $5+6$
$-$	Negatív szám előjele, szám ellentettjének a jele, kivonás	mínusz, -ból	-5, $13-7$
$\lvert\,\rvert$	Abszolútérték-jel	abszolút érték	$\lvert x \rvert$
,	Tizedesvessző		3,75
…	Felsorolás folytatása	és így tovább	1, 2, 3, …
%	Százalék	százalék	15%
‰	Ezrelék	ezrelék	17‰
$\forall$	Minden (univerzális kvantor)	minden…	$\forall n$
$\exists$	Létezik, van olyan (egzisztenciális kvantor)	van olyan…	$\exists x$
∞	Végtelen	végtelen	
$\in$	Eleme	… eleme …-nak	$x \in H$
$\subset$, $\subseteq$	Részhalmaz	részhalmaza	$A \subset B$
$\cup$	Egyesítés, unió	unió	$A \cup B$
$\cap$	Közös rész, metszet	metszet	$A \cap B$
$\overline{}$	Komplementer	komplementer	$\overline{A}$
$\setminus$	Halmazok különbsége	mínusz	$A \setminus B$
$\times$	Direkt (Descartes-) szorzat	kereszt	$A \times B$
$\cdot$, $\times$	Szorzás	-szor	$3 \cdot 5$
:, $\div$, /	Osztás	per, -ban	15 : 3
$\mid$	Oszthatóság jele	osztója	$3 \mid 18$
$\sqrt{}$	Négyzetgyök	négyzetgyök	$\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{}$	n-edik gyök	n-edik gyök	$\sqrt[n]{a}$
[;]	zárt intervallum	zárt intervallum	[2; 5]
] ; [, (;)	nyílt intervallum	nyílt intervallum	]3; 7[, (3; 7)

1. táblázat folytatása

Szimbólum	Jelentése, neve	Olvasása	Példa
$=$	Egyenlőség	egyenlő	$a = b$
$\neq$	Egyenlőség tagadása	nem egyenlő	$a \neq b$
$:=$	Definiáló egyenlőség	legyen egyenlő	$a := 2b$
$<$	Kisebb	kisebb, mint	$1 < 3$
$\leq$	Kisebb vagy egyenlő	kisebb egyenlő, legfeljebb	$x \leq 10$
$>$	Nagyobb	nagyobb, mint	$12 > 3$
$\geq$	Nagyobb vagy egyenlő	nagyobb egyenlő, legalább	$x \geq 3$
$\approx$	Közelítőleg egyenlő	körülbelül	$\pi \approx 3{,}14$
$\overline{AB}$, $\lvert AB \rvert$	Szakasz hossza		
$\mathbf{v}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$	Vektor		
$\cong$	Egybevágóság	egybevágó	$ABC_{\triangle} \cong PQR_{\triangle}$
$\sim$	Hasonlóság	hasonló	$ABC_{\triangle} \sim PQR_{\triangle}$
$\multimap$	Illeszkedés	illeszkedik	$P \multimap e$
$\lVert$	Párhuzamosság	párhuzamos	$e \lVert f$
$\perp$	Merőlegesség	merőleges	$e \perp f$
$\neg$, $^{-}$	Negáció (tagadás)	nem	$\neg P$, $\overline{P}$
$\wedge$	És (konjukció)	és	$P \wedge Q$
$\vee$	Vagy (diszjunkció)	vagy	$P \vee Q$
$\oplus$	Kizáró vagy (antivalencia)	vagy … vagy	$P \oplus Q$
$\Rightarrow$	Következtetés (implikáció)	ha …, akkor …-ből következik	$P \Rightarrow Q$
$\Leftrightarrow$	Ekvivalencia	ekvivalens, akkor és csak akkor	$P \Leftrightarrow Q$
$\triangle$	Háromszög		$ABC_{\triangle}$
$^{\circ}$ $'$ $''$	Szögmértékek	fok, perc, másodperc	$45^{\circ}\,15'\,27''$
$\hat{\alpha}$	Ívmértékben (radiánban) megadott szög		
π	pi	pi	$\approx 3{,}1415\ldots$
$!$	Faktoriális	faktoriális	$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$
$\binom{n}{k}$	Binomiális együttható	n alatt a k	$\binom{5}{2} = 10$
$\sum$	Összeg	szumma, ha meg vannak adva a határok is, akkor például: „i megy 1-től n-ig”	$\sum_{i=1}^{n} a_i$
$\prod$	Szorzat	produktum	$\prod_{i=1}^{n} a_i$
$\lim$	Határérték	limesz	$\lim_{n \to \infty} a_n$
$'$, $\cdot$, $\frac{df}{dx}$	Derivált	derivált	$f'(x)$
$\int$, $\int_a^b$	Integrál	integrál	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

A görög abécé betűi

2. táblázat

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ	ró
B	β	béta	K	κ	kappa	Σ	σ	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε	epszilon	N	ν	nű	Φ	φ	fi
Z	ζ	dzéta	Ξ	ξ	kszi	X	χ	khi
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszi
Θ	ϑ	théta	Π	π	pi	Ω	ω	ómega

Előtagok (prefixumok)

3. táblázat

Előtag	Jele	Neve	Értéke
jotta-	Y	kvadrillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{24}$
zetta-	Z	ezertrillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{21}$
exa-	E	trillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$
peta-	P	ezerbillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$
tera-	T	billió	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
giga-	G	milliárd	$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$
mega-	M	millió	$1\,000\,000 = 10^{6}$
kilo-	k	ezer	$1\,000 = 10^{3}$
hekto-	h	száz	$100 = 10^{2}$
deka-	da	tíz	$10 = 10^{1}$
—		egy	$1 = 10^{0}$
deci-	d	tized	$0{,}1 = 10^{-1}$
centi-	c	század	$0{,}01 = 10^{-2}$
milli-	m	ezred	$0{,}001 = 10^{-3}$
mikro-	μ	milliomod	$0{,}000\,001 = 10^{-6}$
nano-	n	ezermilliomod	$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$
piko-	p	billiomod	$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$
femto-	f	ezerbilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$
atto-	a	trilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$
zepto-	z	ezertrilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-21}$
jokto-	y	kvadrilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-24}$

Gondolkodási műveletek

Halmazelmélet

Fogalmak, jelölések

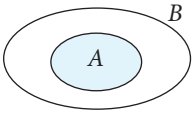
A halmazok jelölésére általában az ábécé nagybetűit, a halmaz elemeinek a jelölésére pedig az ábécé kisbetűit használjuk.

$a \in H$	Azt jelöli, hogy az a betűvel jelölt dolog eleme a H betűvel jelölt halmaznak.
$a \notin H$	Azt jelöli, hogy az a betűvel jelölt dolog nem eleme a H betűvel jelölt halmaznak.
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	Azt a véges halmazt jelöli, melynek elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
$A = B$	Az A és a B halmazok egyenlőségét jelöli. Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemeik megegyeznek. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.
$\lvert H \rvert$	A H halmaz elemeinek a számát (számosságát) jelöli.
$\varnothing$, $\{\,\}$, $\emptyset$	Az üres halmaz jelölése. Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük: $\lvert\varnothing\rvert = 0$.

Halmaz részhalmaza

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme.

Jelölés: $A \subset B$ vagy $B \supset A$



$\varnothing \subset A$	Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
$A \subset A$	Minden halmaz részhalmaza önmagának.
$H := \{a \in A \mid t_{(a)}\}$	Az A halmaz t tulajdonsággal rendelkező elemeinek H részhalmaza.

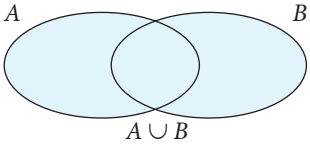
Műveletek halmazokkal

Halmazok uniója (egyesítése)

Az A és a B halmazok uniója (egyesítése) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A és B közül legalább az egyiknek elemei.

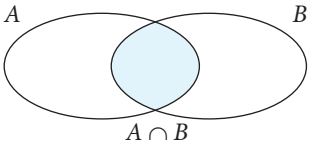
Jelölés: $A \cup B$

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$



Halmazok metszete (közös része)

Az A és a B halmazok metszete (közös része) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek A-nak és B-nek is elemei.

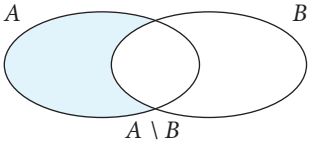


Jelölés: $A \cap B$

$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$

Két halmaz különbsége

Az A és B halmazok különbséghalmazán azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem.

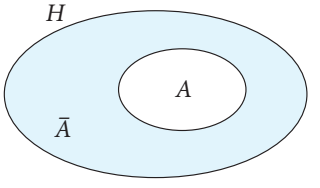


Jelölés: $A \setminus B$

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$

Halmaz komplementere

Legyen adott a H halmaz (alaphalmaz) és ennek egy A részhalmaza. H azon elemeinek a halmazát, amelyek nem elemei A-nak, az A halmaz H-ra vonatkozó komplementer halmazának nevezzük.



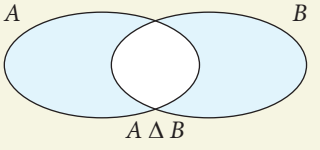
Jelölés: $\overline{A}$

$\overline{A} := \{x \mid x \in H \text{ és } x \notin A\}$

KIEGÉSZÍTÉS

Két halmaz szimmetrikus különbsége (differenciája)

Az A és B halmazok szimmetrikus különbségén az $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.



Jelölés: $A \Delta B$

Két halmaz Descartes-szorzata (direkt szorzata)

Azoknak a rendezett pároknak a halmaza, amelyeknek az első komponense az A-nak, második komponense pedig a B-nek eleme, az A és B halmazok Descartes-szorzata (direkt szorzata).

Jelölés: $A \times B$

$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$

Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A \times B| = n \cdot m$

A komplementer halmazokra vonatkozó azonosságok: $\overline{(\overline{A})} = A$

De Morgan-azonosságok: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Logikai szita formula kettő, illetve három halmaz esetén

Ha A, B és C a H alaphalmaz részhalmazait jelöli, akkor

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Halmazműveleti azonosságok

$A \cup B = B \cup A$	és	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	és	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup A = A$	és	$A \cap A = A$
$A \cup \varnothing = A$	és	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	és	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Logika

Fogalmak, jelölések

Azokat a kifejezéseket, amelyekről egyértelműen megállapítható, hogy igazak vagy hamisak, kijelentésnek (állításnak) nevezzük.
Egy kijelentés (állítás) logikai értéke lehet igaz vagy hamis.

Jelölések:
P, Q, R, … kijelentések (állítások)

i igaz logikai érték
h hamis logikai érték

Logikai műveletek és értéktáblázataik

Tagadás (negáció, not)

P tagadása (nem P): $\neg P$

P	$\neg P$
i	h
h	i

Megengedő vagy (diszjunkció, or)

P vagy Q: $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

És (konjunkció, and)

P és Q: $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Kizáró vagy (antivalencia, xor)

vagy P, vagy Q: $P \oplus Q$

P	Q	$P \oplus Q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Ha …, akkor (implikáció)

Ha P, akkor Q: $P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

$P \Rightarrow Q$ más megfogalmazásai:
P elégséges feltétele Q-nak.
Q szükséges feltétele P-nek.

Ekvivalencia

P ekvivalens Q-val: $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

A $P \Leftrightarrow Q$ másik megfogalmazása:
Akkor és csak akkor P, ha Q.

Ha $P \Leftrightarrow Q$ igaz, akkor $P \Rightarrow Q$ és $Q \Rightarrow P$ egyaránt teljesülnek.

Műveleti azonosságok

$\neg(\neg P) = P$

$P \vee Q = Q \vee P$ és $P \wedge Q = Q \wedge P$

$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$ és $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ és $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$ és $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$P \Leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$

KIEGÉSZÍTÉS

Gyakran használt következtetési sémák

$P \Rightarrow Q$, P / Q

$P \Rightarrow Q$, $\neg Q$ / $\neg P$

$P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ / $P \Rightarrow R$

Kombinatorika

Permutáció (sorba rendezés)

Ismétlés nélküli permutáció

n különböző elemet kell az összes lehetséges módon sorba rendezni.
A különböző elrendezések száma:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$0! := 1$$

Az $n!$ kiejtése: n faktoriális.
A faktoriálisok értékei ($n = 0, 1, \ldots, 12$):

$$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,$$
$$8! = 40\,320,\ 9! = 362\,880,\ 10! = 3\,628\,800,\ 11! = 39\,916\,800,\ 12! = 479\,001\,600$$

Ismétléses permutáció

n olyan elemet kell az összes lehetséges módon sorba rendezni, amelyek között ismétlődő elemek is vannak. Ha az ismétlődések száma $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ($k_1 + k_2 + \ldots + k_r \leq n$), akkor a különböző elrendezések száma:

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Variáció (kiválasztás sorrenddel)

Ismétlés nélküli variáció

n különböző elem közül $k \leq n$ elemet kell kiválasztani. Egy elemet csak egyszer választhatunk ki, a sorrend számít, vagyis ha ugyanazokat az elemeket más sorrendben választjuk ki, az más kiválasztásnak számít.
A különböző kiválasztások száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ismétléses variáció

n különböző elem közül k elemet kell kiválasztani. Egy elemet többször is kiválaszthatunk, a sorrend számít.
A különböző kiválasztások száma:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Kombináció (kiválasztás sorrend nélkül)

Ismétlés nélküli kombináció

n különböző elem közül $k \leq n$ elemet kell kiválasztani. Egy elemet csak egyszer választhatunk ki, a sorrend nem számít, vagyis ha ugyanazokat az elemeket más sorrendben választjuk ki, az ugyanannak a kiválasztásnak számít. A különböző kiválasztások száma:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ismétléses kombináció

n különböző elem közül k elemet kell kiválasztani. Egy elemet többször is kiválaszthatunk, a sorrend nem számít. A különböző kiválasztások száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

Binomiális együtthatók

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

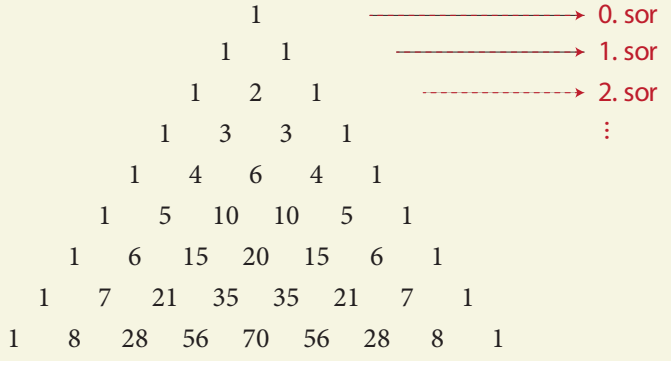
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

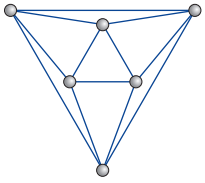
A Pascal-háromszög

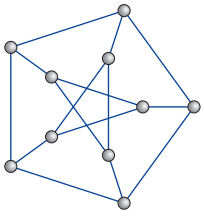
A binomiális együtthatók háromszög alakba rendezhetők az ábrán látható módon. Ha a sorok sorszámozását, valamint a sorokon belüli sorszámozást is 0-val kezdjük, az n-edik sor k-adik eleme éppen $\binom{n}{k}$ lesz.



Gráfok

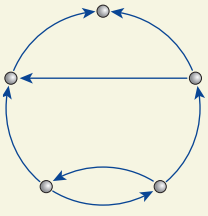
A gráfot egy halmaz elemei és a halmaz elemeit összekötő vonalak alkotják. A halmaz elemeit pontoknak vagy a gráf csúcsainak hívjuk. A pontokat összekötő vonalak a gráf élei.





Ha a gráfban megkülönböztetjük az élek kezdő- és végpontját, azaz az éleknek irányítást adunk, akkor azt irányított gráfnak nevezzük.

Ha a gráfban az éleket nem irányítjuk, akkor irányítatlan gráfról, röviden gráfról beszélünk.

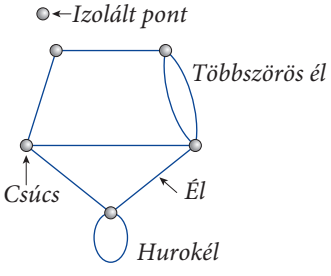


Gráfokkal kapcsolatos alapvető elnevezések

Csúcs: A ponthalmaz pontjainak neve.

Él: A pontokat (csúcsokat) összekötő vonalak neve.

Fokszám: Egy csúcs fokszáma a csúcsból kiinduló élek száma, a hurokéleket duplán számoljuk.



Hurokél: Olyan él, melynek kezdőpontja és végpontja azonos.

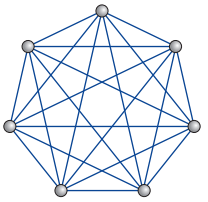
Többszörös él: Ha két vagy több él ugyanazt a két pontot köti össze, akkor ezeket az éleket többszörös éleknek nevezzük.

Egyszerű gráf: Azok a gráfok, melyek sem hurokélt, sem többszörös élt nem tartalmaznak.

Izolált pont: A gráf egy pontja izolált, ha fokszáma nulla.

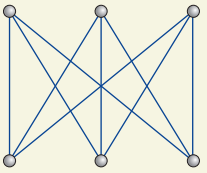
A gráf véges, ha pontjainak száma véges.

Teljes gráf: A teljes gráf olyan egyszerű véges gráf, melyben bármely két pont között van él.



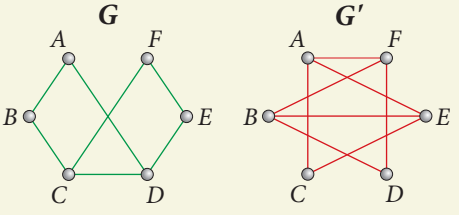
KIEGÉSZÍTÉS

Reguláris gráf: Egy gráf reguláris, ha minden csúcs fokszáma egyezik. Az r-reguláris gráfokban minden csúcs foka r.



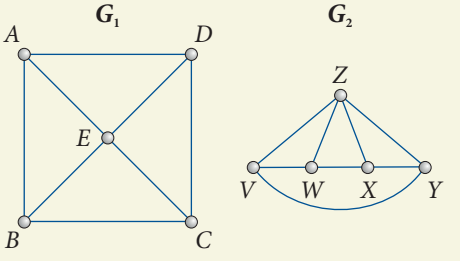
3-reguláris gráf

Komplementer gráf: Az egyszerű G gráf komplementere az a G', melynek ponthalmaza egyezik G ponthalmazával, és G'-ben pontosan azok a csúcsok vannak éllel összekötve, melyek a G-ben nincsenek.



komplementer gráfok

Izomorfia: A G_1 és G_2 egyszerű gráfok izomorfak, ha létrehozható a csúcshalmazaik között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy G_1-ben bármely két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a két csúcs G_2-beli megfelelője között is él húzódik.



izomorf gráfok

Alapvető gráfelméleti tételek

Bármely véges gráfban a pontok fokszámainak összege megegyezik az élek számának kétszeresével.

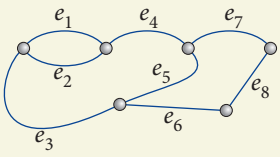
A tételből következik, hogy bármely véges gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Egy n csúcsú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bármely véges gráfban létezik két azonos fokszámú pont.

Út, vonal, kör, összefüggőség

Elnevezések:



Séta: Csatlakozó élek sorozata (pl. e_5, e_7, e_8, e_6, e_5, e_4).

Vonal: Csatlakozó élek olyan sorozata, amelyben az élek nem ismétlődnek (pl. e_7, e_8, e_6, e_5, e_4).

Út: Csatlakozó élek olyan sorozata, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek (ekkor az élek között sem lehet ismétlődés, pl. e_2, e_4, e_5, e_6, e_8).

Összefüggő gráf: Egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja között létezik út.

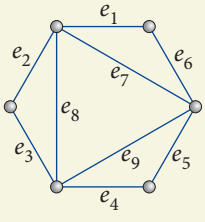
Kör: Csatlakozó élek olyan sorozata, amelynek kezdő- és végpontja megegyezik, és benne minden pont és minden él csak egyszer szerepel (pl. e_2, e_4, e_7, e_8, e_6, e_3).

Körséta: Olyan séta, amelynek kezdő és végpontja megegyezik.

Komponensek: Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a maximális összefüggő részeit komponenseknek nevezzük. A komponensek a gráf „lehető legbővebb” összefüggő részgráfjai.

KIEGÉSZÍTÉS

Euler-vonal, Hamilton-kör

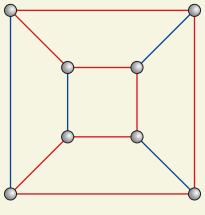


Euler-vonal, zárt Euler-vonal: Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza, Euler-vonalnak nevezünk. Ha a vonal zárt, akkor zárt Euler-vonalnak nevezzük (pl. e_1, e_2, e_3, e_8, e_7, e_9, e_4, e_5, e_6).

Legyen G egy összefüggő gráf. Ekkor

1. G-ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden pont foka páros.

2. G-ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő, és legfeljebb két darab páratlan fokú pontja van.



Hamilton-út, Hamilton-kör: Ha egy gráfban egy út minden csúcson átmegy, akkor azt Hamilton-útnak nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden csúcson átmegy, akkor Hamilton-körnek nevezzük.

Dirac tétele:

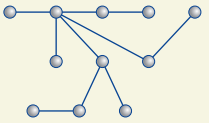
1. Ha egy n pontú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van benne Hamilton-út.

2. Ha egy $n \geq 3$ pontú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van benne Hamilton-kör.

Fagráfok

A G gráfot fának nevezzük, ha összefüggő és nem tartalmaz kört.

Tételek, összefüggések

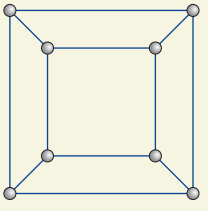


- Az n pontú fa éleinek száma $n - 1$.
- Ha egy fa bármely élét elhagyjuk (a végpontok elhagyása nélkül), a kapott gráf már nem lesz összefüggő. Azaz a fagráfok a minimális összefüggő gráfok.
- Ha egy fa két pontját összekötjük, akkor a kapott gráfban biztosan lesz kör. Másképp fogalmazva, a fagráfok a maximális körmentes gráfok.
- Ha egy véges gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör.
- Ha egy n pontú gráf éleinek száma n, akkor a gráfban van kör.

KIEGÉSZÍTÉS

Síkgráfok

Síkgráfoknak nevezzük azokat a gráfokat, melyek lerajzolhatók a síkban úgy, hogy az éleknek csak csúcsokban van közös pontjuk. Egy síkgráf élei által határolt területeket a síkgráf tartományainak nevezzük.



Euler tétele:
Legyen G egy olyan síkgráf, melynek c csúcsa, e éle és t tartománya van. Ekkor $c + t = e + 2$.

Számelmélet, algebra

A valós számok áttekintése, számhalmazok

Természetes számok

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

Egész számok

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Racionális számok

A két egész szám hányadosaként felírható számokat racionális számoknak nevezzük.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Bármely racionális szám felírható egész szám, véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban. Megfordítva is igaz, minden véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört racionális szám.

Irracionális számok

A nem szakaszos végtelen tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük. Az irracionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}^*$. Az irracionális számok nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.
Irracionális számok például π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\lg 3$, …

Valós számok

A racionális és az irracionális számok halmazának egyesítése a valós számok halmaza.

Jele: $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

A számhalmazok kapcsolata

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Az alapműveletek elvégezhetősége a nevezetes számhalmazokon belül

4. táblázat

<table>
<tr><th></th><th>$\mathbb{N}$</th><th>$\mathbb{Z}$</th><th>$\mathbb{Q}$</th><th>$\mathbb{R}$</th></tr>
<tr><td>Összeadás</td><td colspan="4">mindig elvégezhető</td></tr>
<tr><td>Kivonás</td><td>nem mindig végezhető el</td><td colspan="3">mindig elvégezhető</td></tr>
<tr><td>Szorzás</td><td colspan="4">mindig elvégezhető</td></tr>
<tr><td>Osztás</td><td colspan="2">nem mindig végezhető el</td><td colspan="2">a 0-val való osztás kivételével mindig elvégezhető</td></tr>
</table>

Műveleti tulajdonságok a valós számok körében

Felcserélhetőség (kommutativitás)

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

Csoportosíthatóság (asszociativitás)

$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Disztributivitás

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Néhány egyéb tulajdonság

Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$
Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $ac < bc$
Ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$

Szám reciproka

$a \neq 0$ esetén az $\frac{1}{a}$ számot az a szám reciprokának nevezzük.

Abszolút érték

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Pozitív számok normálalakja

Bármely $x > 0$ szám felírható a következő alakban:
$x = N \cdot 10^k$, ahol $1 \leq N < 10$, $k \in \mathbb{Z}$
Az x számnak ezt az alakját normálalaknak nevezzük.
Például: $32\,504 = 3{,}2504 \cdot 10^4$
$0{,}0012 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$

Természetes számok felírása számrendszerekben

Az m alapú számrendszerben a számjegyek 0-tól $(m-1)$-ig terjednek, a helyi értékek pedig m hatványai.

Egy természetes szám tízes számrendszerben felírt alakja:

$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$,
ahol $0 \le a_0, a_1, \ldots, a_{(k-1)} \le 9$; $1 \le a_k \le 9$ számjegyek.

Egy természetes szám m alapú számrendszerben felírt alakja:

$n = \overline{b_l b_{l-1} \ldots b_1 b_0} = b_l \cdot m^l + b_{l-1} \cdot m^{l-1} + \cdots + b_1 \cdot m + b_0$,
ahol $0 \le b_0, b_1, \ldots, b_{l-1} \le m-1$; $1 \le b_k \le m-1$ számjegyek.

A tizenhatos számrendszerben a 9-et követő 10, 11, 12, 13, 14, 15 számjegyeket rendre A, B, C, D, E, F betűkkel jelöljük.

KIEGÉSZÍTÉS

Komplex számok

Komplex számok és jelölésük

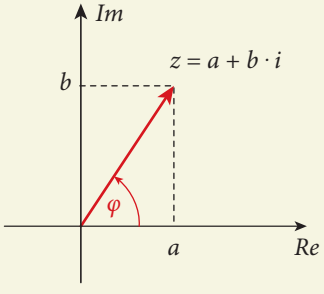
A $z = a + bi$ alakú számokat komplex számoknak nevezzük $(a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$.
A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük.

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}$$

Trigonometrikus alak: $a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \quad (a \neq 0)$

Exponenciális alak: $r \cdot e^{i\hat{\varphi}} = r(\cos\hat{\varphi} + i\sin\hat{\varphi})$



Műveletek komplex számokkal

$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$; $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$

Összeadás: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Kivonás: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Szorzás: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

Osztás: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$

Hatványozás: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Gyökvonás: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Egységgyökök: $\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Számelmélet

Oszthatóság a természetes számok körében

Egy b természetes számot az a természetes szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan c természetes szám, melyre teljesül, hogy $a = bc$.

Jelölés: $b \mid a$ b osztója a-nak

Főbb oszthatósági szabályok ($n \in \mathbb{N}$)

$2 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n utolsó számjegye: 0, 2, 4, 6 vagy 8
$5 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n utolsó számjegye: 0 vagy 5
$4 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel
$8 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 8-cal
$3 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n számjegyeinek összege osztható 3-mal
$9 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n számjegyeinek összege osztható 9-cel
$11 \mid n$	$\Leftrightarrow$	ha n számjegyeit váltakozó előjellel összegezve 11-gyel osztható szám az eredmény

Általános oszthatósági szabályok

$a \mid b$ és $b \mid c$	$\Rightarrow$	$a \mid c$
$a \mid b$ és $a \mid c$	$\Rightarrow$	$a \mid (b + c)$, $a \mid (b - c)$
Ha p prím és $p \mid ab$	$\Rightarrow$	$p \mid a$ vagy $p \mid b$.
Ha $n \mid ab$ és $(n; a) = 1$	$\Rightarrow$	$n \mid b$.
Ha $(a; b) = 1$ és $a \mid c$, $b \mid c$	$\Rightarrow$	$ab \mid c$.

Prímszámok

Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van, prímszámoknak nevezzük.

A számelmélet alaptétele

Bármely $n > 1$ egész szám felbontható prímszámok szorzatára, a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Egy $n > 1$ pozitív egész szám prímtényezős felbontásának általános (kanonikus) alakja: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_k$ különböző prímszámok.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának a vizsgált számok közös osztói közül a legnagyobbat nevezzük.

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösének a vizsgált számok közös többszörösei közül a legkisebbet nevezzük.

Jelölés: $(k; l)$ jelenti a k és l pozitív egészek legnagyobb közös osztóját.
$[k; l]$ jelenti a k és l pozitív egészek legkisebb közös többszörösét.

Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor ezeket relatív prímszámoknak, rövidebben relatív prímeknek nevezzük.

A 2-vel, 3-mal és 5-tel nem osztható számok prímtényezős felbontása ($n \leq 1001$)

5. táblázat

7	$203 = 7 \cdot 29$	401	601	$803 = 11 \cdot 73$
11	$209 = 11 \cdot 19$	$403 = 13 \cdot 31$	607	809
13	211	$407 = 11 \cdot 37$	$611 = 13 \cdot 47$	811
17	$217 = 7 \cdot 31$	409	613	$817 = 19 \cdot 43$
19	$221 = 13 \cdot 17$	$413 = 7 \cdot 59$	617	821
23	223	419	619	823
29	227	421	$623 = 7 \cdot 89$	827
31	229	$427 = 7 \cdot 61$	$629 = 17 \cdot 37$	829
37	233	431	631	$833 = 7^2 \cdot 17$
41	239	433	$637 = 7^2 \cdot 13$	839
43	241	$437 = 19 \cdot 23$	641	$841 = 29^2$
47	$247 = 13 \cdot 19$	439	643	$847 = 7 \cdot 11^2$
$49 = 7^2$	251	443	647	$851 = 23 \cdot 37$
53	$253 = 11 \cdot 23$	449	$649 = 11 \cdot 59$	853
59	257	$451 = 11 \cdot 41$	653	857
61	$259 = 7 \cdot 37$	457	659	859
67	263	461	661	863
71	269	463	$667 = 23 \cdot 29$	$869 = 11 \cdot 79$
73	271	467	$671 = 11 \cdot 61$	$871 = 13 \cdot 67$
$77 = 7 \cdot 11$	277	$469 = 7 \cdot 67$	673	877
79	281	$473 = 11 \cdot 43$	677	881
83	283	479	$679 = 7 \cdot 97$	883
89	$287 = 7 \cdot 41$	$481 = 13 \cdot 37$	683	887
$91 = 7 \cdot 13$	$289 = 17^2$	487	$689 = 13 \cdot 53$	$889 = 7 \cdot 127$
97	293	491	691	$893 = 19 \cdot 47$
	$299 = 13 \cdot 23$	$493 = 17 \cdot 29$	$697 = 17 \cdot 41$	$899 = 29 \cdot 31$
101		$497 = 7 \cdot 71$		
103	$301 = 7 \cdot 43$	499	701	$901 = 17 \cdot 53$
107	307		$703 = 19 \cdot 37$	907
109	311	503	$707 = 7 \cdot 101$	911
113	313	509	709	$913 = 11 \cdot 83$
$119 = 7 \cdot 17$	317	$511 = 7 \cdot 73$	$713 = 23 \cdot 31$	$917 = 7 \cdot 131$
$121 = 11^2$	$319 = 11 \cdot 29$	$517 = 11 \cdot 47$	719	919
127	$323 = 17 \cdot 19$	521	$721 = 7 \cdot 103$	$923 = 13 \cdot 71$
131	$329 = 7 \cdot 47$	523	727	929
$133 = 7 \cdot 19$	331	$527 = 17 \cdot 31$	$731 = 17 \cdot 43$	$931 = 7^2 \cdot 19$
137	337	$529 = 23^2$	733	937
139	$341 = 11 \cdot 31$	$533 = 13 \cdot 41$	$737 = 11 \cdot 67$	941
$143 = 11 \cdot 13$	$343 = 7^3$	$539 = 7^2 \cdot 11$	739	$943 = 23 \cdot 41$
149	347	541	743	947
151	349	547	$749 = 7 \cdot 107$	$949 = 13 \cdot 73$
157	353	$551 = 19 \cdot 29$	751	953
$161 = 7 \cdot 23$	359	$553 = 7 \cdot 79$	757	$959 = 7 \cdot 137$
163	$361 = 19^2$	557	761	$961 = 31^2$
167	367	$559 = 13 \cdot 43$	$763 = 7 \cdot 109$	967
$169 = 13^2$	$371 = 7 \cdot 53$	563	$767 = 13 \cdot 59$	971
173	373	569	769	$973 = 7 \cdot 139$
179	$377 = 13 \cdot 29$	571	773	977
181	379	577	$779 = 19 \cdot 41$	$979 = 11 \cdot 89$
$187 = 11 \cdot 17$	383	$581 = 7 \cdot 83$	$781 = 11 \cdot 71$	983
191	389	$583 = 11 \cdot 53$	787	$989 = 23 \cdot 43$
193	$391 = 17 \cdot 23$	587	$791 = 7 \cdot 113$	991
197	397	$589 = 19 \cdot 31$	$793 = 13 \cdot 61$	997
199		593	797	$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
		599	$799 = 17 \cdot 47$	

Osztók száma, osztók összege

Ha az n pozitív egész szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor n pozitív osztóinak a száma:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)\,(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

KIEGÉSZÍTÉS

n pozitív osztóinak az összege:

$$s(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

Hatványozás

A hatványozás definíciója különböző kitevőfajtákra

Pozitív egész kitevőre:

Az a valós szám n-edik hatványa ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$) egy olyan n tényezős szorzat, melynek minden eleme a. Az a valós szám első hatványa önmaga, $a^1 = a$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}$$

Nulla kitevőre:

$a^0 = 1$ A 0 nulladik hatványát nem értelmezzük.

Negatív egész kitevőre:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad (n \in \mathbb{N}^+, a \neq 0).$$

Racionális kitevőre:

$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}, \quad (n, k \in \mathbb{Z}, a > 0; k \geq 2).$$

Gyökvonás

Négyzetgyök

Az $a \geq 0$ szám négyzetgyökének azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek négyzete a.

Jelölés: $\sqrt{a}$ az a szám négyzetgyökét jelenti.

Azonosságai:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (a \geq 0, b > 0)$$

Az *n*-edik gyök

Legyen $a \geq 0$ és n páros szám ($n \geq 2$). Ekkor n-edik gyök a azt a nemnegatív számot jelenti, melynek n-edik hatványa a.

Legyen a tetszőleges valós és n páratlan szám ($n \geq 3$). Ekkor n-edik gyök a azt a valós számot jelenti, melynek n-edik hatványa a.

Jelölés: $\sqrt[n]{a}$ az a szám n-edik gyökét jelenti.

Logaritmus

Egy pozitív x valós szám a alapú logaritmusának ($a > 0, a \neq 1$) nevezzük azt a kitevőt, amelyre a-t emelve x-et kapunk.

$$a^{\log_a x} = x$$

Jelölések: $\log_a x$ jelöli az x szám a alapú logaritmusát,
$\lg x$ jelöli az x szám tízes alapú logaritmusát,
$\ln x$ jelöli az x szám e alapú ($e \approx 2{,}718$) / természetes alapú logaritmusát.

A hatványozás, a gyökvonás és a logaritmus azonosságai

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

Hatványozás	*n*-edik gyökvonás	Logaritmus
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
$(a^n)^k = a^{nk}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$	$\log_c a^k = k \cdot \log_c a$
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$	$\log_{a^k} b^k = \log_a b$
$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$	$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\lg b}{\lg a}$

Számok 10-es alapú logaritmusa

Ha x legalább 10, akkor felírható $N \cdot 10^k$ alakban, ahol $1 \leq N < 10$.
Ekkor $\lg x = k + \lg N$: 1,00–5,99

6. táblázat

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6294	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ha x legalább 10, akkor felírható $N \cdot 10^k$ alakban, ahol $1 \leq N < 10$.
Ekkor $\lg x = k + \lg N$: 6,00–9,99

6. táblázat folytatása

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,0	0,7782	0,7789	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Algebrai (betűs) kifejezések, nevezetes azonosságok

Algebrai (betűs) kifejezések

Az algebrai kifejezésekben számok, változók, a négy alapművelet és racionális kitevőjű hatványok szerepelhetnek.

Példák algebrai kifejezésekre: $3a - 2b$, $\sqrt{a+b}$, $\dfrac{2a^2 - 5b^2}{a - b}$

Példák nem algebrai kifejezésekre: $\log_3(x^2 - 4x)$, $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Polinomok

A polinom olyan összeg, melynek minden tagja változóknak, azok hatványainak és konstansoknak a szorzata.

Példák polinomokra: $x + 2$; $5x^2y + x^4z^2 - 7y^3 + 27$; $3t^4 - 7t^2 + t - \sqrt{2}$

Az egyváltozós, n-ed fokú, x változójú polinom általános alakja:

$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

Két polinom hányadosát algebrai törtnek nevezzük.

Nevezetes azonosságok

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k})$

$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + \ldots + ab^{2k-2} - b^{2k-1})$

$a - b \mid a^n - b^n$

$a + b \mid a^n - b^n$, ha $n = 2k$

$a + b \mid a^n + b^n$, ha $n = 2k + 1$

Binomiális tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

A tételben található binomiális együtthatók értékei kis számok esetén a 14. oldalon lévő Pascal-háromszögben is láthatók.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Egyenletek

Egyismeretlenes egyenletek

Az $f(x) = g(x)$ alakú egy ismeretlent tartalmazó egyenlőséget egyismeretlenes egyenletnek nevezzük.

Az egyenlet gyökei az egyenlet alaphalmazának azon elemei, amelyek igazzá teszik az egyenlőséget. A gyökök összessége az egyenlet megoldáshalmaza.

Egyenletek ekvivalenciája

Két egyenlet ekvivalens, ha az alaphalmazuk ugyanaz és megoldáshalmazuk egyenlő. Az olyan átalakításokat, amelyek egy egyenletet vele ekvivalens egyenletbe visznek át, ekvivalens átalakításoknak nevezzük.

Példák ekvivalens átalakításokra:

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + c = g(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot f(x) = c \cdot g(x) \qquad c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet

$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Megoldóképlete: $x = -\frac{b}{a}$

Másodfokú egyenletek

Általános alak	$ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$
Diszkrimináns	$D = b^2 - 4ac$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
Megoldásszám	– Ha $D > 0$, az egyenletnek két különböző valós megoldása van. – Ha $D = 0$, az egyenletnek egy valós megoldása van. – Ha $D < 0$, az egyenletnek nincs valós megoldása.	
Megoldóképlet	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Gyöktényezős alak	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$	$(x - x_1)(x - x_2) = 0$
A gyökök és együtthatók közötti összefüggések, Viète-formulák	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 \cdot x_2 = q$

Egyenlőtlenségek

Ha a változót is tartalmazó $f(x)$ és $g(x)$ kifejezéseket a $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ jelek valamelyikével kapcsoljuk össze, egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk.

Az egyenlőtlenség megoldása

Az egyenlőtlenség megoldásának nevezzük az egyenlőtlenség alaphalmazának mindazon elemeit, amelyek igazzá teszik az egyenlőtlenséget. Egyenlőtlenséget megoldani annyit tesz, mint megadni az összes megoldását (vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása).

Egyenlőtlenségek átalakítása

Ha $f(x) < g(x)$, akkor $f(x) + c < g(x) + c$.
Ha $f(x) < g(x)$ és $c > 0$, akkor $cf(x) < cg(x)$.
Ha $f(x) < g(x)$ és $c < 0$, akkor $cf(x) > cg(x)$.

Nevezetes közepek

	Két szám esetén $(x, y \in \mathbb{R}^+)$	**Több szám esetén** $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+)$
Számtani közép (aritmetikai közép)	$A(x;y) = \frac{x+y}{2}$	$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
Mértani közép (geometriai közép)	$G(x;y) = \sqrt{x \cdot y}$	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
Négyzetes közép (kvadratikus közép)	$Q(x;y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$	$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$
Harmonikus közép	$H(x;y) = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$	$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$
***k*-adik hatvány-közép**	$Q_k(x;y) = \sqrt[k]{\frac{x^k+y^k}{2}}$	$Q_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n}}$
Súlyozott számtani közép	$A^* = \frac{p_1 x + p_2 y}{p_1 + p_2}$, ahol $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$	$A^* = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$, ahol $p_1, p_2, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$

KIEGÉSZÍTÉS

A közepek között fennálló nevezetes egyenlőtlenségek

Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok és $k \geq 2$ esetén teljesül, hogy

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq Q_k \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Bármely kettő között az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Sorozatok

Definíciók, jelölések

A pozitív egész számok halmazán értelmezett olyan függvényeket, amelyeknek értékkészlete valós számokból áll, számsorozatoknak nevezzük.
Általában a sorozat első tagját a_1-gyel (b_1-gyel, c_1-gyel stb.), n-edik tagját a_n-nel (b_n-nel, c_n-nel stb.), a sorozat első n tagjának az összegét S_n-nel jelöljük.

Speciális sorozatok és sorok

Számtani és mértani sorozatok

	Számtani sorozat	Mértani sorozat
Sorozat jellemzője	A második tagtól kezdve bármely tag és az azt megelőző tag különbsége állandó.	A második tagtól kezdve bármely tag és az azt megelőző tag hányadosa állandó.
Állandó	$d = a_{n+1} - a_n$ $(n \geq 1)$ állandó. Ez a sorozat különbsége (differenciája).	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ állandó. Ez a sorozat hányadosa (kvóciense) $(q \neq 0)$.
Általános elem	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Közepek	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $(n > 1)$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, $(n > 1)$
Összeg	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{ha } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n, & \text{ha } q = 1 \end{cases}$

Mértani sor

Egy mértani sorozat tagjaiból képezett $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ végtelen összeget mértani sornak nevezzük.

A mértani sort konvergensnek mondjuk, ha az $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ részletösszeg-sorozat konvergens. Az S_n részletösszeg-sorozat határértékét ekkor a mértani sor összegének nevezzük.

A mértani sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, ekkor összege:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Harmonikus sor

Az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ sort harmonikus sornak nevezzük. A harmonikus sor divergens.

Az első *n* pozitív egész szám hatványainak összege

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Kamatszámítás

Kamat, diszkont

Jelölések: $p\%$: a kamatláb értéke

n: az időszakok száma évben (időegységben)

A befizetések az év (időszak) elején, a kifizetések az év (időszak) végén történnek.

Kamattényező: $q=1+\frac{p}{100}$

Folyamat	Kiszámítási mód
Tőke kamatos kamattal növelt értéke: Egy adott időpontban T_0 tőke kerül a bankba, amely n éven (időszakon) keresztül növekszik, a pénzhez se hozzá nem tesznek, se el nem vesznek. Az n-edik év elteltével a tőke megnövekedett értéke T_n.	$T_n=T_0\cdot q^n$
Azonos összegű befizetések kamatos kamattal növelt értéke (gyűjtőjáradék): n éven keresztül minden év (időszak) elején a összeget helyezünk a bankba kamatos kamatra. A tőke n-edik év végére felnövekedett értéke S_n.	$S_n=aq\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$
Hitel törlesztőrészlete: T összegű hitelt vettünk fel a bankból, melyet n éven (időszakon) át törlesztünk, az évek (időszakok) végén fizetve azonos összegeket. Az egy alkalommal fizetendő törlesztőrészlet értéke A.	$A=T\cdot\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}=T\cdot\frac{q^n\frac{p}{100}}{q^n-1}$

KIEGÉSZÍTÉS

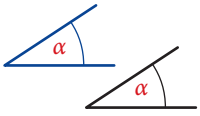
Diszkonttényező: $d=\frac{100}{100+p}=\frac{1}{q}$ Diszkontált érték: $T_0=T_n\cdot d^n$

Geometria

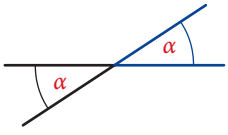
Síkbeli alakzatok

Szögpárok

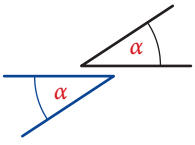
Egyállású szögek



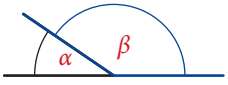
Csúcsszögek



Váltószögek

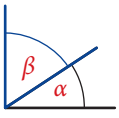


Mellékszögek



$\alpha + \beta = 180°$

Pótszögek

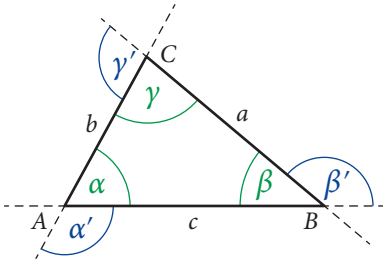


$\alpha + \beta = 90°$

Sokszögek szögei, oldalai

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

Oldalak: a, b, c
Belső szögek: α, β, γ
Külső szögek: α', β', γ'



Egy háromszögben bármely két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza, és bármely két oldal hosszának az eltérése kisebb, mint a harmadik oldal hossza.

$$a + b > c \qquad |a - b| < c$$
$$b + c > a \qquad |b - c| < a$$
$$c + a > b \qquad |c - a| < b$$

A háromszög belső szögeinek az összege 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

A háromszög külső szögeinek az összege 360°.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$$

A háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \gamma + \alpha, \quad \gamma' = \alpha + \beta.$$

A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik és viszont.

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

Négyszögek, sokszögek szögeivel, átlóival kapcsolatos összefüggések

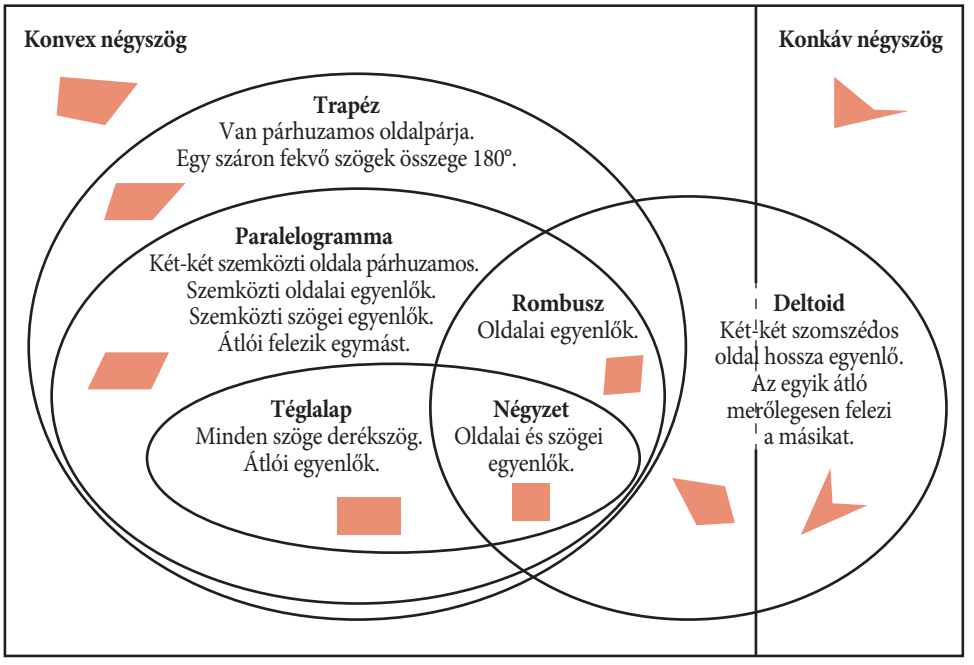
A négyszögek belső szögeinek összege 360°.

Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.

Tetszőleges oldalszámú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

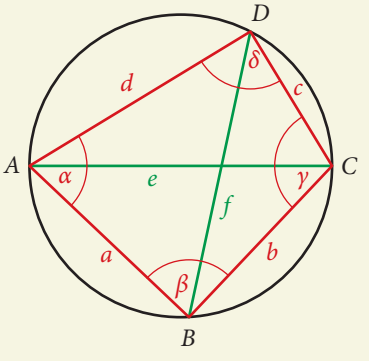
Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

Nevezetes négyszögek



Húrnégyszög

Húrnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek van körülírt köre (tehát van olyan kör, melyre a négyszög összes csúcsa illeszkedik).



Húrnégyszögek tétele

Egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.

$\alpha+\gamma=180°, \quad \beta+\delta=180°.$

Ptolemaiosz tétele

Bármely húrnégyszögben igaz, hogy a szemközti oldalak szorzatainak összege egyenlő az átlók szorzatával.

$ac+bd=ef$

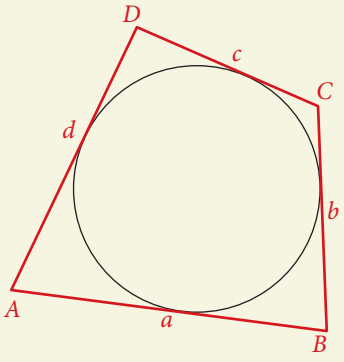
Érintőnégyszög

Érintőnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt köre (tehát van olyan kör, melynek a négyszög összes oldala érintője).

Érintőnégyszögek tétele

Egy négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha konvex és szemközti oldalainak összege egyenlő.

$a + c = b + d$

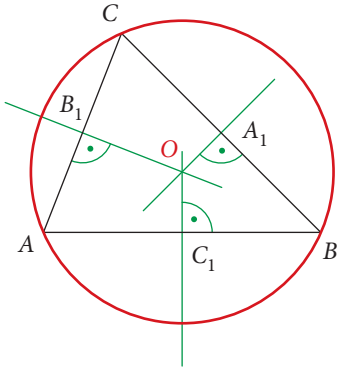


A háromszög nevezetes pontjai és vonalai

Oldalfelező merőleges, körülírt kör

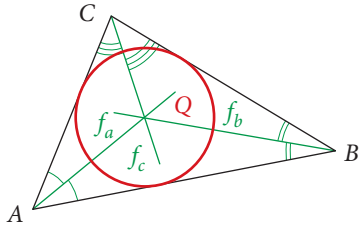
A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távolságra helyezkedik el a csúcspontoktól, tehát a háromszög körülírt körének középpontja.

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$



Szögfelező, beírt kör

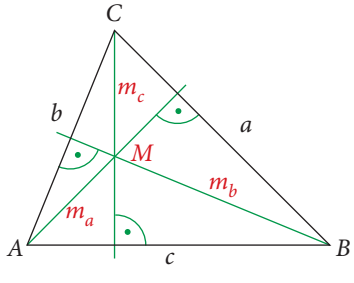
A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távolságra helyezkedik el a háromszög oldalegyeneseitől, tehát a háromszög beírható körének középpontja.



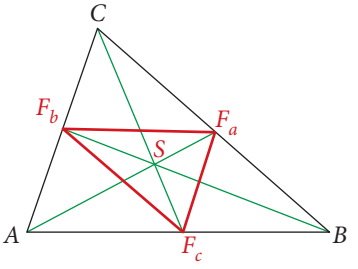
Magasságvonal, magasságpont

A háromszög magasságvonala az egyik csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges egyenes. Magasság alatt az egyik csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakaszt értjük.

A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög magasságpontja.



Középvonal, súlyvonal, súlypont



A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük. A középvonal párhuzamos a harmadik oldallal és a hossza ezen oldal hosszának a fele.

$$\overline{F_aF_b} \parallel \overline{AB}, \quad \overline{F_aF_b} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

A háromszög súlyvonala az egyik csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

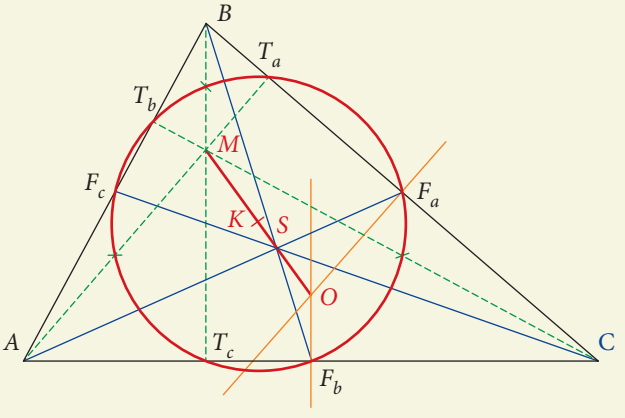
A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, és ez a pont a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadolópontja. A metszéspontot súlypontnak nevezzük.

$$\frac{\overline{F_aS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{F_bS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{F_cS}}{\overline{SC}} = \frac{1}{2}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Euler-egyenes, Feuerbach-kör

A háromszög M magasságpontja, S súlypontja és a köréírt kör O középpontja egy egyenesen van. Ezt az egyenest a háromszög Euler-egyenesének nevezzük. Az S pont az $\overline{MO}$ szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja. Ha a háromszög szabályos, akkor a három pont (M, S, O) egybeesik. Ekkor bármely ezt a pontot tartalmazó egyenes Euler-egyenes.



A háromszög oldalfelező pontjai, magasságtalppontjai, továbbá a magasságpont és a csúcsok által meghatározott szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. Ezt a kört a háromszög Feuerbach-körének nevezzük. E kör középpontja az $\overline{MO}$ szakasz felezőpontja, sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele.

Fontosabb elemi geometriai összefüggések

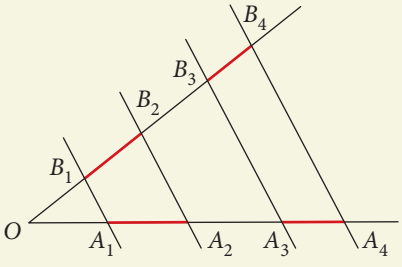
Háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapesetei

Két háromszög	
EGYBEVÁGÓ,	**HASONLÓ,**
ha oldalaik hossza rendre megegyezik.	ha oldalaik aránya rendre megegyezik.
ha két-két oldaluk egyenlő hosszú, és az ezek által közrezárt szögek egyező nagyságúak.	ha két-két oldaluk aránya egyenlő, és az azok által közrezárt szögek egyező nagyságúak.
ha két-két oldaluk egyenlő hosszú, és a nagyobbikkal szemközti szögek egyező nagyságúak.	ha két-két oldaluk aránya egyenlő, és a nagyobbikkal szemközti szögek egyező nagyságúak.
ha egy-egy oldaluk egyenlő hosszú, és a rajtuk fekvő két-két szög nagysága rendre megegyezik.	ha két-két szög nagysága rendre megegyezik.

Párhuzamos szelők tétele

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_3A_4}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_3B_4}}$$



A tétel megfordítása:
Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek az aránya mind a két száron ugyanakkora, akkor a két egyenes párhuzamos.

Párhuzamos szelőszakaszok tétele: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}}$

Pitagorasz-tétel

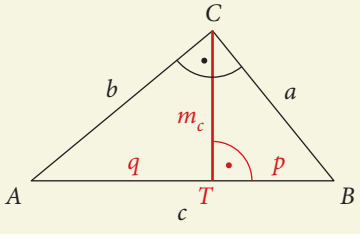
Bármely derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

$a^2 + b^2 = c^2$

A tétel megfordítása:
Ha egy háromszög valamelyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldalának négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

Befogótétel

A derékszögű háromszög befogója mértani közép az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete között. $a^2 = pc$ $b^2 = qc$



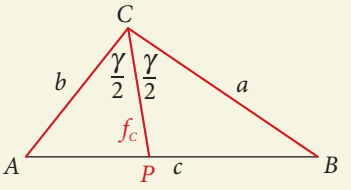
Magasságtétel

A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két részre osztja. Az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe e két rész hosszának. $m_c^2 = pq$

Szögfelezőtétel

A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja.

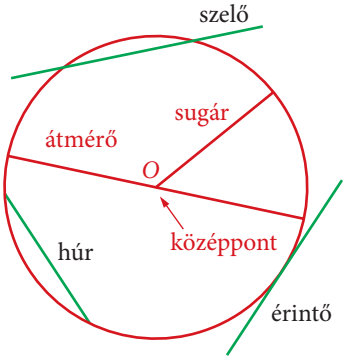
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{b}{a}$$



A kör

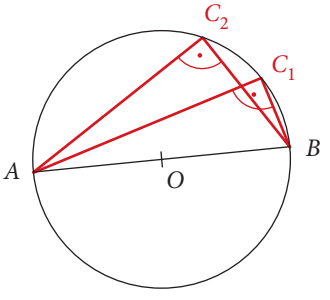
A kör azon pontok halmaza a síkban, melyek a sík egy pontjától egyenlő távolságra helyezkednek el.

Az adott pontot középpontnak, a távolságot sugárnak nevezzük, a sugarat általában *r*-rel vagy *R*-rel jelöljük.



Thalész tétele

Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör egy tetszőleges, az átmérő végpontjaitól különböző pontjával, akkor egy olyan derékszögű háromszöget kapunk, melyben az átmérő az átfogó.



A tétel megfordítása különböző megfogalmazásokban

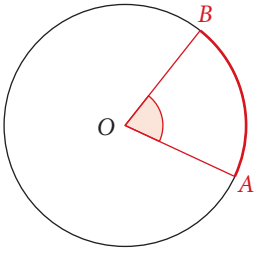
Derékszögű háromszögben a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja.

Azon pontok halmaza a síkon, melyekből egy adott szakasz derékszögben látszik, egy olyan kör, melynek az adott szakasz az átmérője (a szakasz két végpontját kivéve).

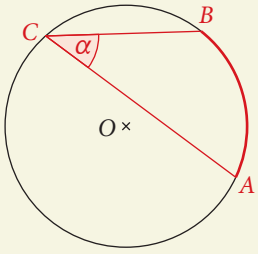
Thalész-kör: a szakasz mint átmérő fölé rajzolt kör.

Kerületi és középponti szögek

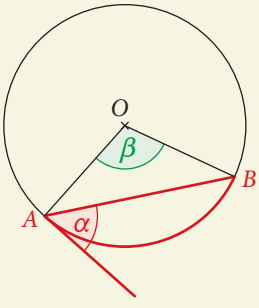
A kör egy *AB* ívéhez tartozó középponti szög az, melynek csúcsa a kör *O* középpontja, szárai az *OA* és *OB* szakaszok, és tartalmazza az *AB* ívet.



Egy kör A és B pontjából a szintén a körön lévő C pontba húzott húrok által bezárt α szög a kör kerületén nyugvó szög, rövidebben az AB ívhez tartozó kerületi szög.



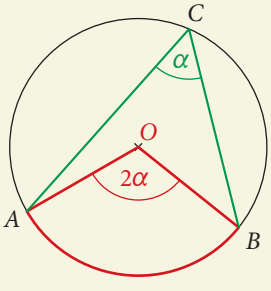
Ha egy konvex szög egyik szára a kör AB húrja, másik szára pedig a kör A pontbeli érintője, akkor ezt érintő szárú kerületi szögnek nevezzük.



Egy körben bármely kerületi szög feleakkora, mint az ugyanazon az íven nyugvó középponti szög.

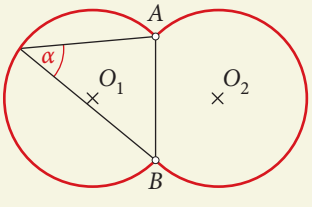
Következmények:

- Egy körben az egyenlő hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők (kerületi szögek tétele).
- Egy körben az egyenlő kerületi szögekhez tartozó ívek egyenlő hosszúak.



Látókörív

Adott a síkban egy α konvex szög és egy AB szakasz. Ekkor azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyekből az AB szakasz α szögben látszik: két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus körív, amelynek A és B nem eleme.

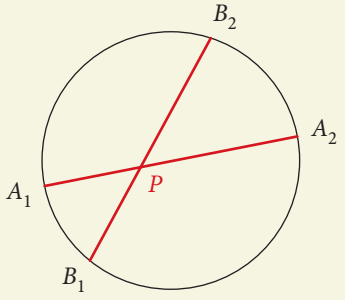


KIEGÉSZÍTÉS

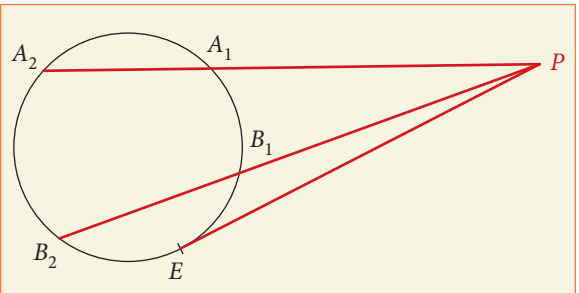
Apolloniusz tétele

Adott a síkon egy szakasz, és egy 1-től különböző állandó (λ). Ekkor azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek a szakasz két végpontjától mért távolságának aránya λ, egy kör.

Szelőszakaszok, érintőszakaszok, húrdarabok



$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2}$



$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} = \overline{PE}^2$

Síkidomok kerülete, területe

Háromszög

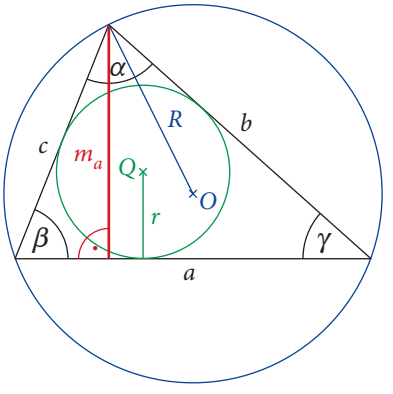
$$K = a + b + c = 2s$$

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$$

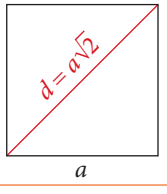
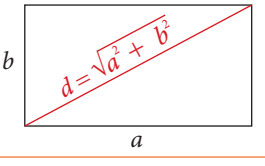
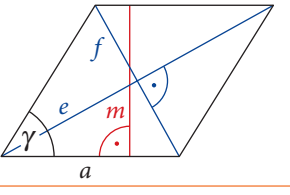
$$T = \frac{abc}{4R}$$

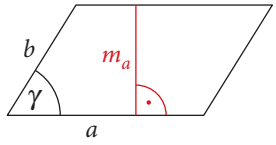
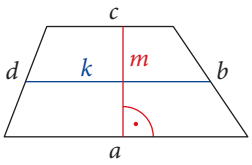
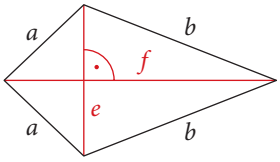
$$T = sr \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

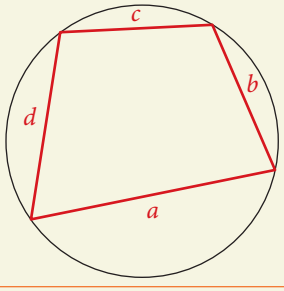
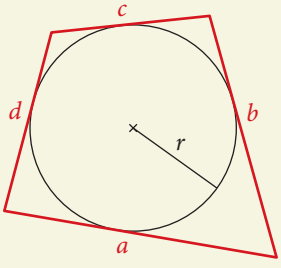
Héron-képlet: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



Négyszögtípusok

Négyzet	Téglalap	Rombusz
		
$K = 4a$ $T = a^2$	$K = 2(a+b)$ $T = ab$	$K = 4a$ $T = am = \frac{ef}{2} = a^2 \cdot \sin\gamma$

Paralelogramma	Trapéz	Deltoid
		
$K = 2(a+b)$ $T = am_a = ab \cdot \sin\gamma$	$K = a+b+c+d$ $T = \frac{a+c}{2} \cdot m = k \cdot m$	$K = 2(a+b)$ $T = \frac{ef}{2}$

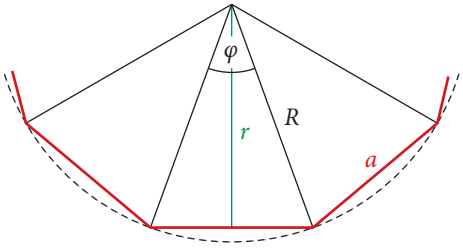
Húrnégyszög	Érintőnégyszög
	
$K = a+b+c+d = 2s$ $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$	$K = a+b+c+d = 2s$ $T = sr$

Szabályos sokszögek

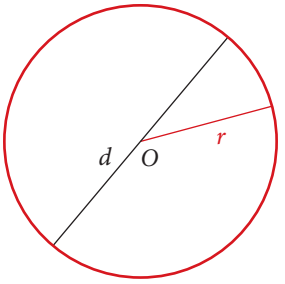
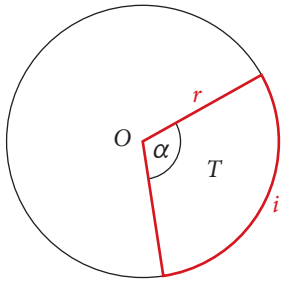
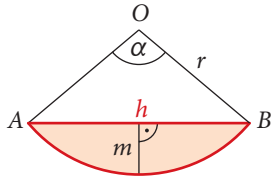
$$K = na$$

$$T = \frac{1}{2}nar = n \cdot \frac{R^2 \sin\varphi}{2} =$$

$$= n \cdot \frac{a^2}{4\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$



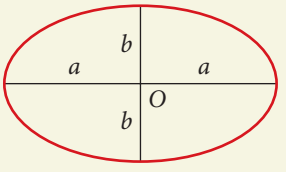
Kör és részei

Kör	Körcikk	Körszelet
		
$K = 2r\pi$ $T = r^2\pi$	$i = 2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = r\hat{\alpha}$ $T = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{ri}{2} = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2}$ α: a szög fokban mért értéke $\hat{\alpha}$: a szög radiánban mért értéke	$T = T_{\text{cikk}} - T_{OAB}$ $T = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin\alpha}{2}$ $T = \frac{1}{2}r^2(\hat{\alpha} - \sin\alpha)$ $h = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $m = r - r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

KIEGÉSZÍTÉS

Ellipszis

$T = ab\pi$



Hasonló síkidomok területe

Ha S és S' egymáshoz hasonló síkidomok, és S-ből az S' egy λ arányú hasonlósági transzformációval kapható, akkor S' és S területének aránya:

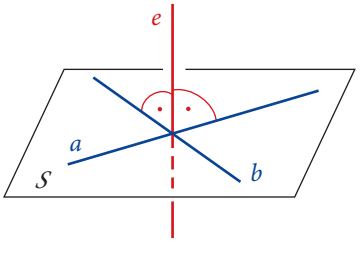
$$\frac{T_{S'}}{T_S} = \lambda^2$$

Fontosabb térgeometriai fogalmak és tételek

Sík és egyenes merőlegessége, síkra merőleges egyenes tétele

$a \perp e$
$b \perp e$

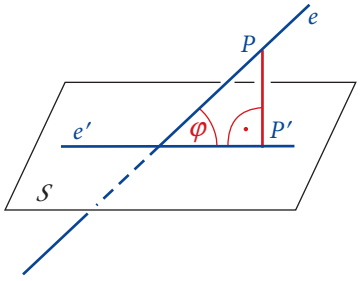
Az e egyenes merőleges az S síkra, ha e merőleges az S sík összes egyenesére.
Ha az e egyenes merőleges egy S sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor e merőleges S bármely egyenesére is.



Egyenes és sík hajlásszöge

e és S hajlásszöge: φ.

Ha egy egyenes nem merőleges egy síkra, akkor az egyenesnek és a síkra eső merőleges vetületének a hajlásszögét az egyenes és a sík hajlásszögének nevezzük.



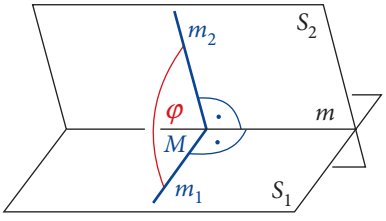
Két sík hajlásszöge

$m_1 \multimap S_1,\ m_1 \perp m$

$m_2 \multimap S_2,\ m_2 \perp m$

A síkok hajlásszöge: φ.

A két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában a síkokon belül a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszöge adja a két sík hajlásszögét.

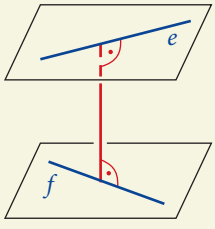


Két párhuzamos sík távolsága

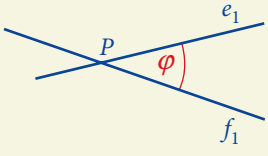
Két párhuzamos sík távolsága a két síkot összekötő, a síkokra merőleges szakasz (normáltranszverzális) hossza.

Kitérő egyenesek távolsága és szöge

Az e és f kitérő egyenesek távolsága a rájuk illeszkedő egymással párhuzamos síkok távolsága.



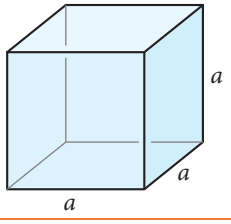
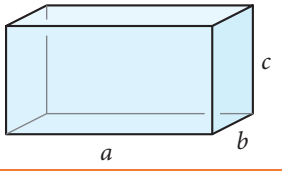
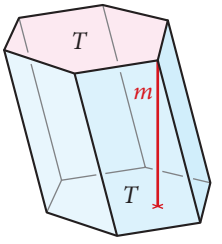
Az e és f kitérő egyenesek szögén a tér egy tetszőleges P pontján átmenő, e-vel és f-fel párhuzamos e_1 és f_1 egyenesek hajlásszögét értjük.

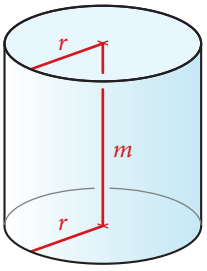
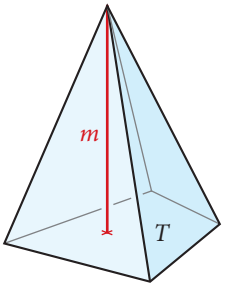
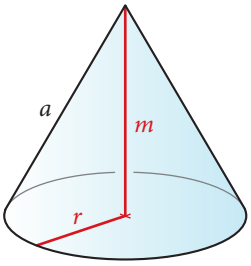


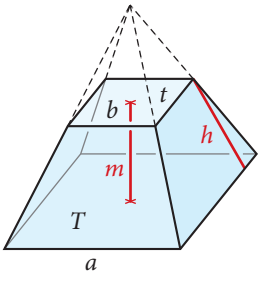
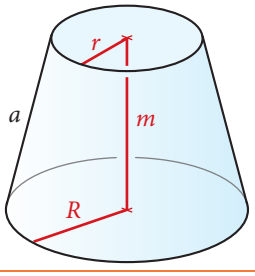
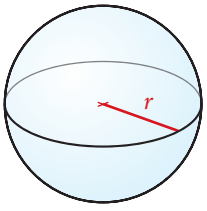
Testek felszíne, térfogata

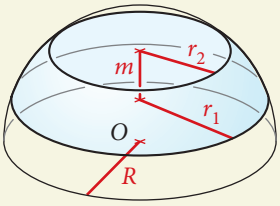
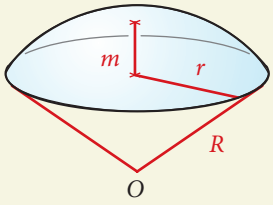
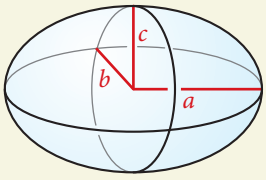
A táblázat egészében érvényes jelölések:

- T: alaplap területe
- t: fedőlap területe
- P: palást területe (az oldallapok területeinek összege)
- m: magasság
- A: a test felszíne
- V: a test térfogata

Kocka	Téglatest	Hasáb
		
$V = a^3$ $A = 6a^2$	$V = abc$ $A = 2(ab + ac + bc)$	$V = Tm$ $A = 2T + P$

Forgáshenger	Gúla	Forgáskúp
		
$V = r^2\pi m$ $A = 2r^2\pi + 2r\pi m$	$V = \frac{Tm}{3}$ $A = T + P$	$V = \frac{r^2\pi m}{3}$ $A = r^2\pi + r\pi a$

Csonkagúla	Csonkakúp	Gömb
		
$V = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right)$ $A = T + t + P$	$V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ $A = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)a\pi$	$V = \frac{4r^3\pi}{3}$ $A = 4r^2\pi$

Gömböv, gömbréteg	Gömbsüveg, gömbszelet, gömbcikk	Ellipszoid
		
Gömböv: $A = 2R\pi m$ Gömbréteg: $V = \frac{\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + m^2\right)m\pi}{6}$	Gömbsüveg: $A = 2R\pi m$ Gömbszelet: $V = Rm^2\pi - \frac{m^3\pi}{3}$ Gömbcikk: $A = 2R\pi m + Rr\pi$ $V = \frac{2R^2 m\pi}{3}$	$V = \frac{4abc\pi}{3}$

Hasonló testek felszíne, térfogata

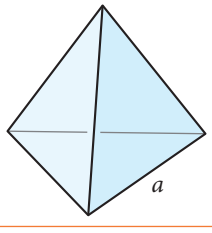
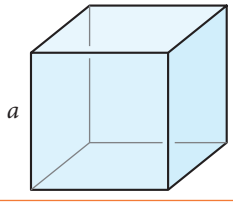
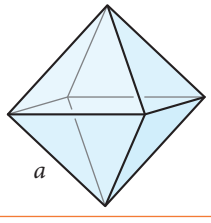
Ha T és T' egymáshoz hasonló testek, és T-ből a T' test egy λ arányú hasonlósági transzformációval kapható, akkor T' és T térfogatának aránya λ^3, felszínük aránya pedig λ^2.

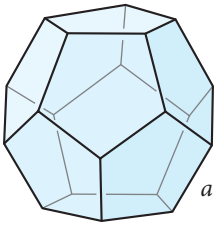
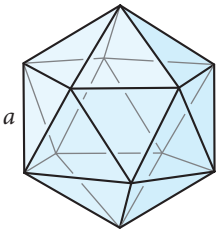
$$\frac{V_{T'}}{V_T} = \lambda^3, \qquad \frac{A_{T'}}{A_T} = \lambda^2$$

Szabályos testek

A táblázat jelölései:

lapok száma: l
élek száma: e
csúcsok száma: c

Tetraéder	Hexaéder (kocka)	Oktaéder
		
$l = 4, c = 4, e = 6$	$l = 6, c = 8, e = 12$	$l = 8, c = 6, e = 12$
$A = a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$A = 6a^2$ $V = a^3$	$A = 2\sqrt{3}\,a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}$

Dodekaéder	Ikozaéder
	
$l = 12,\ c = 20,\ e = 30$	$l = 20,\ c = 12,\ e = 30$
$A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ $V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}$	$A = 5a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3(15 + 5\sqrt{5})}{12}$

KIEGÉSZÍTÉS

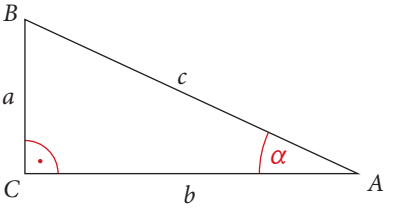
Euler-féle poliédertétel

Egyszerű poliéderek esetén:
$c + l = e + 2$

Trigonometria

Szögfüggvények derékszögű háromszögben

$ABC\triangle$ α hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

KIEGÉSZÍTÉS

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

Derékszög, tompaszögek szögfüggvényei

Derékszög szögfüggvényei

$\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, és tg 90°-ot nem értelmezzük.

KIEGÉSZÍTÉS

$\text{ctg}\,90° = 0$

Tompaszögek szögfüggvényei

Egy α tompaszög szögfüggvényei a következő módon származtathatók hegyesszögek szögfüggvényeiből:

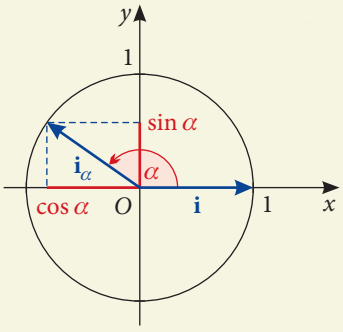
$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$; $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$;

KIEGÉSZÍTÉS

$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(180° - \alpha)$; $\text{ctg}\,\alpha = -\text{ctg}\,(180° - \alpha)$

Tetszőleges forgásszögek szögfüggvényei

Legyen adott egy α (előjeles) forgásszög, forgassuk el az **i** bázisvektort az origó körül α-val pozitív irányba. Jelölje az elforgatott képet $\mathbf{i}_\alpha$.



$\sin\alpha$: $\mathbf{i}_\alpha$ második koordinátája

$\cos\alpha$: $\mathbf{i}_\alpha$ első koordinátája

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

KIEGÉSZÍTÉS

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \alpha \neq 0 + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

7. táblázat

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

KIEGÉSZÍTÉS

ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

KIEGÉSZÍTÉS

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

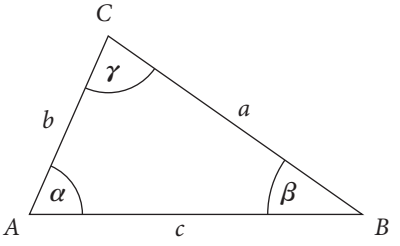
Háromszögekre vonatkozó trigonometrikus tételek

Szinusztétel

A háromszög oldalainak aránya megegyezik az oldalakkal szemközti szögek szinuszainak arányával.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



Körülírt kör sugarára (R) vonatkozó összefüggés:

$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha$$

Koszinusztétel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

A háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegéből levonva ezeknek az oldalaknak és a közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát.

Összefüggések két szög szögfüggvényei között

Addíciós tételek

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	KIEGÉSZÍTÉS $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$

Két szögfüggvény összegének szorzattá alakítása

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$	$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$	$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ KIEGÉSZÍTÉS
$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$	$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Többszörös és félszögek szögfüggvénye

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	KIEGÉSZÍTÉS $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\left\lvert\sin\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\left\lvert\cos\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$	KIEGÉSZÍTÉS $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
$\left\lvert\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Trigonometrikus egyenletek megoldásánál használt összefüggések

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

KIEGÉSZÍTÉS

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Szögek szögfüggvényei

Szögek szinusza és koszinusza

8. táblázat

sin 0°–45°

sin	0’	15’	30’	45’	60’	
0°	0,0000	0,0044	0,0087	0,0131	0,0175	89°
1°	0,0175	0,0218	0,0262	0,0305	0,0349	88°
2°	0,0349	0,0393	0,0436	0,0480	0,0523	87°
3°	0,0523	0,0567	0,0610	0,0654	0,0698	86°
4°	0,0698	0,0741	0,0785	0,0828	0,0872	85°
5°	0,0872	0,0915	0,0958	0,1002	0,1045	84°
6°	0,1045	0,1089	0,1132	0,1175	0,1219	83°
7°	0,1219	0,1262	0,1305	0,1349	0,1392	82°
8°	0,1392	0,1435	0,1478	0,1521	0,1564	81°
9°	0,1564	0,1607	0,1650	0,1693	0,1736	80°
10°	0,1736	0,1779	0,1822	0,1865	0,1908	79°
11°	0,1908	0,1951	0,1994	0,2036	0,2079	78°
12°	0,2079	0,2122	0,2164	0,2207	0,2250	77°
13°	0,2250	0,2292	0,2334	0,2377	0,2419	76°
14°	0,2419	0,2462	0,2504	0,2546	0,2588	75°
15°	0,2588	0,2630	0,2672	0,2714	0,2756	74°
16°	0,2756	0,2798	0,2840	0,2882	0,2924	73°
17°	0,2924	0,2965	0,3007	0,3049	0,3090	72°
18°	0,3090	0,3132	0,3173	0,3214	0,3256	71°
19°	0,3256	0,3297	0,3338	0,3379	0,3420	70°
20°	0,3420	0,3461	0,3502	0,3543	0,3584	69°
21°	0,3584	0,3624	0,3665	0,3706	0,3746	68°
22°	0,3746	0,3786	0,3827	0,3867	0,3907	67°
23°	0,3907	0,3947	0,3987	0,4027	0,4067	66°
24°	0,4067	0,4107	0,4147	0,4187	0,4226	65°
25°	0,4226	0,4266	0,4305	0,4344	0,4384	64°
26°	0,4384	0,4423	0,4462	0,4501	0,4540	63°
27°	0,4540	0,4579	0,4617	0,4656	0,4695	62°
28°	0,4695	0,4733	0,4772	0,4810	0,4848	61°
29°	0,4848	0,4886	0,4924	0,4962	0,5000	60°
30°	0,5000	0,5038	0,5075	0,5113	0,5150	59°
31°	0,5150	0,5188	0,5225	0,5262	0,5299	58°
32°	0,5299	0,5336	0,5373	0,5410	0,5446	57°
33°	0,5446	0,5483	0,5519	0,5556	0,5592	56°
34°	0,5592	0,5628	0,5664	0,5700	0,5736	55°
35°	0,5736	0,5771	0,5807	0,5842	0,5878	54°
36°	0,5878	0,5913	0,5948	0,5983	0,6018	53°
37°	0,6018	0,6053	0,6088	0,6122	0,6157	52°
38°	0,6157	0,6191	0,6225	0,6259	0,6293	51°
39°	0,6293	0,6327	0,6361	0,6394	0,6428	50°
40°	0,6428	0,6461	0,6494	0,6528	0,6561	49°
41°	0,6561	0,6593	0,6626	0,6659	0,6691	48°
42°	0,6691	0,6724	0,6756	0,6788	0,6820	47°
43°	0,6820	0,6852	0,6884	0,6915	0,6947	46°
44°	0,6947	0,6978	0,7009	0,7040	0,7071	45°
	60’	45’	30’	15’	0’	cos

cos 45°–90°

sin 45°–90°

sin	0’	15’	30’	45’	60’	
45°	0,7071	0,7102	0,7133	0,7163	0,7193	44°
46°	0,7193	0,7224	0,7254	0,7284	0,7314	43°
47°	0,7314	0,7343	0,7373	0,7402	0,7431	42°
48°	0,7431	0,7461	0,7490	0,7518	0,7547	41°
49°	0,7547	0,7576	0,7604	0,7632	0,7660	40°
50°	0,7660	0,7688	0,7716	0,7744	0,7771	39°
51°	0,7771	0,7799	0,7826	0,7853	0,7880	38°
52°	0,7880	0,7907	0,7934	0,7960	0,7986	37°
53°	0,7986	0,8013	0,8039	0,8064	0,8090	36°
54°	0,8090	0,8116	0,8141	0,8166	0,8192	35°
55°	0,8192	0,8216	0,8241	0,8266	0,8290	34°
56°	0,8290	0,8315	0,8339	0,8363	0,8387	33°
57°	0,8387	0,8410	0,8434	0,8457	0,8480	32°
58°	0,8480	0,8504	0,8526	0,8549	0,8572	31°
59°	0,8572	0,8594	0,8616	0,8638	0,8660	30°
60°	0,8660	0,8682	0,8704	0,8725	0,8746	29°
61°	0,8746	0,8767	0,8788	0,8809	0,8829	28°
62°	0,8829	0,8850	0,8870	0,8890	0,8910	27°
63°	0,8910	0,8930	0,8949	0,8969	0,8988	26°
64°	0,8988	0,9007	0,9026	0,9045	0,9063	25°
65°	0,9063	0,9081	0,9100	0,9118	0,9135	24°
66°	0,9135	0,9153	0,9171	0,9188	0,9205	23°
67°	0,9205	0,9222	0,9239	0,9255	0,9272	22°
68°	0,9272	0,9288	0,9304	0,9320	0,9336	21°
69°	0,9336	0,9351	0,9367	0,9382	0,9397	20°
70°	0,9397	0,9412	0,9426	0,9441	0,9455	19°
71°	0,9455	0,9469	0,9483	0,9497	0,9511	18°
72°	0,9511	0,9524	0,9537	0,9550	0,9563	17°
73°	0,9563	0,9576	0,9588	0,9600	0,9613	16°
74°	0,9613	0,9625	0,9636	0,9648	0,9659	15°
75°	0,9659	0,9670	0,9681	0,9692	0,9703	14°
76°	0,9703	0,9713	0,9724	0,9734	0,9744	13°
77°	0,9744	0,9753	0,9763	0,9772	0,9781	12°
78°	0,9781	0,9790	0,9799	0,9808	0,9816	11°
79°	0,9816	0,9825	0,9833	0,9840	0,9848	10°
80°	0,9848	0,9856	0,9863	0,9870	0,9877	9°
81°	0,9877	0,9884	0,9890	0,9897	0,9903	8°
82°	0,9903	0,9909	0,9914	0,9920	0,9925	7°
83°	0,9925	0,9931	0,9936	0,9941	0,9945	6°
84°	0,9945	0,9950	0,9954	0,9958	0,9962	5°
85°	0,9962	0,9966	0,9969	0,9973	0,9976	4°
86°	0,9976	0,9979	0,9981	0,9984	0,9986	3°
87°	0,9986	0,9988	0,9990	0,9992	0,9994	2°
88°	0,9994	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	1°
89°	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	0°
	60’	45’	30’	15’	0’	cos

cos 0°–45°

Szögek tangense és kotangense

9. táblázat

tg 0°–45°

tg	0’	15’	30’	45’	60’	
0°	0,0000	0,0044	0,0087	0,0131	0,0175	89°
1°	0,0175	0,0218	0,0262	0,0306	0,0349	88°
2°	0,0349	0,0393	0,0437	0,0480	0,0524	87°
3°	0,0524	0,0568	0,0612	0,0655	0,0699	86°
4°	0,0699	0,0743	0,0787	0,0831	0,0875	85°
5°	0,0875	0,0919	0,0963	0,1007	0,1051	84°
6°	0,1051	0,1095	0,1139	0,1184	0,1228	83°
7°	0,1228	0,1272	0,1317	0,1361	0,1405	82°
8°	0,1405	0,1450	0,1495	0,1539	0,1584	81°
9°	0,1584	0,1629	0,1673	0,1718	0,1763	80°
10°	0,1763	0,1808	0,1853	0,1899	0,1944	79°
11°	0,1944	0,1989	0,2035	0,2080	0,2126	78°
12°	0,2126	0,2171	0,2217	0,2263	0,2309	77°
13°	0,2309	0,2355	0,2401	0,2447	0,2493	76°
14°	0,2493	0,2540	0,2586	0,2633	0,2679	75°
15°	0,2679	0,2726	0,2773	0,2820	0,2867	74°
16°	0,2867	0,2915	0,2962	0,3010	0,3057	73°
17°	0,3057	0,3105	0,3153	0,3201	0,3249	72°
18°	0,3249	0,3298	0,3346	0,3395	0,3443	71°
19°	0,3443	0,3492	0,3541	0,3590	0,3640	70°
20°	0,3640	0,3689	0,3739	0,3789	0,3839	69°
21°	0,3839	0,3889	0,3939	0,3990	0,4040	68°
22°	0,4040	0,4091	0,4142	0,4193	0,4245	67°
23°	0,4245	0,4296	0,4348	0,4400	0,4452	66°
24°	0,4452	0,4505	0,4557	0,4610	0,4663	65°
25°	0,4663	0,4716	0,4770	0,4823	0,4877	64°
26°	0,4877	0,4931	0,4986	0,5040	0,5095	63°
27°	0,5095	0,5150	0,5206	0,5261	0,5317	62°
28°	0,5317	0,5373	0,5430	0,5486	0,5543	61°
29°	0,5543	0,5600	0,5658	0,5715	0,5774	60°
30°	0,5774	0,5832	0,5890	0,5949	0,6009	59°
31°	0,6009	0,6068	0,6128	0,6188	0,6249	58°
32°	0,6249	0,6310	0,6371	0,6432	0,6494	57°
33°	0,6494	0,6556	0,6619	0,6682	0,6745	56°
34°	0,6745	0,6809	0,6873	0,6937	0,7002	55°
35°	0,7002	0,7067	0,7133	0,7199	0,7265	54°
36°	0,7265	0,7332	0,7400	0,7467	0,7536	53°
37°	0,7536	0,7604	0,7673	0,7743	0,7813	52°
38°	0,7813	0,7883	0,7954	0,8026	0,8098	51°
39°	0,8098	0,8170	0,8243	0,8317	0,8391	50°
40°	0,8391	0,8466	0,8541	0,8617	0,8693	49°
41°	0,8693	0,8770	0,8847	0,8925	0,9004	48°
42°	0,9004	0,9083	0,9163	0,9244	0,9325	47°
43°	0,9325	0,9407	0,9490	0,9573	0,9657	46°
44°	0,9657	0,9742	0,9827	0,9913	1,0000	45°
	60’	45’	30’	15’	0’	ctg

ctg 45°–90°

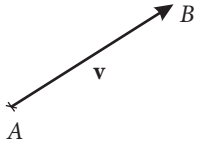
tg 45°–90°

tg	0’	15’	30’	45’	60’	
45°	1,0000	1,0088	1,0176	1,0265	1,0355	44°
46°	1,0355	1,0446	1,0538	1,0630	1,0724	43°
47°	1,0724	1,0818	1,0913	1,1009	1,1106	42°
48°	1,1106	1,1204	1,1303	1,1403	1,1504	41°
49°	1,1504	1,1606	1,1708	1,1812	1,1918	40°
50°	1,1918	1,2024	1,2131	1,2239	1,2349	39°
51°	1,2349	1,2460	1,2572	1,2685	1,2799	38°
52°	1,2799	1,2915	1,3032	1,3151	1,3270	37°
53°	1,3270	1,3392	1,3514	1,3638	1,3764	36°
54°	1,3764	1,3891	1,4019	1,4150	1,4281	35°
55°	1,4281	1,4415	1,4550	1,4687	1,4826	34°
56°	1,4826	1,4966	1,5108	1,5253	1,5399	33°
57°	1,5399	1,5547	1,5697	1,5849	1,6003	32°
58°	1,6003	1,6160	1,6319	1,6479	1,6643	31°
59°	1,6643	1,6808	1,6977	1,7147	1,7321	30°
60°	1,7321	1,7496	1,7675	1,7856	1,8040	29°
61°	1,8040	1,8228	1,8418	1,8611	1,8807	28°
62°	1,8807	1,9007	1,9210	1,9416	1,9626	27°
63°	1,9626	1,9840	2,0057	2,0278	2,0503	26°
64°	2,0503	2,0732	2,0965	2,1203	2,1445	25°
65°	2,1445	2,1692	2,1943	2,2199	2,2460	24°
66°	2,2460	2,2727	2,2998	2,3276	2,3559	23°
67°	2,3559	2,3847	2,4142	2,4443	2,4751	22°
68°	2,4751	2,5065	2,5386	2,5715	2,6051	21°
69°	2,6051	2,6395	2,6746	2,7106	2,7475	20°
70°	2,7475	2,7852	2,8239	2,8636	2,9042	19°
71°	2,9042	2,9459	2,9887	3,0326	3,0777	18°
72°	3,0777	3,1240	3,1716	3,2205	3,2709	17°
73°	3,2709	3,3226	3,3759	3,4308	3,4874	16°
74°	3,4874	3,5457	3,6059	3,6680	3,7321	15°
75°	3,7321	3,7983	3,8667	3,9375	4,0108	14°
76°	4,0108	4,0867	4,1653	4,2468	4,3315	13°
77°	4,3315	4,4194	4,5107	4,6057	4,7046	12°
78°	4,7046	4,8077	4,9152	5,0273	5,1446	11°
79°	5,1446	5,2672	5,3955	5,5301	5,6713	10°
80°	5,6713	5,8197	5,9758	6,1402	6,3138	9°
81°	6,3138	6,4971	6,6912	6,8969	7,1154	8°
82°	7,1154	7,3479	7,5958	7,8606	8,1443	7°
83°	8,1443	8,4490	8,7769	9,1309	9,5144	6°
84°	9,5144	9,9310	10,385	10,883	11,430	5°
85°	11,430	12,035	12,706	13,457	14,301	4°
86°	14,301	15,257	16,350	17,611	19,081	3°
87°	19,081	20,819	22,904	25,452	28,636	2°
88°	28,636	32,730	38,189	45,829	57,290	1°
89°	57,290	76,390	114,59	229,18	–	0°
	60’	45’	30’	15’	0’	ctg

ctg 0°–45°

Vektorok

Jelölések, elnevezések

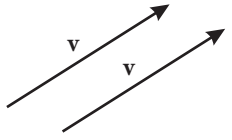


$\overrightarrow{AB}$

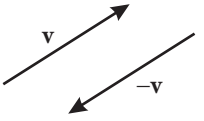
A vektor abszolút értékén a vektor hosszát értjük, jele $|\mathbf{v}|$.

Egységvektor alatt egység hosszúságú vektort értünk.

Egyenlő vektorok



Ellentett vektorok



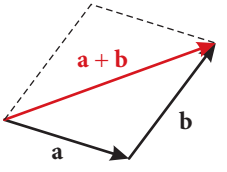
Vektorműveletek

Vektorok összeadása

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

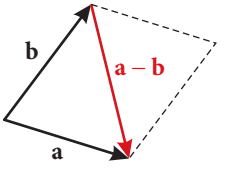
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$



Két vektor különbsége

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

$\big||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\big| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$



Vektor szorzása skalárral

$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$

$|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$

$\mathbf{a}$ és $\lambda\mathbf{a}$ egyirányú, ha $\lambda > 0$

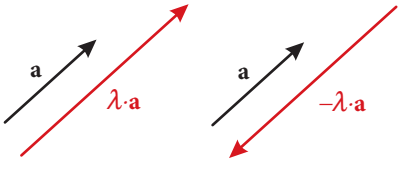
különböző irányú, ha $\lambda < 0$

$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$, ha $\lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a}$

$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\,\mathbf{a})$

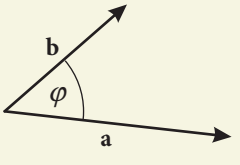


Két vektor skaláris szorzata

$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$

$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

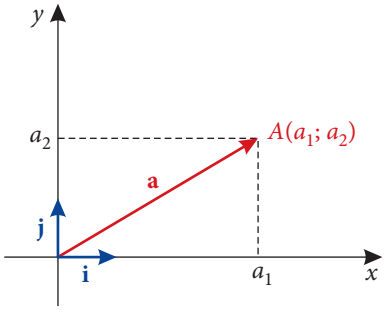


Koordinátageometria

Vektorok koordinátái

i, **j** bázisvektorok (a koordinátatengelyek irányát kijelölő egységvektorok)
Az **a** vektort felírva $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ alakban, az a_1, a_2 számokat az **a** vektor koordinátáinak nevezzük.

$\mathbf{a}(a_1; a_2)$



Műveletek:
$\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

$\lambda\mathbf{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$

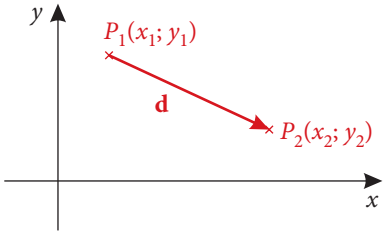
$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Egy koordinátarendszerbeli A pont koordinátáinak az A pontba mutató **a** helyvektor koordinátáit nevezzük.

Két pont távolsága

$$d = \left|\overrightarrow{\mathbf{P_1P_2}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Felezőpont, osztópont koordinátái

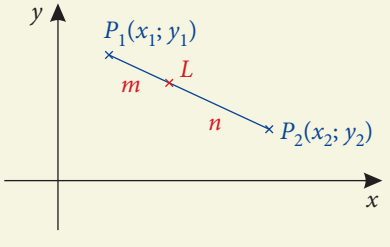
$P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontok.

A P_1P_2 szakasz F felezőpontjának koordinátái:

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

A P_1P_2 szakasz adott arányú osztópontjának koordinátái:

Ha $\overline{P_1L} : \overline{LP_2} = m : n \Rightarrow L\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}; \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$

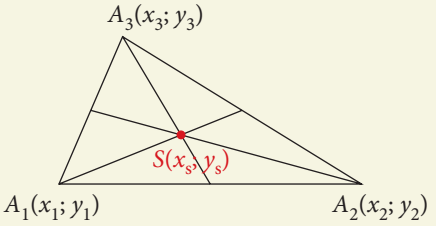


Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és a $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok által bezárt φ szöget megkaphatjuk a skaláris szorzat kétféle felírásából: $\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$.

Háromszög súlypontjának koordinátái

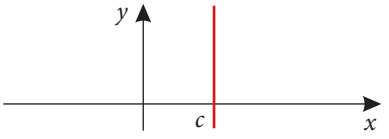
$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$



Egyenes egyenletei

Az *x*-tengelyt a (*c*; 0) pontban merőlegesen metsző egyenes egyenlete $x = c$.

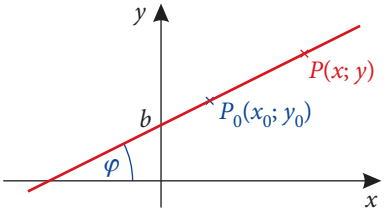


Adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő, *m* iránytangensű egyenes egyenlete

$$\operatorname{tg} \varphi = m$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

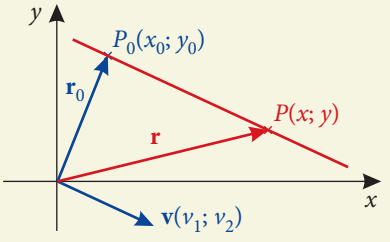
$$y = mx + b$$



Adott $r_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete

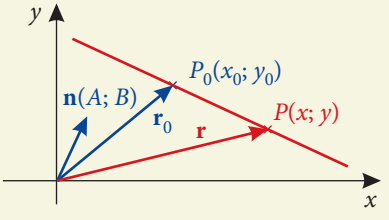
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned}\right\} v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$$



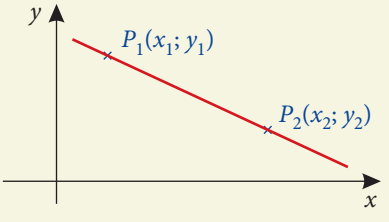
Adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

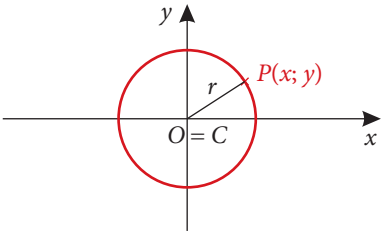


Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete

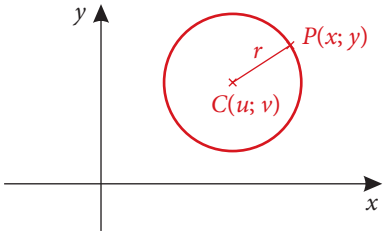
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$



Kör egyenlete



$x^2 + y^2 = r^2$

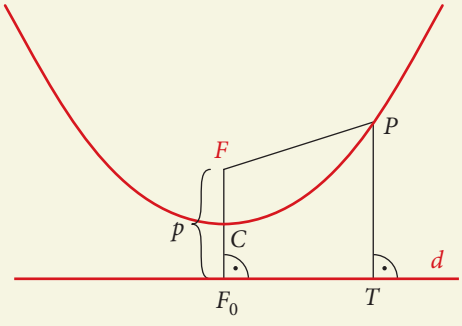


$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

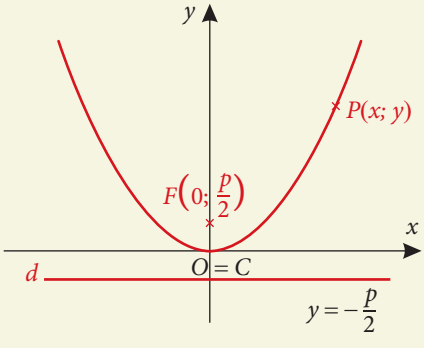
Parabola

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyek a sík egy pontjától és egy a pontra nem illeszkedő egyenesétől egyenlő távolságra helyezkednek el.

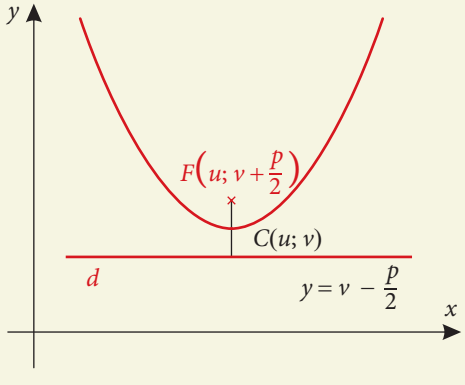
F fókuszpont
d vezéregyenes
C tengelypont
F és d távolsága: p paraméter
$\overline{FP} = \overline{PT}$



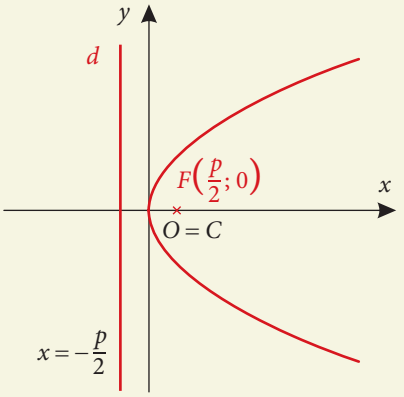
A parabola egyenlete



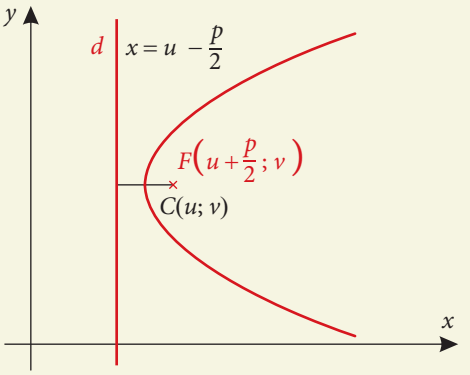
$y = \frac{1}{2p}x^2$



$y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v$



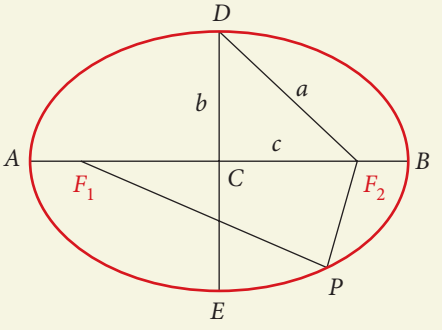
$$x = \frac{1}{2p}y^2$$



$$x = \frac{1}{2p}(y - v)^2 + u$$

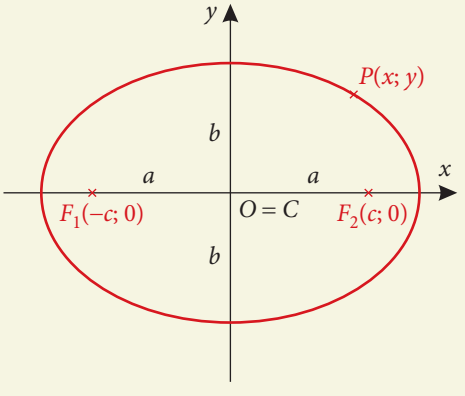
Ellipszis

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyek a sík két adott pontjától mért távolságának az összege – az adott pontok távolságánál nagyobb – állandó.

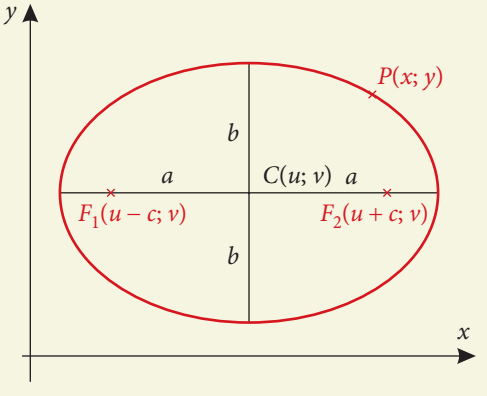


F_1, F_2	fókuszok
C	középpont
$\overline{F_1F_2} = 2c$	fókusztávolság
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a > 2c$	
$\overline{AB} = 2a$	nagytengely
$\overline{ED} = 2b$	kistengely
$a^2 = b^2 + c^2$	

Az ellipszis egyenlete



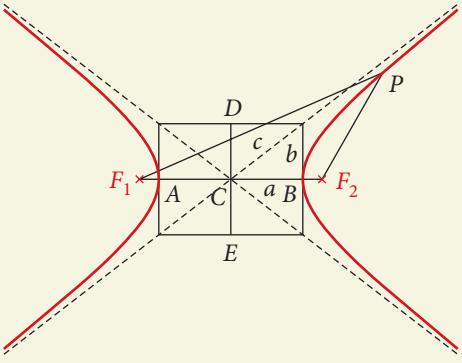
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

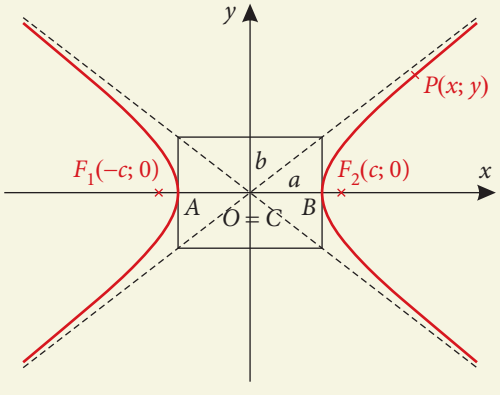
Hiperbola

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyeknek a sík két adott pontjától mért távolságának az eltérése – az adott pontok távolságánál kisebb – állandó.

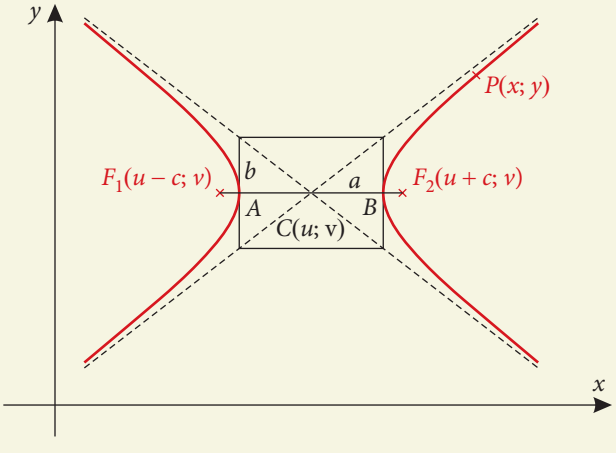


F_1, F_2	fókuszok
C	középpont
$\overline{F_1F_2} = 2c$	fókusztávolság
$\left\lvert \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right\rvert = 2a < 2c$	
$\overline{AB} = 2a$	valós tengely
$\overline{ED} = 2b$	képzetes tengely
$a^2 + b^2 = c^2$	

A hiperbola egyenlete

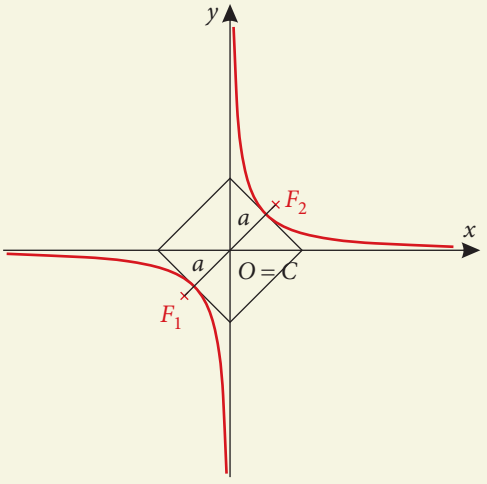


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

KIEGÉSZÍTÉS



$$y = \frac{a^2}{2x}$$

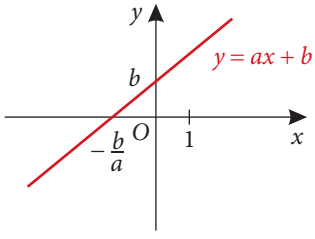
Analízis

Nevezetes függvények

Elsőfokú függvény

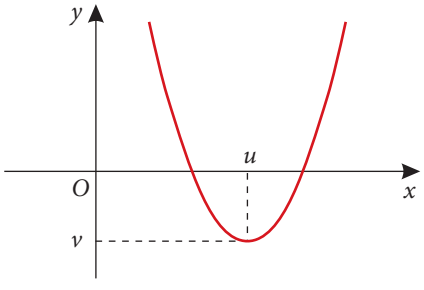
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Az a együtthatót a függvénygrafikon meredekségének nevezzük.
Az elsőfokú függvény grafikonja egyenes.

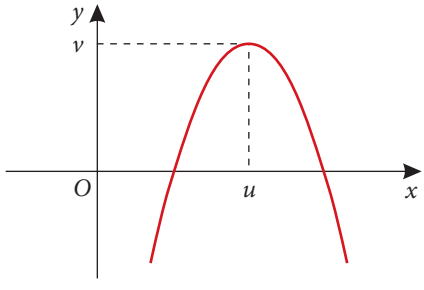


Másodfokú függvény

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$



$y = ax^2 + bx + c$
$a > 0$



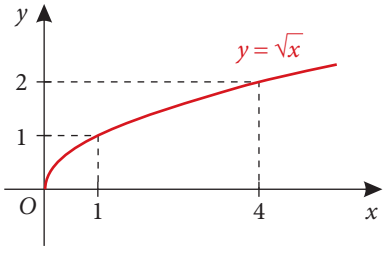
$y = ax^2 + bx + c$
$a < 0$

A másodfokú függvény grafikonja parabola.
A parabola tengelypontjának u és v koordinátáit megkapjuk, ha elvégezzük a következő átalakítást:

$ax^2 + bx + c = a(x - u)^2 + v$

Négyzetgyökfüggvény

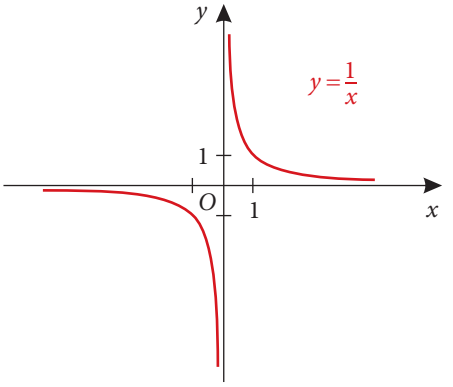
$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$



Az $\frac{1}{x}$ függvény

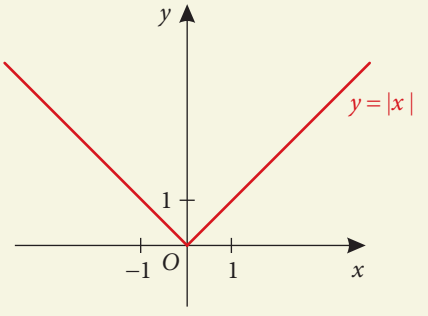
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

Az $\frac{1}{x}$ függvény grafikonja hiperbola.



Abszolútérték-függvény

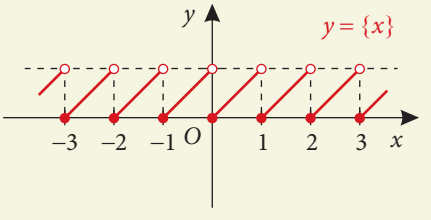
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$



KIEGÉSZÍTÉS

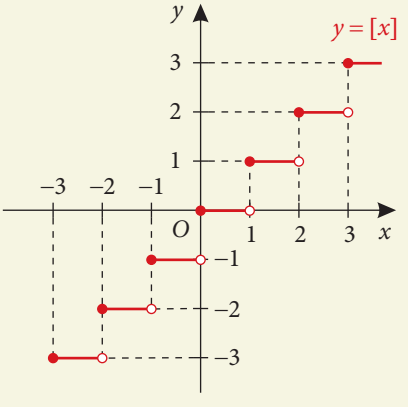
Törtrész-függvény

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \{x\}$



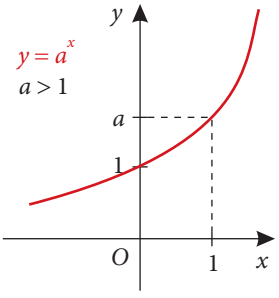
Egészrész-függvény

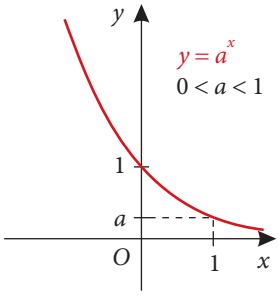
$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x]$



Exponenciális függvény

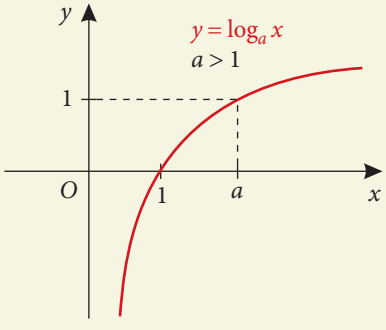
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a^x; \quad a > 0, \quad a \neq 1$

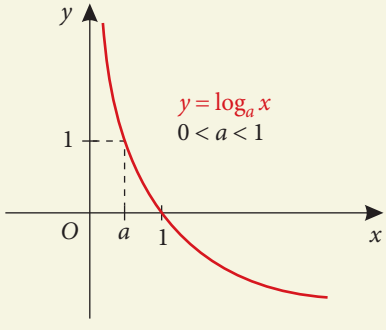




Logaritmusfüggvény

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_a x; \qquad a > 0, \quad a \neq 1$

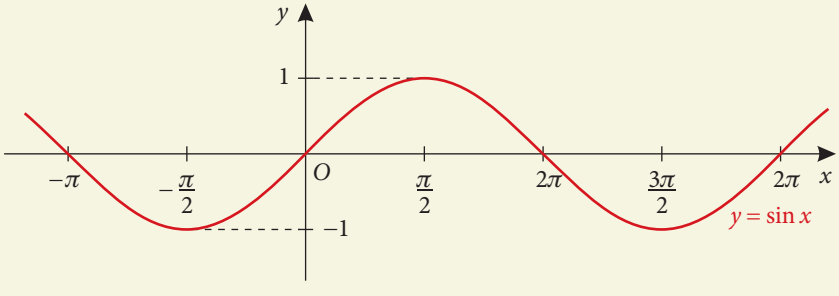




Trigonometrikus függvények

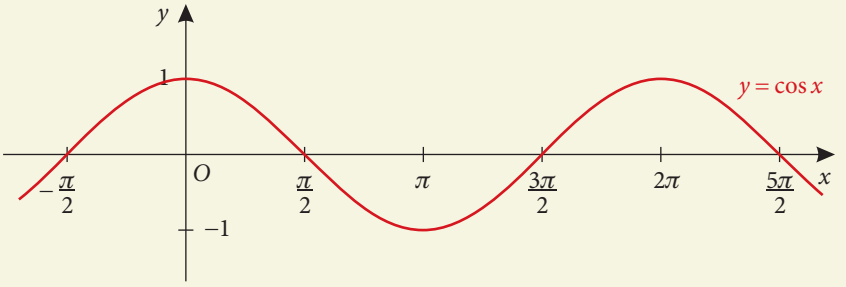
Szinuszfüggvény

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin x$



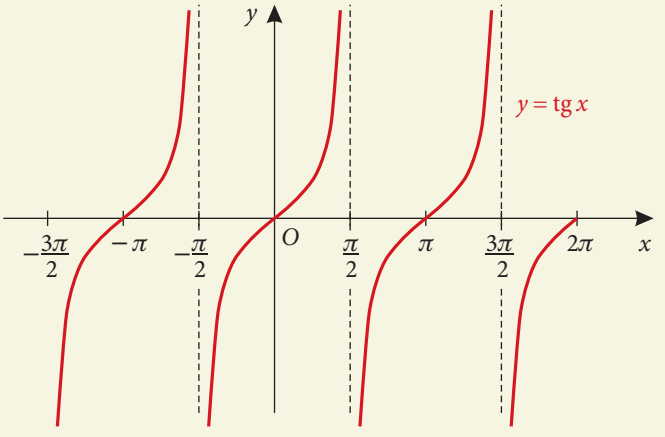
Koszinuszfüggvény

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x$



Tangensfüggvény

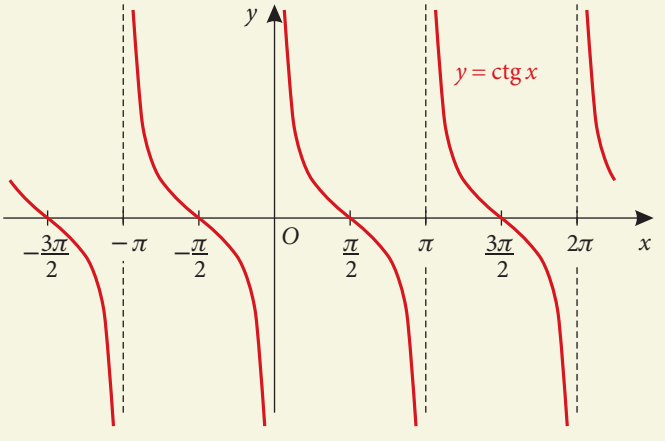
$\mathbf{D} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{tg} x; \quad \mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$



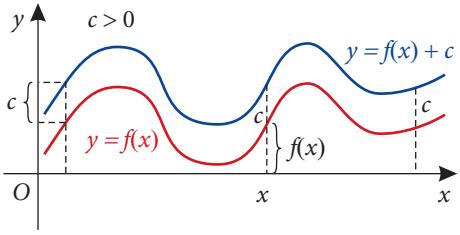
KIEGÉSZÍTÉS

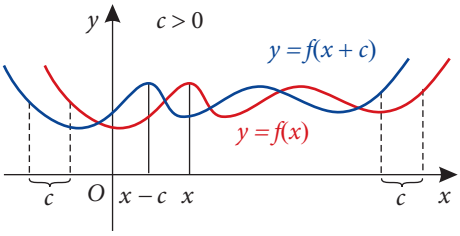
Kotangensfüggvény

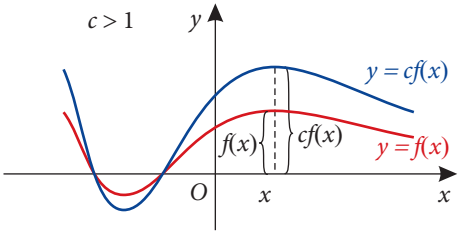
$\mathbf{D} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{ctg} x; \quad \mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

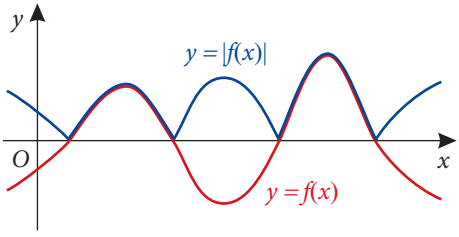


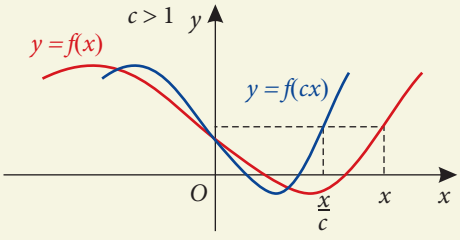
Függvénytranszformáció











Függvények határértéke

Határérték-számítási szabályok

Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ létezik és véges, illetve $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

$$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ ha } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Derivált (differenciálhányados), deriváltfüggvény

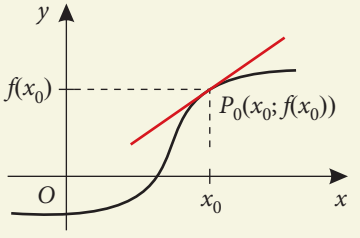
Az $x \mapsto f(x)$ függvény deriváltja az x_0 pontban

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Az $f'(x_0)$ szemléletes jelentése: az $f(x)$ grafikon x_0-beli érintőjének meredeksége.

Az $x \mapsto f(x)$ differenciálható függvény grafikonjának érintője a $P_0(x_0; f(x_0))$ pontban

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$



Differenciálási szabályok

$$(cf)' = cf' \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Néhány elemi függvény deriváltfüggvénye

10. táblázat

$c' = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R})$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

KIEGÉSZÍTÉS

A függvény és a deriváltfüggvény kapcsolata

11. táblázat

f növekedő $]a; b[$-ben	$f'(x) \geq 0 \qquad x \in]a; b[$
f csökkenő $]a; b[$-ben	$f'(x) \leq 0 \qquad x \in]a; b[$
f-nek az x_0 pontban helyi maximuma van	$f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ pozitívról negatívra vált az x_0 pontban
f-nek az x_0 pontban helyi minimuma van	$f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ negatívról pozitívra vált az x_0 pontban
f konvex $]a; b[$-ben	$f''(x) \geq 0 \qquad x \in]a; b[$
f konkáv $]a; b[$-ben	$f''(x) \leq 0 \qquad x \in]a; b[$
f-nek az x_0 pontban inflexiós pontja van	$f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ előjelet vált az x_0 pontban

Határozatlan integrál, primitív függvény

Integrálási szabályok

$$\int cf = c\int f \qquad \int (f \pm g) = \int f \pm \int g \qquad \int (fg') = fg - \int (f'g)$$

Néhány elemi függvény primitív függvénye

12. táblázat

$\int a\,dx = ax + c \quad (a \in \mathbb{R})$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	KIEGÉSZÍTÉS $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	KIEGÉSZÍTÉS $\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$
$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$	$\int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + c$	

Határozott integrálra vonatkozó azonosságok

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \int_a^b (c \cdot f) = c\int_a^b f \qquad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

$$(b-a)\min f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\max f(x)$$

Newton–Leibniz-formula

Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$-ban és $F'(x) = f(x)$, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Valószínűségszámítás, statisztika

Valószínűségszámítás

Események, műveletek eseményekkel, teljes eseményrendszer

Események, speciális események

Az Ω-val jelölt eseménytér elemeit elemi eseményeknek, részhalmazait eseményeknek nevezzük.
Lehetetlen esemény (az az esemény, amely soha nem következhet be) az üres halmaz, $\varnothing$.
Biztos esemény (az az esemény, amely mindig bekövetkezik) az eseménytér, Ω. A biztos eseményt jelölik még I és E betűvel is.

Műveletek eseményekkel, eseményalgebra

$A + B$, $A \cup B$	azt az eseményt jelöli, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A és B események legalább egyike bekövetkezik.
$A \cdot B$, $A \cap B$	azt az eseményt jelöli, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik.
$\overline{A}$	azt az eseményt jelöli, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be.

Mivel mindkét jelölésrendszer, az $(+, \cdot)$ és az $(\cup, \cap)$ is elterjedt, ezért a formulákat mindkét változatban megadjuk.

Teljes eseményrendszer

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega \qquad A_i \cdot A_j = \varnothing \text{ minden } i \neq j \text{ esetén}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega\right)$$

Valószínűség, feltételes valószínűség

Események valószínűsége

Az A esemény valószínűségét $P(A)$-val jelöljük.

A valószínűségszámítás axiómái:

$P(A) \geq 0$

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, ha $A \cdot B = \varnothing$, $\quad (P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ha $A \cap B = \varnothing)$

$P(\Omega) = 1$

További összefüggések:

$P(\varnothing) = 0$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

Klasszikus valószínűségi modell

Ha az eseménytér véges, minden eseménye felírható elemi események összegeként, és minden elemi esemény valószínűsége egyenlő, akkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}$$

Feltételes valószínűség, függetlenség

$P(A \mid B)$ az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségét jelöli. Ekkor

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \qquad \text{ha } P(B) \neq 0$$

Az A és B események függetlenek, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Ezzel ekvivalens $P(B) \neq 0$ esetén: $P(A \mid B) = P(A)$

KIEGÉSZÍTÉS

Teljes valószínűség tétele

Ha B egy tetszőleges esemény, és az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak (semelyik $P(A_i) \neq 0$), akkor

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n)$$

Bayes-tétel

Ha B egy tetszőleges esemény, és az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak (semelyik $P(A_i) \neq 0$ és $P(B) \neq 0$), akkor

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_n)P(A_n)}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Valószínűségi változó, eloszlás

Egy kísérlet kimeneteleihez valós számokat rendelve egy függvényt, úgynevezett valószínűségi változót kapunk.

Diszkrét esetben a szokásos jelölések:

$P(X = x_i) = p_i$

KIEGÉSZÍTÉS

Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$F(x) := P(X < x)$

Egy valószínűségi változó eloszlása diszkrét, ha a kimenetelek száma véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. Folytonos, ha az eloszlásfüggvénye folytonos.
Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény deriválható, akkor az $F'(x) = f(x)$ függvényt a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük.

Várható érték, szórásnégyzet és szórás

A várható érték jele E vagy M.

A szórásnégyzet jele D^2, σ^2 vagy S^2.

Egy valószínűségi változó szórása a szórásnégyzetének a négyzetgyöke:

$D(X) = \sqrt{D^2(x)}$

A szórás jele D, σ vagy S.

	Diszkrét eset (ha az összegek végesek)	**Folytonos eset (ha az integrálok végesek)**
		KIEGÉSZÍTÉS
E	$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k + \ldots$	$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$
	KIEGÉSZÍTÉS	
D^2	$E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - E(X)^2 =$ $= \left(x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_k^2p_k + \ldots\right) - E(X)^2$	$E(X^2) - E(X)^2 =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)\,dx - E(X)^2$

Nevezetes valószínűség-eloszlások

Diszkrét valószínűség-eloszlások

	Egyenletes eloszlás	Binomiális eloszlás	Hipergeometrikus eloszlás
Modell	Egy kísérlet folyamán minden előforduló érték (x_1, x_2, …, x_n) egyforma valószínűségű. X: a kísérlet kimeneteléhez tartozó érték	*Visszatevéses mintavétel:* Egy kísérlet adott kimenetele legyen A, $P(A) = p$. Végezzük el a kísérletet n-szer egymástól függetlenül. X: az A bekövetkezéseinek száma	*Visszatevés nélküli mintavétel:* Adott N különböző elem, közülük K db rendelkezik valamely tulajdonsággal. Az elemek közül véletlenszerűen választunk n darabot. X: a tulajdonsággal rendelkező kiválasztott elemek száma
Eloszlás	$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ $i = 1, 2, \ldots, n$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \ldots, n$	$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
E, D	$E = \frac{\sum x_i}{n}$ $D = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$	$E = np$ $D = \sqrt{np(1-p)}$	$E = n \cdot \frac{K}{N}$ KIEGÉSZÍTÉS $D = \sqrt{n \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$

KIEGÉSZÍTÉS

	Geometriai eloszlás	Poisson-eloszlás
Modell	Egy kísérlet adott kimenetele legyen A, $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$. A kísérletet addig végezzük, amíg A be nem következik. X: a szükséges kísérletek száma	
Eloszlás	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \ldots$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \ldots,$ ahol $\lambda > 0$, az eloszlás paramétere
E, D	$E = \frac{1}{p}$ $D = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$	$E = \lambda$ $D = \sqrt{\lambda}$

Folytonos valószínűség-eloszlások

Egyenletes eloszlás az $(a; b)$ intervallumon

$x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } x \ge b. \end{cases}$$

$$E = \frac{a+b}{2} \qquad D = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Normális eloszlás

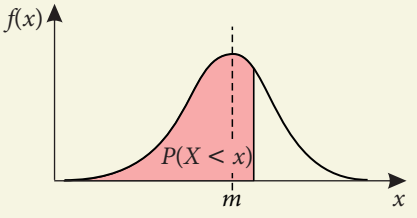
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol μ és σ adott valós paraméterek.

$F(x)$ explicit alakban nem, csak integrál alakban adható meg.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

$$E = \mu \qquad D = \sigma$$



Standard normális eloszlás

Ez az eloszlás a normális eloszlás speciális esete, ha $\mu = 0$ és $\sigma = 1$.
A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét $\varphi(x)$-szel, eloszlásfüggvényét $\Phi(x)$-szel szokás jelölni.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Értékét általában számológéppel vagy táblázat alapján adjuk meg.
$\Phi(x)$ legfontosabb adatait a *13. táblázat* tartalmazza.

Exponenciális eloszlás

Sűrűség és eloszlás függvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{\lambda} \qquad D = \frac{1}{\lambda}$$

13. táblázat

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,10	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,20	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,30	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,40	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,50	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,60	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,70	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,80	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,90	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,00	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,10	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,20	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,30	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,40	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,50	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,60	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,70	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,80	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,90	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,00	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,10	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,20	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,30	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,40	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,50	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,60	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,70	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,80	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,90	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,00	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,10	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,20	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,30	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,40	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,50	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,60	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,70	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,80	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,90	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,00	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

$x < 0$ esetén $\Phi(x)$ értékei a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggés alapján számolhatók.

KIEGÉSZÍTÉS

A várható értékre és a szórásra vonatkozó összefüggések

Markov-egyenlőtlenség

$$P(X \geq \lambda \cdot E) \leq \frac{1}{\lambda}, \qquad (X \geq 0, \lambda > 0)$$

Csebisev-egyenlőtlenség

$$P(|X - E| \geq \lambda \cdot D) \leq \frac{1}{\lambda^2}, \qquad (\lambda > 0)$$

A nagy számok Bernoulli-féle gyenge törvénye

Ha egy p valószínűségű eseményre vonatkozó n független kísérlet során az esemény gyakorisága x_n és δ tetszőleges pozitív szám, akkor:

$$P\left(\left|\frac{x_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Statisztika

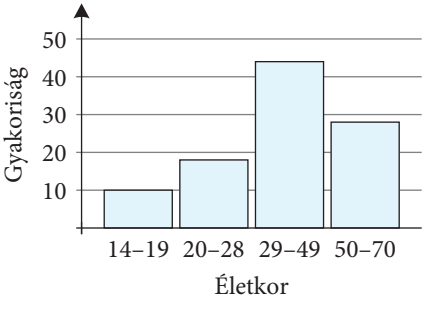
Gyakoriság, relatív gyakoriság

Egy adat gyakorisága megmutatja, hogy az adat hányszor fordul elő az adatok között. Egy adat relatív gyakorisága a gyakoriság és az adatok számának hányadosa.

Adatok (grafikus) ábrázolása

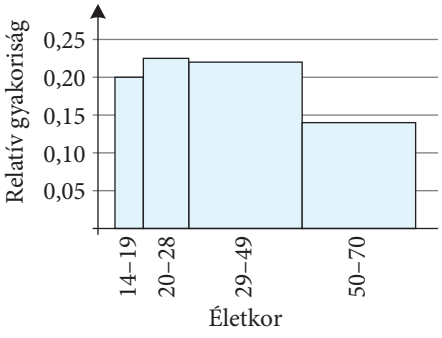
Oszlopdiagram

A vízszintes tengelyen a lehetséges adatokat vesszük fel, a függőleges tengelyen pedig a hozzájuk tartozó gyakoriságokat.



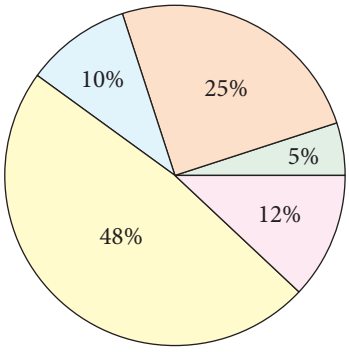
Hisztogram

A vízszintes tengelyen az osztályközöket tüntetjük fel. A hisztogramban a gyakoriságok a téglalapok területével arányosak. Az oszlopok magasságát úgy kapjuk, hogy a gyakoriságokat osztjuk a megfelelő osztályköz szélességével.



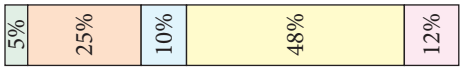
Kördiagram

Kördiagramot elsősorban arányok, százalékos értékek ábrázolására használunk. Az egyes körcikkek középponti szöge arányos az ábrázolt mennyiségekkel.



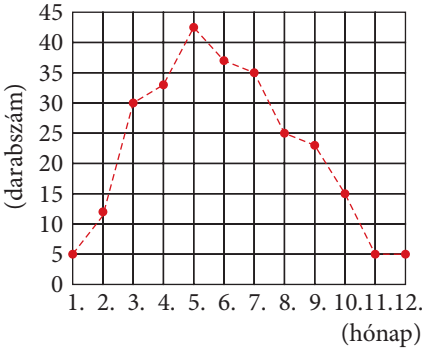
Sávdiagram

A százalékos adatokat egy téglalapban egy sávban ábrázoljuk. A sávdiagram belsejében levő csíkok hossza a százalékosan megadott adatokkal egyenesen arányos.



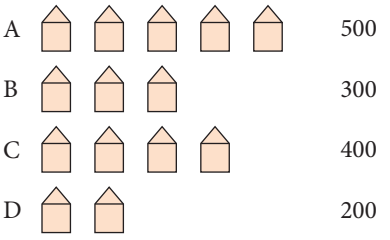
Töröttvonal-grafikon (vonaldiagram)

A töröttvonal-diagramot (vonaldiagramot) valamely mennyiség időszakonkénti változásának szemléltetésére használjuk. A vízszintes tengelyen ábrázoljuk az időszakokat (például: év, nap, hónap, évszak).
A diagramon a pontoknak van jelentősége, a pontokat összekötő szakaszoknak általában csak az a szerepe, hogy érzékeltesse a változást.



Piktogram

A piktogram az ismérvekre emlékeztető rajzocskákból áll. Pl.: Négy településen egy adott időszakban épült lakások száma.



Statisztikai jellemzők

Középértékek

Módusz

A leggyakoribb eleme az adatoknak. Ha több legnagyobb gyakoriságú adat van, akkor a leggyakoribb adatok, azaz a móduszok halmazát lehet megadni. Általában nagy adatsokaság esetén használják. Rövidítése a *Mo*.

Medián

A nagyság szerint rendezett adatok közül a középen lévő adat. Csak rendezhető adatoknál értelmezhető. Ha az adatok $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, akkor

- páratlan számú ($n = 2k + 1$) adat esetén a sorba rendezett adatok közül a középső, azaz x_{k+1};
- páros számú ($n = 2k$) adat esetén pedig a két középső elem számtani közepe, azaz $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Rövidítése *Me*.

Átlag vagy számtani közép

Csak számszerű adatoknál értelmezhető. Jele $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Az átlag körüli ingadozás becslései, szóródási mérőszámok

Terjedelem

A legnagyobb és a legkisebb adat különbsége. Ha az adatok rendezettek, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, akkor $x_n - x_1$.

Átlagos abszolút eltérés egy adott *a* számtól

$$A(a) = \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

Átlagos négyzetes eltérés egy *a* számtól

$$D^2(a) = \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2}{n}$$

Szórásnégyzet
Az átlagos négyzetes eltérés az $\bar{x}$-tól.

$$S_n^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Szórás
Az átlagtól vett átlagos négyzetes eltérés négyzetgyöke. Röviden a szórásnégyzet négyzetgyöke.

$$S_n = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

(Az itt megadott szórásnégyzetet, illetve szórást szokták tapasztalati, korrigálatlan vagy torzított szórásnégyzetnek/szórásnak is nevezni.)

Kvartilisek
A Q_1, Q_2, Q_3 kvartilisek a rendezett adathalmaz negyedelőpontjai, tehát amelyek 4 körülbelül azonos elemszámú részre darabolják az adathalmazt.

Q_2 = a második negyedelőpont, azaz a felezőpont, ami a medián.

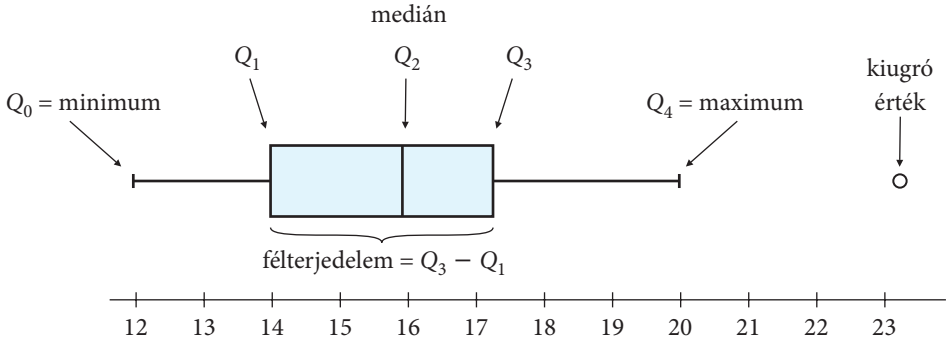
A mediánnal kettéosztjuk az adatsokaságot (páratlan elemszámnál a mediánt elhagyjuk).

Külön-külön vesszük a két részsokaság mediánját, ezek lesznek a Q_1 alsó kvartilis és a Q_3 felső kvartilis.

Szokták a sokaság legkisebb elemét Q_0-lal, legnagyobb elemét Q_4-gyel jelölni.
(A kvartiliseket különböző programok kicsit eltérő függvények alapján határozzák meg.)

Félterjedelem (interkvartilis félterjedelem)
A felső és az alsó kvartilis különbsége, $Q_3 - Q_1$.

Dobozdiagram (boxplot)
Az adatokat rendezzük, és ha szükséges, akkor az irreális, nagyon kiugró adatokat elhagyjuk. A megmaradó adatok közül ábrázoljuk azok minimumát, maximumát, kvartiliseit, és az alsó és felső kvartilis közé eső részre egy „dobozt” rajzolunk.



Fizika

Mechanika

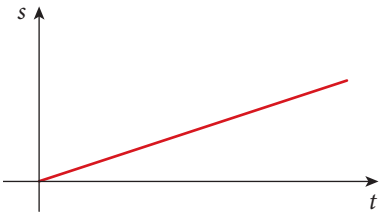
A mozgás kinematikai leírása

Egyenes vonalú mozgások (anyagi pont)

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

$\frac{s}{t}$ = állandó

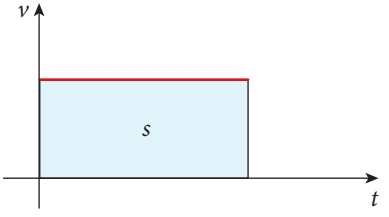
A grafikon meredeksége a sebesség számértékével egyenlő.



A sebesség:

$v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

A grafikon alatti terület nagysága a megtett út számértékével egyenlő.



A megtett út:

$s = vt$

t a mozgás tetszőleges szakaszának időtartama
s a t idő alatt megtett út
v a test sebessége

Változó mozgás

$\frac{s}{t} \neq$ állandó

Átlagsebesség: A mozgás során megtett út és a közben eltelt idő hányadosa.

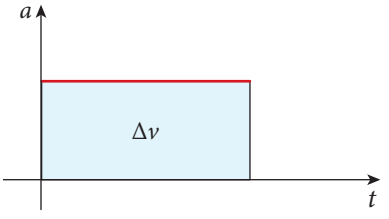
$$v_{\text{átlag}} = \frac{\sum s}{\sum t} = \frac{\text{összes megtett út}}{\text{összes eltelt idő}}$$

Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = állandó

Gyorsulás:

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$ = állandó



Átlaggyorsulás: A sebességváltozás nagysága és az eközben eltelt idő hányadosa.

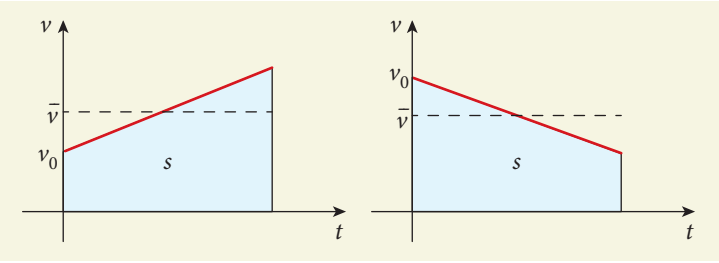
Δv a Δt idő alatti sebességváltozás

Pillanatnyi gyorsulás: A sebesség-idő függvény meredeksége (a nagyon-nagyon pici időintervallumra számolt átlaggyorsulás), iránya a sebességvektor változásának irányába mutat.

A pillanatnyi sebesség:

$v = v_0 + at$, illetve:

$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$



Pillanatnyi sebesség: a hely-idő függvény meredeksége (a nagyon-nagyon pici időintervallumra számolt átlagsebesség), iránya a pálya érintőjének irányába esik.

A megtett út:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \frac{v_0 + v}{2} t,$$

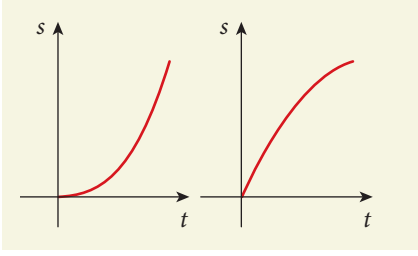
ahol:

$\frac{v_0 + v}{2} = \bar{v}$ az átlagsebesség

v_0 a kezdősebesség

v a t idő alatt elért sebesség

a a test gyorsulása



Szabadesés

Egyenletesen gyorsuló mozgás, $a = g$.

A nehézségi gyorsulás a Föld egy adott helyén állandó, értéke a Föld különböző helyein különböző, Budapesten $g_{Bp} = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

Periodikus mozgások

Egyenletes körmozgás

Szögsebesség:

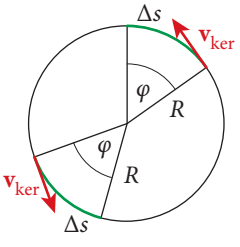
$\frac{\varphi}{t} = \text{állandó} = \omega$ $\qquad$ $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ahol f megadja az 1 s alatt megtett fordulatok számát:

$f = \frac{1}{T}$

Kerületi sebesség nagysága:

$v_{ker} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\qquad$ $v_{ker} = \frac{2R\pi}{T} = 2\pi f R = \omega R$



φ a t idő alatt megtett szögelfordulás ívmértéke

ω a test szögsebessége

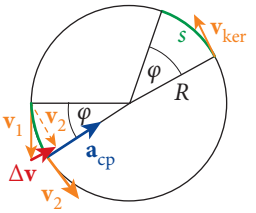
$\mathbf{v}_{ker}$ a kerületi sebesség

T a periódusidő

f a fordulatszám (frekvencia)

Gyorsulás:
A sebesség irányának változása miatt a kör középpontja felé mutató (centripetális) gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v_{\text{ker}}^2}{R} = R\omega^2 = 4\pi^2 f^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

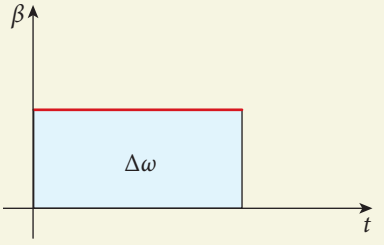


$\mathbf{a}_{cp}$ a centripetális (sugárirányú) gyorsulás

Egyenletesen változó körmozgás

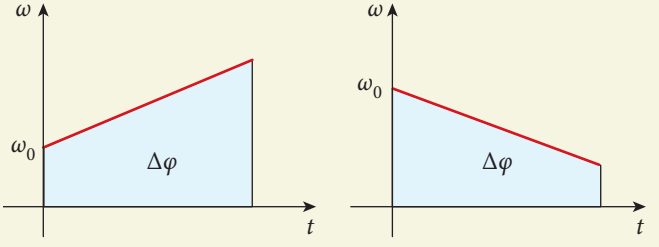
A szöggyorsulás állandó:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{állandó} = \beta \qquad \beta = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$



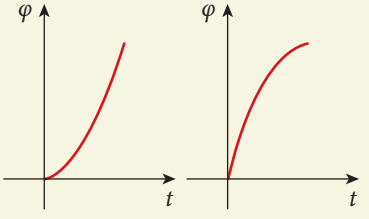
A szögsebesség: $\omega = \omega_0 + \beta t$

A grafikon alatti terület nagysága a szögelfordulás számértékével egyenlő.



A szögelfordulás:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2$$

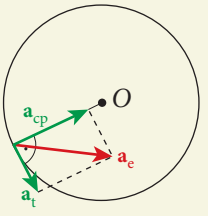


A sebesség nagyságának változása miatt a tangenciális (érintőirányú) gyorsulás nagysága:

$a_t = R\beta = \text{állandó}$

A körpályán megtett út:

$$s = R\varphi = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t t^2 = \omega_0 R t + \frac{1}{2} \beta R t^2$$



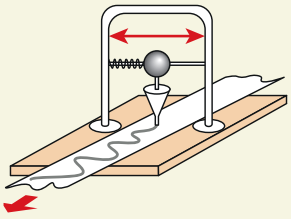
Eredő gyorsulás nagysága:

$$a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

Harmonikus rezgőmozgás

Kinematikai leírás

A rezgő test pillanatnyi kitérése – egyensúlyi helyzettől vett távolsága:



$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) =$$
$$= A\sin(2\pi f t + \varphi_0),$$

ahol: x a kitérés
A az amplitudó
φ_0 a kezdőfázis
ω a körfrekvencia

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

KIEGÉSZÍTÉS

A pillanatnyi sebesség koordinátája:

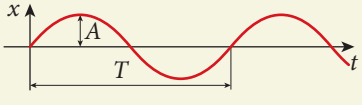
$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A2\pi f\cos(2\pi f t + \varphi_0)$$

A pillanatnyi gyorsulás koordinátája:

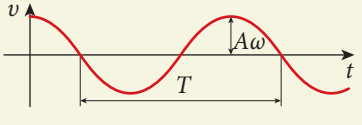
$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) =$$
$$= -A(2\pi f)^2\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

ha $\varphi_0 = 0$:

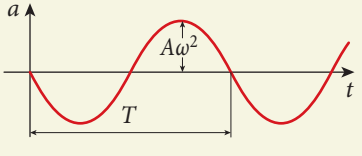
$$x = A\sin(\omega t)$$



$$v = A\omega\cos\omega t = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$v_{max} = A\omega$$



$$a = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$$
$$a_{max} = A\omega^2$$



Ha a kezdőfázis $\varphi_0 \neq 0$, a kinematikai függvények argumentuma: $(\omega t + \varphi_0)$

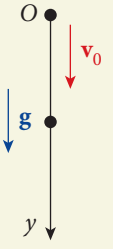
Összetett mozgások

Függőleges hajítás

A függőleges hajítás összetehető egy függőleges irányú v_0 sebességű egyenes vonalú egyenletes mozgásból és egy szabadesésből.

Függőleges lefelé hajítás

Pillanatnyi sebessége és koordinátája:



$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{g}t \qquad \text{és} \qquad v = v_0 + gt,$$

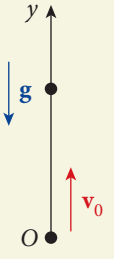
ahol **g** a nehézségi gyorsulás.

A helye és koordinátája:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v_0}t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2 \qquad \text{és} \qquad y = v_0 t + \frac{g}{2}t^2$$

Függőleges felfelé hajítás

Pillanatnyi sebessége és koordinátája:



$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{g}t \qquad \text{és} \qquad v = v_0 - gt$$

Az emelkedés ideje: $t_{\text{em}} = \dfrac{v_0}{g}$

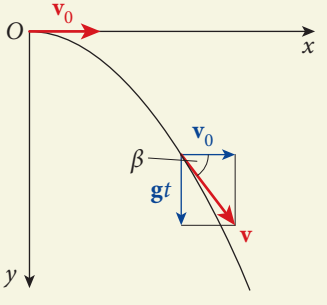
Pillanatnyi helye és koordinátája:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v_0}t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2 \qquad \text{és} \qquad y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

Maximális emelkedés: $y_{\text{max}} = \dfrac{v_0^2}{2g}$

Vízszintes hajítás

Összetehető egy x irányú, v_0 sebességű egyenes vonalú egyenletes mozgásból és egy y irányú szabadesésből.



Az origóból eldobott test koordinátái:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{g}{2}t^2$$

A sebesség:

$$v_x = v_0; \quad v_y = gt; \quad v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$$

A pálya egyenlete: $y = \dfrac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$

Ferde hajítás

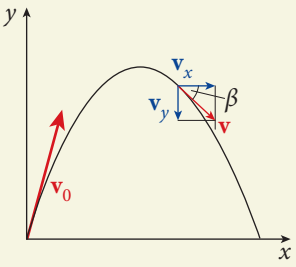
x irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásból

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos\alpha,$$

és *y* irányú függőleges felfelé hajításból

$$y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2$$

tehető össze.



A pillanatnyi sebességek:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

A sebesség nagysága, iránya:

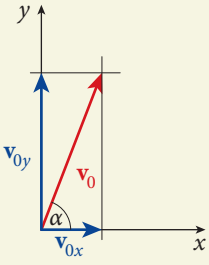
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x}$$

Az emelkedés ideje: $t_{em} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

A mozgás teljes ideje: $t = 2t_{em} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

A hajítás távolsága: $x = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Az emelkedés maximális értéke: $y_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

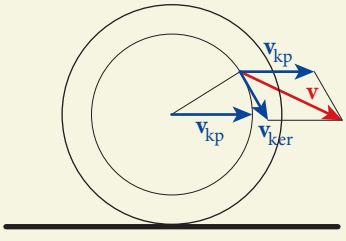


$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$
$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

Kerék gördülő mozgása

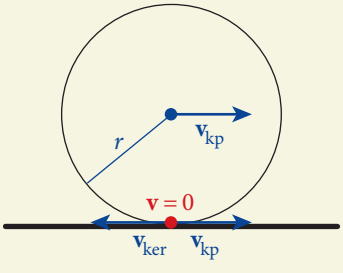
A kerék pontjainak mozgása felbontható a kerék középpontjának v_{kp} sebességű mozgására és a középpont körüli v_{ker} sebességű körmozgásra:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{kp} + \mathbf{v}_{ker}$$



A kerék a talajon tisztán (csúszásmentesen) gördül, ha a talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll:

$$v_{kp} = v_{ker} (= r\omega)$$



A mozgás dinamikai leírása

A Newton-törvények

Newton I. törvénye (tehetetlenség törvénye)



A testek inerciarendszerhez viszonyított mozgásállapota (sebessége) csak más testek hatására változik meg.

Newton II. törvénye

Adott, állandó tömegű testre ható erő és az általa létrehozott gyorsulás egyenesen arányos:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

ahol: m a tömeg

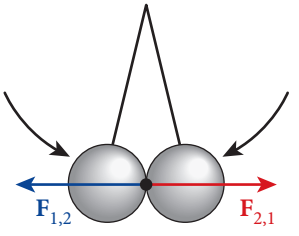
$\mathbf{F}$ az m tömegre ható erő, vektormennyiség

Az arányossági tényező (m), a test tehetetlen tömege.

Newton III. törvénye (kölcsönhatás törvénye)

Két test kölcsönhatását párkölcsönhatásnak nevezzük.

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$$



Az erők mindig párosával lépnek fel, azonos hatásvonalúak, ellentétes irányúak, megegyező nagyságúak és különböző testekre hatnak!

Az erőhatások függetlenségének elve
(szuperpozíció elve, amit szokás Newton IV. törvényének is nevezni)

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}$$

Ha egy testre egyidejűleg több erő hat, akkor ezek együttes hatása megegyezik a vektori eredőjük hatásával. Ugyanígy, egy testre ható erő fölbontható tetszőlegesen sok erővé, amelyeknek vektori összege az eredeti erő lesz.

A dinamika alaptörvénye

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Lendülettétel (impulzustétel)

A testek mozgásállapotát az

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}$$

lendület (impulzus) jellemzi.



A Δt idő alatt történő $\mathbf{F}\Delta t$ erőlökés egyenlő a test

$$\Delta \mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$$

I a lendület (impulzus)

lendületváltozásával, azaz:

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta(m\mathbf{v})$$

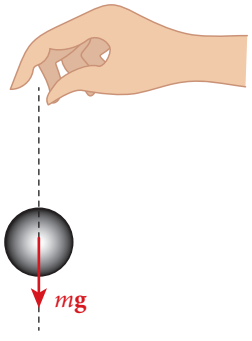
Az erő:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}$$

Erőtörvények

A nehézségi erő

$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$,
ahol **g** a nehézségi gyorsulás az adott helyen.



A gravitációs erő

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

ahol γ a gravitációs állandó,

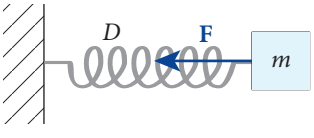
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$



A rugóerő

$$F = -D \cdot \Delta l,$$

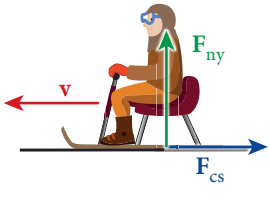
ahol: D a rugóállandó
Δl a rugó megnyúlása



Csúszási súrlódási erő

$$F_{cs} = \mu F_{ny},$$

a testnek a súrlódó felülethez viszonyított **v** sebességével ellentétes irányú.
A μ az érintkező felületek minőségére jellemző csúszási súrlódási együttható.



$\mathbf{F}_{ny}$ a felületre merőleges nyomóerő

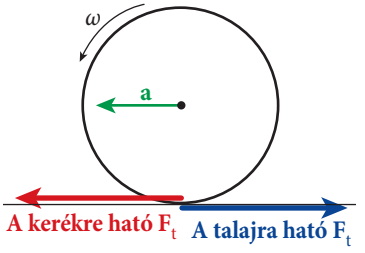
Tapadási („nyugalmi”) súrlódási erő

Nagysága akkora és iránya olyan, hogy a két súrlódó felület egymáshoz képest nem mozdul el. Nagysága nem lehet tetszőlegesen nagy:

$$0 \le F_t \le F_{t,max} = \mu_0 F_{ny},$$

ahol μ_0 a tapadási súrlódási együttható.
F_{ny} a felületre merőleges nyomóerő
F_t a tapadási súrlódási erő
$F_{t,max}$ a tapadási súrlódási erő maximuma

Az induló kerék és a talaj közötti tapadási súrlódási erők:



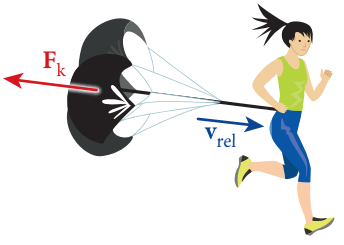
Kényszererő

Azokat az erőket, amelyek a test mozgására vonatkozó kényszerfeltételeket biztosítják, kényszererőknek nevezzük. Például: K kötélerő, F_{ny} (vagy N) nyomóerő, F_t tapadási súrlódási erő.

A közegellenállási erő

$$F_k = -k\frac{1}{2}A\rho_{közeg} \cdot v_{rel}^2,$$

ahol: k a közegellenállási tényező
A a mozgásra merőleges felület
$\rho_{közeg}$ a közeg sűrűsége
v_{rel} a testnek a közeghez viszonyított sebessége

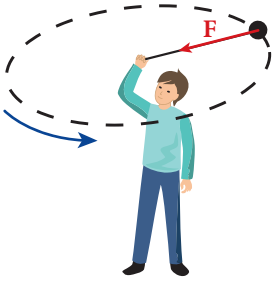


Tömegpont periodikus mozgásainak dinamikája

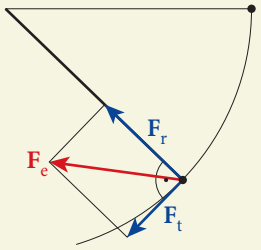
Egyenletes körmozgás

Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele:

$$\left|\sum \mathbf{F}\right| = ma_{cp} = mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R}$$



Egyenletesen változó körmozgás



A testre ható erők eredőjét érintőirányú (tangenciális) és sugárirányú (radiális) összetevőre bontjuk fel.
A testre ható erők eredője:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_t$$

A sugárirányú (radiális) irányú erő:

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r \qquad |\mathbf{F}_r| = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

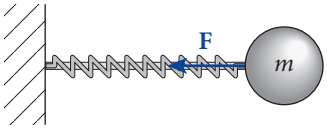
A tangenciális irányú erő:

$$\mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_t \qquad |\mathbf{F}_t| = mr\beta$$

Harmonikus rezgőmozgás

Az eredő erő:

$$F = -Dx \qquad F = -m\omega^2 x$$



D a rugóállandó (direkciós állandó)
x a test egyensúlyi helyzetétől való kitérése

A körfrekvencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

A periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

m a rezgő test tömege
D a rugóállandó

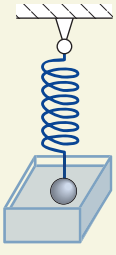
Matematikai inga (fonálinga)

Lengésidő (az inga hosszához képest kis kitérések esetén):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ahol l az inga hossza.

Csillapodó rezgések



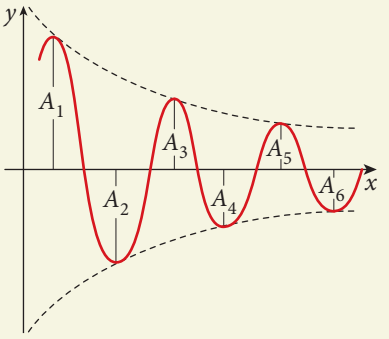
Közegellenállással csillapított rezgés:

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{v}$$

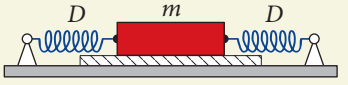
Az egymás után következő legnagyobb, egyirányú kitérések hányadosa állandó (mértani sorozat). Az egymás utáni egyirányú maximális kitérések végpontjai exponenciális görbére illeszkednek.

Csillapodási hányados:

$$K = \frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4} = \frac{A_3}{A_5} = \ldots = \text{állandó}$$

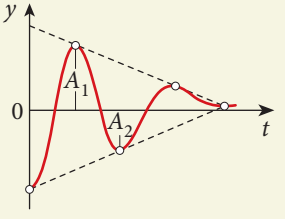


Súrlódással csillapított rezgés: $F = -\mu N$
Az egymás után következő legnagyobb kitérések számtani sorozatot alkotnak.



$$A_1 - A_2 = \frac{2\mu mg}{D} = \text{állandó}$$

Az amplitudók lineárisan csökkennek.



Kényszerrezgés, rezonancia

Sajátrezgés: A testet egyensúlyi helyzetéből kitérítve és magára hagyva rezgésbe jön. Ennek a rezgésnek a frekvenciája az f_0 sajátfrekvencia.

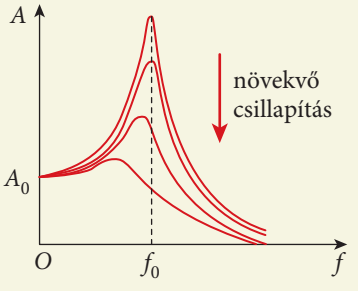
Kényszerrezgés: A sajátrezgésre képes rendszert egy $F = F_0 \sin \omega t$ harmonikus gerjesztőerő gerjeszti, amely ennek hatására f frekvenciával rezeg.

A kényszerrezgés amplitudója a sajátfrekvencia közelében a legnagyobb, annál élesebb, minél kisebb a rendszer csillapodása.

Rezonancia:

$$f \approx f_0, \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}},$$

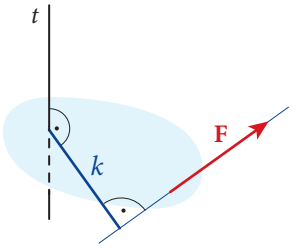
ahol f_0 a sajátfrekvencia.



Forgatónyomaték (forgásiránytól függő előjeles számnak tekintjük)

$$M = F \cdot k,$$

ahol k az erőkar.



Megjegyzés: Körmozgásról akkor beszélünk, ha pontszerű test körpályán mozog, forgómozgásról pedig akkor, ha a merev test rögzített pont vagy tengely körül végez mozgást. Például: a Föld a tengelye körül forgó-, a Nap körül mint pontszerű test körmozgást végez.

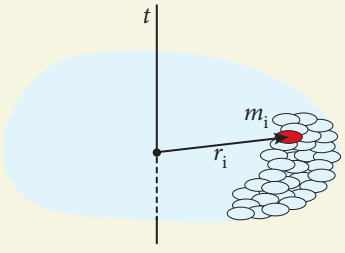
Perdület (forgásiránytól függő előjeles számnak tekintjük)

$$N = \Theta \cdot \omega,$$

ahol: Θ a tehetetlenségi nyomaték
ω a szögsebesség

Tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$$



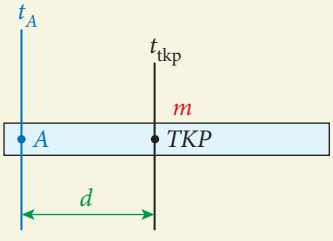
KIEGÉSZÍTÉS

Steiner-tétel

Kapcsolat a tömegközépponton átmenő és vele párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték között:

$$\Theta_A = \Theta_{tkp} + md^2,$$

ahol: Θ_{tkp} a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték
m a test tömege
d a tömegközépponton és az A ponton áthaladó, egymással párhuzamos tengelyek távolsága



Egyenletesen változó forgómozgás

A forgómozgás alapegyenlete

Adott kiterjedt testre ható eredő forgatónyomaték és az általa létrehozott szöggyorsulás egyenesen arányos. Az arányossági tényező a test tehetetlenségi nyomatéka.

$$\sum_{i=1}^{n} M = \Theta\beta,$$

ahol: Θ a tehetetlenségi nyomaték
β a szöggyorsulás

KIEGÉSZÍTÉS

Perdülettétel

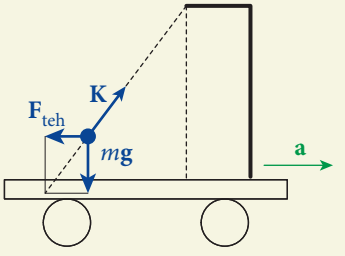
$$\sum_{i=1}^{n} M = \frac{\Delta N}{\Delta t},$$

ahol: ΔN a perdületváltozás nagysága
Δt a perdületváltozás időtartama

A tehetetlenségi erők

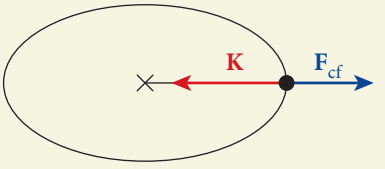
Nem inerciarendszerben, gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben a mozgások a Newton-törvényekhez formailag hasonló leírásához ún. tehetetlenségi erőket kell bevezetni.

$$\mathbf{F}_{\text{teh}} = -m\mathbf{a}$$



Például: Az ω szögsebességgel forgó rendszerben, ha a test a rendszerhez képest nyugalomban van, a tehetetlenségi erőt centrifugális erőnek nevezik:

$$F_{\text{cf}} = mr\omega^2$$



Munka, energia, teljesítmény

Munka, energia

Munka

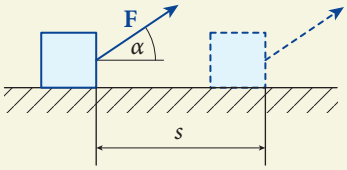
Állandó nagyságú F erő munkája s úton, ha a test az erő irányában mozdul el:

$$W = F\,s$$

Mértékegysége: 1 J (joule). 1 J = 1 Nm = 1 kg $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Állandó nagyságú és a mozgás irányával állandó α szöget bezáró **F** erő s úton végzett munkája:

$$W = F\,s\cos\alpha$$

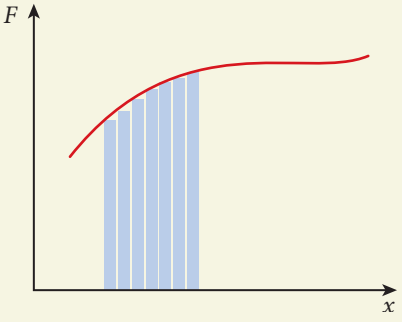


Változó nagyságú erő munkája

Változó, de szakaszonként állandó nagyságú erő munkája, ha a mozgás irányával bezárt szöge állandó, akkor az elemi munkák összegével egyenlő.

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta x_i \cos\alpha$$

Az erő munkájának abszolút értéke a grafikon alatti terület számértéke.



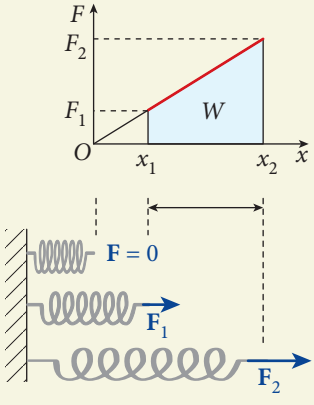
Példák változó erő munkájára

A rugóerő munkája

Az $F(x)$ „görbe alatti terület” egyenlő a rugó megnyújtásakor végzett munkával

$$W = \frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2$$

A rugóerő munkája a W munkavégzésnek a mínusz egyszerese.



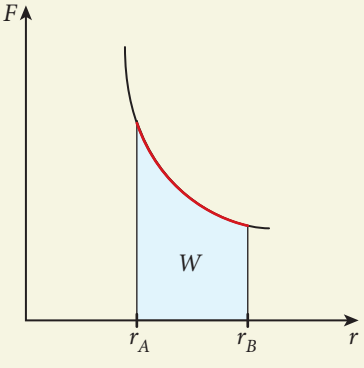
KIEGÉSZÍTÉS

A gravitációs erő munkája

A M és m tömegű pontszerű testek távolsága r_A-ról r_B-re változik, ekkor a gravitációs erő munkája:

$$W_{AB} = -\gamma M m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

ahol γ a gravitációs állandó.



KIEGÉSZÍTÉS

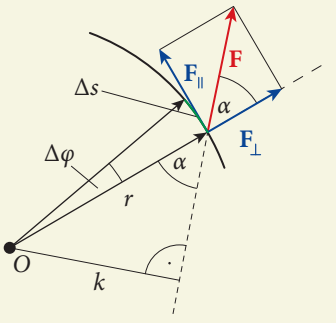
Forgatónyomaték munkája

Az O ponton átmenő, a síkra merőleges tengely körüli forgásnál az F erő munkája kicsi Δs íven:

$$W = F_{\parallel}\Delta s = F\Delta s \sin\alpha = Fr\Delta\varphi \sin\alpha = \\ = Fk\Delta\varphi = M\Delta\varphi$$

Az M állandó forgatónyomaték munkája φ szögelfordulás esetén:

$$W = M\varphi$$



Energiafajták, munkatétel

A mozgási (kinetikus) energia

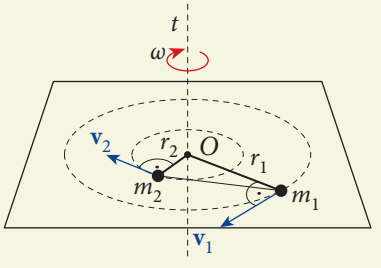
Az $E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}mv^2$ mennyiség a mozgási energia.

A forgási energia

A merev test pontjainak összes mozgási energiája:

$$E_{\text{forg}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

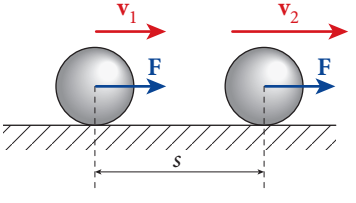
ahol Θ a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.



A munkatétel

A test mozgási energiájának megváltozása a testre ható összes erő munkájának összegével egyenlő:

$$W_{\text{összes}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \Delta E_{\text{mozg}} = \sum W_i$$



Munkatétel rögzített tengely körül forgó merev test esetén

Az M forgatónyomaték munkája a test forgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$\sum_{i=1}^{n} M\varphi = \frac{1}{2}\Theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2$$

Konzervatív erő

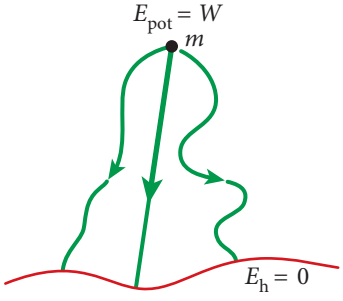
Az olyan erőket, amelyeknek a munkája egy elmozdulás során csak a kezdő- és végpont helyzetétől függ, és nem függ a pálya alakjától, konzervatív erőknek nevezzük. Konzervatív erő például a nehézségi erő és a rugóerő.

A helyzeti (potenciális) energia

A konzervatív erők munkája a mozgáspályától függetlenül mindig ugyanakkora, miközben a test eljut a megválasztott nullapontba. Ezt a munkát nevezzük a test kiindulási helyén lévő potenciális (helyzeti) energiának.

A nullszint (pl. talaj) felett h magasságban lévő m tömegű test magassági (helyzeti) energiája:

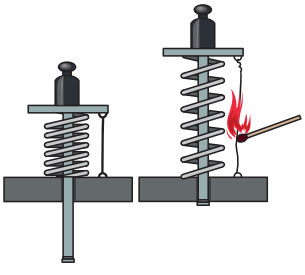
$$E_h = mgh$$



Rugalmassági energia

A Δl-lel megnyújtott (összenyomott) rugó rugalmassági energiája:

$$E_{rug} = \frac{1}{2} D(\Delta l)^2$$



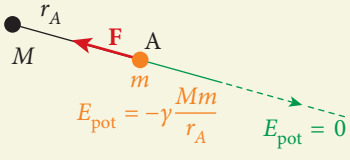
KIEGÉSZÍTÉS

Gravitációs energia

Az M tömegű testtől r_A távolságban lévő m tömegű test helyzeti energiája:

$$E_{pot} = -\gamma \frac{Mm}{r_A},$$

ha a nullaszintet a végtelenben rögzítjük,
ahol: γ a gravitációs állandó
r_A a két test középpontjának a távolsága



Teljesítmény, hatásfok

A teljesítmény (a munkavégzés sebessége)

$$P = \frac{W}{\Delta t},$$

ahol W a munkavégzés, Δt a munkavégzés időtartama.

Átlagteljesítmény: $P_{\text{átlag}} = \dfrac{\sum W}{\sum t}$

Pillanatnyi teljesítmény: $P_{\text{pill}} = F \cdot v_{\text{pill}}$

KIEGÉSZÍTÉS

Forgómozgásnál: $P_{\text{pill}} = M\omega_{\text{pill}}$

Hatásfok

A munkavégzés hatásfoka: $\eta = \dfrac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett munka}} \leq 1$

A hatásfok definíciója a teljesítménnyel kifejezve:

$$\eta = \frac{P_h}{P_b},$$

ahol: η a hatásfok
P_h a hasznosult teljesítmény
P_b a befektetett teljesítmény

A hatásfok növelése a veszteség csökkentésével vagy egy részének hasznosításával történik.

Haladó és forgómozgás összehasonlítása

Haladó mozgás	Forgómozgás
KINEMATIKA	
$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v(t) = v_0 + at$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$ $\omega(t) = \omega_0 + \beta t$
DINAMIKA	
$\mathbf{I} = m\mathbf{v}$	$N = \Theta\omega$
$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}$	$\sum_{i=1}^{n} M = \Theta\beta$ $\sum_{i=1}^{n} M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$
Zárt rendszer lendülete $\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{I}\right)$ állandó	Zárt rendszer perdülete $\left(\sum_{i=1}^{n} N\right)$ állandó

Haladó mozgás	Forgómozgás
ENERGETIKA	
Állandó, elmozdulásirányú erő munkája: $W = Fs$	Állandó forgatónyomaték munkája: $W = M\varphi$
$E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Munkatétel: $\sum_{i=1}^{n} W_{\text{F}} = \Delta E_{\text{mozgási}}$	$\sum_{i=1}^{n} W_{\text{M}} = \Delta E_{\text{forgási}}$
Pillanatnyi teljesítmény: $P = Fv$	$P = M\omega$

Megmaradási tételek

Lendületmegmaradás törvénye

Lendületmegmaradás (impulzusmegmaradás)

Ha a külső erők összege zérus – zárt rendszer –, a pontrendszer összimpulzusa állandó:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 + \ldots + m_n\mathbf{u}_n,$$

ahol $\mathbf{v}_i$ a korábbi, $\mathbf{u}_i$ a későbbi sebességek.

Azaz:

$$\mathbf{I} = \sum m_i\mathbf{v}_i = \text{állandó}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Lendülettétel pontrendszerre

Egy pontrendszer lendülete a tömegpontok lendületeinek összege.

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_i$$

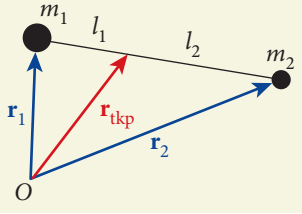
A pontrendszer lendületének (impulzusának) egységnyi időre eső megváltozása egyenlő a pontrendszerre ható külső erők összegével:

$$\frac{\Delta\mathbf{I}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i\,\text{külső}}$$

Pontrendszer tömegközéppontja

A tömegközéppont helyének meghatározása súlyzó esetén:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$



KIEGÉSZÍTÉS

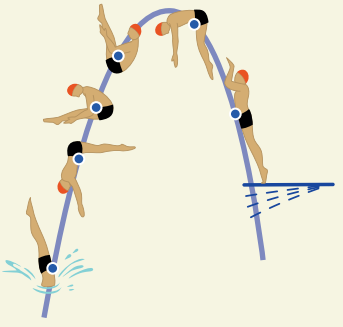
A tömegközéppont mozgásának tétele

Egy pontrendszer tömegközéppontjának helyvektora az egyes tömegpontok helyvektorainak a tömegekkel súlyozott számtani közepe:

$$\mathbf{r}_{\text{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

A tömegközéppont mozgásának tétele: a rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha az össztömeg ott lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna:

$$M\mathbf{a}_{\text{tkp}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i ,$$



ahol: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, a pontrendszer össztömege

$\mathbf{a}_{\text{tkp}}$ a tömegközéppont gyorsulása

$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ a külső erők összege

Ha $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$, akkor $\mathbf{a}_{\text{tkp}} = 0$.

Egy zárt rendszer tömegközéppontja állandó sebességgel mozog, vagyis:

$$\mathbf{v}_{\text{tkp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \text{állandó}$$

A mechanikai energiamegmaradás

A mechanikai energiamegmaradás törvénye

Konzervatív rendszer: ha csak konzervatív erők hatnak.
Konzervatív rendszerben a mozgási és a potenciális (helyzeti) energia összege:

$$E_{\text{ö}} = E_{\text{m}} + E_{\text{pot}} = \text{állandó}$$

Harmonikus rezgőmozgást végző test energiaviszonyai

$$E_{\text{rezgés}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \text{állandó},$$

ahol: x a rezgő test egyensúlyi helyzettől való kitérése

v a rezgő test pillanatnyi sebessége

Az egyensúlyi helyzetben: $E_{össz} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$

A szélső helyzetben: $E_{össz} = \frac{1}{2} D A^2$

Súrlódásmentes lejtőn mozgó tömegpont energiaviszonyai

$$mgh + \frac{1}{2} m v^2 = \text{állandó}$$

Lejtőn csúszásmentesen guruló test energiaviszonyai

$$mgh + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \text{állandó}$$

ahol: h a lejtő alsó szintjéhez viszonyított magassága
v és ω a sebesség és a szögsebesség pillanatnyi értékei
Θ a guruló test tehetetlenségi nyomatéka

KIEGÉSZÍTÉS

A perdület (impulzusnyomaték) megmaradása

Perdület (impulzusnyomaték) a pontrendszerben

Egy pontrendszer perdülete az egyes tömegpontok perdületének összegével egyenlő:

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$$

Egy pontrendszer perdületének egységnyi időre eső megváltozása egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak előjeles összegével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} M_{i,\,\text{külső}}$$

Perdület (impulzusnyomaték) megmaradása

Ha a külső erők forgástengelyre vett forgatónyomatékainak összege (M_k) zérus, akkor

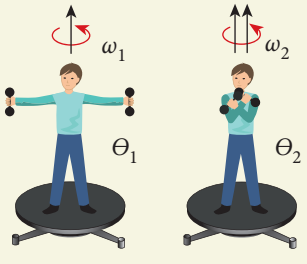
$\Delta N = 0$, vagyis $N = \Theta \cdot \omega = \text{állandó}$, vagyis a perdület megmarad.

Például:
A piruettező gyerekekre:

$$\Theta_1 \omega_1 = \Theta_2 \omega_2$$

A rajzon:

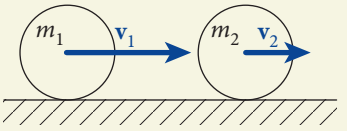
Ha $\Theta_1 > \Theta_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$, vagyis gyorsabban pörög.



A tehetetlenségi nyomaték csökken, a szögsebesség nő

Ütközések

Két test centrális, egyenes ütközése esetén a testek sebességének nagysága ütközés után:



$$u_1 = (1+k)\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - k v_1,$$

$$u_2 = (1+k)\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - k v_2,$$

ahol $0 \leq k \leq 1$ az ütközési szám: $k = \dfrac{|u_1 - u_2|}{|v_1 - v_2|}$

v_1, v_2 } a testek ütközés előtti sebessége

u_1, u_2 } a testek ütközés utáni sebessége

Tökéletesen rugalmas ütközés esetén $k = 1$, tökéletesen rugalmatlan ütközés esetén $k = 0$, ekkor

$$u \equiv v_{\text{tkp}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

a két testből álló rendszer tömegközéppontjának sebessége.

Tömegpont (anyagi pont) és merev test egyensúlya (statika)

Egyensúly

Tömegpont egyensúlya

A test az inerciarendszerben áll vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez ($a = 0$). Az egyensúly feltétele:

a testre ható erők eredője: $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} = 0$

Merev test egyensúlya

A merev test egyensúlyához általános esetben két feltétel szükséges:

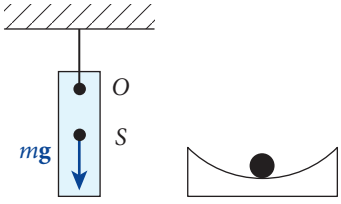
a) a testre ható összes erők eredője zérus: $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} = 0$,

b) a testre ható összes erők forgatónyomatékainak előjeles összege a test bármely pontjára vonatkozóan zérus legyen: $\sum_{i=1}^{n} M = 0$.

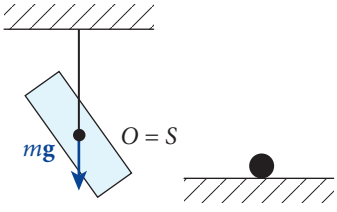
Egyensúlyi helyzetek

Egy pontjában felfüggesztett vagy alátámasztott test egyensúlya:

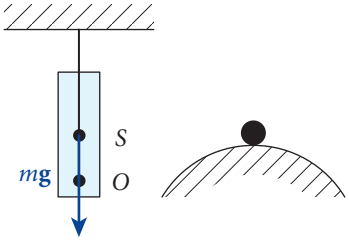
biztos,
ha a testet egyensúlyi helyzetéből bármilyen irányban kissé kimozdítva helyzeti energiája növekedik;



közömbös,
ha van olyan irány, amelybe a testet kissé kimozdítva helyzeti energiája nem változik, de nincs olyan irány, amelybe kimozdítva helyzeti energiája csökkenne;



bizonytalan,
ha van olyan irány, amelybe a testet kimozdítva a test helyzeti energiája csökken.



Egyszerű gépek

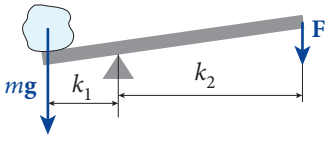
Használatukkor nagy erőket kis erőkkel egyensúlyozhatunk.

Emelő rendszerű egyszerű gépek

Kétoldalú emelő:

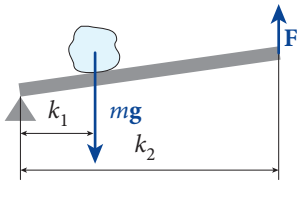
$$mgk_1 = Fk_2$$

$$F = mg\frac{k_1}{k_2}$$



Egyoldalú emelő:

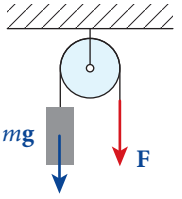
$$F = mg\frac{k_1}{k_2}$$



Állócsiga:

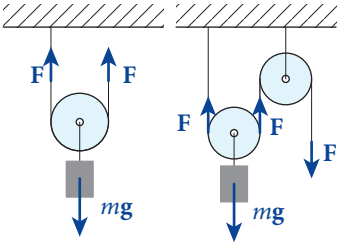
$$F = mg$$

Az állócsiga az F erő irányának megfordítására szolgál.



Mozgócsiga:

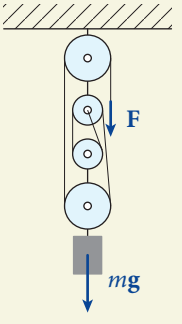
$$F = \frac{mg}{2}$$



Közönséges csigasor n mozgócsiga esetén:

$$F = \frac{mg}{2n},$$

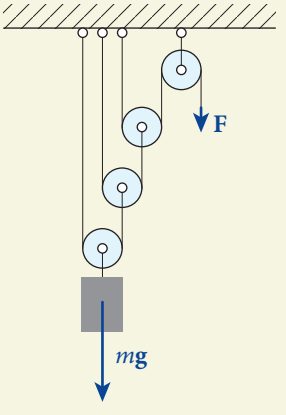
ahol n a mozgócsigák száma.



Arkhimédészi vagy hatványcsigasor:

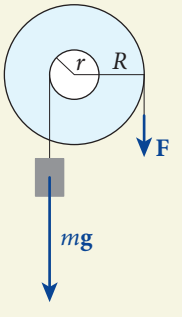
$$F = \frac{mg}{2^n},$$

ahol n a mozgócsigák száma.



Hengerkerék:

$$F = mg\frac{r}{R}$$

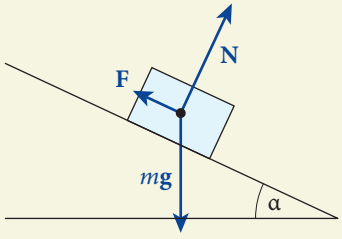


Lejtő rendszerű egyszerű gépek

Lejtőn, ha F párhuzamos a lejtő síkjával:

$F = mg \sin \alpha$,
$N = mg \cos \alpha$,

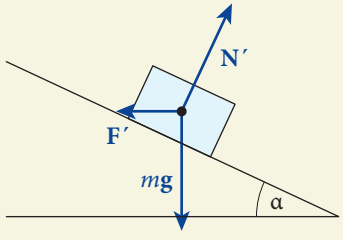
ahol: mg a nehézségi erő
N a felületre merőleges nyomóerő



Lejtőn, ha F' párhuzamos a lejtő alapjával:

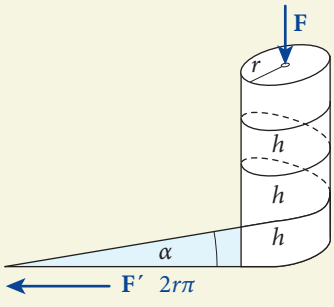
$F' = mg \operatorname{tg} \alpha$

$N' = \dfrac{mg}{\cos \alpha}$



Csavar:

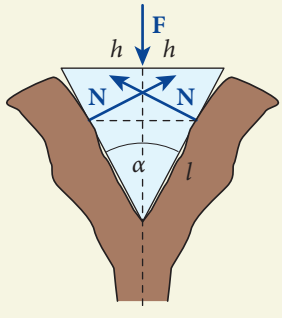
$F' = F \operatorname{tg} \alpha; \quad tg\ \alpha = \dfrac{h}{2r\pi}; \quad F' = mg\dfrac{h}{2r\pi}$



Ék:

$F = 2N \sin \dfrac{\alpha}{2} = 2N \dfrac{h}{l}$,

ahol: α az ék nyílásszöge
N a felületre merőleges nyomóerő



Mechanikai hullámok

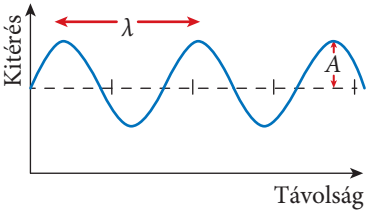
Haladó hullámok

Transzverzális és longitudinális hullámok

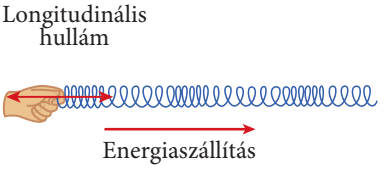
Transzverzális hullám pontsoron

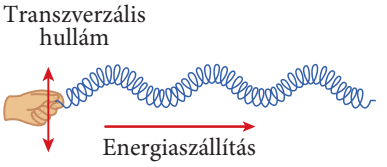
Longitudinális hullám pontsoron

$\lambda = cT$, a rezgés T periódusideje alatt a rezgésállapot λ távolságra jut



A harmonikus hullám térben és időben periodikus jelenség.





KIEGÉSZÍTÉS

Hullámfüggvény:

$$y(x,t) = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin(\omega t - kx)$$

A λ hullámhossz a térbeli, a T periódusidő az időbeli periodicitás mértéke.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a hullámszám

Terjedési sebesség

Rúdban (transzverzális hullám)

F erővel kifeszített, m tömegű, l hosszúságú húrban (rúdban) a transzverzális hullám terjedési sebessége:

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \sqrt{\frac{Fl}{m}}$$

Levegőben

A hang levegőben longitudinális hullámként terjed, sebessége:

$$c = c_0\sqrt{\frac{T}{273\ \mathrm{K}}},$$

ahol $c_0 = 331{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

T a levegő kelvinben mért hőmérséklete

Gázokban (longitudinális hullám)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}},$$

ahol: $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ fajhőhányados

R az egyetemes gázállandó

$R = 8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$

T a kelvinben mért hőmérséklet

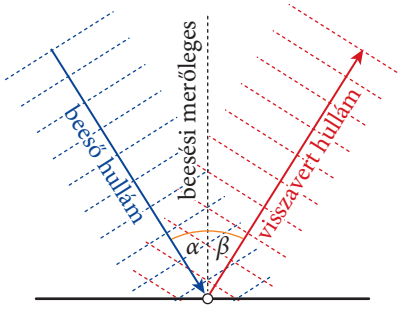
M a moláris tömeg

Hullámjelenségek

Visszaverődés (egyenes hullám visszaverődése)

A visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel ($\alpha = \beta$).

A beeső hullám terjedési iránya, a visszavert hullám terjedési iránya és a beesési merőleges egy síkban van.



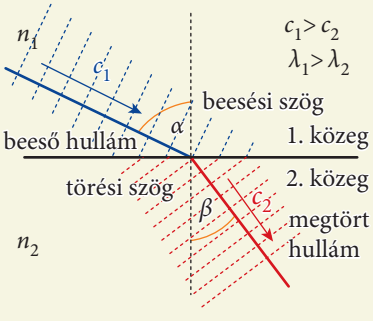
Hullámok törése (Snellius–Descartes-törvény)

A beeső hullám terjedési iránya, a megtört hullám terjedési iránya és a beesési merőleges egy síkban van, és ha a hullám hullámtanilag sűrűbb közegbe lép, akkor a törési szög (β) kisebb, mint a beesési szög (α).

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1},$$

ahol: c_1, c_2 a hullám terjedési sebessége az egyes közegekben

$n_{2,1}$ a második közeg első közegre vonatkozó törésmutatója



Elhajlás (diffrakció)

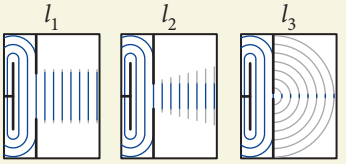
Hullámjelenség figyelhető meg az akadály mögötti térben (az ún. árnyéktérben).

Hullám áthaladása résen:

$l_1 >> \lambda$ a hullám a résen szinte változatlanul halad át

$l_2 \cong \lambda$ hullámjelenség a rés mögött, elhajlás

$l_3 << \lambda$ a pontszerű rés hullámforrásként viselkedik



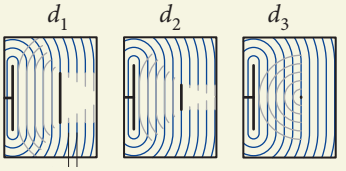
l a rés mérete
λ a hullámhossz

Akadály a hullámtérben:

$d_1 >> \lambda$ a hullám az akadály árnyékterébe nem jut, de nincs éles határvonal

$d_2 \cong \lambda$ hullámjelenség az árnyéktérben is létrejön: elhajlás

$d_3 << \lambda$ az akadály pontszerű hullámforrásként viselkedik



d az akadály mérete
λ a hullámhossz

Hullámok találkozása, interferencia

Koherens hullámok: időben állandó fáziskülönbséggel találkozó hullámok.

Egy egyenesbe eső rezgések összetételekor $f_1 = f_2$ esetén az eredő mozgás harmonikus rezgés.

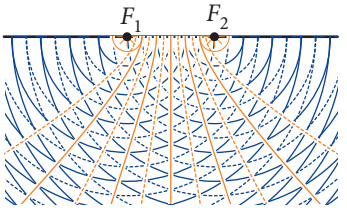
$\Delta\varphi = k \cdot 2 \cdot \pi$ esetén maximális erősítés

$A = A_1 + A_2$

$\Delta\varphi = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$ esetén maximális gyengítés

$A = |A_1 - A_2|$

Ezért ahol a hullámok azonos fázisban találkoznak, tartósan erősítik egymást, ahol ellentétes fázisban találkoznak, tartósan gyengítik (kioltják) egymást.



F_1, F_2 azonos fázisban rezgő hullámforrások

Észlelhető interferencia: koherens hullámok találkozása

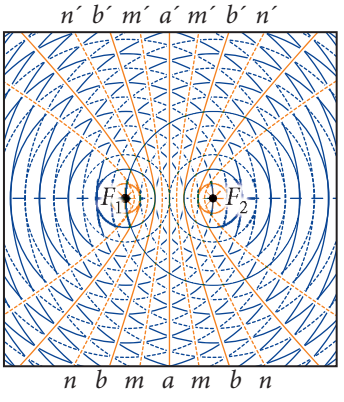
Körhullámok találkozása:

a) találkozó hullámok amplitúdóinál nagyobb amplitúdójú rezgések: erősítés;

b) más helyeken kisebb amplitúdójú (zérus) helyek: gyengítés (kioltás).

A maximális erősítés helyei: aa', bb'

A maximális gyengítés (kioltás) helyei: mm', nn'



Azonos fázisban rezgő hullámforrások esetén, ha a két hullámforrás fáziskülönbsége $2k\pi$, akkor a maximális erősítés:

$$\Delta s = 2k\frac{\lambda}{2}$$

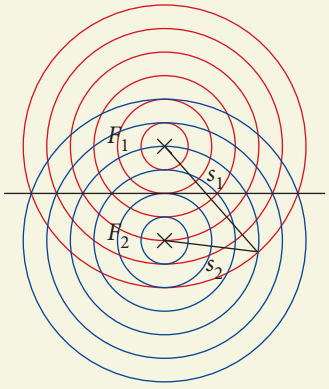
$$s_1 - s_2 = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \text{ (hiperbolák)}$$

Kioltás vagy maximális gyengítés:

$$\Delta s = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$s_1 - s_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \text{ (hiperbolák)}$$

λ útkülönbséghez 2π fáziskülönbség tartozik.

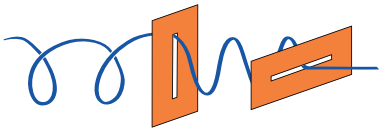


Δs útkülönbség a találkozó hullámok között

s_1, s_2 az egyes hullámforrások távolsága az erősítés, illetve gyengítés helyétől

Polarizáció

Csak transzverzális hullámok polarizálhatók.
A réssel párhuzamos rezgés jelenik meg a rés mögött.



polarizátor analizátor

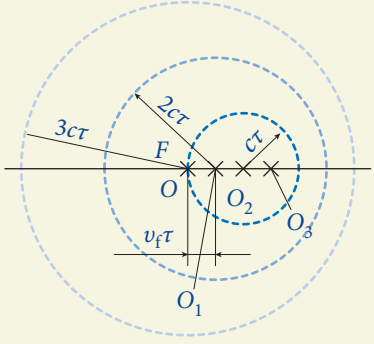
Doppler-jelenség, lökéshullám

Doppler-jelenség

A hullámforrás és a megfigyelő relatív mozgása az észlelt rezgések frekvenciáját befolyásolja.
A hullámforrás v_f sebessége kisebb a hullám közegbeli c sebességénél:

$$v_f < c$$

A jelenség oka: A hullámforrás által keltett állapot a közegben meghatározott sebességgel terjed, függetlenül a hullámforrás mozgásától. A hullámfelületek (felületi hullámok esetén körhullámok) nem koncentrikus körök. A hullámforrás haladása irányában a hullámfrontok torlódnak.



v_f a hullámforrás sebessége
c a hullám terjedési sebessége a közegben
τ egy tetszőleges időtartam

1. v_f sebességgel mozgó hullámforrás, nyugvó megfigyelő.
Az észlelt frekvencia:

$$f = f_0 \frac{c}{c \mp v_f},$$

ahol: f_0 a hullámforrás frekvenciája
$+$ a megfigyelőtől távolodik
$-$ a megfigyelőhöz közeledik

2. A hullámforrás nyugszik, a megfigyelő v_m sebességgel mozog.
Az észlelt frekvencia:

$$f = f_0 \frac{c \pm v_m}{c},$$

ahol: v_m a megfigyelő sebessége
$+$ közeledés
$-$ távolodás

3. A hullámforrás v_f sebességgel, a megfigyelő v_m sebességgel mozog.
Az észlelt frekvencia egymáshoz közeledve:

$$f = f_0 \frac{c + v_m}{c - v_f}$$

Az észlelt frekvencia egymástól távolodva:

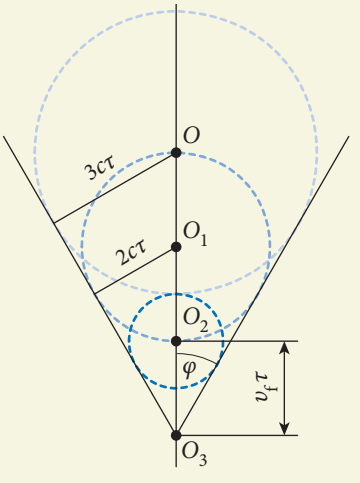
$$f = f_0 \frac{c - v_m}{c + v_f}$$

v_f és v_m az F forrást és az M megfigyelőt összekötő egyenes menti sebességkomponensek.

KIEGÉSZÍTÉS

Lökéshullám

Ha a hullámforrás v_f sebessége nagyobb a hullám közegbeli c terjedési sebességénél, akkor a hullámforrás „lehagyja” az általa keltett hullámfrontot (érdekes hangjelenség figyelhető meg, például szuperszonikus repülőgépeknél a süvítő hang).



Mach-kúp:
(2φ nyílásszögű)

$$\sin\varphi = \frac{c}{v_f}$$

Mach-szám:

$$M = \frac{v_f}{c}$$

Állóhullámok

Húrok, pálcák sajátrezgései

Az l *hosszúságú húron kialakuló állóhullámok (monochord sajátrezgései)*

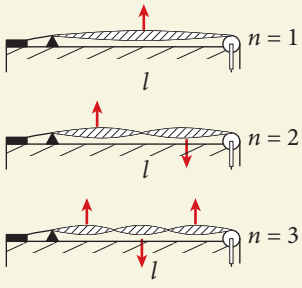
A húr két vége rögzített, ott az állóhullámnak csomópontja van.

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad f_n = n\frac{c}{2l}$$

Alapfrekvencia ($n = 1$): $f_1 = \frac{c}{2l}$

Felharmonikusok frekvenciái ($n = 2$; 3 stb.):

$f_n = n \cdot f_1$, azaz $f_2 = \frac{c}{l}$; $f_3 = 3\frac{c}{2l}$; …



KIEGÉSZÍTÉS

Pálcák sajátrezgései (egyik végén rögzített)

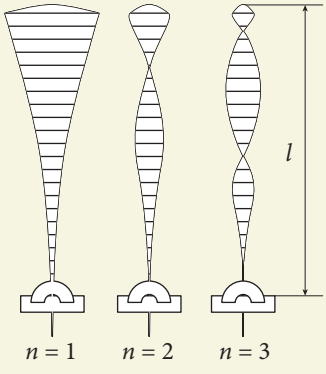
Egyik végén rögzített pálcán kialakuló állóhullámnak a szabad végen duzzadási helye, a rögzített végen csomópontja van.

$$l = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \qquad f_n = (2n-1)\frac{c}{4l}$$

Alapfrekvencia ($n = 1$): $f_1 = \frac{c}{4l}$

Felharmonikusok frekvenciái ($n = 2$; 3 stb.):

$f_n = (2n-1) \cdot f_1$, azaz $f_2 = 3\frac{c}{4l}$; $f_3 = 5\frac{c}{4l}$; …



Rezgő levegőoszlopok (sípok)

Egyik végén nyitott dobozban (zárt sípban) kialakuló állóhullámok:

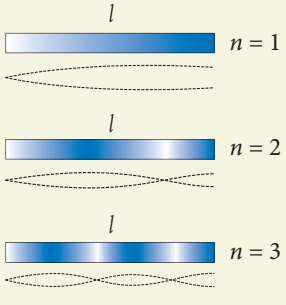
$$l = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4}$$

$f_1 = \frac{c}{4l}$ } alapfrekvencia

$f_2 = 3\frac{c}{4l}$

⋮

$f_n = (2n-1)\frac{c}{4l} = (2n-1)f_1$ } felharmonikusok ($n = 2, 3, \ldots$)



Mindkét végén nyitott csőben (nyitott sípban) lévő, l hosszúságú levegőoszlop sajátrezgései:

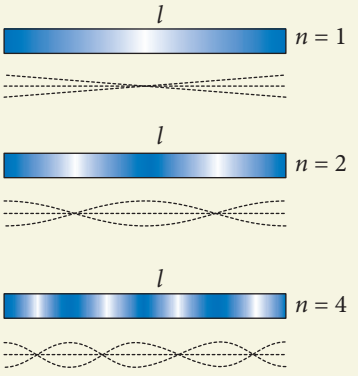
$$l = n\frac{\lambda_n}{2}$$

$f_1 = \frac{c}{2l}$ } alapfrekvencia

$f_2 = 2 \cdot \frac{c}{2l}$

$\vdots$

$f_n = n\frac{c}{2l} = nf_1$ } felharmonikusok ($n = 2, 3, \ldots$)



Folyadékok és gázok mechanikája

Nyugvó folyadékok és gázok (hidrosztatika, aerosztatika)

Nyomás

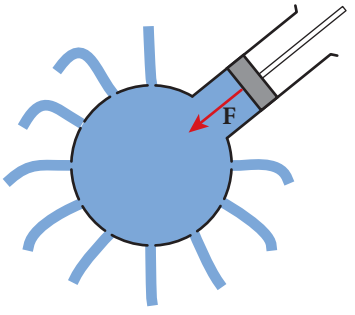
A felületre ható merőleges F erő nagyságának és a felület A területének hányadosa.

$$p = \frac{F}{A}$$

Mértékegysége: 1 Pa. $1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Pascal törvénye

Folyadékra (gázra) ható külső erő által létrehozott nyomás a folyadékban (gázban) minden irányban gyengítetlenül terjed.

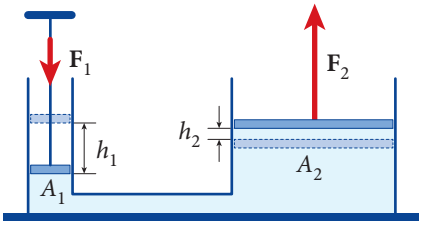


Hidraulikus emelő (sajtó)

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad F_2 > F_1, \text{ ha } A_2 > A_1$$

(összenyomhatatlan folyadék)

$$A_1 h_1 = A_2 h_2 \qquad h_2 < h_1, \text{ ha } A_2 > A_1$$



A hidrosztatikai nyomás

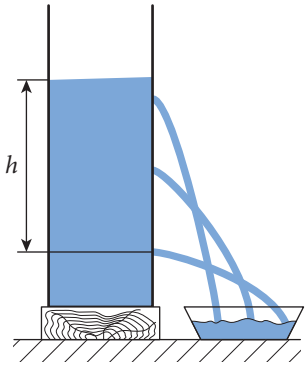
Nyugvó folyadék szabad felületétől mért h mélységben a hidrosztatikai nyomás:

$$p_h = \rho g h$$

Földi körülmények között a folyadék szabad felületére a levegő p_0 nyomása is hat, így a p nyomás a folyadékban:

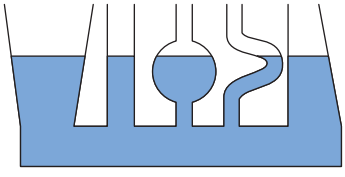
$$p = p_0 + \rho g h,$$

ahol: ρ a folyadék sűrűsége
h a szabad felszíntől mért távolság (mélység)



Közlekedőedények

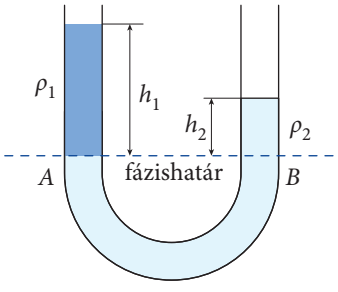
Egy folyadékkal töltött közlekedőedény mindegyik szárában a folyadék azonos magasságban van.



Különböző nem keveredő folyadékok közlekedőedényben:

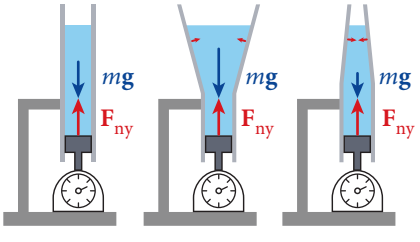
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

ahol: ρ_1, ρ_2 a folyadékok sűrűsége
h_1, h_2 a fázishatár fölötti folyadékoszlopok magassága



Hidrosztatikai paradoxon

A folyadék hidrosztatikai nyomása, a $p_h = \rho \cdot g \cdot h$, nem tartalmaz semmilyen paramétert az edény formájáról, tehát a hidrosztatikai nyomás nem függ az edény alakjától.

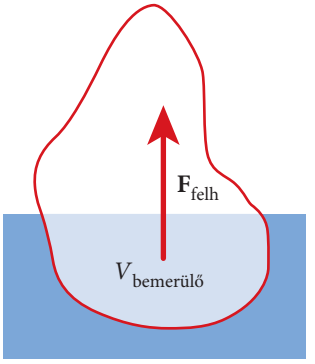


Arkhimédész törvénye

A folyadékba merülő testre a folyadék által kifejtett nyomáskülönbségből származó felhajtóerő hat.

$$F_{felh} = \rho_{foly} \cdot V_{bemerülő} \cdot g,$$

ahol: F_{felh} a felhajtóerő
$V_{bemerülő}$ a testnek a folyadékba merülő térfogatrésze



A törvény gázokba merülő testek esetében is igaz.

Folyadékba merülő testek egyensúlya

Ha egy ρ sűrűségű, V térfogatú testre csak a nehézségi erő és a felhajtóerő hat, akkor az egyensúly feltétele:

$$\rho \cdot V \cdot g = \rho_{foly} \cdot V_{bem} \cdot g$$

Ha $\rho < \rho_{foly}$, akkor $V_{bem} < V$, a test úszik,

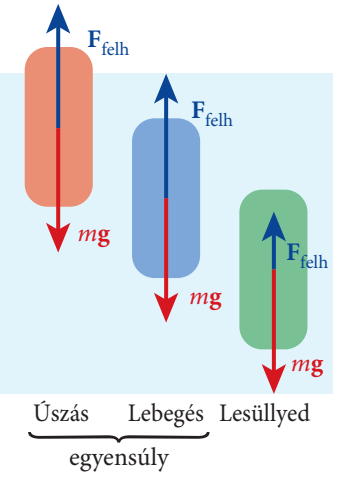
$$mg = F_{felh}.$$

Ha $\rho = \rho_{foly}$, akkor $V_{bem} = V$, a test lebeg,

$$mg = F_{felh}.$$

Ha $\rho_{foly} < \rho$, akkor $V_{bem} = V$, a test lemerül,

$$F_{felh} < mg.$$



A légnyomás (Torricelli-kísérlet)

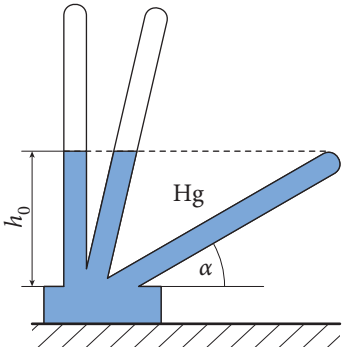
$$p = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_0$$

A tengerszinten általában a higanyszint:

$$h_0 = 760 \text{ mm};$$

a nyomás:

$$p = 101{,}325 \text{ kPa} = 1{,}0133 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$



ρ_{Hg} a Hg sűrűsége
p_0 a levegő nyomása a viszonyítási helyen
ρ_0 a levegő sűrűsége
h a viszonyítási helytől mért távolság

KIEGÉSZÍTÉS

A légnyomás a tengerszint feletti magassággal csökken:

$$p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g}{p_0} \cdot h},$$

az ún. barometrikus magasságformulának megfelelően.

Molekuláris erők folyadékokban

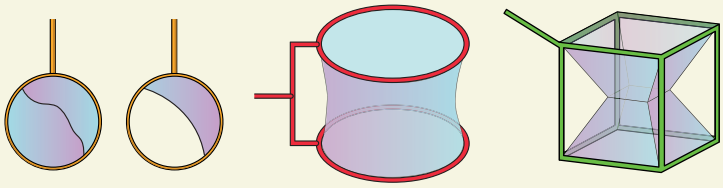
Felületi feszültség, határfelületi energia

Egy folyadék felületének ΔA-val való megváltoztatásához szükséges munka arányos ΔA-val. Az arányossági tényező a felületi feszültség (a folyadék és környezete határfelületi feszültsége):

$$\sigma = \frac{W}{\Delta A}$$

Felületi energia:

$$E = \sigma \cdot A$$



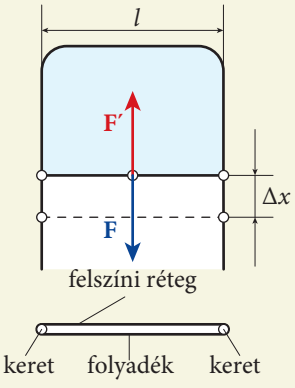
Egy folyadékfelszín adott körülmények között a legkisebb energiájú, illetve legkisebb felületű.

$W = \Delta E$ miatt

$F \cdot \Delta x = \sigma \cdot \Delta A = \sigma \cdot 2l \cdot \Delta x$ (mert a hártya kétrétegű), így

$F = \sigma \cdot 2l$

F: a drótkeret *l* hosszúságú darabjára ható erő.



KIEGÉSZÍTÉS

Görbületi nyomás

Külső p_1 nyomás és R sugarú gömb alakú buborék (szappanbuborék) belsejében lévő p_2 levegő nyomása:

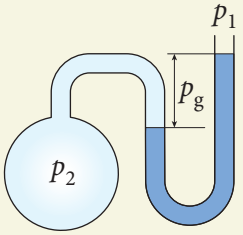
$$p_2 = p_1 + \frac{4\sigma}{R}$$

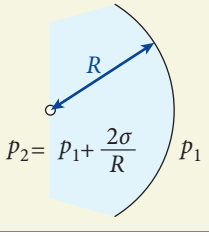
$$p_2 - p_1 = p_g = \frac{4\sigma}{R}$$

(a szappanhártya kettős felszínnel rendelkezik).

Folyadékcsepp görbületi nyomása:

$$p_g = \frac{2\sigma}{R}$$



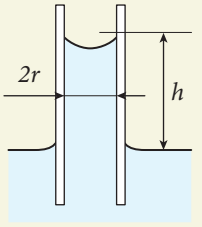


Kapillárisemelkedés (süllyedés)

Kapillárisemelkedés r sugarú hajszálcsőben (tökéletesen nedvesítő folyadék esetén):

$$\rho g h = \sigma \frac{2}{r},$$

ahol: ρ a folyadék sűrűsége
σ a felületi feszültség
r a kapillárisCső belső sugara



Folyadékok és gázok áramlása

Ideális folyadékok

Az ideális (belső súrlódástól mentes) folyadék összenyomhatatlannak tekinthető.

Az áramlás erőssége:

Valamely felületen egységnyi idő alatt átáramlott folyadék tömege.

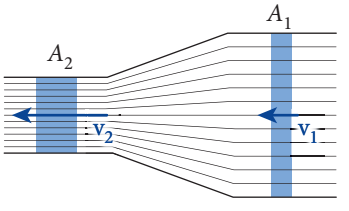
$$I = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho A v \Delta t}{\Delta t} = \rho A v$$

A stacionárius áramlás törvénye
(kontinuitási törvény):

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Ha összenyomhatatlan a folyadék, a sűrűsége nem változik:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



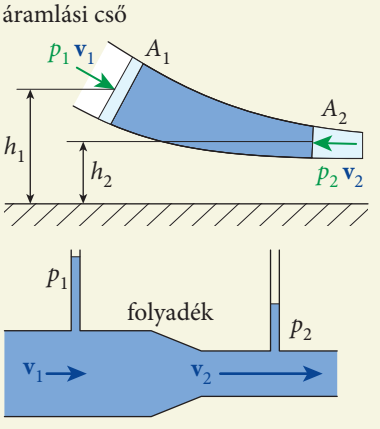
Bernoulli-törvény

Súrlódásmentes áramlási térben bármely áramfonal mentén:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

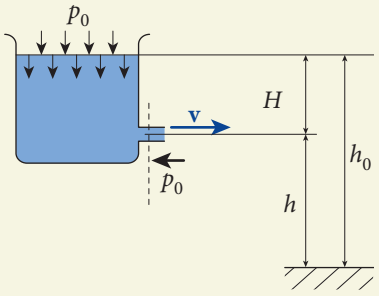
p a nyomás azon helyen, ahol v a közeg sebessége



A Bernoulli-törvény alkalmazásai

Torricelli-féle kiömlési törvény:

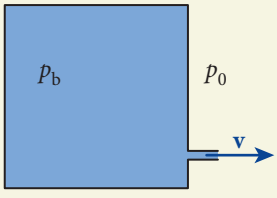
$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)} = \sqrt{2gH}$$



KIEGÉSZÍTÉS

Tartályból kis nyíláson kiömlő gáz
Bunsen-féle törvény:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_b - p_0)}{\rho_{gáz}}}$$

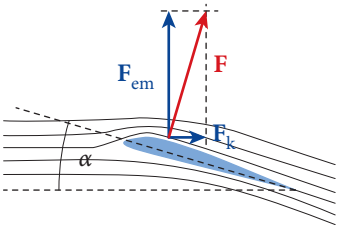


Aerodinamikai emelőerő

$$F_{em} = k_1 \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

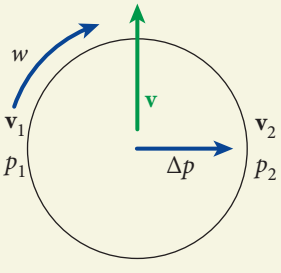
$$F_k = k_2 \frac{1}{2} \rho v^2 A \qquad \text{siklási szám: } \varepsilon = \frac{k_1}{k_2}$$

ahol: A a lap (szárny) felülete
ρ a közeg sűrűsége
α az állásszög
k_1 és k_2 együtthatók az α állásszögtől függenek



Csavart labda

A megpörgetve elhajított vagy megrúgott labda elkanyarodik a két oldalán lévő nyomáskülönbség miatt (Magnus-effektus).



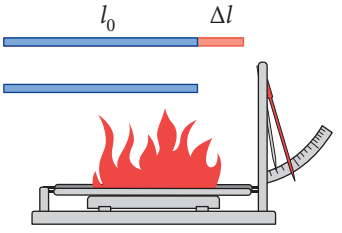
v_1, v_2 a (labda által magával sodort) levegő sebessége
$v_1 (< v) < v_2$, $p_1 > p_2$

Hőtan

Hőtágulás

Szilárd testek tágulása

Szilárd testek vonalas (lineáris) hőtágulása



A Δt hőmérséklet-változás hatására bekövetkező Δl hosszváltozás:

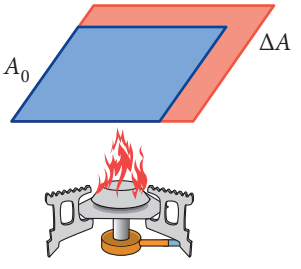
$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$$

A test l_t hossza (illetve bármely hosszúságadata) t hőmérsékleten

$$l_t = l_0(1 + \alpha t),$$

ahol: l_0 a test hossza 0 °C hőmérsékleten
α a lineáris hőtágulási együttható

Szilárd testek felületi tágulása



A felületváltozás:

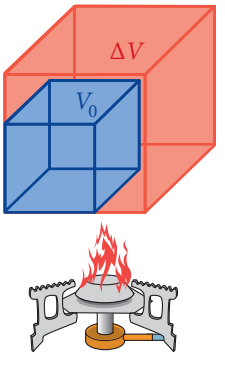
$$\Delta A = A_0 2\alpha \Delta t$$

A test felülete t hőmérsékleten (jó közelítéssel):

$$A_t = A_0(1 + 2\alpha t),$$

ahol A_0 a test felületének területe 0 °C-on.

Szilárd testek térfogati hőtágulása
(izotróp test köbös hőtágulása)



A térfogatváltozás:

$$\Delta V = V_0 3\alpha \Delta t$$

A test térfogata t hőmérsékleten (jó közelítéssel):

$$V_t = V_0(1 + \beta t),$$

ahol: V_0 a test térfogata 0 °C-on
$\beta = 3\alpha$, a test térfogati hőtágulási együtthatója

Folyadékok hőtágulása

A térfogatváltozás Δt hőmérséklet-változás hatására:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta t$$

ahol: V_0 a folyadék 0 °C-on mért térfogata
β a folyadék hőtágulási együtthatója

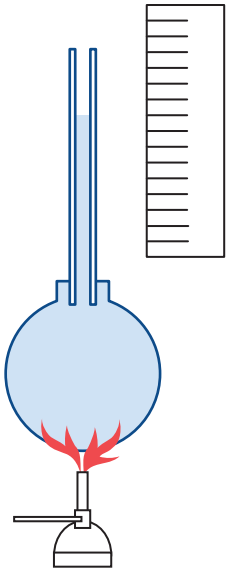
A térfogat a t hőmérsékleten:

$$V_t = V_0(1 + \beta t),$$

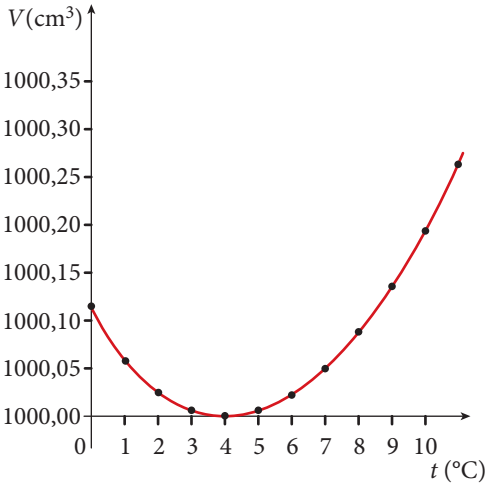
Szilárd testek és folyadékok hőmérséklet-változás hatására bekövetkező sűrűségváltozása:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}$$

ahol ρ_0 a sűrűség 0 °C-on
ρ_t a sűrűség t hőmérsékleten



A víz a folyadékok többségétől eltérően viselkedik. Hőtágulási együtthatója 0 és 4 °C között negatív, 4 °C-on zérus.



1 kg víz térfogatának hőmérsékletfüggése

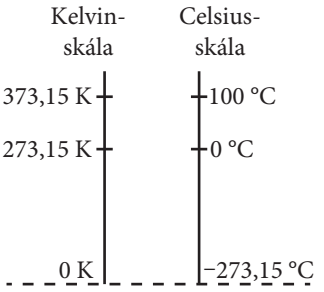
Gáztörvények

Az abszolút hőmérsékleti skála

A kelvinben (K) kifejezett T hőmérséklet:

$T = 273{,}15 + t$, a t a Celsius-fokban mért hőmérséklet.

A gyakorlatban a Celsius-fokba történő átszámításnál a 273,15 K helyett 273 K értéket használjuk.



Avogadro törvénye

Az azonos nyomású, térfogatú és hőmérsékletű ideális gázokban mindig ugyanannyi részecske található.

$$N = N_A \cdot n,$$

ahol: n az anyagmennyiség (mólszám)

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$, az úgynevezett Avogadro-állandó.

Ideális gázok állapotegyenlete

Egy ideális gáz minden állapotában az állapothatározók között fennáll a következő összefüggés:

$$pV = NkT$$

$$pV = nRT$$

Más alakban:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$p = \frac{\varrho}{M}RT$$

p a nyomás
V a térfogat
n a gáz kémiai anyagmennyisége mólban
T az abszolút hőmérséklet K-ben
m a gáz tömege
M a gáz moláris tömege
R az egyetemes gázállandó
$R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
k a Boltzmann-állandó
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Gázkeverékek állapotegyenlete

$$pV = (N_1 + N_2 + N_3 + \ldots)kT$$

Egyesített gáztörvény

Adott mennyiségű ideális gázra (N = állandó vagy n = állandó) fennáll:

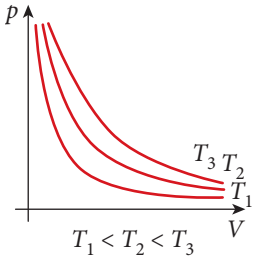
$$\frac{pV}{T} = \text{állandó}$$

A gáz két különböző állapotát összehasonlítva: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$

Speciális állapotváltozások
(adott mennyiségű ideális gázra)

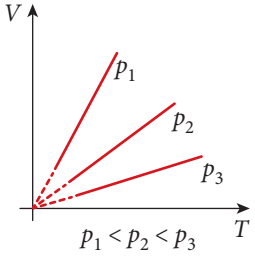
Izoterm állapotváltozás (T = állandó)

pV = állandó
(Boyle–Mariotte-törvény)



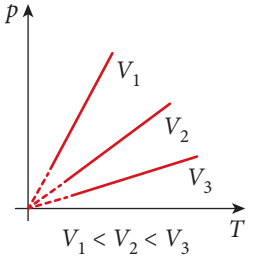
Izobár állapotváltozás (p = állandó)

$\frac{V}{T}$ = állandó
(Gay-Lussac I. törvénye)



Izochor állapotváltozás (V = állandó)

$\frac{p}{T}$ = állandó
(Gay-Lussac II. törvénye)



Adiabatikus állapotváltozás ($Q = 0$)

KIEGÉSZÍTÉS

pV^{κ} = állandó (Poisson-egyenlet)

$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ a fajhőhányados

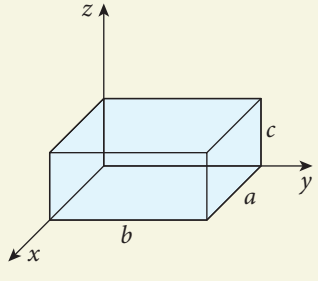
KIEGÉSZÍTÉS

A molekuláris hőelmélet alapjai

A kinetikai gázmodell

A gáznyomás molekuláris értelmezése

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{m_0\overline{v^2}}{2},$$



ahol: $\frac{m_0\overline{v^2}}{2}$ egy részecske átlagos mozgási energiája
N a gázrészecskék száma
V a gáz térfogata
m_0 egy részecske tömege
$\overline{v^2}$ a részecskék sebességnégyzetének átlaga

A gáz hőmérséklete:

$$T = \frac{2}{3k}\frac{m_0\overline{v^2}}{2},$$

ahol k a Boltzmann-állandó:

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Az energia egyenletes eloszlása (ekvipartíciótétel)

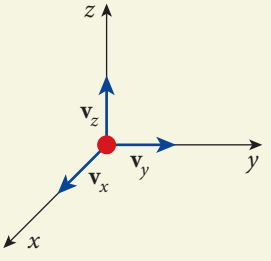
Szabadsági fok: a gázrészecskék energiájában szereplő négyzetes tagok (más szóval: egymástól független energiatárolási lehetőségek) száma.

Ezen f szabadsági fokok között az energia egyenletesen oszlik el, minden szabadsági fokra $\frac{1}{2}kT$ energia jut.

Egyatomos gázrészecskénél a haladó és forgómozgás együttes energiája:

$$E_{m_0} = \frac{1}{2}m_0v_x^2 + \frac{1}{2}m_0v_y^2 + \frac{1}{2}m_0v_z^2$$

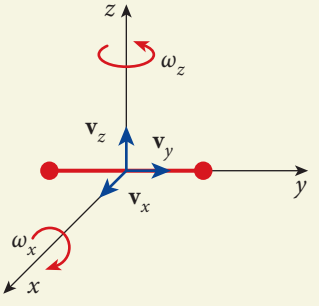
$f = 3$, ezért az egyatomos, N részecskéből álló gáz belső energiája: $E_b = \frac{3}{2}NkT$



Kétatomos gázrészecske esetén a haladó és forgómozgás együttes energiája:

$$E_{m_0} = \frac{1}{2}m_0v_x^2 + \frac{1}{2}m_0v_y^2 + \frac{1}{2}m_0v_z^2 + \\ + \frac{1}{2}\theta_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\theta_z\omega_z^2$$

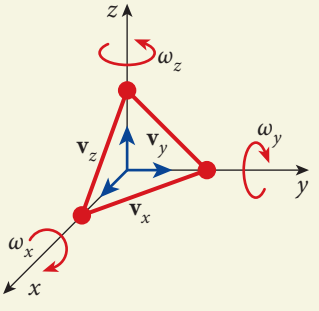
$f = 5$, ezért a kétatomos, N részecskéből álló gáz belső energiája: $E_b = \frac{5}{2}NkT$



Többatomos gázrészecske esetén a haladó és forgómozgás együttes energiája:

$$E_{m_0} = \frac{1}{2}m_0v_x^2 + \frac{1}{2}m_0v_y^2 + \frac{1}{2}m_0v_z^2 + \\ + \frac{1}{2}\theta_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\theta_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}\theta_z\omega_z^2$$

$f = 6$, ezért a többatomos, N részecskéből álló gáz belső energiája: $E_b = 3NkT$



A termodinamika főtételei

Belső energia, tágulási munka

Belső energia

Az f szabadsági fokú rendszerben: $E_b = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT$

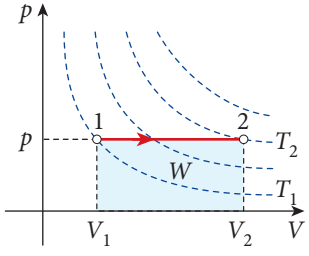
Zárt gázmennyiség térfogatváltozáskor munkát végez.

A térfogati munka

Izobár (p = állandó) változáskor:

$W_{\text{gáz}} = p\Delta V$

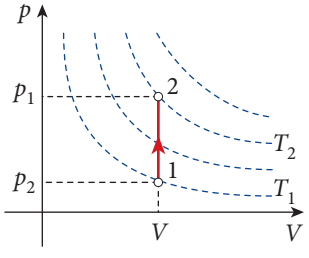
$W_{\text{környezet}} = -p\Delta V$



Izochor (V = állandó) változáskor:

$W_{\text{környezet}} = 0$

$W_{\text{gáz}} = 0$

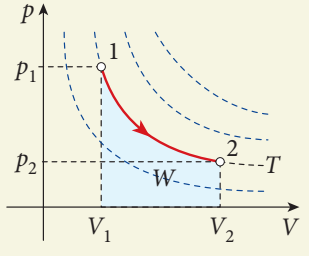


KIEGÉSZÍTÉS

Izoterm (T = állandó) változáskor:

$W_{\text{környezet}} = -nRT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$

$W_{\text{gáz}} = nRT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT \cdot \ln\frac{p_1}{p_2}$



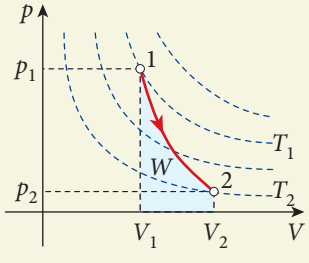
Adiabatikus (Q = 0) változáskor:

$W_{\text{gáz}} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\kappa - 1}$,

ahol:

$\kappa = \frac{c_p}{c_V}$

c_p, c_V } az ideális gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton mért fajhői



A termodinamika I. főtétele

Egy termodinamikai rendszer belső energiájának változása egyenlő a rendszerrel közölt hő és a rendszeren végzett munka előjelesen vett összegével.
Az energiákat a rendszer szempontjából látjuk el előjellel. Pozitív, ha a gáz energiát vesz fel (pl. a gázt összenyomjuk).

$$\Delta E_b = Q + W,$$

ahol: ΔE az adott test belső energiaváltozása
Q a környezet által leadott vagy felvett hőmennyiség
W a környezet munkavégzése

	Pozitív	Negatív
ΔE	a belső energia nő	a belső energia csökken
Q	a környezet hőt ad a testnek	a test hőt ad a környezetnek
W	a környezet végez munkát a gázon (a gáz térfogata csökken)	a gáz végez munkát a környezeten (a gáz térfogata növekszik)

Az I. főtétel speciális állapotváltozásokra

Izotermikus folyamat

$$\Delta E_b = 0 \qquad Q + W = 0$$

KIEGÉSZÍTÉS

$$W = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad W_{\text{gáz}} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Izochor folyamat:

$$W = 0$$

$$\Delta E_b = Q \qquad Q = c_V m \Delta T$$

Izobár folyamat:

$$W = -p\Delta V$$

$$\Delta E_b = Q - p(V_2 - V_1) \qquad Q = c_p m \Delta T$$

Adiabatikus folyamat:

$$Q = 0$$

$$\Delta E_b = W \qquad W = -\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\kappa - 1} \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_V}$$

A hőkapacitás, fajhő, mólhő

A termikus kölcsönhatás közben átadott energiát hőmennyiségnek (vagy röviden hőnek) nevezzük.

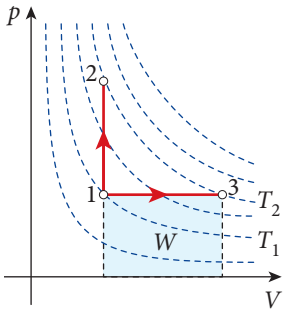
$$C = \frac{Q}{\Delta T},$$

ahol: C az adott test hőkapacitása

ΔT a hőmérséklet-változás

Adott anyagi minőségre jellemző a c fajlagos hőkapacitás (fajhő) és a c_n moláris hőkapacitás (mólhő):

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \qquad c_n = \frac{Q}{n\Delta T}$$



$Q_{12} = c_v m\Delta T$, $Q_{13} = c_p m\Delta T$

$c_p > c_v$, mert izobár folyamat során a felvett hő egy része a gáz munkavégzését fedezi

KIEGÉSZÍTÉS

Ideális gáz esetén:

A gázok kétféle fajhője és mólhője a szabadsági fokokkal kifejezve

izochor folyamatban:

fajhőre: $c_V = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M}$ mólhőre: $c_{n,V} = \frac{f}{2}R$

izobár folyamatban:

fajhőre: $c_p = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$ mólhőre: $c_{n,p} = \frac{f+2}{2}R$

A fajhőhányados $\left(\frac{c_p}{c_V}\right)$: $\kappa = \frac{f+2}{f}$

A kétféle fajhő közötti összefüggés:

$$c_p - c_V = \frac{R}{M}$$

(Robert Mayer egyenlete)

A termodinamika II. főtétele

Clausius megfogalmazása alapján:
Két test termikus kölcsönhatása során külső beavatkozás nélkül csak a melegebb test adhat energiát a hidegebb testnek.

W. Thomson (Kelvin) megfogalmazása:
Nincs a természetben olyan folyamat, amelynek összes hatása abban áll, hogy egy test hőt veszít, és az teljes egészében munkává alakul.

Planck megfogalmazása:
Lehetetlen olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely egyetlen hőtartály lehűlése árán munkát végez. Másodfajú perpetuum mobile nem létezik.

A körfolyamatok hatásfokával megfogalmazva:

A termodinamikai körfolyamatok hatásfoka kisebb, mint egy: $\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{Q_{\text{fel}}} < 1.$

KIEGÉSZÍTÉS

Statisztikus fizikai megfogalmazás

Zárt rendszerben a folyamatok megfordíthatatlanul a rendezetlenség növekedésének irányába tartanak. A rendszer rendezetlensége az egyensúlyi állapot eléréséig növekszik. A rendszer rendezetlenségét jellemző fizikai mennyiség az entrópia.

A termodinamika III. főtétele

A 0 K hőmérséklet tetszőleges pontossággal megközelíthető, de véges lépésben nem érhető el.

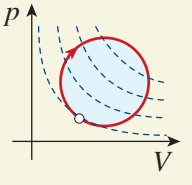
Körfolyamatok gázokkal

A körfolyamat olyan folyamat, amelynek végén a gáz az eredeti állapotba jut vissza. A teljes körfolyamatban a gáz belső energiája nem változik.

Hőerőgép

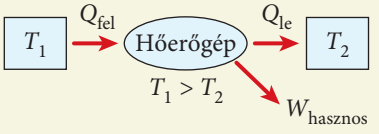
A W hasznosítható munka a p-V diagramon a körfolyamat görbéi által bezárt terület.

$$\sum_{i=1}^{n} Q + \sum_{i=1}^{n} W = 0$$

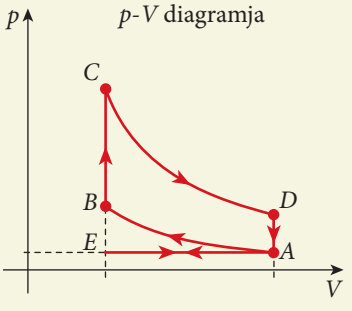


A hőerőgépek hatásfoka:

$$\eta = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$$

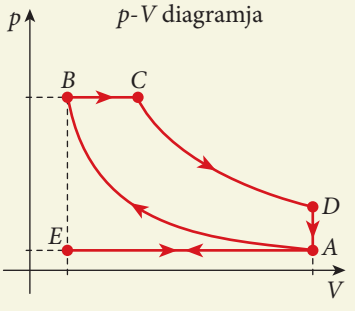


A benzinmotor működésének p-V diagramja



BC és *DA* izochor részfolyamatok
AB és *CD* adiabatikus részfolyamatok

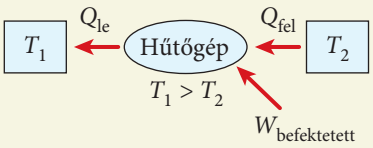
A dízelmotor működésének p-V diagramja



BC izobár, *DA* izochor részfolyamatok
CD és *AB* adiabatikus részfolyamatok

Hőszivattyú, hűtőgép

A leadott és felvett hőmennyiség különbségét a befektetett munka fedezi.



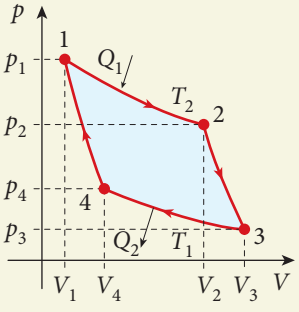
Hőszivattyú jósági tényezője

$$\varepsilon = \frac{Q_{le}}{W_{befektetett}} = \frac{Q_{le}}{Q_{le} - Q_{fel}}$$

Carnot-körfolyamat

Az ideális gázzal működő körfolyamat hatásfoka:

$$\eta_{id} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$



1→2 és 3→4 szakaszok izotermek,
2→3 és 4→1 szakaszok adiabatikusak.

KIEGÉSZÍTÉS

A reverzibilis (megfordítható) Carnot-körfolyamat során:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

A hányadosok összege nulla.

Irreverzibilis körfolyamatban:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} < 0$$

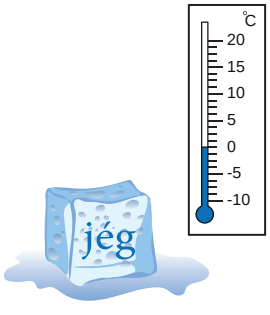
Halmazállapot-változások

Olvadás, fagyás

A m tömegű kristályos tiszta anyag olvadásponton történő megolvasztásához szükséges, illetve fagyásakor felszabaduló hő:

$$Q = L_o \cdot m,$$

ahol L_o az anyag olvadáshője (fagyáshője).

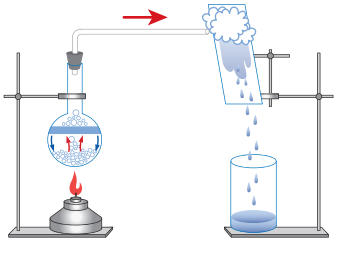


Párolgás, lecsapódás

Az m tömegű folyadék ugyanolyan hőmérsékletű gőzzé alakításához szükséges, illetve a lecsapódáskor felszabaduló hő:

$$Q = L_p \cdot m,$$

ahol L_p a párolgáshő.



Forrás



Az m tömegű folyadék forrásponton történő teljes elforralásához szükséges hő:

$$Q = L_f \cdot m,$$

ahol L_f a forráshő.

Párolgáskor csak a folyadék felszínéről távozhatnak molekulák, míg forráskor a folyadék egész térfogatában keletkezhetnek gőzbuborékok, melyek a folyadék felszínére törve gyakran az egész folyadék heves mozgásához vezetnek.

Égéshő, fűtőérték

Az m tömegű tüzelőanyag tökéletes elégetése során felszabaduló hőmennyiség (az égéstermék felmelegedését figyelmen kívül hagyva):

$$Q = L_é \cdot m,$$

ahol $L_é$ az anyag égéshője.

A nedves tüzelőanyag elégetése során felszabaduló hőmennyiség, figyelembe véve, hogy a víz elpárologtatásához szükséges hőmennyiség nem hasznos:

$$Q = H \cdot m$$

A H a fűtőérték, az égéshőnek a víz párolgáshőjével csökkentett értéke.

A hőközlés módjai

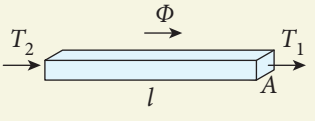
Hővezetés (kondukció)

Hőáramerősség: a rúdon átvezetett Q hő és a t idő hányadosa.

KIEGÉSZÍTÉS

$$\Phi = \frac{Q}{t} = -\lambda A \frac{\Delta T}{l},$$

differenciális alakban $\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$,



ahol: λ a hővezetési tényező

$\Delta T = T_2 - T_1$, $T_2 > T_1$

A a rúd keresztmetszetének területe

l a rúd hossza

t az idő

Φ a hőáram

Hőáramlás (konvekció)

Folyadék vagy gáz tényleges mozgása szállítja a hőt.

KIEGÉSZÍTÉS

Hősugárzás

Minden test elektromágneses sugárzást bocsát ki.

Az abszolút fekete test sugárzása

Az abszolút fekete test a ráeső sugárzást teljesen elnyeli.
Az abszolút fekete test által kibocsátott sugárzás erőssége változik a hullámhossz függvényében, és függ a hőmérséklettől.

Stefan–Boltzmann-törvény

Az abszolút fekete test sugárzási teljesítménye egyenesen arányos az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával és a felülettel:

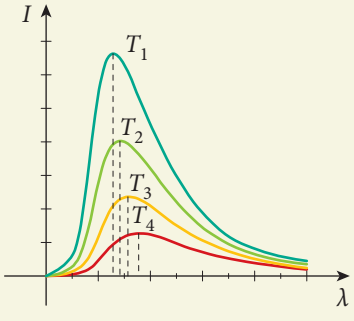
$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot A,$$

ahol $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$.

Wien-féle eltolódási törvény

Az abszolút fekete test maximális intenzitású sugárzásához tartozó hullámhossza fordítottan arányos a test abszolút hőmérsékletével.

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{állandó} = 2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K} \cdot \mathrm{m},$$



ahol: I a sugárzás erőssége
λ a sugárzás hullámhossza
$T_1 \rightarrow T_4$ csökken
λ_{max} a T hőmérsékletű sugárzás maximumához tartozó hullámhossz

Hőátvitel

Szabadon álló, környezeténél melegebb test lehűlésekor a hőmérséklet időbeli változása:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{\alpha A}{C}(T - T_1), \qquad T > T_1$$

ahol: T_1 a környezet állandónak feltételezett hőmérséklete
α a hőátadási tényező
C a test hőkapacitása
A a test felülete

Elektromágnesség

Időben állandó elektromos mező (elektrosztatika)

Az elektromosan semleges testben azonos mennyiségű negatív és pozitív elektromos töltés van.

Az elektromos megosztás

Amikor az elektromos mező hat a fémes vezetőre, a töltések átrendeződnek. A pozitív töltések az elektromos mező irányába mozdulnak el, míg a negatív töltések az ellenkező irányba. Ez a folyamat addig tart, amíg a rendszer el nem éri az új egyensúlyi állapotot.

A töltésmegmaradás törvénye

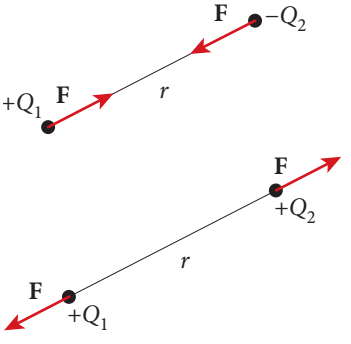
Környezettől elszigetelt rendszerben az elektromos töltések algebrai összege állandó.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q = \text{állandó}$$

Coulomb-törvény

Két pontszerű töltés között fellépő erő nagysága:

$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, illetve $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$,



ahol: $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

Elektromos térerősség

Az elektromos mező pontjaiban az „erőkifejtő képességét" az odahelyezett pozitív q töltésű próbatestre ható **F** erő és a q töltés hányadosa jellemzi.

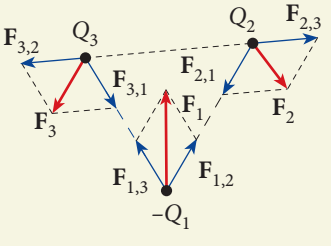
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q^+}$$

Mértékegysége: $\frac{\text{N}}{\text{C}} . 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

A szuperpozíció elve az elektromos erőhatásokra is érvényes:

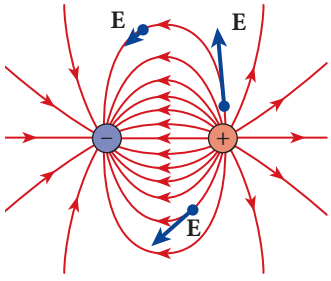
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots \mathbf{F}_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots \mathbf{E}_n$$



Az elektromos mező szemléltetése

Az erővonalak irányított görbék, amelyek érintői a görbe minden pontjában az ottani térerősség irányába mutatnak.

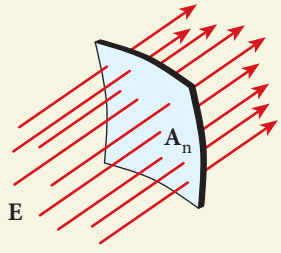


Az elektromos erővonalfluxus (ψ_A)

Az elektromos mezőben annyi erővonalat rajzolunk meg, hogy a rájuk merőlegesen felvett elegendő kicsiny felület A_n területére

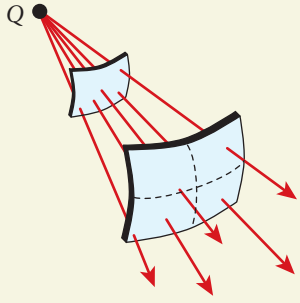
$$\psi_A = EA_n$$

számú erővonal jusson.



Az elektromos fluxussűrűség megadja az E térerősség nagyságát:

$$E = \frac{\psi_A}{A}$$



KIEGÉSZÍTÉS

Térfogati töltéssűrűség:

$$\rho = \frac{Q}{V}, \text{ illetve } \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

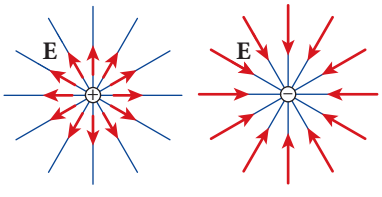
Felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \text{ illetve } \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

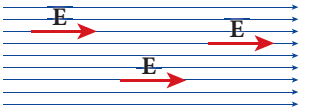
Speciális elektromos mezők szerkezete

Ponttöltés mezeje

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$



Homogén elektromos mező

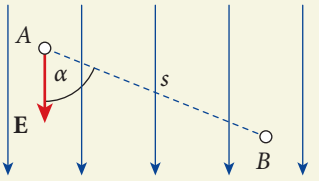


E a tér minden pontjában azonos.

Az elektromos mező munkája

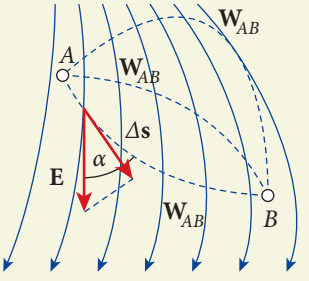
Az **F** = *Q***E** erő munkája:

$$W_{AB} = \sum_{A}^{B} QE\Delta s\cos\alpha = Q\sum_{A}^{B} E\Delta s\cos\alpha$$



Az elektrosztatikus tér konzervatív, a Q töltésen végzett munka független az úttól:

$$\frac{W_{AB}}{Q} = \text{állandó}$$



Feszültség, potenciál

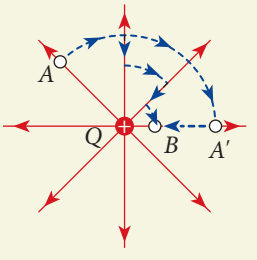
A *feszültség* az elektromos mező két (A és B) pontja közötti „munkaképességét” az A és B között mozgó töltésen végzett munkája és a q töltés hányadosaként jellemzi.

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q}$$

Mértékegysége: 1 V (volt). $1\ \text{V} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{C}}$

A *potenciál* a mező adott pontjának egy előre rögzített nullaponthoz viszonyított feszültsége:

$$U_A = \frac{W_{A\to 0}}{q}$$



Speciális elektromos mezők jellemzői

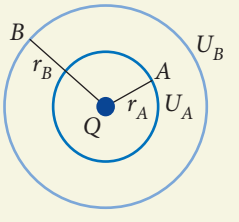
Ponttöltés tere

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

ahol: r_A az A pont távolsága Q-tól
r_B a B pont távolsága Q-tól

$$U_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r_A}$$

(A nullaszint a végtelen távoli pontban van.)



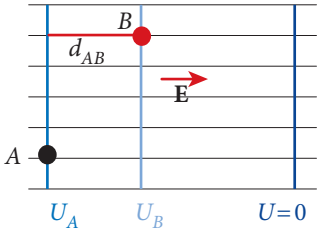
Ekvipotenciális helyek ponttöltés mezejében: Q középpontú gömbfelületek

Homogén elektromos mező

$$U_{AB} = Ed_{AB}$$

Az A pont elektromos nullszinthez viszonyított potenciálja:

$$U_A = Ed_{A0}$$



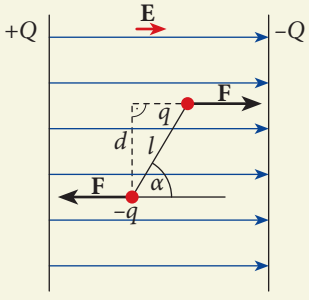
d_{AB} A és B erővonalakkal párhuzamos, a térerősség irányában mért távolsága

Az elektromos dipólus

Dipólus homogén elektromos térben

A dipólra ható forgatónyomaték:

$$M = Fd = qEl \sin \alpha$$



KIEGÉSZÍTÉS

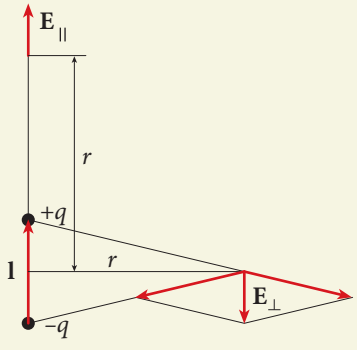
A térerősség a dipól tengelyére merőlegesen, az $E_\perp$ nagysága:

$$E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot l}{r^3}$$

A térerősség a dipól tengelyében, az $E_\parallel$ nagysága:

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q \cdot l}{r^3}$$

(Gauss-féle főhelyzetek)



Kapacitás

Egy fémtest kapacitása a rávitt töltés és a hatására létrejövő potenciál hányadosa:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Mértékegysége: 1 F (farad)

A síkkondenzátor

A síkkondenzátor kapacitása vákuumban (levegőben):

$$C_0 = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

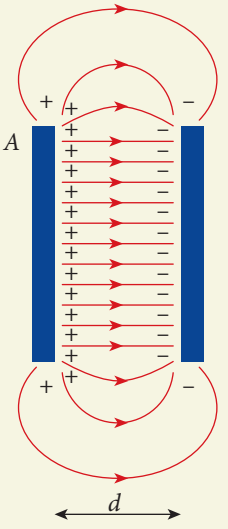
ahol: A a lemezek területe
d a lemezek távolsága

A síkkondenzátor lemezei közötti homogén elektromos mező térerőssége:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$$

A síkkondenzátor lemezei között fellépő erő nagysága:

$$F = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{2A} = \varepsilon_0 \cdot \frac{E^2 A}{2}$$

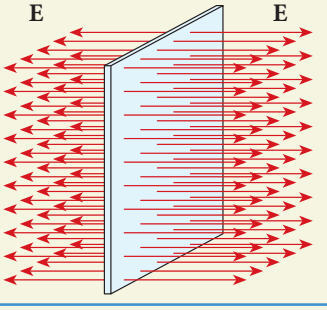


KIEGÉSZÍTÉS

Végtelen töltött vezető síklap keltette elektromos mező térerőssége:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma}{2},$$

ahol $\sigma = \frac{Q}{A}$ a felületi töltéssűrűség.



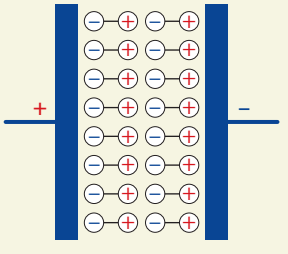
Szigetelő polarizációja hatására megváltozik a kondenzátor lemezei közötti E térerősség, így a kondenzátor kapacitása is:

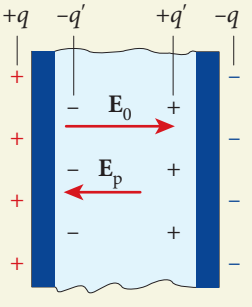
$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

ahol ε_r a relatív permittivitás.

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

megmutatja, hogy hányszorosára nő a kondenzátor kapacitása, ha a lemezek közötti teret levegő (vákuum) helyett szigetelő tölti ki.

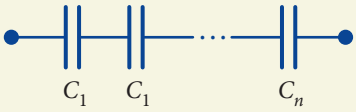




Kondenzátorok soros kapcsolása

Sorba kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása:

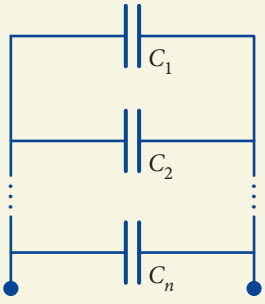
$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}$$



Kondenzátorok párhuzamos kapcsolása

Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása:

$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$



Kondenzátor energiája

A kondenzátor elektromos mezőjének energiája:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$$

Homogén mezőben:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V,$$

ahol: E a térerősség

$V = Ad$ a lemezek közötti térfogat

ε_0 a vákuumpermittivitás

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

KIEGÉSZÍTÉS

Elektromos energiasűrűség

Az elektromos mező energiasűrűsége (lokális mennyiség):

$$w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Az elektromos áram

Az elektromos áram: töltéshordozók rendezett mozgása.

Az áram erőssége

A vezeték teljes keresztmetszetén áthaladó töltés és az eközben eltelt idő hányadosa:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Időben változó áram pillanatnyi áramerőssége:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0$$

Egyenáram:

I = állandó

Ohm törvénye

Az áramerősség a vezeték két rögzített pontja közötti feszültséggel egyenesen arányos:

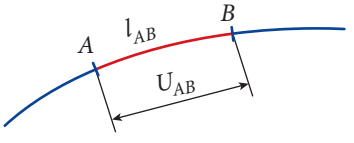
$$\frac{U}{I} = \text{állandó}$$

Az ellenállás

Valamely vezető két pontja közötti elektromos ellenállás:

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$$

$$R_{AB} = \rho \frac{l_{AB}}{A}$$



l_{AB} a vezeték hossza
A a vezeték keresztmetszetének területe
ρ a fajlagos ellenállás

A fajlagos ellenállás hőmérsékletfüggése:

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta T)$$

α_{20} a hőfokténye ző

Az áramforrások

Ohm törvénye teljes áramkörre:

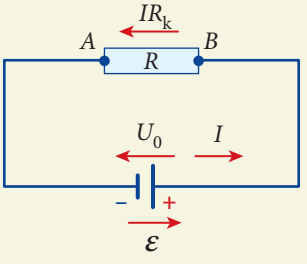
$$U_0 + I(R_k + R_b) = 0,$$
$$\mathcal{E} = I(R_k + R_b) = U_k + U_b,$$

ahol $\mathcal{E}$ az elektromotoros erő

R_k a külső ellenállás
U_k a kapocsfeszültség
U_b a belső feszültségesés
U_0 az üresjárási feszültség

Ha a feszültségesés irányát is figyelembe vesszük:

$$\mathcal{E} = -U_0$$



A Joule-féle hő

Az elektromos vezeték A és B pontja között az áram hatására leadott energia:

$$W_{AB} = U_{AB}It = I^2R_{AB} \cdot t = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}} \cdot t$$

Teljesítmény

Az áramkör R_{AB} ellenállású szakaszán felvett teljesítmény:

$$P_{AB} = U_{AB}I = I^2R_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$

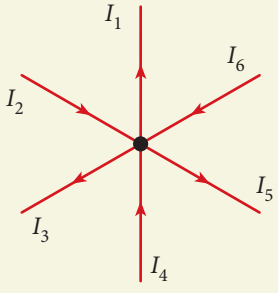
Összetett hálózatok

KIEGÉSZÍTÉS

Kirchhoff I. törvénye, a csomóponti törvény

A csomópontba befolyó és az onnan elfolyó áramok erősségének algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^{n} I_j = 0$$

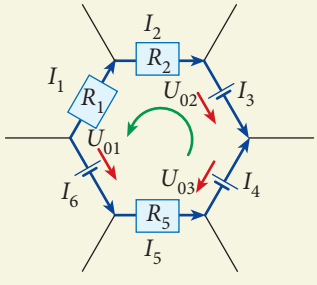


Kirchhoff II. törvénye, a huroktörvény

$$\sum^{o} RI + \sum^{o} U_o = 0,$$

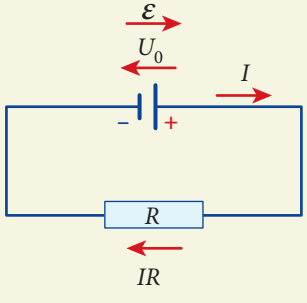
ahol az egyes szakaszok ohmikus feszültségeinek összege:

$$\sum^{o} RI$$



A hurkon elhelyezett áramforrások üresjárási feszültségeinek összege:

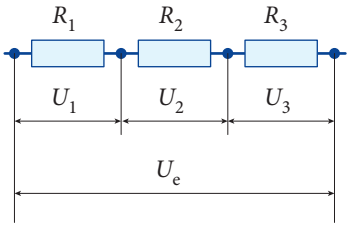
$$\sum^{o} U_o$$



A szumma (felette kör) azt jelenti, hogy a mennyiségeket a zárt kör mentén kell összegezni.

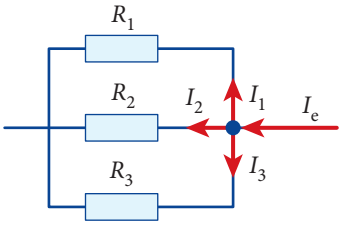
Ellenállások soros kapcsolásának tulajdonságai:

$$U_e = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \sum U$$
$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = (= I)$$
$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum R$$



Ellenállások párhuzamos kapcsolásának tulajdonságai:

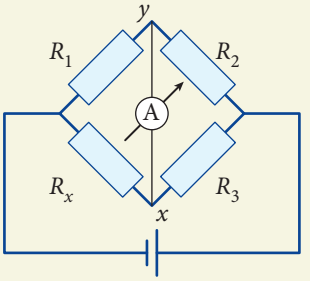
$$U_1 = U_2 = \ldots = U_n (= U)$$
$$I_e = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = \sum I$$
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum \frac{1}{R}$$



Wheatstone-mérőhíd

Ismeretlen ellenállás meghatározása (mérése):

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2} \qquad U_{xy} = 0$$

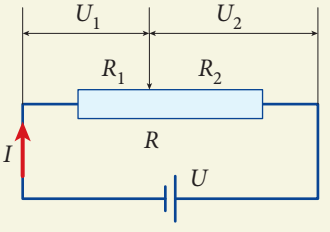


$U_1 = U_x \quad U_2 = U_3$

Terheletlen feszültségosztó, potenciométer:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{amiből} \quad U_1 = I \cdot R_1,$$

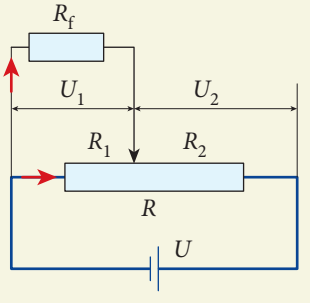
ahol I a körben folyó áram.



Terhelt feszültségosztó, potenciométer:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1 R_f}{R R_f + R_1 R_2}$$

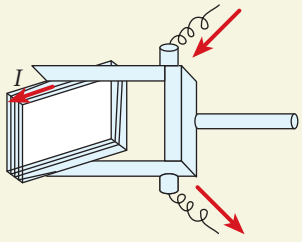
$R_f \gg R_1$ esetén $\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$



Az időben állandó mágneses mező

Mágneses mező:
az olyan mező, amelyet mozgó töltés kelt, és csak mozgó töltésre hat.

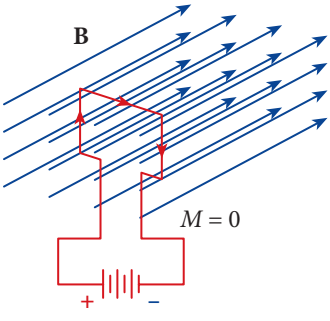
A mágneses próbatest:
az iránytű és a magnetométer (köráram).



A mágneses mezőt jellemző mennyiségek

Mágneses indukció

A mágneses mező a belehelyezett kis mágnesrúdra és a magnetométerre (áramhurokra) forgatónyomatékot fejt ki, amennyiben elfordítjuk egyensúlyi helyzetéből. A maximális forgatónyomaték 90°-os elforgatás esetén lép fel.



A mágneses mező pontjaiban az „erősségét” az odahelyezett magnetométerre mint próbamágnesre ható maximális forgatónyomaték és a próbamágnes „erősségének” a hányadosa jellemzi. (Az állandó mágnesek mágneses terét a bennük lévő elemi áramok – Amper-féle köráramok – segítségével modellezzük.)
A mágneses mező erősségének nagysága:

$$B = \frac{M_{max}}{N \cdot I_m \cdot A_m},$$

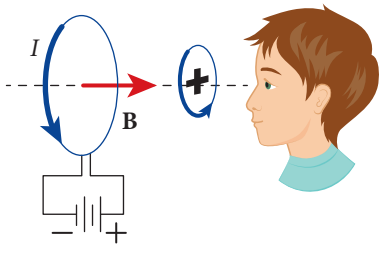
ahol: B a mágneses indukcióvektor nagysága
N a magnetométer menetszáma
I_m a magnetométer árama
A_m a magnetométer területe

Mértékegysége: T (tesla)

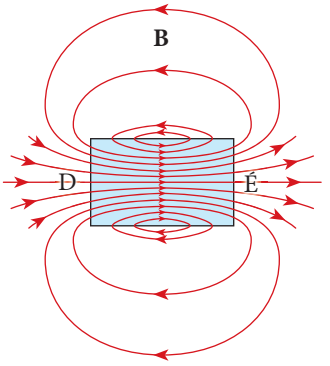
$$1\ \mathrm{T} = 1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$$

A mágneses indukciót vektorként definiáljuk.

Iránya megállapodás szerint megegyezik azzal az iránnyal, amerre az egyensúlyba került próbamágnes északi pólusa mutat.



A mágneses mező szemléltetése

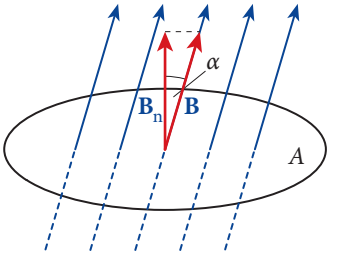


Az indukcióvonalak irányított görbék, amelyek érintői a görbe minden pontjában az ottani indukcióvektor irányába mutatnak.

Az indukcióvonalak sűrűsége az adott helyen az indukció nagyságát jellemzi: az indukcióvonalakra merőlegesen felvett kellően kicsi A_n felületen BA_n számú indukcióvonal megy át.

A mágneses mező indukcióvonalai önmagukba záródó görbék.

A mágneses indukció fluxusa

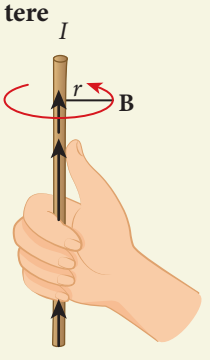


$$\Phi = BA\cos\alpha = B_n A,$$

ahol α a **B** vektornak a felületre merőleges egyenessel bezárt szöge, míg a $\mathbf{B}_n$ a **B** vektor felületre merőleges összetevője.

Az áram keltette mágneses mező

„Végtelen” hosszú, árammal átjárt vezető mágneses tere



A mágneses indukció nagysága a vezetéktől r távolságra:

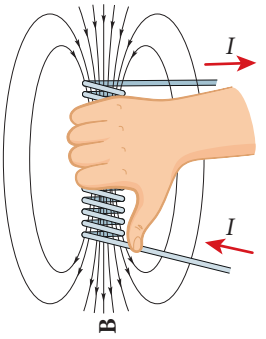
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{r},$$

ahol: μ_0 a vákuum permeabilitása

$$\mu_0 = 4\,\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

B irányát a jobbkéz-szabály segítségével határozhatjuk meg, ebben az esetben, ha a jobb kezünk kifeszített hüvelykujja az áram irányába mutat, akkor a többi, begörbített ujjunk a **B** indukcióvonalak irányába mutat.

Egyenes tekercs (szolenoid) mágneses tere



Az l hosszúságú N menetes tekercs (szolenoid) belsejében homogén mező alakul ki, melynek indukciója:

$$B = \mu_0\frac{NI}{l}$$

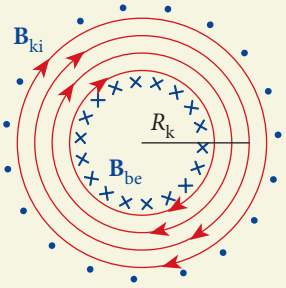
B iránya a jobbkéz-szabály szerinti.

Körtekercs (toroid) mágneses tere

$$B = \mu_0 \frac{IN}{2R_k\pi},$$

ahol R_k a középkör sugara.

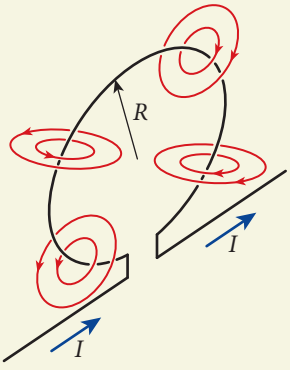
B iránya az ábra szerint.



Mágneses indukció az *R* sugarú körvezető középpontjában

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{R},$$

ahol R a körvezető sugara.



KIEGÉSZÍTÉS

Mágneses indukció az anyag jelenléte esetén:

Ha a mágneses mezőben valamilyen anyag található, B értéke megváltozik,

$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$

B_0 a mágneses indukció vákuumban
B a mágneses indukció anyagban

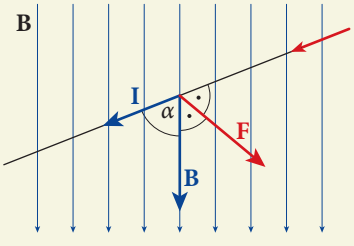
relatív permeabilitás az anyagra jellemző állandó.

Mágneses mező hatása áramjárta vezetőre, Ampère törvénye

A **B** indukciójú mágneses mezőben lévő, I erősségű árammal átjárt, l hosszúságú egyenes áramvezetőre a mező az úgynevezett Lorentz-erővel hat:

$$F_L = B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha$$

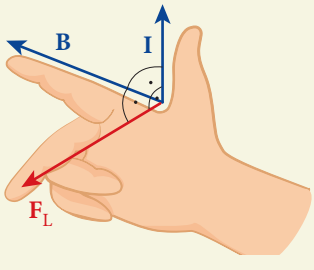
ahol α a **B** vektor vezetékkel bezárt szöge.



Homogén mágneses mezőben a **B** indukcióvonalakra merőleges helyzetű áram által átjárt egyenes vezetőszakaszra ható erő:

$$F_L = B \cdot I \cdot l$$

Iránya **I**, **B**, $\mathbf{F}_L$ a jobbkéz-szabálynak megfelelően követi egymást.

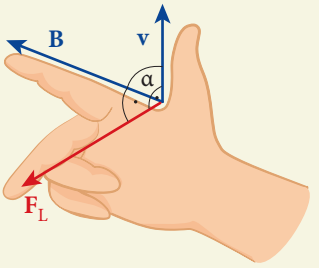


Szabad töltések mozgása mágneses mezőben, Lorentz-erő

A **B** indukciójú mágneses mezőben **v** sebességgel mozgó töltésre ható erő a Lorentz-erő:

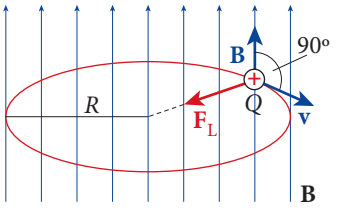
$$F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

ahol α a **v** és a **B** szöge.



Ha **v** és **B** merőleges egymásra, akkor a mágneses mező a töltést körpályára kényszeríti, melynek sugara:

$$R = \frac{mv}{QB}$$



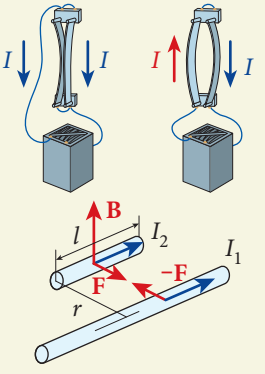
KIEGÉSZÍTÉS

Áramvezetők közötti erőhatás

A végtelen hosszú, árammal átjárt egyenes vezetőtől r távolságra levő, párhuzamos, végtelen hosszú egyenes vezető l hosszúságú szakaszára ható erő:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} \cdot l$$

Vonzóerő, ha I_1 és I_2 egy irányban,
taszítóerő, ha I_1 és I_2 ellentétes irányban folynak.



Elektromágneses indukció

A mozgási indukció

A mágneses térben mozgó vezetőben a Lorentz-erő töltésszétválasztó hatása miatt indukált elektrosztatikus mező térerőssége:

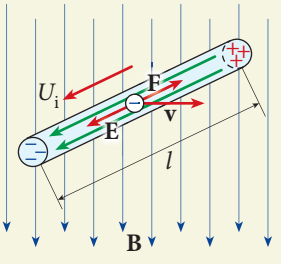
$$E = vB \sin \alpha,$$

ahol α a **v** és **B** által bezárt szög.

A kialakult mező két pontja közötti potenciálkülönbség az indukált feszültség:

$$U_i = Blv \sin \alpha,$$

ahol: U_i az indukált feszültség,
l a vezetékszakasz hossza,
v a vezetékszakasz sebessége.



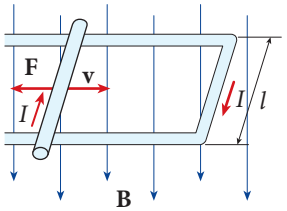
E az elektromos térerősségvektor
B a mágneses indukcióvektor

Homogén mágneses mezőben a **B** indukcióvonalakra merőlegesen **v** sebességgel mozgó, *l* hosszúságú vezetőben létrejövő indukált feszültség nagysága:

$$U_i = Blv$$

Lenz törvénye

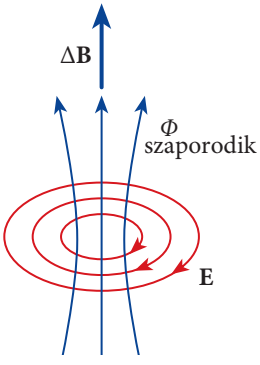
Az indukált áram iránya olyan, hogy mágneses hatásával akadályozza az őt létrehozó hatást.



I az indukált áram
v a mozgó vezeték sebessége

Nyugalmi indukció, Faraday-féle indukciós törvény

A mágneses fluxus időbeli változása örvényes (önmagába záródó erővonalú) elektromos mezőt kelt. Az indukált feszültség nagysága (U_i) egyenesen arányos a mágneses tér fluxusváltozásával ($\Delta\Phi$) és a tekercs menetszámával (N), valamint fordítottan arányos a változás időtartamával (Δt):



$$U_i = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Vezetőhurok esetén $N = 1$.

Önindukció

Egy tekercsben folyó áram erősségének megváltozása a tekercsben feszültséget indukál. Az önindukciós feszültség:

$$U_{\text{öi}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

ahol L az önindukciós együttható vagy induktivitás.

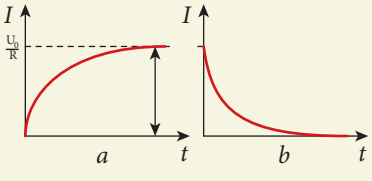
Hosszú egyenes tekercs önindukciós együtthatója:

$$L = \mu_0\mu_r\frac{N^2A}{l},$$

ahol: l a tekercs hossza
A a tekercs keresztmetszetének területe
N a tekercs menetszáma
μ_0 a vákuumpermeabilitás
μ_r a tekercs vasmagjának relatív permeabilitása

Az önindukció szerepe az áram be- és kikapcsolásánál:

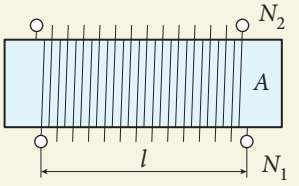
Az áram bekapcsolása után csak késve éri el az $\frac{U_0}{R}$ állandó értéket, kikapcsoláskor az áram nem szűnik meg azonnal.



Kölcsönös indukció

Ha egy tekercsben az indukált feszültséget egy másik tekercs áramának (időbeli) megváltozása hozza létre, akkor az indukált feszültség:

$$U_2 = L_{2,1}\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$



Egymásra csévélt hosszú egyenes tekercsek kölcsönös indukciós együtthatója:

$$L_{2,1} = \mu_0\mu_r\frac{N_1N_2A}{l},$$

ha a két tekercsre A és l azonos.

Ahol: μ_0 a vákuumpermeabilitás
μ_r a relatív permeabilitás
l a tekercs hossza
A a tekercs keresztmetszete
N_1, N_2 az 1. tekercs, illetve a 2. tekercs menetszáma
L_{21} a tekercsek kölcsönös indukciós együtthatója

A mágneses mező energiája

L induktivitású (önindukciós együtthatójú), I erősségű árammal átjárt vezetékrendszer keltette mágneses mező energiája:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

Hosszú egyenes tekercs esetén:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}B^2Al,$$

ahol: A a szolenoid keresztmetszete
l a szolenoid hossza

KIEGÉSZÍTÉS

A mágneses enegiasűrűség:

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0\mu_r}B^2,$$

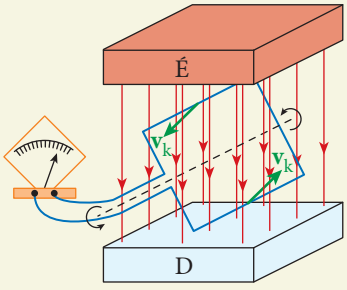
ahol: B a mágneses indukcióvektor nagysága
μ_0 a vákuumpermeabilitás
μ_r a relatív permeabilitás

A váltakozó feszültség, a váltakozó áram

Homogén mágneses mezőben a **B**-re merőleges tengely körül forgó keretben indukált feszültség:

$$U_i = 2Blv_k \sin \omega t = 2Blr\omega \sin \omega t = BA\omega \sin \omega t,$$

ahol: A a forgó keret területe
ω a forgó keret szögsebessége



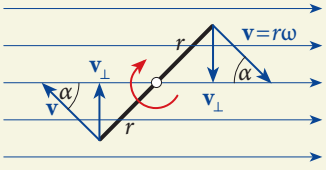
A legnagyobb feszültségérték:

$$U_{max} = BA\omega,$$

amellyel a váltakozó feszültség:

$$U_i = U_{max} \sin \omega t,$$

ahol U_{max} a maximális feszültség (feszültségamplitúdó, vagy a feszültség csúcsértéke).

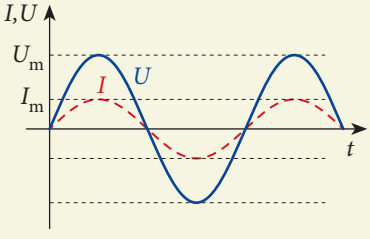


Az U_{max} csúcsértékű váltakozó feszültség hatására az R ellenállású fogyasztón

$$I = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin \omega t,$$

$$I = I_{max} \sin \omega t$$

erősségű váltakozó áram folyik,
ahol I_{max} a maximális áramerősség (áramamplitúdó vagy az áram csúcsértéke).



Effektív feszültség, effektív áramerősség

Effektív (hatásos) áramerősség: a váltakozó áram hőhatáson alapuló átlagértéke.

Szinuszos váltakozó áram és váltakozó feszültség effektív értéke:

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ohm törvénye váltakozó áramú kör R ellenállású szakaszára:

$$U_{eff} = I_{eff}R,$$

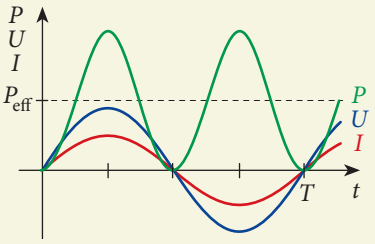
ahol: I_{eff} az effektív áramerősség
U_{eff} az effektív feszültség
R az ohmos ellenállás

A váltakozó áram munkája tisztán ohmos ellenállás esetén:

$$W = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot t = I_{\text{eff}}^2 \cdot R \cdot t = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} t$$

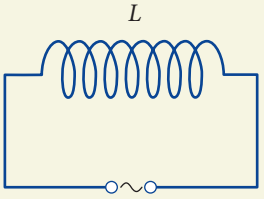
Effektív (hatásos) teljesítménye:

$$P_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}^2 \cdot R = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{P_{\text{max}}}{2}$$



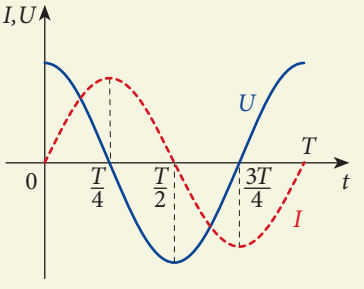
A váltakozó áramú ellenállások

Induktív ellenállás



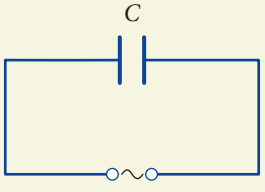
$$X_{\text{L}} = \omega L = 2\pi f \cdot L = \frac{2\pi}{T} \cdot L$$

Az áram erőssége fázisban $\varphi = 90°$-ot késik a kapocsfeszültséghez képest ideális tekercs esetén.



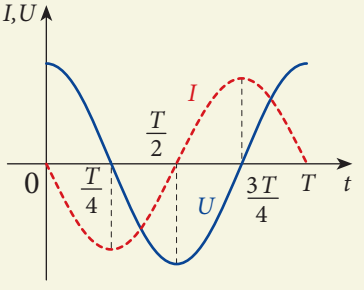
L az induktivitás
f a frekvencia
ω a körfrekvencia

Kapacitív ellenállás



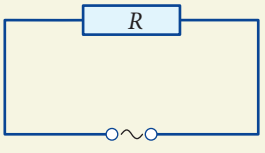
$$X_{\text{c}} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

Az áram erőssége fázisban $\varphi = 90°$-ot siet a kapocsfeszültséghez képest.



C a kapacitás
f a frekvencia
ω a körfrekvencia

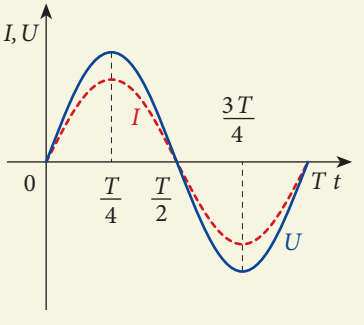
Ohmikus ellenállás



$$R = \rho \frac{l}{A},$$

ahol: ρ a fajlagos ellenállás
l a vezető hossza
A a vezető keresztmetszete

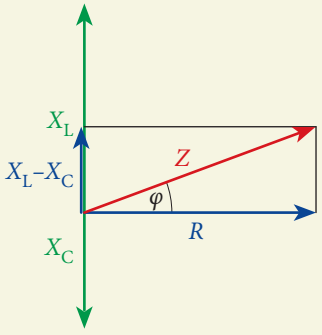
Az áramerősség fázisban van a kapocsfeszültséggel.



Az eredő impedancia (ellenállás) soros *RLC* körben:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{(X_{\text{L}} - X_{\text{c}})^2 + R^2}, \text{ illetve}$$

$$Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2},$$



ahol Z az impedancia
φ a fáziseltolódás szöge
$\cos\varphi$ a teljesítménytényező

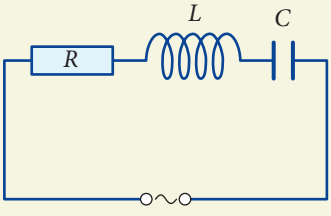
Az áram és a kapocsfeszültség között a fáziseltolódás szögére:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \text{illetve} \quad \text{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

adódik.

KIEGÉSZÍTÉS

Feszültségrezonancia



Soros *RLC* körben, ha $\varphi = 0$,

$X_{\text{L}} = X_{\text{C}}$, $Z = R$;

az egyes elemeken maximális feszültség jelenik meg, ha

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

RLC-kör sajátfrekvenciája (Thomson-formula):

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; T = 2\pi\sqrt{LC}, \text{ illetve}$$

f a frekvencia
L az induktivitás
C a kapacitás

A váltakozó áram teljesítménye

Az effektív (hatásos) teljesítmény:

$$P_{\text{h}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{U_{\text{R}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 Z \cos\varphi,$$

ahol: U_{eff} az effektív feszültség
I_{eff} az effektív áramerősség
U_{R} az ohmikus ellenállás feszültsége
Z az impedancia
$\cos\varphi$ a teljesítménytényező

KIEGÉSZÍTÉS

A látszólagos teljesítmény: $P_l = U_{eff} \cdot I_{eff}$

A meddő teljesítmény: $P_m = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin \varphi$

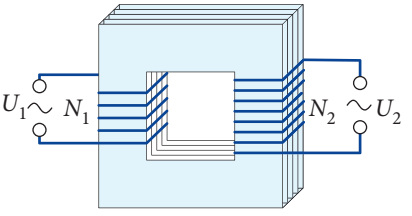
Kapcsolat az említett teljesítmények között:

$$P_h = \sqrt{P_l^2 - P_m^2}$$

A transzformátor

A terheletlen transzformátor primer és szekunder feszültségeinek aránya a menetszámok arányával egyezik meg:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2},$$



ahol: N_1 a primer tekercs menetszáma
N_2 a szekunder tekercs menetszáma
U_1 a primer tekercs feszültsége
U_2 a szekunder tekercs feszültsége

A terhelt transzformátor esetén a primer kör teljesítménye (közel) egyenlő a szekunder kör teljesítményével:

$$U_1 I_1 \cos \varphi_1 \approx U_2 I_2 \cos \varphi_2,$$

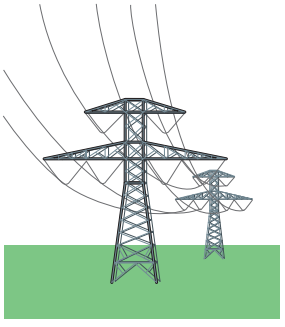
ahol: I_1 a primer tekercs áramerőssége
I_2 a szekunder tekercs áramerőssége
$\cos \varphi_1$ a primer tekercs teljesítménytényezője
$\cos \varphi_2$ a szekunder tekercs teljesítménytényezője

Jó hatásfokú, terhelt transzformátor esetén:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

A távvezeték

Ugyanaz az elektromos energia nagy feszültség mellett kisebb áramerősségen továbbítható, így a távvezetéken kisebb az energiaveszteség, a szállítás hatásfoka nagyobb.



Az időben változó elektromos mező

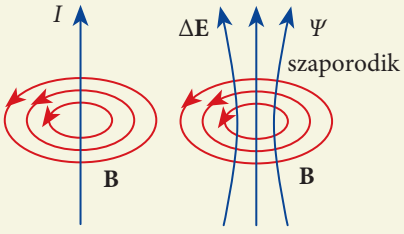
KIEGÉSZÍTÉS

Az eltolási áram

Az időben változó elektromos mező olyan mágneses mezőt kelt, mint a neki megfelelő

$$I_e = \varepsilon_0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$$

eltolási áram,
ahol: Ψ az elektromos fluxus
ε_0 a vákuumpermittivitás
μ_0 a vákuumpermeabilitás



Vékony elektromos fluxuscső esetén a mágneses indukció:

$$B = \frac{1}{2\pi r}\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2r\pi}\cdot\frac{\Delta EA}{\Delta t}$$

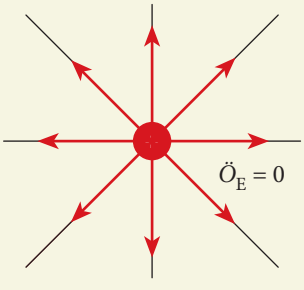
Maxwell-egyenletek

Maxwell I. törvénye

Elektromos mező V térfogatának forráserőssége a felületen mért térerősséggel kifejezve:

$$N_E = \overset{o}{\sum_F} E_n \Delta A = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_V Q,$$

ahol E_n a ΔA felületre merőleges térerősségkomponens.
Jelentése: Az elektrosztatikus tér forrásos.



Maxwell II. törvénye

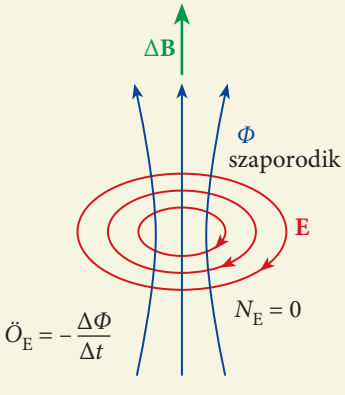
Nyugvó töltések elektromos mezőjének örvényerőssége bármely zárt L görbevonal mentén:

$$\ddot{O}_E = \overset{o}{\sum_L} E_s \Delta s = 0$$

Jelentése: Az elektrosztatikus tér konzervatív (örvénymentes).
Időben változó mágneses fluxust körülölelő bármely L zárt görbére az elektromos mező örvényerőssége:

$$\ddot{O}_E = \overset{o}{\sum_L} E_s \Delta s = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Jelentése: Időben változó mágneses mező örvényes (forrásmentes) elektromos mezőt indukál.

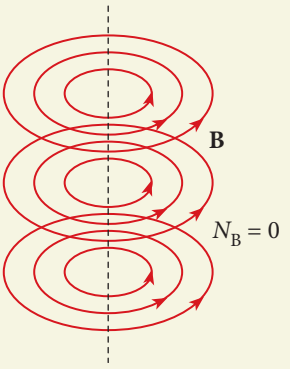


Maxwell III. törvénye

Mágneses mező forráserőssége (valamely F zárt felületbe belépő és onnan kilépő B vonalak előjeles összege):

$$N_B = \overset{o}{\sum_F} B_n \Delta A = 0$$

Jelentése: Zárt felületbe belépő és onnan kilépő mágneses indukcióvonalak előjeles összege zérus. A mágneses mező forrásmentes. Nincsenek mágneses töltések.

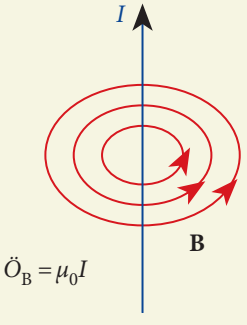


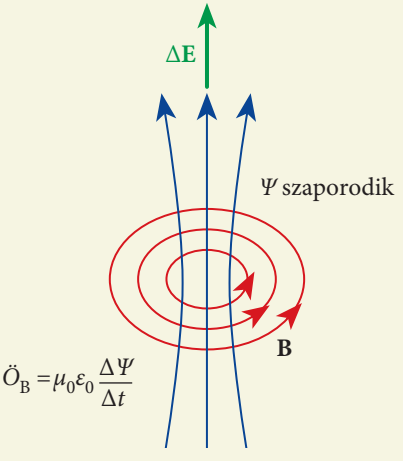
Maxwell IV. törvénye

Ha az L zárt görbe áramvezetőt és változó elektromos fluxust is körülvesz, az örvényerősség:

$$\ddot{O}_B = \overset{o}{\sum_L} \mathbf{B}\Delta s = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}\right)$$

Jelentése: A mágneses mezőt áramok és váltakozó elektromos mezők keltik. A mágneses mező örvényes.

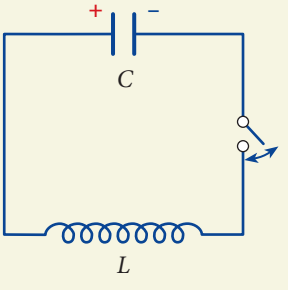




Elektromágneses rezgések

Rezgőkör

C kapacitású kondenzátorból és L induktivitású ideális tekercsből álló kör.

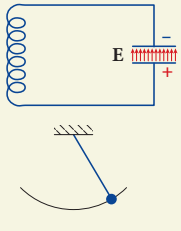
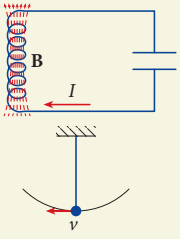
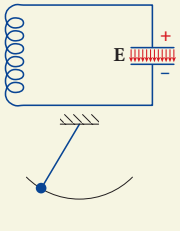
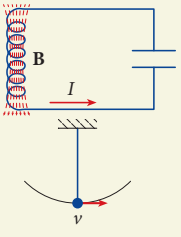
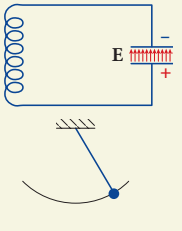


A rezgőkör periódusideje és frekvenciája (Thomson-formula):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

ahol: L az induktivitás
C a kapacitás

A rezgőkör állapotai egy teljes T periódusidő alatt, a matematikai inga lengéseivel összehasonlítva:

$t = 0$	$t = \frac{T}{4}$	$t = \frac{T}{2}$	$t = \frac{3T}{4}$	$t = T$
$E_{el} = \frac{1}{2}CU^2$	$E_{el} = 0$	$E_{el} = \frac{1}{2}CU^2$	$E_{el} = 0$	$E_{el} = \frac{1}{2}CU^2$
$E_m = 0$	$E_m = \frac{1}{2}LI^2$	$E_m = 0$	$E_m = \frac{1}{2}LI^2$	$E_m = 0$
				
$E_h = mgh$	$E_h = 0$	$E_h = mgh$	$E_h = 0$	$E_h = mgh$
$E_m = 0$	$E_m = \frac{1}{2}mv^2$	$E_m = 0$	$E_m = \frac{1}{2}mv^2$	$E_m = 0$

Az elektromágneses hullámok

Terjedési sebesség

Az elektromágneses hullámok vákuumban a fény sebességével (c) terjednek, ami nagyon jó közelítéssel 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

ahol: ε_0 a vákuumpermittivitás

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

μ_0 a vákuumpermeabilitás

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Az elektromágneses hullám terjedési sebessége anyagban:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}};$$

dielektrikumban ($\mu_r \approx 1$):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}},$$

ahol: ε_r a relatív permittivitás

μ_r a relatív permeabilitás

v az elektromágneses hullám terjedési sebessége

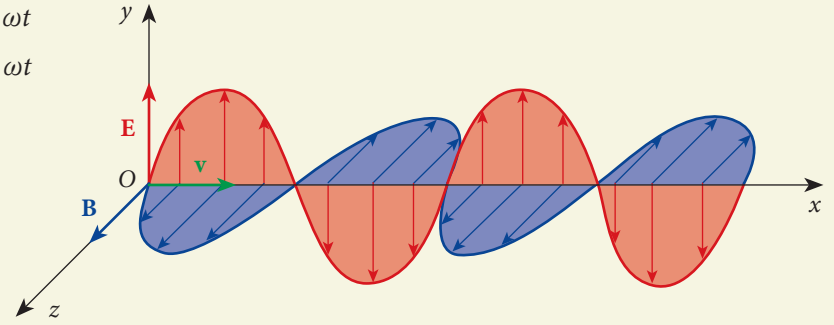
KIEGÉSZÍTÉS

Az elektromágneses hullám elektromos és mágneses tere

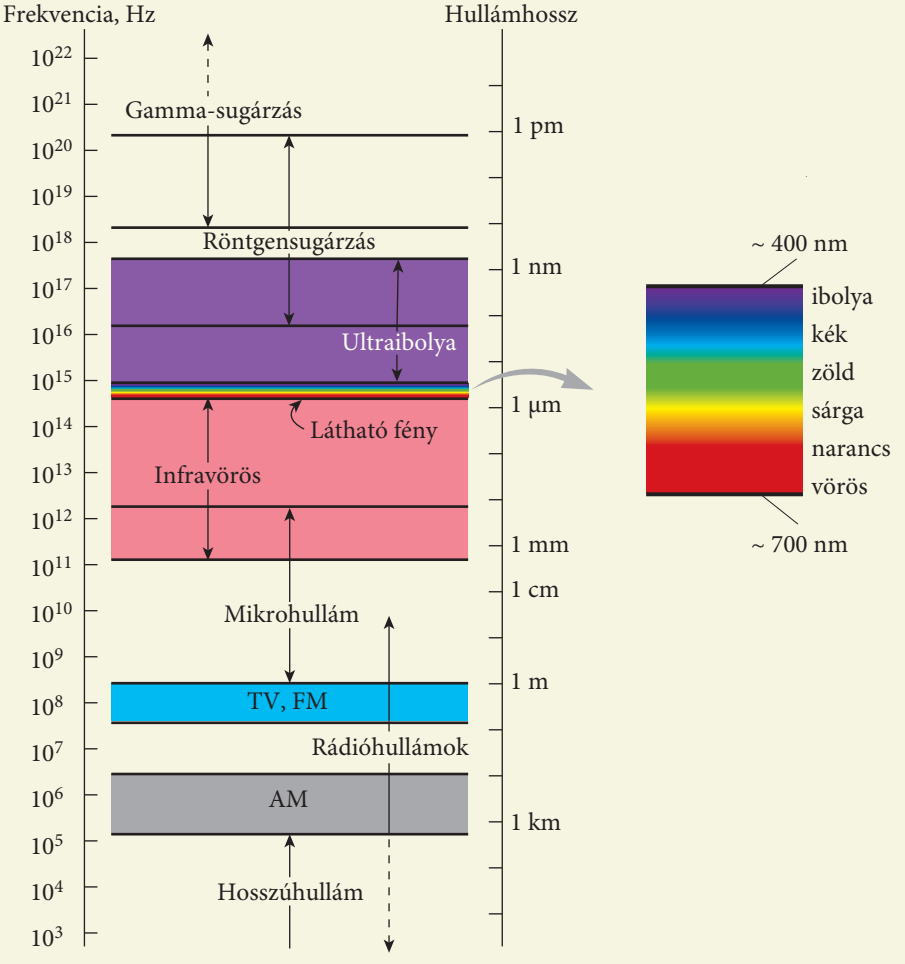
Egy antenna (adó) mellett a sugárzási térerősség:

$E = E_0 \sin \omega t$

$B = B_0 \sin \omega t$



Az elektromágneses hullám spektruma



Fénytan

Fizikai optika

Fényinterferencia

Koherens fényhullámok találkozása észlelhető interferenciát eredményez.

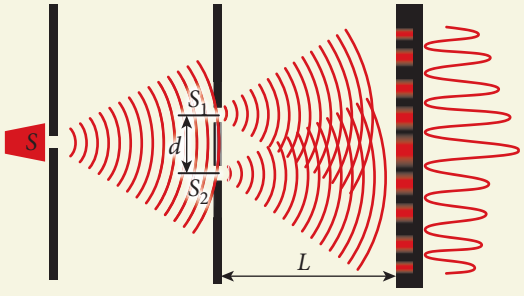
KIEGÉSZÍTÉS

Young-kísérlet

Az S_1 és S_2 „virtuális fényforrásokból” induló hullámok találkozása az E ernyőn erősítést (világos hely) eredményez a

$$\sin\theta_e = \frac{k\lambda}{d}$$

irányokban, a középső világos helytől szimmetrikusan,
ahol: d a „fényforrások” távolsága
λ az S fényforrás fényének hullámhossza



S_1, S_2 „virtuális fényforrások”
S a valódi fényforrás

Az első világos hely középről mért távolsága (hullámhosszmérés):

$$\Delta x \approx L\frac{\lambda}{d},$$

ahol L a „fényforrás” és az E ernyő távolsága.

Kioltás (sötét hely) jelenik meg a

$$\sin\theta_k = \frac{2k+1}{d}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

irányokban.

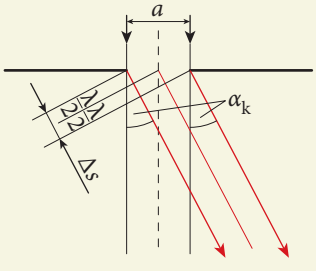
Fényelhajlás (diffrakció)

Fényelhajlás résen (Fraunhofer-féle elhajlás)

Távoli fényforrásból párhuzamos nyaláb esik a résre merőlegesen.

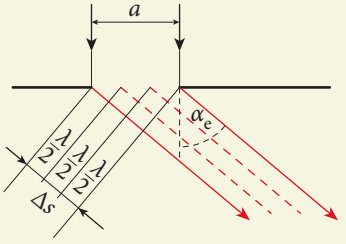
A távoli ernyőn:
Fényminimum észlelhető (kioltás), ha az útkülönbség

$\Delta s = 2k\frac{\lambda}{2}$, az α_k irányokban,



$$\sin\alpha_k = \frac{2k}{a}\cdot\frac{\lambda}{2},$$

ahol: $k = 1, 2, \ldots$
a a rés mérete
λ a beeső fény hullámhossza



Maximális erősítés észlelhető, ha az útkülönbség

$\Delta s = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, így a

$$\sin\alpha_e = \frac{2k+1}{a}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

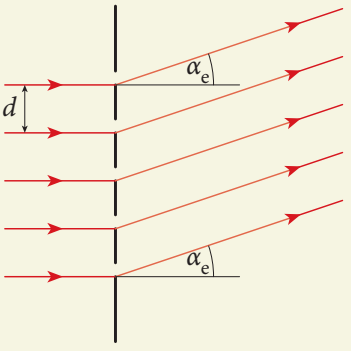
irányokban, ahol $k = 1, 2, \ldots$.

Fényelhajlás optikai rácson

A távoli ernyőn erősítés:

$$\sin\alpha_e = \frac{2k}{d}\cdot\frac{\lambda}{2},$$

ahol: $k = 0, 1, 2, \ldots$
d a rácsállandó

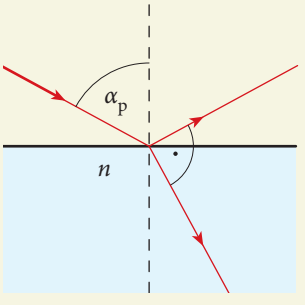


$d \approx 2\lambda$ és 3λ között

Az L távolságban lévő ernyőn az erősítési helyek főmaximumtól való távolsága: $x = L \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_e$
Ha a rések N száma elég nagy, akkor gyakorlatilag az összes többi irányban kioltás van.

Fénypolarizáció

Az n törésmutatójú közeghatárról visszavert fénynyaláb akkor teljesen poláros, amikor a visszavert és a közegbe hatoló (megtört) nyaláb egymásra merőleges. Ezt Brewster-törvénynek nevezzük.



KIEGÉSZÍTÉS

A Brewster-törvény segítségével meghatározhatjuk azt az α_p beesési szöget, amely esetén az üveglapról visszavert fény teljesen polarizált:

$$n = \frac{\sin\alpha_p}{\sin(90^\circ - \alpha_p)} = \mathrm{tg}\,\alpha_p,$$

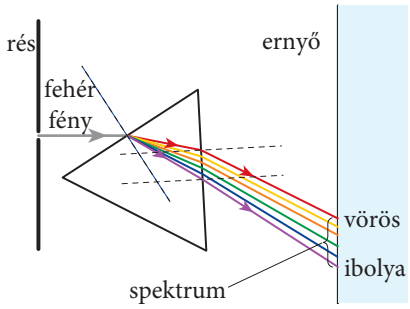
ahol: n a környezetre vonatkozó (relatív) törésmutató
$n = 1{,}54$ törésmutatójú üveg esetén $\alpha_p \approx 57^\circ$

A fény polarizálhatósága kísérletileg azt bizonyítja, hogy a fény transzverzális hullám.

Diszperzió (színszóródás)

A spektrum: a fehér fény különböző színű fényekből összetett fény.

A látható színkép színei: vörös, narancs, sárga, zöld, kék, ibolya.



Az anyagok (üvegek) törésmutatója a nagyobb hullámhosszúságú fényre vonatkozóan kisebb, ezért a vörös kevésbé térül el, mint az ibolya.

Geometriai optika

A fény fénysugármodellje

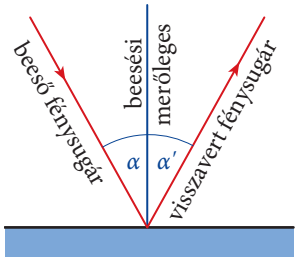
A fénysugármodell tulajdonságai:
- homogén közegben egyenes vonalban terjed, különböző közegekben különböző sebességgel;
- két, optikailag különböző közeg határán a fény egy része visszaverődik, másik része megtörik – leszámítva a teljes visszaverődést.

A fényvisszaverődés törvénye

A beeső fénysugár, a visszavert fénysugár és a beesési merőleges egy síkban vannak.

A beesési szög megegyezik a visszaverődés szögével:

$$\alpha = \alpha'$$



Abszolút törésmutató

Egy anyag (abszolút) törésmutatója a vákuumbeli fénysebesség és az anyagbeli fénysebesség hányadosa.

Például: $n_{\text{víz}} = \frac{c}{c_{\text{víz}}}$

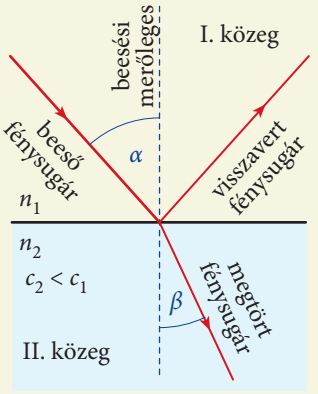
A fénytörés törvénye

Snellius–Descartes-törvény:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ illetve}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

ahol: c_1 a fény terjedési sebessége az I. közegben
α a beesési szög az I. közegben
n_1 az I. közeg törésmutatója
c_2 a fény terjedési sebessége a II. közegben
β a törési szög a II. közegben
n_2 a II. közeg törésmutatója



A relatív törésmutató:

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$$

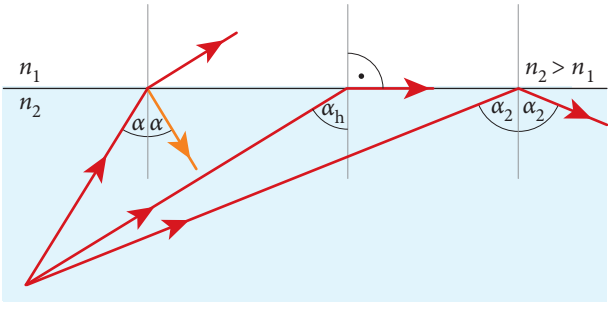
Ez a II. közegnek az I. közegre vonatkozó törésmutatója.

Teljes visszaverődés

Ha a fény a nagyobb törésmutatójú (optikailag sűrűbb) közegből halad a kisebb törésmutatójú közeg felé, akkor lesz egy olyan α_h beesési szög (határszög), melyhez 90°-os törési szög tartozik, azaz:

$$n_2 \sin\alpha_h = n_1 \sin 90^o$$

$$\sin\alpha_h = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}}$$



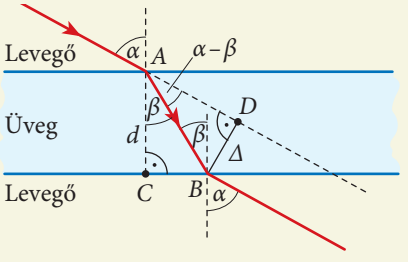
Az α_h-nál kisebb beesési szög esetén a fény egy része visszaverődik, egy része megtörik, nagyobb beesési szög esetén a fény a közeghatárról teljes egészében visszaverődik.

Fénytörés plánparalel lemezen

Az eltolódás mértéke, ha az n törésmutatójú lemez mindkét oldalán ugyanaz a közeg található:

$$\Delta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} \cdot d,$$

ahol: d a lemez vastagsága
Δ az eltolódás mértéke

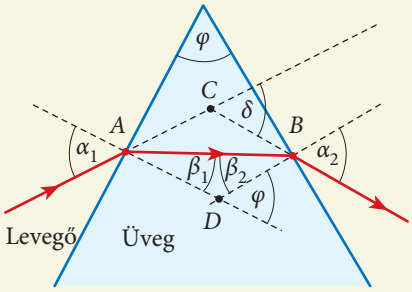


Fénytörés prizmán

Az n törésmutatójú prizmát minden oldalról ugyanaz a közeg (levegő) veszi körül:

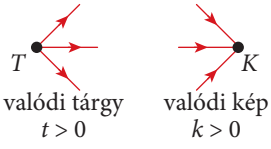
$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi,$$

ahol: δ az eltérítés szöge
φ a törőlapok által bezárt szög, a „törőszög”



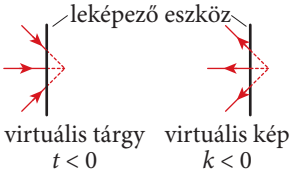
A pontszerű leképezés

Egy T pontból kiinduló fénysugarak a leképező eszközt elhagyva egy K pontban találkoznak. T a tárgy, K pedig a T képe.
Valódi tárgy: széttartó sugárnyaláb tartópontja.
Valódi kép: összetartó sugárnyaláb találkozási pontja.



KIEGÉSZÍTÉS

Virtuális tárgy: összetartó sugárnyaláb meghosszabbításának találkozási pontja.



Virtuális kép: széttartó sugárnyaláb meghosszabbításának metszéspontja.

A távolságok előjelzése

	Pozitív	Negatív
f	gyűjtő leképező eszköz	szóró leképező eszköz
k	valódi kép	látszólagos (virtuális) kép
t	valódi tárgy	KIEGÉSZÍTÉS virtuális tárgy

Gömbtükrök

Fókusztávolság

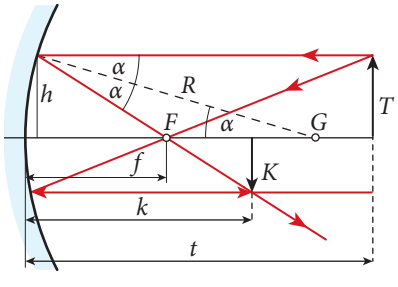
Ha $h \ll R$ (kis nyílásszögű gömbtükör),
akkor $f \approx \frac{R}{2}$.

Leképezés gömbtükrökkel (kis nyílásszögű gömbtükrök)

Leképezési törvény: $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$,

ahol: t a tárgytávolság
k a képtávolság (látszólagos kép esetén a képtávolság negatív érték)
f a fókusztávolság (domború tükör esetén $f < 0$)

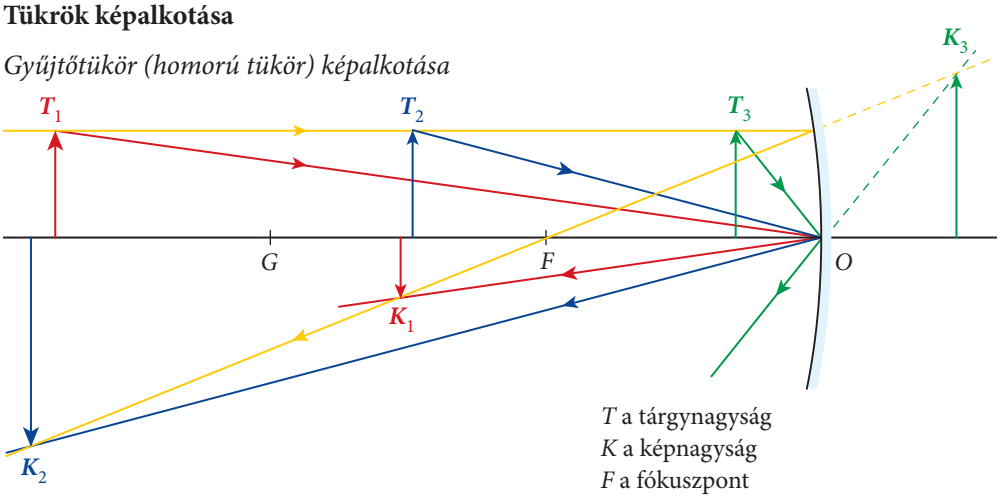
Nagyítás: $N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}$



F a fókuszpont
G a geometriai középpont ($R = 2f$)

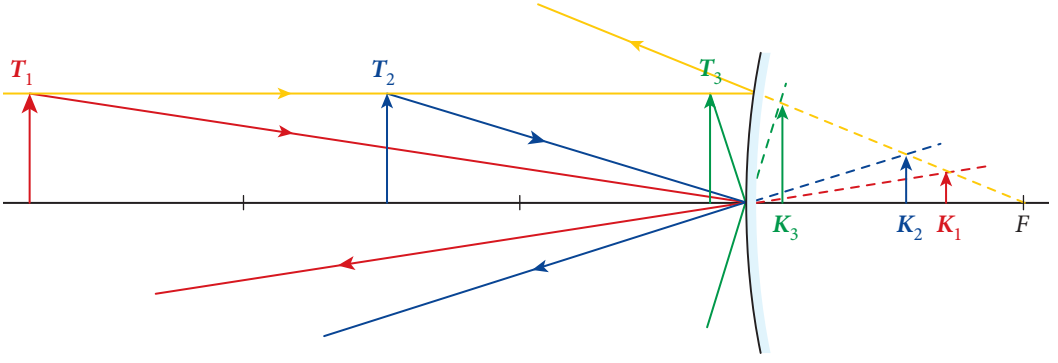
Tükrök képalkotása

Gyűjtőtükör (homorú tükör) képalkotása



T a tárgynagyság
K a képnagyság
F a fókuszpont
G a geometriai (optikai) középpont

Szórótükör (domború tükör) képalkotása

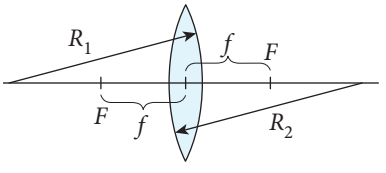


Vékony lencsék

Vékony lencsék jellemzői

Gömbfelületdarabokkal (vagy/és síkkal) határolt fénytörő közegek.

$R < 0$, ha a határoló gömbfelület kívülről nézve homorú;
$R > 0$, ha a határoló gömbfelület kívülről nézve domború.



R_1, R_2 a lencse görbületi sugarai

Leképezés vékony lencsékkel

A leképezési törvény vékony lencsékkel és kis nyílásszögű gömbtükrökkel:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f},$$

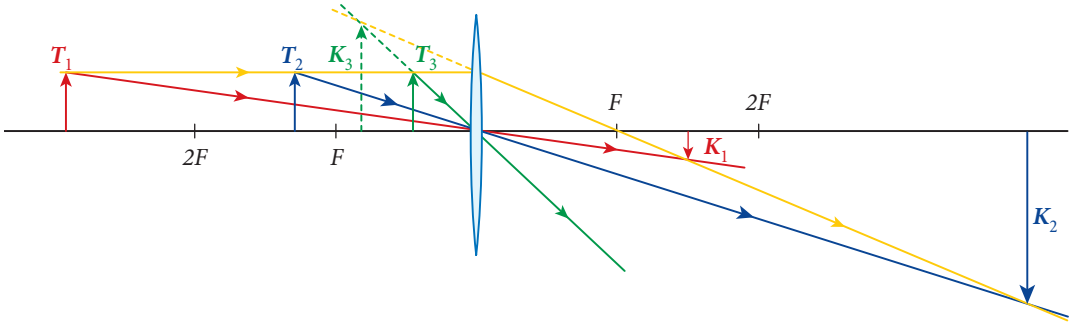
ahol: f a fókusztávolság
t a tárgytávolság
k a képtávolság (látszólagos kép esetén a képtávolság negatív érték)

Nagyítás:

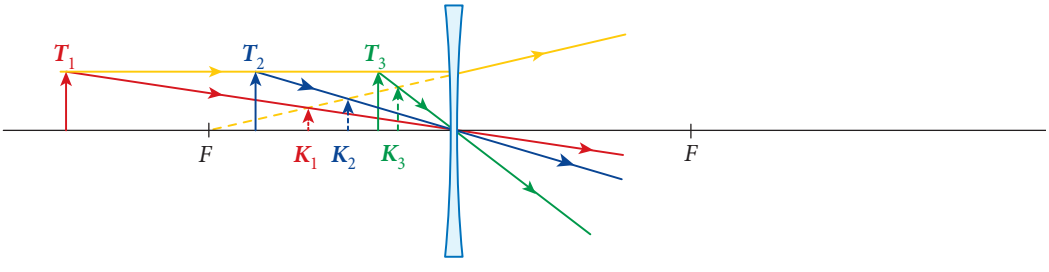
$$N=\frac{K}{T}=\frac{k}{t}=\frac{f}{t-f}=\frac{k-f}{f}$$

Lencsék képalkotása

Gyűjtőlencse képalkotása



Szórólencse képalkotása



KIEGÉSZÍTÉS

Lencserendszerek fókusztávolsága

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\ldots$$

(vékony lencsék szorosan egymás mellett, amely rendszeregyüttes is vékony)

A dioptria

A dioptria a D-vel jelölt törőerősség SI-mértékegysége.

$$D = \frac{1}{f},$$

ahol f a lencse méterben mért fókusztávolsága.

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

ha a lencse mindkét oldalán ugyanaz a közeg van. Az n a lencse anyagának a környezetére vonatkoztatott törésmutatója.

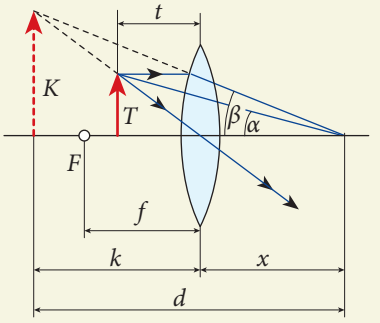
Látószöget növelő eszközök

Egyszerű nagyító

Szögnagyítás:

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 + \frac{d}{f},$$

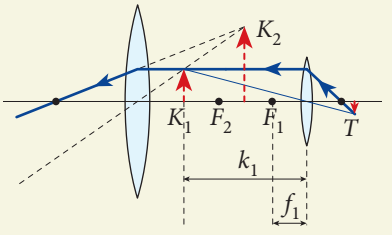
ahol: d a tiszta látás távolsága
f a lencse fókusztávolsága



Mikroszkóp

$$N_{sz} = \frac{dl}{f_1 f_2}$$

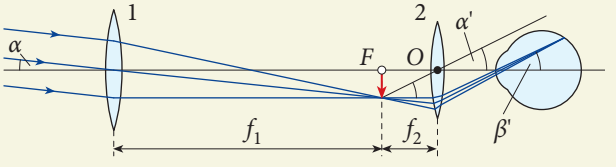
$l = k_1 - f_1$ az optikai tubushossz



Távcsövek

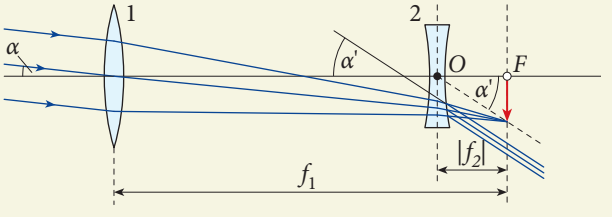
Kepler-féle távcső:

$$N_{sz} = \frac{f_1}{f_2}$$



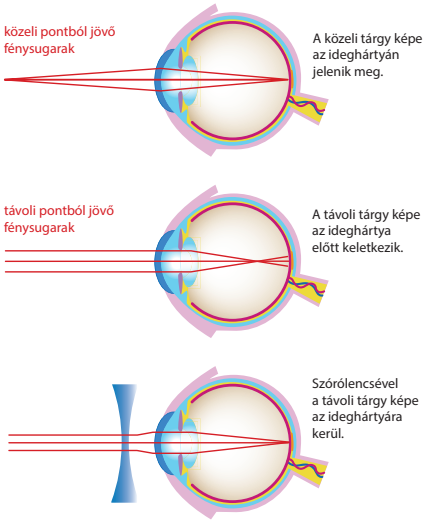
Galilei-féle távcső:

$$N_{sz} = \frac{f_1}{|f_2|}$$

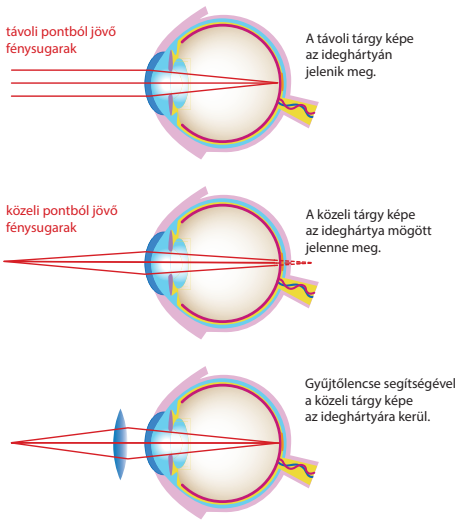


Az emberi szem látáshibái

A rövidlátás és javítása



A távollátás és javítása



KIEGÉSZÍTÉS

A fotometria alapjai

A fényforrás fényerőssége (I)

A fényforrástól egységnyi távolságban elképzelt, a fény terjedési irányára merőleges helyzetű, egységnyi felületen másodpercenként átáramlott energia.
Egysége: cd (candela).

A fényáram (Φ)

A fény terjedésére merőleges helyzetű, tetszőleges nagyságú felületen, időegység alatt fénysugárzással átáramlott energia.
Egysége: lumen (lm).

A megvilágítás erőssége (E)

A megvilágított felület egységnyi darabjára eső fényáram.

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta A}$$

Egysége: lux (lx). $\mathrm{lx} = \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$

A felület megvilágításának erőssége

$$E = \frac{I}{r^2 \cos \alpha},$$

ahol: I a pontszerű fényforrás fényerőssége
r a fényforrás és a felület távolsága
α a fény beesési szöge a felületre (a felületi normálissal bezárt szöge)

A speciális relativitáselmélet alapjai

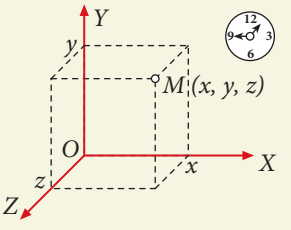
A speciális relativitáselmélet alaptörvényei

I. alaptörvény: a fizika minden törvényének ugyanaz a formája minden inerciarendszerben.

II. alaptörvény: A fény vákuumban bármely inerciarendszerben $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed, a fényforrás és a fényt észlelő sebességétől függetlenül.

Minkowski-féle négydimenziós tér

A fény mind a K, mind a K' vonatkoztatási rendszerben c sebességgel terjed.
Egy rövid esemény a téridő (x, y, z, t) pontjában játszódik.
(Minkowski-féle négydimenziós tér)



KIEGÉSZÍTÉS

Lorentz-transzformáció

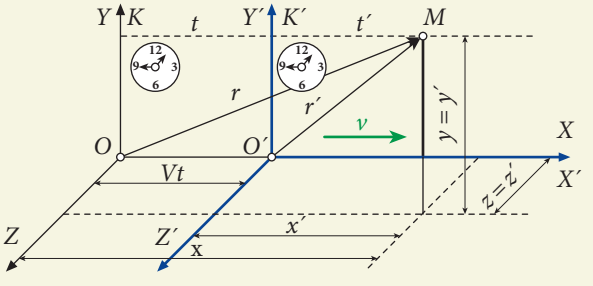
A K és K' v relatív sebességgel mozog a közös x tengely mentén, az esemény paraméterei:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$y' = y;\ z' = z;$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ahol v a koordináta-rendszerek relatív sebessége.



A sebesség-összeadás Einstein-féle szabálya

Egyező irányú v_x és v esetén:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}},$$

ahol: v_x a pont sebessége K-ban
v'_x a pont sebessége K'-ben

Távolságkontrakció

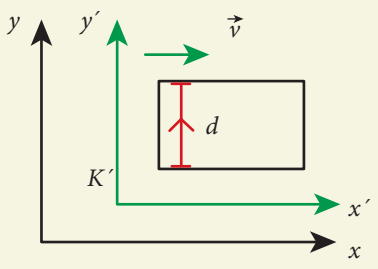
Ha a K'-ben lévő megfigyelő a K'-ben nyugalomban lévő test hosszát l'-nek méri („nyugalmi hossz”), akkor a K-ban lévő megfigyelő

$$l = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\text{-nek („mozgási hossz”).}$$

Időtágulás

Ha a K'-ben lévő megfigyelő a K' adott helyén lévő esemény időtartamát Δt-nek méri („saját időtartam”), akkor a K-ban lévő megfigyelő

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{-nek („mozgási időtartam”).}$$



Relativisztikus dinamika

A *v* sebességgel mozgó test tömege, lendülete

$$E_0 = m_0c^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

ahol: E_0 a nyugalmi energia
m_0 a nyugalmi tömeg

A teljes energia

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (p\cdot c)^2},$$

ahol: $p = mv$ a lendület
c a fénysebesség

A mozgási energia

$$E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0c^2$$

Tömegdefektus

M nyugalmi tömeg m-re való csökkenése

$$(M-m)c^2 = \Delta E = \Delta mc^2$$

energia felszabadulásával jár.

Atomfizika

Hullám-részecske, kettős természet

Az elektron

Az elemi töltés, az elektron töltése (Millikan kísérlete)

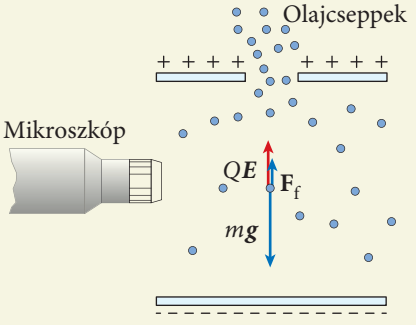
Az elemi töltés meghatározása kondenzátorlemezek között vákuumban lebegő, negatív töltésű olajcsepp egyensúlyából.

$$Q = \frac{mg}{E} = \frac{mgd}{U}$$

Tapasztalat: $Q = k \cdot e$, ahol k pozitív egész szám, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C az elemi töltés, aminél kisebb elektromos töltés nincs.

Levegőben lebegő olajcseppre:

$$Q = \frac{V \cdot (\rho_{\text{olaj}} - \rho_{\text{levegő}}) \cdot g}{E} = \frac{V \cdot (\rho_{\text{olaj}} - \rho_{\text{levegő}}) \cdot gd}{U}$$



mg az olajcseppre ható nehézségi erő
QE az olajcseppre ható elektromos erő
F_f az olajcseppre ható felhajtóerő

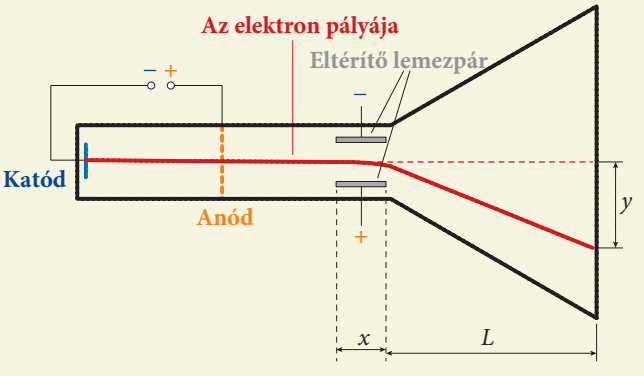
KIEGÉSZÍTÉS

Az elektron fajlagos töltése (J. J. Thomson)

Az elektron fajlagos töltésének meghatározása a katódsugárzás kondenzátorlemezek közötti eltérüléséből történik.

$$\frac{e}{m} = \frac{2y}{E \cdot x \cdot (x + 2L)} \cdot v^2,$$

ahol: E a kondenzátorlemezek közötti mező térerőssége
v az anódot elhagyó elektronok sebessége,
x az eltérítő lemezpár hossza
y az elektron teljes függőleges irányú eltérülése
L az ernyő és az eltérítő lemezpár távolsága



A foton

A foton energiája, lendülete

A foton energiája: $E = hf$

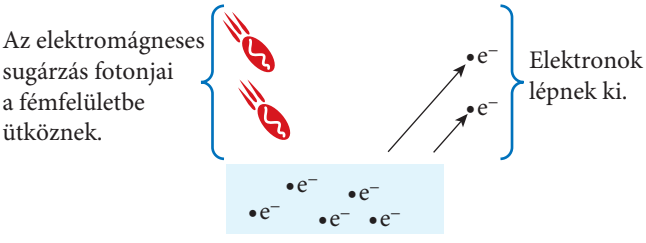
A foton lendülete: $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$,

ahol: h a Planck-állandó
f a foton frekvenciája
c a fénysebesség
λ a foton hullámhossza

A fotonnak nincs (nyugalmi) tömege, de a tömeg-energia ekvivalencia ($E = mc^2$) értelmében hozzá rendelhető tömeg: $m = \frac{hf}{c^2}$.

Fényelektromos hatás (fotoeffektus)

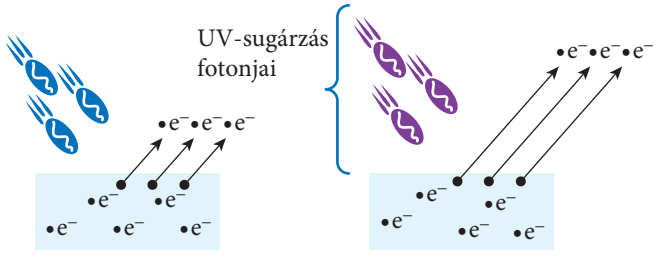
A hf energiájú foton hatására a fémből elektronok léphetnek ki.



Fényelektromos egyenlet

$$hf = W_{ki} + E_m$$

E_m a kilépő elektronok maximális mozgási energiája, W_{ki} a fotokatódra jellemző kilépési munka.



A frekvenciát növelve (az UV felé) a kilépő elektronok mozgási energiája növekszik.

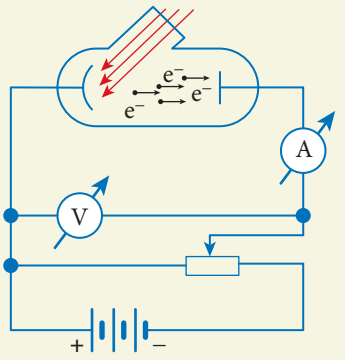
Határfrekvencia: az elektronok kilépéséhez szükséges legkisebb frekvencia:

$$f_{határ} = \frac{W_{ki}}{h} \text{ (ekkor } E_m = 0)$$

A Planck-állandó mérése fotocellával

$$h = \frac{U_1 - U_2}{f_1 - f_2}$$

A fotocellát f_1 frekvenciájú fénnyel megvilágítva U_1 ellenfeszültséggel lehet megszüntetni az áramot, f_2 frekvenciájú fénnyel megvilágítva U_2 ellenfeszültséggel.



Szabad elektronok

Az elektron sebessége U gyorsítófeszültség hatására:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}},$$

ahol: e az elektron töltése
m_e az elektron tömege

Fémből kilépő elektron energiája

A hf energiájú foton hatására a fémből kilépő elektron energiája:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = hf - W_{ki},$$

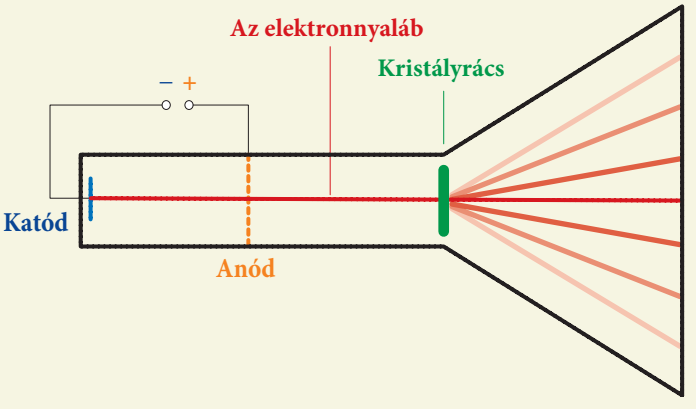
ahol W_{ki} a kilépési munka.

Anyaghullámok (de Broglie)

A részecskéhez társítható hullámtulajdonság, amelynek a hullámhossza

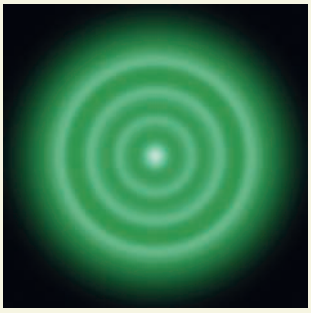
$$\lambda = \frac{h}{p},$$

ahol:
h a Planck-állandó
$p = mv$ a részecske lendületének (impulzusának) a nagysága



Elektroninterferencia kristályrácson

Az elektronnyaláb interferenciaképet mutat, de egy elektron csak egy helyre csapódik be, az „erősítési helyek” valamelyikére.



Elektronelhajlás polikristályos aranylemezen

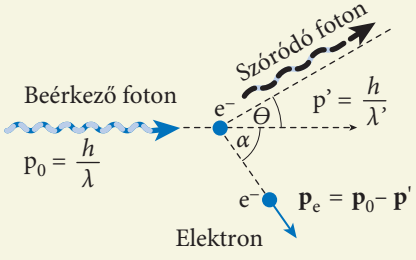
KIEGÉSZÍTÉS

Compton-effektus
(foton és szabad elektron ütközése)

A foton hullámhosszának változása

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\Theta),$$

ahol: m_0 az elektron nyugalmi tömege
Θ a foton szóródási szöge



A foton és elektron jól modellezhető két rugalmas golyó ütközésével, felírható a lendület és az energia megmaradása.

Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Ha a Δx egy részecske x koordinátájának megadásakor a hely bizonytalansága, Δp az impulzus bizonytalansága ezen koordinátatengely mentén, akkor a két mennyiség bizonytalanságának a szorzata nem lehet kisebb, mint a Planck-állandó 4π-ed része.

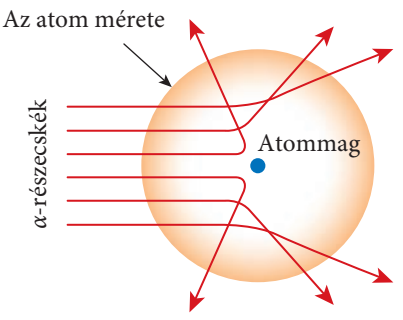
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Atommodellek

Rutherford-féle modell

Rutherford-szórás (az atommag felfedezése)

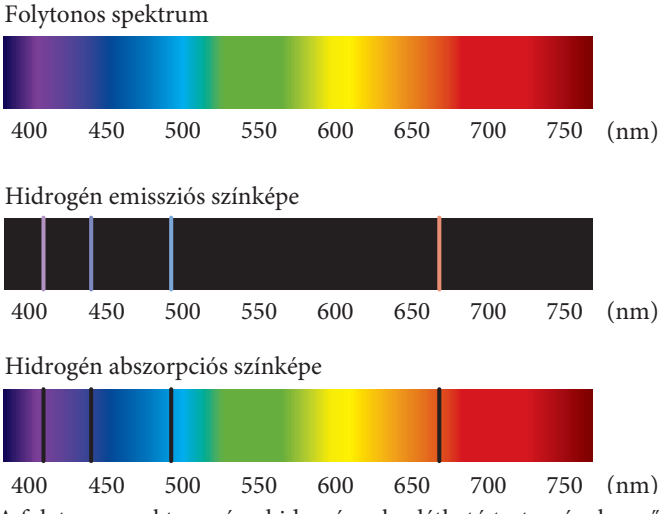
Vékony fémfóliára bocsátott α-sugárnyaláb nagy része gyakorlatilag irányváltozás nélkül halad át a fólián, de vannak jelentősen szóródó (eltérülő) részecskék is.



α-részecskék szóródása az atommagokon

A gázok vonalas színképe

A gázok csak néhány frekvenciájú (hullámhosszúságú) fényt bocsátanak ki, illetve nyelnek el.



A folytonos spektrum és a hidrogénnek a látható tartományba eső színképvonalai

A Bohr-féle atommodell axiómái

I. Dinamikai feltétel

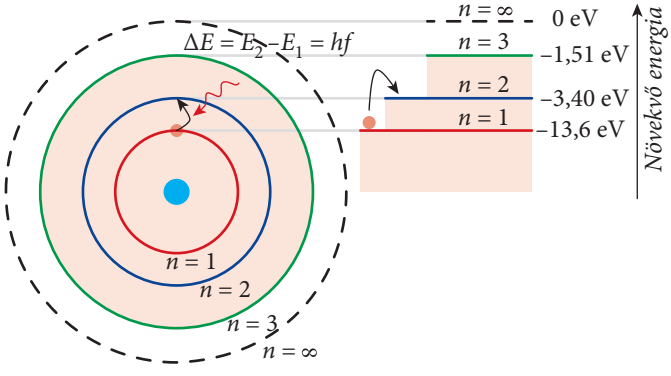
Az elektron a mag körül körpályán mozog a klasszikus mechanika törvényei szerint, azaz a Coulomb-erő biztosítja a centripetális erőt. Az első axióma a hidrogénatomra felírva:

$$k\frac{e^2}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

II. A Bohr-féle frekvenciafeltétel

Minden elektronpályához meghatározott energia rendelhető. Az elektronpályák közti átmenetek úgy mennek végbe, hogy egy elektron az egyik pályáról átugrik egy másikra, miközben az atom egy fotont bocsát ki vagy nyel el. A foton energiája egyenlő két elektronpálya energiájának a különbségével.

$$hf = E_n - E_m = \Delta E$$



Az elektron magasabb energiapályára ugrásakor energiát vesz fel.

III. A Bohr-féle pályafeltétel

Megengedett pályák azok, amelyeken az elektron *mrv* perdülete a 2π-vel osztott Planck-állandónak egész számú többszöröse. A perdület pontszerű, körpályán mozgó testek esetén úgy számítható ki, hogy a test *mv* lendületet megszorozzuk azzal az *r* sugárral, amelyik a körpálya jellemzője.

$$mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

A 2π-vel osztott Planck-állandó jelölésére vezettük be a $\hbar$ („h vonás”) jelölést.
Az *n* természetes szám ($n > 0$), főkvantumszámnak nevezzük.

Az elektronpályák sugara, energiája

Az elektronpálya sugara:

$$r_n = r_0 \cdot n^2,$$

ahol r_n az *n*-edik pálya sugara, r_0 az úgynevezett Bohr-sugár. $r_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m.

Az *n*-edik elektronpálya energiája: $E_n = \dfrac{-2{,}18\ \text{aJ}}{n^2}$

A kvantummechanikai atommodell

Az elektron (mikrorészecske) állapotát teljesen leíró függvény a hullámfüggvény: Ψ.
A hullámfüggvény adott pontbeli értéke azzal kapcsolatos, hogy a részecske mekkora valószínűséggel található a pont körüli kicsiny ΔV térfogatban. A valószínűséget a $\Psi^2 \cdot \Delta V$ szorzat adja meg.

Kvantumszámok

Az atompályát három kvantumszámmal jellemezzük: a fő-, a mellék- és a mágneses kvantumszámmal.

A *főkvantumszám* az atompálya atommagtól való távolságát határozza meg. Jele: n.

A *mellékkvantumszám* az elektronpálya alakját jellemzi. Jele: l.
Az l lehetséges értékei: 0, 1, 2, ..., $n - 1$.
A mellékkvantumszámnak megfelelő betűjelölések: *s*, *p*, *d* és *f*.

A *mágneses kvantumszám* az atompálya alakjának térbeli irányultságát adja meg mágneses tér esetén. Jele: m.
A mágneses kvantumszám lehetséges értékei a $-l$-től a $+l$-ig egész számok lehetnek.

Az atompályák jellemzésére bevezetett három kvantumszám mellett az elektronnak van egy saját mágneses tulajdonsága, melyet *spinkvantumszámnak* nevezünk. Jele: s.

A spinkvantumszám lehetséges értékei: $-\frac{1}{2}$ vagy $+\frac{1}{2}$.

Az atomok felépítésének szabályai

Az energiaminimum elve

Az elektronok először a kisebb energiájú pályákat töltik fel. Ha már tele van az adott pálya, akkor épülnek be a nagyobb energiájú, magtól távolabbi pályák.

Pauli-elv

Az atomban nem lehet kettő vagy több olyan elektron, amelynek a négy kvantumszáma megegyezik. Ha n, l és m azonos, akkor legalább az s spinkvantumszámnak különböznie kell.

Hund-szabály

Az elektronok az azonos energiaszintű pályákra először azonos spinnel épülnek be. Ha már mindegyiken van egy-egy elektron, akkor kezdődik meg az ellentétes spinű elektronok beépülése.

Atommagfizika

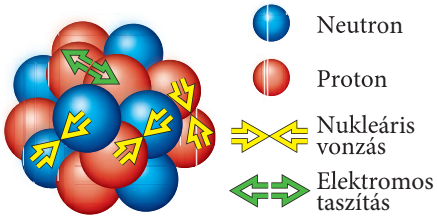
Az atommag

Az atommagok kötési energiája

Az atommag egyes nukleonokra történő teljes szétbontásához szükséges energia:

$$E_{\text{köt}} = \left(Zm_{\text{p}} + Nm_{\text{n}} - m_{\text{mag}}\right)c^2 = \Delta mc^2,$$

ahol: Z a rendszám, a protonok száma
m_{p} a proton tömege
N a neutronok száma
m_{n} a neutron tömege
m_{mag} az atommag tömege
Δm a tömeghiány

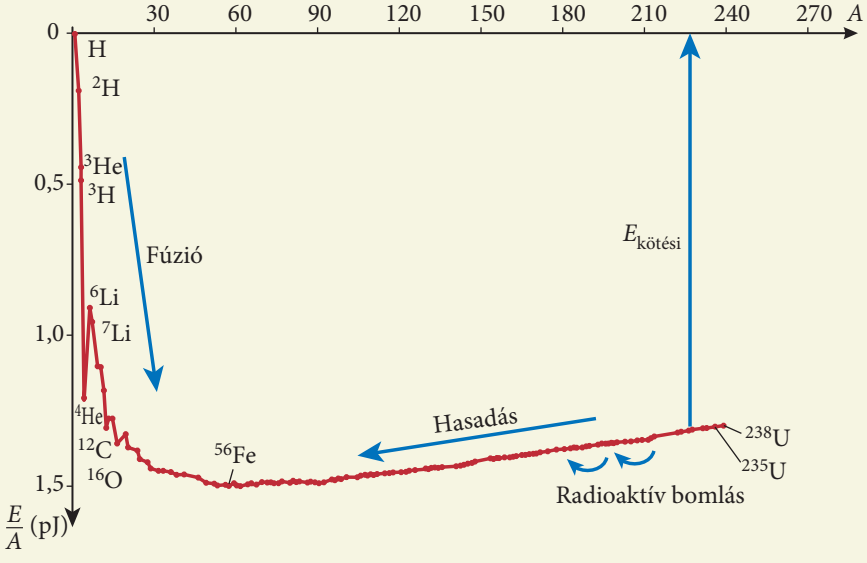


Nukleonok közötti kölcsönhatások az atommagban

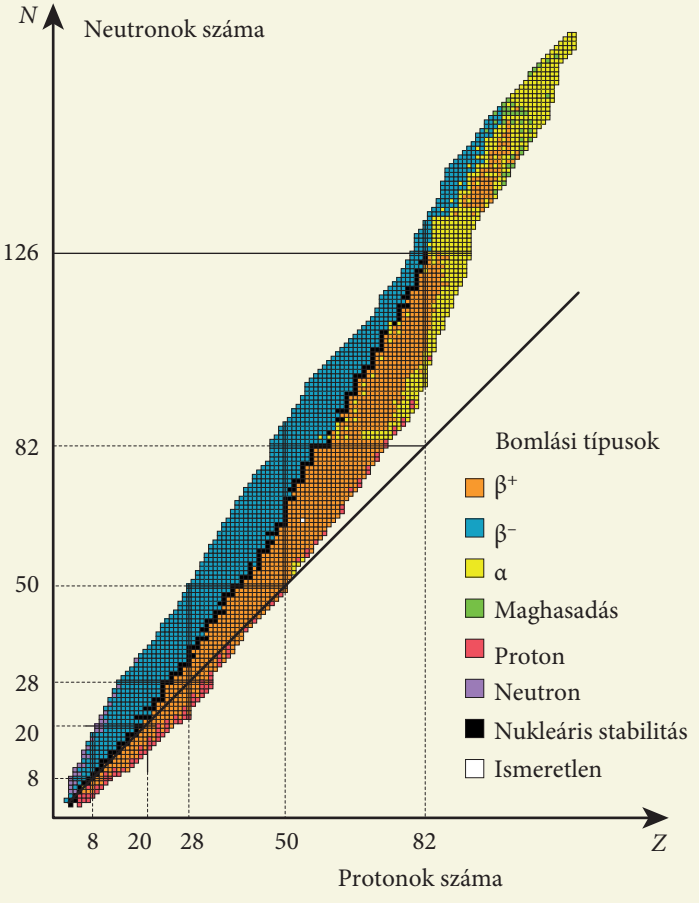
Fajlagos kötési energia

Fajlagos kötési energiának nevezzük az egy nukleonra jutó kötési energiát, melyre fennáll:

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{köt}}}{A}$$



Nukleáris energiavölgy



Nukleáris stabilitási energiavölgy

Az atommagok cseppmodellje

Az atommagok kötési energiája a cseppmodell szerint:

$$E_{\text{köt}}(Z,A) = \underbrace{\varepsilon_V A}_{\substack{\text{térfogati}\\ \text{energia}}} - \underbrace{\varepsilon_F \sqrt[3]{A^2}}_{\substack{\text{felületi}\\ \text{energia}}} - \underbrace{\varepsilon_C \frac{Z^2}{\sqrt[3]{A}}}_{\substack{\text{Coulomb-}\\ \text{energia}}} - \underbrace{\varepsilon_p \frac{(N-Z)^2}{A}}_{\substack{\text{Pauli-}\\ \text{energia}}},$$

ahol: Z a rendszám, a protonok száma

N a neutronok száma

A a tömegszám

Egyetlen nukleonra jutó átlagos kötési energia (fajlagos kötési energia) a cseppmodellben:

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{köt}}}{A} = \varepsilon_V - \varepsilon_F \frac{1}{\sqrt[3]{A}} - \varepsilon_C \frac{Z^2}{\sqrt[3]{A^4}} - \varepsilon_p \frac{(N-Z)^2}{A^2}$$

ε arányossági tényezők értékei:

$\varepsilon_V = 2{,}52$ pJ, $\varepsilon_F = 2{,}85$ pJ, $\varepsilon_C = 0{,}114$ pJ, $\varepsilon_p = 3{,}80$ pJ

KIEGÉSZÍTÉS

Az atommag legkisebb energiája esetén a protonok száma:

$$Z_{\min} = \frac{A}{2 + 0{,}015\sqrt[3]{A^2}}$$

Nukleonsűrűség

A nukleonsűrűség (a térfogategységben lévő nukleonok száma):

$$\rho = \frac{3}{4\pi R_0^3} = \text{állandó.}$$

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A}\,,$$

ahol $R_0 = 1{,}42 \cdot 10^{-15}$ m, az ($A \geq 27$) nehézmagok sugara.

KIEGÉSZÍTÉS

Néhány nevezetes elemi magreakció

A proton felfedezése és az első mesterséges magátalakítás (Rutherford, 1919):

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

A neutron felfedezése (Chadwick, 1932):

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

A mesterséges radioaktivitás felfedezése (Irène Curie, 1934):

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \qquad {}^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \mathrm{e}^{+}$$

Plutónium keletkezése uránból:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U}$$

$$^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{23\ \text{perc}} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}$$

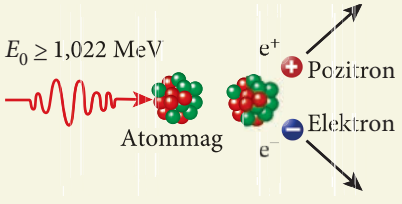
$$^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{2{,}33\ \text{nap}} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}$$

A plutónium 24 000 év felezési idővel α-sugárzással 235-ös uránra bomlik.

Párkeltés

Párkeltés során részecske-antirészecske pár keletkezik.

$$\gamma \rightarrow \mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-}$$

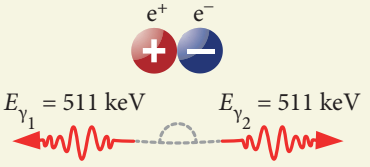


Szétsugárzás (annihiláció)

Szétsugárzás során részecske-antirészecske találkozáskor két gamma-foton keletkezik.

$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$

$p^+ + p^- \rightarrow 2\gamma$



Radioaktivitás

A radioaktív bomlás főbb típusai

α-bomlás ($Z \geq 82$ rendszámú atomoknál):

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow \underbrace{{}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}}_{\text{a keletkező atom}} + {}^4_2\alpha \quad ({}^4_2\alpha = {}^4_2\mathrm{He})$$

negatív β-bomlás (elektronsugárzás):

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- (+\tilde{\nu}) \quad (n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \tilde{\nu})$$

pozitív β-bomlás (pozitronsugárzás):

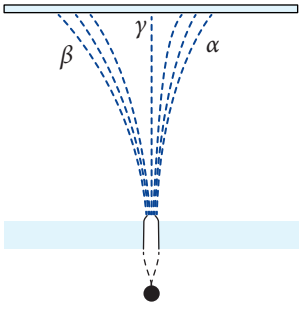
$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + e^+ (+\tilde{\nu}) \quad (p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu)$$

elektronbefogás (K-befogás):

$${}^A_Z\mathrm{X} + e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} (+\nu)$$

γ-sugárzás (elektromágneses sugárzás)

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^A_Z\mathrm{X} + \gamma$$



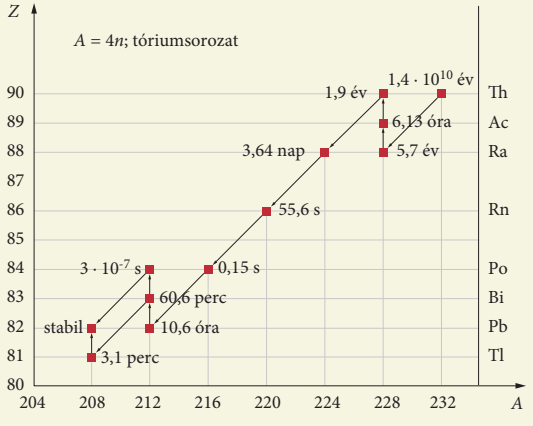
A radioaktív sugárzás a papír síkjára merőlegesen kifelé mutató B mágneses mezőben

A a tömegszám
Z a rendszám
X egy elem vegyjele

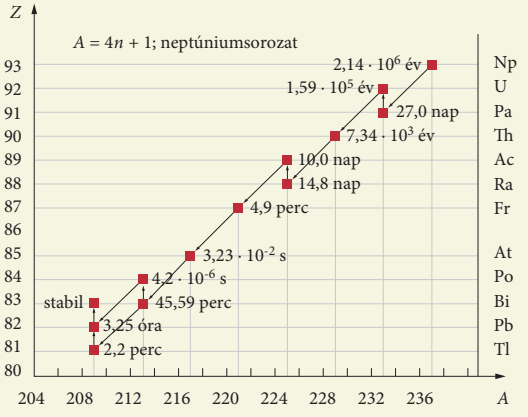
KIEGÉSZÍTÉS

ν neutrínó
$\tilde{\nu}$ antineutrínó

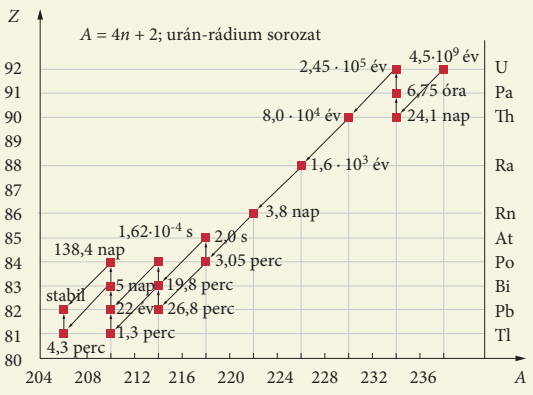
Radioaktív bomlási sorok



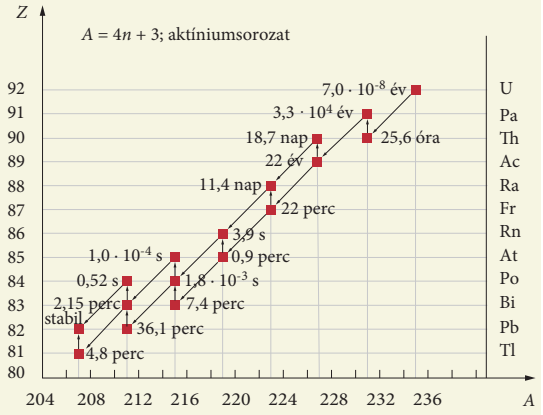
Tórium bomlási sora



Neptúnium bomlási sora



Urán bomlási sora



Aktínium bomlási sora

Felezési idő

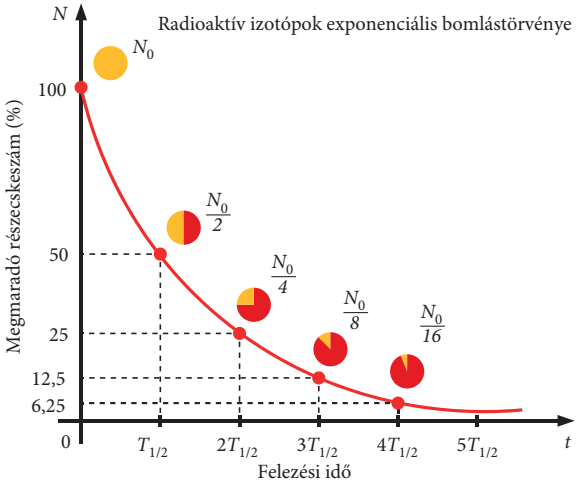
Felezési időnek nevezzük azt az időt, ami alatt a radioaktív részecskék száma a felére csökken.
Jele: $T_{1/2}$.

Mértékegysége: *s*.

A radioaktív bomlási törvény

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}},$$

ahol: N_0 a kezdetben jelen volt atommagok száma
N a t időtartam múlva jelen lévő atommagok száma



Bomlási állandó:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$$

KIEGÉSZÍTÉS

Az atommag átlagos élettartama:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Aktivitás

Átlagos aktivitás

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$$

Mértékegysége Bq (becquerel, ejtsd: bekerel). 1 Bq = 1 $\frac{1}{\text{s}}$.

Pillanatnyi aktivitás

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{½}} \cdot N\,,$$

ahol: N az adott t időpillanatban jelen lévő atommagok száma
$T_{1/2}$ az atommag felezési ideje
λ a bomlási állandó

Dózisfogalmak, háttérsugárzás

Az elnyelt dózis

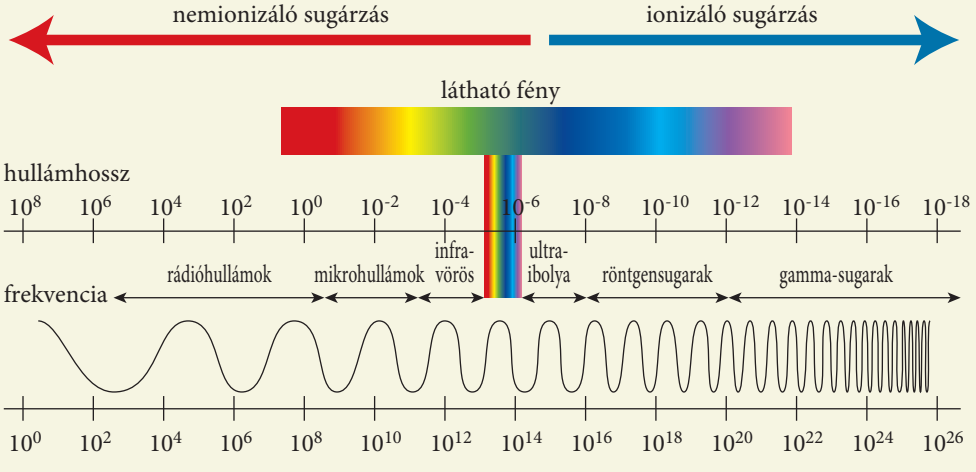
Bármely ionizáló sugárzásra vonatkozóan a besugárzott anyagban elnyelt energia és a besugárzott anyag tömegének a hányadosát elnyelt dózisnak nevezzük.
Jele: D.

$$D = \frac{\Delta E}{\Delta m}$$

Mértékegysége: Gy (gray). 1 Gy = 1 $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A gray az a sugárdózis, melyet 1 kg anyag elnyel, ha vele állandó intenzitású ionizáló sugárzás útján 1 J energiát közlünk.

Az elektromágneses spektrum



Az egyenértékdózis

A ionizáló sugárzásokat károsító hatásuk alapján egy W_R sugárzási tényezővel súlyozzuk. A W_R sugárzási tényező és a D elnyelt dózis szorzatát egyenértékdózisnak (dózisegyenértéknek) nevezzük.
Jele: H.

$$H = W_R \cdot D$$

Mértékegysége a sievert (rövidítése: Sv). 1 Sv = 1 $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A háttérsugárzás mérése: dózisteljesítmény

A dózisteljesítmény a kapott ΔH egyenértékdózis és az ezalatt eltelt idő hányadosa, azaz:

$$\frac{\Delta H}{\Delta t}$$

A háttérsugárzás értéke Magyarországon 50–180 $\frac{\text{nSv}}{\text{h}}$ között változik, átlagos értéke 90 $\frac{\text{nSv}}{\text{h}}$.

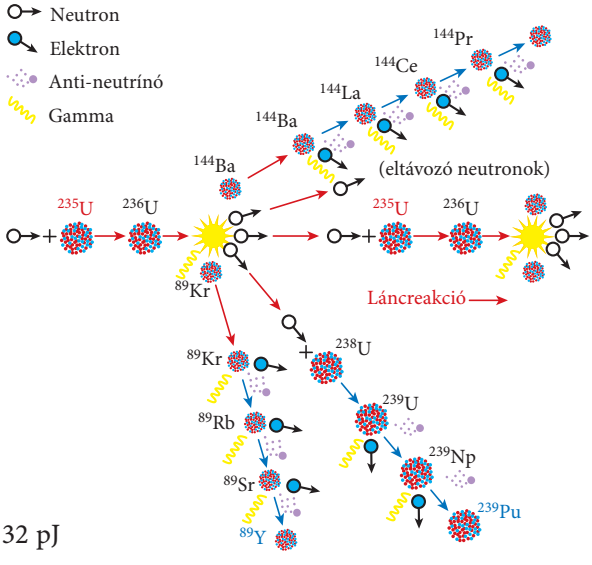
Az atomenergia felszabadítása

Maghasadás

Többnyire a neutronok bombázása okozza.

Egy 235-ös uránatommag hasadásának energiamérlege:

A hasadási termékek kinetikus energiája:	167 MeV
A β-bomlások energiája:	5 MeV
A γ-bomlások energiája:	5 MeV
A hasadásnál keletkező neutronok energiája:	5 MeV
A neutrínókkal távozott energia:	11 MeV
A hasadás pillanatában keletkező sugárzás:	5 MeV
Összesen:	198 MeV ≈ 32 pJ

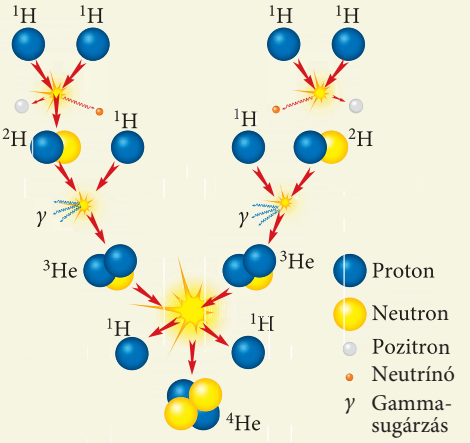


Magfúzió

Termonukleáris reakció.

A csillagok energiatermelése (proton-proton ciklus)

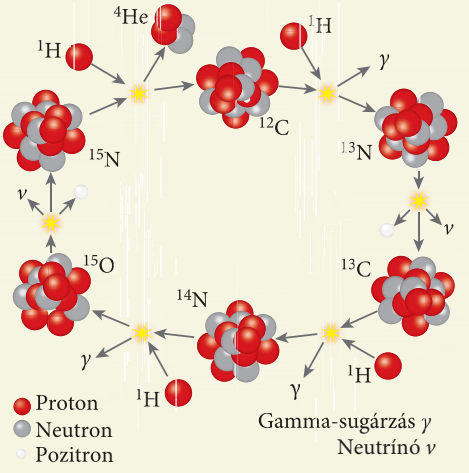
$$^1_1H + {}^1_1H = {}^2_1H + e^+ + \nu + 1{,}44\ \text{MeV}$$
$$^2_1H + {}^1_1H = {}^3_2He + \gamma + 5{,}49\ \text{MeV}$$
$$^3_2He + {}^3_2He = {}^4_2He + {}^1_1H + {}^1_1H + 12{,}85\ \text{MeV}$$



KIEGÉSZÍTÉS

A csillagok energiatermelése (szén-nitrogén-oxigén, CNO-ciklus)

$$^{12}_6C + {}^1_1H = {}^{13}_7N + \gamma + 1{,}98\ \text{MeV}$$
$$^{13}_7N = {}^{13}_6C + e^+ + \nu + 2{,}22\ \text{MeV}$$
$$^{13}_6C + {}^1_1H = {}^{14}_7N + \gamma + 7{,}54\ \text{MeV} \quad 2{,}7 \cdot 10^6\ \text{év}$$
$$^{14}_7N + {}^1_1H = {}^{15}_8O + \gamma + 7{,}53\ \text{MeV} \quad 3{,}2 \cdot 10^8\ \text{év}$$
$$^{15}_8O = {}^{15}_7N + e^+ + \nu + 7{,}21\ \text{MeV} \quad 82\ \text{s}$$
$$^{15}_7N + {}^1_1H = {}^{12}_6C + {}^4_2He + 4{,}96\ \text{MeV} \quad 1{,}12 \cdot 10^5\ \text{év}$$



Csillagászat

A gravitáció

Newton-féle gravitációs törvény

A gravitáció (tömegvonzás) bármely két test között fellép, az erőhatás nagysága:

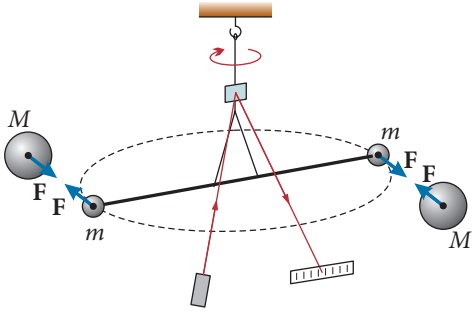
$$F_g = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

ahol: M és m a két, kölcsönhatásban lévő tömeg

r a két tömeg középpontjának távolsága

γ a gravitációs állandó:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$$



Cavendish kísérlete

A nehézségi erő

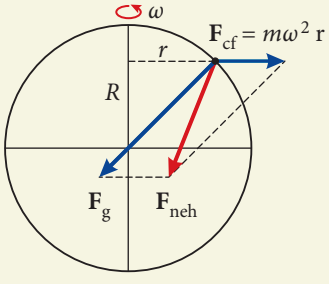
A Földhöz rögzített koordináta-rendszerből nézve a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{neh}} = \mathbf{F}_{\mathrm{g}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cf}}$$

$$F_{\mathrm{g}} = \gamma \cdot \frac{M_F \cdot m}{R^2}$$

A gravitációs gyorsulás értéke az M tömegű és R sugarú égitest (Föld) felszínén:

$$g = \frac{F_{\mathrm{g}}}{m} = \gamma \cdot \frac{M}{R^2}$$



A nehézségi erő (mg) szemléltetése gömb alakú Földet feltételezve

Az égitest (Föld) felszíne felett h magasságban a gravitációs gyorsulás értéke:

$$g = \gamma \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

A Föld lapultsága (A Föld nem pontosan gömb alakú):

R_{s} = 6357 km a sarkokon

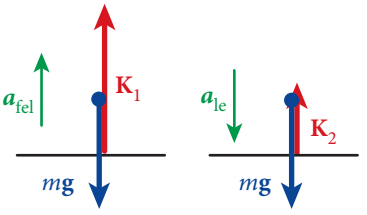
R_{e} = 6378 km az Egyenlítőn

A Föld lapultságának mértéke:

$$\frac{R_{\mathrm{e}} - R_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{e}}} \approx \frac{1}{300}$$

Súly, súlytalanság

A súly az az erő, amivel a testek az alátámasztást nyomják vagy a felfüggesztést húzzák.



Ha az alátámasztás vagy felfüggesztés függőlegesen gyorsul, akkor az m tömegű testre ható erő nagysága:

$$K_1 = m\,(g + a_{fel})$$
$$K_2 = m\,(g - a_{le})$$

Súlytalanság esetén:

$$K = 0,\ a = g$$

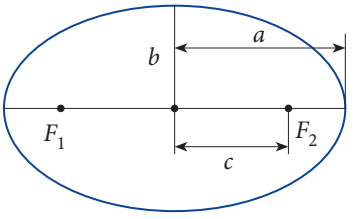
Bolygómozgás

Kepler törvényei

Kepler törvényei érvényesek minden (központi) égitest körül keringő égitestre, ha ezek tömege elhanyagolható a központi égitest tömegéhez képest.

1. A bolygók pályája ellipszis, amelynek egyik gyújtópontjában a Nap áll.

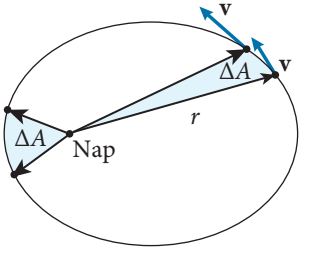
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



F_1, F_2 fókuszpontok
a a fél nagytengely
c az F_1F_2 fókusztávolság fele
b a fél kistengely

2. A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (felületi tétel).

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{állandó}$$



r a vezérsugár

KIEGÉSZÍTÉS

Kepler II. törvénye a perdületmegmaradás törvényét rejti magában:

$$\Theta\omega = mr^2\omega = mrv_{\text{merőleges}} = \text{állandó}$$

3. Különböző bolygók esetében a keringési idők négyzetei úgy aránylanak, mint a bolygópályák fél nagytengelyeinek köbei:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \text{ azaz } \frac{T^2}{a^3} = \text{állandó},$$

ahol T a keringési idő.

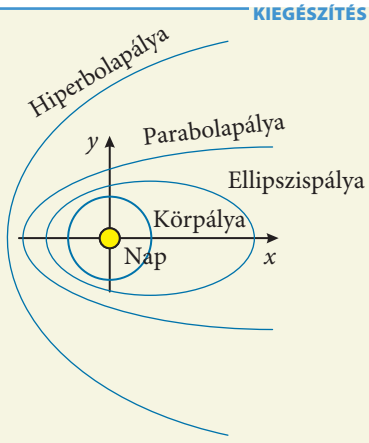
KIEGÉSZÍTÉS

Ellipszispályán keringő égitest keringési ideje és sebessége

Az ellipszispályán keringő égitest, bolygó keringési ideje és pillanatnyi sebessége:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}, \quad v_{\text{pill}} = \sqrt{\gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

ahol: r a bolygó pillanatnyi távolsága a Naptól
a a keringési pálya fél nagytengelye
M a Nap tömege
γ a gravitációs állandó



Az égitestek lehetséges pályaalakjai a Naprendszerben

Kozmikus sebességek

1. Első kozmikus sebesség a Föld körüli körmozgás sebessége a Föld felszíne magasságában:

$$\gamma\frac{mM}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}} \approx 7{,}9\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

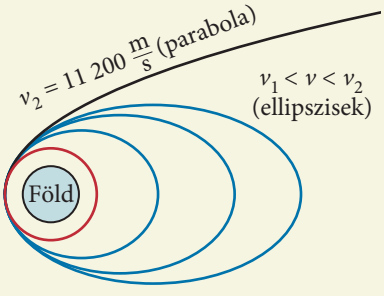
M a Föld tömege, R a sugara, γ a gravitációs állandó.

2. Második kozmikus sebesség (szökési sebesség a Földről): a Föld közelében nulla összenergiájú test sebessége:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{mozg}} = -\gamma\frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2\gamma\frac{M}{R}} \approx 11{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A Föld gravitációs vonzásából való kilépéshez és a Nap körüli keringéshez legalább a *második kozmikus sebesség* szükséges.



Föld körüli pályasebességek

KIEGÉSZÍTÉS

A Föld középpontjától r távolságban Föld körül keringő égitest energiája:

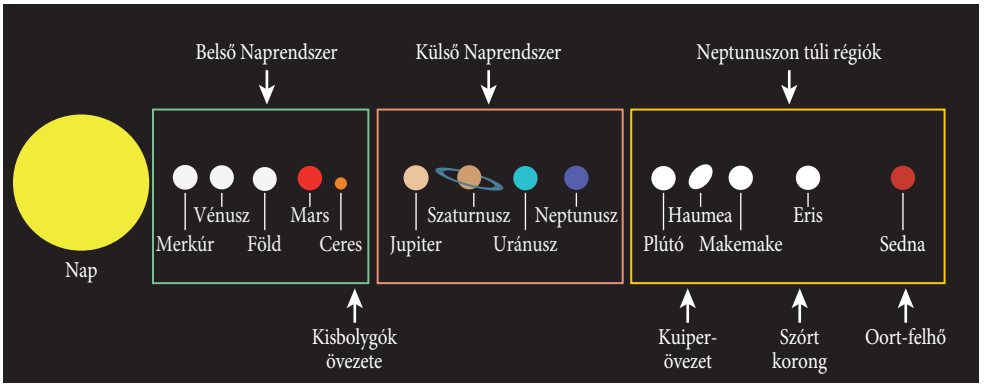
$$E_{\text{ö}} = E_{\text{m}} + E_{\text{h}} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{M_{\text{F}}m}{r}$$

Ellipszispálya esetén a „kötési energia”: $E_{\text{ö}} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{M_{\text{F}}m}{a}$

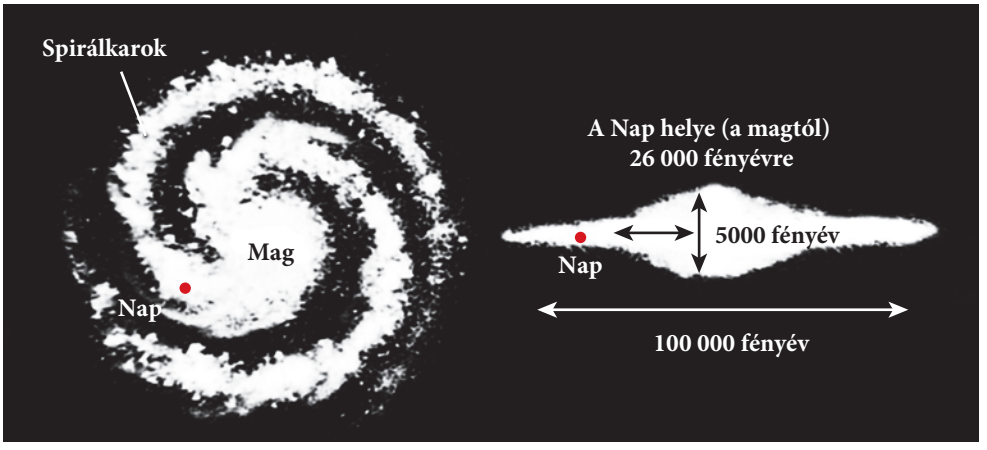
3. Szökési sebesség a Naprendszerből a végtelenbe távozva:

$$v_3 = 42{,}1\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A Naprendszer



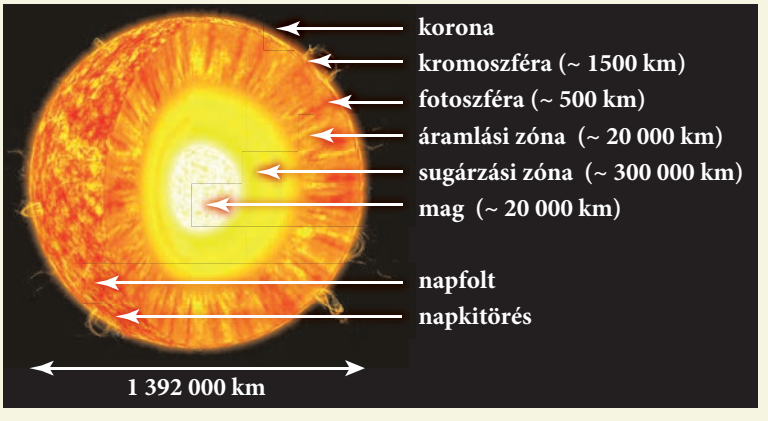
A Naprendszer régiói és övezetei



A Naprendszer helye a Tejút galaxisban

A Nap

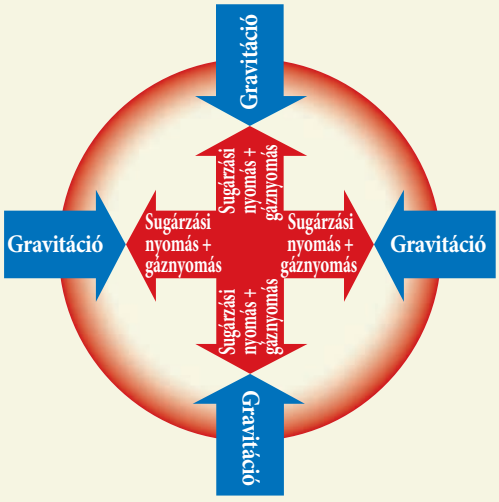
A Nap szerkezete



A Nap szerkezeti felépítése

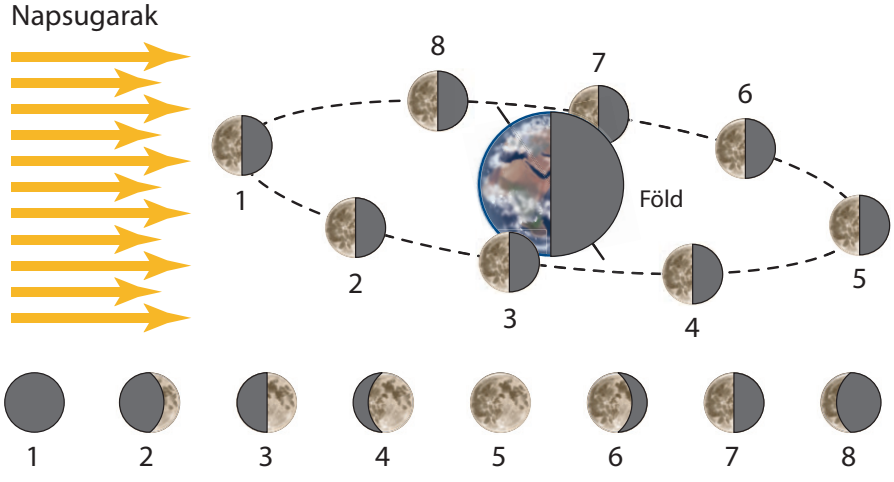
A Nap mint önfenntartó fúziós reaktor

A Napban a fotonok sugárzási nyomása és a gáznyomás tart dinamikus egyensúlyt a gravitációval.



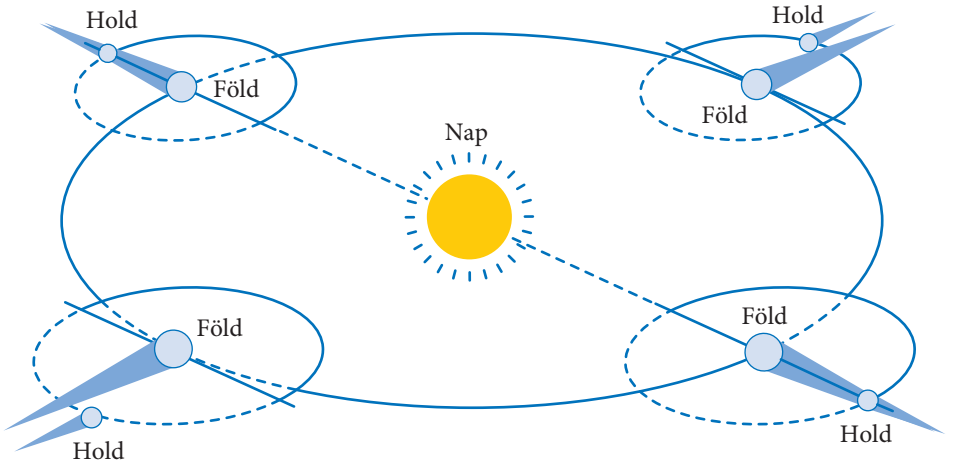
Holdfázisok, fogyatkozások

Holdfázisok



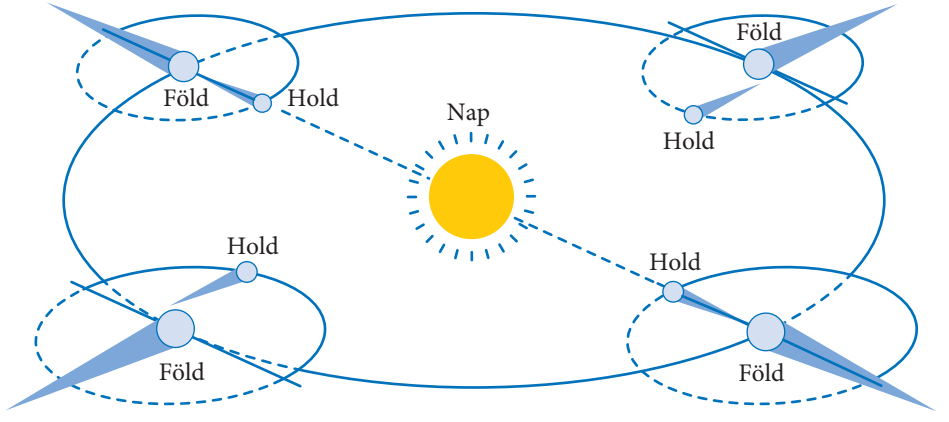
A Hold fázisainak váltakozása a Földről nézve
1: újhold, 2: növekvő holdsarló, 3: első negyed, 4: növekvő Hold, 5: telihold, 6: fogyó Hold, 7: utolsó negyed, 8: fogyó holdsarló

Holdfogyatkozás



A holdfogyatkozás feltétele, hogy a Nap, a Föld és a Hold egy egyenesen helyezkedjen el, ebben a sorrendben.
Ez az esemény nem következik be minden teliholdkor, mivel a Hold keringési síkja és a Föld keringési síkja kb. 5 fokos szöget zár be. Csak akkor következik be a holdfogyatkozás, ha a Hold e két sík metszésvonalán helyezkedik el teliholdkor.

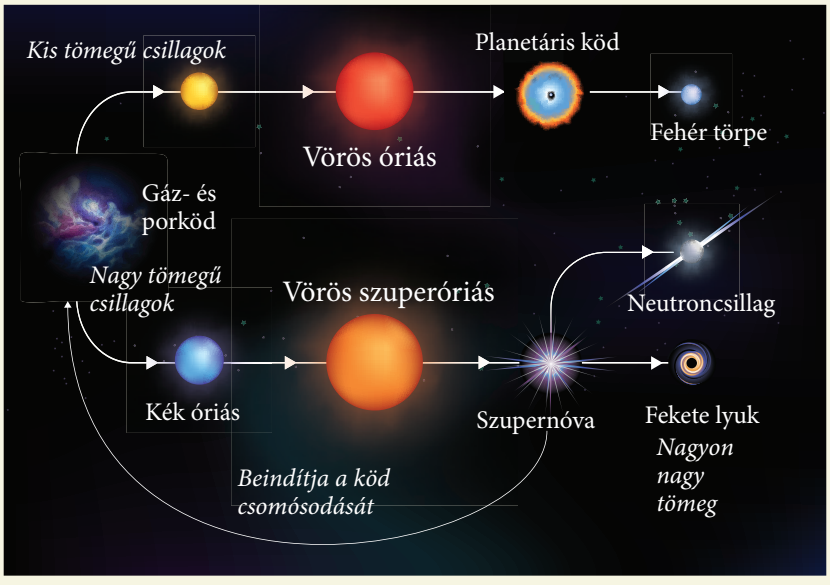
Napfogyatkozás



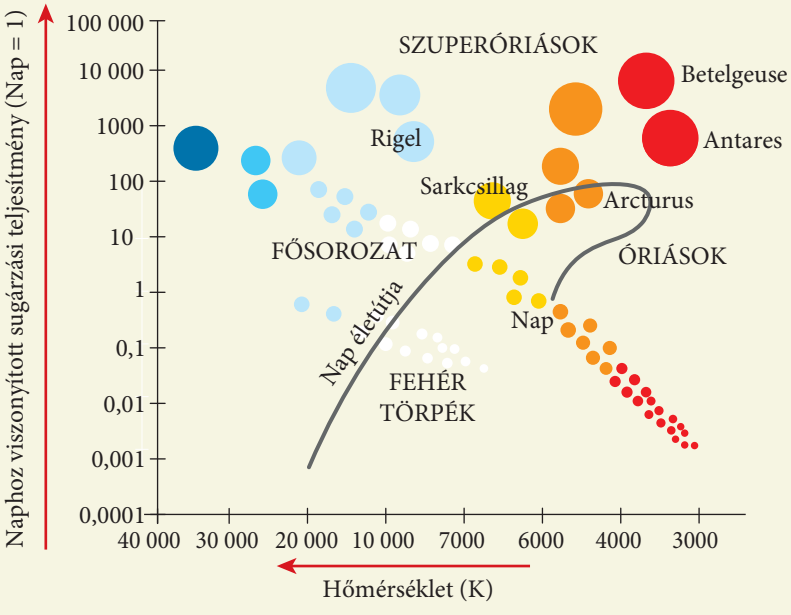
A napfogyatkozás feltétele, hogy a Nap, a Hold és a Föld egy egyenesen helyezkedjen el, ebben a sorrendben.
Ez az esemény nem következik be minden újholdkor, mivel a Hold keringési síkja és a Föld keringési síkja kb. 5 fokos szöget zár be. Csak akkor következik be a fogyatkozás, ha a Hold e két sík metszésvonalán helyezkedik el újholdkor.

A csillagok

Csillagok életútja



A Hertzspung–Russell- (HR-) diagram



A Hertzspung–Russell-diagram egy csillag életútjáról árulkodik. A függőleges tengelyen a Naphoz viszonyított sugárzási teljesítmény (abszolút fényesség), a vízszintes tengelyen a felszíni hőmérséklet van feltüntetve. A diagramon négy fő területet különíthetünk el: a fősorozatot, az óriáságakat és a fehér törpék régióját.

Az univerzum

Vöröseltolódás

A vöröseltolódás (Doppler-effektus) a galaxisok fényében arra utal, hogy az univerzum tágul.

A galaxisok távolodási sebessége a Tejútrendszertől:

$$v = \frac{\lambda_{\text{laboratóriumi}} - \lambda_{\text{mért}}}{\lambda_{\text{laboratóriumi}}} \cdot c$$



Nyugalomban (laboratórium)



Távolodik – vöröseltolódás



Közeledik – kékeltolódás

Hubble-törvény

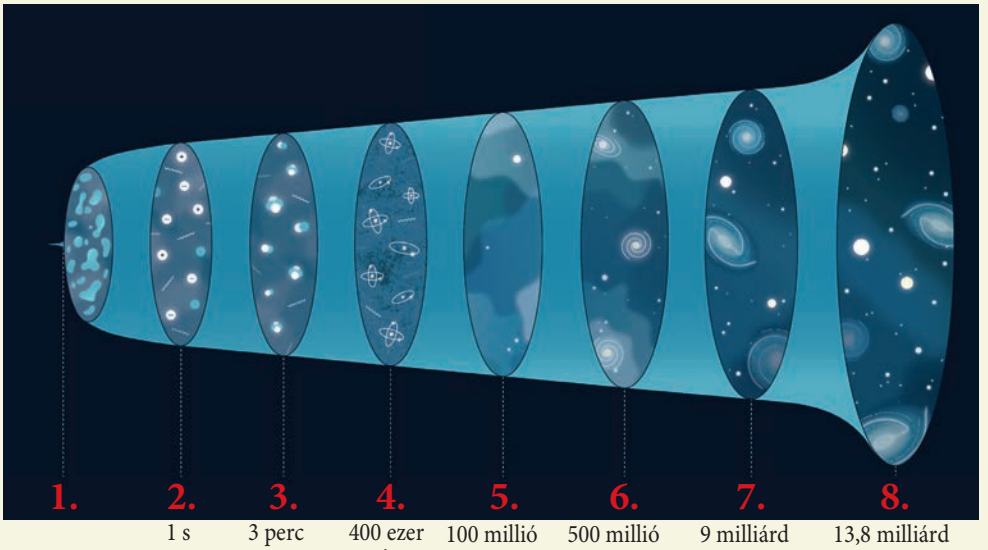
A Földtől (lényegében a Tejútrendszertől) R távolságra lévő galaxis távolodási sebessége:

$$v = H \cdot R,$$

ahol H a Hubble-állandó, értéke kb. 70–74 $\frac{\frac{\text{km}}{\text{s}}}{\text{Mpc}}$ (Mpc: megaparszek).

KIEGÉSZÍTÉS

Az univerzum története



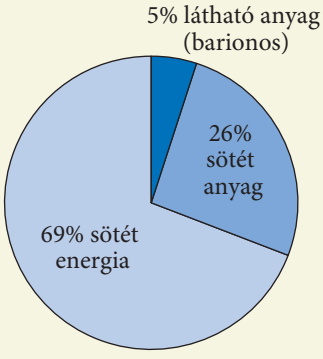
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	1 s	3 perc	400 ezer év	100 millió év	500 millió év	9 milliárd év	13,8 milliárd év

1. **Infláció** – Kezdeti tágulás
2. **Első részecskék** – Neutronok, protonok és elektronok
3. **Első atommagok** – Hélium- és hidrogénatommagok
4. **Első fény** – Első atomok kialakulása, kozmikus háttérsugárzás létrejötte
5. **Első csillagok** – A gáz- és a porfelhők csillagokká tömörültek
6. **Galaxisok** – Galaxisok, galaxishalmazok kialakulása, létrejött az univerzum nagy léptékű szerkezete
7. **A Naprendszer kialakulása** – Csillagközi gáz- és porfelhőkből
8. **Mai korszak** – A mai ember létrejötte

Az ősrobbanás-elmélet mellett szóló legfontosabb érvek

- könnyű elemek előfordulási gyakorisága
- vöröseltolódás, világegyetem tágulása
- mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás

Az univerzum összetétele



Fizikai táblázatok

A nemzetközi mértékegységrendszer (SI)

Alapmennyiségek és alapmértékegységek

1. táblázat

Az alapmennyiség		Az alapmértékegység	
neve	**jele**	**neve**	**jele**
Hosszúság	l	méter	m
Tömeg	m	kilogramm	kg
Idő	t	másodperc	s
Áramerősség (elektromos)	I	amper	A
Termodinamikai hőmérséklet	T	kelvin	K
Anyagmennyiség	n	mól	mol
Fényerősség	I_v	kandela	cd

SI-alapegységek meghatározásai

2. táblázat

SI-alapegységek	Meghatározások
Méter (m)	1 méter annak az útnak a hossza, amelyet a fény vákuumban $\frac{1}{299\,792\,458}$ másodperc alatt tesz meg.
Másodperc (s)	1 másodperc a 133 tömegszámú, alapállapotú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenethez tartozó sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.
Mól (mol)	1 mól anyagban $6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ darab részecske van, amely éppen az Avogadro-állandó számértéke.
Amper (A)	Az olyan állandó elektromos áram erőssége, amely két párhuzamos, egyenes, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsi körkeresztmetszetű és vákuumban egymástól 1 méter távolságra lévő vezetőben áramlik, és e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hoz létre, 1 amper (A).
Kilogramm (kg)	A Sèvres-ben őrzött platina-irídium henger etalonként elfogadott tömege egy kilogramm.
Kelvin (K)	A víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének $\frac{1}{273{,}16}$-szorosa 1 kelvin.
Kandela (cd)	Annak a fényforrásnak a fényerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki, és erőssége ebben az irányban $\frac{1}{683}\frac{\text{watt}}{\text{szteradián}}$, 1 kandela.

A 2019-ben elfogadott definíciókban az alapegységeket természeti állandókhoz rögzítették.

3. táblázat

SI-alapegységek	Meghatározások
Kilogramm (kg)	A kilogramm, aminek az alapja a Planck-állandó rögzített értéke, pontosan $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$. Ez alapján $1\ \text{kg} = 1{,}509\,190\,18 \cdot 10^{33}\ h \left[\frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right]$.
Amper (A)	Az amper, aminek alapja az elemi töltés rögzített értéke, pontosan $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{A} \cdot \text{s}$. Ez alapján $1\ \text{A} = 6{,}241\,509\,074 \cdot 10^{18}\ e \left[\frac{1}{s}\right]$, vagyis 1 amper az áramerősség értéke, ha a vezető keresztmetszetén másodpercenként $6{,}241\,509\,074 \cdot 10^{18}$ elektronnyi töltés halad keresztül.
Kelvin (K)	A kelvin, aminek az alapja a Boltzmann-állandó rögzített értéke, pontosan $k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$. Ez alapján $1\ \text{K} = \frac{1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}}{k}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$.

Önálló nevű származtatott SI-mértékegységek

4. táblázat

Mennyiség	Egység		
	neve	jele	kifejezése a szokásos egységekkel
Frekvencia	hertz	Hz	$\frac{1}{\text{s}}$
Erő	newton	N	$\frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$
Nyomás	pascal	Pa	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Munka, energia, hő (hőmennyiség)	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Teljesítmény	watt	W	$\frac{\text{J}}{\text{s}}$
Elektromos töltés	coulomb	C	$\text{A} \cdot \text{s}$
Elektromos feszültség	volt	V	$\frac{\text{J}}{\text{C}}$
Kapacitás	farad	F	$\frac{\text{C}}{\text{V}}$
Ellenállás	ohm	Ω	$\frac{\text{V}}{\text{A}}$
Mágneses fluxus	weber	Wb	$\text{V} \cdot \text{s}$
Induktivitás	henry	H	$\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$

4. táblázat folytatása

Mennyiség	Egység		
	neve	jele	kifejezése a szokásos egységekkel
Mágneses indukció	tesla	T	$\frac{V \cdot s}{m^2}$
Fényáram	lumen	lm	cd · sr
Megvilágítás	lux	lx	$\frac{lm}{m^2}$
Aktivitás	becquerel	Bq	$\frac{1}{s}$
Elnyelt sugárdózis	gray	Gy	$\frac{J}{kg}$
Dózisegyenérték	sievert	Sv	$\frac{J}{kg}$

Az SI-mértékegységrendszeren kívüli mértékegységek

5. táblázat

Mennyiség	SI-átváltás
ívfok	$1^o = \frac{\pi}{180}\text{rad} = 0{,}017\ 45\ \text{rad}$
csillagászati egység	$1{,}496 \cdot 10^8$ km
angström	1 Å = 10^{-10} m
fényév	1 fényév = $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km
parszek	1 parszek = 3,2617 fényév = $3{,}0857 \cdot 10^{13}$ km
hektár	1 ha = 10^4 m^2
liter	1 l = 1 dm^3
mázsa	1 q = 100 kg
tonna	1 t = 1000 kg = 1 Mg
perc	1 min = 60 s
óra	1 h = 3600 s
nap	1 d = 86 400 s
$\frac{km}{h}$	$1\frac{km}{h} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s}$
torr	1 torr = 1 Hgmm = 133,322 Pa
atm	1 atm = 760 torr = 101 325 Pa
bar	1 bar = 10^5 Pa
kalória	1 cal = 4,1868 J
kilowattóra	1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J
elektronvolt	1 eV = $1{,}602\ 19 \cdot 10^{-19}$ J
lóerő	1 LE ≈ 735,5 W
Celsius-fok	1 °C = 1 K ($t = T - 273{,}15$ K)
amperóra	1 Ah = 3600 C

5. táblázat folytatása

Mennyiség	SI-átváltás
gauss	$1\ \mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T}$
curie	$1\ \mathrm{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Bq}$
decibel	$1\ \mathrm{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ nem helyettesíthető SI-mértékegységekkel

Előtagok (prefixumok)

6. táblázat

Előtag	Jele	Neve	Értéke
exa-	E	trillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$
peta-	P	ezerbillió	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$
tera-	T	billió	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
giga-	G	milliárd	$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$
mega-	M	millió	$1\,000\,000 = 10^{6}$
kilo-	k	ezer	$1\,000 = 10^{3}$
–		egy	$1 = 10^{0}$
deci-	d	tized	$0{,}1 = 10^{-1}$
centi-	c	század	$0{,}01 = 10^{-2}$
milli-	m	ezred	$0{,}001 = 10^{-3}$
mikro-	μ	milliomod	$0{,}000\,001 = 10^{-6}$
nano-	n	ezermilliomod	$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$
piko-	p	billiomod	$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$
femto-	f	ezerbilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$
atto-	a	trilliomod	$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$

Fontosabb fizikai állandók

7. táblázat

Neve	Jele	Egysége	Értéke	
			pontos	gyakorlatban használt
A fény terjedési sebessége vákuumban	c	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	299 792 458	$3 \cdot 10^8$
Planck-állandó	h	Js	$6{,}626\,068\,76 \cdot 10^{-34}$	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$
Elemi töltés (elektron töltése)	e	C	$1{,}602\,176\,462 \cdot 10^{-19}$	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$
Boltzmann-állandó	k	$\frac{\text{J}}{\text{K}}$	$1{,}380\,650\,3 \cdot 10^{-23}$	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$
Avogadro-állandó	N_A	$\frac{1}{\text{mol}}$	$6{,}022\,141\,99 \cdot 10^{23}$	$6 \cdot 10^{23}$
Nehézségi gyorsulás (normál)	g_N	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	9,80665	9,81
Gravitációs állandó	γ	$\text{N}\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$	$6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}$	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$
A hang terjedési sebessége levegőben (0 °C-on)	c	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	331,46	331
Univerzális (egyetemes) gázállandó	R	$\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	8,314 472	8,31
Légköri nyomás (normál)	p_N	Pa	101 325	10^5
Ideális gáz moláris térfogata (273,15 K, 101 325 Pa)	V_m	$\frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}$	22,413 996	22,41
Ideális gáz moláris térfogata (298,15 K, 101 325 Pa)	V_m	$\frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}$	24,465 433	24,5
Vákuumpermittivitás	ε_0	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	$8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$
Vákuum permeabilitása	μ_0	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$12{,}57 \cdot 10^{-7}$
Faraday-állandó	F	$\frac{\text{C}}{\text{mol}}$	96 485,3415	96 500
Elemi tömegegység	m_u	kg	$1{,}660\,538\,73 \cdot 10^{-27}$	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$
Proton tömege	m_p	kg	$1{,}672\,621\,58 \cdot 10^{-27}$	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$
Neutron tömege	m_n	kg	$1{,}674\,927\,16 \cdot 10^{-27}$	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$
Deutérium tömege	m_D	kg	$3{,}343\,583\,09 \cdot 10^{-27}$	$3{,}344 \cdot 10^{-27}$
Alfa-részecske tömege	m_a	kg	$6{,}444\,655\,98 \cdot 10^{-27}$	$6{,}445 \cdot 10^{-27}$
Elektron tömege	m_e	kg	$9{,}109\,381\,88 \cdot 10^{-31}$	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$
Bohr-sugár	r_0	m	$5{,}291\,772 \cdot 10^{-11}$	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$
Stefan–Boltzmann-állandó	σ	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$	$5{,}670\,400 \cdot 10^{-8}$	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$
Wien-állandó	b	$\text{m} \cdot \text{K}$	$2{,}897\,768\,6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9 \cdot 10^{-3}$

Súrlódási tényezők (közelítő értékek)

8. táblázat

Anyagok	Tapadási súrlódás (μ_0)		Csúszási súrlódás (μ)	
	szárazon	**olajozva**	**szárazon**	**olajozva**
Acél – acélon	0,15	0,111	0,14	0,01
Acél – vason	0,19	0,1	0,18	0,01
Fa – fán	0,4–0,6	0,10	0,2–0,5	0,07–0,15
Fa – fémen	0,5–0,6	0,10–0,2	0,3–0,6	0,1–0,2
Fa – jégen			0,035	
Gumi – aszfalton			0,8–1,1	ha nedves, 0,4–0,5
Br – fémen	0,3–0,5	0,16	0,3	
Vas – jégen			0,027	
Vas – havon			0,035	
Fém – fémen	0,15–0,30	0,10–0,2	0,15–0,2	0,05–0,20

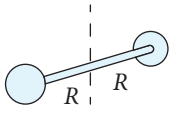
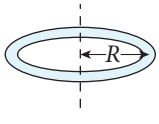
Gördülési ellenállási tényezők (a szokásos kerekek esetében)

9. táblázat

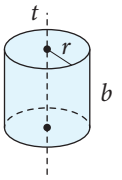
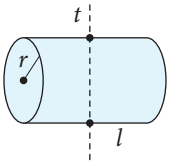
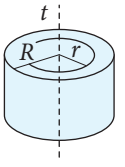
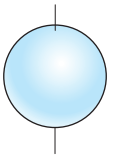
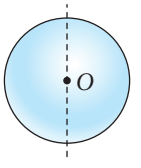
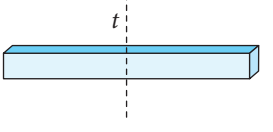
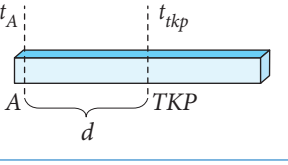
Gumitömlős kerekek (μ_g)		Egyéb kerekek (μ_g)	
Aszfalt- és betonúton	0,015…0,025	Villamoskerék	0,006
Földúton	0,05…0,15	Vasútikocsi-kerék	0,002
Homokban	0,15…0,3		

Tehetetlenségi nyomatékok (homogén testek tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkoztatva)

10. táblázat

Könnyű rúddal összekötött két egyforma golyócska	$\Theta = 2mR^2$	
Abroncs vagy vékony gyűrű	$\Theta = mR^2$	

10. táblázat folytatása

Körhenger	$\Theta_s = \frac{1}{2}mr^2$, a tengely átmegy a fedőlap középpontján és párhuzamos az alkotóval	
	$\Theta_s = \frac{1}{12}m(3r^2 + l^2)$, a tengely merőleges az alkotóra	
Cső, kerék	$\Theta_s = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$, a tengely átmegy a fedőlap középpontján és párhuzamos az alkotóval	
Vékony falú gömbhéj	$\Theta = \frac{2}{3}mr^2$, középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva	
Tömör gömb	$\Theta_s = \frac{2}{5}mR^2$, középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva	
l hosszúságú vékony rúd	$\Theta = \frac{1}{3}ml^2$, a végponton átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva	
	$\Theta_S = \frac{1}{12}ml^2$, a rúdra merőleges, a középponton átmenő tengelyre vonatkoztatva	
	alkalmazva a Steiner-tételt $\Theta_A = \Theta_{tkp} + md^2$ és $t_A \parallel t_{tkp}$	

Hang terjedési sebessége levegőben, különböző hőmérsékleten

11. táblázat

t (°C)	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	t (°C)	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	t (°C)	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
−30	313	5	334,8	40	354,3
−25	316,2	10	337,8	45	347,2
−20	319,4	15	340,8	50	360,9
−15	322,6	20	343,7	55	363,7
−10	325,7	25	346,7	60	366
−5	328,7	30	349,6	65	369,2
0	331,8	35	352,4	70	371

Hang terjedési sebessége néhány gázban és gőzben
(0 °C hőmérsékleten, 101 325 Pa nyomáson)

12. táblázat

Gáz, gőz	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	Légnemű anyag	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
Argon (Ar)	308	Nitrogén (N_2)	334
Hélium (He)	971	Oxigén (O_2)	317
Hidrogén (H_2)	1286	Szén-dioxid (CO_2)	258
Metán (CH_4)	430	Vízgőz (H_2O)	405

Hang terjedési sebessége néhány szilárd anyagban longitudinális hullám esetén

13. táblázat

Anyag	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	Anyag	c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
Acél (20 °C)	6100	Téglafal	3600
Beton	4500	Kvarcüveg	5570
Jég (−4 °C)	3980	Vas	5850
Ebonit	2405	Parafa	3200

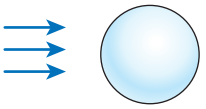
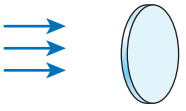
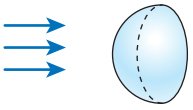
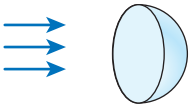
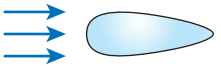
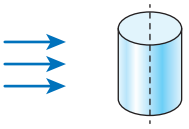
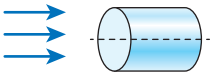
A hang terjedési sebessége vízben különböző hőmérsékleteken

14. táblázat

t (°C)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
c $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	1402,7	1447,6	1482,7	1509,4	1529,2	1542,9	1551,3	1555,1	1554,8	1550,8	1543,4

Áramlási ellenállási tényezők (formatényezők)

15. táblázat

	Gömb	0,45
	Körlemez	1,11
	Félgömbhéj (konvex)	0,34
	Félgömbhéj (konkáv)	1,33
	Csepp alak	0,05
	Henger (az áramlás merőleges a tengelyre)	0,68
	Henger (az áramlás párhuzamos a tengellyel)	0,85
	Hordfelület, szárny (Zsukovszkij-profil)	0,05–0,2

Felületi feszültségek (20 °C-on)

16. táblázat

Folyadék	σ $\left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}\right)$	Folyadék	σ $\left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}\right)$
Levegőkörnyezetben		Víz (0 °C-on)	0,0756
Etil-alkohol	0,0227	(20 °C-on)	0,0727
Benzin	0,022	(50 °C-on)	0,0679
Benzol	0,0285	(100 °C-on)	0,0588
Glicerin	0,0635		
Olívaolaj	0,3306	*Vízkörnyezetben*	
Higany (0 °C-on)	0,479	Benzol	0,035
(20 °C-on)	0,472	Dietil-éter	0,0107
Petróleum	0,0264	Higany	0,375
Terpentinolaj	0,0268	Szén-tetraklorid	0,0405

Folyékony és szilárd elemek sűrűsége (20 °C-on, 101 325 Pa nyomáson)

17. táblázat

Elem	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Elem	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Elem	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Alumínium	2 700	Kadmium	8 648	Ólom	11 342
Antimon	6 684	Kalcium	1 550	Ón	7 290
Arany	19 300	Kálium	870	Platina	21 370
Arzén	5 727	Kén (rombos)	2 070	Réz	8 930
Bizmut	9 747	Kén (monoklin)	1 960	Szelén	4 800
Bróm (Br_2)	3 120	Kobalt	8 900	Szén (gyémánt)	3 520
Cink	7 140	Króm	7 100	Szén (grafit)	2 250
Ezüst	10 500	Lítium	534	Szilícium	2 420
Foszfor (fehér)	1 830	Magnézium	1 740	Titán	4 510
Foszfor (vörös)	2 200	Mangán	7 420	Urán (13 °C)	18 700
Germánium	5 460	Nátrium	971	Vas	7 870
Higany	13 546	Nikkel	8 900	Volfrám	18 600…
Irídium	22 400	Nióbium	8 570		19 100

Folyékony anyagok sűrűsége (20 °C-on, 101 325 Pa nyomáson)

18. táblázat

Folyadék	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Folyadék	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Folyadék	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Aceton	792	Glicerin	1260	Víz (0 °C-on)	999,868
Etil-alkohol	789	Kénsav (96%-os)	1835	Víz (4 °C-on)	999,97
Metil-alkohol	793	Nitrobenzol	1205	Víz (20 °C-on)	998,23
Benzol	879	Salétromsav (65%-os)	1392	Víz (25 °C-on)	997,04
Ecetsav	1049			Nehézvíz (25 °C-on)	1104,47
Etil-acetát	901	Sósav (37%-os)	1190		
Dietil-éter	714	Szén-tetraklorid	1589		

A víz legnagyobb sűrűsége (101 325 Pa nyomáson):

$T = 3{,}98\ °C \quad \rho = 999{,}973\ \frac{kg}{m^3}$

Gázok sűrűsége normálállapotban (0 °C-on és 101 325 Pa nyomáson)

19. táblázat

Gáz	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Gáz	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	Gáz	Sűrűség $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Ammónia	0,771	Hélium	0,178	Neon	0,900
Argon	1,784	Hidrogén	0,090	Nitrogén	1,251
Acetilén	1,173	Hidrogén-klorid	1,639	Oxigén	1,429
N-bután	2,503	Kén-dioxid	2,858	Ózon	2,144
Deutérium	0,180	Kén-hidrogén	1,539	Propán	2,019
Dimetil-éter	2,109	Klór	3,214	Radon	9,730
Etán	1,356	Kripton	3,743	Szén-dioxid	1,977
Etilén	1,261	Levegő	1,293	Szén-monoxid	1,250
Fluor	1,695	Metán	0,717	Xenon	5,890

Néhány változó összetételű anyag körülbelüli sűrűsége
(101 325 Pa nyomáson)

20. táblázat

Anyag	Sűrűség $\rho\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	Anyag	Sűrűség $\rho\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$
Acél	7800–7850	Gumi (feldolgozva)	1000–2000
Agyag	1800–2600	Hó (friss)	130
Aszfalt	1100–1500	Homok (száraz)	1580–1650
Bakelit	1335	Homokkő	1900–2700
Bauxit	2600	Jég	917
Bazalt	2400–3100	Kámfor	990
Barnaszén	1200–1500	Kenőolaj	890–960
Benzin	680–740	Kerámiák	1600–3900
Beton	1800–2450	Korom	1700–1800
Borostyán	1100	Márvány	2600–2800
Cement	3100–3200	Mészkő	2000–2800
Cukor	1590	Papír	700–1150
Csillám	2600–3200	Parafa	220–260
Csont	1700–2000	Paraffin	800–900
Ebonit	1150–1500	Paraffinolaj	870–910
Emberi test	1010–1070	Petróleum	820
Étolaj	910–920	Plexiüveg	1180
Fa akác	480–700	Porcelán	2300–2500
balsa	110–140	Ricinusolaj	960–967
bambusz	310–400	Sárgaréz	8400–8600
bükk	700–900	Selyem	1560
cédrus	490–570	Szén	2500–2800
dió	640–700	Szürkeöntvény	7250
ébenfa	1110–1330	Tégla	1400–2200
fenyő	370–600	Tej	1028–1032
hárs	320–590	Tengervíz	1010–1050
nyárfa	350–500	Terpentinolaj	860
nyírfa	510–770	Transzformátorolaj	870
tölgy	600–900	Üveg (ablak)	2400–2670
Faszén fenyőből	280–440	Üveg (kvarc)	2200
tölgyfából	570	Üveg (ólom)	2600–4200
Flintüveg	3600–4700	Üveg (jénai)	2600
Föld (száraz)	1300–1600	Vasbeton	2400
Gránit	2640–2760	Zselatin	1270
Gumi (nyers)	900	Zsír (sertés)	934–938

Hőtani táblázatok

A telített vízgőz nyomása és sűrűsége; a víz sűrűsége és párolgáshője

21. táblázat

Hőmérséklet t (°C)	Telített vízgőz		Víz	
	sűrűsége ρ $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	nyomása p (kPa)	sűrűsége ρ $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	párolgáshője L_p $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right)$
0	0,0048	0,61129	999,84	2 500,5
5	0,0068	0,81359	999,93	2 488,8
10	0,0094	1,2281	999,70	2 477,0
15	0,0128	1,7056	999,13	2 465,3
20	0,0173	2,3388	998,23	2 453,6
25	0,0230	3,1690	997,07	2 442,3
30	0,0303	4,2455	995,65	2 430,1
35	0,0396	5,6267	994,05	2 417,9
40	0,0511	7,3814	992,22	2 406,3
45	0,0656	9,5898	990,24	2 394,1
50	0,0828	12,344	988,03	2 382,4
55	0,1043	15,752	985,73	2 370,3
60	0,1302	19,932	983,24	2 358,6
65	0,1611	25,022	980,59	2 345,9
70	0,1981	31,176	977,78	2 333,8
75	0,2418	38,563	974,89	2 321,3
80	0,2933	47,373	971,82	2 308,3
85	0,3534	57,815	968,65	2 295,3
90	0,4235	70,117	965,35	2 282,3
95	0,5045	84,529	961,92	2 269,3
100	0,5977	101,32	958,4	2 256,4
125	1,299	232,12	939,0	2 187,3
150	2,548	475,72	916,9	2 112,8
175	4,617	891,80	892,1	2 031,5
200	7,857	1 553,6	864,7	1 940,7
225	12,75	2 547,9	834,0	1 836,8
250	19,98	3 973,6	799,2	1 715,8
275	30,57	5 943,1	759,4	1 572,6
300	46,24	8 583,8	712,0	1 403,1
325	70,68	12 046	654,0	1 188,7
350	113,6	16 521	572,4	891,8
370	200,0	21 030	448,4	448,0
374,2	326,2	22 106	326,2	0

Szilárd anyagok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson)

22. táblázat

Anyag	Olvadáspont t (°C)	Olvadáshő L_o $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Forráspont t (°C)	Forráshő L_f $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Fajhő 25 °C-on c $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	Hővezetési tényező λ $\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$	Lineáris hőtágulási tényező t (°C)	Lineáris hőtágulási tényező α $\left(\cdot 10^{-6} \frac{1}{°C}\right)$
Alumínium	660	400,0	2467	9 210	900,16	220,98	0–200	24,5
							0–600	27,9
Antimon	631	163,3	1380	1 256	207,2	18,61	–	10,5
Arany	1064	66,2	2807	1 758	128,9	308,21	0–200	14,5
							0–1000	16,8
Cink	419,5	102,0	907	1 800	386,0	110,49	0–400	38,0
Ezüst	961,9	105,0	2212	2 177	235,29	418,70	0–200	19,8
							0–900	22,4
Kalcium	839	216,5	1434	4 187	648,95	125,61	–	–
Kálium	63,6	61,1	774	2 076	753,62	100,02	0–200	84,0
Kobalt	1495	266,3	2900	6 489	447,98	69,78	0–200	12,3
Króm	1857	316,5	2665	6 155	447,98	67,46	0–200	7,3
							0–700	9,4
Lítium	180,5	665,7	1347	18 912	3491,79	70,95	0–	58,0
Magnézium	650	344,2	1090	5 443	1025,76	157,01	0–200	24,5
Nátrium	97,8	115,0	883	4 345	1222,54	133,75	0–200	72,0
Nikkel	1455	301,9	2732	6 196	444,21	93,04	0–200	14,0
							0–800	16,1
Ólom	327,5	25,0	1740	860	127,69	34,89	0–300	31,3
Ón	231,9	60,7	2270	3 014	217,29	63,97	0–200	31,6
Platina	1772	101,0	3827	2 512	132,72	69,78	0–200	9,2
							0–1100	10,4
Réz	1083	213,0	2567	4 800	386,86	395,44	0–200	17,4
							0–1000	20,3
Titán	1660	322,5	3287	8 770	520	21,9	0–200	8,5
							0–700	10,4
Vas	1535	277,0	2750	6 300	450,08	75,60	0–100	12,2
							0–800	14,8
Volfrám	3387	184,0	5660	4 960	134,81	197,72	0–200	4,5
							0–2100	5,8
Arzén	613[1]	372,6[2]	–	1 574[3]	328,66	–	30	3,2
							75	6,8
Foszfor (fehér)	44	21,4	280	1 675	757,81	–	–	125,0
Kén	112,8	39,4	445	1 406	732,69	0,2675	–	90,0

[1] illanási (szublimálási) hőmérséklet
[2] 3 647 700 Pa nyomáson 817 °C-on megolvad
[3] illanási (szublimálási) hő

Megjegyzés: A változó összetételű anyagok adatai hozzávetőlegesek. A forráspont- és forráshőadatok folyadékállapotra vonatkoznak.

Anyag	Olvadáspont t (°C)	Olvadáshő L_o $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Forráspont t (°C)	Forráshő L_f $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Fajhő 25 °C-on c $\left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$	Hővezetési tényező λ $\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$	Lineáris hőtágulási tényező	
							t (°C)	α $\left(\cdot 10^{-6} \frac{1}{°C}\right)$
Szelén	217	64,5	685	1 088,6	321,12	–	–	66,0
Szén	3727	–	4830	50 244,0	690,86	–	–	–
Gyémánt	3540	–	4000	–	519,16	–	0–100	1,2
Grafit	3540	–	4000	–	711,75	10–150	0–100	7,9
Szilícium	1410	1656,4	2680	14 068,3	703,38	83,51	–	10,4
Acél összetételfüggő	1300–1500	83,7	2500		500,0	46,5–58,2	20	11
Rozsdamentes acél							20–700	12,8
Nyersvas összetételfüggő	1100–1200	96–140	2500		540	48,85	20–500 20–800	10,5 14,0
Bronz összetételfüggő	970–1070		2300		380	58,15	20–300	18,2
Sárgaréz összetételfüggő	890–1050	167,5	2300		380	93–117,3	20–100	17,8
Újezüst	1050	33,5			397	29,08		
Wood-fém	60–80	33,5			167	13,38		
Konstantán	1270				410	23,26	20–100	15,2
Invár						10,47	20–100	1,6
Porcelán	1600				750	0,814–1,861	20–700 0	3,4–4,1 2,5
Kvarcüveg					670	1,338	20–200	0,6
Ablaküveg					830	0,582–1,047	20–200	9,5
Beton					920	0,814–1,745	20	10–14
Tégla					750	1,4	20	3–9
Fa balsafa					2400	0,045	20	3–5[(1)]
tölgy						0,171		35–60[(2)]
paratölgy					2050	0,04		
Ebonit					1380		20	70
Viasz							10–25	230
Jég	0	332,0			2090,0	2,21	–10–0	50,7
Konyhasó	800	517,09	1413	2 847,2	920		–20–0	51

(1) hossziránya
(2) keresztirány

Folyadékok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson)

23/a táblázat

Anyag		Olvadáspont t (°C)	Olvadáshő L_o $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Forráspont t (°C)	Forráshő L_f $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$
Aceton	$(CH_3)_2CO$	−94,6	82,07	56,50	524,63
Benzin	–	(−130)–(−50)	–	40–220	230–310
Benzol	C_6H_6	5,5	127,28	80,09	395,67
Bróm	Br_2	−7,3	67,83	58,8	180,04
Dietil-éter	$(C_2H_5)_2O$	−116,0	98,39	34,6	355
Etil-alkohol	C_2H_5OH	−117,3	108,0	78,4	963,0
Gázolaj		−30	–	200–300	–
Glicerin	$C_3H_5(OH)_3$	17,9	199	290	1101,18
Higany	Hg	−38,86	12,0	356,6	290,0
Kénsav	H_2SO_4	10,5	108,86	338	552,68
Kloroform	$CHC1_3$	−63,7	74,95	61,1	247,03
Konyhasóoldat (20%)		−18	–	108,8	–
Metil-alkohol	CH_3OH	−97,8	83,74	64,7	1109,56
N-pentán	C_5H_{12}	−129,7	–	36,1	352,96
Petróleum		< −50	összetételfüggő	150–300	210–230
Salétromsav	HNO_3	−41,3	39,7	86	482
Sósav (20%)	HCl + aq	−14	–	110	–
Szén-diszulfid	CS_2	−111,8	74,11	46,2	364,27
Szén-tetraklorid	CCl_4	–22,6	17,59	76,8	192,60
Terpentinolaj		−10	–	160	290,00
Víz	H_20	0	332,0	100	2260
Nehézvíz	D_2O	3,82	317,79	101,42	2070
Tengervíz		−2,5	–	104	–

Megjegyzés: Az olvadáspont és olvadáshő szilárd állapotra vonatkoznak.

23/b táblázat

Anyag	Kritikus hőmérséklet t_{kr} (°C)	Kritikus nyomás p_{kr} (kPa)	Fajhő c $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$	Hővezetési tényező 18 °C-on $\lambda \left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$	Térfogati hőtágulási tényező 18 °C-on $\beta \left(10^{-3} \frac{1}{°C}\right)$
Aceton	235,5	4 762	2,160 (20 °C)	0,16 (25 °C)	1,43
Benzin	–	–	2,093	0,15	1,00
Benzol	288,9	4 924	1,741	0,139	1,24
Bróm	310,9	10 335	0,460 (20 °C)	–	1,11
Dietil-éter	192,6	3 607	2,34 (18 °C)	0,14	1,62
Etil-alkohol	243	6 383	2,51 (15–30 °C)	0,184	1,10
Gázolaj	–	–	–	0,151	–
Glicerin	240	10 002	2,43 (15–50 °C)	0,290	0,50
Higany	1460	105 519	0,14 (20 °C)	7,90	1,81
Kénsav	–	–	0,138 (0 °C)	0,465	0,55
Kloroform	263	4 833	0,942 (0 °C)	–	1,27
Konyhasóoldat (20%)	–	–	3,910 (0 °C)	0,593	0,44
Metil-alkohol	240	7 954	2,407 (0 °C)	–	1,19
N-pentán	196,6	3 374	2,269	0,139	1,62
Petróleum	–	–	2,21 (20 °C)	0,15	0,96
Salétromsav	–	–	1,72	0,535	1,24
Sósav (20%)	–	–	3,14	0,465	0,30
Szén-diszulfid	279	7 903	1,004 (0 °C)	–	1,19
Szén-tetraklorid	283	4 559	0,837 (0 °C)	–	1,23
Terpentinolaj	376	–	1,76 (20 °C)	0,104	1,00
Víz	374,1	22 119	4,22 (20 °C)	0,58	0,21[(1)]

[(1)] A víz térfogati hőtágulási együtthatója függ a hőmérséklettől.
$0\ °C \le t \le 4\ °C$ esetén $\beta < 0$
$t = 4\ °C$ esetén $\beta = 0$
$t > 4\ °C$ esetén $\beta > 0$

Megjegyzés: A kritikus adatok gázállapotra vonatkoznak.

Gázok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson)

24/a táblázat

Anyag		Fajhő (0 °C-on, 101 325 Pa nyomáson) c_p $\left(\frac{kJ}{kg \cdot K}\right)$	Hővezetési tényező (27 °C-on, 101 325 Pa nyomáson) λ $\left(\frac{mW}{m \cdot K}\right)$	Olvadáspont (101 325 Pa nyomáson) t (°C)	Olvadáshő L_o $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$
Ammónia	NH_3	2,089	24,4	−77,7	339,15
Argon	Ar	0,520	17,9	−189,2	29,31
Acetilén	C_2H_2	1,687	21,4	−81,5 nyomás alatt	–
N-bután	C_4H_{10}	–	16,4	−135	81,65
Etán	C_2H_6	1,752	21,3	−183,0	95,05
Fluor	F_2	–	–	−220	37,68
Hélium	He	5,20	156,7 ($p = 0$)	−272,2(1)	–
Hidrogén	H_2	14,41	230,4 ($p = 0$)	−259,3	58,62
Nehézhidrogén	D_2	14,487	128,96	−254,6	–
Hidrogén-klorid	HCl	0,799	19,5	−112	56,53
Kén-dioxid	SO_2	0,628	9,6	−75,3	116,82
Kén-hidrogén	H_2S	1,106	30	−85,6	69,50
Klór	Cl_2	0,477	–	−103	188,42
Kripton	Kr	0,248	9,5 ($p = 0$)	−156,6	19,68
Levegő		0,997	26,2	−220	–
Metán	CH_4	2,236	30	−182,6	58,20
Dimetil-éter	$(CH_3)_2O$	–	–	−138	–
Neon	Ne	1,030	49,8 ($p = 0$)	−248,67	–
Nitrogén	N_2	1,040	26,00	−210,0	25,75
Oxigén	O_2	0,916	26,30	−218,4	13,82
Ózon	O_3	0,816	–	−251	–
Propán	C_3H_8	1,550	18,00	−187,8	79,97
Szén-dioxid	CO_2	0,843	16,8	−56,3(2)	184,2
Szén-monoxid	CO	1,047	25,0 ($p = 0$)	−205	30,15
Vízgőz	H_2O	1,864	27,1	0,0	328,68
Xenon	Xe	0,158	5,5 ($p = 0$)	−111,9	17,59

(1) $26 \cdot 10^5$ Pa nyomáson
(2) 519 752 Pa nyomáson

Megjegyzés: Az olvadáspont és olvadáshő szilárd állapotra, a forráspont és forráshő folyadékállapotra vonatkozik.

24/b táblázat

Anyag	Térfogati hőtágulási tényező β $\left(\frac{1}{°C}\right)$	Forráspont (101 325 Pa nyomáson) t (°C)	Forráshő L_f $\left(\frac{kJ}{kg}\right)$	Kritikus hőmérséklet t_{kr} (°C)	Kritikus nyomás p_{kr} (MPa)
Ammónia	0,003 802	−33,4	339	132,4	11,39
Argon	0,003 642	−185,7	166,62	−122,5	4,86
Acetilén	–	−84	753,66	36,0	6,24
N-bután	–	−0,5	385,62	152,8	3,49
Etán	–	−88,5	486,11	32,2	4,96
Fluor	–	−188	159,11	−101	–
Hélium	0,003 66	−268,9	25,12	−267,9	0,23
Hidrogén	0,003 662	−252,9	460,57	−239,9	1,27
Nehézhidrogén	–	−249,7	314,03	–	–
Hidrogén-klorid	–	−85,0	448,00	51,4	8,43
Kén-dioxid	0,003 385	−10,0	389,81	157,5	7,88
Kén-hidrogén	–	−60,4	551,01	100,4	9,02
Klór	–	−35,0	260,85	144	7,70
Kripton	–	−152,3	116,82	−63,8	5,50
Levegő	0,003 675	−192	209,35	−140,7	3,75
Metán	–	−161,6	503,70	−82,1	4,64
Dimetil-éter	–	−23,7	468,94	127	5,30
Neon	–	−246,0	104,66	−228,7	2,72
Nitrogén	0,003 674	−195,8	199,30	−147,1	3,39
Oxigén	0,003 674	−182,9	213,12	−118,8	5,04
Ózon	–	−112	251,22	−12,1	5,53
Propán	–	−42,1	448,01	96,8	4,26
Szén-dioxid	0,003 726	−78	572,78	31,1	7,38
Szén-monoxid	0,003 367	−191,5	216,05	−140,2	3,49
Vízgőz	–	100	2256,37	374,2	22,13
Xenon	–	−108,2	96,3	16,6	5,89

Táblázatok elektromágnességből és optikából

Gázok relatív dielektromos állandója (101 325 Pa nyomáson)

25. táblázat

Gáz	Relatív dielektromos állandó ε_r	Gáz	Relatív dielektromos állandó ε_r
Hélium	1,000 07	Nitrogén (0 °C)	1,000 58
Hidrogén	1,000 27	Oxigén (0 °C)	1,000 53
Levegő	1,000 57	Szén-dioxid (0 °C)	1,000 99

Folyadékok fajlagos ellenállása és relatív dielektromos állandója (20 °C-on és 101 325 Pa nyomáson)

26. táblázat

Folyadék	Fajlagos ellenállás ρ ($\Omega \cdot m$)	Relatív dielektromos állandó ε_r
Aceton	$1{,}1 \cdot 10^7$	–
Dietil-éter	$4 \cdot 10^{13}$	4,22
Etil-alkohol	10^4–10^5	26
Glicerin (25 °C)	$6{,}4 \cdot 10^6$	42,4
Metil-alkohol	–	33,7
Petróleum	10^{10}	2
Terpentinolaj	$5 \cdot 10^{10}$	2,2–4,9
Transzformátorolaj	10^{14}–10^{16}	2,1–2,2
Víz (18 °C)	$4{,}44 \cdot 10^6$	78,3
Víz (34 °C)	$9{,}62 \cdot 10^6$	34,6
Tengervíz (20 °C)	0,3	–

Vezetőanyagok fajlagos ellenállása és hőfoktényezője (20 °C-on)

27. táblázat

Anyag neve	ρ ($\Omega \cdot m$)	α_{20} $\left(\frac{1}{°C}\right)$
Alumínium	$(2{,}8 \cdot 10^{-8})$–$(4 \cdot 10^{-8})$	0,0042
Ezüst	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,0041
Cink	$5{,}45 \cdot 10^{-8}$	0,0042
Higany	$9{,}58 \cdot 10^{-7}$	0,0009
Ólom	$2{,}1 \cdot 10^{-7}$	0,0037
Ón	$10{,}1 \cdot 10^{-8}$	0,0042
Réz (tiszta)	$1{,}695 \cdot 10^{-8}$	0,0043
Réz (vezetékanyag)	$1{,}78 \cdot 10^{-8}$	0,0039

27. táblázat folytatása

Anyag neve	ρ ($\Omega \cdot m$)	α_{20} $\left(\frac{1}{°C}\right)$
Szén	$(4 \cdot 10^{-5})$–$(1 \cdot 10^{-4})$	$(-3 \cdot 10^{-4})$–$(-9 \cdot 10^{-4})$
Nikkel (20 °C)	$6{,}84 \cdot 10^{-8}$	$6{,}8 \cdot 10^{-3}$
Öntöttvas	$(8{,}7 \cdot 10^{-7})$–$(1{,}6 \cdot 10^{-6})$	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$
Volfrám	$5{,}51 \cdot 10^{-8}$	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$
Acél (0,1…0,15‰)	$(1 \cdot 10^{-7})$–$(2{,}5 \cdot 10^{-7})$	$6 \cdot 10^{-3}$
Bronz	$1{,}8 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$
Kanthal	$(1{,}3 \cdot 10^{-6})$–$(1{,}4 \cdot 10^{-6})$	$(6 \cdot 10^{-5})$–$(9 \cdot 10^{-5})$
Konstantán	$(4{,}5 \cdot 10^{-7})$–$(5{,}2 \cdot 10^{-7})$	$(5 \cdot 10^{-6})$–$(25 \cdot 10^{-6})$
Krómnikkel (20 °C)	$(6{,}6 \cdot 10^{-7})$–$(7{,}3 \cdot 10^{-7})$	$(1 \cdot 10^{-4})$–$(2 \cdot 10^{-4})$
Manganin	$(4{,}7 \cdot 10^{-7})$–$(4{,}8 \cdot 10^{-7})$	$(5 \cdot 10^{-6})$–$(30 \cdot 10^{-6})$
Sárgaréz	$7{,}3 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$
Újezüst	$(3 \cdot 10^{-7})$–$(4 \cdot 10^{-7})$	$7 \cdot 10^{-4}$
Titán (20 °C)	$4{,}2 \cdot 10^{-7}$	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$

Szigetelőanyagok relatív dielektromos állandója (20 °C-on)

28. táblázat

Anyag neve	ε_r	Anyag neve	ε_r
Bakelit	4,5–8	Márvány	8–10
Borostyán	2,8	Paraffin	1,9–2,2
Celluloid	2,6–6	Papír (száraz)	2,0–2,5
Csillám	5–7,5	Plexiüveg	3–3,6
Ebonit	2,7–3	Porcelán	4,6–6,8
Gumi	2,5–5	PVC	3–5
Fa (száraz)	2,2–3,7	Sellak	3,6
Kerámia	–100	Üveg	5,3–11
Méhviasz	2,8–2,9		

Relatív permeabilitások

29. táblázat

Ferro- és paramágnesek	μ_r	Diamágnesek	μ_r
Vas (közepes érték)	2000	Alkohol	0,9999916
Kobalt (közepes érték)	170	Víz	0,999991
Nikkel (közepes érték)	270	Kén, antimon, réz, ólom	0,99999
Mangán, króm, cérium, palládium, erbium, szamárium	1,0004	Bróm, jód, arany, higany	0,99997
		Tallium	0,999942
Platina, molibdén, oxigén, levegő, urán	1,00000038	Bizmut	0,999824
		Volfrám	1,000176

Az elektromágneses spektrum tartományai

30. táblázat

Tartomány	Megnevezés	Hullámhossz	Frekvencia (Hz)	Alkalmazás
rádióhullámok		nagyobb, mint 10 cm	kisebb, mint $3 \cdot 10^9$	
	hosszúhullám	600 m – 10 km	$3 \cdot 10^4 – 5 \cdot 10^5$	Rádiós és televíziós földi műsorszórás
	középhullám	200–600 m	$5 \cdot 10^5 – 1{,}5 \cdot 10^6$	
	rövidhullám	10–200 m	$1{,}5 \cdot 10^6 – 3 \cdot 10^7$	
	URH	10 cm – 10 m	$3 \cdot 10^7 – 3 \cdot 10^9$	Technikai felhasználás
mikrohullám		0,6 mm – 1 m	$3 \cdot 10^8 – 5 \cdot 10^{11}$	
	GPS	19–24 cm	$1{,}227 \cdot 10^9 – 1{,}575 \cdot 10^9$	Helymeghatározás
	3G technológia	0,1–1 m	$3 \cdot 10^8 – 3 \cdot 10^9$	Multimédiás adatátvitel, mobiltelefonok, 3G hálózatok: 2100 MHz frekvenciasávokon
	Mikrohullámú sütő	12 cm	$2{,}45 \cdot 10^9$	Hőkezelés
	4G technológia	0,1–1 m	$3 \cdot 10^8 – 3 \cdot 10^9$	HD minőségű videótartalmak, mobiltelefonok, 4G hálózatok: 700 MHz, 1800 MHz, 2600 MHz frekvenciasávokon
	UHF radar	30 cm – 1 m	$3 \cdot 10^8 – 10^9$	Helymeghatározás
	Műholdas műsorszórás	2,5–3 cm	$10^{10} – 1{,}2 \cdot 10^{10}$	
	5G technológia	0,1–1 m	$3 \cdot 10^{10} – 3 \cdot 10^{11}$	Mobiltelefon (5G), műsorszórás, 5G több frekvenciasávot használ, radarok, mikrohullámú sütők
	Hertz-hullámok (szikratávíró)	1 mm – 6 cm	$5 \cdot 10^9 – 3 \cdot 10^{11}$	
infravörös fény		750 nm – 0,6 mm	$5 \cdot 10^{11} – 4 \cdot 10^{14}$	Orvosi terápia, hőképkészítés, technológiai hőkezelés, éjjellátó eszközök, távirányítók

30. táblázat folytatása

Tartomány	Megnevezés	Hullámhossz	Frekvencia (Hz)	Alkalmazás
látható fény	vörös	650–750 nm	$4 \cdot 10^{14} – 4{,}6 \cdot 10^{14}$	Emberi látás, képalkotás, optikai eszközök
	narancs	585–650 nm	$4{,}6 \cdot 10^{14} – 5{,}1 \cdot 10^{14}$	
	sárga	575–585 nm	$5{,}1 \cdot 10^{14} – 5{,}2 \cdot 10^{14}$	
	zöld	490–575 nm	$5{,}2 \cdot 10^{14} – 6{,}1 \cdot 10^{14}$	
	kék	420–490 nm	$6{,}1 \cdot 10^{14} – 7{,}1 \cdot 10^{14}$	
	ibolya	380–420 nm	$7{,}1 \cdot 10^{14} – 7{,}9 \cdot 10^{14}$	
ultraibolya fény		10 nm – 380 nm	$7{,}9 \cdot 10^{14} – 3 \cdot 10^{16}$	
	UV A	315–380 nm	$7{,}9 \cdot 10^{14} – 9{,}5 \cdot 10^{14}$	
	UV B	280–315 nm	$9{,}5 \cdot 10^{14} – 1{,}1 \cdot 10^{15}$	Orvosi terápia
	UV C	180–280 nm	$1{,}1 \cdot 10^{15} – 1{,}6 \cdot 10^{15}$	Sterilizálás
röntgensugárzás	RTG	0,01 nm – 10 nm	$3 \cdot 10^{16} – 3 \cdot 10^{19}$	Orvosi diagnosztika, orvosi terápia
gamma-sugárzás	gamma	0,01 pm – 0,1 nm	$3 \cdot 10^{18} – 3 \cdot 10^{22}$	Ipari anyagszerkezet-vizsgálat, ipari technológiai folyamatok, orvosi terápia
elektromágneses kozmikus sugárzás	kozmikus	kisebb, mint 0,01 pm	nagyobb, mint $3 \cdot 10^{22}$	Részecskefizikai vizsgálatok

A fékezési röntgensugár spektruma folytonos: $\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$

Néhány anyag 20 °C-os és 101 325 Pa nyomású levegőre vonatkoztatott törésmutatója, határszöge és diszperziója

31. táblázat

Anyag		Törésmutató n 589,3 nm Na_D	Határszög α_h Na_D	Diszperzió $n_{396{,}85\ nm} - n_{656{,}282\ nm}$
Benzol		1,501	41° 46′	0,03769
Glicerin		1,470	42° 47′	0,01638
Terpentin		1,470	42° 47′	0,02208
Víz		1,333	48° 31′	0,01233
Napraforgóolaj		1,470		
Jénai üvegek:	Bór-korona (BK–4)	1,530	41° 29′	0,01695
	Nehézkorona (SK–1)	1,564	38° 23′	0,02301
	Flint (F–1)	1,613	38° 19′	0,03213
	Nehézflint (SF–4)	1,739	34° 44′	0,06310
Jég (0 °C-on)	rendes sugár	1,309	49° 48′	0,0066
	rendellenes sugár	1,311	49° 42′	0,0067
Kvarckristály	rendes sugár	1,544	40° 21′	0,01624
	rendellenes sugár	1,553	40° 04′	0,01680

Atomfizikai és atommagfizikai táblázatok

Fémekre vonatkozó kilépési munka; határhullámhossz

32. táblázat

Rendszám	Vegyjel	Fém	Kilépési munka, W_{min}		Határhullámhossz, λ_{max}
			(aJ)	(eV)	(nm)
3	Li	lítium	0,47	2,90	427
4	Be	berillium	0,80	4,98	249
5	B	bór	0,72	4,41	281
11	Na	nátrium	0,39	2,45	506
12	Mg	magnézium	0,59	3,66	338
13	Al	alumínium	0,69	4,28	289
19	K	kálium	0,37	2,30	539
24	Cr	króm	0,73	4,50	275
25	Mn	mangán	0,66	4,10	302
26	Fe	vas	0,73	4,50	275
28	Ni	nikkel	0,84	5,15	241
29	Cu	réz	0,75	4,65	267
30	Zn	cink	0,70	4,33	286
31	Ga	gallium	0,38	4,20	295
37	Rb	rubídium	0,35	2,16	574
38	Sr	stroncium	0,42	2,59	479
46	Pd	palládium	0,83	5,12	242
47	Ag	ezüst	0,69	4,28	290
48	Cd	kadmium	0,68	4,22	294
55	Cs	cézium	0,35	2,14	579
56	Ba	bárium	0,44	2,70	459
73	Ta	tantál	0,69	4,25	292
74	W	volfrám	0,74	4,55	272
78	Pt	platina	0,92	5,65	219
79	Au	arany	0,83	5,10	243
80	Hg	higany	0,73	4,49	276
81	Tl	tallium	0,62	3,84	323
82	Pb	ólom	0,69	4,25	292
félvezető elemekre					
14	Si	szilícium	0,79	4,85	255
32	Ge	germánium	0,81	5,00	248
33	As	arzén	0,61	3,75	331
34	Se	szelén	0,96	5,90	210

1 aJ = 6,241 506 eV

1 eV = 0,160 2177 aJ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

Néhány atommag egy nukleonra jutó kötési energiája

33. táblázat

Atom	Vegy-jel	Rend-szám Z	Tömeg-szám A	Atom tömege m_{atom} (u)	Számított értékek			
					$\frac{\Delta m \cdot c^2}{A}$-ból		cseppmodellből	
					E		E	
					(pJ)	(MeV)	(pJ)	(MeV)
Deuteron	D	1	2	2,014	0,178	1,112		
Trícium	T	1	3	3,016	0,453	2,827		
Hélium	He	2	3	3,016	0,412	2,573		
Hélium	He	2	4	4,003	1,133	7,074		
Lítium	Li	3	6	6,015	0,854	5,333		
Lítium	Li	3	7	7,016	0,898	5,607		
Berillium	Be	4	9	9,012	1,035	6,461		
Bór	B	5	10	10,013	1,037	6,475		
Szén	C	6	12	12,000	1,230	7,680		
Nitrogén	N	7	14	14,003	1,198	7,476	1,178	7,351
Oxigén	O	8	16	15,995	1,278	7,976	1,214	7,579
Króm	Cr	24	52	51,941	1,406	8,776	1,408	8,785
Mangán	Mn	25	55	54,938	1,404	8,766	1,410	8,804
Vas	Fe	26	56	55,935	1,408	8,791	1,409	8,792
Kobalt	Co	27	59	58,933	1,405	8,768	1,411	8,810
Nikkel	Ni	28	58	57,935	1,399	8,733	1,395	8,707
Réz	Cu	29	63	62,930	1,402	8,752	1,411	8,805
Cink	Zn	30	64	63,929	1,400	8,736	1,406	8,775
Arany	Au	79	197	196,967	1,268	7,915	1,282	8,004
Higany	Hg	80	200	199,968	1,267	7,906	1,279	7,981
Ólom	Pb	82	208	207,977	1,260	7,867	1,269	7,919
Bizmut	Bi	83	209	208,980	1,257	7,848	1,268	7,914
Tórium	Th	90	232	232,038	1,220	7,615	1,240	7,741
Urán	U	92	234	234,041	1,218	7,600	1,238	7,729
Urán	U	92	235	235,044	1,216	7,591	1,237	7,722
Urán	U	92	238	238,051	1,213	7,570	1,233	7,697

Néhány, a gyakorlatban használt (vagy előforduló) radioaktív izotóp bomlásának neme, felezési ideje és a sugárzás maximális energiája

34. táblázat

Izotóp	Felezési idő $T_{\frac{1}{2}}$	A bomlás neme	A sugárzás maximális energiája (keV)	Alkalmazás
$^{3}_{1}H$	12,26 év	β^-	18,6	Légköri és óceáni áramlások nyomkövetése Élettudomány és gyógyszeranyagcsere tanulmányozása
$^{6}_{3}Li$	–	stabil	–	Nukleáris fúziós reakciókhoz használják (fúziós reaktorban, termonukleáris fegyverekben)
$^{10}_{5}B$	$1{,}38 \cdot 10^{19}$ év	α	718	Nukleáris reaktorokban neutronelnyelő anyagként Neutronterápia
$^{11}_{6}C$	20,34 min	β^+	970	Szervdiagnosztika PET-vizsgálattal(1)
$^{13}_{7}N$	9,96 perc	β^+ γ	 1022	Orvosi PET-vizsgálat (szövetek oxigénfelhasználása és véráramlás)
$^{14}_{6}C$(2)	5730 év	β^-	156	Régészeti leletek kormeghatározása Anyagcsere-diagnosztika cukorbetegnél és vérszegénységben Növényi fotoszintézis lépéseinek vizsgálata
$^{18}_{9}F$	110 perc	β^+	511	Szervdiagnosztika PET-vizsgálattal
$^{24}_{11}Na$	14,96 óra	β^- γ	1389 2754	Orvosi diagnosztika (vérkeringés, szívizom vérellátása, veseműködés)
$^{32}_{15}P$	14,28 nap	β^-	1710	Biológiai és genetikai kutatásokban
$^{40}_{19}K$(3)	1,248 milliárd év	β^- EB(4) 11% γ	1311 – 1460	Földtörténeti időszakok meghatározása
$^{60}_{27}Co$	5,263 év	β^- γ	314 1332	Sugárterápia, orvosi berendezések sterilizálása Ipar: hegesztési varratok ellenőrzése
$^{75}_{34}Se$		β^-	326	Fehérjék vizsgálata élettudományi kutatásokban
$^{85}_{36}Kr$	10,76 év	β^-	687	Légköri áramlások vizsgálata Gáztöltésű lámpákban, villamoskörök tesztelése
$^{85}_{38}Sr$	64 nap	β^-	514	Anyagcsere- és csontképződési diagnosztika
$^{89}_{38}Sr$	54 nap	β^-	1463	Sugárterápia (csontra)
$^{90}_{38}Sr$	27,7 év	β^-	546	Sugárterápia (belső szervekre)

(1) A pozitronemissziós tomográfia – PET – vizsgálatnál injekció formájában pozitronokat sugárzó izotópokat juttatnak a szervezetbe, és egy készülékkel felvételeket készítenek a sugárzás követésével.

(2) A kozmikus sugárzás hatására: $^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$. Ez a szén beépül a szervezetbe, és kormeghatározásra alkalmas. $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + \beta^-$

(3) A természetben is előfordul, kb. minden tizedik K-atom ilyen.

(4) EB = elektronbefogás

Izotóp	Felezési idő $T_{\frac{1}{2}}$	A bomlás neme	A sugárzás maximális energiája (keV)	Alkalmazás
$^{99m}_{43}Tc$	6,01 óra	γ	143	Mesterséges radioaktív izotóp Orvosi diagnosztikai képalkotó (csont, szívizom, vese, agy és egyéb szervek) és funkcióvizsgálati eljárások (véráramlás) Sugárterápia
$^{90}_{39}Y$	64 óra	β^-	2280	Sugárterápia (belső szervekre: pl. máj)
$^{111}_{49}In$	2,8 nap	γ	170 vagy 250	Antitestek és vérsejtek vizsgálata
$^{123}_{53}I$	13,2 óra	γ	159	Pajzsmirigy-diagnosztika
$^{125}_{53}I$	60 nap	γ	35	Melanomaterápia
$^{131}_{53}I$	8,1 nap	β^- γ	606 364	Pajzsmirigy-diagnosztika és sugárterápia
$^{137}_{55}Cs$	30,0 év	β^- γ	514 662	Ipari méréseknél, mezőgazdasági kutásoknál, élemiszer-tartósítás (sugárzással)
$^{177}_{71}Lu$	6,65 nap	β^-	497	Sugárterápia (prosztatarák, neuroendokrin daganatok, csontáttétek)
$^{192}_{77}Ir$	73,8 nap	γ	675	Belső sugárterápia (belső szervekre: pl. méhnyak)
$^{201}_{81}Tl$	73 óra	EB	167	Szívizomzat-, tumordiagnosztika
$^{210}_{84}Po$	138,38 nap	α	5407	Nukleáris fűtőelemek előállítása (űrszondákban) Statikus elektromosság csökkentése
$^{222}_{86}Rn$	3,82 nap	α	5590	Radioaktív nemesgáz Jelentős sugárterhelést okozhat földszinti lakásokban
$^{226}_{88}Ra$	1620 év	α	4784	Sugárterápia
$^{235}_{92}U$	703,8 millió év	α	4679	Nukleáris reaktorok üzemanyaga
$^{238}_{92}U$	4,468 milliárd év	α	4269	Földtani leletek (kőzetek, ásványok) kormeghatározása Nukleáris reaktorok üzemanyaga

Az anyagot összetartó kölcsönhatások jellemzői

35. táblázat

Kölcsönhatás	Erőátvivő elemi részecske (bozon)	Kölcsönható részecskék	A kölcsönhatás	
			relatív erőssége (arányuk)	hatótávolsága (m)
gravitációs	graviton(1)	mindegyik	10^{-39}	végtelen
gyenge	W^+, W^-, Z^0	mindegyik	10^{-5}	10^{-18}
elektromágneses	foton	minden, töltéssel vagy mágneses momentummal rendelkező	10^{-2}	végtelen
erős	8 gluon	hadronok	1	10^{-15}

(1) Kísérletileg még nem sikerült kimutatni létezését.

A standard modell részecskéi

Minden kvarknak és leptonnak létezik antirészecskéje, ezeket a táblázat nem tartalmazza.

A fermionok generációi

36. táblázat

Fermionok		Jelölés	Elektromos töltés(1)	Tömeg $\left(\frac{\text{GeV}}{c^2}\right)$
Első generáció				
kvarkok	up	u	+2/3	0,004
	down	d	−1/3	0,008
leptonok	elektron	e	−1	0,0005
	elektron-neutrínó	ν_e	0	> 0?(2)
Második generáció				
kvarkok	charm	c	+2/3	1,4
	strange	s	−1/3	0,1
leptonok	müon	μ	−1	0,01
	müon-neutrínó	ν_μ	0	> 0?(2)
Harmadik generáció				
kvarkok	top	t	+2/3	175
	bottom	b	−1/3	4,2
leptonok	tau	τ	−1	1,78
	tau-neutrínó	ν_τ	0	> 0?

(1) Elemi töltésegységben kifejezve.
(2) A legújabb mérési eredmények szerint legalább az egyik neutrínónak nagyon kicsi, de nullánál nagyobb a tömege. Ezzel együtt fellép a neutrínóoszcilláció jelensége.

Az erőhordozó bozonok tulajdonságai

37. táblázat

A bozon neve	A közvetített kölcsönhatás	Elektromos töltés[1]	Spin	Tömeg $\left(\frac{\text{GeV}}{c^2}\right)$
foton	elektromágneses	0	1	0
W^+	gyenge	+1	1	81
Z^0		0	1	92
W^-		−1	1	81
8 gluon	erős	0	1	0
graviton	gravitáció	0	2	0

[1] elemi töltésegységben kifejezve

A hadronok felépítése és tulajdonságai

38. táblázat

Hadronok		Kvark-összetétel	Elektromos töltés[1]	Spin	Tömeg $\left(\frac{\text{GeV}}{c^2}\right)$	Élettartam (s)
barionok	proton	uud	1	$\frac{1}{2}$	0,938	$> 5 \cdot 10^{32}$
	neutron	udd	0	$\frac{1}{2}$	0,940	900
	lambda	uds	0	$\frac{1}{2}$	1,116	$2{,}63 \cdot 10^{-10}$
	omega-mínusz	sss	−1	$\frac{3}{2}$	1,672	$8{,}2 \cdot 10^{-11}$
	delta	uuu	2	$\frac{3}{2}$	1,232	$\sim 6 \cdot 10^{-24}$
mezonok	pion$^+$	$u\bar{d}$	1	0	0,140	$2{,}60 \cdot 10^{-8}$
	pion^0	$\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	0	0	0,135	$8{,}4 \cdot 10^{-16}$
	kaon	$u\bar{s}$	1	0	0,494	$1{,}24 \cdot 10^{-8}$
	ró	$u\bar{d}$	1	1	0,770	$\sim 4{,}4 \cdot 10^{-24}$
	d-mezon	$u\bar{u}$	0	0	1,865	$4{,}3 \cdot 10^{-13}$
	b-mezon	$u\bar{b}$	1	0	5,271	$1{,}4 \cdot 10^{-12}$

A feles spinű hadronok a fermionok, az egész spinűek a bozonok családjába tartoznak.
[1] elemi töltésegységben kifejezve

Csillagászati táblázatok

A Nap adatai

39. táblázat

Valódi átmérője	$D_N = 1{,}392 \cdot 10^6$ km
Tömege	$m_N = 1{,}983 \cdot 10^{30}$ kg
Nehézségi gyorsulás a felszínen	$g_N = 274 \ \frac{m}{s^2}$
Felületi hőmérséklete kb.	$T_N = 6000$ K

A Föld adatai

40. táblázat

Egyenlítői sugara	$R_e = 6378{,}160$ km	A Nemzetközi Asztronómiai Unió (IAU) adatai
Sugara a pólusokon	$R_p = 6356{,}777$ km	
Közepes sugara $\left(\sqrt[3]{R_e^2 R_p}\right)$	$R_k = 6371{,}032$ km	
Nehézségi gyorsulása az Egyenlítőn	$g_e = 9{,}780\ 49 \ \frac{m}{s^2}$	
Nehézségi gyorsulá az Északi-sarkon	$g_é = \ 9{,}832 \ \frac{m}{s^2}$	
Tömege	$m_F = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg	
Közepes sűrűsége	$\rho_F = 5518 \ \frac{kg}{m^3}$	
Átlagos keringési sebessége a Nap körül	$v = 29{,}765 \ \frac{km}{s}$	
Életkora	$4{,}5–4{,}6 \cdot 10^9$ év	
Föld–Hold közepes távolság	384 404 km	
Föld–Nap közepes távolság	$149{,}6 \cdot 10^6$ km	

A Hold adatai

41. táblázat

Közepes látszólagos átmérője	$31' \ 5''$
Valóságos átmérője	$D_H = 3476$ km
Tömege	$m_H = 7{,}347 \cdot 10^{22}$ kg
Közepes sűrűsége	$\rho_H = 3340 \ \frac{kg}{m^3}$
Nehézségi gyorsulása a felületén	$g_H = 1{,}6193 \ \frac{m}{s^2}$
Felületének hőmérséklete	
a nappali oldalon	130 °C
az éjjeli oldalon	−150 °C
Szinódikus keringési ideje	$T_H = 29{,}53059$ nap
Sziderikus keringés ideje	27,321661 nap

A Naprendszer bolygói

42. táblázat

Adatok	Merkúr	Vénusz	Föld	Mars	Jupiter	Szaturnusz	Uránusz	Neptunusz
Közepes naptávolság (millió km)	58	108	149,6	228	778,3	1428	2872	4498
Közepes naptávolság AU (csill. egység)	0,3871	0,7233	1	1,524	5,203	9,539	19,191	30,06
Keringési periódus	88 nap	224,7 nap	365,26 nap	687 nap	11,863 év	29,458 év	84,022 év	164,771 év
Tengely körüli forgás periódusa	59 nap	–243 nap retrográd	23 óra 56 perc 4 s	24 óra 37 perc 23 s	9 óra 50 perc 30 s	10 óra 39 perc	15 óra	16 óra 6 perc 36 s
Forgástengely hajlásszöge a pályanormálishoz	1°	2° 42′	23° 27′	23° 59′	3° 05′	26° 44′	82° 05′	28° 48′
Pályasík hajlásszöge az ekliptikához	7°	3,4°	0°	1,9°	1,3°	2,5°	0,8°	1,8°
Egyenlítői átmérő (km)	4840	12 400	12 756	6760	142 700	120 800	52 000	48 400
Tömeg (földtömeg = 1)	0,055	0,815	1	0,108	317,9	95,2	14,6	17,2
Sűrűség (g/cm^3)	5,44	5,22	5,52	3,95	1,34	0,71	1,41	1,58
Felszíni gravitációs gyorsulás (Föld = 1)	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	0,79	1,12
Szökési sebesség (km/s)	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,22	23,6
Légkör (legfontosabb összetevők)	H, He[1]	CO_2 N_2	N_2, O_2, vízpára	CO_2, N_2	H_2, He, CH_4, NH_3	H_2, He, CH_4, NH_3	H_2, He, CH_4	H_2, He, CH_4
Átlagos felszíni hőmérséklet (K)	440	730	288	218	165[2]	140[2]	76[2]	72[2]

[1] Napszélből származó légkör.

[2] Az értékek a légkör $10^5 \frac{N}{m^2}$ nyomású szintjére vonatkoznak, mivel az óriásbolygóknak nincsen szilárd felszíne.

A legfényesebb csillagok

43. táblázat

A csillag neve	Távolsága a Földtől (fényév)	Látszólagos fényesség (m – magnitudó)	Abszolút fényesség (M – magnitudó)	Felszíni hőmérséklete (K)	Átmérője a Naphoz viszonyítva	Tömege a Naphoz viszonyítva
Nap	0,000016	–26,74	4,83	5 772	1	1
Proxima Centauri	4,25	10,77	15,60	2 990	0,154	0,122
Sarkcsillag	430	1,98	–3,6	6 015	37,5	5,4
Sirius A	8,6	–1,46	1,43	9 940	1,711	2,06
Arcturus	36,7	–0,05	–0,30	4 290	25,4	1,08
Vega	25	0,03	0,58	9 600	2,58	2,14
Capella	43	0,08	–0,48	5 730	–	5,03
Rigel	860	0,13	–7,84	12 100	79	21
Procyon	11	0,34	2,66	6 530	2,05	1,50
Betelgeuze	640	0,50	–5,85	3 700	800	17
Altair	17	0,76	2,22	7 740	1,79	1,86
Aldebaran	65,3	0,86	–0,64	3 900	45,1	1,16
Deneb	2 600	1,25	–8,38	8 525	203	19

Megjegyzés: A Föld távolsága a Naptól 499 fénymásodperc, a Hold távolsága a Földtől 1,3 fénymásodperc.

A leggyakoribb kémiai elemek előfordulása az univerzumban

44. táblázat

Elem	Rendszám	Tömegszám	Tömeg%
Hidrogén	1	1	73,4
Hélium	2	4	24,8
Oxigén	8	16	0,73
Szén	6	12	0,29
Vas	26	56	0,16
Neon	10	20	0,12
Nitrogén	7	14	0,10
Szilícium	14	28	0,07
Magnézium	12	24	0,05
Kén	16	32	0,04
Argon	18	40	0,02
Az összes többi elem			0,2

Kémia

A kémiában használatos mértékegységek és fizikai állandók

A kémiában használatos SI[(1)]-alap- és külön nevű, származtatott egységek

SI-alapegységek

1. táblázat

Az alapmennyiség		Az alapmértékegység	
neve	**jele**	**neve**	**jele**
Hosszúság	l	méter	m
Tömeg	m	kilogramm	kg
Idő	t	másodperc	s
Áramerősség (elektromos)	I	amper	A
Termodinamikai hőmérséklet	T	kelvin	K
Fényerősség	I_v	kandela	cd
Anyagmennyiség	n	mól	mol

A kémiában használatos SI-alapegységek definíciói

A **méter** annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban 1/299 792 458 másodperc alatt tesz meg.[(2)]

A **kilogramm** az 1889. évben Párizsban megtartott Első Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sèvres-ben őrzött platina-irídium henger tömege.

A **másodperc** az alapállapotú ^{133}Cs-atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.

Az **amper** olyan állandó elektromos áram erőssége, amely két párhuzamos egyenes, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör keresztmetszetű és vákuumban egymástól 1 méter távolságban levő vezetőben áramolva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hoz létre.

A **kelvin** a víz hármaspontja,[(3)] termodinamikai hőmérsékletének 1/273,16-szorosa.

(1) SI = Systeme International d'Unites

(2) A méter új definíciójára azért volt szükség, mert a régi pontossága már nem volt kielégítő. Az 1976-os mérésügyi rendelet még a régi definíciót tartalmazta. Eszerint a méter a ^{86}Kr-atom $2p^{10}$ és $5d^5$ energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő vákuumban terjedő sugárzás hullámhosszúságának 1 650 763,73-szorosa.

(3) Hármaspont: ahol a víz három fázisa termodinamikai egyensúlyban van.

A **kandela** az olyan fényforrás sugárerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ Hz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki, és erőssége ebben az irányban 1/683 watt per szteradián.(4)

A **mól** annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0,012 kilogramm ^{12}C-ben. Egy mól pontosan $6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ elemi egységet tartalmaz.

(4) Az általános Súly- és Mértékügyi Konferencia 1979 októberében határozta meg a kandela új definícióját. A szteradián (sr) a gömbsugár négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozó középponti térszög. ($\Omega = \frac{A}{r^2}$, a teljes gömbfelület térszöge: $\Omega = 4\pi$ sr $\approx 12{,}3663$ sr).

Az SI-alapmértékegységekből származtatott mértékegységek

2. táblázat

A származtatott mennyiség		A származtatott mértékegység		
neve	**jele**	**neve**	**jele**	**kifejezése a szokásos egységekkel**
Nyomás	p	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Munka, energia, hőmennyiség	W, E, Q	joule	J	$N \cdot m$
Elektromos töltés	Q	coulomb	C	$A \cdot s$
Elektromos feszültség	U	volt	V	$W \cdot A^{-1}$
Ellenállás (elektromos)	R	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$

A kémiában használatos nem SI-mértékegységek

A nemzetközi mértékegységrendszeren kívüli, korlátozás nélkül használható mértékegységek

3. táblázat

A mennyiség neve	A mértékegység		
	neve	**jele**	**kifejezése SI-egységekkel**
Térfogat	liter	l	$1\ l = 10^{-3}\ m^3$(1)
Tömeg	tonna	t	1 t = 1000 kg
Idő	perc	min	1 min = 60 s
	óra	h	1 h = 3600 s
	nap	d	1 d = 86 400 s
Hőmérséklet	Celsius-fok	°C(2)	1 °C = 1 K

(1) A liter szó a dm^3 névváltozata. A litert nem helyes nagy pontosságú eredmények kifejezésére használni.

(2) A Celsius-fokban mért t hőmérsékletet a $t = T - T_0$, definiálja, ahol $T_0 = 273{,}15$ K. A fok jele (°) és az utána következő C betű egyetlen szimbólumot alkot (tehát betűhely nincs közöttük, például 25 °C (nem 25° C).
A ° jel önmagában nem használható, mert a síkszög mértékegységének a jele.

A nemzetközi mértékegységrendszeren kívüli, kizárólag meghatározott területen használható törvényes mértékegységek

4. táblázat

A mennyiség neve	A mértékegység		
	neve	jele	kifejezése SI-egységekkel
Nyomás folyadékokra és gázokra	bar	bar	1 bar = 10^5 Pa
Energia atomfizikában	elektronvolt	eV	1 eV = 1,6021892 · 10^{-19} J

Néhány nem törvényes mértékegység átszámítása SI-egységre

5. táblázat

A mennyiség neve	A nem törvényes mértékegység			
	neve	jele	kifejezése SI-egységgel	helyett javasolt hasonló nagyságrendű használható egység
Hosszúság	angström	Å	1 Å = 10^{-10} m	nm, pm
	mikron	μ	1 μ = 10^{-6} m	μm
Tömeg	mázsa	q	1 q = 10^2 kg	kg, t
Erő	dyn	dyn	1 dyn = 10^{-5} N	mN, μN
	kilopond	kp	1 kp = 9,806 65 N	N
Nyomás	atmoszféra	atm	1 atm = 101 325 Pa	bar, kPa, MPa
	torr	torr*	1 torr = 101 325 / 760 Pa	Pa, mbar
	higanyoszlop-milliméter	mmHg*	1 mmHg = 133,322 Pa	Pa, mbar
	vízoszlop-milliméter	mmH_2O	1 mmH_2O = 9,806 65 Pa	Pa, mbar
Energia	kalória	cal	1 cal = 4,1868 J	J
	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J	J
Dinamikai viszkozitás	poise	P	1 P = 10^{-1} Pa · s	Pa · s

* 1 torr = 1 mmHg

A kémiában használatos fizikai állandók

6. táblázat

Neve	Jele	Számértéke és mértékegysége
Atomi tömegegység	m_u	1,660 56 · 10^{-27} kg
Avogadro-állandó	N_A	6,022 045 · 10^{23} mol^{-1}
Elektromos töltésegység (az elektron töltése)	e	1,602 18 · 10^{-19} C
Elektron tömege	m_e	9,1095 · 10^{-31} kg
Proton tömege	m_p	1,672 52 · 10^{-27} kg
Neutron tömege	m_n	1,674 82 · 10^{-27} kg
Faraday-állandó ($F = N_A \cdot e$)	F	9,6487 · 10^4 C · mol^{-1}
Moláris gázállandó	R	8,3144 J · K^{-1} · mol^{-1}
Gáz moláris térfogata (ideális gáz) $\left(V_m = \frac{RT}{p_0}, \quad T = 273{,}15\ \text{K}, \quad p_0 = 101\,325\ \text{Pa}\right)$	V_m	22,4136 dm^3 · mol^{-1}
Gáz standard moláris térfogata (T = 298 K, p_0 = 101 325 Pa)	V_0	24,465 dm^3 · mol^{-1}

Az atomok és jellemző adataik

Az elemi részecskék és jellemző adataik

Az elemi részecskék tömege és töltése

7. táblázat

Az elemi részecske					
neve	**jele**	**valódi tömege**	**relatív tömege**	**valódi töltése**	**relatív töltése**
Proton	p^+	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg*	1	$+1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C	+1
Neutron	n^0	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg*	1	0	0
Elektron	e^-	$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ kg	$1/1840 \approx 0{,}0005$	$-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C	−1

* kerekített értékek

Elemi részecskék: az atomot felépítő részecskék.
Atom: atommagból és elektronokból felépülő semleges részecske, az atomban lévő protonok és elektronok száma megegyezik.
Atommag: proton(ok) és neutron(ok) alkotják (kivétel a ^1_1H hidrogénatom, amelynek atommagja csak egy protonból áll).
Magerők: Az atommagban a protonokat és neutronokat összetartó erők. Nagyon erősek, kis hatótávolságúak, töltésfüggetlenek. (Az atommagok stabilitása a magerők vonzó és a protonok egymás közötti elektrosztatikus taszító hatásának eredménye.)
Magtöltés: az atommagban lévő protonok össztöltése.
***Rendszám* (Z):** Az atommagban lévő protonok száma. (Megmutatja az adott elem helyét a periódusos rendszerben.)
Tömegszám (A): Az atommagban lévő protonok és neutronok számának összege. A = Z + N, mivel az elektronok tömege a protonok és neutronok tömegéhez képest igen kicsi, az atom tömegét a tömegszám határozza meg.
Nuklidok: az azonos proton- és tömegszámú atomok.
Izotópok: Azonos protonszámú (rendszámú), de eltérő tömegszámú (neutronszámú) atomok (izotópnuklidok). (Az elnevezés a periódusos rendszerben elfoglalt azonos helyükből származik.)
Az atom jelölése: vegyjellel, tömegszámmal, rendszámmal, például:
$^{35}_{17}Cl$ [A(Cl) = 35,0; Z(Cl) = 17]; $^{23}_{11}Na$ [A(Na) = 23,0; Z(Na) = 11].
Relatív atomtömeg: Viszonyszám, amely megmutatja, hogy az adott elem egy atomja (nuklidja) hányszor nagyobb tömegű a ^{12}C-izotópatom tömegének 1/12-részénél.
Jele: A_r, mértékegysége 1. Pl.: $A_r(Cl) = 35{,}5$.
(A periódusos rendszerből kiolvasható relatív atomtömeg az adott elem különböző izotópnuklidjainak a természetes izotóparány szerinti átlagos, relatív tömege, ezért nem egész szám.)
Relatív molekulatömeg: A relatív atomtömegből számolható az összegképlet alapján. Pl.: $M_r(NaCl) = 23 + 35{,}5 = 58{,}5$

Az atomok elektronszerkezete

Az atomban levő elektronok energiája időben állandó.

Az elektronállapot jellemzői:

- az összenergia ($E_{össz} = E_{mozgási} + E_{helyzeti}$ = konstans)
- a térbeli felépítés (szimmetria)
- töltéseloszlás: *s*, *p*, *d*, *f* állapotok

A kvantummechanikai atommodell (*Schrödinger* és *Heisenberg*):

- az elektronnak az atommag körüli egy-egy ponton vagy térrészben csak a tartózkodási valószínűségét lehet megadni

Az atompálya: az atomban levő, az atommag körüli azon térrész, amelyen belül az elektron 90%-os valószínűséggel tartózkodik.

A kvantumszámok: az atompályák, illetve az atomban kötött elektron jellemzésére szolgáló adatok.

Főkvantumszám: A pálya nagyságára és energiájára vonatkozó adat. Jele: *n*, értéke $n = 1, 2, 3\ldots$ egész számok.

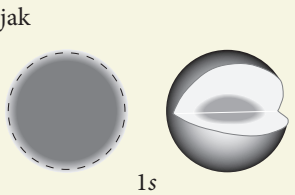
Héj: Azonos főkvantumszámú pályák alkotják. Jelölésük: K, L, M… a pályaméret növekvő sorrendjében.

Mellékkvantumszám: A pálya alakjára (szimmetriájára) és energiájára vonatkozó adat. Jele: *l*, értéke: $l = 0, 1, 2\ldots n - 1$. A mellékkvantumszám értéke megegyezik az atompálya csomósíkjainak a számával.

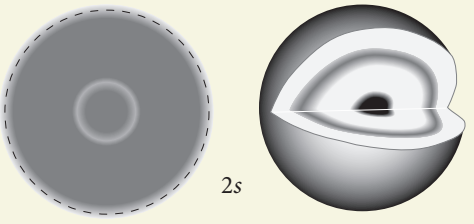
– Csomósík: az a sík, amelyen az elektron tartózkodási valószínűsége 0.

Alhéjak: Egy atomban az adott főkvantumszámhoz tartozó azonos mellékkvantumszámú pályák alkotják. Jelölésük a mellékkvantumszám növekvő sorrendjében: *s*, *p*, *d*, *f*.

s-alhéjak

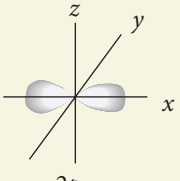


1*s*

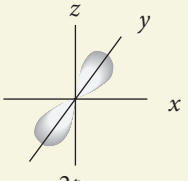


2*s*

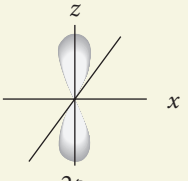
p-alhéjak



$2p_x$

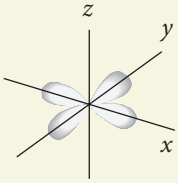


$2p_y$

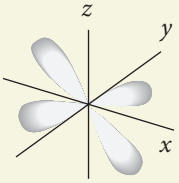


$2p_z$

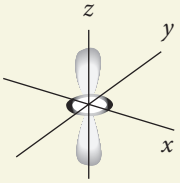
d-alhéjak



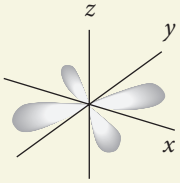
$d_{x^2-y^2}$



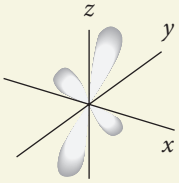
d_{xz}



d_{z2}



d_{xy}



d_{yz}

Mágneses kvantumszám: Az atompálya mágneses térben való viselkedésére utaló adat. Jele: m, értéke $m = -l, (-l + 1), \ldots (l - 1), l$.

Spinkvantumszám: Az elektron mágneses sajátságára vonatkozik. Értéke: +1/2 vagy −1/2.

Alapállapotú atom: a lehető legkisebb energiájú atom, amelyben az elektronok a lehetőség szerint a legközelebb helyezkednek el az atommaghoz.

Gerjesztett atom: energiabefektetés hatására az atom néhány elektronja magasabb energiaszintre kerül (távolabb kerül az atommagtól, mint alapállapotban volt).

Az atomok elektroneloszlása, Pauli-elv, Hund-szabály

Az elektronállapotok betöltődési szabályai:

Az energiaminimumra törekvés elve: az elektronok mindig a lehető legalacsonyabb energiaszintű pályákon helyezkednek el.

Pauli-elv: Nem lehet két olyan elektron az atomban, amelynek mind a négy kvantumszáma megegyezik. Az egyes héjakon, alhéjakon, pályákon tartózkodó elektronok számát maximálja.

A kvantumszámok és az elektroneloszlás kapcsolata

8. táblázat

Főkvantumszám	Héj	Mellékkvantumszám	Alhéj	Mágneses kvantumszám	Az atompályák száma	Az elektronok maximális száma	
$n = 1$	K	$l = 0$	1*s*	0	1	2	2
$n = 2$	L	$l = 0$	2*s*	0	1	2	8
		$l = 1$	2*p*	−1, 0, +1	3	6	
$n = 3$	M	$l = 0$	3*s*	0	1	2	18
		$l = 1$	3*p*	−1, 0, +1	3	6	
		$l = 2$	3*d*	−2, −1, 0, +1, +2	5	10	
$n = 4$	N	$l = 0$	4*s*	0	1	2	32
		$l = 1$	4*p*	−1, 0, +1	3	6	
		$l = 2$	4*d*	−2, −1, 0, +1, +2	5	10	
		$l = 3$	4*f*	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3	7	14	

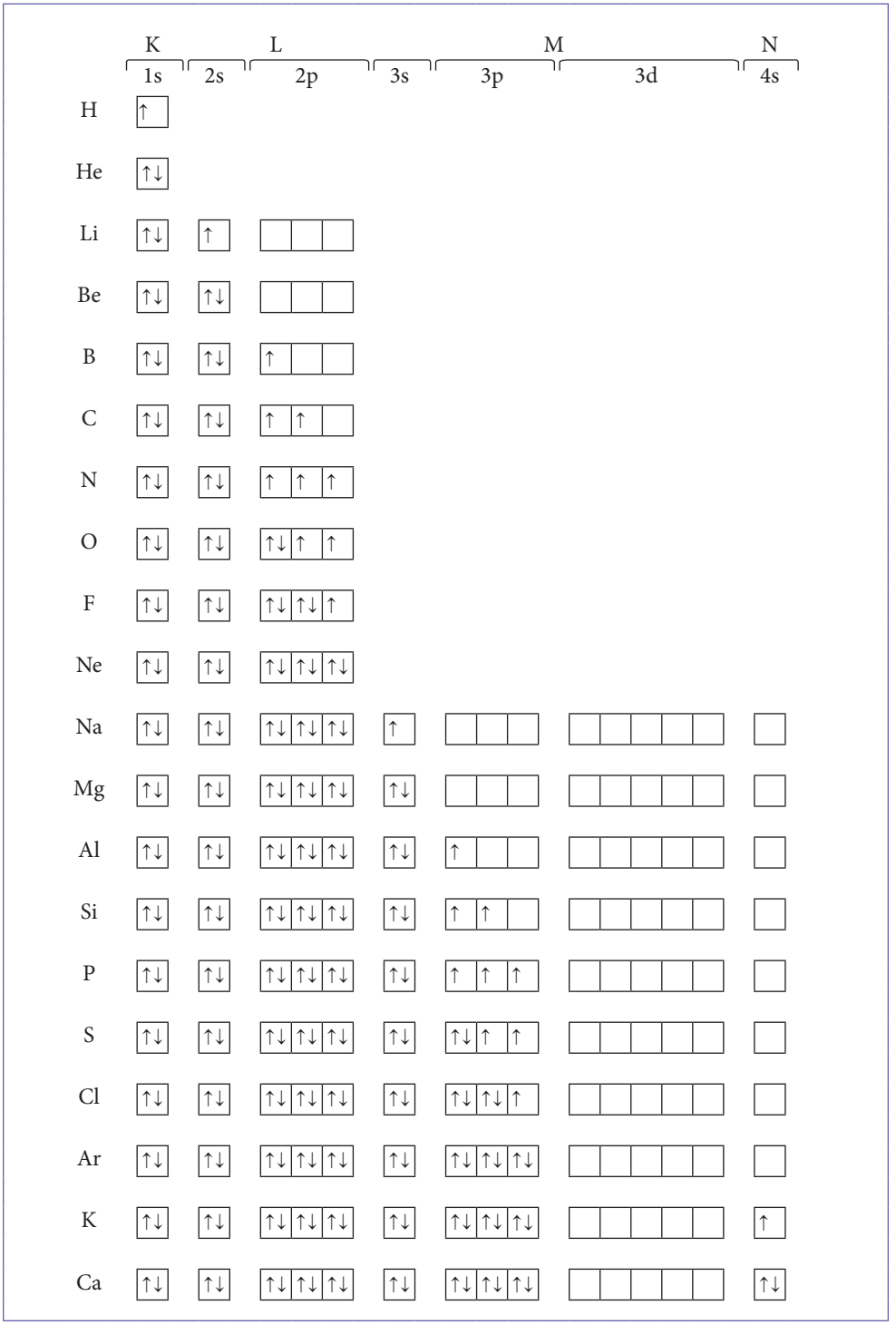
Atomtörzs: az atommagból és azokból az elektronokból áll, amelyek nem tekinthetők vegyértékelektronoknak.

Pályaenergia: Az az energia, amely akkor szabadul fel, ha az elektron a magtól végtelen távolságból az adott atompályára lép. Mértékegysége: $\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$, értéke negatív (a definícióból következőleg).

Hund-szabály: Az atomok alapállapotában valamely alhéjon adott számú elektron úgy helyezkedik el, hogy minél több legyen a párosítatlan elektron (azonos spinkvantumszám).

Az első 20 elem alapállapotú atomjának elektronkonfigurációja cellás ábrázolással

9. táblázat



Az elemek alapállapotú atomjainak elektroneloszlása az atomtörzs feltüntetésével*

10. táblázat

Rend-szám	Vegyjel	Elektroneloszlás	Rend-szám	Vegyjel	Elektroneloszlás
1	H	$1s^1$	34	Se	[Ar] $3d^{10}4s^24p^4$
2	He	$1s^2$	35	Br	[Ar] $3d^{10}4s^24p^5$
3	Li	[He] $2s^1$	36	Kr	[Ar] $3d^{10}4s^24p^6$
4	Be	[He] $2s^2$	37	Rb	[Kr] $5s^1$
5	B	[He] $2s^22p^1$	38	Sr	[Kr] $5s^2$
6	C	[He] $2s^22p^2$	39	Y	[Kr] $4d^15s^2$
7	N	[He] $2s^22p^3$	40	Zr	[Kr] $4d^25s^2$
8	O	[He] $2s^22p^4$	41	Nb	[Kr] $4d^45s^1$
9	F	[He] $2s^22p^5$	42	Mo	[Kr] $4d^55s^1$
10	Ne	[He] $2s^22p^6$	43	Tc	[Kr] $4d^55s^2$
11	Na	[Ne] $3s^1$	44	Ru	[Kr] $4d^75s^1$
12	Mg	[Ne] $3s^2$	45	Rh	[Kr] $4d^85s^1$
13	Al	[Ne] $3s^23p^1$	46	Pd	[Kr] $4d^{10}$
14	Si	[Ne] $3s^23p^2$	47	Ag	[Kr] $4d^{10}5s^1$
15	P	[Ne] $3s^23p^3$	48	Cd	[Kr] $4d^{10}5s^2$
16	S	[Ne] $3s^23p^4$	49	In	[Kr] $4d^{10}5s^25p^1$
17	Cl	[Ne] $3s^23p^5$	50	Sn	[Kr] $4d^{10}5s^25p^2$
18	Ar	[Ne] $3s^23p^6$	51	Sb	[Kr] $4d^{10}5s^25p^3$
19	K	[Ar] $4s^1$	52	Te	[Kr] $4d^{10}5s^25p^4$
20	Ca	[Ar] $4s^2$	53	I	[Kr] $4d^{10}5s^25p^5$
21	Sc	[Ar] $3d^1s^2$	54	Xe	[Kr] $4d^{10}5s^2p^6$
22	Ti	[Ar] $3d^24s^2$	55	Cs	[Xe] $6s^1$
23	V	[Ar] $3d^34s^2$	56	Ba	[Xe] $6s^2$
24	Cr	[Ar] $3d^54s^1$	57	La	[Xe] $5d^16s^2$
25	Mn	[Ar] $3d^54s^2$	58	Ce	[Xe] $4f^15d^16s^2$
26	Fe	[Ar] $3d^64s^2$	59	Pr	[Xe] $4f^36s^2$
27	Co	[Ar] $3d^74s^2$	60	Nd	[Xe] $4f^46s^2$
28	Ni	[Ar] $3d^84s^2$	61	Pm	[Xe] $4f^56s^2$
29	Cu	[Ar] $3d^{10}4s^1$	62	Sm	[Xe] $4f^66s^2$
30	Zn	[Ar] $3d^{10}4s^2$	63	Eu	[Xe] $4f^76s^2$
31	Ga	[Ar] $3d^{10}4s^24p^1$	64	Gd	[Xe] $4f^75d^16s^2$
32	Ge	[Ar] $3d^{10}4s^24p^2$	65	Tb	[Xe] $4f^96s^2$
33	As	[Ar] $3d^{10}4s^24p^3$	66	Dy	[Xe] $4f^{10}6s^2$

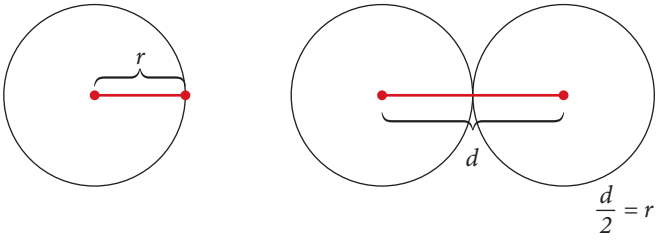
10. táblázat folytatása

Rend-szám	Vegyjel	Elektroneloszlás	Rend-szám	Vegyjel	Elektroneloszlás
67	Ho	[Xe] $4f^{11}6s^2$	89	Ac	[Rn] $6d^17s^2$
68	Er	[Xe] $4f^{12}6s^2$	90	Th	[Rn] $6d^27s^2$
69	Tm	[Xe] $4f^{13}6s^2$	91	Pa	[Rn] ($5f^26d^17s^2$)
70	Yb	[Xe] $4f^{14}6s^2$	92	U	[Rn] ($5f^36d^17s^2$)
71	Lu	[Xe] $4f^{14}5d^16s^2$	93	Np	[Rn] ($5f^46d^17s^2$)
72	Hf	[Xe] $4f^{14}5d^26s^2$	94	Pu	[Rn] $5f^67s^2$
73	Ta	[Xe] $4f^{14}5d^36s^2$	95	Am	[Rn] $5f^77s^2$
74	W	[Xe] $4f^{14}5d^46s^2$	96	Cm	[Rn] $5f^76d^17s^2$
75	Re	[Xe] $4f^{14}5d^56s^2$	97	Bk	[Rn] $5f^97s^2$
76	Os	[Xe] $4f^{14}5d^66s^2$	98	Cf	[Rn] $5f^{10}7s^2$
77	Ir	[Xe] $4f^{14}5d^76s^2$	99	Es	[Rn] $5f^{11}7s^2$
78	Pt	[Xe] $4f^{14}5d^96s^1$	100	Fm	[Rn] $5f^{12}7s^2$
79	Au	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^1$	101	Md	[Rn] $5f^{13}7s^2$
80	Hg	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^2$	102	No	[Rn] $5f^{14}7s^2$
81	Tl	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^26p^1$	103	Lr	[Rn] $5f^{14}6d^17s^2$
82	Pb	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^26p^2$	104	Rf	[Rn] $5f^{14}6d^27s^2$
83	Bi	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^26p^3$	105	Db	[Rn] $5f^{14}6d^37s^2$
84	Po	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^26p^4$	106	Sg	[Rn] $5f^{14}6d^47s^2$
85	At	[Xe] ($4f^{14}5d^{10}6s^26p^5$)	107	Bn	[Rn] $5f^{14}6d^57s^2$
86	Rn	[Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^26p^6$	108	Hs	[Rn] $5f^{16}d^67s^2$
87	Fr	[Rn] ($7s^1$)	109	Mt	[Rn] $5f^{14}6d^67s^2$
88	Ra	[Rn] $7s^2$			

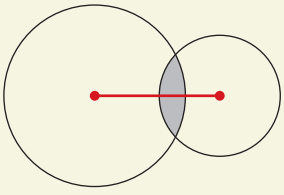
* A szögletes zárójel a vegyjellel (pl. [Kr]) a megfelelő atomtörzset jelenti.

Az atomok fizikai adatai

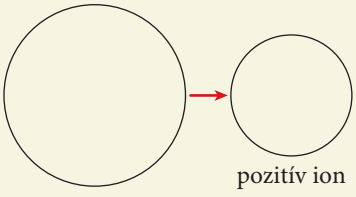
Atomsugár: Annak a legkisebb távolságnak a fele, ameddig két azonos atom magja megközelíti egymást anélkül, hogy kémiai kötés alakulna ki.

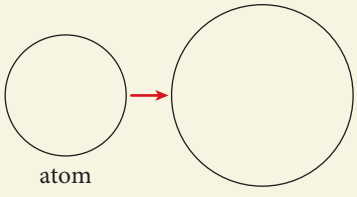


Kovalens sugár: Két, egymással egyszeres kovalens kötéssel kapcsolódó atom atommagjai közötti távolság fele (átlagos atomsugár). Azonos atomok kapcsolódása esetén a kovalens sugár mindig kisebb az atomsugárnál.



Ionsugár: A közelítőleg gömbnek tekinthető ionok sugara. A pozitív töltésű ionok sugara kisebb a semleges atomok sugaránál, a negatív töltésű ionok sugara nagyobb a semleges atomok sugaránál.





Ionizációs energia

Első ionizációs energia: 1 mól szabad, gázállapotú atomból 1 mól legkönnyebben leszakítható elektron eltávolításához szükséges energia.

Jele: E_{i1}, mértékegysége: $\frac{kJ}{mol}$. Előjele mindig pozitív.

Pl.: $Na(g) \rightarrow Na^+(g) + e^-$

$E_{i1} = 495{,}8 \frac{kJ}{mol}$

Második ionizációs energia: a második elektron leszakításához szükséges energia. $E_{i1} < E_{i2}$

Elektronaffinitás: 1 mól gázállapotú egyszeresen negatív töltésű ionból a töltést okozó elektron eltávolításához szükséges vagy felszabadult energiát elektronaffinitásnak nevezzük. Jele: E_{ea}, mértékegysége: $\frac{kJ}{mol}$. Értékének előjele lehet pozitív és negatív is.

Elektronegativitás: Jele: *EN*.

Az elektronegativitás a kötött állapotú atom elektronvonzó képessége. Egy atomnak a közös elektronpárhoz való ragaszkodását fejezi ki. Tényleges értékét meghatározni nem lehet, de ez nem lényeges, mert a két atom elektronvonzó képességének különbsége a döntő a kémiai kötés kialakulása szempontjából.

Ionsugarak a periódusos rendszer főcsoportjaiban*

11. táblázat

1	2	13	14	15	16	17	18
H^- 154							**He** –
Li^+ 68	**Be^{2+}** 44	**B^{3+}** 35	**C^{4-}, C^{4+}** 260, 16	**N^{3-}** 171	**O^{2-}** 132	**F^-** 133	**Ne^+** 112
Na^+ 97	**Mg^{2+}** 82	**Al^{3+}** 51	**Si^{4-}, Si^{4+}** 271, 42	**P^{3-}** 212	**S^{2-}** 184	**Cl^-** 181	**Ar^+** 154
K^+ 133	**Ca^{2+}** 118	**Ga^{3+}** 81	**Ge^{4-}, Ge^{2+}, Ge^{4+}** 272, 73, 58	**As^{3-}** 222	**Se^{2-}** 191	**Br^-** 196	**Kr** –
Rb^+ 147	**Sr^{2+}** 112	**In^{3+}** 81	**Sn^{2+}, Sn^{4+}** 93, 71	**Sb^{3-}** 245	**Te^{2-}** 211	**I^-** 220	**Xe** –
Cs^+ 167	**Ba^{2+}** 153	**Ti^{4+}** 68	**Pb^{2+}, Pb^{4+}** 120, 84				**Rn** –

A d-mező elemei (nagy spinszámú ionok)

Sc^{3+} 73	**Ti^{4+}** 68	**Cr^{3+}** 69	**Mn^{4+}, Mn^{7+}** 60, 46	**Fe^{2+}, Fe^{3+}** 74, 64	**Co^{3+}** 63	**Cu^{2+}** 69	**Zn^{2+}** 74

* Az ionsugarak vegyjelek alatti értékei pm-ben (10^{-12} m) adottak.

Elektronaffinitások, $E_{ea}\left(\frac{kJ}{mol}\right)$ a periódusos rendszer főcsoportjaiban

12. táblázat

1	2	13	14	15	16	17	18
H 73							**He** −21
Li 60	**Be** −240	**B** 27	**C** 122	**N** 0	**O** 141	**F** 328	**Ne** −29
Na 53	**Mg** −230	**Al** 44	**Si** 134	**P** 72	**S** 200	**Cl** 348	**Ar** −35
K 48	**Ca** −156	**Ga** 30	**Ge** 120	**As** 77	**Se** 195,0	**Br** 325	**Kr** −39
Rb 47	**Sr** −168	**In** 30	**Sn** 121	**Sb** 101	**Te** 190,2	**I** 295	**Xe** −41
Cs 45	**Ba** −52	**TI** 30	**Pb** 110	**Bi** 110	**Po** 180	**At** 270	**Rn** −41

Az elektronaffinitás-értékek elektronvoltban (eV) is megadhatók.
$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J = 1{,}6 \cdot 10^{-22}\ kJ$

Az első, a második és a harmadik ionizációs energiák, $E_i \left(\frac{kJ}{mol}\right)$ a periódusos rendszer főcsoportjaiban

13. táblázat

1	2	13	14	15	16	17	18
H 1305							**He** 2360 5224
Li 518 7261 11765	**Be** 895 1748 14773	**B** 796 2414 3641	**C** 1080 2340 4596	**N** 1394 2841 4550	**O** 1307 3370 5273	**F** 1672 3357 6019	**Ne** 2069 3932 6091
Na 493 4538 6877	**Mg** 734 1440 7693	**Al** 574 1808 2726	**Si** 782 1568 3215	**P** 1006 1893 2897	**S** 994 2239 3340	**Cl** 1244 2285 3802	**Ar** 1512 2651 3911
K 416 3035 4389	**Ca** 586 1139 4886	**Ga** 579 1979 2962	**Ge** 758 1529 3283	**As** 970 1788 2721	**Se** 936 2035 2956	**Br** 1132 2092 3456	**Kr** 1344 2338 3547
Rb 395 2620 3840	**Sr** 547 1056 4185	**In** 559 1819 2701	**Sn** 705 1404 2928	**Sb** 825 1584 2428	**Te** 864 1785 2684	**I** 1003 1836 3168	**Xe** 1164 2036 3081
Cs 373 2409 –	**Ba** 500 960 3425	**Tl** 589 1970 2875	**Pb** 711 1440 2976	**Bi** 700 1603 2453	**Po** 808 – –	**At** 930 – –	**Rn** 1031 – –

Az elemek atomjainak fizikai adatai

14/a táblázat

Az elem neve	Vegyjel	Rendszám (A)	Relatív atomtömeg (A_r)	Kovalens sugár	Atomsugár[1]	Ionsugár[2]
				pm (10^{-12} m)		
Aktínium	Ac	89	227	–	118	118(+3)
Alumínium	Al	13	26,9815	118	143	51(+3)
Amerícium	Am	95	243	–	173	106(+3) 92(+4)
Antimon	Sb	51	121,75	140	159	245(−3) 90(+3) 62(+5)
Arany	Au	79	196,967	134	146	137(+1) 85(+3)
Argon	Ar	18	39,948	98	–	154(+1)
Arzén	As	33	74,9216	120	139	222(−3) 72(+3) 47(+5)
Asztácium	At	85	210	(145)	–	–
Bárium	Ba	56	137,34	198	222	153(+2)
Berillium	Be	4	9,0122	90	112	44(+2)
Berkélium	Bk	97	249	–	–	–
Bizmut	Bi	83	208,980	146	176	117(+3) 74(+5)
Bór	B	5	10,811	82	98	35(+3)
Bróm	Br	35	79,904	114	119	196(−1) 47(+5) 39(+7)
Cérium	Ce	58	140,12	165	181	111(+3) 101(+4)
Cézium	Cs	55	132,905	235	267	167(+1)
Cink	Zn	30	65,38	125	138	74(+2)
Cirkónium	Zr	40	91,22	145	160	80(+4)
Diszprózium	Dy	66	162,5	159	180	99(+3)
Dubnium	Db	105	261	–	–	–
Einsteinium	Es	99	252	–	–	–
Erbium	Er	68	167,26	157	178	96(+3)
Európium	Eu	63	151,96	185	199	112(+2)
Ezüst	Ag	47	107,868	134	144	126(+1)
Fermium	Fm	100	257	–	–	–

14/b táblázat

Vegyjel	Első	Második	Harmadik	Elektro-negativitás	Gyakori oxidációs számok
	ionizációs energia[3] (kJ/mol)				
Ac	–	–	–	1,1	+3
Al	574	1808	2 726	1,5	+3
Am	–	–	–	1,3	+3, +4
Sb	825	1584	2 428	1,9	−3, +3, +5
Au	889	1978	–	2,4	+1, +3
Ar	1512	2651	3 911	–	–
As	970	1788	2 721	2,0	−3, +3, +5
At	930	–	–	2,2	+7
Ba	500	960	3 425	0,9	+2
Be	895	1748	14 773	1,5	+2
Bk	–	–	–	–	+3, +4
Bi	700	1603	2 453	1,9	+3, +5
B	796	2414	3 641	2,0	+1, +3
Br	1132	2092	3 456	2,8	−1, +1, +5
Ce	540	1187	1 930	1,1	+1, +3, +4
Cs	373	2409	–	0,7	+1
Zn	906,1	1733	3 830	1,6	+2
Zr	660	1267	2 217	1,4	+1, +4
Dy	656	–	–	–	+3
Db	–	–	–	–	–
Es	–	–	–	–	–
Er	587	–	–	1,2	+3
Eu	547	1084	–	–	+2, +3
Ag	730,8	2072	3 360	1,9	+1
Fm	–	–	–	–	–

14/a táblázat folytatása

Az elem neve	Vegyjel	Rendszám (A)	Relatív atomtömeg (A_r)	Kovalens sugár	Atomsugár[1]	Ionsugár[2]
				pm (10^{-12} m)		
Fluor	F	9	18,9984	64	71	133(−1) 7(+7)
Foszfor	P	15	30,9738	111	128	212(−3) 34(+5)
Francium	Fr	87	223	–	–	176(+1)
Gadolínium	Gd	64	157,25	161	179	102(+3)
Gallium	Ga	31	69,72	126	141	113(+1) 81(+3)
Germánium	Ge	32	72,59	122	137	73(+2) 58(+4)
Hafnium	Hf	72	178,49	144	167	81(+4)
Hélium	He	2	4,0026	93	–	–
Hidrogén	H	1	1,00797	32	46	154(−1)
Higany	Hg	80	200,59	149	157	110(+2) 127(+1)
Holmium	Ho	67	164,930	158	179	97(+3)
Indium	In	49	114,82	144	166	132(+1) 81(+3)
Irídium	Ir	77	192,2	127	136	66(+4)
Itterbium	Yb	70	173,04	–	194	113(+2) 94(+3)
Ittrium	Y	39	88,906	162	178	93(+3)
Jód	I	53	126,9044	133	136	220(−1) 62(+5) 50(+7)
Kadmium	Cd	48	112,41	148	154	97(+2)
Kalcium	Ca	20	40,08	174	197	118(+2)
Kalifornium	Cf	98	251	–	–	–
Kálium	K	19	39,098	203	235	133(+1)
Kén	S	16	32,064	102	127	184(−2) 37(+4) 29(+6)
Klór	Cl	17	35,453	99	107	181(−1) 34(+5) 26(+7)

14/b táblázat folytatása

Vegyjel	Első	Második	Harmadik	Elektro-negativitás	Gyakori oxidációs számok
	ionizációs energia[3] (kJ/mol)				
F	1672	3357	6019	4,0	−1
P	1006	1893	2897	2,1	−3, +3, +5
Fr	386	–	–	0,7	+1
Gd	594	1158	–	1,1	+3
Ga	579	1979	2962	1,6	+1, +3
Ge	758	1529	3283	1,8	−4, +2, +4
Hf	675	1437	2238	1,3	+4
He	2360	5224	–	–	–
H	1305	–	–	2,1	−1, +1
Hg	1006	1809	3300	1,9	+1, +2
Ho	–	–	–	1,2	+3
In	559	1819	2701	1,7	+3
Ir	868	–	–	2,2	+2, +3, +4, +6
Yb	598	1167	–	1,1	+2, +3
Y	–	–	–	–	–
I	1003	1836	3168	2,5	−1, +1, +5, +7
Cd	867,5	1631	3615	1,7	+2
Ca	586	1139	4886	1,0	+2
Cf	–	–	–	–	+3
K	416	3035	4389	0,8	+1
S	994	2239	3340	2,5	−2, +2, +4, +6
Cl	1244	2285	3802	3,0	−1, +1, +3, +5, +7

14/a táblázat folytatása

Az elem neve	Vegyjel	Rendszám (A)	Relatív atomtömeg (A_r)	Kovalens sugár	Atomsugár[1]	Ionsugár[2]
				pm (10^{-12} m)		
Kobalt	Co	27	58,9332	116	125	78(+2) 63(+3)
Kripton	Kr	36	83,80	112	–	–
Króm	Cr	24	51,996	118	130	69(+3) 52(+6)
Kűrium	Cm	96	247	–	–	–
Lantán	La	57	138,91	169	187	115(+3)
Laurencium	Lr	103	257	–	–	–
Lítium	Li	3	6,939	123	155	68(+1)
Lutécium	Lu	71	147,97	156	175	93(+3)
Magnézium	Mg	12	24,305	136	160	82(+2)
Mangán	Mn	25	54,9380	117	135	80(+2) 60(+4) 46(+7)
Mendelévium	Md	101	258	–	–	–
Molibdén	Mo	42	95,94	130	139	68(+4) 62(+6)
Nátrium	Na	11	22,9898	154	190	97(+1)
Neodímium	Nd	60	144,24	164	182	108(+3)
Neon	Ne	10	20,179	71	–	112(+1)
Neptúnium	Np	93	237	–	130	109(+3) 95(+4)
Nikkel	Ni	28	58,69	115	124	78(+2) 62(+3)
Nióbium	Nb	41	92,906	134	146	70(+5)
Nitrogén	N	7	14,0067	70	92	171(−3) 25(+1) 11(+5) 16(+3)
Nobélium	No	102	259	–	–	–
Ólom	Pb	82	207,19	147	175	120(+2) 84(+4)
Ón	Sn	50	118,69	141	162	112(+2) 71(+4)

Vegyjel	Első	Második	Harmadik	Elektro-negativitás	Gyakori oxidációs számok
	ionizációs energia[3] (kJ/mol)				
Co	758	1645	3 231	1,8	+2, +3
Kr	1344	2338	3 547	–	–
Cr	653	1591	2 986	1,6	+1, +2, +3, +6
Cm	–	–	–	–	+3
La	541	1103	1 850	1,1	+3
Lr	–	–	–	–	–
Li	518	7261	11 765	1,0	+1
Lu	–	1418	–	1,2	+3
Mg	734	1440	7 693	1,2	+2
Mn	717	1508,7	3 250	1,5	+2, +3, +4, +6, +7
Md	–	–	–	–	–
Mo	685	1558	3 250	1,8	+1, +4, +6
Na	493	4538	6 877	0,9	+1
Nd	513	–	–	1,2	+3
Ne	2069	3932	6 091	–	–
Np	–	–	–	1,3	+3, +4, +7
Ni	736	1751	3 392	1,8	+2, +3
Nb	664	1381	2 416	1,6	+1, +4, +5
N	1394	2841	4 550	3,0	−3, +1, +3, +5
No	–	–	–	–	–
Pb	711	1440	2 976	1,8	+2, +4
Sn	705	1404	2 928	1,8	+2, +4

14/a táblázat folytatása

Az elem neve	Vegyjel	Rendszám (A)	Relatív atomtömeg (A_r)	Kovalens sugár	Atomsugár[1]	Ionsugár[2]
				pm (10^{-12} m)		
Oxigén	O	8	15,9994	66	65	132(−2) 9(+6)
Ozmium	Os	76	190,2	126	135	69(+4)
Palládium	Pd	46	106,4	128	137	86(+2)
Platina	Pt	78	195,09	130	139	96(+2)
Plutónium	Pu	94	244	–	151	107(+3) 93(+4)
Polónium	Po	84	209	146	176	–
Prazeodímium	Pr	59	140,907	165	182	109(+3) 92(+4)
Promécium	Pm	61	145	163	–	106(+3)
Protaktínium	Pa	91	231	–	161	112(+3) 98(+4)
Raderfordium	Rf	104	260	–	–	–
Rádium	Ra	88	226	–	–	140(+2)
Radon	Rn	86	222	–	–	–
Rénium	Re	75	186,2	128	137	–
Réz	Cu	29	63,546	117	128	96(+1) 69(+2)
Ródium	Rh	45	102,905	125	134	86(+2)
Rubídium	Rb	37	85,47	216	248	147(+1)
Ruténium	Ru	44	101,07	125	134	69(+3) 67(+4)
Stroncium	Sr	38	87,62	191	215	112(+2)
Szamárium	Sm	62	150,35	162	181	104(+3)
Szelén	Se	34	78,96	116	140	191(−2) 42(+6)
Szén	C	6	12,01115	77	91,4	260(−4) 16(+4)
Szilícium	Si	14	28,086	111	132	271(−4) 42(+4)
Szkandium	Sc	21	44,956	144	162	81(+2)
Tallium	Tl	81	204,38	148	171	140(+1) 95(+3)
Tantál	Ta	73	180,948	134	149	73(+5)
Technécium	Tc	43	98	127	136	–

Vegyjel	Első	Második	Harmadik	Elektro-negativitás	Gyakori oxidációs számok
	ionizációs energia[3] (kJ/mol)				
O	1307	3370	5273	3,5	−2
Os	820	1640	–	2,2	+4, +6
Pd	804	1874	3176	2,2	+2, +4
Pt	868	1791	–	2,2	+2, +4
Pu	492	–	–	1,3	+3, +4
Po	808	–	–	2,0	+6
Pr	527	–	–	1,1	+3, +4
Pm	–	–	–	–	+3
Pa	–	–	–	1,5	+3, +4, +5
Rf	–	–	–	–	–
Ra	509	979	–	1,1	+2
Rn	1031	–	–	–	–
Re	759	1602	–	1,9	+4, +7
Cu	745	1958	3554	1,9	+1, +2
Rh	720	1743	2996	2,2	+3
Rb	395	2620	3840	0,8	+1
Ru	710	1617	2746	2,2	+4
Sr	547	1056	4185	1,0	+2
Sm	540	1080	–	1,2	+3
Se	936	2035	2956	2,4	−2, −1, +1, +4, +6
C	1080	2340	4596	2,5	−4, +2, +4
Si	782	1568	3215	1,8	−4, −1, +1, +4
Sc	631	1235	2388	1,3	+3
Tl	589	1970	2875	1,8	+1, +3
Ta	760	1563	–	1,5	+5
Tc	702	1472	2850	1,9	+7

Az elem neve	Vegyjel	Rendszám (A)	Relatív atomtömeg (A_r)	Kovalens sugár	Atomsugár[1]	Ionsugár[2]
				pm (10^{-12} m)		
Tellúr	Te	52	127,60	136	160	211(−2) 56(+6)
Terbium	Tb	65	158,924	159	180	100(+3)
Titán	Ti	22	47,90	132	147	90(+2) 68(+4)
Tórium	Th	90	232,038	165	180	114(+3) 95(+4)
Túlium	Tm	69	168,934	148	171	140(+1) 95(+3)
Urán	U	92	238,03	142	138	111(+3) 97(+4)
Vanádium	V	23	50,942	122	134	74(+3) 59(+5)
Vas	Fe	26	55,847	117	126	76(+2) 64(+3)
Volfrám	W	74	183,85	130	141	64(+4) 68(+6)
Xenon	Xe	54	131,30	131	–	–

Vegyjel	Első	Második	Harmadik	Elektro-negativitás	Gyakori oxidációs számok
	ionizációs energia[3] (kJ/mol)				
Te	864	1785	2684	2,1	−2, −1, +1, +4, +6
Tb	577	–	–	1,2	+3, +4
Ti	585	1960	2860	1,5	+3, +4
Th	670	–	–	1,3	+4
Tm	560	–	–	1,2	+3
U	587	–	–	1,7	+4, +6
V	650	1413	2828	1,6	+2, +3, +4, +5
Fe	759	1561	2957	1,8	+2, +3
W	770	1708	–	1,7	+4, +6
Xe	1164	2036	3081	–	–

(1) A fémek atomsugara a 12-es koordinációs számú kristályokra vonatkozik.

(2) Az ionsugár a 6-os koordinációs számú kristályokra vonatkozik, az utána zárójelben szereplő szám az ion elektromos töltését, illetve oxidációs számát jelzi, amire az ionsugár vonatkozik.

(3) Az ionizáció folyamata:

$M(g) \rightarrow M^+(g) + e^-$ $\quad E_{i1}$ = első ionizációs energia

$M^+(g) \rightarrow M^{2+}(g) + e^-$ $\quad E_{i2}$ = második ionizációs energia

$M^{2+}(g) \rightarrow M^{3+}(g) + e^-$ $\quad E_{i3}$ = harmadik ionizációs energia

Az elemek

Az elemek felfedezése

Az elemek felfedezésének ideje, a felfedezők neve

15. táblázat

Rendszám	Vegyjel	Az elem neve	Felfedező(k) neve	Felfedezés ideje
1	H	hidrogén	Cavendish, H.	1766
2	He	hélium	Ramsay, W.	1895
3	Li	lítium	Arfvedson, J. A.	1817
4	Be	berillium	Vauquelin, L. N.	1798
5	B	bór	Gay-Lussac, J. L., Thénard, L. J., Davy, H.	1808
6	C	szén	–	ókor
7	N	nitrogén	Rutherford, D.	1772
8	O	oxigén	Priestley, J. és Lavoisier, A. L.	1774
9	F	fluor	Moissan, H.	1886
10	Ne	neon	Ramsay, W.	1898
11	Na	nátrium	Davy, H.	1807
12	Mg	magnézium	Davy, H.	1808
13	Al	alumínium	Oersted, H.	1825
14	Si	szilícium	Berzelius, J. J.	1824
15	P	foszfor	Brand, H.	1669
16	S	kén	–	ókor
17	Cl	klór	Scheele, C. W.	1774
18	Ar	argon	Rayleigh, W.	1894
19	K	kálium	Davy, H.	1807
20	Ca	kalcium	Davy, H.	1808
21	Sc	szkandium	Nilson, F. L.	1879
22	Ti	titán	Gregor, W.,	1791
23	V	vanádium	del Rio, A. M.	1801
24	Cr	króm	Vauquelin, L. N.	1798
25	Mn	mangán	Scheele, C. W.	1774
26	Fe	vas	–	ókor
27	Co	kobalt	Brandt, G.	1735
28	Ni	nikkel	Cronstedt, A. F.	1751
29	Cu	réz	–	ókor
30	Zn	cink	Marggraf, A. S.	1746
31	Ga	gallium	Boisbaudran, L.	1875
32	Ge	germánium	Winkler, Cl.	1886
33	As	arzén	Albertus Magnus	1250
34	Se	szelén	Berzelius, J. J.	1818
35	Br	bróm	Balard, J.	1826

Rendszám	Vegyjel	Az elem neve	Felfedező(k) neve	Felfedezés ideje
36	Kr	kripton	Ramsay, W.	1898
37	Rb	rubídium	Bunsen, R. Kirchhoff, G.	1861
38	Sr	stroncium	Davy, H.	1808
39	Y	ittrium	Gadolin, J.	1794
40	Zr	cirkónium	Klaproth, M. H.	1789
41	Nb	nióbium	Hatchett, Ch.	1801
42	Mo	molibdén	Scheele, C. W.	1778
43	Tc	technécium	Perrier, C., Segré, E.	1937
44	Ru	ruténium	Klauss, K. K.	1844
45	Rh	ródium	Wollaston, W. H.	1803
46	Pd	palládium	Wollaston, W. H.	1803
47	Ag	ezüst	–	ókor
48	Cd	kadmium	Stromeyer, F.	1817
49	In	indium	Reich, F.	1863
50	Sn	ón	–	ókor
51	Sb	antimon	–	középkor
52	Te	tellúr	Müller Ferenc	1782
53	I	jód	Courtois, B.	1811
54	Xe	xenon	Ramsay, W.	1898
55	Cs	cézium	Bunsen, R., Kirchhoff, G.	1860
56	Ba	bárium	Davy, H.	1808
57	La	lantán	Mosander, C. G.	1839
58	Ce	cérium	Berzelius, J. J.	1803
59	Pr	prazeodímium	Auer, W.	1885
60	Nd	neodímium	Auer, W.	1885
61	Pm	promécium	Coryell, C. D., Glendenin, L. E., Marinsky, J. A.	1945
62	Sm	szamárium	Boisbaudran, L.	1879
63	Eu	európium	Demarcay, E.	1901
64	Gd	gadolínium	Marignac, J. C.	1880
65	Tb	terbium	Mosander, C. G.	1843
66	Dy	diszprózium	Boisbaudran, L.	1886
67	Ho	holmium	Cléve, Th. P.	1879
68	Er	erbium	Mosander, C. G.	1843
69	Tm	túlium	Cléve, Th. P.	1879
70	Yb	itterbium	Marignac, J.	1878
71	Lu	lutécium	Urbain, G., Auer, W.	1907
72	Hf	hafnium	Hevesy György Coster, D.	1922

15. táblázat folytatása

Rendszám	Vegyjel	Az elem neve	Felfedező(k) neve	Felfedezés ideje
73	Ta	tantál	Ekeberg, A. G.	1802
74	W	volfrám	d'Elhuyar, F. és J.	1783
75	Re	rénium	Noddack, W., Tacke, I., Berg, O.	1925
76	Os	ozmium	Tennant, S.	1803
77	Ir	irídium	Tennant, S.	1803
78	Pt	platina	Ulloa	1735
79	Au	arany	–	ókor
80	Hg	higany	–	ókor
81	Tl	tallium	Crookes, W.	1861
82	Pb	ólom	–	ókor
83	Bi	bizmut	–	középkor
84	Po	polónium	Curie, M. és P.	1898
85	At	asztácium	Corson, D. R., McKenzie, K. R., Segré, E.	1940
86	Rn	radon	Dorn, F. E.	1900
87	Fr	francium	Perey, M.	1939
88	Ra	rádium	Curie, M. és P.	1898
89	Ac	aktínium	Debierne, A.	1899
90	Th	tórium	Berzelius, J. J.	1828
91	Pa	protaktínium	Hahn, O., Meitner, L.	1917
92	U	urán	Klaproth, M. H.	1789
93	Np	neptúnium	McMillan, E. M., Abelson, P. H.	1940
94	Pu	plutónium	Seaborg, G. T., McMillan, E. M., Kennedy, J. W., Wahl, A. C.	1940
95	Am	amerícium	Seaborg, G. T., James, R. A., Morgen, L. O., Ghiorso, A.	1944
96	Cm	kűrium	Seaborg, G., James, R. A., Ghiorso, A.	1944
97	Bk	berkélium	Seaborg, G., Thompson, S., Ghiorso, A.	1950
98	Cf	kalifornium	Seaborg, G.	1950
99	Es	einsteinium	Ghiorso, A.	1952
100	Fm	fermium	Ghiorso, A.	1953
101	Md	mendelévium	Ghiorso, A., Seaborg, G.	1955

15. táblázat folytatása

Rendszám	Vegyjel	Az elem neve	Felfedező(k) neve	Felfedezés ideje
102	No	nobélium	Ghiorso, A., Sikkeland, T., Walton, J. R., Seaborg, G.	1958
103	Lr	laurencium	Ghiorso, A., Sikkeland, T., Larsh, A. E., Latimer, R.	1961
104	Rf	raderfordium	Fljorov, G. Ny.	1964
105	Db	dubnium	Fljorov, G. Ny. Ghiorso, A.	1970
106	Sg	sziborgium	Berkeley-i kutatócsoport	1974
107	Bh	bohrium	Darmstadti kutatócsoport	1981
108	Hs	hasszium	Darmstadti kutatócsoport	1984
109	Mt	meitnérium	Darmstadti kutatócsoport	1982

Az elemek előfordulása

Az elemek nem egyenletesen oszlanak el a világegyetemben. A hidrogén alkotja az univerzum tömegének csaknem háromnegyedét (~ 75 m/m%), a hélium a ~ 24%-át, a fennmaradó egy százalékot pedig az összes többi elem. A Napban szintén ez a helyzet, de a nehezebb elemek: a szén, a nitrogén és az oxigén már sokkal gyakoribbak, és nem elhanyagolható mértékben jelen van a vas, illetve a szilícium is.
A földkéregben a nehezebb elemek vannak jelentős túlsúlyban a hidrogénnel és a héliummal szemben.

Az elemek gyakorisága az univerzumban

16. táblázat

Elem	Tömegszázalék
H	75,4
He	23,1
O	0,64
Ne	0,33
N	0,17
C	0,079
Fe	0,062
Si	0,053
Mg	0,042
Ar	0,011

A holdkőzet összetétele

17. táblázat

Mért vegyület	Földi	Űrszonda
	elemzés (tömegszázalék)	
SiO_2	42,3	46,4
FeO	15,8	12,1
Al_2O_3	14,1	14,4
CaO	12,0	14,5
MgO	7,9	4,4
TiO_2	7,3	7,6
Na_2O	0,5	0,6

A Nap összetétele

18. táblázat

Elem	Tömegszázalék
H	55
He	11
C, N, O, F, Ne	33,75
Fémek	0,25

A levegő összetétele

19. táblázat

Elem	Térfogatszázalék	Tömegszázalék
N_2	78,09	75,51
O_2	20,95	23,15
Ar	0,93	1,28
Ne	0,0018	0,0013
He	0,0005	0,00007
Kr	0,0001	0,0003
Xe	0,00009	0,00004
H_2	0,00005	0,000003
CO_2	0,04	0,06

Az elemek gyakorisága a Földön

20. táblázat

Sorszám	Elem neve	Vegyjel	Tömegszázalék
1.	oxigén	O	49,40
2.	szilícium	Si	25,75
3.	alumínium	Al	7,51
4.	vas	Fe	4,70
5.	kalcium	Ca	3,39
6.	nátrium	Na	2,64
7.	kálium	K	2,40
8.	magnézium	Mg	1,94
9.	hidrogén	H	0,88
10.	titán	Ti	0,58
11.	klór	Cl	0,19
12.	foszfor	P	0,12
13.	szén	C	0,087
14.	mangán	Mn	0,085
15.	kén	S	0,048
16.	bárium	Ba	0,047
17.	króm	Cr	0,033
18.	nitrogén	N	0,030
19.	fluor	F	0,027
20.	cirkónium	Zr	0,023
21.	cink	Zn	0,020
22.	nikkel	Ni	0,018
23.	stroncium	Sr	0,017
24.	vanádium	V	0,016
25.	réz	Cu	0,010
		Összesen	99,96

Az elemek gyakorisága a Földön atomszázalékban

21. táblázat

Elem neve	Vegyjele	Atomszázalék
Oxigén	O	52,32
Hidrogén	H	16,95
Szilícium	Si	16,67
Alumínium	Al	5,53
Nátrium	Na	1,95
Vas	Fe	1,50
Kalcium	Ca	1,48
Magnézium	Mg	1,39
Kálium	K	1,08
Titán	Ti	0,22
Szén	C	0,14
Foszfor	P	0,04
Nitrogén	N	0,03
Mangán	Mn	0,03
Kén	S	0,03
Klór	Cl	0,03
Fluor	F	0,001
	Összesen	99,391

Az ember létfontosságú elemei

Hat elemből (H, C, O, N, P, S) épülnek fel a biomolekulák.
A sejtek elektrokémiai tulajdonságaiért a következő kationok és anionok felelősek:
kationok: K^+, Mg^{2+}, Na^+, Ca^{2+},
anionok: Cl^-, SO_4^{2-}, HPO_4^{2-}.
A biológiailag nélkülözhetetlen elemek száma: 25.

A biológiailag nélkülözhetetlen elemek csoportosítása

22. táblázat

Makroelemek	H, Na, Mg, K, Ca, C, N, P, O, S, Cl, I
Mikroelemek	V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn, Mo, B, Si, F, Se
Egyes fajoknál biológiai hatású elemek	Sn, As, Br

Az ember létfontosságú elemeinek átlagos mennyisége*

23. táblázat

Elem	Tömeg (kg)	Elem	Tömeg (kg)
O	43,550	Cl	0,115
C	12,590	Na	0,070
H	6,580	Mg	0,042
N	1,815	Fe	0,0042–0,0061
P	0,680	Zn	0,0014–0,0023
S	0,100	Cu	$80 \cdot 10^{-6} – 120 \cdot 10^{-6}$
Ca	1,700	Mn	$12 \cdot 10^{-6} – 20 \cdot 10^{-6}$
K	0,250	Mo	$\approx 4 \cdot 10^{-6}$

* 70 kg-os felnőttre számítva

Az elemek természetes izotópjainak százalékos megoszlása

24. táblázat

Elem	Izotóp		Elem	Izotóp	
	tömegszám	százalékos előfordulás		tömegszám	százalékos előfordulás
Aktínium(1)			Asztácium(2)	210	100
Alumínium	27	100		215	
Amerícium(1)				216	
Antimon	121	57,25		218	
	123	42,75	Bárium	138	71,79
Arany	197	100		137	11,3
Argon	40	99,63		136	7,8
	36	0,30		135	6,6
	38	0,06		134	2,42
Arzén	75	100		130	0,10
				132	0,09

Elem	Izotóp		Elem	Izotóp	
	tömeg-szám	százalékos előfordulás		tömeg-szám	százalékos előfordulás
Berillium	9	100	Fermium(1)		
Berkélium(1)			Fluor	19	100
Bizmut	209	100	Foszfor	31	100
Bór	11	81,17	Francium(1)		
	10	18,83	Gadolínium	158	24,79
Bróm	79	50,6		160	21,79
	81	49,4		156	20,59
Cérium	140	88,46		157	15,71
	142	11,07		155	14,78
	138	0,25		154	2,15
	136	0,19		152	0,20
Cézium	133	100	Gallium	69	60,1
Cink	64	48,9		71	39,9
	66	27,82	Germánium	74	36,4
	68	18,5		72	27,4
	67	4,16		70	20,6
	70	0,62		73	7,8
Cirkónium	90	51,5		76	7,8
	94	17,4	Hafnium	180	35,1
	92	17,1		178	27,10
	91	11,2		177	18,47
	96	2,8		179	13,84
Diszprózium	164	28,2		176	5,03
	162	25,5		174	0,18
	163	25,0	Hélium	4	≈100
	161	18,88		3	10^{-7}
	160	2,29	Hidrogén	1	99,98
	158	0,09		2	0,002
Einsteinium	156	0,05	Higany	202	29,54
Erbium	166	35		200	23,25
	168	29		199	17,04
	167	24		201	13,18
	170	10		198	10,12
	164	2		204	6,72
	162	0,25		196	0,15
Európium	153	52,23	Holmium	165	100
	151	47,7	Indium	115	95,5
Ezüst	107	51,9		113	4,5
	109	48,1			

24. táblázat folytatása

Elem	Izotóp		Elem	Izotóp	
	tömeg-szám	százalékos előfordulás		tömeg-szám	százalékos előfordulás
Irídium	193	61,5	Kripton	84	57,18
	191	38,5		86	17,5
Itterbium	174	29,58		83	11,5
	172	21,47		82	11,5
	173	17,02		80	2,01
	171	14,26		78	0,35
	176	13,38	Króm	52	83,8
	170	4,21		53	9,5
	168	0,06		50	4,3
Ittrium	89	100		54	2,4
Jód	127	100	Kűrium(1)		
Kadmium	114	28,86	Lantán	139	99,91
	112	24,07		138	0,09
	111	12,75	Lítium	7	92,7
	110	12,39		6	7,3
	113	12,26	Lutécium(2)	175	97,5
	116	7,58		176	2,5
	106	1,21	Magnézium	24	78,6
	108	0,87		26	11,3
Kalcium	40	96,92		25	10,1
	44	2,13	Mangán	55	100
	42	0,64	Mendelévium(1)		
	48	0,18	Molibdén	98	23,7
	43	0,13		95	16,5
	46	0,003		92	15,9
Kalifornium(1)				96	15,7
Kálium(2)	39	93,2		100	9,6
	41	6,8		97	9,4
	40	0,01		94	9,2
Kén	32	95,1	Nátrium	23	100
	34	4,2	Neodímium	142	27,1
	33	0,74		144	23,9
	36	0,02		146	17,2
Klór	35	75,4		143	12,2
	37	24,6		145	8,3
Kobalt	59	100		148	5,72
				150	5,60

Elem	Izotóp		Elem	Izotóp	
	tömeg-szám	százalékos előfordulás		tömeg-szám	százalékos előfordulás
Neon	20	90,0	Palládium	106	27,2
	22	9,73		108	26,8
	21	0,27		105	22,6
Neptúnium[1]				110	13,5
Nikkel	58	67,8		104	9,3
	60	26,2		102	0,8
	62	3,7	Platina	195	35,3
	61	1,2		194	30,2
	64	1,1		196	26,6
Nióbium	93	100		198	7,2
Nitrogén	14	99,62		192	0,8
	15	0,38		190	0,006
Ólom	208	52,4	Plutónium[1]		
	206	25,1	Polónium[2]	210	100
	207	21,1		211	
	204	1,37		212	
Ón	120	33,0		214	
	118	24		215	
	116	14,1		216	
	119	8,6		218	
	117	7,5	Prazeodímium	141	100
	124	6,1	Prométium[1]		
	122	4,8	Protaktínium	231	100
	112	0,9	Radon	219	100
	114	0,6		220	
	115	0,4		222	
Oxigén	16	99,76	Rádium	223	100
	18	0,20		224	
	17	0,04		226	
Ozmium	192	41,0		228	
	190	26,4	Rénium[2]	187	62,9
	189	16,1		185	37,1
	188	13,3	Réz	63	68,9
	187	1,64		65	31,1
	186	1,59	Ródium	103	100
	184	0,02	Rubídium[2]	85	72,8
				87	27,2

24. táblázat folytatása

Elem	Izotóp		Elem	Izotóp	
	tömeg-szám	százalékos előfordulás		tömeg-szám	százalékos előfordulás
Ruténium	102	31,34	Tellúr	130	34,5
	104	18,27		128	31,8
	101	16,98		128	18,7
	99	12,91		126	6,37
	100	12,70		124	4,59
	96	5,68		122	2,43
	98	2,22		123	0,85
Stroncium	88	82,6		120	0,05
	86	9,86	Terbium	159	100
	87	7,02	Titán	48	73,45
	84	0,56		46	7,95
Szamárium	152	26		47	7,75
	154	20		49	5,51
	147	17		50	5,34
	149	15	Tórium(2)	232	100
	148	14	Túlium	169	100
	150	5	Urán(2)	238	99,28
	144	3		235	0,71
Szelén	80	48,0		234	0,005
	78	24,0	Vanádium	51	99,77
	76	9,5		50	0,23
	82	9,3	Vas	56	91,64
	77	8,3		54	5,81
	74	0,9		57	2,21
Szén	12	98,9		58	0,34
	13	1,1	Volfrám	184	30,68
Szilícium	28	92,28		186	29,17
	29	4,67		182	25,77
	30	3,05		183	14,24
Szkandium	45	100		180	0,12
Tallium	205	70,5	Xenon	132	26,96
	203	29,5		129	26,23
Tantál	181	100		131	21,17
Technécium(1)				134	10,54
				136	8,95
				130	4,07
				128	1,90
				124	0,09
				126	0,09

(1) gyorsan bomló radioaktív elem, ezért nincsenek adatok mellette feltüntetve
(2) radioaktív elem

Az elemek fizikai adatai

25. táblázat

Az elem neve	Vegyjele	Olvadáspontja[1] (°C)	Olvadáshője[2] (kJ/mol)	Forráspontja[3] (°C)	Forráshője[4] (kJ/mol)	Sűrűsége[5] (kg/dm³)
Aktínium	Ac	1050	–	3200	–	–
Alumínium	Al	660	10,87	2519	284	2,7
Amerícium	Am	–	–	2011	60	11,7
Antimon	Sb	631	19,8	1587	195	6,62
Arany	Au	1064	12,7	2519	342,5	19,3
Argon	Ar	−189	1,6	−186	6,5	1,4
Arzén	As	–	–	817	32,4 sz	5,72
Asztácium	At	302	–	337	33,5	–
Bárium	Ba	727	7,6	1870	150	3,5
Berillium	Be	1287	11,7	2470	309,4	1,85
Berkélium	Bk	–	–	–	–	–
Bizmut	Bi	271	10,9	1564	178,8	9,8
Bór	B	2075	22	4000	536	2,34
Bróm	Br	−7	5,3	59	15	3,12
Cérium	Ce	798	5,0	3360	398	6,67
Cézium	Cs	28	2,1	671	68,2	1,90
Cink	Zn	419,5	7,4	907	114,7	7,14
Cirkónium	Zr	1855	16,7	4409	502	6,49
Diszprózium	Dy	1412	17	2567	280,5	8,54
Dubnium	Db	–	–	–	–	–
Einsteinium	Es	–	–	–	–	–
Erbium	Er	1497	17	2700	280,5	9,05
Európium	Eu	822	9,2	1527	176	5,26
Ezüst	Ag	962	11,3	2162	254	10,5
Fermium	Fm	–	–	–	–	–
Fluor	F	−220	0,2	−188	3,1	1,505
Foszfor	P	44	0,6	281	12,4	1,82
Francium	Fr	27	–	–	–	–
Gadolínium	Gd	1313	15,5	3250	301	7,89
Gallium	Ga	30	5,6	2204	–	5,91
Germánium	Ge	938	32	2820	285	5,32
Hafnium	Hf	2233	22	4603	649	13,1
Hélium	He	−272	0,02	−269	0,08	0,126
Hidrogén	H	−259	0,06	−253	0,45	0,071
Higany	Hg	−38	2,3	357	58,2	13,6
Holmium	Ho	1474	17	2700	280,5	8,8

25. táblázat folytatása

Az elem neve	Vegyjele	Olvadáspontja[1] (°C)	Olvadáshője[2] (kJ/mol)	Forráspontja[3] (°C)	Forráshője[4] (kJ/mol)	Sűrűsége[5] (kg/dm³)
Indium	In	156	3,3	2072	225	7,31
Irídium	Ir	2466	27,6	4428	636	22,5
Itterbium	Yb	819	7,5	1196	159	6,98
Ittrium	Y	1526	11,3	3345	389	4,47
Jód	I	114	7,8	184	22	4,94
Kadmium	Cd	321	6,1	767	100	8,65
Kalcium	Ca	842	8,8	1484	153,8	1,55
Kalifornium	Cf	–	–	–	–	–
Kálium	K	63	2,3	759	79	0,86
Kén	S	115	1,4	445	12,6	2,07
Klór	Cl	−101,0	3,2	−34	10,2	1,56
Kobalt	Co	1495	15,2	2927	389	8,9
Kripton	Kr	−157	1,6	−153	9,0	2,6
Króm	Cr	1907	13,8	2671	305,5	7,19
Kűrium	Cm	–	–	–	–	–
Lantán	La	920	6,3	3464	402	6,17
Laurencium	Lr	–	–	–	–	–
Lítium	Li	181	3,0	1342	137	0,53
Lutécium	Lu	1652	19,3	3327	377	9,84
Magnézium	Mg	650	8,9	1090	136,1	1,74
Mangán	Mn	1246	14,6	2061	225	7,43
Mendelévium	Md	–	–	–	–	–
Molibdén	Mo	2623	27,6	4639	536	10,2
Nátrium	Na	98	2,6	883	101	0,97
Neodímium	Nd	1021	7,1	3100	289	7,00
Neon	Ne	−249	0,3	−246	1,8	1,2
Neptúnium	Np	637	–	–	395	19,5
Nikkel	Ni	1455	17,6	2913	381	8,9
Nióbium	Nb	2477	26,8	4744	–	8,4
Nitrogén	N	−210	0,36	−196	2,8	0,81
Nobélium	No	–	–	–	–	–
Ólom	Pb	327	5,1	1749	177	11,4
Ón	Sn	232	7,2	2602	293	7,3
Oxigén	O	−218	0,22	−183	3,4	1,14
Ozmium	Os	3033	26,8	5012	678	22,6
Palládium	Pd	1555	16,7	2963	377	12,0
Platina	Pt	1768	19,7	3825	511	21,4

Az elem neve	Vegyjele	Olvadáspontja[1] (°C)	Olvadáshője[2] (kJ/mol)	Forráspontja[3] (°C)	Forráshője[4] (kJ/mol)	Sűrűsége[5] (kg/dm³)
Plutónium	Pu	640	–	3235	365	–
Polónium	Po	254	–	–	121	(9,2)
Prazeodímium	Pr	931	6,7	3290	331	6,77
Prométium	Pm	1027	–	–	–	–
Protaktínium	Pa	1230	–	–	544	15,4
Raderfordium	Rf	–	–	–	–	–
Rádium	Ra	700	10	1737	115	5,0
Radon	Rn	−71	2,9	−62	16,4	4,4
Rénium	Re	3186	33	5596	636	21,0
Réz	Cu	1085	13	2562	304,8	8,96
Ródium	Rh	1964	22	3695	532	12,4
Rubídium	Rb	39	2,3	688	75,8	1,53
Ruténium	Ru	2334	25,5	4150	620	12,2
Stroncium	Sr	777	8,8	1382	141,5	2,6
Szamárium	Sm	1072	8,8	1803	192	7,54
Szelén	Se	221	5,2	685	14	4,79
Szén	C	3550	–	4027	719	2,26
Szilícium	Si	1414	46	2900	170	2,33
Szkandium	Sc	1541	16	2830	339	3,0
Tallium	Tl	304	4,2	1473	162	11,85
Tantál	Ta	3017	28,4	5458	754	16,6
Technécium	Tc	2140	23	4700	502	11,5
Tellúr	Te	450	18	988	50	6,24
Terbium	Tb	1356	16	3230	293	8,27
Titán	Ti	1668	15,5	3287	446	4,51
Tórium	Th	1750	19,2	4820	–	11,7
Túlium	Tm	1545	18	1950	247	9,33
Urán	U	1135	11,3	3927	460	19,07
Vanádium	V	1910	17,6	3407	444	6,1
Vas	Fe	1538	15,4	2861	354	7,86
Volfrám	W	3422	33,7	5555	774	19,3
Xenon	Xe	−112	2,3	− 108	12,6	3,06

(1) egész számra kerekített értékek
(2) az elem olvadáspontján
(3) egész számra kerekített értékek
(4) a párolgáshő az elem forráspontján
(5) $1\ \frac{g}{cm^3} = 1\ \frac{kg}{dm^3} = 10^3\ \frac{kg}{m^3}$, a gázoknál az adat a cseppfolyós halmazállapotú elem forráspontjára vonatkozik

Az atomok kapcsolódásának jellemzői

A kémiai elemek atomjai a **legkisebb energiájú állapotra**, vagyis telített héjak és alhéjak **kialakítására törekednek**.
Az atomok többféle módon stabilizálódhatnak, alakíthatnak ki **kémiai kötéseket**.

Az elsőrendű kémiai kötések

Az elsőrendű kémiai kötések fajtái és jellemzői

26. táblázat

A kötés típusa	Kialakulásának feltétele	Jellemzője (definíció)
Ionos	Az atomok közötti nagy elektronegativitás (*EN*)-különbség.	Ellentétes töltésű ionok közötti elektrosztatikus vonzás.
Kovalens	Általában nagyobb *EN*-ú atomok, közöttük az *EN*-különbség kicsi vagy 0.	Az atomok között közös kötőelektronpárok kialakulásával jön létre.
Fémes	Kis *EN*-ú atomok (fématomok).	A fématomokat delokalizált* elektronfelhő tartja össze.

* Delokalizált elektronok: azok az elektronok, amelyek kettőnél több atomtörzs vonzása alá tartoznak.

Az elsőrendű kötések és az atomok elektronegativitásának kapcsolata

ΔEN = Két kötésben levő atom elektronegativitásának különbsége
Például:

P—H kötés $EN(P) = 2{,}1$, $EN(H) = 2{,}1$ $\Rightarrow \Delta EN = 0$ $\Delta EN = 0$, akkor a kötés apoláris kovalens

H—O kötés $EN(H) = 2{,}1$, $EN(O) = 3{,}5$ $\Rightarrow \Delta EN = 1{,}4$ $\Delta EN < 2$, akkor a kötés poláris kovalens

Na és Cl között $EN(Na) = 0{,}9$, $EN(Cl) = 3{,}0$ $\Rightarrow \Delta EN = 2{,}1$ $\Delta EN > 2$, akkor a kötés általában ionos

Másodrendű kémiai kötések

A másodrendű kémiai kötések (intermolekuláris kötések)

Molekulák között alakulhatnak ki, halmazszinten értelmezhetők. A molekulák méretével, tömegével együtt az anyagok fizikai tulajdonságait (olvadáspont, forráspont stb.) befolyásolják. Jóval gyengébbek az elsőrendű kötéseknél.

A másodrendű kémiai kötések fajtái és jellemzői

27. táblázat

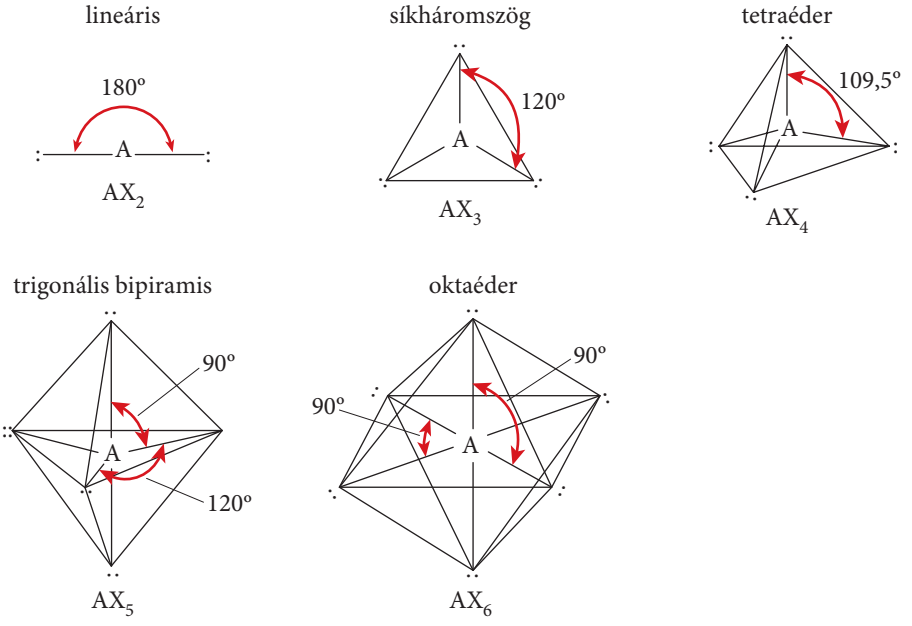
Fajtái	Feltétele	Hatása az anyag	
		olvadáspontjára	forráspontjára
Diszperziós	pillanatnyi dipólus létrejötte	alacsony olvadáspont, kis hatás	alacsony forráspont, kis hatás
Dipólus-dipólus	állandó dipólus-molekulák	növelő hatás	növelő hatás
Hidrogénkötés	1. nagy *EN*-ú elemhez kapcsolódó H-atom 2. nemkötő elektronpárral rendelkező atom molekulán belül	erősen növeli	erősen növeli

A molekulák geometriája

A központi atomhoz (*A*) kapcsolódó atomok vagy atomcsoportok (*X*), valamint a vegyértékhéjban előforduló, kötést nem létesítő elektronpárok (*E*) száma szabja meg a molekulák térbeli felépítését.

A vegyértékhéjat alkotó **elektronpárok** – függetlenül attól, hogy kötést létesítenek-e vagy sem – a központi atomtörzs körüli tér meghatározott részeit foglalják el úgy, hogy egymástól minél távolabb igyekeznek elhelyezkedni. A térszerkezetnél a párosítatlan elektront is figyelembe kell venni.

Molekulageometriai alapszerkezetek

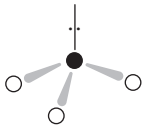
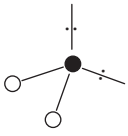
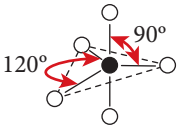
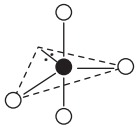
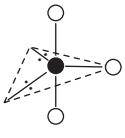
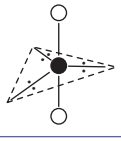
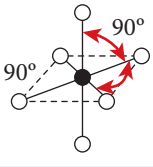


Központi atom (jele: *A*): a legtöbb kötő elektronpárral rendelkező atom.
Ligandum (jele: *X*): a központi atomhoz kapcsolódó molekulák vagy atomcsoportok.

A molekulák térszerkezete és alakja

28. táblázat

Összetétel	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Térszerkezet	Molekulaalak	Példák
	kötő	nemkötő			
AX_2	2	–		lineáris	$BeCl_2$, $HgCl_2$
AX_3	3	–	120°	síkháromszög	BF_3, BCl_3, SO_3, NO_3^-
AX_2E	2	1	φ φ < 120°	V alak	SO_2, $PbCl_2$, $SnCl_2$, NO_2^-
AX4	4	–		tetraéderes	CH_4, CCl_4, $POCl_3$, SiF_4

Összetétel	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Térszerkezet	Molekulaalak	Példák
	kötő	nemkötő			
AX3E	3	1		háromszög alapú piramis	NH_3, NF_3, NCl_3, $SOCl_2$, IO_3^-
AX_2E_2	2	2		V alak	H_2O, ClO_2^-, XeO_2, HOCl
AX_5	5	–		háromszög alapú bipiramis	PF_5, PCl_5, SOF_4
AX_4E	4	1			SF_4, $TeCl_4$, IF_4
AX_3E_2	3	2		T alak (síkban)	ClF_3, BrF_3
AX_2E_3	2	3		lineáris	XeF_2, ICl_2^-, IBr_2^-
AX_6	6	–		oktaéder	SF_6, IOF_5

Önálló molekulák és ionok szerkezete

Kétatomos molekulák és ionok

A kétatomos molekulák és ionok mindig lineáris felépítésűek, akár azonos, akár különböző minőségű atomokból épülnek fel.

Kötéstávolságok kétatomos molekulákban és ionokban

29. táblázat

Azonos minőségű atomokból álló molekulák		Különböző minőségű atomokból álló molekulák vagy inonok	
Képlet	**Kötéstávolság *d* (pm)**	**Képlet**	**Kötéstávolság *d* (pm)**
H_2	74,6	HF	92
F_2	142	HCl	128
Cl_2	199	HBr	141
Br_2 (60 °C fölött)	229	HI	160
I_2 (190 °C fölött)	267	NO	115
O_2	121	CO	113
N_2	110	CN^- (cianidion)	105
S_2 (1000 °C fölött)	189		
S_8	207		

Háromatomos molekulák és ionok

Kötéstávolságok és kötésszögek háromatomos molekulákban

Lineáris molekulák és ionok

30. táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság *d* (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
HCN	4	–	C—H: 107 C—N: 116	180°
XeF_2	2	3	–	180°

Háromszög (V) alakú molekulák (ionok)

31. táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság d (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
O_3	4	–	128	117°
H_2O	2	2	98	104,5°
H_2S	2	2	133	92,3°
SO_2	4	1	143	119,5°
NO_2	2	1 párosí-tatlan e^-	120	134°
NO_2^-	2	1	124	115°

Négyatomos molekulák és ionok

Kötéstávolságok és kötésszögek négyatomos molekulákban

Lineáris molekulák és ionok (A_2X_2 összetételnél)

32/a táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság d (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
C_2H_2 etin	4	–	C—H: 106 C—C: 120	180°
$(CN)_2$ dicián	4	–	C—N: 115 C—C: 138	180°

Síkháromszög alakú molekulák és ionok (AX_3 összetételnél)

32/b táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság d (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
BCl_3	3	–	B—Cl: 176	120°
BF_3	3	–	B—F: 130	120°
CO_3^{2-}	3 delokalizáció		C—O: 131	120°
NO_3^-	3 delokalizáció		N—O: 122	120°
CH_2O formaldehid	4	–	C—H: 109 C—O: 123	≈120°
$COCl_2$ foszgén	4	–	C—Cl: 175 C—O: 117	Cl—C—Cl: 111° Cl—C—O: 124,3°

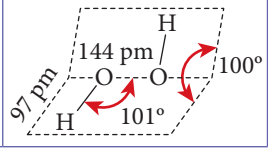
Háromszög alapú piramis

32/c táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság d (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
P_4 (300 °C fölött)	3	1	221	60°
As_4 (900 °C fölött)	3	1	243	60°
NH_3	3	1	101,5	107°
PH_3	3	1	142	93,5°
AsH_3	3	1	–	92,0°
SbH_3	3	1	–	91,5°
PCl_3	3	1	202	100°

A hidrogén-peroxid (H_2O_2) szerkezete

33. táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Térszerkezet	Kötéstávolság *d* (pm)	Kötésszög *α*
	kötő	nemkötő			
H_2O_2	2	2		O—H: 97 O—O: 144	$O \sphericalangle \begin{matrix} H \\ O \end{matrix}$: 101°

Ötatomos molekulák és ionok

Kötéstávolságok és kötésszögek ötatomos molekulákban és ionokban

Tetraéderes molekulák és ionok

34/a táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság *d* (pm)	Kötésszög *α*
	kötő	nemkötő		
CH_4	4	–	C—H: 109	$O \sphericalangle \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}$: 109,5°
CCl_4	4	–	C—Cl: 177	$O \sphericalangle \begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}$: 109,5°
CH_3Cl	4	–	C—H: 111 C—Cl: 178	$O \sphericalangle \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}$: 110,5°
CH_2Cl_2	4	–	C—H: 108 C—Cl: 177	$O \sphericalangle \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}$: 113° $O \sphericalangle \begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}$: 112°
NH_4^+	4	–	N—H: 103	109,5°
SO_4^{2-}	4 delokalizáció	–	S—O: 154	109,5°
PO_4^{3-}	4 delokalizáció	–	P—O: 155	109,5°

Sajátos szerkezetű molekula: HNO_3

34/b táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság *d* (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
HNO_3	3 (és delokalizált e^-)	–	N—O: 120 N—O: 140	$N \sphericalangle \begin{matrix} O \\ O \end{matrix}$: 130° $O \sphericalangle \begin{matrix} N \\ H \end{matrix}$: 102°

Hatatomos molekulák

Kötéstávolságok és kötésszögek hatatomos molekulákban és ionokban

Változatos térszerkezet
(Pl. AX_5: háromszög alapú bipiramis)

35. táblázat

Képlet	A központi atom vegyértékhéján az elektronpárok száma		Kötéstávolság *d* (pm)	Kötésszög α
	kötő	nemkötő		
PCl_5	5	–	3P—Cl: 209 2P—Cl: 219	$P \sphericalangle \begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}$: 120° $P \sphericalangle \begin{matrix} Cl \\ Cl \end{matrix}$: 90°
C_2H_4 etén	4	–	C—H: 108 C—C: 134	$C \sphericalangle \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}$: 117°
N_2O_4	4	–	N—O: 117 N—N: 164	$N \sphericalangle \begin{matrix} O \\ O \end{matrix}$: 126°

Kötéstávolságok és kötésszögek hétatomos molekulákban

Változatos térszerkezet
(Pl. AX_6 – oktaéder)

36. táblázat

Képlet	**Kötéstávolság** ***d*** **(pm)**	**Kötésszög** α
SF_6	S—F: 158	$\sphericalangle \begin{matrix} F \\ F \end{matrix}$: 90°
H_3BO_3	B—O: 136 B—H: 90	$\sphericalangle \begin{matrix} O \\ O \end{matrix}$: 120° $\sphericalangle \begin{matrix} H \\ B \end{matrix}$: ≈114°
H_2SO_4	S—O: ≈ 150	$\sphericalangle \begin{matrix} O \\ O \end{matrix}$: 123° $\sphericalangle \begin{matrix} O \\ OH \end{matrix}$: 107° $\sphericalangle \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix}$: 101°
H_3PO_4	P—O: 152 P—OH: 157	$\sphericalangle \begin{matrix} O \\ OH \end{matrix}$: 112° $\sphericalangle \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix}$: 105°

Kötéstávolságok és kötésszögek hétnél több atomos molekulákban

Általában gyűrűs szerkezet

37. táblázat

Képlet	Kötéstávolság d (pm)	Kötésszög α
S_8	204	105°
C_6H_6 benzol	C—H: 108 C—C: 140	120°
$C_{10}H_8$ naftalin	C—H: 108 C—C: ≈140	≈120°
C_6H_{12} ciklohexán	C—H: 109 C—C: 154	109,5°
P_4O_{10} dimer foszfor-pentoxid	4P—O: 139 P—O: 162	$P \sphericalangle \begin{matrix} O \\ O \end{matrix}$: 101° $O \sphericalangle \begin{matrix} P \\ P \end{matrix}$: 123,5°
$C_6H_{12}O_6$ glükóz	C—C: 154 C—O: 142 C—H: 109 O—H: 97	≈109,5°

Kötési energiák

A kötési energia kifejezi azt, hogy mekkora energiát kell befektetni ahhoz, hogy 1 mol kötést felszakítsunk.

Jele: E_k. Mértékegysége: $\frac{kJ}{mol}$.

A kötési energiák intervallumai

38. táblázat

Kötéstípus	Kötési energia (kJ/mol)
Elsőrendű kémiai kötés (kovalens, ionos, fémes)	80–800
Másodrendű kötés	
hidrogénkötés	20–40
dipólus-dipólus és diszperziós	0,4–8

Kötési energiák kJ/mol-ban

39. táblázat

	H	C	N	O	F	Cl	Br	I	S
H	436*								
C	412*	348* 612** 812*** 518****							
N	388*	305* 613** 890***	163* 409** 945***						
O	463*	360* 799** 1072***	201* 607***	146* 497**					
F	565*	484*	270*	185*	155				284*
Cl	431*	338*	313*	203*	254	240*			255*
Br	366*	276*	–	201*		219*	193*		217*
I	299*	238*	–	201*		210*	178*	151*	–
S	338*	259*	–	–		250*	212*		264*

* egyes kötés
** kettős kötés
*** hármas kötés
**** aromás kötés

Szilárd anyagok halmazszerkezete

A szilárd halmazállapotú anyagok kristályosak vagy amorfak lehetnek.
Az atomok stabilizálódása során kialakult elsőrendű kötések térrácsokat hoznak létre szilárd halmazállapotban.

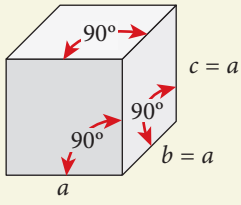
Kristályrácstípusok és jellemzőik

40. táblázat

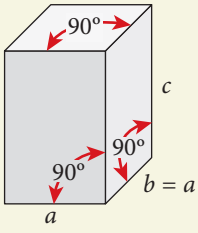
Jellemzők	Ionrács	Atomrács	Fémrács	Molekularács
A rács-pontokban elhelyezkedő részecskék	pozitív és negatív töltésű ionok	atomok vagy atomtörzsek	atomtörzsek	molekulák
Rácsösszetartó erő	ionkötés (elektrosztatikus vonzóerő)	kovalens kötés (delokalizált elektronok)	fémes kötés (delokalizált elektronok)	másodrendű kötőerők
Olvadás- és forráspont	magas (a nagy rácsenergia miatt)	magas (erős kovalens kötések)	változó (változó erősségű fémes kötés)	általában alacsony (gyenge másodrendű kötések)
Standard halmazállapot (25 °C-on)	szilárd	szilárd	szilárd (kivétel a higany)	gáz, folyadék, szilárd (a molekula méretétől és a másodrendű kötés típusától függ)
Keménység	viszonylag nagy	nagy	változó	kicsi
Elektromos vezetés	szilárd: szigetelő olvadék, vizes oldat: vezet	szigetelő vagy félvezető	jó vezető	szigetelő (a vízben elektrolikusan disszociáló anyagok oldata vezető)
Oldhatóság	vízben általában jól	gyakorlatilag oldhatatlanok	megfelelő hőmérsékleten egymásban (egyesek cseppfolyós ammóniában)	poláris (H_2O) vagy apoláris oldószerben, a polaritástól függően
Példák az elemek közül	nincs	B, C, Si, Ge	kis *EN*-ú elemek (fémek)	a nagy *EN*-ú elemek a p-mezőből
Példák a vegyületek közül	kis *EN*-ú fémek és nagy *EN*-ú nemfémek vegyületei	B_2O_3, SiO_2, egyes fém-szulfidok	néhány szulfid (pl. $CuFeS_2$, kalkopirit)	nemfémvegyületek, szerves vegyületek, sok p- és d-mezőbeli fém-halogenid

Kristályok elemi celláinak alaptípusai

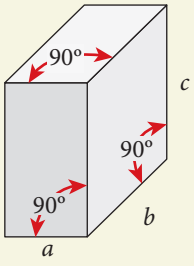
Elemi cella: A kristályrács legkisebb, jellemző része, amelyet a tér három irányába eltolva megkapjuk az egész rácsot. Alaptípusai:



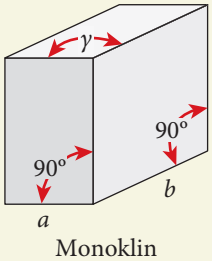
Hexagonális
(kocka)



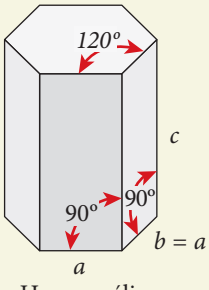
Tetragonális
(négyzetes hasáb)



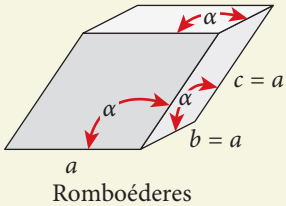
Trigonális
(rombos)



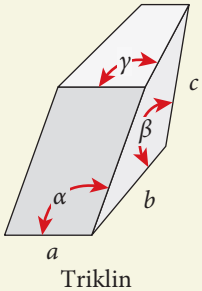
Monoklin
(egyhajlású)



Hexagonális
(hatszögletes)



Romboéderes



Triklin
(háromhajlású)

Az elemi cellák alaptípusainak jellemző adatai

41. táblázat

Elemi cella	Élhosszúság	Szögek	Példák
Hexagonális (kocka)	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	NaCl, Cu
Tetragonális (négyzetes hasáb)	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	TiO_2 (rutil), Sn (fehérón)
Trigonális (rombos)	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	$CaCO_3$ (aragonit), $BaSO_4$, I_2, rombos kén
Monoklin (egyhajlású)	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$, $\gamma \neq 90°$	$Na_2B_4O_7 \cdot 10\ H_2O$ (bórax), $PbCrO_4$
Hexagonális (hatszögletes)	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$	C (grafit), ZnO
Romboéderes	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$	$CaCO_3$ (kalcit), HgS (cinnabarit)
Triklin (háromhajlású)	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$	$K_2Cr_2O_7$, $CuSO_4 \cdot 5H_2O$

A kristálytípusok és az elemi cellák kapcsolata

Molekularácsos kristályszerkezet

Például jód (I_2) *Elemi cella:* trigonális (rombos)
rombos kén (S) *Elemi cella:* trigonális (rombos)

Atomrácsos kristályszerkezet

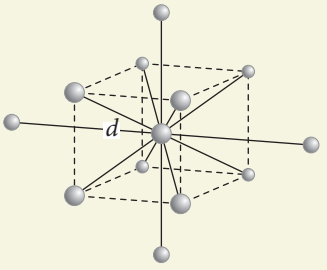
Például gyémánt (C), szilícium (Si), germánium (Ge), ón (szürke Sn).
Elemi cella: hexagonális (kocka). Az atomok tetraéderesen helyezkednek el.

Fémrácsok szerkezete

Elemi cella: tércentrált kocka (koordinációs szám: 8 + 6 = 14) (8 közelebbi, 6 távolabbi szomszéd)

42. táblázat

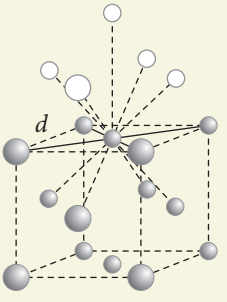
Fém	*d* (pm)	Fém	*d* (pm)
Li	304	Ba	435
Na	372	Cr	250
K	454	Fe	248
Rb	495	V	262
Cs	531		



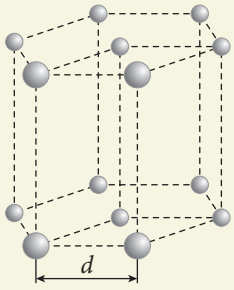
Elemi cella: laponcentrált kocka (koordinációs szám: 12)

43. táblázat

Fém	*d* (pm)	Fém	*d* (pm)
Ca	395	Pb	350
Sr	430	Ag	289
Al	286	Au	288
Cu	256	Pt	278



Elemi cella: Hexagonális (szoros illeszkedés)



44. táblázat

Fém	*d* (pm)	Fém	*d* (pm)
Be	223	Co	251
Mg	320	Ni	249
Cd	298	Zn	267

Ionrácsos kristályszerkezet

Elemi cella: tércentrált kocka

45. táblázat

Vegyület	*d* (pm)
CsCl	411
CsBr	429
CsI	456

Elemi cella: laponcentrált kocka

46. táblázat

Vegyület	*d* (pm)	Vegyület	*d* (pm)
LiCl	514	AgBr	575
NaF	462	MgO	420
NaCl	563	CaO	480
KCl	628	BaO	550
KBr	658	NH_4I	724
AgCl	554	FeS_2	540

Rácsenergia

A rácsenergia kifejezi, hogy mekkora energia szükséges ahhoz, hogy 1 mol szilárd anyag felbomoljék úgy, hogy a rácsot felépítő részecskék egymástól végtelen távolságra kerüljenek (gázhalmazállapot). **A rácsenergia jele: E_r, számértékének előjele pozitív, mértékegysége:** $\frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$.

Fontosabb halogenidek rácsenergia-értékei (E_r) kJ/mol-ban 25 °C-on

47. táblázat

	F^-	Cl^-	Br^-	I^-
Li^+	1030	834	788	730
Na^+	910	769	732	682
K^+	808	701	671	632
Rb^+	774	680	651	617
Cs^+	744	657	632	600
Ag^+	953	864	830	808
Be^{2+}	3150	3004	2950	2653
Mg^{2+}	2913	2326	2097	1944
Ca^{2+}	2609	2223	2132	1905
Sr^{2+}	2476	2127	2008	1937
Ba^{2+}	2341	2033	1950	1831
Al^{3+}	5924	5376	5247	5070

Oxidok és szulfidok rácsenergia-értékei (E_r) kJ/mol-ban 25 °C-on

48. táblázat

	O^{2-} (oxid)	O_2^{2-} (peroxid)	S^{2-} (szulfid)
Li^+	2799	2592	2464
Na^+	2481	2309	2192
K^+	2238	2114	1979
Rb^+	2163	2025	1929
Cs^+	–	1948	1892
Ag^+	3002	–	2606
Be^{2+}	4293	–	–
Mg^{2+}	3795	–	3406
Ca^{2+}	3414	–	3119
Sr^{2+}	3217	–	2974
Ba^{2+}	3029	–	2832
Al^{3+}	15916	–	–

Oldódás, oldatok

Az oldódás energiaviszonyai

Ionhidratációs energiák (E_h)

az $M^{n+}(g)$ + víz → $M^{n+}(aq)$ és $Y^-(g)$ + víz → $Y^-(aq)$ folyamatokra vonatkozólag

Ionhidratációs energiák (E_h) 25 °C-on kJ/mol-ban

49. táblázat

Kationok	E_h (kJ/mol)	Kationok	E_h (kJ/mol)	Anionok	E_h (kJ/mol)
H^+	(−1090)	Mg^{2+}	−1920	OH^-	−46
Li^+	−520	Ca^{2+}	−1650	F^-	−506
Na^+	−405	Sr^{2+}	−1480	Cl^-	−364
K^+	−321	Ba^{2+}	−1360	Br^-	−337
Rb^+	−300	Fe^{2+}	−1950	I^-	−296
Cs^+	−277	Cu^{2+}	−2100		
Ag^+	−464	Zn^{2+}	−2050		
NH_4^+	−301	Al^{3+}	−4690		
Be^{2+}	−2453	Fe^{3+}	−4430		
Mn^{2+}	−1814				

Ionvegyületek végtelen híg oldatra vonatkozó standard moláris hidratációs energiái kJ/mol-ban a $X^+(g) + Y^-(g) \rightarrow X^+(aq) + Y^-(aq)$ folyamatra vonatkozólag

Ionvegyületek moláris hidratációs energiái kJ/mol-ban 25 °C-on

50. táblázat

	Li^+	Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
F^-	−1026	−911	−828	−806	−782
Cl^-	−884	−769	−685	−664	−640
Br^-	−856	−742	−658	−637	−613
I^-	−815	−701	−617	−596	−572

A hidratált ionok képződéshői 25 °C hőmérsékleten

Arra a folyamatra, amelyben a hidratált ion 0,1 MPa nyomáson stabilis halmazállapotú eleméből vagy elemeiből keletkezik

51. táblázat

Ion	Képződéshő (kJ/mol)	Ion	Képződéshő (kJ/mol)	Ion	Képződéshő (kJ/mol)
Ag^+	106	F^-	−330	Mn^{2+}	−219
Al^{3+}	−525	Fe^{2+}	−88	MnO_4^-	−512
Ba^{2+}	−539	Fe^{3+}	−48	NH_4^+	−133
Br^-	−121	H^+	0,00	NO_3^-	−207
CO_3^{2-}	−677	HCO_3^-	−692	Na^+	−240
Ca^{2+}	−543	Hg^{2+}	174	OH^-	−230
Cl^-	−168	I^-	−56	Pb^{2+}	1,6
Cu^+	52	K^+	−251	S^{2-}	−33
Cu^{2+}	65	Mg^{2+}	−462	Zn^{2+}	−152

Oldáshők

Vegyületek oldáshője vizes oldatban

52/a táblázat

Oldott anyag	Hőmérséklet (°C)	*n*	Oldáshő* (kJ/mol)
HCl	21,5	299	−73,5
H_2SO_4	25	199	−74,4
NH_3	20	91,3	−34,9
NaOH	18	200	−42,3
KOH	18	200	−53,5
$Ca(OH)_2$	18	2500	−11,7
$Ba(OH)_2$	18	660	−48,6
LiCl	18	200	−35,6
NaF	19,7	5245	+1,9
NaCl	25,3	161	+4,02
NaBr	18	200	+2,51
NaI	18	200	−6,49
KCl	20	200	+ 18,3
KBr	18	200	+ 21,4
KI	25	200	+ 20,6
NH_4Cl	18,9	120	+ 16,1
$BeCl_2$	20	1367	−214
$MgCl_2$	18	800	−150,4

52/a táblázat folytatása

Oldott anyag	Hőmérséklet (°C)	*n*	Oldáshő* (kJ/mol)
$CaCl_2$	18	200	−75,4
$SrCl_2$	18	400	−46,7
$BaCl_2$	18	400	−8,67
$NaNO_3$	18	200	+ 20,8
KNO_3	18	200	+ 35,2
NH_4NO_3	19,6	1079	+ 25,5
$Ca(NO_3)_2$	25	200	−17,7
$Sr(NO_3)_2$	18	400	+ 20,6
$Ba(NO_3)_2$	18	400	+ 39,7
$AgNO_3$	18	200	+ 22,9
Na_2CO_3	25	1000	−23,7
$NaHCO_3$	18	300	+ 17,2
K_2CO_3	18	400	−27,8
$KHCO_3$	18	2000	+ 21,5
aceton	17	13	−25,6
ecetsav	15	100	−1,0
etil-alkohol	17,3	23	−21,9
fenol	16	424	+ 11,6
glicerin	20	140	−5,89
nádcukor	15	200	+ 3,81

* Az adatok 1 mol anyag *n* mol vízben való oldásakor végtelen híg oldat esetén adják meg az oldáshőértékeket az adott hőmérsékleten.

Oldáshőértékek végtelen híg oldatokban kJ/mol-ban 25 °C-on

52/b táblázat

	F^-	Cl^-	Br^-	I^-	OH^-	CO_3^{2-}	NO_3^-	SO_4^{2-}
Li^+	+4,9	−37,0	−48,8	−63,3	−23,6	−18,2	−2,7	−29,8
Na^+	+1,9	+3,9	−0,6	−7,5	−44,5	−26,7	+20,4	−2,4
K^+	−17,7	+17,2	+10,9	+20,3	−57,1	−30,9	+34,9	+23,8
NH_4^+	−1,2	+14,8	+16,0	+13,7	–	–	+25,7	+6,6
Ag^+	−22,5	+65,5	+84,4	+112,2	–	+41,8	+22,6	+17,8
Mg^{2+}	−17,7	−160,0	−185,6	−213,2	+2,3	−25,3	−90,9	−91,2
Ca^{2+}	+11,5	−81,3	−103,1	−119,7	−16,7	−13,1	−19,2	−18,0
Al^{3+}	−27	−329	−368	−385	–	–	–	−360

Oldhatóság

Az oldhatóság megadható *t* hőmérsékleten 100 g oldószerben (vízben) oldódó anyag térfogatával vagy tömegével, illetve az adott hőmérsékleten telített oldat összetételével. Például 20 °C-on 100 g víz 36 g NaCl-ot old, tehát a NaCl oldékonysága 20 °C-on 36 g /100 g víz, illetve a telített oldat összetétele ezen a hőmérsékleten ~ 26,5 *m*/*m*%.

Elemi gázok oldhatósága vízben, különböző hőmérsékleten
(g/100 g víz, 101 325 Pa nyomáson, *t* °C-on)

53/a táblázat

t [°C]	Cl_2	H_2	N_2	O_2
0	–	0,0001922	0,002942	0,006945
5	–	0,0001824	0,002600	0,006072
10	0,9972	0,0001740	0,002312	0,005368
15	0,8495	0,0001668	0,002085	0,004802
20	0,7293	0,0001603	0,001901	0,004339
25	0,6413	0,0001535	0,001751	0,003931
30	0,5723	0,0001474	0,001624	0,003588
35	0,5104	0,0001425	0,001501	0,003315
40	0,4519	0,0001384	0,001391	0,003082
45	0,4228	0,0001341	0,001300	0,002858
50	0,3925	0,0001287	0,001216	0,002657
60	0,3295	0,0001178	0,001052	0,002274
70	0,2793	0,0001020	0,000851	0,001856
80	0,2227	0,0000790	0,000660	0,001381
90	0,127	0,0000460	0,000380	0,000790

Gáz-halmazállapotú vegyületek oldódása vízben
(g/100 g víz, 101 325 Pa nyomáson, *t* °C-on)

53/b táblázat

t (°C)	HBr	HCl	H_2S	NH_3	N_2O	NO	SO_2
0	221,2	82,3	0,7066	89,5	–	0,009833	22,83
5	–	–	0,6001	79,6 (4 °C)	–	0,008584	19,31
10	210,3	–	0,5112	72,0 (8 °C)	0,1705	0,007560	16,21
15	–	–	0,4411	58,7 (16 °C)	–	0,006788	13,54
20	198,0	72	0,3846	53,1	0,1211	0,006173	11,28
25	184	–	0,3375	48,2 (24 °C)	–	0,005630	9,41
30	–	67,3	0,2983	44,0 (28 °C)	–	0,005165	7,80
35	–	–	0,2648	–	–	0,004757	6,47
40	–	63,3	0,2361	–	–	0,004394	5,41
45	–	–	0,2110	–	–	0,004059	–
50	171,5	59,6	0,1883	–	–	0,003758	–
60	–	56,1	0,1480	–	–	0,003237	–
70	–	–	0,1101	–	–	0,002668	–
80	–	–	0,0765	–	–	0,001984	–
90	–	–	0,0410	–	–	0,001130	–

53/c táblázat

t (°C)	CH_4	C_2H_6	C_2H_4	C_2H_2	CO	CO_2
0	0,003959	0,01317	0,0281	0,200	0,004397	0,3346
5	0,003410	0,01069	0,0237	0,171	0,003903	0,2774
10	0,002955	0,00870	0,0200	0,150	0,003479	0,2318
15	0,002599	0,00727	0,0171	0,131	0,003130	0,1970
20	0,002319	0,00620	0,0149	0,117	0,002838	0,1688
25	0,002091	0,00535	0,0131	0,105	0,002603	0,1449
30	0,001904	0,00468	0,0118	0,094	0,002405	0,1257
35	0,001733	0,00412	–	–	0,002231	0,1105
40	0,001586	0,00366	–	–	0,002075	0,0973
45	0,001466	0,00327	–	–	0,001933	0,0860
50	0,001359	0,00294	–	–	0,001797	0,0761
60	0,001144	0,00239	–	–	0,001522	0,0576
70	0,000926	0,00185	–	–	0,001276	–
80	0,000695	0,00134	–	–	0,00098	–
90	0,00040	0,0008	–	–	0,00057	–

Szervetlen vegyületek oldhatósága vízben különböző hőmérsékleten

(A táblázat a 100 g vízben oldódó vízmentes anyag tömegét adja meg g-ban.)

54. táblázat

Anyag	0 °C	20 °C	50 °C	80 °C	100 °C
$AgCH_3COO$	0,72	1,04	1,64	2,52	–
$AgNO_3$	122	222	455	669	952
Ag_2SO_4	0,573	0,796	1,08	1,30	1,41
$AlCl_3$	44,9	45,6	–	47,7	–
$Al(NO_3)_3$	61	75,4	97	–	166
$Al_2(SO_4)_3$	31,2	36,4	52,2	73,0	89,0
As_2O_5	59,5	65,8	–	75,1	76,7
$BaBr_2$	98	104	118	135	149
$Ba(CH_3COO)_2$	59	71	77	–	75
$BaCl_2$	31,6	35,7	43,6	52,4	58,8
$Ba(ClO_3)_2$	20,3	33,8	57	84,8	104,9
$Ba(ClO_4)_2$	205,8	289,1	426,3	–	$562,3^{(90)}$
BaI_2	170,2	203,1	239	261,0	271,7
$Ba(NO_2)_2$	–	67,5	–	205,8	300
$Ba(NO_3)_2$	5,0	9,2	17,1	27,2	34,2
$CaBr_2$	125	143	–	295	–
$Ca(CH_3COO)_2$	37,4	34,7	–	33,5	29,7
$CaCl_2$	59,5	74,5	$102^{(30)}$	147	159
CaI_2	181,9	208,8	260	354,5	426,3
$Ca(NO_2)_2$	62,1	76,7	–	–	–
$CdBr_2$	61,1	–	155	165,2	–
$CdCl_2$	97,6	135	–	140	147
CdI_2	79,8	86,2	97,4	–	127,6
$Cd(NO_3)_2$	106	153	233	–	–
$CdSO_4$	75,7	76,9	80	84,6	–
$CoCl_2$	41,6	53,6	88,7	98	104,1
CoI_2	138,1	187,4	376,2	400,0	–
$Co(NO_3)_2$	84,0	100,0	$126,8^{(40)}$	217	$334,9^{(90)}$
$CoSO_4$	25,5	36,2	55,2	70	83
CrO_3	164,9	167,4	182,1	–	206,8
$CsCl$	161,4	186,5	218,5	250,0	270,5
$CsNO_3$	9,3	23,0	64,4	134,0	197,0
Cs_2SO_4	167,1	178,7	194,9	210,3	220,3
$CuCl_2$	70,7	77,0	87,4	99,2	107,9
$Cu(NO_3)_2$	81,8	125,1	168	207,8	–
$CuSO_4$	14,3	20,7	33,3	53,6	75,4

Anyag	0 °C	20 °C	50 °C	80 °C	100 °C
$FeBr_2$	102,0	115,1	136	159,7	177,8
$FeCl_2$	–	68	82,5	100	105,8
$Fe(NO_3)_2$	71,0	83,8	$165,6^{(60)}$	–	–
$FeSO_4$	15,6	26,5	48,6	–	–
$FeCl_3$	74,5	91,9	315	525	537
$Fe(NO_3)_3$	40,1	45,6	$51,2^{(40)}$	–	–
$HgBr_2$	0,3	0,5	1,27	–	4,9
$Hg(CN)_2$	–	$9,3^{(13,5)}$	–	–	$53,8^{(100,1)}$
$HgCl_2$	3,6	6,5	13	24,2	54,1
KBr	53,5	65,2	80,2	95,0	104,0
$KBrO_3$	3,1	6,9	17,5	34,0	50,0
K_2CO_3	105,5	110,5	121,2	139,8	155,7
KCN	–	$71,6^{(25)}$	81	–	122
KSCN	177,0	217,5	325	–	674
KCl	27,6	34,0	42,6	51,1	56,7
$KClO_3$	3,3	7,4	19,3	38,5	57
$KClO_4$	0,75	1,8	6,5	14,8	21,8
K_2CrO_4	58,2	61,7	66,8	72,1	75,6
$K_2Cr_2O_7$	3	12	34	61	80
$K_3Fe(CN)_6$	31	43	64	81,8	91
$KHCO_3$	22,4	33,2	52	–	–
$KHC_4H_4O_6$ (kálium-hidrogén-tartarát)	0,32	0,53	1,83	4,6	6,9
$KHSO_4$	36,3	51,4	–	–	121,6
KI	127,5	144	168	192	208
KIO_3	4,7	8,1	14	24,8	32,2
KIO_4	0,17	0,42	1,5	4,44	7,87
$KMnO_4$	2,8	6,4	16,9	–	–
KNO_2	278,8	298,4	–	–	412,8
KNO_3	13,3	31,6	85,5	169	246
KOH	97	112	140	–	178
KH_2PO_4	14,3	22,7	41	68,0	–
K_2HPO_4	85,6	159	$266^{(60)}$	–	–
K_3PO_4	77,6	–	$122^{(40)}$	–	–
K_2SO_3	106	107	–	111,5	114
K_2SO_4	7,3	11,1	16,5	21,4	24,1
$K_2S_2O_8$	1,6	4,5	$9,9^{(40)}$	–	–
LiBr	143	177	$205^{(40)}$	245	266
Li_2CO_3	1,5	1,3	1,1	0,8	0,7
LiCl	67	78,5	97	–	133

54. táblázat folytatása

Anyag	0 °C	20 °C	50 °C	80 °C	100 °C
LiI	151	165	187	435	481
$LiNO_3$	53,4	74,5	156,4	–	–
LiOH	12,7	12,8	13,3	15,3	17,5
Li_2SO_4	35,3	34,2	32,5	30,7	29,9
$MgBr_2$	91,0	96,5	104,1	113,7	120,2
$MgCl_2$	52,8	54,5	59	66,0	73,0
MgI_2	120,8	139,8	173,2(40)	–	–
$Mg(NO_3)_2$	66,5	–	–	–	137(90)
$MgSO_4$	40,8	44,5	50,4	64,2	74,0
$MnBr_2$	127,3	146,9	181,7	224,7	228,0
$MnCl_2$	63,4	73,9	98,1	112,7	115,3
$Mn(NO_3)_2$	102,0	142,7	–	–	–
$MnSO_4$	53,2	62,9	56,9	48,0	34,0
NH_4Br	60,6	75,5	99,2	126	145,6
NH_4SCN	119,8	170	207,7(30)	–	–
$(NH_4)_2(COO)_2$	2,2	4,4	10,3	–	–
NH_4Cl	29,4	37,2	50,4	65,6	77,3
NH_4ClO_4	11,5	20,8	–	48,2	57,0
$(NH_4)_2CrO_4$	25,0	33,0	51,9	–	–
NH_4HCO_3	11,9	21	–	–	–
$(NH_4)_2HPO_4$	57,5	68,6	–	–	–
NH_4I	154,2	172,3	199,6	228,8	250,3
NH_4NO_3	118,3	192	344,0	580,0	871,0
$(NH_4)_2SO_4$	70,6	75,4	84	95,3	103,3
$(NH_4)_2S_2O_8$	58,2	–	–	–	–
$(NH_4)_2SeO_4$	–	1,22(12)	–	–	–
$Na_2B_4O_7$	1,3	2,7	10,5	31,5	52,5
NaBr	79,5	90,5	116,0	118,3	121,2
$NaBrO_3$	27,5	34,5	56	75,7	90,9
Na_2CO_3	7	21,5	–	45,8	45,5
$NaCH_3COO$	36,3	46,5	83	153	170
NaCl	35,7	36,0	37,0	38,4	39,8
$NaClO_3$	79	101	140	189	230
Na_2CrO_4	31,7	88,7	104	124,8	125,9
$Na_2Cr_2O_7$	163,0	177,8	244,8	376,2	426,3
$Na_4[Fe(CN)_6]$	–	17,9	–	59	63
$NaHCO_3$	6,9	9,6	14,4	19,7	23,6
NaH_2PO_4	57,9	85,2	158,6	–	246,6
Na_2HPO_4	1,7	7,7	80,2	92,4	102,2
NaI	158,7	178,7	227,8	296	302

Anyag	0 °C	20 °C	50 °C	80 °C	100 °C
$NaIO_3$	2,5	9	18	27	34
Na_2MoO_4	–	65,0	71	78	83,8
$NaNO_2$	72,1	84,5	104,1	132,6	163,2
$NaNO_3$	73	88	114	148	180
NaOH	42	109	145	–	347
Na_3PO_4	1,5	11	43	81	108
$Na_4P_2O_7$	3,1	6,2	17,4	30,0	40,2
Na_2S	12,4	18,8	28,5(40)	49,1	57,3
Na_2SO_3	13,9	26,9	28,2	28,3	–
Na_2SO_4	5,0	19,4	46,7	43,7	42,5
$Na_2S_2O_3$	52,5	70,0	–	–	266
$NiBr_2$	112,8	130,9	150	153,8	155,1
$NiCl_2$	53,9	64,2	–	–	88
NiI_2	124,2	148,1	183,0	187,4	–
$Ni(NO_3)_2$	79,6	96,3	122,4(40)	–	–
$NiSO_4$	27,2	37	50,1	63,2	76,7
$Pb(CH_3COO)_2$	–	55,0(25)	–	–	200
$Pb(NO_3)_2$	38,8	56,5	85	115	–
$SnCl_2$	83,9	269,8(15)	–	–	–
SnI_2	–	1,0	1,7	3,0	4,0
$SnSO_4$	–	19	–	–	18
$SrBr_2$	85,2	102,4	135,8	181,8	222,5
$SrCl_2$	43,5	52,9	72,4	90,5	100,8
SrI_2	165,3	177,8	203	270,4	383,1
$Sr(NO_3)_2$	52,7	64,0	83,8	–	139
$ZnBr_2$	389,0	389,0	591,1(40)	644,6	672,2
$ZnCl_2$	–	–	–	541	614
ZnI_2	429,4	484,9	455	490	510,5
$Zn(NO_3)_2$	94,8	118,3	206,9(40)	–	–
$ZnSO_4$	41,9	54,4	76,8	86,6	80,8

A zárójelben jelzett számok a fejlécben jelölt hőmérséklettől eltérő értéket mutatják.

Oldhatósági szorzat: (L) telített oldatban az oldott anyag ionkoncentrációinak (mol/dm^3-ben kifejezve) a sztöchiometriai számoknak megfelelő hatványon vett szorzata.

Például: $L_{AgCl} = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ mol^2/dm^6

$L_{AgCl} = [Ag^+]\,[Cl^-]$

vagy: $L_{Al(OH)_3} = 1{,}0 \cdot 10^{-33}$ (mol/dm^3)^4

$L_{Al(OH)_3} = [Al^{3+}]\,[OH^-]^3$

Néhány rosszul oldódó szervetlen vegyület oldhatósági szorzata 25 °C-on

55. táblázat

Vegyület	Képlet	*L*	*pL*(1)
Alumínium-hidroxid	$Al(OH)_3$	$1{,}0 \cdot 10^{-33}$	33,00
Antimon-szulfid	Sb_2S_3	$1{,}7 \cdot 10^{-93}$	92,77
Bárium-karbonát	$BaCO_3$	$8{,}1 \cdot 10^{-9}$	8,09
-fluorid	BaF_2	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	5,77
-szulfát	$BaSO_4$	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	9,96
Bizmut-szulfid	Bi_2S_3	$1{,}0 \cdot 10^{-97}$	97,00
Cink-hidroxid	$Zn(OH)_2$	$2{,}0 \cdot 10^{-17}$	16,70
-szulfid	ZnS	$1{,}6 \cdot 10^{-24}$	23,80
Ezüst-bromid	AgBr	$7{,}7 \cdot 10^{-13}$	12,11
-hidroxid	AgOH	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$	7,82
-jodid	AgI	$1{,}5 \cdot 10^{-16}$	15,82
-karbonát	Ag_2CO_3	$6{,}2 \cdot 10^{-12}$	11,21
-klorid	AgCl	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	9,80
-szulfid	Ag_2S	$6{,}3 \cdot 10^{-51}$	50,20
-szulfát	Ag_2SO_4	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	4,80
Higany(I)-klorid	Hg_2Cl_2	$1{,}3 \cdot 10^{-18}$	17,89
-jodid	Hg_2I_2	$1{,}2 \cdot 10^{-28}$	27,92
-szulfát	Hg_2SO_4	$6{,}6 \cdot 10^{-7}$	6,18
Higany(II)-szulfid	HgS fekete	$1{,}6 \cdot 10^{-52}$	51,80
	vörös	$1{,}4 \cdot 10^{-53}$	52,85
Kalcium-karbonát	$CaCO_3$	$8{,}9 \cdot 10^{-9}$	8,06
-fluorid	CaF_2	$4{,}0 \cdot 10^{-11}$	10,40
-hidroxid	$Ca(OH)_2$	$5{,}5 \cdot 10^{-6}$	5,26
-szulfát	$CaSO_4$	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$	4,62
-foszfát	$Ca_3(PO_4)_2$	$2{,}0 \cdot 10^{-29}$	28,70

55. táblázat folytatása

Vegyület	Képlet	*L*	*pL* (1)
Magnézium-			
-ammónium-foszfát	$MgNH_4PO_4$	$2{,}5 \cdot 10^{-13}$	12,60
-fluorid	MgF_2	$6{,}4 \cdot 10^{-9}$	8,19
-hidroxid	$Mg(OH)_2$	$1{,}1 \cdot 10^{-11}$	10,96
-karbonát	$MgCO_3$	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	5,00
Nikkel-hidroxid	$Ni(OH)_2$	$6{,}5 \cdot 10^{-18}$	17,19
Ólom(II)-bromid	$PbBr_2$	$7{,}9 \cdot 10^{-5}$	4,10
-fluorid	PbF_2	$3{,}7 \cdot 10^{-8}$	7,43
-jodát	$Pb(IO_3)_2$	$2{,}6 \cdot 10^{-13}$	12,59
-jodid	PbI_2	$1{,}4 \cdot 10^{-8}$	7,85
-klorid	$PbCl_2$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	4,80
-szulfát	$PbSO_4$	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	7,80
-szulfid	PbS	$3{,}4 \cdot 10^{-28}$	27,47
Réz(I)-bromid	CuBr	$4{,}2 \cdot 10^{-8}$	7,38
-jodid	CuI	$5{,}1 \cdot 10^{-12}$	11,29
-klorid	CuCl	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	6,00
-szulfid	Cu_2S	$8{,}5 \cdot 10^{-45}$	44,07
Vas(II)-hidroxid	$Fe(OH)_2$	$1{,}6 \cdot 10^{-14}$	13,80
-szulfid	FeS	$6{,}3 \cdot 10^{-18}$	17,20
Vas(III)-hidroxid	$Fe(OH)_3$	$2{,}0 \cdot 10^{-39}$	39,70

(1) $pL = -\lg \mathcal{L}$

Az oldatok sűrűsége és tömegkoncentrációja

Hidrogén-klorid-, kénsav-, salétromsav-, nátrium- és kálium-hidroxid-oldatok sűrűsége és tömegkoncentrációja 20 °C hőmérsékleten

56. táblázat

Sűrűség (g/cm^3)	Tömegkoncentráció (g/dm^3)				
	HCl	H_2SO_4	HNO_3	NaOH	KOH
1,010	23,84	17,483	21,86	10,55	13,08
1,020	44,78	33,068	40,62	19,76	24,28
1,030	66,23	48,884	59,57	29,24	35,84
1,040	88,30	64,865	78,31	38,84	47,63
1,050	110,46	80,892	97,22	48,88	59,43
1,060	132,61	96,767	116,28	58,96	71,44
1,070	155,04	112,460	135,36	69,24	83,67
1,080	177,88	129,170	154,55	79,68	96,01
1,090	200,89	145,620	173,86	90,28	108,56
1,100	224,29	162,030	193,38	101,08	121,33
1,110	247,86	178,49	213,01	112,08	134,09
1,120	271,60	195,22	232,85	123,28	147,17
1,130	296,06	211,99	252,89	134,68	160,35
1,140	321,25	228,91	272,92	146,20	173,51
1,150	346,61	245,87	293,02	157,88	186,99
1,160	372,82	262,97	313,20	169,76	200,56
1,170	399,91	280,21	333,57	181,80	214,34
1,180	427,51	297,48	354,00	194,00	228,33
1,190	456,01	314,99	374,49	206,40	242,40
1,200		332,64	395,38	219,04	256,56
1,210		350,29	416,36	231,84	270,80
1,220		368,20	438,35	244,88	285,24
1,230		386,22	461,00	258,04	299,75
1,240		404,36	483,85	271,52	314,46
1,250		422,75	507,25	285,16	329,25
1,260		441,13	530,96	299,00	344,23
1,270		459,61	554,99	312,96	359,28
1,280		478,21	579,46	327,12	374,40
1,290		497,04	604,37	341,56	389,71
1,300		515,84	629,46	356,24	404,95
1,310		534,74	655,00	371,12	420,38
1,320		553,74	682,57	386,24	436,00
1,330		572,83	710,35	401,60	451,80
1,340		591,88	738,74	417,20	467,66
1,350		611,01	768,83	433,20	483,57
1,360		630,09	799,41	449,60	499,60
1,370		649,24	831,18	466,00	515,81
1,380		668,61	865,26	483,20	532,13
1,390		687,77	899,89	500,40	548,49

56. táblázat folytatása

Sűrűség (g/cm³)	Tömegkoncentráció (g/dm³)			
	H_2SO_4	HNO_3	NaOH	KOH
1,400	707,00	937,58	518,00	565,18
1,410	726,43	976,14	535,6	581,77
1,420	745,64	1017,15	553,6	598,60
1,430	765,05	1059,49	572,0	615,47
1,440	784,66	1104,62	590,8	632,45
1,450	804,03	1151,74	610,0	649,46
1,460	823,59	1202,89	629,6	666,64
1,470	843,44	1256,85	649,2	683,99
1,480	862,99	1318,24	669,2	701,37
1,490	882,68	1393,00	689,2	718,93
1,500	902,55		710,0	736,50
1,510	922,31		730,4	754,25
1,520	942,40		751,2	772,16
1,530	962,52		772,4	790,09
1,540	982,62			
1,550	1003,01			
1,560	1023,20			
1,570	1043,58			
1,580	1064,13			
1,590	1084,86			
1,600	1105,44			
1,610	1126,36			
1,620	1147,28			
1,630	1168,22			
1,640	1189,33			
1,650	1210,61			
1,660	1232,05			
1,670	1253,67			
1,680	1275,46			
1,690	1297,41			
1,700	1319,71			
1,710	1342,18			
1,720	1365,16			
1,730	1388,33			
1,740	1412,18			
1,750	1436,58			
1,760	1461,86			
1,770	1488,22			
1,780	1515,85			
1,790	1545,67			
1,800	1578,42			
1,810	1615,06			
1,820	1658,20			
1,830	1713,61			

Hidrogén-klorid-, kénsav-, salétromsav-, nátrium- és kálium-hidroxid-oldatok összetétele a sűrűség függvényében (20 °C hőmérsékleten)

57. táblázat

Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék				
	HCl	H_2SO_4	HNO_3	NaOH	KOH
1,000	0,36	0,261	0,333	0,159	0,197
1,005	1,36	0,986	1,255	0,602	0,743
1,010	2,36	1,731	2,164	1,045	1,295
1,015	3,37	2,485	3,073	1,49	1,84
1,020	4,39	3,242	3,982	1,94	2,38
1,025	5,41	4,000	4,883	2,39	2,93
1,030	6,43	4,746	5,784	2,84	3,48
1,035	7,46	5,493	6,661	3,29	4,03
1,040	8,49	6,237	7,530	3,74	4,58
1,045	9,51	6,956	8,398	4,20	5,12
1,050	10,52	7,704	9,259	4,65	5,66
1,055	11,52	8,415	10,12	5,11	6,20
1,060	12,51	9,129	10,97	5,56	6,74
1,065	13,50	9,843	11,81	6,02	7,28
1,070	14,49	10,56	12,65	6,47	7,82
1,075	15,48	11,26	13,48	6,93	8,36
1,080	16,47	11,96	14,31	7,38	8,89
1,085	17,45	12,66	15,13	7,83	9,43
1,090	18,43	13,36	15,95	8,28	9,96
1,095	19,41	14,04	16,76	8,74	10,49
1,100	20,39	14,73	17,58	9,19	11,03
1,105	21,36	15,41	18,39	9,64	11,56
1,110	22,33	16,08	19,19	10,10	12,08
1,115	23,29	16,76	20,00	10,55	12,61
1,120	24,25	17,43	20,79	11,01	13,14
1,125	25,22	18,09	21,59	11,46	13,66
1,130	26,20	18,76	22,38	11,92	14,19
1,135	27,18	19,42	23,16	12,37	14,70
1,140	28,18	20,08	23,94	12,83	15,22
1,145	29,17	20,73	24,71	13,28	15,74
1,150	30,14	21,38	25,48	13,73	16,26
1,155	31,14	22,03	26,24	14,18	16,78
1,160	32,14	22,67	27,00	14,64	17,29
1,165	33,16	23,31	27,76	15,09	17,81
1,170	34,18	23,95	28,51	15,54	18,32
1,175	35,20	24,58	29,25	15,99	18,84
1,180	36,23	25,21	30,00	16,44	19,35
1,185	37,27	25,84	30,74	16,89	19,86
1,190	38,32	26,47	31,47	17,34	20,37
1,195	39,37	27,10	32,21	17,80	20,88
1,200		27,72	32,94	18,25	21,38
1,205		28,33	33,68	18,71	21,88

57. táblázat folytatása

Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék			
	H_2SO_4	HNO_3	NaOH	KOH
1,210	28,95	34,41	19,16	22,38
1,215	29,57	35,16	19,62	22,88
1,220	30,18	35,93	20,07	23,38
1,225	30,79	36,70	20,53	23,87
1,230	31,40	37,48	20,98	24,37
1,235	32,01	38,25	21,44	24,86
1,240	32,61	39,02	21,90	25,36
1,245	33,22	39,80	22,36	25,85
1,250	33,82	40,58	22,82	26,34
1,255	34,42	41,36	23,27	26,83
1,260	35,01	42,14	23,73	27,32
1,265	35,60	42,92	24,19	27,80
1,270	36,19	43,70	24,64	28,29
1,275	36,78	44,48	25,10	28,77
1,280	37,36	45,27	25,56	29,25
1,285	37,95	46,06	26,02	29,73
1,290	38,53	46,85	26,48	30,21
1,295	39,10	47,63	26,94	30,68
1,300	39,68	48,42	27,41	31,15
1,305	40,25	49,21	27,87	31,62
1,310	40,82	50,0	28,33	32,09
1,315	41,39	50,85	28,80	32,56
1,320	41,95	51,71	29,26	33,03
1,325	42,51	52,56	29,73	33,50
1,330	43,07	53,41	30,20	33,97
1,335	43,62	54,27	30,67	34,43
1,340	44,17	55,13	31,14	34,90
1,345	44,72	56,04	31,62	35,36
1,350	45,26	56,95	32,10	35,82
1,355	45,80	57,87	32,58	36,28
1,360	46,33	58,78	33,06	36,73
1,365	46,86	59,69	33,54	37,19
1,370	47,39	60,67	34,03	37,65
1,375	47,92	61,69	34,52	38,10
1,380	48,45	62,70	35,01	38,56
1,385	48,97	63,72	35,50	39,01
1,390	49,48	64,74	36,00	39,46
1,395	49,99	65,84	36,49	39,92
1,400	50,50	66,97	36,99	40,37
1,405	51,01	68,10	37,49	40,82
1,410	51,52	69,23	37,99	41,26
1,415	52,02	70,39	38,49	41,71
1,420	52,51	71,63	38,99	42,15
1,425	53,01	72,86	39,49	42,60

57. táblázat folytatása

Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék			
	H_2SO_4	HNO_3	NaOH	KOH
1,430	53,50	74,09	40,00	43,04
1,435	54,00	75,35	40,51	43,48
1,440	54,49	76,71	41,03	43,92
1,445	54,97	78,07	41,55	44,36
1,450	55,45	79,43	42,07	44,79
1,455	55,93	80,88	42,59	45,23
1,460	56,41	82,39	43,12	45,66
1,465	56,89	83,91	43,64	46,09
1,470	57,36	85,50	44,17	46,53
1,475	57,84	87,29	44,69	46,96
1,480	58,31	89,07	45,22	47,39
1,485	58,78	91,13	45,75	47,82
1,490	59,24	93,49	46,27	48,25
1,495	59,70	95,46	46,80	48,67
1,500	60,17	96,73	47,33	49,10
1,505	60,62	97,99	47,85	49,53
1,510	61,08	99,26	48,38	49,95
1,515	61,54		48,90	50,38
1,520	62,00		49,44	50,80
1,525	62,45		49,97	51,22
1,530	62,91		50,50	51,64
1,535	63,36			
1,540	63,81			
1,545	64,26			
1,550	64,71			
1,555	65,15			
1,560	65,59			
1,565	66,03			
1,570	66,47			
1,575	66,91			
1,580	67,35			
1,585	67,79			
1,590	68,23			
1,595	68,66			
1,600	69,09			
1,605	69,53			
1,610	69,96			
1,615	70,39			
1,620	70,82			
1,625	71,25			
1,630	71,67			
1,635	72,09			
1,640	72,52			
1,645	72,95			

57. táblázat folytatása

Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék H_2SO_4	Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék H_2SO_4	Sűrűség (g/cm^3)	Tömegszázalék H_2SO_4
1,650	73,37	1,730	80,25	1,810	89,23
1,655	73,80	1,735	80,70	1,815	90,12
1,660	74,22	1,740	81,16	1,820	91,11
1,665	74,64	1,745	81,62	1,821	91,33
1,670	75,07	1,750	82,09	1,822	91,56
1,675	75,49	1,755	82,57	1,823	91,78
1,680	75,92	1,760	83,06	1,824	92,00
1,685	76,34	1,765	83,57	1,825	92,25
1,690	76,77	1,770	84,08	1,826	92,51
1,695	77,20	1,775	84,61	1,827	92,77
1,700	77,63	1,780	85,16	1,828	93,03
1,705	78,06	1,785	85,74	1,829	93,33
1,710	78,49	1,790	86,35	1,830	93,64
1,715	78,93	1,795	86,99	1,831	93,94
1,720	79,37	1,800	87,69	1,832	94,32
1,725	79,81	1,805	88,43	1,833	94,72

Az ecetsavoldat sűrűsége és CH_3COOH-tartalma 20 °C hőmérsékleten

58. táblázat

Sűrűség (g/cm^3)	Tömeg-százalék	Tömeg-koncentráció (g/dm^3)	Sűrűség (g/cm^3)	Tömeg-százalék	Tömeg-koncentráció (g/dm^3)
1,0055	5	50,275	1,0611	55	583,605
1,0126	10	101,26	1,0642	60	638,520
1,0195	15	152,925	1,0667	65	693,355
1,0261	20	205,220	1,0686	70	748,020
1,0324	25	258,100	1,0697	75	802,275
1,0383	30	311,490	1,0699	80	855,920
1,0437	35	365,295	1,0688	85	908,480
1,0488	40	419,520	1,0660	90	959,400
1,0534	45	474,030	1,0606	95	1007,570
1,0575	50	528,750	1,0497	100	1049,700

A levegő sűrűsége 101 325 Pa nyomáson

59. táblázat

Hőmérséklet (°C)	Sűrűség (g/dm³)	Hőmérséklet (°C)	Sűrűség (g/dm³)
−40	1,5146	100	0,9456
−30	1,4525	150	0,8338
−20	1,3953	200	0,7455
−10	1,3421	250	0,6742
0,0	1,2929	300	0,6152
10	1,2470	350	0,5658
20	1,2044	400	0,5238
30	1,1646	450	0,4875
40	1,1273	500	0,4559
50	1,0924		

Etanol-víz elegy sűrűsége és C_2H_5OH-tartalma 20 °C hőmérsékleten

60. táblázat

Tömeg-százalék	Sűrűség (g/cm³)	Tömeg-százalék	Sűrűség (g/cm³)
0,5	0,9983	55	0,9026
1	0,9964	60	0,8911
3	0,9928	65	0,8795
5	0,9894	70	0,8677
10	0,9819	75	0,8556
15	0,9751	80	0,8434
20	0,9686	85	0,8310
25	0,9617	90	0,8180
30	0,9538	95	0,8042
35	0,9449	97	0,7985
40	0,9352	99	0,7924
45	0,9247	100	0,7893
50	0,9138		

Az ammónia vizes oldatának sűrűsége és NH_3-tartalma 20 °C hőmérsékleten

61. táblázat

Sűrűség (g/cm^3)	Tömeg-százalék	Tömeg-koncentráció (g/dm^3)	Sűrűség (g/cm^3)	Tömeg-százalék	Tömeg-koncentráció (g/dm^3)
0,998	0,047	0,463	0,938	15,47	145,10
0,996	0,512	5,10	0,936	16,06	150,32
0,994	0,977	9,70	0,934	16,65	155,51
0,992	1,43	14,19	0,932	17,24	160,67
0,990	1,89	18,71	0,930	17,85	166,01
0,988	2,35	23,21	0,928	18,45	171,21
0,986	2,82	27,81	0,926	19,06	176,49
0,984	3,30	32,47	0,924	19,67	181,74
0,982	3,78	37,11	0,922	20,27	186,88
0,980	4,27	41,85	0,920	20,88	192,10
0,978	4,76	46,55	0,918	21,50	197,37
0,976	5,25	51,24	0,916	22,12	202,62
0,974	5,75	56,01	0,914	22,75	207,94
0,972	6,25	61,75	0,912	23,39	213,32
0,970	6,75	65,48	0,910	24,03	218,67
0,968	7,26	70,28	0,908	24,68	224,09
0,966	7,77	75,05	0,906	25,33	229,49
0,964	8,29	79,91	0,904	26,00	235,04
0,962	8,82	84,85	0,902	26,67	240,56
0,960	9,34	89,66	0,900	27,33	245,97
0,958	9,87	94,55	0,898	28,00	251,44
0,956	10,40	99,42	0,896	28,67	256,88
0,954	10,95	104,47	0,894	29,33	262,21
0,952	11,49	109,39	0,892	30,00	267,60
0,950	12,03	114,29	0,890	30,68	273,05
0,948	12,58	119,25	0,888	31,37	278,56
0,946	13,14	124,31	0,886	32,09	284,31
0,944	13,71	129,42	0,884	32,84	290,30
0,942	14,29	134,61	0,882	33,59	296,26
0,940	14,88	139,87	0,880	34,35	302,28

Sóoldatok összetétele és sűrűsége 20 °C hőmérsékleten (g/cm³)

62/a táblázat

Tömeg-százalék	NH_4NO_3	Na_2CO_3	NaCl	$Na_2S_2O_3$	$CaCl_2$	$Al_2(SO_4)_3$	$FeCl_2$	$FeCl_3$
	ρ (g/cm³)							
1	1,002	1,007	1,005	1,007	1,007	1,009	1,007	1,007
2	1,006	1,018	1,013	1,015	1,015	1,019	1,017	1,015
4	1,015	1,038	1,027	1,032	1,032	1,040	1,035	1,032
6	1,023	1,059	1,041	1,048	1,049	1,061	1,054	1,049
8	1,031	1,080	1,056	1,065	1,066	1,083	1,073	1,067
10	1,040	1,101	1,071	1,083	1,084	1,105	1,092	1,085
12	1,048	1,122	1,086	1,100	1,102	1,129	1,113	1,104
14	1,057	1,144	1,101	1,118	1,120	1,152	1,134	1,123
16	1,065	1,164	1,116	1,137	1,139	1,176	1,155	1,142
18	1,074	1,186	1,132	1,155	1,158	1,201	1,177	1,162
20	1,083	1,209	1,148	1,174	1,178	1,226	1,199	1,182
30	1,128	1,327	–	1,274	1,282	–	–	1,291
40	1,175	–	–	1,383	1,396	–	–	1,417
50	1,226	–	–	–	–	–	–	1,551

62/b táblázat

Tömeg-százalék	$CuSO_4$	$AgNO_3$	KBr	KCl	KI	KNO_3	K_2CrO_4	K_2CO_3
	ρ (g/cm³)							
1	1,009	1,007	1,005	1,005	1,006	1,005	1,007	1,007
2	1,019	1,015	1,013	1,011	1,013	1,011	1,015	1,016
4	1,040	1,033	1,028	1,024	1,028	1,023	1,031	1,035
6	1,062	1,050	1,043	1,037	1,044	1,036	1,048	1,053
8	1,083	1,069	1,058	1,050	1,060	1,049	1,065	1,072
10	1,107	1,088	1,074	1,063	1,076	1,063	1,082	1,090
12	1,131	1,108	1,090	1,077	1,093	1,076	1,099	1,109
14	1,155	1,128	1,107	1,091	1,110	1,090	1,118	1,129
16	1,180	1,150	1,124	1,104	1,128	1,104	1,137	1,149
18	1,206	1,172	1,142	1,119	1,147	1,118	1,156	1,169
20	–	1,194	1,160	1,133	1,166	1,133	1,175	1,190
30	–	1,320	1,260	–	1,271	–	1,278	1,298
40	–	1,474	1,375	–	1,396	–	1,396	1,414
50	–	1,658	–	–	1,546	–	–	1,540
60	–	1,916	–	–	1,731	–	–	–

Redoxirendszerek

Kémiai redoxireakciók

Szűkebb értelmezés szerint:
oxidáció: oxigénnel való egyesülés és/vagy hidrogénelvonás
redukció: hidrogénfelvétel és/vagy oxigénleadás

Tágabb értelmezés szerint:
oxidáció: elektronleadás
redukció: elektronfelvétel

A két reakció egymást feltételezi, egy időben megy végbe, a leadott és felvett elektronok száma megegyezik.

$$\begin{array}{ll} \text{oxidáció} & -n\,e^- \\ +n\,e^- & \text{redukció} \end{array}$$

Az oxidálódó anyag a reakciópartner redukálószere. A redukálódó anyag a reakciópartner oxidálószere.

$$\underset{\text{redukálószer}}{Fe} \xrightarrow{\text{oxidáció}} Fe^{2+} + 2e^-$$

$$\underset{\text{oxidálószer}}{Cu^{2+}} + 2e^- \xrightarrow{\text{redukció}} Cu$$

Kovalens molekulák és összetett ionok esetén a redoxireakciók részleges elektronleadással és -felvétellel mennek végbe.

$$\overset{-2}{C}H_3OH \xrightarrow{\text{oxidáció}} \overset{0}{H}COH \xrightarrow{\text{oxidáció}} \overset{+2}{H}COOH \xrightarrow{\text{oxidáció}} \overset{+4}{C}O_2$$

Oxidációs szám: Az oxidáltság mértékének mérőszáma, az atom oxidációs állapotának jellemzésére szolgál. Tényleges vagy névleges töltés, amely az atom elemi állapotához viszonyított oxidációs állapotát mutatja meg.

Oxidáció: az oxidációs szám nő.

Redukció: az oxidációs szám csökken.

Az oxidációs szám meghatározása

63. táblázat

Egyszerű ionok	Kovalens molekulák és összetett ionok	
	elemmolekula	összetett ionok és vegyületmolekulák
Oxidációs számuk megegyezik töltésük számszerű értékével és előjelével.	Bennük az atomok oxidációs száma: 0.	Bennük egy adott atom oxidációs számát úgy számoljuk ki, hogy a kötést létesítő elektronpár(oka)t az elektronegatívabb atomhoz rendeljük. Az így kialakult névleges ionok töltését tekintjük az adott atom oxidációs számának.

A semleges molekulákban az atomok oxidációs számainak algebrai összege: 0, összetett ionokban egyenlő az iontöltéssel.
A redoxireakcióban a leadott és felvett elektronok száma megegyezik. Így az oxidációs-szám-változások előjeles összege: 0.

Oxidációs számok kovalens molekulákban és összetett ionokban:
- Hidrogén: +1 (kivétel a sószerű hidridekben: −1)
- Oxigén: −2 (kivétel a peroxidokban: −1 és szuperoxidokban: −0,5)

A kis szabályok száma lényegesen több:
CH_4: a szénatom oxidációs száma: −4
CH_3OH: a szénatom oxidációs száma: −2
CH_2Cl_2: a szénatom oxidációs száma: 0
HCOOH: a szénatom oxidációs száma: +2
CCl_4: a szénatom oxidációs száma: +4

A redoxifolyamatok iránya, redoxipár

A fématom és a belőle képződött fémion, illetve a nemfématom és a belőle képződött nemfémion redoxipárt képeznek.
A fémek redukálnak, miközben fémionná alakulnak. A nemfémek oxidálnak, miközben nemfémionná alakulnak.

$Zn + Cl_2 = ZnCl_2$

$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$ oxidáció

$Cl_2 + 2e^- \rightarrow 2Cl^-$ redukció

Fémek redukálósora
(Tapasztalat és elektronegativitási értékek alapján)

Ca^{2+}/Ca, Mg^{2+}/Mg, Al^{3+}/Al, Cr^{3+}/Cr, Zn^{2+}/Zn, Fe^{2+}/Fe, H^+/H, Cu^{2+}/Cu, Hg^{2+}/Hg, Ag^+/Ag, Au^{3+}/Au

A fém redukálóképessége csökken
A fémion oxidálóképessége nő →

Nemfémek oxidálósora
(Tapasztalat és elektronegativitási értékek alapján)

F_2/F^-, Cl_2/Cl^-, Br_2/Br^-, I_2/I^-

A nemfémek oxidálóképessége csökken
A nemfémionok redukálóképessége nő →

A redukáló- és oxidálósor alapján általában eldönthető, hogy egy redoxireakció önként végbemegy-e, vagy sem.

Elektrokémiai folyamatok, rendszerek

Elektrokémiai reakciók:
Heterogén redoxireakciók, amelyekben az oxidáció és a redukció mindig a folyadék és a szilárd anyag érintkezési, más szóval határfelületén megy végbe. Térben egymástól elkülönítve zajlik, miközben elektromos energia termelése vagy felhasználása történik. Mindez a kémiai és elektromos energia egymásba való kölcsönös átalakulása révén megy végbe.
Az elektrokémiai folyamatok **nem azonosak** a kémiai redoxireakciókkal.

64. táblázat

Kémiai redoxireakció	Elektrokémiai reakció
Közvetlen elektronátmenet Energiaváltozás: hő, esetleg fény	Elektronleadás és -felvétel két külön helyen Energiaváltozás: elektromos energia
Oxidáció és redukció megy végbe	

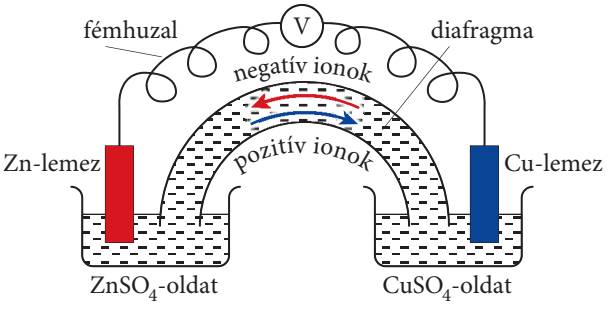
Elektrokémiai rendszer:
Biztosítja a fémes vezetőn történő elektronátmenetet és az elektrolitos (másodrendű) vezetést.
Fajtái: galváncella, elektrolizálócella.

Kémiai áramforrások

Galvánelemek

A galvánelemek kémiai energiát alakítanak át elektromos energiává.
Részei:

- Két elektród
  Az *elektród* egy elem redukált és oxidált alakját tartalmazó rendszer, amely elektrolit(oldat)ot és vele érintkező fémet vagy fémes vezetőt tartalmaz.
  Anód: a felületén oxidáció megy végbe.
  Katód: a felületén redukció megy végbe.
- *Fémes vezető:* fémhuzal, amely összeköti az elektródokat, és így biztosítja az elektronok mozgását az elektródok között.
- *Diafragma:* az elektrolitok keveredését megakadályozza, de az ionok vándorlása révén biztosítja a töltéskiegyenlítődést.



Celladiagram:

$$\ominus\ \underset{\text{anód}}{\text{Zn(sz)}}\ \big|\ \text{Zn}^{2+}\text{(aq)}\ \big\|\ \text{Cu}^{2+}\text{(aq)}\ \big|\ \underset{\text{katód}}{\text{Cu(sz)}}\ \oplus$$

Elektrokémiai reakciók standardpotenciáljai 101 325 Pa nyomáson 25 °C-on egységnyi koncentrációjú (mol/dm³) oldatban

65. táblázat

Elektródfolyamat	ε^0 (V)
$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$	0,80
$Al^{3+} + 3\ e^- \longrightarrow Al$	−1,66
$As^{3+} + 3\ e^- \longrightarrow As$	0,3
$AsO_4^{3-} + 2\ H^+ + 2\ e^- \longrightarrow AsO_3^{3-} + H_2O$	0,24
$Au^+ + e^- \longrightarrow Au$	1,68
$Au^{3+} + 3\ e^- \longrightarrow Au$	1,42
$Au^{3+} + 2\ e^- \longrightarrow Au^+$	1,29
$Ba^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow Ba$	−2,90
$Be^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow Be$	−1,70
$Bi^{3+} + 3\ e^- \longrightarrow Bi$	0,2
$Br_2(aq) + 2\ e^- \longrightarrow 2\ Br^-$	1,087
$BrO^- + H_2O + 2\ e^- \longrightarrow Br^- + 2\ OH^-$	0,76

Elektródfolyamat		ε^0 (V)
$BrO_3^- + 6\ H^+ + 5\ e^-$	$1/2\ Br_2 + 3\ H_2O$	1,52
$BrO_3^- + 6\ H^+ + 6\ e^-$	$Br^- + 3\ H_2O$	1,44
$Ca^{2+} + 2\ e^-$	Ca	−2,87
$Cd^{2+} + 2\ e^-$	Cd	−0,40
$Ce^{3+} + 3\ e^-$	Ce	−2,48
$Ce^{4+} + e^-$	Ce^{3+}	1,61
$Cl_2(g) + 2\ e^-$	$2\ Cl^-$	1,35
$Cl_2(aq) + 2\ e^-$	$2\ Cl^-$	1,40
$ClO^- + H_2O + 2\ e^-$	$Cl^- + 2\ OH^-$	0,89
$Co^{2+} + 2\ e^-$	Co	−0,28
$Cr^{3+} + 3\ e^-$	Cr	−0,71
$Cr_2O_7^{2-} + 14\ H^+ + 6\ e^-$	$2\ Cr^{3+} + 7\ H_2O$	1,33
$Cs^+ + e^-$	Cs	−3,02
$Cu^+ + e^-$	Cu	0,52
$Cu^{2+} + 2\ e^-$	Cu	0,34
$Cu^{2+} + e^-$	Cu^+	0,16
$2\ D^+ + 2\ e^-$	D_2	−0,044
$F_2 + 2\ e^-$	$2\ F^-$	2,65
$Fe^{2+} + 2\ e^-$	Fe	−0,44
$Fe^{3+} + 3\ e^-$	Fe	−0,036
$Fe^{3+} + e^-$	Fe^{2+}	0,77
$2\ H^+ + 2\ e^-$	H_2	0,00
$2\ H_2O + 2\ e^-$	$H_2 + 2\ OH^-$	−0,83
$Hg_2^{2+} + 2\ e^-$	$2\ Hg$	0,80
$Hg^{2+} + 2\ e^-$	Hg	0,85
$2\ Hg^{2+} + 2\ e^-$	Hg_2^{2+}	0,91
$I_2(sz) + 2\ e^-$	$2\ I^-$	0,535
$I^{3-} + 2\ e^-$	$3\ I^-$	0,54
$IO_3^- + 6\ H^+ + 5\ e^-$	$1/2\ I_2 + 3\ H_2O$	1,19
$IO_3^- + 6\ H^+ + 6\ e^-$	$I^- + 3\ H_2O$	1,085
$K^+ + e^-$	K	−2,93
$Mg^{2+} + 2\ e^-$	Mg	−2,34
$Mn^{2+} + 2\ e^-$	Mn	−1,05
$MnO_4^- + e^-$	MnO_4^{2-}	0,56
$MnO_4^- + 8\ H^+ + 5\ e^-$	$Mn^{2+} + 4\ H_2O$	1,51
$MnO_2 + 4\ H^+ + 2\ e^-$	$Mn^{2+} + 2\ H_2O$	1,21
$Na^+ + e^-$	Na	−2,71
$Ni^{2+} + 2\ e^-$	Ni	−0,25
$NO_3^- + 2\ H^+ + 2\ e^-$	$NO_2^- + H_2O$	0,84
$O_2 + 2\ H_2O + 4\ e^-$	$4\ OH^-$	0,40
$O_2 + 4\ H^+ + 4\ e^-$	$2\ H_2O$	1,23
$O_2 + e^-$	O_2^-	−0,56
$H_2O_2 + 2\ H^+ + 2\ e^-$	$2\ H_2O$	1,78
$Pb^{2+} + 2\ e^-$	Pb	−0,13

65. táblázat folytatása

Elektródfolyamat		ε^0 (V)
$Pt^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Pt	1,2
$Rb^+ + e^- \longrightarrow$	Rb	−2,99
$S + 2\ e^- \longrightarrow$	S^{2-}	−0,51
$SO_4^{2-} + 2\ H^+ + 2\ e^- \longrightarrow$	$SO_3^{2-} + H_2O$	−0,10
$S_4O_6^{2-} + 2\ e^- \longrightarrow$	$2\ S_2O_3^{2-}$	0,17
$Sb^{3+} + 3\ e^- \longrightarrow$	Sb	0,24
$Sb^{5+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Sb^{3+}	0,80
$Sn^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Sn	−0,14
$Sn^{4+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Sn^{2+}	0,15
$Sr^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Sr	−2,89
$Zn^{2+} + 2\ e^- \longrightarrow$	Zn	−0,76

Elektródpotenciál: A fémes vezető és az elektrolitoldat közötti egyensúlyi potenciálkülönbség. Jele: ε.
Mértékegysége: volt (V).
Függ:
- az elektrolit és a fém anyagi minőségétől
- az elektrolit koncentrációjától
- a hőmérséklettől
- gázelektródok esetén a nyomástól

a) Ha a fém könnyen oxidálódik, az egyensúlyi elektródpotenciálja negatív (−), például a cink.
b) Ha a fém nehezen oxidálódik (a fémion könnyen redukálódik), az egyensúlyi elektródpotenciálja pozitív (+), például a réz.

Az *elektródpotenciál* abszolút értéke nem mérhető. Ezért elektródpotenciálon (ε) annak a galvánelemnek az elektromotoros erejét értjük, amelynek egyik elektródja a vizsgált, a másik a standard hidrogénelektród.
A standard hidrogénelektród elektródpotenciálja megállapodás szerint: 0.

Standard elektródpotenciál (ε_0) annak a galvánelemnek az elektromotoros ereje, amelynek egyik elektródja a standard hidrogénelektród, a másik pedig az adott elektród. Az ionkoncentráció 1 mol/dm^3, a hőmérséklet 25 °C, a nyomás 0,1 MPa.

A galvánelem működése: a fémes vezetőn keresztül a potenciálkülönbség kiegyenlítődése révén áram folyik.

Elektromotoros erő (E): a két elektród közötti maximális potenciálkülönbség, amelyet akkor mérünk, ha a galvánelemen nem halad át áram.
Jele: E_{ME}.
Mértékegysége: volt (V).

Elektromotoros erő kiszámítása a standardpotenciálok ismeretében

$E_{ME} = \varepsilon_k - \varepsilon_a$

E_{ME} = elektromotoros erő
ε_k = a katód elektródpotenciálja
ε_a = az anód elektródpotenciálja

$\varepsilon^0_{Cu^{2+}/Cu} = +0{,}34$
$\varepsilon^0_{Zn^{2+}/Zn} = -0{,}76$
$\varepsilon = 0{,}34 - (-0{,}76) = 1{,}1$ volt

A pozitívabb standardpotenciálból (katód) vonjuk ki a negatívabb standardpotenciált (anód).
A standardpotenciálok különbsége 25 °C-on és 0,1 MPa nyomáson adja meg az elektromotoros erő értékét.

A standardpotenciálok előjeles értéke mindig a redukció irányába felírt elektródfolyamat standardpotenciálját jelenti.

$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu \qquad \varepsilon^0 = +0{,}34$ V

Az oxidáció irányába felírt elektródfolyamatra:

$Cu \rightarrow Cu^{2+} + 2e^- \qquad \varepsilon^0 = -0{,}34$ V

Nernst-egyenlet: az elektródpotenciál koncentráció- és hőmérsékletfüggését kifejező összefüggés.
Nernst-egyenlet: (25 °C; 0,1 MPa)

$$\varepsilon_{aktuális} = \varepsilon^0 + \frac{0{,}059}{z} \cdot \lg[Me^{z+}], \text{ ahol}$$

ε = a rendszer aktuális potenciálja
ε^0 = a rendszer standardpotenciálja
z = a fématom és a fémion közötti oxidációsszám-különbség
$[Me^{z+}]$ = az elektrolitoldat fémionkoncentrációja (mol/dm^3)

A standardpotenciálok és a redoxireakciók
A pozitívabb ε^0 értékű rendszer oxidálja a kisebb ε_0 (standardpotenciál) értékű rendszert (lásd: fémek redukálósora, nemfémek oxidálósora). Pl.: $Cu^{2+} + Fe \rightarrow Fe^{2+} + Cu$
A kiválasztott redukciós sorozatok ε^0-értékeinek összehasonlítása gyors tájékozódási lehetőséget kínál a redoxireakciók önkéntes lejátszódásának várható irányára.
Például:

$\varepsilon^0\ Fe^{3+}/Fe = -0{,}036$ V
$\varepsilon^0\ Fe^{2+}/Fe = -0{,}441$ V
$\varepsilon^0\ Fe^{3+}/Fe^{2+} = +0{,}77$ V

Az önként végbemenő reakció: $2\ Fe^{3+} + Fe \rightarrow 3\ Fe^{2+}$

- A pozitívabb standardpotenciálú redoxirendszer oxidálni képes a kevésbé pozitív standardpotenciálú redoxirendszert.
- A negatívabb standardpotenciálú rendszer redukálni képes a nagyobb standardpotenciálú redoxirendszert.
- Nem oxidáló hatású savakkal csak a negatív standardpotenciálú fémek reagálnak, hidrogénfejlődés közben.

Redoxirendszerek standardpotenciál-értékei és redoxi tulajdonságai közötti kapcsolat

66. táblázat

ε^0 (V)	Csoport	Példa	ε^0 (V)	Csoport	Példa
+1,51	erős oxidálószer	MnO_4^{2-}/Mn^{2+}	+0,15	gyenge redukálószer	Sn^{4+}/Sn^{2+}
+1,35	közepes oxidálószer	Cl_2 (aq) / Cl^-	0	közepes redukálószer	H^+/H_2 (g)
+0,535	gyenge oxidálószer	I_2 (sz) / I^-	−2,71	erős redukálószer	Na^+/Na

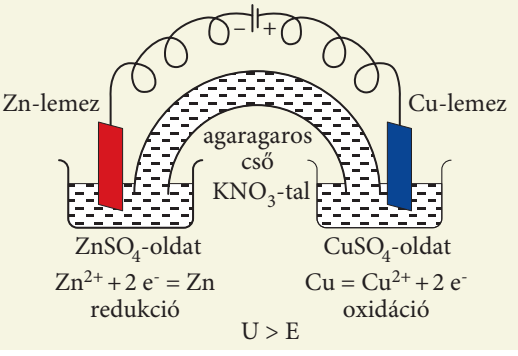
Elektrolízis

Az elektromos energia kémiai energiává is átalakulhat.

Elektrolízis: elektromos energia hatására bekövetkező redoxireakció.

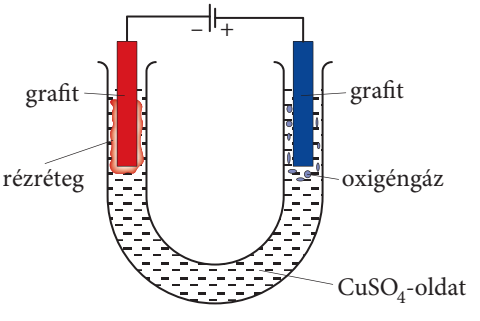
Ha a galvánelem elektródjaira megegyező polaritással a galvánelem elektromotoros erejével **megegyező nagyságú** vagy nagyobb **egyenfeszültséget kapcsolunk**, akkor a galvánelemben lezajló elektródfolyamatokkal ellentétes redoxireakciók indulnak meg.

Bontásfeszültség: az elektrolízis megindulásához és folyamatos végbemeneteléhez szükséges feszültség.
Jele: *U*, mértékegysége: V (volt).
A bontásfeszültség függ:
- az elektródreakcióban részt vevő komponensek minőségétől,
- az elektrolit koncentrációjától,
- az elektródok minőségétől.



Az elektrolízis **elektrolizálócellában** megy végbe.

Az elektrolizálócella részei:
- két fém- vagy más vezető elektród (pl. grafit)
- közös elektrolitoldat
- egyenáramú feszültségforrás



Az elektrolízis lépései:
- ionvándorlás
- oxidációs-redukciós folyamatok

Ionvándorlás: Az elektroliton áthaladó egyenáram hatására történő ionmozgás. A pozitív töltésű ionok a negatív töltésű elektród (katód), a negatív töltésű ionok a pozitív töltésű elektród (anód) felé vándorolnak.

Elektrolíziskor az ionvándorlás során a katódhoz érkező pozitív töltésű ionok vagy dipólmolekulák redukálódnak. Az anódhoz érkező negatív töltésű ionok vagy dipólmolekulák oxidálódnak.

Az elektródfolyamatok közül mindig az valósul meg, amelyikhez a **legkisebb energia** szükséges. Ez nemcsak az elektrolízisben részt vevő ionok minőségétől, tehát a standardpotenciál értékektől függ, hanem például az elektródok anyagától is.

A hidrogén túlfeszültsége fémeken

67. táblázat

Az elektródfém	Túlfeszültség (V)
Pt (platinázott)	0,005
Au	0,02
Ni (szivacsos)	0,05
Pt (sima)	0,08
Ag	0,15
Cu	0,16
Fe	0,17
Ni (sima)	0,21
Pb	0,64
Hg	0,78
C	≈ 0,00

A hidrogén túlfeszültségének köszönhető, hogy olyan fémek is leválaszthatók vizes oldatokból, amelyek ε^0 értéke negatívabb a hidrogénnél.
Az összetett ionok oxidációjához nagy energia szükséges.

Elektrolízis vizes oldatokban – elektródfolyamatok

68. táblázat

Elektród	Katód	Anód
Víz	1. $2\ H_2O + 2\ e^- = H_2 + 2\ OH^-$ vagy: $2\ H_3O^+ + 2\ e^- = H_2 + 2\ H_2O$	2. $H_2O = 2\ H^+ + 0{,}5\ O_2 + 2\ e^-$ vagy: $3\ H_2O = 0{,}5\ O_2 + 2\ H_3O^+ + 2\ e^-$
Sav	$2\ H^+ + 2\ e^- = H_2$ vagy: $2\ H_3O^+ + 2\ e^- = H_2 + 2\ H_2O$	Összetett anion esetén $H_2O = 2\ H^+ + 0{,}5\ O_2 + 2\ e^-$ Haloidsavaknál $2\ X^- = X_2 + 2\ e^-$
Lúg	1. Elektródreakció (pl. Na^+, K^+, NH_4^+) vagy $Me^{n+} + n\ e^- = Me$	$2\ OH^- = 0{,}5\ O_2 + H_2O + 2\ e^-$
Só	1. reakció (Na^+, K^+, NH_4^+ stb. esetén) vagy $Me^{n+} + n\ e^- = Me$	Összetett anion esetén $H_2O = 2\ H^+ + 0{,}5\ O_2 + 2\ e^-$ vagy $2\ X^- = X_2 + 2\ e^-$

A táblázat jelölései: X^- – halogenidion
Me^{n+} – fémion
Az elektródok anyaga szén vagy platina.

Az elektrolízis mennyiségi törvényei

Faraday I. törvénye

Az elektrolízis során az elektródokon átalakuló és kiváló anyag tömege (m) arányos az alkalmazott áramerősséggel (I) és az elektrolízis időtartamával (t).

$$m = k \cdot I \cdot t$$

k = elektrolízisállandó: Az 1 C töltésmennyiség által leválasztott anyag tömege (g/C)

1 coulomb = 1 A · s

m = a levált anyag tömege (g)
I = az áthaladó áram erőssége (A)
t = az elektrolízis időtartama (s)
$Q = I \cdot t$
$m = k \cdot Q$

Faraday II. törvénye

Az elektrolizálócellán áthaladt töltés és az elektródfolyamatban részt vevő elektronok anyagmennyisége arányos egymással. 1 mol z töltésű ion semlegesítéséhez $z \cdot 96\,500$ C töltésmennyiség szükséges.
n = anyagmennyiség (mol)
F = 96 500 C/mol Faraday-szám
1 Faraday = 96 500 C = 1 mol elektron töltése

1 elektron töltése: $\frac{96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}}{6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

A két törvény egyesítése

$$m = \frac{M}{z \cdot F} \cdot I \cdot t$$

M = a leválasztott anyag moláris tömege
z = az oxidációs szám változása

Az elektrolízis gyakorlati felhasználása

1. Galvanizálás (fémbevonat készítése)
   a) korrózióvédelem
   b) díszítő célú galvanizálás
2. Fémelőállítás
   a) timföldelektrolízis
   b) nátrium-klorid olvadékának elektrolízise (nátrium-előállítás)
3. Fémek tisztítása elektrolízissel (raffinálás)

A galvánelemek gyakorlati felhasználása. Elemek, akkumulátorok

69/a táblázat

Az elem elnevezése	Az elem összetétele és az elemben végbemenő folyamatok	Elektromotoros erő (V)
Leclanché-szárazelem	(–) Zn (Hg | tel. NH_4Cl kocsonyásított, MnO_2 | C (+) K: $2\ H^+ + 2\ MnO_2 + 2\ e^- = H_2O + Mn_2O_3$ A: $Zn = Zn^{2+} + 2\ e^-$ Bruttó reakció: $Zn + 2\ NH_4Cl + MnO_2 = Zn(NH_3)_2Cl_2 + Mn_2O_3 + H_2O$	≈ 1,5
Higany-oxidos elem	(–) Cd | KOH (kocsonyásított) | HgO (+) A: $Cd + 2\ OH^- = CdO + H_2O + 2\ e^-$ K: $HgO + 2\ e^- + H_2O = Hg + 2\ OH^-$ Bruttó reakció: $Cd + HgO = Hg + CdO$	≈ 1,344

69/b táblázat

Az akkumulátor elnevezése	Az akkumulátor felépítése és az akkumulátorban végbemenő folyamatok	Elektromotoros erő (V)
Pb-akkumulátor	(–) Pb | 30-35%-os H_2SO_4 | PbO_2 (Pb) (+) A: $Pb + SO_4^{2-} = PbSO_4 + 2\ e^-$ K: $PbO_2 + 4\ H^+ + SO_4^{2-} + 2\ e^- = PbSO_4 + 2\ H_2O$ Bruttó reakció: $Pb + PbO_2 + 2\ H_2SO_4 \underset{\text{töltés}}{\overset{\text{kisütés}}{\rightleftharpoons}} 2\ PbSO_4 + 2\ H_2O$	≈ 2
Ni-Cd akkumulátor	(–) Cd | 20%-os KOH | $Ni(OH)_3$ | Ni (+) A: $Cd = Cd^{2+} + 2\ e^-$ $Cd^{2+} + 2\ OH^- = Cd(OH)_2$ K: $2\ Ni(OH)_3 = 2\ Ni^{3+} + 6\ OH^-$ $2\ Ni^{3+} + 2e^- = 2\ Ni^{2+}$ $2\ Ni^{2+} + 4\ OH^- = 2\ Ni(OH)_2$ Bruttó reakció: $Cd + 2\ Ni(OH)_3 \underset{\text{töltés}}{\overset{\text{kisütés}}{\rightleftharpoons}} 2\ Ni(OH)_2 + Cd(OH)_2$	≈ 1,36

Sav-bázis rendszerek

Protolitikus reakciók

A Brønsted–Lowry-elmélet szerint a sav-bázis reakciókban protonátmenet történik.

Sav: a reakció során protont ad le.
Bázis: a reakció során protont vesz fel.

A protonleadási és -felvételi készség mindig a partnertől függ.
A Brønsted–Lowry-féle sav-bázis elmélet alapegyenlete:

$$\text{sav}_1 \rightleftharpoons \text{bázis}_1 + H^+$$
$$\text{bázis}_2 + H^+ \rightleftharpoons \text{sav}_2$$

Összegreakció: $\text{sav}_1 + \text{bázis}_2 \rightleftharpoons \text{bázis}_1 + \text{sav}_2$

A savak erősségét vizes oldatban a protonleadási készségükkel jellemezhetjük, amelyet a

$\underset{\text{sav}_1}{HA} + \underset{\text{bázis}_2}{H_2O} \rightleftharpoons \underset{\text{bázis}_1}{A^-} + \underset{\text{sav}_2}{H_3O^+}$ egyenlet egyensúlyi állandója mutat: $K_s = \dfrac{[A^-][H_3O^+]}{[HA]}$

Ha a sav erős, akkor bázispárja gyenge és fordítva.

$$\underset{\text{bázis}_1}{NH_3} + \underset{\text{sav}_2}{H_2O} \rightleftharpoons \underset{\text{sav}_1}{NH_4^+} + \underset{\text{bázis}_2}{OH^-}$$

A bázis erősségét is az egyensúlyi állandóval jellemezhetjük:

$$K_b = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}$$

A víz savként és bázisként is szerepelhet (amfoter):

$$\underset{\text{sav}_1}{H_2O} + \underset{\text{bázis}_2}{H_2O} \rightleftharpoons \underset{\text{bázis}_1}{OH^-} + \underset{\text{sav}_2}{H_3O^+}$$

$[H_2O] = \text{konstans}$

Ha az egyensúlyi állandó értéke nagy, akkor erős savakról és bázisokról, ha kicsi, akkor gyenge savakról és bázisokról beszélünk.

Savi disszociációs állandók vizes oldatban a savak erőssége sorrendjében 25 °C-on
(A savkitevő: $pK_s = -\lg K_s$)

70/a táblázat

Sav	HA	A^-	K_s	pK_s
Hidrogén-jodid	HI	I^-	10^{11}	−11
Perklórsav	$HClO_4$	ClO_4^-	10^{10}	−10
Hidrogén-bromid	HBr	Br^-	10^9	−9
Sósav	HCl	Cl^-	10^7	−7
Kénsav (1)	H_2SO_4	HSO_4^-	10^2	−2
Oxóniumion	H_3O^+	H_2O	1	0,0
Oxálsav (1)	$(COOH)_2$	$HOOCCOO^-$	$5{,}9 \cdot 10^{-2}$	1,23
Kénessav (1)	H_2SO_3	HSO_3^-	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	1,81
Kénsav (2)	HSO_4^-	SO_4^{2-}	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	1,92
Foszforsav (1)	H_3PO_4	$H_2PO_4^-$	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	2,12
Hidrogén-fluorid	HF	F^-	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$	3,45
Hangyasav	HCOOH	$HCOO^-$	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	3,75
Tejsav	$CH_3CH(OH)COOH$	$CH_3CH(OH)COO^-$	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	3,86
Oxálsav (2)	$HOOCCO_2^-$	$(COO)_2^{2-}$	$6{,}5 \cdot 10^{-5}$	4,19
Aniliniumion	$C_6H_5NH_3^+$	$C_6H_5NH_2$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	4,63
Ecetsav	CH_3COOH	CH_3COO^-	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	4,75
Vajsav	C_3H_7COOH	$C_3H_7COO^-$	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	4,82
Propionsav	C_2H_5COOH	$C_2H_5COO^-$	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	4,87
Piridiniumion	$HC_5H_5N^+$	C_5H_5N	$5{,}6 \cdot 10^{-6}$	5,25
Szénsav (1)	H_2CO_3	HCO_3^-	$4{,}3 \cdot 10^{-7}$	6,37
Kén-hidrogén (1)	H_2S	HS^-	$9{,}1 \cdot 10^{-8}$	7,04
Foszforsav (2)	$H_2PO_4^-$	HPO_4^{2-}	$6{,}2 \cdot 10^{-8}$	7,21
Kénnessav (2)	HSO_3^-	SO_3^{2-}	$6{,}3 \cdot 10^{-8}$	7,2
Hipoklórossav	HClO	ClO^-	$3{,}0 \cdot 10^{-8}$	7,53
Hidrazóniumion	$NH_2NH_3^+$	NH_2NH_2	$5{,}9 \cdot 10^{-9}$	8,23
Hipobrómossav	HBrO	BrO^-	$2{,}0 \cdot 10^{-9}$	8,69
Bórsav (1)	H_3BO_3	$H_2BO_3^-$	$7{,}2 \cdot 10^{-10}$	9,14
Ammóniumion	NH_4^+	NH_3	$5{,}6 \cdot 10^{-10}$	9,25
Hidrogén-cianid	HCN	CN^-	$4{,}9 \cdot 10^{-10}$	9,31
Glicin	NH_2CH_2COOH	$NH_2CH_2COO^-$	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$	9,78
Trimetilammóniumion	$(CH_3)_3NH^+$	$(CH_3)_3N$	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	9,81
Fenol	C_6H_5OH	$C_6H_5O^-$	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	9,89
Szénsav (2)	HCO_3^-	CO_3^{2-}	$4{,}8 \cdot 10^{-11}$	10,32
Hipojódossav	HIO	IO^-	$2{,}3 \cdot 10^{-11}$	10,64
Metilammóniumion	$CH_3NH_3^+$	CH_3NH_2	$2{,}2 \cdot 10^{-11}$	10,66
Dimetilammóniumion	$(CH_3)_2NH_2^+$	$(CH_3)_2NH$	$1{,}9 \cdot 10^{-11}$	10,73
Trietilammóniumion	$(C_2H_5)_3NH^+$	$(C_2H_5)_3N$	$1{,}7 \cdot 10^{-11}$	10,76
Etilammóniumion	$C_2H_5NH_3^+$	$C_2H_5NH_2$	$1{,}6 \cdot 10^{-11}$	10,81
Dietilammóniumion	$(C_2H_5)_2NH_2^+$	$(C_2H_5)_2NH$	$1{,}0 \cdot 10^{-11}$	11,00
Kén-hidrogén (2)	HS^-	S^{2-}	$1{,}1 \cdot 10^{-12}$	11,96
Foszforsav (3)	HPO_4^{2-}	PO_4^{3-}	$2{,}2 \cdot 10^{-13}$	12,67

A zárójelben levő számok az 1., 2., 3. disszociációs lépcsőre vonatkoznak.

Savi disszociációs állandók vizes oldatokban ábécésorrendben

70/b táblázat

Sav	HA	A^-	K_s	pK_s
Ammóniumion	NH_4^+	NH_3	$5{,}6 \cdot 10^{-10}$	9,25
Aniliniumion	$C_6H_5NH_3^+$	$C_6H_5NH_2$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	4,63
Arzénsav (3)	$HAsO_4^{2-}$	AsO_4^{3-}	$3{,}0 \cdot 10^{-12}$	11,53
Bórsav (1)	H_3BO_3	$H_2BO_3^-$	$7{,}2 \cdot 10^{-10}$	9,14
Dietil-ammóniumion	$(C_2H_5)_2NH_2^+$	$(C_2H_5)_2NH$	$1{,}0 \cdot 10^{-11}$	11,00
Dimetil-ammóniumion	$(CH_3)_2NH_2^+$	$(CH_3)_2NH$	$1{,}9 \cdot 10^{-11}$	10,73
Ecetsav	CH_3COOH	CH_3COO^-	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	4,75
Etil-ammóniumion	$C_2H_5NH_3^+$	$C_2H_5NH_2$	$1{,}6 \cdot 10^{-11}$	10,81
Fenol	C_6H_5OH	$C_6H_5O^-$	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$	9,89
Foszforsav (1)	H_3PO_4	$H_2PO_4^-$	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	2,12
Foszforsav (2)	$H_2PO_4^-$	HPO_4^{2-}	$6{,}2 \cdot 10^{-8}$	7,21
Foszforsav (3)	HPO_4^{2-}	PO_4^{3-}	$2{,}2 \cdot 10^{-13}$	12,67
Glicin	NH_2CH_2COOH	$NH_2CH_2COO^-$	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$	9,78
Hangyasav	$HCOOH$	$HCOO^-$	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	3,75
Hidrazóniumion	$NH_2NH_3^+$	NH_2NH_2	$5{,}9 \cdot 10^{-9}$	8,23
Hidrogén-jodid	HI	I^-	10^{11}	−11
Hidrogén-bromid	HBr	Br^-	10^{9}	−9
Hidrogén-cianid	HCN	CN^-	$4{,}9 \cdot 10^{-10}$	9,31
Hidrogén-fluorid	HF	F^-	$3{,}5 \cdot 10^{-4}$	3,45
Hidrogén-klorid	HCl	Cl^-	10^{7}	−7
Hidrogén-szulfát-anion	HSO_4^-	SO_4^{2-}	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	1,92
Hipobrómossav	HBrO	BrO^-	$2{,}0 \cdot 10^{-9}$	8,69
Hipoklórossav	HClO	ClO^-	$3{,}0 \cdot 10^{-8}$	7,53
Kén-hidrogén (1)	H_2S	HS^-	$9{,}1 \cdot 10^{-8}$	7,04
Kén-hidrogén (2)	HS^-	S^{2-}	$1{,}1 \cdot 10^{-12}$	11,96
Kénsav (1)	H_2SO_4	HSO_4^-	10^{2}	−2
Kénsav (2)	HSO_4^-	SO_4^{2-}	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	1,92
Kénessav (1)	H_2SO_3	HSO_3^-	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	1,81
Kénessav (2)	HSO_3^-	SO_3^{2-}	$6{,}3 \cdot 10^{-8}$	7,2
Metil-ammóniumion	$CH_3NH_3^+$	CH_3NH_2	$2{,}2 \cdot 10^{-11}$	10,66
Oxálsav (1)	$(COOH)_2$	$HOOCCOO^-$	$5{,}9 \cdot 10^{-2}$	1,23
Oxálsav (2)	$HOOCCO_2^-$	$(COO)_2^{2-}$	$6{,}5 \cdot 10^{-5}$	4,19
Oxóniumion	H_3O^+	H_2O	1	0,0
Perklórsav	$HClO_4$	ClO_4^-	10^{10}	−10
Piridiniumion	$HC_5H_5N^+$	C_5H_5N	$5{,}6 \cdot 10^{-6}$	5,25
Propionsav	C_2H_5COOH	$C_2H_5COO^-$	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	4,87
Szénsav (1)	H_2CO_3	HCO_3^-	$4{,}3 \cdot 10^{-7}$	6,37
Szénsav (2)	HCO_3^-	CO_3^{2-}	$4{,}8 \cdot 10^{-11}$	10,32
Tejsav	$CH_3CH(OH)COOH$	$CH_3CH(OH)COO^-$	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	3,86
Trietil-ammóniumion	$(C_2H_5)_3NH^+$	$(C_2H_5)_3N$	$1{,}7 \cdot 10^{-11}$	10,76
Trimetil-ammóniumion	$(CH_3)_3NH^+$	$(CH_3)_3N$	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	9,81
Vajsav	C_3H_7COOH	$C_3H_7COO^-$	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	4,82

A zárójelben levő számok az 1., 2., 3. disszociációs lépcsőre vonatkoznak.

Bázisok disszociációs egyensúlyi állandói és báziskitevői 25 °C-on
(A báziskitevő: $pK_b = -\lg K_b$)

71. táblázat

Vegyület	Bázisforma	Savforma	K_b	pK_b
Alumínium-hidroxid	$Al(OH)_3$ $Al(OH)_2^+$	$Al(OH)_2^+$ $Al(OH)^{2+}$	$5 \cdot 10^{-9}$ $2 \cdot 10^{-10}$	8,3 9,7
Anilin	$C_6H_5NH_2$	$C_6H_5NH_3^+$	$3{,}83 \cdot 10^{-10}$	9,42
Ammónia	$NH_3(aq)$	NH_4^+	$1{,}79 \cdot 10^{-5}$	4,75
Berillium-hidroxid	$Be(OH)_2$ $Be(OH)^+$	$Be(OH)^+$ Be^{2+}	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$ $5 \cdot 10^{-11}$	5,75 10,3
Glicin	NH_2CH_2COOH	$NH_3CH_2COOH^+$	$2{,}26 \cdot 10^{-12}$	11,65
Hidrazin	NH_2NH_2	$NH_2NH_3^+$	$3{,}0 \cdot 10^{-6}$	5,52
Hidroxil-amin	NH_2OH	NH_3OH^+	$1{,}07 \cdot 10^{-8}$	7,97
Kalcium-hidroxid	$Ca(OH)_2$	$Ca(OH)^+$	$3{,}74 \cdot 10^{-3}$	2,43
Karbamid	$CO(NH_2)_2$	$CO(NH_3^+)(NH_2)$	$1{,}50 \cdot 10^{-14}$	13,82
Magnézium-hidroxid	$Mg(OH)_2$ $Mg(OH)^+$	$Mg(OH)^+$ Mg^{2+}	10^{-1} $2{,}5 \cdot 10^{-3}$	1 2,6
Imidazol	$C_3H_4N_2$	$C_3H_4N_2H^+$	$1{,}12 \cdot 10^{-7}$	6,95
Piridin	C_5H_5N	$C_5H_5NH^+$	$1{,}40 \cdot 10^{-9}$	8,85

A víz ionszorzata különböző hőmérsékleten
$K_v = [H^+] \cdot [OH^-]$

72. táblázat

t (°C)	K_v	t (°C)	K_v	t (°C)	K_v
0	$0{,}13 \cdot 10^{-14}$	20	$0{,}86 \cdot 10^{-14}$	28	$1{,}62 \cdot 10^{-14}$
5	$0{,}21 \cdot 10^{-14}$	21	$0{,}93 \cdot 10^{-14}$	29	$1{,}76 \cdot 10^{-14}$
10	$0{,}36 \cdot 10^{-14}$	22	$1{,}00 \cdot 10^{-14}$	30	$1{,}89 \cdot 10^{-14}$
15	$0{,}58 \cdot 10^{-14}$	23	$1{,}10 \cdot 10^{-14}$	40	$3{,}80 \cdot 10^{-14}$
16	$0{,}63 \cdot 10^{-14}$	24	$1{,}19 \cdot 10^{-14}$	50	$5{,}60 \cdot 10^{-14}$
17	$0{,}68 \cdot 10^{-14}$	25	$1{,}27 \cdot 10^{-14}$	60	$12{,}6 \cdot 10^{-14}$
18	$0{,}74 \cdot 10^{-14}$	26	$1{,}38 \cdot 10^{-14}$	70	$21 \cdot 10^{-14}$
19	$0{,}79 \cdot 10^{-14}$	27	$1{,}50 \cdot 10^{-14}$		

A savas és bázikus kémhatás mértékét a pH jelzi. $pH = -\lg [H^+]$
A pH-t 0–13-ig értelmezzük.

Sav-bázis indikátorok

Az indikátorok színátcsapása (színváltozása) az indikátortól függően más-más pH-intervallumban következik be. Néhány ilyen adatot mutat az alábbi táblázat:

73. táblázat

Indikátor	pH											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Timolkék	vörös				sárga							
Metilvörös			vörös							sárga		
Bróm-timolkék					sárga					kék		
Fenolftalein						színtelen					bíborvörös	
Univerzális, a négy indikátor keveréke	vörös		narancs			narancs		sárga		zöldessárga	zöld	kékes-zöld
	savas						semleges				lúgos	

Zöldség- és gyümölcsindikátorok színváltozásai a pH függvényében

74. táblázat

Indikátor	pH										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Piros alma	n			gyr				s–z			
Sárgarépa	év							bi			
Áfonya	év			bi				z			
Vörös káposzta	v		r	bi		k					
Cseresznye	v			n				b		z	
Szőlőlé		v						z			
Lila hagyma	gyr				sz			s			
Hagyma	sz								s		
Őszibarack	n		r								
Körte	n	r						z			
Szilva		v			bi			z			
Retek	én			r			bi			b	
Rebarbara	n	r		bi	k					világos b	
Paradicsom		sz					s			sötét s	
Fehérrépa	v		bi			k				z	

v = vörös, bi = bíborszínű, r = rózsaszín, k = kék, b = barna, s = sárga, sz = színtelen, n = narancssárga, z = zöld, é = élénk, gy = gyenge

Néhány sav-bázis indikátor színváltozása

75/a táblázat

Indikátor	Savas közegben	Lúgos közegben	pH-intervallum
Metilibolya	sárga	ibolya	0–2
Timolkék	rózsaszín	sárga	1,2–2,8
Brómfenolkék	sárga	ibolya	3,0–4,7
Metilnarancs	rózsaszín	sárga	3,1–4,4
Metilvörös	vörös	sárga	4,4–6,3
Brómkrezolzöld	sárga	kék	4,0–5,6
Lakmusz	piros	kék	4,7–8,2
Fenolftalein	színtelen	bíborvörös	8,3–10,0
Timolftalein	színtelen	kék	9,3–10,5
Alizarinsárga	színtelen	sárga	10,1–12,1

Néhány köznapi oldat pH-értéke

75/b táblázat

Név	pH
Citromlé	2,2–2,4
Ecet	2,4–3,4
Szódavíz	3,9
Sör	4,0–4,5
Tej	6,4
Vér	7,4
Tengervíz	7,0–8,3
Sütőpor (1 mol/dm^3 konc.)	8,4
Szalmiákszesz	11,9

Elemek és szervetlen vegyületek

Elemek és szervetlen vegyületek termodinamikai adatai 25 °C-on

76. táblázat

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Alumínium				
Al(sz)	26,98	0	660	2450
Al(f)		10,56	–	–
Al(g)		326,4	–	–
Al^{3+}(g)		5483,17	–	–
Al^{3+}(aq)		−525	–	–
Al_2O_3(sz)	101,96	−1675,7	2045	2250
$AlCl_3$(sz)	133,34	−704,2	194 nyomás alatt	szublimál: 177,8
Antimon				
Sb(sz)	121,75	0	630,7	1380
SbH_3(g)	124,78	145,11	–	–
Arany				
Au(sz)	196,97	0	1064	2808
Argon				
Ar(g)	39,95	0	−189,5	−185,86
Arzén				
As(sz)	74,92	0	816 (nagy nyomás)	szublimál: 615
AsH_3(g)	77,95	182,5	–	–
Bárium				
Ba(sz)	137,34	0	850	1140
Ba^{2+}(aq)		−539	–	–
BaO(sz)	153,34	−553,5	1923	2000
$BaCl_2$(sz)	208,25	−858,6	962	1560
Berillium				
Be(sz)	9,01	0	1289	2772
Bizmut				
Bi(sz)	208,98	0	271,4	1564
Bróm				
Br_2(f)	159,82	0	−7,25	59,5
Br_2(g)		30,907	–	–
Br^-(g)	79,91	−219,07	–	–
Br^-(aq)		−121	–	–
HBr(g)	80,92	−36,40	−88,6	−67

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Cézium				
Cs(sz)	132,91	0	28,4	671
Cs^+(aq)		−258,28	–	–
Cink				
Zn(sz)	65,37	0	419,5	906
Zn^{2+}(aq)		−152	–	–
ZnO(sz)	81,37	−348,28	–	szublimál: 1800
Deutérium				
D_2(g)	4,028	0	−254,3	−249,4
HD(g)	3,022	0,318	–	–
D_2O(g)	20,028	−249,20	–	–
D_2O(f)		−294,60	3,802	101,42
Ezüst				
Ag(sz)	107,87	0	961	2155
Ag^+(aq)		106	–	–
AgBr(sz)	187,78	−100,37	434	bomlik: 700
AgCl(sz)	143,32	−127,07	455	1550
Ag_2O(sz)	231,74	−31,05	bomlik: 300	–
$AgNO_3$(sz)	169,88	−124,39	212	bomlik: 444
Fluor				
F_2(g)	38,00	0	−219,6	−188,1
F(g)	19,00	78,99	–	–
F^-(aq)		−330	–	–
HF(g)	20,01	−271,1	−83,5	19,5
Foszfor				
P(sz, f)	30,97	0	44,1 (60 vörös)	280,5
P(g)		629,5	–	–
P_4(g)	123,90	58,91	–	–
PH_3(g)	34,00	5,4	−133,5	−87,7
PCl_3(g)	137,33	−287,0	–	–
PCl_3(f)		−319,7	−112	75
PCl_5(g)	208,24	−374,9	–	–
PCl_5(sz)	208,24	−443,5	167 (nyomás alatt)	szublimál: 160
H_3PO_4(sz)	98,00	−1279,0	–	–
H_3PO_4(f)		−1266,9	–	–
H_3PO_4(aq)		−1277,4	–	–
PO_4^{3-}(aq)	94,97	−1277,4	–	–
P_4O_{10}(sz)	283,89	−2984,0	420 (nyomás alatt)	szublimál: 360
P_4O_6(sz)	219,89	−1640,1	–	–
Hélium				
He(g)	4,003	0	−272,2*	−268,93

76. táblázat folytatása

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Hidrogén (l. még deutérium)				
$H_2(g)$	2,016	0	−259	−252,6
H(g)	1,008	217,97	–	–
$H^+(aq)$	1,008	0		
$H_2O(f)$	18,015	−285,83	0	100
$H_2O(g)$		−241,82	0	100
$H_2O_2(f)$	34,015	−187,78	−0,89	152,1
Higany				
Hg(f)	200,59	0	−38,9	357
Hg(g)		61,32		
$Hg^{2+}(aq)$		174		
$Hg_2^{2+}(aq)$	401,18	172,4		
HgO(sz)	216,59	−90,83	bomlik: 500	–
$Hg_2Cl_2(sz)$	472,09	−265,22		szublimál: 400
$HgCl_2(sz)$	271,50	−224,3	276	302
HgS(sz, fekete)	232,65	−53,6	–	szublimál: 583,5
Jód				
$I_2(sz)$	253,81	0	113,6	185,2
$I_2(g)$		62,44	–	–
$I^-(aq)$	126,90	−56	–	–
HI(g)	127,91	26,48	−50,8	−35,5
Kadmium				
Cd(sz)	112,40	0	320,8	765
$Cd^{2+}(aq)$		−75,90	–	–
CdO(sz)	128,40	−258,2	–	–
$CdCO_3(sz)$	172,41	−750,6	–	–
Kalcium				
Ca(sz)	40,08	0	842	1494
Ca(g)		178,2	–	–
$Ca^{2+}(aq)$		−543	–	–
CaO(sz)	56,08	−635,09	2580	2850
$CaCO_3(sz)$ (kalcit)	100,09	−1206,9	bomlik	
$CaCO_3(sz)$ (aragonit)		−1207,1	–	–
$CaF_2(sz)$	78,08	−1219,6	1360	–
$CaCl_2(sz)$	110,99	−795,8	–	–
$CaBr_2(sz)$	199,90	−682,8	–	–

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Kálium				
K(sz)	39,10	0	63,7	759
K^+(g)		514,26	–	–
K^+(aq)		−251	–	–
KOH(sz)	56,11	−424	–	–
KF(sz)	58,10	−567	–	–
KCl(sz)	74,56	−436	776	1500
KBr(sz)	119,01	−393	–	–
KI(sz)	166,01	−327	723	1330
Kén				
S(sz) (rombos)	32,06	0	112,8	445
S(sz) (monoklin)		0,33	119	445
S^{2-}(aq)		33	–	–
SO_2(g)	64,06	−296,83	–	–
SO_3(g)	80,06	−395,72	–	–
H_2SO_4(f)	98,08	−813,99	10,49	330
H_2SO_4(aq)		−909,27	–	–
SO_4^{2-}(aq)	96,06	−909,27	–	–
HSO_4^-(aq)	97,07	−887,34	–	–
H_2S(g)	34,08	−20,63	−82	−61
H_2S(aq)		−39,7	–	–
HS^-(aq)	33,072	−17,6	–	–
SF_6(g)	146,065	−1097	−50,54	szublimál: −63,8
Klór				
Cl_2(g)	70,91	0	−101,0	−34,0
Cl(g)	35,45	121,68	–	–
Cl^-(g)		−233,13	–	–
Cl^-(aq)		−168	–	–
HCl(g)	36,46	−92,31	−112	−83,7
HCl(aq)		−167,16		
Kripton				
Kr(g)	83,80	0	−157	−151
Króm				
Cr(sz)	52,00	0	1900	2690
CrO_4^{2-}(aq)	115,99	−881,15	–	–
$Cr_2O_7^{2-}$(aq)	215,99	−1490,3	–	–
Lítium				
Li(sz)	6,94	0	180	1342
Li^+(aq)		−278	–	–

76. táblázat folytatása

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Magnézium				
Mg(sz)	24,31	0	650	1090
Mg^{2+}(aq)		−466	–	–
MgO(sz)	40,31	−601,70	2800	–
$MgCO_3$(sz)	84,32	−1095,8	bomlik: 350	–
$MgCl_2$(sz)	95,22	−641,32	708	1412
Nátrium				
Na(sz)	22,99	0	97,8	883
Na(g)		107,32	–	–
Na^+(aq)		−240	–	–
NaOH(sz)	40,00	−425,61	318	1390
NaCl(sz)	58,44	−411,15	801	1413
NaBr(sz)	102,90	−361,06	–	–
NaI(sz)	149,89	−287,78	–	–
Na_3AlF_6(sz)	209,95	−3284	1000	–
Neon				
Ne(g)	20,18	0	−248,61	−246,06
Nitrogén				
N_2(g)	28,013	0	−210	−195,8
N(g)	14,007	472,70	–	–
NO(g)	30,01	90,25	–	–
N_2O(g)	44,01	82,05	–	–
NO_2(g)	46,01	33,18	–	–
N_2O_4(g)	92,02	9,16	–	–
N_2O_5(sz)	108,01	−43,1	–	–
N_2O_5(g)		11,3	–	–
HNO_3(f)	63,01	−174,10	−42	86
HNO_3(aq)		−207,36	–	–
NO_3^-(aq)	62,01	−205,0	–	–
NH_3(g)	17,03	−46,11	−77,7	−33,4
NH_3(aq)		−80,29	–	–
NH_4^+(aq)	18,04	−132,51	–	–
N_2H_4(f)	32,05	50,63	–	–
NH_4NO_3(sz)	80,04	−365,56	–	–
NH_4Cl(sz)	53,49	−314,43	–	–
Ólom				
Pb(sz)	207,19	0	327	1751
Pb(g)		195,0	–	–
Pb^{2+}(aq)		−1,6	–	–
PbO(sz, sárga)	223,19	−217,32	888	950
PbO(sz, piros)		−218,99	–	–
PbO_2(sz)	239,19	−277,4	bomlik: 290	–

76. táblázat folytatása

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Ón				
Sn(sz)	118,69	0	232	2270
Sn(g)		302,1	–	–
Sn^{2+}(aq)		−8,8	–	–
SnO(sz)	134,69	−285,8	–	–
SnO_2(sz)	150,69	−580,7	–	–
Oxigén				
O_2(g)	31,999	0	−218,8	−182,9
O(g)	15,999	249,17	–	–
O_3(g)	47,998	142,7	–	–
OH^-(aq)	17,007	−229,99	–	–
Réz				
Cu(sz)	63,54	0	1083	2562
Cu(g)		338,32		–
Cu^+(aq)		52		–
Cu^{2+}(aq)		65		–
Cu_2O(sz)	143,08	−168,6	1235	bomlik
CuO(sz)	79,54	−157,3	bomlik: 1026	–
$CuSO_4$(sz)	159,60	−771,36	bomlik: 650	
$CuSO_4 \cdot H_2O$(sz)	177,62	−1085,8	vizet veszít	
$CuSO_4 \cdot 5H_2O$(sz)	249,68	−2279,7	vizet veszít	
Stroncium				
Sr(sz)	87,62	0	769	1382
Szén (szerves vegyületek a 79. táblázatban)				
C(sz) (grafit)	12,011	0	4100 (nagy nyomás)	szublimál
C(sz) (gyémánt)		1,895	4100 (nagy nyomás)	szublimál
C(g)		716,68	–	–
C_2(g)	24,022	831,90	–	–
CO(g)	28,011	−110,53	–	–
CO_2(g)	44,010	−393,51	–	–
CO_2(aq)		−413,80	–	–
H_2CO_3(aq)	62,03	−699,65	–	–
HCO_3^-(aq)	61,02	−691,99	–	–
CO_3^{2-}(aq)	60,01	−677,14	–	–
CCl_4(f)	153,82	−135,44	–	–
CS_2(f)	76,14	89,70	–	–
HCN(g)	27,03	135,1	–	–
HCN(f)		108,87	–	–
CN^-(aq)	26,02	150,6	–	–

76. táblázat folytatása

Név, vegyjel, képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Képződéshő (kJ/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)
Szilícium				
Si(sz)	28,09	0	1420	2600
SiO_2(sz)	60,09		1710	2230
Vas				
Fe(sz)	55,85	0	1535	2750
Fe^{2+}(aq)		−88	–	–
Fe^{3+}(aq)		−48	–	–
Fe_3O_4(sz) (magnetit)	231,54	−1118,4	bomlik: 1538	–
Fe_2O_3(sz) (hematit)	159,69	−824,2	1565	–
FeS(sz)	87,91	−100,0	–	–
FeS_2(sz)	119,98	−178,2	–	–
Xenon				
Xe(g)	131,30	0	−111,8	−108,13

* ($26 \cdot 10^5$ Pa nyomáson)
(sz) = szilárd, (f) = folyadék, (g) = gáz, (aq) = hidratált ion

További hőtani adatok a Fizika 168–173. oldalakon.

Néhány komplex vegyület stabilitási állandója 25 °C-on

77. táblázat

Komplexképződés			Összesített komplex-stabilitási állandó
$Ag^+ + 2\ NH_3$	$\rightleftharpoons$	$[Ag(NH_3)_2]^+$	$1{,}7 \cdot 10^7$
$Cu^{2+} + 4\ NH_3$	$\rightleftharpoons$	$[Cu(NH_3)_4]^{2+}$	$4{,}8 \cdot 10^{12}$
$Zn^{2+} + 4\ NH_3$	$\rightleftharpoons$	$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$	$2{,}9 \cdot 10^9$
$Co^{2+} + 6\ NH_3$	$\rightleftharpoons$	$[Co(NH_3)_6]^{2+}$	$1{,}3 \cdot 10^5$
$Ni^{2+} + 6\ NH_3$	$\rightleftharpoons$	$[Ni(NH_3)_6]^{2+}$	$5{,}8 \cdot 10^8$
$Pb^{2+} + 3\ OH^-$	$\rightleftharpoons$	$[Pb(OH)_3]^-$	$8{,}3 \cdot 10^{13}$
$Sn^{2+} + 3\ OH^-$	$\rightleftharpoons$	$[Sn(OH)_3]^-$	$2{,}5 \cdot 10^{25}$
$Zn^{2+} + 4\ OH^-$	$\rightleftharpoons$	$[Zn(OH)_4]^{2-}$	$2{,}8 \cdot 10^{15}$
$Ag^+ + 2\ CN^-$	$\rightleftharpoons$	$[Ag(CN)_2]^-$	$5{,}6 \cdot 10^{18}$
$Cu^{2+} + 4\ CN^-$	$\rightleftharpoons$	$[Cu(CN)_4]^{2-}$	$2{,}0 \cdot 10^{27}$
$Zn^{2+} + 4\ CN^-$	$\rightleftharpoons$	$[Zn(CN)_4]^{2-}$	$8{,}3 \cdot 10^{17}$
$Ag^+ + 2\ S_2O_3^{2-}$	$\rightleftharpoons$	$[Ag(S_2O_3)_2]^{3-}$	$4{,}7 \cdot 10^{13}$
$Al^{3+} + 6\ F^-$	$\rightleftharpoons$	$[AlF_6]^{3-}$	$5{,}0 \cdot 10^{23}$
$Hg^{2+} + 4\ I^-$	$\rightleftharpoons$	$[HgI_4]^{2-}$	$6{,}8 \cdot 10^{29}$
$Fe^{3+} + 6\ SCN^-$	$\rightleftharpoons$	$[Fe(SCN)_6]^{3-}$	$3{,}2 \cdot 10^3$

Néhány vegyület bomlási hőmérséklete

78. táblázat

Vegyület	Bomlási hőmérséklet (°C)
Au_2O_3 / Au	160
Ag_2O / Ag	300
HgO / Hg	480
$CaCO_3$ / CaO	882
Cu_2O / Cu	1800
PbO / Pb	2240

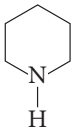
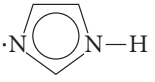
Szerves vegyületek

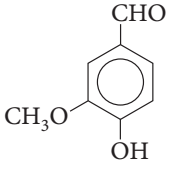
Szerves vegyületek termodinamikai adatai
(Az égéshő- és a képződéshőértékek 25 °C-ra vonatkoznak.)

79. táblázat

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)	Égéshő (kJ/mol)
Szénhidrogének						
1. Nyílt láncú szénhidrogének						
metán	CH_4	16,04	−182,5	−161,5	−74,9 (g)	−891
etán	C_2H_6	30,07	−183,2	−88,6	−84,6 (g)	−1561
propán	C_3H_8	44,09	−187,8	−42,1	−104 (g)	−2221
n-bután	C_4H_{10}	58,12	−138,3	−0,5	−124,0 (g)	−2862
n-pentán	C_5H_{12}	72,15	−129,7	36,1	−146,4 (g)	−3506
n-hexán	C_6H_{14}	86,17	−95,3	68,7	−198,7 (f)	−4153
n-heptán	C_7H_{16}	100,2	−90,6	98,4	−224,4 (f)	−4818
n-oktán	C_8H_{18}	114,2	−56,8	125,7	−249,9 (f)	−5475
etin (acetilén)	$CH \equiv CH$	26,04	−81,5*	−84,0^s	226,9 (g)	−1300
etén (etilén)	$CH_2 = CH_2$	28,05	−169,2	−103,7	52,6 (g)	−1412
propén (propilén)	$CH_3CH = CH_2$	42,08	−185,3	−47,7	20,4 (g)	−2059
but-1-én	$CH_3CH_2CH = CH_2$	56,10	−185,4	−6,3	1,2 (g)	−2718
cisz-but-2-én	C_4H_8	56,10	−139	4	−5,7 (g)	–
transz-but-2-én	C_4H_8	56,10	−106	1	−10,1 (g)	–
buta-1,3-dién	$CH_2 = CH - CH = CH_2$	54,09	−109	−4,4	156 (f)	−2590
2-metilbuta-1,3-dién (izoprén)	C_5H_8	68,11	−146	34,1	71,3 (f)	−3182
2. Cikloparaffinok						
ciklopropán	$(CH_2)_3$	42,8	−127	−34	55 (g)	−2093
ciklobután	$(CH_2)_4$	56,10	−50,6	12	4,6 (g)	−2722
ciklopentán	$(CH_2)_5$	70,13	−93,8	49	−76,4 (g)	−3293
ciklohexán	$(CH_2)_6$	84,16	6,5	81	−158 (f)	−3923

* nyomás alatt
^{s} szublimál
(g) = gáz
(f) = folyadék
(sz) = szilárd

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)	Égéshő (kJ/mol)
3. Aromás szénhidrogének						
benzol	C_6H_6	78,11	5,5	80,1	46,5 (f)	−3270
naftalin	$C_{10}H_8$	128,16	80,2	218	78,6 (sz)	−5157
antracén	$C_{14}H_{10}$	178,22	217	340	112,2 (sz)	−7054
fenantrén	$C_{14}H_{10}$	178,22	100,5	340	73,7 (sz)	−7013
metilbenzol (toluol)	$C_6H_5CH_3$	92,13	−95	110,6	50,0 (f)	−3915
1,2-dimetil-benzol (*o*-xilol)	$C_6H_4(CH_3)_2$	106,16	−25,2	144,4	19,1 (g)	−4579
1,3-dimetil-benzol (*m*-xilol)	$C_6H_4(CH_3)_2$	106,16	−47,9	139,1	17,3 (g)	−4555
1,4-dimetil-benzol (*p*-xilol)	$C_6H_4(CH_3)_2$	106,16	13,8	138,4	−24,4 (g)	−4556
vinilbenzol (sztirol)	$C_6H_5CH=CH_2$	104,14	−30,6	145,2	103,8 (f)	−4384
Heterociklusos vegyületek						
pirrol	 C_4H_4NH	67,09	–	131	88,5 (f)	−2377
piperidin	 $C_5H_{10}NH$	85,15	−10,5	106,4	−84,2 (f)	−3458
piridin	 C_5H_5N	79,10	−41,5	115,5	80,4 (f)	−2764
imidazol	 $C_3H_4N_2$	68,08	88	268	58,5 (sz)	–
Alkoholok						
metanol (metil-alkohol)	CH_3OH	32,04	−97,8	64,7	−238,8 (f)	−727,0
etanol (etil-alkohol)	C_2H_5OH	46,07	−112	78,4	−277,8 (f)	−1367
propán-1-ol (propil-alkohol)	C_3H_7OH	60,09	−127	97,2	−303 (f)	−2023

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)	Égéshő (kJ/mol)
Alkoholok *(folytatás)*						
bután-1-ol (butil-alkohol)	C_4H_9OH	74,12	−79,9	117	−333 (f)	−2672
etán-1,2-diol (glikol)	$(CH_2OH)_2$	62,07	−15,6	197,9	−451,8 (f)	−1194
propán-1,2,3-triol (glicerin)	$(CH_2)_2(CH)(OH)_3$	92,09	17,9	290	−660 (f)	−1666
benzil-alkohol	$C_6H_5CH_2OH$	108,13	−15,3	204,7	−161,6 (f)	−3738
Fenolok						
fenol	C_6H_5OH	94,11	40,9	181,8	−163 (sz)	−3056
o-krezol	$CH_3C_6H_4OH$	108,13	30,9	191	−202 (sz)	−3699
m-krezol	$CH_3C_6H_4OH$	108,13	11,9	202,7	−201 (sz)	−3697
p-krezol	$CH_3C_6H_4OH$	108,13	34,8	201,9	−197 (sz)	−3704
benzol-1,4-diol (hidrokinon)	$C_6H_4(OH)_2$	110,11	170,5	287	−358 (sz)	−2863
α-naftol	$C_{10}H_7OH$	144,16	96	278	−117 (sz)	−4964
β-naftol	$C_{10}H_7OH$	144,16	122	285	−110 (sz)	−4972
Éterek						
dimetil-éter	$(CH_3)_2O$	46,07	−138,5	−23,7	−183 (f)	−1463
dietil-éter	$(C_2H_5)_2O$	74,12	−116,3	34,6	−282 (f)	−2731
Aldehidek, ketonok						
metanal (formaldehid)	HCHO	30,03	−92	−21	−108 (f)	−561
etanal (acetaldehid)	CH_3CHO	44,05	−123,5	20,2	−193 (f)	−1167
fenilmetanal (benzaldehid)	C_6H_5CHO	106,12	−26	179	−82,1 (f)	−3535
fahéj-aldehid	$C_6H_5CH=CHCHO$	132,15	−7,5	251	−27,7 (f)	−4657
dimetil-keton (aceton)	CH_3COCH_3	58,08	−94,6	56,5	−248 (f)	−1792
kámfor	$C_{10}H_{16}O$	152,23	179,5	209,1	−311 (sz)	−5908
vanillin		152,14	81	285	−464 (sz)	−3827

79. táblázat folytatása

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)		Égéshő (kJ/mol)
Karbonsavak							
hangyasav (metánsav)	$HCOOH$	46,03	8,4	100,8	−417	(f)	−254,8
ecetsav (etánsav)	CH_3COOH	60,05	16,7	118,1	−487	(f)	−875,9
propionsav (propánsav)	CH_3CH_2COOH	74,08	−20,4	141,4	−509	(f)	−1 531
n-vajsav (butánsav)	$CH_3(CH_2)_2COOH$	88,10	−5,5	164	−534	(f)	−2 185
kapronsav	$CH_3(CH_2)_4COOH$	116,16	−1,5	202	−582	(f)	−3 497
pelargonsav	$CH_3(CH_2)_7COOH$	158,24	12,5	253	–		–
kaprinsav	$CH_3(CH_2)_8COOH$	172,26	31,5	268	−714	(f)	−6 084
laurinsav	$CH_3(CH_2)_{10}COOH$	200,31	44,1	bomlik	−765	(f)	−7 393
mirisztinsav	$CH_3(CH_2)_{12}COOH$	228,36	52,4	bomlik	−834	(f)	−8 683
palmitinsav	$CH_3(CH_2)_{14}COOH$	256,42	62,8	bomlik	−918	(sz)	−9 960
sztearinsav	$CH_3(CH_2)_{16}COOH$	284,47	69,6	bomlik	−955	(sz)	−11 282
akrilsav (prop-2-énsav)	$CH_2=CH-COOH$	72,06	12	141	−376	(f)	−1 377
olajsav	$CH_3(CH_2)_7-CH=CH-(CH_2)_7-COOH$	282,45	16	bomlik	−772	(sz)	−11 180
oxálsav	$(COOH)_2$	90,04	189,5	–	−822	(sz)	−252
malonsav	$HOOCCH_2COOH$	104,06	135	bomlik	–		–
borostyánkősav	$HOOC(CH_2)_2COOH$	118,09	190	235**	−939	(sz)	−1 494
adipinsav	$HOOC(CH_2)_4COOH$	146,14	153	bomlik	–		−2 798
maleinsav	$HOOCCH=CHCOOH$	116,07	130	135**	−790	(sz)	−1 357
fumársav	$HOOCCH=CHCOOH$	116,07	287	–	−812	(sz)	−1 334
borkősav	$(CHOH)_2(COOH)_2$	150,09	168	bomlik	−1567	(sz)	−1 152
citromsav	$HO-C(CH_2-COOH)_2-COOH$	192,12	153	bomlik	1545	(sz)	−1 962
benzoesav	C_6H_5COOH	122,12	121,7	249,2	−381	(sz)	−3 233
o-ftálsav	$C_6H_4(COOH)_2$	166,13	191^s	–	−783	(sz)	−3 225

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)	Égéshő (kJ/mol)
Észterek						
metil-acetát	CH_3COOCH_3	74,08	−98,7	57,3	−442 (f)	−1596
etil-acetát	$CH_3COOC_2H_5$	88,10	−82,6	77,1	−479 (f)	−2256
glicerin-trinitrát	$C_3H_5(ONO_2)_3$	227,09	13,3	270 (robban)	–	–
Szénhidrátok						
α-D-glükóz (szőlőcukor)	$C_6H_{12}O_6$	180,16	146	bomlik	−1271 (sz)	−2805
β-D-fruktóz (gyümölcscukor)	$C_6H_{12}O_6$	180,16	102–104	bomlik	−1262 (sz)	−2814
szacharóz (répacukor)	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342,35	186	bomlik	−2222 (sz)	−5648
maltóz (malátacukor)	$C_{12}H_{22}O_{11} \cdot H_2O$	360,31	102,5	bomlik	−2217	−5649
laktóz (tejcukor)	$C_{12}H_{22}O_{11} \cdot H_2O$	360,31	202	bomlik	−2214	−5652
keményítő	$(C_6H_{10}O_5)n$	$162{,}2 \cdot n$	–	–	$-956 \cdot n$	$-2834 \cdot n$
Halogénvegyületek						
metil-klorid (klórmetán)	CH_3Cl	50,49	−97,7	−24	−84,2 (g)	−690
metilén-klorid (diklórmetán)	CH_2Cl_2	84,94	−96,7	40,2	−123,1 (g)	–
kloroform (triklórmetán)	$CHCl_3$	119,39	−63,5	61,2	98,8 (f)	−373
szén-tetraklorid (tetraklórmetán)	CCl_4	153,84	−22,9	76,8	−141,5 (f)	156
etil-klorid (kloretán)	C_2H_5Cl	64,52	−138,7	12,3	–	−1331
propil-klorid (klórpropán)	C_3H_7Cl	78,55	−122,8	47,2	–	−2003
n-butil-klorid (klórbután)	C_4H_9Cl	92,57	−123,1	78,5	–	–
vinil-klorid (kloretén)	$CH_2 = CHCl$	62,50	−160	−13,9	–	–
monoklór-ecetsav	$ClCH_2COOH$	94,5	62,8	189,9	–	−725,9
diklórecetsav	$Cl_2CHCOOH$	128,95	9,7	194,4	–	–
triklórecetsav	Cl_3CCOOH	163,40	58,0	195,5	–	−388,5
klórbenzol	C_6H_5Cl	112,56	−45,2	132	–	–

Név	Képlet	Moláris tömeg (g/mol)	Olvadáspont (°C)	Forráspont (°C)	Képződéshő (kJ/mol)	Égéshő (kJ/mol)
Halogénvegyületek *(folytatás)*						
1,2-diklór-benzol	$C_6H_4Cl_2$	147,01	−17,6	179	–	−2813
metil-bromid	CH_3Br	94,95	−93,7	3,5	−35,6 (g)	–
metilén-bromid	CH_2Br_2	173,86	−52,7	97,0	−4,2 (g)	–
bromoform	$CHBr_3$	252,77	8	150,5	25,1 (g)	–
szén-tetrabromid	CBr_4	331,67	48,4	189,5	50,0 (g)	–
etil-bromid	C_2H_5Br	108,98	−117,8	38,4	–	–
n-brómbután	C_4H_9Br	137,03	112	102	–	–
monobróm-ecetsav	$BrCH_2COOH$	138,96	49	208	–	–
brómbenzol	C_6H_5Br	157,02	−30,6	156,2	–	–
metil-jodid	CH_3I	141,95	−66,5	42,4	20,5 (g)	−815
metilén-jodid	CH_2I_2	267,87	6,1	–	–	−747
jodoform	CHI_3	393,78	119	bomlik	141,0 (sz)	–
szén-tetrajodid	CI_4	519,65	171	–	–	–
jódbenzol	C_6H_5I	204,02	−31,4	188,5	–	–
Nitrogénvegyületek						
metil-amin	CH_3NH_2	31,06	−92,5	−6,7	−38,1 (f)	−1071
dimetil-amin	$(CH_3)_2NH$	45,08	−96	7,4	−46,9 (f)	−1742
etil-amin	$C_2H_5NH_2$	45,08	−80,6	16,6	−88,8 (f)	−1709
etilén-diamin	$(C_2H_4)(NH_2)_2$	60,10	8,5	117,2	–	−1895
karbamid	$CO(NH_2)_2$	60,06	132,8	bomlik	−331 (sz)	−635
formamid (metánamid)	$HCONH_2$	45,04	2	193	−258 (sz)	−565
acetamid (etánamid)	CH_3CONH_2	59,07	81	221,2	−320 (sz)	−1183
glicin (amino-ecetsav, glikokoll)	NH_2CH_2COOH	75,07	232**	–	−529 (sz)	−978
glicil-glicin	$NH_2CH_2CONHCH_2COOH$	132,12	215**	–	–	−1971
anilin	$C_6H_5NH_2$	92,12	−6,2	184,4	31,1 (f)	−3399
benzamid	$C_6H_5CONH_2$	121,13	130	290	–	−3549
difenil-amin	$(C_6H_5)_2NH$	169,22	52,9	302	121 (f)	−6420
nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	123,1	5,7	210,9	18,0 (f)	−3095
m-dinitrobenzol	$C_6H_4(NO_2)_2$	168,1	89,8	301	−161 (f)	−2917

[s] szublimál
** bomlik

Szerves vegyületek nevezéktana

Az MTA Kémiai Osztálya 1998-as határozata alapján, amely az IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) legújabb, 1993. évi ajánlásához közelíti a **szerves kémiai vegyületek elnevezési szabályait**, kiegészítve a magyar nyelvi szabályokkal. Az új szabályzat elsősorban a szubtitúciós nevezéktanban jelent alapvető változást, a csoportfunkciós elnevezés elvei nem változtak (pl. CH_3 — Cl: metil-klorid). A triviális nevek használata pedig korlátozódott (pl. etilén, propilén nem használható).

A vegyületek **tudományos nevének** megalkotásában a legfontosabb követelmény az, hogy **a név pontosan jelölje a molekula szerkezetét**. Másik fontos követelmény, hogy **minden vegyületnek csak egyetlen szabályos neve legyen**.

Telített szénhidrogének

A *n*-alkánok nevezéktana

Szabályos név: **alkán**.
Az első négy *n*-alkán neve triviális: metán, etán, propán, bután.

Az öt szénatomos alkántól kezdődően az *n*-alkánokat úgy nevezzük el, hogy **a szénatomszámnak megfelelő görög vagy latin számnév tövéhez -án végződés járul**.
Pl.: pentán, hexán, heptán, oktán, nonán, dekán.

Az alkánokból levezethető csoportok nevezéktana

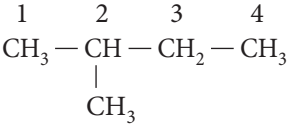
Alkilcsoportok: a velük azonos szénatomszámú telített szénhidrogén-molekula egyik láncvégi hidrogénatomját eltávolítjuk, és a szénhidrogén nevében az **-án végződést -il végződésre cseréljük**.

R — H → R —
alkán → alkil

Pl.: CH_3 — metil $CH_3 — CH_2$ — etil $CH_3 — CH_2 — CH_2$ — propil

Az izoalkánok nevezéktana

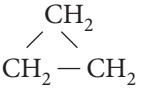
Úgy nevezzük el, mintha az *n*-alkán valamelyik hidrogénatomját (atomjait) alkilcsoporttal (csoportokkal) helyettesítenénk. **A leghosszabb, el nem ágazó lánccal (főlánc) azonos szénatomszámú *n*-alkán neve elé (egybeírva) írjuk az oldalláncként csatlakozó alkilcsoport nevét.** A főlánc szénatomjait az elágazáshoz közelebbi láncvégtől kezdődően megszámozzuk, hogy az elágazó csoportok helyét egyértelműen jelölhessük. Pl.:



2-metilbután

A cikloalkánok nevezéktana

A megfelelő szénatomszámú alkán neve elé tesszük (egybeírva) a ciklo- előtagot.

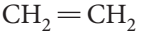


ciklopropán

Telítetlen szénhidrogének

Az alkének nevezéktana

Szabályos név: **alkén**.
Az *n*-alkének nevét az azonos szénatomszámú *n*-alkán nevéből vezetjük le úgy, hogy az **-án végződést -én végződésre cseréljük**.
Ha a vegyület két vagy három szénatomos, akkor a kettős kötés helyzetét nem kell jelölni. Pl.:



etén



propén

Háromnál több szénatom esetén a szénatomokat a kettős kötéshez közelebb eső láncvégtől kezdődően meg kell számozni. A kettős kötésben részt vevő két szénatom közül a kisebb helyzetszámú helyzetszámát (kötőjellel) az **-én** végződés elé írjuk. Pl.:



but-1-én



but-2-én

Több kettős kötést tartalmazó szerves vegyületek

Szabályos név: **poliének**.
Nevüket úgy képezzük, hogy a megegyező szénatomszámú alkán nevében az **-án** végződést **-adién**, **-atrién** stb. cseréljük, és a kettős kötések helyzetszámát közvetlenül a **-dién**, **-trién** stb. végződés elé írjuk. Pl.:

$CH_2 = C = CH_2$
propadién

$CH_2 = CH - CH = CH_2$
buta-1,3-dién (butadién)

Hármas kötést tartalmazó szénhidrogének

Szabályos név: **alkin**.
A megfelelő szénatomszámú alkán nevében az **-án** végződést egy hármas kötés esetén **-in** végződésre, két hármas kötés esetén **-diin** végződésre cseréljük. Pl.:

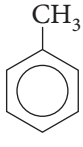
$CH \equiv C - CH_3$
propin

$CH \equiv C - C \equiv CH$
buta-1,3-diin

Aromás szénhidrogének

A benzol származékai

Tudományos nevüket úgy képezzük, hogy az alkilcsoportok nevének, számának és helyzetének jelölésével mint **helyettesített** benzolt nevezzük meg őket. A benzol szó előtt álló előtagot a benzol szóval egybeírjuk. Pl.:



metilbenzol
(toluol)

N-tartalmú szénvegyületek

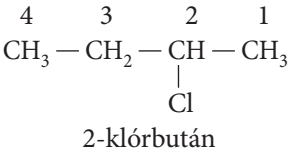
Az aminok

Primer aminok: $R - NH_2$ elnevezése: a szénhidrogéncsoport neve után írjuk az **-amin** végződést: alkil-amin. Pl.:

$CH_3 - NH_2$
metil-amin

Halogénezett szénhidrogének

Szabályos név: **halogénalkán**.
A megfelelő szénhidrogén neve előtt (ábécérendben) fel kell sorolni a molekulában lévő halogénatomokat is, azoknak a szénatomoknak a számával együtt, amelyekhez kapcsolódnak. A számozást a halogénhez közeli láncvégnél kezdjük. Pl.:

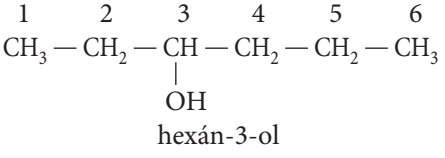


2-klórbután

Hidroxilcsoportot tartalmazó szénvegyületek

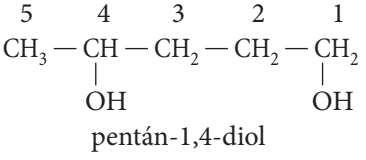
Az alkoholok

Egyértékű, nyílt szénláncú, telített alkoholok nevét úgy képezzük, hogy az alapszénhidrogén nevéhez kapcsoljuk az **-ol** végződést (alkanol). A főlánc számozását a hidroxilcsoporthoz közeli láncvégnél kezdjük. Az **-ol** végződés előtt feltüntetjük annak a szénatomnak a számát, amelyhez a hidroxilcsoport kapcsolódik. Pl.:



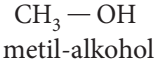
hexán-3-ol

Többértékű alkoholnál a helyzetszám megjelölésével **-diol**, **-triol** stb. végződést kap.

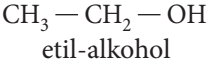


pentán-1,4-diol

Csoportfunkciós nevezéktan: **alkil**-alkohol
A szénhidrogéncsoport nevéhez az alkohol szót csatoljuk (csak kis szénatomszámú alkoholoknál). Pl.:



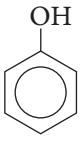
metil-alkohol



etil-alkohol

Fenolok

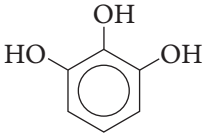
Legtöbb fenolnak a triviális neve használatos. Tudományos nevüket úgy képezzük, hogy **a szénhidrogén nevéhez illesztjük** (egybeírva) **az -ol utótagot**. A hidroxilcsoport helyzetszámát az **-ol** végződés elé tesszük. Pl.:



fenol



benzol-1,4-diol
(hidrokinon)

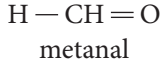


benzol-1,2,3-triol
(pirogallol)

Oxovegyületek

Aldehidek

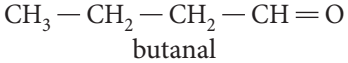
Szabályos név: **alkanal**.
Nevüket úgy képezzük, hogy az alapszénhidrogén neve után **-al** végződést teszünk. Pl.:



metanal
(formaldehid)



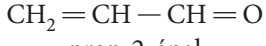
etanal
(acetaldehid)



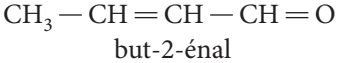
butanal
(butiraldehid)

Telítetlen aldehidek

Elnevezés: **alkénal** vagy **alkinal** típusnév alapján. A kettős kötés helyzetét mindig jelölni kell. Pl.:



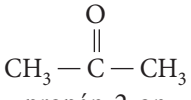
prop-2-énal
(akrolein)



but-2-énal

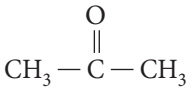
Ketonok

Szabályos név: **alkanon**.
A főlánc szénatomszámának megfelelő szénhidrogén neve után tesszük az **-on** végződést. Pl.:



propán-2-on
(aceton)

Másik lehetőség (csoportfunkciós elnevezés):
megnevezzük azokat a szénhidrogéncsoportokat, amelyeket a karbonilcsoport köt össze, és a név végére kerül a **-keton** végződés. Pl.:

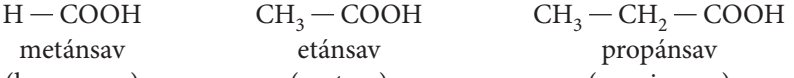


dimetil-keton

Karbonsavak és származékaik

Monokarbonsavak

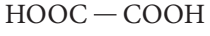
Nyílt láncú, telített karbonsavak (zsírsavak).
Általános név: **alkánsav**. Pl.:



metánsav (hangyasav) — etánsav (ecetsav) — propánsav (propionsav)

Telített dikarbonsavak

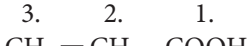
Általános név: **alkándisav**. Pl.:



etándisav (oxálsav)

Telítetlen karbonsavak

Általános név: **alkénsav**.
A kettős kötés helyzetszámát az **-én** végződés előtt mindig meg kell adni. Pl.:



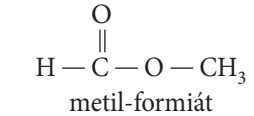
prop-2-énsav (akrilsav)

Karbonsavészterek

Szabályos nevük: **alkil-alkanoát**.



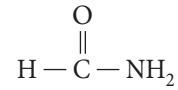
vagy: **alkánsav-alkil-észter** (csoportfunkciós elnevezés). Pl.:



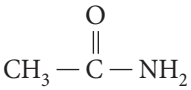
metil-formiát
(metánsav-metil-észter)
(hangyasav-metil-észter)

Amidok

Szabályos név: **alkánamid**. A megfelelő karbonsav nevében a sav végződést **-amid** végződésre változtatjuk. Alkánsav-amid – a sav neve után **kötőjellel illesztjük az amid** szót. (csoportfunkciós elnevezés). Pl.:



metánamid
formamid
hangyasav-amid



etánamid
acetamid
ecetsav-amid

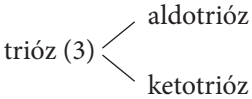
Aminosavak: szabályos nevük helyett nemzetközileg elfogadott hagyományos nevük használatos.

Szénhidrátok

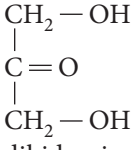
Monoszacharidok

polihidroxi-aldehidek, **aldózok**, vagy
polihidroxi-ketonok, **ketózok**

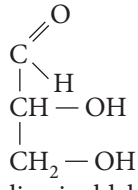
A molekula szénatomszáma szerint:



tetróz (4)
pentóz (5)
hexóz (6)
heptóz (7)



1,3-dihidroxiaceton
ketotrióz



glicerinaldehid
aldotrióz

Biol

Biológia

Az élők környezete és alkotóelemei

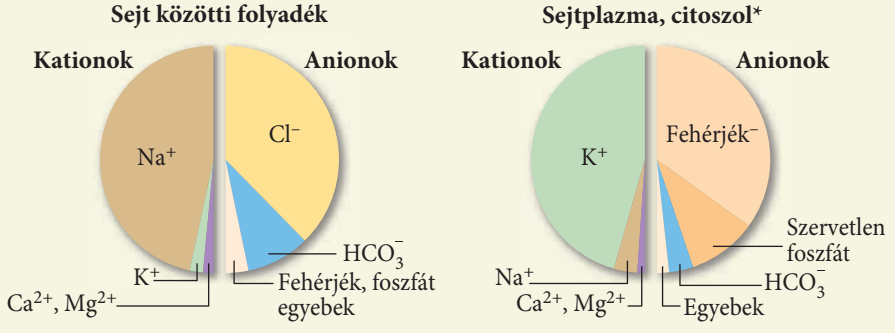
Anyageloszlás a Földön és más bolygókon

1. táblázat

Szférák	Anyagok	Vénusz	Mars	Ősföld[1]	Föld, ma	Föld, élet nélkül[2]
Légkör (V%)	CO_2	93–98	95,3	17	0,04	99,0
	N_2	25	2,7	0,3	78	ny[3]
	O_2	ny[3]	ny[3]	ny[3]	21	ny[3]
	H_2O	0,1	0,003	80	< 0,04	?
	nemesgázok	ny[3]	1,6	ny[3]	< 1	< 1
	egyéb	?	ny[3]	1,7	ny[3]	ny[3]
Légnyomás[4]		90	0,007	?	1	60
Óceánok átlagosan (m%)	H_2O				96	85
	sók (a nitrátok nélkül)				3,5[5]	13
	nitrátok				ny[3]	1,7

(1) A prekambriumi (> 570 millió évvel ezelőtti) Földön becsült értékek (Paturi, 1991)
(2) A Földdel megegyező helyzetű, de életfolyamatok nélküli bolygóra számított értékek (Lovelock, 1979)
(3) ny = nyomokban
(4) A mai Föld tengerszinten mért értékét egységnyinek tekintve (1 atm = 10^5 Pa)
(5) 0,2 és 3,75% közötti értékek

Az emberi test folyadéktereinek összetétele



* A citoszol a sejtplazma oldott vegyületekből álló része.

Ionkoncentrációk az emberi szervezet folyadéktereiben* (mmol/l-ben)

2. táblázat

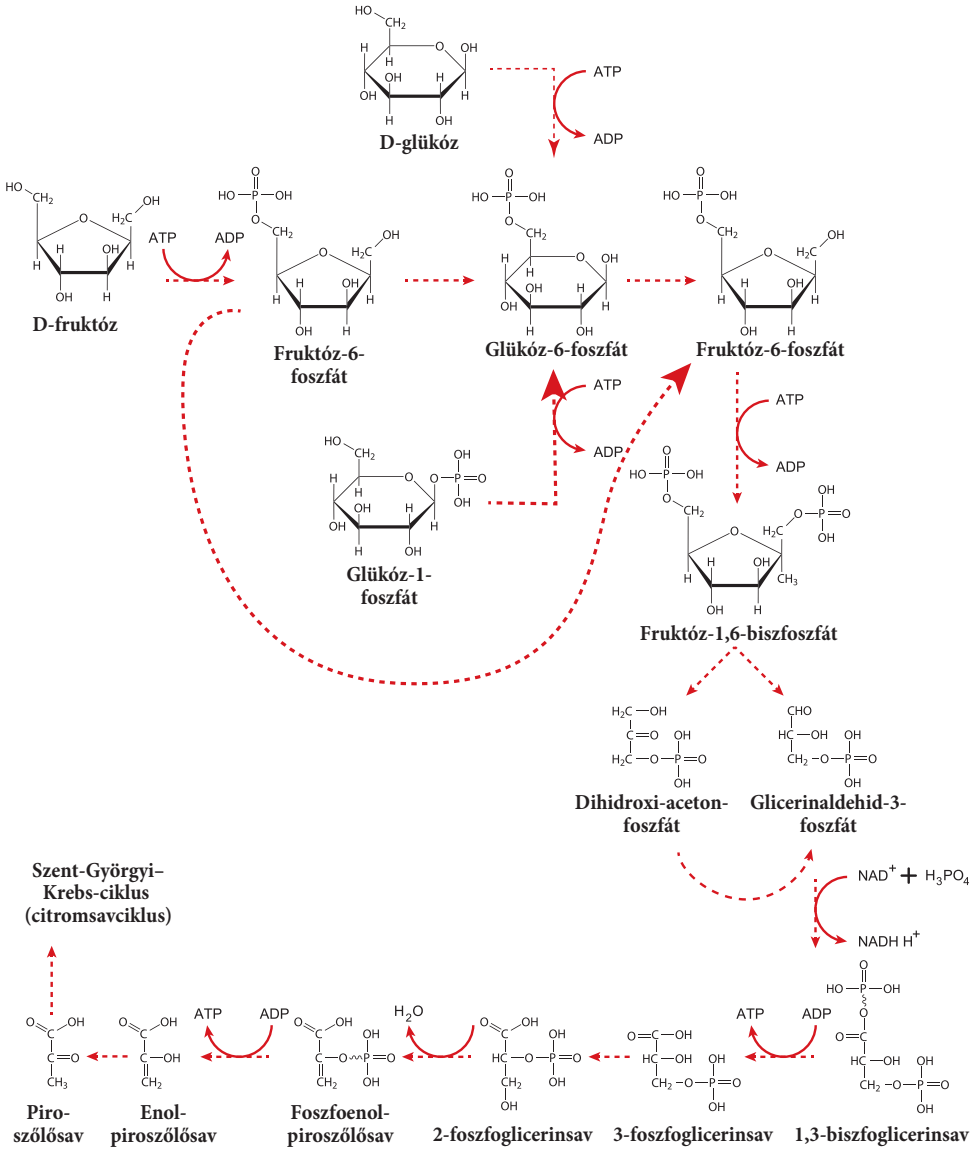
	Ion	Vérplazma	Fehérjementes vérplazma	Szövetek közti tér	Sejtplazma
kation(1)	Na^+	142	153	145	12
	K^+	4,3	4,6	4,4	140
	szabad Ca^{2+}	2,6	2,8	2,5	< 0,001
	szabad Mg^{2+}	1,0	1,0	0,9	1,6
	összesen	150	161	153	151
anion	Cl^-	104	112	117	3
	HCO_3^-	24	26	27	10
	szervetlen foszfát	2	2,2	2,3	30
	fehérje	14	15	0,4	54
	egyéb	5,9	6,3	6,2	54
	összesen	150	162	153	151

* Silbernagl, S., Despopoulos, A. (2015)

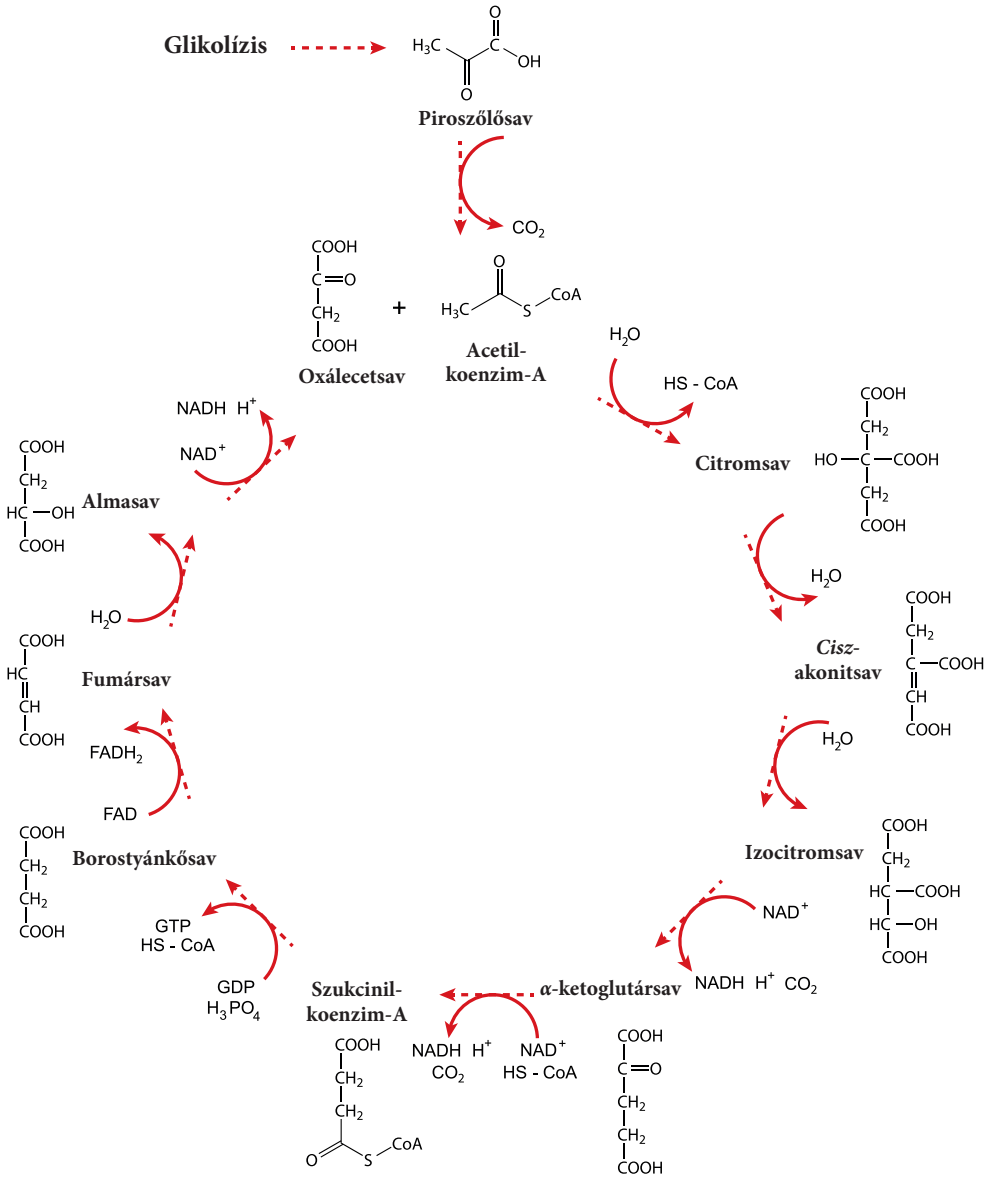
(1) Az adatok egy része élettani helyzet szerint változó, illetve körülbelüli adat, a kationok, anionok össztöltésszáma nem feltétlenül egyezik meg.

Sejtszintű anyagcsere

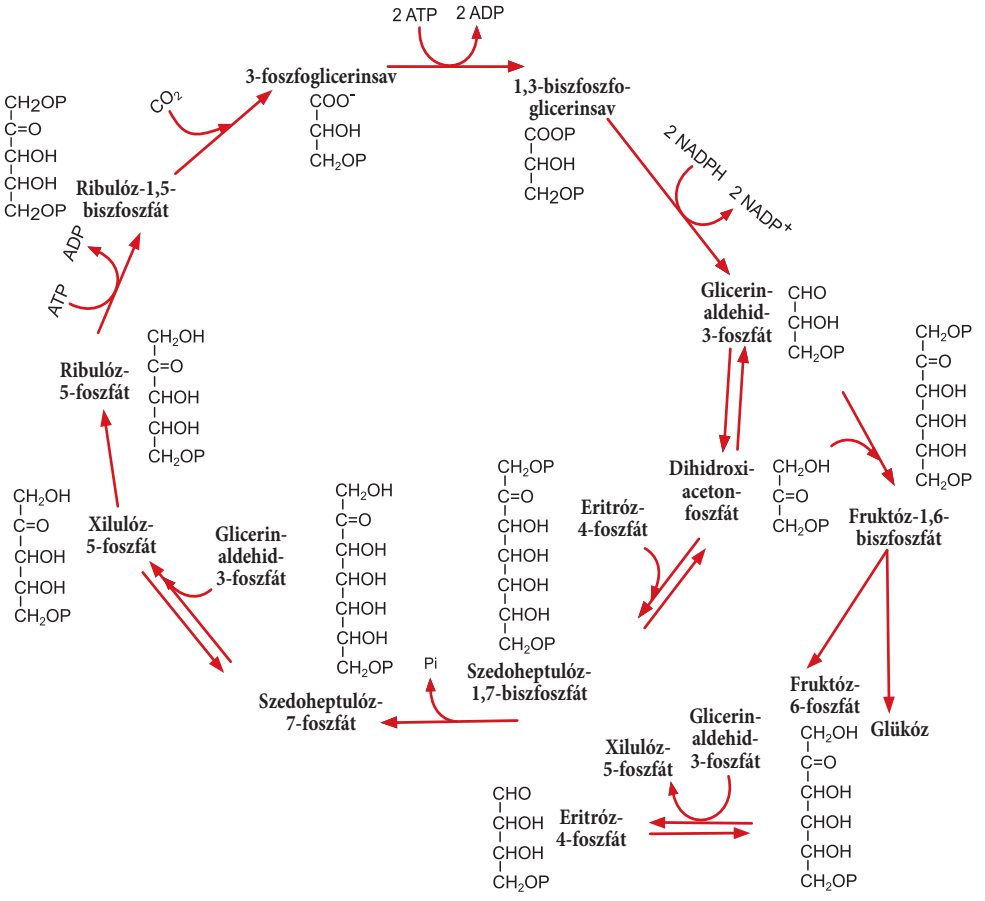
A glikolízis lépései



A citromsavciklus (Szent-Györgyi–Krebs-ciklus) lépései



A fotoszintézis sötét szakaszának lépései (Calvin-ciklus)



1 mol glükóz biológiai oxidációja során felszabaduló ATP anyagmennyisége

3. táblázat

	Glikolízis	Citromsav-ciklus	A terminális oxidációba lépő összes redukált koenzim	A terminális oxidáció ATP-termelése	A biológiai oxidáció során keletkező ATP/GTP
ATP/GTP	2 mol	2 mol			26,94–29,12 mol
$NADH + H^+$	2 mol	6 mol	6–8*	16,38–21,84 mol**	
$FADH_2$		2 mol	2–4*	3,28–6,56 mol**	

* A glikolízis során keletkező NADH a mitokondriumba két úton juthat el. Az egyik út során NADH, míg a másik út során $FADH_2$ keletkezik.
** 1 mol NADH oxidálása 2,73 mol ATP-t szabadít fel.
1 mol $FADH_2$ oxidálásakor 1,64 mol ATP keletkezik.
1 mol acetil-CoA eloxidálása 10,83 mol ATP-t eredményez.

Az emberi szervezet életfolyamatai

Tápanyagok energiatartalma és az energiaszükséglet(1)

4. táblázat

	Szükséglet (g/nap)	Élettani égéshő (kJ/g)	Naponként felszabaduló energia (kJ/nap)	Az energiaszükségletből való részesedés
Zsírok	65	38,9	2 528,5	25,04%
Fehérjék	70	17,2	1 204	11,93%
Szénhidrátok	370	17,2	6 364	63,03%
		Összesen	10 096,5	100%

(1) Könnyű munkát végző 70 kg testtömegű férfira vonatkozó adatok.

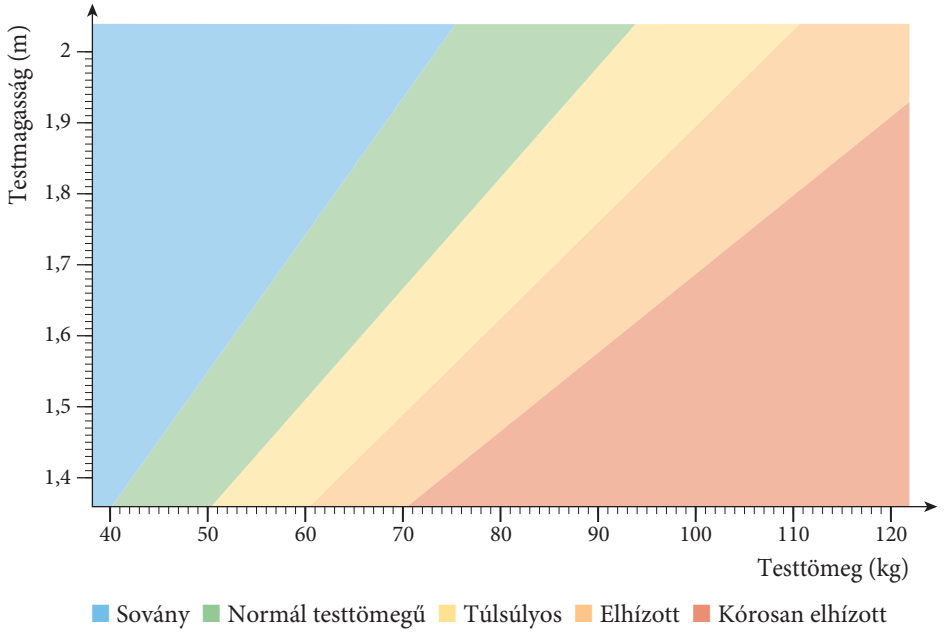
Táplálkozással kapcsolatos élettani adatok*

5. táblázat

	Férfiak		Nők	
Energiaszükséglet ágynyugalomban	6500 kJ/nap		5400 kJ/nap	
Energiaszükséglet könnyű irodai munka során	10 800 kJ/nap		9600 kJ/nap	
Energiaszükséglet sportolás során	4,5–6,8 kJ/s (1 óra sportolás 16 200 – 24 400 kJ-t igényel)		3,6–5,4 kJ/s (1 óra sportolás 12 960 – 19 440 kJ-t igényel)	
Az emberi szervezet normális működéséhez szükséges minimális fehérjebevitel	1 g/kg testtömeg			
Vitaminok optimális napi bevitele	A: 1–15 mg	B_1, B_2, B_3, B_5, B_6: 25–300 mg	B_{12}: 25–300 µg	
	C: 500–5000 mg	D: 400–600 NE(1) (10–15 µg)	E: 200–800 NE	
	Folsav: 0,4–1,2 mg	H: 25–300 µg	K: 65–80 µg	
Elektrolitok és nyomelemek optimális napi bevitele	Ca^{2+}: 1–1,5 g	Cr: 200–600 µg	Cu^{2+}: 0,5–2 mg	Fe^{2+}: 15–30 mg
	I^-: 50–300 µg	K^+: 0,8–1,5 g	Mg^{2+}: 500–750 mg	Mn: 15–30 mg
	Mo: 45–500 µg	Na^+: 2 g	P: 200–400 mg	Se: 50–400 µg

* Silbernagl, S., Despopoulos, A. (2015)
(1) NE: Nemzetközi egység. Téli időszakban 2000 NE bevitele ajánlott

Testtömegindexek*



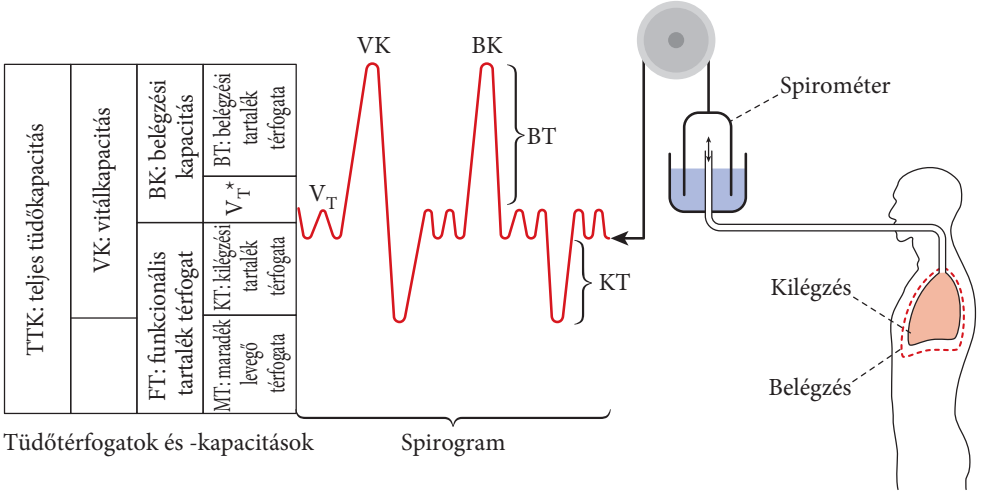
* Testtömegindex (BMI: Body Mass index)

A testtömegindex kiszámítása: a kilogrammban kifejezett testtömeg osztva a méterben kifejezett testmagasság négyzetével.

$$\text{TTI} = \frac{\text{testtömeg}}{\text{testmagasság}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Gyermekek esetén nem használható, a kategóriahatárok életmódtól is függhetnek.

A légzéssel kapcsolatos adatok mérése



* V_T = Respirációs térfogat: egy levegővétellel megmozgatott levegő térfogata nyugalomban.

Az emberi légzéssel kapcsolatos élettani adatok*

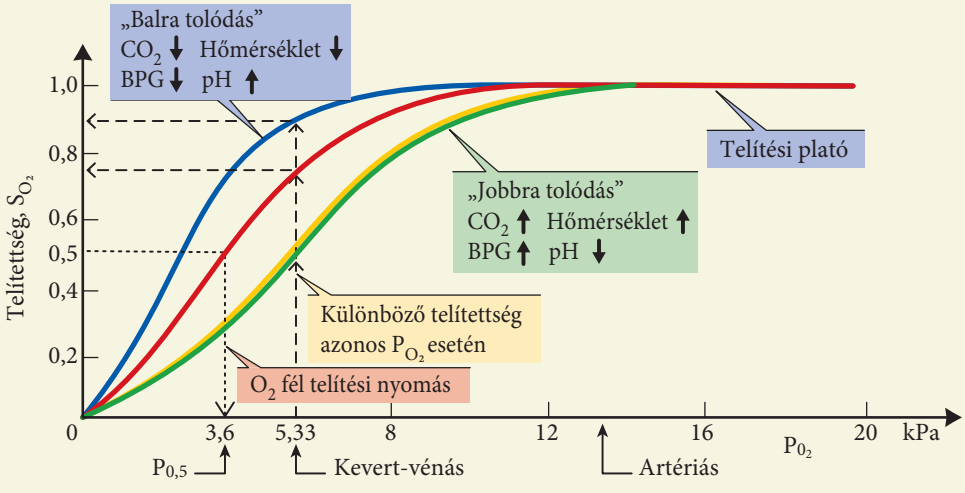
6. táblázat

	Férfiak	Nők
Teljes tüdőkapacitás	7 l	6,2 l
Vitálkapacitás	5,6 l	5 l
Respirációs térfogat	0,6 l	0,5 l
Belégzési tartalék	3,2 l	2,9 l
Kilégzési tartalék	1,8 l	1,6 l
Maradék levegő	1,4 l	1,2 l
Légzési határérték (30/min légzésfrekvencia)	110 l	100 l
O_2 parciális nyomása	Levegő: 21,17 kPa (159 Hgmm)	
	Léghólyag: 13,33 kPa (100 Hgmm)	
	Artériás vér (nagy vérkör): 12,66 kPa (95 Hgmm)	
	Vénás vér (nagy vérkör): 5,3 kPa (40 Hgmm)	
CO_2 parciális nyomása	Levegő: 0,03 kPa (0,23 Hgmm)	
	Léghólyag: 5,2 kPa (39 Hgmm)	
	Artériás vér (nagy vérkör): 5,3 kPa (40 Hgmm)	
	Vénás vér (nagy vérkör): 6,1 kPa (46 Hgmm)	
Légzési frekvencia nyugalomban	16/min	
Vér oxigénszállító kapacitása	180–200 ml O_2 / l vér, 8–9 mmol/l vér	
Respirációs hányados: V_{CO_2}/V_{O_2}	0,84	

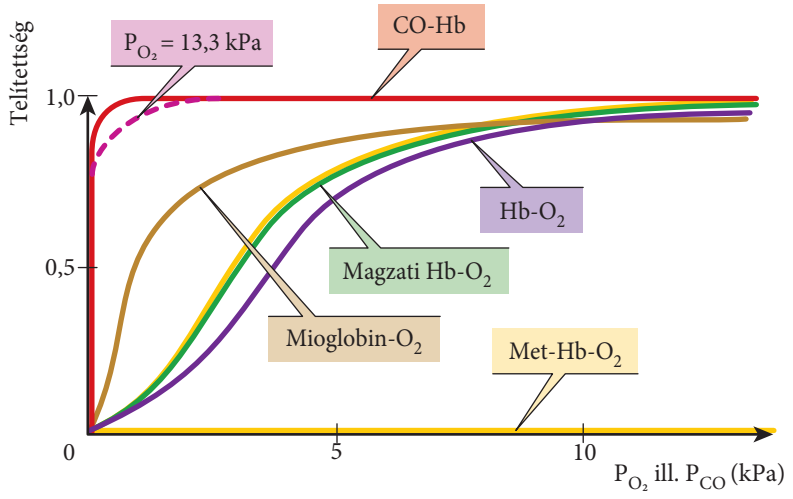
* Silbernagl, S., Despopoulos, A. (2015)

A hemoglobin oxigénkötő képessége az érpálya különböző szakaszaiban

A BPG (2,3-difoszfoglicerinsav) a hemoglobinhoz kötődve úgy változtatja meg annak konformációját, hogy az oxigéntelítési görbét jobbra tolja el, vagyis adott O_2-tenzión megkönnyíti az oxigén leadását. Koncentrációja a vörösvértesten belül változhat, függ a tengerszint feletti magasságtól.



Vérfehérjék oxigéntelítettségi görbéi



Hb: hemoglobin
Met-Hb: methemoglobin, oxidált vasiont (Fe^{3+}) tartalmazó hemoglobin
13,3 kPa jelentése: A szaggatott vonalú görbe felvétele során a CO mellett a gázkeverék 13,3 kPa (kb. 100 Hgmm) parciális nyomású oxigént tartalmazott. (Ez megfelel az oxigén normál légköri nyomáson mérhető parciális nyomásának.)

A szívciklus egyes szakaszainak időtartama emberben, nyugalmi állapotban*

7. táblázat

Szakasz	Időtartam (ms)
Azonos térfogat mellett történő összehúzódás (mind a négy billentyű zárt)	50
Maximális mértékű kamrai összehúzódás időtartama	90
Csökkent mértékű kamrai összehúzódás időtartama	130
Kamrai szisztolé teljes időtartama	**270**
Prodiasztolé: a kamrai elernyedés kezdetétől a zsebes billentyűk zárásáig	40
Azonos térfogat mellett történő elernyedés (mind a négy billentyű zárt)	80
Gyors telődés	110
Lassú telődés	190
Pitvari összehúzódás	110
Teljes kamrai diasztolé időtartama	**530**

* Fonyó, A. (2014)

A nagy vérkör érszakaszainak jellemzői

8. táblázat

	Aorta	Nagy artériák	Artéria-ágak	Arteriolák	Hajszálerek	Venulák	Vénaágak	Nagy vénák	Nagy üres vénák
Erek száma	1	Növekvő		$1{,}6\times10^8$	5×10^9	5×10^8	Csökkenő		2
Részesedés a TPR-ből[1]	19%		47%		27%		7%		
Vérnyomás maximum-minimum (Hgmm)	120–80		40–25		25–20	20–6	6–3		
Áramlási sebesség (cm/s)	18–5		5–1,5		1,5–0,02	0,1–1	1–6		
Egyedi átmérő	2,6 cm	8 mm	3–0,6 mm	20 µm	9 µm	25 µm	1,5–7 mm	1,6 cm	3,2 cm
Összkeresztmetszet (cm^2)	5,3	20	20	500	3500	2700	100	30	10
Teljes befogadóképesség (cm^3)[2]	180	250	250	125	300	550	1550	900	250

[1] TPR: teljes perifériális ellenállás.
[2] A nagy vérkör össztérfogata a szív nélkül: 4400 cm^3.

Szervek véráramlása nyugalomban

9. táblázat

	A perctérfogat %-a	A szerv grammjaira vonatkoztatott véráramlás (cm^3/min)
Szív	4	0,8
Agy	13	0,5
Vesék	20	4
Májkapuér véráramlása	16	0,70
Májartéria véráramlása = máj	8	0,3
Vázizomzat	21	0,04
Bőr és egyéb szervek	18	–

A szívvel és a vérkeringéssel kapcsolatos élettani adatok*

10. táblázat

A szív súlya	250–350 g		
Perctérfogat nyugalomban	5–6 dm^3/min		
Maximális perctérfogat	25 dm^3/min		
Nyugalmi pulzusszám = szinuszritmus	60–75/min		
Artériás vérnyomás (szisztolés/diasztolés)	120/80 Hgmm (16/10,7 kPa)		
Vénás vérnyomás	3–6 Hgmm		
Végdiasztolés/végszisztolés kamratérfogat	120/40 cm^3		
Ejekciós frakció[1]	0,67		
Pulzushullám terjedési sebessége (m/s)	Aorta: 0,18	Kapillárisok: 0,0002–0,001	Üres vénák: 0,06

* Az oldal adatainak forrása: Silbernagl, S., Despopoulos, A. (2015)
[1] Az ejekciós frakció a szív teljesítményét jelző arányszám, a verőtérfogat és a végdiasztolés térfogat hányadosa.

A vér és a belőle származtatható folyadékok paraméterei 1.*

11. táblázat

	Férfiak	Nők
Vértérfogat	4,5 dm^3	3,6 dm^3
Hematokrit(1)	0,4–0,54	0,37–0,47
Vörösvérsejtszám	4,6–5,9/µl(2)	4,2–5,4/µl(2)
Hemoglobin-koncentráció a teljes vérben	140–180 g/dm^3 2,2–2,8 mmol/dm^3	120–160 g/dm^3 1,9–2,5 mmol/dm^3
A vörösvérsejtek átlagos térfogata (MCV)	80–100 fl (femtoliter = 10^{-15} l)	
A vörösvérsejtek átlagos hemoglobin-koncentrációja (MCHC)	320–360 g/dm^3	
A vörösvérsejtek átlagos hemoglobin-koncentrációja (MCH = HB_E)	27–32 pg (pikogramm: 10^{-12} g)	
A vörösvérsejtek átlagos átmérője	7,2–7,8 µm	
Retikulociták (fejletlen, sejtmagvas vörösvérsejtek)	0,4–2% (20 000 – 100 000/µl)	
Fehérvérsejtek	3000 – 11 000/µl(2)	
Vörösvérsejtek süllyedési sebessége az első órában	< 10 mm/h	< 20 mm/h
Plazmafehérjék		
Összes	66–85 g/dm^3	
Albumin	35–50 g/dm^3	55–64 rel.%(3)
α_1-globulin	1,3–4 g/dm^3	2,5–4 rel.%
α_2-globulin	4–9 g/dm^3	7–10 rel.%
β-globulin	6–11 g/dm^3	8–12 rel.%
γ-globulin	13–17 g/dm^3	12–20 rel.%
Véralvadás		
Vérzési idő	< 6 perc	

* Silbernagl, S., Despopoulos, A. (2015)
(1) A hematokrit értéke megmutatja a vér alakos elemeinek arányát a teljes vértérfogathoz viszonyítva.
(2) µl = mm^3
(3) rel.% = az összes vérplazmafehérjéhez viszonyított arány

A vér és a belőle származtatható folyadékok paraméterei 2.

12. táblázat

Glükózanyagcsere paraméterei	
A vénás vér glükózkoncentrációja	3,9–5,5 mmol/dm³, 70–100 mg/dl
A kapilláris vér glükózkoncentrációja	4,4–6,1 mmol/dm³, 80–110 mg/dl
A plazma glükózkoncentrációja	4,2–6,4 mmol/dm³, 75–115 mg/dl
A cukorbetegség határértéke a plazmában	> 7,8 mmol/dm³, > 140 mg/dl
Glikolizált hemoglobin(1) A_1	3,2–5,2%
A zsíranyagcsere paraméterei	
Trigliceridek a szérumban	< 1,71 mmol/dm³ < 150 mg/dl
Összes koleszterin a szérumban	< 5,2 mmol/dm³ < 200 mg /dl
HDL-koleszterin a szérumban	> 1,4 mmol/dm³ > 40 mg/dl
Nitrogéntartalmú anyagcseretermékek	
Karbamidkoncentráció a szérumban	3,3–8,3 mmol/dm³, 20–50 mg/dl
Húgysav-koncentráció a szérumban	150–390 µmol/dm³, 2,6–6,5 mg/dl
Kreatininkoncentráció a szérumban	36–106 µmol/dm³, 0,4–1,2 mg/dl
Bilirubin	
Összes bilirubin	3,7–14 µmol/dm³, 0,2–1 mg/dl
Direkt bilirubin(2)	0,7–5,1 µmol/dm³, 0,05–0,3 mg/dl
Elektrolitok és vérgázok	
Ozmolalitás	280–300 mosm/kg víz(3)
Kationok (mmol/dm³ a szérumban)	Na^+: 135–145; K^+: 3,5–4,5; szabad Ca^{2+}: 1,0–1,3; szabad Mg^{2+}: 0,5–0,7
Anionok (mmol/dm³ a szérumban)	Cl^-: 95–108; $H_2PO_4^-$ + HPO_4^{2-}: 0,8–1,5
pH	7,35–7,45
Összes pufferbázis(4)	48 mmol/dm³
Standard bikarbonát- (HCO_3^- ion) koncentráció	22–26 mmol/dm³
Oxigéntelítettség (szaturáció)	artériás: 96%; kevert vénás: 65–75%
Oxigén parciális nyomása féltelítés esetén ($P_{0,5}$)	3,6 kPa; 27 Hgmm

(1) A diabéteszes beteg tartósan magas vércukorszintje mérhető vele. A vérben található glükóz kondenzációs reakcióval kapcsolódik a hemoglobint felépítő aminosavak oldalláncaihoz.

(2) A direkt bilirubin a hemoglobin bomlástermékének, a bilirubinnak a glükuronsavval összekapcsolt és így vízoldékony formája.

(3) 1 osmol mindazon vizes oldatok ozmolalitása – bármilyen is az összetételük –, amelyek fagyáspontja –1,85 °C. Vagyis az ozmolalitás az oldat összes oldottanyag-tartalmára vonatkozik.

(4) Az összes pufferbázis azoknak a pufferként viselkedő molekuláknak és ionoknak az összesített értéke, ami képes állandó szinten tartani a vér pH-ját. (Literenként 48 mmol erős egyértékű sav vagy lúg fogja 1 egységgel csökkenteni vagy növelni a vér pH-ját). Pufferként viselkednek a vér HCO_3^-, HPO_4^{2-} és $H_2PO_4^-$ ionjai, valamint a vérplazmafehérjék.

Ökológia

Élőhelyek és növényfajok ökológiai jellemzői (TWR-táblázat)*

13. táblázat

T-érték: fajok hőmérsékleti igényei, a legjellemzőbb klímaövvel megadva		**W-érték: fajok vízigénye, illetve az a termőhely, ahol a növény a leggyakrabban előfordul**	
0	tág tűrésű faj, határozott hőigény nélkül	0	extrém száraz
1	tundra	1	igen száraz
2	erdős tundra	2	száraz
3	tajga	3	mérsékelten száraz
4	tű- és lomblevelű erdők	4	mérsékelten üde
5	lomblevelű klíma	5	üde
6	szubmediterrán lomberdő	6	mérsékelten nedves
7	mediterrán és atlanti örökzöld erdő	7	nedves
R-érték: fajok pH-igénye		8	mérsékelten vizes
0	a pH-ra nézve tág tűrésű faj	9	vizes
1	savanyú	10	igen vizes
2	gyengén savanyú	11	vízi
3	közel semleges		
4	enyhén meszes		
5	meszes, bázikus		
N-érték: fajok nitrogénigénye		**Z-érték: fajok degradációtűrésének jellemzése**	
0	közömbös fajok	–	ismeretlen degradációtűrésű
1	nitrogénben szegény termőhelyeken élő fajok	1	degradációt nem tűrő
2	inkább nitrogénben szegény termő-helyeken élők	2	degradációt kevésbé tűrő
3	közepes nitrogénigényű fajok	3	degradációt közepesen tűrő
4	inkább nitrogénben gazdag, jó tápanyag ellátottságú talajokon élők	4	degradációt jól tűrő
5	csak nitrogénban gazdag, túltrágyázott termőhelyeken élők	5	degradációt kedvelő

* Simon–Seregélyes (1998)

Biológiai produkciók*

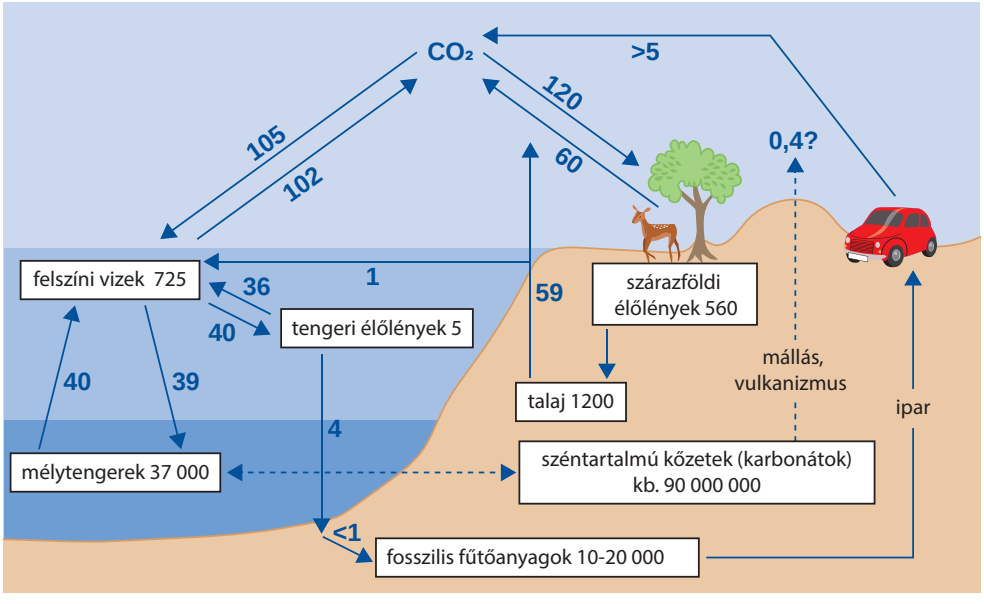
14. táblázat

Biomtípus(1)	Terület 10^6 km^2	Nettó primer produkció		Biomassza	
		átlagosan terület-egységenként g m^{-2}/év	összesen 10^9 t/év	átlagosan terület-egységenként kg/m^2	összesen 10^9 t
Trópusi esőerdő	17,0	2200	37,4	45	765
Trópusi lombhullató erdő	7,5	1600	12,0	35	250
Mérsékelt övi lombhullató erdő	5,0	1300	6,5	30	210
Tajga	12	800	9,6	20	240
Szavanna	15,0	900	13,5	4	60
Tundra és alpesi biomok	8,0	140	1,1	0,6	5
Sivatagok, félsivatagok	18,0	90	1,6	0,7	13
Kontinensek összesen	**149**	**782**	**117,5**	**12,2**	**1837**
Nyílt óceán	332,0	125	41,5	0,003	1,0
Kontinentális self	26,6	360	9,6	0,001	0,27
Korallzátonyok	0,6	2500	1,6	2	1,2
Folyótorkolatok	1,4	1500	2,1	1	1,4
Tengerek összesen	**361**	**155**	**55,0**	**0,01**	**3,9**

* SH atlasz, Ökológia (1995)

(1) A táblázatban nem az összes szárazföldi biomtípus szerepel.

A szénkörforgás adatai*



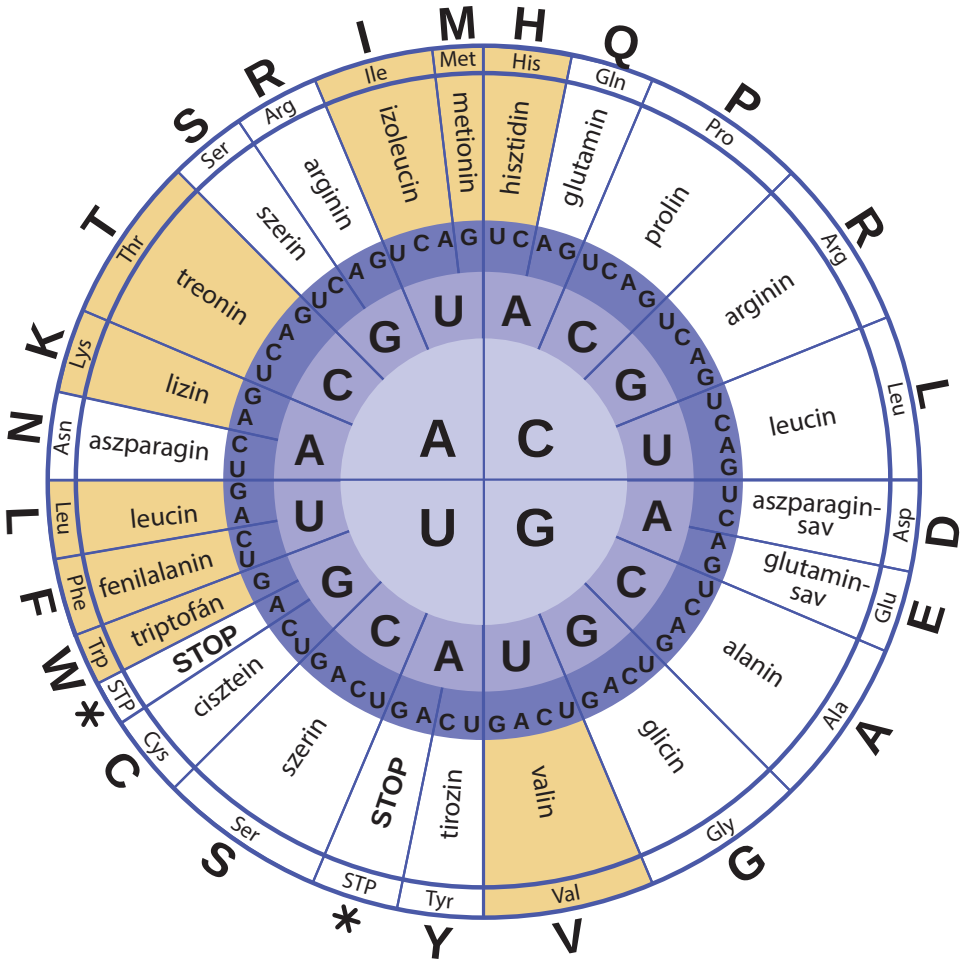
* Kerényi (1995) és SH (1995)
A keretbe írt számok a szénvegyületek mennyiségét jelzik (10^9 t).
A nyilak mellé írt számok a szénvegyületek évi áramlását mutatják (10^9 t/év).
A szaggatott nyíllal jelölt folyamatokról nincsenek pontos adatok.

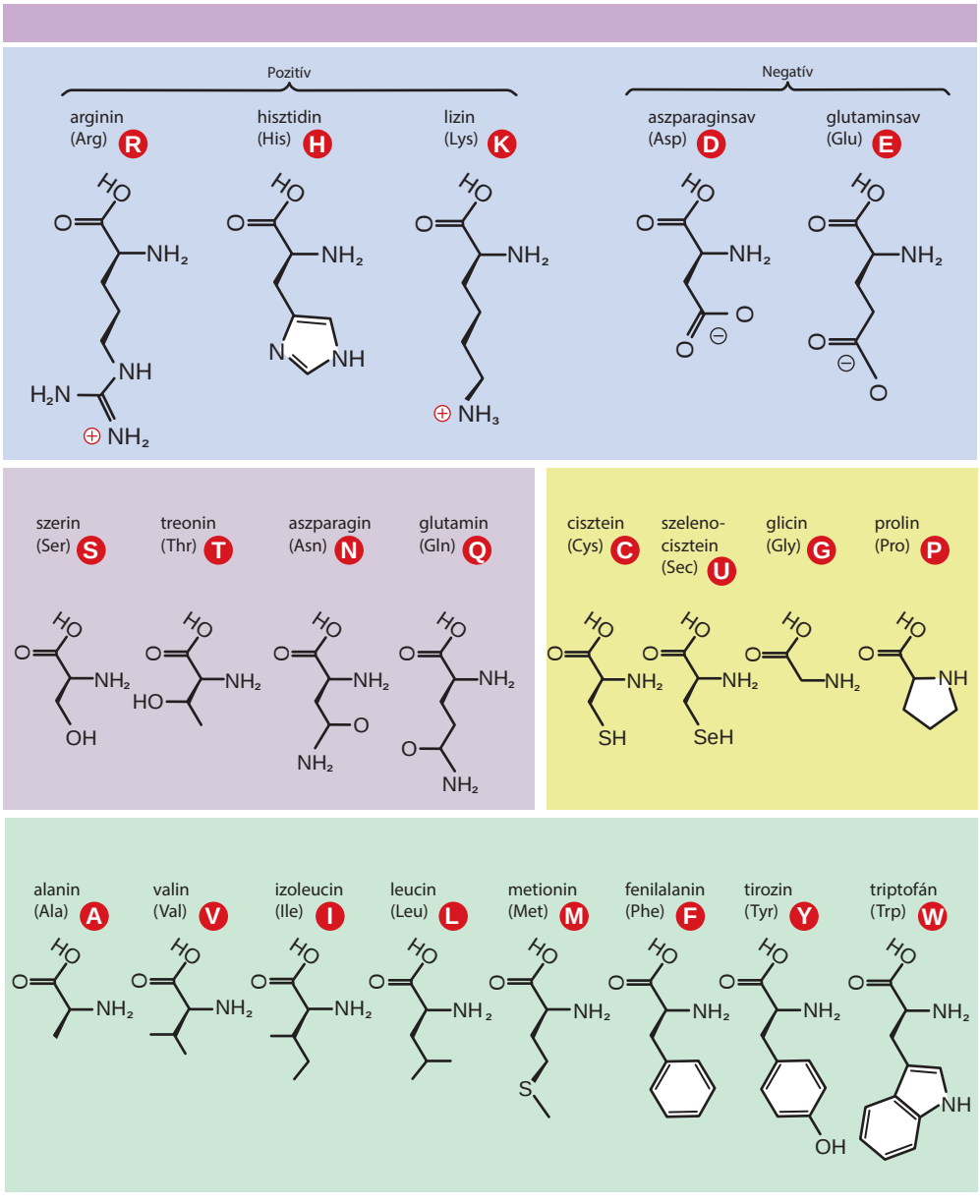
Genetika

A kodonszótár és az aminosavak

A belső kör betűi az mRNS kodonjainak első, a középső kör a második, a külső kör a harmadik bázisát jelöli. A körön kívüli nagybetűk az aminosavak elfogadott jelölései. A sárga szín az ember számára esszenciális aminosavakat mutatja.

15. táblázat





A háttérszín az aminosavak oldalláncainak tulajdonságait jelzi
Kék háttér: semleges pH-n pozitív vagy negatív töltésű oldalláncok
Lila háttér: poláris csoportot tartalmazó oldalláncok
Zöld háttér: apoláris oldalláncok
Sárga háttér: valamilyen szempontból kivételes oldalláncok

Néhány monogénes öröklődésű betegség öröklődésmenete*

AR: autoszomális recesszív
AD: autoszomális domináns
XR: X-kromoszómához kötött recesszív
XD: X-kromoszómához kötött domináns

16. táblázat

Albinizmus	AR
Cori-kór	AR
Cisztás fibrózis	AR
Fenilketonuria	AR
Galaktózémia	AR
Glükóz-6-foszfát-dehidrogenáz hiánya	XR
Hemofília A (VIII. faktor hiánya)	XR
Hemofília B (IX. faktor hiánya)	XR
Huntington-betegség	AD
Juharfaszirup-betegség	AR
Lesh–Nyhan-szindróma	XR
Marfan-szindróma	AD
Piruvát-kináz-hiány	AR
Policisztás vesebetegség (felnőttkori)	AD
Polidaktilia	AD
Pompe-kór	AR
Sarlósejtes vérszegénység(1)	AD/AR
Színtévesztés	XR
Tay–Sachs-betegség	AR
Wilson-kór	AR

* Mandl, J., Machovich, R., (2007)

(1) A sarlósejtes vérszegénység homozigóta állapotának súlyossága változó, részben a környezeti és szociális tényezők határozzák meg. Heterozigótáknál a tünetek enyhébbek, csak oxigénhiányos állapotban jelennek meg.

Felhasznált irodalom

Atkins, P. W.: *Fizikai kémia.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

Ebbing, D. D.: *General chemistry.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1984.

Elementary Textbook on Physics. Mir Publischer, Moszkva, 1988.

Fonyó Attila: *Orvosi élettan.* 6. kiadás. Medicina Könyvkiadó, Budapest, 2014.

Fröhlich Izidor (szerk.): *Báró Eötvös Loránd emlékkönyv.* MTA, Budapest, 1930.

General Chemistry. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, Toronto, 1984.

Greenwood, N. N., Earnshaw, A.: *Az elemek kémiája.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Handbook of Chemistry and Physics. 1. kiadás. (Szerk.: David R. Lide) 1990–1991.

Holics László (szerk.): *Fizika I–II.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

Holics László: *Fizika III.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

Kerényi Attila: *Általános környezetvédelem.* Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 2006.

Korányi Erzsébet: *Egy könyvben a középiskolai matematika.* Litovalentin Kft., Budapest, 1997.

Koshin, N. I., Shirkevich, M. G.: *Handbook of elementary physics.* Mir Publischer, Moszkva, 1977.

Lansberg, G. S.: *Elementary Textbook on Physics. I–III.* Fimatlit, Moszkva, 2000.

Lovelock, Jim: *Gaia.* Göncöl Kiadó, Budapest, 1987.

Mandl, J., Machovich, R.: *Orvosi patobiokémia.* Medicina Könyvkiadó, Budapest, 2007.

Dr. Mázor László: *Szerveskémiai analitikai kézikönyv.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.

Négyjegyű függvénytáblázatok. Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Paturi, Felix (szerk.): *A Föld krónikája.* Officina Nova, Budapest, 1993.

Praticle Physics Booklet (szerk.: D. E. Groom et al.). Springer, Cern, 2000.

Riedel Miklós: *Az SI és a IUPAC definíciók alkalmazása a kémiaoktatásban.* ELTE, Fizikai-kémiai Tanszék, Budapest, 1988.

Rózsahegyi Márta, Wajand Judit: *Rendszerező kémia mintapéldákkal, feladatokkal.* Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1992.

Silbernagl, S., Despopoulos, A.: *Élettan.* Medicina Könyvkiadó, Budapest 2015.

Simon Tibor, Seregélyes Tibor: *Növényismeret.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

Szervetlen kémiai analitika zsebkönyv. Műszaki Kiadó, Budapest, 1966.

Villányi Attila: *Kémiai összefoglaló középiskolásoknak.* Calibra Kiadó, Budapest, 1992.

Tartalom

Bevezetés 3

MATEMATIKA

Fontosabb matematikai jelek, jelölések 6

A görög abécé betűi 8

Előtagok (prefixumok) 8

Gondolkodási műveletek 9
Halmazelmélet 9
Fogalmak, jelölések 9
Halmaz részhalmaza 9
Műveletek halmazokkal 9
Halmazok uniója (egyesítése) ... 9
Halmazok metszete (közös része) 10
Két halmaz különbsége 10
Halmaz komplementere 10
Két halmaz szimmetrikus különbsége (differenciája) 10
Két halmaz Descartes-szorzata (direkt szorzata) 10
Logikai szita formula kettő, illetve három halmaz esetén 11
Halmazműveleti azonosságok 11
Logika 11
Fogalmak, jelölések 11
Logikai műveletek és értéktáblázataik 11
Tagadás (negáció, not) 11
Megengedő vagy (diszjunkció, or) 11
És (konjunkció, and) 12
Kizáró vagy (antivalencia, xor) .. 12
Ha ..., akkor (implikáció) 12
Ekvivalencia 12
Műveleti azonosságok 12
Gyakran használt következtetési sémák 12
Kombinatorika 13
Permutáció (sorba rendezés) 13
Ismétlés nélküli permutáció 13
Ismétléses permutáció 13
Variáció (kiválasztás sorrenddel) ... 13
Ismétlés nélküli variáció 13
Ismétléses variáció 13
Kombináció (kiválasztás sorrend nélkül) 14
Ismétlés nélküli kombináció 14
Ismétléses kombináció 14
Binomiális együtthatók 14
A Pascal-háromszög 14

Gráfok 15
Gráfokkal kapcsolatos alapvető elnevezések 15
Alapvető gráfelméleti tételek 16
Út, vonal, kör, összefüggőség 17
Euler-vonal, Hamilton-kör 17
Fagráfok 18
Tételek, összefüggések 18
Síkgráfok 18

Számelmélet, algebra 19
A valós számok áttekintése, számhalmazok 19
Természetes számok 19
Egész számok 19
Racionális számok 19
Irracionális számok 19
Valós számok 19
A számhalmazok kapcsolata 19
Az alapműveletek elvégezhetősége a nevezetes számhalmazokon belül 20
Műveleti tulajdonságok a valós számok körében 20
Felcserélhetőség (kommutativitás) 20
Disztributivitás 20
Csoportosíthatóság (asszociativitás) 20
Néhány egyéb tulajdonság 20
Szám reciproka 20
Abszolút érték 20

Pozitív számok normálalakja 20
Természetes számok felírása számrendszerekben 21
Komplex számok 21
Komplex számok és jelölésük 21
Műveletek komplex számokkal 21
Számelmélet 22
Oszthatóság a természetes számok körében 22
Főbb oszthatósági szabályok ($n \in \mathbb{N}$) 22
Általános oszthatósági szabályok 22
Prímszámok 22
A számelmélet alaptétele 22
Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös 22
A 2-vel, 3-mal és 5-tel nem osztható számok prímtényezős felbontása ($n \leq 1001$) 23
Osztók száma, osztók összege ... 24
Hatványozás 24
A hatványozás definíciója különböző kitevőfajtákra 24
Pozitív egész kitevőre 24
Nulla kitevőre 24
Negatív egész kitevőre 24
Racionális kitevőre 24
Gyökvonás 25
Négyzetgyök 25
Az n-edik gyök 25
Logaritmus 25
A hatványozás, a gyökvonás és a logaritmus azonosságai 25
Számok 10-es alapú logaritmusa ... 26
Algebrai kifejezések, nevezetes azonosságok 28
Algebrai kifejezések 28
Polinomok 28
Nevezetes azonosságok 28
Binomiális tétel 28
Egyenletek, egyenlőtlenségek 29
Egyenletek 29
Egyismeretlenes egyenletek 29
Egyenletek ekvivalenciája 29
Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet 29
Másodfokú egyenletek 29
Egyenlőtlenségek 30
Az egyenlőtlenség megoldása ... 30
Egyenlőtlenségek átalakítása 30
Nevezetes közepek 30
A közepek között fennálló nevezetes egyenlőtlenségek 30
Sorozatok 31
Definíciók, jelölések 31
Speciális sorozatok és sorok 31
Számtani és mértani sorozatok .. 31
Mértani sor 31
Harmonikus sor 32
Az első n pozitív egész szám hatványainak összege 32
Kamatszámítás 32
Kamat, diszkont 32

Geometria 33
Síkbeli alakzatok 33
Szögpárok 33
Sokszögek szögei, oldalai 33
Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között 33
Négyszögek, sokszögek szögeivel, átlóival kapcsolatos összefüggések 34
Nevezetes négyszögek 34
Húrnégyszög 34
Érintőnégyszög 35
A háromszög nevezetes pontjai és vonalai 35
Oldalfelező merőleges, körülírt kör 35
Szögfelező, beírt kör 35
Magasságvonal, magasságpont .. 35
Középvonal, súlyvonal, súlypont 36
Euler-egyenes, Feuerbach-kör 36
Fontosabb elemi geometriai összefüggések 37
Háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapesetei 37
Párhuzamos szelők tétele 37
Pitagorasz-tétel 37
Befogótétel 37
Magasságtétel 38
Szögfelezőtétel 38
A kör 38
Thalész tétele 38
Kerületi és középponti szögek ... 38

Látókörív ... 39
Apolloniusz tétele ... 39
Szelőszakaszok, érintőszakaszok, húrdarabok ... 40
Síkidomok kerülete, területe ... 40
Háromszög ... 40
Négyszögtípusok ... 40
Szabályos sokszögek ... 41
Kör és részei ... 42
Ellipszis ... 42
Hasonló síkidomok területe ... 42
Fontosabb térgeometriai fogalmak és tételek ... 42
Sík és egyenes merőlegessége, síkra merőleges egyenes tétele ... 42
Egyenes és sík hajlásszöge ... 43
Két sík hajlásszöge ... 43
Két párhuzamos sík távolsága ... 43
Kitérő egyenesek távolsága és szöge ... 43
Testek felszíne, térfogata ... 44
Hasonló testek felszíne, térfogata ... 45
Szabályos testek ... 45
Trigonometria ... 46
Szögfüggvények derékszögű háromszögben ... 46
Derékszög, tompaszögek szögfüggvényei ... 46
Derékszög szögfüggvényei ... 46
Tompaszögek szögfüggvényei ... 46
Tetszőleges forgásszögek szögfüggvényei ... 47
Nevezetes szögek szögfüggvényei ... 47
Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között ... 47
Háromszögekre vonatkozó trigonometrikus tételek ... 48
Szinusztétel ... 48
Koszinusztétel ... 48
Összefüggések két szög szögfüggvényei között ... 48
Addiciós tételek ... 48
Két szögfüggvény összegének szorzattá alakítása ... 48
Többszörös és félszögek szögfüggvénye ... 49
Trigonometrikus egyenletek megoldásánál használt összefüggések ... 49
Szögek szögfüggvényei ... 50
Szögek szinusza és koszinusza ... 50
Szögek tangense és kotangense ... 51
Vektorok ... 52
Jelölések, elnevezések ... 52
Vektorműveletek ... 52
Vektorok összeadása ... 52
Két vektor különbsége ... 52
Vektor szorzása skalárral ... 52
Két vektor skaláris szorzata ... 52
Koordinátageometria ... 53
Vektorok koordinátái ... 53
Két pont távolsága ... 53
Felezőpont, osztópont koordinátái ... 53
Háromszög súlypontjának koordinátái ... 54
Egyenes egyenletei ... 54
Adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő, m iránytangensű egyenes egyenlete ... 54
Adott $r_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő $v(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete ... 54
Adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete ... 54
Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete ... 54
Kör egyenlete ... 55
Parabola ... 55
A parabola egyenlete ... 55
Ellipszis ... 56
Az ellipszis egyenlete ... 56
Hiperbola ... 57
A hiperbola egyenlete ... 57

Analízis ... 59
Nevezetes függvények ... 59
Elsőfokú függvény ... 59
Másodfokú függvény ... 59
Négyzetgyökfüggvény ... 59
Az $\frac{1}{x}$ függvény ... 60
Abszolútérték-függvény ... 60
Törtrész-függvény ... 60

Egészrész-függvény 60
Exponenciális függvény 61
Logaritmusfüggvény 61
Trigonometrikus függvények 61
Szinuszfüggvény 61
Koszinuszfüggvény 62
Tangensfüggvény 62
Kotangensfüggvény 62
Függvénytranszformáció 63
Függvények határértéke 63
Határérték-számítási szabályok 63
Derivált (differenciálhányados), deriváltfüggvény 64
Az $x \mapsto f(x)$ függvény deriváltja az x_0 pontban 64
Az $x \mapsto f(x)$ differenciálható függvény grafikonjának érintője a $P_0(x_0; f(x_0))$ pontban 64
Differenciálási szabályok 64
Néhány elemi függvény deriváltfüggvénye 64
A függvény és a deriváltfüggvény kapcsolata 65
Határozatlan integrál, primitív függvény 65
Integrálási szabályok 65
Néhány elemi függvény primitívfüggvénye 65
Határozott integrálra vonatkozó azonosságok 65
Newton–Leibniz-formula 65

Valószínűségszámítás, statisztika 66
Valószínűségszámítás 66
Események, műveletek eseményekkel, teljes eseményrendszer 66
Események, speciális események 66
Műveletek eseményekkel, eseményalgebra 66
Teljes eseményrendszer 66
Valószínűség, feltételes valószínűség 66
Események valószínűsége 66
Teljes eseményrendszer 67
Klasszikus valószínűségi modell 67
Feltételes valószínűség, függetlenség 67
Teljes valószínűség tétele 67
Bayes-tétel 67
Valószínűségi változó, eloszlás 68
Várható érték és szórásnégyzet .. 68
Nevezetes valószínűségeloszlások 69
Diszkrét valószínűségeloszlások 69
Folytonos valószínűségeloszlások 70
Egyenletes eloszlás az (***a***, ***b***) intervallumon 70
Normális eloszlás 70
Standard normális eloszlás 70
Exponenciális eloszlás 70
A várható értékre és a szórásra vonatkozó összefüggések 72
Markov-egyenlőtlenség 72
Csebisev-egyenlőtlenség 72
A nagy számok Bernoulli-féle gyenge törvénye 72
Statisztika 72
Statisztikai adatok fajtái 72
Adatok (grafikus) ábrázolása 72
Oszlopdiagram 72
Hisztogram 73
Kördiagram 73
Sávdiagram 73
Töröttvonal-grafikon (vonaldiagram) 73
Piktogram 74
Statisztikai jellemzők 74
Középértékek 74
Az átlag körüli ingadozás becslései, szóródási mérőszámok 74

FIZIKA

Mechanika 78
A mozgás kinematikai leírása 78
Egyenes vonalú mozgások (anyagi pont) 78
Egyenes vonalú egyenletes mozgás 78
Változó vonalú mozgás 78
Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás 78
Periodikus mozgások 79
Egyenletes körmozgás 79

Egyenletesen változó körmozgás ... 80
Harmonikus rezgőmozgás ... 81
Kinematikai leírás ... 81
Összetett mozgások ... 82
Függőleges hajítás ... 82
Vízszintes hajítás ... 82
Ferde hajítás ... 83
Kerék gördülő mozgása ... 83
A mozgás dinamikai leírása ... 84
A Newton-törvények ... 84
Newton I. törvénye (tehetetlenség törvénye) ... 84
Newton II. törvénye ... 84
Newton III. törvénye (kölcsönhatás törvénye) ... 84
Az erőhatások függetlenségének elve ... 84
A dinamika alaptörvénye ... 84
Lendülettétel (impulzustétel) ... 84
Erőtörvények ... 85
A nehézségi erő ... 85
A gravitációs erő ... 85
A rugóerő ... 85
Csúszási súrlódási erő ... 85
Tapadási („nyugalmi") súrlódási erő ... 86
Kényszererő ... 86
A közegellenállási erő ... 86
Tömegpont periodikus mozgásainak dinamikája ... 86
Egyenletes körmozgás ... 86
Egyenletesen változó körmozgás ... 87
Harmonikus rezgőmozgás ... 87
Matematikai inga (fonálinga) ... 87
Csillapodó rezgések ... 87
Kényszerrezgés, rezonancia ... 88
Merev test forgómozgásának dinamikája ... 89
Perdület ... 89
Tehetetlenségi nyomaték ... 89
Steiner-tétel ... 89
Egyenletesen változó forgómozgás ... 90
A forgómozgás alapegyenlete ... 90
Perdülettétel ... 90
A tehetetlenségi erők ... 90
Munka, energia, teljesítmény ... 90
Munka, energia ... 90
Munka ... 90
Változó nagyságú erő munkája ... 91
Példák változó erő munkájára ... 91
Forgatónyomaték munkája ... 92
Energiafajták, munkatétel ... 92
A mozgási (kinetikus) energia ... 92
A forgási energia ... 92
A munkatétel ... 92
Munkatétel rögzített tengely körül forgó merev test esetén ... 92
Konzervatív erő ... 93
A helyzeti (potenciális) energia ... 93
Rugalmassági energia ... 93
Gravitációs energia ... 93
Teljesítmény, hatásfok ... 94
A teljesítmény (a munkavégzés sebessége) ... 94
Hatásfok ... 94
Haladó és forgómozgás összehasonlítása ... 94
Megmaradási tételek ... 95
Lendületmegmaradás törvénye ... 95
Lendületmegmaradás (impulzusmegmaradás) ... 95
Lendülettétel pontrendszerre ... 95
Pontrendszer tömegközéppontja 95
A tömegközéppont mozgásának tétele ... 96
A mechanikai energiamegmaradás ... 96
A mechanikai energiamegmaradás törvénye ... 96
Harmonikus rezgőmozgást végző test energiaviszonyai ... 96
Súrlódásmentes lejtőn mozgó tömegpont energiaviszonyai ... 97
Lejtőn csúszásmentesen guruló test energiaviszonyai ... 97
A perdület (impulzusnyomaték) megmaradása ... 97
Perdület (impulzusnyomaték) a pontrendszerben ... 97
Perdület (impulzusnyomaték) megmaradása ... 97
Ütközések ... 98
Tömegpont (anyagi pont) és merev test egyensúlya (statika) ... 98

Egyensúly 98
Tömegpont egyensúlya 98
Merev test egyensúlya 98
Egyensúlyi helyzetek 99
Egyszerű gépek 99
Emelő rendszerű egyszerű gépek 99
Lejtő rendszerű egyszerű gépek 101
Mechanikai hullámok 102
Haladó hullámok 102
Transzverzális és longitudinális hullámok 102
Terjedési sebesség 102
Hullámjelenségek 103
Visszaverődés (egyenes hullám visszaverődése) 103
Hullámok törése (Snellius–Descartes-törvény) ... 103
Elhajlás (diffrakció) 104
Hullámok találkozása, interferencia 104
Polarizáció 105
Doppler-jelenség, lökéshullám 105
Doppler-jelenség 105
Lökéshullám 106
Állóhullámok 107
Húrok, pálcák sajátrezgései 107
Rezgő levegőoszlopok (sípok) ... 107
Folyadékok és gázok mechanikája 108
Nyugvó folyadékok és gázok (hidrosztatika, aerosztatika) 108
Nyomás 108
Pascal törvénye 108
Hidraulikus emelő (sajtó) 108
A hidrosztatikai nyomás 109
Közlekedőedények 109
Hidrosztatikai paradoxon 109
Arkhimédész törvénye 110
Folyadékba merülő testek egyensúlya 110
A légnyomás (Torricelli-kísérlet) 110
Molekuláris erők folyadékokban ... 111
Felületi feszültség, határfelületi energia 111
Görbületi nyomás 111
Kapillárisemelkedés (süllyedés) . 112
Folyadékok és gázok áramlása 112
Ideális folyadékok 112
A stacionárius áramlás törvénye (kontinuitási törvény) 112
Bernoulli-törvény 112
Aerodinamikai emelőerő 113
Csavart labda 113

Hőtan 114
Hőtágulás 114
Szilárd testek tágulása 114
Szilárd testek vonalas (lineáris) hőtágulása 114
Szilárd testek felületi tágulása ... 114
Szilárd testek térfogati hőtágulása 114
Folyadékok hőtágulása 115
Gáztörvények 116
Az abszolút hőmérsékleti skála 116
Avogadro törvénye 116
Ideális gázok állapotegyenlete ... 116
Gázkeverékek állapotegyenlete 116
Egyesített gáztörvény 116
Speciális állapotváltozások (adott mennyiségű ideális gázra) 117
A molekuláris hőelmélet alapjai 117
A kinetikai gázmodell 117
Az energia egyenletes eloszlása (ekvipartíciótétel) 118
A termodinamika főtételei 119
Belső energia, tágulási munka 119
Belső energia 119
A térfogati munka 119
A termodinamika I. főtétele 120
Az I. főtétel speciális állapotváltozásokra 120
A hőkapacitás, fajhő, mólhő 121
A termodinamika II. főtétele 121
A termodinamika III. főtétele 122
Körfolyamatok gázokkal 122
Hőerőgép 122
Hőszivattyú, hűtőgép 123
Hőszivattyú jósági tényezője 123
Carnot-körfolyamat 123
Halmazállapot-változások 123
Olvadás, fagyás 123
Párolgás, lecsapódás 123
Forrás 124

Égéshő, fűtőérték 124
A hőközlés módjai 124
Hővezetés (kondukció) 124
Hőáramlás (konvekció) 124
Hősugárzás 125
Hőátvitel 125

Elektromágnesség 126
Időben állandó elektromos mező (elektrosztatika) 126
Az elektromos megosztás 126
A töltésmegmaradás törvénye ... 126
Coulomb-törvény 126
Elektromos térerősség 126
Az elektromos mező szemléltetése 127
Az elektromos erővonal fluxus (ψ_A) 127
Speciális elektromos mezők szerkezete 127
Az elektromos mező munkája .. 128
Feszültség, potenciál 128
Speciális elektromos mezők jellemzői 128
Az elektromos dipólus 129
Kapacitás 129
Kondenzátorok soros kapcsolása 131
Kondenzátorok párhuzamos kapcsolása 131
Kondenzátor energiája 131
Elektromos energiasűrűség 131
Az elektromos áram 132
Az áram erőssége 132
Ohm törvénye 132
Az ellenállás 132
Az áramforrások 132
A Joule-féle hő 133
Teljesítmény 133
Összetett hálózatok 133
Kirchhoff I. törvénye, a csomóponti törvény 133
Kirchhoff II. törvénye, a huroktörvény 133
Sorosan kapcsolt ellenállások eredője 134
Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője 134
Wheatstone-mérőhíd 134
Az időben állandó mágneses mező 135
A mágneses mezőt jellemző mennyiségek 135
Mágneses indukció 135
A mágneses mező szemléltetése 136
A mágneses indukció fluxusa ... 136
Az áram keltette mágneses mező 136
„Végtelen" hosszú, árammal átjárt vezető mágneses tere 136
Egyenes tekercs (szolenoid) mágneses tere 136
Körtekercs (toroid) mágneses tere 137
Mágneses indukció az *R* sugarú körvezető középpontjában 137
Mágneses mező hatása áramjárta vezetőre, Ampère törvénye 137
Szabad töltések mozgása mágneses mezőben, Lorentz-erő 138
Áramvezetők közötti erőhatás 138
Elektromágneses indukció 138
A mozgási indukció 138
Lenz törvénye 139
Nyugalmi indukció, Faraday-féle indukciós törvény 139
Önindukció 139
Kölcsönös indukció 140
A mágneses mező energiája 140
A váltakozó feszültség, a váltakozó áram 141
Effektív feszültség, effektív áramerősség 141
A váltakozó áramú ellenállások 142
Feszültségrezonancia 143
A váltakozó áram teljesítménye 143
A transzformátor 144
A távvezeték 144
Az időben változó elektromos mező ... 145
Az eltolási áram 145
Maxwell-egyenletek 145
Maxwell I. törvénye 145
Maxwell II. törvénye 145

Maxwell III. törvénye 146
Maxwell IV. törvénye 146
Elektromágneses rezgések 146
Rezgőkör 146
Az elektromágneses hullámok 147
Terjedési sebesség 147
Az elektromágneses hullám elektromos és mágneses tere 148
Az elektromágneses hullám spektruma 148

Fénytan 149
Fizikai optika 149
Fényinterferencia 149
Young-kísérlet 149
Fényelhajlás (diffrakció) 149
Fényelhajlás résen (Fraunhofer-féle elhajlás) 149
Fényelhajlás optikai rácson 150
Fénypolarizáció 150
Diszperzió (színszóródás) 151
Geometriai optika 151
A fény fénysugármodellje 151
A fényvisszaverődés törvénye 151
Abszolút törésmutató 151
A fénytörés törvénye 152
Teljes visszaverődés 152
Fénytörés plánparalel lemezen 152
Fénytörés prizmán 153
A pontszerű leképezés 153
Gömbtükrök 153
Fókusztávolság 153
Leképezés gömbtükrökkel (kis nyílásszögű gömbtükrök) 153
Tükrök képalkotása 154
Vékony lencsék 154
Vékony lencsék jellemzői 154
Leképezés vékony lencsékkel ... 155
Lencsék képalkotása 155
Lencserendszerek fókusztávolsága 155
A dioptria 155
Látószöget növelő eszközök 156
Egyszerű nagyító 156
Mikroszkóp 156
Távcsövek 156
Az emberi szem látáshibái 157
A fotometria alapjai 157
A fényforrás fényerőssége (I) ... 157
A fényáram (Φ) 157
A megvilágítás erőssége (E) 157

A speciális relativitáselmélet alapjai .. 158
A speciális relativitáselmélet alaptörvényei 158
Minkowski-féle négydimenziós tér 158
Lorentz-transzformáció 158
A sebesség-összeadás Einstein-féle szabálya 158
Távolságkontrakció 159
Időtágulás 159
Relativisztikus dinamika 159
A v sebességgel mozgó test tömege, impulzusa 159
A teljes energia 159
A mozgási energia 159
Tömegdefektus 159

Atomfizika 160
Hullámrészecske, kettős természet 160
Az elektron 160
Az elektron fajlagos töltése (J. J. Thomson) 160
A foton 161
A foton energiája, lendülete 161
Fényelektromos hatás (fotoeffektus) 161
Fényelektromos egyenlet 161
A Planck-állandó mérése fotocellával 162
Szabad elektronok 162
Fémből kilépő elektron energiája 162
Anyaghullámok (de Broglie) 162
Compton-effektus (foton és szabad elektron ütközése) 163
Heisenberg-féle határozatlansági reláció 163
Atommodellek 164
Rutherford-féle modell 164
A gázok vonalas színképe 164
A Bohr-féle atommodell 165
I. Dinamikai feltétel 165
II. A Bohr-féle frekvenciafeltétel .. 165
IV. A Bohr-féle pályafeltétel 165

Az elektronpályák sugara, energiája 165
A kvantummechanikai atommodell 166
Kvantumszámok 166
Az atomok felépítésének szabályai 166

Atommagfizika 167
Az atommag 167
Az atommagok kötési energiája 167
Fajlagos kötési energia 167
Nukleáris energiavölgy 168
Az atommagok csepp-modellje 168
Nukleonsűrűség 169
Néhány nevezetes elemi magreakció 169
Párkeltés 169
Szétsugárzás (annihiláció) 170
Radioaktivitás 170
A radioaktív bomlás főbb típusai 170
Radioaktív bomlási sorok 170
Felezési idő 171
A radioaktív bomlási törvény 171
Aktivitás 172
Dózisfogalmak, háttérsugárzás 172
Az elnyelt dózis 172
Az egyenértékdózis 173
A háttérsugárzás mérése: dózisteljesítmény 173
Az atomenergia felszabadítása 173
Maghasadás 173
Magfúzió 174
A csillagok energiatermelése (p–p ciklus) 174
A csillagok energiatermelése (szén–nitrogén ciklus) 174

Csillagászat 175
A gravitáció 175
Newton-féle gravitációs törvény 175
A nehézségi erő 175
Súly, súlytalanság 176
Bolygómozgás 176
Kepler törvényei 176
Ellipszispályán keringő égitest keringési ideje és sebessége 177
Kozmikus sebességek 177
A Naprendszer 178
A Nap 178
A Nap szerkezete 178
A Nap mint önfenntartó fúziós reaktor 179
Holdfázisok, fogyatkozások 179
Holdfázisok 179
Holdfogyatkozás 180
Napfogyatkozás 180
A csillagok 181
Csillagok életútja 181
A Hertzspung–Russel- (HR) diagram 181
Az univerzum 182
Vöröseltolódás 182
Hubble-törvény 182
Az univerzum története 182
Az ősrobbanás-elmélet mellett szóló legfontosabb érvek 183
Az univerzum összetétele 183

Fizikai táblázatok 184
A nemzetközi mértékegységrendszer (SI) 184
Alapmennyiségek és alapmértékegységek 184
SI-alapegységek meghatározásai 184
Önálló nevű származtatott SI-mértékegységek 185
Az SI-mértékegységrendszeren kívüli mértékegységek 186
Előtagok (prefixumok) 187
Fontosabb fizikai állandók 188
Mechanikai táblázatok 189
Súrlódási tényezők (közelítő értékek) 189
Gördülési ellenállási tényezők (a szokásos kerekek esetében) 189
Tehetetlenségi nyomatékok (homogén testek tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkoztatva) 189

Hang terjedési sebessége levegőben, különböző hőmérsékleten 191
Hang terjedési sebessége néhány gázban és gőzben (0 °C hőmérsékleten, 101 325 Pa nyomáson) 191
Hang terjedési sebessége néhány szilárd anyagban longitudinális hullám esetén 191
A hang terjedési sebessége vízben különböző hőmérsékleteken 191
Áramlási ellenállási tényezők (formatényezők) 192
Felületi feszültségek (20 °C-on) .. 192
Folyékony és szilárd elemek sűrűsége (20 °C-on, 101 325 Pa nyomáson) 193
Folyékony anyagok sűrűsége (20 °C-on, 101 325 Pa nyomáson) 193
Gázok sűrűsége normálállapotban (0 °C-on és 101 325 Pa nyomáson) 193
Néhány változó összetételű anyag körülbelüli sűrűsége (101 325 Pa nyomáson) 194
Hőtani táblázatok 195
A telített vízgőz nyomása és sűrűsége; a víz sűrűsége és párolgáshője 195
Szilárd anyagok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson) 196
Folyadékok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson) 198
Gázok hőtani adatai (101 325 Pa nyomáson) 200
Táblázatok elektromágnességből és optikából 202
Gázok relatív dielektromos állandója (101 325 Pa nyomáson) 202
Folyadékok fajlagos ellenállása (20 °C-on) és relatív dielektromos állandója (101 325 Pa nyomáson) 202
Vezetőanyagok fajlagos ellenállása és hőfoktényezője 203
Szigetelőanyagok relatív dielektromos állandója (20 °C-on) 203
Relatív permeabilitások 203
Az elektromágneses spektrum tartományai 204
Néhány anyag 20 °C-os és 101 325 Pa nyomású levegőre vonatkoztatott törésmutatója, határszöge és diszperziója 205
Atomfizikai és atommagfizikai táblázatok 206
Fémekre vonatkozó kilépési munka; határhullámhossz 206
Néhány atommag egy nukleonra jutó kötési energiája 207
Néhány, a gyakorlatban használt (vagy előforduló) radioaktív izotóp bomlásának neme, felezési ideje és a sugárzás maximális energiája 208
Az anyagot összetartó kölcsönhatások jellemzői 210
A standard modell részecskéi 210
A fermionok generációi 210
Az erőhordozó bozonok tulajdonságai 211
A hadronok felépítése és tulajdonságai 211
Csillagászati táblázatok 212
A Nap adatai 212
A Föld adatai 212
A Hold adatai 212
A Naprendszer bolygói 213
A legfényesebb csillagok 214
A leggyakoribb kémiai elemek előfordulása az univerzumban .. 214

KÉMIA

A kémiában használatos mértékegységek és fizikai állandók 216
A kémiában használatos SI-alap- és külön nevű, származtatott egységek 216
SI-alapegységek 216
A kémiában használatos SI-alapegységek definíciói 216
SI-származtatott egységek 217

A kémiában használatos nem SI-mértékegységek 217
A nemzetközi mértékegységrendszeren kívüli, korlátozás nélkül használható mértékegységek 217
A nemzetközi mértékegységrendszeren kívüli, kizárólag meghatározott területen használható törvényes mértékegységek 218
Néhány nem törvényes mértékegység átszámítása SI-egységre 218
A kémiában használatos fizikai állandók 218

Az atomok és jellemző adataik 219
Az elemi részecskék és jellemző adataik 219
Az elemi részecskék tömege és töltése 219
Az atomok elektronszerkezete 220
Az atomok elektroneloszlása, Pauli-elv, Hund-szabály 221
A kvantumszámok és az elektroneloszlás kapcsolata 221
Az első 20 elem alapállapotú atomjának elektronkonfigurációja cellás ábrázolással 222
Az elemek alapállapotú atomjainak elektroneloszlása az atomtörzs feltüntetésével 223
Az atomok fizikai adatai 224
Ionizációs energia 225
Ionsugarak a periódusos rendszer főcsoportjaiban 226
Elektronaffinitások, $E_{ea}\left(\frac{kJ}{mol}\right)$ a periódusos rendszer főcsoportjaiban 226
Az első, a második és a harmadik ionizációs energiák, $E_i\left(\frac{kJ}{mol}\right)$ a periódusos rendszer főcsoportjaiban 227
Az elemek atomjainak fizikai adatai 228

Az elemek 238
Az elemek felfedezése 238
Az elemek felfedezésének ideje, a felfedezők neve 238
Az elemek előfordulása 242
Az elemek gyakorisága az univerzumban 242
A Nap összetétele 242
A holdkőzet összetétele 242
A levegő összetétele 242
Az elemek gyakorisága a Földön 243
Az elemek gyakorisága a Földön atomszázalékban 243
Az ember létfontosságú elemei 243
A biológiailag nélkülözhetetlen elemek csoportosítása 244
Az ember létfontosságú elemeinek átlagos mennyisége .. 244
Az elemek természetes izotópjainak százalékos megoszlása ... 244
Az elemek fizikai adatai 249

Az atomok kapcsolódásának jellemzői 252
Az elsőrendű kémiai kötések 252
Az elsőrendű kémiai kötések fajtái és jellemzői 252
Az elsőrendű kötések és az atomok elektronegativitásának kapcsolata 252
Másodrendű kémiai kötések 253
A másodrendű kémiai kötések (intermolekuláris kötések) 253
A másodrendű kémiai kötések fajtái és jellemzői 253
A molekulák geometriája 253
Molekulageometriai alapszerkezetek 254
A molekulák térszerkezete és alakja 254
Önálló molekulák és ionok szerkezete 256
Kétatomos molekulák és ionok 256
Kötéstávolságok kétatomos molekulákban és ionokban 256
Háromatomos molekulák és ionok ... 256

Kötéstávolságok és kötésszögek háromatomos molekulákban ... 256
Négyatomos molekulák és ionok ... 257
Kötéstávolságok és kötésszögek négyatomos molekulákban ... 257
A hidrogén-peroxid (H_2O_2) szerkezete ... 259
Ötatomos molekulák és ionok ... 259
Kötéstávolságok és kötésszögek ötatomos molekulákban és ionokban ... 259
Hatatomos molekulák ... 260
Kötéstávolságok és kötésszögek hatatomos molekulákban és ionokban ... 260
Hétatomos molekulák ... 261
Kötéstávolságok és kötésszögek hétatomos molekulákban ... 261
Hétnél többatomos molekulák ... 262
Kötéstávolságok és kötésszögek hétnél többatomos molekulákban ... 262

Kötési energiák ... 263
A kötési energiák intervallumai ... 263
Kötési energiák kJ/mol-ban ... 263

Szilárd anyagok halmazszerkezete ... 264
Kristályrácstípusok és jellemzőik ... 264
Kristályok elemi celláinak alaptípusai ... 265
Az elemi cellák alaptípusainak jellemző adatai ... 265
A kristálytípusok és az elemi cellák kapcsolata ... 266
Molekularácsos kristályszerkezet ... 266
Atomrácsos kristályszerkezet ... 266
Fémrácsok szerkezete ... 266
Ionrácsos kristályszerkezet ... 267
Rácsenergia ... 268
Fontosabb halogenidek rácsenergia-értékei (E_r) kJ/mol-ban 25 °C-on ... 268
Oxidok és szulfidok rácsenergia-értékei (E_r) kJ/mol-ban 25 °C-on ... 268

Oldódás, oldatok ... 269
Az oldódás energiaviszonyai ... 269
Ionhidratációs energiák (E_h) ... 269
Ionhidratációs energiák (E_h) 25 °C-on kJ/mol-ban ... 269
Ionvegyületek moláris hidratációs energiái kJ/mol-ban 25 °C-on ... 269
A hidratált ionok képződéshői 25 °C hőmérsékleten ... 270
Oldáshők ... 270
Vegyületek oldáshője vizes oldatban ... 270
Oldáshőértékek végtelen híg oldatokban kJ/mol-ban 25 °C-on ... 272
Oldhatóság ... 272
Elemi gázok oldhatósága vízben, különböző hőmérsékleten (g/100 g víz, 101 325 Pa nyomáson, *t* °C-on) ... 272
Gáz-halmazállapotú vegyületek oldódása vízben ... 273
Szervetlen vegyületek oldhatósága vízben, különböző hőmérsékleten ... 274
Néhány rosszul oldódó szervetlen vegyület oldhatósági szorzata 25 °C-on ... 278
Az oldatok sűrűsége és tömegkoncentrációja ... 280
Hidrogén-klorid-, kénsav-, salétromsav-, nátrium- és kálium-hidroxid-oldatok sűrűsége és tömegkoncentrációja 20 °C hőmérsékleten ... 280
Hidrogén-klorid-, kénsav-, salétromsav-, nátrium- és kálium-hidroxid-oldatok összetétele a sűrűség függvényében (20 °C hőmérsékleten) ... 282
Az ecetsavoldat sűrűsége és CH_3COOH-tartalma 20 °C hőmérsékleten ... 285
A levegő sűrűsége 101 325 Pa nyomáson ... 286
Etanol-víz elegy sűrűsége és C_2H_5OH-tartalma 20 °C hőmérsékleten ... 286

Az ammónia vizes oldatának sűrűsége és NH_3-tartalma 20 °C hőmérsékleten 287
Sóoldatok összetétele és sűrűsége 20 °C hőmérsékleten (g/cm^3) 288

Redoxirendszerek 289
Kémiai redoxireakciók 289
Az oxidációs szám meghatározása 290
A redoxifolyamatok iránya, redoxipár 290
Fémek redukálósora 291
Nemfémek oxidálósora 291
Elektrokémiai folyamatok, rendszerek 291
Kémiai áramforrások 292
Galvánelemek 292
Elektrokémiai reakciók standardpotenciáljai 101 325 Pa nyomáson 25 °C-on egységnyi koncentrációjú (mol/dm^3) oldatban 292
Elektromotoros erő kiszámítása a standardpotenciálok ismeretében 295
A standardpotenciálok és a redoxireakciók 295
Redoxirendszerek standardpotenciál-értékei és redoxi tulajdonságai közötti kapcsolat 296
Elektrolízis 296
A hidrogén túlfeszültsége fémeken 297
Elektrolízis vizes oldatokban – elektródfolyamatok 297
Az elektrolízis mennyiségi törvényei 298
Faraday I. törvénye 298
Faraday II. törvénye 298
A két törvény egyesítése 298
Az elektrolízis gyakorlati felhasználása 298
A galvánelemek gyakorlati felhasználása. Elemek, akkumulátorok 299

Sav-bázis rendszerek 300
Protolitikus reakciók 300
Savi disszociációs állandók vizes oldatban a savak erőssége sorrendjében 25 °C-on 301
Savi disszociációs állandók vizes oldatokban ábécésorrendben 302
Bázisok disszociációs egyensúlyi állandói és báziskitevői 25 °C-on 303
A víz ionszorzata különböző hőmérsékleten 303
Sav-bázis indikátorok 304
Zöldség- és gyümölcsindikátorok színváltozásai a pH függvényében 304
Néhány sav-bázis indikátor színváltozása 305
Néhány köznapi oldat pH-értéke 305

Elemek és szervetlen vegyületek 306
Elemek és szervetlen vegyületek termodinamikai adatai 25 °C-on 306
Néhány komplex vegyület stabilitási állandója 25 °C-on ... 312
Néhány vegyület bomlási hőmérséklete 312

Szerves vegyületek 313
Szerves vegyületek termodinamikai adatai 313

Szerves vegyületek nevezéktana 319
Telített szénhidrogének 319
A *n*-alkánok nevezéktana 319
Az alkánokból levezethető csoportok nevezéktana 319
Az izoalkánok nevezéktana 320
A cikloalkánok nevezéktana 320
Telítetlen szénhidrogének 320
Az alkének nevezéktana 320
Több kettős kötést tartalmazó szerves vegyületek 321
Hármas kötést tartalmazó szénhidrogének 321
Aromás szénhidrogének 321

A benzol származékai 321
N-tartalmú szénvegyületek 321
Az aminok 321
Halogénezett szénhidrogének 322
Hidroxilcsoportot tartalmazó szénvegyületek 322
Az alkoholok 322
Fenolok 323
Oxovegyületek 323
Aldehidek 323
Telítetlen aldehidek 323
Ketonok 323
Karbonsavak és származékaik 324
Monokarbonsavak 324
Telített dikarbonsavak 324
Telítetlen karbonsavak 324
Karbonsavészterek 324
Amidok 325
Szénhidrátok 325
Monoszacharidok 325

BIOLÓGIA

Az élők környezete és alkotóelemei ... 328
Anyageloszlás a Földön és más bolygókon 328
Az emberi test folyadéktereinek összetétele 328
Ionkoncentrációk az emberi szervezet folyadéktereiben 329

Sejtszintű anyagcsere 330
A glikolízis lépései 330
A citromsavciklus (Szent-Györgyi–Krebs-ciklus) lépései .. 331
A fotoszintézis sötét szakaszának lépései (Calvin-ciklus) 332
1 mol glükóz biológiai oxidációja során felszabaduló ATP anyagmennyisége 332

Az emberi szervezet életfolyamatai ... 333
Tápanyagok energiatartalma és az energiaszükséglet 333
Táplálkozással kapcsolatos élettani adatok 333
Testtömegindexek 334
A légzéssel kapcsolatos adatok mérése 334
Az emberi légzéssel kapcsolatos élettani adatok 335
A hemoglobin oxigénkötő képessége az érpálya különböző szakaszaiban 335
Vérfehérjék oxigéntelítettségi görbéi 336
A szívciklus egyes szakaszainak időtartama emberben, nyugalmi állapotban 336
A nagy vérkör érszakaszainak jellemzői 337
Szervek véráramlása nyugalomban 337
A szívvel és a vérkeringéssel kapcsolatos élettani adatok 337
A vér és a belőle származtatható folyadékok paraméterei 1. 338
A vér és a belőle származtatható folyadékok paraméterei 2. 339

Ökológia 340
Élőhelyek és növényfajok ökológiai jellemzői (TWR-táblázat) 340
Biológiai produkciók 341
A szénkörforgás adatai 341

Genetika 342
A kodonszótár és az aminosavak 342
Néhány monogénes öröklődésű betegség öröklődésmenete 344

Felhasznált irodalom 345

AZ ATOMOK PERIÓDUSOS RENDSZERE

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
I. A												III. A	IV. A	V. A	VI. A	VII. A	VIII. A
1 H 2,20 hidrogén 1,008	II. A																2 He hélium 4,00
3 Li 0,98 lítium 6,94	4 Be 1,57 berillium 9,01											5 B 2,04 bór 10,81	6 C 2,55 szén 12,01	7 N 3,04 nitrogén 14,01	8 O 3,44 oxigén 16,00	9 F 3,98 fluor 19,00	10 Ne neon 20,18
11 Na 0,93 nátrium 22,99	12 Mg 1,31 magnézium 24,31	III. B	IV. B	V. B	VI. B	VII. B	VIII. B			I. B	II. B	13 Al 1,61 alumínium 26,98	14 Si 1,90 szilícium 28,09	15 P 2,19 foszfor 30,97	16 S 2,58 kén 32,06	17 Cl 3,16 klór 35,45	18 Ar argon 39,95
19 K 0,82 kálium 39,10	20 Ca 1,00 kalcium 40,08	21 Sc 1,36 szkandium 44,96	22 Ti 1,54 titán 47,90	23 V 1,63 vanádium 50,94	24 Cr 1,66 króm 52,00	25 Mn 1,55 mangán 54,94	26 Fe 1,83 vas 55,85	27 Co 1,88 kobalt 58,93	28 Ni 1,91 nikkel 58,71	29 Cu 1,90 réz 63,54	30 Zn 1,65 cink 65,37	31 Ga 1,81 gallium 69,72	32 Ge 2,01 germánium 72,63	33 As 2,18 arzén 74,92	34 Se 2,55 szelén 78,96	35 Br 2,96 bróm 79,91	36 Kr kripton 83,80
37 Rb 0,82 rubídium 85,47	38 Sr 0,95 stroncium 87,62	39 Y 1,22 ittrium 88,91	40 Zr 1,33 cirkónium 91,22	41 Nb 1,6 nióbium 92,91	42 Mo 2,16 molibdén 95,94	43 Tc 2,10 technécium (98)	44 Ru 2,2 ruténium 101,07	45 Rh 2,28 ródium 102,91	46 Pd 2,20 palládium 106,4	47 Ag 1,93 ezüst 107,87	48 Cd 1,69 kadmium 112,40	49 In 1,78 indium 114,82	50 Sn 1,96 ón 118,69	51 Sb 2,05 antimon 121,75	52 Te 2,1 tellúr 127,60	53 I 2,66 jód 126,90	54 Xe 2,60 xenon 131,30
55 Cs 0,79 cézium 132,91	56 Ba 0,89 bárium 137,34	57 La 1,10 lantán 138,91	72 Hf 1,3 hafnium 178,49	73 Ta 1,5 tantál 180,95	74 W 1,7 volfrám 183,85	75 Re 1,9 rénium 186,2	76 Os 2,2 ozmium 190,2	77 Ir 2,2 irídium 192,2	78 Pt 2,2 platina 195,09	79 Au 2,4 arany 196,97	80 Hg 1,9 higany 200,59	81 Tl 1,8 tallium 204,37	82 Pb 1,8 ólom 207,19	83 Bi 1,9 bizmut 208,98	84 Po 2,0 polónium (209)	85 At 2,2 asztácium (210)	86 Rn radon (222)
87 Fr 0,7 francium (223)	88 Ra 0,9 rádium (226)	89 Ac 1,1 aktínium (227)	104 Rf raderfordium (265)	105 Db dubnium (268)	106 Sg sziborgium (271)	107 Bh bohrium (270)	108 Hs hasszium (277)	109 Mt meitnérium (276)	110 Ds darmstadtium (281)	111 Rg röntgénium (280)	112 Cn kopernícium (285)	113 Nh nihónium (286)	114 Fl fleróvium (289)	115 Mc moszkóvium (288)	116 Lv livermórium (293)	117 Ts tenesszium (294)	118 Og oganeszon (294)



6	58 Ce 1,12 cérium 140,12	59 Pr 1,13 prazeodímium 140,91	60 Nd 1,14 neodímium 144,24	61 Pm prométium (145)	62 Sm 1,17 szamárium 150,35	63 Eu európium 151,96	64 Gd 1,20 gadolínium 157,25	65 Tb terbium 158,92	66 Dy 1,22 diszprózium 162,50	67 Ho 1,23 holmium 164,93	68 Er 1,24 erbium 167,26	69 Tm 1,25 túlium 168,93	70 Yb itterbium 173,04	71 Lu 1,0 lutécium 174,97
7	90 Th 1,3 tórium 232,0	91 Pa 1,5 protaktínium 231	92 U 1,7 urán 238,03	93 Np 1,3 neptúnium (237)	94 Pu 1,3 plutónium (244)	95 Am amerícium (243)	96 Cm kúrium (247)	97 Bk berkélium (247)	98 Cf kalifornium (251)	99 Es einsteinium (252)	100 Fm fermium (257)	101 Md mendelévium (258)	102 No nobélium (259)	103 Lr laurencium (262)

s-mező

p-mező

d-mező

f-mező

AZ ELEMEK PERIÓDUSOS RENDSZERE

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
I. A												III. A	IV. A	V. A	VI. A	VII. A	VIII. A
1	II. A																
2																	
3		III. B	IV. B	V. B	VI. B	VII. B	VIII. B			I. B	II. B						
4																	
5																	
6																	
7																	

1 −259 / −253 / 0,09 — **H** — hidrogén — 1,008

2 −272 / −269 / 0,18 — **He** — hélium — 4,00

3 181 / 1342 / 0,54 — **Li** — lítium — 6,94

4 1287 / 2470 / 1,85 — **Be** — berillium — 9,01

5 2075 / 4000 / 2,46 — **B** — bór — 10,81

6 3550 / 4027 / 2,26 — **C** — szén — 12,01

7 −210 / −196 / 1,25 — **N** — nitrogén — 14,01

8 −218 / −183 / 1,43 — **O** — oxigén — 16,00

9 −220 / −188 / 1,70 — **F** — fluor — 19,00

10 −249 / −246 / 0,90 — **Ne** — neon — 20,18

11 98 / 883 / 0,97 — **Na** — nátrium — 22,99

12 650 / 1090 / 1,74 — **Mg** — magnézium — 24,31

13 660 / 2519 / 2,70 — **Al** — alumínium — 26,98

14 1414 / 2900 / 2,33 — **Si** — szilícium — 28,09

15 44 / 281 / 1,82 — **P** — foszfor — 30,97

16 115 / 445 / 1,96 — **S** — kén — 32,06

17 −102 / −34 / 3,21 — **Cl** — klór — 35,45

18 −189 / −186 / 1,78 — **Ar** — argon — 39,95

19 63 / 759 / 0,86 — **K** — kálium — 39,10

20 842 / 1484 / 1,55 — **Ca** — kalcium — 40,08

21 1541 / 2830 / 2,99 — **Sc** — szkandium — 44,96

22 1668 / 3287 / 4,51 — **Ti** — titán — 47,90

23 1910 / 3407 / 6,11 — **V** — vanádium — 50,94

24 1907 / 2671 / 7,14 — **Cr** — króm — 52,00

25 1246 / 2061 / 7,47 — **Mn** — mangán — 54,94

26 1538 / 2861 / 7,87 — **Fe** — vas — 55,85

27 1495 / 2927 / 8,90 — **Co** — kobalt — 58,93

28 1455 / 2913 / 8,91 — **Ni** — nikkel — 58,71

29 1085 / 2927 / 8,92 — **Cu** — réz — 63,54

30 420 / 907 / 7,14 — **Zn** — cink — 65,37

31 30 / 2204 / 5,90 — **Ga** — gallium — 69,72

32 938 / 2820 / 5,32 — **Ge** — germánium — 72,63

33 817 / 614 / 5,73 — **As** — arzén — 74,92

34 221 / 685 / 4,82 — **Se** — szelén — 78,96

35 −7 / 59 / 3,12 — **Br** — bróm — 79,91

36 −157 / −153 / 3,75 — **Kr** — kripton — 83,80

37 39 / 688 / 1,53 — **Rb** — rubídium — 85,47

38 777 / 1382 / 2,63 — **Sr** — stroncium — 87,62

39 1526 / 3345 / 4,47 — **Y** — ittrium — 88,91

40 1855 / 4409 / 6,51 — **Zr** — cirkónium — 91,22

41 2477 / 4744 / 8,57 — **Nb** — nióbium — 92,91

42 2623 / 4639 / 10,28 — **Mo** — molibdén — 95,94

43 2157 / 4265 / 11,50 — **Tc** — technécium — (98)

44 2334 / 4150 / 12,37 — **Ru** — ruténium — 101,07

45 1964 / 3695 / 12,45 — **Rh** — ródium — 102,91

46 1555 / 2963 / 12,02 — **Pd** — palládium — 106,4

47 962 / 2162 / 10,49 — **Ag** — ezüst — 107,87

48 321 / 767 / 8,65 — **Cd** — kadmium — 112,40

49 157 / 2072 / 7,31 — **In** — indium — 114,82

50 232 / 2602 / 7,31 — **Sn** — ón — 118,69

51 631 / 1587 / 6,70 — **Sb** — antimon — 121,75

52 450 / 988 / 6,24 — **Te** — tellúr — 127,60

53 114 / 184 / 4,94 — **I** — jód — 126,90

54 −112 / −108 / 5,90 — **Xe** — xenon — 131,30

55 28 / 671 / 1,88 — **Cs** — cézium — 132,91

56 727 / 1870 / 3,51 — **Ba** — bárium — 137,34

57 920 / 3464 / 6,15 — **La** — lantán — 138,91

72 2233 / 4603 / 13,31 — **Hf** — hafnium — 178,49

73 3017 / 5458 / 16,65 — **Ta** — tantál — 180,95

74 3422 / 5555 / 19,25 — **W** — volfrám — 183,85

75 3186 / 5596 / 21,02 — **Re** — rénium — 186,2

76 3033 / 5012 / 22,61 — **Os** — ozmium — 190,2

77 2466 / 4428 / 22,65 — **Ir** — irídium — 192,2

78 1768 / 3825 / 21,09 — **Pt** — platina — 195,09

79 1064 / 2856 / 19,30 — **Au** — arany — 196,97

80 −39 / 357 / 13,53 — **Hg** — higany — 200,59

81 304 / 1473 / 11,85 — **Tl** — tallium — 204,37

82 327 / 1749 / 11,34 — **Pb** — ólom — 207,19

83 271 / 1564 / 9,78 — **Bi** — bizmut — 208,98

84 254 / 962 / 9,20 — **Po** — polónium — (209)

85 302 / 337 — **At** — asztácium — (210)

86 −71 / −62 / 9,73 — **Rn** — radon — (222)

87 27 / 677 — **Fr** — francium — (223)

88 700 / 1737 / 5,00 — **Ra** — rádium — (226)

89 1050 / 3200 / 10,07 — **Ac** — aktínium — (227)

104 — **Rf** — raderfordium — (265)

105 — **Db** — dubnium — (268)

106 — **Sg** — sziborgium — (271)

107 — **Bh** — bohrium — (270)

108 — **Hs** — hasszium — (277)

109 — **Mt** — meitnérium — (276)

110 — **Ds** — darmstadtium — (281)

111 — **Rg** — röntgénium — (280)

112 — **Cn** — kopernícium — (285)

113 — **Nh** — nihónium — (286)

114 — **Fl** — fleróvium — (289)

115 — **Mc** — moszkóvium — (288)

116 — **Lv** — livermórium — (293)

117 — **Ts** — tenesszium — (294)

118 — **Og** — oganeszon — (294)

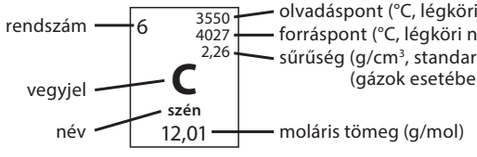
halmazállapot:

H gáz

Br folyadék

C szilárd

Tc mesterséges



fémek

félfémek

nemfémek

6	58 798 / 3360 / 6,69 **Ce** cérium 140,12	59 931 / 3290 / 6,64 **Pr** prazeodímium 140,91	60 1021 / 3100 / 7,01 **Nd** neodímium 144,24	61 1100 / 3000 / 7,26 **Pm** prométium (145)	62 1072 / 1803 / 7,35 **Sm** szamárium 150,35	63 822 / 1527 / 5,24 **Eu** európium 151,96	64 1313 / 3250 / 7,90 **Gd** gadolínium 157,25	65 1356 / 3230 / 8,22 **Tb** terbium 158,92	66 1412 / 2567 / 8,55 **Dy** diszprózium 162,50	67 1474 / 2700 / 8,80 **Ho** holmium 164,93	68 1497 / 2868 / 9,07 **Er** erbium 167,26	69 1545 / 1950 / 9,32 **Tm** túlium 168,93	70 819 / 1196 / 6,57 **Yb** itterbium 173,04	71 1663 / 3402 / 9,84 **Lu** lutécium 174,97
7	90 1750 / 4820 / 11,72 **Th** tórium 232,0	91 1572 / 4000 / 15,37 **Pa** protaktínium 231	92 1135 / 3927 / 19,05 **U** urán 238,03	93 644 / 4000 / 20,45 **Np** neptúnium (237)	94 640 / 3230 / 19,82 **Pu** plutónium (244)	95 1176 / 2011 **Am** amerícium (243)	96 1345 / 3110 / 13,51 **Cm** kűrium (247)	97 1050 / 14,78 **Bk** berkélium (247)	98 900 / 15,10 **Cf** kalifornium (251)	99 860 **Es** einsteinium (252)	100 1527 **Fm** fermium (257)	101 827 **Md** mendelévium (258)	102 827 **No** nobélium (259)	103 1627 **Lr** laurencium (262)

Raktári szám: OH-FGV912GY
ISBN 978-963-328-484-1

A QR-kód a Nemzeti Köznevelési Portálon található interaktív periódusos rendszerhez vezet.

Az interaktív periódusos rendszer lehetővé teszi

- az elemek adatainak megtekintését nyolc különböző adatkombinációban;
- az elemcsoportok színekkel történő megkülönböztetését;
- négy adat (moláris tömeg, atomsugár, ionsugár, elektronegativitás) nagyságának összehasonlítását színárnyalatok felhasználásával;
- az egyes elemek előfordulási gyakoriságát, felfedezőjének nevét;
- –270 és +6 000 °C között az elemek halmazállapotának megtekintését.