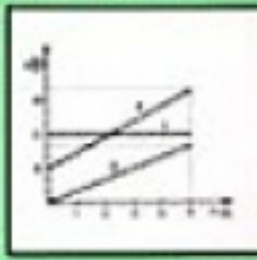
SZAKKÖZÉPISKOLAI ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

FIZIKA





NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ





1.1. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Mi az elmozdulás?
b) Miért mondjuk, hogy a nyugalom mindig viszonylagos?
c) Mikor nevezünk egy fizikai mennyiséget vektormennyiségnek?
d) Mi a mozgási pálya?
e) Milyen vonatkoztatási rendszerhez képest látjuk nyugvónak a folyóba ejtett labdát?
f) A testek mely mozgását mondjuk egyenletesnek?

Megoldás:

1.1. a) Az elmozdulás az a vektor, amely a mozgó pontszerű test egy pillanatnyi helyzetéből egy későbbi helyzetébe mutat.

b) A mozgás leírásához mindig valamilyen vonatkoztatási rendszert kell választani, következésképpen a nyugvónak nevezett test csak megfelelő vonatkoztatási rendszerben nem változtatja helyét.

c) Valamely fizikai mennyiség vektormennyiség, ha egyértelmű megadásához a nagyság mellett irány is tartozik.

d) A mozgási pálya az a geometriai vonal, amelynek pontjain a mozgó test áthalad.

e) A folyóba ejtett labdát a folyóhoz viszonyítva látjuk nyugalomban, illetve olyan testekhez képest, amelyek a folyóval azonos sebességgel (és irányban) haladnak.

f) A test mozgása egyenletes, ha útja egyenesen arányos a megtételéhez szükséges idővel, bármekkora is az időtartam.

1.2. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

A) Egyenletes egy test mozgása, ha a megtett út egyenesen arányos az út megtételéhez szükséges idővel.

B) A pillanatnyi sebesség a lehető legrövidebb időtartamhoz tartozó átlagsebesség.

C) A lejtőn legördülő golyó által megtett út fordítottan arányos a mozgás időtartamával.

D) A v sebességű egyenletesen mozgó test t idő alatt $s = v \cdot t$ utat tesz meg.

E) A változó sebességgel mozgó test által megtett út fordítottan arányos a mozgás időtartamával.

Megoldás:

1.2. Az egyenletes mozgás és a pillanatnyi sebesség definíciója, (az egyenletes és az egyenletesen változó mozgás útképlete) alapján hibás: *C, E.*

1.3. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Ha egy test egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez, akkor:

A) a sebesség nagysága egyenesen arányos az eltelt idővel zérus kezdősebességnél;

B) a megtett út egyenesen arányos az eltelt idővel;
C) a gyorsulás állandó;
D) a sebességváltozás arányos a sebességváltozás időtartamával;
E) a sebesség nagysága egyenesen arányos az eltelt idővel.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

1.3. Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás értelmezéséből következően helyes az *A, C* és *D.* Azért nem igaz a *B*, mert az út az idő négyzetes függvénye, az *E* állítás pedig akkor lenne igaz, ha kikötnénk, hogy a kezdősebesség 0.

1.4. *Válasszuk ki a* HELYES *sorokat!*

Az alábbi állítások mindegyik sora ugyanazon két, egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test út-, idő- és sebességértékére vonatkozik.

A) Ha $s_1 = s_2$ és $t_1 < t_2$, akkor $v_1 > v_2$.

B) Ha $v_1 = v_2$ és $t_1 > t_2$, akkor $s_1 < s_2$.

C) $t_1 = t_2$ és $s_1 > s_2$, akkor $v_1 > v_2$.

D) $s_1 = s_2$ és $v_1 < v_2$, akkor $t_1 > t_2$.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

1.4. **A**: ha $s_1 = s_2$ és $t_1 < t_2$, akkor $v_1 = \frac{s}{t_1} > v_2 = \frac{s}{t_2}$ igaz, mert ugyanolyan hosszú utat rövidebb idő alatt csak nagyobb sebességgel lehet megtenni.

C: ha $t_1 = t_2$ és $s_1 > s_2$, akkor $v_1 = \frac{s_1}{t} > v_2 = \frac{s_2}{t}$ igaz, mert ugyanannyi idő alatt hosszabb utat csak nagyobb sebességgel lehet megtenni.

D: ha $s_1 = s_2$ és $v_1 < v_2$, akkor $t_1 = \frac{s}{v_1} > t_2 = \frac{s}{v_2}$ igaz, mert ugyanolyan hosszú utat kisebb sebességgel hosszabb idő alatt lehet megtenni (egyenlő számlálójú törtek közül az a nagyobb, amelynek a nevezője kisebb, illetve egyenlő nevezőjű törtek közül az a nagyobb, amelynek a számlálója nagyobb).

1.5. *Válasszuk ki a* HELYES *arányt!*

Egy zérus kezdősebességgel induló szabadon eső test útjának első felét t_1, második felét t_2 idő alatt teszi meg. Mennyi a $t_1 : t_2$ arány?

A) $2 : 1$,

B) $\sqrt{2} : 1$,

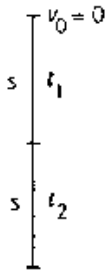
C) $1 : (\sqrt{2} - 1)$,

D) $2 : (2 - \sqrt{2})$,

E) $\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$.

Megoldás:

1.5. $v_0 = 0$. A szabadesés útképletét alkalmazva s-re és $2s$-re:



$$(1) \qquad s = \frac{g}{2} t_1^2$$

$$(2) \qquad 2s = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)^2$$

(1)-et (2)-be helyettesítve, a kapott kifejezést $(g/2)$-vel egyszerűsítve, majd négyzetgyököt vonva, és elvégezve az összevonást:

$$(\sqrt{2} - 1)t_1 = t_2; \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

C a helyes arány.

1.6. Egy folyó vizének sebessége $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A folyón két, egyaránt $2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel úszó ember kel át, mindketten a kiindulási hellyel szemközti, 300 méterre levő csónakházba szeretnének eljutni.

Melyikük ér előbb a célba, ha

a) az egyik egyenesen a part felé fordulva úszik és a parton $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel fut vissza a célig;

b) a másik a folyó sodrásával bizonyos mértékig szemben úszik úgy, hogy eredő sebessége mindig merőleges legyen a partra?

Megoldás:

1.6. $v_f = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_e = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_p = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $d = 300$ m.

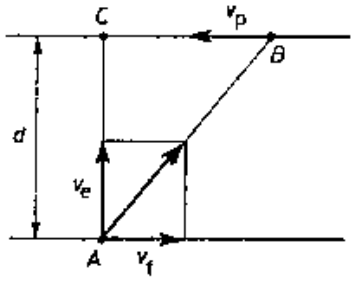
a) A partra merőleges elmozdulás ideje: $t = \frac{d}{v_e}$.

A parttal párhuzamos elmozdulás: $\overline{CB} = t \cdot v_f$.

A túlparton a visszafutás ideje: $t_p = \frac{\overline{CB}}{v_p}$.

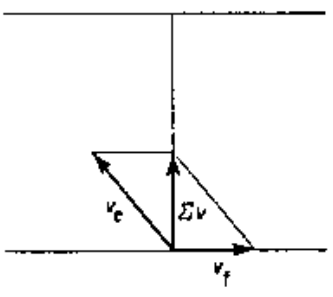
$\underline{\underline{\Delta t_a}} = t + t_p = 120\ \text{s} + 60\ \text{s} = \underline{\underline{180\ \text{s}}}$.

a)



b) $v = \sqrt{v_e^2 - v_f^2}$

b)



$\Delta t_b = \frac{d}{v} = 200\ s$

$\underline{\underline{\Delta t_a < \Delta t_b}}$ a partra merőlegesen úszó és a parton futó jut előbb a csónakházba.

1.7. Egy csónak sebességének nagysága állóvízben $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A parthoz viszonyítva milyen irányban kell evezni a $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ „sodrású" folyón, ha egyenes vonalban haladva, a kiindulási hellyel szemben szeretne a túlsó oldalon partot érni?

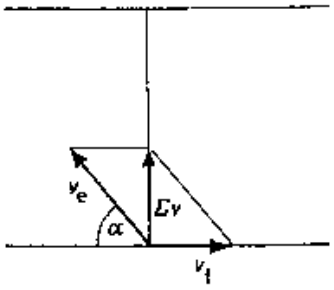
b) Mennyi idő alatt ér át a folyón a csónak, ha a folyó szélessége 500 m?

Megoldás:

1.7. $v_{cs} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_f = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $d = 500$ m.

a) $\cos\alpha = \frac{v_f}{f_{cs}}$; $\underline{\underline{\alpha = 53{,}13^\circ}}$

A parthoz viszonyítva felfelé $53{,}13^\circ$ ($53^\circ 8'$) szögben kell eveznie.



b) Mivel a partra merőleges $\sum v$-vel halad:

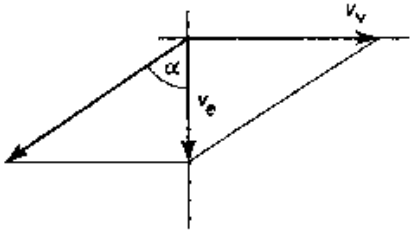
$t = \frac{d}{\sum v} = \frac{d}{\sqrt{v_{cs}^2 - v_f^2}} = 125$ s. $\underline{\underline{125\text{ s}}}$ alatt ér át a csónak a folyón a túloldalra.

1.8. Mekkora sebességgel esnek az esőcseppek szélcsendben a $48{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó vonat ablakára, ha az ablakon a cseppek nyoma a függőlegessel 60°-os szöget zár be?

Megoldás:

1.8. $v_v = 48{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 60°$.

Az esőcsepp nyoma az ablakon az esőcsepp vonathoz viszonyított sebességének irányát mutatja. Az esőcseppnek a földfelszínhez viszonyított (függőleges) sebességét a vonat földfelszínhez viszonyított sebességének és az esőcsepp vonathoz viszonyított sebességének vektori eredője adja meg. A vektorábra alapján:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_v}{v_e};$$

$$v_e = 7{,}79\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.9. Az 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel haladó túrázó társaság 2 km-t halad keleti irányban, majd 3 km-t dél felé és végül 6 km-t nyugat felé.

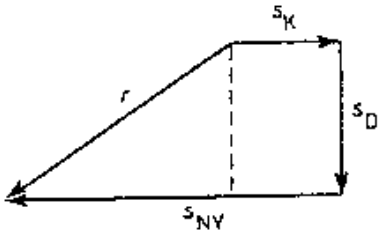
a) Mekkora utat tettek meg?
b) Mekkora az elmozdulásuk?
c) Mennyi ideig tartott a túra, ha közben 20 percet pihentek?

Megoldás:

1.9. $v = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $s_K = 2\ \text{km}$; $s_D = 3\ \text{km}$; $s_{NY} = 6\ \text{km}$; $t_p = 20\ \text{min} = \frac{1}{3}\ \text{h}$.

a) $\underline{s} = s_K + s_D + s_{NY} = \underline{11\ \text{km}}$ utat tettek meg.

b) Az r elmozdulás az ábra alapján $\underline{r} = \sqrt{s_D^2 + (s_{NY} - s_K)^2} = \underline{5\ \text{km}}$.



c) Az egyenletes mozgás út–idő kapcsolata alapján a túra ideje:

$\underline{t} = \frac{\sum s}{v} + t_p = \frac{38}{15}\ \text{h} = \underline{2{,}53\ \text{h}}$

1.10. Egyenes országúton a 40. kilométerkőnél egy személygépkocsi megelőz egy autóbuszt. Az autóbusz $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú, a személygépkocsi $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel egyenletesen halad.

a) Adjuk meg az autóbusz és a személygépkocsi helyét az országúton a találkozás után 20 perccel!

b) Mekkora ugyanakkor a két jármű egymástól mért távolsága?

c) Mekkora a személygépkocsi sebessége az autóbuszhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben?

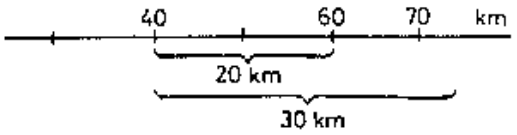
Megoldás:

1.10. $\overline{v}_a = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\overline{v}_{sz} = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $t = 20\ \text{min} = \frac{1}{3}\ \text{h}$.

a) $s_a + \overline{v}_a \cdot t = 20\ \text{km}$

$s_{sz} = \overline{v}_{sz} \cdot t = 30\ \text{km}$

Az autóbusz a 60-adik, a személygépkocsi a 70-edik kilométerkőnél lesz.



b) A két jármű egymástól mért távolsága az a) ábráról 10 km.

c) A vektori összegzés alapján: a személygépkocsi sebessége az autóbuszhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben $v_{sz-a} = v_{sz} - v_a = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.11. Egy gépkocsi a Budapest–Szeged közötti 170 km-es utat 3 óra alatt teszi meg. Az út első felében $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel halad.

a) Mekkora az egész útra számított átlagsebesség?
b) Mekkora az autó átlagsebessége az út második felében?

Megoldás:

1.11. $\Delta s = 170\ \text{km};\ \Delta t = 3\ \text{h};\ \bar{v}_1 = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) az átlagsebesség értelmezése szerint

$$t_1 = \frac{\frac{\Delta s}{2}}{v_1}; \qquad t_2 = \Delta t - t_1; \qquad \bar{\bar{v}}_2 = \frac{\frac{\Delta s}{2}}{t_2} = \underline{\underline{65{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}},$$

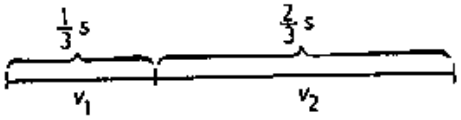
az út második felében az autó átlagsebessége $65{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) $\bar{\bar{v}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underline{\underline{56{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$ az egész útra számított átlagsebesség.

1.12. Egy gépkocsi az útjának egyharmad részét 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel, kétharmadát pedig 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel teszi meg.
Mekkora az egész útra számított átlagsebesség?

Megoldás:

1.12. $\overline{v}_1 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\overline{v}_2 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Az átlagsebességre vonatkozó összefüggés alapján: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ahol $\Delta t = t_1 + t_2$ és $t_2 = \frac{\frac{s}{3}}{\overline{v}_1}$; $t_2 = \frac{\frac{2}{3}s}{\overline{v}_2}$.

$\overline{v} = 77{,}14\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ az egész útra számított átlagsebesség.

1.13. A mellékelt táblázat a Nagybörzsöny és Nagyirtás között közlekedő erdei vasút menetrendjéből való.

km	hely	idő odafelé	idő visszafelé
0	Nagybörzsöny	9 h 50 p	17 h 20 p
4	Kisirtás	10 h 17 p	16 h 55 p
8	Nagyirtás	10 h 40 p	16 h 30 p

a) Ábrázoljuk az egyes megállók közötti átlagsebességeket egy oda- és visszaútnyi időtartamra!

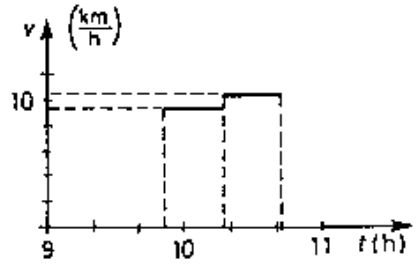
b) Ábrázoljuk az elmozdulás—idő grafikont, ha feltételezzük, hogy a számított nagyságú átlagsebességekkel halad a vonat az egyes útszakaszokon!

Megoldás:

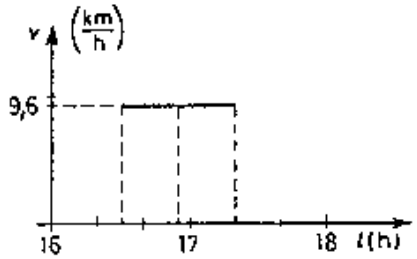
1.13. $s_1 = 4$ km; $s_2 = 4$ km; $\Delta t_{0-4} = 27$ min $= 0{,}45$ h; $\Delta t_{4-8} = 23$ min $=$ $= 0{,}38$ h; $\Delta t_{8-4} = 25$ min $= 0{,}416$ h; $\Delta t_{4-0} = 25$ min $= 0{,}416$ h.

a) Az átlagsebességre vonatkozó összefüggés alapján: $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$\overline{v}_{0-4} = 8{,}8 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$; $\overline{v}_{4-8} = 10{,}43 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$; $\overline{v}_{8-4} = 9{,}6 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$; $\overline{v}_{4-0} = 9{,}6 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

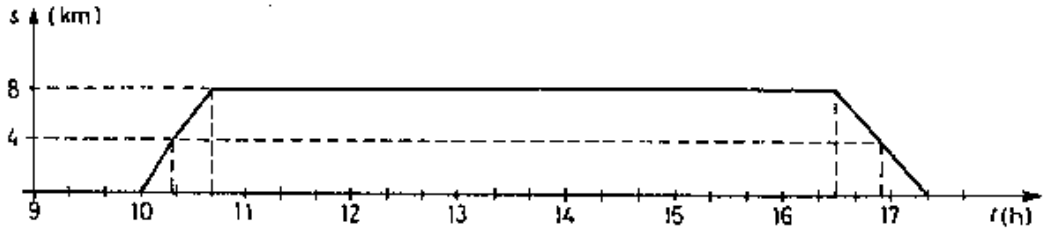


Az átlagsebességek odaútban



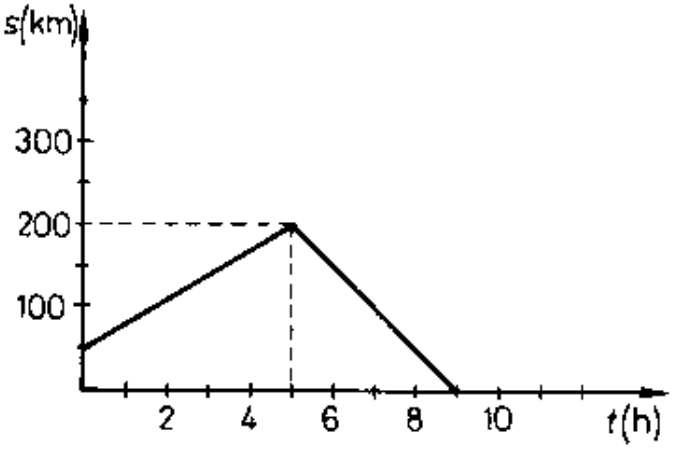
Az átlagsebességek visszaútban

b)



1.14. Az ábra egy teherautó elmozdulás–idő grafikonját mutatja.

Határozzuk meg és ábrázoljuk az idő függvényében a (0–5) óra és az (5–9) óra időtartamokhoz tartozó, valamint az egész útra számított átlagsebességek nagyságát!



Megoldás:

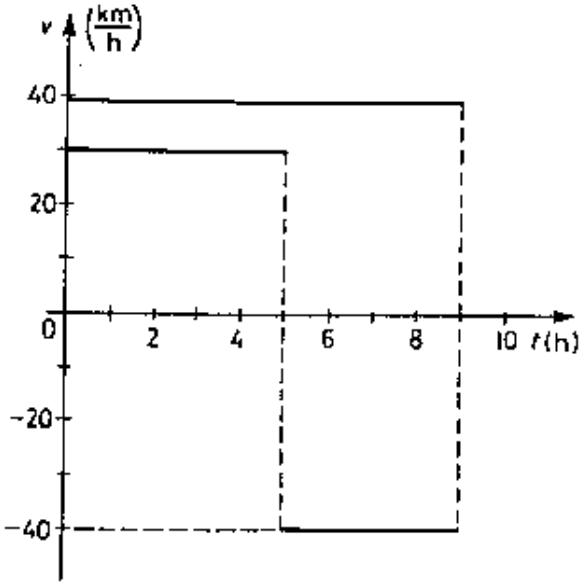
1.14. $s_{0-5} = 150$ km; $s_{5-9} = 200$ km; $\Delta t_1 = 5$ h; $\Delta t_2 = 4$ h.

$$\overline{v} = \frac{\sum s}{\sum t},$$

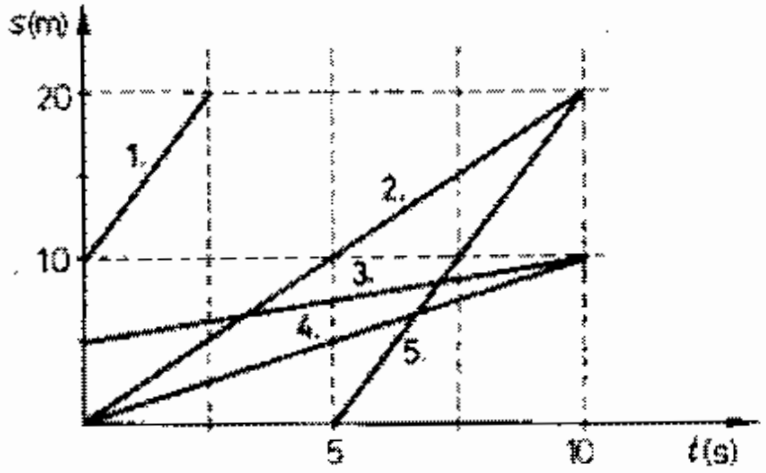
$$\underline{\underline{\overline{v}_{0-5} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}};}}$$

$$\underline{\underline{\overline{v}_{5-9} = -50 \frac{\text{km}}{\text{h}};}}$$

$$\underline{\underline{\overline{v}_{0-9} = 38{,}9 \frac{\text{km}}{\text{h}}.}}$$



1.15. Az ábra öt test elmozdulás–idő grafikonját mutatja.



a) Határozzuk meg az átlagsebességek nagyságának arányát!

b) Ábrázoljuk az átlagsebességeket az idő függvényében!

Megoldás:

1.15. 1: $s_1 = 10$ m; $t_1 = 2{,}5$ s; 2: $s_2 = 20$ m; $t_2 = 10$ s; 3: $s_3 = 6$ m; $t_3 = 10$ s; 4: $s_4 = 10$ m; $t_4 = 10$ s; 5: $s_5 = 20$ m; $t_5 = 5$ s.

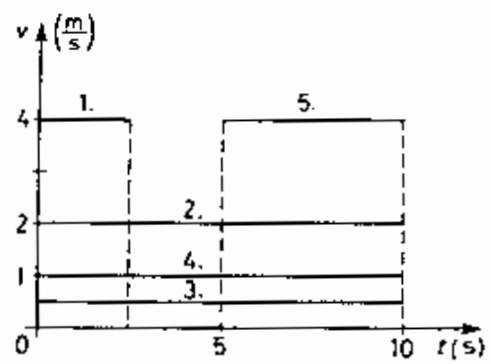
a) Az átlagsebességre vonatkozó összefüggés alapján: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

$\overline{v}_1 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_2 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_3 = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_4 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_5 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

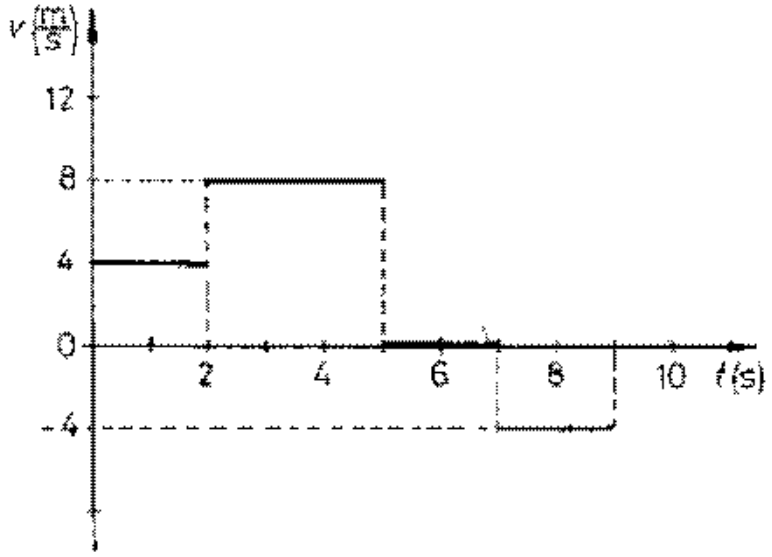
$$\overline{v}_1 : \overline{v}_2 : \overline{v}_3 : \overline{v}_4 : \overline{v}_5 = 4 : 2 : 0{,}5 : 1 : 4$$

az átlagsebességek aránya.

b)



1.16. Az ábra egyenes mentén, szakaszonként egyenletes mozgást végző test sebesség–idő grafikonját mutatja!

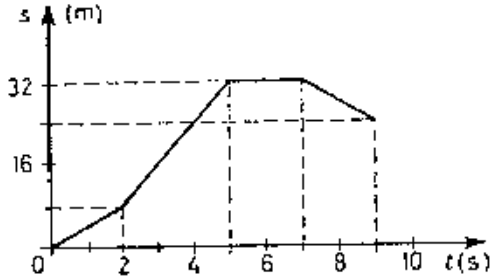


a) Készítsük el a mozgás elmozdulás–idő grafikonját!
b) Határozzuk meg a test által megtett utat!

Megoldás:

1.16. $t_1 = 2\ \text{s};\ v_1 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ t_2 = 5\ \text{s} - 2\ \text{s} = 3\ \text{s};\ v_2 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ t_3 = 7\ \text{s} - 5\ \text{s} = 2\ \text{s};$
$v_3 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ t_4 = 9\ \text{s} - 7\ \text{s} = 2\ \text{s};\ v_4 = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

a) Az elmozdulás–idő grafikon az $s = v \cdot t$ összefüggést alkalmazva:
$s_1 = 8\ \text{m};\quad s_2 = 24\ \text{m};$
$s_3 = 0\ \text{m};\quad s_4 = -8\ \text{m}.$



b) A megtett út:
$\underline{\underline{\sum s = s_1 + s_2 + s_3 + |s_4| = 40\ \text{m}}}.$

1.17. Az emberi szem mozgónak látja az egymás után vetített állóképeket, ha másodpercenként 24 képet vetítenek. Egy kép hossza a filmen 18 mm.

a) Mennyi a levetített filmtekercs hossza, ha a vetítés időtartama másfél óra?

b) Ábrázoljuk a vetítés időtartamára vonatkozó út–idő és sebesség–idő grafikonokat!

Megoldás:

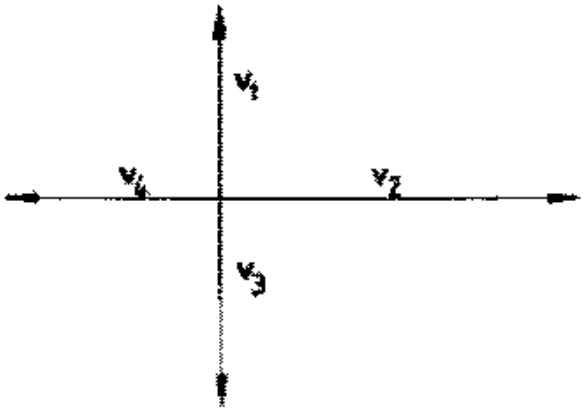
1.18. Egy test v_1 sebességgel haladt 20 s-ig, azután v_2-vel 10 s-ig, majd v_3-mal 30 s-ig, végül v_4-gyel 10 s-ig.
Mekkora a test elmozdulása a 70 s alatt?
Adatok:

$$v_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$v_2 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

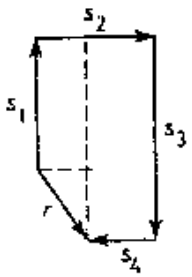
$$v_3 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$v_4 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Megoldás.

1.18. $t_1 = 20$ s; $t_2 = 10$ s; $t_3 = 30$ s; $t_4 = 10$ s.



$s = v \cdot t$ alkalmazásával a vektorábráról az elmozdulás nagysága:

$$\underline{r} = \sqrt{(s_3 - s_1)^2 + (s_2 - s_4)^2} = \underline{\underline{179\ \text{m}}}.$$

1.19. Egyenes országúton egymással szemben haladó személygépkocsi és autóbusz találkozik a 30-as kilométerkőnél. A személygépkocsi 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú, az autóbusz 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel halad egyenletesen.

a) Adjuk meg a személygépkocsi és az autóbusz helyét az országúton a találkozás után 20 perccel!

b) Mekkora ugyanekkor a két jármű egymástól mért távolsága?

c) Mekkora a személygépkocsi sebessége az autóbuszhoz rögzített koordináta-rendszerben (vonatkoztatási rendszerben)?

Megoldás:

1.19. $v_{sz} = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_a = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) $t = 20\ \text{min} = \frac{1}{3}\ \text{h}$; $s = v \cdot t$; 20 perc múlva az autóbusz a 10-edik, a személygépkocsi a 60-adik kilométerkőnél lesz.

b) A két autó távolsága $s = s_a + s_{sz} = 50\ \text{km}$.

c) A személygépkocsi sebessége az autóbuszhoz rögzített rendszerben $v_{sz-a} = v_{sz} + v_a = 150\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.20. Két hajó egyenlő nagyságú sebességgel halad, az egyik egyenes pályán, a másik nem.

a) Melyik jut messzebb ugyanannyi idő alatt?
b) Azonos idő alatt melyik tesz meg nagyobb utat?

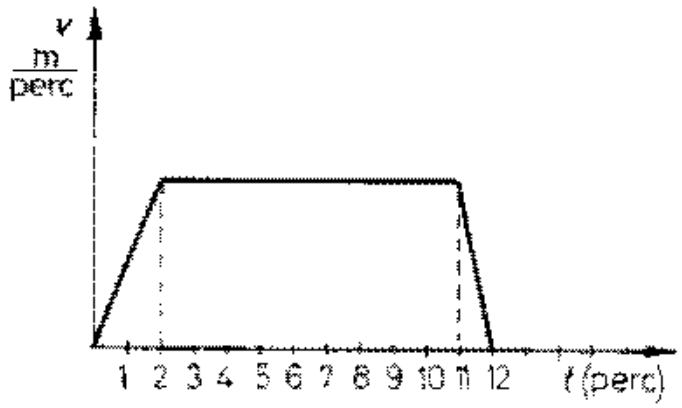
Megoldás:

1.20. $v_1 = v_2$.

a) Az egyenlő sebesség miatt az egyenes pályán haladónak nagyobb az elmozdulása.

b) Az egyenlő sebesség miatt azonos idő alatt egyforma utat tesznek meg.

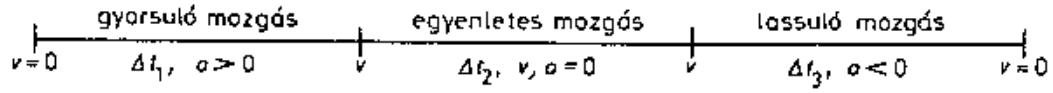
1.21. Egy vonat két állomás között 10 500 m utat tesz meg. Sebességének nagyságát az ábra mutatja.



Mekkora volt a vonat sebessége a nyílt pályán?

Megoldás:

1.21. $\Delta t_1 = 2\ \text{min} = 120\ \text{s}$; $\Delta t_2 = 11\ \text{min} - 2\ \text{min} = 9\ \text{min} = 540\ \text{s}$; $\Delta t_3 = 12\ \text{min} - 11\ \text{min} = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$; $s = 10\ 500\ \text{m}$.



$s = s_1 + s_2 + s_3$. $\quad s = \dfrac{0+v}{2}\Delta t_1 + v \cdot \Delta t_2 + \dfrac{v+0}{2}\Delta t_3$.

A vonat sebessége nyílt pályán: $v = 16{,}7\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

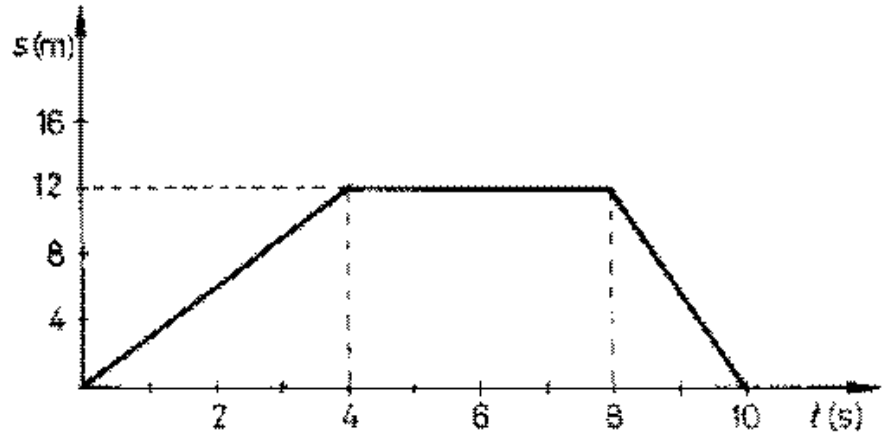
1.22. Mekkora a 4. másodpercben az átlagsebessége annak a testnek, amelynek útját az $s = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$ függvény írja le?

Megoldás:

1.22. $s = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2$; $\Delta t = 1$ s.

A 4. s-ban az átlagsebesség: $\underline{\underline{\overline{v}_{4.}}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_4 - s_3}{\Delta t} = \underline{\underline{28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

1.23. Az ábra egy mozgó test elmozdulás–idő grafikonját mutatja.



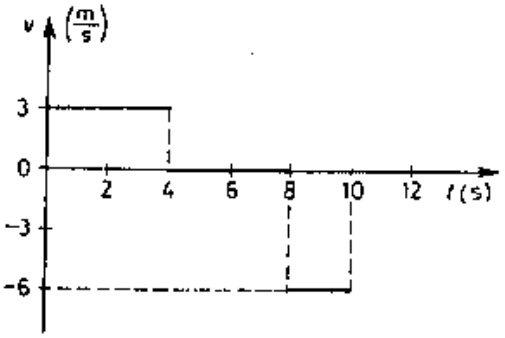
a) Készítsük el a mozgás sebesség–idő grafikonját!

b) Határozzuk meg az egész útra számított átlagsebesség nagyságát!

Megoldás:

1.23. $s_1 = 12$ m; $t_1 = 4$ s; $s_2 = 0$; $t_2 = 8$ s $-$ 4 s $= 4$ s; $s_3 = -12$ m; $t_3 = 10$ s $-$ 8 s $= 2$ s.

a) A grafikon alapján a mozgás egyenletes, $v = \frac{s}{t}$ alkalmazásával:



b) Az egész útra számított átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = 2{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1.24. Katonai gyakorlótéren méréseket végeznek.

a) Álló megfigyelő egy ágyú elsütésekor a torkolattűz észlelése után 10 s-mal hallja a dörrenést. A megfigyelőtől mekkora távolságban sütötték el az ágyút, ha a hang terjedési sebessége 330 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

b) Mekkora távolságban volt az elsütés pillanatában az a megfigyelő az ágyútól, aki a fényjel és a hang észlelése között 9 s-et mért, miközben 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel futott az ágyú felé?

c) Mekkora távolságban volt az ágyútól az elsütés pillanatában az a megfigyelő, aki a fényjel és a hang észlelése közötti időszakban 150 m utat tett meg, 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű motoron távolodva az ágyútól?

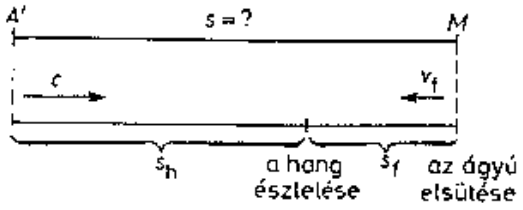
Megoldás:

1.24. Egyenes vonalú egyenletes mozgás miatt:

a) $\Delta t = 10\ \text{s};\quad c = 330\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\underline{\underline{s_h}} = c \cdot \Delta t = \underline{\underline{3300\ \text{m}}}$. A hang 3300 m utat tett meg, tehát a megfigyelőtől ekkora távolságban sütötték el az ágyút.

b) $\Delta t = 9\ \text{s};\quad v_f = -36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\quad c = 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

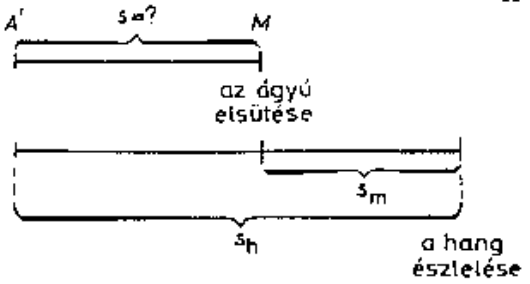


A fény terjedéséhez szükséges idő elhanyagolható. A fényjel és a hang észlelése közötti idő megegyezik a futási idejével. Az ábráról:

$$\underline{\underline{s}} = s_h + s_f = c \cdot \Delta t + v_f \cdot \Delta t = \underline{\underline{3060\ \text{m}}}.$$

Az ágyú és a futó megfigyelő távolsága az ágyú elsütésének pillanatában 3060 m.

c) $s_m = 150\ \text{m};\quad v = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\quad c = 330\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



A fényjel és a hang észlelése közötti időszakban haladt a motor.

$$\Delta t = \frac{s_m}{v} = 12\ \text{s},$$

$$\underline{\underline{s}} = s_h - s_m = c \cdot \Delta t - s_m =$$

$$= 3960\ \text{m} - 150\ \text{m} = \underline{\underline{3810\ \text{m}}}.$$

Az ágyú és a motoros távolsága az ágyú elsütésének pillanatában 3810 m.

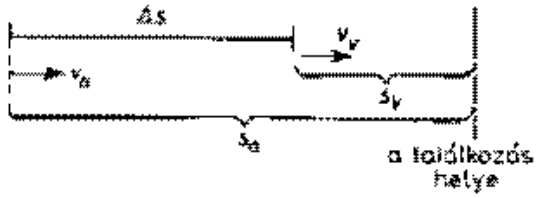
1.25. Egyenes műúton személyautó, a műúttal párhuzamosan futó vasúti sínen pedig vonat halad. Egy adott időpillanatban a vonat 2,4 km-rel jár az autó előtt.

a) Mennyi idő alatt és mekkora úton éri utol az autó a vonatot, ha az autó sebessége 68,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a vonat sebessége pedig 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

b) Ábrázoljuk mindkét test elmozdulását az idő függvényében!

Megoldás:

1.25. $\Delta s = 2{,}4\ \text{km} = 2400\ \text{m}$.



a) $v_a = 68{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 19\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$;

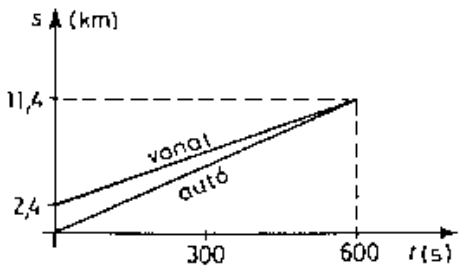
$v_v = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A találkozásig ugyanannyi ideig halad egyenletes mozgással az autó és a vonat is:

$$\Delta s = s_a - s_v = v_a \cdot t - v_v \cdot t.$$

A találkozásig eltelt idő $t = 600\ \text{s}$, az autó által megtett út:
$s_a = 11\,400\ \text{m} = 11{,}4\ \text{km}$.

b)



1.26. Egy autókaraván egyenletesen mozog $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A karavánnal párhuzamosan, állandó nagyságú sebességgel halad egy motoros.

a) Mekkora a motoros sebessége, ha szemben haladva az autókkal 15 s alatt megy el mellettük, ha pedig egy irányban megy velük, akkor 50 s alatt előzi meg őket?

b) Mekkora az autókaraván hossza?

Megoldás:

1.26. $v_a = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) $t_{sz} = 15$ s; $t_c = 50$ s.

$v_m = ?$

Az autókaravánhoz viszonyított vonatkoztatási rendszerben a motoros által megtett út a karaván hossza. Sebessége szemben haladva: $v_{m,a,sz} = v_m + v_a$, egy irányban haladva: $v_{m,a,sz} = v_m - v_a$. Az idő független a választott koordináta-rendszertől.

$a = v_{m,a,sz} \cdot t_{sz} = v_{m,a,e} \cdot t_e$. A motor sebessége $\underline{\underline{v_m = 23{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) Az autókaraván hossza: $\underline{\underline{s = 525{,}7\ \text{m}}}$.

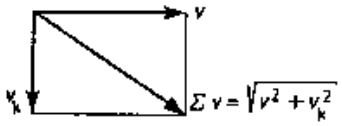
1.27. Egyenes vonalú egyenletes mozgással haladó vonat sebességének nagysága $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A vonatban 2 m magasságból a padlójára ejtünk egy követ.

a) Mennyi idő alatt és mekkora sebességgel ér a kő a padlóra?
b) Mekkora utat tesz meg ezalatt a vonat?
c) Mekkora a padlóra érkezés pillanatában a kőnek a Földhöz viszonyított sebessége?
d) Mekkora a kő vízszintes irányú elmozdulása az esés ideje alatt a Földhöz viszonyítva és mekkora a vonathoz viszonyítva?

Megoldás:

1.27. $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = 2$ m.

a) A kő a vonathoz képest függőlegesen, g gyorsulással esik.



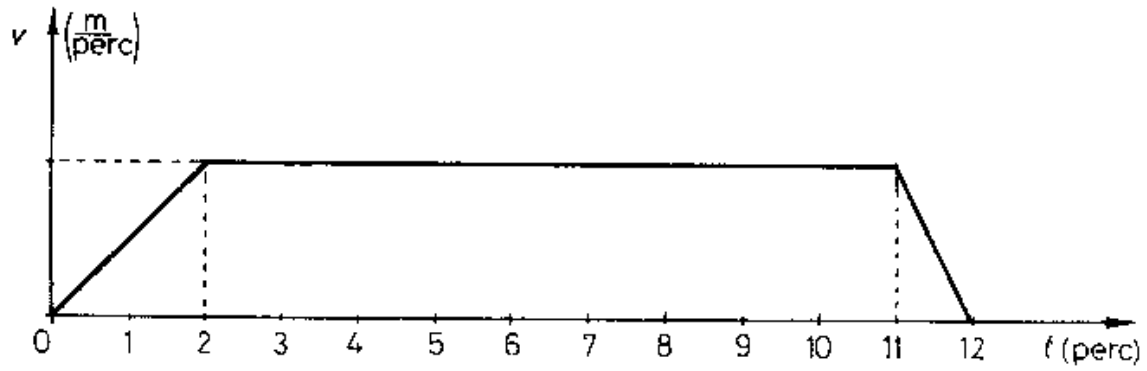
$h = \frac{g}{2}t^2$. Az esés ideje $\underline{t = 0{,}63\ \text{s}}$.

b) A vonat a kő esése alatt halad előre: $\underline{x = v_s \cdot t = 6{,}3\ \text{m}}$

c) A kőnek a földhöz viszonyított sebessége: $\underline{\sum v = 11{,}82\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

d) Az esés ideje alatt a kőnek a vízszintes irányó elmozdulása a a vonathoz viszonyítva nulla, a földhöz viszonyítva pedig megegyezik a vonatéval $\underline{= 6{,}3\ \text{m}}$.

1.28. A grafikon szerint egy vonat két állomás között 21 000 m utat tesz meg.



Mekkora volt a vonat sebessége a nyílt pályán?

Megoldás:

1.28. $s = 2100$ m; $v_0 = 0$; $t_1 = 2$ min $= 120$ s; $t_2 = 11$ min $- 2$ min $=$
$= 9$ min $= 540$ s;
$t_3 = 12$ min $- 11$ min $= 1$ min $= 60$ s; $v_{t2} = 0$.
Lásd az 1.21. feladat megoldását!

$$s = \frac{0+v}{2} t_1 + v \cdot \Delta t_2 + \frac{c+0}{2} t_3.$$

A vonat sebessége a nyílt pályán: $\underline{\underline{v = 33{,}3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

1.29. A metró lefelé haladó mozgólépcsőjén egy utas a lépcsőhöz viszonyított állandó v sebességgel lefelé megy, és így 1 perc alatt ér le. Ha a lépcsőhöz viszonyított sebességét megkétszerezi, akkor 45 másodperc alatt ér le.
Mennyi idő alatt ér le, ha áll a lépcsőn?

Megoldás:

1.29. v; $t_1 = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$; $2v$; $t_2 = 45\ \text{s}$.
A mozgólépcső sebessége legyen a földhöz viszonyítva: v_m. Ekkor az utas sebessége a földhöz képest: $v_1 = v_m + v$ és $v_2 = v_m + 2v$, illetve ha csak áll a mozgólépcsőn, akkor $v_0 = v_m$. Az út a földhöz viszonyított koordinátarendszerben mindegyik esetben ugyanolyan hosszúságú.

(1) $s = v_1 \cdot t_1 = (v_m + v) \cdot 60$

(2) $s = v_2 \cdot t_2 = (v_m + 2v) \cdot 45$

(3) $s = v_m \cdot t$

(1) – (2): $v_m = 2v$.

(1) = (3): $(v_m + v) \cdot 60 = v_m \cdot t$.

$(2v + v) \cdot 60 = 2v \cdot t$, ebből $t = 90\ \text{s}$.

Az utas a mozgólépcsőn állva $\underline{\underline{t = 90\ \text{s}}}$ alatt ér le.

1.30. Két villamosmegálló közti távolság 500 m. A kocsi a gyorsítási és fékezési útszakaszokon kívül egyenletesen mozog $36\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Indulás után 30 s múlva éri el az utazási sebességet, és az utolsó 50 m-en fékez.
Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás:

1.30. $s = 500$ m; $v = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_1 = 30$ s; $s_3 = 50$ m.

Lásd az 1.21. feladat megoldását!

$s = \frac{0+v}{2} t_1 = 150$ m; $s_2 = s - s_1 - s_3 = 300$ m; $s_2 = v \cdot t_2$, ebből $t_2 = 30$ s;

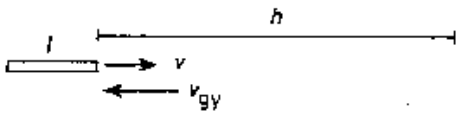
$s_3 = \frac{v+0}{2} t_3$, ebből $t_3 = 10$ s.

Az átlagsebesség: $\overline{v} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = 7{,}14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1.31. A 90 m hosszú vonat 27 s alatt halad át egy hídon. A vele szemben $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó gyalogos mellett 9 s alatt gördül el.
Határozzuk meg a híd hosszát és a vonat sebességét!

Megoldás:

1.31. $l = 90$ m; $t = 27$ s; $v_{gy} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_1 = 9$ s.



Legyen a vonat sebessége a földhöz viszonyítva v, a gyalogoshoz viszonyítva $v + v_{gy}$. A vonat a gyalogoshoz viszonyítva, t_1 idő alatt, a vonattal egyenlő hosszúságú utat tesz meg: $l = (v + v_{gy}) \cdot t_1$; $v = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A vonat a földhöz viszonyított v sebességgel t idő alatt $h + l$ utat tesz meg: $h + l = v \cdot t$. A híd hossza $\underline{\underline{h = 153\ \text{m}}}$.

1.32. Egy autó távolsága az elindulás helyétől $x = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$ alakú függvénye az időnek.
Határozzuk meg az autó átlagsebességét a 4. s-ban!

Megoldás:

1.32. $x = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$; $t = 4.$ s.
Lásd az 1.22. feladat megoldását! A 4. másodpercben az átlagsebesség:
$\overline{v}_4 = 21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1.33. Két megálló közti távolság 800 m. A jármű legnagyobb gyorsulása $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, legnagyobb fékezési lassulása $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lehet. A megengedett maximális sebesség 86,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A járműnek a legrövidebb idő alatt kell megtenni a két megálló közötti utat.

a) Mennyi utat tesz meg gyorsítva, egyenletesen és fékezve?

b) Mekkora a minimális menetidő a két megálló között?

Megoldás:

1.33. $s_1 = 96$ m; $s_3 = 72$ m; $s_2 = 632$ m

b) $t = 40{,}3$ s.

$s = 800$ s; $a_1 = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $s_3 = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v = 86{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 24\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lásd az 1.21. feladat megoldását!

a) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $t_1 = \frac{v}{a_1}$; $s_1 = \frac{v}{2} t_1 = \underline{\underline{96\ \text{m}}}$.

$t_3 = \frac{-v}{a_3}$; $s_3 = \frac{v}{2} t_3 = \underline{\underline{72\ \text{m}}}$; $s_2 = s_1 - s_3 = \underline{\underline{632\ \text{m}}}$.

A gyorsítási út 96 m, az egyenletes szakasz 632 m, a fékezési út 72 m.

b) $t_2 = \frac{s_2}{v}$. A minimális menetidő: $\underline{t} = t_1 + t_2 + t_3 = 8\ \text{s} + 26{,}3\ \text{s} + 6\ \text{s} = \underline{\underline{40{,}3\ \text{s}}}$.

1.34. Egy gépkocsi álló helyzetből indulva, 7 s-ig állandó gyorsulással mozog, majd az elért sebességgel egyenletesen halad tovább. Az indulás pillanatától mért első 12 s alatt 142,8 m utat tesz meg a gépkocsi.

a) Mekkora a gyorsulása?
b) Ábrázoljuk a sebességet az idő függvényében!

Megoldás:

1.34. $v_0 = 0$; $t_1 = 7s$; $t = 12$ s; $s = 142{,}8$ m.

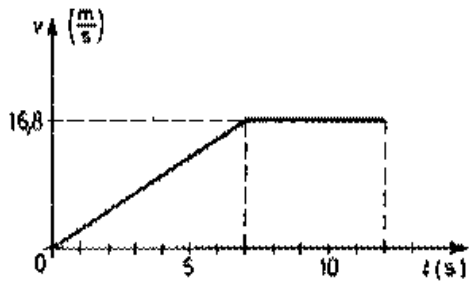
a)

	gyorsuló szakasz		egyenletes szakasz	
$v=0$	$a,\ s_1,\ t_1$	v	$s_2,\ t_2$	v

$s = s_1 + s_2$; $t_2 = t - t_2$.

$s = \frac{v}{2} t_1 + v \cdot t_2$; $v = 16{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A gyorsulás: $\underline{a} = \frac{v}{t_1} = \underline{\underline{2{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

b)



1.35. Az autópályán 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó autó, 100 m-es vízszintes úton fékezhető le. (Az autó gyorsulását tekintsük állandó értékűnek!)

a) Mekkora út megtétele után csökken a jármű sebessége az eredeti érték felére?
b) Oldjuk meg a feladatot grafikusan is!
c) Ábrázoljuk a fékezés ideje alatt a gépkocsi sebességét, gyorsulását és a helyét az idő függvényében!

Megoldás:

1.35. $v_0 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 100$ m; $v_t = 0$.

a) Egyenletesen változó a mozgás.

$s = \frac{v_0 + v_t}{2} t$; $t = 8$ s; $a = \frac{v_1 - v_0}{t} = 3{,}125\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\frac{v_0}{2} = v_0 + a \cdot t_1$;

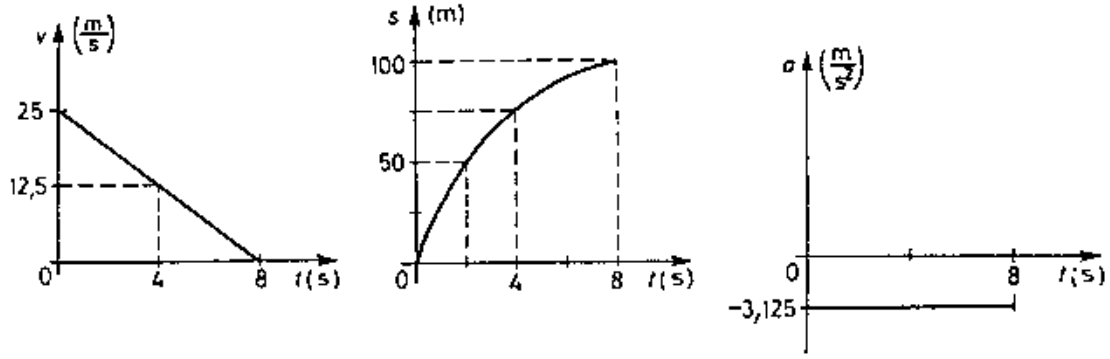
$t_1 = 4$ s alatt lesz a sebesség az eredeti érték fele;

$\underline{\underline{s_1}} = \frac{v_0 + \frac{v_0}{2}}{2} \cdot t_1 = \underline{\underline{75 \text{ m}}}$.

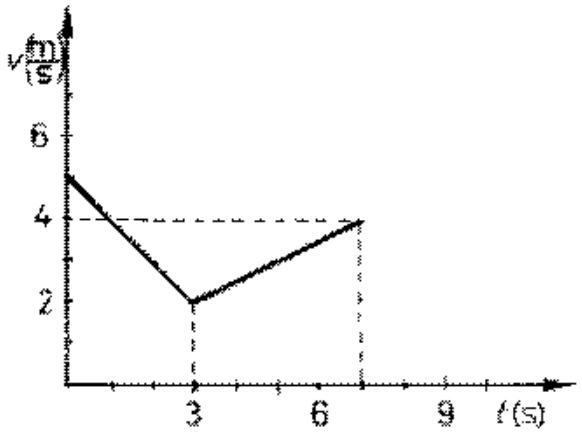
75 m út megtétele után csökken a sebesség a felére.

b) $v = v_0 + a \cdot t$; $v \sim t$, a v–t grafikon egyenes. Mivel $a < 0$, az egyenes csökkenő irányú.

$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$, $s \sim t^2$, az s–t grafikon parabola. Mivel $a < 0$, a parabolának maximuma van. $a =$ áll.



1.36. Egy test sebessége a grafikonon látható módon változik. Határozzuk meg és ábrázoljuk a gyorsulást és a test helyét az idő függvényében a mozgás folyamán!



Megoldás:

1.36. $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_1 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_1 = 3\ \text{s}$; $\Delta t_2 = 7\ \text{s} - 3\ \text{s} = 4\ \text{s}$.

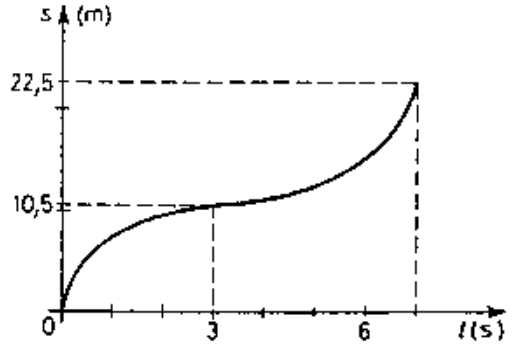
Egyenletesen lassuló, majd gyorsuló mozgást végez a test:

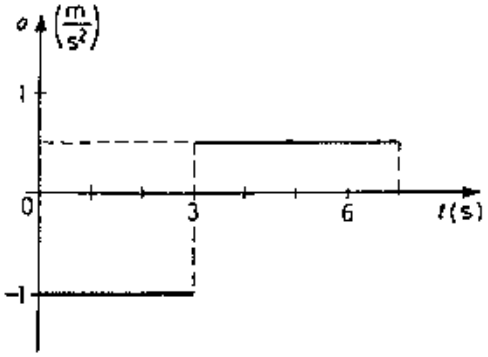
$s = \frac{v_0 + v_1}{2} t$; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $s_1 = 10{,}5\ \text{m}$; $s_2 = 12\ \text{m}$.

$0 \le t < 3s$; $s = v_0 \cdot t + \frac{a_1}{2} t^2$ és $a < 0$, ezért $\underline{\underline{s \sim -t^2}}$.

$3s \le t < 7s$; $s = 10{,}5 + v_1 (t - 3) + \frac{a_2}{2} (t - 3)^2$ és $a > 0$, ezért $\underline{\underline{s \sim t^2}}$.

$s_1 = 10{,}5\ \text{m}$; $s_2 = 12\ \text{m}$; $\underline{\underline{a_1 = -1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$; $\underline{\underline{a_2 = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.



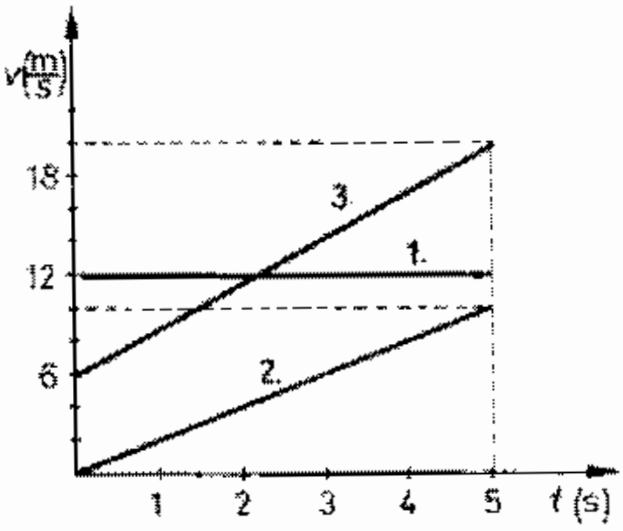


1.37. A grafikon egyenes vonalú mozgást végző testek sebességét mutatja az idő függvényében.

a) Ábrázoljuk a (0—5 s) időintervallumra vonatkozó átlagsebességeket az idő függvényében!

b) Határozzuk meg az egyes mozgások gyorsulását!

c) Ábrázoljuk a testek helyét az idő függvényében!



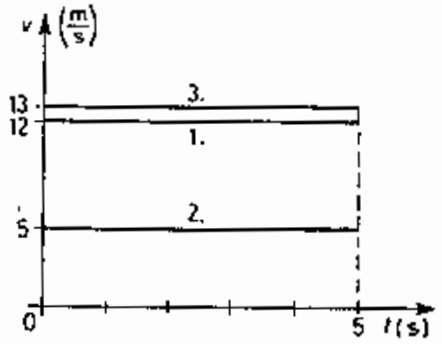
Megoldás:

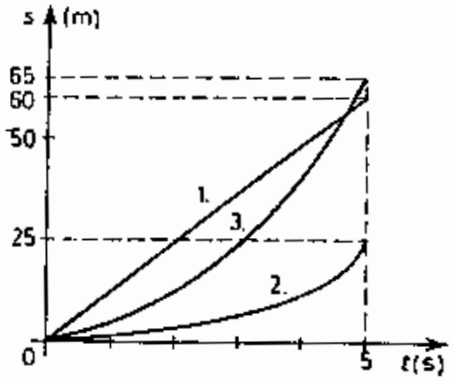
1.37. 1: $v = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5$ s;

2: $v_0 = 0$; $v_t = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5$ s;

3: $v_0 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_t = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5$ s;

A 2. és a 3. mozgás egyenletesen változó, az 1. egyenletes.





$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t};\quad s = \frac{v_0 + v_t}{2}t;\quad s = v \cdot t;\quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

a) $\overline{v}_1 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_2 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\overline{v}_3 = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $a_1 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_2 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_3 = 2{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

c) $s_1 \sim t$, $s_2 \sim t^2$, $s_3 \sim t^2$.

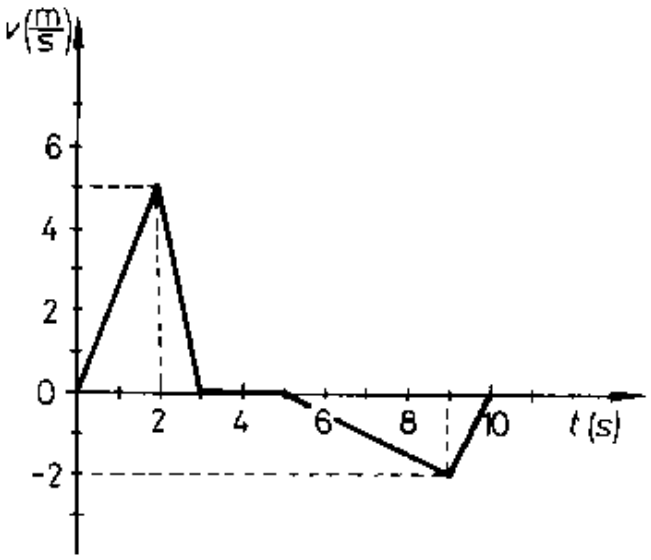
$s_1 = 60$ m; $s_2 = 25$ m; $s_3 = 65$ m.

1.38. A grafikon egy test sebességét mutatja az idő függvényében. A mozgás egyenes vonalú.

a) Ábrázoljuk a mozgás gyorsulását az idő függvényében a (0–10 s) időintervallumban!

b) Mekkora az elmozdulás 10 s alatt?

c) Határozzuk meg az első 5 s-ban az átlagsebesség nagyságát!

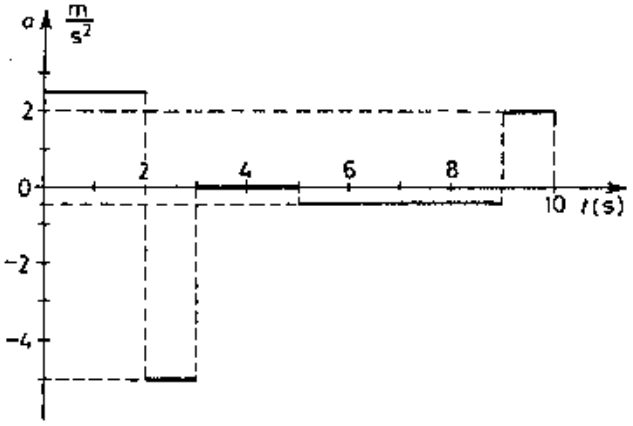


Megoldás:

1.38. $v_0 = 0$; $v_1 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_1 = 2$ s; $v_2 = 0$; $\Delta t_2 = 3\ \text{s} - 2\ \text{s} = 1$ s; $v_3 = 0$; $\Delta t_3 = 5\ \text{s} - 3\ \text{s} = 2$ s.

$v_4 = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_4 = 9\ \text{s} - 5\ \text{s} = 4$ s; $v_5 = 0$; $\Delta t_5 = 10\ \text{s} - 9\ \text{s} = 1$ s.

a) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $a_1 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_2 = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_3 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_4 = -0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_5 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



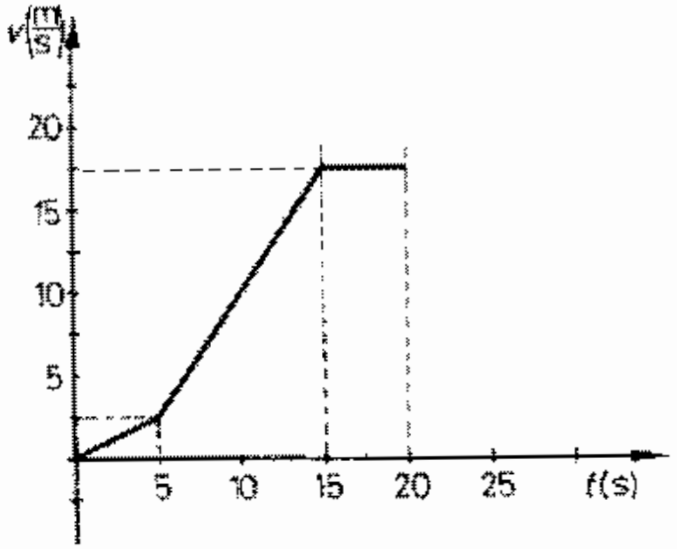
b) $s = \frac{v_0 + v_t}{2} t$; $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$.

Az elmozdulás: $\underline{\underline{s}} = 5\ \text{m} + 2{,}5\ \text{m} + 0 - 4\ \text{m} - 1\ \text{m} = \underline{\underline{2{,}5\ \text{m}}}$.

c) $\Delta t = 5\ \text{s} - 0$; $\Delta s_{5\ \text{s}} = 5\ \text{m} + 2{,}5\ \text{m} + 0$.

Az átlagsebesség az első 5 s-ban: $\underline{\underline{\overline{v}}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underline{\underline{1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

1.39. Ábrázoljuk annak az egyenletes mozgásnak a sebességét, amellyel mozogva a test 20 s alatt ugyanakkora utat tenne meg, mint a grafikonon megadott sebességű mozgás közben!



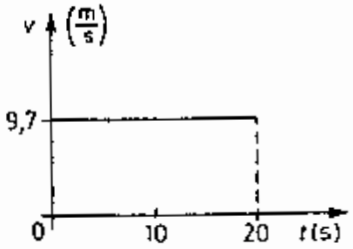
Megoldás:

1.39. $v_0 = 0$; $\Delta t_1 = 5$ s; $v_1 = 2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_2 = 15$ s-5 s$= 10$ s; $v_2 = 17{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$\Delta t_3 = 20$ s $- 15$ s$= 5$ s; $v_3 = 17{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\Delta s = s_1 + s_2 + s_3$, $s = \frac{v_0 + v_t}{2} \cdot t$.

$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}6875 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sim \underline{\underline{9{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.



1.40. Egy gépkocsi fékútja hányszoros sebességnövekedés után nő n-szeresére?

Megoldás:

1.40. Egyenletesen változó egyenes menti mozgás, ahol a kezdősebesség v_0, a végsebesség: $v_t = 0 = v_0 + a \cdot t$.

Ebből $t = -\frac{v_0}{a}$; a fékút $s = \frac{v_0 + 0}{2} \cdot t = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{-v_0}{a} = \frac{-v_0^2}{2a}$.

A fékút a kezdősebesség négyzetétől függ, tehát n-szeres fékút $\sqrt{n}$-szeres kezdősebesség esetén lesz.

1.41. Autópályán $108\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel haladó autó vezetője 98 m távolságban forgalmi akadályt vesz észre.
El tudja-e kerülni az ütközést, ha reakcióideje 1 s és a kocsi 10 s alatt állítható meg?

Megoldás:

1.41. $v_0 = 108\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 98$ m; $t_r = 1$ s; $t_f = 10$ s.

A fékezés megkezdéséig a reakcióidő alatt még egyenletesen halad a kocsi: $\underline{s_r} = v_0 \cdot t_r = \underline{30\ \text{m}}$ utat megtesz, és csak azután kezdi meg a fékezést: $\underline{s_f} = \frac{v_0}{2} t_f = \underline{150\ \text{m}}$.

$\underline{s < s_r + s_f}$, nem tud megállni az akadály előtt.

1.42. Újpest és Vác között a távolság 26 km. A gyorsvonat ezt az utat 18 perc alatt teszi meg. Induláskor 90 s-ig egyenletesen gyorsít és érkezés előtt 70 s-mal kezdi meg a fékezést. Az út közbenső részében egyenletes mozgással halad.

a) Mekkora a sebessége a nyílt pályán?
b) Mekkora induláskor és fékezéskor a gyorsulása?
c) Ábrázoljuk a vonat által megtett utat az idő függvényében!

Megoldás:

1.42. $s = 46\ \text{km} = 26\,000\ \text{m}$; $t = 18\ \text{min} = 1080\ \text{s}$; $t_{gy} = 90\ \text{s}$; $t_f = 70\ \text{s}$.
Lásd az 1.21. feladat megoldását!

a) $s = \frac{v}{2}t_{gy} + v \cdot t_2 + \frac{v}{2}t_f$; $t_2 = t - t_{gy} - t_f$.

A sebesség nyílt pályán $v = 26\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, $a_{gy} = 0{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gyorsulás indulásakor.

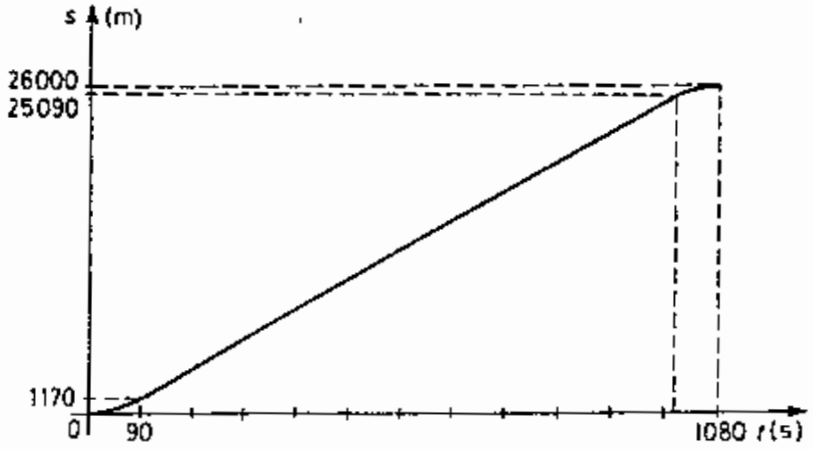
$a_1 = -0{,}37\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gyorsulás fékezéskor.

$s_{gy} = 1170$ m; $s_e = 23\,920$ s; $s_f = 910$ m.

$0 \le t < 90$ s; $s = \frac{a_{gy}}{2} t^2$ és $a > 0$, ezért $s \sim t^2$.

$90 \text{ s} \le t < 1010$ s; $s = 1170 + v(t - 90)$, ezért $s \sim t$.

$1010 \text{ s} \le t < 1080$ s; $s = 25\,090 + v(t - 1010) + \frac{s_f}{2}(t - 1010)^2$ és $a < 0$, ezért $s \sim -t^2$.



1.43. A metrószerelvény induláskor 200 m-es úton 20 s alatt gyorsít fel a menetsebességre. A megállóhoz való érkezés előtt 20 s-mal kezdi meg a lassítást és 200 m-es úton áll meg. A közbülső szakaszt egyenletes mozgással 40 s alatt teszi meg.

a) Mekkora távolságra van egymástól ez a két állomás?
b) Mekkora a metró átlagsebessége a két megálló között?
c) Ábrázoljuk a mozgás sebesség–idő, gyorsulás–idő és út–idő grafikonját!

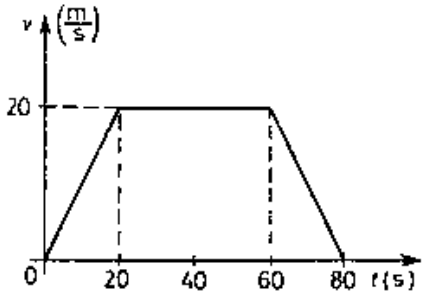
Megoldás:

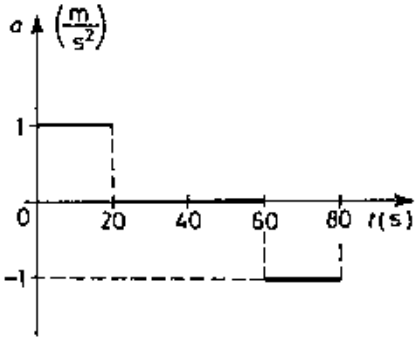
1.43. $v_0 = 0$; $s = 200$ m; $t_{gy} = 20$ s; $t_1 = 20$ s; $t_1 = 20$ s; $s_1 = 200$ m; $t_e = 40$ s; $v_t = 0$.
Lásd az 1.21. feladat megoldását!

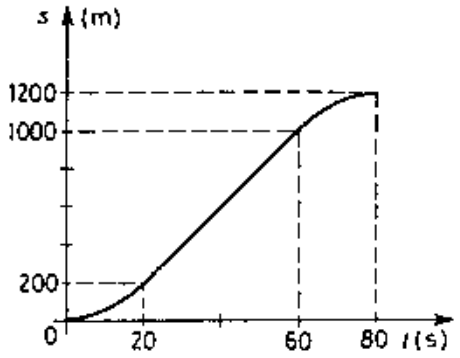
a) Az elért sebesség $s_{gy} = \frac{v_0 + v_t}{2} \cdot t_{gy}$ alapján: $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
A két állomás távolsága $s = s_{gy} + s_e + s_1 = \underline{\underline{1200 \text{ m}}}$.

b) $\overline{\overline{v}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underline{\underline{15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ az átlagsebesség a két megálló között.

c) $0 \le t < 20$ s; $s = \frac{a_1}{2} t^2$ és $a_1 > 0$, ezért $s \sim t^2$.
$20 \text{ s} \le t < 60$ s; $s = 200 + v(t - 20)$, ezért $s \sim t$.
$60 \text{ s} \le t < 80$ s; $s = 1000 + v(t - 60) + \frac{a_3}{2}(t - 60)^2$ és $a_3 < 0$, ezért $s \sim -t^2$.




a
$\left(\frac{m}{s^2}\right)$
1
0
20
40
60
80
t(s)
-1


s
(m)
1200
1000
200
0
20
60
80
t(s)

1.44. Egy toronyból leejtünk egy követ. Egy másodperc múlva $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányított sebességgel utána dobunk egy másik követ. (A közegellenállástól tekintsünk el!)

a) Milyen mozgásállapotúnak látszik esés közben az első kő a másodikról nézve?

b) Milyen mozgásállapotúnak látszik ugyanakkor a második kő az elsőről nézve?

Megoldás:

1.44. $v_{01} = 0$; $\Delta t = 1$ s; $v_{02} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Az eső és a dobott kő gyorsulása is $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, tehát egyenes vonalú egyenletes mozgásúnak látszik esés közben az első kő a másodikról nézve. Az első kő egyenletes mozgással közeledik a másodikhoz és fordítva.

b) Lásd az *a)* pontot!

1.45. Az $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ állandó sebességgel függőlegesen emelkedő helikopterből, a helikopterhez viszonyítva $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lefelé irányuló kezdősebességgel lehajítunk egy testet.

a) Mekkora a helikopter és a test távolsága a ledobás után 5 s-mal?

b) Mekkora a ledobás után 5 s-mal a test sebessége a Földhöz képest?

c) Mekkora a ledobás után 5 s-mal a test sebessége a helikopterhez képest?

Megoldás:

1.45. $v_h = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{t,h} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5$ s; legyen az irány lefelé pozitív.

a) A helikopter a Földhöz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást véges. A test mozgását a helikopteréhez viszonyítva:

$\underline{\underline{s}} = v_{t,h} \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 = \underline{\underline{150\text{ m}}}$ a test és a helikopter távolsága.

b) $\underline{\underline{v}} = v_h + v_{t,h} + g \cdot t = \underline{\underline{50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a test sebessége a Földhöz képest.

c) $\underline{\underline{v}} = v_{t,h} + g \cdot t = \underline{\underline{55\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a test sebessége a helikopterhez képest.

1.46. A $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel függőlegesen emelkedő léghajóból a léghajóhoz viszonyított $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel függőlegesen ledobunk egy zsákot.

a) Mekkora a léghajó és a zsák távolsága a ledobás után 5 s-mal?

b) Mekkora a test sebessége a ledobás után 5 s-mal a Földhöz és a léghajóhoz viszonyítva?

c) Ábrázoljuk a zsák és a léghajó Földhöz viszonyított sebességét az idő függvényében a ledobástól mért első 5 s-ban!

Megoldás:

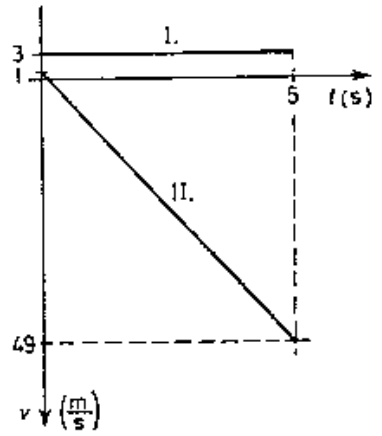
1.46. $v_l = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{t,l} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5$ s; legyen az irány lefelé pozitív.

a) Lásd az 1.45. feladat megoldását!

$\underline{s} = v_{t,l} \cdot t + \frac{g}{2} t^2 = \underline{\underline{135\ \text{m}}}$ a zsák és a léghajó távolsága.

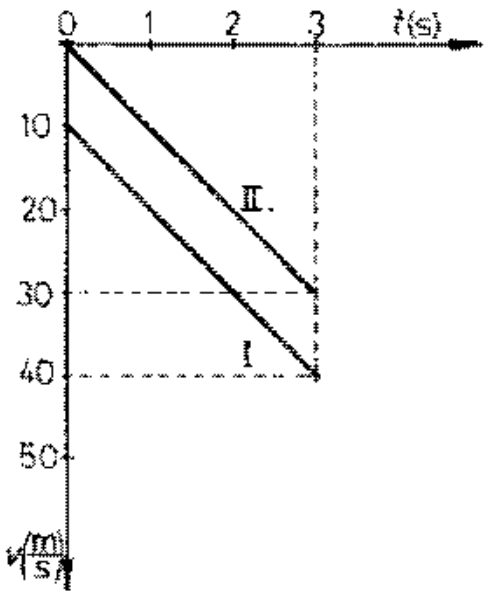
b) $v_{t,F} = v_l + v_{t,l} + g \cdot t = \underline{\underline{49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a zsák sebessége a Földhöz képest.

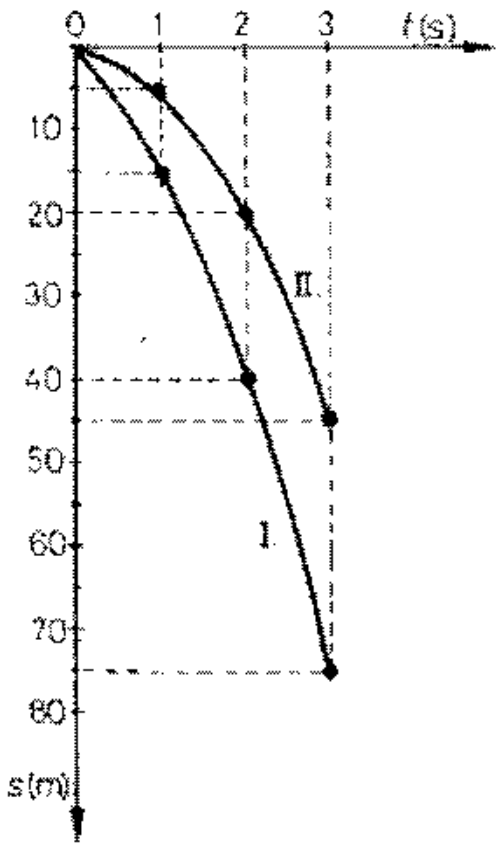
$\underline{\underline{v_{t,l}}} = v_{t,h} + g \cdot t = \underline{\underline{52\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a zsák sebessége a léghajóhoz képest.



c) I. A léghajónak a Földhöz viszonyított sebesség–idő függvénye.
II. A zsáknak a Földhöz viszonyított sebesség–idő függvénye.
$v_{0t,F} = v_l + v_{t,l} = -1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a kezdősebesség.

1.47. Két test sebességét és helyét ábrázoltuk az idő függvényében.





Milyen a két test mozgása és a két test helyzetének egymáshoz való viszonya?

Megoldás:

1.47. Mindkét test egyenletesen változó mozgást végez. A kezdősebesség II-nél: $0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, I-nél $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Az $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ vagy az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ alapján $a = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ mindkettőnél, tehát egymáshoz viszonyítottan egyenletes mozgást végeznek. Lehet például ugyanarról a helyről indított szabadesés a II. és függőleges lefelé hajítás az I.

Az $s_{\text{I}} - s_{\text{II}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ alapján a két test közötti távolság az idővel egyenesen arányos.

1.48. Kútba ejtett kavics csobbanását az ejtés pillanatától számítva 2,06 s múlva halljuk.
Milyen mélyen van a vízfelszín, ha a hang terjedési sebessége 330 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Megoldás:

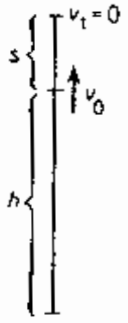
1.48. $t_e + t_h = 2{,}06$ s; $c = 300\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
A kavics szabadeséssel esik a víz felszínéig, és onnan visszafelé a hang egyenletes mozgással teszi meg ugyanazt az utat.
$h = \frac{g}{2} t_e^2 = c \cdot t_h$.
A másodfokú egyenletből: $t_e = 2$ s és $\underline{\underline{h = 20\ \text{m}}}$ a kút mélysége.

1.49. Egy 11 emeletes ház legfelső emeletén, 32 m magasan lévő ablakból $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőlegesen feldobunk egy követ.

a) Mennyi idő múlva érkezik vissza az ablakhoz?
b) Mekkora a sebessége a földetérés pillanatában?
c) Ábrázoljuk a test helyzeti energiáját a magasság függvényében, ha a tömege 1 kg!

Megoldás:

1.49. $g = 32$ m; $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

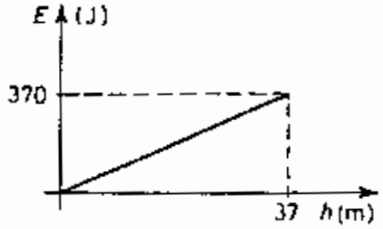


a) A kő sebessége a pálya legmagasabb pontján $v_t = 0$, $0 = v_0 - g \cdot t$, amiből az emelkedés ideje: $t = 1$ s, a közben megtett út:

$s = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = 5$ m, majd 5 m-t esik $t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = 1$ s alatt, tehát $\underline{\underline{2 \text{ s}}}$ múlva érkezik vissza az ablakhoz.

b) $h + s$ magasságból szabadon esik $v_0 = 0$ kezdősebességgel: $h + s = \frac{g}{2} t^2$, abból $t = 2{,}72$ s, $\underline{\underline{v_t = v_0 + g \cdot t = 27{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a sebesség a földetéréskor.

c) $m = 1$ kg, $E_h = m \cdot g \cdot h$. A helyzeti energia a magassággal egyenesen arányos. Legyen 0 szint a föld felszíne.



1.50. Az 1300 m magasan egy helyben álló helikopterből kiugrik egy ejtőernyős. 10 s-ig szabadon esik, ekkor kinyitja az ejtőernyőjét. 300 m-es úton egyenletesen változó mozgással $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra fékeződik a sebessége, majd ezzel a sebességgel egyenletesen süllyed tovább.

a) A kiugrástól számítva mennyi idő múlva érkezik le a földre?

b) Ábrázoljuk az ejtőernyős sebességét, a gyorsulását és a megtett útját az idő függvényében!

Megoldás:

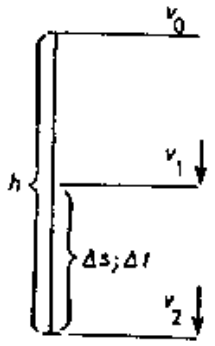
1.50. $v_0 = 0$; $h = 1300$ m; $t_1 = 10$ s; $h_2 = 300$ m; $v_2 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

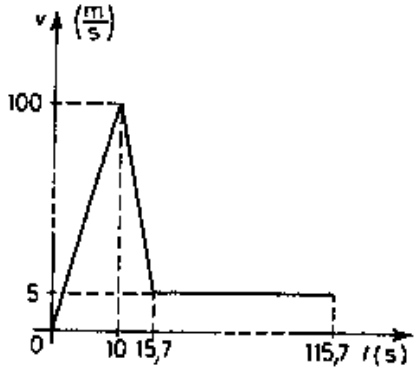
a) $h_1 = \frac{g}{2} t_1^2 = 500$ m; $v_1 = g \cdot t_1 = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$h_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t_2$-ből $t_2 = 5{,}71$ s; $h_3 = h - h_1 - h_2 = 500$ m.

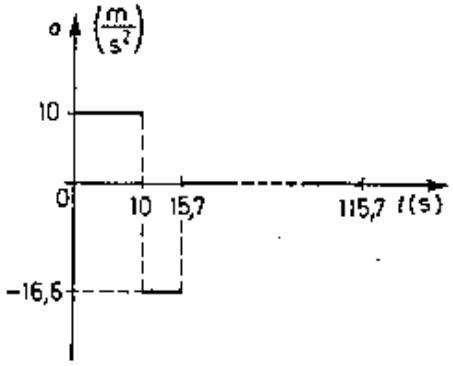
$h_3 = v_2 \cdot t_3$-ból $t_3 = 100$ s.

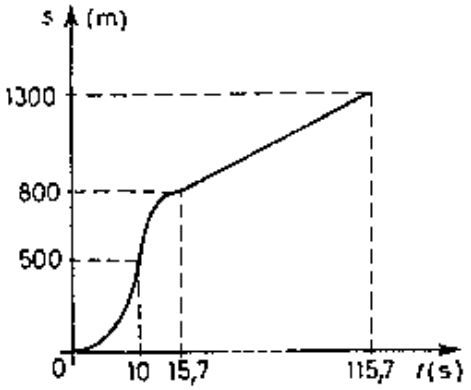
A földre $t = t_1 + t_2 + t_3 = \underline{\underline{115{,}71\ \text{s}}}$ alatt érkezik le az ejtőernyős.





b) $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$; $a_1 = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_2 = -16{,}6\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_3 = 0$.

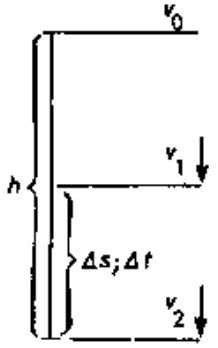




1.51. Mekkora magasságból ejtettük le azt a kis méretű testet, amely esésének utolsó másodpercében 10 m utat tett meg? Mekkora sebességgel csapódik a test a földbe?

Megoldás:

1.51. $\Delta t = 1$ s; $\Delta s = 10$ m.



$\Delta s = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t$ és $v_2 = v_1 + g \cdot \Delta t$, amelyekből $v_1 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v_1 = g \cdot t_1$-ből $t_1 = 0{,}5$ s; $\underline{h} = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)^2 = \underline{11{,}25\ \text{m}}$.

A test h magasságból esett le, és v_2 sebességgel csapódott a földbe.

1.52. A 20 m magasból leejtett kő pillanatnyi sebessége mekkora magasságban lesz fele a földre érkezés sebességének? Ábrázoljuk a kő sebességét és helyét az idő függvényében!

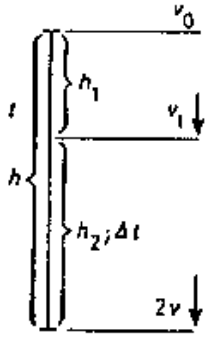
Megoldás:

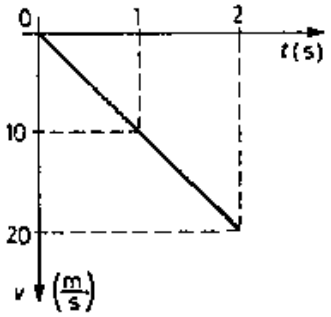
1.52. $h = 20$ m; $v_0 = 0$; $h = \frac{g}{2}t^2$-ből $t = 2$ s.

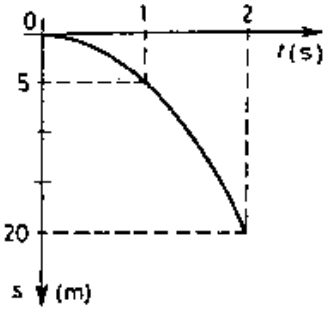
$2v = g \cdot t$-ből $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $g = \frac{2v - v}{\Delta t}$-ből $\Delta t = 1$ s.

$h_2 = \frac{v + 2v}{2}\Delta t = \underline{\underline{15 \text{ m}}}$.

A sebesség 15 m magasságban lesz fele a földre érkezés sebességének.







1.53. Egy kis méretű testet ejtünk 15 m magasságból. Az elengedés pillanatában társunk egy másik testet indít $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé a föld felszínéről.

a) Mekkora magasságban találkoznak a testek és mennyi ekkor a sebességük?

b) Ábrázoljuk a testek sebességét az idő függvényében!

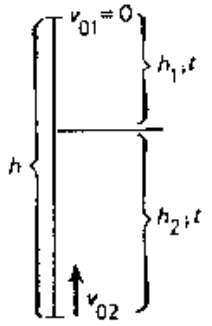
Megoldás:

1.53. $h = 15$ m; $v_{01} = 0$; $v_{02} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A találkozásig eltelt idő mindkét esetben ugyanannyi.

$h_1 = \frac{g}{2} \cdot t^2$; $h_2 = v_{02}t - \frac{g}{2} \cdot t^2$; $h_1 + h_2 = h$; $t = 0{,}75$ s.

$\underline{\underline{h_2 = 12{,}2\ \text{m}}}$ magasságban találkoznak, és itt a sebességek:

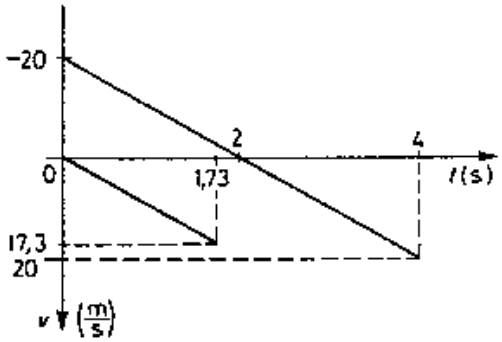


$\underline{\underline{v_1}} = g \cdot t = \underline{\underline{7{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ lefelé,

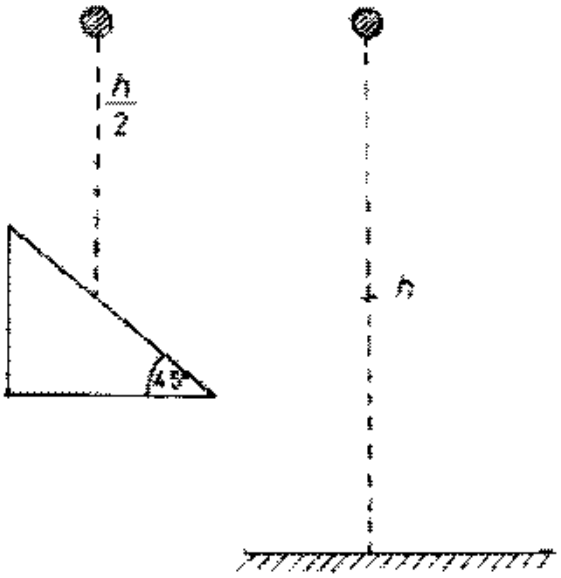
$\underline{\underline{v_2}} = v_0 - g \cdot t = \underline{\underline{12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ felfelé.

b) $h = \frac{g}{2}t_1^2$-ből $t_1 = 1{,}73$ s alatt esik le az 1. test, és lent $\underline{\underline{v = g \cdot t_1 = 17{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a sebessége.

$0 = v_{02} - g \cdot t_2$-ből a 2. test emelkedésének ideje $t_2 = 2$ s; $h = v_{02} \cdot t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = 20$ m az emelkedés magassága, majd onnan az esés ideje $t_3 = 2$ s és $\underline{\underline{v_3}} = g \cdot t_3 = \underline{\underline{20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.



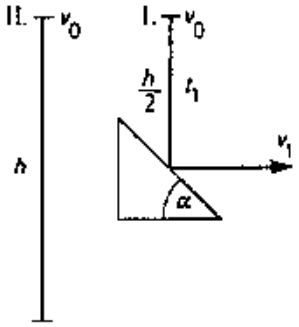
1.54. Két kis méretű labdát egyszerre ejtünk le 30 m magasságból. Az egyik labda félúton a vízszintessel 45°-os szöget bezáró lejtőbe tökéletesen rugalmasan ütközve folytatja útját. Határozzuk meg a két test esésének idejét!



Megoldás:

1.54. $h = 30$ m; $\alpha = 45°$; $v_0 = 0$.

I. $\frac{h}{2} = \frac{g}{2}t_1^2$ utat esik, amiből $t_1 = 1{,}732$ s. Ez alatt az idő alatt $v_1 = g \cdot t_1$ függőlegesen lefelé irányuló sebességet ér el. A tökéletesen rugalmas ütközés miatt 15 m magasságból v_1 vízszintes irányú hajítással halad tovább, amely sebességének függőleges irányú komponense 0, tehát $\frac{h}{2} = \frac{g}{2}t_2^2$ utat esik, amiből $t_2 = 1{,}732$ s.



Az esés ideje: $\underline{\underline{t_1 + t_2 = 3{,}46 \text{ s}}}$.

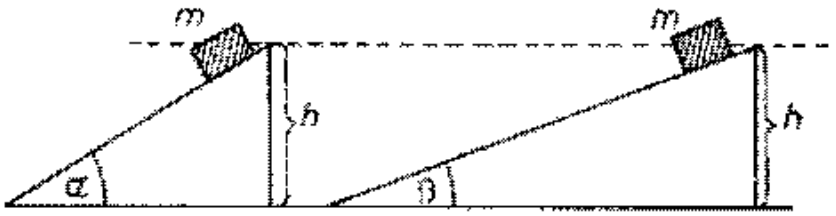
II. $h = \frac{g}{2}t^2$; az esés ideje: $\underline{\underline{t = 2{,}45 \text{ s}}}$.

1.55. Egy tízemeletes ház tetejéről leejtünk egy labdát. Az ejtés pillanatában vízszintes irányú $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel elhajítunk egy másik labdát is.
Mennyi az esési idejük és hol érnek földet, ha egy emelet magassága 2,8 m?
(A légellenállástól tekintsünk el!)

Megoldás:

1.55. $v_0 = 0$; $v_v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = 11 \cdot 2{,}8\ \text{m} = 30{,}8\ \text{m}$.
Mindkét test kezdősebességének függőleges irányú komponense 0, tehát $h = \frac{g}{2}t^2$-ből $\underline{t = 2{,}48\ \text{s}}$ az esési idejük.
Az elejtett labda függőlegesen esik.
A v_v sebességgel elhajított t ideig vízszintes irányban egyenletes mozgást végezve $\underline{s_x} = v_v \cdot t = \underline{4{,}96\ \text{m-rel távolabb}}$ ér földet a függőlegesen esőtől.

1.56. Azonos magasságú, de különböző meredekségű lejtőn csúszik le zérus kezdősebességgel egy-egy azonos tömegű és méretű test. A lejtők és a testek közötti súrlódás, valamint a légellenállás elhanyagolható.



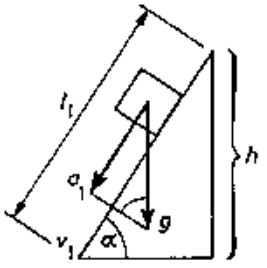
a) Mekkora a testek sebessége a lejtő alján, ha:

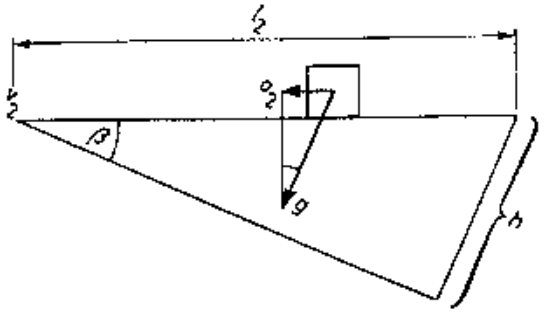
$$h = 4 \text{ m}, \alpha = 60°, \beta = 20°?$$

b) Mekkora a lejtő alján a testek sebessége abban az esetben, ha $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú, a lejtővel párhuzamos irányú kezdősebességgel indítottuk azokat a lejtő tetejéről?

Megoldás:

1.56. a) $h = 4$ m; $v_0 = 0$; $\alpha = 60°$; $\beta = 20°$; $\mu = 0$.





Az ábra alapján a gyorsulás lejtő irányú komponense $a_1 = g \cdot \sin\alpha$ és $a_2 = g \cdot \sin\beta$; $l_1 = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ és $l_2 = \dfrac{h}{\sin\beta}$.

Mivel egyenletesen változó mozgást végeznek:

$l_1 = \dfrac{a_1}{2}t_1^2$ és $l_2 = \dfrac{a_2}{2}t_2^2$-ből az idők kifejezésével a lejtő alján

$$\underline{\underline{v_1}} = a_1 t_1 = g \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2l_1}{a_1}} = g \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha \cdot g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{2g \cdot h} = \underline{\underline{8{,}94 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

és $\underline{\underline{v_2}} = a_2 \cdot t = \sqrt{2g \cdot h} = \underline{\underline{8{,}94 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $v_0 = 3 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ esetén $l_1 = v_0 \cdot t_1 + \dfrac{a_1}{2}t_1^2$ és $l_2 = v_0 \cdot t_2 + \dfrac{a_2}{2}t_2^2$-ből

$t_1 = 0{,}74$ s és $t_2 = 1{,}88$ s.

A sebességek a lejtő alján: $\underline{\underline{v_1}} = v_0 + a_1 \cdot t_1 = \underline{\underline{9{,}4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$;

$\underline{\underline{v_2}} = v_0 + a_2 \cdot t_2 = \underline{\underline{9{,}4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

1.57. Egy gépkocsi állandó sebességgel halad egy magas fal felé, rá merőleges irányban. Amikor s távolságra van a faltól, rövid hangjelet ad le, amelynek visszhangját a vezető t idő múlva hallja.

a) Hol van ekkor a gépkocsi?

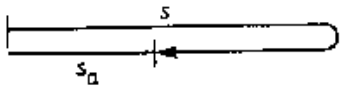
b) Mekkora a sebessége?

(A hang terjedési sebessége $340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = 200$ m, $t = 1{,}1$ s.)

Megoldás:

1.57. v; $x = 200$ m; $t = 1{,}1$ s; $c = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A hang útja: $s_\text{h} = c \cdot t = 374$ m, illetve $s_\text{h} = 2 \cdot s - s_\text{a}$, ebből az autó útja: $\underline{\underline{s_\text{a} = v \cdot t = 26\ \text{m}}}$.



b) Az autó sebessége: $\underline{\underline{v = \frac{s_a}{t} = 23{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

2.1. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Aki síkos talajon állva súlyos golyót lök el, maga is mozgásba jön. Mechanikai szempontból melyik test okozza sebességének változását?

b) Egy test tömege 6 kg, egy másik testé 2 kg. Egymással rugalmasan ütköznek. Melyik testnek lesz nagyobb a sebességváltozása? Hányszorosa ez a másik test sebességváltozásának?

c) A tóparthoz közel lévő kis tömegű kajakból ki akarnak ugrani a partra. Mi történhet?

d) Merre mutat egy feldobott kő lendületvektora a kő felfelé, illetve lefelé haladásakor?

e) Merre mutat egy feldobott kő lendületváltozásának vektora a kő felfelé, illetve lefelé haladásakor?

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

2.1. a) Egy test sebességváltozását az a test okozza, amellyel kölcsönhatásban áll. A kérdésben az ember – mechanikai szempontból – a talajjal és a súlyos golyóval van kapcsolatban. A talaj síkossága miatt ható súrlódási erő elhanyagolható, tehát csak *a golyó okozhatja az ember* sebességének változását.

b) $m_1 = 6$ kg; $m_2 = 2$ kg.

Alkalmazva a lendületmegmaradás törvényét:

$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$, és rendezve a sebességváltozásokra:
$m_1 \cdot v_1' - m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_2'$
$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2') = -m_2(v_2' - v_2)$
$6 \cdot \Delta v_1 = -2 \cdot \Delta v_2$
$3 \cdot \Delta v_1 = -\Delta v_2$.

A 2 kg tömegű test sebességváltozásának nagysága háromszorosa a 6 kg-os testének és iránya azzal ellentétes.

c) A *b)* szerint a kis tömegű kajaknak nagyobb lesz a sebességváltozása, mint az emberé, tehát ugrás közben az ember nem biztos, hogy eléri a partot.

d) A lendületvektor iránya megegyezik a sebességvektor irányával, tehát a kő felfelé haladásakor felfelé, lefelé haladásakor pedig lefelé mutat.

e) A lendületváltozás vektorának iránya a sebességváltozás irányával egyezik meg, tehát a kő felfelé, illetve lefelé haladásakor is lefelé mutat.

2.2. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre! Indokoljuk állításunkat!*

a) Mi okozza az eldobott kavics elindulását, pályájának görbülését és végül megállását?

b) Változik-e a lemezjátszó egyenletesen forgó korongjának szélére tapasztott gumidarab sebessége? És lendülete? Ha igen, mi okozza a változást?

c) A hatás és ellenhatás törvényében szereplő két erő hathat-e valamikor ugyanarra a testre?

d) Képzeljük el, hogy tökéletesen súrlódásmentes, vízszintes padlón állunk egy üres szoba közepén! Hogyan tudnánk távozni a szobából?

e) Egy m tömegű testre F erő Δt ideig hat. Mekkora a test impulzusának megváltozása?

Megoldás:

2.2 a) A kavics a hajítás megkezdése előtt nyugalomban volt, ekkor a rá ható erők eredője 0. A hajítás folyamata alatt a hajító test (pl. az emberi kéz) által gyakorolt erőnek és a nehézségi erőnek az eredője gyorsította a kavicsot, és ennek következtében valamilyen nagyságú és irányú sebességre gyorsult fel. Miután a hajítást végző test és a kavics kölcsönhatása megszűnik (a kavics elhagyta a kezet) a kavics további mozgáspályáját a megszerzett kezdősebesség és a nehézségi erő szabja meg. Ha a kezdősebesség iránya nem függőleges, akkor a függőleges irányú nehézségi erő által okozott függőleges gyorsulás a sebesség irányát is változtatja, így a pálya görbe vonal lesz. A kavics megállását az okozza, hogy előbb-utóbb nekiütközik egy másik testnek, pl. a talajnak. A talaj erejének és a nehézségi erőnek az eredője okozza a kavics lassulását, majd megállását.

b) A gumidarab sebességének iránya változik, mert körmozgást végez, és a pillanatnyi sebesség érintő irányú. Ennek megfelelően vál-

zik a gumidarab lendületének iránya is. A sebesség és a lendület nagysága nem változik, mert a körmozgás egyenletes. A lendületváltozást a gumidarab és a korong között fellép tapadási erő okozza.

c) A hatás–ellenhatás törvénye szerint, ha az A test erőhatást gyakorol a B testre, akkor a B ugyanakkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki A-ra, tehát két különböző testre ható erőről szól a törvény.

d) A lendületmegmaradás vagy Newton III. törvényét alkalmazva: egy kezünkben lévő testet a kijárattal ellenkező irányba elhajítva, a testtel egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú lendületet nyerünk, illetve az eldobott testre általunk gyakorolt erővel ellentétes irányú erő hat ránk, s mivel tökéletesen súrlódásmentes, vízszintes a talaj – eljuthatnánk a kijáratig.

e) Newton II. törvénye: $F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$, $\Delta I = F \cdot \Delta t$, és ΔI iránya megegyezik F irányával.

2.3. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Fogalmazzuk meg a hatás és ellenhatás törvényét!
b) Mikor van egy test a súlytalanság állapotában?
c) Mit nevezünk a mindennapi életben súlynak vagy súlyerőnek?
d) Mitől függ a csúszó súrlódási erő?

Megoldás:

2.3. a) Ha az A test erőhatást gyakorol a B testre, akkor a B ugyanakkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki A-ra. $F_{AB} = -F_{BA}$.

b) A súlytalanság állapotában csak gravitációs erő hat a testre. Például kikapcsolt hajtóművű űrhajó és a benne levő testek: szabadon eső testek.

c) A Föld környezetében minden testre érvényesül a nehézségi erő. Ha csak ez a hatás érvényesül, akkor a test gyorsulása függőlegesen lefelé irányul, és nagysága g. A test súlya az a függőleges erőhatás, amelyet a test gyakorol a szabadesését megakadályozó alátámasztásra vagy felfüggesztésre.

d) $F_s = \mu \cdot F_{ny}$; F_s függ az egymáson elcsúszó felületektől (μ) és a felületeket összenyomó erőtől (F_{ny}).

2.4. *Válaszoljunk a következő kérdésekre!*

a) Két teljesen egyforma csónak van a vízen, a parttól 50 m-re. Mindkét csónakban egy-egy ember áll, kötéllel a kezében. Az egyik ember kezében levő kötél másik vége a parton álló fához van kötve; a másik ember kezében levő kötél túlsó végét egy parton álló harmadik ember fogja. A három ember azonos nagyságú erővel húzza a kötelet. Melyik csónak ér előbb partot? Miért?

b) El lehet-e indítani a vitorláscsónakot a vitorlára merőlegesen fújtatott levegőárammal, ha a fújtató a csónakban van?

c) Egy rögzített akasztóra dinamométert függesztünk, arra egy másik dinamométert, majd a második erőmérőre egy 0,5 kg tömegű vasdarabot. Mekkora erőt jeleznek a dinamométerek?

Megoldás:

2.4. a) Az emberek azonos nagyságú erővel húzzák a kötelet, tehát mindkét csónakra azonos nagyságú erő hat. A feltétel szerint a csónakok tömege is egyenlő és egyforma távol vannak a parttól, tehát egyszerre érik el azt.

b) A fellépő erőhatások: a fújtató, illetve az általa felgyorsított levegő között és a vitorlára fújt levegő és a vitorla között. A csónak nem indul el, mert a két erőhatás egyező nagyságú, de ellentéte irányú.

c) Az alsó dinamométer egyensúlyban tartja a rajta függő testet, tehát 5 N erőt jelez, ugyanis a dinamométer által kifejtett erő egyenlő kell, hogy legyen a függő testre érvényesülő nehézségi erővel. Az alsó dinamométerre két, függőlegesen lefelé mutató erő hat: a függő test súlya és a dinamométerre magára érvényesülő nehézségi erő G_{dim} felfelé pedig a felső dinamométer tartóereje. Az egyensúly miatt tehát a felső dinamométer által az alsóra kifejtett erő az alsó dinamométer súlyának és a függő test súlyának az összege: $5\ \text{N} + G_{\text{dim}}$. Ezt az erőt mutatja a felső dinamométer.

2.5. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

A) A szabadon eső test gyorsulása a tömegétől függ.

B) A testek állandó mozgásállapotának a fenntartásához semmilyen külső vagy belső erőre nincs szükség.

C) A testek közötti kölcsönhatást az impulzusváltozás sebességével egyenlő erővel jellemezhetjük.

D) A testek mozgásállapotának a megváltozásához semmilyen külső hatásra nincs szükség.

E) Egy adott test impulzusa (lendülete) egyenesen arányos a test pillanatnyi sebességével.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

2.5. $\underline{\underline{A}}$ – hibás, mert a szabadon eső test gyorsulása a tömegétől független: $a = g$.

$\underline{\underline{B}}$ – helyes (Newton I. törvénye).

C – helyes, mert $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ a lendületváltozási sebesség egyenlő az adott időpillanatban a testre ható erővel.

$\underline{\underline{D}}$ – hibás, mert a mozgásállapot csak kölcsönhatás következtében változik meg.

E – helyes, mert $I = m \cdot v$.

2.6. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Egy gyerek kiskocsit húz egyenletes mozgással vízszintes úton.

A) Az útburkolat és a kiskocsi közötti súrlódási erő biztosan sokkal kisebb, mint a gyerek által a kiskocsira kifejtett erő.

B) A gyerek húzza a kiskocsit, a kiskocsi a gyereket. Ez a két erő egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú. A két erő eredője zérus, ezért egyenletes a mozgás.

C) A gyerek és a kiskocsi együttes mozgását az útburkolat által a gyerekre ható erő eredményezi.

D) A gyerek nagyobb erőt fejt ki a kiskocsira, mint a kiskocsi a gyerekre, hiszen ha fordítva lenne, akkor a kiskocsi hátrafelé mozogna.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

2.6. $\underline{\underline{A}}$ – hibás, mert egyenletes mozgás esetén a testre ható erők eredője 0, tehát a gyerek által a kocsira kifejtett erő ugyanakkora nagyságú, mint az útburkolat és a kocsi között fellépő súrlódási erő, csak azzal ellentétes irányú.

$\underline{\underline{B}}$ – az első két egyszerű állítás igaz. A harmadik mondat összetett állítás hamis, mert a kölcsönhatásban szereplő két erő nem ugyanarra a testre hat (gyerek a kocsira, kocsi a gyerekre), tehát nem lehet eredőjük 0.

$\underline{\underline{C}}$ – az állítás hamis, mert az erő nem „eredményezi" a mozgást, illetve mert a rendszer mozgását a rendszer tagjaira ható összes erő szabja meg.

$\underline{\underline{D}}$ – hibás, mert Newton III. törvénye szerint a ható és kölcsönható erő egyenlő nagyságú.

2.7. *Válasszuk ki a* HELYES *kijelentéseket!*

A következő kijelentések egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásra vonatkoznak. Feltételezésünk szerint a súrlódás elhanyagolhatóan kicsi, és mindegyik esetben zérus kezdősebességű a mozgás.

A) Egy testet a kétszer akkora erő ugyanannyi idő alatt kétszer akkora sebességre gyorsítja.

B) Kétszer nagyobb tömegű test ugyanannyi idő alatt ugyanakkora erő hatására feleakkora utat tesz meg.

C) Kétszer nagyobb tömegű test ugyanannyi idő alatt kétszer nagyobb erő hatására kétszer nagyobb utat tesz meg.

D) Ha egy erő hatására egy test sebességváltozása Δt idő alatt Δv, akkor Δt idő alatt a kétszer nagyobb erő hatására létrejövő sebességváltozás is kétszer nagyobb lesz.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

2.7. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás: $v_0 = 0$ és $\mu = 0$ esetén:

$\underline{\underline{A}}$ – helyes, mert $F = \dfrac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}$ miatt, ha m és Δt állandó, akkor $2F$ esetén Δv is kétszeres.

$\underline{\underline{B}}$ – helyes, mert a kétszeres tömeg esetén ugyanakkora erő fele akkora gyorsulást eredményez az $F = m \cdot a$ miatt (Newton II. törvénye), tehát az $s = \dfrac{a}{2}t^2$ út is fele akkora lesz, ha az idő ugyanolyan nagy.

C – hibás; ha a tömeg és az erő egyaránt kétszeresére növekszik, akkor a gyorsulás változatlan, így ugyanannyi idő alatt ugyanakkora lesz az út.

$\underline{\underline{D}}$ – helyes, lásd A.

2.8. *Az alábbi megállapítások közül válasszuk ki a* HIBÁSAKAT! *Indokoljuk választásunkat!*

Az $m_1 = m$ és az $m_2 = 1{,}2 \cdot m$ tömegű golyók centrálisan, tökéletesen rugalmasan ütköznek.

A) A kölcsönhatás az m_1 tömegű test lendületét változtatta nagyobb mértékben.

B) A kölcsönhatás az m_1 tömegű test sebességét változtatta nagyobb mértékben.

C) A kölcsönhatás előtt a két golyó lendületének összege nagyobb volt, mint kölcsönhatás után.

D) A kölcsönhatás a két golyó együttes mozgási energiáját nem változtatta meg.

Megoldás:

2.8. $m_1 = m$; $m_2 = 1{,}2 \cdot m$; centrális és tökéletesen rugalmas ütközés esetén érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$m \cdot v_1 + 1{,}2 \cdot m \cdot v_2 = m \cdot v_1' + 1{,}2 \cdot m \cdot v_2'$ (C);

$m \cdot \Delta v_1 = -1{,}2 \cdot m \cdot \Delta v_2$ (B);

$\Delta I_1 = -\Delta I_2$ (A);

$\Delta v_1 = -1{,}2 \cdot \Delta v_2$ (B);

$\underline{\underline{A}}$ – hibás, mert a két test lendületváltozásának nagysága egyenlő és iránya ellentétes.

B – helyes, mert a kisebb tömegű test sebességének változása 1,2-szerese a nagyobbénak, csak azzal ellentétes irányú.

$\underline{\underline{C}}$ – hibás, mert itt érvényes a lendületmegmaradás törvénye.

$\underline{\underline{D}}$ – helyes, mert a feltételek esetén érvényes az energiamegmaradás törvénye.

2.9. *Két-két állítást fogalmaztunk meg az alábbiakban. Döntsük el, hogy az állítások azonosak-e!*

a) A testek sebességének változását mindig más testek hatása okozza. Magára hagyott – más testek hatásától mentes – test sebessége állandó.

b) Síkos, vízszintes asztallapon egy tömör, kiterjedt test forogva halad. Van egy kitüntetett pontja a testnek, amely egyenes pályán, egyenletesen mozog. – Magára hagyott, tömör kiterjedt test tömegközéppontjának sebessége állandó.

c) Két részből álló test tömegközéppontja a részek tömegközéppontjait összekötő szakaszt a tömegek arányában osztja, a nagyobb tömegű részhez közelebb helyezkedve el. – Két részből álló test tömegközéppontja az a pont, melyre vonatkoztatott, a két rész súlyából származó forgatónyomatékok azonos nagyságúak, de ellenkező irányúak.

Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

2.9. a) A két állítás egyenértékű.

b) A két állítás azonos, az első állításban a kitüntetett pont a tömegközéppont.

c) Két definíció szerepel, mindegyik a középpont meghatározásának egy-egy lehetősége.

2.10. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Egy test egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez, ha:

A) a gyorsulása állandó irányú és nagyságú,

B) állandó irányú és nagyságú erő hat rá,

C) a gyorsulás nagysága állandó és iránya azonos a sebesség irányával,

D) a ráható erők eredőjének nagysága állandó és iránya azonos a sebesség irányával,

E) a ráható erők eredőjének nagysága állandó és iránya megegyezik a gyorsulás irányával.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

2.10. *A* – hibás, mert például a ferde hajítás görbe vonalú mozgás, de gyorsulása – légüres térben – állandó: g.

B – hibás, lásd *A*.

$\underline{\underline{C}}$ – helyes, mert ha a gyorsulás iránya azonos a pillanatnyi sebesség irányával, akkor a sebességváltozás iránya is megegyezik a sebesség irányával, így a sebesség iránya nem változik, a mozgás egyenes vonalú.

$\underline{\underline{D}}$ – helyes, lásd *C*.

$\underline{\underline{E}}$ – hibás, mert ferde hajítással a feltétel teljesül, A feltétel Newton II. törvénye értelmében mindig teljesül.

2.11. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Fahasáb és jég között a súrlódási együttható μ_j, fahasáb és fémlemez között pedig μ_f. Ugyanolyan nagyságú vízszintes kezdősebességgel ellökjük a fahasábot jégen, majd fémlemezen. A jégen s_j, a fémen pedig s_f út megtétele után áll meg a hasáb.

A) $s_j : s_f = \mu_j : \mu_f$,

B) $s_j : s_f = \mu_f : \mu_j$,

C) $s_j : s_f$ független a súrlódási együtthatótól,

D) $s_j : s_f$ független a kezdősebességtől.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

2.11. μ_j, μ_f, v_0; s_j; s_f; vízszintes út; $v_t = 0$.

A v_0 kezdősebességgel ellökött test egyenletesen változó mozgással áll meg. A gyorsulása a sebességgel ellentétes irányú, a mozgásiránnyal ellentétes irányú erő a súrlódási erő:

$F_s = -\mu \cdot m \cdot g$; $F_s = m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = m\dfrac{-v}{\Delta t}$-ből $t = \dfrac{-m \cdot v_0}{F_s}$, illetve

$s = \dfrac{v_0 + v_t}{2}t = \dfrac{-m \cdot v_0^2}{2 \cdot F_s}$.

$\dfrac{s_j}{s_f} = \dfrac{\dfrac{-m \cdot v_0^2}{2F_{sj}}}{\dfrac{m \cdot v_0}{2F_{sj}}} = \dfrac{\mu_f}{\mu_j}$ $\underline{\underline{\dfrac{s_j}{s_j} = \dfrac{\mu_f}{\mu_j}}}$, tehát a helyes a B és D, hibás az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{C}}$.

2.12. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A) A proton és az elektron mind elektromos, mind gravitációs erővel hat egymásra.

B) Az elektron által a protonra ható elektromos erő sokkal kisebb, mint a proton által az elektronra ható erő.

C) A gravitációs erő a proton és az elektron között sokkal kisebb, mint az elektromos erő.

D) A proton és az elektron közötti kölcsönhatás eredményeképpen a proton gyorsulásának abszolút értéke sokkal kisebb, mint az elektroné.

E) A proton tömege sokkal nagyobb, mint az elektroné, de töltésük nagysága egyenlő.

Megoldás:

2.12. $\underline{\underline{A}}$ – helyes, mert töltésük miatt az elektromos erő, tömegük miatt pedig a gravitációs erő hat közöttük.

B – hibás Newton III. törvénye szerint.

$\underline{\underline{C}}$ – helyes: $F_g = \gamma \frac{m_e \cdot m_p}{r^2} < F_c = k \frac{Q_e \cdot Q_p}{r^2}$.

$\underline{\underline{D}}$ – helyes, mert a proton tömege sokszorosa az elektronénak, tehát kisebb a gyorsulásának nagysága.

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

$\underline{\underline{E}}$ – helyes, mert a töltés nagysága egyenlő, és az állításban csak a nagysága szerepel.

2.13. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

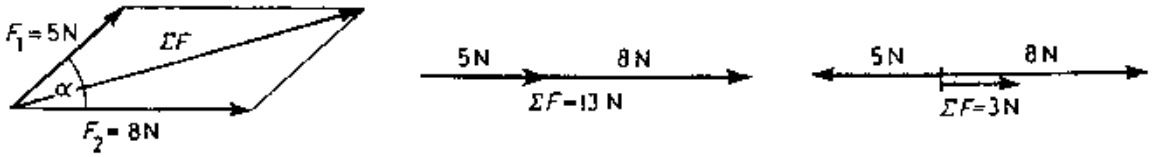
Egy pontszerű testre 5 N és 8 N nagyságú erő hat. Az erők hatásvonalai egy síkban vannak. A testre ható erők eredője:

A) 13 N,
B) legfeljebb 13 N,
C) legalább 13 N,
D) legfeljebb 3 N,
E) legalább 3 N,
F) 3 N és 13 N között bármekkora lehet attól függően, hogy a két erő hatásvonala mekkora nagyságú szöget zár be egymással.

Válaszunkat indokoljuk!

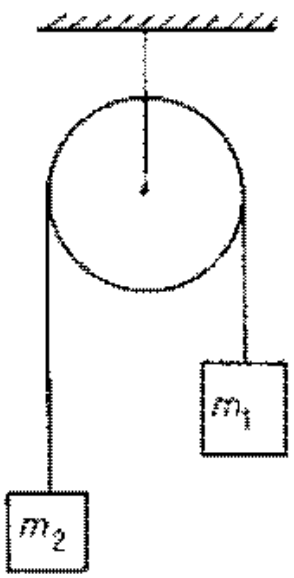
Megoldás:

2.13. A vektorábra szerint $\sum F$ legfeljebb 13 N és legalább 3 N.
Helyes: *B*, *E*, *F*.



2.14. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldást!*

Az $m_1 = m$ és az $m_2 = m$ tömegű hasábokat fonállal összekötjük az ábra szerinti elrendezésben.
Mekkora gyorsulással mozog az m_2 tömegű hasáb, ha a rendszert magára hagyjuk és a csiga, valamint a fonal tömegétől, továbbá a súrlódástól eltekintünk?



A) nulla,

B) $\sqrt{\frac{g}{2}}$,

C) $\frac{g}{2}$,

D) $g \cdot \sqrt{2}$,

E) $\sqrt{2} \cdot g$.

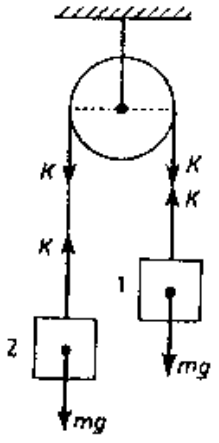
Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

2.14. $m_1 = m_2$. A hasábok egyensúlyban vannak:

$\sum F = 0$, $\sum M = 0$.

<u>Helyes: *A*.</u>



2.15. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

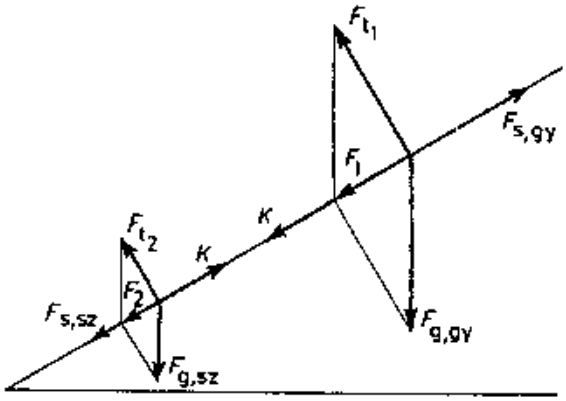
A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között ok-okozati összefüggés van.
B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában véve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.
C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.
D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.
E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

Egy gyerek szánkót húz egy lejtőn felfelé egyenletesen.

1. A gyerek nagyobb erőt fejt ki a szánkóra, mint a szánkó a gyerekre, mert a szánkó helyzeti energiája növekszik.
2. A gyerek ugyanakkora erőt fejt ki a szánkóra, mint a szánkó a gyerekre, mert a szánkó mozgási energiája nem változik.
3. A gyerek ugyanakkora erőt fejt ki a szánkóra, mint a szánkó a gyerekre, mert Newton III. törvénye szerint ilyen esetben a két erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú.
4. A gyerek ugyanakkora erőt fejt ki a szánkóra, mint a szánkó a gyerekre, mert a gyerek lendületváltozása a szánkóéval egyenlő nagyságú, de azzal ellentétes irányú.
5. A gyerek kisebb erőt fejt ki a szánkóra, mint a szánkó a gyerekre, mert a gyerek és a talaj közötti súrlódási erő kisebb, mint a szánkó és a talaj közötti súrlódási erő.

Megoldás:

5. E – Az állítás hamis (Newton III. törvénye), az indoklás hamis, mert $f_{s,gy} = F_1 + K$ az egyenletes mozgás miatt $K = F_2 + F_{s,sz}$, $F_{s,gy} > F_{s,sz}$.



2.16. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között van ok-okozati összefüggés.
B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában nézve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.
C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.
D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.
E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

1. Függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása állandó, mert egyetlen állandó nagyságú erő hat rá, a gravitációs erő.
2. A függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása emelkedés közben negatív, eséskor pedig pozitív, mert emelkedéskor a gyorsulás és a sebesség iránya ellentétes, eséskor pedig megegyező irányú.
3. A függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása emelkedés közben negatív, eséskor pedig pozitív, mert emelkedéskor a helyzeti energia változása negatív, eséskor pedig pozitív.
4. A függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása állandó, mert a mozgás közben a test lendülete nem változik.
5. A függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása állandó, mert a lendülete a mozgás folyamán állandóan változik.
6. A függőlegesen felfelé hajított test gyorsulása a pálya csúcspontján zérus, mert ekkor a test sebessége zérus.

Megoldás:

2.16. 1. *A* –
2. *D* – Az állítás hamis, mert a gyorsulás a mozgás során végig lefelé mutat. Az indoklás igaz.
3. *E* – Az állítás hamis (lásd 2.). Az indoklás hamis, mert a helyzeti energia a magassággal arányos, tehát emelkedéskor a változása pozitív, eséskor pedig negatív.
4. *C* – Az állítás igaz. Az indoklás hamis, mert a sebesség változik a mozgás során, tehát a lendület is változik.
5. *B* – Az állítás és az indoklás igaz, de nincs ok–okozati összefüggés közöttük.
6. *D* – Az állítás hamis (lásd 2.), az indoklás igaz.

2.17. Mennyivel nyúlik meg a $40\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú rugó a liftben, ha arra 400 g tömegű testet függesztünk, és a lift:

a) $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással indul lefelé,

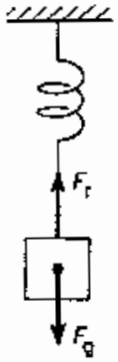
b) egyenletesen mozog lefelé,

c) $6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással mozog felfelé,

d) a lift szabadon esik?

Megoldás:

2.17. $D = 40\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 400\ \mathrm{g} = 0{,}4\ \mathrm{kg}$; legyen az irány lefelé pozitív.



A felfüggesztett testre ható erők eredője Newton II. törvénye értelmében

$\sum F = m \cdot a = F_g - F_r$; $F_r = F_g - m \cdot a = m \cdot g - m \cdot a$.

$\Delta l = \frac{F_r}{D}$.

a) $a = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $F_r = F_g - m \cdot a = 4\ \mathrm{N} - 2\ \mathrm{N} = 2\ \mathrm{N}$;

$\underline{\underline{\Delta l = 0{,}05\ \mathrm{m}}}$.

b) $v = \text{áll.}$; $a = 0$; $F_r = 4\ \mathrm{N} - 0 = 4\ \mathrm{N}$; $\underline{\underline{\Delta l = 0{,}1\ \mathrm{m}}}$.

c) $a = -6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $F_r = 4\ \mathrm{N} + 2{,}4\ \mathrm{N} = 6{,}4\ \mathrm{N}$; $\underline{\underline{\Delta l = 0{,}16\ \mathrm{m}}}$.

d) $a = g$; $F_r = 4\ \mathrm{N} - 4\ \mathrm{N} = 0$; $\underline{\Delta l = 0}$.

2.18. Egy mérleg serpenyőjébe egy vasdarabot helyezünk, és e fölé – ugyancsak a mérlegre – egy elektromágnest függesztünk, majd kiegyensúlyozzuk a mérleget. Mi történik a mérleg egyensúlyával és miért, ha

a) bekapcsoljuk az áramot az elektromágnesbe, de a mágnes nem tudja megemelni a vasat;

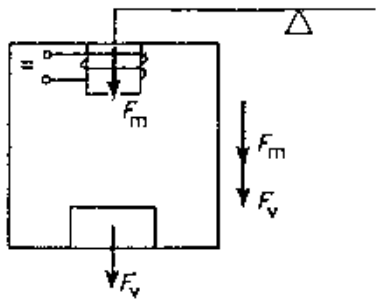
b) bekapcsoljuk az áramot, és a mágnes magához rántja a vasat?

Megoldás:

2.18. Az áram bekapcsolása előtt a mérleg egyik oldalán az elektromágnes és a vasdarab súlya hat, ami a másik oldalon ki van egyensúlyozva.

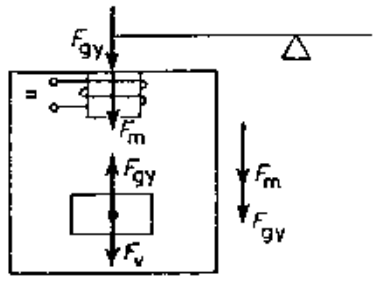
a) és b) Belső erők nem változtatják meg a tömegközéppont mozgásának állapotát. Legyen a rendszer: a mérlegtányér, a vasdarab és a mágnes. Az erre a rendszerre érvényesülő külső erőhatások: a mérlegtányérra, a mágnesre és a vasdarabra ható nehézségi erő, illetve a mérlegkar által a tányérra kifejtett tartóerő. A bekapcsolás előtt a rendszer tömegközéppontja a földfelszínhez képest nyugalomban van. Az elektromágnes bekapcsolásával a mágnes és a vasdarab között belső erő lép fel.

a)



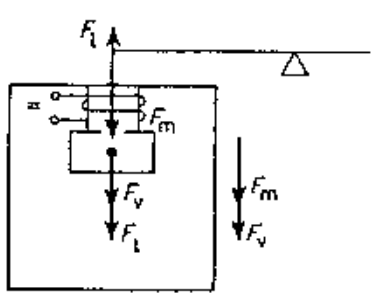
a) Ha a mágneses erő nem mozdítja meg a testet a mérlegtányérhoz viszonyítva, akkor a rendszer tömegközéppontjának helyzete nem változik a mérlegtányérhoz viszonyítva, így a mérlegtányér a földfelszínhez képest mozdulatlan marad.

b)

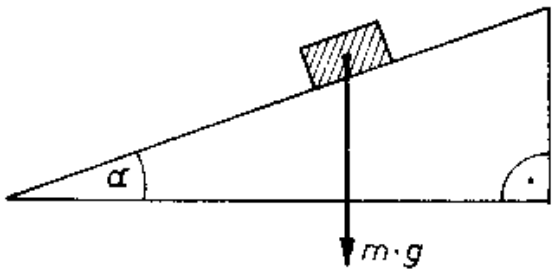


b) Ha a mágnes magához rántja a vasdarabot, akkor a rendszer tömegközéppontja a tányérhoz képest felfelé mozdul el, ezért a tömegközéppont csak úgy maradhat mozdulatlan a földfelszínhez képest, ha a mérlegtányér lefelé mozdul. Amikor a vas a mágneshez tapadva megáll, a tömegközéppontnak a tányérhoz viszonyított mozgása is megszűnik, így a tányér mozgása is megállna elvileg. A mérlegeket azonban úgy szerkesztik, hogy ha a mérlegkarra ható két erő egyenlő, akkor a mérlegkar vízszintes helyzetben állapodik meg. Ezért, miután a vasdarab a mágneshez tapadt, a mérleg visszaáll eredeti helyzetébe.

c)



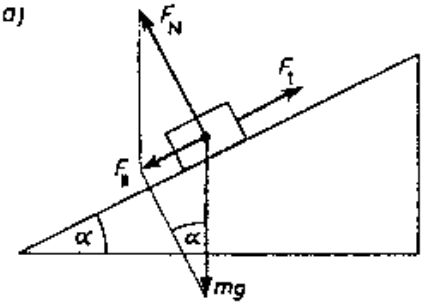
2.19. *Egészítsük ki az ábrát* azokkal az erőkkel, amelyek az α hajlásszögű lejtőn elhelyezett m tömegű testre hatnak, ha a test a lejtőn:



a) nyugalomban van,
b) súrlódásmentesen csúszik lefelé,
c) lefelé csúszik egyenletesen és a súrlódási együttható μ,
d) felfelé mozog egyenletesen és a súrlódási együttható μ!
Adjuk meg az erő nagyságát is!
(Négy ábrát készítsünk, minden eset külön megfontolásával!)

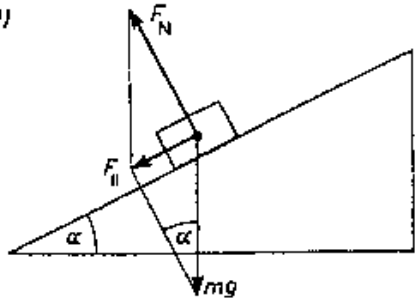
Megoldás:

2.19. a) a)



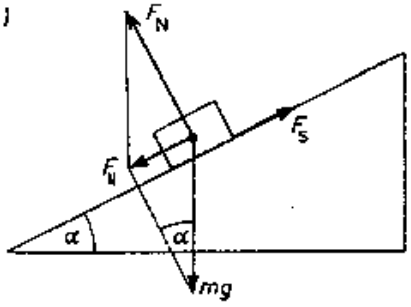
$\sum F = 0, \quad |F_{||}| = |F_t|$

b) b)



$\sum F = m \cdot a$

c) c)



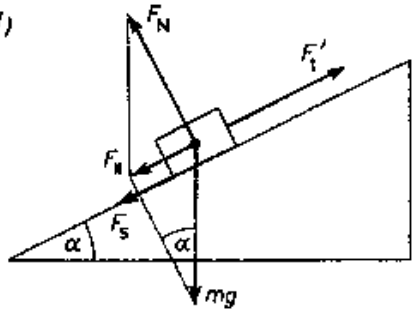
$\sum F = 0, \quad |F_{||}| = |F_s|$

$F_{||} = m \cdot g \cdot \sin\alpha;$

$F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha;$

$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha.$

d) d)



$\sum F = 0, \quad |F_{||}| + |F_t| = |F_t'|$

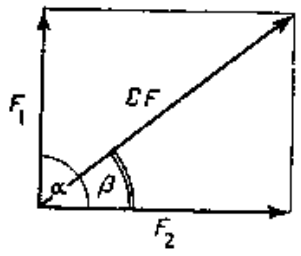
2.20. Egy 4 kg tömegű test tömegközéppontjára vízszintes síkban egymással 90°-os szöget bezáró 3 N és 4 N nagyságú erő hat.

a) Mekkora és – az egyik erőhöz viszonyítva – milyen irányú a test gyorsulása?

b) Mekkora és milyen irányú erőnek kell még a testre hatnia, hogy a test egyensúlyban legyen?

Megoldás:

2.20. $m = 4$ kg; $F_1 = 3$ N; $F_2 = 4$ N; $\alpha = 90°$.



$\sum F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5$ N.

$\underline{a} = \dfrac{\sum F}{m} = 1{,}25 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A gyorsulás $1{,}25 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nagyságú, és az F_2-vel 36,87°-os szöget zár be.

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{F_1}{F_2}$; $\underline{\beta = 36{,}87°}$.

Az egyensúlyban tartó erő az eredővel ($\sum F$) azonos nagyságú és ellentétes irányú.

2.21. Terheléssel együtt 150 kg tömegű kocsi $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. A kocsiból menetirányba kidobunk egy 30 kg tömegű ládát, a talajhoz viszonyított $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.
Mekkora a kocsi sebessége a láda kidobása után?

Megoldás:

2.21. $m_1 + m_2 = 150$ kg; $v_{1,2} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 30$ kg; $v_2' = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
A lendületmegmaradás törvénye szerint:
$(m_1 + m_2) \cdot v_{1,2} = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$.
A kocsi sebessége a láda kidobása után: $\underline{\underline{v_1' = 8{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

2.22. Terheléssel együtt egy 200 kg tömegű kiskocsi 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. A kocsiból a menetiránnyal ellentétes irányba kidobunk egy 50 kg tömegű zsákot, a kocsihoz viszonyított 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

Mekkora a kocsi sebessége a zsák kidobása után?

Megoldás:

2.22. $m_1 + m_2 = 200$ kg; $v_{1,2} = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 50$ kg; $v = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A Földhöz viszonyított rendszerben a kocsi sebessége a zsák kidobása után: v_1', 4 zsáké: $v_1' + v$, a lendületmegmaradás törvénye szerint:

$(m_1 + m_2) \cdot v_{1,2} = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$; ebből $\underline{\underline{v_1' = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

2.23. Móló mellett a kb. 0,5 m-re álló hajóból könnyű a partra ugrani. Aki ugyanezt kis csónakból próbálja meg, általában vízbe esik. Miért?

Megoldás:

2.23. Tegyük fel, hogy az ember ugyanakkora F erővel rugaszkodik el a hajótól és a csónaktól. A hajó tömegét jelölje M_h, a csónakét M_{cs}, az emberét pedig m. $M_h > M_{cs}$. A hajó gyorsulása $a_h = \frac{F}{M_h}$ kisebb, mint a csónaké: $a_{cs} = \frac{F}{M_{cs}}$, az ember gyorsulása mindkét esetben ugyanakkora, mert az emberre a hajó és a csónak F erőt gyakorol. A gyorsulás azonban csak addig tart, amíg az elrugaszkodó ember lába érintkezik a hajóval vagy a csónakkal. Miután a hajó gyorsulása kisebb, mint a csónaké, a hajó elmozdulása ugyanannyi idő alatt kisebb, mint a csónaké, így a hajó és az ember lába között a kölcsönhatás tovább tart, mint a csónak és az ember lába közötti kölcsönhatás. Így az ember nagyobb sebességet ér el, ha a hajóról rugaszkodik el, mintha a csónakból ugrana ki. Ezért, ha a csónakból ugrik ki az ember, könnyen a vízbe eshet.

2.24. *Töltsük ki a következő táblázatot!*

Személyszállító felvonófülke
a) elindul a földszintről felfelé,
b) megérkezik a 10. emeletre,
c) elindul a 10. emeletről lefelé,
d) megérkezik a földszintre,
e) állandó sebességgel megy két emelet között.

	Hogyan változik a sebesség nagysága?	Milyen irányú a sebesség változása?	Milyen irányú a gyorsulás?	Milyen az $F_{köt}$ és az F_{neh} nagyságának viszonya?
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				

Megoldás:

2.24.

	Hogyan változik a sebesség nagysága?	Milyen irányú a sebesség változása?	Milyen irányú a gyorsulás?	Milyen az F_k és az F_n nagyságának viszonya?
a)	nő	negatív	negatív	$F_k > F_n$
b)	csökken	pozitív	pozitív	$F_k < F_n$
c)	nő	pozitív	pozitív	$F_k < F_n$
d)	csökken	negatív	negatív	$F_k > F_n$
e)	állandó	–	–	$F_k = F_n$

Az irány lefelé pozitív, $m \cdot a = F_n - F_k$, ahol F_n a nehézségi erő és F_k a kötélerő.

2.25. Kezünkben tartunk egy rugós erőmérőt, amelyre egy 50 g tömegű teniszlabdát függesztünk fel.
Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a rugó a labdára a következő esetekben?

a) Nyugalomban vannak.

b) $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel emelkednek.

c) $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel süllyednek.

d) $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással emelkednek.

e) $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással süllyednek.

f) Elengedjük az erőmérőt és szabadon esik a labdával együtt.

Megoldás:

2.25. $m = 50\ \text{g} = 0{,}05\ \text{kg}$; az irány felfelé pozitív.
Lásd a 2.17. feladat megoldását!

a) $a = 0$, $\underline{\underline{F_r = 0{,}5\ \text{N}}}$.

b) $v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = 0$, $\underline{\underline{F_r = 0{,}5\ \text{N}}}$.

c) $v = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = 0$, $\underline{\underline{F_r = 0{,}5\ \text{N}}}$.

d) $a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\underline{\underline{F_r = 0{,}6\ \text{N}}}$.

e) $a = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\underline{\underline{F_r = 0{,}4\ \text{N}}}$.

f) $a = -g$, $\underline{\underline{F_r = 0}}$.

2.26. Egy 150 kg tömegű kiskocsi 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ állandó nagyságú sebességgel mozog. A kocsiból menetirányban kidobunk a Földhöz képest 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vízszintes irányú sebességgel egy 30 kg tömegű testet.

a) Mekkora sebességgel mozog a kocsi tovább?

b) Mekkora lesz a kocsi sebessége, ha ezután egy 20 kg tömegű testet dobunk ki a kocsiból hátrafelé, a kocsihoz viszonyított 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vízszintes irányú sebességgel?

Megoldás:

2.26. $m_1 + m_2 = 150$ kg; $v_{1,2} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2' = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 30$ kg.

a) Lásd a 2.21. feladat megoldását!

$(m_1 + m_2) \cdot v_{1,2} = m_1 v_1' + m_2 \cdot v_2'$.

A kocsi $v_1' = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozog tovább.

b) $m_3 = 20$ kg; $v_1 = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_1 + m_3 = 120$ kg; $v = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lásd a 2.22. feladat megoldását!

$(m_1 + m_3) \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_3(v_1' + v)$.

A kocsi $v_1' = 14{,}17\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozog tovább.

2.27. Vízszintes talajon álló, a lövedékkel együtt 502,5 kg tömegű ágyú és a talaj közötti súrlódási együttható 0,3. Az ágyúcső vízszintes helyzetben van, amikor a 2,5 kg tömegű lövedéket 500 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel kilövik belőle.

Mennyit csúszik hátra az ágyú a lövedék kilövése után?

Megoldás:

2.27. $m_1+m_2=502{,}5$ kg; $v_{1,2}=0$; $\mu=0{,}3$; $m_2=2{,}5$ kg; $v_2'=500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az ágyú kezdetben nyugalomban volt, tehát a rendszer lendületének összege 0 volt, ami a kilövés után sem változott: $0=m_1\cdot v_1'+m_2\cdot v_2'$, amiből az ágyú sebessége a kilövés után:

$v_1'=-2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, és a lövedék sebességével ellentétes irányú. Az ágyú egyenletesen lassuló mozgást fog végezni, hat rá a súrlódási erő:

$F_s=-\mu\cdot m_1\cdot g=-1500$ N, valamint: $F=\frac{\Delta I}{\Delta t}$ (Newton II. törvénye).

$F_s=F$, amiből $\Delta t=0{,}83$ s idő alatt áll meg az ágyú.

$s=\frac{v_1'+0}{2}\Delta t$, az ágyú 1,04 m-t csúszik hátra.

2.28. Kikapcsolt hajtóművel gravitációs pályán haladó űrhajóból űrsétára kilépő űrhajós tömege felszereléseivel együtt 100 kg.

Mennyivel változna meg az űrhajós sebessége az űrhajóhoz viszonyítva, ha kilőne egy pisztolyból 10 g tömegű, 900 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű lövedéket?

Megoldás:

2.28. $m_1 = 100$ kg; $v_1 = v_2 = 0$; $m_2 = 10$ g $= 0{,}01$ kg; $v_2 = 0$; $v_2' = 900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lásd a 2.21. feladat megoldását!

$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$, amiből $v_1' = -0{,}09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az űrhajós sebessége az űrhajóhoz viszonyítva $0{,}09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal változna meg a lövedék sebességével ellentétes irányban.

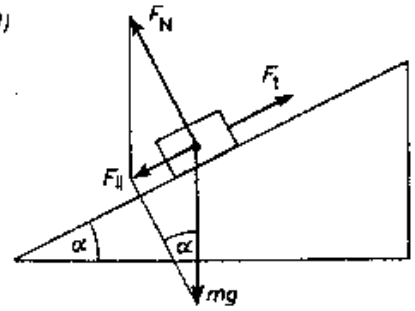
2.29. A 30°-os hajlásszögű lejtőn állandó sebességgel feltolunk egy 40 kg tömegű teherkocsit. Mekkora erővel kell hatni a kocsira, ha az ellenállásoktól eltekintünk és izomerőnk iránya:

a) a lejtő hosszával párhuzamos,
b) a lejtő alapjával párhuzamos?

Megoldás:

2.29. $\alpha = 30°$; $m = 40$ kg; $v =$ állandó; $\mu = 0$.

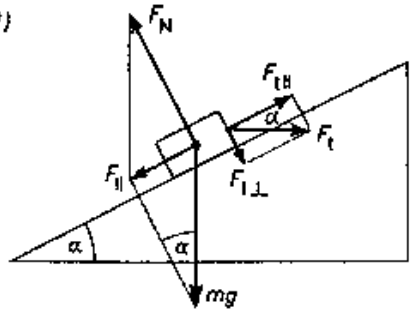
a)



a) Mivel $\mu = 0$ és $v =$ állandó, $\sum F = 0$. Az ábráról: $F_{||} - F_t = 0$, $\underline{\underline{F_t}} = m \cdot g \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{200\ \text{N}}}$.

A lejtővel párhuzamos tolóerő 200 N.

b)



b) Mivel $\mu = 0$ és $v =$ állandó, $\sum F = 0$. Az ábráról: $F_{||} - F_{t,||} = 0$, $F_{||} = F_{t,||} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$.

$$\underline{\underline{F_t}} = \frac{F_{t||}}{\cos\alpha} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = m \cdot g \cdot \operatorname{tg}\alpha = \underline{\underline{231\ \text{N}}}.$$

A lejtő aljával párhuzamos tolóerő 231 N.

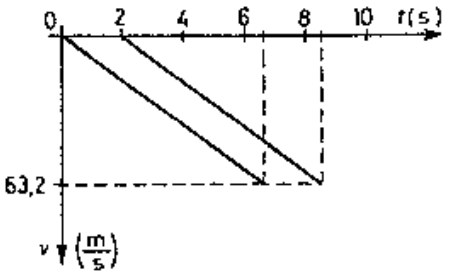
2.30. 200 m magasan levő, lebegő léghajóból kiejtünk egy m tömegű testet, majd 2 s múlva ugyanonnan ismét kiejtünk egy m tömegű testet.

a) Ábrázoljuk a testek sebességét az idő függvényében! (A közegellenállástól tekintsünk el!)

b) Milyen mozgást végez az egyik test a másikhoz viszonyítva?

Megoldás:

2.30. a) $h = 200$ m; $v_0 = 0$; m; $t = 2$ s; g.



A testek szabadon esnek:

$s = \frac{g}{2}t^2$, ebből az esés ideje: $\underline{\underline{t_e = 6{,}32 \text{ s}}}$.

A Földre érkezéskori sebesség:

$\underline{\underline{v = F \cdot t_e = 63{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) Mivel gyorsulásuk azonos, ezért egymáshoz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek $v = g \cdot t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

2.31. Egy sportrepülőgép zuhanó repüléssel, 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó nagyságú függőleges sebességgel közeledik a földhöz. A gépből 400 m magasságban kiejtenek egy 80 kg tömegű homokzsákot.

a) Mennyi idő alatt és mekkora függőleges irányú lendülettel csapódik a földön levő célpontba a zsák?

b) Készítsük el a zsák sebesség–idő és út–idő grafikonjait!

Megoldás:

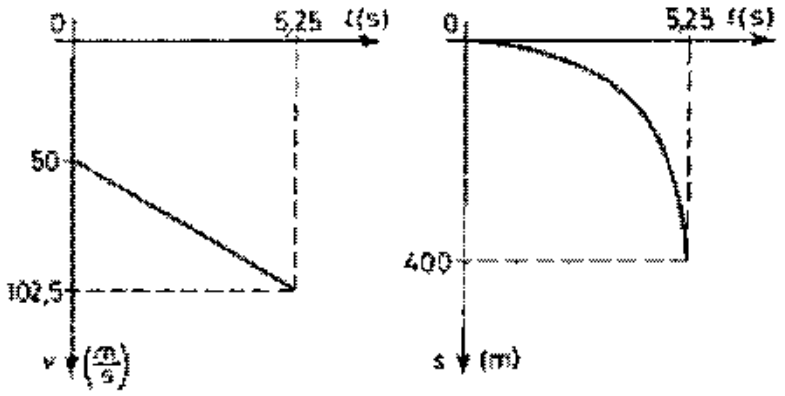
2.31. a) $v_0 = 180\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = 400$ m; $m = 80$ kg; az irány lefelé pozitív. Szabadesés v_0 kezdősebességgel:

$s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2}t^2$, ebből az esés ideje $\underline{t = 5{,}25\ \text{s}}$.

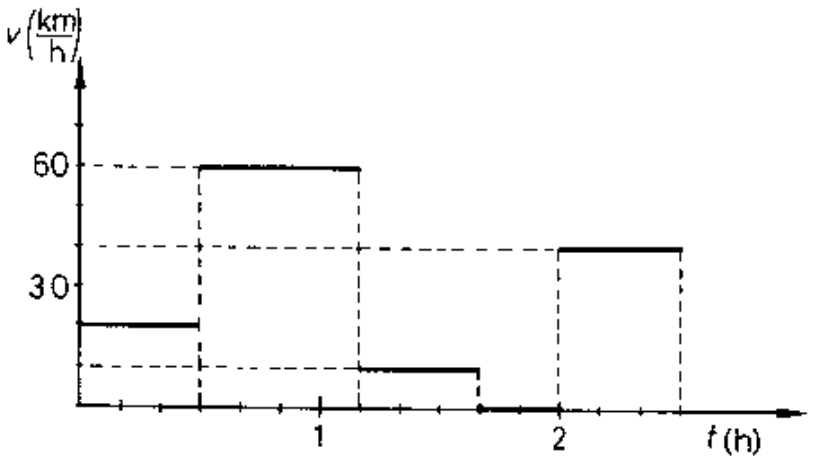
$v = v_0 + g \cdot t = 102{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A becsapódási lendület: $\underline{I = m \cdot v = 8200\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

b)



2.32. A grafikon egy 1500 kg tömegű autó mozgásának átlagsebességeit mutatja az idő függvényében.



a) Melyik időtartamhoz tartozik a leghosszabb út és mennyi a mozgás egész ideje alatt megtett út?

b) Mennyi a mozgás egész időtartamára vonatkozó átlagsebesség?

c) Mekkora az egyes szakaszokban a motor teljesítménye, ha a mozgás közben fellépő ellenállási együttható értéke 0,05?

Megoldás:

2.32. $m = 1500\ \text{kg}$; $\overline{v}_1 = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\Delta t_1 = 0,5\ \text{h}$; $\overline{v}_2 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\Delta t_2 = \frac{2}{3}\ \text{h}$; $\overline{v}_3 = 10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\Delta t_3 = 0,5\ \text{h}$; $\overline{v}_4 = 0$; $\Delta t_4 = \frac{1}{3}\ \text{h}$; $\overline{v}_5 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\Delta t_5 = 0,5\ \text{h}$;

a) $s = \overline{v} \cdot \Delta t$.

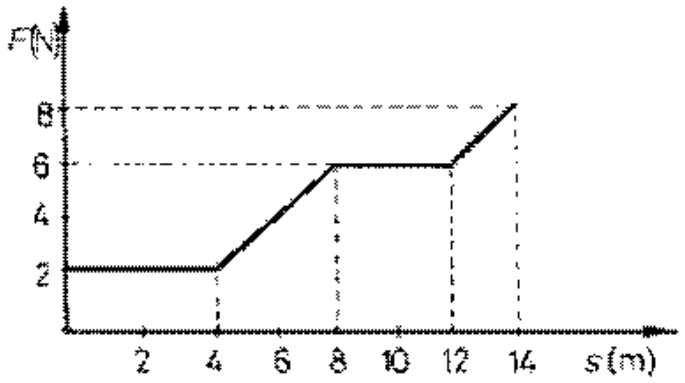
$s_1 = 10\ \text{km}$; $\underline{\underline{s_2 = 40\ \text{km}}}$; $s_3 = 5\ \text{km}$; $s_4 = 0$; $s_5 = 20\ \text{km}$; $\underline{\underline{s_{\text{ö}}}} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = \underline{\underline{75\ \text{km}}}$.

b) $\underline{\underline{\overline{v} = \frac{\sum s}{\sum t} = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$.

c) $\mu = 0,05$; $F_s = \mu \cdot m \cdot g$; $P = \frac{W}{t} = \frac{F_s \cdot s}{t} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \overline{v}$.

$\underline{\underline{P_1 = 4167\ \text{W}}}$; $\underline{\underline{P_2 = 12\,500\ \text{W}}}$; $\underline{\underline{P_3 = 2083\ \text{W}}}$; $\underline{\underline{P_4 = 0}}$; $\underline{\underline{P_5 = 8333\ \text{W}}}$.

2.33. Egy 4 kg tömegű testre változó nagyságú erő hat az elmozdulás irányában. Az erő nagyságának a változását a grafikon mutatja az elmozdulás függvényében.



a) Milyen mozgást végez a test 0 és 4 m, 4 m és 8 m, 8 m és 12 m, 12 m és 14 m között?
b) Mekkora a legnagyobb gyorsulás a mozgás során?
c) Mekkora a sebessége 12 m út befutásakor, ha kezdősebessége nulla volt?

Megoldás:

2.33. $m = 4$ kg; $F_1 = 2$ N; $s_1 = 4$ m; $F_2 = 6$ N; $s_2 = 8\text{ m} - 4\text{ m} = 4$ m; $F_4 = 8$ N; $s_3 = 12\text{ m} - 8\text{ m} = 4$ m; $s_4 = 14\text{ m} - 12\text{ m} = 2$ m

a) $0 < s < 4$ m: F = állandó, egyenes menti egyenletesen változó mozgás;
4 m $< s <$ 8 m: a gyorsulás növekszik, a mozgás nem egyenletesen változó;
8 m $< s <$ 12 m: F = állandó, egyenes menti egyenletesen változó mozgás;

$12\ \text{m} < s < 14\ \text{m}$: a gyorsulás növekszik, a mozgás nem egyenletesen változó;

b) $\underline{\underline{a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

c) $v_0 = 0$; alkalmazva a munkatételt:

$W = \Delta E_{\text{kin}}$; $W = F_1 \cdot s_1 + \frac{F_1 + F_2}{2} s_2 + F_2 \cdot s_3$; $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$.

Az elért sebesség: $\underline{\underline{v = 4{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

2.34. Az elromlott teherautó impulzusát $5 \cdot 10^4\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal változtatta meg egyenletesen egy vontató.
Mennyi ideig tartott az impulzusváltozás, ha a vontató $5 \cdot 10^3$ N állandó erővel gyorsitotta a teherautót?

Megoldás:

2.34. $\Delta I = 5 \cdot 10^4\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $F = 5 \cdot 10^3$ N.

$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$, $\underline{\underline{\Delta t = 10\ \text{s}}}$-ig tartott az impulzusváltozás.

2.35. Egy rakéta hajtóművéből s-onként 50 kg tömegű gáz áramlik ki 4500 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

Mekkora a tolóerő nagysága?

Megoldás:

2.35. $\Delta t = 1\ \text{s};\ \ m = 50\ \text{kg};\ \ \Delta v = 4500\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1250\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\underline{\underline{F}} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \underline{\underline{62\ 500\ \text{N}}}$ erő hat a kiáramló gázra. A tolóerő Newton III. törvénye szerint az F erővel egyenlő nagyságú és ellentétes irányú.

2.36. Egy egyenes vonalú mozgást végző test lendülete egy adott pillanatban 50 kg $\cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$, 3 s múlva 120 kg $\cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Mekkora a testre ható átlagerő?

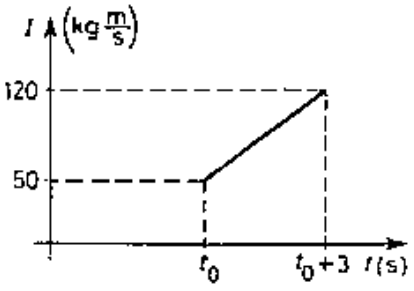
b) Mekkora a 3 s alatt megtett út, ha a kezdősebesség 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt?

c) Ábrázoljuk a test impulzusát az idő függvényében!

Megoldás:

2.36. $I_0 = 50\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t = 3\ \text{s}$; $I_1 = 120\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) $\overline{F} = \frac{\Delta I}{\Delta t}$. Az átlagerő $\underline{\underline{\overline{F} = 23{,}3\ \text{N}}}$.



b) $v_0 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 3\ \text{s}$; $I_0 = m \cdot v_0$-ból $m = 25\ \text{kg}$. $\overline{F} = m \cdot a$-ból $a = 0{,}93\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A megtett út: $\underline{\underline{s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2}t^2 = 10{,}2\ \text{m}}}$.

c) $I = m \cdot v = m \cdot a \cdot t = \text{állandó} \cdot t \rightarrow I$ egyenesen arányos az idővel.

2.37. Vízszintes talajon fekvő, 2 kg tömegű fahasábra különböző nagyságú húzóerőket fejtünk ki. A hasáb és a talaj közötti tapadási súrlódási együttható értéke 0,4, a csúszó súrlódási együtthatóé 0,15.
Számítsuk ki a hasáb gyorsulását, ha

a) a mozgásban levő hasábra 2 N, 3 N és 4 N nagyságú erő hat;

b) a nyugvó hasábra 2 N, 6 N és 10 N nagyságú erő hat!

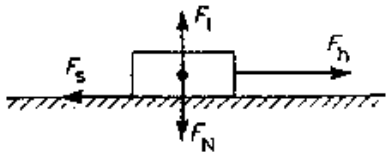
Megoldás:

2.37. $v_0 = 0$; $m = 2$ kg; $\mu_0 = 0{,}4$; $\mu = 0{,}15$; vízszintes talaj; $F_{s0} = \mu_0 \cdot F_N = 8$ N; $F_s = \mu \cdot F_N = 3$ N, a húzóerők vízszintesek.

a) $v_0 \neq 0$; $F_{h1} = 2$ N; $F_{h2} = 3$ N; $F_{h3} = 4$ N.

$\sum F = F_h - F_s$, $\sum F = m \cdot a$. A gyorsulások:

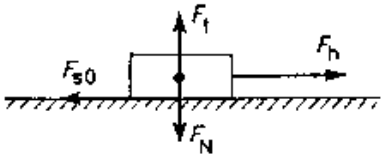
$a_1 = -0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



b) $v_0 = 0$; $F_{h1} = 2$ N; $F_{h2} = 6$ N; $F_{h3} = 10$ N.

Amíg $F_{s0} > F_h$, addig a test nyugalomban van. Ha $F_h > F_{s0}$, akkor lásd *a)*.

A gyorsulások: $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 3{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



2.38. Egy fékező gépkocsi sebességének a nagysága egyenletesen csökken, s-onként $10{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val, induláskor pedig egyenletesen növekszik, s-onként $4{,}32\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val.

a) Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki a két esetben a talaj az 1200 kg tömegű kocsira?

b) Mennyivel változott a gépkocsi impulzusa a fékezés, illetve az indulás 1. s-a alatt?

Megoldás:

2.38. $\Delta t = 1\ \text{s};\ \Delta v_1 = -10{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \Delta v_2 = 4{,}32\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) $m = 1200\ \text{kg};\ F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}$. Fékezéskor: $\underline{\underline{F_1 = -3600\ \text{N}}}$ a sebességgel ellentétes irányú, induláskor: $\underline{\underline{F_2 = 1440\ \text{N}}}$ a sebességgel megegyező irányú erőt fejt ki a talaj a kocsira.

b) $\Delta I = m \cdot \Delta v$. Fékezéskor: $\underline{\underline{\Delta I_1 = -3600\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a sebességgel ellentétes irányú, induláskor: $\underline{\underline{\Delta I_2 = 1440\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a sebességgel megegyező irányú a gépkocsi impulzusváltozása.

2.39. Egy személygépkocsi tömege terheléssel együtt 1000 kg. A gépkocsi motorja 400 N tolóerőt fejt ki.
Mennyi idő alatt és mekkora úton gyorsul fel a gépkocsi $54\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre álló helyzetből vízszintes talajon, ha:

a) az ellenállásoktól eltekintünk,
b) a menetellenállási tényező 0,03?

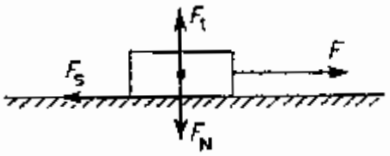
Megoldás:

2.39. $m = 1000\ \text{kg}$; $F = 400\ \text{N}$; $v_0 = 0$; $v = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) $\mu = 0$; $F = m \cdot a$; $v = a \cdot t$; $s = \frac{a}{2}t^2$.

$\underline{\underline{t = 37{,}5\ \text{s}}}$; $\underline{\underline{s = 281{,}25\ \text{m}}}$.

b) $\mu = 0{,}03$; $F_s = \mu \cdot F_N$; $\sum F = F - F_s$; $\sum F = m \cdot a$; $v = a \cdot t$; $s = \frac{a}{2}t^2$.



$\underline{\underline{t = 150\ \text{s}}}$; $\underline{\underline{s = 1125\ \text{m}}}$.

2.40. Egy tehervonat $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad vízszintes pályán.

A szerelvényről leszakad az utolsó kocsi, amely 300 m utat tesz meg a leszakadás után. A szerelvény többi kocsija változatlan sebességgel halad tovább.

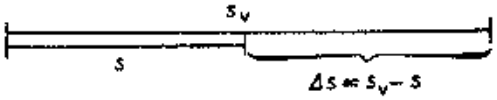
a) Mekkora távolságra lesz a vonat és a leszakadt kocsi egymástól, amikor a leszakadt kocsi megáll?

b) Mekkora a leszakadt kocsi menetellenállási tényezője?

Megoldás:

2.40. $v = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; vízszintes pálya; $s = 300$ m; $v_2 = 0$.

a) A vonat egyenletesen halad, a leszakadó kocsi egyenletesen lassuló mozgással áll meg.



$s_v = v \cdot t = 600$ m.

$s = \frac{v}{2}t$, ebből $t = 48$ s; $\Delta s = s_v - s$.

$\underline{\underline{\Delta s}} = 600\ \text{m} - 300\ \text{m} = \underline{\underline{300\ \text{m}}}$ a távolság a vonat és a leszakadó kocsi között.

b) $s = v \cdot t + \frac{a}{2}t^2$; $a = -0{,}26\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$\sum F = m \cdot a = -F_s = -\mu \cdot m \cdot g$, ebből $\underline{\underline{\mu = 0{,}026}}$.

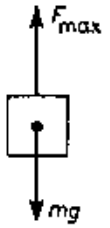
2.41. Az építkezésnél egy 1000 kg tömegű elemet kell felemelni emelődaruval.

a) Mekkora maximális gyorsulással indítható az emelés, ha a daru kötele $1{,}3 \cdot 10^4$ N-nál nagyobb erővel nem terhelhető?

b) Mennyi idő szükséges a $2{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ végsebesség eléréséhez a maximális gyorsulás esetén?

Megoldás:

2.41. $m = 1000$ kg.



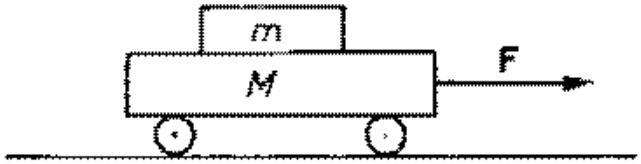
a) $F_{max} = 1{,}3 \cdot 10^4$ N.

$\sum F = m \cdot a$; $\sum F = F_{max} - m \cdot g$; $\underline{\underline{a_{max} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

b) $v = 2{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_0 = 0$.

$v = a_{max} \cdot t$, ebből $\underline{\underline{t = 0{,}87\ \text{s}}}$ alatt éri el a maximális gyorsulást.

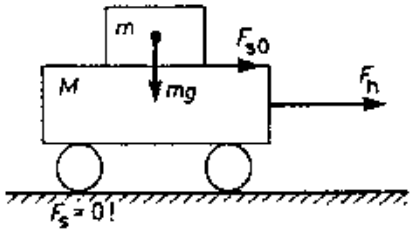
2.42. Az ábra szerinti elrendezésben $M = 2$ kg tömegű kocsin fekszik egy $m = 0{,}5$ kg tömegű test. A kocsi és a test között a nyugalmi súrlódási együttható 0,2. A kocsi és a talaj közötti súrlódás elhanyagolható.



Határozzuk meg azt a legkisebb F húzóerőt, amellyel a kocsira hatva, az m tömegű test éppen megcsúszik a kocsin!

Megoldás:

2.42. $M = 2$ kg; $m = 0{,}5$ kg; $\mu_0 = 0{,}2$.



A kocsin fekvő m tömegű testet a kocsi és a test közötti kölcsönhatás, a tapadási súrlódási erő:

$F_{so} = \mu_0 \cdot m \cdot g = m \cdot a$ gyorsítja, ebből a gyorsulás $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A kocsi gyorsulása maximálisan ennyi lehet ahhoz, hogy a rajta elhelyezett test ne csússzon meg.

$\underline{F_h} > (m + M) \cdot a_{max} = \underline{\underline{5\ \text{N}}}$ esetén megcsúszik a test.

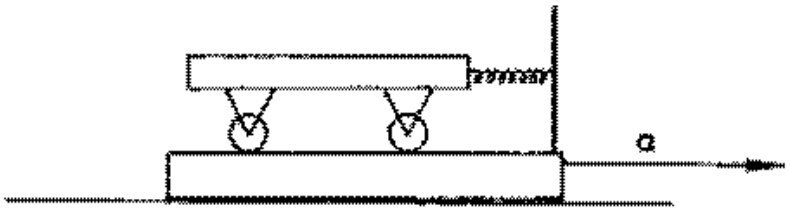
2.43. Mekkora maximális gyorsulással indulhat a teherautó, hogy a vízszintes, sík rakfelületén levő láda meg ne csúszszon?
A láda és a rakfelület közötti súrlódási együttható 0,2.

Megoldás:

2.43. $\mu = 0{,}2$. Lásd a 2.42. feladat megoldását!

$a_{max} = 2\ \frac{m}{s^2}$.

2.44. Igen könnyen mozgó, 5 kg tömegű kiskocsit vízszintes helyzetű, rugós erőmérő közbeiktatásával deszkalaphoz erősítünk, majd a deszkalapot vízszintes irányban gyorsítjuk. A rugós erőmérő 20 N erőt jelez.
Mekkora a rendszer gyorsulása?



Megoldás:

2.44. $m = 5$ kg; $F_r = 20$ N.
A kocsit F_r gyorsítja. A kocsi és a deszka gyorsulása megegyezik.
$F_r = m \cdot a$; ebből $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a rendszer gyorsulása.

2.45. Egy autó induláskor egyenletesen gyorsulva 4 s alatt éri el a $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet. Innen kezdve egyenletesen halad.

Összesen mennyivel csúszik hátra a rakfelületen levő láda, ha a láda és a rakfelület között a súrlódási együttható 0,2?

Megoldás:

2.45. $v_0 = 0$; $t = 4$ s; $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}2$.

Lásd a 2.42. feladat megoldását!

$a_a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} > a_l = \frac{F_s}{m} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$m \cdot a_l = \mu \cdot m \cdot g$.

Az autó útja $s_a = \frac{a_a}{2} t^2 = 20$ m, a láda útja pedig $s_l = \frac{a_l}{2} t^2 = 16$ m (a Földhöz viszonyítva).

4 s alatt a láda azonban csak $v_l = a_l \cdot t = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességre tesz szert, tehát $v' = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel rendelkezik az autóhoz viszonyítva, ami miatt még hátra fog csúszni. Mivel az autó már egyenletes mozgással halad, az autó és a láda közötti súrlódási erő:

$F_s = m \cdot a_l = -\mu \cdot m \cdot g$, ebből a láda gyorsulása $a = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és

$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 1$ s-ig csúszik még hátra $s' = v' \cdot \Delta t + \frac{a}{2}(\Delta t)^2 = 1$ m hosszú úton.

A láda hátracsúszása összesen 20 m – 16 m + 1 m = <u>5 m</u>.

2.46. Vízszintes talajon $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ellökött test a súrlódás következtében 6 m út megtétele után megáll.
Mekkora a talaj és a test között a súrlódási együttható?

Megoldás:

2.46. $v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 6$ m; $v_t = 0$.

A testet a súrlódási erő lassítja: $\sum F = -F_s$;

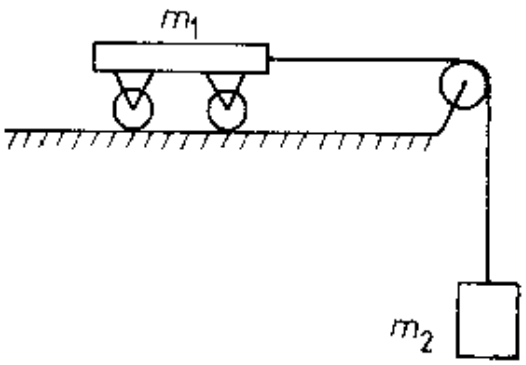
(1) $$m \cdot a = -\mu \cdot m \cdot g;$$

$s = \frac{v_0 + v_t}{2}$-ből $t = 1{,}2$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; ebből $a = -8{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, és behelyettesítve (1)-be $\underline{\underline{\mu = 0{,}83}}$.

2.47. Vízszintes lapon, súrlódás nélkül mozgatható $m_1 = 2$ kg tömegű kiskocsihoz csigán átvetett fonállal $m_2 = 1{,}2$ kg tömegű testet kötünk. A csiga és a fonál tömege, valamint a csiga tengelyénél fellépő súrlódás elhanyagolható.

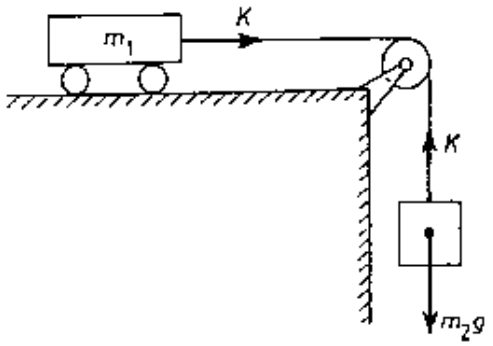
a) Mekkora utat tesz meg a kiskocsi 1 s alatt?

b) Mekkora erő feszíti a fonalat?



Megoldás:

2.47. $\mu = 0$; $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 1{,}2$ kg; $v_0 = 0$; $t = 1$ s.



a) A mozgásegyenletek:

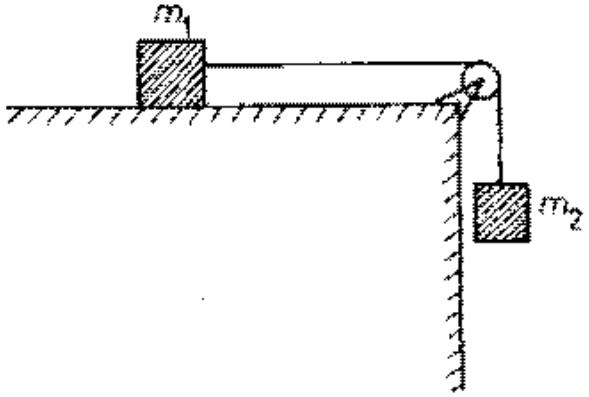
$$\left.\begin{aligned} K &= m_1 \cdot a \\ m_2 \cdot g - K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

ebből $a = 3{,}75 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$s = \frac{a}{2} t^2 = \underline{1{,}875 \text{ m}}.$$

b) $\underline{K = 7{,}5 \text{ N}}$.

2.48. Az ábrán látható módon vízszintes asztalon fekszik egy $m_1 = 3$ kg tömegű, hasáb alakú test. A hasábhoz súrlódásmentes csigán átvetett fonál végére, egy $m_2 = 1$ kg tömegű testet függesztünk. A fonal és a csiga tömege elhanyagolható.



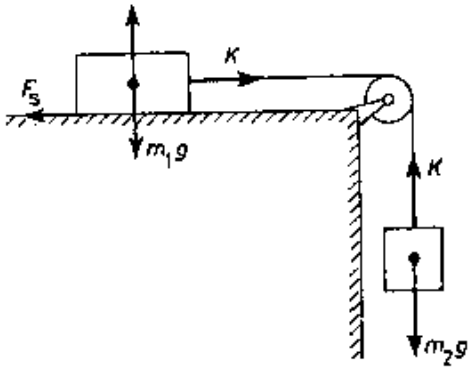
Mekkora az asztalon lévő testnek a gyorsulása és mekkora erő feszíti a köteleket, ha:

a) a súrlódás az asztal és a test között elhanyagolható,
b) az asztal és a test közötti súrlódási együttható 0,15?

Megoldás:

2.48. $m_1 = 3$ kg; $m_2 = 1$ kg.

a) Lásd a 2.47. feladat megoldását! $a = 2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $K = 7{,}5$ N.

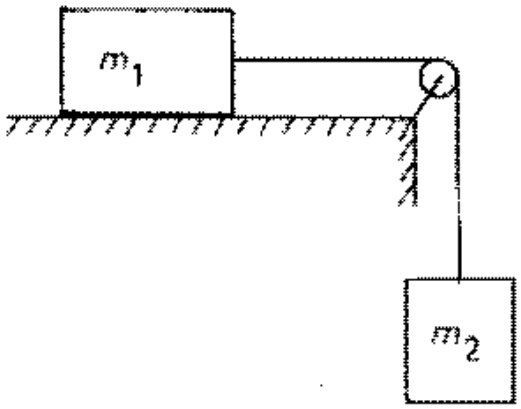


b) A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} K - F_s &= m_1 \cdot a \\ m_2 \cdot g - K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

ebből $a = 1{,}375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. $K = 8{,}625$ N.

2.49. Vízszintes lapon $m_1 = 6$ kg tömegű testhez, csigán átvetett fonállal, $m_2 = 4$ kg tömegű testet kötünk. A lap és a rajta levő test között a súrlódási együttható 0,2. A csiga és a fonál tömege, valamint a csiga tengelyénél fellépő súrlódás elhanyagolható.



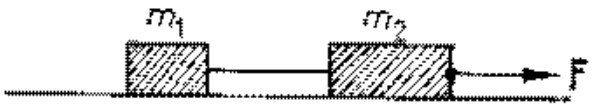
a) Mekkora gyorsulással mozog a rendszer?
b) Mekkora erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

2.49. $m_1 = 6$ kg; $m_2 = 4$ kg; $\mu = 0,2$.

Lásd a 2.48.*b)* feladat megoldását! $\underline{\underline{a = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$; $\underline{\underline{K = 28,8 \text{ N}}}$.

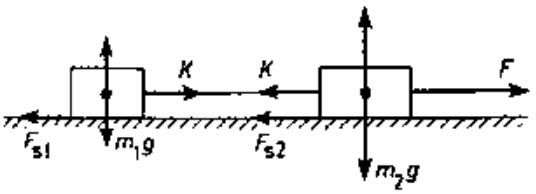
2.50. Két hasábot húzunk vízszintes síkon, az ábra szerinti elrendezésben.



Legfeljebb mekkora F erővel húzhatjuk a rendszert, ha $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 5$ kg, a súrlódási együttható értéke 0,1 és a két testet összekötő fonál 25 N-nál nagyobb terhelésnél elszakad?

Megoldás:

2.50. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 5$ kg; $\mu = 0{,}1$; $K \leq 25$ N.



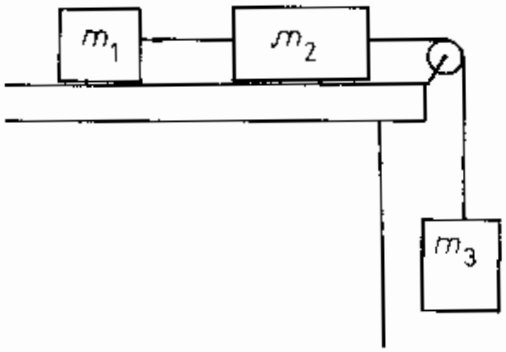
$F_s = \mu \cdot m \cdot g$.

A mozgásegyenletek:

$K - F_{s1} = m_1 \cdot a$, ebből $a \leq 11{,}5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, mert $K \leq 25$ N.

$F - K - F_{s2} = m_2 \cdot a$, ebből F legfeljebb <u>87,5 N</u>.

2.51. Vízszintes lapon fonállal összekötött $m_1 = 2$ kg, illetve $m_2 = 4$ kg tömegű hasáb fekszik. Az m_2 tömegű hasábhoz csigán átvetett fonalat kötünk, és annak végére $m_3 = 3$ kg tömegű testet akasztunk.



a) Mekkora gyorsulással mozog a rendszer, ha a súrlódástól és a csiga tömegétől eltekintünk?

b) Mekkora erő feszíti ebben az esetben az egyes fonalakat?

Megoldás:

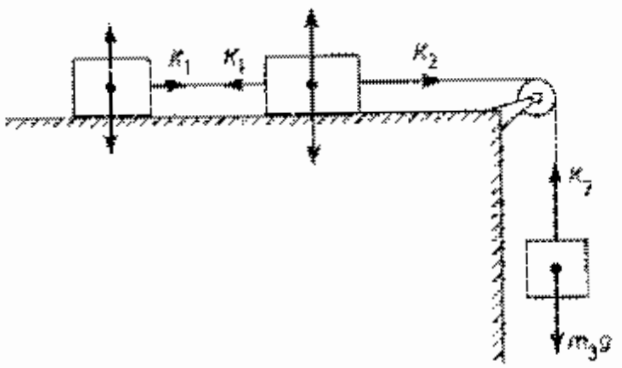
2.51. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 4$ kg; $m_3 = 3$ kg; $\mu = 0$.

A mozgásegyenletek:

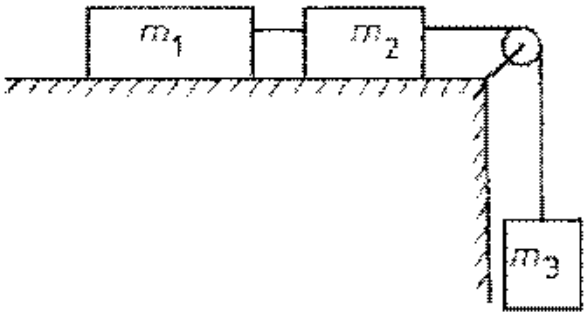
$$\left.\begin{aligned} K_1 &= m_1 \cdot a \\ K_2 - K_1 &= m_2 \cdot a \\ m_3 \cdot g - K_2 &= m_3 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

ebből $a = 3{,}33 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$K_1 = 6{,}67$ N; $K_2 = 20$ N.



2.52. Vízszintes lapon fonállal összekötött m_1, illetve m_2 tömegű test fekszik. Az m_2 tömegű testhez csigán átvetett fonalat kötünk, és annak a végére m_3 tömegű testet erősítünk. Az asztal és a rajta fekvő testek között a súrlódási együttható μ. Legyen $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg és $m_3 = 1{,}5$ kg; a csiga és a fonalak tömege elhanyagolható, $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $\mu = 0{,}2$.



a) Mekkora gyorsulással mozog a rendszer?
b) Mekkora erő feszíti az egyes fonalakat?

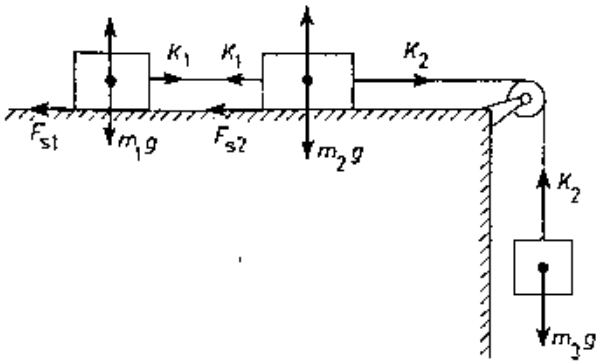
Megoldás:

2.52. $\mu = 0{,}2$; $m_1 = 3$ kg; $m_3 = 1{,}5$ kg; $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$F_s = \mu \cdot m \cdot g$

A mozgásegyenletek:

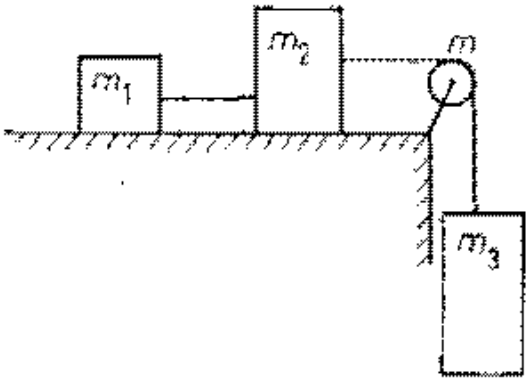
$$\left.\begin{aligned} K_1 - F_{s1} &= m_1 \cdot a \\ K_2 - K_1 - F_{s2} &= m_2 \cdot a \\ m_3 \cdot g - K_2 &= m_3 \cdot a \end{aligned}\right\},$$



ebből $a = 0{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

$K_1 = 8{,}14$ N; $K_2 = 13{,}56$ N.

2.53. Vízszintes lapon fonállal összekötött $m_1 = 2$ kg, illetve $m_2 = 3$ kg tömegű hasáb fekszik. Az m_2 tömegű hasábhoz csigán átvetett fonalat erősítünk, és annak végére 4 kg tömegű testet függesztünk. A csiga tömege 1,5 kg, átmérője 10 cm. A fonál tömege és a súrlódás mindenütt elhanyagolható. $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$



a) Mekkora a rendszer gyorsulása?
b) Mekkora erő feszíti a fonalakat?

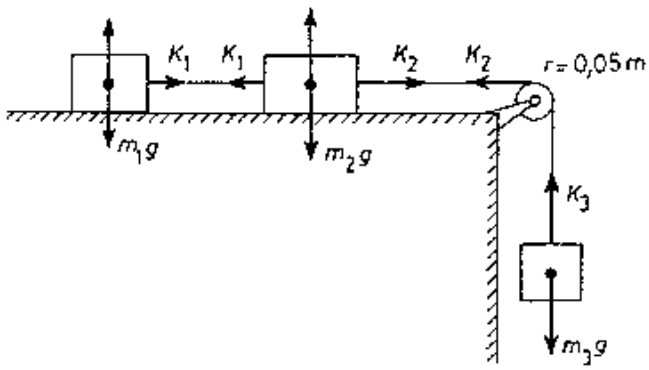
Megoldás:

2.53. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg; $m_3 = 4$ kg; $m = 1{,}5$ kg; $d = 10$ cm $= 0{,}1$ m.
A csiga forgómozgást végez. A forgómozgás alapegyenlete:

$\sum M = \Theta \cdot \beta$, ahol $M = K \cdot r$ és $\Theta = \frac{1}{2} m r^2$.

A csiga érintőirányú gyorsulása megegyezik a rendszer gyorsulásával.
A mozgásegyenletek:

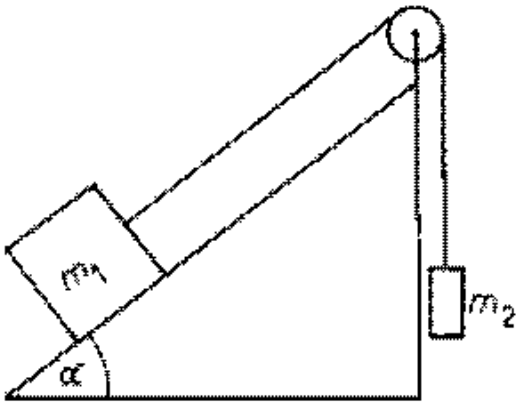
$$\left.\begin{aligned} K_1 &= m_1 \cdot a \\ K_2 - K_1 &= m_2 \cdot a \\ (K_3 - K_2) \cdot r &= \Theta \cdot \beta \\ m_3 \cdot g - K_3 &= m_3 \cdot a \\ \beta = \frac{a_é}{r} &= \frac{a}{r} \end{aligned}\right\},$$



ebből $\underline{\underline{a = 4{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$; $\underline{\underline{K_1 = 8{,}2 \text{ N}}}$; $\underline{\underline{K_2 = 20{,}5 \text{ N}}}$; $\underline{\underline{K_3 = 23{,}6 \text{ N}}}$.

2.54. 30°-os hajlásszögű lejtőre helyezett $m_1 = 5$ kg tömegű testhez a lejtő tetején felerősített csigán átvetett fonalat kötünk, a fonal másik végére $m_2 = 2$ kg tömegű testet akasztunk. A csiga és a fonál tömegét, valamint a súrlódást hanyagoljuk el!

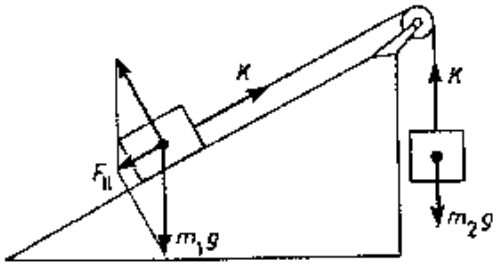
a) Mekkora a magára hagyott rendszer gyorsulása?
b) Mekkora erő feszíti a fonalat?
c) Mekkora sebességet ér el a kezdősebesség nélkül induló rendszer, amíg az m_2 tömegű test 40 cm-t mozdul el?



Megoldás:

2.54. $\alpha = 30°$; $m_1 = 5$ kg; $m_2 = 2$ kg; $\mu = 0$.

a) $F_{\parallel} = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha$.



A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} F_{\parallel} - K &= m_1 \cdot a \\ K - m_2 \cdot g &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

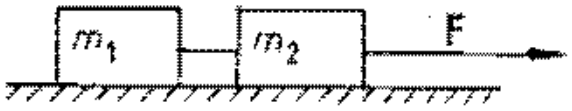
ebből $a = 0{,}71 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a lejtőn lefelé mutató.

b) $K = 21{,}4$ N.

c) $v_0 = 0$; $s = 40$ cm $= 0{,}4$ m.

$s = \frac{a}{2}t^2$; ebből $t = 1{,}06$ s; $v = a \cdot t = 0{,}75 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lejtőn lefelé mutató.

2.55. Vízszintes lapon elhelyezett $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 3$ kg tömegű téglatestet fonállal kötünk össze. Az m_2 tömegű testre $F = 100$ N vízszintes irányú erővel hatunk.

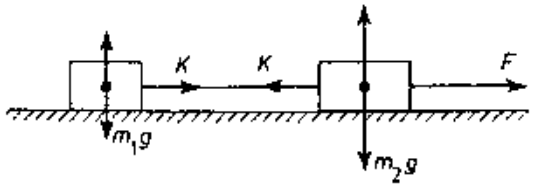


a) Mekkora a rendszer gyorsulása, ha a súrlódás elhanyagolható?

b) Mekkora erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

2.55. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg; $F = 100$ N; $\mu = 0$.

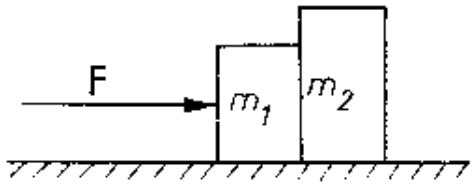


a) A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} K &= m_1 \cdot a \\ F - K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{a = 20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

b) $\underline{\underline{K = 40 \text{ N}}}$.

2.56. Vízszintes asztallapra egymás mellé $m_1 = 4$ kg és $m_2 = 6$ kg tömegű téglatesteket helyezünk. A két téglatestet megtoljuk. Az erő 20 N nagyságú, az m_1 tömegű testre hat vízszintes irányban, az érintkező oldallapokra merőlegesen.

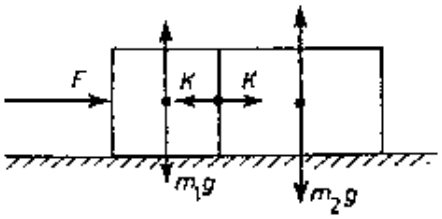


a) Mekkora a téglák gyorsulása, ha a súrlódástól eltekintünk?

b) Mekkora erővel nyomja az egyik test a másikat?

Megoldás:

2.56. $m_1 = 4$ kg; $m_2 = 6$ kg; $F = 20$ N; $\mu = 0$.

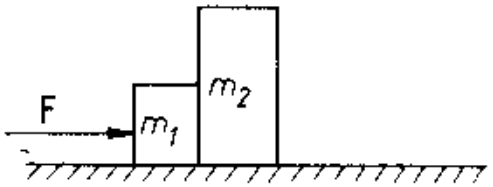


a) A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} F - K &= m_1 \cdot a \\ K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{a = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

b) $\underline{k = 12 \text{ N}}$.

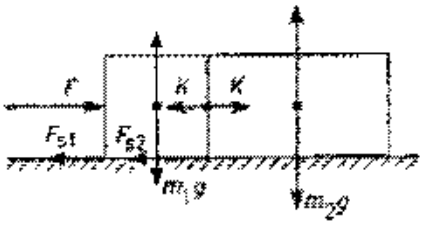
2.57. Vízszintes asztallapra egymás mellé $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 8$ kg tömegű téglatesteket helyezünk. Az m_1 tömegű téglatest oldallapjára merőlegesen, vízszintes irányú, $F = 30$ N nagyságú erővel hatunk, amelytől az m_2 tömegű is elmozdul.



a) Mekkora a téglák gyorsulása, ha az asztal és a téglatestek között a súrlódási együttható 0,2?
b) Mekkora erővel nyomja az egyik test a másikat?

Megoldás:

2.57. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 8$ kg; $F = 30$ N; $\mu = 0{,}2$.

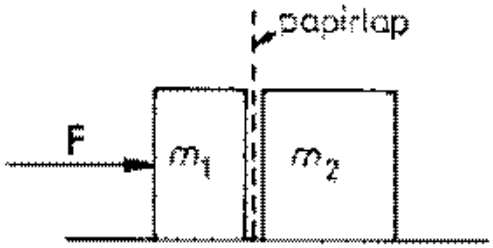


a) $F_s = \mu \cdot m \cdot g$. A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} F - K - F_{s1} &= m_1 \cdot a \\ K - F_{s2} &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{a = 1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

b) $\underline{\underline{k = 24 \text{ N}}}$.

2.58. Vízszintes asztallapra egymás mellé helyezünk $m_1 = 3$ kg és $m_2 = 5$ kg tömegű téglatesteket. Az m_1 téglatest oldallapjára merőlegesen vízszintes irányú, $F = 32$ N nagyságú erővel hatunk úgy, hogy az az m_2 tömegű téglatestet is tolni kezdi maga előtt. A két téglatest közé elhanyagolható tömegű papírlapot helyezünk. A téglatestek és az asztallap közötti súrlódástól tekintsünk el!



a) Mekkora a rendszer gyorsulása?

b) Mekkora erővel tudjuk kihúzni a téglák közül a papírlapot, ha a papírlap és a téglák közötti súrlódási együttható 0,1?

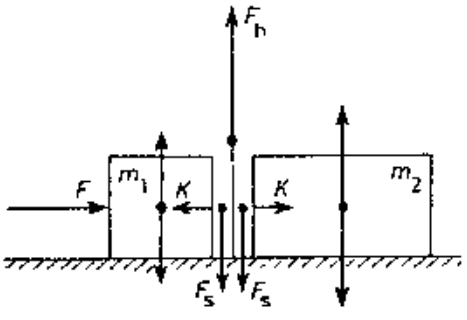
Megoldás:

2.58. $m_1 = 3$ kg; $m_2 = 5$ kg; $F = 32$ N; $\mu = 0$.

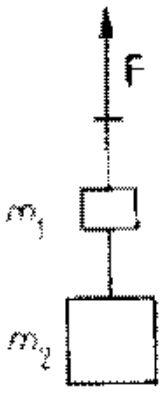
a) Lásd a 2.56.*a)* feladat megoldását! $\underline{\underline{a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$ és $\underline{\underline{K = 20\ \text{N}}}$.

b) $\mu = 0{,}1$.

A lap és a tégla között a lap mindkét oldalán hat a súrlódási erő: $F_s = \mu \cdot K$, $|F_h| = 2 \cdot |F_s| = \underline{\underline{4\ \text{N}}}$ erővel lehet a papírlapot kihúzni a téglák közül.



2.59. Az $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 4$ kg tömegű testeket zsineggel függesztünk fel az ábra szerint.



a) Mekkora F erőt kell a felső zsinegre kifejteni ahhoz, hogy a két testet a földfelszín fölött tartsuk?

b) Mekkora erővel kell hatni a felső zsinegre, hogy a két test felfelé irányuló $1{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással mozogjon?

c) A *b)*-ben leírt feltételek mellett mekkora erő feszíti a két testet összekötő zsineget?

Megoldás:

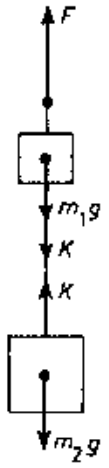
2.59. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 4$ kg.

a) $F = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g = \underline{\underline{60\ \mathrm{N}}}$.

b) $a = 1{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; felfelé pozitív az irány.

A mozgásegyenletek:

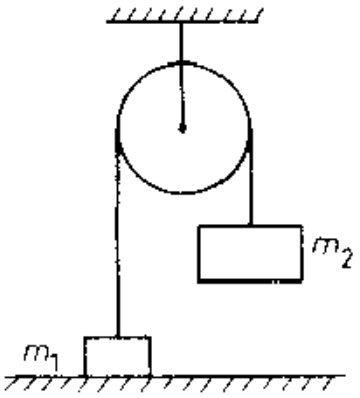
$$\left.\begin{aligned} F - m_1 \cdot g - K &= m_1 \cdot a \\ K - m_2 \cdot g &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{F = 67{,}2\ \mathrm{N}}}.$$



c) $\underline{\underline{K = 44{,}8\ \mathrm{N}}}$.

2.60. Az $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 3$ kg tömegű testeket elhanyagolható tömegű álló csigán átvetett fonál két végére akasztjuk, és m_1-et asztalra helyezve tartjuk.

a) Mekkora a tartóerő?
b) Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a rendszer nyugalomban van?
c) Mekkora lesz a fonalat feszítő erő, ha az m_1 tömegű testet elengedjük?



Megoldás:

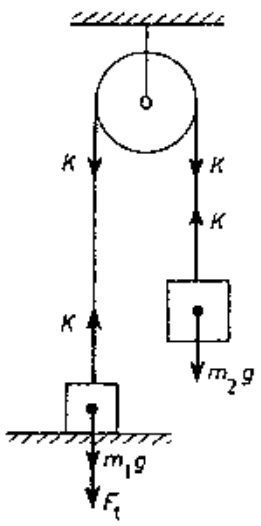
2.60. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg.

a) A rendszer nyugalomban van: $\sum F = 0$.
$K - m_2 g = 0$, ebből $K = 30$ N.
$-K + F_t + m_1 \cdot g = 0$, ebből $\underline{\underline{F_t = 10 \text{ N}}}$ lefelé ható erővel kell nyomni az asztalhoz az m_1 tömegű testet.

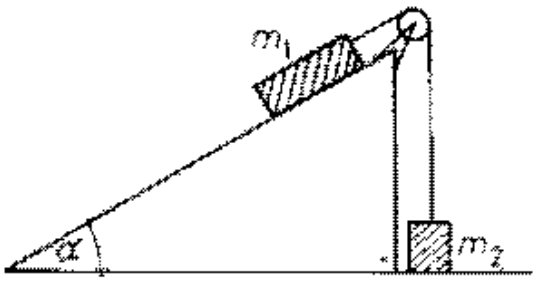
b) $\underline{\underline{K = 30 \text{ N}}}$.

c) Elengedés után F_t megszűnik, a mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m_2 \cdot g - K &= m_2 \cdot a \\ K - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}; \quad \underline{\underline{K = 24 \text{ N}}}.$$



2.61. Legyen az ábra szerinti elrendezésben a súrlódás mindenhol elhanyagolható! Az $m_1 = 5$ kg és $m_2 = 2$ kg tömegű testet összekötő fonál nyújthatatlan és elhanyagolhatóan kis tömegű. Eltekinthetünk a csiga tömegétől is. A lejtő hossza $l = 2{,}5$ m, $\alpha = 30°$.



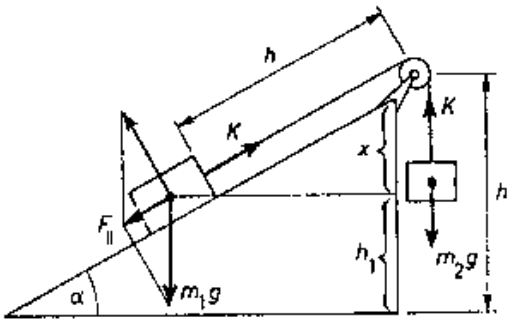
(Kezdetben az m_2 tömegű test a lejtő aljával egy szintben helyezkedett el, az m_1 tömegű pedig a lejtő tetején állt.)

a) Határozzuk meg a testek sebességét a munkatétel segítségével abban a pillanatban, amikor az m_2 tömegű test éppen eléri a csigát!

b) Ábrázoljuk mindkét test helyzeti és mozgási energiáját az idő függvényében!

Megoldás:

2.61. $\mu = 0$; $m_1 = 5$ kg; $m_2 = 2$ kg; $l = 2{,}5$ m; $\alpha = 30°$; $v_0 = 0$.



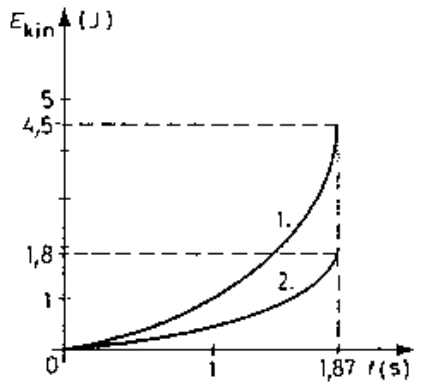
a) $F_{\parallel} = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha = 25$ N;
$h = 1 \cdot \sin\alpha = 1{,}25$ m;
$\sum W_{\text{külső}} = \Delta E_{\text{kin}}$;
$\sum W_{\text{külső}} = (F_{\parallel} - m_2 \cdot g) \cdot h = 6{,}26$ J;
$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 - 0$, ebből
$v = 1{,}34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ az elért sebesség.

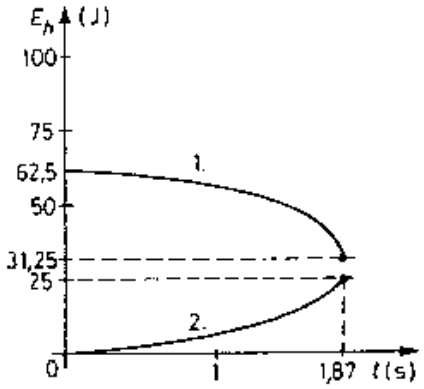
b) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$; $E_{\text{kin}\,1} = 4{,}5$ J; $E_{\text{kin}\,2} = 1{,}8$ J; $E_{\text{kin}\,0} = 0$.

$h = \frac{v_0 + v}{2} t$, ebből $t = 1{,}87$ s; $E_{\text{kin}\,1} = \frac{m_1 \cdot a^2 \cdot t^2}{2}$; $E_{\text{kin}\,2} = \frac{m_2 \cdot a^2 \cdot t^2}{2} t$.

$E_{\text{kin}} \sim t^2$, tehát mindkét görbe parabolaív;

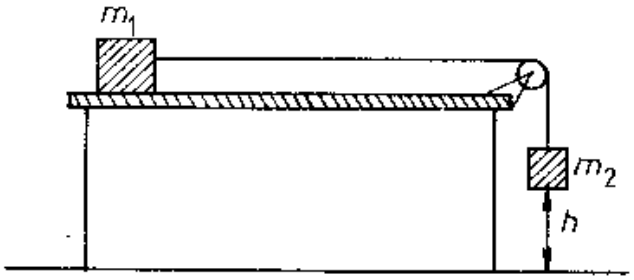
$E_{\text{h}01} = m_1 \cdot g \cdot h = 62{,}5$ J; $E_{\text{h}1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 = 31{,}25$ J; $h_1 = h - x =$
$= h - h \cdot \sin\alpha = h - \frac{a}{2} t^2 \cdot \sin\alpha$; $E_{\text{h}1} = m_1 \cdot g \cdot \left(h - \frac{a}{2} t^2 \cdot \sin\alpha\right) \rightarrow$
a görbe maximummal rendelkező parabolaív.





$E_{\text{h}02} = 0$; $E_{\text{h}2} = m_2 \cdot g \cdot h = 25$ J; $h = \frac{a}{2} t^2$; $E_{\text{h}2} = m_2 \cdot g \cdot \frac{a}{2} t^2 \rightarrow$
a görbe minimummal rendelkező parabolaív.

2.62. A 2 méter hosszú, vízszintes asztallapon elhelyezett $m_1 = 3$ kg tömegű testhez egy súrlódásmentes állócsigán átvetett kötél végére $m_2 = 2{,}5$ kg tömegű testet akasztunk. A csiga és a kötél tömege elhanyagolható. Az ábra szerinti elrendezésben az m_2 tömegű test kezdetben $h = 80$ cm magasban van a talaj fölött.



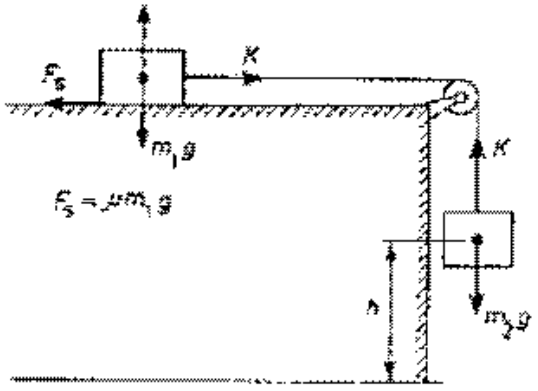
Mekkora sebességgel ér az m_2 tömegű test a talajhoz, ha az asztallap és az m_1 tömegű test között a csúszási súrlódási együttható 0,25?

Megoldás:

2.62. $l = 2$ m; $m_1 = 3$ kg; $m_2 = 2{,}5$ kg; $h = 80$ cm $= 0{,}8$ m; $\mu = 0{,}25$.
A mozgásegyenletek:

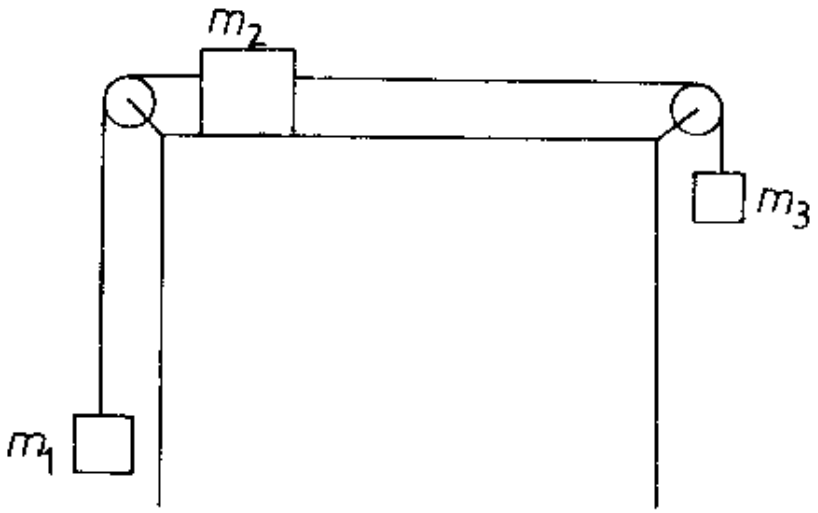
$$\left.\begin{aligned} K - F_s &= m_1 \cdot a \\ m_2 \cdot g - K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \quad \text{ebből } a = 3{,}18 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$h = \frac{a}{2} t^2$, ebből $t = 0{,}7$ s. $\underline{\underline{v = a \cdot t = 2{,}26 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.



2.63. Az ábrán látható elrendezésben $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 6$ kg, $m_3 = 3$ kg.

A testeket összekötő fonál és a csigák tömege, valamint a súrlódás mindenhol elhanyagolható.



a) Mekkora az m_2 tömegű test gyorsulása?

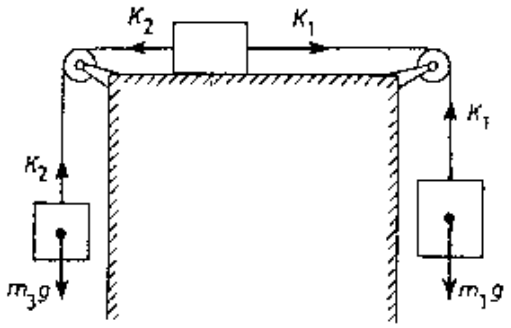
b) Mekkora sebességre tud felgyorsulni 2 m út megtétele után az m_2 tömegű test?

c) Ábrázoljuk az m_2 tömegű test sebességét és gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

2.63. $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 6$ kg; $m_3 = 3$ kg; $\mu = 0$.

a) A rendszer minden tagja egyforma gyorsulással mozog, a mozgásegyenletek:

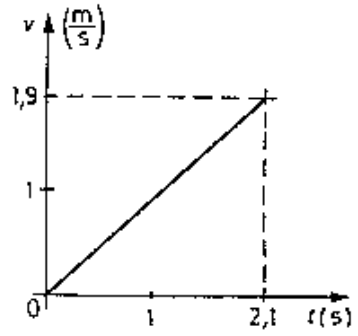


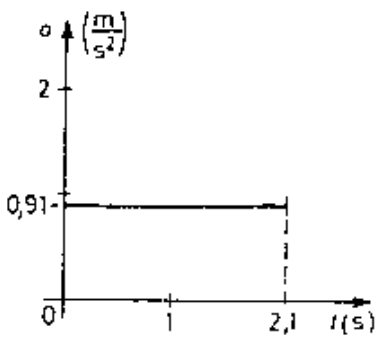
$$\left.\begin{aligned} m_3 \cdot g - K_2 &= m_3 \cdot a \\ K_2 - K_1 &= m_2 \cdot a \\ K_1 - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

ebből $\underline{\underline{a = 0{,}91 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

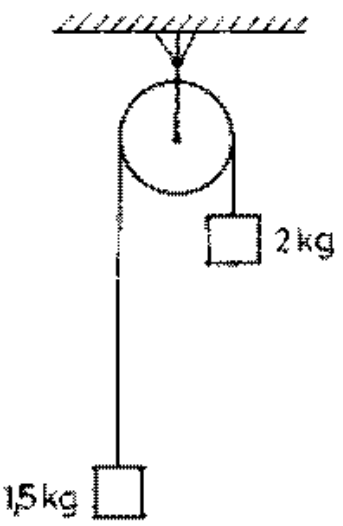
b) $s = 2$ m; $s = \frac{a}{2}t^2$; $t = 2{,}1$ s; $\underline{\underline{v = a \cdot t = 1{,}9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

c)





2.64. Egy súrlódásmentes és elhanyagolható tömegű állócsigán átvetett, nyújthatatlan és elhanyagolható tömegű fonál végeire 1,5 kg és 2 kg tömegű testeket erősítünk, majd elengedjük azokat.



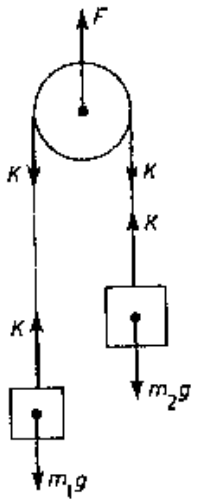
a) Mekkora gyorsulással mozog a rendszer?

b) Mekkora lesz a testek sebessége az elengedéstől számított 2 s múlva?

c) Mekkora erő feszíti a csigát felfüggesztő fonalat?

Megoldás:

2.64. $m_1 = 1{,}5$ kg; $m_2 = 2$ kg.



a) A mozgásegyenletet:

$$\left.\begin{aligned} m_2 \cdot g - K &= m_2 \cdot a \\ K - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \end{aligned}\right\},$$ ebből $\underline{\underline{a = 1{,}43 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$; $K = 17{,}15$ N.

b) $t = 2$ s; $\underline{\underline{v = a \cdot t = 2{,}86 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

c) A csigát felfüggesztő fonalat feszítő erő

$\underline{\underline{|F_t| = 2 \cdot K = 34{,}3 \text{ N}}}$.

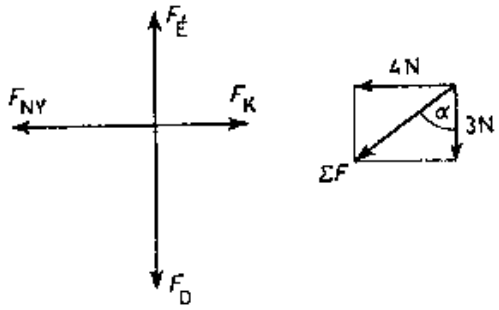
2.65. Egy merev test tömegközéppontjában négy erő hat: északi irányba 8 N; kelet felé 6 N; dél felé 11 N és nyugat felé 10 N. Ezen erők hatására a test $2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással mozog.

a) Mekkora a test tömege?

b) Mekkora szöget zár be a gyorsulásvektor a déli iránnyal?

Megoldás:

2.65. $a = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $F_E = 8$ N; $F_K = 6$ N; $F_D = 11$ N; $F_{NY} = 10$ N.



a) Az erők vektori eredője az ábrából:

$\sum F = m \cdot a_1$; $|\sum F| = 5$ N.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4\ \mathrm{N}}{3\ \mathrm{N}}$, $\alpha = 53{,}13°$.

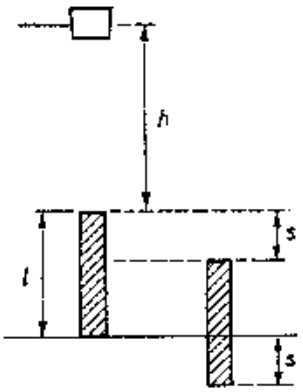
$m = 2{,}5$ kg.

b) A gyorulásvektor az eredő erő irányába mutat, a déli iránnyal 53,13°-os szöget zár be nyugat felé.

2.66. Egy 800 kg tömegű cölöpverő kalapács 2 m magasról esik a cölöpre.
Mennyire nyomul be a cölöp a földbe, ha a föld ellenálló ereje 10^5 N?

Megoldás:

2.66. $m = 800$ kg; $h = 2$ m; $F = 10^5$ N.



A bevert cölöp tetejéhez viszonyítva a helyzeti energia:

$\Delta E_h = F \cdot s$; $m \cdot g \cdot (h + s) = F \cdot s$.

A cölöp benyomódása: $s = 0{,}17$ m.

(A megoldásban a cölöp tömegét elhanyagoltuk a kalapácséhoz képest, és elhanyagoltuk azt a munkát is, amely a rugalmatlan ütközéskor a testek maradó alakváltozásában és felmelegedésében testesül meg.)

2.67. Egy 12 m hosszú, 3 m magas lejtő tetején elengedünk egy m tömegű testet. A test lecsúszik a lejtőn. A test és a lejtő között a súrlódási együttható 0,15.

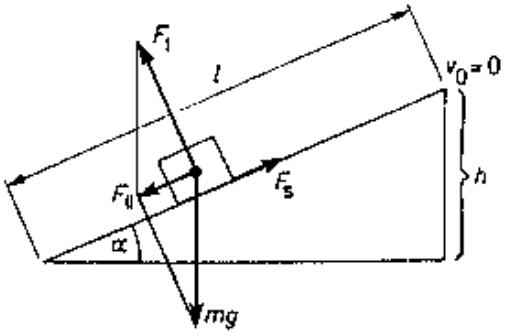
a) Mekkora lesz a test sebessége a lejtő alján?
b) Mennyi idő alatt ér a test a lejtő aljához?

Megoldás:

2.67. $l = 12$ m; $h = 3$ m; m; $\mu = 0{,}15$.

a) Egyenletesen változó mozgással mozog a test.

$$\left.\begin{array}{r} \sum F = m \cdot a; \\ \sum F = F_{\parallel} - F_s, \text{ ahol} \\ F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha; \\ F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha \end{array}\right\}, \text{ ebből}$$



$a = g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = 1{,}05 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$l = \frac{a}{2}t^2$; ebből $t = 4{,}78$ s; $v = a \cdot t = 5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebessége alejtő alján.

b) $t = 4{,}78$ s.

2.68. Egy 60°-os hajlásszögű lejtőn felfelé lökünk egy testet a lejtő síkjával párhuzamosan, $12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. A lejtő és a test között a súrlódási együttható 0,2.

a) Milyen magasra csúszik fel a lejtőn a test?

b) Mekkora sebességgel érkezik vissza a test a lejtő aljához?

c) Mennyi ideig tartott a test fel- és lecsúszása?

Megoldás:

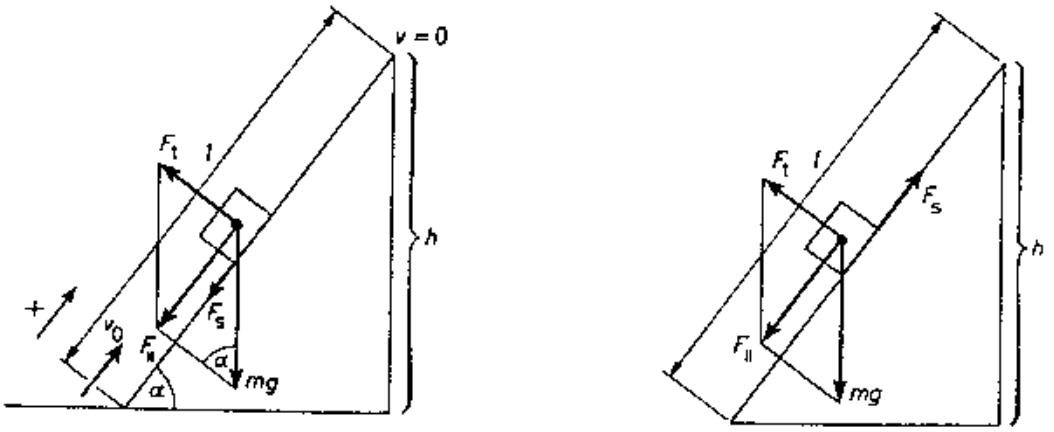
2.68. $\alpha = 60°$; $v_0 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}2$; $v = 0$.

a) $F_s = \mu \cdot s \cdot g \cdot \cos\alpha$; $F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$; $l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Alkalmazva a munkatételt: $\Delta E_{\text{kin}} = \sum F \cdot l$;

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = (-F_{\parallel} - F_s) \cdot l.$$

$$0 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = (-m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}.$$



Egyszerűsítve $m \neq 0$-val: $h = \dfrac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (1 + \mu \cdot \operatorname{ctg}\alpha)} = \underline{\underline{6{,}45\ \text{m}}}$ magasra csúszik fel a lejtőn a test.

b) Alkalmazva a munkatételt: $\Delta E_{kin} = \sum F \cdot l$;

$\frac{1}{2}m \cdot v_t^2 - \frac{1}{2}m \cdot v^2 = (F_{\parallel} - F_s) \cdot l$, $\frac{1}{2}m \cdot v_t^2 - 0 = (m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha) \cdot l$.

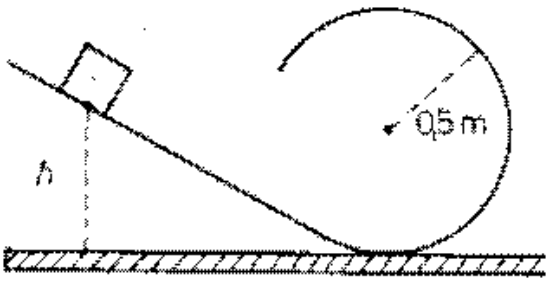
Egyszerűsítve $m \neq 0$-val:

$\underline{\underline{v_t}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot l} = \underline{\underline{10{,}7 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a test sebessége a lejtő alján.

c) Az út felfelé:

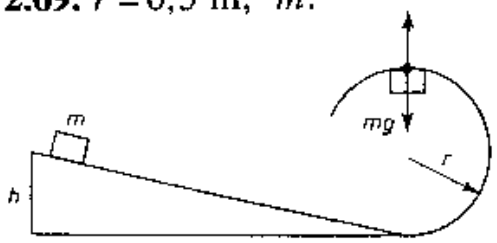
$l = \frac{h}{\sin\alpha} = 7{,}45$ m. $l = \frac{v_0 + v}{2}t_1$, és lefelé: $l = \frac{v + v_t}{2}t_2$, ezekből az idő felfelé $\underline{\underline{t_1 = 1{,}24 \text{ s}}}$ és lefelé $\underline{\underline{t_2 = 1{,}4 \text{ s}}}$. $t = t_1 + t_2 = 2{,}64$ s.

2.69. Egy lejtő lemezből hajlított, 0,5 m sugarú, függőleges síkú körpályában folytatódik. Mekkora h magasságból kell elengednünk az m tömegű kicsiny testet, hogy a test a körpálya belső felületén végighaladjon? (A súrlódást hanyagoljuk el!)



Megoldás:

2.69. $r = 0{,}5$ m; m.



A körpálya tetőpontján:

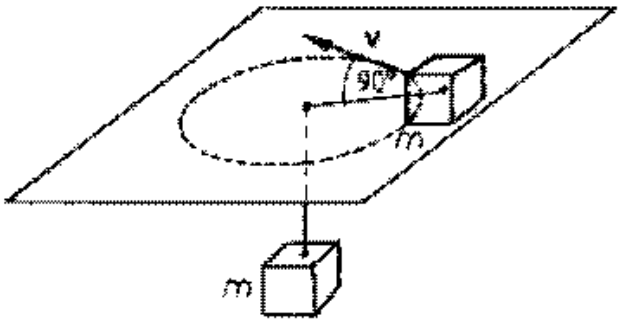
$$m \cdot g = \frac{m \cdot v_{min}^2}{r}; \quad v_{min} = \sqrt{r \cdot g}.$$

Az energiamegmaradás törvénye miatt:

$$E_h \geq E_{kin} + E_{2r}; \quad m \cdot g \cdot h \geq \frac{1}{2} m \cdot v_{min}^2 + m \cdot g \cdot 2r, \text{ ebből } h \geq \frac{v^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot r = \frac{5r}{2}.$$

$\underline{\underline{h \geq 1{,}25 \text{ m}}}$.

2.70. Vízszintes sík lapba fúrt lyukon fonalat fűzünk át. A fonál mindkét végére m tömegű testet kötünk. Az egyik test a lapon fekszik, a másik függőlegesen lóg lefelé, az ábra szerint.



Mekkora sebességgel kell a lapon lévő testet a fonálra merőleges irányban ellökni, ha a fonál asztalon feszülő része 40 cm, és azt akarjuk, hogy a fonálon függő test nyugalomban maradjon?
(A súrlódást hanyagoljuk el!)

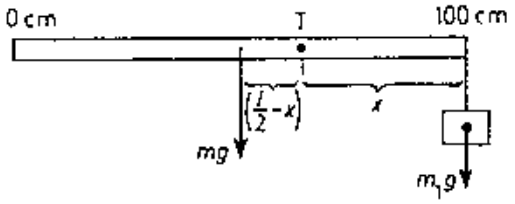
Megoldás:

2.70. $r = 40\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{m}$; $\mu = 0$; $v \perp r$.
A vízszintes lapon levő testet a függő test súlya tartja körpályán; $v \perp r$;
$m \cdot g = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$; ebből $\underline{\underline{v = 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

2.71. Egyenletes tömegeloszlású méterrúd tömege 200 g. Melyik beosztásnál lesz a tömegközéppont, ha a rúd 100 cm-rel jelölt végére 50 g tömegű testet akasztunk?

Megoldás:

2.71. $m = 200\ \text{kg} = 0{,}2\ \text{kg}$; $m_1 = 50\ \text{g} = 0{,}05\ \text{kg}$; $l = 100\ \text{cm} = 1\ \text{m}$.



A keresett tömegközéppontra a rúd és a ráakasztott test forgatónyomatékainak összege 0.

$m \cdot g \left(\frac{l}{2} - x\right) - m_1 \cdot g \cdot x = 0$, ebből

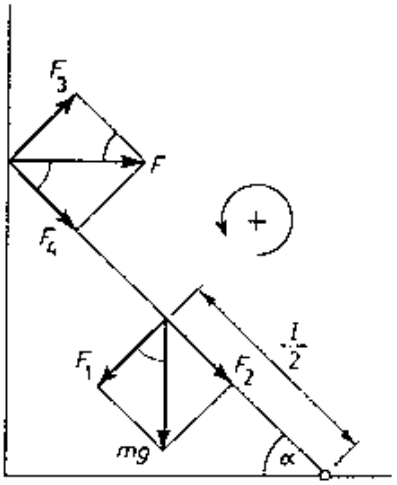
$x = 0{,}4\ \text{m}$.

A 60 cm-es beosztásnál lesz a tömegközéppont.

2.72. Egy 50 kg tömegű, egyenletes tömegeloszlású gerendát súrlódásmentes falhoz támasztottunk úgy, hogy a gerenda a talajjal 45°-os szöget zár be.
Mekkora erővel nyomja a gerenda a falat?

Megoldás:

2.72. $m = 50$ kg; $\mu = 0$; $\alpha = 45°$.



Az A pontra írva fel a forgatónyomatékokat: F_2 és F_4 forgatónyomatéka 0. (Az erővektorok átmennek a forgástengelyen.)

$F_1 \frac{1}{2} - F_3 \cdot l = 0$, ahol $F_1 = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ és $F_3 = F \cdot \sin\alpha$;

$m \cdot g \cdot \cos\alpha \frac{1}{2} - F \cdot \sin\alpha \cdot l = 0$; ebből $\underline{\underline{F = 250 \text{ N}}}$.

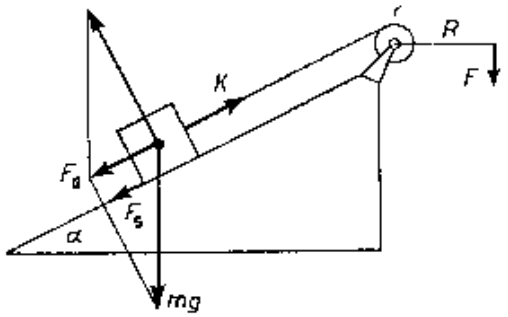
A falra F ellenereje hat (Newton III. törvénye), tehát a rúd 250 N erővel nyomja a falat.

2.73. Egy 30°-os hajlásszögű lejtő felső végére hengerkereket szereltek, amelyre csévélődő kötél segítségével húznak felfelé egy 200 kg tömegű terhet. A henger sugara 15 cm, a forgató kar hossza 75 cm, a tehertől feszülő kötél párhuzamos a lejtő hosszával.
Mekkora erő kell a kar forgatásához, ha a teher és a lejtő között a súrlódási együttható értéke 0,2?

Megoldás:

2.73. $\alpha = 30°$; $m = 200$ kg; $r = 15$ cm $= 0{,}15$ m; $R = 75$ cm $= 0{,}75$ m; $\mu = 0{,}2$.

Nyilván a legkisebb erőt szeretnénk kifejteni, ami akkor teljesül, ha egyenletesen mozog a teher és a hengerkerék is.

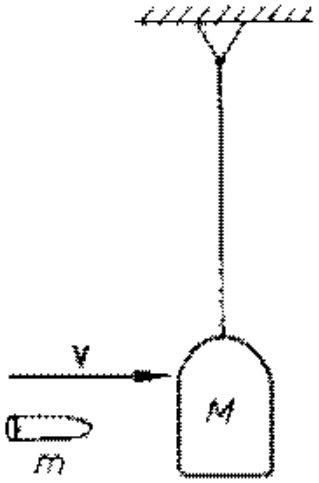


$\sum F = 0$; $K - F_{\parallel} - F_s = 0$, ahol $F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ és $F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$; amiből $K = 1346$ N.

$\sum M = 0$; $K \cdot r - F \cdot R = 0$, amiből $F = 269$ N.

A forgatókarra ható erő nagysága 269 N.

2.74. A 80 kg tömegű homokkal töltött zsákot kötél végére erősítve ingaszerűen felfüggesztjük. Az inga középpontja $l = 1{,}8$ m távolságban van a felfüggesztési ponttól. Vízszintes irányú sebességgel a zsákba lövünk egy $m = 220$ g tömegű lövedéket. A lövedék becsapódása után az inga 15°-kal kilendül.
Mekkora volt a lövedék sebessége?



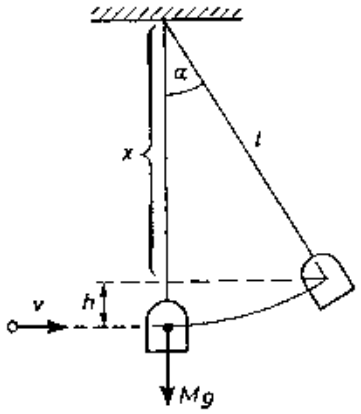
Megoldás:

2.74. $M = 80$ kg; $l = 1{,}8$ m; $m = 220$ g $= 0{,}22$ kg; $\alpha = 15°$.

Az ütközés rugalmatlan:

$m \cdot v = (m + M) \cdot v_1$, amiből az ütközés utáni közös sebesség: $v_1 = \dfrac{m \cdot v}{m + M}$.

A nyugvó zsák súlypontjához viszonyítva a helyzeti energiát, és alkalmazva az energiamegmaradás törvényét:



$\frac{1}{2}(M + m) \cdot v_1^2 = (M + m) \cdot g \cdot h$, ahol $h = l - x = l - l\cos\alpha$.

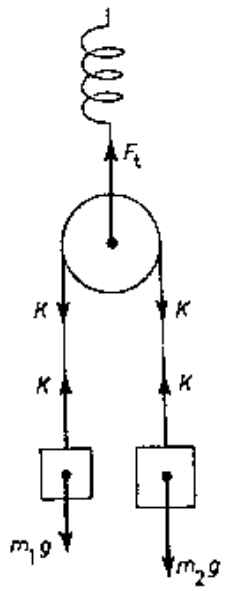
Ezekből: $v = \dfrac{M + m}{m}\sqrt{2 \cdot g \cdot l(l - \cos\alpha)} = 403{,}85\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

A lövedék becsapódási sebessége $403{,}85\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.75. Egy rugós erőmérőre függesztett csigán fonal van átvetve, melynek végeire $m_1 = 50$ g és $m_2 = 75$ g tömegű testek vannak akasztva.
Mekkora erőt jelez az erőmérő, ha a rendszert magára hagyjuk?
(A csiga és a fonal tömege, valamint a csiga tengelysúrlódása elhanyagolható.)

Megoldás:

2.75. $m_1 = 50$ g $= 0{,}05$ kg; $m_2 = 75$ g $= 0{,}075$ kg.

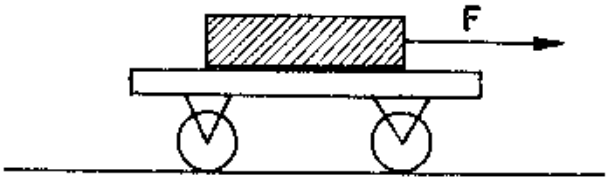


A csiga haladó mozgást nem végez:
$\sum F = 0$; $F_t - 2 \cdot K = 0$.
A fonalra akasztott testek mozgásegyenlete:

$$\left.\begin{aligned} K - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \\ m_2 g - K &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};\quad K = 0{,}6\ \text{N}.$$

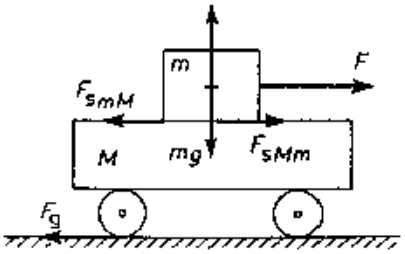
Tehát az erőmérő $\underline{\underline{F_t = 1{,}2\ \text{N}}}$ erőt mutat.

2.76. Az 5 kg tömegű kiskocsi vízszintes sík lapján 2 kg tömegű test fekszik. A kiskocsi és a talaj között a gördülési ellenállási tényező 0,02, a kocsi és a rajta fekvő test között a csúszó súrlódási együttható 0,3.
Mekkora a test és a kocsi gyorsulása a vízszintes talajhoz rögzített jelhez képest, ha vízszintes irányban 20 N erővel hatunk a testre?



Megoldás:

2.76. $M = 5$ kg; $m = 2$ kg; $\mu_g = 0{,}02$; $\mu = 0{,}3$; $F = 20$ N.



A kocsit a hasáb és a kocsi közötti súrlódási erő, és a talaj és a kocsi közötti gördülési ellenállási erő eredője gyorsítja, a hasábot pedig a húzóerő és a súrlódási erő eredője.
$F_s = \mu \cdot m \cdot g = 6$ N; $F_g = \mu_g \cdot (M + m) \cdot g = 1{,}4$ N.
A mozgásegyenletek:

$F_s - F_g = M \cdot a_2$, ebből $a_2 = 0{,}92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a kocsi gyorsulása;

$F - F_s = m \cdot a_1$, ebből $a_1 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a hasáb gyorsulása.

(Megjegyzés. Legyen a kocsi és a test közötti erő F_{tk}, akkor a mozgásegyenletek:

$F - F_{tk} = m \cdot a$ és $F_{tk} - F_g = M \cdot a$, ezekből $a = 2{,}66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $F_{tk} = 14{,}7$ N.
Viszont $F_{tk} < \mu \cdot m \cdot g = 6$ N feltétel nem teljesül, így a hasáb megcsúszik a kocsi felületén.)

2.77. A $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel vízszintesen kelet felé repülő lövedék két darabra robban. Az $m_1 = 1{,}5$ kg tömegű rész továbbra is vízszintesen mozog kelet felé, de sebessége $v_1 = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra növekedett.

Mekkora és milyen irányú a másik, $m_2 = 1$ kg tömegű darab sebessége?

Megoldás:

2.77. $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_1 = 1{,}5$ kg; $v_1 = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 1$ kg. Kelet felé pozitív a sebesség.

Robbanáskor csak belső erők hatnak, tehát alkalmazható a mozgásmennyiség megmaradásának tétele:

$(m_1 + m_2) \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$, ebből $\underline{\underline{v_2 = -125 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

Az 1 Kg tömegű test 125 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel nyugat felé fog mozogni a robbanás után.

3.1. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Milyen erő gyorsítja az induló teherautó platóján fekvő ládát?

b) Milyen erő változtatja a szabadon eső test lendületét?

c) Egy emelődaru és egy helikopter azonos tömegű testeket tart. Végez-e munkát az emelődaru, illetve a helikopter a terhen, ha az áll, vízszintesen mozog, vagy felemelkedik?

d) Mekkora erőt képes kifejteni a 100 kW hasznos teljesítményű traktor a $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel vontatott ekére?

e) Változik-e a görbe vonalú pályán állandó nagyságú sebességgel mozgó test impulzusa?

Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

3.1. **a)** Ha az autó vízszintes pályán halad és a plató is vízszintes, akkor a teherautó és a platóján fekvő láda között fellépő súrlódási erő.

b) A nehézségi erő.

c) $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$; $F = m \cdot g$ – ha áll a test, akkor sem a daru, sem a helikopter nem végez munkát a testen, mert nincs elmozdulás. Ha vízszintesen mozog, akkor sem, mert $\alpha = 90°$. Ha a teher emelkedik, akkor van munkavégzés.

d) $P = 100\ \text{kW} = 10^5\ \text{W}$; $v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, egyenletes a mozgás: $P = F \cdot v$, ebből $\underline{\underline{F = 5 \cdot 10^5\ \text{N}}}$.

e) $\mathbf{I} = m \cdot \mathbf{v}$ vektormennyiség, mivel $\mathbf{v}$ iránya változik, $\mathbf{I}$ iránya is megváltozik.

3.2. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Növelheti-e egy test sebességét a súrlódási erő?
b) Változik-e a szabadon eső test impulzusa?
c) m tömegű testet hirtelen (nagy gyorsulással) emelünk h magasságba, majd ugyanazt a testet lassan, egyenletes mozgással emeljük újra h magasságba. Melyik esetben végzünk nagyobb munkát?

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

3.2. a) Igen, például járáskor, vagy lásd a 3.1. *a)* feladatot.

b) Igen, mert nő a sebessége.

c) Ha gyorsítva emeljük a testet ugyanakkora magasságra, nagyobb a munkavégzés, mintha egyenletesen történik az emelés, ugyanis az első esetben $m \cdot (g+a)$, a másodikban pedig $m \cdot g$ nagyságú erőt kell kifejteni.

3.3. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

Két, egyenlő tömegű kiskocsit rugó kapcsol össze. A kiskocsikat vízszintes, súrlódásmentes asztalra helyezzük, majd a rugó megnyújtásával eltávolítjuk azokat egymástól. Ezután elengedjük a kocsikat és magára hagyjuk a rendszert.

a) Változik-e a rendszer összes lendülete a mozgás folyamán?

b) Milyen a mozgásállapota a rendszer tömegközéppontjának?

c) Változik-e a mozgás folyamán a két kiskocsi együttes mozgási energiája?

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

3.3. a) A rendszer lendülete nem változik, mert a rendszerre ható külső erők eredője nulla.

b) Nyugalomban van a tömegközéppont, mert mozgását a rendszerre ható külső erők eredője határozza meg, és $F_e = 0$.

c) Igen, mert mindkét kocsi mozgási energiája egyformán nő vagy csökken.

3.4. *Válasszuk ki az alábbi definíciók, törvények közül a* HELYESEN *megfogalmazottakat!*

A) Pontszerű testekből álló rendszer összes lendületének időegység alatti változását a rendszerre ható külső erők vektori összege határozza meg.

B) Ha valamely rendszerre ható külső erők vektori összege zérus (vagy a rendszerre külső erő nem hat), akkor a rendszert alkotó testek lendületének összege állandó.

C) A mechanikai rendszer középpontja úgy gyorsul, mintha a rendszer összes tömege e pontban volna egyesítve, és a középpontban hatna a rendszerre ható erők összege.

D) A mechanikai rendszer tömegközéppontja megtartja meglévő mozgásállapotát, ha a rendszerre külső erő nem hat.

E) A mechanikai rendszer teljes mozgási energiájának változását a külső erők munkáinak összege határozza meg.

F) Zárt rendszer teljes mechanikai energiája állandó.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

3.4. *A*) Helyes, ez a lendülettétel.

B) Hibás, mert helyesen a lendületek vektori összege állandó.

C) Hibás, mert helyesen a tömegközéppontban hatna a rendszerre ható erők vektori összege.

D) Helyes, ez a tömegközépponttétel.

E) Hibás, mert helyesen a külső és belső erők együttes munkája határozza meg.

F) Hibás, mert a belső súrlódás (vagy más disszipatív erő) csökkentheti a mechanikai energiát. Az összenergia persze állandó, de a belső energiát is figyelembe kell venni.

3.5. Határozzuk meg a nehézségi erő munkájának az előjelét, ha

a) a liftet a motor állandó sebességgel emeli,
b) a liftet a motor állandó sebességgel süllyeszti,
c) a lift szabadon esik, mert a tartókötele elszakadt,
d) egy labdát leejtünk,
e) egy labdát feldobunk,
f) egy labda vízszintes talajon gurul!

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

3.5. $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$; α az elmozdulás és az erő által bezárt szög.

a) Negatív, $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$.

b) Pozitív, $\alpha = 0°$, $\cos\alpha = 1$.

c) Lásd *b).*

d) Lásd *b).*

e) Amíg emelkedik a labda, lásd *a),* amikor esik, lásd *d).*

f) Nulla, $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$.

3.6. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Egy gépkocsi álló helyzetből indulva egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez vízszintes úton. A légellenállástól tekintsünk el!

A) A motor teljesítménye a mozgás során állandó.
B) A motor teljesítménye a mozgás során az eltelt idővel arányosan növekszik.
C) A motor által végzett munka azonos hosszúságú elmozdulásokon ugyanakkora.
D) Két, azonos hosszúságú útszakaszt kiválasztva, azon nagyobb a motor munkája, amelyet a gépkocsi később fut be.
E) Két, azonos hosszúságú útszakaszt kiválasztva, azon nagyobb a motor átlagteljesítménye, amelyet később fut be.

Válaszunkat indokoljuk!

Megoldás:

3.6. *A*) Hamist, mert P függ az időtől, $P = \frac{m \cdot a^2 \cdot t}{2}$; $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s \cdot \cos\alpha}{t} = \frac{m \cdot a \cdot \frac{a}{2} t^2 \cdot 1}{t}$; $v_0 = 0$.

B) Helyes, lásd *A*).

C) Helyes, mert ha az út hossza megegyezik, a gyorsulás állandósága miatt az erő is állandó ugyanazon tömeg esetén.

D) Hamis, lásd *C*).

E) Helyes, mert azonos hosszúságú útszakasz megtételéhez az egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a pálya későbbi szakaszán rövidebb időre van szükség.

3.7. *Döntsük el, hogy az alábbi, számmal megjelölt kijelentések az A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között van ok-okozati összefüggés.

B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában nézve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.

D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.

E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

1. A Föld felszínétől különböző magasságban elhelyezett különböző tömegű testeknek nem lehet azonos a helyzeti energiája, mert a helyzeti energia függ a Föld felszínétől mért magasságtól.
2. A Föld felszínétől mért különböző magasságban elhelyezett, különböző tömegű testeknek a helyzeti energiája lehet azonos, mert a helyzeti energia nemcsak a Föld felszínétől mért magasságtól függ, hanem a testek tömegétől is.
3. A Föld felszínétől azonos magasságban elhelyezett két testnek lehet különböző a helyzeti energiája, mert amelyiket mélyebbről emeltük oda, azon több munkát kellett végeznünk.
4. A Föld felszínétől azonos magasságban elhelyezett két testnek lehet különböző a helyzeti energiája, mert a helyzeti energia skalármennyiség.
5. A Föld felszínétől azonos magasságban elhelyezett két testnek különböző a helyzeti energiája, mert a nagyobb tömegű test ha lezuhan, nagyobb sebességgel ér földet.

Megoldás:

3.7. 1.: *D* – Az állítás hamis, mert $E_h = m_1 \cdot g \cdot h_1 = m_2 \cdot g \cdot h_2$ fennállhat. Az indoklás igaz.
2.: *A*
3.: *C* – Az indoklás hamis, mert nem feltétlenül különbözik a munka.
4.: *B*
5.: *E* – Az állítás hamis, mert nem feltétlenül különböző a két test helyzeti energiája.

3.8. *Döntsük el, hogy a számmal mégjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között van ok-okozati összefüggés.

B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában nézve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.

D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.

E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

Súrlódás nélküli lejtőn csúszik le egy test.

1. A lejtő nem végez a testen munkát, mert a lejtő által a testre kifejtett erő a test elmozdulására merőleges.
2. A lejtő a testen munkát végez, mert a testnek növekszik a mozgási energiája.
3. A test a lejtőn munkát végez, mert a testnek csökken a helyzeti energiája.
4. A nehézségi erő nem végez a testen munkát, mert a test összes mechanikai energiája nem változik.
5. A test egyenletesen gyorsuló mozgást végez, mert a lejtő állandó erővel hat a testre.
6. A test kisebb sebességgel ér a lejtő aljára, mintha azonos magasságból szabadon esne, mert a lejtőn lecsúszó test gyorsulása kisebb, mint a nehézségi gyorsulás.

Megoldás:

3.8. 1.: *A*

2.: *D* – Az állítás hamis, mert a súrlódás nélküli lejtő a testen nem végez munkát.

3.: *D* – Lásd 2.!

4.: *D* Az állítás hamis, mert a nehézségi erő végez munkát a testen.

5.: *A*

6.: *D*

3.9. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között van ok-okozati összefüggés.

B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában nézve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.

D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.

E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

Vízszintes pályán egyenes mentén egyenletesen haladó gépkocsi motorja állandó vonóerőt fejt ki.

1. A motor teljesítménye állandó, mert a gépkocsi állandó sebességgel halad.
2. A motor teljesítménye a gépkocsi sebességével arányos, mert állandó vonóerő esetén a gépkocsi egyenletes mozgást végez.
3. Azonos útszakaszokon a motor által végzett munka mindig ugyanakkora, mert a gépkocsi állandó sebességgel halad.
4. A motor által végzett munka teljes egészében az ellenállások leküzdésére fordítódik, mert a vonóerő állandó.
5. A motor teljesítménye arányos a gépkocsi sebességével, mert a motor által végzett munka azonos útszakaszokon egyenlő nagyságú.

Megoldás:

3.9. 1.: *A*; 2.: *B*; 3.: *B*; 4.: *B*; 5.: *B*

3.10. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz és a kettő között van ok-okozati összefüggés.

B) Az állítás igaz, az indoklás önmagában véve igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.

D) Az állítás hamis, az indoklás igaz.

E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

Egy vízszintes sebességű golyó függőleges falnak ütközik és arról visszapattan. Az ütközés tökéletesen rugalmas.

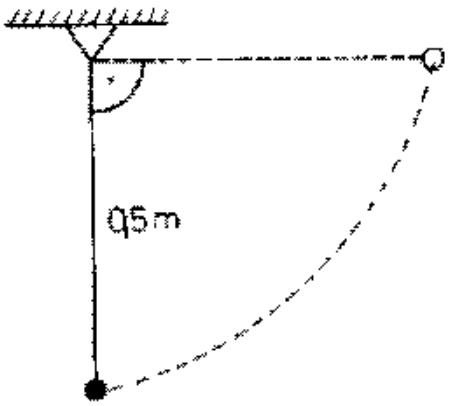
1. A golyó megváltozott lendületének az iránya ellentétes a test eredeti lendületének irányával, mert a fal által a golyóra kifejtett erő iránya is ellentétes a golyó eredeti lendületének irányával.
2. Az ütközés eredményeként a fal energiát ad át a golyónak, mert ütközés közben a golyó sebessége megváltozik.
3. Az ütközés eredményeképpen a fal energiát ad át a golyónak, mert az ütközés után a golyó mozgási energiája más, mint ütközés előtt volt.
4. Ütközéskor a golyó lendületváltozást szenved, mert mozgási energiája is más lesz az ütközés után, mint előtte.
5. Az ütközés eredményeképpen a fal nem ad át energiát a golyónak, mert ütközéskor a golyó helyzeti energiája nem változik.

Megoldás:

3.10. 1.: *A* – Megjegyzendő, hogy az erő és a kezdeti impulzus ellentétes iránya csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy a megváltozott impulzus az eredetivel ellentétes irányú legyen.
2.: *D* – Az állítás hamis, a golyó ugyanakkora sebességgel pattan vissza, mint amekkorával beérkezett, így mozgási energiája nem változott, a fal nem ad át energiát a golyónak.
3.: *E* – Lásd a 2. állítást; az indoklás hamis, mert a mozgási energiák nagysága ugyanakkora.
4.: *C* – Indoklást lásd 3.!
5.: *B*

3.11. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldást!*

Egy 0,5 m hosszú fonálingát 90°-kal kitérítünk nyugalmi helyzetéből, majd elengedjük.
Mekkora sebességgel halad át a fonálra erősített test a nyugalmi helyzetén?
(A levegő ellenállása elhanyagolható.)



A) $\sqrt{0{,}5\ \text{m} \cdot g}$,
B) $\sqrt{1\ \text{m} \cdot g}$,
C) $\sqrt{1{,}5\ \text{m} \cdot g}$,
D) $\sqrt{2\ \text{m} \cdot g}$,
E) $\sqrt{3\ \text{m} \cdot g}$.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

3.11. $h = 0{,}5$ m; $\alpha = 90°$; m.
A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva: $m \cdot g \cdot h = W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ebből $v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 0{,}5m \cdot g} = \sqrt{1m \cdot g}$.
Helyes a *B*.

3.12. Az alábbiak közül válasszuk ki azokat, amelyek inerciarendszernek tekinthetők!

A) Az induló repülőgép.
B) Az állandó nagyságú sebességgel forduló repülőgép.
C) Az állandó nagyságú és irányú sebességgel haladó repülőgép.

Indokoljuk választásunkat!

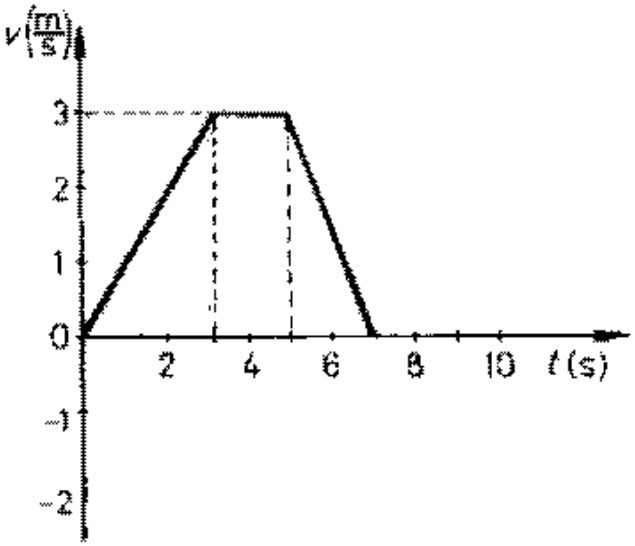
Megoldás:

3.12. Helyes a *C*, mert a repülőgép mozgását az inerciarendszernek tekintett földfelszínhez rögzített koordinátarendszerben adjuk meg, és azok a vonatkoztatási rendszerek, amelyek egy inerciarendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, szintén inerciarendszerek.

3.13. Egy 2 kg tömegű, vízszintes talajon mozgó test sebességének időbeli lefolyását mutatja a grafikon.

a) Határozzuk meg a mozgás dinamikai feltételét, ha a súrlódási együttható értéke 0,5!

b) Ábrázoljuk a test mozgási energiáját az idő függvényében!



Megoldás:

3.13. $m = 2$ kg; $v_0 = 0$; $v = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_1 = 3$ s; $\Delta t_2 = 2$ s; $\Delta t_3 = 2$ s; $\mu = 0{,}5$.

a) Alkalmazva Newton törvényét:

$\sum F = m \cdot a = F_\text{h} - F_\text{s}$; $F_\text{s} = \mu \cdot m \cdot g = 10$ N; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Az első szakaszon: $a = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\underline{\underline{\sum F = 2\text{ N}}}$ és $F_\text{h} = 12$ N.

A második szakaszon: $a = 0$; $\underline{\underline{\sum F = 0}}$ és $F_\text{h} = 10$ N.

A harmadik szakaszon: $a = -1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\underline{\underline{\sum F = -3\text{ N}}}$ és $F_\text{h} = 7$ N.

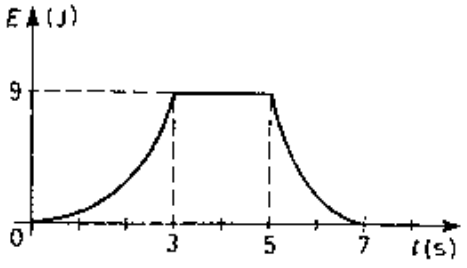
b) $E_\text{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot a_1^2 \cdot t^2$;

$0\text{ s} \le t < 3$ s.

$E_\text{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 =$ állandó; $3\text{ s} \le t < 5$ s.

$E_\text{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \{v_0 + a_2(t-5)\}^2$;

$5\text{ s} \le t < 7$ s.



3.14. Egy 2 kg tömegű testet nyugalmi helyzetből 30 N erő emel 2 m magasra.

a) Mekkora munkát végez az erő?
b) Mekkora a test gyorsítására fordított munka?
c) Mekkora lesz a test impulzusa 2 m magasságban?
d) Mennyi idő kell a 2 m magasság eléréséhez?
e) Mekkora az átlagteljesítmény?

Megoldás:

3.14. $m = 2$ kg; $v_0 = 0$; $F = 30$ N; $h = 2$ m.

a) $\underline{W = F \cdot h = 60 \text{ J}}$.

b) $W_{gy} = m \cdot a \cdot h$, $\sum F = F - m \cdot g = m \cdot a$; ebből $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\underline{W_{gy} = 20 \text{ J}}$.

c) $h = \frac{a}{2} t^2$, ebből $t = 0{,}89$ s; $v = a \cdot t$; $\underline{I = m \cdot v = 8{,}9 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

d) $\underline{t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}} = 0{,}89 \text{ s}}$.

e) $\underline{\overline{P}_{\text{emelő}} = \frac{W}{t} = 67 \text{ W}}$.

3.15. 20 m magasból, zérus kezdősebességgel szabadon esik egy 10 kg tömegű test.

a) Mekkora induláskor a helyzeti energiája?
b) Mekkora az esés ideje?
c) Mekkora sebességgel ér a test a talajra?
d) Mekkora leérkezéskor a test mozgási energiája?
e) Mennyit változott esés közben a test impulzusa?

Megoldás:

3.15. $h = 20\ \text{m};\quad v_0 = 0;\quad m = 10\ \text{kg}.$

a) $\underline{\underline{E_h}} = m \cdot g \cdot h = \underline{\underline{2000\ \text{J}}}.$

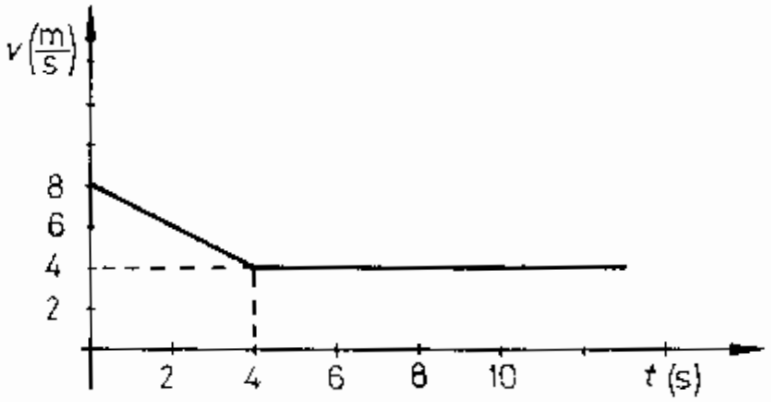
b) $h = \frac{g}{2}t^2,\quad \underline{\underline{t = 2\ \text{s}}}.$

c) $\underline{\underline{v}} = g \cdot t = \underline{\underline{20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$

d) $\underline{\underline{E_m}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \underline{\underline{2000\ \text{J}}}.$

e) $\underline{\underline{\Delta I}} = m \cdot \Delta v = \underline{\underline{200\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$

3.16. Vízszintes pályán haladó, 1200 kg tömegű autó sebesség–idő grafikonját mutatja az ábra. A menetellenállás értéke 0,025.

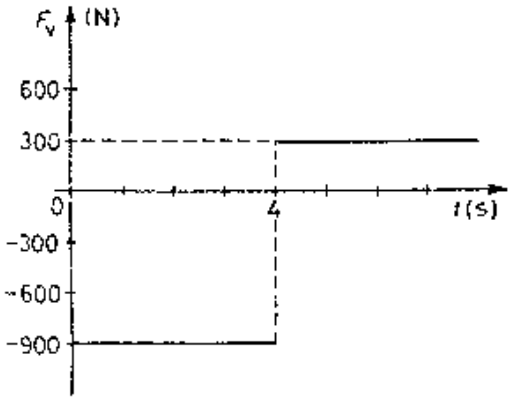


a) Ábrázoljuk az idő függvényében azt a vízszintes irányú vonóerőt, ami biztosítja a grafikon szerinti mozgást!

b) Határozzuk meg a vonóerő által végzett munkát az első 10 s-ra számítva!

Megoldás:

3.16. $m = 1200$ kg; $\mu = 0{,}025$; $v_0 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_1 = 4$ s; $\Delta t_2 = 9$ s.



a) Δt_1 időintervallumban Newton II. törvénye alapján:

$\sum F = m \cdot a = F_v - F_s$; $F_s = \mu \cdot m \cdot g$;

$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t_1}$.

$F_v = -900$ N; 4 s-ig fékez az autó.

Δt_2 időintervallumban Newton I. törvénye alapján:

$\sum F = 0 = F_v - F_s$; $F_v = 300$ N.

b) $t_1 = 4$ s; $t_2 = 6$ s.

$$W_1 = F_v \cdot s = F_v \cdot \left(v_0 \cdot t_1 + \frac{a}{2} t_1^2 \right) = -21\,600 \text{ J}.$$

$W_2 = F_v \cdot s = F_v \cdot v \cdot t_2 = 7200$ J.

$W = W_1 + W_2 = -14\,400$ J.

3.17. A vízszintes pályán egyenletesen változó mozgással haladó, 120 t tömegű vasúti kocsi kereke és a sín között fellépő menetellenállási tényező 0,01.

a) Ábrázoljuk a vonóerőt az idő függvényében, ha a kocsi az indulás helyétől mért 1 km út befutása után éri el a $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet!

b) Mekkora teljesítmény szükséges a vontatáshoz, amikor a kocsi $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad?

c) Mekkora munka árán vontathatjuk a $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó kocsit 12 percig?

Megoldás:

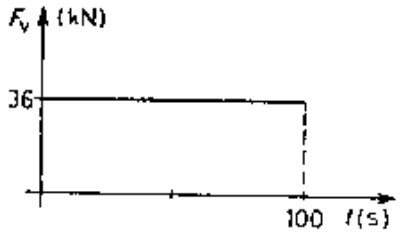
3.17. $m = 120\ \text{t} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \text{kg}$; $\mu = 0{,}01$; vízszintes pálya.

a) $s = 1\ \text{km} = 10^3\ \text{m}$; $v_0 = 0$;

$v_t = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\sum F = m \cdot a = F_v - F_s$; $F_s = \mu \cdot m \cdot g$; $s = \frac{v}{2} t$.

$\underline{\underline{F_v = 36\,000\ \text{N}}}$ a vonóerő nagysága.



b) Egyenletes mozgásnál $\sum F = 0 = F_v - F_s$.

$F_v = 12\,000\ \text{N}$, $\underline{\underline{P = F_v \cdot v = 240\,000\ \text{W}}}$ a teljesítmény.

c) $t = 12\ \text{perc} = 720\ \text{s}$; $v = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$W = F_v \cdot s$; $s = v \cdot t$; $\underline{\underline{W = 1{,}728 \cdot 10^8\ \text{J}}}$ a végzett munka.

3.18. A $12 \cdot 10^3$ N súlyú autó indulástól számítva 50 s alatt, vízszintes úton, egyenletesen gyorsulva éri el a 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet.

a) Mekkora húzóerőt fejt ki a motor, ha a menetellenállási tényező 0,05?

b) Mekkora a motor átlagteljesítménye a gyorsítási szakaszon?

Megoldás:

3.18. $G = 12 \cdot 10^3$ N; $t = 50$ s; $v_0 = 0$; $v = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5 \frac{\text{m}}{2}$.

a) $\mu = 0{,}05$; $a = \frac{v}{t}$, $F_s = \mu \cdot m \cdot g$ és $G = m \cdot g$. Alkalmazva Newton II. törvényét:
$\sum F = m \cdot a = F_v - F_s$, ebből a húzóerő nagysága $\underline{\underline{F_v = 900 \text{ N}}}$.

b) $\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{F_v \cdot s}{t}$; $s = \frac{v}{2}t$.
A motor átlegteljesítménye $\underline{\underline{\overline{P} = 5625 \text{ W}}}$.

3.19. Egy 3 m magas szobában 50 g tömegű teniszlabdát dobunk függőlegesen felfelé 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, 160 cm magasságból. Ha a labda eléri a mennyezetet, azzal tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Fel tud-e emelkedni a labda a mennyezetig az adott kezdeti feltételek mellett?

b) Mekkora a labda mozgási energiája a padlóra érés pillanatában?

c) Ábrázoljuk a labda sebességét az idő függvényében!

Megoldás:

3.19. $h = 3$ m; $m = 50$ g $= 0{,}05$ kg; $v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h_1 = 160$ cm $= 1{,}6$ m.

a) A pálya tetőpontján $v = 0$, $0 = v_0 - g \cdot t_{\text{em}}$; $t = 1$ s; $h_{\text{em}} = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = 5\ \text{m} > h - h_1 = 1{,}4$ m.

fel tud emelkedni a labda.

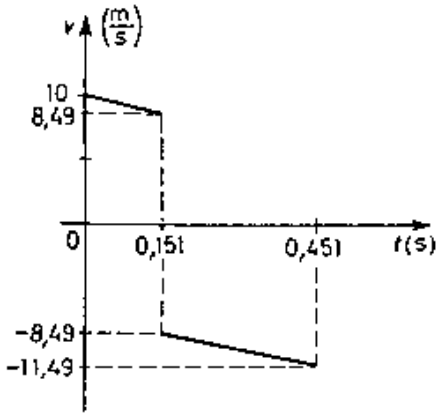
b) $\Delta h = v_0 \cdot t_1 - \frac{g}{2}t_1^2$, ahol $t = 0{,}151$ s (1,85 s nem lehet *a)* miatt) a mennyezetig történő emelkedési idő.

$v = v_0 - g \cdot t_1 = 8{,}49 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ütközik a labda a mennyezethez, és ugyanilyen nagyságú, csak lefelé mutató sebességgel indul onnan lefelé. $h = v \cdot t_2 + \frac{g}{2} t_2^2$, ebből az esés ideje $t_2 = 0{,}3$ s.

$v_{\text{lent}} = v + g \cdot t_2 = 11{,}49 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\underline{\underline{E_{\text{m}}}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \underline{\underline{3{,}3 \text{ J}}}$ a padlóra éréskor a labda mozgási energiája.

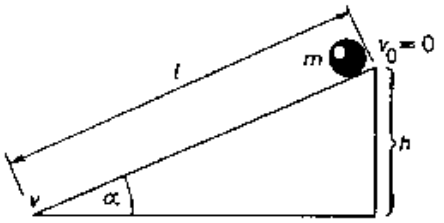
e)



3.20. Egy golyót egymás után két, egyforma hajlásszögű lejtőn, azonos magasságból engedünk le. Az egyik lejtőn a súrlódás elhanyagolható, a másikon nem.
Melyik esetben ér nagyobb sebességgel a golyó a lejtő aljára?
Bizonyítsuk állításunkat!

Megoldás:

3.20. Azon a lejtőn ér nagyobb sebességgel a golyó a lejtő aljára, ahol nincs súrlódás, mert ott a golyó kezdeti helyzeti energiája teljes egészében mozgási energiává alakul, míg a súrlódásos lejtőn az energia egy része a súrlódási erő ellenében végzett munkára használódik fel.



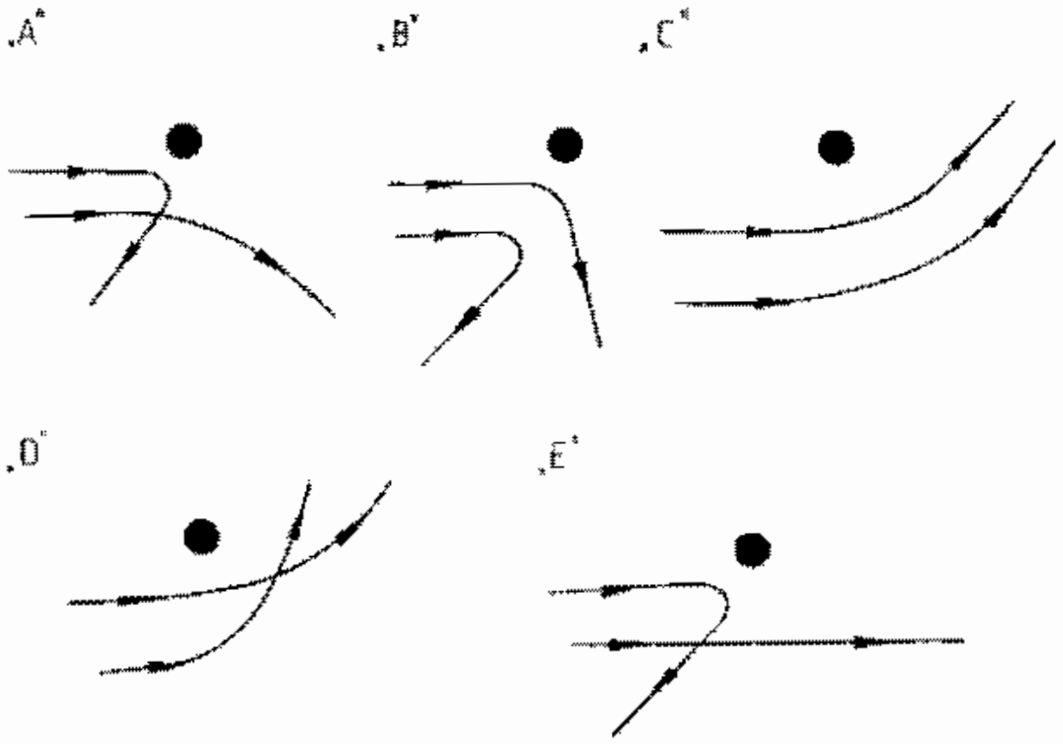
$$\mu = 0: \quad m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

$$\mu \neq 0: \quad m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot l,$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - \mu \cdot l \cdot \cos\alpha)}.$$

$$\sqrt{2g \cdot h} > \sqrt{2g \cdot (h - \mu \cdot l \cdot \cos\alpha)}.$$

3.21. Az alábbi ábrák mindegyike azonos energiájú alfa-részecskék aranyatomon történő szóródását mutatja. Melyik ábra helyes? Miért?



Megoldás:

3.21. Az *A* ábra helyes. Az α részecske is és az aranyatom magja is pozitív töltésű, tehát taszítják egymást, ezért a *C*, *D*, *E* ábra hibás. Az *A* és *B* ábra közül pedig úgy dönthetjük el, hogy melyik mutatja helyesen a pályavonalakat, ha meggondoljuk, hogy miután az α részecskék

kezdeti mozgási energiája azonos, az aranyatomhoz közelebb kerülő részecskének kisebb lesz a sebessége, a rá érvényesülő taszító erő viszont nagyobb lesz, így az a pálya görbül erősebben, amelyiknek az eredeti iránya szerinti egyenes közelebb haladna el az aranyatom mellett.

3.22. Rugalmasan és centrálisan ütközik vízszintes pályán két, egymással szemben haladó $m_1 = 20$ g és $m_2 = 30$ g tömegű kiskocsi. Ütközés előtt az első kocsi sebességének nagysága $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másodiké $v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ütközés után az első kocsi $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad az eredeti sebességével ellenkező irányba.
Mekkora és milyen irányú a második kocsi sebessége?

Megoldás:

3.22. $m_1 = 20\ \text{g} = 0{,}02\ \text{kg}$; $m_2 = 30\ \text{g} = 0{,}03\ \text{kg}$; $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_1' = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A lendületmegmaradás törvénye alapján: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$, ebből $v_2' = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A második kocsi az eredeti sebességével ellentétes irányban mozog az ütközés után $7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

3.23. Egy 100 kg tömegű, vízszintes talajon álló kiskocsiban 40 kg tömegű gyermek ül, a kezében 2 db, egyenként 3 kg tömegű kő van. A köveket a gyermek egymás után kidobja a kocsi hossztengelyének irányában, vízszintesen, a kocsihoz viszonyított $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

a) Mekkora lesz a kövek kidobása után a kocsi sebessége?
b) Mekkora lesz a kiskocsi mozgási energiája a kövek kidobása után?

Megoldás:

3.23. $m = 100\ \text{kg} + 40\ \text{kg};\ \ v_0 = 0;\ \ m_1 = m_2 = 3\ \text{kg};\ \ v_{12} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A kövek a talajhoz viszonyított sebessége az első kő kidobása után: $v_1' = v' - v_1$, a második kidobása után: $v_2' = v'' - v_2$, ahol v' és v'' a kiskocsi sebessége az első, illetve a második kő kidobása után. Alkalmazva a lendületmegmaradás törvényét:

Első: $0 = (m + m_2) \cdot v' + m_1 \cdot v_1',\ \ \underline{\underline{v' = 0{,}041\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

Második: $(m + m_2) \cdot v' = m \cdot v'' + m_2 v_2',\ \ \underline{\underline{v'' = 0{,}083\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

Az első kő kidobása után a kiskocsi sebessége $v' = 0{,}041\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a második után $v'' = 0{,}083\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $\underline{\underline{E_{\text{m}}'}} = \frac{1}{2}(m + m_1)v'^2 = \underline{\underline{0{,}12\ \text{J}}},\ \ \underline{\underline{E_{\text{m}}''}} = \frac{1}{2} m \cdot v''^2 = \underline{\underline{0{,}482\ \text{J}}}$.

3.24. A $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó, 100 kg tömegű kocsiban ül egy 40 kg-os gyermek, kezében egy 2 kg tömegű tégla van. A gyermek a téglát a kocsiból hátrafelé kidobja, a kocsihoz viszonyított $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ vízszintes irányú sebességgel.

a) Mennyivel változik a kocsi sebessége?

b) Mennyivel változik a gyermek mozgási energiája, ha a gyermek a kocsihoz viszonyítva nem mozdul el?

Megoldás:

3.24. $m = 100\ \text{kg} + 40\ \text{kg};\ \ v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \ m_1 = 2\ \text{kg};\ v_1 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Lásd a 3.23. feladat megoldását! $m \cdot v + m_1 \cdot v = m \cdot v' + m_1 \cdot v_1'$, ahol $v_1' = v' - v_1$ a tégla sebessége a talajhoz képest.

Ebből $v' = 10{,}056\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a kocsi sebessége a tégla kidobása után, és a sebességváltozása $\underline{\underline{\Delta v = v' - v = 0{,}056\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $\underline{\underline{E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m_{\text{gy}} \cdot v'^2 - \frac{1}{2} m_{\text{gy}} \cdot v^2 = 22{,}58\ \text{J}}}$.

3.25. Egy 30 t tömegű, 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó tehervagon utolér egy 20 t tömegű, 7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó tehervagont.

a) Mekkora lesz a két vagon lendülete és sebessége, ha az ütközés után összekapcsolódva haladnak tovább?

b) Mennyivel változott a rendszer mozgási energiája az ütközés következtében?

Megoldás:

3.25. $m_1 = 30\ \text{t} = 3 \cdot 10^4\ \text{kg};\ v_1 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ m_2 = 20\ \text{t} = 2 \cdot 10^4\ \text{kg};\ v_2 = 7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A lendületmegmaradás törvénye alapján: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$; az ütközés utáni sebességük: $\underline{\underline{v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ és lendületük: $\underline{\underline{I = (m_1 + m_2)v = 5 \cdot 10^5\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $\underline{\underline{\Delta E_{\text{m}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2\right) = -1{,}5 \cdot 10^5\ \text{J}}}$.

A mozgási energia: $1{,}5 \cdot 10^5$ J-lal csökkent.

3.26. Egy lejtő alján áll egy 52 kg tömegű görkorcsolyázó gyermek. Hátulról közeledik feléje egy 40 kg tömegű, 8 $\frac{\text{m}}{s}$ sebességgel haladó másik görkorcsolyázó, aki találkozáskor átkarolja az állót. (A lejtő aljánál nincs törés.)

a) Milyen magasra jut fel a két görkorcsolyázó a lejtőn, ha a súrlódástól eltekintünk?

b) Ábrázoljuk a görkorcsolyázók sebességét a lejtőn, a lejtő magasságának függvényében!

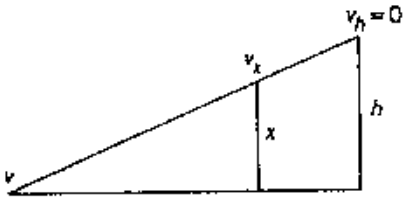
Megoldás:

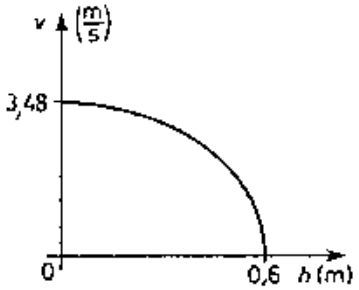
3.26. $m_1 = 52$ kg; $v_1 = 0$; $m_2 = 40$ kg; $v_2 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0$.

a) A lendületmegmaradás törvénye alapján: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$, $v = 3{,}48\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján:

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$. Az emelkedési magasság $\underline{\underline{h = 0{,}6\ \text{m}}}$.





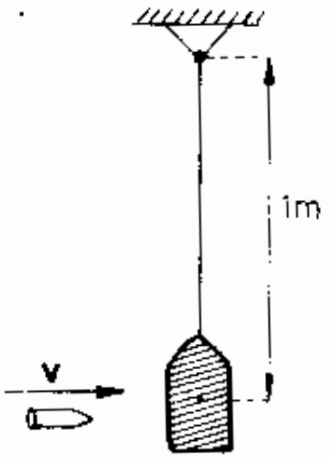
b) Egy $x < h$ magasság esetén

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v_x^2 + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot x,$$

ebből $v_x = \sqrt{v^2 - 2gx} = \sqrt{12{,}1\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x}$.

A sebesség a magasság négyzetgyökös függvénye.

3.27. Egy fonálon 3 kg tömegű homokzsák függ. A homokzsákba egy 5 g tömegű lövedék hatol be, vízszintes irányú sebességgel. A lövedék a zsákban lefékeződik, a zsák kilendül, és tömegközéppontja 5 cm-rel emelkedik.
Mekkora volt a becsapódás előtt a lövedék sebessége, ha a homokzsák tömegközéppontjának a felfüggesztési ponttól való távolsága 1 m?



Megoldás:

3.27. $M = 3$ kg; $m = 5$ g $= 0{,}005$ kg; $h = 5$ cm $= 0{,}05$ m; $l = 1$ m.
Lásd a 2.74. feladat megoldását!

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha)}.$$

A lövedék becsapódási sebessége $v = 601 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.28. Egy v sebességgel haladó jármű a vele egyenlő tömegű másik járművel ütközik. Ütközéskor a járművek összekapcsolódnak.
Mekkora lesz összekapcsolódás után a közös sebességük, ha ütközés előtt a második jármű:

a) nyugalomban volt,
b) v sebességgel mozgott az első járművel szemben,
c) $\frac{v}{3}$ sebességgel mozgott az első járművel megegyező irányban,
d) $3v$ sebességgel mozgott az első járművel szemben?

Megoldás:

3.28. v; $m_1 = m_2 = m_3$.
A lendületmegmaradási törvénye alapján az ütközés utáni közös sebességük v':

a) $v_2 = 0$, $m \cdot v + m \cdot 0 = (m+m) \cdot v'$; $\underline{\underline{v' = \frac{v}{2}}}$.

b) $v_2 = -v$, $m \cdot v + m \cdot (-v) = (m+m) \cdot v'$; $\underline{\underline{v' = 0}}$.

c) $v_2 = \frac{v}{3}$, $m \cdot v + m \cdot \frac{v}{3} = (m+m) \cdot v'$; $\underline{\underline{v' = \frac{2v}{3}}}$.

d) $v_2 = -3v$, $m \cdot v + m(-3v) = (m+m) \cdot v'$; $\underline{\underline{v' = -v}}$.

3.29. Egy m tömegű, v sebességű és egy m tömegű, $2v$ sebességű test szemben halad és tökéletesen rugalmatlanul ütközik egymással.
Mekkora a két testből álló rendszer mozgási energiájának megváltozása?

Megoldás:

3.29. m; v; m; $-2v$.

Alkalmazva a lendületmegmaradás törvényét:

$m \cdot v + m(-2v) = (m+m) \cdot v'$, ebből $v' = -\frac{1}{2}v$.

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}(m+m) \cdot \left(-\frac{1}{2}v\right)^2 - \left[\frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}m \cdot (-2v)^2\right].$$

$$\Delta E = -\frac{9}{4}mv^2.$$

A rendszer mozgási energiája $\frac{9}{4}m \cdot v^2$-tel csökkent.

3.30. Egy 1500 kg tömegű, álló helyzetből induló gépkocsi, vízszintes úton, $1{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással haladva ér el $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet.
Mennyi a motor munkavégzése és átlagos teljesítménye a gyorsítás ideje alatt, ha a menetellenállást elhanyagoljuk?

Megoldás:

3.30. $m = 1500$ kg; $v_0 = 0$; $a = 1{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0$;

$W = F \cdot s$; $F = m \cdot a$; $v = a \cdot t$; $t = 8{,}93$ s; $s = \frac{v}{2}t$; $P = \frac{W}{t}$.

$\underline{\underline{W = 117\ \text{kJ}}}$; $\underline{\underline{P = 13\ \text{kW}}}$.

3.31. Az oxigénmolekulák közepes sebessége 0 °C-on $450\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Az oxigénmolekula tömege $53{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg. Mekkora az 1 dm³ 0 °C-os oxigénben lévő molekulák együttes mozgási energiája, ha az 1 dm³ térfogatban $2{,}7 \cdot 10^{23}$ db oxigénmolekula van?

Megoldás:

3.31. $v = 450\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 53{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg; $V = 1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$; $N = 2{,}7 \cdot 10^{23}$.

$\underline{\underline{\sum E_{\text{m}}}} = N\frac{1}{2}m \cdot v^2 = \underline{\underline{1457\ \text{J}}}$.

3.32. Határozzuk meg, hogy mekkora magasságban lesz egy $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel feldobott kő helyzeti és mozgási energiája egyenlő nagyságú!

Megoldás:

3.32. $v_0 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az energiamegmaradás törvénye alapján:

$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$. A feltétel szerint: $\frac{1}{2}m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$, ebből

$h = \frac{v_0^2}{4g}$.

A $\underline{\underline{h = 1{,}6\ \text{m}}}$ magasságban lesz a feldobott kő helyzeti és mozgási energiája egyenlő nagyságú.

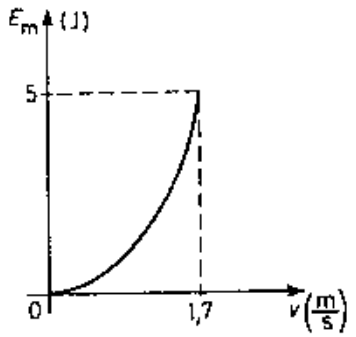
3.33. Vízszintes, teljesen sima talajon egy 3,5 kg tömegű test áll.

a) Mekkora sebességre gyorsul fel a test 5 J munka befektetése árán a vízszintes talajon?

b) Ábrázoljuk a test mozgási energiáját a sebesség függvényében!

Megoldás:

3.33. $m = 3{,}5$ kg; $v_0 = 0$; $W = 5$ J.



a) Alkalmazva a munkatételt:

$$W = \Delta E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - 0; \quad \underline{\underline{v = 1{,}7 \ \frac{m}{s}}}.$$

b) A mozgási energia a sebesség négyzetével arányos, a görbe parabolaív.

3.34. Mekkora magasságra tud felgördülni egy lejtőn az 50 kg tömegű görkorcsolyázó gyermek, ha a lejtő alján $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebessége és az ellenállásokat elhanyagoljuk?

Megoldás:

3.34. $m = 50$ kg; $v = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0$.

A mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján:

$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$. A gyermek $\underline{\underline{h = 3{,}2\ \text{m}}}$ magasságig gördül fel a lejtőn.

3.35. A vízszintes úton, álló helyzetből induló gépkocsi tömege 800 kg. 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással haladva éri el a 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menetsebességet. A mozgás során a menetellenállási együttható 0,15.

Mekkora a gyorsítás alatt a motor által végzett munka és mekkora a motor átlagos teljesítménye?

Megoldás:

3.35. $v_0 = 0$; $m = 800\ \text{kg}$; $a = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}15$;

$W = F_\text{h} \cdot s$; $F_\text{s} = \mu \cdot m \cdot g$; $\sum F = m \cdot a$; $\sum F = F_\text{h} - F_\text{s}$; $t = \frac{\Delta v}{a}$; $s = \frac{v}{2} t$;

$\overline{P} = \frac{W}{t}$.

A motor által végzett munka $\underline{\underline{W = 125\ \text{kJ}}}$, és az átlagteljesítmény $\underline{\underline{\overline{P} = 15\ \text{kW}}}$.

3.36. A vízszintes pályán haladó gépkocsi 12 kW átlagos teljesítménnyel egyenletesen növeli sebességét 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ról 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra. A kocsi tömege 1200 kg.

a) Mennyi ideig tartott a gyorsítás, ha a menetellenállási tényező 0,024?

b) Ábrázoljuk a gyorsítás alatt megtett utat az idő függvényében!

Megoldás:

3.36. $P = 12\ \text{kW} = 12 \cdot 10^3\ \text{W}$; $v_0 = 18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 1200\ \text{kg}$; $\mu = 0{,}024$.

a) A motor által végzett összes munka a gyorsításra és a súrlódás leküzdésére fordítódik:

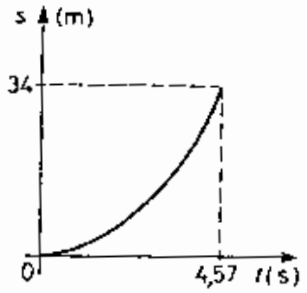
$W = W_{gy} + W_s$, $W = P \cdot t$,

$W_{gy} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$,

$W_s = F_s \cdot s = \mu \cdot m \cdot g \frac{v_0 + v}{2} t$.

Ebből az idő $\underline{\underline{t = 4{,}57\ \text{s}}}$.

b) $s = \frac{v_0 + v_t}{2} t = 34\ \text{m}$; $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$.



3.37. A vízszintes pályán, $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó $1{,}3 \cdot 10^5$ kg tömegű vonat úgy tudja behozni a késését, hogy 6 percig egyenletesen gyorsít 10 km-es távolságon. A mozgás közben fellépő ellenállási együttható 0,025.

a) Mekkora a vonat gyorsulása és az elért végsebesség?

b) Mekkora hasznos teljesítményű mozdonyra van szükség a késés behozásához?

Megoldás:

3.37. $v_0 = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 1{,}3 \cdot 10^5$ kg; $t = 6$ min $= 360$ s; $s = 10$ km $= 10\,000$ m; $\mu = 0{,}025$.

a) $s = \frac{v_0 + v_t}{2} t$. Az elért végsebesség: $\underline{\underline{v = 33{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$; a gyorsulás: $\underline{\underline{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

b) $P = F \cdot v = (m \cdot a + \mu \cdot m \cdot g) \cdot v$

A motor maximális teljesítménye: $\underline{\underline{P = 1{,}22 \cdot 10^6\ \text{W}}}$.

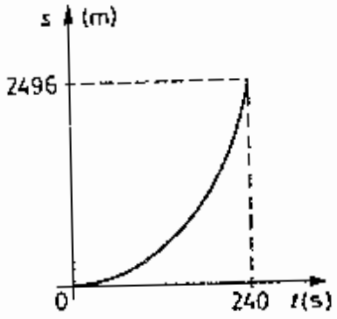
3.38. Egy 10^3 kg tömegű vasúti szerelvény mozdonya 460 MJ munkát végez, miközben egy állomásról kiindulva állandó gyorsulással 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra növeli a szerelvény sebességét.

a) Mekkora az ellenállások leküzdésére fordított energia?
b) Mennyi a mozdony átlagteljesítménye, ha a gyorsítás 4 percig tartott?
c) Ábrázoljuk a szerelvény útját az idő függvényében!

Megoldás:

3.38. $m = 10^3$ kg; $W = 460$ MJ $= 4{,}6 \cdot 10^8$ J; $v_0 = 0$; $v = 75\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 4$ min $= 240$ s.

a) Lásd a 3.36. *a)* feladat megoldását!
Az ellenállásokra fordított energia $\underline{\underline{W_s = 4{,}5978 \cdot 10^8 \text{ J}}}$.



b) $\underline{\underline{P = \frac{W}{t} = 1{,}92 \text{ MW}}}$.

c) $s = \frac{v_0 + v_t}{2} t = 2496$ m.

3.39. A 2 m magas és 100 m hosszú lejtő tetejéről kiskocsikon gurulnak le gyerekek. Az ellenállás elhanyagolható.

a) Mekkora a lejtő alján a kocsik sebessége?

b) Mekkora a lejtőn a kocsik gyorsulása?

c) Mekkora a kocsik sebessége a lejtő alján, ha a lejtő tetejéről $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel indítják lefelé azokat?

Megoldás:

3.39. $h = 2$ m; $s = 100$ m; $\mu = 0$.

a) A mechanikai energia megmaradásának tétele alapján:

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$;

ebből a lejtő alján a sebesség: $\underline{\underline{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 6{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $s = \frac{v}{2} t$, $\underline{\underline{a = \frac{v}{t} = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

c) $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ebből $\underline{\underline{v = 8{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a lejtő alján a sebesség.

3.40. Egy 1200 kg tömegű, kezdetben álló járművet 2500 N nagyságú erő gyorsít 10 s-ig a vízszintes, egyenes vonalú pályán. A test és a talaj között a súrlódás elhanyagolható.

a) Mekkora a test gyorsulása és az elért sebessége?

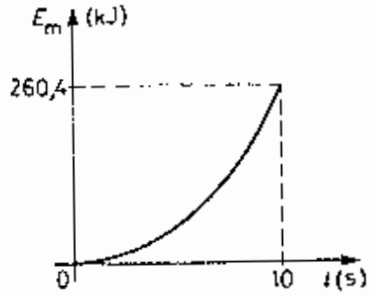
b) Ábrázoljuk a jármű mozgási energiáját az idő függvényében!

Megoldás:

3.40. $m = 1200$ kg; $v_0 = 0$; $F = 2500$ N; $t = 10$ s; $\mu = 0$.

a) $F = m \cdot a$; $\underline{\underline{a = 2{,}08 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$; $\underline{\underline{v}} = a \cdot t =$

$= \underline{\underline{20{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.



b) $E_\text{m} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m (a \cdot t)^2$; $E_\text{m} \sim t^2$ – a görbe parabola.

3.41. Vízszintes pályán egyenletesen gyorsuló mozgást végző, 1200 kg tömegű jármű a sebességét 1,5 perc alatt növeli a kezdeti érték négyszeresére. Ez alatt 180 m utat tesz meg. A menetellenállás elhanyagolható.

a) Mekkora kezdősebessége volt a gyorsítási szakasz elején?

b) Ábrázoljuk a jármű mozgási energiáját az idő függvényében!

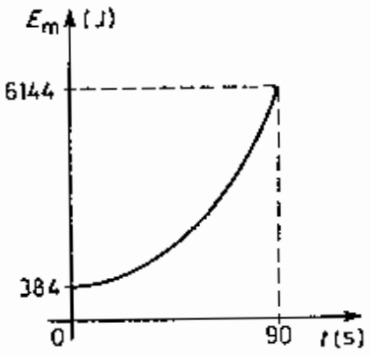
c) Mennyi a motor átlagteljesítménye a vizsgált időszakban?

Megoldás:

3.41. $m = 1200\ \text{kg}$; $t = 1{,}5\ \text{min} = 90\ \text{s}$; v_0; $v = 4 \cdot v_0$; $s = 180\ \text{m}$; $\mu = 0$.

a) $s = \dfrac{v_0 + v}{2} t$, ebből $\underline{\underline{v_0 = 0{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) Lásd a 3.40. *b)* feladat megoldását!



c) A munkatétel alapján: $W = \Delta E_m$; az átlagteljesítmény $\underline{\underline{\overline{P} = \dfrac{W}{t} = 64\ \text{W}}}$.

3.42. A 20 g tömegű, 1800 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vízszintes sebességgel haladó lövedék fába ütközik, és abban 3 cm hosszú út megtétele után áll meg.

a) Mekkora munkát végez a lövedék?

b) Mennyi idő alatt áll meg a golyó a fában, ha egyenletesen változó mozgást tételezünk fel?

c) Mekkora és milyen irányú az 5 kg tömegű puska sebessége a kilövés után, ha a lövedék 1800 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel hagyja el a puskát?

Megoldás:

3.42. $m = 20\ \text{g} = 0{,}02\ \text{kg}$; $v = 1800\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 3\ \text{cm} = 0{,}03\ \text{m}$; $v_t = 0$.

a) A lövedék mozgási energiája a fa ellenállásának leküzdésére fordítódik:

$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \underline{\underline{2500\ \text{J}}}$ munkát végez a lövedék.

b) $s = \frac{v}{2} t$, $\underline{\underline{t = 1{,}2 \cdot 10^4\ \text{s}}}$ alatt áll meg a golyó a fában.

c) $m_1 = 6\ \text{kg}$. A lendületmegmaradás törvénye alapján: $0 = m \cdot v + m_1 \cdot v_1$, ebből a puska sebessége a kilövés után $\underline{\underline{v_1 = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ hátrafelé irányuló.

3.43. Egy személygépkocsi tömege 1200 kg, talajhoz viszonyított sebessége 79,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A vele egy egyenesben haladó másik kocsi talajhoz viszonyított sebessége 64,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Mekkora a személygépkocsi mozgási energiája a másik kocsihoz képest, ha az

a) közeledik feléje,
b) távolodik tőle?

Megoldás:

3.43. $m = 1200$ kg; $v_1 = 79{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 64{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ha a két gépkocsi sebességének iránya megegyezik, akkor akár közelednek, akár távolodnak egymástól, a relatív sebesség ugyanakkora nagyságú: $|v_1 - v_2|$, ezért $E_\text{m} = \frac{1}{2} m \cdot (v_1 - v_2)^2$, $\underline{\underline{E_\text{m} = 9600\ \text{J}}}$.

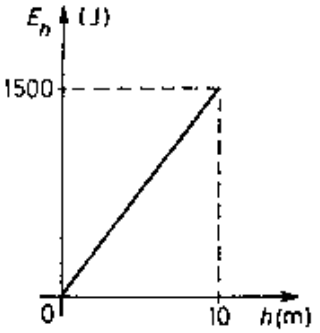
Ha pedig a két sebesség ellentétes irányú, akkor a relatív sebességek nagysága $|v_1 + v_2|$, ezért $E_\text{m} = \frac{1}{2} m (v_1 + v_2)^2$, $\underline{\underline{E_\text{m} = 9{,}6 \cdot 10^5\ \text{J}}}$.

3.44. Egy 15 kg tömegű, kezdetben álló testet állandó, 200 N nagyságú, függőleges irányú erővel emelünk 10 m magasra.

a) Mennyi munkát végeztünk ezalatt?
b) Mekkora lesz 10 m magasban a test mozgási energiája és mekkora ott a sebessége?
c) Ábrázoljuk a test helyzeti energiáját a hely függvényében!

Megoldás:

3.44. $m = 15$ kg; $v_0 = 0$; $F = 200$ N; $h = 10$ m.



a) $\underline{W} = F \cdot h = \underline{2000\ \text{J}}$ munkát végeztünk.

b) $W = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2$, $\underline{v = 8{,}16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$; $\underline{E_\text{m} = 500\ \text{J}}$.

c) $E_\text{h} = m \cdot g \cdot h = 1500$ J; $E_\text{h} \sim h$.

3.45. Egy $0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ állandó sebességgel emelkedő léghajóból leejtünk egy 50 kg tömegű zsákot.
Mennyi lesz a zsák mozgási energiája 3 s múlva:

a) a léghajóhoz viszonyítva,
b) a Földhöz viszonyítottan?

Megoldás.

3.45. $v = -0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 50$ kg; $t = 3$ s; az irány lefelé pozitív; $E_\text{m} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$.

a) $v_1 = g \cdot t$, $\underline{\underline{E_\text{m} = 22\,500\ \text{J}}}$.

b) $v_2 = v + g \cdot t$, $\underline{\underline{E_\text{m} = 21\,756\ \text{J}}}$.

3.46. Egy családi ház építésénél 30 kg kötőanyagot emeltek fel függőlegesen, állócsiga segítségével, 4 m magasra.

a) Mennyivel változott a test helyzeti energiája?

b) Mennyi a végzett emelési munka?

c) Mekkora lesz a teher sebessége 1 s múlva, ha a testet 420 N állandó nagyságú erővel kezdjük emelni?

Megoldás:

3.46. $m = 30$ kg; $h = 4$ m; $v_0 = 0$; az irány lefelé pozitív.

a) $\underline{\underline{\Delta E_h = m \cdot g \cdot h = 1200 \text{ J}}}$.

b) $\underline{\underline{W_e = \Delta E_h = 1200 \text{ J}}}$.

c) $t = 1$ s, $F = 420$ N.

$\sum F = F - m \cdot g = m \cdot a = m \cdot v \cdot t$, $\underline{\underline{v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

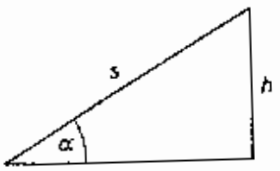
3.47. Egy 10 kg tömegű test álló helyzetből indulva csúszik le a súrlódásmentes, 30°-os hajlásszögű lejtőn.

a) Mennyi idő alatt ér a lejtő aljára, ha a lejtő hossza 5 m?

b) Mekkora a test mozgási energiája a lejtő alján?

Megoldás:

3.47. $m = 10$ kg; $v_0 = 0$; $\alpha = 30°$; $s = 5$ m.



a) A mechanikai energia megmaradásának tétele alapján: $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ahol $h = s \cdot \sin\alpha$ és $s = \frac{v}{2} t$, ebből $\underline{\underline{t = 1{,}41 \text{ s}}}$ alatt ér a lejtő aljára.

b) $\underline{\underline{E_m}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \underline{\underline{250 \text{ J}}}$.

3.48. A talaj és egy test között a súrlódási együttható 0,2. A testet vízszintes talajon húzzuk $0{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

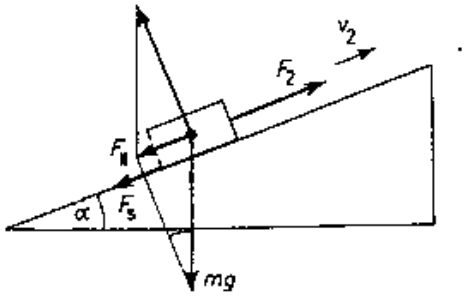
Mekkora lesz a test sebessége, ha 20°-os hajlásszögű lejtőn húzzuk fel változatlan vontatási teljesítmény mellett?

Megoldás:

3.48. $\mu = 0{,}2$; $v_1 = 0{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 20°$; $P_1 = P_2$.

A vízszintes talajon történő egyenletes húzás miatt: $F_1 = F_s = \mu \cdot m \cdot g$ és $P_1 = F_1 \cdot v_1$.

A lejtőn történő egyenletes húzás miatt: $F_2 = F_{\parallel} + F_s = m \cdot g \cdot \sin\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$ és $P_2 = F_2 \cdot v_2$. Mivel $P_1 = P_2$, $\mu \cdot m \cdot g \cdot v_1 = (m \cdot g \cdot \sin\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha) \cdot v_2$, ebből $v_2 = 0{,}34\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



3.49. Egy 30°-os hajlásszögű, 10 m hosszú lejtő tetejéről csúszik le egy test.
Mekkora sebességgel ér a test a lejtő aljára, ha:

a) a lejtő súrlódásmentes,

b) a lejtő és a test közötti csúszási súrlódási együttható 0,3?

Megoldás:

3.49. $\alpha = 30°$; $s = 10$ m.

a) $\mu = 0$. A mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján:

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ahol $h = s \cdot \sin\alpha$, ebből $\underline{\underline{v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $\mu = 0{,}3$. A munkatétel alapján:

$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos\alpha$, ebből $\underline{\underline{v = 6{,}93 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

3.50. Egy 15 t tömegű vasúti kocsi 15 m magas és 500 m hosszú lejtő tetejéről indul el. A kocsi és a sín közötti gördülési ellenállási együttható értéke mindenhol 0,005.

a) Mekkora sebességgel ér a kocsi a lejtő aljára?

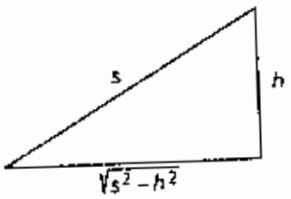
b) A lejtő aljától mekkora távolságban áll meg a kocsi, ha a lejtő vízszintes útban folytatódik?

c) Ábrázoljuk a vízszintes útszakaszhoz tartozó sebességet az idő függvényében!

Megoldás:

3.50. $m = 15\ \text{t} = 15\,000\ \text{kg}$; $h = 15\ \text{m}$; $s = 500\ \text{m}$; $\mu = 0{,}005$.

a) Lásd a 3.49. *b)* feladat megoldását!



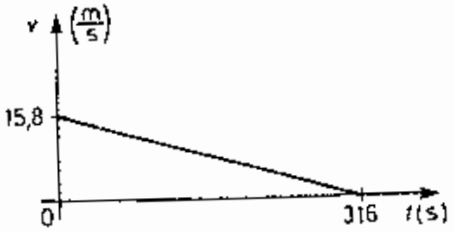
$v = 15{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Alkalmazva a munkatételt:

$$F_s \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2; \quad \mu \cdot m \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

ebből $s = 2496\ \text{m}$.

c) $s = \frac{v}{2} t$, $t = 316\ \text{s}$.



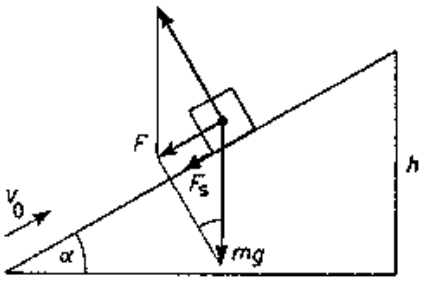
3.51. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőre lejtőirányú, $5 \frac{m}{s}$ nagyságú kezdősebességgel lökünk fel egy testet. A lejtő és a test között a súrlódási együttható 0,2.

a) Mekkora magasságig emelkedik fel a lejtőn a test?
b) Mekkora sebességgel ér vissza a test a lejtő aljára?
c) Mennyi ideig mozgott a test a lejtőn?
d) Ábrázoljuk a test sebességét az idő függvényében!

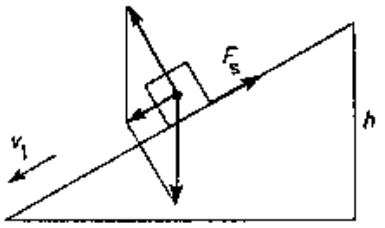
Megoldás:

3.51. $\alpha = 30°$; $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}2$.

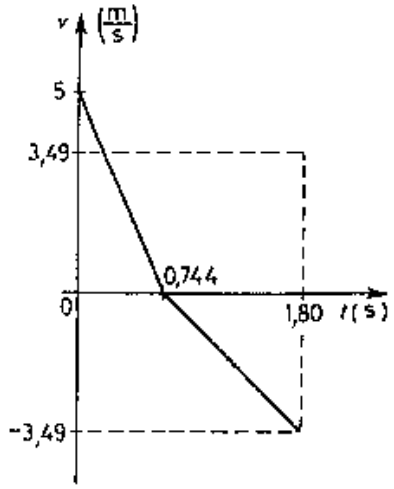
Alkalmazva a munkatételt:



a) $\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - m \cdot g \cdot h = F_s \cdot s$, ahol $F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$ és $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, $\underline{\underline{h = 0{,}93\ \text{m}}}$ magasra emelkedik a test.



b) $m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 = F_s \cdot s$, ebből $\underline{\underline{v_1 = 3{,}49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ sebességgel ér vissza a lejtő aljára.



c) Egyenletesen lassuló mozgással halad felfelé és gyorsulóval lefelé:

$s = \frac{v_0}{2}t$, ebből $t = 0{,}744$ s ideig mozog felfelé. $s = \frac{v_1}{2}t_1$, ebből $t_1 = 1{,}066$ s ideig mozog lefelé.

$\underline{\underline{\sum t = t + t_1 = 1{,}8\ \text{s}}}$.

d) Fel- és lefelé mozogva a sebességek iránya ellentétes.

3.52. Egy 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó kerékpáros 30°-os hajlásszögű emelkedőhöz ér.

a) Mekkora magasságig tud feljutni a kerékpáros az emelkedőn, ha annak aljánál abbahagyja a kerékpár hajtását, és az ellenállástól eltekintünk?

b) Hányadrészére csökken az emelkedési magasság, ha a gördülési ellenállási együttható 0,05?

Megoldás:

3.52. $v_0 = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 30°$.

a) A mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján:

$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h_0$, ebből $\underline{\underline{h_0 = 5\ \text{m}}}$.

b) $\mu = 0{,}05$. Lásd a 3.51. *a)* feladat megoldását!

$h = 4{,}6\ \text{m}$, $\underline{\underline{\frac{h}{h_0} = 0{,}92}}$; 92%-ra csökken az emelkedési magasság.

3.53. Egy testet felfelé lökünk egy 30°-os hajlásszögű lejtőn, a lejtő síkjával párhuzamos, $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel.

a) Mekkora a test gyorsulása a lejtőn, ha a test és a lejtő között a csúszási súrlódási együttható 0,3?

b) Mekkora magasságig jut fel a test a lejtőn?

Megoldás:

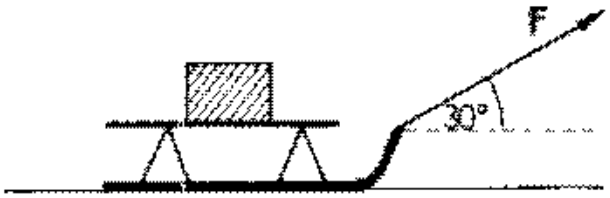
3.53. $\alpha = 30°$; $v_0 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}3$; $v_t = 0$.

a) Lásd a 3.51. *a)* feladat megoldását, ahonnan $s = 2{,}369$ m.

$s = \frac{v_0}{2}t$-ből t-vel: $\underline{a} = \frac{v_t - v_0}{t} = \underline{\underline{-7{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$, vagy $a = -g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$, he felfelé mutató irány pozitív.

b) $h = s \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{1{,}18\ \text{m}}}$.

3.54. Vízszintes, behavazott talajon, a talajjal 30°-os szöget bezáró hatásvonalú, 12 N erővel húzunk egy szánkót. A szán tömege terheléssel együtt 25 kg. A szán és a hó közötti súrlódási együttható 0,02.



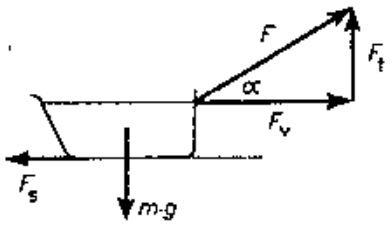
a) Határozzuk meg a szán sebességét az indulástól számított 10 s múlva!

b) Mekkora munkát végeztünk a 10 s alatt?

Megoldás:

3.54. a) $\alpha = 30°$; $F = 12$ N; $m = 25$ kg; $\mu = 0{,}02$; $t = 10$ s; $v_0 = 0$.

$\sum F = m \cdot a = F_v - F_s$, ahol $F_v = F \cdot \cos\alpha$, $F_s = \mu \cdot F_N$ és $F_N = m \cdot g - F_f = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$, ebből kifejezve $a = 0{,}22 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $\underline{\underline{v = a \cdot t = 2{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.



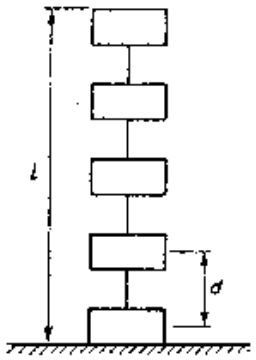
b) $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, $s = \frac{a}{2}t^2$, $\underline{\underline{W = 114{,}3 \text{ J}}}$.

3.55. Elhanyagolható tömegű, 2 m hosszú fonálra 5 db, egyenként 10 g tömegű csavaranyát erősítünk, egymástól 50–50 cm távolságra.
Mekkora emelési munkát végzünk akkor, ha a fekvő fonalat úgy emeljük lassan függőleges helyzetbe, hogy az egyik vége éppen a talajon maradjon?

Megoldás:

3.55. $L = 2$ m; 5 db; $m = 10$ g $= 0{,}01$ kg; $d = 50$ cm $= 0{,}5$ m.
Egy csavaranya a talajon marad, ezért csak 4 db-ot kell felemelni, amelyek tömegközéppontja $h = 0{,}5\text{ m} + \frac{L - 0{,}5\text{ m}}{2}$ magasra kerül.

$\underline{\underline{W}} = 4 \cdot m \cdot g \cdot h = \underline{\underline{0{,}5\text{ J}}}$.



Más meggondolás: az öt csavaranyából álló rendszer tömegközéppontja $\frac{L}{2} = 1$ m magasra kerül, így $\underline{\underline{W}} = 5 \cdot m \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \underline{\underline{0{,}5\text{ J}}}$.

3.56. Egy 150 m mély aknából 500 kg terhet emelünk ki sodronykötél segítségével. A kötél méterenkénti súlya 10 N.

a) Mekkora munkát végzünk a teher felemelésekor?

b) Ábrázoljuk az emelőerőt az út függvényében!

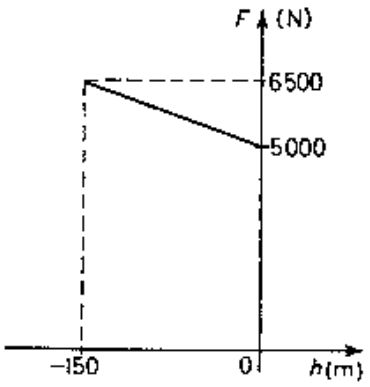
Megoldás:

3.56. $h = 150$ m; $m = 500$ kg; $m \cdot g = 10$ N.

a) A kötelet és a terhet is fel kell emelni. A kötél súlya: $G = h \cdot m \cdot g$, tömegközéppontja $\frac{h}{2}$ mélyen van, a rajta végzett emelési munka: $W_{e,k} = G \cdot \frac{h}{2}$.

A terhen végzett emelési munka: $W_{e,t} = m \cdot g \cdot h$.

$\underline{\underline{W}} = W_{e,k} + W_{e,t} = \underline{\underline{862\,500 \text{ J}}}$.



b) Ha a talaj szintjét választjuk 0 szintnek, akkor a mélység számértéke negatív.

$G_t = 5000$ N

$G_k = 1500$ N.

3.57. Egy súlyemelő 150 kg tömegű testet 2 s alatt emel fel 2,3 m magasra egyenletesen.

a) Mekkora a súlyemelő átlagteljesítménye?

b) Mennyi az emeléskor végzett összes munka?

Megoldás:

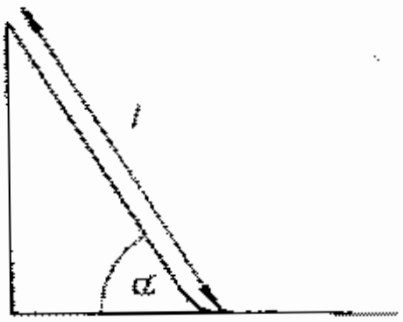
3.57. $m = 150$ kg; $t = 2$ s; $h = 2{,}3$ m.

Ha eltekintünk attól, hogy a súlyemelő testének tömegközéppontja is elmozdul:

a) $\underline{\underline{P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = 1725 \text{ W}}}$.

b) $\underline{\underline{W = 3450 \text{ J}}}$.

3.58. A csúszdához vízszintes szakasz csatlakozik az ábra szerinti elrendezésben. A csúszda tetejéről egy 30 kg-os gyermek csúszik le 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. A mozgás folyamán fellépő súrlódási együttható értéke mindenhol 0,1 nagyságú. A lejtő hajlásszöge $\alpha = 60°$, hossza $l = 4$ m.

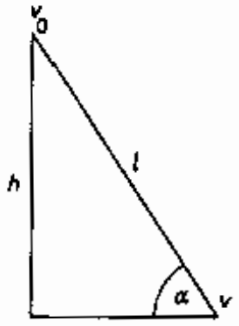


a) Mekkora a gyermek sebessége a csúszda alján?

b) Mekkora út megtétele után áll meg a vízszintes szakaszon?

Megoldás:

3.58. $m = 30$ kg; $v_0 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}1$; $\alpha = 60°$; $l = 4$ m.



a) Alkalmazva a munkatételt:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h - W_s;$$

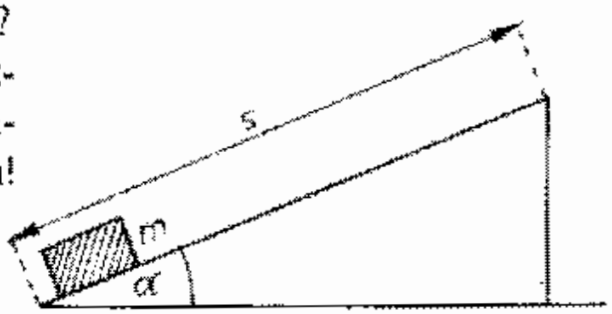
$W_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot l$ és $h = l \cdot \sin\alpha$, ebből $\underline{\underline{v = 8{,}14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) A súrlódási erő fékezi: $W_s = \Delta E_{kin}$, $W_s = F_s \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, ebből $\underline{\underline{s = 33{,}14\ \text{m}}}$.

3.59. Egy lejtő α hajlásszögű és s hosszúságú. A lejtő és a test között fellépő súrlódási együttható mindenhol μ.

a) Mekkora lejtőirányú kezdősebességgel kell az m tömegű testet a lejtő aljáról felfelé elindítani, hogy az éppen a lejtő tetején álljon meg?

b) Ábrázoljuk a test mozgási és helyzeti energiáját az idő függvényében!

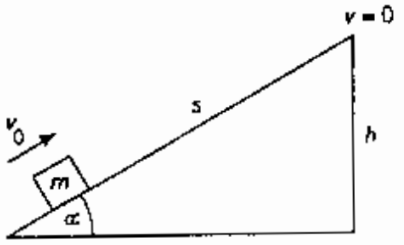


Megoldás:

3.59. μ; m; α.

a) A munkatétel szerint:

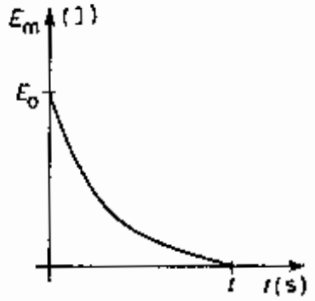
$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = \\ = -m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos\alpha,$$

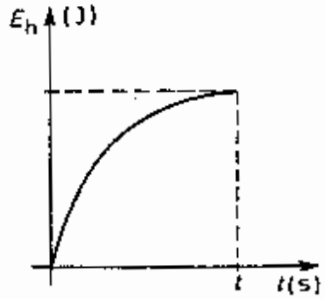


ebből $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (\mu \cdot s \cdot \cos\alpha + h)}$, ahol $h = s \cdot \sin\alpha$.

b) $E_m = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot (v_0 - a \cdot t)^2$, és $E_h = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha =$

$= m \cdot g \cdot \left(v_0 \cdot t - \frac{a}{2}t^2\right) \cdot \sin\alpha$: parabolák.





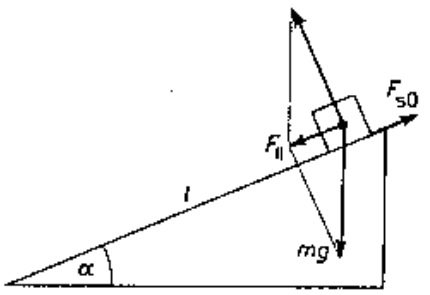
3.60. A 2 *m* hosszú sima deszkalap egyik végére 200 g tömegű fahasábot helyeztünk. A deszka azon végét, ahol a fahasáb volt, lassan emelve azt tapasztaltuk, hogy a hasáb akkor kezdett el csúszni, amikor a deszkalap a vízszintessel 20°-os szöget zárt be.
Mekkora a hasáb és a deszka között:

a) a tapadási súrlódási együttható,
b) a csúszási súrlódási együttható, ha a 20°-os lejtőn a test a 2 méteres utat 5 s alatt tette meg?

Megoldás:

3.60. $l = 2$ m; $m = 200$ g $= 0{,}2$ kg; $\alpha = 20°$.

a) $\sum F = F_{\parallel} - F_{s0} = 0$ az elinduláskor, ahol



$$F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha,$$
$$F_{s0} = \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

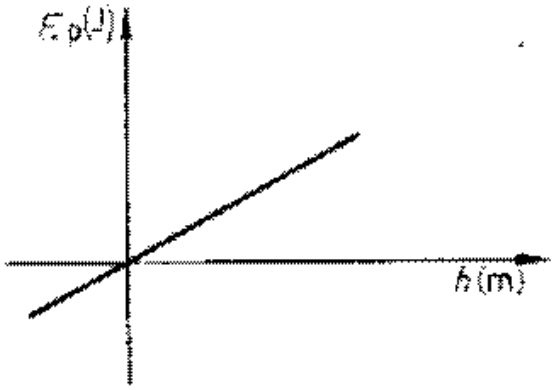
Ebből $\underline{\mu_0 = 0{,}36}$.

b) $t = 5$ s; $v_0 = 0$; $l = \frac{a}{2}t^2$-ből $a = \frac{2l}{t^2}$.

Newton II. törvénye szerint: $\sum F = m \cdot a$, $\sum F = F_{\parallel} - F_s$, ebből $\underline{\mu = 0{,}347}$.

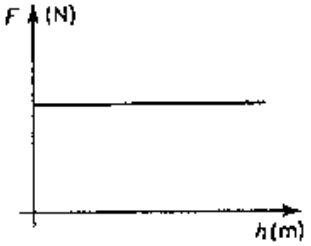
3.61. Egy m tömegű test α hajlásszögű lejtőn, egyenes vonalú pályán, egyenletes mozgással halad felfelé. A mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. Változzék a test potenciális energiája a hely függvényében az ábra szerint!

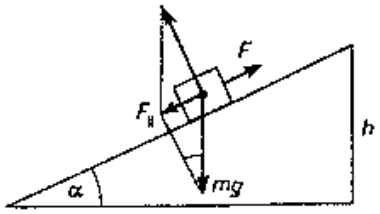
Ábrázoljuk a testre ható erőt a hely függvényében!



Megoldás:

3.61. m; α; v; $\mu = 0$ Egyenletes a mozgás: $\sum F = 0 = F - F_{\parallel}$; $F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$. A húzóerő: $\underline{\underline{F}} = m \cdot g \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{\text{állandó}}}$.





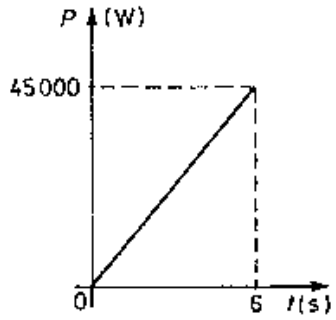
3.62. Egy 1200 kg tömegű személygépkocsi indulástól 6 s-ig gyorsít 2,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással. A menetellenállás elhanyagolható!

a) Mekkora az átlagteljesítmény a gyorsítási szakaszon?

b) Ábrázoljuk a teljesítményt az idő függvényében!

Megoldás:

3.62. $m = 1200$ kg; $v_0 = 0$; $t = 6$ s; $a = 2{,}5\frac{m}{s^2}$; $\mu = 0$



a) $P = \frac{W}{t}$, $W = m \cdot a \cdot s$, $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$,

$\overline{P} = 22\,500$ W

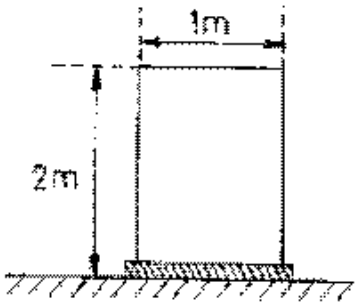
b) Lásd a 3.6. feladat megoldását! $P = F \cdot v = F \cdot a \cdot t$, $P \sim t$, $P_{max} = 45\,000$ W

3.63. Egy teherautó rakfelületén 1 m alapélhosszúságú, 2 m magas, homogén tömegeloszlású, négyzetes oszlop alakú láda áll. A láda alapélei párhuzamosak a teherautó megfelelő oldalaival, és a ládát minden oldalról biztosították elcsúszás ellen a teherautó rakfelületéhez rögzített, vékony lécekkel.

a) Mekkora lehet a teherautó maximális gyorsulása, amelynél a láda még éppen nem dől fel?

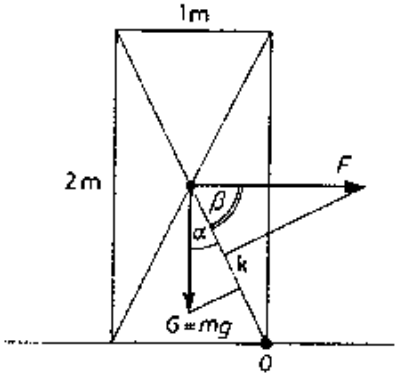
b) A maximális gyorsulás nagysága alapján ítéljük meg, hogy feldőlhet-e a láda a teherautó indulásakor?

c) Feldőlhet-e a láda, ha a teherautó 20 m sugarú körpályán kanyarodik?



Megoldás:

3.63. $l = 1$ m; $h = 2$ m

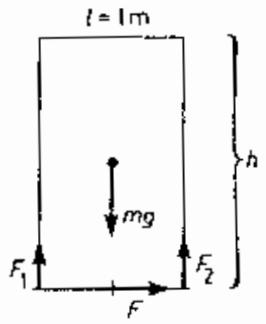


a) A mozgást a gépkocsihoz rögzített gyorsuló vonatkoztatási rendszerben értelmezzük:

Annak a feltetéle, hogy a láda ne dőljön fel: $M_G \geq M_F$, ahol $M_G = G \cdot k \cdot \sin\alpha$ és $M_F = F \cdot k \cdot \sin\beta = F \cdot k \cdot \sin(90° - \alpha) = F \cdot k \cdot \cos\alpha$, $F = m \cdot a$, $G \cdot k \cdot \sin\alpha \geq F \cdot k \cdot \cos\alpha$, ebből: $\underline{a} \leq g \cdot \operatorname{tg}\alpha = g \cdot 0{,}5 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ha az autó és vele együtt a láda gyorsulása $\leq 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, akkor nem dől fel a láda.

A mozgást inerciarendszerben leírva:



Inerciarendszerben a számításba vehető erők: a nehézségi erő, amelynek támadáspontját a láda tömegközéppontjában képzelhetjük el, és a gépkocsi platója által a ládára gyakorolt erő, amely az alátámasztási felület egészén érvényesül. A felületi erővel történő számolás bonyodalmait elkerülendő, tételezzük fel, hogy a láda négy sarkán négy láb van. Így a gépkocsi platója által gyakorolt erő négy pontban támad. Egyenes vonalú mozgásnál a platό által a hátul lévő két lábra gyakorolt erő függőleges komponense ugyanakkora, ezek eredőjét jelölje F_1. Hasonlóan az elöl lévő két lábra ható két erő függőleges komponensének eredője F_2. Jelölje F a platό által a lábakra gyakorolt erők vízszintes komponenseinek eredőjét. Ha a láda billenés nélkül vízszintes irányban gyorsul, akkor a mozgásegyenletek:

$F = m \cdot a$; $F_1 + F_2 - m \cdot g = 0$.

m a láda tömege, **a** pedig a láda tömegközéppontjának, illetve a gépkocsinak a gyorsulása. Mivel nincs szöggyorsulás, a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatékok algebrai összege 0: $F\frac{h}{2} + F_2\frac{l}{2} - F_1\frac{l}{2} = 0$

(l a láda hossza)

A három egyenletből: $m \cdot a \cdot h = (m \cdot g - 2F_2) \cdot l$

Ha $a = 0$, akkor $F_2 = m\frac{g}{2}$; ha **a** növekszik, F_2-nek csökkennie kell. **a** akkor maximális, ha $F_2 = 0$ (F_2 nem lehet negatív.) Ekkor $a_{max} = g\frac{l}{h} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) A tehergépkocsik nem indulhatnak ekkora gyorsulással, hiszen a legtöbb személyautó sem képes erre.

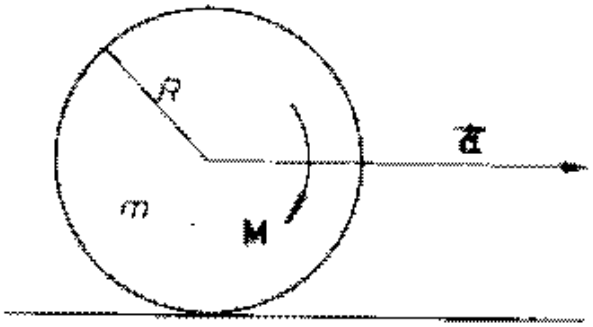
Álló helyzetből 5,6 s alatt gyorsulna fel 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra!

c) $r = 20$ m; $a_{cp} = \frac{v^2}{r} \leq \frac{g}{2}$; $v_k \leq \sqrt{\frac{r \cdot g}{2}}$; $\underline{\underline{v_k \leq 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ esetén nem dől fel a láda.

3.64. Vízszintes talajon homogén anyageloszlású, R sugarú, m tömegű, hengeres test nyugszik. Szimmetriatengelyére vonatkoztatott M nagyságú forgatónyomaték hat rá, minek következtében gyorsulva kezd gördülni. Mozgás közben a test nem csúszik meg.

a) Mekkora a tömegközéppont gyorsulása?

b) Milyen intervallumba eshet a forgatónyomaték nagysága, hogy csúszásmentes legyen a gördülés?



Megoldás:

3.64. R; m; M.

a) A feltételek miatt a tömegközéppont gyorsulása megegyezik a henger érintő irányú gyorsulásával. A forgómozgás alapegyenlete: $M = \Theta \cdot \beta$; $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$; $a_é = R \cdot \beta$; $\underline{\underline{a_é = \frac{2M}{R \cdot m}}}$

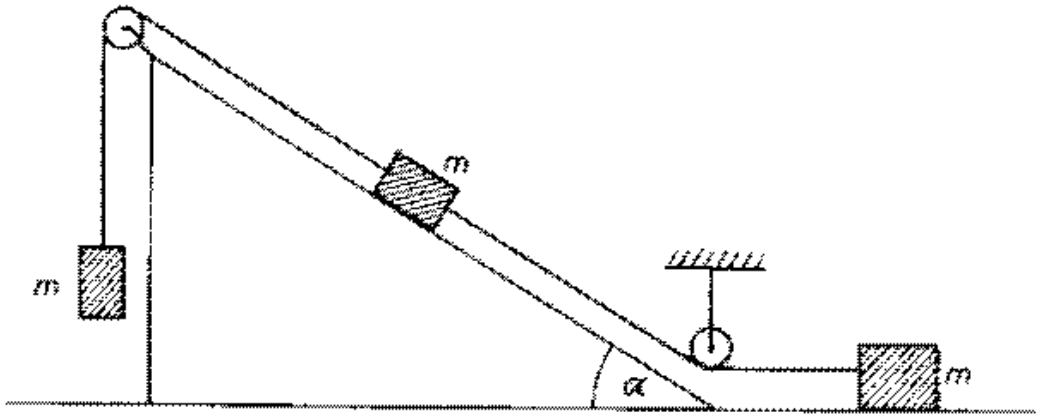
b) $\underline{\underline{F_é \leq F_{s0}}}$; $M = F_é \cdot R$; $\frac{M}{R} \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$; $\underline{\underline{M \leq \mu_0 : m \cdot g \cdot R}}$

3.65. Egy 30°-os lejtő tetejéről lecsúszó test a lejtő aljára harmadakkora sebességgel érkezik, mintha súrlódás nélkül csúszott volna le.
Mekkora a test és a lejtő között a súrlódási együttható?

Megoldás:

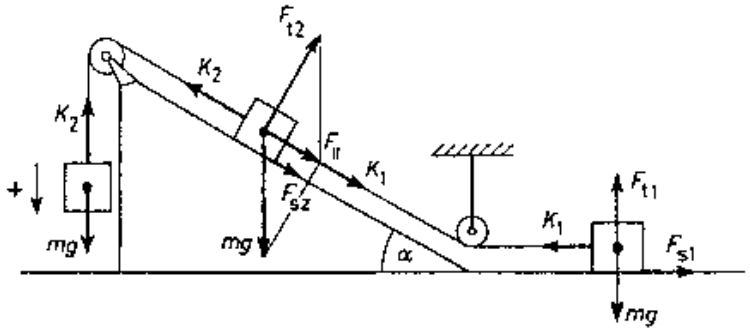
3.65. $\alpha = 30°$; $v = 3 \cdot v_s$. Lásd a 3.49. feladat megoldását! $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ és $v_s = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(1 - \mu \cdot \operatorname{ctg}\alpha)}$; $v = 3 \cdot v_s$-ból $\underline{\underline{\mu = 0{,}51}}$.

3.66. Határozzuk meg a rajzon látható rendszer gyorsulását és a kötélerőket, ha $m = 2$ kg, $\alpha = 30°$ és a súrlódási együttható 0,1! (A csigák tömegétől és súrlódásuktól eltekintünk.)



Megoldás:

3.66. $m = 2$ kg; $\alpha = 30°$; $\mu = 0{,}1$; $F_{s_1} = \mu \cdot m \cdot g$; $F_{s_2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$; $F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, mindegyik test azonos gyorsulással halad.



A mozgásegyenletek: $\left.\begin{aligned} K_1 - F_{s_1} &= m \cdot a \\ K_2 - F_{\parallel} - F_{s_2} - K_1 &= m \cdot a \\ m \cdot g - K_2 &= m_3 \cdot a \end{aligned}\right\}$, ebből $\underline{\underline{a = 1{,}04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$;

$\underline{\underline{K_1 = 4{,}09 \text{ N}}}$; $\underline{\underline{K_2 = 117{,}9 \text{ N}}}$

3.67. Egy vízszintes síkon fekvő ládát, $F = 50$ N nagyságú, vízszintes irányú erővel húzunk. A láda egyenletesen mozog $v = 0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel.

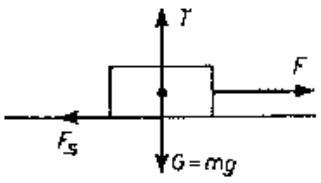
a) Mekkora a húzóerő munkája, miközben a láda $s = 3{,}5$ m-t halad?
b) Határozzuk meg a ládára ható többi erő munkáját külön-külön!
c) Mennyi a ládára ható erők munkájának összege?
d) Mennyi az eredő erő munkája?
e) Mennyi a húzóerő teljesítménye?

Megoldás:

3.67. $F = 50$ N; $v = 0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) $s = 3{,}5$ m; $\underline{\underline{W_f = F \cdot s = 175 \text{ J}}}$

b) $\sum F = 0$; $0 = F - F_s$; $W_s = -W_f = -175$ J $W_G = 0$ és $W_T = 0$, mert G és T merőleges az elmozdulásra.



c) $\underline{\underline{\sum W = 0}}$

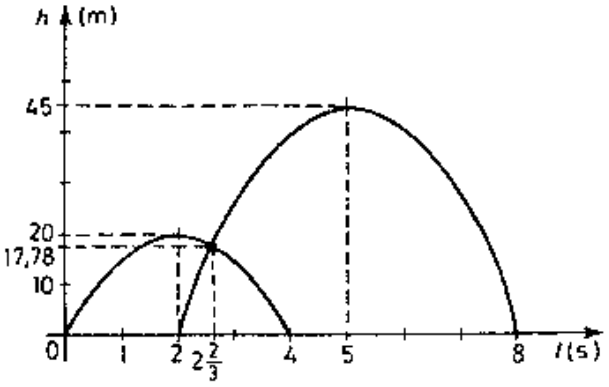
d) $\underline{\underline{W_{\sum F} = 0}}$

e) $P = \frac{W_F}{t}$; $s = v \cdot t$; $\underline{\underline{P = 10 \text{ W}}}$.

3.68. Egy 2 kg tömegű követ függőlegesen felfelé dobunk 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, majd 2 s múlva utána dobunk egy 1 kg tömegű követ 30 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel.

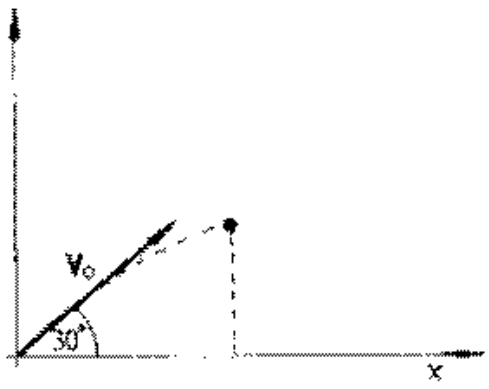
a) Határozzuk meg találkozásuk idejét és helyét!
b) Ábrázoljuk a két kő helyét az idő függvényében!
c) A találkozást követően hogyan változik helyzeti energiájuk?

Megoldás:



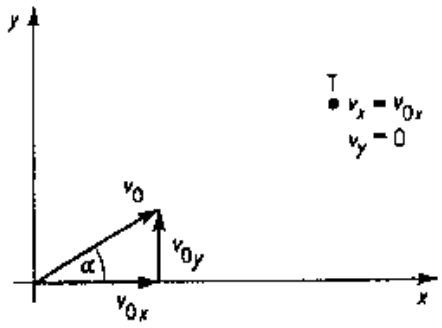
c) A grafikonról leolvasható, hogy a találkozás után ($t = 2\frac{2}{3}$ s): Az első kő esik, tehát a helyzeti energiája csökken. A második kő az 5. s-ig emelkedik, tehát a helyzeti energiája növekszik, utána a 8. s-ig esik, tehát a helyzeti energiája csökken.

3.69. A $v_0 = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel $\alpha = 30°$-os szög alatt fellőtt lövedék pályájának legmagasabb pontján felrobban és két egyenlő tömegű részre szakad. Mindkét rész egyszerre éri el a talajt. Hol ér talajt az egyik rész, ha a másik rész a robbanás helye alatt esik a földre?



Megoldás:

3.69. $v_0 = 200\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 30°$



A kezdősebesség x és y irányú komponense: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ és $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$. A tetőpontban $y_x = v_{0x}$ és $v_y = 0 = v_{0y} - g \cdot t$, ebből az emelkedési idő $t = 10$ s; az emelkedési magasság: $h = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = 500$ m.

A robbanás helye alatt esik a földre az első fél tömegdarab, tehát nincs vízszintes irányú sebessége csak a második fél tömegdarabnak. Alkalmazva a lendületmegmaradás törvényét. $m \cdot v_{0x} = \frac{1}{2}m \cdot 0 + \frac{1}{2}m \cdot v'_{0x}$, ebből a második sebessége a robbanás után vízszintesirányban: $v'_{0x} = 2 \cdot v_{0x}$, függőleges irányban pedig szabadeséssel $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ ideig esik, miközben vízszintesen $\underline{s} = v'_{0x} \cdot t = \underline{3464\ \text{m}}$ távolságra távolodik a robbanás helyétől.

3.70. Mekkora munkát végez a súrlódási erő, ha az 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó, 120 kg tömegű szánkót vízszintes talajon megállítja?

Megoldás:

3.70. $v_0 = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 120$ kg.

A munkatétel alapján: $\underline{W_s} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \underline{13\,500\ \text{J}}$

3.71. Mekkora a súrlódási együttható a padló és a láda között, ha a $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ellökött láda 4 m úton fékeződik le a vízszintes padlón?

Megoldás:

3.71. $v_0 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 4$ m; $v_t = 0$.

A ládára csak a súrlódási erő hat: $m \cdot a = -F_s$; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $s = \frac{v_0}{2} t$; $F_s = \mu \cdot m \cdot g$; $\underline{\underline{\mu = 0{,}45}}$.

3.72. Mekkora sebességgel haladt az a szán, amely vízszintes havon 50 m-es úton fékeződik le? A szán és a hó között a súrlódási együttható 0,08.

Megoldás:

3.72. $s = 50$ m; $\mu = 0{,}08$.

Lásd a 3.71. feladat megoldását! $\underline{\underline{v = 8{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

3.73. Mekkora munkát végzett a közegellenállási erő, ha egy 12 m magasból leejtett, 0,5 kg tömegű test $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel éri el a talajt?

Megoldás:

3.73. $h = 12$ m; $m = 0{,}5$ kg; $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A munkatétel alapján: $\underline{\underline{W_{\text{ell}}}} = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \underline{\underline{35 \text{ J}}}$.

3.74. Egy 4 kg tömegű, $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó test beleütközik a nyugalomban lévő, 6 kg tömegű testbe. Ütközés után a testek együtt haladnak, az ütközés tehát rugalmatlan. Mennyivel változott a rendszer mozgási energiája az ütközés során?

Megoldás:

3.74. $m_1 = 4\ \text{kg};\ v_1 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ v_2 = 0;\ m_2 = 6\ \text{kg};$

$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v;\quad v = 3{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$$\underline{\underline{\Delta E_m}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right) = \underline{\underline{-76{,}8\ \text{J}}}.$$

3.75. Két rugalmatlan test együttes tömege 18 kg. A testek egymással szemben haladnak $8{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, illetve $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel, és centrális ütközés után a közös sebességük $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz. A közös sebesség iránya a nagyobb sebesség irányával azonos. Mennyit változott a rendszer mozgási energiája az ütközés során?

Megoldás:

3.75. $m_1+m_2=18\ \text{kg}$; $v_1=8{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2=-6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v=2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2=18\ \text{kg}-m_1$.

Lásd a 3.74. feladat megoldását!

$\underline{\Delta E_m=-460{,}8\ \text{J}}$.

3.76. Két, azonos tömegű biliárdgolyó egymással szemben haladva centrálisan és rugalmasan ütközik. Az egyik golyó sebessége az ütközés előtt $6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a másiké $4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

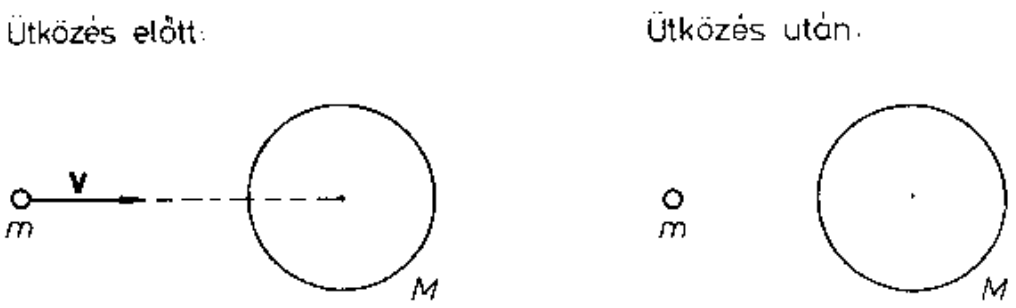
Mekkora lesz a golyók sebessége az ütközés után?

Megoldás:

3.76. $m_1 + m_2 = m$; $v_1 = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = -4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A lendületmegmaradás és a mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján: $m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot v_1' + m \cdot v_2'$ és $\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_2'^2$. Ebből $\underline{\underline{v_1' = -4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$, $\underline{\underline{v_2' = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

3.77. Egy kis tömegű test (m) centrálisan és rugalmasan ütközik egy igen nagy tömegű testtel (M), mely kezdetben nyugalomban volt.



a) Milyen lehetőségek vannak az ütközés után az m és M tömegű testek sebességének irányára vonatkozóan?

b) Az ütközések következtében mindkét testnek megváltozik a sebessége, impulzusa, mozgási energiája. Elemezzük ezen mennyiségek nagyságának és irányának változását!

Megoldás:

3.77. m; M; v; $v_M = 0$.

A lendületmegmaradás és a mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján:

a) $m \cdot v + 0 = m \cdot v' + m \cdot v'_M$ (1);

$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot v'^2 + \frac{1}{2} M \cdot v'^2_M$ (2);

$m \cdot (v' - v) = -M \cdot v'_M$ (3);

$m \cdot (v'^2 - v^2) = -M \cdot v'^2_M$ (4);

A (4) egyenletet osztva (3)-mal: $v' + v = v'_M$, ebből

$v' = -v + v'_M$ (5)

és $v'_M = v + v'$ (6).

(5)-t és (6)-t visszahelyettesítve (1)-be:

$v' = \frac{m - M}{m + M} \cdot v$ és $v'_M = \frac{2 \cdot m}{m + M} \cdot v$;

$m < M$: $\frac{2m}{m + M} > 0$, $\frac{m - M}{m + M} < 0$, tehát az ütközés után a nagy golyó sebességvektorának iránya megegyezik a kis golyó sebességvektorának iránya pedig ellentétes az m tömegű golyó ütközés előtti sebességvektorának irányával.

b) Lásd az *a)* rész megoldását!

(3): $\Delta I_m = -\Delta I_M$ a két golyó lendületváltozásának iránya ellentétes, tehát a sebességváltozásának iránya is.

(4): $\Delta E_m = -\Delta E_M$ a két golyó mozgási energia változásának nagysága ellentettje egymásnak.

3.78. Vízszintes és egyenes sínpályán $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó, $m_1 = 10^4$ kg tömegű vasúti kocsi utoléri az előtte $v_2 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó, $m_2 = 3 \cdot 10^4$ kg tömegű másik vasúti kocsit. Az összeütközésnél önműködő kapcsoló összekapcsolja a két kocsit.
Mekkora lesz ütközés után az összekapcsolt kocsik sebessége? (A súrlódástól és közegellenállástól tekintsünk el!)

Megoldás:

3.78. $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_1 = 10^4$ kg; $v_2 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 3 \cdot 10^4$ kg.
A lendületmegmaradás törvénye alapján: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$,
ebből $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.79. Vízszintes és egyenes pályán $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó, $m_1 = 10^4$ kg tömegű vasúti kocsi rugalmasan ütközik a sínen álló $m_2 = 2 \cdot 10^4$ kg tömegű vasúti kocsinak. Mekkora lesz a kocsik sebessége az ütközés után?

Megoldás:

3.79. $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_1 = 10^4$ kg; $m_2 = 2 \cdot 10^4$ kg; $v_2 = 0$,

Lásd a 3.77. *a)* feladat megoldását!

$v_1' = -2{,}67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $v_2' = 5{,}33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.80. Vízszintes, egyenes sínen két kocsi egymás felé mozog és ütköznek. A kocsik közelebbi homloklapjait nem egyforma erős rugós ütközőkkel látták el. Ütközéskor ezek nyomódnak össze, de csak annyira, hogy maguk a kocsik homloklapjai az ütközés folyamán nem érintkeznek. A rugókat ideálisnak vesszük, és mindennemű súrlódástól eltekintünk. Mekkora az egyes kocsik ütközőinek maximális benyomódása külön-külön?

Számadatok: a kocsik tömegei:

$$m_1 = 260\ \text{kg},\ m_2 = 150\ \text{kg};$$

sebességeik az érintkezés pillanatában:

$$v_1 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\ v_2 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

az egyes ütközők rugóállandói:

$$D_1 = 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}},\ D_2 = 2{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Megoldás:

3.80. $m_1 = 260$ kg; $m_2 = 150$ kg; $v_1 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = -8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $D_1 = 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $D_2 = 2{,}25 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Az érintkezés pillanatától kezdve a rugók összenyomódnak, a kocsik közelednek egymáshoz. A maximális összenyomódás pillanatában további közeledés nincs, ekkor a két kocsi sebessége azonos: u. Az impulzus megmaradás törvényéből kiszámítható: $u = 6{,}585\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Eddig a pillanatig a mozgási energia veszteség egyenlő a rugókban együttesen tárolt rugalmas energiával.

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot u^2 = \frac{1}{2}D_1 \cdot x_1^2 = 25\,160\ \text{J}.$$

Felhasználva, hogy $D_1 \cdot x_1 = D_2 \cdot x_2$ adódik, hogy $\underline{\underline{x_1 = 6\ \text{m},\ x_2 = 2{,}4\ \text{m}}}$ az egyes kocsik ütközőinek maximális benyomódása.

3.81. Egy gépkocsi adott sebességről felgyorsul, miközben motorját állandó teljesítménnyel működtetjük. A felgyorsulás alatt menetellenállás (mozgást gátló erő) hat rá, amelyet állandó nagyságúnak veszünk.

a) Mutassuk meg, hogy a sebesség nem növekedhet tetszőleges nagyra, és számítsuk ki a gépkocsi végsebességét!

b) Mekkora a gépkocsi gyorsulása abban a pillanatban, amikor sebessége a maximális sebességnek éppen a fele? Mekkora gyorsító erő hat rá ekkor?

Számadatok: a gépkocsi tömege: $m = 10^3$ kg,
az ellenálló erő: $K = 1180$ N,
a motor teljesítménye: $P = 31$ kW.

Megoldás:

3.81. $m = 10^3$ kg; $K = 1180$ N; $P = 31$ kW $= 31\,000$ W.

a) Alkalmazva a munkatételt kis időintervallumokra: $\Delta E_m = W_{\text{motor}} - W_k = P \cdot \Delta t - K \cdot \Delta s$

$\frac{\Delta E_m}{\Delta t} = P - K\frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0$, ahol $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{pil.}}$. $P - K \cdot v_{\max} = 0$, ebből $\underline{\underline{v_{\max} = 26{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $v = \frac{v_{\max}}{2} = 13{,}15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kis időintervallum esetén $P = F \cdot v$, illetve a gyorsuló mozgás miatt: $\sum F = m \cdot a = F - K$, ebből $\underline{\underline{a = 1{,}18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$ a pillanatnyi gyorsulás. $\underline{\underline{F = 2357 \text{ N}}}$ a pillanatnyi gyorsító erő.

3.82. Egy csigán átvetett kötél egyik végére M tömegű nehezéket erősítettünk, másik végére homokkal telt vödröt akasztottunk, melynek tömege a homokkal együtt egyenlő a nehezék tömegével. A mennyezethez erősített csigán lógó rendszer kezdetben nyugalomban és egyensúlyban van. A vödör fölött elejtünk egy m tömegű vaspálcát, mely v sebességgel érkezik a homok felületére és abba belefúródik. A pálca, mozgása során nem lép ki a homokból, hanem állandó F súrlódási erő hatására fékeződve, abban végül is megáll, tehát együtt mozog a vödörrel. A csiga és a kötél tömegétől eltekintünk, csak a pálcát fékező súrlódást vesszük figyelembe.

a) Mekkora a rendszer sebessége abban a pillanatban, mikor a pálca a vödörhöz képest éppen nyugalomba került?

b) Mennyi ideig mozog a pálca a homokban?

c) Mekkora a rendszer gyorsulása akkor, amikor a pálca már a vödörrel együtt mozog?

d) Mekkora erő hat a pálcára a mozgó rendszerben akkor, amikor a pálca, a vödörhöz viszonyítva már áll?

Számadatok: a pálca sebessége

a homokra érkezéskor: $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

a pálca tömege: $m = 0{,}5$ kg,

a nehezék tömege: $M = 4$ kg,

a fékező erő: $F = 60$ N.

Megoldás:

3.82. $v = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 0{,}5$ kg; $M = 4$ kg; $F = 60$ N; $v_0 = 0$.

c) A becsapódás pillanatában F hat a pálcára, illetve ezzel ellenkező erő a homokra (Newton III. törvénye). A rendszer gyorsulása a fékeződés alatt (Newton II. törvénye):

$$\left.\begin{aligned} M \cdot g - K + F &= M \cdot a \\ K - M \cdot g &= M \cdot a \end{aligned}\right\}, \text{ ebből } \underline{\underline{a = 7{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

A talajhoz viszonyítva a pálcára ható erő: $m \cdot g - F = m \cdot a_{p-t} = -110\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $a_{p-t} - a = -117{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) $0 = v + a_{p-v} \cdot t$-ből $\underline{\underline{t = 0{,}119\ \text{s}}}$ idő alatt áll meg a pálca a homokban a vödörhöz képest.

a) A pálca talajhoz viszonyított sebessége akkor, amikor megáll: $v_{p-t} = v + a_{p-t} \cdot t = 0{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és ugyancsak $\underline{\underline{0{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a rendszer sebessége is ekkor.

d) A pálca megállásakor a mozgásegyenletek: $K - M \cdot g = M \cdot a_1$ és $(M + m) \cdot g - K = (M + m) \cdot a_1$, ebből $a_1 = 0{,}59\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lesz a rendszer gyorsulása. A pálcára ható erő: $F_p = -m \cdot (g - a_1) = \underline{\underline{-4{,}7\ \text{N}}}$.

3.83. Az M tömegű vagon szénrakodó automata alatt halad el v sebességgel és 100 m utat tesz meg, míg megáll.
Mekkora távolságig jutott volna el, ha az automata alatt való áthaladás közben vele egyenlő tömegű szén hullott volna bele?

Megoldás:

3.83. M; v; $s = 100$ m.

A lendületmegmaradás törvénye alapján $M \cdot v + M \cdot 0 = 2 \cdot M \cdot v'$, ebből $v' = \frac{v}{2}$.

A mechanikai energia megmaradásának tétele alapján: $\frac{1}{2} M \cdot v^2 = \mu \cdot M \cdot g \cdot s$, illetve $\frac{1}{2} M \cdot v'^2 = \mu \cdot 2 \cdot M \cdot g \cdot s'$, ebből $\underline{s' = 12{,}5 \text{ m}}$ távolságra jutott volna.

3.84. Az $m = 10$ g tömegű viaszgolyócska $h_1 = 27$ cm magasból esik az asztal lapjára.

a) Mekkora átlagos erővel hat a lapra a golyó az ütközés folyamata alatt, ha az ütközés időtartama $t = 0{,}03$ s?

b) Mekkora ez az erő, ha a golyó rugalmas anyagból készült, és az ütközés után $h_2 = 12$ cm magasra pattan vissza?

c) Az asztaltól milyen távol ért talajt az m_2 tömegű test, ha az asztal 1,2 m magas?

Megoldás:

3.84. $m = 10$ g $= 0{,}01$ kg; $h_1 = 27$ cm $= 0{,}27$ m; $\Delta t = 0{,}03$ s.

a) $h_1 = \frac{g}{2}t^2$-ből $t = 0{,}23$ s és $v = g \cdot t = 2{,}32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel csapódik az asztalnak a golyó és megáll: $v_1 = 0$.

$F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = -0{,}77$ N erővel hat az asztal a golyóra. Newton III. törvénye alapján $\underline{\underline{0{,}77 \text{ N}}}$ erővel hat a golyó az asztalra.

b) $h_2 = 12$ cm $= 0{,}12$ m.

$h_2 = v_1 \cdot t - \frac{g}{2}t^2$ és $v_1 - g \cdot t = 0$-ból a visszapattanás sebessége $v_1 = 1{,}55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$|\Delta v| = \left|-1{,}55 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2{,}32 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right| = 3{,}87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$|F_2| = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \underline{\underline{1{,}29 \text{ N}}}$ erővel hat a golyó az asztalra.

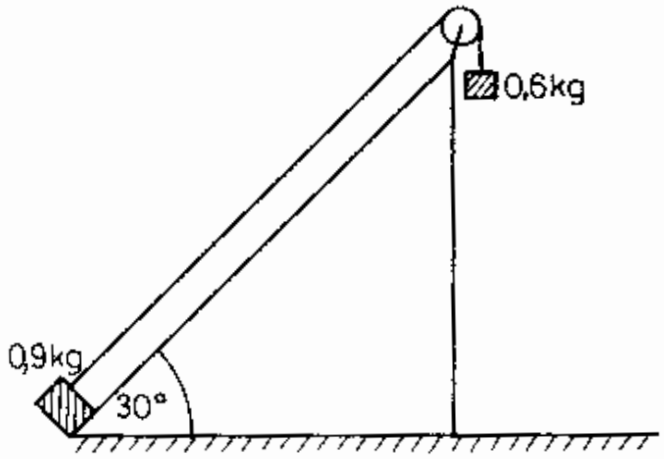
c) Ha függőleges a fel-le pattanás, akkor az asztalon marad a végén a golyó.

3.85. Egy súrlódásmentes lejtő hossza 1,5 m, hajlásszöge 30°. A lejtő alján 0,9 kg tömegű test van. A testhez fonalat erősítünk, melyet a lejtő tetején lévő csigán vetünk át, és a végére 0,6 kg tömegű testet erősítünk. A rendszert ezután magára hagyjuk.

a) Mekkora a rendszer gyorsulása?

b) Mekkora lesz a sebessége a 0,6 kg tömegű testnek 0,5 m út megtétele után?

c) Milyen magasan lesz a lejtőn a 0,9 kg tömegű test, mikor egy pillanatra zérussá válik a sebessége?



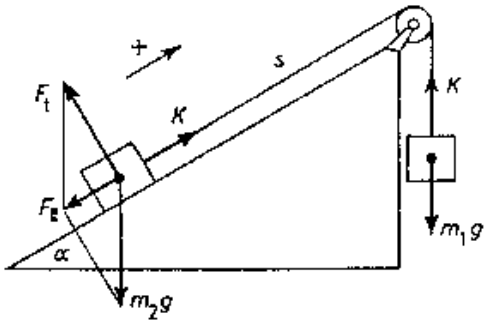
Megoldás:

3.85. $s = 1{,}5$ m; $\mu = 0$; $\alpha = 30°$; $m_2 = 0{,}9$ kg; $m_1 = 0{,}6$ kg.

a) A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot g - K &= m_1 \cdot a \\ K - F_{\parallel} &= m_2 \cdot a \end{aligned}\right\},$$

ahol $F_{\parallel} = m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha$, $a = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



b) $s_2 = 0{,}5$ m; $s_1 = \frac{1}{2} t_1^2$,

$\underline{\underline{v_1 = a \cdot t_1 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

c) Az m_1 tömegű test $h = s \cdot \sin\alpha = \frac{a}{2} t^2$ utat tesz meg lefelé t idő alatt, miközben az m_2: $v_0 = a \cdot t$ sebességre gyorsul fel. Az m_2 v_0-ról egyenletesen lassuló mozgással fog megállni: $\sum F = -m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot a_2$-ből a_2 gyorsulással, $0 = v_0 + a_2 \cdot t_2$-ből t_2 idő alatt, $s_2 = v_0 \cdot t + \frac{a_2}{2} t_2^2$ úton.

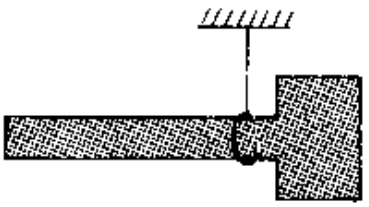
Összesen $h + s_2$ úttal: $h_2 = (h + s_2) \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{0{,}45 \text{ m magasságra jut fel.}}}$

4.1. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre! Indokoljuk állításunkat!*

a) Miért nem sikerül felállni a székről anélkül, hogy testünket előre hajlítsuk?

b) Egy a közepén fonálra felfüggesztett huzal vízszintes helyzetben van. Megmarad-e vízszintes helyzetben, ha egyik végét felébe visszahajlítjuk?

c) Az ábra szerint kötélhurokra felfüggesztett faoszlop egyensúlyi helyzetben van. Az oszlop melyik része lesz nagyobb súlyú, ha kettévágjuk a kötélhurok síkjában?



d) Mikor könnyebb megemelni a talicskában lévő terhet a talicskával: amikor az a kerékhez közelebb, vagy amikor a keréktől távolabb van?

e) Rudakon hordót gurítunk fel azonos magasságra egyenletesen. Hosszabb vagy rövidebb rudak esetében fejt ki nagyobb erőt a hordó a rudakra?

Megoldás:

4.1. *a)* A széken ülő ember csak akkor tud felállni, ha a testének tömegközéppontján átmenő súlyvonal metszi a talpak által meghatározott alátámasztási felületet.

b) Nem, mert a visszahajlított rész súlypontja közelebb kerül a felfüggesztési ponthoz, így forgatónyomatéka kisebb lesz.

c) Az a rész lesz nagyobb súlyú, amelyik vastagabb. Ennek ugyanis a felfüggesztési ponthoz közelebb volt a súlypontja, így egyensúly – a két rész forgatónyomatékának egyenlősége – a kisebb kar miatt, csak nagyobb súly esetén teljesülhetett.

d) Amikor a teher a kerékhez közelebb van. Ekkor a teher karja kisebb, az emelő erő karja nagyobb, az egyensúly így kisebb emelő-erő esetén teljesül.

e) Hosszabb rudak esetén fejt ki a hordó nagyobb erőt a rudakra. Ha a hordó súlyát rúdirányú és rúdra merőleges összetevőkre bontjuk, a rudakra merőleges összetevő annál nagyobb, minél kisebb a rudak alkotta lejtő hajlásszöge.

4.2. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Mi a feltétele a szabad merev testek egyensúlyának?

b) Lehet-e egyetlen további erő alkalmazásával egyensúlyban tartani azt a merev testet, melyre erőpár hat?

c) Hogyan összegezhetők a szabad merev testre ható párhuzamos erők?

d) Egy szabad merev testre két, egy síkban fekvő erő hat. A merev test egyensúlyban van. Mit tudunk mondani a reá ható két erőről?

e) Egy szabad merev testre három, egy síkban fekvő erő hat. Az erők között nincs párhuzamos hatásvonalú. A test egyensúlyban van. Mit tudunk mondani a három erőről?

Megoldás:

4.2. **a)** Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője és az erők – a szilárd test bármely pontjára vonatkoztatott – forgatónyomatékainak algebrai összege nulla legyen.

b) Nem, mert erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel, hanem mindig csak vele egyenlő forgatónyomatékú erőpárral.

c) Párhuzamos erők eredőjét az összetevő erők előjel szerinti összegezése adja. Az eredő hatásvonala az összetevők hatásvonalával párhuzamos, irányát előjele mutatja. Az eredő hatásvonalának bármely pontjára az összetevő erők forgatónyomatékainak algebrai összege nulla.

d) Hatásvonaluk egy egyenesbe esik, ellentétes irányúak és azonos nagyságúak.

e) Hatásvonalaik egy pontban metszik egymást. Bármelyik két erő eredőjének hatásvonala egybeesik a harmadik erő hatásvonalával, vele azonos nagyságú és ellentétes irányú, így $\sum \vec{F} = 0$.

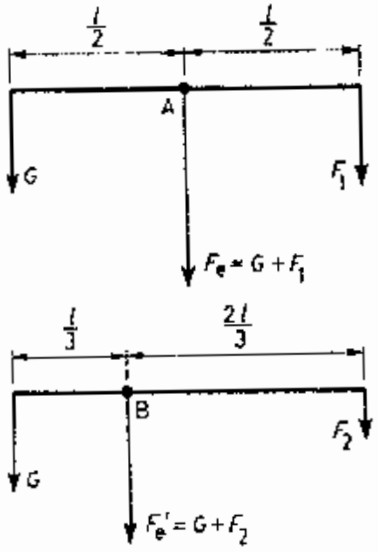
4.3. Egy ember 15 kg tömegű terhet visz úgy, hogy a terhet alkalmasan megválasztott bot egyik végére akasztotta, majd a botot középen alátámasztotta a vállával. A bot másik végét kezével fogva, egyensúlyt hoz létre.

a) Mekkora erő nyomja az ember vállát?

b) Mekkora a vállát nyomó erő, ha a botot a teher felőli egyharmad hosszban támasztja meg?

Megoldás:

4.3. $m = 15$ kg.



a) $G = mg = 150$ N. Egyensúly esetén: $\sum \vec{M}_A = 0$; azaz $G \cdot \frac{1}{2}l - F_1 \cdot \frac{1}{2}l = 0$; $F_1 = G = 150$ N.

Az eredő erő párhuzamos és egyirányú összetevők esetén:

$\underline{\underline{F_e}} = G + F_1 = \underline{\underline{300 \text{ N}}}$.

b) Az *a)* megoldás menete szerint:

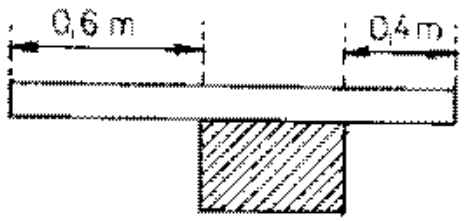
$G \cdot \frac{1}{3}l = F_2 \cdot \frac{2}{3}l$; $F_2 = \frac{G}{2} = 75$ N.

$\underline{\underline{F_e'}} = G + \frac{F}{2} = \underline{\underline{225 \text{ N}}}$.

4.4. Egy 100 N súlyú, 1,5 m hosszú, homogén anyageloszlású rúd egy ládán fekszik. A láda bal szélén 0,6 m-rel, jobb szélén 0,4 m-rel nyúlik túl.

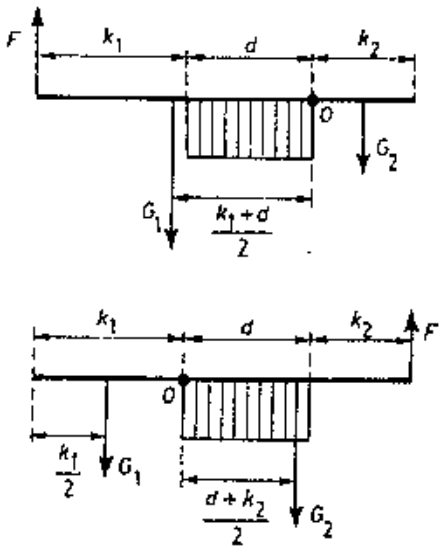
a) Mekkora erővel tudjuk a rudat a bal oldali végénél megemelni?

b) Mekkora erővel tudjuk a rudat a jobb oldali végénél megemelni?



Megoldás:

4.4. $G = 100$ N; $l = 1{,}5$ m; $k = 10{,}6$ m; $k_2 = 0{,}4$ m.



a) A 0,1 m hosszú rúd súlya: $\frac{100}{15}$ N, ezért $G_1 = 73{,}34$ N; $G_2 = 26{,}66$ N.

A láda hossza:

$\underline{\underline{d = l - (k_1 + k_2) = 0{,}5 \text{ m}}}$.

Az O pontra vonatkoztatva: $\sum \vec{M} = 0$.

$$F \cdot (k_1 + d) - G_1 \cdot \left(\frac{k_1 + d}{2}\right) + G_2 \cdot \frac{k}{2} = 0;$$

$\underline{\underline{F = 31{,}82 \text{ N}}}$.

b) Ebben az esetben: $G_1 = 40$ N; $G_2 = 60$ N.

Az O' pontra: $\sum \vec{M} = 0$.

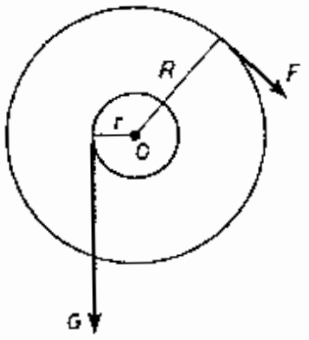
$$F \cdot (k_2 + d) - G_2 \cdot \frac{k_2 + d}{2} + G_1 \cdot \frac{k_1}{2} = 0. \quad \underline{\underline{F = 16{,}67 \text{ N}}}.$$

4.5. Egy hengerkerék 0,2 m sugarú hengerére csévélődő kötélen 40 kg tömegű teher függ. A kerék 5 fordulatával 30 s alatt a terhet egyenletesen felhúzzuk. A kerék sugara 0,6 m.

a) Mekkora erő kell a kerék forgatásához?
b) Mennyi a munkavégzés?
c) Mekkora a teljesítmény?

Megoldás:

4.5. $r = 0{,}2$ m; $R = 0{,}6$ m; $n = 5$; $t = 30$ s; $m = 40$ kg.



a) $G = mg = 400$ N.

$\sum \vec{M} = 0$; $R \cdot F - G \cdot r = 0$; $\underline{\underline{F = 133{,}3 \text{ N}}}$.

b) Az 5 fordulat alatt az F erő útja: $s = 2R\pi \cdot n = 18{,}85$ m.

A munkavégzés: $\underline{\underline{W = F \cdot s = 2512{,}7 \text{ J}}}$.

c) A teljesítmény: $\underline{\underline{P = \frac{W}{t} = 83{,}7 \text{ W}}}$.

4.6. Egy kétoldalú emelő karjai 8 cm, illetve 40 cm hosszúak. A rövidebb karra függesztett 10 kg tömegű teher emelésekor



a hosszabb karra 25 N nagyságú erővel kell hatni. Mekkora az emelő hatásfoka?

Megoldás:

4.6. $k_1 = 0{,}08$ m; $k_2 = 0{,}4$ m; $m = 10$ kg; $F = 25$ N.

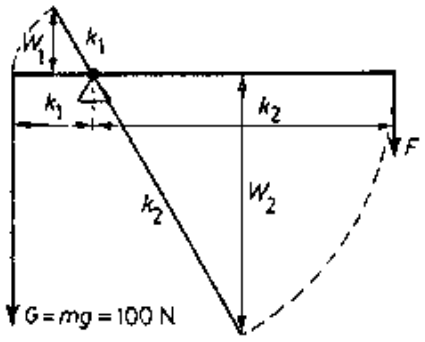
A hatásfok (η) a hasznos munka és a befektetett munka hányadosa:

$$\eta = \frac{W_h}{W_b};\quad W_h = G \cdot h_1;\quad W_b = F h_2;\quad h_1 : h_2 =$$

$$= k_1 : k_2;\quad h_1 = \frac{k_1 \cdot h_2}{k_2}.$$

$$W_h = G\frac{k_1 \cdot h_2}{k_2};\quad W_b = F \cdot h_2;$$

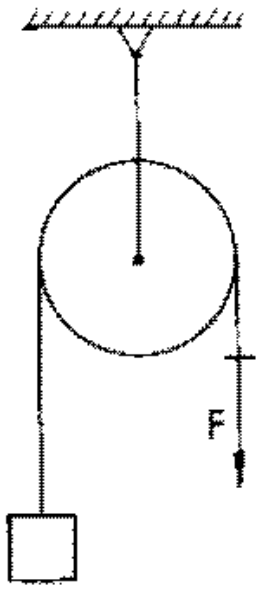
$$\underline{\underline{\eta}} = \frac{G \cdot \frac{k_1 \cdot h_2}{k_2}}{F \cdot h_2} = \frac{G \cdot k_1}{F \cdot k_2} = \underline{\underline{0{,}8}}.$$



4.7. Álló csiga segítségével 75 kg tömegű terhet emelünk 4 m magasra. A berendezés hatásfoka 60%.

a) Mekkora erő szükséges az emeléshez?

b) Mekkora a hasznos és mekkora a befektetett munka?



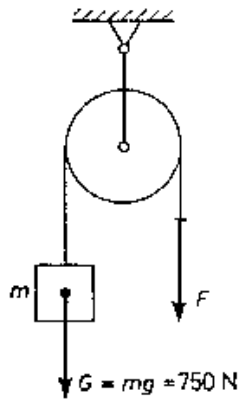
Megoldás:

4.7. $m = 75$ kg; $h = 4$ m; $\eta = 0{,}6$.

a) A hatásfok a hasznos munka és a befektetett munka hányadosa:

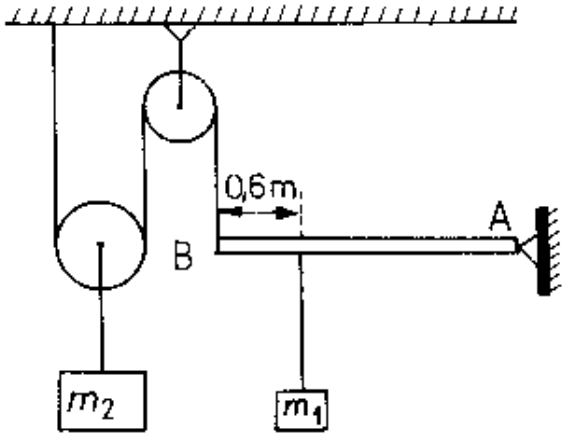
$$\eta = \frac{W_h}{W_b}; \quad \eta = \frac{G \cdot h}{F \cdot h};$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{G}{\eta} = \underline{\underline{1250 \text{ N}}}.$$



b) $\underline{\underline{W_h}} = G \cdot h = \underline{\underline{3000 \text{ J}}}; \quad \underline{\underline{W_b}} = F \cdot h = \underline{\underline{5000 \text{ J}}}.$

4.8. Egy homogén, $m = 1{,}5$ kg tömegű rúd „A” végét csuklóval rögzítettük, a „B” végét két csigán átvetett kötél tartja. (L: az ábrát!) A rúd „B” végétől 0,6 m-re a rúdra egy $m_1 = 2{,}5$ kg tömegű, a mozgó csigára $m_2 = 5$ kg tömegű terhet akasztottunk. A rendszer így egyensúlyban van. A súrlódást hanyagoljuk el!

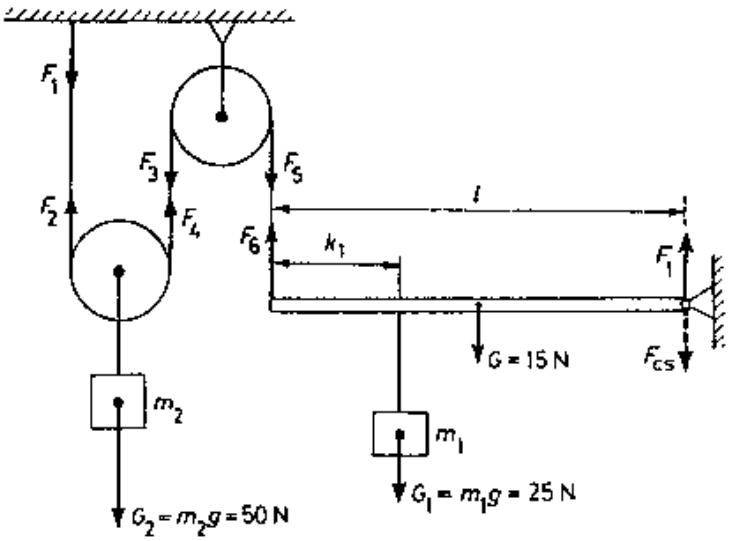


a) Milyen hosszú a rúd?

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a csuklóra?

Megoldás:

4.8. $m = 1{,}5$ kg; $k_1 = 0{,}6$ m; $m_1 = 2{,}5$ kg; $m_2 = 5$ kg.



A fonalat feszítő erők kölcsönhatású erők, ezért egyenlő nagyságúak, ezeket a számítások során jelöljük F-fel.
$(F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F)$

a) A mozgócsiga egyensúlyban van, tehát $G_2 = 2F$; $F = 25$ N.
A rúd egyensúlyban van, tehát az A pontra $\sum \vec{M} = 0$;
$F \cdot l - G_1 \cdot (l - k_1) - G \cdot \frac{l}{2} = 0$. Ebből $\underline{\underline{l = 2 \text{ m}}}$.

d) A rúd egyensúlyban van, $\sum \vec{F} = 0$; azaz $F + F_1 - G_1 - G = 0$.
Ebből $F_1 = 15$ N. A csukló egyensúlya miatt: $F_1 + F_{cs} = 0$; $F_{cs} = -F_1$.
$\underline{\underline{F_{cs} = -15 \text{ N}}}$. A csuklóra ható erő nagysága 15 N, iránya lefelé mutat.

4.9. Egy 5 m hosszú és 1,5 m magas lejtőn 180 kg tömegű terhet emelünk a lejtő síkjával párhuzamos erővel. A lejtő és a teher között a súrlódási együttható 0,3.

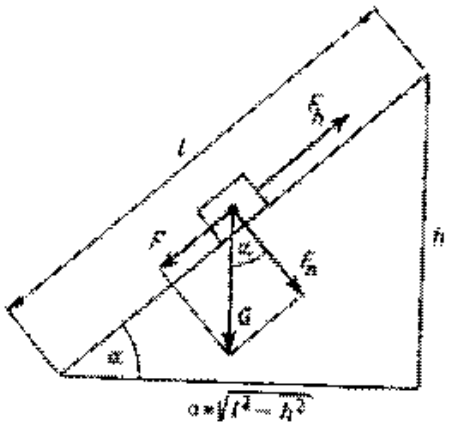
a) Mekkora a teherre ható erő, ha a teher egyenletes mozgással csúszik felfelé a lejtőn?

b) Mekkora az a legkisebb erő, amely a teher egy helyben tartásához szükséges?

c) Mekkora a hatásfok a teher emelésekor?

Megoldás:

4.9. $l = 5$ m; $h = 1{,}5$ m; $m = 180$ kg; $\mu = 0{,}3$.



a) $F_h = F + \mu F_n$;

$$F = mg \cdot \sin\alpha = mg\frac{h}{l} = 540 \text{ N}.$$

$$F_h = mg \cdot \cos\alpha = mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$$

$$\underline{F_h = 1055{,}16 \text{ N}}.$$

b) A tapadási súrlódási együtthatót vesszük azonos nagyságúnak a súrlódási együtthatóval.

$$\underline{F'} = F - m \cdot g \cdot \mu \cdot \cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \underline{24{,}84 \text{ N}}.$$

c) $\underline{\underline{\eta}} = \dfrac{\text{hasznos munka}}{\text{befektetett munka}} = \dfrac{F \cdot s}{F_n \cdot s} = \underline{0{,}51}$.

4.10. Egy 30°-os hajlásszögű lejtő felső végére 15 cm sugarú állócsigát rögzítettünk, amelyet 75 cm hosszú karral forgatunk. A teher és a lejtő között a súrlódási együttható 0,2, és a kötél párhuzamos a lejtő síkjával.
Mekkora a kar egyenletes forgatásához szükséges erő, ha a csigára csévélt kötéllel 500 kg tömegű terhet akarunk felemelni?

Megoldás:

4.10. $\alpha = 30°$; $R = 0{,}15$ m; $k = 0{,}75$ m; $\mu = 0{,}2$; $m = 500$ kg.

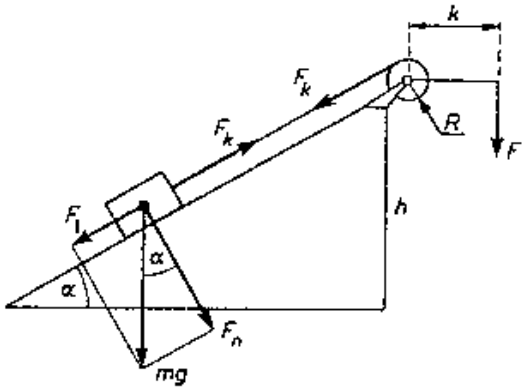
$F_k = F_l + \mu F_n = mg \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha$.

$F_k = 3366$ N.

A csiga tengelyére számított

$\sum \vec{M} = 0$.

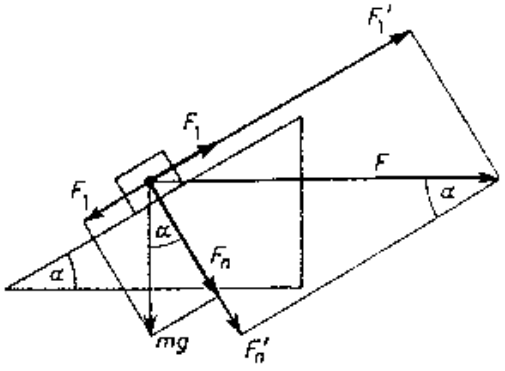
$F \cdot k - F_k \cdot R = 0$; ebből $\underline{\underline{F = 673{,}2 \text{ N}}}$.



4.11. 30°-os hajlásszögű lejtőn 50 kg tömegű testet húzunk fel vízszintes irányban ható erővel, egyenletes mozgással. A teher és a lejtő között a súrlódási együttható 0,25.
Mekkora erővel kell hatnunk a testre?

Megoldás:

4.11. $\alpha = 30°$; $m = 50$ kg; $\mu = 0{,}25$.
A súlyerőt és a vízszintes F erőt is felbontjuk a lejtővel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.



$F_1 = mg \cdot \sin\alpha = 250$ N;
$F_n = mg \cdot \cos\alpha = 433$ N;
$F_n' = F \cdot \sin\alpha$; $F_1' = F \cdot \cos\alpha$;
$F_1' = F_1 + F_{\text{súrlódás}}$;
$F_{\text{súrlódás}} = \mu \cdot (F_n + F_n')$.
$F_1' = mg \cdot \sin\alpha + \mu(mg \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha)$;
$F \cdot \cos\alpha = mg \cdot \sin\alpha + \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha + \mu \cdot F \cdot \sin\alpha$.
$F = 483{,}46$ N.

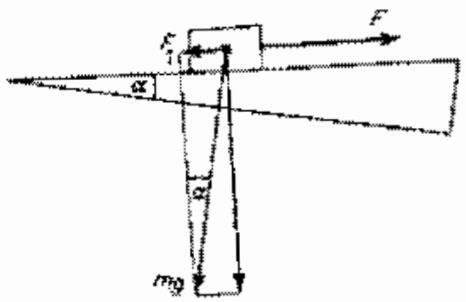
4.12. Az $1{,}5 \cdot 10^6$ watt teljesítményű mozdony a 2500 t tömegű vonatot állandó 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel vontatja felfelé az emelkedő pályán.
Legfeljebb mekkora lehet az emelkedő hajlásszöge, ha a vonatra ható súrlódási és közegellenállási erő ekkor $5 \cdot 10^4$ N?

Megoldás:

4.12. $P = 1{,}5 \cdot 10^6$ W; $m = 2{,}5 \cdot 10^6$ kg; $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $F_{\text{ell}} = 5 \cdot 10^4$ N.

A mozdony teljesítménye $P = \frac{W}{t}$; munkavégzése $W = F \cdot s$; tehát

$P = \frac{F \cdot s}{t}$; azaz $P = F \cdot v$; ebből $F = \frac{P}{v}$, ahol F a mozdony húzóereje.



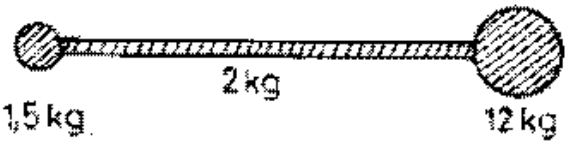
$F = F_1 + F_{\text{ell}} = mg \cdot \sin\alpha + F_{\text{ell}}$.

$\frac{P}{v} = mg \cdot \sin\alpha + F_{\text{ell}}$; $mg \cdot \sin\alpha = \frac{P}{v} - F_{\text{ell}}$.

$\sin\alpha = \frac{1}{mg} \cdot \left(\frac{P}{v} - F_{\text{ell}}\right) = 0{,}004$.

$\underline{\underline{\alpha = 0{,}23°}}$.

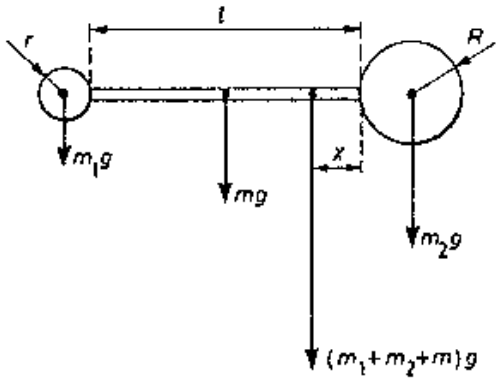
4.13. Az ábrán látható test egy 50 cm hosszú és 2 kg tömegű homogén rúdból, egy 3 cm sugarú és 1,5 kg tömegű, valamint egy 6 cm sugarú és 12 kg tömegű golyóból áll.



Hol van a test tömegközéppontja?

Megoldás:

4.13. $l = 0{,}5$ m; $m = 2$ kg; $r = 0{,}03$ m; $m_1 = 1{,}5$ kg; $R = 0{,}06$ m; $m_2 = 12$ kg.

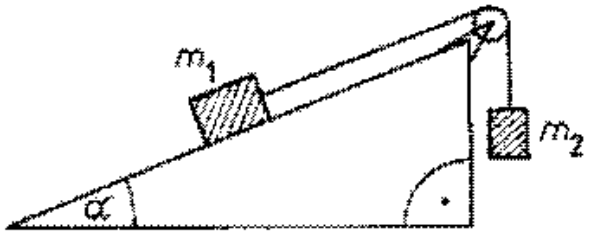


A testre ható erők O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékainak összege nulla.

$$m_1g(l-x+r)+mg\left(\frac{1}{2}-x\right)-m_2g(x+R)=0.$$

Ebből $\underline{\underline{x = 3{,}7\cdot 10^{-2}\ \text{m}}}$, a rúd jobb oldali végétől.

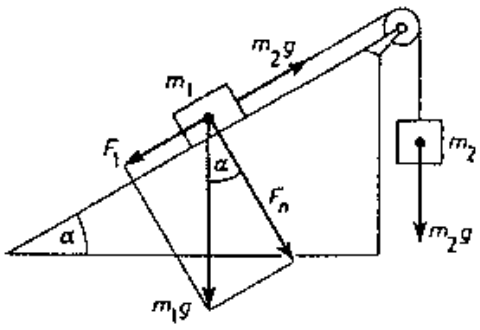
4.14. Az ábra szerinti elrendezésben a csiga és a kötél tömege elhanyagolható, a fonal nyújthatatlan. Az m_1 tömegű test és a lejtő közötti súrlódási együttható értéke μ, máshol a súrlódás elhanyagolható.



Legalább mekkora m_2 tömegű test esetén lehet a rendszer egyensúlyban?

Megoldás:

4.14. Az m_1 tömegű test súlyát lejtő irányú és arra merőleges összetevőkre bontjuk.



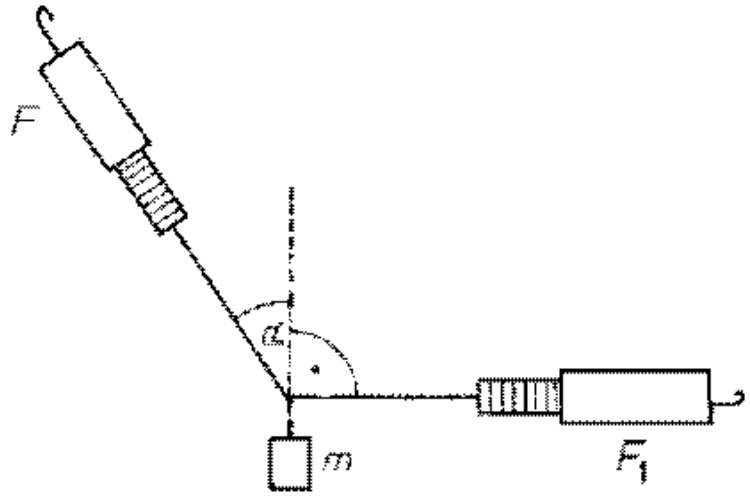
Az m_1 tömegű test nyugalmi egyensúlya esetén:

$m_2 \cdot g - F_1 + \mu F_n = 0;$

$m_2 \cdot g - m_1 \cdot g \sin\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha = 0;$

$m_2 = m_1(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha).$

4.15. Egy 50 g tömegű testet tartunk két erőmérővel az ábrán látható módon.



a) Mekkora és milyen irányú F erőt kell kifejteni ahhoz, hogy az F_1 erőmérő vízszintes helyzetű legyen és 0,3 N erőt mutasson?

b) Mekkora és milyen irányú gyorsulással indul el a test, ha mérés közben az F erőt jelző erőmérőt és a testet összekapcsoló fonál elszakad?

Megoldás:

4.15. $m = 5 \cdot 10^{-2}$ kg; $F_1 = 0{,}3$ N.

a) Az F erőt vízszintes és függőleges összetevőkre bontjuk.

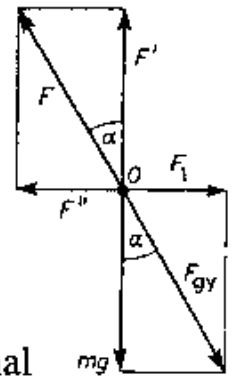
Az O pont egyensúlya esetén:

$F' - mg = 0$ és $F'' - F_1 = 0$;

$F' = F \cdot \cos\alpha$; $F'' = F \cdot \sin\alpha$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F''}{F_1} = \frac{F_1}{m \cdot g} = \frac{3}{5}; \quad \alpha = 31°;$$

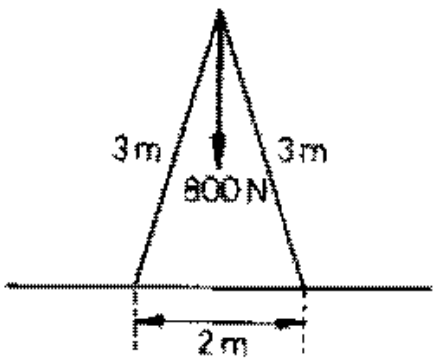
$$\underline{\underline{F}} = \frac{F'}{\cos\alpha} = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = \underline{\underline{0{,}583 \text{ N}}}.$$



b) Az O pontban levő testet gyorsító erő a fonal elszakadásának pillanatában F_1 és mg eredője.

$$F_{gy} = F = m \cdot a; \quad \underline{\underline{a}} = \frac{F}{m} = \underline{\underline{11{,}66 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

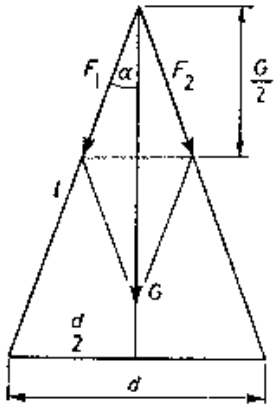
4.16. Kétágú létra szárai 3 m hosszúak és egymástól 2 m távolságban támaszkodnak a földre. A létra tetején 800 N súlyú ember áll. Mekkorák a létra száraiban ható erők?



Megoldás:

4.16. $l = 3$ m; $d = 2$ m; $G = 800$ N.

Az ember súlyát felbontjuk a létra szárainak irányába mutató F_1 és F_2 összetevőkre.



Az ábra alapján $\cos\alpha = \dfrac{G}{2F_1}$:

Ebből $F_1 = \dfrac{G}{2\cos\alpha}$; $\sin\alpha = \dfrac{d}{2l}$, ebből $\alpha = 19{,}5°$.

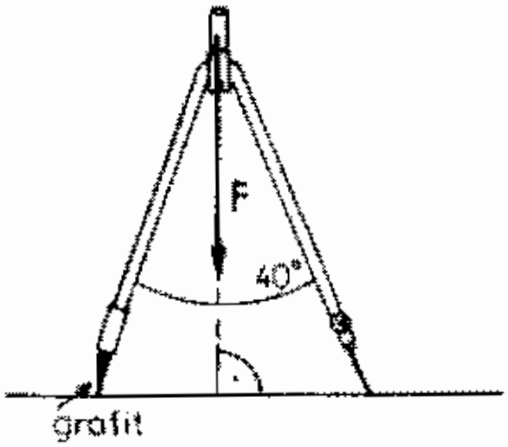
$F_1 = 424{,}34$ N.

4.17. Egy körző szárai 40°-os szöget zárnak be egymással.

a) Mekkora a körző száraiban ható erő, ha a körzőre 6 N függőleges hatásvonalú erővel hatunk és a körző súlya elhanyagolható?

b) Mekkora erő nyomja a papírlapra merőleges irányban a grafitot?

c) Mekkora erő igyekszik vízszintes irányba csúsztatni a grafitot a papíron?



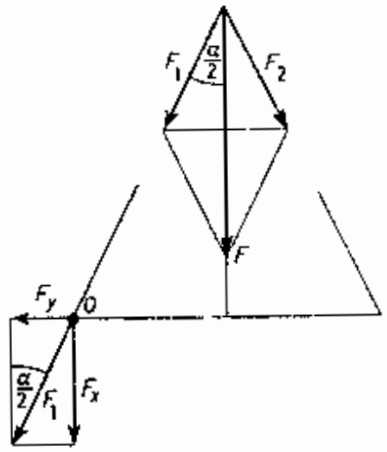
Megoldás:

4.17. $\alpha = 40°$; $F = 6$ N.

a) $F_1 = F_2 = \dfrac{\frac{F}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. $\underline{\underline{F_1 = 3{,}2 \text{ N}}}$.

b) Az F_1 erőt eltoljuk az O pontba, és felbontjuk talajmenti, ill. a talajra merőleges összetevőkre. $\underline{\underline{F_x}} = F_1 \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} = \underline{\underline{3 \text{ N}}}$.

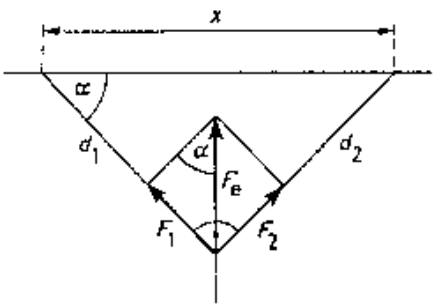
c) $\underline{\underline{F_y}} = F_1 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} = \underline{\underline{1{,}1 \text{ N}}}$.



4.18. Egy 50 kg és egy 40 kg tömegű gyermek úgy szeretne hintázni az 1,5 m hosszú mérleghintán, hogy mindketten a karok végén üljenek.
Hová ültessék a 20 kg tömegű játszótársukat, hogy a hinta egyensúlyban legyen?

Megoldás:

4.18. $F_1 = 500$ N; $F_2 = 400$ N; $l = 1{,}5$ m; $F_3 = 200$ N.

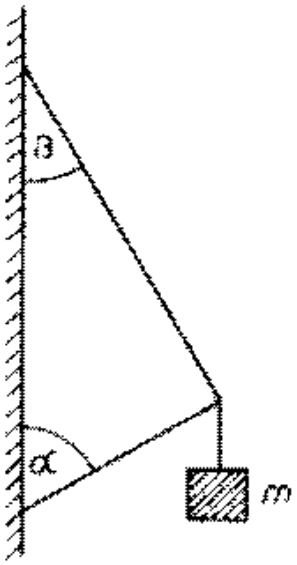


A 200 N súlyú fiút a 400 N súlyú fiú felőli oldalra kell ültetni. A hinta forgástengelyére felírt $\sum \vec{M} = 0$.

$$F_1 \cdot \frac{l}{2} - F_3 \cdot x - F_2 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

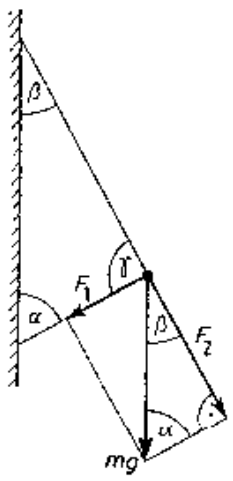
$\underline{\underline{x = 0{,}375 \text{ m}}}$.

4.19. Elhanyagolható tömegű falikarra egy 50 kg tömegű testet erősítünk az ábra szerinti elrendezésben.
Mekkora a rudakban ható erők nagysága, ha $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$?



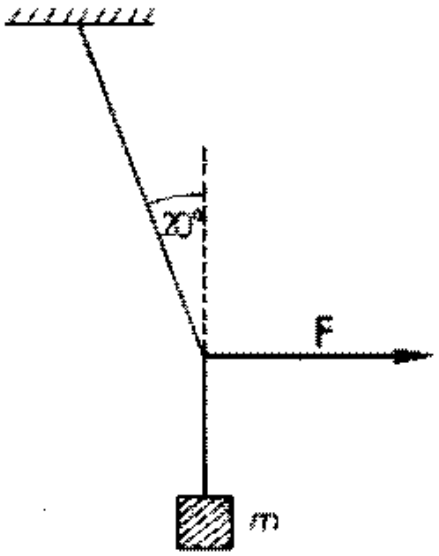
Megoldás:

4.19. $m = 50$ kg; $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$.



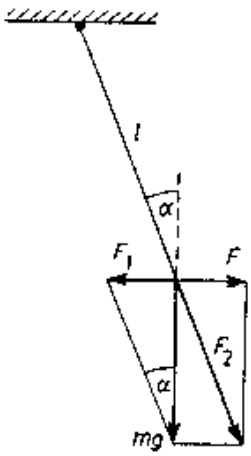
Az m tömegű testre ható súlyerőt a rögzítő rudakkal azonos irányú összetevőkre bontjuk (F_1, ill. F_2).
A rudak alkotta háromszögben:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\gamma = 90°$.
$\underline{\underline{F_1}} = mg \cdot \cos\beta = \underline{\underline{433\ \text{N}}}$.
$\underline{\underline{F_2}} = mg \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{250\ \text{N}}}$.

4.20. Egy testet 60 cm hosszú, elhanyagolható tömegű fonálra erősítünk. A testre ezután $F = 0{,}5$ N vízszintes irányú erővel hatunk, így a kötél a függőlegessel 20°-os szöget zár be.
Mekkora tömegű a test?



Megoldás:

4.20. $m = 0{,}137$ kg; $l = 0{,}6$ m; $F = 0{,}5$ N; $\alpha = 20°$.

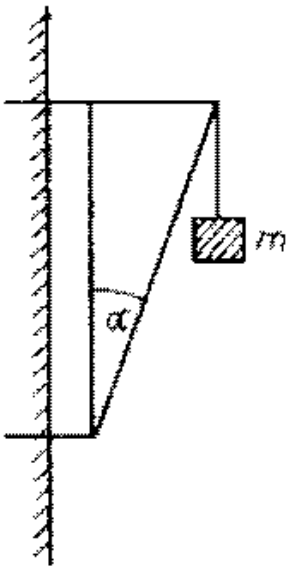


Az mg súlyerőt felbontjuk F_1 vízszintes és F_2 fonálirányú összetevőkre.

A test egyensúlyban van, ezért $F_1 - F = 0$; azaz $F_1 = F$.

$F_1 = m \cdot g \cdot \operatorname{tg}\alpha$; $\underline{\underline{m = 0{,}137 \text{ kg}}}$.

4.21. Egy 5 kg tömegű testet az ábra szerinti elrendezésben erősítenek fel.



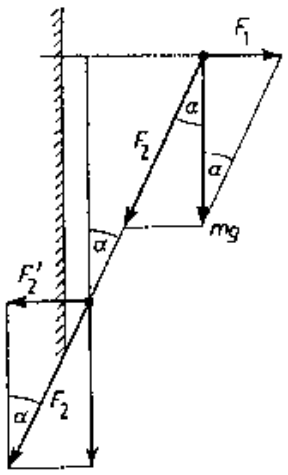
a) Mekkora erők hatnak a rudakban, ha $\alpha = 20°$ és a tartókarok súlyától eltekintünk?

b) Mekkora erő húzza kifelé a felső szöget a falból?

c) Mekkora erő nyomja befelé az alsó szöget a falba?

Megoldás:

4.21. $m = 5$ kg; $\alpha = 20°$.

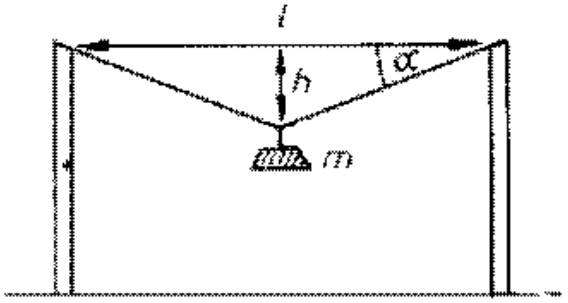


a) $\underline{F_1} = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha = \underline{18{,}2\ \text{N}}$ $\underline{F_2} = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = \underline{53{,}2\ \text{N}}$.

b) $\underline{F_1 = 18{,}2\ \text{N}}$.

c) Az F_2 erőt felbontjuk – eltolás után – vízszintes és függőleges irányú összetevőkre.
$\underline{F_2'} = F_2 \cdot \sin\alpha = \underline{18{,}2\ \text{N}}$.

4.22. Egy 10 kg tömegű lámpa két, egymástól $l = 20$ m távolságra lévő, egyenlő magasságú oszlop tetejére felerősített, nyújthatatlan huzal közepén függ. A huzal belógása $h = 1$ m.



a) Mekkora erő feszíti a huzalt?

b) Mekkora gyorsulással esne le a lámpa, ha a huzalok egyszerre szakadnának el, és mennyi lenne a becsapódási sebessége, ha a lámpa eredetileg 5 m magasságban függött?

Megoldás:

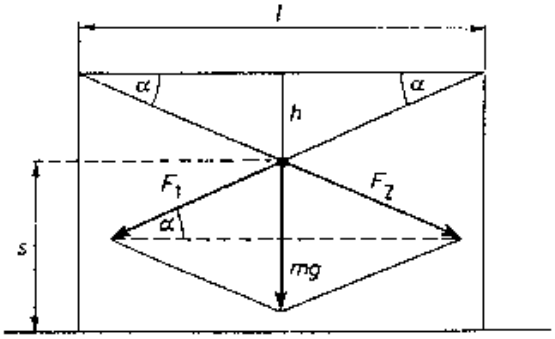
4.22. $m = 10$ kg; $l = 20$ m; $h = 1$ m; $s = 5$ m.

a) A lámpára ható súlyerőt felbontjuk fonalirányú F_1 és F_2 összetevőkre.

$$F_1 \cdot \sin\alpha = \frac{mg}{2};$$

$$\underline{\underline{F_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha} = 502\ \text{N}}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{s}\right)^2}}.$$



b) A lámpa szabadesést végezne a huzalok elszakadásának pillanatától $a = g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással.

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2;\quad t^2 = \frac{2s}{g};\quad \underline{\underline{v = g \cdot t = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

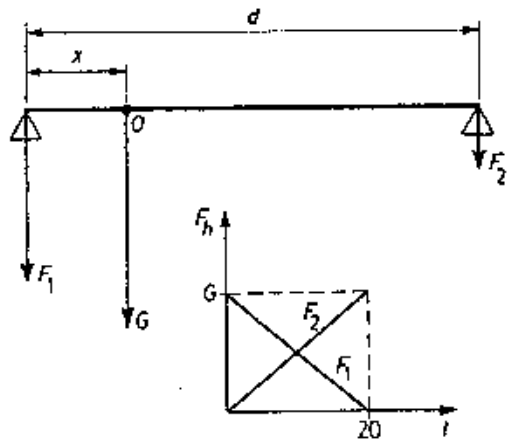
4.23. A híd pilléreinek távolsága 100 m. A hídon áll egy $5 \cdot 10^4$ N súlyú gépkocsi az egyik pillértől 15 m távolságban.

a) Mennyivel növeli meg ez a kocsi a pillérek terhelését?

b) Ábrázoljuk a pillérek terhelésének növekedését az idő függvényében, ha a kocsi 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad végig a két pillér közötti útszakaszon!

Megoldás:

4.23. $d = 100$ m: $G = 5 \cdot 10^4$ N; $x = 15$ m.



a) Párhuzamos erőkről lévén szó:

$G = F_1 + F_2$; $F_1 = G - F_2$. Az O pontra:

$\sum \vec{M} = 0$; $F_1 \cdot x - F_2(d - x) = 0$.

$(G - F_2) \cdot x - F_2(d - x) = \underline{F_2 = 7500 \text{ N}}$.

$\underline{F_1} = G - F_2 = \underline{42\,500 \text{ N}}$.

b) Ha az autó a bal oldali pillértől halad jobbra a hídon v sebességgel, $x = v \cdot t$, ezt beírva a $\sum \vec{M} = 0$ egyenletbe:

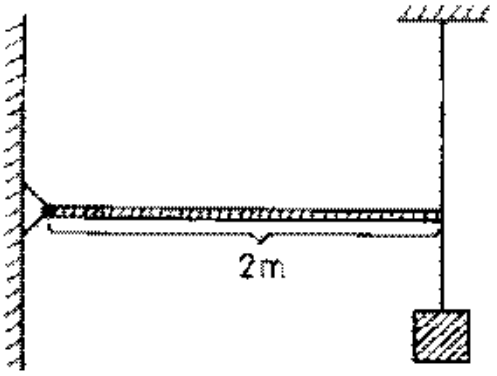
$G \cdot v \cdot t - F_2 \cdot v \cdot t - F_2 \cdot d + F_2 \cdot vt = 0$. $\underline{F_2 = \frac{Gv}{d} \cdot t}$,

míg $F_1 = G - \frac{G \cdot v}{d} \cdot t = \underline{G\left(1 - \frac{vt}{d}\right)}$.

Ha $t = 0$, akkor $F_1 = G$; $F_2 = 0$.

Ha $t = 20$ s; $F_1 = 0$; $F_2 = G$.

4.24. Egy 2 m hosszú, homogén rudat csuklóval erősítünk egy falhoz. A rudat a másik végéhez erősített, függőleges helyzetű, elhanyagolható tömegű fonal tartja vízszintes helyzetben, az ábra szerinti elrendezésben.

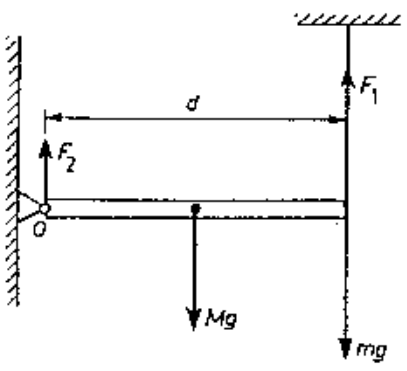


a) Mekkora erő feszíti a nyújthatatlan fonalat, ha a rúd 5 kg tömegű, és a rúd végére akasztott test tömege $m = 10$ kg?

b) Mekkora erővel nyomja a rúd a csuklót?

Megoldás:

4.24. $d = 2$ m; $M = 5$ kg; $m = 10$ kg.



a) A csuklóra vonatkoztatott forgatónyomatékok algebrai összege nulla:

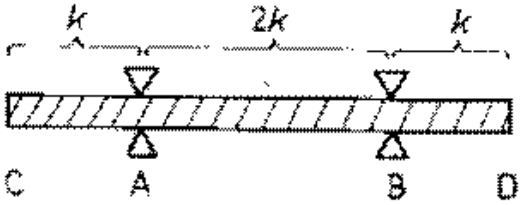
$F_1 \cdot d - M \cdot g \cdot \frac{d}{2} - m \cdot g \cdot d = 0$. Ebből

$\underline{\underline{F_1 = 125 \text{ N}}}$.

b) A rúdra ható erők algebrai összege nulla:

$F_1 + F_2 - G_1 - G_2 = 0$. $\underline{\underline{F_2 = 25 \text{ N}}}$.

4.25. Egy G súlyú, vízszintes helyzetű rúd két pontban van rögzítve az ábra szerinti elrendezésben. A rúd egyik végére G_1 súlyú terhet akasztunk.
Rajzoljuk be és határozzuk meg a rúdra ható erőket, ha
$AB = 2CA = 2BD = 2\,k$!

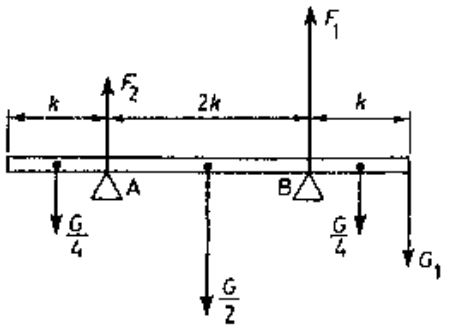


Megoldás:

4.25. Egyensúlyban van a rúd, ezért pl. az A pontra $\sum \vec{M} = 0$. (A G erő irányát választjuk pozitívnak, az F_1 erő irányát nem tudjuk.)

$$G_1 \cdot 3k + \frac{G}{4} \cdot \frac{5}{2}K + F_1 \cdot 2k + \frac{G}{2} \cdot k - \frac{G}{4} \cdot \frac{k}{2} = 0.$$

Ebből $F_1 = \frac{1}{2}(-3G_1 - G)$. F_1 előjele negatív, így G_1-gyel ellentétes irányban forgatná a rudat, azaz iránya lefelé mutat.



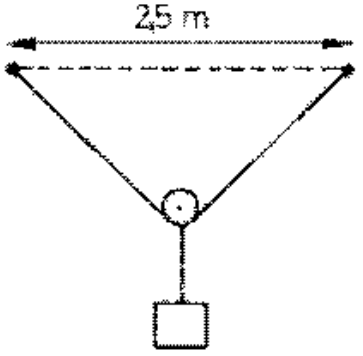
A rúdra ható erők eredője nulla. (F_2 irányát nem ismerjük.) G_1 irányát pozitívnak véve:

$$\frac{G}{4} + F_2 + \frac{G}{2} - F_1 + \frac{G}{4} + G_1 = 0.$$

Ebből $F_2 = \frac{1}{2}(G_1 - G)$.

Ha $G_1 > G$, az F_2 pozitív, tehát lefelé mutat, ha $G_1 < G$, az F_2 negatív, azaz felfelé mutat. Ha $G_1 = G$, az A pontban nem hat erő.

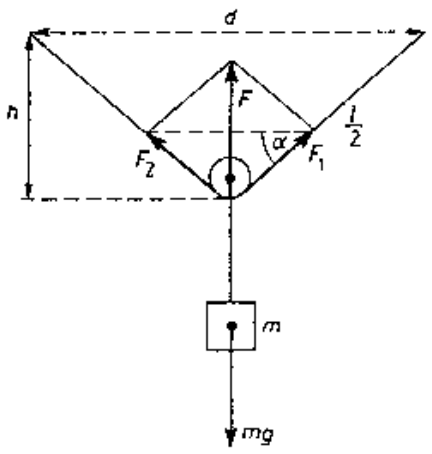
4.26. A 3 m hosszú fonál két végét vízszintes egyenesben fekvő, egymástól 2,5 m-re lévő pontokhoz rögzítjük. A fonálon súrlódás nélkül gördülő, elhanyagolható tömegű csiga tengelyére 5 kg tömegű testet függesztünk.



a) Hol lesz egyensúlyban a test? Indokoljuk állításunkat!
b) Mekkora erő feszíti az egyensúlyi helyzetben a fonalat?

Megoldás:

4.26. $l = 3$ m; $d = 2{,}5$ m; $m = 5$ kg.

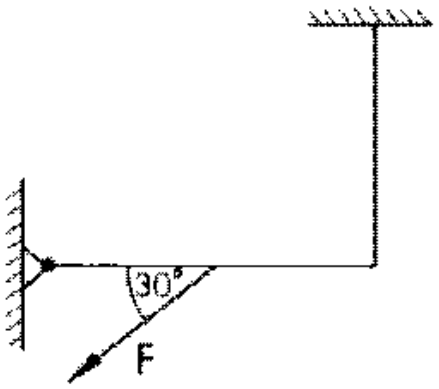


a) A csiga és vele a test akkor lesz egyensúlyban, ha a csigára ható erők eredője nulla.
$F = mg = 0$; $F = mg = 50$ N.
Ez a helyzet akkor jön létre, ha a csiga a lehető legalacsonyabban van, ez a pont a fonal középpontja.
Ekkor $F_1 = F_2$.

b) Ebben a helyzetben $\sin\alpha = \dfrac{mg}{2F_1}$ (a vektorok alkotta háromszögből), $\sin\alpha = \dfrac{h}{\frac{l}{2}} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}}$ (fonalak alkotta háromszögből.)

Így $\dfrac{mg}{2F_1} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - d^2}}{\frac{1}{2}}$. $F_1 = 45{,}2$ N.

4.27. Egyik végénél csukló körül forgatható, elhanyagolható súlyú rúd másik végét függőleges fonállal rögzítjük úgy, hogy a rúd vízszintes legyen. A rúd közepére $F = 20$ N erőt fejtünk ki, melynek iránya a rúddal 30°-os szöget zár be. A rúd hossza 0,6 m.

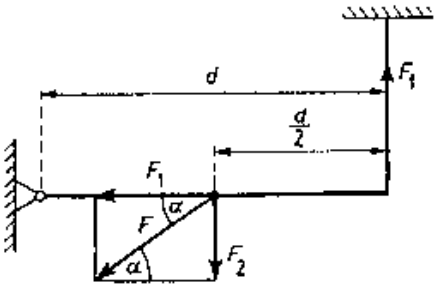


a) Mekkora erő feszíti a fonalat?

b) Mekkora erőt fejt ki a csukló a rúdra?

Megoldás:

4.27. $F = 20$ N; $\alpha = 30°$; $d = 0{,}6$ m.

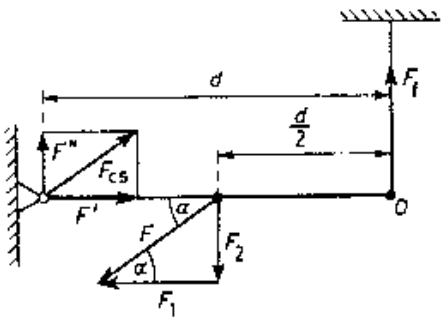


a) Az F erőt rúdirányú és erre merőleges összetevőkre bontjuk. A csuklóra $\sum \vec{M} = 0$.

$F_2 \frac{d}{2} - F_f \cdot d = 0$. $\frac{F_2 \cdot d}{2} = F_f \cdot d$.

Ebből $F_f = \frac{F_2}{2}$. $F_2 = F \cdot \sin\alpha$.

Ezekből $\underline{\underline{F_f = 5 \text{ N}}}$.



b) Az O pontra $\sum \vec{M} = 0$.

$F'' \cdot d - F_2 \cdot \frac{d}{2} = 0$. $F'' \cdot \frac{F_2}{2} = \frac{F \cdot \sin 30°}{2} =$

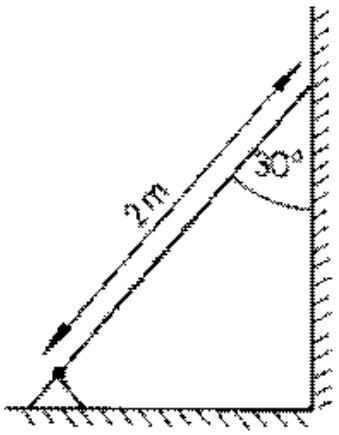
$= 5$ N. $F' = F_1 = F \cdot \cos\alpha$.

$F_{cs} = F'^2 + F''^2$. $\underline{\underline{F_{cs} = 18 \text{ N}}}$.

4.28. A 2 m hosszú, 12 kg tömegű rúd alsó végét csuklóval rögzítettük, felső végét teljesen sima, függőleges falhoz támasztottuk. A rúd a fallal 30°-os szöget zár be.

a) Mekkora erővel nyomja a rúd a falat?

b) Mekkora és milyen irányú erővel hat a csukló a rúdra?

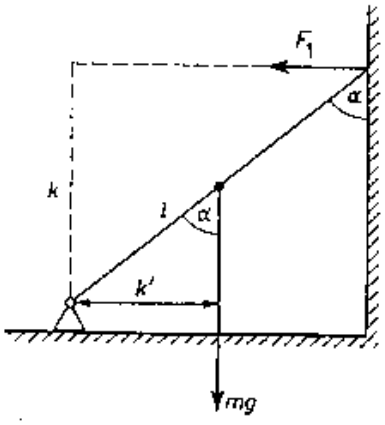


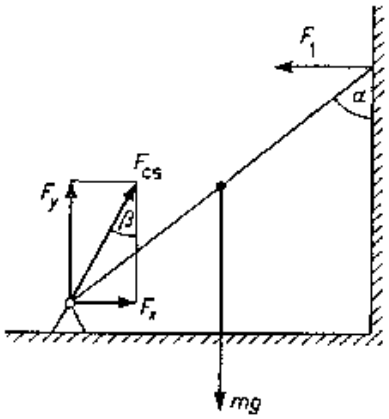
Megoldás:

4.28. $l = 2$ m; $m = 12$ kg; $\alpha = 30°$.

a) A csuklóra: $\sum \vec{M} = 0$. $mg \cdot k' - F_1 \cdot k = 0$.

$mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha - F_1 \cdot l \cdot \cos\alpha = 0$. $\underline{F_1 = 34{,}64 \text{ N}}$.





b) Az F_{cs} csuklóerőt függőleges és vízszintes irányú (F_x és F_y) összetevőkre bontjuk. A rúdra ható erők eredője nulla: $F_x - F_1 = 0$; $F_y - mg = 0$.

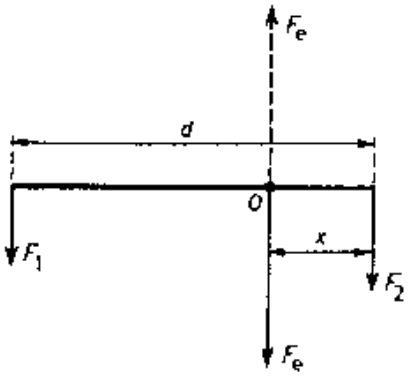
$\underline{F_{cs}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{F_1^2 + (mg)^2} = \underline{124{,}9 \text{ N}}$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{F_1}{mg}$. $\underline{\beta = 16{,}1°}$.

Hatásvonala a függőlegessel 16,1°-ot zár be.

4.29. A 150 N és 200 N nagyságú, párhuzamos erők hatásvonalainak távolsága 2 m.
Mekkora az erők eredője és hol van az eredő hatásvonala, ha

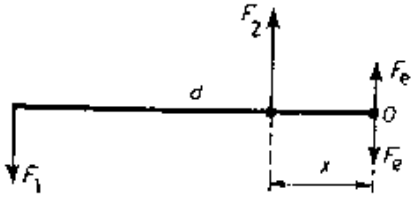
a) az erők egyenlő irányúak,
b) az erők ellentétes irányúak?

Megoldás:



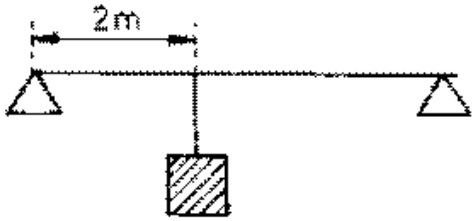
4.29. $F_1 = 150$ N; $F_2 = 200$ N; $d = 2$ m.

a) Az erők támadáspontjait kössük össze képzeletben egy elhanyagolható súlyú rúddal. A rúd akkor van egyensúlyban, ha az eredő erővel (F_e) azonos nagyságú, közös hatásvonalú, ellentétes irányú erővel hatunk a rúdra. Egyensúly esetén $\sum \vec{F} = 0$ és $\sum \vec{M} = 0$.
$F_1 + F_2 - F_e = 0$: $F_e = 350$ N.
$\sum \vec{M}$ az O pontra: $F_2 \cdot x - F_1(d - x) = 0$.
Ebből $\underline{x = 0{,}857 \text{ m}}$.



b) Az eredő erővel (F_e) ekkor is azonos nagyságú, közös hatásvonalú, ellentétes irányú erővel kell hatni, hogy a súlytalan rúd egyensúlyban legyen. Az eredő támadáspontjára $\sum \vec{M}$ csak akkor lehet nulla, ha az eredő hatásvonala a nagyobbik összetevőn kívül helyezkedik el. Az O pontra felírt $\sum \vec{M} = 0$; azaz $F_2 \cdot x - F_1(d + x) = 0$. Ebből $\underline{x = 6 \text{ m}}$.
$\sum \vec{F} = 0$; $F_2 - F_1 - F_e = 0$, ebből $F_e = F_2 - F_1$ és F_2 irányába mutat.
$\underline{F_e = 50 \text{ N}}$.

4.30. Egy 5 m hosszú, merev rudat a két végén alátámasztottunk úgy, hogy vízszintes helyzetben van. Az egyik végétől 2 m-re 120 kg tömegű terhet akasztunk rá. A rúd súlyát hanyagoljuk el!
Mekkora erővel hatnak az alátámasztások a rúdra?



Megoldás:

4.30. $l = 5$ m; $d = 2$ m; $m = 120$ kg.

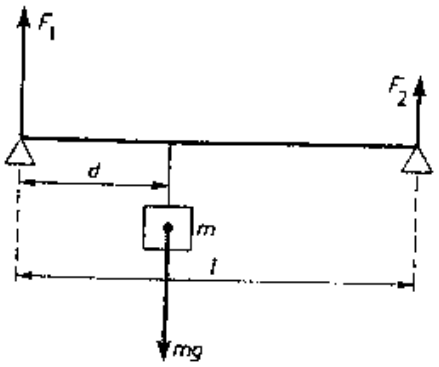
Az A pontra

$\sum \vec{M} = 0$; $F_1 \cdot l - mg(l-d) = 0$.

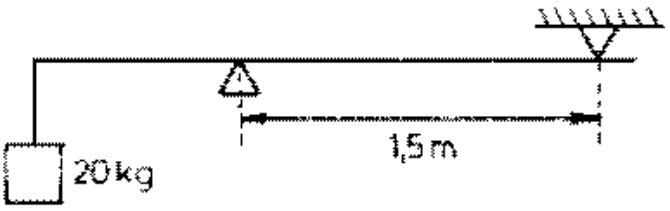
$\underline{\underline{F_1}} = \dfrac{mg \cdot (l-d)}{l} = \underline{\underline{720\ \text{N}}}$.

A rúdra $\sum \vec{F} = 0$. $F_1 + F_2 - mg = 0$.

Ebből $\underline{\underline{F_2 = 480\ \text{N}}}$.



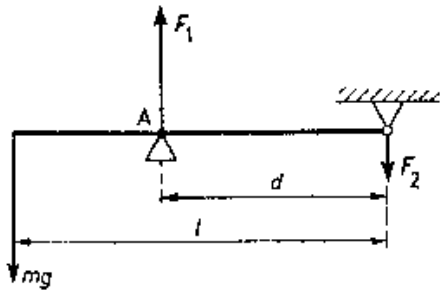
4.31. Egy 2,5 m hosszú rúd egyik végén 20 kg tömegű teher lóg. A rudat a másik oldalán, egymástól 1,5 m-re lévő ékekkel támasztjuk meg.



Mekkora erőkkel hatnak a rúdra a támasztó ékek?
(A rúd súlyát hanyagoljuk el!)

Megoldás:

4.31. $l = 2{,}5$ m; $m = 20$ kg; $d = 1{,}5$ m.



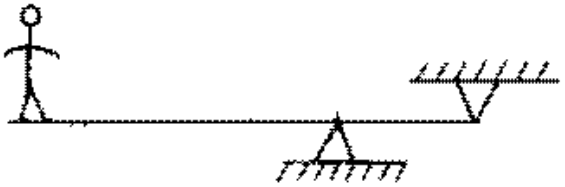
Az A pontra: $\sum \vec{M} = 0$, $mg(l-d) - F_2 d = 0$.

$\sum \vec{F} = 0$; $mg + F_2 - F_1 = 0$.

Ezekből: $\underline{\underline{F_1 = 333{,}3 \text{ N}}}$; $\underline{\underline{F_2 = 133{,}3 \text{ N}}}$.

4.32. Az 5 m hosszú műugródeszka az egyik végén és a végétől 1,5 m-re van a tartókhoz rögzítve.

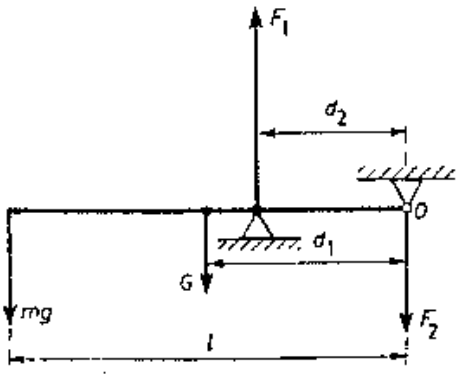
a) Mekkora és milyen irányú erők hatnak a rögzítési pontokban, ha a deszka víz fölé nyúló szabad végén egy 60 kg-os ember készülődik ugráshoz, és a deszka súlyát elhanyagoljuk?



b) Mekkora és milyen irányú erők hatnak a rögzítési pontokban, ha a deszka súlya 300 N, a tömegközéppontja a szélső rögzítési ponttól 2 m-re van, a deszka végén álló ember tömege ismét 60 kg?

Megoldás:

4.32. $l = 5$ m; $d_2 = 1{,}5$ m; $m = 60$ kg; $G = 300$ N; $d_1 = 2$ m.



a) Az O pontra $\sum \vec{M} = 0$.

$mg \cdot l = F_1 d_2 = 0$.

$F_1 = 2000$ N.

Az ugródeszkára $\sum \vec{F} = 0$.

$m \cdot g - F_1 + F_2 = 0$. $F_2 = 1400$ N.

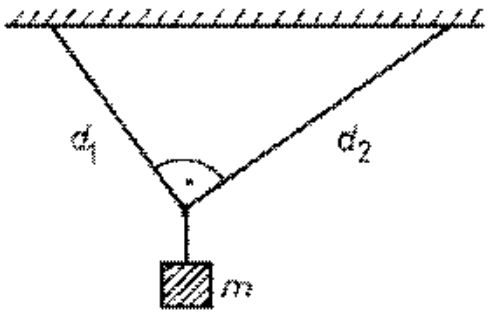
b) Az O pontra $\sum \vec{M} = 0$.

$m \cdot g \cdot l + G \cdot d_1 - F_1' d_2 = 0$;

$F_1 = 2400$ N.

$\sum \vec{F} = 0$; $mg + G - F_1 + F_2' = 0$. $F_2 = 1500$ N.

4.33. Egy $m = 0{,}5$ kg tömegű virágcseréptartó az ábrán látható elrendezésben függ két elhanyagolható tömegű kötélen. A d_1 és d_2 hosszúságú kötél által bezárt szög 90°.



Mekkora erő feszíti a köteleket, ha:

a) $d_1 = d_2$,
b) $d_2 = 2\,d_1$?

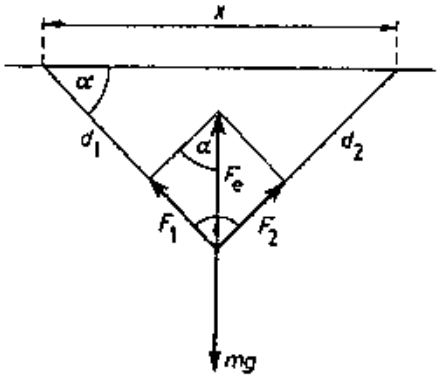
Megoldás:

4.33. $m = 0{,}5$ kg.

a) $d_1 = d_2 = d$; akkor $F_1 = F_2 = F$.

$F_e = m \cdot g$; $m^2 \cdot g^2 = 2F^2$.

$\underline{F = 3{,}54 \text{ N}}$.



b) $d_2 = 2d_1$. $x^2 = d_1^2 + 4d_1^2$.

$x = \sqrt{5 \cdot d_1^2} = d_1\sqrt{5}$.

$\sin\alpha = \dfrac{F_1}{mg}$, ill. $\sin\alpha = \dfrac{d_2}{x} = \dfrac{2d_1}{x}$.

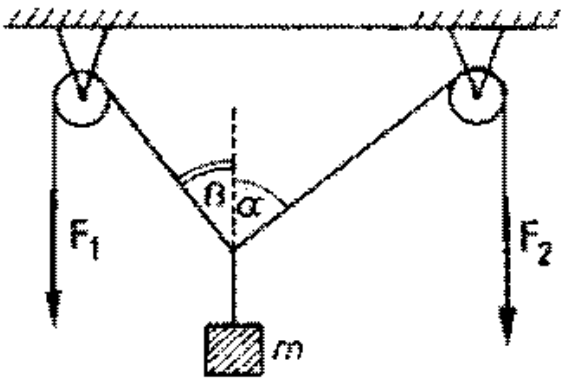
$\dfrac{F_1}{mg} = \dfrac{2d_1}{x} = \dfrac{2d_1}{d_1\sqrt{5}}$. $\underline{F_1 = \dfrac{2mg}{\sqrt{5}} = 4{,}47 \text{ N}}$.

$\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = mg$; $\underline{F_2 = 2{,}24 \text{ N}}$.

4.34. Az ábrán látható elrendezésben $F_1 = 5$ N, $F_2 = 7$ N, a fonál nyújthatatlan.

a) Mekkora az az m tömegű test, melynek hatására a rendszer egyensúlyban van úgy, hogy a fonalak egymással 90°-os szöget zárnak be?

b) Mekkora a két kötélrésznek a függőlegessel alkotott hajlásszöge?

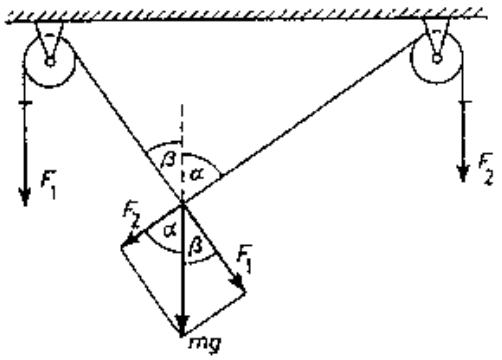


Megoldás:

4.34. $F_1 = 5$ N; $F_2 = 7$ N; $\alpha + \beta = 90°$.

a) $mg = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow$
$\underline{m = 0{,}86 \text{ kg}}$.

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{F_1}{F_2}$; $\alpha = 54{,}46°$.
$\underline{\beta = 90° - \alpha = 35{,}54°}$.

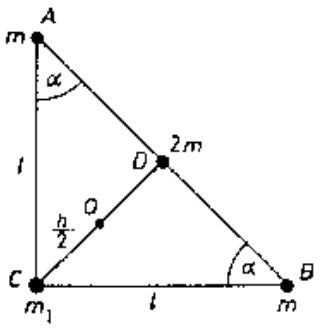


4.35. Egyenlő oldalú, derékszögű háromszög derékszögnél levő csúcsában 0,8 kg tömegű, a másik két csúcsában 0,4–0,4 kg tömegű testeket helyeztünk el. A háromszög befogóinak hossza 10–10 cm.
Hol van a három test tömegközéppontja?

Megoldás:

4.35. $l = 0{,}1$ m; $m_1 = 0{,}8$ kg; $m = 0{,}4$ kg.

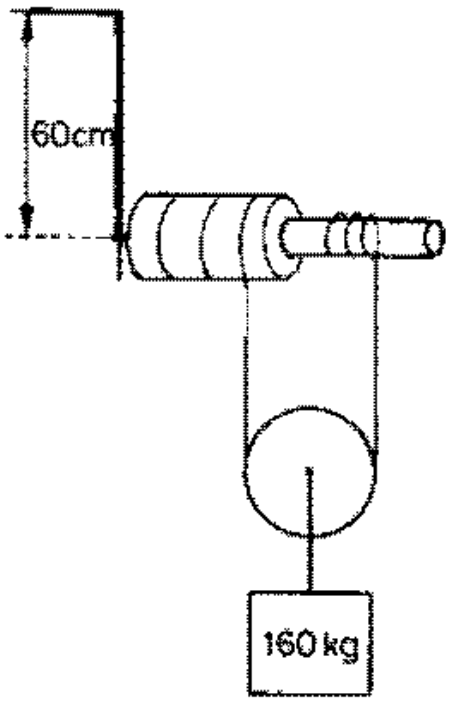
Az A és B pontban levő testek tömege azonos nagyságú, így a két test tömegközéppontja az A és B pontokat összekötő szakasz felezési pontjában, a D pontban van. Tömege $2m$. Mivel $m_1 = 2m$, ezek tömegközéppontja a C és D pontokat összekötő szakasz felezési pontjában van, tömege $m_1 + 2m$.



$$\frac{h}{2} = \frac{l \cdot \sin\alpha}{2} = \underline{\underline{0{,}035 \text{ m}}}.$$

$(2\alpha = 90°;\ \alpha = 45°.)$

4.36. Hengerkerék hengereinek sugara 40 cm, illetve 10 cm. A hajtókar hossza 60 cm. Mekkora erővel kell hatni a hajtókarra, ha 160 kg tömegű terhet akarunk felemelni a szerkezettel?



Megoldás:

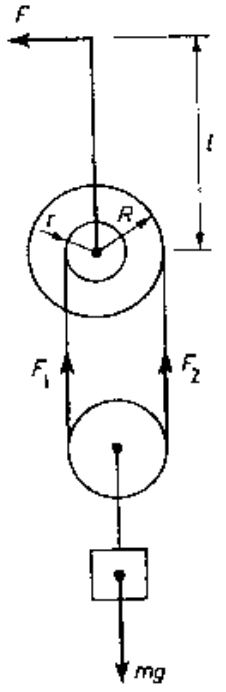
4.36. $R = 0{,}4$ m; $r = 0{,}1$ m; $l = 0{,}6$ m; $m = 160$ kg.

A hengerkerékre: $\sum \vec{M} = 0$.

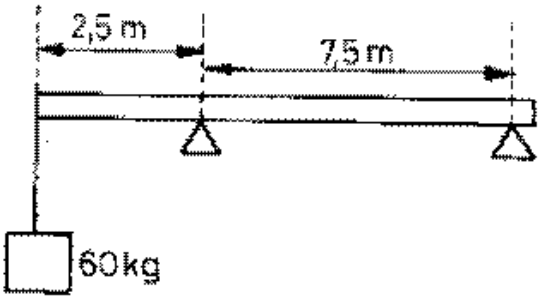
$F \cdot l + F_1 \cdot r - F_2 \cdot R = 0.$

$F_1 = F_2 = \frac{m}{2} \cdot g = 800$ N.

$F = \frac{F_1 \cdot (R - r)}{l}$; $\underline{\underline{F = 400 \text{ N}}}$.

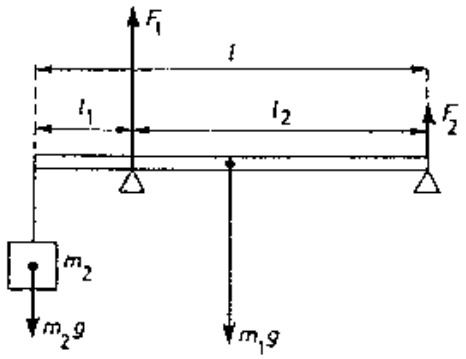


4.37. Egy 300 kg tömegű, 10 m hosszú, homogén tömegeloszlású, hasáb alakú gerenda egyik végén, és a másik végétől 2,5 m-re van alátámasztva. A gerenda végén 60 kg tömegű teher van.
Mekkora erők hatnak az alátámasztási pontokra?



Megoldás:

4.37. $m_1 = 300$ kg; $l = 10$ m; $l_1 = 2{,}5$ m; $m_2 = 60$ kg.



Az O pontra $\sum \vec{M} = 0$.

$$m_2 \cdot g \cdot l - F_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot g \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

$l_2 = l - l_1 = 7{,}5$ m; $\underline{\underline{F_1 = 2800 \text{ N}}}$.

A rúdra $\sum \vec{F} = 0$; $m_2 \cdot g - F_1 + m_1 \cdot g - F_2 = 0$.

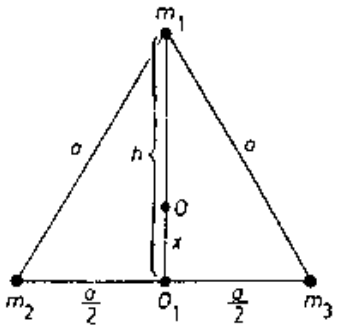
$\underline{\underline{F_2 = 800 \text{ N}}}$.

4.38. Elhanyagolható tömegű, egyenlő oldalú háromszög alakú léckeret csúcsaiban $m_1 = 0{,}2$ kg, $m_2 = 0{,}8$ kg és $m_3 = 0{,}8$ kg tömegű, pontszerű testek vannak.
Hol van a rendszer tömegközéppontja, ha a lécek 32 cm hosszúak?

Megoldás:

4.38. $m_1 = 0{,}2$ kg; $m_2 = 0{,}8$ kg; $m_3 = 0{,}8$ kg; $a = 0{,}32$ m.

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = 0{,}277 \text{ m}.$$



m_2 és m_3 tömegközéppontja az O_1 pontban van, tömege $(m_2 + m_3)$.

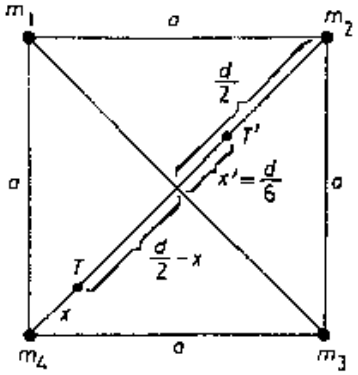
A h magasság O pontjára $\sum \vec{M} = 0$; azaz $g \cdot m_1(h - x) - (m_2 + m_3) \cdot x \cdot g = 0$; ebből $x = 0{,}03$ m.

Az m_1 tömegű testhez tartozó magasságvonalon van, a magasságvonalhoz tartozó alap felezési pontjától $x = -0{,}03$ m-re.

4.39. Egy 10 dm oldalhosszúságú, négyzet alakú léckeret csúcsaiban rendre 0,2 kg, 0,2 kg, 0,2 kg és 2 kg tömegű testeket helyeztünk el.
Hol van a rendszer tömegközéppontja?

Megoldás:

4.39. $a_1 = 1\text{m}$; $m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}2$ kg; $m_4 = 2$ kg.



A négyzet átlója: $d = a\sqrt{2} = 1{,}41$ m. T' az m_1, m_2, m_3 testek által meghatározott háromszög súlypontja, amely a $\frac{d}{2}$ magasság $\frac{1}{3}$-ában van, tehát $x' = \frac{d}{6} = 0{,}235$ m, tömege: $m_1+m_2+m_3 = 0{,}6$ kg.

Az m_4 és m_2 testek közötti átlóra $\sum \vec{M} = 0$.

Azaz: $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot \left(x' + \frac{d}{2} - x\right) - m_4 \cdot g \cdot x = 0$.

Ebből $\underline{\underline{x = 0{,}22 \text{ m}}}$. Tehát a rendszer tömegközéppontja az m_4-ből kiinduló átlón, az m_4-től 0,22 m-re van.

5.1. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az egyenletes körmozgást végző testre jellemző, hogy
A) egyenlő íveket egyenlő idők alatt fut be,
B) van sugárirányú gyorsulása,
C) nincs érintőirányú gyorsulása,
D) sebessége minden időpillanatban merőleges a sugárirányú gyorsulásra.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás.

5.1. A felsorolt állítások mindegyike teljesül az egyenletes körmozgásra. A *C)* tulajdonság azonban az, amelyik megkülönbözteti más körmozgástól, ezért jellemzőnek ezt kell tekinteni.

5.2. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Egyenletes körmozgást végez az a test,

A) amelyre ható erők eredője állandó nagyságú;

B) amelyre ható erők eredője állandó nagyságú, iránya minden pillanatban merőleges a kerületi sebességre és a pályasík ugyanazon pontja felé mutat;

C) amelyre ható erők eredője minden pillanatban sugárirányú;

D) amelyre centrális szabaderő hat.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.2. Helyes: a *B*), mert a mozgás dinamikai feltételét fogalmazza meg. Hibás: az *A*), mert az irányra, *C*), mert a nagyságra vonatkozó kikötés hiányzik, a *D*) pedig nem zárja ki további erők létezését.

5.3. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az egyenletes körmozgást végző testre ható centripetális erő nagysága kiszámítható, ha ismert:

A) a test tömege, a szögelfordulása és a pálya sugara;

B) a test tömege, a kerületi sebessége és a szögsebessége;

C) a test lendülete és a mozgás frekvenciája;

D) a test tömege, a pálya sugara és a periódusidő.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.3. Helyes: B), mert $F_{cp} = m \cdot a_{cp} = m \cdot v \cdot \omega$;

C), mert az $I = m \cdot v$ és $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ helyettesítésével $F_{cp} = I(2 \cdot \pi \cdot f)$.

D), mert $F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$, ahol $v = \frac{2r\pi}{T}$, az adatokból számolható.

Hibás: A), mert az $F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)^2 r$, ahol a Δt ismeretlen.

5.4. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

Ha két test egyenletes körmozgást végez azonos szögsebességgel, akkor

A) a fordulatszámok aránya megegyezik a sugarak arányával;

B) a centripetális gyorsulások aránya egyenlő a periódusidők arányával;

C) a kerületi sebességek aránya egyenlő a sugarak arányával;

D) a periódusidők aránya egyenlő a fordulatszámok arányának reciprokával.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.4. Hibás: A), a szögsebességek egyenlőségéből $2\pi f_1 = 2\pi f_2$, tehát $f_1 = f_2$, $\frac{f_1}{f_2} = 1$ következik a sugaraktól függetlenül.

B), azonos szögsebesség a periódusidők egyenlőségét jelenti, ezért $\frac{T_1}{T_2} = 1$. Az $a_{cp1} = \omega^2 \cdot r_1$ és $a_{cp2} = \omega^2 \cdot r_2$ alapján az $a_{cp1} : a_{cp2} = 1$ csak a sugarak egyenlősége esetén teljesülhetne.

Helyes: C), mivel $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega \cdot r_1}{\omega \cdot r_2}$, egyszerűsítés után az arány $\frac{r_1}{r_2}$.

D), az A) alapján.

5.5. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Az egyenletes körmozgást végző test centripetális gyorsulása kiszámítható

A) a kerületi sebességből és a periódusidőből,

B) a szögsebességből és a pálya sugarából,

C) a fordulatszámból és a pálya sugarából,

D) a szögelfordulásból és a közben eltelt időből.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.5. Hibás: $\underline{\underline{D)}}$, az adatokból a szögsebesség számolható, más nem.

Helyes: *A*), az $a_{cp} = v \cdot \omega = v \cdot \frac{2\pi}{T}$ alapján.

B) $a_{cp} = \omega^2 \cdot r$.

C), a *B*)-ben $\omega = 2\pi f$ helyettesítésével az a_{cp} számolható.

5.6. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Két, különböző tömegű test azonos sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. Ha a testekre ható centripetális erők azonosak, akkor tömegeik aránya megegyezik:

A) a fordulatszámok arányával,

B) a szögsebességnégyzetek reciprokainak arányával,

C) a periódusidők arányának négyzetével,

D) a kerületi sebességek arányának négyzetével.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.6. Helyes: B), az $F_{cp1} = F_{cp2}$-ből $m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot r = m_2 \cdot \omega_2^2 \cdot r$ következik, egyszerűsítés és rendezés után az arány $m_1 : m_2 = \omega_2^2 : \omega_1^2$.

C), mivel $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a B)-nél felírt arányba helyettesítve $m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2$ az állításnak megfelelően.

Hibás: A), mert a B) alapján $\frac{m_1}{m_2} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \neq \frac{f_1}{f_2}$.

D), a feltételből $m_1 \cdot v_1^2 = m_2 \cdot v_2^2$, ennek rendezésével

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \neq \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2.$$

5.7. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

Két egyenlő tömegű test két különböző sugarú körpályán egyenletes körmozgást végez és centripetális gyorsulásuk azonos. Ekkor

A) szögsebességük aránya megegyezik a pályasugarak arányának reciprokával,

B) kerületi sebességük aránya megegyezik a pályasugarak arányával,

C) kerületi sebességük négyzetének aránya egyenlő a sugarak arányával,

D) szögsebességük arányának négyzete megegyezik a sugarak arányának reciprokával.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.7. Helyes: C), a feltétel $a_{cp1} = a_{cp2}$ miatt $\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{v_2^2}{r_2}$, innen az arány $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_1}{r_2}$.

D), az $\omega_1^2 \cdot r_1 = \omega_2^2 \cdot r_2$ rendezésével $(\omega_1 : \omega_2)^2 = r_2 : r_1$ adódik.

Hibás: *A*) a feltételből $a_{cp1} = a_{cp2}$, azaz $\omega_1^2 \cdot r_1 = \omega_2^2 \cdot r_2$ következik, átrendezve $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}}$ arányt kapjuk.

B), a *C*) szerint.

5.8. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

Két test különböző sugarú körpályán mozog. Megfigyelésünk ideje alatt azonos szöggel fordultak el, tehát

A) a két test átlagos szögsebessége azonos,

B) a két test által befutott ívhosszak azonosak,

C) a két test szöggyorsulása azonos,

D) a két test pillanatnyi szögsebessége különböző lehet.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.8. Helyes: A), mert az átlagos szögsebességet a $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ határozza meg a pályasugártól függetlenül.

D), mert a pillanatnyi szögsebességet $-\omega_t = \omega_0 + \beta \cdot t$ – azonos idő mellett ω_0 és β határozza meg, ezeket nem ismerjük.

Hibás: *B*), mert $\Delta s = (\Delta\alpha) \cdot r$, a sugarak viszont nem egyenlők.

C), mert $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, a szögsebesség időfüggését nem ismerjük.

5.9. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

Ha egy test egyenletesen változó körmozgást végez, akkor

A) szöggyorsulása állandó,

B) centripetális gyorsulása állandó,

C) fordulatszáma az idő négyzetével arányos ($\omega_0 \neq 0$),

D) szögsebesség-változása egyenesen arányos a változáshoz szükséges idővel.

Igazoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.9. Helyes: A), a mozgás egyik jellemzője.

D), ez a $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ és $\beta =$ állandó-ból következik.

Hibás: *B*), ugyanis $a_{cpt} = \omega^2 \cdot r$, ahol $\omega_t = \omega_0 + \beta t$, tehát a_{cpt} függ az időtől.

C), az $\omega_t = \omega_0 + \beta \cdot t$-be helyettesítve $2\pi \cdot f_t = 2\pi \cdot f_0 + \beta \cdot t$-ből egyik arányosság sem következik.

5.10. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések, az alábbi A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás is igaz, a kettő között ok-okozati összefüggés van.

B) Az állítás igaz, az indoklás is igaz, de a kettő között nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás nem igaz.

D) Az állítás nem igaz, de az indoklás önmagában igaz.

E) Az állítás nem igaz, az indoklás sem igaz.

1. Ha megszüntetjük a testet körpályára kényszerítő erőt, a test a kör érintőjének irányában folytatja útját, mert ha egy testre erő nem hat, úgy a meglévő sebességével egyenes vonalú mozgást végez.
2. Homogén mágneses mezőben az indukcióvonalra merőlegesen haladó, elektromosan töltött részecske körpályán mozog, mert a mező olyan állandó nagyságú erőt gyakorol a mozgó részecskére, amely mindig merőleges a pillanatnyi sebesség irányára.
3. Adott sugarú pályán körmozgást végző test fordulatszámát kétszeresére, háromszorosára növelve, a körpályán tartáshoz négyszer, kilencszer nagyobb eredő erő kell, mert a centripetális erő állandó pályasugár esetén egyenesen arányos a fordulatszám négyzetével.
4. Adott sugarú pályán azonos kerületi sebességgel körmozgást végző, kétszer, háromszor nagyobb tömegű testre kétszer, háromszor nagyobb a középpont felé mutató eredő erő, mert a körpályán tartáshoz szükséges erő adott sugár esetén csak a test tömegétől függ.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.10. 1. *A*) Newton I. törvénye szerint.

2. *A*) Feltéve, hogy a részecskére csak Lorentz erő hat.

3. *A*) Az $F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot (2\pi)^2 \cdot f^2 \cdot r$-ből következik, pillanatnyi értékeket alapul véve.

4. *C*) Az $F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ szerint a mondat első fele igaz, a második nem.

5.11. Mekkora nyomóerőt gyakorol a hídra a v sebességgel haladó, m tömegű autó a következő esetekben?

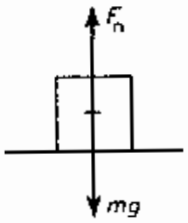
a) A híd vízszintes.
b) A híd felülnézetben homorú, alakja R sugarú körív.
c) A híd felülnézetben domború, alakja R sugarú körív.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

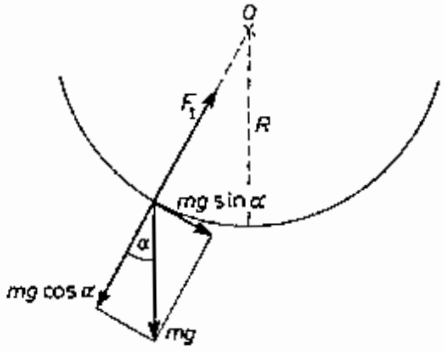
5.11. a) Az autónak nincs függőleges gyorsulása, ezért a súlyával nyomja a hidat, $F_n = G = m \cdot g$.

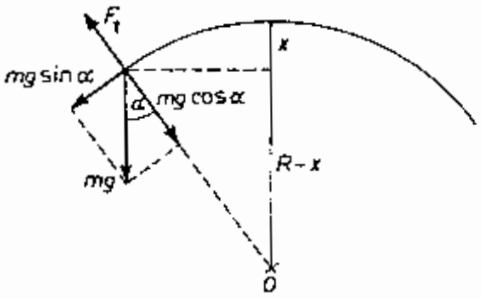
b) és c) esetekben az autó körpályán mozog. Az ehhez szükséges centripetális erőt a sugárirányú erők eredője biztosítja.



Az ábrák alapján:

b) (a homorú híd esetén): $F_{cp} = F_t - m \cdot g \cdot \cos\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$, innen $F_t = m \cdot \left(g \cdot \cos\alpha + \dfrac{v^2}{r}\right)$. A pálya legmélyebb pontján $\alpha = 0$, ekkor





$F_t = m \cdot g + m \cdot \dfrac{v^2}{R}$, ez a híd által az autóra ható kényszererő. Newton III. törvénye szerint az autó ugyanekkora, a súlyánál nagyobb erővel nyomja a hidat.

c) A domború híd esetében $F_{cp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha - F_t$, innen $F_t = m \cdot \left(g \cdot \cos\alpha - \dfrac{v^2}{R}\right)$. A pálya legmagasabb pontján $\alpha = 0$, ekkor, $F_t = m \cdot g - m \cdot \dfrac{v^2}{r}$, vagyis $F_t < m \cdot g$, tehát az autó súlyánál kisebb a nyomóerő.

5.12. *Jelöljük meg a* HELYES *választ!*

Egy körív alakú domború híd legfelső pontján haladó autó centripetális gyorsulása megegyezik a nehézségi gyorsulással. Ekkor az autó a hidat

A) a súlyánál kisebb erővel nyomja,

B) a súlyával egyenlő erővel nyomja,

C) a súlyánál nagyobb erővel nyomja,

D) nem nyomja.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.12. Helyes: *D*), mert az autó körpályán mozog. Az 5.11. alapján. a legfelső ponton $F_{cp} = F_{neh} - F_t = m \cdot a_{cp}$. Az $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = g$ feltétel és az $F_{neh} = m \cdot g$ helyettesítésével $m \cdot g - F_t = m \cdot g$-t kapjuk, innen $F_t = 0$. Ez azt jelenti, hogy a híd nem fejt ki kényszererőt az autóra. Newton III. törvénye szerint ekkor az autó sem nyomja a hidat. Hibás: *A*), *B*), *C*), lásd 5.11.

5.13. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Mi az egyenletes körmozgás létrejöttének dinamikai feltétele?

b) Az egyenletes körmozgásnál mit tudunk a szögsebességről?

c) A diszkoszvető többszöri körülfordulás után engedi el a diszkoszt. Milyen irányban repül el a diszkosz? Miért?

d) Miben nyilvánul meg az egyenletes körmozgás centripetális gyorsulása?

Megoldás:

5.13. a) Az 5.2. *b)* fogalmazza meg.

b) Az egyenletes körmozgás esetén a szögelfordulás és a közben eltelt idő között egyenes arányosság van, ezért a $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$ állandó.

c) Mielőtt a sportoló elhajítaná a diszkoszt, az görbevonalú pályán, megközelítően körpályán mozog. A kiengedés pillanatában a mozgás sebességének irányát a pillanatnyi pályaérintő adja (az elhajított diszkosz mozgása eltér a szokásos értelemben vett hajítástól).

d) A centripetális gyorsulás a kerületi sebesség irányát változtatja meg.

5.14. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Mi a görbe vonalú mozgás létrejöttének dinamikai feltétele?

b) Az egyenletes körmozgás gyorsuló mozgás-e vagy sem?

c) Mit mondhatunk az egyenletes körmozgás kerületi sebességéről?

d) Egy tanuló cérnára kötött radírgumit mozgat körpályán.
Merre repül a radírgumi, ha a cérna elszakad? Miért?

Megoldás:

5.14. **a)** Görbevonalú mozgást akkor végez egy test, ha a ráható erők eredője és a test pillanatnyi sebességének iránya nem esnek egy egyenesbe.

b) Az egyenletes körmozgás gyorsuló mozgás. Lásd 5.11.

c) A kerületi sebesség nagysága állandó, hiszen az út (ív) és a befutásához szükséges idő egyenesen arányosak. Iránya szüntelenül változó, minden fázisban érintőirányú. Kiszámítható a $v = \frac{2r \cdot \pi}{T} = 2r \cdot \pi = r \cdot \omega$ összefüggésekkel.

d) A radír Newton I. törvénye szerint a pillanatnyi helyzetéhez tartozó körérintő irányába repül ki.

5.15. *Jelöljük meg a* HELYES *válaszokat!*

Egy körív alakú hídról leguruló test pályamenti sebességét növekvőnek észleljük. Mely erők növelik a test pályamenti sebességét?

A) A híd tartóereje.
B) A súrlódási erő.
C) A gravitációs erő érintőirányú összetevője.
D) A gravitációs erő sugárirányú összetevője.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.15. Helyes: *C*), a pályamenti sebesség növekvő, ekkor a test gyorsulása a sebességgel azonos irányú vektor. Newton II. törvénye szerint a gyorsító erő és a gyorsulás egyező irányú, a felsorolt erők közül ilyen tulajdonságú a gravitációs erő érintőirányú összetevője.
Hibás: *A*), *B*), *D*) a fentiek szerint.
Megjegyzés: a test sebességének változását a gravitációs erő érintő irányú összetevője és a súrlódási erő együtt határozzák meg. Azonban ebben az esetben a súrlódási erő fékező hatású.

5.16. *Jelöljük meg a* HELYES *választ!*

Mely testek mozgása gyorsulásmentes?

A) Az állandó nagyságú sebességgel kanyarodó járműé.

B) A kitéritett, majd magára hagyott ingáé.

C) Az állandó nagyságú sebességgel egyenes pályán haladó vonaté.

D) A kikapcsolt hajtóművű, földkörüli pályán keringő űrhajóé.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.16. Helyes: $\underline{\underline{C}}$), a vonat sebessége az egyenes pályán állandó nagyságú és irányú, így nincs sebességváltozása, tehát gyorsulása sem. A többi esetben a pálya görbevonalú, ekkor a sebesség iránya biztosan változik.

Hibás: *A*), mert a pálya nem egyenes.

B), mert az inga sebességének nagysága is és iránya is változó, ekkor van gyorsulás.

D), mert az űrhajó szabadon esik, így $a = g$.

5.17. *Válasszuk ki a* HELYES *arányt!*

Két, azonos sugarú pályán egyenletes körmozgást végző test tömegének aránya 2:3. Azonos szögsebesség esetén a testre ható centripetális erők aránya:

A) 2:3,
B) 3:2,
C) 4:9,
D) 9:4.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.17. Adatok: $m_1 = 2m$; $m_2 = 3m$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $r_1 = r_2 = r$.
Helyes: A), ugyanis $F_{cp1} = (2m)\omega^2 \cdot r$; $F_{cp2} = (3m)\omega^2 \cdot r$, a két erő hányadosa 2 : 3.
Hibás: *B*), *C*), *D*), mert egyszerre csak egy arány teljesülhet.

5.18. *Válasszuk ki a* HELYES *arányt!*

Két, azonos tömegű test „r" sugarú pályán egyenletes körmozgást végez, szögsebességük aránya 1:2.
Mennyi a mozgási energiájuk aránya?

A) 1:2,
B) 2:1,
C) 1:4,
D) 4:1.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.18. Adatok: $m_1 = m_2 = m$; $\omega_2 = 2\omega_1$; $r_1 = r_2 = r$.

Helyes: C), mert $E_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2$, $E_2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot (4\omega_1^2) = 4E_1$, azaz a $E_1 : E_2 = 1 : 4$ a helyes arány.

Hibás: *A*), *B*), *D*), lásd 5.17.

5.19. Az alábbi táblázatban az egyenletesen változó körmozgás leírásához használt mennyiségeket tüntettük fel.
Írjunk a táblázat megfelelő rovatába 0-t, ha állandó a kérdéses adat és 1-et, ha változó!

	Kerületi sebesség	Centripetális gyorsulás	Érintő irányú gyorsulás	Eredő gyorsulás	Szögsebesség	Eredő erő	Forgatónyomaték
Nagysága							
Iránya							

Megoldás:

5.19.

	kerületi sebesség	centripetális gyorsulás	érintőirányú gyorsulás	eredő gyorsulás	szögsebesség	eredő erő	forgatónyomaték
irány	1	1	1	1	0	1	0
nagyság	1	1	0	1	1	1	0

5.20. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

A) Az egyenletes körmozgás kerületi sebessége állandó.
B) A körmozgást végző test sebességének irányát a centripetális erő változtatja meg.
C) A fordulatszám a pálya egyszeri befutásához szükséges idő reciproka.
D) A centripetális erő értékét a kerületi sebesség és a szögsebesség határozza meg.
E) A centripetális erő megszűnése pillanatában a test a pillanatnyi kerületi sebesség irányába haladna tovább.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.20. Hibás: *A*), mert a kerületi sebesség iránya szüntelenül változik, így a vektor is.
D), mert a centripetális erő is függ a tömegtől.
Helyes: *B*), lásd bevezetés.
E), Newton I. szerint (feltéve, hogy más erő nem hat rá).
A *C*) csak egyenletes körmozgás esetén igaz.

5.21. *Válasszuk ki a* HIBÁS *válaszokat!*

Két, azonos tömegű test különböző sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. A két test mozgásának szögelfordulás–idő grafikonja megegyezik. Melyik grafikonok egyeznek még meg?

A) A szögsebesség–fordulatszám grafikon.

B) A kerületi sebesség–idő grafikon.

C) Az út–idő grafikon.

D) A szögsebesség–idő grafikon.

Választásunkat indokoljuk!

Megoldás:

5.21. A szögelfordulás–idő grafikonok egyezőségéből a szögsebességek egyenlősége következik. Ekkor a fordulatszámok is egyenlők.

Hibás: *B)*, a kerületi sebességek a különböző pályasugarak miatt nem egyenlők.

C), az azonos idő alatt befutott utak sem egyenlők, mert értékük függ a sugártól.

Helyes: *A)*, a fentiek szerint az $\omega = 2\pi \cdot f$, ω, és f kapcsolata független a szögelfordulástól.

D) $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ = állandó.

5.22. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Ha két körmozgást végző, azonos tömegű test kinetikus energiája egyenlő, akkor
A) a lendületük is egyenlő;
B) a kerületi sebességük is egyenlő;
C) a perdületük is egyenlő;
D) a szögsebességük is egyenlő.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.22. Valamennyi állítás hibás. *A)* és *B)* azért, mert a feltételekből csak a kerületi sebességek nagyságának egyenlőségére lehet következtetni, az irányukat nem ismerjük. A *C)* és *D)* esetében a sebességek egyenlőségéből nem következik sem a szögsebességek, sem a perdületek egyenlősége, hisz a sugarak lehetnek különbözőek.

5.23. *Válasszuk ki az alábbi állítások közül a HIBÁSAT!*

A) Egyenletes körmozgást végző testet körpályán tartó centripetális erő nem végez munkát.

B) Síkos lejtőn lecsúszó testre a lejtő F_n erővel hat. A test lecsúszása közben F_n nem végez munkát.

C) A ferdén felfelé elhajított testnek a gyorsulása a pálya legmagasabb pontján nulla.

D) Homogén tömegeloszlású, egyenlő oldalú, háromszög alakú fémlap tömegközéppontja a magasságvonalak metszéspontjában van.

E) Szimmetrikus alakú, homogén tömegeloszlású test középpontjának sebessége állandó, ha a testre külső erő nem hat.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

5.23. Hibás: $\underline{\underline{C}}$), az elhajított test gyorsulása a mozgás során végig g.

Helyes: *A*) és *B*), mert mindkettőnél az erő merőleges az elmozdulásra.

D), mert szabályos háromszög esetén a tömegközéppont és a magasságpont egybeesik.

E), a tömegközéppont-tétel alapján.

5.24. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A) Ha a testre ható erők eredőjének a munkája pozitív, akkor a test mozgási energiája nő.

B) A testre ható súrlódási erő növelheti és csökkentheti is a test mozgási energiáját.

C) Két mozgó test közül annak nagyobb a lendülete, amelynek mozgási energiája nagyobb.

D) Kiterjedt test teljes mozgási energiáját a tömegközéppontjának sebességéből kell kiszámolni.

E) Egy műhold körpályán kering a Föld körül. Ha a műhold sebességét lecsökkentjük, a körpálya sugara nő.

Választásunkat indokoljuk!

Megoldás:

5.24. Helyes: A), a munkatétel alapján $W = \Delta E_{kin}$, ahol E_{kin} a sebesség növekedése miatt pozitív, így a W is az.

B), vízszintes alátámasztáson ellökött test, vagy lejtőn lecsúszó test sebességét csökkenti, ugyanakkor gyorsuló járműn raklapján levő test sebességét növelheti a súrlódási erő.

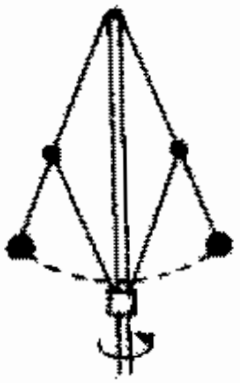
Hamis: C), legyen $m_1 = 1$ kg; $v_1 = 10 \frac{m}{s}$; $m_2 = 2$ kg; $v_2 = 7 \frac{m}{s}$. Ebben az esetben $E_1 > E_2$, de $I_1 < I_2$.

D), kiterjedt test haladó és forgó mozgást végezhet, ezért teljes mozgási energiája két energiából tevődik össze, lásd a bevezetést.

E), a kérdés az ún. égi mechanikai paradoxonra vonatkozik. A műhold energiája a mozgási energia és a potenciális energia összege. Az összenergia ebből kiszámítható, ha felhasználjuk a gravitációs vonzóerő és a centripetális erő egyenlőségét, azaz a $\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g = m \frac{v^2}{r}$ egyenlőségeket. Az összenergia $\sum E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} \gamma \frac{M \cdot m}{r} - \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} r =$ $= -\gamma \frac{M \cdot m}{2r}$. Ebből látszik, hogy az energia csökkenése a sugár csökkenésével jár.

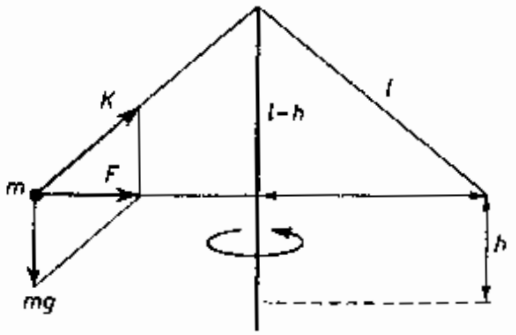
5.25. *Válaszoljunk a kérdésre!*

Az ábrán látható centrifugális szabályozó karjai a fordulatszám növelésével egyre magasabbra emelkednek.
Mi határozza meg az emelkedés magasságát?



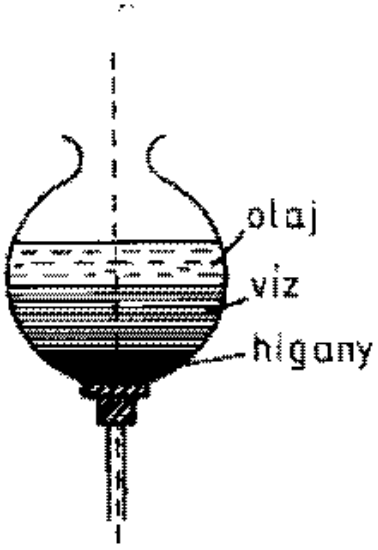
Megoldás:

5.25. Az l hosszúságú kar végére erősített kis m tömegű gömb r sugarú körpályán mozog. A centripetális erőt a nehézségi erő és a kar által kifejtett kényszererő (K) adja. Az ábráról a hasonlóságot felhasználva $F_{cp} : F_{neh} = r : (l - h)$, innen $F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r$, az $\omega = 2\pi \cdot f$ és $F_{neh} = m \cdot g$ helyettesítésével rendezés után $h = 1 - \frac{g}{4\pi^2 \cdot f^2}$ adódik.



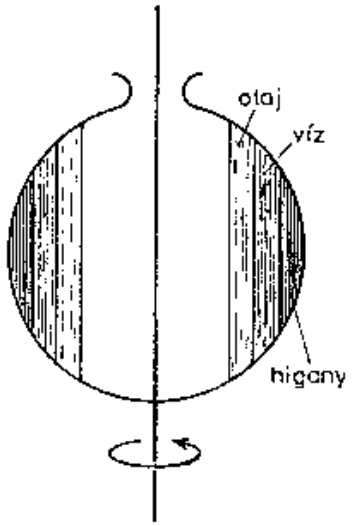
Ebből kiolvasható, hogy az emelkedés magasságát a kar hossza és a fordulatszám együtt határozzák meg. Adott karhossz mellett a fordulatszám növekedésével a $\frac{g}{4\pi^2 \cdot f^2}$ „rohamosan" csökken, azaz h igen gyorsan nő, a karok felemelkednek. (Az emelkedés magassága csak megközelítheti a kar hosszát.)

5.26. A centrifugális szeparátorban különböző sűrűségű folyadékokat, vagy folyadékot és szilárd anyagokat választanak szét. A szeparátorba higanyt, vizet és olajat öntünk, majd forgásba hozzuk.
Kellően nagy fordulatszámnál hogyan helyezkednek el ezek az anyagok?
Készítsünk a megoldáshoz vázlatos rajzot is!



Megoldás:

5.26. Az egyes rétegek elhelyezkedését a folyadékrétegekre ható erők határozzák meg. Ezek a nehézségi erő és a forgó rendszerben fellépő centrifugális erő. A folyadék felszíne ezek eredőjére lesz merőleges. Kellően nagy fordulatszám esetén a centrifugális erő értéke $m \cdot r(2\pi)^2 \cdot f^2$ alapján oly nagy lesz, amelynél az $m \cdot g$ nehézségi erő elhanyagolhatóvá válik. Ekkor az eredőerő a forgástengelytől kifelé mutató centrifugális erő, a felszín síkja ezért függőlegesen alakul. Az egyes rétegek sorrendjét a földhöz képest nyugvó folyadékokra érvényes „alul-felül" tartalmának megfelelően értelmezzük.



5.27. Egy játékvonat 2 m sugarú körpályán $0{,}628\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozog.
Mekkora a körülfordulási ideje, szögsebessége és a fordulatszáma?

Megoldás:

5.27. $r = 2m$; $v = 0{,}628\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

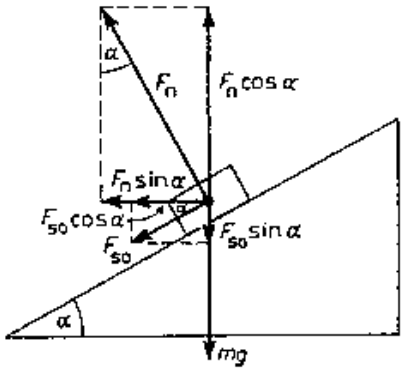
Egyenletes körmozgás esetén $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$, ebből

$\underline{\underline{T = 20\ \text{s}}}$; $\underline{\underline{\omega = \frac{v}{r} = 0{,}314\ \frac{1}{\text{s}}}}$; $\underline{\underline{f = \frac{1}{T} = 0{,}05\ \frac{1}{\text{s}}}}$.

5.28. Egy 100 m sugarú kanyarban megemelték az úttest külső ívét, így az úttest a vízszintes síkkal 12 fokos szöget zár be. Mekkora sebességgel haladhat ezen a pályán egy autó, ha a súrlódási tényező 0,2?

Megoldás:

5.28. $r = 100$ m; $\alpha = 12°$; $\mu_0 = 0{,}2$



A testre ható erők: nehézségi erő, tapadási súrlódási erő és a lejtő tartóereje. Ezek vízszintes összetevőinek eredője biztosítja a centripetális erőt. Függőleges összetevőik eredője 0, hiszen a feltétel szerint nincs ilyen irányú gyorsulás. Az ábra alapján:

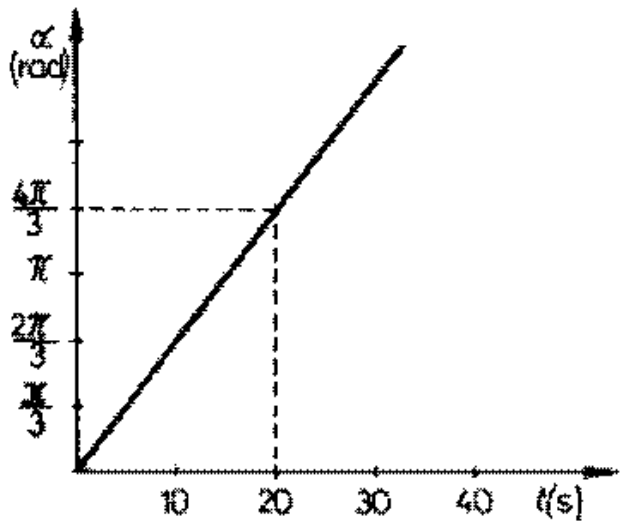
(1) $F_n \cdot \sin\alpha + F_{s0} \cdot \cos\alpha = F_{cp}$, ahol $F_{cp} = m\dfrac{v^2}{r}$ és

(2) $F_{s0} = \mu F_n$, ez F_{s0} legnagyobb értéke,

(3) $F_n \cos\alpha = F_{s0} \sin\alpha + m \cdot g$, az F_{cp} és F_{s0} értékét az egyenletekbe beírjuk, rendezve, (1)-re $F_n \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = m\dfrac{v^2}{r}$-t kapjuk.

(3)-ból (2)-felhasználásával F_n-t kifejezzük: $F_n = \dfrac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu_0 \sin\alpha}$, és (1)-be helyettesítjük. Ebből $v^2 = g \cdot r \dfrac{\sin\alpha + \mu_0 \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}$ adódik, innen $v = 20{,}76 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ a legnagyobb sebesség.

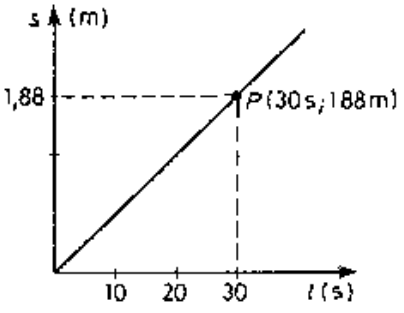
5.29. Az ábrán látható grafikonon egy 0,3 m sugarú körpályán mozgó test szögelfordulását ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Milyen mozgást végez a test? (A választ indokoljuk!)
b) Készítsük el a mozgás út–idő grafikonját!
c) Jelöljük be ezen a grafikonon azt a pontot, amely a pálya egyszeri befutásának felel meg!

Megoldás:

5.29. $r = 0{,}3$ m, $t_1 = 20$ s; $\alpha_1 = \dfrac{4\pi}{3}$ rad.



a) A grafikon alapján a szögelfordulás egyenesen arányos az idővel, ezért egyenletes körmozgást végez a test.

b) Az út és idő kapcsolata ugyancsak egyenes arányosság, ezért a grafikon az origóra illeszkedik. További pontja a $(t; \alpha \cdot r)$, tehát a (20 s; 1,26 m) koordinátájú pont.

c) A keresett P pontra $t = T$ és $s = 2r\pi$. Az egyenes arányosságot felhasználva $T = \dfrac{2\pi t}{\alpha} = 30$ s, $s = 1{,}88$ m.

5.30. Egy vízszintes síkú körpálya sugara 15 cm. A pályán 0,25 kg tömegű test kering, centripetális gyorsulása a nehézségi gyorsulás négyszerese.

a) Mekkora a fordulatszám?
b) Mekkora a testre ható centripetális erő?
c) Mennyi a test kinetikus energiája?

Megoldás:

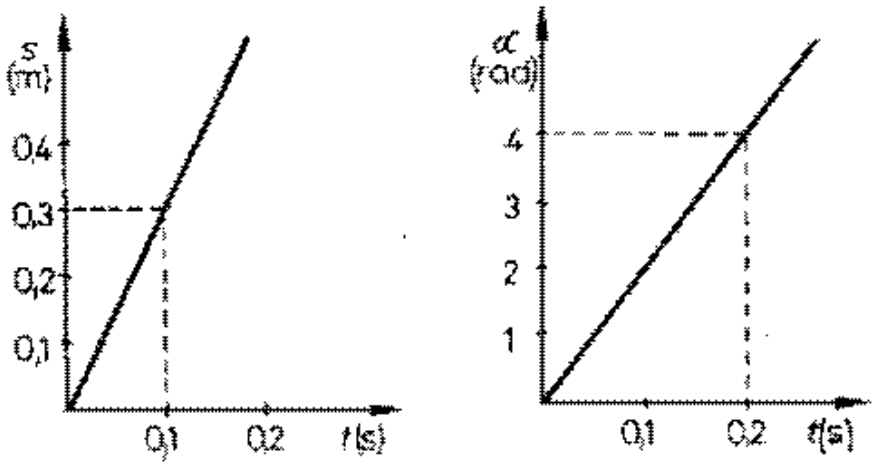
5.30. $r = 0{,}15$ m; $m = 0{,}25$ kg; $a_{cp} = 4 \cdot g$.

a) A $4 \cdot g = (2\pi f)^2 \cdot r$-ből $\underline{\underline{f = 2{,}6 \frac{1}{s}}}$.

b) $\underline{\underline{F_{cp}}} = ma_{cp} = \underline{\underline{10 \text{ N}}}$.

c) $\underline{\underline{E_{kin}}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma_{cp}r = \underline{\underline{0{,}75 \text{ J}}}$, itt felhasználtuk, hogy $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$.

5.31. Az ábrán egy 3 kg tömegű test egyenletes körmozgásának út–idő és szögelfordulás–idő grafikonját látjuk.



a) Mekkora a pálya sugara?
b) Mekkora a fordulatszám?
c) Mennyi idő alatt tesz meg a test egy fordulatot?
d) Mekkora a test centripetális gyorsulása?
e) Mekkora erő szükséges a körmozgás biztosításához?

Megoldás:

5.31. $m = 3$ kg; a grafikonokról: $t = 0{,}1$ s; $s = 0{,}3$ m; $\alpha = 2$ rad.

a) $\underline{r} = \frac{s}{\alpha} = \underline{0{,}15 \text{ m}}$.

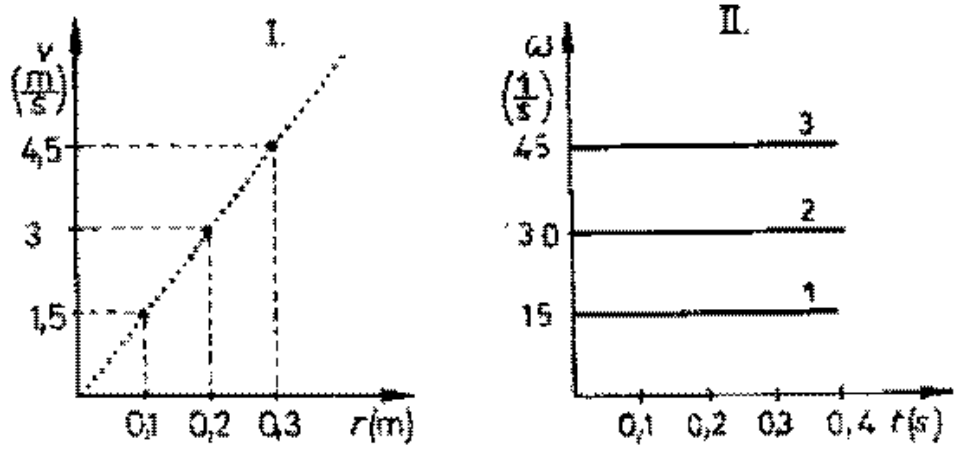
b) $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 20 \frac{1}{\text{s}}$; $\underline{f} = \frac{\omega}{2\pi} = \underline{3{,}18 \frac{1}{\text{s}}}$.

c) $\underline{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{0{,}314 \text{ s}}$.

d) $\underline{a_{cp}} = \omega^2 \cdot r = \underline{60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

e) $\underline{F_{cp}} = m \cdot a_{cp} = \underline{180 \text{ N}}$.

5.32. Az ábrán látható I. grafikon egyenletes körmozgást végző testek sebességét ábrázolja a pálya középpontjától mért távolság függvényében.



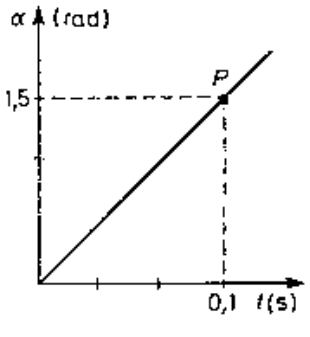
a) Mi a közös a testek mozgásában?

b) Válasszuk ki a II. szögsebesség–idő grafikonok közül azt, amelyik az I. sebesség–távolság grafikonhoz tartozik!

c) Készítsük el a testek mozgásának szögelfordulás idő grafikonját!

Megoldás:

5.32. a) A grafikonról látható, hogy a $\frac{v}{r}$ hányados, amely a testek szögsebességét adja, állandó.

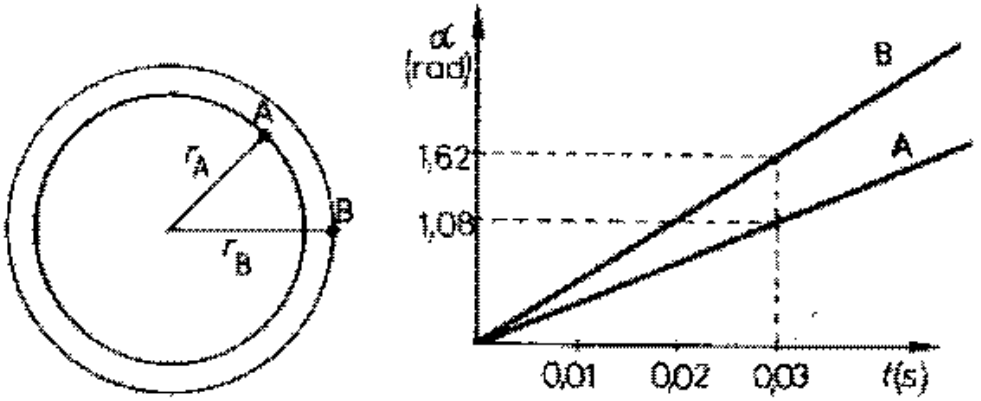


b) $\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,5}{0,1} = 15\ \frac{1}{s}$, tehát az 1-es tartozik a I.-hez.

c) Mivel a testek szögsebessége azonos, ezért szögelfordulás–idő grafikonjuk is egybeesik:

A grafikon pontjai: origó és $t = 0,1$ s, $\alpha = \omega t = 1,5$ rad-nak megfelelő pont.

5.33. Az ábrán látható két test közül az A test 20 cm, a B test 25 cm sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. Mozgásukról a grafikon tájékoztat.



a) Mekkora a testek szögsebessége?

b) Mekkora a testek kerületi sebességének aránya?

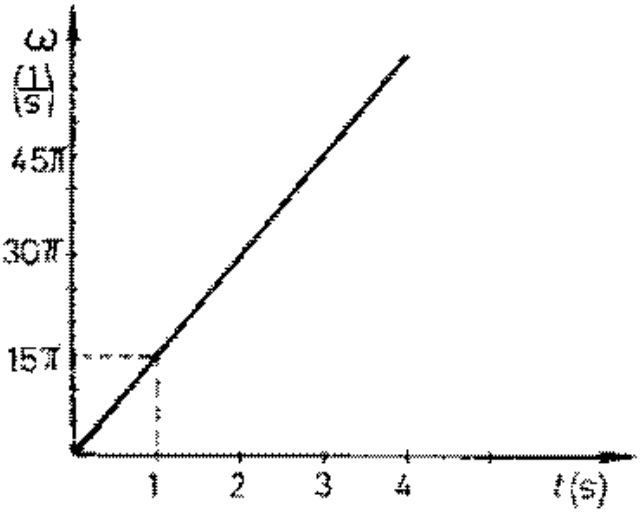
Megoldás:

5.33. $r_a = 0{,}2$ m; $r_b = 0{,}25$ m; $t = 0{,}03$ s; $\alpha_a = 1{,}08$ rad; $\alpha_b = 1{,}62$ rad.

a) $\omega_a = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \dfrac{\alpha_a}{t} = 36\ \dfrac{1}{s}$; $\underline{\underline{\omega_b = \dfrac{\alpha_b}{t} = 54\ \dfrac{1}{s}}}$.

b) $v_a = \omega_a \cdot r_a$ és $v_b = \omega_b \cdot r_b$, így a $v_a : v_b$ arány helyettesítés és egyszerűsítés után $\underline{\underline{8 : 15}}$.

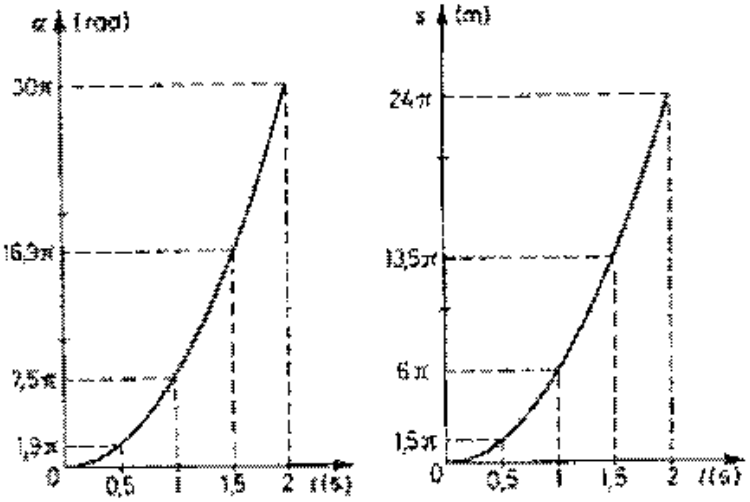
5.34. Az ábrán egy pontszerű test körmozgásának szögsebesség–idő grafikonját készítettük el. A pálya sugara 80 cm. Készítsük el a mozgás szögelfordulás–idő és út–idő grafikonját!



Megoldás:

5.34. $r = 0{,}8$ m, a grafikonról $\omega_0 = 0$; $t = 1$ s; $\omega_t = 15\pi \ \frac{1}{\text{s}}$.

A test egyenletesen változó körmozgást végez, mert $\omega \sim t$, $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t} = 15\pi \ \frac{1}{\text{s}}$ szöggyorsulással.



Mivel $\alpha = \frac{1}{2}\beta t^2$ és $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ másodfokú függvények, a grafikonok több pontját meghatározzuk:

$t_1 = 0{,}5$ s, $\alpha_1 = 1{,}9\pi$ rad, $s_1 = 1{,}5\pi$ m;

$t_2 = 1$ s, $\alpha_2 = 7{,}5\pi$ rad, $s_2 = 6\pi$ m;

$t_3 = 1{,}5$ s, $\alpha_3 = 16{,}9\pi$ rad, $s_3 = 13{,}5\pi$ m;

$t_4 = 2$ s, $\alpha_4 = 30\pi$ rad, $s_4 = 24\pi$ m;

5.35. Egy 2 kg tömegű test 30 cm sugarú körpályán 0,1 s periódusidővel egyenletes körmozgást végez.

a) Mekkora a test lendületének nagysága?
b) Változik-e a test lendülete a periódusidő függvényében?

Megoldás:

5.35. $m = 2$ kg; $r = 0{,}3$ m; $T = 0{,}1$ s.

a) $\underline{\underline{I}} = m \cdot v = m \dfrac{2r\pi}{T} = \underline{\underline{37{,}7 \ \dfrac{\text{kgm}}{\text{s}}}}$.

b) Az *a)* alapján állandó pályasugarat és tömeget feltételezve a lendület és a periódusidő fordítottan arányosak, tehát a periódusidő megváltozásával a lendület is változik.

5.36. A Föld Nap körüli pályájának átlagos sugara $1,5 \cdot 10^{11}$ m, pályamenti sebessége 30 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

a) Mekkora utat fut be a Föld 1 nap alatt?

b) Átlagértékekkel számolva mennyi idő alatt kerüli meg egyszer a Föld a Napot?

c) Miért tér el a számított keringési idő az év valóságos tartamától?

Megoldás:

5.36. $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m; $v = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 86\,400$ s.

a) $s = vt = 2\,592\,000$ km $\sim \underline{2,6 \cdot 10^9 \text{ m}}$.

b) $T = \frac{2r\pi}{v} = 3,14 \cdot 10^7$ s $= \underline{363 \text{ nap}}$.

c) A megoldáshoz feltételeztük, hogy a pálya kör, és a Föld pályamenti sebessége állandó. Kepler törvényei szerint egyrészt a pálya ellipszis, másrészt a Föld sebessége nem állandó, legnagyobb a pályának a Naphoz legközelebbi pontjában és legkisebb a legtávolabb fekvő pontban.

5.37. Egy 0,5 kg tömegű test 2 m sugarú pályán 5 s periódusidővel egyenletes körmozgást végez.

a) Mekkora a test mozgási energiája?
b) A periódusidőt kétszeresére növelve, hogyan változik a test mozgási energiája?

Megoldás:

5.37. $m = 0{,}5$ kg; $r = 2$ m; $T = 5$ s.

a) $E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ahol $v = \frac{2r\pi}{T}$, helyettesítés után $E_{\text{mozg}} = 1{,}58$ J.

b) Ha $T' = 2 \cdot T$, akkor $v' = \frac{v}{2}$, $v'^2 = \frac{v^2}{4}$ miatt $E'_{\text{mozg}} = 0{,}25 \cdot E_{\text{mozg}}$, a mozgási energia negyedére csökken.

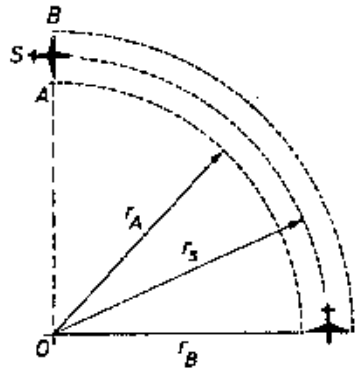
5.38. Egy repülőgép vízszintes síkú körívén fordul keletről délnek. Tömegközéppontjának kerületi sebessége $75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A gép szárnyvégeinek távolsága 50 m.

a) Mekkora a gép tömegközéppontja által befutott körív sugara, ha a szárnyvégek kerületi sebességei úgy aránylanak egymáshoz, mint 13:12?

b) Mennyi idő szükséges a forduláshoz? (A gép „bedőlésétől" tekintsünk el!)

Megoldás:

5.38. $v_S = 75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $d = 50$ m; $v_B : v_A = 13 : 12$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad; $t = \frac{T}{4}$.



a) A gép pontjainak szögsebessége egyenlő, így $v_A = \omega r_A$ és $v_B = \omega r_B$, azaz $v_B : v_A = r_B : r_A = 13 : 12$.
Az ábráról: $r_A = r_S - 25$ m és $r_B = r_S + 25$ m, ezek arányát ismerve $\underline{\underline{r_S = 625\ \text{m}}}$-nek adódik.

b) $v_S = \frac{2r_S \cdot \pi}{T}$, innen $T = 52{,}35$ s, így a forduláshoz szükséges idő $\underline{\underline{t = \frac{T}{4} = 13\ \text{s}}}$.

5.39. Egy 80 cm-es fonálra erősített testet függőleges síkban forgatunk. A fonalat akkor engedjük el, amikor a test sebessége függőlegesen felfelé mutat. Elengedés után 1 s múlva a test sebessége 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, iránya felfelé mutat.

a) Mekkora sebességgel hagyta el a test a körpályát?

b) Mekkora fordulatszámmal kellett a testet mozgatnunk?

Megoldás:

5.39. $r = 0{,}8$ m; $t = 1$ s; $v_t = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Elengedés után a test mozgása függőleges hajítás, kezdősebessége a körpályán megszerzett sebesség. Mivel $v_t = v_0 - g \cdot t$, a test $v_0 = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel hagyta el a pályát.

b) A $v_0 = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességhez tartozó fordulatszám $f = \frac{v_0}{2r\pi} = 5\ \frac{1}{\text{s}}$.

5.40. Egy 3 kg tömegű test $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel 1 m sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. Ugyanerre a pályára juttatunk egy 5 kg tömegű, $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kerületi sebességű testet, mely az előzőt utolérve, vele tökéletesen rugalmatlanul ütközik.

a) Mekkora közös sebességgel halad tovább a körpályán a két test?

b) Hogyan változik meg a periódusidő az első testhez képest?

Megoldás:

5.40. $m_1 = 3$ kg; $v_1 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 5$ kg; $v_2 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A lendületmegmaradás törvénye szerint $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_k$, innen $v_k = 7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a testek közös sebessége.

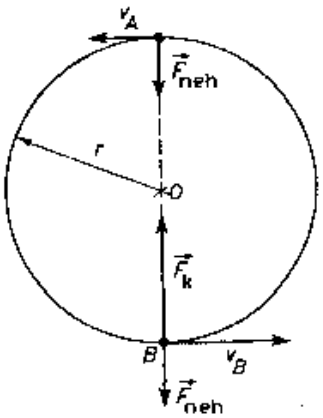
b) $v_1 = \frac{2r\pi}{T_1}$, $v_k = \frac{2r\pi}{T_k}$, innen a $\frac{T_k}{T_1} = \frac{v_1}{v_k} = \frac{2}{7}$. A periódusidő a T_1-hez képest 2/7 részére csökken.

5.41. Függőleges síkban körbeforgatunk egy 0,4 m hosszú fonálra erősített, 0,6 kg tömegű testet. A test a pálya legmagasabb pontján a súlytalanság állapotában van.

a) Mekkora a test sebessége a pálya legmagasabb pontján?
b) Mekkora a test sebessége a pálya legmélyebb pontján?
c) Mekkora erővel hat a fonál a testre a pálya legmélyebb és legmagasabb pontján?

Megoldás:

5.41. $r = 0{,}4$ m; $m = 0{,}6$ kg



a) A pálya legmagasabb pontján a testre csak a nehézségi erő hat, ez biztosítja a körpályát.

Ekkor $F_{cp} = F_{neh}$; $m \cdot \frac{v_A^2}{r} = m \cdot g$. Innen $v_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) A testen a nehézségi erő munkát végez, ez a test kinetikus energiáját növeli. Feltételezve, hogy más erő nem gyorsít, a munkatétel $\Delta E_{kin} = W$ alapján $0{,}5 \cdot m \cdot v_B^2 - 0{,}5 \cdot m \cdot v_A^2 = m \cdot g \cdot 2r$, behelyettesítés és rendezés után $v_B = 4{,}47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a test sebessége a pálya legalsó pontján.

c) A legmagasabb ponton a fonál nem hat a testre. A legmélyebb ponton a centripetális erő a fonálerő és a vele ellentétes nehézségi erő eredője: $F_{cp} = F_k - F_{neh}$; $F_{cp} = m \frac{v_B^2}{r} = 30$ N; $F_{neh} = m \cdot g = 6$ N, így a fonálerő $F_K = 36$ N.

5.42. A 2 m sugarú körpályán két test egyenletes körmozgást végez. Az egyik test kerületi sebessége $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másiké $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Egy irányban haladva 3 s múlva találkoznak.

a) Milyen messze volt egymástól a két test az időmérés kezdetekor?

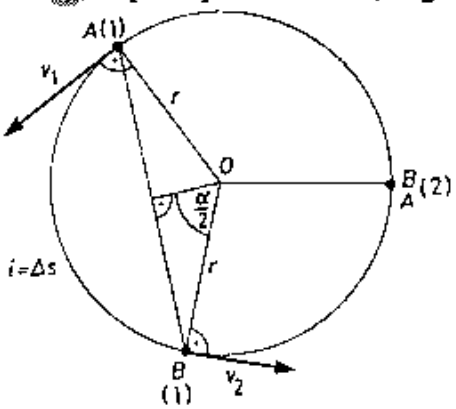
b) Mekkora szöget zártak be ekkor a pályasugarak?

c) Határozzuk meg a szögsebességek arányát!

Megoldás:

5.42. $r = 2$ m; $v_1 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 3$ s.

a) $s_1 = v_1 \cdot t = 24$ m; $s_2 = v_2 \cdot t = 18$ m. Mivel $k = 2r \cdot \pi = 12{,}56$ m és $\Delta s = 6$ m $< k$, a köríven a távolságuk 6 m volt. A két hely távolsága az őket összekötő AB húr. Az AOB körcikk középponti szöge $\alpha = \frac{\Delta s}{r} = 3$ rad $=$ $= 171°53'$. Az AOB háromszög AB oldalára a koszinusz szögfüggvényt felhasználva 3,99 m ~ 4 m-t kapunk.



b) Az előzők szerint $\alpha = 171°53'$.

c) $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = 4\ \frac{1}{\text{s}}$; $\omega_2 = \frac{v_2}{r} = 3\ \frac{1}{\text{s}}$, így az arányuk 4 : 3.

5.43. A 3200 kg tömegű gépjármű 64,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 80 m sugarú kanyarhoz közeledik.

a) Megengedhető-e ez a sebesség a kanyarban, ha a talaj vízszintes és a tapadási súrlódási tényező a jármű és a talaj között 0,32?

b) Mekkora lehet a jármű maximális sebessége a kanyarban?

Megoldás:

5.43. $m = 3200$ kg; $v = 18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r = 80$ m; $\mu_0 = 0{,}32$.

A járművet a tapadási súrlódási erő tartja körpályán. $F_{cp} = F_{s0}$, amelynek legnagyobb értéke $F_{cp} = \mu \cdot m \cdot g = 10\,240$ N. Ehhez adott pályasugár mellett az $F_{cp} = m \cdot \frac{v_{max}^2}{r}$-ből $v_{max} = 16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ adódik.

A megadott sebesség nem engedhető meg.

b) A fentiek alapján $16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a megengedhető legnagyobb sebesség.

5.44. Egyenes pályán, $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó mozdony 400 m sugarú kanyarhoz közeledik. A mozdony tömege $5 \cdot 10^4$ kg.

a) Mekkora sebességgel haladhat a mozdony a kanyarban, ha a sínek megengedett oldalirányú terhelése $5 \cdot 10^4$ N?

b) A kanyar előtt mekkora távolságban kezdjen fékezni a vezető, ha a mozdony biztonságos lassulása $0{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Megoldás:

5.44. $v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r = 400$ m; $m = 5 \cdot 10^4$ kg; $F_{max} = 5 \cdot 10^4$ N; $a = -0{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) A mozdonyt a sínek által kifejtett oldalirányú kényszererő – F_{max} – tartja körpályán.

$F_{max} = F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$-ből $\underline{\underline{v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a megengedhető legnagyobb sebesség.

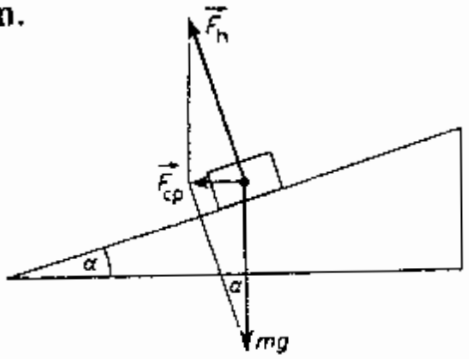
b) A fentiek alapján $\underline{s} = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a} = \underline{\underline{450 \text{ m}}}$-re kezdjen fékezni.

5.45. Mekkora szöggel kell megdönteni a 100 m sugarú kanyarban az úttestet a vizszinteshez viszonyítva, hogy az 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó jármű akkor is biztonságosan kanyarodhasson, ha az út síkos?

Megoldás:

5.45. Adatok; $v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0$; $r = 100$ m.

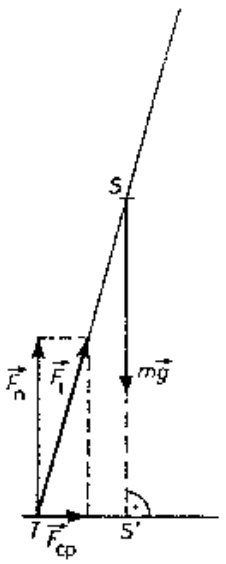
A centripetális erő a nehézségi erő és a lejtő tartóerejének az eredője. Az ábráról $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} = 0{,}225$, így $\underline{\underline{\alpha = 12°40'}}$-cel kell megemelni az úttestet.



5.46. Egy korcsolyázónak 73°-kal kell a vízszinteshez dőlnie, hogy a 60 m sugarú kanyarban haladhasson. Mekkora a korcsolyázó kerületi sebessége?

5.46. $r = 60$ m; $\alpha = 73°$. Feltételezzük, hogy $\overline{TS'} \ll r$.

A korcsolyázó tömegközéppontja vízszintes síkú egyenletes körmozgást végez. Ez csak úgy lehetséges, ha a testre ható erők egyikének sincs a tömegközéppontra vonatkoztatva forgatónyomatéka; miután a nehézségierőnek nincs, a talajnál fellépő támaszerőnek sem lehet. Ez azt jelenti, hogy a támaszerő hatásvonala átmegy a tömegközépponton. A támaszerő függőleges komponensére $F_n = -F_{neh}$, mert függőleges gyorsulás nincs. A centripetális erőt a vízszintes komponense adja.



Az ábráról $F_{cp} = m \cdot g \cdot \operatorname{ctg} 73°$, másrészt $F_{cp} = m\dfrac{v^2}{r}$.

Az adatok helyettesítésével $\underline{\underline{v = 13{,}5 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a korcsolyázó lehetséges legnagyobb sebessége.

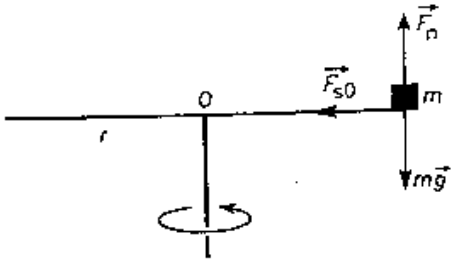
5.47. Egy lemezjátszó 12 cm sugarú korongjának fordulatszáma $45\ \frac{1}{\text{perc}}$. A korong szélére helyezünk egy 0,2 kg tömegű testet.

Legalább mekkora legyen a korong és a test között a tapadási súrlódási együttható, hogy a test a koronghoz viszonyítva nyugalomban legyen?

Megoldás:

5.47. $r = 0{,}12$ m; $f = 45\ \frac{1}{\text{perc}} = 0{,}75\ \frac{1}{\text{s}}$; $m = 0{,}2$ kg.

A testet a tapadási súrlódási erő tartja körpályán. Az egyenletes körmozgás feltétele: $F_{cp} < F_{s0}$, vagyis $m \cdot a_{cp} < \mu_0 \cdot m \cdot g$, ahol $a_{cp} = (2\pi f)^2 \cdot r = 2{,}65\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Helyettesítés és rendezés után $\underline{\underline{\mu_0 > 0{,}265}}$.



5.48. A Rutherford-féle atommodell szerint a hidrogénatomban az elektron a proton körül körpályán kering. A pálya sugara $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Mekkora erő tartja az elektront körpályán a modell szerint?

b) Mekkora az elektron sebessége a modell szerint?

Megoldás:

5.48. $r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Az elektront a protonnal való elektromos kölcsönhatás tartja pályán. Ezért $F_{cp} = k \cdot \frac{e^2}{r^2} = \underline{\underline{8{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N}}}$ a Coulomb törvény szerint.

b) $F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$-ből $\underline{\underline{v = 2{,}19 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ az elektron sebessége a modell szerint.

5.49. Egy vízzel telt vödrőt függőleges síkban, 0,9 m hosszú fonal segítségével körbeforgatunk.

a) Legalább mekkora legyen a pálya legmagasabb pontján a vödör sebessége, hogy a víz ne ömöljék ki a vödörből?

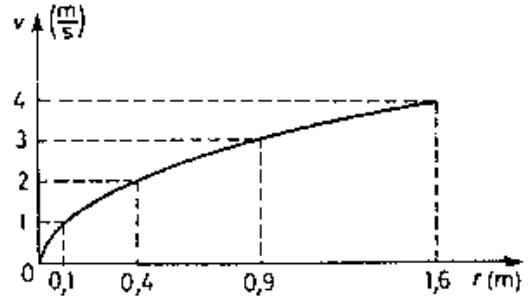
b) Hogyan változik a víz kiömlését meggátoló erő e pontban, ha a fonal hossza 0,4 m-re csökken?

c) Ábrázoljuk a vödör legkisebb szükséges sebességét a fonal hosszának függvényében!

Megoldás:

5.49. $l = r = 0{,}9$ m; $r' = 0{,}4$ m.

a) Nem ömlik ki a víz a pálya legmagasabb pontján, ha függőleges, a pálya középpontja felé mutató gyorsulása nem kisebb g-nél. Ekkor $F_{cp} = F_{neh}$, $m \cdot \frac{v_{min}^2}{r} = m \cdot g$, innen $\underline{\underline{v_{min} = 3 \frac{m}{s}}}$.



b) A vödörrel együttforgó rendszerben fellépő centrifugális erő felfelé hat, gátolva a kiömlést. $F_{cf} = m\frac{v^2}{r}$ miatt F_{cf} nő $\frac{0{,}9}{0{,}4} = \underline{\underline{2{,}25}}$-szorosára.

c) A $\frac{v^2}{r} = g$ feltételből $v = \sqrt{r \cdot g}$, a sebesség a sugár négyzetgyökös függvénye.

5.50. Fonál végére erősített, vízzel telt vödröt függőleges síkban körbeforgatunk, midőn a fonál másik, rögzített vége a forgás centruma. A fordulatszám akkora, hogy a körpálya legfelső pontján a vödörből a víz még éppen nem ömlik ki. A vödör tömegétől eltekintünk, a fonal hossza l.

a) Mekkora erő feszíti a fonalat, mikor a vödör a körpálya legalsó pontján megy át? (Tételezzük fel, hogy állandó kerületi sebességet tudunk biztosítani!)

b) Hogyan módosul a válasz, ha – a valóságnak megfelelően – figyelembe vesszük, hogy lefelé menet növekszik a sebesség a gravitáció miatt?

Megoldás:

5.50. a) A pálya legalsó pontján az F_{cp}-t a középpont felé mutató F_k kötélerő és a vele ellentétes F_{neh} nehézségi erő eredője adja. $F_{cp} = F_k - F_{neh}$, másrészt az 5.49. *a)* szerint $F_{cp} = m \cdot g$, ezért $\underline{F_k = 2m \cdot g}$.

b) A munkatételt és 5.49. *c)*-t felhasználva $\frac{1}{2}m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot 2l$, egyszerűsítés és $v_1 = \sqrt{g \cdot k}$ helyettesítésével $v_2 = \sqrt{5 \cdot g \cdot l}$, a sebesség a pálya legalsó pontján. Ezt az $m\frac{v_2^2}{l} = F_k - m \cdot g$-be helyettesítve $\underline{F_k = 6m \cdot g}$ a kötélerő. (ld 5.41.)

5.51. Milyen magasra tudjuk függőlegesen felhajítani a $3\,\frac{1}{s}$ fordulatszámmal forgatott, 80 cm-es fonalra erősített követ? Mennyi ideig emelkedik a test?

Megoldás:

5.51. $f = 3\,\frac{1}{s}$; $l = r = 0{,}8$ m.

A függőleges felfelé hajításhoz a követ akkor kell elengedni, amikor kerületi sebessége függőlegesen felfelé mutat. A kezdősebessége $v_0 = 2r \cdot \pi \cdot f = 15{,}07\,\frac{m}{s}$, a tetőponton megáll, itt $v = 0$.

Az emelkedés ideje: $v = v_0 - g \cdot t$, $0 = 15{,}07 - 10t$, azaz $\underline{\underline{t = 1{,}507\text{ s}}}$.

Az emelkedés magassága $\underline{\underline{h}} = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = \underline{\underline{11{,}35\text{ m}}}$. Amennyiben a viszonyítási szint a körpálya legalsó pontja, a sugarat is figyelembe kell venni, ekkor $h' = 12{,}15$ m az emelkedés magassága.

5.52. Egy lemezjátszó korongjának fordulatszáma $33\ \frac{\text{l}}{\text{perc}}$.

a) Mekkora a tű lemezhez viszonyított sebessége a lemez legkülső, 15 cm-es és legbelső, 5 cm-es sugarú ívében?

b) Hány fordulatot tesz meg a lemez egy 2,5 perces felvétel lejátszása alatt?

Megoldás:

5.52. $f = 0{,}55\ \frac{1}{\text{s}}$; $r_1 = 0{,}05$ m; $r_2 = 0{,}15$ m; $t = 2{,}5$ perc.

a) $v_1 = 2\pi \cdot f \cdot r_1 = 0{,}173\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; és $v_2 = 0{,}518\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a tű meghatározandó sebességei.

b) Az $f = 33\ \frac{\text{l}}{\text{perc}}$ adattal számolva a fordulatok száma $f \cdot t = 82{,}5$.

5.53. Egy 0,4 kg tömegű, pontszerű test 25 cm sugarú körpályán egyenletes körmozgást végez.

a) Mekkora a test tehetetlenségi nyomatéka?

b) Mekkora szögsebesség esetén lesz a test perdülete $0{,}15\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$?

Megoldás:

5.53. $m = 0{,}4$ kg; $r = 0{,}25$ m.

a) $\underline{\Theta = m \cdot r^2 = 0{,}025\ \text{kgm}^2}$.

b) $N = \Theta \cdot \omega$, innen $\underline{\omega = 6\ \frac{1}{\text{s}}}$.

5.54. Egyenletes körmozgást végző, 0,13 kg tömegű pontszerű test perdülete 7,8 kg $\cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

a) Számítsuk ki a test tehetetlenségi nyomatékát, ha a pálya sugara 10 m!
b) Mekkora a test pályamenti sebessége?
c) Mekkora centripetális erő szükséges a test körpályán tartásához?

Megoldás:

5.54. $m = 0{,}13$ kg; $N = 7{,}8$ kg $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $r = 10$ m.

a) $\underline{\Theta} = m \cdot r^2 = \underline{13\ \text{kgm}^2}$.

b) $v = \omega \cdot r = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ahol $\underline{\omega} = \frac{N}{\Theta} = \underline{0{,}6\ \frac{1}{\text{s}}}$.

c) $\underline{F_{cp}} = m \cdot \omega^2 \cdot r = \underline{0{,}486\ \text{N}}$.

5.55. Egy jármű kerekének átmérője 70 cm.

a) Mekkora gyorsulással indul a jármű, ha a kerék 3,5 s alatt éri el a $21\ \frac{1}{s}$ szögsebességet?

b) Mekkora a kerék szöggyorsulása?

c) Mekkora utat tesz meg a jármű a gyorsítás alatt?

d) Mekkora szöggel fordul el a kerék a gyorsítás ideje alatt?

Megoldás:

5.55. $r = 0{,}35$ m; $t = 3{,}5$ s; $\omega_0 = 0$; $\omega_t = 21\ \frac{1}{s}$.

a) Feltételezzük, hogy a kerék tisztán gördül, ekkor a jármű gyorsulása és a kerék érintőirányú gyorsulása egyenlő. Az $a = \beta \cdot r$-be $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 6\ \frac{1}{s^2}$-ot helyettesítve a gyorsulás $\underline{\underline{a = 2{,}1\ \frac{m}{s^2}}}$.

b) Az *a)* szerint $\underline{\underline{\beta = 6\ \frac{1}{s^2}}}$.

c) $s = \frac{a}{2}t^2 = \underline{\underline{12{,}86\ \text{m}}}$ utat tesz meg a jármű.

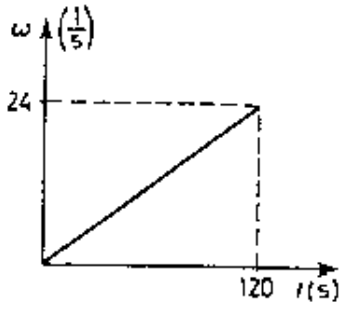
d) A kerék szögelfordulása $\alpha = \frac{\beta}{2}t^2 = \underline{\underline{36{,}75\ \text{rad}}}$.

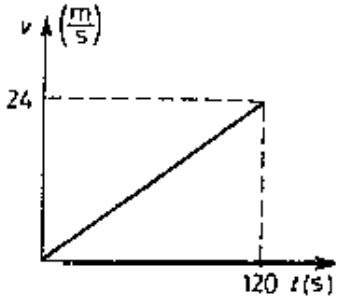
5.56. Egy 0,75 kg tömegű test 1 m sugarú körpályán $0{,}2\ \frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással indul.

a) Mennyi idő alatt éri el a $24\ \frac{1}{s}$ maximális szögsebességet?
b) Mekkora a test érintőirányú gyorsulása?
c) Mekkora a test legnagyobb érintőirányú sebessége?
d) Készítsük el a mozgás szögsebesség–idő és sebesség–idő grafikonját!

Megoldás:

5.56. $m = 0{,}75$ kg; $r = 1$ m; $\beta = 0{,}2\ \frac{1}{s^2}$; $\omega_0 = 0$; $\omega = 24\ \frac{1}{s}$.



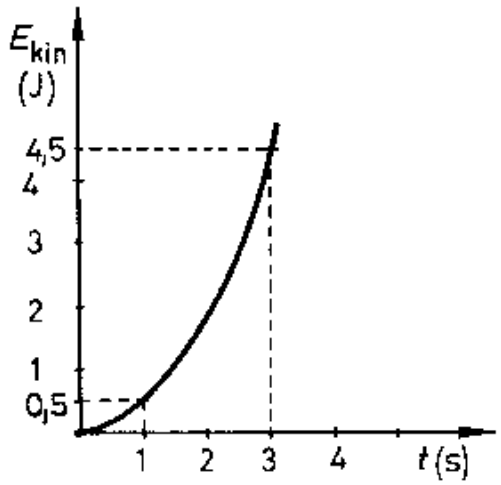


a) $\omega = \beta \cdot t$-ből $t = \frac{\omega}{\beta} = \underline{120\ \text{s}}$.

b) $a_\varepsilon = \beta \cdot r = \underline{0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

c) $v = \omega \cdot r = \underline{24\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

5.57. Egy 1 kg tömegű test vízszintes síkban, 30 cm sugarú pályán körmozgást végez. A test kinetikus energiáját az idő függvényében ábrázoltuk.



a) Töltsük ki az alábbi táblázatot!

t (s)	E_{kin} (J)	a_t $\left(\frac{m}{s^2}\right)$	$F_é$ (N)	M (N · m)
1				
2				
3				

b) Mennyivel változott a test kinetikus energiája az 1. s és 3. s között?

c) Mekkora utat tesz meg a test eközben?

Megoldás:

5.57. $m = 1$ kg; $r = 0{,}3$ m; $v_0 = 0$

a)

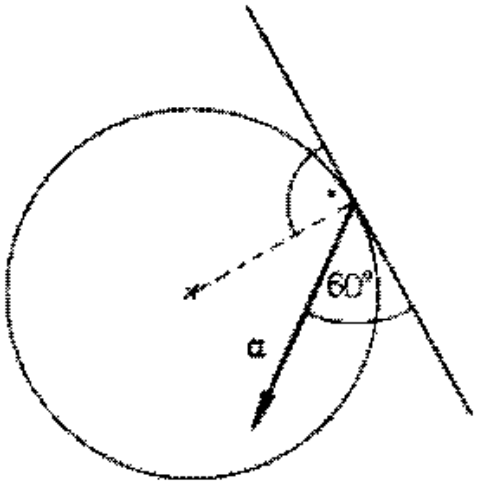
t (s)	E_{kin} (J)	$a_t \left(\frac{m}{s^2}\right)$	F_t (N)	M (Nm)
1	0,5	1	1	0,3
2	2	1	1	0,3
3	4,5	1	1	0,3

Felhasználtuk, hogy $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, $a_t = \frac{v}{t}$, $F_t = m \cdot a_t$ és $M = F_t \cdot r$.

b) $\underline{\underline{\Delta E_{kin}}} = 4$ J, a táblázat alapján.

c) $\Delta E_{kin} = W = F_t \cdot s$, innen $\underline{\underline{s}} = \frac{E_{kin}}{F_t} = \underline{\underline{4 \text{ m}}}$.

5.58. Egy egyenletesen változó körmozgást végző test eredő gyorsulása egy kiválasztott pillanatban $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és a gyorsulás iránya 60°-os szöget zár be az érintővel.



a) Szerkesszük meg a test érintőirányú és sugárirányú gyorsulását! Számítsuk ki értéküket!

b) Álló helyzetből indulva, milyen hosszú úton éri el a test a $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet?

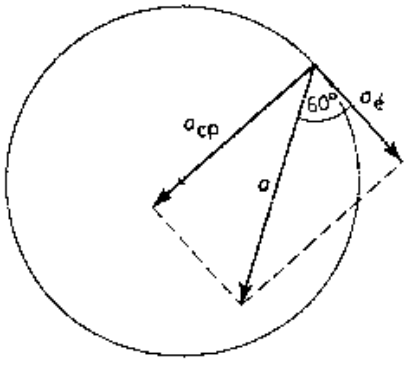
c) Mekkora a pálya sugara, ha a $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességnél a centripetális gyorsulás $4{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Megoldás:

5.58. $a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v_0 = 0$; $v_t = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{cp} = 4{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) $\underline{\underline{a_{cp} = a \cdot \sin 60^\circ = 4{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$ és $\underline{\underline{a_{\acute{e}} = a \cdot \cos 60^\circ = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

A gyorsulások szerkesztéséhez a paralelogramma-módszert alkalmazzuk.



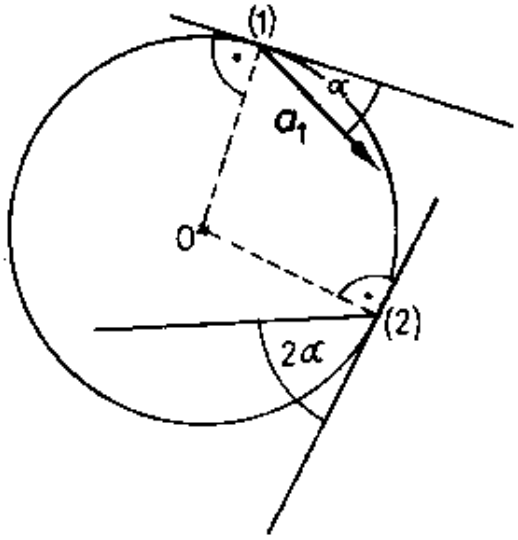
b) $\underline{s} = \frac{v_t^2}{2a_{\acute{e}}} = \underline{\underline{45\ \text{m}}}$.

c) $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, innen $\underline{r} = \frac{v^2}{a_{cp}} = \underline{\underline{52{,}94\ \text{m}}}$.

5.59. Egy pontszerű test egyenletesen változó körmozgásának két fázisát választottuk ki.

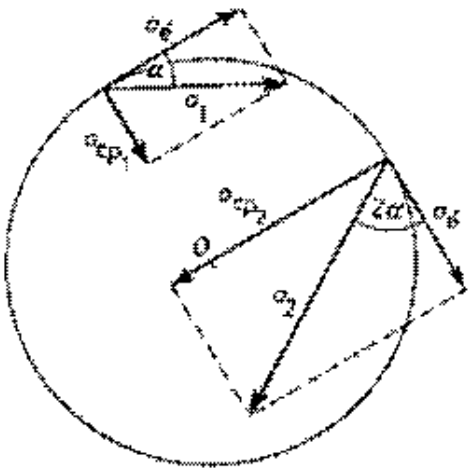
a) Szerkesszük meg az a_2-t! ($\alpha = 30°$)

b) Határozzuk meg az eredő gyorsulások arányát!



Megoldás:

5.59. Az 5.58. alapján megszerkesztjük az a_1 érintőirányú összetevőjét. Ez állandó nagyságú, ezért a (2) fázisban felvéve, már szerkeszthető a paralelogramma, amelynek átlója adja az a_2 eredő gyorsulást nagyság és irány szerint.



Az eredő gyorsulások: $a_1 = \dfrac{a}{\cos 30°} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

és $a_2 = \dfrac{a_é}{\cos 60°} = 2a_é$, ezek alapján $a_1 : a_2 =$

$= \underline{\underline{1 : \sqrt{3}}}$.

5.60. A 60 cm hosszú fonálra 1,5 kg tömegű testet erősítünk, majd $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ érintőirányú gyorsulással vízszintes síkban körmozgásra késztetjük. A fonál 1620 N-ig terhelhető.

a) Mekkora fordulatszámnál szakad el a fonál?
b) Mekkora a szöggyorsulás?
c) Mekkora és milyen irányú a test legnagyobb gyorsulása?

Megoldás:

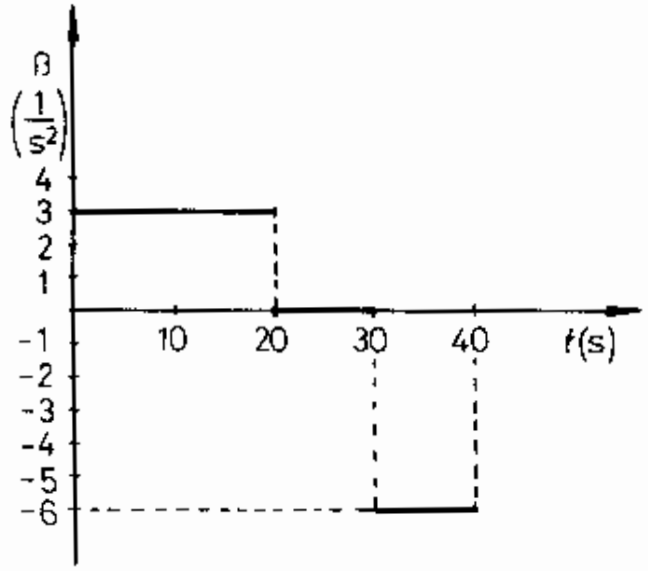
5.60. $l = r = 0{,}6$ m; $m = 1{,}5$ kg; $a_é = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $F_{\text{kmax}} = 1620$ N.

a) A körmozgást a fonálban ébredő erő biztosítja, ezért $F_{\text{kmax}} = F_{\text{cpmax}} = m \cdot (2\pi f_{\text{max}})^2 \cdot r$, innen $\underline{\underline{f_{\text{max}} = 6{,}75\ \frac{1}{\text{s}}}}$. Ennél nagyobb fordulatszámnál elszakad a fonal.

b) $\underline{\underline{\beta = \frac{a}{r} = 5\ \frac{1}{\text{s}^2}}}$.

c) A legnagyobb gyorsulás az f_{max}-hoz tartozik: $a_{\text{cp}} = \frac{F_{\text{cpmax}}}{m} = 1080\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a = \sqrt{a_{\text{cp}}^2 + a_é^2} \sim 1080\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Az $a_é$ nagyon kicsi az a_{cp}-hez képest, ezért $a \sim a_{\text{cp}}$. Az a irányát az 5.58. feladat ábrája alapján az érintővel bezárt szögével adjuk meg: $\text{tg}\,\varepsilon = \frac{a_{\text{cp}}}{a_é} = 360$, az $\underline{\underline{\varepsilon \sim 89°50'}}$.

5.61. Az ábrán egy körpályán haladó test mozgásának szöggyorsulás–idő grafikonját készítettük el.



a) Elemezzük a test mozgását! Készítsük el a szögsebesség–idő grafikont feltéve, hogy kezdetben a test nyugalomban volt!

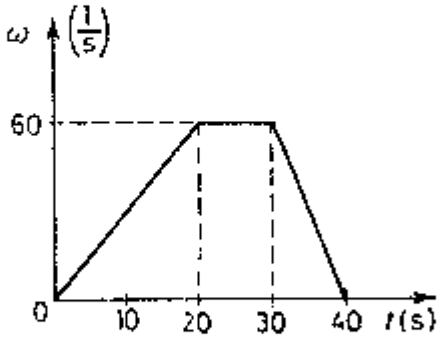
b) Számítsuk ki a 40 s alatti szögelfordulást!

c) Mennyi a test átlagos szögsebessége?

Megoldás:

5.61. $\omega_0 = 0$; $t = 40$ s.

a) A test mozgása három szakaszból áll: 0 s és 20 s ($t_1 = 20$ s) között egyenletesen változó körmozgást végez $\beta_1 = 3\ \frac{1}{s^2}$ állandó szöggyorsulással; 20 s és 30 s között ($t_2 = 10$ s) a $\beta = 0$, az előzőleg elért szögsebességgel ($\omega_1 = \omega_2$) egyenletesen mozog; 30 s és 40 s ($t_3 = 10$ s) között ismét egyenletesen változó körmozgást végez, $\beta = -6\ \frac{1}{s^2}$, tehát szögsebessége csökken.

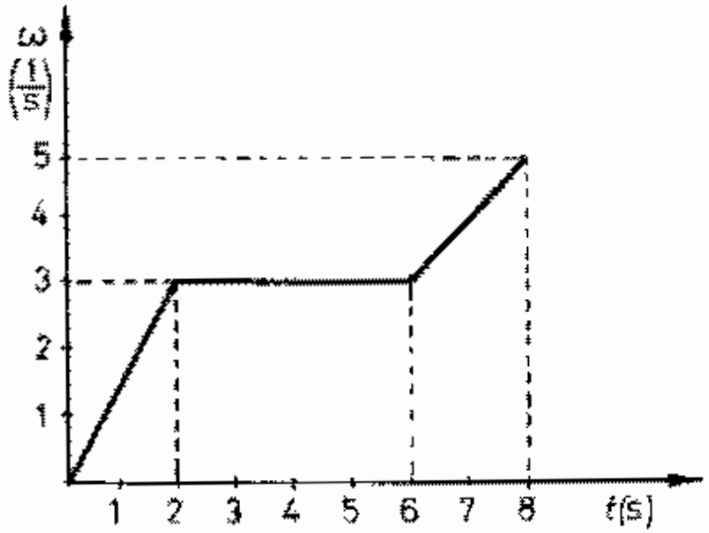


$\omega_1 = \beta_1 \cdot t = 60\ \frac{1}{s}$, $\omega_3 = \omega_2 + \beta_3 \cdot t = 0$ adódik, ez azt jelenti, hogy 40 s múlva megáll a test.

b) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, ahol $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2} t_1^2 = 600$ rad, $\alpha_2 = \omega_2 \cdot t_2 = 600$ rad, $\alpha_3 = \omega_2 \cdot t_3 = \frac{\beta_3}{2} t_3^2 = 300$ rad. A test α szögelfordulása ezek összege 1500 radián.

c) $\omega_{\text{átlag}} = \frac{\alpha}{t} = 37{,}5\ \frac{1}{s}$.

5.62. Az ábrán egy test mozgásának szögsebesség- idő grafikonját látjuk.



a) Ábrázoljuk a test szöggyorsulását az idő függvényében!

b) Határozzuk meg a test átlagos szögsebességét!

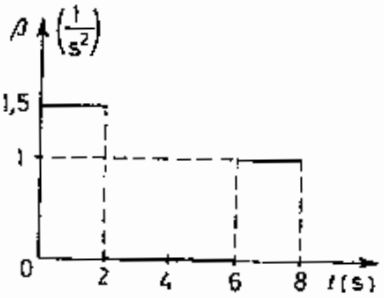
Megoldás:

5.62. 1. szakasz: $\Delta t_1 = 2$ s; $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = 3\ \frac{1}{s}$, ezekből

a) $\beta_1 = \frac{\omega_1}{\Delta t_1} = 1{,}5\ \frac{1}{s^2}$, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2} \cdot (\Delta t_1)^2 = 3$ rad.

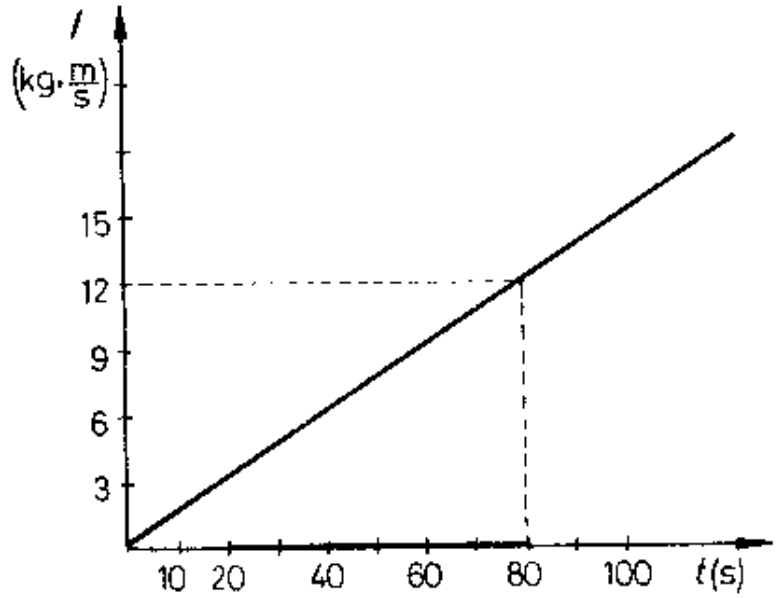
2. szakasz: $\Delta t_2 = 4$ s; $\omega_2 = 3\ \frac{1}{s}$ állandó; ($\omega_1 = \omega_2$), ekkor $\beta = 0$, és $\alpha_2 = \omega_2 \cdot \Delta t_2 = 12$ rad.

3. szakasz: $\Delta t_3 = 2$ s; $\omega_0 = 3\ \frac{1}{s}$; $\omega_3 = 5\ \frac{1}{s}$, ekkor $\beta = \frac{\omega_3 - \omega_0}{\Delta t_3} = 1\ \frac{1}{s^2}$, és $\alpha_3 = \frac{\omega_0 + \omega_3}{2} \cdot \Delta t_3 = 8$ rad.



b) $\underline{\underline{\omega = \frac{\sum \alpha}{\sum t} = 2{,}875\ \frac{1}{s}}}$.

5.63. Az ábrán egy körmozgást végző test lendület–idő grafikonját készítettük el. A test tömege 0,75 kg, a körpálya sugara 2 m.



a) Mekkora a test érintőirányú gyorsulása?

b) Mekkora és milyen irányú a test gyorsulása a 20.s végén?

c) Határozzuk meg a test pillanatnyi sebességét az indulást követő 40 s múlva!

Megoldás:

5.63. $r = 2$ m; $m = 0{,}75$ kg; $I_0 = 0$; $t = 80$ s; $I_t = 12 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_1 = 20$ s; $t_2 = 40$ s.

A test egyenletesen változó körmozgást végez ($I \sim t$).

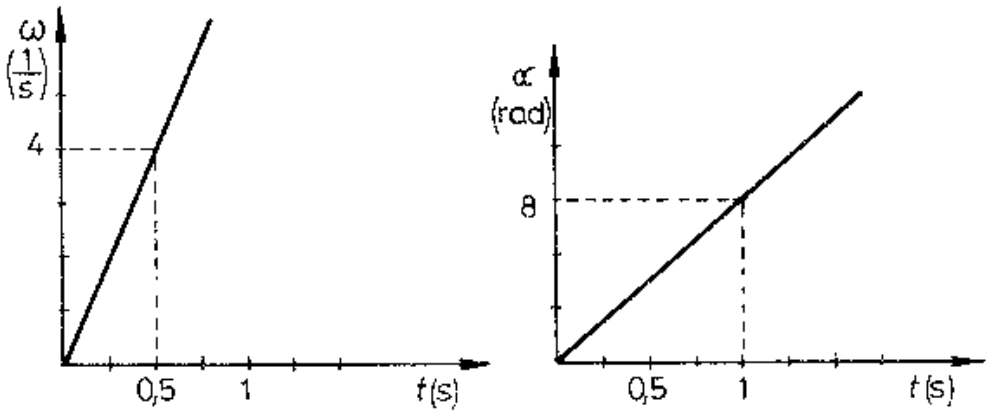
a) $I_t = m \cdot v_t \Rightarrow v_t = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, mivel $v_0 = 0$ az $\underline{\underline{a_é = \frac{v_t}{t} = 0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

b) $a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_é^2}$, ahol $a_{cp} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{(a_é \cdot t_1)^2}{r} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, az $a_é = 0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} =$ = állandó. Ezek helyettesítésével $\underline{\underline{a = 8{,}0025 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

Legyen az eredő gyorsulás érintővel bezárt szöge ε, ekkor $\text{tg}\,\varepsilon = \frac{a_{cp}}{a_é} =$ $= 40$, innen $\varepsilon = 88°34'$.

c) $\underline{\underline{v_{t2} = a_é \cdot t_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

5.64. Egy gépkocsi, álló helyzetből indulva 2,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ állandó gyorsulással éri el a 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet.



a) Mekkora a 30 cm sugarú kerék szöggyorsulása?

b) Mekkora a kerék egy szélső pontjának centripetális gyorsulása? Vonatkozhat-e az előbbi két grafikon a kiválasztott pont mozgására?

Megoldás:

5.64. $v_0 = 0$; $a = 2{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v_t = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r = 0{,}3$ m.

a) Feltételezzük, hogy a kerék tisztán gördül, ekkor $a = a_é = 2{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mivel $a_é = \beta \cdot r$, ebből $\underline{\underline{\beta = 8\ \frac{1}{\text{s}^2}}}$.

b) Az $a_{cpmax} = \frac{v^2}{r} = \underline{\underline{1333{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

A mozgás egyenletesen változó, ezért $\alpha \sim t^2$, szemben a grafikonnal, amelyen $\alpha \sim t$.

Az ω–t grafikonon a mozgásnak megfelelően $\omega \sim t$, és a kiválasztott értékekkel $\beta = 8\ \frac{1}{\text{s}^2}$, mint amennyi a kerék szöggyorsulása, tehát ez a grafikon vonatkozhat a pont mozgására.

5.65. Egy 12 cm sugarú köszörűkő 4 s alatt éri el a 2400 $\frac{1}{\text{perc}}$ fordulatszámot.

a) Számítsuk ki az elért fordulatszámnál a pillanatnyi szögsebességet!

b) Egyenletes változást feltételezve, ábrázoljuk a szögsebességet az idő függvényében! Határozzuk meg a grafikon segítségével a köszörűkő szöggyorsulását!

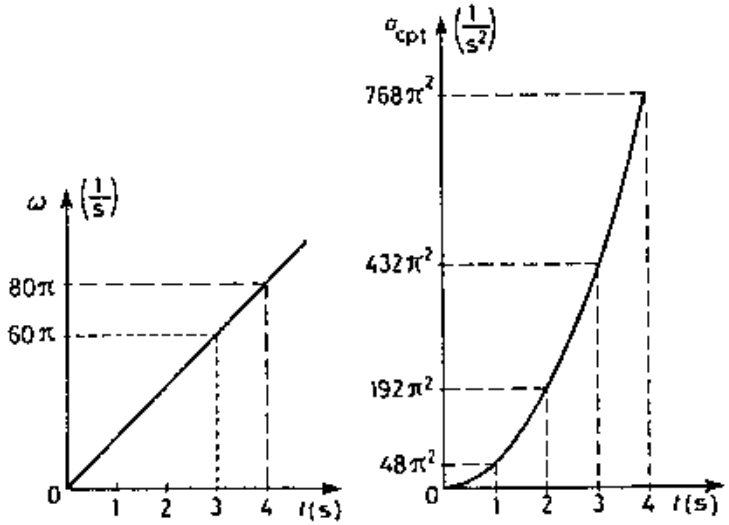
c) Készítsük el a kő peremén lévő pontra a sugárirányú gyorsulás–idő grafikont!

Megoldás:

5.65. $r = 0{,}12$ m; $t = 4$ s; $f_t = 40\ \frac{1}{\text{s}}$.

a) $\underline{\underline{\omega_t = 2\pi \cdot f_t = 80\ \frac{1}{\text{s}}}}$ az elért szögsebesség.

b) Feltételezzük, hogy $\omega_0 = 0$, ekkor a grafikon az $\omega_t = \beta \cdot t$ összefüggésnek megfelelően egyenes. Az egyenes meredeksége $\underline{\underline{\beta = 20\pi\ \frac{1}{\text{s}^2}}}$.

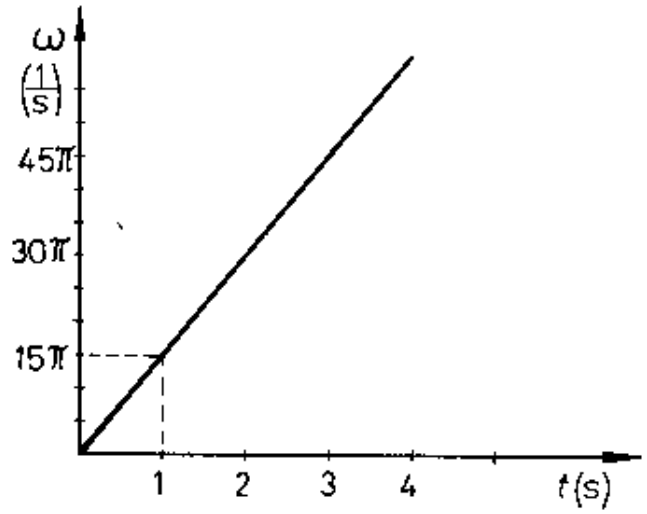


d) Mivel $a_{cpt} = \omega_t^2 \cdot r = (\beta t)^2 \cdot r = \beta^2 \cdot r \cdot t^2$, ahol β és r állandó értékek, az a_{cpt} az idő másodfokú függvénye. Ennek néhány pontja:

$t_1 = 1$ s, $a_{cp1} = 48\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $t_2 = 2$ s, $a_{cp2} = 192\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$t_3 = 3$ s, $a_{cp3} = 432\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $t_4 = 4$ s, $a_{cp4} = 768\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

5.66. Az ábrán egy pontszerű test szögsebesség–idő grafikonját készítettük el.



a) Határozzuk meg a test szöggyorsulását!

b) Jelöljük be a grafikonon azt a területet, melynek mérőszáma megadja a test indulásától számított 3 s alatti szögelfordulását!

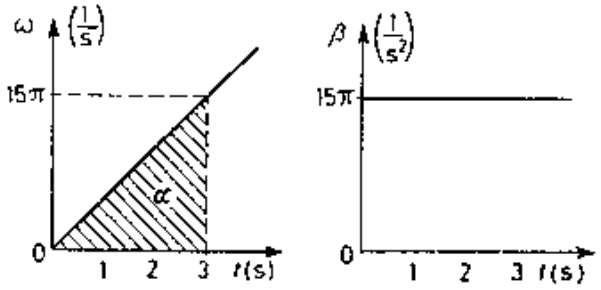
c) Készítsük el a test mozgásának szöggyorsulás–idő és szögelfordulás–idő grafikonját!

Megoldás:

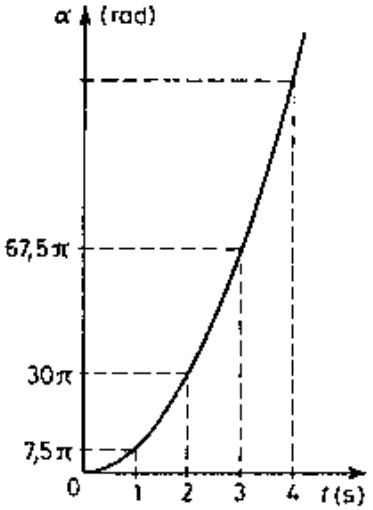
5.66. $\omega_0 = 0$; $t = 1$ s; $\omega_t = 15\pi \ \frac{1}{s}$.

a) $\beta = \frac{\omega_t}{t} = \underline{\underline{15\pi \ \frac{1}{s^2}}}$.

b)



c) β állandó, $\alpha \sim t^2$, ennek néhány pontja $t_1 = 1$ s, $\alpha_1 = 7{,}5\pi$ rad; $t_2 = 2$ s; $\alpha_2 = 30\pi$ rad; $t_3 = 3$ s, $\alpha_3 = 67{,}5\pi$ rad.



5.67. Egy test, álló helyzetből indulva egyenletesen gyorsuló körmozgást végez. Az indulástól számított 10 s múlva $50\ \frac{1}{s}$ fordulatszámot ért el a 80 cm sugarú körpályán.

a) Mekkora a test 10 s alatt elért szögsebessége és legnagyobb kerületi sebessége?

b) Mekkora volt a test fordulatszáma az indulástól számított 4 s elteltével?

c) Mekkora szöggyorsulással érte el a test az $50\ \frac{1}{s}$ fordulatszámot?

Megoldás:

5.67. $v_0 = 0;\ \ t = 10\ \text{s};\ \ f_{max} = 50\ \frac{1}{s};\ \ r = 0{,}8\ \text{m}.$

a) $\omega_{max} = 2\pi \cdot f_{max} = 314\ \frac{1}{s}$ és $\underline{v_{max} = \omega_{max} \cdot r = 251{,}2\ \frac{m}{s}}$.

b) Mivel $\omega_t = 2\pi \cdot f_t = \beta t$, ezért $f_t \sim t$, tehát $f_{4s} = \frac{4}{10} \cdot f_{max} = \underline{20\ \frac{1}{s}}$ volt a test fordulatszáma.

c) $\beta = \frac{\omega_{max}}{t} = \underline{31{,}4\ \frac{1}{s^2}}$.

5.68. Álló helyzetből, körpályán induló test 12 s alatt éri el a $60\ \frac{1}{s}$ szögsebességet. Szöggyorsulása állandó.

a) Mekkora a test szöggyorsulása?

b) Mekkora pályamenti sebességre tesz szert a test 30 cm sugarú pályán 12 s alatt?

c) Mozgását a $60\ \frac{1}{s}$ állandó szögsebességgel folytatva, mekkora szöggel fordul el az indulástól számított 20 s alatt?

Megoldás:

5.68. $v_0 = 0$; $t = 12$ s; $\omega_t = 60\ \frac{1}{s^2}$; $r = 0{,}3$ m.

a) $\beta = \frac{\omega_t}{t} = \underline{\underline{5\ \frac{1}{s^2}}}$.

b) $v_t = \omega_t \cdot r = \underline{\underline{18\ \frac{m}{s}}}$.

c) A test ekkor 12 s-ig egyenletesen változó, majd $t' = 20\text{ s} - 12\text{ s} = 8$ s-ig egyenletes körmozgást végez.

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta}{2} t_1^2 + \omega_{max} \cdot t = 360\text{ rad} + 480\text{ rad} = \underline{\underline{840\text{ rad}}}$ az együttes szögelfordulás.

5.69. Egy motorkerékpáros $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad.

a) A piros forgalomirányító lámpától mekkora távolságban kezdjen fékezni, ha a biztonságos, csúszásmentes lassulása $2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

b) Mekkora a 64 cm átmérőjű kerekek szöggyorsulása?

c) Hány fordulatot tesz meg a kerék a fékezés megkezdésétől a megállásig?

Megoldás:

5.69. $v_0 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a = -2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $r = 0{,}32$ m; $v_t = 0$.

a) A $v_t = v_0 + a \cdot t$, innen $t = \frac{v_t - v_0}{a} = 8$ s, és $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 80$ m. Ezért a lámpa előtt 80 m-rel kezdjen fékezni, a megállásig 8 s telik el.

b) A kerekek csúszásmentes gördülése azt jelenti, hogy a jármű sebessége és lassulása megegyezik a kerekek talajjal érintkező pontjának kerületi sebességével illetve érintő irányú lassulásával. Emiatt $a = \beta \cdot r$, innen $\beta = \frac{a}{r} = -7{,}8\ \frac{1}{\text{s}^2}$.

c) A jármű és vele a kerék kerületi pontja 80 m-t tesznek meg. A fordulatok száma annyi, ahányszor erre a kerék kerülete „ráfér". $K = 2r\pi \approx 2$ m, így a kerék közel 40-et fordul megállásig.

5.70. Egy 0,5 m sugarú körpályán egyenletesen változó körmozgást végző test, az indulástól számított 0,2 s alatt éri el az $5\ \frac{1}{s}$ szögsebességet. A test tömege 0,4 kg.

a) Határozzuk meg a testre ható eredő erőt a gyorsítás utolsó pillanatában!

b) Mekkora szöget zár be ekkor az eredő erő a pálya érintőjével?

Megoldás:

5.70. $r = 0{,}5$ m; $t = 0{,}2$ s; $\omega_t = 5\ \frac{1}{s}$; $m = 0{,}4$ kg.

a) Feltételezzük, hogy $v_0 = 0$. Az eredő gyorsulás $a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_é^2} = 17{,}68\ \frac{m}{s^2}$, mert $a_{cp} = \omega_t^2 \cdot r = 12{,}5\ \frac{m}{s^2}$ és $a_é = \beta \cdot r = \frac{\omega_t}{t} \cdot r = 12{,}5\ \frac{m}{s^2}$. A testre ható eredő erő $F = m \cdot a = \underline{\underline{7{,}1\ \text{N}}}$.

b) Mivel $a_{cp} = a_é$, az eredő gyorsulás $\underline{\underline{45°\text{-ot}}}$ zár be az érintővel.

5.71. 2 m sugarú körpályán $40\ \frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással indul egy test.

a) Mennyi idő múlva lesz a centripetális gyorsulás tízszer akkora, mint az érintőirányú gyorsulása?

b) Mekkora ebben a pillanatban a test eredő gyorsulása és mekkora szöget zár be az érintőirányú gyorsulással?

Megoldás:

5.71. $r = 2$ m; $\beta = 40\ \frac{1}{s^2}$; $v_0 = 0$; $a_{cp} = 10a_é$.

a) Az $a_{cp} = 10a_é$, azaz $\omega^2 r = 10\beta \cdot r$, $(\beta t)^2 = 10\beta$ innen $t = \sqrt{\frac{10}{\beta}} =$

$= \underline{0{,}5 \text{ s}}$.

b) $a_é = \beta r = 80\ \frac{m}{s^2}$ és $a_{cp} = 10a_é = 800\ \frac{m}{s^2}$, ekkor $a = 804\ \frac{m}{s^2}$ (lásd 5.70.). Az iránya 5.63. *b)* alapján $\operatorname{tg}\varepsilon = 10$, ekkor $\underline{\varepsilon = 84°18'}$.

5.72. Egy 2 kg tömegű test 1 m sugarú körpályán, álló helyzetből indulva $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással éri el a $60\ \frac{1}{\text{s}}$ fordulatszámot.

a) Mekkora a test szöggyorsulása?

b) Mennyi idő telt el a $60\ \frac{1}{\text{s}}$ fordulatszám eléréséig?

c) Mekkora a test tehetetlenségi nyomatéka a $60\ \frac{1}{\text{s}}$ fordulatszámnál a pálya középpontján átmenő, a pálya síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan?

d) Mekkora forgatónyomaték hozta létre a test szöggyorsulását?

Megoldás:

5.72. $m = 2$ kg; $r = 1$ m; $v_0 = 0$; $a_\text{é} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $f_t = 60\ \frac{1}{\text{s}}$.

a) $\underline{\underline{\beta = \frac{a_\text{é}}{r} = 3\ \frac{1}{\text{s}^2}}}$.

b) $\omega_t = 2\pi \cdot f_t = 377\ \frac{1}{\text{s}}$; másrészt $\omega_t = \beta \cdot t$, innen $\underline{\underline{t = 125{,}6\ \text{s}}}$.

c) $\underline{\underline{\Theta = m \cdot r^2 = 2\ \text{kgm}^2}}$.

d) $M = F_\text{é} \cdot r = m \cdot a_\text{é} \cdot r = 6$ Nm vagy $\underline{\underline{M = \Theta \cdot \beta = 6\ \text{Nm}}}$.

5.73. Körpályán mozgó, 0,1 kg tömegű test nyugalmi helyzetből 2 s alatt $12\ \frac{1}{\text{s}}$ fordulatszámra gyorsul fel.

a) Mekkora a test legnagyobb szögsebessége?
b) Mekkora szöggyorsulással indul a test?

c) Mekkora érintőirányú erő gyorsítja a testet a 30 cm sugarú pályán?
d) Mekkora perdület jellemzi a test mozgásállapotát a gyorsítás végén?
e) Mennyivel változik a test kinetikus energiája a 2 s alatt?

Megoldás:

5.73. $\omega_0 = 0$; $m = 0{,}1$ kg; $\Delta t = t = 2$ s; $f_t = 12\ \frac{1}{\text{s}}$

a) $\underline{\omega_{max} = 2\pi \cdot f_t = 24\pi\ \frac{1}{\text{s}}}$.

b) $\underline{\beta = \frac{\omega_{max}}{t} = 12\pi\ \frac{1}{\text{s}^2}}$.

c) $r = 0{,}3$ m; $\underline{F_é = ma_é = m\beta \cdot r = 1{,}13\ \text{N}}$.

d) $N = \Theta \cdot \omega_{max}$, ahol $\Theta = m \cdot r^2 = 0{,}009\ \text{kgm}^2$, ezért $\underline{N_{max} = 0{,}678\ \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$.

e) $\Delta E = E_{max} - 0 = E_{max} = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2$, ahol $v_{max} = r \cdot \omega_{max} = 22{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ezért $\underline{\Delta E = 22{,}54\ \text{J}}$.

5.74. A 64 cm sugarú körpályán $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ érintőirányú sebességgel mozgó testre ható erők eredője 50 N, melynek iránya a pálya érintőjével 44° 30′-es szöget zár be.

a) Mekkora az eredő erő sugárirányú és érintőirányú komponense?

b) Mekkora érintőirányú gyorsulással és – nyugalomból indulva – mennyi idő alatt érte el a test a $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet?

(Tételezzünk fel egyenletesen változó mozgást!)

Megoldás:

5.74. $r = 0{,}64$ m; $F_{\text{eredő}} = F_t = 50$ N; $v_t = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\varepsilon = 44°30'$.

a) $F_{cp} = F_t \cdot \sin\varepsilon = \underline{35{,}05\ \text{N}}$ a sugárirányú komponens, $F_é = F_t \cdot \cos\varepsilon = \underline{35{,}66\ \text{N}}$ az érintőirányú komponens.

b) $F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$, innen $m = 1{,}4$ kg, és $F_é = ma_é$, innen $\underline{a_é = 25{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$, $v_0 = 0$ feltétellel $v_t = a_é t$, amiből $t = 0{,}157$ s (lásd 5.58.).

5.75. Egy belül üres, 17 cm sugarú gömbben 2 g tömegű golyó van, a gömb függőleges helyzetű főkörén elhelyezett vályúban. A gömböt állandó szöggyorsulással forgásba hozzuk a középpontján átmenő, függőleges tengely körül.

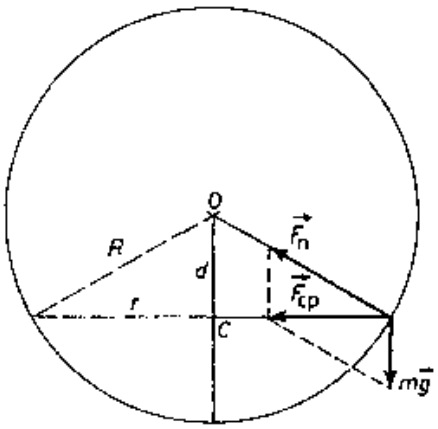
a) Hogyan függ a golyó gömbbeli helyzete a fordulatszámtól?

b) Mekkora szögsebességnél lesz a golyó mozgási síkja 8 cm-re a gömb középpontjától?

c) Mekkora erőt fejt ki a gömb fala ebben a helyzetben a golyóra?

Megoldás:

5.75. $m = 0{,}002$ kg; $R = 0{,}17$ m; $\beta =$ állandó.



A golyóra a gömb fala sugárirányú kényszererőt fejt ki. A centripetális erőt ez és a golyóra ható nehézségi erő eredője adja.

a) Az ábrát felhasználva és az 5.25. feladat gondolatmenetét követve $d = \dfrac{g}{(2\pi)^2 f^2}$ adja a körpálya síkjának a gömb középpontjától mért távolságát. Mivel $d \sim \dfrac{1}{f^2}$, a körpálya nem lehet a gömb főköre.

b) Ha $d = 0{,}08$ m, akkor $d = \dfrac{g}{\omega^2} \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{d}} \approx 11{,}2 \dfrac{1}{\text{s}}}}$.

c) $F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 3{,}75 \cdot 10^{-2}$ N, $m \cdot g = 2 \cdot 10^{-2}$ N és $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 0{,}15$ m értékek felhasználásával $\underline{\underline{F_n}} = \sqrt{F_{cp}^2 + (m \cdot g)^2} = \underline{\underline{4{,}24 \cdot 10^{-2} \text{ N}}}$.

5.76. Egy 40 cm sugarú körpályán mozgó test szögsebessége $15\,\frac{1}{s}$-ról $25\,\frac{1}{s}$-ra nőtt, eközben a perdülete $4{,}8\ \text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{s}$-mal változott.

a) Mekkora a test tömege?

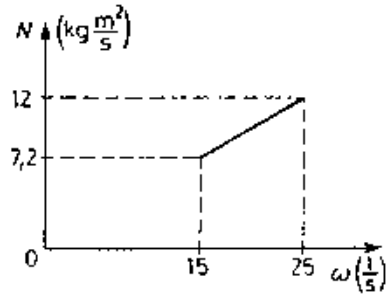
b) Ábrázoljuk a test perdületét a szögsebesség függvényében a megadott szögsebességhatárok között!

Megoldás:

5.76. $r = 0{,}4$ m; $\omega_1 = 15\,\frac{1}{s}$; $\omega_2 = 25\,\frac{1}{s}$; $\Delta N = 4{,}8\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{s}$.

a) $\Delta N = \Theta \cdot \Delta\omega$; $\Theta = m \cdot r^2$ és helyettesítés és rendezés után $\underline{\underline{m}} = \dfrac{\Delta N}{r^2 \Delta\omega} = \underline{\underline{3\ \text{kg}}}$.

b) $\Theta = m \cdot r^2 = 0{,}48\ \text{kgm}^2$; $N_1 = \Theta \cdot \omega_1 = 7{,}2\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{s}$; $N_2 = N_1 + \Delta N = 12\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{s}$.



A perdület a szögsebesség lineáris függvénye, mert $N = \Theta \cdot \omega$ és Θ állandó.

5.77. Két test azonos sugarú körpályán mozog. Az „A" test mozgása egyenletes, a „B" testé egyenletesen változó. Az időt akkor kezdjük mérni, amikor a „B" indul.

a) Mennyi idő múlva egyezik meg a szögelfordulásuk, ha az „A" test szögsebessége $4\,\frac{1}{s}$, a „B" test szöggyorsulása $2\,\frac{1}{s^2}$?

b) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két test szögsebességét az idő függvényében! A két grafikon metszi egymást. Miről tájékoztat a metszéspont abszcisszája?

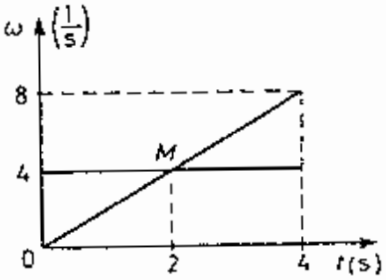
Megoldás:

5.77. Az A testre: $\omega_A = 4\,\frac{1}{s}$, a B testre: $\omega_0 = 0$; $\beta = 2\,\frac{1}{s}$.

a) A feltétel szerint $\alpha_A = \alpha_B$, a mozgásokra igaz összefüggésekkel $\omega_A t = \frac{1}{2}\beta t^2$, t-vel egyszerűsítve és rendezve $\underline{\underline{t = 4\ s}}$.

b) Az A testre ω_A = állandó, B testre $\beta \cdot t = 8\,\frac{1}{s}$ és $\omega \sim t$.

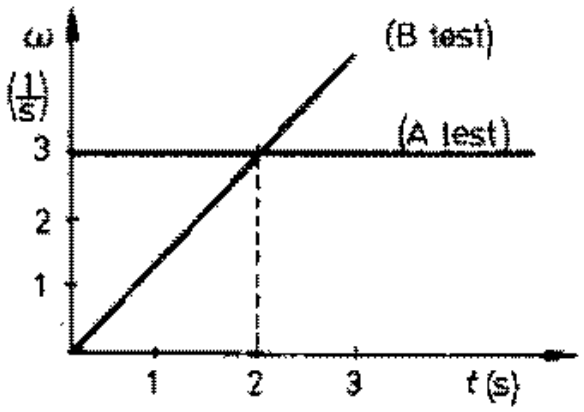
A metszésponthoz 2 s tartozik, ekkor lesz a két test szögsebessége egyenlő.



5.78. Az ábra két, körpályán mozgó test szögsebesség–idő grafikonját mutatja be.

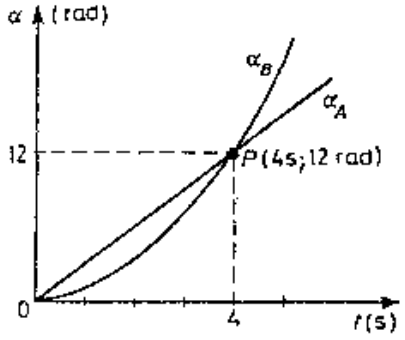
a) Készítsük el a két mozgás szögelfordulás–idő grafikonját ugyanabban a koordinátarendszerben!

b) Határozzuk meg a grafikon alapján, mikor lesz a két test szögelfordulása azonos!



Megoldás:

5.78. Az A testre: $\omega_A = 3\ \frac{1}{s}$ állandó, a B testre $\omega_0 = 0$, $t = 2$ s; $\omega_B = 3\ \frac{1}{s}$ $\Rightarrow \beta = \frac{3}{2}\ \frac{1}{s^2}$.



a) Az A test egyenletes mozgást végez, $\alpha_A = \omega_A t = 3t$ elsőfokú függvény, a képe egyenes, a B test mozgása egyenletesen változó: $\alpha_B = \frac{1}{2}\beta t^2$ másodfokú függvény, a képe parabolaív.

b) A metszéspont abszcisszája $t =$ $= 4$ s, ekkor a testek szögelfordulása 12 rad.

5.79. Az „A" test 50 cm sugarú körpályán állandó nagyságú kerületi sebességgel halad, szögsebessége $3\ \frac{1}{s}$. A „B" test pedig 40 cm sugarú körpályán, egyenletesen változó körmozgást végez, $1{,}5\ \frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással, álló helyzetből indulva.

a) Készítsük el közös koordináta-rendszerben a mozgások kerületi sebesség–idő, valamint út–idő grafikonjait!

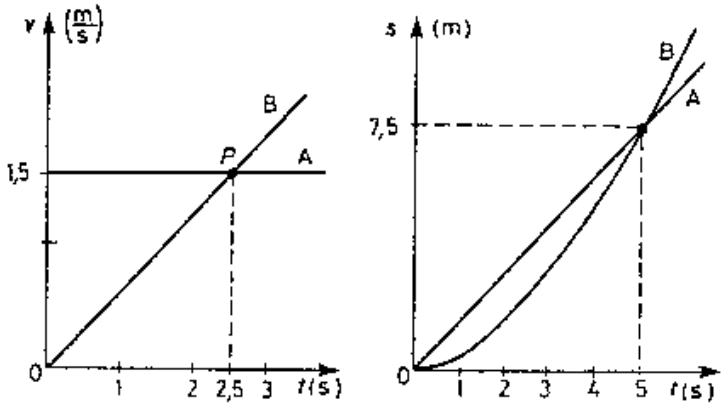
b) Olvassuk le a grafikonokról és ellenőrizzük számítással, mikor lesz a két test kerületi sebessége azonos?

c) A B test indulásától számítva mennyi idő múlva lesznek azonosak a testek által befutott ívhosszak?

Megoldás:

5.79. $r_A = 0{,}5$ m; $\omega_A = 3\ \frac{1}{s}$ állandó; $r_B = 0{,}4$ m; $\omega_0 = 0$; $\beta = 1{,}5\ \frac{1}{s^2}$.

a) Pontok a v–t és s–t grafikonhoz: Az A testre: $v_A = \omega_A \cdot r_A = 1{,}5\ \frac{m}{s}$ állandó, és $s_A = v_A \cdot t$, $t = 2$ s esetén $s_A = 3$ m. A B testre $v_B = \omega_B \cdot r_B = \beta \cdot r_B \cdot t = 0{,}6$ t, $s_B = \frac{1}{2} a_\varepsilon \cdot t^2 = \frac{1}{2} \beta \cdot r_B \cdot t^2 = 0{,}3 \cdot t^2$. A $t = 2$ s-hoz $v_B = 1{,}2\ \frac{m}{s}$ és $s_B = 1{,}2$ m tartozik. Feltételezzük, hogy a kezdeti szögelfordulás nulla.



b) A metszésponthoz tartozó értékek $t = 2{,}5$ s; $v = 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v_A = v_B$ esetén $1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$, innen $t = 2{,}5$ s-ot kapunk a grafikonnal egyezően.

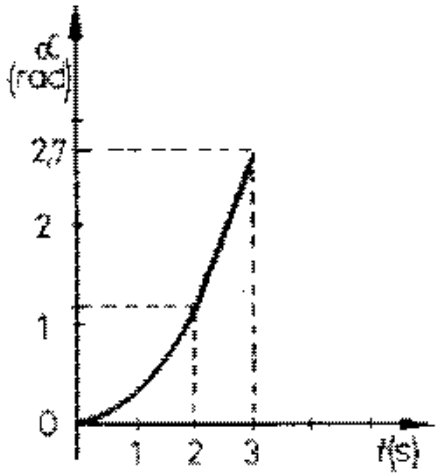
c) Az $s_A = s_B$, ekkor $1{,}5t = 0{,}3t^2$. Ez $t = 5$ s-ra teljesül. ($t = 0$ nem megoldása a feladatnak). Ehhez $\underline{\underline{s = 7{,}5 \text{ m}}}$ ívhossz tartozik.

5.80. Az ábrán egy 5 kg tömegű test körmozgásának szögelfordulás–idő grafikonját készítettük el. A pálya sugara 0,4 m.

a) Milyen mozgást végez a test a 0–3 s közötti időintervallumban?

b) Készítsük el a mozgás szögsebesség–idő és szöggyorsulás–idő grafikonját!

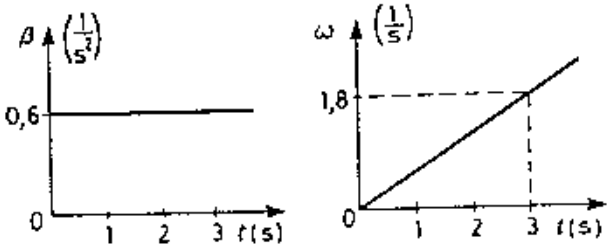
c) Határozzuk meg a testre ható érintő irányú erőt!



Megoldás:

5.80. $r = 0{,}4$ m; $m = 5$ kg.

a) A grafikon szerint $\alpha \sim t^2$, ekkor a test egyenletesen változó mozgást végez, $t = 3$ s esetén $\alpha = 2{,}7$ rad, ekkor $\beta = 0{,}6\ \frac{1}{s^2}$.



b) Az $\omega_0 = 0$ feltétellel $\omega_t = \beta \cdot t = 1{,}8\ \frac{1}{s}$ $(t = 3$ s).

c) $F_é = m \cdot a_é = m \cdot r \cdot \beta = \underline{\underline{1{,}2\ \text{N}}}$.

5.81. Egy test kinetikus energiája, a 0,5 m sugarú körpálya harmadrészén a kezdetben meglévő mozgási energiájának négyszeresére nőtt.

a) Hogyan változott a test pályamenti sebessége?

b) Milyen hosszú ív befutása után lesz a kinetikus energia az indulási érték tízszerese?

Megoldás:

5.81. $r = 0{,}5$ m; E_1; $s_1 = \frac{2r\pi}{3}$; $E_2 = 4E_1$; $E_3 = 10E_1$.

a) Mivel $E_2 = 4E_1$, ezért $v_2^2 = 4v_1^2$, azaz $\frac{v_2}{v_1} = 2$, tehát a test sebessége kétszeres lett.

b) A munkatétel szerint $\Delta E_m = W = F_é s_1 \rightarrow$

(1) $F_é = \frac{E_2 - E_1}{s_1} = \frac{3E_1}{s_1}$,

majd $F_é$-t állandónak feltételezve: $\Delta E'_m = F_é \cdot s_1$. Ebből

(2) $F_é = \frac{E_3 - E_1}{s_2} = \frac{9E_1}{s_2}$.

(1) és (2) összevetéséből $s_2 = 3s_1 = 3\,\frac{2r\pi}{3} = 2r \cdot \pi$, ezért a test mozgási energiája 3,14 m-es úton változott meg.

5.82. Egy 0,8 kg tömegű test kerületi sebessége $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról egyenletesen nő.

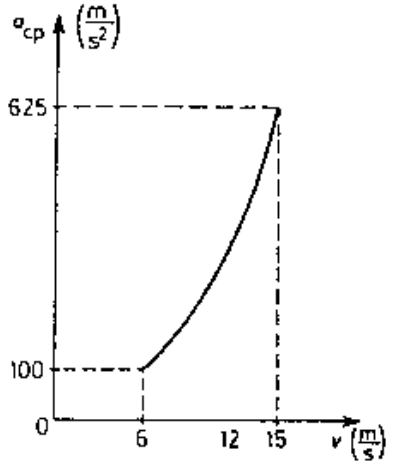
a) Mekkora lesz a pillanatnyi sebessége a gyorsítás végén, ha az érintőirányú erő munkája 75,6 J?

b) Mekkora a test centripetális gyorsulásának változása? A körpálya sugara 36 cm.

c) Készítsük el az a_{cp}–v grafikont!

Megoldás:

5.82. $m = 0{,}8$ kg; $v_0 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r = 0{,}36$ m.



a) $W_é = 75{,}6$ J, ez a munka a mozgási energiát növelte. A munkatétel alapján $\Delta E = W_é$, $\frac{1}{2}m \cdot v_t^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = W_é$, innen $v_t = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $a_{cp0} = \frac{v_0^2}{r} = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $a_{cpt} = \frac{v_t^2}{r} = 625\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, tehát $\Delta a_{cp} = 525\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

c) Mivel $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, a centripetális gyorsulás a kerületi sebesség másodfokú függvénye, a képe parabolaív.

5.83. A 40 cm sugarú körpályán $3{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ érintő irányú gyorsulással indul egy 0,8 kg tömegű test.

a) Mekkora utat tesz meg a gyorsítás alatt, ha az érintő irányú erők munkája 432 J?

b) Hány fordulatot tesz meg a test a gyorsítás alatt?

Megoldás:

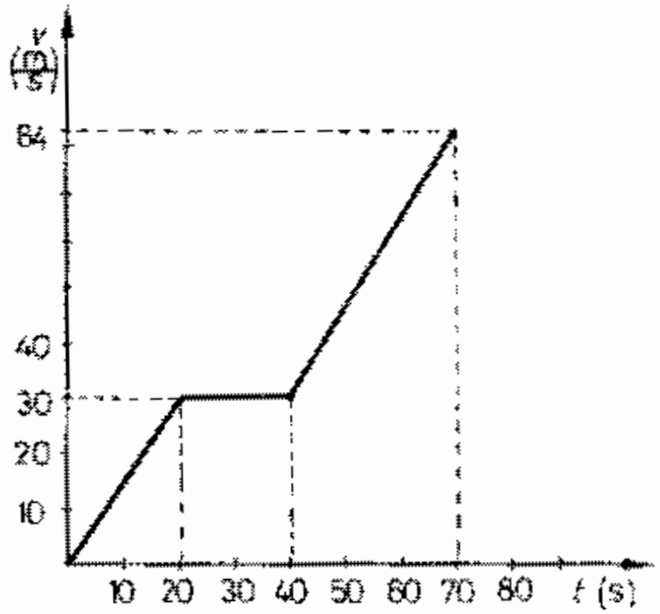
5.83. $r = 0{,}4$ m; $m = 0{,}8$ kg; $v_0 = 0$; $a = 3{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $W = 432$ J.

a) $W = m \cdot a_\epsilon \cdot s$, innen $\underline{\underline{s = 150 \text{ m}}}$.

b) $n = \frac{s}{2r\pi} \approx \underline{\underline{60 \text{ fordulat}}}$.

5.84. A grafikonon egy 2 m sugarú pályán körmozgást végző test kerületi sebességét ábrázoltuk az idő függvényében.

a) Mekkora a test legnagyobb centripetális gyorsulása?
b) Mekkora a test átlagsebessége?



Megoldás:

5.84. $r = 2$ m; $\Delta t_1 = 20$ s; $v_0 = 0$; $v_1 = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_2 = 40\text{ s} - 20\text{ s} = 20$ s; $v_2 = v_1 = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta t_3 = 70\text{ s} - 40\text{ s} = 30$ s; $v_3 = 84\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A centripetális gyorsulás legnagyobb értéke a legnagyobb kerületi sebességhez tartozik, $a_{\text{cpmax}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{r} = \underline{\underline{3528\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

b) $\overline{v} = \frac{\sum s}{\sum t}$, ahol $s_1 = \frac{v_1}{2}\Delta t_1 = 300$ m; $s_2 = v_2 \cdot \Delta t_2 = 600$ m; $s_3 = \frac{v_2 + v_3}{2}\Delta t_3 = 1710$ m, $\sum s = s_1 + s_2 + s_3$; $\sum t = 70$ s, helyettesítés után $\underline{\underline{\overline{v} = 37{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

5.85. Két, pontszerűnek tekinthető golyó 1 m sugarú körpályán mozog. Az 1,8 kg tömegű, 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű golyó utoléri az 1,2 kg tömegű, 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű golyót.

a) Mekkora sebességgel haladnak tovább, ha az 1,2 kg tömegű golyót a súrlódási erő 0,5 $\frac{\text{l}}{\text{s}^2}$ szöggyorsulással 10,4 s alatt fékezi le?

b) Hogyan ütközött a két test?

Megoldás:

5.85. $r = 1$ m; $m_1 = 1{,}8$ kg; $v_1 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 1{,}2$ kg; $v_2 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\beta_2 = -0{,}5\ \frac{1}{\text{s}^2}$; $t_2 = 14{,}4$ s.

a) A körpályán mozgó golyó ütközés utáni sebessége: v_2', ez csökken a súrlódás hatására nullára. Az $a_é = \beta_2 \cdot r = -0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ezért $v_2' + a_é \cdot t = 0$, $v_2' = -a_é \cdot t = 5{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az m_1 tömegű golyó sebességét a lendületmegmaradás törvényével számíthatjuk ki:

ütközés előtt $\sum I = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 13{,}8\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$;

ütközés után $\sum I = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$, a két összes lendület egyenlő.

Helyettesítés után $1{,}8v_1' + 6{,}24 = 13{,}8$, ebből $\underline{\underline{v_1' = 4{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) A mozgási energia megmaradását kell megvizsgálnunk:

ütközés előtt $\sum E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = 32{,}1$ J;

ütközés után $\sum E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2'^2 = \underline{\underline{32{,}1\ \text{J}}}$, összehasonlítva, nincs energiaveszteség, ezért az ütközés teljesen rugalmas volt.

5.86. Az „A" test 40 cm sugarú körpályán $120\ \frac{1}{s}$ szögsebességgel egyenletes körmozgást végez, tömege 10 g. A „B" test 20 cm sugarú pályán $15\ \frac{1}{s}$ szögsebességgel szintén egyenletes körmozgást végez, tömege 80 g. A két pálya kívülről érinti egymást. A két test szemben haladva, a pályák érintkezési pontjában találkozik úgy, hogy az „A" test $20\ \frac{m}{s}$ sebességgel visszapattan, tökéletesen rugalmasan.

a) Mekkora lesz a „B" test sebessége az ütközés után?

b) Változik-e az ütközés következtében a két test együttes mozgási energiája?

Megoldás:

5.86. $r_A = 0{,}4$ m; $\omega_A = 120\ \frac{1}{s}$; $m_A = 0{,}01$ kg; $r_B = 0{,}2$ m; $\omega_B = 15\ \frac{1}{s}$; $m_B = 0{,}08$ kg; $v'_A = -20\ \frac{m}{s}$.

a) Lásd a 5.85. feladat gondolatmenetét, $\sum I$ = állandó, tehát $m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$, ebben $v_A = \omega_A \cdot r_A = 48\ \frac{m}{s}$, $v_B = \omega_B \cdot r_B = -3\ \frac{m}{s}$ az ellentétes irány miatt. Behelyettesítve és rendezve $\underline{\underline{v'_B = 5{,}5\ \frac{m}{s}}}$ lesz a sebesség. Az előjele alapján v_A-val azonos irányú, tehát visszapattan.

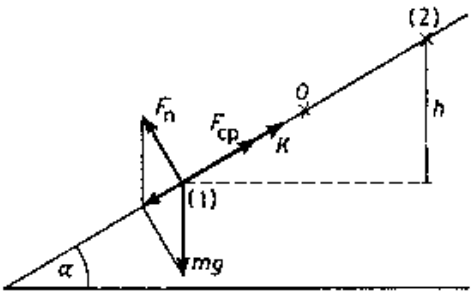
b) Tökéletesen rugalmas ütközést feltételezve nem változhat az összes mozgási energia. Ennek értékei 5.85. *b)* szerint: ütközés előtt $\sum I = 11{,}88$ J; ütközés után $\sum I' = 3{,}21$ J, nem teljesül a feltétel, az ütközés nem tökéletesen rugalmas, jelentős energiaveszteség lépett fel.

5.87. Egy 30°-os hajlásszögű lejtő lapján az 1 m hosszú fonálra erősített, 2 kg tömegű test körmozgást végez. A pálya legalsó pontján a test sebessége $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A test és a lejtő közötti súrlódást hanyagoljuk el.

a) Mekkora lesz a test sebessége a pálya legmagasabb pontján?
b) Mekkora a test legnagyobb centripetális gyorsulása?
c) Mekkora erő feszíti a fonalat a pálya legalsó pontján?

Megoldás:

5.87. $\alpha = 30°$; $m = 2$ kg; $l = r = 1$ m; $v_1 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



a) A pálya legfelső pontjában is van a testnek mozgási energiája, mert körmozgást végez. A két szélső helyzetbeli mozgási energia különböző, mert a nehézségi erő munkát végez a testen. Mivel más kölcsönhatást nem kell figyelembe venni, a munkatételt így írhatjuk fel:

$\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h$, ahol $h = 2r \cdot \sin\alpha$, és figyelembe vesszük, hogy a viszonyítási szint a legalsó pont szintje. Helyettesítés és rendezés után $v_2 \approx 6{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebesség a pálya legmagasabb pontján.

b) Legnagyobb a centripetális gyorsulás a pálya legalsó pontján, hiszen itt a legnagyobb a sebesség: $a_{cpmax} = \frac{v^2}{r} = 64\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

c) A testre ható erők az ábráról: a nehézségi erő, jele mg; a lejtő tartóereje, jele F_n, és a kötélerő K. Ezek sugárirányú eredője a centripetális erő, melynek nagysága: $F_{cp} = K - m \cdot g \sin\alpha$, ebből $K = m\frac{v_1^2}{r} + m \cdot g \cdot \sin\alpha = 138$ N.

6.1. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A Föld körül keringő űrhajóban lebegő űrhajósra nem hat erő.

B) Vízszintes síkban kanyarodó jármű pályán maradását a tapadási súrlódási erő biztosítja.

C) A körpályán mozgó test mozgásállapotára a perdület a jellemző.

D) Az egyenletesen változó körmozgást végző test kinetikus energiáját az érintő irányú erő munkája változtatja meg.

E) A tengely körül forgó test perdületét a testre ható erők forgatónyomatékai változtatják meg.

Megoldás:

6.1. Helyes: *B)*, a járműre három erő hat, ezek eredője biztosítja a körpályán maradást. Mivel a nehézségi erő és az út tartóereje kiegyenlítik egymást, az eredő erő a tapadási súrlódási erő.
C), a perdület fogalma alapján.
D), a munkatétel megfogalmazása.
E), A perdülettétel alapján.
Hibás: *A)*, mert az űrhajós sebessége a hajóéval együtt szüntelenül változik, ehhez Newton I. törvénye szerint erő kell.

6.2. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A) Egyenletes körmozgást csak olyan test végezhet, amely más testtel vagy testekkel kölcsönhatásban áll.

B) Két test centrális rugalmas ütközésekor a lendületváltozások egymással ellentétes irányúak.

C) Két test centrális rugalmas ütközésekor a nagyobb tömegű test lendületváltozása kisebb.

D) Egy forgó korongon, a tengelytől kétszer nagyobb távolságban lévő tömegpont szögsebessége kétszer nagyobb.

E) Homogén gravitációs mezőben nem változik a test sebességének iránya, ha a test kezdősebessége a térerősséggel párhuzamos volt, és más kölcsönhatás nincs.

Megoldás:

6.2. Helyes: *A*), Newton I. törvénye szerint kölcsönhatás hiányában a pálya egyenes.

B), belső erők lépnek fel, amelyek a rendszer összes lendületét nem változtatják meg. Az egyes testek lendületváltozásai ezért ellentétes irányúak és azonos nagyságúak.

Hibás: *C*), lásd *B*)-nél.

D), hiszen a korong minden pontja azonos szöggel fordul el, azaz a szögsebesség a pályasugártól független.

E), amennyiben a kezdősebesség iránya a gravitációs gyorsulásával ellentétes, mint a felfelé hajításnál, a sebesség iránya is megváltozik a pálya tetőpontján.

6.3. Forgózsámolyon ülő ember jobbra, illetve balra kinyújtott kezében egy-egy súlyzót tart. Emberünk a zsámollyal együtt forog megközelítően állandó szögsebességgel. Egyszercsak a kezeiben lévő súlyzókat behúzza a testéhez.
Változik-e a rendszer szögsebessége, perdülete, forgási energiája?
Indokoljuk állításunkat!

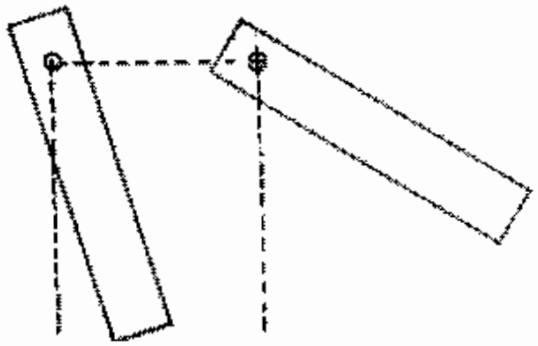
Megoldás:

6.3. A rendszer perdülete állandó, mert forgatónyomaték nem hat (vagy elhanyagolható), ezért a perdülettételből $\Delta N = 0$, azaz $N = \Theta \cdot \omega =$ = állandó.

A szögsebesség változik: mivel a perdület állandó, ezért $\Theta_1 \cdot \omega_1 = \Theta_2 \cdot \omega_2$. A karok behúzása miatt $\Theta_2 < \Theta_1$, így $\omega_1 < \omega_2$.

A forgási energia változik: jelölje $E_1 = \frac{1}{2}\Theta_1 \cdot \omega_1^2$ és $E_2 = \frac{1}{2}\Theta_2 \cdot \omega_2^2$ a kezdeti és a karok behúzása utáni energiákat. A perdület állandóságából $\omega_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \omega_1$, ezért $E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta_1^2}{\Theta_2} \cdot \omega_1^2$. Így $\Delta E = \frac{1}{2}\Theta_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot E_1$, ami a belső erők (izomerő) munkájával egyenlő.

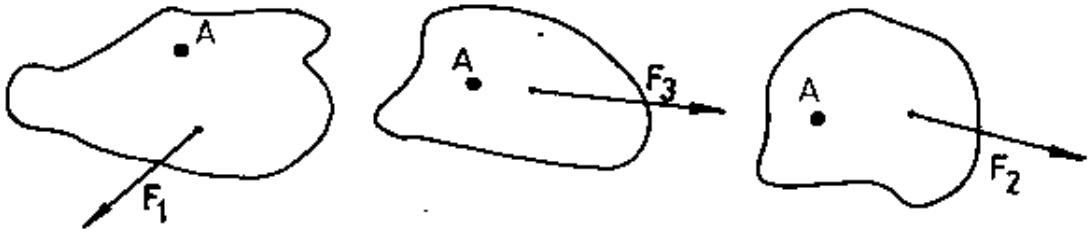
6.4. Felfüggesztett vonalzókat különböző magasságokra térítünk ki, az ábra szerint. Melyik esetben nagyobb a vonalzó szöggyorsulása? Miért?



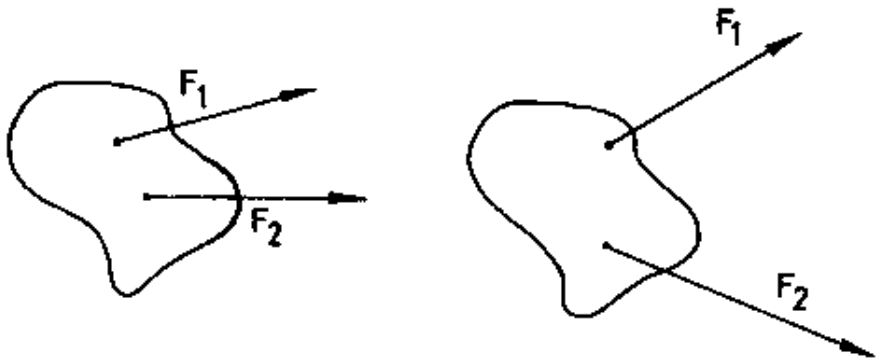
Megoldás:

6.4. A vonalzók szöggyorsulását a tömegközéppontban ható nehézségi erő forgatónyomatéka hozza létre. Mivel a tehetetlenségi nyomaték mindkét esetben ugyanakkora, ám az erőkar a jobboldali, jobban kitérített vonalzónál nagyobb, az $M = \Theta \cdot \beta$ alapján ekkor β is nagyobb.

6.5. *a)* Rajzoljuk be a merev testre ható erők „A" tengelyre vonatkoztatott karjait!

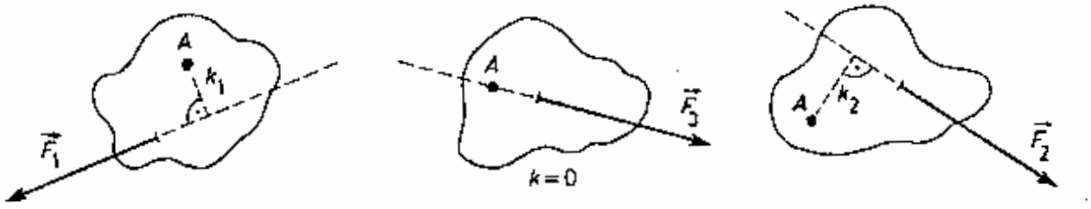


b) Határozzuk meg szerkesztéssel azt a harmadik erőt, mely egyensúlyban tartja a szabad merev testet!



Megoldás:

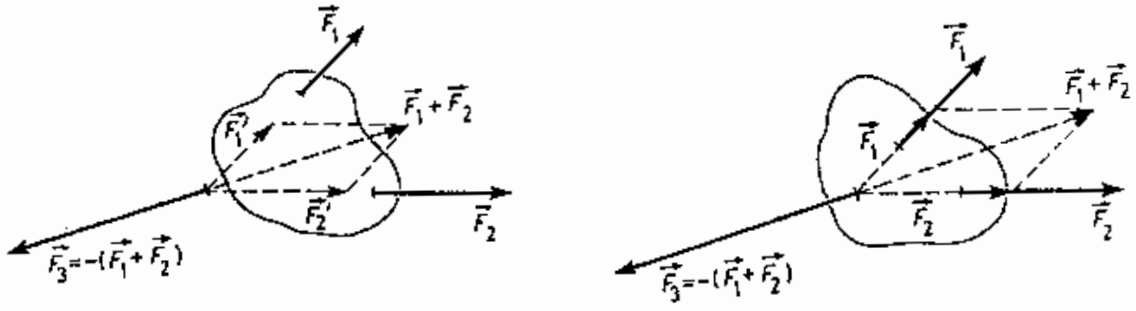
6.5. a)



Az erőkar az erő hatásvonalának a forgástengelytől való távolsága.

b) Az F_1 és F_2 erőket eltoljuk a hatásvonaluk közös pontjába, és összegezzük őket. Az F_1+F_2 ellentettje az F_3, a keresett egyensúlyozó erő.

Az egyensúlyt az F_3 a haladó mozgás szempontjából biztosítja.



6.6. Nő vagy csökken a léggömb tehetetlenségi nyomatéka a felfújás közben? Miért?

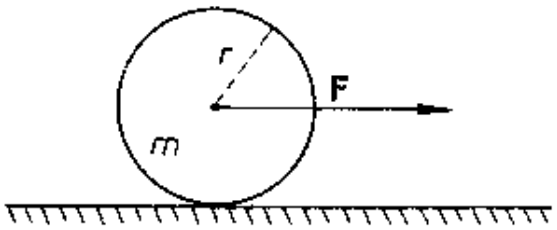
Megoldás:

6.6. A Θ nő, mert a tömeg is és a léggömb sugara is nő ($\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$).

6.7. Hogyan mozog az r sugarú, m tömegű tömör henger, ha a tengelyére kötött fonál F nagyságú, vízszintes erővel húzza, és

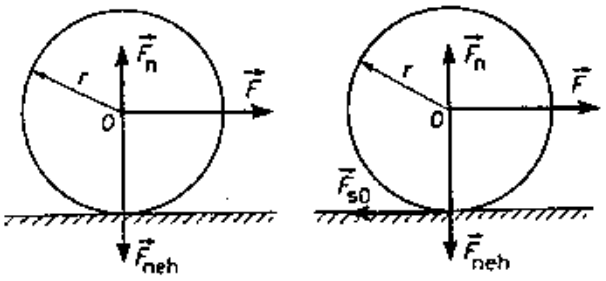
a) a tapadási, illetve csúszó súrlódás elhanyagolható;

b) a tapadási, illetve súrlódási együttható nagy, F pedig kicsi?



Megoldás:

6.7. Ha nincs súrlódás, a henger haladó mozgást végez. F a tömegközéppontban hat, ezért nincs forgató hatása. Newton II. törvénye alapján: $\sum F = m \cdot a$. Az $F_{neh} = -F_n$, ezért $\sum F = F$. A tömegközéppont gyorsulása $a = \frac{F}{m}$.



A henger tömegközéppontja, ill. szimmetriatengelye haladó mozgást végez, emellett a súrlódási erő hatására a tömegközéppontja körül elforog. Mozgásegyenletek: a haladó mozgásra fennáll

(1) $F - F_{s0} = m \cdot a.$

A forgómozgásra: felhasználva, hogy $\sum M = F_{s0} \cdot r$, és $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$,

(2) $F_{s0} \cdot r = m \cdot r^2 \beta.$

A tisztán gördülés feltétele

(3) $a = \beta \cdot r,$

innen β-t kifejezve és (2)-be helyettesítve $F_{s0} = \frac{1}{2} m \cdot a$ adódik. Ezt (1)-gyel összevetve $F = \frac{3}{2} m \cdot a$. A tömegközéppont gyorsulása ekkor $a = \frac{2F}{3m}$. Így (1)-ből $F_{s0} = \frac{F}{3}$. Mivel a tapadási súrlódási erőnek van legnagyobb értéke ($\mu_0 \cdot m \cdot g$), ezért a húzóerő sem lehet tetszőleges, az előzőek alapján nem lehet nagyobb, mint a tapadási súrlódási erő háromszorosa.

6.8. Milyen messzire menne el a 10 t tömegű, lendkerék meghajtású villamos a motor kikapcsolása után, ha lendkerekének tömege 1,5 t, sugara 1 m?
A talaj és a villamos között a súrlódási együttható 0,008.
A lendkerék szögsebessége $10\ \frac{1}{s}$, tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} m \cdot r^2$.

Megoldás:

6.8. A feladat elegendő adat hiányában nem megoldható. A megoldás a munkatétel alapján lenne lehetséges, miszerint a talaj és a villamos közti súrlódási erő munkája éppen egyenlő a villamos és a lendkerék kezdeti összenergiájával. Persze ebben az esetben is eltekintünk más, a valóságban fellépő veszteségforrásoktól.

6.9. Egy lemezjátszó 12 cm sugarú korongjának fordulatszáma $45\ \frac{1}{\text{perc}}$.

a) Mekkora a korong másodpercenkénti fordulatszáma?
b) Mennyi idő alatt tesz meg a korong egy fordulatot?
c) Mekkora a korong szélső pontjának kerületi sebessége?
d) Mekkora szöggel fordul el a korong 5 s alatt?

Megoldás:

6.9. $r = 0{,}12$ m; $f = 45\ \frac{1}{\text{perc}}$; $t = 5$ s.

$f = \frac{45}{60}\ \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{0{,}75\ \frac{1}{\text{s}}}}$ a másodpercenkénti fordulatszám.

$T = \frac{1}{f} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ \text{s}}}$ egy fordulat ideje.

$v = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot f = \underline{\underline{0{,}565\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ a kerületi sebesség.

$\alpha = \omega \cdot t = (2\pi \cdot f)t = \underline{\underline{23{,}55\ \text{rad}}}$ a szögelfordulás.

6.10. Egy 50 cm sugarú kerék 0,4 s alatt 120 fokkal fordul el.

a) Számítsuk ki a kerék szögsebességét!

b) Határozzuk meg a kerék azon pontját, melynek kerületi sebessége $0{,}52\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$!

c) Hány fordulatot tesz meg a kerék 2 perc alatt?

Megoldás:

6.10. $r = 0{,}5$ m; $\Delta t = 0{,}4$ s; $\Delta\alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad.

Egyenletes forgást feltételezve:

a) $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{5\pi}{3}\ \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{5{,}23\ \frac{1}{\text{s}}}}$ a szögsebesség.

b) A keresett pontot a középponttól való távolságával adjuk meg: $r' = \frac{v}{\omega} = 0{,}099$ m $\sim \underline{\underline{10\text{ cm}}}$.

c) A $t = 2$ perc alatti fordulatok száma a periódusidő ($T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}2$ s) segítségével: $\frac{t}{T} = \underline{\underline{100\text{ fordulat}}}$.

6.11. Mekkora sebességgel halad az a kerékpár, melynek 30 cm sugarú kereke $2{,}5\ \frac{1}{s}$ fordulatszámmal egyenletesen forog? Hány teljes fordulatot tesz meg a kerék 200 m-es úton?

Megoldás:

6.11. $r = 0{,}3$ m; $f = 2{,}5\ \frac{1}{s}$; $s = 200$ m.

A kerék csúszásmentesen gördül, ekkor a kerékpár tömegközéppontjának sebessége és a kerék talajjal érintkező pontjának kerületi sebessége megegyezik: $v = 2r \cdot \pi \cdot f = \underline{\underline{4{,}71\ \frac{m}{s}}}$ a kerékpár sebessége.

A fordulatok számát a megtett út és a kerék kerületének hányadosa adja: $\frac{s}{2\pi \cdot r} \approx \underline{\underline{106}}$ a teljes fordulatok száma.

6.12. Egy hengerre 100 méter hosszú kötelet kell feltekernünk.

a) Mennyi idő szükséges ahhoz, ha a 25 cm sugarú hengert $16\ \frac{1}{s}$ szögsebességgel tudjuk forgatni?

b) Mekkora szöggel fordul el a henger 25 s alatt?

Megoldás:

6.12. $l = 100$ m; $r = 0{,}25$ m; $\omega = 16\ \frac{1}{s}$; $t = 25$ s.

a) Feltételezzük, hogy a forgás egyenletes. Ekkor a kötél feltekeredéséhez szükséges idő $t = \frac{1}{v} = \frac{1}{r \cdot \omega} = \underline{25\ \text{s}}$.

b) A henger ezalatt $\alpha = \omega \cdot t = \underline{400 \text{ radiánnal}}$ fordul el.

6.13. Az 1 cm sugarú egyenletesen forgó orsó pereméről 12 s alatt 60 m hosszú fonal tekeredik le.

a) Mekkora sebességgel hagyja el a fonal az orsót?
b) Mekkora fordulatszámmal forog az orsó?
c) Hogyan változik az orsó fordulatszáma, ha egy másik alkalommal ugyanennyi idő alatt 120 m fonal tekeredik le?

Megoldás:

6.13. $r = 0{,}01$ m; $t = 12$ s; $l = 60$ m.

a) A 6.12. alapján: $\underline{\underline{v = \frac{l}{t} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

b) $v = 2r \cdot \pi \cdot f$, innen $f = \frac{v}{2r \cdot \pi} = \underline{\underline{79{,}6 \frac{1}{\text{s}}}}$ az orsó fordulatszáma.

c) $t = 12$ s; $l' = 120$ m. Most ugyanannyi idő alatt kétszer olyan hosszú fonal tekeredik le, ehhez egyenletes forgást feltételezve, kétszeres fordulatszám, azaz $\underline{\underline{159{,}2 \frac{1}{\text{s}}}}$ szükséges.

6.14. Egy kerék $20\ \frac{1}{s}$ szögsebességgel forog. A tengelytől 15 cm-re lévő darabjának tömege 0,4 kg.

a) Számítsuk ki a darabra ható centripetális erőt!
b) Határozzuk meg e darabnak a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
c) Mekkora a centripetális erő munkája, miközben a test egy félfordulatot tesz meg?
d) Változik-e a kiszemelt darabnak a kinetikus energiája a kerék forgása közben?

Megoldás:

6.14. $\omega = 20\ \frac{1}{s}$; $r = 0{,}15$ m; $m = 0{,}4$ kg.

A kerék egyenletes forgást végez.

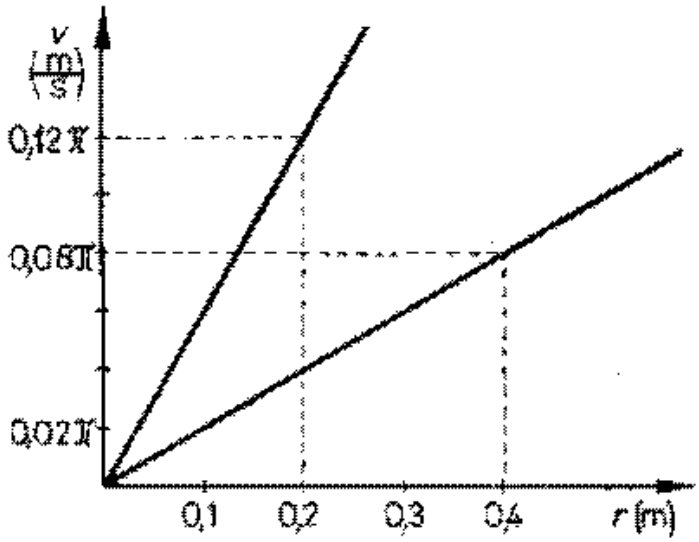
a) $\underline{\underline{F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 24\ \text{N}}}$.

b) $\underline{\underline{\Theta = m \cdot r^2 = 0{,}009\ \text{kg m}^2}}$.

c) $\underline{\underline{W_{cp} = 0}}$, mert a centripetális erő merőleges az elmozdulásra.

d) A kinetikus energia nem változik meg, mert sem a darab tömege, sem kerületi sebességének nagysága nem változik.

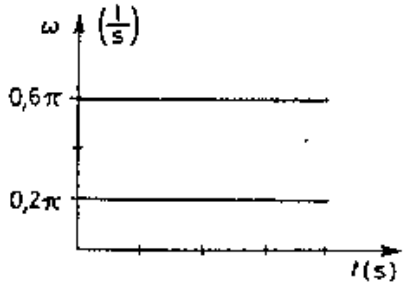
6.15. A grafikonon két, egyenletesen forgó test különböző pontjának sebességét ábrázoltuk a középponttól mért távolság függvényében.



a) Készítsük el a mozgások szögsebesség–idő grafikonját!
b) Határozzuk meg a fordulatszámok arányát!

Megoldás:

6.15. Adatok a grafikon alapján: $r_1 = 0{,}2$ m; $v_1 = 0{,}12\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r_2 = 0{,}4$ m; $v_2 = 0{,}08\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



a) $\omega_1 = \frac{v_1}{r_2} = 0{,}6\pi \frac{1}{\text{s}}$ = állandó és $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = 0{,}2\pi \frac{1}{\text{s}}$ = állandó.

b) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3:1$ a fordulatszámok aránya.

6.16. Egy korong $50\ \frac{1}{s}$ fordulatszámmal egyenletesen forog. A középponttól 3 cm-re és 5 cm-re egy-egy 200 g-os test a koronggal együtt mozog.

a) Mekkora a testek pályamenti sebessége?
b) Fejezzük ki a sebességek arányát a sugarak segítségével!
c) Mekkora az egyes testek tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkozóan?

Megoldás:

6.16. $f = 50\ \frac{1}{s}$ mindkét testre; $r_1 = 0{,}03$ m; $r_2 = 0{,}05$ m $m_1 = m_2 = 0{,}2$ kg.

A koronggal együtt forgó két test szögsebessége is és fordulatszáma is megegyezik, azonosak a korongéval.

a) $\underline{\underline{v_1}} = 2r_1 \cdot \pi \cdot f = \underline{\underline{9{,}42\ \frac{m}{s}}}$; $\underline{\underline{v_2}} = 2r_2 \cdot \pi \cdot f = \underline{\underline{15{,}7\ \frac{m}{s}}}$.

b) $v_1 : v_2 = r_1 : r_2 = 3 : 5$ az arány.

c) $\underline{\underline{\Theta_1}} = m_1 \cdot r_1^2 = \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{kgm}^2}}$; $\underline{\underline{\Theta_2}} = m_2 \cdot r_2^2 = \underline{\underline{5 \cdot 10^{-4}\ \text{kgm}^2}}$ a testek tehetetlenségi nyomatéka.

6.17. Egy egyenletes forgómozgást végző korong 4 s alatt 240°-kal fordul el. A korong két pontjának kerületi sebessége $31{,}2\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, illetve $41{,}6\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

a) Mekkora a korong szögsebessége?
b) Mekkora a két pont tengelytől való távolsága?
c) Mekkora a két pont centripetális gyorsulásának aránya?

Megoldás:

6.17. $t = 4$ s; $\alpha = 240° = \frac{4\pi}{3}$ rad; $v_1 = 31{,}2\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$; $v_2 = 41{,}6\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

A 6.16. alapján:

a) $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{\text{s}}$.

b) $r_1 = v_1 : \omega = 29{,}8$ cm; és $r_2 = v_2 : \omega = 39{,}7$ cm a kiválasztott pontok tengelytől való távolságai.

c) $a_{cp1} : a_{cp2} = v_1 : v_2 = 3 : 4$ az arány.

6.18. A Föld tengely körüli forgásának periódusideje 24 óra.

a) Határozzuk meg a Föld tengely körüli forgásának szögsebességét!

b) Mekkora az egyenlítőn lévő ember kerületi sebessége, ha a Föld sugara 6380 km?

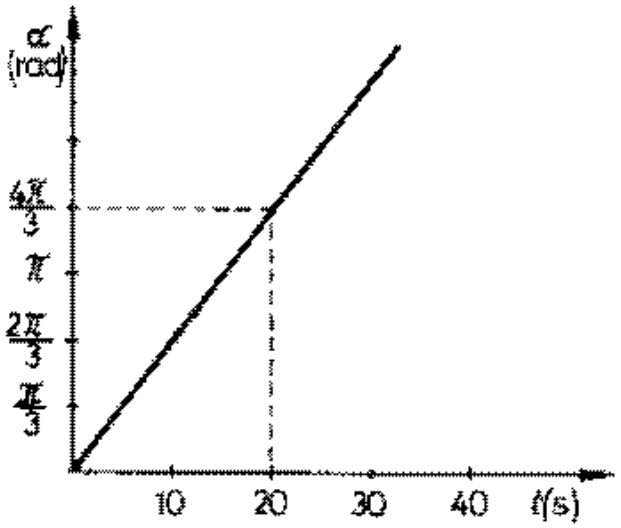
Megoldás:

6.18. $t = T = 24$ óra $= 86\,400$ s; $r = 6380$ km $= 6{,}380 \cdot 10^6$ m.

a) a Föld szögsebessége: $\underline{\underline{\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}}}$.

b) Az ember kerületi sebessége: $\underline{\underline{v = \frac{2r \cdot \pi}{T} = 463{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

6.19. Az ábrán egy test szögelfordulását ábrázoltuk az idő függvényében.



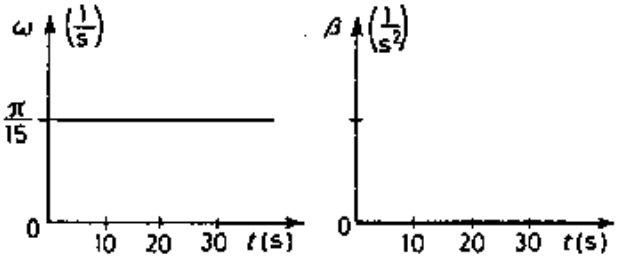
Készítsük el a szögsebesség–idő és szöggyorsulás–idő grafikont!

Megoldás:

6.19. A grafikon alapján a test egyenletes forgómozgást végez, ugyanis $\alpha \sim t$.

$t = 0;\ \alpha_0 = 0;\ t = 20\ \text{s};\ \alpha_t = \dfrac{4\pi}{3}\ \text{rad}.$

$\omega = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \dfrac{\pi}{15}\ \dfrac{1}{\text{s}}$ állandó érték. A szöggyorsulás ekkor nulla.



6.20. Egy 20 kg tömegű, 10 cm sugarú tömör korong, szimmetriatengelye körül súrlódás nélkül foroghat. A kerületén ható, érintő irányú, 15 N nagyságú erővel 6 s ideig forgatjuk a korongot. (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)

a) Mekkora a korong szöggyorsulása?

b) Hány fordulatot tesz meg a korong a 6 s alatt?

c) Mennyi munkát végeztünk?

Megoldás:

6.20. $\omega_0 = 0$; $m = 20$ kg; $r = 0{,}1$ m; $F = 15$ N; $t = 6$ s; $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r_2 =$ $= 0{,}1$ kgm^2.

a) A korongra az állandó F erő forgatónyomatéka hat, ezért egyenletesen változó forgómozgást végez. A $\sum M = \Theta \cdot \beta$ alapegyenletből a $\sum M = F \cdot r$ helyettesítésével $\beta = \frac{F \cdot r}{\Theta} = \underline{\underline{15 \frac{1}{s^2}}}$.

A korong 6 s alatt $\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot t^2$ szöggel, egy periódus alatt 2π-vel fordul el, így $\frac{\alpha}{2\pi} \sim \underline{\underline{43 \text{ a fordulatok száma}}}$.

b) Munkavégzésünk a forgási energiát növelte, a munkatétel alapján: $\underline{\underline{W}} = \Delta E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} \Theta \cdot (\beta t)^2 = \underline{\underline{405 \text{ J}}}$.

6.21. Egy rúdon 3 kg-os és 1 kg-os testeket rögzítettünk úgy, hogy a rúdra merőleges tengelytől mért távolságuk aránya 1 : 3. A rudat egyenletes forgásba hozzuk.

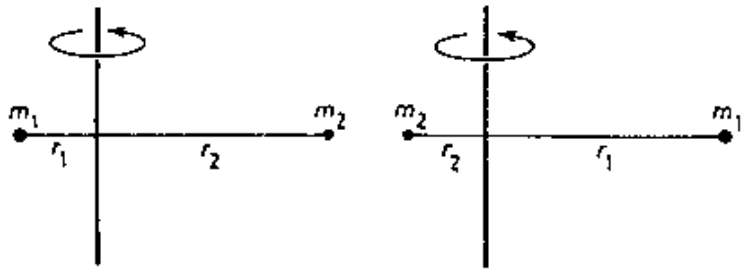
a) Melyik test mozgási energiája a nagyobb?

b) Cseréljük fel a testeket! Mennyi lesz a felcserélés után a testek mozgási energiájának aránya?

Megoldás:

6.21. $m_1 = 3$ kg; $m_2 = 1$ kg.

Feltétel: $r_1 : r_2 = 1 : 3$, azaz $r_2 = 3r_1$.

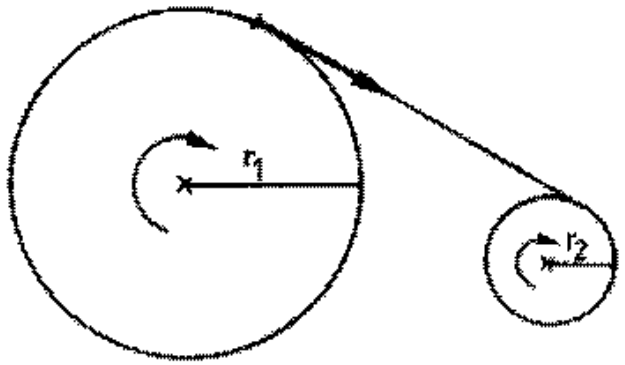


Ekkor $E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 = \frac{3}{2} \omega^2 \cdot r_1^2$.

A feltételt felhasználva $E_2 = \frac{9}{2} \omega^2 \cdot r_1^2$, tehát $E_2 = 3E_1$-ből $E_2 > E_1$ adódik.

A tömegek felcserélésével $r_1 = 3r_2$, ekkor $E_1 = 27 \cdot E_2$, tehát az arány $\underline{\underline{E_1 : E_2 = 27 : 1}}$.

6.22. Egy gép az ábrán látható 8 cm sugarú orsóról cérnát teker át a 2 cm sugarú orsóra. A cérna az első orsóról $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel tekeredik le.



a) Mekkora legyen a második orsó fordulatszáma, hogy a cérna feszessége ne változzon?
b) Milyen hosszú cérnát teker át a gép 10 perc alatt?
c) Mekkora az egyes orsók szögsebessége?

Megoldás:

6.22. $r_1 = 0{,}08$ m; $r_2 = 0{,}02$ cm; $v_1 = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 600$ s.

a) A cérna feszessége nem változik, ha $v_1 = v_2$, ezért $v_2 = 2r_2 \cdot \pi \cdot f_2$-ből $\underline{\underline{f_2 = 47{,}8\ \frac{1}{\text{s}}}}$ a fordulatszám.

b) A forgást egyenletesnek feltételezve, bármelyik orsó kerületi pontja által t idő alatt befutott ív hossza és az áttekert cérna hossza azonos kell legyen. Így $l = v_1 \cdot t = 3600$ m $= \underline{\underline{3{,}6\ \text{km}}}$ hosszú cérna tekeredik át.

c) Az orsók szögsebessége: $\underline{\underline{\omega_1 = v_1 : r_1 = 75\ \frac{1}{\text{s}}}}$; és $\underline{\underline{\omega_2 = v_2 : r_2 = 300\ \frac{1}{\text{s}}}}$.

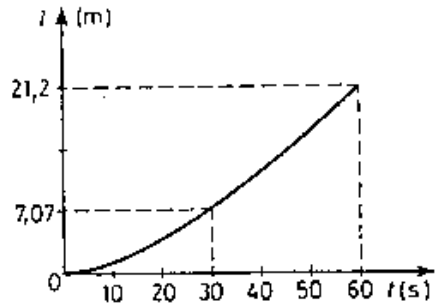
6.23. Egy 0,5 cm sugarú orsóra géppel cérnát tekerünk fel. Az orsó 3,14 $\frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással éri el a 900 $\frac{1}{\text{perc}}$ fordulatszámot.

a) Mennyi cérnát tekerünk fel az indulástól számított 1 perc alatt?

b) Készítsük el az orsó kerületi pontjára az út–idő grafikont!

Megoldás:

6.23. $r = 5 \cdot 10^{-3}$ m; $\beta = 3{,}14 \frac{1}{s^2}$; $f_{max} = 15 \frac{1}{s}$; $t = 60$ s; $\omega_0 = 0$.



Az orsó kezdetben egyenletesen gyorsuló, majd egyenletes forgást végez.

A gyorsuló forgás ideje $t_1 = \frac{\omega_{max}}{\beta} = 30$ s, ahol $\omega_{max} = 2\pi \cdot f_{max}$; a feltekert cérna hossza $l_1 = \frac{a_é}{2} \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}\beta \cdot r \cdot t_1^2 = 7{,}07$ m.

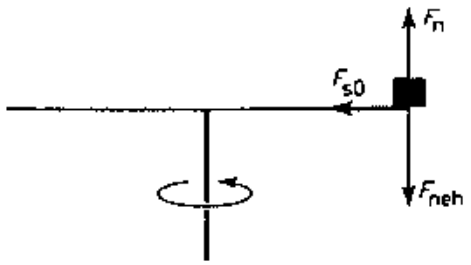
Az egyenletes forgás ideje $t_2 = t - t_1 = 30$ s, ezalatt $l_2 = (\beta \cdot t_1) r \cdot t_2 = 14{,}13$ m cérna tekeredik fel. Így 1 perc alatt összesen $l_1 + l_2 = 21{,}2$ m tekeredik fel.

6.24. Egy vízszintes korong átmérője 50 cm. A korong szélére 30 g-os testet helyezünk, majd a korongot 0,3 $\frac{1}{s^2}$ szöggyorsulással forgásba hozzuk.

a) Mekkora fordulatszámnál röpül le a korongról a test, ha a tapadási súrlódási együttható 0,1?
b) Mennyi idő múlva következik be a test leröpülése?
c) Mekkora a test kinetikus energiája a lerepülés pillanatában?

Megoldás:

6.24. $r = 0{,}25$ m; $m = 0{,}03$ kg; $\beta = 0{,}3\ \frac{1}{s^2}$; $\mu_0 = 0{,}1$; $\omega_0 = 0$.



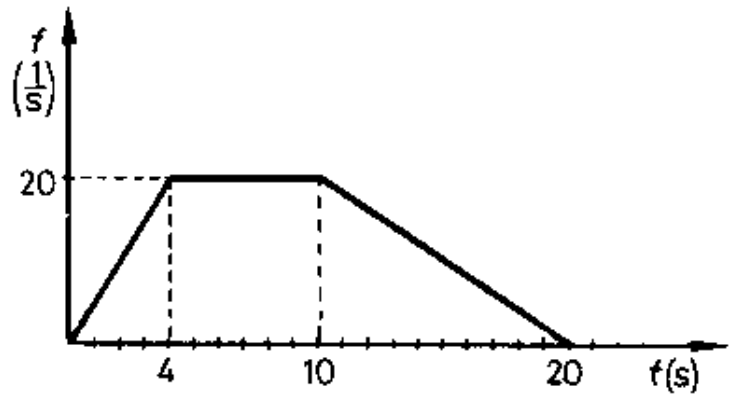
a) Az m tömegű test mindaddig a koronggal együtt forog, amíg a tapadási súrlódási erő biztosítja a körpályához szükséges erőt, vagyis $F_{s0} > F_{cp}$, határesetben $F_{s0} = F_{cp}$. Az F_{s0} legnagyobb értéke $\mu_0 \cdot m \cdot g$; ezért a fordulatszám a $\mu_0 \cdot m \cdot g = (2 \cdot \pi \cdot f_{max})^2 \cdot r \cdot m$-ből számolható: $\underline{\underline{f_{max} = 0{,}32\ \frac{1}{s}}}$.

Ennél nagyobb fordulatszám esetén a test leröpül a korongról.

b) Az f_{max} eléréséhez szükséges idő a $\underline{t} = \frac{2\pi \cdot f_{max}}{\beta} = \underline{\underline{6{,}7\ s}}$-nak adódik.

c) A leröpülés pillanatában a test kinetikus energiája $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} m (2r \cdot \pi \cdot f_{max})^2 = \underline{\underline{3{,}8 \cdot 10^{-3}\ J}}$.

6.25. Az ábrán egy centrifugadob fordulatszámát ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Készítsük el a szögsebesség–idő és szöggyorsulás–idő grafikont!

b) Mekkora a 30 cm átmérőjű dob szélső pontjának legnagyobb kerületi sebessége?

Megoldás:

6.25. $r = 0{,}15$ m; a centrifugadob forgása három szakaszból áll:

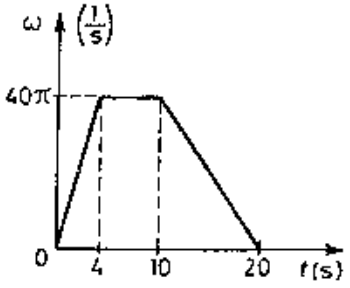
a) Első szakasz: $f_0 = 0$; $f_{max} = 20\ \frac{1}{s}$; $\Delta t_1 = 4$ s, a forgás egyenletesen változó, $\omega_{max} = 2 \cdot \pi \cdot f_{max} = 40\pi\ \frac{1}{s}$ és $\underline{\underline{\beta_1 = \frac{\omega_{max}}{t} = 10\pi\ \frac{1}{s^2}}}$.

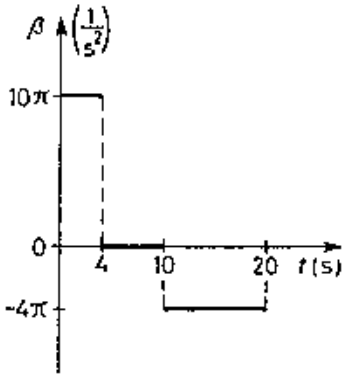
Második szakasz: a forgás egyenletes, $\Delta t_2 = 6$ s; $\omega = \omega_{max}$; állandó, ezért $\underline{\underline{\beta_2 = 0}}$.

Harmadik szakasz: a forgás egyenletesen változó, $\omega_0 = 40\pi\ \frac{1}{s}$; $\omega_t = 0$; $\Delta t_3 = 10$ s. Ebben az időközben $\underline{\underline{\beta_3 = \frac{0 - \omega_0}{\Delta t_3} = -4\pi\ \frac{1}{s^2}}}$.

b) A dob szélső pontjára $\underline{\underline{v_{max} = \omega_{max} \cdot r = 18{,}84\ \frac{m}{s}}}$.

Grafikonok *a)*-hoz:





6.26. Egy kezdetben nyugvó korongra 5 s-ig két, egymással ellentétes, 550 N · m és 350 N · m nagyságú forgatónyomaték hat.

a) Mekkora fordulatszámra gyorsul fel a korong, ha tömege 2 kg, sugara 0,2 m? $\left(\Theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.\right)$

b) Mekkora a korong középpontjától 20 cm-re lévő pont legnagyobb kerületi sebessége?

c) Mekkora az e pontban lévő 5 g tömegű, pontszerűnek tekinthető korongrész legnagyobb perdülete?

Megoldás:

6.26. $\omega_0 = 0$; $t = 5$ s; $M_1 = 550$ Nm; $M_2 = -350$ Nm; (ellentétes M_1-gyel); $m = 2$ kg; $r = 0{,}2$ m; $m_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ kg.

a) A korong forgását a $\sum M = \Theta \cdot \beta$ alapegyenlet írja le. $\sum M = M_1 + M_2 = 200$ Nm; $\Theta = 0{,}5 \cdot m \cdot r^2 = 0{,}04$ kgm^2, az alapegyenletbe helyettesítve $\beta = 5000 \frac{1}{s^2}$. Mivel $\omega_t = \beta \cdot t = 2\pi \cdot f_t$, innen $\underline{\underline{f_t = 3{,}98 \cdot 10^3 \frac{1}{s}}}$.

b) A kiválasztott pont legnagyobb sebessége $\underline{\underline{v_{max}}} = \omega_t \cdot r = 5000 \frac{m}{s}$.

c) A korongrész perdületére $\underline{\underline{N_{max}}} = \Theta_1 \cdot \omega_t = 5 \frac{kgm^2}{s}$-ot kapunk,

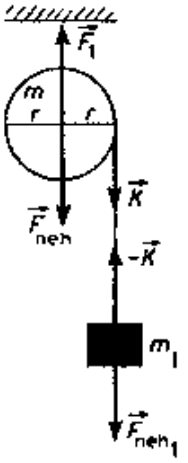
ahol most $\Theta_1 = m_1 \cdot r^2$.

6.27. A 20 cm sugarú, 30 kg tömegű tömör fémkorong, a vízszintes helyzetű szimmetriatengelye körül, súrlódás nélkül foroghat. A korong kerületére csévélt fonal végére 5 kg tömegű testet akasztunk. Mekkora a korong szöggyorsulása?

(A korong tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)

Megoldás:

6.27. $\omega_0 = 0$; $r = 0{,}2$ m; $m = 30$ kg; $\Theta = 0{,}5 \cdot m \cdot r^2 = 0{,}6$ kgm^2; $m_1 = 5$ kg; $\mu = 0$.



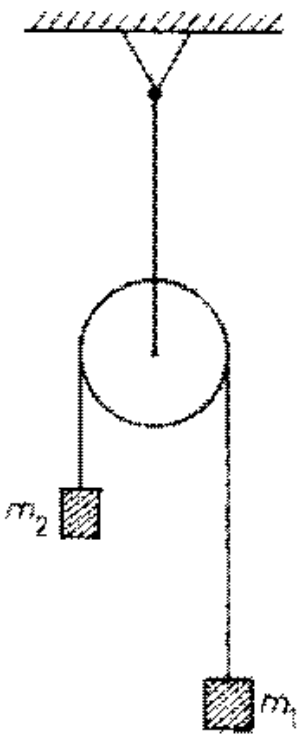
A korong forgómozgást, a fonálon függő test haladómozgást végez. Az erők berajzolása után az alapegyenletekbe helyettesítünk:

(1) $K \cdot r = \Theta \cdot \beta$; mert a korongra ható nehézségi erő és a tartóerő nem forgatnak.

(2) $F_{neh1} - K = m_1 \cdot a$, továbbá, mivel a kötél nem csúszik meg a korongon

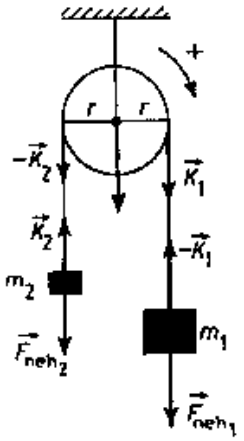
(3) $a = \beta \cdot t$ is teljesül. A három egyenlet egyenletrendszert alkot, innen $\underline{\underline{\beta = 12{,}5 \ \frac{1}{s^2}}}$ a korong szöggyorsulása.

6.28. A 10 cm sugarú, 15 kg tömegű tömör korong, a vízszintes helyzetű szimmetriatengelye körül, súrlódás nélkül forog-hat. A korong kerületén átvetett fonál egyik végére $m_1 = 10$ kg, a másik végére $m_2 = 7$ kg tömegű testet függesztünk.
Mekkora a korong szöggyorsulása?
(A korong tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)



Megoldás:

6.28. $m_1 = 10$ kg; $m_2 = 7$ kg; $m = 15$ kg; $r = 0{,}1$ m; $\Theta = 0{,}5 \cdot mr^2 = 0{,}075$ kgm^2.



A 6.27-nél leírtak alapján most az egyenletek:
(1) $K_1 \cdot r - K_2 \cdot r = \Theta \cdot \beta$;
(2) $m_1 \cdot g - K_1 = m_1 \cdot a$;
(3) $K_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$;
(4) $a = \beta \cdot r$.
A feltétel alapján az $a_1 = a_2 = a$. Az egyenletrendszert megoldva

$$\beta = 12{,}2 \ \frac{1}{s^2}.$$

6.29. A 20 kg tömegű, 20 cm sugarú, vízszintes helyzetű tömör korong függőleges tengely körül súrlódás nélkül forog $8\ \frac{1}{s}$ állandó szögsebességgel. A korong kerületén $m_1 = 1$ kg tömegű test van rögzítve.
Mekkora munka árán lehet az m_1 tömegű testet a forgástengelyhez behúzni?
(A súrlódástól tekintsünk el! A korong tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)



Megoldás:

6.29. $m = 20$ kg; $r = 0{,}2$ m; $\omega_0 = 8\ \frac{1}{s}$; $m_1 = 1$ kg; $\mu = 0$.
Egyrészt feltételezzük, hogy a testet belső erő húzza be, ekkor érvényes a perdületmegmaradás törvénye, másrészt a tömegközéppontba behúzott test tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható.
A kezdeti perdületet a korong és a peremén elhelyezett test perdülete adja: $N_0 = (\Theta + \Theta_1) \cdot \omega_0$, ahol $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = 0{,}4\ \text{kgm}^2$, és $\Theta_1 = m_1 \cdot r^2 = 0{,}04\ \text{kgm}^2$. A test behúzása után $N = \Theta \cdot \omega$. A fentiek alapján $N = N_0$, azaz $\Theta \cdot \omega = (\Theta + \Theta_1) \cdot \omega_0$, innen $\omega = 8{,}8\ \frac{1}{s}$, a forgás tehát felgyorsul.
A munkavégzés a forgási energiát növelte, a munkatételt alkalmazzuk:
$\underline{\underline{W}} = \Delta E_{\text{forg}} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 - \frac{1}{2}(\Theta + \Theta_1) \cdot \omega_0^2 = \underline{\underline{1{,}408\ \text{J}}}$.

6.30. Egy generátor forgórészének fordulatszáma $10\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

Mekkora a forgórész szögsebessége és körülfordulási ideje?

Megoldás:

6.30. $f = 10\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

Egyenletes forgást feltételezve: $\omega = 2\pi \cdot f = 62{,}8\ \frac{1}{\mathrm{s}}$; és $\underline{\underline{T}} = \frac{1}{f} = \underline{\underline{0{,}1\ \mathrm{s}}}$.

6.31. Egy 50 cm sugarú, függőleges tengely körül forgó, vízszintes korong szélére vasdarabot helyezünk. A vasdarab és a korong között a súrlódási együttható 0,1.

a) Milyen erők hatnak a vasdarabra?

b) Mekkora az a legkisebb fordulatszám, amelynél lecsúszik a vasdarab a korongról?

Megoldás:

6.31. $r = 0{,}5$ m; $\mu_0 = 0{,}1$.

Lásd 6.24. feladat gondolatmenetét!

a) A vasdarabra ható erők: nehézségi erő, a korong tartóereje és a tapadási súrlódási erő.

b) $f > 0{,}23 \frac{1}{s}$ esetén a vasdarab lecsúszik a korongról.

6.32. Mekkora munkavégzés árán pörgethető fel a játékautó lendkereke álló helyzetből $40\ \frac{1}{s}$ fordulatszámra, ha a lendkerék 1,5 cm sugarú, 25 g tömegű, henger alakú test?
(A henger tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)

Megoldás:

6.32. $\omega_0 = 0$; $f_t = 40\ \frac{1}{s}$; $m = 25 \cdot 10^{-3}$ kg; $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ kgm^2. A munkavégzés a lendkerék forgási energiáját növeli. $W = \Delta E_{forg} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega_t^2 - 0 = 8{,}8 \cdot 10^{-2}$ J, ahol $\omega_t = 2\pi \cdot f_t = 251{,}2\ \frac{1}{s}$. Az általunk végzett munka 0,088 J.

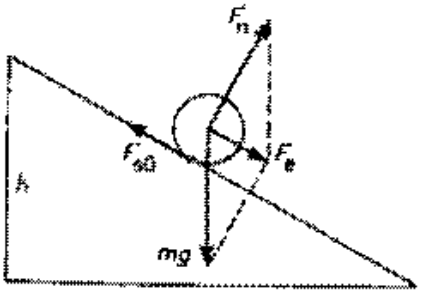
6.33. A h magasságú lejtőről elengedünk egy R sugarú gömböt. Mekkora sebességgel érkezik a gömb tömegközéppontja a lejtő aljához, ha csúszás nélkül gördül?

(A gömb tehetetlenségi nyomatéka a középponton átmenő tengelyre: $\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$.)

Megoldás:

6.33. $\Theta = \frac{2}{5} m R^2$; $v_{s0} = 0$; $\omega_0 = 0$; R; h.

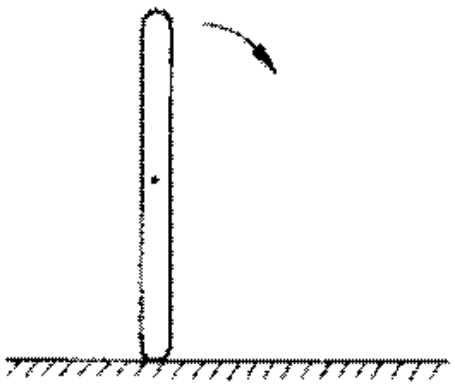
A feltételekből arra következtethetünk, hogy a gömb tömegközéppontja (S) egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást, a gömb pedig S körül egyenletesen változó forgást végez, a $\sum F$ és $\sum M$ is nullától különböző állandó értékek. A gömb kinetikus energiája így két tagból



áll: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$. Ennek változását a testre ható erők munkája hozza létre. A lejtő tartóereje nem végez munkát, mert merőleges az elmozdulásra. A súrlódási erő összes munkája a tiszta gördülés miatt szintén nulla, ugyanis: $W_{súrl} = -F_{s0} \cdot s + F_{s0} \cdot R \cdot \alpha$, itt $\alpha = \frac{s}{R}$, ebben s a lejtőn megtett út, α a szögelfordulás, behelyettesítve $W_{súrl} = 0$ adódik. A nehézségi erő munkája $W_{neh} = m \cdot g \cdot h$.

Ezek figyelembevételével a munkatétel alapján: $\Delta E_{kin} = m \cdot g \cdot h = m \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 - 0$, az $\omega = \frac{v}{R}$ és $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$ helyettesítésével a tömegközéppont sebessége $v = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h}$.

6.34. Sík talajon függőlegesen álló, 2 m hosszú, 12 kg tömegű gerenda úgy dől el, hogy közben a talajjal érintkező pontja nyugalomban marad.
Mekkora sebességgel ér a talajhoz a rúd felső pontja?



Megoldás:

6.34. $l = 2$ m; $m = 12$ kg.
Feltételezzük, hogy a rúd homogén, ekkor tömegközéppontja a talaj felett $\frac{l}{2}$-re van. A dőlés során a nehézségi erő $\underline{\underline{W = m \cdot g \cdot \frac{l}{2}}} = \underline{\underline{120\ \text{J}}}$ munkát végez. Ez a rúd forgási energiáját növeli. A kezdeti energiája nulla volt, így $W = \Delta E_{\text{forg}} = E_{\text{forg}} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$. Mivel $\Theta = \frac{1}{3} m \cdot l^2 = 16\ \text{kgm}^2$, $\omega = \frac{v}{l}$, mert a rúd felső pontja l sugarú pályán mozog, ezért $W = \frac{1}{2}\Theta \cdot \frac{v^2}{l^2}$, innen $\underline{\underline{v = 7{,}74\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.
A rúd tömegének ismerete nem szükséges a megoldáshoz, ugyanis $W = E_{\text{forg}}$-ba helyettesítve $m \cdot g \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} m \cdot l^2\right) \omega^2$, amit m-mel osztva m-től független egyenletet kapunk.

6.35. Mekkora az energiája a 3 t tömegű lendítőkeréknek, ha a tömegét a kerék peremében, 2 m átmérőjű körvonal mentén gondoljuk egyesítve, és fordulatszáma $1{,}2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$?

Megoldás:

6.35. $r = 1$ m; $f = 1{,}2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$; $m = 3000$ kg; $\Theta = m \cdot r^2 = 3000\ \mathrm{kgm}^2$, (a kerék tehetetlenségi nyomatéka alapján).

A lendítőkeréknek forgási energiája van, $E = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$. Itt $\omega = 2\pi \cdot f =$

$= 7{,}536\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, helyettesítés után $\underline{E = 8{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{J}}$.

6.36. Az 1,2 m átmérőjű, 600 kg tömegű, homogén tömegeloszlású tömör lendítőkerék fordulatszáma $2\ \frac{1}{s}$.

Mekkora a kerék forgási energiája?

(A lendítőkerék tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.)

Megoldás:

6.36. $r = 0{,}6$ m; $m = 600$ kg; $f = 2\ \frac{1}{s}$; $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = 108\ \text{kgm}^2$.

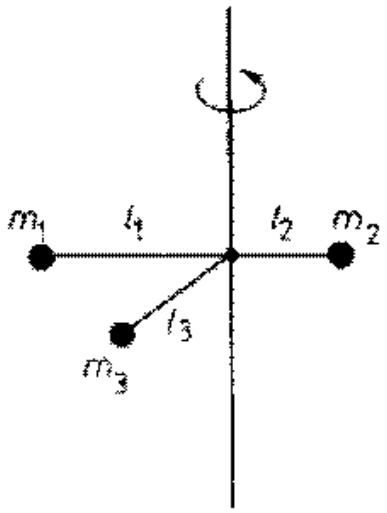
A forgási energia $E = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 = 8518{,}7$ J, ahol $\omega = 2\pi \cdot f = 12{,}56\ \frac{1}{s}$.

6.37. Egy kerekes kút 24 cm átmérőjű hengeréről lecsavarodó, elhanyagolható tömegű kötelet állandó, 12 N erő húz. A hengerkerék az indulástól számított 6 s alatt 24 $\frac{1}{s}$ szögsebességre gyorsul fel.
Mekkora a henger tehetetlenségi nyomatéka?

Megoldás:

6.37. $r = 0,12$ m; $F = 12$ N; $t = 6$ s; $\omega_0 = 0$; $\omega_t = 24\ \frac{1}{s}$.
A hengerre az állandó F erő állandó nyomatéka hat, ezért egyenletesen változó forgómozgást végez. Az alapegyenlet $\sum M = \Theta \cdot \beta$, ahol most $\sum M = F \cdot r = 1,44$ Nm, $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_t}{t} = 4\ \frac{1}{s^2}$. Helyettesítés és rendezés után $\underline{\Theta = 0,36\ \text{kgm}^2}$.

6.38. Függőleges tengelyből vízszintes síkban kiinduló, három darab, elhanyagolható tömegű pálca végére egy-egy kis méretű testet erősítünk.
Mekkora a három testből álló rendszer tehetetlenségi nyomatéka?
(Legyen
$m_1 = 5$ g; $m_2 = 8$ g;
$m_3 = 4$ g; $l_1 = 12$ cm;
$l_2 = 6$ cm; $l_3 = 8$ cm!)



Megoldás:

6.38. $m_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ kg; $m_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ kg; $m_3 = 4 \cdot 10^{-3}$ kg; $l_1 = 12 \cdot 10^{-2}$ m; $l_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ m; $l_3 = 8 \cdot 10^{-2}$ m.
A rendszer tehetetlenségi nyomatéka az egyes testek tehetetlenségi nyomatékainak összege: $\underline{\underline{\Theta}} = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2 + m_3 \cdot l_3^2 =$
$= \underline{\underline{1{,}264 \cdot 10^{-4}\ \text{kgm}^2}}$.

7.1. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A) A nem gyorsuló űrhajó szükségképpen a súlytalanság állapotában van.

B) Ha a Holdat leállítaná valami a Föld körüli keringésben, akkor leesne a Földre.

C) A tömeg és súly lényegében azonos fogalmak, csak a súly közelítőleg tízszerese a tömegnek.

D) A súlytalanság állapotában lévő testnek nincs lendülete.

E) A gravitációs állandó (γ) értéke a Marson tizedrésze a Cavendish által a Földön mért értéknek, mert a Mars tömege a Föld tömegének tizedrésze.

F) A súlytalanság állapotában levő űrhajóban nem lehet higanyos barométerrel nyomást mérni.

Választásunkat indokoljuk!

Megoldás:

7.1. A Hibás (súlytalanságban $a = g$).

B Helyes (a Föld és Hold közötti gravitációs erő hatására, mivel akkor nem volna erre az erőre merőleges sebessége, a Hold a Föld irányába indulna el és „leesne" a Földre).

C Hibás. (Arányosak egymással, de nem azonos jellegű fizikai mennyiségek. A súly vektormennyiség, a tömeg nem.)

D Hibás (sebessége és tömege is van, tehát van lendülete).

E Hibás (γ univerzális állandó, nem függ a testek tömegétől).

F Helyes. (A higanyos barométerben adott magasságú higanyoszlop súlyából származó nyomás tart egyensúlyt a gáz nyomásával.)

7.2. *Válaszoljunk a kérdésekre!*

A mesterséges holdakat általában nyugat felől keleti irányba bocsátják fel.

a) Mi ennek az oka?

b) Miért az egyenlítő mentén leggazdaságosabb fellőni a mesterséges holdakat?

Megoldás:

7.2. a) A Föld is nyugatról keletre forog, így az ebből adódó kerületi sebesség hozzáadódik a kilövési sebességhez.

b) A kerületi sebesség itt a legnagyobb.

7.3. Írjunk le két eljárást, mellyel a Föld körül keringő űrhajóban is meg lehet mérni egy test tömegét!

Megoldás:

7.3. 1. Adott rugóállandójú rugóra rögzítve a testet, a rezgésidő mérésével a tömeg meghatározható: $T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow m = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2}$. (Ha a rugóállandó nem ismert, akkor először egy ismert tömeg segítségével a rugóállandót meg kell határozni.)

2. Egy rugós kilövőszerkezet ismert energiával lő ki egy tárgyat. Ezt az energiát a rugóállandó és az összenyomás mértéke határozza meg. Ez az energia a test mozgási energiájává alakul át. Az út és az idő méréséből a sebesség meghatározható, így a mozgási energiából: ($E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2$) a tömeg kiszámítható.

7.4. Mozoghat-e a mesterséges hold olyan stabil pályán, amelynek a síkja nem megy át a Föld középpontján? Miért?

Megoldás:

7.4 Nem. A műholdra ható gravitációs erő tartja a műholdat a pályáján, ez az erő pedig Kepler törvénye szerint csak a pálya síkjában lehet.

7.5. Mekkora erővel vonzza egymást két, 50 kg tömegű golyó, ha tömegközéppontjaik között 50 cm a távolság?

Megoldás:

7.5. Alkalmazzuk a gravitációs tömegvonzás törvényét.

$m_1 = m_2 = 50\ \text{kg};\quad r = 0{,}5\ \text{m};\quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$

$$\underline{\underline{F}} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \underline{\underline{6{,}67 \cdot 10^{-7}\ \text{N}}}.$$

7.6. Két, azonos tömegű test 10 m távolságból 1 N erővel vonzza egymást.
Mekkora a tömege ezeknek a testeknek?

Megoldás:

7.6. Alkalmazzuk a gravitációs tömegvonzás törvényét.

$m_1 = m_2 = m$; $r = 10$ m; $F = 1$ N; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

$$F = \gamma \frac{m^2}{r^2} \rightarrow \underline{\underline{m}} = \sqrt{\frac{Fr^2}{\gamma}} = \underline{\underline{1{,}22 \cdot 10^6 \text{ kg}}}.$$

7.8. 20 kg tömegű, homogén anyageloszlású ólomgömb tömegközéppontjától 25 cm távolságban m tömegű matematikai inga függ.
Mekkora gyorsulással indul el az m tömegű test az ólomgömb felé, ha megszüntetjük a rögzítést?

Megoldás:

7.8. A homogén tömegeloszlású ólomgömb úgy viselkedik, mintha az összes tömege a tömegközéppontjában lenne. Az ólomgömbből származó gravitációs erő indítja el az m tömegű ingát.

$M = 20\ \text{kg};\quad r = 0{,}25\ \text{m};\quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$

$$\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a \rightarrow \underline{\underline{a = 2{,}13 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

7.9. Két, egyenlő tömegű és sugarú golyó közötti távolság felezési pontjában egy harmadik golyó áll.
Ha feltesszük, hogy csak a három test közötti gravitációs erőhatás érvényesül, akkor biztos, bizonytalan, vagy közömbös-e a harmadik golyó egyensúlyi állapota? Miért?

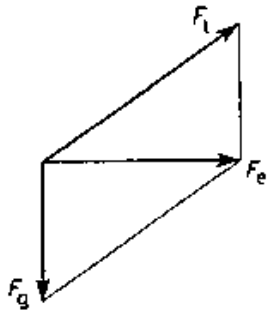
Megoldás:

7.9. Bizonytalan (labilis), mert ha ebből az állapotból elmozdul az egyik golyó felé, akkor ez a golyó nagyobb gravitációs vonzóerővel hat rá, mint a másik, így abba az irányba fog gyorsulni, amerre elmozdult.

7.10. Repülhet-e vízszintes irányban 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással egy repülőgép, ha a benne ülő utasoknak a Föld felületén mért súlyuk kétszeresénél nagyobb erőt nem szabad érezniök? Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

7.10. A utasra ható erők eredőjének kell biztosítania a 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ vízszintes irányú gyorsulást. A gravitációs erő ismeretében a másik összetevő (F_t) megszerkeszthető.



$a = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $F_t \leq 2m \cdot g$; $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$F_t = \sqrt{(m \cdot a)^2 + (m \cdot g)^2} = m\sqrt{a^2 + g^2} = m \cdot 18{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$18{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} < 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, tehát repülhet vízszintes irányú $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással.

7.11. A Nap tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg. Mekkora a keringési ideje a Nap körül 220 millió km távolságban keringő Erosz bolygónak?

Megoldás:

7.11. A Nap és az Erosz közötti gravitációs vonzóerő biztosítja az Erosz keringéséhez szükséges centripetális erőt.

$$M = 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg};\quad r = 2{,}2 \cdot 10^{11}\ \text{m};\quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}.$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = mr\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{r^3}} = 1{,}12 \cdot 10^{-7}\ \frac{1}{s}.$$

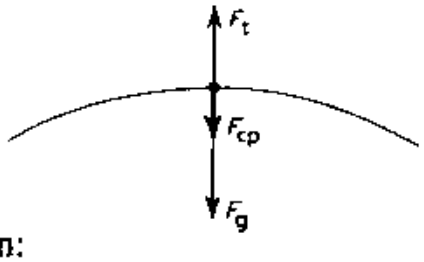
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega} = 5{,}611 \cdot 10^{7} s \approx \underline{\underline{649\ \text{nap}}}.$$

7.12. Mekkora annak a bolygónak a közepes sűrűsége, amelynek az egyenlítőjén a testek súlya 2,5%-kal kisebb, mint a sarkokon?
(A nap hossza 27,7 óra, a bolygó alakja szabályos gömb.)

Megoldás:

7.12. $T = 9{,}972 \cdot 10^4$ s; $2{,}5\%(F_t + 0{,}025 \cdot F_g = F_g)$;
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

Az egyenlítőn lévő test egyenletes körmozgását a rá ható gravitációs erő és tartóerő biztosítja. A tartóerő az alátámasztás által a testre ható erő és ez Newton III. törvénye szerint egyenlő nagyságú (és ellentétes irányú) a test által az alátámasztásra ható erővel, vagyis a test súlyával.



(1) $F_g - F_t = F_{cp}$.
A tartóerő 2,5%-kal kisebb, mint a sarkokon:
(2) $F_t = 0{,}975 \cdot F_g$.
Az (1) és (2) együttesen:
$0{,}025 \cdot F_g = F_{cp}$.

$$0{,}025 \cdot \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Egyszerűsítés, majd $v = \dfrac{2r\pi}{T}$ helyettesítés után a bolygó sűrűsége $\dfrac{M}{\frac{4r^3\pi}{3}}$ az összefüggésből kifejezhető:

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4r^3\pi}{3}} = \frac{3\pi}{0{,}025\gamma T^2} = \underline{\underline{568{,}1 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}.$$

7.13. Határozzuk meg a Föld tömegét és átlagos sűrűségét, ha a Föld sugara 6370 km, felszínén a gravitációs gyorsulás középértéke 9,81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és alakja szabályos gömb!

Megoldás:

7.13. $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

A Föld felszínén a gravitációs gyorsulás a gravitációs tömegvonzás következménye.

$$\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \rightarrow M = \frac{g \cdot r^2}{\gamma} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}.$$

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4r^3\pi}{3}} = 5516{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

7.14. Mekkora a nehézségi gyorsulás a földfelszín felett 50 km magasságban?

(A nehézségi gyorsulás a Föld felszínén 9,81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a Föld sugara 6370 km.)

Megoldás:

7.14. $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $h = 5 \cdot 10^4$ m; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Az M tömegű Föld és a h magasságban lévő m tömegű test tömegközéppontjainak távolsága $r+h$. Gyorsulását a Föld gravitációs vonzóereje okozza.

$$\gamma \frac{Mm}{(r+h)^2} = mg_h;\quad \underline{\underline{g_h = \gamma \frac{M}{(r+h)^2} = 9{,}71\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

7.15. Mekkora a gravitációs vonzóerő a Föld és a Nap között, ha a Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Nap tömege $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, a távolságuk $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m?

Megoldás:

7.15. $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m;

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Alkalmazzuk a gravitációs tömegvonzás törvényét.

$\underline{\underline{F}} = \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = \underline{\underline{3{,}54 \cdot 10^{22} \text{ N}}}$.

7.16. Mekkora a gravitációs vonzóerő a Föld és a Hold között, ha a Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Hold tömege $7{,}5 \cdot 10^{22}$ kg, a távolságuk 384 000 km?

Megoldás:

7.16. $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $m = 7{,}5 \cdot 10^{22}$ kg; $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m;

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Alkalmazzuk a gravitációs tömegvonzás törvényét.

$\underline{\underline{F}} = \gamma \dfrac{M \cdot m}{r^2} = \underline{\underline{2{,}04 \cdot 10^{20}\ \text{N}}}$.

7.17. Mekkora gravitációs vonzóerő hat egy 60 kg tömegű és egy 80 kg tömegű ember között, ha egymástól 0,5 m-re állnak?

Megoldás:

7.17. $m_1 = 60$ kg; $m_2 = 80$ kg; $r = 0{,}5$ m; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

Alkalmazzuk a gravitációs tömegvonzás törvényét.

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 1{,}28 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

7.18. A Hold tömege a Föld tömegének 0,012-szerese. Hová kellene elhelyezni a Hold és a Föld tömegközéppontjait összekötő egyenes mentén az m tömegű, pontszerű testet, hogy a Hold, illetve a Föld azonos nagyságú gravitációs erővel hasson rá?

Megoldás:

7.18. $m_H = 0{,}012 m_F$; A Föld–Hold távolság: l.

Az adott helyen lévő m tömegű testre a Föld illetve a Hold által ható gravitációs vonzóerő egyenlő.

$\gamma \frac{m_F \cdot m}{(l-x)^2} = \gamma \frac{m_H \cdot m}{x^2}$. A távolságok aránya ebből kifejezhető:

$$\frac{x}{l-x} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{0{,}012} = \underline{\underline{0{,}109}},$$ a Holdhoz közelebb.

7.19. A Vénusz tömege 0,8-szerese a Föld tömegének, sugara kb. megegyezik a Föld sugarával.
Mekkora a gravitációs gyorsulás a Vénusz felszínén?

Megoldás:

7.19. $m_V = 0{,}8 \cdot m_F$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$; $g_F = 9{,}81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$.

A Vénusz felszínén a gravitációs gyorsulást a gravitációs tömegvonzás törvénye határozza meg.

$$\gamma \frac{m_V \cdot m}{r^2} = m \cdot g_V \rightarrow g_V = \frac{0{,}8 \cdot \gamma \cdot m_F}{r^2} = 0{,}8 \cdot g_F = \underline{\underline{7{,}85 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}}.$$

7.20. A Nap sugara 700 000 km. Felszínén a gravitációs gyorsulás 274 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Mekkora a Nap tömege és átlagos sűrűsége?

Megoldás:

7.20. $r = 7 \cdot 10^8$ m; $g_N = 174 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

A Nap felszínén a gravitációs gyorsulást a gravitációs tömegvonzás okozza.

$$\gamma \frac{M_N \cdot m}{r^2} = m \cdot g_n \rightarrow \underline{\underline{M_N}} = \frac{g_N \cdot r^2}{\gamma} = \underline{\underline{2{,}01 \cdot 10^{30} \text{ kg}}}.$$

$$\underline{\underline{\varrho}} = \frac{M_N}{V} = \frac{M_N}{\frac{4r^3\pi}{3}} = \underline{\underline{1401{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}.$$

7.21. Mekkora volt az átlagos kerületi sebessége és a szögsebessége a Föld első mesterséges holdjának, ha egy fordulatot 5770 s alatt tett meg?

Megoldás:

7.21. $T = 5770$ s; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Az egyenletes körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a gravitációs erő biztosítja.

$$F_g = F_{cp}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}09 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}}$$

$$\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot r \cdot \omega^2 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M}{\omega^2}} = 6{,}96 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

$$\underline{\underline{v_k = r \cdot \omega = 7564 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

7.22. Milyen magasan kering a Föld felszíne felett az a mesterséges hold, amely mindig a földi egyenlítő ugyanazon pontja fölött látható?

Megoldás:

7.22. $T = T_F = 86\,400$ s; $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg;
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

ld. 7.21.

$f = \frac{1}{T} = 0{,}115\,741 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$.

$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M}{4\pi^2 f^2}} = 4{,}231\,18 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 42312 \text{ km}$.

$\underline{\underline{h}} = r - R = \underline{\underline{35\,942 \text{ km}}}$.

7.23. Mekkora lenne az első kozmikus sebesség egy olyan bolygón, amelynek a sugara és a tömege kétszerese a Földének? (A Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, sugara 6370 km.)

Megoldás:

7.23. $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a gravitációs vonzóerő biztosítja.

$$\gamma \frac{2M \cdot m}{(2r)^2} = m\frac{v^2}{2r} \rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \underline{\underline{7926{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

Megegyezik a Föld első kozmikus sebességével. $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg-mal számolva, a pontosabb értéket kapjuk: $v = 7906{,}4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

7.24. Mekkora lenne az első kozmikus sebesség egy olyan bolygón, amelynek a tömege megegyezik a Föld tömegével, a sugara pedig feleakkora, mint a Földé?

Megoldás:

7.24. $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m; $\gamma = 6{,}37 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

ld. 7.23.

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma \cdot M}{r}} = \underline{\underline{11\,209 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}.$$

7.25. A Merkur távolsága a Naptól a Föld–Nap-távolság 38,7%-a. Mennyi ideig tart egy Merkur-év?

Megoldás:

7.25. $r_1 = 0{,}387 \cdot r_2$; $T_2 = 365$ nap; $r_2 = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.
Alkalmazzuk Kepler III. törvényét.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{(0{,}387 \cdot r_2)^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{365^2} \rightarrow T_1 = 87{,}87 \text{ nap} \approx \underline{\underline{88 \text{ nap}}}.$$

7.26. Mennyivel csökkenti a 650 t tömegű vasúti szerelvény súlyát a Hold tömegvonzása akkor, amikor a Hold éppen a szerelvény fölött van?
(A Hold tömege $7{,}5 \cdot 10^{22}$ kg, a Föld–Hold távolság 384 000 km.)

Megoldás:

7.26. $m = 6{,}5 \cdot 10^5$ kg; $M = 7{,}5 \cdot 10^{22}$ kg; $r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m;
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.
A szerelvény súlya a Hold által rá ható gravitációs erővel lesz kisebb.
$F = \gamma \dfrac{m \cdot M}{r^2} = 22{,}05$ N-nal csökken.

7.27. A nehézségi gyorsulás vektora változik a Föld különböző helyein és általában különbözik az általános tömegvonzási törvény szerinti gravitációs gyorsulásvektortól.

a) Mi az oka a különbségeknek?

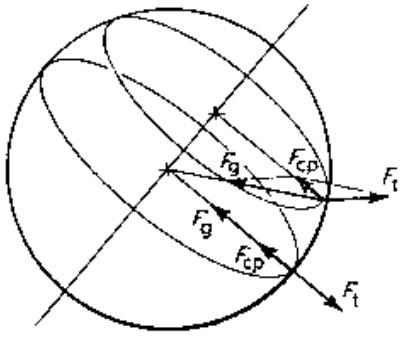
b) A Föld mely pontjain azonosak a vektorok?

Megoldás:

7.27. **a)** A Föld forgása miatt a testek a felszínen egyenletes körmozgást végeznek, így a gravitációs erő és a tartóerő eredője a centripetális erő.

$\vec{F}_g + \vec{F}_t = \vec{F}_{cp} \rightarrow \vec{F}_t = \vec{F}_{cp} - \vec{F}_g$.

A centripetális erő függ a sugártól, tehát a Föld különböző szélességi körein más és más az értéke. Így a nehézségi gyorsulás a gravitációs törvényből számított gyorsulástól különböző általában.



b) Mindenütt különbözőek.

(A szimmetrikus helyeken is más az irányuk.)

7.28. Mekkora a súlya az egyenlítő mentén K–Ny irányban, illetve Ny–K irányban 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó 1000 t tömegű tartályhajónak?
(A Föld sugara 6370 km.)

Megoldás:

7.28. $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $m = 10^6$ kg; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $T = 8{,}64 \cdot 10^4$ s.

A Föld nyugatról keletre forog, ezért a NY–K irányban haladó hajó sebessége hozzáadódik, a K–NY irányban haladó hajó sebessége levonódik a Föld kerületi sebességéből.

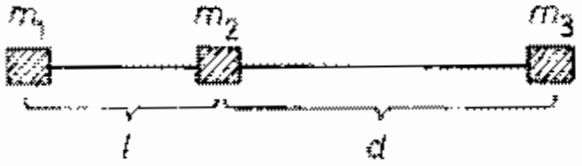
$v_k = \frac{2r \cdot \pi}{T} = 463\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_1 = v_k + v = 473\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = v_k - v = 453\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

ld. 7.12.

$\underline{\underline{F_{t_1}}} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} - m\frac{v_1^2}{r} = \underline{\underline{9\,827\,650\ \text{N}}}$;

$\underline{\underline{F_{t_2}}} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} - m\frac{v_2^2}{r} = \underline{\underline{9\,830\,535\ \text{N}}}$.

7.29. Az ábra szerinti elrendezésben elhelyezkedő pontszerű testek tömege: $m_1 = 60$ g, $m_2 = 50$ g, $m_3 = 30$ g, a tömegek távolsága pedig: $l = 10$ cm, $d = 20$ cm.



a) Mekkora vonzóerőt fejt ki együttesen az m_1 és az m_2 az m_3 tömegű testre?

b) Hová kell elhelyezni az m_3-at, hogy a reá ható gravitációs erők eredője zérus legyen?

Megoldás:

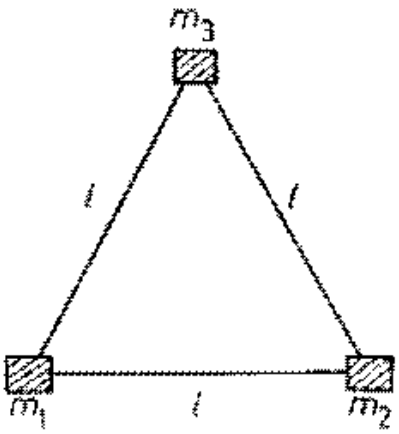
7.29. $m_1 = 0{,}06$ kg; $m_2 = 0{,}05$ kg; $m_3 = 0{,}03$ kg; $l = 0{,}1$ m; $d = 0{,}2$ m; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

a) A gravitációs vonzóerők összege:

$$F = F_1 + F_2 = \gamma \frac{m_1 \cdot m_3}{(l+d)^2} + \gamma \frac{m_2 \cdot m_3}{d^2} = \underline{3{,}84 \cdot 10^{-12}\ \text{N}}.$$

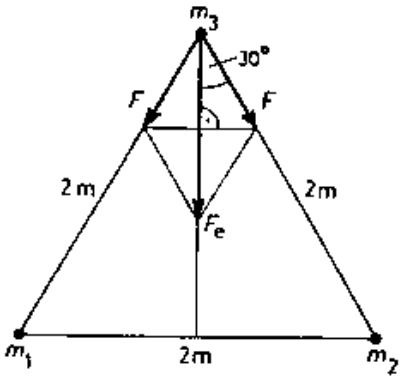
b) $F_1 = F_2$; $\gamma \dfrac{m_1 \cdot m_3}{x^2} = \gamma \dfrac{m_2 \cdot m_3}{(l-x)^2} \rightarrow x = 0{,}0523$ m $\approx \underline{5{,}2\ \text{cm}}$-re az m_1 tömegű testtől.

7.30. Az ábra szerinti elrendezésben elhelyezett három, pontszerű test tömege $m_1 = m_2 = 5$ kg, $m_3 = 3$ kg és $l = 2$ m.
Mekkora és milyen irányú az m_1 és az m_2 tömegű testek által az m_3 tömegű testre kifejtett gravitációs erők eredője?



Megoldás:

7.30. $m_1 = m_2 = m = 5$ kg; $m_3 = 3$ kg; $l = 2$ m; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.



A szimmetria miatt az m_1 és m_2 tömegű testektől származó gravitációs erők nagysága megegyezik.

$\underline{\underline{F = \gamma \dfrac{m_1 \cdot m_3}{l^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{N}}}$.

Az erők eredője az ábra alapján:

$F_e = 2F \cdot \cos 30° = 4{,}33 \cdot 10^{10}$ N és merőleges az $m_1 - m_2$ szakaszra.

7.31. Egy bolygó egyenlítőjén a testek súlya fele a sarkokon mért súlynak. A bolygó közepes sűrűsége $3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, alakja gömb.

Mennyi ideig tartana ezen a képzelt bolygón egy nap?

Megoldás:

7.31. $F_t = \frac{1}{2} F_g$; $\varrho_B = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

$F_g - F_{cp} = \frac{1}{2} F_g \rightarrow F_{cp} = \frac{1}{2} F_g$; $m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{2} \gamma \frac{m_B \cdot m}{r^2}$.

$v = \frac{2r\pi}{T}$ helyettesítéssel átalakítható úgy, hogy $\varrho_B = \frac{m_B}{\frac{4r^3\pi}{3}}$ kifejezés megjelenjen:

$\frac{2\frac{4r^2\pi^2}{T^2}}{r} = \gamma \frac{m_B}{r^2}$; $\frac{6\pi}{T^2} = \gamma \frac{m_B}{\frac{4r^3\pi}{3}} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \sqrt{\frac{6\pi}{\gamma \varrho_B}} = 9{,}70324 \cdot 10^3 \text{ s} = \underline{\underline{2{,}7 \text{ h}}}$.

7.32. Milyen hosszúnak kellene lennie a napnak a Földön, hogy a testek az egyenlítőn súlytalanok legyenek?

Megoldás:

7.32. $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

$$F_t = F_g - F_{cp} = 0; \quad F_g = F_{cp}.$$

$$\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = 7926{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$v = \frac{2r \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2r \cdot \pi}{v} = 5047 \text{ s} = \underline{1{,}4 \text{ h}}.$$

7.33. Hányszorosa a két elektron között fellépő elektromos taszítóerő a gravitációs vonzóerőnek?

$$\left(k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}, \quad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}, \right.$$

$$\left. \frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}. \right)$$

Megoldás:

7.33. $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$; $\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$.

A két erő hányadosa:

$$\underline{\underline{\frac{F_{el}}{F_g}}} = \frac{\frac{ke^2}{r^2}}{\gamma \frac{m^2}{r^2}} = \frac{k}{\gamma}\left(\frac{e}{m}\right)^2 = \underline{\underline{4{,}37 \cdot 10^{42}}}.$$

$4{,}37 \cdot 10^{42}$-szerese az elektromos erő a gravitációs erőnek.

7.34. Egy mesterséges bolygónak a Föld felszínéhez közeli körpályára juttatásakor $3{,}2 \cdot 10^{10}$ J munkát végeztek. A Föld sugara 6370 km.
Mekkora a mesterséges bolygó tömege?

Megoldás:

7.34. $W = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ J; $r = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m; $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg;
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

A felszínhez közeli pálya esetén a mesterséges bolygó helyzeti energiája nem változik számottevően. Így a munka a mozgási energiáját növeli: $W = \dfrac{1}{2} m \cdot v^2$.

Körpálya esetén: $F_{cp} = F_g$; $m \dfrac{v^2}{r} = \gamma \dfrac{m \cdot M}{r^2}$.

Átalakítva:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r}; \quad W = \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{2r} \rightarrow \underline{\underline{m}} = \frac{2r \cdot W}{\gamma \cdot M} = \underline{\underline{1018{,}7 \text{ kg}}}.$$

8.1. IGEN *vagy* NEM *válaszok valamelyikét írjuk a táblázat utolsó oszlopába! Igen válasz esetén bizonyítsuk állításunkat!*

Egy harmonikus rezgőmozgás adataiból ismertnek tekintjük azokat, amelyeket x-szel jelöltünk. Meghatározhatók-e ezen adatok felhasználásával a harmonikus rezgőmozgás többi jellemzői?

Eset	A	f	ω	T	v	a	y	φ	Válasz
1.			x		x			x	
2.	x				x		x		
3.	x	x		x					
4.		x		x			x		
5.	x					x		x	

Megoldás:

8.1. A kitérés, a sebesség és a gyorsulás ismeretén ezek függvényének ismeretét értjük az idő függvényében ($y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$).
$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.
Így bármelyik megadása esetén az A, ω és φ adatokat is ismerjük.

1. eset: igen, v ismerete miatt y és a felírható, T és f pedig $\omega = \frac{2\pi}{T} =$
$= 2\pi f$-ből kiszámítható.

2. eset: igen, hasonlóan v ismerete miatt.

3. eset: nem, mert x, v, a függvénye nem írható fel φ nélkül.

4. eset: igen, y ismerete miatt.

5. eset: igen, a ismerete miatt.

8.2. Harmonikus rezgőmozgásnál tetszőlegesen adhatjuk-e meg az x-szel jelölt adatokat?

Eset	A	f	ω	T	D	m	Válasz
1.		x		x	x	x	
2.			x		x	x	
3.	x		x			x	
4.	x				x	x	

Esetenként indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

8.2. *1.* Nem, mert f és T nem független: $f = \frac{1}{T}$.

2. Nem, mert $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

3. Igen, mert A, ω és m függetlenek egymástól.

4. Igen, mert A, D és m függetlenek egymástól.

8.3. *Válasszuk ki a* HELYES *feltételt!*

Mi a harmonikus rezgőmozgás kialakulásának dinamikai feltétele?

A) A kitérés az időnek szinuszos függvénye legyen!

B) A rendszer potenciális és kinetikai energiáinak összege állandó legyen!

C) A sebesség az időnek koszinuszos függvénye legyen!

D) A kitéréssel egyenesen arányos, azzal ellentétes irányú legyen a testre ható erők eredője!

E) A test gyorsulása a kitéréssel egyenesen arányos és azzal ellentétes irányú legyen!

Megoldás:

8.3. **D a helyes, mert** $\sum F = -D \cdot x$.

8.4. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Igazak-e a harmonikus rezgőmozgásra a következő állítások?

A) A kitérés az időnek szinuszos függvénye.
B) A testre ható erő ellentétes irányú a kitéréssel.
C) A gyorsulás az időnek szinuszos függvénye.
D) A sebesség az egyensúlyi helyzeten történő áthaladáskor maximális.
E) A testre ható erők eredője ellentétes irányú a kitéréssel.

Megoldás:

8.4. ***A)*** **Igaz,** $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

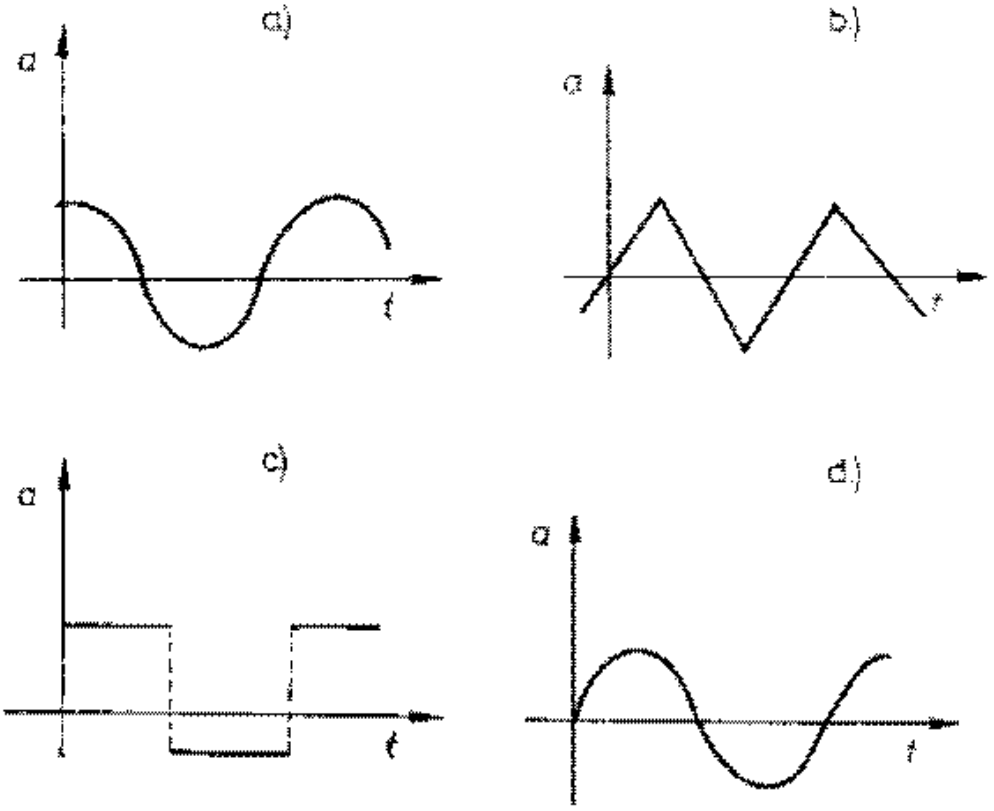
B) Hamis, mert az eredő erőre igaz, de külön-külön az egyes erőkre nem.

C) Igaz, $a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

D) Igaz, mert $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$, $x = 0$ esetén v maximális, $v_{max} = A \cdot \omega$.

E) Igaz, mert $\sum F = -Dx$.

8.5. Az alábbi grafikonok közül melyek lehetnek harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulás–idő grafikonjai? *Igazoljuk állításunkat!*



Megoldás:

8.5. a) Igen, mert a gyorsulás az időnek szinuszos függvénye.

$\varphi = -90° = -\frac{\pi}{2}$.

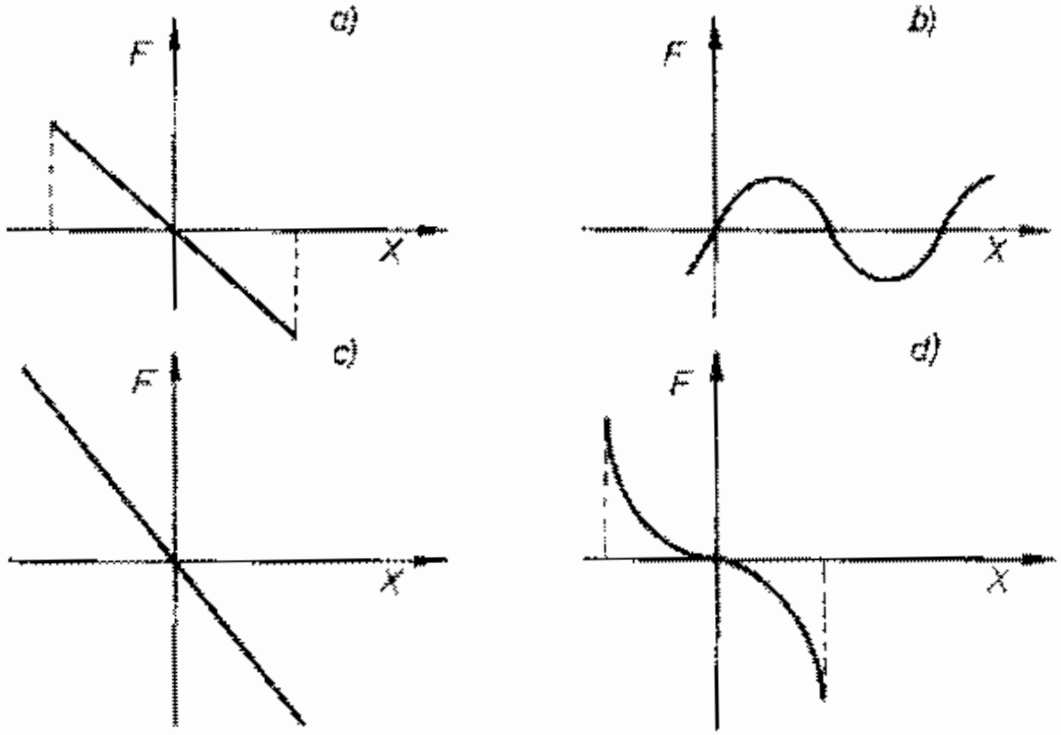
$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Nem, ld. *a*).

c) Nem, ld. *a*).

d) Igen, $\varphi = 180°$, $a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi)$.

8.6. A grafikonon erő–kitérés függvényeket ábrázoltunk.



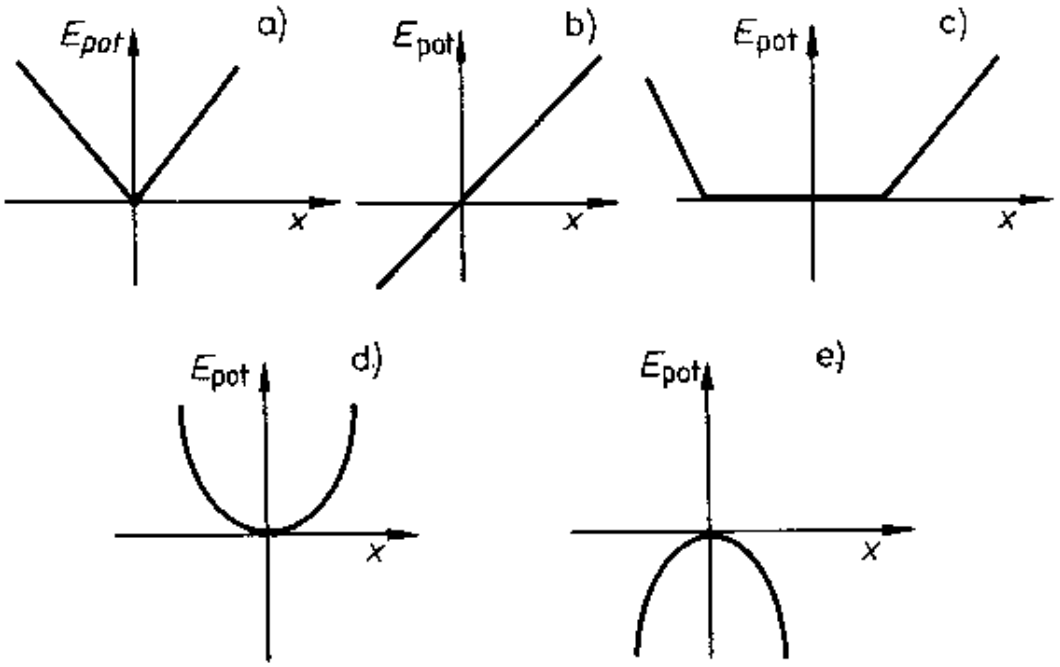
a) Melyik lehet a rezgőmozgás erő–kitérés grafikonja?
b) Ezek közül melyek lehetnek a harmonikus rezgőmozgás grafikonjai?
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

8.6. **a)** *a*) és *d*) grafikon, mert rezgőmozgás esetén a test két szélső helyzet között periodikusan mozog.

b) Csak az *a*) grafikon, mert $\sum F = -D \cdot x$, és van az erőnek maximuma és minimuma.

8.7. A grafikonokon a potenciális (rugalmas) energiát ábrázoltuk a kitérés függvényében.
Melyik a harmonikus rezgőmozgásra vonatkozó grafikon?
Igazoljuk állításunkat!



Megoldás:

8.7. **d)** grafikon, mert $E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$, a grafikon parabolaív.

8.8. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

Miről ismerhető fel egy rezgésre képes testen a rezonancia jelensége?
Mi a kapcsolat ekkor a test sajátfrekvenciája és a gerjesztő frekvencia között?

Megoldás:

8.8. Rezonancia akkor jön létre, ha a test sajátfrekvenciája megegyezik a gerjesztő frekvenciával. Ilyenkor az amplitúdó megnő.

8.9. Csavarrugóra függesztett test harmonikus rezgőmozgást végez. A mozgására jellemző következő vektormennyiségek közül melyek azok, amelyek egymáshoz viszonyítva egyirányúak, ellentétes irányúak, illetve hol egyirányúak, hol ellentétes irányúak?

a) Az eredő erő és a gyorsulás.
b) Az eredő erő és a kitérés.
c) Az eredő erő és a sebesség.
d) A gyorsulás és a kitérés.
e) A gyorsulás és a sebesség.
f) A kitérés és a sebesség.

Megoldás:

8.9. a) Egyirányúak, $\sum F = m \cdot a$.

b) Ellentétes irányúak, $\sum F = -D \cdot x$.

c) Negyed periódusonként azonos, majd ellentétes irányúak.

d) Ellentétes irányúak, $a = -\omega^2 \cdot x$.

e) Negyed periódusonként azonos, majd ellentétes irányúak.

f) Negyed periódusonként azonos, majd ellentétes irányúak.

8.10. *Válaszoljunk az alábbi kérdésre!*

Egy rezgésbe hozott hangvilla kézben tartva vagy rezonanciaszekrényen állva rezeg tovább? Miért?

Megoldás:

8.10. A szekrény nélküli hangvilla tovább rezeg, mert hosszabb idő alatt adja át energiáját a környezetnek.

8.11. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz, a kettő között ok-okozati összefüggés van.

B) Az állítás igaz, az indoklás igaz, de a kettő között nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, de az indoklás nem igaz.

D) Az állítás nem igaz, de az indoklás önmagában igaz.

E) Az állítás nem igaz, az indoklás sem igaz.

1. A hang, a fény, a röntgensugárzás és a γ-sugárzás hullám, mert mindegyik rugalmas közegben terjed.
2. A hang, a fény, a röntgensugárzás és a γ-sugárzás hullám, mert kimutatható, hogy visszaverődnek, megtörnek, interferálnak és résen áthaladva elhajlanak.
3. A hang, a fény, a röntgensugárzás, a γ-sugárzás hullám, mert az azonos fázisállapotban lévő pontok egyenlő (hullámhossznyi) távolságban vannak egymástól.

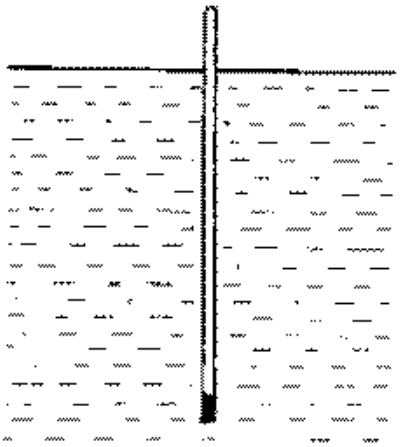
Megoldás:

8.11. *1. C*), mert a fény, a röntgen és a gammasugárzás vákuumban is terjed.

2. A), rendelkeznek a hullámtulajdonságokkal.

3. B), nem ezért hullámok.

8.12. Hosszú, vékony üvegcső alját ólomsúllyal zárjuk le. A vízen úgy úszik, hogy függőleges helyzetben a vége néhány cm-rel a víz fölött van. Ha a csövet kicsit kibillentjük az egyensúlyi helyzetből, harmonikus rezgőmozgást végez. A kiálló rész



két szélső helyzete közötti távolság kezdetben 6 cm, maximális gyorsulása 0,15 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Mekkora a rezgés periódusideje?

Megoldás:

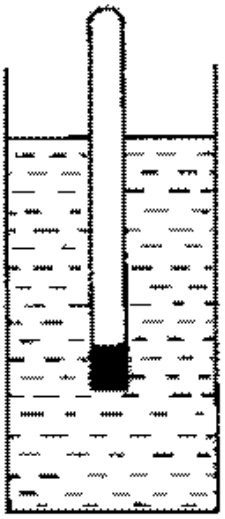
8.12. $2A = 0,06$ m; $A = 0,03$ m; $a_{\max} = 0,15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = \sqrt{5}\ \frac{1}{\text{s}}.$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2,81\ \text{s}}}.$$

8.13. Az alsó végén megterhelt és a terhelésnél zárt cső vízzel töltött edényben, függőleges helyzetben úszik. A csövet függőlegesen benyomjuk kissé a vízbe, majd hirtelen elengedjük.
Milyen mozgást végez a cső, ha a víz ellenállásától eltekintünk?

Bizonyítsuk állításunkat!



Megoldás:

8.13. Be lehet látni, hogy a csőre ható erők eredője a kitéréssel egyenesen arányos és azzal ellentétes irányú, tehát a mozgása harmonikus rezgőmozgás.
A csőre a gravitációs és a felhajtóerő hat.
Egyensúlyi helyzet esetén: $m \cdot g = \varrho_{víz} \cdot g \cdot V_{bem}$.
$V_{bem} = A \cdot h$.
x kitérés esetén: $\sum F = m \cdot g - \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot (h + x) = \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot h -$
$- \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot h - \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot x = \underline{\underline{-(\varrho_{víz} \cdot g \cdot A) \cdot x}}$.

8.14. Egy rezgésbe hozott hangvilla pontjai harmonikus rezgőmozgást végeznek 320 Hz frekvenciával. Egyik pontjának a maximális kitérése 0,5 mm.

a) Mekkora ennek a pontnak a maximális gyorsulása?

b) Mekkora utat tenne meg egy álló helyzetből induló test 1 s alatt ezzel a gyorsulással?

Megoldás:

8.14. $f = 320$ Hz; $A = 5 \cdot 10^{-4}$ m.

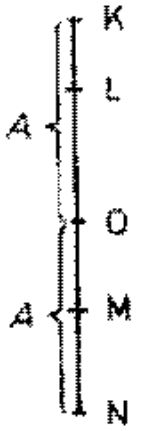
● $\underline{a_{max}} = A \cdot \omega^2 = A \cdot 4\pi^2 \cdot f^2 = \underline{2019{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

● $t = 1$ s, $\underline{s} = \frac{a}{2} t^2 = \underline{1009{,}6 \text{ m}}$.

8.15. Az ábra, egy függőleges egyenes mentén, harmonikus rezgőmozgást végző pontszerű test pályáját ábrázolja.

a) Hol maximális és hol nulla a sebesség, illetve a gyorsulás?

b) Egy teljes rezgés során a test kétszer halad át az L és M pontokon. Milyen irányú a sebesség és a gyorsulás az egyes esetekben?
(A test induljon az egyensúlyi helyzetből függőlegesen felfelé!)



Megoldás:

8.15. ● **A sebesség nagysága maximális az *O* pontban, nulla a *K* és *N* pontokban.**
A gyorsulás nagysága maximális a *K* és *N* pontokban, nulla az *O* pontban.

● Az *L* pontban: Az első negyedperiódusban a sebesség felfelé, a gyorsulás lefelé mutat. A második negyedperiódusban a sebesség és a gyorsulás is lefelé mutat.
Az *M* pontban: A harmadik negyedperiódusban a sebesség lefelé, a gyorsulás felfelé mutat. A negyedik negyedperiódusban a sebesség és a gyorsulás is felfelé mutat.

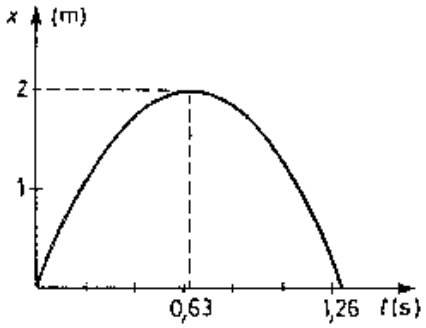
8.16. 2 m magasból függőlegesen leeső labda a talajjal tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Milyen mozgást végez a labda, ha a légellenállás elhanyagolható?

b) Rajzoljuk le a labda kitérés–idő grafikonját!

Megoldás:

8.16. a) A labda rezgőmozgást végez, de nem harmonikus rezgőmozgást, hiszen a testre ható erők eredője a gravitációs erő, ami állandó nagyságú és irányú, így $\sum F = -Dx$ nem teljesül.



b) $s = \frac{g}{2}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 0{,}63$ s.

A grafikon két ütközés között ábrázolja a kitérést az idő függvényében.

8.17. Egy pontszerű test ½ cm-es amplitúdójú és 0,01 s periódusidejű harmonikus rezgést végez. A test 100 rezgésére vonatkozó átlagsebességét Péter, Sanyi és Jancsi a következőképpen számítja ki:

Péter: 100 rezgés – azaz 1 s – alatt a test 2 m utat tesz meg. Így átlagsebessége

$$\bar{v} = \frac{2\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Sanyi: 100 teljes rezgés után a test a kiindulási pontban van, az elmozdulása tehát nulla, így az átlagsebesség is nulla.

Jancsi: Egy teljes rezgés alatt minden pillanatnyi sebességhez található ugyanakkora nagyságú, de ezzel ellentétes irányú sebesség. Ezek összege tehát egy periódusra nézve nulla. Ez mind a 100 rezgésre érvényes, így az átlagsebesség nulla.

Melyik megoldás a helyes?
Miért?

Megoldás:

8.17. $A = 0{,}005$ m; $T = 0{,}01$ s; 100 rezgés.

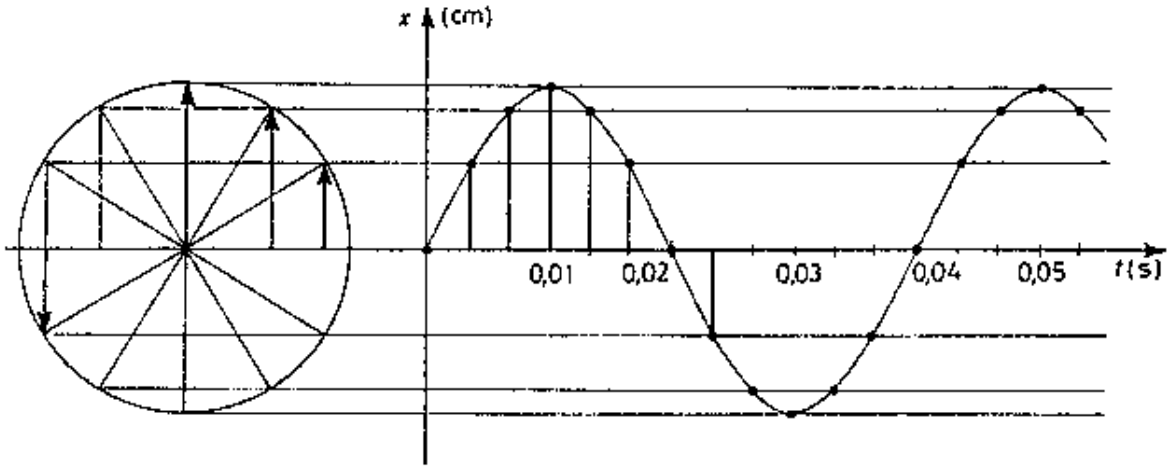
Az átlagsebesség definíciója alapján: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2m}{1s} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

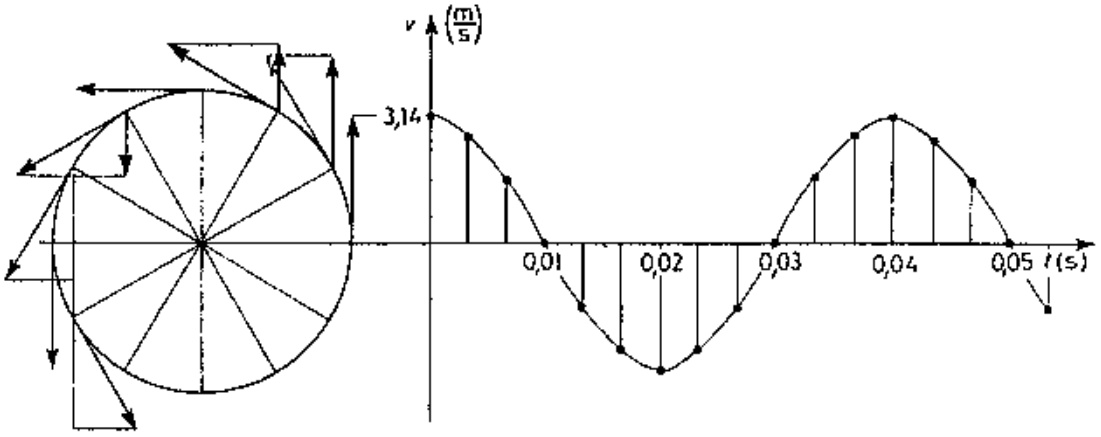
Így Péter megoldása helyes.

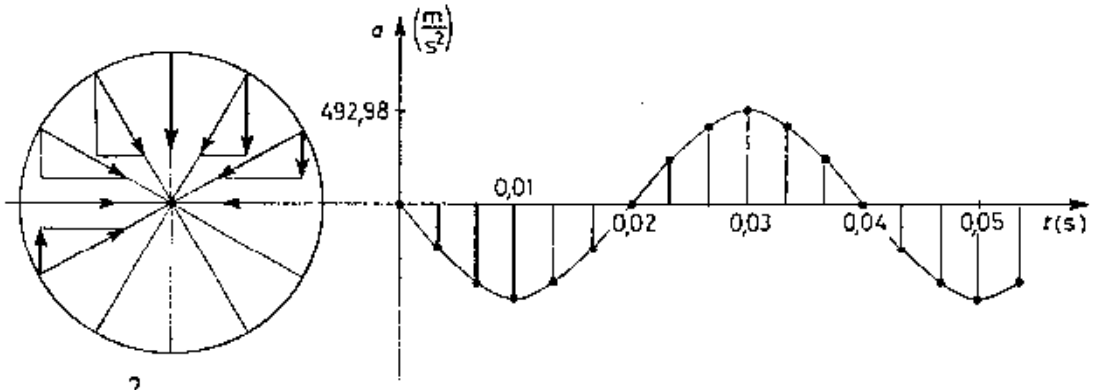
8.18. 2 cm sugarú, vízszintes síkú körpályán 3,14 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó testet oldalról megvilágítunk.
Szerkesszük meg a vetület kitérés–idő, sebesség–idő, gyorsulás–idő grafikonját az egyenletes körmozgás megfelelő fizikai mennyiségeinek a vetületéből!
(A tengelyeken mindig alkalmas beosztást használjunk!)

Megoldás:

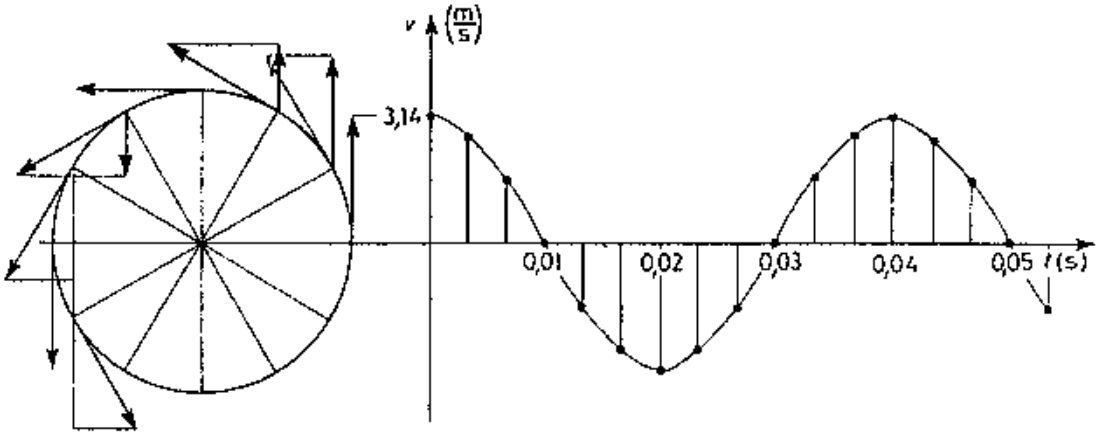
8.18. $r = 0{,}02$ m; $v = 3{,}14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. $v = \frac{2r\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2r\pi}{v} = 0{,}04$ s.

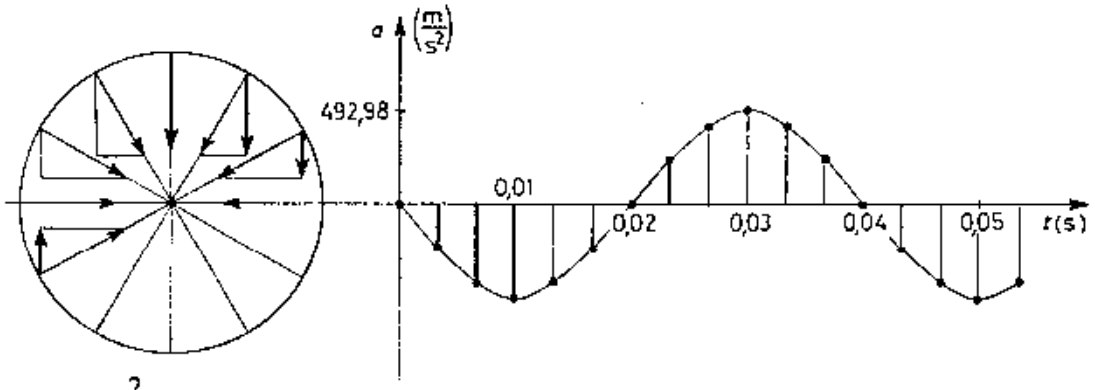






$$a_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{r} = 492{,}98 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



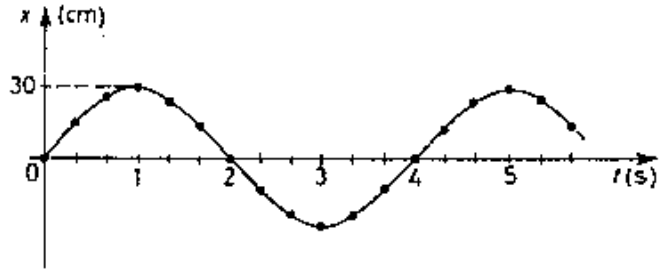


$$a_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{r} = 492{,}98 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

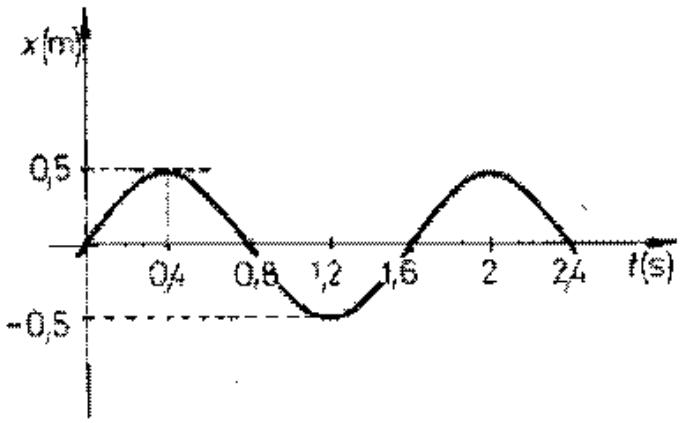
8.19. Szerkesszük meg egy pontszerű test harmonikus rezgőmozgásának kitérés–idő grafikonját, ha az amplitúdó 30 cm, és az egyensúlyi helyzeten való két, egyirányú áthaladás között eltelt idő 4 s!

Megoldás:

8.19. $A = 0{,}3$ m; $T = 4$ s. Feltételeztük, hogy $\varphi = 0$.



8.20. Az ábra egy harmonikus rezgőmozgást végző pontszerű test kitérését ábrázolja az idő függvényében.



a) Mekkora a rezgés frekvenciája?

b) Mekkora a test legnagyobb sebessége? Hol és mikor éri el ezt?

c) Mekkora a test legnagyobb gyorsulása? Hol és mikor éri el azt?

Megoldás:

8.20. $T = 1{,}6$ s; $A = 0{,}5$ m.

a) $\underline{f = \frac{1}{T} = 0{,}625 \text{ Hz}}$.

b) $\underline{v_{max}} = A \cdot \omega = A \cdot 2\pi f = \underline{1{,}963 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

Félperiódusonként az egyensúlyi helyzetben éri el.

c) $\underline{a_{max}} = A \cdot \omega^2 = A \cdot 4\pi^2 \cdot f^2 = \underline{7{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

Félperiódusonként a szélső helyzetben éri el.

8.21. Harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb sebessége $8{,}4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, legnagyobb gyorsulása $3{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Mekkora a rezgés periódusideje és az amplitúdója?

Megoldás:

8.21. $a_{max} = 3{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v_{max} = 0{,}084\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\left.\begin{aligned} a_{max} &= A \cdot \omega^2 \\ v_{max} &= A \cdot \omega \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{a_{max}}{v_{max}} = \omega = 40{,}48\ \frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{0{,}16\ \text{s}}},$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{v_{max}}{\omega} = 0{,}002\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}2\ \text{cm}}}.$$

8.22. Harmonikus rezgőmozgást végző pontszerű test legnagyobb gyorsulása $60\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A legnagyobb gyorsulású fázist 0,5 s múlva követi a legnagyobb sebességű fázis.

a) Mekkora a rezgés frekvenciája?
b) Mekkora a legnagyobb sebesség?

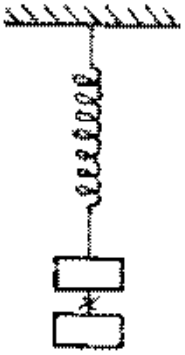
Megoldás:

8.22. $\frac{T}{4} = 0{,}5\ \text{s} \rightarrow T = 2\ \text{s};\quad a_{\max} = 60\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) $\underline{\underline{f = \frac{1}{T} = 0{,}5\ \text{Hz}}}$.

b) $\underline{\underline{v_{\max} = \frac{a_{\max}}{\omega} = 19{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

8.23. $50\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú rugóra 2 db, egyenként 25 g tömegű testet függesztünk az ábra szerinti elrendezésben.



a) Mekkora lesz a felső test maximális sebessége, ha elégetjük az alsó testet tartó cérnát?

b) Mekkora a kialakuló harmonikus rezgés amplitúdója és periódusideje?

Megoldás:

8.23. $D = 50\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 0{,}025$ kg.

b) A rezgő test egyensúlyi állapota az általa létrehozott megnyúlásnál van. A rezgés amplitúdója tehát a két test és az egyik test által okozott megnyúlás különbsége.

$F = D \cdot x$; $F_1 = 2m \cdot g$; $F_2 = m \cdot g$.

$x_1 = \frac{F_1}{D} = \frac{2mg}{D} = 0{,}01$ m, $x_2 = \frac{F_2}{D} = \frac{mg}{D} = 0{,}005$ m.

$A = x_1 - x_2 = 0{,}005$ m $= 0{,}5$ cm, $\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}14\ \mathrm{s}}}$.

a) $\underline{\underline{v_{\max} = A \cdot \omega = A\frac{2\pi}{T} = 0{,}22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

8.24. Ha egy rugóra 100 g tömegű testet függesztünk, a rugó 1 cm-rel nyúlik meg.
Mekkora tömegű testet kell függesztenünk ugyanerre a terheletlen rugóra, ha azt szeretnénk, hogy 0,6 s periódusidővel rezegjen?

Megoldás:

8.24. $x = 0{,}01$ m; $m = 0{,}1$ kg; $T = 0{,}6$ s.

$$\left.\begin{aligned} F &= Dx \\ F &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow D = \frac{m \cdot g}{x} = 100 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{D}} \rightarrow \underline{\underline{m'}} = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2} = 0{,}913 \text{ kg} = \underline{\underline{913 \text{ g}}}$$

8.25. Egy rugóra akasztott test a rugót 4 cm-rel nyújtotta meg. Mekkora periódusidejű rezgéseket végez a test, ha az egyensúlyi helyzetből kimozdítjuk, majd magára hagyjuk?

Megoldás:

8.25. $x = 0{,}04$ m.

$$\left.\begin{aligned} F &= D \cdot x \\ F &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \rightarrow D = \frac{m \cdot g}{x}.$$

$$\underline{\underline{T}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{x}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}} = \underline{\underline{0{,}4 \text{ s}}}.$$

8.26. Egy teherautó tömege 5000 kg. A rugózás miatt függőleges irányban rezgéseket végezhet, ennek frekvenciája terheletlen kocsi esetén $2\ \frac{1}{s}$.

Mennyivel változik a frekvencia, ha a kocsi $2 \cdot 10^3$ kg tömegű rakományt szállít?

Megoldás:

8.26. $m_1 = 5000$ kg; $f_1 = 2$ Hz; $m_2 = 2000$ kg.

A terheletlen autó rezgésidejéből a rugóállandó kiszámítható. $T_1 = \frac{1}{f_1} =$

$= 0{,}5$ s; $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}} \rightarrow D = \frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2} = 789568\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Teherrel együtt a rezgésidő: $T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} = 0{,}59$ s, $f_2 = \frac{1}{T_2} =$

$= 1{,}7$ Hz.

$\Delta f = f_2 - f_1 = -0{,}3$ Hz.

A frekvencia 0,3 Hz-cel csökken.

8.27. Hogyan határozzuk meg kísérleti úton egy csavarrugó rugalmassági állandóját?
Rendelkezésünkre áll egy „súlysorozat" és egy vonalzó. Írjuk le a mérés menetét és az állandó kiszámítási módját!

Megoldás:

8.27. Súlyokat függesztve a rugóra, a gravitációs erő hatására megnyúlás jön létre.

$$\left.\begin{aligned} F &= D \cdot x \\ F &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \rightarrow D = \frac{m \cdot g}{x}.$$

3–5 súlyt kiválasztva és megmérve a létrejött megnyúlásokat, a rugóállandó kiszámítható. A kapott értékek átlaga csökkenti a mérés pontatlanságát.

8.28. Csavarrugóra akasztott test harmonikus rezgőmozgást végez.
Hogyan határozhatjuk meg a körfrekvenciáját?
A méréshez stopperóra áll rendelkezésünkre. Írjuk le a mérés menetét és a mért mennyiségekből a körfrekvencia kiszámítási módját!

Megoldás:

8.28. Célszerű több rezgés idejét mérni (pl.: 50 vagy 100 rezgés) a mérési pontatlanság miatt. A kapott értékből osztással megkapjuk egy rezgés idejét. Ebből $\omega = \frac{2\pi}{T}$ már kiszámítható.

8.29. Adjuk meg a harmonikus rezgőmozgás kitérését az idő függvényében, ha a rezgés amplitúdója 2 cm, a periódusidő 0,01 s és a $t_0 = 0$ időpillanatban a kitérés nulla!

Megoldás:

8.29. $\varphi = 0$; $T = 0{,}01$ s; $A = 0{,}02$ m; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 628\ \frac{1}{\text{s}}$.

$$\underline{\underline{x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0{,}02\ \text{m} \cdot \sin\left(628\ \frac{1}{\text{s}} t\right)}}.$$

8.30. Mennyivel kell megrövidíteni a matematikai inga hosszát, hogy a 10 km magasságban lebegő léghajóban ugyanakkora legyen a lengésideje, mint a Föld felszínén?
A Föld tengely körüli forgását ne vegyük figyelembe!

Megoldás:

8.30. $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $h = 10^4$ m.
A gravitációs gyorsulás

h magasságban: $g' = \gamma \cdot \dfrac{M}{(r+h)^2}$,

a Föld felszínén: $g = \gamma \cdot \dfrac{M}{r^2}$.

A fonálinga lengésideje

h magasságban $T' = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l'}{g'}}$,

a Föld felszínén: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

$$T' = T;\ 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{l'}{g'} = \frac{l}{g}.$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{g'}{g} = \frac{\gamma \frac{M}{(r+h)^2}}{\gamma \frac{M}{r^2}} = \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 = 0{,}997.$$

$l' = 0{,}997 \cdot l$, tehát az inga hosszát a 3 ezred részével kell rövidebbre venni.

8.31. Mekkora az átlagsebesség és az átlaggyorsulás harmonikus rezgőmozgás esetén egy félperiódusra, illetve egy teljes periódusra? Függenek-e ezek az értékek attól, hogy a mozgás melyik szakaszát választjuk ki?

Megoldás:

8.31. Az átlagsebesség nem függ attól, hogy a mozgás melyik szakaszát vizsgáljuk egy félperiódus-idő alatt, ugyanis a megtett út mindig $2A$.

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, így $\underline{\underline{v}} = \frac{2A}{\frac{T}{2}} = \underline{\underline{\frac{4A}{T}}}$.

Az átlaggyorsulás függ a kiválasztott szakasztól, hiszen: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, így

$$|\bar{a}| = \left|\frac{v-(-v)}{\frac{T}{2}}\right| = \left|\frac{4v}{T}\right|.$$

Attól függően, hogy honnan indult, más és más a v értéke, tehát az átlaggyorsulás is.

Teljes periódusra: $v = \frac{4A}{T}$, $|a| = \left|\frac{v-v}{T}\right| = 0$.

8.32. A nyugalmi helyzetből v_0 sebességgel indított rezgő test sebessége 0,2 s múlva a felére csökken.

a) Mekkora a rezgésidő és a frekvencia?

b) Az indítás után mennyi idő múlva lesz a gyorsulás nagysága a maximális gyorsulás fele?

Megoldás:

8.32. $t = 0{,}2$ s.

a) Feltehetjük, hogy a $t = 0{,}2$ s az első olyan időpillanat, amikor a sebesség a felére csökkent.

$v = v_{max} \cdot \cos(\omega t)$.

$\frac{v_{max}}{2} = v_{max} \cdot \cos(\omega \cdot 0{,}2\ \text{s}) \rightarrow \omega = 5{,}23 \frac{1}{\text{s}}$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}2\ \text{s}}}, \quad \underline{\underline{f = \frac{1}{T} = 0{,}83\ \text{Hz}}}$

(Ha bármelyik időpillanatra gondolhatunk, akkor az $\frac{1}{2} = \cos(\omega t)$ trigonometrikus egyenlet általános megoldásai adják a feladat megoldását. Egy perióduson belül mindig két ilyen időpillanat van, a sebesség irányát is figyelembe véve.)

b) Egy perióduson belül négy ilyen időpillanat van. Ezeket az

(1) $-\frac{a_{max}}{2} = -a_{max} \cdot \sin(\omega t)$ és az

(2) $\frac{a_{max}}{2} = -a_{max} \cdot \sin(\omega t)$ egyenletek megoldásai adják.

(1) $\frac{1}{2} = \sin(\omega t) \rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6} \rightarrow t_1 = 0{,}1$ s.

$\omega t_2 = \frac{5\pi}{6} \rightarrow t_2 = 0{,}5$ s.

(2) $-\frac{1}{2} = \sin(\omega t) \rightarrow \omega t_3 = \frac{7\pi}{6} \rightarrow t_3 = 0{,}7$ s.

$\omega t_4 = \frac{11\pi}{6} \rightarrow t_4 = 1{,}1$ s.

A $\underline{\underline{t = 0{,}1\ \text{s}}}$ az első ilyen időpillanat.

8.33. Harmonikus rezgőmozgást végző pontszerű test rezgéseinek amplitúdója 4 cm, periódusideje 1,8 s.
Mekkora a kitérés a nyugalmi helyzeten való áthaladás után 0,3 s, 0,45 s, 0,75 s és 1,05 s múlva?

Megoldás:

8.33. $A = 4$ cm; $T = 1{,}8$ s; $\varphi = 0$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3{,}49$ Hz; $x = A \sin(\omega t)$.

Behelyettesítve:

$t_1 = 0{,}3$ s $\quad x_1 = 3{,}46$ cm

$t_2 = 0{,}45$ s $\quad x_2 = 4$ cm

$t_3 = 0{,}75$ s $\quad x_3 = 2$ cm

$t_4 = 1{,}05$ s $\quad x_4 = -2$ cm

8.34. Harmonikus rezgőmozgást végző test rezgéseinek amplitúdója 2,5 cm, és a test 1 s alatt 75 teljes rezgést végez.

a) Mennyi idő telik el az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatától addig, amíg a test kitérése 1,25 cm lesz?
b) Mekkora itt a sebesség és a gyorsulás?

Megoldás:

8.34. $A = 2{,}5$ cm; $f = 75$ Hz; $\omega = 2\pi \cdot f = 471$ Hz.

a) $x = 1{,}25$ cm; $x = A \cdot \sin(\omega t) \rightarrow t_1 = 0{,}0011$ s
$t_2 = 0{,}0056$ s egy periódusidőn belül.
Először $\underline{t_1 = 0{,}0011 \text{ s}}$ múlva lesz a kitérés 1,25 cm.

b) $v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \rightarrow v_1 = 10{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
$\underline{v_2 = -10{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$. $\underline{\underline{a} = -\omega^2 \cdot x = -2773 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

8.35. A rugó végére függesztett testet úgy hozzuk rezgésbe, hogy a testet nyugalmi helyzetéből függőleges egyenes mentén lefelé 5 cm-rel kitérítve, magára hagyjuk. Az időt ettől a pillanattól mérjük.

a) Mekkora a kezdőfázis?

b) Mekkora a test kitérése az elengedéstől számított 0,5 s múlva, ha a periódusidő 1,2 s?

Az x-tengelyt, amelyen az egyensúlyi helyzettől való kitérést mérjük, felfelé irányítjuk.

Megoldás:

8.35. *a)* $t = 0$; $x = -A$; $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow -A = A \cdot \sin\varphi \rightarrow$ $\varphi = 270° = \frac{3\pi}{2}$.

b) $T = 1{,}2$ s; $t = 0{,}5$ s; $A = 5$ cm; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5{,}25$ Hz.

$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 4{,}33$ cm.

8.36. Az asztallapon rugók által mozgatott kiskocsi 10 cm-es amplitúdójú, 2 s periódusidejű harmonikus rezgést végez. (A kezdőfázis nulla.)

a) Mekkora a sebessége és a gyorsulása az egyensúlyi helyzettől 2 cm távolságban?

b) Mennyi idő alatt jut ebből a pontból az egyensúlyi helyzet másik oldalán ugyanilyen távolságra lévő pontba?

Megoldás:

8.36. $A = 10\ \text{cm};\ T = 2\ \text{s};\ \varphi = 0;\ x = 2\ \text{cm};\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 3{,}14\ \frac{1}{\text{s}}$.

a) $\underline{v_x} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 30{,}77\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \underline{0{,}308\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$.

$\underline{a} = -\omega^2 \cdot x = \underline{-0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

b) $x = A \cdot \sin \omega t$.

$x_1 = 2\ \text{cm} \rightarrow t_1 = 0{,}064\ \text{s}$,

$x_2 = -2\ \text{cm} \rightarrow t_2 = 1{,}064\ \text{s}$.

Ha távolodott az egyensúlyi helyzettől: $\underline{\Delta t} = t_2 - t_1 = \underline{1\ \text{s}}$.

Ha közeledett az egyensúlyi helyzet felé: $\underline{\Delta t} = 2 \cdot t_1 = \underline{0{,}128\ \text{s}}$.

8.37. Mi a feltétele annak, hogy a harmonikus rezgőmozgást végző test maximális sebességének számértéke az amplitúdó értékének kétszerese legyen?

Megoldás:

8.37. $v_{max} = A \cdot \omega$; $A \cdot \omega = 2A \rightarrow \underline{\underline{\omega = 2 \frac{1}{s}}}$.

8.38. Pingponglabda pattog az asztalon. Két, egymást követő ütközés között 0,4 s telik el.
Milyen magasra pattant fel a labda?
(Az ütközés teljesen rugalmas, a közegellenállástól tekintsünk el!)

Megoldás:

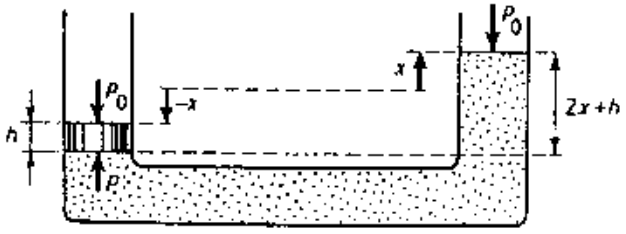
8.38. $t_{em} = t_{esés} = 0{,}2$ s.

$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 = 0{,}2 \text{ m} = \underline{20 \text{ cm}}$.

8.39. U alakú csőbe folyadékot öntünk. A csövet megbillentjük és egyik szárát befogjuk, majd visszaállítjuk úgy, hogy a szárak függőlegesek legyenek. Ha ekkor az egyik szárban magasabban van a víz, akkor elengedve a nyílást, a folyadékoszlop rezgésbe jön.
Igazoljuk, hogy a rezgés harmonikus, ha a folyadék mozgása súrlódásmentes!

Megoldás:

8.39. A külső nyomás: p_0. A kiválasztott folyadékrétegre a gravitációs erő hat és a kiválasztott szint feletti folyadékoszlop nyomása.



$$\sum F = p \cdot A - m \cdot g = \varrho_{víz} \cdot g \cdot (2x+h) \cdot A - \varrho_{víz} \cdot A \cdot h \cdot g = p = \varrho_{víz} \cdot g \cdot (2x+h).$$

$$\varrho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \varrho \cdot V = \varrho_{víz} \cdot A \cdot h = 2 \cdot \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot x + \varrho_{víz} \cdot g \cdot h \cdot A -$$
$$- \varrho_{víz} \cdot g \cdot A \cdot h = (2 \cdot \varrho_{víz} \cdot g \cdot A) \cdot x.$$

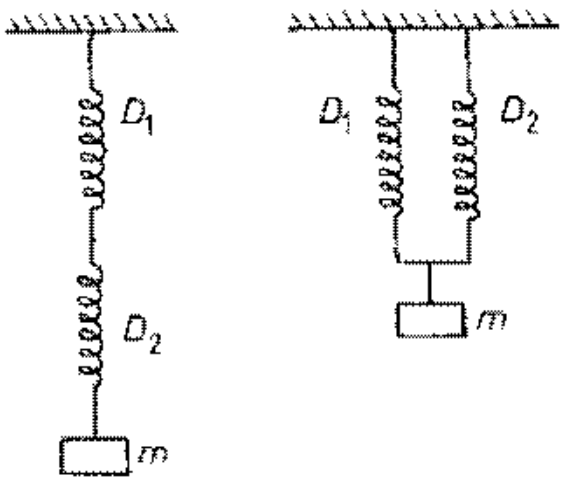
Ez az erő a kitéréssel egyenesen arányos, azzal ellentétes irányú, tehát a folyadék mozgása harmonikus rezgőmozgás.

8.40. Ha egy harmonikus rezgőmozgást végző testet megállítunk a nullhelyzetben, labilis, stabilis vagy közömbös egyensúlyi állapotban van-e? Igazoljuk állításunkat!

Megoldás:

8.40. Stabilis, mert ha kitérítjük az egyensúlyi helyzetből, a rá ható erők eredője az egyensúlyi helyzet felé mutat, tehát a testet arra mozdítja el.

8.41. A D_1 és a D_2 rugóállandójú rugókat egy D rugóállandójú rugóval szeretnénk helyettesíteni a D_1 és a D_2 rugók soros, illetve párhuzamos kapcsolásával.



a) Milyen összefüggés van D_1, D_2 és D között, ha a rugókat egymás után (sorosan), illetve egymás mellé (párhuzamosan) kötjük?

b) Mekkora az egyes esetekben a rugókra akasztott m tömegű test rezgésideje?
(A rugók tömegét hanyagoljuk el!)

c) Mekkora a rezgésidők aránya a két összeállításnál?

Megoldás:

8.41. **a)** Soros kötés esetén: $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \rightarrow D = \frac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}$.
Párhuzamos kötés esetén: $\underline{\underline{D = D_1 + D_2}}$.

b) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$. Így soros kötéskor: $T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m(D_1 + D_2)}{D_1 \cdot D_2}}$,

párhuzamos kötéskor: $\underline{\underline{T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D_1 + D_2}}}}$.

c) $\underline{\underline{\frac{T_1}{T_2}}} = \sqrt{\frac{m(D_1 + D_2)}{D_1 \cdot D_2} \cdot \frac{D_1 + D_2}{m}} = \underline{\underline{\frac{D_1 + D_2}{\sqrt{D_1 \cdot D_2}}}}$.

8.42. Mekkora frekvenciával rezeghet a 26 cm amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végző test, ha gyorsulása nem haladhatja meg a $15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$-et?

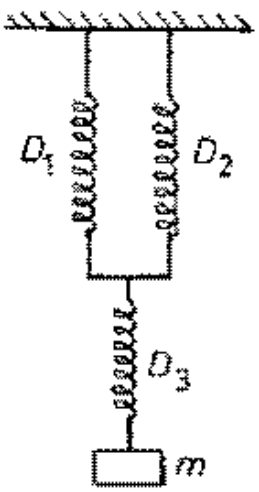
Megoldás:

8.42. $A = 0{,}26\ \mathrm{m}$; $a_{max} \leq 15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

$$\left.\begin{aligned} a_{max} = A \cdot \omega^2 \rightarrow A \cdot \omega^2 \leq 15 \\ \omega = 2\pi \cdot f \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{f \leq 1{,}21\ \mathrm{Hz}}}.$$

8.43. Az ábra szerinti összeállításban az m tömeget kissé kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, függőleges irányban, majd magára hagyjuk. Mekkora lesz a rezgésidő?

($D_1 = 1 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $D_2 = 2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $D_3 = 3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ és a rugók tömege elhanyagolható, $m = 180$ g).



Megoldás:

8.43. $D_1 = 1 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $D_2 = 2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $D_3 = 3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $m = 0{,}18$ kg.

D_1 és D_2 párhuzamos kapcsolásúak, ezek eredője:

$$D_{12} = D_1 + D_2 = 3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

D_{12} és D_3 soros kapcsolásúak, így az eredő rugóállandó:

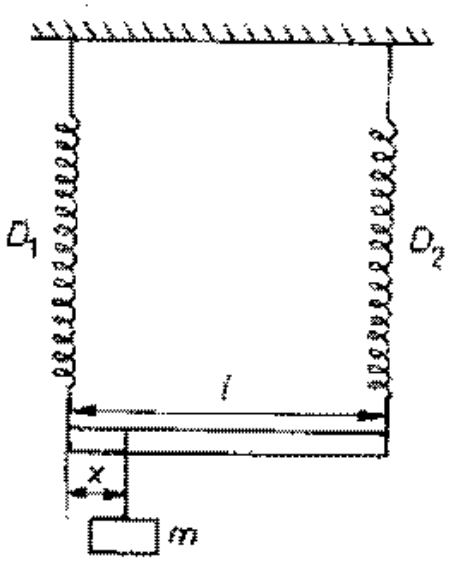
$$D = \frac{D_{12} \cdot D_3}{D_{12} + D_3} = 15 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

A rezgésidő: $\underline{\underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2{,}18 \text{ s}}}$.

8.44. Két darab, nyújtatlan állapotban egyforma hosszúságú rugót egymástól l távolságra felfüggesztünk. Végükre egy elhanyagolható tömegű rudat erősítünk.

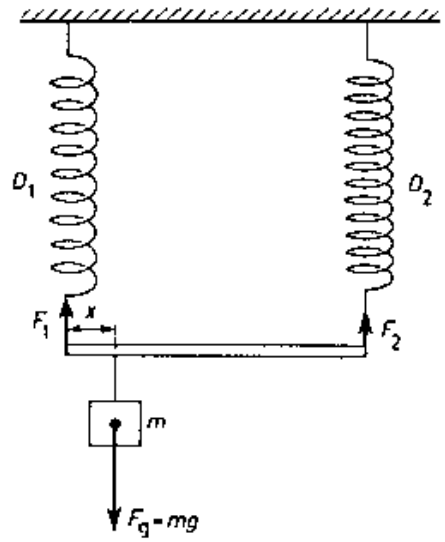
a) Hová akasszuk a rúdra az m tömegű testet, ha azt akarjuk, hogy a rúd vízszintes maradjon?
A rugóállandók D_1, illetve D_2.

b) Az m tömegű testet függőleges irányban kissé kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk.
Mekkora lesz a kialakuló rezgőmozgás rezgésideje?



Megoldás:

8.44. a) A pálca mint merev test egyensúlyának feltétele: $\sum F = 0$ és $\sum M = 0$ bármely pontra.
Így F_1, F_2 és F_g erők eredője nulla: $F_1 + F_2 = F_g$.



A két rugó megnyúlása egyenlő, mert a pálca vízszintes helyzetű:

$$F = D \cdot x \rightarrow x = \frac{F}{D}.$$

$$x_1 = x_2 \rightarrow \frac{F_1}{D_1} = \frac{F_2}{D_2} \rightarrow$$

$$(1) \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Az O pontra felírva a forgatónyomatékok egyensúlyát.

$$F_1 \cdot x = F_2(1 - x) \rightarrow$$

$$(2) \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l - x}{x}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből:

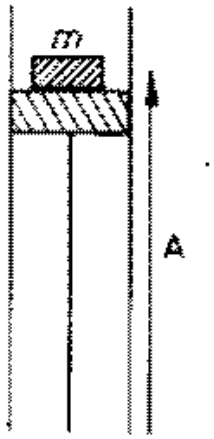
$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{l-x}{x} \rightarrow x = \underline{\underline{\frac{D_2}{D_1 + D_2} \cdot l.}}$$

b) A rugók párhuzamos kapcsolásúak:

$$D = D_1 + D_2.$$

$$\underline{\underline{T}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \underline{\underline{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D_1 + D_2}}}}.$$

8.45. Egy dugattyú, függőleges egyenes mentén, harmonikus rezgőmozgást végez. A rezgésidő 0,2 s. A dugattyúra helyezett, 40 g tömegű test elhanyagolható tömegű „ragasztóval" tapad a dugattyúhoz. A test a dugattyútól 0,1 N erővel választható el.



Legfeljebb mekkora lehet a rezgés amplitúdója, ha azt akarjuk, hogy a test állandóan rajta maradjon a dugattyún?

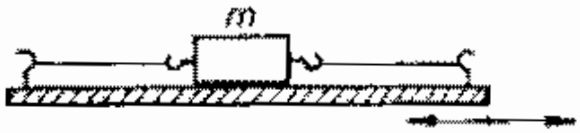
Megoldás:

8.45. $T = 0{,}2$ s; $m = 0{,}04$ kg; $F = 0{,}1$ N.

A test a felső szélső helyzetben válhat el a dugattyútól. Mindaddig rajta marad, amíg a súlya és a ragasztó ereje legalább akkora, mint a szélső helyzetben a rezgőmozgáshoz szükséges maximális erő:

$F_{max} = m \cdot a_{max} = m \cdot A \cdot \omega^2$; $m \cdot A \cdot \omega^2 \leq 0{,}1\ \text{N} + m \cdot g$; $\underline{\underline{A \leq 0{,}013\ \text{m}}}$.

8.46. Egy deszkalap $0{,}5\,\frac{1}{s}$ frekvenciájú rezgéseket végez vízszintes síkban. A ráhelyezett 2,5 kg tömegű testet fonállal kötöttük a deszkába vert szögekhez.



Mekkora amplitúdó esetén szakad el a fonál, ha 5 N erőt már nem bír ki?
(Az m tömeg és a deszkalap közötti súrlódástól tekintsünk el!)

Megoldás:

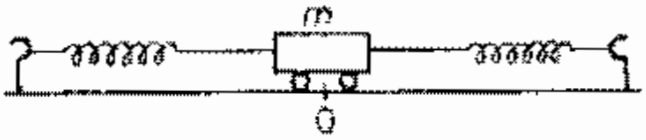
8.46. $f = 0{,}5\ \frac{1}{s}$; $m = 2{,}5$ kg.

A szélső helyzetben fellépő maximális erő nem haladhatja meg az 5 N-t.

$F_{max} = m \cdot a_{max} = m \cdot A \cdot \omega^2$; $\omega = 2\pi \cdot f = 3{,}14\ \frac{1}{s}$.

$m \cdot A \cdot \omega^2 = 5\ \text{N} \rightarrow \underline{A} = 0{,}203\ \text{m} = \underline{\underline{20{,}3\ \text{cm}}}$-nél szakad el a fonál.

8.47. Könnyen gördülő, 100 g tömegű kiskocsit az ábrán látható módon fonállal és rugókkal rögzítünk. A rugók nyújtatlan állapotban vannak, a fonalak vízszintes helyzetűek. A rugók rugóállandója 50 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. A súrlódástól tekintsünk el!



a) Mekkora a rendszer energiája, ha a kiskocsit 5 cm-rel fonálirányba kitérítjük, majd magára hagyjuk?

b) Mekkora a kocsi sebessége az egyensúlyi helyzeten történő áthaladáskor?

Megoldás:

8.47. $A = 0{,}05$ m; $D = D_1 + D_2 = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $m = 0{,}1$ kg; $\mu = 0$.

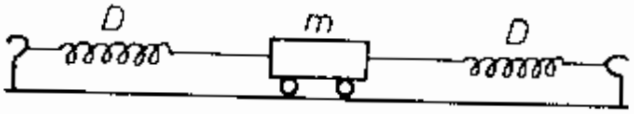
a) Szélső helyzetben az összes mechanikai energia rugalmas energia:

$$\underline{\underline{E}} = E_{\text{r}} = \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \underline{\underline{0{,}125\ \text{J}}}.$$

b) A_2 egyensúlyi helyzetben az összes mechanikai energia mozgási energiaként jelenik meg:

$$E = E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2 \rightarrow \underline{\underline{v_{\text{max}}}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \underline{\underline{1{,}58\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

8.48. Az ábrán látható 100 g tömegű kiskocsi az egyensúlyi helyzeten fonálirányú 22,5 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ sebességgel halad át. Mindegyik rugó rugóállandója 50 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a rugók nyújtatlan állapotban vannak, a fonalak vizszintes helyzetűek.



Mekkora amplitúdójú a kocsi rezgőmozgása?
(A rugók tömegét és a súrlódást hanyagoljuk el!)

Megoldás:

8.48. $m = 0{,}1$ kg; $v_{max} = 0{,}225\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $D = D_1 + D_2 = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $\mu = 0$.

Ld. 8.47. feladat:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{m \cdot v_{max}^2}{D}} = 0{,}007 \text{ m} = \underline{\underline{0{,}7 \text{ cm}}}.$$

8.49. Az ábrán látható elrendezésben a 100 g tömegű kiskocsi harmonikus rezgőmozgást végez. A kocsi sebessége 2 cm-es kitérésnél $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Mekkora a kocsi rezgésének amplitúdója, ha mindegyik rugó rugóállandója $50\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$?

(Az egyensúlyi helyzetben a rugók nyújtatlan állapotban vannak, a fonalak vízszintes helyzetűek. A rugók tömegét és a súrlódást hanyagoljuk el!)

Megoldás:

8.49. $m = 0{,}1\ \text{kg}$; $x = 0{,}02\ \text{m}$; $v_x = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $D = D_1 + D_2 = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Az energiamegmaradás törvénye miatt:

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}D \cdot x^2 = \frac{1}{2}D \cdot A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{m \cdot v_x^2 + D \cdot x^2}{D}} = 0{,}0374\ \text{m} = \underline{\underline{3{,}74\ \text{cm}}}.$$

8.50. A harmonikus rezgőmozgást végző, m tömegű test teljes mechanikai energiájának hány százaléka a mozgási, illetve a helyzeti energia

a) az egyensúlyi helyzetben,
b) a maximális kitérésnél,
c) ha a kitérés az amplitúdó fele?

Megoldás:

8.50. Ld. 8.47. feladat.

a) A mozgási energia: 100%. Helyzeti energiája nincs.

b) Mozgási energiája nincs. A helyzeti energia: 100%.

c) $x = \frac{A}{2}$;

$E_h = \frac{1}{2} D \cdot x^2 = \frac{1}{2} D \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} D \cdot A^2\right) \rightarrow E_h = 0{,}25 \cdot E_{összes}$, tehát a helyzeti energia az összes energia 25%-a, a mozgási energia 75%-a.

8.51. Az ábrán látható, 100 g tömegű test és a lap között a csúszási súrlódási együttható 0,1. A testet 7 cm-rel kitérítettük egyensúlyi helyzetéből a fonalak által meghatározott irányban.



A kitéréshez szükséges erő legnagyobb értéke 3,6 N volt. Mekkora lehet a test által megtett út maximuma, ha elengedjük?
(Az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a rugók nyújtatlan állapotban vannak, a fonalak vízszintes helyzetűek.)

Megoldás:

8.51. $m = 0{,}1$ kg; $\mu = 0{,}1$; $x = 0{,}07$ m; $F_{max} = 3{,}6$ N.

$$F = D \cdot x \rightarrow D = \frac{F}{x} = 51{,}43 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

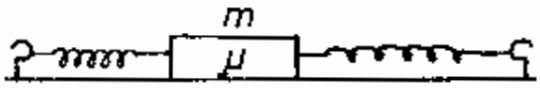
A csillapodó rezgést végző test teljes megállásáig megtett utat számoljuk.

A test kezdeti rugalmas energiája súrlódási munkára fordítódik.

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{2} D \cdot x^2 \\ W_s &= \mu \cdot m \cdot g \cdot s \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} D x^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \rightarrow$$

$$\underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{D \cdot x^2}{2\mu \cdot m \cdot g}} = \underline{\underline{1{,}26 \text{ m}}}.$$

8.52. Az ábrán látható, 50 g tömegű test és a lap között a csúszási súrlódási együttható 0,1, mindkét rugó rugóállandója $50 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.



a) Mekkora sebességgel ér vissza az egyensúlyi helyzetébe a 10 cm-rel kitérített és elengedett test?

b) Mekkora lesz a test legnagyobb kitérése az egyensúlyi helyzeten történt első áthaladás után?
(Az egyensúlyi helyzetben mindkét rugó feszítetlen, a fonalak vízszintes helyzetűek.)

c) Határozzuk meg a test néhány egymás után következő legnagyobb kitérését! Milyen összefüggés van ezek között?

Megoldás:

8.52. $m = 0{,}05$ kg; $\mu = 0{,}1$.

$D = 2 \cdot 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $A_1 = 0{,}1$ m.

a) A test kezdeti rugalmas energiája $\left(\frac{1}{2} D \cdot A_1^2\right)$ az egyensúlyi helyzetig súrlódási munkává $(\mu \cdot m \cdot g \cdot A_1)$ és mozgási energiává alakul át $\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right)$:

$$\frac{1}{2} D \cdot A_1^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot A_1 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow \underline{v} = \sqrt{\frac{D_1 A_1^2 - 2\mu \cdot mg \cdot A_1}{m}} = \underline{\underline{4{,}45 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

b) Átérve az egyensúlyi helyzet másik oldalára, a kitérés legyen A_2. A kezdeti összes rugalmas energia fedezi a súrlódás elleni munkát, és marad $\frac{1}{2} D \cdot A_2^2$ rugalmas energia.

$$\frac{1}{2} D \cdot A_1^2 = \mu \cdot m \cdot g(A_1 + A_2) + \frac{1}{2} D \cdot A_2^2.$$

Átalakítással:

$$\frac{1}{2} D \cdot (A_1^2 - A_2^2) = \mu \cdot m \cdot g(A_1 + A_2)$$

$$\frac{1}{2} D \cdot (A_1 - A_2)(A_1 + A_2) = \mu \cdot m \cdot g(A_1 + A_2), \text{ egyszerűsítve}$$

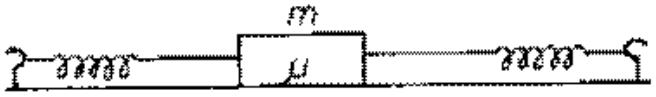
$$A_1 - A_2 = \frac{2\mu \cdot m \cdot g}{D} = \underline{\underline{\text{állandó} = 0{,}001 \text{ m}}}.$$

Behelyettesítve: $A_2 = 0{,}099 \text{ m} = \underline{\underline{9{,}9 \text{ cm}}}$.

c) A fentiek alapján az egymás utáni kitérések különbsége állandó, számtani sorozatot alkotnak.

$A_1 = 10$ cm; $A_2 = 9{,}9$ cm; $A_3 = 9{,}8$ cm; $A_4 = 9{,}7$ cm.

8.53. Az ábrán látható, 50 g tömegű testet 6 cm-rel kitérítjük, majd magára hagyjuk. Azt tapasztaljuk, hogy 20 rezgés után az amplitúdó a kezdeti érték felére csökken a súrlódás miatt.



a) Mekkora a súrlódási együttható a test és a lap között?

b) Legfeljebb hány rezgést végez a test összesen, mielőtt véglegesen megáll?

(Mindegyik rugó rugóállandója $50\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Az egyensúlyi helyzetben a rugók nyújtatlanok, a fonalak vízszintes helyzetűek.)

Megoldás:

8.53. $m = 0{,}05$ kg; $A_1 = 6$ cm; 20 rezgés; $D = 2 \cdot 50\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Ld. 8.52. feladat.

a) A 8.52. feladat szerint az egymás utáni amplitúdók számtani sorozatot alkotnak. Egy teljes rezgés alatt az amplitúdó 2-szer csökken.

Így a 20. rezgés végén az amplitúdó a számtani sorozat 41-edik tagja, és ez az amplitúdó a kezdeti amplitúdó fele:

$$A_{41} = A_1 + 40 \cdot d,$$

$$\frac{1}{2}A_1 = A_1 + 40 \cdot d \rightarrow d = -\frac{A_1}{2 \cdot 40} = -0{,}000\,75 \text{ m},$$

$$|d| = \underline{\underline{A_1 - A_2}} = \frac{2\mu m \cdot g}{D} \rightarrow \mu = \frac{|d| \cdot D}{2m \cdot g} = \underline{\underline{0{,}075}}.$$

b) 1 teljes rezgés alatt $2 \cdot |d| = 0{,}0015$ m-rel csökken az amplitúdó.

Így $\frac{0{,}06 \text{ m}}{0{,}0015 \text{ m}} = 40$, legfeljebb 40 rezgést végezhet a test.

8.54. Mérőhengerbe 0,5 liter 20 °C-os vizet öntünk. A vízbe lógó rugót a reá akasztott, 0,1 kg tömegű test 4 cm-rel nyújtja meg.
Hány °C-ra melegszik fel a víz, ha a testet az egyensúlyi helyzetéből 10 cm-rel függőleges irányba kitérítjük, majd magára hagyjuk?

$$\left(c_{\text{víz}} = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$$

Megoldás:

8.54. $m_{\text{víz}} = 0{,}5$ kg; $c_{\text{víz}} = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $T_{\text{víz}} = 293$ K; $m_{\text{test}} = 0{,}1$ kg; $x = 0{,}04$ m; $A = 0{,}1$ m.

A felhajtóerő feltételezhetően elhanyagolható. Így

$$\left.\begin{aligned} F &= D \cdot x \\ F &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \rightarrow D = \frac{m \cdot g}{x} = 25 \frac{\text{N}}{\text{n}}.$$

A rezgő test kezdeti összenergiája rugalmas energia és ez hővé alakul a rezgés során:

$$\frac{1}{2} D \cdot A^2 = c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot \Delta T \rightarrow \underline{\underline{\Delta T}} = \frac{D \cdot A^2}{2 c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}}} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-5} \text{ K}}}.$$

(A megoldás során a felhajtóerőn kívül a rezgő test melegedését is elhanyagoltuk az adatok hiányában. A teljes megoldás paraméterekkel írható fel.

$$\left.\begin{aligned} \sum F &= D \cdot x \\ \sum F &= m \cdot g - \varrho_{\text{víz}} \cdot g \cdot V_{\text{test}} \end{aligned}\right\} \rightarrow D = \frac{m \cdot g - \varrho_{\text{víz}} \cdot g \cdot V_{\text{test}}}{x}.$$

A rezgő test kezdeti összenergiája rugalmas energia és ez a víz, illetve a test felmelegedésére fordítódik a rezgés során.

$$\frac{1}{2} D \cdot A^2 = c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot \Delta T + c_{\text{test}} \cdot m_{\text{test}} \cdot \Delta T.$$

A test adatainak ismeretében a hőmérsékletváltozás ebből kiszámítható.)

8.55. A harmonikus rezgőmozgást végző test periódusideje T.

a) A T hányadrésze alatt jut el a test az egyensúlyi helyzettől a szélső helyzetig?

b) A T hányadrésze alatt teszi meg az amplitúdónyi út első, illetve második felét?

Megoldás:

8.55. $\frac{T}{4}$ idő alatt.

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \sin \omega \cdot t \\ x + \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \sin \omega t.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} = \sin \omega t \rightarrow \omega t = \dfrac{\pi}{6} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow t_1 = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{12},$$

a periódusidő 1/12-ed része alatt teszi meg az amplitúdónyi út első felét.

A második felét $t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \underline{\underline{\frac{T}{6}}}$ idő alatt teszi meg.

8.56. Egy matematikai inga hossza l, tömege m.
A lengésidő hányadrészében van a matematikai inga tömegpontja az egyensúlyi helyzettől mért 1 cm-es határon belül, ha a rezgés amplitúdója 2 cm?
(A kitérés szöge 5°-nál kisebb!)

Megoldás:

8.56. $x = 0{,}01$ m; $A = 0{,}02$ m.

Ld. az előző feladatot.

A lengés ilyen feltételekkel harmonikus rezgőmozgásnak tekinthető. Így $t = 4 \cdot \frac{T}{12} = \frac{1}{3} \cdot T$, a lengésidő harmadrészében van az inga tömegközéppontja az 1 cm-es határon belül.

8.57. Egy mozdulatlan liftben inga függ, amelynek lengésideje 1 s.

Milyen gyorsulással mozog a lift, ha az inga lengésideje 1,1 s-ra nő?

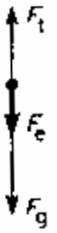
(Ha egy szabadon eső test a liftben g' gyorsulással mozog, akkor az l hosszúságú inga lengésideje a liftben:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.)$$

Megoldás:

8.57. $T = 1$ s; $T' = 1{,}1$ s; $T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g'}}$.

A mozdulatlan liftben lévő ingára:



$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = 0{,}25 \text{ m}.$$

g' gyorsulással mozgó liftben:

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g'}} \rightarrow g' = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T'^2} = 8{,}15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\underline{a} = g - g' = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 8{,}15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{1{,}85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

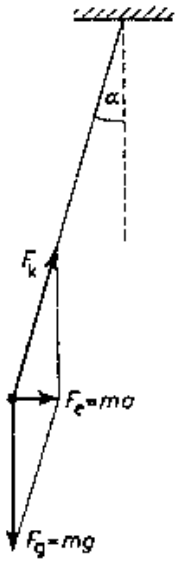
8.58. Álló vonatban egy $T = 1$ s periódusidejű matematikai inga nyugalomban van.

a) Milyen irányú lesz a fonal, ha a vonat $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással elindul?

b) Határozzuk meg a lengésidőt, ha az ingát menetirányban hozzuk lengésbe a gyorsuló vonaton!

Megoldás:

8.58. $T = 1$ s; $a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



a) Az ingára ható erők eredője biztosítja, hogy az inga a vonattal együtt $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozogjon.

Az ábra alapján: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m \cdot a}{m \cdot g} = 0{,}2$; $\underline{\underline{\alpha = 11°20'}}$.

b) Az ábra alapján: $g' = \sqrt{a^2 + g^2} = 10{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az inga hossza: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow l = \dfrac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = 0{,}25$ m.

$\underline{\underline{T'}} = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g'}} = \underline{\underline{0{,}98\ \text{s}}}$.

8.59. Egy matematikai inga lengésideje a Föld felszínén 0,6 s. Mennyi lesz az inga lengésideje a Föld felszíne felett 5 km magasságban?

Megoldás:

8.59. $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $h = 5 \cdot 10^3$ m; $T = 0{,}6$ s.

A gravitációs gyorsulás

a Föld felszínén: $g = \gamma \dfrac{M_{\text{Föld}}}{r^2}$, h magasságban: $g' = \gamma \cdot \dfrac{M_{\text{Föld}}}{(r+h)^2}$.

A lengésidők:

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T' &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g'}} \end{aligned}\right\} \rightarrow T' = \frac{(r+h)\cdot T}{r} = \underline{\underline{0{,}6005 \text{ s}}}.$$

8.60. Milyen periódusidejű hangforrás kelt levegőben, illetve vízben 77 cm hullámhosszúságú hanghullámot?

(A hang terjedési sebessége levegőben $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, vízben $1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.)

Megoldás:

8.60. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}77\ \text{m}$; $v_1 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \underline{\underline{T_1}} = \frac{\lambda_1}{v_1} = \underline{\underline{2{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{s}}}$, $\underline{\underline{T_2}} = \frac{\lambda_2}{v_2} = \underline{\underline{5{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{s}}}$.

8.61. Mekkora lesz a 200 Hz rezgésszámú hangforrás által keltett hang hullámhossza levegőben, illetve szén-dioxidban?

(A hang levegőben 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, szén-dioxidban 260 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed.)

Megoldás:

8.61. $f = 200$ Hz; $v_1 = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 260\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \underline{\lambda_1} = \frac{v_1}{f} = \underline{1{,}7\ \text{m}}$ levegőben,

$\underline{\lambda_2} = \frac{v_2}{f} = \underline{1{,}3\ \text{m}}$ széndioxidban.

8.62. A hang sebessége vízben $1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Milyen távolságra vannak egymástól az egymáshoz legközelebb lévő ellentétes fázisú helyek, ha a rezgésszám 725 Hz?

Megoldás:

8.62. $v = 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $f = 725$ Hz.

Félhullámhossznyira: $v = \lambda \cdot f \rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \underline{1 \text{ m}}$.

8.63. Felfüggesztett rugó végére $m = 0{,}5$ kg tömegű golyót akasztunk. A golyót kitérítjük 10 cm-rel lefelé és magára hagyjuk a rendszert. A golyóra ható nehézségi erő teljesítménye 10 W, amikor a golyó az egyensúlyi helyzetén halad át.

a) Mekkora a golyóra ható rugóerő teljesítménye ebben a pillanatban?
b) Mekkora a golyó sebessége ebben a pillanatban?
c) Mekkora a használt rugó rugóállandója?

Megoldás:

8.63. $m = 0{,}5$ kg; $A = 0{,}1$ m; $P = 10$ W.

a) Az egyensúlyi helyzetben a rugóerő a nehézségi erővel egyenlő nagyságú (és ellentétes irányú), így a teljesítménye szintén $\underline{\underline{10\ \text{W}}}$.

b) $$\left.\begin{aligned} P &= \frac{W}{t} = F \cdot v_{\max} \\ F &= m \cdot g \end{aligned}\right\} \rightarrow \underline{\underline{v_{\max} = \frac{P}{m \cdot g} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

c) $v_{\max} = A \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{v_{\max}}{A} = 20\ \frac{1}{\text{s}}$,

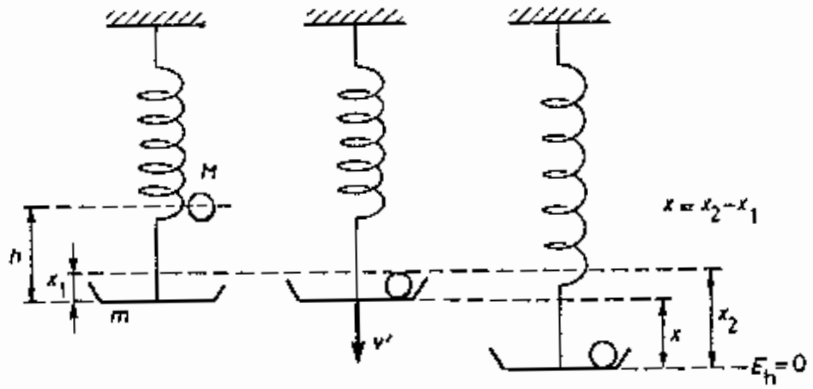
$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow D = \omega^2 \cdot m = 200\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}}.$$

8.64. Súlytalannak tekinthető, $D = 15{,}3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú rugón $m = 25$ g tömegű tányér függ. Az $M = 50$ g tömegű test $h = 9$ cm magasról a tányérra esik, és azzal tökéletesen rugalmatlanul ütközik.

a) Milyen mélyre süllyed a tányér ennek következtében?
b) A legmélyebb helyzet elérése után milyen mozgást végez a rendszer?
c) Határozzuk meg a mozgás kinematikai jellemzőit!

Megoldás:

8.64. $D = 15{,}3$ N; $m = 0{,}025$ kg; $M = 0{,}05$ kg; $h = 0{,}09$ m.



a) Az m tömegű test esésekor kezdeti helyzeti energiája mozgási energiává alakul.

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Ütközésekor a lendület-megmaradás elve szerint:

$$M \cdot v = (M + m) \cdot v' \rightarrow v' = \frac{M \cdot v}{M + m} = \frac{M \cdot \sqrt{2gh}}{M + m}.$$

Ez a tányér és a test közös sebessége az ütközés után.

A rugó a golyó érkezésekor már megnyújtott állapotban volt:
$x_1 = \frac{m \cdot g}{D}$.
Ezután a két test együttes helyzeti és mozgási energiája rugalmas energiává alakul:

$$(M+m)g \cdot (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}D \cdot x_2^2 - \frac{1}{2}D \cdot x_1.$$

v, v', x_1 beírásával:

$$(M+m)g \cdot x_2 - \frac{(M+m) \cdot m \cdot g^2}{D} + \frac{M^2 \cdot g \cdot h}{M+m} = \frac{1}{2}D \cdot x_2^2 - \frac{m^2 \cdot g^2}{2D}.$$

Az adatok beírása után x_2-ben másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pozitív megoldása lehet jó a feladat szempontjából: $x_2 = 11{,}96$ cm.
A tányér $\underline{\underline{x}} = x_2 - x_1 = \underline{\underline{10{,}36 \text{ cm}}}$-rel süllyed lejjebb.

b) Harmonikus rezgőmozgást végez.

c) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{D}} = 0{,}44$ s.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 14{,}27$ Hz; $\underline{\underline{f}} = \frac{1}{T} = \underline{\underline{2{,}27 \text{ Hz}}}$.
Az egyensúlyi helyzet az lesz, amit a két test együttes megnyúlása hoz létre.

$$x' = \frac{(M+m) \cdot g}{D} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Így az amplitúdó: $\underline{\underline{A}} = x_2 - x' = \underline{\underline{7{,}06 \text{ cm}}}$.

8.65. Az $l = 1{,}2$ m hosszú fonálingát kicsit kilendítjük egyensúlyi helyzetéből.

a) Mekkora lesz a létrejövő lengés periódusideje?

b) Mekkora lenne ugyanazon inga lengésideje egy $a = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással süllyedő liftben?

Megoldás:

8.65. $l = 1{,}2$ m.

a) $\underline{\underline{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}17\ \text{s}}}$.

b) Lásd a 8.57. feladatot.

$g' = g - a = 7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\underline{\underline{T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g'}} = 2{,}6\ \text{s}}}$.

8.66. Milyen körmozgásból és hogyan származtatható az $x = 5 \cdot \sin 314 \cdot t$ függvény szerint lejátszódó rezgés? (A kitérést cm-ben, az időt s-ban mérjük.)

Megoldás:

8.66. Az egyenletes körmozgás vetülete egy, a körpálya síkjában lévő egyenesre, harmonikus rezgőmozgás.

$r = A = 5$ cm.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{0{,}02 \text{ s}}}.$$

8.67. A 450 Hz rezgésszámú hullámok 360 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjednek egy adott közegben.
Mekkora a fáziskülönbség két, egymástól 20 cm-re lévő pont között?

Megoldás:

8.67. $f = 450$ Hz; $v = 360\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\Delta x = 0{,}2$ m.

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0{,}8$ m, így az adott pontok negyedhullámhossznyi távolságra vannak, tehát a fáziskülönbségük $\frac{\pi}{2} = 90°$.

8.68. A rezgéskeltés helyétől 7 m-re lévő részecske mekkora fáziskéséssel végzi rezgéseit a rezgéskeltés helyétől 2 m-re lévő részecskéhez képest?

$T = 1$ s; $A = 0{,}3$ m; $c = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

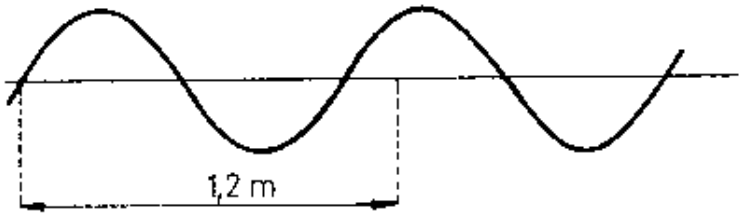
Megoldás:

8.68. $x_1 = 2$ m; $x_2 = 7$ m; $T = 1$ s; $A = 0{,}3$ m; $c = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$c = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = c \cdot T = 5$ m.

$\Delta x = x_2 - x_1 = 5$ cm, tehát az adott pontok hullámhossznyi távolságra vannak, fáziseltérésük $\underline{\underline{2\pi = 360°}}$.

8.69. Gumikötél vége 10 cm-es amplitúdóval másodpercenként 2 teljes transzverzális rezgést végez.
Mekkora a kötél rezgő végétől 1,2 m távolságban lévő pontjának kitérése a rezgés kezdetétől eltelt 1,5 s múlva?
A transzverzális hullám terjedési sebessége $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Megoldás:

8.69. $A = 10$ cm; $f = 2\ \frac{1}{\text{s}}$; $x = 1{,}2$ m; $t = 1{,}5$ s; $v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 1$ m.

$T = \frac{1}{f} = 0{,}5$ s.

A hullámfüggvényből $\underline{x} = A \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \underline{\underline{-9{,}51 \text{ cm}}}$.

8.70. Mekkora a hang terjedési sebessége szén-dioxidban, ha a levegőnek a szén-dioxidra vonatkoztatott törésmutatója 0,76? (A hang terjedési sebessége levegőben $340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.)

Megoldás:

8.70. $n_{21} = 0{,}76; \quad v_2 = 340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \underline{v_1} = n_{21} \cdot v_2 = \underline{\underline{258{,}4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

8.71. A hang a vízből a levegőre 45°-os beesési szöggel érkezik. Mennyivel térül el eredeti irányától, ha a hang terjedési sebessége levegőben 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, vízben 1450 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Megoldás:

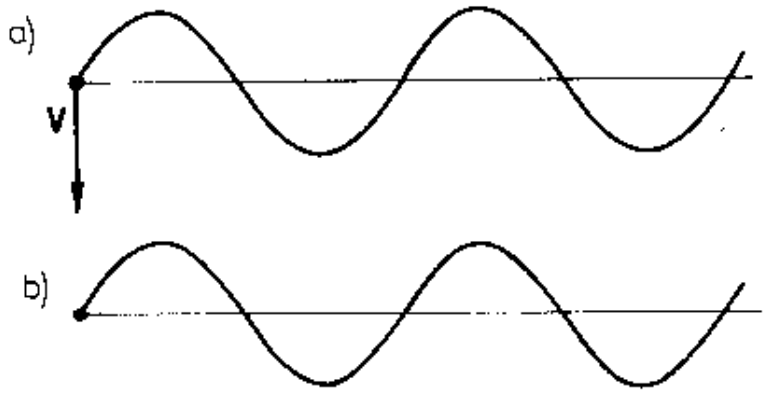
8.71. $v_1 = 1450\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 45°$.

A törési törvény szerint: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$.

Ebből $\sin\beta = \frac{v_2 \cdot \sin\alpha}{v_1} = 0{,}1658$, tehát $\beta = 9°35'$.

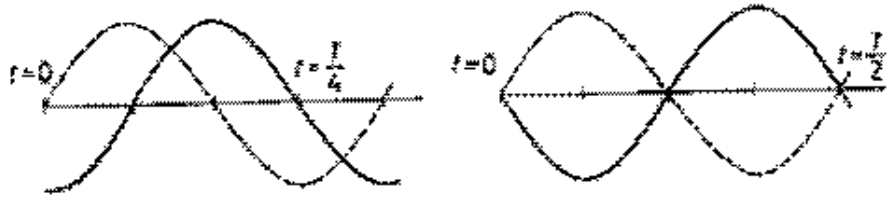
Az eltérülés szöge: $\alpha - \beta = \underline{35°25'}$.

8.72. Az *a)* ábra egy gumikötélen kialakuló haladó hullámot, a *b)* ábra egy állóhullámot ábrázol valamilyen t időpillanatban.

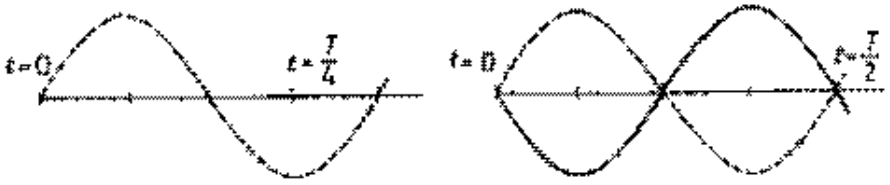


Rajzoljuk le a hullámok alakját $\frac{T}{4}$ és $\frac{T}{2}$ idő múlva!

8.72. a) Haladó hullám esetén:



b) Állóhullám esetén:



8.73. Az l hosszúságú rugalmas közegben állóhullámokat hozunk létre.
Milyen összefüggés van l és λ között, ha:

a) az egyik vég szabad,
b) mindkét vég szabad,
c) mindkét vég zárt?
Mondjunk mindegyik esetre legalább egy gyakorlati példát!

Megoldás:

8.73. A szabad végek mindig duzzadóhelyek, a zárt végek csomópontok. Ezért

a) $l = (2k - l)\frac{\lambda}{4}$ (pl. zárt síp).

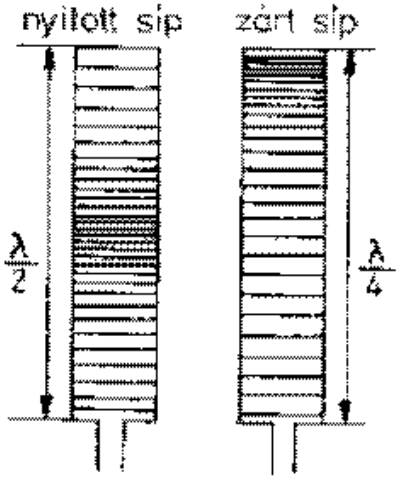
b) $1 = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ (pl. nyitott síp).

c) $l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ (pl. húrok). $k = 1, 2, 3, \ldots$

8.74. Az ábra zárt és nyitott sípban kialakuló állóhullámokat szemléltet.

a) Ugyanakkora csőhossz esetén, melyik sípban keltett hang magassága nagyobb?

b) Hogyan aránylanak egymáshoz az azonos magasságú hangot adó zárt, illetve nyitott sípok hosszai?



Megoldás:

8.74. A hangmagasság egyenesen arányos a frekvenciával. Alaphang esetén ($k = 1$):

$v = \lambda \cdot f \rightarrow f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$, mert $\lambda_1 = 2l$ nyitott síp esetén.

$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{4l}$, mert $\lambda_2 = 4l$ zárt síp esetén.

$f_1 > f_2$, ezért a nyitott sípban keltett hang magassága nagyobb.
(A felharmonikusok esetén is $f_1 > f_2$.)

b) $f_1 = f_2$ alaphang esetén is $\frac{v}{2l_1} = \frac{v}{4l_2} \rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{2}$, a zárt síp hossza fele a nyitott síp hosszának.

Általában: $\frac{l_2}{l_1} = \frac{2k-1}{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

8.75. Milyen hosszú síp ad 440 Hz rezgésszámú alaphangot, ha a síp:

a) nyitott,
b) zárt?

$\left(\text{A hang terjedési sebessége levegőben } 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.\right)$

Megoldás:

8.75. $f = 440$ Hz.

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0{,}773$ m.

A 8.74. feladat ábrája alapján:

a) $l_1 = \frac{\lambda}{2} = \underline{38{,}6 \text{ cm}}.$

b) $l_2 = \frac{\lambda}{4} = \underline{19{,}3 \text{ cm}}.$

8.76. Milyen hosszú nyitott síp rezonál annak a lemeznek a hangjára, amely 50 cm hosszú, 3 g tömegű és a feszítőerő 250 N?

Megoldás:

8.76. $l = 0{,}5$ m: $m = 3 \cdot 10^{-3}$ kg; $F = 250$ N; $v_2 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A rezgésállapot terjedési sebessége a lemezben:

$$v_1 = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} = 204{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A lemez egyik vége rögzített, másik szabad, így $l = (2k - 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$, alaphangra $(k = 1)$ $l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \lambda_1 = 4l = 2m$.

$v = \lambda \cdot f \rightarrow f_1 = \frac{v_1}{\lambda_1} = 102{,}5$ Hz.

Rezonancia esetén: $f_1 = f_2$.

Nyitott síp esetén: $l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda_2 = \frac{2l_2}{k}$.

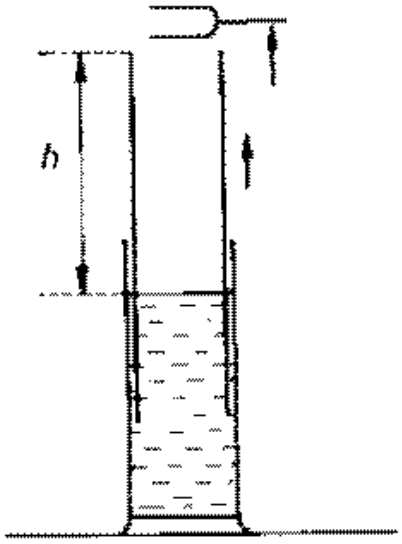
$v_2 = \lambda_2 \cdot f_2 = \frac{2l_2}{k} f_2 \rightarrow \underline{\underline{l_2 = \frac{v_2 \cdot k}{2 \cdot f_2} = 1{,}66 \text{ m}}}$.

A nyitott síp hossza 1,66 m.

8.77. A rezgésbe hozott hangvillát – az ábra szerint – vízzel telt mérőhengerbe helyezett cső fölé tartjuk. A csövet a hangvillával együtt lassan mozgatjuk felfelé.

a) Milyen h magasságnál fog először felerősödni a hang, ha a hangvilla rezgésszáma 1000 Hz, a hang terjedési sebessége levegőben $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

b) Hogyan lehet használni ezt a berendezést a hang terjedési sebességének, vagy a hangvilla rezgésszámának mérésére?



Megoldás:

8.77. $f = 1000$ Hz; $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A vízfelszín feletti levegőoszlop egyik végén zárt, rugalmas közeg (zárt síp).

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0{,}34 \text{ m}.$$

$$l = \frac{\lambda}{4} = 0{,}085 \text{ m} = \underline{\underline{8{,}5 \text{ cm}}}.$$

b) A cső függőleges mozgatásával megkereshetjük a rezonancia helyét (amikor a hang felerősödik).

Az *a)* rész alapján a hang terjedési sebességének ismeretében a frekvencia, vagy a hangvilla rezgésszámának ismeretében a hang terjedési sebessége meghatározható.

8.78. Rugalmas karikán λ hullámhosszú állóhullámot szeretnénk létrehozni. Mekkora lehet a karika kerülete?

Megoldás:

8.78. A hullámhossz egész számú többszöröse lehet a kerület.

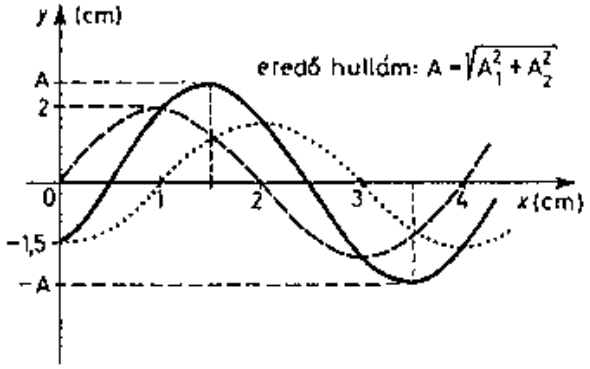
8.79. Azonos egyenes mentén haladó két transzverzális hullám hullámhossza egyaránt 4 cm. Az egyik hullám amplitúdója 1,5 cm, a másiké 2 cm. Az 1,5 cm amplitúdójú hullám fázisban 270°-kal siet a másikhoz képest.

a) Milyen eredő hullám alakul ki a két hullám interferenciájakor?

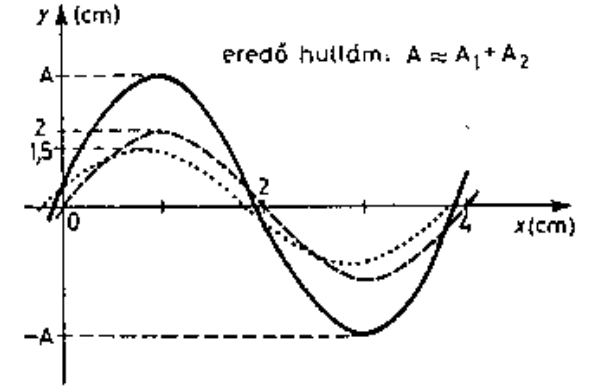
b) Szerkesszük meg a két hullám interferenciájakor létrejövő eredő hullámot abban az esetben, ha az 1,5 cm amplitúdójú hullám fázisban csak kevéssel (pl. mintegy 5°-kal) siet a másikhoz képest! Mit állapíthatunk meg a rajzról?

Megoldás:

8.79. a)



b)



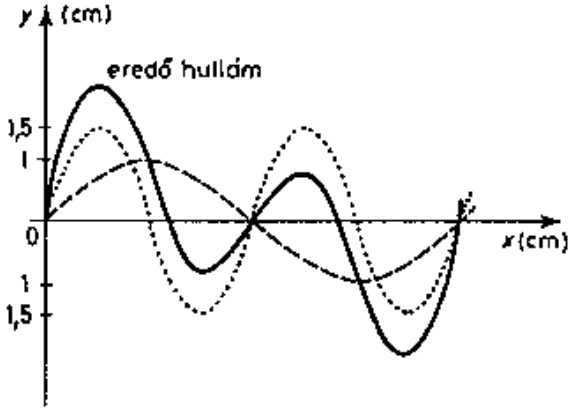
A kitérések összege adja adott helyen az eredő hullám kitérését.

8.80. Szerkesszük meg az egy pontból kiinduló, egy pontsoron, egy irányban haladó két hullám eredőjét, ha:

$\lambda_1 = 6$ cm, $\lambda_2 = 3$ cm, $A_1 = 1$ cm, $A_2 = 1{,}5$ cm!

Megoldás:

8.80. $\lambda_1 = 6$ cm; $\lambda_2 = 3$ cm; $A_1 = 1$ cm; $A_2 = 1{,}5$ cm.



A kitérések összege adja adott helyen az eredő hullám kitérését.

8.81. Egy mechanikai hullám egyik közegből a másik közegbe lép át. Melyek változnak meg az alábbi, hullámmozgást jellemző fizikai mennyiségek közül?

A) Periódusidő,
B) hullámhossz,
C) fázisszög,
D) frekvencia,
E) terjedési sebesség.

Megoldás:

8.81. *B*) hullámhossz és *E*) terjedési sebesség változik meg. A frekvencia nem változik, tehát a periódusidő sem, és a fázisszög is állandó.

8.82. Egy sziréna tárcsáján 22 nyílás van. A tárcsa másodpercenként 5 fordulatot tesz meg.
Mekkora a keltett hang hullámhossza levegőben?

$$\left(c_{\text{levegő}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \right)$$

Megoldás:

8.82. $f_{\text{tárcsa}} = 5 \frac{1}{\text{s}}$; 22 nyílás.

Egy-egy nyílás elhaladása a befújt levegő előtt egy teljes rezgést jelent.

Így 1 s alatt $5 \cdot 22 = 110$ rezgést végez a levegő.

$f = 110$ Hz; $\underline{\underline{\lambda = \frac{v}{f} = 3{,}1 \text{ m}}}$.

8.83. Milyen széles az a folyó, amelyen át a hang 5 s-mal később érkezik a levegőben, mint a vízben?

(A hang terjedési sebessége levegőben $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, vízben $1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.)

Megoldás:

8.83. $v_1 = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_1 = t_2 + 5$.

A megtett utak egyenlőek:

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$; $v_1(t_2 + 5) = v_2 t_2 \rightarrow t_2 = 1{,}53$ s.

A folyó szélessége: $v_2 \cdot t_2 = \underline{\underline{2220{,}7 \text{ m}}}$.

8.84. Ultrahanggal mérték a tenger mélységét. Az ultrahang indítása és visszaérkezése között 0,5 s telt el.
Milyen mély a tenger, ha a hang terjedési sebessége a tenger vizében közelítőleg $1400\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Megoldás:

8.84. $t = 0{,}5$ s; $v = 1400\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Az indítás és visszaérkezés között a tengermélységnyi utat kétszer teszi meg.
$2s = v \cdot t \rightarrow \underline{\underline{s}} = \frac{v \cdot t}{2} = \underline{\underline{350\ \text{m}}}$.

8.85. Mekkora a frekvenciája és a terjedési sebessége az

$$y = 12\ \text{cm} \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}2\ \text{s}} - \frac{x}{400\ \text{cm}} \right)$$

függvénnyel megadott hullámnak?
(Az időt s-okban, a távolságot cm-ekben mérjük.)

Megoldás:

8.85. A hullámfüggvény: $y = A \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$.

Így: $T = 0{,}2\ \text{s} \rightarrow \underline{\underline{f}} = \frac{1}{T} = 5\ \underline{\underline{\frac{1}{\text{s}}}}$. $\lambda = 4\ \text{m}$, $\underline{\underline{v}} = \lambda \cdot f = 20\ \underline{\underline{\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

8.86. *Válaszoljunk a kérdésekre!*

A szabadon eső liftben:

a) a kitérített és elengedett inga végez-e lengéseket? Miért?

b) A rugóra függesztett és kitérített test rezegni fog-e? Miért?

c) Hogyan változna a test lendületének a nagysága, ha a periódusidő felére csökkenne?

d) Változik-e a test mozgási energiája, ha a periódusidő a felére csökken? Ha igen, hányszorosára?

Megoldás:

8.86. a) Nem. Az ingatestre csak a nehézségi erő hat, így az szabadon esik.

b) Igen, de az egyensúlyi helyzet most nem ott lesz, ahol a gravitációs és rugóerő kiegyenlíti egymást, hanem ahol a rugó megnyúlása nulla.

c) A rezgő test lendületfüggvénye: $I = m \cdot v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$. A maximális lendület kétszeresére nő. A lendületérték változásának frekvenciája kétszeresére növekszik.

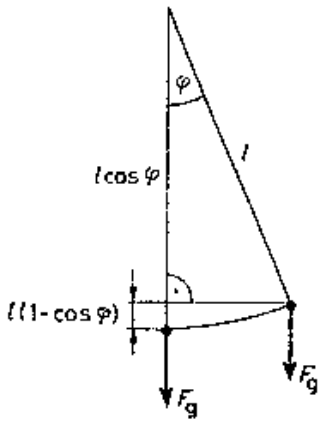
d) A *c)* rész alapján a maximális mozgási energia a négyszeresére nő.

8.87. *a)* Fonálinga lengése közben mennyi munkát végez a fonál, miközben a fonálra erősített test a legszélső helyzetből a legalsó helyzetbe jut?

b) Mennyi munkát végez ezalatt a gravitációs mező, ha az inga hossza l, a kitérítés szöge α?

Megoldás:

8.87. a) A fonálerő munkája nulla, mert minden időpillanatban merőleges az elmozdulásra.



b) Az ábra alapján a gravitációs erő irányába eső elmozdulás $l(1-\cos\varphi)$.

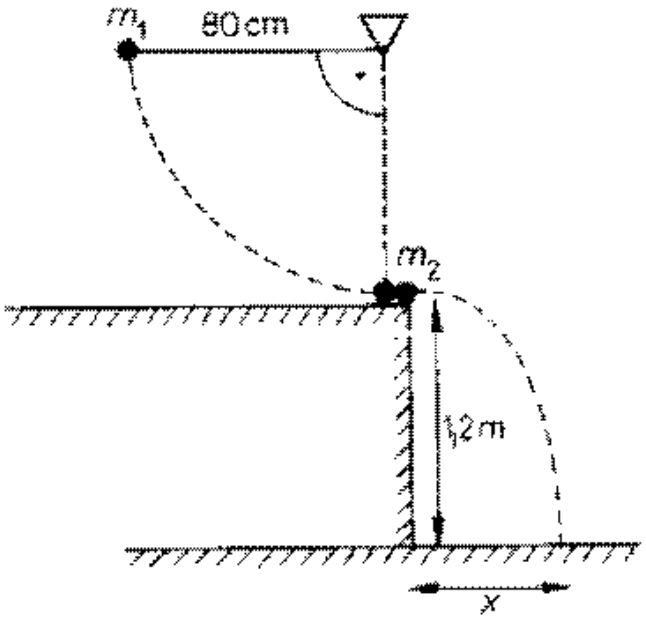
$W_{Fg} = F \cdot s = m \cdot g \cdot l(1-\cos\varphi)$.

8.88. A 80 cm hosszú fonálingát 90°-kal kitérítjük, majd elengedjük. A fonál függőleges helyzetében centrálisan és rugalmasan ütközik a fonál végén lévő m_1 tömegű test az asztal szélén álló m_2 tömegű testtel. Az ütközés következtében az m_1 tömegű test megáll.

a) Mekkora az m_2 test tömege az m_1-hez viszonyítva?

b) Mekkora sebességgel indult el az m_2 tömegű test?

c) Mekkora távolságban érkezik a padlóra az m_2 tömegű test?



Megoldás:

8.88. $l = 80$ cm.

a) Az m_1 tömeg test kezdeti helyzeti energiája függőleges helyzetben mozgási energiává alakul:

$$\left.\begin{array}{r} m \cdot g \cdot h = \dfrac{1}{2} m \cdot v^2 \\ h = l \end{array}\right\} \rightarrow v_1 = \sqrt{2hg} = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Rugalmas ütközéskor a lendület-megmaradás és energia-megmaradás elve is érvényes.

Ezeket alkalmazva az ütközésre:

$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$, $v_2 = 0$ és $v_1' = 0$ a feltételek szerint.

Így $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2' \rightarrow v_2 = \dfrac{m_1}{m_2} \cdot v_1$.

$\dfrac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \dfrac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$,

$\dfrac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \dfrac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$. v_2-t behelyettesítve:

$\dfrac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \dfrac{1}{2} m_2 \cdot \dfrac{m_1^2}{m_2^2} \cdot v_1^2 \rightarrow \underline{\underline{m_1 = m_2}}$.

b) $\underline{\underline{v_2' = v_1 = 4 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

c) Vízszintes hajítás: $h' = 1{,}2$ m.

$h' = \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h'}{g}} = 0{,}49$ s.

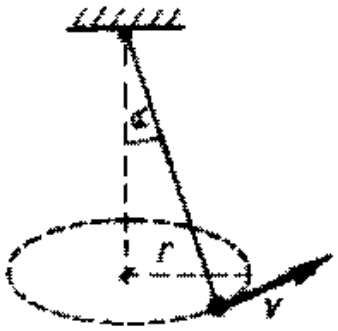
$x = \underline{s} = v_2' \cdot t = \underline{1{,}96 \text{ m}}$.

8.89. Egy 5,1 kg tömegű golyót 2,4 m hosszú fonálra függesztünk fel. Az így kapott ingát a függőleges helyzettől α szöggel kitérítve, vízszintes síkban körmozgásra késztetjük (kúpinga).

a) Mekkora szöget zár be a fonal a függőlegessel, ha a fonálerő 60 N?

b) Mekkora a golyó kerületi sebessége?

c) Mekkora a periódusidő?



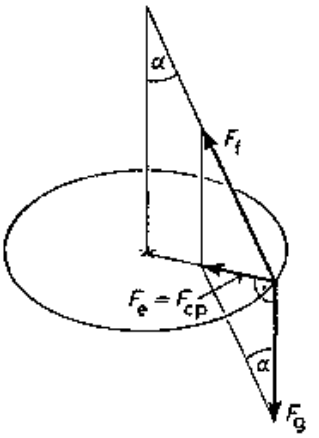
Megoldás:

8.89. $m = 5{,}1$ kg; $l = 2{,}4$ m; $F_f = 60$ N.

a) A gravitációs és fonálerő biztosítják a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt.

$F_g = m \cdot g = 51$ N.

$$\cos\alpha = \frac{F_g}{F_f} = 0{,}85 \rightarrow \underline{\underline{\alpha = 31°48'}}.$$



b) $r = 2{,}4 \cdot \sin\alpha = 1{,}26$ m.

$$F_{cp} = \sqrt{F_f^2 - F_g^2} = 31{,}6 \text{ N}.$$

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \underline{v} = \sqrt{\frac{F_{cp} \cdot r}{m}} = \underline{\underline{2{,}79 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

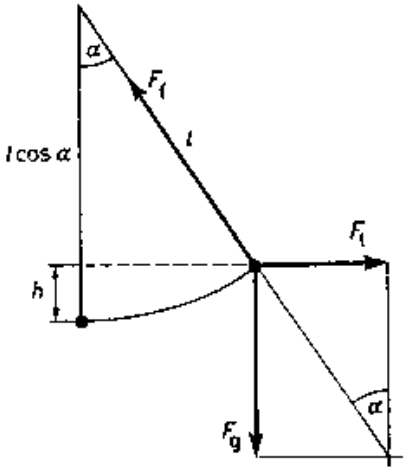
c) $$v = \frac{2r\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2r\pi}{v} = \underline{\underline{2{,}83 \text{ s}}}.$$

8.90. Az 1,4 m hosszú fonalra 2,1 kg tömegű testet erősítünk. Az ingát oldalirányba kitérítve 20 N nagyságú vízszintes irányú erővel kell tartanunk.

a) Mekkora a fonálerő az inga kitérített helyzetében?
b) Milyen magasra emeltük az ingát?
c) Az ingát elengedjük, mekkora érintőirányú erő gyorsítja az elengedés pillanatában?
d) Mekkora lesz az inga mozgási energiája a pálya legmélyebb pontján?

Megoldás:

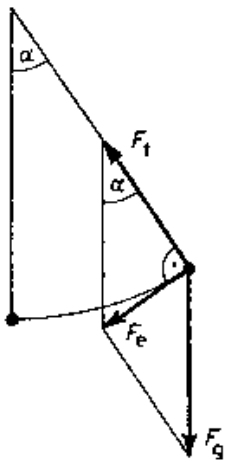
8.90. $l = 1{,}4$ m; $m = 2{,}1$ kg; $F_t = 20$ N.



a) A három erő hatására a test egyensúlyban van, eredőjük nulla. Az ábra alapján:

$$\underline{\underline{F_f = \sqrt{F_t^2 + F_g^2} = 29 \text{ N}}}.$$

b) $\underline{\underline{h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) = 0{,}39 \text{ m}}}.$



c) Ha elengedjük, akkor csak a fonálerő és a gravitációs erő hat a testre, amelyek hatására érintőirányban mozdul el.

$$\underline{\underline{F_e = m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \frac{20}{29} = 14{,}5 \text{ N}}}.$$

d) Az energiamegmaradás miatt:

$$\underline{\underline{E_m = E_h = m \cdot g \cdot h = 8{,}19 \text{ J}}}.$$

9.1. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Egy fazék vízben ökölnyi jégdarab úszik. Hogyan változik a víz felszínének magassága, ha a jég elolvad?

A) Emelkedik,

B) süllyed,

C) nem változik.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

9.1. Helyes válasz a C.

A jég úszik, mert a sűrűsége kisebb a víz sűrűségénél, súlya egyenlő a kiszorított víz súlyával. Olvadás után a sűrűsége nő, térfogata egyenlő lesz az eredetileg kiszorított víz térfogatával, tehát nem változik a víz szintje.

9.2. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

A körülbelül 10 l-es üvegkádban lévő víz felszínén úszó bádogdobozban ökölnyi jég van.
Hogyan változik a víz felszíne az üvegkádban, ha a jég elolvad?
A) Emelkedik,
B) süllyed,
C) nem változik.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

9.2. Helyes a C válasz.
A bádogdoboz bemerülését csak a benne lévő víz tömege befolyásolja. Ez jég és víz formájában ugyanakkora.

9.3. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Üvegkádban lévő, $1{,}26 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű glicerinen $0{,}92 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű jégkocka úszik, majd lassan elolvad.

Hogyan változik a folyamat közben a glicerin magassága?

A) Emelkedik,

B) csökken,

C) nem változik.

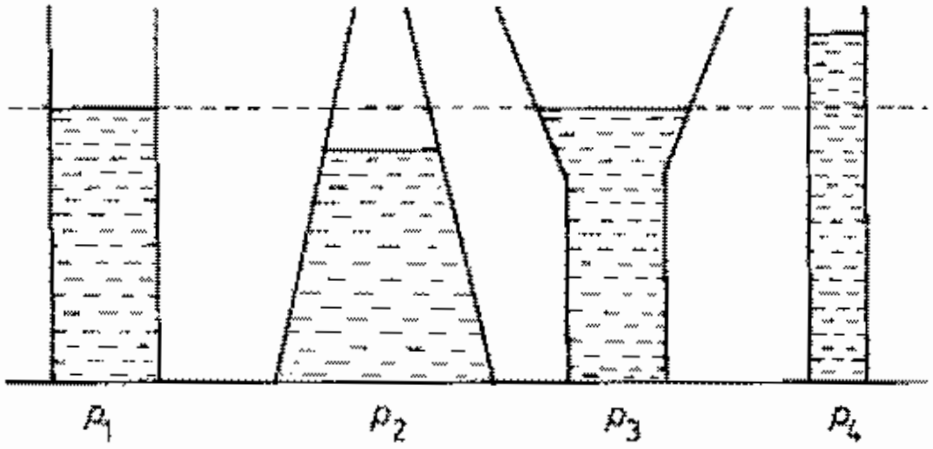
Indokoljuk választásunkat!

9.3. Helyes a B válasz.

Az úszó jégkocka kiszorít valamekkora térfogatú glicerint. Olvadás után a víz szétterül a glicerin felszínén, mert sűrűsége kisebb a glicerinénél, és nem keveredik vele.

9.4. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A négy edényben azonos hőmérsékletű víz van. Az edények alján mérhető nyomások: p_1, p_2, p_3 és p_4.

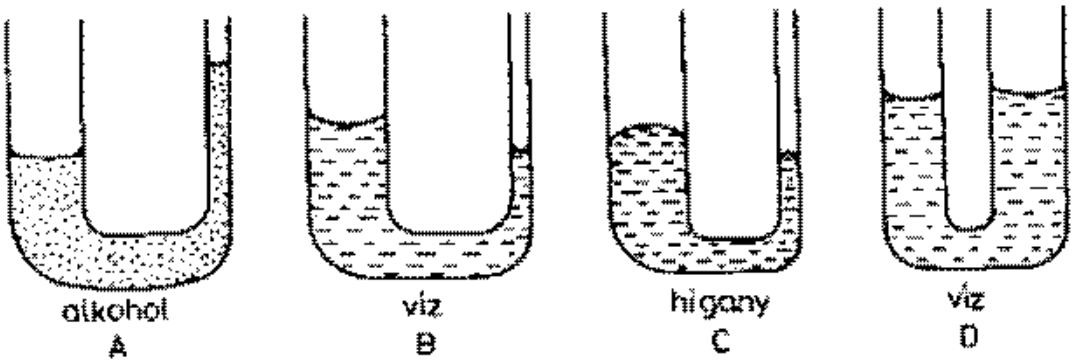


A) $p_2 < p_4$,
B) $p_2 > p_1$,
C) $p_2 < p_1$,
D) $p_1 = p_3$,
E) $p_4 > p_3$,
F) $p_3 > p_2$.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

9.4. Helyes állítások: A, C, D, E, F.
Az edények alján mérhető nyomás csak a folyadék sűrűségétől és a folyadékoszlop magasságától függ.

9.5. A négy U alakú üvegcső egyikében helytelenül ábrázoltuk a folyadékszinteket. Melyikben? Miért?
A vékony csövek belső átmérője 1 mm, a vastagabbaké 1 cm.



Megoldás:

9.5. Helytelen ábra a B.
Az 1 mm átmérőjű cső hajszálcső, ebben a nedvesítő folyadék (ilyen a feladatban a víz és az alkohol) felszíne magasabban áll, mint a szélesebb edényrészben.

9.6. *Az alábbi négy állítás közül válasszuk ki a* HIBÁSAT!

A) A folyadékba merülő testre a kiszorított folyadék súlyával egyenlő nagyságú felhajtóerő hat.
B) Minden folyadékban úszó testre felhajtóerő hat.
C) A nyugvó folyadékba merülő testre ható felhajtóerő minden esetben függ a test súlyától.
D) A felhajtóerő a folyadék sűrűségétől és a bemerülő test térfogatától függ.

Indokoljuk választásunkat!

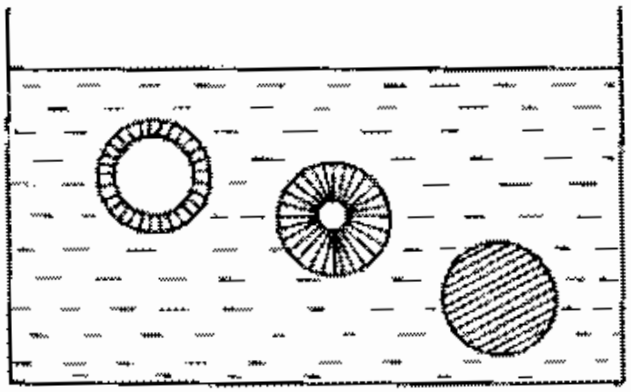
Megoldás:

9.6. Hibás a C és D állítás.
A felhajtóerő a folyadék sűrűségétől és a test bemerülő részének térfogatától függ.
Hibás a *D* is: nem az egész test, csak a bemerülő rész térfogatától függ a felhajtóerő.

9.7. *Válasszuk ki az egyetlen* HELYES *állítást!*

Vékony falú, vastag falú és tömör, egyenlő sugarú fémgömböket merítettünk különböző mélységekben ugyanabba a folyadékba. Melyikre hat a legnagyobb felhajtóerő?

A) A vékony falúra,
B) a vastag falúra,
C) a tömör gömbre,
D) mindháromra azonos felhajtóerő hat.



Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

9.7. Helyes állítás a D.
Mindhárom gömbre azonos nagyságú felhajtóerő hat, mert bemerülő térfogatuk ugyanakkora.

9.8. *Válasszuk ki az egyetlen* HELYES *állítást!*

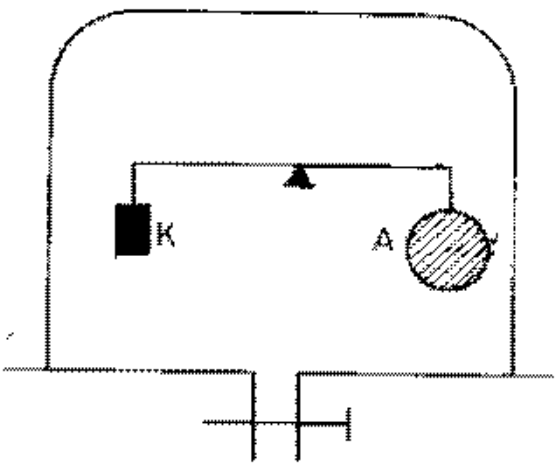
A bura alatt lévő „A" fagolyó és a „K" fémhenger az emelőn egyensúlyban van. Mi történik, ha a bura alól kiszivattyúzzuk a levegőt?

A) A fagolyó lesüllyed.

B) A fémhenger lesüllyed.

C) Az egyensúly megmarad.

Indokoljuk választásunkat!



Megoldás:

9.8. Helyes állítás az A.

Levegőben mindkét testre felhajtóerő hat, és $F_A > F_K$, mert az ugyanakkora súlyú két test közül nyilván a fagolyó térfogata nagyobb. A két test súlya és a felhajtóerők eredője hozza létre az eredeti egyensúlyt, tehát $G_A > G_K$, a felhajtóerők csökkenése után a fagolyó lesüllyed.

9.9. A folyadék felszínén úszó testekre vonatkozó *alábbi állítások közül az egyik* HIBÁS. *Melyik?*

A) Az úszó test a saját súlyával egyenlő súlyú folyadékot szorít ki.

B) A folyadék sűrűsége egyenlő a rajta úszó test sűrűségével.

C) Az úszó testre ható nehézségi erő és a felhajtóerő egyenlő nagyságú.

D) Az úszó test átlagos sűrűsége kisebb, mint a folyadék sűrűsége.

Indokoljuk választásunkat!

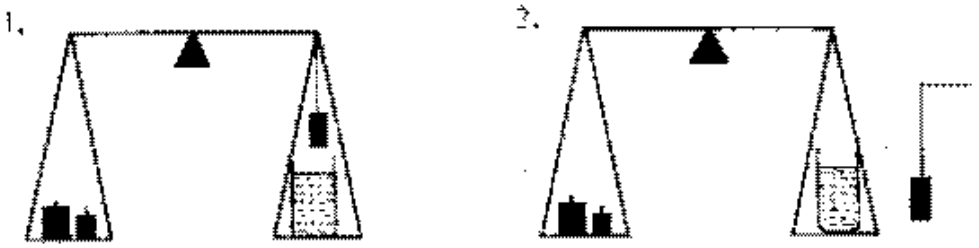
Megoldás:

9.9. Hibás a B állítás.

Az úszó test sűrűsége kisebb a folyadék sűrűségénél.

9.10. *Válasszuk ki az egyetlen* HELYES *állítást!*

Az ábrák szerinti két mérleg egyensúlyban van. Az 1. mérlegen függő hengeres testet beleengedjük a pohár vízbe. A 2. mérlegen levő pohár vízbe ugyanolyan, de nem a mérlegen függő hengert lógatunk. A vízbe lógatott henger mindkét esetben teljesen elmerül, de sehol nem ér a pohárhoz.



Melyik mérleg egyensúlya bomlik meg?

A) Az 1. mérlegé,
B) a 2. mérlegé,
C) egyiké sem,
D) mindkettőé.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

9.10. Helyes állítás a B.
Az egyenlőkarú mérleg egyensúlyának feltétele, hogy a karokra függesztett testek súlya megegyezzen. Az 1. mérlegnél a henger bemerítésével nem változik a testek súlya, az egyensúly megmarad. A 2. mérlegnél a kívülről bemerített hengerre ható felhajtóerő ellenereje hozzáadódik a felfüggesztett test súlyához, az egyensúly tehát megbomlik.

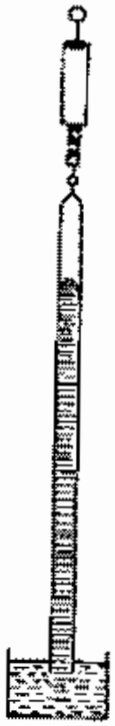
9.11. Egy Torricelli-csövet erőmérőre függesztünk. Az üvegcső alig merül a tálban lévő higany felszíne alá.

Mit mutat az erőmérő?

A) Az üvegcső súlyát.

B) Az üvegcső és benne lévő higany együttes súlyát.

Indokoljuk állításunkat!



Megoldás:

9.11. Egyik válasz sem helyes.

A higanyoszlop súlyát a külső nyomásból származó nyomóerő egyensúlyozza (Torricelli-cső). Az erőmérő az üvegcső súlyát akkor mutatná, ha az üres csövet tartaná, s a légnyomás minden irányból hatna rá. Mivel a Torricelli-csőben a higany fölött gyakorlatilag légüres tér van, a cső alsó peremére a higanyon keresztül ható nyomóerő nem tudja kiegyenlíteni a cső tetejére ható, légnyomásból származó nyomóerőt, így a csövet a levegőben mért súlyánál nagyobb erővel kell tartani.

9.12. Egyenlő térfogatú alumínium- és ólomdarabkát higannyal telt, nyitott edénybe teszünk.
Melyikre hat nagyobb felhajtóerő? Miért?

Megoldás:

9.12. Az ólomdarabra hat nagyobb felhajtóerő.
Mindkét test úszik a higanyon, a rájuk ható felhajtóerő egyenlő a testek súlyával. Az ólomdarab súlya nagyobb, ezért rá nagyobb felhajtóerő hat.

9.13. Fából készült téglatest vízben, magasságának feléig bemerülve úszik.
Meddig merülne be ugyanez a téglatest a vízbe a Holdon, ahol a nehézségi gyorsulás értéke a földi érték egyhatoda?

Megoldás:

9.13. Ugyanannyira merülne be.
Az úszó test bemerülésének mélysége csak a test és a folyadék sűrűségének arányától függ, független a nehézségi gyorsulás értékétől.

9.14. Hat-e felhajtóerő egy vödör vízben lévő labdára, miközben a vödör szabadon esik? Miért?

Megoldás:

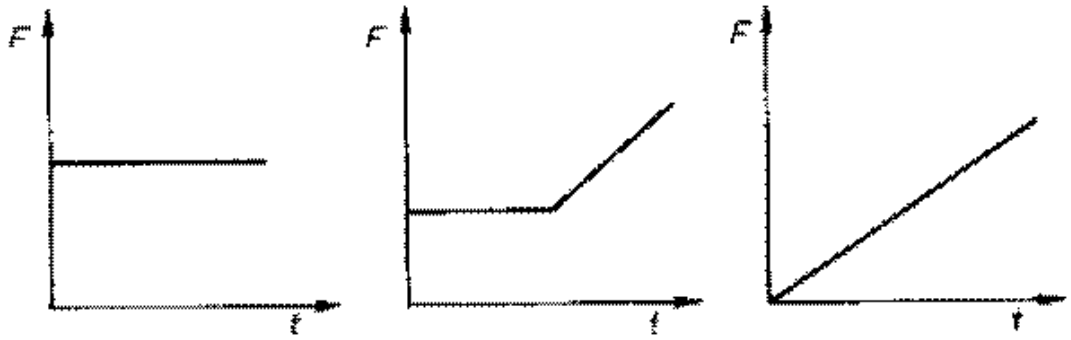
9.14. Nem!
A szabadon eső test súlytalan, nincs hidrosztatikai nyomóerő, s így felhajtóerő sem.

9.15. Pohárban nyugalomban lévő víz felszínére óvatosan ráfektethetünk 10, 20 filléres pénzérmét anélkül, hogy az lesüllyedne. Miért? Ha ezután a víz felszínéhez éteres vattával közelítünk, az addig a felszínen nyugvó pénzérme lesüllyed. Magyarázzuk meg a jelenséget!

Megoldás:

9.15. A felületi feszültség miatt a víz felszíne rugalmas hártyaként viselkedik, a kis súlyú, nagy felületű pénzérme alatt ez a hártya benyomódik, de nem szakad meg.
Az éter hatására a víz felületi feszültsége csökken, ezért nem képes megtartani az érmét.

9.16. Egy tó mélyéről daruval emelnek ki egy kocka alakú betontömböt. A kötelek az emelés egész ideje alatt függőleges irányúak, az emelés egyenletes.
Melyik grafikon ábrázolja helyesen az emeléshez szükséges erőt?



Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

9.16. Helyes a második ábra.
Amíg a kocka teljes térfogata a víz alatt van, az emelőerő állandó, egyenlő a kocka súlyának és a felhajtóerőnek az eredőjével.
Amint a kocka kezd kiemelkedni a vízből, csökken a felhajtóerő; csökkenése a kocka alakja és a merőleges emelés miatt arányos a kiemelt rész magasságával, a kocka súlya nem változik.
Az ábra a kocka teljes kiemeléséig mutatja az emelőerő változását.

9.17. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A folyadékok felületi feszültsége:

A) az a határfelületi feszültség, amely a telített gőzével érintkező folyadék felszínén alakul ki;

B) függ a folyadék anyagi minőségétől és hőmérsékletétől;

C) mérhető a folyadék szabad felszínének egységnyi növeléséhez szükséges munkával;

D) jól habzó folyadékok (pl. mosószeres víz, szappanoldat) esetén nagy.

Megoldás:

9.17. Helyes az A, B, C.

Hibás a D: a jó habzás éppen azt jelenti, hogy kis munkával növelhető a szabad felszín, vagyis kicsi a felületi feszültség.

9.18. Mosószeres víz felszínén aránylag kevés rázás, keverés hatására hab képződik, sőt könnyen lehet belőle „szappanbuborékot" fújni. E tapasztalat alapján állapítsuk meg, hogyan változtatta meg a mosószer a víz felületi feszültségét!
Állításunkat igazoljuk!

Megoldás:

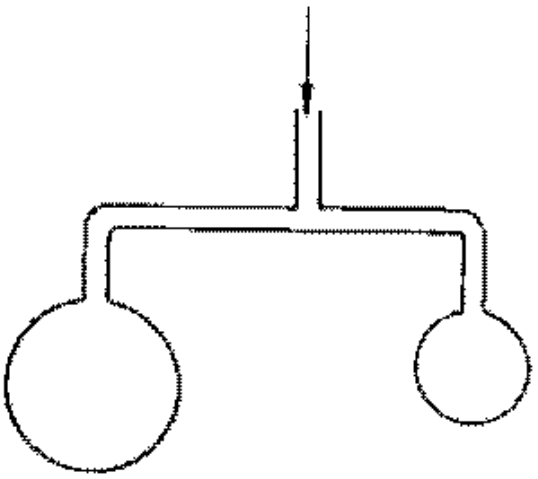
9.18. A mosószer csökkenti a felületi feszültséget. (Ld. a 9.17. feladat megoldását!)

9.19. Az élőlényeket a környezettől elválasztó falak (sejtfal, bőr, héj stb.) vízzel szemben mutatott határfelületi feszültsége általában nagy.
Milyen szerepe van ennek a tulajdonságnak?

Megoldás:

9.19. Ez a határfelületi feszültség védi a szerveket a káros vízfelvételtől.

9.20. Az ábrán látható kétágú üvegcsövön – kellő ügyességgel – két különböző méretű szappanbuborékot fújunk, majd a cső szabad végét befogjuk.
Mi történik ezután? Magyarázzuk meg a jelenséget!



Megoldás:

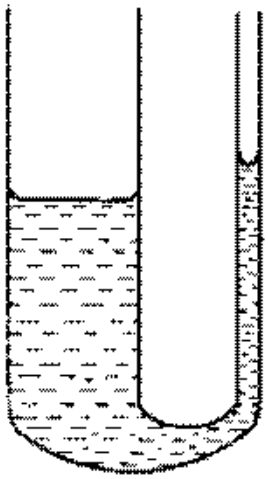
9.20. A kisebb térfogatú buborék térfogata csökken, a nagyobbé nő.
Oka: a kis buborék kisebb sugara, nagyobb görbülete miatt a felületi feszültségből származó, a szabad felszínt csökkentő erők eredője nagyobb, ezért a kisebb buborék belsejében nagyobb nyomás alakul ki, a levegő átáramlik a nagyobb buborékba.

9.21. Ismert tény, hogy a légnyomás meghatározott magasságú vízoszlopot képes hidrosztatikai egyensúlyban tartani. Milyen szerepe van a hajszálcsövességnek és a párolgásnak a 8–10 méternél magasabb fák nedvkeringésének fenntartásában?

Megoldás:

9.21. A víz nedvesíti a növényekben lévő hajszálcsövek falát: a kapilláris erők eredője a víz szabad felszíne felé mutat, a felszín homorú lesz, a kapilláris erő emeli a folyadékot. A párolgás folyamatosan üríti a kapillárisokat, további nyomáskülönbséget állít elő, ezzel erősíti a kapilláris nyomóerő hatását.

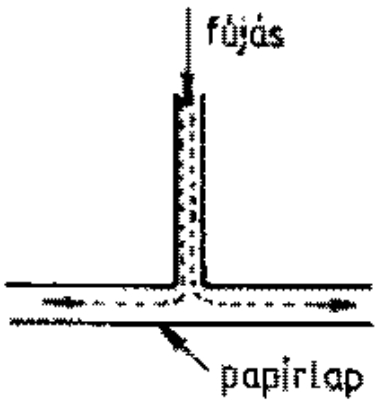
9.22. Az ábrán látható U alakú cső egyik szára igen szűk kapilláris cső. A csőben higany van.
Helyesen ábrázoltuk-e az ábrán a higanyszinteket?
Indokoljuk állításunkat!



Megoldás:

9.22. Nem!
A higany nem „nedvesíti" az üveget, a kapilláris nyomóerők eredője a folyadék belseje felé mutat, ezért a felszíne domború.
A szűk keresztmetszetű kapillárisban a nyomóerők eredője a folyadékszintet lenyomja, itt a higany alacsonyabban áll, mint a nagyobb keresztmetszetű részben.

9.23. Egy csődarab végére erősítünk egy középen kifúrt, lemezből kivágott korongot. A koronggal szembe, azzal párhuzamosan egy papírlapot állítunk, majd levegőt fújunk a csőbe. A papírlap

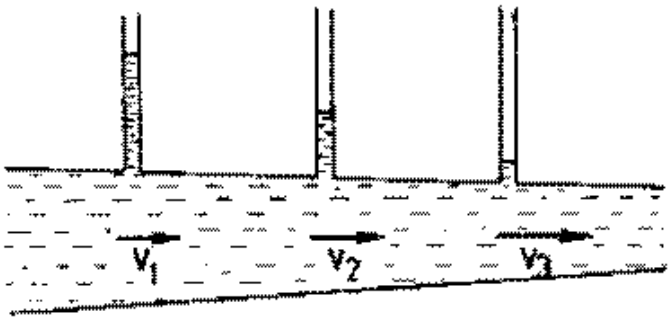


nem repül el a korongtól, hanem közeledik felé. Valósággal odaszívódik a csőhöz erősített koronghoz. Miért?

Megoldás:

9.23. A csőből a ráerősített korong és az elé helyezett papírlap között kiáramló nagy sebességű levegő nyomása kisebb, mint a papírlap másik oldalára a nyugvó levegőben ható nyomás (Bernoulli-törvény). Ez a nyomáskülönbség a papírlapot a koronghoz szívja.

9.24. Elemezzük és értelmezzük az ábrát az áramlásról tanult törvények segítségével!



Megoldás:

9.24. A szűkülő csőben áramló víz sebessége a folyadék összenyomhatatlansága miatt változik: $v_3 > v_2 > v_1$. Az áramlási cső falára ható nyomás a nagyobb sebességű részeken kisebb: $p_3 < p_2 < p_1$, ezekkel tart egyensúlyt a csatlakozó kis csövekben lévő folyadék hidrosztatikai nyomása.

9.25. A csapból kifolyó vízsugár lefelé szűkül és végül cseppekre szakad. Mi ennek az oka?

Megoldás:

9.25. A csapból kifolyó víztömeg sebessége esés közben nő, a kontinuitás miatt a vízsugár elvékonyodik. Az elvékonyodásnak a vízmolekulák közti vonzóerő szab határt, és így a vízsugár cseppekre bomlik.

9.26. Egy áramlási cső átmérője felére, majd negyedére csökken. Milyen kapcsolat van a szűkületekben a sebességek között, ha az áramló folyadék összenyomhatatlan, az áramlás súrlódásmentes és stacionárius?

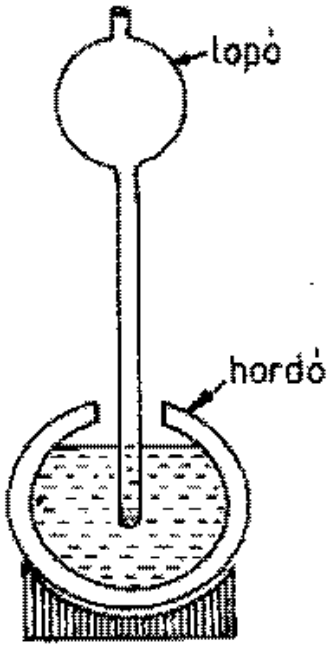
Megoldás:

9.26. A kontinuitási egyenlet szerint: $A \cdot v = \text{állandó}$. Ha $A_1 = \frac{A}{4}$, akkor $v_1 = 4v$; ha $A_2 = \frac{A}{16}$, akkor $v_2 = 16v$. (A keresztmetszet az átmérő négyzetével arányosan csökken.)

9.27. *Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!*

a) Miért „szökik" fel a folyadék a lopó megszívásakor a lopóba?

b) Miért nem ömlik vissza a folyadék a lopóból a hordóba, ha a lopó felső nyílását befogjuk?



Megoldás:

9.27. a) A szívás hatására a lopóban lévő levegő nyomása lecsökken, a külső nyomás és a csökkent belső nyomás különbsége miatt a csőben felszökik a folyadék, amíg hidrosztatikai nyomása ki nem egyenlíti a nyomáskülönbséget.

b) Ha a lopót, felső végét befogva emeljük ki a hordóból, a nyomáskülönbség továbbra is fennáll, és megtartja a felszívott folyadékot.

9.28. Egy hidraulikus emelő áttétele (a munkahenger és a nyomóhenger keresztmetszetének aránya) 50 : 1.

a) Mekkora erővel kell lenyomni a nyomóhenger dugattyúját, ha az emelővel 200 kg tömegű terhet akarunk emelni?

b) Mekkora munkát végzünk, miközben a teher 10 cm-t emelkedik?

(A veszteségektől eltekintünk.)

Megoldás:

9.28. $\frac{A_m}{A_{ny}} = 50$; $m = 200$ kg; $s = 0{,}1$ m.

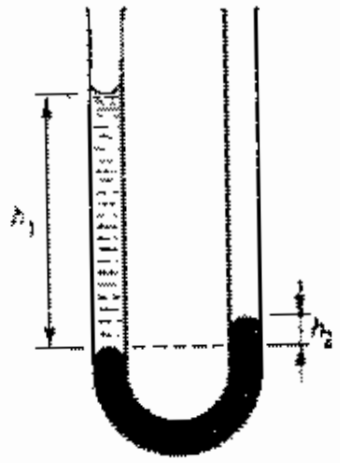
a) $\frac{A_m}{A_{ny}} = \frac{F_m}{F_{ny}}$; $F_m = m \cdot g = 2000$ N; $F_{ny} = F_m \frac{A_{ny}}{A_m} = \underline{\underline{40\ \text{N}}}$.

b) $W = F_m s = \underline{\underline{200\ \text{J}}}$.

9.29. Egy U alakú csőben alul higany, az egyik szárban a higany fölött 20 cm magas ismeretlen sűrűségű folyadékoszlop van. A két higanyszint különbsége 1 cm.
Mekkora az ismeretlen folyadék sűrűsége? (A higany sűrűsége 13 600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Megoldás:

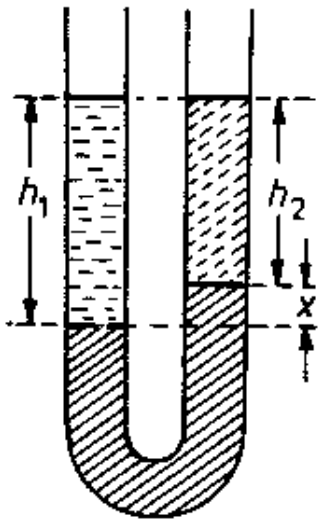
9.29. $h_1 = 0{,}2$ m; $h_2 = 10^{-2}$ m; $\varrho_2 = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Az egyensúlyfeltétel: $h_1 \cdot \varrho_1 = h_2 \cdot \varrho_2$.

$\varrho_1 = 680\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

9.30. U alakú csőben alul higany van. Egyik szárába a higany fölé 25 cm magasan 700 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű benzint öntöttünk, a másik szárba annyi vizet, hogy felszíne a benzinével azonos magasságban legyen.
Mekkora a két higanyszint közötti különbség?



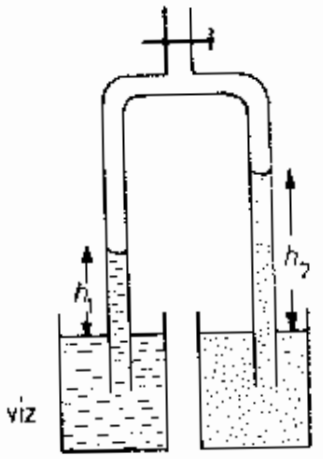
Megoldás:

9.30. $h_2 = 0{,}25$ m; $\varrho_2 = 700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $h_1 = h_2 + x$; $\varrho_1 = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;
$\varrho_{\text{Hg}} = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
Az egyensúlyfeltétel: $(h_2 + x)\varrho_1 = h_2 \cdot \varrho_2 + x \cdot \varrho_{\text{Hg}}$.
$x = \frac{h_2(\varrho_1 - \varrho_2)}{\varrho_{\text{Hg}} - \varrho_1} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}}$.

9.31. Az ábrán látható kétágú, felül csappal elzárható szívócső segítségével egymással keveredő folyadékok sűrűségét is összehasonlíthatjuk, illetve az egyik folyadék sűrűségének ismeretében a másikét meghatározhatjuk. Mérési gyakorlaton etil-alkohol sűrűségét mértük. A víz sűrűsége $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Mérési eredményeink:

	h_1(cm)	h_2(cm)
1.	3,2	4,1
2.	4,7	5,8
3.	5,8	7,7
4.	8,2	10,5
5.	5,3	6,6
6.	2,4	3,0
7.	6,2	8,0



Mekkora az etil-alkohol sűrűsége?

Megoldás:

9.31. $\varrho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_2 = \frac{h_1}{h_2}\varrho_1$. Mérési eredmények:

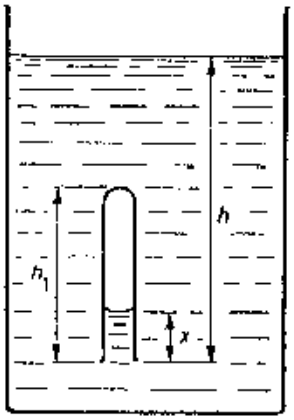
$\frac{h_1}{h_2} = 0{,}780;\ 0{,}810;\ 0{,}753;\ 0{,}781;\ 0{,}803;\ 0{,}800;\ 0{,}775.$

A mért értékek átlagából: $\frac{h_1}{h_2} = 0{,}786$. Ebből $\underline{\varrho_2 = 786 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$.

9.32. A 12 cm hosszú kémcsövet nyílásával lefelé függőlegesen tartva, víz alá nyomjuk úgy, hogy a szája 1 m mélyen legyen a víz felszíne alatt.
Milyen magas vízoszlop nyomul a kémcsőbe?
(A külső nyomás 100 kPa, a víz és a levegő hőmérséklete egyaránt 20 °C, mérés közben nem változik.)

Megoldás:

9.32. $\varrho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $p_k = 10^5$ Pa; $h_1 = 0{,}12$ m; $h = 1$ m; $\Delta T = 0$.



Az A keresztmetszetű kémcsőben a víz alá nyomás előtt $A \cdot h_1$ térfogatú p_k nyomású levegő van. A víz alatt a bezárt levegő térfogata $h_1 - x$, nyomása $p_k + (h - x)\varrho \cdot g$. Az állapotváltozás izoterm, ezért

$$A \cdot h_1 \cdot p_k = A \cdot (h_1 - x)(p_k + h \cdot \varrho \cdot g - x \cdot \varrho \cdot g).$$

Az ebből egyszerűsítés után kapott másodfokú egyenletből $\underline{\underline{x = 0{,}01\ \text{m}}}$.

9.33. A 60 cm hosszú, mindkét végén nyitott, függőlegesen álló üvegcsövet feléig higanyba merítjük, majd a cső felső végét befogva, a csövet függőlegesen tartva, kiemeljük a higanyból.
Mekkora a csőben maradt higanyoszlop hossza?
(A külső nyomás 100 kPa, a hőmérséklet állandó, a higany sűrűsége 13 600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

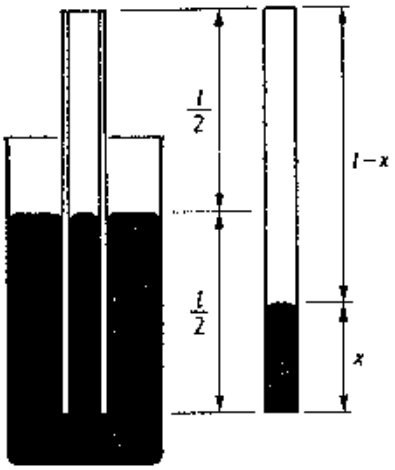
Megoldás:

9.33. $l = 0{,}6$ m; $p_k = 10^5$ Pa; $\varrho = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\Delta T = 0$.

A higanyba merülő A keresztmetszetű cső felső végének lezárása után a bezárt levegő térfogata $A \cdot \frac{l}{2}$, nyomása p_k. Kiemelés után a térfogat $A(l-x)$, a nyomás $p_k - x \cdot \varrho \cdot g$. Az állapotváltozás izoterm,

$$A \cdot \frac{l}{2} \cdot p_k = A \cdot (l-x)(p_k - x \cdot \varrho \cdot g).$$

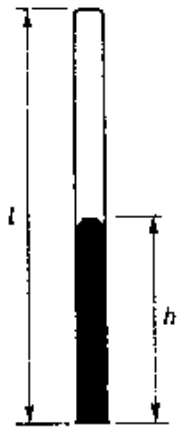
Az ebből kapott másodfokú egyenlet megoldása $\underline{\underline{x = 0{,}19 \text{ m}}}$.



9.34. Az 1 cm^2 belső keresztmetszetű, 1 méter hosszú Torricelli-csőben 50 cm magasan áll a higany.
Hány g levegő jutott be a csőbe a higany fölé?
(A külső légnyomás 100 kPa, a hőmérséklet a csövön belül és kívül egyaránt 0 °C. A levegő normál sűrűsége 1,3 $\frac{kg}{m^3}$, a higany sűrűsége 13 600 $\frac{kg}{m^3}$, $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.)

Megoldás:

9.34. $A = 10^{-4}\ m^2$; $l = 1$ m; $h = 0.5$ m; $p_k = 10^5$ Pa; $t_0 = 0$ °C;
$\varrho_0 = 1{,}3\ \frac{kg}{m^3}$; $\varrho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$.

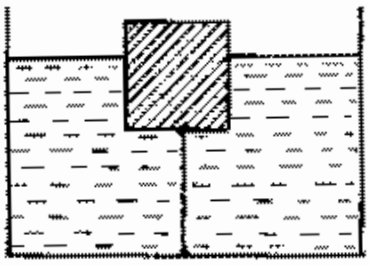


A bezárt levegő nyomása:
$p = p_k = h \cdot \varrho \cdot g = 3{,}2 \cdot 10^4$ Pa.
Sűrűsége ebben az állapotban:
$\varrho' = \frac{p}{p_0} \cdot \varrho_0 = 0{,}41\ \frac{kg}{m^3}$.
Tömege: $m = \varrho' \cdot A \cdot \frac{l}{2} = \underline{\underline{2{,}08 \cdot 10^{-5}\ kg}}$.

9.35. A 3 dm élhosszúságú, 9 kg tömegű fakockát a vízzel telt medencében kötéllel rögzítették a fenékhez úgy, hogy a kocka magasságának egyharmada van a vízszint felett.

a) Mekkora erő feszíti a kötelet?

b) Milyen mélyen merül a kocka a vízbe, ha a kötelet elvágjuk? $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$



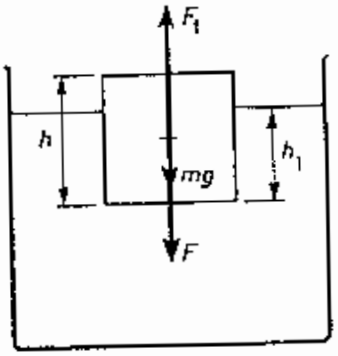
Megoldás:

9.35. $h = 0{,}3$ m; $h_1 = 0{,}2$ m; $m = 9$ kg; $V = 27 \cdot 10^{-3}$ m^3; $\varrho_k = \frac{10^3}{3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;

$\varrho_v = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

a) A rögzített kocka egyensúlyának feltétele:

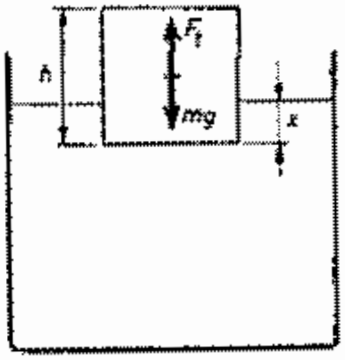
$F + m \cdot g = h^2 \cdot h_1 \cdot \varrho_v \cdot g$; $\underline{\underline{F = 90 \text{ N}}}$.



b) Az úszás feltétele:

$m \cdot g = F_f$, $V \cdot \varrho_k \cdot g = V_b \cdot \varrho_v \cdot g$,

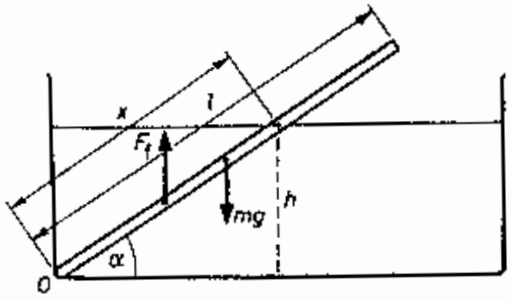
$\frac{V_b}{V_k} = \frac{\varrho_k}{\varrho_v} = \frac{1}{3}$, tehát $\underline{\underline{x = 0{,}1 \text{ m}}}$.



9.36. Egy 2 m hosszú, 5 cm² keresztmetszetű homogén falléc egyik végét csuklóval rögzítettük egy medence aljához. A medencében 0,8 m magasan áll a víz. A fa sűrűsége 640 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Mekkora szöget zár be a falléc a medence aljával?

Megoldás:

9.36. $l = 2$ m; $A = 5 \cdot 10^{-4}$ m²; $h = 0{,}8$ m; $\varrho = 640\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



A rúd egyensúlyának feltétele: a rögzített O pontra vonatkozó forgatónyomatékok összege 0. A rúd x hosszúságú része van a víz alatt, erre hat a felhajtóerő: $F_f = A \cdot x \cdot \varrho_v \cdot g$.

A forgatónyomatékok: $F_f \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$.

$A \cdot x \cdot \varrho_v \cdot \frac{x}{2} = l \cdot A \cdot \varrho \cdot \frac{l}{2}$; $x = 1{,}6$ m. $\sin\alpha = \frac{h}{x} = 0{,}5$; $\underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

9.37. Kődarabot vízbe merítve, fele akkora erővel kell tartani, mint levegőben.
Mekkora a kő sűrűsége?

Megoldás:

9.37. $F_f = \frac{m \cdot g}{2}$; $m \cdot g = 2F_f$; $V \cdot \varrho \cdot g = 2V \cdot \varrho_v \cdot g$.

$\underline{\varrho} = 2 \cdot \varrho_v = \underline{\underline{2 \cdot 10^3 \ \frac{kg}{m^3}}}$.

9.38. Egy üvegdugó súlya levegőben 2,8 N. 800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű petróleumba merítve, 1,9 N erővel kell tartani. Mekkora az üveg sűrűsége? $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$

Megoldás:

9.38. $G_1 = m \cdot g = 2{,}8$ N; $m = 0{,}28$ kg; $G_p = 1{,}9$ N; $\varrho_p = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A petróleumba merülő test egyensúlyfeltétele:

$F_f = G_1 - G_p$, $V \cdot \varrho_p \cdot g = G_1 - G_p$,

ebből a test térfogata: $V = \frac{G_1 - G_p}{\varrho_p \cdot g} = 1{,}125 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$,

sűrűsége: $\varrho = \frac{m}{V} = \underline{\underline{2{,}49 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$.

9.39. Egy m tömegű testet a ϱ_1 sűrűségű vízben teljesen elmerítve F_1, a ϱ_2 sűrűségű alkoholban F_2 erővel kell tartani. Mekkora az alkohol sűrűsége?

$\left(\text{Adatok: } m = 100\ \text{g};\ \varrho_1 = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\ F_1 = 0{,}5\ \text{N};\ \varrho_2 = 789\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\ F_2 = 0{,}6\ \text{N};\ g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$

Megoldás:

9.39. Paraméteresen:

tartóerő az 1. folyadékban: $F_1 = m \cdot g - V \cdot \varrho_1 \cdot g$;

a 2. folyadékban: $F_2 = m \cdot g - V \cdot \varrho_2 \cdot g$.

$$V = \frac{m \cdot g - F_1}{\varrho_1} = \frac{m \cdot g - F_2}{\varrho_2}.$$

Az ismeretlen sűrűség: $\varrho_2 = \frac{m \cdot g - F_2}{m \cdot g - F_1} \cdot \varrho_1$.

$$\underline{\underline{\varrho = 0{,}8 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}.$$

9.40. Homogén ötvözetet készítettünk m_1 tömegű, ϱ_1 sűrűségű és m_2 tömegű, ϱ_2 sűrűségű fémből.
Számítsuk ki az ötvözet sűrűségét!

Megoldás:

9.40. Az ötvözet sűrűsége: $\varrho = \dfrac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$, ahol $V_1 = \dfrac{m_1}{\varrho_1}$ és $V_2 = \dfrac{m_2}{\varrho_2}$; ezekből

$$\varrho = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1 \cdot \varrho_2 + m_2 \cdot \varrho_1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}} = \underline{\underline{\frac{(m_1 + m_2) \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2}{m_1 \cdot \varrho_2 + m_2 \cdot \varrho_1}}}.$$

9.41. Réz-cink ötvözet súlya levegőben 45 N, benzinben 41 N. Számítsuk ki az ötvözetben lévő réz és cink tömegarányát!

$\left(\text{Sűrűségek: benzin: } 750\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ \text{réz: } 8900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ \text{cink: } 7200\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\right.$

$\left. g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \right)$

Megoldás:

9.41. $G_1 = m \cdot g = 45\ \text{N};\quad G_b = 41\ \text{N};\quad m = 4{,}5\ \text{kg};\quad \varrho_b = 0{,}75 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};$

$\varrho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3};\quad \varrho_2 = 7{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$

Az ötvözet térfogata: $V = \frac{G_1 - G_b}{\varrho_b \cdot g} = 5{,}33.10^{-4}\ \text{m}^3;$

sűrűsége: $\varrho = \frac{m}{V} = 8{,}44 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$

$m_1 + m_2 = m;\quad V_1 \cdot \varrho_1 + (V - V_1) \cdot \varrho_2 = V.$

$V_1 + V_2 = V;\quad V_1 = 3{,}89 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3.$

$V_2 = V - V_1;\quad V_2 = 1{,}44 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3.$

A tömegarány: $\underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 \cdot \varrho_1}{V_2 \cdot \varrho_2} = 3{,}34}}.$

9.42. A 3,6 kg tömegű, 7200 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű, fémből készült kannába 20 liter olaj fér. Elmerül, úszik vagy lebeg az olajjal telitöltött kanna, ha tengervízbe dobjuk?

(Az olaj sűrűsége 850 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a tengervíz sűrűsége 1030 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Megoldás:

9.42. $m_1 = 3{,}6$ kg; $\varrho_1 = 7200\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $V_0 = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3$; $\varrho_0 = 850\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1030\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A tele kanna súlya: $(m_1 + V_0 \cdot \varrho_0) \cdot g$; térfogata: $\frac{m_1}{\varrho_1} + V_0$.

Úszik, ha $(m_1 + V_0 \cdot \varrho_0) \cdot g < \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + V_0\right) \cdot \varrho_v \cdot g$.

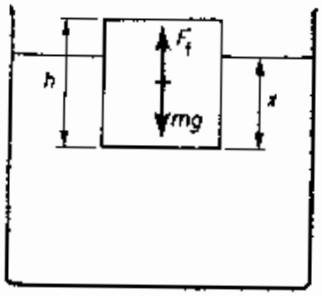
206 N < 211 N. Tehát úszik.

9.43. Egy 2 kg tömegű, homogén fahasáb magasságának kétharmad részéig bemerülve úszik a vízen.

a) Mekkora a fa sűrűsége?
b) Mekkora a fahasábra ható felhajtóerő?

Megoldás:

9.43. $m = 2$ kg; $\frac{x}{h} = \frac{2}{3}$.



a) $V \cdot \varrho \cdot g = \frac{2}{3} V \cdot \varrho_v \cdot g$, $\varrho = \frac{2}{3} \cdot \varrho_v =$

$= \underline{\underline{666{,}7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$.

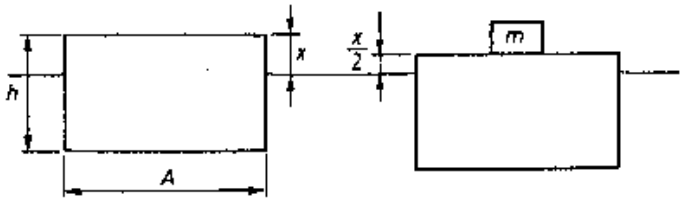
b) $m \cdot g = F_f = \underline{\underline{20 \text{ N}}}$.

9.44. Egy egyenletesen 40 cm vastagságú jégtábla vízből kiálló része felére csökken, ha egy 75 kg tömegű ember rálép. Mekkora a jégtábla területe?

$\left(\text{A jég sűrűsége } 930 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}.\right)$

Megoldás:

9.44. $m_1 = 75$ kg; $h = 0{,}4$ m; $\varrho_j = 930 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



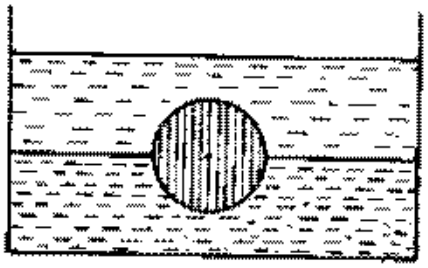
Egyensúlyfeltétel terhelés nélkül:

$m \cdot g = F_f$; $A \cdot h \cdot \varrho_j \cdot g = A \cdot (h - x) \cdot \varrho_v \cdot g$.

A kiálló rész magassága $x = 2{,}8$ cm. A teher (a rálépő ember) súlya egyenlő a felhajtóerő növekedésével, vagyis az $\dfrac{x}{2}$ magasságú, A alapterületű jégtáblára ható felhajtóerővel: $m_1 \cdot g = A \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \varrho_v \cdot g$, innen $A = 5{,}36$ m^2.

9.45. Egy edényben, ϱ_1 sűrűségű folyadék tetején úszik egy homogén, gömb alakú test. Ha ϱ_2 sűrűségű, az előbbivel nem keveredő folyadékból óvatosan annyit öntünk az edénybe, hogy a gömböt teljesen ellepje, a gömb úgy helyezkedik el, hogy középpontja pontosan a két folyadék érintkezésénél van.

Mekkora a gömb sűrűsége?



Megoldás:

9.45. A gömb súlya egyenlő a két félgömbre ható felhajtóerő összegével:

$$V \cdot \varrho \cdot g = \frac{V}{2} \cdot \varrho_1 \cdot g + \frac{V}{2} \cdot \varrho_2 \cdot g.$$

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

9.46. A 7800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű, 1 dm^3 térfogatú, tömör vaskocka 0 °C hőmérsékletű higanyon úszik.

a) Mekkora a bemerült rész magassága?

b) Nő vagy csökken a bemerülés mélysége, ha a higany és a vas felmelegszik? Miért?

Megoldás:

9.46. $\varrho_{Fe} = 7800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_{Hg} = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $V = 10^{-3}\ \text{m}^3$; $h = 0{,}1\ \text{m}$.

a) Egyensúlyfeltétel: $A \cdot h \cdot \varrho_{Fe} \cdot g = A \cdot x \cdot \varrho_{Hg} \cdot g$.

A bemerülés mélysége: $\underline{\underline{x = 0{,}0573\ \text{m}}}$.

b) Az egyensúlyfeltételből látható, hogy a bemerülés mélysége a két sűrűség arányától függ: $\frac{V_{be}}{V} = \frac{\varrho_{test}}{\varrho_{folyadék}} = \frac{\varrho_{Fe}}{\varrho_{Hg}}$.

Mivel melegítés hatására a folyadék nagyobb mértékben tágul, mint a szilárd test $\left(\beta_{Fe} = 3{,}51 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}},\ \beta_{Hg} = 18 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}\right)$, s így a folyadék sűrűsége nagyobb mértékben csökken, mint a szilárd testé, a bemerülés mértékét meghatározó hányados és ezzel a <u>bemerülés mélysége nő</u>.

9.47. Kis méretű kannában víz, a vízben 10 cm^3 térfogatú fémgolyó van.

a) Mekkora a golyóra ható felhajtóerő?

b) A kannát rugóra akasztva $2\ \frac{1}{s}$ frekvenciájú, 6 cm amplitúdójú rezgésbe hozzuk. A rezgés iránya függőleges. Mekkora a vízben lévő golyóra ható felhajtóerő legnagyobb és legkisebb értéke? $\left(g = 10\ \frac{m}{s^2}.\right)$

Megoldás:

9.47. $V = 10^{-5}\ m^3$; $f = 2\ \frac{1}{s}$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 12{,}56\ \frac{1}{s}$; $A = 0{,}06$ m.

a) $F_f = V \cdot \varrho_v \cdot g = \underline{\underline{0{,}1\ N}}$.

b) A rezgő kanna gyorsulásának maximális értéke: $a_{max} = A \cdot \omega^2 = 9{,}47\ \frac{m}{s^2}$.

Ha a kanna lefelé gyorsul: $F_f = V \cdot \varrho_v \cdot (g - a) = \underline{\underline{5{,}3 \cdot 10^{-3}\ N}}$.

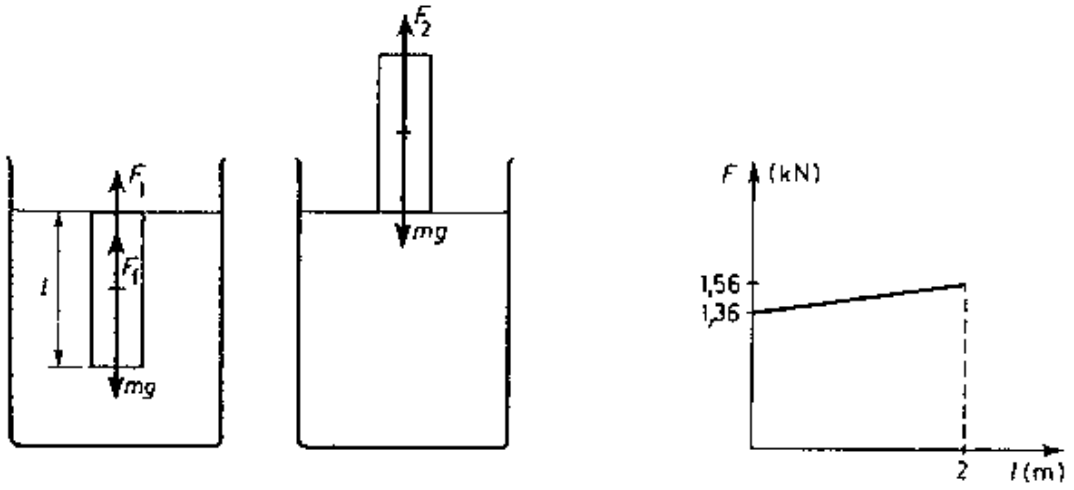
Ha felfelé gyorsul: $F_f = V \cdot \varrho_v \cdot (g + a) = \underline{\underline{0{,}1947\ N}}$.

9.48. A 2 m hosszú, 1 dm² keresztmetszetű vasgerenda úgy áll függőlegesen egy medencében, hogy a víz éppen ellepi. Mekkora munkával lehet a gerendát – mindvégig függőlegesen tartva – egyenletes mozgással teljesen kiemelni a vízből?

$\left(\text{A vas sűrűsége } 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.\right)$

Megoldás:

9.48. $l = 2$ m; $A = 10^{-2}$ m²; $\varrho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $m = A \cdot l \cdot \varrho = 156$ kg.



Az emeléshez szükséges erő

az emelés kezdetekor: $F_1 = m \cdot g - V \cdot \varrho_v \cdot g = 1360$ N,

az emelés végén: $F_2 = m \cdot g = 1560$ N.

Az erő emelés közben egyenletesen nő.

Az összes munka: $W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot l = \underline{\underline{2920 \text{ J}}}$.

9.49. Egy ϱ_1 sűrűségű golyót fonálra függesztve, ϱ_2 sűrűségű vízzel telt medencébe lógatunk úgy, hogy a golyót a víz teljesen ellepje, majd elvágjuk a fonalat.

a) Mekkora gyorsulással indul a golyó a fonal elszakadásának pillanatában?

Legyen $\varrho_1 = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_2 = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$! A közegellenálást ne vegyük figyelembe!

b) Mi történik, ha $\varrho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

Megoldás:

9.49. **a)** $\varrho_1 = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A fonál elvágásának pillanatában a golyóra $m \cdot g - F_f = V \cdot \varrho_1 \cdot g - V \cdot \varrho_v \cdot g = V \cdot g \cdot (\varrho_1 - \varrho_v)$ erő hat.

Gyorsulása: $a = \frac{F}{m} = \frac{V \cdot g \cdot (\varrho_1 - \varrho_v)}{m} = \frac{g \cdot (\varrho_1 - \varrho_v)}{\varrho_1}$,

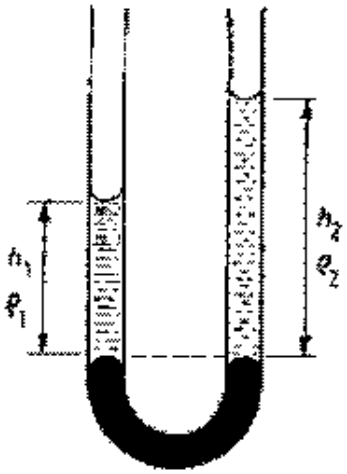
$a = 6{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) Ha a golyó sűrűsége egyenlő a víz sűrűségével, $a = 0$, a golyó lebeg.

9.50 U alakú csőben alul higany van. Ha a higany fölé az egyik szárba h_1 magasságban ϱ_1 sűrűségű folyadékot, a másikba h_2 magasságban ismeretlen sűrűségű folyadékot teszünk, a két higanyszint megegyezik.
Mekkora az ismeretlen folyadék ϱ_2 sűrűsége?

Megoldás:

9.50. Egyensúlyfeltétel: $h_1 \cdot \varrho_1 = h_2 \cdot \varrho_2$.



A sűrűség: $\varrho_2 = \varrho_1 \cdot \frac{h_1}{h_2}$.

9.51. Egy A alapterületű, h magasságú, ϱ_1 sűrűségű, téglatest alakú deszka ϱ_2 sűrűségű vízen úszik.
Mekkora az a legnagyobb G súlyú, V térfogatú teher, ami alatt a deszka még nem kerül egészen a víz alá, ha

a) a terhet rátesszük a deszkára,
b) a terhet a deszka alá akasztjuk?

Megoldás:

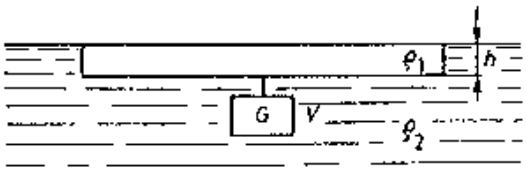
9.51. **a)** Ha a terhet a deszkára tesszük:



A deszka súlya: $A \cdot h \cdot \varrho_1 \cdot g$.
Maximális felhajtóerő: $A \cdot h \cdot \varrho_2 \cdot g$.
Egyensúlyfeltétel: $G + A \cdot h \cdot \varrho_1 \cdot g \leq$
$\leq A \cdot h \cdot \varrho_2 \cdot g$.
$\underline{G \leq A \cdot h \cdot g \cdot (\varrho_2 - \varrho_1)}$.

b) Ha a terhet a deszka alá tesszük:

Maximális felhajtóerő: $A \cdot h \cdot \varrho_2 \cdot g +$
$+ V \cdot \varrho_2 \cdot g$.
Egyensúlyfeltétel: $G + A \cdot h \cdot \varrho_1 \cdot g \leq$
$\leq A \cdot h \cdot \varrho_2 \cdot g + V \cdot \varrho_2 \cdot g$.
$\underline{G \leq A \cdot h \cdot g(\varrho_2 - \varrho_1) + V \cdot \varrho_2 \cdot g}$.

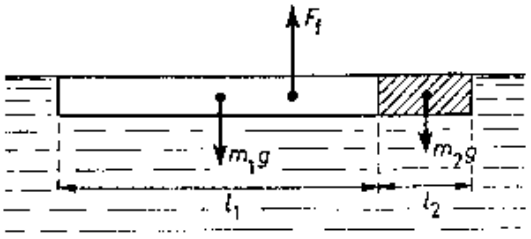


9.52. 1 m hosszú, 1 dm² keresztmetszetű, négyzetes hasáb alakú test fa és fémötvözet kombinációjából készült úgy, hogy a test 8 dm hosszú darabja fa, 2 dm hosszú vége pedig fémötvözet. A fa sűrűsége $600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a fémötvözet sűrűsége $2600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Mi történik, ha a testet vízszintes helyzetben vízre fektetjük?

Megoldás:

9.52. $l = 1$ m; $a = 10^{-2}$ m²; $l_1 = 0{,}8$ m; $\varrho_1 = 600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $l_2 = 0{,}2$ m; $\varrho_2 = 2600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



A vízre fektetett deszkára ható forgatónyomatékok eredője nem 0, ezért a deszka lebillen, végül úgy jut egyensúlyba, hogy $m \cdot g = F_f$.

$m = m_1 + m_2 = A \cdot (\varrho_1 \cdot l_1 + \varrho_2 \cdot l_2) = 10$ kg.

$V = A \cdot l = 10^{-2}$ m³.

A deszka átlagos sűrűsége: $\varrho = \frac{m}{V} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \varrho_v$, tehát lebeg!

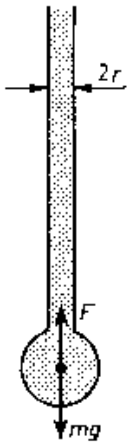
9.53. Azonos folyadékcseppentőt használva, hányszor több csepp képződik alkoholból, mint ugyanakkora térfogatú vízből?

Az alkohol felületi feszültsége $0{,}022\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, sűrűsége $790\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a víz felületi feszültsége $0{,}073\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Megoldás:

9.53. $\gamma_1 = 0{,}022\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $\gamma_2 = 0{,}073\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $\varrho_1 = 790\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $\varrho_2 = 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

A cső keresztmetszetén fellépő kapilláris nyomóerő tart egyensúlyt a csepp súlyával: $F = 2r \cdot \pi \cdot \gamma$. A csepp leszakad, ha $m \cdot g \geq F$.



Legyen egy csepp alkohol tömege m_1, egy csepp víz tömege m_2.

Felhasználva, hogy $m_1 \cdot g = 2r \cdot \pi \cdot \gamma_1$ és $m_2 \cdot g = 2r \cdot \pi \cdot \gamma_2$, a kétféle folyadékból leszakadó egy-egy csepp tömegének aránya:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

A V térfogatból n_1 alkoholcsepp és n_2 vízcsepp keletkezik: $V = \frac{n_1 \cdot m_1}{\varrho_1}$

és $V = \frac{m_2 \cdot n_2}{\varrho_2}$.

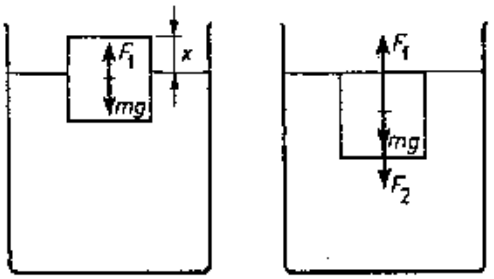
Ebből $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\varrho_2 \cdot m_2}{\varrho_2 \cdot m_1}$, de $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, így $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\varrho_1 \gamma_2}{\varrho_2 \gamma_1} = \underline{\underline{2{,}62}}$.

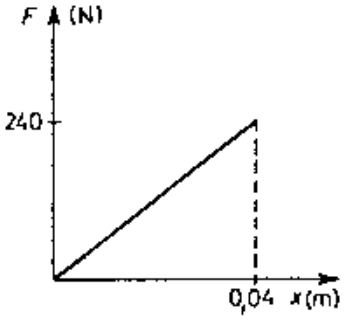
9.54. Egy 0,6 m² alapterületű, 0,4 m magasságú jégtábla úszik a vízen. A jég sűrűsége 900 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Mekkora munka szükséges a jégtábla víz alá nyomásához?

Megoldás:

9.54. $A = 0{,}6\ \text{m}^2$; $h = 0{,}4\ \text{m}$; $\varrho_j = 900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.





Kezdetben a jégtábla egyensúlyban van:

$$A \cdot h \cdot \varrho_j \cdot g = A \cdot (h - x) \cdot \varrho_v \cdot g.$$

A vízből kiálló rész magassága: $x = 0{,}04$ m.

A lenyomáshoz szükséges erő egyenletesen változik: $F_1 = 0$; $F_2 = F_f - m \cdot g = V \cdot g \cdot (\varrho_v - \varrho_j)$. $F_2 = 240$ N.

A munka: $\underline{\underline{W}} = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot x = \underline{\underline{4{,}8\ \text{J}}}$.

9.55. Egy „a" belső élhosszúságú, kocka alakú edényt színültig töltöttünk ϱ sűrűségű folyadékkal.
Határozzuk meg a kocka lapjaira ható eredő erőket!

Megoldás:

9.55. a) Feltételezzük, hogy az edény teljesen zárt, a légnyomás nem hat a folyadékra.

$$F_{\text{alaplap}} = a^2 \cdot a \cdot \varrho \cdot g = a^3 \cdot \varrho \cdot g. \qquad F_{\text{fedőlap}} = 0.$$

$$F_{\text{oldallapok}} = 4a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \varrho \cdot g = 2a^3 \cdot \varrho \cdot g.$$

b) Ha az edény felül nyitott:

$$F_{\text{alaplap}} = a^2 \cdot (p_k + a \cdot \varrho \cdot g). \qquad F_{\text{felső szint}} = p_k.$$

$$F_{\text{oldallapok}} = 4a^2 \left(p_k + \frac{a}{2} \cdot \varrho \cdot g \right).$$

Az oldallapokra ható nyomóerő számításánál figyelembe vettük, hogy az oldalnyomás a mélységgel lineárisan változik a két szélső érték között.

9.56. Két edényben különböző anyagi minőségű folyadék van.

a) Rugós erőmérő és ólomdarab segítségével hogyan lehetne megállapítani, hogy melyik folyadéknak nagyobb a sűrűsége?

b) Mit kellene megmérnünk ahhoz, hogy a folyadékok sűrűségét a rugós erőmérő és az ólomdarab segítségével meg tudjuk határozni?

Megoldás:

9.56. **a)** Az ólomdarabra ható felhajtóerő a sűrűbb folyadékban nagyobb, itt kell kisebb erővel hatni.

b) Meg kell mérni az ólomdarab térfogatát úgy, hogy vízbe merítem:

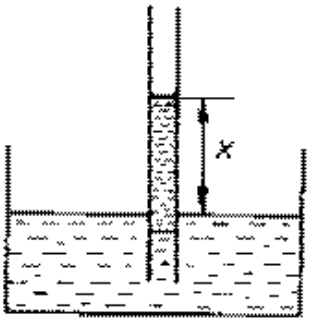
G: levegőben mért súly
G_v: vízben mért súly

$$V = \frac{G - G_v}{\varrho_v \cdot g}.$$

Ennek segítségével az ismeretlen sűrűség: $\varrho_x = \frac{G - G_x}{V \cdot g}$.

9.57. Vízzel telt edénybe egy 2 cm² keresztmetszetű csövet állítunk. A csőbe 72 g olajat töltünk. Az olaj sűrűsége 900 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Határozzuk meg az olaj és a víz szintje közötti különbséget!

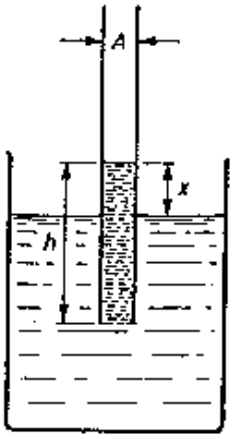


Megoldás:

9.57. $A = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $m = 0{,}072\ \text{kg}$; $\varrho = 900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Az olaj térfogata: $V = \frac{m}{\varrho} = 8 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$,

magassága a csőben: $h = \frac{V}{A} = 0{,}4\ \text{m}$.



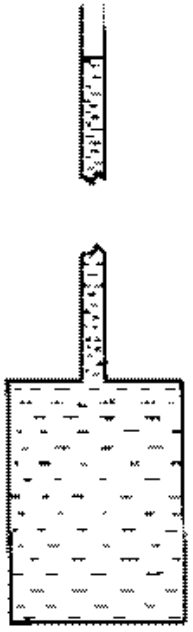
Egyensúlyfeltétel: $(h - x) \cdot \varrho_v = h \cdot \varrho$.

$\underline{\underline{x}} = \frac{h(\varrho_v - \varrho)}{\varrho_v} = \underline{\underline{0{,}04\ \text{m}}}$.

9.58. Egy edény alaplapja 10 cm oldalhosszúságú négyzetlap. A 20 cm magasságú edényre 10 cm² keresztmetszetű, hosszú csövet erősítünk, és az ábra szerint összeállított edénybe 2,5 l vizet öntünk.

a) Mekkora a hidrosztatikai nyomás és a nyomóerő az edény fenekén?

b) Mekkora nyomást gyakorol a víz az edény felső lapjára?

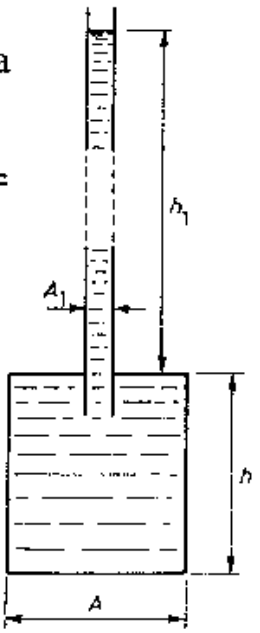


Megoldás:

9.58. $A = 10^{-2}$ m²; $h = 0{,}2$ m; $A_1 = 10^{-3}$ m²; $V_{víz} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m³.

Az edény térfogata: $V = A \cdot h = 2 \cdot 10^{-3}$ m³.

A csőben van $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m³ víz, ennek magassága $h_1 = 0{,}5$ m.



a) $p = (h + h_1)\varrho_v \cdot g = \underline{7 \cdot 10^3 \text{ Pa}}$. $F_{ny} = A \cdot p = \underline{70 \text{ N}}$.

b) A Pascal-törvény értelmében:
$\underline{p' = h_1 \cdot \varrho_v \cdot g = 5 \cdot 10^3 \text{ Pa}}$.

9.59. Az acélhuzal szakítási szilárdsága $3{,}5 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, sűrűsége $7900 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Vízbe lógatva milyen hosszú acélhuzal szakadna el a saját súlyától?

Megoldás:

9.59. $\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} = 3{,}5 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

$\varrho = 7900 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $\varrho_{\mathrm{v}} = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Egyensúlyfeltétel: $m \cdot g = F_{\mathrm{f}} + F_{\mathrm{r}}$.

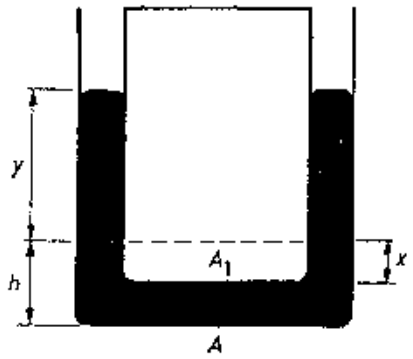
$A \cdot l \cdot \varrho \cdot g = A \cdot l \cdot \varrho_{\mathrm{v}} \cdot g + A \cdot \sigma$, $l \cdot g(\varrho - \varrho_{\mathrm{v}}) = \sigma$.

$\underline{\underline{l}} = \frac{\sigma}{g \cdot (\varrho - \varrho_{\mathrm{v}})} = \underline{\underline{5072 \text{ m}}}$.

9.60. Egy 24 cm² alapterületű hengeres edénybe 2 cm vastag higanyréteget öntünk. Ezután egy 20 cm² alapterületű tömör vashengert teszünk a higanyba. A vashenger 1 cm-re közelíti meg az edény alját.
Mekkora a vashenger súlya?

Megoldás:

9.60. $A = 24\ \text{cm}^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$; $A_1 = 20\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$; $h = 2\ \text{cm} = 0{,}02\ \text{m}$; $x = 1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$; $\varrho_{\text{Hg}} = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



A vashenger kiszorított $V' = A_1 \cdot x = 20\ \text{cm}^3$ higanyt, ezért a higanyszint emelkedett $y = \frac{V'}{A - A_1} = 5$ cm-rel.

Most a vashengerre ható felhajtóerő:

$$\underline{\underline{F_{\text{f}}}} = A_1 \cdot (x + y) \cdot \varrho_{\text{Hg}} \cdot g = \underline{\underline{16{,}32\ \text{N}}}.$$

Mivel a vashenger úszik, $\underline{\underline{m \cdot g = F_{\text{f}}}}$.

9.61. A 13 600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű higanyban 7800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű, 10 cm élhosszúságú vaskocka úszik. A higanyra vizet rétegezünk, amig a víz szintje eléri a kocka tetejét.

a) Milyen vastag ekkor a vízréteg?

b) Mekkora nyomás hat ekkor a vaskocka alsó lapjára?

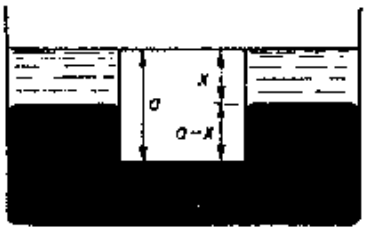
Megoldás:

9.61. $a = 0{,}1$ m; $\varrho_{Fe} = 7800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_{Hg} = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_v = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

a) A kocka súlya: $m \cdot g = a^3 \cdot \varrho_{Fe} \cdot g$.

A felhajtóerő: $F_f = a^2(a-x)\varrho_{Hg} \cdot g + a^2 \cdot x \cdot \varrho_v \cdot g$.

Úszik: $a^3 \cdot \varrho_{Hg} \cdot g = a^2 \cdot (a-x) \cdot \varrho_{Hg} \cdot g + a^2 \cdot x \cdot \varrho_v \cdot g$.



Ebből: $\underline{x} = \frac{a \cdot (\varrho_{Hg} - \varrho_{Fe})}{\varrho_{Hg} - \varrho_v} = \underline{\underline{0{,}046\ \text{m}}}$.

b) A kocka alsó lapjára ható hidrosztatikai nyomás:

$\underline{p} = x \cdot \varrho_v \cdot g + (a-x) \cdot \varrho_{Hg} \cdot g = \underline{\underline{7804\ \text{Pa}}}$.

9.62. Az emberi szív pulzustérfogata körülbelül 70 cm^3.

a) Mennyi vér áramlik át s-onként a szíven, ha a szív frekvenciája percenként 75?

b) Ha ugyanekkora térfogatú víz 1,8 cm átmérőjű vízcsapon folyna ki, mekkora lenne a víz kifolyásának sebessége?

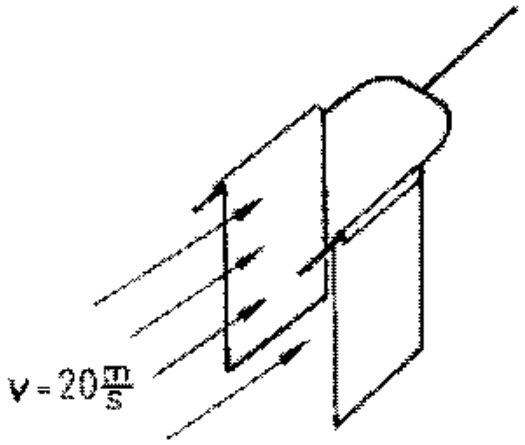
Megoldás:

9.62. $V = 70\ cm^3 = 7 \cdot 10^{-5}\ m^3$; $f = 1{,}25\ \frac{1}{s}$.

a) A szíven másodpercenként $\underline{\underline{V_f = 8{,}75 \cdot 10^{-5}\ m^3}}$ vér áramlik át.

b) $2 \cdot r = 1{,}8$ cm; $A = r^2 \cdot \pi = 2{,}83 \cdot 10^{-4}\ m^2$ keresztmetszetű csapon $\frac{V_f}{A} = \underline{\underline{0{,}3\ \frac{m}{s}}}$ sebességgel folyna át ekkora vízmennyiség.

9.63. Közelítőleg mekkora és milyen irányú erő mozdítja el az ábrán látható papírlapokat, ha a lapok közé 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel levegőt fújunk?
(A lapok mérete: 12 cm × 15 cm.)



Megoldás:

9.63. $v_1 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 0$; $\varrho_{\text{lev}} = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $A = 0{,}12 \cdot 0{,}15\ \text{m}^2 = 0{,}018\ \text{m}^2$.

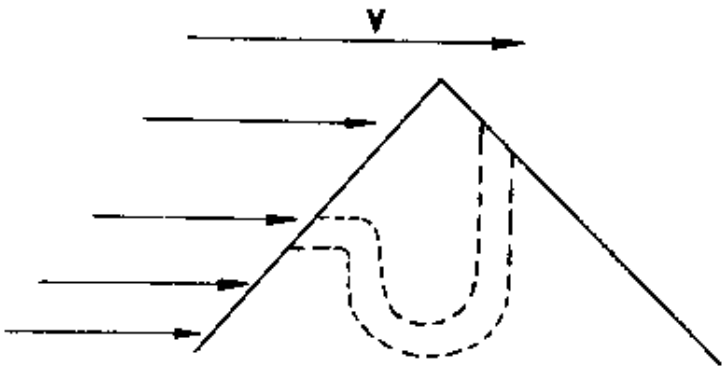
$F = A \cdot \Delta p$. A Bernoulli-törvény szerint: $p_2 + \frac{1}{2}\varrho \cdot v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho \cdot v_1^2$.

$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\varrho \cdot v_1^2 = 260\ \text{Pa}$.

$\underline{\underline{F}} = A \cdot \Delta p = \underline{\underline{4{,}68\ \text{N}}}$.

Az erő kívülről merőleges a papírlapokra.

9.64. Átlagosan mekkora emelőerő feszíti a háztető 1 m^2 felületű részét, ha a viharos szél sebessége 90 $\frac{km}{h}$?



Megoldás:

9.64. $A = 1\ m^2$; $v = 25\ \frac{m}{s}$; $\varrho_{lev} = 1{,}3\ \frac{kg}{m^3}$.

$p_k - p = \frac{1}{2}\varrho \cdot v^2 = 406{,}25$ Pa (lásd a 9.63. feladatot).

$\underline{\underline{F}} = A \cdot \Delta p = \underline{\underline{406{,}25\ N}}$.

9.65. A vér a 25 cm hosszú aortában $0{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebességgel halad.

a) Mennyi idő alatt áramlik át a vér az aortán?

b) Az aortán való áthaladás ideje alatt mennyi az átáramló vér térfogata, ha az aorta átlagkerülete 50 mm?

Megoldás:

9.65. $v = 0{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s = 0{,}25$ m; $2r\pi = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $r = 8 \cdot 10^{-3}$ m.

a) $t = \frac{s}{v} = \underline{0{,}83\ \text{s}}$.

b) $V = A \cdot s$; $A = r^2\pi = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $\underline{V = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3}$.

9.66. Mekkora sebességgel áramlott a víz az 1 cm átmérőjű vízvezetékben, ha a 120 liter térfogatú, üres villanyboyler 12 perc alatt töltődött fel hideg vízzel?

Megoldás:

9.66. $2r = 0{,}01$ m; $r = 0{,}005$ m; $V = 0{,}12$ m^3; $t = 720$ s.

$v \cdot t = \frac{V}{A}$; $v = \frac{V}{A \cdot t} = 2{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

9.67. Egy csatorna medrének keresztmetszete felfelé szélesedő trapéz, amely alul 2 m széles. Amikor a csatornában a víz 1 m 20 cm mély, akkor a vízfelszín szélessége 3 m. A víz $0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagos sebességgel folyik.

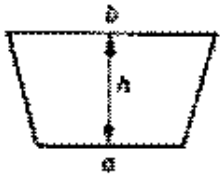
Mennyi vizet szállít ilyenkor 1 nap alatt a csatorna?

Megoldás:

9.67. $a = 2$ m; $b = 3$ m; $m = 1{,}2$ m; $v = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 86\,400$ s.

$V = A \cdot v \cdot t$; $A = \frac{a+b}{2}\ \text{m} = 3\ \text{m}^2$.

$\underline{V = 51\,840\ \text{m}^3}$.



9.68. A locsoláshoz használt gumicső átmérője 3 cm, benne a víz $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel áramlik.

Mekkora sebességgel hagyja el a víz a 0,6 cm átmérőjű szórófejet?

(Tekintsük az áramlást stacionáriusnak és súrlódásmentesnek!)

Megoldás:

9.68. $d_1 = 0{,}03$ m; $v_1 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $d_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ m.

A kontinuitás miatt $A_2 \cdot v_2 = A_1 \cdot v_1$.

$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}$, $A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4}$. $\underline{\underline{v_2}} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot v_1 = \underline{\underline{50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

9.69. Mekkora az emberi szív munkavégzése a bal kamra egyetlen összehúzódásakor, ha a bal kamra és a jobb pitvar közötti szisztolés nyomáskülönbség átlagosan 16 kPa, és az érrendszerbe nyomott vér térfogata egyetlen összehúzódáskor 70 cm^3?

A jobb kamra munkája a bal kamráénak kb. egyötöde. Mekkora a szív teljesítménye, ha a pulzusszám percenként 70?

Megoldás:

9.69. $\Delta p = 1{,}6 \cdot 10^4$ Pa; $\Delta V = 7 \cdot 10^{-5}$ m^3.

A szív munkavégzése egy összehúzódáskor:

$W_b = \Delta p \cdot \Delta V = 1{,}12$ J (bal kamra),

$W_j = \frac{1}{5} W_b = 0{,}225$ J (jobb kamra).

Együtt: $W = 1{,}345$ J.

A szív frekvenciája: $f = \frac{70}{60\ \text{s}} = 1{,}17\ \frac{1}{\text{s}}$,

teljesítménye: $\underline{P} = W \cdot f = \underline{1{,}574\ \text{W}}$.

9.70. Egy strandon, a 2 m mély vizet tartalmazó úszómedencének az alján és az oldalán is vannak a víz leeresztésére szolgáló nyílások.
Mekkora sebességgel áramlik kezdetben a víz a medence aljától 75 cm magasan lévő vízszintes kifolyócsövön?

Megoldás:

9.70. $h = 2$ m; $h_1 = 0{,}75$ m.

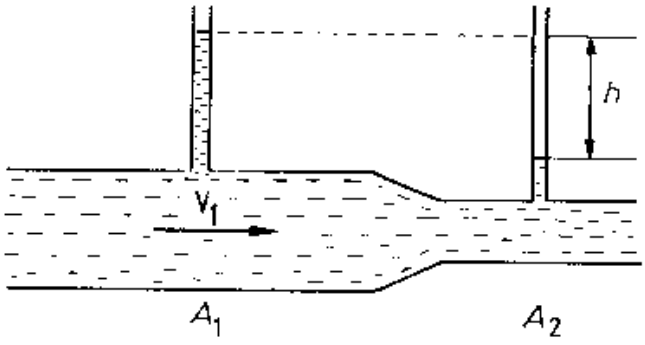


A kifolyócső helyén a nyomás:
$p_1 = (h - h_1) \cdot \varrho_v \cdot g + p_k$.
A Bernoulli-törvény:
$p_k + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_1^2$.
Feltételezzük, hogy a kifolyócső keresztmetszete sokkal kisebb a medence felületénél, így a vízszint süllyedésének sebessége elhanyagolhatóan kicsi ($v_0 = 0$).

$$p_k - p_1 = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_1^2, \quad (h - h_1) \cdot \varrho \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_1^2.$$

$$\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_1)} = 5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

9.71. Az ábrán látható vízszintes áramlási csőben olaj áramlik.



Mekkora a h szintkülönbség, ha $A_1 = 5\ \text{cm}^2$, $A_2 = 3\ \text{cm}^2$, $v_1 = 15\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$?

(A folyadék összenyomhatatlan, az áramlás súrlódásmentes és stacionárius.)

Megoldás:

9.71. $A_1 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $A_2 = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $v_1 = 0{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

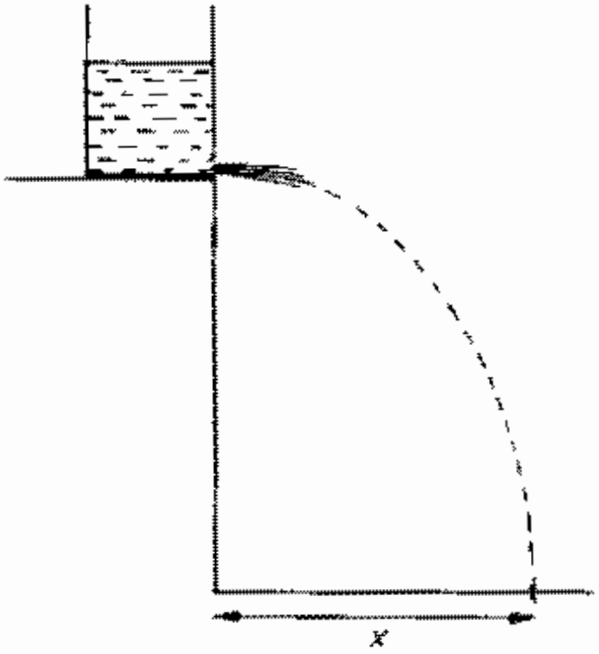
A h szintkülönbség az A_1 és A_2 keresztmetszetű helyek közötti nyomáskülönbség miatt keletkezik. A Bernoulli-törvényből:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_2^2, \quad p_1 - p_2 = h \cdot \varrho \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

A kontinuitás miatt: $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$, $v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} = 0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Így $\underline{h} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \underline{0{,}2\ \text{m}}$.

9.72. 80 cm magas asztal szélén egy edényben 20 cm magasan áll a víz.
Milyen távolságra ér földet az asztal lábától az edény alján lévő kis nyíláson kezdetben vízszintesen kiömlő víz?



Megoldás:

9.72. $h = 0{,}8$ m; $h_1 = 0{,}2$ m; $\varrho = 10^3 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Feltételezzük, hogy $v_0 = 0$ (lásd a 9.70. feladatot).

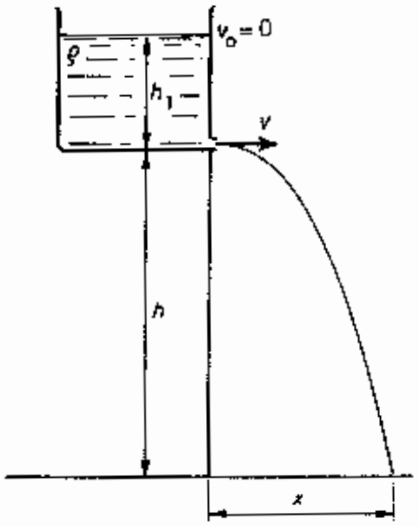
A kiáramlás sebessége:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 = h_1 \cdot \varrho \cdot g, \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h_1.$$

$$v = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A mozgás további lefolyása vízszintes hajítás: az esés ideje: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, a hajítás távolsága:

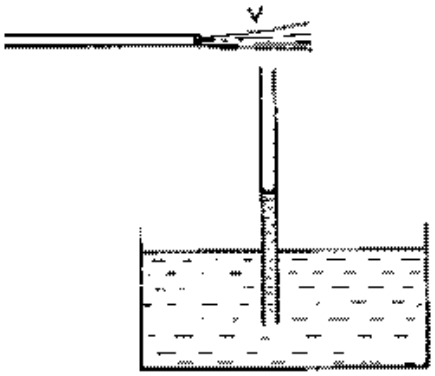
$$\underline{x} = v \cdot t = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \underline{\underline{0{,}8 \text{ m}}}.$$



9.73. Vízzel telt edénybe mindkét végén nyitott csövet állítunk. A cső fölött 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel levegőt áramoltatunk. Azt tapasztaljuk, hogy a víz a csőben felemelkedik.

a) Magyarázzuk meg a jelenséget!

b) Milyen magasra emelkedik a víz a csőben? (A hajszálcsövességtől tekintsünk el!)



Megoldás:

9.73. $v = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\varrho_v = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_l = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

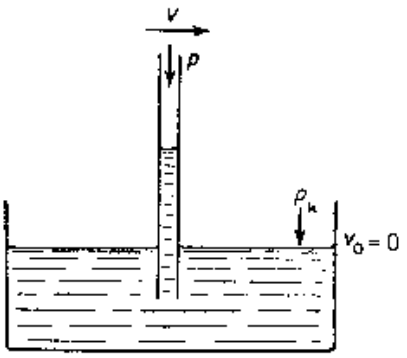
a) A folyadékoszlopot a cső felett az áramlás következtében csökkent nyomás és az edény felszíne fölötti nagyobb nyomás különbsége emeli fel.

b) A Bernoulli-törvény alapján:

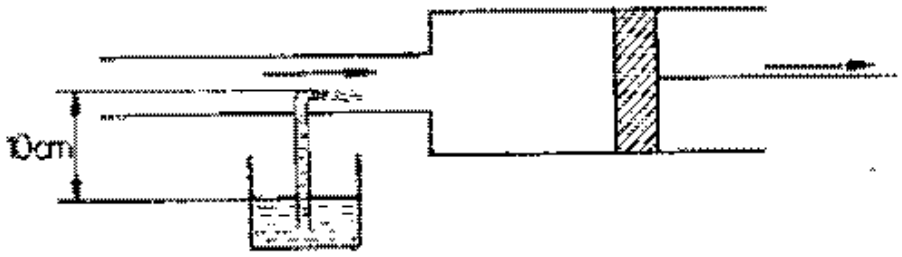
$p_k = p + \frac{1}{2} \cdot \varrho_l \cdot v^2$, ha az edény felszíne felett $v_0 = 0$.

$p_k - p = \frac{1}{2} \cdot \varrho_l \cdot v^2$, $h \cdot \varrho_v \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \varrho_l \cdot v^2$.

$\underline{\underline{h = \frac{\varrho_l \cdot v^2}{2\varrho_v \cdot g} = 4{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}}$.



9.74. A porlasztócső felső nyílása kb. 10 cm-rel magasabban van, mint az úszóházban a benzin szintje.
Legalább mekkorának kell lennie a levegőáram sebességének, hogy a 740 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű benzint felszívja a tartályból, és csak ez a hatás működteti a porlasztót?



Megoldás:

9.74. $h = 0{,}1$ m; $\varrho_b = 740\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_l = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
A szükséges nyomáskülönbséget a nagy sebességgel áramló levegő hozza létre.
A 9.73. feladathoz hasonlóan a Bernoulli-törvényt alkalmazva $p_k - p = \frac{1}{2} \cdot \varrho_l \cdot v^2 = h \cdot \varrho_b \cdot g$, amiből

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2h \cdot \varrho_b \cdot g}{\varrho_l}} = 33{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

10.1. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Bizonyos mennyiségű ideális gázt állandó nyomáson melegítünk. A létrejött állapotváltozás során a gázzal közölt hőmennyiség nagyobb, mint a gáz belső energiájának növekedése. Az alábbi állítások közül melyik magyarázza meg a jelenséget?

A) A gázzal közölt hőmennyiség egy része növeli a gáz belső energiáját, a többi átadódik a környezetnek.

B) A gázzal közölt hőmennyiség egy része növeli a gáz belső energiáját, egy másik hányada pedig a tágulási munkára fordítódik.

C) A gáz fajhője állandó nyomáson nagyobb, mint állandó térfogaton.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

10.1. A magyarázatot a B válasz adja meg. Izobár állapotváltozásnál $\Delta E_b = Q - p \cdot \Delta V$.

10.2. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Adott tömegű, normál állapotú ideális gáz hőmérsékletét két módon változtatjuk meg:
1. izobár folyamattal,
2. izokor folyamattal.
A hőmérséklet-változás a két esetben azonos.
Melyik esetben nagyobb a gáz belső energiájának változása?

A) Az első esetben.
B) A második esetben.
C) Mindkét esetben ugyanakkora.
D) Nem dönthető el.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

10.2. Helyes állítás a C, mert $\Delta E_b \sim \Delta T$, és a hőmérsékletváltozás a két esetben azonos.

10.3. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Állandó mennyiségű ideális gáz kezdeti nyomása 101 kPa, térfogata 5 l. A gáz kezdeti állapotából 9 l térfogatúra tágul. Ha a gáz által végzett munkát a $W = p \cdot \Delta V$ összefüggés alapján úgy számoljuk ki, hogy:
$W = 101 \cdot 10^3$ Pa $\cdot$ 0,004 m^3 = 404 J,
nem biztos, hogy helyes eredményhez jutottunk.

A) Csak akkor helyes az eredmény, ha állandó hőmérsékleten ment végbe a tágulás.

B) Hibás az eredmény, mert nem vettük figyelembe, hogy a tágulás közben okvetlenül változik a nyomás is.

C) A gáz teljes, 0,009 m^3 térfogatával kellett volna számolni.

D) Akkor helyes az eredmény, ha úgy változtatjuk a térfogatot a tágulás során, hogy a nyomás közben állandó maradjon.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

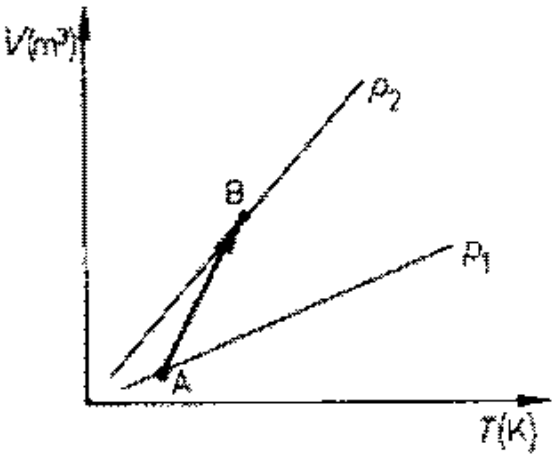
10.3. Helyes állítás a D, mert a $p \cdot \Delta V$ összefüggés csak akkor fejezi ki a gáz munkáját, ha a térfogatváltozás során a nyomás nem változott.

10.4. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Az ábra állandó mennyiségű ideális gáz állapotváltozását mutatja a V–T diagramon. Hogyan változott az ideális gáz nyomása, ha a gáz az A-val jelzett állapotból a B-vel jelzett állapotba jutott?

A) Növekedett az ideális gáz nyomása.
B) Csökkent az ideális gáz nyomása.
C) Nem változott a folyamatban a nyomás.

Indokoljuk választásunkat!



Megoldás:

10.4. Helyes állítás a B: az $\overrightarrow{AB}$ állapotváltozás során csökkent a gáz nyomása. Adott tömegű es nyomású ideális gáz térfogata egyenesen arányos a hőmérséklettel:

$V \sim T$ és $\frac{V}{T} = \frac{m \cdot R}{M \cdot p}$.

Az összefüggésből látható, hogy a kisebb nyomáshoz tartozó izobár meredekebb, tehát $p_2 < p_1$.

10.5. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

Az ideális gáz olyan rendszer, amelyben:

A) a homogén állapot a legvalószínűbb,

B) a molekulák mozgása állandó és egyensúlyi állapotban tökéletesen rendezetlen,

C) a molekulák közötti kölcsönhatás rugalmas ütközés,

D) a molekulák az edényfallal is rugalmasan ütköznek.

Megoldás:

10.5. Valamennyi megállapítás helyes.

10.6. *Jelöljük meg a* HELYES *válaszokat!*

Két gázpalackban azonos minőségű, de különböző állapotú gáz van. A palackokat összekötő cső csapját kinyitjuk. Válasszuk ki a felsorolt fizikai mennyiségek közül azokat, amelyek az egyensúlyi állapot kialakulása során kiegyenlítődnek!

A) Nyomás,
B) tömeg,
C) belső energia,
D) térfogat,
E) hőmérséklet,
F) sűrűség.

Megoldás:

10.6. Kiegyenlítődő mennyiségek a nyomás, a hőmérséklet és a sűrűség (*A*, *E*, *F*).

10.7. *Jelöljük meg a* HELYES *válaszokat!*

Két gázpalackban azonos minőségű, de különböző állapotú gáz van. A palackokat összekötő cső csapját kinyitjuk. Válasszuk ki a felsorolt fizikai mennyiségek közül azokat, amelyek az egyensúlyi állapot kialakulása során összegződnek!

A) Sűrűség,
B) nyomás,
C) tömeg,
D) belső energia,
E) térfogat,
F) hőmérséklet.

Megoldás:

10.7. Összegeződő mennyiségek a térfogat, a tömeg, a belső energia (*C*, *D*, *E*).

10.8. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

Izoterm összenyomásnál
A) a hőmérséklet állandó,
B) a külső munka növeli a gáz belső energiáját,
C) nem változik a gáz belső energiája,
D) nincs hőcsere a gáz és a környezet között.

Megoldás:

10.8. Hibás a D állítás.
Összenyomásnál a külső munka növeli a gáz belső energiáját, tehát a hőmérséklet és vele a belső energia csak úgy maradhat állandó, ha ezt az energiát a gáz átadja a környezetének.

10.9. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

Izokor állapotváltozásnál

A) nem változik a gáz belső energiája,

B) nincs munkavégzés,

C) a gáz nyomása állandó,

D) a belső energia változása egyenlő a felvett hőmennyiséggel.

Megoldás:

10.9. Hibás az A és C megállapítás.
Mivel térfogatváltozás nincs, tágulási munka sincs. Változik a hőmérséklet, és így a belső energiaváltozás: $\Delta E_b = Q_v$.

10.10. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

Izobár tágulásnál
A) a gáz nem végez munkát,
B) a belső energia állandó,
C) a felvett hőmennyiség egyenlő a végzett munkával,
D) a gáz hőmérséklete növekszik.

Megoldás:

10.10. Hibás az A, B, C megállapítás.
A gáz tágul állandó nyomáson, $V \sim T$. A térfogat akkor nőhet, ha a hőmérséklet és ezzel együtt a belső energia is nő, tehát $Q - p \cdot \Delta V > 0$.

10.11. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

Az ideális gáz adiabatikus sűrítésekor

A) nincs hőcsere a gáz és környezete között,

B) a belső energia nő,

C) a belső energia változása egyenlő a külső erő által a gázon végzett munkával,

D) az állapotváltozás mennyiségi jellemzésére nem alkalmazható a $\frac{p \cdot V}{T} = \textit{állandó}$ összefüggés.

Megoldás:

10.11. Valamennyi állítás helyes.

10.12. *Válasszuk ki a* HIBÁS *megállapításokat!*

A párolgás

A) csak folyadék halmazállapotban lehetséges,

B) szilárd vagy folyadék fázisból légneműbe való átmenet, amely a kritikus hőmérséklet alatt bármilyen hőmérsékleten végbemehet,

C) sebessége általában független a párolgó test hőmérsékletétől,

D) hűti a visszamaradó szilárd- vagy folyadékfázist.

Megoldás:

10.12. Hibás: A, C.

10.13. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A telített gőz

A) nyomása adott hőmérsékleten az anyagi minőségre jellemző állandó;

B) nem követi a gáztörvényt;

C) általában zárt térben keletkezik úgy, hogy abban saját folyadékjával érintkezik;

D) folyadékjával dinamikus egyensúlyban van.

Megoldás:

10.13. Valamennyi megállapítás helyes.

10.14. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás is igaz, és a kettő között ok-okozati összefüggés van.
B) Az állítás igaz, az indoklás is igaz, de a kettő között nincs ok-okozati összefüggés.
C) Az állítás igaz, az indoklás nem igaz.
D) Az állítás nem igaz, de az indoklás önmagában igaz.
E) Az állítás nem igaz és az indoklás sem igaz.

1. Izoterm állapotváltozáskor nem változik a rendszer hőmérséklete, mert a rendszer és környezete között nincs hőcsere.
2. Adott tömegű ideális gáz adiabatikus összenyomásakor a gáz belső energiájának megváltozása egyenlő az összenyomáskor végzett munkával, mert ez a munka egyenlő azzal a hőmennyiséggel, amely izokor állapotváltozásnál ugyanezen a gáztömegen ugyanekkora hőmérséklet-változást hozna létre.
3. Adott tömegű ideális gáz izoterm tágulásakor nem változik a rendszer belső energiája, mert a környezetből felvett hőmennyiség egyenlő a gáz által végzett tágulási munkával.
4. Izokor állapotváltozáskor nem változik a gáz belső energiája, mert az állandó térfogaton lejátszódó folyamatban nincs munkavégzés.

Igazoljuk választásunkat!

Megoldás:

10.14. 1. – *C*, 2. – *B*, 3. – *A*, 4. – *D*.

10.15. *Jelöljük meg, hogy a számokkal jelölt megállapításokhoz az A), B), C), D) jelű változatok közül melyik tartozik!*

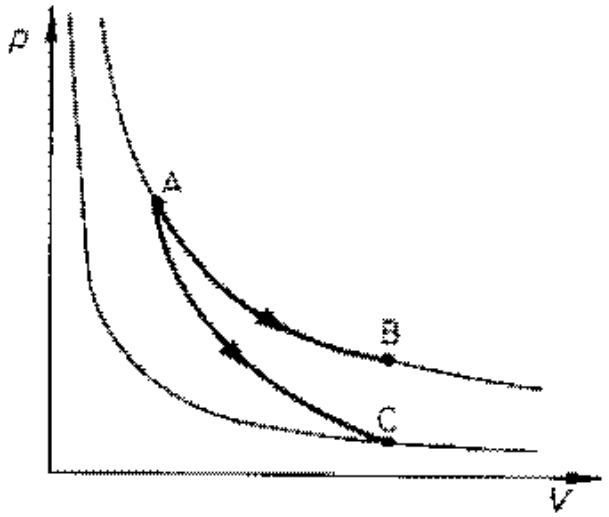
A) A belső energia.
B) A gáz nyomása.
C) Mindkettő.
D) Egyik sem.

1. Ideális gázban csak a részecskék számától és kinetikai energiájától függ.
2. Melegítés hatására feltétlenül növekszik.
3. A molekulák kölcsönös potenciális energiája csökkenti az értékét.
4. Adott mennyiségű és térfogatú ideális gázban a hőmérséklettel arányos.
5. Jellemző a gáz adott állapotára.
6. Ideális gázban az edényfalnak ütköző molekulák lendületváltozása hozza létre.
7. Megváltozását mindig hőmérséklet-változás jelzi.

Megoldás:

10.15. 1. – *A*, 2. – *A*, 3. – *D* (ha ideális gáz), 4. – *C*, 5. – *C*, 6. – *B*, 7. – *A*.

10.16. A grafikonon ugyanannak a gázmennyiségnek izoterm (A→B) és adiabatikus (A→C) állapotváltozását ábrázoltuk.



a) Melyik esetben végzett a gáz több munkát?
b) Melyik esetben volt nagyobb a hőfelvétel?
c) Hogyan változott a két esetben a gáz belső energiája?

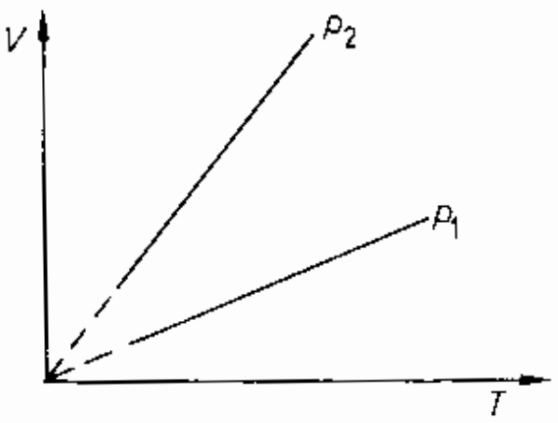
Megoldás:

10.16. **a)** $W_{AB} > W_{AC}$. A gáz által végzett munka számértékben megegyezik a p–V diagramról leolvasható vonal alatti területtel.

b) Csak az $\overrightarrow{AB}$ folyamatban van hőfelvétel, az $\overrightarrow{AC}$ folyamat adiabatikus.

c) $\overrightarrow{AB}$ izoterm, $\Delta E_1 = 0$; az $\overrightarrow{AC}$ folyamatban csökkent a hőmérséklet és ezzel arányosan a belső energia is.

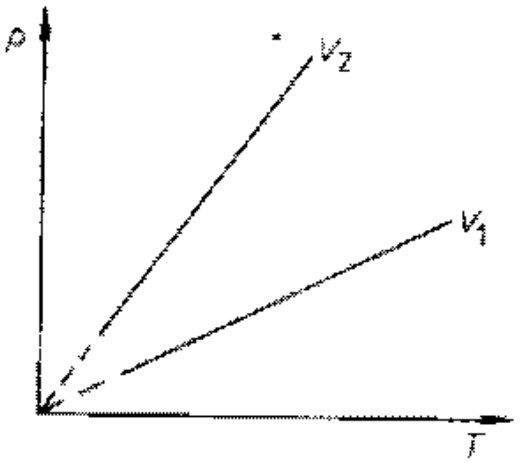
10.17. A grafikonon azonos fajtájú és tömegű két gázmennyiség egy-egy izobár állapotváltozását ábrázoltuk.
Melyik állapotváltozáshoz tartozik nagyobb nyomás? Miért?



Megoldás:

10.17. $p_2 < p_1$ (lásd a 10.4. feladat megoldását).

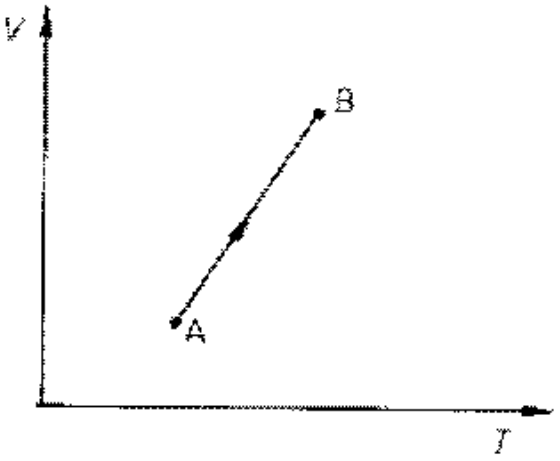
10.18. A grafikonon azonos minőségű és tömegű gázmennyiség izokor állapotváltozását ábrázoltuk két különböző térfogaton.
Melyik állapotváltozáshoz tartozik nagyobb térfogat? Miért?



Megoldás:

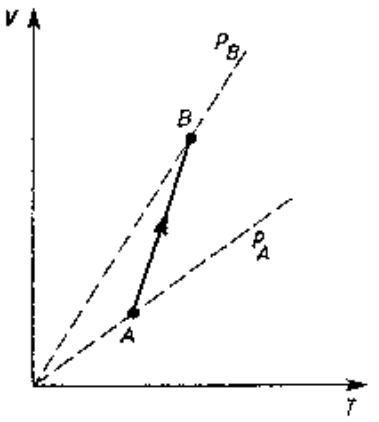
10.18. Állandó tömegű és térfogatú ideális gáznál $p \sim T$; $\frac{p}{T} = \frac{m \cdot R}{M \cdot V}$.
Az összefüggésből látható, hogy a kisebb térfogathoz tartozó izochor meredeksége nagyobb, tehát $V_2 < V_1$.

10.19. Az A→B nyíl ideális gáz állapotváltozását jelzi V–T diagramon.
Nőtt vagy csökkent a gáz nyomása a folyamat során?
Indokoljuk állításunkat!

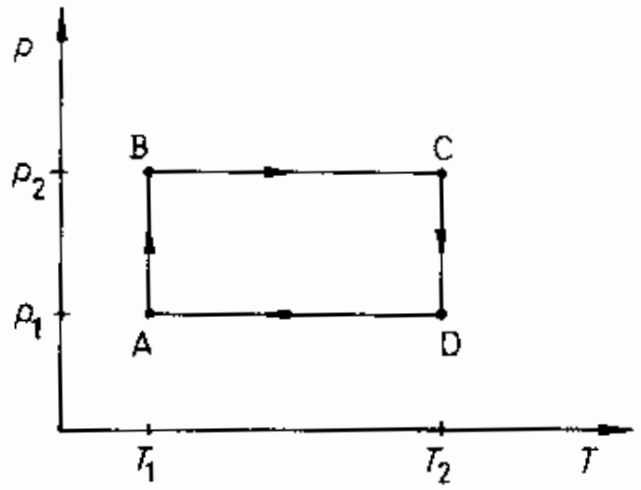


Megoldás:

10.19. Az ábrát kiegészítem az A és B állapothoz tartozó izobárral. $p_B < p_A$ (lásd a 10.4. feladat megoldását), tehát a gáz nyomása csökkent. Ez könnyen belátható, mivel adott T esetén nagyobb V-hez kisebb p érték tartozik.



10.20. A grafikonon állandó tömegű ideális gázzal végzett körfolyamatot ábrázoltunk.



a) Milyen előjelű a belső energia változása az egyes részfolyamatokban?

b) Melyik részfolyamatokban van hőcsere a gáz és környezete között?

c) Rajzoljuk meg (kvalitatívan) a körfolyamat képét p–V diagramon is!

d) Hasonlítsuk össze a gáz által végzett tágulási munkát és az összenyomásra fordított külső munkát! Melyik a nagyobb?

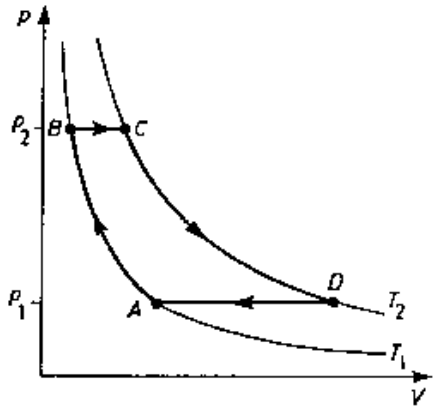
Megállapításainkat indokoljuk!

Megoldás:

10.20. a) $\Delta E \sim \Delta T$, így $\Delta E_{AB} = \Delta E_{CD} = 0$; $\Delta E_{BC} > 0$, $\Delta E_{DA} < 0$.

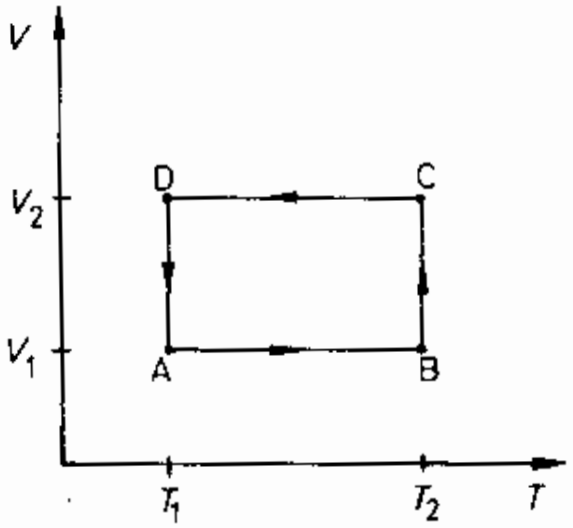
b) Valamennyi részfolyamatban van hőcsere a gáz és környezete között. (Izoterm folyamatban is csak így tartható a hőmérséklet.)

c)



d) A gáz a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CD}$ részfolyamatban végez tágulási munkát. Ez nagyobb, mint a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{AB}$ folyamatban végzett külső munka, amint ez a görbék alatti területből látható (lásd a 10.16. feladatnál is).

10.21. Jellemezzük a mellékelt grafikonon ábrázolt körfolyamatot!



a) Milyen állapotváltozás történt az egyes részfolyamatokban?

b) Hogyan változott a gáz belső energiája az egyes részfolyamatokban és az egész körfolyamatban?

c) Melyik részfolyamatban történt hőcsere a gáz és környezete között?

d) A körfolyamatban a gáz által felvett, vagy a leadott hőmennyiség volt nagyobb?

Megállapításainkat indokoljuk!

Megoldás:

10.21. a) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ izochor, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{DA}$ izoterm.

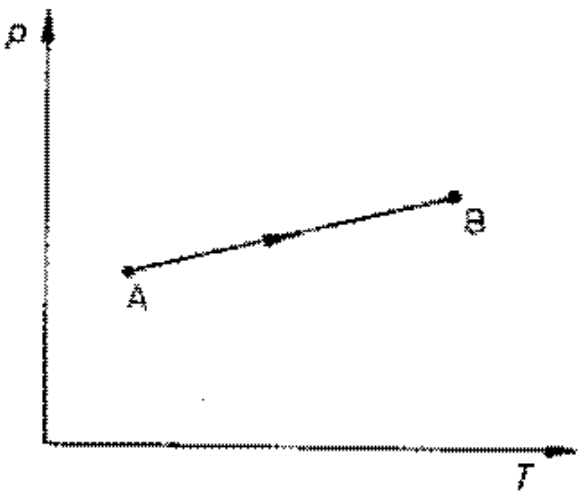
b) $\Delta E_{BC} = \Delta E_{DA} = 0$; $\Delta E_{AB} > 0$, $\Delta E_{CD} < 0$ és $\Delta E_{AB} = -\Delta E_{CD}$, mert $\sum \Delta E = 0$.

c) Valamennyi részfolyamatban történt hőcsere a gáz és környezete között.

d) A két izochor folyamatban felvett, illetve leadott hőmennyiség egyenlő. A $\overrightarrow{BC}$ izoterm folyamatban a gáz a magasabb T_2 hőmérsékleten tágul, a hőmérséklet fenntartásához a környezetből felvett hőmennyiség nagyobb, mint a $\overrightarrow{DA}$ folyamatban leadott hőmennyiség.

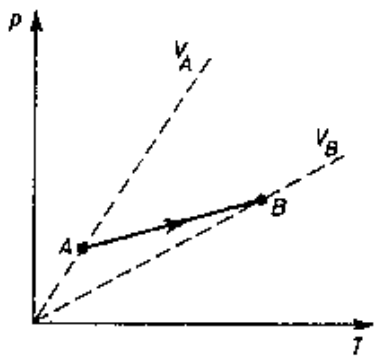
10.22. Nőtt vagy csökkent az ideális gáz térfogata a p–T diagramon ábrázolt A→B állapotváltozásnál?

Indokoljuk állításunkat!



Megoldás:

10.22. Az ábrát kiegészítjük az A és B állapothoz tartozó izochorral.



$V_B > V_A$ (lásd a 10.18. feladat megoldását), a gáz térfogata nőtt, mivel adott T esetén nagyobb p nyomáshoz kisebb V térfogat tartozik.

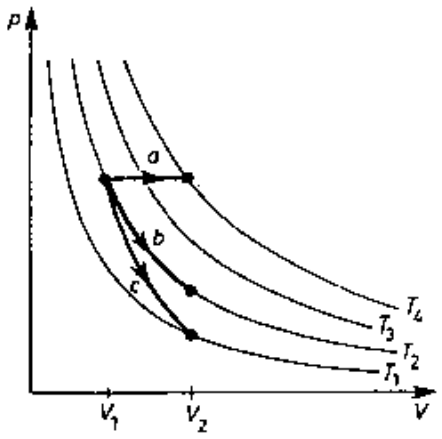
10.23. Egy V_1 térfogatú gáz V_2 térfogatra tágul

a) állandó nyomáson,
b) állandó hőmérsékleten,
c) adiabatikusan.

1. Ábrázoljuk a folyamatokat p–V diagramon!
2. Melyik folyamatban végzi a gáz a legkevesebb munkát, ha a kiinduló nyomás és hőmérséklet azonos?
3. Milyen előjelű a belső energia változása az egyes folyamatoknál?

Megoldás:

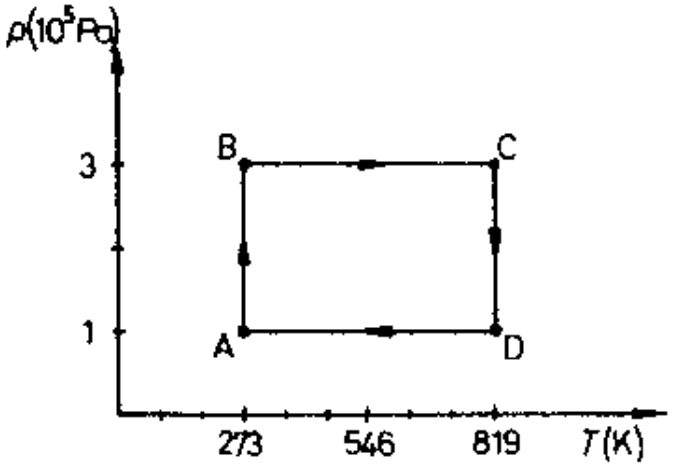
10.23. 1.



2. A tágulási munka az adiabatikus folyamatnál a legkisebb. (Görbe alatti terület.)

3. $\Delta E_a > 0$, $\Delta E_b = 0$, $\Delta E_c < 0$, az egyes folyamatoknál jelentkező hőmérsékletváltozásnak megfelelően.

10.24. A grafikonon adott tömegű ideális gáz körfolyamatát ábrázoltuk.



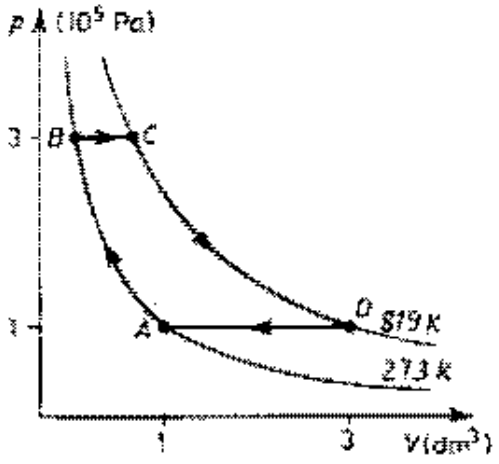
a) Hogyan változik a gáz belső energiája az egyes részfolyamatokban?

b) Ábrázoljuk ezt a körfolyamatot p–V diagramon! ($V_A = 1\ \mathrm{dm}^3$.)

Megoldás:

10.24. a) $\Delta E_{AB} = \Delta E_{CD} = 0$ (izoterm).
$\Delta E_{BC} > 0$, $\Delta E_{DA} < 0$, $\Delta E_{BC} = -\Delta E_{DA}$.

b)



10.25. Ha a forró vízben elmosott, még vizes, ép szélű poharat szájával lefelé sima felületre (pl. tálcára) tesszük, az alóla eltávozó levegő még sokáig emelgeti a poharat.
Hogyan magyarázható ez a jelenség?

Megoldás:

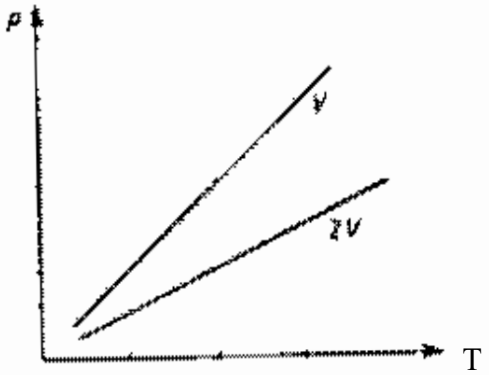
10.25. Amikor a forró poharat leborítom, szobahőmérsékletű levegőt zárok be vele. A lassan hűlő pohár melegíti a bezárt levegőt, növelve annak nyomását.

10.26. Két edényben azonos tömegű és minőségű ideális gáz van. Az edények térfogata V és $2V$. A két edényt lassan melegítjük.

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két gáz nyomásának változását a hőmérséklet függvényében!

Megoldás:

10.26. A kisebb térfogathoz tartozó izochor meredekebb (lásd a 10.18. feladat megoldását).



10.27. Ha a hidrogéngázt hevítjük, egyszer csak azt tapasztaljuk, hogy a hőkapacitása megnő. Mi lehet az oka?

Megoldás:

10.27. Zárt térben melegítem a H_2 gázt $\rightarrow$ izochor állapotváltozás: $\Delta E_b = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$ és $\Delta E_b = \frac{5}{2}\frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T$. Innen $c_v = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{M}$.
Magas hőmérsékleten a gáz ionizálódik, egyatomos gáz lesz, móltömege felére csökken, szabadsági foka 5-ről 3-ra változik: $c_v = \frac{3R}{M} > \frac{5R}{2M}$, tehát nő az izochor fajhő.

10.28. Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben lévő, m tömegű ideális gáz hőmérséklete állandó nyomáson ΔT-vel nő. Igazoljuk, hogy a gáz tágulási munkája a

$$W = (c_v - c_p) \cdot m \cdot \Delta T$$

összefüggésből kiszámítható!

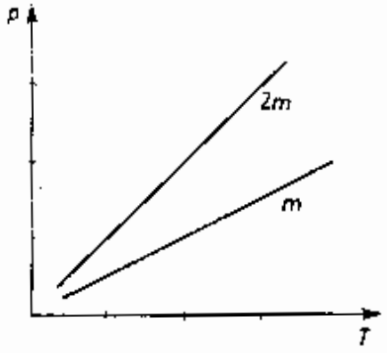
Megoldás:

10.28. Izobár állapotváltozás. $\Delta E_b = Q_p + W$.
De $\Delta E_b = Q_v$, így $W = Q_v - Q_p = (c_v - c_p) \cdot m \cdot \Delta T$.

10.29. Két, egyenlő térfogatú edény közül az egyikben m, a másikban $2m$ tömegű, azonos minőségű gáz van. A két edényt lassan melegítjük.
Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két gáztömeg nyomásának változását a hőmérséklet függvényében!

Megoldás:

10.29. Adott térfogat esetében $p \sim T$-vel és m-mel, ezt mutatja az egyesített gáztörvény: $\frac{p}{T} = \frac{m \cdot R}{M \cdot V}$, tehát a $2 \cdot m$ tömegű gázhoz tartozó izochor a meredekebb.



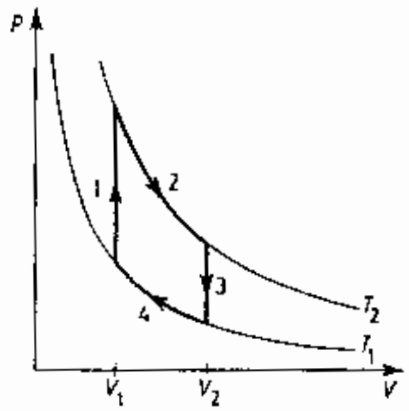
10.30. Súrlódásmentesen mozgó dugattyúval lezárt hengerben kezdetben p_1 nyomású, T_1 hőmérsékletű, V_1 térfogatú ideális gáz van. A henger fala jó hővezető.

1. Rögzítjük a dugattyút és a hengert nagy méretű, magasabb hőmérsékletű (T_2) tartályba helyezzük.
2. Szabaddá tesszük a dugattyút és még mindig a T_2 hőmérsékletű tartályban tartva, lassan engedjük a gázt kitágulni. Térfogata V_2 lesz.
3. Rögzítjük a dugattyút és a hengert visszahelyezzük az eredeti T_1 hőmérsékletű tartályba.
4. A T_1 hőmérsékletű tartályban tartva a hengert, feloldjuk a dugattyú rögzítését és lassan a gáz térfogata újra V_1 lesz.

a) Jellemezzük az egyes lépéseknél lejátszódó folyamatokat, és ábrázoljuk p–V diagramon!
b) Hogyan változik a gáz belső energiája az egyes lépéseknél és az egész körfolyamatban?
c) Végez-e a gáz hasznosítható tágulási munkát? Ha igen, miből fedezi az erre fordított energiát?

Megoldás:

10.30. a)



1. izochor melegítés: $V = \text{áll.}$, $T_2 > T_1$.
2. izoterm tágulás: $T = \text{áll.}$, $V_2 > V_1$.
3. izochor hűtés: $V = \text{áll.}$, $T_1 < T_2$.
4. izoterm összenyomás: $T = \text{áll.}$, $V_1 < V_2$.

b) $\Delta E_2 = \Delta E_4 = 0$; $\Delta E_1 = -\Delta E_3$; $\sum \Delta E = 0$.

c) Igen, mert a 2. részfolyamat során a magasabb T_2 hőmérsékleten végzett tágulási munka nagyobb, mint a körfolyamatot lezáró 4. részfolyamatban a gázt összenyomó külső erő munkája. (A 4. részfolyamat csak külső erővel valósítható meg!) A tágulási munkára fordított energiát a környezetből felvett hőmennyiség fedezi.

10.31. Egy 350 g tömegű, 16 °C hőmérsékletű kétatomos gáz térfogata 2,5 MPa nyomáson 12 dm^3.
Melyik ez a gáz?

Megoldás:

10.31. $m = 0{,}35$ kg; $T = 289$ K; $p = 2{,}5 \cdot 10^6$ Pa; $V = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m^3.

A $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből $\underline{\underline{M}} = \frac{m \cdot R \cdot T}{p \cdot V} = \underline{\underline{28 \cdot 10^{-3} \ \frac{kg}{mol}}}$,

ami a kétatomos nitrogéngáz moláris tömegének felel meg.

10.32. Mekkora a térfogata a 6 mol 27 °C hőmérsékletű ideális gáznak 5 MPa nyomáson?

Megoldás:

10.32. $n = 6$ mol; $T = 300$ K; $p = 5 \cdot 10^6$ Pa.

A $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből

$$\underline{\underline{V}} = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \underline{\underline{2{,}99 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}}.$$

10.33. Hány mol az az ideális gáz, amelynek nyomása 2 MPa, térfogata 33,24 dm^3 és hőmérséklete 400 K?

Megoldás:

10.33. $p = 2 \cdot 10^6$ Pa; $V = 3{,}324 \cdot 10^{-2}$ m^3; $T = 400$ K.

A $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből $n = \dfrac{p \cdot V}{R \cdot T} = 20$ mol.

10.34. Egy 30 literes gáztartályban lévő 10 mol ideális gáz nyomása 831 kPa.
Mekkora a hőmérséklete?

Megoldás:

10.34. $V = 3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$; $n = 10\ \mathrm{mol}$; $p = 8{,}31 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$.

A $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből $\underline{\underline{T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} = 300\ \mathrm{K}}}$.

10.35. Mekkora a nyomása 10 mol 0 °C hőmérsékletű ideális gáznak, ha a térfogata 16,62 dm^3?

Megoldás:

10.35. $n = 10$ mol; $T = 273$ K; $V = 1{,}662 \cdot 10^{-2}$ m^3.

A $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből $\underline{\underline{p}} = \dfrac{n \cdot R \cdot T}{V} = \underline{\underline{1{,}37 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$.

10.36. Mekkora a tömege 200 dm^3 térfogatú, 27 °C hőmérsékletű $3 \cdot 10^5$ Pa nyomású hidrogéngáznak?
Mekkora lenne a térfogata 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson?

Megoldás:

10.36. $V = 0{,}2\ m^3$; $T = 300\ K$; $p = 3 \cdot 10^5\ Pa$.

A gáz H_2, $M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}$.

A $p \cdot V = \frac{m \cdot R \cdot T}{M}$ állapotegyenletből $\underline{\underline{m}} = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \underline{\underline{0{,}048\ kg}}$.

Ha $T' = 273\ K$ és $p' = 10^5\ Pa$, a V' térfogat a $\frac{p' \cdot V'}{T'} = \frac{p \cdot V}{T}$ egyesített gáztörvényből $\underline{\underline{V'}} = \frac{p \cdot V \cdot T'}{p' \cdot T} = \underline{\underline{0{,}546\ m^3}}$.

10.37. Mekkora térfogatú az a gázpalack, amelyben a 3,2 kg tömegű, 27 °C hőmérsékletű oxigéngáz nyomása 12 MPa? Mekkora lenne a gáz térfogata 10^5 Pa nyomáson, ha hőmérséklete közben nem változhat?

Megoldás:

10.37. $m = 3{,}2$ kg; $T = 300$ K; $p = 1{,}2 \cdot 10^7$ Pa; $M = 3{,}2 \cdot 10^{-2} \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

$p \cdot V = \dfrac{m}{M} \cdot R \cdot T$, $V = \dfrac{m \cdot R \cdot T}{p \cdot M} = 0{,}0208$ m^3.

Izoterm állapotváltozás után, ha $p' = 10^5$ Pa, $p' \cdot V' = p \cdot V$, $\underline{\underline{V' = 2{,}49 \text{ m}^3}}$.

10.38. Mekkora a sűrűsége a 6 MPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű neongáznak? Mekkora a térfogata ebben az állapotban 200 g neongáznak?

Megoldás:

10.38. $p = 6 \cdot 10^6$ Pa; $T = 300$ K; $M = 0{,}02 \ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

A sűrűség: $\varrho = \frac{m}{V}$. Az állapotegyenletből $\frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$, innen $\varrho = 48 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

$m = 0{,}2$ kg, $\underline{\underline{V = \frac{m}{\varrho} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \ \text{m}^3}}$.

10.39. Mekkora a belső energiája 24 dm^3 100 kPa nyomású héliumnak?

Megoldás:

10.39. $V = 0{,}024\ m^3$; $p = 10^5$ Pa.

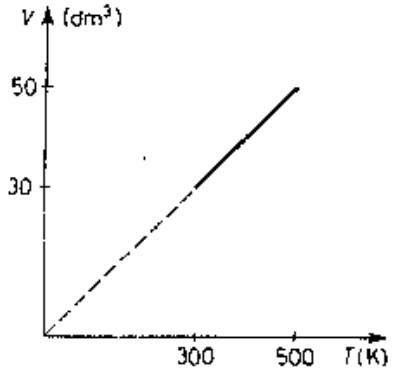
A He egyatomos gáz, belső energiája $E_b = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$.

De az állapotegyenletből $n \cdot R \cdot T = p \cdot V$, így $\underline{\underline{E_b}} = \frac{3}{2} p \cdot V = \underline{\underline{3600\ J}}$.

10.40. Ábrázoljuk grafikusan 32 g oxigén izobár állapotváltozását a $V-T$ diagramon 83,1 kPa nyomáson, 300 K és 500 K hőmérséklethatárok között!

Megoldás:

10.40. $m = 0{,}032$ kg; $p = 8{,}31 \cdot 10^4$ Pa; $M = 0{,}032 \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$.
$T_1 = 300$ K; $T_2 = 500$ K.



Az ábrázoláshoz ki kell számítani a térfogatokat.
Az állapotegyenletből

$$V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{M \cdot p} = \underline{\underline{0{,}03 \text{ m}^3}}.$$

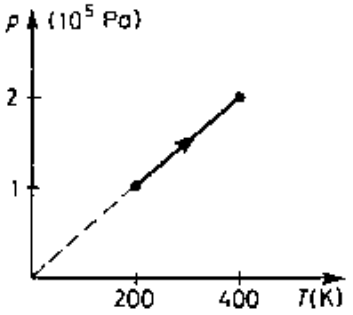
Izobár állapotváltozás után $V_2 = \dfrac{V_1 \cdot T_2}{T_1} =$

$= \underline{\underline{0{,}05 \text{ m}^3}}$.

10.41. Ábrázoljuk grafikusan 2 g hidrogén izokor állapotváltozását p–T diagramon 16,62 dm³ térfogaton, 200 K és 400 K hőmérséklethatárok között!

Megoldás:

10.41. $m = 0{,}002$ kg; $M = 0{,}002 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, $n = 1$ mol; $V = 1{,}162 \cdot 10^{-2}$ m³; $T_1 = 200$ K; $T_2 = 400$ K.



Az ábrázoláshoz meg kell határozni a nyomásokat.

Az állapotegyenletből $p_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V_1} = 10^5$ Pa.

Izochor állapotváltozás után $p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = 2 \cdot 10^5$ Pa.

10.42. Egy 10 dm^3-es edénybe 1 mol 100 °C hőmérsékletű kéndioxidgázt zártunk.

a) Mekkora a gáz nyomása?

b) Mekkora lenne a gáz térfogata 0 °C-on 10^5 Pa nyomáson?

Megoldás:

10.42. $V = 10^{-2}$ m^3; $n = 1$ mol; $T = 373$ K.

a) $p = ?$

Az állapotegyenletből $\underline{p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = 3{,}1 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$.

b) $p_1 = 3{,}1 \cdot 10^5$ Pa; $T_1 = 373$ K; $V_1 = 10^{-2}$ m^3.

$p_2 = 10^5$ Pa; $T_2 = 273$ K; $V_2 = ?$

Az egyesített gáztörvényből $V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1}$.

$\underline{V_2 = 2{,}27 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}$.

10.43. 0,5 dm^3-es lombikban 10^5 Pa nyomású, 20 °C hőmérsékletű kén-hidrogént (H_2S) fogtunk fel.

a) Mekkora a bezárt gáz tömege?

b) Mekkora lesz a lombikba zárt gáz nyomása, ha hőmérséklete 40 °C-ra nő?

Megoldás:

10.43. $V = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$; $p = 10^5$ Pa; $T = 293$ K; $M = 0{,}034\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

a) m =? Az állapotegyenletből $\underline{\underline{m}} = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \underline{\underline{7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg}}}$.

b) Izochor állapotváltozás után $T_2 = 313$ K; p_2 =?

$\underline{\underline{p_2}} = \frac{p \cdot T_2}{T} = \underline{\underline{1{,}07 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}}$.

10.44. Mekkora térfogatú palackba tölthetünk 0,64 kg tiszta oxigént, ha a bezárt gáz nyomása nem lehet nagyobb 5 MPa-nál és maximálisan 30 °C külső hőmérséklettel kell számolnunk?

Megoldás:

10.44. $m = 0{,}64$ kg; $M = 0{,}032 \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $p = 5 \cdot 10^6$ Pa; $T = 303$ K; $V = ?$

Az állapotegyenletből $\underline{\underline{V}} = \dfrac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p} = \underline{\underline{1{,}007 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3}}$.

10.45. Mekkora térfogatú levegő áramlik ki a 40 m^2 alapterületű, 5 m magas teremből, miközben 14 °C-ról 20 °C ra emelkedik a levegő hőmérséklete, ha a nyomás közben nem változik?

Megoldás.

10.45. $T_1 = 287$ K; $V_1 = 200$ m^3; $p_1 = p_2$; $T_2 = 293$ K; $V_2 = ?$ $\Delta V = ?$

Az állapotváltozás izobár, $\underline{\underline{V_2}} = \dfrac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \underline{\underline{204{,}18 \text{ m}^3}}$.

A nyomás nem változik, ha a $V_2 - V_1 = 4{,}18$ m^3 térfogatú levegő kiáramlik a teremből.

10.46. Palackba zárt gáz nyomása 27 °C-on 90 kPa.

a) Mekkora lesz a gáz nyomása, ha −18 °C-ra lehűtjük?

b) Ábrázoljuk a gáz nyomásának változását a hőmérséklet függvényében!

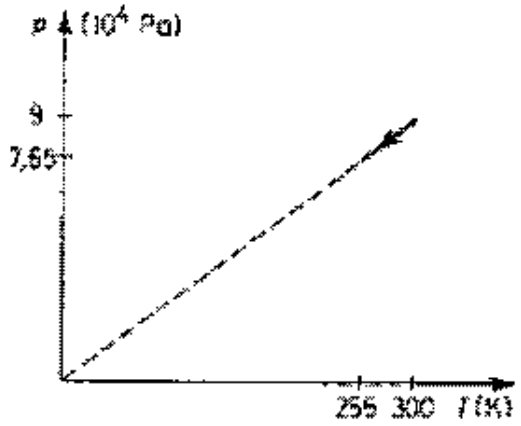
Megoldás:

10.46. $T = 300\ \text{K};\quad p = 9 \cdot 10^4\ \text{Pa}.$

a) $T' = 255\ \text{K};\quad V' = V;\quad p' = ?$

Az állapotváltozás izochor, $\underline{\underline{p' = \frac{p \cdot T'}{T} = 7{,}65 \cdot 10^4\ \text{Pa}}}.$

b)



10.47. Egy gázpalackban 27 °C-on 7,2 MPa nyomású gáz van. Mekkora lesz a gáz nyomása, ha 50 °C-ra melegítjük?

Megoldás:

10.47. $p_2 = 7{,}75 \cdot 10^6$ Pa; $T_1 = 300$ K; $p_1 = 7{,}2 \cdot 10^6$ Pa; $T_2 = 323$ K; $V_2 = V_1$; $p_2 = ?$

Izochor állapotváltozás: $\underline{\underline{p_2}} = \dfrac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \underline{\underline{7{,}75 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$.

10.48. Egy autókerék tömlőjében 27 °C-on 15 dm^3 $2{,}4 \cdot 10^5$ Pa nyomású levegő van. 47 °C-ra melegedve a tömlő térfogata 15,3 dm^3 lesz.
Mekkora a tömlőben levő gáz nyomása ezen a hőmérsékleten?

Megoldás:

10.48. $T_1 = 300$ K; $V_1 = 0{,}015$ m^3; $p_1 = 2{,}4 \cdot 10^5$ Pa; $T_2 = 320$ K; $V_2 = 0{,}0153$ m^3; $p_2 = ?$

Az egyesített gáztörvényből $p_2 = \dfrac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1}$. $\underline{\underline{p_2 = 2{,}51 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$.

10.49. Egy 20 dm^3-es gázpalackban 17 °C hőmérsékletű, 10,13 MPa nyomású gáz van.

a) Mekkora a gáz térfogata 0 °C hőmérsékleten és 10^5 Pa nyomáson?

b) Mekkora lenne a palackba zárt gáz nyomása 27 °C-on?

Megoldás:

10.49. $V = 0{,}02\ m^3$; $T = 290\ K$; $p = 10{,}13\ MPa$.

a) $T_1 = 273\ K$; $p_1 = 10^5\ Pa$.

Az egyesített gáztörvényből $\underline{\underline{V_1}} = \dfrac{p \cdot V \cdot T_1}{T \cdot p_1} = \underline{\underline{1{,}9\ m^3}}$.

b) $V_2 = V$; $T_2 = 300\ K$.

Az eredeti állapothoz képest izochor állapotváltozás: $\underline{\underline{p_2}} = \dfrac{p \cdot T_2}{T} =$

$= \underline{\underline{10{,}48\ MPa}}$.

10.50. Szén-monoxid-gáz sűrűsége 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson $1{,}25\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

a) Mekkora a sűrűsége 27 °C hőmérsékleten és 50 kPa nyomáson?

b) Mekkora a térfogata 27 °C hőmérsékleten és 50 kPa nyomáson, ha a tömege 200 g?

Megoldás:

10.50. $T_0 = 273$ K; $p_0 = 10^5$ Pa; $\varrho_0 = 1{,}25\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

a) $T = 300$ K; $p = 5 \cdot 10^4$ Pa; $\varrho = ?$

A sűrűséget $\left(\varrho = \frac{m}{V}\right)$ kifejezhetjük az állapotegyenletből: $\frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$, tehát $\varrho = \frac{M}{R} \cdot \frac{p}{T}$.

Felhasználva, hogy adott minőségű ideális gázra $\frac{M}{R}$ állandó, a gáz két állapotához tartozó sűrűségre a $\frac{\varrho \cdot T}{p} = \frac{\varrho_0 \cdot T_0}{p_0}$ összefüggést kapjuk. Ebből $\underline{\underline{\varrho = \varrho_0 \frac{p \cdot T_0}{p_0 \cdot T} = 0{,}57\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$.

b) $m = 0{,}2$ kg. $\underline{\underline{V = \frac{m}{\varrho} = 0{,}35\ \text{m}^3}}$.

10.51. Egy 25 dm^3-es gáztartályban 1,4 kg tömegű, 5 MPa nyomású nitrogéngáz van.

a) Mekkora a hőmérséklete?

b) Mekkora lesz a palackban maradt gáz nyomása, ha ezen a hőmérsékleten a gáz felét elhasználjuk?

Megoldás:

10.51. $V = 25 \cdot 10^{-3}\ m^3$; $m = 1{,}4$ kg; $p = 5 \cdot 10^6$ Pa; $M = 0{,}028\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

a) $T = ?$

Az állapotegyenletből $\underline{T} = \frac{p \cdot V \cdot M}{m \cdot R} = \underline{\underline{300{,}8\ \text{K}}}$.

b) $m' = \frac{m}{2}$, V és T nem változik, ezért az egyesített gáztörvényből $\frac{p'}{p} = \frac{m'}{m}$ és $p' = \frac{1}{2}p$. $\underline{\underline{p' = 2{,}5 \cdot 10^6\ \text{Pa}}}$.

10.52. Egy gázpalackban 40 MPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű gáz van.

Mekkora lesz a palackban maradt gáz nyomása, ha a gáz 25%-át elhasználtuk, és a hőmérséklet eközben 7 °C-ra csökkent?

Megoldás:

10.52. $p = 4 \cdot 10^7$ Pa; $T = 300$ K; $T' = 280$ K; $m' = \frac{3}{4}m$; $p' = ?$

A térfogat nem változik, de a gáz tömege igen. Az egyesített gáztörvényből $\frac{p'}{m' \cdot T'} = \frac{p}{m \cdot T}$ és $\underline{\underline{p' = p\frac{m' \cdot T'}{m \cdot T} = 2{,}8 \cdot 10^7 \text{ Pa}}}$.

10.53. Egy 20 dm^3-es gázpalackban 260 g tömegű, $3 \cdot 10^5$ Pa nyomású gáz van. A gáz egy részét elhasználtuk. Miután a bennmaradt gáz újra felvette a szobahőmérsékletet, a nyomásmérő $2{,}4 \cdot 10^5$ Pa nyomást mutat.
Hány g gázt használtunk el?

Megoldás:

10.53. $V = 0{,}02\ m^3$; $m = 0{,}26$ kg; $p = 3 \cdot 10^5$ Pa; $p' = 2{,}4 \cdot 10^5$ Pa; $T' = T$ és $V' = V$.

Az állapotváltozás után a gázpalackban maradt gáz tömegét az egyesített gáztörvényből határozzuk meg: $\frac{m'}{p'} = \frac{m}{p}$, innen $m' = m \cdot \frac{p'}{p} = 0{,}208$ kg. Az elhasznált gáz tömege: $\underline{\underline{\Delta m}} = m - m' = \underline{\underline{0{,}052\ \text{kg}}}$.

10.54. Egy gázpalackban 6 MPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű gáz van.

a) Mekkora lesz a palackban maradt gáz nyomása, ha a gáz 20%-át elhasználtuk, s a hőmérséklet közben nem változott?

b) Mekkora lesz a nyomás, ha a használt palackot a munkahelyről a 7 °C hőmérsékletű raktárba visszük?

Megoldás:

10.54. $p = 6 \cdot 10^6$ Pa; $T = 300$ K.

a) $T_1 = T$, $m_1 = 0{,}8 \cdot m$, $p_1 = ?$ $V_1 = V$.

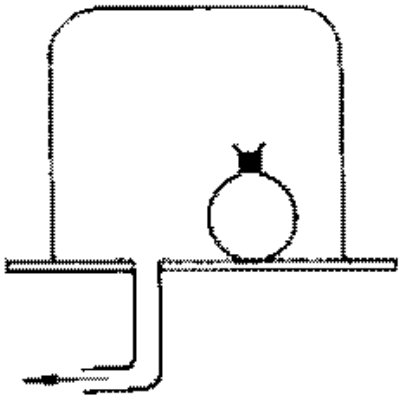
Zárt gázmennyiség tömege változik állandó hőmérsékleten: $\frac{p_1}{m_1} = \frac{p}{m}$,

$\underline{\underline{p_1 = p \cdot \frac{m_1}{m} = 4{,}8 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$.

b) $V_2 = V$, $T_2 = 280$ K.

Izochor állapotváltozás: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$, ahonnan $\underline{\underline{p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 4{,}48 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$.

10.55. Egy 500 ml térfogatú lombikba 0,88 g szén-dioxidot zártunk be. A szén-dioxid hőmérséklete 27 °C. Az 1 cm² keresztmetszetű dugót 0,5 N erővel lehet a lombikból kihúzni, ha a külső és belső nyomás egyenlő. A lombikot légszivattyú burája alá helyezzük. Mekkora nyomást kell a bura alatt előállítanunk, hogy a dugó kirepüljön a lombikból?



Megoldás:

10.55. $V = 5 \cdot 10^{-4}$ m^3; $m = 8{,}8 \cdot 10^{-4}$ kg; $T = 300$ K; $M = 0{,}044 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $A = 10^{-4}$ m^2; $F = 0{,}5$ N.

A dugó kirepül, ha a nyomáskülönbség

$$\Delta p = \frac{F}{A} = 5 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0{,}5 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

a palackba zárt gáz nyomása az állapotegyenletből: $p = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V} =$

$= 9{,}972 \cdot 10^4$ Pa.

A búra alatt $\underline{\underline{p_k = p - \Delta p = 9{,}472 \cdot 10^4 \text{ Pa}}}$ nyomást kell előállítani.

10.56. Orvosi fecskendő hengerébe vattát helyezünk. Mikor a dugattyú a 20 cm^3-es osztályzatnál van, a fecskendőhöz csatlakozó nyomásmérő 10^5 Pa nyomást mutat. Ha a dugattyút a 10 cm^3-es osztályzatig benyomjuk, a nyomás $2{,}25 \cdot 10^5$ Pa lesz. Mekkora a vatta térfogata?
(A hőmérséklet a mérés közben nem változott.)

Megoldás:

10.56. A vatta térfogata V; $V_1 + V = 2 \cdot 10^{-5}$ m^3; $p_1 = 10^5$ Pa; $V_2 + V = 10^{-5}$ m^3; $p_2 = 2{,}25 \cdot 10^5$ Pa; $T_2 = T_1$; $V = ?$
A gáz térfogata: $V_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ $m^3 - V$, illetve $V_2 = 10^{-5}$ $m^3 - V$.
A gáz állapotváltozása izoterm, $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$.

$$\underline{\underline{V}} = \frac{10^{-5} \cdot p_2 - 2 \cdot 20^{-5} \cdot p_1}{p_2 - p_1} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = \underline{\underline{2 \text{ cm}^3}}.$$

10.57. Megfigyelhetjük, hogy mély üvegedényben az edény alján keletkezett apró buborékok a víz felszíne felé közeledve nagyobbak lesznek.
Hányszorosára növekszik a tóban 5 m mélyről felszálló levegőbuborék térfogata, mire a víz felszínéhez ér, ha a víz különböző mélységeiben a hőmérséklet azonos?

Megoldás:

10.57. $h = 5$ m; $\varrho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $p = p_2 = 10^5$ Pa; $p_1 = p + h \cdot \varrho \cdot g$; $T_2 = T_1$.
A buborékba zárt levegő állapotváltozása izoterm: $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$.
A két térfogat aránya a kérdés:

$$\underline{\underline{\frac{V_2}{V_1}}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p + h \cdot \varrho \cdot g}{p} = \underline{\underline{1{,}5}}.$$

A buborék térfogata 1,5-szeresére nő.

10.58. Egyik végén zárt vékony üvegcsőben 15 cm hosszú higanyoszloppal levegőt zártunk el. A levegőoszlop hossza a cső függőleges állásánál, ha a cső nyitott vége van felül, 12 cm; ha a cső nyitott vége alul van, 18 cm.

a) Mekkora a külső légnyomás?

b) Milyen hosszú a bezárt levegőoszlop, ha a csövet ferdén tartjuk, nyitott véggel felfelé úgy, hogy a cső a vízszintessel 60°-os szöget zárjon be?

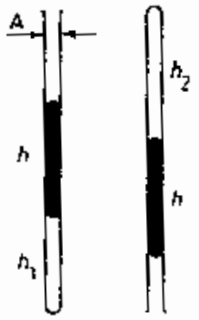
Megoldás:

10.58. $h = 15$ cm; $h_1 = 12$ cm; $h_2 = 18$ cm; $\varrho = 13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $T =$ állandó; $p_1 = p_k + h \cdot \varrho \cdot g$; $p_2 = p_k - h \cdot \varrho \cdot g$; $V_1 = A \cdot h_1$; $V_2 = A \cdot h_2$.

a) Izoterm állapotváltozás: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$;

$p_1 \cdot h_1 = p_2 \cdot h_2$.

$(p_k + h \cdot \varrho \cdot g) \cdot h_1 = (p_k - h \cdot \varrho \cdot g) \cdot h_2$, ebből $\underline{\underline{p_k}} = \frac{(h_1 + h_2) \cdot h \cdot \varrho \cdot g}{h_2 - h_1} = \underline{\underline{1{,}02 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}$.

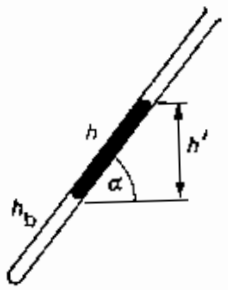


b) $\alpha = 60°$; $h' = h \cdot \sin\alpha$; $p_b = p_k + h \cdot \varrho \cdot g \sin\alpha =$

$= 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa.

$p_b \cdot h_b = p_1 \cdot h_1$, $p_1 = 1{,}22 \cdot 10^5$ Pa.

$\underline{\underline{h_b}} = \frac{p_1 \cdot h_1}{p_b} = \underline{\underline{0{,}122 \text{ m}}}$.



10.59. Egy 10 dm^3-es gáztartályban 5 MPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű oxigéngáz van.

a) Mekkora a gáz tömege?

b) Mekkora lesz a gáz nyomása, ha a hőmérséklete állandó térfogaton 10 °C-ra csökken?

c) Mekkora a tartályban maradt gáz tömege, ha a gáz felhasználása után nyomása a palackban $2 \cdot 10^5$ Pa-ra csökkent és hőmérséklete 10 °C maradt?

Megoldás:

10.59. $V = 0{,}01\ m^3$; $T = 300\ K$; $p = 5 \cdot 10^6\ Pa$; $M = 0{,}032\ \frac{kg}{mol}$.

a) Az állapotegyenletből $\underline{\underline{m}} = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 0{,}641\ kg = \underline{\underline{641\ g}}$.

b) Izochor állapotváltozás, $T_2 = 283\ K$.

$$\underline{\underline{p_2}} = \frac{p \cdot T_2}{T} = \underline{\underline{4{,}72 \cdot 10^6\ Pa}} = 4{,}72\ MPa.$$

c) $p_3 = 2 \cdot 10^5\ Pa$; $T_3 = T_2$; $V_3 = V$.

Az állapotegyenletből:

$$\underline{\underline{m_3}} = \frac{p_3 \cdot V \cdot M}{R \cdot T_3} = \underline{\underline{0{,}027\ kg}} = 27\ g.$$

10.60. Egy palackban levő oxigéngáz nyomása 18 °C-on 12 MPa. A palack legfeljebb 16 MPa nyomást bír ki.

a) Mekkora az a legmagasabb hőmérséklet, amelyre felmelegedhet a palackban levő gáz?

b) Mekkora a palackban levő gáz sűrűsége?

$\left(\text{Az oxigén sűrűsége 0 °C-on, } 10^5 \text{ Pa nyomáson } 1{,}4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.\right)$

Megoldás:

10.60. $T_1 = 291$ K; $p_1 = 12 \cdot 10^6$ Pa; $p_2 = 16 \cdot 10^6$ Pa; $V_2 = V_1$.

a) Izochor állapotváltozás után:

$$\underline{\underline{T_2}} = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \underline{\underline{388\ \text{K}}}.$$

b) $T_0 = 273$ K; $p_0 = 10^5$ Pa; $\varrho_0 = 1{,}4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_1 = ?$

Az ideális gáz sűrűségváltozása (lásd a 10.50. feladatot): $\frac{T_1 \cdot \varrho_1}{p_1} = \frac{T_0 \cdot \varrho_0}{p_0}$.

Ebből $\underline{\underline{\varrho_1}} = \frac{T_0 \cdot \varrho_0 \cdot p_1}{T \cdot p_0} = \underline{\underline{157{,}6\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$.

10.61. Egy 10 dm^3-es gázpalackban 27 °C hőmérsékletű, 10 MPa nyomású hidrogéngáz van.

a) Mekkora a palackban levő gáz tömege?

b) Hány g hidrogént használtunk el a palackból változatlan hőmérsékleten, ha a maradék gáz nyomása 100 kPa-ra csökkent?

Megoldás:

10.61. $V + 0{,}01\ \text{m}^3$; $T = 300\ \text{K}$; $p = 10^7\ \text{Pa}$; $M = 0{,}002\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

a) A gáz tömege az állapotegyenletből: $\underline{\underline{m}} = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} =$
$= 0{,}08\ \text{kg} = \underline{\underline{80\ \text{g}}}$.

b) $V_1 = V$, $T_1 = T$, $p_1 = 10^5\ \text{Pa}$.

A palackban maradt gáz tömegét számítom ki az egyesített gáztörvényből: $\frac{m_1}{p_1} = \frac{m}{p}$, $m_1 = m \cdot \frac{p_1}{p} = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{kg}$.

Tehát elhasználtunk $\underline{\underline{m - m_1}} = 0{,}0792\ \text{kg}$ gázt.

$\underline{\underline{\Delta m = 79{,}2\ \text{g}}}$.

10.62. Egy zárt gázpalackban 0 °C hőmérsékletű, 500 kPa nyomású levegő van.
Hány százalékát kell kiengednünk a levegő tömegének, ha azt akarjuk, hogy az 50 °C-ra felmelegedett levegő nyomása 500 kPa maradjon?

Megoldás:

10.62. $T_1 = 273$ K; $T_2 = 323$ K; $p_1 = p_2 = 5 \cdot 10^5$ Pa; $V_1 = V_2$.
A melegítés után a gázpalackban maradt m_2 és az eredeti m_1 tömeg arányát az egyesített gáztörvényből tudom meghatározni: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1 \cdot m_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2 \cdot m_2}$, ebből $\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} = 0{,}845$.
Tehát bennmaradt az eredeti tömeg 84,5%-a, kiengedtünk 15,5%-ot.

10.63. Egy 20 dm^3-es gázpalackban 0 °C hőmérsékletű, 1 MPa nyomású oxigéngáz van. Az oxigénből elhasználunk 82 g-ot.

a) Mekkora a palackban maradt gáz nyomása, ha a hőmérséklet nem változik?

b) Hány °C-ra kell felmelegednie a gáznak, hogy a palackban a nyomás újra 1 MPa legyen?

Megoldás:

10.63. $V = 0{,}02\ m^3$; $T = 273\ K$; $p = 10^6\ Pa$; $M = 0{,}032\ \frac{kg}{mol}$; $\Delta m = 82\ g = 0{,}082\ kg$.

a) Az eredeti gáztömeg $m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 0{,}282\ kg$, így $m_1 = 0{,}2\ kg$.

$V_1 = V$ és $T_1 = T$ miatt a nyomás megváltozását a $\frac{p_1}{p} = \frac{m_1}{m}$ összefüggésből határozhatom meg: $\underline{\underline{p_1 = p \cdot \frac{m_1}{m} = 7 \cdot 10^5\ Pa}}$.

b) $p_2 = 10^6\ Pa$; $V_2 = V_1$ izochor állapotváltozás, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$, ahonnan $\underline{\underline{T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} = 390\ K}}$.

10.64. Egy 25 dm^3-es gázpalackban 15 MPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű nitrogén–hidrogén gázkeverék van. A gázelegy tömege 3 kg.
Határozzuk meg, hogy a gázelegy tömegének hány százaléka nitrogén!

Megoldás:

10.64. $V = 0{,}025\ m^3$; $p = 1{,}5 \cdot 10^7$ Pa; $T = 300$ K; $m = 3$ kg.

A gázelegy m_1 tömegű nitrogénből $\left(M = 0{,}028\ \frac{kg}{mol}\right)$ és $m_2 = m - m_1$ tömegű hidrogénből $\left(M = 0{,}002\ \frac{kg}{mol}\right)$ áll.

Az állapotegyenlet gázelegyre: $p \cdot V = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T$.

Az $n = \frac{m}{M}$ helyettesítéssel és a fenti jelöléseket alkalmazva $\frac{p \cdot V}{R \cdot T} =$

$= \frac{m_1}{M_1} + \frac{m - m_1}{M_2}$, ebből $m_1 = 2{,}91$ kg.

$\frac{m_1}{m} = 0{,}97$, tehát a keverék 97%-a N_2.

10.65. Egy sztratoszférakutatáshoz használt óriás léggömböt felszállás előtt 0 °C hőmérsékleten, 100 kPa nyomáson 7000 m³ térfogatú héliummal töltöttek fel. 20 km magasságban, ahol a légnyomás értéke 5 kPa, a léggömb térfogata 108 000 m³ volt.

a) Mekkora a hőmérséklet a 20 km-es magasságban?

b) Mekkora erő emelte induláskor a léggömböt, ha a léggömb anyagának és a műszereknek az együttes tömege 6800 kg volt?

(A levegő sűrűsége 0 °C-on, 100 kPa nyomáson $1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a héliumé $0{,}18\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Megoldás:

10.65. $T_1 = 273$ K; $p_1 = 10^5$ Pa; $V_1 = 7 \cdot 10^3$ m³; $p_2 = 5 \cdot 10^3$ Pa; $V_2 = 108 \cdot 10^3$ m³.

a) $T_2 = ?$ Az egyesített gáztörvényből:

$$\underline{\underline{T_2}} = T_1 \cdot \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} = \underline{\underline{210{,}6\ \text{K}}}.$$

b) $m = 6800$ kg; $\varrho_{\text{He}} = 0{,}18\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_{\text{lev}} = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Az emelőerő a léggömbre ható felhajtóerő és a léggömb súlyának különbsége.

$F_{\text{felh}} = V_1 \cdot \varrho_{\text{lev}} \cdot g = 91\,000$ N. A He tömege: $m_{\text{He}} = V_1 \cdot \varrho_{\text{He}} = 1260$ kg.

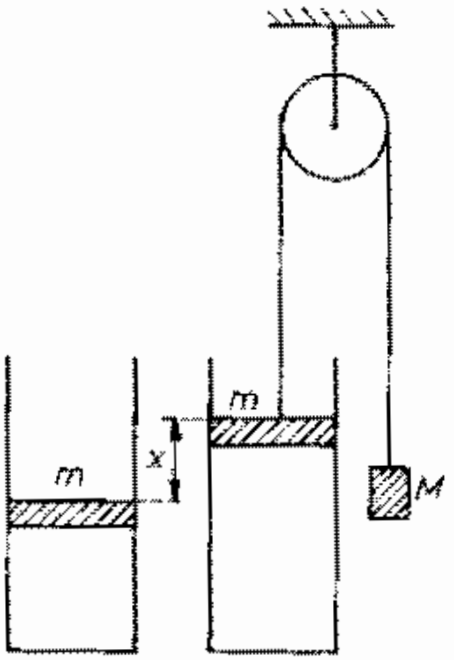
Az emelőerő: $\underline{\underline{F_{\text{em}}}} = F_{\text{felh}} - (m + m_{\text{He}}) \cdot g = \underline{\underline{10\,400\ \text{N}}}$.

10.66. A függőleges hengerbe 1 dm³ térfogatú ideális gázt zár be a súrlódásmentesen mozgó 0,2 kg tömegű, 20 cm² keresztmetszetű dugattyú. A külső nyomás 10^5 Pa.

Hány cm-t emelkedik a dugattyú, ha – az ábra szerinti elrendezésben – súrlódásmentesen mozgó állócsigán átvetett fonálra kötjük, és a fonál másik végére 2 kg tömegű testet akasztunk?

A henger fala jó hővezető, a folyamatban a gáz hőmérséklete nem változik.

$\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$



Megoldás:

10.66. $V_1 = 10^{-3}$ m³; $m = 0{,}2$ kg; $A = 2 \cdot 10^{-3}$ m²; $p_k = 10^5$ Pa; $M = 2$ kg; $T =$ állandó.

A hengerben lévő gáz nyomása a kezdeti állapotban $p_1 = p_k + \frac{m \cdot g}{A} =$

$= 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa.

Az M tömegű súly felfüggesztése után a gáz nyomása p_2-re változott.

Az egyensúly feltétele: $p_2 + \frac{M \cdot g}{A} = p_k + \frac{m \cdot g}{A}$, ebből $p_2 = 9{,}1 \cdot 10^4$ Pa.

Az állapotváltozás izoterm, $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$, így $V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} =$

$= 1{,}11 \cdot 10^{-3}$ m³.

A dugattyú elmozdulása $x = \frac{V_2 - V_1}{A} = \underline{\underline{0{,}055 \text{ m}}}$.

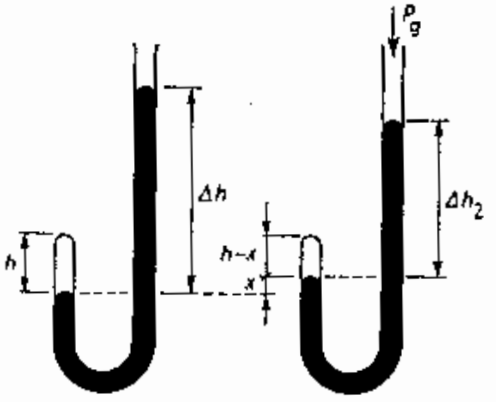
10.67. Egyik végén zárt U alakú cső (zárt manométer) belső keresztmetszete 1 cm². A cső zárt végében a higany felett kevés, ideálisnak tekinthető gáz van. 100 kPa külső nyomás mellett a higanyszintek különbsége 30 cm, a bezárt gázoszlop hossza 10 cm. A hőmérséklet állandó.

a) Mekkora a csőbe zárt gáz nyomása?

b) Ha a manométer nyitott végét egy gáztartályhoz csatlakoztatjuk, a higany szintje ebben a szárban 5 cm-t süllyed.
Mekkora a gáztartályban lévő gáz nyomása?

Megoldás:

10.67. $A = 1\ \text{cm}^2$; $p_k = 10^5$ Pa; $\Delta h = 0{,}3$ m; $h = 0{,}1$ m; $\varrho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $T = \text{áll.}$



a) A csőbe zárt gáz nyomása:
$\underline{p} = p_k + \Delta h \cdot \varrho \cdot g = \underline{\underline{1{,}408 \cdot 10^5\ \text{Pa}}}$.

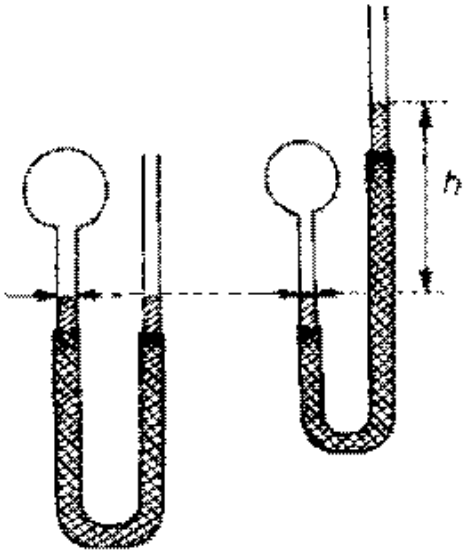
b) A gáztartályhoz való csatlakoztatás után a bezárt gáz térfogata megváltozik: $V_1 = h \cdot A$-ról $V_2 = (h - x) \cdot A$-ra csökken. Az állapotváltozás izoterm, $x = 5$ cm. $p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 2{,}816 \cdot 10^5$ Pa.

Ez a nyomás tart egyensúlyt a gáztartályban lévő gáz és a $\Delta h_2 = \Delta h - 2x$ magasságú higanyoszlop nyomásával. Ebből a gáz nyomása:
$\underline{\underline{p_g}} = p_2 - \Delta h_2 \cdot \varrho \cdot g = \underline{\underline{2{,}544 \cdot 10^5\ \text{Pa}}}$.

10.68. Gázhőmérőben 0 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású ideális gáz van.

a) Mekkora hőmérsékletet jelez a hőmérő, ha az ábra szerint a nyitott csövet megemelve, a higanyszintek különbsége 82 mm lesz? (A külső nyomás nem változott!)

b) Mekkora a jelzett hőmérséklet, ha a szintkülönbség 82 mm, de a külső nyomás $1{,}04 \cdot 10^5$ Pa-ra változott?



(A gázhőmérő tartályába zárt gáz térfogata a mérés során nem változik.)

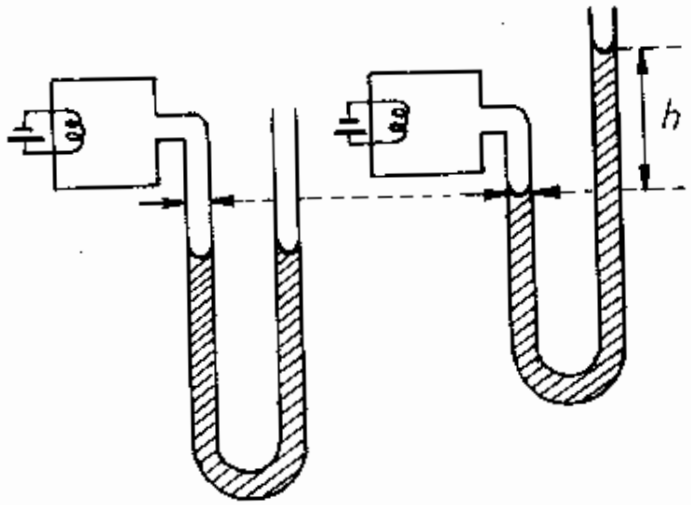
Megoldás:

10.68. $T_1 = 273$ K; $p_1 = 10^5$ Pa; $p_k = p_1$; $\Delta h = 0{,}082$ m; $\varrho_{Hg} = 13\,600 \frac{kg}{m^3}$; $V_2 = V_1$.

a) $p_2 = p_k + \Delta h \cdot \varrho \cdot g = 1{,}11 \cdot 10^5$ Pa; $\underline{\underline{T_2}} = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} = \underline{\underline{303{,}4 \text{ K}}}$.

b) $T_1 = 273$ K; $p_1 = 10^5$ Pa; $p_k = 1{,}04 \cdot 10^5$ Pa; $\Delta h = 0{,}082$ m; $p_3 = 1{,}15 \cdot 10^5$ Pa. $\underline{\underline{T_3}} = T_1 \cdot \frac{p_3}{p_1} = \underline{\underline{314{,}3 \text{ K}}}$.

10.69. Az 5 dm^3 térfogatú, 10^5 Pa nyomású, kezdetben 27 °C hőmérsékletű oxigéngázt tartalmazó palackhoz nyitott manométer csatlakozik.



a) A gázt a beépített, 10 W teljesítményű fűtőtesttel melegítjük, közben a manométer mozgatható szárának süllyesztésével biztosítjuk, hogy a gáz nyomása ne változzon. A fűtés hatásfoka 80%. Mekkora lesz 30 s múlva a gáz térfogata?

b) A manométer nyitott szárának emelésével eredeti térfogatára nyomjuk össze a felmelegített gázt. Mekkora lesz a higanyszintek különbsége, ha a hőmérséklet eközben nem változott?

c) Mennyivel változott a gáz belső energiája?

Megoldás:

10.69. $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_1 = 10^5$ Pa; $T_1 = 300$ K; $M = 0{,}032 \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

a) $P = 10$ W; $\eta = 0{,}8$; $t = 30$ s; $c_p = 917 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

A palackban lévő gáz tömege: $m = \dfrac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 6{,}42$ g.

A gázt a fűtőtest melegíti állandó nyomáson: $\eta \cdot P \cdot t = c_p \cdot m \cdot \Delta T$, innen $\Delta T = \dfrac{\eta \cdot P \cdot t}{c_p \cdot m} = 40{,}77$ K; $T_2 = 340{,}77$ K.

A gáz térfogata az izobár állapotváltozás után: $\underline{\underline{V_2}} = \dfrac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \underline{\underline{5{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}}$.

b) $V_2 = 5{,}68 \cdot 10^{-3}$ m^3; $V_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $T_2 = T_3$; $p_2 = p_k = 10^5$ Pa. $p_3 = ?$ $h = ?$

A gáz nyomása az izoterm állapotváltozás végén: $p_3 = \dfrac{p_2 \cdot V_2}{V_3} = 1{,}136 \cdot 10^5$ Pa.

Ezzel tart egyensúlyt a h magasságú Hg oszlop és a külső légnyomás: $p_3 = p_k + h \cdot \varrho \cdot g$.

Ebből $\underline{\underline{h}} = \dfrac{p_3 - p_k}{\varrho \cdot g} = \underline{\underline{0{,}1 \text{ m}}}$.

c) A belső energia csak az izobár melegítés során változott: $\Delta E_b = Q - p \cdot \Delta V$, ahol $Q = \eta \cdot p \cdot t = 240$ J, $\Delta v = v_2 - v_1 = 0{,}68 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p = 10^{-5}$ Pa, tehát $\underline{\underline{\Delta E_b = 172 \text{ J}}}$.

10.70. Két gázpalack egyikében p_1 nyomású, V_1 térfogatú, a másikban p_2 nyomású, V_2 térfogatú gáz van. A két gázmennyiség anyagi minősége és hőmérséklete azonos. A két palackot összekötő cső csapját kinyitjuk. A nyomás úgy egyenlítődik ki, hogy a hőmérséklet közben nem változik. Mekkora lesz a közös nyomás?

Megoldás:

10.70. A csap kinyitása után a nyomás kiegyenlítődik, a térfogatok és anyagmennyiségek összeadódnak. Az állapotegyenlet:

$$p \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T.$$

Itt $n_1 = \dfrac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$ és $n_2 = \dfrac{p_2 \cdot V_2}{R \cdot T}$, helyettesítés és rendezés után a közös nyomás

$$\underline{\underline{p = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}}}.$$

10.71. Két, azonos térfogatú lombikot vízszintes üvegcsővel kötöttünk össze. A csőben középen lévő higanycsepp egyensúlyban van, amikor a bal oldali lombikban 0 °C, a jobb oldaliban 30 °C hőmérsékletű a bezárt levegő.
Elmozdul-e a higanycsepp, ha mindkét lombikban 20 °C-kal emelkedik a hőmérséklet?



Megoldás:

10.71. $V_1 = V_2$; $p_1 = p_2$; $T_1 = 273$ K; $T_1' = 293$ K; $T_2 = 303$ K; $T_2' = 323$ K.
Nem mozdul el a higanycsepp, ha állandó térfogaton melegítve a gázt a megváltozott nyomások egyenlőek lesznek.

Mindkét oldalon izochor állapotváltozást feltételezve: $p_1' = p \cdot \frac{T_1'}{T_1} =$

$= 1{,}073 \cdot p$ és $p_2' = p \cdot \frac{T_2'}{T_2} = 1{,}066 \cdot p$ lenne, tehát a higanycsepp elmozdul.

10.72. Két, azonos térfogatú lombikot 0,4 cm² keresztmetszetű üvegcsővel kötöttünk össze. A csőben egyensúlyban lévő, higanycsepp által bezárt, két, azonos térfogatú gázmennyiség egyike 27 °C, a másik 0 °C hőmérsékletű.



Hány cm-t mozdul el a higanycsepp, ha az első lombikban lévő 1 dm³ gázt 47 °C-ra melegítjük, miközben a másikat továbbra is 0 °C-on tartjuk?

Megoldás:

10.72. $V = V_1 = V_2 = 10^{-3}$ m³; $p = p_1 = p_2$; $A = 0{,}4$ cm² $= 4 \cdot 10^{-5}$ m²; $T_1 = 300$ K; $T_1' = 320$ K; $T_2 = 273$ K $= T_2'$; $x = ?$

A nyomások az új egyensúlyi állapotban is egyenlőek lesznek: $p_1' = p_2' = p'$.

A megváltozott térfogatok: $V_1' = V + A \cdot x$; $V_2' = V - A \cdot x$. Mindkét oldalra felírva a gáztörvényt:

$$\frac{p \cdot V}{T_1} = \frac{p' \cdot (V + A \cdot x)}{T_1'}, \quad \text{ebből} \quad \frac{p \cdot V}{p'} = \frac{(V + A \cdot x) \cdot T_1}{T_1'},$$

$$\frac{p \cdot V}{T_2} = \frac{p' \cdot (V - A \cdot x)}{T_2'}, \quad \text{ebből} \quad \frac{p \cdot V}{p'} = \frac{(V - A \cdot x) \cdot T_2}{T_2'}.$$

A fentiekből adódik: $\frac{(V + A \cdot x)T_1}{T_1'} = \frac{(V - A \cdot x) \cdot T_2}{T_2'}$, amiből

$$\underline{\underline{x = 0{,}806 \text{ m}}}.$$

10.73. Vízszintesen fekvő hengeres edényt 40 cm² keresztmetszetű, 2 kg tömegű, súrlódás nélkül mozgó dugattyú oszt két egyenlő részre. A zárt henger mindkét részében 10^4 Pa nyomású gáz van. Az edényt függőleges helyzetbe állítjuk. A hőmérséklet mindvégig állandó marad.
Mekkora lesz ezután a gáznyomás a két térrészben?
$\left(g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.\right)$

Megoldás:

10.73. $A = 4 \cdot 10^{-3}$ m²; $m = 2$ kg; $p = 10^4$ Pa.



Izoterm állapotváltozás után

$V_1 = V + A \cdot x$; $V_2 = V - A \cdot x$;

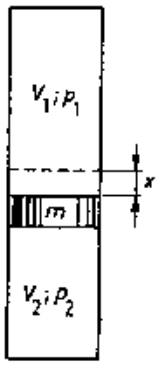
$p_2 = p_1 + \frac{m \cdot g}{A}$.

A henger felső részében: $p \cdot V = p_1 \cdot (V + A \cdot x)$, innen $x = \frac{(p - p_1) \cdot V}{p_1 \cdot A}$.

Az alsó részben: $p \cdot V = \left(p_1 + \frac{m \cdot g}{A}\right) \cdot (V - A \cdot x)$.

x fenti értékét helyettesítve:

$$p \cdot V = \left(p_1 + \frac{m \cdot g}{A}\right)\left(1 - \frac{p - p_1}{p_1}\right) \cdot V.$$



Ebből rendezés és behelyettesítés után a

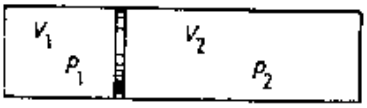
$$2p_1^2 - 10^4 p_1 - 5 \cdot 10^7 = 0$$

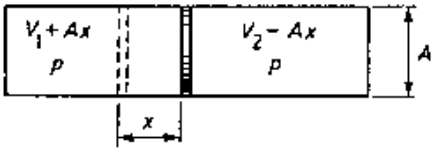
másodfokú egyenlethez jutunk. Megoldás: $p_1 = 0{,}809 \cdot 10^4$ Pa.
Tehát a felállított henger felső részében $p_1 = 8{,}09 \cdot 10^3$ Pa, az alsóban $p_2 = 13{,}09 \cdot 10^3$ Pa lesz a nyomás.

10.74. Egy 2 dm² keresztmetszetű fémhengert könnyen mozgó, de kezdetben rögzített dugattyú oszt két részre. A 3 dm³ térfogatú részben 500 kPa nyomású, az 5 dm³ térfogatú részben 300 kPa nyomású, azonos minőségű és hőmérsékletű gáz van.
Hány cm-t mozdul el a dugattyú, ha a rögzítést feloldjuk és biztosítjuk, hogy a hőmérséklet állandó maradjon?

Megoldás:

10.74. $V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ m³; $p_1 = 5 \cdot 10^5$ Pa; $V_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ m³; $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Pa; $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m²; $T_1 = T_2 = T$.





A rögzítés feloldása után a nyomás kiegyenlítődik: $p_1' = p_2' = p$, a két térfogat $V_1 + A \cdot x$ és $V_2 - A \cdot x$ lesz. Az állapotváltozás mindkét oldalon izoterm. $p_1 \cdot V_1 = p \cdot (V_1 + A \cdot x)$ és $p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V_2 - A \cdot x)$.

$\frac{p_1 \cdot V_1}{V_1 + A \cdot x} = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_2 - A \cdot x}$, ahonnan $\underline{\underline{x = 0{,}05 \text{ m}}}$.

A dugattyú $x = 5$ cm-t mozdul el.

10.75. Egy 100 cm^2 keresztmetszetű, egyik végén zárt csőben 5 dm^3 térfogatú nitrogéngázt zár be egy elhanyagolható tömegű dugattyú. A dugattyú és a henger alaplapja közé $10 \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugót kötöttünk. Kezdetben a rugó feszítetlen állapotban van. Ekkor a bezárt gáz nyomása 10^5 Pa, hőmérséklete 0 °C. $\left(C_v = 740 \frac{J}{kg \cdot K} . \right)$

a) Mennyivel kell emelni a gáz hőmérsékletét, hogy térfogata 8 dm^3 legyen?

b) Mennyi energiát kell ehhez közölni a gázzal?

c) A gázzal közölt energia hány %-a fordítódik a gáz belső energiájának növelésére?

Megoldás:

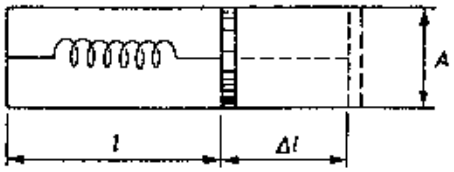
10.75. $A = 10^{-2}$ m^2; $V = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $D = 10 \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$; $p = 10^5$ Pa; $T = 273$ K; $M = 0{,}028 \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $c_v = 740 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) $V_1 = 8 \cdot 10^{-3}$ m^3; $l = 0{,}5$ m $= \dfrac{V}{A}$; $\Delta l = 0{,}3$ m.

Kezdetben a gáz nyomása egyenlő a külső légnyomással. Melegítés után a külső nyomás és az $F = D \cdot \Delta l$ rugóerő által kifejtett nyomás tart egyensúlyt a gáz nyomásával.

$$p_1 = p_k + \frac{D \cdot \Delta l}{A} = 1{,}003 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

A megváltozott hőmérséklet: $T_1 = \dfrac{p_1 \cdot V_1}{p \cdot V} \cdot T = 438$ K, $\underline{\underline{\Delta T = 165 \text{ K}}}$.



b) A gáz tömege: $m = \dfrac{p \cdot M \cdot V}{R \cdot T} = 6{,}17 \cdot 10^{-3}$ kg.

A belső energia megváltozása

$$\Delta E_b = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T = 753{,}4 \text{ J}.$$

Az I. főtétel szerint $\Delta E_b = Q + W$. Itt W a gáz tágulási munkája + a rugó megnyújtásával végzett munka: $W = -p \cdot \Delta V - \dfrac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 = -300{,}45$ J.

Az I. főtételből Q-t kifejezve az az energia, amit a gázzal közölni kell:

$\underline{\underline{Q = \Delta E_b - W = 1053{,}85 \text{ J}}}$.

c) $\dfrac{\Delta E_b}{Q} = \dfrac{753{,}4 \text{ J}}{1053{,}85 \text{ J}} = \underline{\underline{0{,}715}}$.

A felvett hőmennyiség 71,5%-a a belső energiát növelte.

10.76. A 2 dm^3 térfogatú, 0°-os, 100 kPa nyomású levegővel 300 J hőmennyiséget közlünk:

a) egyszer úgy, hogy a térfogat marad állandó,
b) máskor úgy, hogy a nyomása marad állandó.

Mekkorák lesznek az állapotjelzők (p, V, T) az egyik, és a másik állapotváltozás után?

(A levegő sűrűsége 0 °C-on, 100 kPa nyomáson $1{,}3\ \frac{kg}{m^3}$, fajhője állandó térfogaton $710\ \frac{J}{kg \cdot K}$, állandó nyomáson $1000\ \frac{J}{kg \cdot K}$.)

Megoldás:

10.76. $V_0 = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$; $T_0 = 273\ K$; $p_0 = 10^5\ Pa$; $\varrho_0 = 1{,}3\ \frac{kg}{m^3}$; $Q = 300\ J$.

a) Izochor állapotváltozás. $\underline{\underline{V_1 = V_0}}$; $c_v = 710\ \frac{J}{kg\,K}$; $m = \varrho_0 \cdot V_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ kg$; $\Delta T_1 = \frac{Q_v}{c_v \cdot m} = 162{,}5\ K$; $\underline{\underline{T_1 = 435{,}5\ K}}$; $\underline{\underline{p_1}} = \frac{p_0 \cdot T_1}{T_0} = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^5\ Pa}}$.

b) Izobár állapotváltozás. $\underline{\underline{p_2 = p_0}}$; $c_p = 1000\ \frac{J}{kg\,K}$; $\Delta T_2 = \frac{Q_p}{c_p \cdot m} = 115{,}4\ K$; $\underline{\underline{T_2 = 388{,}4\ K}}$; $\underline{\underline{V_2}} = \frac{T_2 \cdot V_0}{T_0} = \underline{\underline{2{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^3}}$.

10.77. Egy dugattyúval zárt hengerben 5 g tömegű, 0 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású héliumgáz van. A henger és a dugattyú jó hőszigetelő. A gázt 600 J munkával hirtelen összenyomjuk.

a) Mekkora a belső energia megváltozása?
b) Mekkora lesz a gáz hőmérséklete?

$\left(\text{A hélium állandó térfogaton mért fajhője } 3200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

10.77. Az állapotváltozás adiabatikus.

$m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg; $T = 273$ K; $p = 10^5$ Pa; $W = 600$ J; $c_v = 3200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) $\underline{\Delta E_b = W = 600 \text{ J}}$.

b) $W = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$; $\Delta T = \frac{W}{c_v \cdot m} = 37{,}5$ K. $\underline{T_1 = 310{,}5 \text{ K}}$.

10.78. Hőszigetelt falú hengerbe zárt, 10 g tömegű, 27 °C hőmérsékletű neongázt 1240 J munkával adiabatikusan összenyomunk.

a) Mekkora a belső energia megváltozása?

$\left(\text{A neon fajhője állandó térfogaton } 620 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

b) Mekkora a gáz hőmérséklete az összenyomás után?

Megoldás:

10.78. $m = 10^{-2}$ kg; $T = 300$ K; $W = 1240$ J; $c_v = 620 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) Adiabatikus állapotváltozás: $\underline{\underline{\Delta E_b = W = 1240 \text{ J}}}$.

b) $W = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$; $\Delta T = \dfrac{W}{c_v \cdot m} = 200$ K. $\underline{\underline{T_1 = 500 \text{ K}}}$.

10.79. Egy gőzgép 6 dm^2 keresztmetszetű dugattyújának két oldala között 500 kPa nyomáskülönbséget tartanak fenn folyamatos gőzbevezetéssel.
Mekkora munkát végez a gőz egy löket tartama alatt, ha a lökethossz 40 cm?

Megoldás:

10.79. $A = 6 \cdot 10^{-2}$ m^2; $\Delta p = 5 \cdot 10^5$ Pa; $\Delta l = 0{,}4$ m.
Az állandó nyomáskülönbség miatt a gőz munkája kiszámítható a $\Delta p \cdot \Delta V$ összefüggés segítségével:

$$\underline{\underline{W}} = \Delta p \cdot A \cdot \Delta l = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^4 \text{ J}}}.$$

10.80. Súrlódásmentesen mozgó dugattyúval ellátott hengerben 9 g 0 °C-os, 10^5 Pa nyomású neongáz van.

a) Hány °C-ra kell felmelegíteni a gázt, hogy állandó nyomáson a térfogata 12 dm^3-re növekedjék?

b) Mekkora munkát végez eközben a táguló gáz?

(A neon sűrűsége 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson $0{,}9 \frac{kg}{m^3}$.)

Megoldás:

10.80. $m = 9 \cdot 10^{-3}$ kg; $p_0 = 10^5$ Pa; $T_0 = 273$ K; $\varrho_0 = 0{,}9 \frac{kg}{m^3}$; $V_0 = \frac{m}{\varrho_0} = 10^{-2}$ m^3.

a) Izobár állapotváltozás: $p = p_0$; $V = 12 \cdot 10^{-3}$ m^3. $\underline{\underline{T}} = \frac{V \cdot T_0}{V_0} =$

$= \underline{\underline{327{,}6 \text{ K}}}$.

b) A gáz munkája: $\underline{\underline{W}} = p \cdot \Delta V = \underline{\underline{200 \text{ J}}}$.

10.81. Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben levő 1 dm^3 térfogatú, 100 kPa nyomású héliummal 200 J hőt közlünk. A gáz hőmérséklete a folyamat közben nem változik.

a) Mekkora a végzett térfogati munka?
b) Mekkora a belső energia megváltozása?

Megoldás:

10.81. a) Az állapotváltozás izoterm, a belső energia nem változik, a felvett hőmennyiség a gáz tágulási munkáját fedezi: $W = Q = 200$ J.

b) $\Delta E_b = 0$.

10.82. Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben 1 dm^3 térfogatú, 27 °C hőmérsékletű, 100 kPa nyomású egyatomos gáz van. A gázzal állandó nyomáson 500 J hőt közlünk, térfogata 3 dm^3-re tágul.

a) Mekkora a gáz hőmérséklete az új egyensúlyi állapotban?

b) Mekkora a belső energia megváltozása?

Megoldás:

10.82. $V = 10^{-3}$ m^3; $T = 300$ K; $p = 10^5$ Pa; $Q_p = 500$ J; $V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ m^3.

a) Izobár állapotváltozás $\underline{\underline{T_1}} = \frac{V_1}{V} \cdot T = \underline{\underline{900\ \text{K}}}$.

b) Az I. főtételből: $\underline{\underline{\Delta E_b}} = Q_p - p \cdot \Delta V = \underline{\underline{300\ \text{J}}}$.

10.83. Súrlódásmentesen mozgó dugattyúval elzárt, tökéletesen hőszigetelő hengerben levő, 10 mol 27 °C hőmérsékletű héliumgázt 36 kJ munka befektetésével összenyomunk. Mekkora lesz a gáz hőmérséklete az állapotváltozás végén?

Megoldás:

10.83. $T_1 = 589$ K; $n = 10$ mol; $T = 300$ K; $W = 3{,}6 \cdot 10^4$ J.
Az állapotváltozás adiabatikus, $\Delta E_b = W$. A He egyatomos gáz, $\Delta E_b = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot \Delta T = W$. Innen: $\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{2W}{3n \cdot R} = \underline{\underline{289 \text{ K}}}$, $\underline{\underline{T_1 = 589 \text{ K}}}$.

10.84. A 200 g tömegű, 300 K hőmérsékletű hidrogéngáz adiabatikus összenyomásakor 83,1 kJ munkát végeztünk.

a) Mekkora a belső energia megváltozása?

b) Mekkora lesz a gáz hőmérséklete az új állapotban?

Megoldás:

10.84. $m = 0{,}2$ kg; $T = 300$ K; $W = 8{,}31 \cdot 10^4$ J; $M = 0{,}002 \dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

a) Adiabatikus állapotváltozás, $\underline{\Delta E_b} = W = \underline{8{,}31 \cdot 10^4 \text{ J}}$.

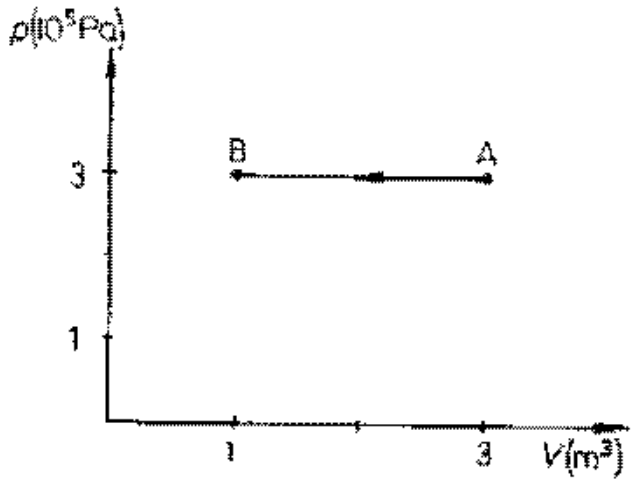
b) A H_2 kétatomos gáz, a belső energia változása $\Delta E_b = \frac{5}{2} n \cdot R \cdot \Delta T$; $n = \dfrac{m}{M} = 100$ mol; $\Delta T = \dfrac{2 \cdot \Delta U}{5n \cdot R} = 40$ K; $\underline{T_1 = 340 \text{ K}}$.

10.85. A grafikonon oxigéngáz állapotváltozását ábrázoltuk.

a) Milyen típusú az állapotváltozás?

b) Mekkora a munkavégzés?

c) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása, ha a *B* állapotban 300 K a hőmérséklete?



(Az oxigén állandó nyomáson mért fajhője $920 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)

Megoldás:

10.85. a) Az állapotváltozás izobár összenyomás.

b) $p = 3 \cdot 10^5$ Pa; $V_A = 3$ m^3; $V_B = 1$ m^3; $\Delta V = -2$ m^3; $W = -p\Delta V = +6 \cdot 10^5$ J.

c) $T_B = 300$ K; $c_p = 920 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $M = 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

Az izobár állapotváltozás előtt a hőmérséklet az *A* állapotban $T_A = \frac{V_A}{V_B \cdot T_B} = 900$ K volt, tehát a hőmérsékletváltozás $\Delta T = -600$ K.

A gáz tömege az állapotegyenletből:

$$m = \frac{p \cdot V_B \cdot M}{R \cdot T_B} = 3{,}85 \text{ kg}.$$

Az I. főtétel alapján:

$$\Delta E_b = Q - p \cdot \Delta V = c_p \cdot m \cdot \Delta T - p \cdot \Delta V = -1{,}525 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

10.86. Súrlódásmentesen mozgó, de rögzíthető dugattyúval bezárt hengerben 1 dm^3 0 °C-os, 10^5 Pa nyomású gáz van.

a) Mekkora lesz a gáz nyomása, ha a dugattyút rögzítjük és a gázt 273 °C hőmérsékletre melegítjük?

b) Hány °C-ra kell felmelegíteni a 0 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású gázt, hogy térfogata állandó nyomáson a négyszeresére növekedjék?

c) Ábrázoljuk mindkét állapotváltozást p–V diagramon!

Megoldás:

10.86. $V = 10^{-3}$ m^3; $T = 273$ K; $p = 10^5$ Pa.

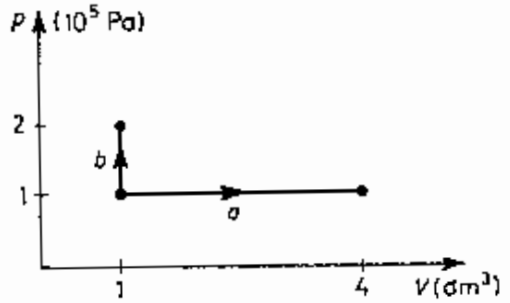
a) Izochor állapotváltozás: $V_1 = V$; $T_1 = 546$ K.

$$\underline{\underline{p_1}} = \frac{p \cdot T_1}{T} = \underline{\underline{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

b) Izobár állapotváltozás: $p_2 = p$; $V_2 = 4V$.

$$\underline{\underline{T_2}} = \frac{V_2 \cdot T}{V} = 4 \cdot T = \underline{\underline{1092 \text{ K}}}.$$

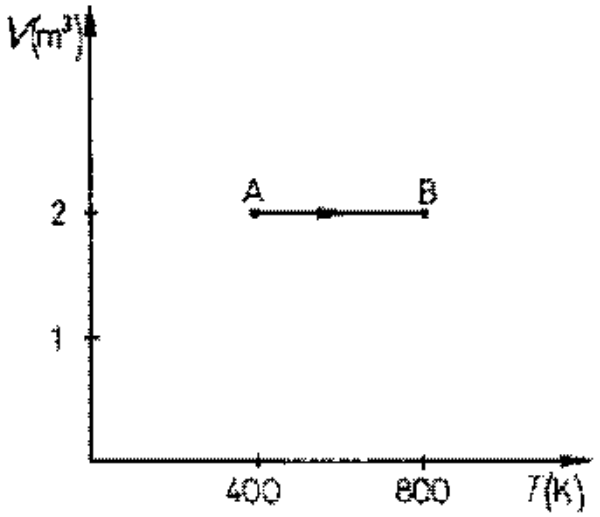
c)



10.87. A grafikonon ideális gáz állapotváltozását ábrázoltuk.

a) Mekkora a munkavégzés?

b) Mekkora a felvett hőmennyiség, ha a gáz nitrogén, nyomása az *A* állapotban 100 kPa? (Állandó térfogaton mért fajhője $740 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)



Megoldás:

10.87. $M = 0{,}028 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ $p_A = 10^5$ Pa; $T_A = 400$ K; $V_A = 2$ m^3; $T_B = 800$ K; $V_B = V_A$; $c_v = 740 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) Az állapotváltozás izochor, $\Delta V = 0$, $\underline{\underline{W = 0}}$.

b) $Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$; $m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 1{,}69$ kg; $\Delta T = 400$ K; $\underline{\underline{Q_v}} = 500\,240$ J $\sim \underline{\underline{5 \cdot 10^5 \text{ J}}}$.

10.88. Egy gáztartályban 0,7 kg nitrogént és 1,6 kg oxigént tartalmazó gázkeverék van.
Mennyivel nő a gázkeverék belső energiája, ha hőmérséklete 40 °C-kal emelkedik?

Megoldás:

10.88. $m_1 = 0{,}7$ kg; $M_1 = 0{,}028 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $m_2 = 1{,}6$ kg; $M_2 = 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $\Delta T = 40$ K.
Az N_2 és O_2-ből álló gázkeverék belső energiájának megváltozása:

$$\underline{\underline{\Delta E_b}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m_1}{M_1} \cdot R \cdot \Delta T + \frac{5}{2} \cdot \frac{m_2}{M_2} \cdot R \cdot \Delta T = \underline{\underline{62\,325\ \text{J}}}.$$

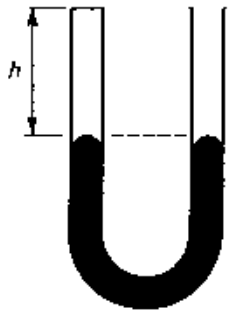
10.89. Függőleges helyzetű szárakkal rögzített, U alakú csőben higany van. A higanyszintek a csövek felső végétől 40 cm-re helyezkednek el. Az egyik csővéget lezárjuk, és a bezárt, 27 °C hőmérsékletű, 100 kPa nyomású levegőt addig melegítjük, amíg a levegőoszlop hossza 50 cm-re tágul. A külső nyomás 100 kPa.

a) Mekkora a bezárt levegő hőmérséklete ebben az állapotban?

b) Mekkora munkát végzett a táguló levegő, ha a cső keresztmetszete 5 cm^2?

Megoldás:

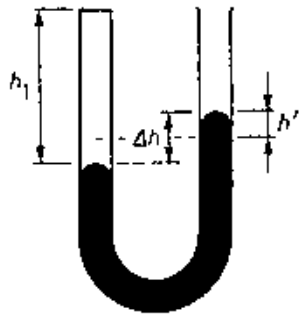
10.89. $h = 0{,}4$ m; $T = 300$ K; $p = 10^5$ Pa $= p_k$.



a) $h_1 = 0{,}5$ m; $\Delta h = 0{,}2$ m; $T_1 = ?$

A bezárt levegő nyomása a melegítés után: $p_1 = p_k + \Delta h \cdot \varrho_{Hg} \cdot g = 1{,}272 \cdot 10^5$ Pa, térfogata: $V_1 = A \cdot h_1 = 0{,}5 \cdot A$.

Hőmérséklete a gáztörvényből: $\underline{\underline{T_1}} = \dfrac{p_1 \cdot V_1 \cdot T}{p \cdot V} = \underline{\underline{477 \text{ K}}}$.



b) $A = 5 \cdot 10^{-4}$ m^2; $\varrho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \dfrac{kg}{m^3}$; $h' = 0{,}1$ m.

A táguló gáz egy 0,1 m magas Hg-oszlopot emelt 0,1 m-rel magasabbra. Munkája a higanyoszlop helyzeti energiáját növelte.

$$\underline{\underline{W}} = m \cdot g \cdot h' = A \cdot h' \cdot \varrho_{Hg} \cdot g \cdot h' = \underline{\underline{0{,}68 \text{ J}}}.$$

10.90. Mekkora hőmennyiség szükséges ahhoz, hogy a zárt gázpalackban levő, 40 dm³, 0 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású nitrogén nyomása $3{,}039 \cdot 10^5$ Pa-ra változzon?
Mekkora a belső energia megváltozása?

(A nitrogén sűrűsége 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson $1{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;
fajhője állandó térfogaton $740 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)

Megoldás:

10.90. $V = 0{,}04\ \text{m}^3 = \text{állandó}$; $T_0 = 273\ \text{K}$; $p_1 = 10^5\ \text{Pa}$; $p_2 = 3{,}039 \cdot 10^5\ \text{Pa}$; $c_v = 740 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $\varrho_0 = 1{,}25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Izochor állapotváltozás: $Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$; $m = V \cdot \varrho_0 = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}$;
$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = 829{,}6\ \text{K}$; $\Delta T = 556{,}6\ \text{K}$. $\underline{\underline{Q_v = 20\,594\ \text{J}}}$. $\Delta E_b = Q_v$.

10.91. Mekkora hőmennyiség szükséges ahhoz, hogy 5 m^3 0 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású oxigéngáz állandó nyomáson 8 m^3-re tágulj on?

a) Mekkora a tágulási munka?

b) Mekkora a gáz belső energiájának megváltozása?

(Az oxigén sűrűsége 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson 1,40 $\frac{kg}{m^3}$; állandó nyomáson mért fajhője 920 $\frac{J}{kg \cdot K}$.)

Megoldás:

10.91. $V_1 = 5\ m^3$; $V_2 = 8\ m^3$; $T_1 = 273\ K$; $p_1 = 10^5\ Pa$; $p_2 = p_1$; $\varrho_1 = 1{,}40\ \frac{kg}{m^3}$; $c_p = 920\ \frac{J}{kg\,K}$.

a) Izobár állapotváltozás: $Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T$ és $\Delta E_b = Q_o - p \cdot \Delta V$.

$m = \varrho_1 \cdot V_1 = 7\ kg$; $T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = 436{,}8\ K$; $\Delta T = 163{,}8\ K$. $Q_p = 1\,054\,872\ J = 1{,}05\ MJ$. $\underline{\underline{W = -p \cdot \Delta V = -3 \cdot 10^5\ J}}$.

b) $\underline{\underline{\Delta E_b = 754\,872\ J = 0{,}75\ MJ}}$.

10.92. Súrlódásmentesen mozgó dugattyúval lezárt hengerben 30 dm^3, 400 kPa nyomású, 27 °C hőmérsékletű oxigén van. A gázt állandó nyomáson addig melegítjük, amíg tágulása közben 4 kJ munkát végez.

a) Mekkora lett a gáz térfogata?
b) Mekkora lett a hőmérséklete?
c) Mekkora hőmennyiséget vett fel a gáz tágulás közben?

$\left(\text{Az oxigén fajhője állandó nyomáson } 920\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right)$

Megoldás:

10.92. $V_1 = 0{,}03\ \text{m}^3$; $p_1 = 4\cdot 10^5\ \text{Pa}$; $T_1 = 300\ \text{K}$; $M = 0{,}032\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $c_p = 920\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $p_2 = p_1$; $W = -4\cdot 10^3\ \text{J}$.

a) Izobár állapotváltozás: $W = -p\cdot\Delta V$, ebből $V = 0{,}01\ \text{m}^3$; $\underline{\underline{V_2 = 0{,}04\ \text{m}^3}}$.

b) $\underline{\underline{T_2}} = \frac{V_2}{V_1}\cdot T_1 = \underline{\underline{400\ \text{K}}}$.

c) $Q_p = c_p\cdot m\cdot\Delta T$; $m = \frac{p\cdot V\cdot M}{R\cdot T} = 0{,}154\ \text{kg}$. $\underline{\underline{Q_p = 14\,168\ \text{J}}}$.

10.93. Nitrogéngázt melegítünk 100 kPa nyomáson. A gáz hőfelvétele 700 J.

a) Mekkora a gáz térfogatváltozása?
b) Mekkora a gáz által végzett tágulási munka?

(A nitrogén fajhője állandó nyomáson $1040 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$, állandó térfogaton $740 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$.)

Megoldás:

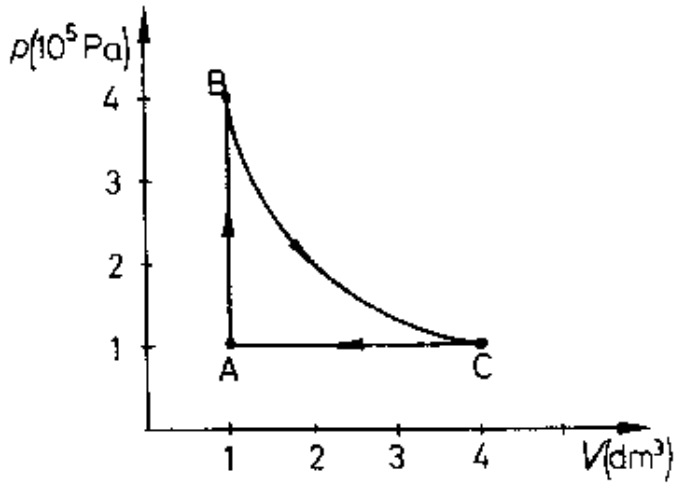
10.93. $p = 10^5$ Pa; $Q_p = 700$ J; $c_p = 1040 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$; $c_v = 740 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$; $M = 0{,}028 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

a) Izobár állapotváltozás: $p \cdot \Delta V = (c_p - c_v) m \cdot \Delta T$ (lásd a 10.28. feladatot). $Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T$, ebből $m \cdot \Delta T = \frac{Q_p}{c_p}$.

a kettőt összevetve: $\underline{\underline{\Delta V}} = \frac{(c_p - c_v) \cdot Q_p}{p \cdot c_p} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}}$.

b) $\underline{\underline{W}} = -2p \cdot \Delta = \underline{\underline{-200\ \mathrm{J}}}$.

10.94. Az oxigéngáz kezdetben 300 K hőmérsékletű (az ábra A pontja). A grafikon az oxigéngáz állapotváltozásait mutatja.



a) Mekkora a gáz hőmérséklete a *B* és a *C* állapotban?
b) Mekkora az $A \rightarrow B$ állapotváltozás során felvett hőmennyiség?
c) Mekkora a belső energia változása a $B \rightarrow C$ állapotváltozáskor?
d) Mekkora a külső munkavégzés a $C \rightarrow A$ állapotváltozáskor?

$\left(\text{Az oxigén fajhője állandó térfogaton } 650 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

10.94. $T_A = 300$ K; $V_A = 10^{-3}$ m^3; $p_A = 10^5$ Pa; $V_B = 10^{-3}$ m^3; $p_B = 4 \cdot 10^5$ Pa; $V_C = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_C = 10^5$ Pa; $M = 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $c_v = 650 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) AB izochor, $\underline{\underline{T_B = \frac{p_B}{p_A} \cdot T_A = 1200 \text{ K}}}$.

BC izoterm, $T_C = T_B = 1200$ K.

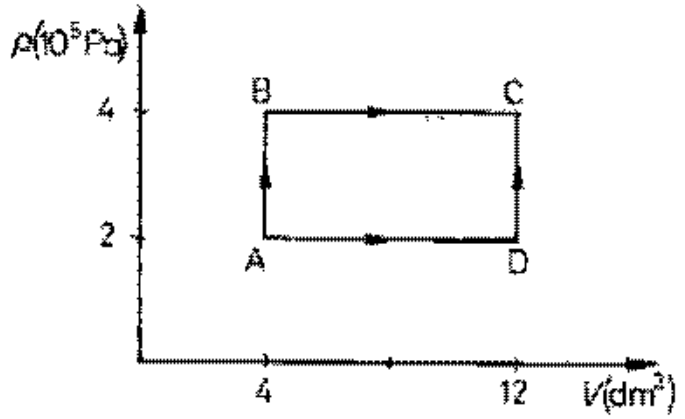
b) $Q_{AB} = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$; $m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ kg.

$\underline{\underline{Q_{AB} = 748{,}8 \text{ J}}}$.

c) $\underline{\underline{\Delta E_{BC} = 0}}$, izoterm állapotváltozás.

d) Izobár: $W_{CA} = -p \cdot \Delta V$, $\Delta V = -3 \cdot 10^{-3}$ m^3. $\underline{\underline{W_{CA} = 300 \text{ J}}}$.

10.95. Nitrogéngáz hőmérséklete az A állapotban 300 K. A gázt két úton juttathatjuk az A állapotból a C állapotba: az ábrán jelzett ABC, illetve ADC folyamatsoron keresztül. Határozzuk meg mindkét úton:



a) a gáz által felvett hőmennyiséget,
b) a tágulási munkát,
c) a belső energia megváltozását!

(A nitrogén fajhője állandó nyomáson 1040 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, állandó térfogaton 740 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Az állapotjelzők a grafikonról leolvashatók.)

Megoldás:

10.95. $M = 0{,}028 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $c_p = 1040 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $c_v = 740 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $T_A = 300$ K;
$V_A = V_B = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3; $V_C = V_D = 12 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_A = p_D = 2 \cdot 10^5$ Pa;
$p_B = p_C = 4 \cdot 10^5$ Pa.
Kiszámítjuk a hiányzó hőmérsékleteket.
$\overrightarrow{AB}$ izochor: $T_B = \frac{p_B}{p_A} \cdot T_A = 600$ K; $\overrightarrow{BC}$ izobár: $T_C = \frac{V_C}{V_B} \cdot T_B = 1800$ K;
$\overrightarrow{AD}$ izobár: $T_D = \frac{V_D}{V_A} \cdot T_A = 900$ K.
A gáz tömege: $m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 9 \cdot 10^{-3}$ kg.

Az $\overrightarrow{ABC}$ folyamatsoron: $Q = c_v \cdot m \cdot (T_B - T_A) + c_p \cdot m \cdot (T_C - T_B)$.
$\underline{\underline{Q = 13\,230\ \text{J}}}$; $\underline{\underline{W = 0 + W_{BC} = -p_B \cdot (V_C - V_B) = -3200\ \text{J}}}$;
$\underline{\underline{\Delta E_b = Q + W = 10\,030\ \text{J}}}$.

Az $\overrightarrow{ADC}$ folyamatsoron: $Q = c_p \cdot m \cdot (T_D - T_A) + c_v \cdot m \cdot (T_C - T_D)$.
$\underline{\underline{Q = 11\,610\ \text{J}}}$; $\underline{\underline{W = W_{AD} = -p_A \cdot (V_D - V_A) = -1600\ \text{J}}}$; $\underline{\underline{\Delta E_b = Q + W = 10\,010\ \text{J}}}$.

$\Delta E_{ABC} = \Delta E_{ADC}$, az eltérést a mért fajhőadatok kerekítései indokolják.

10.96. Hőszigetelő falú hengert vékony fal oszt két részre. Az egyik részben 2 dm^3, 300 kPa nyomású, 300 K hőmérsékletű, a másikban 5 dm^3, 100 kPa nyomású, 400 K hőmérsékletű, azonos minőségű gáz van.
Mekkora lesz a kialakuló közös nyomás és hőmérséklet, ha a válaszfal széttörik?

Megoldás:

10.96. $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa; $T_1 = 300$ K; $V_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_2 = 10^5$ Pa; $T_2 = 400$ K.

A válaszfal széttörése után a két gázmennyiség belső energiája, mennyisége és térfogata összeadódik; nyomása, hőmérséklete kiegyenlítődik.

Az állapotegyenletből $m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$; $n_1 = 0{,}24$ mol; $n_2 = 0{,}15$ mol; $n = n_1 + n_2 = 0{,}39$ mol.

$E = \frac{5}{2} n_1 \cdot R \cdot T_1 + \frac{5}{2} \cdot n_2 \cdot R \cdot T_2 = \frac{5}{2} \cdot (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T$, ebből a közös hőmérséklet: $\underline{\underline{T}} = \frac{n_1 \cdot T_1 + n_2 \cdot T_2}{n_1 + n_2} = \underline{\underline{338{,}5 \text{ K}}}$; $V = V_1 + V_2 = 7 \cdot 10^{-3}$ m^3.

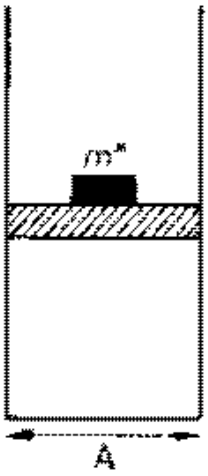
A kiegyenlítődött nyomás az állapotegyenletből:

$$\underline{\underline{p}} = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \underline{\underline{1{,}57 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

10.97. Az ábrán látható hengerben a gáz fölött súrlódásmentesen mozgó, elhanyagolható tömegű dugattyú van. A bezárt gáz kezdetben 6 dm³ térfogatú, 27 °C hőmérsékletű, nyomása 100 kPa, megegyezik a külső légnyomással.

a) Mekkora lesz a gáz térfogata, ha hőmérsékletét 100 °C-kal növeljük?

b) Mekkora a felvett hőmennyiség, ha a gáz oxigén, melynek állandó nyomáson mért fajhője $920\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$?



c) Mennyivel nőtt a gáz belső energiája?

d) Mekkora tömegű testet kell az 1 dm² keresztmetszetű dugattyúra tenni, hogy a gázt a megnövekedett hőmérsékleten eredeti térfogatára nyomjuk össze?

Megoldás:

10.97. $V_1 = 6\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^3$; $T_1 = 300\ \mathrm{K}$; $p_1 = 10^5\ \mathrm{Pa} = p_2 = p_\mathrm{k}$; $T_2 = 400\ \mathrm{K}$; $M = 0{,}032\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$; $c_\mathrm{p} = 920\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $A = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$.

a) Izobár állapotváltozás: $\underline{\underline{V_2}} = \frac{T_2}{T_1}\cdot V_1 = \underline{\underline{8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^3}}$.

b) $\underline{\underline{Q_\mathrm{p}}} = c_\mathrm{p}\cdot m\cdot\Delta T = \underline{\underline{708{,}4\ \mathrm{J}}}$; $m = \frac{p\cdot V\cdot M}{R\cdot T} = 7{,}7\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}$.

c) $\underline{\underline{E_\mathrm{b}}} = Q_\mathrm{p} - p\cdot\Delta V = \underline{\underline{508{,}4\ \mathrm{J}}}$.

d) Izoterm állapotváltozás. $T = T_2$; $V = V_1$.

A dugattyúra tett m^* tömeg hatására a gáz nyomása $p_k + \frac{m^* \cdot g}{A}$-ra változott.

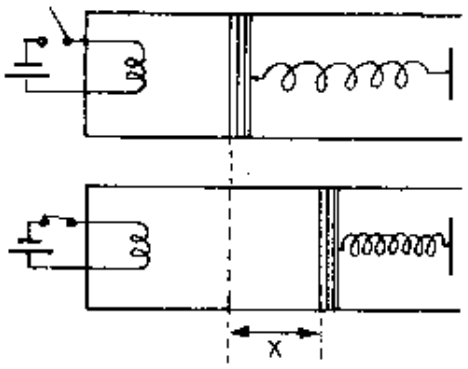
A gáztörvényből: $\left(p_k + \frac{m^* \cdot g}{A}\right) \cdot V_1 = p_k \cdot V_2$, ebből

$$\underline{\underline{m^*}} = \frac{A \cdot p_k \cdot (V_2 - V_1)}{g \cdot V_1} = \underline{\underline{33{,}3 \text{ kg}}}.$$

10.98. A hőszigetelt hengerben 2 dm^3 100 kPa nyomású, 0 °C hőmérsékletű levegő van. A súrlódásmentesen mozgó, 50 cm^2 keresztmetszetű dugattyút tartó rugó rugóállandója $100 \frac{N}{m}$. A bezárt levegőt 10 W teljesítményű fűtőelemmel fűtjük.

a) Mekkora hőmérsékletre kell felmelegíteni a levegőt, hogy a rugó 5 cm-t nyomódjon össze?

b) Mennyi időre kell ehhez bekapcsolni a fűtőelemet?



(A levegő sűrűsége 0 °C-on, 100 kPa nyomáson $1{,}3 \frac{kg}{m^3}$, fajhője állandó nyomáson $1000 \frac{J}{kg \cdot K}$, állandó térfogaton $700 \frac{J}{kg \cdot K}$.)

Megoldás:

10.98. $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_1 = 10^5$ Pa; $T_1 = 273$ K; $A = 5 \cdot 10^{-3}$ m^2; $D = 100 \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$; $P = 10$ W; $x = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $\varrho_1 = 1{,}3 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $c_p = 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $c_v = 700 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) Feltételezzük, hogy kezdetben a rugó feszítetlen állapotban van, a külső nyomás egyenlő a gáz nyomásával.

A melegítés végén $p_2 = p_k + \dfrac{D \cdot x}{A} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, $V_2 = V_1 + A \cdot x = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ m^3.

A gáztörvényből $\underline{\underline{T_2}} = \dfrac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \underline{\underline{310{,}2 \text{ K}}}$.

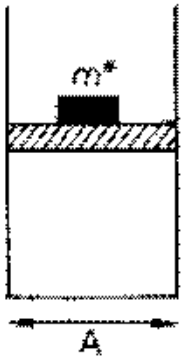
b) A felvett hőmennyiség ($Q = P \cdot t$) növelte a gáz belső energiáját ($\Delta E = Q_v$), és fedezte a rugó összenyomására fordított munkát.

Összegezve: $P \cdot t = c_v \cdot m \cdot \Delta T + \dfrac{D}{2} \cdot x^2 = 67{,}7 \text{ J} + 0{,}125 \text{ J}$, $m = \varrho_1 \cdot V_1 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg.

A melegítés ideje: $\underline{t} = \dfrac{Q}{P} = \underline{\underline{6{,}8 \text{ s}}}$.

10.99. Az ábrán látható hengerben 3 dm³, 27 °C hőmérsékletű, 100 kPa nyomású nitrogén van. A dugattyú súrlódásmentesen mozoghat, tömege elhanyagolható.

a) A gáz hőmérsékletét 60 °C-kal növeljük. Mekkora tömegű testet kell az 1 dm² keresztmetszetű dugattyúra helyezni, hogy a melegítés ellenére ne változzon a gáz térfogata?



A külső nyomás 100 kPa, a nitrogén állandó térfogaton mért fajhője 740 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

b) Mekkora a melegítés során felvett hőmennyiség?

c) Mekkora a belsőenergia megváltozása?

Megoldás:

10.99. $V = 3 \cdot 10^{-3}$ m³; $T = 300$ K; $p = p_k = 10^5$ Pa; $A = 10^{-2}$ m²; $c_v = 740 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

a) A melegítés során nem engedem tágulni a gázt, a nyomást az m^* tömegű test ráhelyezésével növelem.

$$V_1 = V; \quad T_1 = 360 \text{ K}; \quad p_1 = p + \frac{m^* \cdot g}{A}, \quad \frac{p + \frac{m^* \cdot g}{A}}{T_1} = \frac{p}{T}, \quad \underline{\underline{m^*}} =$$

$$= \frac{A \cdot p}{g}\left(\frac{T}{T_1} - 1\right) = \underline{\underline{20 \text{ kg}}}.$$

b) Az izochor állapotváltozás során felvett hőmennyiség: $\underline{\underline{Q_v}} =$

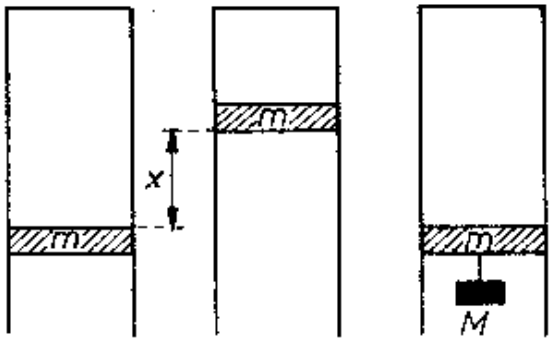
$= c_v \cdot m \cdot \Delta T = \underline{\underline{150 \text{ J}}}$. $m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = 3{,}37 \cdot 10^{-3}$ kg, $\Delta T = T_1 - T = 60$ K.

c) $\underline{\underline{\Delta E_b}} = Q_v = \underline{\underline{150 \text{ J}}}$.

10.100. Az ábra szerint függőlegesen álló, jó hővezető falú hengerben kezdetben 2 dm^3, 400 K hőmérsékletű oxigéngáz van. A súrlódásmentesen mozgó, 100 cm^2 keresztmetszetű dugattyú tömege 0,2 kg. A külső nyomás 10^5 Pa, $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

a) Hány cm-rel tolódik el a dugattyú, miközben a gáz 300 K-re hűl?

b) Mekkora tömegű testet kell a dugattyúra akasztani, ha azt akarjuk, hogy a dugattyú eredeti helyzetébe térjen vissza, miközben a gáz hőmérséklete változatlanul 300 K?



c) Mekkora a belsőenergia-változás az *a)*, illetve *b)* folyamat során?

Megoldás:

10.100. $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3; $T_1 = 400$ K; $A = 10^{-2}$ m^2; $m = 0{,}2$ kg; $p_k = 10^5$ Pa; $p_1 = p_k - \frac{m \cdot g}{A} = 0{,}998 \cdot 10^5$ Pa.

a) Izobár állapotváltozás: $V_2 = V_1 - A \cdot x$, $T_2 = 300$ K, $V_2 - A \cdot x = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$, ebből $\underline{\underline{x = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}}$.

$V_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3.

b) Izoterm állapotváltozás:

$T_3 = T_2$, $V_3 = V_1$, $p_3 = p_k - \frac{(m+M) \cdot g}{A}$.

$p_k - \frac{(m+M) \cdot g}{A} \cdot V_3 = p_2 \cdot V_2$, ebből $M = \frac{(p_k \cdot V_3 - p_2 \cdot V_2) \cdot A}{g \cdot V_3} - m = 24{,}95$, $\underline{\underline{M = 25 \text{ kg}}}$.

c) A belső energia megváltozása az *a*) esetben:

$\underline{\underline{\Delta E}} = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R(T_2 - T_1) = \underline{\underline{-124{,}65 \text{ J}}}$, $n = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T} = 0{,}06$;

a *b*) állapotváltozás izoterm, $\underline{\underline{\Delta E_b = 0}}$.

10.101. A 10 dm^3-es gázpalackban 293 K hőmérsékleten 10 MPa nyomású hidrogén van. Mennyi a hidrogén sűrűsége?

Megoldás:

10.101. $V = 10^{-2}\ m^3$; $T = 293\ K$; $p = 10^7\ Pa$; $M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}$.

Az állapotegyenletből: $\varrho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = 8{,}21\ \frac{kg}{m^3}$.

10.102. Környezetétől tökéletesen hőszigetelt, könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben 4 mólnyi, 27 °C hőmérsékletű hidrogén van, melyet 15 kJ munka befektetésével nyomunk össze.

Határozzuk meg az állapotváltozás végére kialakult hőmérsékletet!

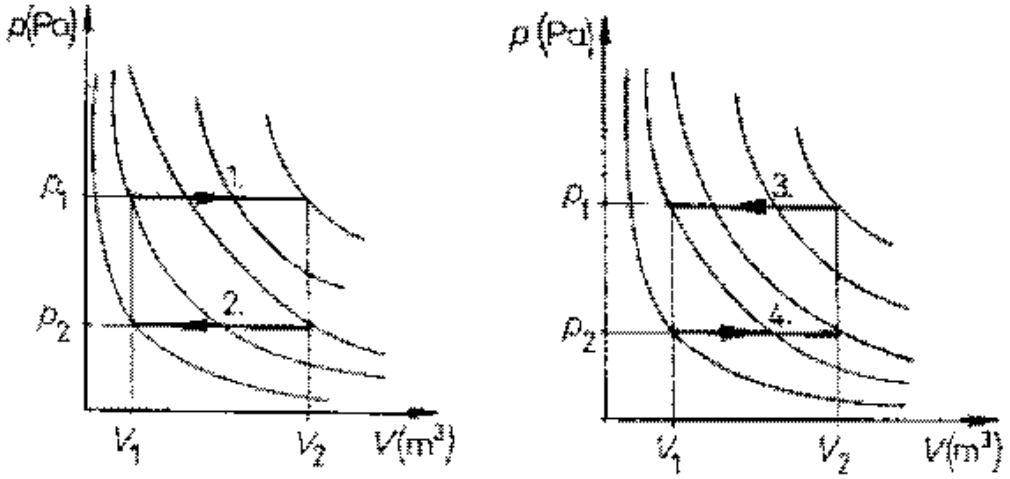
Megoldás:

10.102. $n = 4$ mol; $T = 300$ K; $W = 1{,}5 \cdot 10^4$ J.

Adiabatikus állapotváltozás: $\Delta E_b = W$.

$$\frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = W; \quad \Delta T = \frac{2W}{5 \cdot n \cdot R} = 180{,}5 \text{ K}; \quad \underline{T_1 = 480{,}5 \text{ K}}.$$

10.103. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható négy állapotváltozás közül melyik során végez a gáz nagyobb tágulási munkát, ha $p_1 = 8 \cdot 10^5$ Pa, $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3!



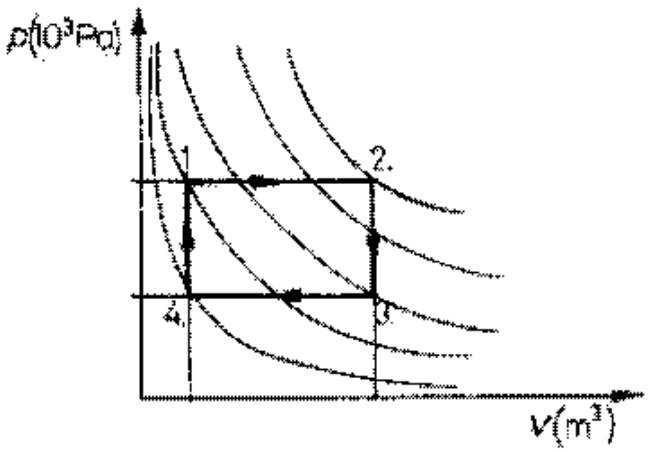
Oldjuk meg a feladatot paraméteresen is!

Megoldás:

10.103. Paraméteresen: $W_1 = p_1 \cdot (V_2 - V_1)$, $W_2 = p_2 \cdot (V_1 - V_2)$, $W_3 = p_1 \cdot (V_1 - V_2)$, $W_4 = p_2 \cdot (V_2 - V_1)$.

A gáz munkája pozitív, ha annak következtében a gáz tágul. Ilyen az 1. és a 4. folyamat, s itt $W_1 > W_4$ (ugyanakkora a térfogatváltozás, de $p_1 > p_2$). A 2. és 3. folyamat összenyomás, a munkát külső erő végzi. Számszerűen: $W_1 = 1200$ J, $W_2 = -750$ J, $W_3 = -1200$ J, $W_4 = 750$ J.

10.104. Az ábra állandó mennyiségű ideális gáz körfolyamatát mutatja.



a) Állapítsuk meg az ábra segítségével, hogy mely szakaszokon történt hőfelvétel, illetve hőleadás!

b) Megállapítható-e, hogy a felvett vagy a leadott hőmennyiség volt a több a folyamatban?

Megoldás:

10.104. **a)** 1–2: izobár, $\Delta E_b > 0$; $T_2 > T_1$ $Q > 0$; hőfelvétel,
2–3: izochor, $\Delta E_b < 0$; $T_3 < T_2$ $Q < 0$; hőleadás,
3–4: izobár, $\Delta E_b < 0$; $T_4 < T_3$ $Q < 0$; hőleadás,
4–1: izochor, $\Delta E_b > 0$; $T_1 > T_4$ $Q > 0$; hőfelvétel.

b) Igen. A körfolyamat során a belső energia változásainak összege = 0 (a kezdeti és a végállapot azonos). $|\Delta E_{4-1-2}| = |\Delta E_{2-3-4}|$. A felvett hőmennyiség a 4–1–2 folyamatsoron a belső energia növelésén kívül a tágulási munkát is fedezi. A tágulási munka abszolút értéke az 1–2 folyamatban nagyobb, mint a 3–4-ben, tehát a felvett hőmennyiség nagyobb.

10.105. Könnyen mozgó dugattyúval ellátott hengerben lévő gáz hőmérséklete 20 °C, térfogata 6 dm³, nyomása 34 kPa. A gáz nyomását izotermikusan 102 kPa-ra növeljük.

a) Mekkora lesz a gáz térfogata?

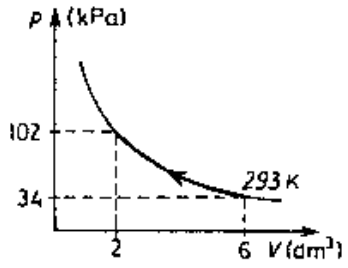
b) Ábrázoljuk az állapotváltozást p–T, V–T és p–V diagramon!

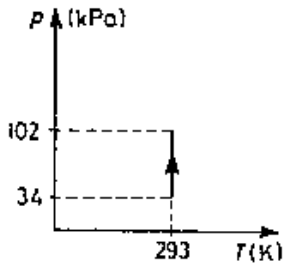
Megoldás:

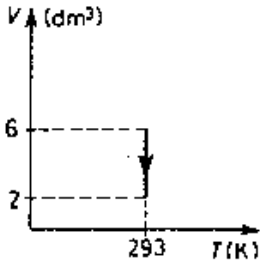
10.105. $T_1 = 293$ K; $V_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ m³; $p_1 = 3{,}4 \cdot 10^4$ Pa; $p_1 = 1{,}02 \cdot 10^5$ Pa; $T_2 = T_1$.

a) Izoterm állapotváltozás: $\underline{\underline{V_2}} = \dfrac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}}$.

b)







10.106. Hány °C-kal változott meg a hőmérséklete a 20 g tömegű héliumgáznak, ha belső energiája 18 987,25 J-ról 19 610,5 J-ra nőtt?
Lehetett-e ez az állapotváltozás:

– izobár,
– izokor,
– izoterm,
– adiabatikus?

Megoldás:

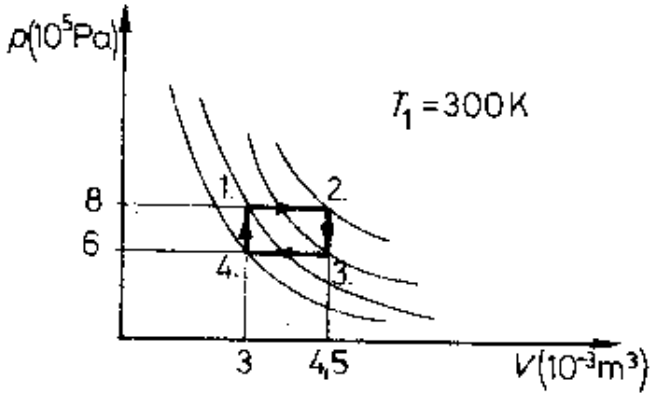
10.106. $m = 2 \cdot 10^{-2}$ kg; $M = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $E_1 = 18\,987{,}25$ J; $E_2 = 19\,610{,}5$ J.

$\Delta E = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T$; $\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{2M \cdot (E_2 - E_1)}{3m \cdot R} = \underline{\underline{10\ \text{K}}}$.

Izoterm nem lehet, mert akkor $\Delta E_b = 0$ lenne.

10.107. Állandó mennyiségű oxigénnel végezzük el az ábrán látható körfolyamatot! Töltsük ki a grafikon segítségével a következő táblázatot!

(Az oxigén állandó nyomáson vett fajhője $920 \frac{J}{kg \cdot K}$, állandó térfogaton vett fajhője: $650 \frac{J}{kg \cdot K}$.)



	p	V	T	Δp	ΔT	ΔV	W	Q	U
1.									
2.									
3.									
4.									
1→2									
2→3									
3→4									
4→1									

Megoldás:

10.107. $V_1 = V_4 = 3 \cdot 10^{-3}$ m^3; $V_2 = V_3 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_1 = p_2 = 8 \cdot 10^5$ Pa; $p_3 = p_4 = 6 \cdot 10^5$ Pa; $M = 0{,}032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $c_v = 650 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $c_p = 920 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$. $T_1 = 300$ K; $m = 0{,}0308$ kg.

1–2: izobár: $T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = 450$ K; $\Delta T = 150$ K; $\Delta p = 0$; $\Delta V = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $W = -p \cdot \Delta V = -1200$ J; $Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T = 4250{,}4$ J; $\Delta E_b = Q + W = 3050{,}4$ J.

2–3: izochor: $T_3 = \frac{p_3}{p_2} \cdot T_2 = 337{,}5$ K; $\Delta T = -112{,}5$ K; $\Delta V = 0$. $W = 0$; $\Delta p = -2 \cdot 10^5$ Pa; $Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T = -2252{,}25$ J; $\Delta E_b = Q = -2252{,}25$ J.

	p 10^5 Pa	V dm^3	T K	p 10^5 Pa	T K	V dm^3	W J	Q J	$\Delta U = \Delta E$ J
1.	8	3	300						
2.	8	4,4	450						
3.	6	4,5	337,5						
4.	6	3	225						
1–2				0	150	1,5	−1200	4250	3050
2–3				−2	−112	0	0	−2252	−2252
3–4				0	225	−1,5	900	−3188	−2288
4–1				2	75	0	0	1501	1501

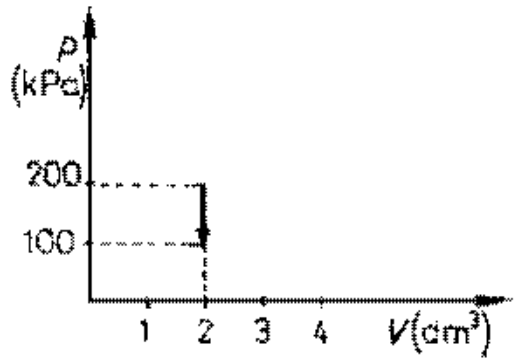
3–4: izobár: $T_4 = \frac{V_4}{V_3} \cdot T_3 = 225$ K; $\Delta T = -112{,}5$ K; $\Delta p = 0$; $\Delta V = -1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $W = -p \cdot \Delta V = 900$ J.
$Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T = -3187{,}8$ J; $\Delta E_b = Q + W = -2287{,}8$ J.

4–1: izochor: $\Delta V = 0$; $W = 0$; $\Delta T = 75$ K; $\Delta p = 2 \cdot 10^5$ Pa; $Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T = 1501{,}5$ J; $\Delta E_b = Q_v = 1501{,}5$ J.

10.108. A grafikon 5 mol hélium állapotváltozását mutatja.

a) Mekkora a hőmérséklete a kiindulási és a végállapotban?

b) Mennyivel változott meg a gáz belső energiája a folyamat során?



Megoldás:

10.108. $n = 5$ mol; He; $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3; $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa; $p_2 = 10^5$ Pa.

a) Az állapotváltozás izochor.

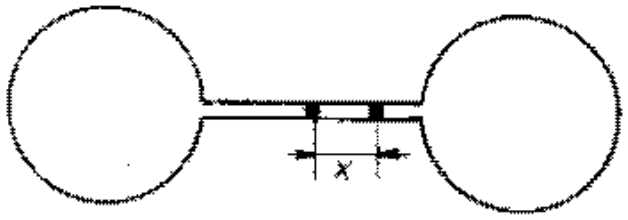
Az állapotegyenletből: $\underline{\underline{T_1}} = \dfrac{p_1 \cdot V_1}{n \cdot R} = \underline{\underline{9{,}63 \text{ K}}}$.

A gáztörvényből: $\underline{\underline{T_2}} = \dfrac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = \underline{\underline{4{,}81 \text{ K}}}$.

b) $\underline{\underline{\Delta E_b}} = \dfrac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \underline{\underline{-300 \text{ J}}}$.

A feladat a meglepően alacsony hőmérsékletek ellenére valós, mert a hélium a feladatban szereplő nyomásokon és hőmérsékleteken gázállapotú.

10.109. Két, azonos térfogatú, 0 °C-os gázt tartalmazó ballont 0,5 mm-es átmérőjű vizszintes csővel kötöttünk össze. A vizszintes cső közepén higanycsepp választja el az edényeket. Az elválasztott részek térfogata 200 cm³. Az egyik edényt 2 °C-kal felmelegítjük, a másikat ugyanennyivel lehűtjük.



Mennyivel mozdul el a higanycsepp?

Megoldás:

10.109. $V_1 = V_2 = V = 200\ \text{cm}^3$; $V_1' = V + A \cdot x$; $V_2' = V - A \cdot x$; $2r = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}$; $T_1 = T_2 = T = 273\ \text{K}$; $T_1' = 275\ \text{K}$; $T_2' = 271\ \text{K}$; $p_1 = p_2 = p$; $p_1' = p_2' = p'$; $A = r^2 \cdot \pi = 1{,}96 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}^2$.
Mindkét oldali állapotváltozásra felírható a gáztörvény:

$$\frac{p' \cdot (V + A \cdot x)}{T_1'} = \frac{p \cdot V}{T} \text{ és } \frac{p' \cdot (V - A \cdot x)}{T_2'} = \frac{p \cdot V}{T}, \text{ amiből}$$

$$\frac{p' \cdot (V + A \cdot x)}{T_1'} = \frac{p' \cdot (V - A \cdot x)}{T_2'},$$

és így $x = \dfrac{V \cdot (T_1' - T_2')}{A \cdot (T_1' + T_2')} = \underline{\underline{748\ \text{cm}}}$.

10.110. Lehetséges-e, hogy egy gáz a környezetétől hőt nem vett fel, és belsőenergiája mégis 800 J-lal növekedett?
Milyen folyamattal valósítható meg ez az állapotváltozás?

Megoldás:

10.110. Lehetséges adiabatikus állapotváltozásnál, ha a gázt összenyomjuk.

10.111. Egy 100 cm^2 keresztmetszetű, függőleges helyzetű hengerben 12 °C-os levegő van, melynek nyomása 101 kPa. A hengert az aljától mért 60 cm magasságban elhanyagolható tömegű és könnyen mozgó dugattyú zárja.

a) Mennyire kell felmelegítenünk a levegőt, hogy a dugattyúra helyezett 10 kg tömegű terhet az eredeti magasságban tartsa?

b) Mennyi energiát kell közölnünk a gázzal a felmelegítésekor?

Megoldás:

10.111. $A = 10^{-2}$ m^2; $h = 0{,}6$ m; $T = 285$ K; $p = p_k = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa; $M = 10$ kg; $V_1 = V$.

a) Izochor állapotváltozás; $p_1 = p + \dfrac{M \cdot g}{A}$, $\dfrac{p_1}{p} = \dfrac{T_1}{T}$, $T_1 = 313{,}2$ K, $\Delta T = 28{,}2$ K.

b) A feladat két lépésben oldható meg:

1. Ráteszem a terhet, és biztosítom, hogy egyenletesen és lassan süllyedjen: izoterm állapotváltozás,

$$V' \cdot \left(p_k + \frac{M \cdot g}{A}\right) = V \cdot p_k; \qquad V' = 5{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A dugattyú $x = \dfrac{V - V'}{A} = 5{,}4$ cm-t süllyed.

2. Állandó nyomáson melegítem a gázt, míg az eredeti térfogatot el nem éri. A hőmérsékletváltozás *a)* szerint 28,2 K.

$Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T$, $c_p = 996{,}5 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $\varrho_0 = 1{,}29 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (táblázatból); $\varrho = \dfrac{\varrho_0 \cdot T_0}{T} = 1{,}24 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $m = \varrho \cdot V = 7{,}44 \cdot 10^{-3}$ kg.

$Q_p = 209$ J.

10.112. Könnyen mozgó dugattyúval elzárt, környezetétől tökéletesen hőszigetelt hengerben lévő, 5 mol 25 °C hőmérsékletű héliumgázt 18 kJ munkával összenyomunk.
Mekkora lesz a gáz hőmérséklete az állapotváltozás végén?

Megoldás:

10.112. $n = 5$ mol; $T = 298$ K; $W = 18$ kJ.

Adiabatikus állapotváltozás: $\Delta E_b = W$ és $\Delta E_b = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot \Delta T$; $\Delta T = \frac{2 \cdot \Delta E_b}{3 \cdot n \cdot R} = 289$ K. $\underline{\underline{T_2 = 587 \text{ K}}}$.

10.113. Könnyen mozgó, elhanyagolható tömegű, 100 cm² keresztmetszetű dugattyúval hengerben elzárt, 27 °C-os, 1 dm³ térfogatú, 100 kPa nyomású, ideális gázzal 250 J hőt közlünk. A gáz izobár körülmények között 2 dm³ térfogatra tágul.

a) Mekkora erő hatott a dugattyúra a folyamat közben?
b) Mekkora a gáz hőmérséklete az új egyensúlyi állapotban?
c) Mennyivel változott meg a gáz belső energiája?

Megoldás:

10.113. $A = 10^{-2}$ m²; $V_1 = 10^{-3}$ m³; $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m³; $T_1 = 300$ K; $p_2 = p$; $p = 10^5$ Pa; $Q = 250$ J.

a) A dugattyúra ható erő: $\underline{\underline{F}} = p \cdot A = \underline{\underline{10^3 \text{ N}}}$.

b) Izobár állapotváltozás: $\underline{\underline{T_2}} = \dfrac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \underline{\underline{600 \text{ K}}}$.

c) A belső energia változása: $\underline{\underline{\Delta E_b}} = Q - p \cdot \Delta V = \underline{\underline{150 \text{ J}}}$.

10.114. Zárt gázmennyiség egyik állapotból úgy jut el egy másikba, hogy közben nyomása, hőmérséklete, térfogata minden pillanatban változik.

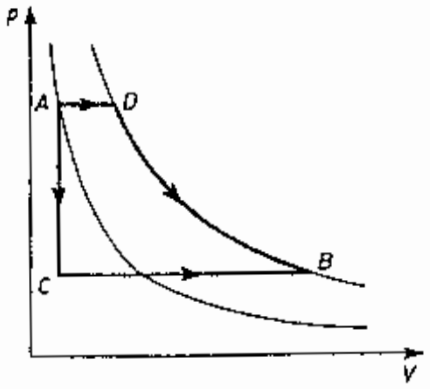
a) Hogyan lehet ugyanezt a folyamatot két, egymást követő részfolyamattal úgy előidézni, hogy az utóbbiak már izokor, izobár vagy izoterm állapotváltozások legyenek? Van-e többféle lehetőség?

b) Ábrázoljuk elgondolásunkat vázlatosan p–V diagramon!

c) Könnyen mozgó dugattyúval hengerbe zárt gázzal, hogyan valósíthatók meg ténylegesen is az elgondolt folyamatok?

Megoldás:

10.114. Több lehetőség is van. Pl. kettő az ábrán:



1. AC izochor + CB izobár;

2. AD izobár + DB izoterm.

Gyakorlati megvalósításuk:

1. AC: rögzített dugattyú mellett hűtöm a gázt, míg eléri a p_B nyomást.

CB: állandó nyomáson melegítem, míg eléri a T_B hőmérsékletet.

2. AD: állandó nyomáson melegítem, míg eléri a T_B hőmérsékletet.

DB: lassan hagyom tágulni, hogy hőmérséklete ne változzon, míg nyomása p_B-re csökken.

10.115. Egy gáztartályban 2 kg tömegű, 1 MPa nyomású gáz van. Mennyi gázt engedtünk ki a tartályból, ha állandó hőmérsékleten a visszamaradt gáz nyomása 0,25 MPa-ra csökkent?

Megoldás:

10.115. $m_1 = 2$ kg; $p_1 = 10^6$ Pa; $p_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ Pa; $T_1 = T_2$.

A gáztörvény általános alakjából: $\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2}$ és $m_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot m_1 = 0{,}5$ kg.

Tehát a kiengedett gáz tömege: $m_1 - m_2 = \underline{1{,}5 \text{ kg}}$.

$m = 1{,}5$ kg.

10.116. Mekkora a neongáz atomjainak átlagos sebessége 0 °C-on?

$$\left(M_{\text{neon}} = 20\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}.\right)$$

Megoldás:

10.116. Az ideális gáz belső energiája a gázmolekulák mozgási energiájából származik. Az m tömegű egyatomos ideális gázra:

$$\frac{1}{2}m \cdot \overline{v}^2 = \frac{3}{2}\frac{m}{M} \cdot R \cdot T \qquad \overline{v}^2 = \frac{3 \cdot R \cdot T}{M}.$$

Az összefüggésben szereplő $\overline{v}^2$ a gázmolekulák pillanatnyi sebességnégyzeteinek átlaga:

$$\overline{v}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}.$$

Ha feltételezzük, hogy az adott hőmérsékleten minden molekula azonos sebességgel mozog, akkor

$$\sqrt{\overline{v}^2} = \overline{v}.$$

A feladat adataival: $T = 273\ \text{K}$; $M_{\text{neon}} = 0{,}02\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$:

$$\overline{v}^2 = 340\,294{,}5\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \qquad \underline{\overline{v} = 583{,}35\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

10.117. Egy gáztartályban 300 m^3 térfogatú, -10 °C hőmérsékletű világítógáz van.
Hány %-kal változik meg a gáz nyomása, ha hőmérséklete 30 °C-ra emelkedik, és közben térfogata 325 m^3-re nő?

Megoldás:

10.117. $V_1 = 300\ m^3$; $V_2 = 325\ m^3$; $T_1 = 263\ K$; $T_2 = 303\ K$.
Az egyesített gáztörvényből:

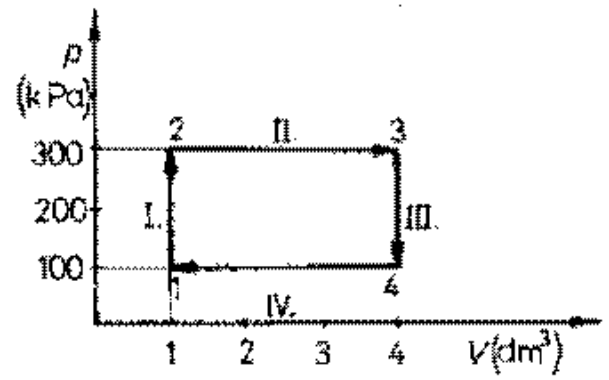
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = 1{,}063.$$

A gáz nyomása 6,3%-kal nő.

10.118. Könnyen mozgatható (és szükség esetén rögzíthető) dugattyúval ellátott hengerben 1 dm³ térfogatú, 100 kPa nyomású, 273 K hőmérsékletű neongáz van. A gáz állapota az ábrán feltüntetett folyamatok szerint változik.

a) Mennyi a gáz hőmérséklete a 2., a 3., valamint a 4. állapotban?

b) Mennyi a gáz belső energiája a sorszámmal jelölt állapotokban?



c) Hogyan változik a gáz belső energiája az egyes részfolyamatokban?

Megoldás:

10.118. $V_1 = 10^{-3}$ m³; $p_1 = 10^5$ Pa; $T_1 = 273$ K; neon.

a) I. izochor, $V_2 = V_1$; $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Pa; $T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = 819$ K.

II. izobár, $p_3 = p_2$; $V_3 = 4 \cdot 10^{-3}$ m³; $T_3 = \frac{V_3}{V_2} \cdot T_2 = 3276$ K.

III. izochor, $V_4 = V_3$; $p_4 = 10^5$ Pa; $T_4 = \frac{p_4}{p_3} \cdot T_3 = 1092$ K.

IV. izobár, $p_1 = p_4$; $V_1 = 10^{-3}$ m³; $T_1 = 273$ K.

b) A belső energia meghatározható a nyomás és a térfogat segítségével: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ és $E_b = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$, így $E_b = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V$.

$E_1 = 150$ J; $E_2 = 450$ J; $E_3 = 1800$ J; $E_4 = 600$ J.

c) A belső energia változása a részfolyamatokban:

I.: nő, $\Delta E_b = 300$ J;

II.: nő, $\Delta E_b = 1350$ J;

III.: csökken, $\Delta E_b = -1200$ J;

IV.: csökken, $\Delta E_b = -450$ J.

$\sum \Delta U = 0$.

10.119. Dugattyúval ellátott hengerben kezdetben 1 dm^3 térfogatú, 20 °C hőmérsékletű, 96 kPa nyomású gáz van.
Mekkora erővel kell hatni az 1 dm^2 felületű dugattyúra, hogy nyugalomban maradjon, ha a gázt 100 °C-ra melegítjük és a külső légnyomás 101 kPa?

Megoldás:

10.119. $V_1 = 10^{-3}$ m^3; $V_2 = V_1$; $T_1 = 293$ K; $T_2 = 373$ K; $p_1 = 9{,}6 \cdot 10^4$ Pa; $p_k = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa; $A = 10^{-2}$ m^2.
Kezdetben $p_1 < p_k$, ezért a dugattyúra kifelé kell hatni: $\underline{\underline{F_1}} = A \cdot (p_k - p_1) = \underline{\underline{50\ \text{N}}}$.

A melegítés során nő a nyomás, izochor állapotváltozás: $p_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot p_1 = 1{,}22 \cdot 10^5$ Pa.
A melegítés végén $\underline{\underline{F_2}} = A \cdot (p_2 - p_k) = \underline{\underline{210\ \text{N}}}$ szükséges.
Kezdetben kifelé $F_1 = 50$ N, végén befelé $F_2 = 210$ N.

10.120. Alul zárt, 100 cm^2 keresztmetszetű, függőleges hengerben 0 °C-os oxigén van, melynek nyomása 10^5 Pa. A hengert 40 cm magasságban súlytalan dugattyú zárja el. A dugattyúra 20 kg tömegű terhet helyezünk. $\left(c_p = 920 \frac{J}{kg \cdot K};\ \varrho = 1{,}4 \frac{kg}{m^3}.\right)$

a) Mekkora hőmérsékletre kell melegítenünk a 0 °C-os gázt, hogy a dugattyú a terhet 12 cm-rel feljebb emelje?

b) Mennyi hőmennyiséget kell közölnünk melegítés közben a rendszerrel?

c) A közölt hőmennyiség hányadrésze fordítódik a mechanikai munka végzésére?

Megoldás:

10.120. $A = 10^{-2}$ m^2; $h_1 = 0{,}4$ m; $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3; $T_1 = 273$ K; $p_1 = 10^5$ Pa $= p_k$; $c_p = 920 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $\varrho = 1{,}4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $m^* = 20$ kg.

a) A feladat szerint a melegítés után a terhelt dugattyúnak az eredeti állapothoz képest 12 cm-rel magasabban kell lennie. $h_2 = 0{,}52$ m; $V_2 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$ m^3.

A kialakult új nyomás: $p_2 = p_k + \frac{m^* \cdot g}{A} = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa.

A gáztörvényből $\underline{\underline{T_2}} = \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} \cdot T_1 = \underline{\underline{425{,}9 \text{ K}}}$.

b) A tágulás közben felvett hőmennyiség: $\underline{\underline{Q_p}} = c_p \cdot m \cdot \Delta T =$ $= \underline{\underline{787{,}7 \text{ J}}}$.

$m = \varrho \cdot V_1 = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg és $\Delta T = T_2 - T_1 = 152{,}9$ K.

c) A teher a ráhelyezéskor lenyomja a dugattyút. Feltételezve, hogy eközben a hőmérséklet nem változik, alsó állásban a gáz térfogata (V'):

$$\left(p_k + \frac{m^* \cdot g}{A}\right) \cdot V' = p_1 \cdot V_1; \qquad V' = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_k + \frac{m^* \cdot g}{A}} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A melegítés hatására bekövetkezett térfogatváltozás: $\Delta V = V_2 - V' =$ $= 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ m^3, a gáz által végzett munka $W = p_2 \cdot (V_2 - V') = 228$ J. Ez a felvett hőmennyiség 30%-a, mert $\left|\frac{W}{Q}\right| = \underline{\underline{0{,}289}}$.

10.121. Egy $m = 15$ kg gázzal frissen töltött palackban 27 °C-on a nyomás $1{,}5 \cdot 10^7$ Pa.
Mennyi gáz szivárgott el szállítás közben, ha a rendeltetési helyen a nyomása 7 °C-on 10^7 Pa?

Megoldás:

10.121. $m_1 = 15$ kg; $T_1 = 300$ K; $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^7$ Pa; $T_2 = 280$ K; $p_2 = 10^7$ Pa; $V_1 = V_2$.

Az egyesített gáztörvényből:

$$m_2 = \frac{p_2 \cdot T_1 \cdot m_1}{p_1 \cdot T_2} = 10{,}7 \text{ kg}, \qquad \underline{\Delta m = 4{,}3 \text{ kg}}.$$

10.122. Mennyivel nagyobb egy 300 m^3-es tanteremben lévő levegő belső energiája 20 °C-on, mint 7 °C-on? (A nyomás mindkét esetben 10^5 Pa.)

Megoldás:

10.122. Ha egy teremben melegszik a levegő, a nyomás csak úgy maradhat állandó, ha a levegő egy része távozik az adott térfogatból. A gáztörvény szerint $\frac{p \cdot V}{m \cdot T}$ = állandó. Mivel itt p és V állandó, az $m \cdot T$ szorzatnak is állandónak kell lenni. A belső energia $E_b = n \cdot R \cdot T$, $E_b \sim n \cdot T$, ezért a belső energia nem változik.

10.123. Egy függőleges helyzetben rögzített, cső alakú gáztartó edény felül súrlódásmentesen mozgatható dugattyúval záródik. A dugattyúhoz függőleges helyzetű ideális rugót erősítünk, melynek másik végét a mennyezethez rögzítjük. Kezdetben a dugattyút úgy tartjuk, hogy a rugó feszítetlen legyen. Ezután a dugattyút igen lassan engedjük lefelé mozogni, mígnem egyensúlyi helyzetbe kerül. Eközben hűtéssel gondoskodunk arról, hogy a csőben lévő, kezdetben 0 °C hőmérsékletű levegő nyomása a külső, 10^5 Pa nyomásnál kisebb és állandó maradjon.

a) Mennyivel változik ezalatt a gáz hőmérséklete?

b) A gázon végzett munka hányadrészét szolgáltatja a leadott hőnek?

Számadatok:

a gáztartó edény keresztmetszete: $A = 10\ \text{cm}^2$,

a cső hossza: $a = 2\ \text{m}$,

a dugattyú tömege: $m = 0{,}8\ \text{kg}$,

a rugóállandó: $D = 150\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

a normál állapotú levegő sűrűsége: $\varrho_0 = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,

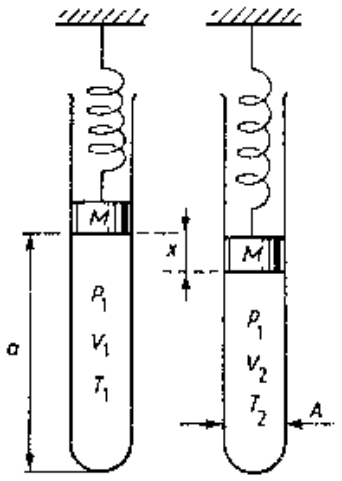
a fajhők: $c_p = 1000\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$,

$c_v = 700\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$,

a bezárt levegő nyomása: $p = 0{,}7 \cdot 10^5\ \text{Pa}$.

Megoldás:

10.123. $p_1 = 7 \cdot 10^4$ Pa; $p_k = 10^5$ Pa; $T_1 = 273$ K; $A = 10^{-3}$ m^2; $a = 2$ m; $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3; $M = 0{,}8$ kg; $D = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $\varrho_0 = 1{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $c_p = 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.



a) Egyensúlyi helyzetben (a feltétel szerint a nyomás marad p_1):

$\frac{M \cdot g - D \cdot x}{A} + p_k = p_1$, ebből $x = 0{,}253$ m.

$V_2 = A \cdot (a - x) = 1{,}747 \cdot 10^{-3}$ m^3;

$T_2 = \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = \frac{A \cdot (a-x)}{A \cdot a} \cdot T_1 = \frac{a-x}{a} \cdot T_1$;

$T_2 = 238{,}5$ K; $\underline{\underline{\Delta T = -34{,}5 \text{ K}}}$.

b) A gázon végzett munka: $W = -p \cdot \Delta V = 17{,}7$ J.

A leadott hőmennyiség: $Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T = -62{,}1$ J.

$m = V_1 \cdot \varrho_1$, ahol $\varrho_1 = \frac{p_1 \cdot T_0}{p_0 \cdot T_1} \cdot \varrho_0 = 0{,}91 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (lásd 10.50. feladat).

$m = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg. $\left|\frac{W}{Q}\right| = 0{,}285$. A gázon végzett munka a leadott hőmennyiségnek 28,5%-a.

10.124. Oxigéngázt melegítünk állandó nyomáson.
A gázzal közölt energia hány %-a növeli a gáz belső energiáját?

$$\left(c_p = 920 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}},\ c_v = 650 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}.\right)$$

Megoldás:

10.124. $c_p = 920 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $c_v = 650 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$.

A belső energia változása egyenlő az izochor állapotváltozás során felvett hőmennyiséggel: $\Delta E_b = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$.

Az állandó nyomáson felvett hőmennyiség: $Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T$.

Ebből következik, hogy $\frac{\Delta E_b}{Q_p} = \frac{Q_v}{Q_p} = \frac{c_v}{c_p} = \underline{\underline{0{,}707}}$, tehát a felvett energia 70,7%-a növeli a belső energiát.

10.125. Oxigéngázt melegítünk állandó nyomáson.
A gázzal közölt energia hány %-a fordítódik a tágulási munka végzésére?

$$\left(c_p = 920\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}},\ c_v = 650\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}.\right)$$

Megoldás:

10.125. $c_p = 920\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$; $c_v = 650\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$.

A tágulási munka $W = (c_v - c_p)\cdot m\cdot \Delta T$ (lásd 10.28. feladat).

A gázzal közölt energia $Q_p = C_p\cdot m\cdot \Delta T$.

A kettő aránya: $\left|\frac{W}{Q_p}\right| = \left|\frac{c_v - c_p}{c_p}\right| = 0{,}293.$

Tehát a felvett energia 29,3%-a fordítódik a tágulási munkára.

10.126. Egy dugattyúval elzárt hengerben 4 l térfogatú, 20 °C hőmérsékletű, 10^5 Pa nyomású neongáz van. A dugattyú hirtelen lenyomásával a gázt adiabatikusan összenyomjuk, közben 16,5 J munkát végzünk.
Mekkora az összenyomott gáz hőmérséklete?
(A neon sűrűsége 0 °C-on, 10^5 Pa nyomáson $0{,}9\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, és az állandó térfogaton mért fajhője $c_v = 620\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)

Megoldás:

10.126. $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$; $T_1 = 293\ \text{K}$; $p_1 = 10^5\ \text{Pa}$; $W = 16{,}5\ \text{J}$; $\varrho_0 = 0{,}9\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $c_v = 620\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $T_0 = 273\ \text{K}$.

A gáz tömege $V_0 \cdot \varrho_0 = 3{,}35 \cdot 10^{-3}$ kg, mert $p_0 = p_1$ miatt $V_0 = \frac{T_0}{T_1} \cdot V_1 = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$.

Az adiabatikus állapotváltozásnál $W = \Delta E_b = Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta T$, amiből $\Delta T = \frac{W}{c_v \cdot m} = 7{,}9\ \text{K}$, tehát $\underline{\underline{T_2 = 300{,}9\ \text{K}}}$.

11.1. Melyik állapotjelző az alábbi fizikai mennyiségek közül?

A) Energia,
B) hőmennyiség,
C) hőmérséklet,
D) munka.

Megoldás:

11.1. Állapotjelző a belső energia (*A*) és a hőmérséklet (*C*).

11.2. *A következő állítások közül egy a* HELYES. *Melyik?*

A) A lineáris hőtágulási együttható az 1 K hőmérséklet-változásra bekövetkező hosszváltozást mutatja meg.

B) A lineáris hőtágulási együttható az 1 K hőmérséklet-változásra bekövetkező relatív hosszváltozást mutatja meg.

C) A lineáris hőtágulási együttható a test 1 m-rel való hosszváltozásához szükséges hőmérséklet-növekedést mutatja meg.

D) A lineáris hőtágulási együttható a test hőmérséklet-változás hatására bekövetkező hosszváltozását mutatja meg.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

11.2. Helyes a *B* állítás: $\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T} \frac{1}{\mathrm{K}}$, ahol $\frac{\Delta l}{l}$ a relatív hosszváltozás.

11.3. Megváltozik-e a mikroszkóp alatt látható Brown-mozgás élénksége, ha a folyadék melegszik?
Ha igen, miért?

Megoldás:

11.3. Igen! Brown mozgás pl. a folyadékban lévő festékszemcsék mozgása, amit az állandó rendezetlen mozgásban lévő folyadékmolekulák ütközése vált ki.

A melegítés hatására nő a folyadékmolekulák kinetikus energiája, a gyorsabban mozgó molekulák gyakrabban ütköznek a festékszemcsékbe, ezért élénkül a Brown mozgás.

11.4. *Válasszuk ki az egyetlen* HELYES *állítást!*

Egy fémhuzal hosszát két módon változtatjuk meg:

1. nyújtással,
2. melegítéssel.

A hosszváltozás mindkét esetben 5 mm. Melyik esetben nagyobb a fémhuzal belső energiájának megváltozása?

A) Az első esetben.
B) A második esetben.
C) Mindkét esetben ugyanakkora.
D) Nem dönthető el egyértelműen.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

11.4. A belső energia megváltozása a második esetben tehát akkor nagyobb, ha a hosszváltozás melegítés hatására megy végbe. Ebben az esetben a felvett hőmennyiség nagyobb része az atomok kinetikus energiájának növelésére fordítódik, míg az első esetben, mechanikai nyújtáskor csak a kölcsönös potenciális energia növekszik, miközben az atomok távolsága nő.

11.5. A pontos hőmérsékletmérés egyik feltétele a hőmérő méretének helyes megválasztása.
Miért kapunk nagyon hibás eredményt, ha kis tömegű test hőmérsékletét nagy tömegű hőmérővel mérjük?

Megoldás:

11.5. A hőmérő a vizsgált anyag és a hőmérő közös hőmérsékletét mutatja. Méréskor a két test hőmérséklete kiegyenlítődik. Ha a vizsgált anyag mennyiségéhez képest nem elhanyagolhatóan kicsi a hőmérő tömege, a hőmérséklet kiegyenlítődése közben jelentősen megváltozik a vizsgált test hőmérséklete, így hamis eredményt kapunk.

11.6. A hőmérsékletméréssel kapcsolatban mire figyelmeztet ez a kijelentés: „A hőmérő a saját hőmérsékletét mutatja"?

Megoldás:

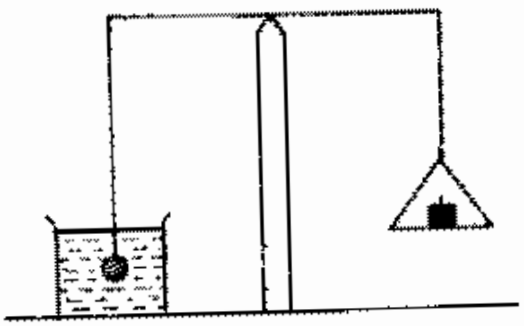
11.6. Ha a hőmérő kapcsolata nem jó a környezetével, akkor a leolvasott hőmérséklet eltérő lehet. Ilyen eset előfordulhat pl. akkor, ha a hőmérő nem merül bele eléggé a vizsgált anyagba. Hibát okozhat, ha a mérés ideje nem elég a hőmérséklet kiegyenlítődésére vagy a hőmérőt zavaró sugárzás (pl. napfény) éri.

11.7. Mi a diffúzió?
Mi a szerepe a diffúziónak a különböző életfolyamatokban?

Megoldás:

11.7. A diffúzió a gáz-, illetve folyadékmolekulák külső beavatkozás nélküli keveredése. Ennek oka a molekulák állandó, rendezetlen mozgása. A hártyán, pl. a sejthártyán át történő diffúzió az ozmózis, amely a sejtek anyagcseréjét és vízfelvételét lehetővé teszi.

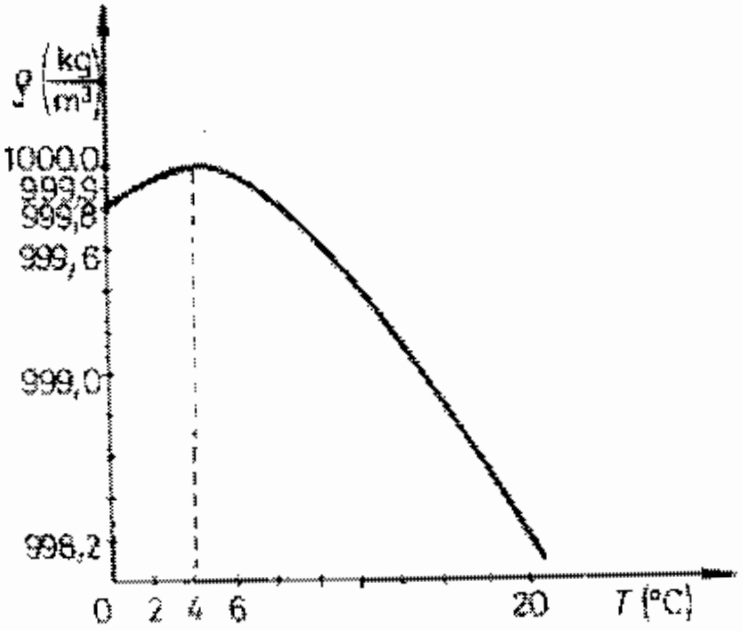
11.8. A szobahőmérsékleten egyensúlyban lévő mérleg egyik karján lógó cinkgolyó teljesen vízbe merül.
Hogyan változik meg a mérleg egyensúlya, ha a vizet melegítjük? Miért?



Megoldás:

11.8. A cink golyó súlyának és a rá ható felhajtóerőnek a különbsége tart egyensúlyt a mérleg másik serpenyőjében lévő súllyal.
A melegítés hatására mind a cink golyó, mind a víz térfogata s ezzel sűrűsége megváltozik. A táblázatból leolvasható, hogy a víz térfogati tágulási együtthatója nagyobb, mint a cinkké, így a víz sűrűsége nagyobb mértékben csökken, a golyó által kiszorított víz súlya kisebb lesz, mint melegítés előtt, ezért a mérleg egyensúlya megbomlik, a golyó oldala lebillen.

11.9. A grafikon a víz sűrűségét ábrázolja a hőmérséklet függvényében $0\ °C < T < 20\ °C$ hőmérsékleti tartományban.



a) A víznek milyen sajátos tulajdonságára utalnak a grafikonról leolvasható adatok?

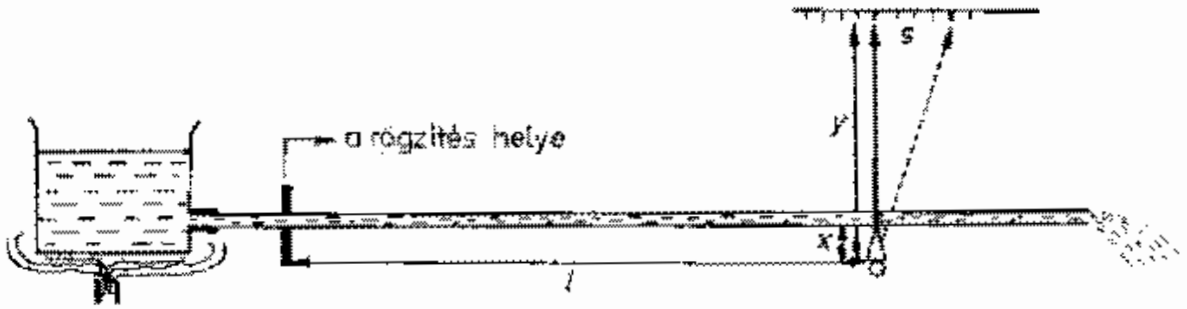
b) Milyen szerepe van ennek a tulajdonságnak a természetben?

Megoldás:

11.9. **a)** A grafikonról leolvasható, hogy a $0\ °C < t < 20\ °C$ tartományban a víz sűrűsége 4 °C-nál a legnagyobb, ellentétben a „normális" folyadékokkal, amelyek sűrűsége az olvadásponton túl többékevésbé egyenletesen csökken.

b) Ez okozza pl. azt, hogy a folyók, tavak vize soha nem fagy be fenékig. Ez teszi lehetővé a vízben élő állatok áttelelését. A sűrűbb – 4 °C körüli hőmérsékletű – vízrétegek lesüllyednek, a felszín befagy, a jégpáncél a további lehűlést megakadályozza.

11.10. Alumínium cső egyik végét rögzítjük, a csőben folyamatosan meleg vizet áramoltatunk. A csövet a rögzített végtől $l = 2$ m távolságban $x = 2$ cm magas ékre fektetjük, amely vízszintes tengely körül elfordulhat. Az ékhez mutatót rögzítünk, amely az ékkel együtt fordul. A mutató hossza $y = 40$ cm. A mutató és az ék 20 °C hőmérsékleten függőlegesen áll.



Mekkora a csőben áramló víz hőmérséklete, ha a mutató végpontja $s = 4{,}8$ cm-t tér ki?

(Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.)

Megoldás:

11.10. $l = 2$ m; $x = 2$ cm; $y = 40$ cm; $t_0 = 20$ °C; $s = 4{,}8$ cm; $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.

A cső a melegítés hatására megnyúlik, az ék elmozdulása egyenlő a Δl megnyúlással. A mutató kinagyítja ezt a változást. Az ábrán látható hasonló háromszögekből: $\frac{\Delta l}{x} = \frac{s}{y}$, s innen $\Delta l = 0{,}24$ cm.

A lineáris hőtágulási együttható: $\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T}$, ahonnan $\Delta T = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l} =$ $= 50$ ° C. A víz hőmérséklete tehát 70 ° C.

11.11. Egy 500 W teljesítményű villanyfúróval 450 g tömegű rézlemezt munkálunk meg. A lemez 0,5 perc alatt 20 °C-ról 72 °C-ra melegszik fel.
Mekkora a környezetnek átadott hő?
$\left(\text{A réz fajhője } 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.11. $P = 500$ W; $m = 0{,}45$ kg; $t = 30$ s; $\Delta T = 52$ K; $c = 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.
A fúró mechanikai energiájának egy része a rézlemezt, másik része a környezetet melegíti.
$P \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T + Q$; $\underline{\underline{Q = 5991 \text{ J}}}$.

11.12. Az 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó, 600 kg tömegű gépkocsi lefékez és megáll.

a) Mekkora a fékezés közben az alkatrészek és a környezet által felvett hőmennyiség?

b) Mennyivel emelkedik az 5 kg tömegű acél fékberendezés hőmérséklete, ha a hőmennyiség 60%-a a fék belső energiáját növelte?

$\left(\text{Az acél fajhője } 470\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.12. $v_0 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 0$; $m = 600$ kg; $m_f = 5$ kg; $c = 470\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $\eta = 60\%$.

a) $\underline{\underline{Q = E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = 67\,500\ \text{J}}}$.

b) $c \cdot m_{\text{f}} \cdot \Delta T = \eta \cdot Q$; $\underline{\underline{\Delta T = \frac{\eta \cdot Q}{c \cdot m_f} = 17{,}23\ \text{K}}}$.

11.13. Mekkora magasságból esett szabadon az a 200 g tömegű ólomgolyó, amely a hőszigetelő lapon lefékeződve 4 °C-kal melegedett fel?
A mechanikai energia 20%-a a környezetet melegítette. Az ólom fajhője $130 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$, $g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Megoldás:

11.13. $m = 0{,}2\ \mathrm{kg}$; $c = 130 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$; $T = 4\ \mathrm{K}$; $\eta = 0{,}8$.

$Q = \eta \cdot E_{\mathrm{h}}$; $c \cdot m \cdot \Delta T = 0{,}8 \cdot m \cdot g \cdot h$; $\underline{h = 65\ \mathrm{m}}$.

11.14. Egy m tömegű, c fajhőjű test h magasságból szabadon esik egy hőszigetelő lapra.

Mekkora lenne a leeső test hőmérséklet-változása, ha a mechanikai energia teljes egészében a test belső energiáját növelné?

$\left(\text{Legyen } c = 130 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}},\ h = 50 \text{ m};\ g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$

Megoldás:

11.14. $c \cdot m \cdot \Delta T = m \cdot g \cdot h;\ \ \Delta T = \frac{g \cdot h}{c}$.

Ha $c = 130 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ és $h = 50$ m, akkor $\underline{\underline{\Delta T = 3{,}85 \text{ K}}}$.

11.15. Mekkora hőmérsékletre kell felmelegíteni a 0 °C hőmérsékletű rézhuzalt, hogy hossza 0,1%-kal megváltozzon?

$\left(\text{A réz lineáris hőtágulási együtthatója } 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.15. $t_0 = 0\ ^\circ\text{C};\ \alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}};\ \frac{\Delta l}{l_0} = 10^{-3}.$

$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta T};\ \Delta T = 62{,}5\ \text{K};\ \underline{\underline{t = 62{,}5\ ^\circ\text{C}}}.$

A rézhuzalt 62,5 °C-ra kell melegíteni.

11.16. Egy 50 km hosszú távvezetéket 10 °C-on szerelnek fel. Milyen hosszú lesz az alumíniumból készült vezeték + 30 °C és mekkora lesz − 20 °C hőmérsékleten?

$\left(\text{Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője } 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.16. $t_1 = 10\ ^\circ\text{C}$; $l_1 = 5 \cdot 10^4$ m; $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$; $t_2 = 30\ ^\circ\text{C}$; $t_3 = -20\ ^\circ\text{C}$; $\Delta t_2 = 20\ ^\circ\text{C}$; $\Delta t_3 = -30\ ^\circ\text{C}$.

$\Delta l_2 = l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t_2 = 24$ m; $\underline{\underline{l_2 = 50\,024\ \text{m}}}$.

$\Delta l_3 = l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t_3 = -36$ m; $\underline{\underline{l_3 = 49\,964\ \text{m}}}$.

11.17. Az alumínium sűrűsége 0 °C hőmérsékleten $2{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.
Mekkora a sűrűsége 300 °C-on?

(Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$.)

Megoldás:

11.17. $t_0 = 0\ ^\circ\text{C}$; $\varrho_0 = 2{,}7 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $t = 300\ ^\circ\text{C}$; $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$.

A különböző hőmérsékletekhez tartozó sűrűség-értékek közötti összefüggés: $\varrho = \frac{m}{V}$.

Mivel $m = \varrho_0 \cdot V_0$ és $V = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T)$, így $\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T} =$

$= \underline{\underline{2{,}64 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$.

11.18. A fonálinga mozgástörvényének vizsgálatához vékony acélhuzalra függesztett ingát szereltünk fel. Az inga hossza 10 °C hőmérsékleten pontosan 4 m.

a) Mekkora lesz az inga hossza 30 °C hőmérsékleten?

b) Mekkora eltérést okoz ez a változás az inga lengésidejében?

c) A stopperórával 0,01 s pontossággal mérhetünk. Figyelembe kell-e venni ilyen pontosság mellett a hőmérséklet-változást?

$\left(\text{Az acél lineáris hőtágulási tényezője } 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}},\ g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$

Megoldás:

11.18. $t_0 = 10\ ^\circ\text{C};\ l_0 = 4\ \text{m};\ \alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}};\ g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2};\ t = 30\ ^\circ\text{C}.$

a) Az inga hossza 30 °C-on:

$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{m};\ \underline{\underline{l_1 = 4{,}000\,96\ \text{m}}}.$

b) A lengésidő 10 °C-on: $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}} = 4{,}0101\ \text{s};$

30 °C-on: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 4{,}010\,58\ \text{s}.$

A lengésidő változása: $\underline{\underline{T - T_0 = 0{,}00048\ \text{s}}}.$

c) Nem kell figyelembe venni a hőmérsékletváltozást, ha 0,01 s pontossággal leolvasható stopperórával mérünk.

11.19. Milyen hosszú alumínium és rézrudat vágjunk le 0 °C-on, ha azt akarjuk, hogy a két fémrúd hosszának különbsége minden hőmérsékleten 0,1 m legyen?

(Az alumínium lineáris hőtágulási tényezője $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$, a rézé $1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.)

Megoldás:

11.19. $\alpha_{Al} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\alpha_{Cu} = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $l_{Cu} - l_{Al} = 0{,}1$ m; $t_0 = 0$ °C.

$l_{0Cu} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot \Delta T) - l_{0Al}(1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta T) = 0{,}1$ m, de a kezdeti feltétel szerint $l_{0Cu} - l_{0Al} = 0{,}1$ m.

$l_{0Cu} - l_{0Al} + \Delta T(l_{0Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{0Al} \cdot \alpha_{Al}) = 0{,}1$ m.

$0{,}1 + \Delta T \cdot (l_{0Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{0Al} \cdot \alpha_{Al}) = 0{,}1$ m.

Ez csak úgy lehet igaz minden hőmérsékleten, ha $l_{0Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{0Al} \cdot \alpha_{Al} = 0$.

$l_{0Cu} \cdot \alpha_{Cu} = l_{0Al} \cdot \alpha_{Al}$; $\frac{l_{0Cu}}{l_{0Al}} = \frac{\alpha_{Al}}{\alpha_{Cu}} = 1{,}5$.

$\underline{\underline{l_{0Al} = 0{,}2\ \mathrm{m}}}$; $\underline{\underline{l_{0Cu} = 0{,}3\ \mathrm{m}}}$.

11.20. A hidak szerelésénél figyelembe kell venni, hogy a nagy méretű fémtestek hőtágulása jelentős lehet. Az ennek következtében létrejövő deformációt úgy kerülik el, hogy a hídszerkezet egyes részei között rést hagynak.

a) Mekkora rést kell hagyni a 10 °C hőmérsékleten felszerelt, 60 m hosszú vashídon, ha maximálisan 50 °C-os nyári hőmérsékletre számíthatunk?

b) Mekkora lesz ez a rés −20 °C-on?

$\left(\text{A vas lineáris hőtágulási tényezője } 1{,}17 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.20. $t_0 = 10$ °C; $t_1 = 50$ °C; $t_2 = -20$ °C; $l_0 = 60$ m; $\alpha = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$.

a) $\Delta l_1 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T_1 = 0{,}028$ m. A rés 2,8 cm.

b) $\Delta l_2 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T_2 = -0{,}021$, vagyis a felszereléskor hagyott 2,8 cm-en túl 2,1 cm, azaz a rés 4,9 cm.

11.21. A 2 cm² keresztmetszetű, 130 °C-ra melegített acélrudat 30 °C-ra hűtjük és az összehúzódást megakadályozzuk.

a) Mekkora a rúdban a rugalmas feszítőerő?

(Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; rugalmassági modulusa $2 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.)

b) Soroljunk fel olyan gyakorlati példákat, ahol ez a jelenség károkat okozhat, illetve ahol tudatosan felhasználják!

Megoldás:

11.21. $A = 2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$; $t_0 = 130\ ^\circ\mathrm{C}$; $t = 30\ ^\circ\mathrm{C}$; $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

a) A hűtés hatására $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T = -1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m lenne. Mivel ezt az összehúzódást megakadályozzuk, a rúdban $\underline{\underline{F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 4{,}8 \cdot 10^4\ \mathrm{N}}}$ feszítőerő lép fel.

b) Pl. hordókészítéskor felmelegített abroncsokkal fogják össze a dongákat. Kárt okozhat a szabadban felszerelt vezetékek, csövek lehűlésekor.

11.22. Egy 100 cm^2 keresztmetszetű, 5 m hosszú acélrúd a melegítés során 5,5 MJ energiát vett fel.

a) Mekkora a rúd hosszváltozása?

b) Mekkora mechanikai munkával lehetne ugyanakkora hosszváltozást létrehozni az acélrúdon?

c) Magyarázzuk meg, mi az oka a két esetben felhasznált energia közötti nagy különbségnek!
(Emlékezzünk a kinetikus hőelmélettel kapcsolatban tanultakra!)

(Az acél sűrűsége 7,8 $\frac{kg}{dm^3}$; lineáris hőtágulási együtthatója $1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{K}$; fajhője 470 $\frac{J}{kg \cdot K}$; rugalmassági modulusa $2 \cdot 10^{11}\ \frac{N}{m^2}$.)

Megoldás:

11.22. $A = 10^{-2}\ m^2$; $l_0 = 5$ m; $\Delta U = 5{,}5 \cdot 10^6$ J; $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{K}$; $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$; $c = 470\ \frac{J}{kg \cdot K}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{N}{m^2}$.

a) $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$; $\Delta U = Q = c \cdot m \cdot \Delta T$; $\Delta T = \frac{Q}{c \cdot m} = 30$ K, mert $m = \varrho \cdot A \cdot l_0 = 390$ kg. $\underline{\underline{\Delta l = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ m}}$.

b) Az ugyanakkora megnyúlást létrehozó mechanikai munka: $\underline{\underline{W = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l_0} \cdot \Delta l^2 = 648\ J}}$.

c) A nyújtásnál felhasznált mechanikai energia csak a molekulák közötti potenciális energiát növeli. Melegítéskor nő a molekulák kinetikai energiája is, a felvett energia döntő többsége erre, a molekulák hőmozgásában megnyilvánuló belső energia növelésére fordítódik.

11.23. A 2 m hosszú, 4 mm² keresztmetszetű, 20 °C hőmérsékletű rézhuzalt külső erővel 0,5 cm-rel megnyújtjuk. Egy másik, azonos méretű rézhuzal hosszát úgy növeljük meg 0,5 cm-rel, hogy kellő hőfokra melegítjük.

a) Mekkora mechanikai munkát végeztünk a huzal nyújtásakor?
(A réz rugalmassági modulusa $12 \cdot 10^{10} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.)

b) Mennyi hőt kellett a felmelegítéskor közölni a rézhuzallal? (A réz fajhője $400 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$.)

c) Melyik esetben változott nagyobb mértékben a huzal belső energiája?

Megoldás:

11.23. $l_0 = 2$ m; $A = 4 \cdot 10^{-6}$ m²; $t_0 = 20$ °C; $\Delta l = 5 \cdot 10^{-3}$ m; $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{K}}$; $E = 1{,}2 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$; $c = 400 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$; $\varrho = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

a) Rugalmas nyújtásnál $\underline{\underline{W = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l_0} \cdot \Delta l^2 = 3 \text{ J}}}$.

b) Ugyanekkora $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$ megnyúláshoz szükséges hőmérsékletváltozás $\Delta T = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha} = 156{,}25$ K.
A melegítés során felvett hőmennyiség $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$, ahol $m = \varrho \cdot A \cdot l_0 = 7{,}12 \cdot 10^{-2}$ kg, így $\underline{\underline{Q = 4450 \text{ J}}}$.

c) A belső energia a melegítéskor nőtt nagyobb mértékben (lásd a 11.22. feladatot is).

11.24. Mekkora hőmennyiséget ad át környezetének egy 2 t tömegű betontömb, miközben 30 °C hőmérsékletről 10 °C-ra lehűl? $\left(\text{A beton fajhője } 879 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.24. $m = 2 \cdot 10^3$ kg; $c = 879 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $\Delta T = 20$ K.

$\underline{Q} = c \cdot m \cdot \Delta T = \underline{35,16 \cdot 10^6 \text{ J}}$.

11.25. Vörösrézből és ezüstből készült ötvözet 80 °C hőmérsékletre melegített 100 g tömegű darabját 420 cm³, 10 °C hőmérsékletű vízbe dobjuk. A közös hőmérséklet 11 °C lett! (A hőveszteségektől eltekinthetünk.)

Határozzuk meg az ötvözet százalékos összetételét!

$\left(\text{A réz fajhője } 385\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}};\ \text{az ezüst fajhője } 234\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.25. $m_1 + m_2 = 0{,}1$ kg; $t_1 = 80$ °C; $m_3 = 0{,}42$ kg; $t_3 = 10$ °C; $t = 11$ °C; $c_1 = 385\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$; $c_2 = 234\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$; $c_3 = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

$Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}}$; $m_2 = m - m_1$.

$c_1 \cdot m_1(t_1 - t) + c_2 \cdot (m - m_1)(t_1 - t) = c_3 \cdot m_3 \cdot (t - t_3)$.

Az egyenletet megoldva: $\underline{\underline{m_1}} = 14{,}3$ g; $\underline{\underline{14{,}3\%}}$; $\underline{\underline{m_2}} = 85{,}7$ g; $\underline{\underline{85{,}7\%}}$.

14,3% réz és 85,7% ezüst.

11.26. Az 1 cm sugarú, 400 °C hőmérsékletű vörösréz golyót 200 g tömegű, 20 °C hőmérsékletű vízbe tesszük.

a) Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

b) Mekkora lesz a rézgolyó átmérője?

(A réz sűrűsége 8,9 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; fajhője 385 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; lineáris hőtágulási tényezője $1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$.)

Megoldás:

11.26. $r = 10^{-2}$ m; $V_1 = 4{,}19 \cdot 10^{-6}$ m^3; $\varrho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $c_1 = 385\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $t_1 = 400$ °C; $m_2 = 0{,}2$ kg; $c_2 = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) $Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}}$. A golyó tömege: $m_1 = \varrho_1 \cdot V_1 = 3{,}73 \cdot 10^{-2}$ kg.

$c_1 \cdot m_1 (t_1 - t) = c_2 \cdot m_2 (t - t_2)$.

A közös hőmérséklet: $\underline{t} = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2} = \underline{\underline{26{,}39\ °\text{C}}}$.

b) $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$.

$d_1 = 2r = 2 \cdot 10^{-2}$ m; $\Delta d = d_1 \cdot \alpha \cdot \Delta T = -1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m.

$\underline{\underline{d = 1{,}988\ \text{cm}}}$.

11.27. 3 kg 10 °C-os vízben 100 °C-ra melegített réztömböt hűtünk. A hőmérsékleti egyensúly beállta után 25 °C lett a közös hőmérséklet.
Mekkora a réztömb tömege, ha a hőveszteségektől eltekinthetünk?
$\left(\text{A réz fajhője } 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.27. $m_1 = 3$ kg; $t_1 = 10$ °C; $c_1 = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $t_2 = 100$ °C; $c_2 = 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $t = 25$ °C; $m_2 = ?$

$Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}}$. $c_1 \cdot m_1 \cdot (t - t_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_2 - t)$.

$\underline{\underline{m_2 = 6{,}55 \text{ kg}}}$.

11.28. Egy 5 mm² keresztmetszetű, kezdetben 3 m hosszú acélhuzalt 6 mm-rel megnyújtottunk.
Mennyivel nőtt az acélhuzal belső energiája?
$\left(\text{Az acél rugalmassági modulusa } 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.\right)$

Megoldás:

11.28. $A = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$; $l_0 = 3\ \text{m}$; $\Delta l = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

$\underline{\underline{\Delta E_b}} = W = \frac{E \cdot A}{2 \cdot l_0} \cdot \Delta l^2 = \underline{\underline{6\ \text{J}}}$.

11.29. Egy A keresztmetszetű, l hosszúságú, E rugalmassági modulusú fémgerendát szilárdan beépitettek két fal közé. Mekkora feszítőerő lép fel, ha a gerenda hőmérséklete ΔT-vel emelkedik és a falak megakadályozzák a gerenda tágulását?

(Legyen $A = 100\ \text{cm}^2$; $l = 3\ \text{m}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\alpha = 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$; $\Delta T = 20\ ^\circ\text{C}$.)

Megoldás:

11.29. Paraméteresen: $F = \frac{E \cdot a}{l} \cdot \Delta l$; $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$.

$F = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta T$.

Ha $A = 10^{-2}\ \text{m}^2$; $l = 3\ \text{m}$; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\alpha = 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$; $\Delta T = 20\ \text{K}$.

$\underline{\underline{F = 4 \cdot 10^5\ \text{N}}}$.

11.30. Daruval egyenletesen emelünk egy 2 t tömegű gépalkatrészt. Indításkor $0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gyorsulás. A daru kötele acélkábel, hossza 4 m, rugalmassági modulusa $2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, sűrűsége $7800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Legalább mekkora legyen a kábel keresztmetszete, ha 0,5 cm-nél nagyobb megnyúlást nem engedhetünk meg és

a) a kábel saját súlyát nem vesszük figyelembe,
b) számolunk a kábel súlyával is?

Megoldás:

11.30. $m = 2 \cdot 10^3$ kg; $a = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $l = 4$ m; $E = 2 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\Delta l = 5 \cdot 10^{-3}$ m.

a) Ha a kábel súlyát nem vesszük figyelembe, indításkor a kötélben $F_\text{h} = m \cdot (g + a)$ erő ébred.

A rugalmas megnyúlás törvényéből az erőt kifejezve: $\frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l = m \cdot (g + a)$, ebből $\underline{\underline{A = \frac{m \cdot (g + a) \cdot l}{E \cdot \Delta l} = 8{,}16 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2}}$.

b) Ha a kábel súlyát is figyelembe vesszük: $F_\text{h} = m \cdot g + \varrho \cdot l \cdot A \cdot g + (m + \varrho \cdot l \cdot A) \cdot a$, ahol $\varrho \cdot l \cdot A$ a kábel tömege.

$F_\text{h} = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l$-t helyettesítve és az egyenletet megoldva

$$\underline{\underline{A = 8{,}17 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2}}.$$

11.31. Hány °C-kal emelkedik egy ólomlövedék hőmérséklete, ha $500\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel fába csapódik és lefékeződik, miközben a lövedék mozgási energiájának 20%-a növeli a lövedék belső energiáját? $\left(c_{\text{ólom}} = 130\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}.\right)$

Megoldás:

11.31. $v_0 = 500\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v = 0$; $\eta = 0{,}2$; $c = 130\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.

$\Delta E_{\mathrm{b}} = \eta \cdot \Delta E_{\mathrm{m}}$ és $\Delta E_{\mathrm{b}} = 0$, $c \cdot m \cdot \Delta T = \eta \cdot m \cdot \frac{v_0^2}{2}$; $\underline{\Delta T = 192{,}3\ \mathrm{K}}$.

11.32. A 20 °C-on 100 mm átmérőjű acél csapszeget a 99,8 mm átmérőjű furatba mélyhűtéssel helyezik be.
Legalább hány °C-ra kell a csapszeget lehűteni?

$\left(\alpha_{\text{acél}} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.32. $t_0 = 20\ ^\circ\text{C};\ \ d_0 = 100\ \text{mm};\ \ d = 99{,}8\ \text{mm};\ \ \alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}.$

$$\Delta d = d_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T,\ \ \underline{\underline{\Delta T = \frac{\Delta d}{d_0 \cdot \alpha} = -167\ \text{K}}}.$$

$$\Delta d = d - d_0 = -0{,}2\ \text{mm};\ \ \underline{\underline{t = -147\ ^\circ\text{C}}}.$$

11.33. A 30° hajlásszögű és 5 m hosszúságú lejtőn 10 kg tömegű, 465 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ fajhőjű vasdarab csúszik le. A csúszási súrlódási együttható 0,2.
Hány fokkal melegszik fel a test, ha feltételezzük, hogy a mechanikai energiaveszteség fele a lecsúszó test belső energiáját növeli?

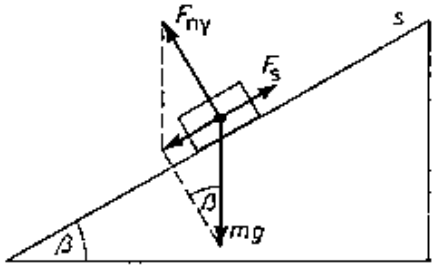
Megoldás:

11.33. $\beta = 30°$; $s = 5$ m; $m = 10$ kg; $c = 465\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $\mu = 0{,}2$; $\eta = 0{,}5$.

A test gyorsulva csúszik a lejtőn, a mechanikai energiaveszteség a súrlódási munka:
$W_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos\beta$.
Ennek fele melegíti a lecsúszó testet:

$$\Delta E_b = c \cdot m \cdot \Delta T = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot s \cdot \cos\beta.$$

Ebből $\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{\mu \cdot g \cdot s \cdot \cos\beta}{2c} = \underline{\underline{9 \cdot 10^{-3}\ \text{K}}}$.
A felmelegedés jelentéktelen: 0,009 K.



11.34. Izomszövet hőkezelése során 1 cm^3 térfogatnyi résszel 5 perc alatt 60 J hőmennyiséget közlünk.
Hány K-nel növekszik az izomszövet hőmérséklete, ha a véráram a közölt energia 30%-át elszállítja?
$\left(\text{Az izomszövet átlagos sűrűsége } 1{,}03 \cdot 10^3 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\text{, fajhője } 3{,}475 \cdot 10^3 \ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.34. $V = 10^{-6}\ \text{m}^3$; $Q = 60\ \text{J}$; $\Delta t = 300\ \text{s}$; $\eta = 0{,}7$; $\varrho = 1{,}03 \cdot 10^3 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;
$c = 3475 \ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$c \cdot m \cdot \Delta T = \eta \cdot Q$; $m = \varrho \cdot V$; $\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{\eta \cdot Q}{c \cdot \varrho \cdot V} = \underline{\underline{11{,}73\ \text{K}}}$.

11.35. Elektromos főzőlapon 2 kg tömegű alumínium tömböt 5 perc alatt melegítünk fel 20 °C-ról 70 °C-ra.

a) Mekkora a hasznos teljesítmény?

b) Mekkora a melegítés hatásfoka, ha a főzőlap teljesítménye 500 W?

$\left(\text{Az alumínium fajhője } 900 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.35. $m = 2\ \text{kg};\ \Delta t = 300\ \text{s};\ \Delta T = 50\ \text{K};\ c = 900 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$

a) $\underline{P_h} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{c \cdot m \cdot \Delta T}{\Delta t} = \underline{300\ \text{W}}.$

b) $\underline{P} = 500\ \text{W};\ \underline{\eta} = \frac{P_h}{P} = \underline{0{,}6}.$

11.36. 0,5 dm^3, kezdetben 20 °C-os teavizet merülőforralóval melegítünk.
Mekkora a merülőforraló teljesítménye, ha 3,5 perc alatt forr fel a teaviz?

A veszteségektől tekintsünk el! A víz fajhője 4200 $\frac{J}{kg \cdot K}$.

Megoldás:

11.36. $V = 0{,}5\ dm^3$; $m = 0{,}5\ kg$; $\Delta T = 80\ K$; $c = 4200\ \frac{J}{kg \cdot K}$;
$\Delta t = 210\ s$.
$P \cdot \Delta t = c \cdot m \cdot \Delta T$; $\underline{P = 800\ W}$.

11.37. Egy elektromos főzőlapon 2 kg víz 20 perc alatt melegszik fel 20 °C-ról 80 °C-ra.
Mekkora a melegítés hatásfoka, ha 220 V feszültségen 3 A erősségű áram halad a főzőlapon?

$\left(\text{A víz fajhője } 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.37. $m = 2\ \text{kg};\ c = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}};\ \Delta t = 1200\ \text{s};\ \Delta T = 60\ \text{K};\ U = 220\ \text{V};$
$I = 3\ \text{A}.$

$Q = \eta \cdot P \cdot \Delta t;\ c \cdot m \cdot \Delta T = \eta \cdot U \cdot I \cdot \Delta t;\ \underline{\underline{\eta}} = \frac{c \cdot m \cdot \Delta T}{U \cdot I \cdot \Delta t} = \underline{\underline{0{,}64}}.$

11.38. Egy elektromos vízmelegítő (boyler) fogyasztása egy éjszaka 5 kWh.

Mekkora hőmérsékletre melegszik fel a tartályban lévő 80 kg tömegű, kezdetben 20 °C-os víz, ha

a) a hőveszteségektől eltekintünk,
b) a vízmelegítő hatásfoka 85%?

Megoldás:

11.38. $W = 5\ \text{kWh} = 1{,}8 \cdot 10^7\ \text{J}$; $m = 80\ \text{kg}$; $t = 20\ ^\circ\text{C}$.

a) $\eta = 100\%$; $c \cdot m \cdot \Delta T = W$; $\Delta T = 53{,}6\ \text{K}$; $\underline{t_a = 73{,}6\ ^\circ\text{C}}$.

b) $\eta = 0{,}85$; $c \cdot m \cdot \Delta T = 0{,}85\ \text{W}$; $\Delta T = 45{,}5\ \text{K}$; $\underline{t_b = 65{,}5\ ^\circ\text{C}}$.

11.39. Egy 27 °C hőmérsékletű ólomgolyó $500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ütközött egy tárgyba, lefékeződött, és az ólom $\frac{3}{4}$ része megolvadt.
A golyó mozgási energiájának hány százaléka növelte a golyó belső energiáját?
(Az ólom fajhője $130\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, olvadáspontja 327 °C; olvadáshője $23{,}9\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.)

Megoldás:

11.39. $v_0 = 500\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 0$; $t = 27\ ^\circ\text{C}$; $t_0 = 327\ ^\circ\text{C}$; $\Delta T = 300\ \text{K}$;
$L_0 = 23{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $c = 130\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$$\eta \cdot \frac{m v_0^2}{2} = c \cdot m \cdot \Delta T + 0{,}75 m \cdot L_0.$$

$\underline{\underline{\eta}} = 0{,}46$, azaz $\underline{\underline{46\%}}$.

11.40. Alkoholos hőmérőnk $-20\ ^\circ$C-tól $+60\ ^\circ$C-ig mér. A skálacső hossza 30 cm, belső átmérője 0,6 mm.
Mekkora legyen a gömb alakú alkoholtartály belső átmérője, ha az alkohol térfogati hőtágulási együtthatója $1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$, és az üveg tágulását nem vesszük figyelembe?

Megoldás:

11.40. $\Delta T = 80$ K; $l = 0{,}3$ m; $2r = 6 \cdot 10^{-4}$ m; $V = r^2 \cdot \pi \cdot l$; $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.

A V_0 térfogatú gömbben annyi alkoholnak kell lennie, amelynek a térfogata a 80 K hőmérsékletkülönbség hatására ΔV-vel nő.

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T; \quad V_0 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot l}{\beta \cdot \Delta T} = 0{,}96\ \mathrm{cm}^3.$$

A tartály gömbalakú: $V_0 = \frac{4}{3} r_0^3 \cdot \pi$, innen $r_0 = 0{,}61$ cm, a belső átmérő $\underline{d_0 = 1{,}2\ \mathrm{cm}}$.

11.41. Hőmérő alkoholos edénye 2,5 g alkoholt tartalmaz, hőmérséklete 14 °C. A hőmérőt 5 cm^3, 80 °C hőmérsékletű vízbe mártjuk.
Mekkora hőmérsékletet mutat a hőmérő?
(A hőmérő üvegének hőkapacitását hagyjuk figyelmen kívül. Az alkohol fajhője 2400 $\frac{J}{kg \cdot K}$, a víz fajhője 4200 $\frac{J}{kg \cdot K}$.)

Megoldás:

11.41. $m_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg; $t_1 = 14$ °C; $m_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ kg; $t_2 = 80$ °C;
$c_1 = 2400 \frac{J}{kg \cdot K}$; $c_2 = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$.

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (t_k - t_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k), \quad \underline{\underline{t_k = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2} = 65{,}33\ °C}}.$$

A hőmérő ezt a közös hőmérsékletet mutatja. Látható, hogy a hőmérő méretének rossz megválasztása – túl nagy tömegű hőmérő – nagyon hibás eredményhez vezet. A valóság még a számítottnál is rosszabb, mert itt nem vettük figyelembe a hőmérő kapacitását.

11.42. A 20 °C hőmérsékleten hitelesített mérőhengerbe 200 ml, 20 °C hőmérsékletű etil-alkoholt töltöttünk, majd vízfürdőben 60 °C-ra melegítettük. Térfogata ekkor 208,8 ml volt.

a) Mekkora érték adódik az etil-alkohol térfogati hőtágulási tényezőjére, ha az üveg hőtágulását figyelmen kívül hagyjuk?

b) Mekkora hőtágulási tényező adódik, ha az üveg $10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$-es lineáris hőtágulási tényezőjét is figyelembe vesszük?

Megoldás:

11.42. $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$; $V_1 = 200 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$; $t_2 = 60\ ^\circ\mathrm{C}$; $V_2 = 208{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$; $\Delta T = 40\ \mathrm{K}$; $\Delta V_\mathrm{a} = 8{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$.

a) $\underline{\underline{\beta_\mathrm{a} = \frac{\Delta V_\mathrm{a}}{V_1 \cdot \Delta T} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}}}$.

b) $\alpha_\mathrm{ü} = 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$; $\Delta V = \Delta V_\mathrm{a} - \Delta V_\mathrm{ü}$.

$\Delta V_\mathrm{ü} = 3 \cdot \alpha_\mathrm{ü} \cdot V_1 \cdot \Delta T = 2{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^3$.

$\Delta V = 8{,}56 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$.

$\underline{\underline{\beta_\mathrm{b} = \frac{\Delta V}{V_1 \cdot \Delta T} = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{K}}}}$.

11.43. Mérési gyakorlaton, két módszerrel mérjük ugyanannak a folyadéknak a hőtágulási együtthatóját.

1. A folyadékot olyan, 0 °C hőmérsékleten hitelesített kisméretű lombikba töltjük, amelybe ismert belső keresztmetszetű üvegcső nyúlik. A lombikot először elég nagy tömegű olvadó jégbe, majd 80 °C-os meleg vízzel telt tartályba állítjuk. A hőmérsékleti egyensúly beállása után mért térfogatok: 0 °C-on 105 cm^3; 80 °C-on 113,2 cm^3.
2. A folyadékot U alakú csőbe töltjük. Az egyik csőág 80 °C hőmérsékletű vízbe, a másik olvadó jégbe merül. Miután az egyes ágakban beállt a hőmérsékleti egyensúly, leolvassuk a folyadékoszlopok magasságát: a 0 °C-os csőben 20 cm; a 80 °C-os csőágban 21,6 cm.

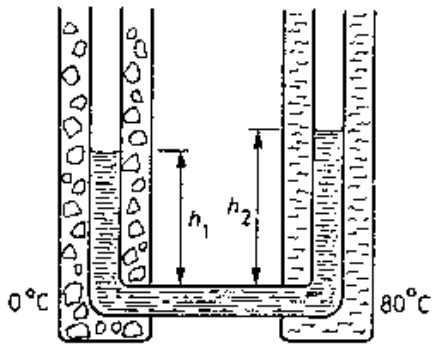
a) Mekkora hőtágulási együtthatóra következtethetünk az 1. és a 2. mérés alapján?
b) Mi okozhatja a két mérés eredménye között az eltérést?
c) Melyik módszer a pontosabb? Miért?

Megoldás:

11.43. 1. mérés: $t_0 = 0\ ^\circ\text{C}$; $V_0 = 105\ \text{cm}^3$; $t_1 = 80\ ^\circ\text{C}$; $V_1 = 113{,}2\ \text{cm}^3$; $\Delta T = 80\ \text{K}$; $\Delta V = 8{,}2\ \text{cm}^3$.

$$\underline{\underline{\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T} = 9{,}76 \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{K}}}}.$$

2. mérés: A két szárban lévő víz sűrűsége különböző. Ha a közlekedő edényben két különböző sűrűségű folyadék van, a folyadékszintek magassága a sűrűségekkel fordítottan arányos: $h_1 \cdot \varrho_1 = h_2 \cdot \varrho_2$; $h_1 = 0{,}2\ \text{m}$; $h_2 = 0{,}216\ \text{m}$.



A két sűrűség közötti $\varrho_2 = \dfrac{\varrho_1}{1 + \beta \cdot \Delta T}$ összefüggést felhasználva β kiszámítható.

$h_1 \cdot \varrho_1 = h_2 \cdot \dfrac{\varrho_1}{1 + \beta \cdot \Delta T}$, ebből $\underline{\underline{B = \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 \cdot \Delta T} = 10^{-3}\ \dfrac{1}{\text{K}}}}$.

b) Az első mérésnél nem vettük figyelembe, hogy melegítéskor az edény térfogata is megváltozott, s ez az eredményt befolyásolja.

c) A második eredmény pontosabb, mert az edény térfogatváltozásának nincs szerepe.

11.44. Mennyi vízgőznek kell lecsapódnia a gőzfűtéses radiátorban ahhoz, hogy a 4 m × 3 m × 5 m méretű terem levegőjét 10 °C-ról 18 °C-ra melegítse, ha a beérkező 100 °C-os vízgőz 60 °C-ra hűl a radiátorban, és a felszabaduló hőmennyiség 20%-a melegíti a levegőt?

(A víz forráshője 2256 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, fajhője 4200 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, a levegő állandó nyomáson mért fajhője 997 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, sűrűsége 1,3 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Megoldás:

11.44. $V_1 = 60\ \text{m}^3$: $\Delta T_1 = 8\ \text{K}$; $\Delta T_{vg} = -40\ \text{K}$; $\eta = 0{,}2$; $L_f = 2256 \cdot 10^3\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $c_{víz} = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $c_{plev} = 997\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = c_1$; $\varrho_1 = 1{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

$Q_{le} = Q_{fel}$, $\eta \cdot (L_f \cdot m_{vg} + c_v \cdot m_{vg} \cdot \Delta T_{vg}) = c_1 \cdot \varrho_1 \cdot V_1 \cdot \Delta T_1$.

$\underline{\underline{m_{vg} = 1{,}28\ \text{kg}}}$.

11.45. A műtéteknél helyi érzéstelenítéskor 16 g, $389{,}4 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ párolgáshőjű folyadékot használnak fel a test egy 100 g-nak vehető részén. Feltételezzük, hogy a párolgáshoz szükséges teljes hőmennyiséget a test szolgáltatja.
Hány K-nel változik a test hőmérséklete, ha átlagos fajhője $3{,}475 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$?

Megoldás:

11.45. $m_1 = 16 \cdot 10^{-3}$ kg; $L_\mathrm{p} = 389{,}4 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$; $m_2 = 0{,}1$ kg; $c_2 = 3{,}475 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$.

$c_2 \cdot m_2 \cdot \Delta T = L_\mathrm{p} \cdot m_1$. $\underline{\underline{\Delta T = 17{,}93 \text{ K}}}$.

11.46. Mekkora hőmennyiséget ad át környezetének a 2 kg, kezdetben 120 °C-os vízgőz, miközben 100 kPa nyomáson előbb telítetté hűl, majd lecsapódik?

$\left(\text{A víz forráshője } 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\text{, a vízgőz fajhője állandó nyomáson } 1846 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.46. $m = 2$ kg; $t_1 = 120$ °C; $p = 10^5$ Pa; $t_f = 100$ °C; $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $c_p = 1846 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$\underline{\underline{Q}} = c \cdot m \cdot (t_1 - t_f) + L_f \cdot m = \underline{\underline{4{,}586 \cdot 10^6 \text{ J}}}$.

11.47. Merülőforralóval 3 perc alatt melegítettünk fel 0,5 dm^3 vizet 0 °C-ról 50 °C-ra.

a) Mekkora a melegítéshez szükséges hőmennyiség?

b) Mekkora a felvett teljesítmény, ha a hőveszteségektől eltekinthetünk?

c) Mekkora a 220 V feszültségű hálózatra kapcsolt merülőforraló ellenállása?

$\left(\text{A víz fajhője } 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.47. $\Delta t = 180$ s; $V = 0{,}5$ dm^3: $m = 0{,}5$ kg; $\Delta T = 50$ K; $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) $\underline{\underline{Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 1{,}05 \cdot 10^5 \text{ J}}}$.

b) $\eta = 1$; $\underline{\underline{P = \frac{Q}{\Delta t} = 583 \text{ W}}}$.

c) $U = 220$ V; $P = \frac{U^2}{R}$; $\underline{\underline{R = 83\ \Omega}}$.

11.48. Két, azonos kivitelű kaloriméterbe egyenlő tömegű (100 g) vizet, illetve etil-alkoholt töltünk. A két folyadékot két azonos, 5 ohm ellenállású, sorba kapcsolt merülőforralóval melegítjük. 5 perc alatt a víz hőmérséklete 10 °C-ról 30 °C-ra, az alkoholé 10 °C-ról 45 °C-ra emelkedett. A víz fajhője $4200 \frac{J}{kg \cdot K}$.

Határozzuk meg az alkohol fajhőjét!

Megoldás:

11.48. $m_1 = m_2 = 0{,}1$ kg; $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$; $\Delta t = 300$ s; $\Delta T_1 = 20$ K; $\Delta T_2 = 35$ K; $c_v = 4200 \frac{J}{kg \cdot K} = c_1$.

A két kaloriméterben a sorba kapcsolt azonos ellenállású fűtőtest és az azonos időtartam miatt egyenlő hőmennyiség szabadul fel.

$c_1 \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 = c_a \cdot m_2 \cdot \Delta T_2$; $\underline{\underline{c_2 = c_a = 2400 \frac{J}{kg \cdot K}}}$.

11.49. Hőszigetelt falú edényben (kaloriméterben) 200 g, 25 °C hőmérsékletű víz van. Ha ehhez 60 g, 90 °C-os vizet öntünk, a közös hőmérséklet 35 °C lesz.
Mekkora a kaloriméter hőkapacitása?
$\left(\text{A víz fajhője } 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.49. $m_1 = 0{,}2$ kg; $t_1 = 25$ °C; $m_2 = 0{,}06$ kg; $t_2 = 90$ °C; $t_k = 35$ °C;

$c_1 = c_2 = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$C \cdot (t_k - t_1) + c_1 \cdot m_1 \cdot (t_k - t_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k)$.

$\underline{\underline{C = 546 \frac{\text{J}}{\text{K}}}}$.

11.50. Egy 0,1 kg tömegű, tömör vörösréz golyót elég hosszú ideig tartottunk gyertyalángban. Miután felvette a láng hőmérsékletét, 0,5 kg tömegű, 20 °C-os vízbe dobtuk. A közös hőmérséklet 31 °C lett. (A réz fajhője 385 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; a víz fajhője 4200 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. A hőveszteségektől eltekintünk.) Mekkora a láng hőmérséklete?

Megoldás:

11.50. $m_1 = 0{,}1\ \text{kg}$; $c_1 = 385\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $m_2 = 0{,}5\ \text{kg}$; $c_2 = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$;

$t_2 = 20\ ^\circ\text{C}$; $t_k = 31\ ^\circ\text{C}$.

$c_1 \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_k) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_k - t_2)$.

$$\underline{\underline{t_1}} = \frac{c_2 \cdot m_2 \cdot (t_k - t_2) + c_1 \cdot m_1 \cdot t_k}{c_1 \cdot m_1} = \underline{\underline{631\ ^\circ\text{C}}}.$$

11.51. A szegedi versenyuszoda úszómedencéjének 24 °C-os vizét 89 °C-os termálvíz és 14 °C-os hideg víz megfelelő arányú keverésével állítják elő.
Milyen tömegarányban kell keverni a kétféle vizet?

Megoldás:

11.51. $t_k = 24\ °C$; $t_1 = 89\ °C$; $t_2 = 14\ °C$.

$c \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_k) = c \cdot m_2 \cdot (t_k - t_2)$.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{t_1 - t_k}{t_k - t_2} = \frac{65}{10} = \frac{13}{2}.$$

A megfelelő hőmérsékletű víz 13 rész hideg és 2 rész meleg víz keverésével állítható elő ($m_2 : m_1 = 13 : 2$).

11.52. Mennyi 14 °C-os hideg vizet keverjünk az 50 dm^3, 70 °C-os vízhez, hogy 40 °C-os fürdővizet kapjunk?

Megoldás:

11.52. $t_1 = 14\ °C$; $m_2 = 50\ kg$; $t_2 = 70\ °C$; $t_k = 40\ °C$; $c \cdot m_1 \cdot (t_k - t_1) = c \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k)$. $\underline{\underline{m_1 = 57{,}7\ kg}}$.

11.53. Egy elektromos vízmelegítő percenként 0,6 dm^3 vizet melegít fel 14 °C-ról 60 °C-ra.

a) Mekkora a melegítő hasznos teljesítménye?

b) Mekkora a berendezés hatásfoka, ha a melegítő 220 V feszültségen 10 A erősségű áramot vesz fel?

$\left(\text{A víz fajhője } 4200 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.53. $\Delta t = 60\ \text{s};\ m = 0{,}6\ \text{kg};\ \Delta T = 46\ \text{K};\ c = 4200 \dfrac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$

a) $P_\text{h} \cdot \Delta t = c \cdot m \cdot \Delta T;\ \underline{P_\text{h} = 1932\ \text{W}}.$

b) $U = 220\ \text{V};\ I = 10\ \text{A};\ \underline{\eta = \dfrac{P_\text{h}}{P} = \dfrac{P_\text{h}}{U \cdot I} = 0{,}88}.$

11.54. A szentesi termálfürdőt a percenként 1700 dm^3, 71 °C-os gyógyvizet adó termálkút látja el meleg vízzel. Ezt a gyógyvizet a fürdő medencéinek töltésén kívül fűtésre is használják.
Mekkora hőmennyiséget ad át a környezetének a víz óránként, ha 30 °C-ra hűl?

Megoldás:

11.54. $t = 60$ s; $m = 1700$ kg; $t_1 = 71$ °C; $t_2 = 30$ °C; $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.
Percenként $Q = c \cdot m \cdot (t_1 - t_2) = 2{,}93 \cdot 10^8$ J, óránként $\underline{\underline{1{,}758 \cdot 10^{10}\ \text{J}}}$ hőmennyiséget ad le.

11.55. A petróleum sűrűsége 0 °C-on $800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Mekkora a sűrűsége 100 °C-on? $\left(\beta = 10^{-3}\ \frac{1}{\text{K}}.\right)$

Megoldás:

11.55. $\varrho_0 = 800\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\Delta T = 100\ \text{K}$; $\beta = 10^{-3}\ \frac{1}{\text{K}}$.

$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta \cdot \Delta T} = \underline{\underline{727{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}$ (lásd a 11. 17. feladat megoldását).

12.1. Magyarázzuk meg a szilárd testek molekuláris modelljével, miért nem emelkedik a hőmérséklet a tiszta szilárd anyagok olvadása közben!

Megoldás:

12.1. Olvadás közben a felvett hőmennyiség azt a belső munkát fedezi, amely ahhoz szükséges, hogy a kristályrács kötött molekulái helyzetüket megváltoztassák, a rácsból kiszakadjanak, miáltal a kristályrács összeomlik. Eközben a molekulák kinetikai energiája nem nő, azaz a hőközlés hatására a hőmérséklet nem emelkedik.

12.2. *Döntsük el, hogy a számokkal megjelölt állítások az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás igaz, az indoklás igaz, ok-okozati összefüggés van közöttük.

B) Az állítás igaz, az indoklás igaz, ok-okozati összefüggés nincs közöttük.

C) Az állítás igaz, az indoklás hamis.

D) Az állítás hamis, az indoklás önmagában igaz.

E) Az állítás hamis, az indoklás hamis.

1. A belső energia nem állapotjelző, mert sem a munka, sem a hőmennyiség nem állapotjelző.
2. A folyadék forráspontja függ a külső nyomástól, mert a külső nyomás alacsony hőmérsékleten is befolyásolja a párolgás sebességét.
3. Tiszta, szilárd anyagok olvadáspontja függ a külső nyomástól, mert a nyomás növelése elősegíti az átalakulást a kisebb térfogatú fázis felé.
4. Ha egy gáz bármilyen folyamatban tágulási munkát végez, biztosan megváltozik a belső energiája, mert tágulás közben csökken a gáz nyomása és emiatt csökken a hőmérséklete is.

Igazoljuk választásunkat!

Megoldás:

12.2. 1–D a belső energia állapotjelző, a munka és a felvett hőmennyiség folyamatjelző.
2–B
3–A
4–E ellenpélda az izoterm átalakulás.

12.3. *Válasszuk ki, hogy egy-egy számmal jelzett állítás mely jelenségre (jelenségekre) vonatkozik!*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik!

a) Párolgás.
b) Forrás.

1. Bármely hőmérsékleten végbemehet.
2. Gázfázisba való átmenet, de kizárólag folyadékfázisból.
3. Feltétele, hogy a folyadék szabad felszíne feletti nyomás ne legyen nagyobb a telített gőz adott hőmérsékletéhez tartozó nyomásánál.
4. A folyamat során gyakran csökken a test hőmérséklete.
5. A folyamat egy speciális fajtája a szublimáció.

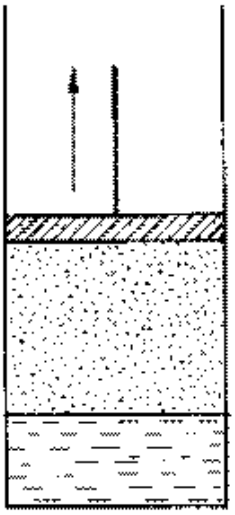
Megoldás:

12.3. 1–A feltétel: a kritikus hőmérséklet alatt!
2–B mindkettő gázfázisba való átmenet, de az állítás csak a forrásra igaz.
3–B
4–A Párolgáskor csak az átlagosnál nagyobb energiájú molekulák lépnek ki a szabad felszínről, s ez csökkenti a visszamaradó anyag belső energiáját. Ha a környezetből nem tud felvenni hőt, lehűl.
5–A szublimáció: közvetlen átmenet szilárd fázisból gázfázisba.

12.4. Az ábra szerinti hengerben folyadékjával érintkező, vele egyensúlyban lévő gőz van.

a) Mi történik, ha a gőz térfogatát – állandó hőmérsékleten – a dugattyú lassú kifelé mozgatásával növeljük?

b) Hogyan alakul a gőz nyomása?



Megoldás:

12.4. *a)* A zárt térben folyadékjával érintkező gőz telített, nyomása adott hőmérsékleten anyagi minőségére jellemző állandó. Ha a térfogatot állandó hőmérsékleten növelem, a folyadék egy része elpárolog, nő a gőz, csökken a folyadék mennyisége, a nyomás nem változik, amíg a térben folyadék is van.

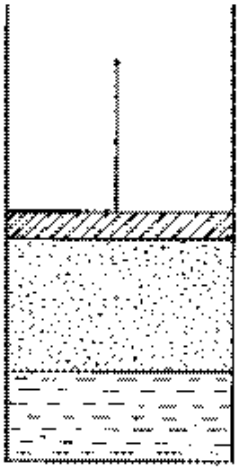
b) A gőz nyomása állandó marad, ha elég lassú a dugattyú mozgása.

12.5. A tiszta szilárd test nem melegíthető olvadáspontjánál magasabb hőmérsékletre szilárd halmazállapotban, a folyadék azonban túlhűthető (fagyáspontjánál alacsonyabb hőmérsékletre hűthető folyadék halmazállapotban). Ez azzal függ össze, hogy molekuláris szinten az olvadás, illetve a fagyás megindulása között van egy lényeges különbség.
Magyarázzuk meg, mi az!

Megoldás:

12.5. Az olvadás – a kristályrács összeomlása – az anyagra jellemző adott külső nyomás és hőmérséklet mellett mindig végbemegy (lásd a 12.1. feladatot is).
A fagyás során a molekulárisan rendezetlen állapotból szigorú rendbe, kristályrácsba kell rendeződnie a molekuláknak. Ehhez a mozgási energia csökkenésén kívül véletlenszerűen kialakuló kristálygócok szükségesek.

12.6. Az ábra szerinti hengerben folyadékával érintkező gőz van. A dugattyút rögzítjük és változatlan térfogaton hűtjük a hengert és a tartalmát.
Mi történik?



Megoldás:

12.6. Ha a telített gőzt tartalmazó rendszert hűtjük, csökken a telített gőz nyomása, a gőz egy része pedig lecsapódik, amíg az alacsonyabb hőmérséklethez tartozó telítettgőz-nyomás ki nem alakul.
Lásd a 12.4. feladat megoldását is!

12.7. Hőálló üvegből készült gömblombikot félig megtöltünk vízzel és a vizet felforraljuk, majd dugóval jól elzárjuk. Ezután a lombikot felfordítjuk, s a tetejét leöntjük hideg vízzel.
Mi történik? Miért?

Megoldás:

12.7. A hűtés következtében a gőz egy része lecsapódik, nyomása csökken. Ha elég nagy a nyomásváltozás, a lehűtött folyadék forrni kezd. A forrás megindul, ha a folyadék szabad felszíne feletti nyomás megegyezik az adott hőmérséklethez tartozó telítettgőz-nyomással.

12.8. Gőzmozdony sípjából kilövellő gőz csak a kilövellés helyétől néhány cm-re válik láthatóvá.
Miért? Mikor nagyobb ez a köz: télen vagy nyáron?

Megoldás:

12.8. A gőz akkor válik láthatóvá, ha lehűlt, és vízcseppekké alakult. A megfelelő mértékű lehűlés a nyári melegben lassabban megy végbe, ezért a köz nyáron nagyobb.

12.9. Ismert szilveszteri népszokás az „ólomöntés".

a) Mekkora hőmennyiség szükséges 100 g tömegű, 27 °C hőmérsékletű ólomdarab megolvasztásához?

b) Az olvadásponton lévő, megolvadt, 100 g tömegű ólmot 0,5 dm^3, 20 °C hőmérsékletű vízbe öntjük. Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

(A hőveszteségektől eltekinthetünk. Az ólom fajhője 130 $\frac{J}{kg \cdot K}$, olvadáspontja 327 °C, olvadáshője 24 $\frac{kJ}{kg}$, a víz fajhője 4200 $\frac{J}{kg \cdot K}$.)

Megoldás:

12.9. *a)* $m_1 = 0{,}1$ kg; $t_0 = 27$ °C; $t_1 = 327°$ C; $c_1 = 130 \frac{J}{kg \cdot K}$; $L_1 = 24\,000 \frac{J}{kg}$.

Az ólom először felmelegszik olvadáspontra, azután megolvad:

$$\underline{\underline{Q}} = c_1 \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_0) + L_1 \cdot m_1 = \underline{\underline{6300 \text{ J}}}.$$

b) $m_2 = 0{,}5$ kg; $t_2 = 20$ °C; $c_2 = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$.

A vízbe dobott olvadásponton lévő folyadék halmazállapotú ólom megfagy, majd lehűl a kialakuló közös hőmérsékletre:

$$Q_{\text{felvett}} = Q_{\text{leadott}},$$

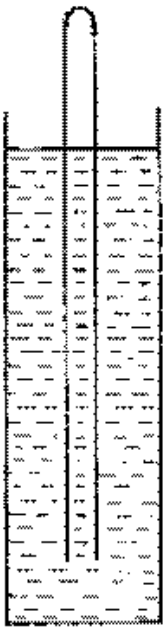
tehát:

$$c_2 \cdot m_2 \cdot (t_k - t_2) = L_1 \cdot m_1 + c_1 \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_k),$$

amiből

$$\underline{\underline{t_k}} = \frac{L_1 \cdot m_1 + c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2} = \underline{\underline{23 \text{ °C}}}.$$

12.10. Egy edényben és a benne függőlegesen álló cső egy részében 65 °C-os víz van. A két vízszint kezdetben megegyezik. A külső nyomás 10^5 Pa.



a) Mekkora az 5 cm hosszú zárt térrészben lévő telített vízgőz nyomása?

b) A bezárt rész térfogatát kétszeresére növeljük az elég hosszú cső felhúzásával. A hőmérséklet változatlanul 65 °C. Hogyan változik meg a vízszint magassága, ha a felhúzott csőben levő víz lehűl? (Használjuk a függvénytáblázatot!)

Megoldás:

12.10. $t = 65$ °C; $p_k = 10^5$ Pa.

a) Feltételezzük, hogy a cső kiálló részében lévő levegő és telített vízgőz is 65 °C hőmérsékletű. Az egyensúlyfeltétel miatt $p_g + p_l = p_k$. A telített vízgőz nyomása 65 °C-on $p_g = 2{,}5 \cdot 10^4$ Pa, így a levegő nyomása $\underline{p_l = 7{,}5 \cdot 10^4 \text{ Pa}}$.

b) Ha a csövet – állandó hőmérsékleten – addig emelem, amíg a bezárt rész kétszeresére nem nő, a levegő nyomása felére csökken (követi a gáztörvényt) $p_l' = 3{,}75 \cdot 10^4$ Pa lesz, a telített gőz nyomása nem változik. Így a bezárt térrészben $p = 6{,}25 \cdot 10^4$ Pa nyomás alakul ki. Az egyensúly biztosításához $p_k - p = 3{,}75 \cdot 10^4$ Pa nyomású vízoszlop emelkedik fel a csőben. Ennek hossza $h = \dfrac{p_k - p}{\varrho \cdot g} = 3{,}75$ m.

A csőnek valóban elég hosszúnak kell lenni, hiszen a feltételeknek megfelelően 3,8 m-rel kell feljebb emelni.

Ha csökken a hőmérséklet, a csőben lévő víz szintje emelkedik, mert mind a telített gőz, mind a levegő nyomása csökken, miközben a külső nyomás nem változik.

12.11. 100 °C hőmérsékleten, 101,3 kPa nyomáson elforralunk 0,5 dm³ vizet.
Mennyivel nagyobb a keletkezett, 100 °C-os vízgőz belső energiája, mint a 100 °C-os vizé volt?
(A víz forráshője 2256 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, sűrűsége 100 °C-on 958 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a vízgőz sűrűsége 100 °C-on 0,6 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Megoldás:

12.11. $V_v = 5 \cdot 10^{-4}$ m³; $t = 100$ °C; $\varrho_v = 958 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\varrho_g = 0{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa; $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A forralás közben felvett Q_f energia részben növeli a belső energiát, részben a tágulási munkát fedezi.

$$\Delta U = Q_f - p \cdot \Delta V = L_f \cdot m_v - p \cdot \Delta V, \qquad m_v = V \cdot \varrho_v = 0{,}479 \text{ kg}.$$

A vízgőz sűrűsége kisebb, térfogata nagyobb lesz.

$$m_v = V_v \cdot \varrho_v = V_g \cdot \varrho_g, \quad V_g = V_v \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho_g} = 0{,}7983 \text{ m}^3. \quad \Delta V = 0{,}7978 \text{ m}^3.$$

Mindezt felhasználva a belső energia növekedésére:

$$\underline{\underline{\Delta U = 1{,}072 \cdot 10^6 \text{ J}.}}$$

12.12. A $800\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$ hőkapacitású kaloriméterben 100 g tömegű víz és 25 g tömegű jég keveréke van hőmérsékleti egyensúlyban. Mekkora tömegű, 100 °C-os vízgőzt kell a kaloriméterbe bevezetni ahhoz, hogy a jég éppen megolvadjon?

$\left(\text{A víz forráshője } 2256\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\text{, olvadáshője } 334\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.\right)$

Megoldás:

12.12. $C = 800\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$; $m_\text{v} = 0{,}1$ kg; $m_\text{j} = 0{,}025$ kg; $t_0 = 0$ °C; $t_\text{g} = 100$ °C; $D_\text{f} = 2{,}256 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $L_\text{o} = 3{,}34 \cdot 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A víz–jég keverék és a kaloriméter hőmérsékleti egyensúlyban van, tehát hőmérséklete 0 °C.

A vízgőz lecsapódik, és a jég olvadáspontjára hűl: $Q_\text{le} = L_\text{f} \cdot m_\text{g} + c_\text{v} \cdot m_\text{g} \cdot (t_\text{g} - t_0)$.

A vízgőz által leadott hőmennyiséget az olvadó jég veszi fel. (A víz és a kaloriméter nem melegszik, amíg a jég fel nem olvad!)

$$Q_\text{fel} = L_\text{o} \cdot m_\text{j}, \qquad Q_\text{le} = Q_\text{fel}.$$

$$L_\text{f} \cdot m_\text{g} + c_\text{v} \cdot m_\text{g} \cdot (t_\text{g} - t_0) = L_\text{o} \cdot m_\text{j}.$$

Ebből $\underline{m_\text{g} = 3{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}$.

12.13. Hőszigetelő falú edényben levő, 5 kg tömegű, 0 °C hőmérsékletű jégre 1 kg, 100 °C hőmérsékletű vízgőzt engedünk 10^5 Pa nyomáson, majd az edényt lezárjuk.

Mekkora lesz a közös hőmérséklet?

$\left(\text{A jég olvadáshője } 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \text{ a víz forráshője } 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.\right)$

Megoldás:

12.13. $m_j = 5$ kg; $t_0 = 0$ °C; $m_g = 1$ kg; $t_g = 100$ °C; $p = 10^5$ Pa;
$L_o = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$Q_{le} = L_f \cdot m_g + c_v \cdot m_g \cdot (t_g - t_k)$.

$Q_{fel} = L_o \cdot m_j + c_v \cdot m_j \cdot (t_k - t_0)$.

$Q_{fel} = Q_{le}$.

Ebből

$$\underline{\underline{t_k}} = \frac{L_f \cdot m_g + c_v \cdot m_g \cdot t_g - L_o \cdot m_j}{c_v \cdot m_j + c_v \cdot m_g} = \underline{\underline{39{,}9\ ^\circ\text{C}}}.$$

12.14. Merülőforralóval vizet forralunk.
Mekkora a forraló hasznos teljesítménye, ha forrás közben percenként 20 g víz forr el 10^5 Pa külső nyomáson?
$\left(\text{A víz forráshője } 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.\right)$

Megoldás:

12.14. $\Delta t = 60$ s; $m = 0{,}02$ kg; $p = 10^5$ Pa; $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

$W = Q = L_f \cdot m$, $\underline{\underline{P_h = \frac{W}{\Delta t} = 752 \text{ W}}}$.

12.15. Hőszigetelő falú edényben levő, 300 g tömegű, 20 °C hőmérsékletű vízbe 50 g tömegű vizes havat dobunk. A hőmérsékleti egyensúly kialakulásakor az edényben lévő víz hőmérséklete 8 °C-kal csökken.
Mennyi vizet tartalmazott a hó?
$\left(\text{A jég olvadáshője } 334\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}},\ \text{fajhője } 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}.\right)$

Megoldás:

12.15. $m_1 = 0{,}3$ kg; $t_1 = 20$ °C; $t_k = 12$ °C; $m_2 + m_3 = 0{,}05$ kg; $t_2 = 0$ °C; $L_o = 3{,}34 \cdot 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $c_v = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.
A vizes hóban m_2 tömegű jég és m_3 tömegű víz van.
$Q_{le} = c_v \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_k)$.
$Q_{fel} = L_o \cdot m_2 + c_v \cdot (m_2 + m_3) \cdot (t_k - t_2)$.
$Q_{le} = Q_{fel}$.
Ebből $m_2 = \frac{c_v \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_k) - c_v \cdot (m_2 + m_3) \cdot (t_k - t_2)}{L_o}$.
$m_2 = 22{,}6$ g jég és $\underline{\underline{m_3 = 27{,}4\ \text{g}}}$ víz. A hóban 27,4 g víz volt.

12.16. Hőszigetelő falú edényben 200 g tömegű, -20 °C hőmérsékletű jég van.
Mi történik, ha 10 g, 110 °C-os vízgőzt vezetünk a kalorimé-terbe 10^5 Pa nyomáson?

(A jég fajhője 2100 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, olvadáshője 334 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$; a vízgőz fajhője 1900 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, forráshője 2256 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$; a víz fajhője 4200 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)

Megoldás:

12.16. $m_\text{j} = 0{,}2$ kg; $t_\text{j} = -20$ °C; $c_\text{j} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $L_0 = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $m_\text{g} = 0{,}01$ kg; $t_\text{g} = 110$ °C; $p = 10^5$ Pa; $c_\text{g} = 1900 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $c_\text{v} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $L_\text{f} = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A jég felmelegszik 0 °C-ra, és teljes mennyiségében megolvad, ha felvesz:

$$Q_\text{fel} = c_\text{j} \cdot m_\text{j} \cdot (0 - t_\text{j}) + L_\text{o} \cdot m_\text{j} = 75\,200 \text{ J}$$

hőmennyiséget.
A gőz lehűl 100 °C-ra, 100 °C-on 10^5 Pa nyomáson lecsapódik, majd lehűl 0 °C-ra. Eközben lead:

$$Q_\text{le} = c_\text{g} \cdot m_\text{g} \cdot (t_\text{g} - 100) + L_\text{f} \cdot m_\text{g} + c_\text{v} \cdot m_\text{g} \cdot 100 = 26\,950 \text{ J}$$

hőmennyiséget.
A teljes jégmennyiség megolvasztásához hiányzik $Q_\text{fel} - Q_\text{le} = 48\,250$ J, ezért

$$\underline{\underline{m'}} = \frac{Q_\text{fel} - Q_\text{le}}{L_\text{o}} = \underline{\underline{0{,}144 \text{ kg}}}$$

jég marad.
144 g 0 °C-os jég és 66 g 0 °C-os víz keverékét kapjuk.

12.17. Egy 600 W teljesítményű főzőlapon 2 kg 0 °C hőmérsékletű jeget melegítünk.
Mennyi idő alatt lesz a jégből 40 °C-os víz, ha a hőátadás hatásfoka 60%?
$\left(\text{A jég olvadáshője } 334\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\text{, a víz fajhője } 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}.\right)$

Megoldás:

12.17. $P = 600\ \text{W};\ m = 2\ \text{kg};\ t_0 = 0\ ^\circ\text{C};\ t_\text{v} = 40\ ^\circ\text{C};\ L_\text{o} = 3{,}34 \cdot 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}};$

$c_\text{v} = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}};\ \eta = 0{,}6.$

$\eta \cdot P \cdot t = L_\text{o} \cdot m + c_\text{v} \cdot m \cdot (t_\text{v} - t_0),\ t = 2{,}79 \cdot 10^3\ \text{s} = \underline{\underline{46{,}5\ \text{min}}}.$

12.18. Mekkora tömegű, 0 °C hőmérsékletű jeget kell 300 g tömegű, 20 °C hőmérsékletű gyümölcslébe tennünk, hogy az 10 °C-ra hűljön?

(A gyümölcslé fajhője megegyezik a vízével: $4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$, a jég olvadáshője $334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$.)

Megoldás:

12.18. $m_{gy} = 0{,}3\ \mathrm{kg};\ t_{gy} = 20\ ^\circ\mathrm{C};\ c_{gy} = c_v = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}};\ t_k = 10\ ^\circ\mathrm{C};$

$t_j = 0\ ^\circ\mathrm{C};\ L_o = 3{,}35\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$

$Q_{fel} = Q_{le}.$

12.18. $m_{gy} = 0{,}3\ \mathrm{kg};\ t_{gy} = 20\ ^\circ\mathrm{C};\ c_{gy} = c_v = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}};\ t_k = 10\ ^\circ\mathrm{C};$

$t_j = 0\ ^\circ\mathrm{C};\ L_o = 3{,}35\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$

$Q_{fel} = Q_{le}.$

12.19. Az 50 g tömegű, -20 °C hőmérsékletű alumínium darabot 0 °C hőmérsékletű vízbe dobunk.
Mennyi 0 °C hőmérsékletű jég keletkezik?
(Az alumínium fajhője $900\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$, a jég olvadáshője $334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$.)

Megoldás:

12.19. $m_1 = 0{,}05$ kg; $t_1 = -20$ °C; $c_1 = 900\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$; $t = 0$ °C; $L_o = 3{,}34\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

A 0 °C-ra felmelegedő A darab $Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot (t - t_1) = 900$ J hőmennyiséget von el a víztől.

Ennek hatására megfagy $\underline{\underline{m_2}} = \frac{Q_1}{L_o} = \underline{\underline{2{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{kg víz.}}}$

$m_2 = 2{,}7$ g jég keletkezik.

12.20. Az 1 kg tömegű, -20 °C hőmérsékletű jéggel 500 kJ hőmennyiséget közlünk állandó, 10^5 Pa nyomáson termikusan zárt rendszerben.

a) Mi történik?

b) Ábrázoljuk a hőmérséklet-változást a felvett hőmennyiség függvényében!

(A jég fajhője $2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, olvadáshője $334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, a víz fajhője $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.)

Megoldás:

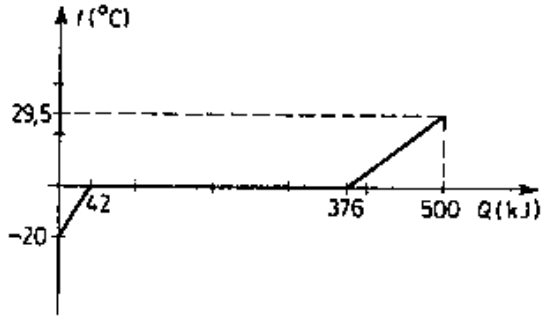
12.20. $m = 1$ kg; $t = -20$ °C; $Q = 5 \cdot 10^5$ J; $p = 10^5$ Pa; $c_j = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $L_o = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

a) A jég felmelegszik 0 °C-ra és megolvad: $Q_1 = c_j \cdot m \cdot (0 - t) + L_o \cdot m = 3{,}76 \cdot 10^5$ J hatására.

A maradék tovább melegíti a vizet: $Q - Q_1 = c_v \cdot m \cdot \Delta T$, ebből $\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{Q - Q_1}{c_v \cdot m} = \underline{\underline{29{,}5 \text{ K}}}$.

A víz végül 29,5 °C-ra melegszik.

b)



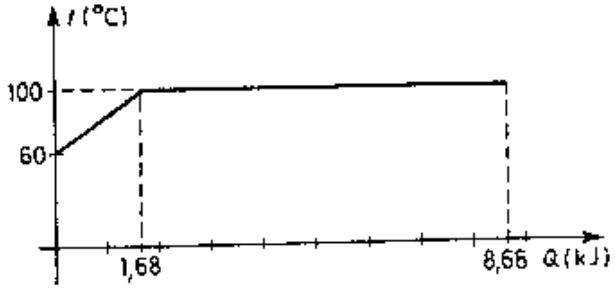
12.21. Mi fog történni, ha nyitott fazékban levő, 10 dm^3, 60 °C-os vízzel 8,68 MJ hőt közlünk?
Állításunkat igazoljuk számítással! (A forrást megelőző párolgást hanyagoljuk el!)
Ábrázoljuk a hőmérséklet-változást a közölt hőmennyiség függvényében!

$$\left(\text{A víz forráshője } 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}\text{, fajhője } 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.\right)$$

Megoldás:

12.21. $V = 10^{-2}$ m^3; $m = 10$ kg; $t = 60$ °C; $Q = 8{,}68 \cdot 10^6$ J; $L_f = 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

A víz $Q_1 = c \cdot m \cdot (100 - t) = 1{,}68 \cdot 10^6$ J hőfelvétellel éri el a forráspontot.
A maradék $\Delta Q = Q - Q_1 = 7 \cdot 10^6$ J hatására elforr $m' = \frac{\Delta Q}{L_f} = 3{,}1$ kg víz.
Végül $\underline{\underline{m - m' = 6{,}9 \text{ kg}}}$ 100 °C víz marad a fazékban.



12.22. Egy kísérletben 1 kg, $-5\,^\circ$C-os jéggel 723 kJ hőmennyiséget közlünk.

a) Hány °C hőmérsékletű víz lesz belőle?

b) Mennyi hőmennyiség kellett volna még ahhoz, hogy a víz forrni kezdjen?

c) Ábrázoljuk a hőmérséklet-változást a közölt hőmennyiség függvényében!

$\left(\text{A jég fajhője } 2100\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\text{, a jég olvadáshője } 334\cdot 10^3\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}\text{,}\right.$
$\left.\text{a víz fajhője } 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\text{.}\right)$

Megoldás:

12.22. $m = 1$ kg; $t = -5\,^\circ$C; $Q = 7{,}23\cdot 10^5$ J; $L_o = 3{,}34\cdot 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$;

$c_j = 2100\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$; $c_v = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

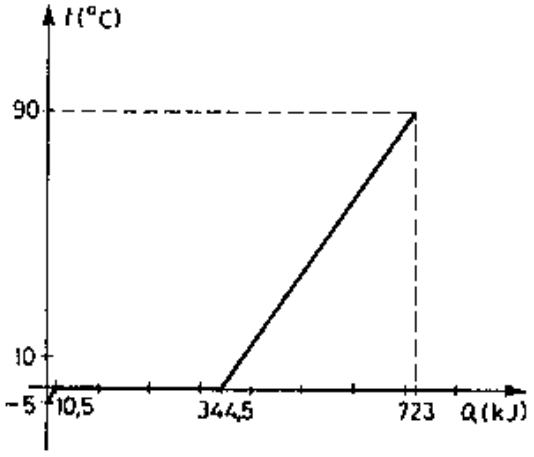
a) $Q = c_j\cdot m\cdot(0-t) + L_o\cdot m + c_v\cdot m\cdot\Delta t$.

$$\underline{t'} = \Delta t = \frac{Q - c_j\cdot m\cdot(0-t) - L_o\cdot m}{c_v\cdot m} = \underline{\underline{90{,}12\ ^\circ\text{C}}}.$$

A jégből 90 °C-os víz lesz.

b) A forrás megindulásához még

$\underline{Q'} = c_v\cdot m\cdot(100 - t') = \underline{\underline{42\,000\ \text{J}}}$ kellene.



12.23. Mekkora a víz párolgáshője 50 °C-on, ha a fajhője $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, a forráshője pedig 2 256 000 $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$?

Megoldás:

12.23. $m = 1$ kg; $t = 50$ °C; $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

A párolgáshő az egységnyi tömegű anyag adott hőmérsékleten történő teljes elpárologtatásához szükséges hőmennyiség. A megadott adatokkal számolva:

$$L_{p(50)} = c_v \cdot m \cdot (100 - t) + L_f \cdot m = 2{,}466 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

Ez a számított érték nagyobb, mint a ténylegesen mérhető érték (lásd a függvénytáblázatot). Alacsonyabb hőmérsékleten ugyanis a molekulák közepes kinetikus energiája kisebb, így a párolgásnál kiszabaduló, a közepesnél nagyobb energiájú molekulák energiája is kisebb, mint 100 °C-on. Ezért nagyobb a 100 °C-ra érvényes párolgási hőből az 50 °C-ra számított érték a valóságosnál.

13.1. Homorú vagy dombor tükröt használunk-e

a) borotválkozáshoz,
b) autóban visszapillantó tükörnek,
c) távcsőben,
d) fényszóróban,
e) vetítőlámpa mögött?
Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

13.1. **a)** Borotválkozáshoz alkalmas a homorú tükör, mert a tükör fókusztávolságán belül eső tárgyról egyenes állású, nagyított, látszólagos képet állít elő, és így a borotválkozó ember nagyítva láthatja benne az arcát.

b) Visszapillantó tükörként domború tükröt használunk, amely egyenes állású, látszólagos, kicsinyített képet mutat.

c) A távcsövekben homorú tükröt alkalmaznak.

d), **e)** Fényszóróban és vetítőlámpa mögött olyan homorú tükör van, amely a fókuszpontjában lévő fényforrás fényét gyakorlatilag párhuzamos sugarakban veri vissza.

13.2. Látszólagos vagy valódi képet látunk-e

a) mikroszkópba nézve,
b) távcsőbe nézve,
c) moziban,
d) nagyítón keresztül,
e) szemüvegen át,
f) fényképezőgép keresőjén át,
g) televízióban?
Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

13.2. **a)** a mikroszkóp látszólagos képet ad;

b) a távcső látszólagos képet hoz létre;

c) a moziban a kép ernyőn felfogható, tehát valódi;
d), **e)**, **f)** esetekben látszólagos kép keletkezik;

g) a televízió képernyőjén megjelenő kép valódi.

13.3. Mi a különbség a prizmával és az optikai ráccsal előállított színképek között?

Megoldás:

13.3. A prizma az összetett „fehér" fényt fénytöréssel bontja összetevőire. A különböző színű összetevőket különböző mértékben téríti el, mert a törésmutató függ a fény színétől.
Az optikai ráccsal előállított színkép a fényelhajlás következtében fellépő interferencia jelenség következménye.

13.4. *Válasszuk ki a fénysebességre vonatkozó állítások közül a* HELYESET!

A) A fény sebessége bármely közegben kisebb, mint vákuumban.

B) A fény mindenütt azonos – 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ – sebességgel terjed.

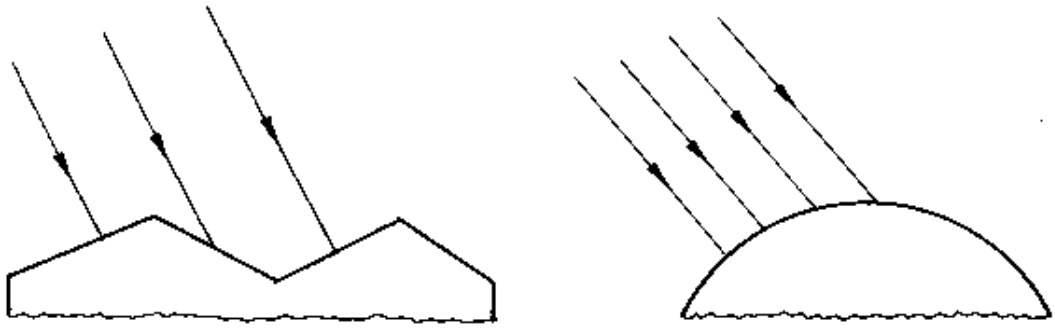
C) A fény sebessége bármely közegben nagyobb, mint vákuumban.

D) A fény terjedési sebessége vákuumban is függ a fény színétől.

Megoldás:

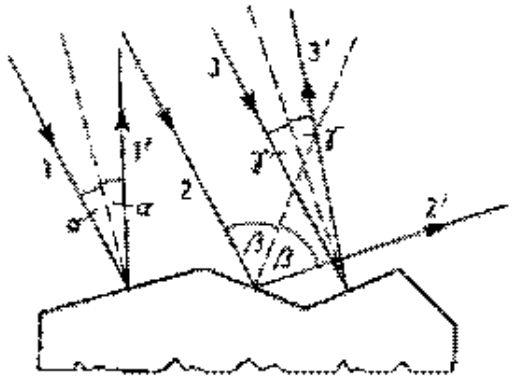
13.4. Helyes állítás: A. A fény sebessége anyagi közegben mindig kisebb, mint vákuumban. (Foucault, Michelson mérései, lásd még törésmutató táblázatokat)

13.5. Rajzoljuk meg, hogyan verődnek vissza az ábrán vázolt felületről a párhuzamosan beeső fénysugarak!

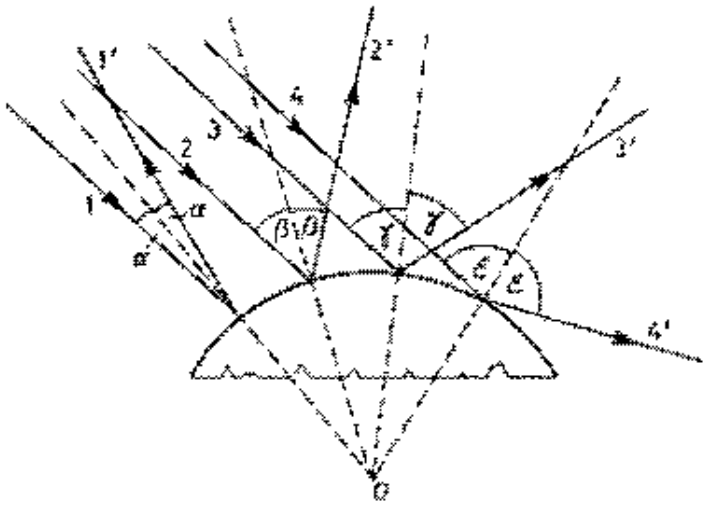


Megoldás:

13.5. a) Ábra:



b) Ábra:



13.6. *Válasszuk ki a* HELYES *feleletet!*

Milyen feltételek mellett jöhet létre fényinterferencia?

A) Ha két vagy több világító test fénye vetítődik ugyanarra az ernyőre.

B) Ha kiterjedt fényforrás (például fénycső) két, különböző pontjából kiinduló fénysugarak találkoznak.

C) Ha ugyanazon fényforrás ugyanazon pontjából kiinduló fénysugarak nem nagy – a koherenciahosszúságánál rövidebb – útkülönbségű utak megtétele után találkoznak.

D) Ha több, különböző színű fénysugarat vetítünk egy időben ugyanarra a helyre.

Megoldás:

13.6. Helyes állítás: C. Interferencia olyan fényhullámok találkozása során jöhet létre, amelyek azonos fényforrás ugyanazon pontjából indulnak ki, egyidőben ugyanabból az elemi eseményből származnak.
A feltételek szerint létrejöhet az interferencia.

13.7. *Jelöljük meg a* HELYES *választ!*

Egy keskeny rést egyenletesen világítunk meg párhuzamos fénysugarakkal. A megvilágító fény hullámhossza és a rés szélessége azonos nagyságrendű.
Milyen fényjelenséget tapasztalunk a rés mögött elhelyezett ernyőn?

A) A rés szélességénél sokkal szélesebb világos, de a szélek felé folyamatosan halványuló fénycsíkot kapunk.

B) A rés szélességénél sokkal szélesebb tartományban világos és sötét csíkok követik egymást. A csíkok távolsága állandó.

C) A rés szélességénél szélesebb tartományban sötét és világos csíkok váltakoznak. Középen sötét csík látható.

D) Középen mindig világos csík látható, ettől jobbra és balra sötét és világos csíkok váltakoznak csökkenő intenzitással.

Megoldás:

13.7. Helyes állítás: B, D. A rés mögötti tartományban az ernyőn világos és sötét csíkok váltakoznak, a középső csík világos, a csíkok egymástól való távolságát tekinthetjük állandónak.

13.8. *Jelöljük meg a* HELYES *választ! Indokoljuk választásunkat!*

A keskeny résen áthaladó, elhajlást szenvedő fénysugarak olyan irányokban fogják egymást kioltani, amely irányokban a rés két széléről induló párhuzamos sugarak között az útkülönbség:

A) a félhullámhossz páratlan számú többszöröse,
B) a félhullámhossz egész számú többszöröse,
C) a félhullámhossz páros számú többszöröse,
D) a hullámhossz egész számú többszöröse.

Megoldás:

13.8. Helyes állítás: C, D. A két egyenértékű helyes válasz a fényinterferencia feltételéből következik.

13.9. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) Szigorúan párhuzamos fénynyaláb nem állítható elő.

B) A fénysugár és a párhuzamos fénynyaláb a jelenségek leírását megkönnyítő hasznos modellek ugyanúgy, mint a mechanikában a pontszerű test.

C) A fényforrás elé tett elég keskeny résen áthaladó fény a rés mögött szigorúan párhuzamos fénynyaláb.

D) Egy fénylő pont helyének a megítélésében optikai csalódáshoz vezethet, ha a belőle kiinduló fénysugár nem homogén anyagon keresztül jut a szemünkbe.

Megoldás:

13.9. Hibás állítás: C. Ha a résre szigorúan párhuzamos fénynyaláb érkezik, a rés szélein jelentkező fényelhajlás miatt az átjutó nyaláb nem tekinthető párhuzamosnak.

13.10. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) Ha $n_{2,1} < 1$, akkor a második közeg optikailag ritkább, mint az első.

B) A fénysugarak „menete" a törésnél megfordítható.

C) Bármely két anyag közül optikailag is az a sűrűbb, amelyiknek nagyobb az anyagsűrűsége.

D) Az alkohol optikailag sűrűbb a víznél.

Megoldás:

13.10. Hibás állítás: C. Az anyagsűrűség és az optikai sűrűség között nincs egyértelmű kapcsolat. Lásd még a vonatkozó táblázatokat.

13.11. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) A homorú gömbtükör a kétszeres fókusztávolságon kívüli tárgyról kicsinyített, valódi képet ad.
B) A domború gömbtükör kicsinyített, valódi, egyenes állású képet ad a tárgyról.
C) Síktükörrel nem tudunk előállítani valódi képet.
D) A homorú lencse csak egyenes állású képet ad.

Megoldás:

13.11. Hibás állítás: B. A domború tükör által alkotott kép látszólagos.

13.12. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) A szórólencsével történő leképezés nagyítását negatívnak szokás tekinteni.

B) A gyűjtőlencséhez a kétszeres fókusztávolságnál nagyobb távolságtól közelített tárgy képe növekszik.

C) A gyűjtőlencse fókuszán belül elhelyezett tárgy képe nagyított.

D) A lencsék törőereje – dioptriája – csak a lencse anyagának törésmutatójától függ.

Megoldás:

13.12. Hibás állítás: B. A fókusztávolságban elhelyezett tárgyról nem keletkezik kép, a fókusztávolságon belül közelítve a tárgyat a lencséhez, a kapott látszólagos tárgy egyre kisebb lesz. D. A lencsék dioptria értéke a törésmutatón kívül még a lencsét határoló felületek r_1, és r_2 görbületi sugarától is függ a $D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ képlet szerint.

13.13. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) Egy lencsének a fókusztávolságán belül elhelyezett tárgyról nem szerkeszthetünk valódi képet.

B) Ha gyűjtőlencsével való leképezés esetén a $t > 2f$, akkor $k < 2f$.

C) Ha a nagyítás $N < 1$, akkor az optikai eszközzel szerkesztett kép látszólagos.

D) Ha a $k > 0$, akkor $N > 0$.

Megoldás:

13.13. Hibás állítás: C. Ha a nagyítás $N < 1$, akkor a kicsinyített kép valódi is lehet.

13.14. *Keressük meg a* HIBÁS *állítást!*

A) Ha $0 < \frac{T}{K} < 1$, akkor $k > t$.

B) Ha gyűjtőlencsével való leképezés esetén $t > 2f$, akkor $N > 1$.

C) A domború lencsén áthaladt fénynyaláb lehet szétttartó.

D) A lencsék fókusztávolsága függ a lencsét alkotó anyag optikai sűrűségétől.

Megoldás:

13.14. Hibás állítás: B. Gyűjtőlencsével való leképezés esetén, ha $t > 2f$, akkor a kép valódi és kicsinyített, tehát $N < 1$.

13.15. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Milyen körülmények között jön létre fényvisszaverődés?

A) Csak akkor, ha a fénysugarak szabályos, sima felületre esnek.

B) Általában, ha fény esik valamelyik test vagy közeg határfelületére.

C) Akkor nem, ha a fény átlátszó közeg határfelületére érkezik.

D) A felületre merőlegesen beeső fénysugarak egy része még az „átlátszó" testek felületéről is visszaverődik.

Megoldás:

13.15. Helyes állítás: B. A fényvisszaverődés a test, vagy közeg határfelületén következik be.
Helyes állítás: D. A határfelületet merőlegesen érő fénysugarak egy része is visszaverődik.

13.16. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Milyen jelenséget tapasztalunk, ha a levegőben haladó fénysugár nyugvó víz felületére érkezik?

A) A fénysugár egy része a vízbe hatol.

B) A fénysugár teljes egészében a vízbe hatol.

C) A fénysugár egy része a határfelületen visszaverődik.

D) A víz felületén nem jön létre visszaverődés.

Megoldás:

13.16. Hibás állítás: B. A víz határfelületén létrejön a fényvisszaverődés és a fénytörés is, tehát a fény egy része visszaverődik, egy része megtörik és behatol a vízbe, ebből következik, hogy a D állítás is hibás.

13.17. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Mi történik a fénysugárral, ha vízből jut a levegőbe?

A) A fénysugár részben vagy teljesen visszaverődik a határfelületen.

B) A fénysugár egy része mindig kijut a levegőre.

C) A fénysugár törési szöge kisebb lesz, mint a beesés szöge.

D) Ha merőlegesen éri a határfelületet, a továbbhaladó fénysugár nem változtatja meg a haladási irányát!

Megoldás:

13.17. Hibás állítás: B. Bekövetkezhet a teljes visszaverődés. Ennek az a feltétele, hogy a beesés szöge nagyobb legyen, mint a határszög.
Hibás állítás: C. A fénysugár az optikailag sűrűbb közegből halad az optikailag ritkább közeg felé. Ebben az esetben a törés szöge nagyobb, mint a beesés szöge.

13.18. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Fénysugár jutott az 1. közegből a 2. közegbe, és $n_{2,1} > 1$.

A) A beesési szög szinusza nagyobb, mint a törési szög szinusza.

B) A fény terjedési sebessége törés után kisebb, mint törés előtt.

C) A megtört sugár a beesési merőlegessel kisebb szöget zár be, mint a beeső fénysugár.

D) Az első közeg optikailag ritkább, mint a második közeg.

Megoldás:

13.18. A, B, C, D állítások mindegyike helyes. A válaszok magyarázhatók a fény törése során megismert törvényszerűségekkel.

13.19. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az alábbiak közül melyik jelenség bizonyítja, hogy az anyagok törésmutatója függ a fény színétől?

A) A délibáb,

B) a naplemente,

C) az egy részéig vízbe merülő bot bizonyos irányokból töröttnek látszik,

D) a prizmákkal előállítható színképek.

Megoldás:

13.19. Helyes állítás: D. A prizma a különböző színű, ugyanakkora szögben beeső fénysugarakat különböző mértékben töri meg. Ugyanezt támasztja alá, hogy az összetett fehér fényt a prizma színeire bontja.

13.20. *Válasszuk ki a* HELYES *válaszokat!*

Fénysugár esik két, homogén, „átlátszó" közeg határfelületére. Az 1. közeg optikailag sűrűbb, mint a 2. közeg.

Az alábbiak közül melyik esetben jön létre a két közeg határfelületén teljes visszaverődés?

A) Ha a fénysugár a 2. közegből az 1. közeg felé halad a teljes visszaverődés határszögénél kisebb beesési szög alatt.

B) Ha a fénysugár az 1. közegből a teljes visszaverődés határszögénél kisebb beesési szög alatt halad a 2. közeg felé.

C) Ha a fénysugár a teljes visszaverődés határszögénél nagyobb beesési szögben halad az 1. közegben a 2. közeg felé.

D) Ha a fénysugár a 2. közegből a teljes visszaverődés határszögénél nagyobb beesési szöggel halad az 1. közeg felé.

Megoldás:

13.20. Helyes állítás: C. Teljes visszaverődés akkor következik be, ha a fénysugár optikailag sűrűbb közegből halad az optikailag ritkább közeg felé a határszögnél nagyobb beesési szög alatt.

13.21. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az alábbiak közül melyek azok az esetek, amelyekben az interferenciaképes – koherens – fényhullámok erősíteni fogják egymást?

A) Ha útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse.

B) Ha útkülönbségük a félhullámhossz egész számú többszöröse.

C) Ha útkülönbségük a félhullámhossz páros számú többszöröse.

D) Ha útkülönbségük a félhullámhossz páratlan számú többszöröse.

Megoldás:

13.21. Helyes állítás: A. A fényhullámok azonos fázisban találkoznak, erősítik egymást.

Helyes állítás: C. A félhullámok páros számú többszöröse feltétel egyenértékű a hullámhossz egész számú többszöröse esettel, a megoldás ugyanaz.

13.22. *Válasszuk ki a* HELYES *állítások!*

A fény hullámtermészetével magyarázható jelenségek:

A) a fényinterferencia,

B) a fényelhajlás,

C) a fénypolarizáció,

D) a fénytörés.

Megoldás:

13.22. A, B, C, D állítások mindegyike helyes. A fény hullámtermészetére utaló jelenségek: a fényinterferencia, a fényelhajlás, a fénypolarizáció. A fénytörés is magyarázható a fényhullám értelmezés alapján, tehát mindegyik állítás helyes.

13.23. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Melyik optikai eszköz adhat valódi tárgyról virtuális képet?

A) A homorú gömbtükör.

B) A domború gömbtükör.

C) A domború lencse.

D) A homorú lencse.

Megoldás:

13.23. A, B, C, D állítások mindegyike helyes. Az optikai eszközök képszerkesztési törvényszerűségeinek ismeretében belátható, hogy mindegyik eszköz adhat valódi tárgyról virtuális képet, tehát mindegyik állítás helyes.

13.24. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Melyik optikai leképezésnél lesz a képtávolság is és a fókusztávolság is negatív?

A) Ha domború lencsével alkotunk képet a fókusztávolságon belüli tárgyról.

B) A domború gömbtükörrel megvalósított képalkotásnál.

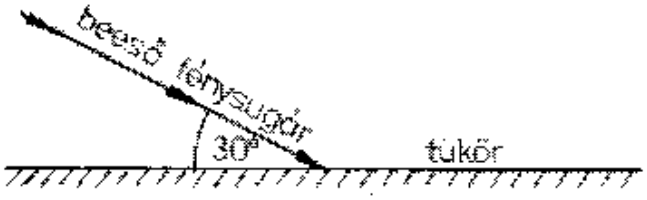
C) Ha homorú tükörrel alkotunk képet a fókuszon belüli tárgyról.

D) A homorú lencsével történő optikai leképezésnél.

Megoldás:

13.24. Hibás állítás: A. A gyűjtőlencse fókusztávolsága pozitív, a képtávolság ennél a képszerkesztésnél negatív.
Hibás állítás: C. A homorú tükör fókusztávolsága pozitív.

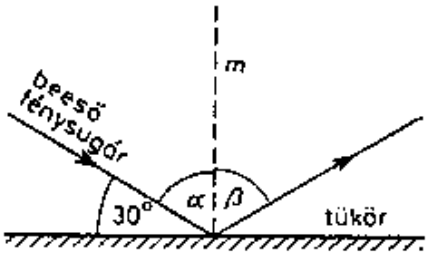
13.25. *Jelöljük be az alábbi ábrán* a beesési merőlegest, a visszavert fénysugarat, a beesési szöget (α-val), a visszaverődési szöget (β-val)!



Mekkora szöget zár be a beeső és a visszavert fénysugár, ha az ábrán megadott szög 30°?

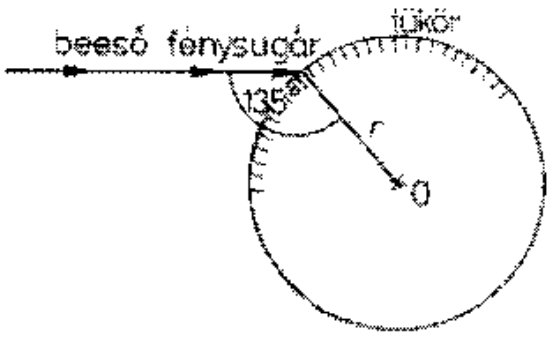
Megoldás:

13.25. A beeső és a visszavert fénysugár által bezárt szög $\alpha+\beta=120°$.



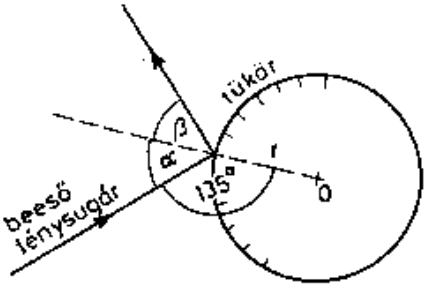
13.26. *Jelöljük be az alábbi ábrán* a beesési merőlegest, a visszavert fénysugarat, a beesési szöget (α-val), a visszaverődési szöget (β-val)!

Mekkora szöget zár be a beeső és a visszavert fénysugár, ha ismerjük az ábrán bejelölt szöget?



Megoldás:

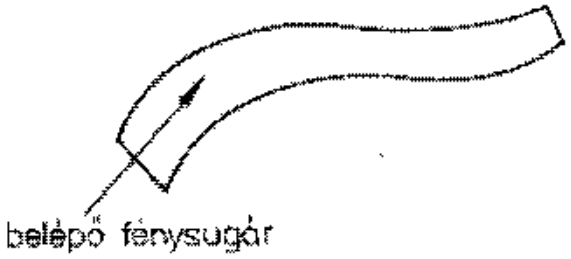
13.26. $\alpha = \beta = 45°$; $\alpha + \beta = 90°$. A tükör elemi felületdarabját tekinthetjük a gömb sugarára merőleges síknak.



13.27. Gyakran használják az orvosi diagnosztikában a belső szervek vizsgálatához a jól hajlítható, fényvezető szálak kötegéből álló száloptikát.

a) Hogyan halad a szál egyik végén belépő fénysugár a szál belsejében?

b) Vázoljuk fel a belépő fénysugár útját!



c) Lehetőleg mekkora törésmutatójú anyagból készüljön a szál?

Megoldás:

13.27. Az eszköz egyik véglapján belépő fénysugár sorozatos teljes visszaverődés után jut el a másik véglapig.

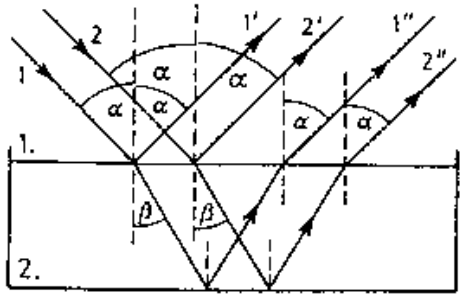


Lehetőleg nagy törésmutatójú anyagból kell készíteni, mert ilyenkor nagy a teljes visszaverődés határszöge, és így a fényvezető szál erősebb meghajlása esetén sem lép ki a fénysugár.

13.28. A vízzel teli üvegkád aljára síktükröt helyezünk, majd párhuzamos fénysugarakat bocsátunk a víz felszínére $0° < \alpha < 90°$ terjedő beesési szög alatt.
Rajzoljuk le, hogy miként haladnak a fénysugarak a vízfelszín elérése után!

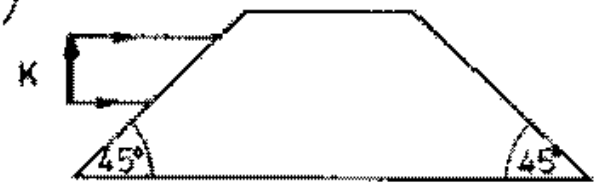
Megoldás:

13.28. A fénysugarak egy része az *1.* felületen visszaverődik, más része megtörik, és behatol a vízbe, majd a tükörről a *2.* felületen visszaverődik, és újbóli törés után lép ki a vízből. A kilépés helyén is van az *1.* felületről visszaverődés, de ezt már az ábrán nem tüntettük fel.



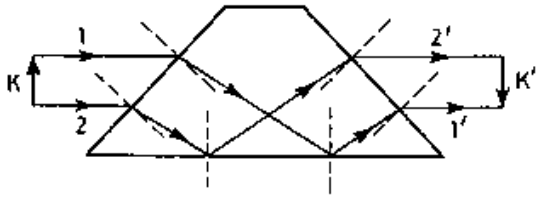
13.29. *Rajzoljuk le*, hogy miként fordítja meg a K optikai képet az ábrán látható üvegprizma!

(A prizma anyagának a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$.)

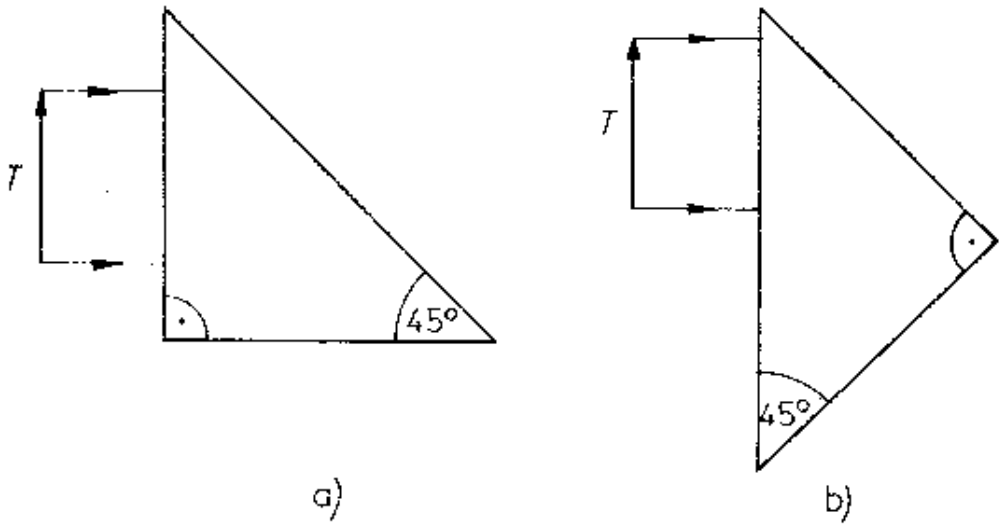


Megoldás:

13.29. Az eszköz a képfordító prizma. A megadott adatok esetében a prizma alapfelületén teljes visszaverődés jelentkezik.



13.30. A fénysugarakat teljesen visszaverő üvegprizmákat gyakran alkalmazzák optikai eszközökben a kép helyzetének a megváltoztatására.



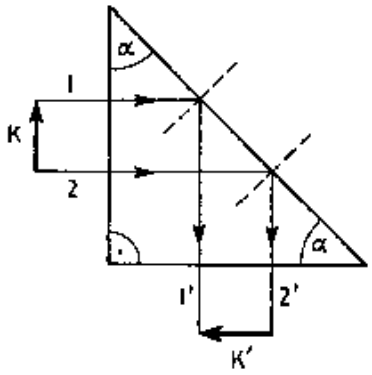
A fénysugarak további menetének a megrajzolása után állapítsuk meg, hogy az ábrán látható prizmák milyen változást idézhetnek elő a kép helyzetében!

(A prizma anyagának a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$.)

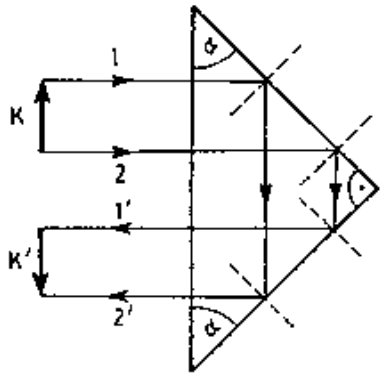
Megoldás:

13.30. a) A kép 90°-kal fordul el.

b) A prizma ebben a helyzetben 180°-os képfordítást végez.



a)



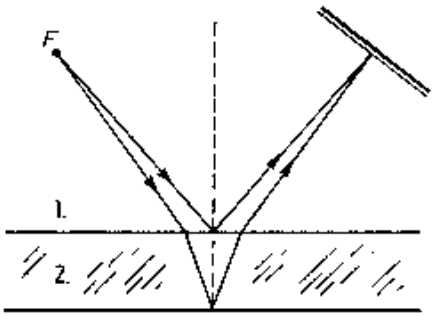
b)

13.31. *Rajzoljuk le*, hogyan hozható létre fényinterferencia

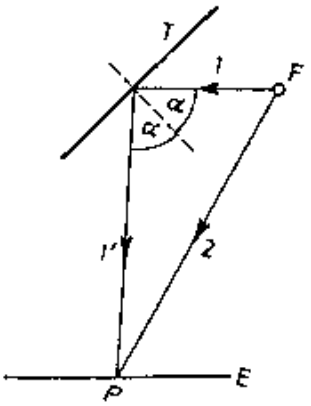
a) egy planparalel üveglemezzel,
b) egy síktükörrel,
c) a Fresnel-féle kettőstükörrel,
d) a Michelson–Morley-féle interferométerrel!

Megoldás:

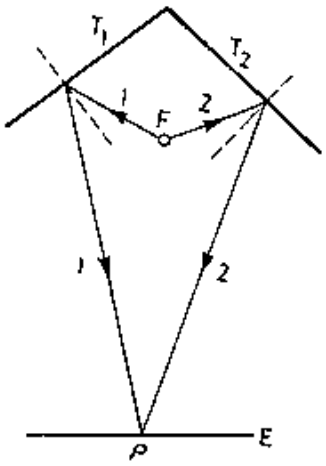
13.31. a) Az F fényforrásnak az 1. felületről visszaverődő, illetve az *1.* felületen megtörő, a *2.* felületen visszaverődő, majd újból megtörő fénysugarainak találkozásából jön létre az interferencia. Az útkülönbségük annyi, amennyit a törést szenvedő fénysugarak a lemez belsejében megtesznek.



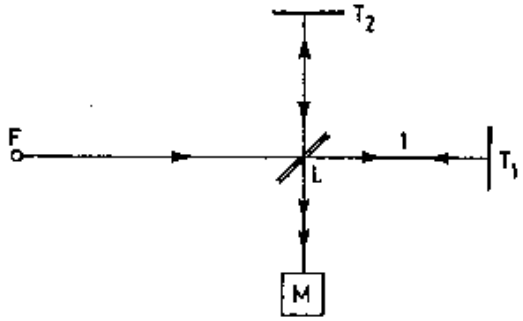
b) Az F fényforrásból kiinduló fénysugarak közül az E ernyőre közvetlenül érkező, illetve az ernyőre a T tükörről visszaverődő sugarak között jön létre az interferencia.



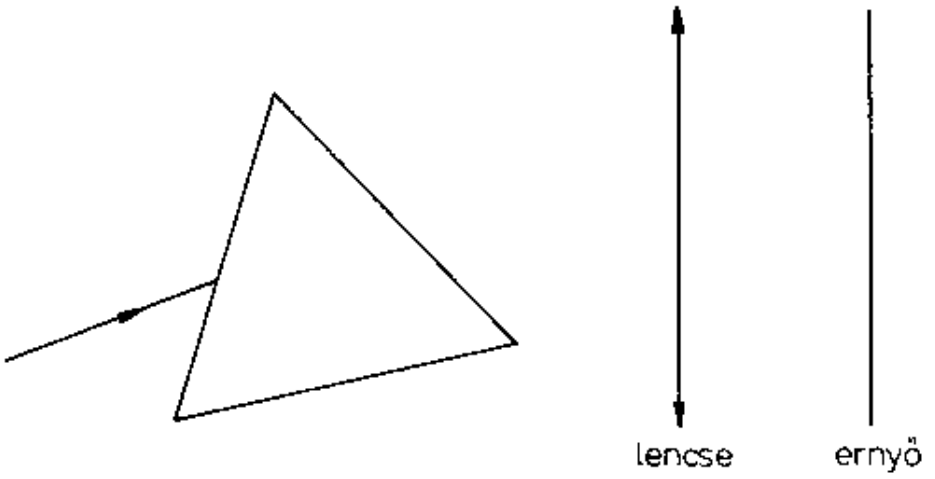
c) A kettős tükör az F fényforrásból induló sugarakat veri vissza ugyanabba a pontba. A tükrök beállításával érhető el az interferencia létrejöttéhez szükséges útkülönbség az E ernyőnél.



A Michelson–Morley interferométerben a fénysugár egy része átjut a félig áteresztő L tükrön, majd a T_1 és L tükrökön történő visszaverődés után jut az E ernyőhöz, míg a másik része az L és T_2 tükrökön való visszaverődés, majd az L tükrön való áthaladás után jut az ernyőre. A T_1 és T_2 tükrök helyzetének változtatásával lehet változtatni az útkülönbséget, és létre lehet hozni az interferenciát.



13.32. Az ablakon keresztül keskeny résen át beszűrődő erős napfény útjába egy prizmát helyezünk, majd a prizmán átjutó fénysugarakat gyűjtőlencsével egyesítve egy ernyőre bocsátjuk az ábra szerint.



a) Milyen fényjelenséget figyelhetünk meg a prizma és a lencse között?
b) Milyen színű lesz az ernyőn felfogható fényfolt?
c) Változik-e az ernyőn felfogható fényfolt színe, ha a prizmán átjutó fénysugarak egy részét leárnyékoljuk?
d) Egészítsük ki a rajzot!

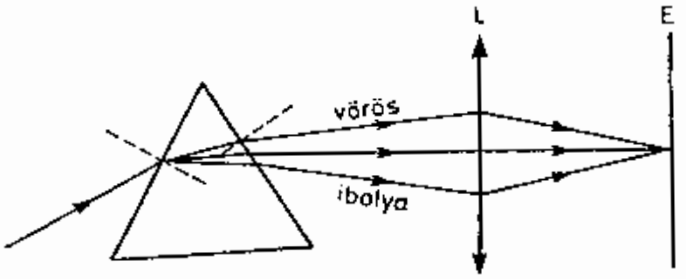
Megoldás:

13.32. a) A prizma fénytörés révén az összetett fehér fényt összetevőire bontja.

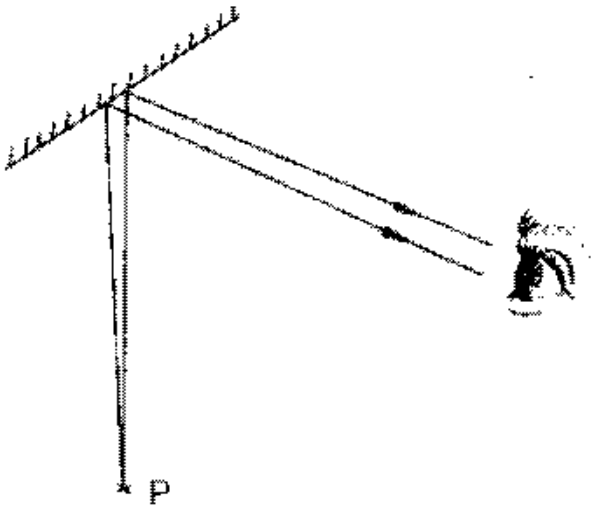
b) A színes fénysugarakat gyűjtőlencsével ismét fehér, az ernyőn felfogható fényfolttá tudjuk egyesíteni.

c) A feltételek szerint változik a fényfolt színe. A hiányzó fény színének kiegészítő színe jelenik meg az ernyőn.

d) Ábra:

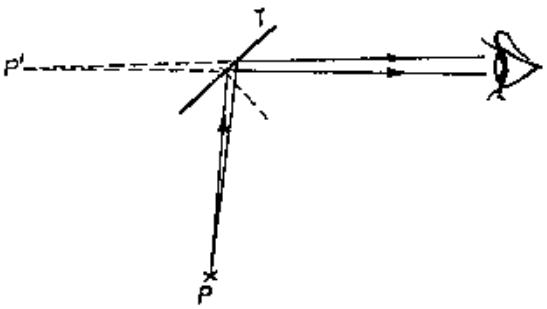


13.33. A *P* világító pontból kiinduló fénysugarak sík tükörről való visszaverődés után jutnak el a szemünkbe az ábrán látható módon. Hol látjuk a *P* pont képét?



Megoldás:

13.33. A *P* pont képét a tükörről visszaverődő, szemünkbe jutó fénysugarak képzeletbeli metszéspontjában „látjuk".



13.34. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A monokromatikus fény terjedési sebessége megváltozik, ha optikailag új közegbe jut.

B) A monokromatikus fény hullámhossza és terjedési sebessége is megváltozik, ha optikailag új közegbe jut.

C) A monokromatikus fény frekvenciája és terjedési sebessége is megváltozik, ha optikailag új közegbe jut.

D) A monokromatikus fény frekvenciája és hullámhossza is megváltozik, ha optikailag új közegbe jut.

Megoldás:

13.34. Helyes állítások: A és B.

13.35. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A fény bármely közegben mindig egyenes vonalban terjed.
B) A fény homogén közegben egyenes vonalban terjed.
C) A fény két pont között olyan útvonalon terjed, amelynek megtétele a lehető legrövidebb ideig tart.
D) A fény két pont között olyan útvonalon terjed minden közegben, amely útvonal a lehető legrövidebb.

Megoldás:

13.35. Helyes állítások: B és C.

13.36. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A beesési szög a beeső sugár és a beesési merőleges által bezárt szög.
B) A beesési szög egyenlő a beeső sugár és a visszavert sugár által bezárt szög felével.
C) A beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel.
D) A beesési merőleges 90°-os szöget zár be a beeső és a visszavert fénysugár által meghatározott síkkal.

Megoldás:

13.36. Helyes állítások: A, B, C.

13.37. *Válasszuk ki a* mindkét oldalán domború vékony lencsére vonatkozó *állítások közül a* HIBÁSAKAT!

A) A domború lencse a ráeső fénysugarakat egy pontban, a fókuszpontban egyesíti, ha a környezete optikailag ritkább, mint a lencse.

B) A domború lencse a ráeső párhuzamos fénysugarakat egy pontban, a fókuszpontban egyesíti, ha a környezete optikailag ritkább, mint a lencse.

C) A domború lencse az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarakat a fókuszpontban egyesíti, ha a környezete optikailag sűrűbb, mint a lencse.

D) A domború lencse a párhuzamos fénysugarakat egy pontban egyesíti, ha a környezete optikailag ritkább, mint a lencse.

E) A domború lencse az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarakat a fókuszpontban egyesíti, ha a környezete optikailag ritkább, mint a lencse.

Megoldás:

13.37. Hibás állítások: A, B, C.

13.38. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

A) Valódi tárgynál és valódi képnél a képtávolság mindig pozitív.

B) Valódi tárgynál a tárgytávolság mindig pozitív.

C) A képtávolság gyűjtőlencsénél mindig pozitív, szórólencsénél mindig negatív.

D) Látszólagos kép csak szórólencsével történő leképezésnél keletkezik.

E) A tárgy egy pontjáról kiinduló, majd megtört, vagy visszavert sugarak tényleges metszéspontjában valódi kép keletkezik.

Megoldás:

13.38. Hibás állítás: C és D. Gyűjtőlencsével szerkesztett kép is lehet látszólagos, amelyhez negatív képtávolság tartozik.

13.39. Két síktükör hajlásszöge 60°. A metszésvonalukra merőleges síkban az egyik tükörre 45°-os beesési szög alatt esik egy fénysugár.

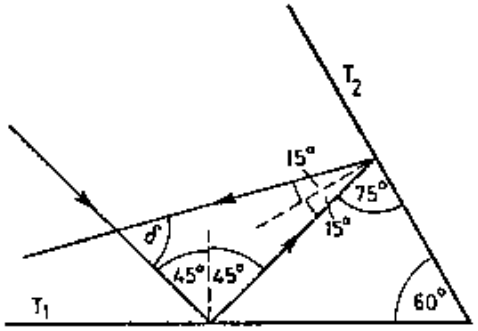
a) Mekkora szöget zár be a két tükrön visszaverődő fénysugár az eredeti fénysugárral?

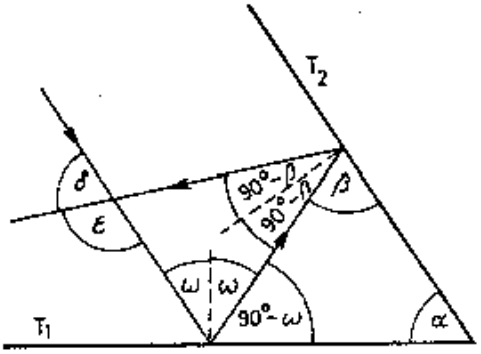
b) Fejezzük ki a tükörre beeső és az onnan visszaverődő fénysugarak hajlásszögét arra az esetre is, ha a tükrök hajlásszöge és a beesés szöge is tetszőleges hegyesszög!

Megoldás:

13.39. **a)** $\delta + 2 \cdot 45° + 2 \cdot 15° = 180°$; $\underline{\delta = 60°}$.

b) A beeső és a visszavert sugarak hajlásszögét δ-val, a tükrök hajlásszögét ε-nal, a visszaverődések szögeit pedig α-val, és β-val jelölve a két keletkezett háromszögre felírható: $\delta + 2\alpha + 2\beta = 180°$, illetve $\varepsilon + (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180°$.
Az utóbbiból $\varepsilon = \alpha + \beta$ adódik, amit az első egyenletbe helyettesítve kapjuk:
$\underline{\delta + 2\varepsilon = 180°}$, azaz $\underline{\delta = 180° - 2\varepsilon}$.





13.40. Az F fényforrásból fénysugarakat bocsátunk egy síktükörre, majd a tükröt a beesési síkra merőleges tengely mentén elfordítjuk α szöggel.
Mekkora szöggel fordul el a visszaverődő fénysugár?

Megoldás:

13.40. A tükröt α szöggel elfordítva a beesési szög és így a visszaverődési szög is α-val növekszik, tehát a visszavert fénysugár összesen 2α szöggel fordul el.

13.41. Egy siktükör középpontjáról visszaverődő fénysugár merőlegesen érkezik a felfogó ernyőre. A tükröt a beesés síkjára merőleges tengely körül elfordítjuk, miközben a visszaverődő fénysugár által keltett fényfolt 5 cm-rel mozdul el az ernyőn. A tükör középpontja és az ernyő távolsága 2 m. Mekkora szöggel fordítottuk el a tükröt?

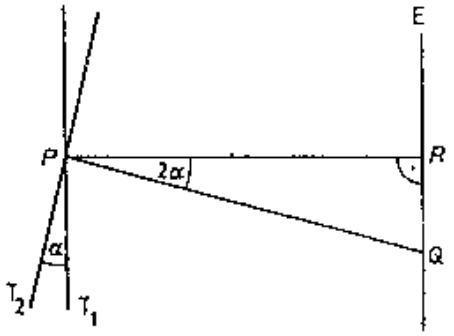
Megoldás:

13.41. PRQ háromszög derékszögű, az előző feladat szerint a P pontból visszavert fénysugár 2α szöggel fordult el.

$PR = 2$ m, $RQ = 0{,}05$ m.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{RQ}{PR} = 0{,}025; \quad 2\alpha = 1{,}43°;$$

$\underline{\underline{\alpha = 0{,}71°}}$.

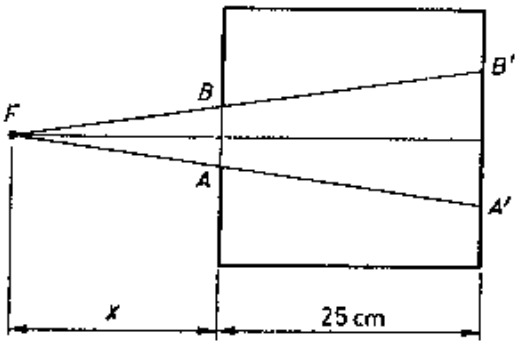


13.42. 25 cm élhosszúságú, belül üres kocka egyik lapjának közepére 0,5 cm oldalú, négyzet alakú nyílást vágunk. Ha pontszerű fényforrással megvilágítjuk, a nyílás képe a szemközti fal közepén 4 cm^2 területű négyzet.
Hol helyezkedik el a pontszerű fényforrás?

Megoldás:

13.42. $x = 8{,}33$ cm távolságban van a fényforrás a réstől.

FAB háromszög hasonló az $FA'B'$ háromszöghöz, ahol $AB = 0{,}5$ cm és $A'B' = 2$ cm, így $\frac{x}{x+25} = \frac{0{,}5}{2}$; $x = 8{,}33$ cm.



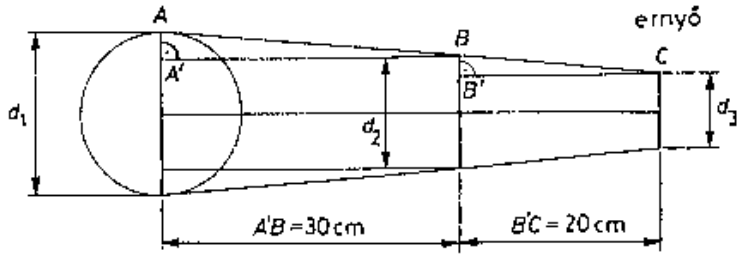
13.43. Egy 5 cm átmérőjű, gömb alakú fényforrás elé, középpontjától 30 cm távolságra helyezünk el egy 4 cm átmérőjű körlapot.

a) Mekkora lesz a körlap síkjával párhuzamos, attól 20 cm távolságra levő felfogó ernyőn a teljes árnyékban lévő terület átmérője?

b) Mekkora a félárnyék átmérője?

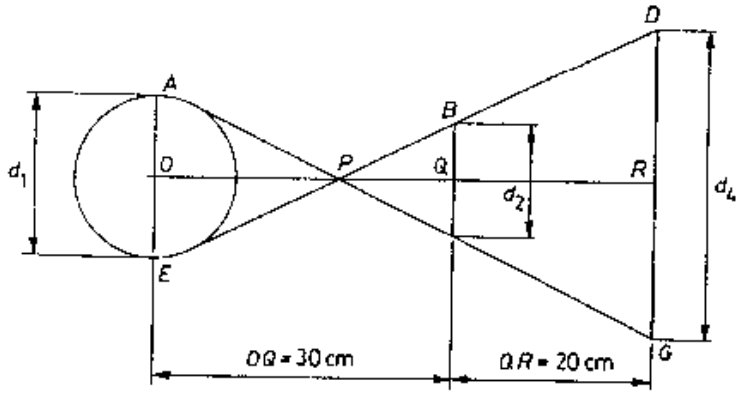
Megoldás:

13.43. a) $d_1 = 5$ cm; $d_2 = 4$ cm.



Ha a fényforrás átmérőjét $d_1 = 5$ cm, a körlap átmérőjét $d_2 = 4$ cm és a teljes árnyék átmérőjét d_3 jelöli, akkor az ábrán látható $ABA' \triangle \sim BCB' \triangle$ hasonlóságából következik, hogy $\frac{BB'}{AA'} = \frac{A'B}{B'C}$, ebből $BB' = 0{,}33$ cm és $d_3 = d_2 - 2BB' = 3{,}33$ cm.

$AA' = \frac{d_1 - d_2}{2} = 0{,}5$ cm.



b) A félárnyék átmérőjét d_4-gyel jelölve az ábráról látható, hogy $PBF \triangle \sim PAE \triangle \sim PDG \triangle$. A hasonlóság alapján $\frac{PQ}{PO} = \frac{d_2}{d_1}$, amiből

$PQ = \frac{40}{3}$ cm, mivel $PQ + PO = OQ = 30$ cm. Másrészt, $\frac{PQ}{PR} = \frac{d_2}{d_4}$, amiből $\underline{\underline{d_4 = 10 \text{ cm}}}$.

13.44. A Nap fénye a Plutóra 40-szer annyi idő alatt érkezik el, mint a Földre.
Mekkora a Plutónak és a Földnek a Naptól mért távolsága, ha a Nap fénye 500 s alatt érkezik hozzánk?

Megoldás:

13.44. $t_F = 5 \cdot 10^2$ s; $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t_P = 40 \cdot 5 \cdot 10^2$ s $= 2 \cdot 10^4$ s.

Behelyettesítés után: $\underline{\underline{d_{F,N} = c \cdot t_F = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}}$;

$\underline{\underline{d_{P,N} = d \cdot t_P = d \cdot t_P = 6 \cdot 10^{12}\ \text{m}}}$.

13.45. Egy $4 \cdot 10^{14}$ Hz frekvenciájú fény üvegben halad. Mennyi a frekvenciája, terjedési sebessége, hullámhossza, ha a fény vákuumban $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed, és ha az üveg levegőhöz viszonyított törésmutatója 1,5?

Megoldás:

13.45. $f = 4 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$; $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $n_{\text{ü,l}} = 1{,}5$.

$n_{\text{ü,l}} = \frac{c}{c_{\text{ü}}}$; $c_{\text{ü}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. $\lambda_{\text{ü}} = \frac{c_{\text{ü}}}{f} = 5 \cdot 10^{-7}$ m.

A fény frekvenciája nem változik.

13.46. Mekkora a levegőben a 600 nm hullámhosszúságú fény frekvenciája? Mekkora ennek a fénynek a terjedési sebessége és a hullámhossza benzolban, ha a benzolnak a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$?

Megoldás:

13.46. $\lambda = 600\ \text{nm} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$; $c_{lev} = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $n_{b,l} = 1{,}5$.

Az előző feladat meggondolásai alapján a fény frekvenciája levegőben $\underline{\underline{f_l}} = \frac{c_{lev}}{\lambda} = \underline{\underline{5 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{\text{s}}}}$; terjedési sebessége a benzolban: $\underline{\underline{c_b}} = \frac{c_{lev}}{c_{b,l}} = \underline{\underline{2 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

13.47. A vörös fény vízben $2{,}25 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel terjed.

a) Mekkora a víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója erre a fényre?

b) Mekkora sebességgel halad a fénysugár abban az anyagban, amelynek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,5?

Megoldás:

13.47. $c_{\text{víz}} = 2{,}25 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $c_{\text{lev}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A víznek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója: $\underline{\underline{n_{\text{v,l}} = \frac{c_{\text{l}}}{c_{\text{v}}}}} = \underline{\underline{1{,}33}}$.

b) Mivel $n_{2,1} = \frac{c_1}{c_2} = 1{,}5$; $\underline{\underline{c_2 = \frac{c_1}{n_{2,1}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

13.48. A víz felszínére benzolt rétegezünk. A benzol levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,47, a vízé 1,33.

a) Mi történik a fénysugárral a benzol és víz határfelületén?

b) Mekkora a víz benzolra vonatkoztatott törésmutatója?

Megoldás:

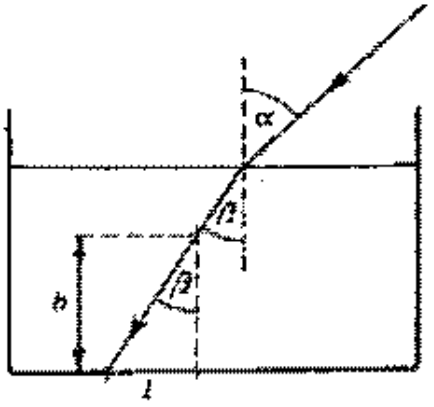
13.48. a) A víz törésmutatója kisebb, mint a benzolé, tehát optikailag ritkább közeg. Ezért ha a vízből halad benzolba a fénysugár, akkor a beesés szöge nagyobb, mint a törési szög, a fénysugár behatol a vízbe.

b) $n_{b,l} = 1{,}47$; $n_{v,l} = 1{,}33$. $\underline{\underline{n_{v,b}}} = \frac{n_{v,l}}{n_{b,l}} = \underline{\underline{0{,}9}}$.

13.49. A vízzel telt medence vízszintes alján 1,5 m magas függőleges oszlop áll, amelyet a víz ellep.
Mekkora az oszlop árnyéka a medence fenekén, ha a napsugarak 50°-os beesési szöggel érik a vízfelszínt?

Megoldás:

13.49. $h = 1{,}5$ m; $\alpha = 50°$; $n_{v,l} = \frac{4}{3}$.



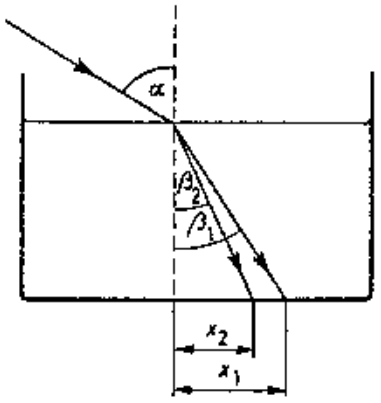
Az ábráról: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{v,l}$; $\beta = 35{,}1°$.

$l = h \cdot \operatorname{tg}\beta$; $\underline{\underline{l = 1{,}05 \text{ m}}}$.

13.50. Egy üvegkádat 25 cm-es magasságig töltöttünk fel szénkéneggel. A folyadék felületére 60°-os beesési szöggel érkezik a napfényből kiválasztott keskeny fénynyaláb.
Egymástól mekkora távolságra éri a színkép vörös és ibolya színe a kád alját, ha a szénkéneg törésmutatója a napfény vörös színére 1,609, az ibolyára pedig 1,699?

Megoldás:

13.50. $h = 0{,}25$ m; $\alpha = 60°$; $n_{sz,v} = 1{,}609$; $n_{sz,i} = 1{,}699$.
A törési szögek kiszámíthatóak a törési törvény alapján.

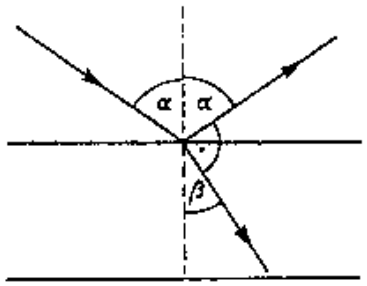


$\beta_1 = 32{,}56°$; $\beta_2 = 30{,}64°$; $x_1 = h \cdot \operatorname{tg}\beta_1 =$
$= 0{,}159$ m; $x_2 = h \cdot \operatorname{tg}\beta_2 = 0{,}148$ m.
$\underline{\Delta x} = x_1 - x_2 = 0{,}011$ m $= \underline{\underline{1{,}1 \text{ cm}}}$.

13.51. Az üvegből készített planparalel lemezre eső fénysugár megtört és visszaverődött része által bezárt szög 90°. Az üveg levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,5. Mekkora az üveglemezre érkező fénysugár beesési szöge?

Megoldás:

13.51. $n_{ü,l} = 1{,}5$. Az ábráról leolvasva, a fénytörés törvényeit felhasználva: $\beta = 90° - \alpha$; $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$



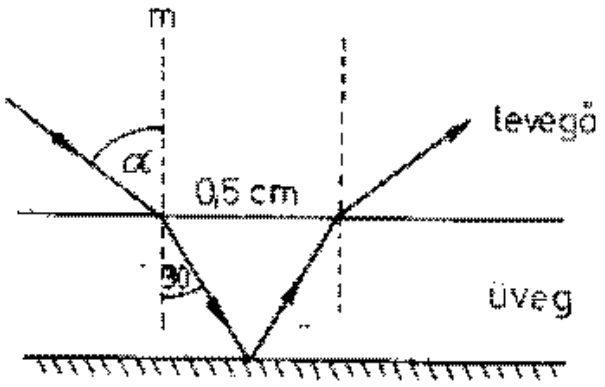
$= \operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$; $\underline{\underline{\alpha = 56{,}3°}}$.

13.52. A foncsorozott üvegből készült síktükör külső felületére érkező fénysugár törési szöge az üvegben 30°.

a) Mekkora a tükörre érkező és az abból kilépő fénysugarak által bezárt szög?

b) Mekkora a tükör üvegének a vastagsága, ha a fénysugár be-, illetve kilépésének az iránya 0,5 cm-re van egymástól?

Az üveg levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,5.

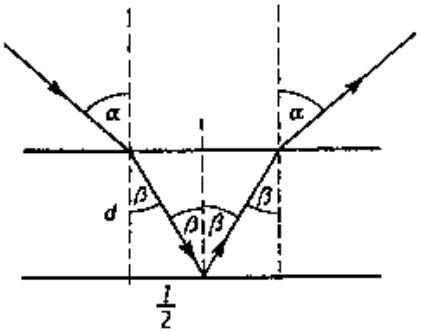


13.52. feladathoz

Megoldás:

13.52. $\beta = 30°$; $l = 0{,}5$ cm.

A fénytörés, és a fényvisszaverődés törvényeit alkalmazva látható, hogy a belépő és a kilépő fénysugarak ugyanakkora szöget zárnak be a beesési merőlegessel.



a) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 30°} = n_{ü,l}$; $\alpha = 48{,}59°$, a fénysugarak egyeneseinek szöge $2\alpha = 97{,}18°$.

b) A tükör üvegének vastagságára fennáll: $d = \dfrac{l}{2\,\mathrm{tg}\,30°}$.

$d = 0{,}43$ cm.

13.53. A 20 cm magas, hengeres edény alaplapjának a középpontjában pontszerű fényforrás világít. Az edényt félig töltjük folyadékkal, amelynek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$. A fényforrásból kiinduló fénysugarak törés után az edény felső pereménél az alkotókkal 45°-os szöget zárnak be.

Mekkora az edény alaplapjának sugara?

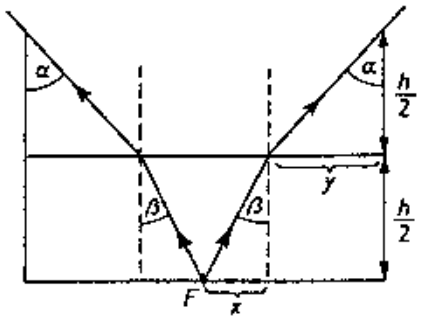
Megoldás:

13.53. $h = 20$ cm; $n_{v,l} = \frac{3}{2}$; $\alpha = 45°$.

A fénytörés törvénye szerint $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{v,l}}$;

$\underline{\underline{\beta = 28{,}13°}}$.

$x = \frac{h}{2}\operatorname{tg}\beta = 5{,}35$ cm. Az ábráról leolvasható: $y = 10$ cm, $\underline{\underline{R = x + y = 15{,}35 \text{ cm}}}$.



13.54. Egy fénysugár 30°-os beesési szögben érkezik egy plánparalel üveglemezre. Az üveglemez vastagsága 5 cm.
Mekkora távolsággal tolódik el a kétszeres törés után a beérkező fénysugártól a kilépő fénysugár, ha az üveg törésmutatója levegőhöz viszonyítva 1,5?

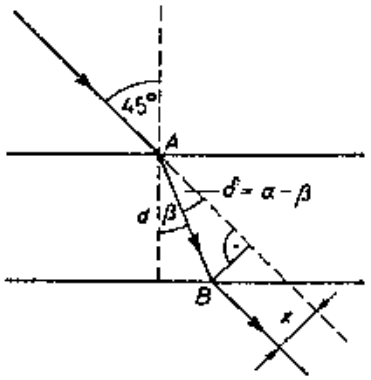
Megoldás:

13.54. $\alpha = 30°$; $n_{ü,1} = \frac{3}{2}$; $d = 5$ cm.

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{ü,1}} = \frac{1}{3} = 0{,}3333; \quad \beta = 19{,}47°.$$

$$AB = \frac{d}{\cos\beta} = 5{,}3 \text{ cm};$$

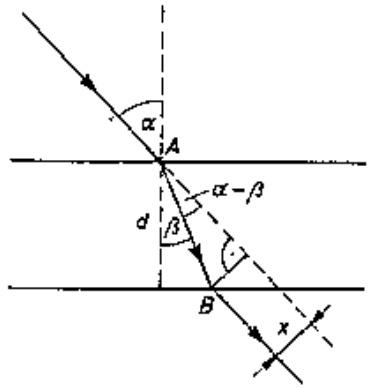
$$\underline{\underline{x}} = AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = \underline{\underline{0{,}97 \text{ cm}}}.$$



13.55. A párhuzamos felületekkel határolt, 1,61 törésmutatójú üvegre 45°-os szög alatt jut a fénysugár. Az üvegből kilépő fénysugár a belépőhöz képest 1,8 cm-re tolódott el. Mekkora az üveglap vastagsága?

Megoldás:

13.55. $x = 1{,}8$ cm; $\alpha = 45°$; $n_{ü,l} = 1{,}61$.



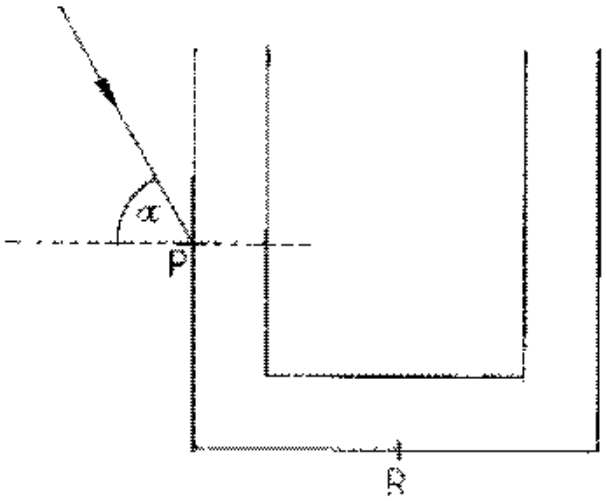
Az előző feladat meggondolásait alkalmazva:

$\beta = 26{,}05°$; $\delta = 18{,}95°$; $AB = \dfrac{x}{\sin\delta} =$

$= 5{,}54$ cm.

$\underline{\underline{d}} = AB \cdot \cos\beta = \underline{\underline{4{,}98 \text{ cm}}}$.

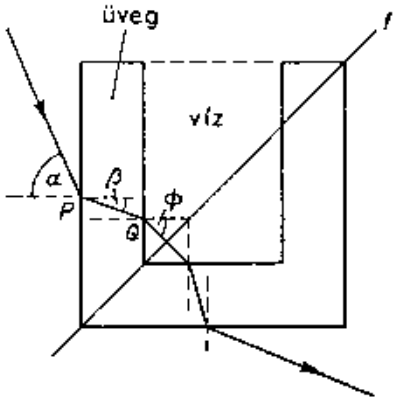
13.56. A kívülről kocka alakú, mindenütt azonos falvastagságú, vízzel teletöltött üvegkád egyik oldallapjának a P középpontjába kívülről fénysugár esik, amely többszörös törés után az alaplap R középpontján keresztül lép ki a kádból. Mekkora az oldallapra eső fénysugár beesési szöge?



Az üvegnek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$, a vízé pedig $\frac{4}{3}$. (A kád falvastagságát ne hagyjuk figyelmen kívül!)

Megoldás:

13.56. Azt kell észre venni – a feltételekből következik –, hogy a fénysugár útja tengelyesen tükrözhető a síkmetszet négyzet f átlójára. Így a ϕ szög csak 45° lehet. A fénytörés törvényét felírjuk a víz–üveg határfelületen való átmenetre (Q pontra).

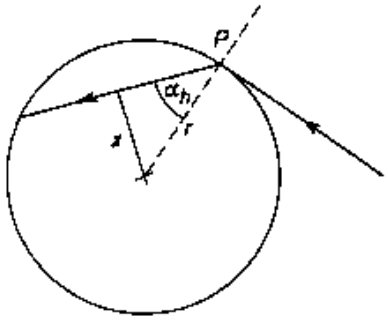


$\frac{\sin\phi}{\sin\beta} = \frac{n_{ü,l}}{n_{v,l}} = \frac{9}{8}$; $\beta = 38{,}94°$. Az üveg levegő határfelületen történő törésre (P pontban) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{ü,l}$. $\underline{\underline{\alpha = 70{,}53°}}$.

13.57. A középponttól mekkora távolságban haladjon a fénysugár egy üveggömbben, hogy kiérve a levegőre, a megtört fénysugár a gömb érintője legyen?
Az üveg levegőhöz viszonyított törésmutatója 1,5, a gömb sugara 12 cm.

Megoldás:

13.57. $n_{ü,l} = \frac{3}{2}$; $r = 12$ cm.



A fénysugárnak az üvegben a P ponthoz tartozó körsugárral α_h határszöget kell bezárnia.

$\sin\alpha_h = \frac{1}{n_{ü,l}}$, másrészt $\sin\alpha_h = \frac{x}{R}$;

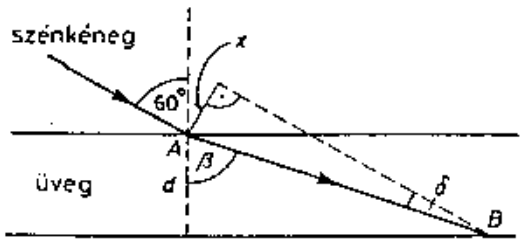
$\underline{\underline{x}} = \frac{R}{n_{ü,l}} = 8 \text{ cm} = \underline{\underline{0{,}08 \text{ m}}}$.

13.58. A párhuzamos felületekkel határolt, 5 cm vastag üveglemezt szénkénegbe helyezzük.
Mennyivel tolódik el az üveglemezen az a fénysugár, amelyik 60°-os beesési szöggel jut a felületére?
(A szénkéneg levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,61, az üvegé 1,5.)

Megoldás:

13.58. $d = 5\text{ cm} = 0{,}05\text{ m}$; $\alpha = 60°$; $n_{sz,l} = 1{,}61$; $n_{ü,l} = 1{,}5$.
A fénytörés a szénkéneg–üveg határfelületen következik be, a szénkéneg optikailag sűrűbb, mint az üveg.

$$n_{ü,sz} = \frac{n_{ü,l}}{n_{sz,l}} = 0{,}9317; \quad \sin\beta = \frac{\sin 60°}{n_{ü,sz}} = 0{,}9295.$$



$$\beta = 68{,}36°; \quad \cos\beta = \frac{d}{AB}; \quad AB = \frac{d}{\cos\beta} = 13{,}56\text{ cm}.$$

$$\delta = \beta - 60° = 8{,}36°; \quad \underline{\underline{x}} = AB \cdot \sin\delta = \underline{\underline{1{,}97\text{ cm}}}.$$

13.59. Egy 8 m sugarú, kör alapterületű, vízzel telt medence szélén álló ember szeme 2 m magasan van a víztükör felett. A medence szélétől 6 m távolságban megpillant egy úszó fadarabot, amely eltakarja előle a medence aljának a középpontját.

Mekkora a víz mélysége a medence tengelye mentén?

A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{4}{3}$.

Megoldás:

13.59. $AT = 6$ m; $AD = BC = 2$ m; $ET = 2$ m.

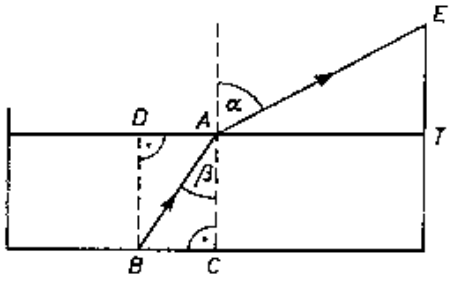
$n_{v,l} = \frac{4}{3}$; $AC = ?$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{ET} = 3$;

$\alpha = 71{,}57°$.

A fénytörés törvényéből: $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{v,l}} =$

$= 0{,}7115$;

$\beta = 45{,}35°$; $\underline{AC} = BC \cdot \operatorname{ctg}\beta = \underline{1{,}97 \text{ m}}$.



13.60. Az 1,8 m magas búvár az 5 m mélységű, vízszintes fenekű tó alján áll.
Határozzuk meg a tófenék azon pontjainak helyzetét, amelyekből a fénysugár a vízfelszínen való teljes visszaverődés után jut a búvár szemébe!

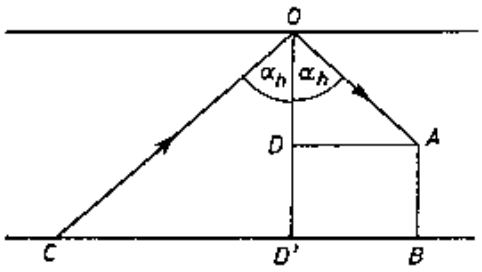
A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{4}{3}$.

Megoldás:

13.60. $n_{v,l}=\frac{4}{3}$; $AB=DD'=1{,}8$ m; $OD'=5$ m.

A keresett pontokból a fénysugarak teljes visszaverődés után jutnak a búvár szemébe.

$\sin\alpha_h=\frac{1}{n_{v,l}}=0{,}75.$



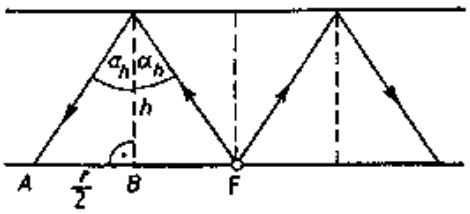
Az ODA háromszögből $DA=\operatorname{tg}\alpha\cdot OD=3{,}63$ m.
Az OCD' háromszögből $CD'=\operatorname{tg}\alpha_h\cdot OD'=5{,}67$ m.
A búvár így láthatja a B talppontja körüli BC sugarú körvonalra és az azon kívül eső pontokat.
$CB=CD'+D'B=\underline{\underline{9{,}3\text{ m}}}$.

13.61. Egy 10 cm magas üvegkádat színültig töltöttünk folyadékkal. A kád alján elhelyezett pontszerű fényforrásból kiinduló fénysugarak egy része a folyadék felszínén teljes visszaverődést szenved. Ezek a sugarak az edény alján egy 16 cm sugarú, kör alakú területet határolnak körül.
Mekkora a folyadék levegőre vonatkoztatott törésmutatója?

Megoldás:

13.61. $h = 10$ cm; $r = 16$ cm.

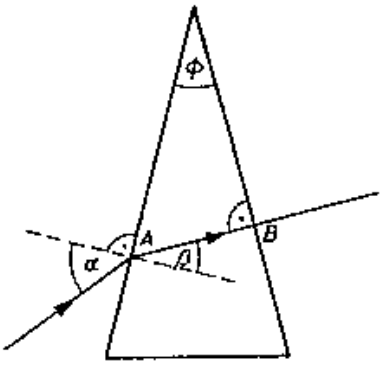
Az F fényforrásból induló fénysugarak akkor verődnek vissza teljes mértékben, ha legalább α_h határszög alatt érkeznek a levegő–folyadék határfelületre. $AB = BF = r$; $\operatorname{tg}\alpha_h = \frac{r}{2h} = 0{,}8$; $\alpha_h = 38{,}66°$; $\underline{\underline{n_{f,l}}} = \frac{1}{\sin\alpha_h} = \underline{\underline{1{,}6}}$.



13.62. Mekkora a prizma törőszöge, ha az egyik lapjára 48°35′ szögben beeső fénysugár a másik törőfelületen irányváltoztatás nélkül halad keresztül?
Az üveg anyagának törésmutatója 1,5.

Megoldás:

13.62. $\alpha = 48°35'$; $n_{ü,l} = 1,5$.



A fénysugár a *2.* törőfelületre merőlegesen érkezik, mert csak így tud irányváltoztatás nélkül áthaladni rajta.
Az *1.* felületre felírva a fénytörés törvényét: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{ü,l}$; $\sin\beta = 0,5$; $\beta = 30°$. Az ábráról leolvasható, hogy $\beta = \phi$, tehát $\underline{\underline{\phi = 30°}}$.

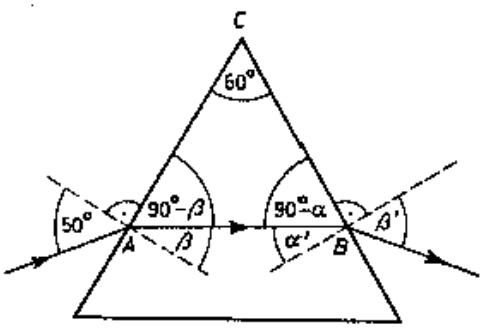
13.63. Egy keskeny fehér fénysugár 50°-os beeséi szöggel lép be a 60°-os törésszögű üvegprizma egyik felületén.

a) Mekkora szöget zárnak be egymással a prizma másik lapján kilépő vörös és kék fénysugarak?
(Az üveg levegőre vonatkoztatott törésmutatója vörös fényre 1,5, kék fényre 1,53.)

b) Mekkora a két fénysugár által bezárt szög az első határfelület után, a prizma belsejében?

Megoldás:

13.63. $\alpha = 50°$; $\phi = 60°$; $n_{v,l} = 1{,}5$; $n_{k,l} = 1{,}53$.



A vörös és a kék fénysugarak mindkét törőfelületen megtörnek. Az ábrán látható β, α', β' szögeket kell kiszámolni vörös és kék színű fényre.

Vörös színű fény esetén, az A pontban való törésre $\sin\beta_v = \dfrac{\sin\alpha}{n_{v,l}} = 0{,}5107$; $\beta_v = 30{,}71°$.

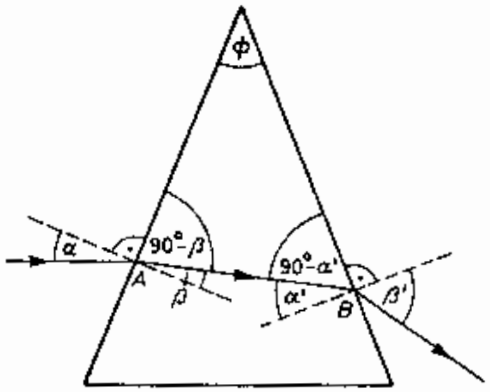
Az ABC háromszög belső szögeire $90° - \beta + 60° + 90° - \alpha' = 180°$. $\alpha'_v = 60° - \beta_v = 29{,}29°$. A B pontban történő törésre (optikailag sűrűbb közegből jut a fény az optikailag ritkábba) $\sin\beta'_v = \dfrac{\sin\alpha'}{\frac{1}{n_{v,l}}} = 0{,}7338$; $\underline{\underline{\beta'_v = 47{,}21°}}$.

Ugyanezt a számítási sorozatot elvégezve kék színű fényre $\beta_k = 30{,}05°$; $\alpha'_k = 60° - \beta_k = 29{,}95°$; $\beta'_k = 49{,}81°$. A második törőfelületen kilépő vörös és kék fénysugarak szöge $\underline{\underline{\beta'_k - \beta'_v = 2{,}6°}}$. A prizmán belül a két fénysugár által bezárt szög: $\underline{\underline{\beta_v - \beta_k = 0{,}66°}}$.

13.64. A 45°-os törőszögű, 1,5 törésmutatójú üvegprizma egyik oldallapjára eső fénysugár a másik lapon 60°-os törési szöggel lép ki.
Mekkora a prizmára érkező fénysugár beesési szöge?

Megoldás:

13.64. $\phi = 45°$; $n_{ü,l} = 1{,}5$; $\beta' = 60°$.



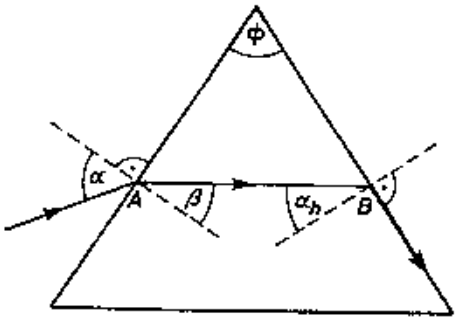
A fénytörés törvényét alkalmazva, először a B pontban történő törésre $\frac{\sin\alpha'}{\sin 60°} = \frac{1}{n_{ü,l}}$; $\sin\alpha' = 0{,}5774$; $\alpha' = 35{,}26°$; az ABC háromszögből $90° - \beta + 90° - \alpha' + 45° = 180°$.

$\beta = 45° - \alpha' = 9{,}74°$. Az A pontra felírva a törési törvényt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{ü,l}$; $\sin\alpha = 0{,}2538$; $\underline{\underline{\alpha = 14{,}7°}}$.

13.65. A 70°-os törőszögű üvegprizma egyik lapjára a napfényből kiválasztott fénysugár esik. Az előállított színképben nem észlelhető a kék és ibolya szín.
Mekkora beesési szögben érkezett a fénysugár a prizmára, ha a prizma anyagának törésmutatója kék fényre 1,63?

Megoldás:

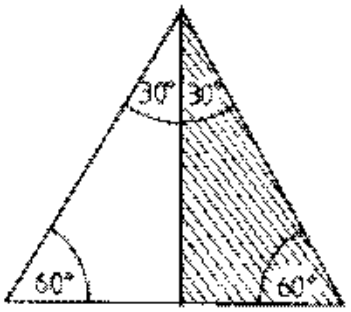
13.65. $\phi = 70°$; $n_{ü,l} = 1{,}63$ a kék fényre. A színképből a többi összetevő után hiányzik a kék és az ibolya szín. Ez azt jelenti, hogy a prizma második törőfelületéről ezek a fénysugarak nem jutottak át az új közegbe. A kék színű összetevő legalább α_h határszög alatt érte a felületet.



$$\sin\alpha_h = \frac{1}{n_{ü,l}} = 0{,}6135; \quad \alpha_h = 37{,}84°.$$

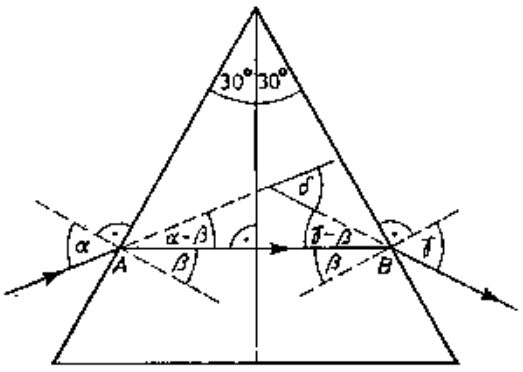
Az előző feladatban bemutatott megoldás szerint $\beta = \phi - \alpha_h = 32{,}16°$.
Az A pontban beeső fénysugárra vonatkozó törési törvényből $\sin\alpha = n_{ü,l} \cdot \sin\beta = 0{,}8676$; $\underline{\underline{\alpha = 60{,}18°}}$.

13.66. A 60°-os törőszögű prizmát két, különböző törésmutatójú üveg összeillesztésével készítették, az ábrán látható módon. A prizma egyik lapjára eső sárga színű fénysugár a kétféle anyag határfelületét merőlegesen éri. Mekkora szöget zárnak be egymással a prizmába belépő, illetve abból kilépő fénysugarak? (A kétféle üveg törésmutatója 1,5 és 1,75.)



Megoldás:

13.66. $\phi = 60°$; $n_{1,l} = 1{,}5$; $n_{2,l} = 1{,}75$.



Az A pontban bekövetkező törésre felírva a fénytörés törvényét $\beta = 30°$, az ábráról $\sin\alpha = \sin\beta \cdot n_{1,l} = 0{,}75$; $\alpha = 48{,}59°$.

A B pontban fellépő törésre $\sin\gamma = \sin\beta \cdot n_{2,l} = 1{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}875$; $\gamma = 61{,}05°$.

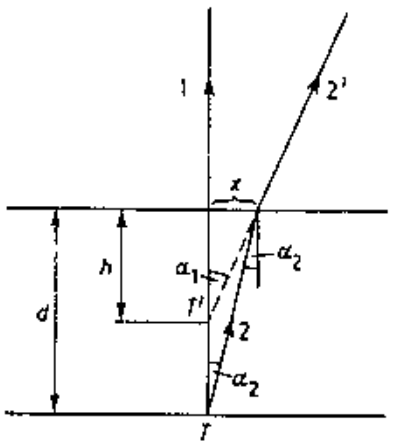
A két fénysugár szöge: $\delta = \alpha - \beta + \gamma - \beta = \alpha + \gamma - 2\beta$; $\underline{\underline{\delta = 49{,}64°}}$.

13.67. Egy 10 cm-es vízréteggel fedett pontszerű tárgyat függőleges irányból nézünk.
A víz felszínétől mekkora távolságon észleljük a tárgy képét?

A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{4}{3}$.

Megoldás:

13.67. $d = 10$ cm; $n_{v,l} = \frac{4}{3}$.



A tárgy térbeli helyzetét azáltal érzékeljük, hogy a róla kiinduló 1 és 2 jelzésű fénysugarak a szemünkbe jutnak. Az 1 jelzésű fénysugár irányváltoztatás nélkül halad át a felületen, a 2 viszont megtörik. α_1 és α_2 kicsiny szögek, emiatt nem követünk el nagy hibát a számítással, ha $\operatorname{tg}\alpha_1 \approx \sin\alpha_1$; $\operatorname{tg}\alpha_2 \approx \sin\alpha_2$ közelítést alkalmazunk. Az ábra alapján $x = h \cdot \operatorname{tg}\alpha_1$; $x = d \cdot \operatorname{tg}\alpha_2$, így $h \cdot \sin\alpha_1 = d \cdot \sin\alpha_2$.
$h = d \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{d}{n_{v,l}} = 7{,}5$ cm. A T' pontban, a felszíntől 7,5 cm-re látjuk a tárgy képét.

13.68. Szorosan egymáshoz illesztünk három planparalel lemezt, amelyek törésmutatói a levegőre vonatkozóan rendre n_1, n_2, n_3. Az első lemezt 60°-os beesési szöggel éri a fénysugár. $(n_1 < n_2 < n_3)$

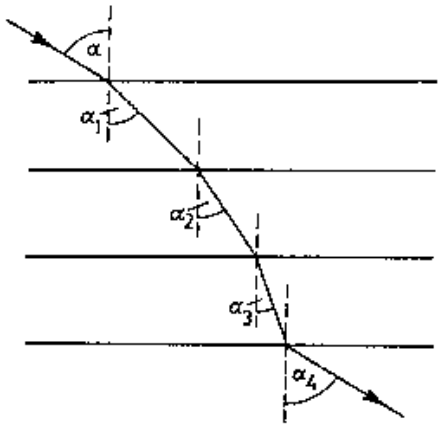
Mekkora lesz a harmadik lemezből kilépő fénysugár törési szöge?

Megoldás:

13.68. $n_1 < n_2 < n_3$.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = n_1$; $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}$; $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}$; $\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4} = \frac{1}{n_3}$.

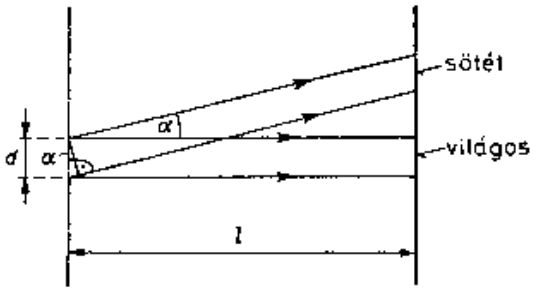
A kifejezések szorzása és egyszerűsítése után: $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_4} = 1$; $\underline{\underline{\alpha = \alpha_4}}$, tehát a rétegelt planparalel lemezen kilépő fénysugár ugyanakkora szöget zár be a beesési merőlegessel, mint az első törőfelületen belépő fénysugár.



13.69. Keskeny résre merőlegesen bocsátunk 760 nm hullámhosszúságú párhuzamos fénysugarakat. A réstől 1,5 m távolságra elhelyezett felfogóernyőn, a fény elhajlási képén, világos és sötét csíkok vállakoznak. A középső világos csíktól jobbra és balra lévő első sötét csíkok egymástól mért távolsága 4 mm. A rés és az ernyő síkja egymással párhuzamos. Mekkora a rés szélessége?

Megoldás:

13.69. $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m; $x = 2 \cdot 10^{-3}$ m; $l = 1{,}5$ m.



A fényelhajlás során fellépő interferencia esetén az első minimum irányára fennáll, hogy $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$, és mivel α kicsiny szög, $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$;

$\sin\alpha = \frac{x}{l}$; $\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{l}$; $\underline{d} = \frac{\lambda \cdot l}{x} = \underline{\underline{5{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{m}}}$.

13.70. A 0,1 mm széles résre merőlegesen 590 nm hullámhosszúságú, párhuzamos fénysugarakat bocsátunk, majd az elhajlási képet ernyőn felfogjuk.
Számoljuk ki a középső világos csíktól számított első, illetve második sötét csíkhoz tartozó elhajlási szögeket!

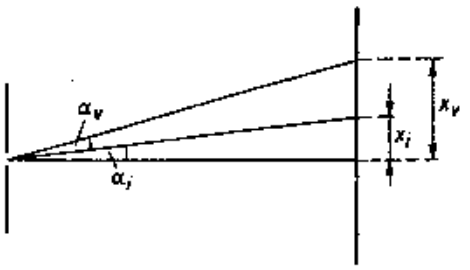
Megoldás:

13.70. $d = 10^{-4}$ m; $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m.
Az előző feladat meggondolásait felhasználva az első intenzitásminimum irányára fennáll, hogy $\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{d} = 5{,}9 \cdot 10^{-3} = 0{,}0059$; $\underline{\underline{\alpha_1 = 0{,}34°}}$.
A második intenzitásminimumhoz tartozó elhajlási szögre érvényes, hogy $\sin\alpha_2 = \frac{2\lambda}{d} = 0{,}0118$; $\underline{\underline{\alpha_2 = 0{,}68°}}$.

13.71. A természetes fényből kiválasztott párhuzamos sugárnyaláb merőlegesen esik a 0,01 mm széles résre.
Mekkora a rés síkjával párhuzamos, attól 2 m távolságra elhelyezett felfogóernyőn a szinkép vörös és ibolya színének egymástól mért távolsága a középső helyzettől számított első szinképben?
(A vörös fény hullámhossza 760 nm, az ibolyáé 380 nm.)

Megoldás:

13.71. $d = 0{,}01\ \text{mm} = 10^{-5}\ \text{m}$; $\lambda_v = 7{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$; $\lambda_i = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$; $l = 2\ \text{m}$.



Az elhajlási kép első intenzitásmaximumára fennáll: $\sin\alpha = \frac{3\lambda}{2d}$; $\sin\alpha \approx$ $\approx \operatorname{tg}\alpha$; $\sin\alpha = \frac{x}{l}$. Az egyenleteket összevetve és kiszámolva x_i, x_v értékeket:

$$x_i = \frac{3\lambda_i \cdot l}{2 \cdot d} = 0{,}114\ \text{m}; \quad x_v = \frac{3\lambda_v \cdot l}{2d} = 0{,}228\ \text{m}.$$

A keresett távolság: $\underline{\underline{\Delta x}} = x_v - x_i = \underline{0{,}114\ \text{m}}$.

13.72. Monokromatikus fénynyaláb esik a 0,02 mm szélességű résre. A rés síkjával párhuzamos, attól 1,2 m távolságra elhelyezett ernyőn felfogott elhajlási képen a középső világos csíktól számított első és második sötét csík egymástól mért távolsága 11,8 cm.
Mekkora a résre érkező fény hullámhossza?

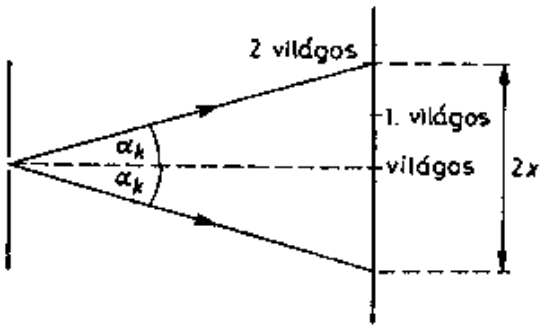
Megoldás:

13.72. $d = 2 \cdot 10^{-5}$ m; $l = 1{,}2$ m; $\Delta x = 0{,}118$ m.
Az első, illetve a második intenzitásminimum helyének a középső világos csíktól való x_1 és x_2 távolságára igaz: $\frac{x}{l} = \frac{\lambda}{d}$ alapján $x_1 = \frac{\lambda \cdot l}{d}$;
$x_2 = \frac{2\lambda \cdot l}{d} \rightarrow \Delta x = \frac{\lambda \cdot l}{d}$, ebből
$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{d \cdot \Delta x}{l} = 1{,}967 \cdot 10^{-6}$ m $= \underline{\underline{1967 \text{ nm}}}$.

13.73. Egy üveglapon milliméterenként 250 karcolás van. Az így kapott optikai rácsra 400 nm hullámhosszúságú fényt bocsátunk. A felfogóernyőn, a középponttól szimmetrikusan jobbra és balra lévő második világos csíkok távolsága 16 cm.
Mekkora a felfogóernyő és a rács közötti távolság?

Megoldás:

13.73. $d = \frac{1}{250}$ mm $= 4 \cdot 10^{-6}$ m; $\lambda = 400$ nm $= 4 \cdot 10^{-7}$ m; $2x = 0{,}16$ m.
Optikai rács esetén a maximális erősítési irányokra fennáll: $d \cdot \sin\alpha_k = k \cdot \lambda$; $k = 2$ esetén $\sin\alpha_2 = \frac{k \cdot \lambda}{d} = 0{,}2$; $\alpha_2 = 11{,}54°$.

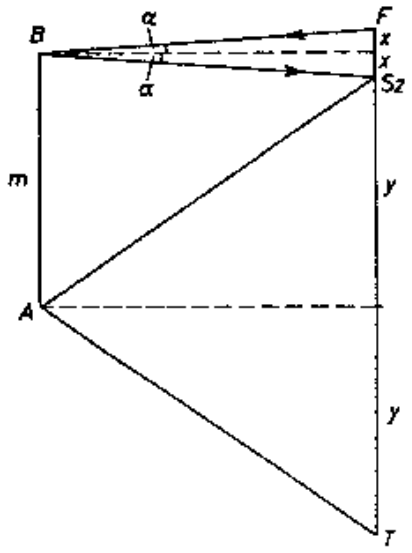


Az ábra alapján $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{x}{l}$; $l = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \underline{\underline{0{,}39 \text{ m}}}$.

13.74. Az 1,8 m magas ember mekkora függőleges helyzetű síktükörben láthatja magát tetőtől talpig?

Megoldás:

13.74. Az ember magassága $\overline{TF} = 1{,}8$ m. A T pontból induló fénysugár a tükör A pontjából, az F-ből induló pedig a tükör B pontjából verődik a szemébe (Sz). A tükör BA magassága $x + y$, éppen a szemlélő ember magasságának a fele. Így $\underline{\underline{m = 90\ \text{cm} = 0{,}9\ \text{m}}}$.



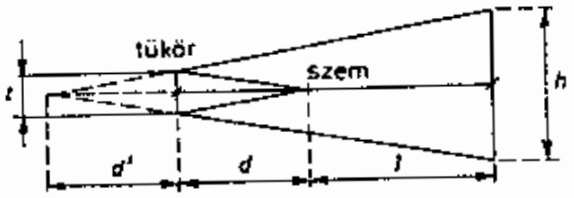
13.75. A szemünktől 50 cm távolságra tartott, 10 cm magas, függőleges síktükörbe „belefér" a mögöttünk 29 m távolságra levő oszlop képe.
Mekkora az oszlop magassága?

Megoldás:

13.75. $t = 10\text{ cm} = 0{,}1\text{ m}$; $l = 29\text{ m}$; $d = 0{,}5\text{ m}$.

$d' = d$ az ábráról látható, a tükrözés miatt

$$\frac{d'}{t} = \frac{2d + l}{h}; \quad \underline{h} = \frac{2d + l}{d'} \cdot t = \underline{\underline{6\text{ m}}}.$$



13.76. Egy homorú tükör fókusztávolsága 15 cm, és egy tárgyról kétszeres nagyítású valódi képet ad.
Mekkora a tárgy és a képtávolság? Készítsünk ábravázlatot a megoldásról!

Megoldás:

13.76. $f = 15$ cm; $N = 2$.

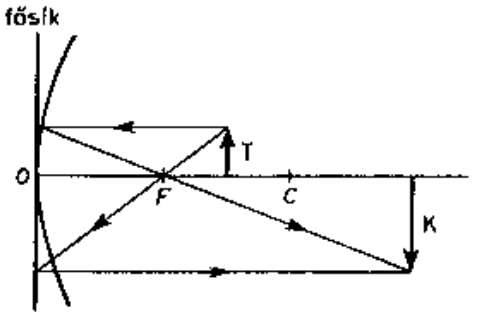
A tükrök leképezési törvénye szerint:

$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$; $\frac{k}{t} = 2$; $k = 2t$, így

$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{f}$.

A megoldás:

$f = \frac{2t}{3}$; $t = \frac{3f}{2} = \underline{\underline{22{,}5 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{k = 45 \text{ cm}}}$.



13.77. A homorú tükör az előtte álló tárgyról két esetben alkot kétszer akkora képet, mint maga a tárgy. Az egyik esetben a tárgytávolság 60 cm, és az így keletkezett kép ernyőn felfogható.

a) Mekkora a tárgytávolság a másik esetben?
b) Mekkora a tükör fókusztávolsága?

Megoldás:

13.77. $t_1 = 60$ cm; $N_1 = 2$, az ernyőn felfogható kép valódi kép. Az $N_1 = \frac{k_1}{t_1}$ összefüggésből $k_1 = 2t_1 = 120$ cm és a leképezési törvényből:

b) $f = \frac{k_1 \cdot t_1}{k_1 + t_1} = 40$ cm.

A másik esetben a fókusztávolság nem változik, de a kép virtuális lesz:

a) $k_2 = -2t_2$, a leképezési törvény ezekkel a feltételekkel: $\frac{1}{t_2} - \frac{1}{2t_2} = \frac{1}{f}$; $f = 2t_2$. $t_2 = 20$ cm; $k_2 = -40$ cm.

13.78. Egy homorú tükör görbületi sugara 40 cm. A tükör előtt álló tárgyról a tükör mögött, attól 60 cm távolságra keletkezik a kép.

a) Mekkora a tükör és a tárgy távolsága?
b) Mekkora a tükör nagyítása?

Megoldás:

13.78. $r = 40$ cm; $f = 20$ cm; $k = -60$ cm.
A leképezési törvény szerint a kép virtuális és nagyított.

$$\underline{\underline{t}} = \frac{k \cdot f}{k + f} = \underline{\underline{15 \text{ cm}}}; \quad \underline{\underline{N}} = \frac{k}{t} = \underline{\underline{-4}}.$$

13.79. A homorú tükör és az ernyő egymástól mért távolsága 1,2 m.
Mekkora a tükör fókusztávolsága, ha az előtte álló tárgyról háromszoros nagyítású képet vetít az ernyőre?

Megoldás:

13.79. $k = 1.2$ m; $N = 3$, a kép valódi. $t = \frac{k}{3} = 40$ cm; $f = \frac{k \cdot t}{k + t} = \underline{\underline{30 \text{ cm}}}$.

13.80. Egy tárgyról kétszeres nagyítású képet kapunk homorú tükörrel. Ha a tárgyat 15 cm-rel közelebb visszük a tükörhöz, akkor a nagyítás már háromszoros lesz.
Mekkora a tükör görbületi sugara?

Megoldás:

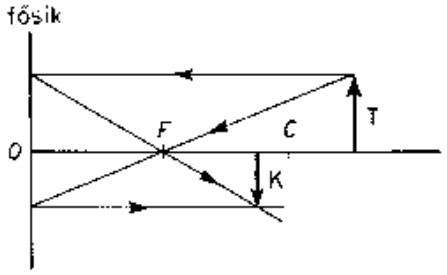
13.80. $N_1 = 2$; $k_1 = 2t$.
Ha a tárgyat 15 cm-rel közelebb visszük, akkor a tárgytávolság $t_2 = t - 15$ cm, a nagyítás háromszoros, $k_2 = 3 \cdot (t - 15)$, a leképezési törvényt felírjuk mindkét esetre: $\frac{1}{f} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{t}$; $\frac{1}{f} = \frac{1}{3(t-15)} + \frac{1}{t-15}$. Az egyenletrendszer megoldásából $\underline{\underline{t = 135 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{f = 90 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{r = 2f = 180 \text{ cm}}}$.

13.81. Egy homorú tükör fókusztávolsága 12,5 cm. A tárgy és képe közötti távolság 10 cm.

a) Mekkora a nagyítás, ha a kép valódi és kicsinyített?
b) Rajzoljuk fel a megoldásokat!

Megoldás:

13.81. $f = 12{,}5$ cm.
A kép valódi és kicsinyített, $t = k + 10$ cm.



A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t},$$

behelyettesítve az adatokat a

$$k^2 - 15k - 125 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Megoldásai: $k_1 = 20{,}96$ cm; $k_2 = -5{,}97$ cm, a második gyök azért nem megoldása a feladatnak, mert ellentmond az eredeti feltevésnek, annak, hogy a kép valódi. A tárgytávolság: $t = 30{,}96$ cm. $\underline{\underline{N = 0{,}68}}$.

13.82. Mekkora távolságra tartsuk arcunktól a homorú borotválkozótükröt, ha görbületi sugara 100 cm és 1,5-szeres nagyítást akarunk elérni?

Megoldás:

13.82. $r = 100$ cm, ebből következik, hogy $f = 50$ cm.
A kép legyen egyenes állású és nagyított. A feltételeknek megfelelő kép csak virtuális lehet. $N = -1{,}5$; $k = -1{,}5t$. A leképezési törvény $\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$ megoldásával $t = \frac{f}{3} = \underline{\underline{16{,}67 \text{ cm}}}$.

13.83. Homorú tükör előtt az optikai tengelyre merőlegesen áll egy tárgy. Ha a tárgyat 10 cm-rel közelebb visszük a tükörhöz, akkor a keletkezett kép valódi és ugyanakkora, mint a tárgy. Ha pedig a tárgy és a tükör eredeti távolságát 10 cm-rel megnöveljük, akkor a valódi kép nagysága feleakkora, mint a tárgyé.
Mekkora a tükör fókusztávolsága?

Megoldás:

13.83. Induljunk ki abból, hogy a tárgyat már 10 cm-rel közelebb hoztuk a leképező eszközhöz. Így $t_1 = k_1 = 2f$; $f = \frac{t_1}{2}$.
Ezután 10 cm-rel növelve az eredeti tárgytávolságot; $t_2 = t_1 + 20$. Mivel a valódi kép ekkor feleakkora, mint a tárgy, $N = \frac{k_2}{t_2} = \frac{1}{2}$, amiből $k_2 = \frac{t_2}{2} = \frac{t_1 + 20}{2}$ adódik. Így a leképezési törvény f, k_2 és t_2 behelyettesítésével $\frac{2}{t_1} = \frac{1}{t_1 + 20} + \frac{2}{t_1 + 20}$. Az egyenlet megoldásából adódik, hogy $\underline{\underline{t_1 = 40 \text{ cm}}}$. Mivel $f = \frac{t_1}{2}$; így $\underline{\underline{f = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}}}$.

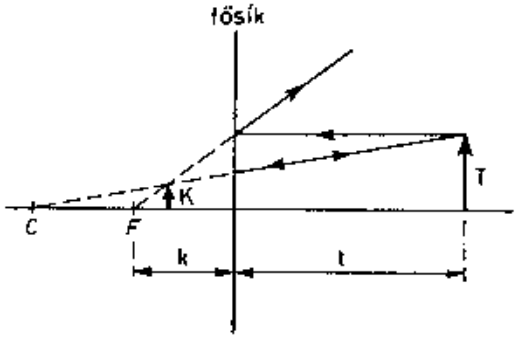
13.84. Egy domború gömbtükör görbületi sugara 10 cm.

a) Hová helyezzük a tárgyat, ha azt akarjuk, hogy a kép 4 cm távolságra keletkezzen a tükörtől?

b) Készítsünk vázlatot a megoldáshoz!

Megoldás:

13.84. A leképező eszköz domború gömbtükör. $r = 10$ cm; $f = -5$ cm; $k = -4$ cm.

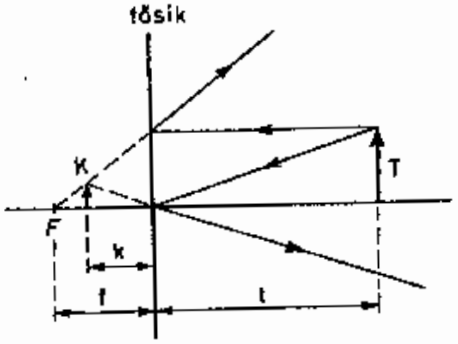


Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenlet megoldásából adódik: $\underline{\underline{t = 20 \text{ cm}}}$.

13.85. Az alábbi adatok alapján szerkesszük meg a tükör által adott képet! Számoljuk ki a hiányzó (k, N, K) adatokat!
$f = -20$ cm, $t = 30$ cm, $T = 10$ cm.
Milyen tükörről van szó?

Megoldás:

13.85. $f = -20$ cm; $t = 30$ cm; $T = 10$ cm.



A tükör domború, az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletből $k = -12$ cm; $\underline{\underline{N}} = \frac{k}{t} =$

$= -\frac{2}{5} = \underline{\underline{-0{,}4}}$.

$\underline{\underline{K}} = -0{,}4T = \underline{\underline{-4 \text{ cm}}}$.

13.86. Egy tárgyat 40 cm távolságra helyezünk el az 1 m sugarú, gömbfelületből kivágott domború tükörtől. A tárgy merőleges a tükör optikai tengelyére.
Mekkora a nagyítás?

Megoldás:

13.86. $t = 40$ cm; $r = 100$ cm; $f = -50$ cm.

A leképezési törvényt alkalmazva: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$, $k = \underline{\underline{-\frac{200}{9}\text{ cm}}}$; $N = \frac{k}{t} =$

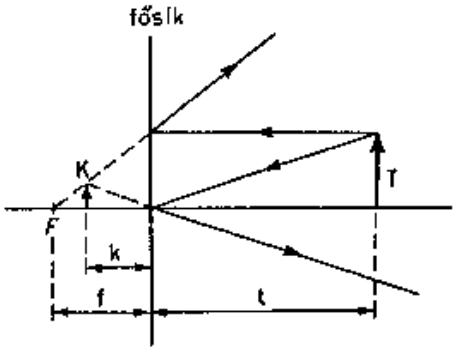
$= \underline{\underline{-\frac{5}{9}}}$.

13.87. A 60 cm görbületi sugarú domború tükör fősíkjától 60 cm-re, optikai tengelyétől 12 cm-re található egy világító pont.

Szerkesztéssel és számítással határozzuk meg a fénypont képének helyét!

Megoldás:

13.87. $r = 60$ cm; $f = -30$ cm; $t = 60$ cm; $T = 12$ cm.



A leképezési törvény összefüggését: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ az adatokkal megoldva:

$k = -20$ cm; $N = \frac{k}{t} = -\frac{1}{3}$; $\underline{\underline{K}} = N \cdot T = \underline{\underline{-4 \text{ cm}}}$.

13.88. A 20 cm fókusztávolságú homorú tükör egy tárgyról 10 cm-es nagyított képet ad. Ha a tárgy és a kép helyét felcseréljük, akkor a kép nagysága 2,5 cm.
Mekkora a tárgy nagysága, az eredeti képtávolság és a tárgytávolság?

Megoldás:

13.88. A leképező eszköz homorú tükör. $f = 20$ cm, k a képtávolság, t a tárgytávolság, T a tárgy magassága.

1. $K_1 = 10$ cm, a nagyítás $N_1 = \frac{k}{t} = \frac{10}{T}$.

2. A kép és a tárgy helyét felcserélve: $K_2 = 2{,}5$ cm; $N_2 = \frac{t}{k} = \frac{2{,}5}{T}$.
A nagyításra kapott két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával adódik, hogy $T = 5$ cm; $N_1 = 2$; $k = 2t$. A leképezési törvény, az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ alkalmazásával: $\underline{\underline{t = 30 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{k = 60 \text{ cm}}}$.

13.89. Homorú tükörrel egy tárgyról 0,5-szeres nagyítású képet kapunk. Ha a tárgyat 15 cm-rel közelebb visszük a tükörhöz, akkor a képtávolság 6 cm-rel változik.
Mekkora a tükör fókusztávolsága, az eredeti tárgytávolság és a képtávolság?

Megoldás:

13.89. A leképező eszköz homorú tükör.

1. $N = \frac{1}{2}$; $k_1 = \frac{t_1}{2}$.

2. $t_2 = t_1 - 15$ cm; $k_2 = \frac{t_1}{2} + 6$ cm.

A leképezési törvény egyenletét felírva mindkét esetre,

$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{2}{t_1} = \frac{3}{t_1}$; és $\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1 - 15} + \frac{2}{t_1 + 12}$.

Megoldva a két egyenletből álló egyenletrendszert, a megoldások:

$\underline{\underline{t_1 = 60 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{k_1 = 30 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{f = 20 \text{ cm}}}$.

13.90. Két, 10 cm fókusztávolságú homorú tükröt egymással szembefordítunk úgy, hogy az optikai tengelyeik egybeessenek. A közöttük elhelyezett tárgyról alkotott valódi képek egymástól 15 cm távolságra vannak.
Határozzuk meg a tárgy helyét a tükrök között, ha a tükrök egymástól mért távolsága 50 cm!

Megoldás:

13.90. A két homorú tükör fókusztávolsága megegyezik, egyaránt $f = 10$ cm.
Mivel a tükrök távolsága 50 cm, $t_1 + t_2 = 50$ cm és $k_1 + k_2 = 50 - 15 = 35$ cm, így $t_2 = 50 - t_1$, és $k_2 = 35 - k_1$. A leképezési törvényt felírva mindkét esetre: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}$ és $\frac{1}{f} = \frac{1}{50 - t_1} + \frac{1}{35 - k_1}$.
Az egyenletrendszer megoldása során a $t_1^2 - 50t_1 + 600 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amiből $\underline{\underline{t_1 = 30 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{t_2 = 20 \text{ cm}}}$ következik.

13.91. A 8 cm-es fókusztávolságú, szemünktől 9 cm távol lévő gyűjtőlencsével nézünk egy apró tárgyat. A virtuális kép a szemünktől 25 cm távolságban keletkezik.
Mekkora távolságra van a tárgy a lencsétől?

Megoldás:

13.91. Gyűjtőlencse a leképező eszköz, a feltételek szerint virtuális képet szerkeszt. $f = 8$ cm; $k = -16$ cm.

A leképezési törvényt, az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletet megoldva az adatokkal:

$t = \frac{16}{3}$ cm.

13.92. A 2,5 dioptriás lencsével a 22,5 cm magas tárgyról 7,5 cm magas képet akarunk előállítani.
Mekkora legyen a tárgytávolság?

Megoldás:

13.92. $D = 2{,}5\ \frac{1}{\text{m}}$; $T = 22{,}5$ cm; $K = 7{,}5$ cm.

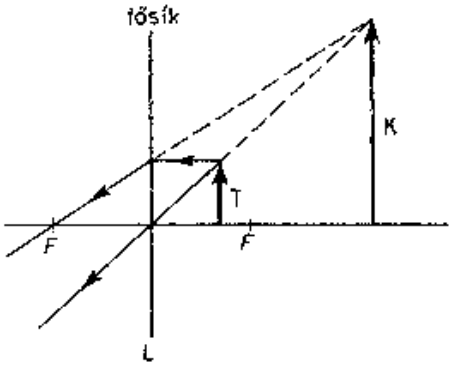
A dioptriából kiszámítjuk a fókusztávolságot. $f = 0{,}4$ m $= 40$ cm. A nagyítás $N = \frac{K}{T} = \frac{1}{3}$, így $t = 3k$. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ leképezési törvényt alkalmazva adódik: $\underline{\underline{t = 160 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{k = \frac{160}{3} \text{ cm}}}$.

13.93. Egy lencse fókusztávolsága $f = 45$ cm. A lencsével előállított kép nagyítása $N = -3$.

a) Készítsünk rajzot az adatok alapján!
b) Határozzuk meg a kép- és a tárgytávolságot!
c) Milyen lencséről van szó?

Megoldás:

13.93. $f = 45$ cm; $N = -3$, lencse a leképező eszköz.

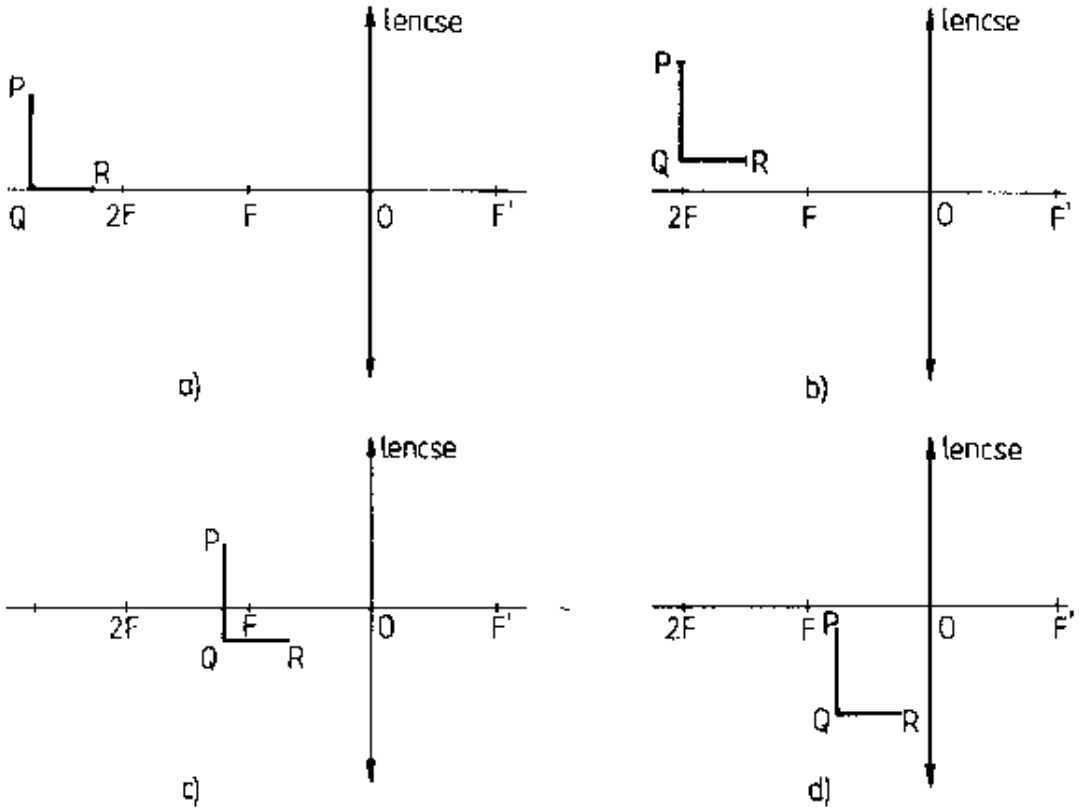


Az adatokból következtetve: a lencse gyűjtőlencse, a keletkezett kép virtuális és nagyított.

Számítással: Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ és az $N = \frac{k}{t}$ egyenletek alkalmazásával

$\underline{\underline{t = 30 \text{ cm}}}$; $\underline{\underline{k = -90 \text{ cm}}}$.

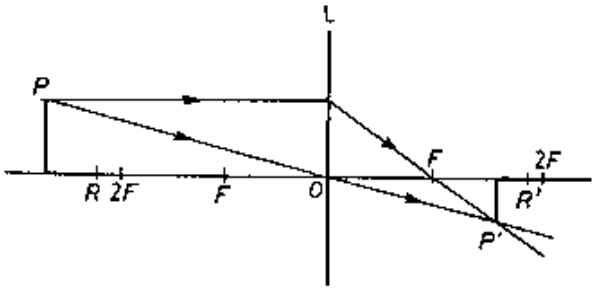
13.94. Szerkesszük meg az L alakú fénycső domború lencsével előállított képét az ábrán látható helyzetekben!



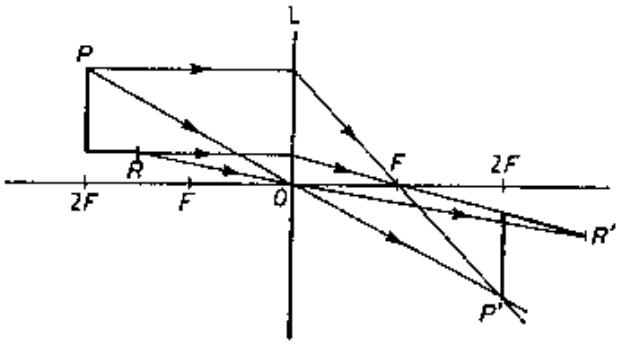
Megoldás:

13.94. Szerkesztéssel megoldva a feladatot

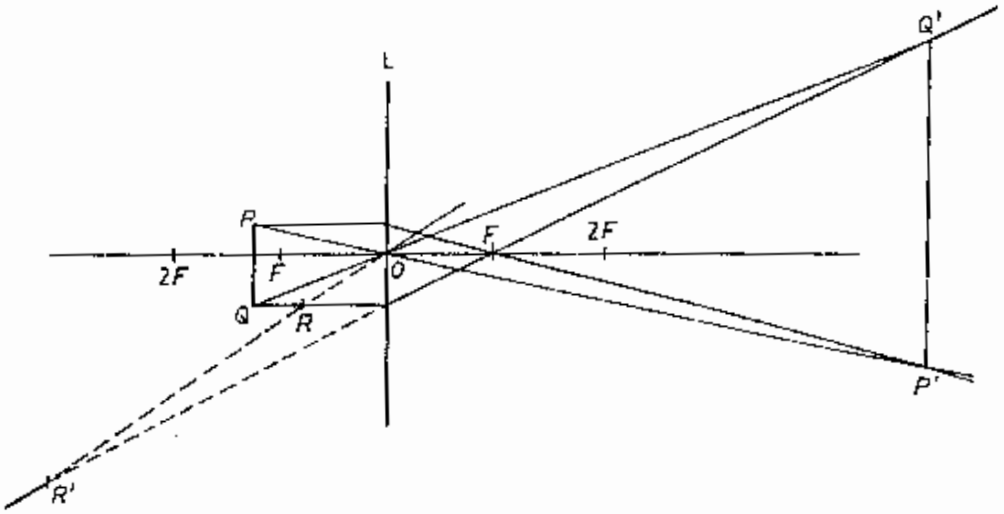
a)



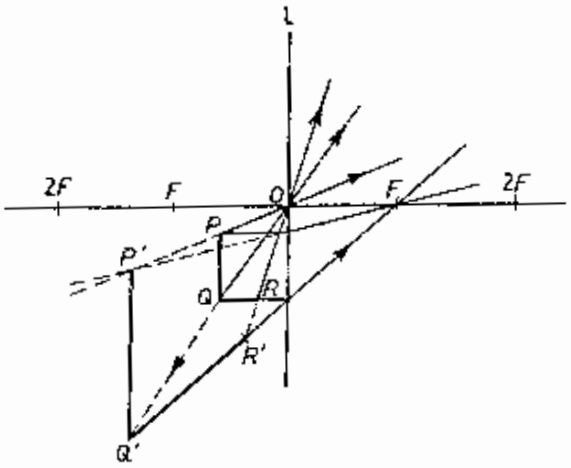
b)



c)



d)



13.95. Egy homorú lencse fókusztávolsága -50 cm. A tárgyat a lencsétől 30 cm-re helyezzük el.

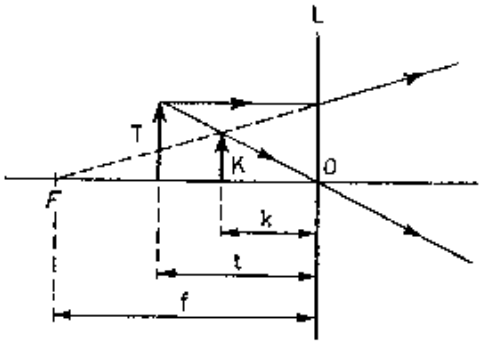
a) Mekkora a képtávolság és a nagyítás?

b) Készítsünk rajzot a megoldáshoz!

Megoldás:

13.95. A leképező eszköz szóró lencse, $f = -50$ cm; $t = 30$ cm. A lencsével szerkesztett kép kicsinyített, látszólagos, egyenes állású. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ leképezési törvény alkalmazásával:

$k = -\frac{150}{8}$ cm $= -18{,}75$ cm; $N = \frac{k}{t} = -\frac{5}{8}$.



13.96. Domború lencsével egy tárgy kétszeresen nagyított valódi képét állítjuk elő. Ha a tárgyat 5 cm-rel közelebb visszük a lencséhez, akkor a kép már négyszeresen nagyított lesz. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

Megoldás:

13.96. A leképező eszköz gyűjtőlencse. A kiinduló állapotban $N = 2$; $k = 2t$. Utána csökken a tárgytávolság 5 cm-rel, így $t_1 = t - 5$; $N = 4$;

$k_1 = 4(t - 5)$. Az adatokkal felírva a távolságtörvényt mindkét esetre: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t}$ és $\frac{1}{f} = \frac{1}{t-5} + \frac{1}{4(t-5)}$. Megoldva az egyenletrendszert:
$\underline{t = 30 \text{ cm}}$; $\underline{k = 60 \text{ cm}}$; $\underline{f = 20 \text{ cm}}$.

13.97. Egy tárgy és az ernyő távolsága 1 m. A közéjük helyezett, 16 cm fókusztávolságú domború lencsével a tárgynak éles képét vetíthetjük az ernyőre.

a) Hová kell elhelyezni a lencsét?
b) Mekkora a nagyítás?

Megoldás:

13.97. Domború lencsével történik a képszerkesztés. $f = 16$ cm; $t + k = 100$ cm. A feltételeknek megfelelően két helyzet fordulhat elő. Egyszer nagyított, egyszer pedig kicsinyített kép keletkezhet. A $k = 100 - t$ változót behelyettesítve az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletbe, kapjuk a $t^2 - 100t + 1600 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai:

$t_1 = 80$ cm, ehhez $k_1 = 20$ cm, $N_1 = \frac{1}{4}$;

$t_2 = 20$ cm, ehhez $k_2 = 80$ cm, $N_2 = 4$.

13.98. Gyűjtőlencsével egy tárgy négyszeres nagyítású valódi képét állítjuk elő. A tárgy és a kép egymástól 1,25 m távolságra van.

a) Hány dioptriás a lencse?

b) Mekkora lesz a nagyítás, ha felcseréljük a tárgy és a felfogóernyő helyét?

Megoldás:

13.98. Gyűjtőlencsével szerkesztett a kép. $N = 4$; $t + k = 125$ cm.

a) Az adatokból: $k = 4t$, így $5t = 125$ cm; $t = 25$ cm; $k = 100$ cm. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ összefüggés alkalmazásával $f = 20$ cm; $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{f\ (\mathrm{m})} = 5\ \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{m}}}}$.

b) A tárgyat és az ernyőt felcserélve $\underline{\underline{k_1 = 25\ \mathrm{cm}}}$; $\underline{\underline{t_1 = 100\ \mathrm{cm}}}$; $\underline{\underline{N_1 = \frac{k_1}{t_1} = \frac{1}{4}}}$.

13.99. Egy tárgy ernyőn felfogható éles képét gyűjtőlencsével állítjuk elő. Ha felcseréljük egymással a tárgyat és az ernyőt, akkor az eredetihez viszonyítva a kép méretei 75%-kal csökkennek. A tárgy és az ernyő egymástól mért távolsága 90 cm.

a) Mekkora a lencse fókusztávolsága?
b) Mekkorák a képek, ha a tárgy nagysága 10 cm?

Megoldás:

13.99. Gyűjtőlencse alkalmazásával $t + k = 90$ cm; $T = 10$ cm.

Az első esetben a nagyítás $N_1 = \frac{K_1}{T} = \frac{k}{t} = \frac{K_1}{10}$. A tárgy és a kép helyzetét felcserélve K_2 méretei 75%-kal kisebbek, tehát $K_2 = \frac{1}{4}K_1$, és ekkor a nagyítás $N_2 = \frac{t}{k} = \frac{\frac{1}{4}K_1}{T} = \frac{K_1}{40}$. Ebből következik, hogy $\frac{t}{k} = \frac{10}{K_1} = \frac{K_1}{40}$, amiből $K_1^2 = 400$; $K + 1 = \pm 20$.

Valódi kép esetén $\underline{\underline{K_1 = 20 \text{ cm}}}$, tehát $\underline{\underline{K_2 = 5 \text{ cm}}}$, $N_1 = 2$, $t = 30$ cm; $k = 60$ cm. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ lencsetörvényből számolva következik, hogy $\underline{\underline{f = 20 \text{ cm}}}$.

13.100. Egy gyűjtőlencse nagyítása négyszeres, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 75 cm.

a) Mekkora a lencse fókusztávolsága?

b) Hányszoros a nagyítás, ha a kép és a tárgy egymástól 50 cm távolságban van?

Megoldás:

13.100. Az eszköz gyűjtőlencse. $k+t=75$ cm; $N=4$.

a) Az adatok alapján $k=4t$; $t=15$ cm; $k=60$ cm. Az $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$ egyenletbe helyettesítve az adatokat: $\underline{\underline{f=12 \text{ cm}}}$.

b) Ugyanezzel a lencsével történik a leképezés. $f=12$ cm, $t+$ $+k=50$ cm; $t=50-k$.

Ezekkel az adatokkal felírva a leképezési törvényt, kapjuk a t^2-50t+ $+600=0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai:

$t_1=30$ cm, ehhez $k_1=20$ cm; $\underline{\underline{N_1=\frac{2}{3}}}$;

$t_2=20$ cm, ehhez $k_2=30$ cm; $\underline{\underline{N_2=\frac{3}{2}}}$.

13.101. Egy bikonvex lencse mindkét gömbfelületének 10 cm a görbületi sugara. Mekkora a lencse fókusztávolsága, ha anyagának a levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{3}{2}$?

Megoldás:

13.101. $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 10$ cm; $n_{2,1} = \frac{3}{2}$.

A lencsék fókusztávolságára fennáll: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$. Az összefüggésbe behelyettesítve adódik: $\underline{\underline{f = 10 \text{ cm}}}$.

13.102. Kétszer domború lencse fókusztávolsága 8 cm, a lencse anyagának törésmutatója 1,5. Az egyik görbületi sugár kétszerese a másiknak.
Mekkorák a lencse görbületi sugarai?

Megoldás:

13.102. $f = 8$ cm; $n = \frac{3}{2}$; $r_1 = r$; $r_2 = 2r$.

Az előző feladat megoldása szerint $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 12$ cm.

13.103. Egy lencse anyagának a törésmutatója $\frac{5}{3}$. Az egyik határoló gömbfelületének a görbületi sugara kétszer akkora, mint a másiké. Egy tárgyról kétszeresen nagyított, valódi képet kapunk a lencsétől 18 cm távolságra.
Mekkora a lencsét határoló két gömbfelület görbületi sugara?

Megoldás:

13.103. $n_{2,1}=\frac{5}{3}$; $r_1=r$; $r_2=2r$; $k=18$ cm; $N=2$; $t=9$ cm.

A leképezési törvény $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$ megoldásával $\underline{\underline{f=6\text{ cm}}}$, illetve az $\frac{1}{f}=$

$=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$ alkalmazásával $\underline{\underline{r_1=6\text{ cm}}}$; $\underline{\underline{r_2=12\text{ cm}}}$.

13.104. Az üvegből készített lencse egyik törőfelülete domború, a másik pedig homorú. A domború felület 10 cm, a homorú pedig 20 cm sugarú gömbfelület.
Mennyivel változik a lencse fókusztávolsága, ha előbb vörös, utána pedig kék fénnyel világítjuk meg?
Az üveg levegőre vonatkoztatott törésmutatója vörös fényre 1,5, kék fényre 1,52.

Megoldás:

13.104. $r_1 = 10$ cm; $r_2 = -20$ cm; $n_{v,l} = 1{,}5$; $n_{k,l} = 1{,}52$.

A fókusztávolságra fennálló $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ összefüggés szerint vörös fényre, illetve kék fényre a fókusztávolság, valamint a fókusztávolság megváltozása: $f_v = 40$ cm; $f_k = 38{,}46$ cm; $\Delta f = f_v - f_k = 1{,}54$ cm.

13.105. Egy gyűjtőlencse egyik gömbfelületének a sugara 10 cm, a másiké 15 cm. A lencse a tőle 16 cm távol lévő tárgyról 3-szoros nagyítású, ernyőn felfogható képet ad.

a) Mekkora a lencse anyagának a törésmutatója?
b) Hány dioptriás a lencse?

Megoldás:

13.105. $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 15$ cm; $t = 16$ cm; $N = 3$; $k = 3t = 48$ cm. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletbe való behelyettesítés után megoldva, a fókusztávolságra adódik: $f = 12$ cm. Az $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ megoldásával $\underline{\underline{n = \frac{3}{2}}}$; $\underline{\underline{D = \frac{1}{f\ (\mathrm{m})} = 8{,}3 \text{ dioptria.}}}$

13.106. Homorú lencse egyik határoló felületének görbületi sugara -20 cm, a másik határoló felület síklap. A lencse anyagának törésmutatója 1,5.
Hány dioptriás a lencse?

Megoldás:

13.106. $r_1 = -20$ cm; $n = 1{,}5$; $r_2 \to \infty$.
A síklap tekinthető egy végtelen nagy sugarú gömbfelület darabnak. Az $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ egyenlet az $\frac{1}{r_\infty} \to 0$ miatt a következőképpen módosul: $\frac{1}{f\ (\mathrm{m})} = (n-1)\frac{1}{r_1} = D$. A megoldás: $\underline{\underline{D = -2{,}5 \text{ dioptria}}}$.

13.107. Üvegből készült gyűjtőlencse mindkét gömbfelületének a görbületi sugara 10 cm.
Hányszorosára változik a lencse fókusztávolsága, ha vízbe tesszük?

Az üveg törésmutatója 1,5, a vízé $\frac{4}{3}$.

Megoldás:

13.107. $r_1 = r_2 = 10$ cm; $n_{ü,l} = 1{,}5$; $n_{v,l} = \frac{4}{3}$.

A levegőben a lencse fókusztávolsága $\frac{1}{f} = (n_{ü,l} - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$; $f = 10$ cm.

Ha a lencsét vízbe tesszük, megváltozik a fókusztávolsága, mert más lesz az üvegnek a vízre vonatkoztatott törésmutatója. $n_{ü,v} = \frac{n_{ü,l}}{n_{v,l}} = \frac{9}{8}$.

Így a lencse fókusztávolsága vízben a fókusztávolságra adott összefüggés értelemszerű alkalmazásával $f_v = 40$ cm. Az eredményekből látszik, hogy a fókusztávolság a négyszeresére növekedett.

13.108. Egy síkdomború és egy síkhomorú lencsét siklapjaik mentén egyetlen lencsévé illesztünk össze. Az így kapott lencse fókusztávolsága 1 m. A domború felület görbületi sugara feleakkora, mint a homorúé.

Hány dioptriásak a lencsék külön-külön?
(A lencsék anyagának törésmutatója 1,5.)

Megoldás:

13.108. A domború felület sugara $r_1 > 0$, a homorúé $r_2 < 0$.

A feladat szövege szerint lehet $r_1 = \frac{r}{2}$; $r_2 = -r$; $n = 1{,}5$; $D = 1$ dioptria.

Ezeket az értékeket behelyettesítve az $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ egyenletbe, azt kapjuk, hogy $r = 0{,}5$ m.

A **13.106.** feladat megoldásában bemutatott meggondolások szerint:

$r_1 = \frac{r}{2} = 0{,}25$ m; $\underline{\underline{D_1}} = \frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{r_1} = \underline{\underline{2 \text{ dioptria.}}}$

$r_2 = -r = -0{,}5$ m; $\underline{\underline{D_2}} = (n-1)\frac{1}{r_2} = \underline{\underline{-1 \text{ dioptria.}}}$

13.109. A tárgy és az ernyő rögzített távolságra vannak egymástól. A közéjük helyezett lencse két helyzetben ad éles, valódi képet. A lencse két helyzetének a távolsága 2 m. A két kép nagyításának aránya 4.

a) Hány dioptriás a lencse?
b) Hányszorosak a nagyítások külön-külön?

Megoldás:

13.109. Az eszközök elrendezéséből következik, hogy az egyik esetben nagyított, a másikban pedig kicsinyített képet kapunk. A tárgy és az ernyő távolsága legyen $t + k$.

Az első esetben: $t_1 = t$; $k_1 = k$; $N_1 = \frac{k}{t}$.

A második esetben: $t_2 = k$; $k_2 = t$; $N_2 = \frac{t}{k}$. A nagyítások szorzata, illetve hányadosa $N_1 \cdot N_2 = 1$; $\frac{N_1}{N_2} = 4$. Az e két egyenletből alkotott egyenletrendszer megoldása: $N_1 = 2$; $N_2 = \frac{1}{2}$.

A két lencsehelyzet távolsága $t_2 - t_1 = 2$ m; de $t_1 = k_2 = N_2 \cdot t_2$, így

$t_2 - N_2 \cdot t_2 = t_2 - \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2}t_2 = 2$ m; $t_2 = 4$ m; $k = t_2 = 4$ m; $t = t_1 = 2$ m.

A leképezési törvény alkalmazásával: $f = \frac{4}{3}$ m; $\underline{\underline{D = 0{,}75 \text{ dioptria}}}$.

13.110. Két, megegyező fókusztávolságú gyűjtőlencsét egymástól 90 cm távolságra úgy helyezünk el, hogy optikai tengelyeik egybeesnek. A lencsék közötti tárgyról keletkező valódi képek távolsága 180 cm, a tárgytól mért távolságuk pedig megegyezik. Az egyik kép kétszeres nagyítású.

a) Mekkora a lencsék fókusztávolsága?
b) Hol helyeztük el a tárgyat a lencsék között?
c) Mekkora a két kép nagyításának aránya?

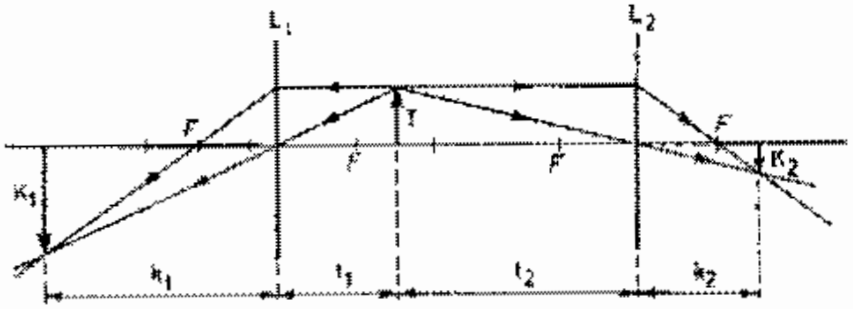
Megoldás:

13.110. A feladat megfogalmazása és az ábra alapján $t_1 + k_1 = 90$ cm; $N_1 = 2$: $k_1 = 2t$; $t_1 = 30$ cm; $k_1 = 60$ cm.

A leképezési törvény alkalmazásával: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$, $\underline{\underline{f = 20 \text{ cm}}}$.

A tárgyat az első (L_1) lencsétől $\underline{\underline{t_1 = 30 \text{ cm}}}$, a másiktól ($L_2$) $\underline{\underline{t_2 = 60 \text{ cm}}}$ távolságra helyezték el.

A képtávolságra fennáll: $k_2 = 30$ cm, a nagyítás a második esetben: $N_2 = \frac{1}{2}$; a nagyítások aránya: $\underline{\underline{\frac{N_1}{N_2} = 4}}$.



13.111. Egy trapéznak az f gyújtótávolságú lencsével előállított valódi képét az $\frac{f}{2}$ fókusztávolságú lencsével vetítjük egy ernyőre. A tárgynak az első lencsétől és a lencséknek egymástól mért távolsága $3f$.

a) Mekkora a tárgy és az ernyő távolsága?
b) Hányszoros nagyítású az ernyőn felfogott kép?
c) Milyen helyzetű a kép az ernyőn?

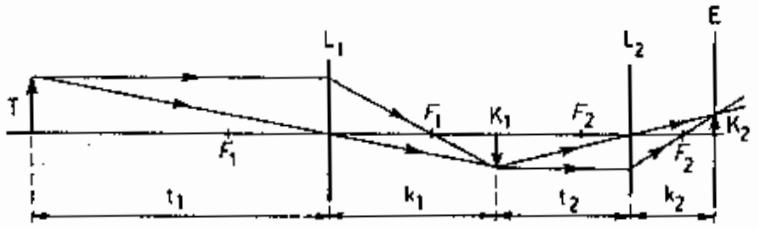
Megoldás:

13.111. a) $\underline{\underline{d = \frac{27}{4} f_2}}$, $t_1 = 3f$; $k_1 + t_2 = 3f$. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletbe való behelyettesítés után adódik: $\frac{1}{f} = \frac{1}{3f} + \frac{1}{k_1}$; $k_1 = \frac{3f}{2}$; $t_2 = \frac{3f}{2}$.

A második lencsére is alkalmazva a leképezési törvényt: $\frac{2}{f} = \frac{2}{3f} + \frac{1}{k_2}$;

$k_2 = \frac{3f}{4}$. A tárgy (T) és a kép (K_2) távolsága:

$$d = t_1 + k_1 + t_2 + k_2 = 3f + \frac{3f}{2} + \frac{3f}{2} + \frac{3f}{4} = \frac{27}{4} f.$$



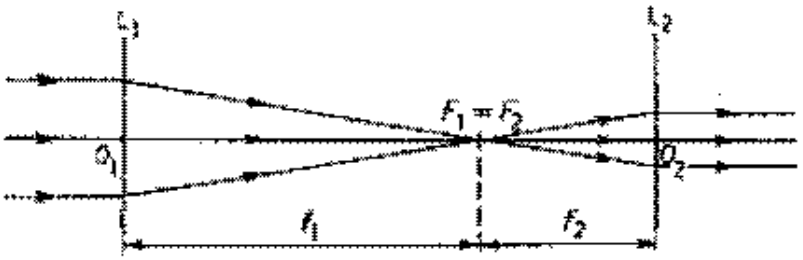
b) $\underline{\underline{N = N_1 \cdot N_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}}$.

c) A kép a tárggyal megegyező állású.

13.112. Egymástól mekkora távolságra kell elhelyezni az 50 cm és a 25 cm fókusztávolságú gyűjtőlencséket, ha azt akarjuk, hogy az egyik lencsére párhuzamosan érkező fénysugarak a két lencsén való áthaladás után is párhuzamosak maradjanak?
(Méretarányos rajzon szerkesszük meg a sugármeneteket!)

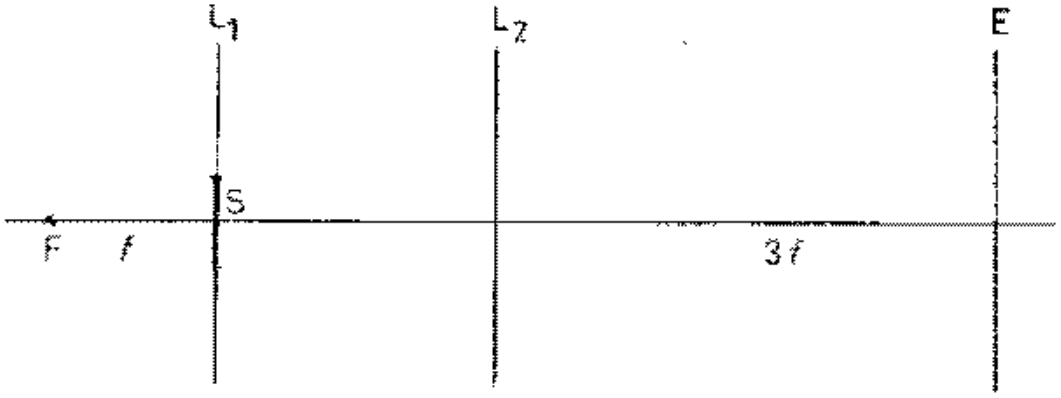
Megoldás:

13.112. Ábra:



Az ábráról látható, hogy $\underline{d = f_1 + f_2 = 75 \text{ cm}}$.

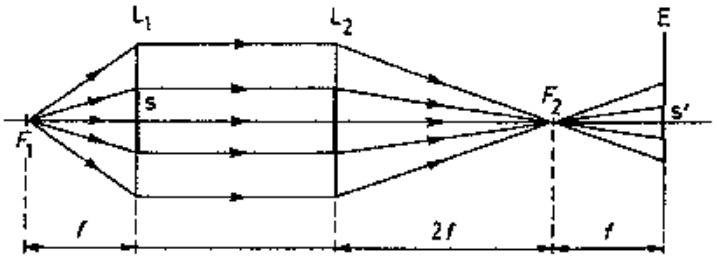
13.113. Az 5 cm átmérőjű L_1 és L_2 gyűjtőlencséket az ábrán látható módon rögzítjük. Az L_1 lencse fókusztávolsága f, az L_2 lencséé $2f$. Az L_1 lencse F fókuszpontjába pontszerű fényforrást helyezünk, majd a lencsén áthaladó fénysugarak egy részét 2 cm átmérőjű S körlappal leárnyékoljuk.



Milyen fényjelenséget láthatunk az L_2 lencsétől $3f$ távolságra elhelyezett E ernyőn?

Megoldás:

13.113. Ábra:



Az ernyőn egy világos körgyűrű látható, a közepén sötét folt van. $GHF_2\Delta \sim G'H'F_2\Delta$, a hasonlóság aránya 0,5. Így a sötét folt átmérője 1 cm, a világos gyűrű külső átmérője 2,5 cm.

13.114. Egy tárgy és a képet felfogó ernyő távolsága 80 cm. Közöttük egy lencsét mozgatva, a tárgyról kétszer kapunk éles képet. Az egyik kép nagysága a másiknak kilencszerese. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

Megoldás:

13.114. $t + k = 80$ cm; $\frac{N_1}{N_2} = 9$. A feladat értelmezhető úgy, hogy az ernyő és a tárgy cserélnek helyet, így t és k is szerepet cserélnek. Ezt felhasználva a nagyítások hányadosában: $\frac{\frac{k}{t}}{\frac{t}{k}} = \frac{k^2}{t^2} = 9$; valódi kép esetén a megoldás csak $\frac{k}{t} = 3$ lehet, ennek megfelelően $t = 20$ cm; $k = 60$ cm. Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletet az adatokkal megoldva a fókusztávolság: $f = 15$ cm.

13.115. Egy lencse fókusztávolsága 25 cm.

a) Mekkora lehet a lencse elé helyezett tárgy és annak valódi képe között a legkisebb távolság?

b) Mekkora lehet a tárgy és a virtuális képe között a legkisebb távolság?

Megoldás:

13.115. **a)** A gyűjtőlencsék képszerkesztéséből tudjuk, hogy $t = 2f$ tárgytávolsághoz $k = 2f$ képtávolság tartozik, így a tárgy és a kép egymástól mért távolsága $t + k = 4f$.

Belátható, hogy a valódi kép és a tárgy egymástól mért távolságának minimuma $4f$. Ugyanis:

1. Ha a $t = 2f$ tárgyhelyzetből kiindulva növekszik a tárgytávolság Δt-vel, akkor a képtávolság csökken Δk-val. A képszerkesztés szerint Δt képe a Δk, emiatt $\Delta k < \Delta t$, $\Delta t - \Delta k > 0$. A tárgy és a két távolsága ezáltal növekedett, $t + \Delta t + k - \Delta k > t + k = 4f$.

2. Ha a $t = 2f$ tárgytávolság csökken Δt-vel, akkor a képtávolság növekszik $\Delta k'$-vel.

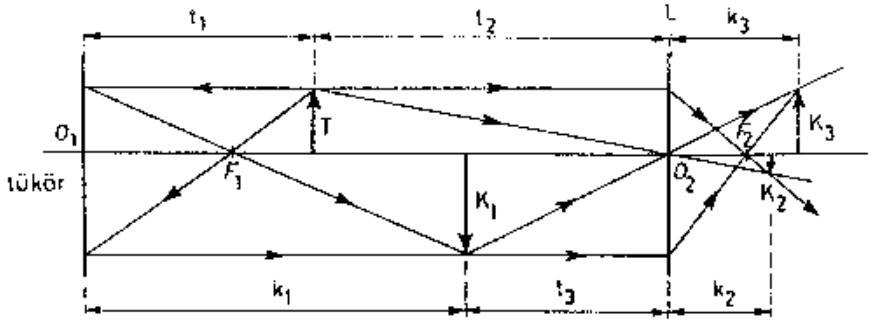
A képszerkesztés nagyítása miatt $\Delta k' > \Delta t$, $\Delta k' - \Delta t > 0$. A tárgy és a kép távolsága $t - \Delta t + k + \Delta k' > t + k = 4f$, tehát ismét növekszik a távolság.

b) Virtuális kép akkor keletkezik, ha a tárgy a fókusztávolságon belülre kerül. A tárgytávolság csökkentése nyomán a kép is egyre közelebb kerül a lencséhez. A kép és a tárgy közötti távolság akkor lenne a legkisebb, ha a tárgy a lencse fősíkjába kerülne. Ez pedig nem teszi lehetővé a képszerkesztést.

13.116. Egy homorú tükör és egy domború lencse 80 cm-re állnak egymástól, optikai tengelyük közös. A tükör görbületi sugara 40 cm, a lencse fókusztávolsága 10 cm. A tükör és a lencse között, a tükörtől 30 cm távolságra elhelyezünk egy tárgyat.
Számítsuk ki a keletkező képek távolságát!

Megoldás:

13.116. Ábra:



A homorú tükör görbületi sugara $r = 40$ cm, tehát $f_H = 20$ cm. Ha $t_1 = 30$ cm, akkor a leképezési törvény alapján az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenlet megoldásával a tükörtől $k_1 = 60$ cm távolságban keletkezik a K_1 kép. Ez $t_3 = 20$ cm-re van a lencsétől. Az $f_l = 10$ cm fókusztávolságú lencse a K_1 képről $k_3 = 20$ cm képtávolságú K_3 képet, a lencsétől $t_2 = 50$ cm-re álló eredeti tárgyról pedig $k_2 = 12{,}5$ cm képtávolságú K_2 képet szerkeszt.

13.117. Mekkora gyújtótávolságú lencse ad + 2-szeres nagyítást, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 9 cm? Mekkora a képtávolság és a tárgytávolság?

Megoldás:

13.117. A feltétel szerint: $N = \frac{k}{t} = 2$; $k + t = 9$ cm. E két egyenletből alkotott egyenletrendszer megoldásából adódik: $k = 6$ cm; $t = 3$ cm. Az adatok birtokában megoldva az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletet: $\underline{\underline{f = 2 \text{ cm}}}$.

13.119. Egy 4 cm-es tárgytól 15 cm-re 2 cm magas, valódi, fordított állású kép keletkezik.

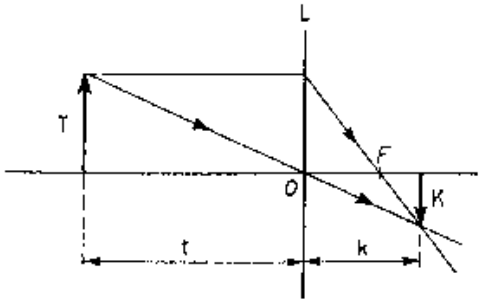
a) Mekkora a lencse fókusztávolsága és a tárgytávolság?
b) Szerkesszük meg a lencse helyét és fókusztávolságát!
c) Mekkora a nagyítás?

Megoldás:

13.119. *a)* Az adatokból következik, hogy $N = 0{,}5$.

$t + k = 15$ cm; $t = 2k$, az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletet megoldva $k = 5$ cm, $t = 10$ cm; $f = \frac{10}{3}$ cm.

b) Ábra:



c) $N = 0{,}5$.

14.1. *Válasszuk ki a* nyugvó elektromos töltések elektromos mezőjének erővonal-rendszerére vonatkozó *állítások közül a* HIBÁSAT!

A) Az erővonalakat olyan görbülettel vesszük fel, hogy a vonal minden pontjában a görbe érintője megadja a pontbeli térerősségvektor irányát.

B) A vonalakat olyan irányítással látjuk el, hogy a pozitív töltéstől a negatív töltés felé irányuljanak.

C) Az erővonalakat olyan sűrűséggel vesszük fel, hogy a mező adott helyén az erővonalakra merőleges egységnyi felületen annyi erővonal haladjon át, amennyi ott a térerősség nagysága.

Megoldás:

14.1. Mindhárom állítás helyes, azzal a kiegészítéssel, hogy az érintő csak a térerősségvektor egyenesét adja meg.

14.2. *Válasszuk ki az* elektromos mezőre vonatkozó *alábbi állítások közül a* HIBÁSAT!

A) Az elektromos mezőnek energiája van.

B) Az elektromos mező két pontja közötti energiaszint különbségét mennyiségileg a két pont közötti feszültséggel jellemezzük.

C) Egy fémgömbön lévő nyugvó elektromos töltés a vezető belsejében és a vezetővel körülvett üregben zérustól különböző, azonos térerősségű mezőt hoz létre.

D) Sztatikus elektromos állapotban az elektromos potenciál a vezető minden pontjában azonos.

Megoldás:

14.2. A C állítás hibás, mert a fémgömb anyagában, mint minden vezető anyag belsejében, valamint a vezető anyaggal körülvett térben a térerősség zérus, ha felületén nyugvó töltés helyezkedik el. Ha ugyanis E nem lenne zérus, akkor a vezető belsejében lévő töltéshordozók (fém esetén szabad elektronok) az E irányának megfelelően elmozdulnának. Az üreg térerősségének zérus voltára pedig jó kísérleti bizonyíték a „Faraday-kalitka". Zárt fémdobozba helyezett, vagy sűrű fémhálóval körülvett elektroszkóp nem tér ki, bármekkora töltést viszünk is a körülvevő vezetőre.

14.3. *Az alábbi jelenségre vonatkozó állítások közül válasszuk ki a* HELYESEKET!

Egy Q töltésű és m tömegű részecske egy Q'-vel jelölt, pontszerűnek tekinthető, rögzített töltés körül állandó v sebességgel, r sugarú körpályán mozog az elektromos mező hatására.

1. A töltések előjele lehet: *A)* Q pozitív, Q' negatív;
   B) Q negatív, Q' pozitív;
   C) Q negatív, Q' negatív;
   D) Q pozitív, Q' pozitív.
2. A Q töltés: *A)* homogén mezőben mozog,
   B) inhomogén mezőben mozog,
   C) azonos potenciálú pontokon halad át.
3. A Q töltés v sebessége:
   A) az erővonalakra mindig merőleges irányú,
   B) nagysága csak r, Q és Q' értékétől függ,
   C) nagysága Q, Q', r és m értékétől függ.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.3. 1. A C, és a D állítás hamis. Ugyanis Q töltésű részecskére egyetlen erő, a Coulomb-féle erő hat, ha az mg erő elhanyagolható. Nagysága: $F = k\frac{Q \cdot Q'}{r^2}$. Iránya a $\overrightarrow{Q' \cdot Q}$ iránynak megfelelően, sugárirányban, a centrumtól kifelé mutat, mivel a töltések előjele egyező, és ennek megfelelően taszítás lép fel. Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele pedig az, hogy a mozgó testre ható erők eredője állandó nagyságú legyen, és minden pillanatban a kör középpontja, tehát a centrum felé mutasson (centripetális erő). Ez utóbbi pedig csak az A és a B esetekben teljesül, a C és a D esetben nem.

2. Az A állítás hamis, a B és C állítások igazak. A Q töltés most a Q' pontszerű töltés elektromos terében mozog, amely inhomogén. Ugyanis az E nagysága egy P pontban $E_P = k\frac{Q'}{x^2}$, ahol x a kérdéses P pont és a Q' távolsága. Ennek értéke nem állandó, így E_P sem az. Az E iránya minden P pontban $\overline{Q'P}$ vagy $\overline{PQ'}$ irányú – Q' előjelétől függően. Ezek pedig egymással nem párhuzamosak. A potenciál $U(r) = k\frac{Q'}{r}$ alapján számolható. Mivel a potenciálokat a körpálya pontjaiban kell vizsgálni, ezek értéke a Q' és r konstans volta miatt állandó.

3. Az A állítás helyes, mert az erővonalak sugárirányúak, a kerületi sebesség érintőirányú, így egymásra merőlegesek.

A C állítás szintén helyes, ugyanis a centripetális erő a Coulomb-féle erő: $\frac{m \cdot v^2}{r} = k\frac{Q \cdot Q'}{r^2}$. Ebből $v = \sqrt{\frac{k \cdot Q \cdot Q'}{r \cdot m}}$.

Tehát v a Q, a Q', az r és az m értékétől függ.

14.4. *Válasszuk ki* az alább felsorolt erők közül azokat, amelyek a Millikan-féle kísérletben szereplő olajcseppre hatnak!

a) Az olajcsepp tömegének meghatározásakor (a kondenzátor lemezei között $U = 0$)

b) Az olajcsepp töltésének meghatározásakor

A) a Lorentz-erő (F_L),

B) az elektromos erő (F_E),

C) a súrlódási erő (F_S),

D) a felhajtóerő (F_F),

E) a nehézségi erő (G),

F) a mágneses erő (F_M).

Megoldás:

14.4. **a)** A C, D, E válasz helyes. Az adott kísérletben a nehézségi erő mellett nem elhanyagolható mértékűek a felhajtó és súrlódási (közegellenállási) erők sem. A Lorentz, illetve a mágneses erő csak mágneses mezőben, az elektromos erő pedig elektromos mezőben léphet fel. Ezek pedig nincsenek jelen a kísérlet ezen szakaszában. Így az *A*, *B* és *F* válaszok hamisak.

b) A *B*, *C*, *D* és E válaszok helyesek. Itt már feszültség is van a lemezek között, tehát elektromos mező alakul ki. Így az olajcseppre az előzőekben leírt erőkön kívül az elektromos erő is hat. Amikor az olajcsepp már lebeg, illetve nem mozog, a közegellenállási erő már nem hat!

14.5. Az elektron melyik jellemzőjét határozza meg a Millikan-kísérlet az alábbiak közül?

A) A fajlagos töltését,
B) a tömegét,
C) a töltését.

Megoldás:

14.5. A *C* válasz a helyes, az elektron töltését a vizsgált olajcseppek töltéseinek összehasonlításából határozták meg.

14.6. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

A) A megdörzsölt üvegrúd taszítani fogja a cérnaszálon felfüggesztett másik, semleges üvegrudat.

B) A megdörzsölt ebonitrúd a fonálra függesztett semleges műanyag golyót előbb maga felé vonzza, majd – ha érintkeztek – eltaszítja.

C) A vízcsapból kifolyó vékony vízsugarat a megdörzsölt ebonitrúd vonzza, a megdörzsölt üvegrúd pedig taszítja.

D) A két, levegőben elhelyezett ponttöltés közötti elektrosztatikus erőt egyértelműen meghatározza a töltések nagysága és távolságuk!

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.6. Az *A* hamis, mert az elektromos megosztás miatt vonzás lép fel.
A *B* válasz igaz. Először az elektromos megosztás miatt vonzza. Az érintkezéskor a töltések átvándorlása miatt azonos töltésű lesz a két test, így taszítják egymást.
A *C* válasz hamis, mert az elektromos megosztás miatt mindkét esetben vonzás lép fel. (Ha kimutatható.)
A *D* válasz helyesnek tekinthető, hiszen az $F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ összefüggés jó közelítéssel nemcsak vákuumban, hanem levegőben is érvényes.
Levegőben $F = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$, de ε_r értéke alig különbözik 1-től.

14.7. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldást!*

Mekkora erőhatás lép fel két, vákuumban elhelyezkedő 1 C nagyságú pontszerű elektromos töltés között, ha távolságuk 1 m?

A) 1 N,

B) $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ N,

C) $9 \cdot 10^{9}$ N,

D) $\frac{1}{4}$ N.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.7. A C válasz a helyes. Az $F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ összefüggésbe helyettesítve $F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = \underline{\underline{9 \cdot 10^9 \text{ N}}}$.

14.8. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Szigetelő talpon álló, belül üres, nyitott fémgömbre elektromos töltést viszünk. Hová érintsük a töltetlen fémgömböt, ha vele töltést akarunk levenni a töltött gömbről?

A) A gömb külső felületéhez.
B) A gömb belső felületéhez.
C) Akár a külső, akár a belső felülethez.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.8. Az A válasz a helyes, mert az azonos előjelű töltések taszítás következtében külső felületen helyezkednek el, ugyanis itt vannak legtávolabb egymástól.

14.9. *Jelöljük meg* a HIBÁS *választ!*

Adott ponttöltéstől származó elektromos mezőben miként függ az elektromos térerősség a mezőt létrehozó töltés nagyságától és az attól mért távolságtól?

A) Egyenesen arányos a töltés nagyságával és a töltéstől mért távolság négyzetének reciprokával.
B) A töltéssel egyenesen, a távolság négyzetével fordítottan arányos.
C) A töltéssel egyenesen, a távolság négyzetének reciprokával fordítottan arányos.
D) A töltéssel és a távolság reciprokának négyzetével egyenesen arányos.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.9. A Q pontszerű töltés elektromos mezőjében a térerősség a töltéstől r távolságra: $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$. Így $\underline{C}$ hibás.

14.10. *Jelöljük meg* a HIBÁS *választ!*

Mi történik akkor, ha feltöltött síkkondenzátor lemezei közé szigetelőanyagot csúsztatunk?

A) A kondenzátor töltése csökken.
B) A kondenzátor feszültsége csökken.
C) A kondenzátor kapacitása növekszik.
D) A kondenzátorlemezek között csökken a potenciálkülönbség.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.10. Az $\underline{\underline{A}}$ hamis, mert a töltések számát a szigetelőanyag bevitele nem befolyásolja.

B, *C*, *D* helyes. A szigetelőanyag bevitelével a kapacitás nő: $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$ vákuumban, és $C = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d}$ szigetelőanyag esetén, ahol ε_r a szigetelőanyag relatív dielektromos állandója.

Az $U = \frac{Q}{C}$ miatt a feszültség, illetve a potenciálkülönbség csökken, hiszen Q nem változik, a C pedig növekszik.

14.11. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állítást!*

A homogén elektrosztatikus mezőben

A) a különböző előjelű, azonos nagyságú elektromos töltésekre a mező minden pontjában azonos erő hat,

B) a töltésnek potenciális energiája van,

C) a térerősség mindenütt különbözik nullától,

D) a térerősségvektorok minden pontban azonos nagyságúak és irányúak.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

14.11. Az $\underline{\underline{A}}$ hibás, mert az $F = E \cdot Q$ alapján az erők irányai ellentétesek, ha a töltések ellentétes előjelűek. A két erő nagysága egyenlő.

A *B* válasz helyesnek tekinthető. Ugyanis a homogén mező egy *A* pontjában a potenciális energia $W_{pot}(A) = Q \cdot E \cdot d$, ahol Q az *A* pontba vitt töltés, E a térerősség és d az *A* pont 0 szinttől mért távolsága. A 0 szint egy olyan általunk választott viszonyítási felület, amelyen minden pontban 0-nak vesszük a potenciált.

$W_{pot}(A)$ csak akkor lehet 0, ha $d = 0$, vagyis ha a Q töltés (így az *A* pont) is a 0 potenciálon van.

Ebben az esetben nincs potenciális energiája.

A *C* válasz helyes, mert ha olyan elektrosztatikus mezőről van szó, amely homogén, akkor az E vektor minden pontban egyenlő, és ez nem lehet 0. Ekkor ugyanis nem beszélhetünk elektromos mezőről.

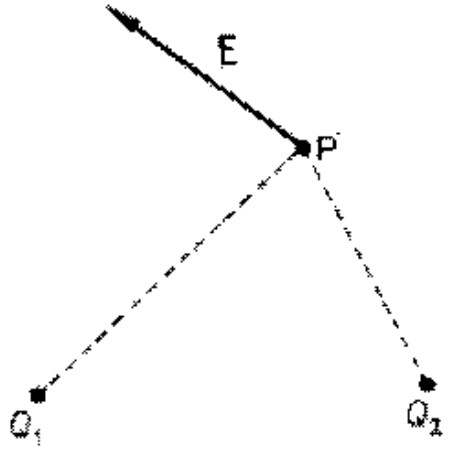
A *D* válasz helyes. Ez a homogén mező definíciójából következik.

14.12. *Válasszuk ki az ábrának megfelelő* HELYES *állítást!*

Ha a P pontban lévő próbatöltés pozitív, akkor

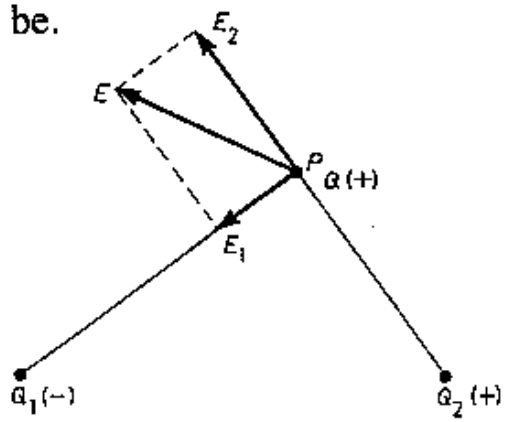
A) Q_1 pozitív, Q_2 pozitív,
B) Q_1 pozitív, Q_2 negatív,
C) Q_1 negatív, Q_2 pozitív,
D) Q_1 negatív, Q_2 negatív.

Indokoljuk választásunkat!



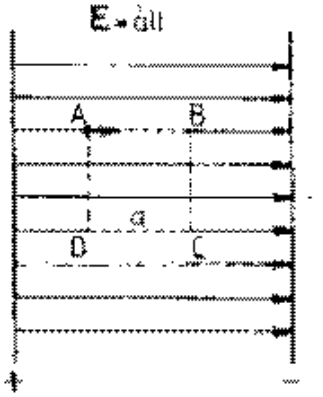
Megoldás:

14.12. A $\underline{C}$ állítás a helyes, ami szerkesztéssel indokolható.
A másik három állítás hamis, ami szintén szerkesztésekkel látható be.



14.13. Az alábbi ábrán egy homogén elektromos mező látható.

Bizonyítsuk be, hogy ha az ábrán látható négyzet (zárt görbe) mentén egységnyi pozitív töltést viszünk végig egyenletes mozgással, akkor a térerősség összmunkája zérus!



Megoldás:

14.13. $W_{AB} = E \cdot Q \cdot a$; $W_{BC} = W_{DA} = 0$, mert az elmozdulás merőleges az erővonalakra. A $W_{CD} = -E \cdot Q \cdot a$ munka azért negatív, mert az elmozdulás az erővonalakkal ellentétes irányban történik. A W_{ABCDA} munka a négy munka összege. $W_{ABCDA} = E \cdot Q \cdot a + 0 - E \cdot Q \cdot a + 0 = 0$.

14.14. Definiáljuk az elektromos mezőt jellemző térerősségvektort!

Megoldás:

14.14. A mező egy adott P pontjában az E vektor nagysága $E = \frac{F}{Q}$, ahol Q a P pontba helyezett próbatöltés, F pedig a mező által a Q töltésre kifejtett erő nagysága. Az E vektor iránya megegyezik a pozitív próbatöltésre ható erő irányával.

14.15. Definiáljuk az elektromos mező két pontja közötti feszültséget!

Megoldás:

14.15. $U_{AB} = \dfrac{W_{AB}}{Q}$. Ahol W_{AB} az elektromos mező munkája, miközben a pozitív Q töltésű test az A pontból a B pontba mozog.

14.16. Magyarázzuk meg, hogy

a) miért vonzza az elektromos állapotú test a semleges testet,

b) összeérintésük után miért taszítják egymást?

Megoldás:

14.16. **a)** Az elektromos állapotú test a semleges testen töltésmegosztást vagy dielektromos polarizációt eredményez. A közelebbi oldalak ellentétes töltésűek lesznek, ez okozza a vonzóerőt.

b) Összeérintés után a töltés a két test között kiegyenlítődik. A testek taszítani fogják egymást.

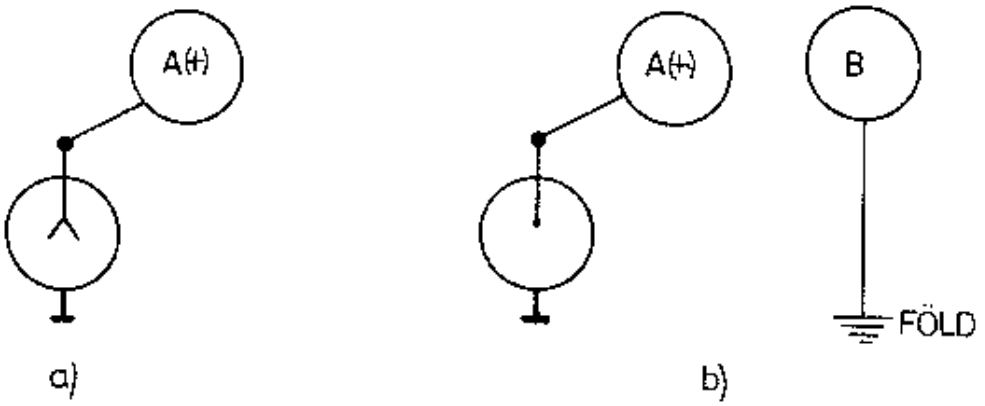
14.17. Hogyan tehető pozitív töltésűvé egy elektromosan semleges fémhenger elektromos megosztással? Magyarázzuk meg a jelenséget!

Megoldás:

14.17. A semleges testhez negatív töltéssel közelítünk, majd a fémhengert földeljük.

Magyarázat: A negatív megosztó test az elektronokat a fémhenger távolabbi felébe taszítja. Földeléskor a negatív töltéseket elvezetjük, a pozitív töltéseket a negatív megosztó test ott „tartja".

14.18. *Rajzoljuk be mindkét ábrába* a pozitív töltésű „A" gömb erővonalrendszerét és állapítsuk meg a *b)* ábrán az elektroszkóp kitérését az *a)* ábrához viszonyítva!

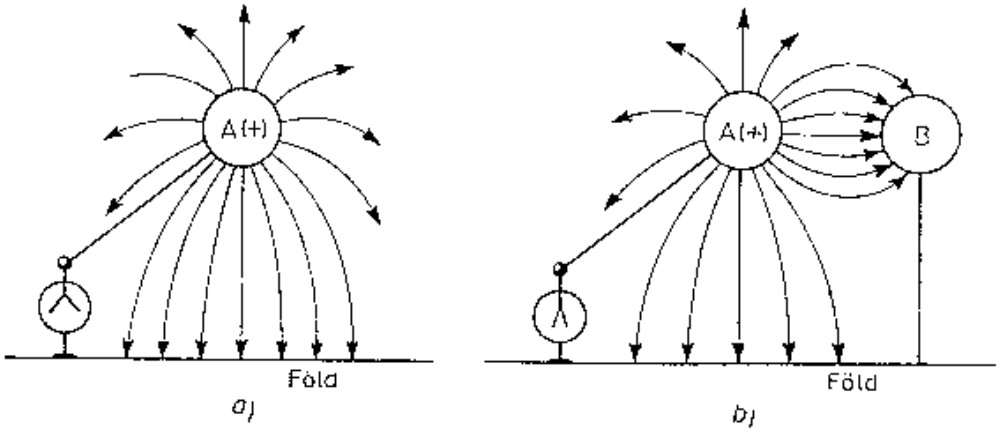


a) b)

Hogyan változott az „A" gömb potenciálja és kapacitása, miután a „B" gömböt mellé helyeztük és az „A" gömbön a töltést nem változtattuk?
Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

14.18. Az A gömb potenciálja (földhöz viszonyított feszültsége) csökkent, kapacitása növekedett, amikor a B földelt gömböt melléhelyeztük.



Ennek megfelelően a elektroszkóp kitérése is csökkent.

Magyarázat: A második esetben az erővonalak egy része nem a végtelenbe, illetve a föld felé tart, hanem B gömbben végződik. Ezáltal az erővonalak sűrűsége és így a térerősség is csökken az A gömb és a föld közötti térrészben. Ennek megfelelően az A gömb és a föld közötti feszültség is csökken, mivel a közöttük lévő távolság nem változott.

Nem változott a Q töltésmennyiség sem. Mivel $C = \frac{Q}{U}$ és U csökkent, így a C nőtt az A gömbön.

14.19. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Egy kondenzátor kapacitása nő, ha

A) növeljük a fegyverzeteken lévő töltést,
B) lemezeit távolítjuk egymástól,
C) lemezei közé szigetelőanyagot teszünk,
D) a fegyverzetek szembenéző felületeit növeljük.

Megoldás:

14.19. A válaszokat a $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}$ összefüggés alapján adhatjuk meg, ahol A a szemben lévő lemezfelület, d a lemezek távolsága, ε_r a szigetelőanyag relatív dielektromos állandója és $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot k}$.
Így A hamis, mert a C független Q-tól. (Ha ugyanis adott kondenzátor esetén növeljük a Q-t, vele arányosan nő az U is, így $C = \frac{Q}{U}$ állandó marad.)

B hamis, mert d-vel fordítottan arányos a C.
C igaz. Lásd a 14.10. B válaszát.
D igaz. A fenti összefüggésből látható.

14.20. *A következő állításokban jelöljük meg az A)-val vagy B)-vel jelzett részt, esetleg mindkettőt, attól függően, hogy melyikre, vagy melyekre* HELYES *az állítás!*

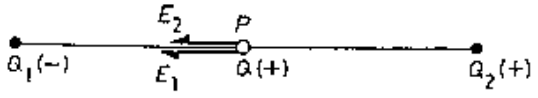
1. Az elektromos mező adott pontjának jellemző mennyisége

   A) a térerősség,
   B) a potenciál.
2. A térerősség
   A) vektormennyiség,
   B) skalármennyiség.
3. Homogén elektromos mező egy pontjában a térerősség iránya megegyezik
   A) a pontba helyezett pozitív töltésre ható erő irányával,
   B) a ponton áthaladó erővonalak irányitásával.
4. Egy negatív és egy pozitív pontszerű töltést összekötő szakasz egy megadott pontjában a térerősség egyenlő az egyes pontszerű töltések adott pontbeli térerősségeinek
   A) összegével,
   B) különbségével.

Megoldás:

14.20.

1. $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ is igaz. Lásd a bevezetőt.
2. $\underline{\underline{A}}$ igaz – definíció szerint. Lásd a bevezetőt.
3. $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ is igaz – definíció szerint. Lásd a bevezetőt.
4. $\underline{\underline{A}}$ helyes, mert a térerősség iránya megegyezik a P pontban lévő pozitív próbatöltésre ható erő irányával. Az ábra szerint látható, hogy a két térerősség egyirányú, ezért összeadódik.



14.21. *A következő állításokban jelöljük meg azt az A)-val vagy B)-vel jelzett részt – esetleg mindkettőt –, melyekre* HELYES *az állítás!*

1. Két pontszerű töltés közötti erő fordítottan arányos a köztük lévő
   A) távolsággal,
   B) távolság négyzetével.
2. Két pontszerű töltés közötti erő az egyes töltésmennyiségekkel
   A) egyenesen arányos,
   B) fordítottan arányos.
3. A Coulomb-törvényben szereplő arányossági tényező
   A) minden közegben állandó,
   B) közegenként változó.
4. Két fémgömb töltését külön-külön kétszeresére növeljük, távolságuk nem változik. A köztük ható erő
   A) négyszeresére nő,
   B) kétszeresére nő.

Megoldás:

14.21. A kérdésekre az $F = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ összefüggés alapján adhatjuk meg a választ, ahol εr a közeg dielektromos állandója, ami anyagonként különböző. Így: **1.** $\underline{\underline{B}}$ igaz; **2.** $\underline{\underline{A}}$ igaz; **3.** $\underline{\underline{B}}$ igaz; **4.** $\underline{\underline{A}}$ igaz.

14.22. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt állítások az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás és az indoklás igaz, az állítás és indoklás között ok-okozati összefüggés van.

B) Az állítás és az indoklás is igaz, az állítás és az indoklás között nincs ok-okozati összeffüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás nem igaz.

D) Az állítás nem igaz, az indoklás igaz.

E) Az állítás nem igaz, az indoklás sem igaz.

Indokoljuk választásunkat!

1. Pontszerű töltéstől állandó „*r*" távolságban mozgó töltésen a mező nem végez munkát, mert a mező munkája nulla, ha a töltés ekvipotenciális felületen mozdul el.
2. A vezetőkben szabadon mozgó töltéshordozók vannak, mert ha két különböző potenciálú helyet vezetővel összekötünk, a vezetőben lévő töltések elmozdulnak.
3. Ha két különböző sugarú, töltött vezető gömböt összeérintünk, a gömbökön a töltéssűrűségek nem változnak, mert a töltött testek érintkezésekor a töltések is és a felületek is összeadódnak.
4. Az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző töltést körülvevő mező elektrosztatikus, mert az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test egyensúlyi állapotban van.

Megoldás:

14.22. 1. A

Az állítás első része igaz, mert az elmozdulás minden pillanatban érintőirányú, az erővonalak sugárirányúak, így a kettő merőleges egymásra. Ezért $W = 0$.

Az állítás második része önmagában szintén igaz, hiszen ekvipotenciális felületen lévő pontok esetén $U_A = U_B$. Így $W = Q \cdot U_{AB} = Q(U_A - U_B) = Q \cdot 0 = 0$.

A körpályán mozgó töltés valóban ekvipotenciális felületen mozog, mert az $U_P = k \cdot \frac{Q}{r}$. Az U_P a Q töltéstől r távolságban lévő P pontbeli potenciál értéke. Ez állandó, ha r is állandó.

2. B.

Mindkét állítás külön-külön triviálisan igaz, de nem azért vannak a vezetőben szabad töltéshordozók, mert feszültség hatására ezek elmozdulnak. A szabad töltéshordozók léte a vezetők anyagszerkezetéből következik.

3. D.

Az állítás általában nem igaz, kivéve ha a gömbök potenciálja egyenlő. Ekkor ugyanis nem indul meg töltésáramlás, így a töltéssűrűség mindkét gömbön megmarad. Egyébként az áramlás a potenciálok kiegyenlítődéséig tart, és ekkor megváltoznak a töltéssűrűségek. Az indoklás külön igaz, hiszen az egyesített rendszer felülete a két felület összege, és az össztöltés is az egyes gömbök töltéseinek összege.

4. D.

Az elektromos mező sztatikus, ha nyugvó töltésektől származik, vagy ha a mezőt jellemző fizikai mennyiség egy adott pontban időben állandó. Ez az állításban nem teljesül. Az egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző test általános értelemben egyensúlyban van, tehát az indoklás igaz.

14.23. *Döntsük el, hogy a számokkal megjelölt állítások az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Az állítás és az indoklás is igaz, az állítás és indoklás között ok-okozati összefüggés van.

B) Az állítás és az indoklás is igaz, az állítás és az indoklás között nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás igaz, az indoklás nem igaz.

D) Az állítás nem igaz, az indoklás igaz.

E) Az állítás sem igaz, az indoklás sem igaz.

Indokoljuk választásunkat!

1. Az érzékeny elektromos műszereket szigetelőből készült dobozba teszik, mert a szigetelőkön az elektromos mező nem hatol át.
2. Feszültségforrást és feltöltött kondenzátort tartalmazó egyenáramú hálózatban nem folyik áram, mert a kondenzátor feltöltődése után nem jön létre a töltéskiegyenlítődés a fegyverzetek töltései között.
3. A zárt áramkörben az áram erősségének növekedésekor általában csökken a telep kapocsfeszültsége, mert a telep belső ellenállása miatt kisebb lesz a telep üresjárási feszültsége is.
4. Két, azonos sugarú fémgömb közül az egyiknek elektromos töltése van. A két gömb összeérintése után taszítja egymást, mert a gömbök között összeérintéskor elektromos megosztás jön létre.

Megoldás:

14.23. 1. $\underline{\underline{E}}$.
Sem az állítás, sem az indoklás nem egyértelműen igaz, mert a külső elektromos mező a szigetelőkön keresztül is valamilyen mértékben áthatol. Az érzékeny műszereket, elektromos eszközöket fémdobozba helyezik, árnyékolják (Faraday-kalitka).
2. $\underline{\underline{A}}$.
Az állítás igaz, mert csak a kondenzátor feltöltéséig – nagyon rövid ideig – folyik áram. Amikor a kondenzátor feszültsége egyenlő a feszültségforrásával, akkor az áramlás megszűnik. Az indoklás mint állítás igaz. A feltöltött kondenzátor lemezei között nem jön létre töltéskiegyenlítődés, mert a lemezek között szigetelőanyag van, illetve a telep felé azért nem, mert ehhez polaritásváltásra lenne szükség. Mivel töltéskiegyenlítődés az adott esetben nem jöhet létre, így valóban nem alakul ki áram sem.
3. $\underline{\underline{C}}$.
Az állítás igaz, mert $U_k = U_e - I \cdot R_b$, és itt U_e és R_b állandó. Az indoklás mint állítás önmagában is hamis, mert az U_e üresjárási feszültség állandónak tekinthető a kísérlet ideje alatt.
4. $\underline{\underline{C}}$.
Az állítás igaz, mert az összeérintéskor töltésáramlás következik be, így

a két gömb azonos töltésű lesz. Az indoklás önmagában hamis, mert összeérintéskor már nem megosztás jön létre.

14.24. Mekkora a homogén elektromos mező térerőssége a kondenzátorlemezek közötti vákuumban, ha abban, a térerősségvonalakkal párhuzamos 5 cm hosszúságú szakasz két végpontja között 20 V a potenciálkülönbség?
Mekkora munkát végez az elektromos mező, ha a $4 \cdot 10^{-6}$ C nagyságú pozitív töltést a térerősségvonalakkal párhuzamosan 10 cm-es úton elmozdítja?

Megoldás:

14.24. $d = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $U = 20$ V; $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ C; $s = 0{,}1$ m.
Megoldás:

a) Homogén mező térerőssége: $\underline{\underline{E}} = \frac{U}{d} = \underline{\underline{400 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$

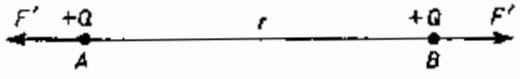
b) Az elektromos mező munkája: $\underline{\underline{W}} = F \cdot s = E \cdot Q \cdot s = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ J}}}$.
($W > 0$, mert F és s egyirányú.)

14.25. Két, rögzített, egyenlő méretű, igen kicsiny sugarú, gömb alakú (pontszerűnek tekinthető) test mindegyikének azonos nagyságú pozitív töltése van. Közöttük 10^{-5} N erő hat. Egy harmadik, töltetlen azonos méretű testet érintünk előbb a bal oldali, utána a jobb oldali töltött testhez, majd ezek után rögzítjük az eredeti testek által meghatározott szakasz felezőpontjában.
Mekkora és milyen irányú erő hat a középső testre?

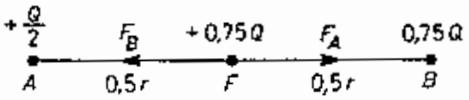
Megoldás:

14.25. $Q_A = Q_B = Q$; $AB = r$; $F' = 10^{-5}$ N.

1. Összeérintés előtt: Az A és B gömbök töltései egyenlők. Így a közöttük ható erő: $F' = k \cdot \frac{Q^2}{r^2}$ (*)



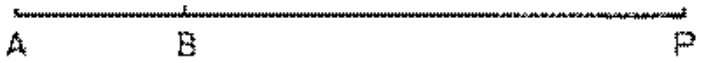
2. Összeérintés után: Ha az F gömböt A-hoz érintjük, akkor: $Q_F = \frac{Q}{2}$; $Q_A = \frac{Q}{2}$. Ha ezután az F gömböt B-hez érintjük, akkor: $Q_f = \frac{Q + 0{,}5 \cdot Q}{2} = \frac{3}{4} \cdot Q$ és $Q_B = \frac{3}{4} \cdot Q$, az egyenlő kapacitások és a töltésmegmaradás elve miatt.



Az F gömbre az A gömb: $F_A = k \cdot \frac{0{,}5 \cdot Q \cdot 0{,}75 \cdot Q}{(0{,}5r)^2}$ erővel, ugyanerre a B gömb $F_B = k \cdot \frac{0{,}75 \cdot Q \cdot 0{,}75 \cdot Q}{(0{,}5r)^2}$ erővel hat. Irányuk ellentétes. Így az eredő F erő: $F = F_B - F_A$ és az A pont felé mutat.

A műveleteket elvégezve $F = \frac{3}{4} k \cdot \frac{Q^2}{r}$. Az első (*) összefüggést felhasználva, $F = \frac{3}{4} \cdot F' = \frac{3}{4} \cdot 10^{-5}$ N $= \underline{\underline{7{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{N}}}$.

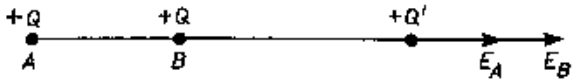
14.26. Két, egyenlő nagyságú, pontszerű, pozitív töltést rögzítettünk az A és a B pontban, egymástól 0,5 m távolságra. A közöttük fellépő elektrosztatikus erőhatás nagysága 0,036 N.



Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a töltések által meghatározott egyenes mentén a B ponttól 1,5 m távolságban lévő P pontban?

Megoldás:

14.26. $Q_A = Q_B = Q$ (pozitív); $AB = 0{,}5$ m; $BP = 1{,}5$ m; $F = 0{,}036$ N.



1. Az A és B pontban lévő töltések között a Coulomb-erő hat: $F = k\frac{Q \cdot Q}{r^2}$. Ebből $Q = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{k}} = 10^{-6}$ C.

2. A P pontban az A, illetve B pontbeli töltések elektromos terei hatnak. Az eredő térerősség e kettő összege.

$E = E_A + E_B$. Iránya az ábrán látható.

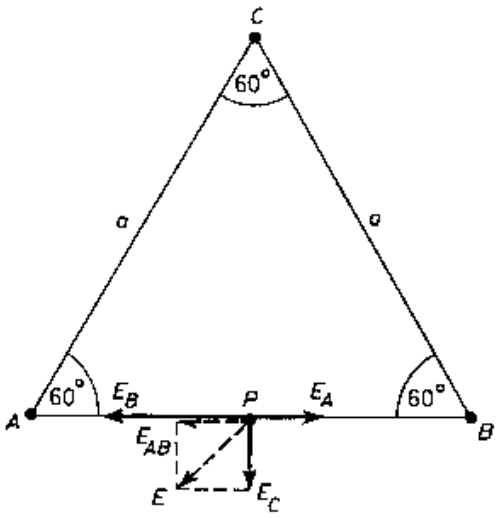
$E_A = k \cdot \frac{Q}{(AP)^2}$; $E_B = k \cdot \frac{Q}{(BP)^2}$. $AP = 2$ m; $BP = 1{,}5$ m; $\underline{\underline{E = 6250 \frac{\text{N}}{\text{C}}}}$.

14.27. Az egyenlő oldalú háromszög három, A,B,C csúcspontjába rendre $Q_A = 10^{-7}$ C, $Q_B = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $Q_C = 3 \cdot 10^{-7}$ C nagyságú, pontszerű, pozitív töltéseket helyezünk el. A háromszög oldalainak a hossza 0,6 m.
Mekkora és milyen irányú az elektromos térerősség a háromszög AB oldalának P felezőspontjában?

Megoldás:

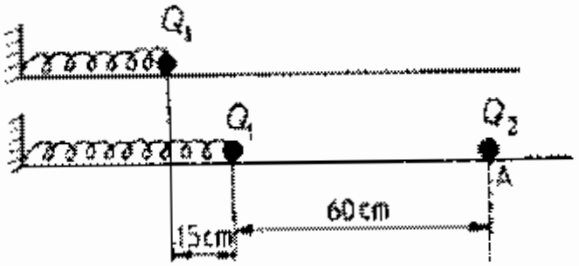
14.27. $Q_A = 10^{-7}$ C; $Q_B = 2 \cdot 10^{-7}$ C; $Q_C = 3 \cdot 10^{-7}$ C (pozitív töltések); $a = 0{,}6$ m.
A kérdéses P pontban a három csúcsba helyezett, pontszerű töltések elektromos terei hatnak.

$E_A = k \cdot \frac{Q_A}{(AP)^2} = 10\,000 \frac{\text{N}}{\text{C}}$; $E_B = k \cdot \frac{Q_B}{(BP)^2} = 20\,000 \frac{\text{N}}{\text{C}}$; $E_C = k \cdot \frac{Q_C}{(PC)^2} = 10\,000 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.



Az irányok az ábrán láthatók, és $AP = BP = \frac{a}{2}$, $PC = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$.
Az E_B és E_A eredője: $E_{AB} = E_B - E_A = 10\,000 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ és A felé mutat.
Az E_{AB} és E_C eredője:
$E^2 = E_{AB}^2 + E_C^2$; $E = \sqrt{2} \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.
$E \approx 1{,}4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, iránya AB-vel 45°-os szöget zár be.

14.28. Az ábrán látható $Q_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ C töltésű, rugóhoz erősített test 15 cm-t mozdul el, ha a $Q_2 = -8 \cdot 10^{-5}$ C töltésű testet az A pontban rögzítjük. Ekkor a két töltés távolsága 60 cm. Számítsuk ki a rugóállandót!



Megoldás:

14.28. $Q_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ C; $Q_2 = -8 \cdot 10^{-5}$ C; $\Delta l = 0{,}15$ m; $d_{AB} = 0{,}6$ m.
Amikor a rugó megnyúlik, a Q_1 töltés nyugalomban van, és két erő hat rá. Az egyik az F_C, a Coulomb-féle erő, amely az A pont felé mutat:

$$F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} = 120 \text{ N}.$$

A másik a rugóerő: $F_r = D \cdot \Delta l$, és iránya az előbbivel ellentétes. Az egyensúly miatt a két erő egyenlő nagyságú.

$F_C = F_r$; $F_C = D \cdot \Delta l$. Ebből $D = \frac{F_C}{\Delta l} = 800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

14.29. Két, 50 g tömegű, 10^{-5} C, illetve -10^{-5} C töltésű, pontszerű test vízszintes síkban, egymástól 1 m-re rögzítve van. Mekkora gyorsulással indulnak, ha a rögzítéseket megszüntetjük?
(A súrlódástól eltekintünk.)

Megoldás:

14.29. $m = 0{,}05$ kg; $Q_1 = 10^{-5}$ C; $Q_2 = -10^{-5}$ C; $r = 1$ m.

A két töltés vonzza egymást az $F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ erővel. A rögzítések megszűnésekor mindkettőt a fenti erők gyorsítják. Az $F_C = m \cdot a$-ból:

$\underline{\underline{a}} = \frac{F_C}{m} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

14.30. Egy 15 g tömegű, $+3 \cdot 10^{-6}$ C töltésű, hasáb alakú testet vízszintes síkon $10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ nagyságú és a síkkal párhuzamos homogén elektromos mezőben, a térerősségvektor irányával ellentétesen, $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel ellökünk. A súrlódási együttható 0,05.

a) Mennyi idő múlva fordul vissza a test?

b) Mennyi a kiindulás és a visszafordulás helyei között a potenciálkülönbség?

Megoldás:

14.30. $m = 0{,}015$ kg; $Q = 3 \cdot 10^{-6}$ C; $E = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$; $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\mu = 0{,}05$.

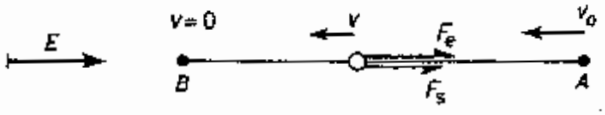
a) A feladatot dinamikai úton oldjuk meg. A töltés v_0 kezdősebességű, egyenletesen lassuló mozgást végez a térerősség ellenében, az $F_e = E \cdot Q$ és $F_s = \mu \cdot m \cdot g$ erők összegének a hatására (lásd az ábrát): $\sum F = m \cdot a$, azaz $-E \cdot Q - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$. Ebből $a = \frac{E \cdot Q + \mu \cdot m \cdot g}{m} =$

$= -0{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Mivel $\Delta v = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, így az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$-ből $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \underline{\underline{2{,}86 \text{ s}}}$.

b) Homogén mezőben: $U_{AB} = E \cdot s$ és negatív előjelű, mert a mező munkája negatív. Az út: $s = v_{\text{átl}} \cdot t = \frac{v_0}{2} \cdot t = 2{,}86$ m.

Így $\underline{\underline{U_{AB} = -2{,}86 \cdot 10^3 \text{ V}}}$.

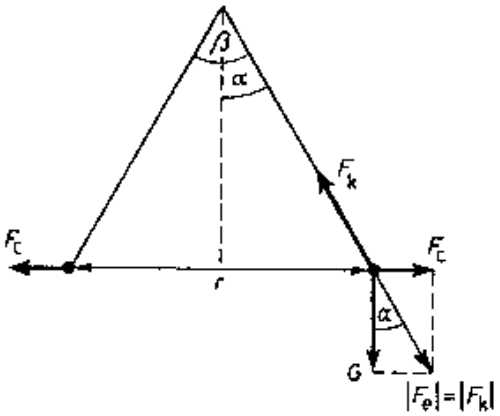


14.31. Két, azonos nagyságú és kapacitású fémgömb egy-egy azonos hosszúságú, közös pontban felfüggesztett szigetelő fonálon lóg. A gömböknek egyenként 10^{-6} C nagyságú pozitív töltést adunk, majd magára hagyjuk a rendszert. Mekkora szöget zár be akkor a két fonál egymással, ha a gömbök tömege egyenként 10 g és középpontjaik 0,2 m távolságban vannak egymástól?

Megoldás:

14.31. $Q_1 = 10^{-6}$ C; $Q_2 = 10^{-6}$ C; $r = 0{,}2$ m; $m = 0{,}01$ kg.

A gömbök előbb taszítják egymást, majd egyensúlyba kerülnek. Ekkor a gömbre ható erők eredője külön-külön is zérus: $\overline{F}_c + \overline{G} + \overline{F}_k = 0$.



Ebből következik, hogy az F_c és a G erők eredője egyenlő nagyságú és ellentétes irányú az F_k kötélerővel.

$$F_c = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}; \quad G = m \cdot g.$$

Az ábra alapján: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{F_c}{m \cdot g} = \dfrac{9}{4}$.

Ebből $\alpha = 66{,}04°$; $\underline{\underline{\beta = 2\alpha = 132°}}$.

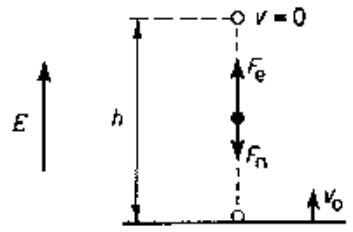
14.32. Egy homogén elektromos mező térerősségvektora függőlegesen felfelé mutat, nagysága $1000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

a) Mekkora kezdősebességgel indítsuk függőlegesen felfelé azt a golyót, amelynek tömege 10 g, töltése $2 \cdot 10^{-5}$ C, ha azt akarjuk, hogy 10 cm magasságig emelkedjen, majd onnan visszaessen?

b) Milyen feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a golyó visszaessen?

Megoldás:

14.32. $E = 10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $m = 0{,}01$ kg; $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ C; $k = 0{,}1$ m.



a) A feladatot munkatétellel oldjuk meg. Az F_n nehézségi erő és F_e elektromos erő munkáinak algebrai összege egyenlő a mozgási energia megváltozásával, amely $\frac{1}{2}m \cdot v_0^2$-ről 0-ra csökken.

$$\sum W = W_{F_e} - W_{F_n} = E \cdot Q \cdot h - m \cdot g \cdot h = -8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

$$\Delta E_m = 0 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = -\frac{1}{2}m \cdot v_0^2.$$

$\Delta E_m = \sum W$ összefüggésből $v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \sum W}{m}} = \underline{\underline{1{,}265\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

b) $F_e < F_n$, azaz $E \cdot Q < m \cdot g$ kell legyen, különben a test $F_e = F_n$ esetén v_0 sebességgel egyenletesen mozog.
$F_e > F_n$ esetén felfelé gyorsul.

14.33. Homogén elektromos mezőben a térerősség $10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ nagyságú és függőlegesen felfelé mutat.

a) Mekkora és milyen irányú a gyorsulása egy 10 g tömegű és $+10^{-4}$ C töltésű, magára hagyott golyónak?

b) Mekkora sebességre gyorsul fel 5 cm hosszú úton?

Megoldás:

14.33. $E = 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $Q = 10^{-4}$ C; $m = 0{,}01$ kg; $s = 0{,}05$ m.

a) $F_e = E \cdot Q$; $F_e = E \cdot Q = 1$ N; $F_n = m \cdot g = 0{,}1$ N; $F_n = m \cdot g$.

A testre ható erők eredője: $\sum F = E \cdot Q - m \cdot g = 0{,}9$ N, és felfelé mutat. Ez határozza meg a test gyorsulását. $\sum F = m \cdot a$.

Ebből $\underline{\underline{a}} = \frac{\sum F}{m} = \underline{\underline{90 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$.

b) Ha $v_0 = 0$, akkor $s = \frac{v^2}{2a}$. Ebből $v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = \underline{\underline{3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

14.34. Egy elektromos mező A pontjában 8 V, B pontjában 12 V a potenciál a földhöz viszonyítva.
Mennyi munkát végez a mező, ha egy $2 \cdot 10^{-4}$ C pozitív töltést a B pontból az A pontba mozgat?

Megoldás:

14.34. $U_A = 8$ V; $U_B = 12$ V; $Q = +2 \cdot 10^{-4}$ C.
A mező pozitív munkát végez, ha pozitív töltést visz a nagyobb potenciálú helyről a kisebb felé.
$U_{BA} = U_B - U_A = 4$ V és $W_{BA} = Q \cdot U_{BA} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}}$.

14.35. Homogén elektromos mezőben egy 4 C nagyságú töltést az „A" pontból a „B" pontba egyenletesen mozgatunk 1000 N nagyságú állandó, külső erővel, az erővonalakkal párhuzamosan.
Mekkora az „A" és „B" pont közötti feszültség, ha a köztük lévő távolság 20 cm?

Megoldás:

14.35. $Q = 4$ C; $F = 10^3$ N; $d = 0{,}2$ m.

A feszültség definíciója szerint: $\underline{\underline{U_{AB}}} = -\frac{W}{Q} = -\frac{F \cdot d}{Q} = \underline{\underline{-50 \text{ V}}}$.

Ha a töltést mozgatni kell, akkor a külső erő pozitív, a mező negatív munkát végez!

14.36. Az $5 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ térerősségű homogén elektromos mező a térerősségvonalakkal párhuzamosan elmozdítja a 10^{-4} C nagyságú töltést.
Mekkora utat tesz meg a töltés, ha az elektromos mező 15 J munkát végez?

Megoldás:

14.36. $E = 5 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $Q = 10^{-4}$ C; $W_\mathrm{m} = 15$ J.

A mező munkája: $W = E \cdot Q \cdot s$, és ez pozitív. Ebből $s = \frac{W}{E \cdot Q} = 0{,}03$ m.

14.37. Mennyi munkát végez az elektrosztatikus mező, miközben a $3 \cdot 10^{-8}$ C töltés a 8 V potenciálú helyről 4 V potenciálú helyre kerül?

Megoldás:

14.37. $U_1 = 8$ V; $U_2 = 4$ V; $Q = 3 \cdot 10^{-8}$ C.
A mező pozitív előjelű munkát végez, mert nagyobb potenciálú helyről kisebb felé mozog a pozitív töltés.
$\underline{\underline{W}} = (U_1 - U_2) \cdot Q = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{J}}}$.

14.38. Két, elektromosan töltött kis gömb között fellépő Coulomb-erő 720 N.
Számítsuk ki a gömbökön lévő töltések nagyságát, ha távolságuk 4 cm, és az egyik gömb töltése a másik töltésének kétszerese!

Megoldás:

14.38. $Q_1 = Q$; $Q_2 = 2Q$; $F_c = 720$ N; $r = 0{,}04$ m.

A két töltés között a Coulomb-féle erő hat. $F_c = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = k \cdot \frac{2 \cdot Q^2}{r^2}$.

Ebből $\underline{\underline{Q}} = \sqrt{\frac{F_c \cdot r^2}{2 \cdot k}} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}}$.

14.39. Homogén elektromos mezőben egy pozitív töltés mozog a térerősség irányában.

Mekkora a töltés nagysága, ha a térerősség nagysága $10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ és a mező 5 J munkát végzett a töltésen 50 cm úton?

Megoldás:

14.39. $W_{\text{mező}} = 5\ \mathrm{J};\quad E = 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}};\quad s = 0{,}5\ \mathrm{m}.$

A mező munkája: $W = E \cdot Q \cdot s$. Ebből $\underline{\underline{Q}} = \frac{W}{E \cdot s} = \underline{\underline{10^{-2}\ \mathrm{C}}}.$

14.40. Egy síkkondenzátor két lapja között a homogén elektromos mező térerőssége $10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.
Mekkora a munkavégzés, ha egy $5 \cdot 10^{-4}$ C nagyságú töltés az egyik lemezről a másik lemezre kerül és a lemezek távolsága 1 cm?

Megoldás:

14.40. $E = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ C; $d = 10^{-2}$ m.
Ha a pozitív töltés a pozitív lemezről a negatívra kerül, akkor $W_{\text{mező}} = E \cdot Q \cdot d = 5 \cdot 10^{-2}$ J (pozitív).
Ha a pozitív töltés a negatív lemezről a pozitívra kerül, akkor itt külső erő végez munkát. Így $W_{\text{mező}} = -5 \cdot 10^{-2}$ J (negatív).
Ekkor az elmozdulás és a mező erővonalai ellentétesek.
A külső erő munkája: $\underline{\underline{W_F = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J}}}$ (pozitív, mert az erő és az elmozdulás azonos irányú)

14.41. Egy 10 cm oldalú négyzet átlójának két végpontjába helyezünk egy $5 \cdot 10^{-5}$ C és egy $6 \cdot 10^{-5}$ C nagyságú töltést. Mekkora elektromos erő hat a két töltés között?

Megoldás:

14.41. $a = 0{,}1$ m; $Q_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ C; $Q_2 = 6 \cdot 10^{-5}$ C.

A két pontszerű töltés között a Coulomb-féle erő hat: $F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$,

ahol $r = a \cdot \sqrt{2}$; $\underline{\underline{F}} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{2a} = \underline{\underline{1350 \text{ N}}}$.

14.42. Egy elektromos mező valamely pontjában a térerősség $10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

Mekkora erő hat az ebbe a pontba helyezett 10^{-6} C pozitív töltésre?

Megoldás:

14.42. $E = 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $Q = 10^{-6}$ C.

A térerősség definíciója: $E = \frac{F}{Q}$. Ebből $\underline{F} = E \cdot Q = \underline{\underline{10^{-3}\ \mathrm{N}}}$.

14.43. A $4 \cdot 10^{-5}$ C, rögzített töltés körül hol helyezkednek el azok a pontok, amelyekben a térerősség $10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$?

Megoldás:

14.43. $Q = 4 \cdot 10^{-5}$ C; $E = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

A pontszerű töltés elektromos térerőssége a mező egy P pontjában: $E_P = k \cdot \frac{Q}{r^2}$. Ebből $r = \sqrt{\frac{k \cdot Q}{E_P}} = 0{,}6$ m.

A kérdéses pontok egy $r = 0{,}6$ m sugarú gömb felületén helyezkednek el. A gömb középpontja a töltés.

14.44. Az $5 \cdot 10^{-6}$ C töltést a $-4 \cdot 10^{-6}$ C töltés 0,5 N erővel vonzza.
Mekkora a töltések között a távolság?

Megoldás:

14.44. $Q_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$ C; $F = 0{,}5$ N.

A Coulomb-törvény szerint $F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$.

Ebből $r = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{F_C}} = \underline{\underline{0{,}6 \text{ m}}}$.

14.45. Ugyanaz a töltésmennyiség a $C_1 = 10$ µF kapacitású kondenzátoron kétszer akkora feszültséget hoz létre, mint a C_2 kapacitásún.
Mekkora a C_2 kapacitás?

Megoldás:

14.45. $C_1 = 10\ \mu\text{F}$.

A kondenzátorok kapacitásai: $C_1 = \dfrac{Q}{2 \cdot U}$ és $C_2 = \dfrac{Q}{U}$.

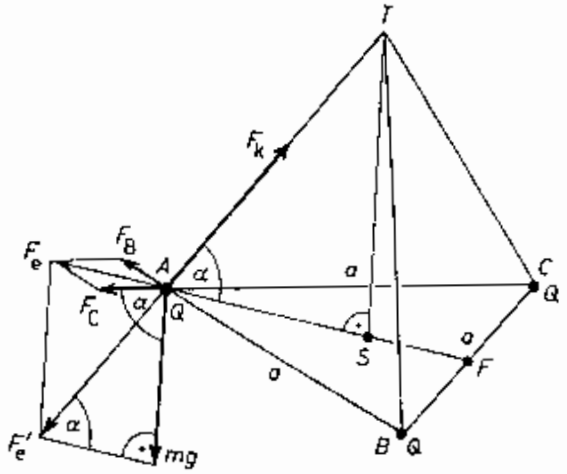
A két összefüggésből: $\underline{\underline{C_2}} = 2 \cdot C_1 = \underline{\underline{20\ \mu\text{F}}}$.

14.46. Három, azonos hosszúságú és tömegű fonálingát egy pontban felfüggesztünk. Ezután a fonálon függő s egymással érintkező golyókat elektromosan feltöltjük. Ennek hatására egymástól eltávolodnak, és egy vízszintes helyzetű, $a = 0{,}1$ m élhosszúságú, szabályos háromszög csúcsaiban helyezkednek el.

Mekkora a golyók töltése, ha $l = 0{,}5$ m, $m = 10$ g?

Megoldás:

14.46. $a = 0{,}1$ m; $l = 0{,}5$ m; $m = 0{,}01$ kg.



Ha a golyók mérete megegyezik, akkor a szétválás után ugyanakkora Q töltésük van.

Az eltávolodás után az egész rendszer egyensúlyba kerül. Az A golyóra felírva az egyensúly feltételét: $\sum F = 0$, azaz $\overline{F}_k + m \cdot g + \overline{F}_B + \overline{F}_C = 0$.

F_k és $m \cdot g$ a függőleges, F_B és F_C a vízszintes síkban vannak. Ezek nagysága: $m \cdot g = 0{,}1$ N.

$$F_B = F_C = k \cdot \frac{Q^2}{a^2} = 9 \cdot 10^{11} Q^2.$$

Az F_B és F_C 60°-os szöget zár be, így ezek eredője:

$F_e = 2\left(F_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $F_e = \sqrt{3} \cdot 9 \cdot 10^{11} Q^2$. Iránya a vízszintes síkban van.

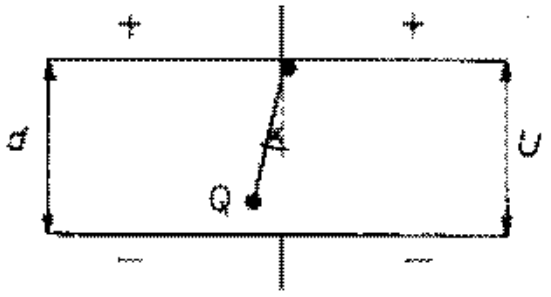
Az A golyó akkor van egyensúlyban, ha az előbb kiszámított F_e és az $m \cdot g$ erők eredője (F_e') egyenlő nagyságú és ellentétes irányú az F_k kötélerővel. Ez pedig akkor lehet, ha F_k-nak a vízszintes síkkal bezárt szöge egyenlő az F_e és F_e' erők által bezárt szöggel (α).
Szükséges még, hogy F_e, F_k és $m \cdot g$ erők egy síkba essenek.
Az α meghatározható az AST háromszögből:
Az $AS = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}057$ m, mivel S az ABC háromszög súlypontja. Az $AT = l = 0{,}5$ m. Így az AST derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{AS}{AT}$. Ebből $\alpha = 83{,}37°$.
Az $m \cdot g$ és F_e' erőkre az ábra vektorháromszögéből: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m \cdot g}{F_e}$. Ebből $F_l = 0{,}0116$ N.
Mivel $F_e = \sqrt{3} \cdot 9 \cdot 10^{11} Q^2$, ide az F_e értékét beírva: $\underline{\underline{Q = 8{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{C}}}$.

14.47. Síkkondenzátor lemezei közé fonálingát helyezünk az ábrán látható módon.

A golyó szigetelőanyagból készült, tömege 3 g, $\alpha = 5°$, töltése $+8 \cdot 10^{-4}$ C,

$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

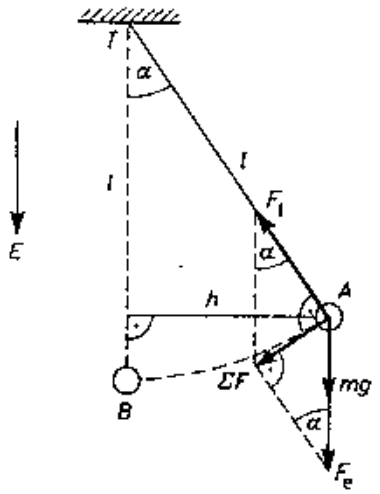
Mekkora a lengésidő?



Megoldás:

14.47. $m = 0{,}003$ kg; $\alpha = 5°$; $Q = 8 \cdot 10^{-4}$ C; $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az α szöggel kitérített töltésre az $\overline{F_e} = E \cdot Q$, az $\overline{m \cdot g}$ és F_f fonálerők hatnak. A három erő eredője ($\sum F$) érintőirányú.



Ha α kicsi, akkor harmonikus rezgőmozgásként kezelhetjük az ingamozgást.

A harmonikus rezgésnél

(1) $$\sum F = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot x.$$

A ingamozgás eredőjére az ábra alapján:

(2) $$\sin\alpha = \frac{\sum F}{F_e + m \cdot g}.$$

Szintén az ábra alapján

(3) $$\sin\alpha = \frac{h}{l} \approx \frac{x}{l}.$$

Itt a h az A pont távolsága a TB függőlegestől, és x az AB ív. Ezek megközelítően egyenlők, ha α kicsi.

A (2) és (3) összefüggésből $\sum F = \frac{F_e + m \cdot g}{l} \cdot x$. Ezt összevetve az (1)

összefüggéssel: $m \cdot \omega^2 \cdot x = \frac{F_e + m \cdot g}{l} \cdot x$.

Ebből ω-t, majd $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggést felhasználva, T-t meghatározhatjuk.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{m \cdot g + F_e}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{E \cdot Q}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{u \cdot Q}{d \cdot m}}}.$$

E és l számszerű értéke nincs megadva, ezért a lengésidő nem számítható ki.

14.48. Síkkondenzátor vízszintes fegyverzeteinek távolsága $d = 1$ cm, feszültsége $U_1 = 1000$ V. A fegyverzetek közötti légüres térben töltött olajcsepp lebeg, a lemezektől egyenlő távolságban. A feszültség hirtelen $U_2 = 995$ V-ra csökken. Mennyi idő múlva jut az olajcsepp az alsó lemezre?

Megoldás:

14.48. $U_1 = 1000$ V; $U_2 = 995$ V; $d = 10^{-2}$ m; $s = \frac{d}{2}$.

A térerősség felfelé mutat, mert csak így jöhet létre lebegés. Ennek feltétele az olajcseppre:

(1) $$E_1 \cdot Q = m \cdot g,$$

ahol $E_1 = \frac{U_1}{d}$.

Ha a lemezek közötti feszültség lecsökken, lecsökken a térerősség is: $E_2 = \frac{U_2}{d}$. Ekkor a nehézségi erő nagyobb lesz, mint a felfelé mutató $E_2 \cdot Q$ elektromos erő, ezért a test lefelé gyorsulni kezd.

Így $\sum F = m \cdot a$, azaz

(2) $$m \cdot g - E_2 \cdot Q = m \cdot a.$$

Az (1) egyenletből Q-t kifejezve: $Q = \frac{m \cdot g}{E_1}$.

Ezt (2)-be beírva: $m \cdot g - \frac{E_2}{E_1} m \cdot g = m \cdot a$. Ebből $a = g - \frac{E_2}{E_1} \cdot g = g - \frac{U_2}{U_1} \cdot g$.

$a = g\left(1 - \frac{U_2}{U_1}\right) = 0{,}05 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A gyorsuló mozgás kezdősebessége 0, és a megtett út $s = \frac{d}{2}$. Erre a mozgásra $s = \frac{a}{2} t^2$. Ebből $\underline{t} = \sqrt{\frac{d}{a}} = \underline{\underline{0{,}45 \text{ s}}}$.

14.49. Egy diódában az anódra érkező elektron sebessége $2{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Mekkora a feszültség a katód és az anód között?

Megoldás:

14.49. $v = 2{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

A munkatétel alapján: $\Delta E_m = W$, azaz $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = Q \cdot U$.

Ebből: $\underline{\underline{U}} = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot Q} = \underline{\underline{17{,}7 \text{ V}}}$.

14.50. Homogén elektrosztatikus mezőbe a térerősségre merőlegesen elektron repül be. A térerősségvektor függőlegesen felfelé irányul.
Mekkora a térerősség nagysága, ha az elektron 0,01 s alatt 8 cm-t süllyed a mező hatására és a gravitációs hatástól eltekintünk?

Megoldás:

14.50. $t = 0{,}01$ s; $s = 0{,}08$ m; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
A függőleges irányú térerősség a negatív töltésű elektront lefelé gyorsítja. A probléma egy vízszintes hajítással egyenértékű, csak itt a nehézségi erő helyett az elektromos erő hat a testre. A mozgás függőleges irányú komponensére:

(1) $$s = \frac{a}{2}t^2$$

és $F_e = m \cdot a$, azaz

(2) $$E \cdot Q = m \cdot a.$$

Az (1) egyenletből az a-t meghatározva $\left(a = \frac{2s}{t^2}\right)$, majd a (2) összefüggésbe írva kapjuk:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{m \cdot 2 \cdot s}{Q \cdot t^2} = \underline{\underline{9{,}1 \cdot 10^{-9} \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}}.$$

14.51. Egy 0,1 g tömegű, $2 \cdot 10^{-3}$ C töltésű részecske 100 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog homogén elektrosztatikus mezőben, az erővonalakkal párhuzamosan.

a) Mekkora a térerősség, ha iránya megegyezik a gravitációs mező irányával?

b) Mekkora lenne a gyorsulása ebben a mezőben annak a részecskének, melynek töltése $-2 \cdot 10^{-3}$ C, tömege 0,1 g?

Megoldás:

14.51. $m = 10^{-4}$ kg; $Q = 2 \cdot 10^{-3}$ C; $a_1 = 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Ha a térerősség iránya megegyezik a nehézségi erő irányával, akkor a test lefelé gyorsul. A mozgásra: $\sum F = m \cdot a_1$, azaz $m \cdot g + E \cdot Q = m \cdot a_1$. Ebből

$$\underline{\underline{E}} = \frac{m \cdot a_1 - m \cdot g}{Q} = \underline{\underline{4{,}5 \frac{\text{N}}{\text{C}}}}.$$

b) Ha egy $Q = -2 \cdot 10^{-3}$ C negatív töltésű részecske kerül az előbbi térerősségű homogén mezőbe, akkor a részecskére két ellentétes erő hat, az $F_e = E \cdot Q$ felfelé és az $m \cdot g$ nehézségi erő lefelé. Mivel

$F_e > m \cdot g$, a részecske felfelé gyorsul. A gyorsulásra: $\sum F = m \cdot a$, azaz $E \cdot Q - m \cdot g = m \cdot a$. Ebből $\underline{a} = \frac{E \cdot Q - m \cdot g}{m} = \underline{\underline{80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

14.52. Az ábrán látható $4Q$ és Q rögzített töltések közötti távolság Q-hoz közelebbi harmadoló pontja P. Egyensúlyi helyzetben van-e a P-be helyezett, tetszőleges Q' töltés?



Megoldás:

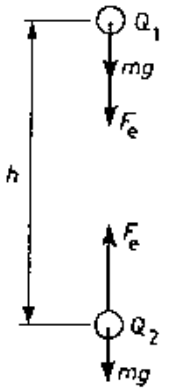
14.52. Természetesen egyensúly csak akkor lehet, ha $4Q$ és Q megegyező előjelű töltések. Ekkor a Q'-re ható erők ellentétes irányúak. Ha ténylegesen egyensúly van, akkor ezek az erők egyenlő nagyságúak is. A Q'-re ható két erő, ha a feltétel szerint $AP = 2x$ és $PB = x$, a következő: $F_A = k \cdot \frac{4Q \cdot Q'}{(2x)^2} = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{x^2}$ és $F_b = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{x^2}$. Tehát egyenlők, így Q' egyensúlyban van.

14.53. Két, 50 g tömegű, 10^{-5} C, illetve -10^{-5} C töltésű, pontszerű test egymás fölött, egymástól 1 m-re rögzítve van. Mekkora és milyen irányú gyorsulással indulnak el, ha a rögzítéseket megszüntetjük? $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.\right)$

Megoldás:

14.53. $m_1 = m_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ kg; $Q_1 = 10^{-5}$ C; $Q_2 = -10^{-5}$ C; $d = 1$ m.
Az ábrán a két testre ható erőket láthatjuk az indulás pillanatában.

Az $F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 0{,}9$ N erők a vonzás miatt egymás felé mutatnak. Az $m \cdot g = 0{,}5$ N erők lefelé mutatnak. Mindkét testre alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét:



1. $m \cdot g + F_C = m \cdot a_1$. Ebből $a_1 = \frac{m \cdot g + F_C}{m} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2. $F_C - m \cdot g = m \cdot a_2$. Ebből $a_2 = \frac{F_C - m \cdot g}{m} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

14.54. Hányszor nagyobb az egymástól „r" távolságra lévő elektronok között fellépő elektromos erőhatás a gravitációs erőnél?

Megoldás:

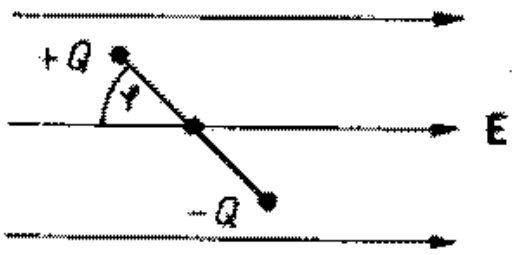
14.54. $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$;

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

A gravitációs erő: $F_g = \gamma \cdot \frac{m_e^2}{r^2}$. A Coulomb-féle erő: $F_C = k \cdot \frac{Q_e^2}{r^2}$.

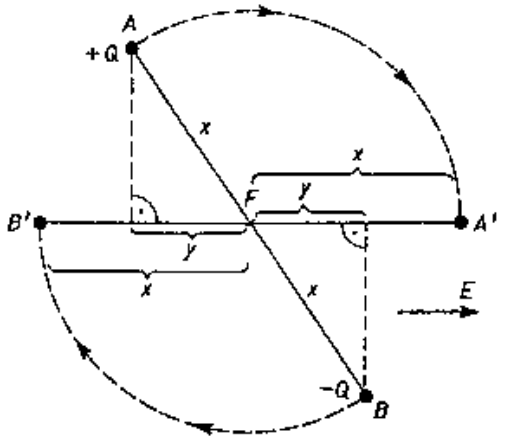
A kettő hányadosa: $F_C : F_g = \frac{k \cdot Q_e^2}{\gamma \cdot m_e^2} = \underline{\underline{4{,}17 \cdot 10^{42}}}$

14.55. Egy vékony, elhanyagolható tömegű pálca végeire két, 10^{-4} C nagyságú, de ellentétes előjelű töltést rögzítünk, majd homogén elektromos mezőbe helyezzük, az ábrán látható módon. A mező térerőssége $4 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ nagyságú és vízszintes irányú. Mennyi munkát végez a mező, amíg az ábrán látható dipólus az adott helyzetből egyensúlyi helyzetbe kerül? (A $\varphi = 45°$, a pálca hossza 0,4 m.)



Megoldás:

14.55. $Q = 10^{-4}$ C; $E = 4 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $\varphi = 45°$; $l = 0{,}4$ m.



Az elektromos mező az elektromos dipólra forgatónyomatékkal hat. Az elfordulás után, az ábrán látható módon, a $(+Q)$ töltés A-ból A'-be, a $(-Q)$ töltés B-ből B'-be kerül. A mező munkája az úttól független, csupán a kezdő és a végpont „potenciálszintjeinek" egymástól való távolságától függ. Így a mező munkája a $+Q$ töltésen: $W = E \cdot Q \cdot (y + x)$, ahol $y + x$ az A és A' pontok szintjeinek távolsága.
Ugyanekkora, és pozitív munkát végez a mező a másik $(-Q)$ töltésen is. Így a mező összes munkája $W_\mathrm{m} = 2 \cdot E \cdot Q(x \cdot \cos\varphi + x)$, ahol $x = \frac{l}{2}$,
$W_\mathrm{m} = 0{,}273$ J.

14.56. Egy $2 \cdot 10^{-6}$ C nagyságú, rögzített, pozitív töltéstől 1 m távolságban egy $-2 \cdot 10^{-6}$ C nagyságú, negatív töltésű és 1 g tömegű fémgolyót helyezünk el. A fémgolyó a vízszintes síklapon súrlódás nélkül mozoghat.
Mekkora nagyságú és irányú kezdősebességet kell adni a fémgolyónak, ha azt akarjuk, hogy a rögzített töltés körül 1 m sugarú körpályán egyenletesen mozogjon?

Megoldás:

14.56. $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6}$ C; $m = 10^{-3}$ kg; $r = 1$ m.
A körmozgás dinamikai feltétele: A testre állandó nagyságú, minden pillanatban a középpont felé mutató erő hasson. Ez az erő most az F_C Coulomb-féle erő.

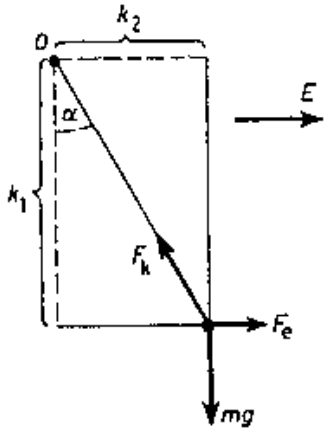
$\sum F = F_{CP}$, azaz $k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$.

Ebből $\underline{v} = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{m \cdot r}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; és a sugárra merőleges.

14.57. Egy 10 g tömegű, 10^{-6} C töltésű fémgolyót 30 cm hosszú szigetelő fonálra függesztünk a vízszintes irányú és $10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ nagyságú homogén elektromos mezőben. A fonál függőleges helyzetében elengedjük a golyót.
Mekkora a golyóra ható erő forgatónyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkozóan akkor, amikor a függőleges helyzethez viszonyítva 30°-os a kitérés?

Megoldás:

14.57. $m = 0{,}01$ kg; $Q = 10^{-6}$ C; $l = 0{,}3$ m; $E = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$; $\alpha = 30°$.



Az adott kitérésnél a testre az ábrán látható három erő hat. Ezek forgatónyomatékai:

1. $M_{\text{Fk}} = 0$, mert F_k hatásvonala átmegy a forgástengelyen.

2. $M_{\text{Fe}} = E \cdot Q \cdot k_1 = E \cdot Q \cdot l \cdot \cos\alpha = 2{,}59 \cdot 10^{-2}$ Nm.

3. $M_{\text{mg}} = m \cdot g \cdot k_2 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Nm.

Mivel ellentétes irányba forgatnak: $\underline{M} = M_{\text{Fe}} - M_{\text{mg}} = \underline{1{,}09 \cdot 10^{-2}\ \text{Nm}}$;
és az óramutató járásával ellentétes.

14.58. Egy kondenzátor egymástól 5 cm távolságra lévő lemezei között 10 V potenciálkülönbség van, a kialakult homogén elektromos mező térerősségvektora vízszintes.

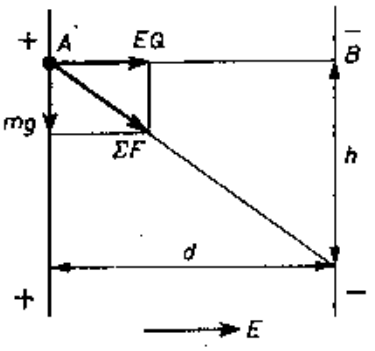
a) Mennyi munkát végez a gravitációs mező a 10^{-3} C pozitív töltésű és 5 g tömegű golyón, amíg a golyó az egyik lemezről a másikra ér? (A golyó kezdősebessége zérus!)

b) Állapítsuk meg a gravitációs és az elektromos mező munkájának arányát!

Megoldás:

14.58. $d = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $U = 10$ V; $Q = 10^{-3}$ C; $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg; $v_0 = 0$.

Az A pontban lévő testre az ábrán látható módon két erő hat, az $F_e = E \cdot Q$ elektromos, és az $F_g = m \cdot g$ gravitációs erő. Mivel ezek iránya és nagysága álladó, így eredőjük is az. Tehát a test ennek irányába gyorsul, s mire a másik lemezre ér, h távolsággal lejjebb kerül.



h meghatározása:

Az ábra alapján: $\dfrac{E \cdot Q}{m \cdot g} = \dfrac{d}{h}$. (Hasonlóság miatt.)

Mivel $E = \dfrac{U}{d}$, így: $h = \dfrac{m \cdot g \cdot d^2}{U \cdot Q} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ m.

a) A gravitációs mező munkája $W_g = m \cdot g \cdot h = \underline{6{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}$.

b) Az elektromos mező munkája: $W_e = U \cdot Q = 10^{-2}$ J.

$W_e : W_g = \underline{16}$.

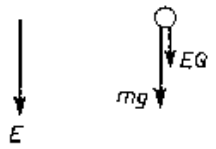
14.59. Egy homogén elektromos mező térerőssége 1000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ nagyságú, iránya függőlegesen lefelé mutat. A mezőben leejtünk egy 10 g tömegű, $2 \cdot 10^{-5}$ C töltésű golyót.

a) Mennyit változik a golyó mozgási energiája 5 cm út megtétele után?

b) Mennyi munkát végzett az elektromos mező és mennyit a gravitációs mező?

Megoldás:

14.59. $E = 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $m = 10^{-2}$ kg; $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ C; $s = 5 \cdot 10^{-2}$ m.



A test a két azonos irányú $F_e = E \cdot Q$ és $F_g = m \cdot g$ erők hatására lefelé gyorsul, változik a mozgási energiája. A munkatétel alapján:

a) $\Delta E_m = \sum W = m \cdot g \cdot s + E \cdot Q \cdot s = 5 \cdot 10^{-3}$ J $+ 10^{-3}$ J $= \underline{6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}$,
ahol $W_{gr} = m \cdot g \cdot s$ és $W_e = E \cdot Q \cdot s$.

b) $\underline{W_e = 10^{-3}\ \mathrm{J}}$; $\underline{W_g = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}$.

14.60. Egy matematikai ingát olyan elektromos mezőbe helyezünk, amelynek erővonalai függőlegesen lefelé mutatnak. A fonál hossza 10 cm, a rajta levő golyó tömege 10 g, töltése $4 \cdot 10^{-6}$ C, az inga lengésideje 0,1 s.
Mekkora az elektromos térerősség?

Megoldás:

14.60. $l = 10^{-1}$ m; $m = 10^{-2}$ kg; $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ C; $T = 0{,}1$ s.

Lásd a 14.47. feladatot:

A $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m \cdot l}{m \cdot g + E \cdot Q}}$ összefüggésből

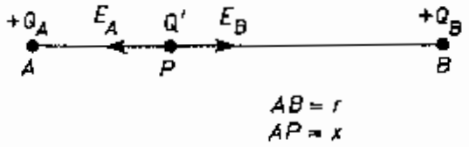
$$E = \frac{m(4\pi^2 \cdot l - T^2 \cdot g)}{T^2 \cdot Q}, \quad E = 9{,}6 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

14.61. Adott egy $2 \cdot 10^{-4}$ C pozitív pontszerű töltés. Milyen előjelű és mekkora töltést kell elhelyezni tőle 1 m távolságban, hogy a két töltést összekötő egyenes mentén, a megadott töltéstől 25 cm távolságban a térerősség zérus legyen?

Megoldás:

14.61. $Q_A = 2 \cdot 10^{-4}$ C; $r = 1$ m; $x = 0{,}25$ m.

a) eset: Ha az A-tól 1 m-re fekvő B pontba Q_B pozitív töltést helyezünk, akkor a P pontban az eredő térerősség zérus lehet. Ez akkor teljesül, ha $E_B = E_A$.

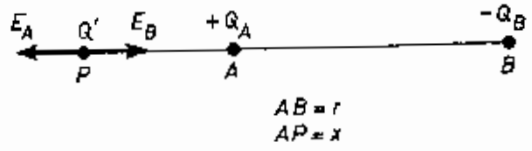


A térerősségek iránya (a pozitív próbatöltés miatt) ellentétes.

$$E_A = k \cdot \frac{Q_A}{x^2} \text{ és } E_B = k \cdot \frac{Q_B}{(r-x)^2}.$$

E_A és E_B egyenlőségéből: $Q_B = \frac{Q_A \cdot (r-x)^2}{x^2} = \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ C}}}$.

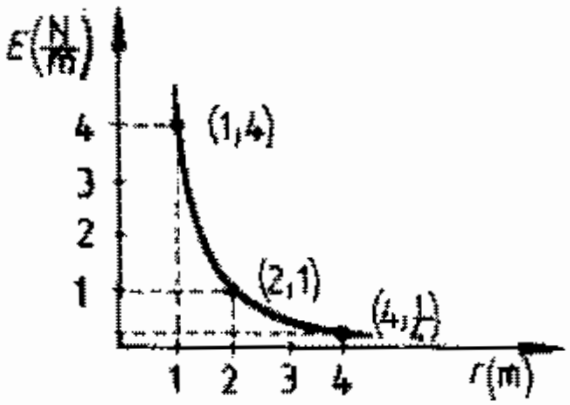
b) eset: Ha a B pontba $-Q$ negatív töltést teszünk, akkor az A-nak B-vel ellentétes oldalán fekvő P pontban lehet az eredő térerősség 0.



Ez akkor teljesül, ha $E_B = E_A$, azaz $k \cdot \frac{Q_B}{(r+x)^2} = k \cdot \frac{Q_A}{x^2}$.

Ebből $Q_B = \frac{Q_A (r+x)^2}{x^2} = \underline{\underline{5 \cdot 10^{-3} \text{ C}}}$.

14.62. Az ábrán egy pontszerű töltés által keltett elektromos mező térerősségét ábrázoltuk a távolság függvényében.
Mekkora a mezőt létrehozó töltés nagysága?



Megoldás:

14.62. A Q' ponttöltés térerőssége a töltéstől r távolságra lévő P pontban: $E_P = k \cdot \frac{Q'}{r^2}$. A grafikonról leolvasva: Ha $r = 1$ m, akkor $E = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Ezeket a fenti összefüggésbe helyettesítve és Q'-t kifejezve: $\underline{\underline{Q' = 4{,}4 \cdot 10^{-10}\ \text{C}}}$.

14.63. Egy kondenzátor lemezei között a távolság 8 cm. A lemezek között lévő homogén elektromos mező térerősségének értéke $2 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. A lemezeket 6 cm-re közelítjük egymáshoz.

a) Mennyivel változott meg a lemezek közötti feszültség?
b) Hogyan és miért változik a kondenzátor lemezei között a mező energiája?

Megoldás:

14.63. $E = 2 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $d_1 = 8 \cdot 10^{-2}$ m; $d_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ m.

a) A térerősség állandó marad, de a lemezek közelítésével a feszültség is csökken.
$U_1 = E \cdot d_1 = 1600$ V; $U_2 = E \cdot d_2 = 1200$ V. Így $\underline{\underline{\Delta U = 400 \text{ V}}}$.

b) A mező energiája meghatározható az $E = \frac{1}{2} U \cdot Q$ összefüggés alapján. Mivel Q nem változik, U csökkenése az E csökkenését is jelenti.

14.64. Mekkora feszültségre töltöttük fel az 5 μF kapacitású kondenzátort, ha kisütésekor 0,01 s ideig átlagosan 10 mA erősségű áram folyik az áramkörben?
Hány db elektron halad át a vezető egy kiszemelt keresztmetszetén a kisütés alatt?

Megoldás:

14.64. $C = 5 \cdot 10^{-6}$ F; $t = 10^{-2}$ s; $I = 10^{-2}$ A; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
A kisütéskor folyó áram a kondenzátorról elszállítja a töltéseket. Az áramló töltésmennyiség $Q = I \cdot t = 10^{-4}$ C.

A kondenzátor kapacitása: $C = \frac{Q}{U}$. Ebből $\underline{\underline{U}} = \frac{Q}{C} = \underline{\underline{20\ \text{V}}}$.

Ha az átáramlott töltésmennyiséget elektronok közvetítik, akkor az elektronok száma:

$\underline{\underline{n}} = \frac{Q}{Q_e} = \underline{\underline{6{,}25 \cdot 10^{14}\ \text{darab}}}$.

14.65. Egy 12 Ω ellenállású fogyasztóra 24 V feszültséget kapcsolunk.

a) Mennyi töltés halad át a vezető keresztmetszetén 1 óra üzemidő alatt?

b) Mekkora erővel hatna egymásra két pontszerű test, ha a vezetőn áthaladó töltést egyenlő arányban osztanánk szét közöttük, és egymástól 1 m-es távolságban helyeznénk el?

Megoldás:

14.65. $R = 12\ \Omega$; $U = 24$ V; $t = 3600$ s; $d = 1$ m.

a) Ohm törvényét felhasználva $I = \frac{U}{R} = 2$ A.

Az ármerősség definíciójából $\underline{\underline{Q = I \cdot t = 7200\ \text{C}}}$.

b) A feltételek szerint ekkor két, egymástól 1 m távolságban lévő, egyenként 3600 C töltéssel rendelkező, pontszerű testek közötti kölcsönhatásról van szó. Köztük a Coulomb-erő hat.

$$\underline{\underline{F_C = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 1{,}16 \cdot 10^{17}\ \text{N}}}.$$

14.66. Mekkora feszültség hatására gyorsul fel 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességre a 10^{-5} g tömegű, 10^{-8} C töltésű részecske?

Megoldás:

14.66. $v_0 = 0$; $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m = 10^{-8}$ kg; $Q = 10^{-8}$ C.

Az elektromos tér munkája megnöveli a részecske mozgási energiáját.

A munkatétel alapján: $W_{\text{el}} = \Delta E_{\text{m}}$, azaz $Q \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

Ebből $\underline{\underline{U}} = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot Q} = \underline{\underline{50\ \text{V}}}$.

14.67. Mennyivel változik az $5 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ térerősségű homogén mezőben elhelyezett, 10^{-6} C töltésű részecske kinetikus energiája, ha 2 m-es úton mozdul el a mező hatására a térerősség irányában?
(A gravitációs hatástól eltekintünk.)

Megoldás:

14.67. $E = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $Q = 10^{-6}$ C; $s = 2$ m.

A mező mozgatja a pozitív töltést a térerősség irányában, így a munkája pozitív. A munkatétel alapján a részecske mozgási energiájának megváltozása egyenlő a mező munkájával.

$\underline{\underline{\Delta E_{\mathrm{m}}}} = W_{\mathrm{el}} = E \cdot Q \cdot s = \underline{\underline{10^{-11}\ \mathrm{J}}}$.

14.68. A $10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ erősségű, homogén elektromos mező két pontja között a feszültség 25 V.
Mekkora erő hatása alatt mozdul el a két pont között az a töltés, melyen a mező 200 J munkát végez?

Megoldás:

14.68. $E = 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $U = 25\ \mathrm{V}$; $W_\mathrm{m} = 200\ \mathrm{J}$.

Az elektromos mező munkája: $W_\mathrm{m} = Q \cdot U$. Ebből $Q = \frac{W}{U} = 8\ \mathrm{C}$.

A töltésre ható elektromos erő: $\underline{\underline{F}} = E \cdot Q = \underline{\underline{80\ \mathrm{N}}}$.

14.69. Mekkora gyorsulással mozog a $2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ erősségű, homogén elektrosztatikus mezőben az a töltés, melynek tömege 2 mg és töltése $3 \cdot 10^{-3}$ C?
(A gravitációs hatást ne vegyük figyelembe!)

Megoldás:

14.69. $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $m = 2 \cdot 10^{-6}$ kg; $Q = 3 \cdot 10^{-3}$ C.

A test gyorsulását a testre ható erők eredője határozza meg.

$\sum F = m \cdot a$, azaz $E \cdot Q = m \cdot a$. Ebből $\underline{a} = \frac{E \cdot Q}{m} = \underline{\underline{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

14.70. Ha a térerősség nagyságát az erővonalak sűrűségével jellemezzük, akkor hány erővonal metszi az $5 \cdot 10^{-5}$ C nagyságú, pontszerű töltéstől 1 m-re lévő, az erővonalakra merőlegesen elhelyezett 1 cm^2-es felületet?

Megoldás:

14.70. $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ C; $r = 1$ m; $A = 10^{-4}$ m^2.

A pontszerű töltéstől r távolságra a térerősség: $E = k \cdot \frac{Q}{r^2} = 4{,}5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

Megállapodás alapján egységnyi felületen annyi térerősség vonal halad át, amennyi az ott uralkodó átlagos térerősség nagysága. Így az A felületen áthaladó összes erővonalak száma $\underline{\underline{n}} = E \cdot A = \underline{\underline{45 \text{ db}}}$. (Ez nem más, mint az elektromos fluxus.)

14.71. A Millikan-féle kísérletben a kondenzátorlemezek közötti felfelé irányuló homogén mező térerőssége 15 000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. Egy lebegő olajcsepp tömege $1{,}2 \cdot 10^{-15}$ kg.

a) Mekkora az olajcsepp töltése, ha a levegő aerosztatikai felhajtóerejét elhanyagoljuk?

b) Hányszorosa ez az elemi töltésnek?

Megoldás:

14.71. $E = 1{,}5 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $m = 1{,}2 \cdot 10^{-15}$ kg; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Lebegés esetén a cseppre ható erők eredője 0. Ez úgy lehetséges, ha $m \cdot g = E \cdot Q$. Ebből $Q = \frac{m \cdot g}{E} = 8 \cdot 10^{-19}$ C.

A Q és a Q_e hányadosa: $\frac{Q}{Q_e} = 5$.

14.72. Egy kondenzátor lemezei között a távolság 2 cm, a térerősség $10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

a) Mekkora lesz az elektron sebessége akkor, amikor a pozitív töltésű lemezre érkezik, ha a másik lemezről zérus kezdősebességgel indult?

b) Mekkora az elektron gyorsulása? (A tömegnövekedéstől és a gravitációs hatástól tekintsünk el!)

Megoldás:

14.72. $d = 2 \cdot 10^{-2}$ m; $E = 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

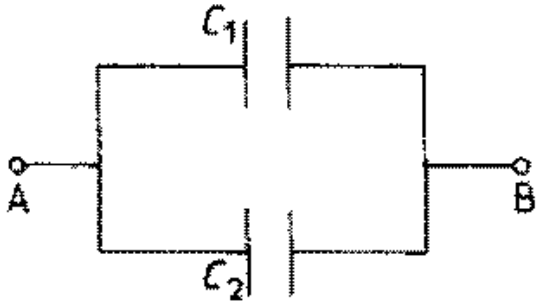
a) A munkatétel alapján $W_{el} = \Delta E_m$, azaz $Q_e \cdot U = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$, ha $v_0 = 0$.

Ebből: $\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot d \cdot Q_e}{m_e}} = 2{,}65 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

b) A gyorsulást a dinamika alapegyenletéből határozzuk meg:

$\underline{\underline{a = \frac{F}{m} = \frac{E \cdot Q}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{14} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$.

14.73. Két kondenzátort – az ábrán látható módon – párhuzamosan kapcsolunk. Kapacitásuk értéke $6 \cdot 10^{-5}$ F, illetve $8 \cdot 10^{-5}$ F.



Hány voltos feszültségre kapcsoljuk az A, B pontokon a rendszert, ha azt akarjuk, hogy $7 \cdot 10^{-3}$ C töltés halmozódjon fel?

Megoldás:

14.73. $C_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ F; $C_2 = 8 \cdot 10^{-5}$ F; $Q = 7 \cdot 10^{-3}$ C.

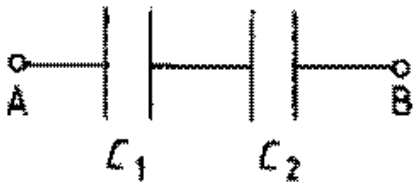
A kondenzátorok töltései legyenek Q_1 és Q_2. Ekkor:

(1) $$Q = Q_1 + Q_2.$$

A párhuzamos kapcsolás miatt a kondenzátor feszültségei: $U_1 = U_2 = U_{AB}$. Az egyes kondenzátorok töltései a kapacitással kifejezve:

$Q_1 = C_1 \cdot U$, illetve $Q_2 = C_2 \cdot U$. Ezeket az (1) egyenletbe írva: $Q = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = U(C_1 + C_2)$. Ebből: $\underline{\underline{U}} = \dfrac{Q}{C_1 + C_2} = \underline{\underline{50\ \text{V}}}$.

14.74. Két kondenzátort az ábrán látható módon sorosan kapcsolunk. Kapacitásaik értéke $2 \cdot 10^{-4}$ F, illetve $8 \cdot 10^{-4}$ F. Mekkora feszültséget kapcsoljunk az A, B pontokra, ha azt akarjuk, hogy mindkét kondenzátoron 0,2 C töltés halmozódjon fel?



Megoldás:

14.74. $C_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ F; $C_2 = 8 \cdot 10^{-4}$ F; $Q_1 = Q_2 = 0{,}2$ C.
A soros kapcsolás és a megosztás miatt mindkét kondenzátor fegyverzetein Q abszolútértékű töltés halmozódik fel. Így az egyes kondenzátorok feszültségei $U_1 = \frac{Q}{C_1}$ és $U_2 = \frac{Q}{C_2}$.

Szintén a soros kapcsolás miatt: $U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} =$

$= Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$.

Itt a Q a megadott 0,2 C töltés, C_1 és C_2 pedig a kondenzátorok kapacitása. A megadott értékeket beírva kapjuk: $\underline{\underline{U_{AB} = 1250 \text{ V}}}$.

14.75. Egy kondenzátor lemezei egymástól 5 cm távolságra vannak, a két lemez közötti feszültség 200 V, a lemezek felülete egyenként 200 cm^2.
Hány erővonal indul ki a pozitív lemez felületéről?

Megoldás:

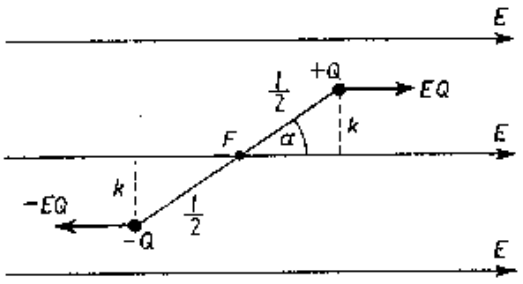
14.75. $d = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $U = 200$ V; $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m^2.
Az erővonalszám (n) – elektromos fluxus – egy A felületen: $n = E \cdot A =$
$= \frac{U}{d} \cdot A = \underline{\underline{80 \text{ db}}}$.
Megállapodás szerint egységnyi felületen a térerősség nagyságának megfelelő számú erővonalat húzunk.

14.76. Egy $+Q$ és egy $-Q$ töltésű golyót az l hosszúságú, vízszintes síkban fekvő pálca két végpontjára rögzítünk. A pálca a középpontján áthaladó, függőleges tengely körül forog-hat.

Mekkora forgatónyomaték hat a fenti dipólusra egy vízszintes irányú és E nagyságú térerősségű homogén elektromos mezőben, ha a pálca az erővonalakkal α szöget zár be?

Megoldás:

14.76. Mindkét töltésre az erővonalakkal párhuzamos $E \cdot Q$ nagyságú erő hat, irányaik a töltések különböző előjele miatt ellentétesek. Ezen erőknek a dipólra kifejtett forgatónyomatékai egyező irányban forgatják a pálcát. Ezért a mező forgatónyomatéka a dipólra e két nyomaték összegével egyenlő.



$$M = M_1 + M_2 = E \cdot Q \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha + E \cdot Q \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha.$$

$M = E \cdot Q \cdot l \cdot \sin\alpha$. Iránya az óramutató járásával megegyező. A forgatás iránya megfordul, ha a töltéseket felcseréljük.

15.1. Ismertessünk egy kísérletet fémek elektromos vezetésére! Adjuk meg a vezetés anyagszerkezeti magyarázatát! Miért nem vesznek részt a vezetésben a pozitív töltésű fémionok?

Megoldás:

15.1. Feltöltött elektroszkóp elveszíti töltését, ha rézvezetéket iktatunk az elektroszkóp gömbje és a radiátor közé. (Ugyanez fapálcával nem történik meg.)
A fémrács szerkezetéből következik, hogy a fémben sok olyan elektron van, amely nem kötődik fémionhoz. (Szabad elektronok.) Ezek megfelelő feszültség, illetve térerősség hatására elmozdulnak, és ez a mozgás addig tart, míg a vezető két végpontja között potenciálkülönbség van. A pozitív töltésű fémionok nem vesznek részt a vezetésben, mert a rácspontokhoz erősen kötöttek, csupán kis rezgéseket végeznek ezek körül.

15.2. Fogalmazzák meg Ohm törvényét vezetőszakaszra és teljes áramkörre!

Megoldás:

15.2. Vezetőszakaszra: Egy vezetőszakasz két vége között mért feszültség és a rajta átfolyó áram egyenesen arányos. Hányadosuk a vezetőszakaszra jellemző állandó, az elektromos ellenállás: $R = \frac{U}{I}$.

Teljes áramkörre: Egy zárt áramkörben a feszültségforrás üresjárási feszültsége egyenesen arányos a rajta átfolyó áram erősségével. $\frac{U_e}{I} = R_k +$ $+ R_b =$ állandó.

R_k a külső ellenállások eredője, R_b a feszültségforrás belső ellenállása, U_e az üresjárási feszültség, vagyis a terheletlen feszültségforrás sarkai között mért feszültség, I a telep, ill. a feszültségforrás árama.

15.3. *Az alábbiak közül melyik az a* HELYES *állítás,* amelyik jellemzi a feszültségforrásokat?

A) A feszültségforrás kapocsfeszültsége nagyobb, mint az elektromotoros ereje.
B) A feszültségforrások belső ellenállása nem változik.
C) A körben folyó áramerősség növekedésével csökken a belső ellenállás.
D) A körben folyó áramerősség növekedésével csökken a kapocsfeszültség.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.3. *A*. hamis, mert $U_e = U_k + I R_b$, így $U_e > U_k$.
B. igaz (Csak általában igaz, mert például lehet hőmérsékletfüggő is.)
C. hamis, mert ideális esetben az R állandónak tekinthető.
D. igaz, mert $U_k = U_0 - I \cdot R_b$. Ha R_b-t és U_0-t állandónak tekintjük, akkor I növekedésével U_k csökken. (Megjegyzés: vannak olyan feszültségforrások is, amelyek üresjárási feszültsége függ az áramerősségtől.)

15.4. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Nagyobb erősségű áramot nyerhetünk-e akkor, ha egy telep helyett két, az előzővel teljesen megegyező tulajdonságú telepet sorba kapcsolunk és a külső ellenállás ugyanakkora marad?

A) Igen, pontosan kétszeresére változik az áramerősség.

B) Nem, mert az áramerősség a felére csökken.

C) Igen, mert a sorba kapcsolt telepekkel kétszer akkora feszültségű feszültségforráshoz jutottunk.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.4. Helyes a C válasz.

Egy telep esetén: $I = \dfrac{U_0}{R_b + R_k}$.

Két telep sorba kapcsolása esetén: $I' = \dfrac{2U_0}{2R_b + R_k}$.

I az R_k értékétől függően változik, de nő, mert

$$I' = \frac{2U_0}{2R_b + R_k} = \frac{2U_0}{2(R_b + 0{,}5R_k)} = \frac{U_0}{R_b + 0{,}5R_k} > \frac{U_0}{R_b + R_k} = I.$$

15.5. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldásokat!*
Két, párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredőjét az alábbi összefüggésekkel határozhatjuk meg:

A) $R_e = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,

B) $\frac{1}{R_e} = R_1 + R_2$,

C) $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,

D) $R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Megoldás:

15.5. A $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{D}}$ válasz a helyes. *D* egyenértékű az ismert *C* állítással. Vegyük mindkét oldal reciprokát:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}.$$

15.6. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

A) Az árammérő méréshatára jelentősen megnő, ha vele sorosan egy nagy ellenállást kapcsolunk.

B) Az árammérő méréshatára megnő, ha vele párhuzamosan egy kis ellenállást kapcsolunk.

C) Az árammérő méréshatára jelentősen megnő, ha a műszer belső ellenállását megnöveljük.

D) Sehogyan sem tudjuk megnövelni az árammérő méréshatárát.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.6. Az árammérőt a mérni kívánt áramot vivő vezetékbe a fogyasztóval sorosan kapcsoljuk. Az árammérő belső ellenállása igen kicsi, hogy ne befolyásolja jelentősen a körben folyó áramerősséget méréskor. Minden műszernek van egy méréshatára, amitől nagyobb áramerősség nem mehet át az árammérőn. Ezért vele párhuzamosan kapcsolva egy R_s ellenállást, elérhetjük, hogy az árammérőn csak a megengedett áram folyik.

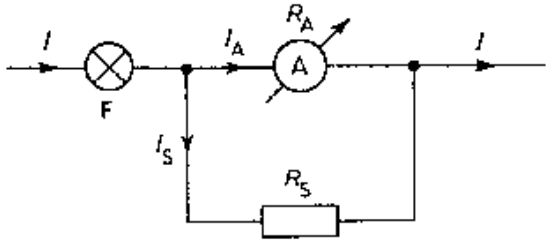
A „többletáram" az R_s (sönt) ellenálláson folyik át. A mérendő áramerősség az R_s-en és a műszer belső ellenállásán átfolyó áramok összege (lásd az ábrát). Így a válaszok:

A hamis, mert soros kapcsolás esetén az ellenálláson és az árammérőn ugyanakkora áram folyik.

B igaz a fentiek alapján.

C hamis, mert ettől nem növekszik a mérhető áram maximuma, csupán az áramkör áramát csökkenti jelentősen.

D hamis, a fentiek alapján.



A csomóponti törvény alapján: $I = I_A + I_B$.

15.7. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Hogyan lehet a feszültségmérő méréshatárát megnövelni?

A) A feszültségmérővel párhuzamosan kapcsolt ellenállás beiktatásával.

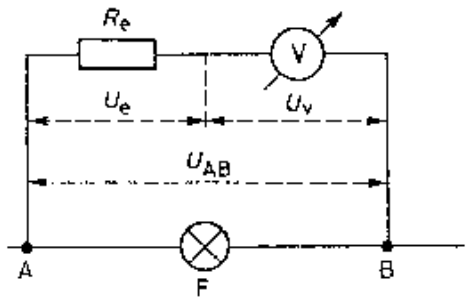
B) A feszültségmérővel sorosan kapcsolt ellenállás beiktatásával.

C) Sehogyan sem tudjuk megnövelni.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.7. A feszültségmérő műszert párhuzamosan kapcsoljuk azzal a fogyasztóval (ellenállással), amelynek végpontjai között a feszültséget (U_{AB}) mérni akarjuk. A műszernek nagy belső ellenállásúnak kell lennie, hogy minél kevesebb áram folyjon a műszer által képzett mellékágon, és így az eredeti áramerősség ne változzon jelentősen.



A feszültségmérő méréshatára úgy növelhető, hogy a mérőt tartalmazó mellékágban a műszerrel sorosan kapcsolunk egy R_c előtétellenállást. Ennek mértéke megválasztható úgy, hogy a műszer belső ellenállására az eredeti méréshatárnak megfelelő feszültség essék. Ekkor a mérendő feszültség: $U_{AB} = U_V + U_e$, U_V a voltmérőre, U_e az előtétellenállásra jutó feszültség.

Így a válaszok:

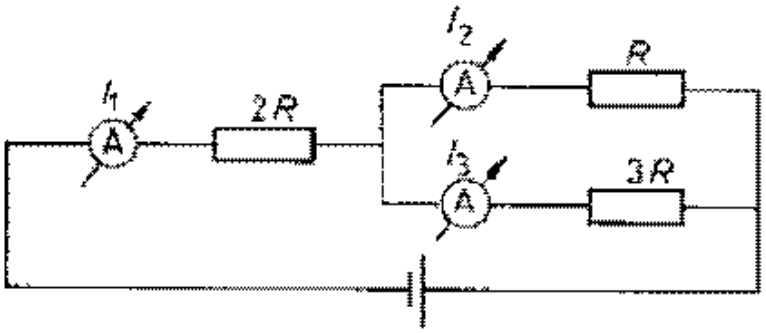
A hamis, mert ekkor $U_e = U_V$.

B igaz a fentiek miatt.

C hamis a fentiek miatt.

15.8. *Jelöljük meg a* HELYES *állítást!*

Az ábra R, $2R$ és $3R$ nagyságú ellenállásból, egy elhanyagolható belső ellenállású telepből és 3 db kis belső ellenállású ampermérőből álló kapcsolási rajzot mutat.



Milyen az arány a mérőműszerekkel mért áramerősségek között?

A) $I_1 : I_2 : I_3 = 6 : 5 : 2$,
B) $I_1 : I_2 : I_3 = 9 : 12 : 4$,
C) $I_1 : I_2 : I_3 = 4 : 3 : 1$,
D) $I_1 : I_2 : I_3 = 2 : 1 : 3$.

Megoldás:

15.8. $\underline{C}$ igaz. Párhuzamos kapcsolás miatt: $I_2 : I_3 = \frac{1}{R} : \frac{1}{3R}$, így $I_2 = 3I_3$.
A csomóponti törvény alapján: $I_1 = I_2 + I_3 = 3I_3 + I_3 = 4I_3$.
Tehát: $I_1 : I_2 : I_3 = 4I_3 : 3I_3 : I_3 = 4 : 3 : 1$.

15.9. *Jelöljük meg a* HELYES *állítást!*

Az ábra R, $2R$ és $3R$ nagyságú ellenállásból, egy elhanyagolható belső ellenállású telepből és 3 db igen nagy belső ellenállású voltmérő műszerből álló kapcsolási rajzot mutat.

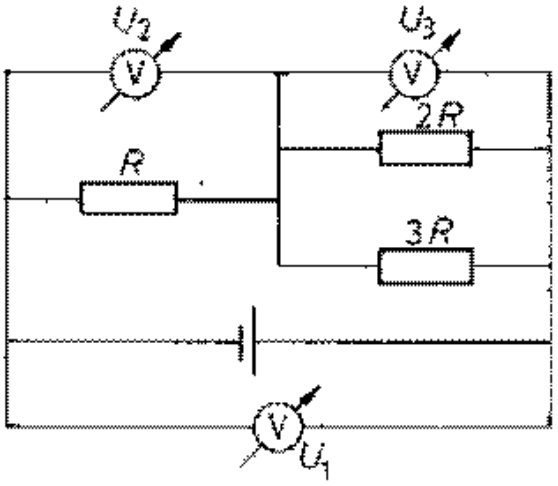
Milyen arányú feszültségeket kapunk a mérőműszereken?

A)
$U_1 : U_2 : U_3 = 3 : 2 : 1,$

B)
$U_1 : U_2 : U_3 = 11 : 5 : 6,$

C)
$U_1 : U_2 : U_3 = 6 : 5 : 1,$

D)
$U_1 : U_2 : U_3 = 5 : 11 : 6.$



Megoldás:

15.9. A $\underline{\underline{B}}$ válasz igaz.

Ugyanis R és $3R$ párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője (R'):
$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$. Ebből $R' = \frac{6R}{5}$.

Mivel R' és R sorosan kapcsolódnak: $\frac{U_2}{U_3} = \frac{R}{R'} = R \cdot \frac{5}{6R} = \frac{5}{6}$. Ebből

$U_3 = \frac{6}{5} U_2.$

A huroktörvény szerint $U_1 = U_2 + U_3$, azaz $U_1 = U_2 + \frac{6}{5} U_2 = \frac{11}{5} U_2.$

Tehát $U_1 : U_2 : U_3 = \frac{11}{5} : 1 : \frac{6}{5} = 11 : 5 : 6.$

15.10. *Válasszuk ki, hogy egy-egy, számmal jelzett állítás mely jelenségre vonatkozik.*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,

B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,

C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,

D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik!

a) Áramkörbe egymással párhuzamosan kapcsolt ellenállások vannak.

b) Áramkörbe egymással sorosan kapcsolt ellenállások vannak.

1. Az eredő ellenállás az egyes részellenállások reciprokainak összegével egyenlő.
2. A végpontjaik között mért feszültségek egyenlők.
3. A rajtuk átfolyó áram erőssége egyenlő.
4. Helyettesíthetők egyetlen ellenállással úgy, hogy nem változnak az áramkör többi részében az áram- és feszültségviszonyok.
5. A rajtuk átfolyó áramerősségek fordítva arányosak az ellenállások értékeivel.
6. Az eredő ellenállás a részellenállások összegével egyezik meg.
7. Az ellenállásokra összesen jutó feszültség egyenlő az egyes ellenállások végpontjai közötti feszültségek összegével.
8. Az egyes ellenállásokon folyó áramerősségek összege egyenlő a főágban folyó áram erősségével.

Megoldás:

15.10. 1. $\underline{\underline{D}}$ Lásd az elméleti bevezetőben leírtakat.
2. $\underline{\underline{C}}$ Ha az ellenállások egyenlőek. Párhuzamos kapcsolásnál lásd a bevezetőt. Soros kapcsolás esetén az I egyenlő. Ha R is egyenlő, akkor $U = I \cdot R$ is egyenlő.
2. $\underline{\underline{A}}$ Ha az ellenállások különbözőek. (Lásd az előzőeket.)
3. $\underline{\underline{C}}$ Ha az ellenállások egyenlőek. Soros kapcsolásnál lásd a bevezetőt. Párhuzamos kapcsolás esetén a közös csomópontba érkező áram az egyenlő ellenállások között egyenlően oszlik meg.
3. $\underline{\underline{A}}$ Ha az ellenállások különbözőek. (Lásd az előzőeket.)
4. $\underline{\underline{C}}$ Az eredő ellenállás értelmezése szerint.
5. $\underline{\underline{A}}$ A feszültségek egyenlőségéből következik.
6. $\underline{\underline{B}}$ Lásd a bevezetőt.
7. $\underline{\underline{B}}$ A huroktörvényből következik.
8. $\underline{\underline{A}}$ A csomóponti törvényből következik.

15.11. Az ábrára vonatkozó *állítások közül melyek a* HELYESEK!

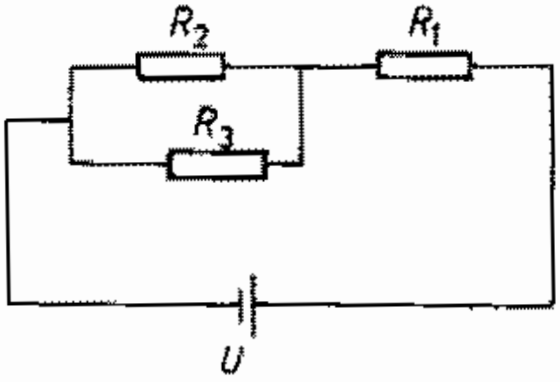
(Az R_1, R_2, R_3 ellenállások közül egyik sem zérus és nagyságuk állandó.)

A) Az R_1 ellenálláson átfolyó áram és a végpontjai között mért feszültség egyenesen arányos egymással, ha az U-val jelölt feszültséget változtatjuk.

B) Az R_2 és R_3 ellenállások végpontjai között mért feszültségek egyenlőek, bármekkora ellenállásértékek esetén.

C) A telep feszültsége egyenlő az R_1, az R_2 és az R_3 ellenállások végpontjai között mért feszültségek összegével, ha az összekötő vezetők ellenállásától eltekintünk.

D) Az R_1 és az R_2 ellenállásokon átfolyó áramok erőssége egyenlő.



Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.11. $\underline{A}$ helyes, Ohm törvénye alapján.

$\underline{B}$ helyes, párhuzamosan kapcsolt ellenállások.

$\underline{\underline{C}}$ hamis, mert a huroktörvény alapján $U = U_1 + U_2$ vagy $U = U_1 + U_3$. (Természetesen $U_2 = U_3$, a $\underline{B}$ válasz szerint.) Így $U \neq U_1 + U_2 + U_3$.

D hamis, mert $I_1 = I_2 + I_3$ a csomóponti törvény szerint. Így I_1 csak akkor egyenlő I_2-vel, ha $I_3 = 0$. (R_3-nak végtelen nagynak kellene lenni!)

15.12. *Válasszuk ki a* HELYES *állítást!*

Kisütünk egy feltöltött kondenzátort egy nagy ellenálláson keresztül.

A) Az áramerősség állandó.

B) Az áramerősség csökken.

C) Az áram változó irányú és egyre kisebb erősségű.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.12. A $\underline{\underline{B}}$ válasz helyes, *A* és *C* hamis. Kisüléskor, a töltések áramlásakor csökken a kondenzátor feszültsége, így az ellenállás feszültsége is. Mivel *R* állandó, így az áramerősségnek is csökkennie kell. Az áram természetesen nem változó irányú.

15.13. *Válasszuk ki az elektromos áramra vonatkozó állítások közül a* HELYESEKET!

A) Ha egy fémes vezető két végpontja között feszültség van, akkor a vezetőben elektromos áram folyik.

B) Ha egy feltöltött kondenzátor két lemezét fémes vezetővel kötjük össze, akkor a vezetőben áram indul.

C) Az áram a vezetőben is, és a feszültségforrásban is a nagyobb potenciálú helyről folyik az alacsonyabb potenciálú hely felé.

D) Az áramjárta vezető belsejében az áram irányával megegyező irányú térerősség van.

Indokoljuk választásainkat!

Megoldás:

15.13. $\underline{\underline{A}}$ helyes. Lásd 15.1.

$\underline{\underline{B}}$ helyes. Mert a feltöltött kondenzátor lemezei között feszültség van.

$\underline{\underline{C}}$ hamis. Mert a feszültségforrásban az alacsonyabb potenciálú helyről a nagyobb potenciálú hely felé mozognak a töltések, a vezetőben pedig fordítva.

$\underline{\underline{D}}$ helyes. Mert az áram irányán a pozitív töltések mozgási irányát értjük. (Pl. az elektron az E irányával ellentétesen mozog.)

15.14. *Válasszuk ki a* következő, egyenárammal átjárt ellenállás-huzalra vonatkozó *állítások közül a* HELYESEKET!

A) Az egyenárammal átjárt huzal belső energiája nem változik, ha az áramerősség állandó és a huzalban már hosszabb ideje folyik áram.

B) A huzal által a környezetnek leadott hőmennyiségre a $Q = U \cdot I$ összefüggés érvényes.

C) A huzal által időegységenként leadott hőmennyiség egyenesen arányos a huzal ellenállásával.

D) A huzal által időegységként leadott hőmennyiség állandó feszültség mellett fordítottan arányos a huzal ellenállásával.

Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

15.14. $\underline{\underline{A}}$ helyes, mert hosszabb idő eltelte után a huzal és környezete közötti termikus kölcsönhatás miatt a hőmérséklet nem változik. Ekkor ugyanis a huzal által termelt hő egyenlő a környezetnek leadott hővel.

B hamis, mert a leadott hő: $Q = U \cdot I \cdot t$.

$\underline{\underline{C}}$ igaz, mert $\frac{Q}{t} = U \cdot I = I^2 \cdot R$. Mivel I állandó, $\frac{Q}{t}$ egyenesen arányos R-rel.

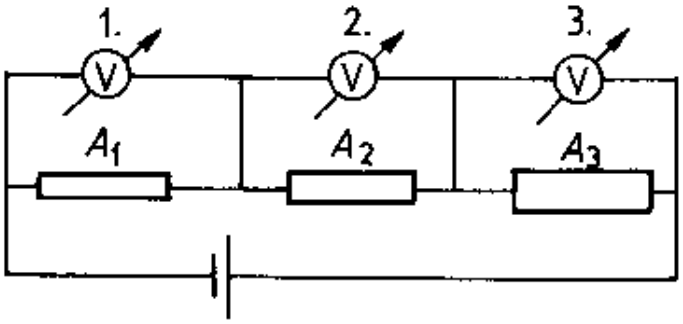
$\underline{\underline{D}}$ igaz, mert $\frac{Q}{t} = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$, és ha U állandó, akkor $\frac{Q}{t}$ fordítottan arányos R-rel.

15.15. *Jelöljük meg a* HELYES *arányt!*

Egy feszültségforrásra, amelynek belső ellenállása elhanyagolható, három, egyenlő hosszúságú, azonos hőmérsékletű és anyagi minőségű vezetékdarabot kapcsolunk, az ábra szerinti elrendezésben. A vezetékek keresztmetszetének aránya 1 : 2 : 3.

Mekkora az egyes darabokon mért feszültségek aránya?

A) 1 : 2 : 3,
B) 1 : 4 : 9,
C) 6 : 3 : 2,
D) 6 : 4 : 2.
Indokoljuk választásunkat!



Megoldás:

15.15. A <u>*D*</u> válasz a helyes.

Mivel $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$, ezért R fordítottan arányos A-val.

Tehát ha $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 3$, akkor $R_1 : R_2 : R_3 = 3 : 2 : 1$.

Az ellenállások sorosan vannak kapcsolva, ezért

$$U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3 = 3 : 2 : 1 = 6 : 4 : 2.$$

15.16. *Válasszuk ki* azokat *a* HELYES *állításokat*, amelyek a Stuart–Tolman kísérletből következnek?

A) A fémek kristályrácsában a rácspontok között szabad, vezetési elektronok vannak.
B) Az elektronoknak tehetetlenségük van.
C) Az elektron fajlagos töltése meghatározható a kísérlettel.
D) Az elektron töltése meghatározható a kísérlettel.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.16. A kísérlet lényege: Egy fémtekercs két végét ampermérőre kapcsoljuk, forgásba hozzuk, majd hirtelen lefékezzük. A fékezéskor az ampermérő áramot jelez.
$\underline{\underline{A}}$ helyes, mert az áramhoz szabadon mozgó töltéshordozók kellenek.
$\underline{\underline{B}}$ helyes, mert a fékezéskor, a tehetetlenség miatt a fékezéssel ellentétes irányba mozdulnak el az elektronok.
$\underline{\underline{C}}$ helyes. Az elméleti megfontolások alapján levezethető a következő összefüggés: $\frac{e}{m} = \frac{2v_0 \cdot l}{I_0 \cdot R \cdot t}$, ahol v_0 a tekerccsel együtt forgó elektron kerületi sebessége, l a huzal hossza, R a huzal ellenállása, I_0 az áram kezdeti értéke, t az az idő, amíg az áram 0-ra csökken.
D hamis. Az m'-t ismerni kellene hozzá.

15.17. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) Ha két, különböző anyagminőségű fémet összeérintünk, akkor közöttük érintkezési feszültség alakul ki.

B) Ha két, különböző anyagminőségű fémet összeérintünk, csak akkor alakul ki közöttük érintkezési feszültség, ha összeérintés után szét is választjuk őket.

C) Különböző fémeknél különbözőek a vezetési elektronok energiaszintjei.

D) Ha ebonitrudat szőrmével dörzsölünk, a szőrme és az ebonitrúd között is fellép érintkezési feszültség.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

15.17. $\underline{\underline{A}}$ igaz, mert a fémek összeérintésekor abból a fémből, amelynek vezetési elektronjai nagyobb energiaszinten vannak, elektronok lépnek át a másik fémbe mindaddig, amíg az energiaszint ki nem egyenlítődik. Az elektronok átlépése a fémek töltési állapotának megváltozását, ez pedig az érintkezési feszültséget eredményezi.

B hibás, mert az érintkező fémekben – az előbb leírtak szerint – a vezetési elektronok különböző energiaállapotúak.

A széthúzás csak megsokszorozza a már meglévő feszültséget, amely az érintkezéskor kialakult.

$\underline{\underline{C}}$ helyes. Emiatt indul meg az elektronok áramlása.

$\underline{\underline{D}}$ helyes. A dörzsölés csak a jobb érintkezést segíti elő.

15.18. *Válasszuk ki, hogy egy-egy, számmal jelzett állítás mely jelenségre (jelenségekre) vonatkozik.*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik!

a) A gázok elektromos vezetése.
b) A fémek elektromos vezetése.

1. Folytonos áram kialakulásához potenciálkülönbségre van szükség.
2. A vezetésben ionok vesznek részt.
3. A vezetésben csak elektronok vesznek részt.
4. A vezetésben elektronok is részt vesznek.
5. A vezetésben részt vevő ionok elektrolitos disszociáció révén jönnek létre.
6. A vezetésben részt vevő ionok ütközések következtében is létrejönnek.
7. A vezetésben részt vevő töltéshordozók nem külső hatásra jönnek létre.
8. A vezetés során kémiai átalakulások játszódnak le.

Megoldás:

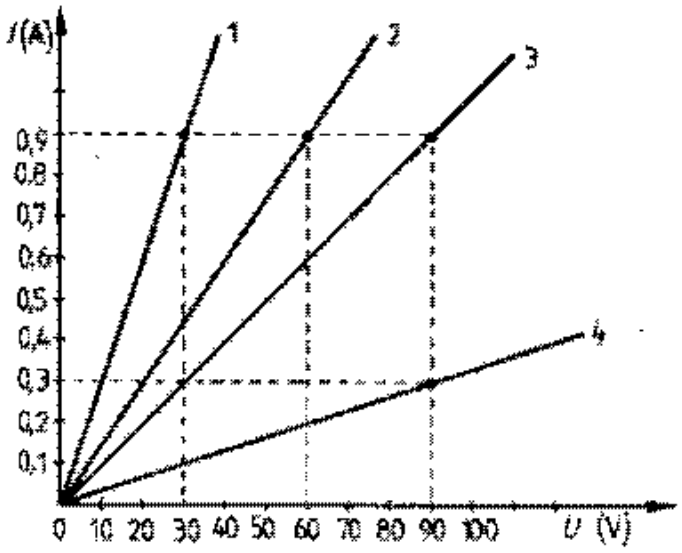
15.18. A fémek vezetésében normál körülmények között csak elektronok, a gázok vezetésében mind elektronok, mind ionok részt vehetnek.
1. *C* A folytonos áramlás triviális feltétele.
2. *A* A gázokra jellemző, pl. ködfénykisülésnél.
3. *B* A fémekre jellemző. Lásd a 15.1. feladatot.
4. *C* Mind a gázoknál, mind a fémeknél résztvesznek a vezetésben az elektronok. A gázok esetén például ívkisülésnél.

5. *D* Ez a jelenség az oldatok esetén lép fel.
6. *A* Például szikrakisülésnél.
7. *B* A gázok normál körülmények között nem vezetők. Valamilyen külső hatással töltéshordozókat kell létrehozni a vezetéshez.
8. *D* (Megjegyzés: a gázoknál speciális esetben előfordulhat.)

15.19. Az alábbi ábrán négy, huzalon átfolyó áramot ábrázoltunk a végpontjaira kapcsolt feszültség függvényében.

a) Az egyes huzalok közül melyiknek a legnagyobb az ellenállása?

b) Mennyi ennek a huzalnak az ellenállása?



Megoldás:

15.19. Az $R = \frac{U}{I}$ alapján a 4. számú huzal ellenállása a legnagyobb. Mivel I–U függvényt ábrázol a grafikon, így a legkisebb meredekségű egyenesnél a legnagyobb az ellenállás. $\underline{\underline{R}} = \frac{90\ \text{V}}{0{,}3\ \text{A}} = \underline{\underline{300\ \Omega}}$.

15.20. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A dióda az egyenáramot mindig vezeti.

B) A dióda az egyenáramot akkor vezeti, ha katódja negatív potenciálú az anódhoz képest.

C) Ha az anódtelep helyére váltakozó áramot kapcsolunk, az anódkörben egyirányú áram folyik.

D) Az egyutas egyenirányítással előállított egyenáram tekercsben önindukciós feszültséget hoz létre.

E) A kétutas egyenirányítás alkalmazásával időben állandó, egyirányú áramot kapunk.

Indokoljunk választásunkat!

Megoldás:

15.20. *A* hamis, mert csak megfelelő polaritással bekötve vezeti az egyenáramot.

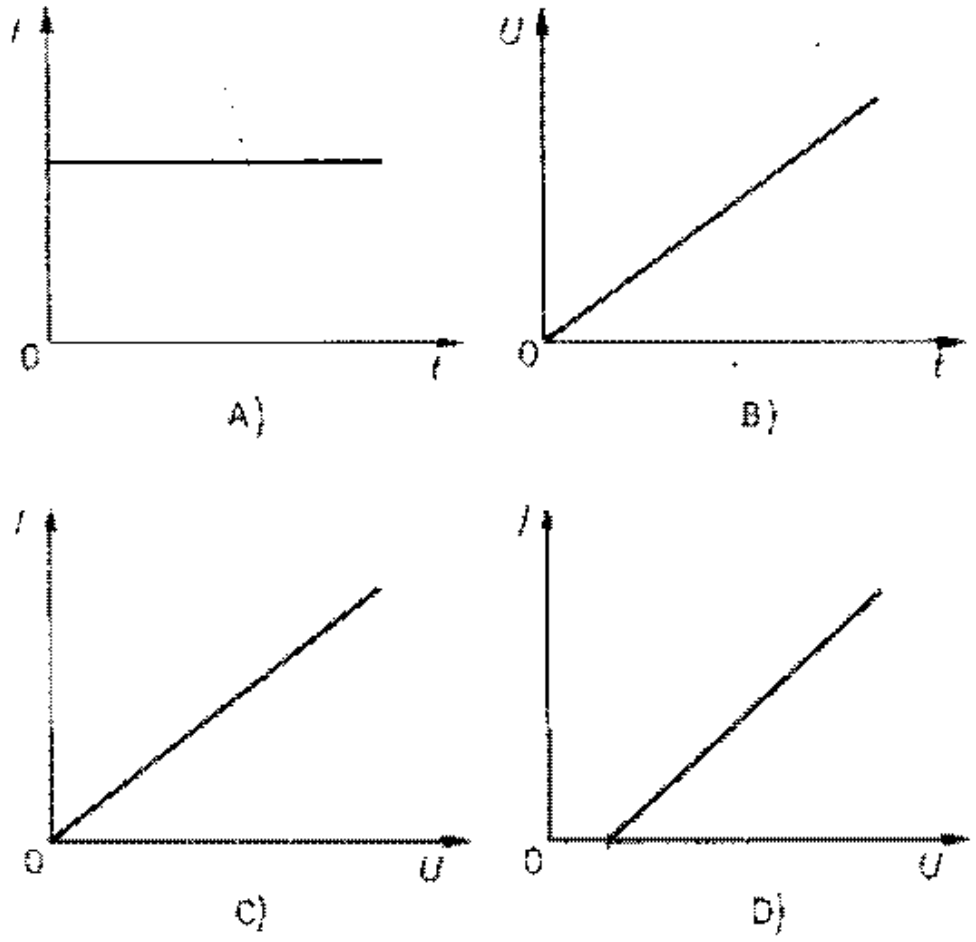
B igaz, mert a katód felületéről kilépő elektronokat a katód negatív polaritása az anód felé taszítja, az anód pedig vonzza. Tehát olyan elektromos mező alakul ki a diódában, amely a negatív elektronokat a katódról az anód felé gyorsítja.

C igaz, mert csak a megfelelő polaritás esetén – minden második félperiódusban – vezet.

D igaz, mert egyirányú áram jön létre, de erőssége változik, és a változó áram a tekercsben önindukciós feszültséget hoz létre. $U_{\text{ö}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

E hamis, mert ekkor ugyan minden félperiódust egyenirányít a dióda, de ekkor is változó nagyságú áram keletkezik.

15.21. *Válasszuk* ki a *grafikonok közül* azokat, melyekkel HELYESEN jellemezhetők az egyenáramú áramkörök! *Indokoljuk választásunkat!*



Megoldás:

15.21. A helyes, mert I időben állandó.
B hamis, mert U a grafikonon időben változó.
C igaz, Ohm törvénye alapján.
D hamis, mert a grafikon alapján U nem egyenesen arányos I-vel.

15.22. Egy huzal ellenállása 20 Ω. A két végpontja közötti feszültség 60 V.

a) Hány elektron halad át a huzal keresztmetszetén 10 s alatt?

b) Ezt az elektronmennyiséget síkkondenzátor lemezeire víve, mekkora térerősség alakul ki a lemezek között, ha a kondenzátor kapacitása 4 μF és lemezeinek távolsága 1 cm?

Megoldás:

15.22. $R = 20\ \Omega$; $U = 60$ V; $t = 10$ s; $d = 0{,}01$ m; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $C = 4 \cdot 10^{-6}$ F.

Ohm törvénye alapján $I = \frac{U}{R} = 3$ A.

Az áramerősség fogalma alapján $Q = I \cdot t = 30$ C.

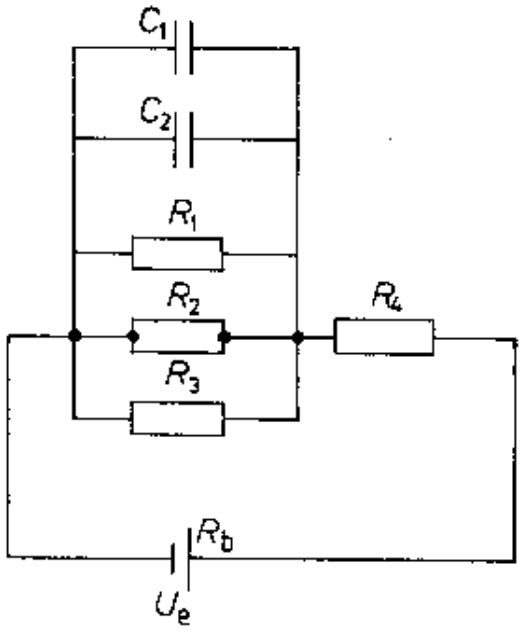
a) A huzal keresztmetszetén 10 s alatt áthaladt elektronok száma:

$$n_e = \frac{Q}{Q_e} = \underline{\underline{1{,}875 \cdot 10^{20}\ \text{db}}}.$$

b) A kapacitás fogalma alapján a kondenzátor lemezei között a feszültség $U = \frac{Q}{C} = 7{,}5 \cdot 10^6$ V, így a lemezek között a térerősség

$$\underline{\underline{E = \frac{U}{d} = 7{,}5 \cdot 10^8\ \frac{\text{V}}{\text{m}}}}.$$

15.23. Számítsuk ki az alábbi kapcsolásban szereplő két kondenzátor feszültségét és töltését!



Az adatok:

$$C_1 = 2\ \mu\text{F},\ C_2 = 6\ \mu\text{F},\ R_b = 2\ \Omega,\ R_1 = 10\ \Omega,$$
$$R_2 = R_3 = 20\ \Omega,\ R_4 = 40\ \Omega,\ U_e = 20\ \text{V}.$$

Megoldás:

15.23. $C_1 = 2\ \mu\text{F}$; $C_2 = 6\ \mu\text{F}$; $R_b = 2\ \Omega$; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 20\ \Omega$; $R_4 = 40\ \Omega$; $U_e = 20\ \text{V}$.

Zárt áramkörben az ellenállásokon folyik áram, a kondenzátorok szakadást jelentenek. A párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon és kondenzátorokon kialakult feszültségek megegyeznek. $U_1 = U_2 = U_3 = U_{C_1} = U_{C_2} = U'$.

A párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője: $\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

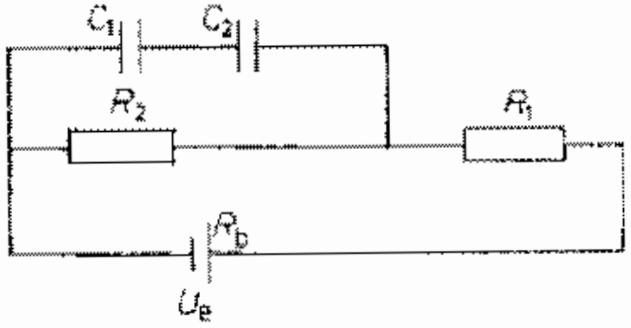
Ebből $R_{1,2,3} = 5\ \Omega$.

A külső ellenállások eredője: $\sum R_k = R_{1,2,3} + R_4 = 45\ \Omega$.

A teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvény alapján: $I = \frac{U}{R_b + \sum R_k} = 0{,}4255\ \text{A}$. Ezt felhasználva: $\underline{\underline{U'_M = I \cdot R_{1,2,3} = 2{,}128\ \text{V}}}$.

A kapacitás fogalma alapján: $\underline{\underline{Q_1 = 4{,}26 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}}$. $\underline{\underline{Q_2 = 1{,}277 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}}$.

15.24. Számítsuk ki az alábbi kapcsolásban szereplő két kondenzátor feszültségét és töltését!



Az adatok:

$$C_1 = 6\ \mu\text{F},\ C_2 = 4\ \mu\text{F},\ R_1 = 15\ \Omega,\ R_2 = 20\ \Omega,$$
$$R_b = 5\ \Omega,\ U_e = 40\ \text{V}.$$

Megoldás:

15.24. $C_1 = 6 \cdot 10^{-6}$ F; $C_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ F; $R_1 = 15\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_b = 5\ \Omega$; $U_e = 40$ V.

Zárt áramkörben csak az ellenállásokon folyik áram, amelynek erőssége a teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvény alapján:

$$I = \frac{U_e}{R_b + \sum R_k} = \frac{U_e}{R_b + R_1 + R_2} = 1\ \text{A}.$$

Az egymással sorosan kapcsolt kondenzátorokon a töltés megegyezik. A rajtuk lévő feszültségek összege – a párhuzamos kapcsolásból adódóan – egyenlő az R_2 ellenálláson eső feszültséggel.

$U_{C_1} + U_{C_2} = U_2 = I \cdot R_2 = 20$ V.

Mivel $U_{C_1} = \frac{Q}{C_1}$ és $U_{C_2} = \frac{Q}{C_2}$, így az előző összefüggés $\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = 20$ V.

Ebből $\underline{\underline{Q = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}}$.

A kondenzátorok feszültségei: $\underline{\underline{U_{C_1}}} = \frac{Q}{C_1} = \underline{\underline{8\ \text{V}}}$; $\underline{\underline{U_{C_2}}} = \frac{Q}{C_2} = \underline{\underline{12\ \text{V}}}$.

15.25. Egy 4 m hosszú, egyenletes keresztmetszetű alumínium huzal ellenállása 20 Ω. A huzalt egy 40 V-os feszültségforrásra kapcsoljuk.

a) Mekkora a huzalon folyó áram erőssége?

b) Mekkora feszültséget jelezne a voltmérő a huzal két azon pontja között, amelyek a végektől 0,5–0,5 m távolságban vannak?

c) Alakítsunk a huzalból zárt kört! A feszültségforrást kapcsoljuk a kör 1 m-es ívének két végpontjára! Mekkora áram folyik az így keletkezett két ívben?

Megoldás:

15.25. $l = 4$ m; $R = 20\ \Omega$; $U = 40$ V.

a) Ohm törvénye alapján $I = \frac{U}{R} = \underline{\underline{2\ \text{A}}}$.

b) $l' = 3$ m, a huzal azon hossza, amelynek két végpontja között a feszültséget mérni akarjuk. Ennek ellenállása: $R = \frac{20}{4} \cdot 3 = 15\ \Omega$. (Arányos osztással.)

A vezetőszakaszra Ohm törvényéből: $U' = I \cdot R = \underline{\underline{30\ \text{V}}}$. Az I értékét az *a)* pontban megállapítottuk.

c) A feltételek teljesülése esetén két ellenállás párhuzamos kapcsolásáról van szó. Ezek: $R_1 = 15\ \Omega$ (3 m hosszú szakasz) és $R_2 = 5\ \Omega$ (1 m hosszú szakasz).

Mivel ezen párhuzamosan kapcsolt ellenállások közvetlenül a feszültségforrásra vannak kapcsolva, a két ellenálláson eső feszültségek egymással és a feszültségforrás feszültségével is egyenlők.

$U_1 = U_2 = U = 40$ V.

De $U_1 = R_1 \cdot I_1$, ebből $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \underline{\underline{2{,}67\ \text{A}}}$; valamint $U_2 = R_2 \cdot I_2$, ebből $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \underline{\underline{8\ \text{A}}}$.

15.26. Három, azonos anyagú és hosszúságú huzal keresztmetszeteinek aránya 1 : 2 : 3.
Hogyan aránylik a rajtuk átfolyó áram erőssége, ha mindhármat ugyanakkora feszültségre kapcsoljuk?

Megoldás:

15.26. $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$; $U_1 = U_2 = U_3 = U$; $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 3$.

A huzalok ellenállását az $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ összefüggés alapján határozhatjuk meg.

$$R_1 = \varrho \cdot \frac{l}{A_1}; \quad R_2 = \varrho \cdot \frac{l}{A_2}; \quad R_3 = \varrho \cdot \frac{l}{A_3}.$$

Ohm törvénye szerint a huzalokon átfolyó áram erőssége:

$$I_1 = \frac{U}{\varrho \cdot \frac{l}{A_1}} = \frac{U \cdot A_1}{\varrho \cdot l}; \quad I_2 = \frac{U \cdot A_2}{\varrho \cdot l}; \quad I_3 = \frac{U \cdot A_3}{\varrho \cdot l}.$$

Ezek alapján: $I_1 : I_2 : I_3 = A_1 : A_2 : A_3 = \underline{1 : 2 : 3}$.

15.27. Egy 12 V elektromotoros erejű telep sarkaira kapcsolt 20 Ω ellenállású fogyasztón 0,5 A erősségű áram folyik.

a) Mekkora a telep belső ellenállása?
b) Mekkora a feszültség a belső ellenálláson?
c) Mekkora a kapocsfeszültség?

Megoldás:

15.27. $U_e = 12$ V; $R_k = 20\ \Omega$; $I = 0{,}5$ A.

Ohm törvénye alapján: $U_k = I \cdot R_k = \underline{10\ \text{V}}$.

A huroktörvény alapján: $U_b = U_e - U_k = \underline{2\ \text{V}}$.

Így a telep belső ellenállása: $R_b = \dfrac{U_b}{I} = \underline{4\ \Omega}$.

15.28. A 6 V elektromotoros erejű feszültségforrásra 18 Ω ellenállású fogyasztót kapcsolunk. Az áramot 17 m hosszú, 0,1 mm^2 keresztmetszetű rézhuzallal vezetjük a fogyasztóhoz. A feszültségforrás belső ellenállása 3 Ω.
Hány elektron halad át a rézhuzalon 1,5 órai üzemeltetés alatt?

Megoldás:

15.28. $U_e = 6$ V; $R_b = 3\ \Omega$; $R_f = 18\ \Omega$; $l_v = 17$ m; $A_v = 0{,}1\ mm^2$; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $t = 5400$ s; $\varrho_v = 0{,}0178\ \frac{\Omega mm^2}{m}$.

A teljes áramkörre vonatkozó Ohm-törvény alapján

$$(*) \qquad I = \frac{U_e}{R_b + \sum R_k}$$

A vezető ellenállása $R_v = \varrho \cdot \frac{l}{A} = 3{,}026\ \Omega$, így a külső ellenállás $\sum R_k = R_v + R_f = 21{,}026\ \Omega \approx 21\ \Omega$.

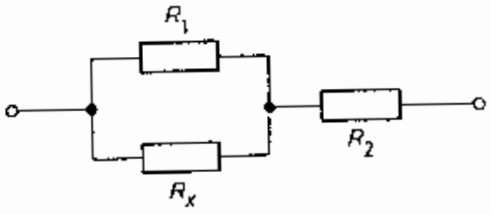
A körben folyó I áram $(*)$ alapján: $I = 0{,}25$ A. A vezetéken t idő alatt átáramlott töltésmennyiség: $Q = I \cdot t = 1350$ C.

Az áthaladó elektronok száma: $\underline{\underline{N_e = \frac{Q}{Q_e} = 8{,}4375 \cdot 10^{21}\ \text{db}}}$.

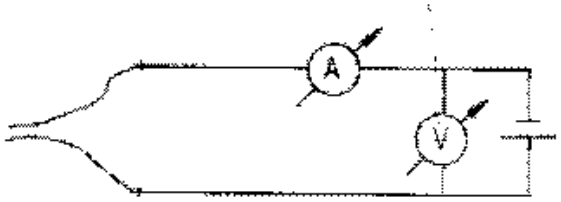
15.29. Egy 200 Ω-os ellenállással párhuzamosan kapcsolunk egy R_x ismeretlen ellenállást, majd ezekkel sorosan egy 160 Ω-os ellenállást.
Mekkora az R_x ellenállás értéke, ha az egész rendszer eredő ellenállása 200 Ω?

Megoldás:

15.29. $R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = 160\ \Omega$; $R_e = 200\ \Omega$.
A soros kapcsolásra visszavezethető ellenálláshálózat eredője:
$R_e = R_{1,x} + R_2$ alapján $R_{1,x} = 40\ \Omega$.
A párhuzamosan kapcsolt ellenállásokra érvényes: $\frac{1}{R_{1,x}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x}$.
Ebből $\underline{\underline{R_x = 50\ \Omega}}$.



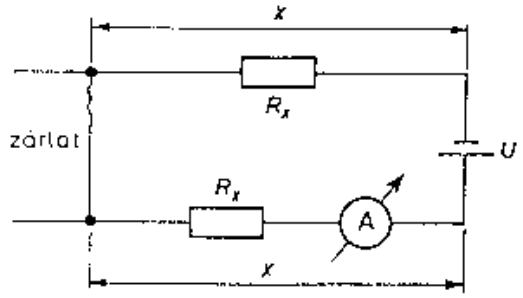
15.30. Egy kétvezetékes kábel érintkezés miatt zárlatos. A hiba helyének megkeresésére 9 V feszültséget kapcsoltak a kábel egyik végére és 2,5 A-es áramot mértek.



Mekkora távolságban kereshető a hiba a mérés helyétől, ha a vezeték 1 mm átmérőjű és 0,017 $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ fajlagos ellenállású rézből készült?

Megoldás:

15.30. $U = 9$ V; $I = 2{,}5$ A; $d = 10^{-3}$ m; $\varrho = 0{,}017\ \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$.



A zárlat során a két kábel valahol érintkezik, a feszültségforrással együtt zárt áramkört alkotnak. Legyen a szakadás helye a feszültségforrástól x távolságra. Ekkor a két x hosszúságú kábel eredő ellenállása a soros kapcsolás miatt: $R = 2 \cdot R_x$; $R_x = \varrho \cdot \frac{x}{A}$; $A = r^2 \cdot \pi$; $r = \frac{d}{2}$. Így $R = 2 \cdot \varrho \cdot \frac{x}{(0{,}5 \cdot d)^2 \cdot \pi}$. Ebből $x = \frac{(0{,}5 \cdot d)^2 \cdot p \cdot R}{2\varrho}$.

Másrészt Ohm törvénye alapján $R = \frac{U}{I} = 3{,}6\ \Omega$.

A két egyenletet összevetve és az adatokat beírva $\underline{\underline{x = 83{,}1\ \text{m}}}$.

15.31. Egy ember két kezére 16 V feszültséget kapcsolva, az áram erőssége $4 \cdot 10^{-2}$ mA.

a) Mekkora az emberi test ellenállása?

b) Hány százalékkal nő az áramerősség, ha a test ellenállása az ötödrészére csökken?

(Vegyük érvényesnek Ohm törvényét a folyamatban!)

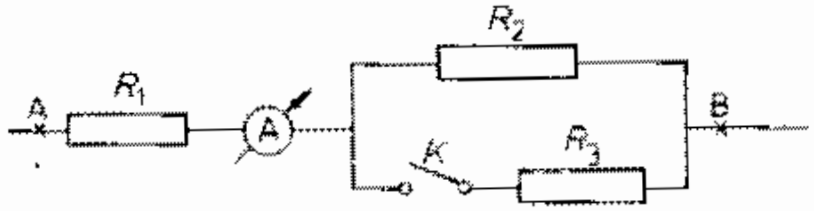
Megoldás:

15.31. $U = 16$ V; $I = 4 \cdot 10^{-5}$ A.

a) Ohm törvényét alkalmazva: $\underline{\underline{R = \frac{U}{I} = 4 \cdot 10^5\ \Omega}}$.

b) Ha $I' = \frac{I}{5}$ és U állandó, akkor $R' = \frac{U}{I'} = \frac{5 \cdot U}{I} = 5 \cdot R$, tehát az ellenállás ötszörösére, azaz $\underline{\underline{400\%\text{-kal}}}$ nő.

15.32. Az ábra szerinti kapcsolásban, a K kapcsoló zárt állásában, az R_1 ellenálláson átfolyó áram erőssége 0,28 A.



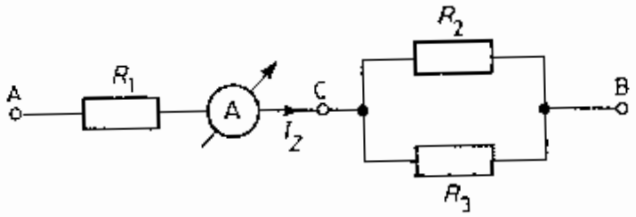
a) Mekkora az R_3 ellenállás?

b) Mekkora a K kapcsoló nyitott állásában az R_1 ellenálláson átfolyó áram erőssége?
(Legyen: $U_k = 56$ V, $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$!)

Megoldás:

15.32. $U_k = 56$ V; $R_1 = 80\ \Omega$; $R_2 = 200\ \Omega$.

a) Zárt állás esetén: $I_z = 0{,}28$ A; $U_{AB} = U_k = 56$ V.



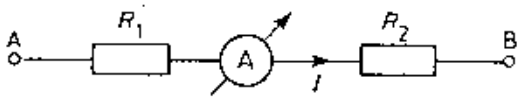
Az AB vezetőszakaszra Ohm törvénye: $R_{AB} = \dfrac{U_{AB}}{I_z} = 200\ \Omega$, $R_{BC} =$

$= R_{AB} - R_1 = 120\ \Omega$.

Másrészt $\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Ebből $\underline{\underline{R_3}} = \frac{R_{BC} \cdot R_2}{R_2 - R_{CB}} = \underline{\underline{300\ \Omega}}$.

b) Nyitott állás esetén: $U_{AB} = U_k = 56$ V.



Nyitott állás esetén az R_3 ellenálláson nem folyik áram. Így az AB szakasz ellenállása $R_{AB} = R_1 + R_2 = 280\ \Omega$.

Az AB szakaszra Ohm törvényét alkalmazva $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$. Ebből $\underline{I} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \underline{\underline{0{,}2\ \text{A}}}$.

15.33. Egy 80 cm hosszú, egyenletes keresztmetszetű vezető ellenállása 40 Ω. A vezetőt kettévágjuk a felében és párhuzamosan kapcsoljuk az így kapott darabokat.
Mekkora lesz az eredő ellenállás?

Megoldás:

15.33. $R = 40\ \Omega$; $l = 80$ cm.

A féldarabok ellenállása $R' = 20\ \Omega$.

Párhuzamos kapcsolás esetén: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega}$. Ebből $\underline{\underline{R_e = 10\ \Omega}}$.

15.34. Az elektronok kb. 0,05 $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ sebességgel mozognak egy vezetőben 1 A erősségű áramnál.

a) Mennyi idő alatt tesznek meg 10 cm-es utat?

b) Hogyan lehetséges, hogy a műszer a bekapcsolás pillanatában azonnal áramot jelez?

Megoldás:

15.34. $v_e = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $I = 1$ A; $s = 0{,}1$ m.

a) Egyenletes mozgás esetén: $t = \frac{s}{v} = \underline{\underline{2000 \text{ s}}}$.

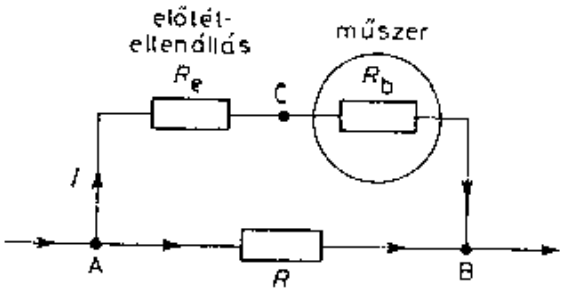
b) A bekapcsolás pillanatában a feszültség, illetve a térerősség hatására minden elektron gyakorlatilag egyszerre indul el.

15.35. Egy 500 Ω belső ellenállású feszültségmérő méréshatára 1V. Hány Ω-os ellenállást kell a műszerrel sorosan kapcsolni, hogy a műszer maximális kitérése 100 V legyen?

Megoldás:

15.35. $R_b = 500\ \Omega$; $U_m = 1$ V; $U'_m = 100$ V.

A voltmérő méréshatárának megnövelésére vonatkozó elméletet lásd a 15.7. feladatban. Az A és B pont közötti feszültséget akarjuk mérni, az R_e előtétellenállás felhasználásával. Ekkor $U_{AB} = U'_m = 100$ V.



Másrészt $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$. Mivel a műszeren maximum 1 V feszültség lehet, így $U_{CB} = 1$ V. Ezt felhasználva: $U_{AC} = 99$ V.

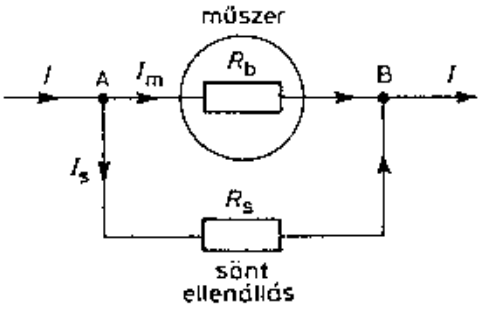
Az R_e és az R_b ellenálláson ugyanaz az áram folyik. Így R_b-re Ohm törvénye: $R_b = \frac{U_{CB}}{I}$. Ebből $I = \frac{U_{CB}}{R_b} = \frac{1}{500}$ A.

R_e-re Ohm törvénye: $\underline{\underline{R_e}} = \frac{U_{AC}}{I} = \underline{\underline{49\,500\ \Omega}}$.

15.36. Egy ampermérő méréshatára 100 mA, belső ellenállása 5 Ω. Mekkora ellenállást kell vele párhuzamosan kapcsolni, hogy a méréshatár 10-szeres legyen?

Megoldás:

15.36. $I_m = 0,1$ A; $R_b = 5\ \Omega$; $I'_m = 10 \cdot I_m = 1$ A.



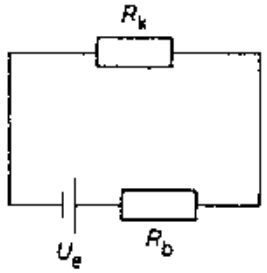
Az I áramerősséget akarjuk mérni a műszerrel egy R_s sönt ellenállás párhuzamos beiktatásával. Lásd a 15.6. feladatot.
Ekkor $I = 1$ A, illetve $I_m = 0,1$ A.
Másrészt, $I = I_m + I_s$ a csomóponti törvény szerint. Ebből $I_s = 0,9$ A.
Mivel R_b párhuzamos R_s-sel, így a feszültségek egyenlők: $U_b = U_s$, azaz $I_s \cdot R_s = I_m \cdot R_b$.
Ebből $\underline{\underline{R_s}} = \dfrac{I_m \cdot R_b}{I_s} = \underline{\underline{0,56\ \Omega}}$.

15.37. Egy telep belső ellenállása 1 Ω, elektromotoros ereje 11 V. Hány darab 40 Ω-os ellenállást kell egymással párhuzamosan kötve a telepre kapcsolni, hogy a főágban 1 A áram folyjon?

Megoldás:

15.37. $R_b = 1\ \Omega$; $U_e = 11$ V; $R = 40\ \Omega$; $I = 1$ A.

$R_k = n$ darab párhuzamosan kapcsolt 40 Ω-os ellenállás eredője. Ennek meghatározása:



$$\frac{1}{R_k} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R}.$$

Ebből

(1) $$R_k = \frac{R}{n} = \frac{40\ \Omega}{n}.$$

Másrészt, Ohm törvényét a teljes áramkörre alkalmazva: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$.

Ebből

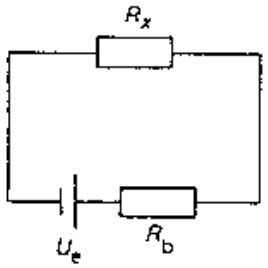
(2) $$R_k = \frac{U_e}{I} - R_b = 10\ \Omega.$$

Az (1) és (2) egyenletből adódik: $10\ \Omega = \frac{40\ \Omega}{n}$. Ebből $\underline{n = 4\ \text{db}}$.

15.38. Egy telep belső ellenállása 1,5 Ω, elektromotoros ereje 8,15 V.
Hány darab 10 Ω nagyságú ellenállást kell sorbakötve a telepre kapcsolni, ha azt akarjuk, hogy 0,1 A erősségű áram folyjon az áramkörben?

Megoldás:

15.38. $R_b = 1{,}5\ \Omega$; $U_e = 8{,}15$ V; $R = 10\ \Omega$; $I = 0{,}1$ A.
$R_k = n$ darab sorosan kapcsolt 10 Ω-os ellenállás eredője.



(1) $$R_k = n \cdot R = n \cdot 10\ \Omega.$$

Ohm törvényét alkalmazhatjuk teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$. Ebből

(2) $$R_k = \frac{U_e}{I} - R_b = 80\ \Omega.$$

Az (1) és (2) egyenletekből: $n \cdot 10\ \Omega = 80\ \Omega$. Ebből $\underline{\underline{n = 8\ \text{db}}}$.

15.39. Egy elektromos főzőlap 1 kg tömegű, 0 °C hőmérsékletű jeget 5 perc alatt olvaszt meg.
Mekkora a főzőlap teljesítménye, ha a hatásfok 80%?
$\left(\text{A jég olvadáshője } 3{,}35 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.\right)$

Megoldás:

15.39. $m_j = 1$ k; $T = 273$ K; $t = 300$ s; $L_0 = 3{,}35 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; $\eta = 0{,}8$.
A főzőlap hasznos munkája a jég olvasztására fordítódik. $W_h = Q$, azaz $W_ö \cdot \eta = L_0 \cdot m$. Ebből $W_ö = \frac{L_0 \cdot m}{\eta}$. A teljesítmény $\underline{\underline{P}} = \frac{W_ö}{t} = \frac{L_0 \cdot m}{\eta \cdot t} =$
$= \underline{\underline{1396 \text{ W}}}$.
A jég a főzőlap bekapcsolásakor azonnal olvadni kezd, mert 0 °C-os.

15.40. A 110 V feszültségű hálózatra 22 Ω ellenállású merülőforralót kapcsolunk.
Mennyi idő alatt forralhatunk fel ezzel 0,5 l, 60 °C hőmérsékletű vizet, ha a hatásfok 80%?

Megoldás:

15.40. $U = 110$ V; $R = 22\ \Omega$; $V = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3; $T = 333$ K; $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $\eta = 0{,}8$.

A merülőforraló által leadott hasznos munka fordítódik a víz forráspontig történő felmelegítésére.

$W_h = Q$, azaz $W_ö \cdot \eta = c_v \cdot m \cdot \Delta T$, $\eta \cdot \frac{U^2}{R} \cdot t = c_v \cdot m \cdot \Delta T$.

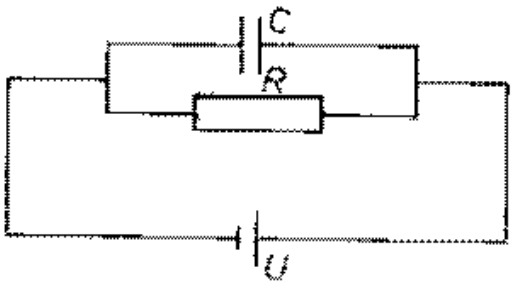
Ebből $\underline{t} = \frac{c_v \cdot m \cdot \Delta T \cdot R}{\eta \cdot U^2} = \underline{\underline{191\ \text{s}}}$.

Ahol $\Delta T = 373\ \text{K} - 333\ \text{K} = 40\ \text{K}$. $m_v = \varrho_v \cdot V_{víz} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0{,}5\ \text{kg}$.

15.41. Egy 10 V elektromotoros erejű és 0,5 Ω belső ellenállású telepre az ábrán látható módon kapcsolunk egy 2 Ω nagyságú ellenállást és egy 0,5 μF kapacitású kondenzátort.

a) Mekkora a kondenzátorlemezek közötti feszültség?

b) Mennyi a lemezeken lévő töltésmennyiség?



Megoldás:

15.41. $U_e = 10$ V; $R_b = 0{,}5\ \Omega$; $R = 2\ \Omega$; $C = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F.

a) A kondenzátor ágán nem folyik áram, de az R ellenállással egyenlő feszültségre töltődik fel az áramforrás bekapcsolásakor: $U_C = U_R$. (A kondenzátor lemezei és az R ellenállás végpontjai azonos potenciálon vannak.)

Ohm törvényét alkalmazzuk a teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$. Ebből

$I = \frac{U_e}{R_k + R_b} = 4$ A. (Itt $R_k = R$.)

A kapocsfeszültség: $U_k = U_R = I \cdot R_k = 8$ V. De $\underline{\underline{U_C}} = U_k = \underline{\underline{8\ \text{V}}}$.

b) A kondenzátor töltése a kapacitás definíciója alapján

$\underline{\underline{Q}} = C \cdot U_C = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}}$.

15.42. Két, egymással sorosan kapcsolt 1000 Ω és 500 Ω ellenállású merülőforralót 220 V feszültségre kapcsolunk. A merülőforralókat 100 °C hőmérsékletű vízbe mártva, elforralunk 0,1 kg vizet.
Mennyi idő szükséges ehhez?
(A víz forráshője $2{,}26 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$. A veszteségektől tekintsünk el!)

Megoldás:

15.42. $R_1 = 1000\ \Omega$; $R_2 = 500\ \Omega$; $U = 220$ V; $T = 373$ K; $m = 0{,}1$ kg; $L_f = 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

A két, sorosan kapcsolt merülőforraló munkája összeadódik, és ez forralja fel a 100 °C-os vizet.

(1) $$\sum W = L_f \cdot m.$$

(2) $\sum W = P_1 \cdot t + P_2 \cdot t = U_1 \cdot I \cdot t + U_2 \cdot I \cdot t = I \cdot t(U_1 + U_2) = I \cdot t \cdot U.$

A körben folyó áramra Kirchhoff törvényét alkalmazva $U = I(R_1 + R_2)$.

Ebből $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}147$ A.

Az (1) és (2) egyenletből: $I \cdot U \cdot t = L_f \cdot m$. Ebből $t = \frac{L_f \cdot m}{U \cdot I} = \underline{6988\ \mathrm{s}}$.

15.43. Egy merülőforralót 220 V feszültségre kapcsolunk. Mekkora az ellenállása, ha 1 kg víz hőmérsékletét 10 perc alatt 20 °C-kal emeli?

(A víz fajhője $4{,}18 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$. A veszteségektől tekintsünk el!)

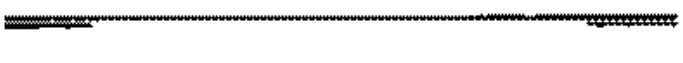
Megoldás:

15.43. $U = 220$ V; $m = 1$ kg; $t = 600$ s; $\Delta T = 20$ K; $c_v = 4{,}18 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$.

A merülőforraló munkája egyenlő a víz melegítéséhez szükséges hővel.

$W = Q$, azaz $\frac{U^2}{R} \cdot t = c_v \cdot m \cdot \Delta T$. Ebből $\underline{R} = \frac{U^2 \cdot t}{c_v \cdot m \cdot \Delta T} = \underline{347{,}4\ \Omega}$.

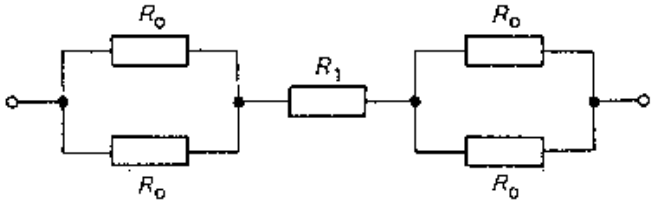
15.44. Egy 10 m hosszú, egyenletes keresztmetszetű és homogén anyagi minőségű huzal ellenállása 2000 Ω. A huzal két végéből levágunk 1–1 métert és a megmaradó részhez az ábrán látható módon hozzáforrasztjuk.



Mekkora lesz az ellenállás?

Megoldás:

15.44. $l = 10$ m; $l' = 1$ m; $R = 2000\ \Omega$.
A feladatnak megfelelő kapcsolás:



Az ellenállások a megfelelő hosszakkal arányosak. Így $R_0 = 200\ \Omega$ (1 m), $R_1 = 1200\ \Omega$ (6 m). A két párhuzamos R_0 eredője: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0}$.
Ebből $R' = 100\ \Omega$. A rendszer eredő ellenállása: $R_e = R' + R_1 + R' = 2R' + R_1 = \underline{\underline{1400\ \Omega}}$.

15.45. Az l hosszúságú, ϱ fajlagos ellenállású, négyzet alapú rudat hosszirányban négy egyenlő alapterületű rúdra vágjuk szét, majd ezeket egymással sorosan kapcsoljuk.
Mennyi lesz a sorosan kapcsolt rudak eredő ellenállásának és az eredeti rúd ellenállásának aránya?

Megoldás:

15.45. l; ϱ; A.

A rúd ellenállása a darabolás előtt: $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$.

Egy darab ellenállása: $R' = \varrho \cdot \frac{l}{0{,}25 \cdot A}$.

A négy sorosan kapcsolt darab ellenállása: $R_e = 4\varrho \cdot \frac{1}{0{,}25 \cdot A} = \frac{16 \cdot \varrho \cdot l}{A}$.

Az arány: $\underline{\underline{k}} = \frac{R_e}{R} = \frac{16 \cdot \varrho \cdot l}{A} \cdot \frac{A}{\varrho \cdot l} = \underline{\underline{16}}$.

15.46. Egy 120 V-os izzó teljesítménye 100 W.

a) Mekkora lesz a teljesítménye, ha 60 V-os, illetve ha 240 V-os feszültségforrásra kapcsoljuk az izzót?

b) Mi történik az izzóval az utóbbi esetben?

Megoldás:

15.46. $U = 120$ V; $P = 100$ W; $U_1 = 60$ V; $U_2 = 240$ V.

a) Ideális üzemmódban $P = U \cdot I$. Ebből $I = \frac{P}{U} = 0{,}83$ A. Ebből az izzó ellenállása: $R = \frac{U}{I} = 144\ \Omega$. Ha 120 V helyett 60 V-ra kapcsoljuk, akkor a teljesítmény: $\underline{\underline{P_1}} = \frac{U_1^2}{R} = \underline{\underline{25\ \text{W}}}$ (R nem változik). Ekkor az izzó halványabban ég.

Ha 120 V helyett 240 V-ra kapcsoljuk, akkor a teljesítmény: $\underline{\underline{P_2}} = \frac{U_2^2}{R} =$

$= \underline{\underline{400\ \text{W}}}$. Ekkor a rajta átfolyó áram $I = \frac{U_2}{R} = 1{,}67$ A.

b) Ez jóval nagyobb a megengedett eredeti 0,83 A-nél, tehát az izzó kiég.

15.47. Egy 6 V feszültségű, 30 W teljesítményű izzólámpát 12 V-os, 0,2 Ω belső ellenállású feszültségforrásról szándékozunk üzemeltetni.

a) Mekkora az előtét-ellenállás teljesítménye, ha teljes fénnyel világít az izzólámpa?

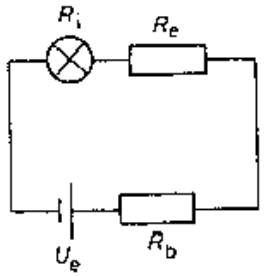
b) Hogyan kell az izzólámpához kapcsolni az ellenállást?

c) Gazdaságos-e az izzólámpa ilyen üzemeltetése? Miért?

Megoldás:

15.47. $U = 6$ V; $P = 30$ W; $U_e = 12$ V; $R_b = 0{,}2\ \Omega$.

A feladatnak megfelelő kapcsolás:



a) Az izzó akkor világít teljes fénnyel, ha a körben az izzón a maximálisan megengedett áram folyik. $I = I_i$.

Az izzó teljesítménye: $P_i = U_i \cdot I_i$. Ebből $I_i = \frac{P_i}{U_i} = 5$ A.

Az izzó ellenállása: $R_i = \frac{U_i}{I_i} = 1{,}2\ \Omega$.

Ohm törvényét alkalmazzuk a teljes áramkörre: $I \cdot (R_i + R_e + R_b) = U_e$.

Ebből $R_e = \frac{U_e}{I} - (R_i + R_b) = 1\ \Omega$.

Az R_e teljesítménye teljes fényerőnél: $\underline{\underline{P_e = I^2 \cdot R_e = 25\ \text{W}}}$.

b) Az <u>izzót sorba kell kapcsolni</u> az előtétellenállással, mert az izzóra kisebb feszültség jut, mint az U_e.

$U_i = U_e - U_R - U_B$.

b) <u>Nem gazdaságos</u>, mert az előtétellenállás teljesítménye közel ugyanakkora, mint az izzóé, így közel ugyanannyi energiát vesz fel.

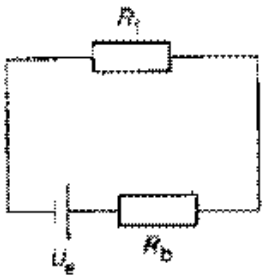
15.48. Az 1,5 Ω belső ellenállású feszültségforrásra előbb 1 m, utána 3 m hosszúságú, egyenletes keresztmetszetű krómnikkel huzalt kapcsolunk. Első esetben 1,8 A, a második esetben pedig $\frac{2}{3}$ A erős áram folyik az áramkörben.

a) Mekkora a vezeték keresztmetszete, ha fajlagos ellenállása $8{,}5 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$?

b) Mekkora a telep elektromotoros ereje?

Megoldás:

15.48. $R_b = 1{,}5\ \Omega$; $l_1 = 1\ \mathrm{m}$; $l_2 = 3\ \mathrm{m}$; $I_1 = 1{,}8\ \mathrm{A}$; $I_2 = \frac{2}{3}\ \mathrm{A}$;



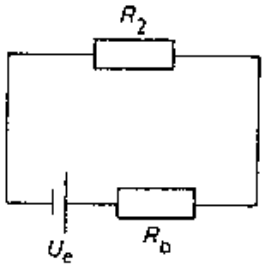
$\varrho = 8{,}5 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

Az R_b és U_e mindkét esetben ugyanaz.

Első eset: Alkalmazzuk Ohm törvényét teljes áramkörre: $I_1 \cdot (R_b + R_1) = U_e$, azaz $I_1 \cdot R_b + I_1 \cdot R_1 = U_e$.

(1) $\qquad 2{,}7\ \mathrm{V} + 1{,}8\ \mathrm{A} \cdot R_1 = U_e.$

Második eset: $R_2 = 3 \cdot R_1$, mert a huzal hossza háromszoros, és a keresztmetszete nem változott. Így Ohm törvénye teljes áramkörre: $I_2 \cdot (R_b + 3 \cdot R_1) = U_e$, azaz $I_2 \cdot R_b + 3 \cdot I_2 \cdot R_1 = U_e$,

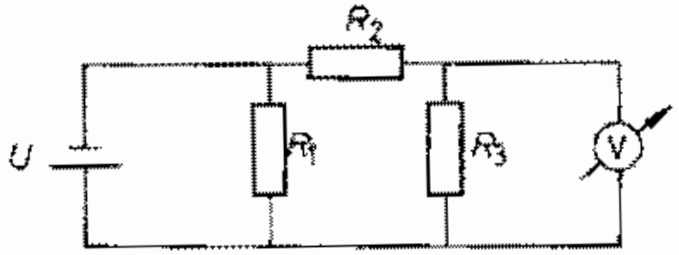


(2) $\qquad 1\ \mathrm{V} + 2\ \mathrm{A} \cdot R_1 = U_e.$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva: $\underline{\underline{U_e = 18\ \mathrm{V}}}$, $R_1 = 8{,}5\ \Omega$. Ez utóbbit felhasználva: $R_1 = \varrho \cdot \frac{l_1}{A}$.

Ebből $\underline{A} = \frac{\varrho \cdot l_1}{R_1} = \underline{\underline{10^{-7}\ \mathrm{m}^2}}$.

15.49. Mekkora feszültséget jelez az ábrán látható igen nagy belső ellenállású voltmérő?
$R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 6\ \Omega$, a telep feszültsége 6 V, belső ellenállása pedig elhanyagolható.



Mekkora az R_3 ellenállás teljesítménye?

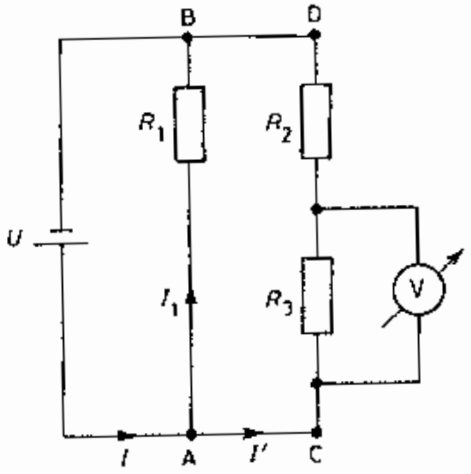
Megoldás:

15.49. $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 6\ \Omega$; $U = 6$ V; $R_b = 0$. Kapcsolási rajz:
A CD ág eredője $R_{2,3} = R_2 + R_3 = 12\ \Omega$. $U_{CD} = U = 6$ V. A CD szakaszra Ohm törvénye $R = \frac{U_{CD}}{I'}$.

Ebből $I' = \frac{U}{R_{2,3}} = \frac{6}{12}$ A $= 0{,}5$ A.

$U_3 = I' \cdot R_3 = 0{,}5\ \text{A} \cdot 6\ \Omega = 3$ V,

$\underline{\underline{P_3 = I' \cdot U_3 = 0{,}5\ \text{A} \cdot 3\ \Omega = 1{,}5\ \text{W}}}$.

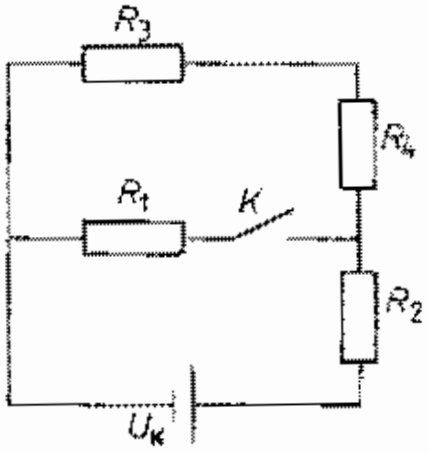


15.50. Négy ellenállást az ábra szerint kapcsolunk a 90 V-os kapocsfeszültségű áramforrásra, amelynek belső ellenállása elhanyagolható.

Mennyivel változik az R_2 ellenállás teljesítménye, ha a nyitott állású kapcsolót zárjuk?

$R_1 = R_2 = 30\ \Omega$,

$R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$.



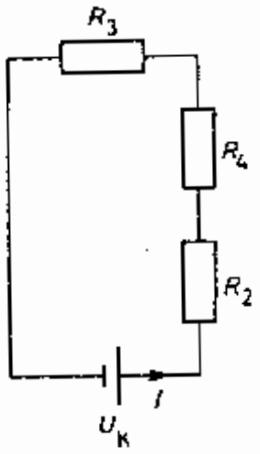
Megoldás:

15.50. $U_k = 90$ V; $R_1 = R_2 = 30\ \Omega$; $R_3 = 20\ \Omega$; $R_4 = 40\ \Omega$.

Nyitott állás esetén, a huroktörvény alapján:

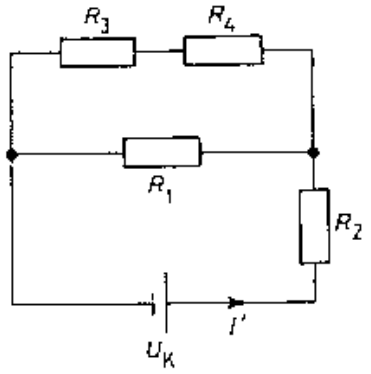
$U_k = I \cdot (R_2 + R_4 + R_3)$.

Ebből $I = 1$ A. Így $P_2 = I^2 \cdot R_2 = 30$ W.



Zárt állás esetén a kör eredő ellenállásának kiszámítása: $R_{3,4} = R_3 + R_4 = 60\ \Omega$. Az R_3, R_4 és R_1 eredője: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{3,4}} + \frac{1}{R_1}$. Ebből $R = 20\ \Omega$.

$R_e = R + R_2 = 30\ \Omega + 20\ \Omega = 50\ \Omega$.



Ohm törvénye az áramkörre: $R_e = \frac{U_k}{I'}$. Ebből $I' = \frac{U_k}{R_e} = 1{,}8\ \text{A}$.

Így $P_2' = I'^2 \cdot R_2 = 97{,}2\ \text{W}$.

A teljesítmény változása: $\underline{\underline{\Delta P = P_2' - P_2 = 67{,}2\ \text{W}}}$.

15.51. Sorba kapcsolunk egy 10 Ω ellenállású, 9 W teljesítményre tervezett és 20 kΩ ellenállású, 8 W teljesítményre tervezett fogyasztót.
Mekkora feszültség kapcsolható a rendszerre, hogy egyik fogyasztó se legyen túlterhelve?

Megoldás:

15.51. $R_1 = 10\ \Omega$; $P_1 = 9\ \text{W}$; $R_2 = 20\,000\ \Omega$; $P_2 = 8\ \text{W}$.
Ha a fogyasztókat sorosan kapcsoljuk, mindkettőn ugyanakkora áram folyik. Ez a fogyasztókra megengedett maximális áramok közül a kisebbiket nem haladhatja meg, mert ellenkező esetben a kisebb áramú fogyasztó tönkremegy. A megengedett áramok a $P = I^2 \cdot R$ összefüggésből: $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$.
Így $I_1 = 0{,}95\ \text{A}$, illetve $I_2 = 0{,}02\ \text{A}$. Tehát $I = 0{,}02\ \text{A}$.
Az ellenállások soros kapcsolása miatt a kapocsfeszültség az U_1 és U_2 összege: $\underline{\underline{U_k}} = U_1 + U_2 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = \underline{\underline{400{,}2\ \text{V}}}$.

15.52. Párhuzamosan kapcsolunk egy 225 Ω ellenállású, 100 W névleges teljesítményű és egy 160 Ω ellenállású, 90 W névleges teljesítményű fogyasztót.

a) Mekkora feszültséget kapcsolhatunk a rendszerre?

b) Mennyi hőt ad át környezetének a két fogyasztó 1 órai üzemeltetés alatt?

Megoldás:

15.52. $R_1 = 225\ \Omega$; $P_1 = 100\ \text{W}$; $R_2 = 160\ \Omega$; $P_2 = 90\ \text{W}$; $t = 3600\ \text{s}$.

a) Ha a fogyasztókat párhuzamosan kapcsoljuk, akkor feszültségeik egyenlők. Ez a két megengedett maximális feszültség közül a kisebbik lehet. A megengedett feszültségek a $P = \frac{U^2}{R}$ összefüggésből: $U = \sqrt{P \cdot R}$. Így $U_1 = 150\ \text{V}$, illetve $U_2 = 120\ \text{V}$.
Tehát a rendszerre kapcsolható feszültség $\underline{\underline{U = 120\ \text{V}}}$.

b) Ha mindkét fogyasztóra 120 V-ot kapcsolunk, akkor a fogyasztók tényleges teljesítménye $P_1' = \frac{U_k^2}{R_1} = 64\ \text{W}$, illetve $P_2' = \frac{U_k^2}{R_2} = 90\ \text{W}$.
A tényleges teljesítmények összeadódnak. Így $P_ö = P_1' + P_2' = 154\ \text{W}$.
Az elektromos munka: $W = P_ö \cdot t = 554\,400\ \text{J}$.
A környezetnek átadható hő is maximálisan ennyi lehet. $\underline{\underline{Q}} = W = 554{,}4\ \text{kJ}$.

15.53. Egy elektromos vízmelegítő fűtőszálának teljesítménye 1000 W.
Mennyi idő alatt melegíti fel az 5 kg tömegű, 20 °C hőmérsékletű vizet 80 °C-ra, ha a melegítés hatásfoka:

a) 100%-os,
b) 90%-os?

Megoldás:

15.53. $P = 1000$ W; $m = 5$ kg; $T_1 = 293$ K; $T_2 = 353$ K; $c_v = 4300 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) $\eta = 1$. Ekkor az elektromos munka teljes egészében a víz melegítésére fordítódik: $W_e = Q_m$, azaz $P \cdot t = c_v \cdot m \cdot \Delta T$. Ebből

$$\underline{\underline{t}} = \frac{c_v \cdot m \cdot \Delta T}{P} = \underline{\underline{1260 \text{ s}}}.$$

b) $\eta = 0{,}9$. Ekkor az elektromos munkának csak a 90%-a alakul hővé: $0{,}9 \cdot W_e = Q$. Az előzőek alapján $\underline{\underline{t}} = \frac{c_v \cdot m \cdot \Delta T}{0{,}9 \cdot P} = \underline{\underline{1400 \text{ s}}}$.

15.54. Egy 4,4 V elektromotoros erejű telephez 10 Ω ellenállású fogyasztót kapcsolunk. Az áramkörben 0,4 A az áramerősség.

a) Mekkora a telep belső ellenállása?

b) Ábrázoljuk az áram erősségét a külső ellenállás függvényében, ha azt 10 Ω-tól 100 Ω-ig változtatjuk!

Megoldás:

14.54. $U_e = 4{,}4$ V; $R_k = 10\ \Omega$; $I = 0{,}4$ A.

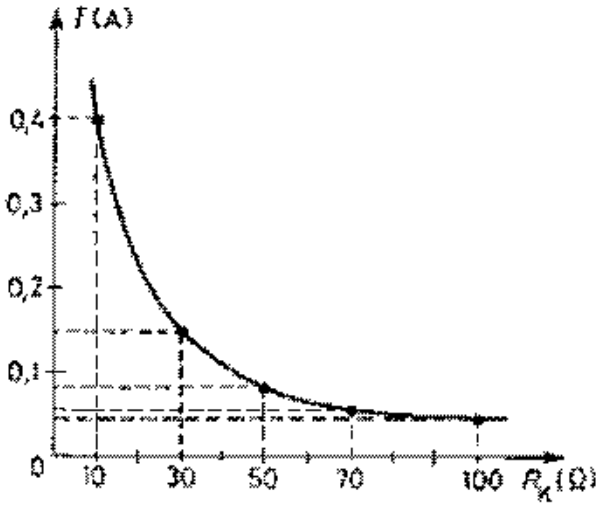
a) Ohm törvényét alkalmazhatjuk teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$.

Innen $\underline{\underline{R_b}} = \frac{U_e}{I} - R_k = \underline{\underline{1\ \Omega}}$.

b) $I(R_k)$ függvényt ábrázoljuk, ha R_k 10 Ω-tól 100 Ω-ig változhat. Fejezzük ki az előző összefüggésből I-t! $I = \frac{U_e}{R_k + R_b} = \frac{4{,}4\ \text{V}}{R_k + 1\ \Omega}$.

Ezt ábrázolva:

R (Ω)	10	30	50	70	100
I (A)	0,4	0,142	0,086	0,062	0,044



15.55. Egy 0,5 mm² keresztmetszetű, 2 m hosszúságú krómnikkel vezetéken 3 A erősségű áram folyik 1,5 órán át.
Mennyi hőt ad le ennyi idő alatt a vezető a környezetének?

Megoldás:

15.55. $A = 5 \cdot 10^{-7}$ m²; $l = 2$ m; $I = 3$ A; $t = 5400$ s; $\varrho_{KN} = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ωm.

A vezető ellenállása: $R = \varrho \cdot \frac{l}{A} = 3{,}4\ \Omega$.

Az elektromos teljesítmény: $P = R \cdot I^2 = 30{,}6$ W.

Az elektromos munka egyenlő a leadott hővel: $Q = W = P \cdot t = 165\,240$ J.

15.56. Mekkora a hossza annak a 2,5 mm² keresztmetszetű, nikkelből készült vezetőnek, melyben 68 V feszültség mellett 0,2 A-es áram folyik?
Mennyi hőt ad át a környezetének a huzal 0,5 óra alatt?

Megoldás:

15.56. $A = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ m²; $U = 68$ V; $I = 0{,}2$ A; $t = 1800$ s; $\varrho_N = 1{,}36 \cdot 10^{-7}$ Ωm.

Ohm törvénye alapján $R = \frac{U}{I} = 340\ \Omega$.

Az ellenállás a vezető adataival $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$. Ebből $\underline{\underline{l}} = \frac{R \cdot A}{\varrho} = \underline{\underline{6250\ \text{m}}}$.

A leadott hő: $\underline{\underline{Q}} = W_e = U \cdot I \cdot t = \underline{\underline{24\,480\ \text{J}}}$.

15.57. Egy izzólámpa teljesítménye 100 W, ha a rákapcsolt feszültség 22 V.
Mekkora az áram erőssége az izzólámpában?

Megoldás:

15.57. $P = 100$ W; $U = 22$ V.
A tényleges teljesítmény $P = U \cdot I$. Ebből $I = 4{,}55$ A.

15.58. Egy 10 Ω-os ellenállásra 100 V feszültséget kapcsolunk.

a) Mennyi hő fejlődik 10 s alatt?

b) Hány °C-ra melegítene fel ez a hőmennyiség 0,1 kg tömegű és 20 °C hőmérsékletű vizet, ha a veszteségektől eltekintünk?

Megoldás:

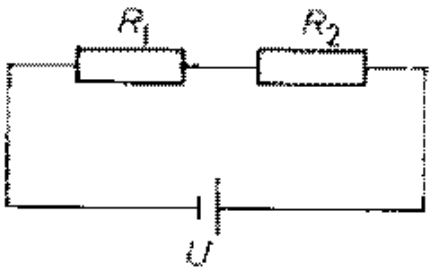
15.58. $R = 10\ \Omega$; $U = 100$ V; $t = 10$ s; $m = 0{,}1$ kg; $T_1 = 293$ K; $c_v = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

a) $\underline{\underline{Q}} = W_e = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = \underline{\underline{10\,000\ \text{J}}}$.

Az elektromos munka teljes mértékben hővé alakul.

b) A hő a víz melegítésére fordítódik: $Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T$. Ebből $\Delta T = \frac{Q}{c_v \cdot m} = 23{,}8$ K. Tehát $\underline{\underline{T_2}} = T_1 + \Delta T = \underline{\underline{316{,}8\ \text{K}}}$.

15.59. Az alábbi ábrán látható kapcsolásban $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $U = 100$ V. Mekkora az eredő ellenállás, a körben folyó áram erőssége és az R_1 ellenállás végpontjai közötti feszültség?



Megoldás:

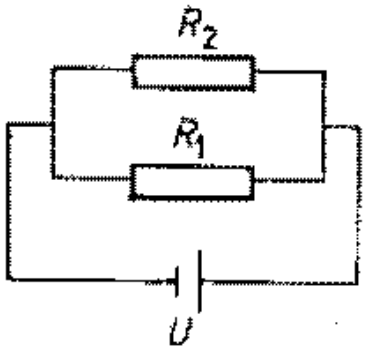
15.59. $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 30\ \Omega$; $U = 100$ V.

Soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás: $R_e = R_1 + R_2 = 40\ \Omega$.

Ohm törvénye alapján a kör árama $I = \dfrac{U}{R_e} = \underline{\underline{2{,}5\ \text{A}}}$.

Az R_1 ellenálláson a feszültség: $U_1 = I \cdot R_1 = \underline{\underline{25\ \text{V}}}$.

15.60. Az ábrán látható kapcsolásban $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $U = 75$ V. Mekkora az eredő ellenállás, a főágban folyó áram erőssége és az R_1 ellenálláson átfolyó áram erőssége?



Megoldás:

15.60. $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 30\ \Omega$; $U = 75$ V.

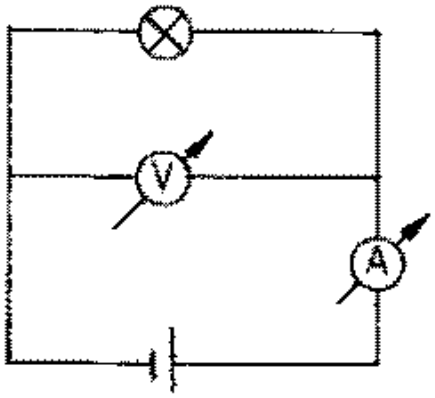
Az eredő ellenállás párhuzamos kapcsolás esetén: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $\underline{\underline{R_e = 7{,}5\ \Omega}}$.

A főágban folyó áram Ohm törvénye szerint: $\underline{\underline{I = \frac{U}{R_e} = 10\ \text{A}}}$.

Az R_1-en a feszültség a kapocsfeszültséggel egyenlő: $U_1 = U = 75$ V.

Ezért $\underline{\underline{I_1 = \frac{U}{R_1} = 7{,}5\ \text{A}}}$.

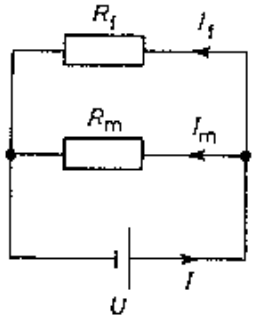
15.61. Az ábra szerinti kapcsolásban a voltmérő műszer 220 V feszültséget, az ampermérő 0,2 A áramerősséget mutat. A voltmérő belső ellenállása 25 000 Ω, az ampermérőé elhanyagolható. Mekkora az izzólámpa teljesítménye?



Megoldás:

15.61. $U = 220$ V; $I = 0{,}2$ A; $R_m = 25\,000\ \Omega$.

A voltmérő belső ellenállását figyelembe véve, a mellékelt kapcsolási rajz szerint, a feszültségekre: $U = U_m = U_f = 220$ V.



A műszeren átfolyó áram $I_m = \dfrac{U}{R_m} = 0{,}0088$ A.

A csomóponti törvény alapján: $I = I_f + I_m$.

Ebből a fogyasztón átfolyó áram: $I_f = I - I_m = 0{,}1912$ A.

A fogyasztó teljesítménye: $\underline{\underline{P_f = I_f \cdot U = 42{,}02\ \text{W}}}$.

15.62. 220 V feszültségre sorosan kapcsolunk egy 110 V, 40 W-os és egy 110 V 60 W-os izzót.
Mi történik? Miért?

Megoldás:

15.62. $U = 220$ V; $P_1 = 40$ W, ha $U_1 = 100$ V; $P_2 = 60$ W, ha $U_2 = 110$ V.

Soros kapcsolás esetén mindkét izzón ugyanakkora áram folyhat. A tényleges áram a körben: $I = \frac{U}{R_e}$.

Az izzók ellenállásai: $R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} = 302{,}5\ \Omega$, illetve $R_2 = \frac{U_2^2}{P_2} = 201{,}7\ \Omega$.

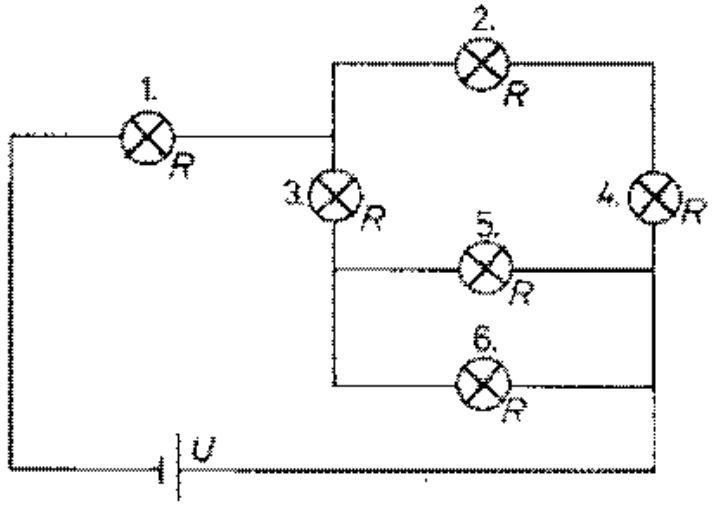
Így $R_e = R_1 + R_2 = 504{,}2\ \Omega$. Tehát $I = \frac{U}{R_e} = 0{,}44$ A.

Ezek alapján a bekapcsoláskor a tényleges feszültségek:

Az első izzóra: $U_1' = I \cdot R_1 = 133{,}1$ V. Ez az izzó nagyobb feszültséget kap a megengedettnél, így kiég.

A másik izzóra: $U_2' = I \cdot R_2 = 88{,}7$ V. Ez a feszültség a megengedettnél kisebb.

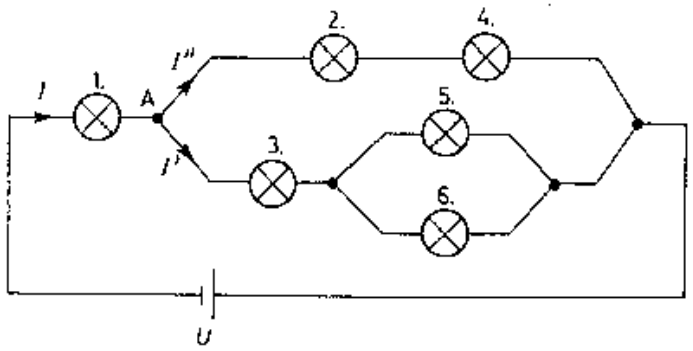
15.63. Az ábrán hat, egyenlő ellenállású izzóból és egy telepből álló kapcsolást láthatunk.



Melyik izzón folyik a legnagyobb és melyiken a legkisebb áram, ha az összekötő vezetékek ellenállása elhanyagolható?

Megoldás:

15.63. Az ábra jelöléseivel: az $I_2 = I_4$ a legkisebb és I_1 a legnagyobb. Indokolás: Mindegyik izzó ellenállása R.



Az 5. és a 6. izzó eredő ellenállása:

$$\frac{1}{R_{5,6}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}.$$

Ebből $R_{5,6} = \frac{R}{2}$.

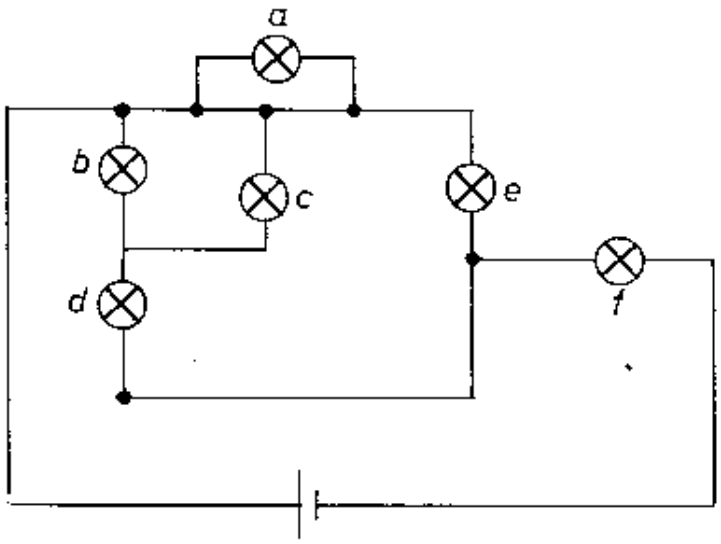
A 3., 5., 6. izzók eredő ellenállása: $R_{3,5,6} = R_{5,6} + R_3 = 1{,}5R$.

A 2. és 4. izzók eredő ellenállása: $R_{2,4} = 2R$.

Tehát ez utóbbi ágban kisebb áram folyik, mint a másikban, hiszen párhuzamos kapcsolásnál az áram az ellenállásokkal fordított arányban oszlik meg: $I'' < I'$.

Az A csomópontban $I = I' + I''$, így az I a legnagyobb. A fentiek alapján a 2. és 4. izzókon folyik a legkisebb és az 1. jelzésűn a legnagyobb áram.

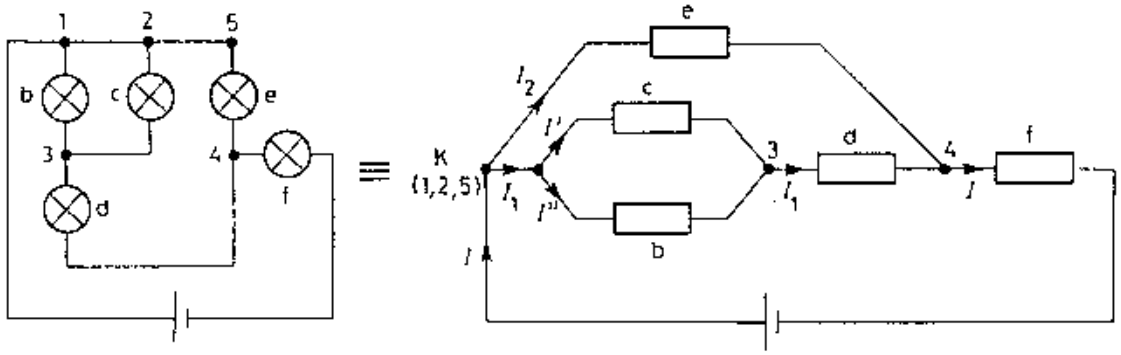
15.64. Állapítsuk meg, hogy az alábbi kapcsolásban az egyformán méretezett izzólámpák fényerősségének milyen a sorrendje!



Megoldás:

15.64. A világítás erősségének sorrendje: f, e, d, c, b, a. (c és b egyformán világít.) Az egyenlő méretezés egyenlő ellenállásokat és egyenlő névleges teljesítményeket jelent. Így a fényerősség sorrendjét a tényleges teljesítmények sorrendje határozza meg. A $P = I^2 \cdot R$ alapján ez a sorrend pedig az áramerősségektől függ, mivel R minden izzónál ugyanaz.

Az a izzó rövidre van zárva, rajta nem folyik áram. Legyen minden izzó ellenállása R. A helyettesítő kapcsolás:



Az 1., 2. és 5. pontok azonos potenciálúak, így egy pontba vehetjük fel őket (K).

A c és b párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője. $\frac{1}{R_{c,b}} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_b}$.

Ebből $R_{b,c} = \frac{R}{2} = 0{,}5R$.

A c, b, d ellenállások eredője: $R_{c,b,d,} = R + \frac{R}{2} = 1{,}5 \cdot R$.

Az I_2 és I_1 áramok értékei az R_e, illetve az $R_{c,b,d}$ ellenállások értékeivel fordítottan arányosak. $I_2 : I_1 = 1{,}5 \cdot R : R = 1{,}5$. Tehát $I_2 = 1{,}5I_1$.

A K pontban a csomóponti törvény alapján: $I = I_1 + I_2 = I_1 + 1{,}5 \cdot I_1 = 2{,}5 \cdot I_1$.

Mivel a c és b ellenállások egyenlőek, így a rajtuk átfolyó áramok is azok (I').

Így a 3.-ban: $I_1 = 2 \cdot I'$. Ebből $I' = \frac{I_1}{2}$. Az áramok mindegyikét I_1-gyel fejeztük ki. Tehát az áramok sorrendje $I > I_2 > I_1 > I'$.

Ennek megfelelően a világítás erősségének sorrendje: f, e, d, c, b, a.

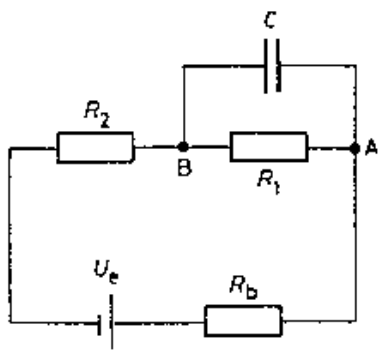
15.65. Mekkora az áramerősség abban az áramkörben, amelyben a 4,5 V üresjárati feszültségű, 0,5 Ω belső ellenállású feszültségforrásra egy 6 Ω-os és egy 16 Ω-os ellenállást kapcsolunk sorosan?

Mennyi töltés fog felhalmozódni a 6 Ω-os ellenállással párhuzamosan kapcsolt 5 μF-os kondenzátoron?

Megoldás:

15.65. $U_e = 4{,}5$ V; $R_b = 0{,}5\ \Omega$; $R_1 = 6\ \Omega$; $R_2 = 16\ \Omega$; $C = 5 \cdot 10^{-6}$ F.

A kapcsolási rajz alapján:



A kondenzátor ágán csak a feltöltésig folyik áram. A kondenzátor az R_1 ellenállással párhuzamosan van kapcsolva, így feszültségeik egyenlők: $U_C = U_1$.

Ohm törvényét alkalmazzuk teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$, azaz $R_1 + R_2 + R_b = \frac{U_e}{I}$.

Ebből $\underline{I} = \frac{U_e}{R_1 + R_2 + R_b} = \underline{\underline{0{,}2\ \text{A}}}$.

Tehát $U_1 = R_1 \cdot I = 1{,}2$ V.

Az $U_C = U_1 = 1{,}2$ V és $C = \frac{Q}{U_C}$ egyenlőségekből $\underline{\underline{Q}} = C \cdot U_C = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}}$.

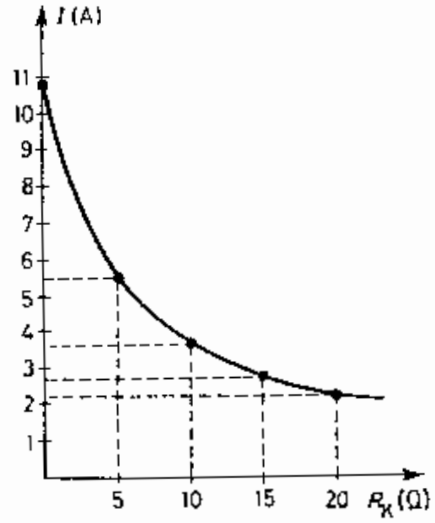
15.66. Egy kísérletben a feszültségforrás 54 V elektromotoros erejű és 5 Ω-os belső ellenállású. A telepet sorba kötjük egy 0-tól 20 Ω-ig változtatható tolóellenállással.
Ábrázoljuk az áramerősséget a külső ellenállás függvényében!

Megoldás:

15.66. $U_e = 54$ V; $R_b = 5\ \Omega$; $R_k = 0\ \Omega - 20\ \Omega$.

Alkalmazzuk Ohm törvényét teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$. Ebből

$$I = \frac{U_e}{R_b + R_k} = \frac{54\text{ V}}{5\ \Omega + R_k}.$$



R (Ω)	0	5	10	15	20
I (A)	10,8	5,4	3,6	2,7	2,16

15.67. Sorba kapcsolunk 220 V feszültségre 220 V 500 W-os és 220 V 1000 W-os merülőforralót. Két edényben, azonos mennyiségű vizet melegítünk velük.
Melyik edényben emelkedik gyorsabban a víz hőmérséklete?
(A veszteségektől tekintsünk el!)

Megoldás:

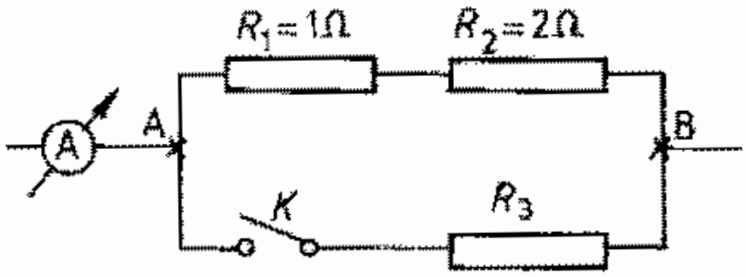
15.67. $P_1 = 500$ W, ha $U_1 = 220$ V; $P_2 = 1000$ W, ha $U_2 = 220$ V.
A soros kapcsolás miatt ugyanakkora áram mehet át rajtuk. A merülőforralók ellenállása a $P = \frac{U^2}{R}$ összefüggésből: $R = \frac{U^2}{P}$.
Így $R_1 = 96{,}8\ \Omega$, $R_2 = 48{,}4\ \Omega$.

A körben folyó áram: $I = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 1{,}52$ A.
A tényleges teljesítmények:

$$P_1' = I^2 \cdot R_1 = 223{,}6\ \text{W}, \qquad P_2 = I^2 \cdot R_2 = 111{,}8\ \text{W}.$$

Látható, hogy $P_1' > P_2'$.
Az 500 W teljesítményű melegíti fel hamarabb a vizet.

15.68. Az ábrán látható kapcsolásban a K kapcsoló nyitott állásakor az ampermérő 1,5 A erősségű áramot jelez. A K kapcsolót zárva, az áramerősség másfélszeresére nő, ha az A és B pontok közötti feszültség változatlan.



a) Mekkora az A és B pontok között a feszültség?
b) Mekkora az R_3 ellenállás?

Megoldás:

15.68. $R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $I = 1{,}5$ A; $I' = 2{,}25$ A.

a) Nyitott esetben: $R_e = R_1 + R_2 = 3\ \Omega$, illetve $\underline{\underline{U_{AB}}} = I \cdot R_e = \underline{\underline{4{,}5\ \text{V}}}$.

b) Zárt esetben: $U_{AB} = 4{,}5$ V, $I_2 = 2{,}25$ A.
Mivel U_{AB} változatlan, és változatlan R_1 és R_2 is, így $I_1 = 1{,}5$ A.
A csomóponti törvény szerint: $I' = I_1 + I_3$. Ebből: $I_3 = I' - I_1 = 0{,}75$ A.
Tehát $\underline{\underline{R_3}} = \dfrac{U_{AB}}{I_3} = \underline{\underline{6\ \Omega}}$.

15.69. Mekkora ellenállást kapunk, ha az „*l*" hosszúságú, *R* ellenállású vezetőt „*n*" egyenlő részre vágjuk, és a részeket párhuzamosan kapcsoljuk?
(A vezető anyaga homogén, keresztmetszete egyenletes.)

Megoldás:

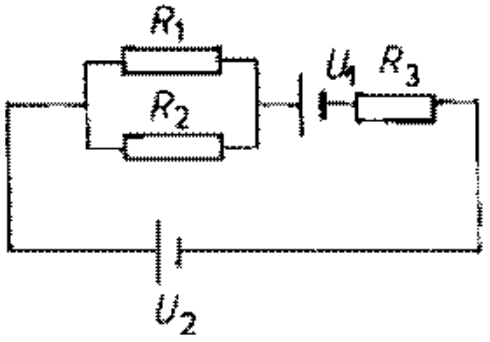
15.69. A feldarabolás után egy ellenállás értéke: $R' = \frac{R}{n}$. Ezekből n darabot párhuzamosan kapcsolva, az eredő ellenállás: $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R'} + \ldots + \frac{1}{R'} = n \cdot \frac{1}{R'} = n \cdot \frac{n}{R} = \frac{n^2}{R}$. Ebből $\underline{\underline{R_e = \frac{R}{n^2}}}$.

15.70. Az alábbi kapcsolásban $U_1 = -20$ V, $U_2 = 40$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$. A telepek belső ellenállása elhanyagolható.

a) Mekkora az eredő ellenállás?

b) Mekkora az R_1-en átfolyó áram erőssége?

c) Mennyi az R_3 végpontjai közötti feszültség?



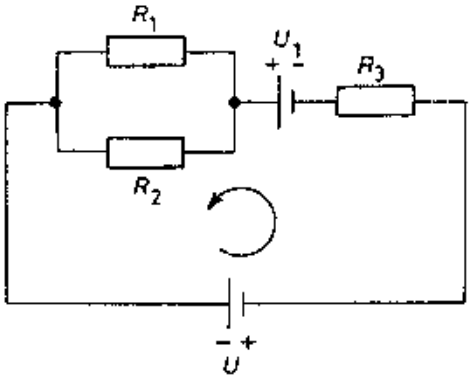
Megoldás:

15.70. $U_1 = -20$ V; $U_2 = 40$ V; $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 20\ \Omega$.

A kapcsolásban a két telep ellentétes irányú áramot hozna létre, ezért a telepek feszültségei közül az egyik negatív kell legyen.

Kirchhoff második (hurok) törvénye szerint: $\sum U_e + \sum I \cdot R = 0$.

Ha egy tetszőlegesen felvett körüljárási irányt tekintünk az áram irányának, akkor az $I \cdot R$ szorzatok (az ellenállások



feszültségei) előjele és az U üresjárási feszültségek előjele pozitív, ha a körüljárási irányt követve a potenciál csökken, negatív, ha növekszik. Ha a körüljárási irány ellentétes a ténylegesen kialakult technikai áramiránnyal (a pozitív töltés mozgásiránya), akkor az I-re negatív előjel adódik a számítások során. (Mint majd látjuk példánkban is.)
A feladatban U_2 pozitív és U_1 negatív, ha a körüljárási irány az óramutató járásával ellentétes.

a) Az eredő ellenállás kiszámítása függ a feszültségforrások helyétől. Példánkban a két telep helyettesíthető egy teleppel úgy, hogy közben a feszültség és áramviszonyok a körben változatlanok maradnak. Így az eredő kiszámítása a szokásos módon történhet:

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = R_{1,2} = 5\ \Omega, \qquad \underline{\underline{R_e}} = R_{1,2} + R_3 = \underline{\underline{25\ \Omega}}.$$

b) A huroktörvényt alkalmazva a berajzolt körüljárási irány szerint: $U_2 + I \cdot R_3 - U_1 + I \cdot R_{1,2} = 0$, azaz $40\ \text{V} + 20\ \Omega \cdot I - 20\ \text{V} + 5\ \Omega \cdot I = 0$. Ebből $I = -0{,}8$ A. A negatív előjel csak az áram irányára utal. Mivel $R_1 = R_2$, ezért $I_1 = I_2$. A csomóponti törvény szerint: $I_1 + I_2 = I$, azaz $2 \cdot I_1 = I$. Tehát $\underline{\underline{I_1}} = \frac{I}{2} = \underline{\underline{0{,}4\ \text{A}}}$.

c) $\underline{\underline{U_3}} = I \cdot R_3 = \underline{\underline{16\ \text{V}}}$.

15.71. Egy telep belső ellenállása R_b, elektromotoros ereje U_e. Hány darab $R_0 = \frac{R_b}{10}$ értékű ellenállást kell sorba kötve a telepre kapcsolni, ha azt akarjuk, hogy egy-egy ellenállás végei között a feszültség $U_0 = \frac{U_e}{20}$ legyen?

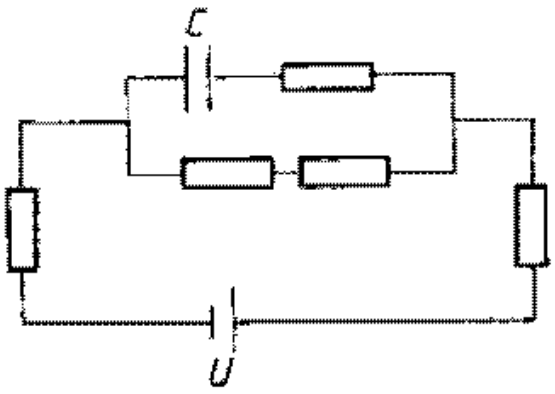
Megoldás:

15.71. U_0; R_b; $R_0 = \frac{R_b}{10}$; $U_0 = \frac{U_e}{20}$.

Jelöljük az ellenállások számát n-nel, és alkalmazzuk Ohm törvényét teljes áramkörre: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$.

Ebből $I = \frac{U_e}{R_k + R_b}$, ahol $R_k = m \cdot R_0 = \frac{n \cdot R_b}{10}$. Ekkor egy R_0 ellenálláson a feszültség: $U_0 = I \cdot R_0$, azaz $\frac{U_e}{20} = \frac{U_e}{R_k + R_b} \cdot \frac{R_b}{10}$. Ebből $R_k = R_b$, azaz $\frac{n \cdot R_b}{10} = R_b$. Innen $\underline{\underline{n = 10 \text{ db}}}$.

15.72. Mekkora az elhanyagolható belső ellenállású feszültségforrás feszültségének értéke, ha az ábra szerinti kapcsolásban a 10 μF-os kondenzátoron $8 \cdot 10^{-5}$ C töltés halmozódik fel?
Az ellenállások értéke egyenként 10 Ω.

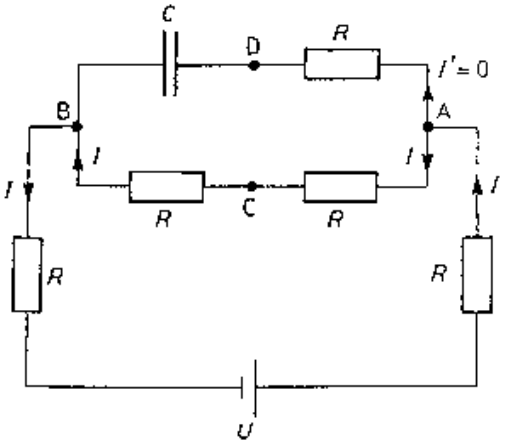


Megoldás:

15.72. $C = 10^{-5}$ F; $Q = 8 \cdot 10^{-5}$ C; $R = 10\ \Omega$.

A kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram, így a kör négy sorosan kapcsolt ellenállásból áll. Ezek eredője: $R_e = 4 \cdot R = 40\ \Omega$.

A kondenzátor feszültsége: $U_C = U_{AB}$, mert A és D között nem folyik áram.

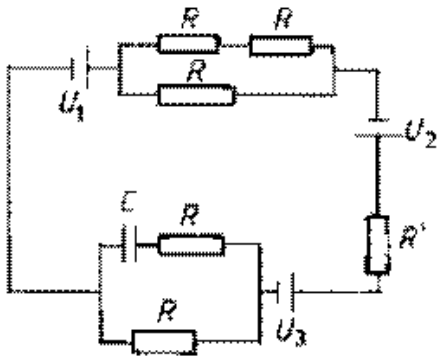


Másrészt, $U_C = \dfrac{Q}{C} = 8$ V.

Ohm törvénye az AOB szakaszra: $R + R = \dfrac{U_{AB}}{I}$.

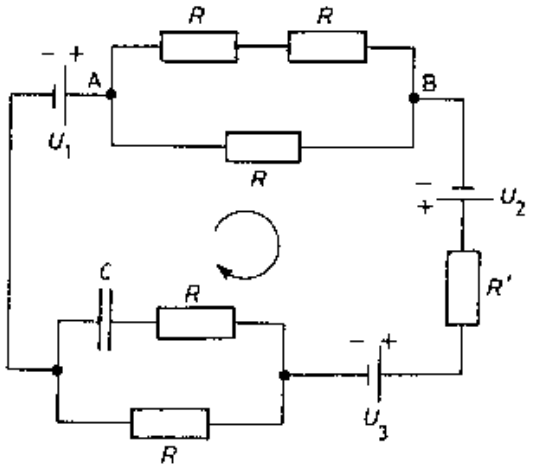
Ebből $I = \dfrac{U_{AB}}{2 \cdot R} = 0{,}4$ A. Ez egyúttal a kör árama is. Így az egész körre $R_e = \dfrac{U}{I}$. Ebből $\underline{\underline{U}} = I \cdot R_e = \underline{\underline{16\ \text{V}}}$.

15.73. Mekkora áram folyik az R' ellenálláson az ábra szerinti kapcsolásban?
($U_1 = 10$ V, $U_2 = 30$ V, $U_3 = 10$ V, a kondenzátor kapacitása $C = 10\ \mu$F, $R = 2\ \Omega$, $R' = 10\ \Omega$, a telepek belső ellenállását elhanyagoljuk!)



Megoldás:

15.73. $U_1 = 10$ V; $U_2 = 30$ V; $U_3 = 10$ V; $C = 10^{-5}$ F; $R = 2\ \Omega$; $R' = 10\ \Omega$.



A kondenzátort tartalmazó ágon nem folyik áram. A 15.70. feladatban leírtak szerint a huroktörvényt alkalmazzuk a felvett körüljárási irány szerint:

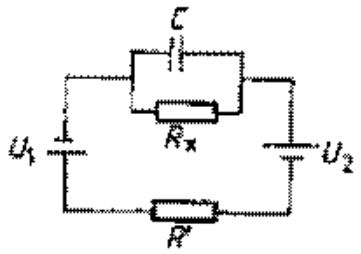
$$-U_1 + I \cdot R_e - U_2 + I \cdot R' + U_3 + I \cdot R = 0,$$

ahol R_e az AB szakasz eredő ellenállása. $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$. Ebből $R_e = \frac{4}{3}\ \Omega$.

A huroktörvényből I-t kifejezve: $\underline{\underline{I}} = \frac{U_1 + U_2 - U_3}{R_e + R' + R} = \underline{\underline{2{,}25\ \text{A}}}$.

15.74. Mekkorának válasszuk az R_x értékét, hogy az ábrán látható kapcsolásban a kondenzátor töltése $5 \cdot 10^{-5}$ C legyen?

($C = 10$ μF, $R' = 7\ \Omega$, $U_1 = 10$ V, $U_2 = 30$ V.)



Megoldás:

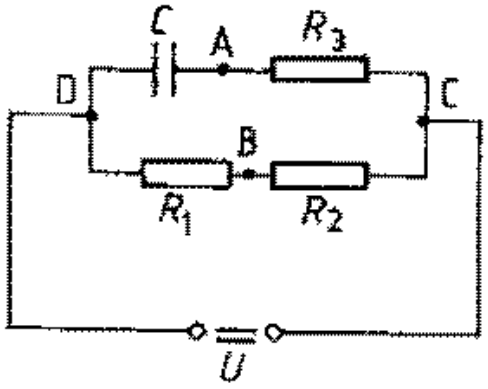
15.74. $C = 10^{-5}$ F; $R' = 7\ \Omega$; $U_1 = 10$ V; $U_2 = 30$ V; $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ C.
A kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram, de a kondenzátor az R_x-en eső feszültséggel azonos feszültségre töltődik fel: $U_x = U_C = \frac{Q}{C} = 5$ V.

A 15.70. feladatban leírtak alapján a huroktörvényt alkalmazzuk:
$-U_1 + U_x - U_2 + I \cdot R' = 0$.

Ebből $I = \frac{U_2 + U_1 - U_x}{R'} = 5$ A. Ohm törvénye szerint $\underline{\underline{R_x}} = \frac{U_x}{I} = \underline{\underline{1\ \Omega}}$.

15.75. Mekkora a feszültség az alábbi ábrán jelzett A és B pontok között?

($R_3 = 10\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $U = 60$ V.)



Megoldás:

15.75. $R_3 = 10\ \Omega$; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $U = 60$ V.

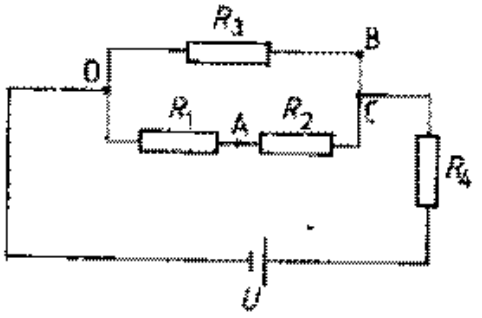
A kondenzátort tartalmazó ágon nem folyik áram, így az A és C pontok azonos potenciálúak. Ezért $U_{CA} = 0$. Így $U_{AB} = U_{CB}$.

Áram csak az R_1 és R_2 ellenállásokon folyik. Ezek eredője: $R_e = R_1 + R_2 = 30\ \Omega$.

A rajtuk átfolyó áram $I = \dfrac{U}{R_e} = 2$ A. Tehát $U_{AB} = U_{CB} = I \cdot R_2 = \underline{40\ \text{V}}$.

15.76. Mennyi a feszültség az ábrán jelzett kapcsolásban az A és a B pontok között?

($R_3 = 10\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $U = 144$ V.)



Megoldás:

15.76. $R_3 = 10\ \Omega$; $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$; $R_4 = 40\ \Omega$; $U = 144$ V.

Mivel a B és C pontok azonos potenciálúak, $U_{BA} = U_{CA} = U_2$.

Az eredő ellenállás kiszámítása: $R_{1,2} = R_1 + R_2 = 40\ \Omega$.

$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_3}$. Ebből $R_{1,2,3} = 8\ \Omega$.

$R_e = R_{1,2,3} + R_4 = 48\ \Omega$.

A főágban folyó áram: $I = \frac{U}{R_e} = 3$ A.

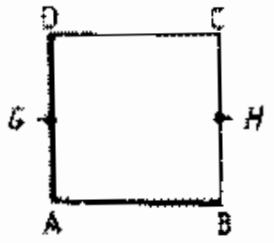
A $BDAC$ körre a huroktörvény (az áram a CBD, illetve a CAD irányban folyik, és ezek jele I_3, illetve I'): $R_3 \cdot I_3 - R_1 \cdot I' - R_2 \cdot I' = 0$.

A csomóponti törvény szerint $I_3 + I' = I$.

E két egyenletből adódik: $I' = 0{,}6$ V.

Tehát $U_{BA} = U_{CA} = U_2 = I' \cdot R_2 = 12$ V. Így $\underline{U_{AB} = -12\ \text{V}}$.

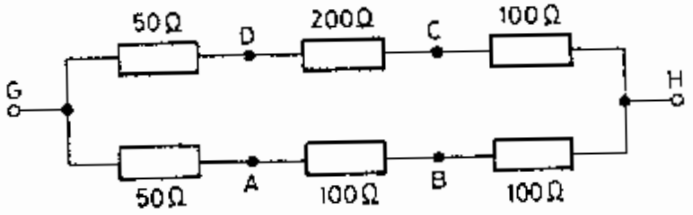
15.77. Az ábrán látható, négyzet alakúra hajlított huzalt a G és H oldalfelező pontokban kapcsoljuk a feszültségforrásra. Egy-egy oldal egyenletes keresztmetszetű. Az AB, AD oldalak ellenállása 100–100 Ω és a CD, CB oldalaké 200–200 Ω. Mekkora az eredő ellenállás?



Megoldás:

15.77. $R_{AD} = R_{AB} = 100\ \Omega$; $R_{CD} = R_{CB} = 200\ \Omega$.

A helyettesítő kapcsolás:



A felső ág eredője:

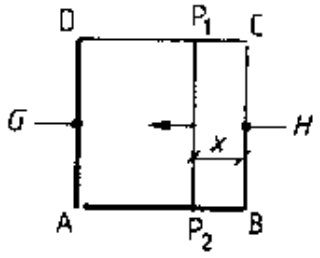
$R_1 = 350\ \Omega$.

Az alsó ág eredője:

$R_2 = 250\ \Omega$.

Így $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Ebből $\underline{\underline{R_e = 145{,}8\ \Omega}}$.

15.78. Egy elhanyagolható ellenállású P_1P_2-vel jelölt csúszka az ábrán látható módon mozoghat.

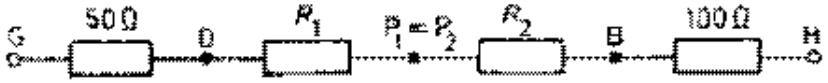


Határozzuk meg a G és a H oldalfelező pontok közötti ellenállás értékét a távolság függvényében, ha az ABCD négyzet oldalai egyenletes keresztmetszetűek, hosszúságuk 10 cm, az AB és az AD oldalak ellenállása 100–100 Ω, a CD és a CB oldalak ellenállása 200–200 Ω, a C és az A csúcsokban az oldalak nem érintkeznek!

Megoldás:

15.78. $R_{AB} = R_{AD} = 100\ \Omega$; $R_{CD} = R_{CB} = 200\ \Omega$; $a = 0{,}1$ m.

A helyettesítő kapcsolás:



Arányos osztással az R_1 és R_2 ellenállások:

$$R_1 = (0{,}1 - x) \cdot \frac{200\ \Omega}{0{,}1} = 200\ \Omega - 2000\ \Omega \cdot x.$$

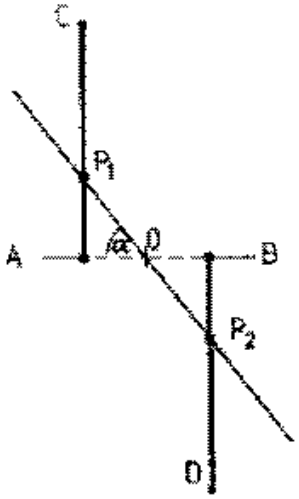
$$R_2 = x \cdot \frac{100\ \Omega}{0{,}1} = 1000\ \Omega \cdot x.$$

Az eredő ellenállás a GH szakaszra:

$$R_{GH} = 50\ \Omega + (200 - 2000x)\ \Omega + 1000\ \Omega \cdot x + 100\ \Omega =$$

$$= \underline{\underline{350\ \Omega - 1000\ \Omega \cdot x}}.$$

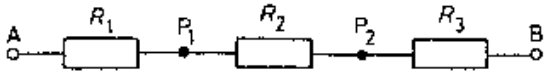
15.79. Az ábrán látható P_1P_2 csúszka a 0 pont körül foroghat, a 0 pont az AB szakasz felezőpontjában van. A csúszka teljes hossza 20 cm, ellenállása 100 Ω. Az AC és BD huzalok hossza 5–5 cm, ellenállásuk 50–50 Ω. Az AB távolság 2 cm, az α szög értéke 45°. Az A és B pontokra 20 V feszültséget kapcsolunk.
Mekkora a kialakult áramerősség?



Megoldás:

15.79. $l = 20$ cm; $R_{cs} = 100\ \Omega$; $R_{AC} = R_{BC} = 50\ \Omega$; $AC = BD = 5$ cm; $AB = 2$ cm; $U = 20$ V; $\alpha = 45°$.

A helyettesítő kapcsolás:
A huzalok ellenállása hosszukkal arányos.



Mivel $\alpha = 45°$, ezért $\overrightarrow{P_1A} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{P_2B} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2} = 1$ cm, illetve $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Ennek alapján $R_1 = R_3 = l \cdot \dfrac{50\ \Omega}{5\ \text{cm}} = 10\ \Omega$. $R_2 = 2 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm} \cdot \dfrac{100\ \Omega}{20\ \text{cm}} = 14{,}1\ \Omega$.

Tehát $R_{AB} = R_1 + R_3 + R_2 = 34{,}1\ \Omega$.

Az áramerősség: $\underline{\underline{I = \dfrac{U_{AB}}{R_{AB}} = 0{,}59\ \text{A}}}$.

15.80. Egy telepre előbb egy darab $n \cdot R$ nagyságú ellenállást, majd n darab egyenként $n^2 \cdot R$ nagyságú, egymással párhuzamosan kapcsolt ellenállást kötünk.
Melyik esetben nagyobb a kapocsfeszültség? ($n > 1$, és n egész szám.)

Megoldás:

15.80. A telep belső ellenállása és üresjárási feszültsége változatlan. Mindkét esetben Ohm törvényét alkalmazzuk teljes áramkörre:

Első eset: $R_{k_1} + R_b = \frac{U_e}{I_1}$, ahol $R_{k_1} = n \cdot R$. Ebből $I_1 = \frac{U_e}{n \cdot R + R_b}$.

A kapocsfeszültség $U_{k_1} = I_1 \cdot R_{k_1} = \frac{U_C \cdot n \cdot R}{n \cdot R + R_b}$.

Második eset: $R_{k_2} + R_b = \frac{U_e}{I_2}$, ahol R_{k_2} párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője: $\frac{1}{R_{k_2}} = n \cdot \frac{1}{n^2 \cdot R}$. Ebből $R_{k_2} = R \cdot n$.

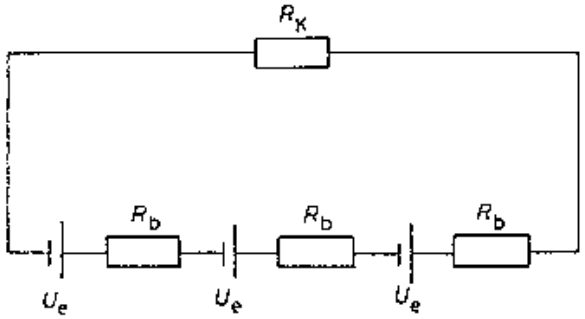
Mivel $R_{k_1} = R_{k_2}$, ezért az áramerősségel és a kapocsfeszültségek is egyenlők: $\underline{\underline{U_{k_1} = U_{k_2}}}$.

15.81. Három, egyenként 10 V elektromotoros erejű és 0,3 Ω belső ellenállású telepet előbb sorosan, majd párhuzamosan kapcsolunk egymással. Mindkét esetben az 1 Ω nagyságú külső ellenállással zárjuk a kört.
Határozzuk meg az eredő feszültségek és ellenállások értékét!

Megoldás:

15.81. $U_e = 10$ V; $R_b = 0{,}3$ Ω; $R_k = 1$ Ω; 3 darab telep.

1. A telepek soros kapcsolása esetén $U_e' = 30$ V, $U_k = 15{,}79$ V, $R_e = 1{,}9$ Ω.



A három telep soros kapcsolása helyettesíthető egyetlen teleppel. Az eredő üresjárási feszültség: $U_e' = 3 \cdot U_e = 30$ V, mert mindhárom telep ugyanolyan irányú áramot indít a körben.

Az eredő belső ellenállás $R_b' = 3 \cdot R_b = 0{,}9$ Ω.

A körben folyó áram az $R_k + R_b' = \dfrac{U_e'}{I}$ összefüggésből határozható meg:

$$I = \frac{U_e'}{R_k + R_b'} = 15{,}97 \text{ A}.$$

A kapocsfeszültség: $\underline{\underline{U_k}} = I \cdot R_k = \underline{\underline{15{,}79 \text{ V}}}$.

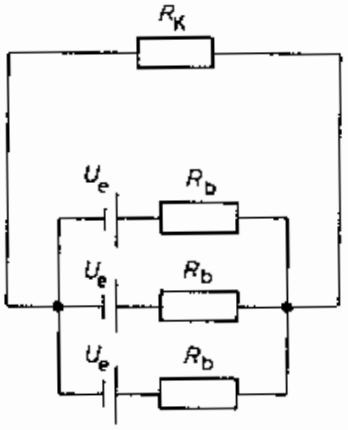
Az eredő ellenállás $\underline{\underline{R_e}} = R_b' + R_k = \underline{\underline{1{,}9 \text{ Ω}}}$.

2. A telepek párhuzamos kapcsolása esetén $U_e' = 10$ V, $U_k = 9{,}09$ V, $R_e = 1{,}1$ Ω.

A három telep párhuzamos kapcsolása helyettesíthető egyetlen teleppel,

amelynek eredő üresjárási feszültsége $U'_e = U_e = 10$ V, eredő ellenállására pedig igaz, hogy $\frac{1}{R'_b} = 3\frac{1}{R_b}$.

Tehát $R'_b = \frac{R_b}{3} = 0{,}1\ \Omega$.



A körben folyó áram az $R_k + R'_b = \frac{U'_e}{I}$ összefüggésből (Ohm törvénye teljes áramkörre) meghatározható: $I = \frac{U'_e}{R_k + R_b} = 9{,}09$ A.

A kapocsfeszültség: $U_k = I \cdot R_k = \underline{\underline{9{,}09\ \text{V}}}$.

Az eredő ellenállás $R_e = R'_b + R_k = \underline{\underline{1{,}1\ \Omega}}$.

15.82. Két, egyenként 6 V elektromotoros erejű és 0,5 Ω belső ellenállású telepet sorba kapcsolunk, majd rákapcsoljuk egy 11 Ω nagyságú külső ellenállásra.
Mennyivel változna meg a külső ellenálláson a teljesítmény, ha az előbbi telepek közül csak egyet használnánk?

Megoldás:

15.82. $U_e = 6$ V; $R_b = 0{,}5\ \Omega$; $R_k = 11\ \Omega$. Ha két telepet sorosan kapcsolunk, akkor egy teleppel helyettesíthető (lásd az előző feladat első részét). $U_e' = 2 \cdot U_e = 12$ V; $R_b' = 2 \cdot R_b = 1\ \Omega$.

Alkalmazzuk Ohm törvényét teljes áramkörre: $R_k + R_b' = \frac{U_e'}{I}$. Ebből

$I = \frac{U_e'}{R_k + R_b'} = 1$ A. Az R_k teljesítménye: $P_k' = I^2 \cdot R_k = 11$ W.

Ha csak egy telepre kapcsoljuk a külső ellenállást: $R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$. Ebből

$I = \frac{U_e}{R_k + R_b} = 0{,}52$ A. Az R_k teljesítménye: $P_k = I^2 \cdot R_k = 2{,}97$ W.

$\underline{\underline{\Delta P_k}} = P_k' - P_k = \underline{\underline{8{,}03\ \text{W}}}$.

15.83. Egy kísérletben sorba kötöttek egy 110 V-os, 60 W-os és egy 110 V-os, 100 W-os izzólámpát. A szabad végeket a 220 V-os hálózatba kapcsolták.
Mi történt és miért?

Megoldás:

15.83. $U = 220$ V; $P_1 = 60$ W, ha $U_1 = 110$ V; $P_2 = 100$ W, ha $U_2 = 110$ V.

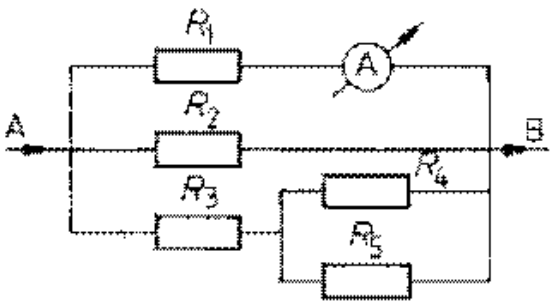
Soros kapcsolás esetén mindkét izzón ugyanakkora áram folyik $I = \frac{U}{R_e}$.

Az izzók ellenállása: $R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} = 201{,}67\ \Omega$; $R_2 = \frac{U_2^2}{P_2} = 121\ \Omega$.

Így $R_e = R_1 + R_2 = 322{,}67\ \Omega$, tehát $I = 0{,}68$ A.

Ennek alapján az 1. jelű izzóra 137,14 V, a 2. izzóra 82,28 V jut. Az 1. jelű izzó a megengedettnél nagyobb ráeső feszültség hatására kiég.

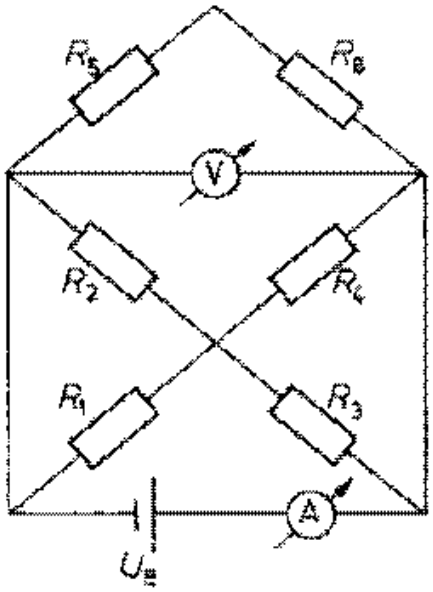
15.84. Az ábrán látható áramkörbe kapcsolt ampermérő 0,5 A erősségű áramot jelez.
Határozzuk meg az R_4 ellenálláson átfolyó áram erősségét, ha $R_1 = R_4 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = R_5 = 1\ \Omega$!



Megoldás:

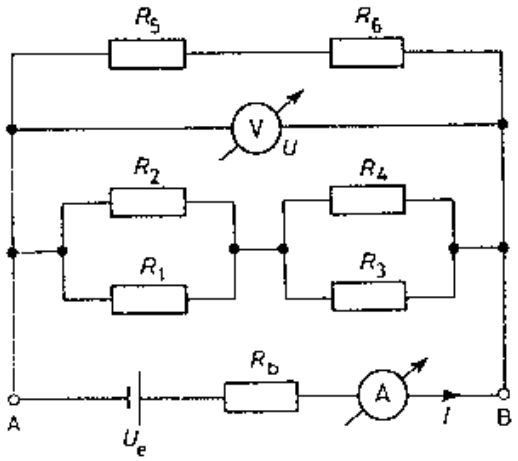
15.84. $R_1 = R_4 = 2\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = R_5 = 1\ \Omega$; $I_1 = 0{,}5$ A.
A párhuzamos kapcsolások miatt $U_1 = U_{AB}$. $U_{AB} = R_1 \cdot I_1 = 1$ V.
Az R_4 és R_5 eredője: $\frac{1}{R_{4,5}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$. Ebből $R_{4,5} = \frac{2}{3}\ \Omega$.
Az R_3 és $R_{4,5}$ eredője: $R_{3,4,5} = R_3 + R_{4,5} = \frac{5}{3}\ \Omega$.
Ohm törvénye az $R_{3,4,5}$ eredő ellenállásra: $R_{3,4,5} = \frac{U_{AB}}{I_3}$. Ebből $I_3 = 0{,}6$ A.
A csomóponti törvény szerint: $I_3 = I_4 + I_5$, azaz $0{,}6\ \text{A} = I_4 + I_5$.
A párhuzamos kapcsolás miatt $U_4 = U_5$, azaz $I_4 \cdot R_4 = I_5 \cdot R_5$, $I_4 \cdot 2 = I_5 \cdot 1$.
E két utóbbi egyenletből: $I_5 = 0{,}4$ A, $\underline{\underline{I_4 = 0{,}2\ \text{A}}}$.

15.85. Az ábrán látható áramkörben a telep elektromotoros ereje 6 V, belső ellenállása 2 Ω.
Mekkora feszültséget mutat az igen nagy belső ellenállású voltmérő, ha
$R_1 = R_4 = 10\ \Omega$,
$R_2 = R_3 = 15\ \Omega$,
$R_5 = R_6 = 3\ \Omega$?
Mekkora áramot jelez az elhanyagolható belső ellenállású árammérő műszer?



Megoldás:

15.85. $R_1 = R_4 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 15\ \Omega$; $R_5 = R_6 = 3\ \Omega$; $U_e = 6$ V; $R_b = 2\ \Omega$.
Az eredetivel egyenértékű kapcsolás:



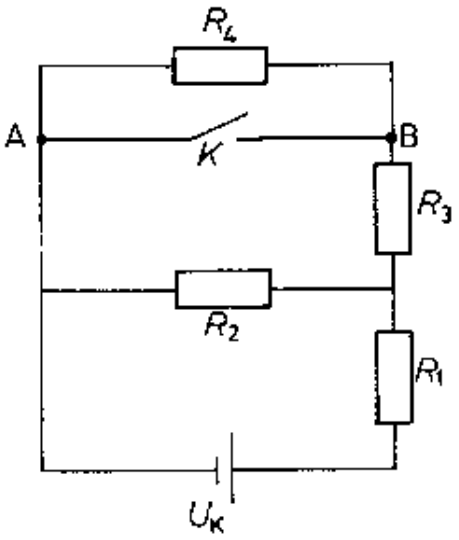
Először a külső ellenállások eredőjét (R) számoljuk ki:
$\frac{1}{R_{4,3}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}$. Ebből $R_{4,3} = 6\ \Omega$.
$\frac{1}{R_{2,1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}$. Ebből $R_{2,1} = 6\ \Omega$.
Az $R_{4,3}$ és az $R_{2,1}$ ellenállások eredője: $R' = R_{4,3} + R_{2,1} = 12\ \Omega$.
Az $R_{5,6} = R_5 + R_6 = 6\ \Omega$.
Az R_k-ra: $\frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_{5,6}} + \frac{1}{R'}$.
Ebből $R_k = 4\ \Omega$. Ohm törvényét alkalmazzuk teljes áramkörre:
$R_k + R_b = \frac{U_e}{I}$. Ebből $\underline{\underline{I}} = \frac{U_e}{R_k + R_b} = \underline{\underline{1\ \text{A}}}$.
A voltmérő által mért U feszültségre: $\underline{\underline{U}} = U_{AB} = U_k = I \cdot R_k = \underline{\underline{4\ \text{V}}}$.

15.86. Az ábrán látható kapcsolásban $R_1 = R_4 = 25\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$.

a) Mekkora a rendszer eredő ellenállása a kapcsoló nyitott, illetve zárt állása esetén?

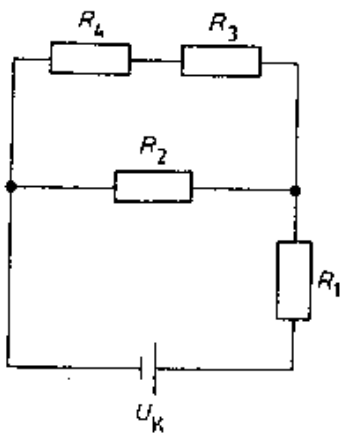
b) Mekkora a kapocsfeszültség, ha a kapcsoló zárása után a teljesítmény 22 W-tal változik?

(A kapocsfeszültség a terheléstől független.)



Megoldás:

15.86. $R_1 = R_4 = 25\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$: $\Delta P = 22$ W.



a) Nyitott állásnál: $R_{4,3} = R_4 + R_3 = 75\ \Omega$.

$\frac{1}{R_{2,3,4}} = \frac{1}{R_{4,3}} + \frac{1}{R_2}$. Ebből $R_{2,3,4} = 30\ \Omega$.

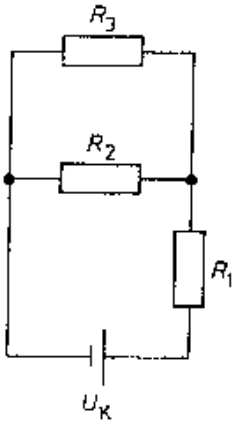
$\underline{\underline{R_{e_1}}} = R_{2,3,4} + R_1 = \underline{\underline{55\ \Omega}}$.

A teljesítmény: $P_1 = \frac{U^2}{R_{e_1}}$.

Zárt állásnál (az R_4 rövidre van zárva):

$\frac{1}{R_{3,2}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}$, ebből $R_{3,2} = 25\ \Omega$.

$\underline{\underline{R_{e_2}}} = R_{3,2} + R_1 = \underline{\underline{50\ \Omega}}$.



A teljesítmény: $P_2 = \frac{U_k^2}{R_{e_2}}$.

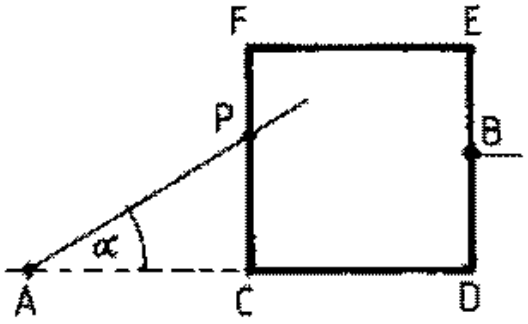
b) A két teljesítmény különbsége:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = U_k^2 \left(\frac{1}{R_{e_2}} - \frac{1}{R_{e_1}} \right).$$

Ebből $\underline{\underline{U_k = 110\ \text{V}}}$.

15.87. Az ábrán látható AP csúszka az A pont körül foroghat, és ellenállása elhanyagolható. A négyzet oldalai egyenletes keresztmetszetűek, hosszuk 10 cm, ellenállásuk egyenként 10 Ω.

Mekkora az A és B pontokban feszültségre kapcsolt rendszer eredő ellenállása, ha a B oldalfelező pont, az α szög értéke 30°, és az AC távolság 10 cm?



Megoldás:

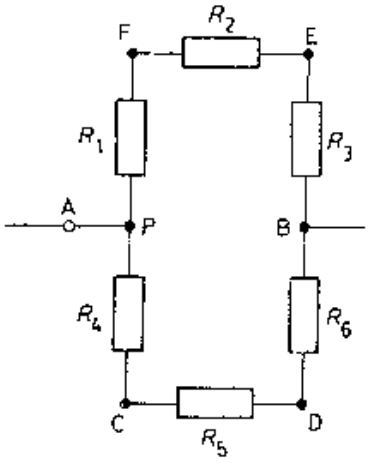
15.87. $a = 10$ cm; $R_a = 10\ \Omega$; $\alpha = 30°$; $AC = 10$ cm.

A helyettesítő kapcsolás: Az ellenállások a hosszakkal arányosak.

Ha 10 cm ~ 10 Ω, akkor 1 cm ~ 1 Ω.

A $PC = 10\text{ cm} \cdot \operatorname{tg} 30° = 5{,}7$ cm és $PF = 10\text{ cm} - PC = 4{,}3$ cm.

Az ellenállások értékei a fentiek alapján: $R_3 = R_6 = 5\ \Omega$, $R_2 = R_5 = 10\ \Omega$, $R_1 = 4{,}3\ \Omega$, $R_4 = 5{,}7\ \Omega$.



Az eredő ellenállás kiszámítása:

$R' = R_1 + R_2 + R_3 = 19{,}3\ \Omega$,

$R'' = R_4 + R_5 + R_6 = 20{,}7\ \Omega$.

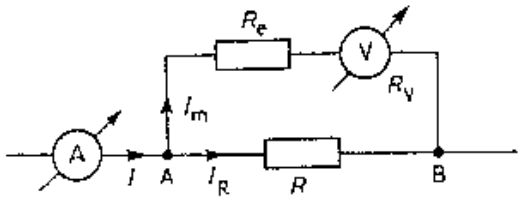
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$. Ebből $\underline{\underline{R_e = 10\ \Omega}}$.

15.88. Ismeretlen ellenállás értékét kívánjuk megmérni Ohm törvénye alapján. Rendelkezésre áll egy telep, egy feszültség- és árammérő műszer.
Határozzuk meg az ismeretlen ellenállás pontos értékét (feltételezve a műszerek és az előtét-ellenállás abszolút pontosságát), a méréshatár kiterjesztése céljából bekapcsolt előtét-ellenállás figyelembevételével!

Számadatok:
Az ampermérő $I = 900$ mA áramot jelez.
A voltmérő mutatója a 80. skálabeosztáson áll, érzékenysége 0,1 V skálaosztásonként.
A voltmérő méréshatárát előzőleg 3-szorosára terjesztettük ki, ezért 2000 Ω értékű előtét-ellenállást kapcsoltunk be.

Megoldás:

15.88. $I = 0{,}9$ A; $U_V = 8$ V; $R_e = 2000$ Ω.
A méréshatár kiterjesztésének elvét lásd a 15.7. feladatban.



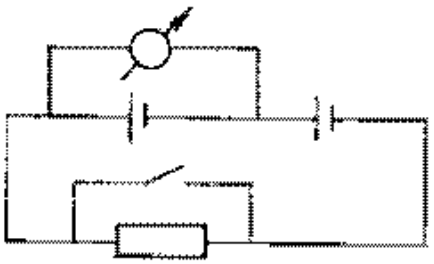
A huroktörvény alapján: $U_{AB} = U_e + U_V$.
Mivel a méréshatárt háromszorosára terjesztették ki, ezért $U_{AB} = 3 \cdot U_V = 24$ V. Így $U_e = 16$ V.

Az előtétellenállásra Ohm törvényét alkalmazva: $I_m = \frac{U_e}{R_e} = 0{,}008$ A.

Az A pontban a csomóponti törvény alapján: $I = I_m + I_R$. Ebből $I_R = I - I_m = 0{,}892$ A.

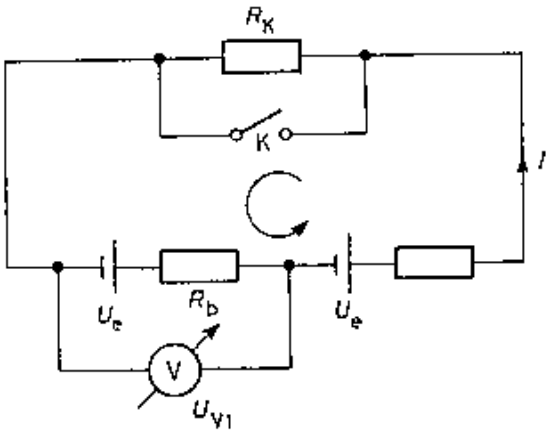
Az R ellenállásra Ohm törvényét alkalmazva: $\underline{\underline{R}} = \frac{U_{AB}}{I_R} = \underline{\underline{26{,}9\ \Omega}}$.

15.89. Kapcsoljunk sorba két, azonos elektromotoros erejű és belső ellenállású telepet, majd adott fogyasztóval létesítsünk áramkört! Kössünk voltmérőt az egyik telep sarkaira, ezután a fogyasztót zárjuk rövidre!
Mi történik? Magyarázzuk meg a jelenséget és kövessük nyomon számítással is!



Megoldás:

15.89. Nyitott állás esetén:
A huroktörvény alapján: $-U_e + I_1 \cdot R_b - U_e + I_1 \cdot R_b - I_1 \cdot R_k = 0$.

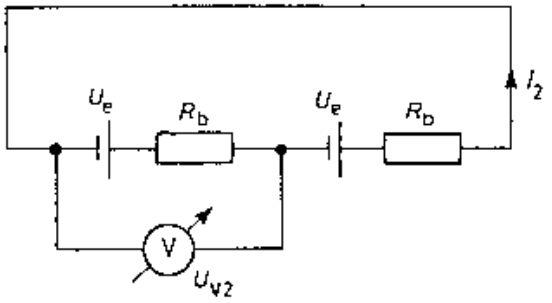


Ebből $I_1 = \dfrac{2U_e}{2R_b + R_k}$.
A voltmérő által mért feszültség:

$$U_{v_1} = U_e - U_b = U_e - I_1 \cdot R_b = U_e - \frac{2U_e \cdot R_b}{2R_b + R_k} = U_e \cdot \left(1 - \frac{2R_b}{2R_b + R_k}\right),$$

$$U_{v_1} = U_e \cdot \frac{R_k}{2R_b + R_k}.$$

Zárt állás esetén az R_k rövidre van zárva.



A huroktörvény szerint: $-U_e + I_2 \cdot R_b - U_e + I_2 \cdot R_b = 0$.

Ebből $I_2 = \dfrac{2U_e}{2R_b} = \dfrac{U_e}{R_b}$.

A voltmérő által mért feszültség:

$$U_{v2} = U_e - U_b = U_e - I_2 \cdot R_b = U_e - \frac{U_e}{R_b} \cdot R_b,$$

$$U_{v2} = U_e - U_e = 0.$$

Az áramkör teljesítménye a terhelő külső ellenállás esetén (nyitott kapcsoló):

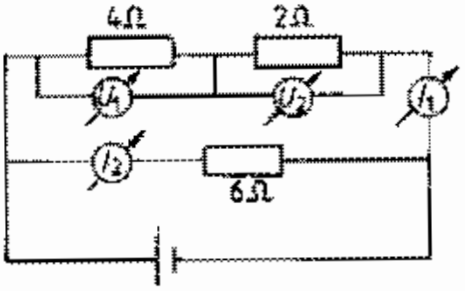
$$P_1 = I_1^2 \cdot R_e = I_1^2 \cdot (2R_b + R_k) = \frac{4 \cdot U_e^2}{2R_b + R_k}.$$

A teljesítmény rövidre zárás esetén (zárt kapcsoló):

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_e = I_2^2 \cdot (2 \cdot R_b) = \frac{2 \cdot U_e^2}{R_b}.$$

Mivel R_k pozitív, így $P_2 > P_1$. Tehát rövidzár esetén nagyobb a felvett teljesítmény, így a telepek hamarabb lemerülnek.

15.90. Az ábra szerinti kapcsolásban az egyik árammérő $I_1 = 2$ A erősségű áramot jelez. Mit mutatnak a feszültségmérők és a másik árammérő? Az árammérők ellenállása elhanyagolható, a feszültségmérők ellenállása „végtelennek" tekinthető.



Megoldás:

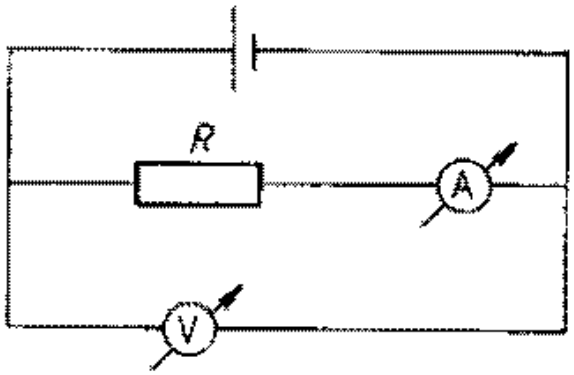
15.90. $I_1 = 2$ A; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 6\ \Omega$.

Az R_1 és R_2 eredője: $R_{1,2} = R_1 + R_2 = 6\ \Omega$.

Mivel $R_{1,2}$ párhuzamosan van kapcsolva az $R_3 = 6\ \Omega$-os ellenállással és a két ellenállás egyenlő, ezért $I_2 = I_1 = \underline{\underline{2\ \text{A}}}$.

Ohm törvénye alapján: $\underline{\underline{U_1 = 8\ \text{V}}}$, $\underline{\underline{U_2 = 4\ \text{V}}}$.

15.91. Az ábrán látható kapcsolásban a feszültségmérőn U V, az árammérőn I A olvasható le.



Az U/I hányados kicsi vagy nagy R ellenállás esetén adja az ellenállás értékét pontosabban? Miért?

Megoldás:

15.91. Ha az R ellenállás értéke sokkal nagyobb, mint az ampermérőé. Indoklás: A voltmérő az R ellenálláson és az ampermérő belső ellenállásán eső feszültség összegét mutatja: $U = U_R + U_{bA}$.

Az U_R és U_{bA} feszültségek a megfelelő ellenállásokkal arányosak. Ezért ha az R ellenállás sokkal nagyobb, mint az ampermérő belső ellenállása, akkor U_R is sokkal nagyobb, mint U_{bA}. Egészen nagy R esetén U_{bA} nagyon kicsi, így $U = U_R$. Tehát az $\frac{U}{I}$ hányados egész pontosan adja az R értékét.

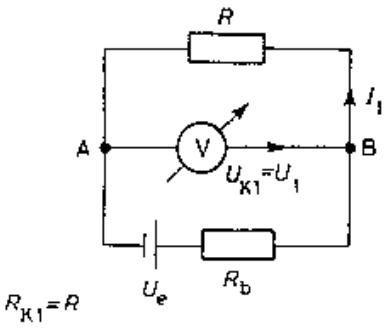
15.92. Egy telep belső ellenállása $R_b = 1\ \Omega$, kapcsait R ellenállással zárjuk. Ekkor a telep sarkain lévő feszültségmérő $U_1 = 175$ V-ot jelez. Ha az előző ellenállással párhuzamosan kapcsolunk még egy R ellenállást, a feszültségmérő $U_2 = 150$ V-ot mutat.

Határozzuk meg az R ellenállást, ha a feszültségmérő ideális, vagyis ellenállása végtelen nagynak tekinthető!

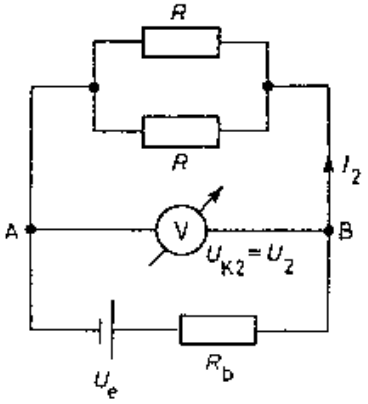
Megoldás:

15.92. $R_b = 1\ \Omega$; $U_1 = 175$ V; $U_2 = 150$ V.

Első eset:



Második eset:



A külső ellenállások eredője:

$$\frac{1}{R_{k_2}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}.$$

Ebből $R_{k_2} = \frac{R}{2}$.

A voltmérő mindkét esetben a kapocsfeszültséget mutatja:

I. Az $U_k = I \cdot R_k$ összefüggést alkalmazva, és a fent meghatározott R_k-t beírva: $U_1 = I_1 \cdot R$, illetve $U_2 = I_2 \cdot \frac{R}{2}$.

A két egyenletet elosztva $\frac{I_2}{I_1} = \frac{2 \cdot U_2}{U_1} = \frac{12}{7}$. Ebből

$$(*) \qquad I_2 = \frac{12}{7} I_1.$$

II. A huroktörvényt alkalmazva mindkét esetben: $U_{k_1} + U_{b_1} = U_e$, illetve $U_{k_2} + U_{b_2} = U_e$,

azaz $U_1 + I_1 \cdot R_b = U_e$, illetve $U_2 = I_2 \cdot R_b = U_e$.

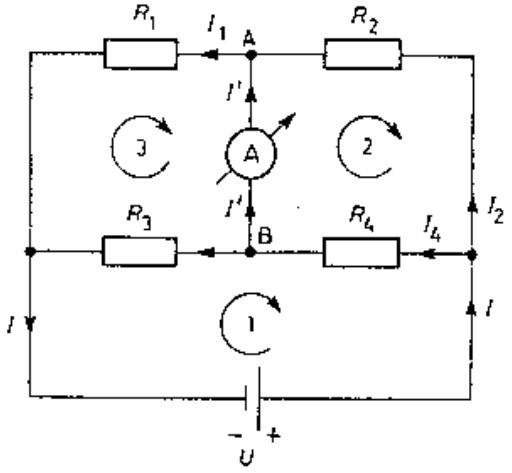
Behelyettesítve: $175\ \text{V} + I_1 \cdot R_b = U_e$, illetve $150\ \text{V} + I_2 \cdot R_b = U_e$.
Ezekhez a (∗) egyenletet hozzávéve, az I_1, I_2 és I_e ismeretlenek meghatározhatók.
Ezekből $I_1 = 35\ \text{A}$.
Az $U_1 = I_1 \cdot R$ egyenletből $\underline{\underline{R = 5\ \Omega}}$.

15.93. Sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokat párhuzamosan kötjük a szintén sorosan kapcsolt R_3 és R_4 ellenállásokhoz úgy, hogy R_1 és R_3 egymáshoz kapcsolódik. Az így nyert kapcsolási elem sarkain U feszültséget mérhetünk.
Mekkora áramot jelez az az ideális (ellenállás nélküli) árammérő, amelyik a két ág „közepét" hidalja át? Miért?

$(R_1 = R_4 = r;\ R_2 = R_3 = 2r.)$

Megoldás:

15.93. $R_1 = R_4 = r;\ \ R_2 = R_3 = 2 \cdot r;\ \ U.$
Feltételezzük, hogy A és B pontok között a bejelölt irányban folyik az áram.



A feladatot három huroktörvény és két csomóponti törvény felírásával oldjuk meg:

1. $-I_4 \cdot R_4 - I_3 \cdot R_3 + U = 0$, azaz $-r \cdot I_4 - 2r \cdot I_3 + U = 0.$

2. $I_4 \cdot R_4 - I_2 \cdot R_2 = 0$, azaz $r \cdot I_4 - 2r \cdot I_2 = 0.$

3. $I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 = 0$, azaz $2r \cdot I_3 - r \cdot I_1 = 0.$

$\underline{A}$-ban: $I_2 + I' = I_1$, $\underline{B}$-ben: $I' + I_3 = I_4.$

Az öt egyenletben öt ismeretlen található (I_1, I_2, I_3, I_4, I'). Az egyenletrendszer megoldása után: $I' = \dfrac{U}{4 \cdot r}.$

16.1. Az alábbi számítások az indukált feszültség meghatározására vonatkoznak, ha a vezető homogén mágneses mezőben egyenletesen mozog.

$$W = F_m \cdot \Delta s = B \cdot I \cdot l \cdot \Delta s, \qquad W = U \cdot I \cdot \Delta t,$$

$$B \cdot I \cdot l \cdot \Delta s = U \cdot I \cdot \Delta t,$$

$$U = B \cdot l \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$U_i = B \cdot l \cdot v.$$

a) Hol használtuk fel az energiamegmaradás elvét?

b) Mondjunk rá egy-két példát, hol használtuk ki, hogy a mozgatás egyenletes v = állandó sebességgel történt!

c) Milyen eredményt kapnánk, ha a sebesség nem 90°-os, hanem ettől eltérő α szöget zárna be az indukcióvonalakkal?

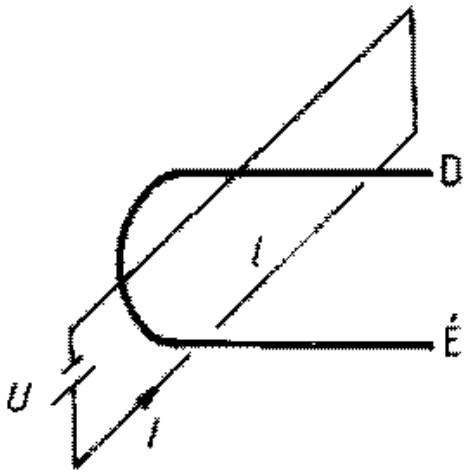
Megoldás:

16.1. **a)** Feltételezzük, hogy az l hosszúságú vezető áramköre zárt, és a mozgás az indukcióvonalakra merőlegesen történik. A mozgatás révén feszültség, illetve a zárt körben áram keletkezik.
Ekkor, az energiamegmaradás elve alapján, a mozgató erő mechanikai munkája egyenlő a vezetőben keletkezett indukált áram munkájával: $W_{\mp m} = W_I$. $U \cdot I \cdot \Delta t = B \cdot I \cdot l \cdot \Delta s$.

b) Ha egyenletesen mozog a vezető, akkor a ráható erők eredője zérus. A vezetőre ható nehézségi erőt pl. a kezünkkel kompenzáljuk.
Ha az indukcióvonalak függőlegesek, akkor az F mozgató erő vízszintes, és minden pillanatban egyenlőnek kell lennie az indukált árammal átjárt vezetőre ható Lorentz-erővel: $F_m = B \cdot I \cdot l$.
Irányuk ellentétes. A mozgatás sebességének állandóságát kihasználtuk még a sebesség felírásakor: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

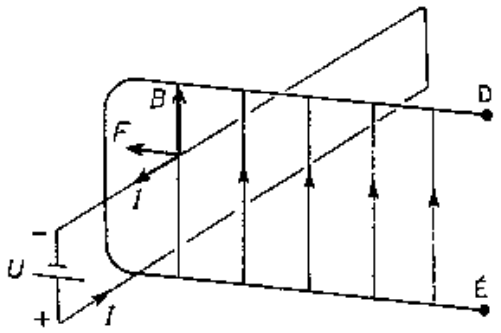
c) Ha v és B α szöget zár be egymással, akkor v-nek az indukcióvonalakra merőleges komponensével számolhatunk: $v' = v \cdot \sin\alpha$. Így $U = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$.

16.2. Másoljuk le az ábrát és rajzoljuk le a mágneses indukcióvonalakat, majd a mágneses mezőben levő vezetőre ható erő irányát!
Mekkora lenne az áramjárta vezetőre ható erő, ha a vezető párhuzamos lenne az indukcióvonalakkal?



Megoldás:

16.2. $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha$, ahol α a B és I iránya által bezárt szög. Ezért ha a vezető párhuzamos a B-vel, akkor $\alpha = 0$. Így $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin 0 = 0$.



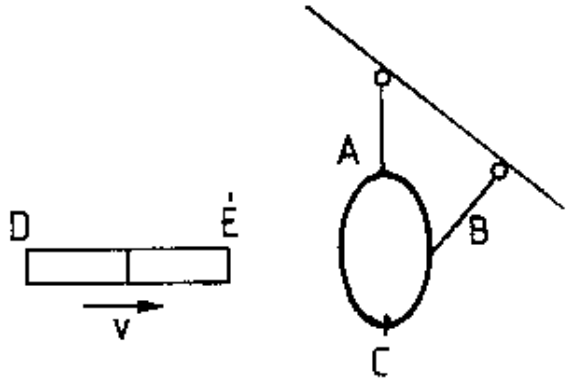
16.3. Mi a mágneses megosztás jelensége?
Mi a különbség, ha a mágneses megosztás lágyvas rúdban vagy ha acélrúdban játszódik le?

Megoldás:

16.3. Mágneses megosztás: Ha egy mágnest közelítünk egy nem mágneses anyaghoz – pl. lágyvashoz –, a lágyvas is mágneses tulajdonságú lesz. Ha pl. a mágnes déli pólusával közelítünk a lágyvashoz, akkor a lágyvas mágneshez közelebbi része északi, a másik vége déli pólusú lesz.
A lágyvas, a megosztó mágnes vagy más mágneses mező hatásának megszűnte után elveszti mágneses tulajdonságát, az acél kisebb-nagyobb mértékben megtartja.

16.4. *Válasszuk ki* a HELYES *állításokat!*

Az ábrán látható kísérletben mágnesrudat mozgatunk egy cérnára felfüggesztett alumínium gyűrű belseje felé.

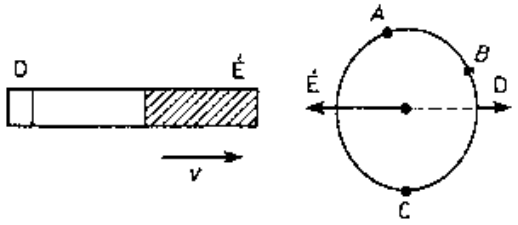


1. Az alumínium gyűrűben keletkezett áram iránya
   A) ABC irányú,
   B) ACB irányú.
   C) Nem keletkezik áram.
2. Az alumínium gyűrű elmozdulása a mágnes mozgatásával
   A) megegyező irányú,
   B) ellentétes irányú,
   C) nem mozdul el.
3. A mozgó mágnes és az indukált árammal átjárt alumínium gyűrű között
   A) taszítás van,
   B) vonzás van,
   C) sem vonzás, sem taszítás nem lép fel.
4. Ha a mágnes pólusait felcseréljük és a mozgatás irányát nem változtatjuk, akkor a gyűrű elmozdulása a mágnes mozgatásával
   A) megegyező irányú,
   B) ellentétes irányú,
   C) nulla.
5. Ha a mágnes mozgatásának irányát felcseréljük – pólusait nem –, akkor a gyűrűben keletkezett áram iránya
   A) ABC irányú,
   B) ACB irányú,
   C) nem keletkezik áram.
   Indokoljuk választásunkat!

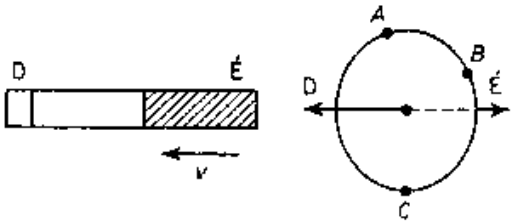
Megoldás:

16.4. A jelenség Lenz törvénye alapján magyarázható, hiszen a karikában áram indukálódik. Az indukált áram olyan irányú, hogy az általa keltett mágneses mező akadályozza az őt létrehozó változást. Vagyis ha az *É* pólussal közeledünk a karikához, az indukált áram keltette mágneses mező ellentétes irányú lesz, a mágnes terével taszítja a karikát. Az áram irányát a jobbkéz-szabály alapján határozzuk meg.

Ha a mágnes közelít a karikához, és annak *B* pontja közelebb van hozzánk, mint *A*.



Ha a mágnes távolodik a karikától, és annak *B* pontja közelebb van hozzánk, mint *A*.



1. Ha a *B* van közelebb hozzánk, akkor az áram iránya *ACB* irányú, így a $\underline{\underline{B}}$ a helyes.
Ha az *A* van közelebb, akkor az $\underline{\underline{A}}$ a helyes válasz
2. $\underline{\underline{A}}$ a helyes. (A kísérlet értelmezése alapján.)
3. $\underline{\underline{A}}$ a helyes. (A kísérlet értelmezése alapján.)
4. $\underline{\underline{A}}$ a helyes, mert a karika mezőjének iránya is felcserélődik, és továbbra is taszítás lép fel.
5. Mivel a karikának most akadályozni kell a mágnes távolodását, ezért a karika olyan polaritású mágnesként viselkedik, amely vonzza a távolodó mágnest. Így, ha a *B* van közelebb hozzánk, a helyes válasz $\underline{\underline{A}}$, ellenkező esetben a $\underline{\underline{B}}$ válasz helyes.

16.5. *Írjunk a számmal megjelölt állításokhoz A), B), C) vagy D) betűt aszerint, hogy mely jelenségre vagy jelenségekre vonatkozik!*

A) Mágneses mező,
B) elektromos mező,
C) mindkettő,
D) egyik sem.

1. Lehet homogén.
2. Csak nyugvó töltés hozhatja létre.
3. Jellemző mennyisége a térerősség.
4. Jellemző mennyisége a mágneses indukció.
5. A bele helyezett nyugvó pontszerű töltésre erő hat.
6. Áramjárta tekercs belsejében is létrejöhet.
7. A benne megfelelő irányban mozgó elektromos töltésre erő hat.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

16.5. 1. *C* Például áramjárta tekercs belsejében $\overline{B}$ = állandó, vagy kondenzátor lemezei között $\overline{E}$ = állandó.
2. *D* Mindkét mezőt mozgó töltés is létrehozhatja.
3. *C* Mindkét mezőben értelmezünk térerősséget, $\overline{H}$, $\overline{E}$.
4. *A* Lásd a bevezetőt.
5. *B* Mágneses mezőben csak mozgó töltésre hat erő.
6. *C* Ugyanis ha az áram erőssége időben változik, akkor a változó mágneses mező maga körül elektromos mezőt is létrehoz.
7. *C* Az elektromos mezőben $F = E \cdot Q$, a mágneses mezőben $F = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin\alpha$ féle Lorentz-erő.

16.6. *Válasszuk ki a* HELYES *feltételeket!*

Azt szeretnénk, hogy egy mágneses mezőben, egy v nagyságú sebességgel elindított elektron egyenletes körmozgást végezzen. Ehhez az szükséges, hogy

A) a mágneses mező homogén legyen,

B) a mágneses mező indukcióvonalai koncentrikus körök legyenek,

C) a sebesség iránya az indukcióvonalakkal párhuzamos legyen,

D) a sebesség iránya az indukcióvonalakra merőleges legyen.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

16.6. Az egyenletes körmozgáshoz szükséges erő állandó nagyságú, a körpálya centrumába mutat minden pillanatban, így a pillanatnyi sebesség merőleges a centripetális erőre. Ilyen mozgás jön létre, ha B indukciójú homogén mezőbe az indukcióvonalakra merőlegesen v sebességgel érkezik egy Q töltés. A centripetális erőt a Lorentz-erő képviseli, amely merőleges v-re minden pillanatban, és állandó nagyságú: $F = B \cdot Q \cdot v$ (B, Q, v állandó).

$\underline{A}$ helyes. Inhomogén mező esetén B nem ugyanaz minden pontban.

B hamis. Ekkor nem homogén a mező.

C hamis. Nem hat a Lorentz-erő.

$\underline{D}$ igaz. Ha $\alpha \neq 0$ és $\alpha \neq 90°$, akkor a töltés spirális pályán mozog.

16.7. *Jelöljük meg azt, az* A)*-val vagy* B)*-vel jelzett feltételt – esetleg mindkettőt –, amelyre* HELYES *az állítás!*

1. A radioaktív sugárzás három részre különíthető el
   A) mágneses mezőben,

   B) elektromos mezőben.
2. Mágneses mezőben a mozgó töltésre ható erő nagysága az indukcióvonalak és a részecskék sebessége által bezárt szögtől
   A) függ,
   B) nem függ.
3. Adott indukciójú mágneses mezőben a Lorentz-erő iránya függ a töltéssel rendelkező, mozgó részecske
   A) töltésének előjelétől,
   B) sebességének irányától.
4. Ha a részecskének sem a töltése, sem a sebessége nem 0, és a mágneses mező indukciója sem zérus, akkor a Lorentz-erő
   A) nem lehet 0,
   B) lehet 0.

Megoldás:

16.7. **1.** *A* és *B*. Mágneses mezőben a Lorentz-erő hatása, elektromos mezőben az $F = E \cdot Q$ erő téríti el a pozitív töltésű α, illetve a negatív töltésű β részecskéket (elektronokat).
2. *A* A mozgó töltésre a Lorentz-erő hat, amely $F = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin\alpha$, ahol α a $\overline{v}$ és B által bezárt szög.
3. *A* és *B* Az előző összefüggés alapján és a „jobbkéz-szabály" alapján mindkettőtől függ.
4. *B* Ha $\alpha = 0$, akkor $F = 0$ (2. A alapján)

16.8. *Jelöljük meg azt, az* A)*-val vagy* B)*-vel jelzett fizikai mennyiséget – esetleg mindkettőt –, amelyre* HELYES *az állítás!*

1. A mágneses mezőt jellemző mennyiség
   A) a mágneses permeabilitás,
   B) a mágneses indukció.
2. A mágneses mező egy pontjában, a kimérendő mágneses indukció nagysága az odavitt magnetométer mérőtekercsében folyó áramerősségtől
   A) független,
   B) függ, vele fordítottan arányos.
3. A mágneses indukció iránya a mező egy megadott pontjában megegyezik az odahelyezett szabadon elforduló kis mágnestű
   A) dél–észak irányával,
   B) észak–dél irányával.
4. A mágneses indukció egysége
   A) 1 T,
   B) 1 $\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

16.8. 1. *B* A permeabilitás a mezőt kitöltő közegre jellemző.

2. *A* $M \sim A, N, I$, így ezek hányadosa állandó: $B = \frac{M}{A \cdot N \cdot I}$ Tehát B független I-től.

3. *A* Egy adott pontban az indukció és az indukcióvonalak irányítása, a mágnesen kívül *É–D* irányú. A mágnestű ezzel ellentétes irányba áll be, ezért a mágnestű *D–É* iránya adja az indukció irányát.

4. *A* és *B* A két egység egyenlő.

16.9. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Két tekercset közös vasmagra helyezünk.

A) Ha az első tekercsben egyenáram folyik, akkor a második tekercsben feszültség indukálódik.

B) Ha ez első tekercsben a fluxusváltozás egyenesen arányos az idővel, akkor a második tekercsben keletkező feszültség a változás ideje alatt állandó.

C) Ha az első tekercsben változó nagyságú áram folyik, akkor a második tekercsben keletkező feszültség egyenesen arányos a második tekercs menetszámával.

D) Az egyenárammal átjárt első tekercs mágneses mezője maga körül elektromos mezőt hoz létre.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

16.9. *A* hamis. Csak időben változó áram esetén igaz.

B igaz. $U_i = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, ha $\Delta\Phi \sim \Delta t$, akkor $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ = állandó.

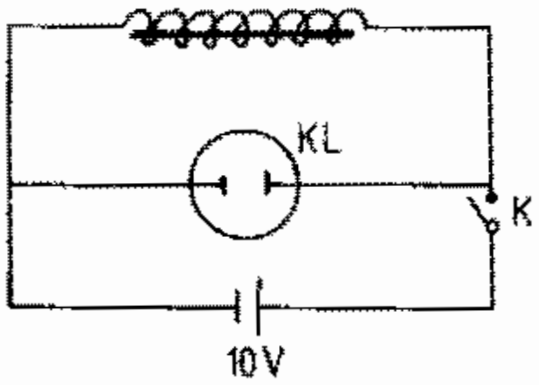
C igaz. A fenti képletben N_2 a második tekercs menetszáma.

D hamis. Az A pont indoklása miatt.

16.10. Az ábrán látható ködfénylámpa (KL) gyújtási feszültsége 100 V, a telep feszültsége 10 V. Megfelelő vasmagos tekercset alkalmazva, a „K" kapcsoló nyitásakor a ködfénylámpa felvillan, holott záráskor nem világított.

a) Magyarázzuk meg a jelenséget!

b) Lejátszódik-e a jelenség, ha a tekercs helyett ugyanakkora ellenállású huzalt alkalmazunk?



Megoldás:

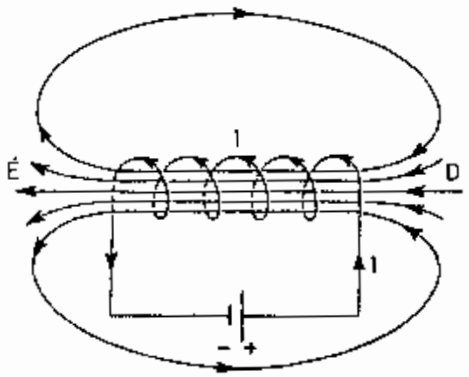
16.10. a) Zárt állapotban nem világít a ködfénylámpa, hiszen állandó áram esetén a tekercsben nem indukálódik feszültség, és a telep 10 V-os feszültsége kevés a lámpa üzemeltetéséhez. A zárás (bekapcsolás) pillanatában hirtelen megnő az áram erőssége, de Lenz törvénye értelmében az indukálódó áram, illetve feszültség ellentétes irányú a telep feszültségével, tehát levonódik abból, így nem érhető el a lámpa üzemi feszültsége. A nyitás pillanatában az eredeti feszültséggel megegyező irányú feszültség indukálódik, és a két feszültség összege elérheti a 100 voltot, így a lámpa felvillan.

b) Nem, mert a huzalban indukálódott feszültség kicsi.

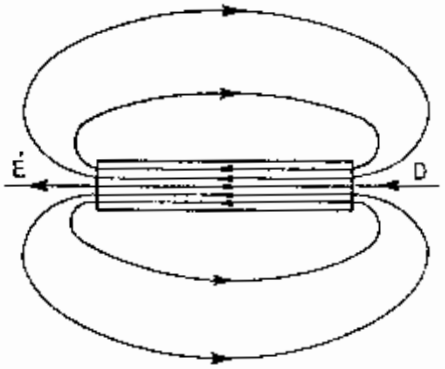
16.11. Rajzoljuk le egy rúdmágnes, egy áramjárta tekercs és egy áramjárta egyenes vezető mágneses indukcióvonalait! Jelöljük be az indukcióvonalak irányát, a pólusokat, illetve az áram irányát!

Megoldás:

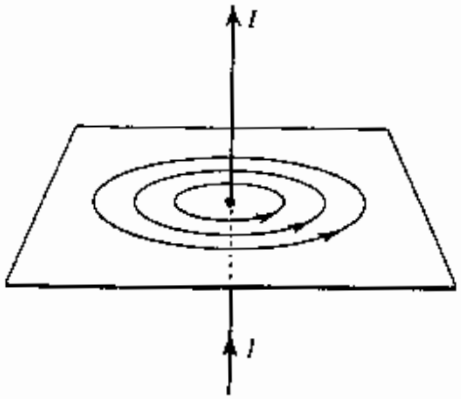
16.11.



tekercs



rúdmágnes



egyenes vezető

16.12. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Egy áramjárta tekercs belsejében, magnetométerrel végzett mérések alapján a mágneses indukció (B) értékére az alábbi összefüggést kaptuk:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}.$$

Az összefüggésben:

A) az I a magnetométer tekercsében folyó áram erősségét jelöli;

B) a μ_0 a mágneses permeabilitás, amelynek értéke a tekercs belsejében lévő bármely közegre állandó;

C) az N, l, I a mágneses mezőt létrehozó, áramjárta tekercs meneteinek számát, hosszát, illetve a benne folyó áram erősségét jelölik.

D) A B értéke a tekercs belsejében mindig minden pontban különböző.

Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

16.12. A hamis. I az áramjárta tekercsben folyó áramot jelenti. A magnetométerben lévő tekercs árama nem befolyásolja a tekercs belsejében mért indukciót.

B hamis. A μ_0 a vákuum permeabilitása, ami ugyan állandó, de különböző közegek permeabilitásai különbözőek.

C igaz.

D hamis. B állandó, mert a $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$ összefüggésben szereplő mennyiségek állandóak.

16.13. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) Elektromos mezőbe helyezett, nyugvó töltésre erő hat.
B) Elektromos mezőben mozgó töltésre erő hat.
C) Állandó indukciójú mágneses mezőbe helyezett nyugvó töltésre erő hat.
D) Állandó indukciójú mágneses mezőben mozgó töltésre nem mindig hat erő.
E) Időben változó mágneses mezőbe helyezett töltésre nem mindig hat erő.

Indokoljuk választásainkat!

Megoldás:

16.13. $\underline{\underline{A}}$ helyes. $F = E \cdot Q$.
$\underline{\underline{B}}$ helyes. Minden pontban $F = E \cdot Q$, de időben változhat.
$\underline{\underline{C}}$ hamis. Csak mozgó töltésre hat a Lorentz-erő.
$\underline{\underline{D}}$ igaz. A Lorentz-erő 0, ha $v \parallel B$-vel.
$\underline{\underline{E}}$ igaz. Mert a változó mágneses mező maga körül elektromos mezőt hoz létre, és előfordulhat, hogy egy adott pillanatban E és B is nulla.

16.14. *Jelöljük meg a* HELYES *választ!*

Áramjárta vezetőt helyezünk homogén mágneses mezőbe a mágneses indukcióvonalakra merőleges helyzetben. Határozzuk meg, hogy mitől függ a vezetőre ható erő!

A) A vezető hosszától, a vezető ellenállásától és a mező mágneses indukciójától.

B) A vezetőben folyó áram erősségétől, a vezető ellenállásától és a levegő mágneses permeabilitásától.

C) A vezető hosszától, a vezetőben folyó áramerősségtől és a mező mágneses indukciójától.

D) A vezető hosszától, a vezetőn eső feszültségtől és a vezető ellenállásától.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

16.14. Ha a vezető merőleges az indukcióvonalakra, akkor a vezetőre ható erő $F = B \cdot I \cdot l$. Ebben B a mágneses indukció, I az áramerősség, l a vezető hossza.

A fentiek alapján: *A* hamis; *B* hamis; *C* igaz; *D* hamis.

16.15. Definiáljuk a mágneses indukcióvektor mennyiségét!

Megoldás:

16.15. A mágneses indukcióvektor (B) a mágneses mező „hatásának mértékét" hivatott jellemezni. A „hatás mértéke" kimutatható a kérdéses pontba helyezett áramjárta vezetőre ható erővel, vagy a pontba helyezett áramjárta tekercsre ható forgatónyomatékkal (magnetométer). Ez utóbbi esetben az áramjárta tekercs a „jobbkéz-szabály" alapján meghatározható, mágneses dipólként viselkedik. Ha a tekercs a dipólra merőleges tengely körül foroghat, a mágneses mező egy adott pontjában el is fordul az egyensúlyi helyzetig. Az erre merőleges helyzetben a legnagyobb a mező által kifejtett forgatónyomaték. Erre igaz, hogy: $M_{max} \sim I, N, A$.

$\frac{M_{max}}{I \cdot N \cdot A} = B$, Ezt nevezzük mágneses indukciónak (B). Az összefüggésben az I a mágneses teret létrehozó tekercsben folyó áram erőssége, N a menetszám, A a tekercs keresztmetszete. A B iránya a pontba helyezett és egyensúlyban lévő mágnestű D–$É$ irányával egyezik meg.

16.16. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

A) A vasmagos tekercsnek csak egyenáramú körben van ohmos ellenállása.

B) A vasmagos tekercsnek csak változó áramerősségnél van induktív ellenállása.

C) A tekercs nem vezeti az egyenáramot.

D) A vasmagos tekercs induktív ellenállása függ az önindukciós együtthatótól.

E) A tekercs ohmos ellenállása függ az áram frekvenciájától.

Indokoljuk választásainkat!

Megoldás:

16.16. $\underline{\underline{A}}$ hamis. A tekercs ohmos ellenállása váltakozó áramú körben ugyanannyi, mint egyenárammal szemben.

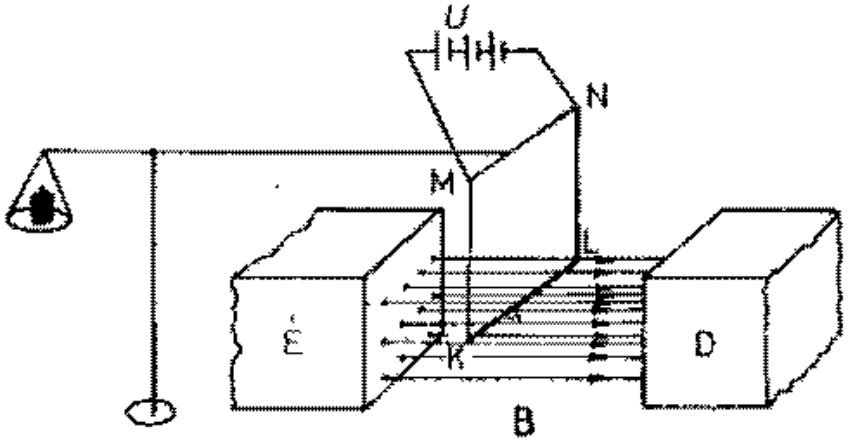
B igaz. Egyenáram esetén nem lép fel indukció.

$\underline{\underline{C}}$ hamis.

D igaz, mert $X_L = L \cdot \omega$ ahol L az önindukciós együttható, ω a váltakozó áram körfrekvenciája.

$\underline{\underline{E}}$ hamis. A tekercs ohmos ellenállása csak a tekercs huzalának jellemzőitől függ.

16.17. Az ábrán egy mérleg látható. A KL vízszintes vezetőben folyó áram erőssége az U feszültségforrás segítségével változtatható. A mérleg karjai egyenlő hosszúak és – az MN szakasszal együtt – szigetelő anyagból készültek. A létreho-



zott indukcióvektor nagysága állandó, iránya merőleges a vezetőre és vízszintes. A mérleget az áram bekapcsolása előtt kiegyensúlyozzuk.

Magyarázzuk meg, hogyan lehet ezzel a mérleggel tömeget mérni!

Megoldás:

16.17. A KL áramjárta szakaszra hat a Lorentz-erő, amely az ábra szerint a „jobbkéz-szabály" alapján függőlegesen lefelé mutat, nagysága $F = B \cdot I \cdot l$.

Az ismeretlen tömeget a serpenyőbe helyezve, a feszültség változtatásával kiegyensúlyozzuk a mérleget. Mivel a karok egyenlőek, így $m \cdot g = B \cdot I \cdot l$. Ebből $m = \dfrac{B \cdot I \cdot l}{g}$.

A B, I és $l = KL$ mennyiségek megfelelő mérőeszközökkel mérhetők.

16.18. Egy 1200 menetes tekercs belsejében a fluxus egyenletesen változott $2 \cdot 10^{-4}$ V · s-ról $5 \cdot 10^{-4}$ V · s-ra. A folyamat közben a tekercsben 2,4 V feszültség indukálódott.
Mennyi idő alatt játszódott le a jelenség?

Megoldás:

16.18. $N = 1200$; $\Phi_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Vs; $\Phi_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ Vs; $U_i = 2{,}4$ V.
A tekercsben indukciós jelenség játszódik le, amelynek során feszültség indukálódik. Az indukciós törvény alapján: $U_i = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
Ebből behelyettesítéssel adódik, hogy $\underline{\underline{\Delta t = 0{,}15 \text{ s}}}$ (U_i Lenz törvénye alapján negatív).

16.19. Hosszú, egyenes vezetőt helyezünk el a homogén, 0,8 $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ indukciójú mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőlegesen. A vezető 50 cm-es darabjára 6 N erő hat. Mekkora a vezetékben folyó áram erőssége?

Megoldás:

16.19. $B = 0{,}8\ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$; $l = 0{,}5$ m; $F = 6$ N.

Homogén mágneses mezőbe helyezett áramjárta vezetőre erő hat (Lorentz-erő). Ha a vezető merőleges B-re, akkor $F = B \cdot I \cdot l$. Ebből $I = \frac{F}{B \cdot l} = \underline{\underline{15\ \text{A}}}$.

16.20. Homogén mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőleges, 100 cm^2 nagyságú, négyzet alakú felületen a mágneses fluxus 0,005 Vs.
Mekkora erő hat ebben a mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőleges, a keret oldalával párhuzamos, 15 A-es áramot szállító, 10 cm hosszú vezetőre?

Megoldás:

16.20. $A = 10^{-2}$ m^2; $\Phi = 5 \cdot 10^{-3}$ Vs; $I = 15$ A; $l = 0,1$ m.
A vezetőre a Lorentz-féle erő hat, $F = B \cdot I \cdot l$. Az ismeretlen B meghatározható a fluxus definíciójából: $B = \frac{\Phi}{A}$. Így $\underline{F} = \frac{\Phi}{A} \cdot I \cdot l = \underline{0,75 \text{ N}}$.

16.21. Homogén mágneses mezőben egy 0,01 m^2 nagyságú felületen a fluxus 10^{-2} Wb. A felület merőleges az indukcióvonalakra. Ebben a mezőben a 10 cm hosszú, áramot vivő vezetőre 0,5 N erő hat.
Mekkora a vezetőben folyó áram erőssége?

Megoldás:

16.21. $A = 10^{-2}$ m^2; $\Phi = 10^{-2}$ Wb; $l = 0{,}1$ m; $F = 0{,}5$ N.
A jelenség a Lorentz-féle erővel jellemezhető. Lásd az előző feladat megoldását!
Így $I = \frac{F}{B \cdot l}$, de $B = \frac{\Phi}{A}$.
Ezekből $\underline{\underline{I}} = \frac{F \cdot A}{\Phi \cdot l} = \underline{\underline{5\ \text{A}}}$.

16.22. Egy tekercsen 1,5 V feszültség indukálódik, ha a benne folyó áramerősség 0,1 s alatt 5 A-rel csökken. Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

Megoldás:

16.22. $U_i = 1{,}5$ V; $\Delta I = -5$ A; $\Delta t = 0{,}1$ s.

A jelenség önindukció, és a következő törvény írja le:

$U_i = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ (Lenz törvénye alapján az U_i ellentétes az áramerősség változásával.)

Ebből: $\underline{\underline{L = 0{,}03 \text{ H}}}$.

16.23. Egy 0,1 H önindukciójú tekercsben 10 A-es áram folyik. Kikapcsolva az áramforrást, az áram 0,04 s alatt szűnik meg.

Mekkora feszültség indukálódik a tekercsben, ha az áramerősség változását egyenletesnek tételezzük fel?

Megoldás:

16.23. $L = 0{,}1$ H; $\Delta I = -10$ A; $\Delta t = 0{,}04$ s.
A jelenség önindukció. Lásd az előző feladat megoldását!

$$\underline{\underline{U_i}} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \underline{\underline{25\ \text{V}}}.$$

16.24. Homogén mágneses mezőben a 0,01 m^2 keresztmetszetű vezetőkeretre ható maximális forgatónyomaték 0,0045 $N \cdot m$. A vezetőben folyó áramerősség 0,5 A.
Mekkora a mező mágneses fluxusa egy, az indukcióvonalakra merőlegesen elhelyezkedő, 200 cm^2 területű felületen?

Megoldás:

16.24. $A_k = 10^{-2}$ m^2; $M_{max} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ Nm; $I = 0{,}5$ A; $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m^2.
A mező a keretre forgatónyomatékot fejt ki, amely: $M_{max} = B \cdot A_k \cdot I$.
Ebből meghatározható a mező indukciója: $B = 0{,}9$ T.
A fluxus definíció szerint $\underline{\underline{\Phi = B \cdot A = 1{,}8 \cdot 10^{-1}\ \text{Wb}}}$.

16.25. Egy 20 cm hosszú vezetőt $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ állandó sebességgel mozgatunk homogén mágneses mezőben, az indukcióvonalakra merőlegesen.
Mekkora a mező mágneses indukciójának nagysága, ha a vezetőben 1 A erősségű áram folyik és 6 s alatt 0,47 J a munkavégzés?

Megoldás:

16.25. $l = 0{,}2$ m; $v = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $I = 1$ A; $t = 6$ s; $W = 0{,}47$ J.

Az indukált áram munkája – az energiamegmaradás törvénye alapján – egyenlő a mozgató erő mechanikai munkájával.

A mozgató erő egyenlő nagyságú a Lorentz-erővel. Így: $F \cdot s = W$, azaz $B \cdot I \cdot l \cdot s = W$.

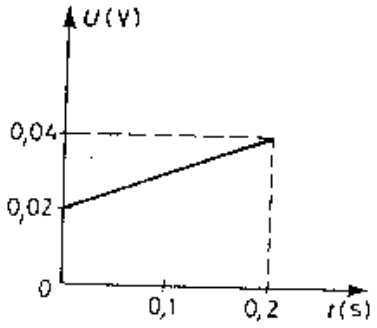
Ebből: $\underline{\underline{B}} = \frac{W}{I \cdot l \cdot s} = \frac{W}{I \cdot l \cdot v \cdot t} = \underline{\underline{0{,}078\ \text{T}}}$.

16.26. A $4 \cdot 10^{-2}$ T indukciójú homogén mágneses mezőben egy 0,5 m hosszú vezetőt mozgatunk $5 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással az indukciós vonalakra merőlegesen.
Mekkora lesz az indukált feszültség értéke 0,2 s múlva, ha a kezdősebesség $1 \frac{m}{s}$ volt?
Ábrázoljuk az indukált feszültséget az idő függvényében!

Megoldás:

16.26. $B = 4 \cdot 10^{-2}$ T; $l = 0{,}5$ m; $a = 5 \frac{m}{s^2}$; $v = 1 \frac{m}{s}$; $t = 0{,}2$ s.

A mozgatás során feszültség indukálódik, amelynek értéke a sebességgel arányosan nő a gyorsuló mozgás miatt. Az indukált feszültség $U = B \cdot l \cdot v$, de $v = v_0 + a \cdot t$, így $U(t) = B \cdot l \cdot (v_0 + a \cdot t)$.
Ennek alapján $U_i(2) = 0{,}04$ V.
A függvény ábrázolása:
Az U a t-nek lineáris függvénye:
$U(t) = B \cdot l \cdot (v_0 + a \cdot t)$.
A függvény képe egyenes:
Ha $t = 0$, akkor $U = 0{,}02$ V. Ha $t = 0{,}2$ s, akkor $U = 0{,}04$ V
A függvény képe egyenes.



16.27. Mekkora áramerősség-változás szükséges ahhoz, hogy egy 4 H önindukciós együtthatójú légmagos tekercsben 0,1 s alatt 60 V feszültség indukálódjon?
Mekkora a tekercs hossza, ha keresztmetszete 25 cm² és menetszáma 4000? $\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}.\right)$

Megoldás:

16.27. $L = 4$ H; $\Delta t = 0{,}1$ s; $U_\mathrm{i} = 60$ V; $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m²; $N = 4000$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}$. $\left(\frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}\right)$.

A jelenség önindukció: $U_\mathrm{i} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Ebből $\Delta I = \underline{\underline{-1{,}5 \text{ A}}}$.

Az I változása negatív, mert a keletkezett feszültség pozitív.

A tekercs önindukciós együtthatója: $L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$ (légmagos tekercs).

Ebből $\underline{\underline{l = 0{,}0126 \text{ m}}}$.

16.28. Mekkora egyenletes sebességgel kell mozgatnunk egy 15 cm hosszú vezetőt a 0,5 T indukciójú homogén mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőlegesen, hogy a vezetőben 2 V feszültség indukálódjon?
Mekkora legyen a sebesség nagysága abban az esetben, ha a mozgatás iránya 60°-os szöget zár be az indukcióvonalakkal?

Megoldás:

16.28. $l = 0{,}15$ m; $B = 0{,}5$ T; $U_i = 2$ V; $\alpha = 90°$, illetve $\alpha = 60°$.
A jelenség mozgási indukció.

$U_i = B \cdot l \cdot v$. Ebből $\underline{\underline{v_a = 26{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ $(\alpha = 90°)$.

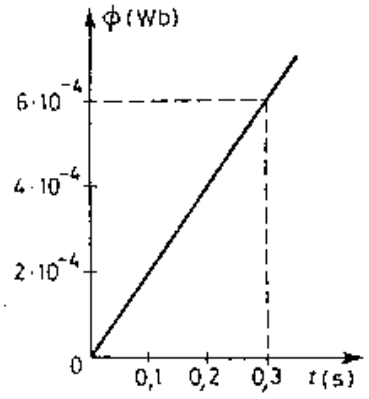
$U_i = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$. Ebből $\underline{\underline{v_b = 30{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ $(\alpha = 60°)$.

16.29. Egy közös vasmagon két tekercs van. Az egyik tekercs fluxusa 0,2 s alatt $2 \cdot 10^{-4}$ Wb-ről $6 \cdot 10^{-4}$ Wb-re változik egyenletesen.
Hány menetes legyen a másik tekercs, hogy abban 4 V feszültség indukálódjon?
Ábrázoljuk a fluxus változását az idő függvényében, ha $t = 0$ időpillanatban $\Delta\Phi = 0$!

Megoldás:

16.29. $U_{sz} = -4$ V; $\Phi_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Wb; $\Phi_2 = 6 \cdot 10^{-4}$ Wb; $\Delta t = 0{,}2$ s.
A jelenség az indukciós törvénnyel magyarázható. Változó mágneses fluxus maga körül örvényes elektromos mezőt létesít: $U_{sz} = -N_{sz} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
Az U_{sz} és az N_{sz} a második (szekunder) tekercsben indukált feszültség, illetve a menetszám.

$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Így a második tekercs menetszáma: $N_{sz} = \frac{U_{sz} \cdot \Delta t}{\Phi_2 - \Phi_1}$.
$N_{sz} = 2000$ (A két tekercsben a fluxusváltozás egyenlő.)



Ábrázolás:
Feltételezzük, hogy a változás egyenletes és $t = 0$ esetén $\Phi = 0$.
Az indukciós törvényből $\Delta\Phi$-t kifejezve:
$\Delta\Phi = \frac{-U_{sz}}{N_{sz}} \cdot t.$
$\Phi - \Phi_0 = \frac{4}{2000} \cdot t = 2 \cdot 10^{-3} \cdot t.$
Ha $\Phi_0 = 0$, akkor $\Phi_t = 2 \cdot 10^{-3} \cdot t$.
Ezt ábrázoltuk.

16.30. A 0,5 T indukciójú homogén mágneses mezőbe egy 20 cm hosszú vezetőt helyezünk az indukcióvonalakra merőlegesen. A vezető közepére egy $10^2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú rugót kapcsolunk úgy, hogy a rugó merőleges legyen a vezetőre és az indukcióvonalakra. Miután a vezetőbe áramot bocsátunk, a rugó 0,5 cm-rel megnyúlik.
Mekkora a vezetőben folyó áram erőssége?

Megoldás:

16.30. $B = 0{,}5$ T; $l = 0{,}2$ m; $D = 10^2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$ m.
A rugó megnyúlását a Lorentz-erő okozta. Az egyensúly beállta után $F_1 = F_r$. (Irányuk ellentétes.) Vagyis: $B \cdot I \cdot l = D \cdot \Delta x$. Ebből $\underline{I} = \frac{D \cdot \Delta x}{B \cdot l} = \underline{\underline{5\ \mathrm{A}}}$.

16.31. Egy tekercs keresztmetszete 4 cm², hossza 10 cm, menetszáma 1000, belsejében a fluxus $2 \cdot 10^{-5}$ Wb.
A tekercs belsejében levegő van.
Mekkora a tekercsben az áramerősség?
$\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}.\right)$

Megoldás:

16.31. $A = 4 \cdot 10^{-4}$ m; $l = 0{,}1$ m; $N = 1000$; $\Phi = 2 \cdot 10^{-5}$ Wb; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$; $\mu_r \approx 1$.

Az áramjárta tekercs belsejében homogén mágneses mező alakul ki, amelynek indukciója: $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$.

A fluxus az A keresztmetszetre $\Phi = B \cdot A$. Ez utóbbi összefüggésből $B = 0{,}05$ T. Ezt felhasználva az első egyenletből $\underline{\underline{I}} = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N} = \underline{\underline{3{,}9 \text{ A}}}$.

16.32. Egy tekercs keresztmetszete 2 cm sugarú kör. A tekercs belsejében a fluxus $8 \cdot 10^{-4}$ Wb.
Mekkora a tekercsben a mágneses indukció?

Megoldás:

16.32. $r = 0{,}02$ m; $\Phi = 8 \cdot 10^{-4}$ Wb. A tekercs belsejében: $\Phi = B \cdot A$, ahol $A = r^2 \cdot \pi$. Így $\underline{\underline{B}} = \dfrac{\Phi}{r^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{0{,}63 \text{ T}}}$.

16.33. Egy magnetométer 4 cm^2-es mérőkeretére $2 \cdot 10^{-5}$ N · m forgatónyomaték hat a $8 \cdot 10^{-2}$ T indukciójú homogén mágneses mezőben. A mérőkeret síkja és a mező mágneses indukciója egymással párhuzamos.

a) Mekkora a keretben folyó áram erőssége?

b) Mekkora az áramerősség abban az esetben, amikor a keret síkja és az indukcióvektor által bezárt szög 30°?

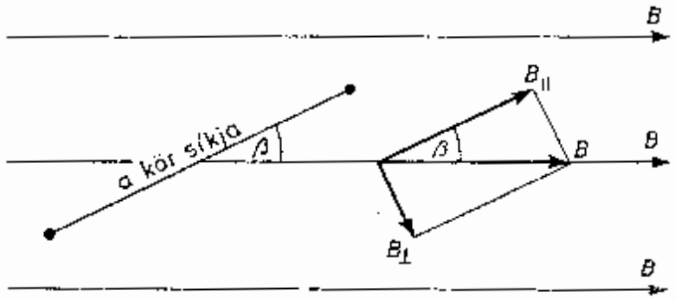
Megoldás:

16.33. $A = 4 \cdot 10^{-4}$ m^2; $M = 2 \cdot 10^{-5}$ Nm; $B = 8 \cdot 10^{-2}$ T.

a) Ha a keret síkja párhuzamos a mező indukciójával, akkor a keret mágneses mezőjének indukcióvektora merőleges a mező indukcióvektorára, így a mező ekkor maximális forgatónyomatékot fejt ki a keretre.

$M_{max} = B \cdot A \cdot I$. Ebből $\underline{I} = \dfrac{M_{max}}{B \cdot A} = \underline{\underline{0{,}625 \text{ A}}}$.

b) $\beta = 30°$.



A $\overline{KL}$–$\overline{MN}$ a mérőkeret síkja.

B_k a keret mezőjének indukcióvektora. Bontsuk fel a mező B vektorát a keret síkjával párhuzamos $B_{\parallel}$ és erre merőleges komponensre ($B_{\perp}$).

Az ábrából adódik, hogy: $B_{\parallel} = B \cdot \cos\beta$; $B_{\perp} = B \cdot \sin\beta$.

Itt a β a keret síkja és a mező indukcióvektora által bezárt szög. A $B_{\parallel}$ indukció komponens $M = B_{\parallel} \cdot I \cdot A$ forgatónyomatékkal hat a keretre. A $B_{\perp}$ indukció komponens nem fejt ki nyomatékot rá, mivel párhuzamos a keret B_k indukcióvektorával.

Így az adott helyzetben a keretre a B indukciójú mező által kifejtett forgatónyomaték: $M = (B \cdot \cos\beta) \cdot A \cdot I = B \cdot A \cdot I . \cos\beta$. Ebből $\underline{\underline{I = 0{,}9 \text{ A}}}$.

Megjegyzés: Ha a keret normálisa – a síkjára merőleges irány – és a mező indukciója által bezárt szög α, akkor az előzőekben leírt forgatónyomaték: $M = B \cdot A \cdot I \cdot \sin\alpha$, mert $\cos\beta = \sin\alpha$. $(\alpha + \beta = 90°)$

16.34. A 10 cm hosszú, 500 menetes tekercsben 0,8 A erősségű áram folyik.
Mekkora az indukció és a mágneses fluxus a tekercs belsejében, ha a vezetéket 2 cm sugarú, belül üres hengerre csévéltük fel?

Megoldás:

16.34. $l = 0{,}1$ m; $N = 500$; $r = 2 \cdot 10^{-2}$ m; $I = 0{,}8$ A.

Áramjárta tekercs belsejében a homogén mágneses mező indukciója:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

A fluxus: $\Phi = B \cdot A = 6{,}3 \cdot 10^{-6}$ Wb.

(B merőleges a keresztmetszetre.)

16.35. A 600 menetű, 20 cm^2 keresztmetszetű tekercs belsejében homogén mágneses mező van, amelynek indukcióvonalai párhuzamosak a tekercs tengelyével. A tekercsben levő mágneses indukciót egyenletesen csökkentjük 0-ra 0,1 s alatt, miközben a tekercs végei között 12 V feszültség indukálódik.
Mekkora volt a tekercsben a mágneses indukció?

Megoldás:

16.35. $N = 600$; $A = 2 \cdot 10^{-3}$ m^2; $\Delta t = 0{,}1$ s; $U_i = 12$ V.

Az indukciós törvény alapján: $U_i = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Ebből: $|\Delta\Phi| = \dfrac{U_i \cdot \Delta t}{N}$.

A fluxusváltozást a tekercs belsejében az indukció csökkenése okozza:
$\Delta\Phi = (\Delta B) \cdot A$.
Ebből $|\Delta B| = 1$ T.
Mivel az indukció 0-ra csökken: $B = |\Delta B| = \underline{\underline{1\ \text{T}}}$.

16.36. Az 1,2 T indukciójú homogén mágneses mező indukcióvonalaira merőleges síkban elhelyeztünk egymástól 40 cm távolságra két vezető sínt, melyek egyik végét egy 10 Ω-os ellenállással kötöttük össze. A sínekre merőlegesen keresztülfektetett rézrudat 0,1 s alatt 20 cm-rel egyenletesen mozdítottuk el a sínek mentén.
Mekkora áram folyik az áramkörben, ha a sínek és a rézrúd ellenállásától eltekintünk?

Megoldás:

16.36. $B = 1{,}2$ T; $l = 0{,}4$ m; $R = 10\ \Omega$; $\Delta t = 0{,}1$ s; $\Delta s = 0{,}2$ m.
A jelenség mozgási indukció. Az áramkör a síneken az ellenálláson és a rézrúdon keresztül zárt. A rézrúd két végpontja között feszültség indukálódik a mozgatás ideje alatt: $U_i = B \cdot l \cdot v$, ahol $v = \frac{s}{t} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ezt felhasználva: $U_i = 0{,}96$ V.
Ugyanennyi a 10 Ω-os ellenállás végpontjai között is a feszültség, mert végpontjai azonos potenciálúak a rézrúdéval. (A többi vezető ellenállása ugyanis elhanyagolható.)
Így az áram: $I = \frac{U}{R} = \underline{0{,}096\ \text{A}}$. (Ohm törvénye vezető szakaszra.)

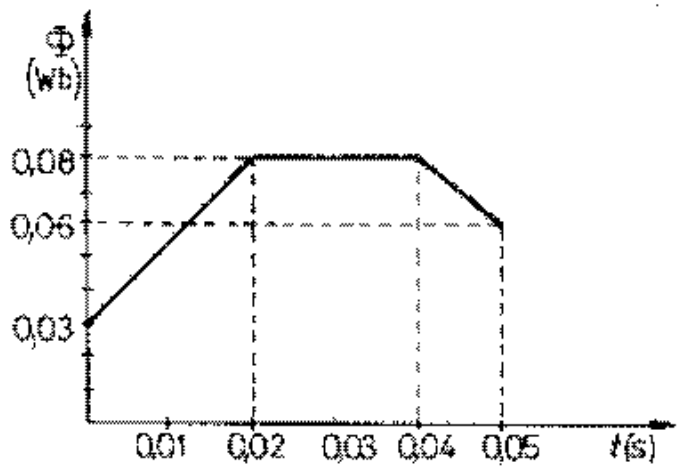
16.37. Egy repülőgép 360 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel repül vízszintes síkban. Szárnyainak szélső pontjai 50 m-re vannak egymástól. Mekkora a gép szárnyvégei között indukált feszültség, ha a Föld mágneses mezőjének függőleges összetevője $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ T?

Megoldás:

16.37. $U_i = 0{,}1$ V; $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $l = 50$ m; $B = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

A jelenség mozgási indukció, és a sebesség merőleges a megadott indukcióra. Így $\underline{\underline{U_i}} = B \cdot l \cdot v = \underline{\underline{0{,}1 \text{ V}}}$.

16.38. Az ábrán egy 1200 menetes tekercs belsejének mágneses fluxusát ábrázoltuk az idő függvényében.



Ábrázoljuk a tekercs végei között indukált feszültséget az idő függvényében!

Megoldás:

16.38. $N = 1200$.

1. szakasz: A Φ lineárisan nő t függvényében, így az indukált feszültség állandó lesz a (0–0,02) s időszakaszon

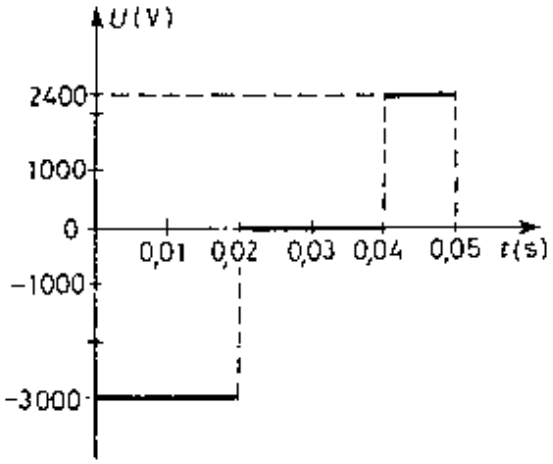
$$U_1 = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1200 \cdot \frac{0{,}08\ \text{Wb} - 0{,}03\ \text{Wb}}{0{,}02\ \text{s} - 0\ \text{s}} = -3000\ \text{V}.$$

2. szakasz: A Φ időben nem változik, $\Delta\Phi = 0$. Így $U_2 = 0$ a (0,02–0,04) s időszakaszon.

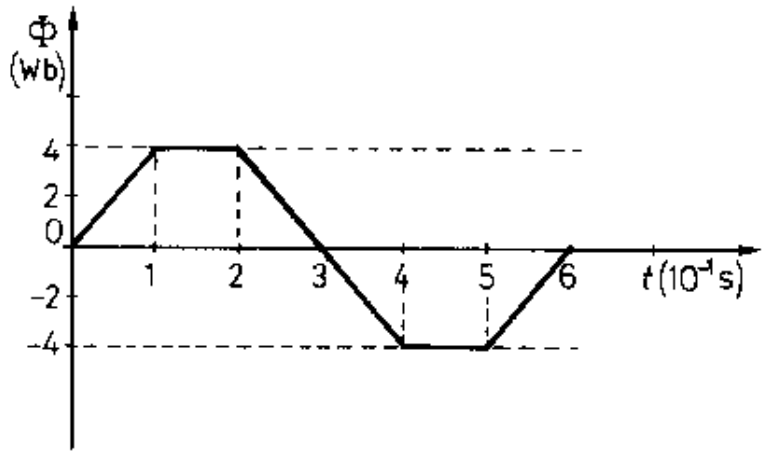
3. szakasz: A Φ arányosan csökken t függvényében, így U szintén állandó lesz a (0,04–0,05) s időszakaszon.

$$U_B = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1200 \cdot \frac{0{,}06\ \text{Wb} - 0{,}08\ \text{Wb}}{0{,}05\ \text{s} - 0{,}04\ \text{s}} = 2400\ \text{V}.$$

Ábrázolás:



16.39. Az ábra egy vezetőkereten áthaladó fluxust mutat az idő függvényében.



a) Ábrázoljuk a vezetőkeretben indukálódott feszültséget az idő függvényében!

b) Zárjuk a 25 Ω ellenállású vezetőkeretet! Ábrázoljuk a vezetőkeretben folyó áramerősséget az idő függvényében, ha a fluxus időfüggése az előzővel azonos!

Megoldás:

16.39. A feladat megoldásának elve az előző feladatéval azonos, csak $N = 1$. Így $U = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

A fentiek alapján:

$U_1 = -40$ V, a (0–0,1) s időintervallumban a $\Delta\Phi = 4$ Wb;

$U_2 = 0$ V, a (0,1–0,2) s időszakaszon a $\Delta\Phi = 0$ Wb;

$U_3 = 40$ V, a (0,2–0,4) s időszakaszon a $\Delta\Phi = -8$ Wb;

$U_4 = 0$ V, a (0,4–0,5) s időszakaszon a $\Delta\Phi = 0$ Wb;

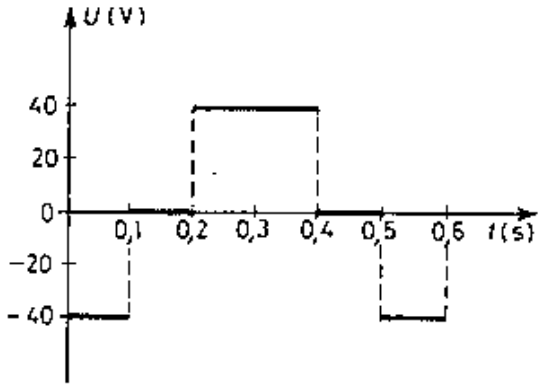
$U_5 = -40$ V, a (0,5–0,6) s időszakaszon a $\Delta\Phi = 4$ Wb.

Ugyanezen szakaszokon az áramerősség Ohm törvénye alapján: $I = \dfrac{U}{R}$.

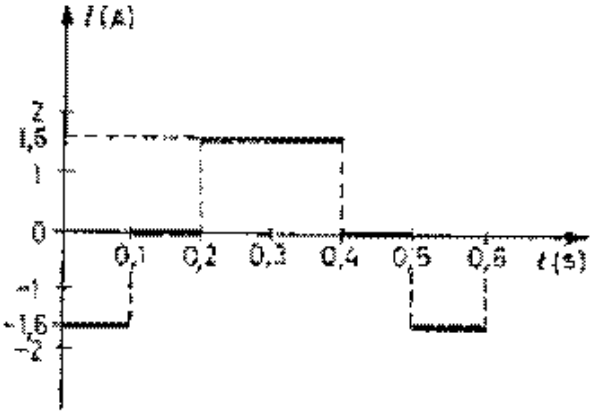
Tehát: $I_1 = -1{,}6$ A; $I_2 = 0$ A; $I_3 = 1{,}6$ A; $I_4 = 0$ A; $I_5 = -1{,}6$ A.

Ábrázolás:

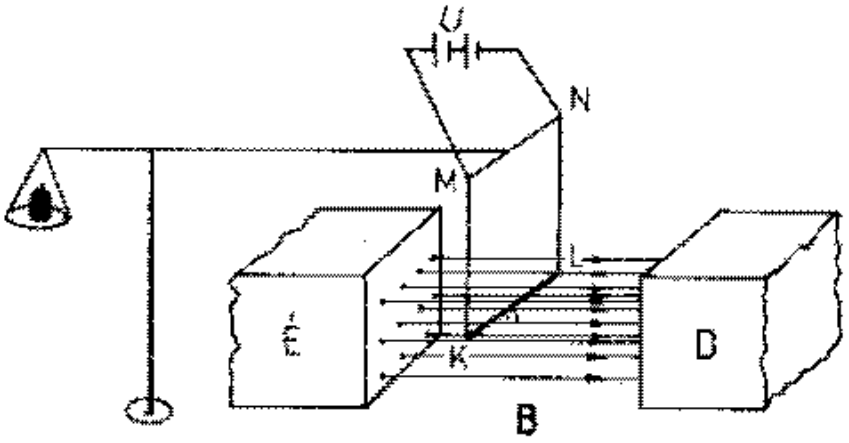
a)



b)



16.40. Az ábrán látható mérleget kiegyensúlyoztuk az áram bekapcsolása előtt. Bekapcsolás után a serpenyőbe 5 g tömegű testet helyezünk, hogy a mérleg ismét egyensúlyban legyen. Az MN szakasz szigetelő, és a mérleg serpenyő felőli karja kétszer akkora, mint a másik. A mágneses indukció mindenütt 1 T és iránya vízszintes. A vezetőnek a mágneses mezőben lévő KL szakasza 5 cm hosszú, merőleges az indukcióvonalakra és vízszintes.



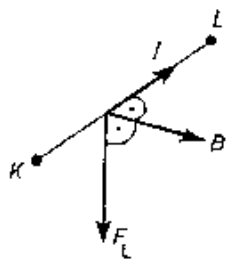
Milyen irányú áram folyik a vezetőben és mekkora ennek a nagysága?

Megoldás:

16.40. $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg; $B = 1$ T; $l = \overline{KL} = 5 \cdot 10^{-2}$ m.

A mérleg működésének elvét lásd a 16.17. feladat megoldásában.

Egyensúly esetén a Lorentz-erő és a test súlyának forgatónyomatéka egyenlő, de ellentétes irányú.



$F_L \cdot k = m \cdot g \cdot 2k$, azaz $B \cdot I \cdot l \cdot k = m \cdot g \cdot 2k$, ahol k és $2k$ az erőkarok. (Az ábrán ezek aránya nem mérvadó.)

Az egyensúlyi feltételből: $\underline{I} = \dfrac{2 \cdot m \cdot g}{B \cdot l} = \underline{\underline{2\ \text{A}}}$, iránya K-tól L felé mutat.

16.41. Egy vízszintes irányú homogén mágneses mezőben négyzet alakú vezetőkeretet helyezünk el úgy, hogy a keret síkja függőleges és két szemközti oldala párhuzamos az indukcióvonalakkal. A vezetőkeret a négyzet szemközti oldalainak felezőpontján átmenő, függőleges tengely körül forog-hat és benne 2 A-es áram folyik.
Mekkora forgatónyomaték hat ebben a helyzetben a keretre, ha a négyzet oldalai 20 cm hosszúak és a mező indukciójának nagysága 2 T?

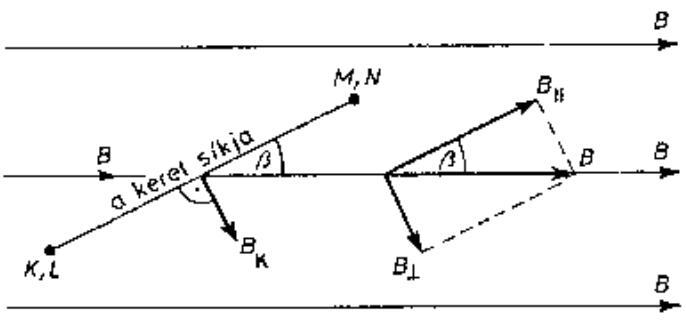
Megoldás:

16.41. $B = 2$ T; $I = 2$ A; $l = 0{,}2$ m.
A keret síkja a szövegben leírtak alapján függőleges, de párhuzamos az indukcióvonalakkal. Ekkor a mező maximális forgatónyomatékot fejt ki rá.
$\underline{M} = B \cdot A \cdot I = \underline{0{,}16 \text{ Nm}}$. (Lásd a 16.33. feladat a) pontját.)

16.42. Egy homogén mágneses mezőben – amelyben az indukcióvektor 0,6 T nagyságú és vízszintes irányú – egy kör alakú vezetőt helyezünk el úgy, hogy a kör síkja az indukcióvektorral 30°-os szöget zár be.
Mekkora a körre vonatkozó fluxus, ha a kör sugara 10 cm?

Megoldás:

16.42. $\Phi = 9{,}42 \cdot 10^{-3}$ Wb; $B = 0{,}6$ T; $\beta = 30°$; $r = 0{,}1$ m.



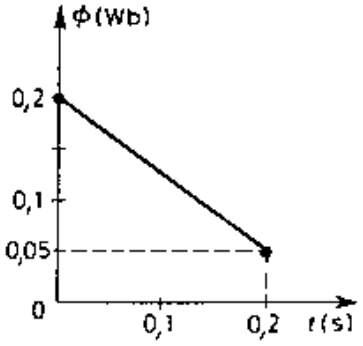
A mező indukcióvektora felbontható a felületre merőleges, illetve párhuzamos összetevőkre.
A fluxus szempontjából a $B_{\perp}$ összetevő vehető figyelembe.

$B_{\perp} = B \cdot \sin\beta$. Így $\underline{\underline{\Phi}} = B_{\perp} \cdot A = B \cdot \sin\beta(r^2 \cdot \pi) = \underline{\underline{9{,}42 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}}}$.

16.43. Egy 0,5 m^2 felületű vezetőkeret síkja merőleges a 0,4 T nagyságú mágneses indukcióval rendelkező homogén mágneses mező indukcióvonalaira.
Ábrázoljuk a vezetőkeretre vonatkozó fluxust az idő függvényében, ha a keret felületét 0,2 s alatt egyenletesen a negyedére csökkentjük!

Megoldás:

16.43. $A_1 = 0{,}5\ m^2$; $B = 0{,}4$ T; $\Delta t = 0{,}2$ s; $A_2 = 0{,}125\ m^2$.
Ha $t = 0$, akkor $\Phi_1 = B \cdot A_1 = 0{,}2$ Wb, ha $t = 0{,}2$ s, akkor $\Phi_2 = B \cdot A_2 = 0{,}05$ Wb.
Ha a csökkenés egyenletes, akkor a $\Phi(t)$ függvény lineáris.

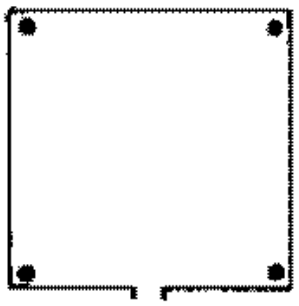


16.44. Homogén mágneses mezőben egy négyzet alakú vezetőkeretet a négyzet szemközti oldalainak felezőpontján átmenő tengely körül egyenletesen forgatunk. A tengely merőleges az indukcióvonalakra.
Mekkora a kerületi sebessége a tengellyel párhuzamos oldalaknak, ha a mező mágneses indukciójának nagysága 10^{-1} T, a négyzet oldalai 20 cm hosszúak és a keretben indukálódott feszültség maximális értéke $4 \cdot 10^{-1}$ V?

Megoldás:

16.44. $B = 10^{-1}$ T; $l = 0{,}2$ m; $U_{max} = 0{,}4$ V.
A jelenség mozgási indukció. Feszültség az indukcióvonalakra merőleges, két 20 cm-es vezetődarabban indukálódik, és ezek egyirányú áramot hoznak létre. (Lásd a 17.4. feladat F pontját.) Ezekből következik, hogy az indukált feszültségek összeadódnak. A feszültség akkor maximális, ha a v merőleges B-re. Ekkor $U_{max} = B \cdot l \cdot v$. A két feszültség együtt: $U_{max} = 2 \cdot B \cdot l \cdot v$.
Ebből $\underline{\underline{v = \frac{U_{max}}{2 \cdot B \cdot l} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

16.45. Egy 0,8 m hosszú, rugalmas acélhuzalt az ábrán látható módon, négy darab szöggel, négyzet alakúra feszítünk ki. A négy szöget elvéve, a négyzetből kör alakú vezető lesz. Mekkora feszültség indukálódik ezalatt a vezetőben, ha a kör 1 s alatt alakul ki egy olyan, $4 \cdot 10^{-1}$ T indukciójú homogén mágneses mezőben, amelynek iránya merőleges a négyzet, illetve a kör síkjára?
(A területváltozást egyenletesnek tételezzük fel.)



Megoldás:

16.45. $l = 0{,}8$ m; $\Delta t = 1$ s; $B = 0{,}4$ T; $N = 1$.
A jelenség olyan indukció, ahol a fluxus változását a felület növekedése okozza. Ugyanis mint a számításokból kitűnik, ugyanolyan kerületű négyzet és kör területe közül ez utóbbi a nagyobb. Mivel Φ nő, így az indukált feszültség negatív.

$\Phi_1 = B \cdot A_1 = B \cdot a^2 = 0{,}016$ Wb. (A négyzet esetén $a = \frac{l}{4}$.)

$\Phi_2 = B \cdot A_2 = B \cdot r^2 \cdot \pi = 0{,}020$ Wb. (A kör esetén $r = \frac{l}{2\pi}$.)

A fentieket felhasználva: $\underline{\underline{U_L = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -4{,}36 \cdot 10^{-3}\ \text{V}}}$, ahol $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$.

16.46. A 0,2 T indukciójú, homogén mágneses mezőbe egy elektron $10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel lép be, az elektron sebességének iránya az indukcióvonalakkal 45°-os szöget zár be.

a) Mekkora erő hat az elektronra?

b) Milyen alakú lesz az elektron pályája a homogén mágneses mezőben? Miért?

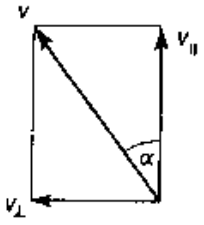
c) Mekkora az elektronra ható erő egy $10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ térerősségű elektromos mezőben, ha az elektron ismét $10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú, az erővonalakkal 45°-os szöget bezáró sebességgel mozog?

Megoldás:

16.46. $B = 0{,}2\ \text{T}$; $v = 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha = 45°$; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$; $E = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

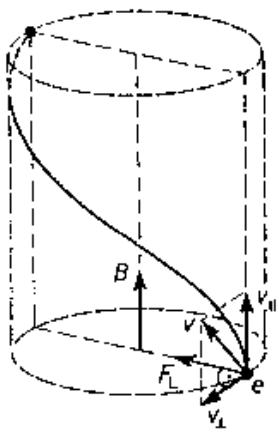
a) Az elektronra mint mozgó töltésre a mágneses mezőben a Lorentz-erő hat.

$F_L = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin\alpha$, ahol α a v és B által bezárt szög. Az adatokat beírva adódik az $\underline{\underline{F_L = 2{,}26 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}}$ eredmény.



b) A 16.6. feladatban tárgyaltuk, hogy ha az elektron sebessége merőleges a homogén mező indukcióvonalaira, akkor az elektron az indukcióvonalakra merőleges síkban egyenletes körmozgást végez. A centripetális erő a Lorentz-erő.

Ha az elektron v sebessége nem merőleges a B-re, akkor a v felbontható egy B-re merőleges ($v_\perp$) és egy B-vel párhuzamos ($v_\parallel$) összetevőre. Lásd az ábrát!



Az elektronra így is a Lorentz-féle erő hat, amelyet csak a $v_\perp$ befolyásol: $F_L = B \cdot Q_e \cdot v_\perp = B \cdot Q_e \cdot v \cdot \sin\alpha$. Csupán ezt figyelembe véve az elektron egyenletes körmozgást végezne. Mivel az elektron rendelkezik egy $v_\parallel$ összetevővel is – $v_\parallel = v \cdot \cos\alpha$ –, így a képzelt körpálya síkjára merőlegesen is elmozdul, egyenletes sebességgel. A két mozgás eredője egy csavarvonal lesz.

A pálya spirális lesz, ami egy körhenger felületén állandó emelkedésű csavarvonal.

c) Elektromos mezőben minden töltésre $F = E \cdot Q$ nagyságú erő hat, a mozgástól függetlenül. Így $\underline{\underline{F = E \cdot Q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}}$. Iránya az erővonalakkal ellentétes irányú, az elektron negatív töltése miatt.

16.47. Egy tekercs belsejében lágyvasmagnál a mágneses indukció 0,3 T. A tekercsben folyó áram 0,2 A, a tekercs menetszáma 150, hossza 10 cm.
Mekkora a relatív permeabilitás?
$\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}.\right)$

Megoldás:

16.47. $B = 0{,}3$ T; $I = 0{,}2$ A; $N = 150$; $l = 0{,}1$ m.
Ha a tekercs belsejében nem levegő vagy vákuum van, akkor az áram hatására kialakult mágneses indukció jelentősen megnő: $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$. Ebből $\underline{\underline{\mu_r = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N \cdot I} = 795}}$.
A μ_r a relatív permeabilitás, amely megmutatja, hogy hányszorosára növekszik az indukció lágyvas esetén a vákuumbelihez képest.

16.48. Egy tekercs induktív ellenállása az 50 Hz-es hálózatban 40 Ω.
Mekkora lesz a tekercs induktív ellenállása a 60 Hz-es áramkörben?

Megoldás:

16.48. $f_1 = 50$ Hz; $f_2 = 60$ Hz; $X_{L_1} = 40\ \Omega$.
Az első tekercs induktív ellenállása: $X_{L_1} = L \cdot \omega_1 = L \cdot 2\pi \cdot f_1$. (Lásd a Váltakozó áramok c. fejezet bevezetőjében.)
Ebből $L = \dfrac{X_{L_1}}{2\pi \cdot f_1} = 0{,}127$ H.
Mivel L állandó, a második tekercsre: $\underline{\underline{X_{L_2}}} = L \cdot 2\pi \cdot f_2 = \underline{\underline{48\ \Omega}}$.

16.49. Homogén mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőleges tengely körül egyenletesen forog egy vezetőkeret. Hány fokos elfordulásnál lesz a vezetőkeretben indukált feszültség pillanatnyi értéke egyenlő az effektív értékkel? (Az elfordulás szögét a vezetőkeret síkjának és a mágneses indukciónak a párhuzamos helyzetéből számítsuk!)

Megoldás:

16.49. A jelenség a váltakozó áram mozgási indukción alapuló előállítása. (Lásd a következő fejezet bevezetőjét.) Ekkor: $U = B \cdot L \cdot v \cdot \sin\alpha = U_{max} \cdot \sin\alpha$. Ebben α a keret síkjának elfordulási szöge, ha induláskor a sík merőleges az indukcióvonalakra. A felírt összefüggésből látható, hogy ha $\alpha = 0$, akkor $U = 0$. (Ebben a pillanatban v párhuzamos B-vel.) Ha azonban az induláskor a keret síkja párhuzamos B-vel, akkor v merőleges B-re, így az indukált feszültség maximális. Az α ekkor 0. Tehát az indukált feszültséget az $U = U_{max} \cdot \sin(\alpha + 90°)$ összefüggés adja helyesen. (Ha $\alpha = 0$, akkor $\sin(\alpha + 90°) = 1$ és $U = U_{max}$.)

A feszültség effektív értéke: $U_{eff} = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ (lásd a következő fejezet bevezetőjét.)

A feladat szerint: $U_{eff} = U$, azaz $\dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}} = U_{max} \cdot \sin(\alpha + 90°)$. Ebből $\sin(\alpha + 90°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Tehát: $\alpha + 90° = 45° + k \cdot 360°$, azaz $\alpha = -45° + k \cdot 360°$.

Vagy $\alpha + 90° = 135° + k \cdot 360°$, azaz $\underline{\underline{\alpha = 45° + k \cdot 360°}}$.

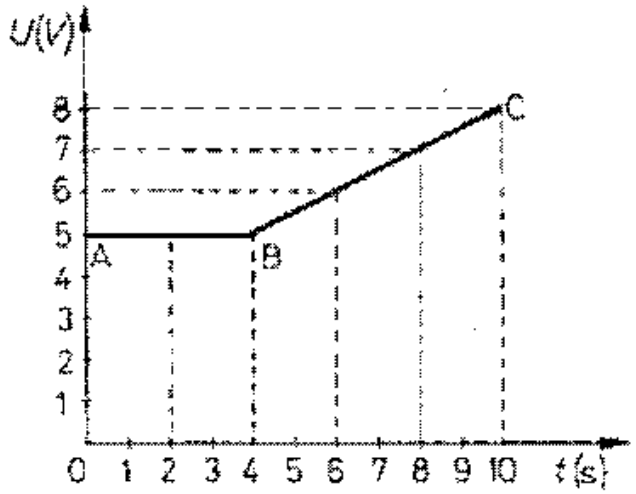
16.50. Egy 0,05 m² területű vezetőkeretet helyezünk homogén mágneses mezőbe úgy, hogy a keret síkja párhuzamos legyen az indukcióvektorral. A keretet 0,02 s alatt 90°-kal elforgatjuk úgy, hogy a keret síkja merőleges legyen az indukcióvektorra. A forgatás közben indukált átlagos feszültség 0,5 V.
Mekkora a mező mágneses indukciója?

Megoldás:

16.50. $A = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $t = 0{,}02$ s; $\Delta\alpha = 90°$; $U_{átl} = 0{,}5$ V; $N = 1$.
Kezdő helyzetben a $\Phi_1 = 0$, mert B párhuzamos a keret síkjával. A felületen így nem megy át indukcióvonal. A 90°-os elfordulás után B merőleges a keret síkjára.
Így: $\Phi_2 = B \cdot A$.
A Φ változásának abszolút értéke: $|\Delta\Phi| = B \cdot A$.
Ebből: $B = \frac{|\Delta\Phi|}{A}$.

Másrészt a lejátszódott indukciós jelenség miatt: $U = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Ebből
$|\Delta\Phi| = \frac{U \cdot \Delta t}{N} = 0{,}01$ Wb.
Ezt a $B = \frac{|\Delta\Phi|}{A}$-ba helyettesítve: $\underline{\underline{B = 0{,}2\ \text{T}}}$.

16.51. Egy homogén mágneses mezőben, amelynek indukciója 3 T, az indukcióvonalakra merőlegesen mozgatunk egy 0,5 m hosszú vezetőt. Az ábrán a vezetőben indukált feszültséget ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Hogyan mozog a vezető az AB, illetve a BC szakaszokon?

b) Mekkora a vezető sebessége a 3. és a 6. s-ban?

Megoldás:

16.51. $B = 3$ T; $l = 0{,}5$ M.

a) A jelenség mozgási indukció, amelyre igaz, hogy $U = B \cdot l \cdot v$. (A B és l mindenütt állandó.)
Ha U állandó – mint az AB szakaszon –, akkor v is csak állandó lehet. Ha U lineárisan nő az idő függvényében – mint a BC szakaszon –, akkor v-nek is így kell változnia. Tehát $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{állandó}$, azaz $a = \text{állandó}$.

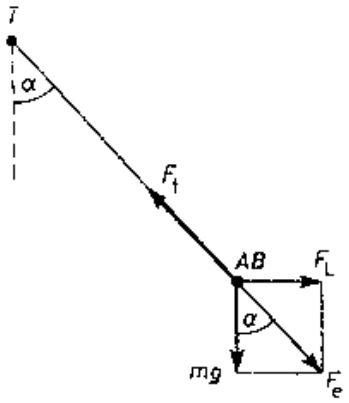
b) Az AB szakaszon minden pillanatban állandó a sebesség.
$U = B \cdot l \cdot v$. Ebből $v = \frac{U}{B \cdot l}$. Az AB szakaszon $U = 5$ V.
Ekkor $\underline{\underline{v = 3{,}33 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

A BC szakaszon az $U = 6$ V, ha $t = 6$ s. Így $\underline{\underline{v = \frac{U}{B \cdot l} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

16.52. Homogén mágneses mezőben egy 10 cm hosszú, árammal átjárt vezetőt függesszünk két végpontjánál egy-egy szigetelő fonálra. A vezető merőleges az indukcióvonalakra, amelyek függőlegesen lefelé mutatnak.
Mekkora szöget zárnak be a függőlegessel a szigetelő fonalak, ha a vezető tömege 20 g, a benne folyó áram erőssége 2 A, a mágneses indukció nagysága $4 \cdot 10^{-1}$ T?

Megoldás:

16.52. $l = 0{,}1$ m ; $m = 2 \cdot 10^{-2}$ kg; $I = 2$ A; $B = 4 \cdot 10^{-1}$ T.
Az árammal átjárt vezetőre a Lorentz-erő hat, amely merőleges a B-re és a vezetőre egyaránt. Egyensúly esetén az ábrán látható három erő, a F_L, $m \cdot g$, F_f erők eredője 0.



Ez úgy lehetséges, ha a fonálerő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú az F_L és az $m \cdot g$ eredőjével (F_e).
Az ábrán az AB az áramjárta vezető. A vektorháromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_L}{m \cdot g} = \frac{B \cdot I \cdot l}{m \cdot g}; \quad \underline{\underline{\alpha = 21{,}8°}}.$$

16.53. Egy 200 menetes tekercsben az áramerősség 10 A-ról egyenletesen csökken zérusra 0,05 s alatt. Eközben a tekercs belsejében elhelyezett, 10 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú vezetőkeretben $4 \cdot 10^{-3}$ V feszültség indukálódik. Milyen hosszú a tekercs, ha a vezetőkeret síkja az indukcióvonalakra merőleges? $\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}.\right)$

Megoldás:

16.53. $N = 200$; $\Delta I = -10$ A; $a = 0{,}1$ m; $U_\mathrm{i} = 4 \cdot 10^{-3}$ V: $N_1 = 1$; $\Delta t = 0{,}05$ s.

Miközben a tekercsben az áram nullára csökken, a belsejében indukció, ill. fluxusváltozás jön létre, és ez a keretben feszültséget indukál.

A keretben az indukált feszültség: $U_\mathrm{i} = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Ebből $\Delta\Phi = -2 \cdot 10^{-4}$ Wb.

Ezt a fluxusváltozást a tekercs indukciójának változása okozta, így $\Delta\Phi = A \cdot \Delta B$, ahol $A = a^2$. Ebből $\Delta B = -0{,}02$ T.

Ugyanez az indukcióváltozás a tekercsben: $\Delta B = \mu_0 \frac{N \cdot \Delta I}{l}$. Ebből $l = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot \Delta I}{\Delta B} = \underline{\underline{0{,}126 \text{ m}}}$.

16.54. Egy homogén mágneses mezőben – amelynek indukcióvektora függőleges irányú és $8 \cdot 10^{-2}$ T nagyságú –, vízszintes síkban négyzet alakú vezetőkeretet helyezünk el. Az egyik oldal mint tengely körül a keret elforoghat. A négyzet oldalai 20 cm hosszúak. A tengellyel szemközti oldal tömege 100 g, a másik három oldal tömege elhanyagolható.
Mekkora lesz a keretben indukált feszültség értéke akkor, amikor a keretet a fenti helyzetből elengedve, annak síkja az előző helyzettel 90°-os szöget zár be?
(Esés közben az indukált áram a vezető nagy ellenállása miatt elhanyagolható!)

Megoldás:

16.54. $B = 8 \cdot 10^{-2}$ T; $a = 0{,}2$ m; $m = 0{,}1$ kg.
Miközben a keret forog, a tengellyel párhuzamos oldalban a sebességétől függő feszültség indukálódik. $U = B \cdot l \cdot v$.
A legalsó pontban a sebességet kiszámolhatjuk a munkatétellel. A tömeggel rendelkező oldalra minden pillanatban a fonálerő (F_f) és a nehézségi erő ($m \cdot g$) hat.
A fonálerő munkája 0, mert merőleges az elmozdulásra minden pillanatban.
Így $\sum W = \Delta E \cdot m$, azaz $m \cdot g \cdot a = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Ebből $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot a} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
A sebesség ismeretében a legalsó helyzetben az indukált feszültség pillanatnyi értéke: $\underline{\underline{U}} = B \cdot l \cdot v = \underline{\underline{0{,}032 \text{ V}}}$.

16.55. Mekkora a légmagos tekercs keresztmetszete, ha menetszáma 800, hossza 0,4 m és benne a 0,01 s alatti 1,5 A áramerősség-változás hatására 4 V feszültség indukálódik?

$$\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}.\right)$$

Megoldás:

16.55. $N = 800$; $l = 0{,}4$ m; $t = 0{,}01$ s; $\Delta I = 1{,}5$ A; $U_i = 4$ V.

A jelenség önindukció: $U_i = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$.

Ebből $L = \dfrac{U_i \cdot \Delta t}{\Delta I} = 0{,}0267$ H.

A tekercs önindukciós együtthatója a tekercs adataival: $L = \mu_0 \dfrac{N^2 \cdot A}{l}$.

Ebből $\underline{\underline{A}} = \dfrac{L \cdot l}{\mu_0 \cdot N^2} = \underline{\underline{1{,}32 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2}}$.

16.56. Egy 1500 menetes, 10 cm hosszú tekercs belsejébe egy 10 cm^2 keresztmetszetű, 500 menetes tekercset helyezünk. Az 1500 menetes tekercsben az áramerősséget 0,2 A-ról 1,2 A-ra növeljük egyenletesen. Eközben a belső tekercsben $9{,}42 \cdot 10^{-2}$ V feszültség indukálódik.
Mennyi ideig tartott az áramerősség változása?

$$\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A}}.\right)$$

Megoldás:

16.56. $N_1 = 1500$; $l_1 = 0{,}1$ m; $A_2 = 10^{-3}$ m^2; $N_2 = 500$; $\Delta I_1 = 1$ A; $U_2 = 9{,}42 \cdot 10^{-2}$ V.
Ha a külső (1. számú) tekercsben változtatjuk az áramerősséget, akkor a tekercs belsejében indukcióváltozás, illetve fluxusváltozás következik be. Ez az indukciós törvény értelmében a belső tekercsben (2. számú) feszültséget hoz létre:

$U_2 = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Ebből $\Delta t = \frac{N_2 \cdot \Delta\Phi}{U_2} = \frac{N_2 \cdot A_2 \cdot \Delta B}{U_2}$.

Az indukcióváltozást az első tekercsből határozhatjuk meg a $\Delta B = \mu_0 \frac{N_1 \cdot \Delta I_1}{l_1}$ összefüggésből.

Ezt az előző egyenletbe helyettesítve: $\underline{\underline{\Delta t}} = \frac{N_2 \cdot A_2 \cdot \mu_0 . N_1 . \Delta I_1}{U_2 \cdot l_1} = \underline{\underline{0{,}1 \text{ s}}}$.

16.57. Egy 600 menetes, 15 cm hosszú tekercs belsejében elhelyezünk egy, az előzővel párhuzamos tengelyű, 4 cm átmérőjű, 500 menetes, hengeres tekercset. A külső tekercset feszültségforrásra kapcsoljuk, és egy tolóellenállás alkalmazásával 0,2 s alatt 3 A-ról 6 A-re változtatjuk a rajta átfolyó áram erősségét.

Mekkora feszültség indukálódik az áramerősség változása idején a belső tekercsben?

Megoldás:

16.57. $N_1 = 600$; $l_1 = 0{,}15$ m; $d_2 = 0{,}04$ m; $N_2 = 500$; $\Delta I_1 = 3$ A; $\Delta t = 0{,}2$ s.

A jelenség az előző feladatban leírtakkal azonos, és a végeredményre kapott $\Delta t = \dfrac{N_2 \cdot A_2 \cdot \mu_0 \cdot N_1 \cdot \Delta I_1}{U_2 \cdot l_1}$ összefüggésből az

$$\underline{\underline{U_2}} = \frac{N_2 \cdot A_2 \cdot \mu_0 \cdot N_1 \cdot \Delta I_1}{l_1 \cdot \Delta t_1} = \underline{\underline{0{,}0473 \text{ V}}},$$

ahol $A_2 = \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = 1{,}256 \cdot 10^{-3}$ m^2.

16.58. Egy tekercs önindukciós együtthatója $2 \cdot 10^{-3}$ H, keresztmetszete $4 \cdot 10^{-3}$ m² és meneteinek száma 1000. $\left(\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}.\right)$
Mekkora a tekercs hossza?

Megoldás:

16.58. $L = 2 \cdot 10^{-3}$ H; $A = 4 \cdot 10^{-3}$ m²; $N = 1000$.

A tekercs önindukciós együtthatója: $L = \mu_0 \frac{N^2 \cdot A}{l}$.

Ebből $l = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{L} = \underline{\underline{2{,}5 \text{ m}}}$.

16.59. Egyenáramú motor 24 V feszültségen üzemel. A motor forgó részét teljesen befékezve, az áramerősség $I_0 = 16$ A-ra növekszik.
Mekkora a motor mechanikai teljesítménye, ha a motor tekercsében folyó áram $I = 8$ A erősségű?

Megoldás:

16.59. $U = 24$ V; $I = 16$ V; $I = 8$ A.
A forgó motorban azért folyik kisebb áram, mint az állóban, mert forgás közben – Lenz törvénye szerint – az eredetivel ellentétes áram indukálódik. Ugyanez igaz a feszültségekre is. Így a forgó motorra a lecsökkent feszültség:

$$(*) \qquad U - U_i = R_b \cdot I,$$

ahol R_b a motor belső ellenállása és I a lecsökkent, forgás közben mérhető áramerősség.
R_b-t meghatározhatjuk az álló motorra felírt Ohm törvényéből: $R_b = \frac{U}{I_0} = 1{,}5\ \Omega$.
Az U_i értékét a $(*)$ egyenletből kifejezve számolhatjuk ki: $U_i = U - R_b \cdot I = 12$ V.
A motor által felvett összteljesítmény – felhasználva a $(*)$ összefüggésből, hogy $U = U_i + R_b \cdot I$ – a következő:
$P = U \cdot I = (U_i + R_b \cdot I) \cdot I = U_i \cdot I + I^2 \cdot R_b$.
Ebből a $P_v = I^2 \cdot R_b$ a veszteségi teljesítmény, mert az általa végzett munka Joule hővé alakul.
A hasznos teljesítmény: $\underline{\underline{P_h}} = U_i \cdot I = 12\ \text{V} \cdot 8\ \text{A} = \underline{\underline{96\ \text{W}}}$, ugyanis ez végez hasznos mechanikai munkát.

16.60. Vízszintesen fekvő, párhuzamos fémsíneken, azokra merőlegesen egy 0,2 m hosszú fémrúd fekszik, majd nyugalomból elindulva, egyenletesen gyorsuló mozgást végez úgy, hogy 0,05 s alatt 1 méteres utat tesz meg. Függőlegesen, a sínek síkjára merőlegesen $B = 0{,}3\ \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}}$ indukciójú homogén mágneses mező van.

a) Írjuk fel a fémrúd végei között indukálódó feszültség időfüggését a 0–0,05 s időtartamra!

b) Írjuk fel az áram időfüggését, ha a sínpárt egy 2 μF kapacitású kondenzátorral zárjuk!

Megoldás:

16.60. $l = 0{,}2$ m; $t = 0{,}05$ s; $s = 1$ m; $B = 0{,}3$ T: $C = 2 \cdot 10^{-6}$ F.

a) A jelenség mozgási indukció. A rúdban indukálódó feszültség a v-vel együtt változik: $U = B \cdot l \cdot v$.

A rúd gyorsuló mozgást végez, így $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Ebből $a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = 800\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$.

A gyorsuló mozgás pillanatnyi sebessége $v = a \cdot t = 800$ t. Tehát az indukált feszültség az idő függvényében: $\underline{\underline{U_i(t) = B \cdot l \cdot a \cdot t = 48 \cdot t}}$.

b) A kondenzátor mindig az indukált feszültség értékével egyenlő feszültségre töltődik fel, amely állandóan növekszik.

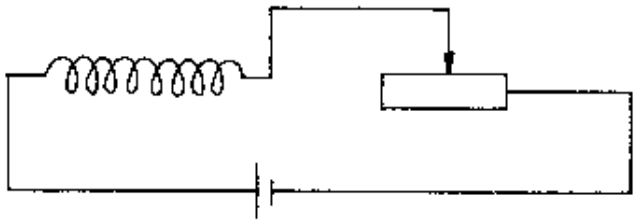
A kondenzátor töltőárama: $\underline{\underline{I}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{C \cdot \Delta U}{\Delta t} = \frac{C \cdot B \cdot l \cdot \Delta v}{\Delta t} =$

$= C \cdot B \cdot l \cdot a = \underline{\underline{9{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}}}$.

Itt felhasználtuk, hogy $\Delta Q = C \cdot \Delta U$, $\Delta U = B \cdot l \cdot \Delta v$, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Tehát az áram időtől független, állandó erősségű, ha a feszültség az idővel egyenes arányban nő.

16.61. Teleppel létesített egyenáramú körben sorosan kapcsoltunk egy veszteséges – azaz saját ohmos ellenállással bíró – önindukciós tekercset és egy változtatható ellenállást. Ennek az ellenállásnak a nagyságát úgy változtatjuk, hogy az áramkörben az áramerősség az idővel arányosan változzon. Kezdetben ismert nagyságú áram folyik az áramkörben.



a) Adjuk meg a tekercs végein a feszültséget mint az idő függvényét és ábrázoljuk grafikonon a változást, ha növeljük és ha csökkentjük az áram erősségét!

b) Hogyan tudnánk a tekercsen eső feszültségről leválasztani az ohmos feszültséget és csak az önindukciós feszültséget kimutatni?
Készítsünk erre kapcsolási rajzot!
Számadatok: $R = 12\ \Omega$,
$L = 20\ \text{H}$,
$I_0 = 1{,}5\ \text{A}$,
$k = \pm 0{,}2\ \frac{\text{A}}{\text{s}}$ (azaz az áramerősség s-onként $\pm$ 0,2 A-rel változik).

Megoldás:

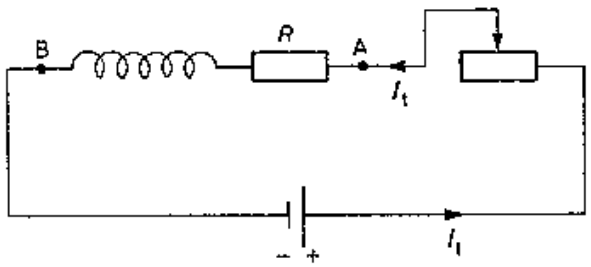
16.61. Ha I_t növekszik: $U_T(t) = 14 + 2{,}4t$, ha $t > 0$ és $U_T = 18$ V, ha $t = 0$.

Ha I_t csökken: $U_T(t) = 22 - 2{,}4t$, ha $t > 0$ és $U_T = 18$ V, ha $t = 0$.

Adatok: $R = 12\ \Omega$; $L = 20$ H: $\frac{\Delta I}{\Delta t} k = \pm 0{,}2\ \frac{\text{A}}{\text{s}}$; $I_0 = 1{,}5$ A.

Megoldás: $I_t = I_0 + k \cdot t$; $U_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

A tekercs ohmos ellenállással rendelkezik. A végein két feszültség, U_R (az ohmos ellenálláson eső feszültség) és az U_i (az önindukciós feszültség) algebrai, előjeles összege jelenik meg. $U_T(t) = U_{AB} = U_R + U_i$.



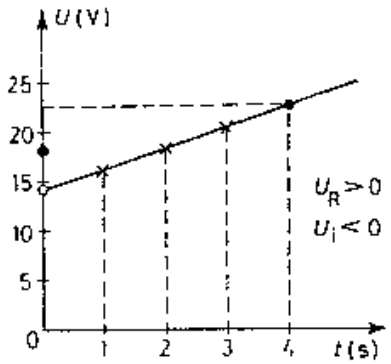
Mivel $I_t = I_0 + k \cdot t$, így $U_T(t) = U_R + U_i = I_t \cdot R - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = (I_0 + k \cdot t)R - L \cdot k$.

1. Ha I növekszik, akkor $\frac{\Delta I}{\Delta t} k = 0{,}2\ \frac{\text{A}}{\text{s}}$, így $U_i = -L \cdot k = -4$ V.

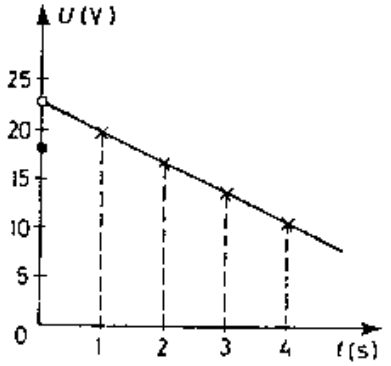
Behelyettesítve az adatokat: $U_T(t) = 14 + 2{,}4t$, ha $t > 0$.

A $t = 0$ pillanatban $I = I_0$, így nincs indukció, tehát: $U_T = U_R = I_0 \cdot R = 18$ V. Ez igaz az áram változtatása előtti időszakra is.

1.



2.

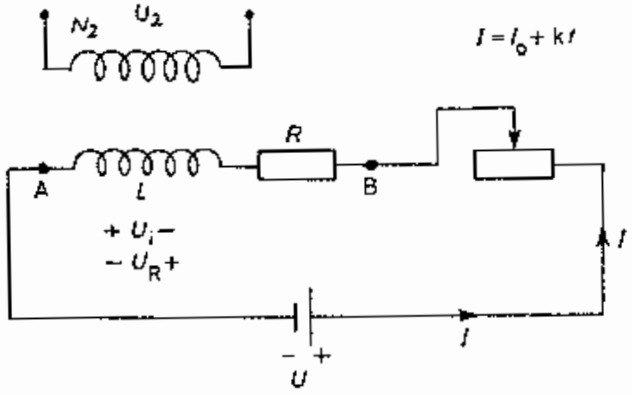


2. Ha I csökken, akkor $\frac{\Delta I}{\Delta t} = k = -0{,}2\ \frac{\text{A}}{\text{s}}$, így $U_i = -L \cdot k = 4$ V.

Behelyettesítve az adatokat: $U_T(t) = 22 - 2{,}4t$, ha $t > 0$.

A $t = 0$ időpillanatra és az áram változtatása előtti időszakra az előző pontban leírtak igazak.

Az első esetben az áram növelésével a feszültség az U értékével hirtelen lecsökken, majd egyenletesen nő. A második esetben ennek ellenkezője történik.



b) Az ohmos feszültség „leválasztása" és csak az indukciós feszültség kimutatása változó áramerősség esetén a következő módon lehetséges:
Az eredeti tekercscsel induktív módon csatolunk egy másik tekercset. Legyen N_1 és L_1 az eredeti tekercs menetszáma, illetve önindukciós együtthatója, N_2 a hozzácsatolt tekercs menetszáma.

R a tekercs ohmos ellenállása.

Az áramkörben lévő tekercsben indukált önindukciós feszültség nagysága: $U_i = L_1 \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$.
Ez a jelenség lényegében a tekercsben lejátszódó fluxusváltozás eredménye, így az indukált feszültség nagysága a nyugalmi indukcióra vonatkozó Faraday törvénye alapján is meghatározható. $U_i = N_1 \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$.
Innen: $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{U_i}{N_1}$. Ez a fluxusváltozás az induktív csatolással kapcsolt tekercsben $U_2 = N_2 \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ feszültséget indukál. Ide beírva az előzőekben kifejezett $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{U_i}{N_1}$ összefüggést, U_2-re a következőt kapjuk:
$U_2 = N_2 \cdot \frac{U_i}{N_1}$

Ha $N_1 = N_2$, akkor $U_2 = U_i$, azaz a második tekercsen éppen az indukált feszültséget kapjuk.

17.1. *Válasszuk ki a* HIBÁS *összefüggéseket!*

A képletek egy sorosan kapcsolt tekercsből, kondenzátorból és ohmos ellenállásból álló váltakozó áramú körre vonatkoznak.

A) $Z = \frac{U}{I}$,

B) $U = U_L + U_C + U_R$,

C) $I = I_L + I_C + I_R$,

D) $Z = R + X_L + X_C$,

E) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$,

F) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$.

Ahol Z az eredő ellenállás (impedancia);

U az áramforrás feszültségének effektív értéke;

I az áramkörben folyó áram effektív értéke;

I_L, I_C, I_R, U_L, U_C, U_R a tekercsen, a kondenzátoron, az ohmos ellenálláson mért áramerősség-, illetve feszültségértékek;

φ a fázisszög;

X_L és X_C az induktív, illetve a kapacitív ellenállás.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.1. A) igaz; B) hamis (helyesen: $U^2 = (U_L - U_C)^2 + U_R^2$); C) hamis; D) hamis; E) igaz; F) igaz.

A válaszok indoklása a bevezetőben leírtakból következik.

17.2. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

A) A váltakozó áram pillanatnyi teljesítménye függ az időtől.

B) A váltakozó áram pillanatnyi teljesítménye negatív is lehet.

C) Ha az áram pillanatnyi értéke 0, akkor a pillanatnyi teljesítménye nem biztos, hogy 0.

D) Ha váltakozó áramú körben csak ohmos ellenállás van, a pillanatnyi teljesítmény mindig pozitív vagy zérus, sohasem negatív.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.2. A) igaz, mert $P_t = U_t \cdot I_t$.
$U_t = U_0 \cdot \sin \omega \cdot t$ és $I_t = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$, ha a feszültség és az áram között φ fáziskülönbség van.
B) igaz, mert a fenti összefüggésből látható, hogy φ-től függően van olyan t érték, amikor U_t és I_t ellentétes előjelű.
C) hamis, mert ha $I_t = 0$, akkor a szorzat is 0.
D) igaz, mert ohmos ellenállás esetén $\varphi = 0$, így $P_t = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin^2 \omega t =$
$= I_0^2 \cdot R \cdot \sin^2 \cdot \omega t$, és itt $I_0^2 > 0$, $R > 0$, $\sin^2 \omega \cdot t \geq 0$.

17.3. *Válasszuk ki, hogy egy-egy, számmal jelzett állítás mely fizikai mennyiségre vonatkozóan igaz!*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak a)-ra igaz,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b)-re igaz,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkettőre igaz,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyikre sem igaz.

a) A váltakozó áram hatásos teljesítménye
b) Az egyenáram teljesítménye

1. $U \cdot I \cdot t$-vel egyenlő,
2. az időtől függ,
3. időben állandó,
4. csak az áram és feszültség pillanatnyi értékétől függ,
5. értéke függ a fáziseltolódás szögétől.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.3. A váltakozó áram hatásos teljesítménye: $P_p = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$.
Az egyenáram teljesítménye: $P = U \cdot I$. Ennek alapján: 1.–D); 2.–D); 3.–C); 4.–B); 5.–A).

17.4. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Homogén mágneses mezőben négyzet alakú, zárt vezetőkeretet forgatunk egyenletes sebességgel egyik középvonala körül úgy, hogy a forgástengely merőleges legyen az indukciósvonalakra. Az állítások erre a jelenségre vonatkoznak.

A) A váltakozó áram keletkezése a mozgási indukció jelenségén alapszik.

B) A négyzet alakú keret minden oldalán indukálódik elektromotoros erő.

C) Csak az indukciósvonalakkal párhuzamos oldalakban indukálódik feszültség.

D) A keletkezett feszültség értéke függ az időtől.

E) A keletkezett feszültség pillanatnyi értéke függ az elfordulás szögétől.

F) Az egymással szemben lévő oldalakban indukálódó áramok iránya az áramkörön belül egymással ellentétes.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.4. A) igaz. Az $U_\alpha = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$ összefüggés érvényes a jelenségre, hiszen mozgási indukcióról van szó. A keletkezett feszültség váltakozó, mert: $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$. Az α a keret elfordulásának szöge (jelölése az ábrán).

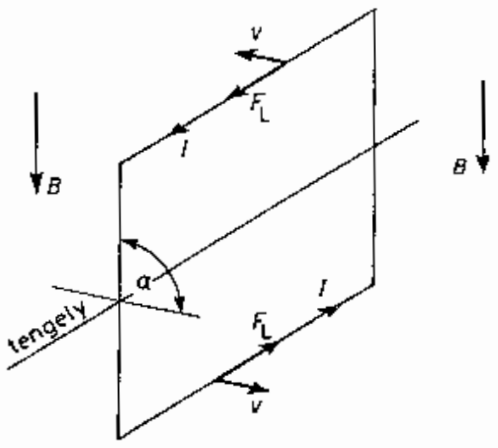
B) hamis. Csak azokban indukálódik feszültség, amelyek merőlegesek az indukcióvonalakra.

C) hamis. (Lásd az előzőt.)

D) igaz. Mivel $\alpha = \omega t$, így $U = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\omega t$.

E) igaz. Lásd az A) választ, ahol α a $\overline{B}$ és a $\overline{v}$ által bezárt szög, de ez egyenlő az elfordulás szögével is. Az α időben változik.

F) hamis. A $\overline{v}$ sebességek B-re merőleges komponenseinek iránya és B iránya meghatározza az F_L (Lorentz-erő) irányát, így az áram irányát is. Az ábrán látható két vezetőszakaszban megállapított áramirányok a körben ugyanolyan körüljárási irányú áramot jelentenek. Az α-t ahhoz a helyzethez viszonyítjuk, amikor a keret síkja merőleges az indukcióvonalakra.



17.5. *Válasszuk ki, hogy egy-egy számmal jelzett állítás melyik fizikai fogalomra nézve igaz.*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak a)-ra igaz,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak b)-re igaz,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkettőre igaz,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyikre sem igaz.

a) Az egyenáram
b) A szinuszosan váltakozó áram

1. mágneses mezőt hoz létre maga körül,
2. hőhatása van,
3. elektrolízisre alkalmas,
4. az áramerősség értéke függ az időtől,
5. az áramerősség értéke állandó,
6. az áram iránya egy periódus alatt négyszer változik,
7. tekercsben fluxusváltozást hoz létre.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.5.

1.–C) Kísérletek igazolják.

2.–C) Kísérletek igazolják.

3.–A) Váltakozó áram esetén a gyors periódus és irányváltakozás miatt lehetetlen.

4.–B) Lásd 17.4 D. válaszát.

5.–A) A definícióból következik.

6.–D) Váltakozó áram esetén is csak kétszer, a szinuszfüggvény tulajdonságai miatt.

7.–B) Fluxusváltozást csak az áramerősség változása hozhat létre az adott esetben.

17.6. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A kondenzátor kapacitív ellenállása függ a váltakozó áram frekvenciájától.

B) Ha kondenzátort kapcsolunk váltakozó áramú vagy egyenáramú körbe, a bekapcsolás pillanatában mindkét esetben áram folyik.

C) A kondenzátor vezeti az egyenáramot.

D) A váltóáramú körben a kondenzátor fegyverzetei között mért effektív feszültség egyenesen arányos az „átfolyó" áram effektív értékével.

E) A kondenzátor kapacitív ellenállása egyenesen arányos a kapacitással.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.6. A) igaz, mert $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$, ahol $\omega = 2\pi \cdot f$ és f a frekvencia.

B) igaz. A feltöltődési szakaszban folyik áram.

C) hamis. A feltöltődés után megszűnik az áram.

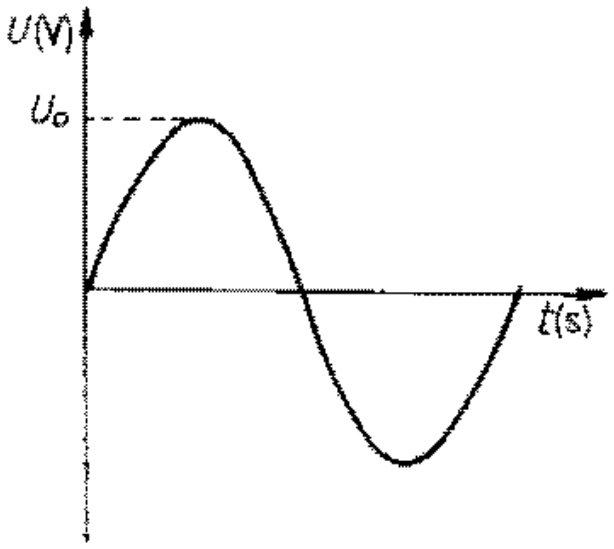
D) igaz, mert $\frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = X_C = \text{állandó}$.

E) hamis. Lásd az A) pontban.

17.7. Egy váltakozó áramú körbe kondenzátort kapcsoltunk. Az ábrán a kondenzátoron mért feszültség látható az idő függvényében.

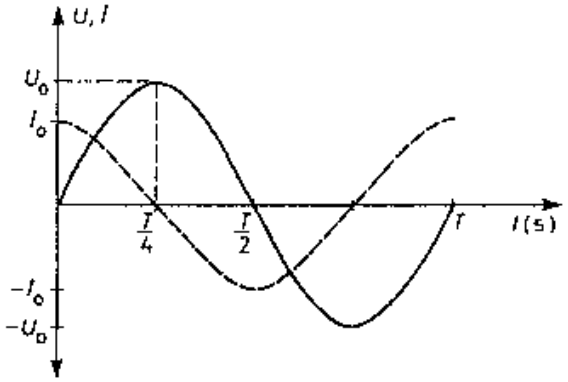
a) Rajzoljuk le az áramerősséget az idő függvényében!

b) Magyarázzuk meg a jelenséget!



Megoldás:

17.7. a)

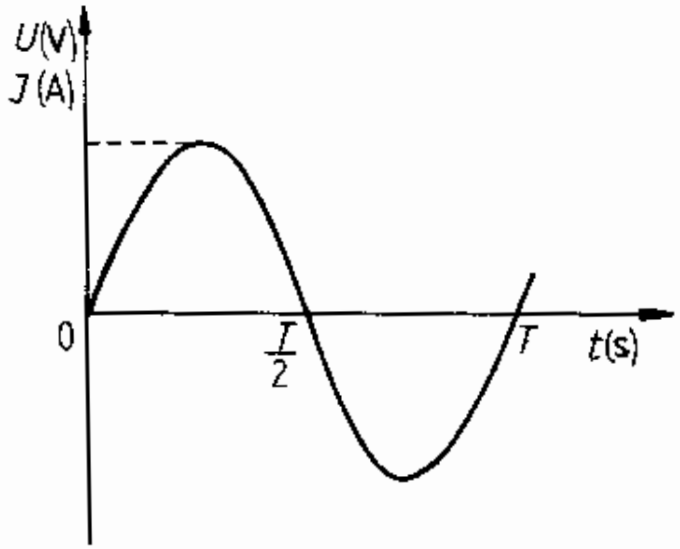


b) A kondenzártoron kialakult feszültséghez képest az áramerősség 90°-kal siet.

Magyarázat:

Az áramforrás feszültsége a bekapcsolás pillanatában töltőáramot indít a kondenzátor felé. A kondenzátor ekkor még töltetlen, így a töltőáram maximális, a kondenzátor feszültsége 0. Ezután a töltőáram csökken, mert a kondenzátor egyre jobban „telítődik", és az adott feszültségen egyre kevesebb töltést képes befogadni. A feszültség a kondenzátoron szinuszfüggvénynek megfelelően nő. Amikor a kondenzátor feszültsége maximális ($\frac{T}{4}$-nél), a töltőáram értéke 0. Így a közöttük lévő fáziskülönbség 90°. A folyamat ezután ellentétesen folytatódik.

17.8. Egy váltakozó áramú körbe tekercset kapcsolunk. Az ábrán a tekercs két vége közötti pillanatnyi feszültséget ábrázoltuk az idő függvényében. (A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható.)

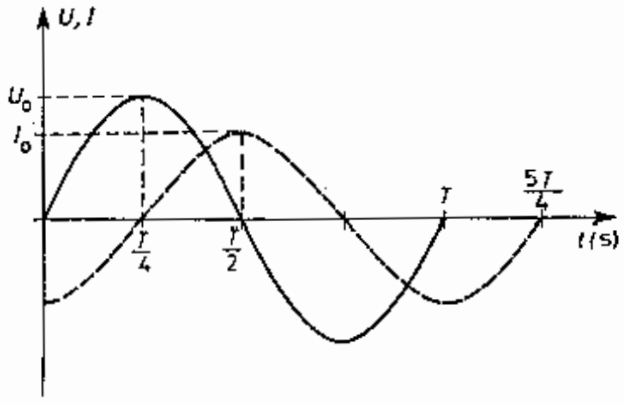


a) Ábrázoljuk a tekercsen átfolyó áram erősségét az idő függvényében!

b) Magyarázzuk meg a jelenséget!

Megoldás:

17.8. a)



b) Az áramerősség késik a feszültséghez képest 90°-kal, ha az ohmikus ellenállástól eltekintünk.

Magyarázat: az önindukció miatt.

Az önindukciós feszültség akkor a legnagyobb (maximális), amikor az áramerősség változása a legnagyobb. Ez $\frac{I}{4}$ környezetében van, mert ekkor a legmeredekebb az áramerősség-görbe. Itt azonban az $I = 0$.

Az önindukciós feszültség akkor 0, amikor a $\Delta I = 0$, vagyis az áram változása a legkisebb. Ez az $\frac{I}{2}$-nél van, mert ekkor a görbe meredeksége 0. Itt azonban az I maximális értéket vesz fel. Tehát a feszültség és az áramerősség maximumok közötti fáziskülönbség 90°.

17.9. Ismertessük a transzformátor működésének fizikai elvét! Milyen összefüggés van a tekercseken lévő feszültségek és menetszámok között?

Megoldás:

17.9. A transzformátor zárt, közös vasmagra szerelt két tekercsből álló berendezés.

Az egyik (primer) tekercsre váltakozó feszültséget (áramot) kapcsolva, a tekercs belsejében – így a vasmagban is – állandóan változó fluxusú mágneses mező jön létre. A változó fluxus a másik (szekunder) tekercsben feszültséget indukál (Nyugalmi indukció).

Az első tekercsben a primer feszültség (U_1) és az indukált feszültség is jelen van egyszerre. Így erre igaz, hogy $U_1 - N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I_1 \cdot R_1$, ahol R_1 az első tekercs ohmos ellenállása, I_1 az áram erőssége.

A második tekercsben csak az indukált feszültség van jelen, ami egyenlő a tekercs kapcsain mért üresjárási feszültséggel. Így erre a következő írható fel:

$$U_2 = N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Ha a primer tekercs ellenállása nagyon kicsi, akkor

$$U_1 = N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

A két utóbbi egyenletből: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$.

17.10. Mit értünk a váltakozó feszültség csúcsértékén és effektív értékén?
Hogyan számítjuk ki ezeket?

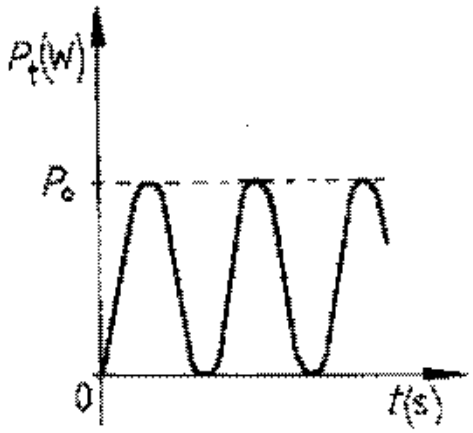
Megoldás:

17.10. Az $U_t = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$ összefüggésben az U_0 jelenti a váltakozó feszültség csúcsértékét (maximális értékét). A váltakozó feszültség effektív értékén (U_{eff}) olyan egyenfeszültséget értünk, amely ugyanabban az áramkörben, ugyanannyi idő alatt ugyanakkora munkát végezne, mint a szóban forgó váltakozó feszültség.

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

17.11. Az ábrán egy szinuszosan váltakozó áramú kör áramának pillanatnyi teljesítménye látható az idő függvényében.

Milyen, egymással sorosan kapcsolt váltóáramú ellenállásfajták szerepelhetnek az áramkörben?
(Tételezzük fel, hogy mindegyik ellenállásfajtából legfeljebb csak egy szerepelhet!)



Megoldás:

17.11. Az ábrán látható görbén $P_t \geq 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $\varphi = 0$. Ekkor ugyanis az I és az U pillanatnyi értékei megegyező előjelűek, tehát $U \cdot I$ mindig pozitív.
Ez megvalósulhat, ha:

1. csak ohmos ellenállás szerepel az áramkörben. Ekkor: $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$. De $R = Z$, így $\varphi = 0$.

2. egy induktív, egy kapacitív és egy ohmos ellenállás szerepel, és $X_L = X_C$.

Ekkor: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0}{R}$. Így $\varphi = 0$.

17.12. *Az alábbi állítások közül melyik a* HIBÁS?

A) A váltakozó feszültségre kapcsolt tekercs vasmagjában a mágneses indukció nem minden időpillanatban zérus.

B) A váltakozó feszültségre kapcsolt tekercs vasmagjában a mágneses indukció nem minden pillanatban különbözik zérustól.

C) Az adott sugarú és hosszúságú váltakozó feszültségre kapcsolt tekercs ellenállása független a tekercs menetszámától.

D) A váltakozó feszültség teljesítménytényezője nem lehet 1-nél nagyobb szám.

Indokoljuk választásunkat!

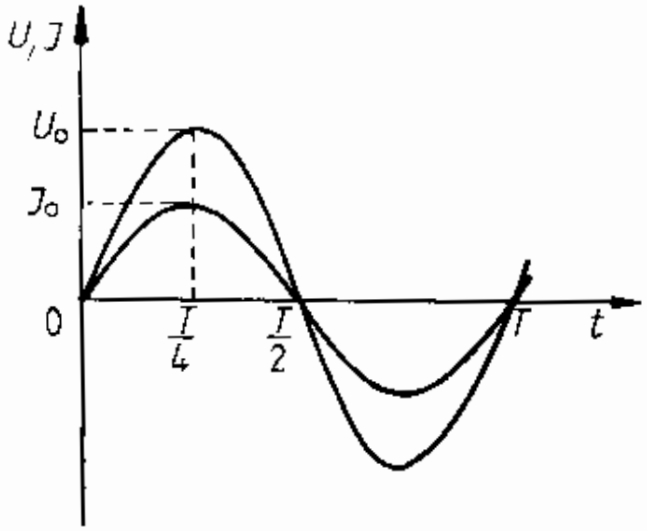
Megoldás:

17.12. *A*) és *B*) igaz. A kialakult indukció értéke a váltakozó áram pillanatnyi értékének függvénye: $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I(t)}{l}$.

C) hamis, mert $X_L = L \cdot \omega = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N_2 \cdot A}{l} \cdot \omega$.

D) igaz, mert $\cos\varphi \leq 1$

17.13. Az ábrán egy váltakozó áramú körben mért áramerősséget és feszültséget ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Mekkora az áramerősség és a feszültség közötti fáziskülönbség?

b) Rajzoljuk le a pillanatnyi teljesítményt az idő függvényében!

Megoldás:

17.13. a) $\underline{\varphi = 0}$

b) $P_t = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin^2 \omega t = I_0^2 \cdot R \cdot \sin^2 \omega t \geq 0.$

17.14. *Az alábbi állítások közül melyik* HIBÁS?

A) A kondenzátor ellenállása függ a váltakozó feszültség periódusidejétől.

B) Az áramjárta vezetőre a mágneses mezőben erő hat, ha az indukcióvonalak párhuzamosak a vezetővel.

C) Egy tekercs belsejében a mágneses indukció átlagos nagysága lecsökken, ha a 4 V egyenfeszültség helyett 4 V effektív értékű váltakozó feszültséget kapcsolunk a tekercs kivezetéseire.

D) Adott csúcsérték mellett a váltakozó feszültség effektív értéke nem függ attól, hogy mekkora az áramkörbe kapcsolt fogyasztó ellenállása.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.14. *A)* igaz, mert $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ és $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

B) hamis, mert $F_L = B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha$, ahol α a B és a vezető által bezárt szög és $\alpha = 0$, így $F_L = 0$.

C) nem egyértelmű, hogy mit értsünk a B átlagos értéke alatt. Ha a $B(t)$ görbe alatti területet, akkor a C) állítás helyes. Ugyanis B a feszültség, illetve az áramerősség pillanatnyi értékétől függ:

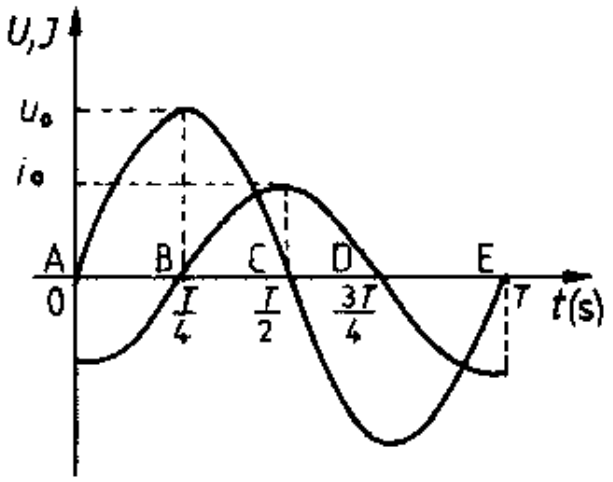
$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I(t)}{l}.$$

Ha a tekercsben nem lépne fel önindukció, így indukált áram sem, akkor a váltakozó áram effektív értéke az adott esetben egyenlő az egyenáram értékével. Így a $B(t)$ görbe alatti területek egyenlők egy konkrét időtartamra.

Mivel a váltakozó áram esetén a fellépő indukált áram iránya ezzel ellentétes, az eredő I lecsökken, és így B is kisebb lesz, mint egyenáram esetén.

D) igaz, mert $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

17.15. Az ábrán egy váltakozó áramú kör feszültségét és áramerősségét ábrázoltuk az idő függvényében.



Milyen előjelű a pillanatnyi teljesítmény az AB, BC, CD és DE szakaszokon?
Indokoljuk állításunkat!

Megoldás:

17.15. $P_t = U_t \cdot I_t$. Tehát

AB szakaszon: $P \leq 0$, mert $U \geq 0$ és $I \leq 0$;
BC szakaszon: $P \geq 0$, mert $U \geq 0$ és $I \geq 0$;
CD szakaszon: $P \leq 0$, mert $U \leq 0$ és $I \geq 0$;
DE szakaszon: $P \geq 0$, mert $U \leq 0$ és $I \leq 0$.

17.16. Mennyi lenne a váltakozó áram hatásos teljesitménye, ha a váltakozó áramú körbe csupán egy ideális kondenzátort iktatnánk?

Megoldás:

17.16. $P_h = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$, de $\varphi = -90°$ és $\cos\varphi = 0$. Így $P_h = 0$.

17.17. A következő jelenségek közül válasszuk ki azokat, amelyek szembeszökően tanúsítják, hogy a fény elektromágneses hullám!

A) Polarizáció mészpát prizmán.
B) Visszaverődés síktükrön.
C) A fény és az elektromágneses hullám ugyanakkora sebességgel terjednek.
D) A kvarc a poláros fény rezgési síkját elforgatja.
E) A mágneses mezőben helyezett anyagban a poláros fény rezgési síkja elfordul.
F) Interferencia plánparalel lemezzel.
G) Ha a vonalas színképet kibocsátó különféle anyagokat elektromos vagy mágneses térbe helyezzük, a színképvonalak felhasadnak.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.17. Azok az állítások, amelyek a fénynek mint hullámnak az elektromágneses jellegét is igazolják, a következők: $\underline{\underline{E}}$), $\underline{\underline{G}}$), $\underline{\underline{C}}$). Amikor kiszámolták az elektromágneses hullámok terjedési sebességét – $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ –, és kiderült, hogy ez a fény sebességével megegyezik, egyértelműen a fény elektromágneses hullám jellegére következtettek. Kísérletileg Hertz igazolta.
$\underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{G}}$ állításokat kísérletek igazolják. A többi állításban leírt jelenségek nemcsak elektromágneses hullámokra igazak.

17.18. *Válasszuk ki, hogy egy-egy számmal jelzett állítás mely jelenségre vonatkozik!*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik.

a) Elektromágneses hullámok
b) Mechanikai hullámok

1. csak transzverzális hullámok lehetnek,
2. terjedéséhez idő szükséges,
3. terjedéséhez valamilyen közvetítő közegre van szükség,
4. interferenciára képesek,
5. frekvenciája megváltozik, ha más közegbe lépnek át.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.18. 1.–A) Minden elektromágneses hullámban az E és a B vektorok nagyságai változnak, de irányaik merőlegesek egymásra és a terjedési irányra.
2.–C) Mivel mindkét hullámnak van terjedési sebessége.
3.–B) Az elektromágneses hullám vákuumban is terjed.
4.–C) (Kísérleti igazolás)
5.–D) Mindkét esetben állandó marad a frekvencia, csak a hullámhossz és a terjedési sebesség változik meg.

17.19. Írjuk le az elektromágneses mező terjedésének elvét!

Megoldás:

17.19. Lásd a fejezet bevezetőjében az elektromágneses rezgésekről és hullámokról leírtakat.

17.20. *A következő állításokban jelöljük meg azokat az* A), B), *vagy* C) *betűkkel jelzett részeket, amelyeket* HELYESNEK *tartunk!*

1. A röntgensugarak a katódsugárzás alkalmával a katódsugárcső
   A) katódjáról indulnak ki,
   B) antikatódjáról indulnak ki,
   C) mindkét elektródjáról kiindulnak.
2. A röntgensugárzás
   A) elektromágneses hullám,
   B) elektronokból álló sugárzás,
   C) mechanikai hullámjelenség.
3. A röntgensugarak
   A) elektromos mezőben eltérülnek,
   B) mágneses mezőben eltérülnek,
   C) sem elektromos, sem mágneses mezőben nem térülnek el.
4. A röntgensugarak
   A) nem mutatnak interferenciát,
   B) közönséges üveglapra karcolt optikai rácson is interferálnak,
   C) csak kristályokon, például kősókristályon mutatnak interferenciát.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

17.20. 1.–B) Az antikatódba ütköző elektronok váltják ki a fékezési és karakterisztikus röntgensugárzást.
2.–A) A kristályrácson végzett interferenciakísérletek igazolják.
3.–C) A sugarak nem töltéssel rendelkező részecskékből állnak.
4.–C) Mert a kristályrács rácsállandója hasonlítható össze a röntgensugarak hullámhosszával.

17.21. Milyen tulajdonsága mutatkozik meg a röntgensugaraknak az alábbi esetekben?

A) Kristályszerkezet vizsgálatakor;
B) átvilágításkor;
C) öntvények, más anyagok belső hibáinak feltárásakor;
D) daganatos sejtek elpusztításakor;
E) röntgenfelvételek, röntgenfényképek készítésekor;
F) bizonyos anyagok röntgensugarak hatására bekövetkező fluoreszkálásakor.

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

17.21. A) A röntgensugár hullámtermészete – interferencia.
B) Az intenzitáscsökkenés mértékének függősége az anyag vastagságától, minőségétől és sűrűségétől.
C) Lásd az előzőt.
D) Az élő sejtekre kifejtett roncsoló hatás.

E) Ugyanaz, mint a *B*-ben, és hogy a fotólemezt és a fényérzékeny filmet az áthatolás mértékétől függően megfeketíti (vegyi hatás).
F) Gerjesztő hatás. Energiát ad át más anyagok atomjának, amelyek azt más frekvencián kisugározzák.

17.22. *Válasszuk ki, hogy egy-egy, számmal jelzett állítás mely jelenségre vonatkozik:*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik.

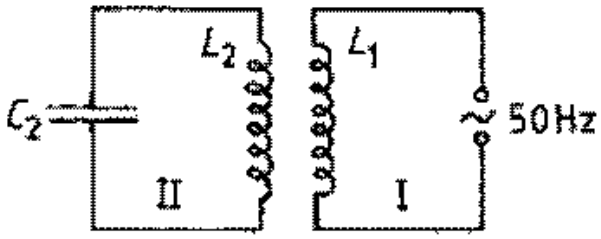
a) A karakterisztikus röntgensugárzás
b) A fékezési röntgensugárzás

1. Elektromágneses hullám,
2. hullámhossza jellemző az antikatód anyagára,
3. folytonos spektruma van,
4. az elektronok lefékeződésekor keletkezik,
5. a mozgó elektronok körüli elektromos és mágneses mező megváltozásából származik,
6. vonalas spektruma van,
7. szabad szemmel látható.

Megoldás:

17.22. A karakterisztikus röntgensugár az antikatód egy atomjának a becsapódó elektron által történt gerjesztésekor, illetve az alapállapotba való visszatérésekor keletkező elektromágneses hullám. A lehetséges frekvenciák az anyag egy atomjának elektronszerkezetétől, azaz az anyagtól függenek. A fékezési sugárzás pedig a becsapódó elektronok mozgási energiájától függ, ennek színképe folytonos. Így:
1.–C) 2.–A) 3.–B) 4.–B) 5.–B) 6.–A) 7.–D)

17.23. *Az ábrát felhasználva, válaszoljunk a következő kérdésekre a megfelelő A)-val vagy B)-vel jelzett rész – esetleg mindkettő – kiválasztásával!*



1. Mekkora a II. rezgőkörben létrejött elektromágneses rezgés frekvenciája?

   A) $f = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}}$ Hz,

   B) $f = 50$ Hz.

2. Az 50 Hz-es feszültségforrás helyett használjunk egy változtatható kapacitású, feltöltött forgókondenzátort! Mi a feltétele annak, hogy két kör között a lehető legnagyobb legyen az energiaátadás?

   A) A forgókondenzátor kapacitása $C_1 = \dfrac{L_2 \cdot C_2}{L_1}$ legyen!

   B) A forgókondenzátor kapacitásának olyan értékűnek kell lenni, hogy a két kör sajátfrekvenciája megegyezzen!

Indokoljuk válaszunkat!

Megoldás:

17.23. 1.–B) A II. kör frekvenciája a gerjesztő kör frekvenciájával egyenlő, mert a II. körben kényszerrezgés történik.
2.–A) Rezonancia esetén a legnagyobb az energiaátadás, ekkor a két kör frekvenciája egyenlő:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 \cdot C_1}}, \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 \cdot C_2}}.$$

Ha $f_1 = f_2$, akkor $L_1 \cdot C_1 = L_2 \cdot C_2$, ebből $C_1 = \dfrac{L_2 \cdot C_2}{L_1}$.
Tehát az A) és B) egymással ekvivalens állítás.

17.24. *Az alábbi állításokban az A)-val és B)-vel jelzett részek közül válasszuk ki a* HELYESEKET!

1. Ha egy feltöltetlen kondenzátor két lemezét egy önindukciós tekercs két végével kötjük össze, akkor ebben a körben:
   A) elektromágneses csillapodó rezgések jönnek létre,
   B) elektromágneses csillapítatlan rezgések jönnek létre.
2. Egy csillapodó elektromágneses rezgésnél, ha nem változtatjuk a kondenzátor kapacitását és a tekercs önindukciós együtthatóját:
   A) a rezgőkörben folyó áram maximális értékeinek abszolút értéke csökken az idő függvényében,
   B) az egymást követő periódusok időtartama is egyre kisebb.
3. Egy rezgőkör sajátfrekvenciája függ:
   A) a kondenzátor feszültségétől,
   B) a kondenzátor kapacitásától.
4. Ha egy csillapodó elektromágneses rezgés során a tekercs mágneses indukciója maximális, akkor a kondenzátorban
   A) a térerősség zérus,
   B) a feszültség maximális.

Megoldás:

17.24. 1. Egyik állítás sem igaz, mert ha a kondenzátor feltöltetlen, nem alakulnak ki elektromágneses rezgések. Ha azonban valamilyen külső elektromágneses rezgés hatására rezonancia lép fel, akkor mindkét fajta rezgés kialakulhat, attól függően, hogy a külső gerjesztés folyamatos vagy nem.

2.–A) Ha az energiaveszteséget megfelelő periódusban nem pótoljuk, csillapodó rezgések alakulnak ki, amely esetén az amplitúdó periódusonként csökken. A periódusidő pedig egyértelműen a C-től és az L-től függ, tehát T állandó. $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

3.–B) Mert $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

4.–A) A kondenzátor elektromos energiája és a tekercs mágneses energiája periódikusan alakul át egymásba. Így amikor B maximális, $E = 0$, így a feszültség is 0.

17.25. *Válasszuk ki, hogy egy-egy számmal jelzett állítás mely jelenségre vonatkozik!*

A) legyen a válasz, ha az állítás csak az a) jelenségre,
B) legyen a válasz, ha az állítás csak a b) jelenségre,
C) legyen a válasz, ha az állítás mindkét jelenségre,
D) legyen a válasz, ha az állítás egyik jelenségre sem vonatkozik.

a) Csillapodó elektromágneses rezgések.
b) Csillapítatlan elektromágneses rezgések.

1. Ha egy rezgőkörben a kondenzátor kapacitása és a tekercs önindukciós együtthatója állandó, akkor a rezgőkör sajátfrekvenciája is állandó.
2. A rezgés során nincs energiaveszteség.
3. A rezgőkör áramerőssége az idő függvényében szinuszosan változik.
4. A kondenzátor feszültségmaximumainak abszolút értéke csökken az idővel.

Megoldás:

17.25. 1.–C) Mindkét esetben a frekvencia $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$.

2.–D) A csillapítatlannál is van eredetileg energiaveszteség, csak ezt minden periódusban pótoljuk.

3.–B) A csillapítatlan rezgésnél az I az idő szinuszos függvénye. A csillapodó rezgés esetén az $I(t)$ csak bonyolult matematikai függvénnyel írható le, amelyben nemcsak az idő szinuszos függvénye szerepel.

4.–A) A csillapodó rezgésnél az energiaveszteség miatt csökken az I és U maximuma is.

17.26. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldást!*

Milyen határok között változik a hullámhossza az elektromágneses színkép látható részének?

A) 300 nm–700 nm,
B) 380 nm--760 nm,
C) 420 nm–800 nm,
D) 480 nm–860 nm.

Megoldás:

17.26. Az emberi szem számára a B) válasz a helyes

17.27. *Válasszuk ki a* HELYES *megoldást!*

Hullámhosszuk növekvő sorrendjében miként követik egymást a színkép (spektrum) látható tartományának a színei?

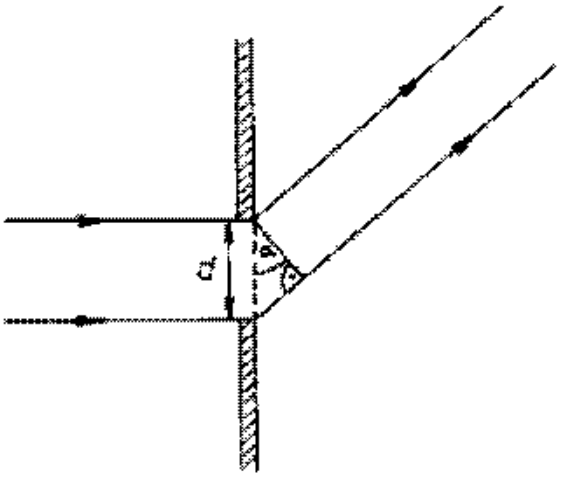
A) Vörös, narancs, sárga, zöld, kék, ibolya.
B) Ibolya, kék, zöld, sátga, narancs, vörös.
C) Vörös, narancs, sárga, kék, zöld, ibolya.
D) Vörös, narancs, zöld, kék, sárga, ibolya.

Megoldás:

17.27. Az A) válasz a helyes. (Kísérletek igazolják.)

17.28. *Válasszuk ki a* HELYES *megállapításokat!*

A mellékelt ábrával szoktuk szemléletessé tenni, hogy egyetlen résen történő elhajlásnál az intenzitás a jelzett irányban nulla, ha $\lambda = d \cdot \sin \alpha$. Nevezzük ezt fő elhajlási csúcsnak.



A) Ha nagyobb hullámhosszú elektromágneses hullámot alkalmazunk, a fő elhajlási csúcs iránya felfelé tolódik el.

B) Ha fehér fényt alkalmazunk, a fő elhajlási csúcs széle színes lesz.

C) Ha szűkítjük a rést, a fő elhajlási csúcs iránya felfelé tolódik el.

Megoldás:

17.28. A) igaz; B) igaz; C) igaz.

Mivel $\lambda = d \cdot \sin\alpha$, így $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$. Tehát ha λ nő és d állandó, akkor α is nő.

Ha d csökken és λ állandó, akkor α nő.

Az α növekedése a csúcs felfelé tolódását jelenti. A fehér fény összetett fény és az adott esetben színeire bomlik.

17.29. Egy váltakozó áramú körben sorosan kapcsolunk egy kondenzátort és egy 50 Ω ellenállású huzalt. Az áramerősség effektív értéke 6 A.
Mennyi munkát végez 10 perc alatt az elektromos áram?

Megoldás:

17.29. $R = 50\ \Omega$; $I_{\text{eff}} = 6$ A; $t = 600$ s.
A váltakozó áram munkája:

$$W = P \cdot t = (U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi) \cdot t = (I_{\text{eff}}^2 \cdot Z \cdot \cos\varphi) \cdot t =$$
$$= I_{\text{eff}}^2 \cdot R \cdot t = \underline{1{,}08 \cdot 10^6\ \text{J}}.$$

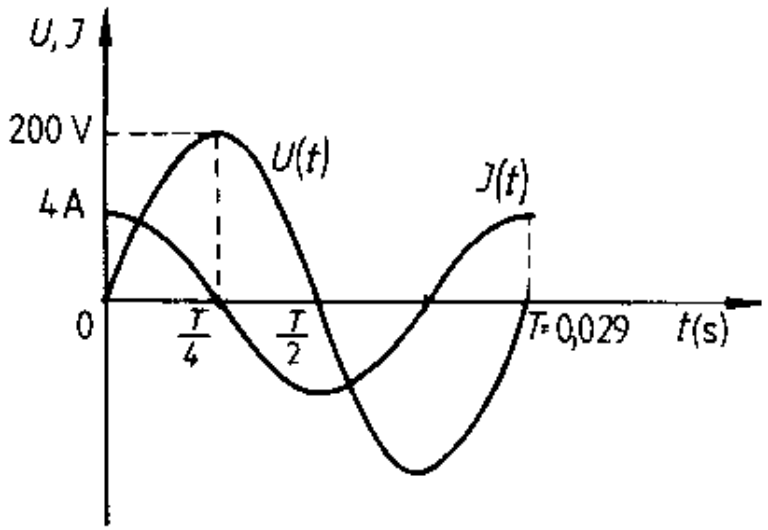
Itt felhasználtuk, hogy $Z = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$ és $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$.

17.30. Egy merülőforralót vízbe mártva, 10 percig 220 V hálózati feszültségre kapcsolunk. A kialakult áram effektív értéke 6 A.
Mennyivel nő a víz belső energiája, ha a hőátadás hatásfoka 75%?

Megoldás:

17.30. $U_{\text{eff}} = 220$ V; $I_{\text{eff}} = 6$ A; $t = 600$ s; $\eta = 0{,}75$.
Az elektromos áram munkájának 75%-a fordítódik a víz melegítésére – belső energiájának növelésére – $\Delta E_{\text{b}} = 0{,}75 W_{\text{eff}} = (U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi) \cdot t \cdot 0{,}75$.
Mivel csak ohmos ellenállás van, $\varphi = 0$, azaz $\cos\varphi = 1$.
Tehát $\underline{\underline{\Delta E_{\text{b}}}} = 0{,}75 \cdot U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot t = \underline{\underline{5{,}94 \cdot 10^5 \text{ J}}}$.

17.31. Egy váltakozó áramú körben az áramerősséget és a feszültséget ábrázoltuk az idő függvényében. Az áramkörben egy kondenzátor van bekötve. A bekötővezeték ohmos ellenállásától tekintsünk el!



Mekkora a kondenzátor kapacitása?

Megoldás:

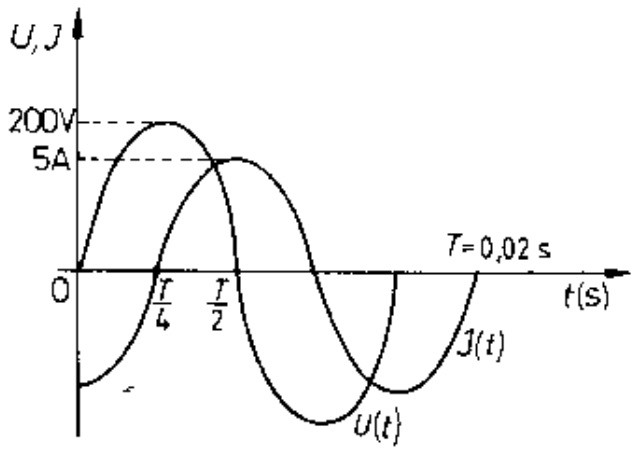
17.31. $U_0 = 200$ V; $I_0 = 4$ A; $T = 0{,}029$ s (a grafikon szerint).

A kondenzátor kapacitív ellenállására: $X_C = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \dfrac{U_0}{I_0}$.

Másrészt $X_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C} = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

A két egyenletből $C = \dfrac{I_0}{U_0 \cdot 2\pi \cdot f} = \underline{92{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}$, ahol $f = \dfrac{1}{T}$.

17.32. Egy váltakozó áramú körbe egy tekercset kapcsoltunk, melynek ohmos ellenállása elhanyagolható. A tekercs végei között mérhető feszültség és a benne folyó áram időbeli lefolyását az ábrán láthatjuk.



Határozzuk meg a tekercs önindukciós együtthatóját!

Megoldás:

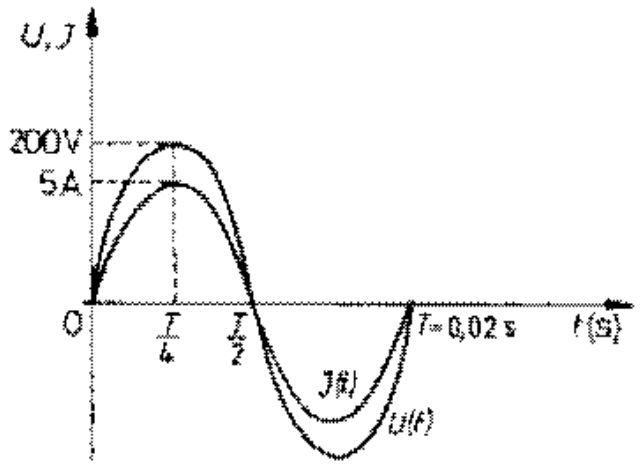
17.32. $U_0 = 200$ V; $I_0 = 5$ A; $T = 0{,}02$ s (a grafikon alapján).

Az induktív ellenállás az áramkörből: $x_L = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}} = \dfrac{U_0}{I_0}$.

Másrészt $X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi \cdot f$.

A két egyenletből $\underline{\underline{L}} = \dfrac{U_0}{I_0 \cdot 2\pi \cdot f} = \underline{\underline{0{,}127 \text{ H}}}$, ahol $f = \dfrac{1}{T}$.

17.33. Egy váltakozó áramú körbe ohmos ellenállást kapcsolunk. Az ábrán a körben folyó áram és az ellenállás két vége között észlelt feszültség időbeli változását láthatjuk.



a) Mekkora az ellenállás értéke?

b) Az ábrán bejelölt adatok közül melyik nem szükséges a feladat megoldásához?

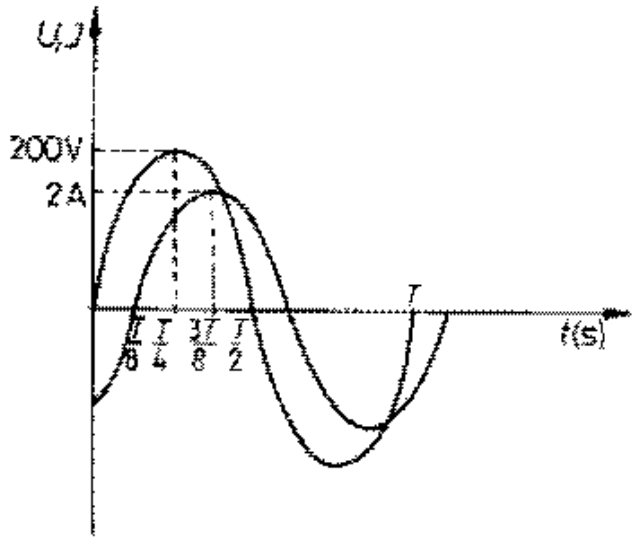
Megoldás:

17.33. $U_0 = 200$ V; $I_0 = 5$ A; $T = 0{,}02$ s.

a) $\underline{\underline{R}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \underline{\underline{40\ \Omega}}$.

b) A T-re nincs szükség, mert az R független a váltakozó áram frekvenciájától.

17.34. Egy váltakozó áramú kör egy feszültségforrásból, egy ohmos ellenállásból és egy elhanyagolható ohmos ellenállású tekercsből áll. Az áramerősséget és a feszültségforrás sarkai közötti feszültséget az idő függvényében az ábra mutatja.



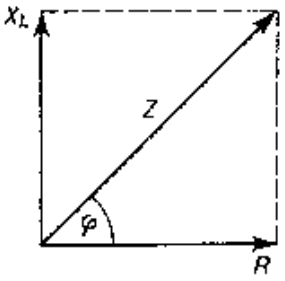
Mekkora a váltakozó áram frekvenciája, ha a tekercs önindukciós együtthatója 0,4 H?

Megoldás:

17.34. $U_0 = 200$ V; $I_0 = 2$ A; $L = 0{,}4$ H.
Az ábra alapján az I és U időbeli eltolódását az I és az U maximumhelyek különbsége adja:

$$\Delta t = \frac{3T}{8} - \frac{T}{4} = \frac{T}{8}.$$

Az ennek megfelelő fáziseltolódás szöge: $\varphi = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = 45°$.



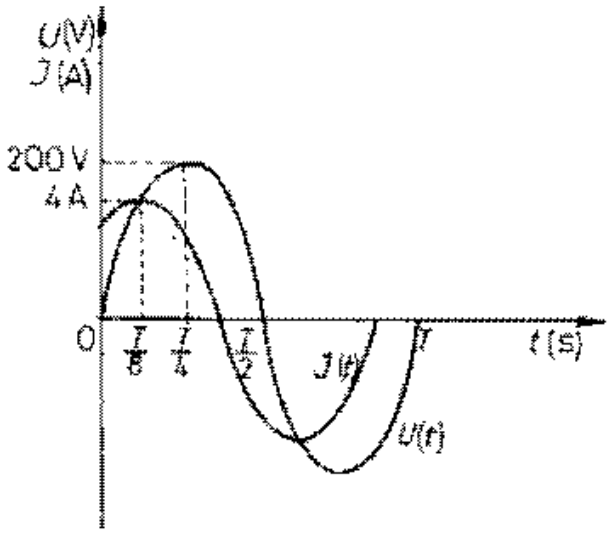
Itt felhasználtuk, hogy T időhöz 2π fáziseltolódási szög tartozik.
Az induktív ellenállás $X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi \cdot f$.

Másrészt $X_L = Z \cdot \sin\varphi = \frac{U_0}{I_0} \cdot \sin\varphi$.

A két összefüggésből $\underline{\underline{f = \frac{U_0 \cdot \sin\varphi}{I_0 \cdot 2\pi \cdot L} = 28{,}15 \text{ Hz}}}$.

Itt felhasználtuk, hogy $Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0}$, és az ábra alapján $\sin\varphi = \frac{X_L}{Z}$.

17.35. Egy váltakozó áramú körbe sorba kapcsolunk egy ohmos ellenállást és egy kondenzátort. Az áramerősséget és a feszültségforrás sarkain mérhető feszültséget az idő függvényében az ábra szemlélteti.



Mekkora a váltakozó áram frekvenciája, ha a kondenzátor kapacitása $4 \cdot 10^{-4}$ F?

Megoldás:

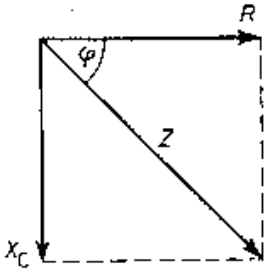
17.35. $I_0 = 4$ A; $U_0 = 200$ V; $C = 4 \cdot 10^{-4}$ F.

Az I és U időbeli eltolódása a feladat grafikonja alapján: $\Delta t = \frac{T}{8} - \frac{T}{4} = -\frac{T}{8}$, így $\varphi = -45°$, mert T időhöz 360° fáziseltolódás tartozik.

A kondenzátor kapacitív ellenállása: $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

Másrészt $X_C = Z \cdot \sin|\varphi| = \frac{U_0}{I_0} \sin|\varphi|$.

A két egyenletből $f = \frac{I_0}{U_0 \cdot 2\pi \cdot C \cdot \sin\varphi} = \underline{\underline{11{,}25 \text{ Hz}}}$.



Itt felhasználtuk, hogy $Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0}$, illetve az ábra alapján $\sin|\varphi| = \frac{X_C}{Z}$.

Megjegyzés: φ negatív előjele arra utal, hogy U időben késik I-hez képest.

17.36. 500 V váltakozó feszültséget 100 V-ra akarunk transzformálni. A veszteségektől tekintsünk el!

a) Mekkora legyen az alkalmazott tekercsek menetszámának az aránya?

b) Mekkora a két tekercsben folyó áramerősségnek az aránya?

Megoldás:

17.36. $U_1 = 500$ V; $U_2 = 100$ V.

a) A transzformátorra igaz, hogy $\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \underline{5}$.

b) illetve $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{5}$.

17.37. Egy 220 V-os hálózatra kapcsolt motor hatásos teljesítménye 400 W.
Mekkora az áram effektív értéke, ha az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség 60°?

Megoldás:

17.37. $P_h = 400$ W; $U_{eff} = 220$ V; $\varphi = 60°$.

A hatásos teljesítmény: $P_h = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$.

Ebből $\underline{\underline{I_{eff}}} = \dfrac{P_h}{U_{eff} \cdot \cos\varphi} = \underline{\underline{3{,}64 \text{ A}}}$.

17.38. Egy kondenzátort sorba kapcsolunk egy 100 Ω-os ohmikus ellenállással, majd ezeket a 220 V-os hálózati feszültségre kapcsoljuk ($f = 50$ Hz). A kör eredő ellenállása 150 Ω.

a) Mekkora a kondenzátor kapacitív ellenállása és kapacitása?

b) Mekkora a körben az áramerősség effektív értéke?

c) Mekkora a hálózati feszültség és az áramerősség közötti fáziseltolódás?

Megoldás:

17.38. $Z = 150\ \Omega$: $R = 100\ \Omega$; $U_{\text{eff}} = 220$ V; $f = 50$ Hz.

a) A fejezet bevezetőjében leírtak alapján: $Z^2 = R^2 + X_C^2$.

Ebből $\underline{\underline{X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 111{,}8\ \Omega}}$.

Mivel $X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$, így $\underline{\underline{C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot X_C} = 2{,}84 \cdot 10^{-5}\ \text{F}}}$.

b) $\cos|\varphi| = \dfrac{R}{Z}$. Ebből $|\varphi| = 48{,}18°$, így $\underline{\underline{\varphi = -48{,}18°}}$.

Itt lásd a 17.35. feladat megjegyzését.

17.39. Egy kondenzátort 220 V feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózati váltakozó feszültségre kapcsolunk. A kialakult áram effektív értéke 0,5 A.
Mekkora a kondenzátor kapacitív ellenállása és kapacitása?

Megoldás:

17.39. $U_{\text{eff}} = 220$ V; $f = 50$ Hz; $I_{\text{eff}} = 0{,}5$ A.

A kapacitív ellenállásra: $X_C = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$, másrészt $\underline{\underline{X_C}} = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \underline{\underline{440\ \Omega}}$.

A két egyenletből $\underline{\underline{C}} = \dfrac{I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \underline{\underline{7{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}}$.

17.40. Egy elhanyagolható ohmos ellenállású, 0,2 H önindukciójú tekercset sorba kapcsolunk egy 20 Ω-os ohmikus ellenállással, s ezeket a 220 V-os hálózati feszültségre kapcsoljuk ($f = 50$ Hz).

a) Mekkora a tekercs induktív ellenállása és a kör impedanciája?
b) Mekkora áram folyik a körben?
c) Mekkora a feszültség és az áram között a fáziskülönbség?

Megoldás:

17.40. $L = 0{,}2$ H: $R = 20\ \Omega$; $U_{\text{eff}} = 220$ V; $f = 50$ Hz.

a) $\underline{X_L} = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi \cdot f = \underline{62{,}8\ \Omega}$; $\underline{Z} = \sqrt{X_L^2 + R^2} = \underline{65{,}9\ \Omega}$.

b) $\underline{I_{\text{eff}}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{Z} = \underline{3{,}34\ \text{A}}$.

c) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$. Ebből $\underline{\varphi = 72{,}33°}$.

17.41. Ha egy tekercs sarkaira 200 V effektív értékű váltakozó feszültséget kapcsolunk, a tekercsben folyó áram effektív értéke 0,2 A lesz.

a) Mekkora a tekercs induktív ellenállása, ha ideálisnak tekinthető?

b) Mekkora a váltakozófeszültség frekvenciája, ha a tekercs önindukciós együtthatója 4 H?

Megoldás:

17.41. $U_{eff} = 200$ V; $I_{eff} = 0{,}2$ A; $L = 4$ H.

a) Az induktív ellenállásra: $\underline{X_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = 1000\ \Omega}$.

b) Másrészt, $X_L = L \cdot 2\pi \cdot f$. Ebből $f = \frac{X_L}{L \cdot 2\pi} = \underline{39{,}8\ \text{Hz}}$.

17.42. Egy váltakozó árammal átjárt 10 Ω-os ellenállás 5000 J hőt ad le a környezetnek 2 perc alatt.
Mekkora az áram effektív és maximális értéke?

Megoldás:

17.42. $Q = 5000$ J; $R = 10\ \Omega$; $t = 120$ s.

A termelt hő egyenlő a váltakozó áram munkájával.

$Q = W_e$, azaz $Q = I_{eff}^2 \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot t$.

Mivel csak ohmos ellenállás van: $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.

Tehát $\underline{\underline{I_{eff}}} = \sqrt{\dfrac{Q}{R \cdot t}} = \underline{\underline{2{,}04\ \text{A}}}$.

$\underline{\underline{I_0}} = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{2{,}88\ \text{A}}}$.

17.43. Egy váltakozó feszültség az idő függvényében a következő módon írható le: $U = 100 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$.

a) Mekkora a feszültség maximális és effektív értéke, frekvenciája?

b) Mekkora a feszültség pillanatnyi értéke a $t = 0{,}06$ s-ban?

Megoldás:

17.43. $U = 100 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$.

A megadott $U(t)$ függvényből, ha összehasonlítjuk az $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ általános alakkal, leolvashatók a következők:

a) $U_0 = 100$ V, így $\underline{\underline{U_{\text{eff}}}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{70{,}71 \text{ V}}}$.

$\omega = 100\pi$, azaz $2\pi \cdot f = 100\pi$, így $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{50 \text{ Hz}}}$.

b) Az $U_t = 100 \cdot \sin 100\pi \cdot t$ összefüggésbe a $t = 0{,}06$ s értéket beírva: $\underline{\underline{U_t}} = 100 \cdot \sin 6\pi = \underline{\underline{0 \text{ V}}}$.

17.44. Az 50 Hz-es váltakozó feszültségű hálózatra sorosan kapcsolunk egy ideális kondenzátort és egy 0,6 H önindukciójú ideális tekercset. A tekercs induktív ellenállása háromszor nagyobb a kondenzátor kapacitív ellenállásánál.
Mekkora a kondenzátor kapacitása?

Megoldás:

17.44. $f = 50$ Hz; $L = 0{,}6$ H; $X_L = 3 \cdot X_C$.

A körfrekvencia: $\omega = 2\pi \cdot f = 314 \frac{1}{s}$.

A feltétel szerint $X_L = 3 \cdot X_C$, azaz $L \cdot \omega = \frac{3}{\omega \cdot C}$.

Ebből $\underline{C} = \frac{3}{L \cdot \omega^2} = \underline{\underline{50{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}}$.

17.45. A 220 V-os, 50 Hz-es váltakozó feszültségű hálózatra mérc-tezett villanymotor teljesítménytényezője 0,8. A motor 0,5 óra alatt 633,6 kJ munkát végez.
Mekkora a motor effektív áramfelvétele, a fáziseltolódás szöge és a hatásos teljesítmény?

Megoldás:

17.45. $U_{\text{eff}} = 220$ V; $\cos\varphi = 0{,}8$; $t = 1800$ s; $W = 633\,600$ J.

A munka: $W = P_{\text{h}} \cdot t$. Ebből $\underline{\underline{P_{\text{h}} = \frac{W}{t} = 352 \text{ W}}}$.

A hatásos teljesítmény: $P_{\text{h}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$.

Ebből $\underline{\underline{I_{\text{eff}} = 2 \text{ A}}}$.

Mivel a teljesítménytényező a $\cos\varphi$-t jelenti, ezért: $\cos\varphi = 0{,}8$. Ebből $\underline{\underline{\varphi = 36{,}9°}}$.

17.46. Egy váltakozó áramú generátor hasznos teljesítménye 3000 V feszültség és 0,8 teljesítménytényező mellett 100 kW.

a) Mekkora erősségű áramot szolgáltat a generátor?

b) Mekkora lenne a teljesítménye változatlan áramerősség és feszültség mellett, ha a teljesítménytényező a felére csökkenne?

Megoldás:

17.46. $U_{\text{eff}} = 3000$ V; $\cos\varphi = 0{,}8$; $P_{\text{h}} = 100\,000$ W.

a) $P_{\text{h}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$. Ebből $\underline{\underline{I_{\text{eff}} = 41{,}7 \text{ A}}}$.

b) Ha $\cos\varphi = 0{,}4$, $I_{\text{eff}} = 41{,}7$ A és $U_{\text{eff}} = 3000$ V, akkor $\underline{\underline{P_{\text{h}}}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi = \underline{\underline{50\,000 \text{ W}}}$.

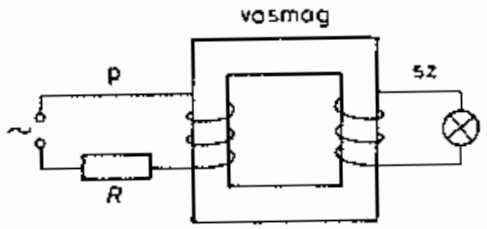
17.47. Egy transzformátor szekunder tekercséről 30 W teljesítményű izzólámpát üzemeltetünk, miközben 5 A effektív erősségű áram folyik rajta keresztül.
Mekkora effektív feszültség mérhető a primer tekerccsel sorosan kapcsolt 120 Ω-os fogyasztó két kivezetése között, ha a primer és szekunder tekercs menetszámának a hányadosa 15? (A veszteségektől eltekintünk.)

Megoldás:

17.47. $P = 30$ W; $I_{Sz} = 5$ A; $R = 120\ \Omega$; $\frac{N_p}{N_{Sz}} = 15$.

A fogyasztó teljesítménye:

$P = U_{Sz} \cdot I_{Sz}$. Ebből $U_{Sz} = \frac{P}{I_{Sz}} = 6$ V.



A primer tekercs feszültségére:

$\frac{U_p}{U_{Sz}} = \frac{N_p}{N_{Sz}}$. Ebből $U_p = 90$ V.

A primer kör áramára: $\frac{I_p}{I_{Sz}} = \frac{U_{Sz}}{U_p}$. Ebből $I_p = 0{,}33$ A.

A primer körben lévő ellenálláson eső feszültség: $\underline{\underline{U_R = I_p \cdot R = 40\ \text{V}}}$.

A feladatban mind az áram, mind a feszültség effektív értékei szerepelnek.

17.48. Egy 80 Ω-os ellenállású főzőlapot kapcsolunk a 220 V feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózati feszültségforrásra.

a) Ábrázoljuk a feszültség és a főzőlapon átfolyó áram erősségének időbeli lefolyását!

b) A feszültség és az áramerősség pillanatnyi értékei melyik időpillanatban lesznek azonosak először az effektív értékkel, ha a vizsgálatot a $t=0$ $(U=0)$ időpillanatban kezdjük?

Megoldás:

17.48. $R=80\ \Omega$; $U_{\text{eff}}=220$ V; $f=50$ Hz.

a) Mivel csak ohmos ellenállás van a körben, $\varphi=0$, azaz az I és U fázisban vannak.

Ha $f=50$ Hz, akkor $T=\dfrac{1}{f}=0{,}02$ s.

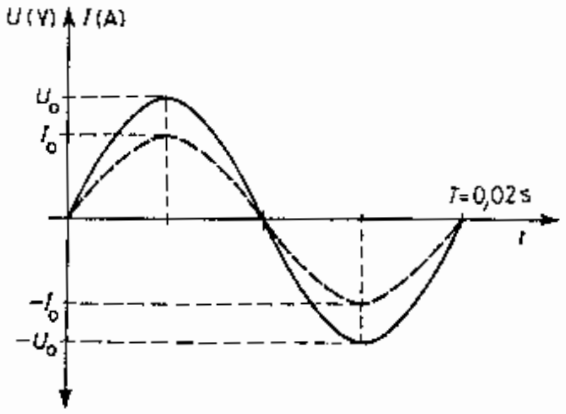
A feszültség maximuma:

$U_0=U_{\text{eff}}\cdot\sqrt{2}=310{,}2$ V.

Mivel $R=\dfrac{U_0}{I_0}$, így

$I_0=\dfrac{U_0}{R}=3{,}87$ A.

Tehát az ábrázolás:



b) Mivel U és I fázisban van, ezért mindkét esetben ugyanazon pillanatban lesz $U(t)=\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$, illetve $I(t)=\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Az $U(t)$ függvény $U(t)=U_0\cdot\sin\omega t=220\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(2\pi\cdot 50\cdot t)$.

Ha $U_t=2000$ V, akkor $220\text{ V}=220\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(100\pi\cdot t)$ V.

Ebből $\sin(100\pi\cdot t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, így $100\pi\cdot t=\dfrac{\pi}{4}$.

Ebből $\underline{\underline{t=0{,}0025\text{ s}}}$.

17.49. Egy kondenzátor kapacitív ellenállása 31,8 Ω, ha az 50 Hz frekvenciájú hálózati feszültségre kapcsoljuk.

a) Mekkora a kondenzátor kapacitása?

b) Mekkora frekvenciájú váltakozó árammal szemben lesz a kapacitív ellenállás 0,00318 Ω?

Megoldás:

17.49. $X_C = 31{,}8\ \Omega$; $f = 50$ Hz; $X'_C = 0{,}003\,18\ \Omega$.

a) $X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$. Ebből $\underline{\underline{C}} = \dfrac{1}{X_C \cdot 2\pi \cdot f} = \underline{\underline{10^{-4}\ \text{F}}}$.

b) $X'_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f' \cdot C} \cdot \dfrac{X_C}{X'_C} = \dfrac{2\pi \cdot f' \cdot C}{2\pi \cdot f \cdot C}$, ebből $\underline{\underline{f'}} = \dfrac{f \cdot X_C}{X'_C} =$

$= \underline{\underline{500\,000\ \text{Hz}}}$.

17.50. Váltakozó feszültség effektív értéke 110 V.
Mekkora a feszültség pillanatnyi értéke 60°-os fázisszög esetén?

Megoldás:

17.50. $U_{\text{eff}} = 110$ V: $\varphi = 60°$.
$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$. Ha $\omega t = \varphi$ a fázisszög, akkor: $\underline{\underline{U(\varphi)}} = U_0 \cdot \sin \varphi =$
$= U_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \varphi = \underline{\underline{134{,}7 \text{ V}}}$.

17.51. A 220 V effektív feszültségű, 50 Hz frekvenciájú hálózatra $5 \cdot 10^{-6}$ F kapacitású ideális kondenzátort kapcsolunk. Mekkora a körben folyó áram erőssége?

Megoldás:

17.51. $U_{\text{eff}} = 220$ V; $f = 50$ Hz; $C = 5 \cdot 10^{-6}$ F.

$X_C = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$, másrészt $X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

A két összefüggésből: $I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \cdot 2\pi \cdot f \cdot C = \underline{0{,}35 \text{ A}}$.

17.52. A 36 V csúcsfeszültségű, 50 Hz frekvenciájú váltakozó feszültségű körbe 0,1 H önindukciójú tekercset kapcsolunk. A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható. Mekkora a tekercsben folyó áram effektív értéke?

Megoldás:

17.52. $U_0 = 36$ V; $f = 50$ Hz; $L = 0{,}1$ H.

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 25{,}53 \text{ V}.$$

Az induktív ellenállás: $X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$. Másrészt $X_L = L \cdot 2\pi \cdot f$.

A két összefüggésből: $\underline{I_{\text{eff}}} = \frac{U_{\text{eff}}}{L \cdot 2\pi \cdot f} = \underline{0{,}81 \text{ A}}$.

17.53. Mennyi idő alatt nő az 50 Hz frekvenciájú váltakozó áram feszültsége zérusról az effektív értékre?

Megoldás:

17.53. $f = 50$ Hz.

A feszültség az idő függvényében: $U_t = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$.

A feladat szerint: $U_t = U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Így: $\frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$. Ebből $\sin(2\pi \cdot f \cdot t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Visszakeresve: $2\pi \cdot f \cdot t = \frac{\pi}{4}$. Ebből $\underline{t = 0{,}0025 \text{ s}}$.

17.54. Egy szinuszosan váltakozó feszültség maximális értéke 240 V, frekvenciája 50 Hz, és ezt egy 100 Ω-os ellenállású huzal végeire kapcsoljuk.
Írjuk fel a feszültséget és az áramerősséget az idő függvényében, majd ábrázoljuk ezt grafikusan is!

$(U_t(0)=0; \quad I_t(0)=0.)$

Megoldás:

17.54. $U_0=240$ V; $R=100\ \Omega$; $f=50$ Hz.

$\underline{\underline{U_t}}=U_0\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)=\underline{\underline{240\cdot\sin(100\pi\cdot t)}}.$

Másrészt: $R=\frac{U_0}{I_0}$. Ebből $I_0=\frac{U_0}{R}=2{,}4$ A.

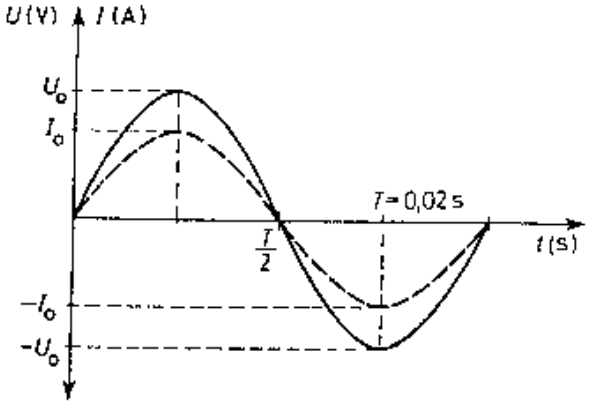
Így $\underline{\underline{I_t}}=I_0\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)=\underline{\underline{2{,}4\cdot\sin(100\pi\cdot t)}}.$

Ábrázolás:

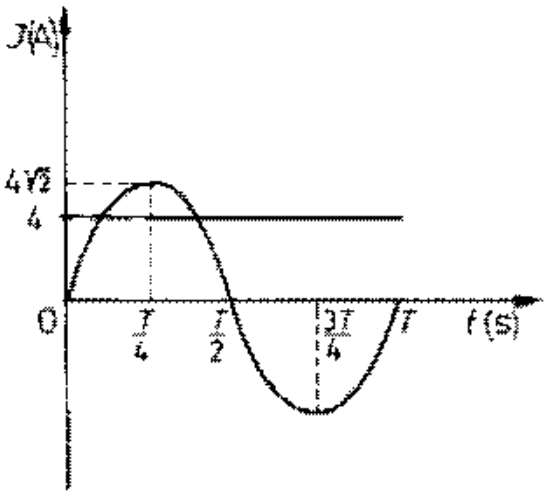
$U_0=240$ V;

$I_0=2{,}4$ A;

$T=\frac{1}{f}=0{,}02$ s.



17.55. Az ábrán egy váltakozó áram és egy egyenáram áramerősségének időbeli változását láthatjuk. Ugyanannyi idő alatt, ugyanazon értékű ellenálláson áthaladva, melyik áram végez több munkát?



Megoldás:

17.55. $I = 4$ A; $I_0 = 4 \cdot \sqrt{2}$ A.

Az egyenáram munkája t idő alatt, R ellenállás esetén:

$$W_1 = U \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = 16 \cdot R \cdot t.$$

A váltakozó áram munkája t idő alatt, R ohmikus ellenállás esetén: mivel $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $I_{\text{eff}} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} = 4$ A, így $W = (U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi) \cdot t =$

$= I_{\text{eff}}^2 \cdot R \cdot t = 16 \cdot R \cdot t.$

A két munka egyenlő.

17.56. Egy váltakozó áramú körbe egy ohmos, egy induktív és egy kapacitív ellenállást kapcsolunk sorosan. A kapacitív és induktív ellenállás értéke egyenlő. A feszültség maximális értéke 300 V, az áramerősség maximuma 4 A.
Mennyi munkát végez az elektromos áram 10 perc alatt?

Megoldás:

17.56. $X_L = X_C$; $U_0 = 300$ V; $I_0 = 4$ A; $t = 600$ s.
Ha $X_L = X_C$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$ (lásd a fejezet bevezetőjében rajzolt ábrát).

$$\underline{\underline{W}} = (U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi) \cdot t = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot t = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^5 \text{ J}}}.$$

17.57. Egy váltakozó áramú körben egymással sorosan kapcsolt ohmos, induktív és kapacitív ellenállások közül a két utóbbi egymással egyenlő értékű. A kapocsfeszültség maximuma 200 V, az áramerősség maximális értéke 5 A, a frekvenciája 50 Hz.

a) Mekkora a fáziseltolódás szöge?

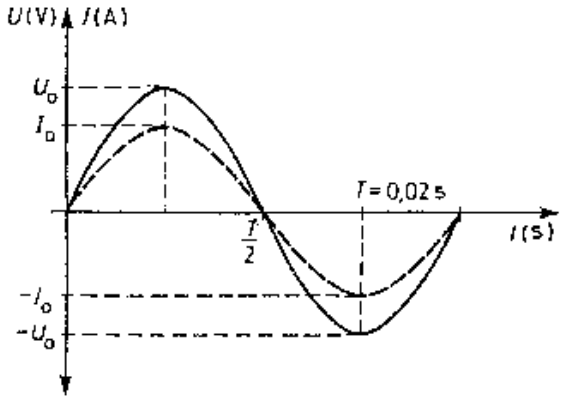
b) Ábrázoljuk a feszültséget és az áramerősséget az idő függvényében, ugyanabban a koordináta-rendszerben!

Megoldás:

17.57. $X_L = X_C$; $U_0 = 200$ V; $I_0 = 5$ A; $f = 50$ Hz.

a) Ha $X_L = X_C$, akkor $\underline{\underline{\varphi = 0}}$ (lásd a fejezet bevezetőjében lévő ábrát).

b) Ábrázolás: $U_0 = 200$ V, $I_0 = 5$ A, $T = \frac{1}{f} = 0{,}02$ s.



17.58. Egy váltakozó áramú körbe sorosan kapcsolunk egymással egy kapacitív és egy induktív ellenállást. A tekercs önindukciós együtthatója 0,4 H, az áram frekvenciája 50 Hz. Mekkora legyen a kondenzátor kapacitása, hogy a fáziskülönbség 0 legyen?

Megoldás:

17.58. $L = 0{,}4$ H; $f = 50$ Hz; $\varphi = 0$.

Az adott esetben φ csak akkor 0, ha $X_L = X_C$, azaz $L \cdot 2\pi \cdot f = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

Ebből $\underline{\underline{C}} = \dfrac{1}{4\pi^2 \cdot f^2 \cdot L} = \underline{\underline{2{,}53 \cdot 10^{-5}\ \text{F}}}$.

17.59. Egy váltakozó áramú hálózatba sorosan kapcsolunk egy 0,5 H önindukciójú tekercset és egy ohmos ellenállást. Mekkora az ohmos ellenállás értéke, ha az áram frekvenciája 50 Hz, a feszültség és az áramerősség közötti fáziskülönbség 60°?

Megoldás:

17.59. $L = 0{,}5$ H; $f = 50$ Hz; $\varphi = 60°$.

A fejezet bevezetőjének ábrája alapján: $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{R}{X_L}$. Ebből

$$\underline{\underline{R}} = X_L \cdot \operatorname{ctg}\varphi = L \cdot 2\pi \cdot f \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \underline{\underline{90\ \Omega}}.$$

17.60. Egy 100 Ω-os ohmikus ellenállást, egy 50 μF kapacitású kondenzátort és egy 0,4 H önindukciójú, elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercset sorba kapcsolunk egy 200 V-os, 50 Hz frekvenciájú váltakozó feszültségre.

a) Mekkora a kör eredő ellenállása?
b) Mekkora a körben folyó áram effektív értéke?
c) Mekkora a kondenzátorra jutó feszültség effektív értéke?

Megoldás:

17.60. $R = 100\ \Omega$; $C = 50 \cdot 10^{-6}$ F; $L = 0{,}4$ H; $U_{\text{eff}} = 200$ V; $f = 50$ Hz.

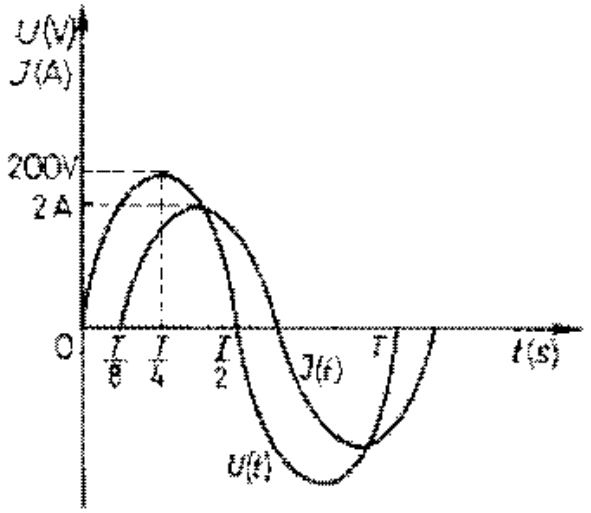
a) Az $X_L = L \cdot 2\pi \cdot f = 125{,}6\ \Omega$. Az $X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = 63{,}69\ \Omega$.

Az eredő impedancia $\underline{\underline{Z}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \underline{\underline{117{,}6\ \Omega}}$.

b) $\underline{\underline{I_{\text{eff}}}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{Z} = \underline{\underline{1{,}7\ \text{A}}}$.

c) $\underline{\underline{U_{\text{eff}}(C)}} = I_{\text{eff}} \cdot X_C = \underline{\underline{108{,}27\ \text{V}}}$.

17.61. Egy váltakozó áramú körben egy kapacitív, egy induktív és egy ohmos ellenállást kapcsolunk sorosan. A körben az áramerősség és a feszültség időbeli változását az alábbi ábra mutatja. ($U_{max} = 100$ V; $I_{max} = 1$ A.)



Mekkora a frekvencia, ha a tekercs önindukciós együtthatója 0,6 H, a kondenzátor kapacitása $2 \cdot 10^{-5}$ F?

Megoldás:

17.61. $U_0 = 100$ V; $I_0 = 1$ A; $L = 0{,}6$ H; $C = 2 \cdot 10^{-5}$ F.

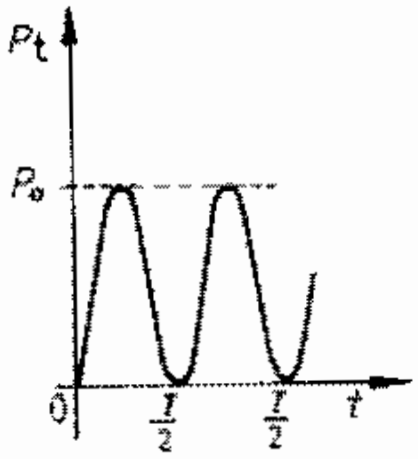
Az ábráról és a 17.34. feladatban leírtak szerint $\varphi = 45°$.

A fejezet bevezetőjének ábrájáról: $\sin\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{Z}$. Ebből: $Z \cdot \sin\varphi = X_L - X_C$, azaz $\dfrac{U_0}{I_0} \cdot \sin\varphi = L \cdot 2\pi \cdot f - \dfrac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

Az egyenletben a behelyettesítéseket elvégezve, a nevezőkkel beszorozva f-re másodfokú egyenletet kapunk.

Ennek megoldása: $\underline{\underline{f = 56{,}2 \text{ Hz}}}$. A negatív gyöknek most nincs fizikai értelme.

17.62. Egy szinuszosan váltakozó áramú körben az egymással sorosan kapcsolt ohmos, induktív és kapacitív ellenállások közül az utóbbi 40 Ω nagyságú. Mekkora az induktív ellenállás értéke, ha a pillanatnyi teljesítmény az időtől az ábrán látható módon függ?

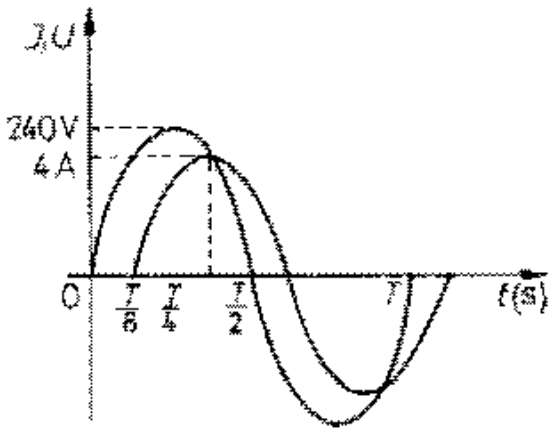


Megoldás:

17.62. $X_C = 40\ \Omega$.

A 17.11. feladat alapján: az ábra szerint a P_t minden pillanatban pozitív vagy 0. Ez csak akkor lehet, ha az U_t és I_t fázisban van, azaz $\varphi = 0$. Ekkor $\underline{\underline{X_L = X_C = 40\ \Omega}}$.

17.63. Az ábrán egy váltakozó áramú kör feszültségét és áramerősségét ábrázoltuk az idő függvényében. Mekkora az áram pillanatnyi teljesítménye a 4,025 s-ban, ha az áram frekvenciája 50 Hz?



Megoldás:

17.63. $U_0 = 240$ V; $I_0 = 4$ A; $\varphi = 45°$; $t = 4{,}025$ s; $f = 50$ Hz.

Az ábráról leolvasható a fáziseltolódás szöge: $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$ (lásd a 17.34. feladatot).

A pillanatnyi teljesítmény:

$P_t = U_t \cdot I_t = (U_0 \cdot \sin \omega t) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

$P_t = (U_0 \cdot \sin 2\pi \cdot f \cdot t) \cdot I_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t - \varphi)$.

Itt $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Az adatokat beírva és a műveleteket elvégezve $\underline{\underline{P_t = 678{,}8 \text{ W}}}$.

17.64. Szinuszosan váltakozó feszültség pillanatnyi értéke a csúcsérték feléről a csúcsértékre növekszik $\frac{1}{600}$ s alatt.

Mekkora a váltakozó feszültség frekvenciája, körfrekvenciája, periódusideje?

Megoldás:

17.64. $\Delta t = \frac{1}{600}$ s.

A pillanatnyi feszültség: $U(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$.

Amikor a pillanatnyi feszültség a csúcsérték fele: $\frac{U_0}{2} = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t_1)$.

Ebből $\sin(2\pi \cdot f \cdot t_1) = \frac{1}{2}$. Így $2\pi \cdot f \cdot t_1 = \frac{\pi}{6}$. Ebből $t_1 = \frac{1}{12 \cdot f}$.

Amikor a pillanatnyi feszültség a csúcsértékkel egyenlő: $t_2 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f}$

($T = \frac{1}{f}$) (ez a negyedperiódusnál történik).

A két idő közötti különbség: $t_2 - t_1 = \frac{1}{600}$, azaz $\frac{1}{4 \cdot f} - \frac{1}{12f} = \frac{1}{600}$.

Ebből $\underline{\underline{f = 100 \text{ Hz}}}$; $\underline{\underline{\omega = 628 \frac{1}{\text{s}}}}$; $\underline{\underline{T = 0{,}01 \text{ s}}}$.

17.65. Egy váltakozó áramú körbe sorosan kapcsolunk egy kondenzátort és egy tekercset. A kondenzátor kapacitív ellenállása 50 Ω, a tekercs ellenállása 20 Ω.
Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója, ha az áramerősség és a feszültség közötti fáziskülönbség 30° és az áram frekvenciája 50 Hz?

Megoldás:

17.65. $X_C = 50\ \Omega$: $R = 20\ \Omega$; $\varphi = 30°$; $f = 50$ Hz.

A fejezet bevezetőjének ábrája alapján: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$. Ebből $X_L = R \cdot \operatorname{tg}\varphi + X_C$.

De $X_L = L \cdot 2\pi \cdot f$, így $L \cdot 2\pi \cdot f = R \cdot \operatorname{tg}\varphi + X_C$.

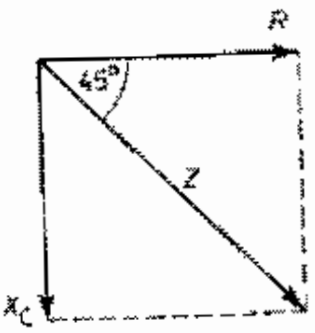
Ebből: $\underline{\underline{L}} = \dfrac{R \cdot \operatorname{tg}\varphi + X_C}{2\pi \cdot f} = \underline{\underline{0{,}19\ \text{H}}}$.

Megjegyzés. A feladatban a tekercs ellenállásán az ohmikus ellenállását értettük. Az adatokból nem tűnik ki, hogy a tekercs ellenállásán az induktív és az ohmos ellenállások eredőjét kell-e értenünk. Ha igen, akkor az itt szereplő adatokkal nincs valós megoldás.

17.66. Egy váltakozó áramú körbe sorosan kapcsolunk egy kondenzátort és egy ohmos ellenállást. Az eredő ellenállás 100 Ω, az áramerősség és a feszültség közötti fáziskülönbség 45°, az áram frekvenciája 50 Hz.
Mekkora a kondenzátor kapacitása?

Megoldás:

17.66. $Z = 100\ \Omega$; $\varphi = 45°$; $f = 50$ Hz.



Az ábra alapján: $\sin 45° = \frac{X_C}{Z}$.

Ebből $X_C = Z \cdot \sin 45° = 70{,}7\ \Omega$.

De $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

Ebből $\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot X_C} = \underline{\underline{4{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{F}}}$.

17.67. Egy váltakozó áramú körben az áramerősség és a feszültség közötti fáziskülönbség 60°. A feszültség maximális értéke 200 V, az áramerősség maximuma 6 A, a frekvencia 50 Hz. (A $t=0$ pillanatot úgy választjuk meg, hogy a feszültség kezdőfázisa 0 legyen.)
Mekkora a váltakozó áram pillanatnyi teljesítménye az 5,015. s-ban?

Megoldás:

17.67. $\varphi = 60°$; $U_0 = 200$ V; $I_0 = 6$ A; $f = 50$ Hz; $t = 5{,}015$ s.

A pillanatnyi teljesítmény:

$$P_t = (U_0 \cdot \sin \omega t) \cdot I_0 \sin(\omega t - \varphi) = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot I_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t - \varphi).$$

Az adatokat behelyettesítve: $\underline{\underline{P = 600 \text{ W}}}$.

A φ értékét ívmértékbe átszámolva ($\varphi = \frac{\pi}{3}$) írjuk be.

17.68. Egy tekercsben 50 Hz-es váltakozó áram folyik. Ehhez induktíven csatolunk egy rezgőkört.
Mekkorának válasszuk a rezgőkörben a kondenzátor kapacitását, ha a tekercs önindukciós együtthatója 0,2 H és maximális amplitúdójú rezgéseket akarunk előállítani?

Megoldás:

17.68. $f = 50$ Hz; $L = 0{,}2$ H.
Maximális amplitúdójú a rezgés, ha rezonancia jön létre. Ez akkor lehetséges, ha a kényszerrezgés frekvenciája ($f_k = 50$ Hz) megegyezik a rezgőkör f_s sajátfrekvenciájával. Az $f_s = \dfrac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$.
Tehát: $f_k = f_s$, azaz $f_k = 1 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$.
Ebből: $\underline{C} = \dfrac{1}{4\pi^2 \cdot f_k^2 \cdot L} = \underline{\underline{5{,}06 \cdot 10^{-5}\ \text{F}}}$.

17.69. Sorosan kapcsolunk egy 20 μF kapacitású kondenzátort és egy tekercset az 50 Hz-es váltakozó feszültségű hálózatra.

A kondenzátoron 16 V, a tekercsen pedig 8 V feszültséget mérünk.

Mekkora a tekercs önindukciós együtthatója?

Megoldás:

17.69. $C = 2 \cdot 10^{-5}$ F; $f = 50$ Hz; $U_C = 16$ V; $U_L = 8$ V.

A kapacitív ellenállás: $X_C = \frac{U_C}{I}$, másrészt $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$.

A két egyenletből $I = U_0 \cdot 2\pi \cdot f \cdot C = 0{,}1$ A.

A tekercs effektív árama ugyanennyi.

Így $X_L = \frac{U_L}{I} = 80\ \Omega$.

Másrészt $X_L = L \cdot 2\pi \cdot f$. Ebből $\underline{\underline{L}} = \frac{X_L}{2\pi \cdot f} = \underline{\underline{0{,}255\ \text{H}}}$.

17.70. A szinuszosan váltakozó feszültség csúcsértékének a felét ugyanabban a félperiódusban kétszer veszi fel. A két időpillanat közti időtartam $\frac{1}{300}$ s. A feszültség csúcsértéke 50 V.

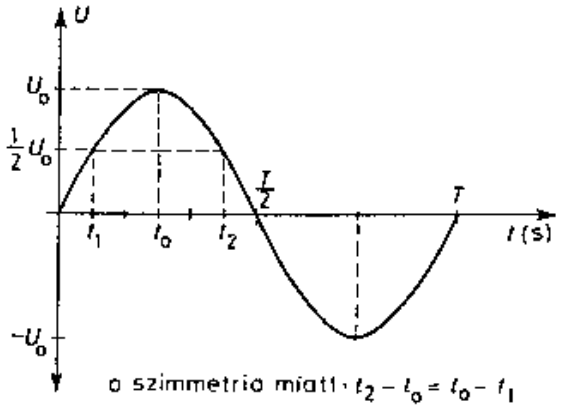
a) Mekkora a váltakozó feszültség periódusideje és frekvenciája?

b) Mekkora a feszültség pillanatnyi értéke a maximális feszültségérték elérése után $\frac{1}{1200}$ s múlva?

Megoldás:

17.70. $t = \frac{1}{300}$ s; $t = \frac{1}{1200}$ s; $U_0 = 50$ V.

a) A 17.64. feladat szerint amikor először éri el a feszültség a csúcsérték felét, akkor $t_1 = \frac{1}{12f}$. Amikor a maximumot éri el, akkor $t_0 = \frac{1}{4f}$. Az az idő, amikor másodszor éri el a feszültség az U_0 felét: $t_2 = t_0 + (t_0 - t_1)$. Lásd az ábrát!



Tehát $\Delta t = t_2 - t_1 = 2(t_0 - t_1) = 2\left(\frac{1}{4f} - \frac{1}{12f}\right)$.

Behelyettesítve: $\frac{1}{300}\ \text{s} = \frac{1}{2f} - \frac{1}{6f}$.

Ebből $\underline{\underline{f = 100\ \text{Hz}}}$ és $\underline{\underline{T = 0{,}01\ \text{s}}}$.

b) Az $U_t = U_0 \cdot \sin \omega t = 50 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$, ahol $t = \frac{T}{4} + \frac{1}{1200}\ \text{s} =$ $= 0{,}033$ s. Így $\underline{\underline{U_t = 43{,}3\ \text{V}}}$.

17.71. Mekkora a 0,5 H önindukciójú tekercsből és a 3 μF kapacitású kondenzátorból álló rezgőkör sajátfrekvenciája?

Megoldás:

17.71. $L = 0{,}5\ \text{H};\quad C = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F}.$

$$\underline{\underline{f_s}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \underline{\underline{130\ \text{Hz}}}.$$

17.72. Egy antenna 2 MHz frekvenciájú elektromágneses hullámokat sugároz.
Mekkora az elektromágneses hullámok hullámhossza?

Megoldás:

17.72. $f = 2 \cdot 10^6$ Hz; $C = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{s}$,

$\underline{\underline{\lambda = \frac{C}{f} = 150 \text{ m}}}$.

18.1. *Döntsük el, hogy a számmal jelölt kifejezések az alábbi, A), B), C), D) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Mind az állítás, mind az indoklás igaz, és a kettő közötti ok-okozati összefüggés van.

B) Mind az állítás, mind az indoklás igaz, de közöttük nincs ok-okozati összefüggés.

C) Az állítás helyes, de az indoklás helytelen.

D) Az állítás és az indoklás is helytelen.

1. Ha fémes vezetőre feszültséget kapcsolunk, akkor a vezető felmelegszik, mert a felgyorsított elektronok átadják energiájuk egy részét a rácsszerkezetben rögzített ionoknak.
2. A ködfénykisülés során ionizált gázrészecskék világítanak, mert a nagy energiájú ütközések révén a gázmolekulák izzásba jönnek.
3. Az atommagban pontosan annyi proton van, mint amennyi neutron, mert a protonok és neutronok azonos száma biztosítja a mag stabilitását.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.1. Az 1. állítás A) típusú. Az elektromos áram hőhatása a leírt jelenség következménye.

A 2. állítás C) típusú. A ködfénykisülés szabad szemmel megfigyelhető. A nagy energiájú ütközések révén a gázrészecskék gerjesztett állapotba juthatnak, s ezekből az állapotokból fénykibocsátás révén térnek vissza kisebb energiájú állapotokba, illetve az alapállapotba.

A 3. állítás D) típusú. Az alacsonyabb rendszámú elemeknél még előfordul a protonok és a neutronok számának megegyezése, de a rendszám növekedésével növekszik a neutronok és a protonok száma közötti különbség. Az atommag stabilitását a protonok és a neutronok száma meghatározza, de nem a leírt módon.

18.2. *Döntsük el, hogy a számmal megjelölt kijelentések az alábbi, A), B), C), D), E) betűkkel megjelölt típusok közül melyikhez tartoznak!*

A) Mind az állítás, mind az indoklás igaz, és a kettő között ok-okozati összefüggés van.

B) Mind az állítás, mind az indoklás igaz, de közöttük ok-okozati összefüggés nincs.

C) Az állítás helyes, de az indoklás helytelen.

D) Az állítás hamis, de az indoklás önmagában helyes.

E) Az állítás és az indoklás egyaránt helytelen.

1. A hidrogén színképében öt különböző vonalsorozat figyelhető meg könnyen, mert a gerjesztett hidrogénatomok öt különböző megengedett energiájú állapotba való átmenete következik be leggyakrabban.
2. Az atomok egy nukleonra jutó kötési energiája a rendszám növekedésével mindig emelkedik, mert a rendszám növekedésével együttal növekszik a nukleáris kölcsönhatásban részt vevő elemi részecskék száma is.
3. A Földön bányászható urániumban nagyon kicsiny mennyiségben fordul elő a $_{92}U^{235}$-izotóp, mert jóval lassabban keletkezik a magátalakulási folyamatok során az uránium 235-ös izotópja, mint a többi.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.2. Az 1. állítás A) típusú. A spektroszkópiai mérések tapasztalatai és azok magyarázatai összhangban vannak az állítással és az indoklással.

A 2. állítás D) típusú. Egy nukleonra jutó kötési energiára vonatkozó számításokkal az állítás ellentmond. A rendszám növekedésével növekszik az atommagban lévő nukleonok száma, így a nukleonok közötti kölcsönhatásban részt vevő részecskék száma is.
A 3. állítás C) típusú. Tény, hogy a természetben az $_{92}U^{235}$ izotóp kevés a kibányászott urániumban. Az indoklás helytelen. A 235-ös izotópnak a bomlékonysága nagyobb, mint a többi uránium izotópé, kisebb a felezési ideje is, ezért van belőle kevesebb. A Föld eddigi története során az $_{92}U^{235}$ izotóp nagy hányada már elbomlott.

18.3. *Az állítások közül egy* HIBÁS, *ezt válasszuk ki!*

A) Az elektron az elemi töltés legkisebb tömegű hordozója, oszthatatlan egység.

B) Az elektron fajlagos töltésének a nagysága sokkal nagyobb, mint a protoné.

C) Az elektron fajlagos töltése a legkisebb az összes töltött részecske fajlagos töltése között.

D) A részecskék fajlagos töltése és mozgékonyságuk között szoros kapcsolat van.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.3. Hibás állítás: C), mert van olyan elemi részecske, pl.: a proton, amelynek fajlagos töltése jóval kisebb, mint az elektroné.

18.4. *Az állítások közül egy* HIBÁS, *ezt válasszuk ki!*

A) Az elektrolit-oldatban egyszerre nem lehetnek jelen pozitív ionok és negatív ionok.

B) Az elektrolitban a negatív töltésű ionok a pozitív elektróda felé haladnak, és ott egy vagy több negatív elemi töltésadagot adnak át a pozitív elektródának.

C) Az elektrolitok áramvezetésével együttjáró folyamat: az elektródákon zérus össztöltésű atomok vagy atomcsoportok válnak ki.

D) A negatív ion a hiányzó töltést nem veheti fel a negatív elektródáról.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.4. Hibás állítás: A), mert az elektrolitok áramvezetésében az oldatban ellentétes irányban áramló pozitív és negatív ionok vesznek részt.

18.5. *Az állítások közül egy* **HIBÁS**, *ezt válasszuk ki!*

A) Az anyagok színképe lehet vonalas, sávos vagy folytonos.

B) Az anyag emissziós (kibocsátási), illetve abszorpciós (elnyelési) színképe egyaránt utal az anyag kémiai összetételére.

C) A színképvonalak hullámhossza független az atom elektronjainak a lehetséges energiaértékeitől.

D) Az atomok által kibocsátott fény frekvenciái csak pontosan meghatározott értékeket vehetnek fel.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.5. Hibás állítás: C), mert a kibocsátott fény hullámhossza és a foton energiája között fennáll a jól ismert összefüggés: $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$.

18.6. *Az állítások közül egy* HIBÁS, *ezt válasszuk ki!*

A) A normál nyomású levegő jó elektromos szigetelő.
B) A normál nyomású levegőben nem játszódnak le kisülési jelenségek.
C) A szikrakisülés létrejöttéhez nem szükséges vákuumot létesíteni.
D) A ködfénykisülés nem valósul meg normál nyomású levegőben.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.6. Hibás állítás: B), mert mindkét jelenség lejátszódik normális nyomású levegőben. Pl.: szikrakisülés történik a villámlás közben, illetve ívkisülés zajlik az elektromos hegesztés során.

18.7. *Az állítások közül egy* HIBÁS, *ezt válasszuk ki!*

A) A β-bomlás során az atommag egyik neutronja elbomlik és protonná alakul át.

B) A β-bomlás során az atommag egyik protonja neutronná alakul át.

C) A β-bomlásban megfigyelhető $n \rightarrow p^+ + e^-$ átalakulás neve gyenge kölcsönhatás.

D) A β-részecskék energiája a kisugárzó anyagra jellemző állandó érték.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.7. Hibás állítás: D), mert a β-bomlás során az átalakulásban az elektronok vagy pozitronok mellett keletkeznek további részecskék – neutrínó, antineutrínó –, amelyek részesednek az energiából. A béta-bomlás spektruma folytonos.

18.8. *Az állítások közül egy* HIBÁS, *ezt válasszuk ki!*

A) A megvilágítás intenzitásától függetlenül, azonos színű fény hatására ugyanabból a fémből kilépő leggyorsabb elektronok mozgási energiája mindig ugyanakkora.

B) Az egyszínű fény legkisebb energiaadagjának a nagysága függ a fény színétől.

C) Az egyszínű fény elemi energiaadagja egyenesen arányos a fény frekvenciájával.

D) Az egyszínű fény elemi energiaadagja függ a fény hullámhosszától, azzal egyenesen arányos.

Indokoljuk válaszásunkat!

Megoldás:

18.8. Hibás állítás: D), mert a fotonok energiája $E = h \cdot \frac{c}{\lambda}$. Az összefüggésből megállapítható, hogy nem áll fenn az egyenes arányosság.

18.9. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Melyik eszköz működésén keresztül érzékeltethetjük a kilépési munka fogalmát?

A) A kételektródás elektroncsőével (diódával),

B) a termoelemével,

C) a háromelektródás elektroncsőével (triódáéval),

D) a félvezető diódáéval.

Megoldás:

18.9. Helyes állítások: A), C), mert az elektroncsövek izzított katódjából kilépnek az anódra jutó elektronok. A jelenség a diódában, és a triódában egyaránt lejátszódik.

18.10. *Válasszuk ki* az elektrolízisre vonatkozó állítások közül *a* HELYESEKET!

A) Egységnyi tömegű anyag kiválasztásához az anyagi minőségtől függetlenül 96 500 C töltésre van szükség.

B) Valamely anyag egységnyi tömegének elektrolitból való kiválasztásához mindig ugyanannyi elektromos töltésre van szükség.

C) Az elektrolitból kiválasztott anyag mennyisége csak az elektrolizáló áram erősségétől és az elektrolízis időtartamától függ.

D) Azonos mennyiségű elektromos töltés hatására kivált különböző anyagok mennyiségei úgy aránylanak egymáshoz, mint a moláris tömegük és a vegyértékük hányadosai.

Megoldás:

18.10. Helyes állítások: B), D). Az állítások Faraday törvényeivel összhangban vannak.

18.11. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) Az akkumulátorok közel reverzibilis működésű galvánelemek.

B) A savas akkumulátorcellák feszültsége feltöltött és terheletlen állapotban 2,1 V.

C) Az akkumulátorcellákat 6 V, 12 V vagy 24 V névleges feszültségűre készítik, attól függően, hogy milyen célra kívánják felhasználni.

D) Az ólomakkumulátor belső ellenállása viszonylag kicsiny, emiatt kapocsfeszültsége majdnem független a terheléstől.

E) Az akkumulátor töltéstároló-képessége nem függ a méreteitől.

Megoldás:

18.11. Helyes állítások: A), B), D). Az állítások az akkumulátorok működésének a lényegét jelentik.

18.12. *Válasszuk ki a* HELYES *válaszokat!*

Melyik vezetési jelenségben van döntő szerepe az ütközési ionizációnak?

A) A szikrakisülésben,

B) az ívkisülésben,

C) a ködfénykisülésben,

D) a katódsugárzásban.

Megoldás:

18.12. Helyes válaszok: A), B), C). Mindhárom jelenségben elektromosan töltött részecskék gyorsulnak a velük ellentétes polaritású töltésfelhalmozódás irányába, s eközben jön létre az ütközési ionizáció.

18.13. *Válasszuk ki* a fotocella áramkörében folyó áramerősségre vonatkozó *állítások közül a* HELYESEKET!

A) Az áram erőssége adott beeső szín mellett általában függ a megvilágító fény erősségétől.

B) Állandó anódfeszültség mellett az áram erőssége függ a megvilágító fény színétől.

C) Állandó anódfeszültség mellett az áram erőssége függ a megvilágító fény frekvenciájától.

D) Állandó megvilágításnál az áram erőssége csak kismértékben függ az anódfeszültségtől.

Megoldás:

18.13. Helyes válaszok: A), B), C), D).

18.14. *Válasszuk ki* a felsorolt egyenlőségek közül azokat, amelyek a fény kvantumosságára utalnak!

A) $\Delta s = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$,

B) $h \cdot f = E$,

C) $\frac{h \cdot f}{c^2} = m$,

D) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.14. A B) és a C) válaszban szereplő összefüggések utalnak a fény részecske voltára. B) válasz a részecske – a foton – energiáját adja, a C) pedig a fényrészecske tömegét.

18.15. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Interferenciakép előállítható
A) fénysugarakkal,
B) egyenként érkező nagyszámú fotonnal,
C) elektronokkal,
D) elektromágneses sugárzással.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.15. Helyes válaszok: A), B), C), D). Az interferencia hullámok találkozása. A felsorolt „jelenségek" mindegyike értelmezhető hullámjelenségként.
B): Az interferenciaképet úgy értelmezhetjük, hogy az interferométerben vannak olyan helyek, ahová nagy valószínűséggel érkeznek fotonok, míg vannak helyek, ahol a fotonok becsapódási valószínűsége kicsiny.
C): Az elekrtoninterferenciát számos kísérlettel igazolták, pl.: katódsugárcsőben gyorsított, grafitrácson átbocsátott elektronok interferenciaképe gyűrűkből áll. A gyűrűk alapján nem túl bonyolult mérések és számítások nyomán meghatározható az elektronhullám hullámhossza.

18.16. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az elemi részek helyzetének és mozgásának összefonódottságát kifejező határozatlansági elv szerint:

A) nincs akadálya annak, hogy egy részecske helyzetét egyre pontosabban meghatározzuk;

B) nincs akadálya annak, hogy egy részecske sebességének meghatározottságát fokozzuk;

C) a természet nem engedi a helyzet és a mozgás meghatározottságának egyidejű fokozását bizonyos határon belül;

D) minél pontosabban meghatározott a részecskék sebessége, annál nagyobb az a térrész, amelyben jelenlétük megnyilvánulhat.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.16. Helyes válaszok: A), B), C), D). Mindegyik válasz összecseng a Heisenberg-féle határozatlansági elvvel, amelyet alátámasztanak a fizikai elméletek és kutatások.

18.17. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Az atommagot alkotó nukleonok közötti erős kölcsönhatás:

A) sokszor nagyobb erősségű a töltött részecskék közötti elektrosztatikus kölcsönhatásnál;

B) neutron–neutron párok között a legerősebb;

C) mindig vonzó;

D) a töltött részecskék között jóval erősebb, mint a töltetlenek között.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.17. Hibás állítások: B), D), mert az erős kölcsönhatásról azt állítjuk, hogy független a kölcsönhatásban részt vevő részecskék elektromos töltésétől, töltésfüggetlen.

18.18. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Radioaktív sugárzás során a sugárzó anyag atomjaiban bekövetkező változások:

A) α-sugárzáskor az atom tömegszáma és rendszáma néggyel csökken;

B) α-rész kibocsátásakor a nukleonok közötti elektrosztatikus kölcsönhatásból származó energia lecsökken;

C) α-részecske kibocsátása a kisebb rendszámú elemekre sokkal jellemzőbb, mint a magasabb rendszámúakra.

D) α-részecske kibocsátásakor az atom rendszáma kettővel, tömegszáma néggyel csökken.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.18. Helyes állítások: B), D), mert egy α-részecske kibocsátásakor két protonnal és két neutronnal csökken a kibocsátó atommag nukleonjainak a száma.

18.19. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A Wilson-féle ködkamra radioaktív sugárzások kimutatására szolgál, amelyben:

A) a sugárforrásból kilépő részecskék pályájuk mentén ionizációt hoznak létre;
B) a sugárzás által keltett részecskenyomok könnyen lefényképezhetők;
C) különböző hosszúságú, vastagságú, szélességű részecskenyomok keletkeznek, s ezekből a részecskék fizikai tulajdonságaira következtethetünk;
D) a létrehozott nagy vákuum miatt jól szemléltethetők a radioaktív sugárzások.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.19. Helyes állítások: A), B), C). A válaszokban leírt jelenségek tették alkalmassá a készüléket arra, hogy a kutatók lényeges magfizikai felfedezéseket tegyenek vele. Említhető Rutherford első mesterséges atommag átalakítási kísérlete 1919-ből.

18.20. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

A radioaktív bomlási sorozatok jellemző tulajdonsága:

A) a sorozat bármely eleme képes kibocsátani α-, β- és γ-sugarakat;

B) a sorozat kiinduló elemének a leghosszabb a felezési ideje;

C) a sorozat utolsó eleme ólomizotóp;

D) a sorozat utolsó elemének a rendszáma 82.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.20. Hibás állítás: A).

18.21. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A hidrogénatom:

A) elektronja a pozitív töltésű atommaggal van kölcsönhatásban;

B) ionizálható 2,2 aJ energiával;

C) a gerjesztett állapotból az alapállapotba való visszatérésekor általában elektromágneses hullámot sugároz ki;

D) alapállapotban gömb alakú.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.21. Helyes állítások: A), B), C), D).

18.22. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az atommag kötési energiáját jelentősen meghatározó kölcsönhatások:

A) a nukleonok közötti erős kölcsönhatás,
B) a protonok közötti elektrosztatikus kölcsönhatás,
C) a részecskék közötti gravitációs kölcsönhatás,
D) a gyenge kölcsönhatás.
Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.22. Valójában mindegyik állítás helyes. A kölcsönhatásra jellemző erő azonban az A) és B) esetben jóval nagyobb, mint a másik két esetben.

18.23. *Válasszuk ki a* HIBÁS *állításokat!*

Melyik magátalakulási folyamatban keletkezhet neutrínó vagy annak antirészecskéje?

A) A radioaktív sugárzások kísérőjelenségeként mindig keletkezhet,

B) a β-sugárzás során keletkezik,

C) a α-részecskék kibocsátásakor,

D) a neutronnak protonná alakulásakor.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.23. Hibás válasz: A), C), mert neutrínó vagy antineutrínó β-bomlások során keletkezhet a $p \rightarrow n$, vagy az $n \rightarrow p$ átalakulások során.

18.24. *Jelöljük a számozott állításokat az A), B), C) vagy D) betűkkel aszerint, hogy az állítások melyik jelenségre vonatkoznak!*

A) Ívkisülés levegőben
B) Szikrakisülés levegőben
C) Mindkettő
D) Egyik sem

1. Viszonylag kis feszültség – néhány 10 V – esetén is létrejöhet.
2. Nagy térerősség esetén jön létre.
3. A vezetési ionok hozzák létre.
4. Az ionokat a térerősség hatására kialakult dipólusmolekulák ütközései hozzák létre.
5. Az ionokat a levegő molekuláinak és az izzó katódból kilépő elektronoknak az ütközései hozzák létre.
6. A vezetésben csak elektronok vesznek részt.
7. A katód izzását az érintkezéskor fellépő nagy átmeneti ellenállás okozza.
8. A villám is ide tartozik.

Megoldás:

18.24. Az A), B), C), D) betűkkel jelzett folyamatok jellemezhetőek a melléjük írt számokkal jelzett állításokkal.
A) – 1, 3, 5, 7; B) – 2, 3, 4, 8; C) – 3; D) – 6.

18.25. Az ólomakkumulátor két elektródja ólom (negatív pólus) és ólom-oxid (pozitív pólus), az elektrolit pedig higított kénsav. Egészítsük ki az alábbi – az elektródokon – lejátszódó folyamatokat!

A katódon: $Pb \rightleftarrows Pb^{2+} +$ ·

$Pb^{2+} + SO_4^{2-} \rightleftarrows$ ·

Az anódon: $PbO_2 + 4$ · $\rightleftarrows$ · $2\,H_2O$

$Pb^{4+} + 2$ · $\rightleftarrows Pb^{2+}$

$Pb^{2+} +$ · $\rightleftarrows PbSO_4$

Megoldás:

18.25. A katódon lejátszódó folyamat:

$Pb \rightleftharpoons Pb^{2+} + 2e^-$; $Pb^{2+} + SO_4^{2-} \rightleftharpoons PbSO_4$.

Az anódon: $PbO_2 + 4H^+ \rightleftharpoons Pb^{4+} + 2H_2O$; $Pb^+ + 2e^- \rightleftharpoons Pb^{2+}$; $Pb^{2+} + SO_4^{2-} \rightleftharpoons PbSO_4$.

A felső nyíl a kisütés, az alsó nyíl a töltés közben lejátszódó folyamatok irányát jelzi.

18.26. *Válasszuk ki* az elektrolízis törvényeire vonatkozó állítások közül *a* HELYESEKET!

1. Bármely anyagnál 96 500 C töltés szükséges:
   A) a moláris tömeg és a vegyérték hányadosával képezett mennyiségű anyag kiválasztásához,
   B) 1 mol mennyiségű anyag kiválasztásához.
2. Azonos töltés hatására különböző anyagokból:
   A) a kivált mennyiségek egyenlőek:
   B) egyaránt 1 mol mennyiség válik ki;
   C) a kivált mennyiségek úgy aránylanak egymáshoz, mint a moláris tömeggel és a vegyértékkel képezett hányadosok;
   D) a kivált mennyiségek úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 mol mennyiségeik.
3. Az elektródokon kivált anyag mennyisége:
   A) független az anyag minőségétől,
   B) egyenesen arányos az elektromos áram erősségével,
   C) egyenesen arányos az elektrolízis időtartamának négyzetével.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.26. Helyes állítás párosítások: 1.–A), 2.–C), 3.–B).
Az elektrolízis Faraday-féle törvényei szerint.

18.27. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Az állítások az elektrolitos disszociációra és az elektrolízisre vonatkoznak.

A) A sósav vizes oldatában pozitív hidroxónium és negatív kloridionok vannak.

B) A sósav vizes oldata csak elektromos egyenfeszültség hatására bomlik ionokra.

C) A sósav vizes oldatának elektrolízisekor az anódon klórgáz, a katódon hidrogéngáz keletkezik.

D) A hidrogénionok a katódon elektronokat adnak le, a kloridionok az anódon elektronokat vesznek fel folyamatosan, s így zárt áramkör jön létre.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.27. Helyes állítások: A), C).

A): Az állítás azt jelenti, hogy a H^+ hidrogénionok és a poláris H_2O molekulák közötti erős elektrosztatikus kölcsönhatás miatt H_3O^+ hidroxónium ionok és Cl^- keletkeznek, a valóságban H^+ ionok – szabad protonok – az oldatban nincsenek.

B): Hamis állítás, ugyanis a HCl molekulák nagy része az oldószerrel való kölcsönhatás folytán külső feszültség nélkül is ionokra disszociál. A D)-ben leírtak fordítottja igaz.

18.28. *Kapcsoljuk a jelenségekhez a megfelelő állításokat! (Egy jelenséghez esetleg több állítás is tartozhat!)*

A) Izzó katóddal előállított katódsugárzás
B) Hideg katóddal előállított katódsugárzás
C) Fényelektromos jelenség
D) Edison-hatás

1. Az elektronok kilépési munkáját a katód izzításakor keletkező energia fedezi.
2. Az elektronok kilépési munkáját a pozitív ionoknak a katódba ütközésekor leadott mozgási energiája fedezi.
3. Az elektronok kilépését a katódra érkező fotonok energiája fedezi.

Megoldás:

18.28. Helyes kapcsolatok: 1.–A), D), 2.–B), 3.–C)

18.29. *Válasszuk ki az A), B), C) betűkkel jelölt állítások közül a* HELYESEKET!

1. Az elektron sebességének 10 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ fölé növekedésekor az elektron tömege
   A) csökken,
   B) nem változik,
   C) nő.
2. Az elektron sebességének növekedésekor az elektron töltése
   A) csökken,
   B) nem változik,
   C) nő.
3. A testek tömege a test sebességének növelésekor
   A) csökken,
   B) nem változik,
   C) nő.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.29. Helyes állítások: 1.–C), a relativisztikus tömegnövekedés miatt. 2.–B). 3.–C) válasz az 1.–C) kapcsolat szerint, de a környezetünkben megszokott sebességeknél a tömegnövekedés nem számottevő.

18.30. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

Két különböző fémet összeillesztünk és egyenáramot bocsátunk át rajtuk. Az összeillesztésnél felmelegedést tapasztalunk a fém többi részéhez képest.
A felmelegedés azért történt, mert:

A) az áram munkája hővé alakult át;

B) az elektronok energiaszintje az átlépés során lecsökken, s a felesleges energiát leadják;

C) az áram a Volta-féle feszültségi sorban előrébb álló fémből haladt egy, a sorban hátrébb álló fémbe;

D) az elektronok energiaszintje az átlépés során megnőtt, és a megnövekedett energiájú elektronok felmelegítik a fémet az összeillesztés helyén.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.30. Helyes állítások: A), B), C).
A felmelegedés úgy képzelhető el, hogy amikor az áramot közvetítő elektronok a két fém érintkezési helyén áthaladnak, az ott fennálló Volta-feszültség hatására felgyorsulnak, s az így előálló energiatöbblet a fémrács ionjaival való ütközések révén az érintkezési hely felmelegedésében mutatkozik meg.

18.31. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Mit nevezünk a fémekkel kapcsolatban kilépési munkának?

A) Azt az energiát, amellyel a fématomok kötött állapotú elektronjait a kristályszerkezetben szabadon mozgó állapotba vihetjük át.

B) Azt a legkisebb munkát, amellyel ki lehet szakítani az elektront.

C) Azt a munkát, amellyel az egymással érintkező fémek egyikéből a másikba lehet juttatni az elektront.

D) A két különböző fém összeérintése következtében kialakuló potenciálkülönbséget.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.31. Helyes válasz: B) – a kilépési munka definíciója szerint.

18.32. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Mivel magyarázhatjuk az elektródpotenciál kialakulását?

A) Az elektródokra kapcsolt feszültség miatt az elektródok között potenciálkülönbség van, amit röviden elektródpotenciálnak nevezünk.

B) Az elektrolízis során az elektródákon kiválnak a pozitív, illetve negatív ionok, ami együttal azt is jelenti, hogy az elektródában töltésfelhalmozódás jön létre. Ennek következményeként az elektródák között kialakul a potenciálkülönbség.

C) Az elektródok felületéről fémionok jutnak az elektrolitba. Az ily módon negatív töltésüvé váló fém viszont meggátolja további ionoknak a felületből való eltávolodását. Ezeknél a fémeknél alakul ki az elektródpotenciál.

D) Előfordulhat, hogy az elektrolitoldatból fémionok rakódnak a fémelektródára, úgyhogy a fém pozitív potenciálú lesz az oldalhoz képest, és emiatt alakul ki az elektródpotenciál.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.32. Helyes válasz: C), D), mert a C) válaszban bemutatott jelenség játszódik le a $ZnSO_4$ oldatba merülő Zn elektróda esetén, míg a D) válaszban bemutatott eset pl.: a rézszulfát oldatba merülő réz elektróda esetén valósul meg.

18.33. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

A fémek jól vezetik az elektromos áramot. Milyen anyagszerkezeti háttere van a jelenségnek?

A) A fémkristályok szabályos szerkezetében, a lokalizált pozitív fémionok vonzástartományában mindig vannak csaknem szabadon mozgó elektronok, amelyek a vezetőre kapcsolt elektromos feszültség hatására a vezetőben elmozdulnak.

B) A fém kristályszerkezetében mindig találhatók szabadon mozgó pozitív és negatív ionok, amelyek a külső elektromos feszültség hatására a vezetőben áramlanak.

C) A fémkristályokban megtalálható szabad töltéshordozók a vezetőre kapcsolt elektromos feszültség hatására gyorsulnak, majd ütközések révén további töltéshordozókat szabadítanak ki a rácsszerkezetből.

D) A vezetőben szabadon mozgó töltéshordozók a külső elektromos mező hatására megindulnak a velük ellentétes töltésű pólus felé.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.33. Helyes válasz: A), D).

A): A fémekben az elektromos vezetést a felsorolt tulajdonságokkal rendelkező elektronok biztosítják.

B), C): Sem a szabadon mozgó pozitív ionok, sem az ütközési ionizáció nem jellemzi a fémes vezetést.

D): A válasz elfogadható, de pontosabb megfogalmazású az A) válasz, a töltéshordozók elektronok.

18.34. *Válasszuk ki a* HELYES *állításokat!*

A) A csősugarak nagyrészt pozitív ionokból álló sugarak, melyek fajlagos töltése jóval nagyobb az elektron fajlagos töltésénél.

B) A ködfénykisülés fenntartásához szükséges, hogy a katódba ütköző ionok energiája elegendő legyen az elektronoknak a katódból való kiléptetéséhez.

C) Katódsugárzást csak ütközési ionizációval lehet kiváltani.

D) A kisülési csövekben a gázrészecskék egymással ütközve ionizálódnak, az ionizációt elektronok nem válthatják ki.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.34. Helyes válasz: B), mert a katód irányába gyorsuló pozitív ionok ütik ki a katódból az elektronokat, amelyek, ha elegendő energiával rendelkeznek további gázmolekulákat ionizálnak.

18.35. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Állandó intenzitású megvilágítás esetén hogyan függ a megvilágító fény színétől a fotoáram erőssége?

A) A sötétebb színű fénysugarak, mint például a zöld, kisebb fotoáramot eredményeznek, mint a világosak.

B) A vörös színű fény hatására – mivel annak nagy a hullámhossza – nagy fotoáram folyik a körben.

C) A kék színű fénysugár hatására erősebb fotoáram folyik, mint a sárgára.

D) A megvilágító fény színétől nem függ a fotoáram erőssége.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.35. Helyes válasz: C), mert a kísérletek szerint azonos elnyelt fényenergia mennyiségek esetén a fotokatód felületét elhagyó elektronok száma (a fotoáram erőssége) függ a fény f frekvenciájától. A normális fotoeffektusban f-fel nő a kilépő elektronok száma.

18.36. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

A radioaktív sugárzások törvényszerűségeiből ismert:

A) a radioaktív anyag bomlékonysága véletlenszerű, előre nem határozható meg a bomlások várható száma;

B) a radioaktív anyag atomjai közül mindig a felszínhez közelebbiek bomlanak hamarabb;

C) a ${}_{92}U^{235}$ bomlékonysága nagyobb, mint a ${}_{92}U^{238}$-é;

D) a bomlások számát a külső körülmények jelentősen befolyásolják.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.36. Helyes válasz: C). A választ alátámasztja, hogy a Földön a természetes uránnak mintegy $\frac{1}{140}$-ed része a ${}_{92}U^{235}$ izotóp, a többi ${}_{92}U^{238}$. A 235-ös tömegszámú izotóp nagy része már elbomlott.

18.37. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Az elemi részecskék mozgására jellemző, hogy:

A) minél pontosabban tudjuk meghatározni a részecske helyzetét, annál pontosabb információt kapunk a sebességéről is;

B) sem a részecske sebessége, sem a helyzete nem alkalmas a részecske állapotának a leírására;

C) minél határozottabb a helyük, annál bizonytalanabbá válik a lendületük; vagy minél határozottabb a lendületük, annál határozatlanabbá válik az a térrész, amelyet betöltenek;

D) a részecske hullámállapotát leíró állapotfüggvény frekvenciája állandó.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.37. Helyes válasz: C). Ez a válasz a Heisenberg-féle határozatlansági elv egyik megfogalmazása.

18.38. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Az elektronburok elektronjainak az energiája:

A) alapállapotban a legnagyobb,

B) folytonosan változik szélső értékei között,

C) a zérus energiaértéknél mindig nagyobb,

d) a gerjesztett állapotból az alapállapotba való visszatéréskor csökken.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.38. Helyes válasz: D). Az elektron alapállapotban van a legmélyebb szintű energiaállapotban. Gerjesztéskor magasabb energiaszintű pályára kerül, energiafelvétel révén. A gerjesztett állapotba való visszatéréskor az energiaszint csökken, az energiatöbbletet fotonként sugározza. Igaz, hogy az energia *abszolút értéke* alapállapotban a legnagyobb.

18.39. *Válasszuk ki a* HELYES *választ!*

Az atommaghoz kötött elektron:

A) mellékkvantumszáma legfeljebb akkora lehet, mint a főkvantumszáma;

B) spinkvantumszáma nem lehet tört szám;

C) mágneses kvantumszáma természetes szám;

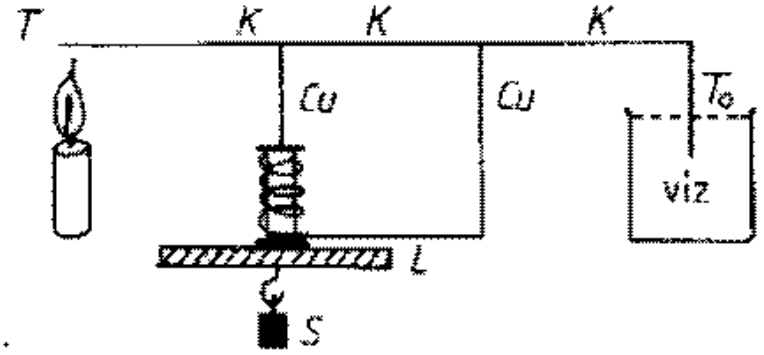
D) mind a négy kvantumszám nem egyezik meg egy másik elektron megfelelő kvantumszámaival.

Indokoljuk választásunkat!

Megoldás:

18.39. Helyes válasz: D). A fizikában ezt a törvényt Pauli elvként ismerjük.

18.40. Az ábrán egy kis ellenállású rézhuzalból, tekercsből és konstantán huzalból álló zárt kört látunk.



Miért vonzza magához a lágyvasat (L) és a ráakasztott súlyt (S) a tekercs?

Megoldás:

18.40. A készülék egy hőelem. A két forrasztási hely különböző hőmérsékletű a melegítés és a hűtés miatt. A két forrasztási hely között potenciálkülönbség alakul ki. A zárt vezetőkörben áram folyik, az áramjárta tekercs mágnesként viselkedik, magához vonzza a lágyvasat.

18.41. Hányszor nagyobb az elektron tömege a nyugalmi tömegéhez képest, ha 200 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel mozog?

Megoldás:

18.41. $v = 200\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A relativisztikus dinamika tételei szerint a tömeg:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

ebből

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{1{,}34}}.$$

18.42. Mekkora egy $2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó elektron mozgási energiája, ha a tömegnövekedést nem vesszük figyelembe, illetve ha ezt nem hagyjuk figyelmen kívül?

Megoldás:

18.42. $v = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) $\underline{\underline{E}} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \underline{\underline{1{,}82 \cdot 10^{-14} \text{ J}}}$.

b) A fénysebességhez közelítő sebességek esetén

$$\underline{\underline{E_{\text{kin}}}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \underline{\underline{2{,}78 \cdot 10^{-14} \text{ J}}}.$$

18.43. Víz elektrolízise alkalmával 1000 C töltés haladt át a folyadékon.
Mekkora a kivált oxigén hőmérséklete, ha 970 Hgmm nyomáson a térfogata 0,25 dm^3?
$\left(\text{Az oxigén sűrűsége normál állapotban } 1{,}43 \frac{kg}{m^3}.\right)$

Megoldás:

18.43. $Q = 1000\ C = 10^3\ C$; $p = 970\ Hgmm = 1{,}293 \cdot 10^5\ Pa$; $V = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^3$.
Faraday törvénye szerint az oldatból kivált anyag mennyisége $m = k \cdot I \cdot t = k \cdot Q$.
Az O_2 elektrokémiai egyenértéke $k = 0{,}0829 \frac{mg}{C} = 8{,}29 \cdot 10^{-8} \frac{kg}{C}$; $m = 8{,}29 \cdot 10^{-5}$ kg. Az ideális gázok állapotegyenletét alkalmazva $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$. Ebből az egyenletből $T = \frac{p \cdot V \cdot M}{m \cdot R}$. További adatok: $M = 3{,}2 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{mol}$; $R = 8{,}31 \frac{J}{Kmol}$. Behelyettesítés után $\underline{\underline{T = 1500\ K}}$.

18.44. Elektrolízis alkalmával ugyanannyi idő alatt egyszer 1 g hidrogén, másodszor 1 g alumínium válik ki.
Hogyan aránylanak egymáshoz az elektrolízishez alkalmazott áramerősségek?

Megoldás:

18.44. $m_{H_2} = m_{Al} = 1$ g.
Az elektrolízis során kivált anyag mennyisége és az elektrolízis időtartama mindkét esetben megegyezik, tehát $m_{H_2} = k_{H_2} \cdot I_{H_2} \cdot t$; $m_{Al} = k_{Al} \cdot I_{Al} \cdot t$.
A két egyenlet egybevetésével $\underline{\underline{\frac{I_{Al}}{I_{H_2}} = \frac{k_{H_2}}{k_{Al}} = 0{,}112}}$.

18.45. Hány g réz válik ki a réz-szulfát-oldatból, ha az áram erőssége 20 A és az elektrolízis időtartama 1,5 óra?

$\left(\text{A réz elektrokémiai egyenértéke } 3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{kg}}{\text{C}}.\right)$

Megoldás:

18.45. $I = 20$ A; $t = 1.5$ h $= 5{,}4 \cdot 10^3$ s; $k_{Cu} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

Faraday törvénye szerint $\underline{m} = k \cdot I \cdot t = 3{,}564 \cdot 10^{-2}$ kg $= \underline{35{,}64\ \text{g}}$.

18.46. Elektrolíziskor 10 A erősségű áram 50 perc alatt 2,04 g anyagot választ ki.
Mennyi az anyag elektrokémiai egyenértéke?

Megoldás:

18.46. $I = 10$ A; $t = 50$ min $= 3 \cdot 10^3$ s; $m = 2{,}04 \cdot 10^{-3}$ kg.

A Faraday törvény alapján $m = k \cdot I \cdot t$; $k = 6{,}8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

18.47. Mekkora erősségű áram halad keresztül az ezüst-nitrát-oldaton, ha abból egy óra alatt 14,4 g ezüst válik ki?

Megoldás:

18.47. $m = 1{,}44 \cdot 10^{-2}$ kg; $t = 1$ h $= 3{,}6 \cdot 10^3$ s; $k_{Ag} = 1{,}118 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

$m = k \cdot I \cdot t$; $\underline{\underline{I = 3{,}578 \text{ A}}}$.

18.48. Mekkora töltésmennyiséget visznek az ezüstionok az elektródra, mialatt az ezüst-nitrát-oldatból 324 g ezüst válik ki?

Megoldás:

18.48. $m = 3{,}24 \cdot 10^{-1}\ kg$; $k_{Ag} = 1{,}118 \cdot 10^{-6}\ \frac{kg}{C}$.

$m = k \cdot Q$; $\underline{Q = 2{,}9 \cdot 10^{5}\ C}$.

18.49. Az 5 cm sugarú vékony körlemez mindkét felületére 0,1 mm vastag krómréteget elektrolizálnak.

a) Mennyi elektromos töltés szükséges ehhez a folyamathoz?

b) Mennyi ideig tart a folyamat, ha az elektrolizáló áram erőssége 10 A?

(A króm elektrokémiai egyenértéke $0{,}18 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{kg}}{\text{C}}$; sűrűsége $7{,}19 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Megoldás:

18.49. $r = 5\ \text{cm} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$; $h = 0{,}1\ \text{mm} = 10^{-4}\ \text{m}$; $\varrho = 7{,}19 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;

$k = 0{,}18 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{kg}}{\text{C}}$; $\underline{\underline{I = 10\ \text{A}}}$.

a) Az elektrolízissel felvitt anyag tömege:

$$m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot r^2\pi \cdot 2h = 1{,}129 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}.$$

$$Q = \frac{m}{k} = 62\,740\ \text{C}.$$

b) $Q = I \cdot t$, $\underline{t} = \frac{m}{k \cdot I} = 6272\ \text{s} = \underline{\underline{1{,}742\ \text{h}}}$.

18.50. Két, azonos ellenállású elektrolizáló kádat sorba kapcsolunk egy 0,5 ohm belső ellenállású, 30 V elektromotoros erejű telepre. Így mindegyik kádba fele annyi oldott anyag válik ki időegység alatt, mintha egyedül kapcsoltuk volna őket az áramforrásra.

a) Mekkora a kádak ellenállása?

b) Mennyi ezüst válik ki a két edényben összesen az ezüst-nitrát-oldatból fél óra alatt?

Megoldás:

18.50. Tegyük fel, hogy I áram t idő alatt m mennyiségű oldott anyagot választ ki. Egy kád ellenállása legyen R, a telep belső ellenállása R_b! Sorba kapcsolt kádaknál az áram $\frac{I}{2}$, ha a kiválasztott anyag tömege kádanként $\frac{m}{2}$. A teljes áramkörre vonatkozó Ohm törvény szerint az 1. esetben: $U_e = I \cdot (R + R_b)$, a második esetben $U_e = \frac{I}{2}(2R + R_b)$. Az egyenletrendszer megoldásával $R + R_b = \frac{1}{2}(2R + R_b)$; $R_b = \frac{R_b}{2}$ adódik. Ennek az egyenletnek a megoldása csak $R_b = 0$ lehet, ami ellentmond a kiinduló feltételnek. Az esetet így nem lehet megvalósítani.

18.51. Elektrolíziskor az ezüst-nitrát-oldatból 2,5 óra alatt 0,1 kg ezüst válik ki. Az ezüst elektrokémiai egyenértéke: $1{,}118 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

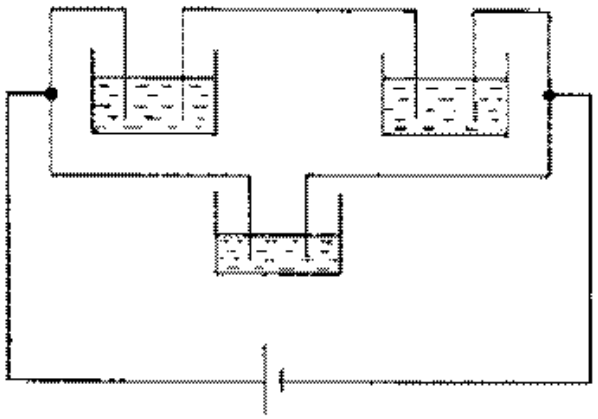
Mekkora az elektrolizáló áram erőssége?

Megoldás:

18.51. $t = 2{,}5\ \text{h} = 9 \cdot 10^3\ \text{s}$; $m = 0{,}1\ \text{kg}$; $k = 1{,}118 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

$m = k \cdot I \cdot t$, ebből az egyenletből: $\underline{I = 9{,}94\ \text{A}}$.

18.52. Három, minden tekintetben azonos elektrolizáló kádat $U = 20$ V elektromotoros erejű, elhanyagolható belső ellenállású feszültségforrásra kapcsolunk az ábra szerinti elrendezésben. A kádak ellenállása egyenként 5 ohm, polarizációs feszültségük külön-külön 1,2 V.



Mennyi anyag válik ki összesen a három kád egyik elektródáján, ha a kérdéses anyag elektrokémiai egyenértéke $0{,}01\ \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}}$?

Megoldás:

18.52. $U = 20$ V; $U_p = 1{,}2$ V; $R = 5\ \Omega$; $k = 0{,}01\ \frac{\text{kg}}{\text{C}}$; ($t = 1$ s).

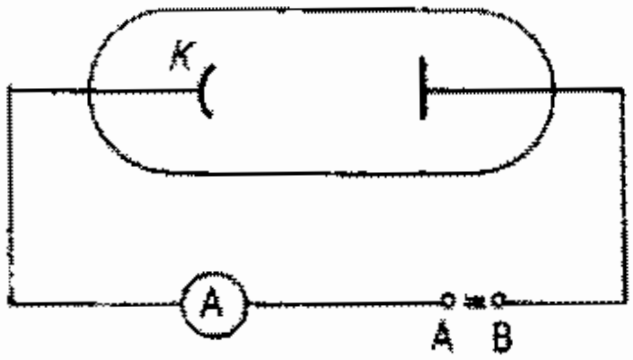
A két sorba kapcsolt kád mindegyikén $U_1 = \frac{U}{2} - U_p = 8{,}8$ V feszültség tartja fenn az áramot, amelynek nagysága $I_1 = \frac{U_1}{R} = 1{,}76$ A. A kádakban kivált oldott anyag mennyisége 1 s idő alatt $m_1 = k \cdot I_1 \cdot t = 0{,}0176$ kg.
A két sorba kapcsolt káddal párhuzamosan kapcsolt harmadik kádon a feszültség $U_2 = U - U_p = 18{,}8$ V, az átfolyó áram $I_2 = \frac{U_2}{R} = 3{,}76$ A, amely 1 s idő alatt $m_2 = k \cdot I_2 \cdot t = 0{,}0376$ kg anyagot választ ki.
A kiválasztott anyag mennyisége másodpercenként $\underline{\underline{m}} = 2m_1 + m_2 = 0{,}0728$ kg.

18.53. Határozzuk meg a rézion fajlagos töltését! A szükséges adatokat keressük ki a táblázatból!

Megoldás:

18.53. A réz moltömege $M_{Cu} = 6{,}4 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{mol}$. Vizsgáljuk a Cu^{++} rézionT. $Q_{Cu} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C; $m_{Cu} = \frac{M_{Cu}}{N_A} = 1{,}067 \cdot 10^{-25}$ kg. A fajlagos töltés $\frac{Q_{Cu}}{m_{Cu}} = 3 \cdot 10^6 \frac{C}{kg}$. A Cu^+ fajlagos töltése az előbbi értéknek a fele.

18.54. A rajz egy fotocellát ábrázol. Az A és B pontok közé egyenfeszültséget kapcsoltunk.



Milyen feltételek mellett folyik a körben áram?

Megoldás:

18.54. Az áram észlelésének a feltételei:

1. Legyen az üvegcsőben vákuum.
2. Az áramforrás pozitív pólusát kapcsoljuk a *B* pontra.
3. Világítsuk meg a katódot.

Kicsiny áram akkor is folyhat az áramkörben, ha a katódot intenzív (pl.: látható) fénnyel megvilágítjuk, és az *A* és *B* pontok között telep nélkül zárjuk az áramkört.

18.55. Egy fotocella elektródjai között a feszültség 100 V. Hány elektron kerül át a katódról az anódra, ha az elektromos mező munkája $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ J?

Megoldás:

18.55. $W = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ J; $U = 100$ V.

Az elektron töltésének nagysága $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Az elektromos mező munkája $W = Q \cdot U = |e| \cdot n \cdot U$; ebből $\underline{\underline{n = 10^{12} \text{ db}}}$.

18.56. Az első mesterséges atommag-átalakítás Rutherford nevéhez fűződik. Melyik egyenlet írja le ezt a magreakciót?

A) ${}_4Be^9 + {}_2He^4 = {}_6C^{12} + {}_0n^1$,
B) ${}_7N^{14} + {}_2He^4 = {}_8O^{17} + {}_1H^1$,
C) ${}_{13}Al^{27} + {}_2He^4 = {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$,
D) ${}_1H^1 + {}_1H^1 = {}_1H^2 + e^+ + \nu$,

Megoldás:

18.56. Helyes válasz: B). 1919-ben Rutherford ködkamrában lévő nitrogént bombázott α részecskékkel. A látható ködfonalakból, és a spektroszkópiai vizsgálatokból arra a megállapításra jutott, hogy a kölcsönhatásban új atommagok is keletkeztek a ködkamrában lévő gázban, mégpedig oxigén, és hidrogén.

18.57. Számítsuk ki, hogy a β-részecske fajlagos töltésének a nagysága hányszor akkora, mint az α-részecskéé!
A szükséges adatokat keressük ki a táblázatból!

Megoldás:

18.57. A β-részecske fajlagos töltése 3650-szer nagyobb, mint az α részecskéé.
A β^- részecske elektron, töltésének nagysága $Q_\beta = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Az α részecske He^{++}-ion. Elektromos töltése $Q_\alpha = 2Q_\beta$. A tömegek: $m_\alpha = 6{,}644 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_\beta = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. A két részecske fajlagos töltésének a hányadosa:

$$\frac{Q_\beta}{m_\beta} \cdot \frac{m_\alpha}{2Q_\beta} = \underline{\underline{3650}}.$$

18.58. Az α és a β részecskét ugyanakkora nem túl nagy feszültséggel gyorsítjuk zérus kezdősebességről.
Mekkora lesz a két részecske sebességének az aránya a gyorsítás végén?
Az adatokat keressük ki a táblázatból!

Megoldás:

18.58. $m_\alpha = 6{,}644 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_\beta = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.
Az elektromos mező munkát végez az elektromosan töltött részecskéken.
$\frac{m_\alpha \cdot v_\alpha^2}{2} = U \cdot Q_\alpha$; $\frac{m_\beta \cdot v_\beta^2}{2} = U \cdot Q_\beta$. A két egyenletből $\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \sqrt{\frac{m_\alpha}{2m_\beta}} =$
$= \underline{\underline{60{,}42}}$.
A két részecske sebességének az aránya 60,42.

18.59. Az elektrosztatikus és a gravitációs kölcsönhatás egyaránt fellép két proton között.

a) Melyik az erősebb?

b) Hányszorosa az egyik kölcsönhatásból származó erő a másiknak?

(A proton tömege $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, töltése $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$.)

Megoldás:

18.59. $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}$; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$.

Az egyes kölcsönhatásokból származó erő: $F_g = \gamma \cdot \frac{m_p^2}{r^2}$, $F_{el} = k \cdot \frac{Q_p^2}{r^2}$.

A két utóbbi egyenletből $\frac{F_{el}}{F_g} = 1{,}24 \cdot 10^{36}$. A hányadosból látszik, hogy az elektrosztatikus kölcsönhatás sokkal erősebb, mint a gravitációs kölcsönhatás.

18.60. Fotokatód anyagára jellemző kilépési munka $3 \cdot 10^{-19}$ J.

a) Mekkora annak a fénynek a hullámhossza, amelynek hatására megindul a fotocella áramkörében a fotoáram?

b) Mekkora a fény frekvenciája? ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.60. $W = 3 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $c = 3 \cdot 10^{8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) A foton energiája fedezi a kilépési munkát.

$h \cdot \frac{c}{\lambda} = W$; $\underline{\lambda} = \frac{h \cdot c}{W} = 6{,}62 \cdot 10^{-7}$ m $= \underline{662 \text{ nm}}$.

b) $\underline{f} = \frac{c}{\lambda} = \underline{4{,}53 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$.

18.61. A lítium fotokatódot 400 nm hullámhosszúságú fénnyel világítjuk meg.
Legfeljebb mekkora sebességgel hagyják el az elektronok a katód felületét, ha az elektront $3{,}84 \cdot 10^{-19}$ J munka árán lehet kiszabadítani a lítiumból?
(Az elektron tömege $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, a Planck-állandó $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.61. $\lambda = 400\ \text{nm} = 4 \cdot 10^{-7}$ m; $W = 3{,}84 \cdot 10^{-19}$ J; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

A foton energiája az elektron kilépési és gyorsítási munkájára fordítódik.

$\frac{h \cdot c}{\lambda} = W + \frac{m \cdot v^2}{2}$ egyenletből $\underline{v} = \sqrt{\frac{2(h \cdot c - W \cdot \lambda)}{\lambda \cdot m}} = \underline{\underline{5 \cdot 10^5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

18.62. Mekkora frekvenciájú fénnyel kell megvilágítani a cézium fotokatódot, hogy a belőle kilépő elektronok maximális sebessége 2000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ legyen?

Szabad szemmel látható-e a megvilágító fénysugár?
(A cézium kilépési munkája $3 \cdot 10^{-19}$ J. Az elektron tömege $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.62. $v = 2000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $W = 3 \cdot 10^{-19}$ J; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

A $h \cdot f = W + \frac{m \cdot v^2}{2}$ egyenletből $f = \frac{W + \frac{m \cdot v^2}{2}}{h} = 3{,}2 \cdot 10^{15}$ Hz.

$\lambda = \frac{c}{f} = 0{,}9 \cdot 10^{-7}$ m = 93,69 nm. A fényhullámhossz az ultraibolya tartományba esik, szabad szemmel nem látható.

18.63. Fotocella katódját az áramforrás pozitív, anódját pedig a negatív pólusához kapcsoljuk (ellentér-kapcsolás). A katódot 590 nm hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva azt tapasztaljuk, hogy 0,23 V-os feszültségnél megszűnik a fotoáram.
Mekkora a katódfém kilépési munkája?
($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.63. $\lambda = 590$ nm $= 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $U = 0{,}23$ V; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
Az elektromos mező (ellentér) által végzett munka számértékben megegyezik az elektron mozgási energiájával $U_e = \frac{m \cdot v^2}{2}$; a foton energiája

$h \cdot f = W + U_e$; $\underline{\underline{W}} = \frac{h \cdot c}{\lambda} - U_e = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}}$.

18.64. Egy elektront a cézium fotokatódból $3 \cdot 10^{-19}$ J munka befektetésével lehet kiszabadítani. 589 nm hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva, a fotocella áramkörében 3,2 A erősségű áram folyik.

a) Hány foton ütközik a katódba 1 s alatt?

b) Mekkora a katódból kilépő elektronok maximális sebessége?

Megoldás:

18.64. $W = 3 \cdot 10^{-19}$ J; $\lambda = 589$ nm $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ m; $I = 3{,}2$ A; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) A fotocella árama $I = \frac{n \cdot Q_e}{t}$, ebből $\underline{\underline{n = 2 \cdot 10^{19} \text{ db}}}$.

b) A 18.61. feladat megoldása szerint: $\underline{\underline{v = 2{,}86 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

18.65. Röntgencsőben az antikatódba ütköző elektronokat 10 kV feszültség gyorsítja.
Mekkora a keletkező fékezett röntgensugárzás frekvenciája, ha feltételezzük, hogy az elektron energiája veszteség nélkül a sugárzás kiváltására fordítható?

($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.65. U = 10 kV = 10^4 V; az elektron töltésének nagysága Q_e = $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.
A gyorsított elektron és a foton energiája megegyezik. $Q_e \cdot U = h \cdot f$;
$\underline{\underline{f}} = \dfrac{Q_e \cdot U}{h} = \underline{\underline{2{,}42 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}}}$.

18.66. Mekkora hullámhosszal jellemezhető a 100 V feszültséggel gyorsított elektron hullámállapota?
Mekkora az elektron lendülete?
Az elektron nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Megoldás:

18.66. $U = 100$ V; az elektron töltésének nagysága $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

$$Q_e \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2; \quad v = \sqrt{\frac{2Q_e \cdot U}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad I = m \cdot v = 5{,}4 \cdot 10^{-24} \ \frac{\text{kgm}}{\text{s}};$$

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = 1{,}23 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

18.67. Katódsugárcsőben az elektronok 2000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel hagyják el a fűtőszál felületét, majd gyorsítás után a katóddal szemközti fémfelületből 1 nm hullámhosszúságú sugárzást váltanak ki.

a) Mekkora sebességgel csapódnak az elektronok a fémfelülethez?

b) Mekkora a gyorsító feszültség?

Az elektron nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Megoldás:

18.67. $v = 2000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\lambda = 10^{-9}$ m; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

A katódból kilépő elektronokat az elektromos mező gyorsítja. Amekkora az elektron energiája az antikatódba való becsapódás pillanatában, akkora lesz az abból kilépő foton energiája is. $f = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^{17}$ Hz, az energiákra fennáll: $\frac{1}{2} m \cdot v^2 + Q_e \cdot U = h \cdot f$.

a) Ebből az egyenletből $\underline{\underline{U}} = \frac{h \cdot f - \frac{1}{2} m \cdot v^2}{Q_e} = \underline{\underline{1230\ \text{V}}}$. Másrészt az energia a becsapódás pillanatában mozgási energia, így ha az elektron sebessége v', akkor $\frac{1}{2} m \cdot v'^2 = h \cdot f$.

b) $\underline{\underline{v'}} = \sqrt{\frac{2h \cdot f}{m}} = \underline{\underline{2{,}089 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

18.68. A $100\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességű elektron $250\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességre gyorsul.

A nyugalmi tömegének hányadrészével változik meg az elektron tömege a gyorsítás során?

Az elektron nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Megoldás:

18.68. $v_1 = 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 2{,}5 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Az elektron tömege a relativisztikus tömegnövekedés miatt változik.

$$\Delta m = m_2 - m_1 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) = 0{,}748 m_0; \quad \frac{\Delta m}{m_0} = 0{,}748.$$

18.69. Mennyivel változik az elektronhullám hullámhossza, ha az elektron sebessége 150 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$-ról 250 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$-ra növekszik?
Az elektron nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Megoldás:

18.69. $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $v_1 = 1{,}5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{c}{2}$; $v_2 = 2{,}5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{6}c$;
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

$$m_1 = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4c^2}}} = \frac{2m_0}{\sqrt{3}}; \quad m_2 = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{25}{36}}} = \frac{6m_0}{\sqrt{11}}.$$

Az elektronhullám hullámhossza a két esetben:

$$\lambda_1 = \frac{h}{m \cdot v_1} = 4{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ m}; \qquad \lambda_2 = \frac{h}{m_2 \cdot v_2} = 1{,}61 \cdot 10^{-12} \text{ m};$$

ebből a hullámhossz változása: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \underline{\underline{-2{,}59 \cdot 10^{-12} \text{ m}}}$.

18.70. Mennyivel változik az elektron lendülete és sebessége, ha hullámhossza $2 \cdot 10^{-10}$ m-ről felére csökken?
Az elektron nyugalmi tömege $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg,
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Megoldás:

18.70. $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-10}$ m; $\lambda_2 = 10^{-10}$ m; $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $I_1 = \frac{h}{\lambda_1} = 3{,}31 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$; $I_2 = \frac{h}{\lambda_2} = 6{,}62 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$; $\Delta I = 3{,}31 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

A lendület a kezdeti értéknek a kétszeresére változott. Feltételezzük, hogy a sebesség nem közelít a fénysebességhez. Erről egyszerű számítással is meggyőződhetünk, pl.: $v_1 = \frac{I_1}{m_0} = 3640 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. A tömeg az m_0 értékhez viszonyítva nem változik számottevően.

A részecske sebessége és lendülete is kétszeresére változik.

18.71. Mekkora a 760 nm hullámhosszúságú foton tömege és energiája vákuumban? ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.)

Megoldás:

18.71. $\lambda = 760$ mm; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A foton energiájára fennáll: $E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = m \cdot c^2$; $\underline{\underline{E = 2{,}61 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$; $\underline{\underline{m}} = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \underline{\underline{2{,}9 \cdot 10^{-36} \text{ kg}}}$.

18.72. Mekkora annak a fotonnak a frekvenciája, amelynek lendülete megegyezik a 250 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességű elektron lendületével?
Mekkora a foton tömege?
Az elektron nyugalmi tömege $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg,
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Megoldás:

18.72. $v = 2{,}5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

Az elektron tömege a nagy sebességeknél fellépő tömegnövekedés miatt: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}646 \cdot 10^{-30}$ kg. Az elektron lendülete:

$I = 4{,}12 \cdot 10^{-22} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

A foton lendülete: $I_f = I = \frac{h \cdot f}{c}$, ebből $f = \frac{I \cdot c}{h} = 1{,}87 \cdot 10^{20}$ Hz.

A foton tömege: $m_f = \frac{h \cdot f}{c^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ kg.

18.73. Egy foton és egy elektron mozgási energiája egyaránt 10^{-16} J.
Melyiknek nagyobb a lendülete és a frekvenciája?
(Az elektron sebességétől függő tömegnövekedése nem számottevő.)

Megoldás:

18.73. $E = 10^{-16}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Az elektron sebessége: $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1{,}48 \cdot 10^{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, lendülete $I_e = m \cdot v =$

$= 1{,}349 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$; a foton lendülete: $I_f = \frac{E}{c} = 3{,}33 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$,

frekvenciája $f_f = \frac{E}{h} = 1{,}51 \cdot 10^{17}$ Hz.

Az elektronhullám frekvenciája: $\underline{\underline{f_e}} = \frac{m \cdot v^2}{h} = \frac{2E}{h} = 2f_f =$

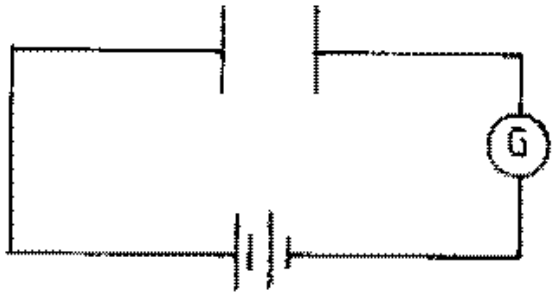
$= \underline{\underline{3{,}02 \cdot 10^{17}}}$ Hz.

18.74. Egy akkumulátortelepet 4 A-es töltőárammal 25 órán keresztül töltöttünk. A feltöltött akkumulátor a rákapcsolt 3 W-os fogyasztót 20 órán keresztül üzemeltette.
Mekkora az akkumulátor feszültsége?
(A veszteségektől tekintsünk el!)

Megoldás:

18.74. $I_1 = 4$ A; $t_1 = 25$ h; $t_2 = 20$ h; $P = 3$ W.
Az akkumulátor töltése során a töltőáram munkája $W_1 = U \cdot I_1 \cdot t_1$, az akkumulátor munkavégzése kisütéskor $W = P \cdot t_2$. Veszteség nélkülinek feltételezve a folyamatokat $W_1 = W_2$. Ebből $\underline{\underline{U}} = \dfrac{P \cdot t_2}{I_1 \cdot t_1} = \underline{\underline{0{,}6 \text{ V}}}$.

18.75. Az ionizációs kamra egy párhuzamos fegyverzetű, gázszigetelésű síkkondenzátor. A kamra belsejébe helyezett radioaktív-izotóp s-onként mintegy 10 db ionizáló részecskét bocsát ki, amelyek mindegyike átlagosan 10^4 db ionpárt hoz létre.



Mekkora áram folyik az ionizációs kamra áramkörében?

Megoldás:

18.75. $t = 1$ s; $n = 10^5$ ionpár; $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
Feltételezve, hogy az ionizáció során rekombináció nem következik be, az ionok elérik az elektródokat, az ionok töltésének nagysága e, az elemi töltés, és n számú ionpár keletkezik másodpercenként, akkor $\underline{I} = \frac{n \cdot e}{t} = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{A}}}$.

18.76. Mekkora hullámhosszúságú fotont sugároz ki a gerjesztett hidrogénatom, ha elektronja a második gerjesztett szintről alapállapotba kerül?
(Az elektron energiája alapállapotban $E_0 = -2{,}2$ aJ, a k-adik gerjesztett szinten pedig $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$, ahol k természetes szám.)

Megoldás:

18.76. $E_0 = -2{,}2 \cdot 10^{-18}$ J; $k = 2$; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

Az elektron energiája a k-adik gerjesztett állapotban: $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$.

A kisugárzott foton energiája $h \cdot f = E_2 - E_0$; $E_2 = \frac{E_0}{9}$; $h \cdot f = -\frac{8}{9}E_0$;

$f = -\frac{8E_0}{9h}$.

$$\lambda = \frac{c}{f} = 1{,}015 \cdot 10^{-7} \text{ m} = \underline{\underline{101{,}5 \text{ nm}}}.$$

18.77. Mekkora energiával juttatható hidrogénatomban az elektron az első gerjesztett szinttől a negyedik gerjesztett szintre?

(Az elektron energiája alapállapotban $E_0 = -2{,}2$ aJ, a k-adik gerjesztett szinten $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$, ahol k természetes szám.)

Megoldás:

18.77. $E_0 = -2{,}2 \cdot 10^{-18}$ J; az elektron energiája a k-adik gerjesztett állapotban $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$.

$$\underline{\underline{\Delta E}} = E_4 - E_1 = \frac{E_0}{25} - \frac{E_0}{4} = -\frac{21E_0}{100} = \underline{\underline{0{,}462 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}}.$$

18.78. A gerjesztett hidrogénatom $3{,}19 \cdot 10^{15}$ Hz frekvenciájú foton kibocsátásával került az alapállapotba.
Hányadik gerjesztett szinten volt a hidrogénatom elektronja az energiaátmenet előtt?
(Az elektron energiája alapállapotban $E_0 = -2{,}2$ aJ, a k-adik gerjesztett állapotban pedig $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$, ahol k természetes szám.)

Megoldás:

18.78. $f = 3{,}19 \cdot 10^{15}$ Hz; $E_0 = -2{,}2 \cdot 10^{-18}$ J; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

Az elektron energiája a k-adik gerjesztett állapotban $E_k = \frac{E_0}{(k+1)^2}$.

$h \cdot f = \Delta E = \frac{E_0}{(k+1)^2} - E_0$; $k+1 = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 + h \cdot f}} = 5$; amiből következik, hogy $\underline{\underline{k=4}}$.

Tehát a 4. gerjesztett állapotból kiindulva történik az átmenet.

18.79. Mennyi idő alatt bomlik el a ${}_{82}Pb^{214}$ radioaktív izotóp 75%-a, ha a radioaktív bomlás felezési ideje 26,8 perc?

Megoldás:

18.79. A felezési idő legyen T, esetünkben $T = 26{,}8$ perc $= 1608$ s.
Egy felezési idő alatt elbomlik az aktív részecskék fele, ugyanannyi marad bomlásképes, aminek szintén elbomlik a fele a következő

felezési idő alatt. Tehát $2T$ idő alatt elbomlik az aktív részecskék $\frac{3}{4} = 0{,}75$ része, azaz 75%-a.
Ennek időtartama: $\underline{t} = 2T = \underline{\underline{53{,}6 \text{ perc}}}$.

18.80. A $_{83}Bi^{212}$-bomló radioaktív izotóp felezési ideje 60 perc. Hány részecskét bocsát ki 1 g bizmut 2 óra alatt?

Megoldás:

18.80. A felezési idő: $T = 60$ perc; $t = 2T$; $m = 1\ \text{g} = 10^{-3}$ kg; $M = 212\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 2{,}12 \cdot 10^{-1}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{mol}}$.

A Bi^{212} β-bomló izotóp, a leányelemek bomlásával nem számolunk. 1 g bizmut tartalmaz $N_0 = \frac{m}{M} \cdot N_A = 2{,}84 \cdot 10^{21}$ db atomot. A két felezési idejű időtartam alatt elbomlik a részecskék 75%-a (lásd: 18.79. feladat), tehát elbomlik $\underline{\underline{N = 0{,}75 \cdot N_0 = 2{,}13 \cdot 10^{21}\ \text{db részecske.}}}$

18.81. A $_{84}Po^{218}$ α-sugárzó radioaktív izotóp. A radioaktív bomlás felezési ideje 3 perc.
Mennyi 20 °C hőmérsékletű vizet lehet forráspontjára melegíteni azzal az energiával, amit 1 g $_{84}Po^{218}$ bocsát ki 9 perc alatt?
Az α-részecskék energiája $9 \cdot 10^{-13}$ J.

Megoldás:

18.81. Po^{218} az aktív bomló anyag. $T = 3$ min; a jelenség időtartama: $t = 3T$; $m = 1$ g $= 10^{-3}$ kg; $M = 0{,}218 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; $E_\alpha = 9 \cdot 10^{-13}$ J; a víz hőmérsékletváltozása: $\Delta T = 80$ K; $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$. $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$.
A 18.80. feladat gondolatmenetét követve $3T$ idő alatt elbomlik N számú atommag, az aktív részecskék $\frac{7}{8}$ része. 1 g Po^{218} izotóp anyag tartalmaz $N_0 = \frac{m}{M} \cdot N_A = 2{,}76 \cdot 10^{21}$ db részecskét. Elbomlik: $N = \frac{7}{8} N_0 = 2{,}41 \cdot 10^{21}$ db részecske. A felszabaduló energia melegíti a vizet. $E = N \cdot E_\alpha = c_v \cdot m_v \cdot \Delta T$. Az egyenletből a víz tömege: $\underline{\underline{m_v}} = \frac{N \cdot E_\alpha}{c_v \cdot \Delta T} = \underline{\underline{6474 \text{ kg}}}$.

18.82. A nyugvó neutron spontán bomlással protonra, elektronra és antineutrínóra hasad. A proton nyugalmi tömege $1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg, az elektroné $9{,}1061 \cdot 10^{-31}$ kg, a neutroné pedig $1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg. Az antineutrínónak nyugalmi tömege nincs, energiája teljes egészében mozgási energia. Határozzuk meg a bomlás során keletkező kinetikus energia nagyságát!

Megoldás:

18.82. $m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}1061 \cdot 10^{-31}$ kg.

A bomlás során keletkező látszólagos tömeghiány: $\Delta m = m_n - (m_p + m_e)$.

Az energia: $\underline{\underline{\Delta E}} = \Delta m \cdot c^2 = \underline{\underline{1{,}25 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}}$.

18.83. Az ${}_{92}U^{235}$-atommag tömege $390{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Mekkora az atommag kötési energiája?

b) Mekkora az atommagban az egy nukleonra jutó kötési energia?

A proton nyugalmi tömege $1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg, a neutroné $1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg.

Megoldás:

18.83. $m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_U = 390{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg.

Az U^{235} atommagban 92 db proton és 143 db neutron található, így a tömeghiány $\Delta m = 92m_p + 143m_n - m_U = 3{,}042 \cdot 10^{-27}$ kg. A kötési energia: $\underline{\underline{E_k}} = \Delta m \cdot c^2 = \underline{\underline{2{,}738 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$. Az egy nukleonra jutó kötési energia: $\frac{E_k}{A} = \underline{\underline{1{,}165 \cdot 10^{-12}\ \text{J}}}$.

18.84. Az ${}_8O^{16}$ atommagjának a kötési energiája 19,6 pJ.

a) Mekkora az egy nukleonra jutó kötési energia?

b) Mekkora az ${}_8O^{16}$ atommagjának a tömege?
(A proton tömege $1{,}6725 \cdot 10^{-27}$ kg, a neutroné $1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg.)

Megoldás:

18.84. $m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg; $E_k = 19{,}6$ pJ = $= 1{,}96 \cdot 10^{-11}$ J. (Oxigén atommag: ${}_8O^{16}$.)

a) Az egy nukleonra jutó kötési energia $\underline{\underline{\frac{E_k}{A} = 1{,}225 \cdot 10^{-12}}}$ J. A tömeghiány:

b) $\Delta m = \frac{E_k}{c^2} = 0{,}2178 \cdot 10^{-27}$ kg. Az oxigén atommag tömege:
$\underline{m_0} = 8m_p + 8m_n - \Delta m = \underline{26{,}559 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}$.

18.85. A $_4Be^8$ egy nukleonra jutó kötési energiája 1,128 pJ. Mekkora a $_4Be^8$-atommag tömege és a kötési energiája?
Tömegadatok: $m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg.

Megoldás:

18.85. $\frac{E_k}{A} = 1{,}128 \cdot 10^{-12}$ J; $m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ kg ($_4Be^8$ atommag).

$\underline{\underline{E_k = 9{,}024 \cdot 10^{-12}\ \text{J}}}$; $\underline{\underline{\Delta m}} = \frac{E_k}{c^2} = 1{,}002 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} = \underline{\underline{0{,}1 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}$.

$\underline{\underline{m_{Be}}} = 4m_p + 4m_n - \Delta m = 13{,}29 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = \underline{\underline{1{,}329 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}}}$.

18.86. Számítsuk ki, mennyi energia szabadul fel, ha 1 g $_{92}U^{236}$-izotóp minden atommagja elbomlik $_{38}Sr^{96}$- és $_{54}Xe^{140}$-atommagokra!

Az $_{92}U^{236}$ atommagjának a tömege $392{,}08 \cdot 10^{-27}$ kg, a $_{38}Sr^{96}$-atommagé $159{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg, a $_{54}Xe^{140}$-atommagé pedig $232{,}44 \cdot 10^{-27}$ kg.

Megoldás:

18.86. $m_U = 392{,}08 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_{Sr} = 159{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_{Xe} = 232{,}44 \cdot 10^{-27}$ kg; $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$.

A felszabaduló energia $E_k = \Delta m \cdot c^2 = (m_U - (m_{Sr} + m_{Xe}))c^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-11}$ J = 27 pJ egy atommag hasadásakor. 1 g tömegű U^{236}-ban található $N = \frac{m}{M} N_A = 2{,}55 \cdot 10^{21}$ db atommag. A felszabaduló összes energia: $\underline{E_{össz.}} = N \cdot E_k = 6{,}885 \cdot 10^{10}$ J = $\underline{688{,}5 \text{ GJ}}$.

18.87. Az alábbi két magreakció folyamatát hiányosan írtuk fel. Egészítsük ki a kifejezéseket!
Mi a közös a két átalakulásban?

1. ${}_7N^{14} + \ldots \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1$,
2. ${}_{13}Al^{27} + \ldots \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$.

Megoldás:

18.87. Helyesen a magreakció egyenletek:
1. ${}_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1$;
2. ${}_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$.
Közös a folyamatokban, hogy mindkét reakció során α-részecskékkel történő bombázás következtében mesterséges úton sikerült előállítani új atommagokat, illetve közös, hogy az új atommagok mellett az atommagot alkotó nukleonok is megjelentek.

18.88. A hidrogénatom elektronjának a megtalálási valószínűsége a 2 s állapotban zérustól különböző az atommag körüli 0,212 nm sugarú gömbön belül.
Legalább mekkora az elektron sebességének az elmosódottsága?

Megoldás:

18.88. $r = 0{,}212\ \text{nm} = 2{,}12 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$.
Az elektron megtalálási valószínűsége zérustól különböző a $\Delta x = 2r = 4{,}24 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$ szélességű tartományban. A Heisenberg-féle határozatlansági elv szerint $\Delta x \cdot \Delta I \geq \frac{h}{2\pi}$. Feltételezve, hogy a sebesség nem közelít a fénysebességhez $\Delta I = \Delta(m \cdot v) = m \cdot \Delta v$, így

$$\underline{\underline{\Delta v \geq \frac{h}{m \cdot \Delta x \cdot 2\pi} = 2{,}73 \cdot 10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$