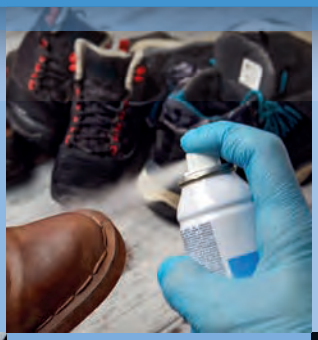
OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020










# Gyűjtemény a

# Fizika

## emelt szintű oktatásához

CSAJÁGI SÁNDOR • DÉGEN CSABA
ELBLINGER FERENC • MAJOR BALÁZS
SIMON PÉTER • URBÁN JÁNOS

Gyűjtemény a

# FIZIKA

emelt szintű oktatásához

OKTATÁSI HIVATAL

A gyűjtemény 2023. január 25-től 2028. augusztus 31-ig TKV-28-3/2023. számú határozattal tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott.

A tankönyv megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) korm. rendelet alapján készült, 2020. 01. 31. után kiadott kerettantervre épülő fizika tantárgy érettségi követelményeinek.

A tankönyvvé nyilvántartási eljárásban közreműködő szakértő: Kondor László

Tananyagfejlesztők: Csajági Sándor, Dégen Csaba, Elblinger Ferenc, Major Balázs, Simon Péter, Urbán János

Szakmai lektor: Varga Balázs

Kerettantervi szakértő: dr. Ádám Péter

Felelős szerkesztő: Csajági Sándor

Grafikák: Szalóki Dezső, Técsi Zita Mária

Tipográfia és fedélterv: Nagy Áron, Bánáti János

A tankönyvben szereplő kísérleti fotók elkészítéséért köszönetet mondunk Piláth Károlynak és Sánta Balázsnak.

© Oktatási Hivatal, 2022

ISBN 978-963-436-389-7

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-FIZ910E
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Nagy Áron • Nyomdai előkészítés: Banó Mária
Terjedelem: 43,78 (A/5) ív • A könyv tömege: 860 gramm • 1. kiadás, 2024

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomtatta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

# Bevezetés

## Hogyan használd ezt a gyűjteményt?

A gyűjtemény egy kétkötetes fizikagyűjtemény első kötete. A kiadvány célja, hogy segítse és érdekessé tegye a fizika tanulmányozását az emelt óraszámú képzésben részt vevő, továbbá az emelt szintű fizika-érettségivizsgára készülő tanulók számára.

A kétkötetes gyűjtemény a tankönyv és feladatgyűjtemény szerepét is betölti.

Tankönyvként teljes egészében tartalmazza a 2024-től érvényes érettségi vizsgakövetelményeknek megfelelő emelt szintű érettségi vizsga tananyagát, továbbá az egyes leckék elején *Emlékeztető* keretében rövidítve tartalmazza a középszintű érettségi vizsga vizsgakövetelményeit is. A gyűjtemény az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészülés során önállóan, más tankönyvek nélkül is használható.

**EMLÉKEZTETŐ**

### Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Egy mozgás vizsgálata során a test által megtett út és az út megtételéhez szükséges idő mérhető legegyszerűbben. Ennek a mozgásnak a törvényeit **Galileo Galilei** (1564–1642) határozta meg elsőként lejtőkön legurított golyókkal elvégzett kísérleteivel.

Az egyes fejezetekben a tananyagot a gyűjtemény lépésről lépésre építi fel, így lehetővé teszi a készségek fejlesztését, a tanultak alkalmazását.

A kétkötetes gyűjtemény első kötete 13, míg a második kötete 16 fejezetből áll. Az első kötet tartalmazza a Mechanika és Hőtan fejezeteket, míg a második kötet az Elektromosság, mágnesesség, Hullámtan, Optika, Modern fizika és Csillagászat témaköröket.

A jelenleg olvasott tankönyv első fejezete azokat a matematikai tartalmakat tartalmazza, melyekre fizikából az emelt szintű érettségi vizsgára történő felkészülés során szüksége van a tanulónak. E fejezet átnézése az emelt szintű vizsgára történő felkészülés során ajánlott.

A nagyobb fejezeteket több fejezetre tagoltuk, néhány fejezet esetében az emelt szintű tartalmat külön fejezetbe csoportosítottuk át (pl. Gravitáció és Naprendszer, Kondenzátorok, kapacitás, Félvezetők és Fizika az orvoslásban).

Az új tananyag összeállítása a részletes érettségi vizsgakövetelmények és vizsgaleírás szerint történt. A témakörök feldolgozása és annak elsajátítása elegendő a sikeres emelt szintű érettségi vizsga letételéhez.

A *Kidolgozott feladatok* az új tananyag elmélyítését, az egyes tananyagelemek közötti kapcsolatokat mutatja be, továbbá a matematikai készségek fejlesztését szolgálja.

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

**1. FELADAT** Budapest 60 m átmérőjű óriáskereke egyenletes forgással 3 perc alatt tesz meg egy kört.
**a)** Mekkora a kabinok sebessége?
**b)** Mekkora a kerék szögsebessége?

**MEGOLDÁS**

Adatok:
$T = 3 \text{ min} = 180 \text{ s}$,
$R = 30 \text{ m}$.

A *Mérési feladatok* az emelt szintű fizika-érettségivizsga szóbeli vizsgarészén szereplő kísérleti feladatok megtalálhatók a gyűjtemény megfelelő fejezetében.

**MÉRÉSI FELADAT**

### Centripetális gyorsulás mérése és a mérőszenzor helyének meghatározása a telefonban

**Eszközök:** okostelefon, lemezjátszó

**A mérés elméleti háttere**
Telepítsünk gyorsulásmérő programot a telefonunkra! Az alkalmazás leírásában érdemes tanulmányozni a program működését.

A mérőprogramok a gyorsulást három tengely ($x$, $y$, $z$)

Az *Alkalmazások* részben műszaki megvalósításokkal, természeti jelenségek fizikai kérdéseivel találkozhatnak a tanulók.

**ALKALMAZÁSOK**

### A Föld mérete – Eratoszthenész mérése

*Eratoszthenész* (i. e. 276–194) meghatározta a Föld méretét. Megfigyelte, hogy a nyári napfordulón, amikor a Nap a legmagasabb pontján, a zeniten áll Szüénében (ma Asszuán), megvilágítja a legmélyebb kút fenekét is. Ugyanezen a napon Alexandriában a fénysugarak beesési szöge 7 fokkal és 12 perccel tért el a függőlegestől. Ez egyben a két városnak a Föld középpontjától mért szögtávolsága is. Ebből az következik, hogy a Föld ke-

A *Kiegészítő anyag* segít kiszélesíteni az olvasók látókörét, és felkelti az érdeklődést a fizika tágabb területei iránt. A kiegészítő anyag ismerete nem szükséges az emelt szintű érettségi vizsga sikeres letételéhez.

# 6. Ferde hajítás
## KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

**Ferde hajításnak nevezzük azt a mozgást, amikor a hajítás iránya a vízszintessel 0° és 90° közti szöget zár be.**

**A ferde hajítás két mozgás szuperpozíciójának tekinthető:**

- **a test a vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez,**
- **függőleges összetevője pedig egy függőleges hajítás.**

**A ferde hajítás pályája parabola.**

Az *Ellenőrző kérdések* a téma főbb fogalmaira és a fogalmak között fennálló összefüggésekre kérdez rá.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a szoba levegőjének belső energiája, ha a szoba nagyon jól szigetelt, és a hőmérsékletet emeljük? Hogyan változik a levegőmolekulák mozgása?
2. A limonádéba tett cukor keverés nélkül is (ugyan sokkal hosszabb idő alatt) egy idő után elkeveredik. Hogyan lehetséges ez?
3. Milyen mikroszkopikus jelenség magyarázza a gázok [illegible]?

Az egyes témakörök végi *összefoglalások* tartalmazzák a téma kulcsfontosságú fogalmainak és a témakör legfontosabb tananyagrészeinek felidézését, és azok megértését segítik.

# Összefoglalás

### Hőtágulás

A testek hőtágulását a geometriájuk alapján **a lineáris vagy a térfogati hőtágulással** jellemezzük:

$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$, illetve $\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t$

A fejezetek végén található feladatgyűjteményben az *Összefoglaló feladatok* részben az emelt szintű érettségi vizsga követelményeiben előírtak szerint tesztkérdések, feladatok és esszékérdések szerepelnek.

Az összefoglaló feladatok emelt szintű tesztjei a vizsgázótól az ismeretek összekapcsolásának képességét is elvárja. A *tesztek* megoldásával a tanuló gyorsan ellenőrizheti, mennyire tanulta és értette meg az egyes témakörök ismeretanyagát, azok alkalmazását kérik számon a vizsgázótól. Az összefoglaló *feladatok* sikeres megoldásához tárgyi tudásra, az ismeretek alkalmazási képességére és matematikai számolási készségre van szükség. Az *esszékérdések* kidolgozását irányító kérdéssor könnyíti meg. Az esszék célja az elméleti tananyag ismeretén túl a hétköznapi élethez, azaz a gyakorlathoz kötöttség.

# Összefoglaló feladatok

### TESZTFELADATOK

1. Télen kora este a Lánchídon sétálva a derült égbolton déli irányban megpillantjuk a Hold alakját. Milyen fázisban látjuk?
   A) Majdnem újhold, holdsarló.
   B) Első negyed.
   [illegible]

# Tartalom


Bevezetés ..... 3

**I. Mérésekről, mennyiségekről, számításokról** ..... 7
1. Fizikai mennyiségek ..... 8
2. Skalár- és vektormennyiségek ..... 9
3. Vektorműveletek ..... 10
4. Szögfüggvények ..... 12
5. Mennyiségek mérése és dokumentálása ..... 14
6. A mérési eredmények elemzése ..... 15
7. Egyenletmegoldás, számológép-használat ..... 16
8. A mérés pontossága, mérési hibák, hibaszámítás ..... 18

**II. A tömegpont kinematikája** ..... 20
1. Kinematikai alapfogalmak és az egyenes vonalú egyenletes mozgás ..... 21
2. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás és a szabadesés ..... 26
3. Nem nulla kezdősebességű mozgások ..... 31
4. Függőleges hajítások ..... 35
5. Vízszintes hajítás ..... 37
6. Ferde hajítás (Kiegészítő anyag) ..... 41
Összefoglalás ..... 44
Összefoglaló feladatok ..... 46

**III. A tömegpont dinamikája** ..... 50
1. Newton I. törvénye ..... 51
2. Newton II. és III. törvénye ..... 54
3. A dinamika alaptörvénye ..... 58
4. Mechanikai erőhatások: a súlyerő és a rugóerő ..... 62
5. A súrlódási és a közegellenállási erő ..... 67
6. Erőhatások a lejtőn ..... 72
7. Pontrendszerek ..... 75
8. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye ..... 79
9. A tehetetlenségi erők (kiegészítő anyag) ..... 82
Összefoglalás ..... 85
Összefoglaló feladatok ..... 88

**IV. Munka, energia** ..... 92
1. Munka, munkatétel ..... 93
2. A mechanikai energia megmaradásának törvénye ..... 96
3. Rugalmassági energia ..... 100
4. Teljesítmény, hatásfok ..... 103
5. Ütközések energiaviszonyai ..... 106
6. Energiaforrások, főbb energiaátalakító berendezések ..... 111
Összefoglalás ..... 116
Összefoglaló feladatok ..... 118

**V. Körmozgás** ..... 122
1. Az egyenletes körmozgás ..... 123
2. A centripetális gyorsulás ..... 127
3. Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele ..... 131
4. Feladatok körmozgásra ..... 135
5. Az egyenletesen változó körmozgás (Kiegészítő anyag) ..... 140
Összefoglalás ..... 144
Összefoglaló feladatok ..... 145

**VI. Rezgőmozgás** ..... 148
1. Mechanikai rezgések leírása ..... 149
2. Harmonikus rezgőmozgás kinematikája ..... 152
3. A rezgésidő ..... 156
4. A lengésidő ..... 158
5. A rezgés energiája ..... 161
6. Kényszerrezgések ..... 163
Összefoglalás ..... 166
Összefoglaló feladatok ..... 167

**VII. A merev test egyensúlya** ..... 170
1. Pontszerű test egyensúlya ..... 171
2. Merev testek egyensúlya ..... 172
3. Egyszerű gépek ..... 178
Összefoglalás ..... 182
Összefoglaló feladatok ..... 183

**VIII. Forgómozgás** ..... 186
1. Forgómozgás kinematikája ..... 187
2. A forgómozgás alapegyenlete ..... 190
3. A perdület ..... 194
4. Merev test mozgási energiája ..... 197
Összefoglalás ..... 202
Összefoglaló feladatok ..... 203

**IX. Gravitáció és Naprendszer** ..... 206
1. Az égbolt vizsgálata ..... 207
2. Az égitestek mozgása ..... 213
3. A gravitáció elmélete ..... 219
4. Súly és súlytalanság ..... 225
Összefoglalás ..... 230
Összefoglaló feladatok ..... 232

**X. Hőtan** ..... 236
1. Hőmérséklet, hőtágulás ..... 237
2. Gáztörvények ..... 242
3. Kinetikus gázelmélet ..... 248
Összefoglalás ..... 253
Összefoglaló feladatok ..... 254

**XI. A hőtan főtételei** ..... 258
1. A hőtan I. főtétele ..... 259
2. A hőtan II. főtétele ..... 265
3. Körfolyamatok ..... 268
4. Kalorimetria ..... 275
Összefoglalás ..... 278
Összefoglaló feladatok ..... 280

**XII. Halmazállapot-változás** ..... 284
1. Halmazállapotok ..... 285
2. Gőz és gáz ..... 290
3. A víz hőtani tulajdonságai, csapadékok ..... 296
Összefoglalás ..... 299
Összefoglaló feladatok ..... 301

**XIII. A folyadékok, gázok mechanikája** ..... 306
1. Nyomásviszonyok ..... 307
2. A felhajtóerő ..... 312
3. Molekuláris jelenségek ..... 317
4. Folyadékok és gázok áramlása ..... 320
5. Természeti környezet ..... 326
Összefoglalás ..... 330
Összefoglaló feladatok ..... 332

Név- és tárgymutató ..... 336

Fotók és ábrák forrásjegyzéke ..... 339

# I. Mérésekről, mennyiségekről, számításokról







# 1. Fizikai mennyiségek

Amikor fizikával foglalkozunk, akkor a természet valamely alapvető jelenségét vagy folyamatát próbáljuk jellemezni, leírni, körülírni. Ehhez szavak helyett fizikai mennyiségeket és mondatok helyett összefüggéseket használunk. Ugyanis a természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott, ahogy arra már Galilei is utalt.

A fizikai mennyiségek a természeti jelenségek, folyamatok tulajdonságát mennyiségileg jellemzik. Ismeretük nélkülözhetetlen fizikai vizsgálataink, tapasztalataink, következtetéseink megfogalmazásához.

A fizikai mennyiségek mérőszámból és mértékegységből állnak, a mennyiségek között a nemzetközi mértékegységrendszer (Systeme International, röviden SI) teremt rendet. Az SI meghatároz hét alapmennyiséget, amelyekből a többi alapmennyiség nem határozható meg, valamint számos származtatott mennyiséget, amelyek az alapmennyiségekből határozhatók meg.

Az SI szabályozza a mennyiségek mértékegységét is. A mértékegységek kisebb vagy nagyobb egységgé átváltásához úgynevezett prefixumokat (előtagokat) használunk.

**MIRE FIGYELJÜNK?**

- A fizikai mennyiségeket mindig jellel és mértékegységgel adjuk meg!
  Például: $m = 4$ kg.
- A jeleket pontosan használjuk! Figyeljünk a kis- és nagybetűkre!
  Például: $t$ az idő, $T$ a hőmérséklet jele, vagy $Q$ jelölhet töltésmennyiséget és hőmennyiséget is.
- Azonos típusú mennyiségeket indexeléssel különböztessünk meg!
  Például: $v_1$, $T_{\text{kezdeti}}$, $p_A$.
- Lehetőleg használjunk SI-mértékegységeket! Ha ettől eltérünk, legyünk körültekintők!
- A fizikai mennyiségeket megadhatjuk normálalakban vagy tudományos/mérnöki alakban is, ez segít a prefixumok használatában.
  Például: $s = 12\,500$ m $= 1{,}25 \cdot 10^4$ m $= 12{,}5 \cdot 10^3$ m $=$ $= 12{,}5$ km.

## Alapmennyiségek

| Fizikai mennyiség | | SI-mértékegység | | Egyéb mértékegység (példa) | |
|---|---|---|---|---|---|
| neve | jele | neve | jele | neve | jele |
| Hosszúság | $l$ | méter | m | csillagászati egység | CsE |
| Idő | $t$ | másodperc | s | nap | d |
| Tömeg | $m$ | kilogramm | kg | tonna | t |
| Elektromos áram | $I$ | amper | A | | |
| Hőmérséklet | $T$ | kelvin | K | Celsius-fok | °C |
| Anyagmennyiség | $n$ | mól | mol | | |
| Fényerősség | $I_V$ | kandela | cd | | |

## Gyakran használt prefixumok

| Előtag | | | |
|---|---|---|---|
| neve | jele | értéke | példa |
| giga- | G | $10^9$ | 3 GW |
| mega- | M | $10^6$ | 7 MJ |
| kilo- | k | $10^3$ | 20 kN |
| deci- | d | $10^{-1}$ | 1,2 dm |
| centi- | c | $10^{-2}$ | 0,5 cg |
| milli- | m | $10^{-3}$ | 20 ml |
| mikro- | μ | $10^{-6}$ | 45 μg |
| nano- | n | $10^{-9}$ | 650 nm |
| piko- | p | $10^{-12}$ | 1,5 pJ |
| femto- | f | $10^{-15}$ | 0,9 fm |
| atto- | a | $10^{-18}$ | 2,8 aJ |

## Példák származtatott mennyiségekre

| Fizikai mennyiség | | SI-mértékegység | | | Egyéb mértékegység (példa) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| neve | jele | neve | jele | kifejezése | neve | jele |
| Sebesség | $v$ | $\frac{\text{méter}}{\text{másodperc}}$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ | $\frac{\text{kilométer}}{\text{óra}}$ | $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ |
| Nyomás | $p$ | pascal | Pa | $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | bar | bar |
| Energia | $E$ | joule | J | Nm | kilowattóra | kWh |
| Elektromos ellenállás | $R$ | ohm | Ω | $\frac{\text{V}}{\text{A}}$ | | |

# 2. Skalár- és vektormennyiségek

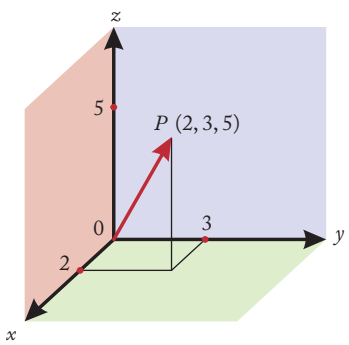
A fizikai mennyiségeket két nagy csoportba soroljuk aszerint, hogy meghatározásukhoz elegendő egy jellemző (nagyság), vagy szükséges két jellemző (nagyság és irány) adat. Az előbbit skalármennyiségnek, az utóbbit vektormennyiségnek nevezzük.

**Skalármennyiség** például az idő, a tömeg, a hőmérséklet, az ellenállás vagy a sűrűség. Mennyiségüket egyetlen (nem negatív) számadattal határozzuk meg.

Például: $t$ = 45 min, $m$ = 7,5 kg.

Vannak olyan **skalármennyiségek is, melyek ugyan egyetlen számadattal írhatók le**, de ez a szám lehet negatív is. Ezeket néha az előjeles skalármennyiség kifejezéssel illetjük. Az előjeles skalármennyiségekre jó példa a töltés, a munka, a térfogatváltozás, a feszültség vagy a fókusztávolság.

**Vektormennyiség** például a sebesség, a gyorsulás, az erő, az elektromos térerősség vagy a lendület. **Mennyiségüket a nagyságot jelző számadattal és irányuk megadásával határozhatjuk meg.** Az irányt a 3 dimenziós térben kell megadni, és ehhez szükséges egy koordináta-rendszer. Az irány megadása lehet szöveges (például felfelé, északra, előremutató), de használhatunk koordinátákat is *(ld. ábra)*. Az egyszerűség kedvéért a vektormennyiségeket ábrázolhatjuk is. A vektor hossza ilyenkor a mennyiség nagyságát jelzi.

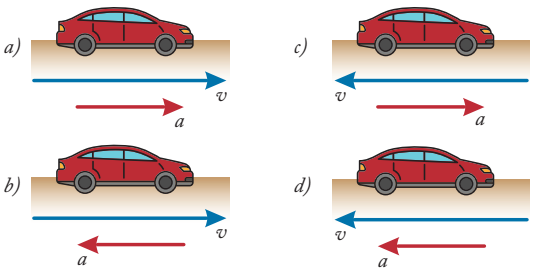



*A P pontba mutató vektor megadása koordinátákkal*

A vektormennyiségeket nyomtatásban a jel fölötti nyíllal vagy vastagított jellel adják meg. Például: $\vec{F}$ vagy **F**.

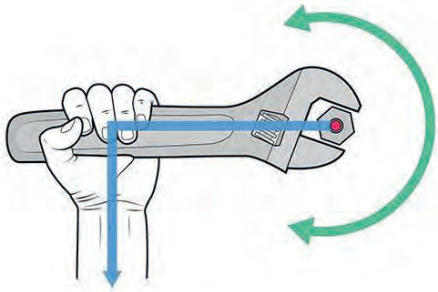
Ha csak a mennyiség nagyságára szeretnének utalni, akkor a jelet abszolútérték-jelbe teszik, vagy nem vastagítják. Például: az erő nagysága $|\vec{F}|$ vagy $F$.

Speciális esetekben a vektormennyiségek irányának fontossága elvész. Például az egyenes vonalú mozgások esetén a sebességnek és a gyorsulásnak csak a nagysága jellemző, illetve az, hogy „előre-" vagy „hátrafelé" mutatnak. Ezért gyakran előjeles skalármennyiségként kezeljük őket, noha megtanultuk, hogy vektormennyiségek.




*Egyenesen haladó mozgásnál a sebesség és a gyorsulás előjeles skalármennyiségként kezelhető*

Vannak olyan fizikai mennyiségek, amelyeket eddigi tanulmányainkban skalármennyiségként vezettünk be, de tulajdonképpen vektormennyiségek. Ennek oka az, hogy csak olyan témaköröket érintünk a középiskolában, amelyekben elegendő a vektormennyiség nagyságát jellemző adat. Ilyen, nem valódi skalármennyiségek például a szögsebesség vagy a forgatónyomaték. Utóbbi esetében gyakran meg is kellett nevezni, hogy az óramutató járásával megegyező, avagy ellentétes irányba forgat.



*Az erőkifejtés iránya szerint a forgatónyomaték lehet az óramutató járásával megegyező vagy ellentétes*

## MIRE FIGYELJÜNK?

- Az előjeles skalármennyiségeknél mindig figyeljünk az előjelre, értelmezzük is azt! Például: $\Delta V = -6\ \text{m}^3$, tehát a gáz térfogata csökkent, vagy $f = -10$ cm, a fókusztávolság negatív, mert a tükör domború, azaz szórja a fényt.
- A vektormennyiségek megadásánál mindig gondoljunk az irány megadására is!
  Például: A tartóerő $F$ = 45 N, és iránya a lejtőre merőleges, vagy $a = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, és iránya a mozgással ellentétes.
- Egy erővektor felrajzolásakor ügyeljünk arra, hogy a vektornak hova rajzoljuk a kezdőpontját, mert annak külön jelentősége van, a támadáspontot határozza meg, ahol az erő kifejti hatását!
- Több azonos típusú vektormennyiség egy ábrába rajzolásakor figyeljünk a vektorok hosszára, mert ezek jelzik az egymáshoz viszonyított nagyságukat!

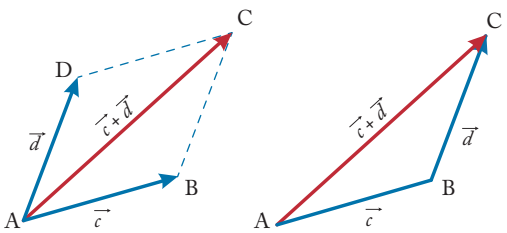
# 3. Vektorműveletek

A vektormennyiségeket nagyságuk és irányuk is jellemzi, ezért a velük való számolás is bonyolultabb, mint a számokkal (skalármennyiségekkel).

## Vektorok összegzése

Azonos típusú vektormennyiségeket összegezhetünk, ehhez a **paralelogrammaszabályt** vagy a **láncszabályt** használhatjuk.

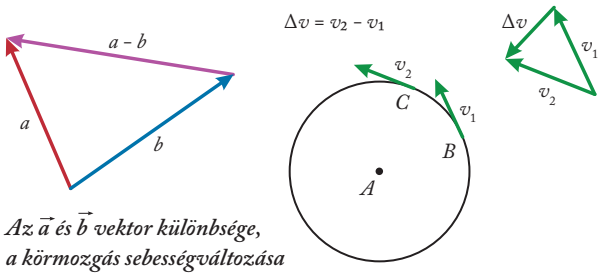
Eddig leggyakrabban sebességvektorokat és erővektorokat adtunk össze. Az összegzés eredményét, vagyis az összegvektort más néven eredőnek vagy eredő vektornak is nevezzük.




*A $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektor összegzése paralelogrammaszabály és láncszabály szerint*

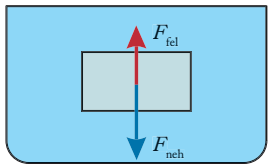
## Vektorok különbsége

Két azonos típusú vektormennyiség különbségét, változását is meghatározhatjuk a **háromszögszabály** szerint. Például így határoztuk meg körmozgás esetén a sebességváltozást.




*Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor különbsége, a körmozgás sebességváltozása*

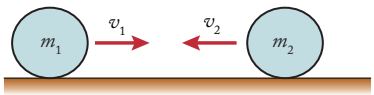
Az összegzés és a különbségszámítás egyszerűbbé válik, ha a vektorok egy egyenesre illeszkednek, mert ekkor a vektorokat előjeles skalármennyiségekként kezelhetjük. Ezt használhatjuk például a nehézségi erő és a felhajtóerő összegzésénél, egy ütközésnél a lendületek összegzésénél, vagy a relatívsebesség-számításnál.



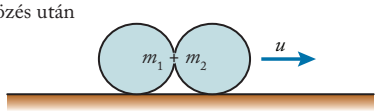

$F_{neh} > F_{fel}$

*Az eredő erő a nagyobbik erő irányába mutat:*
$F_e = F_{neh} - F_{fel}$

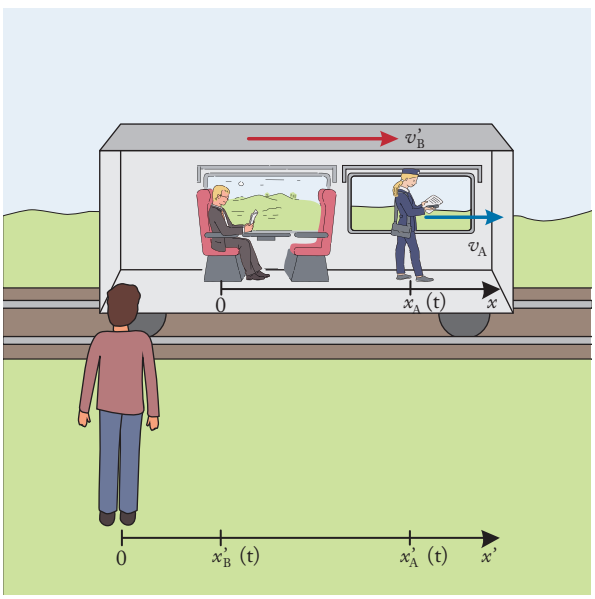
Ütközés előtt




Ütközés után

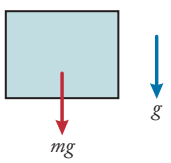



*Rugalmatlan ütközésre:* $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$, *illetve* $m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$




## Vektor szorzása számmal

Gyakran szorzunk össze vektormennyiséget skalárral. Ilyenkor az eredmény egy, az eredetivel megegyező irányú vektor lesz, melynek hossza az eredeti vektor hosszának skalárszorosa. Ezt hangsúlyozzuk például Newton 2. törvényében is: az (eredő) erő a gyorsulás irányába mutat.



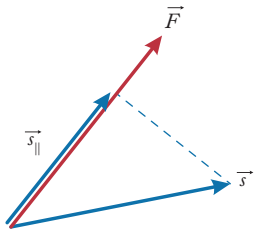

*Szabadon eső test gyorsulása és a rá ható mg nehézségi erő egymás számszorosa*

## Két vektor szorzata

Két vektormennyiség összeszorzása kétféleképpen is alakulhat attól függően, hogy az eredmény skalármennyiség vagy vektormennyiség lesz.

### Két vektor skaláris szorzása

Például az erővektor és az elmozdulásvektor szorzata, a munka, egy skalármennyiség. A munka az erő nagyságának és az erő irányába történő elmozdulás nagyságának szorzata.




*$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{s}_{\parallel}$, vagyis az elmozdulás erő irányába eső összetevőjének és az erőnek a szorzata adja a munkavégzést*

**Két vektormennyiség skaláris szorzata (jele: ·) megegyezik az egyik vektor nagyságának és a másik vektor első irányába eső vetülete nagyságának szorzatával.**

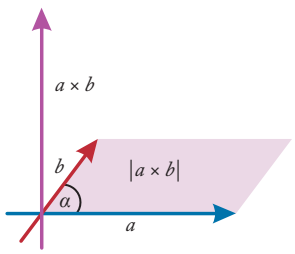
Ha két vektormennyiség egymásra merőleges, akkor a skaláris szorzatuk nulla.

### Két vektor vektoriális szorzata

Ismerünk olyan szorzást is, amelynek eredménye vektormennyiség. Például a Lorentz-erő a töltéshordozó sebességének és a mágneses indukcióvektornak a szorzata megszorozva a töltéssel (skalár). A Lorentz-erő meghatározásánál a nagyságát és az irányát is meg kell adni.

**Két vektormennyiség vektoriális szorzata (jele: ×) olyan vektor, amelynek iránya merőleges mindkét vektorra, az iránya a jobbkéz-szabály szerint adható meg, a nagysága pedig a két vektor által kifeszített paralelogramma területe.**

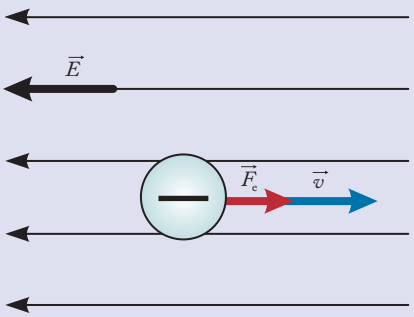
Ha két vektor párhuzamos, akkor a vektoriális szorzatuk nulla.



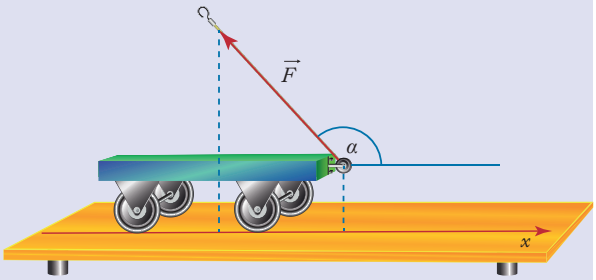

*Az a és b vektor vektoriális szorzatának (a × b) hossza megegyezik a paralelogramma területével*

## MIRE FIGYELJÜNK?

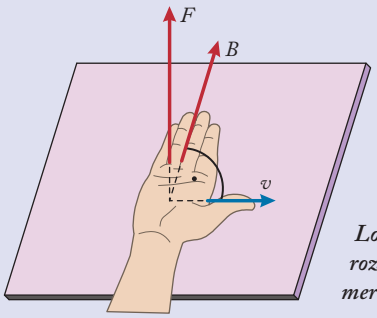
- Vektormennyiségek összeadásakor ne a nagyságukat adjuk össze! 3 N + 5 N nem feltétlenül 8 N! Ezért használjuk az összeadás helyett az összegzés, összeg helyett pedig az eredő szavakat.
- Erők egyensúlya ($F_e = 0$) esetén jól alkalmazható a láncszabály, ekkor a vektorok láncának zárt alakzatot kell alkotnia!
- Vektormennyiségek különbségvektora a „kisebbítendő” felé mutat!
- Ha vektormennyiséget negatív skalárral szorzunk, akkor az iránya megfordul!
  Például: $\vec{F}_{elektron} = \vec{E} \cdot Q_{elektron}$




- Skaláris szorzat lehet negatív is, ha a két vektor tompaszöget zár be egymással!




- Két vektor vektoriális szorzatának nagysága akkor maximális, ha a két vektor merőleges egymásra, ilyenkor az eredményvektor nagysága egyszerűen a két vektor nagyságának szorzata. Sok feladat ezt a merőleges elrendezést használja az egyszerű számolás érdekében.
  Például: $F_L = Q \cdot v \times B$, és ha $v \perp B$,
  akkor $F_L = Q \cdot v \cdot B$.

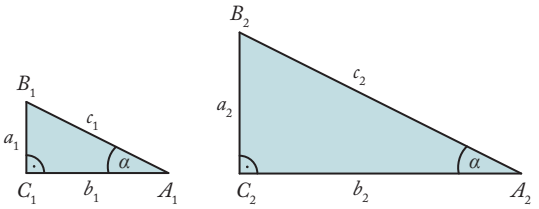



*Lorentz-erő meghatározása mágneses térre merőleges sebesség esetén*

# 4. Szögfüggvények

## Szögfüggvények hegyesszögű háromszögekben

A vektorműveletek számításakor, de más geometriai számítások során is gyakran használjuk ki azt az összefüggést, hogy különböző méretű, azonos $\alpha$ hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszögek hasonlók, így oldalaik aránya megegyezik.




*Hasonló derékszögű háromszögek befogóinak aránya:* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

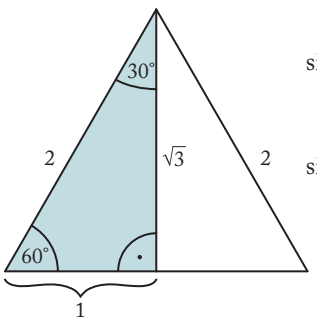
**Az $\alpha$ szöggel szemközti befogó és átfogó arányát az $\alpha$ szög szinuszának, a szög melletti befogó és átfogó arányát az $\alpha$ szög koszinuszának, és a szöggel szemközti és melletti befogók arányát az $\alpha$ szög tangensének nevezzük.**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Egy adott szöghöz tartozó arányok függvénytáblázatokból kikereshetők, illetve számológépből előhívhatók. És fordítva: egy ismert arányhoz a háromszög keresett szöge visszakereshető.

## Nevezetes szögek szögfüggvényei

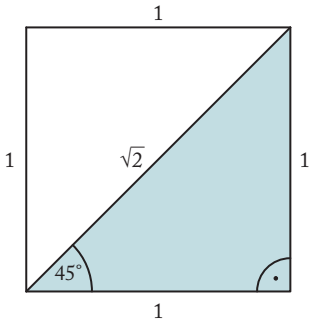
A 30°, 45° és 60° szögfüggvényei gyakran előfordulnak a fizikafeladatok megoldásakor. Szögfüggvényeik értékeit a 2 egység oldalú szabályos háromszög, illetve az egységnyi oldalhosszúságú négyzet segítségével határozhatjuk meg.




$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Két egység oldalú szabályos háromszög felhasználásával írhatjuk fel a 30° és a 60° szögfüggvényeit*

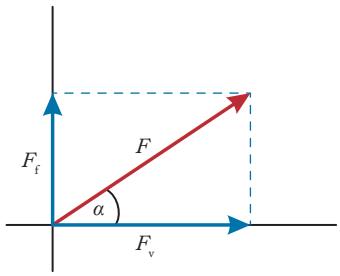



*Egységnyi oldalú négyzet felhasználásával írhatjuk fel a 45° szögfüggvényeit*

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

## Vektorok felbontása összetevőkre

A szögfüggvényeket használjuk például egy vektor komponensekre bontásánál. Ugyanis minden vektort fel tudunk bontani két egymásra merőleges vektorra, melyek összegzése visszaadja az adott vektort. A komponensekkel könnyebb a számolás.

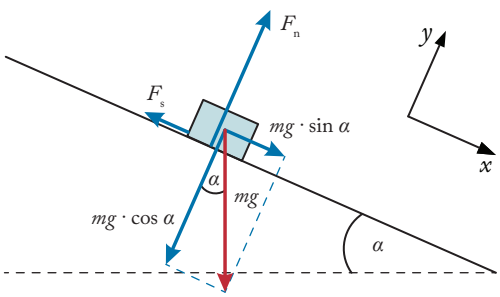



$$F_f = F\cdot\sin\alpha,$$
$$F_v = F\cdot\cos\alpha$$

*Az $F_v$ vízszintes és az $F_f$ függőleges vektorok az $F$ vektor komponensei*

## Szögfüggvények alkalmazása

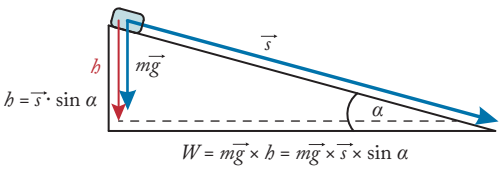
A szögfüggvényeket használhatjuk lejtős feladatoknál, például egy lejtőn lecsúszó test esetén.



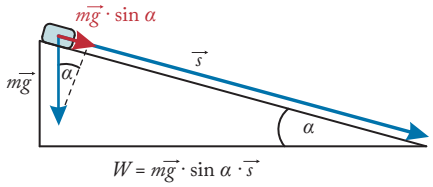

*Lejtőn csúszó testre ható erők x és y irányú komponensei*

Használhatjuk a skaláris szorzatnál.

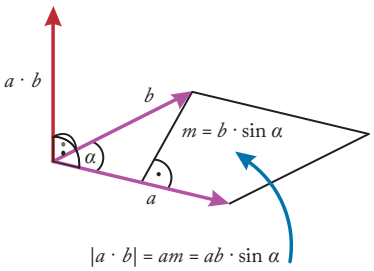
Például: Egy leereszkedő testen a nehézségi erő által végzett munka meghatározásakor. Vagy az elmozdulásvektornak ($s$) vesszük a függőleges komponensét ($h$) és annak nagyságát szorozzuk meg a nehézségi erő nagyságával,




vagy a nehézségi erőnek ($m \cdot g$) vesszük a lejtő irányú komponensét ($m \cdot g \cdot \sin\alpha$), és annak nagyságát szorozzuk össze az elmozdulás nagyságával.



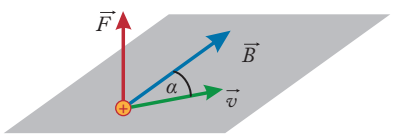

Használhatjuk a vektoriális szorzatnál. A paralelogramma területéhez szükséges magasság a paralelogrammából levágott derékszögű háromszögből meghatározható.




*Az a és b vektor által kifeszített paralelogramma magasságának és területének meghatározása*

Például: Ha ha egy $Q$ töltést $v$ sebességgel a $B$-vonalakhoz képest $\alpha$ szöggel lövünk be, akkor a Lorentz-erő nagysága:

$$F_L = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$$




*Ha a v sebességvektor a B mágneses indukcióvektorral α szöget zár be, akkor az $F_L$ merőleges a két vektor által alkotott síkra*

## MIRE FIGYELJÜNK?

- Az ábrákon megjelenő háromszögek néha túl kicsik, érdemes azokat külön felnagyítva kirajzolni, így jobban látható, hogy hol van a derékszög, mik a befogók és az átfogó.
- Mindig ellenőrizzük, hogy a számológép milyen szögegységgel dolgozik! Fokok esetén DEG üzemmódban, ívmérték (radián) esetén RAD üzemmódban kell lennie a gépnek!
- Írásban a tangens rövidítése tg, azonban a számológépeken az ennek megfelelő gomb a TAN.
- Ha egy derékszögű háromszög oldalainak arányából szeretnénk visszakeresni a szöget, akkor a számológépen a $SIN^{-1}$, $COS^{-1}$, $TAN^{-1}$ gombokkal tudjuk ezt megtenni. A számológép ilyenkor a beállított üzemmódban lévő szögegységben adja meg a keresett szög értékét.



# 5. Mennyiségek mérése és dokumentálása

## A fizikai mennyiségek

A fizikai mennyiségek között összefüggések vannak, melyeket a fizika törvényeiben fogalmazunk meg. Felfedezésükhöz vagy igazolásukhoz a fizikai mennyiségek megmérésével és elemzésével jutunk.

A fizikai mennyiségeket különféle mérőeszközökkel és mérési eljárásokkal tudjuk megállapítani. A mérőeszközök tartalmazzák az alkalmazott mértékegységet/mértékegységeket, a legkisebb egységet, amit hitelesen mérni tud, valamint a méréshatárt/méréshatárokat, amely értékig mérni lehet vele. A korszerű mérőeszközök már digitálisak, kijelzőn mutatják a mért értéket.

## A mérési eljárások

**A mérési eljárások lépései:**
- a megfelelő mérőeszköz kiválasztása,
- a mérőeszköz beállítása a méréshez (kalibrálás),
- a mérési tevékenységek megtervezése,
- a mérés elvégzése,
- a mérési eredmények rögzítése,
- a mérési eredmények elemzése.

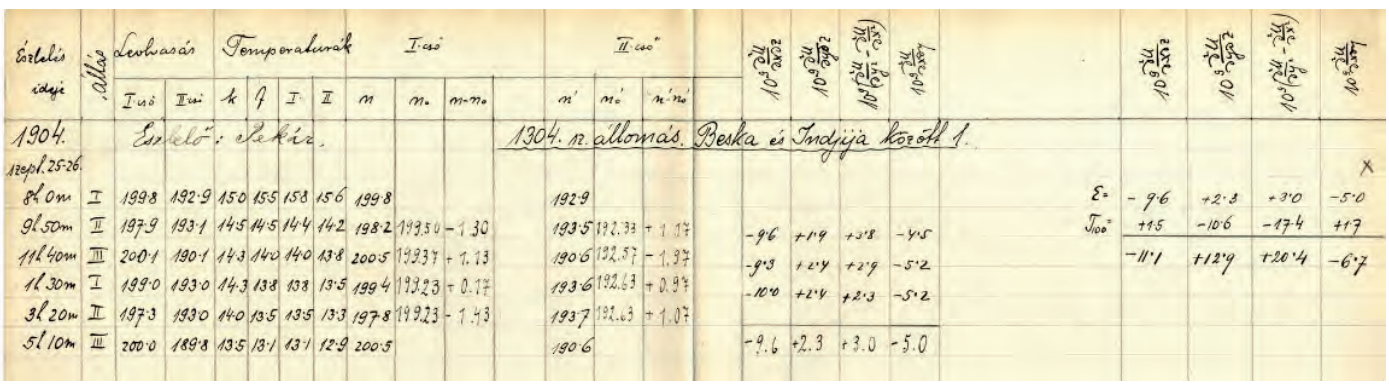
A mérési eredményeket sok esetben befolyásolják a mérés körülményei (helyszín, időpont és mérőeszköz megválasztása, a megfigyelő személye), minden mérés egyedi. Egy fizikai törvény felismeréséhez a körülmények hatásától mentes, tehát többször megismételhető és ellenőrizhető kell hogy legyen egy mérés vagy mérési eljárás. Éppen ezért a mérésekről jegyzőkönyvet készítünk.

## Mérési jegyzőkönyv

**Egy mérési jegyzőkönyvnek tartalmaznia kell:**
- a mérést végző(k) nevét, a mérés pontos helyét és idejét,
- a választott mérőeszközöket, egyéb szükséges eszközöket és anyagokat,
- a mérés célját,
- a mérési eljárás részletes leírását, az összeállítás fotóját vagy rajzát,
- a mérési eredményeket,
- az eredmények elemzését, a következtetéseket,
- a mérés körülményeiből fakadó úgynevezett mérési hibákat.

### MIRE FIGYELJÜNK?

- Mérés során figyeljünk a mérőeszköz mértékegységére, tartsuk be a méréshatárt! Ha szükséges, váltsunk mértékegységet vagy méréshatárt, vagy válasszunk másik mérőeszközt! Analóg eszköz esetén legyünk körültekintők a skálabeosztással! Nem minden skála emelkedik egyesével.
- Egy jegyzőkönyvben a mérési eljárást olyan részletesen és pontosan kell leírni, hogy a leírtak alapján mások, más körülmények között ugyanazt a mérést el tudják végezni! Az érthető leíráshoz mindig segítséget nyújt egy fotó vagy egy részletes ábra az összeállításról.
- A mérés célja, illetve a mérési eljárás szövegében nevezzük meg a mérés során használt mennyiségeket, és adjuk meg az általunk alkalmazott jelét, hogy a későbbiekben is könnyen lehessen azokra utalni!
- Ha egy mennyiséget többször is megmérünk, a mérési eredmények közlésekor a mennyiség jelét indexeljük! Például: $s_1$ = 42,7 cm, $s_2$ = 43,8 cm, $s_3$ = 40,1 cm.



*Eötvös Loránd mérési jegyzőkönyvének részlete. Gravitációs észlelések, Fruska Gora, 1903*

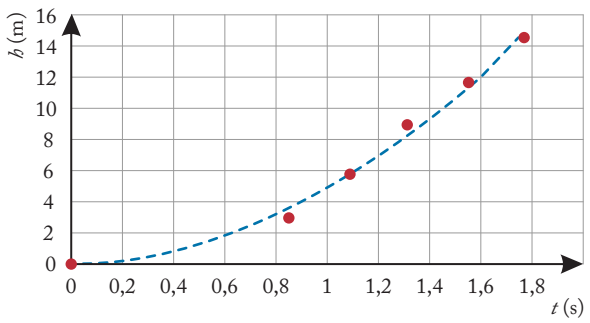
# 6. A mérési eredmények elemzése

A fizikai mennyiségek közötti összefüggéseket akkor tudjuk megállapítani, ha a mérési eredményeket rendszerezzük, táblázatba foglaljuk és/vagy grafikont készítünk.

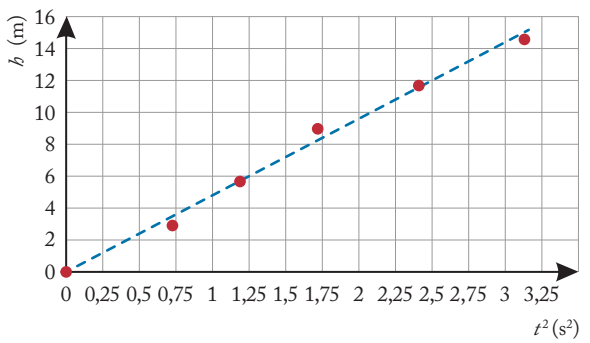
A **táblázatban** a sorok elején vagy az oszlopok elején jelöljük a mért fizikai mennyiség jelét, mértékegységét, a táblázat celláiba már csak a mérési eredmény mérőszámai kerülnek.

| $t$ (s) | 0 | 0,85 | 1,09 | 1,31 | 1,55 | 1,77 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ (m) | 0 | 2,9 | 5,7 | 8,9 | 11,6 | 14,5 |

A mennyiségek közötti kapcsolat a **grafikonon** lesz látható. A grafikon a mérési eredmények összetartozó adatpárjaiból álló pontok sorozata. A pontok által kirajzolódó vonalat, **trendvonalat** szaggatott vonallal illesztjük a pontokhoz.




A fenti grafikonra illesztett trendvonal parabolának tűnik, de a rajz még nem bizonyíték arra, hogy a magasság négyzetesen arányos az idővel. A sejtésünket úgy igazolhatjuk, hogy az idő helyett az idő négyzete függvényében ábrázoljuk a magasságot. Ha a grafikon egyenes lesz, a sejtésünk helyes.




*A trendvonal egyenesét vonalzóval úgy rajzoljuk meg, hogy egyforma mennyiségben legyenek a mérési adatpárok pontjai az egyenes mindkét oldalán.* A trendvonal meredekségét a grafikonról le tudjuk olvasni.

Például: 1,25 $s^2$-nél 6 m, 2,5 $s^2$-nél pedig 12 m.

Ezen adatokból a meredekség: $m = 4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A grafikon elemzésével összefüggést állapíthatunk meg két mennyiség között, ami igazolhat egy fizikai törvényt.

Például: $h = 4{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$, ami igazolja a $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$ négyzetes úttörvényt.

## MIRE FIGYELJÜNK?

- Egy mérési feladatban a grafikon felrajzolását kétféleképpen kérhetik. Megadhatják, hogy mit minek a függvényében rajzoljunk, ilyenkor aminek a függvényében kérik, az lesz a vízszintes tengelyen.
  Például, ha a megtett utat az idő függvényében kérik felrajzolni, akkor az idő a vízszintes tengely. Megadhatják ezt röviden is, például: készítsünk út-idő grafikont. Ebben az esetben az első a függőleges, a második a vízszintes tengelyre kerül.
- Ha magunk választhatjuk meg a tengelyeket, akkor két szokást követünk. Egyrészt, ha a mennyiségek közül az egyik az idő, akkor azt a vízszintes tengelyen ábrázoljuk (balról jobbra „telik" az idő). Másrészt azt a mennyiséget szokás a vízszintes tengelyen ábrázolni, amelyet a mérés során mi változtatunk.
- Ne felejtsük el a tengelyekre a mennyiségek jelét és zárójelben a mértékegységét ráírni!
- A tengelyek lehetőleg mindig 0-val kezdődjenek, és jelöljük rajta, hogy egy beosztás mennyit ér!
- A grafikonok mindig mérési adatok pontjai, nem kötjük össze a pontokat!
- Nem mérünk tökéletesen. Fogadjuk el, hogy a trendvonal egyenese nem megy át a mérési pontokon. Úgy rajzoljuk meg az egyenest, hogy minden ponthoz a lehető legközelebb legyen!
- A meredekséget ne egy mérési pontból, hanem a berajzolt egyenes egy pontjából határozzuk meg!

# 7. Egyenletmegoldás, számológép-használat

## Egyenletmegoldás

A mennyiségek közötti összefüggések, a fizikai törvények segítségével problémákat, feladatokat tudunk megoldani, helyzeteket tudunk előre jelezni. A jelenségre alkalmazható törvény megnevezése és felírása után behelyettesítjük az ismert mennyiségeket, majd az egyenletmegoldás szabályai szerint kiszámítjuk a kérdéses mennyiséget. Eljárhatunk úgy is, hogy a felírt összefüggést rendezzük az ismeretlen mennyiségre, és utána helyettesítünk be.

Példaként nézzünk meg két egyenletmegoldást, egyet az elektromosság, egyet a hőtan témaköréből. Ohm törvénye szerint:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4{,}5\ \text{V}}{0{,}12\ \text{A}} = 12{,}5\ \Omega$$

A hőközlés összefüggése szerint:

$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$,

amelyből: $m = \frac{Q}{c \cdot \Delta T} = \frac{15\,000\ \text{J}}{4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 80\ \text{K}} = 0{,}0446\ \text{kg}$

Ha egy feladatban több összefüggést is fel kell használni, akkor a felírt egyenleteket célszerű egy egyenletrendszerként kezelni, összevonni, alakítani, és a legvégén behelyettesíteni.

Például Newton 2. törvénye szerint:

$$F_e = m \cdot a \qquad (1)$$

Az eredő erő a testre ható erők összegzésekor vektor:

$\vec{F}_e = m \cdot \vec{g} + \vec{K}$, nagysága:

$$F_e = K - m \cdot g \qquad (2)$$

A két egyenletből: $m \cdot a = K - m \cdot g$,

melyből a gyorsulás: $a = \frac{K}{m} - g$

A gyorsuló test sebessége: $v = a \cdot t$ (3)

A (3) egyenletbe behelyettesítve a gyorsulásra kapott kifejezést, akkor azt kapjuk, hogy: $v = \left(\frac{K}{m} - g\right) \cdot t$ (4)

Megoldható a feladat úgy is, ha a felírt egyenleteket egyenként oldjuk meg a megfelelő adatok behelyettesítésével, ha azok rendelkezésre állnak. Ebben az esetben azonban ki kell számolnunk olyan mennyiségeket, például az eredő erőt és a gyorsulást, amelyet a feladat nem kért, másrészt a kiszámított részeredmények óhatatlan kerekítésével a végeredmény kevésbé lesz pontos, mint az előbbi esetben.

## SI-mértékegység használata

A fizikai törvényekben alkalmazott fizikai állandók (arányszámok) értékeit az SI egységei szerint határozták meg, tehát a behelyettesítés akkor helyes, ha SI-ben számolunk. **Ha az adatokat SI-mértékegységrendszerben adjuk meg, akkor az úgynevezett mennyiségegyenlet helyett elegendő számértékegyenletet írni.** Például az előbbi számítás végén kapott (4) egyenletbe való behelyettesítés:

**Mennyiségegyenlet**:

$$v = \frac{20\ \text{N} \cdot 3\ \text{s}}{800\ \text{g}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\ \text{s} = \frac{20\ \text{N} \cdot 3\ \text{s}}{0{,}8\ \text{kg}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\ \text{s} = 45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Számértékegyenlet**:

$$v = \frac{20 \cdot 3}{0{,}8} - 10 \cdot 3 = 45$$

Tehát $v = 45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A számértékegyenlet esetében szükséges az eredmény mennyiségi megadása mértékegységgel, ami szintén SI-egység.

## Számológép-használat

A számítás során használjunk számológépet. Az ezresnél nagyobb vagy az ezrednél kisebb számértékeket célszerű normálalakba átírni. Ugyancsak normálalakba célszerű átírni a prefixummal megadott adatokat. A végeredményt megadhatjuk normálalakban, de elegánsabb prefixumos alakot használni (ha a nagyságrend indokolttá teszi).

Például: $f = 650\ \text{nm} = 650 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$,

vagy

$P = 2{,}3 \cdot 10^7\ \text{W} = 23 \cdot 10^6\ \text{W} = 23\ \text{MW}$.

## MIRE FIGYELJÜNK?

**Feladatmegoldásról:**

– Egy feladatmegoldás a gondolatmenetünk lenyomata. Igyekezzünk rövid szöveges megjegyzésekkel ellátni levezetésünket, felhasználva az egyensúly feltételét, vagy kifejezve a keresett mennyiséget (például a sebességet), vagy behelyettesítve az adatokat!

– Legyen meg mindig a feladatmegoldás három pillére:
  – az összefüggés felírása,
  – az adatok behelyettesítése,
  – a végeredmény kiszámítása!

– Ha számértékegyenletet használunk, érdemes a feladat elején megjegyezni, hogy az adatokat SI-ben számoljuk. És akkor számoljuk is abban!

– Egyes összefüggések nem tartalmaznak fizikai állandót, vagy csak arányokat fejeznek ki. Ilyen esetben nem szükséges SI-mértékegységbe váltani a mennyiségeket, mindössze arra kell ügyelni, hogy azonos egységekkel dolgozzunk.
  Például:
  – az ütközéseknél:
  $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_k$,
  $100\ \text{g} \cdot 3\ \frac{\text{km}}{\text{h}} + 250\ \text{g} \cdot 1{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 350\ \text{g} \cdot 1{,}71\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$,
  *vagy*:
  – a gáztörvényeknél:
  $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$,
  $1500\ \text{hPa} \cdot 23\ \text{liter} = 4500\ \text{hPa} \cdot 7{,}67\ \text{liter}$,
  *vagy:*
  – a leképezési törvénynél:
  $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$
  $\frac{1}{20\ \text{cm}} + \frac{1}{30\ \text{cm}} = \frac{1}{12\ \text{cm}}$

– A fenti eseteket figyelembe véve, mielőtt behelyettesítést végzünk, mindig gondoljuk végig, hogy milyen mértékegységet használunk, vagy szükséges használnunk, és ha kell, váltsuk át az adatokat a megfelelő mértékegységbe!

– Ha számértékegyenletet használunk, akkor az eredmény kiszámolása után a végeredményt mindig mértékegységgel együtt közöljük!

– A hibák elkerülése érdekében a feladat kérdésére adjunk teljes mondattal szöveges választ!

**A számológép-használatról:**

– A számológépekbe könnyen beüthetők a normálalakok az [EXP] billentyű segítségével.
  Például: [5] [EXP] [–] [3] azt jelenti, hogy $5 \cdot 10^{-3}$.

– Használjuk a számológép funkciós billentyűit, még ha matematikából nem is tanultuk! Például, ha $t^2 = 6{,}8\ \text{s}^2$, és keressük $t$ értékét, akkor a [√] billentyűt használjuk. Ennek mintájára használhatjuk a [∛] billentyűt egy $R^3 = 4{,}5 \cdot 10^8\ \text{km}^3$ kifejezés megoldására. Vagy használjuk az [1/x] vagy [x⁻¹] billentyűt egy mennyiség reciprokának megadásához.

– Ügyeljünk arra, hogy ha egy tört kiszámításakor a nevezőben több mennyiség van, akkor azt a gépbe beütve tegyük zárójelbe, mert a gép nem tudja, hogy mit akarunk osztani.
  Például $\frac{6000}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 47}$ gépelve:

[6] [0] [0] [0] [÷] [(] [8] [EXP] [–] [3] [×] [4] [7] [)]

– Egyes tudományos számológépek memóriájában benne vannak a gyakrabban használt fizikai állandók értékei, ezeket egy billentyűkombinációval könnyen elő lehet hívni, megtakarítva az érték kikeresését és begépelését. Ha tudjuk, használjuk ki ezt a lehetőséget!

– Egyes számológépek az eredményeket tizedes tört és közönséges tört alakban is ki tudják írni. Fizikai számításoknál az eredmények közlésénél mindig tizedes tört értékeket használjunk! Még akkor is, ha a közönséges tört alak pontosabb eredményt ad.
  Például: $v = \frac{s}{t} = \frac{11\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 3{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

– A számológépek a legutolsó számítás eredményét automatikusan megjegyzik, és azt az ANS billentyűvel a következő számításhoz elő lehet hívni. Ha egy eredményt egy későbbi számításnál szeretnénk felhasználni, vagy több későbbi számításnál is előkerül, akkor érdemes az M+ memóriabillentyűvel a számítógép memóriájába elmenteni, és bármikor, amikor szükséges, az MR billentyűvel előhívni. A számológép memóriájából az eltárolt eredményt az Mcl billentyű segítségével lehet törölni.



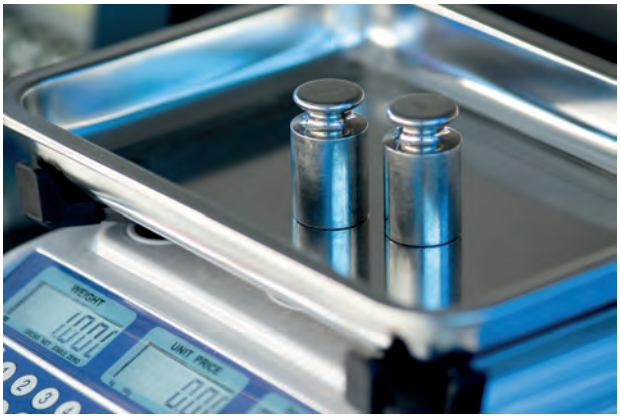
*Tudományos számológép használata*

# 8. A mérés pontossága, mérési hibák, hibaszámítás

## Mérési eredmény megadása

Ha egy kísérletet többször is megismétlünk, és mindannyiszor mérést is végzünk, akkor tapasztalataink szerint a mérésre nem kapunk azonos eredményeket. Ha a kísérletekben a fizikai mennyiség mérési adatait átlagoljuk, akkor azzal a legvalószínűbb értéket kapjuk a mérésre. Ezt **mérési eredménynek** nevezzük.

A **mérőeszköz pontosságának** azt a legkisebb mértékegységet értjük, amiben az eszköz mér. Például egy digitális mérleg grammos beosztással mér, eredményeit is grammban adja meg, ezért a mérleg pontossága 1 gramm, a mért értékeket ± 1 g bizonytalansággal adja meg.



*Digitális mérleg súlyokkal*

*A mérés pontossága (precizitás) azt mutatja meg, hogy a mérési adataink mennyire hasonló eredményt adnak egymáshoz képest.* Ezt számszerűen is ki lehet fejezni.

A **mérés abszolút hibájának** nevezzük a mérési eredmény és a mérési adatok közötti különbségek közül a legnagyobbat (jele: Δ).

Például:

Egy jelenség időtartamát mérve a mérési adataink a következők:

$t_1$ = 2 min 23 s,
$t_2$ = 2 min 28 s,
$t_3$ = 2 min 24 s,
$t_4$ = 2 min 30 s,
$t_5$ = 2 min 27 s.

Ekkor a **mérés eredménye:**

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = 2 \text{ min } 26 \text{ s}$$

és a **mérés abszolút hibája**: $\Delta t = \max|t - t_i| = 4$ s

Az abszolút hibából első ránézésre nem állapítható meg, hogy csekély vagy nagy precizitást jelez, ezért kifejezőbb meghatározni a **mérés relatív hibáját**, ami az abszolút hiba és a mérési eredmény hányadosa százalékban kifejezve (jele: $\delta$). ).

Így az előző példa alapján:

$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{4 \text{ s}}{146 \text{ s}} = 0{,}027 = 2{,}7\%$, ami nagy precizitású mérést jelez.

A **mérési eredményeket** legtöbbször a mérés pontosságával együtt adjuk meg.

Például:

$t$ = 2 min 26 s ± 4 s = 2 min 26 s ± 2,7%

## Mérési hibák

A mérési eljárás pontatlanságának több oka is lehet. A **szisztematikus hibák** olyan hatásoktól származnak, amelyek a mérés eredményét mindig ugyanúgy torzítják.

Ilyenek lehetnek:

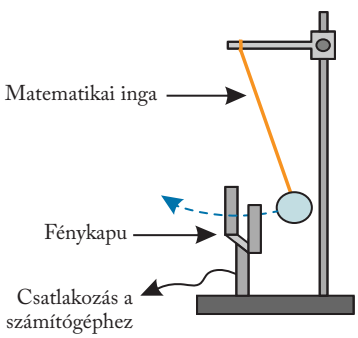
– a mérőeszközök beállításból adódó hibái (például a mérleg mindig 2 g-mal többet mér),

vagy:

– a külső tényezők miatti torzulások (pl. a hőmérséklet, a páratartalom, vagy a Föld mágneses hatása torzítja a mérést).

Például:

A nehézségi gyorsulás értékének matematikai ingával *(ld. ábra)* meghatározásakor, ha bármilyen súrlódás lép fel a rendszerben, vagy ha az inga hosszát pontatlanul mérik (a lengő test tömegközéppontjától kell mérni), akkor az összes leolvasott érték ugyanabba az irányba tolódik el.




*A nehézségi gyorsulás mérése matematikai ingával*

A **véletlen hibák** ezzel szemben kiszámíthatatlanok, az eredményt mindkét irányba torzíthatják. Az ilyen jellegű hibákat sok mérés átlagolásával csökkenteni lehet. Véletlen hiba származhat a mérő személytől, ilyenek például a leolvasásból, reakcióidőből, érzékelésből, beállításból adódó bizonytalanságok. Származhat a környezet változékonyságából, ilyenek például a légmozgásból, külső zajból, gyors hőmérséklet-ingadozásból vagy légnyomás-ingadozásból adódóak.

Bármilyen mérésnél, ha véletlenszerű hibákat kapunk, bármennyire is próbálkozunk, akkor sem tudjuk kijavítani őket (pl. a szél rossz irányból fúj).

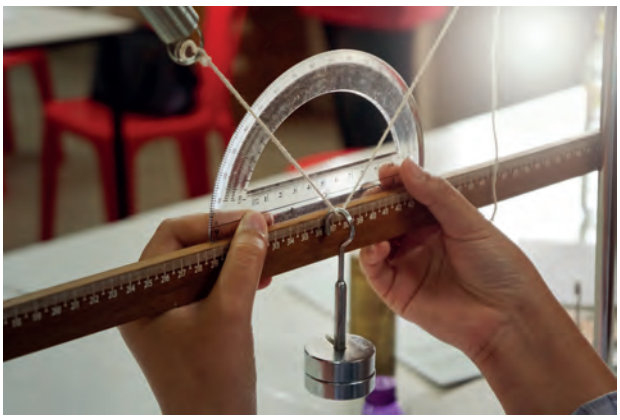
## Mérési eredmény pontossága

*Egy mérési eredmény vagy egy számítás eredményének a pontosságát az értékes jegyeinek a száma adja meg*. Az értékes jegyek számát úgy a legkönnyebb megállapítani, ha az eredményt normálalakba írjuk. Ekkor az egyesek helyén álló számjegy és a tizedesvessző utáni számjegyek tekinthetők értékes jegyeknek.

Például:

A $12\ 690 = 1{,}269 \cdot 10^4$, tehát a számnak négy értékes jegye van (az 1, 2, 6 és 9), a 72 000 két értékes jeggyel rendelkezik (7 és 2), a 0,00108 tizedes törtnek három értékes jegye van (1, 0 és 8).

A *Négyjegyű függvénytáblázatokban* található fizikai állandók és egyéb adatok – néhány kivételtől eltekintve – négy értékes jegy pontosságúak, erre utal a címe is.



*Az erővektorok által bezárt szög meghatározása három erő egyensúlya esetén*

**MIRE FIGYELJÜNK?**

- Egy mérési feladatban mindig több mérést végezzünk, a mérési adatokat átlagoljuk, ezzel is csökkentjük a véletlen hibákat!
- Ne adjunk meg a mérőeszköz egységénél pontosabb mérési eredményt! Például nem helyes egy mm beosztású vonalzóval mért hosszúságra 15,6 mm értéket megadni. Legyen 16 mm!
- A mérési adatoknak, valamint azok átlagának (mérési eredménynek) értékes jegyei egyezzenek meg, tehát ha kell, kerekítsük az átlagot!

  Például: $\frac{9{,}86 + 9{,}95 + 9{,}72}{3} = 9{,}8433\dot{} \approx 9{,}84$
- Mérési feladatban mindig adjuk meg a mérési eredmény(ek) relatív hibáját is!
- A mérési jegyzőkönyv végén mindig tüntessük fel a mérés azon hibáit, amik a mérési eredmény pontosságát befolyásolták!
- A mérési eredményekből számított mennyiségek értékei se legyenek pontosabbak, még ha a számítást nagy pontossággal el is tudjuk végezni! Például:

  $v = \frac{s}{t} = \frac{8{,}13\ \text{cm}}{1{,}37\ \text{s}} = 5{,}634306569\ \ldots \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 5{,}63\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

  (három értékes jegy pontossággal számítva).
- Számítási feladatokban általában elegendő három értékes jegyre kerekítve megadni a végeredményt. A közbülső számításoknál viszont ne kerekítsünk, hogy a műveletek elvégzésekor ne növeljük az eredmény pontatlanságát!
- A 2 cm és a 2,00 cm mérési adat között az értékes jegyek száma, tehát a pontosság a különbség. Míg az első adat 1,5 cm és 2,5 cm közötti mért értékre utal, addig az utóbbi 1,995 cm és 2,005 cm között van.

# II. A tömegpont kinematikája







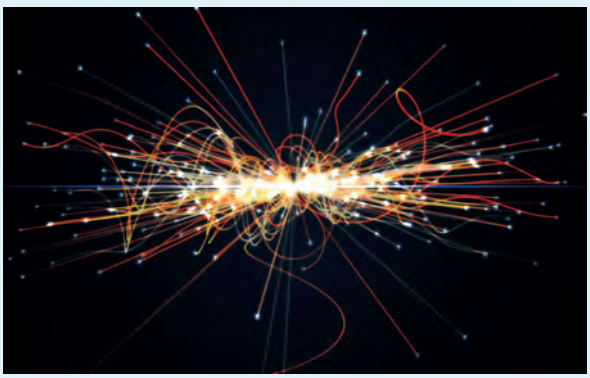
# 1. Kinematikai alapfogalmak és az egyenes vonalú egyenletes mozgás

EMLÉKEZTETŐ

## Pontszerű test, pálya, út, elmozdulás

A kinematika (mozgástan) a fizika azon részterülete, amelynek feladata a mozgások leírása. A kinematika szó a görög (’kinima’) szóból ered, amelynek jelentése: mozgás.

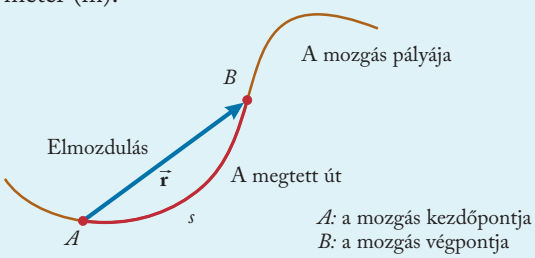
A testek haladó mozgásuk során kiterjedésüknél jóval nagyobb távolságokat tesznek meg, ezért a testeket leegyszerűsítve kiterjedés nélküli, **pontszerű testnek**, vagy másképpen **anyagi pontnak** (tömegpontnak) képzeljük el. Ebben a fejezetben csak ilyen pontszerűnek tekinthető testeket fogunk vizsgálni.



*Különböző elemi részecskék pályája egy kimutatásukra szolgáló készülékben, egy úgynevezett részecskedetektorban. A CERN felvétele*

A mozgás **pályája** az a vonal, amelyet a test a mozgása folyamán befuthat. Ilyen lehet például egy főútvonal, egy villamos sínpálya, egy részecskenyom egy detektorban.

Azt a pálya mentén mért távolságot, amelyet a test az adott idő alatt ténylegesen befut, **megtett útnak** nevezzük. A megtett út jele az $s$ (vagy $\Delta s$), ami a latin spatium (’útszakasz’) szóból származik. Mértékegysége: méter (m).




*A mozgás pályája, a megtett út és az elmozdulás*

Az **elmozdulás** a mozgás kezdőpontjából a végpontjába mutató **vektor**. Jele: $\vec{r}$.

Ez is hosszúság jellegű fizikai mennyiség, mértékegysége: méter (m).

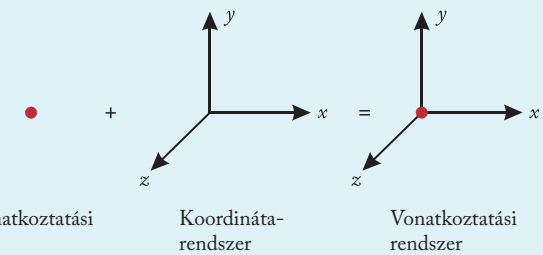
**Egyenes vonalú egyenletes mozgásnak nevezzük a mozgást akkor, ha a mozgás pályája egyenes vonal, és a megtett út egyenesen arányos az út megtételéhez szükséges idővel.**

## Vonatkoztatási rendszerek

A mozgások leírása alatt azt értjük, hogy tetszőleges időpontban meghatározzuk egy test helyét, illetve helyzetét egy másik testhez képest. Mi választhatjuk meg, hogy melyik testhez képest választjuk meg egy másik test mozgásának leírását.

Például, ha a Naprendszer bolygóinak mozgását vizsgáljuk, nem a Földet célszerű választani vonatkoztatási pontnak, ahogy a történelem során azt egészen a 17. századig tették, hanem a Napot.

A testek helyét és elmozdulását úgy tudjuk számszerű adatokkal leírni, hogy a kitüntetett ponthoz mint origóhoz gondolatban egy koordináta-rendszert illesztünk, amelyet a továbbiakban **vonatkoztatási rendszernek** nevezünk.



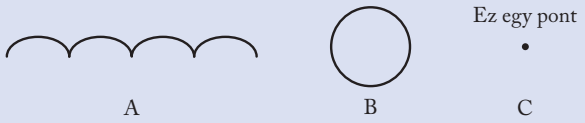

*Vonatkoztatási rendszer*

Például, ha a tanteremben akarjuk a tárgyak helyét megadni, célszerű a terem egyik sarkát választani vonatkoztatási pontnak, a koordinátatengelyeket az ebben a sarokban találkozó falak és a padló metszésvonalai alkothatják.

A **nyugalom** – mint a testek mozgásállapota – mindig viszonylagos. Ez azt jelenti, hogy a nyugalomban lévő test mozgásállapota megegyezik a választott vonatkoztatási rendszer mozgásállapotával.

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

András, Bella és Cecília azon vitatkozik, hogy milyen pályát ír le a kerékpár kerekének a szélére ragadt sárdarab. Mindegyikük lerajzolja elképzelését:




Fizikatanáruk szerint mindegyiküknek lehet igaza, ha megfelelő vonatkoztatási rendszert adnak meg. Adjuk meg, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből értelmezhetők az előbbi pályák!

**MEGOLDÁS**

„A" a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből írta le a mozgást. „B" a kerékpárral együtt mozgó vonatkoztatási rendszert használhatott, például egy másik, az előzővel párhuzamosan haladó kerékpárról látjuk így a sárdarab mozgását. „C" a forgó kerékhez rögzített vonatkoztatási rendszert használt, például egy küllőn megkapaszkodó rovar képes a szemét végig a sárdarabra „fixálni".

## Az átlagsebesség

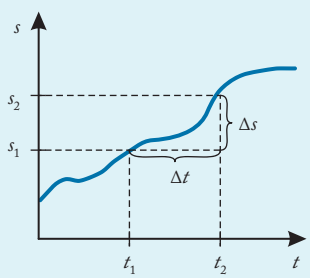
Fizikai tanulmányaink során kétfajta sebességfogalommal találkoztunk.

Az **átlagsebesség** a mozgás során megtett összes út és a közben eltelt összes idő hányadosa.

$$\frac{\Sigma s}{\Sigma t} = \frac{\textbf{összes megtett út}}{\textbf{összes eltelt idő}}$$

**Az átlagsebesség SI-mértékegysége $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. A hétköznapi életben használt mértékegység $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.**

$1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, hiszen ha egy test $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozog, akkor 1 h = 3600 s alatt 3,6 km-t fog megtenni.




*Az átlagsebesség értelmezése*

Az átlagsebességet a fenti grafikon jelölései alapján $v_{\text{átl}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ alakban írhatjuk fel.

Fontos megjegyezni, hogy *az átlagsebesség általában nem egyenlő a sebességek átlagával*, hanem azonos utakat megtéve az átlagsebesség kisebb lesz a sebességek átlagánál, amint az első kidolgozott példánk is szemlélteti. *Az átlagsebesség nem vektormennyiség.*

## Pillanatnyi sebesség

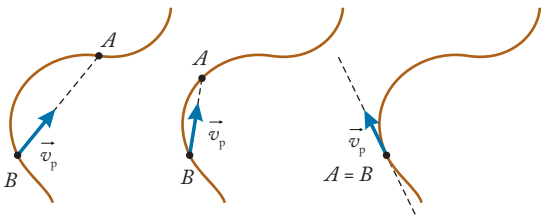
**A pillanatnyi sebességen egy nagyon rövid időtartamhoz tartozó átlagsebességet értünk. Jele: $v_p$.**
**A pillanatnyi sebesség vektormennyiség.**

A pillanatnyi sebesség azt mutatja meg, hogy ha a mozgás a vizsgált pillanatban egyenletessé válna, akkor a test azzal a sebességgel mozogna egyenletesen tovább.

Nagyon rövid időközök esetén a test által befutott AB út és az A-ból B-be mutató elmozdulásvektor *(ld. az alábbi középső ábrát)* lényegében egybeesik. Ekkor a sebességet az elmozdulásvektor időegységre eső megváltozásaként is értelmezhetjük, így jutunk a pillanatnyi sebességhez:

$$\vec{v}_p = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \text{ ha } \Delta t \to 0 \text{ (azaz ha } \Delta t \text{ tart a nullához)}$$

Ha index nélkül használjuk a $v$-t, akkor általában pillanatnyi sebességet értünk rajta.




*A pillanatnyi sebességvektor iránya a mozgás pályájának érintőjébe esik*

Egyenes vonalú mozgásoknál a pillanatnyi sebesség iránya megegyezik az elmozdulásvektor irányával.

Görbe vonalú pályán egyre kisebb időtartamok esetén az elmozdulások nagysága is egyre kisebb lesz, határesetben a lehető legrövidebb időtartamhoz tartozó elmozdulás már nem a pálya húrja, hanem az érintője lesz.

**A pillanatnyi sebességvektor iránya a mozgás pályájának érintőjébe esik.**

Pillanatnyi sebességet mutat a járművek mechanikus „mutatós" sebességmérője („kilométerórája"), amit közvetlenül az autó egyik tengelye forgat.




*Egy autó sebességmérője*

A digitális kilométerórák mindig átlagsebességet mutatnak: kiszámítják egy kis eltelt idő alatt megtett út és az idő hányadosát. (Az utat szintén a tengely elfordulásából mérik.) Manapság már elég rövid időre vett átlagot veszznek, ezért az eredményük a pillanatnyi sebességtől csak elhanyagolható mértékben tér el. A GPS helymeghatározó rendszerek által mutatott sebességnagyság a digitális kilométerórákhoz hasonlóan az átlagsebességet méri.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy autó a Szekszárd és Paks közti távolságot 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tette meg. Pakson rögtön megfordult, és 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel jött visszafelé. Mekkora volt az egész útra számított átlagsebessége?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$v_1 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_{\text{átl}} = ?$

Legyen $s$ a két város közti távolság, $t_1$ az odaút, $t_2$ pedig a visszaút ideje! Írjuk fel az átlagsebességet az oda-vissza útra vonatkozva:

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Sigma s}{\Sigma t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} =$$

$$= 48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

A kapott eredmény matematikailag két szám ún. harmonikus közepét adta meg. A harmonikus középről matematikában ismert, hogy az mindig kisebb, legfeljebb (a két szám egyenlősége esetén) egyenlő a számtani középpel. Ebből következik, hogy azonos utakat megtéve különböző sebességgel, az átlagsebességünk mindig kisebb lesz, mint a sebességek átlaga.

**2. FELADAT** Két hajó halad egy tavon. Mindkét hajó sebessége a vízhez képest 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Mekkora szöget zárnak be a hajók vízhez viszonyított sebességvektorai egymással, ha az egyik hajón álló utas azt érzékeli, hogy

**a)** hozzá képest a másik hajó nyugalomban van?

**b)** hozzá képest a másik hajó 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozog?

**c)** hozzá képest a másik hajó ugyancsak 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel mozog?

Mekkora sebességet érzékel az utasunk, ha a két hajó sebességvektora

**d)** derékszöget,

**e)** 120°-os szöget zár be?

### MEGOLDÁS

Adatok:

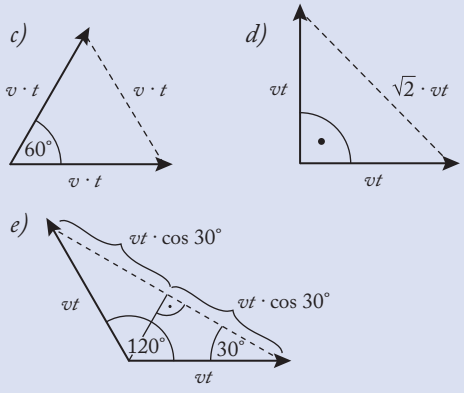
$v = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{\text{rel}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\alpha = ?\quad v' = ?$

**a)** A két sebességvektor azonos irányú, azaz 0°-os szöget zár be, a két hajó egymással párhuzamosan halad.

**b)** A két sebességvektor ellentétes irányú, azaz 180°-os szöget zár be, a két hajó egymással ellentétes irányban halad.

**c)** Gondolatban csúsztassuk el a két sebességvektort egy közös kezdőpontba! Innen tetszőleges időt haladva úgy kell távolodniuk egymástól, hogy minden pillanatban a köztük lévő távolság annyi legyen, mint amennyit a kezdőponttól megtettek, mert csak így fog teljesülni az, hogy a saját sebességük egyenlő az egymáshoz képesti (relatív) sebességgel is. Így egy egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg az elmozdulások, azaz a sebességvektoraik is 60°-os szöget zárnak be.




**d)** Gondolatban csúsztassuk a két sebességvektort egy közös kezdőpontba. Egységnyi idő (pl. 1 s) után a köztük lévő távolság az általuk megtett út $\sqrt{2}$ -szerese lesz. Így az egymástól való távolodási sebességük is $5\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz.

**e)** Az ábráról láthatjuk, hogy $s$ távolságot távolodva a közösnek gondolt kezdőponttól, a köztük lévő távolság $2s \cdot \cos(30^\circ) = 2s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = s\sqrt{3}$ lesz, így most az érzékelt sebesség $v' = 5\sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz.

## A gyorsulás

**A sebesség megváltozásának és a közben eltelt időtartamnak a hányadosát gyorsulásnak nevezzük. Jele: $a$, amely a latin acceleratio ('gyorsulás') szó kezdőbetűje.**

$$\text{Gyorsulás} = \frac{\text{sebességváltozás}}{\text{sebességváltozás időtartama}} = \frac{v_{\text{vég}} - v_{\text{kezdeti}}}{\text{sebességváltozás időtartama}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

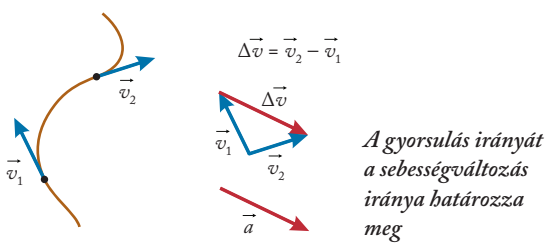
**Mértékegysége: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.**

**A gyorsulás vektormennyiség, iránya a sebességváltozás irányával egyezik meg.**

*A gyorsulás mérőszáma megmutatja, hogy egységnyi idő alatt mennyivel változik meg a sebesség nagysága.*

Nézzük meg, hogy milyen irányú a gyorsulásvektor! Az alábbi ábrán egy test sebességvektorait tüntettük fel két közeli $t$ és $t + \Delta t$ időpontban. *A $\Delta t$ idő alatt bekövetkező sebességváltozást a $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ adja.* A definíció szerint a gyorsulásvektor a következőképpen írható fel: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Ebből következik, hogy az $\vec{a}$ **gyorsulásvektor iránya megegyezik az igen rövid idő alatt bekövetkezett $\Delta\vec{v}$ sebességváltozás-vektor irányával**.




*A gyorsulás irányát a sebességváltozás iránya határozza meg*

Az ábráról kitűnik, hogy a $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ sebességvektorok és a $\Delta\vec{v}$ sebességváltozás-vektor teljesen eltérő irányúak lehetnek. Ez pedig egyben azt is jelenti, hogy **a gyorsulásvektor és a sebességvektor általános esetben** szintén **eltérő irányúak**. *Egyenes vonalú mozgásoknál a gyorsulásvektor és a sebességvektor egy egyenesbe esik.*

## Az egyenes vonalú egyenletes mozgás jellemzői

**Az egyenes vonalú egyenletes mozgás legfontosabb jellemzői:**

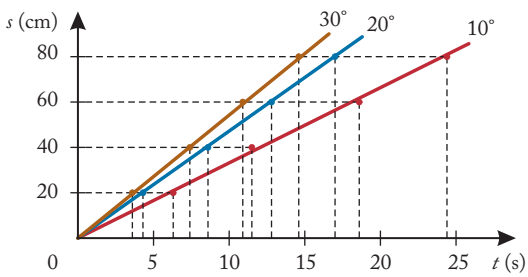
- **a test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg, függetlenül attól, hogy mekkorák is ezek az egyenlő időközök,**
- **a test által megtett út egyenesen arányos a mozgás idejével,**
- **a sebesség nagysága és iránya állandó,**
- **a test gyorsulása minden időpillanatban zérus.**

Ilyen mozgást végez (az indulási és megállási rövid szakaszt nem tekintve) a hosszú, egyenes csőben lévő kis buborék. Ezt az eszközt Mikola-csőnek nevezzük, a mozgást is ezzel célszerű vizsgálni.



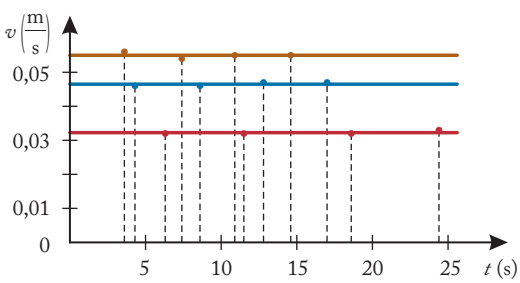
*Az $\alpha$ dőlésszöggel megdöntött Mikola-cső*

## Az egyenes vonalú egyenletes mozgás grafikonjai



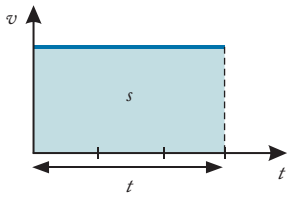

*Különböző sebességű mozgások út-idő grafikonjai*

A különböző sebességű mozgások út-idő grafikonjait ábrázoljuk sebesség-idő koordináta-rendszerben!




*Az előző grafikonon ábrázolt mozgások sebesség–idő grafikonjai*

Vegyük észre, hogy a **sebesség-idő (*v*-*t*) koordinátarendszerben a grafikon alatti terület a megtett út mérőszámát adja meg**. Ez számos esetben nagyon megkönnyíti egyes feladatok megoldását azzal, hogy geometriai, területszámítási problémákká alakítja át a kitűzött feladatokat.




*A v-t grafikon alatti terület a megtett út mérőszámát adja meg*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy halász egyenletesen evez lefelé a folyón. Egy hídhoz érve csónakjából kiesik a csáklyája. (A csáklya fanyelű, fémcsúcsban végződő eszköz, amit a vízbe esett dolgok kiemelésére, illetve sekély vízben a csónak hajtására használtak.) Ezt csak fél óra múlva veszi észre. Ekkor megfordul, és továbbra is ugyanúgy egyenletesen evezve visszafordul a csáklyájáért.

Mikor és a hídhoz viszonyítva hol fogja megtalálni a csáklyát, ha a folyó sebessége 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

A feladatot oldjuk meg a Földhöz (parthoz, hídhoz) rögzített vonatkoztatási rendszerből és a folyóhoz rögzített, egyenletesen haladó vonatkoztatási rendszerből is!

### MEGOLDÁS

#### 1. megoldás

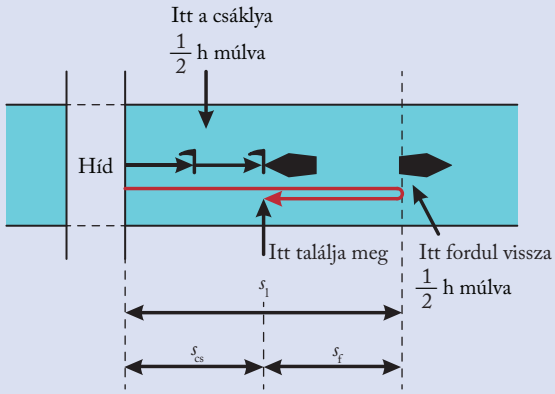
**Folyóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben**

A folyóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a csáklya végig nyugalomban van. Hozzá képest a halász először fél órát távolodik. Majd megfordul, és újabb fél órát evezve ér vissza a csáklyához. Összesen tehát 1 órát evez a halász, míg a csáklyájához visszaér. Ez alatt a csáklya 4 km-t tesz meg, tehát a hídtól 2 km-re fogja megtalálni azt.

#### 2. megoldás

**Parthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben**

Tekintsük a következő ábrát. Jelölje $s_{cs}$ azt az utat, amit a csáklya megtesz a hídtól. $s_l$ jelöli a halász útját lefelé, $s_f$ felfelé.




A halász állóvízben $v$ sebességgel evezne, így lefelé $(v + 2)$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, felfelé $(v - 2)$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy fennáll az $s_{cs} + s_f = s_l$ egyenlőség.

Fejezzük ki az adott távolságokat az út és az idő szorzataként. Jelölje $t$ azt az időt, amit a halász a folyón felfelé evez a megfordulástól a csáklyájáig. Az időt órában, a sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mértékegységben beírva a fenti egyenletbe: $(t + 0{,}5) \cdot 2 + t \cdot (v - 2) = 0{,}5 \cdot (v + 2)$, ahonnan $t = 0{,}5$ h.

Tehát a halász visszafelé is fél órát fog evezni. Így a csáklya összesen 1 órát volt a vízben, tehát 2 km-t tett meg.

*Megjegyzés:* Látható, hogy az 1. megoldás tűnik egyszerűbbnek. Egy célszerűen megválasztott vonatkoztatási rendszerben tehát gyakran jelentősen egyszerűsödnek a feladatok megoldásai.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mikor egyenlő az elmozdulásvektor nagysága a megtett úttal?
2. Egy egyenletes mozgás nem feltétlenül zajlik egyenes mentén. Mondjunk ilyenre példát!
3. Mit mondhatunk az egyenes vonalú egyenletes mozgás átlagsebességének és pillanatnyi sebességének a viszonyáról?
4. Egy autó egyórás útjának egy részét kisebb sebességgel teszi meg, mint a másik részét. Az egyórás út idejét milyen arányban kell felosztani a kisebb és nagyobb sebességgel megtett szakaszokra, hogy a sebességek átlaga azonos legyen az átlagsebességgel?
5. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás definíciója úgy szól, hogy a test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg, függetlenül attól, hogy mekkorák is ezek az egyenlő időközök. Írjunk le egy olyan egyenes pályájú mozgást, amelyre teljesül az, hogy a test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg, és mégsem tekinthető egyenes vonalú egyenletes mozgásnak!

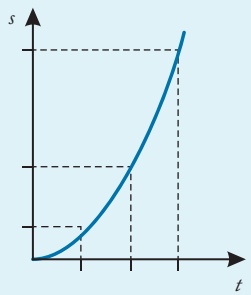
# 2. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás és a szabadesés

**EMLÉKEZTETŐ**

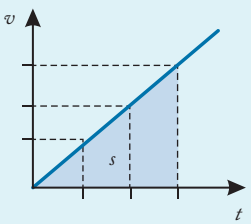
## Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Egy mozgás vizsgálata során a test által megtett út és az út megtételéhez szükséges idő mérhető legegyszerűbben. Ennek a mozgásnak a törvényeit **Galileo Galilei** (1564–1642) határozta meg elsőként lejtőkön legurított golyókkal elvégzett kísérleteivel.

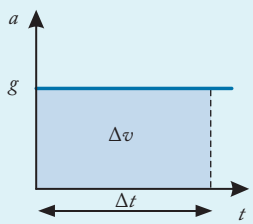
**Egy egyenes vonalú pályán haladó test mozgását akkor tekintjük egyenletesen gyorsuló mozgásnak, ha a test által megtett út az idő négyzetével arányos.**




*Az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test út–idő grafikonja*




*Az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test sebesség–idő grafikonja*




*Az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test gyorsulása állandó*

Megmutatható (lásd lejjebb), hogy az $s \sim t^2$ arányosság esetén **a test pillanatnyi sebessége egyenesen arányos az idővel, a gyorsulása állandó. A mozgásra jellemző összefüggések:**

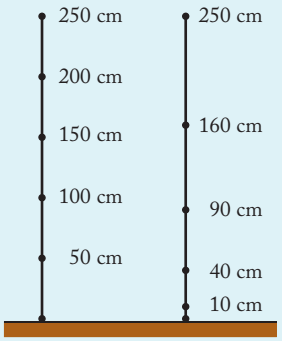
$$v_p = a\,t, \quad s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{v_{max} \cdot t}{2}$$

**Az $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggést négyzetes úttörvénynek nevezzük.**

## Szabadesés

Ha egy testre csak a Föld vonzóereje hat, és minden más erő (különösen a légellenállás) elhanyagolható, akkor a test mozgását **szabadesésnek** nevezzük.

A szabadesés jelenségének tanulmányozásához különböző magasságból leejtett fémgolyók mozgását vizsgálhatjuk.




*Szabadesés vizsgálata ejtőzsinórral*

Az ejtőzsinórnál golyókat az ábrán megadott távolságra rögzíthetjük egymástól. (A golyók távolságát a talajtól számítjuk.) A kétfajta ejtőzsinórt leejtve az első esetben a golyók koppanásai egyre gyorsuló ütemben követik egymást, míg a második esetben megfigyelhetjük, hogy egyenlő időközönként érkeznek a talajra a golyók. A mozgás kezdetétől számított utakat vizsgálva azt kapjuk, hogy az 1, 2, 3, 4 és 5 egységnyi időtartamhoz tartozó megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 4 : 9 : 16 : 25.

**Tehát a szabadon eső testek által megtett utak egyenesen arányosak az esési idők négyzetével: $\Delta s \sim \Delta t^2$. A szabadon eső test mozgása is egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.**

## A nehézségi gyorsulás

A Föld egy adott helyén a szabadesés gyorsulása állandó, bármilyen testre. Ennek a gyorsulásnak a neve **nehézségi gyorsulás**.

**A nehézségi gyorsulás jele $\vec{g}$, értéke Magyarországon két tizedesjegyre kerekítve $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.**

**A nehézségi gyorsulás függőleges irányú, és megközelítőleg a Föld középpontja felé mutat.**

A szabadesésre az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnál megtanult összefüggések érvényesek:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad v_p = g \cdot t, \quad g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Galilei a nehézségi gyorsulással kapcsolatban rájött, hogy az a hétköznapi tapasztalat, miszerint a nehezebb testek mintha gyorsabban esnének, a légellenállás zavaró hatásai miatt következhetnek be. Forradalmi gondolatként légellenállást viszont nem a mozgások lényegi elemének tekintette, hanem „járulékos zavarnak", és arra tett kísérletet, hogy a szabadesés törvényeit abban az egyszerűbb esetben fogalmazza meg, amikor a légellenállás elhanyagolható. A légellenállás ugyanis nagyon bonyolulttá teszi a testek zuhanását. A szabadesést azonban nagyon gyors mozgásnak találta, ezért azt lejtővel „lassította", és szabadesést 90°-os lejtőn való „zuhanásnak" tekintette. Így kezdte el a lejtőn legördülő golyók vizsgálatát, amelynek felismert törvényeit a szabadesésre is vonatkoztatta.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 5 m hosszú kötéllel összekötünk két követ. Egy magas toronyból lelógatjuk ezeket úgy, hogy a felső követ tartjuk a kezünkben. Elengedve ezeket azt tapasztaljuk, hogy a két kő 0,2 s időkülönbséggel csapódott be a talajba.

Milyen hosszú utat futott be a felső kő? ($g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

### MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 5$ m, $t$ s, $t + 0{,}2$ s, $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$s = ?$

**1. megoldás: Becsléssel történő közelítő megoldás**

A 0,2 s időkülönbség talán elég kicsi a zuhanás teljes idejéhez képest. Ezért azzal a közelítéssel élhetünk, hogy a $v_{átl} = \frac{5 \text{ m}}{0{,}2 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebesség, a felső kő becsapódási pillanatnyi sebességéhez lesz közeli.

A felső kő $t = \frac{2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}55$ s ideig esett.

Ez alatt megtett útja:

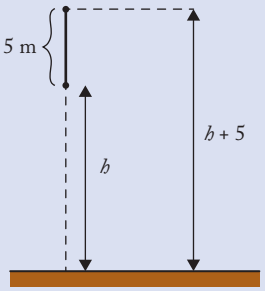
$$s = \frac{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} (2{,}55 \text{ s})^2 = 31{,}86 \text{ m}$$

A felső kő 31,86 m utat tett meg.

Ellenőrizzük más módszerekkel is közelítésünk pontosságát.

**2. megoldás: A feladat megoldása a négyzetes úttörvény felhasználásával**

Készítsünk rajzot a feladatról! Legyen $t$ az alsó kő esési ideje. Írjuk fel a négyzetes úttörvényt a felső és az alsó testre.




*A kötéllel összekötött követ h és h + 5 m magasságból ejtjük el*

A felső testre:

$$h + 5 = \frac{g}{2} (t + 0{,}2 \text{ s})^2, \qquad (1)$$

az alsó testre:

$$h = \frac{g}{2} t^2. \qquad (2)$$

Vonjuk ki az (1) egyenletből a (2) egyenletet:

$$5 = \frac{g}{2} (t + 0{,}2 \text{ s})^2 - \frac{g}{2} t^2$$

Behelyettesítjük be $g$ értékét, majd mindkét oldalt osszunk le $\frac{g}{2}$-vel:

$$\frac{5}{4{,}9} = (t + 0{,}2)^2 - t^2$$

Végezzük el a négyzetre emelést!

$$1{,}02 = t^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot t + 0{,}04 - t^2,$$

amelyből $t = 2{,}45$ s.

Ez az alsó kő esési ideje 2,45 s.

A felső kő még 0,2 s ideig esik, így annak az ideje $t + 0{,}2 = 2{,}65$ s lesz.

A négyzetes úttörvénybe behelyettesítve megkapjuk a felső kő által megtett utat:

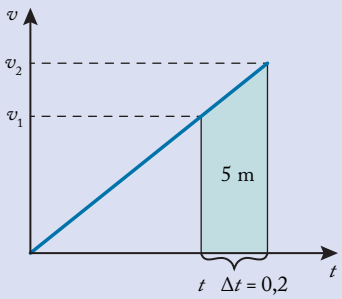
$$s = \frac{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} (2{,}65 \text{ s})^2 = 34{,}41 \text{ m}$$

A kapott 34,41 m az első megoldásban a becsléssel kapott 31,86 m-hez képest elég jelentősen eltér, a becslés hibája nagyjából 7%, ami elég jelentős hibának számít.

**3. megoldás: A feladat megoldása *v–t* grafikonnal**

Ábrázoljuk a felső kő sebességét az idő függvényében! Jelölje $t$ azt az időpillanatot, amikor az alsó kő becsapódik. A felső kő utolsó 5 m-es útja felírható a grafikon alatti trapéz területének segítségével:

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$




*A felső kő Δt idő alatt megtett útja 5 m*

A $v_1$ és $v_2$ meghatározására alkalmazzuk a $v_p = g \cdot t$ összefüggést:

$$s = \frac{g \cdot t + g \cdot (t + \Delta t)}{2} \cdot \Delta t$$

Behelyettesítve az ismert adatokat a következő egyenlethez jutunk:

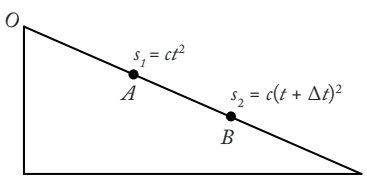
$$5 = \frac{9{,}81 \cdot t + 9{,}81 \cdot (t + 0{,}2)}{2} \cdot 0{,}2\,,$$

amelyből az alsó kő esési ideje $t = 2{,}45$ s lesz. Innen kezdve a feladatunk megoldása az előző megoldással azonos.

## A pillanatnyi sebesség kiszámítása a négyzetes úttörvény alapján

Tekintsük az ábra szerinti lejtőnket! Ennek legfelső (O) pontjából indítsuk el kezdősebesség nélkül egy testet.

Induljunk ki abból, hogy a lejtőn leguruló golyóra teljesül az $s \sim t^2$ arányosság, tehát az utat $s = ct^2$ alakban írhatjuk fel, ahol $c$ egy arányossági tényező. Megmutatjuk, hogy ekkor a pillanatnyi sebesség arányos az idővel, és a $c$ arányossági tényező éppen a gyorsulás fele.




*A lejtőn legördülő golyóra fennáll az $s = ct^2$ összefüggés*

A mozgás vizsgáljuk egy tetszőleges A pontban, eddig $s_1$ utat tett meg a test. Egy $\Delta t$ időtartammal későbbi időpillanatban a test B pontba kerül, az általa megtett út $s_2$.

Határozzuk meg, hogy az AB távolságon mekkora a test átlagsebessége!

$$v_{\text{átl}} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{c(t + \Delta t)^2 - ct^2}{\Delta t}$$

A négyzetre emelést, majd a matematikai átalakításokat elvégezve kapjuk:

$$v_{\text{átl}} = \frac{ct^2 + 2ct\Delta t + c\Delta t^2 - ct^2}{\Delta t} = \frac{2ct\Delta t + c\Delta t^2}{\Delta t} = 2ct + c\Delta t$$

Az átlagsebességnél láttuk, hogy ha a $\Delta t \to 0$, akkor a számított sebesség a pillanatnyi sebesség lesz. Ezt alkalmazva a fenti összefüggésben a $c\Delta t$ tag elhanyagolhatóan kicsivé válik, így a **pillanatnyi sebesség** $v_p = 2ct$.

Ebből pedig látható, hogy a test sebessége arányos az idővel.

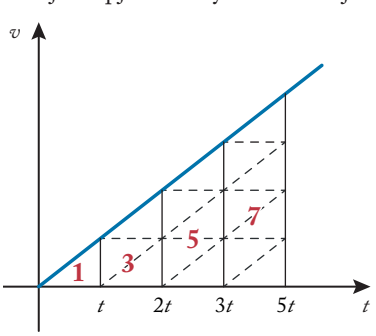
Az $a = 2c$ egyenlőségből következik, hogy $c = \frac{a}{2}$, amelyet az $s = ct^2$ összefüggésbe behelyettesítve az $s = \frac{a}{2}t^2$ négyzetes úttörvényt is megkapjuk.

*Megjegyzés:* Ez a számítás általánosan igazolja, hogy **ha a megtett út az idő négyzetével arányos, akkor a test pillanatnyi sebessége az idővel egyenesen arányosan változik.**

## Galilei definíciója az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásra

Galileinek az időmérés nagy problémát jelentett a lejtőn legördülő golyó vizsgálata esetén. Galilei kezdetben vízórákkal próbálkozott, azaz egy nagy vödörből lecsorgó, idővel arányos vízmennyiségek összehasonlításával kísérletezett. Ennél kielégítőbb eredményt kapott akkor, amikor a lejtőn legördülő golyók által megpendített lanthúrokat állított be úgy a lejtő felett, hogy a húrok megpendülését azonos időközönként hallja. Így azt vizsgálta, hogy egy lejtőn legördülő golyó egyenlő idők alatt mekkora utakat tesznek meg. Azt találta, hogy **egy egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló test mozgása esetén az egyenlő idők alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint 1-től kezdődően az egymást követő páratlan számok, azaz 1 : 3 : 5 : 7.**

A fenti állítás helyességét a gyorsuló mozgás *v–t* grafikonja alapján könnyen beláthatjuk:




*A kezdősebesség nélküli gyorsuló mozgásnál az egyenlő idők alatt megtett utak aránya 1 : 3 : 5 : 7*

Ismert, hogy a $v$–$t$ grafikon alatti terület a megtett utat adja meg. Az egyenlő időközök alatt megtett utak olyan trapézok területeinek felelnek meg, amik felbonthatók a $[0; t]$ intervallumhoz tartozó egybevágó háromszögekre.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Kata vasúton utazik. A hosszú, unalmas úton mobiltelefonjának stoppere segítségével méréseket végez. Egyszer észreveszi, hogy egy vasútállomáson a sínek mellett villanyoszlopok állnak egyenlő távolságra. A vonat éppen úgy állt meg, hogy fülkéjének ablaka előtt egy oszlop volt. Amikor vonat állandó gyorsulással elindult az állomásról, tíz másodperc után ablaka előtt ismét feltűnt egy oszlop, majd 10 másodpercenként egyre több oszlop előtt haladt el. Egy perc után a szerelvény elhagyta az állomást, ekkortól minden 10 s alatt már ugyanannyi oszlop mellett halad el a fülkéje.

**a)** Összesen hány villanyoszlop mellett haladt el fülkéje, míg elhagyta az állomást?

**b)** Ha a villanyoszlopok 10 m-re vannak egymástól, akkor mekkora sebességet ért el a vonat?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$t = 10$ s, $s = 10$ m.

---

*a)* $n = ?$ *b)* $v = ?$

**a)** Oldjuk meg a feladatot a Galilei-féle definícióval! Az egyperces gyorsítási idő 6 db 10 másodperces szakaszra osztható fel. Így az elhaladó villanyoszlopok száma rendre így követi egymást: 1, 3, 5, 7, 9, 11. Ez alapján az összes villanyoszlop száma $n = 36$ db volt.

**b)** Egy perc alatt fülkéje 360 m-t tett meg. Az átlagsebessége $v_{átl} = \frac{360\text{ km}}{60\text{ s}} = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

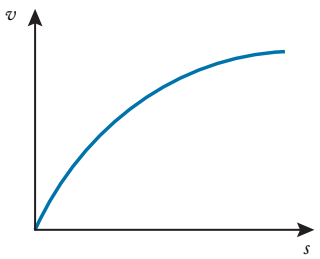
Az elért maximális sebessége a gyorsítási szakasz végén ennek kétszerese, azaz $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 43{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lesz.

## Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség-út függvénye

A mozgások jellemzőinek változását általában az idő függvényében vizsgáljuk. Néha azonban szükségünk van arra is, hogy a sebességet adjuk meg a megtett út függvényében. Ezt úgy vizsgálhatjuk, hogy a sebesség és az út képleteiből kiküszöböljük az időt. A $v = a \cdot t$ összefüggésből az időt kifejezve a $t = \frac{v}{a}$ képlethez jutunk. Ezt írjuk be a négyzetes úttörvénybe: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$.

**Az összefüggést a $v = \sqrt{2as}$ ismert alakban adjuk meg.**

A képletből következik, hogy egyenes vonalú gyorsuló mozgás $v$–$s$ grafikonja négyzetgyökfüggvény lesz:

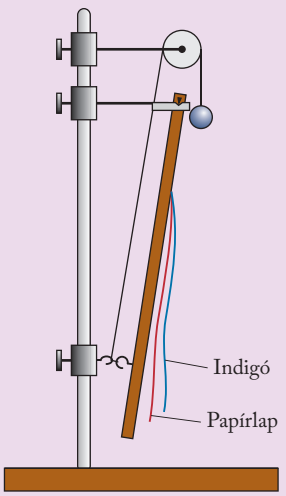



*Az egyenletesen gyorsuló mozgás v–s grafikonja*

## MÉRÉSI FELADAT

### A nehézségi gyorsulás meghatározása Whiting-féle ingával

A Whiting-féle inga egy kb. 1 m hosszú, 0,1 m széles deszkalap, amely felső vége körül lengőmozgást végez. Az inga segítségével egy szabadon eső golyó esési idejét és az útját határozhatjuk meg az $s = \frac{g}{2} t^2$ összefüggéssel.




*Whiting-féle deszkás inga*

Whiting-inga lengő deszkalapjának alsó részére papírlapot, a papírlap fölé pedig rajzszegek segítségével indigót erősítünk. A berendezést az ábra szerinti helyzetbe hozva előkészítjük a mérésre.

**A mérés menete**

**a) Az esési magasság mérése**

A cérnaszálat elégetjük, így az inga lengő része és a golyó ugyanabban a pillanatban kezdik meg mozgásukat. Az inga $\frac{1}{4}$ lengés után találkozik a szabadon eső golyóval, a golyó a papírlapon az ütközés helyén fekete nyomot hagy. Megmérjük a golyó kiindulási helye és az

indigónyom közötti távolságot. Ez lesz a golyó $\frac{1}{4}$ lengésidő alatt megtett útja.

**b) A golyó esési idejének meghatározása**

Az esési idő meghatározásakor az inga lengési idejét kell lemérni. A lengésidő 1 teljes lengés ideje ($T$), vagyis az az időtartam, amely alatt a szélső helyzetből induló inga visszatér a kiindulási helyzetébe. Az ingát egyik szélső helyzetéből elindítva lengésbe hozzuk, és lemérjük 10 lengés idejét. Mivel 10 lengés idejét mérjük, ezért az ebből számolt lengésidő relatív hibája kisebb lesz, mintha csak egy mérést végzünk. Ebből számítással kapjuk az $\frac{1}{4}$ lengés idejét.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

A Whiting-inga 10 lengést 14,40 s alatt végzett. A becsapódási nyom 66 cm-re volt a lengési ponttól.
**a)** Mennyinek adódott ez alapján a $g$ értéke?
**b)** Mennyi az eltérés az irodalmi értéktől?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$T = 14{,}40$ s, $s = 0{,}66$ m.

---

$a)\ g = ?,\ b)\ \frac{|g_{ir} - g_{mért}|}{g_{ir}} = ?$

**a)** Az inga lengésideje 1,44 s. A negyed lengés ideje $t = \frac{T}{4} = 0{,}36$ s. A $g$ nehézségi gyorsulás értéke:

$$g = \frac{2\text{ s}}{t^2} = \frac{2 \cdot 0{,}66\text{ m}}{0{,}1296\text{ s}^2} = 10{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

**b)** Az irodalmi értéktől való eltérése:

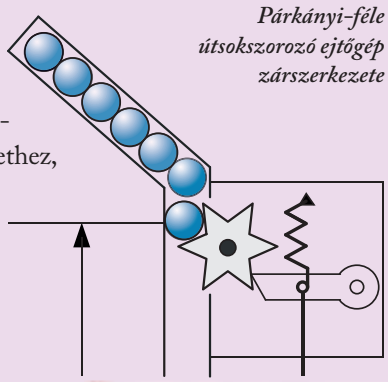
$$\frac{|g_{ir} - g_{mért}|}{g_{ir}} = \frac{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 10{,}19\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}038$$

Ez azt jelenti, hogy a mérés hibája az irodalmi értékhez képest 3,8%. Ez az egyszerű mechanikus eszközökkel nem tekinthető nagynak, és főként a távolságmérésből adódhat, mert nehéz pontosan beállítani a golyó indulási helyét.

## MÉRÉSI FELADAT

### A nehézségi gyorsulás mérése Párkányi-féle útsokszorozó ejtőgéppel

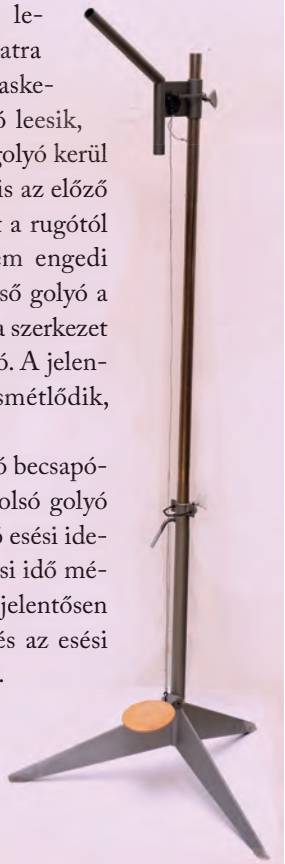
A Párkányi-féle készülék ferde csövébe 10 db golyót helyezünk. A függőleges cső nyílása alatt körülbelül 1-1,2 m-re csuklósan rögzített pedál kapcsolódik acéldróttal a fogaskerekes zárszerkezethez, amelynek vázlatát *(ld. az ábrán)* láthatjuk.



*Párkányi-féle útsokszorozó ejtőgép zárszerkezete*

Ha a pedált ütésszerűen lenyomjuk, a huzal egy pillanatra kioldja az ütközőt, s a két fogaskerékfog között levő első golyó leesik, miközben a sorban második golyó kerül a fogaskerék fogai közé, vagyis az előző golyó pozíciójába. Ez utóbbit a rugótól visszahúzott ütköző már nem engedi kiesni a csőből. Amikor az első golyó a pedálhoz csapódik, az ütéstől a szerkezet ismét kiold, és indul a 2. golyó. A jelenség ezután egészen addig ismétlődik, amíg az összes golyó leesik.

Ha az időmérést az 1. golyó becsapódásakor kezdjük, akkor az utolsó golyó becsapódásáig éppen 10 golyó esési idejét mértük meg. Tízszeres esési idő mérésével a mérés relatív hibája jelentősen lecsökkenthető. A magasság és az esési idő ismeretében $g$ számítható.



*Párkányi-féle útsokszorozó ejtőgép*

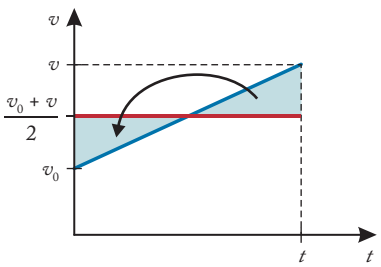
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mik az egyenes vonuló gyorsuló mozgás összefüggései, hogy néznek ki a mozgás grafikonjai?
2. Egy szabadesés magasságát megkétszerezzük. Hogyan változik az esés ideje és a becsapódás sebessége?
3. Válaszoljunk fejben a következő kérdésre! Egy szabadon eső test esésének első másodpercében kb. 5 m utat tesz meg. Mekkora utat tesz meg a 3. másodpercben?
4. A Whiting-ingás $g$-mérést kétszer végezzük el. Először az inga 10°-os, majd 20°-os szöget zár be a függőlegessel. Melyik esetben lesz messzebb a golyó indigónyoma a felfüggesztéstől?

# 3. Nem nulla kezdősebességű mozgások

## A $v_0$ kezdősebességű mozgás leírása az átlagsebességgel

A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgást úgy tekinthetjük, mintha $v_{átl} = \frac{v_0 + v}{2}$ átlagsebességgel egyenletesen haladna a mozgó test. Látható az ábrán, hogy az egyenletesen változó mozgás sebesség-idő grafikon alatti területe átdarabolás után megegyezik a $\frac{v_0 + v}{2}$ átlagsebességű egyenletes mozgás grafikonja alatti területtel. Így az egyenletesen gyorsuló mozgást visszavezettük egy állandó sebességű mozgásra.



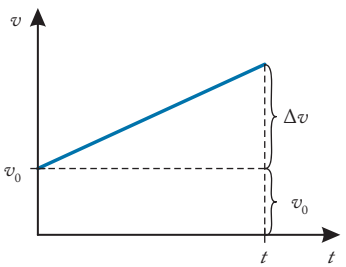

*A gyorsuló mozgás és az egyenletes mozgás kapcsolata*

Így a megtett út kiszámítása: $s = \frac{v_0 + v}{2} t$.

## A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás

A testek mozgását figyelve gyakran tapasztaljuk, hogy a mozgás vizsgálatának kezdetén a test már rendelkezik valamekkora $v_0$ sebességgel.

Írjuk fel az alábbi grafikon felhasználásával mozgás folyamán a $v$ pillanatnyi sebesség időfüggését!



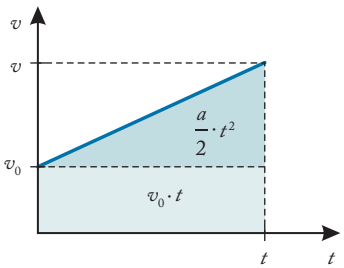

*A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás grafikonja*

**Ha a mozgás során a kezdősebesség nem nulla ($v_0 \neq 0$), akkor a $\Delta v$ sebességváltozása hozzáadódik a $v_0$ kezdősebességhez.**

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + a \cdot t$$

Ezzel megkaptuk a $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás $v$ pillanatnyi sebességére vonatkozó összefüggést.

Írjuk fel az alábbi $v$-$t$ grafikon felhasználásával a mozgás során megtett út és az út megtételéhez szükséges idő között fennálló összefüggést!




*A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség–idő grafikonja*

**A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás grafikonja felbontható egy $v_0$ kezdősebességű egyenletes mozgásra és egy egyenletesen gyorsuló mozgásra. Így a grafikon alatti terület két részre osztható, és a megtett út a kétféle mozgás összegeként fogható fel:**

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

## A $v_0$ kezdősebességű egyenletesen lassuló mozgás

Az egyenletesen lassulva mozgó test sebessége egyenletesen csökken. A sebesség egyenletes csökkenése azért jön létre, mert a test a mozgás irányával ellentétes irányban gyorsul.

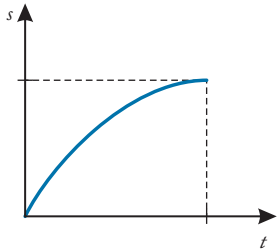
**Ha a $v_0$ kezdősebesség irányát pozitívnak választjuk, akkor a gyorsulás iránya negatív lesz. Az összefüggések:**

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$$

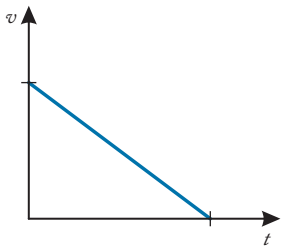
$$v = v_0 - a \cdot t$$

A fenti összefüggésekben a gyorsulás előjelét már figyelembe vettük, ezért ebben az esetben a mozgásegyenletekbe behelyettesítéskor csak a gyorsulás abszolút értékét kell beírnunk.

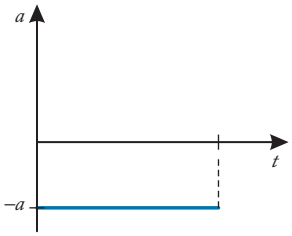
A mozgás grafikonjai:




*Az egyenletesen lassuló mozgás út–idő grafikonja*




*A sebesség egyenletesen csökken a mozgás folyamán*




*A lassuló mozgás negatív előjelű gyorsulást eredményez*

Az eddig tanult összefüggéseket az alábbi táblázat foglalja össze.

| Egyenletes mozgás | Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás | |
|---|---|---|
| | $v_0 = 0$ | $v_0 \neq 0$ |
| $s = v \cdot t$ | $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ | $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ |
| $v$ = állandó | $v = a \cdot t$ | $v = v_0 + a \cdot t$ |
| $a = 0$ | $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ = állandó | |

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Az M7-es autópályán a péntek délutáni csúcsforgalomban haladunk a Balaton felé. Pontosan 14:00-kor járunk a 80 km-es táblánál Polgárdi közelében. 14:10-ig csak araszolgatunk, egyenletesnek tekinthető sebességgel. Aztán szerencsére nekilendül a forgalom ritmusa, és 14:12-ig sikerül állandó gyorsulással megötszörözni a sebességünket. Az elért sebességgel pedig elég sokáig tudunk egyenletesen haladni. Így 14:22-re már a 105 km-es táblánál a siófoki lehajtóhoz érünk.

**a)** Mekkora sebességgel araszolgattunk Polgárdinál?

**b)** Mekkora gyorsulással sikerült megötszörözni a sebességünket?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$t_1 = 10$ perc $= 600$ s,

$t_2 = 2$ perc $= 120$ s,

$t_3 = 10$ perc $= 600$ s,

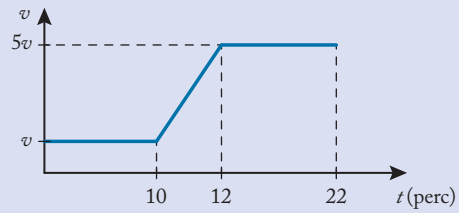
$s = 25$ km $= 25\,000$ m.

---

*a)* $v = ?$

*b)* $a = ?$

**a)** Készítsük el a mozgás sebesség-idő grafikonját!




A mozgás három szakaszból áll. A kezdő és a végső szakasz egy egyenletes mozgás, a középső szakasz egy nem nulla kezdősebességű gyorsuló mozgás.

Ha a három szakasz útját összeadjuk, akkor megkapjuk a Polgárdi és Siófok közti 25 km-es utat.

Ezeket az utakat célszerű a grafikon alatti terület nagyságával számolnunk.

A 2. szakaszt egy trapéz alapján az $s = \frac{v_0 + v}{2} t$ képlettel tudjuk kiszámítani.

$$s = v \cdot t_1 + \frac{v + 5v}{2} \cdot t_2 + v \cdot t_3$$

Behelyettesítve:

$$25\,000 = v \cdot 600 + \frac{v + 5v}{2} \cdot 120 + 5v \cdot 600$$

$$v = 6{,}31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az autó sebessége a csúcsforgalomban $v = 6{,}31 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22{,}73 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

**b)** A sebesség a gyorsítási szakaszban ötszörösére nőtt, ezért a $\Delta v = 5v - v$. A sebességváltozás ideje $\Delta t = 120$ s. A gépkocsi gyorsulása:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 6{,}31 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{120 \text{ s}} = 0{,}21 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A második szakaszon $0{,}21 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással ötszöröztük meg a sebességünket.

## A sebesség és az út összefüggései kezdősebességgel rendelkező mozgásnál

Az előző fejezetben láttuk, hogy gyorsuló mozgásnál a sebesség és az út közt fennáll a $v = \sqrt{2as}$ összefüggés. Ennek is meg tudjuk alkotni a kezdősebességgel kifejezett általánosabb összefüggését, ha az $s = v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ és a $v = v_0 + at$ összefüggésekből kiejtjük az időt. Ehhez az utóbbi egyenletből fejezzük ki $t$-t: $t = \frac{v - v_0}{a}$

Ezt írjuk be az út összefüggésébe!

$$s = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

Egyszerűsítés, majd $2a$-val történő beszorzás után a következő egyenlethez jutunk:

$$2as = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2$$

A négyzetre emelés és rendezés után a $2as = v^2 - v_0^2$ egyenlethez jutunk. Ezt hagyományosabb alakban a

$$\boldsymbol{v = \sqrt{v_0^2 + 2as}}$$

formában szokták megadni.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Lakóövezetben, két egymás mellett $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó személygépkocsi vezetője meglát egy az úttesten keresztben guruló labdát. Mindketten egyszerre, azonos lassulással elkezdenek fékezni. A lassabb autó nagyobb távolságban megáll a guruló labda pályája előtt.

**a)** Számítsuk ki, hogy mekkora sebességgel halad a gyorsabb autó akkor, amikor a lassabb éppen megállt!

**b)** Rajzoljuk fel egy közös koordináta-rendszerben mindkét mozgás $v$–$s$ grafikonját, ha feltételezzük, hogy a gépkocsik lassulása $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$! A lassabb gépkocsi megállásakor mekkora sebességgel halad a gyorsabb gépkocsi?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$v_1 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 8{,}33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $u = ?$

*b)* $v$–$s$ grafikonok

**a)** Jelölje $s$ a külső sávban haladó autó fékútjának hosszát. Ennek a végsebessége 0 lesz, a kezdősebessége $v_1$. Alkalmazzuk rá a $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ összefüggést, és vegyük figyelembe, hogy most lassul, tehát a gyorsulásának az előjele negatív, vagyis $0 = \sqrt{v_1^2 - 2as}$.

Ebből következik, hogy $v_1^2 = 2as$.

Írjuk fel most az összefüggést a nagyobb sebességű autóra is. Az autó fékútjának végén legyen a sebessége $u$.

$$u = \sqrt{v_2^2 - 2as}$$

Figyelembe véve a $v_1^2 = 2as$ kapcsolatot is, azt kapjuk, hogy

$$u = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{\left(50 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 - \left(30 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

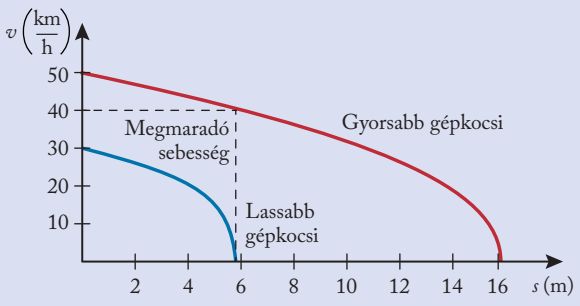
Azt a némileg meglepő eredményt kaptuk, hogy a gyorsabb autó megmaradó sebessége $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ lett, mindösszesze $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel csökkent a sebessége, mialatt a lassabb autó megállt.

*Megjegyzés:* Ha a vezető reakcióidejét is figyelembe vesszük, akkor a számított sebességnél nagyobb sebességgel halad a *gyorsabb* autó ott, ahol a lassabb már megállt.

**b)** Határozzuk meg a két gépkocsi fékútját a $v = \sqrt{2as}$ összefüggés alapján!

Az $s = \frac{v^2}{2a}$ összefüggésbe behelyettesítéssel $s_1 = 5{,}8$ m, míg $s_2 = 16{,}1$ m.

Vegyük fel közös $v$-s koordinátarendszerben a két mozgás grafikonját, és határozzuk meg a gyorsabb gépkocsi sebességét akkor, amikor a lassabb éppen megállt!




*Lassuló gépkocsik sebessége az út függvényében*

Látható, hogy a keresett sebesség kb. $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A négyzetgyökfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy egy $v_0$ kezdősebességű autó a fékezéskor a sebes-

ségének nagy részét a fékút 2. felében veszti el. A fékút felénél még az eredeti sebesség több mint 70%-ával rendelkezik a gépjármű.

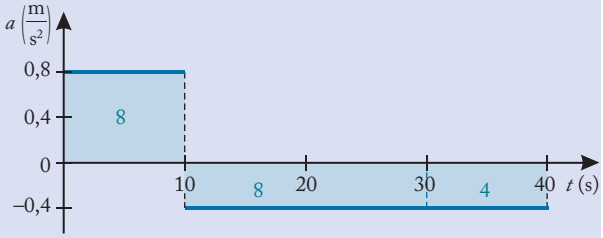
**2. FELADAT** Egy álló helyzetből induló rali-versenyautó 10 s-ig állandó 0,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással gyorsít, majd a következő 30 másodpercben egy lejtőn haladva –0,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gyorsulása. Rajzoljuk fel a mozgás gyorsulás-, sebesség- és elmozdulás-idő grafikonjait!

## MEGOLDÁS

Adatok:

$a_1 = 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t_1 = 10$ s, $a_2 = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t_2 = 30$ s.

*a–t*, *v–t* és *s–t* grafikonok?



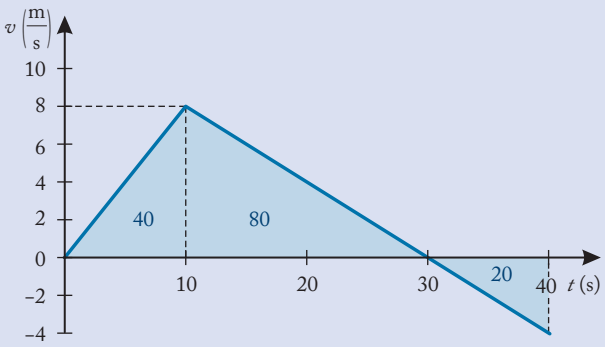

*A mozgás gyorsulás–idő grafikonja*

A grafikon alapján észrevehető, hogy a **gyorsulás-idő koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület egyenlő a sebességváltozás előjeles nagyságával.**

A sebességek a mozgás egyes szakaszai végén:

$$v_1 = a_1 \cdot t_1 = 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{s} = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = v_1 + a_2 \cdot t_2 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 30\ \text{s} = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$




*A személygépkocsi sebessége az idő függvényében*

**A sebesség-idő koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület a megtett út mérőszámával egyenlő.**

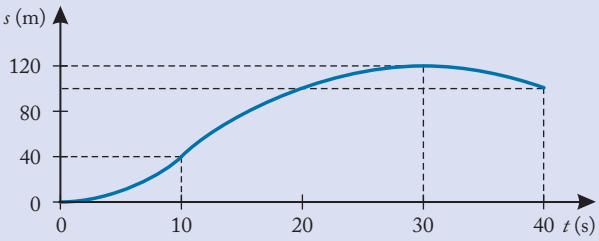
A gépkocsi a 30 s elteltekor megállt, majd ugyanazzal a gyorsulással visszafelé haladt.

Az egyes szakaszokon az elmozdulások:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t^2 = \frac{0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot 100\ \text{s}^2 = 40\ \text{m}$$

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 - \frac{a_2}{2} \cdot t_2^2 = 160\ \text{m} - 80\ \text{m} = 80\ \text{m}$$

$$s_3 = v_2 \cdot t_3 - \frac{a_2}{2} \cdot t_3^2 = 0\ \text{m} - \frac{0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (10\ \text{s})^2 = -20\ \text{m}$$




*A mozgás elmozdulás–idő grafikonja*

*Megjegyzés*:

1. A $t = 10$ s-nál és 30 s-nál a két grafikon találkozásakor a grafikon menetében nincs törés.
2. Az egyenes vonalú mozgásoknál a test által megtett út egyenlő a sebesség-idő grafikon alatti területek nagyságának összegével. Az elmozdulás pedig egyenlő a sebesség-idő grafikon alatti területek előjeles összegével.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Melyek a nem nulla kezdősebességű gyorsuló mozgások legfontosabb kinematikai összefüggései, grafikonjai?
2. Milyen lesz a nem nulla kezdősebességű gyorsuló mozgás út-idő grafikonja? Miben fog ez eltérni a kezdősebesség nélküli gyorsuló mozgás grafikonjától?
3. Írj példát olyan mozgásra, ami gyorsuló, de nem egyenletesen gyorsuló!
4. Az ejtőcsövek hatalmas vákuumtornyok, esetleg vákuumaknák. Bennük szabadesés közben vizsgálhatók a különböző jelenségek. A Brémai Egyetem Alkalmazott Űrtechnológiai és Mikrogravitációs Központjában van Európa legnagyobb ilyen létesítménye. A 110 m magas vákuumcsőben leejtve egy kapszula 4,7 s-ig zuhan a föld felé, majd légzsákokkal lefékezik. Milyen *g*-értékkel számoltak ennek az ismertetőnek az írásakor?
5. Egy, a 10. emeleten álló liftben pattog egy labda. Milyen lesz a labda mozgása a liftben, ha a lift hirtelen leszakad?

# 4. Függőleges hajítások

## Hajítás függőlegesen lefelé

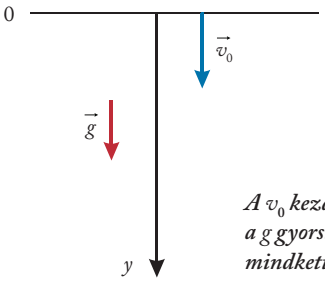
Hajításnak nevezzük az olyan mozgást, amelynél a Föld (vagy valamely más égitest) felszínének közelében leeső pontszerű testnek van kezdősebessége.

A mozgások leírásakor a **$v_0$ kezdősebesség irányát tekintjük pozitívnak**. A lefelé történő hajítás esetén az egyenletesen változó mozgásoknál tanult összefüggéseket használjuk fel, ahol $v_0 \neq 0$ és $a = g$, valamint a $v_0$ kezdősebesség és a $g$ nehézségi gyorsulás is lefelé, pozitív irányba mutat.

**A függőlegesen lefelé dobott test esetén a $v_0$ kezdősebesség és a $g$ is lefelé mutat, így mindkettő előjele pozitív. A mozgást leíró egyenletek:**

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v = v_0 + g \cdot t$$

Ez a hajítások legegyszerűbb esete, grafikonja is a nem nulla kezdősebességű egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség-idő és út-idő grafikonjaihoz lesz hasonló.



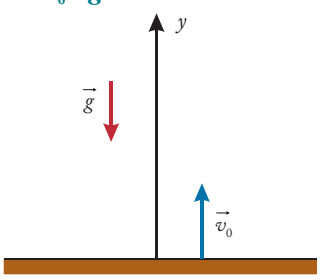

*A $v_0$ kezdősebesség és a $g$ gyorsulás egy irányba mutat, mindkettő pozitív irányú*

## Hajítás függőlegesen felfelé

**A függőlegesen felfelé dobott test esetén a $v_0$ kezdősebesség és a $g$ ellentétes irányba mutat. A pozitív irányba a $v_0$ kezdősebesség mutat, míg a $g$ nehézségi gyorsulás előjele negatív. A mozgást leíró egyenletek:**

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

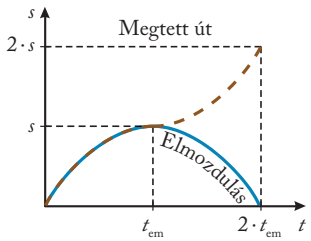
$$v = v_0 - g \cdot t$$



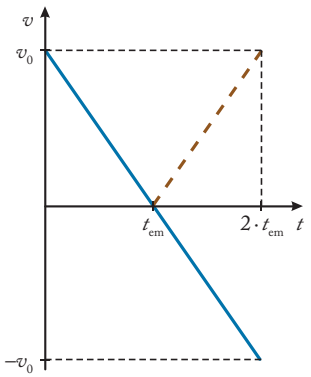

*A $v_0$ kezdősebesség pozitív irányú, míg a $g$ gyorsulás negatív irányba mutat*

A felfelé dobott test emelkedés közben egyre veszít a sebességéből: lefelé gyorsul, miközben felfelé halad. Eléri a maximális magasságot – a sebessége ekkor egy pillanatra nulla lesz –, majd továbbra is lefelé gyorsulva, sebességét egyre növelve a föld felé szabadon esik.

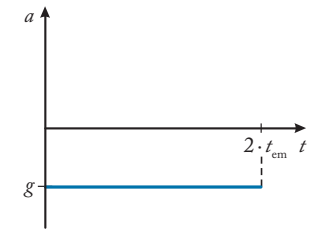
A mozgás grafikonjai:




*A mozgás egy egyenletesen lassuló és egy egyenletesen gyorsuló szakaszból áll*




*A függőlegesen felfelé dobott test ugyanakkora sebességgel ér vissza, mint amekkora sebességgel feldobtuk*




*A függőlegesen felfelé dobott test gyorsulása a mozgás során mindvégig állandó*

## A felfelé hajított test mozgásának néhány jellemzője

### Az emelkedés ideje

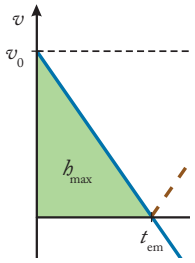
A felfelé hajított test gyorsulása végig a Föld középpontja felé irányul, és $g$ nagyságú. A test a függőlegesen felfelé irányuló mozgás folyamán egyre veszít sebességéből, a mozgás legfelső pontján a sebessége nulla ($v = 0$). Ezt felhasználva kiszámítható az **emelkedés $t_{em}$ időtartama**:

$$0 = v_0 - g \cdot t_{em}$$

Ebből az emelkedés ideje:

$$t_{em} = \frac{v_0}{g}$$

Az **emelkedés magassága** ($h_{max}$) a $v$-$t$ grafikon alapján számítható ki a legegyszerűbben:




*Az emelkedés maximális magassága (összes megtett út) a grafikon alapján kiszámítható*

A grafikon alatti háromszög területe:

$$h_{max} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_{em} = \frac{1}{2} v_0 \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Ha a test ugyanoda ér vissza, mint ahonnan felfelé hajították, akkor a mozgás szimmetrikus lesz, tehát a levegőben töltött idő:

$$t = t_{esés} + t_{em} = 2 \cdot t_{em} = 2 \frac{v_0}{g}$$

Ez azt jelenti, hogy *amennyi ideig emelkedik a test, ugyanannyi ideig süllyed (mindkét esetben a gyorsulásának nagysága ugyanakkora), így a levegőben töltött idő az emelkedési időtartam kétszerese.*

*A földet érés sebessége megegyezik a felfelé hajított test kezdősebességével, de iránya azzal ellentétes.*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kútba leejtett kavics esési ideje 1,60 s. Ugyanebbe a kútba egy másik követ függőlegesen lefelé hajítunk. Ekkor 1,25 s múlva halljuk a csobbanást. Mekkora kezdősebességgel hajítottuk le a követ a kútba? A feladat megoldásánál vegyük figyelembe, hogy a hang sebessége $c = 340 \frac{m}{s}$, $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$T_1 = 1{,}6$ s,

$T_2 = 1{,}25$ s,

$c = 340 \frac{m}{s}$,

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

---

$v_0 = ?$

Először számítsuk ki az első ejtési kísérletből, hogy milyen mély a kút. Zuhanjon a kő $t$ ideig, ekkor a hang $T_1 - t$ ideig jön vissza. Mindkét út egyenlő lesz, hiszen mindkettő a kút mélységét adja meg.

$$\frac{g}{2} t^2 = c(T_1 - t)$$

Ez másodfokú egyenletre vezet.

$$\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 - 340 \cdot (1{,}6 - t) = 0$$

Elvégezve a beszorzást és fokszám szerint rendezve a tagokat:

$$4{,}905\, t^2 + 340\, t - 544 = 0$$

Ennek pozitív megoldása: $t = 1{,}57$ s. Ezzel kiszámítható a kút mélysége a négyzetes úttörvényből:

$$h = \frac{g}{2} t^2 = 4{,}905 \cdot (1{,}57)^2 = 12{,}1 \text{ m}$$

Most jöjjön a feladat második része, a lefelé hajítás. Jelölje $\tau$ azt az időt, amíg a kő leér a kút mélyére. Ekkor a csobbanás hangja $T_2 - \tau$ idő alatt ér fel a kút mélyéről:

$$h = c(T_2 - \tau)$$

Ebből $\tau$ közvetlenül kifejezhető:

$$\tau = T_2 - \frac{h}{c} = 1{,}25 - \frac{12{,}1}{340} = 1{,}21 \text{ s}$$

Most már használhatjuk a $h = v_0 \cdot \tau + \frac{g}{2} \tau^2$ függőlegesen lefelé történő hajítás út-idő képletét!

Ebből a $v_0$ kifejezhető:

$$v_0 = \frac{h - \frac{g}{2} \tau^2}{\tau} = \frac{12{,}1 \text{ m} - 7{,}18 \text{ m}}{1{,}21 \text{ m}} = 4{,}07 \frac{m}{s}$$

A függőlegesen lefelé hajított követ $4{,}07 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel hajítottuk el.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Melyek a függőleges lefelé hajítás kinematikai összefüggései, grafikonjai?
2. Melyek a függőleges felfelé hajítás kinematikai összefüggései, grafikonjai?
3. Egy követ feldobunk. 4 másodperc múlva visszaér az eldobás helyére. Következtessük ki képletek és számítás nélkül, hogy mekkora volt a kezdősebessége és az emelkedés maximuma! $g = 10 \frac{m}{s^2}$.
4. Milyen lesz egy felfelé indított függőleges hajítás út-idő grafikonja? Miben fog ez eltérni a lefelé indított függőleges hajítás grafikonjától?

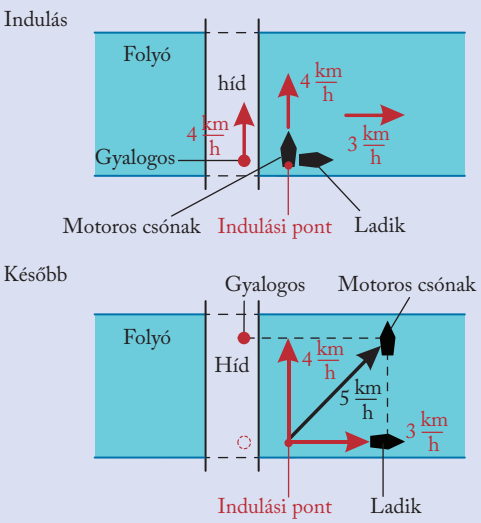
# 5. Vízszintes hajítás

## Mozgások szuperpozíciójának elve

Nézzük meg az alábbi feladatot!

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

Egy híd lábánál egy motorcsónak és egy ladik áll, mindkettőben egy-egy megfigyelővel. Állítsuk be a csónak végén lévő motort úgy, hogy a motorcsónak a partra merőlegesen induljon el a túlsó part felé $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A motort végig ebben a helyzetben rögzítjük. A motorcsónak indulásakor a hídon is elindul egy gyalogos a túlsó part felé, szintén $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Ugyancsak ebben a pillanatban a ladikot is eloldják, és azt a folyó sodorja lefelé $3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. (A folyó sebessége mindenhol $3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ legyen, bár valójában a part közelében kisebb a folyók sebessége.) A motorcsónakot a folyó a folyásirányban elsodorja.




Vizsgáljuk meg a gyalogos és a ladikban lévő megfigyelő szempontjából, milyennek látjuk a motorcsónak mozgását!

### MEGOLDÁS

A hídon haladó megfigyelő oldalra pillantva azt látja, hogy a motorcsónak végig vele egy vonalban halad, azaz a parttól mért távolságuk azonos. A ladikban lévő megfigyelő is azt látja oldalra pillantva, hogy a motorcsónak vele végig egy vonalban van, azaz azonos távolságban vannak mindketten a hídtól. Eközben a motorcsónakban lévő megfigyelő azt látja, hogy mind a hídtól, mind a parttól távolodik.

A hídtól és a parttól való távolodás egymástól függetlenül valósul meg, vagyis a két mozgás nem befolyásolja egymást. Ez azt jelenti, hogy **a motorcsónak mozgása két egymástól független egyenes vonalú egyenletes mozgás „összetételéből", idegen szóval szuperpozíciójából tevődik össze.**

A motorcsónak haladási irányát a két sebességvektor eredője adja meg.

Legyen $v_f$ a folyó sodrásának sebessége, $v_{cs}$ a motorcsónak vízhez képesti sebessége. A parthoz képest a motorcsónak sebessége legyen $v$, amelyre fennáll a

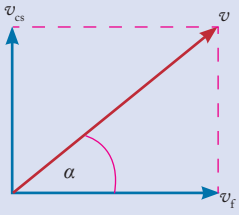
$$\vec{v}_{cs} + \vec{v}_f = \vec{v}$$

egyenlőség.

A csónak sebességének a nagyságát Pitagorasz-tétellel határozhatjuk meg:

$$v = \sqrt{v_{cs}^2 + v_f^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A csónak sebessége $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

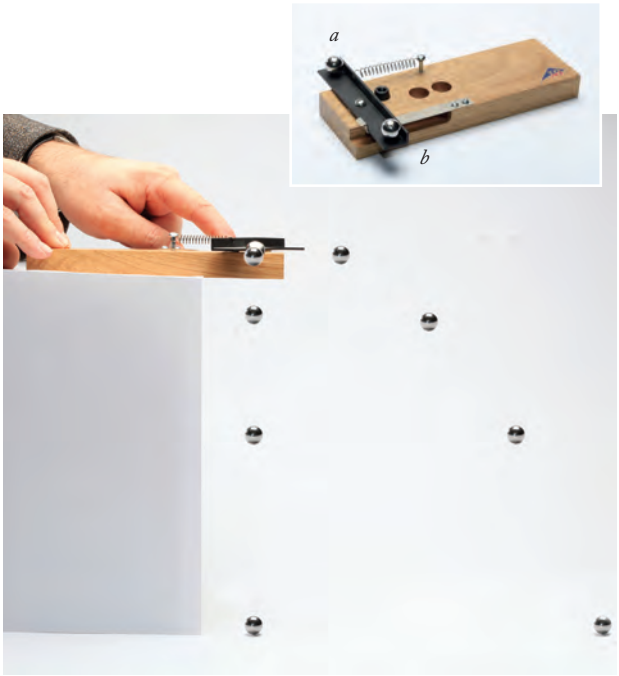



*A csónak sebessége ($v$) a folyó sodrására merőleges evezés esetén*

## Vízszintes hajítás

Vízszintes hajításnál a test $v_0$ kezdősebessége vízszintes. A mozgást kísérletileg egy olyan eszközzel vizsgálhatjuk, amely *az egyik golyó vízszintes irányú $v_0$ sebességgel történő ellökésének pillanatában egyidejűleg ugyanabból a $h$ magasságból leejt egy másik golyót, amely szabadeséssel esik.*

Egy ilyen szerkezetet mutat a fenti kép. Ennél a fényes kar lenyomásakor a megfeszített rugó az $a$-val jelzett golyó




*A kísérlet négy egymást követő fázisa egyetlen képen ábrázolva*

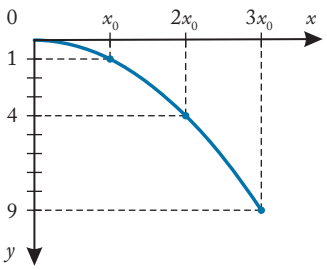
alól kirántja a tartólemezt, amelyik szabadesésbe kezd, miközben a *b*-vel jelölt golyónak vízszintes irányú kezdősebességet ad.

A kísérlet tanúsága szerint a vízszintesen elhajított golyó ugyanakkor ér a talajra, mint a szabadon eső golyó. A mozgás folyamán a két test talajtól való távolsága megegyezik, ezért a függőleges irányban a vízszintes hajítást végző golyó is szabadon esett. A kísérlet alapján a következőket tapasztaljuk.

**A vízszintesen elhajított test mozgása összetehető**
**– egy vízszintes irányú, $v_0$ kezdősebességű egyenes vonalú egyenletes mozgásból és**
**– egy függőleges irányú szabadesésből.**
**Ha az elhajítás pillanatában a testnek $v_0$ vízszintes irányú kezdősebessége van, akkor a vízszintes hajítást leíró egyenletek:**

$$x = v_0 \cdot t,$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$




*A vízszintes hajítás grafikonja félparabolaív*

A vízszintes hajítás tehát egy vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgás és egy függőleges szabadesés szuperpozíciója.

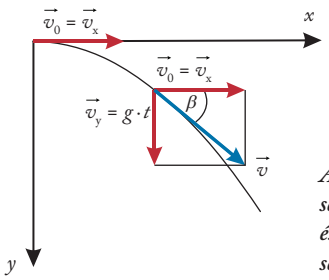
## A vízszintes hajítás néhány jellemzője

### A mozgás pillanatnyi sebessége, elmozdulása

A mozgás **pillanatnyi sebessége** a vízszintes irányú egyenletes mozgás $v_x$ sebességéből és a szabadesés sebességéből tevődik össze. A pillanatnyi sebesség vektormennyiség, így az eredő sebesség a két sebesség vektori összege.

Az eredő nagysága: $v = \sqrt{v_0^2 + (g \cdot t)^2}$, az eredő sebesség irányát a két sebesség-összetevő iránya és nagysága határozza meg.

A vízszintes hajítás pályája félparabolaív.




*A vízszintes hajítás sebessége a vízszintes és függőleges irányú sebességek eredője*

A pillanatnyi sebesség iránya a szögfüggvények ismeretében meghatározható.

A $t$ időpillanatban a test sebességének az iránya a következőképpen számítható ki:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot t}{v_0}$$

A mozgások folyamán a test helyét a vízszintes és függőleges irányú elmozdulások vektori összegéből határozzuk meg. A hajítás kezdőpontjától mért távolság $\Delta r = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$, ahol az $s_x = v_0 \cdot t$, $s_y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, azaz

$$\Delta r = \sqrt{(v_0 \cdot t)^2 + \left(\frac{1}{2} g \cdot t^2\right)^2}$$

### A mozgás pályája

A **mozgás pályájának** meghatározásánál elsőként az $x = v_x \cdot t$ összefüggésből fejezzük ki a mozgás idejét:

$$t = \frac{x}{v_0},$$

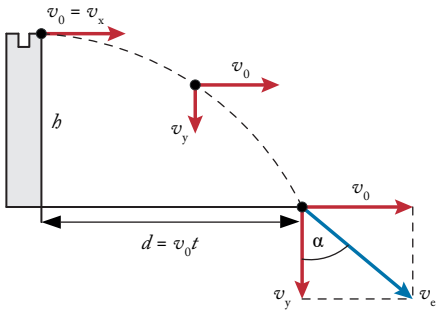
majd az $y = \frac{g}{2} \cdot t^2$ összefüggésbe beírva:

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2 v_0^2} x^2 = C \cdot x^2$$

Ez egy parabola egyenlete. Ezzel igazoltuk, hogy *a **vízszintes hajításnál a mozgás pályája parabola.***

## A hajítás távolsága

A **hajítás távolsága** az a $d$ távolság, amelyet a vízszintes talaj feletti pontból induló test vízszintesen megtesz a talajra érkezésig, tehát ez alatt az elmozdulásának csak a vízszintes összetevőjét értjük. Határozzuk meg ezt a $d$ távolságot!




*A hajítás távolsága a $v_0$ kezdősebességtől és a $h$ magasságtól függ*

A $d$ a vízszintes irányú elmozdulásból adódik, tehát $d = v_0 \cdot t$. A test a mozgás $t$ ideje alatt függőleges irányban $h$ magasságú szabadesést végez, azaz $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$.

A két egyenlet összevetéséből a **hajítás vízszintes irányú távolsága:**

$$d = v_0 \cdot t = v_0 \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy ezt a parabola egyenleténél kapott $y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2$ egyenletből is megkaphatjuk az $y = h$ és $x = d$ helyettesítéssel.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsuk ki egy $h = 20$ m magasságú toronyból vízszintes irányban elhajított $v_x = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű test mozgásának néhány jellemzőjét!

**a)** Milyen messze csapódik be a kő a torony lábától?
**b)** Mekkora a kő elmozdulásának nagysága?
**c)** Mekkora a becsapódó kő sebessége?
**d)** Mekkora lesz a kő becsapódási szöge?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 20$ m

$v_x = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

---

*a)* $d = ?$
*b)* $r = ?$
*c)* $v = ?$
*d)* $\alpha = ?$

**a)** A hajítás vízszintes irányú távolsága:

$$d = v_x \cdot t = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 20 \text{ m}$$

A kő a torony lábától 20 m távolságban csapódik be.

**b)** A kő $r$ elmozdulásának nagysága a Pitagorasz-tételből számítható:

$$r = \sqrt{d^2 + h^2} = \sqrt{(20 \text{ m})^2 + (20 \text{ m})^2} = 28{,}28 \text{ m}$$

A kő elmozdulása 28,28 m.

**c)** A kő $v_e$ becsapódási sebességének nagysága szintén a Pitagorasz-tételből adható meg:

$$v_e = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + (g \cdot t)^2} = \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} =$$

$$= 22{,}36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A becsapódó kő sebessége $22{,}36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

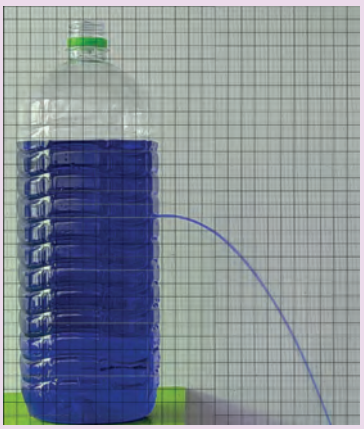
**d)** A hajítás távolsága alfejezetnél lévő ábra alapján legyen $\alpha$ a sebességvektor függőlegessel bezárt szöge. Így:

$$\cos \alpha = \frac{v_y}{v_e} = \frac{20}{22{,}36} = 0{,}894,$$

amelyből $\alpha = 26{,}26^\circ$.
A sebességvektor a függőlegessel bezárt szöge 26,26°. Bármelyik másik szögfüggvénnyel is ugyanezt az eredményt kaptuk volna.

## MÉRÉSI FELADAT

### Palack oldalán kifolyó vízsugár vizsgálata



*Palack oldalán kifolyó színezett víz fényképe*

A mérés során egy palack oldalán kifolyó vízsugárról készült felvételek alapján kell méréseket és számításokat végeznünk. A mérés értékelése során igazoljuk, hogy a vízsugár által kirajzolt pályára teljesülnek a vízszintes hajítás törvényei!

Igazoljuk a következőket!

**a)** Igazoljuk, hogy a vízsugár alakja parabola!

**b)** A fotón mért távolságok adatainak ismeretében határozzuk meg a lyukon kiömlő víz sebességének nagyságát!

**A mérés menete**

**a)** A parabolaalakot az $y \sim x^2$ arányosság alapján tudjuk könnyen igazolni.

A kép alapján a kiömlőnyílásnál felvettünk egy $x$ tengelyt. Az $y$ értékeket ettől az $x$ tengelytől mért távolságként határozzuk meg.

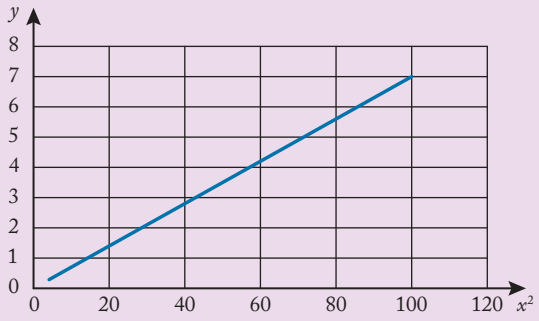
Foglaljuk táblázatba a kép alapján lemért adatokat! A mérést a kiömlőnyílástól viszonylag távol kezdjük, ahol a folyadéksugár eltérülése már jól mérhető. Vegyük figyelembe azt is, hogy a kép illesztése nem tökéletes, és a palack is kissé elfordult.

| $x$ (cm) | $y$ (cm) | $x^2$ (cm$^2$) | $\frac{x^2}{y}$ (cm) |
|---|---|---|---|
| 7 | 4,2 | 49 | 11,6 |
| 8 | 5,8 | 64 | 11,0 |
| 9 | 7,4 | 81 | 10,9 |
| 10 | 9,2 | 100 | 10,9 |
| 11 | 11,5 | 121 | 10,5 |
| 12 | 13,8 | 144 | 10,4 |

*A palackból kiömlő színezett víz vízszintes ($x$) és függőleges ($y$) távolságadatai*

A táblázat utolsó oszlopában az $\frac{x^2}{y}$ hányados értékét tüntettük fel. Mivel ez a hányados jó közelítéssel állandó, ezért az $y \sim x^2$ arányosságot igazoltnak tekinthetjük.

Ha az $\frac{x^2}{y}$ hányados állandó értékének bizonyítása miatt ábrázoljuk $x^2$ függvényében az $y$ értékeket, akkor egyenest kapunk, ami az egyenes arányosság bizonyítéka.




**b)** Elsőként a $t$ esési idő meghatározását végezzük el, ez a négyzetes úttörvényből történhet. Célszerű a legnagyobb távolságadatokat venni.

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}138\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}17\ \text{s}$$

Ezt követően határozhatjuk meg a hajítási sebességet. A vízszintesen mért hajítás távolsága $x = v_0 \cdot t$, amiből

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{0{,}12\ \text{m}}{0{,}17\ \text{s}} = 0{,}71\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit mond ki a szuperpozíció elve?
2. Mik a vízszintes hajítás legfőbb törvényszerűségei?
3. Egy torony közepéből és a torony tetejéről is elhajítunk ugyanakkora vízszintes kezdősebességgel egy testet. Hogy aránylik egymáshoz a két vízszintesen mért hajítási távolság?
4. Egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonaton egy utas leejti a kulcscsomóját. Milyen lesz a leeső kulcscsomó pályája a sínek mellett álló bakter vonatkoztatási rendszeréhez képest? Milyennek látja a kulcscsomó pályáját a kalauz, aki egyenes vonalú egyenletes mozgást végezve elhalad az utas mellett?
5. Egy vízszintes hajítás végén egy test 45°-os szögben csapódik be. Lehetséges-e, hogy a hajítás magassága pontosan akkora, mint a hajítás távolsága?

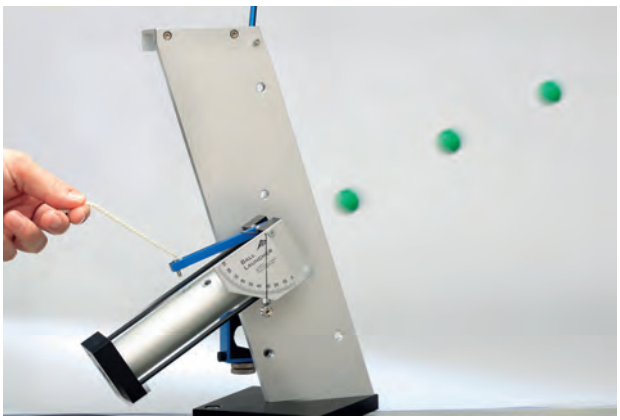
# 6. Ferde hajítás
## KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

**Ferde hajításnak nevezzük azt a mozgást, amikor a hajítás iránya a vízszintessel 0° és 90° közti szöget zár be.**

**A ferde hajítás két mozgás szuperpozíciójának tekinthető:**

- **a test vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez,**
- **függőleges összetevője pedig egy függőleges hajítás.**

**A ferde hajítás pályája parabola.**



*A ferde hajítás vizsgálatára alkalmas kísérleti eszköz*

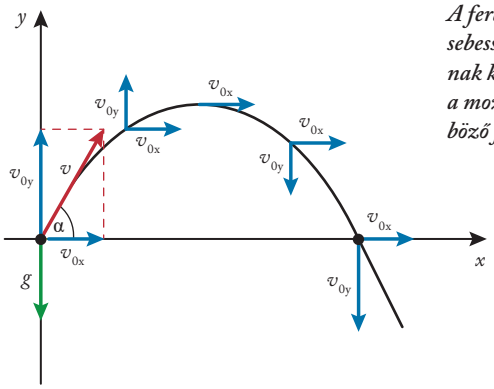
## A ferde hajítás mozgásegyenletei

Mivel a függőleges felfelé és függőleges lefelé hajítás matematikai leírása hasonló, ezért csak a felfelé hajítással, az $0° < \alpha < 90°$ esettel foglalkozunk.

A mozgást a vízszintes hajításnál már megismert koordináta-rendszerben vizsgáljuk.

A $v_0$ kezdősebességnek az $x$ tengellyel bezárt szögét a továbbiakban $\alpha$ jelöli. **A $v_0$ kezdősebesség vízszintes és függőleges irányú összetevője:**

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha, \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$




*A ferde hajítás sebességvektorainak komponensei a mozgás különböző fázisaiban*

**A ferde hajítás során a pillanatnyi sebességre felírható egyenletek:**

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha, \qquad (1)$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \qquad (2)$$

A ferde hajítás vízszintes összetevője egyenes vonalú egyenletes mozgás, ezért a test $x$ irányú sebessége $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ állandó.

**A ferde hajítás mozgásegyenletei:**

$$s_x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t,$$

$$s_y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

## A vízszintes hajítás néhány jellemzője

### A felfelé ferde hajítás ideje

A test mozgásának első felében emelkedik, eléri legmagasabb pontját, amikor a függőleges irányú sebessége nullává válik. Alkalmazzuk a (2) egyenletet! A legfelső pontban a függőleges irányú sebesség $v_y = 0$ lesz:

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$$

Ebből megkapjuk, hogy a $t_e$ emelkedés időtartama:

$$t_e = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

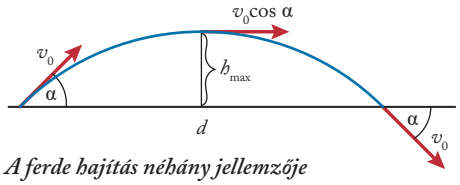
A pálya szimmetrikus parabola, tehát az emelkedés időtartama ugyanannyi lesz, mint a süllyedés időtartama. Így **a ferde hajítás $t_h$ időtartama a $t_e$ emelkedés és süllyedés időtartamának az összege lesz**:

$$t_h = 2 \cdot t_e = \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

### A ferde hajítás legnagyobb emelkedése

A függőleges hajításnál láttuk, hogy annak a maximális magassága:

$$h_{max} = \frac{v_{0y}}{2g}$$




*A ferde hajítás néhány jellemzője*

Mivel a ferde hajítás függőleges összetevője egy $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$, ezért a fenti képletbe a $v_{0y}$-t kell behelyettesíteni. Így **a hajítás magassága**:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

## A ferde hajítás távolsága

A ferde hajítás távolsága is egyszerűen meghatározható, hiszen vízszintes irányban $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ sebességű egyenletes mozgást végez $t_h$ ideig:

$$d = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

A trigonometriai $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ összefüggést felhasználva, a **hajítás távolsága:**

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Adott $v_0$ és $g$ esetén a hajítás távolsága az $\alpha$ szögtől függ ($0° < \alpha < 90°$). A távolság akkor lesz a legnagyobb, ha a képletben a szinuszfüggvény a maximális értékét veszi fel, azaz $\sin 2\alpha = 1$.

Ekkor $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$.

**Tehát $\alpha = 45°$-os szögnél lesz a hajítási távolság maximális. Ekkor a hajítás távolsága:**

$$d_{45°} = \frac{v_0^2}{g}$$

*Megjegyzés:* Elvileg tehát 45°-os szögben kellene elhajítani a kislabdát, gerelyt vagy a kalapácsot az atlétáknak. Valójában az elhajítási szög ennél kisebb szokott lenni.

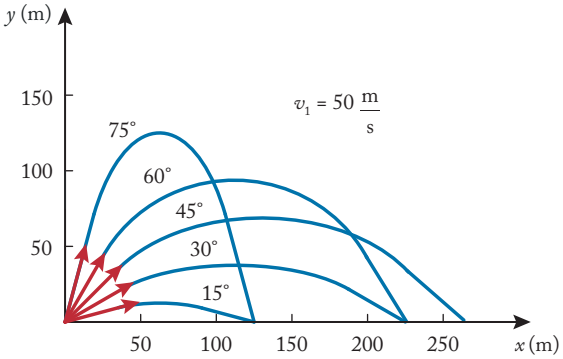


*A dobóatléták az ideálisnak tűnő 45°-os szög helyett valójában kisebb szögben hajítják el sporteszközeiket a maximális távolság eléréséhez*

A maximális távolságnál kisebb távolságok kétfajta hajítási szöggel is elérhetők. Mivel a 0° és 180° közt két olyan szög is van, amelyiknek a szinusza ugyanaz, ezért két összetartozó szögpárnál lehetséges ugyanakkora távolságra hajítás. Azonos lesz a hajítás távolsága például 15° és 75°, vagy 30° és 60° esetén.

A ferde hajítás távolságképletében ezeknek a szögeknek a duplája szerepel, és valóban:

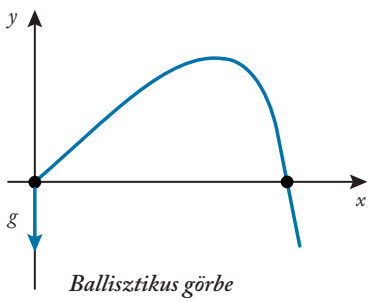
$\sin 30° = \sin 150° = 0{,}5$, és $\sin 60° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.




*A maximális távolságnál kisebb távolságok kétfajta hajítási szöggel is elérhetők*

## A ballisztikus görbe

A nyugvó levegő az elhajított testet mozgása során folyamatosan fékezi, ezért a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás valós értéke kisebb a fenti képletek alapján kiszámított értéknél (a közegellenállás elhanyagolása miatt). Ennek a következménye az is, hogy vízszintes vagy ferde hajításnál a pálya nem parabola, hanem **ballisztikus görbe**. A szél hatása ugyancsak jelentős, amely a széliránytól függően fékezheti, gyorsíthatja vagy oldalra is eltérítheti a testet.




*Ballisztikus görbe*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Usain Bolt, a 100 m-es síkfutás világcsúcstartója képes volt az akár 44 $\frac{km}{h}$ sebesség elérésére is.

**a)** Ha egy távolugró ekkora sebességgel rugaszkodna el az ideális 45°-os szögben, akkor milyen messzire repülne ideális esetben?

**b)** Mennyi ideig tartana a repülése?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$v = 44\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha = 45°$, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

*a)* $d_{45°} = ?$, *b)* $t_h = ?$

**a)** A ferde hajítás távolsága:

$$d_{45°} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{\left(12{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 14{,}9\ \text{m}$$

A távolugró ideális esetben maximálisan 14,9 m távolságra repülne.

**b)** A ferde hajítás időtartama:

$$t_h = \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 12{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}71}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}7\ \text{s}$$

A ferde hajítás időtartama 1,7 s.

*Megjegyzés:* Valójában a távolugrás világcsúcsa 8,95 m. A számított és valós adat közötti különbség okai:

- a távolugró világcsúcstartó, Mike Powell nem volt képes ekkora futási sebességet elérni,
- a távolugrás elrugaszkodása biomechanikailag jelentősen különbözik a futástól,
- a távolugró egyáltalán nem tekinthető pontszerűnek. Jelentős légellenállás hat rá, repülés közben bonyolult mozgássorozattal kell stabilizálnia helyzetét.

**2. FELADAT** Egy 20 m magas toronyból 60°-os szögben 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel elhajítunk egy követ.

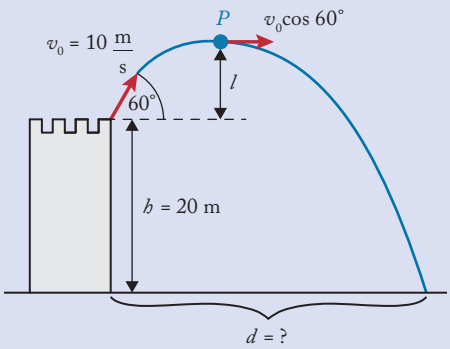
**a)** Milyen maximális magasságot ér el a kő a vízszintes talajhoz képest?
**b)** Mennyi ideig fog repülni?
**c)** Mekkora a lesz a hajítás távolsága?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 20$ m,
$\alpha = 60°$,
$v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

*a)* $H = ?$
*b)* $t = ?$
*c)* $d = ?$




**a)** Először számítsuk ki a kezdősebesség $x$ és $y$ irányú komponensét:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = \frac{v_0}{2} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 = 8{,}66\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jelölje $l$ a hajítás legmagasabb pontjának távolságát a 20 m magasan lévő alapszinthez képest.

A tetőponton $v_{0y}$ zérus lesz, alkalmazhatjuk tehát a $v_{0y} = \sqrt{2gl}$ képletet. Ebből $l$ kifejezhető:

$$l = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 3{,}75\ \text{m}$$

Így a kő a talajhoz képest $H = h + l = 23{,}75$ m magasan lesz a mozgás legfelső pontjában.

**b)** A ferde hajítást bontsuk két részre. Jelölje $t_1$ azt az időt, amíg a kő eléri legmagasabb pontját, $t_2$ azt az időt, amíg a legfelső pontból indulva becsapódik a talajba. A mozgás függőleges összetevője egy függőlegesen felfelé hajítás, ennek emelkedési ideje $t_1$:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = 0{,}87\ \text{s}$$

A $t_2$ pedig megkapható egy 23,75 m magasságból történő szabadeséssel:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{47{,}5\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2{,}18\ \text{s}$$

A repülés ideje így $t = t_1 + t_2 = 3{,}05$ s.

**c)** A hajítás távolsága pedig abból számítható ki, hogy a kő mozgásának vízszintes összetevője egy $v_{0x}$ sebességű egyenletes mozgás:

$$d = v_{0x} \cdot t = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}05\ \text{s} = 15{,}25\ \text{m}$$

A hajítás távolsága 15,25 m.

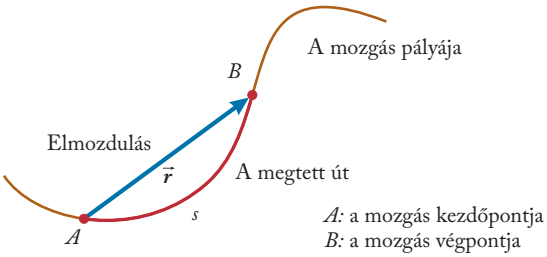
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen mozgások szuperpozíciójaként fogható fel a ferde hajítás?
2. Milyen tényezők határozzák meg, hogy mennyi lesz egy ferde hajítás távolsága?
3. A hajítás maximális távolsága esetén elért maximális magasság hányad része lesz a maximális távolságnak?
4. A ferde hajítás egy egyenes vonalú egyenletes mozgás és egy szabadesés szuperpozíciójaként is felfogható. Milyen irányú mozgások esetén teljesül ez a feltétel?

# Összefoglalás

## Alapfogalmak

**Pálya, megtett út, elmozdulás**




*A mozgás pályája, a megtett út és az elmozdulás*

Az **átlagsebesség** a mozgás során megtett összes út és a közben eltelt összes idő hányadosa.

$$v_{átl} = \frac{\Sigma s}{\Sigma t} = \frac{\textbf{összes megtett út}}{\textbf{összes eltelt idő}}$$

A **pillanatnyi sebesség** egy nagyon rövid időtartamhoz tartozó sebesség.

A test pillanatnyi sebessége egyenesen arányos az idővel, a gyorsulása állandó.

A mozgásra jellemző összefüggések**:**

$$v_p = a \cdot t, \quad s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{v_{max} \cdot t}{2}$$

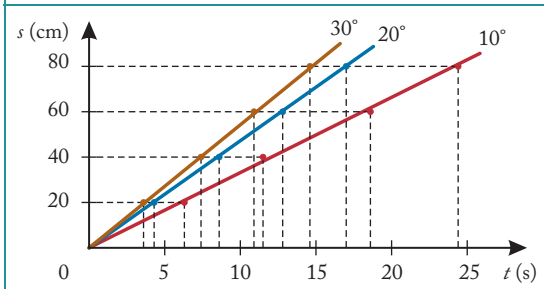
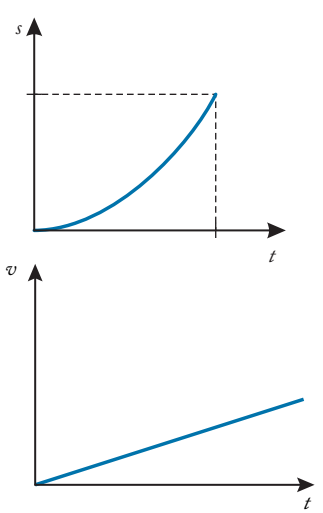
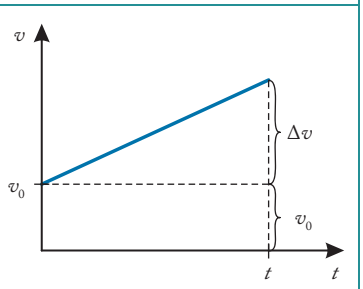
Az $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ összefüggést **négyzetes úttörvénynek** nevezzük.

A sebesség megváltozásának és a közben eltelt időtartamnak a hányadosát **gyorsulásnak** nevezzük. Jele: $a$.

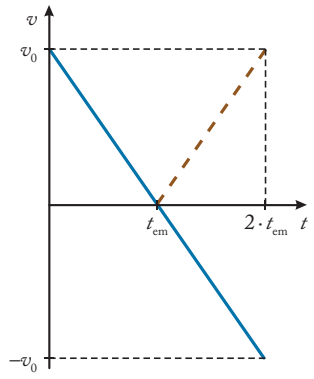
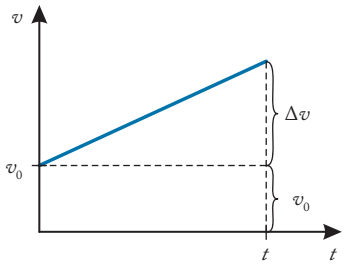
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_{vég} - v_{kezdeti}}{\text{sebességváltozás időtartama}}$$

A gyorsulás vektormennyiség, iránya a sebességváltozás irányával egyezik meg.

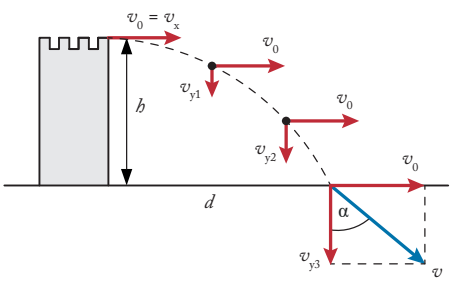
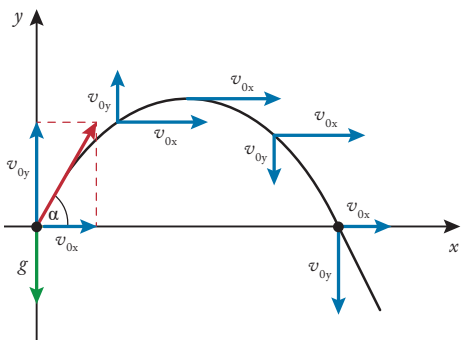
## Alapvető mozgások

| Egyenes vonalú egyenletes mozgás | Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás | |
|---|---|---|
| | $v_0 = 0$ | $v_0 \neq 0$ |
| $s = v \cdot t$ | $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ | $s = v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$ |
| $a$ = állandó | $v = a \cdot t$ | $v = v_0 + at, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ |
| $a = 0$ | $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ = állandó<br>$a > 0$: gyorsuló mozgás; $a < 0$: lassuló mozgás | |
|  |  |  |

## Függőleges hajítások

| Fizikai mennyiség | Függőleges hajítás | |
|---|---|---|
| | felfelé | lefelé |
| | A $v$ és $a$ irányát egy kijelölt irányhoz viszonyítjuk. | |
| Sebesség ($v$) | $v_0$ felfelé pozitív<br>$v = v_0 - g \cdot t$ | $v_0$ lefelé pozitív<br>$v = v_0 + g \cdot t$ |
| Megtett út ($h$) | $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$, $h_{max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$ | $h = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ |
| Gyorsulás ($a$) | $g < 0$ | $g > 0$ |
| Emelkedés időtartama ($t_{em}$),<br>mozgás időtartama ($t_{össz}$) | $t_{em} = \frac{v_0}{g}$<br>$t_{össz} = \frac{2 v_0}{g}$ | |
| Grafikon |  |  |

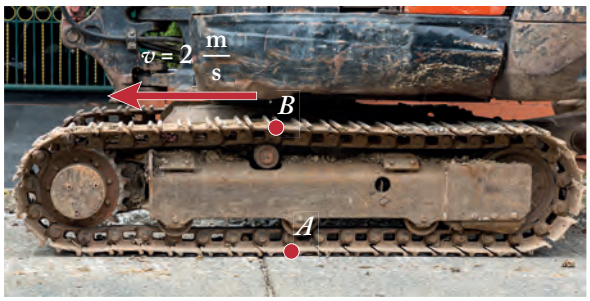
## Összetett mozgások

| Fizikai mennyiség | Vízszintes hajítás | Ferde hajítás (kiegészítő anyag) |
|---|---|---|
| Mozgás pályája, sebességvektorok |  |  |
| Szuperponálódás | $x$ irány: egyenes vonalú egyenletes mozgás<br>$y$ irány: szabadesés | $x$ irány: egyenes vonalú egyenletes mozgás<br>$y$ irány: függőleges felfelé hajítás |
| Hajítás ideje ($t_h$) | $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ | $t_h = \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$ |
| Becsapódási sebesség nagysága ($v$) | $v = \sqrt{v_x^2 + (g \cdot t)^2}$ | $v_0$ |
| Hajítás távolsága ($d$) | $d = v_0 \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ | $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ |

# Összefoglaló feladatok

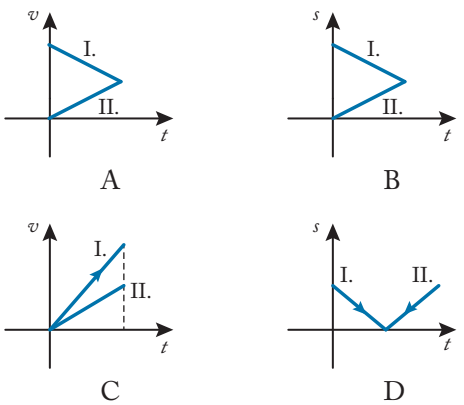
## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2019)
Egy lánctalpas munkagép 2 m/s sebességgel halad előre. Milyen gyorsan mozog a talajhoz képest a lánctalp talajjal érintkező B és a felső vízszintes szakaszon elhelyezkedő A pontja?




A) Az A és a B pont sebessége is 2 m/s.
B) Az A pont sebessége –2 m/s, a B pont sebessége 2 m/s.
C) Az A pont sebessége 4 m/s , a B pont sebessége 0 m/s.
D) Az A pont sebessége 2 m/s, a B pont sebessége 0 m/s.

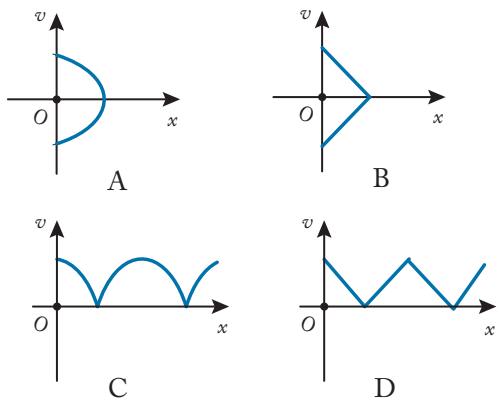
**2.** Két ismerős kutya 80 m távolságról megpillantva egymást, egyszerre kezd futni egymás felé. A kisebbik sebessége 3 m/s, a nagyobbiké 5 m/s. Néhány másodperc múlva találkoznak. Melyik grafikon ábrázolhatja helyesen a mozgásukat?



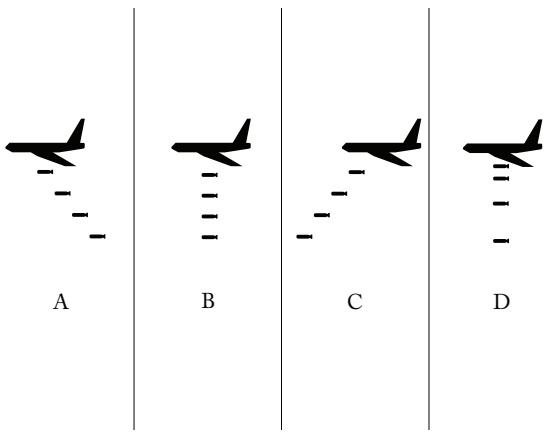

**3.** Egy autó átlagsebessége egy adott úton 60 km/h volt. Útjának első felében még 90 km/h volt az átlagsebessége. Mekkora sebességgel mehetett útjának második felében?
A) 75 km/h;
B) 30 km/h;
C) 45 km/h;
D) 54 km/h.

**4.** Egy lejtőn legördülő golyó mozgását vizsgáljuk úgy, hogy a metronóm ütésekor a lejtő szélére krétajeleket teszünk. Az első metronómütésnél indítjuk a testet, a második ütésnél tesszük az első jelet, ami az indulástól 15 cm-re lesz. A negyedik ütésnél éppen a lejtő végére tesszük a jelet. Milyen hosszú a lejtő?
A) 135 cm;
B) 60 cm;
C) 120 cm;
D) A rendelkezésre álló adatokból ez nem határozható meg.

**5.** Egy tökéletesen rugalmasan pattogó labda sebességét ábrázoltuk az elmozdulás függvényében. A labda becsapódási pontja a koordináta-rendszerünk origója, a felfelé mutató sebességirányt tekintjük pozitívnak. Melyik grafikon a HELYES?




**6.** A következő rajzokon egy bombázó repülőgépből kihulló bombákat ábrázoltuk. (Az ábrázolást a repülővel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből készítettük.) A bombák egyenlő időközönként oldódnak le. Melyik kép a HELYES?



**7.** Egy magas toronyból közel függőlegesen feldobunk egy követ. Az 2 másodpercig emelkedik, majd 3 másodpercig zuhan, amíg a torony lábánál talajt ér. Nagyjából milyen magas a torony?
A) 45 m;
B) 125 m;
C) 25 m;
D) 10 m.

**8.** Egy vízszintes hajítás $h$ magasságú toronyból történik. Az elhajított test a torony lábától szintén $h$ távolságra csapódott be. Mit mondhatunk a becsapódó test vízszintes és függőleges sebességkomponensének viszonyáról?
A) A becsapódó test vízszintes és függőleges sebességkomponense egyenlő.
B) A becsapódó test vízszintes sebességkomponense nagyobb, mint a függőlegesé.
C) A becsapódó test függőleges sebességkomponense nagyobb, mint a vízszintesé.
D) A kevés adat miatt nem tudunk semmit mondani a sebességkomponensekről.

**9.** Egy magas torony közepétől kidobunk vízszintesen egy követ. Az a torony lábától 10 m-re esik le a vízszintes talajra. A torony tetejéről ugyanekkora sebességgel vízszintesen kidobott kő hova fog leesni?
A) Kb. 14 m-re;
B) kb. 20 m-re;
C) kb. 40 m-re;
D) kb. 10 m-re.

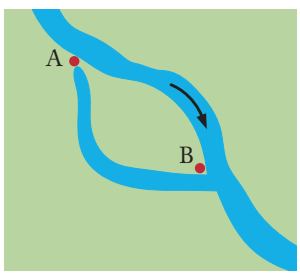
**10.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2016)
Egy egyenletesen haladó vonatszerelvény hátsó kocsija leválik a szerelvényről, és egyenletesen lassulva 100 méter után megáll. Eközben a vonat változatlan sebességgel megy tovább. Mekkora távolságra lesz a szerelvénytől a kocsi a megállás pillanatában?
A) 50 m-re;
B) 100 m-re;
C) 150 m-re;
D) 200 m-re.

## FELADATOK

**1.** Feri gyakran utazik Szekszárdról Pécsre az M6-os autópályán. A Szekszárd és Pécs közti 90 km hosszúságú úton szinte végig tudja tartani a 120 km/h sebességet. A Bátaszék utáni alagutakkal és viaduktokkal teletűzdelt szakaszon, valamint a csomópontokhoz vezető közutakon azonban betartja a 90 km/h sebességkorlátozást. Így 50 perc alatt teszi meg a két város közti utat.
**a)** Mekkora Feri egész útra számított átlagsebessége?
**b)** Milyen hosszú szakaszt tesz meg 90 km/h sebességgel?

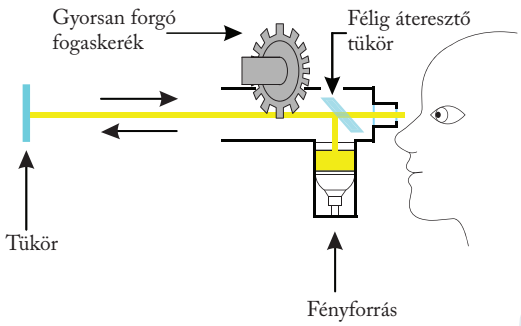
**2.** A nagyrákosi völgyhíd Magyarország leghosszabb vasúti viaduktja, építésekor Európa negyedik leghosszabb völgyhídja volt 1400 m-es hosszával.
**a)** Mennyi idő alatt robog át ezen egy 100 m hosszú teherszerelvény teljes hosszában, 36 km/h sebességgel?
**b)** Mennyi idő alatt robog át ezen egy rövid személyvonat, amely 72 km/h sebességgel hajtott a hídra, de mikorra elhagyja a hidat, addigra egyenletesen 36 km/h-ra csökkent a sebessége?

**3.** Az alábbi térképrészleten fekvő Alfaváros és Bétaváros a folyón és a holtágon keresztül is megközelíthető, és mindkét távolság azonos. Egy hajóskapitánynak döntenie kell, hogy Alfaváros és Bétaváros közt járó hajójáratára a folyóra vagy a holtágra kérjen-e hajózási engedélyt. (Csak az egyikre kaphat, a két útvonal nem kombinálható). A hajó Alfavárosból indulna, Bétavárosban megfordulna és visszatérne A-ba. A kapitány minél rövidebb idő alatt akarja megtenni az egész utat. A hajó sebessége a holtágban háromszorosa a folyó (parthoz viszonyított) sebességének, és háromszorosa a folyón is a folyó vizéhez viszonyítva. Melyik útvonalra kérjen engedélyt?




**4.** A fény terjedési sebességét földi fényforrás segítségével elsőként a francia Fizeau-nak sikerült meghatároznia 1849-ben.

Módszerének lényege a következő volt: Egy fényforrásból kilépő fénynyaláb egyik felét egy féligáteresztő tükör egy gyorsan forgó fogaskerék fogközein keresztül egy távoli tükörre vezette. A tükörről visszaverődő és a fogaskerék közein átjutó fénysugár egy része a féligáteresztő tükrön a szemébe jutott. Mivel a fogaskerék a fénysugarat megszaggatta, ezért azt fényimpulzusokként érzékelte. A fogaskerék megfelelő fordulatszámánál elérte, hogy amíg a fénysugár a tükörig jutott és



onnan visszaverődött, addig a fogaskerék pontosan annyit fordult el, hogy a visszaverődő fénysugárnak a fogköz helyett éppen a következő fog került az útjába. Így a fényimpulzus már nem jutott a szemébe. A fogaskerék fordulatszámának és a távolságoknak az ismeretében a fénysebesség meghatározható volt.

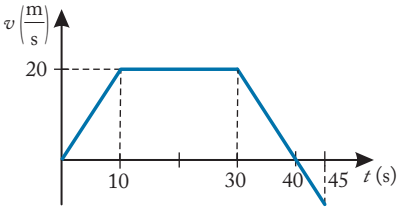
A tükör és a fogaskerék közt a fény összesen 8633 métert tett meg. (Ezt Fizeau-nak úgy sikerült megvalósítania, hogy egy tükörrendszert használt. Az utat oda-vissza tette meg a fény, összes útja tehát 17 266 m volt.) A kereken 720 fog és 720 köz volt, mindegyik egyforma szélességben.

Mekkora terjedési sebességet mért Fizeau, ha a fogaskerék 1 másodperc alatt 12,6 fordulatot tett meg, amikor azt tapasztalta, hogy a tükörről visszaverődő fénysugár nem jut már a szemébe?

**5.** Egy jármű két helység közötti utat úgy futja be először, hogy egy ideig állandó 40 km/h sebességgel halad, majd ugyanennyi ideig 70 km/h sebességgel megy. Másodszor úgy futja be, hogy az útjának első felében állandó 40 km/h sebességgel halad, majd útjának második felében 70 km/h sebességgel megy.

Melyik esetben lesz nagyobb az átlagsebessége és mennyivel?

**6.** Egy test az alábbi grafikon szerint mozog egyenes vonalú pályán.




**a)** Írjuk le a test mozgását!
**b)** Mekkora utat tett meg a test?
**c)** Mekkora az elmozdulása?

**7.** Egy autó 108 km/h sebességgel halad. Egy akadályt látva a vezetője hirtelen vészfékez. Vezetőjének és az autónak az együttes reakcióideje 1 s. Az autó a száraz úton, jó gumikkal 10 m/s² lassulásra képes.
**a)** Mekkora a teljes féktávolsága?
**b)** Készítsük el a mozgás $v$–$t$ grafikonját!
**c)** A lassulás kezdőpillanatától számítva mennyi út után csökken a sebessége az eredetinek a harmadára?

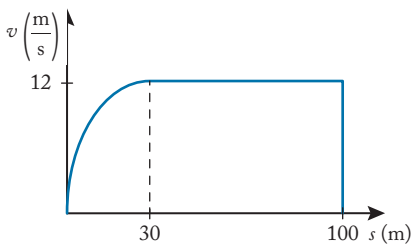
**8.** Rendőrségi vizsgálat zajlik abban az ügyben, hogy valaki két lövést adott le egy egyenes pályán egyenletesen haladó vasúti kocsira. A rendőrségi vizsgálat a következőket állapította meg:

A vagon fala fából készült, és mindkét lövés a falat közel merőlegesen érte. Az oldalfal egy vastag részénél az első lövedék 4 cm-re behatolt a fába, és ott megállt. Egy ugyanolyan deszkából készült 3 cm vastag deszkarészen viszont a második lövedék már áthaladt, és a 2,5 m-re szemben lévő falon 10 cm-es vízszintes irányú eltolódással egy másik nyílást ütött.

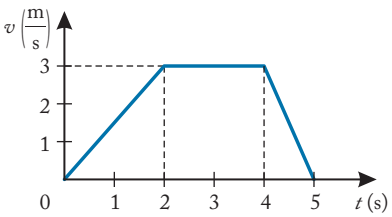
Mekkora a lövedék sebessége, ha a vonat 72 km/h sebességgel haladt?

**9.** Az első hangsebességet átlépő autó, a Thrust SSC rakétautó 1228 km/h sebességgel volt képes haladni, miközben 18,2 liter benzint fogyasztott másodpercenként.
**a)** Adjuk meg a fogyasztást az autóknál szokásos liter/100 km egységben is!
**b)** Tegyük fel, hogy az autó nem gyorsulhatott, illetve lassíthatott 4 $g$-nél nagyobb mértékben, és a csúcssebességét is 1 percig tartania kellett. Mekkora minimális hosszúságú pálya kellene ehhez?

**10.** Az alábbi grafikon egy sprinter sebességét mutatja 100 m-es síkfutás során a rajttól megtett távolság függvényében. Határozzuk meg ez alapján, milyen időt ért el!




**11.** Az ábrán egy kerékpáros sebesség-idő grafikonja látható.
**a)** Milyen mozgást végez a kerékpáros az egyes időközökben?
**b)** Mekkora a gyorsulása, és mennyi utat tesz meg a kerékpáros az egyes időközökben?




**12.** Egyenletesen gyorsuló gépkocsi sebessége 12 s alatt a kezdeti érték háromszorosára nőtt, miközben a jármű 240 m utat tett meg. Mekkora volt a gépkocsi kezdeti sebessége és a gyorsulása?

**13.** Szabadon eső test mozgásának utolsó másodpercében hatszor annyi utat tesz meg, mint az első másodpercben. ($g$ = 10 m/s²)
**a)** Milyen magasról esett le a test?
**b)** Mekkora sebességet ért el?

**14.** Egy 25 m magas torony tetejéről rugós puskából kilövünk egy lövedéket 20 m/s kezdősebességgel, függőlegesen felfelé.
**a)** Milyen magasra jut el?
**b)** Mekkora sebességgel esik le a torony tövéhez, ha feltételezzük, hogy kicsit kitért oldalirányba?
**c)** Mennyi idő múlva csapódik be?
(A légellenállást hanyagoljuk el.)

**15.** Egy 20 m magas toronyból vízszintes irányban elhajítunk egy követ 10 m/s sebességgel.
**a)** Milyen magasan van a kő, és milyen távol van a torony függőleges falától az elhajítás után 1 másodperccel?
**b)** Mekkora lesz ennyi idő alatt az elmozdulása?
**c)** Mekkora ekkor a sebessége?
**d)** Az elhajítás után 2 másodperccel hogyan módosulnak a fenti kérdésekre adott válaszok? ($g$ = 10 m/s$^2$.)

**16.** Egy torony 45 m magas. Vízszintesen eldobunk egy követ a toronyból, ami a torony lábától 60 m távolságra ér földet a vízszintes talajon. ($g$ = 10 m/s$^2$)
**a)** Mekkora a kő sebessége az elhajításkor?
**b)** Hányszorosára nő a kő sebessége a földbe csapódásig?
**c)** Mekkora sebességgel kell elhajítanunk vizszintesen a követ ahhoz, hogy a becsapódási sebessége kétszerese legyen az elhajítási sebességének?

**17.** Két fiú egymásnak dobálja a labdát másfél méteres magasságból. A labda 2 másodpercig repül. Milyen magasságot ér el az elhajítás közben? ($g$ = 10 m/s$^2$)

**18.** Egy kis méretű testet $v_0$ sebességgel, vízszintesen elhajítunk a felszíntől $h$ magasan a Földön, illetve a Holdon. Tudjuk azt, hogy a Holdon a nehézségi gyorsulás a földi értéknek a hatoda.
**a)** Mennyi lesz a hajítási távolságok aránya?
**b)** Hol lesz nagyobb a becsapódási sebesség?
**c)** Milyen magasról kellene indítani a Holdon $v_0$ vízszintes sebességgel, hogy ugyanakkora legyen a becsapódási sebessége, mint a Földön?

**19.** A vízszintes talaj felett egy függőleges egyenes mentén, egymás felett tartunk 5 m és 10 m magasan egy-egy tökéletesen rugalmas golyót. A két golyót egyszerre elengedjük. A golyók ütközése pillanatszerű. Milyen magasan fognak összeütközni először a golyók? ($g$ = 10 m/s$^2$)

**20.** Egy puskával maximálisan 500 m messzire lehetne lőni ideális esetben vízszintes talajon.
**a)** Függőlegesen felfelé milyen magasra lehetne ezzel a puskával lőni?
**b)** Mennyi lesz a két mozgás idejének az aránya?
A légellenállást hanyagoljuk el!

**21.** (Középszintű érettségi feladat, 2015)
A NASA 132 méter mély, légüres ejtőcsövében felülről kezdősebesség nélkül elejtenek egy kapszulát. Ezzel egy időben alulról is fellőnek egyet. A két kapszula pontosan félúton találkozik.
**a)** Mekkora az elejtett kapszula sebessége a találkozáskor?
**b)** Mekkora kezdősebességgel kellett az alulról indított kapszulát fellőni ahhoz, hogy pontosan félúton találkozzanak?
**c)** Mekkora volt az alulról indított kapszula sebessége a találkozáskor?
($g$ = 9,81 m/s$^2$)

**22.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2007)
Egy 25 méter magas ház tetejéről leejtünk egy követ. Amikor a kő elhalad a 20 méter magasan lévő megfigyelő előtt, ő is leejt egy követ. Mekkora időkülönbséggel érnek földet a kövek? (A közegellenállási erő elhanyagolható, $g$ = 10 m/s$^2$.)

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### A szabadesés

*„Ha egy kő esését figyelem, amely kezdetben nyugalomban volt, és elindul egy magasabb helyről, majd folyamatosan új és új növekményt szerez sebességéhez, miért ne hihetném azt, hogy ez a növekedés olyan módon történik, amely a lehető legegyszerűbb és mindenki számára teljesen világos? Ha mi az esetet most gondosan vizsgáljuk, nem találhatunk más összegezést vagy növekedést egyszerűbbnek, mint azt, amely ugyanazon módon állandóan ismétlődik."*

(*Részlet Galilei* Discorsi *című művéből*)

Mit nevezünk szabadesésnek? Fogalmazza meg Galilei legfontosabb felismeréseit ezzel a mozgással kapcsolatban!

Milyen módon igazolható, hogy a szabadesés egyenletesen gyorsuló mozgás?

A fenti idézetben ennek a mozgásnak melyik törvényszerűségét fogalmazza meg Galilei a maga régies nyelvezetén? Mutassa meg, hogy a Galilei által leírt törvényből levezethető a négyzetes úttörvény is!

Mitől függ, hogy egy adott helyen mennyi pontosan a $g$ nehézségi gyorsulás értéke? Mutassa be egy olyan eszköz működését, amivel a nehézségi gyorsulás egyszerű módon mérhető!

# III. A tömegpont dinamikája







# 1. Newton I. törvénye

EMLÉKEZTETŐ

## A tehetetlenség törvénye

A dinamika a mozgásokat létrehozó erőhatásokkal foglalkozik. Newton foglalta törvényeit rendszerbe, de az eredményes vizsgálódásokat a tárgykörben már Galilei elkezdte.

Az ember hétköznapi tapasztalata az, hogy a környezetében lévő (élettelen) testek általában hozzá képest nyugalomban vannak, és ahhoz, hogy tartósan mozgásba jöjjenek, azaz **megváltozzon mozgásállapotuk**, valamiféle külső „ráhatás", **mozgásállapot-változtató hatás** (erőhatás) szükséges. Ha például az asztalon heverő könyvet meglököm, akkor az hamar megáll. Tartósan akkor fog a könyv csúszni az asztalon, ha folyamatosan nyomom, azaz folyamatos marad a mozgásállapot megváltoztatását fenntartó erőhatás. Az egyenletes mozgáshoz tehát látszólag folyamatos erőhatás szükséges. Ezt az ókori téves felfogást néhányan ugyan a középkorban megkérdőjelezték, amikor a kilőtt nyílvesszőre vagy egy márványlapon guruló golyóra gondoltak, de Galileiig senki nem látta világosan a probléma megoldását.

Galilei korszakos felismerésének az alapja hasonló volt ahhoz, mint amit a szabadesésnél tett: *el kell különíteni a lényeges elemeket a zavaró tényezőktől*. Mint láttuk, szabadesésnél a lényegi elem a Föld vonzóereje volt, zavaró tényező pedig főként a közegellenállás. Mozgásoknál hasonlóan éles határt húzott. Lényegi elem a test mozgásállapota, zavaró tényezők pedig a mozgást akadályozó erők: a súrlódás és közegellenállás. Ha ez utóbbiak elhanyagolhatóak, akkor már tényleg azt fogjuk tapasztalni, amit **a tehetetlenség törvénye** kimond:

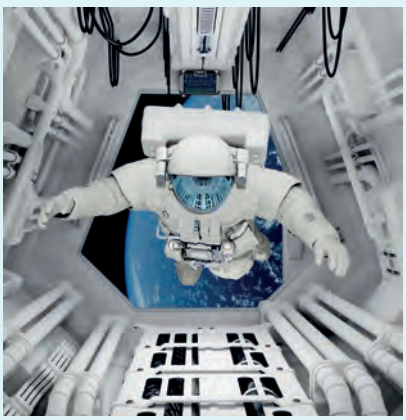
**Minden test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát mindaddig, amíg egy másik test a mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti.**

Ez a törvény alapvető fontosságú a dinamika egészében, ezért Newton is a dinamika alaptörvényei közé emelte, így lett **Newton I. törvénye** a neve.

## Példák Newton I. törvényére

A tehetetlenség törvénye tehát akkor nyilvánul meg egyértelműen, ha az előzőleg említett „zavaró tényezők" elhanyagolhatóak.

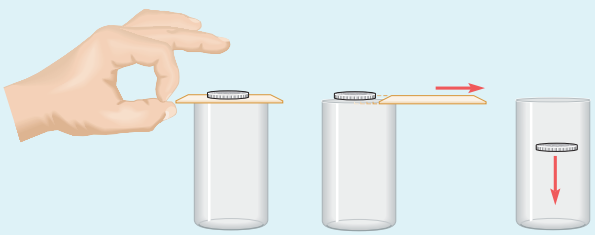
**1.** Zavaró tényezőktől mentes állapotnak tűnik például egy súlytalanság állapotában lévő űrhajó fedélzete. Ha az ott lebegő űrhajós ellöki magát a faltól, akkor amíg a falnak nem csapódik, egyenletes sebességgel „úszik" a levegőben. Mivel azonban a hétköznapi életünkben a mozgást akadályozó erők szinte mindig fellépnek, ezért általában akkor válnak elhanyagolhatókká, ha nagyon gyors folyamatokat tekintünk.



*Az űrhajóban az űrhajós egyenletes sebességgel halad*

**2.** Ilyen például az az eset, amikor egy kartonlapot kipöckölünk a pénzérme alól. Ha a kartonlapot nem mozgatjuk elég gyorsan, akkor a pénzérme együtt mozog a kartonlappal, és a „mutatvány" nem sikerül. Itt egy nyugvó test tehetetlenségét figyelhetjük meg abban az esetben, amikor az alátámasztást hirtelen elmozdítjuk.

Hasonló „trükkre" épül egy papírcsík kirántása egy álló ceruza alól, vagy az abrosz kirántása a teríték alól.



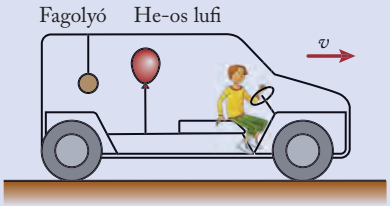
*A nyugvó pénzérme szabadon esik, ha kipöcköljük alóla a kartonlapot.*

**3.** A tehetetlenség törvényének másik gyakori esetében egy gyorsan mozgó rendszer hirtelen lefékeződik vagy kanyarodik, és a rendszerben lévő egyik test igyekszik a rendszer korábbi sebességével továbbhaladni.

Ez figyelhető meg például a porrongy kirázásánál, a huzatban becsapódó ablak kitörésénél, a kalapács fejének a nyélre történő rászorulása során, a kanyarodó buszban oldalra dőlő utasoknál.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Az ábrán látható mikrobusz belsejében két testet helyezünk el: egy héliumos lufit és egy fagolyót. A hélium a levegőnél kisebb sűrűségű, felszállna, ezért alulról rögzítjük egy zsinórral. A fagolyót a plafonról lógatjuk alá. Amikor az egyenletesen haladó mikrobusz hirtelen fékez, a fagolyó előrelendül, a héliumos lufi pedig hátra. Magyarázzuk meg a jelenséget!




*Fékezéskor a fagolyó előrelendül, a héliumos lufi pedig hátra*

### MEGOLDÁS

A tehetetlenség törvénye szerint az addig egyenletes sebességgel haladó fagolyó továbbra is igyekszik megtartani egyenletes sebességét, ezért fékezéskor az eddigi haladási iránynak megfelelően, előrefelé lendül ki. Látszólag ez kéne történjen a héliumos lufival is, de az valójában az addigi haladási iránnyal és a fagolyó irányával éppen ellentétesen, hátrafelé lendül ki. Ennek az az oka, hogy a mikrobuszban lévő levegőre is érvényes a tehetetlenség törvénye. A levegő is felveszi a mikrobusz sebességét, és fékezéskor a levegő is igyekszik megtartani eredeti mozgásállapotát, tehát igyekszik előrefelé haladni. Így tehetetlenségénél fogva a levegő is előrelendül az első szélvédő felé. Ennek következében előrefelé haladva egyre nagyobb lesz a levegő nyomása. A lufi előtt tehát nagyobb lesz a nyomás, mint a lufi mögött. Ez a hatás jelentősebb lesz, mint a lufi tehetetlenségéből adódó hatás, így a lufi hátrafelé lendül.

**2. FELADAT** Egy teherautó 5 m hosszú platójára egy vascsövet fektetnek, az alábbi ábrán látható módon, de elfelejtik rögzíteni. Egy hosszú egyenes úton a teherautó felveszi az $54\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet, ekkor a teherautó fékezésre kényszerül. A fékezés megkezdése után menynyi idővel hallja meg majd a sofőr a vascső becsapódását, ha a teherautó lassulása $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

A vascső mozgását akadályozó erőket hanyagoljuk el!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$L = 5\ \text{m}$, $v_0 = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$t = ?$

### 1. megoldás

**A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben**

A vascső tehetetlensége miatt $v_0$ sebességgel fog továbbra is előrefelé haladni. A becsapódásig $s_1$ utat tesz meg egyenletes sebességgel, $t$ ideig:

$$s_1 = v_0 \cdot t$$

Ezen $t$ idő alatt a teherautó $a$ lassulással

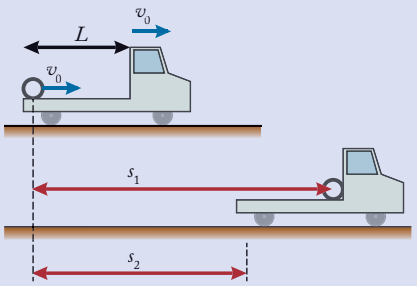
$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$$

utat fog megtenni. Az ábráról láthatjuk, hogy fennáll az $s_1 = s_2 + L$ kapcsolat is. Ebbe az egyenletbe beírva az első két egyenletből az $s_1$ és $s_2$ utakra fennálló összefüggéseket:

$$v_0 \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2 + L$$

egyenlethez jutunk, amelyből:

$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot L}{a}} = \sqrt{-\frac{10\ \text{m}}{-4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}6\ \text{s}$$




***A teherautó megtett útja $s_2$, míg a vascsőé $s_1 = s_2 + L$***

A fékezés megkezdése után 1,6 s múlva hallja meg a sofőr a vascső becsapódását.

### 2. megoldás

**A teherautó platójához rögzített vonatkoztatási rendszerben**

Ebben a vonatkoztatási rendszerben azt látjuk, hogy a fékezés megkezdésekor a vascső $a$ gyorsulással elkezd mozogni a sofőr fülkéje felé, és ezzel a gyorsulással teszi meg az $L$ hosszú utat.

Így a négyzetes úttörvényt alkalmazhatjuk az esetre:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{a}} = \sqrt{\frac{10\ \text{m}}{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}6\ \text{s}$$

A fékezés megkezdése után 1,6 s múlva hallja meg a sofőr a vascső becsapódását.

## Az inerciarendszer

**Az olyan vonatkoztatási rendszereket, amelyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, inerciarendszereknek nevezzük.**

Ha az előző kidolgozott feladat 2. megoldásának gondolatmenete alapján elképzeljük azt, hogy *a teherautó platóján ülünk*, és tudomást sem véve a körülöttünk lévő világról, csak a vascsőre és a platóra koncentrálunk, akkor a fékezés megkezdésekor azt a meglepő dolgot tapasztaljuk, hogy a vascső magától elindul felénk. Ez ellentmond a tehetetlenség törvényének, hiszen a tárgyak nem indulhatnak el maguktól. Ez az ellentmondás úgy oldható fel, hogy rendszerünk megszűnt inerciarendszer lenni.

A *földön álló megfigyelő* szerint a vascső tehetetlenségénél fogva halad tovább egyenletesen, miközben a teherautó lassul. **Egy lassuló vagy gyorsuló rendszer tehát nem lehet inerciarendszer**, hasonlóan egy forgó rendszer sem.

Szigorúan véve tehát az általunk sokszor inerciarendszerként használt Föld mint vonatkoztatási rendszer nem is inerciarendszer, hiszen tengelye körül forog. A Föld olyan lassan forog, hogy *középiskolás tanulmányaink során nyugodtan vehetjük inerciarendszernek*.

*Megjegyzés:* A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerek azonban nem minden mozgás esetében tekinthetők inerciarendszernek. Például az űrhajók, bolygók mozgásának leírásakor *„állócsillagokhoz rögzített" vonatkoztatási rendszert* veszünk alapul. Ekkor a koordináta-rendszer középpontja a Naprendszer középpontja, tengelyei pedig egy-egy állócsillag felé mutatnak.

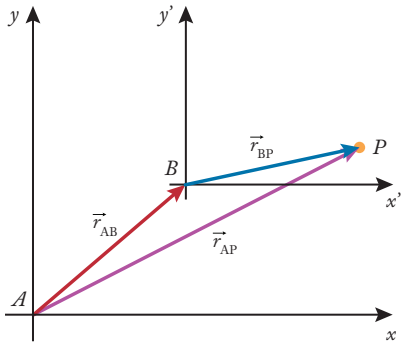
## A Galilei-féle relativitási elv

Galilei a tehetetlenség törvényében kimondja, hogy „minden test megtartja **nyugalmi állapotát** vagy **egyenes vonalú egyenletes mozgását**, amíg egy másik test a mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti". Ez felveti a következő kérdést: egy rendszerről csak a rendszeren belül elvégzett kísérletekkel megállapítható-e, hogy a rendszer áll, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez?

Ezzel a problémával Galilei foglalkozott, és azt a konkrét kérdést vetette fel: *Egy hajó belsejében elvégzett kísérletekkel megállapíthatjuk-e, hogy a hajó áll-e, vagy egyenletesen úszik lefelé a folyón?* Galilei azt a helyes választ adta, hogy semmiféle kísérlettel nem tudjuk eldönteni a kérdést.

**Tehát a fizikai törvények egy nyugalmi rendszerben ugyanolyan alakúak, mint egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerben.**

**Az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek is inerciarendszerek. Ez a Galilei-féle relativitási elv.**




*Inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerek is inerciarendszerek*

Tehát a Galilei-féle relativitási elv alapján, ha találunk egy inerciarendszert, akkor a hozzá képest egyenletesen mozgó összes vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer lesz.

## Newton I. törvényéről

Az emlékeztetőben már utaltunk rá, hogy a fizika fejlődésében milyen nagy jelentőségű volt a tehetetlenség törvényének felismerése. A törvény felismerését a következő kérdés feltevése követte:

*Hol érvényes a tehetetlenség törvénye?* Inerciarendszerben.

*Mi az inerciarendszer?* Olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben érvényes a tehetetlenség törvénye.

Ezzel viszont a definíciót illetően „ördögi körbe" kerültünk, ami egy logikailag helyesen felépített rendszerben (amilyen a fizika tudománya) elfogadhatatlan.

Ebből az ördögi körből az a felismerés vezet ki minket, ha **azt mondjuk ki axiómaként (alaptörvényként), hogy létezik olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magukra hagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat. Az ilyen rendszereket inerciarendszereknek nevezzük.** Newton I. törvénye tehát lényegében azt mondja ki, hogy léteznek inerciarendszerek.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit mond ki a tehetetlenség törvénye és a Galilei-féle relativitási elv?
2. Az alábbi példák közül melyik tekinthető „középiskolai szinten" inerciarendszernek, és melyik nem? Indokoljuk is meg választásunkat!
   **a)** zuhanó lift,
   **b)** egyenletesen haladó vonat,
   **c)** kanyarodó vonat,
   **d)** fékező vonat.
3. Milyen mozgásállapot-változások következnek be az alábbi két rajzon ábrázolt buszban?



# 2. Newton II. és III. törvénye

**EMLÉKEZTETŐ**

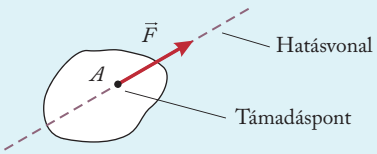
## Az erő fogalma

Az erő a testek egymásra hatásának, kölcsönhatásának jellemzésére szolgáló fizikai mennyiség.

**Erőnek nevezzük egy testre egy másik test által kifejtett hatást, mely okozhat gyorsulást vagy deformációt, vagy esetleg egyszerre mindkettőt.**

**Jele: $\vec{F}$.**

**Az erő vektormennyiség.**




*Az erőnek nagysága, iránya, hatásvonala és támadáspontja van*

## A tehetetlen tömeg

Mint Newton I. törvényénél láttuk, a **tehetetlenség** a testek alapvető tulajdonsága. A fizikában a tulajdonságokhoz gyakran fizikai mennyiségeket rendelünk. Így járunk el most is.

**A tehetetlenséghez mértéket rendelünk, ezt (a tehetetlen) tömegnek nevezzük.**

**Jele: $m$.**

**Mértékegysége: kg. A tömeg skalármennyiség.**

**A tömeg az adott testre jellemző állandó érték** (legalábbis a klasszikus fizikában). Egy test tömege nem változik attól, hogy nyugalomban vagy gyorsuló rendszerben, esetleg a súlytalanság állapotában vizsgáljuk.

## Newton II. törvénye

**Ha egy testre erő hat, akkor a test az erő irányában gyorsul. A test $\vec{a}$ gyorsulása egyenesen arányos a testre ható $\vec{F}$ erővel, és fordítottan arányos a test $m$ tömegével.**

**$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, átrendezve: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$**

Ezt nevezzük Newton II. törvényének. A törvény alapján meghatározhatjuk az erő mértékegységét is, amit Newton tiszteletére newtonnak neveztek el, és N-nel jelöljük.

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

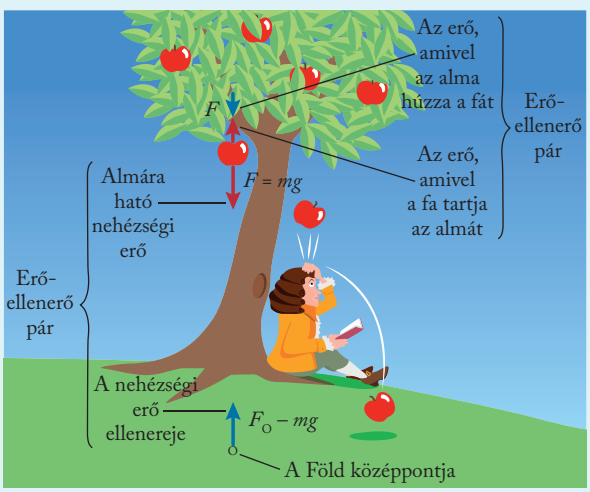
1 N nagyságú erő az 1 kg tömegű testen 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulást hoz létre.

## Newton III. törvénye

A kölcsönhatások legfőbb jellemzője, hogy ha az egyik test erőhatást fejt ki a másikra, akkor a másik is hatással van az elsőre. Mindkét hatás egy-egy erővel jellemezhető, amelyek nagysága egyenlő, irányuk pedig ellentétes. Az egyik erőhatás jellemzőjét erőnek, míg a másikét ellenerőnek nevezzük. **Az erő és az ellenereje nem ugyanarra a testre hatnak!**

**Ha az egyik test erőt fejt ki a másikra, akkor a másik is erőt fejt ki az elsőre (ellenerő), azaz az erők mindig párosával lépnek fel. A kölcsönhatásban – a különböző testekre ható – erők egyenlő nagyságúak, azonos hatásvonalúak és ellentétes irányúak.**

**Ez Newton III. törvénye. Másképpen az erő-ellenerő vagy hatás-ellenhatás törvényének is nevezzük.**

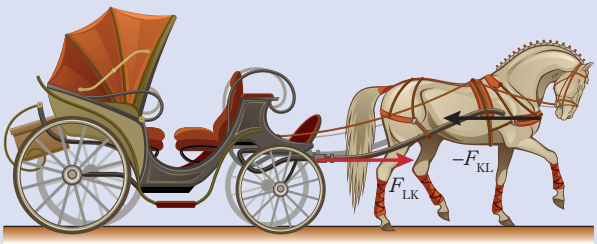



*Egy fán függő almára ható erő-ellenerő párok*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

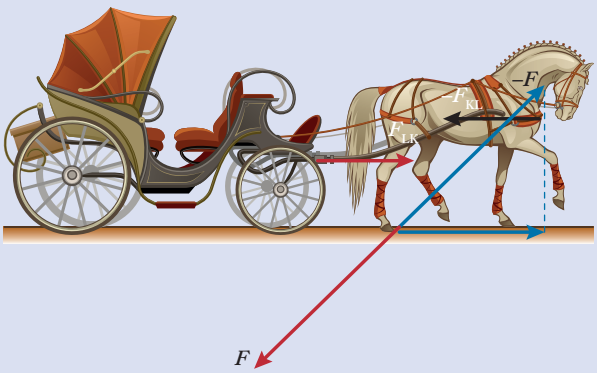
Az ábrán azt a pillanatot ábrázoltuk, amikor egy ló el akarja indítani a kocsit. Az ábrán feltüntettük piros színnel azt az $\vec{F}_{LK}$ erőt, amivel a ló húzza a kocsit. Ennek ellenereje az a feketével berajzolt $\vec{F}_{KL}$ erő, amivel a kocsi húzza a lovat. Newton III. törvénye szerint ez a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú, egyik a kocsira, másik a lóra hat. Ha a ló nagyobb erővel húzza a kocsit, akkor a kocsi is nagyobb erővel húzza visszafelé a lovat. Mivel minden pillanatban ez a két erő egyenlő nagyságú, ezért a ló soha nem tudja gyorsítani a kocsit.

Hol van ebben a gondolatmenetben a hiba?




### MEGOLDÁS

A gondolatmenet helyes, de hiányos. Amit leír az erő-ellenerő párról, az helytálló, de a kocsi nem ezektől az erőktől fog elindulni. A kocsi-ló rendszer azért indul el, mert a ló a lábaival nyomja a talajt, azaz a Földet. (A rajzon ez a pirossal ábrázolt $F$ erő.)




Ennek ellenereje (a kékkel ábrázolt erő) nyomja a ló-kocsi rendszert. Ennek az erőnek van olyan vízszintes összetevője, ami képes a ló-kocsi rendszert előrefelé gyorsítani. (Itt a tapadási súrlódási erőnek van szerepe, erről később még fogunk tanulni.) A ló által a Földre kifejtett erő gyakorlatilag végtelen nagyságú Földre hat. Ezért a Föld gyorsulását nem érzékeljük. Ennek ellenereje a sokkal kisebb tömegű ló-kocsi rendszerre hat, ami az előrefelé mutató gyorsulást okozza. A lovas kocsi mozgásának szempontjából a kocsi és a ló közt ható erő érdektelen. (Ez úgynevezett belső erő, ami nem rendelkezik az egész rendszer – értsd a lovas kocsi – szempontjából mozgásállapot-változtató hatással. A talaj által a lóra kifejtett nyomóerő viszont külső erő, ami képes a rendszert gyorsítani. Lásd később a 7. fejezetet.)

A hétköznapi életben is az olyan egyszerű mozgásnál, mint a járásnál, hasonló erők érvényesülnek.

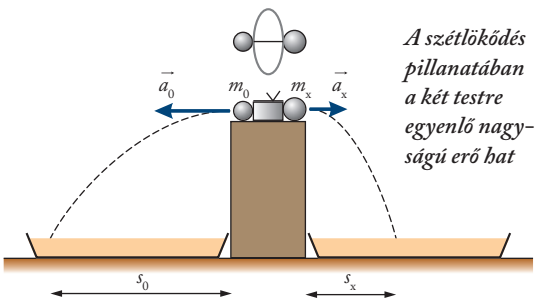
## A dinamikai tömegmérés elve

A tömeget a következő módon tudjuk megmérni: az $m_0$ ismert és az $m_x$ ismeretlen tömegű testeket azonos $F$ erővel gyorsítsuk! Mindkét testre alkalmazzuk Newton II. törvényét: $F = m_0 \cdot a_0$, $F = m_x \cdot a_x$.

Az egyenletek oldalai is egyenlők. Az így kapott egyenletből az ismeretlen tömeg kifejezhető:

$$m_x \cdot a_x = m_0 \cdot a_0 \Rightarrow m_x = \frac{a_0}{a_x} \cdot m_0$$

Nézzünk egy példát a dinamikai tömegmérésre! Összenyomott rugalmas fémlapot fonállal kössük össze! Az egyik oldalára $m_0$ ismert tömegű, a másik oldalára $m_x$ ismeretlen tömegű golyót helyezünk. A fonál elégetése után a fémlap visszanyeri feszültségmentes alakját, és eközben a két testre azonos ideig azonos nagyságú erő hat.




*A szétlökődés pillanatában a két testre egyenlő nagyságú erő hat*

Az előző gondolatmenetünk alapján az ismeretlen tömeg:

$$m_x = \frac{a_0}{a_x} \cdot m_0$$

A $\Delta t$ gyorsítási idő alatt tartó gyorsulások a sebességváltozásokkal kifejezve:

$$a_0 = \frac{v_0}{\Delta t}, \quad \text{illetve} \quad a_x = \frac{v_x}{\Delta t}.$$

Így a gyorsulások arányát helyettesíthetjük a sebességek arányával:

$$m_x = \frac{a_0}{a_x} \cdot m_0 = \frac{v_0}{v_x} \cdot m_0$$

A sebességek arányát viszont az azonos ideig tartó vízszintes hajítások távolságainak ($s = v \cdot t$) arányával helyettesíthetjük:

$$m_x = \frac{v_0}{v_x} \cdot m_0 = \frac{s_0}{s_x} \cdot m_0$$

Így a test ismeretlen tömegét meghatározhatjuk mért távolságok és egy ismert tömeg segítségével.

## A sztatikai tömegmérés

Nyilvánvaló, hogy a tömeg mérésére az általunk ismertetett dinamikai módszer bonyolultsága miatt a hétköznapi életben nem használható.



*Tömegmérés egyenlő karú mérleggel*

A tömegmérés hagyományosan úgy történik, hogy egy egyenlő karú mérleg egyik serpenyőjébe helyezik az ismeretlen tömegű testet, a másik serpenyőjében pedig egy „súlysorozat" tagjaival kiegyensúlyozzák a mérleget. Az ismeretlen tömeget ($m_x$) tehát ismert tömegekkel ($m$) hasonlítják össze. Az összehasonlításnak az az alapja, hogy egyensúly esetén mindkét tömegre azonos nagyságú nehézségi erő hat: $m_x \cdot g = m \cdot g$.

Mivel a $g$ nehézségi gyorsulás minden testre ugyanaz, így: $m_x = m$.




*Egyensúly esetén mindkét tömegre azonos nagyságú nehézségi erő hat*

Vegyük észre, hogy a sztatikai tömegmérés során a tömeget nem úgy használtuk, mint a tehetetlenség mértékét. A dinamikai tömegmérés általunk ismertetett módszerénél a szétlökődő golyóknál a tehetetlenségük érvényesült. A sztatikai tömegmérésnél azonban a tömegmérés során összehasonlított testek nyugalomban vannak, itt tehát nem a tehetetlenségük okán fellépő **tehetetlen tömegnek** ($m_t$) van szerepe, hanem annak a tulajdonságnak, hogy a Föld $\vec{F}_{neh} = m \cdot \vec{g}$ nehézségi erővel vonzza a tömeggel rendelkező testeket. Az így mért tömeget a test „**súlyos tömegének**" ($m_s$) nevezzük.

Ma már elfogadott tény, hogy Newton II. törvényében szereplő tehetetlen tömeg ($m_t$) ugyanaz, mint a nehézségi erő képletében szereplő súlyos ($m_s$) tömeg:

$$\vec{F} = m_t \cdot \vec{a} \quad \text{és} \quad \vec{F}_{neh} = m_s \cdot \vec{g}$$

*Megjegyzés:* A két tömeg egyenlőségének igazolása a fizikusok számára évszázadokon át komoly problémát jelentett. Ebben a folyamatban döntő szerepe volt **Eötvös Lorándnak** is, aki a súlyos és tehetetlen tömeg egyenlőségét $5 \cdot 10^{-9}$ relatív mérési hibahatáron belül igazolta.

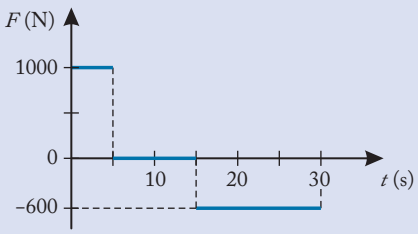
### KIDOLGOZOTT FELADAT

A grafikon egy egyenes vonalú pályán haladó, 800 kg tömegű testre ható erőt ábrázol az idő függvényében.

**a)** A grafikon alapján határozzuk meg, hogy mekkora a test gyorsulása az egyes szakaszokon!

**b)** Készítsük el a sebesség-idő grafikonját!

**c)** Készítsük el az út-idő grafikonját, és az elmozdulás-idő grafikonját is!




*Az autóra ható erő nagysága az idő függvényében*

### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 800$ kg, $t = 30$ s, $F_1 = 1000$ N, $t_1 = 5$ s,
$F_2 = 0$ N, $F_3 = -600$ N.

---

*a)* $a_1 = ?$, $a_2 = ?$, $a_3 = ?$
*b)* $v$–$t$ grafikon
*c)* $s$–$t$ grafikonok

**a)** A mozgás három szakaszra bontható.

**1. szakasz:** Az első szakaszon a testre 1000 N erő hat 5 másodpercig. A gyorsulás nagysága Newton II. törvénye alapján számítható:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{1000\ \text{N}}{800\ \text{kg}} = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az elért sebesség:

$$v_2 = a_1 \cdot t_1 = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ \text{s} = 6{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**2. szakasz:** A második szakaszon a testre nem hat erő, így tehetetlenségénél fogva az 1. szakaszon elért $v_2 = 6{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ állandó sebességével halad 10 s-ig változatlan irányban.

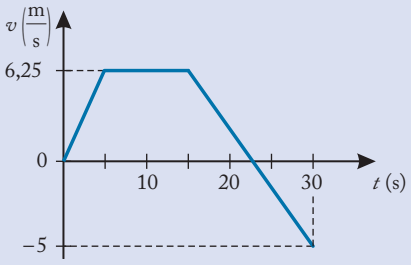
**3. szakasz:** A harmadik szakaszon a testre ható erő ellentétes irányúvá válik. Így a test gyorsulása:

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{-600\ \text{N}}{800\ \text{kg}} = -0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az elért sebessége a mozgás kezdetétől számított 30. s végén:

$$v'' = v_2 - a_3 \cdot t_3 = 6{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{s} = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**b)** Ezek alapján a $v$–$t$ grafikont már felrajzolhatjuk:




*A mozgás sebesség–idő grafikonja*

**c)** Az út kiszámítása a grafikon alatti területtel történhet.

**1.** *Az első szakaszon a test egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez.*

A fennálló összefüggés a grafikon alatti terület alapján:

$$s_1 = \frac{v_2 \cdot t_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 15{,}63 \text{ m}$$

**2.** *A második szakaszon állandó $v_2$ sebességgel halad*:

$$v_2 = v_2 \cdot t_2 = 6{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 62{,}5 \text{ m}$$

**3.** *Bontsuk az eddigi 3. szakaszt két részre: az egyik a $v = 0$ sebesség eléréséig tartó, míg a másik a $v = 0$ sebesség utáni rész legyen.*

A harmadik szakaszon először lassulni fog, amíg el nem éri a zérus sebességet. A $v = 0$ sebesség eléréséig eltelt idő:

$$0 = v_2 - a_3 \cdot t' = 6{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t'$$

Ebből a $t' = 8{,}33$ s eredményt fogjuk kapni.

Ez azt jelenti, hogy

$$t = t_1 + t_2 + t' = 5 \text{ s} + 10 \text{ s} + 8{,}33 \text{ s} = 23{,}33 \text{ s}$$

időpillanatban lesz a test sebessége nulla.

A 3. szakasz alatt megtett út is a grafikon alapján számítható:

$$s_3 = \frac{v_2 \cdot t'}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8{,}33 \text{ s} = 26 \text{ m}$$

**4.** *A negyedik szakaszon a test visszafelé jön, egyenletesen gyorsuló mozgást végez.*

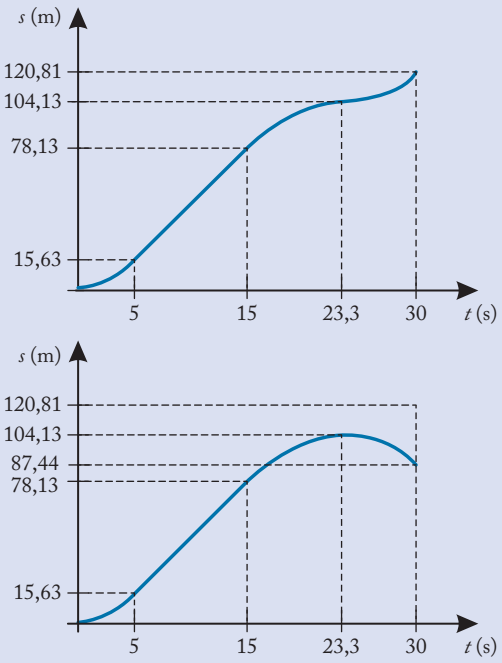
A szakasz megtételéhez szükséges idő

$$t_4 = t - t' = 30 \text{ s} - 23{,}33 \text{ s} = 6{,}67 \text{ s}$$

Így a megtett út nagysága:

$$s_4 = \frac{v'' \cdot t_4}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6{,}67 \text{ s} = 16{,}68 \text{ m}$$

A negyedik szakaszon a megtett út nő, az elmozdulás pedig csökken. A megtett út nagysága hozzáadódik az eddigi úthoz, elmozdulásnál viszont levonódik (visszafelé jön a test). A megfelelő grafikonok:




*Az út–idő és az elmozdulás–idő grafikon*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit mond ki Newton 2. és 3. törvénye?
2. Mi a tehetetlen tömeg és a súlyos tömeg közt a különbség?
3. A Föld a Holdat is vonzza, következésképpen a Hold is vonzza a Földet. Mint ismeretes, ez az oka az árapályjelenségeknek. Mi lehet az oka annak, hogy újhold idején mérhetők a legmagasabb dagályok?
4. Pista csónakázik. Könnyű kis ladikjával a stéghez kormányozza magát úgy, hogy a ladik orra ér a stéghez, míg ő a csónak hátuljában foglal helyet. Magyarázzuk meg Newton 3. törvénye alapján, milyen nehézségei lesznek, ha ki akar szállni a csónakból!



5. Pista csónakázás közben vízbe ejtette evezőjét, így nem tudott kievezni a stéghez. Szerencsére volt a csónakban egy hosszabb kötél, aminek a végét ki tudta dobni a stégen álló barátjának, Andrásnak. Pista megkérte Andrást, ő is húzza a kötelet, hogy minél könnyebben kiérjen a stéghez. András azonban nem hallgatott rá, és nem volt hajlandó húzni a kötelet, hanem csak kikötözte azt a stéghez. Pista erre nagyon mérges lett, mert szerinte így neki sokkal nagyobb erőt kellett kifejtenie ahhoz, hogy a stéghez érjen. Igaza volt-e Pistának?

# 3. A dinamika alaptörvénye

**EMLÉKEZTETŐ**

## A dinamika alaptörvénye

Ha egy testre több erő hat, akkor mindegyik kölcsönhatást egy-egy erővel jelölhetjük. A testre ható minden egyes erőre külön-külön felírhatjuk Newton II. törvényét. Ezeket az erőket egyetlen erővel, az eredővel helyettesíthetjük. Az eredő erőt természetesen vektoriális összegzéssel kaphatjuk meg. Jele: $\Sigma \vec{F}$ vagy $\vec{F}_e$.

(A $\Sigma$ – szumma – görög betű, az eredőt, összességet jelöljük vele a fizikában, illetve a matematikában.)

Így Newton II. törvényét az eredő erő fogalmának bevezetésével módosítjuk.

**A pontszerű testre ható erők eredője egyenlő a test tömegének és gyorsulásának szorzatával. Ez a dinamika alapegyenlete.**

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

A dinamika alapegyenletéből következik, hogy egy pontszerű test mozgásának megfigyelése során – a gyorsulása ismeretében – a testre ható eredő erőre lehet következtetni. Az egyes erők különböző matematikai alakú **erőtörvényekkel** írhatók le. A dinamika fejezetben a nehézségi erő, a rugóerő, a súrlódási erők és a közegellenállási erő, a lejtőn fellépő erők erőtörvényeit vizsgáljuk majd.

Ha a dinamika alaptörvényébe beírjuk az eredő erőt az erőtörvények alapján, akkor azt mondjuk, hogy felírjuk a test **mozgásegyenletét**.

## Az erőhatások függetlenségének elve

Az eredő erő felírásánál hallgatólagosan egy nagyon fontos elvet alkalmaztunk, amit részletesebben is érdemes megvizsgálni.

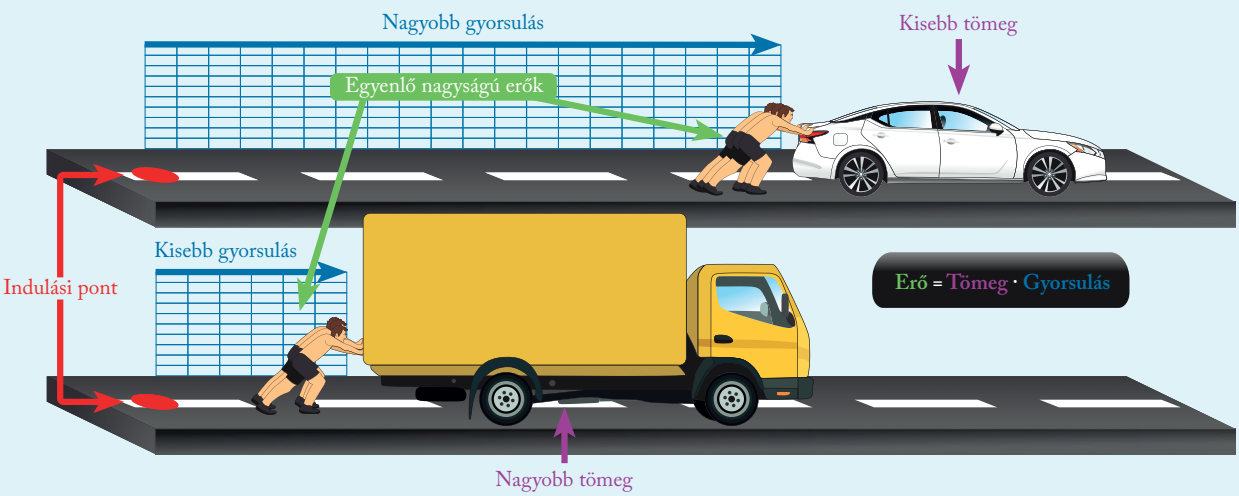
Ha egy $m$ tömegű pontszerű testre egyedül az $\vec{F}_1$, illetve egyedül az $\vec{F}_2$ erő hat, akkor a test gyorsulása Newton II. törvénye szerint: $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$, illetve $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}$.

Felmerül a kérdés: *Ha a testre egyszerre hat az $\vec{F}_1$, illetve az $\vec{F}_2$ erő, akkor mi történik a testtel, mekkora gyorsulással indul el a test?*

Tapasztalati tény, hogy ekkor az erőhatások egymást nem zavarva, egymástól függetlenül adódnak össze. Az $\vec{F}_1$ erő akkor is $\vec{a}_1$ gyorsulást hoz létre – tehát akkor is változatlanul kifejti hatását –, amikor az $\vec{F}_2$ erő is jelen van, és hasonlóan az $\vec{F}_2$ erő hatása is független az $\vec{F}_1$ erő jelenlététől. Az erők hatásai tehát zavartalanul egymásra rakodnak, szuperponálódnak.

**Ha egy testre egyszerre több erő hat, akkor az erők egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat. Együttes hatásuk az erők vektori összegzésével határozható meg.**

**Ezt a törvényt Newton IV. törvényének vagy az erőhatások függetlensége elvének is nevezik.**



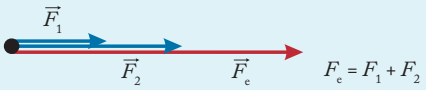

*Ugyanakkora erő hatására a nagyobb tömegű gépkocsin kisebb, míg a kisebb tömegű gépkocsin nagyobb gyorsulást hozhatunk létre*

## Az eredő erő szerkesztése

Ha egy pontszerű testre két erő hat, akkor az eredő erő nagyságát egyszerűen ki tudjuk számítani az alábbi alapesetekben:

**a)** Ha a két erő egyirányú, akkor azok eredőjének nagysága a két vektor nagyságának algebrai összege lesz, iránya pedig az erők irányával egyező, vagyis:

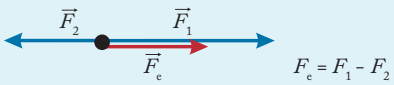
$$F_e = F_1 + F_2$$




*Párhuzamos erők összegzése*

**b)** Ha a két erő ellentétes irányú, akkor azok eredőjének nagysága a két vektor nagyságának algebrai különbsége lesz, iránya a nagyobbik erő irányába mutat:

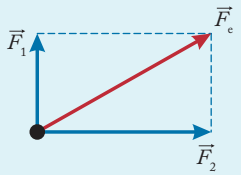
$$F_e = F_1 - F_2$$




*Ellentétes irányú vektorok eredője a nagyobbik összetevő irányába mutat*

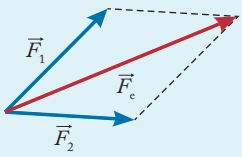
**c)** Ha a két erő egymásra merőleges, akkor azok eredőjének nagysága a két vektor nagyságából a Pitagorasz-tétel segítségével határozható meg:

$F_e = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$, iránya pedig: $\cos\alpha = \frac{F_2}{F_e}$




*Egymásra merőleges vektorok eredője Pitagorasz- tétellel számítható ki*

**d)** Ha a két erő nem ilyen speciális helyzetű, akkor az eredőt paralelogrammamódszerrel határozhatjuk meg. Az eredő erő nagyságának a kiszámítása ebben az esetben bonyolultabb lesz.




*Eredőt paralelogrammamódszerrel szerkesztünk*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

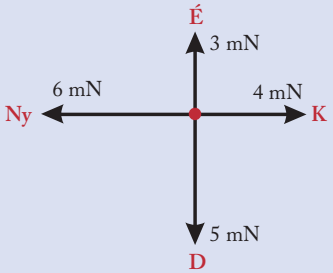
Négy hangya egyszerre kap el egy 1 g tömegű, földön heverő morzsát. Mindegyik maga felé rántja. Az első északi irányba 3 mN (millinewton) erővel, a másik keleti irányba 4 mN erővel, a harmadik déli irányba 5 mN erővel, a negyedik nyugatra 6 mN erővel.

Mekkora gyorsulással és milyen irányba mozdul el a morzsa?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 1$ g,
$F_É = 3$ mN,
$F_K = 4$ mN,
$F_D = 5$ mN,
$F_{Ny} = 6$ mN.

$a = ?$



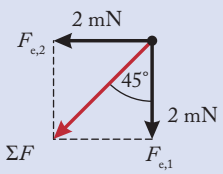

Készítsünk méretarányos ábrát a feladatban szereplő adatok feltüntetésével!

Az egymással ellentétes irányú erőket, tehát az $F_É$ északit és az $F_D$ délit, valamint az $F_{Ny}$ nyugati és az $F_K$ keleti erők eredőjét határozzuk meg elsőként:

$$F_{e,1} = F_D - F_É = 2 \text{ mN},$$

$$F_{e,2} = F_{Ny} - F_K = 2 \text{ mN}.$$

Ezek egyaránt 2 mN nagyságúak lesznek, és a nagyobb erővektorok irányába néznek. Így az ábrán paralelogrammamódszerrel az eredőt is megkaphatjuk:




*Az eredő iránya határozza meg a gyorsulásvektor irányát*

A $\Sigma F$ eredő erőt ezek után Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki:

$$\Sigma F = \sqrt{2} \cdot 2 = 2{,}83 \text{ mN}.$$

A szöge 45°-os, hiszen egy négyzetet határoz meg a két 2 mN nagyságú oldal.

A gyorsulás iránya délnyugati, nagysága a dinamika alaptörvényéből számítható ki.

$$a = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{2{,}83 \text{ mN}}{1 \text{ g}} = \frac{0{,}00283 \text{ N}}{0{,}001 \text{ kg}} = 2{,}83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

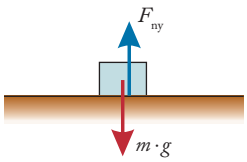
A morzsa délnyugati irányban $2{,}83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozdul el.

## Egyenes vonalú egyenletes mozgás dinamikai feltétele

A $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ egyenletből következik, hogy ha egy pontszerű **testre ható erők eredője nulla**, akkor a test gyorsulása is az, a test mozgásállapota változatlan marad. Ekkor a tömegpont sebessége nulla, vagy pedig **egyenes vonalú egyenletes mozgást végez**. Azt mondjuk, hogy a tömegpont ilyenkor **egyensúlyban** van.

**Példa:** Az asztallapon nyugvó könyvre a nehézségi erő és az asztallap nyomóereje hat. Ennek a két erőnek az eredője nulla.

**A pontszerű test esetén a nyugalomnak, illetve az egyenes vonalú egyenletes mozgásnak az a dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredőjének nagysága nulla legyen.**

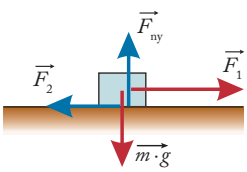



*Nyugalmi helyzet, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás tétrejötte.*

## Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás dinamikai feltétele

Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás esetén a test gyorsulása állandó. A dinamika alaptörvényéből következik, hogy pontszerű test esetében fennáll az alábbi dinamikai feltétel.

**Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnak a dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredőjének nagysága és iránya állandó legyen, hatásvonala essen egybe a pálya egyenesével.**




*Egyenletesen gyorsuló mozgás létrejötte:*
$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT Erővektorok felbontása**

Három azonos, 1 N nagyságú erő egy közös kezdőpontban, de tetszőleges irányban hathat. Mekkora lehet az eredőjük

**a)** maximuma?

**b)** minimuma?

#### MEGOLDÁS

Adat:

$F = 1$ N.

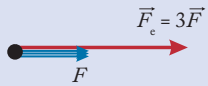
---

*a)* $F_{e,max} = ?$

*b)* $F_{e,min} = ?$

**a)** *A maximális erőt akkor kapjuk, ha mindhárom erő azonos irányban hat a testre.*

Ekkor az eredő erő $F_{e,max} = 3$ N nagyságú lesz.



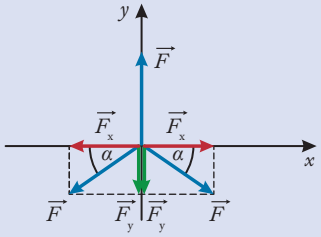

*Három egyirányú erő és eredőjük*

**b)** *A minimális erő akkor lehetséges, ha az eredő egy nullvektor lesz.*

A három azonos nagyságú erő akkor eredményezhet 0 eredőt, ha közös kezdőpontból a három erővektor 120°-os szöget zár be egymással. Ezt egyszerű szimmetriamegfontolásokkal hamar megsejthetjük.

*Igazolásához* azt a módszert választjuk, hogy a vektorokat egy koordináta-rendszer origójába vesszük fel, és azokat felbontjuk $x$ és $y$ irányú összetevőkre a paralelogrammamódszer megfordítottjaként.

Ha az eredő erő nulla lesz, akkor az is teljesülni fog, hogy az $x$ és $y$ irányú összetevők eredője is nulla. Így a $\Sigma \vec{F} = 0$ feltétel vizsgálatát a $\Sigma \vec{F}_x = 0$ és a $\Sigma \vec{F}_y = 0$ vizsgálatával helyettesítjük.




*A három F erőt x és y irányú összetevőkre bontjuk fel*

*Vizsgáljuk meg a* $\Sigma \vec{F}_x = 0$ *feltételt!*

A három erővektort úgy vesszük fel, hogy egyikük az *y* tengelyre essen. Ekkor a másik két vektort felbontjuk *x* (pirossal jelölve), illetve *y* (zölddel jelölve) irányú összetevőkre.

Az ábra szimmetriája miatt a két vektor azonos szöget zár be az *x* tengellyel. A másik két vektor *x* irányú $\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos \alpha$ összetevői pedig azonos nagyságúak és ellentétes irányúak, így a $\Sigma \vec{F}_x = 0$ feltétel teljesül rájuk.

*Vizsgáljuk meg ezek után a* $\Sigma \vec{F}_y = 0$ *feltételt!*

Ez akkor fog teljesülni, ha $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_y$ teljesül. A vektorjelöléseket elhagyva és *y* irányú összetevőt kifejezve, a következő egyenlethez jutunk:

$F = 2F \cdot \sin \alpha$, amelyből $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ egyenlethez jutunk.

Itt csak 90°-nál kisebb szöget keresve az $\alpha = 30°$-os megoldáshoz jutunk. Mivel a két vektor hajlászögének kiszámításához még hozzá kell adnunk a koordinátatengelyek derékszögét, ezért megkaptuk, hogy a vektorok szöge 120°-os lesz, ahogy azt már megsejtettük.

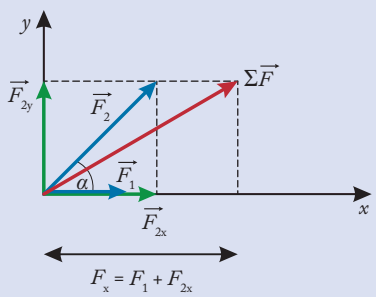
**2. FELADAT** Egy vízen úszó csónakot két motorcsónak akar kihúzni a partra. Az egyik 100 N erővel húzza keleti irányba, a másik pedig 150 N erővel északkeleti irányba. A csónak tömege 500 kg.

Mekkora gyorsulással indul meg a csónak ezen erők hatására?

## MEGOLDÁS

Adatok:
$F_1 = 100$ N,
$F_2 = 150$ N,
$\alpha = 45°$,
$m = 500$ kg.

$a = ?$




*Az* $F_1$ *és* $F_2$ *erőket a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos irányban bontjuk fel*

Az erőket helyezzük el egy derékszögű koordinátarendszerben, az origóban legyen a csónak, $\vec{F}_1$ erő az *x* tengelyen van, $\vec{F}_2$ ezzel 45°-os szöget zár be. Bontsuk fel a két erőt *x* és *y* irányú összetevőkre!

$\vec{F}_2$ *x* és *y* irányú összetevői:

$\vec{F}_{2x} = \vec{F}_2 \cdot \sin \alpha$,

$\vec{F}_{2y} = \vec{F}_2 \cdot \sin \alpha$.

Mivel az *x* tengelyen $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_{2x}$ erők vannak, ezek azonos irányba mutató vektorok.

Eredőjük legyen $F_x$, melynek nagysága:

$F_x = F_1 + F_{2x} = F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha = 100 + 150 \cdot 0{,}71 =$
$= 206{,}5$ N

Az eredő erő (a pirossal jelölt $\Sigma F$) nagyságát $F_x$ és $F_{2y}$ segítségével, Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.

$\Sigma F = \sqrt{F_x^2 + (F_{2y})^2}$, $= \sqrt{F_x^2 + (F_2 \cdot \sin \alpha)^2} =$
$= \sqrt{206{,}5^2 + 106{,}5^2} = 232{,}3$ N

A csónak gyorsulásának nagysága a dinamika alaptörvényéből:

$$a = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{232{,}3 \text{ N}}{500 \text{ kg}} = 0{,}46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A csónak $0{,}46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással indul meg a két erő hatására.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit mond ki a dinamika alaptörvénye?
2. Mi az egyenes vonalú egyenletes és az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás dinamikai feltétele?
3. Egy 1 kg tömegű testre két erő hat, az egyik 4 N nagyságú, a másik 3 N nagyságú. Mekkora lehet a test gyorsulásának maximuma és minimuma? Lehet-e a test gyorsulása $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?
4. Ha egy testre egy északi irányú 3 N nagyságú és egy keleti irányú 4 N nagyságú erő hat, akkor mekkora és milyen irányú erő hatására lesz egyensúlyban? Biztos-e, hogy a test áll?
5. Egy testre állandó nagyságú és irányú erő hat. Biztos-e az, hogy a test sebessége egyenletesen változik az időben?

# 4. Mechanikai erőhatások: a súlyerő és a rugóerő

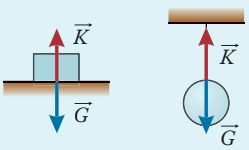
## EMLÉKEZTETŐ

### A súlyerő és a nehézségi erő kapcsolata

Az egyik legfontosabb mechanikai erőfajtával, az $F_{neh} = m \cdot g$ nehézségi erővel a Newton II. és III. törvénye című leckében már megismerkedtünk. Most nézzük meg, milyen kapcsolat áll fenn a súlyerő és a nehézségi erő között!

**Azt az erőt, amellyel a test az alátámasztást nyomja, illetve amellyel a függőleges felfüggesztést húzza, súlynak vagy súlyerőnek nevezzük.**

**Jele: *G*.**




*A súly az alátámasztásra, illetve a felfüggesztésre hat*

Az asztal (a második rajzon pedig a fonál) $K$ erővel hat a testre. Ennek a $K$ erőnek az ellenereje a test alátámasztásra (a második rajzon a felfüggesztésre) ható $G$ súlya.

**A nyugalomban lévő test súlya és a testre ható nehézségi erő egyenlő: $m \cdot g = G$.**

A különbség a két erő között az, hogy **a nehézségi erő a testre hat, a súlyerő pedig az alátámasztásra, illetve a felfüggesztésre**.

### Súlyerő és tömeg

A nehézségi erő, illetve a súlyerő, valamint a tömeg a hétköznapi életben sokak számára összemosódik. Ez általában abban nyilvánul meg, hogy gyakran az erőhatások mértékét is helytelenül kilogrammban adják meg.

**Példa:** Arra a hétköznapi kérdésre, hogy „Mennyi a súlyod?”, általában ilyen válaszok érkeznek például: „80 kg.” Ennél a kérdésnél a tömeg és a súlyerő összekeverése figyelhető meg. A hétköznapi mérlegeléseknél is általában súlyerő megmérése történik, a skálák mégis tömegegységben jelzik ki az eredményt. A tömeg és a súlyerő azonban két teljesen különböző fizikai mennyiség.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Tamás a fizikaórán azt a házi feladatot kapta, hogy határozza meg, mekkora tömbházukban a felvonó egyenletes haladásának a sebessége. Tamás megmérte, hogy a lift a földszintről 33 s alatt jut fel a legfelső emeletig.

Ezt követően a szobamérlegét is bevitte a liftbe. A földszintről történő indulásakor 2 s-ig 66 kg-ot mutatott a mérleg a tényleges 60 kg tömege helyett. Azt is sikerült megállapítania, hogy a felső emeletre való megérkezésekor 1 s alatt fékeződik le a lift.

**a)** Mekkora gyorsulással indul a lift?
**b)** Mekkora a lift sebessége, amikor egyenletesen halad?
**c)** Milyen magas az épület, ha a lift 3 m magas?
**d)** Mit mutat a mérleg, mielőtt a felső emeletre érve megáll?

### MEGOLDÁS

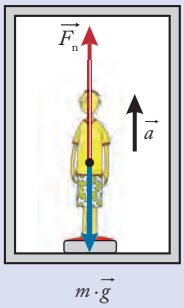
Adatok:
$t = 33$ s,
$m = 60$ kg,
$t_1 = 2$ s,
$l = 3$ m,
$t' = = 1$ s,
$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $a = ?$
*b)* $v = ?$
*c)* $h = ?$
*d)* $F = ?$

Először érdemes megállapítani azt, hogy a mérleg súlyerőt mér, amit tömegegységekben adnak meg, hiszen a mérleget általában (nyugalmi súly mérésén alapuló) tömegmérésre használják. Így felvehetjük az adatok közé a $G = 660$ N súlyerőt is.

**a)** A földszintről felfelé gyorsulva induló liftben Tamásra két erő hat:
– az $mg$ nehézségi erő lefelé,
– a mérleg által Tamásra kifejtett felfelé irányuló $F_n$ nyomóerő.




*A felfelé irányuló gyorsulást a ható erők eredője hozza létre*

Az $F_n$ nyomóerő ellenereje lesz a $G$ súlyerő, ezt az ábrán nem tüntettük fel, mert az nem Tamásra hat, hanem a mérlegre. Tehát a $G$ súlyerő azonos nagyságú az $F_n$ nyomóerővel.

Tamás felfelé gyorsul, így $F_n > m \cdot g$. Tamásra ható eredő erő: $\Sigma F = F_n - m \cdot g$.

Ezt a dinamika alaptörvényébe beírva:

$$\Sigma F = m \cdot a = F_n - m \cdot g,$$

amelyből a gyorsulás:

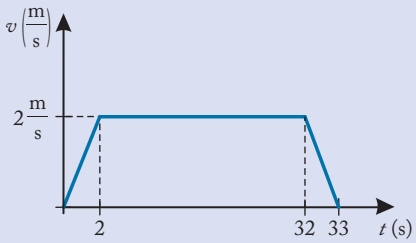
$$a = \frac{F_n - m \cdot g}{m} = \frac{660\ \text{N} - 600\ \text{N}}{60\ \text{kg}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A lift felfelé $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással indul.

**b)** Az első szakaszt a lift $t_1 = 2$ s alatt teszi meg.
A $v = a \cdot t_1$ összefüggés alapján a lift sebessége $v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz az első szakasz végére.

A lift egyenletesen is $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad.

**c)** Készítsük el a mozgás sebesség-idő grafikonját!




A lift által megtett út a grafikon alatti terület, azaz a trapéz alapján számítható ki:

$$s = \frac{33\ \text{s} + 30\ \text{s}}{2} \cdot 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 63\ \text{m}$$

A lift által megtett úthoz hozzá kell adnunk a lift $l$ magasságát, hiszen a lift alja mozdult el ennyit. Az épület magassága minimálisan $h = s + l = 66$ m. (Ez kb. a szolnoki 18 emeletes toronyházak magassága.)

**d)** A lift lassulása az $a = \frac{\Delta v}{t}$ összefüggésből $a' = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-nek adódik.

A fékeződéskor az $mg > F_n'$.

A mozgásegyenlet a következő:

$$m \cdot a' = m \cdot g - F_n',$$

amelyből

$$F_n' = m \cdot g - m \cdot a' = m(g - a')$$

Behelyettesítve:

$$F_n' = 60\ \text{kg} \cdot 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 480\ \text{N}.$$

A mérleg tehát 480 N erőt fog mutatni.

## A súlytalanság

**A súlytalanság állapotában a test nem nyomja az alátámasztási felületet, és nem húzza a felfüggesztést.**

Ez azt is jelenti, hogy **a testre a nehézségi erőn kívül semmilyen más erő nem hat**. Az elejtett (zuhanó, szabadon eső) testek súlya tehát mindig nulla. Ugyanígy a feldobott vagy oldalirányban, akár ferdén eldobott, repülő testek súlya is nulla.





*A magasugró ugrás közben és a Föld körüli űrséta közben keringő űrhajós egyaránt a súlytalanság állapotában van*

## Súlytalanság az űrállomáson

Különösen problémás egy űrállomáson a súlytalanság értelmezése. Az űrállomáson az űrhajósok nem nyomják az alátámasztást, és az alátámasztás sem hat rájuk.

A Nemzetközi Űrállomás kb. 400 km magasságban kering, ahol a gravitációs gyorsulás a földi érték 90%-a (tehát a nehézségi erő ott is hat a testekre).

Ebből következik, hogy **az űrhajósok az űrállomással együtt szabadon esnek a Föld középpontja felé, súlytalansági állapotban vannak**. Azonban a szabadeséssel egy időben, 8 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel érintőirányban is távolodnak a Földtől.

Nézzük meg erre az esetre a következő kidolgozott feladatot!

### KIDOLGOZOTT FELADAT

A Föld körül keringő, a súlytalanság állapotában lévő űrhajó körpályán halad. Számítsuk ki, hogy a 6371 km sugarú Föld esetében mekkora érintőirányú kezdősebesség esetén tud megvalósulni az ezen a körpályán való haladás!

A körpályát fogjuk fel úgy, hogy az egy érintőirányú kezdősebességet kapott „távolodó" mozgás és egy, a Föld középpontja felé irányuló szabadesés szuperpozíciója.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$R = 6370$ km,

$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

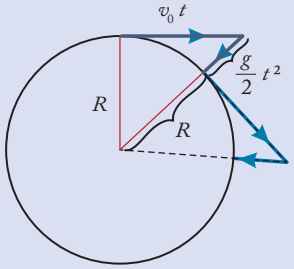
$v = ?$

A körpályán való haladást tehát az ábra jelöléseivel úgy képzeljük el, hogy

- az egy egységnyi ideig tartó $v_0$ kezdősebességű érintőirányú mozgás és
- a szabadesés szuperpozíciója.

A pirossal jelölt háromszögre írjuk fel Pitagorasz tételét:

$$\left(R + \frac{g}{2}t^2\right)^2 = R^2 + (v_0 \cdot t)^2$$




A $t$ időnek konkrét értéket adhatunk a könnyebb számolás érdekében. Ezért vegyük az egységnyi időt nagynak, mondjuk legyen $t = 100$ s, és térjünk át részint számértéki egyenletre. Az $s = \frac{g}{2}t^2$ számértéke 50 000 m = = 50 km lesz.

Ezt írjuk be az egyenletbe, megjegyezve azt, hogy a Föld sugara is kilométerben lesz megadva, az idő másodpercben, így a végén a $v_0$ kezdősebességet $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ mértékegységben kapjuk meg.

$(R + 50\text{ km})^2 = R^2 + (v_0 \cdot 100\text{ s})^2$

Elvégezve a négyzetre emelést, majd $R^2$-et kiejtve:

$100\text{ km} \cdot R + 2500\text{ km}^2 = v_0^2 \cdot 10^4\text{ s}^2$

Ebből 100-zal történő egyszerűsítés után a

$$v_0^2 = \frac{6370\text{ km}^2 + 25\text{ km}^2}{100\text{ s}^2},$$

amelyből $v_0 \approx 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Ez azt jelenti, hogy egy érintőirányba közel 8 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel elhajított test képes „körbezuhanni" a Földet. Ezt a sebességet később majd az első kozmikus sebességnek nevezzük, és egy másik levezetéssel is megkapjuk az értékét.

*Megjegyzés:* Láthatjuk, hogy 8 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ érintőirányú sebességgel történő egyenes haladás után a Föld görbülete kb. 5 m lesz, továbbá a szabadesés során az űrhajó 1 s alatt 5 m-t esik szabadon, így éppen körbeesi a Földet.

## A rugóerő

Ha egy rugóra egy testet akasztunk, akkor a testre ható nehézségi erő révén a rugóra egy húzóerő fog hatni. Az erő-ellenerő törvénye miatt a rugóra ható húzóerővel ellentétes irányú, egyenlő nagyságú erőt fejt ki a rugó. A rugó által kifejtett $F_r$ erő egyenesen arányos a $\Delta l$ megnyúlással.

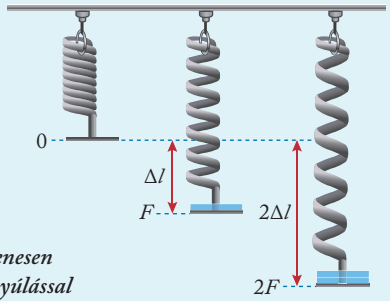
**A rugó által kifejtett $F_r$ erő egyenesen arányos a $\Delta l$ megnyúlással, így $F_r \sim \Delta l$. A két mennyiség hányadosa állandó:**

$$\frac{F_r}{\Delta l} = D \text{ (állandó)}$$

**A rugó által kifejtett erő és a rugóban létrejött megnyúlás hányadosát rugóállandónak (direkciós állandónak) nevezzük.**

**A rugóállandó jele: $D$. Mértékegysége: $\frac{\text{N}}{\text{m}}$.**

**A rugóállandó megmutatja, hogy egy rugó 1 m-rel való megnyújtásához mekkora erőhatásra van szükség.**




*Az $F_r$ rugóerő egyenesen arányos a $\Delta l$ megnyúlással*

Két rugót összehasonlítva a nagyobb rugóállandójú rugót tekintjük erősebbnek, mert azon ugyanakkora erőhatás kisebb mértékű hosszváltozást eredményez.

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

Egy 60 cm hosszú expander 20 cm-es megnyújtásához 50 N erőre van szükség. Mekkora erővel hatottunk az expanderre, ha 105 cm hosszúságúra sikerült megnyújtanunk? (Az expander rugója által kifejtett rugóerő nagysága megegyezik a kezünk által kifejtett húzóerővel.)

**MEGOLDÁS**

Adatok:

$l_0 = 60\ \text{cm} = 0{,}6\ \text{m}$,

$\Delta l_1 = 0{,}2\ \text{m}$, $F_{r_1} = 50\ \text{N}$,

$l_2 = 1{,}05\ \text{m}$.

$F_{r_2} = ?$

Az expander rugóállandója:

$$D = \frac{F_{r_1}}{\Delta l_1} = \frac{50\ \text{N}}{0{,}2\ \text{m}} = 250\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Az $l_2$ megnyújtás esetén az expander megnyúlása:

$\Delta l_2 = l_2 - l_0 = 1{,}05\ \text{m} - 0{,}6\ \text{m} = 0{,}45\ \text{m}$

A megnyújtáshoz szükséges erő:

$$F_{r_2} = D \cdot \Delta l_2 = 250\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}45\ \text{m} = 112{,}5\ \text{N}$$

Az expanderre 112,5 N erővel hatottunk.

## Lineáris erőtörvény

**A rugó által kifejtett rugalmas erő mindig ellentétes irányú a rugó megnyúlásával, nagysága pedig a rugó megnyúlásával egyenesen arányos.**

$$\vec{F}_r = -D \cdot \vec{\Delta l}$$

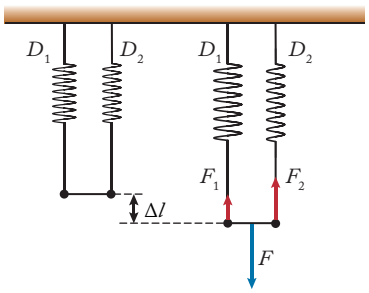
**Ezt a rugó erőtörvényének vagy lineáris erőtörvénynek nevezzük.**

A rugó erőtörvénye a Robert Hooke-ról elnevezett Hooke-törvény egyik alakja. Ezt a vektoros, előjeles alakot azonban ritkán használjuk. Helyette az erők berajzolása után a különböző irányú erők nagyságának előjeles összegzésével oldjuk meg a feladatokat.

## Rugók kapcsolása

### Párhuzamos kapcsolás

Ha egyforma rugókból többet párhuzamosan összekapcsolunk, például az expander nevű erősítőeszköznél, akkor az „expander erősebb lesz”, a rugóállandója megnő. Vezessük le, milyen összefüggés áll fenn a több rugó párhuzamos összekapcsolásával előálló rugórendszer eredő rugóállandója és a rendszert alkotó egyes rugók rugóállandója közt!




*Párhuzamosan kapcsolt rugók esetén az egyes rugókban ugyanakkora megnyúlás esetén különböző nagyságú erők ébrednek*

Tekintsük a $D_1$ és $D_2$ rugóállandójú rugókat, ezeket kötjük párhuzamosan. Mivel a rugók különböző rugóállandójúak, ezért ugyanazon $\Delta l$ megnyúlástól különböző rugóerők ébrednek bennük, ezeket $F_1$-gyel, illetve $F_2$-vel jelöltük. Az összekötő rúd nyugalomban van, így a rá ható erők eredője nulla: $F = F_1 + F_2$.

A párhuzamosan kapcsolt rugók $D_e$ eredő rugóállandójára fennáll

$$D_e = \frac{F_r}{\Delta l}$$

összefüggés. A rugókban ébredő erő a két összetevő összege lesz, ami egyenlő $F$-fel is. Az $F_1$ és $F_2$ erők pedig kifejezhetők a rugóerő törvényéből:

$$F = F_r = F_1 + F_2 = D_1 \cdot \Delta l + D_2 \cdot \Delta l$$

Ezek után az eredő rugóállandó már könnyen kifejezhető:

$$D_e = \frac{F_r}{\Delta l} = \frac{D_1 \cdot \Delta l + D_2 \cdot \Delta l}{\Delta l}$$

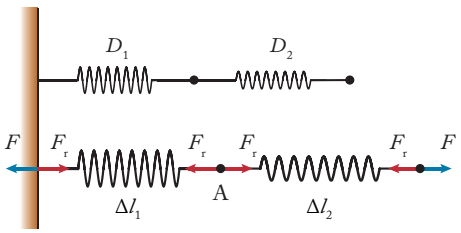
Egyszerűsítés után **a két párhuzamosan kapcsolt rugó eredő rugóállandója:**

$$D_e = D_1 + D_2$$

Az összefüggés tetszés számú rugóra általánosítható. Ezek szerint **több párhuzamosan kapcsolt rugó eredője az egyes rugóállandók összeadásával kapható meg**.

## Soros kapcsolás

Sorba kapcsolt rugók esetén a két rugó összekapcsolási helyén lévő A pontot két rugóerő húzza, ellentétes irányban. Ezek erő-ellenerő párokat alkotnak, ezért Newton III. törvénye értelmében azonos nagyságúak. Azonban különböző rugóállandójú rugókon ugyanaz az erő különböző megnyúlást okoz. Az első rugó megnyúlása legyen $\Delta l_1$, a második rugóé pedig $\Delta l_2$.




*Sorba kapcsolt rugók esetén különböző rugóállandójú rugókon ugyanaz az erő különböző megnyúlást hoz létre*

Az $F$ húzóerő hatására a rendszer megnyúlása a rugók megnyúlásainak összege:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Ezt írjuk be a rugóállandót meghatározó egyenletbe:

$$D_e = \frac{F_r}{\Delta l} = \frac{F_r}{\Delta l_1 + \Delta l_2}$$

A megnyúlásokat ki tudjuk fejezni a $\Delta l = \frac{F_r}{D}$ képletből, felhasználva azt, hogy a rugóban végig ugyanaz az $F_r$ erő fog ébredni. A megnyúlásokat beírva:

$$D_e = \frac{F_r}{\Delta l_1 + \Delta l_2} = \frac{F_r}{\frac{F_r}{D_1} + \frac{F_r}{D_2}}$$

Az $F_r$ erővel egyszerűsítve, majd mindkét oldal reciprokát véve, **a két sorba kapcsolt rugó eredő rugóállandója:**

$$\frac{1}{D_e} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

A sorosan kapcsolt rugók esetén tehát a fenti reciprok-összegzés teljesül.

Megmutatható az is, hogy **a sorosan kapcsolt rugók eredő rugóállandója mindig kisebb, mint bármelyik eredeti rugóé. A soros rendszer „lágyabb", mint bármelyik rugója külön.**

## ALKALMAZÁSOK

### Gépjárművek rugózása

A gépjárműgyártók a gépjárművek rugózásával az úttest egyenetlenségeinek a hatását kiküszöbölve kényelmesebbé és biztonságosabbá tudják tenni a jármű haladását. A kívánt hatást azonban nem csak a futóműveknél lévő rugóval érik el. A rugalmasságot szolgálja, hogy az autó kerekei – ellentétben például a vonatkerekekkel – gumitömlősek, továbbá a gépjárművek ülései is rendelkeznek rugalmassággal. Így egy autó egy több rugóból álló rendszernek tekinthető, amelynek megfelelő méretezése, a kialakuló rezgések, lengések csillapítása komoly műszaki-fizikai tudást igényel.

*Megjegyzés:* Nem csak a műszaki életben dolgozó mérnökök találkoznak rugókkal. Az izomrostok is a rugórendszerekhez hasonló tulajdonságokkal írhatók le, így a biofizikusok is gyakran használják a rugóerőt.



*Gépjárművek futóműveiben laprugót és csavarrugót is használnak*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen erőt nevezünk súlyerőnek? Mikor mondjuk, hogy egy test a súlytalanság állapotában van?
2. Milyen erőtörvény teljesül a rugókra? Mit állapíthatunk meg a sorba, illetve párhuzamosan kapcsolt rugókról?
3. Egy lift elindul a tizedik emeletről lefelé. Jellemezzük azt, hogy a mozgása során hogyan változik a benne álló utasok súlya és tömege!
4. Egy hosszú rugóból levágunk egy rövidebb darabot. Nőtt vagy csökkent ezzel a rugóállandója?
5. A súly fogalmának definíciója alapján fogalmazzuk meg, hogy mi a gond a következő tankönyvi mondattal: „A Holdon a $g$ értéke a földi értéknek a hatoda, tehát a Holdon a testek súlya is csak egyhatoda a Földön mért értéknek."

# 5. A súrlódási és közegellenállási erő

## Szabaderők és kényszererők

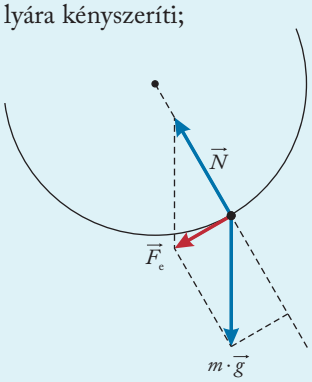
A testekre mozgásuk közben erők hatnak. Ezek közül azokat a jellegzetes, gyakran fellépő kölcsönhatásokból származó erőket, amelyek valamilyen erőtörvénnyel írhatók le, **szabaderőknek** nevezzük. Ilyenek például a nehézségi erő ($F_{neh} = m \cdot g$) és a rugóerő ($F = -D \cdot \Delta l$).

**Szabad mozgások** azok, amelyekre mozgásuk során kényszer nem hat. Ilyen például az elhajított kő mozgása. A szabad mozgásokra az a jellemző, hogy a mozgást jellemző kezdeti adatok és a mozgást leíró erőtörvény egyértelműen megszabja a mozgást.

Léteznek olyan mozgások, amelyeknél egy felület vagy egy kötél szabja meg a mozgás pályáját. Az ilyen mozgásokat **kényszermozgásoknak**, a kényszermozgást leíró felületet, például kötelet, a mozgás szempontjából **kényszerfeltételnek** nevezzük. A kényszerfeltétel általában valamilyen geometriai jellegű feltétellel adható meg.

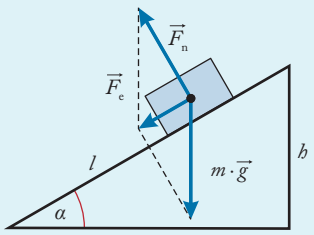
**Példák:**
Kényszerfeltételek lehetnek:

- az asztalon heverő könyvre az asztal függőlegesen felfelé irányuló nyomóerőt fejt ki, hogy biztosítsa azt az $F_n$ nyomóerőt (geometriai feltételt), hogy a könyv az $mg$ nehézségi erő mint szabaderő hatására ne haladjon át az asztallap síkján a Föld középpontja felé;
- a vasúti szerelvény csak a sínek által meghatározott pályán haladhat, kanyarodáskor a sín oldalirányú nyomóerőt is gyakorol a szerelvényre;
- az elengedett ingatest $mg$ szabaderő hatására szabadesést végezne, de a kötélben ébredő $K$ kötélerő (mint kényszererő) és az $mg$ nehézségi erő körív alakú pályára kényszeríti;




*A kényszererő merőleges a kényszerpályára*

- a csúszda tetején lévő gyerek is a nehézségi erő mint szabaderő hatására szabadesést végezne, de a lejtőn fellépő $F_n$ nyomóerő és az $mg$ nehézségi erő lejtőirányú mozgásra kényszeríti.

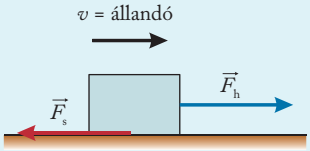



*A lejtőn lévő testre a nehézségi erő mint szabaderő, és a lejtő nyomóereje mint kényszererő hat*

A kényszerfeltétel során kifejtett erőt **kényszererőnek** nevezzük. A kényszererők szerepe abban nyilvánul meg, hogy a szabaderők eredőjének irányát a test valódi mozgásának irányába módosítják.

## A csúszási súrlódási erő

Egy testre vízszintes talajon állandó nagyságú $F_h$ húzóerő esetén **fékezőerő hat**. Ezt a fékezőerőt nevezzük **súrlódási erőnek**. **Jele: $F_s$.**




*Állandó sebesség esetén a húzóerő nagysága megegyezik a súrlódási erő nagyságával*

A csúszási súrlódási erő nagysága

- egyenesen arányos a felületre merőleges nyomóerővel ($F_s \sim F_{ny}$),
- nem függ az érintkező felületek nagyságától,
- függ az érintkező felületek anyagi minőségétől.

**A csúszási súrlódási erő az érintkező felületek érdességére jellemző csúszási súrlódási együttható és a felületre merőleges nyomóerő szorzata:**
**$F_s = \mu \cdot F_{ny}$,**

**ahol $\mu$ a csúszási súrlódási együttható.**

A csúszási súrlódási együttható egy viszonyszám, mely a felület és a test közt fellépő tényezőket (felületek minősége, a felületek közötti kenőanyag hatása) veszi figyelembe.

A csúszási súrlódási erő szabaderő, **iránya** általában **a test mozgásának (sebességének) irányával ellentétes**.

## A tapadási súrlódási erő

A tapadási súrlódás jelenségének nevezzük, ha a talaj és a vele érintkező felület egymáshoz képest nem mozdul el, miközben a felületek érdességei között erőhatás lép

fel. A felület síkjában mindkét testre erő hat, melyek egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak.

**A tapadási súrlódás következtében fellépő erőt tapadási súrlódási erőnek nevezzük.**

**Jele: $F_t$.**

**A tapadási súrlódási erő nagysága nem egy meghatározott érték, hanem nagysága pontosan akkora és iránya olyan, hogy a két súrlódó felület egymáshoz képest ne mozduljon el.**

A tapadási súrlódási erő mindig kényszererőként lép fel.

**Az az erő, amelynek hatására a sík talajon addig álló test éppen megindul, egyenlő a tapadási súrlódási erő legnagyobb értékével. Ezt a tapadási súrlódási erő maximumának nevezzük, amely egyenesen arányos a testet a talajhoz nyomó erővel.**

**Jele: $F_{t,max}$.**

$$F_{t,max} \sim F_{ny} \sim F_{t,max} = \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

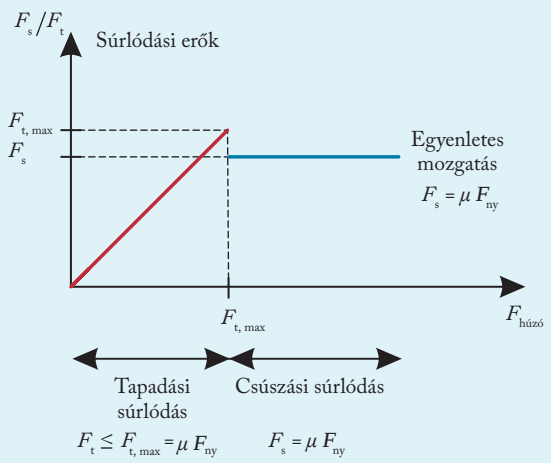
**A $\mu_0$ tapadási súrlódási együttható függ az érintkező felületek anyagi minőségétől.**

**A tapadási súrlódási erő nagyságára felírható:**

$$0 < F_t < F_{t,max} = \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

## A súrlódási erők összehasonlítása

A súrlódástól tanultakat grafikonon foglaljuk össze. A grafikon azt az esetet tárgyalja, amikor egy vízszintes felületen nyugvó testre húzóerővel kezdünk hatni.




*Egy test megindításakor először a tapadási, megindulása után a csúszási súrlódási erő hat*

Kezdetben a test nem mozdul el, amíg a test és a felület közt a **tapadási súrlódási erő** lép fel. Ekkor a tapadási súrlódási erő éppen akkora, mint a húzóerő. Tovább növelve a húzóerőt, elérjük a tapadási súrlódási erő maximumát. Ekkor a test megcsúszik, innen kezdve a testre a **csúszási súrlódási erő** fog hatni. A test egyenletes mozgatáshoz a tapadási súrlódási erő maximumánál kisebb nagyságú csúszási súrlódási erőre van szükség.

## A csúszási és a tapadási súrlódási együttható

**A csúszási és a tapadási súrlódási erő között fennáll:**

$$F_{t,max} > F_s \Rightarrow F_{t,max} = \mu_0 \cdot F_{ny} > F_s = \mu \cdot F_{ny} \Rightarrow \mu_0 > \mu$$

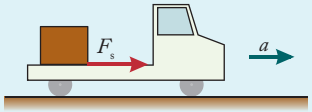
A tapadási súrlódási együttható értéke nagyobb a csúszási súrlódási együtthatónál.

| Az egymással érintkező anyagok | Tapadási súrlódási tényező ($\mu_0$) | Csúszási súrlódási tényező ($\mu$) |
|---|---|---|
| acél–acél | 0,14 | 0,1 |
| fa–fa | 0,4–0,6 | 0,2–0,4 |
| fa–fém | 0,6 | 0,4–0,5 |
| fékbetét–acél | – | 0,4 |
| gumi–acél | – | 1,6–3 |
| gumi–aszfalt | 0,6–1,4 | 0,4–0,9 |
| vas–jég | – | 0,014 |
| vas–hó | – | 0,035 |

*A súrlódási tényezők értéke nagyban függ a felületek minőségétől*

**Példa:** Néha az a cél, hogy a súrlódási erő nagy legyen. Például a gumiabroncsok kopottságát büntetik, a jeges járdát felszórják homokkal, az atléták szöges cipőt húznak, a vészfékező villamost egy elektromágnes nagy erőkkel a sínekhez húzza. Sok esetben viszont csökkenteni igyekeznek a súrlódási erőt. Ilyenkor a felületek közé kenőanyagokat juttatnak, vagy a testeket légpárnán mozgatják egymás felett.

**Példa:** A súrlódási erő nemcsak mozgást akadályozó erő lehet, hanem gyorsíthat is egy testet, mint ezt példánk mutatja. Egy teherautó állandó $a$ gyorsulással gyorsul, míg a platóján egy $m$ tömegű láda lassan csúszik hátrafelé. Az $m$ tömegű láda a teherautó gyorsulásához képest kisebb gyorsulással gyorsul a platón. A ládára az $F_s$ súrlódási erő hat a teherautó gyorsulásának irányában. A ládához képest a teherautó sebességének iránya és a ládára ható súrlódási erő iránya megegyezik.




*Gyorsuló teherautó, platóján egy ládával*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

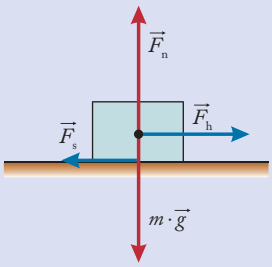
Egy 40 kg tömegű szánkót vízszintes irányban 80 N erővel húz egy szánhúzó kutya. A havas út és a szánkó közötti csúszási súrlódási együttható értéke 0,15. Mekkora a szánkó gyorsulása?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 40$ kg, $F_h = 80$ N, $\mu = 0{,}15$.

$a = ?$

Az erőket méretarányosan a test tömegközéppontjában vesszük fel, így az erővektorok szerkesztését el tudjuk végezni. A testre vízszintes irányban az $F_h$ *húzóerő* és $F_s$ *súrlódási erő* hat, míg függőleges irányban az $m \cdot g$ *nehézségi erő* és $F_n$, *a talaj nyomóereje*.




*A testre ható erők függőleges és vízszintes irányban*

Felírjuk két egymásra merőleges irányban a mozgásegyenleteket.

Függőleges irányú elmozdulás nincs, ezért a függőleges irányú erők eredője nulla. Így a nehézségi erő egyensúlyt tart a talaj nyomóerejével.

Vízszintes irányban a szánkóra az $F_h$ húzóerő és az $F_s$ súrlódási erő hat, eredőjük hatására vízszintesen gyorsul a szánkó.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= F_n - m \cdot g \\ F_e &= F_h - F_s \end{aligned}\right\}$$

A dinamika alaptörvényét felhasználva: $m \cdot a = F_h - F_s$, amelyből:

$$a = \frac{F_h - F_s}{m}$$

A súrlódási erőt vízszintes talajon az alábbi összefüggésből számíthatjuk ki:

$$F_s = \mu \cdot F_n = \mu \cdot m \cdot g$$

Behelyettesítve:

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}15 \cdot 40 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 60 \text{ N}$$

$$a = \frac{F_h - F_s}{m} = \frac{80 \text{ N} - 60 \text{ N}}{40 \text{ kg}} = 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A szánkó $0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog.

## Gördülési ellenállás

A gördülési ellenállási erő ($F_g$) sokkal kisebb, mint a csúszási súrlódási erő, de jellegében hasonlít rá, bár annál bonyolultabb. Egyszerűsített esetben a súrlódási erőhöz hasonló módon közelíthetjük.

**A gördülési ellenállási erő nagysága:**

**$F_g = \mu_g \cdot F_{ny}$,**

**ahol $\mu_g$ a gördülési ellenállási együttható.**

**Jele: $F_{g,max}$.**

**Példa:** A $\mu_g$ gördülési ellenállási együttható értéke annál kisebb, minél nagyobb a kerék sugara. Értéke attól is függ, hogy mekkora felületen érintkezik a kerék a talajjal.

**Példa:** Az autósok figyelmét nem véletlenül hívják fel arra, hogy ne járjanak lapos gumiabronccsal, mert az növeli az autó fogyasztását. Kerékpárnál mi is tapasztalhatjuk, hogy puha gumikkal nem lehet olyan jól haladni. A gördülési ellenállási együttható általában jelentősen kisebb, mint a csúszási együtthatók.

| Gumikerék | $\mu_g$ | Egyéb kerék | $\mu_g$ |
|---|---|---|---|
| aszfalt- és betonúton | 0,015–0,025 | vasalt kerék földúton | 0,2 |
| földúton | 0,05–0,15 | vasalt kerék betonúton | 0,01 |
| homokban | 0,15–0,30 | vasúti kocsi acélabroncsú kereke acélsíneken | 0,002 |

*Gördülési ellenállási tényezők értékei azonos méretű kerekek esetén*

## Közegellenállási erő

**A levegőben vagy a folyadékban mozgó testekre a súrlódáshoz hasonló, a relatív mozgást akadályozó erő hat. Ezt az erőt általánosan közegellenállási erőnek nevezzük, levegőben gyakran légellenállásnak.**

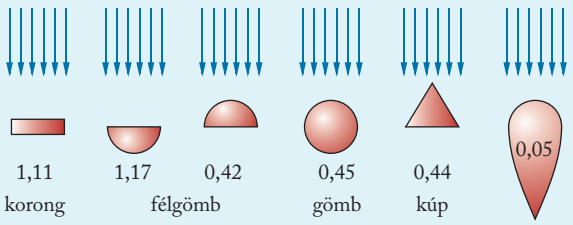
**Jele: $F_{kö}$.**

A közegellenállási erő iránya mindig ellentétes a testnek a közeghez viszonyított sebességével. Csak a nagyobb sebességeknél fellépő erő fajtájával foglalkozunk. A problémakör részleteit a folyadékok és gázok áramlása című fejezetnél fogjuk megismerni.

**Gondos mérések alapján a közegellenállási erő függ:**
- **az adott test közeghez viszonyított relatív sebességének négyzetétől, $F_{kö} \sim v^2$,**
- **a közeg sűrűségétől, $F_{kö} \sim \rho$,**

– **a test homlokfelületétől, $F_{kö} \sim A$,**
– **a test alakjától ($k$).**

$$F_{kö} = k \cdot A \cdot \frac{1}{2} \varrho \cdot v^2$$




*Különböző alakú testek k közegellenállási tényezője*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

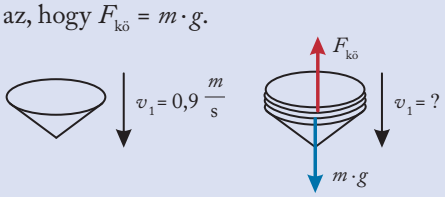
Nagy méretű, kis tömegű, tölcsérszerű lapos papírkúpokat elengedve megfigyelhetjük, hogy azok 1-2 cm esési út után a légellenállástól fékezve már egyenletesen esnek lefelé. Egy ilyen papírkúp esési sebessége $0{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ha négy ugyanilyen papírkúpot egymásba illesztünk, akkor annak mekkora lesz az esési sebessége?

### MEGOLDÁS

Adat:
$v_1 = 0{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$v_2 = ?$

Ha a papírkúpok egy elhanyagolható távolságú esés után felveszik állandó sebességüket, akkor teljesül rájuk az, hogy $F_{kö} = m \cdot g$.




*A papírkúpra lefelé a nehézségi erő, míg felfelé a közegellenállási erő hat*

Ezt külön-külön felírhatjuk az egyszeres és a négyszeres tömegű kúpra is, a közegellenállási erőt részletezve:

$$\frac{1}{2} k \cdot A \cdot \varrho \cdot v_1^2 = m \cdot g \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} k \cdot A \cdot \varrho \cdot v_2^2 = 4\, m \cdot g$$

Vegyük a bal oldali egyenlet és a jobb oldali egyenlet hányadosát! A sebességek előtti tagokkal, valamint $mg$-vel egyszerűsítve, a következőt kapjuk:

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = 4$$

Mindkét oldal négyzetgyökét véve a

$$\frac{v_2}{v_1} = 2$$

egyenlethez jutunk, ami szerint a négy egymásba illesztett kúp sebessége kétszerese lesz egy kúpénak, azaz négy kúp $1{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$-os sebességgel esik lefelé.

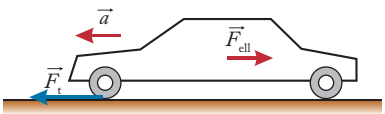
## Gördülés során fellépő súrlódási erők

### A gépkocsi indulásakor fellépő erők

Egy gépkocsi elindulásához a gépkocsira ható külső erőre van szükség. Ezt az erőt a gépkocsi kerekeinek gördülésekor a tapadási súrlódási erő biztosítja. A kerék a talajt a menetiránnyal ellentétes irányban nyomja, míg a talaj – a talaj és a kerék érintkezési pontjában – a gépkocsira a mozgás irányával megegyező irányú erőt fejt ki. Ez a tapadási súrlódási erő lesz.

A gépkocsi motorja által kifejtett erőhatás a súrlódási erőn keresztül válik a gépkocsit mozgató erővé. A gépkocsi mozgását akadályozza az $F_{ell}$ menetellenállási erő (a közegellenállási és gördülési ellenállás együttese). Így a gépkocsi gyorsulása felírható az $F_t$ tapadási súrlódási erő és az $F_{ell}$ menetellenállási erő eredőjeként:

$$a = \frac{F_t - F_{ell}}{m}$$




*Induláskor a gépkocsira hat az $F_t$ tapadási súrlódási és $F_{ell}$ menetellenállási erő*

Ha indul a test, akkor a közegellenállási erő még elhanyagolható (hiszen alig van sebessége), a gördülési ellenállás eleve sem nagy, így a menetellenállást elhanyagolhatjuk. Ekkor a lehetséges legnagyobb gyorsulás

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{\mu_0 \cdot F_{ny}}{m}$$

Vízszintes felületen az autó függőleges irányban nem gyorsul, így: $F_{ny} = m \cdot g$. Ezt felhasználva a tapadó kerékkel elérhető maximális gyorsulásra a következő összefüggés adódik.

$$a_{max} = \frac{\mu_0 \cdot m \cdot g}{m} = \mu_0 \cdot g$$

## ALKALMAZÁSOK

### A gépkocsi aktív rendszerei

Az előző levezetéseknél láttuk, hogy a gyorsulás akkor lesz maximális, ha az autó kereke nem pörög ki, mert így végig a tapadási súrlódási erő hathat. Ezért újabban az autókba **kipörgésgátlókat (ASR)** is beépítenek. Ez csökkenti a motor teljesítményét, ha azt érzékeli, hogy valamelyik kerék fordulatszáma indokolatlanul megnövekedett, magyarul kipörgött.

Ha a gépkocsi kereke erős fékezés miatt megcsúszik, akkor a fellépő csúszási súrlódási erő nagysága kisebb lesz, mint a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke. Ekkor a fékút jelentősen megnő, ráadásul a jármű kormányozhatatlanná válik. A gépkocsik fékrendszerébe beépített **ABS-rendszer** képes meggátolni a kerekek megcsúszását azzal, hogy megcsúszás esetén automatikusan csökkenti a fékpofák és a féktárcsák közti fékezőerőt.

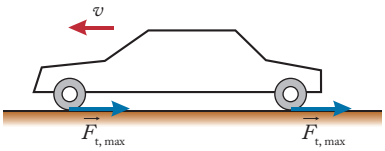
Ezek azonban csak bizonyos megkötésekkel igazak, mivel egy jármű fékeződésekor nemcsak a gumiabroncs és az úttest közti súrlódásnak van szerepe, hanem az autó fékrendszerében (pl. a fékpofák, féktárcsák közt) fellépő súrlódásnak is. Egy gépjármű fékrendszere általában csak meghatározott nagyságú fékerő kifejtésére képes.

Newton II. törvényéből következik, hogy ez nagyobb tömegre csak kisebb lassulást képes okozni. Az autógyárak úgy állítják be a fékerőt, hogy az még elegendő legyen a megengedett maximális össztömeg hatásos lefékezésére is, de ha túl nagy a jármű tömege, vagy a kopott fékpofák miatt nem lép fel a kívánt fékezőerő, akkor a fékhatás romlik, és nem kapjuk meg az előzőekben levezetett ideális lassulásokat, a fékút jelentősen megnő.

### A gépkocsi fékezésekor fellépő erők

A gépkocsi fékezésekor a kerekek gördülése esetén a gépkocsit a talaj által kifejtett tapadási súrlódási erő fékezi. A lassulást a kerekek és az úttest közötti tapadási súrlódási együttható határozza meg. A fékezés a lehető legnagyobb tapadási súrlódási erővel ($F_{t,max}$) történhet.

*A gépkocsi akkor lassul legjobban, ha a kerekek tisztán gördülnek.* A kerekek talajjal érintkező pontjaiban a menetiránnyal ellentétes irányú tapadási súrlódási erő hat a gépkocsira.




*A gépkocsi kerekeire ható erők fékezéskor*

A lassulást most is a tapadási súrlódási erő fogja biztosítani, ezért annak maximuma hasonlóan számítható, mint az előbb a gyorsulásé, de az előjel megváltozik:

$$a_{max} = \frac{-\mu_0 \cdot m \cdot g}{m} = -\mu_0 \cdot g$$

*Megjegyzés:* Érdemes észrevenni, hogy se a gyorsulás, se a lassulás nem függ a jármű tömegétől, kizárólag csak a gumiabroncs és az út minőségétől függ. Ezért sem szabad kopott gumikkal közlekedni! Mivel egy mai gumiabroncs tapadási súrlódási együtthatója száraz útfelületen elérheti a $\mu_0 = 1{,}2$ értéket, így akár 12 $\frac{m}{s^2}$ gyorsulás, illetve lassulás is elérhető.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen erőket nevezünk szabaderőknek, melyeket nevezzük kényszererőknek? Soroljunk fel mindegyikre példákat is!
2. Milyen súrlódási erőket ismertünk meg, ezekre mik jellemzők?
3. A közegellenállási erő milyen tényezőktől függ? Gyűjtsük össze, hogy a képen látható versenyző milyen módszerekkel igyekszik csökkenteni a rá ható közegellenállási erőt!



4. A csúszási súrlódási erőt általában mozgást akadályozó erőnek tekintjük. Keressünk olyan példát, amikor a csúszási súrlódási erő is gyorsíthat egy testet!
5. Egy legenda szerint Galilei az 57 m magas pisai ferde toronyból egyforma méretű fa- és vasgolyókat dobott le, és azt tapasztalta, hogy a két golyó egyszerre ért le. Valójában a kísérletet azóta sokszor elvégezve azt találták, hogy a vasgolyó egy kicsit előbb ér földet. Mi lehet ennek az oka?

# 6. Erőhatások a lejtőn

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT Súrlódásmentes lejtőn fellépő erők**

Egy $\alpha = 30°$-os hajlásszögű lejtőn $m = 20$ kg tömegű hasáb csúszik lefelé.

**a)** Mekkora nyomóerőt fejt ki a testre a lejtő?

**b)** Határozzuk meg a test gyorsulását!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$\alpha = 30°$,

$m = 20$ kg.

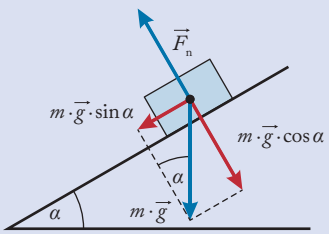
---

*a)* $F_n = ?$

*b)* $a = ?$

### 1. megoldás

**a)** Az $\alpha$ hajlásszögű lejtőn lévő testre az $m \cdot g$ nehézségi erő és a lejtő által a testre kifejtett $F_n$ nyomóerő (kényszererő) hat.




*A lejtőn fekvő hasábra a nehézségi erő és a lejtő nyomóereje hat*

A nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője az $m \cdot g \cdot \sin\alpha$, míg a lejtőre merőleges összetevője $m \cdot g \cdot \cos\alpha$.

A lejtőre merőlegesen a test nem gyorsul, így ebben az irányban az eredő nulla. A lejtővel párhuzamosan az $m \cdot g \cdot \sin\alpha$ erő lép fel, amely egyben az eredő is. Írjuk fel a lejtőirányú és a lejtőre merőleges irányú mozgásegyenleteket!

$$\left.\begin{aligned} 0 &= F_n - m \cdot g \cdot \cos\alpha \\ m \cdot a &= m \cdot g \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

A lejtő által a testre kifejtett erő nagysága:

$$F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Behelyettesítve:

$$F_n = 20\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30° = 173{,}2\ \text{N}$$

A lejtő 173,2 N erőt fejt ki a testre.

**b)** Kihasználva, hogy az eredő erő $m \cdot g \cdot \sin\alpha$, a dinamika alaptörvénye alapján

$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, amelyből

$a = g \cdot \sin\alpha$.

Az adatokat beírva az egyenletbe:

$$a = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30° = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A test $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog.

### 2. megoldás

A lejtőn lévő hasábra két erő hat:

– az $m \cdot g$ nehézségi erő,

– a lejtő $F_n$ nyomóereje (kényszererő).

A hasáb a lejtőn lefelé mozog, tehát *a testre ható erők eredője a lejtővel párhuzamos*. Az eredő erő felírható a rajzon látható háromszög alapján:

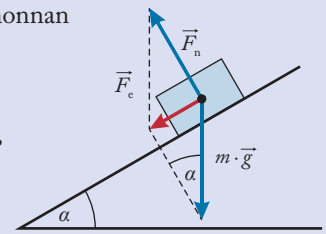
$$\sin\alpha = \frac{F_e}{m \cdot g}, \text{ amelyből } F_e = m \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

A dinamika alaptörvényét alkalmazva:

$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, ahonnan

$a = g \cdot \sin\alpha$.

*A test a testre ható erők eredőjének az irányába, azaz a lejtővel párhuzamosan lefelé fog gyorsulni*




Az $F_n$ nyomóerő a rajz alapján:

$F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha$.

*Megjegyzés:* A gyorsulás a lejtő adataiból is számítható. Legyen $l$ a lejtő hossza és $h$ a magassága.

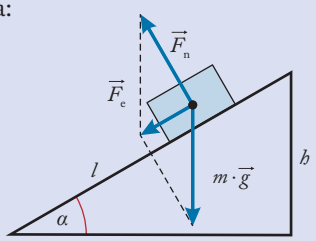
Hasonló háromszögek alapján:

$$\frac{F_e}{m \cdot g} = \frac{h}{l}$$

A gyorsulás nagysága:

$$a = \frac{h}{l} \cdot g$$

*Az eredő iránya a lejtőn lefelé mutat*



**2. FELADAT Súrlódás a lejtőn**

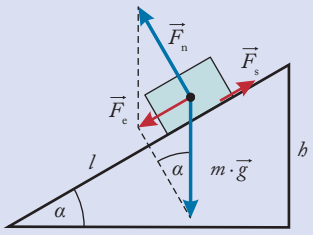
Egy $\alpha = 30^\circ$-os hajlásszögű lejtőn $m = 20$ kg tömegű hasáb csúszik lefelé. A lejtőn a csúszási súrlódási együttható 0,1. Határozzuk meg a lecsúszó test gyorsulását!

## MEGOLDÁS

Adatok:
$\alpha = 30^\circ$,
$m = 20$ kg,
$\mu = 0{,}1$.

$a = ?$

Egészítsük ki az ábránkat oly módon, hogy felvesszük a súrlódási erőt is. (Fontos megjegyezni, hogy a hasábot továbbra is pontszerű testnek tekintjük).




*A lejtőn lévő hasábra a nehézségi erő ($m \cdot g$), a talaj nyomóereje ($F_n$) és a súrlódási erő ($F_s$) hat*

A csúszási súrlódási erő $F_s = \mu \cdot F_{ny}$ módon számítható. Iránya a nyugvó lejtőn a mozgás irányával ellentétes lesz, esetünkben most a lejtőn felfelé mutat.

A felületre merőleges nyomóerő, az $F_{ny} = m \cdot g \cos \alpha$ alakban írható fel.

A lejtőn fellépő súrlódási erő nagysága a következő képlet alapján határozható meg:

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

Írjuk fel a lejtővel párhuzamosan a dinamika alaptörvényét:

$$\Sigma F = m \cdot a = F_e - F_s$$

$F_e$ és $F_s$-re kapott összefüggéseket behelyettesítve:

$$m \cdot a = m \cdot g \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cos \alpha,$$

amelyből a gyorsulás:

$$a = g\,(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) = 4{,}1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Behelyettesítve: $a = 4{,}1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

A hasáb gyorsulása lejtőn lefelé $4{,}1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

# Mozgó lejtők

Ha a lejtő is mozog, akkor az előző feladatokban levezetett erőképletek nem használhatók. Ilyenkor a szabaderők és kényszererők gondos felvételével oldhatjuk meg a dinamikai problémákat. Erre is lássunk egy konkrét feladatot!

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 30°-os hajlásszögű, $M = 2$ kg tömegű lejtő súrlódásmentesen csúszhat vízszintes felületen. Mekkora vízszintes erővel kell nyomni a lejtőt, hogy a ráhelyezett, ugyancsak súrlódásmentes $m = 1$ kg tömegű kis hasáb ne mozogjon a lejtőhöz képest?

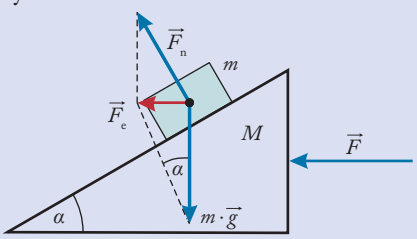
## MEGOLDÁS

Adatok:
$M = 2$ kg, $m = 1$ kg, $\alpha = 30^\circ$.

$F = ?$

Tüntessük fel a lejtőn lévő $m$ tömegű testre ható erőket! Ezek az $mg$ és az $F_n$ lesznek. Most azonban az $m$ tömegű test nem a lejtő síkjában fog lefelé csúszni!

Az $m$ tömegű hasáb akkor nem csúszik a lejtőhöz képest, ha a lejtővel együtt vízszintes irányban gyorsul, ugyanakkora gyorsulással, mint a lejtő. Ekkor a testre ható erők eredője is vízszintes irányú kell hogy legyen, így az $mg$ és $F_n$ eredőjeként berajzolt $F_e$ vízszintes irányú lesz.




*A lejtőn lévő testre a nehézségi erő és a lejtő nyomóereje hat*

Tekintsük most az $F_e$ és $mg$ által meghatározott derékszögű háromszöget. Ebben is felfedezhetjük az $\alpha = 30^\circ$-os szöget. (Az $\alpha$ szögek merőleges szárú szögek.)

A háromszögben most a következő összefüggés teljesül:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_e}{m \cdot g}, \text{ azaz } F_e = m \cdot g \cdot \text{tg}\,\alpha$$

Ezt vessük most egybe a dinamika alaptörvényével!

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \text{tg}\,\alpha,$$

amelyből $a = g \cdot \text{tg}\,\alpha$.

Ez egyben a hasáb és a lejtő gyorsulása is.

Mivel a két test együtt mozog, a két különálló testet most egy $m + M$ tömegű testnek is tekinthetjük, így már ki tudjuk számítani, hogy mekkora erővel kell nyomni a lejtőt:

$F = (m + M) \cdot a = (m + M) \cdot g \cdot \text{tg}\, \alpha$

Behelyettesítve: $F = 17{,}31$ N.

A lejtőt 17,31 N erővel kell tolnunk, hogy az $m$ tömegű test ne mozogjon a lejtőn.

## MÉRÉSI FELADAT

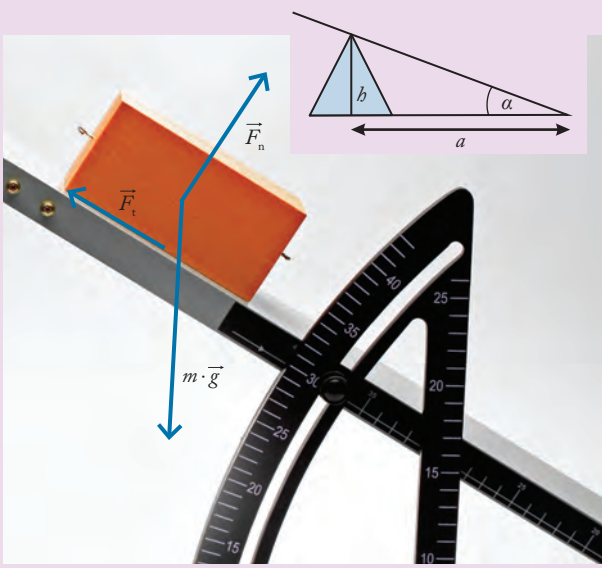
### A tapadási súrlódási együttható meghatározása változó hajlásszögű lejtőn

**A mérés elvi alapja**

A lejtőre helyezett testre három erő hat:
- a nehézségi erő ($m \cdot g$),
- a lejtő nyomóereje ($F_n$),
- a tapadási súrlódási erő ($F_t$).

Mint láttuk, $F_n$ és $m \cdot g$ eredője a lejtővel párhuzamosan lefele irányuló $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ nagyságú erő lesz.

Ha $F_e = m \cdot g \cdot \sin \alpha$ meghaladja az $F_t$ tapadási súrlódási erőt, akkor a test megindul. Ilyen helyzet biztosan előáll, hiszen a lejtő $\alpha$ hajlásszögét növelve $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ is nőni fog, míg a $F_t = \mu_0 \cdot F_{ny} = \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$ a tapadási súrlódási erő pedig csökkenni.




*A lejtőre helyezett testre három erő hat: a nehézségi erő, a lejtő nyomóereje és a tapadási súrlódási erő*

A lejtő hajlásszögét növelve megkereshetjük tehát azt a szöget, amelynél a test megcsúszik a lejtőn. Ekkor fennáll a következő egyenlőség:

$m \cdot g \cdot \sin \alpha = \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$

Egyszerűsítve, majd a $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha$ azonosságot felhasználva kapjuk:

$\text{tg}\, \alpha = \mu_0$

Feladatunk tehát az, hogy a lejtő hajlásszögét óvatosan növelve megtaláljuk azt a szöget, amelynél a test megcsúszik.

**A mérés menete**

A hajlásszög pontos meghatározására számos lehetőség kínálkozik. A lejtőhöz illesztett szögmérők helyett talán egyszerűbb és pontosabb, ha a lejtő geometriai viszonyaiból, alapjának és magasságának a leméréséből határozzuk ezt meg. Ábránk jelöléseivel:

$\mu = \text{tg}\, \alpha = \frac{h}{a}$

Egy ilyen méréssorozat adatait foglaltuk táblázatba. Két különböző testet vizsgáltunk egy állítható sima felületű fémből készült lejtőn. A testeket három különböző helyen tettük a lejtőre. A lejtő hajlásszögét úgy változtattuk meg, hogy minden esetben egy 12 cm magas faéket toltunk be a lejtő szárai közé.

| | $h$ (cm) | $a$ (cm) | $\mu = \text{tg}\, \alpha = \frac{h}{a}$ | $\mu_{\text{átlag}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Radír | 12 | 19,3 | 0,62 | 0,67 |
| | 12 | 17,6 | 0,68 | |
| | 12 | 17,1 | 0,70 | |
| 200 Ft-os pénzérme | 12 | 54,5 | 0,22 | 0,25 |
| | 12 | 42,9 | 0,28 | |
| | 12 | 48 | 0,25 | |

Említett módszerünk alkalmas arra is, hogy a csúszási súrlódási erőt meghatározzuk. Ebben az esetben azt a szöget kell megtalálnunk, amelynél a test egyenletes mozgással csúszik lefelé a lejtőn.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen erők hatnak egy súrlódásmentes lejtőre helyezett testre, mi lesz ezek eredője?
2. Hogyan számíthatjuk ki a lejtőn fellépő súrlódási erőket?
3. Milyen módszerrel mérhetünk csúszási és tapadási súrlódási együtthatót lejtő segítségével?
4. Azonos hosszúságú, 30° és 60° hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőkről egyszerre engedünk el testeket. Melyik ér le nagyobb sebességgel a lejtő aljára? Hogyan módosul a válaszunk, ha a két lejtő azonos magasságú?

# 7. Pontrendszerek

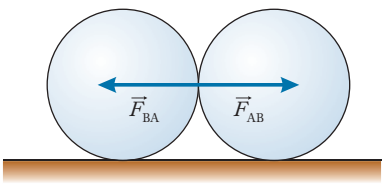
## Feladatok megoldása pontrendszerek esetében

Eddig főként pontszerű testek (más szóval tömegpontok) mozgásának a vizsgálatával foglalkoztunk. Ebben azonban nem tudtunk következetesek maradni. Például Newton 3. törvénye eleve két test egymásra hatását vizsgálja. A mozgások legnagyobb részében a mozgás során több test lép kölcsönhatásba egymással, így ezek mozgását egy rendszerként kell vizsgálnunk.

**A több pontszerű testből álló rendszert pontrendszernek nevezzük.**

Pontrendszernek tekinthető például a Napból, a Földből és a Holdból álló rendszer, vagy az egész Naprendszer. Ugyanígy pontrendszert alkot két test, amely egy csavarrugóval van összekötve, a tűzijátékon fellőtt lövedékdarabkák felrobbanás után, a kiskocsi és a rá felfüggesztett inga, az ágyú és a kilőtt lövedék.

**A pontrendszer mozgása közben a rendszer tagjai között fellépő, a közöttük lévő mechanikai kapcsolatot biztosító erőket belső erőknek, míg a rendszer tagjaira más testek által kifejtett erőt külső erőknek nevezzük.**




*Két ütköző golyó esetén ható belső erők*

**Példa:** Az összeütköző biliárdgolyók között fellépő erők belső erők, de hozzájuk viszonyítva külső erőként lép fel a talaj nyomóereje és a gördülési ellenállás ereje, vagy a nehézségi erő.

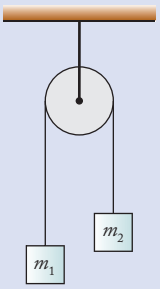
A pontrendszerekre vonatkozó feladatok megoldásakor minden test esetében felvesszük a rá ható erőket. A dinamika alapegyenletét alkalmazva, mindegyik testre különkülön felírjuk a mozgásegyenleteket, valamint a testek mozgása közötti kényszerű kapcsolatokat (pl. egyik gyorsulása feleakkora, mint a másiké), az úgynevezett kényszerfeltételeket. Az így kapott egyenletrendszert megoldva jutunk el a feladat megoldásához.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy súrlódásmentesen csapágyazott csigán átvetett fonál két végére egy 20 kg és egy 12 kg tömegű testet akasztottunk. A csiga és a kötél tömege elhanyagolható, a kötél nyújthatatlan, valamint a csiga és a kötél közötti súrlódástól tekintsünk el.

**a)** Mekkora és milyen irányú $m_1$, illetve $m_2$ gyorsulása?

**b)** Mekkora erő feszíti a fonalat?




*Az $m_1$ és $m_2$ tömeg, az elhanyagolható tömegű csiga és a kötél alkotja a rendszert*

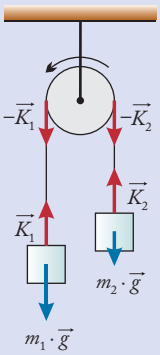
#### MEGOLDÁS

Adatok:

$m_1 = 20$ kg, $m_2 = 12$ kg.

*a)* $a = ?$

*b)* $K = ?$




*A testekre ható erők. Gondoljuk végig, hogy merre indulnak el a testek!*

**a)** A testekre a nehézségi erő és a kötélerő hat. Meghatározzuk a mozgásirányt, és a gyorsulás irányába mutató erőt tekintjük pozitívnak. A mozgásegyenletek a következők:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= m_1 \cdot g - K_1 \\ m_2 \cdot a_2 &= K_2 - m_2 \cdot g \end{aligned}\right\}$$

Mivel a kötél nem nyúlik, ezért a két test azonos idő alatt azonos utakat tesz meg, így a két test gyorsulása egyenlő nagyságú, ezért $a_1 = a_2$. Mivel a csiga és a kötél tömege elhanyagolható, a két kötélerő nagysága is megegyezik: $K_1 = K_2$.

A mozgásegyenletekbe az előzőeket beírva:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a &= m_1 \cdot g - K \\ m_2 \cdot a &= K - m_2 \cdot g \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet összeadva, a $K$ kötélerő kiesik. A gyorsulásra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$a = \frac{m_1 \cdot g - m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

Az adatokat behelyettesítve: $a = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Az $m_1$ tömegű test lefelé, míg az $m_2$ tömegű test felfelé halad $2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással.

**b)** A kötélerőt kifejezve az $m_1$ tömegű test mozgásegyenletéből: $K = m_1 \cdot (g - a)$.

Az adatokat behelyettesítve: $K = 150$ N.

A fonalat 150 N erő feszíti.

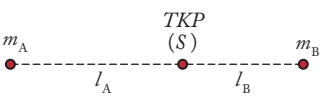
## Pontrendszer tömegközéppontja

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

A tömegközéppont fogalmát korábban már érintettük. Azt mondtuk róla, hogy a nehézségi erő támadáspontját tekintjük egy kiterjedt test tömegközéppontjának. Minden pontrendszernél található egy olyan pont, amelynek mozgása jól jellemzi az egész rendszer haladó mozgását.

**Két pontszerű testből álló rendszernél tömegközéppontnak nevezzük azt a pontot, amely a két testet összekötő egyenes szakaszon van, és távolsága az egyes testektől fordítottan arányos a testek tömegével, azaz az ábra jelöléseivel:**

$$m_A \cdot l_A = m_B \cdot l_B$$




*Két testből álló rendszer tömegközéppontja a nehezebb testhez van közelebb*

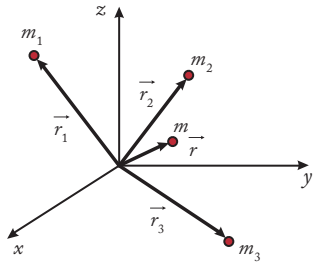
A tömegközéppont helyét TKP-vel, vagy $S$-sel szokás jelölni.

Ennek megfelelően egyenlő tömegeknél a tömegközéppont középen van, különböző tömegeknél pedig a nagyobb tömegű testhez van közelebb. Több tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának meghatározását is az előzőre vezetjük vissza: megkeressük a rendszer két tagjának tömegközéppontját, majd e két testet gondolatban ebben a tömegközéppontban egyesítjük. Ezt követően a felvázolt eljárást ismételjük mindaddig, míg egyetlen ponthoz nem jutunk. Az így kapott pontot nevezzük a pontrendszer tömegközéppontjának.

**Az eljárást $n$ darab tömegponttal elvégezve a következő eredményre jutunk:**

$$\vec{r} = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i}{\Sigma m_i},$$

**ahol $r$ vektor a tömegközéppont helyvektora, $r_i$ vektor az $i$. tömegpont helyvektora.**




*Három tömegpontból álló pontrendszer és tömegközéppontja koordinátarendszerben*

## A tömegközéppont tétele

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

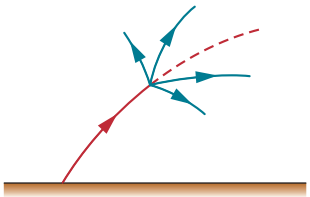
A tömegközéppont fogalmának segítségével a dinamika alapegyenletét kiterjeszthetjük a pontrendszerre is. A pontrendszer össztömegének ($m_p$) és a tömegközéppont gyorsulásának ($a_{TKP}$) a szorzata megegyezik a rendszerre ható külső erők vektori eredőjével:

$$\Sigma \vec{F}_k = m_p \cdot \vec{a}_{TKP}$$

Más megfogalmazásban:

**A pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer összes tömege a tömegközéppontban lenne elhelyezve, és a külső erők eredője erre pontra hatna. Belső erők nem változtatják meg a pontrendszer tömegközéppontjának mozgásállapotát.**
**Ez a tömegközéppont mozgásának tétele.**

**Példa:** Egy tűzijátékon a fellőtt bomba tömegközéppontja a rá ható külső erő hatására a levegőben parabolapályán mozog. Amikor a pálya valamely pontján a fellőtt lövedék a levegőben felrobban, a robbanást belső erők idézik elő, amelyek a bomba tömegközéppontjának mozgását nem befolyásolják. A repeszdarabok mindegyike külön röppályán halad, de a bomba repeszdarabjainak tömegközéppontja ugyanazon a parabolapályán mozog, mint a teljes lövedék tömegközéppontja.





*A tűzijáték felrobbanása után a rendszer TKP-ja továbbra is az eredeti pályán halad tovább*

## Tömegközéppont megmaradásának tétele

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

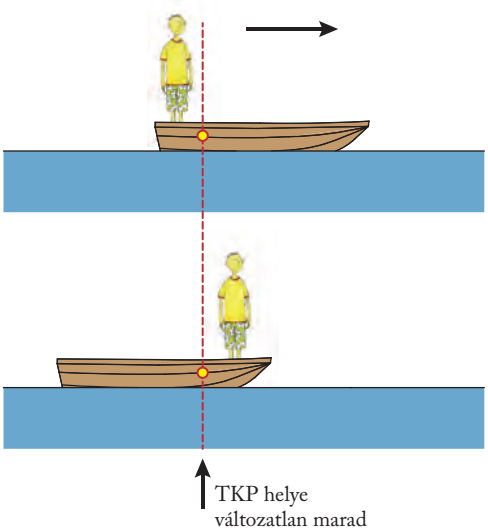
**Zárt rendszerről beszélünk, ha a pontrendszerre nem hatnak külső erők, vagy ezek eredője zérus.**

Ebben az esetben $\Sigma \vec{F}_k = 0$, amiből következik, hogy $\vec{a}_{TKP} = 0$. A tömegközéppont tehát ilyen esetben nem gyorsul, azaz a sebessége állandó.

Ezek alapján megfogalmazható a tömegközéppont sebességének megmaradási tétele:

**A zárt rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van.**

**Példa:** A tavon nyugvó csónakon valaki a csónak hátuljából előremegy, akkor az általa a csónakra kifejtett erő belső erő lesz, akárcsak annak ellenereje. Ezek nem változtatják meg a TKP nyugalmi helyzetét. Így a csónak elmozdul hátrafelé, de a rendszer tömegközéppontja ugyanott marad.




*Vízen álló csónak tömegközéppontja egy helyben marad, ha a benne ülő személy a csónak másik végébe megy*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 20 m magas toronyból kilőttünk 20 $\frac{m}{s}$ vízszintes kezdősebességgel egy bombát, amely a repülés során két darabra, egy 100 g és egy 200 g tömegűre robbant szét. A 200 grammos darabot a torony lábánál találtuk meg. Milyen messze esett a 100 grammos darab a torony lábától? (A légellenállás hatásától tekintsünk el!)

#### MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 20$ m,

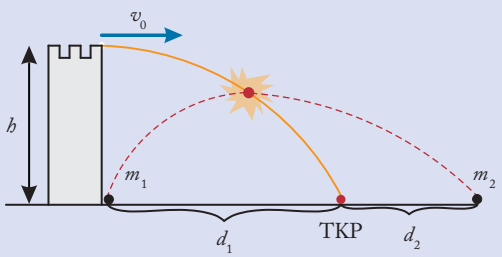
$v_0 = 20 \frac{m}{s}$,

$m_1 = 200$ g,

$m_2 = 100$ g.

$d = ?$

A tömegközéppont tétele szerint a robbanás nem befolyásolja a TKP eredeti pályáját. Először tehát számítsuk ki, hogy milyen $d_1$ távolságra csapódott volna be eredetileg a bomba. A vízszintes hajításnál megismert módon:




$$d_1 = v_0 \cdot t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ m}{10 \frac{m}{s^2}}} = 40\ m$$

Most alkalmazzuk a tömegközéppontra megismert

$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$

szabályt. Ebből ki tudjuk fejezni $d_2$-t:

$$d_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot d_1 = \frac{200\ g}{100\ g} \cdot 40\ m = 80\ m$$

A torony lábától tehát $d = d_1 + d_2 = 120$ m távolságban kell keresni a másik repeszdarabot.

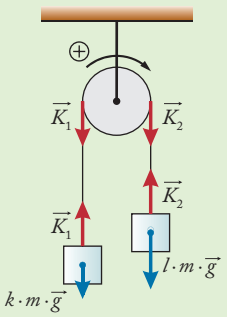
## ALKALMAZÁSOK

### Atwood-féle ejtőgép

Az első kidolgozott feladatban leírt csigás rendszernek a fizikatörténetben is jelentősége van. Az Atwood-gépet 1784-ben George Atwood (1745–1807) angol matematikus találta fel laboratóriumi kísérletként.

A pontrendszerek mozgásának vizsgálatára használjuk az Atwood-féle ejtőgépet. Az ejtőgép egy könnyen forgó csigából (kerékből) és a rajta átvetett fonál két végére akasztott $l+k$ darab, azonos $m$ tömegű fémhengerből áll. Az ejtőgéppel történő méréshez egy másodperceket jelző metronóm és egy rögzített mérőszalag szükséges.

Ha a fonál két végére azonos tömegeket helyezünk, akkor a mozgás nem jön létre. Helyezzünk a fonál két végére különböző számú, $m$ tömegű testet. Az ábra szerint a jobb oldalon legyen $l$ db, míg a bal oldalon $k$ db m tömegű test ($l > k$).




A rendszerre a mozgásegyenletet felírva:

$$\left.\begin{aligned} l \cdot m \cdot a_1 &= l \cdot m \cdot g - K_1 \\ k \cdot m \cdot a_2 &= K_2 - k \cdot m \cdot g \end{aligned}\right\}$$

Mivel $a_1 = a_2 = a$, $K_1 = K_2 = K$, így a gyorsulás értéke

$$a = \frac{l-k}{l+k} \cdot g$$

A kapott összefüggésből láthatjuk, hogy az $l+k$ db azonos $m$ tömegű testtel különböző gyorsulásokat hozhatunk létre úgy, hogy a jobb oldali fonálról egyre több $m$ tömegű testet rakunk át bal oldalra.

Atwood-géppel tehát kényelmesen tanulmányozható a gyorsuló mozgás, valamint igazolhatók a newtoni mozgástörvények.

**Példák: 1.** Az ellensúlyos felvonó is közelítőleg egy Atwood-gép. Amikor a lift emelkedik, a csiga másik oldalán lévő, a lifttel csaknem azonos tömegű ellensúly lefelé ereszkedik. Az ellensúly ezáltal tehermentesíti a hajtómotort a felvonófülke tartásából fakadó terhelés alól, csak a két tömeg súlykülönbségét és tehetetlenségét kell leküzdeni.

**2.** Az Atwood-féle ejtőgép elvét alkalmazzák a ferde vágányokon két összekapcsolt vasúti kocsival rendelkező siklóvasutaknál is, például ilyen a Budavári sikló is.



*Budavári sikló*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan határozhatjuk meg egy pontrendszer tömegközéppontjának helyét?
2. Mit mond ki a tömegközéppont tétele és a tömegközéppont megmaradásának tétele?
3. Münchausen báró – a németek Háry Jánosa – egyszer állítólag úgy mentette meg magát, amikor lovával a mocsárban lefelé süllyedt, hogy hajánál fogva kihúzta magát a mocsárból. Magyarázzuk meg, hogy ez miért nem volt lehetséges!



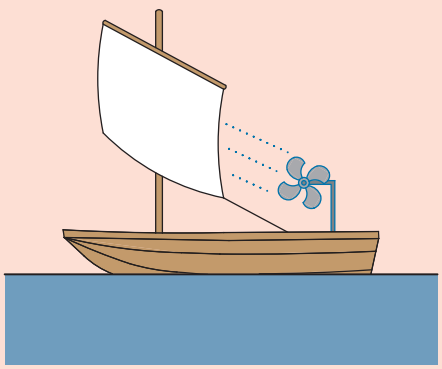
*Münchausen báró szobra*

4. Ugyanazt a kiskocsit az A esetben a csigán átvetett kötéllel 1 N erővel húzva gyorsítjuk, a B esetben a csigán átvetett kötél végére 100 g tömegű testet kötünk ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Magyarázzuk meg, hogy a B esetben miért lesz kisebb a gyorsulása!




A) B)

5. Egy vitorlás csónakon van egy ventilátorunk akkumulátorral. A vitorlás szélcsendben áll a tavon. Elindul-e a vitorlás, ha a ventilátorral levegőt fújunk a vitorlára? És ha a ventilátort a vitorlával ellentétes irányba fordítjuk?



# 8. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye

## A lendület

A fizikában az egyik legfontosabb fizikai mennyiség a lendület.

**A testek tömegének és sebességének a szorzatát lendületnek, más szóval impulzusnak nevezzük.**

**Jele:** $\vec{I}$.

$\vec{I} = m \cdot \vec{v}$

**Mértékegysége:** $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

**A lendület vektormennyiség, iránya megegyezik a test $\vec{v}$ sebességvektorának az irányával.**

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy inga 2 kg tömegű golyója jobbról jövet $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad át a legmélyebb helyzetén. Mennyi a lendületének megváltozása aközben, hogy visszafelé lengve balról jobbra halad át a legmélyebb pontján?

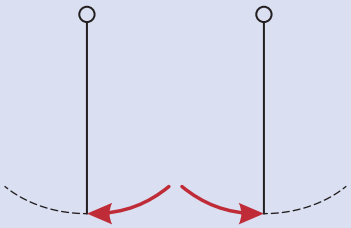
### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 2$ kg,

$v = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\Delta I = ?$



A golyó impulzusvektorának iránya, míg a két legmélyebb helyzetén áthalad, ellentétes irányúra fordul. Így

$I_1 = m \cdot v = 2\ \text{kg} \cdot 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

illetve:

$I_2 = m \cdot (-v) = 2\ \text{kg} \cdot (-3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}) = -6\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A $\Delta\vec{I}$ lendületváltozás-vektor: $\Delta\vec{I} = \vec{I}_1 - \vec{I}_2$.

Behelyettesítve:

$\Delta\vec{I} = 6\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-6\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 12\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A golyó lendületének megváltozása $12\ \text{kg}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

## Lendületmegmaradás törvénye

A fizika egyik legfontosabb megmaradási törvénye a lendületmegmaradást mondja ki.

**Két (vagy több) test ütközése során a kölcsönhatás előtti lendületek vektori összege egyenlő a kölcsönhatás utáni lendületek vektori összegével.**

$\Sigma \vec{I}_{\text{előtt}} = \Sigma \vec{I}_{\text{után}}$

Amennyiben az ütközések egy egyenesben történnek (centrálisak), akkor a lendületvektorokat irány szerint előjelezzük, majd algebrai módon összegezzük a lendületek nagyságát.

Két test ütközésének speciális esetei:

- **tökéletesen rugalmas ütközés**, amely során nincs maradandó alakváltozás,
- **rugalmatlan ütközés**, amikor maradandó alakváltozás lép fel,
- **tökéletesen rugalmatlan ütközés**, amely során a két test egymáshoz tapad, és együtt halad tovább.

Az ütközések energiaviszonyairól részletesen a következő fejezetben tanulunk.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 30 kg tömegű üres gumicsónak pontosan a stég felé úszik $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Gyuri a stégről $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, vízszintes irányú sebességgel beleugrik a szemből érkező csónakba. Gyuri tömege 60 kg, sebességének iránya a csónak sebességének irányával pontosan ellentétes. Mekkora sebességgel indul a csónak tovább?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 30$ kg, $M = 60$ kg, $v_1 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$u = ?$

Az adatok felvételénél pozitív előjelet kapott a csónak sebessége, ezzel ellentétes irányú, tehát negatív előjelű Gyuri sebessége. Kölcsönhatás előtt a csónaknak $m \cdot v_1$, Gyurinak $M \cdot v_2$ a lendülete.

A lendületmegmaradás értelmében ennek a két lendületnek az összege lesz egyenlő a kölcsönhatás után a csónak és Gyuri közös rendszerének az $(m + M) \cdot u$ lendületével.

Az „ütközés” tökéletesen rugalmatlan, így az egyenlet:

$$m \cdot v_1 + M \cdot v_2 = (m + M) \cdot u,$$

amelyből az $u$ sebesség meghatározható:

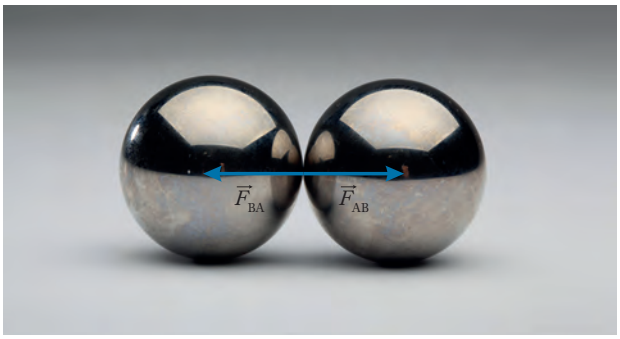
$$u = \frac{m \cdot v_1 + M \cdot v_2}{(m + M)} = \frac{30\ \text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}} + 60\ \text{kg} \cdot (-3\frac{\text{m}}{\text{s}})}{90\ \text{kg}} =$$

$$= -1{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy Gyurival a csónak Gyuri eredeti sebességének az irányába fog mozogni, azaz a stégtől 1,7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel fog távolodni.

## A lendületmegmaradás törvénye zárt rendszerben

Zárt rendszerben a külső erők vektori eredője zérus, így ebben az esetben a környezet nem játszik szerepet a két test közötti kölcsönhatásban. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor




*A zárt rendszerben csak a két test közötti kölcsönhatásokat vesszük figyelembe*

## ALKALMAZÁSOK

Mivel zárt rendszerben erő-ellenerő párok lépnek fel belső erőként, és ezek nem változtatják meg rendszer összes lendületét, ezért számos jelenség egyaránt magyarázható a lendületmegmaradással vagy Newton III. törvényével is.

### Rakétaelv

A rakétában lévő tüzelőanyag elégésével nagy térfogatú forró gáz keletkezik, amely nagy nyomást fejt ki a belső felületre. Az égéstérben a megfelelően kialakított fúvókán az égésgázok igen nagy (2 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ fölötti) sebességgel áramlanak ki a rakéta mozgásirányával ellentétes irányba. A lendületmegmaradás törvénye értelmében a távozó üzemanyag és a rakéta összlendülete mindvégig zérus:

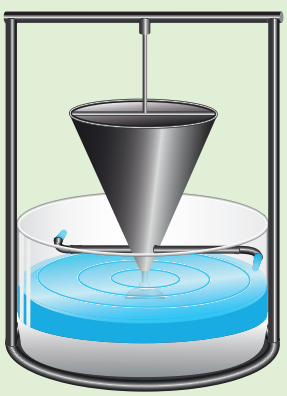


*A felfelé mozgó rakéta lendületének nagysága egyenlő a lefelé kiáramló égéstermékek lendületének összegével*

a kezdetben álló rakéta hajtóművéből az égéstermékek hátrafelé távoznak nagy sebességgel, a rakéta így előrefelé mozog. A tömeg az elhasznált tüzelő- és oxidálóanyaggal folyamatosan csökken. Így a rakéta egyre nagyobb sebességet ér el.

### Segner-kerék

A **Segner-kerék** feltalálója Segner János András (1704–1777) magyar származású természettudós volt. A vízikerékben a kifolyócsöveket szintén ellentétes irányban hajlították meg, ezért a két végén ellentétes irányban folyt ki a vízsugár. A hatás-ellenhatás törvénye miatt a kiáramló víz ellentétes irányú nyomóerővel hat a vízikerékre. A nyomóerő forgatóhatást fejt ki a tengelyre, ennek hatására forogni kezd a Segner-kerék. Ugyanezen az elven működnek a kertekben és a parkokban pörgő öntözőfejek.



*Segner-féle vízikerék*

csak a rendszeren belüli **belső erőket** kell vizsgálnunk. Ezek a fellépő belső erők Newton III. törvénye értelmében erő-ellenerő párokat alkotnak, amelyekről megmutathatók, hogy a rendszer összes lendületét nem változtatják meg.

**Zárt rendszerben a testek lendületeinek vektori összege állandó.**

**$\sum \vec{I}$ = állandó.**

**A lendületmegmaradás törvénye vektoregyenlet.** Ez azt jelenti, hogy a síkban (két dimenzióban) két skaláregyenletre, míg térben (három dimenzióban) három skaláregyenletre bontható fel.

## Lendülettétel

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Vizsgáljuk meg Newton II. törvényét ismét! Használjuk fel a gyorsulás, a sebességváltozás, majd a lendület fogalmát:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}' - m\vec{v}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\vec{I}' - \vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$$

**Newton II. törvényének egy másik megfogalmazásához jutottunk el:**

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$$

**A pontszerű testre ható erő az időegységre jutó lendületváltozás számértékét adja. Ezt nevezzük lendülettételnek.**

(Newton eredetileg ebben a formában fogalmazta meg a II. törvényt.)

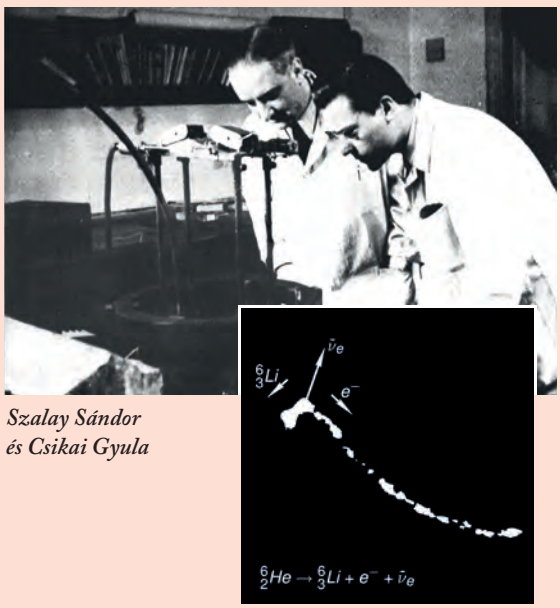
A lendülettételt átrendezve:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{I}$$

Az erő lendületváltoztató hatását a testre ható erő és az erőhatás időtartamának szorzata határozza meg.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit mond ki a lendületmegmaradás törvénye? Mit nevezünk zárt rendszernek? Ebben mit mondhatunk a lendületről?
2. Ha egy kalapácsot ráhelyezek egy szög fejére, a szög nem nyomódik be. Ha a kalapáccsal ráütök, már igen. Mi ennek az oka?
3. Egy jégen nagy sebességgel csúszó korongot akarunk lefékezni. Mit toljunk az útjába, egy vele azonos tömegű deszkát, vagy egy nála sokkal nehezebb betontömböt?
4. A mellékelt ábrán látható fényképet Szalay Sándor és Csikai Gyula készítette, és ezzel kísérletileg is bizonyította a korábban elméleti fizikusok által megjósolt, neutrínónak nevezett részecske létezését. A ködkamrában készült felvétel egy nyugvó atommag bomlását mutatja. A bomlás helyéről kinduló Li-mag és elektron ($e^-$) ködfonala jól megfigyelhető a fényképen, de további részecske nyoma nem látható. Ennek ellenére a felvétel minden fizikus számára bebizonyította, hogy a bomlásban még egy harmadik részecske is keletkezett. Miből következtettek a fizikusok a harmadik részecske keletkezésére?




*Szalay Sándor és Csikai Gyula*

5. A labdarúgásban komolyan fontolóra vették, hogy korlátozzák a fejelést, különösen a fiatalabb játékosoknál. A lendülettétel segítségével végezzünk becslést, mi lehet ennek az oka!

# 9. A tehetetlenségi erők

## KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

### Mozgások leírása egyenletesen gyorsuló vonatkoztatási rendszerben

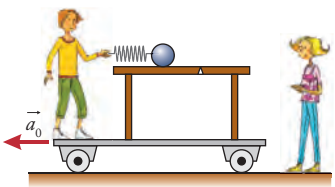
A tehetetlenség törvényével kapcsolatban foglalkoztunk már az inerciarendszerekkel. Tudjuk, hogy

- inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek is inerciarendszerek,
- gyorsuló rendszer nem lehet inerciarendszer, és gyorsuló rendszerben nem érvényes a tehetetlenség törvénye.

Bizonyos kinematikai problémákat már megoldottunk gyorsuló vonatkoztatási rendszert használva. Vizsgáljuk meg most azt, hogy dinamikai problémáknál hogyan járhatunk el gyorsuló vonatkoztatási rendszert használva.

### Gondolatkísérlet

Pista egy kocsin állva a kocsin lévő asztal lapjára helyezett egy golyót, amihez rugós erőmérőt rögzített, az erőmérő másik végét pedig vízszintesen tartotta a kezében. Ezután az egész kocsit $a_0$ vízszintes irányban elkezdték gyorsítani. A gyorsuló kocsi elsuhant a teremben álló Klári mellett is. Írjuk le a golyó mozgását Pista gyorsuló és Klári nyugvó rendszeréből is!




*A gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a magára hagyott golyóra $-m \cdot a_0$ tehetetlenségi erő hat*

#### MEGOLDÁS

*Klári nyugvó rendszeréből:*
A kocsi mellett álló Klári úgy látja, hogy a golyó a kocsi menetirányával megegyező irányban gyorsul $a_0$ gyorsulással. Látja, hogy a rugó megnyúlt, $F = m \cdot a_0$ erőt fejt ki a golyóra, ez okozza a golyó gyorsulását. Klári nyugvó rendszeréből tekintve tehát minden rendben van, teljesül a dinamika alaptörvénye.

*Pista rendszeréből:*
A kocsin álló Pista számára a golyó nyugalomban van, vagyis nem gyorsul. A rugós erőmérő mégis $F = m \cdot a_0$ erőt mutat. A golyó egyensúlya esetén ez csak úgy lehetséges, hogy a golyóra egy $-m \cdot a_0$ erő is hat. Nyilván a különleges helyzetet az okozza, hogy Pista rendszere gyorsul.

Eddig azt tanultuk, hogy az erők valamilyen kölcsönhatás következtében lépnek fel, de itt nem tudunk megnevezni olyan testet, amely ezt a $-m \cdot a_0$ erőt kifejtené. Ezért a dinamika alaptörvényét úgy módosítjuk, hogy az $a_0$ gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerben bevezetünk egy $-m \cdot a_0$ **tehetetlenségi erőt,** amellyel **a dinamika alaptörvényének új alakja:**

$$m \cdot \vec{a} = \Sigma \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0.$$

**Tehát abban az esetben, ha egy inerciarendszerhez képest $a_0$ gyorsulással egyenes vonalú mozgást végző vonatkoztatási rendszerben a dinamika alapegyenletét alkalmazzuk, akkor az inerciarendszerben fellépő erőkön kívül bevezetünk egy $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}_0$ tehetetlenségi erőt. (A negatív előjel itt azt jelenti, hogy az erő iránya ellentétes a vonatkoztatási rendszer gyorsulásának irányával.)**

Tehetetlenségi erő inerciarendszerben nem lép fel. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a hatása mérhető, de nem a testek közötti kölcsönhatásban keletkezik, ezért ellenereje sincs. Emiatt **„fiktív" erőnek** nevezzük. **Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben Newton I. és III. törvénye nem érvényes!**

#### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy kiskocsira állványra függesztett $m = 0{,}5$ kg tömegű fonálingát helyezünk. A kocsit egyenes vonalban egyenletes $a_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozgásba hozzuk.

Milyen szöget zár be egyensúlyi helyzetében az inga fonala a függőlegessel? A jelenséget tárgyaljuk

**a)** inerciarendszerben (a talajhoz viszonyítva),
**b)** gyorsuló vonatkoztatási rendszerben (a kocsihoz viszonyítva)!

## MEGOLDÁS

Adatok:

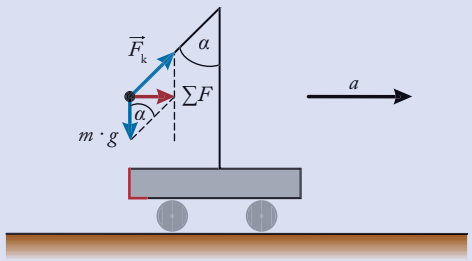
$m = 0{,}5$ kg, $a_0 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $\alpha = ?$ (talajhoz viszonyítva)
*b)* $\alpha = ?$ (kocsihoz viszonyítva)

**a)** A talajhoz viszonyított vonatkoztatási rendszerben

Az ábrán berajzoltuk az ingatestre ható erőket. Az $m \cdot \vec{g}$ és $\vec{F}_k$ erők eredője $\Sigma \vec{F}$. Ez fogja az ingatestet vízszintes irányba előrefelé gyorsítani a $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_0$ dinamika alapegyenletének megfelelően.




*A testre ható erők eredője gyorsítja a testet*

Az $m \cdot \vec{g}$ és $\Sigma \vec{F}$ által meghatározott háromszögben felírható a következő:

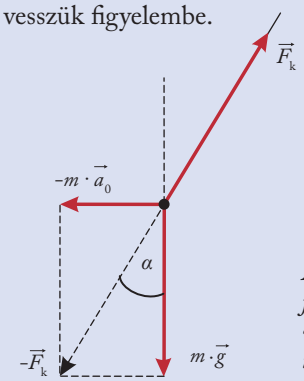
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\Sigma F}{m \cdot g} = \frac{m \cdot a_0}{m \cdot g} = 0{,}2\,,$$ amelyből $\alpha = 11{,}3°$.

**b)** A kocsihoz rögzített (gyorsuló) vonatkoztatási rendszerben

Az ingatest nyugalomban van. Az ábrának megfelelően az ingára:
– $m \cdot g$ nehézségi erő,
– $-m \cdot a_0$ tehetetlenségi erő és a
– fonálingában fellépő $F_k$ kényszererő hat.

A három erőnek az eredője nulla, így az $m \cdot a_0$ és $m \cdot g$ erők eredője $F_k$-val egyenlő nagyságú erő.

Miután az ábrán tisztáztuk a $-m \cdot a_0$ erő irányát, a továbbiakban a negatív előjelet az erők nagyságánál nem vesszük figyelembe.



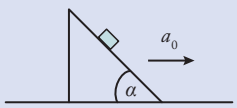

*Az inerciarendszerben fellépő erőkön kívül felveszünk egy $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}_0$ tehetetlenségi erőt*

Így az ábrán lévő háromszögben teljesül a

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{m \cdot a_0}{m \cdot g} = \frac{a_0}{g} = 0{,}2\,,$$

egyenlőség, ami az előzőhöz hasonlóan az $\alpha = 11{,}3°$ megoldást adja.

**2. FELADAT** Mi történik egy 45° hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőre helyezett testtel, ha az egész lejtőt vízszintes irányba gyorsítjuk az ábrának megfelelő irányba
**a)** $a_0 = g$,
**b)** $a_0 = 1{,}2\ g$,
**c)** $a_0 = 0{,}8\ g$ gyorsulással?
**d)** Számítsuk ki, hogy **a)** esetben mekkora lesz a testre ható nyomóerő, ha a test tömege 1 kg!




*A lejtő és a ráhelyezett test együtt $a_0$ gyorsulással mozog*

## MEGOLDÁS

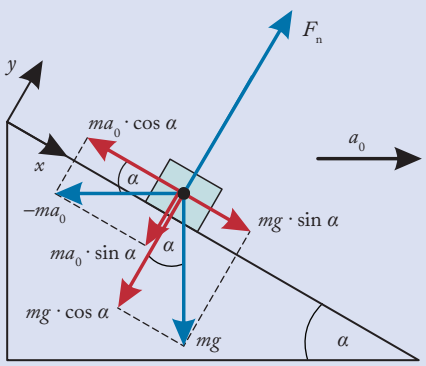
Adatok:
$\alpha = 45°$,
$m = 1$ kg.

---

*a)* $a_x = ?$ (ha $a_0 = g$)
*b)* $a_x = ?$ (ha $a_0 = 1{,}2\ g$)
*c)* $a_x = ?$ (ha $a_0 = 0{,}8\ g$)
*d)* $F = ?$

A feladatot gyorsuló vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg.

A testre három erő hat:
– $mg$ nehézségi erő,
– $F_n$ talaj nyomóereje,
– $-ma_0$ tehetetlenségi erő.
(Innen kezdve az erők nagyságát írjuk, ezért a $-ma_0$ helyett $m \cdot a_0$-t írhatunk.)




*A lejtőn a testre ható erőket ($m \cdot g$, $F_n$ és $-m \cdot a_0$) lejtőirányú és arra merőleges összetevőkre bontjuk fel*

Az $\alpha$-val jelölt szögek merőleges szárú szögek, ezért egyenlők.

Célszerű az erőknek lejtőirányú és lejtőre merőleges összetevőit tekinteni, koordinátatengelyünk $x$ és $y$ tengelyét ennek megfelelően irányítottuk.

A lejtőre helyezett test csak a lejtővel párhuzamosan lefelé irányban ($x$ irányban) mozoghat, így a lejtőre merőleges irányban ($y$ irányban) fennáll: $F_n$ egyenlő az $m \cdot a$ és $m \cdot g$ nagyságú erők $y$ irányú összetevőjének összegével.

$$F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a_0 \cdot \sin \alpha \qquad (1)$$

**a)** Tudjuk, hogy a test a lejtő síkjában mozoghat. A lejtőirányú gyorsulását jelölje $a_x$. Tegyük fel, hogy a test lefelé csúszik, vagyis a pozitív irányban:

$$m \cdot a_x = m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a_0 \cdot \cos \alpha,$$

amelyből:

$$a_x = g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(g - a_0)$$

Az $a_0 = g$ esetben $a_x = 0$ lesz, tehát a test a lejtőhöz képest nyugalomban van.

**b)** Az $a_0 = 1{,}2\ g$ esetben a lejtőirányú gyorsulás:

$$a_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(g - a_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(g - 1{,}2\ g) = -\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A test tehát fölfelé fog gyorsulva csúszni a lejtőn.

**c)** Az $a_0 = 0{,}8\ g$ esetben a lejtőirányú gyorsulás:

$$a_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(g - a_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(g - 0{,}8\ g) = \sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A test tehát lefelé $\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással gyorsul a lejtőn.

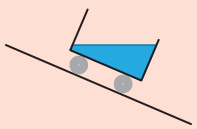
**d)** Az (1) egyenletből az **a)** esetben ($a_0 = g$) a lejtőre merőleges $F_n$ nyomóerő meghatározható. Mivel $\alpha = 45°$, ekkor $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, így:

$$F_n = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot m \cdot g = 14{,}1\ \text{N}$$

Ha a lejtőre helyezett test tömege 1 kg, akkor a testre ható nyomóerő nagysága 14,1 N.

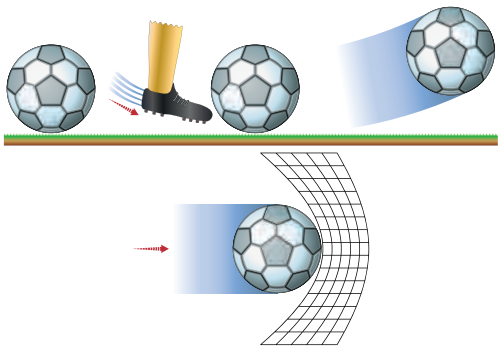
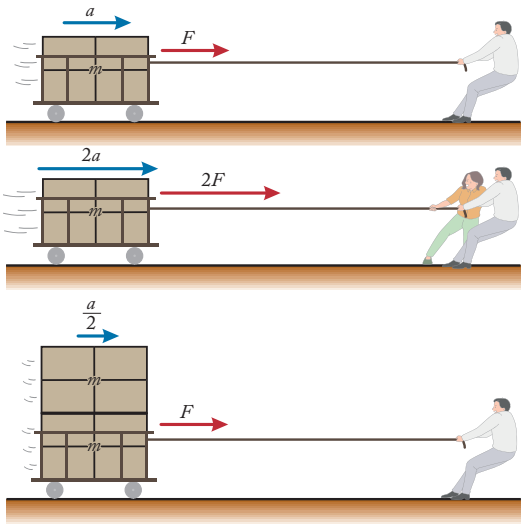
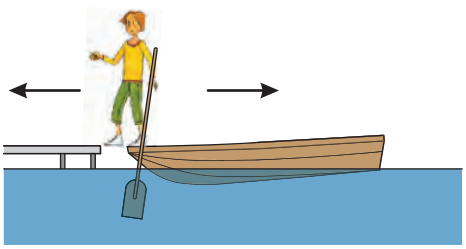
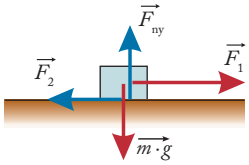
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen erőket nevezünk tehetetlenségi erőknek?
2. Gyorsuló rendszerben a Newton-törvények közül melyek nem teljesülnek?
3. A kocsira erősített inga segítségével hogyan lehetne a kocsi gyorsulását mérni?
4. Egy folyadék felszíne a folyadékrészekre ható erőkre merőleges helyzetű. Ezt felhasználva válaszoljunk a következő kérdésre: Milyen helyzetet foglal el a folyadék felszíne egy $a_0$ gyorsulással mozgó tartálykocsiban?
5. Egy lejtőre kiskocsit, a kiskocsira egy kádat helyezünk. Amíg a kocsi nyugalomban van, addig a kádban a víz vízszintes. Milyen helyzetű lesz a víz, ha a kocsi már huzamosabb ideje állandó gyorsulással megy lefelé a lejtőn?

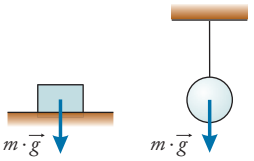
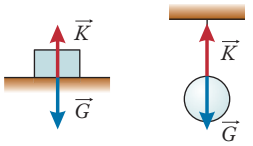
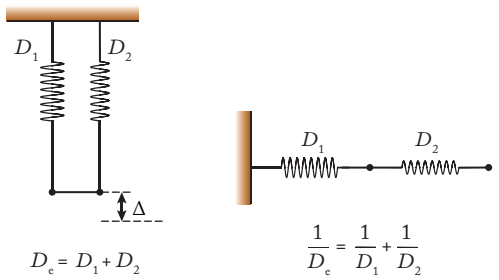
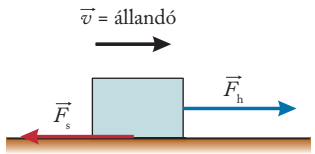
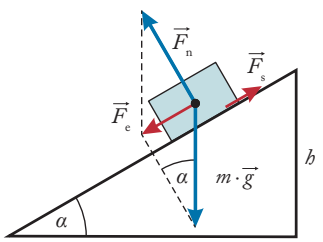
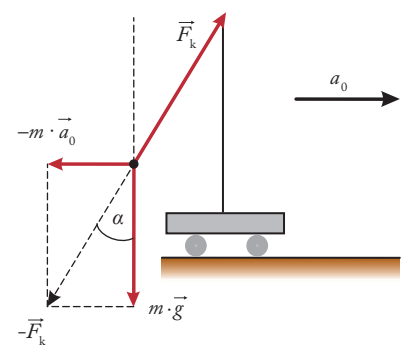


# Összefoglalás

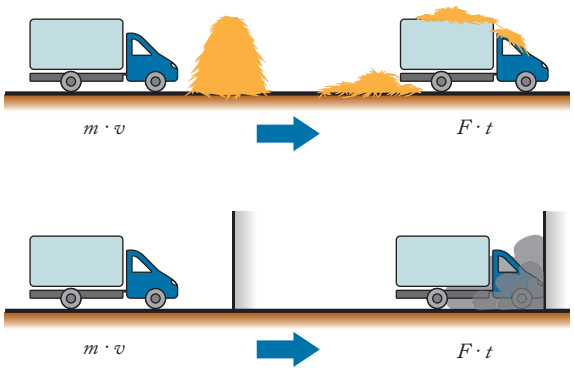
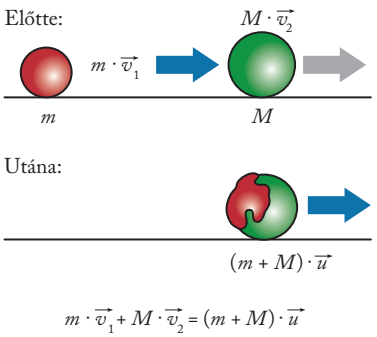
## Newton-törvények

| Törvény | Megfogalmazás | Példa |
|---|---|---|
| A tehetetlenség törvénye | Inerciarendszerben minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, míg egy kölcsönhatás a mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti. |  |
| Newton II. törvénye | Ha egy testre erő hat, akkor a test az erő irányában gyorsul. A test $\vec{a}$ gyorsulása egyenesen arányos a testre ható $\vec{F}$ erővel, és fordítottan arányos a test $m$ tömegével.<br>$F = m \cdot a$, $a = \frac{F}{m}$,<br>ahol $m$ a tehetetlenség mértéke. |  |
| Erő-ellenerő törvénye (Hatás-ellenhatás törvénye) | Ha az egyik test erőt fejt ki a másikra, akkor a másik is erőt fejt ki az elsőre (ellenerő), azaz az erők mindig párosával lépnek fel. A kölcsönhatásban a – különböző testekre ható – erők egyenlő nagyságúak, azonos hatásvonalúak és ellentétes irányúak. |  |
| A szuperpozíció elve (Erőhatások függetlenségének elve) | Ha egy testre egyidejűleg több erő hat, akkor ezek együttes hatása megegyezik a vektori eredőjük hatásával. Ugyanígy, egy testre ható erő felbontható tetszőlegesen sok erővé, amelyek vektori összege az eredeti erő.<br>$\Sigma F = m \cdot a$ | <br>$\vec{m \cdot g} = \vec{F}_{ny}$<br>$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}$ |
| A dinamika alaptörvénye | A testre ható erők vektoriális eredője egyenlő a test tömegének és gyorsulásának a szorzatával.<br>$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | |

## Mechanikai erőhatások

| Törvény | Megfogalmazás | Példa |
|---|---|---|
| Nehézségi erő | $F = m \cdot g$ |   |
| Súlyerő | Az az erő, amivel a test a felfüggesztést húzza, vagy az alátámasztást nyomja.<br>Jele: $G$. |   |
| Rugóerő | $F_r = D \cdot \Delta l$<br>Rugók soros kapcsolása:<br>$\frac{1}{D_e} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$<br>Párhuzamos kapcsolása:<br>$D_e = D_1 + D_2$ |   |
| Csúszási súrlódási erő | $F_s = \mu \cdot F_{ny}$ |   |
| Tapadási súrlódási erő | $F_{t,max} = \mu_0 \cdot F_{ny}$ | |
| Gördülési ellenállás | $F_g = \mu_g \cdot F_{ny}$ | |
| Lejtőn fellépő erők | $F_e = m \cdot g \cdot \sin\alpha$,<br>$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$ |   |
| Tehetetlenségi erő | Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben:<br>$F_{teh} = -m \cdot a_0$ |   |

## A lendület

| Törvény | Megfogalmazás | Példa |
|---|---|---|
| Lendülettétel | $\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$<br>A testre ható erők eredője egyenlő a test lendületének időegységre eső megváltozásával, vagy:<br>$\Sigma \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v$<br>Erőlökés = Lendületváltozás. | Szerencsésebb egy szalmakazallal ütközni, mit egy fallal.<br> |
| Lendület-megmaradás | Ütközések során az ütközés előtti lendületek vektoriális összege egyenlő az ütközés utáni lendületek vektoriális összegével.<br>$\Sigma \vec{I}_e = \Sigma \vec{I}_u$<br>Zárt rendszerben a testek lendületeinek vektori összege állandó.<br>$\Sigma \vec{I}$ = állandó, ha a rendszer zárt. | Rugalmatlan ütközés:<br><br>$m \cdot \vec{v}_1 + M \cdot \vec{v}_2 = (m + M) \cdot \vec{u}$ |

# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** A kamrában egy hosszú, egyenes szalámi lóg vékony zsinegen. A szalámira rámászott egy egér. Ekkor még nem szakadt el a zsineg. Viszont amikor az egér gyorsan elkezdett szaladni, a szalámit tartó zsineg elszakadt. Merre kezdett el a kisegér szaladni?
A) Lefelé.
B) Felfelé.
C) Bármelyik irányba szaladhatott, mert a leszakadást a gyorsulás nagysága dönti el, nem az iránya.

**2.** Egy súrlódásmentesen gyorsuló testet valamekkora erővel gyorsítottunk $t$ ideig, így $d$ utat tett meg. Ezt követően a test tömegét megkétszereztük, majd ugyanakkora erővel gyorsítottuk $2t$ ideig, Ekkor $D$ utat tett meg. Mivel egyenlő a $\frac{D}{d}$ arány?
A) 1 : 1.
B) 1 : 2.
C) $1 : \sqrt{2}$.
D) $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**3.** Három darab egyforma, 10 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugalmassági állandójú könnyű rugót sorba kapcsolunk egymás után. A lánc egyik szabad végét falhoz erősítjük, a másik szabad véget 1 N erővel meghúzzuk. Mekkora erő ébred a középső és a falhoz erősített rugó között?
A) Nem ébred erő.
B) 2 N erő ébred köztük.
C) $\frac{1}{3}$ N erő ébred köztük.
D) 1 N erő ébred köztük.

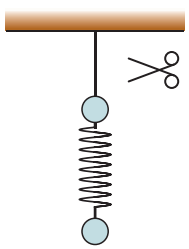
**4.** Egy rugó rugóállandója 100 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Ha a rugót félbevágjuk, mekkora erővel kell húznunk, hogy 10 cm-re nyúljon meg?
A) 5 N.
B) 10 N.
C) 20 N.
D) 40 N.

**5.** Két azonos tömegű test ütközik egymással szemben haladva. Egyikük sebessége ütközés előtt 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, míg ütközés után 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, miközben haladási iránya változatlan marad. A vele szemben haladó test kezdetben 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel mozgott. Mekkora ütközés után ennek a testnek a sebessége?
A) 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú.
B) 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú.
C) 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú.
D) Állandó.

**6.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2020)
Ha egy testet 20 méterről leejtünk egy vákuumkamrában, akkor az esési idejének első felében 5 métert, a második felében 15 métert esik. Mennyit esik a test az esési idejének első felében, ha a légellenállás nem elhanyagolható?
A) Kevesebb, mint 5 métert.
B) Éppen 5 métert.
C) Több, mint 5 métert.

**7.** Egy ejtőernyős nagy magasságból leérkezve 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ér földet hagyományos ejtőernyőjével. (Hagyományos ejtőernyőn olyan félgömb alakú ernyőt értünk, amely csak a közegellenállási erő és a gravitáció törvényeinek engedelmeskedik, és mozgása közben nem tesz szert más erőhatásokra.) Másodszor tandemugrást hajt végre egy vele azonos tömegű illetővel. (Tandemugrás során az oktató és a hozzá csatolt tanuló ugyanazzal az egy darab ernyővel ugrik.)
Mekkora sebességgel érnek most földet?
A) 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
B) $6\sqrt{2}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
C) 9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
D) $3\sqrt{2}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

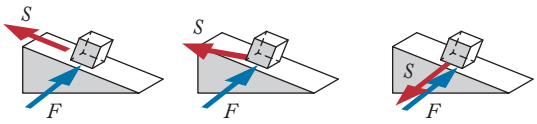
**8.** Két azonos tömegű golyót egy rugó köt össze függőleges helyzetben, az ábrán látható módon. A felső golyót egy cérnaszállal a mennyezethez erősítjük. A golyók a cérnaszál elvágása előtti pillanatban nyugalomban vannak. Mekkora nagyságú gyorsulással indulnak a golyók a cérna elvágásának pillanatában?



A) Mindkét golyó $g$-vel.
B) A felső $2g$-vel, az alsó 0-val.
C) A felső $2g$-vel, az alsó $g$-vel.
D) A felső $g$-vel, az alsó 0-val.

**9.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2015)
Egy lejtőn álló súlyos hasábra a lejtő síkjába eső, a lejtés irányára merőleges irányú $F$ erőt fejtünk ki az ábra szerint. A hasáb a tapadási súrlódás miatt nem mozdul meg. Melyik ábra mutatja helyesen a testre ható tapadási erő irányát, amíg az $F$ erőt meg nem szüntetjük?

A) B) C)




**10.** Egy homokkal megrakott teherautó rááll egy hídmérlegre. (A hídmérlegek teherautók rakománnyal együtt való mérlegelésére szolgáló eszközök.) Ekkor a mérleg $G$ súlyt mutat. Majd átszakad a platója, és elkezd ömleni a homok a mérlegre. Mit mutat most a mérleg?
A) Továbbra is $G$-t.
B) $G$-nél kevesebbet.
C) $G$-nél többet.

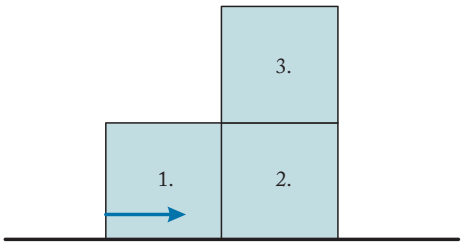
## FELADATOK

**1.** Egy autó 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel falnak ütközik. Az autóban kialakított ütközési zóna eredményeként a jármű 0,8 m hosszúságú úton egyenletesen lassulva megáll. Becsüljük meg, hogy a biztonsági öv által a gépkocsivezetőre kifejtett fékezőerő hányszorosa a gépkocsivezető súlyának!

**2.** Egy 60 kg tömegű ember egy magas torony kilátójának második emeletéről belép a liftbe, és rááll egy rugós mérlegre. A lift indulásakor azt látja, hogy a mérleg 5 s-ig 480 N erőt mutat, azután (elhanyagolható idejű átmeneti jelenségek után) 12,5 s-ig 600 N erőt, majd 5 s-ig 720 N erőt. Ekkor a lift megáll, az utas kilép belőle. A földszint és a második emelet szintkülönbsége egyenlő a második és a harmadik emelet szintkülönbségével.
**a)** A torony földszintjére vagy a 3. emeletére érkezett-e a látogató?
**b)** Milyen magasan van a torony 3. emelete?

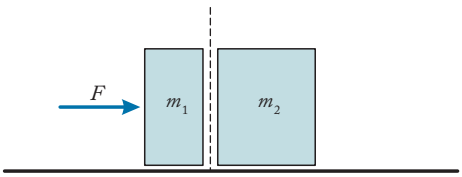
**3.** Egy 4 kg tömegű kiskocsit, elhanyagolható tömegű rugós erőmérő közbeiktatásával, vízszintes helyzetű deszkalapra erősítjük, majd az 1 kg tömegű deszkalapot vízszintes irányban gyorsítjuk. A deszkalapra 2 N nagyságú súrlódási erő is hat. Amikor a deszka és a kiskocsi már együtt mozog, akkor a rugós erőmérő 12 N erőt jelez.
**a)** Mekkora a rendszer gyorsulása?
**b)** Mekkora erővel kell húzni a deszkát?
**c)** Mekkora a deszka és a talaj közt a súrlódási együttható? Inkább betonon, vagy inkább jégen csúszhat a rendszer?

**4.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2012)
Vízszintes, súrlódásmentes felületen kockák fekszenek – részben egymáson – az ábrának megfelelően. Mindegyikük 0,1 kg tömegű. A bal oldalon egyedül álló 1. kockát vízszintes irányú, balról jobbra ható, 0,9 N nagyságú erővel toljuk, és feltételezzük, hogy a tapadási súrlódás nem engedi meg, hogy a 3. kocka a 2. kockához képest elmozduljon.




**a)** Mekkora a kockák gyorsulása?
**b)** Mekkora az 1. és a 2. kocka között ható erő?
**c)** Milyen irányú és mekkora a 3. kockára ható tapadási erő?

**5.** Két hasáb tömege $m_1 = 2$ kg és $m_2 = 6$ kg. Köztük egy papírlap van. A 2 kg tömegű hasábot $F = 16$ N erővel nyomjuk a másik hasábhoz. A hasábok és a vízszintes felület közt a súrlódás elhanyagolható.

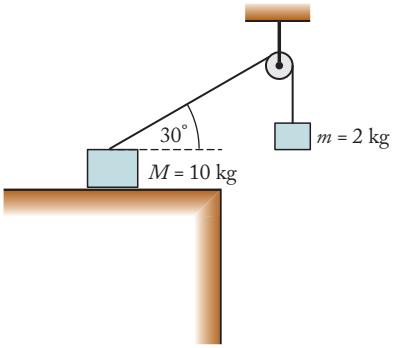



**a)** Mekkora erővel nyomja az $m_1$ tömegű test az $m_2$ tömegű testet?
**b)** A papírlap és a hasábok közt a tapadási súrlódási együttható 0,2. Mekkora erővel lehet felfelé húzva megmozdítani a papírlapot a hasábok közt a gyorsítás közben?
**c)** A papírlap helyett most egy $m_3 = 0{,}5$ kg tömegű deszkalapot teszünk a hasábok közé. Ennek kimozdításához mekkora erőre van szükség, ha a deszkalap és a hasábok közt a tapadási súrlódási együttható 0,2?

**6.** Egy rugó hossza egy ráakasztott 100 g tömegű test hatására 14 cm hosszúságú. Ha egy 300 g-os testet akasztunk rá, akkor a hossza 18 cm lesz.
**a)** Mekkora lesz a hossza, ha egy 400 g tömegű testet teszünk rá?
**b)** Mekkora a rugó terheletlen hossza?

**7.** Egy kacsa áll a befagyott tó jegén, 4 m távolságra a parttól. Talpa és a jég közt a tapadási súrlódási együttható 0,05.
Mekkora lehet az a legrövidebb idő, amíg kiér a partra?

**8.** Mekkora lehet a tapadási súrlódási együttható az asztal és az $M = 10$ kg-os test közt, ha az ábrán látható rendszer egyensúlyban van?




**9.** (Emelt szintű érettségi feladat alapján, 2005)
Nagy magasságban kezdősebesség nélkül elejtenek egy 0,4 kg tömegű, gömb alakú testet. A zuhanó test mozgását a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő fékezi. Esetünkben a közegellenállási erő nagysága $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességnél 0,008 N. Az elejtett test mozgását vizsgálva megállapítható, hogy 20,7 méter zuhanás után a sebessége $16{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**a)** Mekkora a test gyorsulása abban a pillanatban, amikor a sebessége $16{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

**b)** Határozza meg, hogy mekkora maximális sebességre gyorsulhat fel a test!

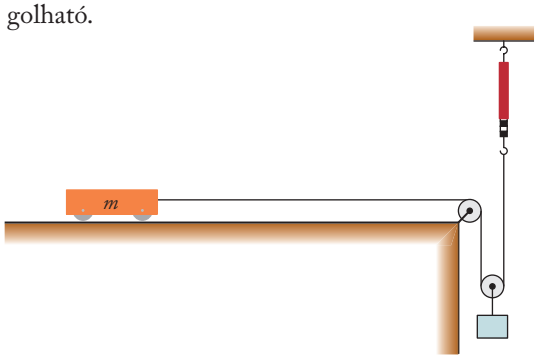
**10.** Az Apollo–15 leszállásakor a három ejtőernyő közül az egyik nem nyílt ki. Emiatt hány százalékkal lett nagyobb a becsapódási sebessége? (Feltételezzük, hogy a leszállóegység fékezésében az ejtőernyőknek van kizárólagos szerepe.)

**11.** Egy ratrak mekkora minimális tapadási súrlódási együttható esetén tud a 45°-os lejtőn felfelé gyorsulni $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással? (A ratrak sípályák karbantartására használt lánctalpas jármű. Képünkön.)



**12.** Egy testet 5 N állandó erővel tudunk egyenletesen felfelé húzni $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőn. Ugyanezen a lejtőn lefelé szabadon csúszva a test $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességről 5 m hosszú úton áll meg. Mekkora a test tömege, és mekkora a csúszási súrlódási együttható?

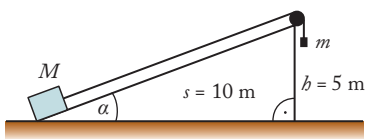
**13.** Az ábrán azt a módszert látjuk, ahogy az $F = m \cdot a$ képletet kimérni szokás. Tegyük fel, hogy a kiskocsi tömege 300 g. A csiga és a kötelek tömege elhanyagolható.




**a)** Mekkora legyen az alsó csigára helyezett test tömege, hogy a kiskocsi gyorsulása $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ legyen?

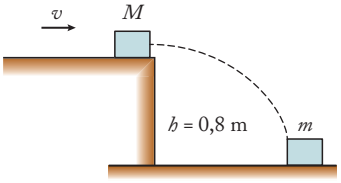
**b)** Mekkora erőt jelez ekkor az erőmérő?

**14.** Az ábrán egy rögzített lejtőt látunk. Mekkora $\frac{m}{M}$ tömegarány mellett jut el a kezdősebesség nélküli $M$ tömegű test a 10 m hosszú súrlódásmentes lejtő tetején lévő csigáig, ha az $m$ tömegű csigától indul? (A súrlódás és a csiga tömege elhanyagolható.)




**15.** Egy 100 kg tömegű vasúti csille $0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad vízszintes irányban, elhanyagolható gördülési ellenállással, amikor hirtelen 0,2 tonna szenet ejtenek bele. Mekkora sebességgel megy tovább a csille?

**16.** Az ábrán látható $m = 10$ g tömegű lövedék $v = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel az $M = 4{,}99$ kg tömegű testbe csapódik, és benne marad.
Az asztaltól számítva milyen távolságban ér földet?



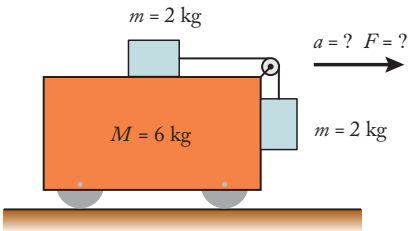
**17.** Egy 30 kg tömegű üres gumicsónak pontosan a stéggel párhuzamosan úszik 1 $\frac{m}{s}$ sebességgel. Gyuri a stégről 3 $\frac{m}{s}$, vízszintes irányú sebességgel beleugrik a csónakba, sebességének iránya merőleges a csónak sebességére. Gyuri tömege 60 kg.
Mekkora sebességgel indul tovább a csónak, ha a víz ellenállásától eltekintünk?

**18.** 60°-os szögben felfelé $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ sebességgel elhajított, 3 kg tömegű bomba, pályájának felszálló ágában 1 kg és 2 kg tömegű darabokra robban szét. A kisebbik éppen a kilövés helyére esik. Hova pottyan a nagyobbik darab? (A légellenállást hanyagoljuk el!)

**19.** A $h = 4$ m magasságú, 30°-os, súrlódás nélküli, görbült ívben végződő lejtőről vízszintes sebességgel rácsúszik egy 50 kg tömegű, kis méretű zsák a vízszintesen álló, elhanyagolható gördülési ellenállású, $M = 100$ kg tömegű, $L = 4$ m hosszú kocsira, és annak a végéig csúszik. Mekkora a zsák és a kocsi között a súrlódási tényező?

**20.** Egy 10 tonnás űrhajó egy nagy méretű, nyugvó kozmikus porfelhőn halad át. A porszemcsék rátapadnak az űrhajó védőpajzsára. Egy köbméter térfogatban átlagosan 10 db porszemcse van, mindegyiknek 0,01 g a tömege. Az űrhajó sebességére merőleges keresztmetszete 25 $m^2$, a meteorokhoz képesti sebessége 10 $\frac{km}{s}$.
Mekkora tolóerővel kell működtetni a hajtóművet, hogy az űrhajó sebessége ne változzon?

**21.** Az ábrán látható $M = 6$ kg tömegű kocsit a rajta lévő tömegekkel együtt gyorsítjuk. Az állócsiga tömege elhanyagolható, mindkét test és a kocsi között a súrlódási tényező $\mu = 0{,}4$.
**a)** Mekkora lehet a kocsi gyorsulása, hogy a rajta lévő testek ne csússzanak meg?
**b)** Mekkora erővel kell nyomni a kocsit ehhez?




## ESSZÉKÉRDÉSEK

### A rakéták mozgása, súlytalanság

*Az amerikai űrrepülőgép-program 1981–2011 közt összesen 133 sikeres repülést hajtott végre, kettő pedig tragédiával végződött. A képen a program első repülésekor a Columbia űrrepülőgép indítását látjuk. Az űrrepülőgép aljára két segédrakéta és egy nagy méretű külső üzemanyagtartály volt erősítve. A segédrakéták a pályára állításhoz szükséges többleterőt biztosították mintegy két percig, majd leváltak, és ettől kezdve az űrrepülőgép saját hajtóműveivel haladt tovább. Nyolc és fél perc után a külső üzemanyagtartály is kiürült, az is levált, és ettől kezdve az űrrepülő saját rakétáival haladt tovább, és mintegy 25 perc után állt a kitűzött pályájára, amikor minden hajtóművét kikapcsolta. A teljes indító tömeg kb. 2000 tonna volt, a rakéták által kifejtett összes tolóerő pedig 28,19 MN volt, ami működésük közben alig változott. A rakéták egyik fontos jellemzője a tolóerő-súly arány. Az űrrepülőgépnél ennek átlagértéke 3 körüli, az átlagos keringési sebessége a Föld körül 7,7 $\frac{km}{s}$ volt.*



Magyarázza el, mi a rakéta mozgásának elve! Mekkora gyorsulás járul a tolóerő-súly arány hármas értékéhez? Mekkora volt a tolóerő-súly arány az induláskor? Mi magyarázhatja, hogy jelentősen kisebb, mint az átlagos 3-as érték?

Ha az indulásnál tapasztalt gyorsulással tudott volna csak továbbhaladni, akkor mennyi idő alatt érte volna el az átlagos Föld körüli keringési sebességét?

Az űrrepülőgép fedélzetén az űrhajósok egy idő után a súlytalanság állapotába kerültek. Mi jellemző erre az állapotra, és ez mikor következhetett be?

A leszállási manőver előtt az űrrepülőgépet egy rövid időre furcsa helyzetbe kellett hozni, ilyenkor az űrrepülőgép farokrésze került a haladás irányába, mintegy három percig. Erre vajon miért volt szükség?

# IV. Munka, energia







# 1. Munka, munkatétel

## EMLÉKEZTETŐ

### A munka

Ha valaki bevásárlószatyrot cipel, árut rak fel a kocsira, azt mondjuk, munkát végez. Az előbbi tevékenységek mindegyike erőkifejtésen kívül a testen valamilyen elmozdulást is létrehozott, ezért beszélünk munkavégzésről.

**A fizikában akkor beszélünk munkavégzésről, ha valamely test erő hatására elmozdul.**

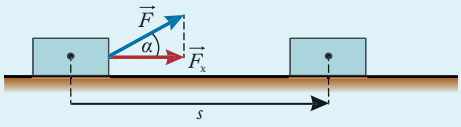
A munkát legegyszerűbben az egyenes vonalú mozgásnál fellépő állandó $F$ erő esetén definiálhatjuk.

**Egy testre ható állandó erő munkája az $F$ erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és az $s$ elmozdulásnak a szorzata.**

$W = F_x \cdot s$.

**Mértékegysége: joule (J). 1 J = 1 N · m.**

**A munka skalármennyiség.**



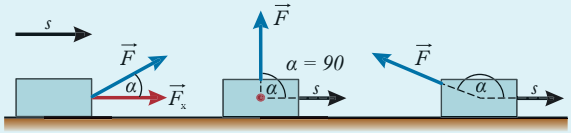

*Az $F_x$ az $F$ erő elmozdulás irányába eső összetevője*

A munka jele a $W$, a szó angol megfelelőjének (work) a kezdőbetűjéből származik. Mivel az erő származtatott mértékegység ($1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$), ezért a munka mértékegységének alapegységekkel kifejezett alakja:

$$\text{J} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Az $F$ erő $F_x$ összetevője a hegyesszögekre vonatkozó szögfüggvényekkel *(ld. fenti ábrát)* kifejezve $\boldsymbol{F_x = F \cdot \cos \alpha}$ összefüggéssel is felírható.

**Ha valamely testre ható erő és a test elmozdulása nem esik egy egyenesbe, akkor az erőnek csak az elmozdulás (mozgás) irányába eső összetevője végez munkát.**




*Az $\alpha$ szög nagyságát az $F$ vektor és az $s$ elmozdulásvektor által bezárt szög határozza meg*

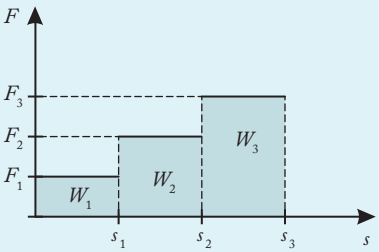
A $W = F_x \cdot s$ összefüggés minden $\alpha$ szög esetén érvényes:
- ha $F_x$ és $s$ azonos irányú, akkor a munka előjele pozitív,
- ha $F_x$ és $s$ merőleges, akkor a munka nagysága nulla,
- ha $F_x$ és $s$ ellentétes irányú, akkor a munka előjele negatív.

### Változó erő munkája

Határozzuk meg az ábrán az $F$-s koordináta-rendszerben látható $F$ erő munkavégzését!

Ha egy test elmozdítása közben az $F_h$ húzóerő nem állandó, akkor az elmozdulást olyan szakaszokra osztjuk fel, amelyeken az $F_h$ húzóerő még állandó. Az egyes szakaszokon a végzett munkát külön-külön kiszámítjuk, majd a kapott értékeket összeadjuk. Legyen az egyes szakaszokon a húzóerő nagysága $F_1$, $F_2$, $F_3$, míg az elmozdulások hossza rendre $s_1$, $s_2$, $s_3$. A teljes elmozdulás során az $F_h$ húzóerő által végzett munka *(ld. ábrán)*:

$$W = F_1 \cdot s_1 + F_2 \cdot s_2 + F_3 \cdot s_3 + \ldots$$




*A grafikon alatti terület az egyes szakaszokon végzett munka mérőszámának összegét adja*

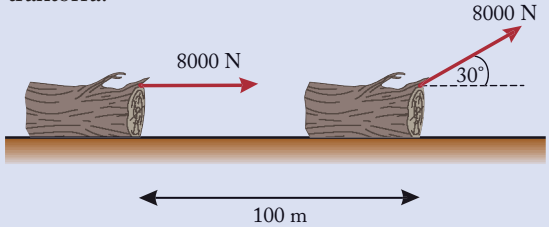
*A változó erő munkájának mérőszáma az $F$-$s$ koordináta-rendszerben a grafikon alatti téglalapok területeinek összegével egyenlő.*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy traktorral 8000 N nagyságú erővel egy farönköt terveznek elhúzni 100 m hosszúságú úton. Mekkora a húzóerő munkája, ha a kötelet

**a)** vízszintesen,

**b)** a vízszintessel 30°-os szöget bezáróan kötik fel a traktorra?



## MEGOLDÁS

Adatok:
$F = 8000$ N, $s = 100$ m, $\alpha = 30^\circ$.

---

*a)* $W = ?$;
*b)* $W' = ?$

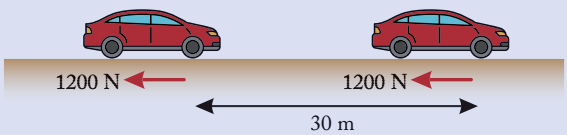
**a)** Az erő egy irányba esik az elmozdulással, így

$W = F \cdot s = 8000\ \text{N} \cdot 100\ \text{m} = 8 \cdot 10^5\ \text{N}$

**b)** Az erő nem párhuzamos az elmozdulással, ekkor az erő elmozdulás irányába eső összetevőjével számolunk.

$W' = (F \cdot \cos\alpha) \cdot s = 8000\ \text{N} \cdot \cos 30^\circ \cdot 100\ \text{m} = 6{,}92 \cdot 10^5\ \text{N}$

**2. FELADAT** Egy személygépkocsit fékezéskor a gumiabroncsok és az úttest között fellépő súrlódási erő lassítja, amely a személygépkocsi mozgásával ellentétes irányú. A 30 m hosszúságú fékúton állandó, 1200 N nagyságú erőt fejt ki a súrlódási erő. Mekkora munkát végzett a fékrendszer a fékezés alatt?




*A személygépkocsi mozgását lassítóerő fékezi*

## MEGOLDÁS

Adatok:
$F_t = 1200$ N, $s = 30$ m.

---

$W = ?$

A fellépő erő (súrlódási erő) a mozgás irányával ellentétes irányú. A munkavégzés:

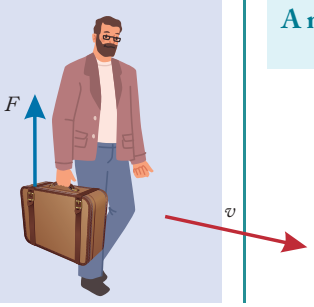
$W = F_t \cdot s = -1200\ \text{N} \cdot 30\ \text{m} = -36\,000\ \text{J}.$

Az elmozdulással ellentétes erő munkája negatív, amit a megoldás során fel is használtunk.

**3. FELADAT** Egy személy állandó sebességgel haladva viszi a bőröndjét vízszintes talajon. Mekkora az általa végzett munka?

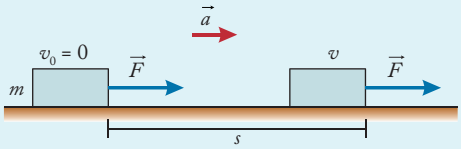
## MEGOLDÁS

Ebben az esetben a személy által a bőröndre kifejtett erő merőleges a mozgás irányára. Mivel az erőnek nincs az elmozdulás irányába eső összetevője, így a munkavégzés nulla.




## Gyorsítási munka

Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy $m$ tömegű, kezdetben nyugvó testre párhuzamos irányú $F$ erő hat. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha ez az $F$ erő $s$ úton munkát végez!




*Hasáb gyorsítása állandó erővel*

Az $m$ tömegű testre ható $F$ erő munkája: $W_{gy} = F \cdot s$.

Az erő az $m$ tömegű testet $a$ gyorsulással gyorsítja, vagyis $W_{gy} = m \cdot a \cdot s$.

Legyen az $s$ út megtétele után a test sebessége $v$, az $s$ út befutásához szükséges idő $t$. Ha a mozgás kezdetén a kezdősebesség nulla volt, akkor a $t$ idő alatt megtett $s$ útra az $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$, az elért végsebességre pedig a $v = a \cdot t$ összefüggés érvényes.

Így: $W_{gy} = m \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot t^2 = m \cdot \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

**A gyorsítási munka az elért sebesség négyzetével és a test tömegével arányos mennyiség.**

$$W_{gy} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

A gyorsítás közben végzett munka eredménye az, hogy a test munkavégző képességhez jutott. A munkavégző képesség révén a test munkát tud végezni. **A testek munkavégző képességét energiának nevezzük.**

Az energia mértékét az a munka adja meg, amit a test munkavégző képességénél fogva végezhet.

## Mozgási energia

Egy test mozgási energiához – mint az előzőekben láttuk – gyorsítás révén végzett munka árán jut.

**A testek sebességéből adódó munkavégző képességet mozgási (kinetikus) energiának nevezzük. Jele: $E_m$.**

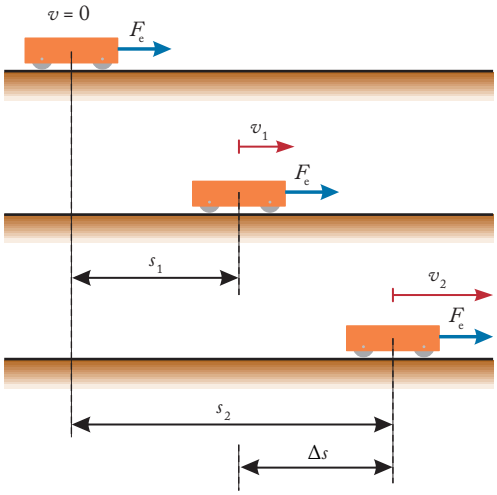
**Mértékegysége: $\text{J} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$**

**A mozgási (kinetikus) energia skalármennyiség.**

## Munkatétel

Ha egy testre több erő hat egyszerre, akkor először kiszámítjuk a testre ható erők eredőjét, majd a következő lépésben ennek munkáját határozzuk meg. Tehát a gyorsítási munkát a testre ható erők eredője végzi.

Ha egy $m$ tömegű testet állandó $F_e$ eredő erővel gyorsítunk, akkor $s$ úton a sebessége nulláról $v$-re változik. Így az álló helyzetből induló testen végzett gyorsítási munka egyenlő az $s$ úton szerzett mozgási energiával, amelynek nagysága $E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.




*Az $F_e$ eredő erő a test mozgási energiáját növeli*

Számítsuk ki a mozgás közbülső szakaszán a munkát, amikor $\Delta s$ úton a test sebessége $v_1$-ről $v_2$-re változik! Eredményül kapjuk:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

**Egy pontszerű testre ható erők eredőjének munkája egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával. Ez a tömegpontra vonatkozó munkatétel.**

**$W_e = E_{m,2} - E_{m,1}$, azaz $W_e = \Delta E_m$**

A testre ható erők eredőjének a munkája a test végpontbeli és kezdőpontbeli mozgási energiájának a különbsége. Így a munkatétel szemléletesebb alakja:

$$F_e \cdot \Delta s = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$$

### KIDOLGOZOTT FELADAT

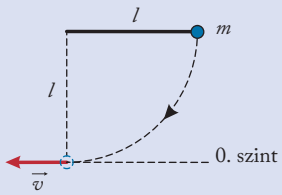
Egy vízszintesen kitérített 50 g tömegű fonálinga fonálhossza 102 cm. Az elengedés után a függőleges helyzetén 4,4 $\frac{m}{s}$ sebességgel halad át.

Mekkora munkát végzett a közegellenállás? $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

#### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 50\ g = 5 \cdot 10^{-2}\ kg$,
$l = 102\ cm = 1{,}02\ m$,
$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

$W_k = ?$




*A testre a nehézségi erő és a közegellenállási erő hat*

Az $m$ tömegű testre ható erők:
– $m \cdot g$ nehézségi erő,
– $F_f$ fonálerő,
– $F_k$ közegellenállási erő.

Az $F_f$ fonálerőnek a munkája zérus, mert a fonálerő hatásvonala minden pillanatban merőleges az elmozdulásra. A munkatétel alapján az $m \cdot g$ nehézségi erő $W_g$ és a közegellenállási erő $W_k$ munkavégzésének az összege egyenlő az $m$ tömegű fonálinga mozgási energiájának $\Delta E_m$ megváltozásával: $W_g + W_k = \Delta E_m$.

A közegellenállás munkavégzése:

$W_k = \Delta E_m - W_g$, vagyis $W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot l$

Behelyettesítve:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot \left(4{,}4 \frac{m}{s}\right)^2 - 5 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}02\ m =$$
$$= -16{,}31\ mJ.$$

A közegellenállás munkavégzése: –16,31 mJ.

*Megjegyzés:* Látható, hogy a nehézségi erő és a közegellenállási erő munkavégzése előjelesen adódik össze.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Fogalmazza meg a munka definícióját!
2. Milyen összefüggéssel írható fel $F$-$s$ koordinátarendszerben a végzett munka állandó erő és lineárisan változó erő esetén?
3. Végez-e munkát szabadeséskor a nehézségi erő? És légüres térben?
4. A testre ható erő és a test sebessége ellenkező irányúak. Történik-e munkavégzés?
5. Miből lesz egy testnek gyorsítási munkája? Mire fordítódik a gyorsítási munka?
6. Mit nevezünk mozgási energiának?
7. Fogalmazza meg a munkatételt!

# 2. A mechanikai energia megmaradásának törvénye

## EMLÉKEZTETŐ

### A testek egyenletes mozgatása közben végzett munka

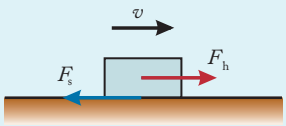
A mindennapi életben legtöbbször olyan esetekkel találkozunk, amikor a testre erőt fejtünk ki, és a test egyenletesen mozog.

Ez akkor valósulhat meg, ha a testre ható erők eredője nulla, vagyis a testre ható erővel egy másik erő (pl. súrlódási erő, nehézségi erő) egyensúlyt tart.

Nézzük meg azt a két esetet, amikor a leggyakrabban előforduló erők ellenében történik a munkavégzés!

**Súrlódási erő munkája**

Mozgassunk egyenletesen egy $m$ tömegű testet $\mu$ csúszási súrlódási együtthatóval rendelkező vízszintes talajon, egy állandó nagyságú $F_h$ húzóerővel! A mozgás folyamán *azt tapasztaljuk, hogy az $F_h$ húzóerő egyensúlyt tart az $F_s$ súrlódási erővel*, így $F_h = F_s$.




*Egyenletes sebesség esetén az $F_h$ húzóerő egyensúlyt tart az $F_s$ súrlódási erővel*

A mindennapi tapasztalataink szerint a testek egymáson történő elmozdulásakor fellép egy, **a mozgást akadályozni próbáló erő, a súrlódási erő**. Ha a mozgás ennek ellenére létrejön, akkor az elmozduló testre ható súrlódási erő munkát végez.

**A súrlódási erő munkavégzése vízszintes talajon:**

$$W_s = -F_s \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő és az elmozdulás ellentétes irányú. Így a súrlódási erő munkája álló felületen mindig negatív.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó gépkocsi a zebra előtt hirtelen fékezni kezd. Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a veszély észlelésétől a megállásig csúszós úttesten, ha a csúszási súrlódási tényező 0,4, a vezető reakcióideje pedig 1,2 s?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$\mu = 0{,}4$,

$a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

$s' = ?$

A feladatban szereplő személygépkocsi fékezéskor blokkol, és csúszással áll meg. A fékútját kell meghatároznunk. A fékezőerő $s$ úton $W = -F_s \cdot s$ munkát végez a gépkocsin. A munkatétel alapján:

$$-F_s \cdot s = 0 - \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

A fékezőerő nagysága csúszás esetén: $F_s = \mu \cdot m \cdot g$, amelyet a munkatételbe ($\Delta E_m = W$) behelyettesítve kapjuk:

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot s = 0 - \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

ahonnan a fékút: $s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$

Behelyettesítve: $s = \frac{13{,}88^2}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 10} \approx 24{,}08$ m

A fékút kb. 24 m, de ebbe nem számoltuk bele a vezető reakcióidejét. A reakcióidőbe beletartozik a vezető reagálása a veszély észlelésétől a fékpedál megnyomásáig, továbbá a teljes fékhatás kialakulásának ideje. Tehát csak a féktávolság második része a fékút.

A vezető átlagos reakcióideje 1,2 s, így az észleléstől a megállásig megtett $s'$ összes út:

$s' = 13{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}2\ \text{s} + 24{,}08\ \text{m} = 40{,}7\ \text{m}.$

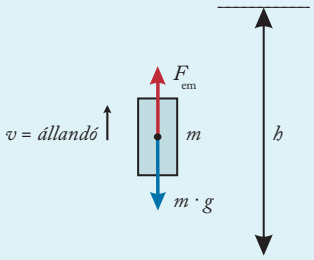
A veszély észlelésétől a megállásig a gépkocsi 40,7 m utat tesz meg.

### Emelési munka

Egy $m$ tömegű testet egyenletesen emeljünk $F_{em}$ emelőerővel $h$ magasságba! A mozgás közben az $F_{em}$ emelőerő az $mg$ nehézségi erő ellenében végez munkát. Mivel a test egyenletes sebességgel mozog, ezért a dinamika alapegyenlete alapján az emelőerő egyenlő nagyságú a nehézségi erővel: $F_{em} = m \cdot g$.

Az emelés magassága $h$, így az emelési munka:

$$W_{em} = F_{em} \cdot h = m \cdot g \cdot h$$




*A testre emelés közben két erő hat*

**Egyenletes mozgatás esetén az emelőerő és a nehézségi erő nagysága azonos, így az emelési munka:**

$$W_{em} = m \cdot g \cdot h$$

A nehézségi erő munkája negatív előjelű, mivel a nehézségi erő az elmozdulással ellentétes irányú:

$$W_{neh} = -\, m \cdot g \cdot h$$

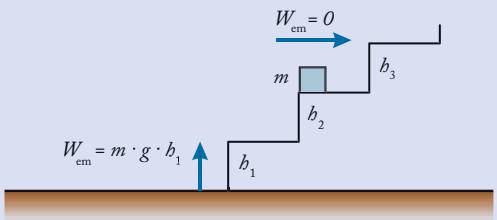
## KIDOLGOZOTT FELADAT

Vigyük fel az iskola folyosóján is végighaladva a földszintről az I. emeletre a táskánkat! Mekkora munkát végzünk egy $m$ tömegű táska cipelése során, ha az épület egyes szintjeinek magassága $h$?

### MEGOLDÁS

Adatok:
Adott $m$, $h$.

$W$ = ?




Amíg az épület folyosóján, azaz a mozgás vízszintes szakaszán haladunk, nem jön létre az emelés irányában történő elmozdulás. Ezen a szakaszon nem végzünk munkát ($W_{em} = 0$).

A lépcsőfokokon az $F_{em}$ emelőerő végez munkát, melyre fennáll: $F_{em} = m \cdot g$.

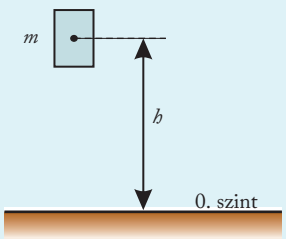
Az egyes lépcsőfokok magassága $h_1$, $h_2$, $h_3$, …, amelyek együtt éppen az emelet $h$ magasságát adják meg, azaz a kifejtett erő (emelőerő) irányában történő elmozdulást. Az összes emelési munka:

$$W_{em} = m \cdot g \cdot h_1 + m \cdot g \cdot h_2 + m \cdot g \cdot h_3 + \ldots = m \cdot g \cdot h.$$

*Megjegyzés:* Figyeljük meg, hogy a végzett munka csak a test $m$ tömegétől és az emelés $h$ magasságától függ. Nem függ attól, hogy milyen úton jutott a test a $h$ magasságba.

### Helyzeti energia

Egy $m$ tömegű testnek $h$ magasságba történő emelésekor $W_{em} = m \cdot g \cdot h$ nagyságú emelési munkát végzünk. A felemelt test helyzeténél fogva rendelkezik munkavégző képességgel. Ez azt jelenti, hogy az $m$ tömegű test $h$ magasságban $m \cdot g \cdot h$ nagyságú munkavégző képességgel rendelkezik. *A felemelt test munkavégző képességét helyzeti energiának nevezzük.*




*A helyzeti energiát minden esetben egy nullaszinthez képest adjuk meg*

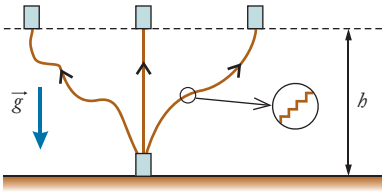
**Egy $m$ tömegű testnek egy rögzített nullaszinthez (vízszintes síkhoz) képest $h$ magasságban $E_h = m \cdot g \cdot h$ helyzeti energiája van.**

**Mértékegysége: J.**

A helyzeti energia meghatározásakor mindig megadjuk a nullaszintet (viszonyítási szintet). Ilyen alapállapotnak tekintjük például a Föld, illetve a padló szintjét.

## Konzervatív erő

Emeljünk fel különböző pályákon egy $m$ tömegű testet $h$ magasságra! Határozzuk meg a folyamat során végzett munkát!




*A test felemelése különböző pályákon*

Bármelyik pályát választjuk, az felbontható vízszintes és függőleges elmozdulásokra. A vízszintes elmozdulások során sem a nehézségi erő, sem az emelőerő nem végez munkát. A függőleges elmozdulások összege minden esetben $h$-val egyezik meg *(ld. ábrán)*. Így a testet felfelé emelő ember által végzett munka független a pálya alakjától. Az $m$ tömegű testnek a Földtől a $h$ magasságig történő emelésekor az emelési munka:

$$W_{em} = m \cdot g \cdot h$$

Vagyis a testen végzett munka és a gravitációs erőtér által végzett munka is csupán a mozgás kezdő- és végpontjának a gravitációs erőtér irányában lévő távolságától függ, a mozgás pályájának alakjától nem.

A vizsgált testnek azért lett $m \cdot g \cdot h$ nagyságú a munkavégző képessége, mert homogén gravitációs erőtérben, a tér irányával ellentétesen mozgattuk. A testet magára hagyva az $mg$ gravitációs erő pontosan annyi munkát végez a testen, mint amennyit korábban a gravitációs tér ellenében végzett a külső erő (emelőerő). Ezt úgy mondjuk, hogy *a külső erő munkája eltárolódott, azaz konzerválódott a test helyzeti adottságában.*

**Az olyan erőket, amelyeknek a munkája egy elmozdulás során csak a kezdő- és a végpont helyzetétől függ, és nem függ a pálya alakjától, konzervatív erőknek nevezzük.**

Konzervatív erő például a nehézségi erő és a rugóerő.

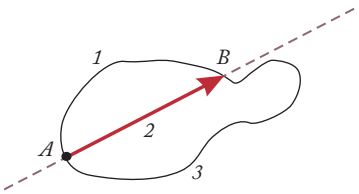
## Mechanikai energia

A konzervatív erővel szemben végzett munkából származó energiát **potenciális energiának** nevezzük. Potenciális energia például a helyzeti energia és a rugalmassági energia. A konzervatív erőtérben lévő, potenciális energiával rendelkező testen az erőtér munkát tud végezni, ami például a test mozgási energiájának változásában jelenik meg.

*A helyzeti és rugalmassági energiákat, valamint a korábban tanult mozgási energiát* közös néven **mechanikai energiának** nevezzük.

## A mechanikai energia megmaradásának törvénye

A konzervatív erőtérben az $F$ erő által végzett munka nem függ attól, hogy milyen pályán kerül valamely tömegpont a tér egy tetszőleges A pontjából a tér egy másik, B pontjába, *a munka csak a kezdő- és végpont egymáshoz viszonyított helyzetétől függ*. Ilyen erő például a tömegvonzás, az elektrosztatikus vonzás vagy taszítás, az ideális rugóerő stb. Nem konzervatív erő például a súrlódás, ennél ugyanis a súrlódási erő által végzett munka a megtett úttal arányos, tehát a különböző hosszúságú, de azonos végpontú pályákra különböző nagyságú.




*Konzervatív erő csak a kezdő- és végpont egymáshoz viszonyított helyzetétől függ*

A konzervatív erők tulajdonsága lehetővé teszi, hogy egy test a rá ható $F$ erő esetén is rendelkezhet potenciális (helyzeti) energiával. Kiválasztunk a térben egy tetszőleges pontot (pl. A pontot), ahol a test potenciális energiáját önkényesen 0-nak vesszük fel. A tér egy másik, B pontjában a testnek az $F$ erőtől származó potenciális energiáját azzal a munkával definiáljuk, amelyet az erő akkor végez, amikor a test a B pontból valamilyen tetszőleges pályán A-ba kerül. Több konzervatív erő esetén mindegyik erőhöz rendelünk egy-egy potenciális energiát, és azok összege adja meg a test teljes potenciális energiáját.

A konzervatív erő és a hozzá rendelhető potenciális energia definíciójából következik a mechanikai energia megmaradásának tétele:

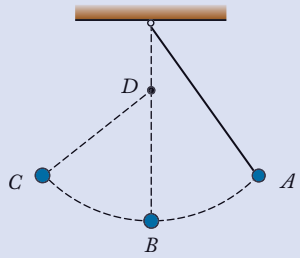
**Ha a tömegpontra ható összes erő konzervatív, akkor a tömegpontnak a mozgási (kinetikus), helyzeti (potenciális) és rugalmassági energiájából összetevődő teljes mechanikai energiája a mozgás folyamán állandó marad:**

$$E_{mozgási} + E_{helyzeti} + E_{rugalmassági} = E_{mechanikai} = \text{állandó.}$$

*Megjegyzés:* A mechanikai energia megmaradásának tételében csak a helyzeti energia különbsége kap szerepet, ezért a helyzeti energiának a nullszintjét tetszőlegesen vehetjük fel.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Milyen magasra emelkedik az A pontból elengedett, fonálingán lévő test, ha a fonalat a D pontnál elhelyezett szöggel megakasztjuk?




### MEGOLDÁS

A mozgás folyamán A és C pontokban a mozgási energia 0, ha az erők konzervatívak (amikor a súrlódást, közegellenállást és a többi nem konzervatív erőt elhanyagoljuk). Így előre megmondhatjuk, hogy a test ugyanolyan magasra emelkedik, mint az A pontban volt, mert a helyzeti (potenciális) energiájuk megegyezik.

*Megjegyzés:* A feladatban kényszererő is szerepelt (a fonálban lépett fel). A mechanikaienergia-megmaradás tételének alkalmazásakor felhasználjuk, hogy az olyan erő, amely a mozgó testet valamely pályára kényszeríti, mindig merőleges erre a pályára, és így a munkája mindig nulla. Ezért a mechanikaienergia-megmaradás tételének alkalmazásakor az ilyen erők figyelmen kívül hagyhatók.

Látható, hogy **a mechanikai energia megmaradásának tétele nem általános érvényű, csak konzervatív erőkre érvényes.**

**2. FELADAT** Egy téglatest alakú test lecsúszik az ábra szerinti lejtőn. Számítsuk ki, mekkora sebességgel ér a lejtő aljára a test!

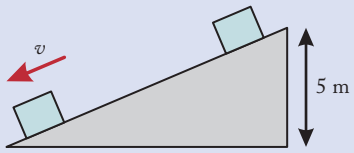
### MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 5$ m.

---

$v = ?$




*A téglatest összes mechanikai energiája*

Legyen $v$ a téglatest sebessége a lejtő alján. A helyzeti energia nullaszintjét pedig rögzítsük a lejtő aljához!

– a lejtő tetején: $E_{ö} = E_{h} = m \cdot g \cdot h$,

– a lejtő alján: $E_{ö} = E_{m} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

A mechanikai energia megmaradásának törvénye szerint a mozgás folyamán a test összes mechanikai energiája állandó, így felírható a következő összefüggés:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

ahonnan: $v = \sqrt{2g \cdot h} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A téglatest $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel ér a lejtő aljára.

*Megjegyzés:* Ez sokkal egyszerűbb módja a megoldásnak, mintha a testre ható erők összetevőjével oldottuk volna meg a feladatot.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

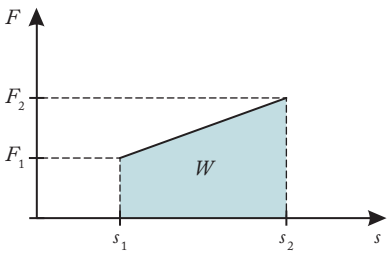
1. Definiáljuk a helyzeti energiát! Milyen esetben lehet egy testnek helyzeti energiája?
2. Igaz-e, hogy a kétszeres magasságból leejtett, szabadon eső test kétszeres sebességgel ér földet?
3. Igaz-e, hogy ha egy ingát feleakkora szöggel térítünk ki, akkor feleakkora sebességgel halad át az egyensúlyi helyzeten?
4. Lehet-e egy test helyzeti és mozgási energiájának összege negatív?
5. Fogalmazzuk meg a mechanikai energia fogalmát!
6. Milyen energiafajtákat ismerünk?

# 3. Rugalmassági energia

## Lineárisan változó erő munkája

Keressünk összefüggést egy lineárisan változó $F$ erő munkavégzése és az $s$ elmozdulás között!

Ábrázoljuk $F$–$s$ koordináta-rendszerben a lineárisan változó $F$ erő munkavégzését!




*A grafikon alatti terület a végzett munka mérőszámával egyenlő*

**A grafikon alatti területre fennáll:**

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2}(s_2 - s_1)$$

**Ha a testre ható húzóerő a munkavégzés során lineárisan változik, akkor a grafikon alatti trapéz területe egyenlő a végzett munka mérőszámával.**

## Rugalmassági energia

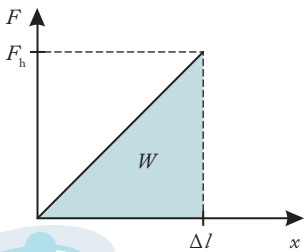
Eddigi tanulmányaink során már megtanultuk, hogy a rugó megnyújtásakor a rugóra ható $F_h$ húzóerő nagysága egyenesen arányos a rugó $\Delta l$ megnyúlásával. Fennáll a következő arányosság: $F_h \sim \Delta l$. Az arányossági tényezőt **rugóállandónak** nevezzük, melynek jele: $D$. Mértékegysége $\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

A fenti arányosságot összefüggésként felírva és figyelembe véve, hogy a rugó $\Delta l$ megnyúlása és az $F_h$ húzóerő megegyező irányú:

$$F_h = D \cdot \Delta l \qquad (1)$$

Grafikonon ábrázoljuk az $F_h$ húzóerőt a $\Delta l$ megnyúlás függvényében!

Látjuk, hogy ha a kezdetben $l_0$ hosszúságú rugót $\Delta l$ távolsággal megnyújtjuk, akkor a megnyúlás során a rugóra kifejtett húzóerőnk nagysága egyenesen arányos a $\Delta l$ megnyúlással.




*Az F–x koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület a húzóerő munkájának mérőszámával egyenlő*

Az $F_h$ húzóerő munkája a grafikon alatti területtel lesz egyenlő, vagyis:

$$W_h = \frac{1}{2} F_h \cdot \Delta l$$

**Tehát a lineárisan változó $F_h$ esetén a grafikon alatti terület nagysága egyenlő az $F_h$ húzóerő által végzett munkával.** A kapott összefüggésbe az (1) összefüggést beírva kapjuk:

$$W_h = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

A $F_h$ húzóerő munkája a rugó rugalmassági energiájának ($E_r$) növelésére fordítódik, így

$$W_h = \Delta E_r$$

A *rugó megnyújtásakor végzett munka a rugóban munkavégző képesség formájában tárolódik, amely később más mechanikai energiává alakulhat*. Ezt a munkavégző képességet nevezzük a rugó **rugalmassági energiájának**.

**Egy megfeszített rugóban tárolt $E_r$ rugalmassági energia:**

$$E_r = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

A rugóban tárolt rugalmassági energia a rugót jellemző tulajdonságtól (rugóállandótól) és a deformáció mértékétől (a megnyúlás négyzetétől) függ.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy eredetileg 5 cm-rel megnyújtott rugót további 10 cm-rel megnyújtunk. A rugó rugóállandója 500 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Mekkora munkát kell végeznünk a rugó megnyújtása során?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$\Delta l_1 = 5$ cm $= 0{,}05$ m,

$\Delta l_2 = 15$ cm $= 0{,}15$ m,

$D = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

$W = ?$

**1. megoldás**

A rugó már 5 cm-rel megnyújtott helyzetéből 15 cm-re megnyújtott állapotába kerül.

A húzóerő által végzett munka a rugó rugalmassági energiájának növelésére fordítódik.

$$W = \frac{1}{2} D \Delta l_2^2 - \frac{1}{2} D \Delta l_1^2 = \frac{1}{2} D (\Delta l_2^2 - \Delta l_1^2) =$$

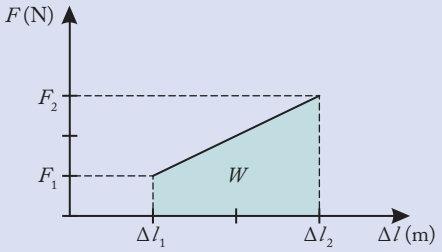
$$= \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot (0{,}15^2 - 0{,}05^2) = 5 \text{ J}$$

Az általunk végzett munka 5 J.

### 2. megoldás

Az erő-elmozdulás ($F$-$\Delta l$) koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület a rugón végzett munkával egyenlő. A grafikon alatti terület egy trapéz, így a rugóra ható $F_h$ húzóerő munkája:

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (\Delta l_2 - \Delta l_1) \qquad (1)$$




*Az F-Δl koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület a rugón végzett munka mérőszámával egyenlő*

A rugóra ható húzóerők nagysága:

$$F_1 = D \cdot \Delta l_1 = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}05 \text{ m} = 25 \text{ N},$$

$$F_2 = D \cdot \Delta l_2 = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}15 \text{ m} = 75 \text{ N}.$$

Behelyettesítve az (1) összefüggésbe:

$$W = \frac{25 + 75}{2} \cdot (0{,}15 - 0{,}05) = 5 \text{ J}.$$

Az általunk a rugón végzett munka 5 J.

**2. FELADAT** Egy 0,5 kg tömegű tárgyat ejtünk 5 m magasról egy $D = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú rugóra. Mekkora lett a rugó legnagyobb összenyomódása?

### MEGOLDÁS

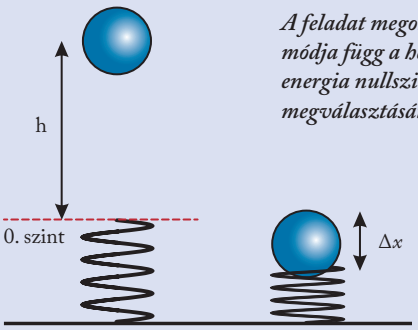
Adatok:
$m = 0{,}5$ kg,
$h = 5$ m,
$D = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

$\Delta x = ?$

### 1. megoldás

A testre csak konzervatív erők hatnak, ezért a mechanikai energia megmaradásának törvénye alkalmazható. Válasszuk a helyzeti energia nullaszintjének az alapállapotban lévő rugó legfelső pontját.

A mechanikai energiák:
– indulás pillanatában: $E_ö = E_h = m \cdot g \cdot h$,
– leérkezés pillanatában:
$E_ö = E_h + E_r = -m \cdot g \cdot \Delta x + \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$




*A feladat megoldásának módja függ a helyzeti energia nullszintjének megválasztásától is*

A mechanikai energia megmaradásának törvénye értelmében a mozgás folyamán a mechanikai energiák összege állandó, így

$$m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot \Delta x + \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2,$$

amelyből: $m \cdot g \cdot (h + \Delta x) = \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$

Behelyettesítve: $0{,}5 \cdot 10 \cdot (5 + \Delta x) = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot \Delta x^2$,

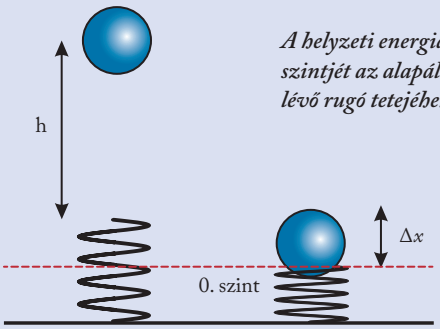
$0 = 250 \cdot \Delta x^2 - 5 \cdot \Delta x - 25$

A másodfokú egyenlet megoldása után kapjuk, hogy $\Delta x = 0{,}228$ m.

A rugó legnagyobb összenyomódása 22,8 cm.

### 2. megoldás

Válasszuk a helyzeti energia nullaszintjének az összenyomott rugó azon pontját, amikor a rá eső golyó éppen megáll.
A mechanikai energiák:
– indulás pillanatában: $E_h = m \cdot g \cdot (h + \Delta x)$,
– leérkezés pillanatában: $E_r = \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$.




*A helyzeti energia nullszintjét az alapállapotban lévő rugó tetejéhez rögzítjük*

A mechanikai energiameg maradásának törvénye értelmében a mozgás folyamán a mechanikai energiák összege állandó, így $m \cdot g \cdot (h + \Delta x) = \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$.

Behelyettesítve: $0{,}5 \cdot 10 \cdot (5 + \Delta x) = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot \Delta x^2$,

amelyből $\Delta x = 0{,}228$ m.

**3. megoldás**

A feladatot munkatétel felhasználásával is oldjuk meg. A golyón a nehézségi erő végez munkát $(h + \Delta x)$ úton. A munkavégzés egyenlő a rugó rugalmassági energiájának megváltozásával: $W_{gr} = \Delta E_r$.

$m \cdot g \cdot (h + \Delta x) = \frac{1}{2} D \cdot \Delta x^2$

Az előző megoldásokhoz hasonlóan: $\Delta x = 0{,}228$ m.

A rugó legnagyobb összenyomódása 22,8 cm.

## A mechanikai energia fajtái

A témakörben eddig megismerkedtünk a mechanikai energia fajtáival: a helyzeti energiával, a mozgási energiával és a rugalmassági energiával.

A következő táblázatban összefoglaljuk a mechanikai energiák főbb jellemzőit.

| Energiafajták elnevezése | Jellemzői | Példák |
|---|---|---|
| Mozgási energia | tömeggel rendelkező test mozgásából származó energia | mozgó gépkocsi, mozgó molekula vagy elektron |
| Helyzeti energia | egy test gravitációs térben elfoglalt helyzete miatti energia | vízerőmű vízmennyiségének helyzetéből származó energiája, vízcseppek a felhőkben |
| Rugalmassági energia | rugalmas test alakjában tárolt energia (reverzibilis változás során szabadul fel) | rugóban tárolt energia, vonós hangszer húrjában tárolt energia |

*Mechanikai energiafajták és jellemzőik*

## Az emberi szervezet energiaforrásai

Az emberi szervezet (és más élőlények) működése is energiaátalakulások sorával jár. Az ember energiaforrásai az élelmiszerek, amelyek energiatartalma alapvetően háromféle forrásból származik: szénhidrátokból, zsírokból és fehérjékből. Az élelmiszerben lévő rostok energiatartalma kicsi, a víz pedig nem szolgáltat energiát.

Az élelmiszerek energiatartalmát kilojoule-ban (kJ) vagy kilokalóriában (kcal) adhatjuk meg.

A két mértékegység közötti összefüggés a következő:

1 kJ = 0,14 kcal, 1 kcal = 4,18 kJ

Az egyes energiaforrások 1 grammja a következő nagyságú energiát tartalmazza:

| Táplálék 1 g mennyisége | Energiatartalom |
|---|---|
| Fehérje | 17 kJ / 4 kcal |
| Szénhidrát | 17 kJ / 4 kcal |
| Zsír | 37 kJ / 9 kcal |
| Alkohol | 29 kJ / 7 kcal |

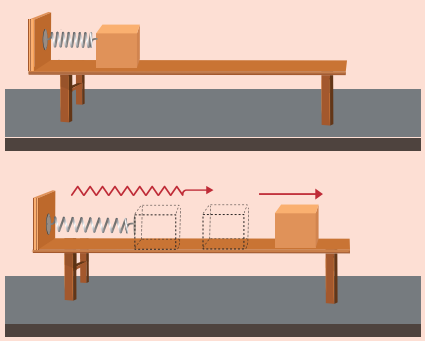
Az élő szervezet, ha elfogyasztja táplálékát, energiához jut. A napi energiaszükségletünk függ a végzett tevékenységtől, kortól, nemtől, egészségi állapottól, a környezet hőmérsékletétől stb.

Átlagos munka esetén naponta 9200 kJ = 2200 kcal energiára van szüksége egy felnőtt embernek. Nehéz fizikai munka esetében ez többszörösére is megnőhet.

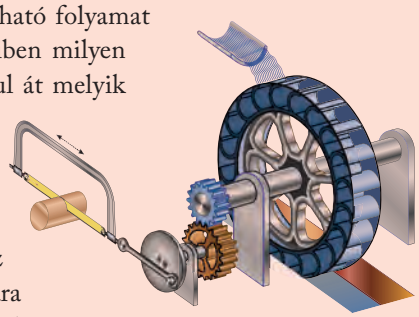
Az élelmiszerek csomagolásán pontosan fel van tüntetve az adott élelmiszer 100 g mennyiségére vonatkoztatva, hogy mennyi annak az energiatartalma.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen összefüggések érvényesek a rugóra ható húzóerő munkavégzésére és a rugalmassági energiára?
2. Egy fakockával vízszintes irányban egy rugót összenyomunk. Milyen energiaátalakulás történik, ha a fakockát hirtelen elengedjük?



3. Ha egy csúzli gumiszálainak $\Delta l$ megnyújtásakor $v$ sebességgel repül el a kavics, akkor a $2 \cdot \Delta l$ megnyújtásnál $2v$ sebességgel fog elrepülni. Igaz-e ez? Miért?
4. Az ábrán látható folyamat egyes lépéseiben milyen energia alakul át melyik energiaformába?
5. Mely élelmiszerek szolgálnak az ember számára energiaforrásul?



# 4. Teljesítmény, hatásfok

## A teljesítmény

Az embereknek és gépeknek is jellemzője, hogy milyen „sebességgel” képesek adott mennyiségű munkát elvégezni. *A munkavégzés sebességét teljesítménynek nevezzük.*

**A teljesítmény a munka és az elvégzéséhez szükséges időtartam hányadosa. Jele: *P*.**

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

**Mértékegysége watt (W).** $W = \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

**A teljesítmény skalármennyiség.**

Ha a teljesítmény a munkavégzés ideje alatt nem állandó, akkor azt **átlagteljesítménynek** is nevezzük.

A teljesítmény jele a power (angol ’teljesítmény’) szó nagy kezdőbetűje.

## A teljesítmény és a sebesség kapcsolata

Ha egy állandó nagyságú $F$ erő állandó $v$ sebességgel mozgat egy testet $s$ úton, akkor $W = F \cdot s$ munkát végez. Az $s$ utat a test $t$ idő alatt teszi meg. Ha a lenti összefüggésben $\frac{s}{t} \Rightarrow$ 0-hoz, az átlagsebesség a pillanatnyi sebességhez tart:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v, \text{ azaz } P = F \cdot v$$

Ezt a teljesítményt **pillanatnyi teljesítménynek** nevezzük.

Ez azt is jelenti, hogy a gyakorlatban megvalósuló mozgások esetén (gépkocsi mozgása, szállítószalag mozgása) a teljesítmény a sebességgel egyenesen arányos.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Mennyi egy kamion motorjának teljesítménye, ha a 36 tonna tömegű kamion vízszintes úton egyenletes teljesítménnyel 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad? A kamionra ható közegellenállási erő nagysága $2 \cdot 10^4$ N.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 36 \text{ t} = 3{,}6 \cdot 10^4 \text{ kg}$,

$v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$F_\text{k} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$.

---

$P = ?$

A kamion egyenletes mozgatása közben a kamion motorjának teljesítményét úgy is kiszámíthatjuk, hogy a motor által kifejtett húzóerőt (talajra kifejtett vízszintes erő) szorozzuk a kamion sebességével.

A kamion egyenletes mozgatása közben a kamion motorja által kifejtett $F_\text{h}$ húzóerő a rá ható $F_\text{k}$ közegellenállási erővel egyenlő, azaz $F_\text{h} = F_\text{k} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$.

A teljesítmény:

$P = F \cdot v = 2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^5 \text{ W} = 300 \text{ kW}$.

A kamion motorja 300 kW teljesítménnyel dolgozik. Ez a teljesítmény egy személygépkocsi teljesítményének kb. tízszerese.

**Egyenletes haladás esetén a mozgó test pillanatnyi teljesítménye megegyezik a test átlagteljesítményével.**

## A munka kiszámítása a teljesítményből

Az elektromos gépeknél sok esetben a teljesítmény könnyebben meghatározható és pontosabban mérhető, mint a munkavégzés. A munkagépeken, otthoni eszközökön feltüntetik az elektromos berendezés vagy készülék teljesítményét. Mivel 1 W teljesítménnyel 1 s alatt 1 J munkát végzünk, így $1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot 1 \text{ s}$.

A munkának a teljesítménnyel való kifejezése alapján vezették be az 1 kWh mértékegységet. Az 1 kWh a $10^3$ W teljesítménnyel 1 h alatt végzett munka.

$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3{,}6 \text{ MJ}$.

### Hatásfok

A berendezések fontos jellemzője, hogy a befektetett energia mekkora része válik hasznos munkává vagy hasznos energiává.

**A hatásfok a munkavégzés során végzett hasznos munka (energia) és a befektetett összes munka (energia) hányadosa. Jele: $\eta$ (éta, görög betű).**

$$\eta = \frac{\text{hasznos munka (energia)}}{\text{befektetett összes munka (energia)}}$$

Ha $\eta = 0{,}6$, akkor 60%-os hatásfokról beszélünk.

*Megjegyzés:* Ugyanannyi idő alatt számított hasznos és összes teljesítmény hányadosa is a hatásfokot adja meg. Az összefüggés:

$$\eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{összes}}}.$$

Az egyes energiaforrásokra jellemző hatásfokot mutatja a következő táblázat.

| | Jellemző hatásfok (%) |
|---|---|
| Hagyományos izzólámpa | 5 |
| Emberi izmok | 20 |
| Benzinmotor | 20 |
| Napelemcella | 25 |
| LED | 35 |
| Dízelmotor | 35 |
| Szélgenerátor | 40 |
| Elektromos fűtőtest | ≈ 100 |

*Egyes energiaforrásokra jellemző hatásfokok*

## A hatásfok mint a folyamatok gazdaságossága

Az energiaváltozással járó folyamatokat gazdaságossági szempontból is össze lehet hasonlítani.

A hatásfok megmutatja, hogy a befektetett energiának hányad része hasznosul.

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{hasznos}}}{\Delta E_{\text{összes}}}$$

Mértékegysége nincs.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy forró levegős fritőzben (olaj nélkül működik) 6 percig sütöttük a csirkemellet. A fritőz teljesítménye 1350 W. A csirkemell mindkét oldalának átsütéséhez 220 000 J energiára van szükség. Mekkora a fritőz hatásfoka?

#### MEGOLDÁS

Adatok:
$t = 6$ min $= 360$ s,
$P_{\text{ö}} = 1350$ W,
$\Delta E_{\text{h}} = 220\,000$ J.

$\eta = ?$

A fritőz által leadott összes energia a hús átsütésére és környezet melegítésére fordítódik.

$\Delta E_{\text{összes}} = P_{\text{ö}} \cdot t = 1350\ \text{W} \cdot 360\ \text{s} = 4{,}86 \cdot 10^5\ \text{J}.$

A hús átsütésére fordított energia lesz a hasznos energia.

$\Delta E_{\text{hasznos}} = 2{,}2 \cdot 10^5\ \text{J}.$

Gazdaságossági szempontból a hatásfok:

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{hasznos}}}{\Delta E_{\text{összes}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^5\ \text{J}}{4{,}86 \cdot 10^5\ \text{J}} = 0{,}45$$

A fritőz hatásfoka 45%.

**2. FELADAT** Egy 1200 kg tömegű személygépkocsi 2 liter benzint használ el 25 km út megtétele során. Egy liter benzin 36 MJ kémiai energiát tartalmaz. A vezető megmérte – miközben a motor húzóerőt nem fejtett ki –, hogy a jármű lassulásakor 6 s alatt a sebességváltozás nagysága $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora az autó motorjának a hatásfoka?

#### MEGOLDÁS

Adatok:
$V = 2$ l,
$s = 25$ km $= 25\,000$ m,
$E_{\text{ö}} = 36$ MJ,
$m = 1200$ kg,
$\Delta t = 6$ s,
$\Delta v = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$\eta = ?$

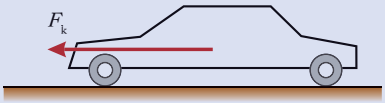
A hatásfok kiszámításához meg kell adnunk a hasznos munkavégzést. Ehhez meg kell határoznunk a következőket:

Először az autó lassulását határozzuk meg:

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\ \text{s}} = -\frac{2}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

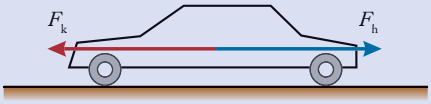
Az autó lassulását az átlagos közegellenállási erő okozza, mivel a gépkocsi motorja nem fejt ki a jármű mozgásával megegyező irányban húzóerőt. Ezt kiszámítva kapjuk:

$F_k = m \cdot a = 1200\ \text{kg} \cdot (-\frac{2}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = -800\ \text{N}$, melynek iránya a haladás irányával ellentétes.




*Ha a gépkocsi motorja nem fejt ki húzóerőt, akkor az $F_k$ közegellenállási erő lassítja, a gördülési ellenállás elhanyagolható*

Amíg az autó egyenletesen halad, a motor $F_h$ „húzóereje" és a menetellenállási erő egyensúlyt tart, a két erő egyaránt 800 N, vagyis $F_h = F_k = 800$ N. Amikor a vezető leveszi a lábát a gázpedálról, az autó az állandó $F_k$ menetellenállási erő hatására fékeződik.




*Állandó sebesség esetén az $F_h$ húzóerő egyenlő nagyságú az $F_k$ közegellenállási erővel*

A hasznos munkavégzés:

$W_h = F_h \cdot s = 800\ \text{N} \cdot 25\ 000\ \text{m} = 2 \cdot 10^7\ \text{J}$.

A benzin elégetéséből származó energia, azaz a munkavégző képesség:

$W_ö = 2 \cdot 36\ \text{MJ} = 72\ \text{MJ} = 7{,}2 \cdot 10^7\ \text{J}$.

A motor hatásfoka:

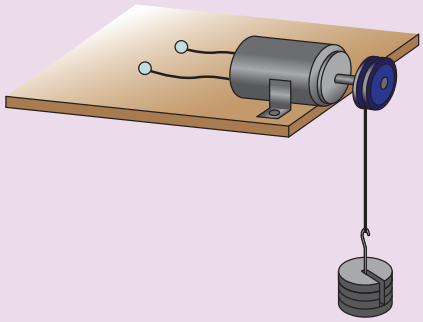
$$\eta = \frac{W_h}{W_ö} = \frac{2 \cdot 10^7\ \text{J}}{7{,}2 \cdot 10^7\ \text{J}} = 0{,}277 \approx 28\%.$$

Az autó motorjának hatásfoka 28%.

## MÉRÉSI FELADAT

### Elektromotor hasznos teljesítménye

Egy elektromotorral $m$ tömegű terhet emelünk $\Delta h$ magasságba. A motor addig működik, míg a teher az asztal lapjának magasságába nem ér. A mérést végezzük el különböző nagyságú $m$ tömegek esetén!



A hasznos teljesítményre vonatkozó összefüggés:

$$P_{\text{hasznos}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_h}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t}$$

A fenti kísérletben használt motor felvett teljesítménye 3,0 W. A 0,1 kg-os teher 1,2 m-es magasságba történő emeléséhez átlagosan 0,8 s kellett.

Gondoljuk át és válaszoljunk az alábbi kérdésekre gazdaságossági szempontból!

**a)** Mutassuk meg, hogy a kísérletben használt motor hatásfoka kb. 50%!

**b)** Mi történt a felvett elektromos energia másik 50%-ával?

**c)** Magyarázzuk meg, miért szükséges az idő többszöri leolvasása és az átlagolás!

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Definiáljuk a teljesítmény fogalmát!
2. Milyen összefüggés áll fenn egy gépkocsi teljesítménye és a sebessége között?
3. Egy testre egyetlen állandó nagyságú erő hat. Állandó-e a teljesítmény?
4. Definiáljuk a hatásfok fogalmát!
5. Definiáljuk a hatásfokot mint a gazdaságosság fogalmát!
6. Miért nagyobb az 1 km-re jutó üzemanyag-fogyasztás a városban, mint az országúton?

# 5. Ütközések energiaviszonyai

**EMLÉKEZTETŐ**

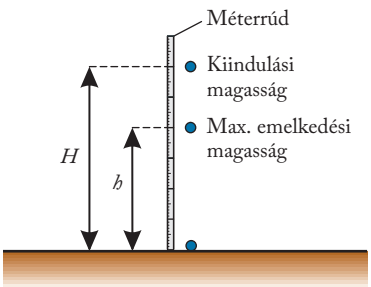
Az ütközések tárgyalása előtt tekintsük át a lendületmegmaradás törvényére vonatkozó legfontosabb tudnivalókat!

A Tömegpont dinamikája című fejezetben már láttuk, hogy a **lendületmegmaradás törvénye vektoregyenlet**. Ez azt jelenti, hogy a síkban (két dimenzióban) két skaláregyenletre, míg térben (három dimenzióban) három skaláregyenletre bontható fel; nemcsak konzervatív erőkre, hanem **mindenfajta erőhatás fellépte esetén érvényes, ha a pontrendszerre ható külső erők hatása elhanyagolható**.

## Rugalmas és tökéletesen rugalmas ütközések

Dobjunk le egy pingponglabdát $H$ magasságból egy kemény padlóra. A pingponglabda majdnem ugyanolyan magasságra pattan vissza. Próbáljuk meg ezt egy kézilabdával: jóval kisebb lesz az ütközés utáni emelkedési magasság.

A labda talajjal való ütközése akkor lesz tökéletesen rugalmas, ha pontosan ugyanaddig a $H$ magasságig pattan vissza. Rögzítsük a helyzeti energia nullaszintjét a talajhoz! A mozgás folyamán a labda kezdeti $H$ magasságban lévő helyzeti energiája megegyezik közvetlenül az ütközés utáni mozgási energiával. Ellenkező esetben nem tudna a labda $H$ magasságig visszapattanni. Ebből arra következtethetünk, hogy tökéletesen rugalmas ütközésnél mechanikaienergia-veszteség nem következik be.




*A $\frac{h}{H}$ arány az ütközés rugalmas vagy rugalmatlan jellegét meghatározza*

Láthatjuk *(ld. az ábrán)*, hogy a $\frac{h}{H}$ arány megadja a kezdeti helyzeti energia azon hányadát, amely az ütközés után mozgási energiaként visszanyerhető. Ha a $\frac{h}{H} < 1$, akkor az ütközés során mechanikaienergia-veszteség lép fel, ha a $\frac{h}{H} = 1$, akkor nem lép fel mechanikaienergia-veszteség.

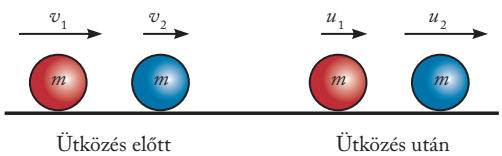
**Ha az ütközés során mechanikaienergia-veszteség lép fel (ekkor $\frac{h}{H} < 1$), akkor az ütközést rugalmatlan ütközésnek nevezzük.**

**Ha az ütközés során mechanikaienergia-veszteség nem lép fel (ekkor $\frac{h}{H} = 1$), akkor az ütközést tökéletesen rugalmas ütközésnek nevezzük. Ilyenkor az ütközés során deformálódott testek pontosan visszanyerik az eredeti alakjukat.**

Láthatjuk például:

- A padlóra merőlegesen érkező pingponglabda minimális sebességvesztéssel vagy anélkül pattan vissza a padlóról. Ha tökéletesen rugalmas az ütközés, akkor a labda sebességének nagysága nem változik (csak az iránya változik ellentétesre), és mozgási energiát sem veszít.
- Két autó nagyon alacsony sebességű ütközése (koccanása) is tökéletesen rugalmas ütközés, feltéve, hogy egyik autóban sem történik sérülés. A két jármű kezdeti mozgási energiájának egy kis része hangenergiává alakul át. Ha azonban az ütközés kárt okoz a járművekben, akkor az ütközés utáni mozgási energia kisebb, mint korábban, így az ütközés nem rugalmas.

Írjuk fel a két test tökéletesen rugalmas ütközésére vonatkozó egyenleteket!




*Tökéletesen rugalmas ütközésnél a lendület és a mozgási energia is megmarad*

**Két test centrális, tökéletesen rugalmas ütközésekor** az ütközés előtt a gyorsabban haladó $m$ tömegű, $v_1$ sebességű test utolér egy vele azonos tömegű, $v_2$ sebességű testet.

A tökéletesen rugalmas ütközésre a lendületmegmaradás törvénye és a mechanikai energiamegmaradás törvénye írható fel.

**A lendületmegmaradás törvénye:**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \qquad (1)$$

**A mechanikai energia megmaradásának törvénye:**

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2,$$

amelyből

$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2 \qquad (2)$$

A tökéletesen rugalmas ütközésre vonatkozó feladatok az (1) és (2) egyenlet alapján megoldhatók, mivel a két egyenletben mindössze két ismeretlen található.

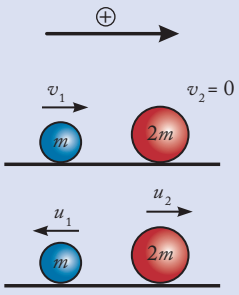
*Megjegyzés:*

1. Rugalmatlan, de nem tökéletesen rugalmatlan ütközésről beszélünk, ha az ütközés során a két test eltávolodik egymástól, és a két testnek kisebb az ütközés utáni mozgási energiája, mint korábban.
2. Annak megállapításához, hogy egy ütközés rugalmas vagy rugalmatlan, meg kell határozni az egyes testek ütközés előtti és ütközés utáni mozgási energiáját *(ld. a kidolgozott feladatot)*.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy $v_1 = 1{,}2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó $m$ tömegű atommag centrálisan ütközik egy álló, $2m$ tömegű atommaggal. Ilyen lehet például egy hidrogén ($^1_1\text{H}$) atommag deutérium ($^2_1\text{H}$) atommaggal történő ütközése. A $v_1$ sebességgel haladó atommag az ütközés után eredeti haladási irányával ellentétes irányban visszapattan, ütközés utáni sebessége $u_1 = 0{,}4 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Lehetett-e az ütközés tökéletesen rugalmas?

### MEGOLDÁS




Adatok:

$v_1 = 1{,}2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$u_1 = -0{,}4 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$u_2 = ?$

$\Delta E_\text{m} = ?$

A lendületmegmaradás törvénye alapján számítsuk ki a $2 \cdot m$ tömegű atommag ütközés után sebességét! A pozitív irány az $m$ tömegű atommag $v_1$ sebességével egyezik meg.

$$m \cdot v_1 + 0 = m \cdot u_1 + 2 \cdot m \cdot u_2$$

Behelyettesítve:

$$m \cdot (1{,}2 \cdot 10^7) = m \cdot (-0{,}4 \cdot 10^7) + 2 \cdot m \cdot u_2,$$

amelyből: $u_2 = 0{,}8 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ha egy ütközés tökéletesen rugalmas, akkor az ütköző testek ütközés előtti összes mozgási energiája megegyezik az ütközés utáni összes mozgási energiával.

Ütközés előtt:

$$\Sigma E_{\text{m,e}} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m\,(1{,}2 \cdot 10^7)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}44 \cdot 10^{14} \cdot m$$

Ütközés után:

$$\Sigma E_{\text{m,u}} = \frac{1}{2}m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}2 \cdot m \cdot u_2^2 = \frac{1}{2}m\,[u_1^2 + 2 \cdot u_2^2] =$$

$$= \frac{1}{2}m\,[(0{,}4 \cdot 10^7)^2 + 2 \cdot (0{,}8 \cdot 10^7)^2] = \frac{1}{2} \cdot 1{,}44 \cdot 10^{14} \cdot m$$

**Mivel az ütközés előtti mozgási energiák összege megegyezik az ütközés utáni mozgási energiák összegével, ezért az ütközés tökéletesen rugalmas volt.**

## MÉRÉSI FELADAT

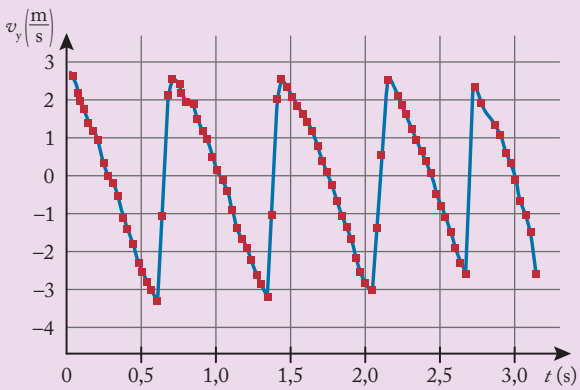
### Pattogó labda mozgásának vizsgálata Tracker videóelemző program segítségével

**Rendelkezésre álló eszközök:** pingpong- vagy más rugalmasan pattogó labda; hosszú vonalzó; erős lámpa; számítógép Tracker szoftverrel; videokamera vagy mobil.

**A mérés leírása:** A pingponglabda pattogását rögzítsük a kamera segítségével! A képbe helyezzük be az ismert hosszúságú etalont a kamera irányára merőlegesen! Ügyeljünk arra, hogy a labda pályája minél jobban kitöltse a képmezőt, és hogy a kamera vízszintesen nézzen a pattogó labdára! Célszerű a labdát erős fénnyel megvilágítani és a kamerát állványon rögzíteni.

A filmen rögzített mozgást elemezzük a Tracker program segítségével! A Tracker egy videóelemző program, melynek használatát itt nem ismertetjük. A labda középpontját nyomon követve készítsük el a programmal a mozgás magasság-idő, illetve függőleges sebesség-idő grafikonját!

A program képernyőfotója:




*A pattogó labda képernyőfotója Tracker videóelemző programmal*

A program segítségével válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

1. Adjuk meg az első öt lepattanás idejét, és ezen lepattanások esetén a leérkezés és a felfelé indulás sebességét! Magyarázzuk meg a pattanások időtartamának változását!
2. Milyen viszony fedezhető fel a leérkezések sebessége, illetve a hozzájuk tartozó visszapattanás sebessége között? Magyarázzuk meg ennek okát!

**A mérés menete**

**1.** A feladat szerint a pattanások időpontját továbbá a becsapódási és a visszapattanási sebességek értékeit kell kigyűjtenünk az első öt pattanásra vonatkozóan. Ez egyszerűen megtehető úgy, hogy a program képernyőjén a kurzorral a sebesség-idő grafikon kívánt pontjára állunk és leolvassuk a pont kiíródó koordinátáit. Így nyert mérési adatainkat a táblázat tartalmazza:

| Pattanás | idő (s) | $v_{le}$ (m/s) | $v_{fel}$ (m/s) |
|---|---|---|---|
| 1. | 0,57 | –3,34 | 2,60 |
| 2. | 1,35 | –3,22 | 2,58 |
| 3. | 2,08 | –3,12 | 2,52 |
| 4. | 2,65 | –2,78 | 2,40 |
| 5. | 3,20 | –2,71 | 2,38 |

Az egymást követő felpattanások időtartama:

| Pattanások között | idő ($\Delta t$) (s) |
|---|---|
| 1–2. | 0,78 |
| 2–3. | 0,73 |
| 3–4. | 0,57 |
| 4–5. | 0,55 |

A labda mozgásának időtartama monoton csökken, ami az egymást követő ütközések emelkedési magasságának csökkenésével értelmezhető.

**2.** A pingponglabda egymást követő ütközései során a becsapódási sebesség ($v_{le}$) abszolút értéke mindig nagyobb, mint a visszapattanás sebessége ($v_{fel}$). Ez azt mutatja, hogy a labda és az asztallap ütközése nem tökéletesen rugalmas. Az ütközések rugalmasságának jellemzésére az ütközési számot használjuk. Az ütközési szám ($k$) a mindenkori visszapattanás impulzusának és a megelőző becsapódás impulzusának hányadosa, ami megegyezik a megfelelő sebességek abszolút értékének arányával: $k = \frac{v_{fel}}{v_{le}}$.

A labda és az asztal ütközésére jellemző ütközési szám értékét, az első ütközésekre meghatározva, a táblázat tartalmazza.

| Pattanás | $v_{le}$ (m/s) | $v_{fel}$ (m/s) | $k = \frac{v_{fel}}{v_{le}}$ |
|---|---|---|---|
| 1. | 3,34 | 2,60 | 0,78 |
| 2. | 3,22 | 2,58 | 0,80 |
| 3. | 3,12 | 2,52 | 0,81 |
| 4. | 2,78 | 2,40 | 0,86 |
| 5. | 2,71 | 2,38 | 0,88 |

Az ütközési szám jó közelítéssel állandó érték, bár a 4. és 5. pattanásnál markánsabban nagyobb. Ennek oka az lehet, hogy ezekben az esetekben a sebesség már lecsökkent, így a közegellenállási erő is kisebb lett, ami az ütközési szám növekedésében jelentkezett.

**A mérés hibái:** A mérés során fokozottan kell arra ügyelni, hogy a labda függőlegesen mozogjon, vízszintes, egyenletes talajra essen. Az oldalirányú eltérülés nagy hibákat eredményezhet. Ügyelni kell a megfelelő kezdőpontok kiválasztására is!

A hiba származhat a mérési módszer sajátosságából is: A videófelvétel nem megfelelő pillanatban készített képkockái alapján kiszámolt értékek jelentős eltéréseket eredményezhetnek. Ezt a hibát a sűrűbb képkockázással lehetne mérsékelni.

## Rugalmatlan ütközés

A rugalmatlan ütközésnél az ütköző testek deformációja miatt mechanikaienergia-veszteség lép fel, így a mechanikai energia megmaradásának törvénye nem alkalmazható. *A tökéletesen rugalmatlan ütközés esetén a két ütköző test összetapad, közös sebességgel együtt halad tovább. A mechanikai energia egy része elvész, ami az ütköző testek belső energiáját növeli.*

Ilyen eset lehet például:

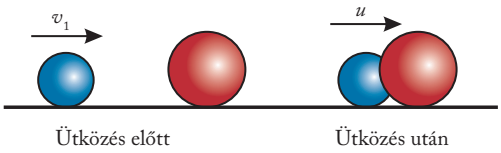
– Két vasúti kocsi egymással ütközik, az ütközés során összekapcsolódnak és közös sebességgel haladnak tovább. A kezdeti mozgási energiájuk egy része más energiaformává alakul át.
– A tökéletesen rugalmatlan ütközés esete az a gépjárműbaleset, ahol a két gépjármű egymásba roncsolódik. Az ütközés utáni összes mozgási energia kisebb, mint az ütközés előtti összes mozgási energia.

Egy $m_1$ tömegű, $v_1$ sebességű golyó centrálisan egy $M$ tömegű, álló golyónak ütközik. Ütközés után $u$ közös sebességgel haladnak tovább.

**Példa:** Írjuk fel a két test tökéletesen rugalmatlan ütközésére vonatkozó egyenleteket!

A rugalmatlan ütközésre felírható összefüggés:

$$m_1 \cdot v_1 + 0 = (m + M) \cdot u$$




*Tökéletesen rugalmatlan ütközésre a lendületmegmaradás törvénye írható fel*

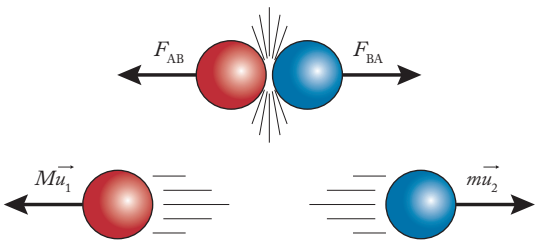
*Megjegyzés:* Minden ütközésre fennáll (rugalmasra és rugalmatlanra egyaránt): ha nem lép fel $F_k$ külső erő az ütközés során, akkor a testek összes lendülete megmarad, tehát felírható a lendületmegmaradás törvénye.

## Robbanások

A robbanások minden esetben rugalmatlan ütközésnek számítanak, mert a robbanás megindításához munkavégzésre van szükség (belső erő munkát végez). A robbanáshoz szükséges energiát kémiai energiából nyerjük.

**Robbanások esetén** a lendületmegmaradás törvényét alkalmazni lehet akkor,

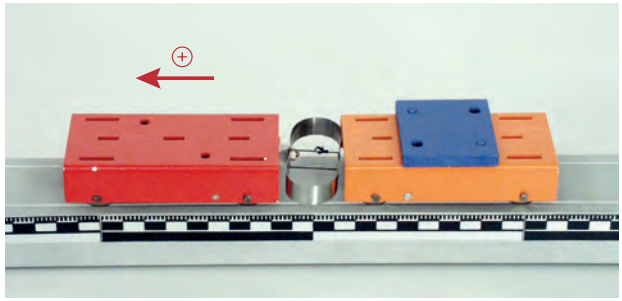
- ha $\Delta t$ (robbanás időtartama) **közelítőleg nulla**. Ekkor a rendszerre ható külső erők (pl. nehézségi erő) nem járulnak hozzá a rendszer lendületváltozásához;
- ha biztosítjuk, hogy a **külső erők eredője zérus legyen** (pl. vízszintes felületen robbantunk úgy, hogy a részek vízszintesen mozogjanak).




*Robbanáskor a testek lendületeinek összege nem változik, ha a külső erők eredője nulla*

A robbanás modelljét két rugóval összekötött kiskocsival szemléltethetjük.

Tegyünk egy asztallapra egy $m$ és egy $M$ tömegű kiskocsit, melyek közé egy összenyomott rugót helyezünk, majd egy fonállal rögzítjük. A fonál elégetésekor a rugó egyformán, de ellenkező irányban hat a két darabra, vagyis a fellépő belső erő nem változtatja meg a két tömegből álló rendszer lendületét. Így a folyamatra felírható a lendületmegmaradás törvénye.



*A szétlökődés pillanatszerű, így a külső erők nem változtatják meg a rendszer összes lendületét*

**Az ütközés előtti összes lendület összege egyenlő az ütközés utáni összes lendület összegével, ezért a rendszer ütközés előtti és ütközés utáni lendületeinek összege is nulla lesz.**

A felírt összefüggés (egyik test irányát pozitívnak tekintjük, ld. ábrát):

$$0 = M \cdot u_1 - m \cdot u_2,$$

amelyből az $m$ és $M$ tömegek ismeretében a sebességek aránya kiszámítható.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kémiai robbanáskor egy eredetileg 1 kg tömegű golyó vízszintes irányban egy 0,2 kg és egy 0,8 kg tömegű részre esik szét. Mobiltelefonunkkal felvett videó alapján kiszámítottuk, hogy a kisebb részecske robbanáskori sebessége $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt.

**a)** Mekkora lett a golyó nagyobb tömegű részének a sebessége?

**b)** Mekkora energiát kapott a két részre szakadt golyó a robbanáskor?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m_1 = 0{,}2$ kg,

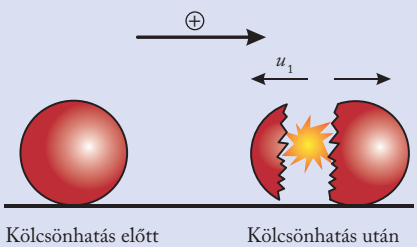
$m_2 = 0{,}8$ kg,

$u_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

---

*a)* $u_2 = ?$

*b)* $\Delta E_{\text{kémiai}} = ?$




**a)** A lendületmegmaradás törvényéből meghatározhatjuk a keresett sebességet. A nagyobb tömegű golyó haladási irányát tekintjük pozitív iránynak.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2,$$

$$0 + 0 = -0{,}2 \cdot 20 + 0{,}8 \cdot u_2,$$

amelyből: $u_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**b)** A kémiai robbanáskor felszabaduló energia egy része a két golyórész mozgási energiájává alakult.

$$\Delta E_{\text{kémiai}} = \Delta E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 0{,}2 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} 0{,}8 \cdot 5^2 = 40 + 10 = 50 \text{ J}$$

## MÉRÉSI FELADAT

### Lövedék sebességének mérése ballisztikus ingával

**Tapadókorongos pisztolyból kilőtt lövedék sebességének mérése**

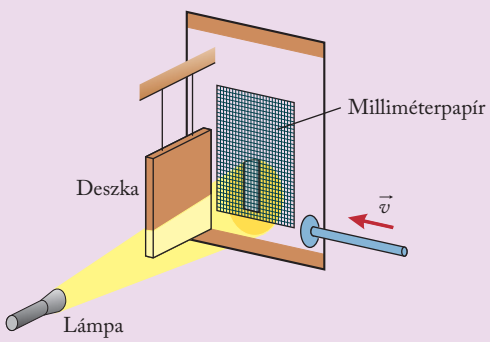
**Mérés elvi alapja:** A tapadókorong deszkalappal történő ütközésekor rugalmatlan ütközés játszódik le, mert együtt haladnak tovább. Rugalmatlan ütközésre felírhatjuk a lendületmegmaradás törvényét.

Az együtt haladó két test mozgására felírhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét is. Az emelkedés magasságából következtethetünk a becsapódás utáni közös sebességre.

**Rendelkezésre álló eszközök:** Körülbelül 6 cm × 12 cm méretű „bútorlap", rajzdeszka, rajzszög, milliméterpapír, állvány, fonál, két pici szög, tapadókorongos pisztoly, közel párhuzamos fénycsóvájú lámpa, mérleg.

**A mérés menete:** Lemérjük a bútorlap ($M$) és a tapadókorongos lövedék ($m$) tömegét. A kis bútorlapdarabot a rövidebbik oldalán levő két szög, a fonál és az állvány segítségével felfüggesztjük. A deszka síkjára merőlegesen a deszka mögé elhelyezzük a rajztáblát, amelyre előzetesen rátűztük a milliméterpapírt. A lámpát úgy helyezzük el, hogy a deszka árnyéka merőlegesen vetüljön a milliméterpapírra. A pisztolyból mintegy 20 cm távolságból lőjük a lövedéket a deszkára. Néhány próbalövéssel be tudjuk állítani a lámpát úgy, hogy a deszka alsó, vízszintes oldala árnyékának helyét pontosan le tudjuk olvasni a kilendülés szélső pozíciójában.

A nyugalmi helyzetben lévő árnyékképet szintén jól le tudjuk olvasni a milliméterpapírról. Szükség esetén a könnyebb leolvasás érdekében a milliméterpapíron ceruzával kiemelhetjük a vonalakat. A lövéseknél ügyeljünk arra, hogy a deszkát középen találjuk el, az ne csavarodjon el.




Távolba ellőve becsüljük meg a lövedék kezdeti sebességét!

$v_{\text{becsült}} = ?$

Hajtsunk végre öt lövést, és számítsuk ki az emelkedések átlagát!

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | Átlag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Magasság, $h$ (mm) | | | | | | |

A rugalmatlan ütközésre érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$m \cdot v = (m + M) \cdot u, \qquad (1)$$

ahol $v$ a lövedék sebessége, $u$ a lövedék és a deszkalap közös sebessége ütközés után.

A rendszer kilendülésére felírhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét. Az ütközés utáni pillanatban a közös mozgási energia egyenlő a szélső helyzetben lévő helyzeti energiával (ha a helyzeti energia nullaszintjét a mozgás legalsó pontjához viszonyítjuk).

$$\frac{1}{2} \cdot (m + M) \cdot u^2 = (m + M) \cdot g \cdot h \qquad (2)$$

A (2) egyenletből $u$-t kifejezve, majd a kapott összefüggést az (1) egyenletbe helyettesítve megkapjuk a lövedék sebességét:

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2 g \cdot h}$$

Hasonlítsuk össze a becsült és a mért sebességet!

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mikor jön létre tökéletesen rugalmas ütközés? Adjuk meg az ebben az esetben felírható összefüggéseket!
2. Mikor jön létre tökéletesen rugalmatlan ütközés? Adjuk meg az ebben az esetben felírható összefüggéseket!
3. Milyen fajta ütközésnek fogható fel egy test felrobbanása? Írjuk le a rá vonatkozó összefüggést!
4. Egy állványra két-két fonállal tökéletesen rugalmas golyókat függesztünk fel úgy, hogy éppen érintkezzenek egymással. Az egyik szélső golyót kitérítjük eredeti helyzetéből, majd elengedjük. Mi történik? Magyarázzuk meg!

# 6. Energiaforrások, főbb energiaátalakító berendezések

Az energiaforrásokat **megújuló** és **nem megújuló energiaforrásokra** osztjuk. A következőkben nézzük meg az energiaátalakító berendezéseket és azokat a folyamatokat, amelyek felhasználásával hasznosítjuk a természet energiáit.

## Nem megújuló energiaforrások

Azokat az energiaforrásokat, amelyekből a Földön a rendelkezésre álló készletek végesek, nem megújuló energiaforrásoknak nevezzük. Főbb jellemzőjük, hogy emberi léptékkel mérve nincs újraképződési mechanizmusuk. Ilyenek például a bányászati módszerekkel kitermelhető ásványi energiaforrások: a **fosszilis ásványi tüzelőanyagok** (kőszén, kőolaj, földgáz), valamint a **nukleárisenergia-termelés alapanyagai** (hasadóanyagok, radioaktív izotópok).

Az ásványi erőforrásokat hasznosító erőművek fajtái a hőerőmű és az atomerőmű. Felhasználásuk jelentős mértékben szennyezi a környezetet.

Az energiaellátás biztonságának megteremtése, az importfüggőség csökkentése és a környezet fokozott védelme (visszafordíthatatlan környezeti károk) kulcskérdés Európában. Ezeknek az energiafajtáknak a felhasználási aránya a teljes energiatermelésben jelenleg igen magas.

### Hőerőművek működése

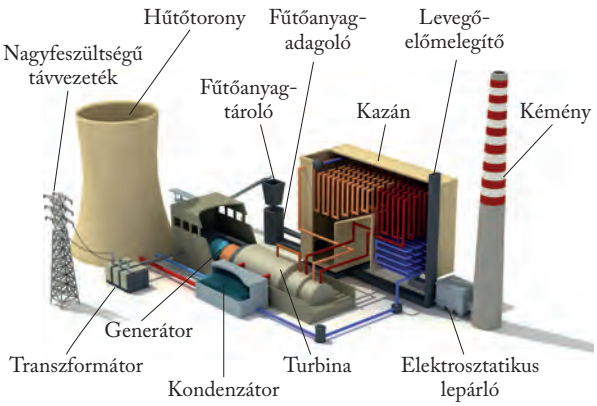
A hőerőművek kazánjában valamilyen fosszilis energiaforrást (pl. kőszenet, földgázt) égetnek el. **Az erőművek fő egységei: kazán, turbina, generátor és a transzformátor**.

A **gőzkazánokban** termelődő gőz a gőzturbina lapátjait hozza forgásba, ekkor a gőz belső energiája jelentős részét leadja a turbinában.

A **turbina** lapátkerekeit megforgatja a nagy nyomású gőz. A turbinát a generátor forgórészével közös tengelyre szerelik. A turbina után a forró vizet/gőzt lecsapatják, és az lehűlt víz formájában visszakerül a kazánba.

A **generátor** egy forgórészből és egy egy- vagy többfázisú tekercsrendszerrel ellátott állórészből áll. A generátorban a turbinával közös tengelyre szerelt forgórészt megforgatják, a forgórészen átfolyó elektromos áram mágneses teret hoz létre. A létrejött mágneses indukcióvonalak metszik az őt körülvevő generátor állórészének tekercsrendszerét. Ekkor abban az elektromágneses indukció révén váltakozó feszültségű elektromos áram jön létre.

A generátorban termelődő elektromos áramot a **transzformátorállomáson** nagyfeszültségre transzformálják,




*Hőerőmű fő szerkezeti egységei*

majd az elektromos energiát a nagyfeszültségű hálózaton továbbítják a fogyasztók felé.

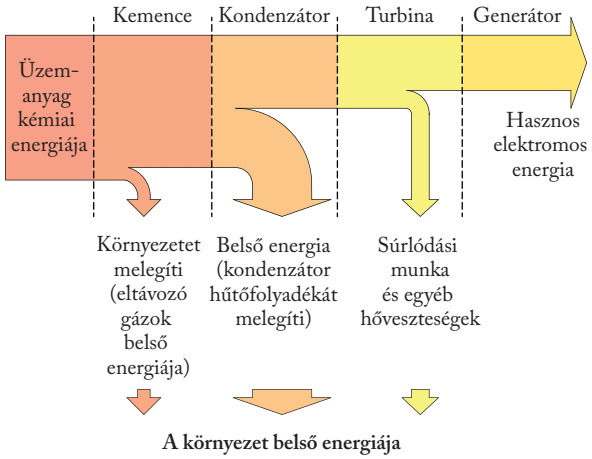
Az atomerőmű működésével a következő tanév során a Nukleáris fizika fejezetben fogunk megismerkedni.

### Hagyományos erőművek hatásfoka

Nézzük meg a fosszilis energiaforrások hatásfokát! Legyen az energiaforrásba bemenő összes energia 100%. Ennek az energiának jelentős része a környezet belső energiáját növeli, például

- a környezetbe távozó gázoknak juttat energiát (eltávozó gázok belső energiáját növeli),
- az erőmű berendezéseinek belső energiáját növeli (pl. kondenzátor hűtőfolyadékát melegíti),
- az erőmű berendezéseinek súrlódásakor fellépő súrlódási energiaveszteségekre fordítódik.

Az erőmű által termelt hasznos energia ($W_h$) és az üzemanyag által leadott összes energia ($W_ö$) hányadosa adja az erőmű hatásfokát.



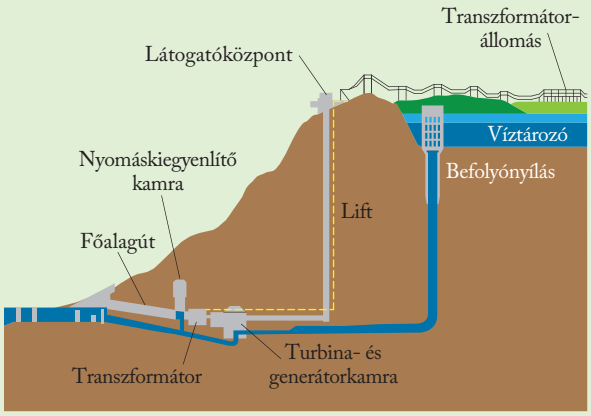

*Hagyományos erőművekben lejátszódó energiaveszteségek*

## ALKALMAZÁSOK

### Szivattyús tározós vízerőművek

A szivattyús tározós vízerőművek a vízerőművek egyik igen gyakori fajtája. Egy szivattyú segítségével egy mélyebb helyről (pl. folyóból vagy tóból) a vizet egy jóval magasabb helyen (pl. hegytető) lévő víztározóba pumpálják fel. Ez akkor történik, amikor az elektromos hálózatban a pillanatnyi felhasználásnál több energia áll rendelkezésre. Ekkor az elektromos energiát a víz helyzeti energiájává alakítják át.

Az elektromosenergia-igény esetén a vizet a magasabban lévő tározóból a turbinán keresztül az alacsonyabb helyre engedik le. Ekkor a turbinához kapcsolt generátor elektromos energiát termel.




*A szivattyús erőművek két különböző magasságú vízforrás között működnek*

## Megújuló energiaforrások

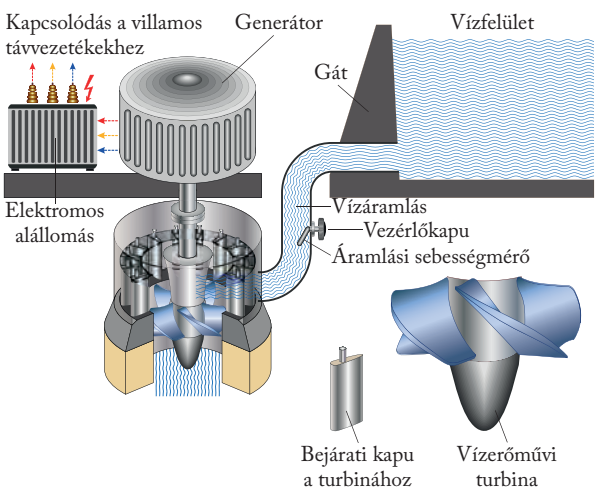
A **megújuló energiaforrások** vagy **alternatív energiaforrások** emberi időléptékben folyamatosan **újratermelődnek** vagy **újratermelhetők**. Ez azt jelenti, hogy nem fogynak el, ellentétben a nem megújuló energiaforrásokkal. Megújuló energiaforrások: *napenergia hasznosítása, biomassza, vízenergia (víz helyzeti energiájából vagy mozgásából származó energia), szélenergia és a geotermikus energia.*

Nézzük meg, hogy az egyes energiaátalakulási folyamatokban milyen módokon nyerünk valamely energiafajtából elektromos energiát!

### Vízenergia

A **vízerőművekben** a víz helyzeti energiája (a nehézségi erő munkavégző képességét jelenti) először a lezúduló víz révén mozgási energiává alakul át. A nagy sebességgel áramló víz meghajtja a **turbinalapátokat**. A turbinalapátok forgásba jönnek, megforgatják a turbina és a generátor közös tengelyét, így mechanikai energia (forgási energia) jön létre.

A továbbiakban – hasonlóan a hőerőművek működéséhez – a generátorra, majd a transzformátorba kerül a megtermelt energia.




*A vízerőműben az áramló víz mozgási energiáját használják fel energiatermelésre*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy hegyvidéken lévő tó legalsó pontjához egy nagy átmérőjű csövet fúrtak. Az ezen átfolyó vizet egy vízerőmű működtetésére használják fel. A tó mérete egy téglatesttel közelíthető, melynek felszíne 3 km × 0,5 km, mélysége átlagosan 200 m. A turbinát 50 m-rel a tó alsó szintje alá építették

Mekkora lehet a turbina hasznos teljesítménye, ha másodpercenként 1 $m^3$ víz áramlik a turbinára, és a hatásfoka 35%?

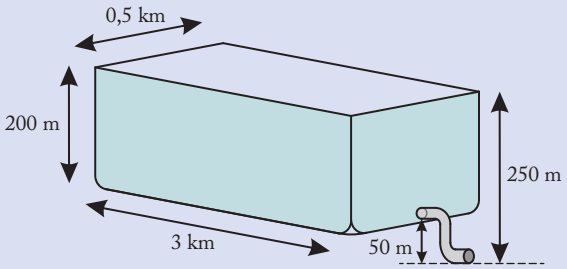
### MEGOLDÁS

Adatok:

$A = 3000 \cdot 500\ m^2$, $h = 200$ m, $x = 50$ m, $\eta = 0{,}35$.

1 s alatt 1 $m^3$ víz folyik át.

$P_h = ?$




*Hegyvidéken általában a turbinát a víztározó vagy tó alsó szintje alá építik*

A víz átlagos magassága a turbina felett:

$$h' = \frac{x + h}{2} = \frac{50 + 250}{2} = 150 \text{ m}$$

A turbinán 1 s alatt 1 $m^3$ víz folyik át, így az összes teljesítménye:

$$P_{ö} = \frac{W_{ö}}{t} = \frac{1000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 150 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ W} =$$
$$= 1500 \text{ kW} = 1{,}5 \text{ MW}$$

A turbina hasznos teljesítménye:

$$P_h = \eta \cdot P_{ö} = 0{,}35 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ W} = 5{,}25 \cdot 10^5 \text{ W} \approx 0{,}5 \text{ MW}$$

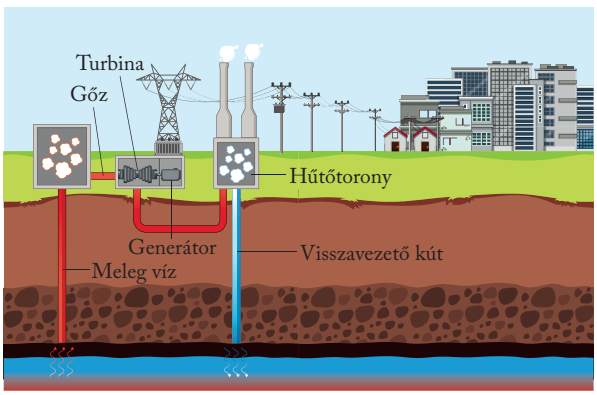
A turbina hasznos teljesítménye 0,5 MW.

## A geotermikus energia

A **geotermikus hőerőművekben** a Föld radioaktivitásából származó belső hőjét használják fel a megújuló energiatermelés során. A Föld legmélyebb részeiről származó magas hőmérsékletű vizet csővezeték-hálózaton keresztül vezetik az erőműbe. Legtöbbször további melegítés szükséges, majd a forró gőzt/vizet a turbina lapátjaira vezetik.

A geotermikus erőmű a fosszilis erőműveknél megismert négy fő egységből (kazán, turbina, generátor, transzformátor) áll. Az energiatermelés fő lépései megegyeznek a hőerőműnél leírtakkal.

A geotermikus energia tiszta, megújuló energiaforrás. Magyarország geotermikus energiában igen gazdag, ennek az energiafajtának a felhasználására kis erőművek és városi fűtőrendszerek építhetők.




*A geotermikus hőerőművekben a Föld belső energiáját használják fel*

## Biomassza

A biomassza növényi és állati eredetű anyagból áll, beleértve az állati hulladékot és a szennyvizet is.

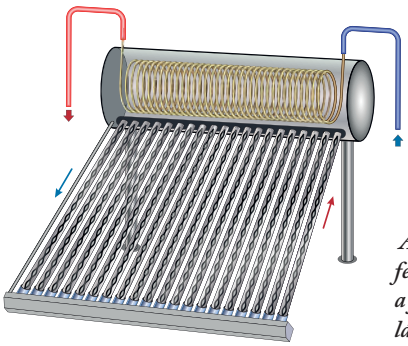
Hasonlóan a fosszilis energiát felhasználó hőerőművekhez, négy fő egységből állnak ezek az erőművek is, melyekben az energiatermelési folyamat is megegyezik.

A biomassza-erőművek Magyarországon elsősorban az erdőgazdasági és mezőgazdasági melléktermékeket hasznosítják.

## Napenergia

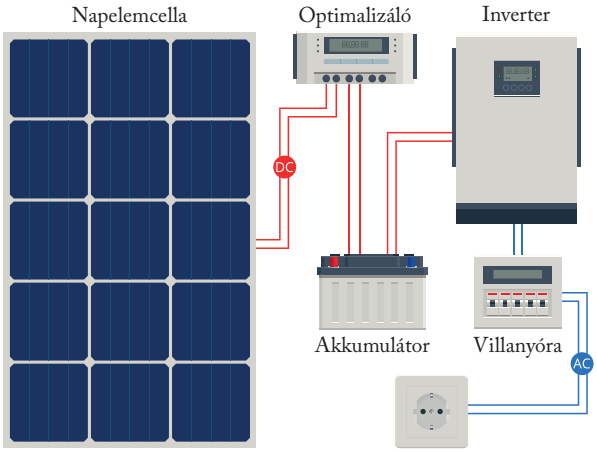
A napenergia közvetlen felhasználása *a Nap sugárzásának napkollektorokban a víz belső energiájává vagy napelemekben közvetlenül elektromos energiává alakítását jelenti.*

A **napkollektorokban** a napsugárzás jelentős hányadát (a látható és infravörös sugárzást) jól elnyelő felület mögötti csőrendszerben felmelegszik a nagy hőkapacitású folyadék, ami egy spirális alakú csőrendszerben áramlik át a hőcserélőn *(ld. ábrán)*. A **hőcserélőben** adja át a napkollektor nagy hőkapacitású folyadéka a belső energiáját a csőrendszer körül elhelyezkedő háztartásban felhasználható víznek. A napkollektor elsősorban a háztartások használati melegvíz-ellátását, esetlegesen a lakások fűtésének egy részét tudja biztosítani.



*A napkollektor alsó felén a csőrendszer, míg a felső részén a hőcserélő látható*

A **napelemekben** a napfényből beérkező fotonok gerjesztik a napelemcellákban lévő elektronokat. A helyükről kilépő elektronok a pozitív, míg a helyükön maradt lyukak a negatív pólus felé áramlanak. Így egy elektromos tér, a napelemcella két pólusa között elektromos feszültség jön




*Otthoni napelemes energiatermelés fő egységei*

létre. Ha a napelemre egy elektromos áramkört kapcsolunk, akkor *egyenfeszültségű elektromos áram jön létre.* Több napelemcella összekapcsolása esetén a rendszer hatásfokát egy **optimalizáló berendezés** maximalizálja, vagyis a napelemek működését figyelve, a maximális hatásfokú energiatermelést igyekszik beállítani.

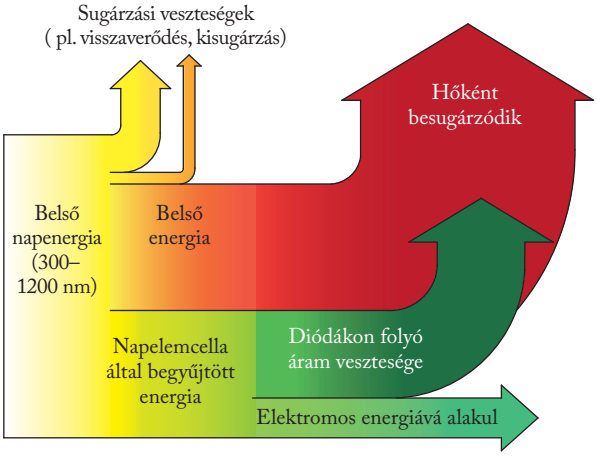
A napelemekben előállított egyenáramot az **inverter** alakítja át hálózati váltakozó feszültséggé. Az inverterek lehetnek szigetüzeműek és a hálózatra tápláló napelem-inverterek. Az elektromos áramot az otthonunkban azonnal felhasználhatjuk, a hálózatra táplálhatjuk (villanyórán keresztül) vagy házi akkumulátorunkban tárolhatjuk.

## A napelem hatásfoka

Vizsgáljuk meg a napelemcella hatásfokát!
A napelemcella a beérkező fénysugár látható és infravörös tartományát képes hasznosítani. Ebben a tartományban a beeső fénysugarak egy része sugárzási veszteségként *(ld. ábrán)* visszaverődik, vagy a környezetbe kisugárzódik (nem nyelődik el a napelemcellában), egy másik része pedig a napelem szerkezetének belső energiáját növeli.

A napelemcella áramköreiben elnyelődő energia egy része a létrejövő elektromos áram hőveszteségére (Joule-hőre), míg másik része a diódák belső energiájává alakul (hőmérsékletüket emeli). A teljes beeső fényenergia kb. 13-14%-a alakul át hasznos elektromos energiává.

Az újabb napelemcellákban a hasznos elektromos energia jelentős növelésére törekszenek.

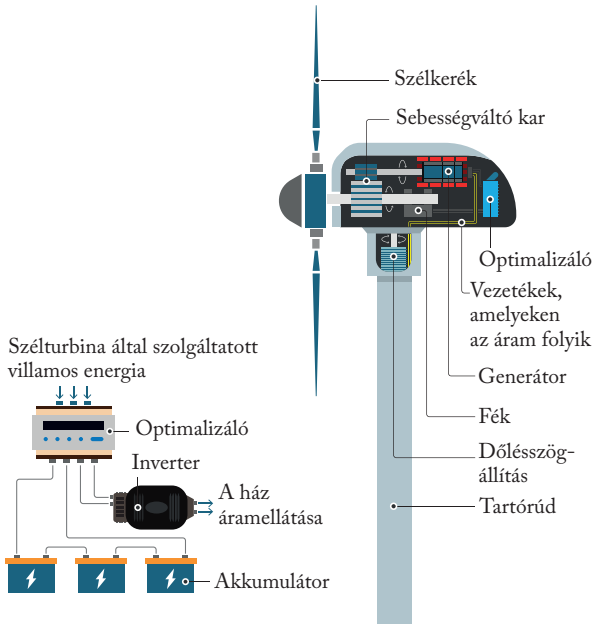



*Napelemcella energiaveszteségei*

## Szélenergia

A szélenergia eredete szintén a napsugárzás hatása. A különböző mértékben felmelegedő légrétegek és területek között nyomáskülönbség alakul ki, aminek következtében légáramlatok jönnek létre. Ezek a légáramlatok forgatják meg a lapátkerekeket, amelyek a generátor forgórészére csatlakoznak. A generátor forgórészének forgatásával – már megismert módon – az állórészben indukált váltakozó áram keletkezik.

A **szélerőművekben** 60-70 m magas toronyban elhelyezett 40-50 m átmérőjű lapátkerék (rotor) veszi át az áramló levegő energiáját. Egy forgatható automatika biztosítja, hogy a lapátok mindig szélirányban álljanak, a lapátok hajlásszögét pedig a szélsebességnek megfelelően állítják. Ezeket a szerkezeteket erőműparkokba telepítik.




*Szélturbina működésének elve*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

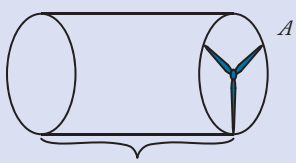
Az előzőekben láttuk, hogy a szélturbina egy magas tornyon álló villamos generátor, amelyet 15 $\frac{m}{s}$ sebességű szél ereje által körbeforgatott nagy lapátok hajtanak. Becsüljük meg, hogy egy tipikus modern szélturbinának mennyi lehet a maximális energiatermelése!

Legyen a vizsgált szélturbina lapátjainak hossza $r = 20$ m.

### MEGOLDÁS

Adatok:
$r = 20$ m,
$v = 15\ \frac{m}{s}$,
$\rho = 1{,}2\ \frac{kg}{m^3}$ (20 °C-on).

$P = ?$




*A turbina lapátjain $\Delta t$ idő alatt $v \cdot \Delta t$ levegő áramlik át*

A $v$ sebességgel mozgó $m$ tömegű szél kinetikus energiája: $E_m = = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

Mivel $m = \rho \cdot V$, ezért az egységnyi térfogatra jutó mozgási energia $v$ sebességű szél esetén: $E_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$, ahol $\rho$ a levegő sűrűsége.

## ALKALMAZÁSOK

### A közeljövő energiahálózata

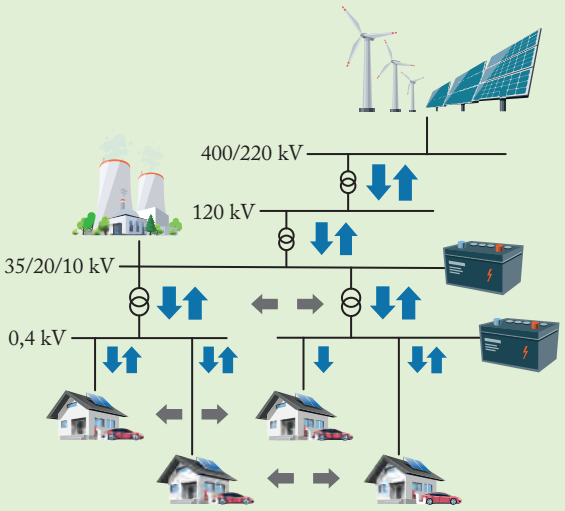
Az országos energiahálózat 400 kV-os és 220 kV-os távvezetékekből áll. Az egyes települések közvetlen közelében történik az alacsonyabb feszültségre a letranszformálás.

A *megújuló energiaforrások* (nap-, szélerőművek) belépésével az országos energiahálózatban az eddig csak az erőművektől a fogyasztók felé irányuló egyirányú energiaáramlás kétirányúvá vált, továbbá a megújuló energiaforrások miatt a hálózat egyes pontjain egyre több *energiatároló* rendszert helyeznek el. Ennek oka, hogy a szél- és a napenergia nem feltétlenül akkor és ott állnak rendelkezésre, amikor a fogyasztónak szüksége van az elektromos energiára. Az energiatárolással tudjuk a villamos energiarendszerünket rugalmassá tenni.

A legtöbb esetben energiatárolásra *akkumulátorokat használnak*, például nagy méretű hálózatban, elektromos járművekben (plug-in hibridek), nagyobb tengeri hajókban, teherautókban és mobiltelefonokban.

Az akkumulátorok felhasználását a tárolt energia energiasűrűsége, a tárolási költségek és az adott rendszerekhez való illeszkedés biztonsága határozza meg.

Az energiatermelés és az energiahálózatok fejlesztését nagyban meghatározzák a felhasználói igények, az energiafelhasználás rugalmasságához pedig nagyban hozzájárulnak az intelligens otthonok. Az országos energiafelhasználás előrejelzését a lakások okos elektromos mérőórái szolgáltatott fogyasztásadatok gyűjtésével (ezt a nagy mennyiségű adatgyűjtést és feldolgozást nevezik *big-data rendszernek*) és arra épülő elemzésekkel, továbbá hatékony nemzetközi hálózati együttműködésekkel lehet optimalizálni.




*A közeljövőbeli országos villamos energiarendszer hagyományos és megújuló energiaforrások és energiatárolók beépítésekor*

A szélturbina lapátjainak hossza $r = 20$ m, így a lapátkerekek területe $A = r^2\pi$.

A szélturbina lapátjain $\Delta t$ idő alatt $V = A \cdot s = A \cdot v \cdot \Delta t$ levegő áramlik át.

Az 1 s alatt átáramló $V = A \cdot v$ térfogatú szél mozgási energiája: $E_m = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot V = \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot v^3$.

Tegyük fel, hogy a szél mozgási energiája teljes egészében a szélturbina lapátjainak mozgási (forgási) energiájává alakul.

A lapátok által 1 s alatt felvett energia: $E_{turbina} = E_m = 2{,}55 \cdot 10^6$ J.

A szélturbina teljesítménye: $P = 2{,}55 \cdot 10^6 \frac{J}{s} \approx 2{,}5$ MW

Az adott paraméterekkel rendelkező szélturbina maximális teljesítménye szeles helyen nem lehet több, mint 2,5 MW.

*Megjegyzés:* A megépült szélturbinák hatásfoka 20-24% körüli érték. A hatásfokot két tényező határozza meg: mekkora tömegű levegő halad át a szélkeréken, s ennek a levegőnek mennyivel csökken le a sebessége, vele együtt a mozgási energiája.

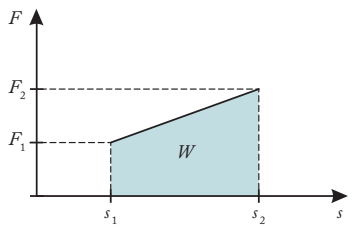
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit nevezünk megújuló és nem megújuló energiaforrásoknak? Nevezzük meg őket!
2. Ismertessük a hőerőmű működési elvét!
3. Milyen energiaveszteségek lépnek fel egy hagyományos erőműben?
4. Ismertessük a vízenergia, a geotermikus energiatermelés és a biomassza hasznosításának főbb lépéseit!
5. Hogyan hasznosítjuk a szél energiáját?
6. Mutassuk be a napenergia hasznosításának módjait!
7. Mutassuk be a napelemcellával történő energiatermelés során fellépő energiaveszteségeket!
8. Nézzünk körül a szobában (vagy tanteremben)! Milyen energiaátalakulásokat látunk? Melyik berendezés, élőlény milyen energiát alakít át mivé?
   Rádió, tv.
   Lámpa.
   Akváriumszűrő.
   Hal.

# Összefoglalás

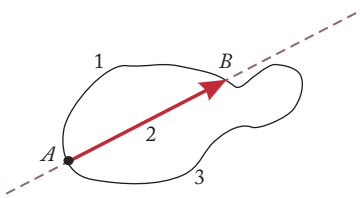
## Munka, munkatétel

A fizikában akkor beszélünk munkavégzésről, ha valamely test erő hatására elmozdul.

| Munka fajtája | Összefüggés | Definíció |
|---|---|---|
| Munka | $W = F \cdot \cos\alpha \cdot s$ | Egy testre ható állandó erő munkája az $F$ erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és az $s$ elmozdulásnak a szorzata. |
| Gyorsítási munka | $W_{gy} = m \cdot a \cdot s$ | Egy $m$ tömegű, $a$ gyorsulással mozgó testre ható erők eredőjének az $s$ úton végzett munkája. |
| Emelési munka | $W_{em} = m \cdot g \cdot h$, | ahol $h$ a nullaszinthez mért magasság. |
| Lineárisan változó erő munkája | $W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$ | A munkavégzés az $F$-$s$ koordinátarendszerben a grafikon alatti terület mérőszámával egyenlő.   |
| Munkatétel | $W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$ | A testre ható erők eredőjének a munkája egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával, ahol $v_2$ a végpontban lévő sebesség, $v_1$ a kezdőpontban lévő sebesség. |

## A mechanikai energia megmaradásának törvénye

**Konzervatív erők:** Az olyan erőket, amelyeknek a munkája egy elmozdulás során csak a kezdő- és a végpont helyzetétől függ, és nem függ a pálya alakjától, konzervatív erőknek nevezzük.




**A mechanikai energia megmaradásának törvénye:** Ha a tömegpontra ható összes erő konzervatív, akkor a tömegpontnak a mozgási, helyzeti és rugalmassági energiájából összetevődő **teljes mechanikai energiája a mozgás folyamán állandó marad:**

$$E_{mozgási} + E_{helyzeti} + E_{rugalmassági} =$$
$$= E_{mechanikai} = \text{állandó}$$

## Mechanikai energiák

**A testek munkavégző képességét energiának nevezzük.** A testek vagy helyzetük (nullaszinttől mért távolságuk) folytán rendelkeznek munkavégző képességgel (helyzeti energia), vagy sebességük révén (mozgási energia).

| Energia fajtái | Összefüggések | Meghatározás |
|---|---|---|
| Helyzeti energia | $E_h = m \cdot g \cdot h$ | A nullaszint (Föld felszíne) felett $h$ magasságban lévő test helyzeti energiája. |
| Mozgási energia | $E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ | Az $m$ tehetetlen tömegű, $v$ sebességű test mozgási energiája. |
| Forgási energia* | $E_f = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$ | A $\Theta$ tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező $\omega$ szögsebességgel forgó test forgási energiája. |
| Rugalmassági energia | $E_r = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$ | A $D$ rugóállandójú, alaphelyzetből $\Delta l$ megnyúlással rendelkező rugó rugalmassági energiája. |
| Gravitációs energia* | $E_{pot} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{2}$ | Egy $M$ tömegű test gravitációs terében egy $m$ tömegű test gravitációs energiája (végtelen távoli pontban 0 az értéke). |

A *-gal jelölt mechanikai energiák a későbbi fejezetekben kerülnek tárgyalásra.

## Teljesítmény, hatásfok

Az **átlagteljesítmény** ($P$) a munka és a munka elvégzéséhez szükséges idő hányadosa.

$P = \frac{W}{\Delta t}$. Mértékegysége: $W = \frac{\text{J}}{\text{s}}$

A teljesítmény a munkavégzés sebességét adja meg.

A **pillanatnyi teljesítmény** az $F$ erő és a $v$ sebesség szorzata: $P = F \cdot v$.

1 kWh = 3,6 MJ.

**Hatásfok** a hasznos munkavégzés és befektetett összes munka hányadosa.

$$\eta = \frac{\text{hasznos munka (energia)}}{\text{befektetett összes munka (energia)}}$$

A hatásfok megmutatja, hogy a befektetett energiának hányad része hasznosul:

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{hasznos}}}{\Delta E_{\text{összes}}}$$

## Energiaátalakító berendezések

**Energiatermelő erőművek**

Nem megújuló energiaforrást felhasználók:

– hőerőművek (fő egységei: kazán, turbina, generátor, transzformátor),
– atomerőművek.

**Megújuló energiaforrást felhasználók**

– vízerőművek,
– geotermikus erőművek,
– biomassza erőművek,
– napenergiát hasznosító erőművek (napkollektor, napelemek),
– szélerőművek.

**Energiatermelő erőművek hatásfoka**

Az energiaforrásba bemenő összes energia 100%. Ennek az energiának jelentős része a környezet belső energiáját növeli, például ilyenek

– a környezetbe távozó gázok,
– az erőmű berendezéseinek belső energiáját növelők,
– az erőmű berendezéseiben súrlódási energiaveszteségekre fordítódnak.

## Ütközések és energiaviszonyaik

| Tökéletesen rugalmas ütközés | Tökéletesen rugalmatlan ütközés |
|---|---|
| A testek visszanyerik eredeti alakjukat. | Az ütköző testek maradandó alakváltozáson mennek keresztül. |
| Érvényes a lendületmegmaradás törvénye mellett a mechanikai energia megmaradásának törvénye is:<br>$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2$<br>és<br>$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$,<br>ahol $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ a testek ütközés előtti, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ pedig a testek ütközés utáni sebessége. | Az ütközés után összekapcsolódnak és együtt haladnak tovább, fennáll a lendületmegmaradás törvénye:<br>$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$,<br>ahol $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ a testek ütközés előtti, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ pedig a testek ütközés utáni sebessége. |
| Speciális esetek:<br>– egyenlő tömegű testek ütközéskor sebességet cserélnek,<br>– végtelen nagy tömegű falnak merőlegesen ütköző test ugyanolyan nagyságú, ellentétes irányú sebességgel pattan vissza. | |

# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** Egy $m$ tömegű kiskocsi lecsúszik egy $h$ magasságú súrlódásmentes lejtőn, amely súrlódással is rendelkező vízszintes felületben folytatódik. Itt egy bizonyos út megtétele után megáll. Legalább mennyi munkát kell végezni, hogy a testet ugyanezen az úton a lejtőn lévő eredeti helyzetébe toljuk vissza?

A) $m \cdot g \cdot h$.

B) $2\ m \cdot g \cdot h$.

C) $\sqrt{2}\ m \cdot g \cdot h$.

D) $\frac{m \cdot g \cdot h}{2}$.

**2.** Melyik állítás HAMIS? Ha egy test súrlódással is rendelkező lejtőn lecsúszik, akkor

A) a mozgási energiája változhat.

B) a helyzeti energiája változik.

C) a súrlódási erő negatív munkát végez.

D) a gravitációs erő negatív munkát végez.

**3.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2020)
Lehetséges-e, hogy két pontszerűnek tekinthető test ütközése során minden kezdeti mozgási energia „elvész”?

A) Nem lehetséges, mert a nagyobb tömegű test biztosan nem áll meg.

B) Nem lehetséges, mert ez sértené az energiamegmaradás elvét.

C) Lehetséges, de csak akkor, ha a két test azonos tömegű.

D) Lehetséges különböző tömegű testek esetében is.

**4.** Melyik állítás IGAZ? Állandó erő pillanatnyi teljesítménye

A) a munkavégzés és a hozzá tartozó időtartam hányadosa.

B) a munkavégzés és a hatásfok szorzata.

C) az erő és az időtartam szorzata.

D) az erő és a sebesség szorzata.

**5.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2014)
Egy nyugalomból induló autót állandó teljesítménnyel gyorsítunk. Hogyan változik a gyorsulása az idő előrehaladtával?

A) A gyorsulása csökken.

B) A gyorsulása állandó.

C) A gyorsulása egyre növekszik.

**6.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2010)
Milyen erőket nevezünk konzervatívnak?

A) Az állandó nagyságú és irányú erőket nevezzük konzervatívnak.

B) Konzervatív erők azok, amelyek ütközésnél az impulzus megmaradását eredményezik.

C) A zárt rendszerben ható erőket nevezzük konzervatívnak.

D) Konzervatívak azok az erők, amelyek munkavégzése az úttól független.

**7.** Egy rugót először 10 cm-rel megnyújtunk, majd 10 cm-rel megnyújtott állapotából újabb 10 cm-rel megnyújtjuk. Melyik esetben kell több munkát végeznünk?

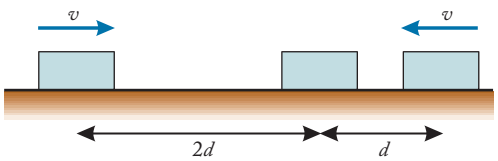
A) Az első esetben.

B) A második esetben.

C) Ugyanannyi a munkavégzés mindkét esetben.

D) Az összehasonlítást csak a megnyújtás idejének ismeretében lehet elvégezni.

**8.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2019)
Három egyforma test közül az első $v$ sebességgel halad jobbra, a második áll, a harmadik $v$ sebességgel halad balra, kezdeti távolságuk az ábráról leolvasható. A testek súrlódásmentesen csúsznak, és tökéletesen rugalmatlanul ütköznek egymással. Hogyan mozognak a testek, miután az összes lehetséges ütközés megtörtént?




A) A testek megállnak.

B) A testek $v/2$ sebességgel jobbra haladnak.

C) A testek $v/3$ sebességgel jobbra haladnak.

D) A testek $v/3$ sebességgel balra haladnak.

**9.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2019)
Egy $v_0$ sebességgel függőlegesen feldobott kavics $h$ maximális magasságig emelkedik. Milyen magasságban lesz a sebessége a kezdeti sebességnek a fele?

A) $h/4$ magasságban.

B) $h/2$ magasságban.

C) $3\ h/4$ magasságban.

**10.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2013)
Egy kiskocsi elejére rugót szerelünk, és egy vízszintes asztallapon elgurítjuk. A rugóval felszerelt kiskocsi nekiszalad egy ugyanolyan, de lassabban mozgó kiskocsinak és ellöki azt, miközben ő maga lelassul. Mit állíthatunk a rendszer mozgási energiájáról? (A súrlódási és közegellenállási veszteségektől tekintsünk el!)



A) A két kocsi együttes mozgási energiája mindig állandó.
B) A két kocsi együttes mozgási energiája akkor a legnagyobb, amikor a sebességük azonos.
C) A két kocsi együttes mozgási energiája akkor a legkisebb, amikor a kocsik legközelebb vannak egymáshoz.

**11.** Mikor negatív a légpuskarugó munkája?
A) Mindig.
B) Sohasem.
C) Ha felhúzzuk a légpuskát.
D) Ha lövünk a légpuskával.

## FELADATOK

**1.** Egy személygépkocsi tömege 1000 kg, amely 1,2 m/s$^2$ gyorsulással halad egyenletesen gyorsulva 20 s-ig.
**a)** Mekkora a személygépkocsira ható átlagos $F_h$ húzóerő nagysága, ha a személygépkocsira ható átlagos $F_k$ közegellenállási erő nagysága 800 N?
**b)** Mekkora a húzóerő és a közegellenállási erő munkája?

**2.** A 10 kg tömegű testet vízszintes irányú és 20 N nagyságú erővel húzzuk 10 másodpercig.
**a)** Mekkora a húzóerő és a súrlódási erő munkája, ha a csúszási súrlódási együttható 0,1?
**b)** Mire fordítódott a húzóerő és súrlódási erő által végzett munka nagysága közötti különbség?
(A nehézségi gyorsulás értéke $g$ = 10 m/s$^2$.)

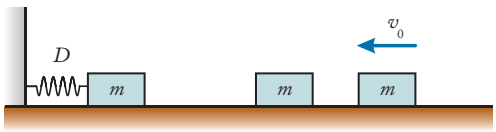
**3.** Jég felületén vízszintes irányú 3 m/s sebességgel ellökött fahasáb 7,5 m út megtétele után megáll.
**a)** Mekkora a csúszási súrlódási együttható?
**b)** Függ-e az út a test tömegétől?

**4.** Az $m$ = 9 g tömegű, $v$ = 400 m/s sebességű lövedék $d$ = 0,06 m mélyen hatol a fába. Mekkora ellenállást (erőt) fejt ki a fa a lövedékre?

**5.** Mekkora az 1000 kg tömegű személygépkocsi motorjának a munkája, miközben 2500 N állandó erő hatására a sebessége 10 m/s sebességről 20 m/s sebességre gyorsul, ha a menetellenállásoktól eltekintünk?

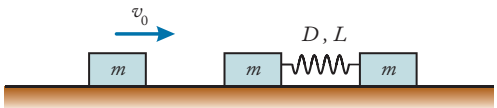
**6.** Egy 15 kg tömegű testet 1,4 m/s$^2$ állandó gyorsulással vízszintes, súrlódásmentes talajon húzunk.
**a)** Hogyan függ az időtől a testre ható húzóerő teljesítménye?
**b)** Számítsuk ki a mozgás kezdetétől mért $t$ = 10 s alatt a húzóerő átlagteljesítményét!
**c)** Mennyi a mozgás kezdetétől mért 2,5 s múlva a húzóerő pillanatnyi teljesítménye?
**d)** A mozgás során mikor egyezik meg a pillanatnyi teljesítmény az átlagteljesítménnyel?

**7.** Az ábra szerinti elrendezésben, egy súrlódásmentes talajon egy vonalban három $m$ tömegű testet helyezünk el. A bal oldalit egy $D$ rugóállandójú rugóval a falhoz rögzítjük, míg a középső szabadon áll, a jobb oldali pedig $v_0$ sebességgel indul meg a másik két test felé. Az ütközések tökéletesen rugalmatlanok.

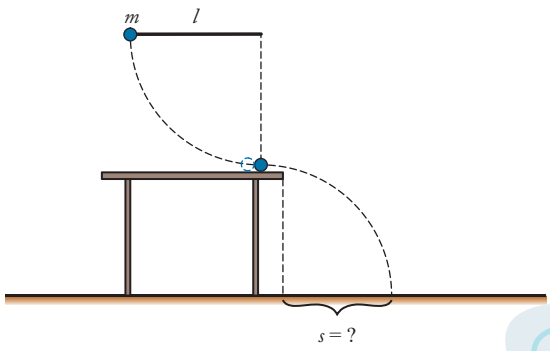



**a)** Mekkora lesz a rugó legnagyobb összenyomódása?
**b)** Mekkora a két tökéletesen rugalmatlan ütközés következtében a mechanikaienergia-veszteség?

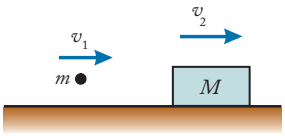
**8.** Egy $m$ tömegű testet $v_0$ sebességgel belelövünk az ábrán látható rendszerbe. Egy pillanatszerű, tökéletesen rugalmatlan ütközés játszódik le. Mekkora a rugó legnagyobb összenyomódása?




**9.** Egy 1,25 m hosszúságú fonálra függesztett 0,2 kg tömegű golyót a fonalat megfeszítve a vízszintesig kitérítjük, majd elengedjük. A pálya legalsó pontján egy vele megegyező tömegű golyóval ütközik, ami egy asztal szélén áll. Milyen messzire ér földet a 0,8 m magas asztaltól az eredetileg nyugvó golyó?



**10.** Egy $m = 0{,}1$ kg tömegű lövedék vízszintesen $v_1 = 400$ m/s sebességgel halad. Beleütközik egy $M = 0{,}8$ kg tömegű fából készült, $v_2 = 2$ m/s sebességgel vele azonos irányban mozgó hasábba. Ütközéskor a lövedék belefúródik a hasábba, majd együtt mozognak tovább.




**a)** Határozzuk meg az együtt mozgó két test ütközés utáni sebességét!

**b)** Mekkora az egyes testek mozgási energiájának megváltozása?

**11.** Egy utasaival együtt 80 kg tömegű szánkót nyugalmi helyzetéből indulva vízszintes pályán állandó gyorsulással 60 kg tömegű felnőtt személy tol. Az 50 m-es út megtétele után ő maga is felugrik a szánra. Felugráskor a szánhoz képest 3 m/s a sebessége, majd együtt mozognak tovább. Továbbhaladva 80 m út megtétele után a szán megáll. A szántalp és a hó közötti súrlódási együttható 0,015, $g = 10$ m/s$^2$.

**a)** Mekkora volt a szán sebessége, mielőtt a felnőtt személy felugrott rá?

**b)** Mekkora vízszintes erővel tolta a felnőtt személy a szánt?

**12.** Egy 3 kg tömegű ólomgolyó 2 m hosszúságú fonálon függ. Egy 0,02 kg tömegű, 200 m/s sebességgel vízszintesen repülő ólomlövedék pontosan centrálisan találja el a golyót. A lövedék a golyóba fúródik.

**a)** Mekkora szöggel lendül ki a fonál?

**b)** Hány fokkal melegszik fel az ólom? Az ólom fajhője 130 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, kezdetben a golyó és a lövedék hőmérséklete azonos. Vegyük figyelembe, hogy a környező levegő és az ólom közötti termikus kölcsönhatás elhanyagolható.

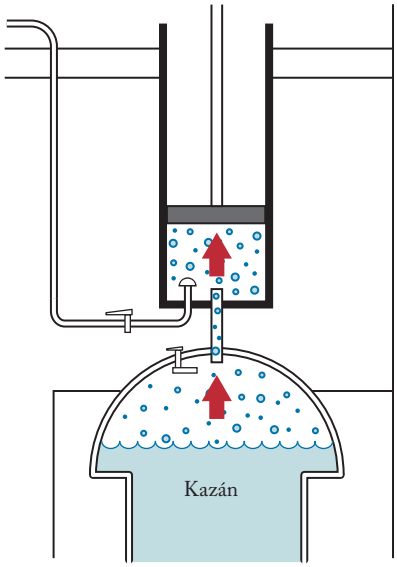
**13.** A 2,5 kg tömegű keményfából készült hosszú fahasáb vízszintes, súrlódásmentes felületen fekszik. A hasábba hossztengelye mentén 10 g tömegű, 500 m/s sebességű lövedék fúródik, és $2\cdot10^{-3}$ s alatt lefékeződik. Tekintsük a lassulást állandónak.

**a)** Mekkora lesz a hasáb és a lövedék közös sebessége?

**b)** Mekkora a hasáb és a lövedék között fellépő erő?

**c)** Milyen mélyen hatolt be a lövedék a hasábba?

**14.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2013)
Egy gőzgép hengerében a dugattyú $d = 15$ cm átmérőjű, a gőz a dugattyút $s = 20$ cm-es úton tolja fel. A hengerben a nyomás a táguláskor átlagosan $p = 2{,}5\cdot10^5$ Pa. A külső légköri nyomás $p_k = 10^5$ Pa.

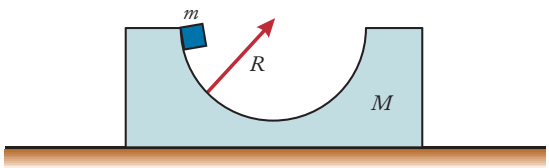



Mennyi ideig mozog a dugattyú, ha tágulás közben a gőzgép teljesítménye $P = 2{,}7$ kW? (A súrlódási veszteségektől és a dugattyú súlyától tekintsünk el!)

**15.** Egy $M$ tömegű téglatestből az alap hosszabb oldalával párhuzamosan kivágtunk egy $R = 0{,}2$ m sugarú félhengert. Az így kapott $M = 0{,}4$ kg tömegű üreges téglatest legfelső pontjáról kezdősebesség nélkül súrlódásmentesen csúszik le a henger alja felé egy $m = 0{,}1$ kg tömegű kocka.

**a)** Mekkora erővel nyomja a pálya legalsó pontján a kockát az $M$ tömegű test, ha az a talajhoz rögzítve van?

**b)** Mekkora lesz az $M$ tömegű test sebessége, amikor a kocka a pálya legalsó pontjára ér, ha a talajnál a rögzítést feloldottuk, így az $M$ tömegű test súrlódásmentesen mozoghat?

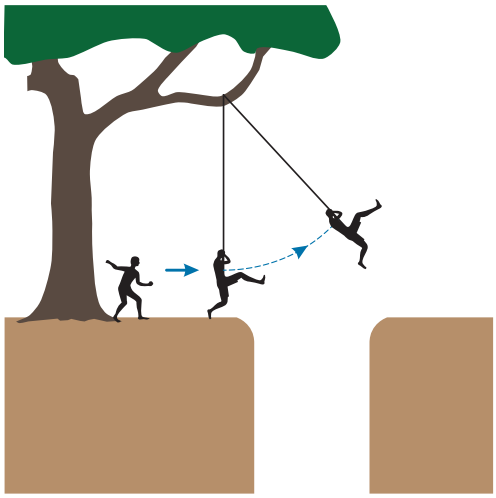



**15.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2020)
Egy $m = 75$ kg tömegű ember egy szakadék felé fut vízszintes terepen 6 m/s sebességgel. Pont a szakadék szélén egy faágról hosszú lián lóg le függőlegesen, amit megragad és belekapaszkodik. A lián kilendül az emberrel, és amikor az ember a hintamozgás során átlendülve eléri a holtpontot, elengedi a liánt. Így épp a szakadék túlsó partján pottyan le. A lendülés során az ember tömegközéppontja 10 m sugarú körön mozog.

**a)** Milyen széles a szakadék?

**b)** Mekkora erővel kell az embernek a liánba belekapaszkodnia (azaz mekkora függőleges erővel kell tartania magát a liánon) a lendülés első pillanatában?

($g$ = 9,81 m/s$^2$, a lián súlytalannak tekinthető.)

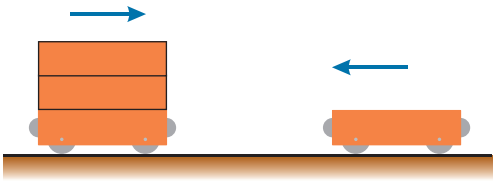


## ESSZÉKÉRDÉSEK

### 1. Ütközések

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2007)

*A megmaradási tételek a fizika legalapvetőbb, a természet bizonyos fajta szimmetriáját kifejező állításai. A mechanikán belül az ütközések leírása általában egy vagy több megmaradási tétel alkalmazásával történik.*



Fogalmazásában tekintse át az egyenes mentén létrejövő mechanikai ütközéseket! Fogalmazza meg, hogy mi tekinthető tökéletesen rugalmatlan ütközésnek, és elemezze ezt a lendületmegmaradási tétel, illetve az energiamegmaradás érvényesülése szempontjából! Fejtse ki tökéletesen rugalmas ütközések esetén a lendületmegmaradási tétel és az energiamegmaradási tétel érvényességét, alkalmazását!

Írja le három szakaszra bontva az ábra szerinti rugalmas ütközés folyamatát, amelyben két, rugós ütközővel ellátott kiskocsi ütközik!

(A szakaszok: ütközés előtt, ütközés közben, ütközés után.)

### 2. Pontszerű testek ütközései egy egyenes mentén

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2018)

*„Ha a lassabban sietőbe ütközik az utána gyorsabban futó, s mind a kettőnek egy közönséges célja vagyon, az ütközés után mind a kettőnek egyenlő a gyorsasága: mert a lassabban haladó a sebesebben rohanónak mindaddig akadálya, míg oly nagy mozdulással nem bír, hogy amennyit a rohanó utánasiet, annyival ő előrébb lódulhasson."*

(*Varga Márton:* A gyönyörű természet tudománya – *Nagyvárad, 1808*)



Ismertesse a lendület fogalmát, mutassa be a lendületmegmaradás törvényét! Mutassa be a lendületváltozás és az erő kapcsolatát! Két test kölcsönhatásán keresztül mutassa be, hogyan következtethetünk a Newton-törvényekből a lendületmegmaradás törvényére!

Ismertesse a mozgási energia fogalmát, adja meg kiszámításának módját!

Mutassa be a tökéletesen rugalmas és a tökéletesen rugalmatlan ütközést! Két ugyanazon egyenes mentén mozgó pontszerű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik. A kezdeti feltételek ismeretében adja meg közös sebességüket!

Mit állíthatunk a rendszer mozgási energiájának alakulásáról a tökéletesen rugalmatlan ütközés során? Hogyan érvényesül az energiamegmaradás ebben az esetben?

Adjon meg egy gyakorlati példát az ütközések valamely típusára!

# V. Körmozgás





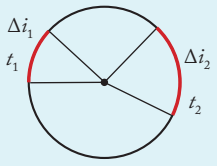


# 1. Az egyenletes körmozgás

EMLÉKEZTETŐ

## Egyenletes körmozgás

A körmozgás pályája kör vagy annak egy része, ezért a körmozgásnál a test által megtett $s$ utat befutott $\Delta i$ ívhosszal jelöljük. Az „egyenletes” jelző a befutott $\Delta i$ ívhossz és az eltelt $t$ idő közti egyenes arányosságot jelenti: $\Delta i \sim \Delta t$.




*Egyenletes körmozgást végző test esetén a befutott ívhossz egyenesen arányos az eltelt idővel* ($\Delta i_2 = 2\Delta i_1$, $t_2 = 2t_1$)

**Ha a körmozgás során egy pontszerű test (tömegpont) bármekkora nagyságú, egyenlő $\Delta t$ időtartamok alatt egyenlő $\Delta i$ ívhosszakat fut be, akkor azt *egyenletes körmozgásnak* nevezzük.**

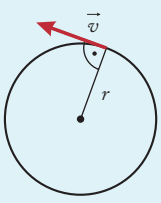
## Kerületi sebesség

Egyenletes körmozgás esetén a tömegpont a kör kerületén úgy mozog, hogy a befutott $\Delta i$ ívhossz és az eltelt $\Delta t$ időtartam hányadosa állandó.

**Ha az $r$ sugarú kör kerületén mozgó pontszerű test (tömegpont) $\Delta t$ idő alatt $\Delta i$ ívet fut be, akkor a $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ hányadost az egyenletes körmozgást végző test *kerületi sebességének* nevezzük. Jele: $v$.**

$$v = \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

**Mértékegysége: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. A kerületi sebesség vektormennyiség.**

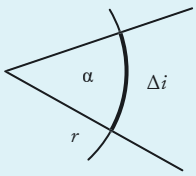



*Kerületi sebesség egyenletes körmozgás esetén*

Az egyenletes körmozgást végző test kerületi sebességének nagysága állandó, iránya mindig a körpálya érintőjébe esik.

## Szögelfordulás

Körmozgás közben a test által megtett utak a kör egyes íveivel egyeznek meg. Adott sugár esetén az ívek hosszát megadhatjuk a hozzájuk tartozó középponti szögekkel is. Ily módon a mozgást nemcsak pálya menti adatokkal (ívhossz), hanem a szögelfordulás mértékével is jellemezhetjük.




*Ívhossz és szögelfordulás egymással egyenesen arányos fizikai mennyiségek*

A szöget – a fizikában megszokott módon – radiánban mérjük.

**Az $\Delta i$ ívhossz és az $\alpha$ szögelfordulás kapcsolata adott $r$ sugarú körben: $\alpha = \frac{\Delta i}{r}$.**

1 radián az a középponti szög, amelyhez tartozó $\Delta i$ ív egyenlő az $r$ sugárral.

A teljes szög $360^\circ = 2\,\pi$ radián,

így $180^\circ = \pi$ radián,

$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radián stb.

*Megjegyzés:* A radián nem mértékegység, a $\frac{\Delta i}{r}$ hányados egy arányszám, nincs mértékegysége. Például, ha az $\alpha$ szög 0,4 radián, azt így írjuk: $\alpha = 0{,}4$.

## Szögsebesség

**Az egyenletes körmozgást végző test $\Delta\alpha$ szögelfordulásának és a közben eltelt $\Delta t$ időtartamnak a hányadosát szögsebességnek nevezzük. Jele: $\omega$ (ómega).**

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

**Mértékegysége: $\frac{1}{\text{s}}$.**

## A kerületi sebesség és a szögsebesség kapcsolata

A kerületi sebesség $v = \frac{\Delta i}{\Delta t}$ definíciójába behelyettesítjük a $\Delta t$ idő alatt történő ívhosszváltozást, $\Delta i = r \cdot \Delta\alpha$-t:

$$v = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\alpha}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

**Az egyenletes körmozgás $v$ kerületi sebessége egyenlő az egyenletes körmozgást végző test $\omega$ szögsebességének és a körpálya $r$ sugarának szorzatával.**

## Periódusidő és fordulatszám

Az egyenletes körmozgás pályája kör, így a mozgó test a pályáját többször is befuthatja.

**Azt az időtartamot, amely alatt a körpályán mozgó test a kör kerületét egyszer befutja, *periódusidőnek* nevezzük.**
**Jele: $T$. Mértékegysége: s.**

**Az egyenletes körmozgást végző test által $\Delta t$ időtartam alatt megtett fordulatok számát ($z$) és a $\Delta t$ időtartam hányadosát *fordulatszámnak* nevezzük.**
**Jele: $f$.**

$$f = \frac{z}{\Delta t}$$

**Mértékegysége: $\frac{1}{\text{s}}$**

*Az $f$ fordulatszám megmutatja, hogy a körpályán mozgó test (tömegpont) a kör kerületét időegységenként hányszor kerüli meg.*

*Egyenletes körmozgás esetén a periódusidő és a fordulatszám egymás repicroka:* $T = \frac{1}{f}$.

*Megjegyzés:* A fordulatszámot gyakran nem $f$ betűvel, hanem $n$-nel jelölik. A műszaki gyakorlatban a fordulatszám a percenkénti fordulatok száma.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Mennyi egy analóg óra nagymutatójának, kismutatójának és másodpercmutatójának periódusideje?

#### MEGOLDÁS

A nagymutató 1 óra alatt tesz meg egy kört, a periódusideje $T_1 = 1$ h $= 3600$ s.

A kismutató 12 óra alatt tesz meg egy kört, a periódusideje $T_2 = 12$ h $= 43\,200$ s.

A másodpercmutató 1 perc alatt tesz meg egy kört, a periódusideje $T_3 = 60$ s.

## A kerületi sebesség és szögsebesség kapcsolata a periódusidővel és a fordulatszámmal

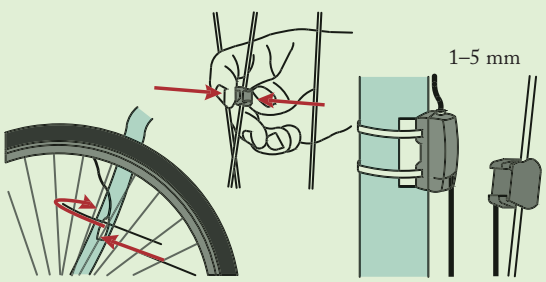
Tekintsünk olyan egyenletes körmozgást, ahol a tömegpont éppen egy $R$ sugarú teljes kört tesz meg! Az eltelt időtartam a periódusidő: $\Delta t = T$, a befutott ívhossz a kör kerülete:

$\Delta i = 2\,R \cdot \pi$, a szögelfordulás pedig: $\Delta\alpha = 2\,\pi$

### ALKALMAZÁSOK

## A kerékpár sebességmérője

A kerékpárra szerelhető sebességmérő elemei:
- a kerék küllőjére rögzíthető mágnes,
- a kerékpár villájára, a mágnes közelébe, 1-5 mm-re erősített érzékelő,
- a fedélzeti komputer kijelzővel.




*A mágnes a küllőn, az érzékelő pedig a villán helyezkedik el*

A küllő bármelyik pontjára szerelt mágnes fordulatonként elektromos impulzust kelt az érzékelőben. Ennek a jelnek a frekvenciája megegyezik a kerék fordulatszámával. A sebességmérő kalibrálásakor be kell állítani a kerék $k$ kerületét, amely a kerék $d$ átmérőjéből a $k = d \cdot \pi$ összefüggéssel határozhatunk meg.

A sebességmérő az $f$ fordulatszámból és a beállított $k$ kerületből a $v = \frac{s}{t} = k \cdot f$ összefüggés alapján meghatározza és kijelzi a kerékpár sebességét.

A kerületi sebesség $v = \frac{\Delta i}{\Delta t}$, illetve a szögsebesség $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ definíciójából ismert összefüggések a periódusidővel kifejezve:

$v = \frac{2\,R \cdot \pi}{T}$, illetve $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$

A fordulatszám $f = \frac{1}{T}$ összefüggését felhasználva:

$v = 2\,R \cdot \pi \cdot f$, illetve $\omega = 2\,\pi \cdot f$

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Budapest 60 m átmérőjű óriáskereke egyenletes forgással 3 perc alatt tesz meg egy kört.
**a)** Mekkora a kabinok sebessége?
**b)** Mekkora a kerék szögsebessége?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$T = 3\ \text{min} = 180\ \text{s}$,
$R = 30\ \text{m}$.

*a)* $v = ?$
*b)* $\omega = ?$



*A körmozgás élmény Budapest óriáskerekén*

**a)** A kabinok sebessége:

$$v = \frac{2\,R \cdot \pi}{T} = v = \frac{2 \cdot 30\ \text{m} \cdot \pi}{180\ \text{s}} \approx 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

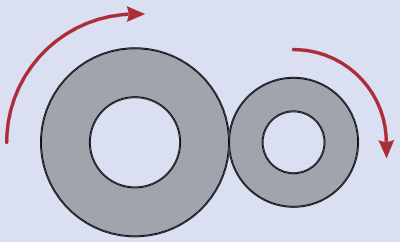
A kabinok sebessége: $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**b)** Az óriáskerék szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{180\ \text{s}} = 0{,}03\ \frac{1}{\text{s}}$$

Az óriáskerék szögsebessége: $0{,}03\ \frac{1}{\text{s}}$.

**2. FELADAT** Egy mechanikus szerkezetben két dörzskerék kapcsolódik egymáshoz. Egyik a másikat forgatja úgy, hogy eközben nem csúsznak meg egymáson. A nagyobb kerék kétszer akkora átmérőjű, mint a kisebb, aminek fordulatszáma $600\ \frac{1}{\text{min}}$. Mekkora a kisebb kerék fordulatszáma?



*A dörzshajtás súrlódással viszi át a forgómozgást*

### MEGOLDÁS

Adatok:
$\frac{d_1}{d_2} = 2$,
$f_2 = 600\ \frac{1}{\text{min}}$.

$f_1 = ?$

Ha a két kerék nem csúszik meg egymáson, akkor tudhatjuk, hogy egymással érintkező pontjaik $v = 2\,R \cdot \pi \cdot f$ kerületi sebessége megegyezik:

$2\,R_1 \cdot \pi \cdot f_1 = 2\,R_2 \cdot \pi \cdot f_2$, vagyis: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{R_1}{R_2}$

*Másképpen*: A fordulatszámok fordítottan arányosak az átmérővel. A feleakkora átmérőjű kerék kétszeres, $f_2 = 1200\ \frac{1}{\text{min}}$ fordulatszámmal forog.

**3. FELADAT** Egy mutatós óra nagymutatójának szögsebessége $\omega_1$, a kismutatóé $\omega_2$, a Föld tengely körüli forgásáé $\omega_3$.

Adjuk meg a három szögsebesség arányát!




*Különböző szögsebességű mutatók*

## MEGOLDÁS

Adatok:
$T_1 = 1$ óra, $T_2 = 12$ óra, $T_3 = 24$ óra.

$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = ?$

A nagymutató, a kismutató, illetve a Föld forgásának periódusideje rendre:

1 óra, 12 óra és 24 óra.

A $T$ periódusidő és az $\omega$ szögsebesség az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggés szerint fordítottan arányos, így a megfelelő szögsebességek aránya $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 24 : 2 : 1$

A három szögsebesség aránya: 24 : 2 : 1.

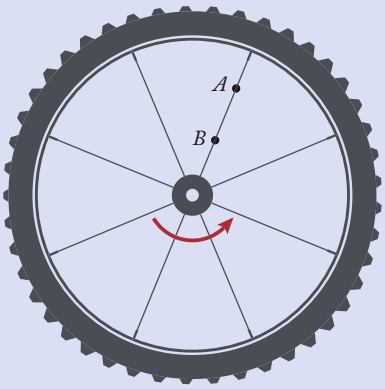
**4. FELADAT** Egy biciklikerék ugyanazon küllőjén lévő $A$ és $B$ pont távolsága 10 cm. A kereket a bicikliből kiszerelve megforgatjuk. Az $A$ pont sebessége $1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a $B$ ponté $0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**a)** Mennyi a biciklikerék szögsebessége?
**b)** Mekkora a biciklikerék periódusideje?

## MEGOLDÁS

Adatok:
$d_{AB} = 10$ cm,
$v_A = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$v_B = 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

*a)* $\omega = ?$
*b)* $T = ?$




*Különböző sebességű pontok ugyanazon a küllőn*

**a)** Jelöljük az egyes pontoknak a tengelytől való távolságát $R_A$-val és $R_B$-vel!
A kerék minden pontjának azonos a szögsebessége. Így a $v = R_A \cdot \omega$ összefüggést alkalmazva:

$v_A = R_A \cdot \omega$, illetve $v_B = R_B \cdot \omega$

Mivel csak a két sugár különbségét ismerjük, célszerű a két összefüggés különbségét képezni:

$v_A - v_B = \omega \cdot (R_A - R_B)$,

amelyből $\omega = \frac{v_A - v_B}{R_A - R_B}$

Behelyettesítve: $\omega = \frac{1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}1\ \text{m}} = 4\ \frac{1}{\text{s}}$

A biciklikerék szögsebessége: $4\ \frac{1}{\text{s}}$.

**b)** A periódusidő pedig az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggésből:
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4}\ \text{s} = 1{,}57\ \text{s}$

A biciklikerék forgásának periódusideje: 1,57 s.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** Hány fordulatot tesz másodpercenként a gépkocsi motorjának főtengelye, amikor a műszerfal fordulatszámmérője az ábra szerinti értéket jelzi?



*Hathengeres V-motor főtengelye a dugattyúkkal*




*Sebességmérő és fordulatszámmérő kijelzője*

**2.** Mekkora lesz az ábrán látható műszerfalon a fordulatszám, ha a gépkocsi sebességét a sebességváltó változatlan sebességi fokozatában 100 km/h-ra növeli?
**3.** Azonos menetsebesség esetén milyen sebességi fokozatban alacsonyabb a motor fordulatszáma?
**4.** Mennyi a Hold Föld körüli keringésének periódusideje?
**5.** Mennyi a Hold saját tengely körüli forgásának periódusideje?

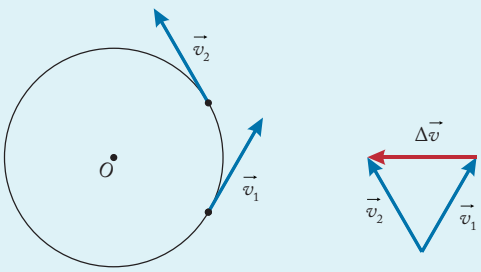
# 2. A centripetális gyorsulás

## EMLÉKEZTETŐ

### Az egyenletes körmozgás

Az egyenletes körmozgást végző test sebességének nagysága állandó, de iránya folyamatosan változik: minden pillanatban merőleges az adott pontot a kör középpontjával összekötő sugárra.

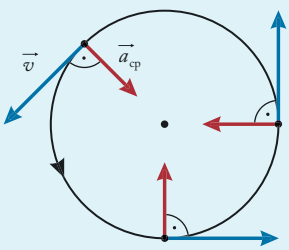
A sebességvektor tehát folyamatosan változik. A változó sebességű mozgást gyorsuló mozgásnak nevezzük, ezért az egyenletes körmozgást végző test is gyorsuló mozgást végez, tehát van gyorsulása.




*Az egyenletes körmozgást végző test sebességének iránya folyamatosan változik*

Egyenletes körmozgás eseten a gyorsulás iránya merőleges a sebességre. Mivel a sebesség érintőirányú, ezért a gyorsulás a kör középpontja felé mutat.

**Az egyenletes körmozgás gyorsulását a középpont felé mutató iránya alapján centripetális gyorsulásnak nevezzük. A centripetális gyorsulásvektor jele: $\vec{a}_{cp}$.**




*A $\vec{v}$ kerületi sebesség iránya minden pillanatban merőleges az adott pontbeli $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulásra, nagysága állandó*

**A centripetális gyorsulás nagysága: $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$ vagy $a_{cp} = R \cdot \omega^2$.**

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy merevlemezes tárolóban (winchester) használt lemez átmérője 3,5" körüli (1" = 2,54 cm).

Számítsuk ki, hogy 7200 $\frac{1}{\text{min}}$ fordulatszám esetén mekkora a forgó lemez szélének maximális sebessége és centripetális gyorsulása!



*Merevlemezes tároló (winchester)*

### MEGOLDÁS

Adatok:

$d = 3{,}5" = 3{,}5 \cdot 2{,}54 \text{ cm} = 8{,}9 \text{ cm}$,

$f = 7200 \frac{1}{\text{min}} = 120 \frac{1}{\text{s}}$.

---

$v_{max} = ?$

$a_{cp} = ?$

A lemez szögsebessége:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 120 \frac{1}{\text{s}} = 754 \frac{1}{\text{s}}$$

A lemez sugara $R = \frac{d}{2}$, melyből $R = 4{,}45$ cm.

A legszélső pont kerületi sebessége:

$$v_{max} = R \cdot \omega = 4{,}45 \text{ cm} \cdot 754 \frac{1}{\text{s}} = 33{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

centripetális gyorsulása:

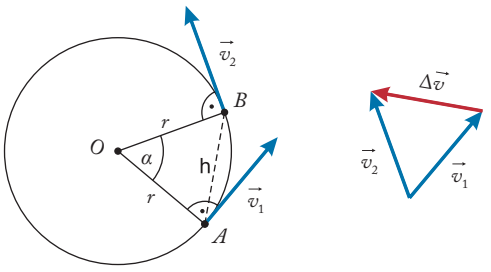
$$a_{cp} = R \cdot \omega^2 = 4{,}45 \text{ cm} \cdot 754^2 \frac{1}{\text{s}^2} \approx 25\,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A lemez szélső pontjainak sebessége $33{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a gyorsulásuk $25\,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, amely több, mint a nehézségi gyorsulás 2500-szorosa.

## A centripetális gyorsulás nagysága és iránya

Az egyenletes körmozgást végző test sebessége és a sebességváltozás is vektormennyiség. A sebességváltozásból következik, hogy a test mozgása folyamán gyorsul. A $\Delta t$ időtartamhoz tartozó gyorsulás nagysága: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Határozzuk meg az egyenletes körmozgást végző test gyorsulását!




*Az egyenletes körmozgást végző testnek is van gyorsulása*

Az ábra alapján a sebességváltozás a $\vec{v}_2$ és $\vec{v}_1$ különbsége: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Az ábrán az $AOB$ háromszög egyenlő szárú, mert két oldala $r$ hosszúságú. A másik, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ és $\Delta\vec{v}$ által meghatározott háromszög szintén egyenlő szárú háromszög, mert két szára $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$. A két háromszögben a szárak által közbezárt szög ($\alpha$) egyenlő, mert merőleges szárú szögek (a sebesség érintőirányú, így merőleges a sugárra). Mivel a két háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalak aránya megegyezik.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{h}{r}$$

Ebből a sebességváltozást kifejezve:

$$\Delta v = \frac{h}{r} \cdot v$$

A kapott összefüggést a gyorsulás képletébe beírva:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{h}{r} \cdot v}{\Delta t} = \frac{h}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r}$$

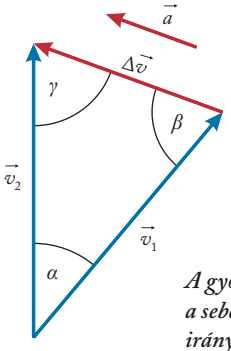
Ha a $\Delta t$ időtartamot egyre kisebbre választjuk, akkor a húr hossza és az ívhossz egyre jobban közelít egymáshoz ($h \approx \Delta i$), akkor pedig $\frac{h}{\Delta t} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} = v$.

Az előző összefüggésbe behelyettesítve:

$$a = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Határozzuk meg a gyorsulásvektor irányát!

Az $\vec{a}$ gyorsulásvektor iránya megegyezik a $\Delta v$ sebességváltozás-vektor irányával. Az ábra alapján legyen a $\vec{v}_1$ és a $\Delta\vec{v}$ által bezárt szög $\beta$.




*A gyorsulásvektor iránya a sebességváltozás-vektor irányával egyezik meg*

Egyre rövidebb $\Delta t$ időtartam választása esetén a $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ által bezárt $\alpha$ szög nagysága tart a nullához ($\Delta t \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$). Ekkor az egyenlő szárú háromszögben a $\beta$ szög egyre jobban megközelíti a 90°-ot ($\beta \to 90°$).

Tehát az egyenletes körmozgás esetén a gyorsulás iránya merőleges a sebességre. Mivel a sebesség érintőirányú, ezért a gyorsulás a kör középpontja felé mutat.

**A centripetális gyorsulás nagysága $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$.**
**Iránya mindig a kör középpontja felé mutat.**

**A centripetális gyorsulás nagysága más alakban is felírható:**

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = v \cdot \frac{v}{r} = v \cdot \omega$$

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** A Hold 384 000 km távolságra, 27,2 napos keringési idővel kering a Föld körül.

**a)** Számítsuk ki a Hold kerületi sebességét!

**b)** Számítsuk ki, hogy a Hold mekkora centripetális gyorsulással kering a Föld körül!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m,

$T = 27{,}2$ nap $= 2{,}35 \cdot 10^6$ s.

$a_{cp,\,Hold} = ?$

**a)** A Föld és a Hold távolságát középpontjuktól mérjük, és úgy számolunk, mintha az égitestek tömege egyetlen pontban, a középpontjukban koncentrálódna.

A Hold kerületi sebessége:

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \pi}{2{,}35 \cdot 10^6 \text{ s}} = 1026{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A Hold kerületi sebessége a Föld körüli keringése során $1027 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

**b)** A Hold centripetális gyorsulása:

$$a_{\text{cp, Hold}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(1026{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m}} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_{\text{cp, Hold}} = 0{,}0027 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tehát a Hold $0{,}0027 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ centripetális gyorsulással kering a Föld körül.



**2. FELADAT** Egy harci repülőgép sebessége földközelben 2,35 Mach. (A Mach-szám a repülő haladási sebességének és a hangsebességnek a hányadosa). A hangsebesség földközelben kb. $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A gép fordulási sugara 450 m. Mekkora a centripetális gyorsulása fordulás közben?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$v = 2{,}35 \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$R = 450$ m.

---

$a_{\text{cp}} = ?$

A centripetális gyorsulás fordulás közben:

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(800 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{450 \text{ m}} = 1422 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A harci gép centripetális gyorsulása $1422 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



*A hangsebesség átlépésekor hangrobbanás történik*

## MÉRÉSI FELADAT

### Centripetális gyorsulás mérése és a mérőszenzor helyének meghatározása a telefonban

**Eszközök:** okostelefon, lemezjátszó

**A mérés elméleti háttere**

Telepítsünk gyorsulásmérő programot a telefonunkra! Az alkalmazás leírásában érdemes tanulmányozni a program működését.

A mérőprogramok a gyorsulást három tengely ($x$, $y$, $z$) mentén mérik. A telefon mozgatásával meghatározható az $x$, $y$ és $z$ tengely helyzete a telefonhoz képest.



*A mobiltelefonban optikai, GPS-, távolságmérő, gyorsulásmérő és giroszkópos szenzor is található*

**A gyorsulásérzékelő szenzor helyének meghatározása**

A telefont helyezzük a lemezjátszóra úgy, hogy egyik sarka a forgáscentrumban legyen. Indítsuk el a mérőprogramot és a lemezjátszót! Ha az eszköz nagyon kicsi gyorsulást mutat $x$ és $y$ irányban is, akkor az ellentétes csúcsot helyezzük a centrumba.



*A lemezjátszó korongja 33 $\frac{1}{s}$ és 45 $\frac{1}{s}$ szögsebességgel képes forogni*

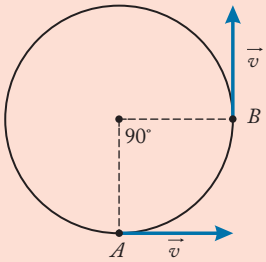
Most forgás közben a rövidebb oldala mentén csúsztassuk el a mobiltelefont addig, amíg az $x$ vagy $y$ tengely mentén már 0 a gyorsulás. Ekkor a nem nulla gyorsulású tengely biztosan egy vonalba esik a lemezjátszó közepétől a szenzorig húzott egyenessel, a nem nulla gyorsulásérték pedig a szenzor helyén érvényes centripetális gyorsulás lesz.

A lemezjátszó $\omega$ szögsebességének ismeretében az $a_{cp} = R \cdot \omega^2$ összefüggésből a középponttól való $R$ távolság meghatározható. Ezzel ismerjük a szenzor helyéhez húzható $R$ sugár helyét és nagyságát is.

Ha a rendelkezésre álló lemezjátszó $f$ fordulatszáma állítható, akkor mérjük meg az $a_{cp}$ centripetális gyorsulást két különböző fordulatszám mellett, és a mért adatokból határozzuk meg a gyorsulásérzékelő szenzor pontos helyét!

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mutassuk meg, hogy a centripetális gyorsulás a kerületi és a szögsebesség szorzata!
2. Milyen mozgást végez a test, amely gyorsul, de a sebessége se nem nő, se nem csökken?
3. Változhat-e egy test sebessége úgy, hogy közben állandó nagyságú sebességgel mozog?
4. Mondjunk példát arra, hogy egy test
   **a)** gyorsulása nulla, de a sebessége nem,
   **b)** sebessége nulla, de a gyorsulása nem!
5. Lehetséges-e az, hogy egy test mozgása során végig ugyanazon pont felé gyorsul, és ahhoz mégsem kerül közelebb?
6. Egy gépkocsi az ábra szerint 54 $\frac{km}{h}$ sebességgel halad egy 50 m sugarú körpályán.




*90°-os szögelfordulás estén a A és B pontban lévő sebességvektorok merőlegesek egymásra*

   **a)** Határozzuk meg a sebességvektor változásának nagyságát azalatt, amíg az $A$ pontból a $B$ pontba jut!
   **b)** Határozzuk meg $\Delta\vec{v}$ irányát a jelzett időszak alatt!
   **c)** Mennyi idő alatt történik meg ez?
   **d)** Mekkora a jármű centripetális gyorsulása?

# 3. Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele

## Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele

A körpályán egyenletes sebességgel haladó test sebességének iránya változik, így gyorsuló mozgást végez. Newton II. törvénye ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) szerint gyorsulást erő hoz létre, tehát **az egyenletes körmozgás fenntartásához erőre van szükség**. A dinamika alapegyenlete szerint az egyenletes körmozgás fenntartásához szükséges eredő erő a test $m$ tömegének és az $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulásának szorzata.

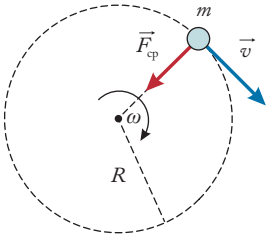
**Az egyenletes körmozgás létrejöttének dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredője a kör középpontja felé mutasson, nagysága pedig állandó legyen. Ezt az eredő erőt centripetális erőnek nevezzük.**

**Jele:** $\vec{F}_{cp}$

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp}$$

A $R$ sugarú körpályán mozgó $m$ tömegű test esetén a testre ható erők eredőjét ($F_{cp}$) a $v$ kerületi, vagy az $\omega$ szögsebességgel írhatjuk fel:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2$$



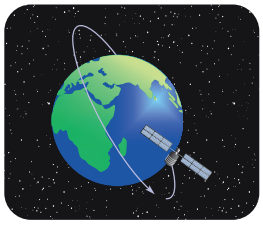

*A eredő erő vektora merőleges a kerületi sebességvektorra*

**Fontos megjegyezni, hogy a centripetális erő nem kölcsönhatásból származó erő. Valójában csak egy elnevezés; nem „önálló" erő, hanem a körmozgást végző testre ható erők eredője: $\Sigma \vec{F} \equiv \vec{F}_{cp}$.** (A ≡ jel a két erő azonosságát hangsúlyozza; megkülönböztetve a két erő egyenlőségét kifejező = jeltől.)

**Példák:**

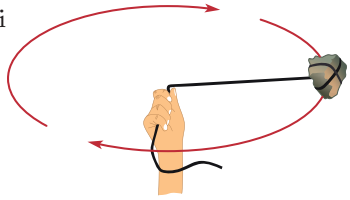
Egy keringő műholdra ható tömegvonzási erő adja a szükséges centripetális erőt:

$$F_{grav} \equiv F_{cp}$$



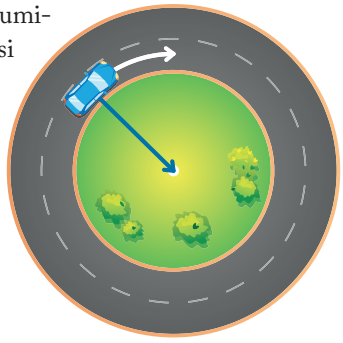
A Góliátot legyőző bibliai Dávid parittyája esetén a centripetális erő a fonálban ébredő erő:

$$F_{fonál} \equiv F_{cp}$$



Körpályán haladó jármű gumiabroncsaira ható tapadási erő adja a centripetális erőt:

$$F_{tap} \equiv F_{cp}$$



### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy kalapácsvető a 7,26 kg tömegű kalapácsot az 1,2 m hosszú drótkötél segítségével úgy dobja el, hogy többször megforgatva felgyorsítja és megfelelő emelkedési szög alatt elhajítja. Tegyük fel, hogy az 1,4 s alatt megtett utolsó három fordulatban már nem nőtt a kalapács sebessége. A sportoló karját vegyük 60 cm hosszúnak!



*A kalapács elengedésekor a kalapács érintőirányban repül tovább*

**a)** Mekkora sebességgel repítette el a versenyző a kalapácsot, és mekkora erővel tartotta forgás közben?
**b)** Adjunk közelítő becslést a dobás távolságára!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 7{,}26$ kg, $k = 1{,}2$ m, $l = 0{,}6$ m, $3 \cdot T = 1{,}4$ s.

*a)* $v = ?$, $F = ?$ *b)* $x = ?$

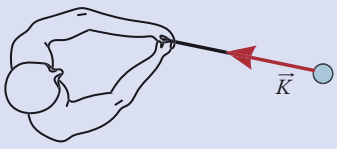
**a)** A körmozgás sugara $R = k + l = 1{,}2\ \text{m} + 0{,}6\ \text{m} = 1{,}8\ \text{m}$.

Az utolsó kör ideje $T = \frac{1{,}4\ \text{s}}{3} = 0{,}47\ \text{s}$.

A kalapács sebessége:

$$\frac{2 \cdot R \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 1{,}8\ \text{m} \cdot \pi}{0{,}47\ \text{s}} = 24{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Ez közel 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ebből talán érthető, hogy miért veszi körül a dobókört erős drótháló.) A forgatáskor a kalapácsvető által a kalapácsra kifejtett $K$ erő hozza létre a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt, így $F_{cp} = K$.




*A drótkötélben ébredő $\vec{K}$ erő adja a centripetális erőt*

$$K = m \cdot \frac{v^2}{R} = 7{,}26\ \text{kg} \cdot \frac{\left(24{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}8\ \text{m}} = 2440\ \text{N}$$

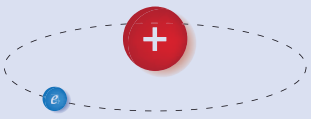
A kalapácsvető 2440 N erővel tartotta a kalapács kötelét az eldobás előtti pillanatban. Ez egy negyedtonnás test súlya!

**b)** A hajítás hozzávetőleges $x$ távolságát becsüljük azzal a közelítéssel, hogy $\alpha = 45°$-os szögben történik a hajítás, és a távolságot az elhajítás magasságában mérjük. Ekkor

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{\left(24{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \sin 90°}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 62\ \text{m}$$

A dobás távolsága 62 m. (A magyar rekord 84,19 m, Annus Adrián.)

**2. FELADAT** A Rutherford- és a Bohr-féle atommodellben a pozitív töltésű atommag körül körpályán keringenek az elektronok. Az elektronok körpályán tartásához szükséges erőt az $F_{\text{Coulomb}} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}$ Coulomb-féle vonzóerő adja.




Számítsuk ki – bár a fizika már meghaladta, mégis érdekes lehet –, hogy a modell szerint a H-atomban az elektron mekkora sebességgel kering a pozitív töltésű proton körül!

Az elektron és a proton töltésének nagysága: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$, a H-atom sugara: $r = 53\ \text{pm}$, az elektron tömege: $m = 9{,}31 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$. A Coulomb-féle erőtörvényben szereplő állandó $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

## MEGOLDÁS

Adatok:

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$,

$r = 53\ \text{pm} = 53 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$,

$m = 9{,}31 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$,

$k = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

---

$v = ?$

Az elektron körpályán történő mozgásához szükséges eredő erőt a Coulomb-féle erő adja: $F_{cp} = F_C$, vagyis:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = k \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

Az elektron $v$ sebességét kifejezve:

$$v = e \cdot \sqrt{\frac{k}{r \cdot m}}$$

Behelyettesítve:

$$v = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{53 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \cdot 9{,}31 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} =$$

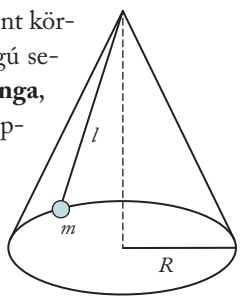
$$= 2{,}16 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2160\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A modellünk szerint az elektron 2160 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel kering a proton körül.

## Kúpinga lengésidejének vizsgálata kísérlettel és számítással

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Fonálra erősített testet az ábra szerint körpályán mozgatunk állandó nagyságú sebességgel. Az elrendezés neve **kúpinga**, mert mozgás közben a fonál egy kúppalástot ír le.

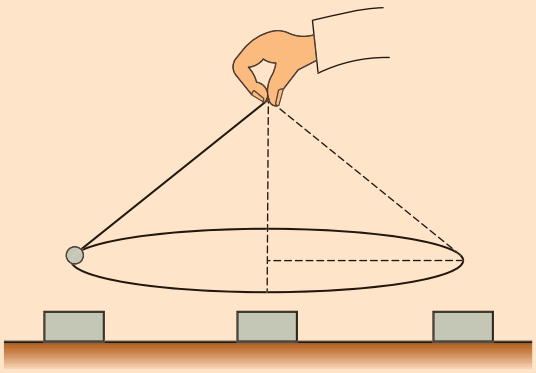



Számítások végzése előtt vizsgáljuk meg a házilag elkészített kúpinga mozgását, hogyan függ a test sebességétől

– a kúp $\alpha$ nyílásszöge,
– a fonálban ébredő $K$ erő!

## KÍSÉRLET

*Párban vagy csoportban végezzük el az alábbi kísérletet!*
Készítsünk el egy kb. fél méter hosszú ingát! A fonál végének finom körkörös mozgatásával érjük el, hogy az inga folyamatosan, stabilan keringjen. Asztalra helyezett gyufásdobozokkal megjelölve rögzíthetjük a kúpinga alapkörének átmérőjét és az alapkör középpontját.



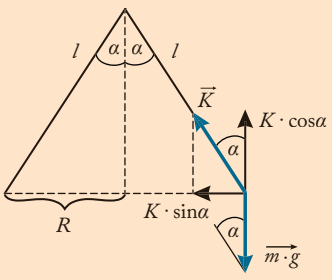
Amikor a kúpinga stabilan kering, mérjük le 10 fordulat idejét stopperrel! A keringés sebességét növelve vagy csökkentve különböző $T$ keringési időket és $R$ alapkörsugarakat kaphatunk.

Ezek kapcsolatát számítással ellenőrizhetjük.

**A számítás lépései**

Erőtani megfontolások: az ingatestre két erő hat:
– a függőleges irányú $mg$ nehézségi erő,
– a fonálirányú $K$ kötélerő.

A két erő eredője a kör középpontja felé mutat, azaz az eredő biztosítja a körpályán tartáshoz szükséges $\vec{F}_{cp}$ centripetális erőt: $\Sigma \vec{F}_e = \vec{F}_{cp} = \overrightarrow{m \cdot g} + \vec{K}$.




*Az ingára ható erők:* $\vec{K}$ *és* $\overrightarrow{m \cdot g}$

(Az ábra készítésekor felhasználtuk, hogy a centripetális erő – eredő erő – iránya vízszintes, és alkalmaztuk a vektorok összeadására tanult paralelogramma-módszert.)

A $K$ fonálerő függőleges összetevője az $mg$ nehézségi erőt egyensúlyozza ki, míg a $K$ vízszintes összetevője szolgáltatja a körpályán tartáshoz szükséges vízszintes irányú $F_{cp}$ centripetális erőt:

$$K \cdot \cos\alpha = m \cdot g, \qquad (1)$$

$$K \cdot \sin\alpha = m \cdot R \cdot \omega^2 \qquad (2)$$

A (2) és az (1) egyenletek hányadosából kapjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (= \operatorname{tg}\alpha) = \frac{F_{cp}}{m \cdot g} = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2}{m \cdot g} = \frac{R \cdot \omega^2}{g} \qquad (3)$$

Az elrendezés geometriája az ábra bal oldali felén látható derékszögű háromszögben vizsgálható: $R = l \cdot \sin\alpha$. Ezt írjuk be az (3) összefüggésbe:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R \cdot \omega^2}{g} = \frac{l \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha}{m \cdot g}$$

Tudjuk, hogy esetünkben $\alpha \neq 0$ miatt $\sin\alpha \neq 0$, így $\sin\alpha$-val oszthatjuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{l \cdot \omega^2}{g}$$

Az egyenletből $\omega^2$-et kifejezve, majd az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggést felhasználva:

$$\frac{g}{l \cdot \cos\alpha} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

A $T$-t kifejezve a **kúpinga keringési idejére** a következő összefüggést kapjuk:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cdot \cos\alpha}{g}}}$$

A feladat elején vázolt kísérletben az $\alpha$ szöget nehezen tudnánk mérni. Helyette a könnyen mérhető alapkör $R$ sugarának a $T$ keringési idővel való kapcsolatát írjuk fel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cdot \cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{g}}$$

**A mérés menete**

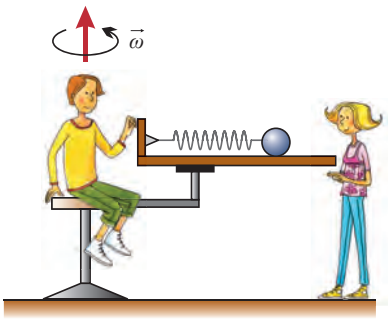
1. Végezzük el a fent leírt mérést legalább 5 esetben 10 fordulat idejének megmérésével, majd határozzuk meg a kúpinga lengésidejét!
2. A mérés során mért $l$ fonálhosszból és a kúpinga $R$ alapjának méréséből határozzuk meg a kúpinga keringési idejére levezetett összefüggéssel, számítással a kúpinga keringési idejét!
3. Vessük össze a méréssel meghatározott és a számított értékeket! Mekkora eltérést tapasztalunk?
4. Milyen fizikai jelentése van annak, hogy az $m$ tömeg az egyszerűsítéskor kiesett?

## Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszer

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Egy tengely körül egyenletesen forgó testhez rögzített vonatkoztatási rendszer is gyorsuló rendszer.

Állandó $\omega$ szögsebességgel forgó forgózsámolyon a rajz szerinti elrendezésben a rugós erőmérő végére helyeztük az $m$ tömegű golyót. Legyen a golyó tömegközéppontja $r$ távolságra a forgástengelytől!




*Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben a sugárirányú erőmérőre erő hat*

Írjuk le a forgózsámolyon lévő golyó mozgását Pista forgó és Klári nyugvó rendszeréből is!

*A forgózsámoly mellett álló* Klári úgy látja, hogy a golyó $r$ sugarú körpályán egyenletes körmozgást végez. A körmozgás $a_{cp} = r \cdot \omega^2$ gyorsulását az erőmérő $F$ ereje biztosítja.

*A forgózsámolyon ülő megfigyelő* úgy látja, hogy a golyó nyugalomban van. Az erőmérő sugárirányban helyezkedik el, az erőmérő a kör középpontja felé irányuló $F = m \cdot r \cdot \omega^2$ nagyságú erőt mutat. Ebből arra következtethetünk, hogy forgó vonatkoztatási rendszerben is egy $-m \cdot a = -m \cdot r \cdot \omega^2$ tehetetlenségi erőnek kell hatnia.

Az egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben egy $\boldsymbol{F = m \cdot r \cdot \omega^2}$ tehetetlenségi erőt kell bevezetnünk, hogy a nyugvó testre ható erők eredője zérus legyen.

**A forgó vonatkoztatási rendszerben fellépő sugárirányban kifelé mutató tehetetlenségi erőt centrifugális erőnek nevezzük.**

**Jele:** $\boldsymbol{F_{cf}}$

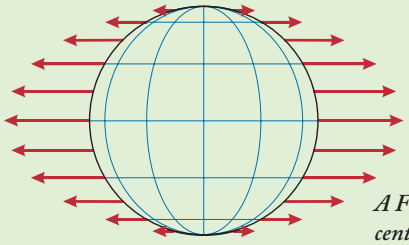
$\boldsymbol{F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega^2}$

**A centrifugális erő is egy tehetetlenségi erő, amely nem a testek közötti kölcsönhatás során lép fel, ezért semmilyen ellenereje sincs!** A centrifugális erő bevezetésével a forgó vonatkoztatási rendszerben nyugalomban lévő testek mozgását is értelmezni tudjuk.

### ALKALMAZÁSOK

#### Centrifugális erő forgó koordináta-rendszerben

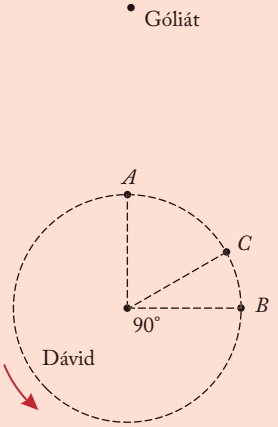
A centrifugális erőnek köszönhető, hogy a Föld a sarkainál lapult, az Egyenlítőnél pedig kiszélesedik. Ugyanis a sarkoknál a centrifugális erő nulla, míg a maximális értéket az Egyenlítőnél éri el, ahol a legnagyobb a forgástengelyre merőleges erő.



*A Föld esetében fellépő centrifugális erő*

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Állandó nagyságú sebességgel kanyarodó autót mi tartja körpályán?
2. Miért csúszhat ki a jeges úton kanyarodó jármű?
3. Miért „dőlnek be" kanyarban a kerékpárosok?
4. (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2009)
   Dávid tízlépésnyire állt Góliáttól, amikor megpörgette a parittyáját. Melyik pontnál engedte el a parittya zsinórját, ha a kirepülő kő eltalálta Góliátot? (A parittyát a nyíl által jelzett irányban pörgette.)
   **a)** Az A pontnál.
   **b)** A B pontnál.
   **c)** A C pontnál.




5. A kidolgozott feladatban tárgyalt kúpinga fonala az ingatest súlyának a kétszeresét bírja el; nagyobb erőtől elszakad. Legfeljebb mekkora szögsebességgel haladhat az ingatest, ha nem szakad el a fonál?
6. A kalapácsvetés világrekordja 86,74 méter. A kalapácsvetős kidolgozott feladat alapján számítsuk ki, hogy ekkora dobásnál kb. mekkora erővel tartja a kalapácsvető a kalapács kötelét az eldobás előtti pillanatban!

# 4. Feladatok körmozgásra

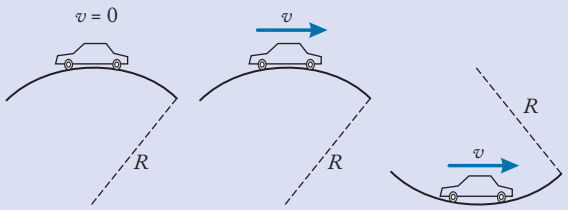
## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Határozzuk meg, hogy egy gépkocsira mekkora erővel hat egy $R$ sugarú körívvel közelíthető úttest *(ld. az ábrán)*, ha

**a)** az autó *(ld. az 1. ábrán)* az úttest legmagasabb pontján áll;

**b)** az autó *(ld. a 2. ábrán)* az úttest legmagasabb pontján $v$ sebességgel halad;

**c)** az autó *(ld. a 3. ábrán)* az úttest legmélyebb pontján $v$ sebességgel halad!




1. 2. 3.

### MEGOLDÁS

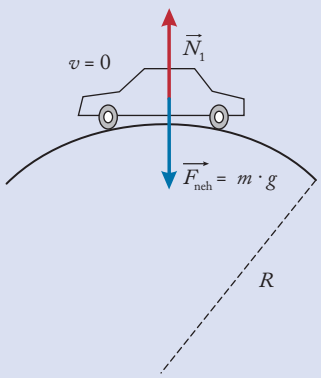
Adatok:
Adott $R$.

---

*a)* $N_1 = ?$
*b)* $N_2 = ?$
*c)* $N_3 = ?$

Mindhárom esetben a gépkocsira ható erők:
– $F_{neh} = mg$ nehézségi erő,
– $N$ az úttest nyomóereje.

**a)** *Álló helyzetben* a gépkocsira hat az $F_{neh} = m \cdot g$ nehézségi erő és az úttest által a gépkocsira kifejtett $N_1$ nyomóerő. Mivel a gépkocsi nem mozdul el, ezért a két erő kiegyenlíti egymást, $\boldsymbol{N_1 = m \cdot g}$.

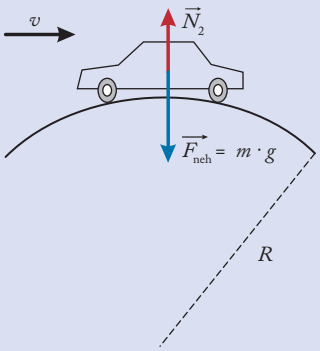



*Álló helyzetben a testre ható erők kiegyenlítik egymást*

**b)** *A körpálya legfelső pontjában* az $F_{neh} = m \cdot g$ nehézségi erő és az úttest által a gépkocsira kifejtett $N_2$ nyomóerő eredője hozza létre a kör középpontja felé irányuló $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$ centripetális gyorsulást. Mivel a körív legfelső pontjában az $F_{neh} = m \cdot g$ nehézségi erő és az $N_2$ nyomóerő hatásvonalai egybeesnek,

$m \frac{v^2}{r} = F_{neh} - N_2$,

ahonnan $\boldsymbol{N_2 = m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \left(g - \frac{v^2}{r}\right)}$

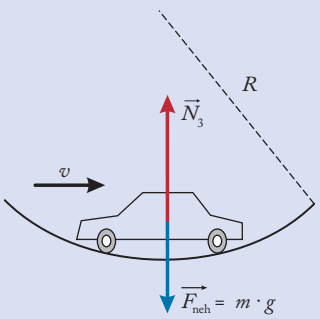



*A legfelső pontban az úttest N nyomóereje kisebb, mint az m · g nehézségi erő*

**c)** A körpálya legalsó pontjában, a b) esethez hasonlóan, az $F_{neh} = m \cdot g$ nehézségi erő és az úttest által a gépkocsira kifejtett $N_3$ nyomóerő eredője hozza létre a kör középpontja felé irányuló $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$ centripetális gyorsulást.

$m \frac{v^2}{r} = N_3 - F_{neh}$,

ahonnan $\boldsymbol{N_3 = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{r}\right)}$




*A legalsó pontban az $N_3$ nyomóerő nagyobb, mint az mg nehézségi erő*

Köríven $v$ sebességgel haladó gépkocsira a legfelső pontban hat legkisebb nyomóerő, míg a legalsó pontban lép fel legnagyobb nyomóerő.

*Megjegyzés:* A gépkocsi mindhárom esetben a $N$ nyomóerővel egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú $N'$ erővel nyomja az úttestet.

**2. FELADAT** Mekkora $v_{max}$ maximális sebességgel haladhat egy $m$ tömegű gépkocsi egy $R$ sugarú körív alakú úttest legfelső pontjában?

## MEGOLDÁS

Adatok:
Adott $m$, $R$.

$v_{max} = ?$

Az $N$ nyomóerőre fennálló $N = m \cdot (g - \frac{v^2}{R})$ összefüggésből megállapítható, hogy az autó $v$ sebességének növelésével az $N$ nyomóerő csökken.

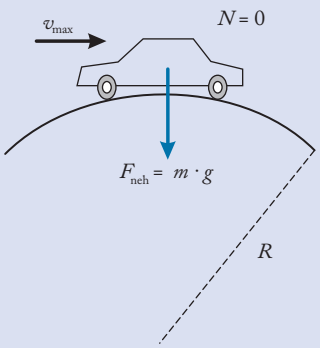
A $g = \frac{v^2}{R}$ esetben $N = 0$ lesz. Ekkor az autó sebességét növelni képes tapadási súrlódási erő is 0 lenne. Az autó nem gyorsulhat tovább, ezért az ezt eredményező sebesség az úttest tetején elérhető legnagyobb sebesség legyen $v_{max}$. Határozzuk meg ezt a $v_{max}$ sebességet!

$$g - \frac{v_{max}^2}{R} = 0,$$

ahonnan $v_{max} = \sqrt{g \cdot R}$

Behelyettesítve:

$$v_{max} = \sqrt{10 \frac{m}{s^2} \cdot 100\ m} \approx 31{,}6 \frac{m}{s} \approx 114 \frac{km}{h}$$




*$N = 0$ esetén a gépkocsi a körpályán a lehető legnagyobb sebességgel halad*

A gépkocsi a legfelső pontban maximum $114 \frac{km}{h}$ sebességgel haladhat, hogy ne váljon el az úttesttől.

*Megjegyzések:*

1. $v_{max}$ sebesség esetén nemcsak az autó és az úttest, hanem az utasok és az ülésük között sem lép fel nyomóerő. Az utas ilyenkor súlytalanságot érez, mint a vidámparkban, amikor a hullámvasút áthalad egy domb tetején.
2. Az $N = 0$ nyomóerő nemcsak az autó gyorsítását akadályozza meg, hanem a fékezését és kormányzását is. Tehát lehet, hogy ez a helyzet az utasokat szórakoztatja, de menetdinamikailag rendkívül kedvezőtlen.
3. A $v_{max} = \sqrt{g \cdot R}$ összefüggésből látszik, hogy a $v_{max}$ határsebesség a görbületi sugár négyzetgyökével arányos, a sugár növelésével tehát növekszik. A nagyobb sebességű utazásra tervezett utak ezért nem tartalmazhatnak kis sugarú – hegyes – bukkanókat.

**3. FELADAT** A feladatban a tapadási súrlódási erő szolgáltatja az egyenletes körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt.

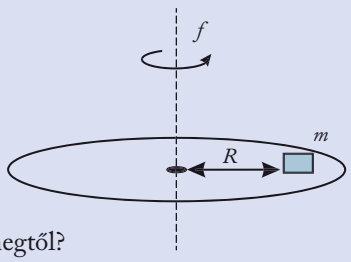
Egy függőleges tengely körül forgó, vízszintes síkú korongon a tengelytől $R = 1$ m távolságra $m = 0{,}2$ kg tömegű test helyezkedik el. A test a koronggal együtt forog. A test és a korong közötti tapadási súrlódási erő együtthatója 0,2.

**a)** Legfeljebb mekkora $\omega$ szögsebességgel foroghat a korong, ha a test nem csúszik meg rajta?
**b)** Függ-e a tömegtől a keresett $\omega$ szögsebesség?
**c)** KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG Oldjuk meg az *a)* feladatot a függőleges tengelyhez rögzített forgó vonatkoztatási rendszerben is!

## MEGOLDÁS

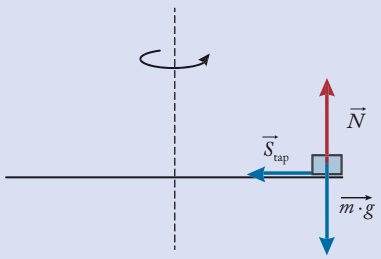
Adatok:
$R = 1$ m,
$m = 0{,}2$ kg,
$\mu_0 = 0{,}2$.

*a)* $\omega = ?$
*b)* Az $\omega$ függ-e a tömegtől?




**a)** A testre ható erők:
– az $m \cdot g$ nehézségi erő függőlegesen lefelé,
– az $N$ nyomóerő függőlegesen felfelé, és
– a kicsúszást akadályozó $S_{tap}$ tapadási erő a kör középpontja felé mutat.

A körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt természetesen nem rajzolunk, hiszen nem is létezik, azt a három létező erő eredője szolgáltatja.




*A forgó korongon nyugvó testre ható erők eredője a körmozgás középpontja felé mutat*

Írjuk fel a mozgásegyenleteket!

A függőleges irányban fellépő erők kiegyenlítik egymást (a test függőleges gyorsulása nulla):

$$0 = m \cdot g - N \qquad (1)$$

A körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt az $S_{tap}$ tapadási súrlódási erő szolgáltatja: $F_{cp} = S_{tap}$, vagyis

$$m \cdot R \cdot \omega^2 = S_{tap} \qquad (2)$$

A tapadási súrlódási erőről tudjuk, hogy

$$S_{tap} = \leq \mu_0 \cdot N \qquad (3)$$

A (3) egyenletbe az $S_{tap}$ és $N$ helyére helyettesítsük be az (1) és (2) egyenletekből a megfelelő összefüggéseket, majd rendezés után a keresett $\omega$ szögsebesség:

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot g}{R}}$$

Behelyettesítve:

$$\omega \leq \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1\ \text{m}}} = \sqrt{2}\ \frac{1}{\text{s}}$$

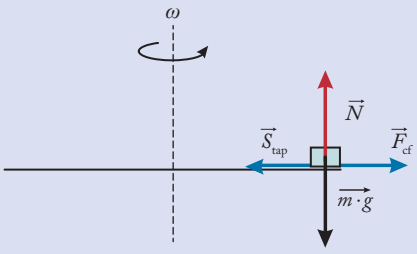
a maximális szögsebesség: $\omega_{max} = \sqrt{2}\ \frac{1}{\text{s}}$

A korong $\omega_{max} = \sqrt{2}\ \frac{1}{\text{s}}$ szögsebességgel foroghat, ha a test nem csúszhat meg rajta.

**b)** Mivel a szögsebességre kapott $\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot g}{R}}$ összefüggésben a tömeg nem szerepel, így nem függ a szögsebesség a tömegtől.

### c) KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

Ebben a rendszerben a test nyugalomban van, a rá ható erők eredője nulla.




*Forgó vonatkoztatási rendszerben – ha a test nem mozdul el – a függőleges és vízszintes irányú erők kiegyenlítik egymást*

A függőlegesen fellépő $m \cdot g$ nehézségi erő és a korong által kifejtett $N$ kényszererő kiegyenlítik egymást:

$$0 = m \cdot g - N$$

Vízszintes irányban az $S_{tap}$ tapadási erő a kör középpontja felé mutat, és a sugárirányban kifelé mutat az $F_{cf}$ centrifugális erő. Mivel a test nem mozdul el, így ezek is kiegyenlítik egymást:

$$F_{cf} = S_{tap}$$

Felhasználjuk az $F_{cf} = m \cdot r \cdot \omega^2$, és az $S_{tap} \leq \mu_0 \cdot N$ összefüggéseket. Látható, hogy az a) megoldással megegyező (1)–(3) egyenletrendszert kaptuk.

*Megjegyzés:* Bármely vonatkoztatási rendszerben egy helyesen megoldott feladat ugyanarra az eredményre vezet.

### 4. FELADAT (Középszintű érettségi feladat, 2015)

Egy vidámparkban az emberek egy henger alakú építményben állnak a falnak támaszkodva. A szerkezetet (centrifugát) növekvő fordulatszámmal forgatni kezdik. Az utasok a falhoz préselődnek. Amikor elég gyors a forgás, a padlót leeresztik a lábuk alól, mégsem pottyannak le, a falhoz lapulva maradnak.

Milyen erő akadályozza meg a lecsúszásukat?

### MEGOLDÁS

**A helyes válasz röviden**: A tapadási súrlódási erő.

**Részletesebben**:
Adatok:
Adott $R$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$\omega = ?$



*Forgó centrifugában a testek a centrifuga falához nyomódnak*

Növekvő fordulatszám esetén az utasok növekvő erővel nyomódnak a centrifuga falához.

Az utasok és a centrifuga fala között fellépő erők:
– a fal által kifejtett, vízszintes irányú $F_{ny}$ nyomóerő,
– az $F_{ny}$ nyomóerővel arányos, függőlegesen felfelé mutató $S_{tap}$ tapadási súrlódási erő.

Az utasokra hat még a padló által kifejtett, felfelé mutató $N$ nyomóerő.

Az $S_{tap}$ tapadási súrlódási erő és a $N$ tartó erő együttesen egyenlítik ki az $m \cdot g$ nehézségi erőt:

$$N + S_{tap} = m \cdot g$$

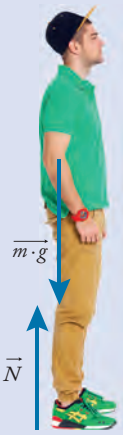
A fordulatszám növelésekor nő a fal $F_{ny}$ nyomóereje, és ezzel arányosan az $S_{tap}$ tapadási erő is.

Az $S_{tap}$ tapadási erő növekedése a padló által kifejtett $N$ tartóerő csökkenését eredményezi. Amikor a padló által kifejtett nyomóerő, $N = 0$ lesz, az alátámasztás fölöslegessé válik. Ennél a fordulatszámnál kinyithatják a padlót anélkül, hogy a vendégek lepotyognának.

Határozzuk meg egy forgatott centrifugában az adott $R$ sugárhoz és $\mu_0$ tapadási súrlódási együtthatóhoz tartozó $\omega$ szögsebesség nagyságát!

Erőtani megfontolások:

*Álló centrifuga esetén* az utas nem esik le, mert az $m \cdot g$ nehézségi erőt kiegyenlíti a padló által kifejtett $N$ nyomóerő. Ekkor $m \cdot g = N$.

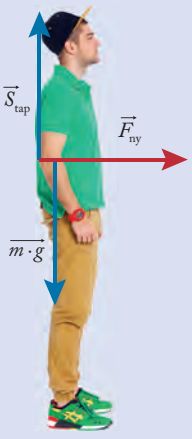



*Álló centrifuga esetén*
$m \cdot g = N$, *vagyis*
$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$.

*Elég gyorsan forgatott centrifugában a padló leeresztése után a* falhoz lapuló utasra három erő hat:
- az $m \cdot g$ nehézségi erő,
- a centrifuga oldalfalának $F_{ny}$ nyomóereje és
- a függőlegesen felfelé irányuló $S_{tap}$ tapadási súrlódási erő.

Az $mg$ nehézségi erőt kiegyenlíti az $S_{tap}$ tapadási súrlódási erő:

$$m \cdot g = S_{tap} \qquad (1)$$




*Forgó centrifuga esetén:* $m \cdot g = S_{tap}$, *vagyis* $\Sigma F = F_{cp} = F_{ny}$

Ha az ember a centrifuga valamely pontján megmarad, akkor $r$ sugarú körpályán mozog. A körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt a centrifuga fala által kifejtett $F_{ny}$ nyomóerő szolgáltatja.

$$F_{ny} = F_{cp} = m \cdot R \cdot \omega^2 \qquad (2)$$

(Jegyezzük meg: a centripetális erő az erők eredője, ezért nem szerepelhet az erőtani ábrán.)

A tapadási erőről tanultak alapján:

$$S_{tap} \le \mu_0 \cdot F_{ny} \qquad (3)$$

A (3) egyenlőtlenségbe az (1) és (2) egyenletekből $S_{tap}$ és $F_{ny}$ erőkre vonatkozó összefüggéseket rendre behelyettesítve:

$$m \cdot g \le \mu_0 \cdot m \cdot R \cdot \omega^2,$$

amelyből $\omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{\mu_0 \cdot R}}$.

Egy megforgatott centrifugában az adott $R$ sugár és $\mu_0$ tapadási súrlódási együttható esetén ahhoz, hogy az emberek hozzátapadjanak a falhoz, az $\omega$ szögsebességre fenn kell állnia, hogy

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_0 \cdot R}}.$$

*Ellenőrzés:*
Ellenőrzésképpen egyrészt megvizsgálhatjuk a kapott két oldal mértékegységét (dimenzióanalízis).

Bal oldal:

$$\left[\sqrt{\frac{\mu_0 \cdot g}{R}}\right] = \sqrt{\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Ez megegyezik a jobb oldal dimenziójával: $[\omega] = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$.

*Megjegyzés:* Gondoljuk meg, ha az utas és a forgó fal között nagyobb lesz a $\mu_0$ tapadási súrlódási együttható, akkor mekkora $\omega$ szögsebességgel kell forgatni a centrifugát!

**5. FELADAT** A fényképen látható lejtő függőleges síkú körpályában folytatódik. Ha van ilyen eszközünk az iskola szertárában, érdekes lehet egy kicsit kísérletezni vele: a lejtőn különböző magasságokból engedjük el a golyót, és vizsgáljuk a körpályán folytatott mozgását.

Elegendően magasról indítva, a golyó teljes kört tesz meg; ennél kisebb magasságból indítva nem megy körbe, elválik a körpályától.



**a)** Mekkora sebességgel kell haladnia a legfelső *A* pontban a golyónak, hogy ne váljon el a körpályától?

**b)** Milyen magasan lévő *K* kezdőpontból indítsuk a golyót, hogy az a körpálya teljes belső felületén végigfusson?

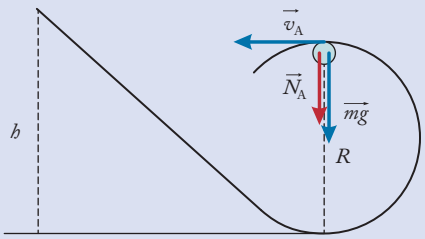
## MEGOLDÁS

Adott: $R$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

*a)* $v_A = ?$ *b)* $h = ?$

**a)** Ha a golyó a lejtőn, majd a kör alakú pályán végighaladva eléri a körpálya legfelső pontját, akkor a körpályán végig körmozgást végez.

Vizsgáljuk a legfelső, az A pontban fellépő erőket!




*A golyóra ható erők a pálya legfelső pontjában:*

$\vec{F}_{cp} \equiv \overrightarrow{m \cdot g} + \vec{N}_A$

Erőtani vizsgálat:
*A legfelső A pontban* a golyóra ható $mg$ nehézségi és $N_A$ nyomóerő is lefelé mutat, ezért eredőjük nagysága a két vektor nagyságának összege:

$$m \cdot \frac{v_A^2}{R} = m \cdot g + N_A$$

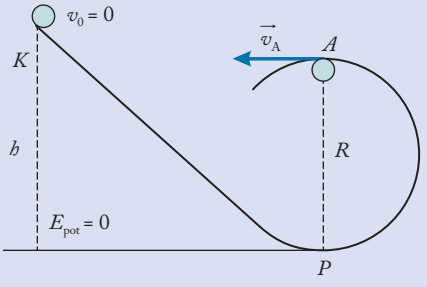
Az összefüggés egymáshoz rendel $v_A$ sebesség- és megfelelő $N_A$ nyomóerőértékeket. A legkisebb nyomóerő az $N_A = 0$. Ehhez tartozik a legkisebb $v_A$ sebesség, amelylyel az $A$ pontban a golyó még éppen körpályán mozog. Ekkor:

$$m \cdot \frac{v_A^2}{R} = m \cdot g,$$

amelyből az $A$ pontban lévő legkisebb sebesség:

$$v_A = \sqrt{g \cdot R}\ .$$

**b)** A $K$ kezdőpontból az $A$ pontba eljutó golyóra alkalmazzuk a $\Sigma W = \Delta E_{kin}$ munkatételt!




*K pontból P ponton át A pontba jut a golyó*

A golyón a nehézségi erő végez munkát:
**először *K*-ból *P*-be, lefelé haladáskor: $m \cdot g \cdot h$,**
**azután *P*-ből *A*-ba emelkedve: $- m \cdot g \cdot 2R$.**

A pálya által kifejtett erő merőleges az elmozdulásra, nem végez munkát, így a munkatétel

$$m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 2R = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 - 0,$$

ahonnan $v_A^2 = 2 \cdot g \cdot h - 4 \cdot g \cdot R$.

Helyettesítsük be az erőtani vizsgálatból a legkisebb sebességre kapott $v_A = \sqrt{g \cdot R}$ értéket:

$g \cdot R = 2 \cdot g \cdot h - 4 \cdot g \cdot R$,

amelyből $h = 2{,}5\ R$ értéket kapunk.

A golyót 2,5 $R$ magasságból kell indítani, hogy a körpálya belső felületén végighaladjon.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Az 1. feladat gondolatmenetét követve számítsuk ki, hogy mekkora erővel nyomja az úttestet az $m$ tömegű autó, ha egy $R$ sugarú mélyedésen halad keresztül $v$ sebességgel!
2. A 3. feladatban kiszámítottuk, hogy adott $\mu_0$ tapadási tényező és $R$ sugár esetén mekkora maximális szögsebességgel lehet forgatni a korongot a test megcsúszása nélkül.
   Fogalmazzunk meg az adott elrendezésre két másik feladatot:
   – adott $\mu_0$ tapadási tényező és $\omega$ szögsebesség esetén…
   – adott $R$ sugár és $\omega$ szögsebesség esetén…
   A feladat végeredményének egyszerű átrendezésével adjuk meg a választ is a kérdésekre!
3. A 4. feladatban kiszámítottuk, hogy adott $\mu_0$ tapadási tényező és $R$ sugár esetén mekkora az a legkisebb szögsebesség, amelynél a padlót le lehet ereszteni.
   Fogalmazzunk meg az adott elrendezésre két másik feladatot:
   – adott $\mu_0$ tapadási tényező és $\omega$ szögsebesség esetén…
   – adott $R$ sugár és $\omega$ szögsebesség esetén…
   A feladat végeredményének egyszerű átrendezésével adjunk választ is a kérdésekre!
4. Az 5. feladatban kiszámítottuk, milyen magasról kell indítani a testet ahhoz, hogy a lejtő elhagyása után teljes kört írjon le. Vizsgáljuk meg, hogy a kiszámított $h = 2{,}5\ R$ helyről indítva a golyót, mekkora erővel nyomja a pályát a kör legalsó $P$ pontjában!

# 5. Az egyenletesen változó körmozgás

## KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

### Változó körmozgás

Az egyenletes körmozgást állandó nagyságú $v$ kerületi sebességgel és $\omega$ szögsebességgel jellemeztük.

A körmozgást végző testek általában álló helyzetből gyorsulnak fel, illetve előbb-utóbb lassulnak és megállnak. Az indulásnál a körmozgást végző test egyes pontjai egyre nagyobb sebességgel, leállásnál pedig egyre kisebb sebességgel mozognak, azaz változó körmozgást végeznek.

### Egyenletesen változó körmozgás kerületi sebessége, gyorsulása

Egy körpályán mozgó test egyenletesen változó körmozgást végez, ha bármekkora egyenlő idők alatt a kerületi sebesség nagyságának változása megegyezik. Ha a mozgás álló helyzetből indul, akkor a kerületi sebesség nagysága egyenesen arányos az eltelt idővel: $v \sim t$.

**Ha a körmozgást végző test érintőirányú sebessége állandóan növekszik, akkor a centripetális gyorsulása mellett tangenciális (érintőirányú) gyorsulása is lesz.**
**A tangenciális (érintőirányú) gyorsulás jele: $a_t$.**

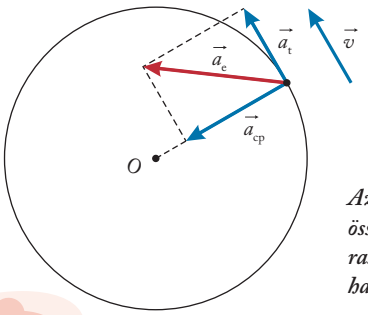
$$a_t = \frac{\Delta v}{t}.$$

**A tangenciális gyorsulás vektormennyiség, a kör érintőjének irányába mutat.**

A tangenciális gyorsulás mellett centripetális gyorsulása is van a körmozgást végző testnek.

**A körpályán egyenletesen változó mozgást végző test gyorsulásának két összetevője van:**
- **a sebesség irányának változásából adódó $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulás és**
- **a sebesség nagyságának megváltozásából származó érintőirányú $\vec{a}_t$ tangenciális gyorsulás.**

**Az eredő gyorsulás: $\vec{a}_e = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t$.**




*Az eredő gyorsulás az összetevőkből Pitagorasz-tétellel határozható meg*

**A két gyorsuláskomponens egymásra merőleges, így az eredő gyorsulás Pitagorasz tételével kifejezhető:**

$$a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

#### KIDOLGOZOTT FELADAT

Vizsgáljunk meg egy álló helyzetből induló, egyenletesen gyorsuló mozgást végző testet!

**a)** Hogyan alakul a mozgás folyamán a sebesség- és gyorsulásvektorok nagysága?

**b)** Vizsgáljuk az eredő gyorsulás irányát jellemző $\alpha$ nagyságát is!

#### MEGOLDÁS

Adatok:
Adott: $r$, $a_t$.

*a)* $v = ?$, $a_e = ?$
*b)* $\alpha = ?$

**a)** *Induláskor* a sebességvektor nagysága nulla, ezért a centripetális gyorsulás is zérus. Ekkor a $v$ sebességvektor nagysága nulla, és így az $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$ centripetális gyorsulás is nulla.

*Mozgás közben* a gyorsulás „egyenletes”, ez azt jelenti, hogy az $\vec{a}_t$ tangenciális gyorsulás nagysága állandó, időben nem változik.
A sebesség nagysága az idővel arányosan nő; az indulás után $t$ idővel $v = a_t \cdot t$.
A centripetális gyorsulás nagysága a sebességtől függ, így:

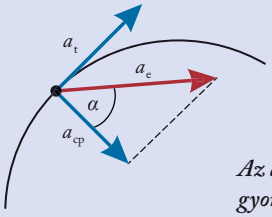
$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{a_t^2 \cdot t^2}{r}$$

A centripetális gyorsulás nagysága az idővel négyzetével arányosan növekszik.

***b)*** Az eredő gyorsulás Pitagorasz tételével:

$$a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{a_t^4 \cdot t^4}{r^2} + a_t^2} = a_t \cdot \sqrt{\frac{a_t^2 \cdot t^4}{r^2} + 1}$$

Nézzük az eredő $\vec{a}_e$ gyorsulásnak a sugárirányú $\vec{a}_{cp}$ gyorsulásvektorral bezárt $\alpha$ szögét!




*Az $a_t$ és $a_{cp}$ adja az eredő gyorsulást*

Az $\vec{a}_t$ befogó nagysága állandó, az $\vec{a}_{cp}$ befogóé növekvő, így az $\alpha$ szög az idő függvényében csökkenő. A sebesség növekedésével az eredő $\vec{a}_e$ gyorsulásvektor egyre inkább sugárirányba fordul.

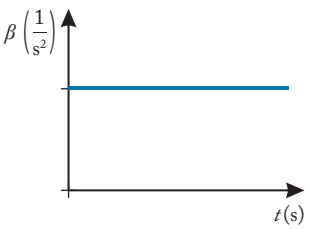
## Szöggyorsulás

Az egyenletesen változó körmozgás $\omega$ szögsebessége a mozgás folyamán egyenletesen változik.

**Egyenletes változó körmozgás esetén a $\Delta\omega$ szögsebesség-változás és az eltelt $\Delta t$ időtartam hányadosát szöggyorsulásnak nevezzük. Jele $\beta$.**

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

**A szöggyorsulás mértékegysége: $\frac{1}{s^2}$.**

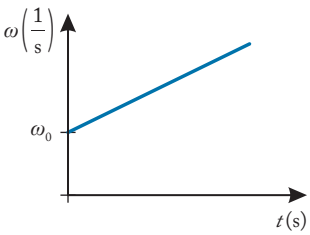



*Az egyenletesen gyorsuló körmozgás szöggyorsulása állandó*

Az egyenletesen változó körmozgás pillanatnyi szögsebességét az egyenletesen gyorsuló mozgásoknál megismert összefüggéshez ($s = v_0 + a \cdot t$) hasonlóan számítjuk ki.

$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$.

A **pillanatnyi szögsebességen** azt a szögsebességet értjük, amellyel a test akkor mozogna, ha megszűnne minden olyan hatás, amely addig a körmozgás változását előidézte.




*Az egyenletesen változó körmozgás szögsebessége az idő függvényében*



*A kalapácsvető „kalapácsa” az elengedés pillanatáig közelítőleg egyenletesen változó körmozgást végez*

## A tangenciális gyorsulás és a szöggyorsulás kapcsolata

Tudjuk, hogy a körpályán egyenletesen gyorsulva mozgó test tangenciális gyorsulása az $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ összefüggéssel számítható ki. Az összefüggésbe a kerületi sebesség helyére helyettesítsük be a körpályán mozgó test egy tömegpontjának kerületi sebessége és szögsebessége közötti kapcsolatot.

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega \cdot r}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot r = \beta \cdot r$$

**Egyenletesen változó körmozgás esetén a tangenciális gyorsulás egyenlő a szöggyorsulás és a sugár szorzatával.**

$a_t = \beta \cdot r$



*A teljesítménymérő fékpad szöggyorsulása és az autó kerekének tangenciális gyorsulása között kapcsolat van: a tangenciális gyorsulás a fékpadhenger sugarának és szöggyorsulásának szorzata*

## A szögelfordulás, szögsebesség

A körpályán egyenletesen gyorsuló mozgásnál a megtett út az $s = \frac{a_t}{2} \cdot t^2$ összefüggéssel számítható ki. Tudjuk továbbá,

hogy a megtett út az $s = \varphi \cdot r$ képlettel, a szögelfordulás ívmértékével is kifejezhető. Vezessünk le a két képletből a szögelfordulásra vonatkozó összefüggést!

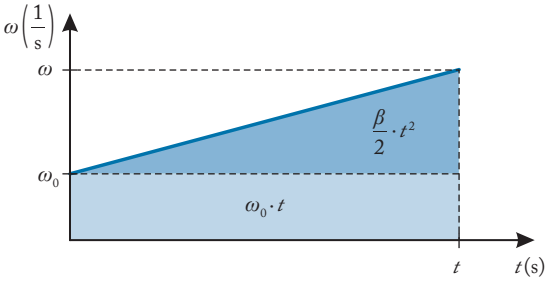
$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{a_t}{2} \cdot t^2 \\ s &= \varphi \cdot r \end{aligned}\right\} \quad \varphi \cdot r = \frac{a_t}{2} \cdot t^2$$

A tangenciális gyorsulás helyére az $a_t = \beta \cdot r$ kifejezést helyettesítjük. Egyszerűsítés után:

$$\varphi = \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$

**Az egyenletesen gyorsuló körmozgásnál vagy forgómozgásnál az $\omega_0$ kezdeti szögsebesség esetén a pillanatnyi szögelfordulásra vonatkozó összefüggés:**

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$




*A szögsebesség–idő koordináta-rendszerben a grafikon alatti terület a szögelfordulás nagyságával egyenlő*

A körmozgásra vonatkozó összefüggéseket az egyenes vonalú egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás analógiája alapján határozhatjuk meg. A táblázat a körmozgás összefüggéseit tartalmazza.

| Egyenletes körmozgás | Egyenletesen gyorsuló körmozgás | |
|---|---|---|
| | $\omega_0 = 0$ | $\omega_0 \neq 0$ |
| $\varphi = \omega \cdot t$ | $\varphi = \frac{\beta}{2} \cdot t^2$ | $\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$ |
| $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ = állandó | $\omega = \beta \cdot t$ | $\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$ |
| $\beta = 0$ | $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ = állandó | |
| $s = v_k \cdot t,\ s = \varphi \cdot r$ | $s = \frac{a_t}{2} \cdot t^2$ | $s = v_0 \cdot t + \frac{a_t}{2} \cdot t^2 = \frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t$ |
| $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, nagysága állandó, iránya változó | $a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$, $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, $a_t = \beta \cdot r$ $a_e$ nagysága és iránya is változó. | |

*A körmozgás összefoglaló táblázata*

## ALKALMAZÁSOK

### A csillagok látszólagos mozgása

Többórás expozíciós idővel készült ez a felvétel az égbolt látszólagos forgásáról. A képen a Föld tengelyének irányában a mozdulatlan Sarkcsillag áll, amely a körpályák középpontjában látható, míg a többi csillag a Föld tengely körüli forgásának következtében körpályán mozog a Sarkcsillag körül. Valójában ezek a csillagok a Földtől való nagy távolságuk miatt állócsillagoknak tekinthetők.



*A Föld forgása miatt a csillagok látszólagos mozgása egyenletes körmozgás*

### Bolygómű

A bolygókerék-hajtóművek olyan fogaskerék-hajtóművek, amelyekben egy vagy több fogaskerék egyidejűleg végez saját tengelyvonala körül forgó mozgást, és más fogaskerék tengelyvonala körül pedig keringő mozgást. Az érintkező fogaskerekek szögsebessége fordítottan arányos a fogaskerekek fogszámával. A bolygóművek ma a gépiparban használt alkatrészek.



## KIDOLGOZOTT FELADAT

(Emelt szintű érettségi feladat nyomán, 2019)
A grafikon egyenletesen gyorsuló korong szögsebességét ábrázolja az idő függvényében.

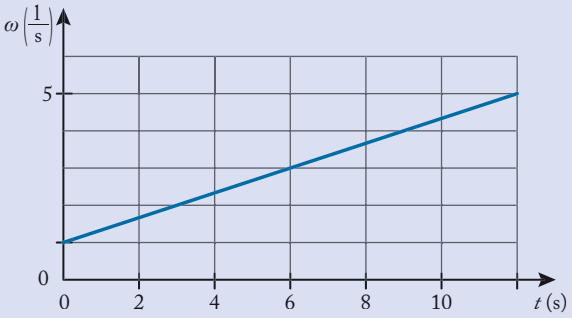
**a)** Mekkora a korong szöggyorsulása?

**b)** Adjuk meg a grafikonhoz tartozó $\omega(t)$ pillanatnyi szögsebesség-idő függvényt!

**c)** Mekkora a korong átlagos szögsebessége és fordulatszáma a vizsgált időintervallumban?

**d)** Hány fordulatot tesz meg a korong a vizsgált időszakban?

**e)** A korong álló helyzetből indult. Mennyivel a vizsgált időintervallum kezdete előtt?




*Egyenletesen gyorsuló test szögsebessége az idő függvényében*

### MEGOLDÁS

$\omega_0 = 1\,\frac{1}{\text{s}}$,

$\omega_1 = 5\,\frac{1}{\text{s}}$,

$\Delta t = 12$ s.

---

*a)* $\beta = ?$

*b)* $\omega(t) = ?$

*c)* $\overline{\omega} = ?$, $\overline{n} = ?$

*d)* $z = ?$

*e)* $t = ?$

**a)** A szöggyorsulás

$$\beta = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} = \frac{5\,\frac{1}{\text{s}} - 1\,\frac{1}{\text{s}}}{12\text{ s}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\text{s}^2}$$

A korong szöggyorsulása $\frac{1}{3}\,\frac{1}{\text{s}^2}$.

**b)** A korong pillanatnyi szögsebességét az idő függvényében az $\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$ összefüggésből határozhatjuk meg:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t = 1\,\frac{1}{\text{s}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\text{s}^2} \cdot t$$

**c)** Az átlagos szögsebességet – az egyenletes változás miatt – a kezdő és végső szögsebesség számtani közepe adja:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_0}{\Delta t} = \frac{1\,\frac{1}{\text{s}} + 5\,\frac{1}{\text{s}}}{2} = 3\,\frac{1}{\text{s}}$$

Az átlagos fordulatszámot az átlagos szögsebességből kaphatjuk:

$$\overline{n} = \frac{\overline{\omega}}{2\pi} = \frac{3\,\frac{1}{\text{s}}}{2\pi} = 0{,}48\,\frac{1}{\text{s}}$$

A korong átlagos szögsebessége $3\,\frac{1}{\text{s}}$, átlagos fordulatszáma $0{,}48\,\frac{1}{\text{s}}$.

**d)** A megtett fordulatok $z$ számát az átlagos fordulatszám és az eltelt idő szorzata adja:

$$z = \overline{n} \cdot \Delta t = 0{,}48\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 12\text{ s} = 5{,}76$$

A korong a vizsgált időszakban 5,76 fordulatot tett meg.

**e)** A $\beta = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\text{s}^2}$ szöggyorsulás szemléletes jelentése: az $\omega$ szögsebesség 3 s alatti növekedése $1\,\frac{1}{\text{s}}$.

A korong a kezdő $\omega_0 = 1\,\frac{1}{\text{s}}$ értéket éppen 3 másodperc alatt érte el, vagyis ennyivel a vizsgált időintervallum kezdete előtt indult.

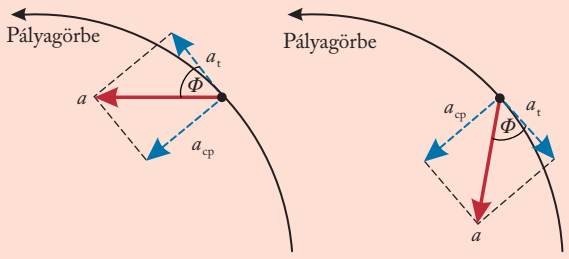
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** Az 1. kidolgozott feladatnak megfelelően vizsgáljuk meg a b) ábra szerinti sebesség- és gyorsulásvektorok nagyságának időbeli változását egyenletesen lassuló körmozgás esetén!

**2.** Mekkora a 2. kidolgozott feladat szerinti korongon a középponttól 0,4 m távolságra lévő pont által megtett út a vizsgált 12 s alatt? Mekkora az elért sebessége?

**3.** Az álló helyzetből induló $\beta = 2\,\frac{1}{\text{s}^2}$ szöggyorsulással mozgó korong mennyi idő alatt tesz meg 1 fordulatot? Mekkora fordulatszámot ér el ezalatt?

**4.** Az ábrák a jelzett irányban körpályán mozgó testek gyorsulásvektorát mutatják. Mit mondhatunk a mozgásokról?

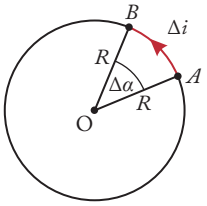


# Összefoglalás

## Egyenletes körmozgás

A körmozgást végző test helyét a befutott $\Delta i$ ívhossz és $\Delta\alpha$ szögelfordulás jellemzi.

Kapcsolatuk: $\Delta i = R \cdot \Delta\alpha$




*A $\Delta i$ ívhossz egyenesen arányos a $\Delta\alpha$ szögelfordulással*

Egyenletes körmozgás estén a $v = \frac{\Delta i}{\Delta t}$ és $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ hányadosok állandók; $v$ a test **kerületi sebessége**, $\omega$ a **szögsebessége**. Kapcsolatuk: $v = R \cdot \omega$.

Egy teljes kör megtétele alatt eltelt idő a $T$ **periódusidő**; ennek reciproka az egységnyi idő alatt megtett körök száma, az $f = \frac{1}{T}$ **fordulatszám**.

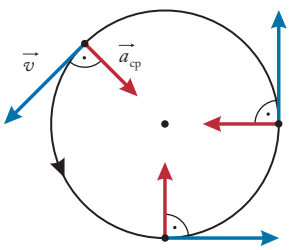
A kerületi sebesség: $v = \frac{2R \cdot \pi}{T} = v = 2R \cdot \pi \cdot f$,

a szögsebesség: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$.

## A centripetális gyorsulás

Egyenletes körmozgás gyorsulása a középpont felé mutató centripetális gyorsulás.

A centripetális gyorsulásvektor jele: $\vec{a}_{cp}$




*Egyenletes körmozgás esetén az $a_{cp}$ centripetális gyorsulás a kör középpontja felé mutat*

## Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele

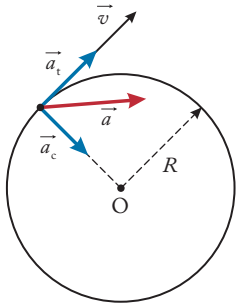
Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredője a kör középpontja felé mutasson, nagysága pedig állandó legyen. Ezt az eredő erőt centripetális erőnek nevezzük.

Nagysága: $F_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot r \cdot \omega^2$

## Egyenletesen változó körmozgás

**Egyenletesen változó körmozgás kerületi sebessége, gyorsulása**

Egy körpályán mozgó test egyenletesen változó körmozgást végez, ha a kerületi sebességváltozás $\Delta v$ nagyságának és a közben eltelt $\Delta t$ időnek a hányadosa, vagyis az $a_t$ tangenciális gyorsulás állandó. Az $\vec{a}_t$ vektor a kör érintőjének irányába mutat.




*A tangenciális gyorsulás az egyenletesen növekvő v kerületi sebességből ered*

A gyorsuló körmozgást végző test $\vec{a}_e$ gyorsulása a centripetális és a tangenciális gyorsulás vektori összege:

$\vec{a}_e = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t$

Nagysága: $a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$

**Szöggyorsulás**

Egyenletesen változó körmozgás esetén a szögsebesség $\Delta\omega$ változása és az eltelt idő $\Delta t$ hányadosa állandó, a test szöggyorsulása: $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

A tangenciális gyorsulás és a szöggyorsulás kapcsolata: $a_t = R \cdot \beta$

**A körmozgás összefoglaló táblázata**

| Egyenletes körmozgás | Egyenletesen gyorsuló körmozgás | |
|---|---|---|
| | $\omega_0 = 0$ | $\omega_0 \neq 0$ |
| $\varphi = \omega \cdot t$ | $\varphi = \frac{\beta}{2} \cdot t^2$ | $\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$ |
| $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$ állandó | $\omega = \beta \cdot t$ | $\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$ |
| $\beta = 0$ | $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} =$ állandó | |
| $s = v_k \cdot t$, $s = \varphi \cdot r$ | $s = \frac{a_t}{2} \cdot t^2$ | $s = v_0 \cdot t + \frac{a_t}{2} \cdot t^2 = \frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t$ |
| $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, nagysága állandó, iránya változó | $a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$, $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, $a_t = \beta \cdot r$<br>$a_e$ nagysága és iránya is változó. | |

# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** Az óra mutatói 12 órakor fedik egymást. Pontosan mennyi idő múlva történik a következő fedés?



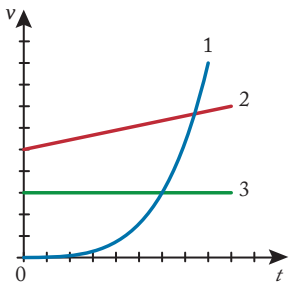
A) 1 óra múlva.

B) $\frac{12}{11}$ óra múlva.

C) 65 perc múlva.

D) 66 perc múlva.

**2.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2007)
Három test körpályán mozog. A mellékelt grafikon az egyes testek sebességének nagyságát ábrázolja az idő függvényében. Melyik állítás LEHET IGAZ az alábbiak közül?




A) Az 1. test egyenletesen gyorsulva mozog.

B) A 2. test egyenletesen mozog.

C) A 3. test gyorsuló mozgást végez.

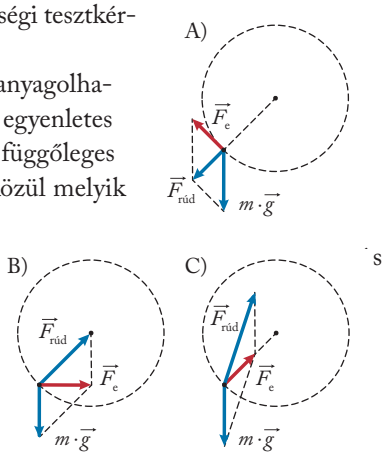
**3.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2005)
Mi biztosítja a centripetális erőt a függőleges tengelyű, forgó centrifuga falára tapadt ruha esetében?

A) A gravitációs erő.

B) A súrlódási erő.

C) A centrifuga fala által kifejtett nyomóerő.

**4.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2011)
Egy súlyos test elhanyagolható súlyú rúd végén egyenletes körmozgást végez függőleges síkban. Az ábrák közül melyik mutatja helyesen a testre ható erőket az eredő erőt?




A) Az *A)* ábra.

B) A *B)* ábra.

C) A *C)* ábra.

D) Egyik sem.

**5.** Pontszerű test $R$ sugarú körpályán kering $T$ periódusidővel, $v$ sebességgel. Válasszuk ki a HAMIS állítást!

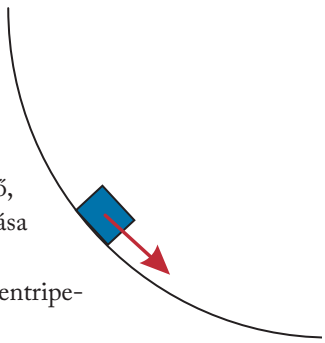
A) A test elmozdulása $\frac{T}{\text{s}}$ idő alatt $2R$, a sebességváltozás nagysága $2v$.

B) A test által megtett út $\frac{T}{\text{s}}$ idő alatt $R \cdot \pi$, a sebesség nagyságának változása nulla.

C) A test elmozdulása $\frac{T}{\text{s}}$ idő alatt $R \cdot \pi$, a sebességváltozás nagysága $2v$.

D) A test által megtett út $\frac{T}{\text{s}}$ idő alatt $R \cdot \pi$, a sebességváltozás nagysága $2v$.

**6.** Egy pontszerű test végigcsúszik egy negyedkör alakú lejtőn, az ábra szerint. Válasszuk ki a HAMIS állítást!



A) A test sebessége nő, érintőirányú gyorsulása csökken.

B) A test sebessége nő, centripetális gyorsulása nő.

C) A test gyorsulása a mozgás kezdetén a nehézségi gyorsulás.

D) A test gyorsulása a mozgás végén nulla.

**7.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2021)
Egy kör alakú pálya két átellenes pontjáról egy-egy gyalogos indul el egymással szemben 16 óra 0 perckor. Mindketten egyenletesen, de egymástól eltérő nagyságú sebességgel haladnak. 16 óra 2 perckor találkoznak először. Mikor lesz a második találkozásuk, ha továbbra is változatlan sebességgel haladnak?

A) 16 óra 4 perckor.

B) 16 óra 6 perckor.

C) 16 óra 8 perckor.

D) Nem dönthető el, a gyalogosok sebességétől függ.

**8.** Egy kör alakú pálya két átellenes pontjáról egy-egy gyalogos indul el egymással szemben 16 óra 0 perckor. Mindketten egyenletesen, de egymástól eltérő nagyságú sebességgel haladnak. 16 óra 2 perckor találkoznak. Mikor találkoztak volna, ha az előzővel egyező nagyságú sebességgel haladnak, de azonos irányban?

A) 16 óra 4 perckor.

B) 16 óra 6 perckor.

C) 16 óra 8 perckor.

D) Nem dönthető el, a gyalogosok sebességétől függ.

**9.** Egy körpályán mozgó test gyorsulásvektora nem a kör középpontja felé mutat. Válasszuk ki a BIZTOSAN IGAZ állítást!

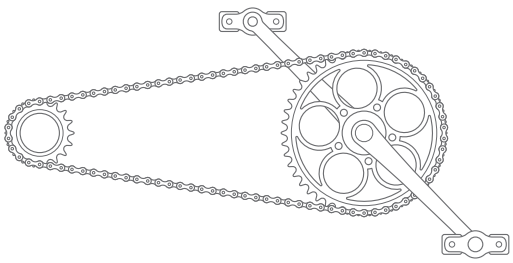
A) Ez lehetetlen, a gyorsulásvektor mindig centrális irányú (centripetális).
B) A test lassuló körmozgást végez.
C) A test gyorsuló körmozgást végez.
D) A test változó körmozgást végez.

**10.** Az 1 m sugarú körpályán egyenletesen mozgó test sebességvektora 1 s alatt 120°-ot fordul el. Mekkora a test gyorsulása?

A) A fenti adatokból nem lehet megállapítani.
B) Kb. 4,38 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
C) Kb. 3,14 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
D) Kb. 6,28 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

## FELADATOK

**1.** Kerékpár erőátviteli rendszere: pedál, pedál fogaskereke, lánc, hátsó kerék fogaskereke.



| | Méret | Fordulatszám | Kerületi sebesség |
|---|---|---|---|
| Pedál | hajtókar hossza: 170 mm | 1 $\frac{1}{\text{s}}$ | |
| Nagy fogaskerék | átmérő: 200 mm | | |
| Kis fogaskerék | átmérő: 100 mm | | |

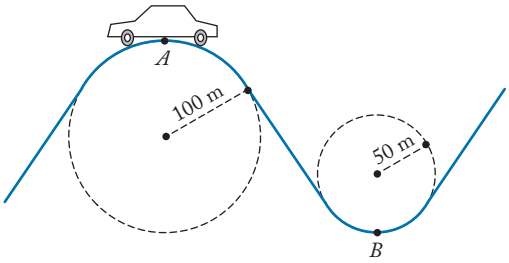
Mennyi a lánc sebessége a kerékpárhoz képest? Töltsük ki a táblázat hiányzó adatait!

**2.** A kerékpár mérete a kerék átmérőjét jelenti, ezt colban (") adják meg. Például: 26", 28". 1 col = 1 inch = 2,54 cm.



Egy 28 colos kerékpár első fogaskerekén 30, a hátsón 15 fog van. Mekkora sebességgel halad az a kerékpáros, aki a pedált $f = 1\ \frac{1}{\text{s}}$ fordulatszámmal hajtja?

**3.** Egy 1 tonnás jármű 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel halad dombvidéken. Az ábra az út hosszmetszetének egy része.

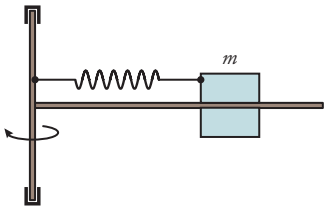



**a)** Mekkora az út és az autó közötti nyomóerő az *A*, illetve a *B* pontban?
**b)** Mekkora az *A* pontban elérhető maximális sebesség?

**4.** Mekkora a Forma–1-ben 50 m sugarú körben, 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó autóban a nyakizmok által a pilóta fejére ható erő? A pilóta fejének tömege a sisakkal együtt 8 kg.



**5.** (Egyetemi felvételi feladat nyomán, 1976)
Egy függőleges tengelyhez rögzített vízszintes rúdra fűzünk fel egy súrlódásmentesen csúszó, $m = 0{,}2$ kg tömegű testet az ábra szerint. A testet egy $D = 5000\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú, 50 cm hosszú rugó rögzíti a tengelyhez.

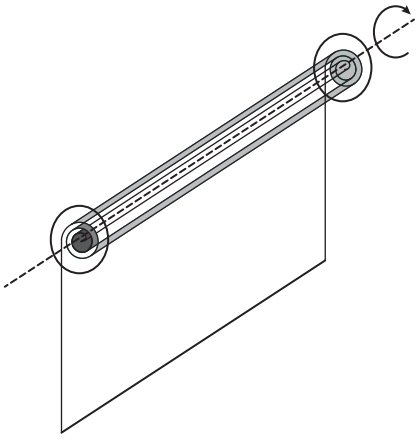


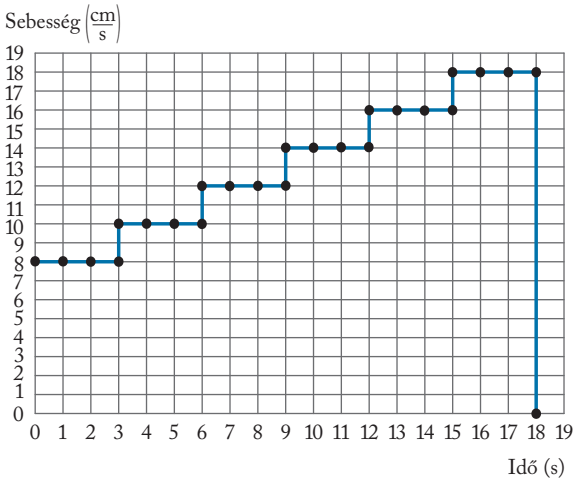

**a)** Merre mozdul el a test, ha a tengelyt növekvő szögsebességgel forgatni kezdjük?

**b)** Milyen távol van a tengelytől a test $\omega = 60\ \frac{1}{s}$ szögsebesség esetén?

**c)** Vizsgáljuk a test $x$ távolságát a tengelytől tetszőleges $\omega$ szögsebesség esetén, vagyis adjuk meg és diszkutáljuk az $x(\omega)$ függvényt!

**6.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2021)
Egy garázs bejátatát motoros alumíniumredőnnyel zárják be. A motor állandó fordulatszámmal forgat egy, a bejárat felett lévő hengert, amire a redőny feltekeredik, illetve amiről letekeredik. A redőny feltekerésével a henger fordulatonként egyre vastagabb lesz, miközben a fordulatszáma állandó marad. A grafikonon a redőny aljának sebessége látható az idő függvényében.






*A redőny aljának sebessége az idő függvényében*

**a)** Határozza meg a henger fordulatszámát $\frac{1}{\text{perc}}$ egységben!

**b)** Mennyivel nő meg egy fordulat után a redőny aljának sebessége?

**c)** Milyen vastag a redőny?

**d)** Milyen magas a bejárat?

**7.** Az $l$ hosszúságú fonálra függesztett $m$ tömegű golyó ingaként leng. A legnagyobb kitérése 60°. Mekkora erő hat a fonálban az inga

**a)** szélső helyzetében?

**b)** függőleges helyzetében?

**8.** Egy $R$ sugarú félgömb tetején egy kis golyót elengedünk. Hol válik el a golyó a gömbtől?

**9.** Egy játék mozdonyt 50 cm sugarú, kör alakú pályán indítunk el. Felgyorsulás közben $0{,}2\ \frac{m}{s^2}$ nagyságú, állandó kerületi gyorsulással mozog.

**a)** Az indulás után mennyi idő múlva lesz a centripetális gyorsulás is $0{,}2\ \frac{m}{s^2}$?

**b)** Mekkora szöggel fordul el ezalatt a gyorsulás vektora?

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### Az egyenletes körmozgás kinematikája

**a)** Ismertessük a pálya, kerületi sebesség, szögsebesség, periódusidő, fordulatszám, centripetális gyorsulás fogalmakat!



**b)** Egy váltós kerékpár erőátviteli rendszerének egységei: pedál, több különböző átmérőjű pedálkerék, lánc, a hátsó tengelyen több különböző átmérőjű fogaskerék, hátsó kerék.

**c)** Vizsgáljuk meg ezen egységek esetén a fordulatszám, kerületi sebesség, szögsebesség értékeinek kapcsolatát!

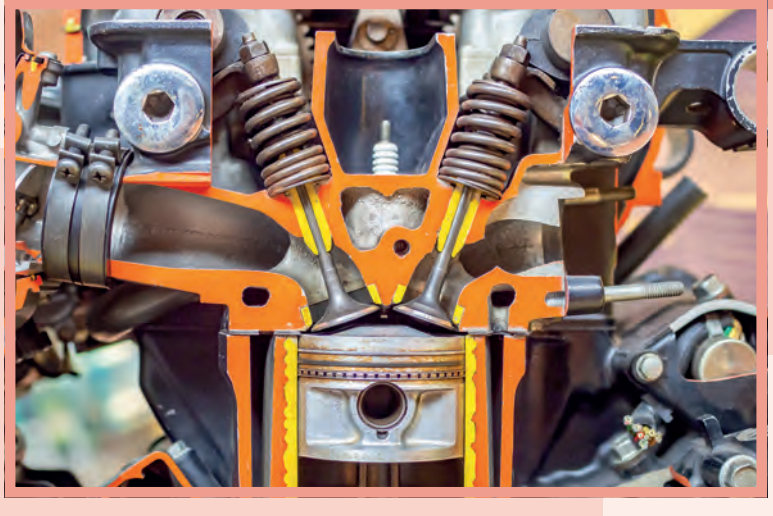
**d)** Az $l$ pedálkarhosszúság, a pedálfogaskerék-sugár ($R$), hátsó fogaskerék-sugár ($r$) és hátsó kerék-sugár ($R^*$) ismeretében adjuk meg adott $f$ pedálfordulatszámhoz tartozó kerékpársebességet!

**e)** Váltós kerékpár esetén több, különböző átmérőjű fogaskereket rögzítenek a pedáltengelyre és a hátsó tengelyre. A pedáltengelyen válasszunk ki két fogaskereket: $R_1 < R_2$; ugyanígy a hátsó tengelyen is: $r_1 < r_2$. A váltóval így négy fokozat közül választhatunk. Adjuk meg az adott $f$ pedálfordulatszámhoz tartozó legnagyobb és legkisebb sebességet!

# VI. Rezgőmozgás







# 1. Mechanikai rezgések leírása

## EMLÉKEZTETŐ

### Mechanikai rezgés leírása

Azt a mozgást, amelynek során egy pontszerű test valamely helykoordinátája vagy helykoordinátái időben periodikusan változnak, **mechanikai rezgésnek** nevezzük.

A rezgőmozgást legegyszerűbben úgy vizsgálhatjuk, ha az egyik végén rögzített spirálrugó másik végére egy pici, de nehéz testet akasztunk. Várjuk meg, míg a test nyugalomba kerül. **Egyensúlyi helyzetben** a testre ható erők eredője nulla. Az egyensúlyi helyzettől a test pillanatnyi helyéig húzott vektor a **kitérés** ($y$). A **szélső helyzetekben** a test sebessége irányt vált, itt a test sebessége egy pillanatra 0. Ez a két szélső helyzet a mozgás két **fordulópontja**. A szélső helyzethez tartozó kitérést **amplitúdónak** ($A$) nevezzük.

A rezgőmozgás ismétlődő legkisebb egységét **teljes rezgésnek** nevezzük. Egy teljes rezgés ideje a **periódusidő** ($T$), mértékegysége a másodperc (s).

A rezgőmozgás jellemzésére használjuk még a **frekvenciát** ($f$) vagy más néven rezgésszámot, ami az időegységenkénti teljes rezgések számát adja, mértékegysége: $\frac{1}{\text{s}}$, Hz. A két mennyiség közötti kapcsolat: $f = \frac{1}{T}$.

### A rezgőmozgás oka

Azt tapasztaljuk, hogy ha a testet egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk, akkor a rá ható $\Sigma\vec{F}$ eredő mindig a visszatérítő jellegű, azaz az egyensúlyi helyzet felé mutat.

A rugóerő törvénye ($\vec{F}_r = -D\cdot\vec{\Delta l}$) miatt az eredő is lineáris erő. A rugó erőtörvényét **lineáris erőtörvénynek** is nevezzük. Az összefüggésben szereplő **rugóállandó** ($D$) mértékegysége $\frac{\text{N}}{\text{m}}$, skalármennyiség.

Az olyan erőt, melynek nagysága egyenesen arányos a kitéréssel és vele ellentétes irányú, **harmonikus erőnek** nevezzük.

A harmonikus erő (lineáris erő) által létrehozott rezgőmozgás a **harmonikus rezgőmozgás**, $\Sigma\vec{F} = -D\cdot\vec{y}$.

## KIDOLGOZOTT FELADAT



**1. FELADAT** Egy rugó felső vége rögzített, alsó végére 30 dkg tömegű testet erősítünk. Amikor a test nyugalomba kerül, a rugó megnyúlása 5 cm. A testet egyensúlyi helyzetéből lefelé kimozdítjuk 3 cm-rel, majd magára hagyjuk. 10 teljes rezgést 3,47 másodperc alatt tesz meg.

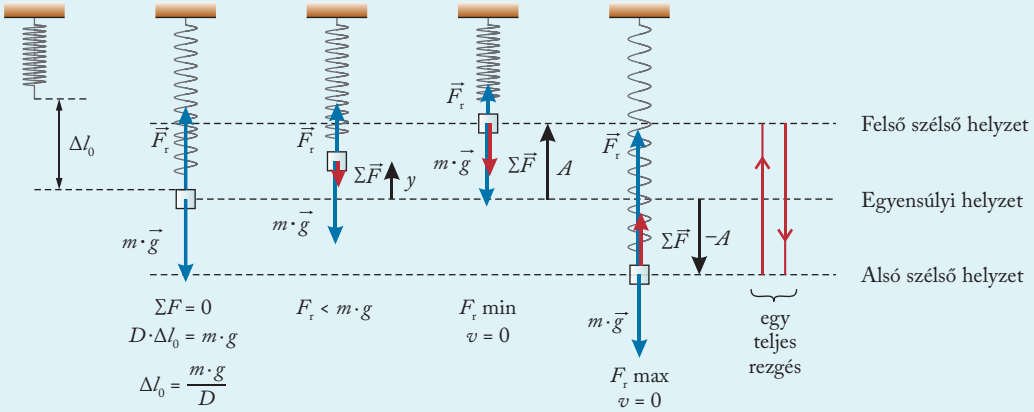
**a)** Mekkora a rugó rugóállandója?
**b)** Mekkora a rezgés amplitúdója?
**c)** Mennyi a rezgésidő?
**d)** Mennyi a rezgés frekvenciája?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 0{,}3$ kg,
$\Delta l = 0{,}05$ m,
$k = 10$,
$\Delta t = 3{,}47$ s.

---

*a)* $D = ?$ *b)* $A = ?$ *c)* $T = ?$ *d)* $f = ?$




*A mechanikai rezgés vizsgálata*

**a)** A test egyensúlyi állapotában $\Sigma \vec{F} = 0$.
Az $m$ tömegű testre ható és a rugóban ébredő erő egyenlő nagyságú:

$m \cdot g = D \cdot \Delta l$

A $D$ rugóállandó már kifejezhető:

$$D = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = 60 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

A rugó rugóállandója $60 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

**b)** A rezgés amplitúdója a test legnagyobb távolsága az egyensúlyi helyzettől mérve, ami most 3 cm. $A = 3$ cm.

A rezgés amplitúdója 3 cm.

**c)** A rezgésidő:

$$T = \frac{\Delta t}{k} = 0{,}347 \text{ s}$$

A rezgő test rezgésideje 0,347 s.

**d)** A rezgés frekvenciája:

$$f = \frac{1}{T} = 2{,}88 \frac{1}{\text{s}} \approx 2{,}9 \text{ Hz}$$

A rezgés frekvenciája 2,9 Hz.

Ismerkedjünk meg néhány olyan jelenséggel, amely szintén harmonikus rezgőmozgás, de a mozgást nem rugó okozza. Hasznos lehet mindegyik esetben igazolni, hogy a vizsgált test az adott fizikai környezetben harmonikus rezgőmozgást végez, azaz a rá ható erők eredője harmonikus.

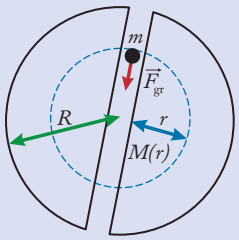
**2. FELADAT** Gondolatban átfúrjuk a Földet a középpontján keresztül. A lyukba ejtünk egy kicsi testet. Mutassuk meg, hogy a test harmonikus rezgőmozgást végez!

A megoldás során a súrlódástól, a közegellenállástól tekintsünk el! A Földet homogén anyagú, $\rho$ sűrűségű, $R$ sugarú gömbnek vesszük. Felhasználhatjuk, hogy a lyukban a Föld középpontjától $r < R$ távolságra lévő testre csak az $r$ sugarú gömbben lévő anyag gravitációs vonzása hat.

## MEGOLDÁS

Ahogy a test esik a lyukban, a rá ható erő végig a Föld középpontja felé mutat, nagysága folyamatosan csökken. A Föld középpontjához érkezve a vonzóerő egy pillanatra nullára csökken. Itt van a test egyensúlyi helyzete, itt legnagyobb a sebessége. Továbblendülve a gravitációs vonzóerő nagysága elkezd növekedni, az iránya továbbra is a Föld középpontja felé mutat, a test lassul.

A feladatban megfogalmazott segítség szerint a Föld középpontjától $r < R$ távolságra lévő testre ható gravitációs erő: $F_{\text{gr}} = \gamma \frac{M(r) \cdot m}{r^2}$.




*A Föld középpontján átfúrt lyukban mozgó testre ható erő*

Használjuk fel a sűrűségre a $\rho = \frac{M}{V}$, illetve a gömb térfogatára vonatkozó $V = \frac{4 r^3 \pi}{3}$ összefüggéseket:

$$F_{\text{gr}} = \gamma \cdot \frac{\rho \cdot V(r) \cdot m}{r^2},$$

$$F_{\text{gr}} = \gamma \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4 r^3 \pi}{3} \cdot m}{r^2}$$

Az egyszerűsítés és rendezés után:

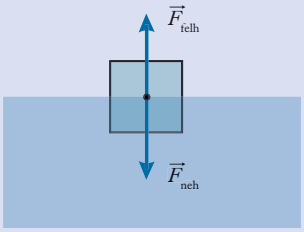
$$F_{\text{gr}}(r) = \frac{4 \pi}{3} \gamma \cdot \rho \cdot m \cdot r$$

A vizsgált testre egyetlen erő, $F_{\text{gr}}(r)$ hat, amelynek nagysága arányos az egyensúlyi helyzettől mért távolsággal ($r$), és iránya mindig a Föld középpontja felé mutat. A testre harmonikus erő hat, harmonikus rezgést végez.

**3. FELADAT** Vízzel telt edényben $a$ oldalélű, $\rho$ sűrűségű fa úszik. Egyensúlyi helyzetéből kicsit kimozdítjuk, és magára hagyjuk. Az edény $A$ alapterülete sokkal nagyobb $a^2$-nél, ezért a mozgás közben az edényben lévő vízszint változásától tekintsünk el! Mutassuk meg, hogy a test harmonikus rezgőmozgást végez!

## MEGOLDÁS

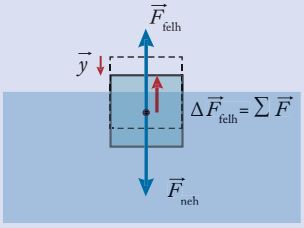
Vizsgáljuk először a fakocka egyensúlyi helyzetét!




*Fakocka úszik a vízen, egyensúlyban van*

Ekkor a testre ható két erő, a $F_{\text{neh}}$ nehézségi erő és a víz által kifejtett $F_{\text{felh}}$ felhajtóerő erő ellentétes irányúak, de azonos nagyságúak: $F_{\text{neh}} = F_{\text{felh}}$.

Amikor ebből a helyzetből $y$-nal megemeljük a testet, a felhajtóerő csökken, az eredő erő lefelé mutat. Amikor az egyensúlyi helyzetből lefelé mozdítjuk el a fakockát, a felhajtóerő növekszik, az eredő erő felfelé mutat.




*Egyensúlyából kimozdított fakockára ható erők*

Az eredő erő nagyságát a felhajtóerő megváltozása adja.

$$\Sigma F = \Delta F_{felh} = \rho \cdot \Delta V \cdot g = \rho \cdot a^2 \cdot y \cdot g = \rho \cdot a^2 \cdot g \cdot y.$$

Amennyiben figyelembe vesszük az eredő erő $y$-hoz viszonyított irányát: $\Sigma\vec{F} = -\rho \cdot a^2 \cdot g \cdot \vec{y}$.

A testre harmonikus erő hat, harmonikus rezgést végez.

**4. FELADAT** Egy vízszintes, $2l$ hosszú rúd két végére egy-egy $+Q$ töltésű pontszerű test van rögzítve. A rúd közepére fűzött $+q$ töltésű gyöngyöt egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük, majd magára hagyjuk. Mutassuk meg, hogy a test harmonikus rezgőmozgást végez!

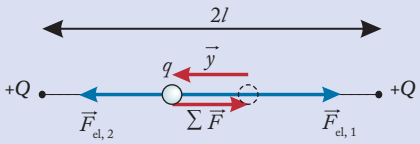
## MEGOLDÁS

A gyöngyre ható függőleges erők (nehézségi erő, kényszererő) eredője mindig nulla, a továbbiakban nem foglalkozunk velük.

A gyöngyre vízszintesen a két elektromos erő hat. A test egyensúlyi helyzetében egyenlő távolságra van a rúd két végére rögzített $+Q$ elektromos töltésű pontszerű testektől.

Mozdítsuk ki a gyöngyöt az egyensúlyi helyzetéből $y$-nal. Legyen $y << l$. Amelyik $+Q$ töltéshez közelebb került a gyöngy, attól nagyobb taszítóerőt fog érezni, a másiktól kisebbet. Így az eredő erő ellentétes irányú lesz az $y$ kitéréssel.

A gyöngyre ható eredő erő:




*Az egyensúlyi helyzetéből kimozdított gyöngyre ható erők*

Számítsuk ki a gyöngyre ható eredő erőt:

$$\Sigma F = F_{el,1} - F_{el,2} = k\frac{Q \cdot q}{(l-y)^2} - k\frac{Q \cdot q}{(l+y)^2}$$

Emeljünk ki, majd hozzuk a két törtet közös nevezőre:

$$\Sigma F = k \cdot Q \cdot q \cdot \left[\frac{1}{(l-y)^2} - \frac{1}{(l+y)^2}\right],$$

$$\Sigma F = k \cdot Q \cdot q \cdot \left[\frac{(l+y)^2 - (l-y)^2}{[(l-y)\,(l+y)]^2}\right] = k \cdot Q \cdot q \cdot \frac{4 \cdot l \cdot y}{(l^2 - y^2)^2}$$

Mivel $y << l$, ezért $l^2$ mellett $y^2$ elhanyagolható, valamint amennyiben figyelembe vesszük az eredő erő $y$-hoz viszonyított irányát:

$$\Sigma\vec{F} = -\frac{4 \cdot k \cdot Q \cdot q}{l^3} \cdot \vec{y}$$

A testre harmonikus erő hat, harmonikus rezgést végez.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Soroljunk fel a hétköznapjainkból olyan jelenségeket, amelyek rezgéssel kapcsolatosak!
2. Melyik mennyiségekkel tudjuk jellemezni a tömegpont rezgését?
3. Egy rugóra helyezett test rezgést végez. Melyik helyzetekben lesz a testre ható eredő erő legnagyobb, illetve legkisebb?
4. Mi a feltétele annak, hogy egy test harmonikus rezgőmozgást végezzen?

# 2. Harmonikus rezgőmozgás kinematikája

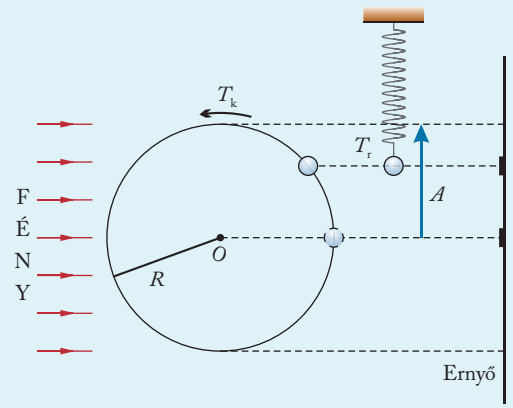
**EMLÉKEZTETŐ**

A rezgés kinematikai leírása azt jelenti, hogy megadjuk a rezgő tömegpont kitérését, sebességét, gyorsulását az idő függvényében. A rezgés három kinematikai függvénye: $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

Érdemes megjegyezni, hogy mindhárom mennyiséget kezelhetjük vektormennyiségként is. Mivel a vizsgált tömegpont többnyire egy egyenes mentén mozog, a kinematikai mennyiségeket elegendő skalárként használni, előjelük az irányukra utal.

### Körmozgás és harmonikus rezgőmozgás

A most megismert új mozgásfajtának szoros kapcsolata van a korábban alaposan megismert körmozgással. A következő ábrán felvázolt kísérletben a két periodikus mozgás azonos síkban történik. Ügyes beállítással elérhető, hogy a körpálya sugara megegyezzen a rezgés amplitúdójával, a két mozgás periódusideje egyenlő legyen, valamint a kezdőpillanatban a két test a körpálya középpontjának magasságából egy irányba (pl. felfelé) induljon. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy a megfelelően beállított kör-, illetve rezgőmozgást végző testek árnyéka az ernyőn együtt mozog.




*Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás kapcsolata*

**Következmények**

1. Az egyenletes körmozgást végző testnek a kör valamely átmérőjére eső vetülete harmonikus rezgőmozgást végez.
2. Minden harmonikus rezgőmozgáshoz hozzárendelhetünk egy egyenletes körmozgást.
3. A hozzárendelési szabály: a körpálya sugara legyen egyenlő a rezgés amplitúdójával ($R = A$), valamint a két mozgás periódusideje legyen azonos ($T_k = T_r$). Az így kapott körmozgást a vizsgált harmonikus rezgőmozgás **referencia-körmozgásának** nevezzük. (A referencia latin szó, jelentése: ajánlás, adott jelnek a jelrendszeren kívüli vonatkoztatása.)

## Fázis, fázisszög

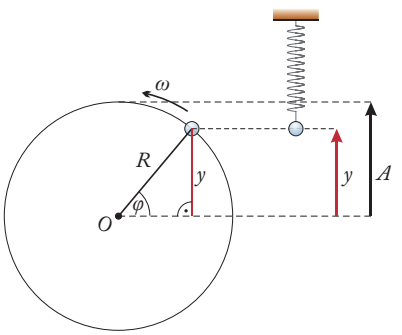
A rezgés pillanatnyi állapotát a mozgás egy **fázisának** nevezzük. A rezgés fázisát a test pillanatnyi helye és sebessége határozza meg.

A vizsgálat kezdőpontjában a rezgő test haladjon át az egyensúlyi helyzeten. A $t$ időpillanatban a rezgés állapotát meghatározza a referencia-körmozgást végző test $\phi$ szögelfordulása. Ez a $\phi$ szög egyben a rezgés fázisát is jellemzi, neve **fázisszög**.

A fázisszög megmutatja, hogy a rezgő test a teljes rezgés melyik részénél van éppen. Két rezgés azonos fázisban van, ha a fáziskülönbségük a teljesszög egész számszorosa: $\varphi_2 - \varphi_1 = k \cdot 2\pi$, $k \in Z$.

## A harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye

A jelenség megfigyelésének kezdőpillanatában mindkét test a rezgőmozgás egyensúlyi helyzetének magasságában van. A rezgő test kitérése $t$ idő múlva $y$. A referencia-körmozgást végző test szögelfordulása $\varphi$, ami egyben a harmonikus rezgőmozgás fázisszöge.




*A referencia-körmozgást végző test $\varphi$ szögelfordulására fennáll:* $\sin\varphi = \frac{y}{A}$

Az ábrán lévő derékszögű háromszöget vizsgálva:
$y = R \cdot \sin \varphi = A \cdot \sin \varphi$.

Egyenletes körmozgás során a szögelfordulás egyenesen arányos az eltelt idővel.

$\varphi = \omega \cdot t$,

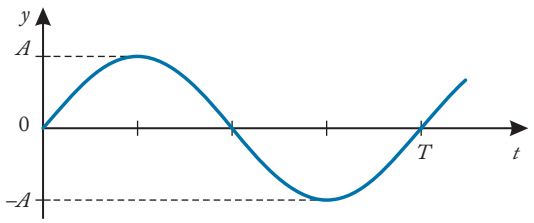
$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Az $\omega$-t körmozgásnál szögsebességnek, rezgőmozgásnál **körfrekvenciának** nevezzük:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

**A harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő szinuszos függvénye:**

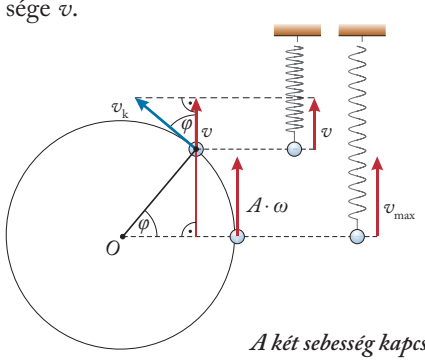
**$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$**




*A harmonikus rezgőmozgás kitérés–idő (y–t) grafikonja*

## A harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő függvénye

A harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont sebessége az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a legnagyobb, a fordulópontokban (szélső helyzetekben) egy pillanatra nullára csökken. A részletes leírást ismét a harmonikus rezgőmozgáshoz rendelt referencia-körmozgás vizsgálata segíti. Az egyenletes körmozgást végző tömegpont kerületi sebessége $v_k$, a rezgőmozgást végző tömegpont sebessége $v$.




*A két sebesség kapcsolata:* $\cos \varphi = \frac{v}{v_k}$

Az ábra alapján: $v(t) = v_k \cdot \cos \varphi$.

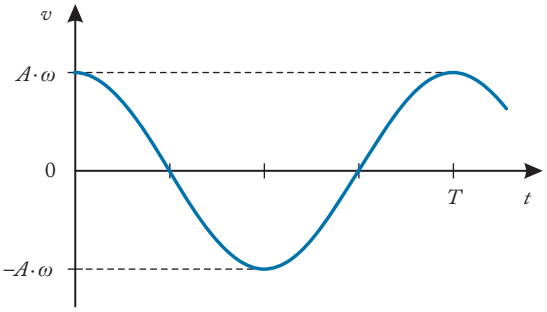
Tudjuk, hogy $\varphi = \omega \cdot t$, így: $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

A koszinuszfüggvény –1 és 1 közötti értékeket vesz fel.

A test sebességének legnagyobb értéke (sebességamplitúdója) $\boldsymbol{v_{max} = A \cdot \omega}$, amit az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor ér el a test.

**A harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége az idő koszinuszos függvénye:**

**$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$**

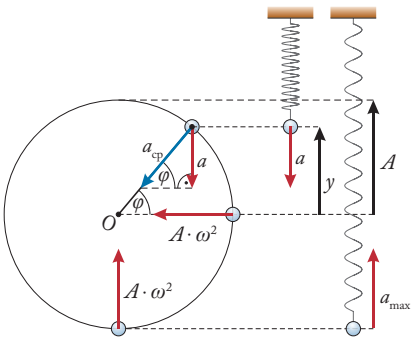



*A harmonikus rezgőmozgás sebesség–idő (v–t) függvényének grafikonja*

## A harmonikus rezgőmozgás gyorsulás-idő függvénye

A fordulópontokban legnagyobb a rugó deformációja, így a benne ébredő erő is. A dinamika alapegyenlete szerint ezekben a helyzetekben legnagyobb a rezgő test gyorsulása. A részletes leírást ismét a harmonikus rezgőmozgáshoz rendelt referencia-körmozgás vizsgálata segíti.

Az egyenletes körmozgást végző test gyorsulása mindig a kör középpontja felé mutat, és nagysága $a_{cp} = R \cdot \omega^2$. A következő ábrán látható, hogy a referencia-körmozgás $a_{cp}$ centripetális gyorsulásának függőleges komponense minden pillanatban megegyezik a harmonikus rezgőmozgás gyorsulásával.

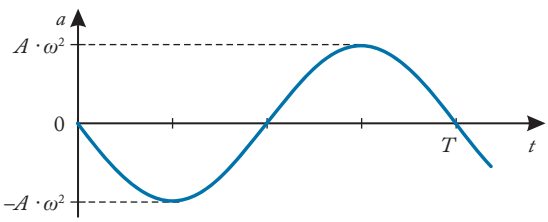



*Az $a_{cp}$ és a kapcsolata:* $\sin \varphi = \frac{a}{a_{cp}}$

$a(t) = a_{cp} \cdot \sin \varphi = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

**A harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása az időnek a mínusz szinuszos függvénye:**

**$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$.**

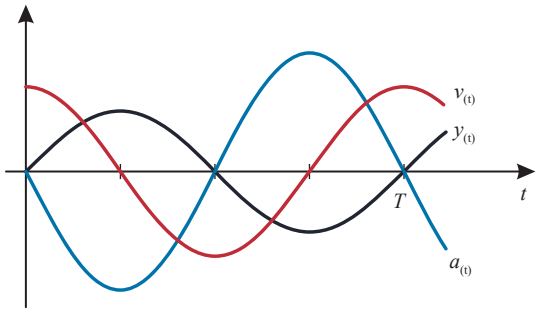



*A harmonikus rezgőmozgás gyorsulás–idő függvényének grafikonja*

A test gyorsulása a szélső helyzetekben a legnagyobb, értéke (gyorsulásamplitúdó): $a_{max} = A \cdot \omega^2$.

A gyorsulást megadhatjuk a kitérés függvényében is: $a = -\omega^2 \cdot y$.

**Összegzés:**
Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az egyensúlyi helyzetből induló harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont kitérését, sebességét, gyorsulását!




*Egyensúlyi helyzetből induló tömegpont kitérés-, sebesség- és gyorsulás-idő függvénye*

Megállapíthatjuk, hogy a sebesség negyed periódussal ($\frac{\pi}{2}$-vel) siet a kitéréshez képest. A kitérés és a gyorsulás ellentétes fázisban „rezeg”.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** A motor dugattyújának kitérés-idő függvénye: $y = 5\ \text{cm} \cdot \sin\left(6000 \cdot \pi \frac{1}{\text{min}} \cdot t\right)$.

**a)** Mekkora a dugattyú lökethossza, frekvenciája és rezgésideje?
**b)** Mekkora a dugattyú legnagyobb sebessége?
**c)** Ábrázoljuk a rezgő test kitérés-idő függvényét!
**d)** Adjuk meg a test $v$–$t$ és $a$–$t$ függvényeit!
**e)** Ábrázoljuk a test $v$–$t$ és $a$–$t$ függvényeit!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$y = 5\ \text{cm} \cdot \sin\left(6000 \cdot \pi \frac{1}{\text{min}} \cdot t\right)$

---

*a)* $l = ?$, $f = ?$, $T = ?$
*b)* $v_{max} = ?$
*c)* Grafikon $y(t)$.
*d)* $v(t) = ?$, $a(t) = ?$
*e)* Grafikon $v(t)$; Grafikon $a(t)$.

**a)** Hasonlítsuk össze a megadott kitérés-idő függvényt a harmonikus rezgőmozgás általános kitérés-idő $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ függvényével!

Megállapítható, hogy a rezgés amplitúdója $A = 5$ cm, a lökethossz $l = 2A = 10$ cm.

Leolvasható a rezgés körfrekvenciája: $\omega = 6000 \cdot \pi \frac{1}{\text{min}}$

Így a rezgés frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3000 \frac{1}{\text{min}} = 50 \frac{1}{\text{s}}$$

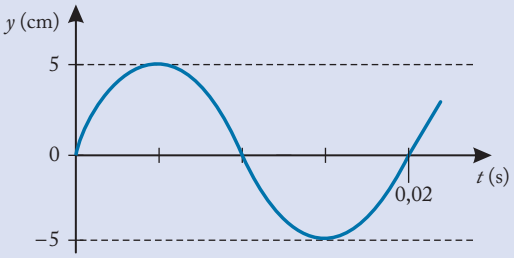
A rezgés periódusideje:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}02\ \text{s}$$

**b)** A dugattyú legnagyobb sebessége:

$$v_{max} = A \cdot \omega \approx 15{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**c)** A rezgő test kitérés-idő függvénye:



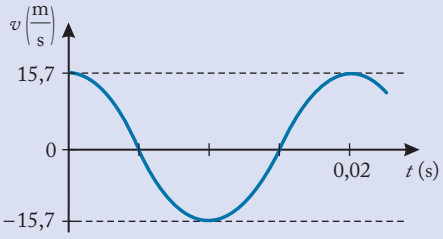

*A motor dugattyújának kitérése az idő függvényében*

**d)** A rezgő test sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényei:

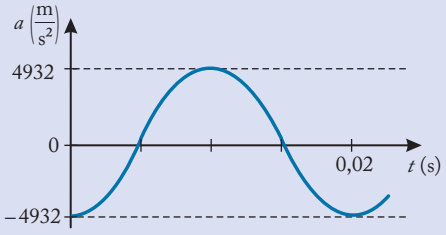
$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = v_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t) =$$
$$= 15{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos\left(60\,000 \cdot \pi \frac{1}{\text{min}} \cdot t\right),$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$= -4932 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(60\,000 \cdot \pi \frac{1}{\text{min}} \cdot t\right)$$

**e)** A rezgő test sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényeinek grafikonja:




*A motor dugattyújának $v$–$t$ grafikonja*




*A motor dugattyújának a–t grafikonja*

**2. FELADAT** Egy harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont legnagyobb sebessége 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, legnagyobb gyorsulása 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mekkora a rezgés

**a)** körfrekvenciája,
**b)** periódusideje,
**c)** amplitúdója?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$v_{max} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$a_{max} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $\omega = ?$
*b)* $T = ?$
*c)* $A = ?$

Írjuk fel a legnagyobb sebességre, illetve gyorsulásra vonatkozó összefüggéseket:

$v_{max} = A \cdot \omega$, $a_{max} = A \cdot \omega^2$

Láthatjuk, hogy $a_{max}$ $v_{max}$-nak pontosan $\omega$-szorosa, így fennáll az $a_{max}$ legnagyobb gyorsulás és a $v_{max}$ legnagyobb sebesség közötti kapcsolat:

$a_{max} = v_{max} \cdot \omega$

**a)** A fenti összefüggésből könnyen megkapjuk a rezgés körfrekvenciáját:

$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = 1{,}5\ \frac{1}{\text{s}}$

**b)** A rezgés periódusideje:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}188\ \text{s} \approx 4{,}2\ \text{s}$

**c)** A legnagyobb sebességre vonatkozó összefüggést használva:

$A = \frac{v_{max}}{\omega} = 6{,}67\ \text{m}$

A rezgés körfrekvenciája 1,5 $\frac{1}{\text{s}}$, periódusideje 4,2 s, az amplitúdója pedig 6,67 m.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mi a kapcsolat az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás között?
2. Melyek a harmonikus rezgőmozgás kinematikai függvényei?
3. Hol lesz a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont sebessége a legnagyobb, a legkisebb?
4. Hol lesz a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont gyorsulása a legnagyobb, a legkisebb?
5. Igaz-e, hogy az $y = \frac{A}{2}$ kitérésnél a test sebessége $\frac{v_{max}}{2}$?

# 3. A rezgésidő

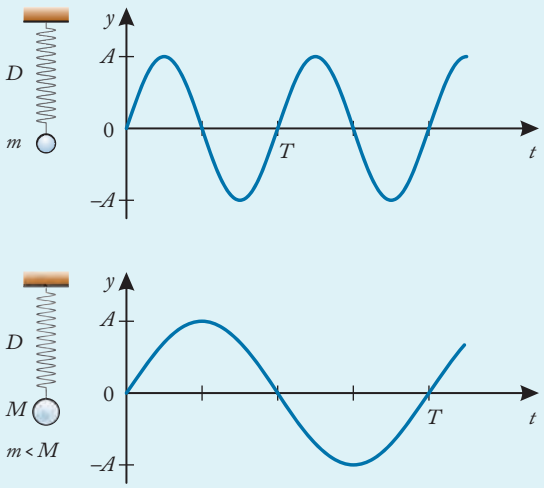
## EMLÉKEZTETŐ

### A rezgésidő

A harmonikus rezgőmozgás időben periodikus jelenség. A legkisebb, időben ismétlődő egységét teljes rezgésnek nevezzük, ennek ideje a **periódusidő**.

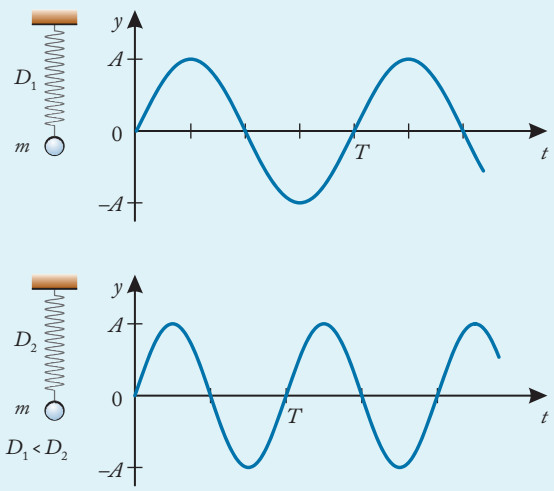
Könnyen tapasztalatokat gyűjthetünk arról, milyen mennyiségektől hogyan függ a mozgás $T$ periódusideje.

Ha ugyanarra a rugóra nagyobb tömegű testet erősítünk, akkor nagyobb rezgésidejű rezgőmozgást tapasztalunk.




*A két rezgőmozgás kitérés–idő grafikonja*

Ha ugyanazt a testet lágyabb (kisebb rugóállandójú) rugóra erősítjük, akkor nagyobb rezgésidejű rezgőmozgást tapasztalunk.




*Különböző rugókra akasztott azonos tömegű testek harmonikus rezgőmozgást végeznek*

Vizsgáljuk matematikailag a jelenséget! Alkalmazzuk a testre a dinamika alapegyenletét:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Használjuk fel, hogy a testre ható eredő erő harmonikus ($\Sigma \vec{F} = -D \cdot \vec{y}$), valamint a gyorsulás és a kitérés közötti összefüggést ($\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y}$):

$$-D \cdot \vec{y} = m \cdot (-\omega^2 \cdot \vec{y})$$

A fenti vektoregyenlet csak akkor lehet igaz, ha $D = m \cdot \omega^2$.

A rezgés körfrekvenciáját csak a rezgő test $m$ tömege és a rugó $D$ direkciós állandója (rugóállandója) határozza meg: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

A szögsebességre vonatkozó $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ összefüggést felhasználva adódik a rezgésidő és a frekvencia:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

**Egy $D$ rugóállandójú rugóra függesztett $m$ tömegű test rezgésideje és frekvenciája:**

$$\boldsymbol{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

Az így kapott összefüggések összhangban vannak a tapasztalattal. Ugyanazon a rugón rezgő nagyobb tömegű test periódusideje nagyobb. Ugyanazon test rezgésideje nagyobb rugóállandójú rugón kisebb. A fenti összefüggésekben nem szerepel a rezgés amplitúdója. Ez azt jelenti, hogy a rezgésidő és a frekvencia nem függ tőle. Ezt minőségileg azzal lehet magyarázni, hogy nagyobb amplitúdó esetén nagyobb a test által befutott út, de az elért legnagyobb sebesség is nagyobb.

## MÉRÉSI FELADAT

**1. FELADAT** Felfüggesztett könnyű rugó aljára akasszuk fel az ismert (pl. 5 dkg-os) tömegsorozat 1, 2, 3… tagját. Összesen legalább négy különböző tömeg mellett végezzünk mérést. Minden alkalommal hozzuk kicsi amplitúdójú rezgésbe a testet. Mérjük meg 10-10 teljes rezgés idejét! Így könnyen kiszámíthatjuk az adott tömeghez tartozó $T$ rezgésidőt, és a mérés hibáját is jelentősen csökkentjük. Az adatokat foglaljuk táblázatba!



*Rezgésidő mérése*

A mérési adatok vizsgálatával könnyen igazolhatjuk a harmonikus rezgőmozgás periódusidejének az ismert rezgésidőképlettel megadott tömegfüggését.

Ábrázoljuk az összetartozó értékeket egy $T$-$m$ koordináta-rendszerben. Azt tapasztaljuk, hogy az ábrázolt pontokra egy konkáv módon, szigorúan monoton növekedő görbe illeszthető.

A rugó rezgésidejére vonatkozó összefüggést kicsit alakítsuk át:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{m}$$

A rezgésidőképletben a $T \sim \sqrt{m}$ arányosságot meggyőzőbben tudjuk igazolni kétféle módon is:

1. Ábrázoljuk az összetartozó $T$ és $\sqrt{m}$ értékpárokat koordináta-rendszerben! Azt tapasztaljuk, hogy az összetartozó $T$ és $\sqrt{m}$ értékpárokat a koordináta-rendszerben ábrázolva olyan pontokat kapunk, melyekre jó közelítéssel az origóból induló egyenes illeszthető.

2. Ábrázoljuk az összetartozó $T^2$ és $m$ értékpárokat koordináta-rendszerben! Most is azt tapasztaljuk, hogy az összetartozó $T^2$ és $m$ értékpárokat a koordináta-rendszerben ábrázolva olyan pontokat kapunk, melyekre jó közelítéssel az origóból induló egyenes illeszthető.

**2. FELADAT** Akasszuk a kődarabot a rugóra, és mérjük meg a rezgésidőt!

Az így mért rezgésidő és az előzőleg kimért három grafikon bármelyikének segítségével meghatározhatjuk az ismeretlen kődarab tömegét.

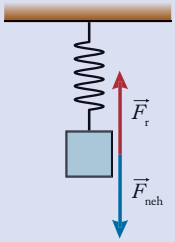
## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy könnyű rugó felső vége rögzített, alsó végére egy testet akasztunk. A test egyensúlyba kerülése után a rugó megnyúlását 6 cm-nek mérjük.

**a)** Mekkora periódusidejű rezgést tudunk létrehozni?

**b)** Legfeljebb mekkora amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végezhet most a test?

### MEGOLDÁS




Adatok:

$\Delta l = 6$ cm.

*a)* $T = ?$

*b)* $A_{max} = ?$

**a)** A test egyensúlyakor a testre két erő hat: nehézségi erő, rugóerő. Az egyensúly feltétele, hogy a két erő ellentétes irányú és azonos nagyságú legyen.

$F_{neh} = F_r$, $m \cdot g = D \cdot \Delta l$.

Ebből fejezzük ki a rezgésidőképletben szereplő törtet:

$$\frac{m}{D} = \frac{\Delta l}{g}$$

Ezt írjuk be a rezgésidőre vonatkozó összefüggésbe:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}06\ \text{m}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} =$$

$$= 0{,}491\ \text{s} \approx 0{,}5\ \text{s}$$

**b)** A rezgés felső szélső helyzetében megengedhető, hogy a rugóerő éppen nullára csökkenjen. (Ha a rugóerő még azelőtt csökkenne nullára, hogy a test megállna, a mozgásnak lenne olyan szakasza, amikor a test szabadon esik, és így könnyen elválik a rugótól.) Ekkor a rezgés legnagyobb gyorsulása megegyezik a nehézségi gyorsulással: $a_{max} = g$.

$$A \cdot \omega^2 = g, \quad A \cdot \frac{g}{\Delta l} = g$$

$A = \Delta l = 6$ cm. Érdekes, ha egy test $\Delta l$-lel nyújt meg egy rugót, akkor legfeljebb $A = \Delta l$ amplitúdójú harmonikus rezgést tud végezni.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen fizikai mennyiségekkel jellemezhetjük a harmonikus rezgés periodikusságát?
2. A rezgőmozgás milyen jellemzőitől függ, illetve nem függ a rezgésidő?
3. A rugón lévő testet 4-szer nehezebbre cseréljük. Hogyan változik a rezgésidő?
4. Milyen eszközökkel lehet az űrállomáson, súlytalanság állapotában a testek tömegét megmérni?

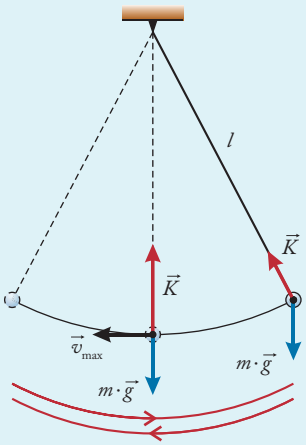
# 4. A lengésidő

**EMLÉKEZTETŐ**

## Az ingamozgás

**Ingamozgást** végezhet bármely merev test, ha biztos egyensúlyi helyzetéből kitérítjük, majd magára hagyjuk. A legegyszerűbb ingamozgást a **fonálinga** vizsgálatával írhatjuk le. A fonálinga egy $l$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű fonálból áll. Ennek egyik végét rögzítjük, a másik végére meg egy pici, nehéz ingatestet erősítünk.

A testet egyensúlyi helyzetéből térítsük ki, majd engedjük el! Létre is jön az ingamozgás. Az ingatest egy síkban, egy körív mentén mozog. Az $mg$ nehézségi erő és a $K$ kötélerő együtt határozza meg a test mozgását. Periodikus jelenséget látunk: a test az egyik szélső helyzetből indul. A sebessége egészen addig növekszik, amíg a fonál függőleges helyzetű lesz. Ekkor legnagyobb a sebessége. Innentől viszont a sebessége csökken, egészen a másik oldali szélső helyzetig. Innentől a mozgás hasonlóan zajlik le, mint eddig, csak a másik irányba.




*A fonálinga egy teljes lengése*

## A lengésidő

A fonálinga mozgása az imént végigkövetett egységekből, **teljes lengésekből** tevődik össze. Egy teljes lengés idejét **lengésidőnek** nevezzük. Könnyen tapasztalatot gyűjthetünk arról, hogyan függ a $T$ lengésidő az inga $l$ hosszától. Ingaként megfigyelhetjük a szalagon függő kulcscsomót is. Amikor a szalag $l$ hosszát rövidebbre vesszük, a $T$ lengésidő csökken.

A lengésidő elméleti vizsgálatánál a fonalat tömeg nélkülinek és nyújthatatlannak, a lengő testet pontszerűnek tekintjük. Az ilyen fonálingát **matematikai ingának** nevezzük. Megmutatható, hogy a matematikai inga mozgása kis kitérések ($\alpha \leq 5°$) esetén közelíthető egy harmonikus rezgőmozgással.

**A matematikai inga lengésideje:**

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

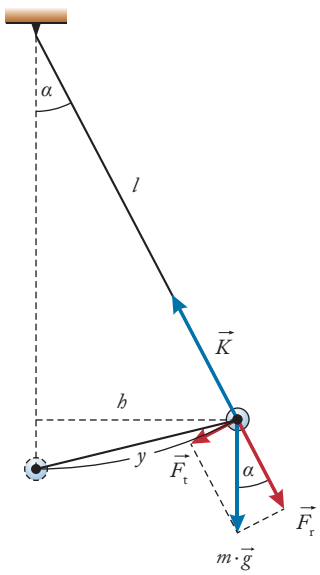
## Lengőmozgás – rezgőmozgás

Határozzuk meg a matematikai inga lengésidejét! Megmutatjuk, hogy kis szögkitérés esetén ($\alpha \leq 5°$) az ingatest harmonikus rezgőmozgást végez. Az ábra alapján a testre ható nehézségi erő pálya menti összetevője: $F_t = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

A derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{h}{l}$

Az inga $y$ kitérését az inga egyensúlyi helyzetétől mérjük. Kis kitérések esetén $h \approx y$.

Így: $F_t = -m \cdot g \cdot \frac{y}{l} = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot y$




*Matematikai inga*
*(A rajzon a jobb láthatóság miatt $\alpha > 5°$.)*

Ez harmonikus erő, hisz nagysága arányos az $y$ kitéréssel, s az iránya ellentétes vele. Tehát a matematikai inga mozgása valóban helyettesíthető egy harmonikus rezgőmozgással. A mozgáshoz rendelhető helyettesítő rugó rugóállandója: $D^* = \frac{m \cdot g}{l}$. A lengésidő megegyezik a $D^*$ rugóállandójú rugó által okozott harmonikus rezgőmozgás periódusidejével:

$$T_l = T_r = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D^*}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_l = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

A matematikai inga lengésideje nem függ az ingatest tömegétől, és kis kitérések esetén az amplitúdótól sem.

A levezetés során feltételeztük, hogy a fonál a függőlegessel legfeljebb 5°-ot zár be. A kapott összefüggés viszont akár 20°-os szögkitérésig is igen pontosan írja le az ingamozgást.

## MÉRÉSI FELADAT

### Nehézségi gyorsulás meghatározása fonálingával

**A mérés elvi alapja**

Tudjuk, hogy a fonálinga lengésideje kis (szög)kitéréseknél ($\alpha_{max} \approx 5°$) egyenesen arányos hosszának a négyzetgyökével, és fordítva a nehézségi gyorsulás négyzetgyökével. Az arányossági tényező: $2\pi$.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

A $T$ és $l$ könnyen mérhető, így $g$ kiszámítható.

**Rendelkezésre álló eszközök**

Bunsen-állvány szorítóval, fonál, ingatest, mérőszalag, stopperóra.



**A mérés menete**

**1. módszer:** Egy kb. 1 méteres fonál egyik végére ráerősítjük az ingatestet, a másik végét hozzákötjük a Bunsen-állványon lévő szorítóhoz. Megmérjük az inga hosszát (a kötésponttól a nehezék tömegközéppontjáig), és az eredményt feljegyezzük. Az így kapott fonálingát kis szögben kitérítjük, és úgy engedjük el, hogy a lengéseit síkban végezze. Ötször mérjük meg az inga legalább 10 teljes lengésének időtartamát, és az eredményeket rendezzük táblázatba! Ezek átlagából kiszámítjuk az inga lengésidejét, majd a nehézségi gyorsulást.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l$$

**2. módszer:** Mérjük több fonálhosszadathoz (pl. 60 cm, 80 cm…) is az inga legalább 10 teljes lengésének időtartamát. Az adatokat foglaljuk táblázatba, számoljunk $T$ lengésidőt, majd $T^2$-et.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l$$

Ábrázoljuk $T^2$-et $l$ függvényében. Az ábrázolt pontokra egyenes illeszthető, melynek meredekségében „benne van" a $g$:

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

Ez a mérés igen pontosan elvégezhető. Az irodalmi értéktől ($g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$) való eltérés akár 2%-nál is kisebb lehet.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Az 1,2 méter hosszú fonálinga 10 lengésidejét 22 másodpercnek mértük. Mekkora a nehézségi gyorsulás értéke?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$l = 1{,}2$ m,
$k = 10$,
$\Delta t = 22$ s.

$g = ?$

Számítsuk ki a lengésidőt: $T = \frac{\Delta t}{k} = 2{,}2$ s.

A fonálinga lengésidejére vonatkozó összefüggést felhasználva:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_{\text{mért}}}} \Rightarrow g_{\text{mért}} = l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az ingával mért nehézségi gyorsulás értéke $9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

**2. FELADAT** Másodpercinga az az inga, amelynek a fél lengésideje 1 másodperc. Milyen hosszú a másodpercinga

*a)* a Földön ($g_{\text{Föld}} = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)?

*b)* a Holdon ($g_{\text{Hold}} = 1{,}62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)?

**MEGOLDÁS**

Adatok:

$\frac{T}{2} = 1$ s,

$g_{\text{Föld}} = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$g_{\text{Hold}} = 1{,}62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $l_{\text{Föld}} = ?$

*b)* $l_{\text{Hold}} = ?$

A vizsgált inga lengésideje: $T = 2$ s.

Használjuk az inga lengésidejére vonatkozó összefüggést:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Fejezzük ki az inga $l$ hosszát:

$$l = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2$$

**a)** A másodpercinga hossza a Földön:

$$l_{\text{Föld}} = \frac{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2} (2\text{ s})^2 = 0{,}9936\text{ m} \approx 1\text{ m}$$

**b)** A másodpercinga hossza a Holdon:

$$l_{\text{Hold}} = \frac{1{,}62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2} (2\text{ s})^2 = 0{,}164\text{ m} \approx \frac{1}{6}\text{ m}$$

**ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK**

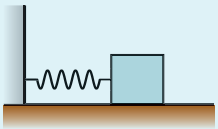
1. Milyen fizikai mennyiségekkel jellemezhetjük az ingamozgás periodikusságát?
2. Melyik fizikai mennyiségektől függ a lengésidő?
3. A fonálinga hosszát 4-szeresére növeljük. Hogyan változik a lengésidő?
4. Az ingatest tömegét 2-szeresére növeljük. Hogyan változik a lengésidő?
5. A kb. 1 méter hosszú fonálinga lengésideje a Földön 2 másodperc. Hogyan lehet elérni, hogy az ilyen hosszú ingának a lengésideje 2 másodpercnél kisebb, vagy nagyobb legyen?

# 5. A rezgés energiája

**EMLÉKEZTETŐ**

## Rezgési energia

A legegyszerűbb rezgőképes rendszer egy elhanyagolható tömegű, $D$ rugóállandójú rugóból és egy ehhez erősített $m$ tömegű testből áll.



*Egy rezgő rendszerben* $E_{\text{rugalmas}} + E_{\text{mozgási}} = \text{állandó}$

Ez a rendszer kétféle módon tárolhat energiát. Az $y$ deformációjú (megnyúlt, vagy összenyomott) rugóban rugalmas energia van: $E_{\text{rug}}(y) = \frac{1}{2} D \cdot y^2$.

A $v$ sebességű test mozgási energiát tárol:

$E_{\text{mozg}}(v) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

**A rezgőképes rendszer rezgési energiája a mozgási és a rugalmas energia összegével egyenlő.**

$E_{\text{rezgési}} = E_{\text{rugalmas}} + E_{\text{mozgási}}$

Ideális esetben a rezgőképes rendszer nem lép kölcsönhatásba a környezetével, zárt rendszerként viselkedik. Ilyenkor **a rendszer teljes energiája, a rezgési energia állandó**.

$$E_{\text{rezgési}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} D \cdot y^2(t) = \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2$$

A rezgési energia minden pillanatban egyenlő a szélső helyzetekhez tartozó (maximális) rugalmas energiával, illetve az egyensúlyi helyzetben a test (maximális) mozgási energiájával.

Könnyen megmutatható, hogy a rezgési energia egyenesen arányos a rezgő test tömegével, valamint a frekvencia és az amplitúdó négyzetével.

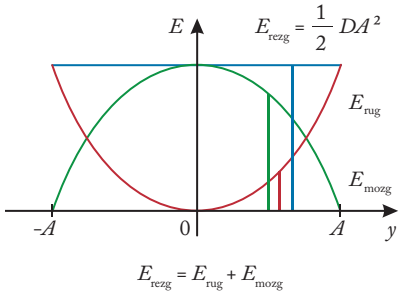
$$E_{\text{rezgési}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot (2\pi \cdot f)^2 = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

Könnyen szemléltethetjük a rezgés energiaviszonyait. Írjuk fel a két energiatagot $y$ függvényében.

$E_{\text{rug}}(y) = \frac{1}{2} D \cdot y^2$,

$E_{\text{mozgási}} = E_{\text{rezgési}} - E_{\text{rugalmas}} = \frac{1}{2} D \cdot A^2 - \frac{1}{2} D \cdot y^2(t)$

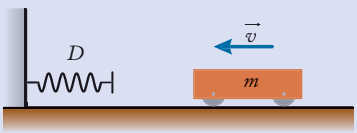
Ábrázoljuk a két energiatagot közös koordináta-rendszerben $y$ függvényében:




*$E_{\text{rezgési}} = E_{\text{rugalmas}} + E_{\text{mozgási}}$, vagyis a rendszer rezgési energiája egyenlő a rugalmassági és mozgási energia összegével*

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

**1. FELADAT** A súrlódásmentes, vízszintes úton 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad egy 20 dkg tömegű kiskocsi. A kocsi energiaveszteség nélkül összenyomja az 500 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú rugót, majd visszalökődik.




*A kiskocsi mozgási energiája a rugó rugalmassági energiájává alakul*

**a)** Mekkora a rugó legnagyobb összenyomódása?
**b)** Mekkora a kiskocsi legnagyobb gyorsulása? Hol van ekkor?
**c)** Mennyi ideig érintkezett a kiskocsi a rugóval?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$v = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$m = 0{,}2$ kg,

$D = 500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

---

*a)* $\Delta l = ?$

*b)* $a_{max} = ?$

*c)* $\Delta t = ?$

**a)** A kiskocsi vízszintes egyenes mentén mozog. Ebben az irányban csak egyetlen erő, a rugóerő hat, ami konzervatív, így alkalmazható a mechanikai energiamegmaradás törvénye.

A kiskocsi kezdeti mozgási energiája átalakul rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

Ebből a rugó maximális összenyomódása kifejezhető:

$$\Delta l = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot v = \sqrt{\frac{0{,}2\ \text{kg}}{500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}1\ \text{m}$$

**b)** A kiskocsinak akkor a legnagyobb a gyorsulása, amikor a rugó összenyomódása a legnagyobb (0,1 m). A test ekkor a fordulópontban van, a sebessége ilyenkor egy pillanatra nulla.

Alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$,

$D \cdot \Delta l = m \cdot a$.

A keresett legnagyobb gyorsulás értékét már könnyen kifejezhetjük:

$$a = \frac{D \cdot \Delta l}{m} = \frac{500\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}1\ \text{m}}{0{,}2\ \text{kg}} = 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**c)** A kiskocsi a periódusidő felében érintkezik a rugóval:

$$t = \frac{1}{2} \cdot T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}0628\ \text{s} \approx 0{,}063\ \text{s}$$

**2. FELADAT** Mekkora kitérésnél lesz a rugalmas energia a mozgási energia kétszerese a harmonikus rezgőmozgás során?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$E_{rug} = 2\ E_{mozg}$

---

$y = ?$

Írjuk fel a rendszer rezgési energiáját a két összetevőjével, valamint a mozgásienergia-tagot fejezzük ki a rugalmasenergia-taggal a feltételnek megfelelően ($E_{mozg} = \frac{1}{2} \cdot E_{rug}$):

$$E_{rezg} = E_{rug} + E_{mozg} = E_{rug} + \frac{1}{2} \cdot E_{rug} = \frac{3}{2} \cdot E_{rug}$$

Azaz: $E_{rezg} = \frac{3}{2} \cdot E_{rug}$,

$$\frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} D \cdot y^2,$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot A$$

Az $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot A$ kitérésnél lesz a rugalmas energia a mozgási energia kétszerese a harmonikus rezgőmozgás során.

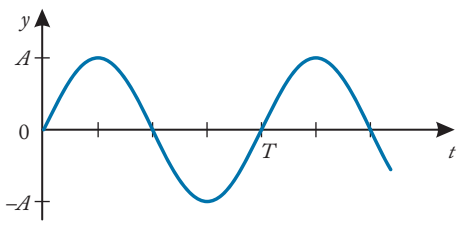
## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Súrlódásmentes, vízszintes talajon egy rugó egy testet „rezegtet”. Milyen jellegű energiák vannak ebben a rendszerben?
2. Milyen fizikai mennyiségektől függ a rezgési energia?
3. Mely helyzetekben lesz a rugalmas, illetve a mozgási energia a legnagyobb, illetve a legkisebb?
4. Egy rezgés amplitúdóját megkétszerezzük. Hogyan változik a rezgési energia?
5. Igaz-e, hogy a félamplitúdónyi kitérésnél a mozgási energia egyenlő a rugalmas energiával?

# 6. Kényszerrezgések

## Szabad rezgés

Eddig a harmonikus rezgéseket ideális környezetben vizsgáltuk. Azt feltételeztük, hogy a környezetével nincs kölcsönhatásban. Gondoljunk a legegyszerűbb rezgőképes rendszerre: a testet kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk. A testre ható erők eredője ellentétes irányú a kitéréssel, valamint a nagysága egyenesen arányos vele (harmonikus), így kialakul a harmonikus rezgőmozgás. Az ily módon kialakuló mozgásnak több neve is van: **szabad rezgés**, sajátrezgés, illetve **csillapítatlan rezgés**. Az ilyen rendszer rezgési energiája állandó, a rezgés amplitúdója időben állandó. Frekvenciáját **sajátfrekvenciának** ($f_0$) nevezzük.

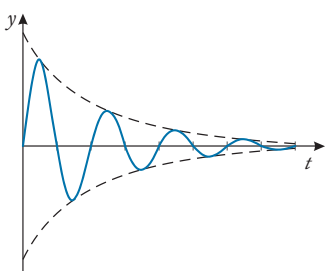



*Csillapítatlan rezgés*

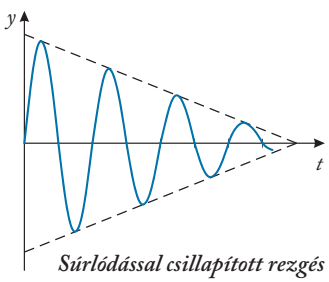
## Csillapított rezgés

A valóságban bármely rezgőképes rendszer (például egy rugó és a rajta lévő test) kölcsönhatásban van a környezetével. *A rendszer rezgési energiája folyamatosan csökken, szétszóródik a környezetbe. Ilyenkor csillapított rezgőmozgást tapasztalunk.* A rezgés amplitúdója folyamatosan csökken, míg a rezgés meg nem szűnik. Alapvetően kétféle **csillapított rezgőmozgást** ismerünk. *A közegellenállással csillapított rezgőmozgás* amplitúdója időben exponenciálisan, a *súrlódással csillapítotté* lineárisan csökken.

Ha a csillapítás igen nagy, akkor gyakran a rezgés létre sem jön. A kitérített testre olyan nagy fékezőerő hat, hogy nem lendül túl az egyensúlyi helyzeten. Ezt nevezzük **túlcsillapított rezgésnek**.




*Közegellenállással csillapított rezgés*

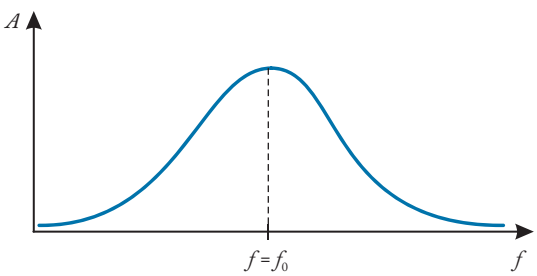



*Súrlódással csillapított rezgés*

## Kényszerrezgés

Gyakran lehet arra szükségünk, hogy egy rezgési állapotot fenntartsunk úgy, hogy a rendszer kölcsönhat a környezetével. Ilyenkor a leadott energiát folyamatosan pótolni kell. A periodikus külső erő által létrehozott rezgést **kényszerrezgésnek** nevezzük.

A kialakuló rezgés frekvenciája megegyezik a gerjesztőerő frekvenciájával. A rezgés energiájáról a rezgés amplitúdója árulkodik. Egy rezgőképes rendszer jellemzője a **rezonanciagörbe**, ami a rezgés amplitúdóját mutatja a gerjesztőerő frekvenciájának függvényében.




*A kényszerrezgés amplitúdójának függése a gerjesztőerő frekvenciájától*

Az energiaátadás akkor a leghatékonyabb, azaz a kényszerrezgés amplitúdója akkor a legnagyobb, ha a periodikus külső erő frekvenciája megegyezik a sajátfrekvenciával. Ez a **rezonancia** jelensége. Rezonanciajelenségre jó példák a motorok alkatrészeinek berezgése, a hangszerek kihangosuló sajátrezgéseiből adódó hangzás, vagy a Tacoma-híd leomlása.



*A Tacoma-függőhídon átfújó szél frekvenciája megegyezett a híd saját-frekvenciájával*

**ALKALMAZÁSOK**

### Kényszerrezgés csillapítása

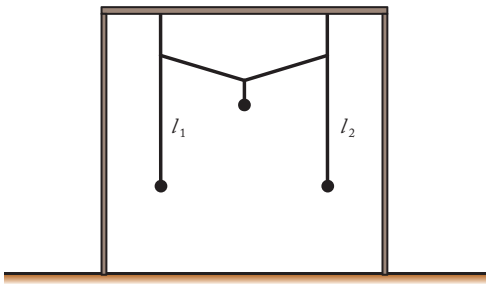
Számos nagy tömegű, meghatározó sajátrezgéssel rendelkező berendezés a közelében lévő lakóházaknál rezgés- és zajproblémákat okoz. Ezeknek a berendezéseknek a rezgését a gép alá helyezett rezgéscsillapító alátétekkel (pl. dübörgésálló lappal vagy hangelnyelő szivaccsal) lehet csillapítani. Lakóépületekben lévő csővezetékek (pl. hűtőegységek, aggregátorból kilépő csővezetékek vagy kazánházi szivattyúk) rezgéscsillapítására van szükség a rezgés- és zajproblémák megoldása érdekében.



*Szivattyúnál a kényszerrezgés megszüntetése rugók és gumipadló beépítésével történik*

## Csatolt rezgés

A rezonanciajelenség akkor válik látványossá, ha a kényszerrezgést végző test és a kényszererőt kifejtő test tömege összemérhető egymással. Ekkor **csatolt rezgés** alakul ki. *A két rezgő test között a rezgési energia ide-oda vándorol. Akkor maximális az energia át- (és vissza-) áramlása egyik testről a másikra, ha a két rendszer sajátfrekvenciája egyenlő.*




*Csatolt ingák. A maximális csatolás feltétele: $l_1 = l_2$*



*Az idősebb, magas rezgő nyárnak szinte folyamatosan rezeg a lombozatát alkotó összes levele. A jelenség hátterében a csatolt rezgés húzódik meg*

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

**1. FELADAT** Négy barát mindegyike 75 kg tömegű. Amikor mindannyian beülnek egy kocsiba, akkor a kocsi 0,6 s periódusidejű rezgésbe jön. Amikor mindannyian kiszállnak, a rezgésidő 0,55 s-ra csökken.

**a)** Mekkora tömegű az autó?

**b)** Mennyit emelkedik meg az autó, amikor mindannyian kiszálltak?

**MEGOLDÁS**

Adatok:

$m = 300$ kg, $T_1 = 0{,}6$ s, $T_2 = 0{,}55$ s.

*a)* $M = ?$

*b)* $h = ?$

**a)** A kocsi lengéscsillapítójának direkciós ereje (rugóállandója) $D$. Írjuk fel a rezgésidőt tele és üres kocsira is:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{D}}, \qquad (1)$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}} \qquad (2)$$

Vegyük az (1) és (2) egyenlet hányadosát:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 1 + \frac{m}{M},$$

$$M = \frac{m}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 1} = \frac{300\text{ kg}}{\left(\frac{0{,}6\text{ s}}{0{,}55\text{ s}}\right)^2 - 1} = 1578{,}26 \approx 1580\text{ kg}$$

Az autó tömege 1580 kg.

**b)** A tele és az üres autó egyensúlyának feltétele:

$(M + m) \cdot g = D \cdot \Delta l_1$,

$M \cdot g = D \cdot \Delta l_2$

Kiszálláskor a kocsi megemelkedése:

$$h = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{m \cdot g}{D} \qquad (3)$$

A (2) egyenletből $D$ kifejezhető:

$$D = M \cdot \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2$$

Ezt helyettesítsük a (3) egyenletbe:

$$h = \frac{m}{M} \cdot g \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2,$$

$$h = \frac{300\ \text{kg}}{1580\ \text{kg}} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{0{,}55\ \text{s}}{2\pi}\right)^2 = 0{,}01426\ \text{m} \approx 1{,}4\ \text{cm}$$

Körülbelül 1,4 cm-t emelkedik az autó, amikor mindannyian kiszálltak belőle.

**2. FELADAT** Az úttest 20 m-es betonlapokból van összerakva, melyek között egy pici hézag van. A visszapillantó tükörre akasztott rugós játékban a rugó rugóállandója $D = 20\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, a figura tömege $m = 0{,}155$ kg. Az autó mekkora sebessége esetén kezd a játék intenzív rezgésbe?

**MEGOLDÁS**

Adatok:
$s = 20$ m,
$D = 20\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$,
$m = 0{,}155$ kg.

$v = ?$



A játék „intenzív rezgése” azt jelenti, hogy a rugós játékot, mint rezgőképes rendszert, olyan frekvenciájú külső kényszererő éri a betonlapok közötti hézagokon való áthaladáskor keletkező döccenés miatt, amelynek frekvenciája a rendszer sajátfrekvenciájával egyezik meg (rezonancia).

A saját periódusidőt fejezzük ki kétféleképpen:

$$T = \frac{s}{v},\quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

A jobb oldalakat tegyük egyenlővé:

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{s}{v} \Rightarrow v = \frac{s}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = 36{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 130\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Az autó $130\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebessége esetén kezd a játék intenzív rezgésbe.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hová „tűnik” egy csillapodó rezgés energiája?
2. A régi vagy a modern autó lengéscsillapítója túlcsillapított?
3. Soroljon fel olyan jelenségeket, amikor a rezgési állapot fenntartása a cél! Hogyan érjük ezt el?
4. Miért nem mehet át a hídon katonai alakzat díszlépésben?

# Összefoglalás

## Rezgések és jellemzőik

Azt a mozgást, amelynek során egy tömegpont valamely helykoordinátája vagy helykoordinátái időben periodikusan változnak, **mechanikai rezgésnek** nevezzük.

A rezgés időben periodikus jelenség. A rezgőmozgás legkisebb, ismétlődő egysége a **teljes rezgés**.

Egy teljes rezgés megtételéhez szükséges időt **periódusidőnek** vagy *rezgésidőnek* nevezzük. Jele: $T$.

A rezgés szaporaságának másik mérhető mennyisége a **frekvencia** vagy **rezgésszám**. A frekvencia a rezgés során megtett rezgések száma és az eltelt idő hányadosa. Jele: $f$.

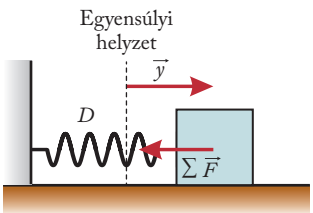
A periódusidő és a frekvencia közötti kapcsolat: $T = \frac{1}{f}$

Az egyensúlyi helyzettől a test pillanatnyi helyéig húzott vektor hossza a **kitérés**, jele: $y$.

A szélső helyzetekhez tartozó kitérés neve **amplitúdó**, jele: $A$.

## Rezgés dinamikája

A harmonikus erő (lineáris erő) által létrehozott rezgőmozgás a **harmonikus rezgőmozgás**. $\Sigma \vec{F} = -D \cdot \vec{y}$




*Rezgő test kitérésével ellentétes irányú a rezgő testre ható erő*

A rezgésidőt a test $m$ tömege és a rugó $D$ direkciós ereje (rugóállandója) együtt határozza meg:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

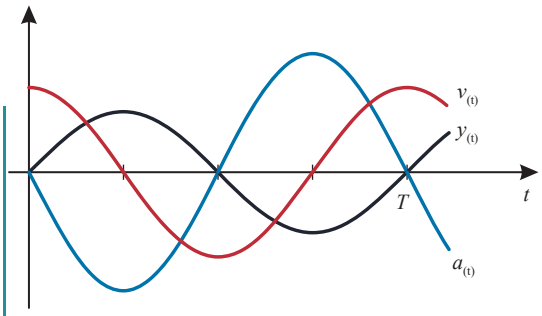
## Harmonikus rezgőmozgás kinematikája

A kinematikai függvények megadását segíti az a kísérleti tény, hogy az egyenletes körmozgást végző testnek a kör valamely átmérőjére eső vetülete harmonikus rezgőmozgást végez. Így minden rezgőmozgáshoz tartozik egy referencia-körmozgás.

**Kitérés-idő függvény:** $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

**Sebesség-idő függvény:** $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

**Gyorsulás-idő függvény:** $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$




*Az y–t, a v–t és az a–t kinematikai függvények*

Az $\omega$ neve körmozgásnál szögsebesség, rezgőmozgásnál körfrekvencia. A rezgés pillanatnyi állapotát a mozgás egy **fázisának** nevezzük, és a fázisszöggel írjuk le, $\varphi = \omega \cdot t$.

## Ingamozgás

Egy **teljes lengésnek** nevezzük az ingamozgás azon szakaszát, amelynek során a test kétszer fut végig a fonálinga által bejárt köríven. Egy teljes lengés ideje a **lengésidő**. Jele: $T$.

A fonálinga kis kitérése (< 5°) mellett az ingatest mozgása közelíthető harmonikus rezgőmozgással.

A lengésidő: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$



*Galilei-csillár a pisai dómban*

## Rezgési energia

A rezgőképes rendszer **rezgési energiája** a mozgási és a rugalmas energia összegével egyenlő:

$$E_{\text{rezgési}} = E_{\text{rugalmas}} + E_{\text{mozgási}}$$

Ha a rezgőképes rendszer zártnak tekinthető, akkor energiája állandó, a rezgés amplitúdója nem változik. **Szabad rezgés** vagy **csillapítatlan rezgés** jön létre.

Amikor a rezgőképes rendszer kölcsönhatásban van a környezetével (súrlódás, közegellenállás), energiája és a rezgés amplitúdója folyamatosan csökken, **csillapított rezgés** alakul ki.

A periodikus külső erő által létrehozott rezgés a **kényszerrezgés**.

Leghatékonyabb energiaátadás akkor jön létre, amikor a gerjesztőerő $f$ frekvenciája megegyezik a rezgő test $f_0$ sajátfrekvenciájával. Ez a jelenség a **rezonancia**.

# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** Az egyenletes körmozgást végző tömegpontnak a körpálya valamely átmérőjére eső merőleges vetülete harmonikus rezgőmozgást végez, ha
A) a függőleges átmérővel párhuzamos ernyőre vetítjük?
B) a vízszintes átmérővel párhuzamos ernyőre vetítjük?
C) bármely átmérővel párhuzamos ernyőre vetítjük?

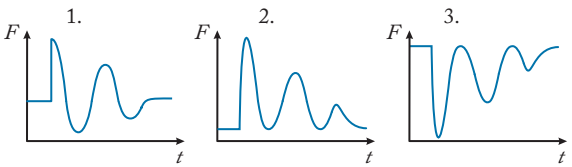
**2.** Melyik kinematikai jellemzője a legnagyobb számértékű a harmonikus rezgőmozgást végző testnek az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor?
A) Kitérése.
B) Sebessége.
C) Gyorsulása.

**3.** Hol lesz nulla egy pillanatra a rezgő test sebessége?
A) Egyensúlyi helyzetben.
B) Szélső helyzetben.
C) Sehol.

**4.** Hol lesz maximális a rezgő test sebessége?
A) Egyensúlyi helyzetben.
B) Alsó szélső helyzetben.
C) Felső szélső helyzetben.
D) Sehol.

**5.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2017, idegen nyelvű) Egy asztalon álló dobroznak hirtelen felpattan a teteje, és kiugrik belőle egy rugóra erősített bábu, ami azután függőlegesen rezegve megáll. Melyik ábra mutatja helyesen az asztal által a dobozra kifejtett tartóerőt az idő függvényében?






A) Az 1. ábra.
B) A 2. ábra.
C) A 3. ábra.

**6.** Mekkora annak a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpontnak az amplitúdója, amelynek a legnagyobb sebessége $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a legnagyobb gyorsulása $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?
A) 1 méter.
B) $\frac{1}{2}$ méter.
C) 2 méter.

**7.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2017, idegen nyelvű) Egy matematikai inga lengésideje $T$. Az ingatest egy szigetelőanyagból készült golyó, melynek pozitív töltést adunk, majd az inga alá negatív töltéssel ellátott szigetelő síklemezt helyezünk, mely közelítőleg homogén elektromos teret hoz létre. Hogyan változik az inga lengésideje?
A) A lengésidő nagyobb lesz, mint $T$.
B) A lengésidő marad $T$.
C) A lengésidő kisebb lesz, mint $T$.

**8.** Az inga hosszát megkétszerezzük. Hogyan változik az inga lengésideje?
A) Nem változik.
B) Kétszeresére nő.
C) $\sqrt{2}$-szeresére nő.
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szeresére változik.

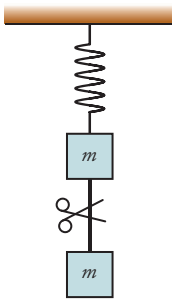
**9.** Mikor legnagyobb a csillapítatlan rezgés rezgési energiája?
A) Minden pillanatban állandó.
B) A szélső helyzetekben.
C) Az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor.

**10.** Fejezze be HELYESEN a mondatot! A rezonancia az a jelenség, amikor
A) a kényszererő leghatékonyabban ad energiát a rezgő testnek.
B) egy testet nagy erővel kényszerítünk rezgésre.
C) egy test magától rezgésbe jön.

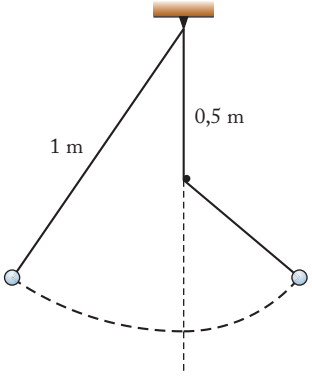
## FELADATOK

**1.** Egy időben vizsgálunk két különböző szabályos rezgőmozgást. (Például spirálrugókra akasztott két test mozgását vizsgáljuk.) Mindkét rezgő test a vizsgálat kezdőpillanatában az egyensúlyi helyzeten egy irányban halad át. Az egyik rezgés periódusideje 2, a másiké 3 másodperc. Adjuk meg azokat az időpontokat, amikor a két test egyszerre halad át az egyensúlyi helyzeten!

**2.** A függőleges helyzetű rugó felső végét rögzítjük, az alsóra két azonos tömegű testet helyezünk. Amikor a testek nyugalomban vannak, a rugó megnyúlása 10 cm. Az alsó test hirtelen leszakad. Mekkora gyorsulással indul az egyik, illetve a másik test? Mekkora amplitúdójú rezgést végez a rugón maradó test?




**3.** Az ábrán látható elrendezés szerint a fonálinga kis kitérésű aszimmetrikus lengéseket végez. Mekkora az inga mozgásának periódusideje?



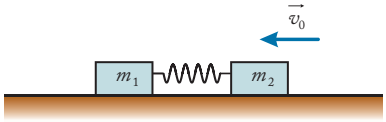

**4.** Egy igen könnyű rugót a felső végénél rögzítünk. Az alsó végére akasztott test 5 cm-rel nyújtja meg. A testet 2 cm-rel az egyensúlyi helyzete alá visszük, és ott elengedjük. Mekkora lesz a rezgés periódusideje, a rezgő test legnagyobb sebessége és legnagyobb gyorsulása?

**5.** Harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont amplitúdója 8 cm, frekvenciája 4 Hz. Mekkora a test sebessége, illetve gyorsulása, amikor a kitérése 6 cm?

**6.** Egy fonálinga a Földön 10 teljes lengést 15 másodperc alatt tesz meg.
**a)** Mekkora a fonálinga hossza?
**b)** Hány lengést tenne meg ez a fonálinga a Holdon szintén 15 s alatt?
($g_{\text{Föld}} = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $g_{\text{Hold}} = 1{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

**7.** A matematikai inga hosszát 30 cm-rel megnöveljük. Emiatt a lengésidő 10%-kal megnőtt.
**a)** Számítsuk ki az inga eredeti hosszát!
**b)** Mennyi az eredeti inga lengésideje?

**8.** A súrlódásmentes asztalon fekszik egy 2 kg és egy 1 kg tömegű test, köztük deformációmentes húzónyomó rugó van. A kisebb tömegű testet pillanatszerűen 3 m/s sebességgel elindítjuk.




Mekkora lesz a testek legnagyobb és legkisebb sebessége ezután?

**9.** Egy harmonikus rezgőmozgást energetikai szempontból vizsgálunk. A rezgési energia hány százaléka lesz mozgási, illetve rugalmas
**a)** az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor?
**b)** az $y = \frac{A}{2}$ kitérésnél?
**c)** a fordulóponton (szélső helyzeten) való áthaladáskor?

**10.** Harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb mozgási energiája 3 J. A rezgésidőt 0,02 másodpercnek, az amplitúdót 5 centiméternek mérjük.
**a)** Mekkora a test tömege?
**b)** Mekkora a rugó direkciós ereje (rugóállandója)?

## ESSZÉKÉRDÉSEK

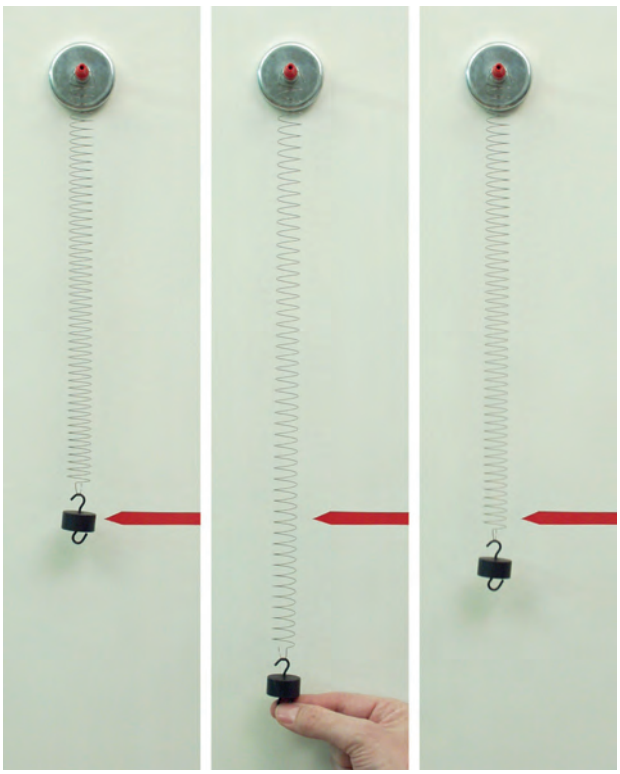
### 1. Harmonikus rezgőmozgás

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2015)

*„Minden időszakilag visszakerülő és megújuló mozgásokat, melyeknél a testek egyes részecskéi helyükből bizonyos irányokban szabályosan ki- és visszatérnek, és melyek a testeknek vagy fölszínén vagy belseikben mutatkoznak, lengő, rezgő, hintázó, hullámzó vagy lebegő mozgásoknak nevezzük."*

(*Schirkhuber Móritcz:* Az elméleti és tapasztalati természettan alaprajza – *Pesten, 1851.*)

Mutassa be az ideális, függőleges helyzetű rugón történő harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvényét! Ismertesse a függőleges rugón zajló harmonikus rezgőmozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolatát! Javasoljon olyan kísérleti elrendezést, amelynek segítségével ez a kapcsolat megmutatható!



Határozza meg a harmonikus rezgőmozgást végző test sebességét és gyorsulását az idő függvényében, az egyenletes körmozgást végző test kinematikai jellemzői alapján! Adja meg a kitérés, sebesség és gyorsulás maximális értékét!

Mit nevezünk harmonikus erőnek? Igazolja, hogy egy pontszerű súlyos test függőleges helyzetű ideális rugón történő rezgése során a rezgő testre ható erők eredője harmonikus erő lesz!

Mutassa meg, hogy a harmonikus rezgőmozgásra jellemző, különböző kitérésekhez tartozó gyorsulásértékeket valóban csak harmonikus erő tudja létrehozni!

### 2. A matematikai inga

(Emelt szintű esszékérdés, 2007)

*A tudós Huygens Christiannak köszönhető, hogy ma a lógó órákhoz van alkalmaztatva… Midőn a lógó óra később jár, lógóját rövidítsd meg, a dróton lévő súlyocskát feljebb tolván, s ellenkezőt cselekedj, ha siet.*

(*Varga Márton:* A gyönyörű természet tudománnya – *Nagyvárad, 1808*)

Ismertesse a matematikai inga fogalmát, jellemezze mozgását! Nevezze meg a matematikai ingát leíró, illetve mozgását jellemző legfontosabb fizikai mennyiségeket, adja meg azok mértékegységeit s a köztük fennálló összefüggéseket!

Értelmezze, hogyan használható a matematikai inga időmérésre a lengés csillapodása ellenére!

Hogyan alkalmazható a matematikai inga a gravitációs gyorsulás mérésére?

Adja meg a Földön és a Holdon azonos lengésidejű matematikai ingák hosszának arányát!

# VII. A merev test egyensúlya







# 1. Pontszerű test egyensúlya

**EMLÉKEZTETŐ**

## Pontszerű test egyensúlya

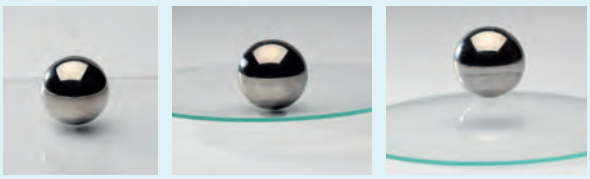
A **nyugalomban** lévő test sebessége nulla, azonban a gyorsulása nem feltétlenül nulla. Ilyen például a szabadon eső test az elejtés pillanatában.

Ha egy test **egyensúlyban** van, nem változik a mozgásállapota. Ha egy test mozgásállapota nem változik, akkor a gyorsulása nulla, ennek meg az a feltétele, hogy a rá ható erők eredője nulla legyen.

## Egyensúlyi helyzetek

Az egyensúlyi helyzeteket a testnek mint tömegpontnak a környezetéhez viszonyított helyzetével is jellemezhetjük.

Helyezzünk rá egy golyót a golyó környezetében sík, homorú és domború felületekre! A síkfelület **közömbös** (indifferens), a homorú **biztos** (stabilis), míg a domború **bizonytalan** (labilis) egyensúlyi helyzetet jelent a golyó számára.

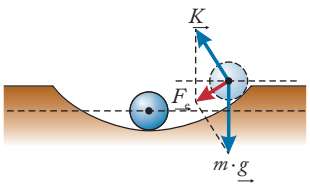


*Egyensúlyi helyzetek: indifferens, stabilis és labilis*

## Pontszerű testek egyensúlyi állapota

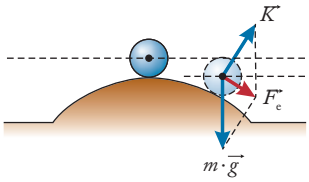
Vizsgáljuk meg, hogy mit is jelent a testek egyensúlyi állapota energia szempontjából!

Ha az egyensúlyban levő testet kimozdítva tömegközéppontja emelkedik, vagyis helyzeti energiája nő, akkor *biztos egyensúlyi helyzetben* van. Elengedés után a rá ható erők eredője az eredeti helyzet felé mozgatja. Stabil egyensúlyi állapotban a testnek a közvetlen környezetéhez képest minimális a helyzeti energiája.



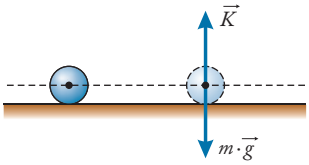

*Stabil egyensúlyi helyzetből kimozdított testre ható erők*

*Labilis helyzetből* való kis kimozdítás után potenciális energiája csökken, a rá ható erők eredője az egyensúlyi állapottól eltávolítja a testet. Bizonytalan egyensúlyi helyzetben tehát a test helyzeti energiája kis környezetének maximumán van.




*Labilis (bizonytalan) egyensúlyi helyzetből kimozdított testre ható erők*

A *közömbös egyensúlyi állapotból* kimozdítva a testet, a helyzeti energiája nem változik, a környező pontokban is közömbös helyzetben lesz.




*Közömbös egyensúlyi helyzetből kimozdított testre ható erők*

## Egyensúly dinamikai feltétele

Általános érvényű az a megállapítás, hogy **a pontszerű test egyensúlyának dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredője nulla legyen**:

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

Az egyensúlyban lévő test, ha kezdetben nyugalomban volt, akkor úgy is marad.

**ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK**

1. Adjuk meg a tömegpont fogalmát!
2. Fogalmazzuk meg egy pontszerű test egyensúlyának feltételét!
3. Mit jelent a pontszerű test esetén a nyugalom és az egyensúly feltétele?
4. Milyen egyensúlyi helyzeteket vehet fel egy pontszerű test?
5. Fogalmazzuk meg a pontszerű testek egyensúlyának dinamikai feltételét!

# 2. Merev testek egyensúlya

EMLÉKEZTETŐ

## A merev test modellje

Akkor tekintjük **pontszerűnek** a testeket, ha méretük, kiterjedésük elhanyagolható a mozgás szempontjából (pl. az ejtőernyős ugrása, az autó mozgása).

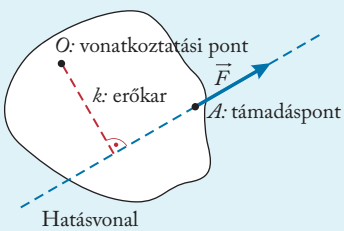
**Kiterjedt testeknek** tekintjük azokat a testeket, amelyeknek mérete, alakja vagy tömegeloszlása más testekkel való kölcsönhatásuk során nem hanyagolható el. A kiterjedt testek közül csak a **merev testekkel** foglalkozunk.

**Merev testnek tekinthetünk egy testet, ha a rá ható erők hatására mérete, alakja, tömegeloszlása nem változik meg, vagyis a kölcsönhatásban a test pontjai egymástól való távolságukat minden körülmények között megtartják.**

*Megjegyzés:* Azt a testet, amely az adott kölcsönhatásban nem tekinthető merev testnek, **deformálható testnek** nevezzük.

## Forgatónyomaték

Egy rögzített tengely körül forgó merev testre hassunk $F$ erővel! Rajzoljuk be az erő hatásvonalát! A hatásvonal az erő támadáspontján átmenő, az erővektorra illeszkedő egyenes. Az erő hatásvonalának a vonatkoztatási ponttól mért távolságát **erőkarnak** nevezzük.




*Az erőkar mindig merőleges az erő hatásvonalára*

**A forgatónyomaték az erő nagyságának és az erőkarnak a szorzata. Jele: $M$, mértékegysége: Nm.**

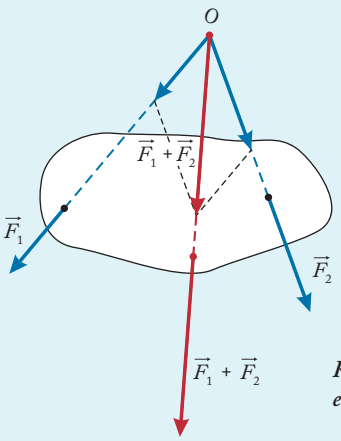
$$M = F \cdot k$$

*A forgatónyomaték az erő forgató hatására jellemző mennyiség.* Ugyanakkora forgatónyomatékot tudunk létrehozni kis erő esetén nagy erőkarral, vagy nagy erő esetén kis erőkarral.

## Nem párhuzamos hatásvonalú erők eredője

Ahhoz, hogy a merev test egyensúlyának feltételét megfogalmazhassuk, előbb meg kell vizsgálnunk a rá ható erők összegzésének módját. Pontszerű test esetén az erők ugyanabban a pontban hatnak, míg kiterjedt test esetén különböző pontokban. Emiatt az erők közvetlenül nem összegezhetők.

A merev testre ható **két nem párhuzamos hatásvonalú erő**t hatásvonalaik mentén toljuk el az erők hatásvonalainak metszéspontjába. Ekkor ezen két erő eredőjét paralelogrammamódszerrel határozhatjuk meg. Mivel a merev testre ható erő támadáspontja a hatásvonalának bármely pontjába áthelyezhető, ezért az erő támadáspontját a merev testen a hatásvonal bármely pontjában felvehetjük.




*Két nem párhuzamos erő eredője*

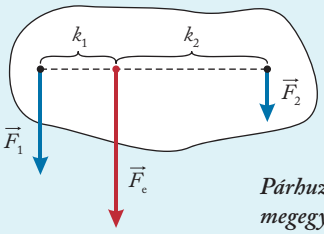
## Párhuzamos hatásvonalú erők eredője

A párhuzamos hatásvonalú erők eredője nem szerkeszthető meg paralelogrammamódszerrel. Ezért az eredőjüket másként kell meghatároznunk.

**Megegyező irányú erők eredője**

Párhuzamos, *megegyező* irányú erők eredőjének nagysága egyenlő a két összetevő nagyságának összegével, iránya pedig megegyezik az összetevők irányával. Az eredő erő a két erő hatásvonala között, a nagyobbik erőhöz közelebb helyezkedik el. Az eredő erő hatásvonalának bármely pontjára nézve a két eredeti erő forgatónyomatéka egyenlő egymással:

$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$$

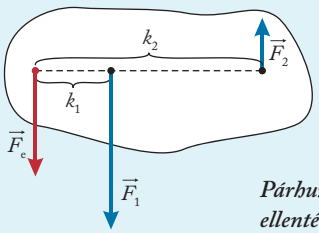



*Párhuzamos hatásvonalú, megegyező irányú erők eredője*

**Ellentétes irányú, különböző nagyságú erők eredője**

Ellentétes irányú, párhuzamos erők eredőjének nagysága a két összetevő nagyságának a különbsége, iránya pedig a nagyobbik összetevő irányával egyezik meg. Az eredő erő hatásvonala a két erő hatásvonalán kívül, a nagyobbik összetevő oldalán helyezkedik el úgy, hogy az eredő erő hatásvonalának minden pontjára fennáll a forgatónyomatékok egyenlősége:

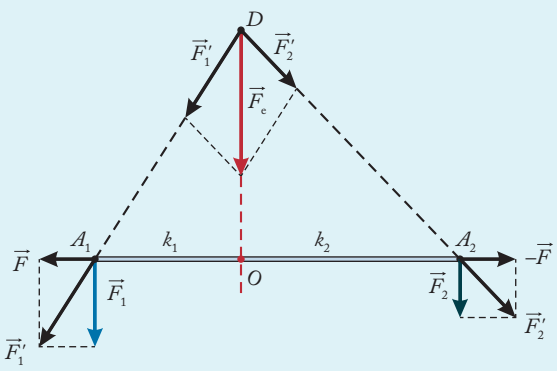
$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$



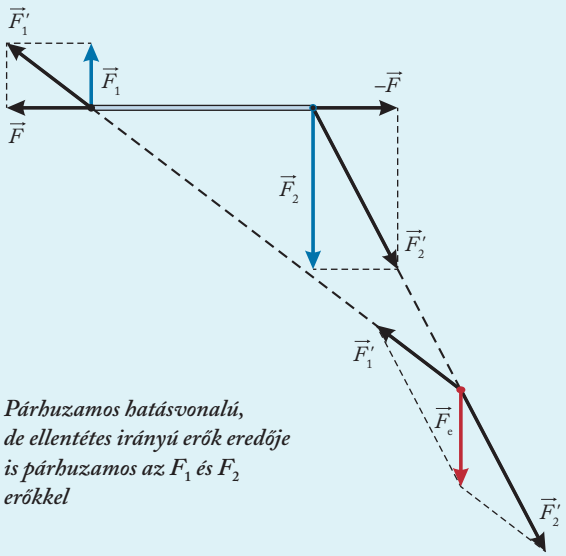

*Párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erők eredője*

**Párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének szerkesztése**

Az eredőt az összetevők hatásvonalára felvett két ellentétes irányú, egyenlő nagyságú, közös hatásvonalú segéderők (ellentett vektorok) felvételével szerkesztjük meg. Az $F_1$ és $F_2$ vektorok és az $F$ és $-F$ vektorok eredőjét közös kezdőpontba toljuk el, és a paralelogramma-módszer alapján megszerkesztjük az $F_e$ eredőt.




*Párhuzamos hatásvonalú, azonos irányú erők eredőjének szerkesztésekor segéderő felvételével szerkesztjük meg az eredő erőt*




*Párhuzamos hatásvonalú, de ellentétes irányú erők eredője is párhuzamos az $F_1$ és $F_2$ erőkkel*

## Erőpár

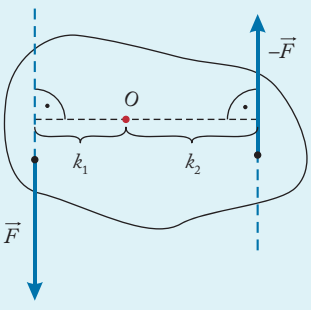
**Az ugyanarra a merev testre ható két erőt, amelyek ellentétes irányúak, párhuzamos hatásvonalúak és egyenlő nagyságúak, erőpárnak nevezzük.**

**Az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel.** Erőpár lép fel például a gépkocsi vagy a kerékpár kormányzásakor.

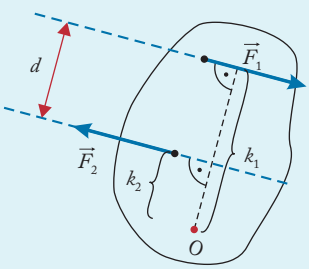
**Egy erőpár forgatónyomatéka egyenlő az egyik erő nagyságának és a két erő hatásvonala közötti távolságnak a szorzatával.**

$M = F \cdot d$

**Az erőpár forgatónyomatékának nagysága független a tengely helyétől.**




*Erőpár forgatónyomatékának meghatározásakor figyeljünk arra, hogy az erő mindig merőleges az erőkarra*

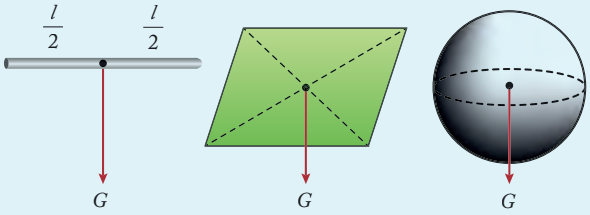



*Mindkét erő hatásvonala a forgástengely egyazon oldalán van*

## Tömegközéppont

A kiterjedt testek mozgása során a tömegüket egy pontban összegezzük, ezt a pontot a merev test **tömegközéppontjának** nevezzük. A kiterjedt testeket a tömegközéppontjukba helyezett pontszerű testtel helyettesítjük. Ismételjük át a Pontrendszerek című leckében a pontrendszer tömegközéppontjáról tanultakat!

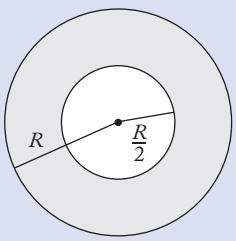
**Homogén szimmetrikus merev testek esetén a tömegközéppont a test geometriai középpontjában helyezkedik el** (pl. téglatest esetén a testátlók metszéspontjában).

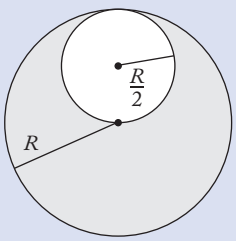



*Homogén szimmetrikus testek tömegközéppontja mindig a test geometriai középpontjában van*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Határozzuk meg annak az $R$ sugarú lemezidom tömegközéppontjának a helyét, amelyből az ábra szerinti kétféle módon kivágtunk egy-egy $\frac{R}{2}$ sugarú körlapot! A lemezidom homogén tömegeloszlású és egyenletes vastagságú.




#### MEGOLDÁS

A lemez tömegközéppontja az $R$ sugarú körlap középpontjában helyezkedik el.

**a)** Az $\frac{R}{2}$ sugarú körlapot az $R$ sugarú körlappal koncentrikusan vágjuk ki. Egy körgyűrűt kapunk, melynek tömegközéppontja továbbra is a kör középpontja.

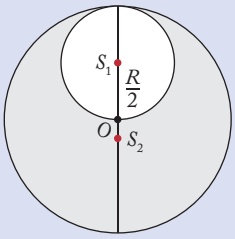
**b)** A lemezidom tömege egyenesen arányos a lemezidom területével, így tömegek aránya helyett a lemezidomok területének arányát írhatjuk fel. A nagy lemez területe $R^2 \cdot \pi$, míg a kivágott területe $\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \pi$. Legyen az eredeti körlap tömegközéppontja $O$, míg a kivágott $\frac{R}{2}$ sugarú körlapé $S_1$, a hiányos körlapé $S_2$.

A hiányos körlap területe $\frac{3}{4} R^2 \cdot \pi$.

Az eredeti lemez $O$ tömegközéppontja az $S_1S_2$ szakaszt a tömegekkel (területekkel) fordított arányban osztja:

$$\frac{S_2O}{S_1O} = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \pi}{\frac{3}{4} R^2 \cdot \pi} = \frac{1}{3},$$

amelyből $S_2O = \frac{1}{3} \cdot S_1O = \frac{R}{6}$.




A megmaradt lemezidom tömegközéppontja az eredeti körlap középpontjától $\frac{R}{6}$ távolságra, az eredeti és a kivágott lap tömegközéppontján átmenő egyenesen helyezkedik el.

## Merev test egyensúlyának feltétele

A statika feladata annak vizsgálata, hogy milyen feltételek mellett vannak a testek egyensúlyban.

A merev test egyensúlyi állapota fennáll, ha a test
- tömegközéppontja egyenletesen mozog ($v$ = állandó), de a test nem forog ($\omega = 0$);
- tömegközéppontja egyenletesen mozog ($v$ = állandó), a test pedig $\omega$ szögsebességgel forog;
- tömegközéppontja nyugalomban van ($v = 0$), a test pedig állandó $\omega$ szögsebességgel forog a tömegközéppontján átmenő tengely körül ($\omega$ = állandó);
- tömegközéppontja nyugalomban van ($v = 0$), és a test nem forog ($\omega = 0$).

**Egy merev test akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője nulla, és a merev test bármely pontjára nézve a rá ható erők forgatónyomatékainak előjeles összege is nulla.**

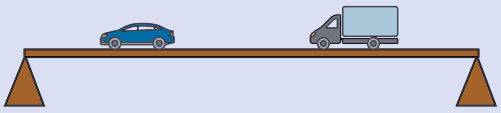
$$\Sigma \vec{F} = 0 \text{ és } \Sigma M = 0$$

Az erők forgatónyomatékát ugyanarra az általunk tetszőlegesen kiválasztott pontra számítjuk.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábrán egy hidat látunk, mely két pillérre támaszkodik. A hídon egy tehergépkocsi és egy személygépkocsi közlekedik. A híd hossza 20 m, tömege 50 000 kg. A teherautó tömege 6000 kg, míg a személygépkocsi tömege 1200 kg. A tehergépkocsi távolsága a hozzá közelebb lévő pillérhez 5 m, míg a személygépkocsié ugyanezen a pillértől 15 m.

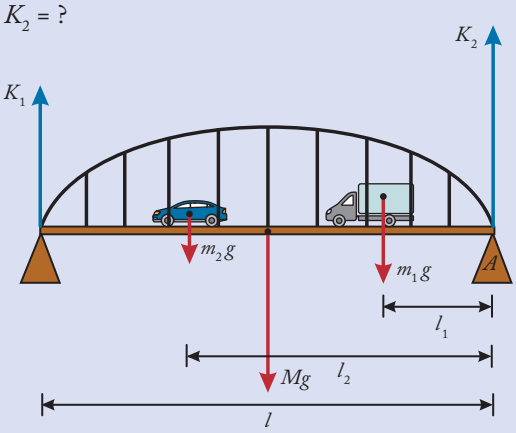
Határozzuk meg a híd pilléreiben fellépő erők nagyságát és irányát!



## MEGOLDÁS

Adatok:
$M = 50\,000$ kg $= 5 \cdot 10^4$ kg, $l = 20$ m,
$m_1 = 6000$ kg $= 6 \cdot 10^3$ kg, $l_1 = 5$ m,
$m_2 = 1000$ kg $= 10^3$ kg, $l_2 = 15$ m.

$K_1 = ?$
$K_2 = ?$




A fellépő nehézségi erők:

$Mg = 5 \cdot 10^5$ N, $m_1 g = 6 \cdot 10^4$ N, $m_2 g = 10^4$ N.

Az egyik pillérre ($A$ pontra) felírjuk a merev test egyensúlyára vonatkozó feltételeket, azaz a $\Sigma M = 0$ és a $\Sigma \vec{F} = 0$ egyenleteket.

**Az egyensúly $\Sigma M = 0$ feltétele:**

$$K_1 \cdot l - Mg \cdot \frac{l}{2} - m_1 g \cdot l_1 - m_2 g \cdot l_2 = 0.$$

Adatokat behelyettesítve:

$K_1 \cdot 20$ m $- 5 \cdot 10^5$ N $\cdot 10$ m $- 6 \cdot 10^4$ N $\cdot 5$ m $-$
$- 10^4$ N $\cdot 15$ m $= 0$,

amelyből $K_1 = 2{,}725 \cdot 10^5$ N.

**Az egyensúly másik feltétele, $\Sigma \vec{F} = 0$:**

$$K_1 + K_2 - Mg - m_1 g - m_2 g = 0.$$

Behelyettesítve:

$2{,}725 \cdot 10^5$ N $+ K_2 - 5 \cdot 10^5$ N $- 6 \cdot 10^4$ N $- 10^4$ N $= 0$,

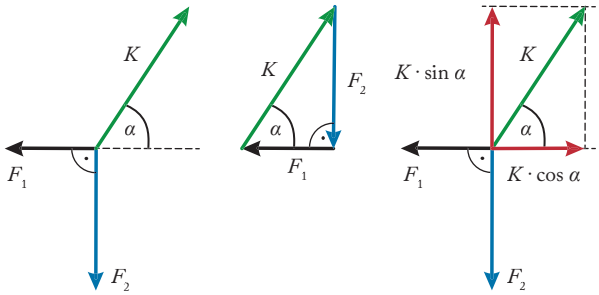
amelyből $K_2 = 2{,}975 \cdot 10^5$ N.

A pillérekben fellépő erők nagysága $K_1 = 2{,}725 \cdot 10^5$ N, $K_2 = 2{,}975 \cdot 10^5$ N. A $K_1$ és $K_2$ erők pozitív előjele mutatja, hogy irányuk ellentétes a nehézségi erők irányával.

# Egy ponton áthaladó erők eredője

Három erő fellépte esetén az egyensúly létrejötte kétféleképpen is értelmezhető.

– Az ábrán szereplő $F_1$ és $F_2$ erők eredőjének egyenlő nagyságúnak kell lennie a $K$ erő $(-1)$-szeresével. Ekkor a háromszögszabály alapján felvéve az erőket, azok zárt háromszöget alkotnak.
– Az erőket két egymásra merőleges irányra bontjuk fel (pl. függőleges és arra merőleges vízszintes irányra). Ekkor a $K$ erő felbontható vízszintes és függőleges irányra, kapjuk: $K \cdot \cos\alpha = F_1$ és $K \cdot \sin\alpha = F_2$.




*Három erő eredőjének meghatározása kétféle módszerrel lehetséges*

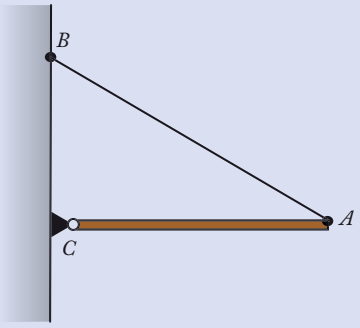
A következő feladatokban három, egy ponton átmenő erő esetén szerkesztjük meg a fellépő kényszererőket.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Az ábrán látható vízszintes, $m$ tömegű merev rúd bal oldali végét csuklóval, jobb oldali végét pedig kötéllel rögzítettük. Szerkesszük meg a fellépő kényszererőket!

## MEGOLDÁS

A rúdra ható erők:
$m \cdot g$ nehézségi erő,
$F_{cs}$ csuklóerő,
$F_k$ kötélerő.

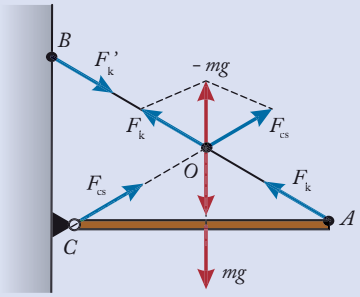



A kötél csak húzóerőt képes kifejteni, tehát az $F_k$ kötélerő hatásvonala a kötél egyenesébe esik.

A rúdra ható három erő forgatónyomatékai előjeles összegének zérusnak kell lennie bármely pontra, vagyis az $F_k$ és $m \cdot g$ metszéspontjára is, ezért $F_{cs}$ csuklóerőnek át kell mennie ezen a metszésponton.

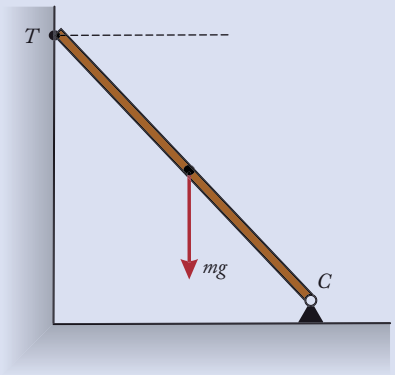
Ezért mindhárom vektort a hatásvonala mentén egy közös pontba toljuk el. A három erő egy paralelogrammát alkot. A paralelogramma oldalai adják meg az $F_{cs}$ csuklóerő és az $F_k$ kötélerő nagyságát és irányát.

A kapott erőket a hatásvonaluk mentén eltoljuk a $C$, illetve az $A$ támadáspontokba.




**2. FELADAT** Az ábrán egy $m$ tömegű, homogén tömegeloszlású, egyenletes keresztmetszetű, merev rúd látható, amely súrlódásmentes függőleges falnak támaszkodik, és egyensúlyban van. A rúd másik végét csuklóban rögzítettük, ami azt jelenti, hogy a vízszintes tengely körül függőleges síkban el tud fordulni.

Szerkesszük meg a csuklóban és a támaszban fellépő erőket!




## MEGOLDÁS

A rúdra ható erők:
$m \cdot g$ nehézségi erő,
$F_t$ támaszerő,
$F_{cs}$ csuklóerő.

Az $m \cdot g$ nehézségi erő a rúd tömegközéppontjában hat. Ez egyben a geometriai középpontja is, mert a rúd homogén anyageloszlású és egyenletes keresztmetszetű.

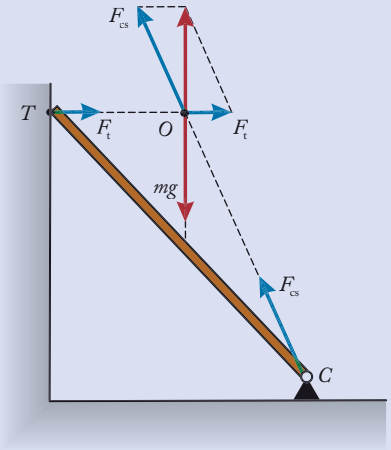
A $F_t$ támaszerő támadáspontja a rúd fallal érintkező $T$ pontjában van. Mivel a fal csak rá merőlegesen képes kifejteni nyomóerőt, így a hatásvonala a falra merőleges.

A rúdra ható három erő forgatónyomatékai előjeles összegének zérusnak kell lennie bármely pontra, vagyis az $F_t$ és $m \cdot g$ metszéspontjára is, ezért az $F_{cs}$ csuklóerőnek át kell mennie ezen a metszésponton.

Az $F_{cs}$ csuklóerő hatásvonala átmegy a $C$ támadáspontón és a másik két erő hatásvonalának metszéspontján, azaz a három erő hatásvonala egy pontban metszi egymást.

Mivel az $m \cdot g$ nagyságát is ismerjük, ezért a másik két erő nagyságát meg tudjuk szerkeszteni, mert azok a paralelogramma oldalai lesznek.

Az így kapott $F_t$ támaszerőt és az $F_{cs}$ csuklóerőt saját hatásvonaluk mentén visszatoljuk a saját támadáspontjukba ($T$, illetve $C$ pontokba).




**MÉRÉSI FELADAT**

### Súlymérés – Ismeretlen tömegű test tömegének meghatározása

(Emelt szintű érettségi mérési feladat alapján)

Mérjük meg egy kődarab súlyát egy digitális mérleg és egy emelőrúd felhasználásával (a kődarab súlya meghaladja a mérleg méréshatárát) úgy, hogy a méterrúd tömegét sem ismerjük!

(A homogén tömegeloszlású méterrudat egyoldalú emelőként használva egyik végét támasszuk alá, míg a rúd vízszintes helyzetében a másik végét helyezzük egy digitális asztali mérlegre.)

**Rendelkezésre álló eszközök**

Az egy métert kicsit meghaladó hosszúságú farúd centiméteres beosztású skálával (a rúd súlya a mérendő test súlyával összemérhető), mérleg (ajánlott a digitális asztali mérleg, de lehet egyszerű rugós erőmérő is), akasztózsineggel ellátott, ismeretlen súlyú kődarab (a kő súlya kevéssel meghaladja a rendelkezésre álló mérleg/erőmérő méréshatárát), méteres mérőszalag, támasztókék, (rugós erőmérő alkalmazása esetén Bunsen-állvány, zsinegek).

**A kísérlet összeállítása**

A falécet (a képeken látható 2 × 3 cm keresztmetszetű és egy métert valamivel meghaladó hosszúságú) vízszintes helyzetben feltámasztjuk. A rúd egyik vége digitális asz-

tali mérlegre helyezett ékre, a másik egy azonos magasságú ékre támaszkodjon. A két alátámasztási pont távolsága 1 m. A léc oldalára méteres papír mérőszalagot célszerű előre felragasztani. A mérendő súlyú kődarab a rá kötött hurokkal akasztható a lécre.

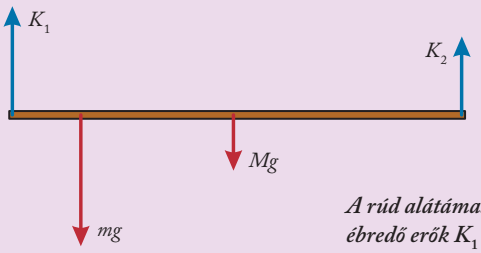


*Ismeretlen tömegű test tömegének meghatározása méterrúddal és digitális mérleggel*

**A mérés elvi alapja**

Készítsünk a mérésről az erőket feltüntető értelmező rajzot!

A rúd alátámasztásában fellépő erők jelölése legyen $K_1$ és $K_2$, $M \cdot g$ a rúd súlya, $m \cdot g$ pedig az ismeretlen tömegű test súlya.

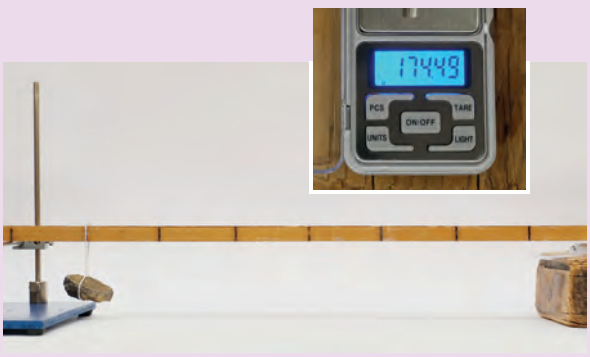



*A rúd alátámasztásában ébredő erők $K_1$ és $K_2$*

**A mérés menete**

Töltsük ki a táblázatot!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Távolság az alátámasztástól (*cm*) | | | | | | |
| Távolság a digitális mérlegtől (*cm*) | | | | | | |
| A digitális mérlegen leolvasható érték (*g*) | | | | | | |



Határozzuk meg az ismeretlen test súlyát!

Legyen $x$ az $m \cdot g$ nehézségi erő és a rúd bal oldali alátámasztásának a távolsága.

Az egyensúly feltételei: $\Sigma \vec{F} = 0$ és $\Sigma M = 0$.

Az utóbbi egyenletet felírva:

$$m \cdot g \cdot x + M \cdot g \cdot \frac{l}{2} - K_2 \cdot l = 0, \qquad (1)$$

ahol $l$ a rúd hossza.

Az egyenletet átrendezve:

$$K_2 = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x + \frac{M \cdot g}{2}$$

adódik, ami egy olyan lineáris függvény egyenlete, amelynek a tengelymetszete $\frac{M \cdot g}{2}$, a meredeksége pedig $\frac{m \cdot g}{l}$. A lineáris függvényt ábrázolva az $l$ ismeretében az $m$ kiszámítható.

**A mérés mérési hibája**

A mérés hibája a digitális mérleg és a hosszmérés leolvasási hibájából, valamint a rúd esetleges deformációjából adódhat. Bizonyos típusú mérlegek hiteles méréséhez fontos, hogy a tányérra ható erő merőleges legyen a tányér felületére.

A méréshatár elvileg akármekkorára növelhető, ha nagyon közel helyezzük az ismeretlen tömegű testet a bal oldali alátámasztáshoz (eltekintve az ismeretlen tömegű test felfüggesztésének kiterjedésétől) – de mindezt csak a pontosság rovására tudjuk megtenni.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hol van a homogén szimmetrikus testek tömegközéppontja?
2. Hogyan határozhatjuk meg párhuzamos hatásvonalú, megegyező, illetve ellentétes irányú erők eredőjét?
3. Hogyan határozhatjuk meg az erőpár forgatónyomatékát?
4. Hogyan végezzük el párhuzamos hatásvonalú, megegyező, illetve ellentétes irányú erők szerkesztését?
5. Fogalmazzuk meg a merev testek egyensúlyának feltételét!
6. A daruknál ellensúlyt alkalmaznak. Mi ennek a célja?
7. A daruknál feltüntetik, hogy a gém mekkora maximális kinyúlással vehető igénybe különböző nagyságú terheléseknél. Miért fontos ezt betartani?
8. Kísérlettel hogyan határozhatjuk meg egy félgömb tömegközéppontjának helyét?
9. Hogyan működik az alvóbaba szeme?
10. Hogyan áll meg a kelfeljancsi a lejtőn?

# 3. Egyszerű gépek

## EMLÉKEZTETŐ

### Egyszerű gépek

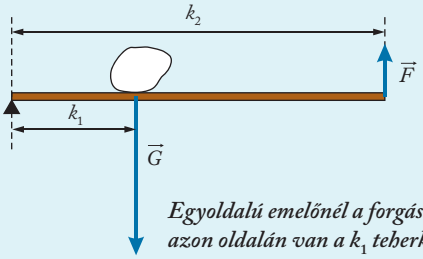
Az ember az ősidőktől kezdve kereste a választ azokra a kérdésekre, hogyan lehet az emberi vagy állati erőt megsokszorozni (pl. építkezéseken). Az erre szolgáló tárgyakat **gépeknek** nevezték. Egyszerű gép például a lejtő, a csiga, az ék, az emelő. Az összetett gépek ezek kombinációi.

### Emelők

Az emelőknek két fajtáját különböztetjük meg: az **egyoldalú** és a **kétoldalú** emelőt.

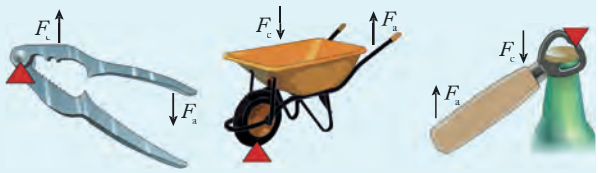
**Egyoldalú emelő**

Az **egyoldalú emelő** esetén a teher és az emelőerő támadáspontja az emelő forgástengelyének ugyanazon oldalára esik.




*Egyoldalú emelőnél a forgástengely ugyanazon oldalán van a $k_1$ teherkar és a $k_2$ erőkar*

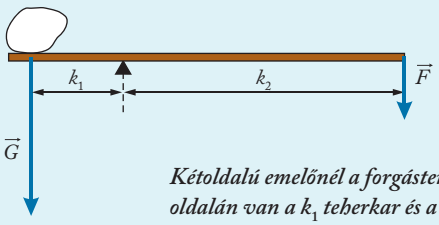
**Példa:** Egyoldalú emelőként működik a diótörő, a talicska és a sörnyitó.




*Egyoldalú emelők: diótörő, talicska és sörnyitó*

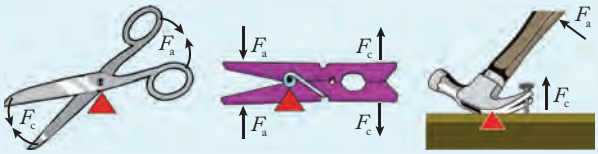
**Kétoldalú emelő**

A **kétoldalú emelő** esetén a forgástengely az emelőerő és a teher támadáspontja közé esik.




*Kétoldalú emelőnél a forgástengely két oldalán van a $k_1$ teherkar és a $k_2$ erőkar*

**Példa:** Kétoldalú emelőként működik az olló, a ruhacsipesz és a kalapács.




*Kétoldalú emelők: olló, ruhacsipesz és kalapács*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

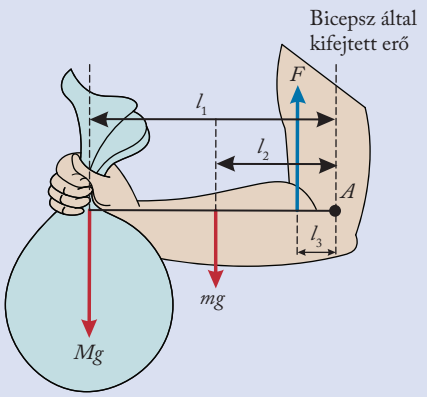
Mekkora erőt fejt ki a felkarunk, ha 6 kg tömegű aranyzsákot tartunk mozdulatlanul a kezünkben? Az alkarunk hossza 19 cm, tömege 2 kg, míg a felkarunk izmai (bicepszünk) 4 cm-re tapadnak le a könyökünktől.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$M = 6$ kg,
$l_1 = 0{,}38$ m,
$m = 2$ kg,
$l_2 = 0{,}19$ m,
$l_3 = 0{,}04$ m.

$F = ?$




A felkarunk izmai (bicepszünk) az óramutató járásával megegyező forgatónyomatékot, míg a zsák és az alkarunk az óramutató járásával ellentétes irányú forgatónyomatékot hoznak létre.

A könyökünkre mint forgástengelyre felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$M \cdot g \cdot l_1 + m \cdot g \cdot l_2 = F \cdot l_3$.

Behelyettesítve:

$60\ \text{N} \cdot 0{,}38\ \text{m} + 20\ \text{N} \cdot 0{,}19\ \text{m} = F \cdot 0{,}04\ \text{m}$,

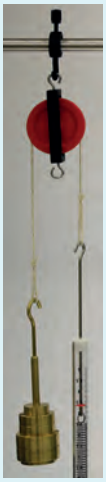
amelyből $F = 665$ N.

A bicepszünk 665 N erőt fejt ki az aranyzsák tartásakor.

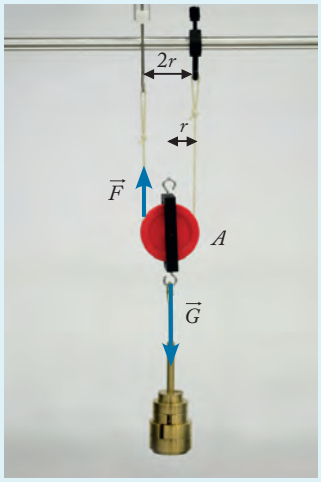
## Csigák

### Állócsiga

Az **állócsiga** egy olyan kétoldalú emelő elvén működik, melynek karjai egyenlők. Az állócsiga az erő nagyságát nem befolyásolja, csak az irányát változtatja meg.



*Az állócsiga tengelye rögzített*




*A mozgócsiga tengelye nem rögzített*

### Mozgócsiga

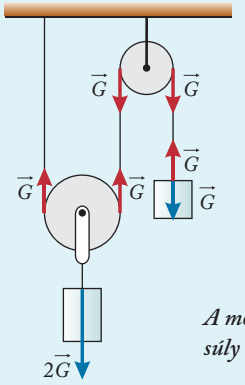
A **mozgócsiga** egyoldalú emelőként működik. A csiga tengelye nem rögzített, a teher a csiga forgástengelyéhez van rögzítve, a kötél két szárában pedig egyenlő arányban oszlik meg az erő. Ha a kötelek párhuzamosak, és az egyik kötél végét rögzítjük, akkor a másik kötél végén a teher felemelése feleakkora erővel valósítható meg, mint amekkora a test súlya. Az egyensúly feltétele az $A$ pontra:

$$F \cdot 2r = G \cdot r,$$

$$F = \frac{G}{2}.$$

Természetesen ahhoz, hogy a mozgócsiga a teherrel együtt $h$-val magasabbra kerüljön, a kötél szabad végét $2h$-val kell elhúzni.

Az álló- és a mozgócsiga együttes alkalmazásakor az állócsiga mindkét kötelét csak $G$ erő feszíti.

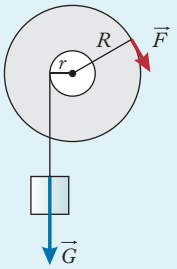



*A mozgócsiga a ráakasztott súly nagyságát felezi*

### Hengerkerék

A **hengerkerék** olyan kétoldalú emelő, amelynek két karja különböző hosszúságú. A teher karja $r$, a terhet egyensúlyozó $F$ erő karja $R$. Az ábra alapján felírható az egyensúly feltétele:

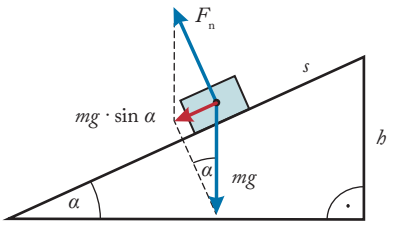
$$F \cdot R = G \cdot r.$$




*A hengerkerék erőkarja R, a teherkar r. A két erő ellentétes irányú forgatónyomatékot hoz létre*

## Lejtő

A **lejtő** elsősorban nagy tömegű tárgyak felemelésére szolgál. A lejtő alkalmazásával a testeket hosszabb úton kisebb erővel emeljük fel ugyanolyan magasra.




*A testre ható erők eredője a lejtővel párhuzamos*

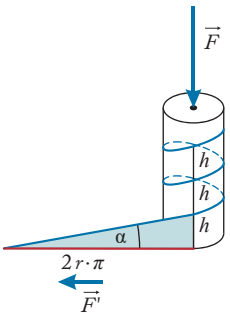
Az ábrán látható, hogy ha $h$ magasságra kívánunk emelni egy testet, akkor például
- függőlegesen $m \cdot g$ erővel, vagy
- a lejtővel párhuzamos $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ erővel emelhetjük.

A két esetet összehasonlítva láthatjuk, hogy a lejtővel párhuzamosan kisebb erővel, de hosszabb úton történik a munkavégzés.

**Példa:** Lejtőt készítünk, ha nagyobb tárgyakat akarunk a lépcsőn felvinni vagy a teherautóra feltenni, vagy a hegyi szerpentinen a magasabb helyekre feljutni.

## Csavar

A **csavar** egy henger oldalába vágott lejtő. A csavar legfontosabb jellemzője a $h$ menetemelkedés *(ld. az ábrán)*. Az erőt a lejtő alapjával párhuzamos irányban fejtjük ki. A hengerkerékhez hasonlóan a csavar fejének sugara a csavar erőkarjának, míg a csavartest sugara a teher teherkarjának felel meg.



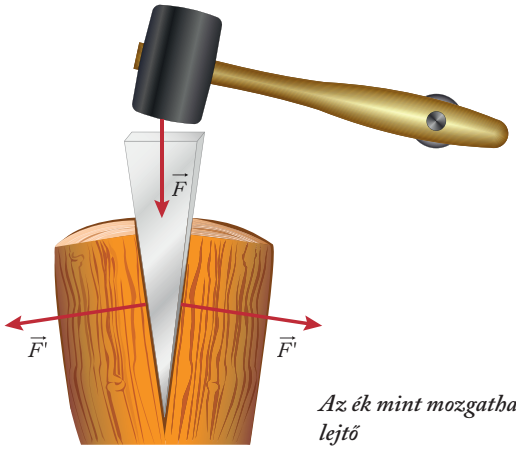

*A csavar kerületére egy h magasságú lejtő van „felcsavarva”*

**Példa:** A csavarok az ember életében alapvető szerepet töltenek be. Használjuk például a testek egymáshoz rögzítésére, az olajprésben a nyomás növelésére, a húsdarálóban a hús előretolására.

### Ék

Az **ék** két, szimmetrikusan összeillesztett lejtőből származtatható. Igen régi eszköz, használata a történelem előtti időkben kezdődött. Minden kés, fejsze, balta, szög és ácskapocs éknek tekinthető.

**Példa:** Többféleképpen használják az éket: egy testbe beleütve anyagok szétfeszítésére, légkalapácsban nagy keménységű tárgyak, például kősziklák, betontömbök szétrobbantására. Ezenkívül használatos a farönkök szétdarabolására, a mechanikus ekében talajforgatásra, a gyaluban a fa felszínének a simítására és a kalapács vagy az ásó nyelének a fejhez szorítására. De ugyanígy éknek tekinthető a sajtreszelő is.




*Az ék mint mozgatható lejtő*

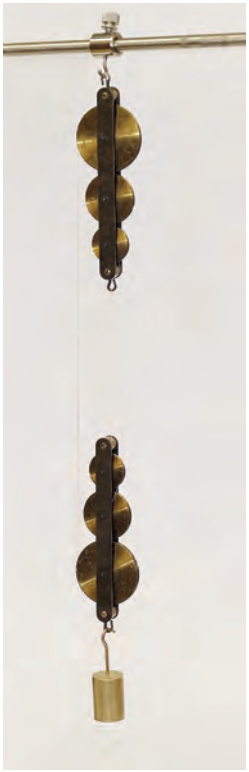
## Csigasorok

### Közönséges csigasor

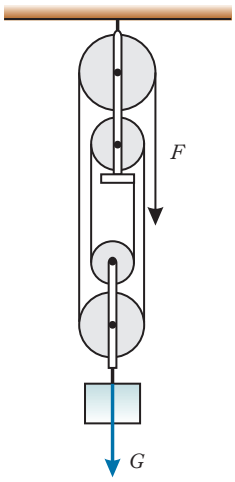
A közönséges csigasor *n* darab, közös tengelyen lévő állócsigából, ugyancsak *n* darab másik közös tengelyen lévő mozgócsigából áll *(ld. az ábrán)*.

Az *n* db mozgócsiga esetén a teher 2*n* kötélszáron oszlik el, ezért az egyensúlyban tartáshoz szükséges erő nagysága:

$$F = \frac{G}{2n}.$$



*Közönséges csigasor*




*A közönséges csigasorban 2n db kötélszáron oszlik el az erő.*

### Arkhimédeszi csigasor

Arkhimédész ismerte föl, hogy a csigák egymás utáni sorba helyezésével, a **csigasorral** az erőhatás megsokszorozható *(ld. következő kidolgozott feladatban)*.

A csigasorban minden egyes csiga egyik kötélszára rögzített, míg a másik kötélszára egy újabb, hasonlóan rögzített mozgócsiga terhelését adja. Az első mozgócsiga a rajta átvetett kötél miatt felezi az egyensúlyban tartáshoz szükséges erőt. Ez így folytatódik minden egyes mozgócsigánál, ha a terhet annyiszor felezzük, amennyi a mozgócsigák száma.

Ha *n* db mozgócsigát használunk, akkor

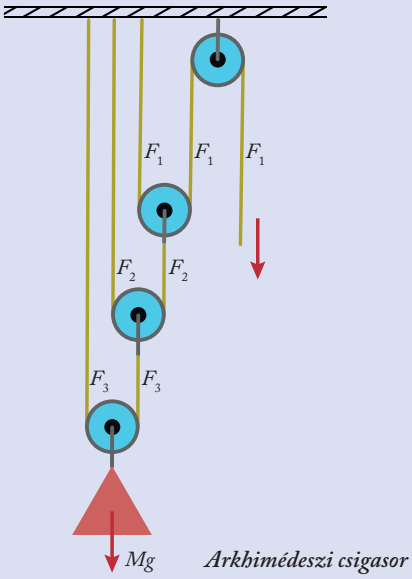
$$F = \frac{G}{2^n}$$

Ezt **arkhimédeszi csigasornak** vagy **hatványcsigasornak** is nevezzük.

*Megjegyzés:* Sok csiga alkalmazásával az erőhatás jelentősen megnő, például tíz mozgócsiga esetén 1024-szeresére. Feltehető, hogy Arkhimédész ilyen mozgócsigasorokat is alkalmazott a rómaiak ellen bevetett félelmetes erejű hadigépben.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsuk ki, hogy mekkora erővel kell felemelnünk az ábrán lévő arkhimédeszi csigasorral egy $M$ tömegű testet!




*Arkhimédeszi csigasor*

### MEGOLDÁS

Az alsó mozgócsiga forgástengelyére az $M$ tömegű test $Mg$ erővel hat. Ennek hatására a mozgócsiga mindkét oldalán $F_3 = \frac{M \cdot g}{2}$ nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló erő lép fel.

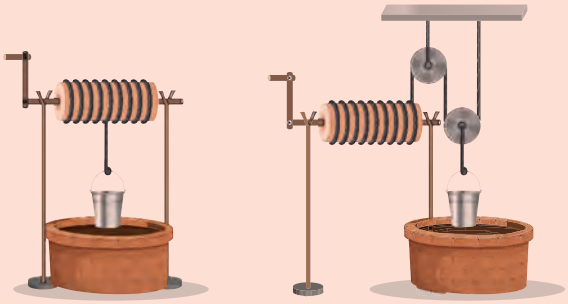
Alulról a második csiga tengelyére lefelé ható $F_3$ erő hatására a csigán átvetett kötél mindkét szárában felfelé irányuló $F_2 = \frac{M \cdot g}{4}$ erő lép fel.

Hasonlóan alulról a harmadik mozgócsigán átvetett kötél mindkét szárában egyenlő nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló $F_1 = \frac{M \cdot g}{8}$ erő hat.

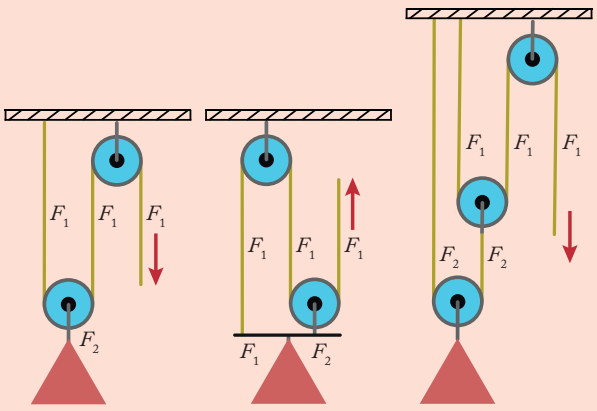
Mivel az állócsiga csak a kötélben ható erő irányát változtatja meg, így a kötelet $F_1 = \frac{M \cdot g}{8}$ erővel kell húznunk.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit nevezünk egyoldalú, és mit kétoldalú emelőnek? Rajzoljuk le mindkettőt, és jelöljük be az erőkarokat és a teherkarokat!
2. Miért nem borul fel az emelődaru?
3. Mit nevezünk állócsigának? Mit nevezünk mozgócsigának?
4. Rajzoljunk egy hengerkereket, és magyarázzuk el, hogy mi a hengerkerék egyensúlyának feltétele!
5. Mi az arkhimédeszi csigasor? Hogyan csökken a mozgócsigák számával a terhet emelő erő nagysága?
6. Egy $M$ tömegű vödröt emelünk a kútból felfelé. Hogyan aránylik egymáshoz az ábrán lévő esetekben a vödröt húzó ember által kifejtett erő?



7. Soroljunk fel lejtő típusú emelőket! Magyarázzuk el a működésüket!
8. A háztartásokban használatos eszközök közül válogassuk ki az egyoldalú és a kétoldalú emelőket!
9. Az alábbi csigasorok esetén mekkora erővel tudjuk felemelni az $M$ tömegű testet?



# Összefoglalás

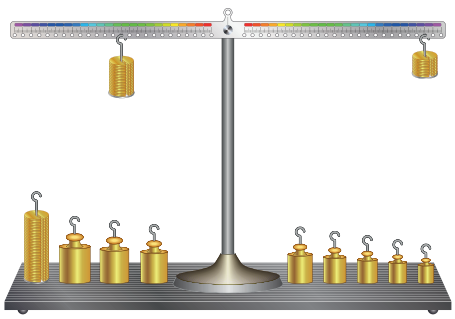
## Pontszerű test egyensúlya

A pontszerű test egyensúlyának dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők eredője nulla legyen: $\Sigma \vec{F} = 0$.

## Merev test egyensúlya

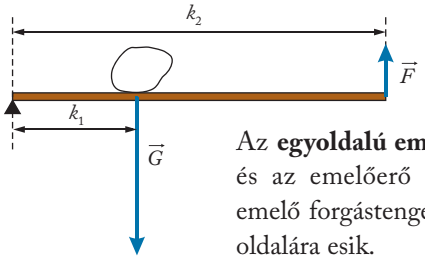
**Egy merev test akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője nulla, és a rá ható erők forgatónyomatékainak előjeles összege is nulla.**

$\Sigma \vec{F} = 0$ **és**
$\Sigma M = 0$

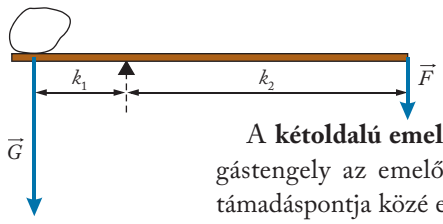


## Egyszerű gépek

### Emelők



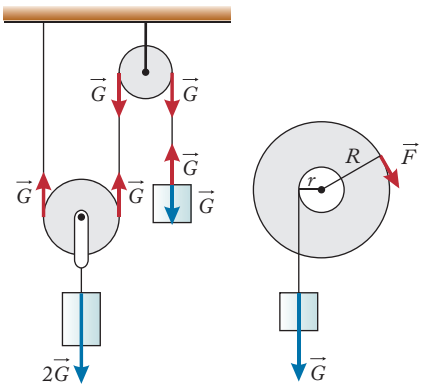

Az **egyoldalú emelő** esetén a teher és az emelőerő támadáspontja az emelő forgástengelyének ugyanazon oldalára esik.




A **kétoldalú emelő** esetén a forgástengely az emelőerő és a teher támadáspontja közé esik.

### Csigák

Az **állócsiga** a kétoldalú emelő elvén működik, melynek karjai egyenlők.




A **mozgócsiga** tengelye nem rögzített, a teher a csiga forgástengelyéhez van rögzítve, a kötél két szárában pedig egyenlő arányban oszlik meg az erő.

A **hengerkerék** olyan kétoldalú emelő, amelynek két karja különböző hosszúságú. A teher karja $r$, a terhet egyensúlyozó $F$ erő karja $R$. A **hengerkerékre** fennáll:

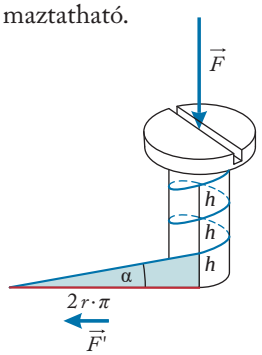
$F \cdot R = G \cdot r$.

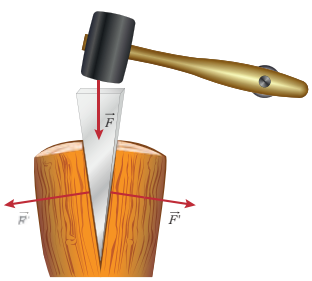
### Lejtő

A **lejtő** elsősorban nagy tömegű tárgyak felemelésére szolgál. A lejtő alkalmazásával a testeket hosszabb úton kisebb erővel emeljük fel ugyanolyan magasra.

A **csavar** egy henger oldalába vágott lejtő.

Az **ék** két, szimmetrikusan összeillesztett lejtőből származtatható.

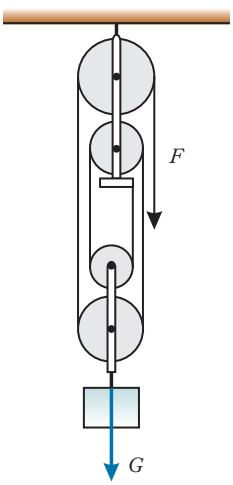



### Csigasorok

**Közönséges csigasor**

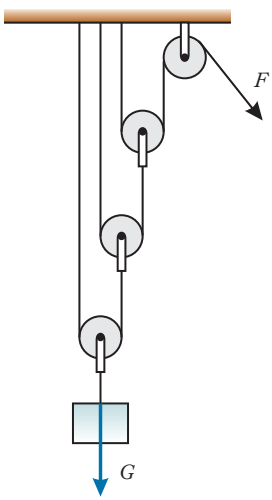
$F = \frac{G}{2n}$.




**Arkhimédeszi csigasor**

A csigák egymás utáni sorba helyezésével, a **csigasorral** az erőhatás megsokszorozható.

$F = \frac{G}{2^n}$



# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

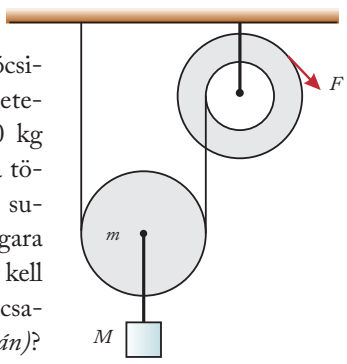
**1.** Hogyan tudunk az $l$ hosszúságú rúddal nagyobb forgatónyomatékot kifejteni: ha egyoldalú, vagy ha kétoldalú emelőként használjuk?
A) Egyoldalú emelőként.
B) Kétoldalú emelőként.
C) Nincs különbség.

**2.** Vízszintes talajon fekszik egy inhomogén (nem egyenletes tömegeloszlású) gerenda. Az egyik végét 500 N, a másik végét 700 N nagyságú erővel tudjuk megemelni. (A gerendát mindig függőleges irányú erővel emeljük.) Mekkora a gerenda súlya?
A) 1200 N.
B) Kevesebb, mint 1200 N.
C) Több, mint 1200 N.

**3.** Egy vízszintes helyzetű homogén, 3 kg tömegű rúd két vége érzékeny mérlegeken nyugszik. A pálca harmadolópontjába egy $m$ tömegű testet akasztottunk. Az $m$ tömeghez közelebbi mérleg 55 N erőt jelez.
**a)** Mekkora az $m$ tömeg?
A) 3 kg.
B) 6 kg.
C) 9 kg.
**b)** Mekkora erőt jelez a másik mérleg?
A) 35 N.
B) 5 N.
C) 65 N.

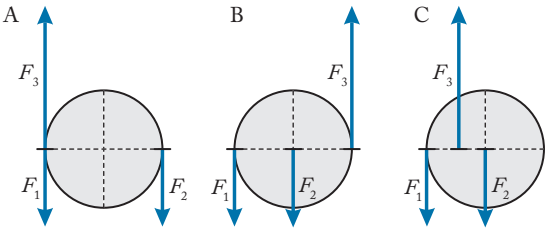
**4.** Vízszintes talajon álló, 70 kg tömegű ember egy állócsiga segítségével egy 50 kg tömegű terhet emel fel a 2. emeletre. Mekkora erőt fejt ki az ember a talajra, ha a kezében tartott kötél függőleges helyzetű?
A) 1200 N.
B) 200 N.
C) 700 N.
D) 500 N.

**5.** Hengerkerék és mozgócsiga segítségével egyenletesen emelünk egy 130 kg tömegű testet. A csiga tömege 10 kg, a henger sugara 15 cm, a kerék sugara 30 cm. Mekkora $F$ erőt kell kifejtenünk a kerékre csavart kötélre *(ld. az ábrán)*?



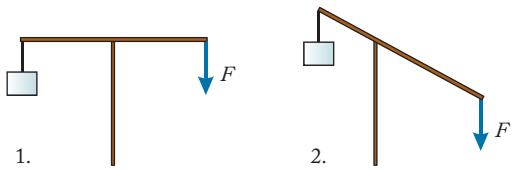

A) 350 N.
B) 700 N.
C) 500 N.
D) 400 N.

**6.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2020)
Egy súrlódásmentes asztalon fekvő, homogén tömegeloszlású korongra három vízszintes erő hat: $F_1$ = = $F_2$ = 5 N, valamint $F_3$ = 10 N. A mellékelt ábrán felülnézetben látható három eset közül melyikben marad nyugalomban a korong?

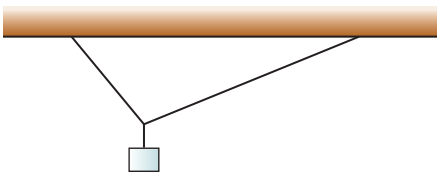



A) Csak az A esetben.
B) Csak a B esetben.
C) Csak a C esetben.

**7.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2017)
Az ábrán látható emelőszerkezet rúdjának teher felőli hossza feleakkora, mint a másik oldal hossza. Az emelő melyik állása mellett kell nagyobb $F$ függőleges irányú erőt kifejteni, hogy megtartsuk a teli vödör vizet?
A) Az első ábra szerinti helyzetben.
B) A második ábra szerinti helyzetben.
C) Mindkét pozícióban egyforma erőre van szükség.

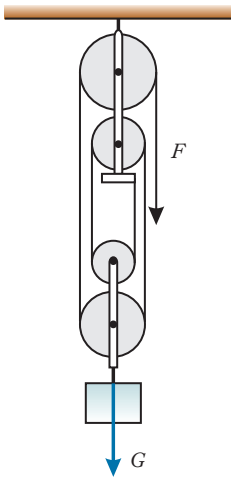



**8.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2014)
Egy testet a rajznak megfelelően két fonállal felfüggesztettünk. Lehet-e a test egyensúlyban?



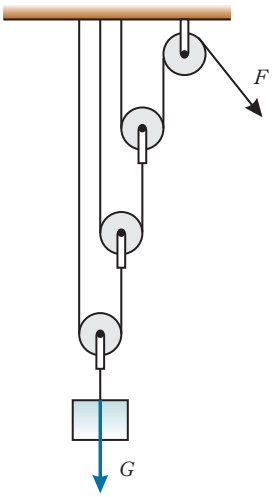
A) Nem, mert a két fonál nem azonos hosszúságú.
B) Igen, de a két kötélerő nem lesz azonos nagyságú.
C) Igen, ha a két kötélerő azonos nagyságú.
D) Nem, mert a két kötélerő nem lehet azonos nagyságú.

**9.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2013)
Az ábrán látható csigasorral emelünk fel egy testet. Mit állíthatunk a test $G$ súlya és az emeléshez szükséges $F$ erő arányáról? (A csigák és a kötél ideálisak, tömegük elhanyagolható.)



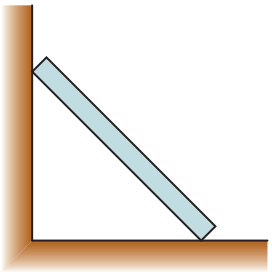

A) $\frac{F}{G} = \frac{1}{4}$.
B) $\frac{F}{G} = \frac{1}{5}$.
C) $\frac{F}{G} = \frac{1}{6}$.
D) $\frac{F}{G} = \frac{1}{8}$.

**10.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2012)
Az arkhimédeszi csigasor egy álló és több mozgócsigából áll. A súlyerőnél hányszor kisebb erőt kell alkalmazni egy teher felemeléséhez, ha a mozgócsigák száma három?
(A csigák, kötelek súlya, valamint a csigák tengelysúrlódása elhanyagolható.)




A) 3-szor.
B) 6-szor.
C) 8-szor.
D) 9-szer.

**11.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2010)
Az ábrán látható módon egy hasáb alakú rudat ferdén falhoz támasztunk. A padló tükörsima, ott nincs súrlódás, de a fal mentén van. Lehet-e egyensúlyban a rúd?
A) Igen, de csak egy bizonyos pozícióban. Az egyensúlyi helyzetet a súrlódási együttható határozza meg.
B) Igen, a tapadás miatt több egyensúlyi helyzet is lehetséges.
C) Nem, semmilyen helyzetben sem lehetséges.

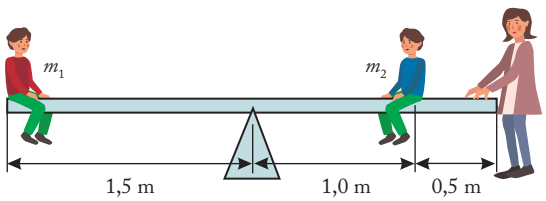


## FELADATOK

**1.** Egy mérleghinta tömege 25 kg. A tengelyétől 1,5 m-re ülő gyermek tömege 40 kg.
**a)** Hová üljön az 50 kg tömegű testvére, hogy egyensúlyban legyen a mérleghinta?
**b)** Mekkora erővel tartja a hinta tengelye a hintát?

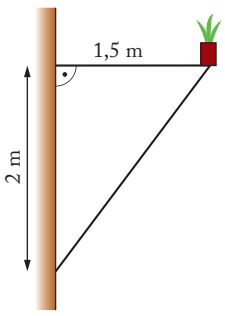
**2.** Az edzőteremben a 6 kg tömegű, 1,5 m hosszú edzőrúd egyik végére 8 kg, a másik végére 16 kg tömegű súlytárcsát helyezünk. Körülbelül hol érdemes egy kézzel megfogni a rudat, hogy azt billenés nélkül meg tudjuk emelni?

**3.** Édesanya két gyermekét hintáztatja az ábra szerinti elrendezésben. Mekkora és milyen irányú erővel kell kiegyensúlyoznia a hintát a mérleghinta vízszintes helyzetében, ha az egyik gyermeke $m_1 = 30$ kg, a másik $m_2 = 25$ kg tömegű?
(A hinta rúdjának tömegét hanyagoljuk el.)

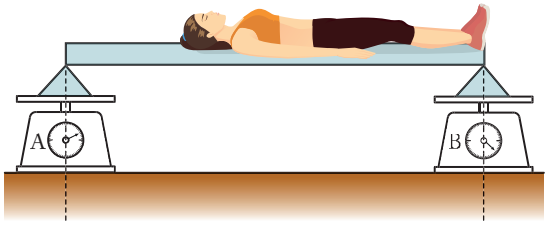



**4.** Az úttest középvonala fölé egy világítótest elhelyezésére 10 m hosszúságú sodronyt feszítenek ki. A kötélsodronyt mindkét oldalon egyenlő magasságban, két egymástól 8 m távolságban álló lámpaoszlophoz rögzítik. Mekkora erő lép fel a kötélsodrony egyes száraiban, ha a világítótest tömege 15 kg? Szerkesztéssel ellenőrizzük számításunk helyességét!

**5.** Az ábra szerinti nagy méretű tartóállvány végére 40 kg tömegű virágládát helyezünk. Mekkora erők lépnek fel az ábra szerinti tartórudakban?




**6.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2017)
Egy gyerek tömegközéppontjának helyét szeretnénk meghatározni. Ebből a célból egy vízszintes, homogén, 2,2 m hosszú deszkára fektetjük, melynek két vége egy-




egy mérlegre támaszkodik. Kezdetben mindkét mérleg 120 N erőt mutat. Ezután a gyereket felfektetjük a deszkára úgy, hogy a talpa a B mérleg felett legyen. Ekkor az A mérleg 454 N, a B mérleg 521 N erőt jelez. ($g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

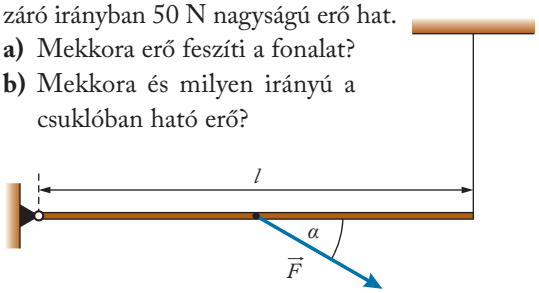
**a)** Mekkora a deszka tömege?
**b)** Mekkora a gyerek tömege?
**c)** Milyen messze van a gyerek tömegközéppontja a talpától az ábrán látható testhelyzetben?

**7.** Egy 1,8 m hosszúságú, 60 kg tömegű vasrudat az egyik végétől 1,2 m távolságra egy vízszintes tengelyre rögzítenek. Mekkora tömegű terhet kell a tengelytől számítva a rövidebb oldal végére helyezni, hogy a rúd egyensúlyban legyen?

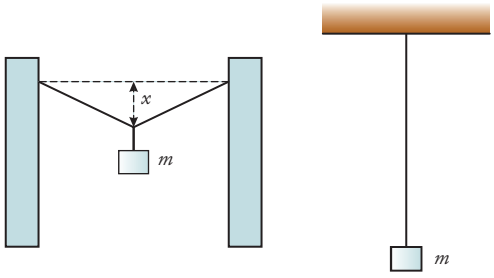
**8.** (Emelt szintű érettségi feladat alapján, 2006)
Egy eredetileg 300 cm hosszú, közepén tengelyezett mérleghinta egyik ülőrésze letörött. A letört rész hossza 40 cm, a hinta tömege ekkor már csak 110 kg. Egy gyerek a letört oldal végére ülve a hintát egyensúlyban tartja.
Mekkora a gyerek tömege, ha a hintát homogén tömegeloszlású hasábnak tekintjük?

**9.** 1,2 m hosszú, elhanyagolható tömegű rúd egyik végét a falon lévő csuklóhoz, míg a másik végét függőleges fonállal a plafonhoz rögzítjük úgy, hogy a rúd vízszintes legyen. A rúd közepére a vízszintessel 30°-os szöget bezáró irányban 50 N nagyságú erő hat.

**a)** Mekkora erő feszíti a fonalat?
**b)** Mekkora és milyen irányú a csuklóban ható erő?




**10.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2011)
Egy 100 cm hosszú rugalmas gumiszálat két, egymástól 100 cm távolságban lévő oszlop között vízszintesen rögzítünk, és a közepére egy $m = 1$ kg tömegű testet akasztunk az ábrán látható módon. A test úgy nyújtja meg a gumiszálat, hogy a szál belógása $x = 25$ cm. (A gumiszál maga súlytalannak tekinthető.)




Mekkora lenne a gumiszál megnyúlása, ha az 1 kg tömegű testet függőleges helyzetben akasztanánk rá? ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

**11.** Elhanyagolható tömegű és súrlódásmentesen mozgó (ideális) csigával emelünk egy 30 kg tömegű vödröt 6 m magasra. Mekkora erőt fejtünk ki, és mekkora munkát végzünk egyenletes emelés közben, ha

**a)** egy állócsigát,
**b)** egy mozgócsigát,
**c)** arkhimédeszi csigasorban három mozgócsigát,
**d)** közönséges csigasorban három mozgócsigát használunk?

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### Erő, egyensúly, forgatónyomaték



(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2014)
*„A műszer magyar szó, maga kijelenti, hogy mesterséggel készült. Valamely eszközt jelent, amelynek hasznát vehetjük, s a testeknek könnyebb mozdításában vagy segíti erőnket, vagy a gyorsabb mozdításra szolgál, vagy a mozdulást valamely meghatározott célra fordítja, s helyesen, mint kell, véghezviszi. Nem lehet mind e három hasznot minden műszerben feltalálni, mert ha gyorsan mozdítunk valamely testet a műszerrel, bizonyos, hogy gyorsan elfáradunk."*
(*Varga Márton:* A gyönyörű természet tudománnya *– Nagyvárad, 1808*)

Készítsen ábrát, és ennek segítségével mutassa be az erőt mint fizikai mennyiséget: adja meg a jelét, mértékegységét, ismertesse az ábrázolásának módját! Térjen ki a következő fogalmak ismertetésére is: támadáspont, hatásvonal!

Ábra segítségével ismertesse egy pontszerű test esetén a testre ható erők összeadásának szabályát! Mi a pontszerű test egyensúlyának feltétele?

Magyarázó ábra segítségével értelmezze a forgatónyomaték fogalmát! Ismertesse a kiterjedt merev test egyensúlyának feltételeit! Mutassa be, hogyan helyettesíthető egyetlen erővel valamely kiterjedt merev testre egy síkban ható, nem párhuzamos hatásvonalú két erő!

Mutassa be, hogy miért csökkenthetjük az alkalmazandó erő nagyságát a következő egyszerű gépek segítségével: lejtő, egy- és kétkarú (kétoldalú) emelő, mozgócsiga! Miért célszerű állócsigát használni?

# VIII. Forgómozgás







# 1. Forgómozgás kinematikája

EMLÉKEZTETŐ

## Merev test tengely körüli forgómozgása

**Egy merev test forgómozgást végez, ha a test minden pontja egy forgástengely körül, arra merőleges síkban egy-egy körmozgást végez.**



*Kővágás nagy szögsebességgel forgó kővágó koronggal*

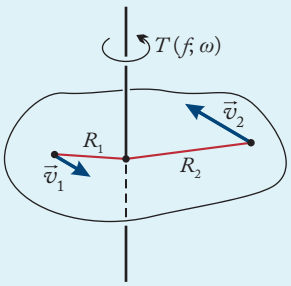
Végezzen egy test egyenletes forgómozgást! Ekkor minden pontja egyenletes körmozgást végez.

A körpályák $R$ sugarai ugyan lehetnek különbözők, de a mozgás több jellemzője ugyanaz: a ***T* periódusidő**, ***f* frekvencia**, **$\omega$ szögsebesség**. Ezeket a forgómozgás jellemzőinek is tekintjük.

Érdemes felidézni a fenti mennyiségek közötti kapcsolatokat:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Az egyenletes forgómozgást végző merev test pontjainak **kerületi sebessége** és **centripetális gyorsulása** is arányos a körpálya sugarával: $v_{ker} = \omega \cdot R$, $a_{cp} = \omega^2 \cdot R$.

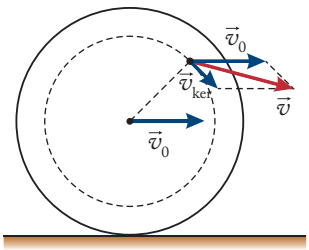



*Kétszer nagyobb sugár esetén hányszoros lesz a kerületi sebesség?*

## Kerék tisztán gördülése

Vizsgáljuk meg egy kerék sík talajon való egyenletes mozgását alaposabban! A talajhoz képest csak a kerék tengelye mozog egyenletesen $v_0$ sebességgel. A kerék többi pontja a tengely körül egyenletes körmozgást végez. Így a kerék többi pontjának sebességét a tengely állandó $v_0$ és a folyton változó irányú $v_{ker}$ kerületi sebesség együtt alakítja ki:

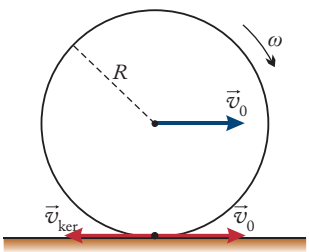
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{ker}$$




*A kerék pontjai összetett mozgást végeznek*

Egy kerék tisztán gördül a sík talajon, ha a kerék nem csúszik meg, nem pörög ki, azaz a kerék talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll.

Vizsgáljuk meg a kerék tisztán gördülésének feltételét! A jelenség fenti megfogalmazásából érdemes kiindulni. A kerék legalsó pontja – mint a többi is – összetett mozgást végez: Egyrészt a tengely $v_0$ állandó nagyságú, menetirányba mutató sebességével rendelkezik. Másrészt a tengely körüli forgása miatt a menetiránnyal ellentétesen mutató $v_{ker}$ kerületi sebessége is van. A két sebesség vektori eredőjének nullának kell lennie, így lehet igaz az, hogy a kerék talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{ker} = 0$.




*A kerék tisztán gördül*

Mivel a két sebesség ellentétes irányú, ezért a nagyságuk azonos kell legyen: $v_0 = v_{ker}$ $(= \omega \cdot R)$

Egy kerék tisztán gördül a sík talajon, ha a kerék sebessége (tengelyének sebessége) és a kerék kerületi pontjának a tengelyhez viszonyított sebessége azonos nagyságú.

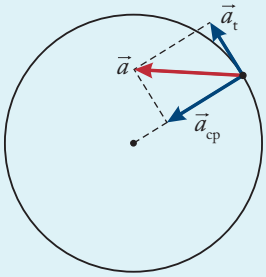
## Egyenletesen változó forgómozgás

A körpályán mozgó tömegpontnak kétféle gyorsulása lehet:

Az $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulás a kör középpontja felé mutat, és a kerületi sebesség irányának megváltozásáért felelős.

Az $\vec{a}_t$ tangenciális gyorsulás a kör érintőjének irányába mutat, és a kerületi sebesség nagyságának megváltozásáért felelős.

A test gyorsulását a két komponens eredőjeként kapjuk: $a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$




*Változó körmozgás gyorsulása*

Az egyenletesen változó körmozgás során a tömegpont szögelfordulása:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2,$$

ahol $\alpha_0$ a kezdeti szögelfordulás ívmértékben (radiánban) mérve, $\omega_0$ a kezdeti szögsebesség, $\beta$ a szöggyorsulás.

Eközben a tömegpont által befutott körív hossza:

$$i(t) = i_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2,$$

ahol $v_0$ a tömegpont kezdősebessége, $a_t$ a tangenciális gyorsulás.

Figyelembe véve, hogy $i = R \cdot \alpha$, adódik:

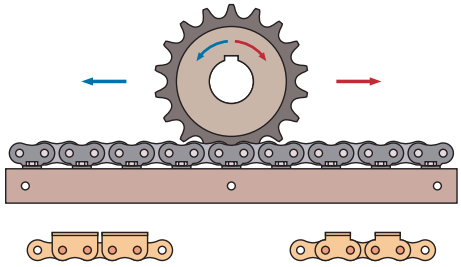
$v = R \cdot \omega$ , $a_t = R \cdot \beta$

## Tömegpont és merev test kinematikájának összehasonlítása

Tömegpont haladó és merev test forgómozgását leíró fogalmakat és a fogalmak közötti kapcsolatokat feltáró összefüggéseket tartalmazza a következő táblázat:

| | Haladó mozgás | Forgómozgás |
|---|---|---|
| Fogalmak | $t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ | $t, \alpha, \omega, \beta$ |
| Törvények | $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$<br>$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$ | $\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t$<br>$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2$ |

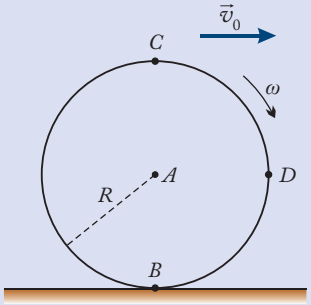
*A haladó és forgómozgás kinematikáját összefoglaló táblázat*



*A haladó és forgómozgás kapcsolata*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kerék $v_0$ állandó nagyságú sebességgel tisztán gördül a vízszintes talajon. Adjuk meg az ábrán jelölt (*A*, *B*, *C*, *D*) pontok talajhoz viszonyított sebességeit!




*Egy tisztán gördülő kerék talajjal érintkező pontja, B nem csúszik meg, nem pörög ki*

### MEGOLDÁS

Adatok: $v_0$.

$v_A = ?$; $v_B = ?$; $v_C = ?$; $v_D = ?$

A kerék tisztán gördülése miatt fennáll a következő kapcsolat: $v_0 = \omega \cdot R$.

*A* pont sebessége: $v_0$, hiszen a kerék sebességét a tengelyének sebességével azonosítjuk. $v_A = v_0$.

*B* pont sebessége: 0, a tisztán gördülés pont ezt jelenti. $v_B = 0$.

*C* pont sebessége: $2 \cdot v_0$, $v_C = 2\ v_0$.

**C pont sebességének igazolása**

**1. módszer:** A kerék legfelső (*C*) pontja összetett mozgást végez: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{ker}$. Mindkét sebességkomponens azonos nagyságú ($v_0$) a tisztán gördülés miatt, és mindkettő menetirányba mutat.

**2. módszer:** Tisztán gördülés során a kerék talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll. A kerék minden más pontja e pont körül végez $\omega$ szögsebességű körmozgást. Azt mondhatjuk, hogy a kerék talajjal érintkező pontja pillanatnyi forgástengelyként viselkedik. Ezek alapján a *C* pont sebessége a talajhoz képest:

$v_c = (2\ R) \cdot \omega = 2 \cdot (R\ \omega) = 2 \cdot v_0$

*D* pont sebessége: $v_D = \sqrt{2} \cdot v_0$

**D pont sebességének igazolása**

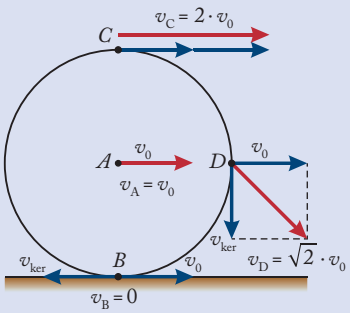
**1. módszer:** A kerék szélének a tengellyel azonos magasságában lévő ($D$) pontja is összetett mozgást végez:

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{ker}$

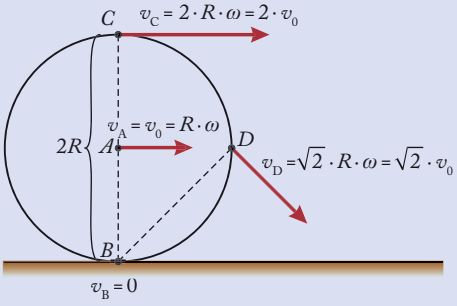
Mindkét sebességkomponens azonos nagyságú ($v_0$) a tisztán gördülés miatt, és merőlegesek egymásra.

**2. módszer:** Használjuk fel ismét, hogy a kerék talajjal érintkező pontja pillanatnyi forgástengelyként viselkedik. Ezek alapján a $D$ pont sebessége a talajhoz képest:

$v_D = (\sqrt{2}\,R)\cdot\omega = \sqrt{2}\cdot(R\,\omega) = \sqrt{2}\cdot v_0$

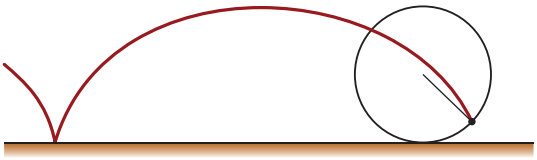



*Igazolás 1. módszere*




*Igazolás 2. módszere*

A sík talajon tisztán gördülő kerék egyik kerületi pontját jelöljük meg! A kerék tisztán gördülése során a megjelölt pont által rajzolt görbét (csúcsos) **cikloisnak** nevezzük. Érdemes végiggondolni azt is, hogy milyen cikloist rajzol ki a megjelölt pont, ha távolsága a tengelytől kisebb, illetve nagyobb a sugárnál.



*Tisztán gördülő $R$ sugarú kerék kerületi pontja által rajzolt ciklois. Milyen távol van egymástól a két szomszédos csúcs?*



*Milyen pályán mozog a haladó kerékpár szelepsapkája?*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Egy rögzített tengely körül egyenletes forgómozgást végez egy merev test. Melyik pontjainak legnagyobb a sebessége, szögsebessége, periódusideje, frekvenciája, gyorsulása?
2. Egy rögzített tengely körül egyenletes forgómozgást végző merev test periódusidejét a felére csökkentjük. Hogyan változik a test legszélső pontjának a sebessége, szögsebessége, frekvenciája, gyorsulása?
3. Mekkora utat tesz meg az $R$ sugarú kerék tisztán gördülve egy fordulat során?
4. A vízszintes plafonon tisztán gördülő (festő-) henger melyik pontjának nulla a sebessége?
5. A kerületi sebesség melyik jellemzőjét változtatja meg a tangenciális, illetve a centripetális gyorsulás?

# 2. A forgómozgás alapegyenlete

## Forgatónyomaték és szöggyorsulás

Ismerjük a rögzített tengely körül elforgatható merev test egyensúlyának feltételét. Amennyiben a testre ható forgatónyomatékok előjeles összege nulla, akkor a test forgási állapota nem változik:

$\Sigma M = 0 \Rightarrow \Delta\omega = 0$

Ezek után feltételezhető: amennyiben a merev testre ható forgatónyomatékok előjeles összege nem nulla, akkor a test forgási állapota változik:

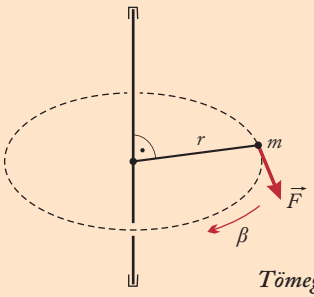
$\Sigma M \neq 0 \Rightarrow \Delta\omega \neq 0$



*A kerekes kút kerekét megforgatva forgatónyomatékot fejtünk ki a hengerkerékre*

**KÍSÉRLET**

Vizsgáljuk azt a merev testet, mely áll egy rögzített tengelyből, egy erre merőlegesen erősített $r$ hosszúságú rúdból, valamint a rúd másik végén lévő $m$ tömegű pontszerű testből! A tengely és a rúd tömege elhanyagolható, valamint a tengely körüli forgás súrlódásmentes. Folyamatosan hasson az $m$ tömegű pontszerű testre állandó nagyságú, érintőirányú $\vec{F}$ erő!




*Tömegpont gyorsítása körpályán*

A test egyenletesen változó körmozgást fog végezni. Newton II. törvényét használva:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{tg}$

A fenti egyenletből nyert skaláregyenlettel dolgozzunk tovább, valamint használjuk fel a tangenciális gyorsulás, a szöggyorsulás és körpálya sugara között lévő $a_{tg} = r \cdot \beta$ összefüggést:

$F = m \cdot a_{tg}$,

$F = m \cdot r \cdot \beta$

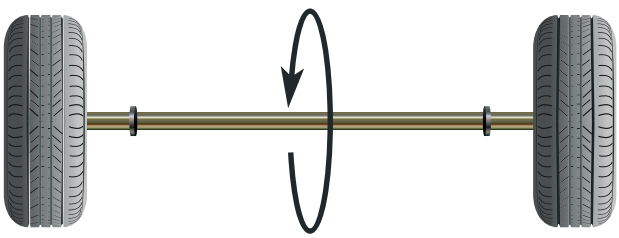
Az $F$ erőnek a tengelyre vonatkoztatott erőkarja $r$, így forgatónyomatéka: $M = F \cdot r$

Ezt felhasználva:

$M = mr^2 \cdot \beta$

**Rögzített tengely körül forgatható tömegpont állandó forgatónyomaték hatására egyenletesen gyorsuló forgómozgást végez. Az $M$ forgatónyomaték és a $\beta$ szöggyorsulás hányadosa állandó. Az arányossági tényezőt a tömegpont $m$ tömege és a tengelytől való $r$ távolsága határozza meg.**

$$\frac{M}{\beta} = m \cdot r^2 = \text{állandó}$$



*A gépkocsi tengelyén kifejtett forgatónyomaték a keréknek szöggyorsulást okoz*

## Forgómozgás alapegyenlete

Most térjünk át a rögzített tengely körül forgatható merev test dinamikájának vizsgálatára!

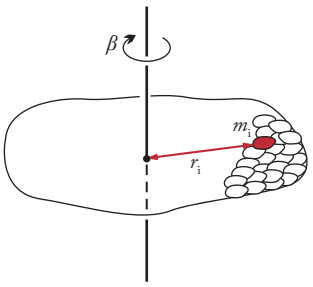
Osszuk fel az $m$ tömegű testet $N$ darab olyan kicsi részre, hogy a kicsi részek már pontszerűnek tekinthetők legyenek:

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots m_N$,

illetve ezt röviden jelölve:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Az $m_i$ tömegrész távolságát a forgástengelytől jelöljük $r_i$-vel!




*Merev test felosztása sok pici részre*

Mindegyik $m_i$ tömegrész ugyanakkora $\beta$ szöggyorsulású, egyenletesen változó körmozgást fog végezni. Az előző részben megismertük, hogy az $m_i$ tömegrész $\beta$ szöggyorsulásáért $M_i$ forgatónyomaték a felelős:

$$M_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \beta$$

Innen már könnyen megmutatható, hogy az egyes $m_i$ tömegrészekre ható $M_i$ forgatónyomatékok összege a merev testre ható $M$ forgatónyomatékot adja:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_N = m_1 r_1^2 \cdot \beta + m_2 r_2^2 \cdot \beta + \ldots + m_N r_N^2 \cdot \beta$$

Rövidebb jelöléssel:

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \cdot \beta$$

Az adott testre ható $M$ forgatónyomaték és az általa okozott $\beta$ szöggyorsulás egyenesen arányos egymással, így hányadosuk állandó: $\frac{M}{\beta}$ = állandó. Ezt az állandót a test **tehetetlenségi nyomatékának** nevezzük.

Előfordulhat, hogy a merev testre egyidejűleg több forgatónyomaték hat. Ekkor a testre ható forgatónyomatékok előjeles összege okozza a test szöggyorsulását.

**Amennyiben a rögzített tengely körül forgatható merev testre ható forgatónyomatékok előjeles összege nem nulla, akkor a test egyenletesen gyorsuló forgómozgást végez. A test szöggyorsulása egyenesen arányos a testre ható forgatónyomatékok előjeles összegével, valamint fordítottan arányos a test egy tulajdonságával, a tehetetlenségi nyomatékával:**

$$\Sigma M = \Theta \cdot \beta$$

**Ezt az összefüggést a forgómozgás alaptörvényének nevezzük.**

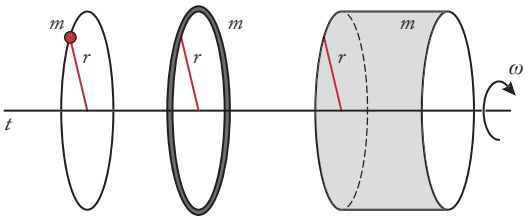
**A tehetetlenségi nyomaték jele: $\Theta$ (théta, görög betű), kiszámítása:**

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

**Mértékegysége: kg·m²**

## Néhány test tehetetlenségi nyomatéka

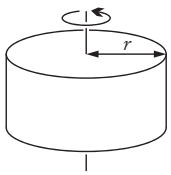
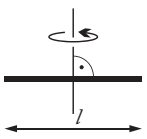
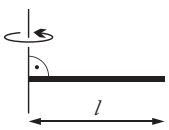
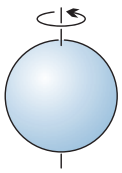
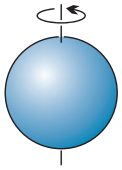
A pontszerű test, a vékony abroncs, a vékony falú henger tehetetlenségi nyomatéka ugyanúgy számítható: $\theta = m \cdot r^2$. Ezeknek a testeknek minden pontja azonos ($r$) távolságra van a $t$ tengelytől.




*Három test, melynek tehetetlenségi nyomatéka hasonló módon számítható*

Általánosan igaz, hogy egy merev test $\theta$ tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos a test alakjára jellemző számmal, a test $m$ tömegével és a test valamely $r$ méretének négyzetével.

Más testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározása integrálszámítást igényel, illetve összefüggés található rá szakkönyvekben. Néhány szabályos test tehetetlenségi nyomatékát tartalmazza a következő táblázat.

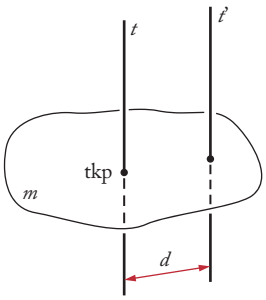
| Szabályos test neve | Rajz | Forgástengely helye | Tehetetlenségi nyomaték értéke |
|---|---|---|---|
| tömör henger |  | szimmetriatengely | $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ |
| rúd |  | rúdra merőleges, a felezőpontján átmenő tengely | $\Theta = \frac{1}{12} m \cdot l^2$ |
| rúd |  | rúdra merőleges, a végpontján átmenő tengely | $\Theta = \frac{1}{3} m \cdot l^2$ |
| vékony falú gömbhéj |  | középpontján átmenő tengely | $\Theta = \frac{2}{3} m \cdot r^2$ |
| tömör gömb |  | középpontján átmenő tengely | $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ |

## Steiner tétele

Ugyanannak a testnek különböző tengelyekre vonatkozóan más a tehetetlenségi nyomatéka. Amennyiben ismert a tömegközépponton átmenő $t$ tengelyre vonatkozóan az $m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka ($\Theta_{tkp}$), akkor az ezzel párhuzamos, tőle $d$ távolságra lévő $t'$ tengelyre vonatkozó ($\Theta$) már könnyedén kiszámítható:

$$\Theta = \Theta_{tkp} + m \cdot d^2$$

Ezt a tételt párhuzamos tengelyek tételének, vagy **Steiner-tételnek** hívjuk.




*Alkoss képletet, mellyel az $m$ tömegű, $R$ sugarú gömb tehetetlenségi nyomatéka számítható valamely érintőjére vonatkozóan!*

## Merev testek síkmozgásának dinamikai leírása

Merev test síkmozgását legegyszerűbben a test tömegközéppontja haladó mozgásának és a tömegközéppont körüli forgásának eredőjeként értelmezhetjük. Ennek megfelelően a test tömegközéppontjának haladó mozgását a testre ható külső erők eredője határozza meg:

$$\Sigma \vec{F}_{külső} = m \cdot \vec{a}_{tkp}$$

A test tömegközéppont körüli forgását a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékok előjeles összege határozza meg:

$$\Sigma M = \Theta \cdot \beta$$

A fenti két mozgásegyenlet felírásával, illetve a kényszerfeltételek figyelembevételével a merev test síkmozgásával kapcsolatos problémák sikerrel tárgyalhatók.

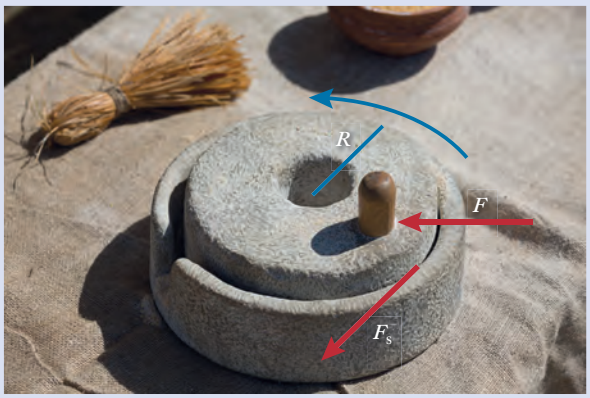
### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 100 kg tömegű, 50 cm sugarú, 2 Hz fordulatszámú malomkereket 3 másodperc alatt egyenletesen akarunk lefékezni. Mekkora sugárirányú erővel kell a féktuskót a keréknek szorítani, ha köztük a csúszási súrlódási együttható 0,6?

### MEGOLDÁS

Adatok:
$m = 100$ kg,
$R = 50$ cm,
$f = 2$ Hz,
$t = 3$ s,
$\mu = 0{,}6$.

$F = ?$




*A féktuskóra ható $F$ sugárirányú erő fejti ki a felületre merőleges nyomóerőt*

Írjuk fel a forgómozgás dinamikai alapegyenletét:

$$\Sigma M = \Theta \cdot \beta$$

Használjuk fel, hogy az $F_S$ súrlódási erő okozza a forgatónyomatékot, valamint hogy a henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$, továbbá $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot f}{t}$:

$$F_S \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi \cdot f}{t}$$

Egyszerűsítés és az $F_S = \mu \cdot F$ összefüggés alapján:

$$\mu \cdot F = m \cdot R \cdot \frac{\pi \cdot f}{t}$$

A keresett $F$ erő:

$$F = m \cdot R \cdot \frac{\pi \cdot f}{\mu} = 174{,}5 \text{ N}$$

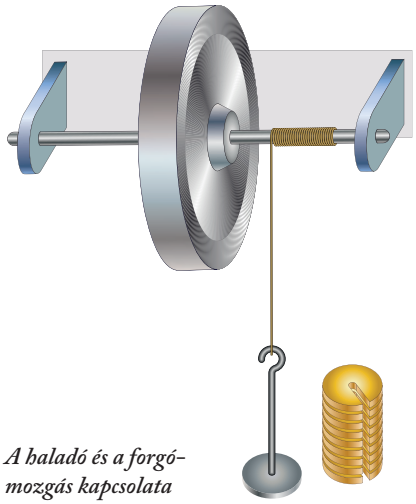
## Haladó és forgómozgás dinamikájának összehasonlítása

A haladó és forgómozgás dinamikáját leíró fogalmakat és a fogalmak közötti kapcsolatokat feltáró összefüggéseket tartalmazza a következő táblázat:

| | Haladó mozgás | Forgómozgás |
|---|---|---|
| Fogalmak | $m$, $\vec{a}$ | $\theta$, $\beta$ |
| Törvények | $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$<br>$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $M = \theta \cdot \beta$<br>$\sum M = \theta \cdot \beta$ |

*A haladó és forgómozgás dinamikáját összefoglaló táblázat*

A merev test tehetetlenségi nyomatéka függ:
- a forgó test tömegétől,
- alakjától,
- méretétől,
- tömegeloszlásától,
- a forgástengely helyétől, helyzetétől.



*A haladó és a forgómozgás kapcsolata*

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Egy merev test 3 másodperc alatt 6 teljes fordulat megtétele után megáll. Mekkora volt kezdetben a test fordulatszáma?
2. Mekkora az előző feladatban leírt merev test szöggyorsulása?
3. Lehet-e két azonos alakú, tömegű, méretű test tehetetlenségi nyomatéka különböző?
4. A forgó vagy a nyugalomban lévő korongnak nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka?
5. Egy merev testet ugyanolyan alakúnak, ugyanolyan anyagból kétszeres méretűnek készítünk el. Hányszorosra változik a test (ugyanarra a tengelyre vonatkozó) tehetetlenségi nyomatéka?

# 3. A perdület

## A perdület (impulzusnyomaték)

A haladó mozgást végző test tehetetlenségét az $m$ tömeg, a rögzített tengely körül forgómozgást végző test tehetetlenségét a tengelyre vonatkoztatott $\Theta$ tehetetlenségi nyomaték jellemzi:

$m \Rightarrow \Theta$

A haladó mozgást a $v$ sebesség, a forgómozgást az $\omega$ szögsebesség jellemzi:

$v \Rightarrow \omega$

A haladó mozgást végző test mozgásállapotának jellemzésére a lendület, a forgómozgást végző test forgásállapotának jellemzésére a perdület fogalmat vezetjük be.

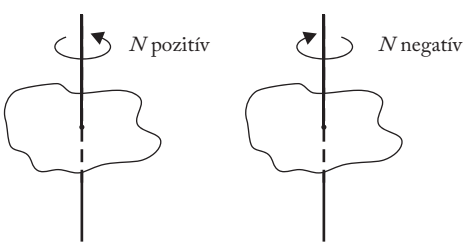
$I = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad N = \Theta \cdot \omega$

**Egy rögzített tengely körül forgó merev test forgásállapotát – dinamikai szempontból – a test $\Theta$ tehetetlenségi nyomatékának és az $\omega$ szögsebességének a szorzatával jellemezzük. Ezt a fizikai mennyiséget perdületnek nevezzük. Jele: $N$.**

**$N = \Theta \cdot \omega$**

**A perdület mértékegysége: $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.**

**Síkmozgást végző testek vizsgálatakor a perdület lehet előjeles skalármennyiség. Általában az óramutató járásával ellentétes irányban forgó testek perdületét pozitív előjelűnek választjuk, míg az óramutatóval megegyező irányban forgó testek perdületének előjele negatív.**




*Az óramutató járásával ellentétes irányban pozitív előjelű, míg megegyező irányban negatív előjelű a perdület*

## A forgatónyomaték és a perdület kapcsolata

Induljunk ki a forgómozgás alaptörvényéből, és használjuk fel a szöggyorsulás fogalmát:

$$\Sigma M = \theta \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(\theta\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

**A merev testre ható eredő forgatónyomaték egyenlő a test perdületének időegységre eső megváltozásával:**

$$\Sigma M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

**A forgómozgás alapegyenletének másik alakját kaptuk, amelynek a neve perdülettétel.**

A perdülettételt leíró egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\Delta t$-vel:

$$(\Sigma M) \cdot \Delta t = \Delta N$$

**A $(\Sigma M) \cdot \Delta t$ szorzatot forgatólökésnek nevezzük. A merev test perdületének megváltozását a testre ható forgatónyomatékok előjeles összege és a forgatóhatás időtartama határozza meg.**

## A perdületmegmaradás törvénye

A perdülettétel szerint egy merev test perdületének megváltozásáért a testre ható forgatónyomatékok eredője a felelős. Ez azt is jelenti, ha a testre nem hat forgatónyomaték, akkor a test perdülete nem változik, azaz állandó. Induljunk ki a perdülettételből:

$$\Sigma M = \frac{\Delta N}{\Delta t},$$

$$0 = \frac{\Delta N}{\Delta t} \Rightarrow 0 = \Delta N \Rightarrow N = \text{állandó}$$

**Megfogalmazzuk a perdületmegmaradás törvényét:**

**Zárt rendszer összes perdülete állandó.**

**Zárt a rendszer, ha egyáltalán nem hat rá külső forgatónyomaték, vagy a testekre ható külső forgatónyomatékok előjeles összege nulla.**

**$\Sigma M_{\text{külső}} = 0 \Rightarrow N_{\text{rendszer}} = \text{állandó}$**

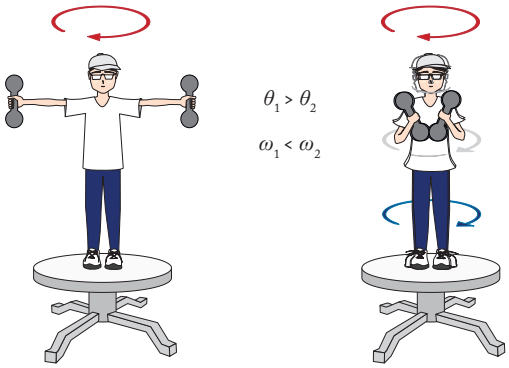


*A kávédaráló indításakor a kések és a burkolat ellentétes irányban indul meg*

## Példák a perdületmegmaradás törvényére

### Perdületmegmaradás igazolása forgózsámolyon

Ha forgózsámolyon ülő tanuló a kinyújtott kezében lévő súlyzókat magához húzza, akkor a forgózsámoly és a tanuló forgása felgyorsul.




*Kezünket behúzva forgásunk szögsebessége nő*

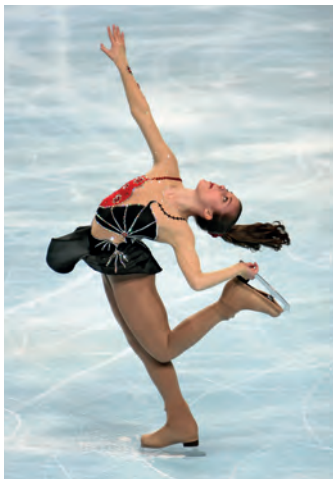
A forgózsámolyon ülő fiú tehetetlenségi nyomatéka a fiú testének és a kezében lévő súlyzók tehetetlenségi nyomatékának az összege.

Ha a kezét és a benne lévő súlyzókat magához húzza, akkor a kezét és a súlyzókat alkotó tömegpontok forgástengelytől mért távolságai lecsökkennek, így a tehetetlenségi nyomatéka is kisebb lesz. Mivel a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak előjeles összege nulla, a perdülete nem változik, így a szögsebessége nő:

$N = \Theta \cdot \omega$ = állandó, $\Theta$ csökken $\Rightarrow$ $\omega$ nő

### Perdületmegmaradás igazolása piurettezéskor

A jégtánc kb. 50 éve olimpiai sportág. A produkció látványos eleme, amikor a versenyző pörögni kezd egy függőleges, nyugalomban lévő tengely körül. A korcsolyázó a forgást oldalra nyújtott karral és lábbal kezdi. Ahogy a végtagjait egyre jobban közelíti a forgástengelyhez, tehetetlenségi nyomatéka csökken, a szögsebessége rohamosan nő. A jelenséget szintén a perdület megmaradásának törvényével értelmezhetjük. A sportolóra ható külső erőknek nincs forgatónyomatéka. A piruettező perdülete nem változik, így:

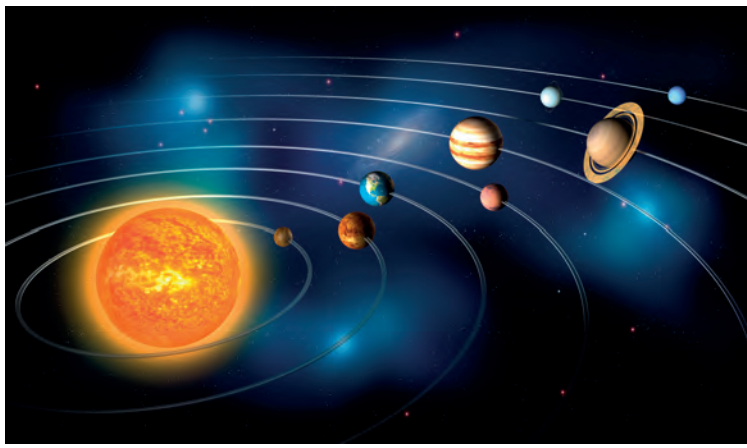


$\Theta \cdot \omega$ = állandó.

## A Naprendszer eredő perdülete

Jelenlegi tudásunk szerint a Naprendszer egy csillagközi gáz- és porfelhőből alakult ki. Ez a felhő a kezdetektől fogva forgott a Tejútrendszer forgása miatt. A kb. egy naptömegnyi felhő a saját gravitációs tere miatt kezdett összehúzódni. A perdületmegmaradás törvénye miatt a felhő az összehúzódás során egyre gyorsabban forgott. A forgó, belapult felhő egyenlítőjén anyagkiáramlás történt, amelyből a bolygók jöttek létre.

A bolygók csaknem egy síkban és egy irányban keringenek. A Nap lassan forog, 1 hónap alatt tesz meg egy fordulatot. A Naprendszer összes perdületének csak $\frac{1}{200}$-a esik a Napra.



*A bolygókon kívül milyen égitestek találhatók még a Naprendszerben?*

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

Egy vízszintes síkú, $R$ sugarú mágneskorong $\omega_0$ szögsebességgel forog a középpontján átmenő, rögzített függőleges tengely körül. Kis magasságból ráesik egy ugyanilyen, kezdetben nyugvó korong, és azonnal hozzátapad. (A két korong középpontja $R$-nél kisebb távolságra lesz egymástól.)

Mekkora közös szögsebességgel fog forogni a két korong?

**MEGOLDÁS**

Adatok: $R$, $\omega_0$.

$\omega_k$ = ?

Alkalmazható a perdületmegmaradás törvénye!

$N_1 = N_2$

Először csak a forgó korongnak van perdülete, az állónak nincs:

$N_1 = \Theta \cdot \omega_0$

A másik korong ráhelyezése után a két korong együttes perdületét a Steiner-tétel alapján számítjuk:

$N_2 = (\Theta + \Theta + M \cdot x^2) \cdot \omega(x)$

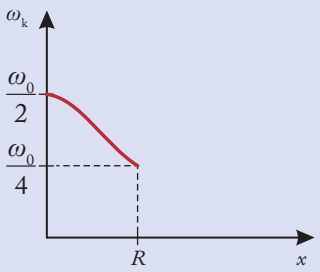
Felhasználjuk a korong tehetetlenségi nyomatékára vonatkozó összefüggést és a két perdület egyenlőségét:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + M \cdot x^2\right) \cdot \omega(x) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega_0$$

Az egyszerűsítések után:

$$\omega(x) = \frac{1}{2 + 2 \cdot \frac{x^2}{R^2}} \omega_0$$

*Megjegyzés:*




Koordináta-rendszerben való ábrázolás után a grafikonról leolvasható, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő. Maximumhelye $x = 0$-nál van, értéke $\frac{\omega_0}{2}$. Minimumhelye $x = R$-nél van, értéke $\frac{\omega}{4}$.

## Haladó és forgómozgás állapotát leíró fogalmak összehasonlítása

A haladó és forgómozgás állapotát leíró fogalmakat és a fogalmak közötti kapcsolatokat feltáró összefüggéseket tartalmazza a következő táblázat:

| | Haladó mozgás | Forgómozgás |
|---|---|---|
| Fogalmak | $m$, $v$<br>Lendület: $I = m \cdot v$ | $\Theta$, $\omega$<br>Perdület: $N = \Theta \cdot \omega$ |
| Törvények | Lendülettétel:<br>$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$<br>Lendületmegmaradás törvénye | Perdülettétel:<br>$\Sigma M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$<br>Perdületmegmaradás törvénye |

***A haladó és forgómozgás állapotát leíró fogalmak összefoglaló táblázata***

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen kísérlettel lehet két tojásról eldönteni, hogy melyik a főtt, melyik a nyers, a tojások feltörése nélkül? Végezzük is el a kísérletet!
2. A Föld–Hold távolság évente 3,8 cm-rel nő. Hogyan változik emiatt a Hold keringési ideje?
3. A kerti locsoló szórófeje körbe-körbe jár. Miért?



4. A Nap jelenleg kb. 1 hónap alatt tesz meg egy fordulatot. Hogyan változna ez a periódusidő, ha hirtelen a kétszeresére felfújódna úgy, hogy az anyageloszlása hasonló lenne a mostani állapotéhoz?
5. Milyen fizikai magyarázat van arra, hogy a „macska mindig a talpára esik”?

# 4. Merev test mozgási energiája

**EMLÉKEZTETŐ**

Korábban tanultunk a mechanikai energiákról.
A $v$ sebességgel mozgó $m$ tömegű test **mozgási** (kinetikus) **energiája**: $E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

A $\Delta l$-lel megnyújtott (vagy összenyomott) $D$ rugóállandójú rugó **rugalmas energiája**:

$$E_{\text{rugalmas}} = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

A $h$ magasra emelt, $m$ tömegű test **helyzeti energiája**: $E_{\text{helyzeti}} = m \cdot g \cdot h$.

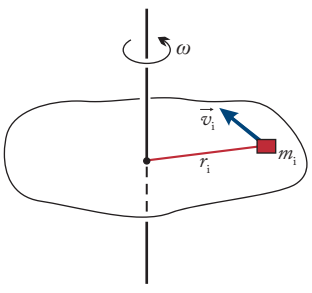
**Munkatétel:** Egy testre ható erők munkáinak előjeles összege a test mozgási energiájának megváltozását okozza: $\Sigma W = \Delta E_{\text{mozgási}}$.

**A mechanikai energia megmaradásának törvénye:** Ha egy testre csak konzervatív erők hatnak, akkor mechanikai energiáinak összege nem változik.

$E_{\text{mozgási}} + E_{\text{rugalmas}} + E_{\text{helyzeti}} = \text{állandó}$

## Rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiája

Szeretnénk értelmezni egy rögzített tengely körül $\omega$ szögsebességgel forgó merev test mozgási energiáját. Osszuk fel az $m$ tömegű testet $N$ darab olyan kicsi részre, hogy a kicsi részek már pontszerűnek tekinthetők legyenek: $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots + m_N$, illetve ezt röviden jelölve: $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Az $m_i$ tömegrész távolságát a forgástengelytől jelöljük $r_i$-vel, sebességét $v_i$-vel!




A rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiáját az őt alkotó tömegrészek mozgási energiáinak összegével azonosítjuk:

$$E_{\text{mozgási}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{m,i}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$$

A merev testet alkotó tömegpontok egyenletes körmozgást végeznek, ezért felhasználhatjuk az ismert $v = r \cdot \omega$ összefüggést:

$$E_{\text{mozgási}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{m,i}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot (r_i \cdot \omega)^2$$

A lehetséges kiemelések után egy ismerős tényezőt, a test tehetetlenségi nyomatékát kapjuk:

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot (r_i \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

A merev testet alkotó tömegpontok mozgási energiájának összegeként kapjuk meg a rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiáját, amit röviden **forgási energiának** nevezünk.

A rögzített forgástengelyre vonatkozóan $\Theta$ tehetetlenségi nyomatékú, $\omega$ szögsebességű test forgási energiája: $E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$

## Forgatónyomaték munkája és teljesítménye

Merev test forgómozgásának kinematikai és dinamikai leírásánál megismertük, hogy a haladó mozgás és a forgómozgás leírására szolgáló fogalmak és törvények között analógia van, megfeleltethetők egymásnak. Ezt a módszert folytatva az energetikai leírás fogalmait, törvényeit könnyebben megkapjuk. Az $E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ analóg fogalma az $E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \theta \cdot \omega^2$.

**Egy rögzített tengely körül forgó merev testre ható állandó $M$ forgatónyomaték munkája $\alpha$ szögelfordulás során: $W = M \cdot \alpha$.**

**Egyenletes forgómozgás során az állandó $M$ forgatónyomaték $P$ teljesítménye is állandó: $P = M \cdot \omega$**

Változó forgómozgás során az állandó $M$ forgatónyomaték pillanatnyi teljesítménye a forgás pillanatnyi szögsebességével arányos: $P(t) = M \cdot \omega(t)$.

**A rögzített tengely körül forgó merev testre vonatkozó munkatétel: A merev testre ható forgatónyomatékok előjeles összegének munkája okozza a test forgási energiájának megváltozását.**

**$(\Sigma M) \cdot \varphi = \Delta E_{\text{forgási}}$**

## Haladó mozgás és rögzített tengely körüli forgómozgás energiáját leíró fogalmak összehasonlítása

A haladó mozgás és rögzített tengely körüli forgómozgás energiáját leíró fogalmakat és a fogalmak közötti kapcsolatokat feltáró összefüggéseket tartalmazza a következő táblázat:

| | Haladó mozgás | Forgómozgás |
|---|---|---|
| Fogalmak | $m$, $v$<br>Mozgási energia:<br>$E_m = \frac{1}{2}mv^2$<br>Munka:<br>$W = F \cdot s$<br>Teljesítmény:<br>$P(t) = F \cdot v(t)$ | $\Theta$, $\omega$<br>Forgási energia:<br>$E_f = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$<br>Munka:<br>$W = M \cdot \varphi$<br>Teljesítmény:<br>$P(t) = M \cdot \omega(t)$ |
| Törvények | Munkatétel:<br>$\Sigma W = \Delta E_{mozgási}$ | Munkatétel:<br>$\Sigma W = \Delta E_{forgási}$ |

*A haladó és forgómozgás energiáját leíró fogalmakat összefoglaló táblázat*

## Merev test teljes mozgási energiája

Egy merev test végezhet csak haladó mozgást (transzláció), és végezhet rögzített tengely körül csak forgómozgást (rotáció).

A csak haladó mozgást végző test haladási (transzlációs) mozgási energiával rendelkezik:

$$E_{haladási} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

A csak forgómozgást végző merev test forgási (rotációs) mozgási energiával rendelkezik:

$$E_{forgási} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$$

Előfordulhat az is, hogy a síkmozgást végző merev test egyidejűleg halad és forog. Ilyenkor a test összes mozgási energiájának a merev testet alkotó tömegpontok mozgási energiának összegét tekintjük.

Megmutatható, hogy az egyidejűleg haladó és forgómozgást végző merev test teljes mozgási energiája két energiatag összegeként írható fel.

Az egyik energiatag, a haladási mozgási energia a merev test teljes $m$ tömegéből és a test tömegközéppontjának $v_{tkp}$ sebességéből számítható:

$$E_{haladási} = \frac{1}{2}mv_{tkp}^2$$

A másik energiatag, a forgási mozgási energia a merev test tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó $\Theta$ tehetetlenségi nyomatékából és a forgás $\omega$ szögsebességéből számítható:

$$E_{forgási} = \frac{1}{2}\Theta_{tkp} \cdot \omega^2$$

### Az egyidejűleg haladó és forgómozgást végző merev test teljes mozgási energiája:

$$E_{mozgási} = E_{haladási} + E_{forgási} = \frac{1}{2}mv_{tkp}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{tkp} \cdot \omega^2$$

Korábban tanultuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét: Ha egy testre csak konzervatív erők hatnak, akkor a test mechanikai energiáinak összege állandó. Ez idáig három mechanikai energiát (mozgási, helyzeti, rugalmas) ismertünk. Vigyázz! Most megtanultuk, hogy egy merev test mozgási energiája akár két tagból (haladási, forgási) is állhat. (A mechanikai energia megmaradásának törvénye természetesen testekből álló rendszerekre is megfogalmazható.)

Az egyidejűleg haladó és forgómozgást végző merev test teljes mozgási energiája egy forgásienergia-tag segítségével is felírható. Ilyenkor a test tehetetlenségi nyomatékát a pillanatnyi forgástengelyre kell vonatkoztatni:

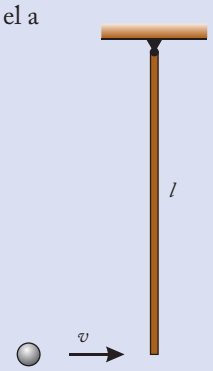
$$E_{mozgási} = \frac{1}{2}\Theta_{pill.teng.} \cdot \omega^2$$

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy 2 kg tömegű test 0,3 $\frac{m}{s}$ vízszintes sebességgel rugalmasan ütközött az egyik végén felfüggesztett 1,5 m hosszú és 3,36 cm átmérőjű, homogén rúd alsó végével, s közben teljes mozgási energiáját átadta a tőle elpattanó rúdnak.

**a)** Milyen anyagból készülhetett a rúd?

**b)** Mekkora szögsebességgel indult el a rúd?




### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 2$ kg,

$v = 0{,}3\ \frac{m}{s}$,

$l = 1{,}5$ m,

$d = 3{,}36$ cm.

*a)* $\rho = ?$; *b)* $\omega = ?$

**a)** A rúd anyagát a sűrűségének ismeretében határozhatjuk meg. Az ütközés pillanatszerűsége miatt a két testre mint rendszerre felírhatjuk az energia és perdület

megmaradásának törvényeit. A test ütközés előtti mozgási energiája megegyezik a rúd ütközés utáni forgási energiájával:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\Theta\cdot\omega^2$$

Ismerjük a rúd végpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot M\cdot l^2\cdot\omega^2 \qquad (1)$$

$M$-mel a rúd tömegét jelöljük. A test ütközés előtti perdületét a rúd viszi tovább:

$$m\cdot v\cdot l = \frac{1}{3}\cdot M\cdot l^2\cdot\omega \qquad (2)$$

A (2) egyenlet négyzetét osszuk el az (1) egyenlettel:

$$M = 3\,m = 6\text{ kg}$$

Határozzuk meg a rúd sűrűségét:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{l\cdot\frac{d^2\cdot\pi}{4}} = 4511\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A függvénytáblázat alapján a rúd anyaga titán.

**b)** A (2) egyenlet alapján:

$$\omega = \frac{3\cdot m\cdot v}{M\cdot l} = \frac{v}{l} = 0{,}2\ \frac{1}{\text{s}}$$

Érdekesség, hogy ilyen $m : M$ tömegarány esetén az induló rúd végpontjának sebessége megegyezik az érkező test sebességével.

**2. FELADAT** Két, $L$ hosszú, homogén rúd végpontjait azonos magasságban egy-egy tengelyhez erősítjük. A rudak a tengelyek körül súrlódásmentesen tudnak forogni ugyanabban a síkban. Az egyik rudat kitérítjük úgy, hogy vízszintes legyen, majd elengedjük.

**a)** Mekkora lesz az elengedett rúd másik végpontjának legnagyobb sebessége?

A két rúd ütközésekor, a rajtuk elhelyezett tépőzárnak köszönhetően, együtt mozognak tovább.

**b)** Mekkora lesz a „két összetapadt rúd" alsó pontjának legnagyobb sebessége?

**c)** Mekkora lesz a „két összetapadt rúd" legnagyobb szögkitérése?

## MEGOLDÁS

Adatok:

Adottak: $L$, $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

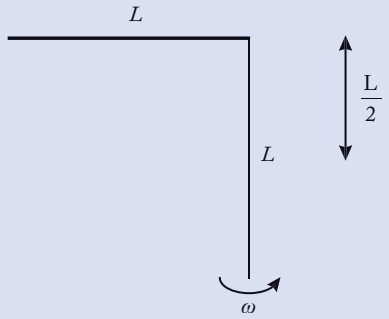
---

*a)* $v = ?$

*b)* $v' = ?$

*c)* $\varphi = ?$

**a)** Az elengedett rúd nem rögzített végpontjának legnagyobb sebessége akkor várható, amikor a rúd éppen függőleges lesz, de még nem ütközött a másik rúddal. Alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét a két helyzetre.




*A mechanikai energia megmaradásának törvénye írható fel a mozgásra*

A kezdetben vízszintes rúd helyzeti energiájának csökkenése fedezi a forgási energiájának növekedését:

$$|\Delta E_{\text{h}}| = \Delta E_{\text{f}}$$

Használjuk fel, hogy a rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontján átmenő tengelyre vonatkozóan

$$\theta = \frac{1}{3}\cdot m\cdot L^2:$$

$$m\cdot g\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\cdot\omega^2,$$

$$m\cdot g\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot m\cdot L^2\cdot\omega^2$$

Használjuk fel, hogy a rúd alsó pontjának sebessége $v = L\cdot\omega$, valamint egyszerűsítsünk:

$$g\cdot L = \frac{1}{3}\cdot v^2$$

A rúd végpontjának keresett sebessége: $v = \sqrt{3\cdot g\cdot L}$.

**b)** A két rúd kölcsönhatásakor tökéletesen rugalmatlan ütközés történik. Alkalmazzuk a perdületmegmaradás törvényét!

$$N_{\text{ütközés előtti}} = N_{\text{ütközés utáni}}$$

$$\theta\cdot\omega = 2\,\theta\cdot\omega',$$

$$\omega' = \frac{\omega}{2}$$

A „két összetapadt rúd" alsó pontjának legnagyobb sebessége:

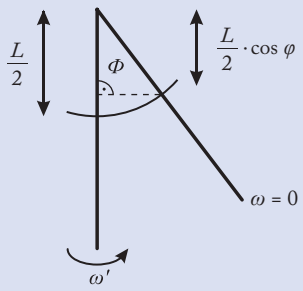
$$v' = L\cdot\omega' = L\cdot\frac{\omega}{2} = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{3\cdot g\cdot L}}{2}$$

**c)** Alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét a „két összetapadt rúd” elindulásától a megállásáig.

A „két összetapadt rúd” kezdeti forgási energiája alakul át helyzeti energiává.

$$\frac{1}{2}\cdot(2\theta)\cdot\omega'^2 = 2\cdot m\cdot g\cdot\frac{L}{2}\cdot(1-\cos\varphi),$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot\frac{\omega^2}{4} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot\omega^2\cdot(1-\cos\varphi)$$




*A függőleges helyzetben meglévő forgási energia a legnagyobb kitérésnél helyzeti energiává alakul*

Az egyszerűsítés és rendezés után:

$$\cos\varphi = \frac{3}{4}$$

A „két összetapadt rúd” legnagyobb szögkitérése:

$$\varphi = \arccos\frac{3}{4} \approx 48{,}6^\circ$$

## ALKALMAZÁSOK

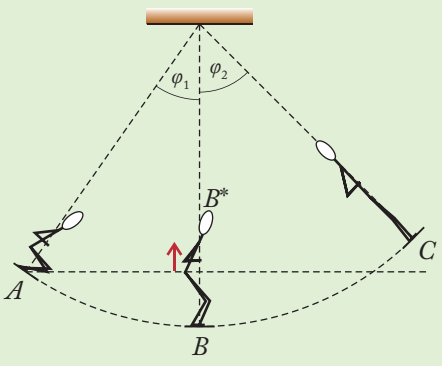
### A hintázás fizikája

Az egészen kicsi gyerek csak passzív hintázásra képes. Ül a hintában, és egy felnőtt időnként meglöki a lengő gyermeket. Minden lökéssel a hintázó gyermek energiát kap. A hinta legnagyobb kitérése akkor állandó, ha a lökésnél kapott energiát a következő lökésig a hintázó gyermek a légellenállás és a súrlódás segítségével szétszórja a környezetébe. Természetesen a lökéssel átadott energiától függően a hinta legnagyobb kitérése növekedhet, illetve csökkenhet is a folyamat során.

A nagyobb gyermek viszont már képes egyedül is hintázni, képes hintázás közben növelni a legnagyobb kitérését is. Vajon hogyan? Vizsgáljuk a hintázásnak olyan félperiódusát, amikor a hintázó az egyik szélső helyzetből a másikba tér, és eközben úgy „hajtja a hintát” a gyermek, hogy a legnagyobb kitérése nő. Alapvetően két módon tudja a gyermek „hajtani a hintát”. Amikor ülve hintázik, akkor a törzsét és alsó lábszárát mozgatja ütemesen előre-hátra. A vagányabb gyerek szeret állva hintázni, ilyenkor hol leguggol, hol kiegyenesedik. Mindkét módon a gyermek végső soron a hinta tengelyéhez viszonyított tehetetlenségi nyomatékát képes változtatni.

Induljon a gyermek a bal oldali szélső helyzetből, az $A$ pontból. Ehhez a helyzethez tartozó szögkitérés $\varphi_1$. Ebben a helyzetben nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka, például guggol a gyerek. Amikor a legmélyebb ponthoz közeledik a hinta, a $B$–$B^*$ szakaszon a gyermek feláll, ezzel csökken a tehetetlenségi nyomatéka. Mivel mindez az egyensúlyi helyzet közelében történik, a hintázóra ható erőnek nincs erőkarja, nincs forgatónyomatéka, érvényes a perdületmegmaradás törvénye. A csökkenő tehetetlenségi nyomaték nagyobb szögsebességet eredményez. Megmutatható, hogy a nagyobb szögsebesség nagyobb forgási energiát is jelent. (Az Olvasóra bízom ennek belátását.) A $B^*$–$C$ szakaszra alkalmazható a mechanikai energia megmaradásának törvénye. A $B^*$ pontban lévő nagyobb forgási energia alakul át a $C$ pontig helyzeti energiává. A $C$ pont magasabban van, mint az $A$ pont, tehát a $\varphi_2$ szögkitérés nagyobb $\varphi_1$-nél.

A $C$ pontban a hintázó gyorsan leguggol, és már indul is a hinta visszafelé. Ilyen periódusok egymásutánjával tudja a hintázó „hajtani magát”. A gyermek a $B$–$B^*$ szakaszon való felálláskor jut energiához. Nincs itt semmilyen ellentmondás, hiszen a hinta és a gyermek együtt pontrendszernek tekinthető, és tudjuk, hogy a pontrendszerben ébredő belső erők munkája a rendszer teljes energiáját növeli.




*A hintázás egy félperiódusa*

## MÉRÉSI FELADAT

### Forgási energia mérése

Méréssel és számítással állapítsuk meg egy lejtőn tisztán legördülő csődarab forgási energiáját a lejtő alján!



**Rendelkezésre álló eszközök:** Legalább 1 méter hosszú, nagyon kicsi emelkedésű lejtő; legalább 10 cm átmérőjű, vékony falú fémcső néhány centiméteres darabja; mérőszalag; stopper; mérleg.

**A mérés menete:** Mérjük meg a lejtő hosszát, magasságát! Hagyjuk legurulni a csövet a lejtő ismert hosszán! Mérjük meg a legördülés idejét legalább ötször!

A mért adatok segítségével kiszámíthatjuk a lejtő aljára érkező cső sebességét, mozgási energiáját. A mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján határozzuk meg a cső forgási energiáját!

### A tehetetlenségi nyomaték számítása

Mérjük meg egy csődarab tehetetlenségi nyomatékát!

**Rendelkezésre álló eszközök:** Egy kb. 1-1,5 méter hosszú, nagyon kicsi emelkedésű lejtő; nagyméretű (kb. 8-10 cm átmérőjű), vékony falú fémcső néhány centiméteres darabja; mérőszalag; stopper; mérleg.

**A mérés menete:** Mérjük meg a csődarab tömegét és sugarát, valamint az $l$ hosszú lejtő $h$ emelkedését!

$R = \ldots, \quad m = \ldots, \quad l = \ldots, \quad h = \ldots$

A mérési adatok összehasonlítása után győződjünk meg arról, hogy a cső falvastagsága a sugarához viszonyítva nagyon kicsi! Az $l$ hosszon $h$-t emelkedő, kellően érdes felületű lejtőn kezdősebesség nélkül hagyjuk legurulni a csődarabot! Mérjük meg a legördülés idejét legalább ötször, majd a lejtő hosszának, magasságának és a mért időtartamok átlagának ismeretében, a gördülési feltétel felhasználásával végezze el az alábbi számításokat!

Határozzuk meg cső $v_{max}$ legnagyobb sebességét a lejtő $l$ hosszú szakaszának alján:

$$l = \frac{v_{max}}{2} \cdot t_{átlag},$$

amelyből $v_{max} = \dfrac{2l}{t_{átlag}} = \ldots$

Határozzuk meg a legördülő cső mozgási energiáját a lejtő alján:

$$E_{mozgási} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \ldots$$

Számoljuk ki a test helyzeti energiájának változását a megfigyelt mozgás során:

$$|\Delta E_{helyzeti}| = m \cdot g \cdot h = \ldots$$

Határozzuk meg az energiamegmaradás alapján a cső forgási energiáját:

$|\Delta E_{helyzeti}| = E_{mozgási} + E_{forgási}$, amelyből

$E_{forgási} = |\Delta E_{helyzeti}| - E_{mozgási} = \ldots$

Határozzuk meg a csődarab tehetetlenségi nyomatékát!

$$E_{forgási} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \left(\frac{v_{max}}{R}\right)^2, \text{ amelyből}$$

$$\Theta_{mérés} = 2 \cdot E_{forgási} \cdot \frac{R^2}{v_{max}^2} = \ldots$$

A csődarab $m$ tömege és $R$ sugara alapján számítsuk ki a csődarab tehetetlenségi nyomatékát!

$$\Theta_{elmélet} = m \cdot R^2$$

Hasonlítsuk össze a mérési adatok, illetve a geometriai adatok alapján számolt tehetetlenségi nyomatékok értékeit.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Egy merev test forgási periódusideje a felére csökken. Hogyan változik a test forgási energiája?
2. Lehet-e egy test forgási energiája nagyobb, mint a haladási mozgási (transzlációs) energiája?
3. Vízszintes talajon tisztán gördül egy vékony falú csődarab, egy tömör henger, egy golyó. Az egyes testek teljes mozgási energiájának hányad része haladási, illetve forgási energia?
4. A piruettező jégtáncos forgási periódusideje hirtelen megkétszereződik. Hányszorosára változott a sportoló tehetetlenségi nyomatéka? Hányszorosára változott a test forgási energiája?
5. Az előző feladatban melyik erő munkavégzése biztosítja a test forgási energiájának növekedését?

# Összefoglalás

## Forgómozgás kinematikája

Egy merev test **forgómozgást** végez, ha a test minden pontja egy-egy körmozgást végez egy egyenes körül, mely egyenest forgástengelynek nevezünk.

A forgómozgás leírására használhatjuk a körmozgás leírására használt fogalmakat:

periódusidő ($T$), frekvencia ($f$), szögsebesség ($\omega$).

A tengely körül forgást végző merev test pontjait jellemezhetjük a $\vec{v}_k$ kerületi sebességgel.

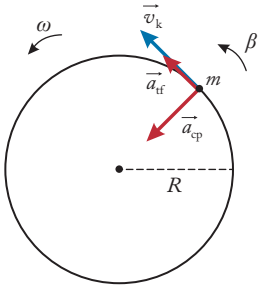
Az egyenletesen változó forgómozgás jellemzésére alkalmas a szöggyorsulás: $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Az $\vec{a}_t$ tangenciális gyorsulás felelős a $\vec{v}_k$ kerületi sebesség nagyságának megváltozásáért:

$$a_t = \frac{\Delta v_k}{\Delta t}, \quad a_t = \beta \cdot R$$

A $\vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulás felelős a $\vec{v}_k$ kerületi sebesség irányának megváltozásáért:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$




*Forgómozgás kinematikája*

## Tisztán gördülés

Egy kerék tisztán gördül a vízszintes talajon, ha a talajjal érintkező pontja a talajhoz képest áll. Ennek feltétele, hogy a kerék haladási sebessége megegyezzen a szélső pontjának kerületi sebességével: $v = \omega \cdot R$.

## Forgómozgás dinamikája

A merev test forgással szembeni tehetetlenségét jellemzi a tehetetlenségi nyomaték: $\theta$, mely függ a forgó test tömegétől, alakjától, méretétől, tömegeloszlásától, a forgástengely helyétől, helyzetétől. A szabályos testek tehetetlenségi nyomatékát megtaláljuk a *Négyjegyű függvénytáblázatokban.*

A Steiner-tétel segít kiszámítani egy test tehetetlenségi nyomatékát olyan tengelyre vonatkozóan, amely párhuzamos a tömegközépponton átmenő tengellyel és tőle $d$ távolságra van: $\theta = \theta_{tkp} + m \cdot d^2$.

A forgómozgás alapegyenlete: $\Sigma M = \theta \cdot \beta$

Merev test síkmozgásának leírása:

haladás: $\Sigma \vec{F}_{külső} = m \cdot \vec{a}_{tkp}$

forgás: $\Sigma M = \theta \cdot \beta$

## A perdület

A forgási állapotot jellemezzük a perdülettel: $N = \theta \cdot \omega$.

A forgómozgás alapegyenletének másik alakja a perdülettétel: $\Sigma M = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$.

Perdületmegmaradás törvénye: Zárt rendszer összes perdülete állandó.

## Forgási energia

A tengely körül forgó merev test forgási energiája:

$$E_{forgási} = \frac{1}{2}\theta_{tkp} \cdot \omega^2$$

Az egyidejűleg haladó és forgómozgást végző merev test teljes mozgási energiája:

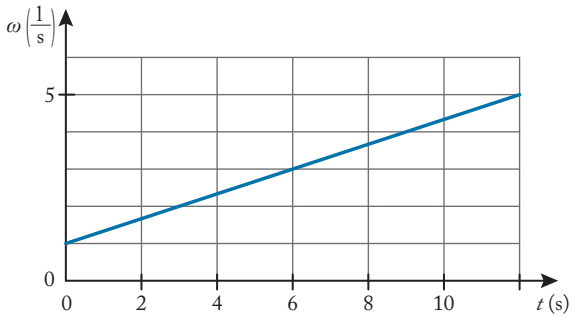
$$E_{mozgási} = E_{haladási} + E_{forgási} = \frac{1}{2}mv_{tkp}^2 + \frac{1}{2}\theta_{tkp} \cdot \omega^2$$

| | Haladó mozgás | Forgómozgás |
|---|---|---|
| Fogalmak | $t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$, $m$ | $t, \alpha, \omega, \beta$ $\Theta$ |
| | Mozgási energia: $E_m = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ | Forgási energia: $E_f = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ |
| | Munka: $W = F \cdot s$ | Munka: $W = M \cdot \varphi$ |
| | Teljesítmény: $P(t) = F \cdot v(t)$ | Teljesítmény: $P(t) = M \cdot \omega(t)$ |
| Törvények | $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ | $\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t$ |
| | $\vec{r}_t(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$ | $\alpha(t) = = \alpha_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2$ |
| | $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $M = \theta \cdot \beta$ |
| | $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | $\Sigma M = \theta \cdot \beta$ |
| | Lendülettétel: $\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$ | Perdülettétel: $\Sigma M = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ |
| | Lendületmegmaradás törvénye | Perdületmegmaradás törvénye |
| | Munkatétel: $\Sigma W = \Delta E_{mozgási}$ | Munkatétel: $\Sigma W = \Delta E_{forgási}$ |

# Összefoglaló feladatok

## TESZTKÉRDÉSEK

**1.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2019)
A mellékelt grafikon egy egyenletesen gyorsuló korong szögsebességét mutatja az idő függvényében. Mekkora a korong $\beta$ szöggyorsulása?




A) $\beta = \frac{1}{3}\,\frac{1}{s^2}$.

B) $\beta = \frac{5}{12}\,\frac{1}{s^2}$.

C) $\beta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2}$.

**2.** Egy test egyszer lassan, majd gyorsan forog. Mikor nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka?
A) Amikor lassan forog.
B) Amikor gyorsan forog.
C) Ugyanakkora.

**3.** Egy kerék tisztán gördül a talajon. Rakjuk növekvő sorrendbe a kerék legalsó (I), legfelső (II), legelső (III) pontjának sebességeit!
A) $v_I < v_{II} < v_{III}$.
B) $v_{II} < v_I < v_{III}$.
C) $v_I < v_{III} < v_{II}$.

**4.** Adott egy $m$ tömegű és $R$ sugarú tömör henger, illetve egy vékony falú csődarab. Mindkettő $\omega$ szögsebességű forgást végez. Melyik test forgásba hozása igényel több munkát?
A) A tömör hengeré.
B) A vékony falú csődarabé.
C) Ugyanannyi a két munka.

**5.** Egy keskeny henger lapjára ügyesen ráillesztünk egy ugyanilyen hengert úgy, hogy az eredetinél kétszer nagyobb hengert kapunk. Hogyan viszonyul az így kapott test tehetetlenségi nyomatéka az eredeti henger forgási szimmetriatengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékához?
A) Nem változik.
B) Felére csökken.
C) Kétszeresére nő.

**6.** A piruettező jégtáncos összébb húzódik, emiatt felgyorsul. Válasszuk ki az igaz állítást!
A) A jégtáncos zárt rendszert alkot, ezért a perdülete és az energiája állandó.
B) A jégtáncos zárt rendszert alkot, ezért a perdülete állandó, viszont az energiája növekszik.
C) A jégtáncos zárt rendszert alkot, ezért a perdülete állandó, viszont az energiája csökken.

**7.** A vízszintes talajon tisztán gördül egy vékony falú csődarab, egy tömör henger és egy tömör gömb. Melyik test haladási mozgási energiája egyenlő a forgási mozgási energiájával?
A) A vékony falú csődarabnak.
B) A tömör hengernek.
C) A tömör gömbnek.

**8.** Egy merev test a tömegközéppontján átmenő tengely körül forog. Hogyan változik a test tehetetlenségi nyomatéka, ha a forgástengelyt az eredetihez képest párhuzamosan egy kicsit eltoljuk?
A) Nem változik.
B) Csökken.
C) Nő.
D) Ennyi információból nem lehet megmondani.

**9.** Válasszuk ki a tehetetlenségi nyomaték mértékegységét!
A) kg.
B) $kgm^2$.
C) $kgms^{-1}$.

**10.** Egy súrlódásmentesen forgó hengeren egy kisegér a forgástengelyhez közelebb megy. Történik-e munkavégzés eközben?
A) Nem, hiszen a henger és a kisegér együtt zárt rendszert alkot.
B) Igen, pozitív munkavégzés történt, hiszen a forgási energia nő.
C) Ennyi információból nem lehet megmondani.

## FELADATOK

**1.** Mikrobarázdás hanglemez lejátszási fordulatszáma $33\frac{1}{3}\frac{1}{\text{min}}$. A nagyméretű hanglemezek átmérője 29,5 cm, míg a kislemezeké 15,5 cm.
**a)** Mekkora a korong forgásának periódusideje, szögsebessége?
**b)** Mekkora a tű legnagyobb és legkisebb sebességének aránya?

**2.** A Földet modellezhetjük a következőképpen: $R = 6370$ km sugarú gömb, forgási periódusideje 24 óra. Budapest a 47,5° szélességi körön van.
**a)** Mekkora az egyenlítői pont kerületi sebessége?
**b)** Melyik szélességi körön van az a pont, amelynek sebessége az a) feladatrészben kapottnak éppen a fele?
**c)** Mekkora Budapest „kerületi sebessége”?

**3.** Egy kerék $v$ állandó sebességgel tisztán gördül a vízszintes talajon. Hol vannak a keréken azok a pontok, amelyeknek a sebessége szintén $v$?

**4.** Egy kerékpár kereke tisztán gördül a vízszintes talajon. Mekkora $v$ sebességgel halad egyenletesen a vizsgált kerékpár (sárvédő nélküli), ha $R = 35$ cm sugarú első kerekének legfelső pontjáról egy kis sárdarab válik le, majd az úttestre eső kis sárdarab éppen a keréknek ugyanarra pontjára tapad vissza, amelyikről „lerepült”?

**5.** A patak vizét elterelve, az addig 3 másodperces periódusidővel forgó vízikerék egyenletesen lassulva 6 másodperc alatt megáll. Hány fordulatot tesz meg a vízikerék a megállásig?

**6.** Egy autó sebessége egy pillanatban $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gyorsulása $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mekkora a gyorsulása a 70 cm átmérőjű kerék legfelső pontjának?

**7.** Frissen olajozott kerekes kút hengerkereke súrlódásmentesen foroghat. A kötél végén lévő vödör és víz együttes tömege 10 kg. A henger sugara 20 cm. A vödröt elengedjük, és azt tapasztaljuk, hogy 4 másodperc múlva csobban a 16 méter mélyen lévő vízbe. Mekkora a hengerkerék tehetetlenségi nyomatéka?

**8.** Az 1 méter oldalú, szabályos háromszög csúcsaiban lévő pontszerű testek tömegei: 2 kg, 3 kg, 4 kg. Határozzuk meg a pontrendszer tehetetlenségi nyomatékát a háromszög középpontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!

**9.** Becsüljük meg a Föld forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Miért csak becslést tudunk adni?

**10.** Mekkora állandó forgatónyomaték tudná a Föld forgását 1 nap alatt megállítani? (A megoldás során használjuk fel a 9. feladat eredményét!)

**11.** Mekkora az $m$ tömegű, $l$ hosszú rúd tehetetlenségi nyomatéka a harmadolópontján átmenő, rá merőleges tengelyre vonatkozóan?

**12.** Egy lejtőn egymás mellől egyszerre engedünk gurulni azonos sugarú, vékony falú hengert, tömör hengert és gömböt. Melyik ér le először, és melyik utoljára?

**13.** Hány százalékkal változna meg egy homogén anyageloszlású bolygó forgási periódusideje, ha a sugara 1%-kal csökkenne?

**14.** Becsléssel állapítsuk meg, van-e realitása annak, hogy az Egyenlítőn felsorakoztatva minden embert, s őket a megfelelő irányba elindítva, a Föld forgása megállítható lehetne!

**15.** A lámpagyújtogató bolygóján percenként van napnyugta. Három lépéssel körül tudja járni a kisbolygót. A kis herceg tanácsára egyik nap 5760 lépést tett, s így mindig a napnyugtát látta. (A lámpagyújtogató mindig az Egyenlítőn mozgott.)
**a)** A bolygó egy adott pontján milyen időközönként volt napnyugta?
**b)** Mekkora a lámpagyújtogató, illetve a bolygó forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának aránya?

**16.** A 9. feladat eredményét felhasználva adjunk becslést a Föld tengely körüli forgási energiájára vonatkozóan!

**17.** Egy bowlinggolyó tisztán gördül a pályán. Mechanikai energiájának hány százaléka származik a haladástól, hány a forgástól?

**18.** Lánctalpas traktor vízszintes úton halad $36\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.
**a)** Határozzuk meg az egyik, 600 kg tömegű lánctalp mozgási energiáját!
**b)** Mennyi a lánctalp mozgási energiája a traktorvezető szerint?

**19.** A CD-lemez átmérője 12 cm, tömege 15 gramm. A gyors adatátvitel miatt a forgási fordulatszáma akár $10\ 000\ \frac{1}{\text{min}}$ is lehet. Mekkora a CD-lemez forgási energiája?

**20.** A mikrobarázdás hanglemez tömege 140 gramm, átmérője 30 cm. Mekkora munka árán lehet a mikrobarázdás hanglemez percenkénti fordulatszámát $33\frac{1}{s}$-ról $45\frac{1}{s}$-ra gyorsítani?

**21.** Azonos sugarú és tömegű vékony falú hengert, tömör hengert és gömböt azonos sebességgel hozunk mozgásba úgy, hogy a testek tisztán gördüljenek. Melyik test mozgásba hozatala kívánta a legtöbb, illetve a legkevesebb munkát?

**22.** Kevesen tudják, hogy Isaac Newton készített először macskaajtót. Mekkora szögsebességgel kell indítani a felültengelyezett, merev, homogén fémlapból készült, *l* magas ajtót, hogy teljesen felcsapódjon?

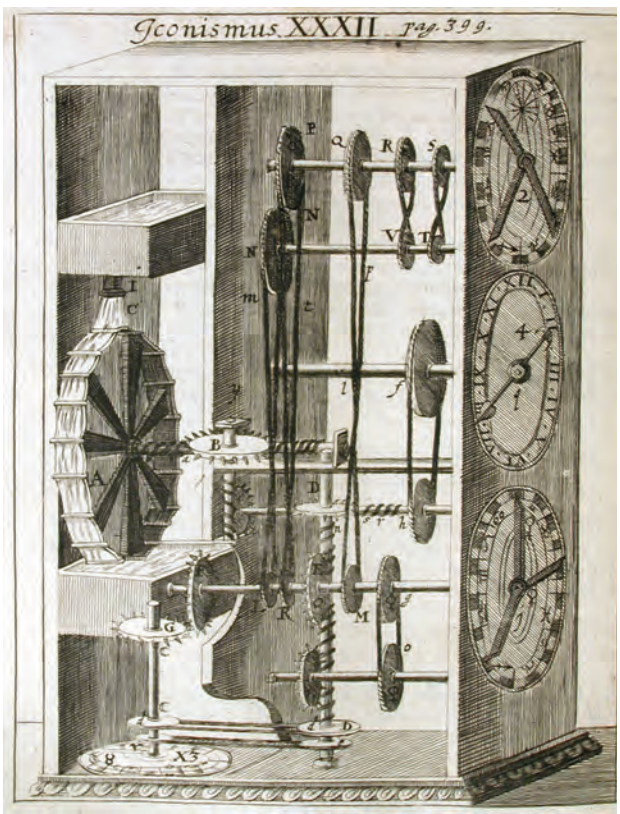
## ESSZÉFELADATOK

### Forgatónyomaték, forgómozgás

(Emelt szintű érettségi feladat, 2019)

*A hengerkerékben úgy van összekötve egy tengelye körül forgatható henger egy kerékkel, hogy a kettőnek tengelye összeesik, s a kerék a tengelyre függőleg áll. Ha ezen hengerkerék helyzete fekmentes, gerendelynek, ha függélyes, bálványnak nevezteték. Az erő a keréknek, a teher a hengernek körületén működik… A hengerkeréknek a közéletben nagy használata van. A szélmalom fő része a szárnyakra ható szél által forgatott tengely.*

*(Tarczy Lajos:* Természettan az alkalmazott mathezissel egyesülve – *Pápa, 1838)*




Ismertesse, hogyan kell meghatározni egy rögzített tengely körül forgatható merev testre ható erő forgatónyomatékát! Készítsen ábrát is!

Mutassa be a forgatónyomaték szerepét kiterjedt testek egyensúlya esetében!

Ismertesse a rögzített tengely körül forgó merev test mozgásának dinamikai leírását, a forgásállapot megváltozása és a forgatónyomaték kapcsolatát! Vesse össze a pontszerű testek egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgását leíró kinematikai összefüggéseket (út-idő, sebesség-idő), valamint a dinamikai egyenletet a forgómozgás hasonló egyenleteivel!

Mutassa be a szögsebesség, szöggyorsulás, tehetetlenségi nyomaték, a perdület és a forgási energia fogalmát, jelét, mértékegységét!

Egy piruettező korcsolyázó behúzza két karját, pörgése felgyorsul. Mutassa be, hogyan változik a korcsolyázó szögsebessége, tehetetlenségi nyomatéka és a perdülete a mutatvány során!

# IX. Gravitáció és Naprendszer





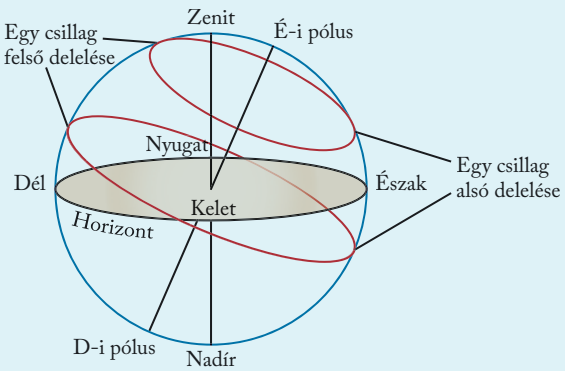


# 1. Az égbolt vizsgálata

EMLÉKEZTETŐ

## A Föld és az égbolt forgása

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az égre feltekintve a világegyetem a Földről szabad szemmel nézve megfigyelhető égitestjeit úgy érzékeljük, mintha egy hatalmas éggömbön, **égbolton** helyezkednének el, azon mozognának. Az éggömbből mindig csak a fejünk feletti felét látjuk. Az éggömb legmagasabb pontja a **zenit**, az ég és a Föld találkozása alkotta körvonal a **horizont**, magyarul a látóhatár.

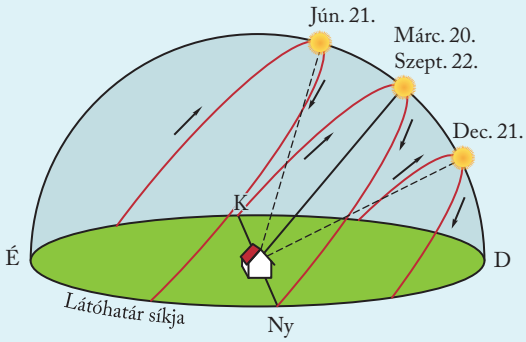



*A Föld és az égbolt*

## A Nap járása és az évszakok az északi féltekén

Az égbolt az állócsillagokkal együtt 23 óra 56 perc alatt körbefordulni látszik az égbolt tengelye körül, melynek északi pólusa közvetlen közelében éppen a **Sarkcsillag** látható.

A Nap az égbolton 24 óra alatt jár körbe. Napi járása egyben az **égtájakat** is kijelöli: keleten kel, délen delel (azaz itt tartózkodik a legmagasabban az égbolton), és nyugaton nyugszik. Ezenkívül a Napnak van egy évi (365,24 napos) járása is, delelési magassága ingadozik, amely az **évszakok** változását adja. A téli napforduló idején a Nap későn kel délkeleten, alacsonyan delel, és korán nyugszik délnyugaton. Ilyenkor legrövidebb a nappal és leghosszabb az éjszaka. A nyári napforduló idején a Nap korán kel északkeleten, magasan delel, és későn nyugszik északnyugaton. Ilyenkor leghosszabb a nappal és legrövidebb az éjszaka. Nap-éj egyenlőség idején, tavasszal és ősszel a Nap pontosan keleten kel, és pontosan nyugaton nyugszik. Ilyenkor a 12 órás nappalt 12 órás éjszaka követi.




*A Nap járása téli napfordulókor, nap-éj egyenlőség idején és nyári napfordulókor*

## Geocentrikus és heliocentrikus világkép

Az égitestek mozgásának egységes, rendszerszintű leírását adta Klaudiusz Ptolemaiosz ókori görög csillagász a 2. században. **Geocentrikus világképének** alapgondolata: a világmindenség közepe nagyon közel van a Föld középpontjához, amely körül körpályán keringenek – a szabad szemmel is látható – égitestek: a Hold, a Merkúr, a Vénusz, a Nap, a Mars, a Jupiter és a Szaturnusz.

Ennek a modellnek a hibáit gondolta orvosolni Nikolausz **Kopernikusz** lengyel csillagász a 16. század első felében. Megalkotta a **heliocentrikus világképet**, amely szerint a világmindenség középpontjában a Nap áll, és körülötte *körpályán keringenek a bolygók*, köztük a Föld is. Az állócsillagok mozdulatlanok, a napi mozgásuk a Föld forgásának következménye.

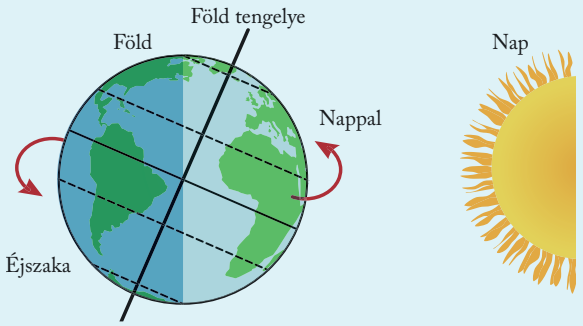
A két modell alapvető állításait a következő táblázat tartalmazza.

| Az állítás tárgya | Geocentrikus világkép | Heliocentrikus világkép |
|---|---|---|
| Föld | mozdulatlan | kering a Nap körül és forog a tengelye körül |
| Nap | körpályán kering | mozdulatlan |
| Hold | kering a Föld körül | kering a Föld körül |
| Bolygók | körpályán keringenek | körpályán keringenek |
| Állócsillagok, égbolt | körbefordul | mozdulatlan |
| Égitestek pályája | körpályák közös középponttal | körpályák eltérő, egymáshoz közeli középpontokkal |
| A világ közepe | nagyon közel a Föld középpontjához, gyakorlatilag a Föld | a Nap |

## A Föld tengely körüli forgása

A Föld saját tengelye körül egy nap alatt fordul körbe, pontosabban a Föld **tengely körüli forgásideje 23 óra 56 perc**. Földi nézőpontból úgy érzékeljük, mintha az állócsillagok a Föld körül járnának 23 óra 56 perces keringési idővel. A forgás miatt érzékelhető az égitestek keletről nyugatra tartó átvonulása az égbolton, a forgás határozza meg az égtájakat, a nappalok és az éjszakák váltakozását. Emiatt észleljük a **Sarkcsillag** mozdulatlanságát és állandó magasságát a horizont felett.

Távoli nézőpontból leírva a Föld forgását, azt mondhatjuk, hogy a forgástengely a Földön kijelöli az Északi- és a Déli-sarkot, valamint az Egyenlítő körvonalát. A forgástengely majdnem pontosan a Sarkcsillag irányába mutat, és a perdületmegmaradás törvénye értelmében ezt az irányt az idő múlásával meg is tartja.

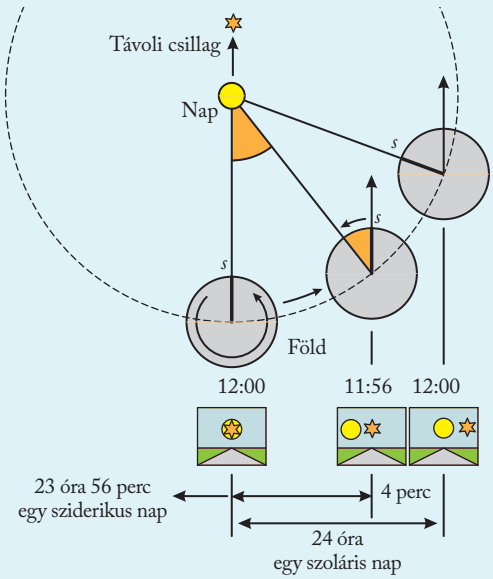



*Az Északi-sark irányából nézve a Föld az óramutató járásával ellentétes irányban forog a tengelye körül*

## A nap mint időmértékegység kétféle értelmezése

A Föld egy év alatt kerüli meg a Napot, pontosabban a **Föld** Nap körüli **keringési ideje 365,256 nap**. A földi megfigyelő a Föld Nap körüli keringését úgy érzékeli, mintha a Nap lassabban járná égi útját, mint az állócsillagok. Az állócsillagok körülfordulását 23 óra 56 perc-nek méri, a Nap körülfordulását 24 órának. A naponta 4 percet lemaradó Nap az égbolt csillagképei között vándorol, bejárva 13 csillagképet, amit állatövi csillagképeknek vagy zodiákusnak nevezünk, míg visszaér kezdeti pozíciójába. Ezt a látszólagos, csillagok közti vándorutat **ekliptikának** nevezik.

Távoli megfigyelőként úgy értelmezhetjük a jelenséget, hogy amíg a Föld 23 óra 56 perc alatt 360°-ot fordulva újra ugyanannak az állócsillagnak az irányába áll, addig Nap körüli pályáján is halad. Így a 360°-os körülfordulás után a Nap még nem ugyanabban a pozícióban helyezkedik el *(ld. ábrán)*. Ahhoz, hogy a Föld egy pontja a földforgás következtében legközelebb is ugyanolyan pozícióba kerüljön a Naphoz képest, még tovább kell fordulnia, és ehhez 4 perc szükséges.

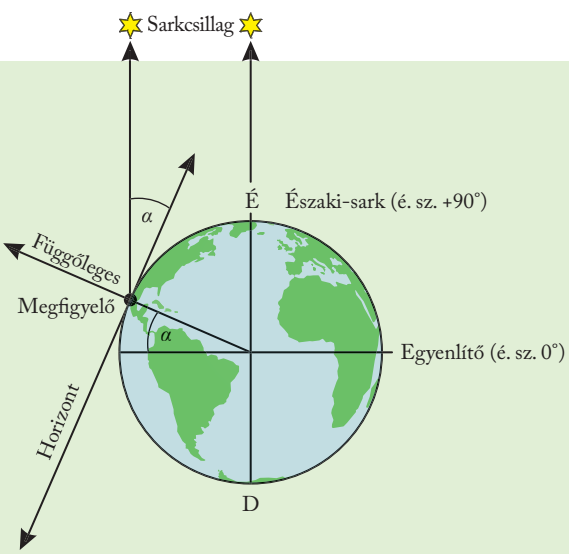



*A nap mint időmértékegység különböző értelmezése*

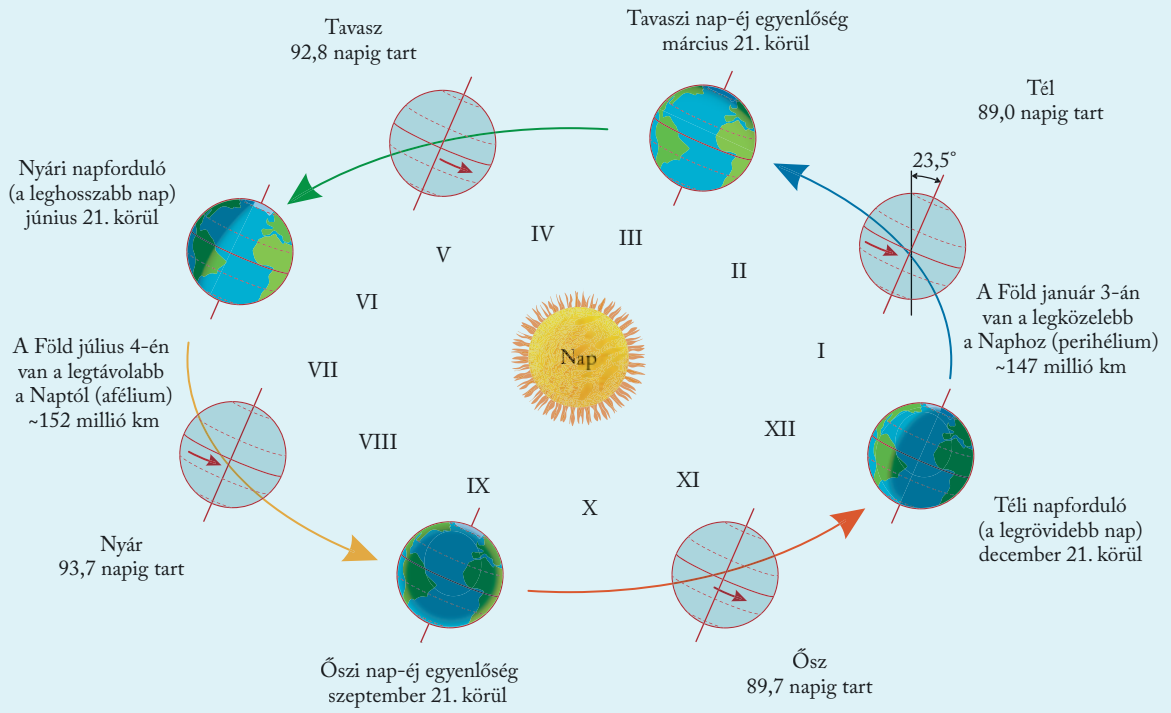
**ALKALMAZÁSOK**

## A Sarkcsillag

A Sarkcsillag égi pozíciója összefügg a megfigyelő földi helyzetével. Az Északi-sarkon álló megfigyelő a feje felett az égbolt közepén, a zeniten látja a Sarkcsillagot, míg az Egyenlítőn szemlélő a látóhatáron, azaz a horizonton. Az ábrán látható, hogy a megfigyelő földrajzi szélessége megegyezik a Sarkcsillag horizont feletti magasságával. Budapest az északi szélesség 47,5° szélességi körön fekszik, így Budapestről nézve a Sarkcsillag északi irányban a horizont felett mindig 47,5° magasságban található.




*A Sarkcsillag égi pozíciója a megfigyelő földrajzi szélességű helyén*




*A Föld forgástengelyének helyzete és az évszakok váltakozása a keringési pálya különböző pontjaiban*

## A Föld tengelyferdesége és az évszakok váltakozása

A Föld forgástengelye és keringési síkja nem merőleges egymásra. A merőlegestől való eltérést tengelyferdeségnek nevezzük. A **Föld tengelyferdesége 23,5°**. A földi megfigyelő ezt úgy érzékeli, hogy az év folyamán a Nap égi útja és delelési magassága folyamatosan változik. Az északi féltekén lévő megfigyelő télen rövid nappalokat és alacsony delelést lát, míg nyáron hosszú nappalokat és magas delelést.

Állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből a megfigyelő azt látja, hogy az év folyamán a Föld hol az északi, hol pedig a déli féltekéjét fordítja inkább a Nap felé. Ezzel magyarázható az évszakok kialakulása.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Budapestről nézve milyen magasan delel a Nap a téli és a nyári napforduló, valamint nap-éj egyenlőség idején?

### MEGOLDÁS

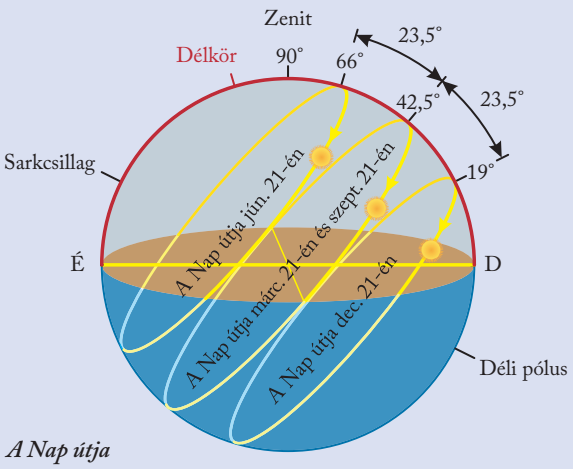
Nap-éj egyenlőség idején a Földet a Nappal összekötő egyenes merőleges a Föld forgástengelyére. Ekkor a földi megfigyelő a Sarkcsillagot Napot égi útjával pontosan 90°-os szöget bezáró irányban látja.

Budapesten a Sarkcsillag északi irányban a horizont felett 47,5° magasan van, ehhez képest a Nap delelése 90°-kal több, azaz 137,5°, ami déli irányból mérve 42,5° a horizont felett.

Napfordulók idején a Földet a Nappal összekötő egyenes már nem merőleges a forgástengelyre, az eltérés 23,5°.

Nyáron a Nap delelése a 47,5°-hoz képest 66,5°-kal több (90° – 23,5°), azaz 114°, ami a déli irányból mérve 66° a horizont felett.

Télen hasonló számítással 47,5° + 90° + 23,5° = 161°, ami a déli irányból mérve 19° a horizont felett.



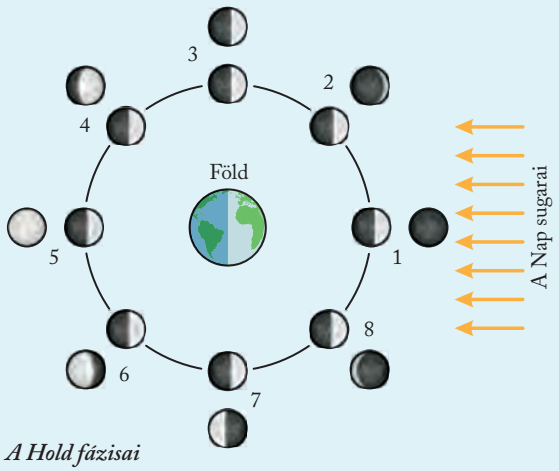

*A Nap útja*

## A Hold

**A Hold a Föld körül keringő égitest.** A Földtől való távolsága 384 000 km, a Föld átmérőjének 30-szorosa. Átmérője a Föld átmérőjének negyede, 3476 km.

### A Hold keringése a Föld körül

A Hold a Föld körül 27,3 nap alatt járja be pályáját. A földi megfigyelő a Föld forgásának és a Hold keringésének összhatásaként azt érzékeli, hogy a Hold a Naphoz hasonlóan keleten kel, délen delel és nyugaton nyugszik, égi járása az égbolton lassabb a Napnál (24 óra 49 perc). A Hold keringése során fázisokat mutat.




*A Hold fázisai*

A Hold fázisa, vagyis az, hogy a Földtől látszó holdkorong mekkora részét világítja meg a Nap, a három égitest kölcsönös helyzetétől függ.

**Újhold** idején a Földdel szemközti félteke sötét (*ld. ábrán* (1) *eset*).

Ezt követően a fázis a következő fokozatokon megy át: holdsarló (2), első negyed (3).

A **telihold** (*ld. ábrán* (5) *eset*) idején az égbolton a Hold Föld felé forduló felszínét teljes egészében látjuk. Telihold idején napnyugtakor kel a Hold, és napkeltekor nyugszik le.

A teliholdat követi az utolsó negyed (7) és az újhold felé közeledve a sarló (8).

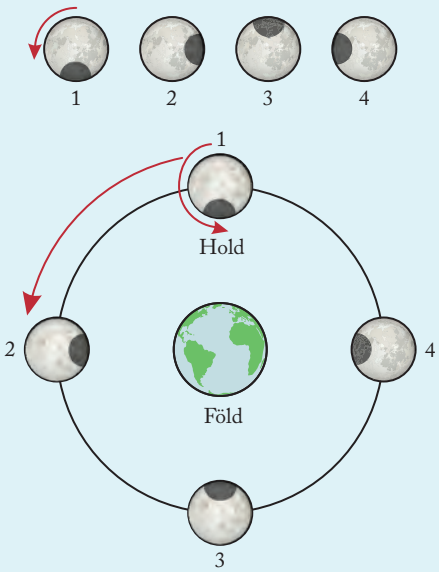


*A Hold fázisai*

*A fázisváltozás periódusa 29,5 nap. Ez alapján alakították ki a naptárakban a hónapot.*

Távoli megfigyelőként azt láthatjuk, hogy míg a Hold a Föld körül az állócsillagokhoz képest egyszer körbejár (27,3 nap), addig további, mintegy két nap szükséges ahhoz, hogy újból a Naphoz legközelebbi pozíciójába kerüljön (29,5 nap). Keringése alatt a Föld felőli oldalából csak annyi világos (azaz annyit látunk), amennyit a Nap meg tud világítani.

Újhold idején a Földhöz képest a Nap és a Hold közel egy irányban vannak, teliholdkor a Nap és a Hold a Föld átellenes oldalán helyezkedik el.




*A Hold egy Föld felé eső pontja mindig a Föld felé tekint, vagyis a Holdnak mindig ugyanazt az oldalát látjuk*

### A Hold tengelyforgása

A Hold saját tengelye körül 27,3 nap alatt fordul körbe, ez pontosan megegyezik a Föld körüli keringési idejével. Ezt a szinkronizálódott mozgást **kötött keringésnek** nevezzük.

Ez azt jelenti, hogy a Hold felszínének egy pontja egy teljes tengelyfordulat alatt 360°-os fordulatot tesz meg. A Hold ugyanannyi idő alatt kerüli meg a Földet, mint amennyi idő alatt a tengelye körül megfordul, vagyis egy Föld felé eső pont mindig a Föld felé fog tekinteni.

Egy holdi megfigyelő a Földet mindig az égbolt azonos helyén látja, de nem mozdulatlanul, mert érzékelné a forgását.

### Nap- és holdfogyatkozások

A Hold keringési síkja nem esik egybe a Föld keringési síkjával, hanem **5,15°-os szöget zárnak be egymással**. A földi megfigyelő ezt úgy érzékeli, hogy a Hold csillagképek közti vándorlását a Nap csillagképek közti vándorútjának közelében látja, attól nem több, mint

5,15°-os eltéréssel. Egy távoli megfigyelő azt látná, hogy a Hold – keringése során – hol a Föld keringési síkja fölött, hol pedig alatta tartózkodik. A perdületmegmaradás törvénye értelmében a Hold keringésének tengelye megtartja irányát, így időnként előfordul olyan eset, amikor a Nap–Föld–Hold-rendszer pontosan egy vonalba kerül. Ilyenkor tapasztalhatunk fogyatkozásokat, ahogyan azt a következő ábrán is láthatjuk.

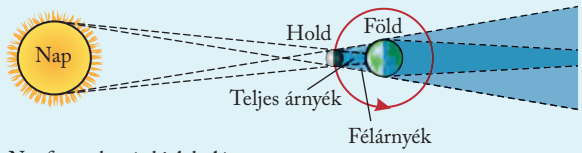
Ha keringése közben a Hold akkor kerül a két pályasík metszésvonalába, amikor a metszésvonal éppen a Napot is keresztezi, akkor a három égitest egy vonalba kerül.

A Nap és a Hold égbolton látszó mérete szinte pontosan egyforma.

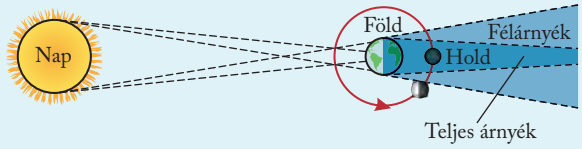
**Napfogyatkozáskor** a Hold kitakarja a Nap fényét a földi megfigyelő elől. Telihold idején, amikor a Nap és a Hold az égbolt közel átellenes pontjain vannak, előfordul, hogy a Föld árnyékot vet a Holdra, ezáltal **holdfogyatkozás** jön létre.

**Teljes napfogyatkozás** esetén a távoli megfigyelő úgy látja, hogy a Hold a Nap és a Föld közé kerül, és a Hold árnyékot vet a Föld egy kis területére. Az ezen a területen lévő földi megfigyelő ezt úgy érzékeli, mintha a Nap az égen utolérte volna a lassabban járó Holdat, ami ilyenkor csakis újhold lehet, és a Hold kitakarja a Napot.

**Holdfogyatkozás** esetén a távoli megfigyelő úgy látja, hogy a Hold éppen a Föld Nappal átellenes pontjába kerül, és a Föld árnyékot vet a Holdra. A földi megfigyelő ezt úgy érzékeli, mintha a telihold egy időre elvesztené a fényét. Az alábbi ábrából az is kiderül, hogy a két fogyatkozás leghamarabb két hét eltéréssel követheti egymást (újhold utáni teliholdkor vagy telihold utáni újholdkor).

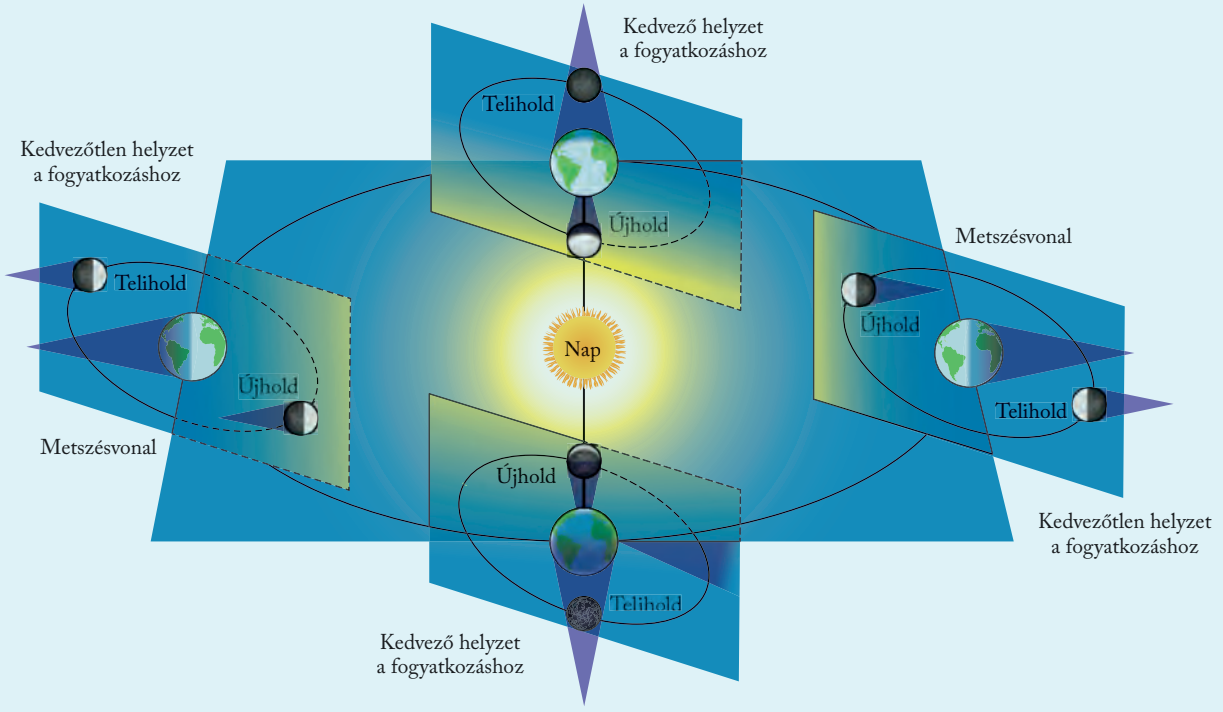


Napfogyatkozás kialakulása



Holdfogyatkozás kialakulása

*A teljes és részleges nap- és holdfogyatkozás*



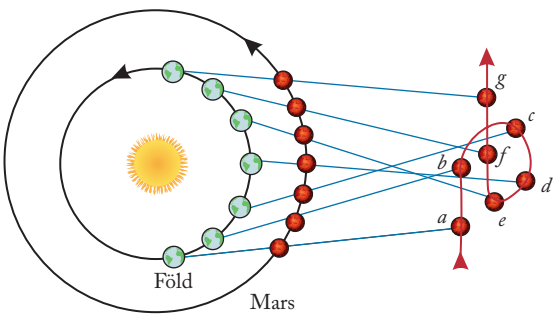
*A Hold és a Föld keringési síkjának helyzete és a fogyatkozások lehetősége*

## A bolygók keringése, fedések

A bolygók a Nap körül keringenek. Keringési síkjuk kevéssel tér el egymástól, szinte egy síkban keringenek. A földi megfigyelő úgy érzékeli, hogy a bolygók égi útja a Nap és a Hold égi útját követi, keleten kelnek, délen delelnek, nyugaton nyugszanak. A Merkúr és a Vénusz kering legközelebb a Naphoz, a Föld pályavonalának belsejében találhatók. Ezek a *belső bolygók* a Nap és a Föld közé is kerülhetnek. A földi megfigyelő azt látja, hogy a belső bolygók mindig a Nap közelében lesznek láthatók, tehát napkelte előtt és napnyugta után, amikor a Nap fénye nem nyomja el a bolygók láthatóságát. Ezért is nevezte a népnyelv a Vénuszt Esthajnalcsillagnak. Ahogy a Holdnak, úgy a belső bolygóknak is fázisai láthatók. Megfelelően védve szemünket, láthatjuk időnként elvonulni a belső bolygókat a Nap előtt.

A Mars, a Jupiter, a Szaturnusz, az Uránusz és a Neptunusz a Föld pályavonalán kívül kering, ezeket *külső bolygóknak* nevezzük. Keringési idejük egyre nagyobb, ahogy egyre messzebb találhatók a Naptól. A földi megfigyelő úgy látja, hogy a külső bolygók a Naptól teljesen eltávolodhatnak, azonban égi pályájukon az állócsillagok háttere előtt időnként mintha visszafelé haladnának. Ezt a látszólagos mozgást **retrográd mozgásnak** nevezzük, és ebből származik a bolyongó, bolygó elnevezés is.

A távoli megfigyelő ezt a látszólagos bolyongást az égbolton a gyorsabb keringésű Föld és a lassúbb keringésű külső bolygó viszonylagos mozgásával tudja magyarázni, ahogy az ábrán is látható. A retrográd mozgás a belső bolygókra is jellemző.




*A Föld pályáján kívüli bolygók a Földről nézve retrográd mozgást végeznek*

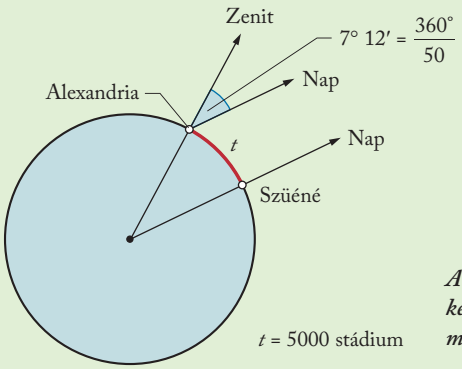


*A Mars retrográd mozgásának érzékelése az égbolton*

## ALKALMAZÁSOK

### A Föld mérete – Eratoszthenész mérése

*Eratoszthenész* (i. e. 276–194) meghatározta a Föld méretét. Megfigyelte, hogy a nyári napfordulón, amikor a Nap a legmagasabb pontján, a zeniten áll Szüénében (ma Asszuán), megvilágítja a legmélyebb kút fenekét is. Ugyanezen a napon Alexandriában a fénysugarak beesési szöge 7 fokkal és 12 perccel tért el a függőlegestől. Ez egyben a két városnak a Föld középpontjától mért szögtávolsága is. Ebből az következik, hogy a **Föld kerülete $\frac{360^\circ}{7^\circ\,12'}$ = 50-szer akkora, mint Szüéné és Alexandria távolsága**. Eratoszthenész a karaván vezetőktől tudta a két város távolságát, ebből az adatból kiszámítva a Föld kerületére **39 700 km** adódott.




*A Föld kerületének meghatározása*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen szélességi körön áll az a megfigyelő, aki a Sarkcsillagtól legfeljebb 30° távolságra lévő állócsillagok alkotta csillagképeket sosem látja lenyugodni, azok mindig a horizont felett tartózkodnak?
2. A nap-éj egyenlőség és a napfordulók idején milyennek látja egy megfigyelő a Nap égi útját
   **a)** az Egyenlítőn,
   **b)** a térítőkön,
   **c)** a sarkkörökön,
   **d)** a sarkokon állva?
3. Hol keressük a Holdat az égbolton közvetlenül napnyugta után
   **a)** újholdkor?
   **b)** első negyed idején?
   **c)** teliholdkor?
   **d)** utolsó negyed idején?
4. A Vénusz fázisait bemutató felvételsorozaton a televénusz kisebb méretűnek látszik, mint a sarlós Vénusz. Mi lehet ennek a magyarázata?



# 2. Az égitestek mozgása

EMLÉKEZTETŐ

## A Naprendszer és tagjai

### A Nap és a Naprendszer bolygói

A 17. században kezdődő távcsöves megfigyelések egyre több bizonyítékot szolgáltattak arra, hogy az égbolton látható Nap, Hold és a bolygók egy rendszert alkotnak.

A **Naprendszer** központi égiteste a **Nap**, melynek mérete a Föld méretének mintegy 109-szerese, és a Naprendszer össztömegének 99,86%-át teszi ki.

A Naprendszeren belül a **csillagászati egység** távolságegységet használjuk gyakran. (Rövidítése: CsE.) Egy csillagászati egység egyenlő a közepes Nap–Föld-távolsággal, azaz kb. 149,6 millió km, kerekítve $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

**Bolygó az az égitest, amely a Nap körül kering, elegendően nagy tömegű ahhoz, hogy kialakuljon a közel gömb alak, és tisztára söpörte a pályáját övező térséget.**

A Naprendszer része a nyolc bolygó, melyek közel gömb alakúak, és anyagukat tekintve két csoportba soroljuk őket:

– **kőzetbolygók** (Merkúr, Vénusz, Föld, Mars) és
– **gázbolygók** (Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz).

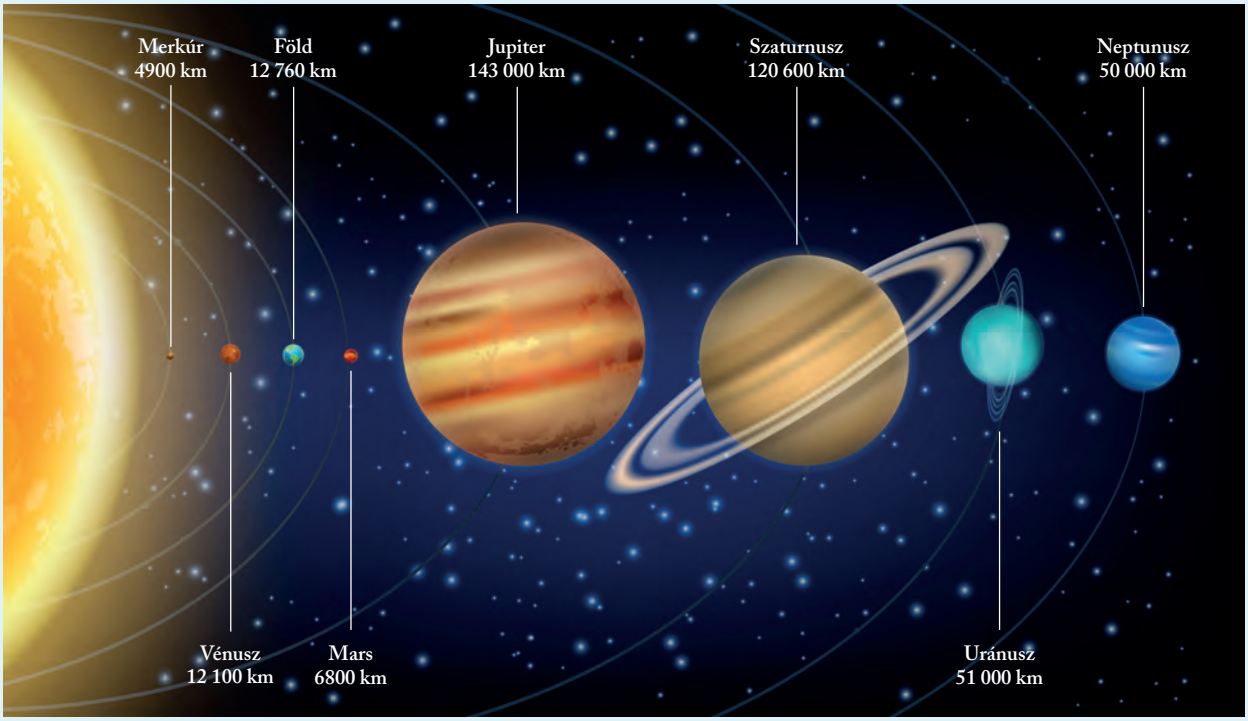
A bolygóknak van légkörük, kivéve a Merkúrt, erről kráteres felszíne árulkodik. A Földnek egy, a Marsnak kettő, a gázbolygóknak sok holdja van.

### A Naprendszer egyéb égitestjei

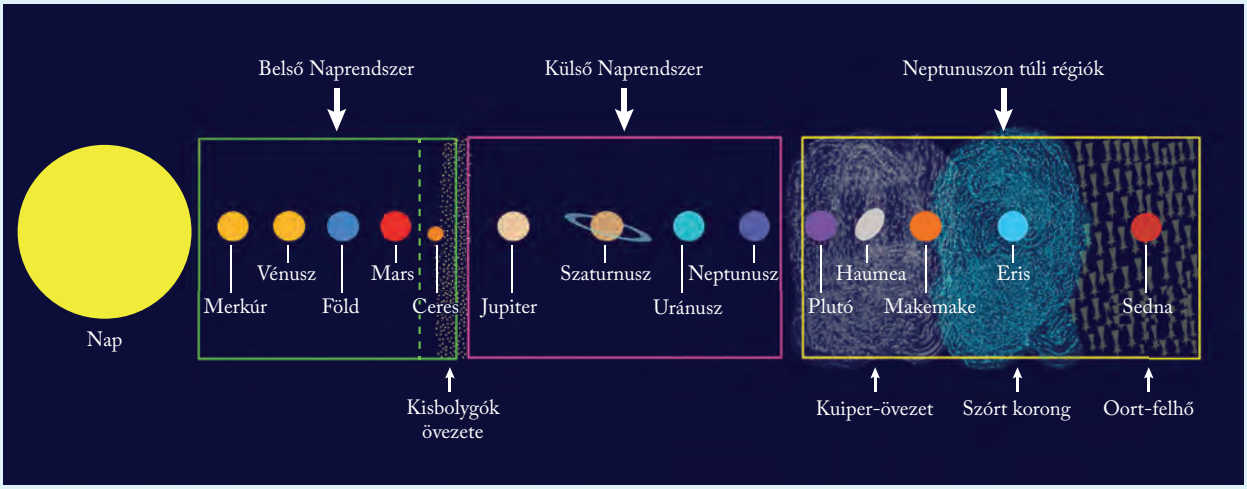
A Naprendszerben a bolygókon kívül számos törpe- és kisbolygó, valamint üstökös és meteor kering.

**Törpebolygó** az az égitest, amely a Nap körül kering, elegendően nagy tömegű ahhoz, hogy kialakuljon a közel gömb alak, de nem söpörte tisztára a pályáját övező térséget. Legismertebb a Ceres (a Mars és a Jupiter között kering), míg a Neptunusz pályáján túl kering a Plútó, az Erisz, a Makemake és a Haumea.

**Kisbolygó** az az égitest, amely a Nap körül kering, szabálytalan alakú (tömege kicsi ahhoz, hogy kialakuljon a közel gömb alak), és nem képes tisztára söpörni a pályáját övező térséget. A kisbolygók a Mars és a Jupiter között, illetve a Neptunuszon túl található Kuiper- (ejtsd kájper) övezetben keringenek.




*A Naprendszer bolygói és azok átmérője*



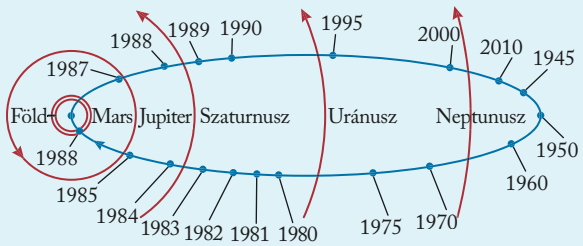

*A Naprendszer régiói és övezetei*

**Az üstökösök, meteoritok**

Az üstökösök naprendszerbeli égitestek, melyek a Nap körül hosszú, elnyújtott pályán keringenek. Az üstökösmagok lazán összekapcsolódó porból, jégből és szikladarabokból állnak. Az üstökösök magjának mérete 100 m és 50 km között mozog.

A Nap közelébe kerülve az üstökös felmelegszik, és felszíni anyagának egy része gázzá szublimál. A szublimált gázból ritka légköre lesz, amit **kómának** nevezünk. A Nap közelébe érve a kóma elnyúlik, a Nappal ellentétes irányba, ez a **csóva**.

Legismertebb üstökös a Halley-üstökös, keringési ideje 75 év.




*A Halley-üstökös pályája során a Naprendszer külső és belső tartományán is áthalad*

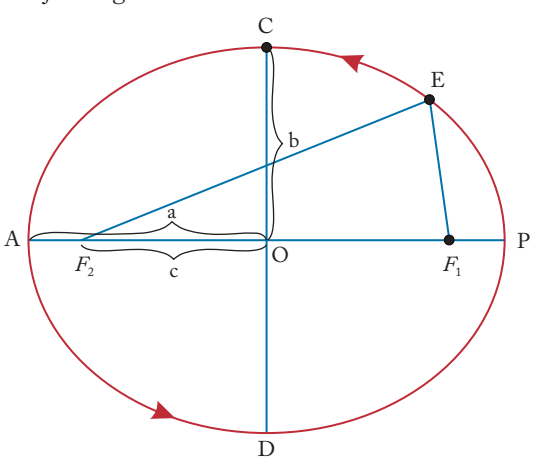
A kisbolygóknál kisebb apró kődarabok, porszemek összefoglaló neve **meteorid**. Amikor a meteoridok belépnek a légkörbe, és a légkörben látványos fényjelenséggel elégnek, akkor ezeket **meteoroknak** nevezzük. Ha egy-egy óriásmeteor átjut a légkörön, és leér a Föld felszínére, akkor ezt **meteoritnak** nevezzük. A meteorok rajokba szerveződnek, legismertebb közülük az augusztus 11. körül érkező Perseidák meteorraj.

## Kepler I. törvénye

Mind a geocentrikus, mind a heliocentrikus világkép egyik jelentős hibája az volt, hogy az égitestek mozgását egyenletes körmozgások segítségével kívánta leírni. 1609-ben **Johannes Kepler** több évtizedes Mars-megfigyelés eredményeit elemezve rájött, hogy a bolygók nem körpályán, hanem ellipszispályán mozognak. Első törvénye szerint:

**A bolygók ellipszis alakú pályákon keringenek, amelyeknek egyik fókuszpontjában a Nap áll.**

Az ábrán egy ellipszis látható, ezen megfigyelhetők a tulajdonságai.




*Az ellipszis és részei*

Egy **ellipszis** két szimmetriatengellyel rendelkezik. Ezek közül az AP = 2*a* szakasz az ellipszis **nagytengelye**, a CD = 2*b* szakasz a **kistengelye**.

A nagytengely felét *a*-val, a kistengely felét *b*-vel szokás jelölni. Az ellipszis nagytengelyén szimmetrikusan két nevezetes pont, az $F_1$ és $F_2$ **fókuszpont** található, az ezek közötti távolság felét *c*-vel szokás jelölni.

*Ha az ellipszis bármely E pontját a két fókuszponttal összekötjük, akkor ezen szakaszok összege mindig 2a nagyságú* lesz. Ez könnyen igazolható, ha *E*-nek az A vagy P pontot választjuk. Ugyanakkor, ha *E*-nek a C vagy D pontot választjuk, akkor két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk, melynek befogói *c* és *b*, átfogója pedig a 2*a* fele, azaz *a*. Ezzel szintén könnyen belátható az ellipszisek másik tulajdonsága: $a^2 = b^2 + c^2$.

Az ellipszisek alakját, lapultságát az $e = \frac{c}{a}$ arányszámmal jellemezzük, és **excentricitásnak** nevezzük. Ha $e = 0$, akkor az ellipszis körré fajul. A bolygópályák excentricitása nagyon csekély, 0,006 és 0,2 közé esik, tehát majdnem kör alakúak. Ezért a bolygók elliptikus mozgását körmozgással helyettesíthetjük.

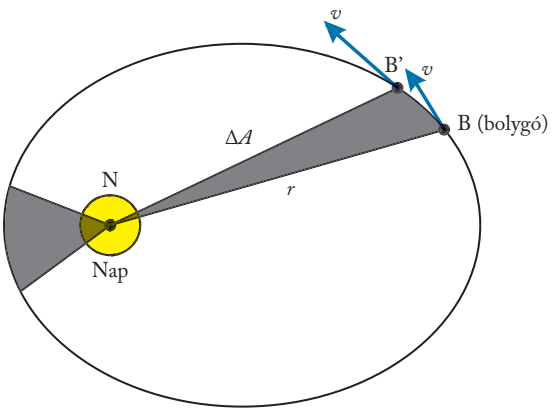
Kepler a felfedezéséhez azt is hozzátette, hogy a Nap az egyik fókuszpontban található. Ez azt is jelenti, hogy a bolygó távolsága a Naptól változik a keringése során. Két nevezetes helyzete a **napközel** (P: perihélium) és a **naptávol** (A: afélium). Naptávolban $a + c$, napközelben $a - c$ a köztük lévő távolság, ezért a **bolygó Naptól mért közepes távolsága** a fél nagytengely (*a*) hosszával egyenlő.

## Kepler II. törvénye

Kepler elemzése egy másik felfedezést is hozott. A mérési adatokból nemcsak a pálya ellipszis alakja jött ki, hanem az is, hogy a bolygó mozgása nem is egyenletes. Pontosabban a második törvénye szerint:

**A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.**

A törvény szemléltetésére tekintsük ezt a nem méretarányos ábrát.




*Kepler II. törvénye*

## Kepler II. törvénye és a perdületmegmaradás törvénye

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Vizsgáljuk meg részletesebben ezt a súrolt területet! Ha kis $\Delta t$ időtartamot választunk, és a bolygók excentricitása is kicsi, akkor az ellipszisben az *r* vezérsugár által $\Delta t$ idő alatt súrolt $\Delta A$ területet közelíthetjük egy körcikk területéhez. A körcikk területe:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot i,$$

ahol az *i* a $\Delta t$ idő alatt befutott ívhossz. Ez alatt a rövid idő alatt a bolygó sebességének nagyságát változatlannak tekinthetjük, és *v*-vel jelöljük. A sebesség vezérsugárra merőleges vetületével kifejezett ívhossz behelyettesítésével kapjuk:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v_{\perp} \cdot \Delta t$$

Kepler II. törvénye értelmében a bolygó bármely pozíciójában

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v_{\perp} = \text{állandó} \qquad (1)$$

A törvényből következik, hogy a bolygó a Naptól távolabb kisebb sebességgel mozog, mint a Naphoz közelebb, sőt naptávolban a legkisebb a sebessége ($v_{min}$), míg napközelben a legnagyobb ($v_{max}$). Mivel napközelben és naptávolban a bolygó sebessége merőleges a vezérsugárra, ezért a sugárra merőleges vetületük önmaguk, így igaz rájuk, hogy:

$$r_{min} \cdot v_{min} = r_{max} \cdot v_{max}$$

Az (1) egyenletet kettővel és a bolygó *m* tömegével megszorozva kapjuk:

$$m \cdot r \cdot v_{\perp} = \text{állandó}$$

A sebesség helyett $\omega$ szögsebességet használva:

$$m \cdot r \cdot r \cdot \omega = m \cdot r^2 \cdot \omega = \text{állandó}$$

Az $m \cdot r^2$ szorzat a bolygó mint a Nap körül keringő pontszerű test tehetetlenségi nyomatéka, így azt kaptuk, hogy

$$\boldsymbol{\Theta \cdot \omega = N = \text{állandó}},$$

vagyis Kepler II. törvénye a **perdületmegmaradás törvényét** rejti magában.

A Föld nem egyenletes keringésének egyik érzékelhető következménye az, hogy az északi féltekén 5 nappal hosszabb a nyár, mint a tél. Ugyanis a Föld január 3-án van napközelben és július 3-án naptávolban, így télen a keringése gyorsabb, mint nyáron.

## Kepler III. törvénye

Az első két törvény felfedezése után Kepler a többi addig ismert bolygó pályaadatait is elemezve, eljutott harmadik törvényéhez:

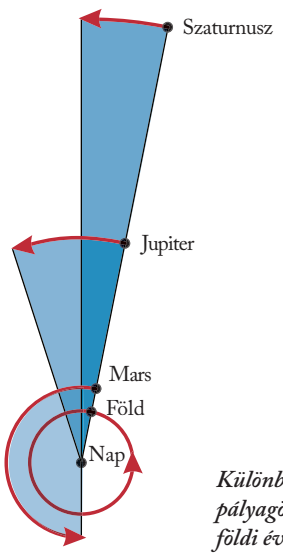
**A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a bolygópályák közepes Nap-távolságainak köbei.**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

A törvényt a *Világ harmóniája* című művében tette közzé. Következtetése szerint a Nap körül keringő bolygók keringési idejük aránya és közepes Nap-távolságuk aránya négyzetes-köbös összefüggést mutat. Az összefüggést átrendezve azt is mondhatjuk, hogy a Naprendszer bolygóira $\frac{T^2}{a^3}$ = állandó.

Mivel az összefüggés két bolygó azonos mennyiségeit hasonlítja össze, ezért a számítások során tetszőleges, de azonos mértékegységeket használhatunk.

Kepler a korábban felfedezett Galilei-holdak keringési idejét és a Jupitertől számított távolságukat is pontosan megmérte, majd kimutatta, hogy a III. törvény összefüggése érvényes a Jupiter és holdjai rendszerére is.




*Különböző bolygók pályagörbéje egy földi év alatt*

## A Kepler-törvények általánosítása

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

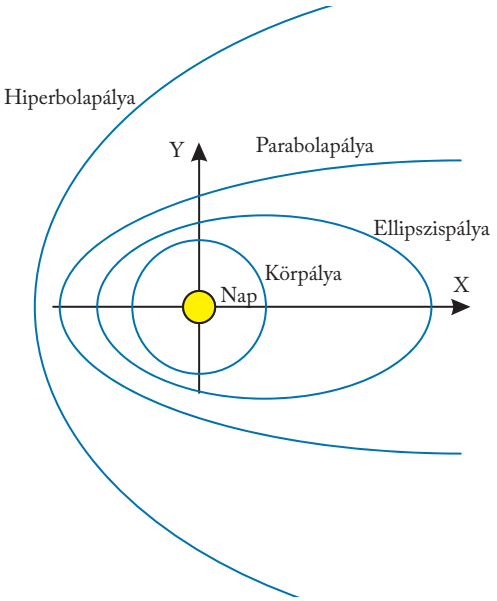
Kepler a törvényeiben a Nap körül keringő bolygók mozgását írta le, de már ő is felismerte, hogy törvényei érvényesek egy bolygó körül keringő holdakra is. A korábban felfedezett Galilei-holdak keringési idejét és a Jupitertől számított távolságukat is pontosan megmérte, majd kimutatta, hogy a III. törvény összefüggése érvényes a Jupiter és holdjai rendszerére.

**Kepler törvényei érvényesek minden (központi) égitest körül keringő égitestre, ha ezek tömege elhanyagolható a központi égitest tömegéhez képest.**

Kepler után Newton mutatta ki először egy üstökös pályaadatait elemezve, hogy a Kepler-törvények olyan üstökösökre is érvényesek, amelyeknek hosszan elnyúlt ellipszis alakú pályájuk van, sőt olyanokra is, melyek pályája parabola, esetleg hiperbola alakú. Utóbbi két esetben a mozgás nem periodikus, az égitest nem tér vissza többet a pályáján.

**A Kepler-törvények általánosíthatók avval a módosítással, hogy a központi égitest körül keringő égitestek pályagörbéje lehet kör, ellipszis, parabola és hiperbola alakú is.**

Kepler tapasztalati törvényei a heliocentrikus modellből egy nagy pontosságú és egyszerű Naprendszer-modellt alkottak, és ezek a törvények már nem bonyolult és hosszas számítással adtak pontos előrejelzést a bolygók égi helyzetéről. De a Kepler-törvények nem adtak magyarázatot a bolygómozgások okára. A magyarázatot jó ötven évvel később Newton gravitációs elmélete szolgáltatta.




*Lehetséges égitest-pályaalakok a Naprendszerben*

ALKALMAZÁSOK

## A műholdak mozgása

A Föld körül az 1960-as évek óta számos műhold keringett, és kering most is. Ha hajtóművüket nem használják, akkor a bolygó körül ellipszispályán keringenek. A Föld körül keringő műholdakra a Hold ismert adatai ($T$ = 27,3 nap és $a$ = 384 ezer km) segítségével alkalmazhatjuk Kepler III. törvényét. Nézzünk néhány példát!

### Keringés alacsony Föld körüli pályán

**Alacsony Föld körüli pályát** használó műhold például a Nemzetközi Űrállomás. Pályája szinte kör alakú, keringési ideje közel 1,5 óra. Kepler III. törvényét a Nemzetközi Űrállomásra és a Holdra felírva:

$$\frac{T_{\text{NŰ}}^2}{T_{\text{H}}^2} = \frac{a_{\text{NŰ}}^3}{a_{\text{H}}^3}$$

Felhasználjuk, hogy a Hold keringési ideje $T_{\text{H}}$ = 27,3 nap = = 655,2 h. Az adatokat órában és ezer km egységekben behelyettesítve:

$$\frac{1{,}5^2}{655{,}2^2} = \frac{a_{\text{NŰ}}^3}{384^3},$$

amelyből $1{,}74 \cdot 10^{-2} = \frac{a_{\text{NŰ}}}{384}$,

ahonnan $a_{\text{NŰ}} = 6{,}67$,

$a_{\text{NŰ}} = 6{,}67 \cdot 10^3$ km.

Tehát a Nemzetközi Űrállomás a Föld középpontjától 6670 km távolságra van, ami a Föld sugarát ($R$ = 6370 km) figyelembe véve a felszíntől mintegy 300 km magasan kering.

Határozzuk meg a Galileo műholdak keringési idejét!

### Keringés közepes Föld körüli pályán

**Közepes magasságú Föld körüli pályát** használnak a navigációs műholdak. Az Európai Unió új helymeghatározó műholdcsaládja, a Galileo 23 200 km-es magasságban kering.

A közepes Föld–Galileo-távolság 29 570 km, így Kepler III. törvényét a Galileo műholdra és a Holdra felírva:

$$\frac{T_{\text{Gal}}^2}{T_{\text{H}}^2} = \frac{a_{\text{Gal}}^3}{a_{\text{H}}^3}$$

Behelyettesítve: $\frac{T_{\text{Gal}}^2}{655{,}2^2} = \frac{29{,}57^3}{384^3}$,

amelyből $\frac{T_{\text{Gal}}}{655{,}2} = 0{,}0214$,

$T_{\text{Gal}}$ = 14 h.

Megkaptuk, hogy a Galileo navigációs műholdak keringési ideje a Föld körül 14 óra.

### Keringés geoszinkron és geostacionárius pályán

**Geoszinkron és geostacionárius pályát** használnak például a kommunikációs műholdak. Nevüket onnan kapták, hogy ezek a műholdak a Föld forgásával együtt keringenek, így mindig a Föld egy adott hosszúsági köre fölött találhatók. A **geostacionárius műholdak** pályája pontosan a földi Egyenlítő fölött van, a **geoszinkron műholdak** pályája ehhez képest kissé döntött.

Határozzuk meg a geostacionárius pályákon keringő műholdak Föld felszín feletti magasságát!

Kepler 3. törvénye szerint:

$$\frac{T_{\text{Geo}}^2}{T_{\text{H}}^2} = \frac{a_{\text{Geo}}^3}{a_{\text{H}}^3}$$

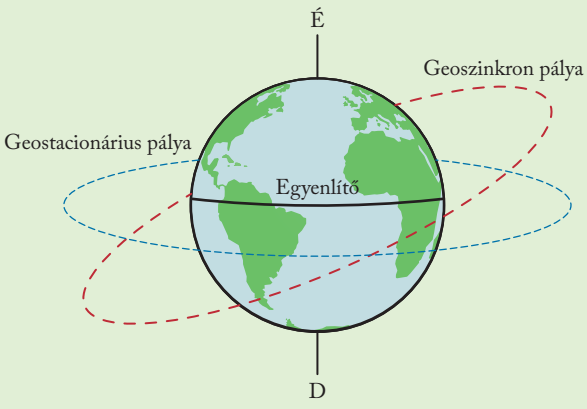
Az adatokat órában és ezer km egységekben behelyettesítve (felhasználjuk, hogy a Föld forgási ideje 23,93 óra):

$$\frac{23{,}93^2}{655{,}2^2} = \frac{a_{\text{Geo}}^3}{384^3},$$

amelyből $a_{\text{Geo}} = 42{,}24$,

vagyis $a_{\text{Geo}}$ = 42 240 km.

A geostacionárius műholdak a Föld középpontjától 42 240 km-re, a Föld felszínétől 35 870 km magasan keringenek a feladatuk ellátásához.




*A mesterséges holdakat rendeltetésüknek megfelelően különböző magasságú pályára állítják*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

A Szaturnusz első holdjait, rögtön kettőt, William Herschel fedezte fel 1789-ben. Az egyik, a Mimas, a mérések szerint Szaturnusz-közelben 181 600 km-re, Szaturnusz-távolban 189 400 km-re van bolygójától, keringési ideje 22,6 óra. A másik az Enceladus, melynek keringési ideje 1,37 nap.

**a)** Mennyire lapult a Mimas pályája?

**b)** Mekkora az Enceladus közepes Szaturnusz-távolsága?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$a_M - c_M = 181\,600$ km,
$a_M + c_M = 189\,400$ km,
$T_M = 22{,}6$ óra $= 0{,}942$ nap,
$T_E = 1{,}37$ nap.

---

*a)* $e_M = ?$
*b)* $a_E = ?$

**a)** A bolygóközeli és bolygótávoli adatokból:

$a_M - c_M = 181\,600$ km és $a_M + c_M = 189\,400$ km, melyekből összeadással:

$2\,a_M = 371\,000$ km, így

$a_M = 185\,500$ km, majd $c_M = 3900$ km.

A Mimas hold ellipszispályának lapultságát az excentricitás határozza meg:

$$e_M = \frac{c_M}{a_M} = \frac{3900\text{ km}}{185\,500\text{ km}} = 0{,}021$$

Ez a nullához közeli excentricitás azt jelenti, hogy a Mimas hold szinte kör alakú pályán kering a Szaturnusz körül.

**b)** Kepler III. törvényét felhasználva:

$$\frac{T_E^2}{T_M^2} = \frac{a_E^3}{a_M^3}$$

Az adatokat ezer km-ben és órában behelyettesítve:

$$\frac{1{,}37^2}{0{,}942^2} = \frac{a_E^3}{185{,}5^3},$$

amelyből $a_E = 2{,}38 \cdot 10^5$ km.

Az Enceladus közepes Szaturnusz-távolsága 238 ezer km-nek adódik.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. A földi évszakok oka a Föld tengelyferdesége. Sokan mégis a Naptól való távolságnak tudják be. Hány százalékkal hosszabb a Nap–Föld-távolság naptávolban, mint napközelben? A Föld excentricitása: $e = 0{,}0167$.
2. Sok üstökös a Naprendszer határvidékéről indulva kerüli meg a Napot, miközben akár jobban megközelíti a Napot, mint a Merkúr. Mit mondhatunk az üstökösök sebességéről utazásuk alatt?
3. Amíg egy bolygó csillaga körül éppen befejezi egy keringését és visszatér kezdeti pozíciójába, addig a csillagtól kilencszer messzebb lévő bolygó keringési idejének hány százalékát tette meg?
4. Egy geostacionárius műhold kering az Egyenlítő egy pontján álló megfigyelő feje felett. A műhold egy apró zavar következtében veszít valamelyest pályamagasságából. Hogyan érzékeli ezt a megfigyelő?

# 3. A gravitáció elmélete

**EMLÉKEZTETŐ**

## Newton-féle gravitációs erőtörvény

A **Newton-féle gravitációs erőtörvény,** más néven **tömegvonzás törvénye** szerint bármely két test között egy egymás felé irányuló, vonzó kölcsönhatás lép fel, melyet **gravitációs kölcsönhatásnak** nevezünk.

**A gravitációs vonzóerő egyenesen arányos a gravitációs kölcsönhatásban részt vevő testek tömegeivel, és fordítottan arányos a testek között levő távolság négyzetével.**

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

ahol $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}$.

**A $\gamma$ (gamma) állandót gravitációs állandónak nevezzük.**

A gravitációs kölcsönhatás következménye a Föld felszínén tapasztalható **gravitációs gyorsulás,** más néven **nehézségi gyorsulás**, melynek átlagértéke $g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$.

A gravitációs gyorsulás nagysága a földrajzi szélességtől és a tengerszint feletti magasságtól is függ. A gravitációs gyorsulás iránya közel a Föld középpontja felé mutat.

## A gravitáció elméletének fizikatörténeti vonatkozásai

A mozgások okáról szóló első részletesen kidolgozott elméletet **Arisztotelész** alkotta meg az i. e. 4. században. Csupán hétköznapi megfigyeléseire hagyatkozva, a mozgásokat két nagy csoportba sorolta: az égitestek mozgása és a földi dolgok mozgása. Ezt a két csoportot hívták később égi mechanikának és földi mechanikának. Arisztotelész elmélete szerint a kétféle mechanika gyökeresen különbözik egymástól:

1. Az égitestek mozgása egyenletes körmozgás, mely örök, önmaguktól származó, isteni jellegű, ideális.
2. A földi dolgok mozgása alapvetően háromféle lehet:
   – élőlények mozgása;
   – élettelen tárgyak természetes mozgása: a nehéz tárgyak lefelé esnek, a könnyűek felfelé szállnak (leeső kő, felszálló füst), minden tárgy a kozmoszban elrendelt helyére törekszik;
   – élettelen testek kényszerített mozgása: élőlények vagy más testek által nem természetes irányú mozgások (feldobott kő, kilőtt nyíl).

Arisztotelész elméletét közel kétezer éven keresztül elfogadták és használták a természetről gondolkodók, még azzal együtt is, hogy sokszor nem adott magyarázatot, vagy rosszul magyarázott egy jelenséget.

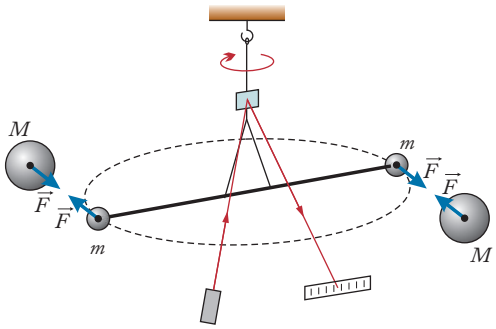
Az égi és földi mechanika éles kettéválasztását sok tudós nehezen fogadta el. **Isaac Newton** is azon elmélkedett, hogy lehet-e a földre leejtett kő és a Föld körül keringő Hold mozgásának ugyanaz a hatás az oka. Ebből született meg a Föld tömegvonzásának, majd aztán az általános tömegvonzásnak, más néven a **gravitációnak** az elmélete. Az elmélet alapösszefüggése a már tanult Newton-féle gravitációs erőtörvény.

## Cavendish kísérlete

Newton a gravitációs erőtörvényét csak mint a tömegektől való egyenes arányosságot és a távolság négyzetétől való fordított arányosságot mondta ki, a törvényben szereplő gravitációs állandót nem határozta meg, habár sejtette, hogy nagyságrendje kicsi.

A tudósok számára nem is elsősorban a gravitációs állandó megismerése volt fontos, hanem a segítségével meghatározható Föld-tömeg. A gravitáció elméletének nyilvánosságra hozatala után több mint száz évvel az angol Henry Cavendish, mások ötleteit is felhasználva, készített egy olyan összeállítást, amellyel kísérletileg is kimutatható volt a gravitációs vonzóhatás.

Egy vékony huzalra középen felfüggesztett rúd két végére 5 cm átmérőjű ólomgolyókat rögzített. Majd két sokkal nehezebb ólomgömböt helyezett a golyók közelébe úgy, hogy az ólomgolyók a gömbök felé kimozdulhassanak. A golyó és a gömb közötti gravitációs kölcsönhatás következtében a rúd valamelyest elfordult eredeti helyzetéből. Az alig észrevehető elfordulás mérésére tükröt helyezett a felfüggesztő huzalra. A tükröt fényforrással világította meg, és a róla visszaverődő fénysugarat egy több méterre lévő ernyőn felfogta. A huzallal együtt elforduló tükör a fényfolt mérhető elmozdulását eredményezte, melyből meghatározható volt az elfordulás szöge is. A huzal csavarodásából a forgatónyomaték nagyságára következtetett, amiből a gravitációs vonzóerőt meg tudta határozni. A huzal csavarodása (torziója) miatt ezt az ingát **torziós ingának** nevezzük.




*Cavendish kísérlete*

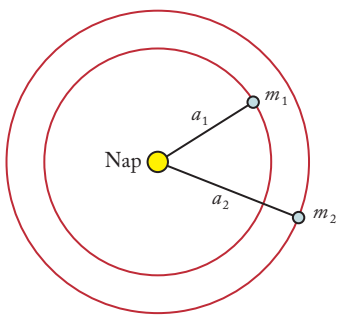
Cavendish a torziós ingát üvegbúra alatt, légmozgásmentes környezetben használta. Gondos mérése során – a nehéz ólomsúlyok és a köztük lévő csekély távolság ellenére – a gravitációs erőre $10^{-7}$ N nagyságrendű értéket kapott. Habár ebből nem határozta meg közvetlenül a gravitációs állandót, ma már tudjuk, hogy mérése nagy pontosságúnak nevezhető.

A gravitációs állandó mérésére azóta is ez a mérési módszer áll rendelkezésre. A legnagyobb problémát a nagy tömegű testek kiterjedéséből adódó, valamint a környező nagy tömegű tárgyak (falak, épületek) gravitációs hatásából adódó zavarok jelentik.

## A Kepler-törvények igazolása a gravitáció elméletével

Newton a gravitációs erőtörvény segítségével igazolni tudta Kepler tapasztalati törvényeit. Az összefüggést alkalmazva nemcsak megerősítette a Kepler I. törvényében lévő pályák ellipszis alakját, hanem levezette, hogy a pályaalak lehet kör, parabola és hiperbola is.

*Newton gondolatmenete alapján igazoljuk a Kepler III. törvényére vonatkozó összefüggést!*




*Két bolygó keringése a Nap körül*

Keringjen az $M$ tömegű Nap körül ellipszispályákon két $m_1$ és $m_2$ tömegű bolygó!

A Naprendszer bolygóinak excentricitása nagyon kicsi, pályájuk kevéssel tér el a körtől, ezért tekintsük a számításhoz a bolygók pályáit egy olyan körnek, melynek sugara az ellipszis fél nagytengelye (közepes Nap-távolság).

Ebben a közelítésben Kepler II. törvénye szerint a bolygók egyenletes körmozgást végeznek. Az egyenletes körmozgás gyorsulását a gravitációs erő biztosítja.

Írjuk fel mindkét bolygóra Newton II. törvényét:

$$\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot M}{a_1^2} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{a_1}, \quad \text{illetve:} \quad \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot M}{a_2^2} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{a_2}$$

Egyszerűsítés után, és felhasználva, hogy a kerületi sebesség $v = \frac{2r\pi}{T}$, kapjuk:

$$\gamma \cdot \frac{M}{a_1} = \frac{4a_1^2\pi^2}{T_1^2}, \quad \text{illetve:} \quad \gamma \cdot \frac{M}{a_2} = \frac{4a_2^2\pi^2}{T_2^2}$$

A bolygóadatokat egy oldalra rendezve kapjuk:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma \cdot M}{4\pi^2}, \quad \text{illetve:} \quad \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma \cdot M}{4\pi^2}$$

Vagyis az $\frac{a^3}{T^2}$ arány minden bolygó esetében ugyanakkora, csak a Nap tömegétől függő állandó, így teljesül Kepler III. törvénye:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

## A gravitációs erőtér

A kölcsönhatások létrejöttének egyik feltétele a testek érintkezése. Ennek egyik kivétele a gravitációs kölcsönhatás (ezenkívül még az elektromos, a mágneses és a nukleáris kölcsönhatás), mely nagy távolságokban is kifejti hatását. Newton úgy gondolta, hogy a hatás azonnal érvényesül nagy távolságban is. Ezt a távolhatás elméletének nevezzük. A kivételesnek látszó tulajdonságot Michael Faraday a **közelhatás elméletével** oldotta fel. A távolhatónak látszó kölcsönhatásokat úgy értelmezte, hogy a kölcsönható test maga körül egy olyan környezetet hoz létre, amellyel képes erőt kifejteni a környezetébe kerülő, és így azzal érintkező másik kölcsönható testre. A kölcsönhatásoknak ezt a modelljét **erőtérnek, vagy más néven mezőnek** nevezzük. A gravitációs kölcsönhatás leírására tehát a **gravitációs erőteret** (gravitációs teret, gravitációs mezőt) használjuk.

A már korábban tanult elektromos (és mágneses) térerősség mintájára meghatározhatjuk a gravitációs erőtér térerősségét:

**A gravitációs erőtér egy adott pontjában a gravitációs térerősség megegyezik az adott pontba helyezett testre ható gravitációs erőnek és a test tömegének a hányadosával.**

**A gravitációs térerősség jele: $g$.**

$g = \frac{F_g}{m}$.

**Mértékegysége: $\frac{N}{kg}$ vagy $\frac{m}{s^2}$.**

**A gravitációs térerősség vektormennyiség.**

A **gravitációs térerősség** megfelel a gravitációs gyorsulásnak, ami jó közelítéssel megegyezik a korábban tanult nehézségi gyorsulással, **vektormennyiség**, azaz nagysága mellett irányát is meg kell adni, valamint értéke a gravitációs térben pontról pontra változhat.

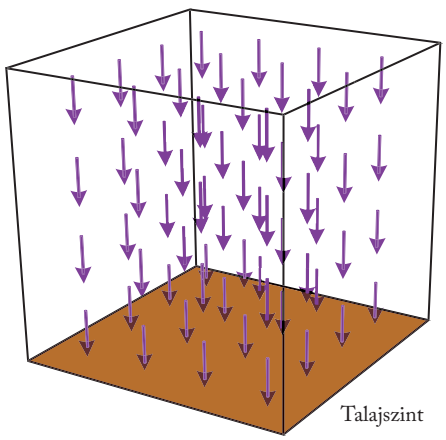
## Gravitációs terek

A gravitációs erőtér szemléltetésére **gravitációs erővonalakat** használunk. Megállapodás szerint *a gravitációs térerősség iránya az adott pontba rajzolt gravitációs erővonal érintőjének irányába mutat, valamint egységnyi felületre merőlegesen annyi erővonal halad át, amennyi az adott felületen mért gravitációs térerősség nagysága.*

A gravitációs erővonalakkal szemléltetett erőterek sajátos szerkezetet is mutathatnak, ezek közül vizsgáljunk meg kettőt!

### Homogén gravitációs erőtér

**Homogén gravitációs erőtérnek** nevezzük az olyan gravitációs erőteret, vagy a gravitációs erőtér egy olyan tartományát, melynek *minden pontjában a gravitációs térerősség állandó*. A legegyszerűbb példa erre a Föld felszínén, a talajközelben a tér egy tartománya.



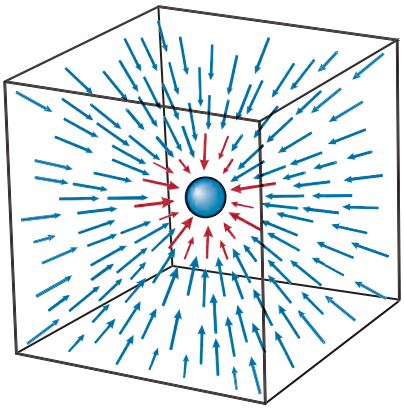

*A gravitációs gyorsulás szemléltetése talajközeli, homogén gravitációs erőtér esetén*

Az ebben a tartományban elengedett tárgyak a gravitáció hatására leesnek. Minden test $g$ gyorsulással esik. A gravitációs erővonalak egyenletes eloszlású, egymással párhuzamos egyenesek, ezek határozzák meg a „függőleges” irányt.

### Centrális gravitációs erőtér

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

**Centrális gravitációs erőtérnek** nevezzük az olyan gravitációs erőteret, melyet *egyetlen tömegpont hoz létre maga körül.* Jó közelítéssel ilyennek tekinthető egy égitest környezetében lévő tér, ha a közelében nincsenek más égitestek.



*A gravitációs gyorsulás szemléltetése centrális erőtér esetén*

A centrális gravitációs erőtérben elengedett testek a gravitációs középpont (centrum) felé esnek. A gravitációs erővonalak a centrumba mutató, egyenletes eloszlású, sugaras szerkezetet kialakító egyenesek.

A Naprendszer minden egyes égitestje gravitációs erőteret kelt, ezek együtthatása (szuperpozíciója) érvényesül a Naprendszer egy adott pontjában.

## A gravitációs erőtér energiaviszonyai

Ha homogén gravitációs erőtérben elengedünk egy tárgyat, az függőlegesen leesik. A gravitációs erőtér által végzett munkát a $W_G = F_G \cdot s = m \cdot g \cdot h$ összefüggés szerint számíthatjuk ki, ahol $m$ a tárgy tömege, $g$ a gravitációs erőtér térerőssége és $h$ a függőlegesen megtett távolság.

Mivel a gravitációs erőtér konzervatív, kapcsolható hozzá egy energiafajta, amely a gravitációs erőtér és a benne lévő tárgy kölcsönös helyzetét jellemzi. Ezt az energiafajtát **gravitációs potenciális energiának** vagy **helyzeti energiának** nevezzük.

Homogén gravitációs erőtérben a helyzeti energia: $E_H = m \cdot g \cdot h$, ahol $h$ most a viszonyítási ponttól mért függőleges távolságot, a magasságot jelenti. A viszonyítási pont szabadon megválasztható, a gyakorlatban például a talajszintet, tengerszintet, padlószintet választjuk legtöbbször viszonyítási pontnak.

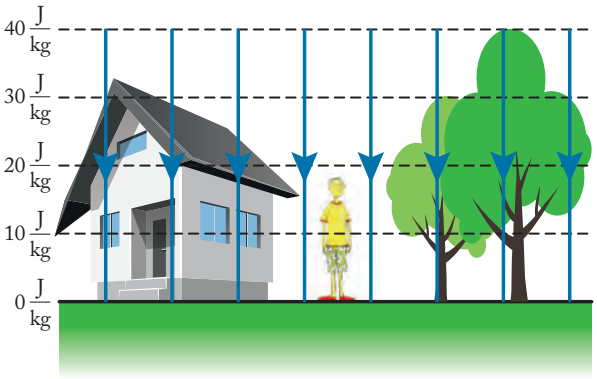
A helyzeti energia értéke arányos a gravitációs térbe helyezett tárgy tömegével. Ha a helyzeti energiát elosztjuk a tárgy tömegével, akkor a *gravitációs erőtér munkavégzését jellemző értéket* kapunk, amit **gravitációs potenciálnak** ne-

vezünk. Ez azt a munkát jelenti, amelyet a gravitációs erőtér végez egy egységnyi tömegű tárgyon, miközben azt a viszonyítási pontba viszi. Az azonos gravitációs potenciálú helyek egy **ekvipotenciális felületet** alkotnak (szintfelület, nívófelület), ezen a felületen a tárgy helyzeti energiája mindenhol ugyanakkora, továbbá ezen a felületen a gravitációs tér a tárgyon nem tud munkát végezni.

**Homogén gravitációs erőtérben a gravitációs potenciál értéke $g \cdot h$, és mivel a térerősség állandó, ezért a viszonyítási ponttól mért magasságtól függ.**

**Mértékegysége $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.**

Az ekvipotenciális felületek ebben az esetben a talaj- vagy tengerszinttel párhuzamos vízszintes síkfelületek. Ekvipotenciális felületeket jelölnek a térképek szintvonalai, az azonos magasságú helyeket összekötő vonalak.




*Azonos gravitációs potenciálú helyek homogén gravitációs erőtérben*

## Energiaviszonyok a centrális gravitációs erőtérben

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

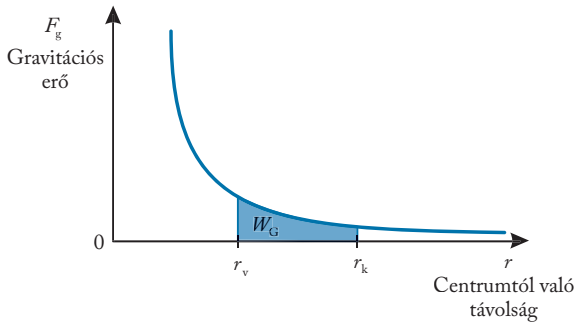
A centrális erőtér a középpontja felé képes mozgatni tárgyakat. Az elmozdulás alatt a gravitációs erő nagysága változik, ezért a munkavégzés a következő módokon számítható ki:

– a mozgást kis, elemi elmozdulásokra bontjuk, ahol a gravitációs erő nagysága állandónak vehető, és az ebből számított elemi munkavégzéseket összegezzük; vagy
– felrajzoljuk a gravitációs erő-távolság grafikont, és a grafikon alatti területet számítjuk ki.

Mindkét módszer ugyanarra az eredményre vezet, miszerint a centrális gravitációs erőtér munkája:

$$W_G = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_v}\right),$$

ahol $M$ a teret létrehozó test tömege, $m$ a mozgatott tárgy tömege, $r_k$ és $r_v$ pedig a tárgy középponttól mért távolsága kezdő- és végállapotban.




*A centrális gravitációs erő munkája az erő-távolság grafikonon*

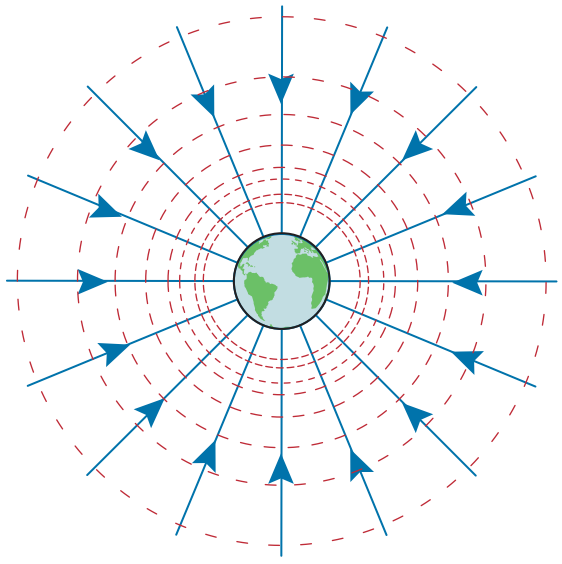
**Centrális gravitációs erőtérben a középponttól $r$ távolságban a helyzeti energia** az előző összefüggés alapján:

$$E_{grav} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Az összefüggés akkor érvényes, ha a viszonyítási pontot egy végtelen távoli pontnak vesszük.

Centrális gravitációs erőtérben az ekvipotenciális felületek a centrumot körbevevő koncentrikus gömbfelületek.

Az ábrán jelölt szomszédos gömbfelületek között a gravitációs tér azonos munkát végez, és látható, hogy ehhez a centrumtól távolabb nagyobb távolság tartozik. Ennek oka, hogy a gravitációs potenciál értéke $-\gamma \cdot \frac{M}{r}$, az $r$ távolsággal fordítottan arányos.



*Azonos gravitációs potenciálú pontok centrális gravitációs mezőben*

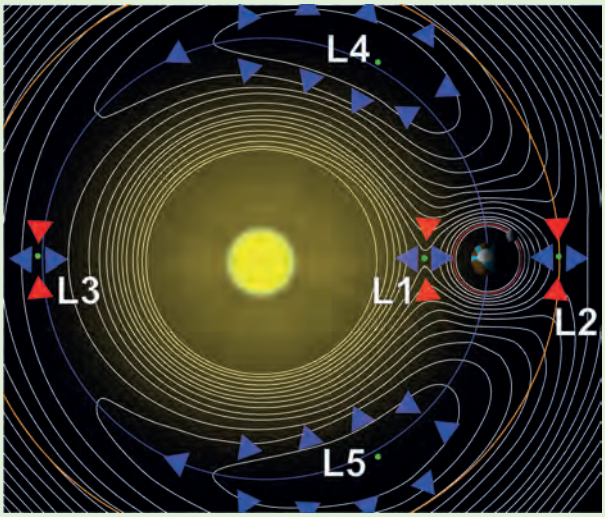
## ALKALMAZÁSOK

### Librációs pontok a Nap-Föld rendszerben

A Nap–Föld–Hold-rendszer gravitációs erőtér rendszerében a számítások szerint található öt olyan pont, ahova egy kisebb tömeget elhelyezve, az egyensúlyban maradna. Ezeket egyensúlyi, más néven **librációs pontoknak** (L) nevezzük.

A Földet a Nappal összekötő vonalon, a Nap és a Föld között található $L_1$ pont 1,5 millió km-re van a Földtől, és alkalmas hely a SOHO nevű napkutató űrszondának, mely a Nap felszínének és légkörének vizsgálatán kívül a Napból a Föld felé érkező napszél mérését is végzi.

A Föld túloldalán az $L_2$ pont szintén 1,5 millió km-re van a Földtől, itt helyezték el 2022-ben a James Webb űrteleszkópot. Az egyensúlyi pozíció energiatakarékos üzemelést és állandó hőmérsékleti feltételeket biztosít az érzékeny műszerek számára.




## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Határozzuk meg a Jupiter bolygó tömegét az Europa nevű holdjának pályaadataiból!

Az Europa hold excentricitása 0,0005, tehát közel körpályán halad. Közepes Jupiter-távolsága 671 100 km, keringési ideje a Jupiter körül 3,551 nap.

### MEGOLDÁS

Adatok:
$e = 0{,}0005$,
$r = 671\,000 \text{ km} = 6{,}71 \cdot 10^8 \text{ m}$,
$T = 3{,}55 \text{ nap}$.

$M = ?$

Egy központi égitest tömegét meg tudjuk határozni a gravitációs erőtörvény segítségével, ha ismerjük egy körülötte keringő égitestjének pályaadatait. Így határozható meg a Nap tömege is a Nap-Föld rendszerben. Tekintsük az Europa Jupiter körüli mozgását egyenletes körmozgásnak!

Írjuk fel Newton II. törvényét az Europa holdra:

$$F_g = F_{cp},$$

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

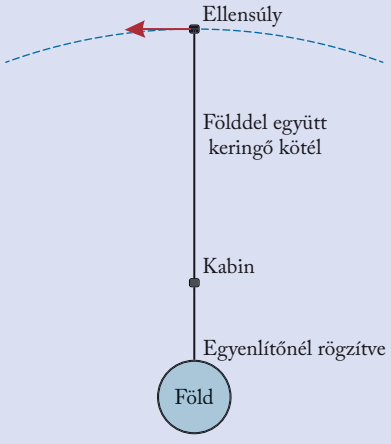
A Jupiter $M$ tömegére rendezve az egyenletet, és felhasználva, hogy $v = \frac{2r\pi}{T}$, kapjuk:

$$M = \frac{v^2 \cdot r}{\gamma} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{\gamma \cdot T^2}$$

Behelyettesítve az adatokat: $M = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

A Jupiter bolygó tömege $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

**2. FELADAT** (Emelt szintű érettségi feladat, 2021)
A mérnököket régóta foglalkoztatja az ún. űrlift gondolata. Ennek lényege az volna, hogy egy, a Földdel együtt forgó, a Föld felszínére mindig merőleges, feszes kötél nyúlna az űrbe. A kötelet úgy alakítanák ki, hogy azon kisebb tömegű kabinok közlekedhessenek, azaz a kötélbe kapaszkodva felfelé, illetve lefelé mozoghatnának a földfelszín és az űr között. A kötél egyik vége az Egyenlítőnél lenne rögzítve, a másik végén egy nagy tömegű ellensúly lenne. Az ellensúlyt körpályára állítanák akkora sebességgel, hogy mindig az Egyenlítőn lévő rögzítési pont fölött tartózkodjon. A keringési ideje tehát megegyezne a Föld tengely körüli forgásának



periódusával. Az ellensúly sebessége meghaladná a pályához tartozó körsebességet, ezért a kötél megfeszülne, az ellensúlyt a gravitációs vonzóerő és a kötélerő eredője tartaná körpályán. A súly ily módon feszesen tartaná a kötelet, és azon kisebb tömegű kabinok „közlekedhetnének", azaz a kötélbe kapaszkodva mozoghatnának fel, illetve le a földfelszín és az űr között.

Tegyük fel, hogy egy 1000 tonna tömegű ellensúlyt egy 73 630 km hosszúságú kötéllel rögzítünk az Egyenlítőhöz. (A kötél tömege elhanyagolható.)

**a)** Mekkora legyen ebben a magasságban az ellensúly sebessége, hogy az Egyenlítő ugyanazon pontja felett maradjon mozgása során?

**b)** Mekkora, a Föld közepe felé mutató, eredő erőre van szükség az ellensúly körpályán tartásához?

**c)** Mekkora erővel húzza az ellensúly a kötél felső végét?

(A Föld tömege $M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, sugara $R_F = 6370$ km, a gravitációs állandó $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, a Föld tengely körüli forgásának periódusát közelítsük egy nappal.)

## MEGOLDÁS

Adatok:

$M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $m_{\text{ellensúly}} = 1000$ t $= 10^6$ kg,

$R_F = 6370$ km, $l = 73\,630$ km,

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$,

$T = 1$ nap $= 86\,400$ s.

---

*a)* $v = ?$

*b)* $F_e = ?$

*c)* $F_g = ?$

**a)** Az ellensúly pályaadatai:

a keringési ideje: $T = 1$ nap $= 86\,400$ s,

a Föld-ellensúly távolsága: $r = 6370$ km $+ 73\,630$ km $=$ $= 80\,000$ km.

Az ellensúly kerületi sebessége:

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot 80\,000 \text{ km} \cdot \pi}{86\,400 \text{ s}} = 5{,}82 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 5820 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az ellensúly $5820 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ esetén az Egyenlítő ugyanazon pontja felett marad.

**b)** A körpályán tartáshoz szükséges eredő erő, vagyis a centripetális erő:

$$F_e = m_{\text{ellensúly}} \cdot \frac{v^2}{r} = 10^6 \text{ kg} \cdot \frac{\left(5820 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{8 \cdot 10^7 \text{ m}} \approx 423\,000 \text{ N}$$

Az ellensúly körpályán tartásához 423 000 N nagyságú eredő erőre van szükség.

**c)** Az $F_e$ eredő erő a Föld gravitációs erejének és a kötélerőnek az összege: $F_e = F_g + K$.

A gravitációs erő:

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m_{\text{ellensúly}} \cdot M_F}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10^6 \text{ kg} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(8 \cdot 10^7 \text{ m})^2} = 62\,200 \text{ N}.$$

Így a kötélerő:

$K = F_e - F_g = 423\,000$ N $- 62\,200$ N $= 360\,800$ N.

Az ellensúly ereje a kötélerő ellenereje, így nagysága szintén 360 800 N.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** (Emelt szintű érettségi feladat alapján, 2013)
Mit tapasztalnánk, ha az alábbi változtatásokat végezzük Cavendish torziós inga kísérletében?

**a)** Az ólomgömbök helyett ugyanakkora átmérőjű alumíniumgömböket teszünk.

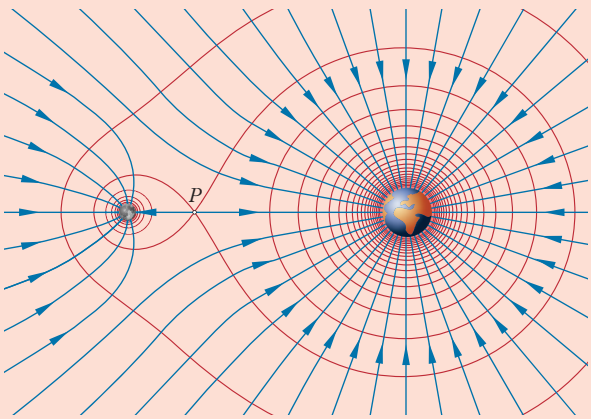
**b)** Az ólomgömböket az ólomgolyók és a rúd azonos oldalára tesszük.

**c)** Az ólomgömböket huzalra függesztve közelítjük a golyókhoz.

**d)** Az ólomgolyókat tartó rudat hosszabbra cseréljük.

**2.** Egy exobolygó pályaadatainak mérése során kiderült, hogy $\frac{a^3}{T^2}$ hányadosa megegyezik a Földével. Mire következtethetünk ebből?

**3.** Az ábra a Föld és a Hold közös gravitációs erőterének erővonalait és ekvipotenciális vonalait tünteti fel. Milyen jellemzője van a gravitációs erőtér $P$ pontjának?




**4.** Egy bolygó körül minden más égitesttől távol egy kis hold kering körpályán, mozgását a bolygó gravitációs ereje okozza. Végez-e munkát a bolygó gravitációs erőtere a holdon?

# 4. Súly és súlytalanság

**EMLÉKEZTETŐ**

## Kozmikus sebességek

A Föld körül keringő űrhajókban és űrállomáson az emberek súlytalanság állapotában vannak, de attól még ott jelentős gravitációs erőtér van. Az űrrakéták különféle pályákra állításához bizonyos küszöbsebességeket el kell érni. Ezeket **kozmikus sebességeknek** nevezzük.

Ahhoz, hogy egy kilőtt test ne essen vissza a Földre, legalább az *első kozmikus sebességgel* kell rendelkeznie:

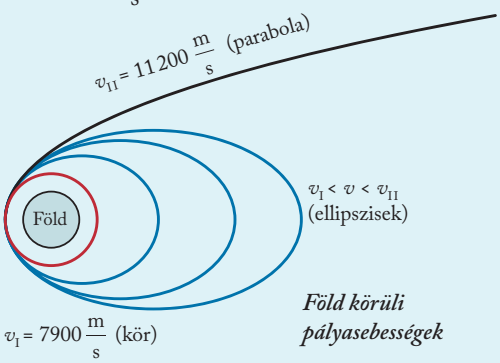
$$v_{\mathrm{I}} = 7{,}92\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \approx 8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

A Föld gravitációs vonzásából való kilépéshez és a Nap körüli keringéshez legalább a *második kozmikus sebesség* szükséges:

$$v_{\mathrm{II}} = 11{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

A Naprendszer elhagyásához legalább a *harmadik kozmikus sebességgel* kell rendelkezni:

$$v_{\mathrm{III}} = 42{,}1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

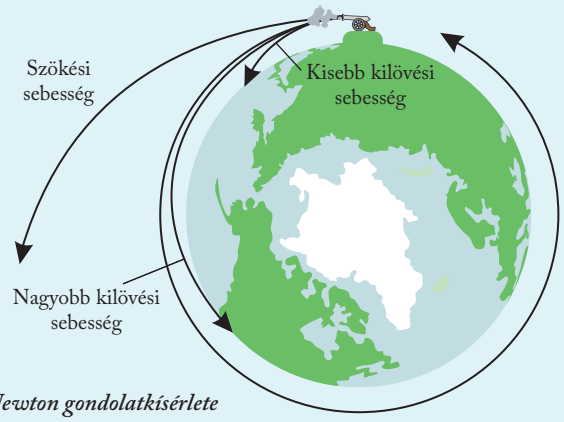



*Föld körüli pályasebességek*

**Newton gondolatkísérlete**

Az égi és földi mechanika egyesítésének gravitációs elméletében Newton a következő gondolatkísérletet vázolta fel. Képzeljünk el a Föld felszínén egy magas hegyet, melyről képzeletben egy ágyúval lövegeket lövünk ki vízszintesen egyre nagyobb sebességgel.

Az első lövegek még vízszintes hajítással csapódnak a földbe. A nagyobb kezdősebességű lövegek pályája alatt a Föld görbülete kezd jelentőssé válni, a gravitációs tér már nem tekinthető homogénnek, és a parabolapálya egyre inkább egy ellipszis ívének fog megfelelni, a lövegek egyre messzebb csapódnak a földbe. Az első kozmikus sebességgel kilőve a löveget, az éppen „körbeesi" a Földet.




*Newton gondolatkísérlete az egyre nagyobb sebességű ágyúlövegek pályájáról*

Még nagyobb kezdősebesség esetén a löveg a repülési magasságát a Föld átellenes pontjáig növeli, majd a kilövés helyére kering vissza, pályája a Kepler-törvényeknek megfelelően ellipszis lesz. Ha a löveget a második kozmikus sebességgel lőjük ki, akkor a Földtől egyre távolodva már nem tér vissza a kilövési pontjába, pályája parabola alakú lesz.

A még ennél is nagyobb kezdősebességű lövegek hiperbolapályán távolodnak el végleg a Föld közeléből.

## A gravitációs gyorsulás

Képzeljünk el egy tökéletesen gömb alakú égitestet, melynek tömege legyen $M$, sugara $R$, és amelynek a felszínén állva elejtünk egy $m$ tömegű tárgyat. A tárgy szabadon esik az égitest középpontja felé. A testre ható $F_{\mathrm{neh}}$ nehézségi erőt és az $F_{\mathrm{g}}$ gravitációs erőt egyenlőnek tekinthetjük:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{neh}}$$

$$\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g$$

Az égitest középpontja és a tárgy közötti távolság gyakorlatilag $R$, ugyanis a felszíntől mért ejtési magasság elhanyagolhatóan kicsi $R$-hez képest.

**A gravitációs gyorsulás értéke az $M$ tömegű és $R$ sugarú égitest felszínén:**

$$g = \gamma \cdot \frac{M}{R^2}$$

**Az égitest felszíne felett *h* magasságban** a gravitációs gyorsulás értéke a távolság négyzetével fordított arányban csökken:

$$g = \gamma \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

**Egy égitest környezetében a gravitációs gyorsulás nagysága függ az égitest *M* tömegétől, *R* sugarától és a felszínétől mért *h* magasságtól.**

Néhány számított érték a Föld egyes helyein a gravitációs gyorsulás értékeire:

($R = 6{,}371 \cdot 10^6$ m, $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg.)

Tengerszinten: $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Budapesten ($h = 105$ m): $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

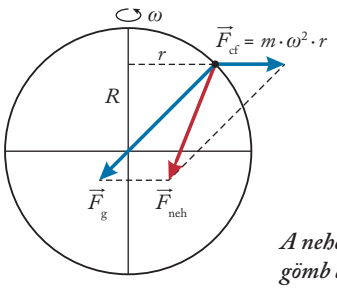
Himalája csúcsán ($h = 8848$ m): $g = 9{,}79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Nemzetközi Űrállomásnál ($h = 420$ km): $g = 8{,}64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Holdnál ($h = 384\,404$ km): $g = 0{,}0026 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

## A nehézségi erő mint a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője

A Föld felszínén lévő nyugvó *m* tömegű test és a Föld között gravitációs kölcsönhatás miatt a Newton-féle gravitációs erő lép fel. A Föld forog saját tengelye körül, ezért a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszert forgó vonatkoztatási rendszernek tekinthetjük. A Föld felszínéről vizsgálva a jelenségeket figyelembe kell venni a forgásából származó tehetetlenségi erőket is a gravitációs erő mellett. Azt az erőt, amely a Föld forgása miatt az *m* tömegű testre hat, **centrifugális erőnek** nevezzük. A centrifugális erő a Föld forgástengelyére merőlegesen kifelé mutat. (Lásd az előző fejezetben a forgó vonatkoztatási rendszerekről tárgyaltakat!)




*A nehézségi erő ($m \cdot g$) szemléltetése gömb alakú Földet feltételezve*

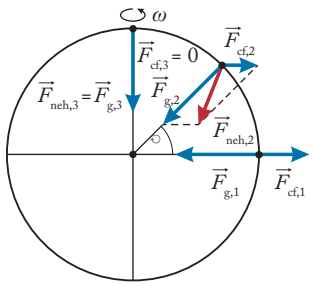
**A Föld felszínén lévő testre ható gravitációs erőnek és a Föld forgásából származó tehetetlenségi (centrifugális) erőnek az eredőjét nehézségi erőnek nevezzük.**

$\vec{F}_{neh} = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf}$

Ennek megfelelően a Föld felszínének közelében a nehézségi gyorsulás különbözik a gravitációs gyorsulástól. A sarkokon a centrifugális erő nulla, míg az Egyenlítőn a legnagyobb értéket veszi fel, és ellentétes irányú a gravitációs erővel. Ezért a testre ható nehézségi erő a sarkokon a legnagyobb, míg az Egyenlítőn a legkisebb.

A gravitációs és a nehézségi erő közötti eltérés nagyon kicsi, ezért – az egyszerűsítés érdekében – a két erő között feladatainkban csak akkor teszünk különbséget, ha arra alapos okunk van.

*Megjegyzés:* Az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből, azaz inerciarendszerből nézve a Föld felszínén lévő test körpályán mozog, gyorsul. A testre ható gravitációs erő ($F_g$) és a Föld (talaj) nyomóerejének ($F_n$) az eredője a centripetális erőt adja meg.




*A nehézségi erő értéke a sarkokon (3) a legnagyobb, az Egyenlítőnél (1) a legkisebb*

## A súlyos és a tehetetlen tömeg

Eötvös Loránd nevéhez fűződik a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőségének vizsgálata is. A testek tömegvonzó képességét is és a kölcsönhatásoknál fellépő tehetetlen tulajdonságát is a tömegének tulajdonítjuk, de a két alapvetően más tulajdonság megkérdőjelezi a kétféleképpen értelmezett tömeg egyenlőségét. Ezért az $m_s$ neve: **súlyos tömeg**, és az $m_t$ neve: **tehetetlen tömeg**.

**Eötvös kísérlete** azon alapul, hogy a Földön a gravitációs erő a test $m_s$ súlyos tömegével, a centrifugális erő – és így a nehézségi erő – pedig a test $m_t$ tehetetlen tömegével arányos. Emiatt a nehézségi erő iránya függ a két tömeg hányadosától.

Eötvös a hihetetlenül érzékeny **torziós ingáját** használta fel úgy, hogy az ingakar két végére különböző anyagból (platinából és rézből) készült tömegeket helyezett, és vizsgálta az inga egyensúlyi helyzetét. Amennyiben a nehézségi erő iránya az anyagi minőségtől függene, akkor a különböző anyagú testek felhelyezésekor az ingának mindig más és más egyensúlyi helyzetet kellene felvennie (a rúdra forgatónyomaték hatna). Az elfordulást az inga egyetlen helyzetében sem észlelte. A készüléket függőleges tengelye körül 180°-kal elforgatta, ekkor a két test helyének meg-

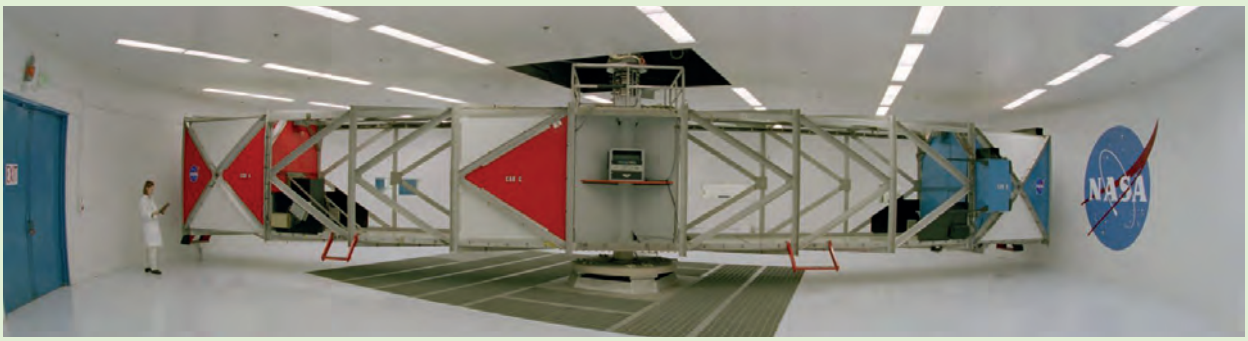
## ALKALMAZÁSOK

### Mesterséges gravitáció

Egy másik, a témához kapcsolódó rossz elnevezés: a **mesterséges gravitáció**. *A mesterséges gravitáció olyan technikai megoldást jelöl, mellyel a súlytalanság állapotában lévő személyek mégis a földön megszokott súlyukat érzékelik.* Ilyen megoldás lehet egy nagy méretű henger alakú, belül üreges űrhajó tengelyforgása, melyben az űrhajósok a henger belső palástjára nyomódnak, nyomják az „alátámasztást", tehát súlyt érzékelnek.

**Példa:** Hasonló hatás érvényesül egy űrhajósnál, amikor kilövik a világűrbe.

Ha a rakéta gyorsulása indításkor 30 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ körüli, akkor egy 70 kg tömegű űrhajóst $F = m \cdot a = 2100$ N erőnek kell gyorsítania. A 700 N nagyságú nehézségi erő indításkor hátrafelé mutat, tehát a rakéta ülése 2800 N tolóerőt fejt ki előre, hogy a kellő gyorsulást elérje. Az űrhajós ezt a 2800 N erőt érzékeli a súlyának, ami a nyugalmi súlyának négyszerese, mintha nyugalomban a $g$ gravitációs térerősség négyszer nagyobbá válna. Ezt a tolóerőt másképp kifejezve szokták 4 $g$ terhelésnek is nevezni.




*Mesterséges gravitáció létrehozó centrifuga*

cserélése miatt a forgatónyomaték (ha egyáltalán fellép) ellentétes irányúvá válik, ezért az inga egyensúlyi helyzetének is meg kell változnia. Ilyen változás azonban nem következett be.

*Eötvös Loránd munkatársaival mérések alapján megállapította, hogy a tehetetlen és a súlyos tömeg legfeljebb 1/200 000 000 arányban térhet el egymástól.*



***Eötvös-féle torziós inga a gravitációs gyorsulás helyi változásainak kimutatására***

## MÉRÉSI FELADAT

### A nehézségi gyorsulás meghatározása Audacity mérőprogrammal

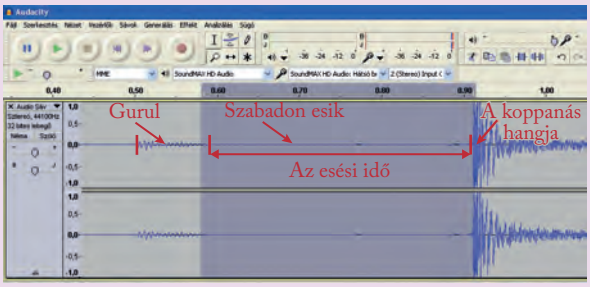
A nehézségi gyorsulás értékét Audacity számítógépes akusztikus mérőprogram segítségével mérjük meg. Vízszintes kerámialapot rögzítsünk a talaj felett. A kerámialapról elgurítjuk a golyót úgy, hogy az a lapról a talajra essen. A kissé egyenetlen felületű kerámialapon a golyó jellegzetes hanggal gurul.



*Nehézségi gyorsulás mérése Audacity mérőprogrammal*

Amikor a golyó a lap szélét elhagyva esni kezd, a hang megszűnik, végül a talajra leérkező golyó hangosan koppan.

**A mérés menete:** A golyó mozgásáról készített hangfelvétel elemzésével meghatározhatjuk az esés idejét. Az esési időtartam végét a hangképen jól látható, nagy amplitúdójú kitérés mutatja. Az esési időtartam elején viszont tölcsér alakú, csillapodó hullámvonulatot látunk. Ez annak köszönhető, hogy a kerámialap, miután a golyó elhagyta, még csillapodva rezeg egy ideig.

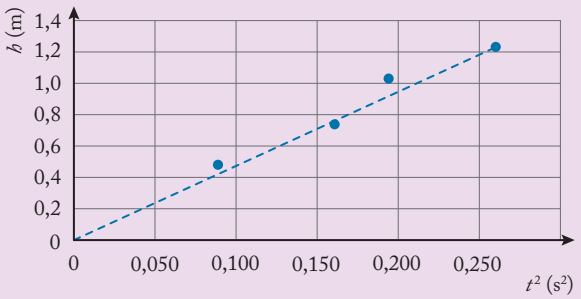



*Az Audacity program ablaka magyarázatokkal egy mérést követően*

Célszerű tehát az esési idő kezdőpontját az utolsó nagyobb amplitúdójú kitéréshez állítani. Az ejtési magasságot a kerámialap talajtól mért magasságával számítjuk. A négy különböző magassággal végzett mérés eredményeit táblázatba foglaltuk.

| $h$ (m) | 0,47 | 0,77 | 1,04 | 1,23 |
|---|---|---|---|---|
| $t$ (s) | 0,298 | 0,399 | 0,442 | 0,51 |
| $t^2$ (s$^2$) | 0,089 | 0,159 | 0,195 | 0,260 |

Ábrázoljuk az ejtési magasságot az esési idő négyzetének függvényében:




*Ejtési magasság az esési idő négyzetének függvényében*

A grafikon pontjaira illesztett egyenes meredeksége:

$$\frac{h}{t^2} = 5{,}05\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a nehézségi gyorsulás értéke pedig:

$$g = \frac{2h}{t^2} = 10{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

## KIDOLGOZOTT FELADAT

A kozmikus sebességek az űreszközök szükséges küszöbsebességét jelölik, mellyel azok gravitációs szempontból kötött helyzetbe kerülhetnek.

Határozzuk meg az első kozmikus sebesség nagyságát, ha adott az űreszköz keringési magassága, továbbá a bolygó $M$ tömege és $R$ sugara!

### MEGOLDÁS

Adatok:
Adott $M$, $R$ és $h$.

$v_{\text{kör}} = ?$

Az első kozmikus sebesség elérésével a test már nem esik vissza Föld felszínére, körpályára áll, ezért azt **körsebességnek** is nevezik.

Az $m$ tömegű űreszközt az $M$ tömegű, $R$ sugarú égitest tartja $r = R + h$ sugarú körpályán:

$$F_{\text{gr}} = m \cdot a_{\text{cp}},$$

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{v_{\text{I}}^2}{r}$$

Az I. kozmikus sebesség, azaz a körsebesség:

$$v_{\text{kör}} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M}{R + h}}$$

## Második és harmadik kozmikus sebesség

A **második kozmikus sebesség** elérésével a test annyi energiát szerez, hogy képes elhagyni az égitest gravitációs terét, ezért **szökési sebességnek** is nevezik. A szökési sebesség a mechanikai energia megmaradásának tételéből vezethető le.

Az $m$ tömegű űreszköz gravitációs potenciális (helyzeti) energiája az $M$ tömegű, $R$ sugarú égitest felszínén:

$$E_{\text{grav}} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

Ha a test mozgási energiája fedezi vagy meghaladja ennek a negatív energiának a nagyságát, akkor az összenergia nem lesz negatív, így a test kiléphet az égitest vonzásteréből:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{II}}^2 = \left| -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R} \right|,$$

amelyből:

$$v_{\text{II}} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{M}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{I}}$$

A második kozmikus sebességgel haladó űrjárművek már a Nap körüli pályán keringenek. Sebességüket növelve egyre elnyúltabb ellipszis alakú pályára állnak.

A harmadik kozmikus sebességgel a Naprendszert, a negyedikkel a Tejútrendszert lehet elhagyni. Ezek kiszámítási módja megegyezik a második kozmikus sebességével, csak $M$ és $R$ helyébe az adott rendszer tömegét és sugarát kell behelyettesíteni.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Az Apollo-program keretében került sor az első holdra szállásra.

**a)** Legalább mekkora sebesség szükséges ahhoz, hogy a hordozórakéta elhagyja a Föld vonzásterét?

**b)** Mekkora sebességgel keringett a parancsnoki modul a Hold körül 210 km-es magasságban?

**c)** Az űrhajósok mekkora nehézségi gyorsulásra számíthatnak?

**d)** Legalább mekkora sebesség kellett a Hold elhagyásához?

A Föld adatai: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\,371\,000$ m.

A Hold adatai: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, $R = 1\,738\,000$ m.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg,

$R_F = 6\,371\,000$ m,

$M_H = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg,

$R_H = 1\,738\,000$ m,

$h = 210\,000$ m,

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

---

*a)* $v_{II,F} = ?$

*b)* $v_I = ?$

*c)* $g_H = ?$

*d)* $v_{II,H} = ?$

**a)** A hordozórakétának legalább a szökési sebességgel kell rendelkeznie. A Föld adatait felhasználva:

$$v_{II,F} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{M_F}{R_F}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6\,371\,000\ \text{m}}} =$$

$$= 11\,180 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A Föld vonzásterének elhagyásához legalább 11,2 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel kell haladnia a rakétának.

**b)** A parancsnoki modul körsebessége $h = 210$ km magasságban a Hold adataival számítva:

$$v_I = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M_H}{R_H + h}} =$$

$$= \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1\,738\,000\ \text{m} + 210\,000\ \text{m}}} =$$

$$= 1586 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}59 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A parancsnoki modul sebessége a Hold körül 1,59 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ volt.

**c)** A nehézségi gyorsulás a Hold felszínén:

$$g_H = \gamma \cdot \frac{M_F}{(R_F)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,738\,000\ \text{m})^2} =$$

$$= 1{,}62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A Hold felszínén a nehézségi gyorsulás 1,62 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

**d)** A Hold elhagyásához szükséges sebességet holdi szökési sebességnek nevezzük. Ennek nagysága:

$$v_{II,H} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{M_H}{R_H}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1\,738\,000\ \text{m}}} =$$

$$= 2375 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}38 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A Hold szökési sebessége 2,38 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** Hol nagyobb a gravitációs gyorsulás értéke, a Vénusz vagy a Szaturnusz felszínén?

**2.** Egy kétkarú mérleget és egy rugós mérleget a budapesti nehézségi gyorsulás értékével kalibráltak. Mindkét mérleg Budapesten egy tárgyat pontosan 1 kg tömegűnek mért. A mérlegeket és a tárgyat Kairóba vitték, és újra elvégezték a méréseket. Mit jeleztek a mérlegek? (A kétkarú mérleg saját súlysorozatát használták mindkét helyszínen.)

**3.** Van-e súlya, és ha igen, a 9,81 N-hoz képest kisebb, vagy nagyobb, egy 1 kg tömegű tárgynak

**a)** egy utasszállító repülőn 10 km magasan a Föld felszíne felett?

**b)** egy utasszállító repülőből 10 km magasan kidobva?

**c)** higanyba merítve?

**d)** egy hintán, amikor épp a legalsó helyzetében lendül át?

**e)** a Holdon leejtve?

**f)** egy üzemben lévő műholdon elhelyezve?

**g)** amikor épp hagyja el a Naprendszert?

**h)** a Mars felszínén?

**4.** Mivel egyezik meg a Nap körsebessége a felszínétől 1 CsE távolságra?

# Összefoglalás

## Égi mozgások

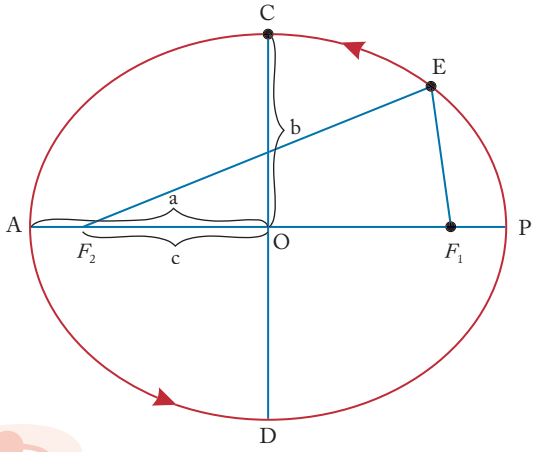
| Az égitest mozgásának jellemzője | Érzékelhető következménye a Földön |
|---|---|
| Föld tengelyforgása | Napszakok, az állócsillagok elfordulása, Sarkcsillag állandó pozíciója |
| Föld keringése a Nap körül | Nap vándorlása a csillagképek között, ekliptika |
| Föld tengelyferdesége | Évszakok |
| Hold keringése a Föld körül | Holdfázisok, vándorlás az ekliptika mentén |
| Hold tengelyforgása | A Holdnak mindig ugyanazt a felét látjuk |
| Hold és Föld pályasíkjának eltérése | Ritkán van nap- és holdfogyatkozás |
| Bolygók közel egy síkban mozgása a Nap körül | Vándorlás az ekliptika mentén, retrográd mozgás, belső bolygók fázisokat mutatnak, fedések |
| Égitestek pályagörbéje ellipszis | Napközel és naptávol, földközel és földtávol, gyűrűs napfogyatkozás, szuperhold |
| Égitestek mozgása nem egyenletes | Nem egyforma hosszú évszakok |

## Kepler-törvények

### Kepler I. törvénye

**A bolygók ellipszis alakú pályákon keringenek, amelyeknek egyik fókuszpontjában a Nap áll.**

Az ellipszis:
- nagytengely ($2a$),
- kistengely ($2b$),
- fókuszpontok ($F_1$; $F_2$),
- excentricitás: $e = \frac{c}{a}$,
- $a^2 = b^2 + c^2$,
- napközel (P) és naptávol (A).

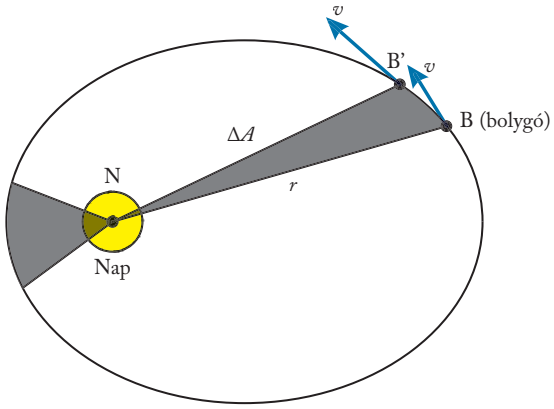



### Kepler II. törvénye

**A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.**

A perdületmegmaradás törvényének következménye.

Napközelben gyorsabban, naptávolban lassabban kering.




### Kepler III. törvénye

**A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a bolygópályák közepes Nap-távolságainak köbei.**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

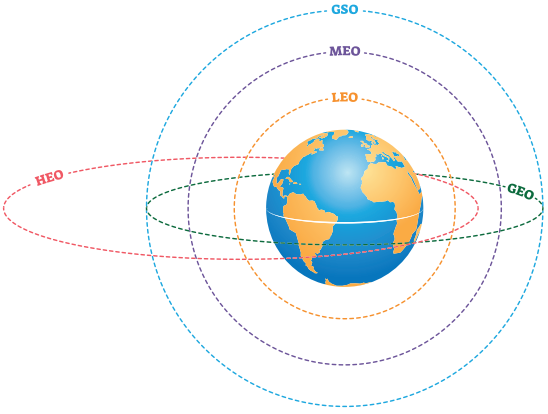
A centrális gravitációs erőtér következménye.

Kepler törvényei érvényesek minden (központi) égitest körül keringő égitestre, ha ezek tömege elhanyagolható a központi égitest tömegéhez képest.

A Kepler-törvények általánosíthatók abban a formában, hogy a központi égitest körül keringő égitestek pályagörbéje lehet kör, ellipszis, parabola és hiperbola alakú is.

## Műholdak mozgása

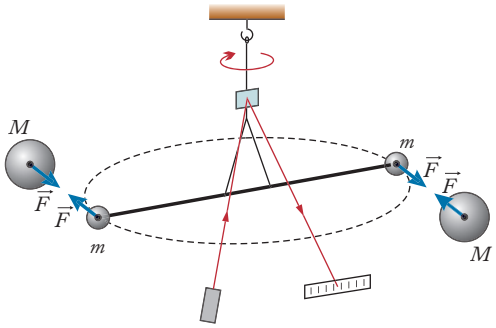
- Érvényesek rájuk a Kepler-törvények.
- Jó közelítéssel körmozgásnak vehetők.



– Mozgásuk pályái:
  – Alacsony Föld körüli pálya.
  – Közepes Föld körüli pálya.
  – Geoszinkron és geostacionárius pálya.

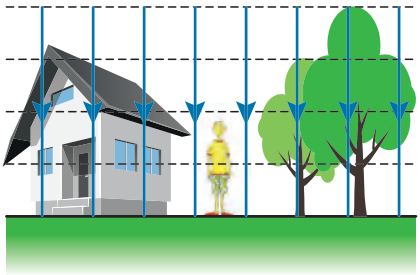
## Gravitáció newtoni elmélete

– Tömegvonzás.
– Gravitációs erő: $F_g = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$.
– Gravitációs állandó mérése, torziós inga (Cavendish).
– Kepler-törvények igazolhatók vele.



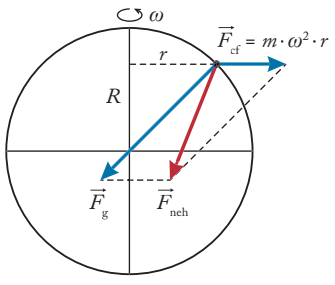

## Gravitációs erőtér

– Közelhatás elmélete (Faraday).
– Gravitációs térerősség: $g = \gamma \cdot \frac{F_g}{m}$.
– Homogén gravitációs erőtér.
– Helyzeti energia: $E_h = m \cdot g \cdot h$.



## Gravitációs gyorsulás

– Égitest felszínén: $g = \gamma \cdot \frac{M}{R^2}$.
– Égitesttől $h$ magasságban: $g = \gamma \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$.

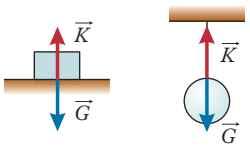



– Forgó Földön: nehézségi gyorsulás a neve.
  A nehézségi gyorsulás a Föld felszínén függ az adott hely szélességi körétől. Nagysága a sarkoktól az Egyenlítő felé csökken.
  Normálértéke: $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.
  Iránya a sarkokon és az Egyenlítőn a Föld középpontja felé, más helyeken a középponttól kissé arrébb mutat. Ennek oka egyrészt a Föld forgása, másrészt a Föld lapultsága.

– Eötvös Loránd mérései Eötvös-ingával.
  A tehetetlen ($m_t$) és a súlyos tömeg ($m_s$) legfeljebb 1/200 000 000 arányban térhet el egymástól.

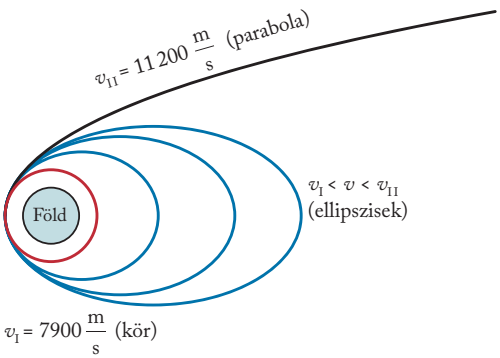
## Súly

– A test a súlyerejével nyomja az alátámasztást vagy húzza a függőleges felfüggesztést.
– Súlytalanság állapotában nem nyom az alátámasztás, és nem húz a felfüggesztés.




## Kozmikus sebességek

– I. kozmikus sebesség (körsebesség):
  $v_I = \sqrt{\gamma \cdot \frac{M}{r}}$
– II. kozmikus sebesség (szökési sebesség):
  $v_{II} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{M}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_I$



# Összefoglaló feladatok

## TESZTFELADATOK

**1.** Télen kora este a Lánchídon sétálva a derült égbolton déli irányban megpillantjuk a Hold alakját. Milyen fázisban látjuk?
A) Majdnem újhold, holdsarló.
B) Első negyed.
C) Telihold.
D) Utolsó negyed.

**2.** A következő ábrán egy holdsarló képe látható az égbolton. Jó ez az ábrázolás?
A) Nem, a holdsarló csak C vagy D alakú és helyzetű lehet.
B) Nem, a holdsarlót csak a Nap közelében láthatjuk.
C) Igen, de csak a déli féltekén látható így a Hold.
D) Igen, de csak az Egyenlítő környékéről figyelhető ez meg, ahol a Hold égi útja merőleges a horizontra.



**3.** Holdfogyatkozás után két héttel megpillantjuk az égbolton a Hold alakját a nyugati horizont felett. Milyen napszak lehet?
A) Napnyugta.
B) Éjszaka.
C) Pirkadat.
D) Napkelte.

**4.** Melyik állítás HAMIS a Föld keringési sebességére?
A) Júliusban a legkisebb a nagysága.
B) Napközelben merőleges a vezérsugárra.
C) Október folyamán az értéke egyre nagyobb.
D) Tavasszal hegyesszöget zár be a vezérsugárral.

**5.** Egy távoli csillag körül két bolygó kering. A külső bolygó 9-szer messzebb van központi csillagától, mint a belső. Melyik bolygónak nagyobb a keringési ideje, és hányszorosa a másikénak?
A) A belsőnek 27-szer nagyobb.
B) A belsőnek 4,33-szor nagyobb.
C) A külsőnek 4,33-szor nagyobb.
D) A külsőnek 27-szer nagyobb.

**6.** A Szaturnusz két holdja, a Thetys és a Calypso egyaránt 294 700 km-re kering a bolygótól, de a Thetys tömege sokszorosa a Calypso tömegének. Melyik holdnak nagyobb a sebessége?
A) A Thetysnek.
B) A Calypsónak.
C) Egyforma a sebességük.
D) Ezekből az adatokból nem dönthető el.

**7.** Szuperholdról akkor beszélünk, ha a Hold földközelben telihold fázist mutat. Ha ma éppen szuperholdat látunk, akkor mikor lesz a Hold legközelebb földközelben?
A) Kb. 1 év múlva.
B) Kb. 1 hónap múlva.
C) Kb. 1 hét múlva.
D) Kb. 1 nap múlva.

**8.** Egy műhold körpályán kering a Föld körül. Rövid időre bekapcsolja a hajtóművét, hogy egy ellipszisívben majd egy nagyobb körpályára tudjon állni. Milyen irányba kell gyorsítóerőt kifejtenie a hajtóműnek ehhez a manőverhez?
A) Érintőirányú, keringési iránnyal megegyező.
B) Érintőirányú, keringési iránnyal ellentétes.
C) Sugárirányú, a Föld felé mutató.
D) Sugárirányú, a Föld felé mutató iránnyal ellentétes.

**9.** A kis herceg bolygójának sugara mindössze egymilliomod része a Föld sugarának. Mekkora a bolygó tömege, ha annak felszínén a gravitációs gyorsulás 10 $\frac{m}{s^2}$?
A) A Föld tömegének $10^6$-on része.
B) A Föld tömegének 10-ed része.
C) A Föld tömegének $10 \cdot 10^6$-on része.
D) A Föld tömegének $10^{12}$-en része.

**10.** Két égitest átlagsűrűsége megegyezik, de az egyik nagyobb méretű, mint a másik. Melyik égitestnek nagyobb a szökési sebessége?
A) A kisebb méretűnek.
B) A nagyobb méretűnek.
C) A szökési sebesség független a két égitest méretétől.
D) Ezekből az információkból nem lehet eldönteni.

## FELADATOK

**1.** Az égbolton az égitestek egymáshoz viszonyított látszólagos távolságát és látszólagos méretét a periódusidők, szögsebességek és szögelfordulások segítségével fokokban határozzuk meg. Ez alapján válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

**a)** Hány fokot mozdul el a Nap az égbolton 1,5 óra alatt? A Nap körülfordulási ideje 24 óra.

**b)** Naponta hány fokot késik a Nap és a Hold az állócsillagok mozgásához képest?

Az állócsillagok körülfordulási ideje 23 óra 56 perc, a Holdé 24 óra 49 perc.

**c)** Az előző számításból az következik, hogy a Hold naponta 12°-kal elmarad a Naptól. Továbbá tudjuk, hogy a Nap és a Hold látszólagos átmérője 0,5°. Amikor a Nap utoléri, majd lehagyja a Holdat, akkor lehet napfogyatkozás. Ezen adatok alapján hozzávetőlegesen mennyi ideig tarthat egy napfogyatkozás?

**2.** A 67P/Csurjumov–Geraszimenko-üstökös az első olyan üstökös, amelyre ember alkotta eszköz leszállt, és azon mérőműszereket helyezett el. Az üstökös napközelben 1,2429 CsE távolságban, naptávolban 5,6839 CsE távolságban kering központi csillaga körül. Mekkora a pálya excentricitása?

**3.** A Hold átlagos Föld-távolsága 384 404 km. A pálya excentricitása 0,0549. Az ellipszispálya egyik fókuszpontja a Föld középpontjában van. A Föld felszínétől milyen magasan található a másik fókuszpont? A Föld sugara 6371 km.

**4.** A 133250 Rubik nevű, 2003. szeptember 5-én magyar csillagászok által felfedezett kisbolygó 4,37 év alatt kerüli meg a Napot. Napközelben a kisbolygó 2,4 CsE távolságra van központi csillagától. Hány CsE távolságra van a Naptól naptávolban?

**5.** Az Uránusz holdjait Shakespeare-hősökről szokták elnevezni. 1851-ben fedezték fel az Arielt, melynek közepes Uránusz-távolsága 191 ezer km, és 2,52 nap alatt járja körbe bolygóját. Az Ariel átlagos sugara 579 km, tömege $1{,}25 \cdot 10^{21}$ kg. Az 1999-ben felfedezett Prospero sugara csak 25 km, tömegét $8{,}5 \cdot 10^{16}$ kg-nak becsülik. A mérések szerint 16,2 millió km az átlagos távolsága az Uránusztól.

**a)** Mi lehet az oka, hogy a Prosperót sokkal később fedezték fel, mint az Arielt?

**b)** Mekkora a Prospero keringési ideje?

**c)** Melyik hold felszínén nagyobb a gravitációs gyorsulás?

**6.** A Hubble űrtávcső pályamagassága átlagosan 569 km.

**a)** Mekkora a keringési ideje?

**b)** Mekkora a szögsebessége?

**c)** Mekkora a gyorsulása?

**7.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2010)

A Gliese 581 egy, a Földtől kb. 20 fényévre lévő csillag. A csillagot tanulmányozva a csillagászok megállapították, hogy négy bolygó kering a csillag körül. A bolygók keringési idejét és a csillagtól vett távolságukat a mellékelt táblázat tartalmazza. Azt is sikerült megállapítani, hogy a bolygók közül kettő is, a Gliese 581c, illetve a Gliese 581d a csillagrendszer „lakható" zónájában lehet, azaz abban a tartományban, amelyben lehetséges folyékony halmazállapotú víz a bolygó felszínén.

**a)** Egészítse ki a táblázatot, írja be a hiányzó adatokat!

**b)** Tegyük fel, hogy sikerül megbizonyosodnunk arról, hogy az egyik bolygó felszínén valóban található folyékony halmazállapotú víz. Vajon levonhatjuk-e ebből azt a következtetést, hogy a felszín átlagos hőmérséklete biztosan kisebb, mint 100 °C? Válaszát indokolja!

**c)** Egy földi szervezet 2008 októberében egy nagy rádióadó segítségével üdvözlő üzenetet küldött a Gliese 581 irányába. Legkorábban mennyi idő múlva várhatunk választ az üzenetünkre?

| Bolygó jele | Távolság (millió km) | Keringési idő (nap) |
|---|---|---|
| Gliese 581a | 4,5 | 3,15 |
| Gliese 581b | 6 | |
| Gliese 581c | | 12,9 |
| Gliese 581d | 33 | 66,8 |

**8.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2010)

Miközben a Föld kering a Nap körül, a Hold kering a Föld körül.

**a)** Becsülje meg, hogy mekkora utat tesz meg Nap körüli pályáján a Föld, miközben a Hold egyszer megkerüli!

**b)** Rajzolja le hozzávetőlegesen a Hold pályáját a Nap körül!

**c)** Tegyük fel, hogy éppen napfogyatkozás van. Mekkora gravitációs erővel vonzza ekkor a Föld a Holdat, illetve a Nap a Holdat? Melyik a nagyobb?

(Adatok: $M_{\text{Föld}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{\text{Nap-Föld}} = 150 \cdot 10^{6}$ km, $M_{\text{Nap}} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_{\text{Hold}} = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg, $R_{\text{Föld-Hold}} = 384\,000$ km, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}}$.)

**9.** (Középszintű érettségi feladat, 2016)
Az alábbi táblázatban egy, a Nap körül elnyújtott ellipszispályán keringő üstökös sebességadatai vannak feltüntetve különböző időpontokban (mindig az adott esztendő február 6-án). Az üstökös a Naptól 0,586 csillagászati egység távolságra van, amikor a legközelebb jár hozzá. (1 csillagászati egység = 1 CsE, a Nap és Föld átlagos távolsága.)

| $t$ | 1931 | 1937 | 1948 | 1960 | 1966 | 1972 | 1976 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v\left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ | 2,9 | 2,0 | 0,9 | 2,1 | 3,1 | 4,5 | 5,8 |

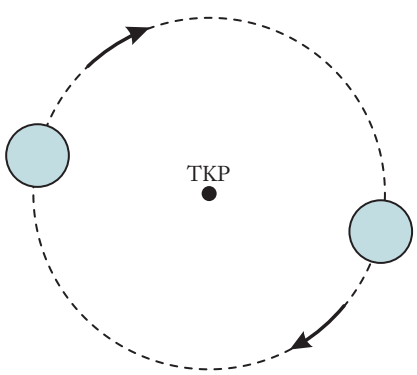
*(folytatás)*

| $t$ | 1980 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v\left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ | 7,9 | 11,1 | 13,2 | 17,7 | 54,0 | 17,7 | 13,2 |

**a)** Ábrázolja grafikonon a sebességértékeket a naptári évek függvényében!
**b)** Határozza meg, hogy az égitest melyik évben járt napközelben, illetve mikor naptávolban! Válaszát indokolja!
**c)** Mekkora az égitest keringésének periódusideje?
**d)** Tudjuk, hogy az üstökös sebességének és Naptól vett távolságának szorzata megegyezik, amikor az üstökös pályájának a Naptól legtávolabbi, illetve amikor a Naphoz legközelebbi pontján halad. Mennyi az üstökös Naptól vett legnagyobb távolsága csillagászati egységben kifejezve?

**10.** A Tienkung űrállomás Kína saját fejlesztésű űrállomása, melyet 2021-ben kezdett építeni. Pályamagassága 389 km, keringési ideje 92,2 perc.
Határozzuk meg ezekből az adatokból a Föld tömegét! A Föld sugarát vegyük 6371 km-nek.

**11.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2016)
Két azonos tömegű égitest kering körpályán közös tömegközéppontjuk körül, egymástól $d = 50\,000$ km távolságban (50 000 km az égitestek középpontjainak távolsága). A keringési idő $T = 5$ földi nap.




**a)** Mekkora az égitestek tömege?
**b)** Mekkora lenne a keringési idő, ha az égitestek egymástól vett távolsága $d' = 2d$ volna?
**A** gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

**12.** Az Apollo-11 holdra szállását a Hold egyenlítőjére tervezték energiatakarékossági okok miatt, hiszen a küldetés után a Hold elhagyásához szükséges sebességet a Hold forgásának hatása csökkentheti. A Hold adatait felhasználva határozzuk meg a következőket!
**a)** Mekkora volt a holdkompra ható gravitációs vonzóerő, ha a komp tömege 16 500 kg volt?
**b)** A Hold forgásából adódóan mekkora kerületi sebessége volt a Nyugalom tengerén landolt holdkompnak? Ezt felhasználva mekkora nehézségi erő hatott a holdkompra?
**c)** Elhanyagolható-e a két erő közötti különbség?

**13.** Egy égitest felszínén a gravitációs gyorsulás értéke $g = 6{,}48\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, az első kozmikus sebesség nagysága pedig $v = 5820\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora az égitest átlagos sűrűsége?

**14.** 2005-ben a Huygens nevű űrszonda leszállt a Szaturnusz legnagyobb holdja, a Titán felszínére. A leszálláshoz ejtőernyőt használtak, ami a Titán légkörében lefékezte a szondát, így az kis sebességgel landolt. Az űrszonda össztömege 318 kg volt. A Titán tömege $1{,}35 \cdot 10^{23}$ kg, sugara 2530 km.
**a)** Mekkora az űrszonda súlya a Titánon a landolást követően? (A Titán forgását ne vegyük figyelembe.)
**b)** Mekkora sebességgel tudta volna elhagyni az űrszonda a Titánt?

**15.** Foucault francia fizikus ingakísérlettel igazolta a Föld forgását. Ingája 67 m hosszú huzalon függő 28 kg tömegű nehezékből állt. Mekkora az inga súlya a legalsó, egyensúlyi helyzetében, ha az ingát vízszintesen 4 méterrel kitérítve indította útjára?

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### 1. Mesterséges holdak a Föld körül

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2015)

*„Valaki megjósolta, hogy a Földnek egy szép napon ugyanolyan gyűrűje lesz, mint a Szaturnusznak, csupa csapszegből, biztosítékból, sőt kéziszerszámból, amit az űrben dolgozó gondatlan szerelők hagyogatnak el."*

(*Arthur C. Clarke:* 2001. Űrodüsszeia – *Budapest, 1973. Fordította: Göncz Árpád*)



Ismertesse az általános tömegvonzás törvényét, és alkalmazza a Föld felszínén uralkodó gravitációs gyorsulás meghatározására! Mutassa be, miért más a gravitációs gyorsulás értéke más égitestek felszínén, például a Marson vagy a Holdon!

Mutassa be rajzban a Föld felszíne felett (a légkörön kívül) egy adott $h$ magasságban a Föld felszínével **párhuzamosan** elindított mesterséges hold pályáját a műhold kezdősebességének függvényében! Az alábbi esetekre térjen ki:

- mutasson be egy olyan pályát, amely metszi a földfelszínt (becsapódik a műhold a Földbe);
- egy olyat, amely éppen megkerüli a Földet;
- egyet, amely éppen kör alakú;
- és egy olyan zárt pályát, amelyen a mesterséges hold jobban eltávolodik a Föld felszínétől, mint amilyen messze induláskor volt!

A mozgások során a közegellenállás hatását tekintsük elhanyagolhatónak. Milyen sebességgel kell a műholdat elindítanunk, hogy a pályája kör alakú legyen? A Föld felszínének mindig ugyanazon pontja felett keringő, így a Föld forgási idejével megegyező keringési periódusú műholdakat geostacionárius műholdaknak nevezik. Hol helyezkedhetnek el a geostacionárius pályára állított műholdak? Határozza meg pályájuk földfelszín feletti magasságát! Mi a geostacionárius műholdak gyakorlati jelentősége?

### 2. A Hold látványa

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2015)

*„Senki arról nem kételkedik, hogy a Hold homályos test, mert az ő világának mind változásai, mind fogyatkozási nyilván mutattyák, valamint hogy gömbölyű is, és az ő felső színe valóban darabos, és különbféle makulákkal pettegettetett. Gömbölyűségéről a messzelátó tsők bizonyosságot tesznek, s ha ezek bővebben nem mutatnák is a makulákat, maga már a puszta szem eleget mutat."*

(*Varga Márton:* A Tsillagos égnek, s a Föld golyóbissának… megismerése – *Nagyvárad, 1809*)



Jellemezze a Hold tengely körüli forgását és Föld körüli keringését! Térjen ki a két mozgást jellemző adatok kapcsolatának következményeire! Magyarázza el a holdfázisok keletkezésének okát, ismertesse a holdfázisok változásának ütemét!

A Holdat úgy tartjuk számon, mint éjszaka világító égitestet. Az Egyenlítőn élő ember melyik holdfázisban mondhatja, hogy a Hold este kel fel és hajnalban nyugszik le? Miért?

Mutassa be a holdfogyatkozás és a napfogyatkozás jelenségét! Mely holdfázisokban figyelhetünk meg nap- és holdfogyatkozást? Mutassa meg, hogy az előző fotók közül melyik ábrázol holdfogyatkozást, és melyik holdfázist! Ezt miből lehet eldönteni, és miért?

Ismertesse, hogy hold- és napfogyatkozás idején milyennek látná a Földet és a Napot a Hold megfelelő oldalán álló űrhajós!

# X. Hőtan







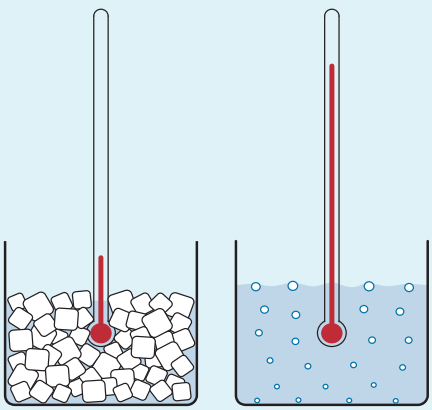
# 1. Hőmérséklet, hőtágulás

EMLÉKEZTETŐ

## Hőmérséklet és hőmérők

A **hőmérséklet** a testek hőállapotát jellemző fizikai mennyiség. SI-mértékegysége a kelvin (K), de a hétköznapi életünkben a Celsius-fokot (°C) használjuk.

A Celsius-féle hőmérsékleti skálát a folyadékok hőtágulása és a víz halmazállapot-változása segítségével alkotjuk meg. A skála két alappontja az olvadó jég és a forrásban lévő víz hőmérsékleti pontja normál légköri nyomáson. A kapillárisscsőben lévő folyadék hőmérséklet-változás hatására tágul vagy összehúzódik. A kapillárison bejelöljük a két alappontot, majd az alappontok között a skálát száz egyenlő részre osztjuk, egy osztásköz egy Celsius-fok hőmérséklet-változásnak felel meg. A beosztást a 0 °C alatt és a 100 °C felett ugyanezzel az osztásközzel folytatjuk.



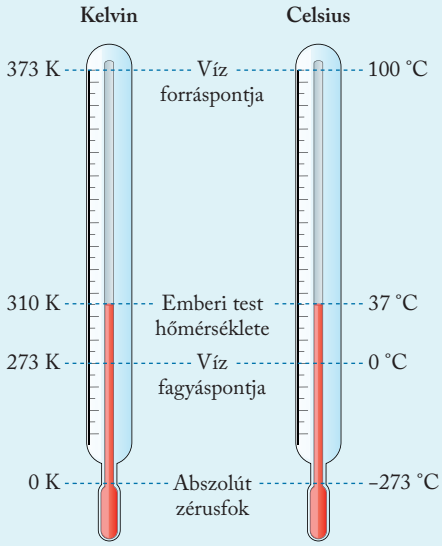

*Celsius-féle hőmérő készítése*

A Kelvin-skálán az osztásközök ugyanazok, azaz 1 °C hőmérséklet-változás egyenlő 1 K hőmérséklet-változással, a skála nullpontja azonban a –273,12 °C-nál van. Ez az elméletileg lehetséges legalacsonyabb hőmérséklet, így a Kelvin-skálán negatív mérőszámok nincsenek, és emiatt abszolút hőmérsékleti skálának is nevezzük.

A hőmérséklet mérése **hőmérővel** történik.

A **folyadékhőmérők** a fenti elven alapulnak. Régebben a **lázmérőben** higany volt a folyadék, de mérgező volta miatt ma már nem használjuk. A folyadék lehet még alkohol (pl. léghőmérők) vagy például gallium.

A **digitális hőmérők** a fémek és a félvezetők ellenállásának hőmérsékletfüggésén alapulnak. A fémek ellenállása a hőmérséklet növekedésével növekszik (ellenállás-hőmérő), a félvezetőké csökken (termisztor). A hőmérőket jellemezhetjük a pontosságukkal és a mérési tartományukkal.




*A Kelvin- és Celsius-hőmérsékleti skálák összehasonlítása*

**Példák:** A képen látható digitális szakácshőmérőről leolvasható, hogy –50 °C és +300 °C között lehet vele hőmérsékletet mérni, a kijelzőn pedig látható, hogy a mérési pontossága 0,1 °C.



*Szakácshőmérő*

A másik képen egy galliumos lázmérő van, ennek mérési tartománya 35–42 °C, és a beosztása alapján a pontossága 0,1 °C.



*Galliumos lázmérő*

## Lineáris és térfogati hőtágulás

A testek (bármely halmazállapotban) melegítés hatására általában kitágulnak, hűtéskor összehúzódnak. A geometriai viszonyok alapján lineáris és térfogati hőtágulásról beszélhetünk: **lineáris hőtágulás** esetén a test mérete az egyik térbeli irányban sokkal kiterjedtebb, mint a másik kettőben (pl. hosszú drót, pálca, villanyvezeték, rúd).

**A lineáris hőtágulást leíró összefüggés:**
$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$,
**ahol $\Delta l$ a hosszváltozás, $\alpha$ a lineáris hőtágulási együttható (mértékegysége $\frac{1}{°C}$ vagy $\frac{1}{K}$), $l_0$ a kezdeti hosszúság, $\Delta t$ a hőmérséklet-változás.**

**A térfogati hőtágulást jellemző összefüggés:**
$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t$,

**ahol $\Delta V$ a térfogatváltozás, $\beta$ a térfogati hőtágulási együttható (mértékegysége $\frac{1}{°C}$ vagy $\frac{1}{K}$), $V_0$ a kezdeti térfogat, $\Delta t$ a hőmérséklet-változás.**

A térfogati hőtágulási együttható jó közelítéssel a lineáris hőtágulási együttható háromszorosa: $\beta = 3\alpha$.

*Megjegyzés:* Az üreges testek üregei is ugyanúgy tágulnak, mintha tömör anyaggal lennének kitöltve. Erre nagyon jó példa a Gravesande-készülékkel elvégzett kísérletsorozat.

### Példák hőtágulásra

A hőtágulás jelenségét régen például a szekerek kerekének abroncsainál, illetve a hordók abroncsainál alkalmazták: a felmelegített és emiatt kitágult vaskarikát a kerékre, illetve a hordó dongáira illesztették. Kihűlés közben a vaskarika rászorult a faelemekre, így összetartva azokat.

Az épületek, építmények esetében figyelembe kell venni az évszakok váltakozása miatti hőmérséklet-ingadozásokat.

A hidak pályatestét emiatt görgőkre helyezik, az egyes pályatesteket fésűs szerkezettel illesztik össze, a vonatpálya építésekor pedig régebben tágulási réseket hagytak a sínek között.

Ha különböző anyagokat egymáshoz erősítünk, akkor a különböző hőtágulásuk miatt az ilyen tárgyak hőmérséklet-változás hatására deformálódnak. Ezen az elven működnek a bimetallszalagok, amelyeket emiatt például elektromos eszközök hőkapcsolójaként lehet használni.



*A bimetallszalag melegítéskor elhajlik*

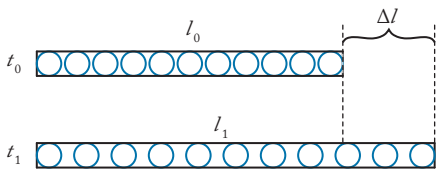
A vasbeton esetében a két anyag hőtágulási együtthatója csaknem megegyezik, így hőmérséklet-változás hatására sem keletkeznek nagy feszültségek az anyagban.

Pontos folyadékhőmérők készítésénél nemcsak a folyadék, hanem a folyadékot tartalmazó üveg hőtágulását is számításba kell venni.

## A hőtágulás mikroszkopikus értelmezése

Egy egyenes fémhuzal atomjai fémrácsba rendeződnek. Ezek között egy adott hőmérsékleten jellemző a fématomok távolsága. A fématomok a rácspontokban rezgőmozgást végeznek. Ha növeljük a hőmérsékletet, akkor a rezgőmozgás amplitúdója növekszik, amihez több helyre van szükség, emiatt a huzal tágulni fog.

Az ábrán látható, hogy miért függ a hosszváltozás a kezdeti hossztól: ha például kétszer akkora a kezdeti hossz, akkor az atomok közti távolság ugyanannyival változik, mintha rövidebb volna a huzal, viszont ezekből a távolságokból kétszer annyi van.




*A hőmérséklet növekedésével a rácspontokban rezgő atomok távolodnak egymástól*

## Relatív hossz- és térfogatváltozás, a hőtágulási együttható jelentése

Ha a hőtágulást leíró összefüggéseket az $\alpha$ és $\beta$ hőtágulási együtthatókra rendezve írjuk fel, akkor ezeket kapjuk:

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta l}{l_0}}{\Delta t}, \quad \text{illetve} \quad \beta = \frac{\frac{\Delta V}{V_0}}{\Delta t}$$

**Az összefüggésekben szereplő $\frac{\Delta l}{l_0}$ és $\frac{\Delta V}{V_0}$ hányadosokat relatív hosszváltozásnak, illetve relatív térfogatváltozásnak nevezzük.**

A relatív hosszváltozás ezek szerint azt fejezi ki, hogy a test hosszváltozása hogyan aránylik a test eredeti hosszához.

Az $\alpha$ lineáris hőtágulási együttható megmutatja, hogy 1 °C hőmérséklet-változás esetén mekkora a relatív hosszváltozás.

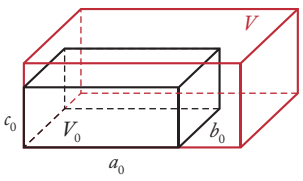
Az üveg hőtágulási együtthatója kerekítve $\alpha = 10^{-5}\,\frac{1}{°C}$, ami azt jelenti, hogy 1 °C hőmérséklet-változás esetén a relatív hosszváltozás $\frac{1}{100\,000}$. Például egy 1 km hosszú üvegszálnak ebben az esetben 1 cm-rel változik meg a hossza.

A lineáris hőtágulási együtthatóhoz hasonlóan a $\beta$ térfogati hőtágulási együttható megmutatja, hogy 1 °C hőmérséklet-változás esetén mekkora a relatív térfogatváltozás.

## A lineáris és a térfogati hőtágulás kapcsolata

A térfogati hőtágulási együttható jó közelítéssel a lineáris hőtágulási együttható háromszorosa: $\beta = 3\,\alpha$. Nézzük meg, hogy ez az állítás hogyan igazolható!

Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy $a_0$, $b_0$, $c_0$ élhosszúságú téglatestet. Adott $\Delta t$ hőmérséklet-emelkedés esetén az új élhosszúságok $a_1$, $b_1$, $c_1$ lesznek. A lineáris hőtágulásra vonatkozó összefüggést felírhatjuk mindhárom élhosszúságra:




*Téglatest alakú test térfogati hőtágulása*

$$a_1 = a_0 + \alpha \cdot a_0 \cdot \Delta t,$$
$$b_1 = b_0 + \alpha \cdot b_0 \cdot \Delta t,$$
$$c_1 = c_0 + \alpha \cdot c_0 \cdot \Delta t.$$

Az új hőmérsékleten a térfogat kiszámítható az élhosszúságok szorzataként. Ezt felírva, és a szorzást elvégezve:

$$V = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = (a_0 + \alpha \cdot a_0 \cdot \Delta t) \cdot (b_0 + \alpha \cdot b_0 \cdot \Delta t) \cdot (c_0 + \alpha \cdot c_0 \cdot \Delta t) =$$
$$= a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 + 3 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 \cdot \Delta t + 2 \cdot \alpha^2 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 \cdot \Delta t^2 +$$
$$+ \alpha^3 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 \cdot \Delta t^3$$

Az utolsó két tag több nagyságrenddel kisebb, mint a második tag, ezért ezeket elhanyagoljuk. Így azt kapjuk, hogy:

$$V = V_0 + 3 \cdot \alpha \cdot V_0 \cdot \Delta t$$

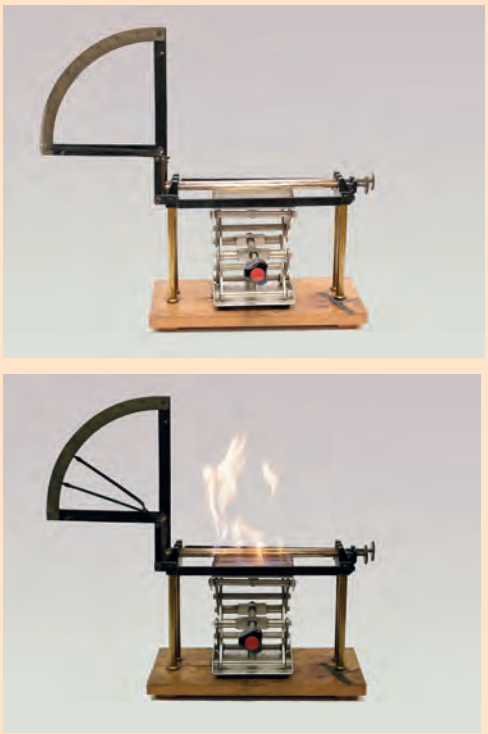
Ebből pedig már látjuk, hogy a $\beta = 3\alpha$ összefüggés közelítőleg valóban érvényes.

**KÍSÉRLET**

### Különböző anyagok hőtágulásának összehasonlítása

**1. KÍSÉRLET** **A mérés leírása:** Emeltyűs pirométerbe két különböző anyagú rudat (alumínium és vas) helyezünk. A két rúd geometriai adatai megegyeznek: azonos hosszúságúak és azonos keresztmetszetűek. A rudak alatti tálkába denaturált szeszt öntünk, és meggyújtjuk. Amikor a denaturált szesz elfogy, hagyjuk a rudakat visszahűlni szobahőmérsékletre.

**Tapasztalat:** A két rúd hőmérséklete emelkedik, a rudak kitágulnak. A tágulás mértékét az emeltyű mutatóján lehet megfigyelni. Kezdetben *(ld. 1. képen)* a két rúd hossza azonos. A hőmérséklet növekedésével azt

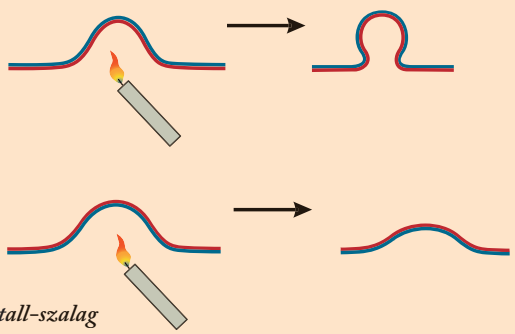


*Alumíniumból és vasból készült készült rudak hőtágulása*

tapasztaljuk, hogy az alumíniumból készült rúd nagyobb mértékben tágul, a hosszváltozása kétszer akkora, mint a vasrúdé *(ld. 2. képen)*. Amikor a rudak visszahűlnek szobahőmérsékletre, a rudak hossza csökken, végül visszanyerik eredeti hosszukat.

**Magyarázat**: A két rúd azonos geometriájú, a kezdeti hosszuk azonos. A hőmérséklet-változásuk azonos, tehát arra következtethetünk, hogy a két anyag hőtágulási együtthatója különbözik, az alumíniumé kétszer akkora, mint a vasé. A mérések szerint ez valóban így van, hiszen $\alpha_{Al} = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$ és $\alpha_{Fe} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$.

**2. KÍSÉRLET** **A mérés leírása:** Némely csokoládénak a csomagolása olyan, hogy az egyik oldala papír, a másik oldala fémfólia. Ebből kivágunk egy kb. 1 cm vastag csíkot, majd egy kis alagutat formálunk belőle úgy, hogy a fémfólia legyen felül (*ld. az 1. ábrán*: a kék szín a fémfóliát, a piros a papírréteget jelöli). Az így kapott bimetall szalagunkat fémtálcára helyezzük. Az alagútba gyors mozdulattal égő gyufát teszünk és ki is húzzuk, hogy a papír ne gyulladjon meg. Miután a szalag kihűl, a szalagot megfordítjuk: most a papírréteg lesz felül *(ld. a 2. ábrán)*. Az előzőket megismételjük, és megfigyeljük, hogy mi történik.



*Bimetall-szalag*

**Tapasztalat:** Az első esetben a melegítés hatására az alagút deformálódik, beszűkül, majd a visszahűléskor visszanyeri eredeti alakját (*1. ábra*).

Amikor megfordítjuk a szalagot, és így melegítjük, az alagút most is deformálódik, de most lelapul (*2. ábra*). Visszahűléskor most is visszanyeri eredeti alakját.

**Magyarázat:** A fémfólia jobban tágul, mint a papír, emiatt a szalag alakja mindig ennek megfelelően változik. A kísérlet jól megmutatja azt, hogy ha különböző hőtágulási együtthatójú anyagokat összeteszünk, és együtt melegítjük őket, akkor a test deformálódni fog, elhajlik, meggörbül. Ezt a tulajdonságot használjuk ki például a bimetall áramköri kapcsolók esetében.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy radiátoros fűtési rendszer elemeiben (csővezetékek, radiátorok, kazán) 5 °C-on 125 liter víz van, ilyenkor a rendszer éppen tele van.

**a)** Legalább mekkora űrtartalmú tágulási tartályra van szükség, ha a vízhőmérséklet legfeljebb 90 °C lehet? (A vezetékek, radiátorok és a kazán hőtágulását elhanyagolhatjuk.)

**b)** A víz üzemi hőmérséklete 65 °C. Mennyi víz van ekkor a tartályban?

**c)** Ha az acélból készült tágulási tartályunk 70 °C hőmérsékleten éppen 10 l, mennyivel kevesebb víz fér bele 35 °C-on?

A víz térfogati hőtágulási együtthatója

$\beta_{víz} = 5{,}85 \cdot 10^{-4} \frac{1}{°C}$,

az acél lineáris hőtágulási együtthatója

$\alpha_{acél} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$.



### MEGOLDÁS

Adatok:

$t_1 = 5$ °C, $V_{össz} = 125$ l,

$t_2 = 90$ °C, $t_3 = 65$ °C, $t_4 = 70$ °C,

$V_{tágulási} = 10$ l,

$\beta_{víz} = 5{,}85 \cdot 10^{-4} \frac{1}{°C}$,

$\alpha_{acél} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$.

---

*a)* $\Delta V_{víz,90} = ?$

*b)* $\Delta V_{víz,65} = ?$

*c)* $\Delta V_{acél} = ?$

**a)** Írjuk fel a víz térfogati hőtágulására fennálló összefüggést!

$$\Delta V_{víz} = \beta_{víz} \cdot V_0 \cdot \Delta t =$$
$$= 5{,}85 \cdot 10^{-4} \frac{1}{°C} \cdot 125 \text{ l} \cdot (90 \text{ °C} - 5 \text{ °C}) = 6{,}21 \text{ l}$$

Tehát a tartálynak legalább 6,21 literesnek kell lennie.

**b)** Az előzőhöz hasonlóan a víz térfogati hőtágulására vonatkozó összefüggést felírjuk:

$$\Delta V_{\text{víz}} = \beta_{\text{víz}} \cdot V_0 \cdot \Delta t =$$
$$= 5{,}85 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 125\ \text{l} \cdot (65\ ^\circ\text{C} - 5\ ^\circ\text{C}) = 4{,}38\ \text{l}$$

A tágulási tartályban 65 °C hőmérsékleten legalább 4,38 liter víz van.

**c)** A tartály ugyanúgy tágul, mintha tömör lenne, azaz űrtartalma változik. Most is felírjuk a térfogati hőtágulás egyenletét, és figyelembe vesszük, hogy $\beta = 3\alpha$.

$$\Delta V_{\text{acél}} = 3 \cdot \alpha_{\text{acél}} \cdot V_0 \cdot \Delta t$$
$$= 3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 10\ \text{l} \cdot (30\ ^\circ\text{C} - 70\ ^\circ\text{C}) = -0{,}13\ \text{l}$$

A tartályba 1,3 dl-rel kevesebb víz fér el 35 °C hőmérsékleten, mint 70 °C-on.

## ALKALMAZÁSOK

### Hidak hőtágulása



Az acél építményelemeket gyakran fémszegecsekkel rögzítik egymáshoz. A szegecseket nagymértékben lehűtik, és a lehűlt szegecseket a rögzítendő elemek lyukaiba helyezik. A szegecsek ezután visszamelegednek a környezet hőmérsékletére, és belefeszülnek a lyukakba. Ilyen szegecselést találhatunk például a budapesti Szabadság hídon, a Széchenyi lánchídon, a szegedi Belvárosi hídon.

### Tágulási tartály szerepe

A fűtési rendszereknél a víz hőtágulása miatt tágulási tartályt kell alkalmazni, ahová a víz kitágulhat. A benzinmotoros gépkocsik motorját víz keringetésével hűtik. A rendszerben lévő víz térfogata hideg és meleg motor esetén különböző, ezért itt is kell tágulási tartályt alkalmazni. Ügyelni kell arra, hogy a lehető legkisebb hőmérsékleten is legyen víz a tartályban, különben a rendszerbe levegő kerül.

### Üveg és levegő hőtágulása

A befőttesüvegeket gyakran igen nehéz kinyitni. Könnyebb dolgunk van, ha forró vizet engedünk a fedőre. Ilyenkor a fedő és az üveg is melegszik, azonban a fedő anyagának nagyobb a hőtágulási együtthatója, mint az üvegé, így az nagyobb mértékben tágul. Ez elegendő lehet, hogy a fedő szorulása enyhüljön.

### Kőzetek eróziója

A hőtágulás egyik következménye a természetben a kőzetaprózódás. A napi, illetve az évszakos hőingás miatt a felszíni kőzetek folyamatosan kitágulnak, majd összehúzódnak. Az anyag szerkezetében előbb-utóbb kisebb-nagyobb repedések keletkeznek. A repedések mentén a kőzetek egyre kisebb darabokra esnek szét. A tisztán hőtágulás miatt bekövetkező kőzetaprózódást igen jól meg lehet figyelni a Holdon, hiszen itt gyakorlatilag csak a hőtágulás az oka a kőzetek aprózódásának. Ennek következtében évmilliárdok alatt igen finom, vastag porréteg alakult ki a felszínen. A Földön az aprózódást további folyamatok, a szél, a víz, a növényzet, a vulkanikus tevékenység, földrengések hatásai kiegészítik, fokozzák.

### Bazalt keletkezése

A föld alól feltörő lávatömeg forró és folyékony. A felszínre kerülve folyamatosan hűl, megszilárdul, majd tovább hűl. A hűlés következtében a szilárd kőzet összehúzódik, és repedések keletkeznek benne. A repedéseket az eróziós folyamatok tovább tágítják, a kőzet töredezett lesz. A folyamatnak szép példái a vulkanikus eredetű Badacsony hegyünk bazaltorgonái és kőtengerei.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Miért nem alkalmas a víz arra, hogy folyadékos hőmérőt készítsünk belőle?
2. Előfordul, hogy a télen könnyen csukódó kerti fémkapu nyáron „szorul". Mi ennek a magyarázata?
3. Miért „lógnak" a távvezetékek nyáron?
4. Milyen hőmérsékleti tartományban használható általában egy folyadék arra, hogy hőmérőben használjuk?
5. Melyik tágul jobban azonos hőmérséklet-változás esetén: egy 10 m hosszú rézvezeték vagy egy 10 m hosszú alumíniumvezeték?
6. Melyiknek lesz nagyobb a hosszváltozása azonos hőmérséklet-változás esetén: az 1 m vagy a 3 m hosszú acélhuzalnak? És mit mondhatunk a relatív hosszváltozásukról?
7. A Hold felszínén kitűnően látható az űrhajósok lábnyoma a holdi porrétegben. Hogyan alakulhatott ki ez a porréteg? Vajon az évtizedekkel ezelőtti lábnyomok most is ott vannak és látszanak?



# 2. Gáztörvények

**EMLÉKEZTETŐ**

## Gázok állapotjelzői

A gáz (pl. a levegő) állapotát egyértelműen meghatározzák az alábbi jellemző és jól mérhető fizikai mennyiségek: nyomás, térfogat, hőmérséklet és a gáz mennyiségét jellemző valamely adat: tömeg, anyagmennyiség vagy részecskeszám. Ezeket a gáz **állapotjelzőinek** vagy **állapothatározóinak** nevezzük. Állapotjelző még a tömegből és a térfogatból származtatható sűrűség is.

## Gáztörvények

Ha egy adott térben lévő gáz minden helyen azonos nyomású és hőmérsékletű, akkor azt mondjuk, hogy a gáz **termikus egyensúlyban** van.

**Ideális gáz állapotjelzői közötti összefüggést határoz meg az ideális gáz állapotegyenlete:**

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T,$$

**ahol $n$ a mólszám, $R$ egy univerzális természeti állandó, az egyetemes gázállandó, értéke**

$$R = 8{,}31 \ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Ebből az összefüggésből következnek a következő törvények: egyesített gáztörvény, Boyle–Mariotte-törvény és Gay-Lussac I. és II. törvénye.

**Adott mennyiségű gáz állapothatározói között teremt kapcsolatot az egyesített gáztörvény. A gáz nyomásának és térfogatának szorzata egyenesen arányos az abszolút (kelvinben mért) hőmérsékletével, azaz**

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{állandó}$$

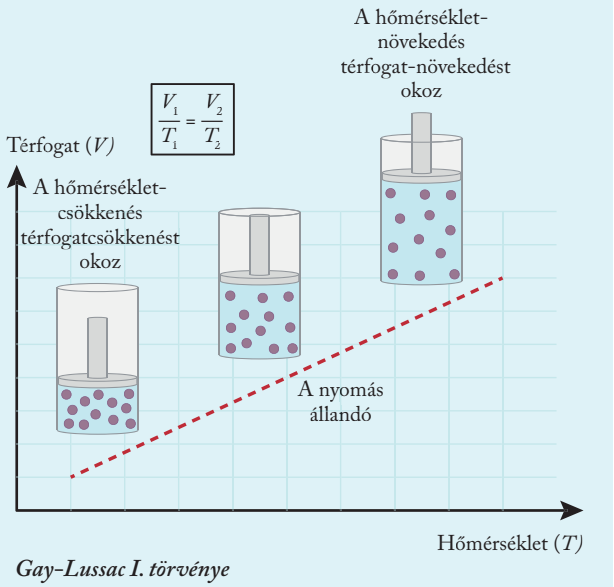
Az egyesített gáztörvényből speciális összefüggéseket vezethetünk le.

### Gay-Lussac I. törvénye

Ha a gáz nyomása állandó, azaz az **izobár állapotváltozásra** (az anyagmennyiség állandósága mellett) fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{V}{T} = \text{állandó},$$

azaz a gáz térfogata egyenesen arányos az abszolút hőmérséklettel. Ez **Gay-Lussac I. törvénye**.



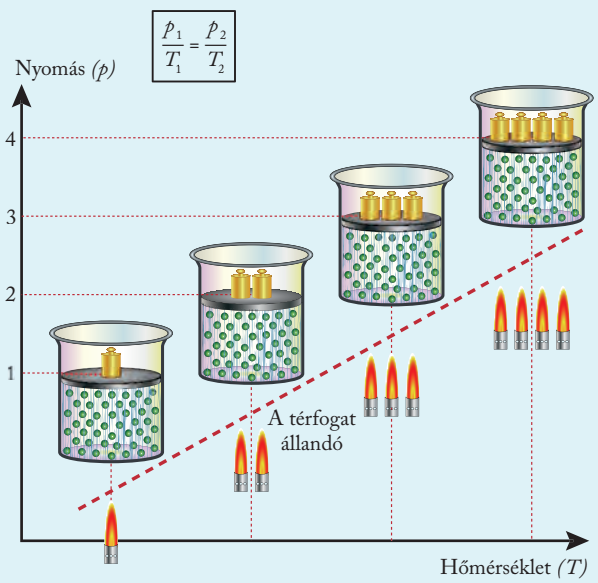

*Gay-Lussac I. törvénye*

### Gay-Lussac II. törvénye

Ha a gáz térfogata állandó, azaz az **izochor állapotváltozásra** (az anyagmennyiség állandósága mellett) fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{p}{T} = \text{állandó},$$

azaz a gáz nyomása egyenesen arányos az abszolút hőmérséklettel. Ez **Gay-Lussac II. törvénye**.

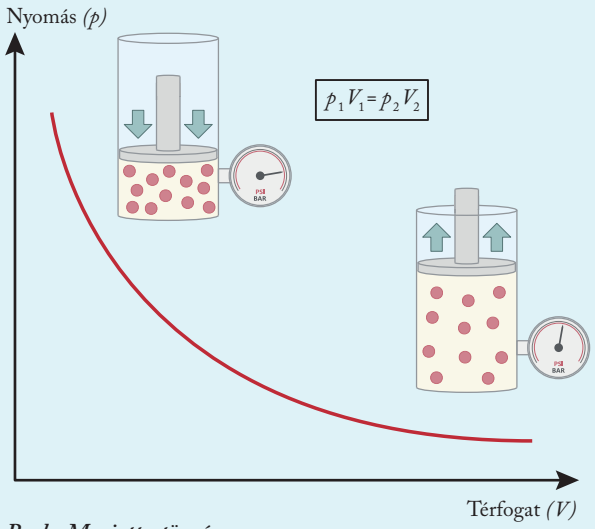



*Gay-Lussac II. törvénye*

**Boyle–Mariotte-törvény**
Ha a gáz hőmérséklete állandó, azaz az **izoterm állapotváltozásra** (az anyagmennyiség állandósága mellett) fennáll, hogy

$p \cdot V$ = állandó,

azaz a gáz nyomása és térfogata közt fordított arányosság van. Ez a **Boyle–Mariotte-törvény**.



*Boyle-Mariotte-törvény*

## Avogadro törvénye

Egy további összefüggés is fennáll az gázok állapotjelzői között.

**Avogadro törvénye** szerint az ideális gáz (függetlenül az anyagtól) egyenlő térfogataiban egyenlő számú részecske (molekula, atom) van, ha a nyomás és a hőmérséklet azonos.

Minden anyag mólnyi anyagmennyiségében $6 \cdot 10^{23}$ db részecske található:

$N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$, ez az **Avogadro-állandó**.

## Gáztörvények anyagmennyiség változásakor

A gáz állapotegyenletét mindig a gáz egy adott (egyensúlyi) állapotára írjuk fel, a gáztörvényeket pedig a gáz állapotváltozásaira, azaz folyamatokra alkalmazhatjuk a feladatok megoldása során. Fontos emlékeznünk még a gáz mennyiségét meghatározó állapotjelzők közti összefüggésekre:

$\rho = \frac{m}{V}$ és $n = \frac{m}{M}$,

ahol $\rho$ a gáz sűrűsége, $m$ a gáz tömege és $M$ a gáz moláris tömege. Utóbbi a gáz anyagára jellemző mennyiség.

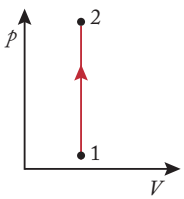
**Az egyesített gáztörvényt felírhatjuk arra az esetre is, amikor a gáz mennyisége változik:**

$$\frac{p \cdot V}{m \cdot T} = \text{állandó, illetve } \frac{p \cdot V}{n \cdot T} = \text{állandó.}$$

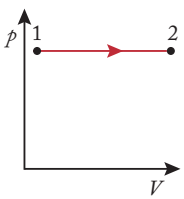
## Gázok állapotváltozásai grafikonon

A gázok állapotváltozásait igen gyakran a nyomás-térfogat ($p$-$V$) diagramon jelenítjük meg. Az egyes állapotokat A, B, C… betűkkel, vagy 1, 2, 3… számokkal jelöljük. Ha gáz az egyik állapotból a másikba jut, akkor a kezdő- és a végállapotot az állapotváltozásnak megfelelő vonallal kötjük össze, a vonalon nyíllal jelöljük a változás irányát.

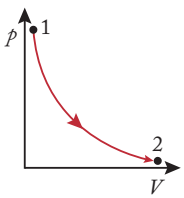
A következő diagramok a három speciális állapotváltozáshoz (izochor, izobár, izoterm) kapcsolódnak:



Izochor folyamat



Izobár folyamat



Izoterm folyamat

*Izochor, izobár és izoterm folyamatok grafikonjai*

Az izochor állapotváltozás $p$-$V$ diagramján a két állapotot a $p$ tengellyel párhuzamos, egyenes szakasz köti össze, hiszen a folyamat során a térfogat állandó.

Az izobár állapotváltozáskor a nyomás állandó, így ezen a $p$-$V$ diagramon a két állapotot a $V$ tengellyel párhuzamos, egyenes szakasz köti össze.

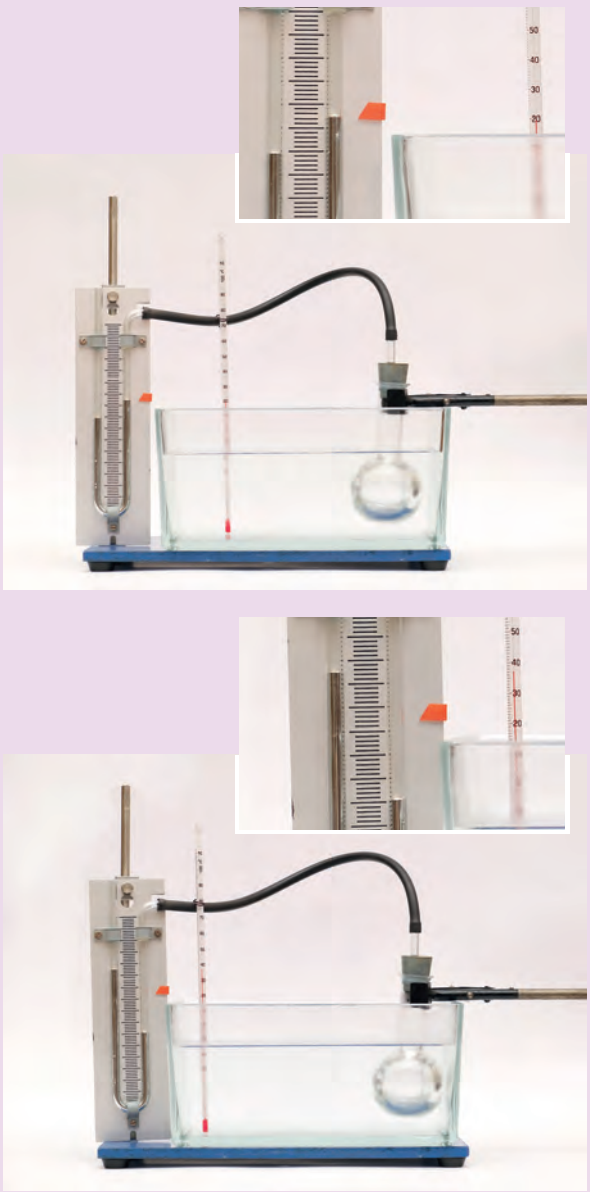
Izoterm folyamat során a Boyle–Mariotte-törvény értelmében a $p \cdot V$ szorzat állandó, így ennek megfelelően a diagramon a két állapotot hiperbolaszakasz köti össze. A különböző hőmérsékletekhez tartozó hiperbolákat a $p$-$V$ diagramon **izotermáknak** nevezzük.

**MÉRÉSI FELADAT**

## Gay-Lussac II. törvénye

**A mérés leírása**

Egy lombikba olyan gumidugót teszünk, amely a közepén át van fúrva, ebbe a lyukba egy üvegcsövecskét helyezünk. Egy gumicső egyik végét erre az üvegcsőre, másik végét higanyos manométerre csatlakoztatjuk. A lombikot vízfürdőbe tesszük, a víz hőmérsékletét hőmérővel mérjük *(ld. 1. képen)*.



*A lombikban a nyomás növekszik, miközben a hőmérséklet 19 °C-ról 37 °C-ra emelkedik*

A mérés során a víz hőmérsékletét ($t$) meleg víz hozzákeverésével fokozatosan emeljük. Miután beáll az új hőmérséklet, a higanyszintek különbségét ($\Delta h$) leolvassuk. Az adatokból kiszámítjuk a lombikba bezárt levegő abszolút hőmérsékletét és nyomását.

**A mérés menete**

Gay-Lussac II. törvényében a gáz abszolút hőmérséklete szerepel, ezért a °C-ban leolvasott hőmérsékletet át kell számítani kelvinbe: $T\,(\mathrm{K}) = t\,(^\circ\mathrm{C}) + 273$.

A bezárt levegő $p$ nyomását a $p_\mathrm{k}$ külső légnyomás (normál légköri nyomás) és a $p_\mathrm{Hg}$ hidrosztatikai nyomás segítségével számítjuk ki:

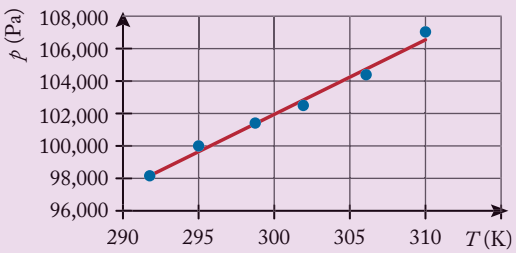
$$p = p_\text{légnyomás} + p_\mathrm{Hg} = 10^5\ \mathrm{Pa} + \rho_\mathrm{Hg} \cdot g \cdot \Delta h =$$

$$= 10^5\ \mathrm{Pa} + 13\,600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \Delta h$$

A következő táblázatban láthatjuk a mérési adatainkat és az azokból számított nyomás- és abszolúthőmérséklet-értékeket. Az első és az utolsó mérés leolvasását láthatjuk a kis képeken, a táblázatban ezeket az értékeket vastagon szedtük. A táblázat utolsó sorában a nyomás és a kelvinben mért hőmérséklet hányadosát számítottuk ki.

| $t$ (°C) | **19** | 22 | 25 | 29 | 33 | **37** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta h$ (cm) | **–1,4** | 0 | 0,8 | 2 | 3,4 | **5,4** |
| $p$ (Pa) | 98 132 | 100 000 | 101 067 | 102 668 | 104 536 | 107 204 |
| $T$ (K) | 292 | 295 | 298 | 302 | 306 | 310 |
| $\frac{p}{T}\left(\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{K}}\right)$ | 336 | 339 | 339 | 340 | 342 | 346 |

Készítsük el a mérési eredmények alapján a $p$-$T$ grafikont!




*A gáz nyomása a hőmérséklet függvényében*

*A grafikonon azt láthatjuk, hogy a mérési pontokra egyenes illeszthető, ez pedig lineáris függvénykapcsolatra utal.* A $\frac{p}{T}$ hányadosok jó közelítéssel állandók, ebből pedig arra a következtetésre jutunk, hogy Gay-Lussac II. törvénye igaz, a gáz nyomása és abszolút hőmérséklete közt egyenes arányosság van.

**A mérés mérési hibái**

Vegyük észre, hogy a táblázat hányadosai mérésről mérésre kicsit növekednek. Ha pedig a grafikon egyenesét meghosszabbítanánk, az nem teljesen az origóba (0; 0) futna. Ezek arra utalnak, hogy a mérésben van némi pontatlanság.

Ennek két oka is van.

Az egyik, hogy a bezárt levegő nincs teljesen termikus egyensúlyban, mert a tömegének egy kis hányada (ami a lombikon kívül van, és így nem veszi körül a víz) kicsit más hőmérsékletű, mint a lombikban lévő.

A másik, hogy a gáz igen kis mértékben ugyan, de tágult is annyival, amennyi higanytérfogatot átnyomott a manométer másik szárába. Ettől függetlenül mondhatjuk, hogy a mérésünkkel jó közelítéssel igazoltuk Gay-Lussac II. törvényét.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy 3 m magasságú, 15 m² alapterületű szobában a hőmérséklet 23 °C, a nyomás $10^5$ Pa.

**a)** Hány darab levegőrészecske van a szobában?

**b)** Mennyi a levegő tömege?

**c)** A szoba levegője 32 °C-ra növekedett, miközben a nyomás 101 300 Pa-ra nőtt. Mennyivel változott a levegő tömege? (Feltételezhetjük, hogy a szoba nem teljesen szigetelt, így a szoba levegőjének mennyisége megváltozhatott.)

A levegő átlagos moláris tömege $29\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$h = 3$ m,

$A = 15$ m².

$t_1 = 23$ °C,

$p_1 = 10^5$ Pa,

$t_2 = 32$ °C,

$p_2 = 101\,300$ Pa,

$M_{\text{levegő}} = 29\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

---

*a)* $N = ?$

*b)* $m_1 = ?$

*c)* $\Delta m = ?$

**a)** Az ideális gáz állapotegyenletét felhasználva:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{10^5\ \text{Pa} \cdot 3 \cdot 15\ \text{m}^3}{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (23 + 273)\ \text{K}} = 1829\ \text{mol}$$

Avogadro törvénye alapján a részecskék száma:

$$N = n \cdot N_\text{A} = 1829\ \text{mol} \cdot 6 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{mol}} = 1{,}98 \cdot 10^{27}\ \text{db}$$

A szobában lévő részecskék száma 23 °C-on $1{,}98 \cdot 10^{27}$ db.

**b)** A moláris tömegből és az anyagmennyiségből kiszámíthatjuk a levegő tömegét:

$$m_1 = n \cdot M = 1829\ \text{mol} \cdot 29\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 53\,041\ \text{g} \approx 53\ \text{kg}$$

A szobában lévő levegő tömege 23 °C-on 53 kg.

**c)** Ismét felírhatjuk a 32 °C hőmérsékletű szoba levegőjére az állapotegyenletet (a térfogat nem változott). Mivel az anyagmennyiségre most nincs szükség, írjuk fel közvetlenül a gáz tömegére:

$$m_2 = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \frac{101\,300\ \text{Pa} \cdot 45\ \text{m}^3 \cdot 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot (32 + 273)\ \text{K}} =$$

$$= 52\ \text{kg}$$

A távozó levegő tömege: $\Delta m = m_1 - m_2 = 53\ \text{kg} - 52\ \text{kg} =$ $= 1$ kg.

A levegő tömege körülbelül 1 kg-mal csökkent, ennyi levegő távozott a szobából.

**2. FELADAT** A gáztartály tetejére dugattyúval ellátott hengert szereltek. A henger keresztmetszetének területe 60 cm², a dugattyú tömege 200 g. A külső nyomás 100 kPa.

**a)** Mekkora a tartályban lévő gáz nyomása?

**b)** A gáz hőmérsékletét 20 °C-ról 40 °C-ra növeljük. Mekkora tömegű testet kell a dugattyúra helyeznünk ahhoz, hogy a dugattyú a melegítés után az eredeti helyzetébe kerüljön?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$A = 60$ cm², $M = 200$ g,

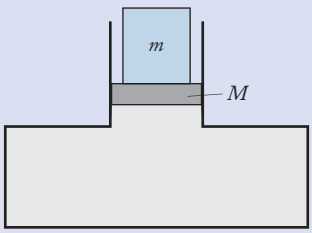
$p_\text{k} = 100$ kPa,

$T_1 = 20$ °C $= 293$ K,

$T_2 = 40$ °C $= 313$ K.

---

$p_1 = ?$, $m = ?$




**a)** $V$ = állandó, **izochor állapotváltozás**.

Számítsuk ki a dugattyú és a külső nyomás összegét, ez a gáz kezdeti nyomása:

$$p_1 = p_\text{k} + \frac{M \cdot g}{A} = 100\ \text{kPa} + \frac{2\ \text{N}}{6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2} = 100{,}33\ \text{kPa}$$

**b)** Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést, fejezzük ki a $p_2$-t, és helyettesítsük be az adatokat!

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{100{,}33\ \text{kPa} \cdot 313\ \text{K}}{293\ \text{K}} = 107{,}18\ \text{kPa}$$

A nyomáskülönbség: $\Delta p = p_2 - p_1 = 6{,}85$ kPa.

A nyomáskülönbséget a dugattyúra helyezett $m$ tömegű test által kifejtett nyomás egyenlíti ki:

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$$

Fejezzük ki a tömeget! Helyettesítsük be az ismert adatokat, végezzük el a számítást!

$$m = \frac{\Delta p \cdot A}{g} = \frac{6{,}85 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4{,}11 \text{ kg}$$

A dugattyúra 4,11 kg tömegű testet kell helyeznünk ahhoz, hogy a dugattyú a melegítés után az eredeti helyzetébe menjen vissza.

**3. FELADAT** A 40 l térfogatú tartályban $2{,}5 \cdot 10^5$ Pa nyomású, 27 °C hőmérsékletű hidrogéngáz van.
**a)** Hány mól gázt töltöttek a tartályba?
**b)** Mekkora lesz a hőmérséklete, ha állandó nyomáson kiengedik a gáz tömegének 20%-át?

## MEGOLDÁS

Adatok:

$V = 40 \text{ l} = 40 \text{ dm}^3 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Pa, $R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$T_1 = 27 \text{ °C} = 300 \text{ K}$

$M_{H_2} = 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$

$m_2 = 0{,}8 \cdot m_1$

---

*a)* $n = ?$, *b)* $T_2 = ?$

**a)** Alkalmazzuk az állapotegyenletet:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Fejezzük ki az anyagmennyiséget: $n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = 4$ mol

A tartályba 4 mol gázt töltöttek.

**b)** $p$ = állandó, $V$ = állandó.

Alkalmazzuk az egyesített gáztörvény tömeget is tartalmazó alakját!

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{m_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{m_2 \cdot T_2}$$

Mivel a nyomás és térfogat állandó, ezért egyszerűsítünk velük:

$$m_2 \cdot T_2 = m_1 \cdot T_1 \text{ és } 0{,}8 \cdot m_1 \cdot T_2 = m_1 \cdot T_1$$

$m_1$-gyel egyszerűsítünk, kifejezzük $T_2$-t:

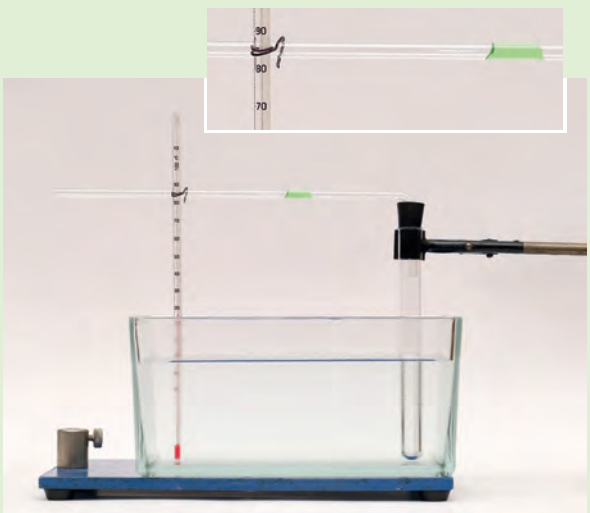
$$T_2 = \frac{T_1}{0{,}8} = 375 \text{ K} = 102 \text{ °C}$$

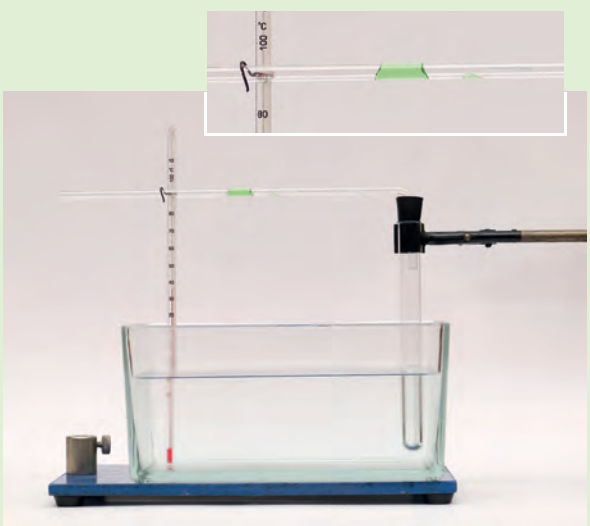
102 °C lesz a hőmérséklete, ha állandó nyomáson kiengedik a gáz tömegének 20%-át.

## ALKALMAZÁSOK

### Gázhőmérő készítése

A gázok hőtágulása a folyadékok mellett szintén jól használható hőmérőként, ezeket gázhőmérőknek nevezzük. Az állandó nyomású (izobár) gázhőmérő Gay-Lussac I. törvénye alapján működik. Az alábbi összeállításban a gáz (levegő) tartálya egy vízszintes csőben végződik, amit folyadékcsepp zár el a külső levegőtől *(ld. 1. kép)*, így a gáz mennyisége és nyomása is állandó marad. Ha melegítjük a gázt, az kitágul, és arrébb tolja a vízcseppet *(ld. 2. kép)*. A vízszintes cső mellé kalibrált skálát helyezve kapunk gázhőmérőt.





## Dezodoros palack melegítése

A hajtógázzal működő dezodorokra, festékszórókra biztonsági figyelmeztetésként ráírják, hogy tilos tűzbe dobni, vagy magas hőmérsékletnek, napsugárzásnak kitenni. A palackban lévő gáz nyomása melegítés hatására Gay-Lussac II. törvénye alapján növekszik (izochor állapotváltozás). A megnövekedett nyomást a palack egy bizonyos érték felett már nem bírja ki, és kidurran. Ez súlyos sérülésekhez vezethet.



## PET vizespalack hűtése

Ha egy szoba-hőmérsékletű, nem teljesen teli PET vizespalackot beteszünk a hűtőszekrénybe, előfordul, hogy egy idő után kis pattanó hangot hallunk. A palackban a víz feletti térrészben adott mennyiségű, szoba-hőmérsékletű levegő van. A hűtőszekrényben a térfogata és a mennyisége nem változik (izochor állapotváltozás), ezért a hűlés során a nyomása csökkenni kezd, Gay-Lussac II. törvényének megfelelően. Egy idő után, ha a palack nem viseli el a külső és a belső levegő közti nyomáskülönbséget, akkor kissé behorpad, ezt kíséri a pattanó hang.

## Hidrosztatikai nyomás szerepe

A természetes vizek alján keletkező buborékok felszállnak a víz felszínére. Eközben a térfogatuk növekszik. Ha a víz hőmérséklete a mélységtől függetlenül állandónak vehető (izoterm állapotváltozás), akkor a buborék a felszállás során folyamatosan tágul. A buborékban lévő gáz nyomása a víz alján az adott mélységre jellemző hidrosztatikai nyomás és a víz feletti légnyomás összege. A felszállás során a hidrosztatikai nyomás csökken, így a buborék nyomása is csökkenni fog. A Boyle–Mariotte-törvény miatt ekkor a térfogat növekszik.

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan lehet egy gázpalackban lévő gáz nyomását csökkenteni?
2. Hosszabb tárolás után a kefires-, joghurtosdobozok fedele, doboza kissé felpuffad. Mi ennek az oka?
3. Miért kell a gázpalackokat óvni a magas hőmérséklettől?
4. Egy nagyon keményre felfújt, vagy egy kicsit kevésbé felfújt labdában van nagyobb nyomás? Mi a magyarázat a nyomások különbözőségére?
5. Egy üres, légmentesen záródó, szoba-hőmérsékletű termoszt hűtőszekrénybe teszünk. Milyen állapotváltozáson megy át a termoszba zárt levegő? Hogyan változik a nyomása?
6. Egy fecskendőt félig kihúzva tartunk. Befogjuk a fecskendő végét, és lassan kihúzzuk. Milyen a bezárt levegő állapotváltozása? Hogyan változik a levegő nyomása?

# 3. Kinetikus gázelmélet

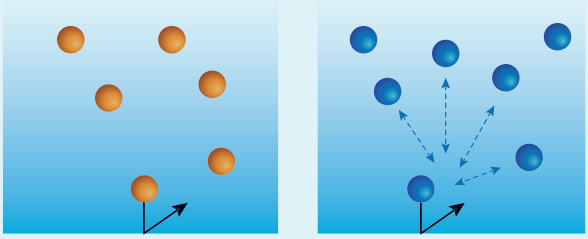
**EMLÉKEZTETŐ**

## Kinetikus gázelmélet

A gázok állapotjelzői közül a nyomás és a hőmérséklet mélyebb megértéséhez meg kell vizsgálni a gázt alkotó részecskék viselkedését. A legegyszerűbb **modell** erre a **kinetikus gázelmélet**. A modellek mindig tartalmaznak egyszerűsítéseket és feltételezéseket. A kinetikus gázelméletben az **ideális gáz modellje** a következő:

– az ideális gáz igen nagy számú, egyenlő tömegű, *pontszerűnek tekinthető részecskéből* áll;
– a részecskék állandó mozgásban vannak (innen származik a „kinetikus” jelző), zegzugos pályán mozognak, és a részecskék egymással és a fallal (amely tökéletesen merev) ütköznek;
– az *ütközések mindig tökéletesen rugalmas ütközések*, azaz az ütközések előtti és utáni mozgási energiák összege állandó;
– eltekintünk a külső gravitációs erőtől, valamint feltesszük, hogy *a részecskék között csak az ütközésekből származó kölcsönhatások lépnek fel*;
– a részecskék nagy sebességgel, rendezetlenül mozognak, a sebesség nagysága és iránya folyamatosan változik az ütközések miatt, de az átlagsebességgel jellemezhető ez a mozgás.

*Megjegyzés:* Az ideális gázoknál a gázrészecskék közötti kölcsönhatást elhanyagoljuk. A reális gázok annyiban különböznek az ideális gázoktól, hogy ott a gázrészecskék közötti kölcsönhatást is figyelembe vesszük, például a Van der Waals-féle erőket.



Ideális gáz | Reális gáz

*Az ideális gázok közötti kölcsönhatást elhanyagoljuk, míg a reális gázoknál figyelembe vesszük (pl. a Van der Waals-erőket)*

## Belső energia, szabadsági fok

Általánosságban egy adott anyag **belső energiáján** ($E_b$) azt a benne tárolt energiát értjük, mely az anyag belső szerkezetével kapcsolatos. Szűkebben: az ideális gáz belső energiáján a gázrészecskék mozgási energiájának összességét értjük.

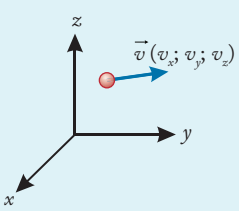
**A kinetikus gázelmélet alapján a gáz belső energiája:**

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T,$$

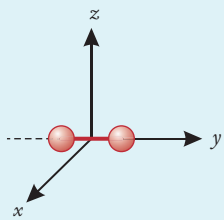
**vagy a $k$ ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$) Boltzmann-állandóval felírva:**

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T$$

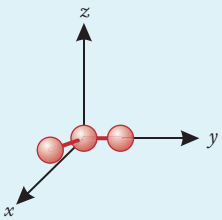
Az egyenlőségekben $f$ a gázrészecskék **szabadsági fokainak számát** jelenti.
Az ideális gáz modellje alapján a szabadsági fokok:
– egyatomos gázokra 3,
– kétatomos gázokra 5,
– többatomos gázoknál 6.




*Egyatomos gáz modellje*




*Kétatomos molekulából álló gáz modellje*




*Többatomos molekulából álló gáz modellje*

*Megjegyzés:* Az ideális gázok modelljében a többatomos gázok szabadsági foka 6. A mérési eljárások alapján egyes többatomos gázok szabadsági foka: például a metáné 6,3, az ammóniáé 6,4, a kén-dioxidé 7,3, a szén-dioxidé 6,7, az etáné 9,8. A többatomos gázokra az ideális gázok modellje csak közelítőleg követi a valóságos mért értékeket.

Az előző egyenletek azt is kifejezik, hogy a gázrészecskék mozgásának (hőmozgás) növekedésével a gáz hőmérséklete is növekszik. A hőmérséklet ezen értelmezése nemcsak a gázokra, hanem a folyadékokra és a szilárd halmazállapotú testekre is érvényes.

### Ekvipartíció tétele

Láttuk, hogy $N$ db részecskéből álló, $f$ szabadsági fokú gáz belső energiája a $k$ Boltzmann-állandóval felírva:

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T$$

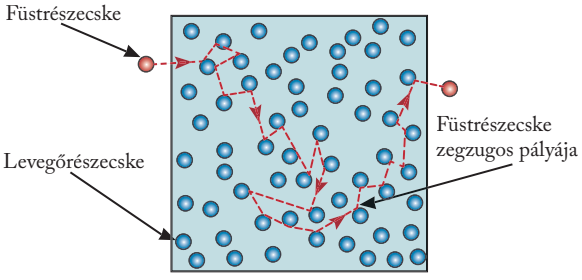
Ebből egy részecske egy szabadsági fokra jutó energiája:

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$$

**Minden egyes szabadsági fokra ugyanannyi, azaz $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ energia jut. Ez az energia egyenletes eloszlásának elve, azaz az ekvipartíció tétele.**

## A Brown-mozgás

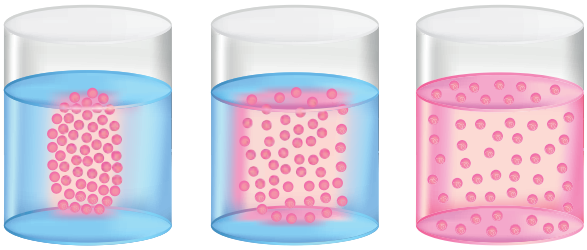
A gáz a folyadékokhoz és a szilárd testekhez hasonlóan részecskékből (atomokból, molekulákból) áll. A gázrészecskék hő hatására rendezetlen mozgást, úgynevezett **hőmozgást** végeznek. Robert *Brown* (1773–1858) angol botanikus 1827-ben mikroszkóppal megfigyelte, hogy a virágpor szemcséi a víz felületén szabálytalan, zegzugos mozgást végeznek. Az ilyen mozgást szokás **Brown-mozgásnak** nevezni. Hasonló jelenséget látunk akkor, ha mikroszkóppal por- vagy füstszemcsék mozgását tanulmányozzuk a levegőben.




*Egy füstrészecske Brown-mozgása levegőben*

A Brown-mozgás hozzájárult ahhoz, hogy a tudományos közösség elfogadja azt a gondolatot (kinetikus gázelméletet), hogy minden atomokból áll.

A gázrészecskék hőmozgásával magyarázhatjuk a **diffúzió** jelenségét. Két különböző gáz molekulái addig keverednek egymással, amíg a molekulák eloszlása egyenletes nem lesz. Jól párolgó illóolaj molekulái összekeverednek a levegő részecskéivel, ezért bizonyos idő múlva mindenütt érezzük az olaj illatát *(ld. az ábrán)*.



*Diffúzió jelensége*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Határozzuk meg, hogy 20 °C hőmérsékletű levegőben mekkora átlagos sebességgel mozognak az oxigénmolekulák! Egy $O_2$-molekula tömege $5{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg.

### MEGOLDÁS

Adatok:
T = 293 K,
$m_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg.

$v_{átl} = ?$

Az ekvipartíció tétele felhasználásával számoljuk ki egy molekula átlagsebességét!

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{átl}^2 = \frac{3}{2} k \cdot T,$$

amelyből

$$v_{átl} = \sqrt{\frac{3\,k \cdot T}{m}}$$

Behelyettesítve:

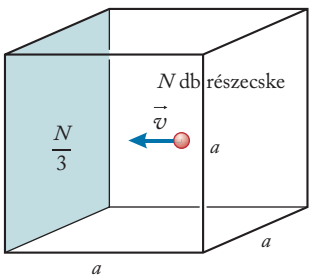
$$v_{átl} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 293\ \text{K}}{5{,}3 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}}} = 480\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A 20 °C hőmérsékletű levegőben az oxigénmolekulák átlagos sebessége 480 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

## Az ideális gáz nyomása

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

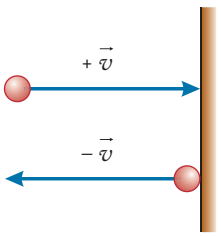
Vizsgáljuk meg a kinetikus modell alapján a gáz nyomását! Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy kocka alakú, $s$ élhosszúságú tartályt, amelyben $N$ számú, egyenként $m_r$ tömegű részecske van. A kinetikus modell alapján feltételezett átlagsebességet jelöljük $v$-vel! További egyszerűsítésként tegyük fel, hogy *minden részecske valamelyik falra merőlegesen mozog!* Azt az időt, amely alatt egy részecske épp $s$ távolságot tesz meg, jelöljük $\Delta t$-vel! Ez alapján $v = \frac{s}{\Delta t}$.




*A gázrészecskék 1/3-a ütközik két-két szemben lévő fallal*

Beláthatjuk, hogy ez alatt a $\Delta t$ idő alatt minden részecske éppen egyszer fog a tartály falával ütközni, amely a kinetikus modell alapján tökéletesen rugalmas, és mivel a tartály fala merev, így a részecske sebességének nagysága nem változik. Ha merőleges ütközést feltételezünk, akkor a részecske sebessége $v$-ről $-v$-re változik, így a lendületváltozásra felírható, hogy:

$$\Delta I = (-m_r \cdot v) - m_r \cdot v = -2\, m_r \cdot v$$




*Gázrészecske falnak ütközése*

A részecske lendületváltozását a fal által kifejtett erő okozza:

$$F_{fal} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = -2\, m_r \cdot v$$

A hatás-ellenhatás (Newton III.) miatt a részecske a falra ugyanekkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki:

$$F_r = \frac{2\, m_r \cdot v}{\Delta t}$$

Mivel $\Delta t$ idő alatt minden részecske egyszer ütközik a fallal, így az $N$ számú részecske a teljes tartály felületére ezen idő alatt átlagosan $F = N \cdot m_r \cdot \frac{2v}{\Delta t}$ erőt fejt ki. A nyomás az erő és a nyomott felület nagyságának hányadosaként számítható, valamint vegyük észre, hogy $N \cdot m_r = m$, ahol $m$ a teljes gáztömeg:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot \frac{2v}{\Delta t}}{6 \cdot s^2} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{\frac{v}{\Delta t}}{s^2}$$

Szorozzuk meg a számlálót és nevezőt is $s$-sel:

$$p = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{\frac{v}{\Delta t} \cdot s}{s^3}$$

A nevezőben így a kocka térfogatát kaptuk, a számlálóban pedig $v^2$-et:

$$p = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{v^2}{V}$$

Átrendezve a törtet, és a $\rho = \frac{m}{V}$ összefüggést alkalmazva (és most már a sebesség átlagosságát is hangsúlyozva) kapjuk, hogy $p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_{átl}^2$.

Ennek az egyenlőségnek két következménye van.

– Az egyik, hogy kapcsolatot teremt a gáz makroszkopikus, közvetlenül mérhető állapotjelzői (nyomás és sűrűség) valamint a gáz mikroszkopikus jellemzője (a részecskék átlagos sebessége) közt. Emellett az is következik ebből, hogy **a gáz nyomását valójában a részecskék mozgása és az ebből következő, a fallal való ütközések okozzák**. Ha nagyobb a gázrészecskék sebessége, időegység alatt több fallal való ütközés történik, így a nyomás is nagyobb lesz.
– Hasonlóan: ha nagyobb a gáz sűrűsége, az ütközések száma több lesz, nő a nyomás. A nagyszámú ütközés együttes hatásának szemléletes elképzeléséhez gondoljunk egy bokszzsákra, amit a bokszoló először csak 5-6 másod-



percenként üt meg. Ilyenkor a zsák kilendül, és oda-vissza lengésbe kezd. Ha a bokszoló most másodpercenként 5-10-szer üti meg a zsákot, akkor a zsák szinte meg sem mozdul, egy bizonyos kitérésnél ott marad.

## A gáz hőmérsékletének értelmezése

Induljunk ki az előző levezetés alábbi egyenletéből:

$$p = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{v^2}{V}$$

Szorozzunk meg az egyenletet $\frac{3}{2} \cdot V$-vel, és használjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét!

$$\frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{átl}}^2$$

Az egyenlet jobb oldalán a gázrészecskék átlagos sebességéből számolt, a gázrészecskék összes mozgási energiája szerepel, amely egyenlő az ideális gáz belső energiájával, míg a bal oldalon a gáz mennyisége és abszolút hőmérséklete. Ez a következőt jelenti.

**A gáz $T$ abszolút hőmérséklete egyenesen arányos a gáz $E_b$ belső energiájával, azaz a gázrészecskék összes mozgási energiájával.**

Ezzel egy újabb, igen fontos összefüggéshez jutottunk. Ha a modellt kiterjesztjük a többatomos gázokra, akkor a fenti egyenletet az $f$ szabadsági fokok számával felírva:

$$\frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{átl}}^2$$

A $k$ **Boltzmann-állandó** bevezetésével, amely az $R$ egyetemes gázállandó és az $N_A$ Avogadro-állandó hányadosa ($k = \frac{R}{N_A}$), a fenti egyenlet így is írható:

$$\frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{átl}}^2$$

### KIDOLGOZOTT FELADAT

A léggömbök töltéséhez gyakran héliumgázt használnak. Egy 10 literes, héliumgázt tartalmazó palackban a nyomás $2 \cdot 10^7$ Pa. A hőmérséklet a palackban és a környezetben is 20 °C.

**a)** Mennyi lenne a térfogata a gáznak ugyanezen a hőmérsékleten, normál légköri nyomáson?

**b)** Mekkora a gázrészecskék átlagos sebessége a palackban?

**c)** Mennyi a gáz belső energiája a palackban?

### MEGOLDÁS

Adatok:

$V = 10\ \text{l} = 10^{-2}\ \text{m}^3$, $p = 2 \cdot 10^7$ Pa,

$M = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$, $T = 20\ ^\circ\text{C} = 293$ K.

*a)* $V_2 = ?$ *b)* $v_{\text{átl}} = ?$ *c)* $E_b = ?$

**a)** Ha a hőmérséklet állandó, és a gázmennyiség sem változik, akkor ez izoterm állapotváltozás, azaz a keresett térfogatot a Boyle–Mariotte-törvényből számíthatjuk ki:

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{2 \cdot 10^7\ \text{Pa} \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3}{10^5\ \text{Pa}} = 2\ \text{m}^3$$

Tehát 2 m³ lenne a héliumgáz térfogata normál légköri nyomáson.

**b)** A sebesség kiszámításához határozzuk meg először a gáz sűrűségét! Ehhez használjuk az ideális gáz állapotegyenletét:

$$p_1 = \frac{\rho}{M} \cdot R \cdot T$$

Ebből a sűrűség

$$\rho = \frac{p_1 \cdot M}{R \cdot T} = \frac{2 \cdot 10^7\ \text{Pa} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 293\ \text{K}} = 32{,}85\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A sebességet a kinetikus gázelmélet alábbi összefüggésének átrendezésével kapjuk:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_{\text{átl}}^2,$$

amelyből

$$v_{\text{átl}} = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^7\ \text{Pa}}{32{,}85\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 1351\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A héliumatomok átlagos sebessége 1351 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**c)** A hélium egyatomos gáz, szabadsági foka így $f = 3$. A belső energia kiszámítása a $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletet is felhasználva:

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{f}{2} \cdot p \cdot V = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^7\ \text{Pa} \cdot 2\ \text{m}^3 =$$
$$= 6 \cdot 10^7\ \text{J} = 60\ \text{MJ}$$

A héliumgáz belső energiája 60 MJ.

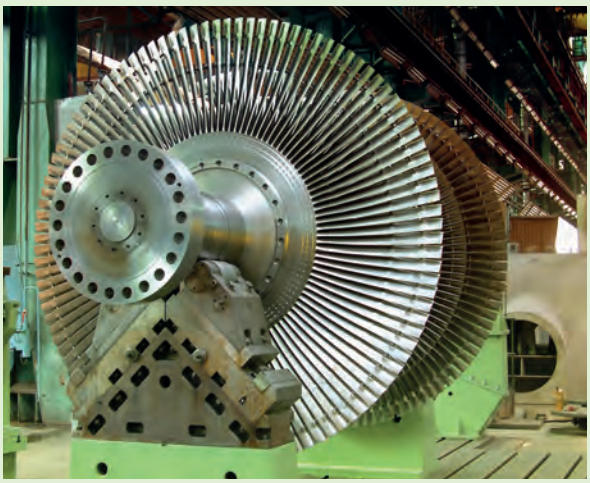
## ALKALMAZÁSOK

### Turbinalapátok meghajtása gőzzel

A villamos energia termeléséhez igen elterjedt a hőerőművek alkalmazása. Ezekben a vizet valamely energiaforrás segítségével felmelegítik, majd elforralják, és a keletkező gőzt tovább melegítik. Ez a gőz a turbinákra áramlik, és megforgatja azokat, a folyamat végén pedig „fáradt” gőz keletkezik.

A kinetikus modell alapján a folyamatot így értelmezhetjük:

A keletkező forró gőzben igen nagy a vízmolekulák mozgási energiája. A turbinára vezetve a gőzt, a vízmolekulák *rugalmasan ütköznek* a lapátokkal. Azok forgásba jönnek, forgási energiájuk megnő, a vízrészecskék mozgási energiája csökken. Mivel így a sebességük is csökken, a kinetikus modell szerint a gőz hőmérséklete csökkenni fog, a gőz „elfárad”.



*Gázturbinalapátok szerelése*

### A Tyndall-jelenség

A redőny résein a szobába bejövő fénycsíkokban a porszemek zegzugos mozgást végeznek. Ez a jelenség akkor is megfigyelhető, ha a szoba levegője teljesen nyugalomban van, nincs légáramlás.

A lebegő porszemcsék mozgására *John Tyndall* (1820–1893) ír fizikus adott először tudományos magyarázatot. A jelenséget tiszteletére Tyndall-jelenségnek nevezzük. Azzal magyarázta a zegzugos mozgást, hogy a porszemekbe beleütköznek a levegő molekulái, és mivel az ütközések nagyságukat és irányukat tekintve véletlenszerűek, így az erőhatások véletlenszerűen mozgatják a porszemeket. A Tyndall-jelenség azt bizonyítja, hogy a gázmolekulák rendezetlen mozgást végeznek.

A kolloid oldatok jellemző tulajdonsága, hogy a bennük lévő finoman elkevert részecskéken a fény szóródik. Ezt az érdekes, látványos jelenséget is Tyndall-jelenségnek nevezzük.



*Tyndall-jelenség*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a szoba levegőjének belső energiája, ha a szoba nagyon jól szigetelt, és a hőmérsékletet emeljük? Hogyan változik a levegőmolekulák mozgása?
2. A limonádéba tett cukor keverés nélkül is (ugyan sokkal hosszabb idő alatt) egy idő után elkeveredik. Hogyan lehetséges ez?
3. Milyen mikroszkopikus jelenség magyarázza a gázok nyomását?
4. Egy palackban a gáz kelvinben mért hőmérséklete a duplájára emelkedik. Hogyan, hányszorosára változik a részecskék átlagos sebessége?
5. Egy szobába betett virág illatát hamarosan az egész helyiségben, sőt az egész lakásban lehet érezni, még akkor is, ha nincs légmozgás. Mi a magyarázata ennek?
6. Egy tartályban lévő gáz tömegét megkétszerezzük, a hőmérséklet nem változik. Hogyan változik a gáz nyomása? Mi a magyarázata a nyomás változásának a kinetikus modell alapján?

# Összefoglalás

## Hőtágulás

A testek hőtágulását a geometriájuk alapján **a lineáris vagy a térfogati hőtágulással** jellemezzük:

$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$ , illetve $\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta t$

A hosszváltozás függ a kezdeti méretektől, mert a hőtágulás mikroszkopikus oka a részecskék közti távolság növekedése.

A lineáris hőtágulási együttható és a térfogati hőtágulási együttható az 1 °C hőmérséklet-változásra jutó relatív hosszváltozást adja meg.

Közelítőleg érvényes, hogy: $\beta = 3\alpha$.

## Ideális gázok állapotváltozásai

### Egyesített gáztörvény

Az **egyesített gáztörvény** a gáz két különböző állapota között teremt összefüggést:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{n_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{n_2 \cdot T_2}$$

### Ideális gáz állapotegyenlete

Az **ideális gáz állapotegyenlete** a gáz ugyanazon állapotában az állapotjelzők között teremt kapcsolatot:

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

## Kinetikus gázelmélet

### Ideális gáz modellje

Az ideális gáz mikroszkopikus modellje a kinetikus gázelmélet. Eszerint a gázrészecskék pontszerűnek tekinthetők, és a fallal, valamint az egymással való tökéletesen rugalmas ütközésen kívül nincs más kölcsönhatás. A részecskék száma igen nagy, folyamatosan, nagy sebességgel mozognak. Az elmélet alapján a gáz nyomása:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v_{\text{átl}}^2$$

A nyomás a részecskék nagyszámú, fallal való ütközéséből származik. A hőmérséklet a gázrészecskék mozgási energiájával függ össze (hőmozgás):

$$\frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{átl}}^2$$

### Gáz belső energiája

Az ideális gáz belső energiája a gázrészecskék mozgási energiájának összességéből adódik:

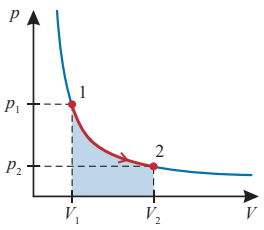
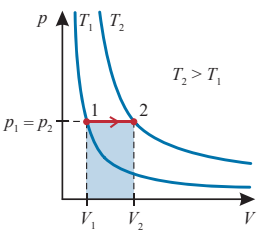
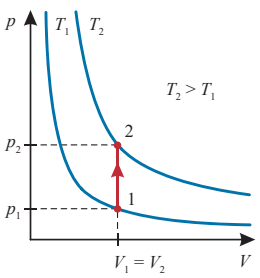
$$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

### Ekvipartíció tétele

A gáz egy részecskéjének egy szabadsági fokára jutó energia:

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$$

**Az ideális gáz állapotváltozásai és jellemzői**

| | Izoterm | Izobár | Izochor |
|---|---|---|---|
| Állandó fizikai mennyiség | hőmérséklet ($T$) | nyomás ($p$) | térfogat ($V$) |
| Gáztörvény neve | Boyle–Mariotte | Gay-Lussac I. | Gay-Lussac II. |
| Gáztörvény egyenlete | $p \cdot V =$ állandó | $\frac{V}{T} =$ állandó | $\frac{p}{T} =$ állandó |
| $p$–$V$ diagram |  |  |  |

# Összefoglaló feladatok

## TESZTFELADATOK

**1.** Egy 10 méteres rézvezetéket először 20 °C-ról 30 °C-ra melegítünk, majd 30 °C-ról tovább melegítjük 40 °C-ra. Melyik esetben nagyobb a vezeték hosszváltozása?
A) A 20 °C-ról 30 °C-ra melegítéskor.
B) A 30 °C-ról 40 °C-ra melegítéskor.
C) A hosszváltozás mindkét esetben azonos.

**2.** Egy gázpalackban a gáz nyomása a felére csökkent. Mi történhetett?
A) A gázmennyiség felét elhasználták, a többi állapotjelzője nem változott.
B) A gáz °C-ban mért hőmérséklete a felére csökkent, a többi állapotjelzője nem változott.
C) A gáz kelvinben mért hőmérséklete megduplázódott, a többi állapotjelzője nem változott.
D) A gáz térfogata a felére csökkent, a többi állapotjelzője nem változott.

**3.** Léggömbök töltésére használt héliumgázt tartalmazó palackból hosszú idő alatt, állandó hőmérsékleten elhasználták a gáz felét. Hogyan változott a gázrészecskék átlagos sebessége?
A) Növekedett.
B) Nem változott.
C) Csökkent.

**4.** Egy palackban tárolt oxigéngáz belső energiája 300 MJ. Mennyi energia jut a gáz egy szabadsági fokára?
A) 300 MJ.
B) 100 MJ.
C) 60 MJ.
D) 50 MJ.

**5.** Az 1-es anyag lineáris hőtágulási együtthatója kétszer akkora, mint a 2-es anyagé. Azonos hőmérsékleten az 1-es anyagból harmadakkora hosszúságú huzalt vágunk, mint a 2-esből. A két huzalt együtt melegítjük. Hogyan aránylik a két hosszváltozás egymáshoz?
A) Az 1-es anyagból készült huzal hosszváltozása kétszer akkora lesz, mint a 2-esből készültnek.
B) A 2-es anyagból készült huzal hosszváltozása 1,5-szerese lesz az 1-es anyagból készültnek.
C) A 2-es anyagból készült huzal hosszváltozása 2/3-a lesz az 1-es anyagból készültnek.
D) Az 1-es anyagból készült huzal hosszváltozása harmadakkora lesz, mint a 2-esből készültnek.

**6.** Héliumgázt tartalmazó palackban a gáz abszolút (kelvinben mért) hőmérséklete kétszeresére nőtt (a gáz mennyisége nem változott). Hogyan változott a héliumatomok átlagos sebessége?
A) Nem változott.
B) Kétszeresére növekedett.
C) Négyszeresére növekedett.
D) $\sqrt{2}$ -szeresére növekedett.

**7.** Melyik NEM IGAZ az alábbiak közül az *ideális gáz* modelljére?
A) A részecskék pontszerűek.
B) A részecskék folyamatosan mozgásban vannak.
C) A részecskék száma nagyon kevés.
D) A részecskék közt csak ütközések vannak, más kölcsönhatás nincs.

**8.** Adott mennyiségű ideálisnak tekinthető gáz nyomása a háromszorosára nőtt, miközben a térfogata a felére csökkent. Hogyan változott a gáz abszolút hőmérséklete?
A) A hőmérséklet változatlan volt a folyamat során.
B) Az abszolút hőmérséklet hatszorosára nőtt.
C) A folyamat végén az abszolút hőmérséklet az eredetinek a 2/3-a lett.
D) Az abszolút hőmérséklet a kezdeti 1,5-szeresére növekedett.

**9.** Az alábbi összefüggések az ideális gáz állapotegyenletét írják le. Az egyik HIBÁS, melyik az?

A) $p \cdot m = \rho \cdot n \cdot R \cdot T$.

B) $T = \frac{p \cdot V}{N \cdot k}$.

C) $\frac{n \cdot R}{\rho} = \frac{p \cdot m}{T}$.

D) $\frac{p}{\rho} = \frac{R \cdot T}{M}$.

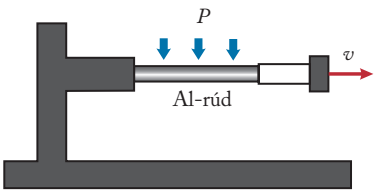
**10.** Egy fémgömböcske éppen nem fér át egy karikán. A karikát elkezdjük melegíteni. Átférhet-e egy idő után a gömb a karikán?
A) Igen, mert a karika belseje is úgy tágul, mintha anyaggal lenne kitöltve.
B) Nem, mert ezt csak a gömb hűtésével lehetne megoldani.
C) Nem, mert melegítésekor a karika befelé is tágul, tehát még kevésbé férne át rajta a gömb.
D) Igen, de csak akkor, ha a gömb és a karika azonos anyagból készült.

**11.** Egy gázpalackban tárolt gáz hőmérséklete 10 °C-ról 20 °C-ra változott, a palack hőtágulásától eltekinthetünk. Mit mondhatunk a gáz nyomásáról?
(A gázmennyiség nem változott.)
A) A gáz nyomása kétszer akkora lett.
B) A gáz nyomása nem változott.
C) A gáz nyomása több mint kétszer akkora lett.
D) A gáz nyomása nőtt, de kevesebb, mint duplájára.

## FELADATOK

**1.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2014)
Egy $t_1 = 20$ °C hőmérsékletű, nagyon pontosan $d = 10$ cm átmérőjű, tömör rézhengerre egy alumíniumból készült, vele megegyező hőmérsékletű gyűrűt szeretnénk ráhúzni. A gyűrű belső átmérője szemmértékre szintén 10 cm, ám mégsem tudjuk a rézhengerre húzni. Ezért melegíteni kezdjük a gyűrűt, és azt tapasztaljuk, hogy akkor lehet ráhúzni a (még mindig 20 °C-os) rézhengerre, amikor a hőmérséklete eléri a $t_2 = 120$ °C-ot.
**a)** Mekkora volt az alumíniumgyűrű belső átmérője melegítés előtt, amikor a hőmérséklete még csak 20 °C volt?
**b)** A rézhengerre húzott és 120 °C-ra felmelegített gyűrűt hagyjuk 20 °C-ra visszahűlni. A gyűrű erősen rászorul a hengerre, nem lehet lehúzni róla. Ezek után együtt kezdjük melegíteni a hengert a ráhúzott gyűrűvel. Mekkora hőmérséklet felett lehet a gyűrűt könnyedén lehúzni a hengerről?

**2.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2021)
Egy kísérletben egy anyagmintát meghatározott sebességgel, nagyon lassan kell mozgatni. Ezt úgy oldották meg, hogy a mintát egy olyan rúd végéhez rögzítették, melynek középső, 30 cm-es része alumíniumból van, és kör keresztmetszetű. Ezt a darabot állandó hőteljesítménnyel melegítik.

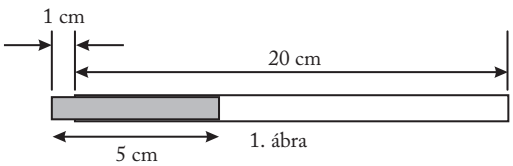



**a)** Másodpercenként mekkora hőmérséklet-változást kell elérnünk, ha azt szeretnénk, hogy a minta 36 nm/s sebességgel mozogjon?
**b)** Mekkora fűtőteljesítményre van ehhez szükség?
(A veszteségektől tekintsünk el!)
Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C}$, az alumíniumrúd átmérője 1 cm, az alumínium sűrűsége 2700 $\frac{kg}{m^3}$, fajhője 900 $\frac{J}{kg \cdot °C}$.

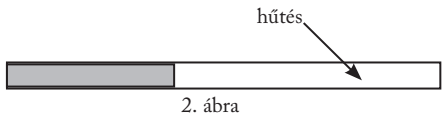
**3.** A Balaton vízmélysége egy adott helyen 8 méter. Ezen a helyen a tó alján képződik egy 3 mm átmérőjű buborék. A légnyomás 101 500 Pa.
**a)** Mekkora lesz a buborék sugara, ha a hőmérséklet végig 17 °C, miközben felemelkedik a felszínre?
**b)** Mekkora lesz a buborék sugara, ha a tó alján 17 °C, a felszínén 25 °C a hőmérséklet?

**4.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2005)
Egy izzólámpa belső térfogata 80 $cm^3$. Az izzót 20 °C hőmérsékletű, $7 \cdot 10^4$ Pa nyomású argongázzal töltik fel.
**a)** Határozzuk meg az izzóban lévő argongáz sűrűségét!
**b)** Mekkora az elzárt gáz nyomása az izzó működése közben, amikor a gáz (átlagos) hőmérséklete 140 °C?
A további szükséges adatokat vegyük a *Négyjegyű függvénytáblázatokból!*

**5.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2006)
Egy 20 cm hosszú, 1 $cm^2$ keresztmetszetű üvegcsőben egy 5 cm hosszú üvegdugó úgy helyezkedik el, hogy 1 cm-rel lóg ki az üvegből *(ld. 1. ábra)*. A dugó könnyen mozog, az üvegben lévő levegőt mégis jól elzárja a külvilágtól. A dugót kétféle módszerrel juttathatjuk teljes terjedelmével az üvegbe: hűtéssel *(ld. 2. ábra)*, vagy mindig a megfelelő nagyságú nyomóerőt kifejtve, lassú, egyenletes mozgatással *(ld. 3. ábra)*. (A szoba és az üvegben lévő levegő kezdeti hőmérséklete 15 °C, a légnyomás $10^5$ Pa.)



1. ábra



2. ábra



3. ábra

**a)** Mekkora hőmérsékletre kell lehűteni a bezárt levegőt az első módszernél?
**b)** Mekkora a nyomóerő a *3. ábrán* látható helyzetben?

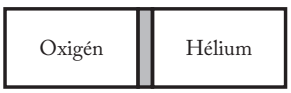
**6.** Egy vaskarika átmérője 20 °C-on 15 cm, egy alumíniumgömb átmérője szintén 20 °C-on 15,01 cm. A vas lineáris hőtágulási együtthatója $1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C}$, az alumíniumé $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C}$. Milyen közös hőmérsékleten fér át éppen a gömb a karikán?

**7.** Egy héliumpalackokat forgalmazó vállalkozás honlapján az alábbi táblázatot találjuk:

| Palack űrtartalma (liter) | Töltési nyomás ($10^5$ Pa) | Töltési mennyiség ($m^3$) |
|---|---|---|
| 2 | 200 | 0,4 |
| 5 | 200 | 0,9 |
| 10 | 150 | 1,5 |

**a)** Mekkora tömegű gázt töltöttek az 5 liter térfogatú palackba, ha a töltés 25 °C-os üzemben történt?
**b)** Mennyi az 5 liter térfogatú palackban a héliumgáz sűrűsége?
**c)** Hány darab héliumatom van az 5 literes palackban?
**d)** Mennyi a héliumatomok átlagos sebességének aránya a töltés előtt és a töltés után?

**8.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2016)
Egy hőszigetelt tartályt egy könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú oszt két részre. A hőmérséklet kezdetben mindkét térrészben 20 °C. A bal oldali tárolóban 0,63 g oxigéngáz van, térfogata kezdetben 0,5 liter, a jobb oldali részben hélium található, amelynek kezdeti térfogata szintén 0,5 liter.

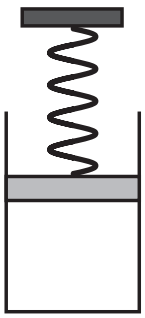



**a)** Határozza meg az oxigén nyomását!
**b)** Határozza meg a hélium tömegét!
**c)** Mennyi lesz a két térrész térfogatának aránya, ha a héliumot 120 °C-ra melegítjük, miközben az oxigén hőmérsékletét változatlanul hagyjuk?
($R = 8{,}31\ \frac{J}{mol \cdot K}$, $M_{O_2} = 32\ \frac{g}{mol}$, $M_{He} = 4\ \frac{g}{mol}$).

**9.** Élelmiszerek tartósításánál gyakran alkalmazzák a vákuumcsomagolást. A darált kávé, felvágott, tőkehús csomagolásakor a dobozból vagy zacskóból kiszívják a levegő nagy részét. Az ételek, élelmiszerek eltarthatóságának idejét ugyanis nagyban csökkenti az oxigén. Hús csomagolásakor a 100 kPa nyomást a csomagológép 10 kPa-ra csökkentette a levegő kiszívásával. A tasak térfogata 20%-kal csökkent. A levegőmolekulák száma hány százalékkal csökkent, ha csomagolás közben a húst lehűtötték 15 °C-ról 4 °C-ra?



**10.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2007)
Egy függőleges hengerben, amely nincs alátámasztva, súlyos dugattyú levegőt zár el az ábrán látható elrendezésnek megfelelően. A levegő hőmérsékletét lassan növeljük. A levegő kezdeti térfogata $V_1 = 10\ dm^3$, kezdeti hőmérséklete $t_1 = 20$ °C, végső hőmérséklete $t_2 = 100$ °C. A dugattyú tömege $m = 5$ kg, alapterülete $A = 40\ cm^2$, a rugó direkciós ereje (rugóállandója) $D = 1500\ \frac{N}{m}$. A jelen elrendezésben a rugó megnyúlása $\Delta l = 10$ cm, $p_{külső} = 10^5$ Pa.



**a)** Mennyi lesz a bezárt gáz kezdeti, illetve végső nyomása?
**b)** Mennyi a rugó végső megnyúlása?
**c)** Milyen irányban és mennyit mozdul el a henger?

**11.** Egy léggömb a légkör felsőbb részében tartózkodik, ahol –18 °C a hőmérséklet. Térfogata $4{,}2 \cdot 10^3\ dm^3$, a benne lévő gáz nyomása 50 kPa.
**a)** Mekkora lesz a léggömb térfogata normál légköri nyomáson és 30 °C hőmérsékleten?
**b)** Mekkora a benne lévő gáz tömege, ha tudjuk, hogy héliummal van töltve?
**c)** Mennyi a héliumatomok átlagos sebessége a két esetben?

**12.** Egy $0{,}1\ cm^2$ keresztmetszetű, alul zárt, felül nyitott, függőleges Melde-csőben 6 $cm^3$ levegő van, amelyet 5 cm hosszúságú higanyoszlop zár el. Mennyivel mozdul el a higanyoszlop, ha
**a)** a csövet vízszintesen helyezzük el?
**b)** zárt végével felfelé, függőlegesen tartjuk?
A higany sűrűsége $\rho_{Hg} = 13\,600\ \frac{kg}{m^3}$, a nehézségi gyorsulás $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$, a légnyomás $p_0 = 101$ kPa. A hőmérséklet nem változik a kísérlet során.

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### 1. Szilárd és folyékony anyagok hőtágulása

(Emelt szintű érettségi feladat, 2006)

*A hőmérséklet ingadozása a természetben és a technikai környezetben is mindennapos dolog. Az anyagok hőmérséklet-változás miatti méretváltozása általában igen kicsiny, legtöbbször 1% alatti hatás, de mégis számos olyan eset van, amelyben ezt a látszólag elhanyagolható hatást nem szabad figyelmen kívül hagyni.*

Ismertesse a szilárd és folyékony anyagok hőtágulását leíró törvényeket! Mutassa be három példa elemzésével, hogy a gyakorlati életben hogyan veszik figyelembe a hőtágulás jelenségét!

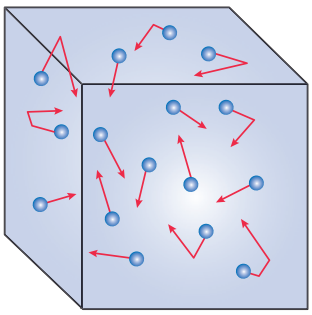
Elemezze, hogy milyen értelemben nevezhetjük rendellenesnek a víz hőtágulását!

### 2. Az ideális gázok és a gázmodell

(Emelt szintű érettségi feladat, 2016)

*„A szerző a gázok tulajdonságait, már ami a hőt és a rugalmasságot illeti, egy különös elméletből vezeti le, mely a hőt úgy tekinti, mint ami az anyag részecskéinek kicsi, de nagyon gyors mozgásából áll. Úgy képzeli, hogy a gáz atomjai, amelyek teljesen elasztikusak, állandó mozgásban vannak minden irányba…".*

(*Waterston cikkének részlete [~1840]*
*Simonyi Károly:* A fizika kultúrtörténete *c. könyvéből*)



Ismertesse a légnemű anyag legfontosabb tulajdonságait! Mutassa be, hogy milyen makroszkopikus mennyiségekkel jellemezhetjük fizikai szempontból egy gáz állapotát! Milyen matematikai kapcsolat áll fenn ezen mennyiségek között?

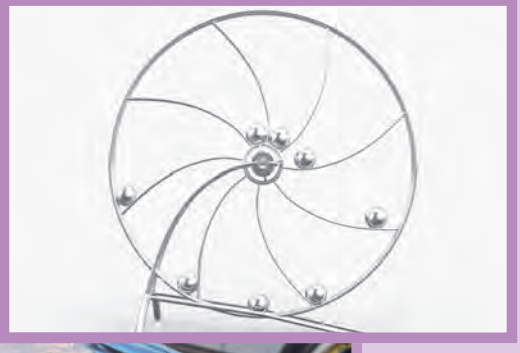
Az ideális gázok részecskemodellje alkalmas a makroszkopikus mennyiségek mikroszkopikus értelmezésére. Ismertesse a modell feltevéseit! Mutassa be, hogy az egyes állapotjelzőket hogyan értelmezhetjük a részecskemodell alapján! (Nem szükséges levezetéseket ismertetnie, elegendő a végeredmény bemutatása.)

Egy állandó hőmérsékleten tartott, állandó térfogatú tartályban tárolt gáz tömegét megkétszerezzük. Ekkor megváltozik a gáz nyomása. Hogyan értelmezhetjük a nyomásváltozást a modell alapján?

Egy másik, dugattyúval elzárt tartályban állandó nyomás mellett melegítjük a gázt. Ekkor a gáz térfogata megnő. Miért kell megnövekednie a térfogatnak, hogy a nyomás állandó maradhasson? Értelmezze a részecskemodell alapján!

# XI. A hőtan főtételei







# 1. A hőtan I. főtétele

**EMLÉKEZTETŐ**

## A hőtan I. főtétele

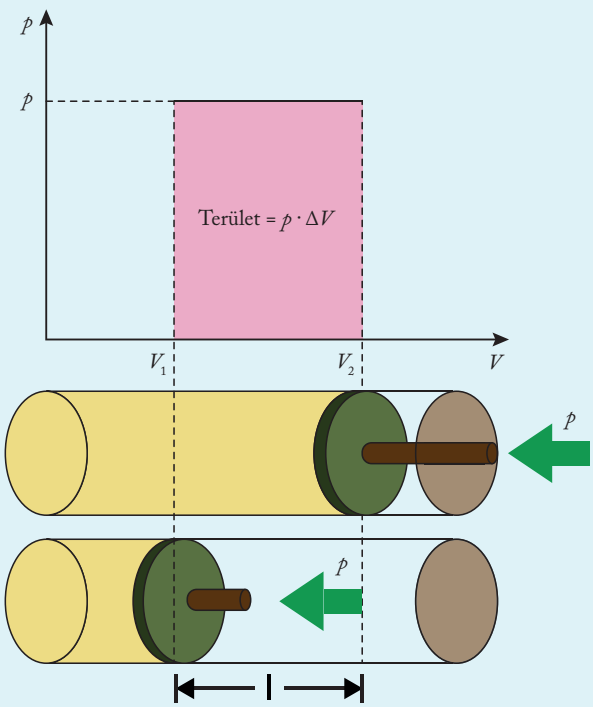
Az ideális gáz belső energiáját termikus kölcsönhatás (melegítés, hűtés) vagy mechanikai kölcsönhatás (a gáz összenyomása, a gáz kitágulása) során lehet megváltoztatni.

**A belső energia megváltozása egyenlő a termikus kölcsönhatást jellemző hőmennyiség és a mechanikai kölcsönhatást jellemző térfogati munkavégzés összegével:**

$\Delta E_b = Q + W$

**Ezt a hőtan I. főtételének nevezzük.**

Ha a gáz a termikus kölcsönhatás során hőmennyiséget vesz fel, akkor az egyenletben a $Q$ előjele pozitív, ha pedig hőmennyiséget ad le, a $Q$ előjele negatív.
Ha a folyamat során állandó nyomáson
- *a gázt összenyomjuk*, azaz $W$ térfogati munkát végzünk a gázon, akkor $W > 0$;
- *ha pedig a gáz tágul*, akkor a gáz végez munkát, ilyenkor $W < 0$.




*Gáz összenyomásakor a gáz energiát vesz fel, ezért a tágulási munka előjele pozitív*

Ezt a munkavégzést tágulási munkának nevezzük. A **tágulási munkára** vonatkozó összefüggés:

$W = -p \cdot \Delta V$.

*Megjegyzés:* A $p$-$V$ koordináta-rendszerben állandó nyomáson a gáz által végzett munka esetén a végzett munka a grafikon alatti területtel egyenlő.

## Hőtani folyamatok energetikai vizsgálata

A hőtan I. főtétele a speciális állapotváltozások során a fentinél egyszerűbb alakra hozható.

### Izochor állapotváltozás

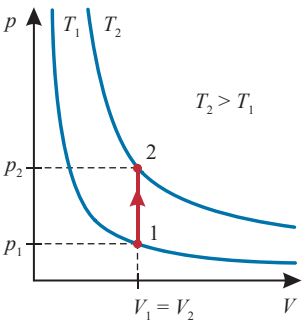
Izochor állapotváltozás során a gáz térfogata nem változik, így a $W$ térfogati munka zérus.

$W = 0$, így:

$\Delta E_b = Q$

**Izochor folyamat esetén a gáz $\Delta E_b$ belső energiája a termikus kölcsönhatás során végbemenő $Q$ hőátadás miatt változik meg.**

A gáz belső energiája hőközlés esetén növekszik, hőleadás esetén csökken.




*Izochor állapotváltozás p-V diagramja*

### Izobár állapotváltozás

Izobár állapotváltozáskor a $\Delta E_b$ belső energia megváltozása mind a termikus, mind a mechanikai kölcsönhatás miatt változni fog.

A munkavégzést azonban a megfelelő $p$-$V$ diagramon a grafikon alatti területből meghatározhatjuk, és így a **belső energiára** fennálló összefüggés a hőtan I. főtétele alapján:

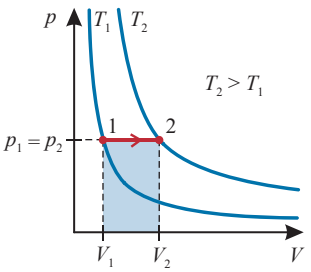
$\Delta E_b = Q - p \cdot \Delta V$

Átrendezve az egyenletet, ezt kapjuk:

$Q = \Delta E_b + p \cdot \Delta V$

**Izobár folyamatban ha $Q$ hőmennyiséget közlünk a gázzal, akkor ennek egy része a gáz $\Delta E_b$ belső energiáját növeli, egy másik része pedig $W$ munkavégzésre fordítódik, miközben a gáz kitágul.**

$Q = \Delta E_b + p \cdot \Delta V$




*Izobár állapotváltozás p–V diagramja*

## Izoterm állapotváltozás

Az izoterm folyamat során a belső energia változása zérus ($\Delta E_b = 0$), hiszen a hőmérséklet állandó. Emiatt az I. főtétel az alábbi alakra hozható:

$0 = Q + W,$

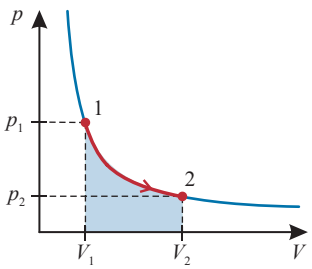
amelyből

$Q = -W$

**Izoterm állapotváltozáskor a gázzal közölt $Q$ hőmennyiség teljes egészében $W$ térfogati munkává alakul.**

$Q = -V$

Ezt úgy értelmezhetjük, hogy
- ha a gázt izoterm állapotváltozással nyomjuk össze, akkor a gázon végzett munkát teljes egészében a gáz hő formájában leadja a környezetének;
- ha a gáz izotermikusan tágul, akkor a munkavégzést teljes egészében a környezettől felvett hőmennyiségből fedezi, a belső energiája nem változik.




*Izoterm állapotváltozás p–V diagramja*

## Adiabatikus állapotváltozás

Egy újabb speciális állapotváltozást is bevezethetünk az I. főtétel alapján. Ha a gázt a környezetétől igen jól elszigeteljük, vagy ha az állapotváltozás nagyon gyors, akkor a termikus kölcsönhatásból származó hőcsere elhanyagolható a térfogati munkához képest, azaz $Q = 0$. Ezt a folyamatot **adiabatikus állapotváltozásnak** nevezzük.

A hőtan I. főtételének alakja az alábbi lesz:

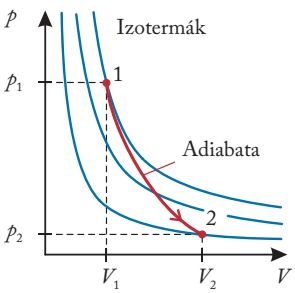
$\Delta E_b = W$

**Adiabatikus állapotváltozáskor a gáz $\Delta E_b$ belső energiájának megváltozása egyenlő a gázon végzett $W$ munkával.**

$\Delta E_b = W$

Ez azt jelenti, hogy
- ha tágulás közben a gáz a térfogati munkavégzését teljes egészében a belső energiájából fedezi, akkor a gáz lehűl;
- ha a gázt hirtelen, adiabatikusan nyomjuk össze, akkor a gázon végzett $W$ térfogati munka teljes egészében a gáz $\Delta E_b$ belső energiáját növeli, a gáz felmelegszik.

Az adiabatikus állapotváltozást is ábrázolhatjuk $p$–$V$ diagramon.




*Adiabatikus állapotváltozás p–V diagramja*

## Hőkapacitás, fajhő, mólhő

**Az anyag által felvett $Q$ hőmennyiség és a $\Delta T$ hőmérséklet-változás hányadosát hőkapacitásnak nevezzük. Jele: $C$.**

**$C = \frac{Q}{\Delta T}$. Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{K}}$.**

A hőkapacitás megmutatja, hogy mekkora hőmennyiség felvételére vagy leadására van szükség ahhoz, hogy a hőmérséklete 1 K-nel megváltozzon.

A mérések alapján a hőkapacitás egyenesen arányos a gáz $m$ tömegével, és értéke függ az anyagi minőségtől:

$C = c \cdot m$

**Ha az anyag által felvett $Q$ hőmennyiséget elosztjuk a $\Delta T$ hőmérséklet-változás és az $m$ tömeg szorzatával, akkor a kapott fizikai mennyiséget fajhőnek nevezzük.**

**Jele: $c$**

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

**Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$**

Egy adott anyag fajhője megmutatja, hogy mekkora hőmennyiség felvételére vagy leadására van szükség ahhoz, hogy egységnyi tömegű anyag hőmérséklete 1 K-nel megváltozzon.

**Ha az anyag által felvett $Q$ hőmennyiséget elosztjuk a $\Delta T$ hőmérséklet-változás és az $n$ anyagmennyiség szorzatával, akkor a kapott fizikai mennyiséget mólhőnek nevezzük.**

**Jele: $c_M$.**

$$c_M = \frac{C}{n} = \frac{Q}{n \cdot \Delta T}$$

**Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$**

Egy adott gáz mólhője megmutatja, hogy mekkora hőmennyiség felvételére vagy leadására van szükség ahhoz, hogy egy mólnyi mennyiségű anyag hőmérséklete 1 K-nel megváltozzon.

## Gázok fajhője

A hőtan I. főtétele alapján a gázzal közölt $Q$ hőmennyiség nem minden esetben a gáz $\Delta E_b$ belső energiáját növeli, ezért a gáz fajhője függ az állapotváltozástól.

Ugyanazon hőmérséklet-változás eléréséhez izochor folyamatnál a gázzal közölt hőmennyiség a belső energia növelésére ($Q = \Delta E_b$), izobár folyamatnál a gázzal közölt hőmennyiség egy része a belső energia növelésére, míg a másik része munkavégzésre fordítódik ($Q = \Delta E_b + W$).

Emiatt a gázok **izobár fajhője** ($c_p$) mindig nagyobb, mint az **izochor fajhője** ($c_v$):

$$c_p > c_v$$

Izoterm állapotváltozás során a hőkapacitást és a fajhőt nem értelmezzük, hiszen ilyenkor $\Delta T = 0$, a hőközlés nem növeli a gáz belső energiáját, az teljes egészében munkavégzésre fordítódik ($Q = -W$).

Ezt másképpen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ilyenkor a fajhő végtelen nagy, hiszen bármekkora hőt is közlünk a gázzal, a hőmérséklet változatlan marad.

Az adiabatikus állapotváltozás során a $Q = 0$-ból következik, hogy ilyenkor a gáz fajhője zérus.

Az előbbi eseteket tovább gondolva beláthatjuk, hogy a gázok fajhője egyértelműen függ attól, hogy a gáz milyen állapotváltozáson megy keresztül. *A speciális állapotváltozásokon kívül a gáznak további, nem végtelen sok állapotváltozása lehet, ezekhez mind külön-külön más-más fajhő tartozik.*

| Gáz | $c_p \left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)$ | $c_v \left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)$ |
|---|---|---|
| Hélium | 5 234 | 3 161 |
| Hidrogén | 14 236 | 10 112 |
| Levegő | 997 | 712 |
| Metán | 2 161 | 1 637 |
| Nitrogén | 1 038 | 741 |
| Oxigén | 916 | 653 |

*Néhány gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton mért fajhői*

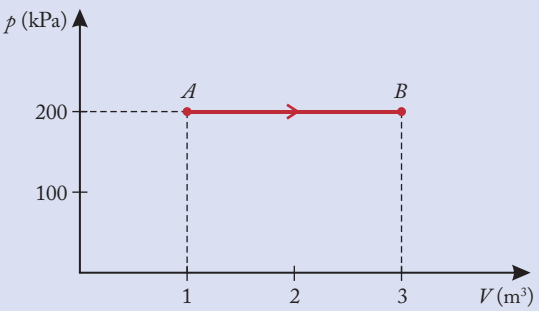
### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** A grafikonon a hidrogén állapotváltozása látható.

**a)** Milyen állapotváltozás figyelhető meg a grafikonon?

**b)** Mekkora munkát végez a gáz?

**c)** Mekkora a belső energia megváltozása?




### MEGOLDÁS

Adatok:
Hidrogén, szabadsági fokok száma: $f = 5$
A grafikonról leolvasható:
$\Delta V = 2\ \text{m}^3$, $p = 2 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

---

*a)* Milyen állapotváltozás történt?
*b)* $W = ?$, *c)* $\Delta E_b = ?$

**a)** A nyomás az állapotváltozás során állandó: **izobár állapotváltozás**.

**b)** A grafikonról leolvasható, hogy

$\Delta V = 2\ \text{m}^3$ és $p = 2 \cdot 10^5\ \text{Pa}$.

Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = -p \cdot \Delta V = -400$ kJ

A térfogatváltozás pozitív, tehát a térfogati munka negatív: –400 kJ.

**c)** A gázok állapotegyenlete: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$. Ha változik a hőmérséklet, változik a térfogat, hiszen a nyomás állandó: $p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést! Ha változik a hőmérséklet, változik a belső energia:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$$

Az $n \cdot R \cdot \Delta T = p \cdot \Delta V$, tehát:

$$\Delta E_b = \frac{5}{2} \cdot p \cdot \Delta V = 1 \text{ MJ}$$

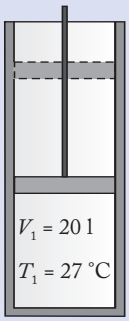
Ennyivel nőtt a gáz belső energiája.

**2. FELADAT** Könnyen mozgó dugattyúval lezárt hengerben 20 liter térfogatú, 300 kPa nyomású hélium van. A dugattyú hirtelen elmozdulásával, adiabatikus folyamatban, a térfogat kétszeresére nő. A gáz kezdeti hőmérséklete legyen 27 °C! A folyamat közben a gáz belső energiája 3340 J-lal csökkent.

**a)** Mennyi lesz a végső állapotban a hőmérséklete?

**b)** Mennyi a gáz nyomása a végső állapotban?

**c)** Ábrázoljuk a folyamatot $p$–$V$ diagramon!




## MEGOLDÁS

Adatok:

$R = 8{,}314 \ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$,

$V_1 = 20$ l $= 2 \cdot 10^{-2}$ m$^3$, $V_2 = 40$ l $= 4 \cdot 10^{-2}$ m$^3$,

$T_1 = 27$ °C $= 300$ K,

Hélium, a szabadsági fokok száma: $f = 3$,

$p_1 = 300$ kPa, $\Delta E_b = 3340$ J

**Adiabatikus állapotváltozás**: $Q = 0$

---

*a)* $T_2 = ?$, *b)* $p_2 = ?$

**a)** Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$$

Írjuk fel az állapotegyenletet a kezdő állapotra:

$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$

Fejezzük ki az $n \cdot R$ szorzatot:

$$n \cdot R = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = 20 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

A belső energia kiszámítására kapott összefüggésből fejezzük ki a hőmérséklet-változást!

$$\Delta T = \frac{2 \cdot \Delta E_b}{3 \cdot n \cdot R} = \frac{2 \cdot 3340}{3 \cdot 20} \text{ K} = 111{,}3 \text{ K}$$

$T_2 = T_1 - \Delta T = 188{,}67$ K

A végső állapotban a gáz hőmérséklete 188,67 K, azaz –84,33 °C.

**b)** Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

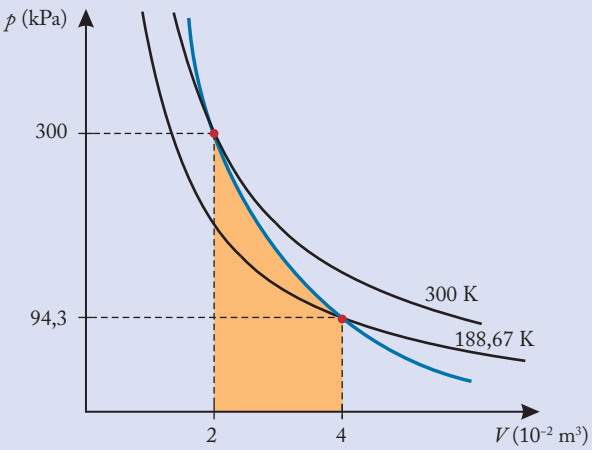
Fejezzük ki a nyomást! Helyettesítsük be az adatokat!

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} = \frac{300 \text{ kPa} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot 188{,}67 \text{ K}}{300 \text{ K} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} =$$

$= 94{,}3$ kPa

A végső állapotban a gáz nyomása 94,3 kPa.

A $p$–$V$ diagram megrajzolása:

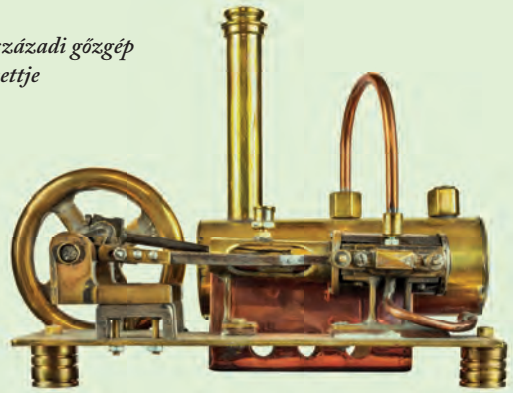


**ALKALMAZÁSOK**

## Gőzgép mint energiaforrás

A **gőzgép** (James Watt) feltalálása indította el az első ipari forradalmat. Ennek elve is az I. főtételen alapul. Külső energiaforrásból, valamely anyag (fa, szén) elégetéséből származó hőmennyiséggel forró gőzt állítunk elő: *a gőz belső energiáját növeljük termikus kölcsönhatás segítségével. A forró gőzzel ezután munkát végeztetünk, azaz valamely mechanikai kölcsönhatás révén többnyire egy dugattyút mozgattatunk, ezt a mozgást tetszőlegesen továbbvihetjük más gépelemekre.*

*Megjegyzés:* A mai modern, villamos energiát előállító hőerőművek alapelve ugyanez, csak itt *a forró gőzzel megforgatott turbina mozgási energiáját a generátor segítségével továbbalakítjuk villamos energiává.*



*19. századi gőzgép makettje*

## Szódavíz készítése

Otthoni szódavíz készítésére használatos eszköz a szódásszifon, amely segítségével patronba zárt szén-dioxidot töltünk csapvízbe. A patronban a gáz nagy nyomású, a becsavaráskor a patron kilyukad, és gáz hirtelen, nagyon gyorsan kitágul. *Adiabatikus folyamat játszódik le. A $CO_2$-gáz a tágulási munkát teljes egészében a belső energiájából fedezi, emiatt a hőmérséklete nagymértékben lecsökken.*

# Gázok fajhője és a szabadsági fok

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

A hőtan I. főtétele ($\Delta E_b = Q + W$) és a belső energiát meghatározó egyenlet ($E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$) alapján levezethetjük az ideális gáz fajhőjét meghatározó összefüggést.

A gáz mennyiségét vegyük állandónak, ekkor a belső energia csak a hőmérséklet-változás miatt fog változni:

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$$

Izochor állapotváltozás esetén $\Delta E_b = Q$. Írjuk be a fajhőt megadó egyenletbe a $Q$ helyére a $\Delta E_b$-t az előző egyenlőségből:

$$c_V = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{\frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T}{m \cdot \Delta T}$$

Egyszerűsítünk, majd az $n = \frac{m}{M}$ összefüggést felhasználva:

$$c_V = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M}$$

Ezek szerint az *ideális gáz izochor fajhője csak a moláris tömegétől és a gáz szabadsági fokainak számától függ.*

Az előzőhöz hasonlóan nézzük meg az izobár fajhőt! Az I. főtételnek a $Q = \Delta E_b + p \cdot \Delta V$ alakját használva kapjuk, hogy

$$c_p = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{\frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V}{m \cdot \Delta T}$$

Az ideális gáz állapotegyenletét felhasználva:

$$c_p = \frac{\frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T + n \cdot R \cdot \Delta T}{m \cdot \Delta T}$$

Egyszerűsítünk, majd a moláris tömeg felhasználásával kapjuk, hogy

$$c_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) \cdot \frac{R}{M} = \frac{f+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$$

Az egyenlőség szerint az ideális gáz izobár fajhője szintén csak a moláris tömegétől és a szabadsági foktól függ.

**A két fajhő hányadosát képezve:** $\frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{2}$

Az ideális gáz modellje alapján a $\frac{c_p}{c_v}$ hányados értéke egyatomos gáz esetén $\frac{5}{2}$, kétatomos gázra $\frac{7}{2}$ és a többatomos gázra $\frac{8}{2}$.

Ebből látható, hogy **a $c_p$ izobár fajhő nagyobb, mint a $c_v$ izochor fajhő.**

*Megjegyzés:* A fenti összefüggésből következik, hogy egyatomos gáz esetén az izobár állapotváltozás során közölt hőmennyiség 3 : 2 arányban oszlik meg a belső energiaváltozás és a térfogati munka közt.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsuk ki az oxigéngáz izochor és izobár fajhőjét a moláris tömegének ismeretében, ha a moláris tömege $0{,}032\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$f = 5$,

$M = 0{,}032\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$,

$R = 8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

$c_V = ?,\ c_p = ?$

Az oxigéngáz kétatomos molekulákból áll, így $f = 5$.

Az izochor állapotváltozásnál a fajhő:

$$c_V = \frac{f}{2}\cdot\frac{R}{M} = \frac{5}{2}\cdot\frac{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}}{0{,}032\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 649{,}2\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

Az izobár állapotváltozásnál a fajhő:

$$c_p = \frac{f+2}{2}\cdot\frac{R}{M} = \frac{5+2}{2}\cdot\frac{8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}}{0{,}032\ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 908{,}9\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

Az oxigéngáz izochor, illetve izobár állapotváltozásánál a kinetikai modell alapján számított fajhőjének értékei:

$$c_V = 649{,}2\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}},\quad c_p = 908{,}9\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

*Megjegyzés:* A *Négyjegyű függvénytáblázatokban* mérési eljárásokkal mért fajhők értékei szerepelnek. Az oxigén mért értékei: $c_V = 653\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, $c_p = 916\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

Egy- és kétatomos gázokra a gázok kinetikai modellje alapján számított eredményünk 1%-os pontossággal megegyezik a *Négyjegyű függvénytáblázatokban* szereplő mérési eredményekkel.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Egy dugattyúval elzárt, jó hővezető falú hengerben lévő gázt lassan összenyomunk. Hogyan változik a gáz belső energiája? Mire fordítódik az általunk végzett munka?
2. Egy dugattyúval elzárt hengerben lévő gázt nagyon gyorsan összenyomunk. Hogyan változik a gáz belső energiája? Mire fordítódik az általunk végzett munka?
3. Egy hőerőmű gőztartályában a turbinára vezetendő gőzt tüzelőanyag elégetésével 300 °C-ról 500 °C-ra melegítik fel. Hogyan változik a gőz belső energiája?
4. Izobár vagy izochor esetben kell nagyobb hőmennyiség ahhoz, hogy a gáz hőmérsékletét 10 °C-kal emeljük?
5. Egy kerékpárpumpa hirtelen benyomásakor a benne lévő levegő felmelegszik. Mit mondhatunk a környezettel való hőcseréről? Miért növekszik a levegő hőmérséklete? Mennyi a folyamatra jellemző fajhő?
6. Egy könnyen mozgó, vízszintes dugattyúval elzárt gázmennyiséget fűtéssel lassan melegítünk. Mi fog történni a dugattyúval? Milyen állapotváltozáson megy át a gáz? Mire fordítódik a közölt hő?

# 2. A hőtan II. főtétele

EMLÉKEZTETŐ

## Megfordítható és nem megfordítható folyamatok

**Azokat a természeti folyamatokat, amelyek megfordíthatók, reverzibilisnek nevezzük.** Ekkor egy test (anyaghalmaz) úgy jut vissza a kiindulási állapotába, hogy a környezetében sem következik be változás.

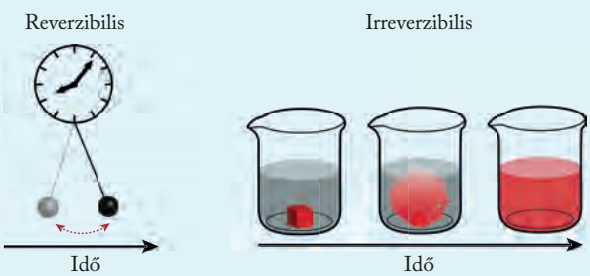
**A nem megfordítható folyamatokat irreverzibilis folyamatoknak nevezzük.**

A falhoz dobott hógolyó deformálódik, egy része megolvadva a falon vizes foltot hagy, a fal kismértékben felmelegszik. Ez a folyamat megfordítva ilyen lenne: a falon lévő víz hóvá fagy, a szétlapult hógolyó gömb alakot vesz fel, a fal lehűl, a hógolyó visszarepül oda, ahonnan érkezett. Ez nem valósul meg, noha az energiamegmaradás törvényével (I. főtétel) nem ellentétes.

**A hőtan II. főtétele meghatározza, hogy egy folyamat önmagától milyen irányban játszódik le.**

**Példák** megfordítható (reverzibilis) folyamatokra:

- Fonálinga lengése légüres térben. A lengést végző test helyzeti energiája mozgási energiává alakul, majd a mozgási energia visszaalakul helyzeti energiává. Az energia átalakulásának folyamata megfordítható.
- Golyók tökéletesen rugalmas ütközése. A golyók mozgási energiája rugalmas energiává alakul, majd a rugalmas energia visszaalakul mozgási energiává. A folyamat megfordítható.




*Reverzibilis és irreverzibilis folyamatok*

**Példák** nem megfordítható (irreverzibilis) folyamatokra:

- Golyók rugalmatlan ütközése. A mozgási energia egy része, bizonyos esetekben az egésze, arra fordítódik, hogy deformálódnak a golyók. A folyamat nem fordítható meg.
- Olyan folyamatok, melyekben a súrlódási munka (I. főtétel szerint) növeli a súrlódó testek belső energiáját (felmelegednek, vagy a hógolyós példában halmazállapot-változás következik be) a súrlódás következtében. A mozgó vonat fékez, majd megáll. A vonat energiája hővé alakul. A keletkezett hőt elnyeli a környezet, nem alakítható vissza a vonat energiájává.
- Cukor oldódása vízben. A cukor feloldódás után egyenletesen elkeveredik a vízben.

## A hőtan II. főtétele

A valós folyamatok irreverzibilisek, visszafelé nem játszódnak le.

**Ehhez kapcsolódik a II. főtétel megfogalmazása:**

**A testek termikus kölcsönhatásakor mindig a melegebb test ad át energiát a hidegebb testnek. Ennek a folyamatnak az iránya önmagától nem változik, csak külső beavatkozással fordítható meg.**

## Rendezett és rendezetlen állapot

A „rend-rendetlenség” fogalmakat a fizika is használja, a köznapi életben megszokotthoz hasonló értelemben. A „minden a helyén van” helyzetet rendezett állapotnak hívjuk; ha mindenféle dolog mindenfelé „szét van szóródva”, azt rendetlennek, rendezetlennek nevezzük.

Gondoljunk szobánk állapotának anyai szemmel felmért minősítésére a rend-rendetlenség skálán!

Ha beleszórjuk a cukrot a kávéba, teába, akkor kezdetben a csésze egyik részében (alul) cukor van, a másik részében (fölötte) pedig kávé. Ezt **rendezett állapotnak** nevezhetjük.



*Rendből a rendezetlenségbe, visszafordíthatatlan folyamat*

A cukor feloldódásakor a kezdeti „rendet” fokozatosan növekvő **rendezetlen állapot** váltja fel. A cukor feloldódásakor „minden mindenhol van”; ugyanolyan cukros kávét találunk a csészében. A folyamat fordított irányban nem történik meg.

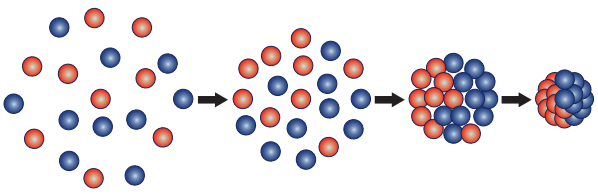
Tapasztalat: **Spontán folyamatokban csökken a rendszer rendezettsége, vagyis nő a rendszer rendezetlensége.**

## A rendezetlenség mértéke az entrópia

A fizika egy – itt nem részletezett módon – precízen definiált mennyiséggel fejezi ki valamely rendszer rendezetlenségét. Ez az **entrópia: a rendezetlenség mértéke**.

**Az entrópia azt mutatja meg, hogy a rendszer szerkezete mennyire egyszerű.**

Az egyensúlyba került rendszer homogén (mindenhol ugyanolyan). Minél kisebb egy rendszer entrópiája (minél kisebb a rendezetlensége), annál bonyolultabb a szerkezete; nagyobb mértékű különbségek, eltérések vannak benne.



Nagy véletlenszerűség
Nagy entrópia
Nagy rendezetlenség

Kicsi véletlenszerűség
Alacsony entrópia
Kis rendezetlenség

*A rendezettség növelésével a rendszer entrópiája csökken, a rendszer szerkezete bonyolultabb*

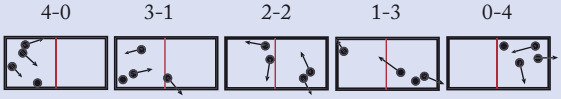
**KIDOLGOZOTT FELADAT**

### Valószínűségi számítások

Vizsgáljuk meg, hogy négy molekula esetén egy képzeletbeli fallal kettéválasztott tartályban az egyes részecskék hányféleképpen helyezkedhetnek el az edény két felében!

### MEGOLDÁS

Az az állapot jön létre nagyobb valószínűséggel, amelyik többféle elrendezésben valósulhat meg. Négy molekula esetén az előforduló lehetséges eloszlások:




*Ötféle állapot, de nem azonos valószínűségűek*

Ezek azonban nem azonos valószínűséggel valósulnak meg.

*A 4-0 eloszlás esetén* minden molekula a bal oldalon található. Ennek az állapotnak a valószínűsége egy adott molekula esetén $\frac{1}{2}$. Egy következő molekula esetén szintén $\frac{1}{2}$.

A molekulák egymástól függetlenül mozognak, így ezek a valószínűségek összeszorzódnak. Négy molekula esetén a 4-0 eloszlás valószínűsége:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

*A 3-1 eloszlás valószínűsége* az előző értéknek annyiszorosa, ahányféleképpen kiválaszthatjuk a 4 molekulából a 3 bal oldalit:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{3} = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$$

*És így tovább: a 2-2 eloszlás valószínűsége:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{2} = \frac{1}{16} \cdot 6$$

*az 1-3 eloszlás valószínűsége*:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{3} = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$$

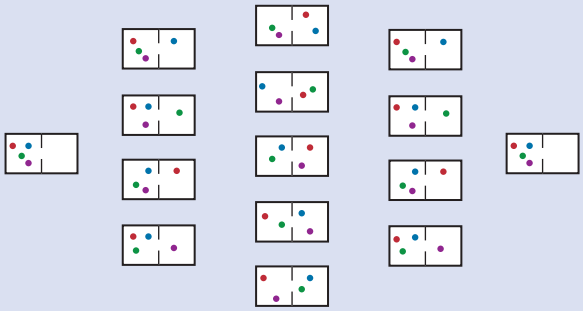
*a 0-4 eloszlás valószínűsége*:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{4} = \frac{1}{16}$$

A legrendezetlenebb állapot valószínűsége 6-szorosa a legrendezettebbnek.

A lehetséges esetek különböző valószínűségét a következő ábrán a részecskék színezéssel megkülönböztetése teszi szemléletessé. (A molekuláknak a valóságban természetesen nincs színük.)

Négy molekula esetén öt lehetséges állapotban helyezkedhetnek el a részecskék.



*Az öt lehetséges állapot (1, 4, 6, 4, 1) különböző módon valósulhat meg*

*Megjegyzés:* 4 részecske esetén a legnagyobb rendezetlenségű állapot 6-szor valószínűbb, mint a legnagyobb rendezettségű.

Ha a részecskék számát $N = 40$-re növeljük, akkor az egyenletes 20-20-as eloszlás valószínűsége a 40-0 esetek valószínűségének $\binom{40}{20} \approx 1{,}38 \cdot 10^{11}$-szerese.

A részecskeszám 10-szerezése az egyenletes eloszlás valószínűségét tehát rendkívüli mértékben megnövelte. Mólnyi mennyiségű gázok részecskeszáma pedig nem tízszeres, hanem $N = N_A = 6 \cdot 10^{23}$ db körüli érték.

## A hőtan II. főtételének megfogalmazásai

**A hőtan II. főtételének megfogalmazásai:**

- **Külső beavatkozás nélkül a termodinamikai rendszerek folyamatai mindig az intenzív állapotjelzők (nyomás, sűrűség, hőmérséklet) kiegyenlítődésének irányába mennek végbe. Akkor jön létre az egyensúly, ha ezek az egész rendszerben ugyanakkorává válnak.**
- **Zárt rendszerben a folyamatok megfordíthatatlanul a rendezetlenség növekedésének irányába mennek végbe. Ha a rendszer eléri a legrendezetlenebb állapotát, akkor ez mint dinamikus egyensúlyi állapot állandósul.**

## Az első és másodfajú perpetuum mobile

A „perpetuum mobile” örökmozgót jelent.

**Az elsőfajú örökmozgó olyan gép, ami több munkát végez, mint amennyi energiát felvesz a környezetétől. Egy ilyen gép hatásfoka nagyobb, mint 100%.**

Az energiamegmaradás törvénye, vagyis a termodinamika első főtétele alapján ilyen gépet nem lehet készíteni.

**A másodfajú perpetuum mobile egy olyan hőerőgép, amely hűtő nélkül is képes hőt elvonni egy testből és 100% hatásfokkal munkává alakítani.**

A hőtan II. főtételének Max Planck német fizikustól származó megfogalmazása:

**Nem lehet olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely egy hőtartályból hőmennyiséget von el, és azt egyéb változások bekövetkezése nélkül munkává alakítja át.** A II. főtétel szerint tehát ilyen gépet sem lehet készíteni.

## A hőtan III. főtétele

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

*Mi történne az ideális gázzal, ha 0 K hőmérsékletűvé válna?* A részecskék hőmozgása megszűnne, sebességük nullára csökkenne. Nulla lenne a nyomásuk, hiszen nem ütköznének a tartály falába. A valódi gázok a 0 K előtt folyékonnyá válnának, majd megfagynának. Megfigyelések és tapasztalatok alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a szilárd testek és folyadékok hőmérséklete sem lehet 0 K.

**A 0 K hőmérséklet tetszőleges pontossággal megközelíthető, de véges lépésben nem érhető el. Ez a hőtan III. főtétele.**

### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Képzeljünk el két videófelvételt: az egyik egy fonálinga 1-2 lengéséről készült, a másik egy labda pattogásának a mozgás megszűnéséig tartó mozgásáról. Gondolatban játsszuk le a felvételeket visszafelé! Miben különbözik a két visszafelé lejátszott felvétel?
2. Mit nevezünk extenzív, és mit intenzív állapotjelzőnek? Soroljuk a megfelelő kategóriába az alábbiakat!
   – anyagmennyiség,
   – sűrűség,
   – térfogat,
   – mólszám,
   – hőmérséklet,
   – tömeg,
   – nyomás,
   – koncentráció.
   A II. főtétel mit állít az intenzív állapotjelzőkről?
3. Két egyenlő nagyságú, egymásba nyíló térfogatban 6 db részecske van. Hány különböző eloszlású állapot alakulhat ki? Melyik a legvalószínűbb? Melyik állapot entrópiája a legnagyobb?
4. A termodinamika főtételei köznapi megfogalmazású – kicsit lehangoló tartalmú – tételmondatokban is kimondhatók. Keresd meg a párokat!

| | | |
|---|---|---|
| I. | Nincs 100%-nál nagyobb hatásfokú gép. | „Nem szállhatsz ki.” |
| II. | A hőerőgép hatásfoka mindig kisebb, mint 100%. | „Nem nyerhetsz.” |
| III. | Az abszolút nulla fok nem érhető el véges sok lépésben sem. | „Veszítesz.” |

# 3. Körfolyamatok

**EMLÉKEZTETŐ**

## Körfolyamatok

Gázzal végrehajtott termodinamikai körfolyamat egymás utáni állapotváltozások sorozata, melyek után a rendszer visszatér eredeti állapotába. Az egyes részfolyamatok során változhatnak a gáz állapotjelzői, de az egész körfolyamatra nézve a változás nulla.

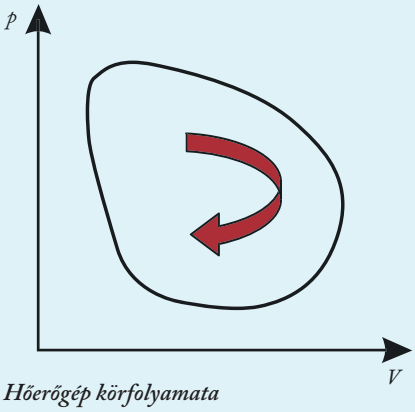
**Egy teljes ciklusra nézve** a rendszer $\Delta E_b$ belső energiájának változása is nulla, így a hőtan I. főtételének megfelelően, **a gáz által végzett összes munka összege a gáz által felvett és leadott hő különbsége:**

$$W = Q_{fel} - Q_{le}$$

Kétféle körfolyamat létezik:

**1. Hőerőgépek körfolyamata**

$Q_{fel} > Q_{le} \Rightarrow W > 0$. A rendszer több hőt vesz fel, mint amennyit lead, így a végzett munka pozitív. Ilyen körfolyamat valósul meg a hőerőgépekben: gőzgépekben, gázturbinákban, belső égésű motorokban.



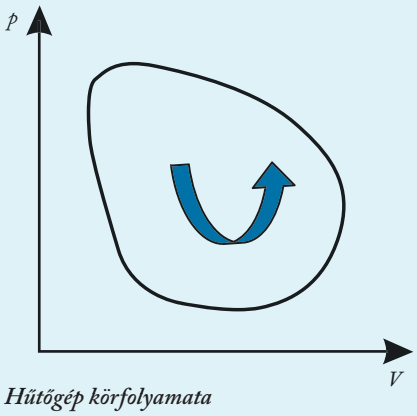

*Hőerőgép körfolyamata*

Hőerőgép körfolyamatának $p$-$V$ diagramjában a körüljárás iránya az óramutató járásával egyirányú; a gáz tágulása nagyobb nyomáson történik, mint az összenyomása.

A gáz által végzett munka a $p$-$V$ diagram zárt görbéje által határolt terület.

**2. Hűtőgépek körfolyamata**

$Q_{fel} < Q_{le} \Rightarrow W < 0$. A rendszeren munkát végez a környezete, és hőt ad le a környezetének: hűtőgépek, klímák, hőszivattyúk.



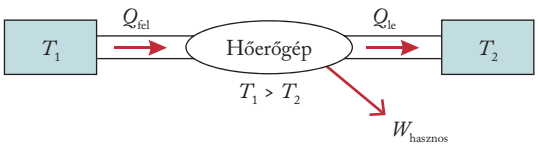

*Hűtőgép körfolyamata*

A $p$-$V$ diagram körüljárási iránya az óramutató járásával ellentétes.

## Hőerőgépek

A hőerőgép $Q_{fel}$ hőt vesz fel a $T_1$ hőmérsékletű „felső” hőtartályból, $Q_{le} < Q_{fel}$ hőt ad le a $T_2 < T_1$ hőmérsékletű „alsó” hőtartálynak, és $W = Q_{fel} - Q_{le}$ „hasznos” munkát végez.

A $T_1$ hőmérsékletű hőtartály magas hőmérsékletű hőforrás (pl. kazán), a $T_2$ hőmérsékletű hőtartály alacsonyabb hőmérsékletű, mint általában a környezet.




*A hőerőgép általános modellje, amelyben fennáll: $W = Q_{fel} - Q_{le}$*

Jó ötletnek tűnhet a $Q_{le} = 0$ gondolata, vagyis az alsó hőtartály kiiktatása. Ekkor ugyanis a felvett hő teljes egészében hasznosulna; a $W = Q_{fel}$ kedvező állapot valósulna meg. Ilyen hőerőgép azonban nem létezik.

**Nem létezhet olyan gép, amelynek egyetlen hőtartálya van, és ennek hűlése árán körfolyamatban (ciklikusan) munkát végez.**

Ez az állítás tapasztalaton alapszik; nem lehet levezetni, vagy elméletileg bizonyítani. Ez a **termodinamika II. főtételének** egyik megfogalmazása.

## Hőerőgép termikus hatásfoka

A hatásfok az energia felhasználásának mértéke.

$$\eta = \frac{\text{hasznos energia}}{\text{befektetett energia}}$$

A hasznos energia a gáz által felvett és leadott hő különbsége: $W = Q_{fel} - Q_{le}$, a befektetett energia pedig a $Q_{fel}$ felvett hő.

**Így a hőerőgép termikus hatásfoka:**

$$\eta = \frac{W}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} - Q_{le}}{Q_{fel}}$$

A fenti összefüggésből $\eta = \frac{Q_{fel} - Q_{le}}{Q_{fel}} = 1 - \frac{Q_{le}}{Q_{fel}}$ adódik.

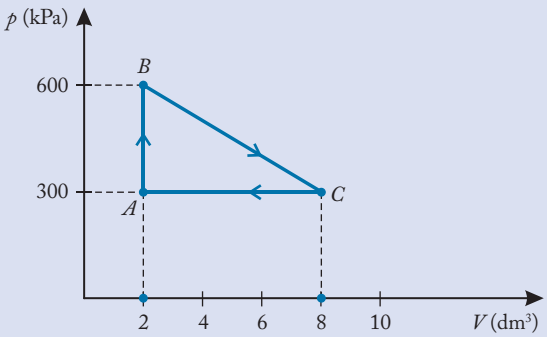
Az alsó hőtartály nem kiiktatható, tehát $Q_{le} \neq 0$, így a hőerőgép termikus hatásfoka $\eta < 1$.

Ez a termodinamika II. főtételének egy másik (Kelvintől származó) megfogalmazása.

**Példa:** Benzinmotorok elméletileg elérhető hatásfoka 0,3, dízelmotoroké 0,4 körüli érték.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábrán látható körfolyamatot héliumgázzal végezzük. Mekkora a körfolyamat termikus hatásfoka?




### MEGOLDÁS

Adatok:

$f = 3$,

$p_A = p_C = 300\ \text{kPa} = 3 \cdot 10^5\ \text{Pa}$,

$p_B = 600\ \text{kPa} = 6 \cdot 10^5\ \text{Pa}$,

$V_A = V_B = 2\ \text{dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$,

$V_C = 8\ \text{dm}^3 = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$.

---

$\eta = ?$

A termikus hatásfok: $\eta = \frac{W}{Q_{fel}}$

A gáz által végzett $W$ munka a $p$-$V$ diagram zárt görbéje által határolt háromszög területe:

$$W = \frac{(p_B - p_A) \cdot (V_C - V_A)}{2} = \frac{300 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{2} = 900\ \text{J}.$$

**A gáz hőmennyiséget az *AB* és *BC* szakaszon vesz fel, így**

$$Q_{fel} = Q_{AB} + Q_{BC} \qquad (1)$$

A (1) egyenletben szereplő felvett hőmennyiség kiszámításakor felhasználjuk a termodinamika I. főtételét:

$\Delta E = Q_{be} + W$,

és a $\Delta E$ belső energia kiszámítására ismert $E = \frac{f}{2} p \cdot V$ összefüggést.

**Az *AB* szakaszon felvett hőmennyiség:**

Az *AB* szakasz izochor változás, ezért $W_{AB} = 0$, így

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} = \frac{f}{2} \Delta(p \cdot V) = \frac{f}{2} V \cdot \Delta p = \frac{f}{2} V_A \cdot (p_B - p_A)$$

Behelyettesítve:

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot 3 \cdot 10^5\ \text{Pa} = 900\ \text{J}$$

**A *BC* szakaszon felvett hőmennyiség:**

A *BC* szakaszon felvett hőmennyiség egy része a gáz belső energiáját növeli, a másik része pedig munkavégzésre (tágulási munkára) fordítódik:

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} - W_{BC}$$

A *BC* szakaszon a belső energia megváltozása:

$$\Delta E_{BC} = \frac{f}{2} (p_C \cdot V_C - p_B \cdot V_B)$$

Behelyettesítve:

$$\Delta E_{BC} = \frac{3}{2} \cdot (3 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot 8 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 - 6 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3) = 1800\ \text{J}$$

A *BC* szakaszon a gáz tágul, $W_{BC}$ előjele negatív lesz, nagysága pedig a *BC* szakasz grafikonja alatti trapéz területe:

$$W_{BC} = \frac{p_B + p_C}{2} \cdot (V_A - V_C)$$

Behelyettesítve:

$$W_{BC} = \frac{6 \cdot 10^5\ \text{Pa} + 3 \cdot 10^5\ \text{Pa}}{2} \cdot (-6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3) = -2700\ \text{J}$$

Így $Q_{BC} = \Delta E_{BC} - W_{BC} = 1800\ \text{J} - (-2700\ \text{J}) = 4500\ \text{J}$.

Az (1) egyenlet alapján **a gáz által felvett összes hőmennyiség:**

$Q_{fel} = Q_{AB} + Q_{BC} = 900\ \text{J} + 4500\ \text{J} = 5400\ \text{J}$.

A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{W}{Q_{fel}} = \frac{900\ \text{J}}{5400\ \text{J}} \approx 0{,}17 = 17\%.$$

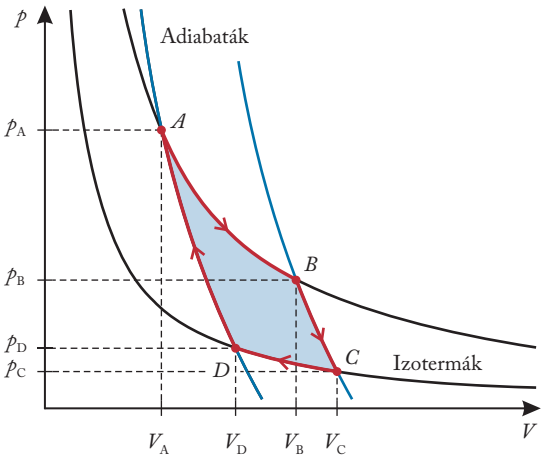
A körfolyamat termikus hatásfoka 17%.

## A Carnot-körfolyamat

A hőerőgépek hatásfokának javítására irányuló kísérletei során Sadi Carnot (1796–1832) francia fizikus értékes eredményeket ért el. A róla elnevezett *körfolyamat két adiabatikus és két izotermikus részfolyamatból áll.*

A Carnot-ciklus jelentősége: adott $T_1$ és $T_2$ hőmérsékletű hőtartályok esetén ez a maximális hatásfokú hőerőgép. Levezethető, hogy **Carnot hőerőgépének hatásfoka** csak a két hőtartály hőmérsékletétől függ:

$$\eta = \frac{Q_{fel} - Q_{le}}{Q_{fel}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$




*A Carnot-ciklus adiabatikus és izotermikus folyamatai*

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy gőzgépet téli időben működtetünk, amikor a fáradt gőz hőmérséklete 0 °C. A beszívott gőzé 100 °C.

**a)** Mennyi a gőzgép elméletileg elérhető legnagyobb hatásoka?

**b)** Hogyan változik a maximális hatásfok, ha 150 °C-ra melegített (túlhevített) gőzt használunk?

#### MEGOLDÁS

Adatok:
$T_2 = 273\ \text{K}$,
$T_1 = 373\ \text{K}$,
$T_3 = 423\ \text{K}$.

*a)* $\eta = ?$
*b)* $\eta = ?$

**a)** A termikus hatásfok:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{373\ \text{K} - 273\ \text{K}}{373\ \text{K}} = 0{,}26$$

A gőzgép elérhető legnagyobb hatásfoka 26%.

**b)** A hatásfok 150 °C-re túlhevített gőz esetén:

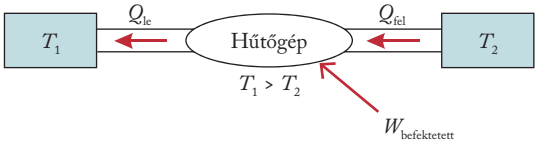
$$\eta = \frac{T_3 - T_2}{T_3} = \frac{423\ \text{K} - 273\ \text{K}}{423\ \text{K}} = 0{,}35$$

A hatásfok magasabb hőmérsékletű gőz esetén jobb, 35% lesz.

## Hűtőgépek

A hő természetes úton (magától) a magasabb hőmérsékletűről az alacsonyabb hőmérsékletű helyre áramlik. A hűtőgép ezt az áramlási irányt megfordítja. *A hideg hőtartályból vesz fel $Q_{fel}$ hőt, a meleg hőtartálynak ad le $Q_{le}$ hőt, de ez a folyamat nem történik meg magától; W energiabefektetést igényel.* Ez a gép működtetéséhez felhasznált $Q_{fel} + W = Q_{le}$ munka.

**Példa:** A háztartásokban használt hűtőszekrények esetén a hideg hőtartály a hidegen tartott élelmiszerek tárolóhelye, a meleg hőtartály az a helyiség, ahol a hűtőgép üzemel. Működés közben a hűtőszekrény hátsó részén található hőleadó felület felmelegszik.




*A hűtőgép általános modellje, amelyben fennáll: $Q_{fel} + W = Q_{le}$*

A folyamat hatásossága az eredmény/befektetés hányados, a **hűtőgép jósági tényezője**:

$$\varepsilon = \frac{\text{A hideg tartálytól elvont hő}}{\text{Felhasznált munka}} = \frac{Q_{fel}}{W} = \frac{Q_{fel}}{Q_{le} - Q_{fel}}$$

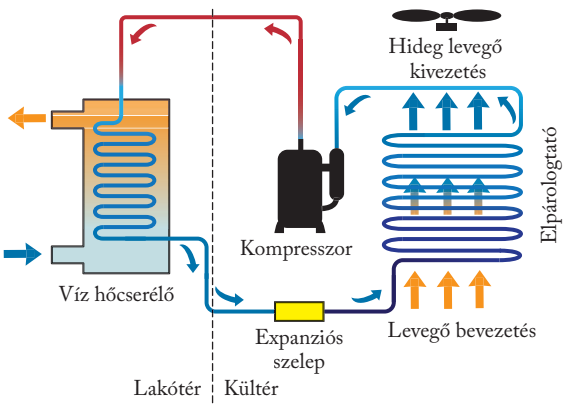
**A Carnot-körfolyamatú hűtőgép esetén a jósági tényező:**

$$\varepsilon = \frac{Q_{fel}}{Q_{le} - Q_{fel}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \text{ ahol } T_1 > T_2$$

## Hőszivattyú mint hűtőgép

A hűtőgép elvének egyre terjedő alkalmazása a hőszivattyú. Hőt ad le a melegebb hőtartálynak (pl. lakótérnek) úgy, hogy hűti hidegebb hőtartályt (pl. külső levegőt). A hő önmagától ilyen irányú áramlásra nem hajlandó, a hőszivattyú működtetése $W$ munkát igényel, amelyre fennáll:

$$Q_{le} = Q_{fel} + W$$




*Hőszivattyú modellje*

Épületek fűtésére, hűtésére és használati melegvíz előállítására egyaránt használják.

Hőszivattyú esetén a folyamat célja nem a külső közeg hűtése, hanem a belső közeg fűtése. Így a **hőszivattyú $\varepsilon$ jósági tényezője** a leadott $Q_{le}$ hőmennyiség és a $W$ befektetett munka hányadosa:

$$\varepsilon = \frac{Q_{le}}{W} = \frac{Q_{le}}{Q_{le} - Q_{fel}}$$

**Carnot-körfolyamatú hőszivattyú jósági tényezője:**

$$\varepsilon = \frac{Q_{le}}{Q_{le} - Q_{fel}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \text{ ahol } T_1 > T_2$$

A hőszivattyúk működésére jellemző szám a jósági tényező, az ún. hatékonysági mutató: „coefficience of performance" (COP). Ez a dimenzió nélküli viszonyszám azt mutatja meg, hogy 1 egység befektetett villamos energiából hány egység hőenergiát képes a készülék előállítani. A legjobb vizes hőszivattyúk 6, a levegősök 4 COP-értéknél tartanak.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy fűtési rendszerben a működéséhez elektromos energiát felhasználó hőszivattyú jósági foka 6. Egy másik fűtési rendszerben ugyanakkora nagyságú elektromos árammal elektromos kazánt működtetünk.

Hasonlítsuk össze, hogy adott felhasznált elektromos energia esetén mennyi a két különböző fűtési rendszer által leadott hő!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$\varepsilon = 6$

———

Mekkora a két fűtési rendszer leadott hőjének aránya?

A hőszivattyú jósági tényezője: $\varepsilon = \frac{Q_{le}}{W}$.

A $Q_{le}$ éppen a hőszivattyú által leadott hő, a $W$ pedig egyenlő a szivattyút működtető áram Joule-hőjével. Mivel $Q_{le} = 6 \cdot W$, így a hőszivattyú működtetéséhez használt energia 6-szorosát adja le a háznak.

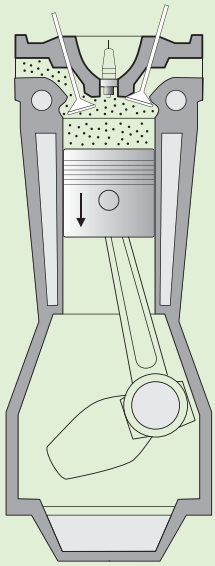
Az elektromos kazánnal működtetett fűtési rendszerben ideális esetben $Q_{le} = W$.

*Megjegyzés:* A valóságban nem ilyen nagy a különbség; az elektromos kazán hatásfoka kisebb, mint 100%, és a hőszivattyú körfolyamata sem ideális. A hőszivattyúnál az összhatásfok 50% környékére is csökkenhet, de így is legalább háromszor annyi hőt kapunk, mint elektromos fűtéssel. Elektromos fűtés esetén a felhasznált elektromos energia pl. padlófűtés esetén a csőrendszerben lévő víz felmelegítésére fordítódik.

**ALKALMAZÁSOK**

## A négyütemű benzinmotor működése

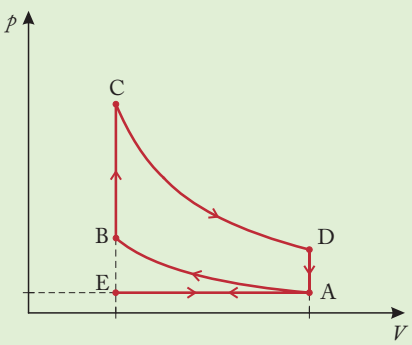
A benzinmotorokban a benzin-levegő keverék megközelítőleg szintén adiabatikus módon nyomódik össze a hengerben. A hőmérséklet nő, de ez nem elég a keverék meggyújtásához. A benzinmotorok esetében a robbanás létrehozásához a gyújtógyertya elektromos szikrája szükséges.



*A benzinmotor hengere*

*Első ütem (szívás):* a hengerben a dugattyú lefelé mozog, a nyitott szívószelepen benzin-levegő keverék jut a hengerbe. A grafikonon az **EA** izobár szakasz.
*Második ütem (sűrítés):* szelepek zárva, a dugattyú felfelé mozog. A grafikonon az **AB** adiabatikus görbe.
*Harmadik ütem (munkavégzés):* a gyújtógyertya szikrája felrobbantja az üzemanyagot, a dugattyú lefelé mozog. **BC** izochor szakasz. A munkavégzésnek a **CD** adiabata felel meg.
*Negyedik ütem (kipufogás):* a **DA** izochor szakaszon kinyílik a kipufogószelep. A felfelé mozgó dugattyú a nyitott kipufogószelepen keresztül kinyomja a hengerből az égésterméket, **AE** izobár szakasz.
A szelepeket a „bütykös tengely” vezérli. A motor egyenletes működését lendítőkerékkel, illetve több henger (2-4-6-8) alkalmazásával biztosítják.

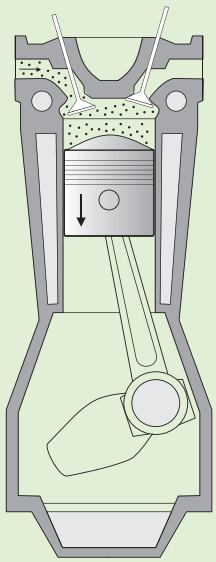
Kisebb teljesítményű motorokat kétütemű változatban is gyártanak. Ezek működését nem ismertetjük.




*A benzinmotor működésének p–V diagramja. A* BC *szakasz a dízelmotorok esetében izobár, a benzinmotoroknál izochor állapotváltozás*

## A dízelmotor működése

A dízelmotorokban levegőt nyomnak össze adiabatikus módon. A nagy sűrítés közben olyan magas lesz a levegő hőmérséklete, hogy a befecskendezett üzemanyag felrobban. A munkavégző szakaszban adiabatikus tágulás közben csökken a nyomás, a hőmérséklet, a belső energia. A belső energia csökkenése közben munkavégzés történik. A dízelmotor munkát végez.

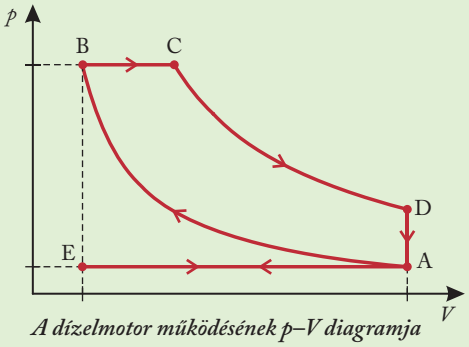


*A dízelmotor hengere*

*Első ütem (szívás):* a hengerben a dugattyú lefelé mozog, a motor levegőt szív be. A grafikonon az **EA** izobár szakasz felel meg ennek az ütemnek.
*Második ütem (sűrítés):* a hengerben a dugattyú felfelé mozog, a levegő 500-700 °C-ra melegszik. A grafikonon a sűrítés az AB adiabatikus görbe mentén történik.
*Harmadik ütem (munkavégzés):* az adagolószivattyú dízelolajat fecskendez a hengerbe, amely a magas hőmérsékleten elég. A dugattyú lefelé mozog, ez a munkavégzés üteme. A grafikonon: a **BC** izobár szakasz, a robbanás; a munkavégzés a **CD** adiabata mentén történik.
*Negyedik ütem (kipufogás):* a felfelé mozgó dugattyú kinyomja a hengerből az elégett üzemanyagot. A grafikonon: a **DA** izochor szakaszon kinyílik a kipufogószelep, és az **AE** izobár szakaszon megtörténik a kipufogás.

A harmadik ütemben az égés nem pillanatszerű, ezért a dízelmotort lassú égésű motornak is nevezzük. A lassú égés, illetve a nagy összenyomás miatt a dízelmotorok hatásfoka nagyobb, mint a benzinmotoroké.

A dízelmotorok négy- vagy kétüteműek lehetnek. A kétütemű motorok működésével most nem foglalkozunk.



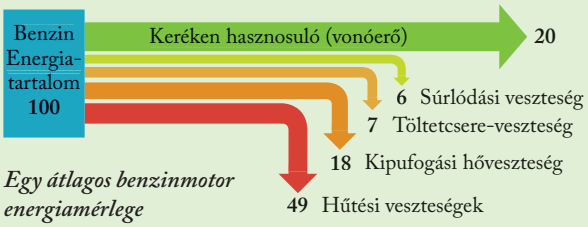

*A dízelmotor működésének p–V diagramja*

## Turbómotorok

Az ismertetett motorokat szívómotoroknak nevezzük. Csak egy adott mennyiségű levegőt képesek felszívni, ami korlátozza a hatásfokukat. A turbómotorok (töltött motorok) hengerébe a levegő nem szívással jut be, hanem az úgynevezett turbótöltő tölti be. A bejuttatott többletlevegő növeli a motor teljesítményét. A mechanizmust általában a kipufogógáz működteti azzal, hogy megforgatja a turbófeltöltő turbinalapátjait.

## Motorok energiamérlege

Egy átlagos benzinmotorban a befektetett energia mintegy 20%-a hasznosul a gépjármű mozgatására. Az energia nagyobbik része különféle veszteségekre (súrlódási, töltetcsere-, kipufogási, hűtési) fordítódik.




*Egy átlagos benzinmotor energiamérlege*

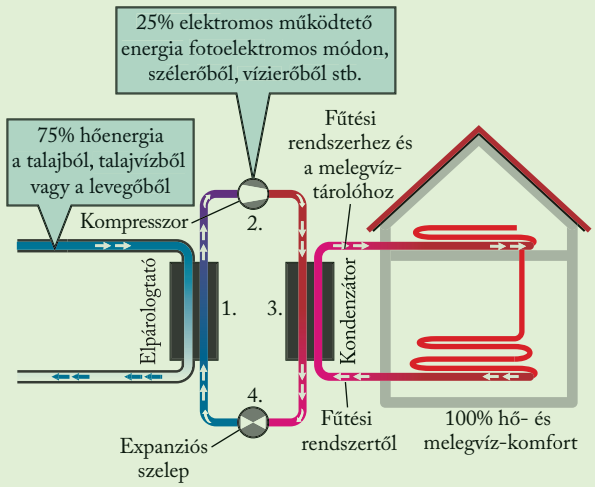
## Fűtő és hűtő hőszivattyú

**Az épületekben használt hőszivattyúkat fűtésre, hűtésre és használati meleg víz előállítására is használható eszközökként gyártják.**

A *hőszivattyúk energiaforrása* (hőforrása) lehet: a házon kívüli levegő, a talajvíz vagy pedig a talaj.

*Hőcserélő közeg* szerint megkülönböztetve:

– levegő-levegő,
– víz-levegő,
– levegő-víz,
– víz-víz.




***A hőszivattyú a felhasznált villamos energiának többszörösét vonja el a környezetéből, majd a padlófűtés leadja a fűtendő térben***

A talajszondákkal működő hőszivattyú víz-víz rendszerű. A talajba süllyesztett csövekben vizet cirkuláltatnak, s ez veszi fel a hőt. A felvett hőmennyiséget hőcserélőn keresztül az épület belső terében fal- vagy padlófűtés veszi át, amely a lakás helyiségeit fűti.

## A hőszivattyú fizikai működési elve

A hőszivattyú működése két fizikai elven alapul:

– minden, abszolút nulla foknál, vagyis –273 °C magasabb hőmérsékletű testnek van belső energiája, amit egy nála hidegebb közegnek képes leadni,
– ha a gázokat összesűrítjük, akkor felmelegszenek és hőt adnak le, ha pedig kitágulnak, akkor lehűlnek, vagyis hőt vonnak el a környezetüktől.

### A hőszivattyú működése fűtés közben

A ciklus elején a hőt szállító, közvetítő anyag (ez általában speciális gázok elegye) hidegebb, mint annak a közegnek (például talajnak, talajvíznek vagy a külső levegőnek) a hőmérséklete, ahonnan az elszállításra kerülő energiát nyeri. Ráadásul, mivel nagy nyomású, folyékony halmazállapotú. Ez a hideg folyadék érintkezik a nála melegebb külső környezettel (pl. levegővel, talajjal vagy vízzel), felvéve annak hőjét.

1. Az *első ciklusban* ez az összesűrített, hideg folyadék miközben felveszi az adott közeg (talaj, levegő) hőjét, kitágul, a hőcserélőben pedig párolgás közben gázzá alakul.

2. A *második ciklusban* egy kompresszor összesűríti a gázt, aminek hatására tovább emelkedik a hőmérséklete.

3. A *harmadik ciklusban* a gáz egy másik, beltérben található hőcserélő (azaz kondenzátor) segítségével leadja a benne felhalmozódott hőt a lakás fűtési rendszerébe, aminek következtében ismét cseppfolyósodik, vagyis kondenzálódik. A folyamat közben keletkező kondenzációs hő is bekerül a fűtési rendszerbe.

4. A *negyedik ciklus* során a folyékony hűtőközeg ismét bekerül a kinti levegőnél (vagy a talajnál) hidegebb rendszerbe, és a folyamat az első ciklussal újraindul.

### Klímaberendezés működése hűtés közben

Most a hűtés esetén vizsgáljuk meg a körfolyamatot!

A *kompresszor* villamos energia felhasználásával mechanikus úton a gázt összesűríti. Így a sűrítés folyamán a nyomás növekedésével megemelkedik a hűtőközeg hőmérséklete.

Ez a nagynyomású felmelegedett gáz a külső egységben lévő *kondenzátorba* jut, amely a klíma külső egységének a hőleadója. Mivel a kondenzátor hőmérséklete magasabb, mint a környezet hőmérséklete, így hőt ad le

a környezetének. A külső egységben lévő ventilátorral levegőt áramoltatunk a kondenzátoron át, a kondenzátor nem melegszik fel, folyamatosan le tudja adni a kellő mennyiségű hőmennyiséget. A hőleadás következtében a kondenzátorban csökken a hűtőközeg hőmérséklete, ezért kondenzálódik, vagyis cseppfolyóssá válik.

Ekkor a gáz hőmérséklete kb. 30 °C hőmérsékletű, így annak még le is kell hűlnie. Erre szolgál az *expanziós szelep*. Az expanziós szelep lassan engedi át a hűtőközeget a belső térbe, ezért kitágul és lehűl kb. 5 °C-ra. Ez a hideg hűtőközeg jut be a beltéri egységbe (elpárologtatóba).

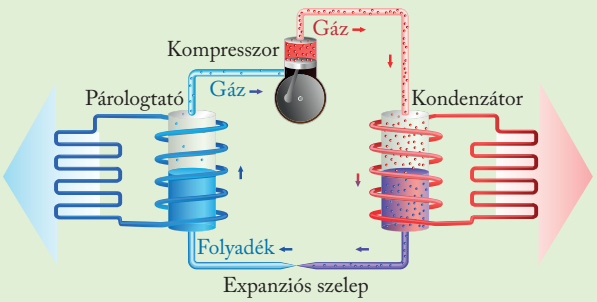
A *beltéri egység* (elpárologtató) a szoba levegőjét áramoltatja keresztül az elpárologtatón, ami hőt von el a szoba levegőjétől, ezáltal ugyanazt, de hidegebb hőmérsékletű levegőt kapunk vissza. A szoba levegőjének páratartalma kicsapódik az elpárologtatón, amit kondenzvízként kivezetünk a kültérbe. Ezzel a szoba levegőjének páratartalmát is csökkentjük.

Ahogy a hűtőközeg áthalad a beltéri egységen (elpárologtatón), hőt vesz fel, ennek hatására elpárolog, ismét gáz-halmazállapotú lesz.

A kompresszorba nem juthat folyékony halmazállapotú hűtőközeg, csak gáz. Ennek szabályozását az expanziós szelep biztosítja. (A kompresszor nem tud folyadékkal dolgozni, mert a folyadékok összenyomhatatlanok.)

Ezt a körfolyamatot nevezzük **Carnot-féle körfolyamatnak**.

*Megjegyzés:* Az elektromos energia a fűtés során is csak a klíma működéséhez szükséges, nem pedig a levegő felfűtéséhez.




*Klímaberendezés szerkezeti egységei*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Rajzoljuk meg a Carnot-féle hűtőgép körfolyamatának *p*-*V* diagramját!
2. A Carnot-féle hőerőgép körfolyamatának *p*-*V* diagramja segítségével a minta alapján töltsük ki a táblázat üres rovatait!

| | A-B | B-C | C-D | D-A |
|---|---|---|---|---|
| **A folyamat neve** | izoterm tágulás | adiabatikus tágulás | | |
| $\Delta T$ | $\Delta T_{AB} = 0$ | $\Delta T_{BC} < 0$ | | |
| $\Delta E$ | $\Delta E_{AB} = 0$ | $\Delta E_{BC} < 0$ | | |
| $Q$ | $Q_{AB} > 0$ | $Q_{BC} = 0$ | | |
| $W$ | $W_{AB} < 0$ | $W_{BC} < 0$ | | |
| **Kapcsolatuk** | $W_{AB} = -Q_{AB}$ | $W_{BC} = \Delta E_{BC}$ | | |

3. Benzinmotorok hatásfoka 0,3, dízelmotoroké 0,4 körüli érték. Az elektromos motorok hatásfoka ennél sokkal nagyobb, akár 98%-ot is elérhet. Ennyivel jobban dolgoznak a villamosmérnökök, mint a hőerőgépészek?
4. A benzin-, illetve dízelmotorok *p*-*V* diagramján hogyan jelenik meg az egy ciklusban végzett munka?
5. Lehet-e a konyhát úgy hűteni, hogy kinyitjuk a bekapcsolt hűtőgép ajtaját?

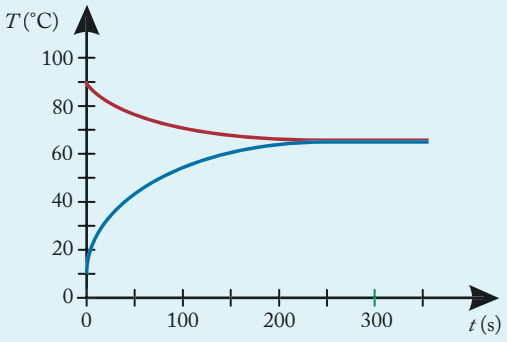
# 4. Kalorimetria

**EMLÉKEZTETŐ**

## A termikus kölcsönhatás

Nagy méretű főzőpohárba hideg vizet töltünk, majd beleállítunk egy kisebb főzőpoharat, melybe forró vizet töltöttünk. Mindkét edényben lévő víz hőmérsékletét adott időközönként (félpercenként) mérjük.

A hideg víz hőmérséklete növekszik, a melegé csökken. *A változás addig tart, ameddig azonos nem lesz a hőmérséklet a két pohárban*. A hőmérsékletek az idő függvényében az ábra szerinti diagramot adják.




*A hőmérsékletek időbeli változása egyre lassuló folyamat*

A termikus kölcsönhatás során a melegebb test hűlni fog, ettől az energiája csökken. Ezt a leadott energiát veszi fel a hidegebb test, amely tehát melegedni kezd, és az energiája növekszik. Ha a kölcsönhatásban részt vevő test környezete gyakorlatilag nem vesz részt a termikus kölcsönhatásban, akkor amennyivel csökken az egyik test energiája, annyival fog növekedni a másik energiája.

**KIDOLGOZOTT FELADAT**

Az ábra szerinti összeállításban a főzőpoharakba 2,4 dl 50 °C-os és 0,6 dl 34 °C-os vizet töltünk. Mennyi lesz a közös hőmérséklet, ha eltekintünk a környezet hatásaitól?



*Megvárjuk a közös hőmérséklet beállását*

**MEGOLDÁS**

Adatok:

$m_1 = 0{,}24\ \text{kg}$, $T_1 = 50\ ^\circ\text{C}$, $m_2 = 0{,}06\ \text{kg}$, $T_2 = 34\ ^\circ\text{C}$.

$T_k = ?$

Az elrendezés együttes belső energiája nem változik.

$\Delta E_b = 0 \Rightarrow c \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + c \cdot m_2 \cdot \Delta T_2 = 0$

Ha a közös hőmérséklet $T_k$, akkor $\Delta T_1 = T_k - T_1$, illetve $\Delta T_2 = T_k - T_2$ (a hőmérséklet-változás mindig a későbbi és a korábbi hőmérséklet különbsége).

Így $c \cdot m_1 \cdot (T_k - T_1) + c \cdot m_2 \cdot (T_k - T_2) = 0$

Ebből $T_k = \dfrac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2}$

Behelyettesítve:

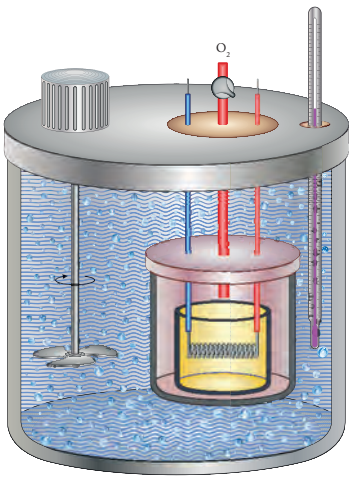
$$T_k = \frac{0{,}24\ \text{kg} \cdot 50\ ^\circ\text{C} + 0{,}06\ \text{kg} \cdot 34\ ^\circ\text{C}}{0{,}24\ \text{kg} + 0{,}06\ \text{kg}} \approx 47\ ^\circ\text{C}$$

A közös hőmérséklet 47 °C lett.

## Kalorimetria

A *kalorimetria* a hőátadással kapcsolatos mérések módszere kémiai és fizikai folyamatokban. Az elnevezés a latin *calor* („hő") és a görög *metron* („mérés") szóból származik, tehát szó szerint „hőmérést" jelent.

A kalorimetriás mérésekhez használt eszközöket **kalorimétereknek** nevezzük. **A kaloriméter olyan tartály vagy edény, amelynek jó a hőszigetelése.**




*Elektromos fűtésű kaloriméter szerkezete*

**Hőszigetelt rendszerben (pl. ideális kaloriméterben) a hőmérséklet-kiegyenlítődés közben az egyes anyagok által leadott és a többi anyag által felvett hőmennyiségek nagysága egyenlő:**

$\Sigma Q_{le} = \Sigma Q_{fel}$

**Ez a kalorimetria alapegyenlete.**

A leadott hő negatív előjelű, ezért a kalorimetria alapegyenlete $\Sigma Q = 0$ alakban is írható, amely azt jelenti, hogy a rendszer összenergiájának változása zérus, vagyis a hőmennyiségek előjeles összege zérus.

**Példa:** Három különböző anyag esetén, ha a kialakuló közös hőmérséklet $T_k$, akkor a $\Sigma Q = 0$ egyenlet:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (T_k - T_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (T_k - T_2) + c_3 \cdot m_3 \cdot (T_k - T_3) = 0$$

A $\Delta t$ hőmérséklet-változások kifejtésekor mindig a későbbi $T_k$ hőmérséklet a kisebbítendő, és a kezdeti hőmérséklet a kivonandó. Így különböző előjelű tagokat kapunk, melyek összege 0.

## Mérés kaloriméterrel

A kalorimetriás mérés akkor lesz pontos, ha a folyamatot a külső környezet és a kaloriméter minél kisebb mértékben befolyásolja. A külső környezet hatását hőszigetelő burkolattal csökkenthetjük.

A kaloriméter mérést befolyásoló hatása abban áll, hogy az edény hőmérséklete is változik a mérés közben, és ez is energiát igényel. Ezt a hibát úgy csökkentjük, hogy számításkor figyelembe vesszük a **kaloriméter** méréssel megállapítható $C$ **hőkapacitását**.

A kaloriméter hőkapacitásának egyik lehetséges mérési folyamatát a következő kidolgozott feladat mutatja meg.

Kaloriméterrel végzett mérés lépései:
– A kaloriméterbe ismert tömegű vizet töltünk.



*Iskolai kaloriméter alkatrészei*

– Megvárjuk, amíg beáll a kaloriméter-víz rendszer közös hőmérséklete.
– Az edénybe helyezzük a vizsgált anyagot.
– Ismét megvárjuk a termikus egyensúly beálltát, majd leolvassuk a közös hőmérsékletet.
– A mért értékekből kiszámítjuk a keresett adatokat.

Számításkor abból indulunk ki, hogy a hő a termikus kölcsönhatásban az energiacsere egyik formája, így a kalorimetria az energiamegmaradás szabályait követi.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kaloriméterbe először $m_1 = 90$ g tömegű vizet öntünk és megvárjuk, hogy beálljon a termodinamikai egyensúly. Leolvassuk a beállt hőmérsékletet: $T_1 = 22{,}2$ °C. Ezután a kaloriméterbe melegített vizet öntünk, melynek tömege $m_2 = 54$ g, hőfoka $T_2 = 70{,}2$ °C.

A kétféle hőmérsékletű víz keverésével elérjük, hogy közös hőmérsékletet vegyenek fel: $T_k = 35{,}4$ °C.

Mekkora a kaloriméter $C$ hőkapacitása?

#### MEGOLDÁS

Adatok:
$m_1 = 90$ g,
$T_1 = 22{,}2$ °C,
$m_2 = 54$ g,
$T_2 = 70{,}2$ °C,
$T_k = 35{,}4$ °C
$c_V = 4180 \frac{J}{kg \cdot K}$.

$C = ?$

A meleg víz által leadott hőmennyiség: $Q_{le} = c_V \cdot m_2 \cdot \Delta T_2$, a hideg víz és a kaloriméter által felvett hőmennyiség: $Q_{fel} = c_V \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + C \cdot \Delta T_1$

Mivel $Q_{le} = Q_{fel}$, így

$$c_V \cdot m_2 \cdot \Delta T_2 = c_V \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + C \cdot \Delta T_1$$

A $C$ hőkapacitást kifejezve kapjuk:

$$C = c_V \cdot \frac{m_2 \cdot \Delta T_2 - m_1 \cdot \Delta T_1}{\Delta T_1}$$

Behelyettesítve:

$$C = 4180 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot \frac{0{,}054\ kg \cdot 34{,}8\ K - 0{,}09\ kg \cdot 13{,}2\ K}{13{,}2\ K} =$$
$$= 218 \frac{J}{K}$$

A kaloriméter hőkapacitása $218 \frac{J}{K}$.

## MÉRÉSI FELADAT

### Szilárd anyag (alumínium) fajhőjének meghatározása

**Rendelkezésre álló eszközök:** Ismert hőkapacitású kaloriméter, hőmérő, 3 db közepes főzőpohár, meleg víz, tálca, törlőruha, mérleg, alumíniumdarabok (pl. alucsavarok).

**A mérés menete:** Mérjük le a szárazra törölt kaloriméter tömegét a fedővel, a keverővel és a hőmérővel együtt! Töltsük meg a kalorimétert – körülbelül a feléig – forró vízzel, és mérjük le ismét a berendezés tömegét a vízzel együtt! A két mérlegelés alapján az edénybe öntött víz tömege meghatározható.

Szobai hőmérőn olvassuk le a szobahőmérsékletet, majd mérjünk le a szoba-hőmérsékletű, száraz fémdarabokból kb. kétszer annyit, mint a kaloriméterbe töltött víz tömege!

Olvassuk le a kaloriméterben lévő meleg víz hőmérsékletét a hőmérőn! (Előtte bizonyosodjunk meg róla, hogy a mérlegeléssel töltött idő alatt a kaloriméter hőmérséklete stabilizálódott!)

Helyezzük a kaloriméterbe a lemért tömegű, szobahőmérsékletű, száraz fémdarabokat! Néhány percnyi kevergetés alatt beáll az új hőmérséklet. Olvassuk le ismét a hőmérő állását!

A megadott és a mért adatok alapján határozzuk meg a szilárd anyag $c$ fajhőjét! A kapott eredményt hasonlítsuk össze a vizsgált fémnek a *Négyjegyű függvénytáblázatokban* található fajhő értékével! Mi okozhatja a mért és az elméleti érték esetleges eltérését?



*Szilárd anyag fajhőjének meghatározása*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kaloriméter hőkapacitása 185 $\frac{\text{J}}{\text{K}}$. Tömege a fedővel, a keverővel és a hőmérővel együtt 180 g. Ezután a kaloriméterbe forró vizet töltünk, és megmérjük a vízzel töltött kaloriméter tömegét: 460 g. A szobahőmérséklet 21 °C. A méréshez rendelkezésre álló acélcsavar tömege 490 g. Lemérjük a kaloriméterben lévő meleg víz stabilizálódott hőmérsékletét, 48,3 °C az értéke.

A kaloriméterbe helyezzük a csavarokat. Néhány percig tartó kevergetés után leolvassuk a hőmérő új állandósult állását: 44,1 °C.

Határozzuk meg az acélcsavarok fajhőjét!

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m_{\text{víz}} = 460\ \text{g} - 180\ \text{g} = 280\ \text{g}$, $T_{\text{víz}} = 48{,}3\ ^\circ\text{C}$,

$m_{\text{Fe}} = 490\ \text{g}$, $T_{\text{Fe}} = 21\ ^\circ\text{C}$,

$C = 185\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$, $T_{\text{k}} = 44{,}1\ ^\circ\text{C}$, $c_{\text{víz}} = 4180\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

$c_{\text{Fe}} = ?$

A kalorimetria alapegyenletét $-\Sigma Q = 0$ – felírva:

$$c_{\text{Fe}} \cdot m_{\text{Fe}} \cdot \Delta T_{\text{Fe}} + c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot \Delta T_{\text{víz}} + C \cdot \Delta T_{\text{kal}} = 0$$

A hőmérséklet-változásokat beírva:

$$c_{\text{Fe}} \cdot m_{\text{Fe}} \cdot (T_{\text{k}} - T_{\text{Fe}}) + c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot (T_{\text{k}} - T_{\text{víz}}) + C \cdot (T_{\text{k}} - T_{\text{víz}}) = 0$$

Behelyettesítve:

$$c_{\text{Fe}} \cdot 0{,}490\ \text{kg} \cdot (44{,}1\ ^\circ\text{C} - 21\ ^\circ\text{C}) +$$

$$+ 4180\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 0{,}28\ \text{kg} \cdot (44{,}1\ ^\circ\text{C} - 48{,}3\ ^\circ\text{C}) +$$

$$+ 185\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot (44{,}1\ ^\circ\text{C} - 48{,}3\ ^\circ\text{C}) = 0$$

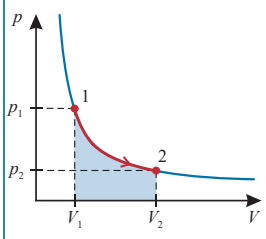
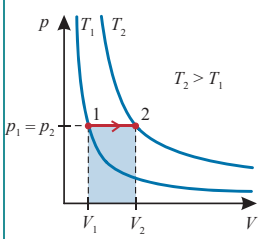
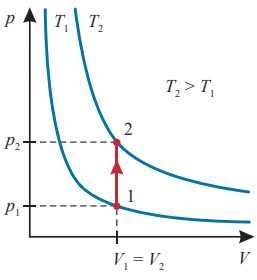
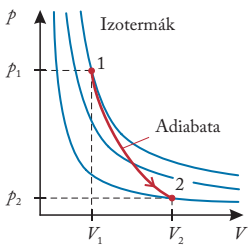
A vascsavar fajhőjére $c_{\text{Fe}} = 503\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ értéket kapunk. A *Négyjegyű függvénytáblázatokban* található érték $470\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, amelytől az eltérés 7%-os.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Az első kidolgozott feladatban a kiszámított közös hőmérséklet sokkal közelebb van meleg víz kezdeti hőfokához, mint a hidegebbéhez. Mi a magyarázata ennek?
2. Ha az első kidolgozott feladat kísérletét elvégezzük, a beállt közös hőmérséklet alacsonyabb, mint a kiszámított. Mi lehet ennek az oka?
3. Termikus kölcsönhatás során a közös hőmérséklet időbeli változása egyre lassuló folyamat. Miért?
4. Egy hőszigetelt falú, kezdetben 20 °C hőmérsékletű edényben összekeverünk 1 kg tömegű, 40 °C hőmérsékletű és 4 kg 80 °C hőmérsékletű vizet. Határozzuk meg a termikus kölcsönhatás után kialakuló közös hőmérsékletet, ha
   – az edény hőkapacitása elhanyagolható,
   – az edény hőkapacitása 2100 $\frac{\text{J}}{\text{K}}$!

# Összefoglalás

## Ideális gázok állapotváltozásainak energiaviszonyai

| | Izoterm | Izobár | Izochor | Adiabatikus |
|---|---|---|---|---|
| Állandó fizikai mennyiség | hőmérséklet ($T$) | nyomás ($p$) | térfogat ($V$) | |
| Gáztörvény neve | Boyle–Mariotte | Gay-Lussac I. | Gay-Lussac II. | |
| Gáztörvény egyenlete | $p \cdot V =$ állandó | $\frac{V}{T} =$ állandó | $\frac{p}{T} =$ állandó | |
| $p$-$V$ diagram |  |  |  |  |
| Fajhő | nem értelmezzük ($\Delta T = 0$) | $c_p = \left(\frac{f+2}{2}\right) \cdot \frac{R}{M}$ | $c_V = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M}$ | 0 |
| Hőtan I. főtételének alakja | $\Delta E = 0$<br>$Q = -W$ | $W = -p \cdot \Delta V$<br>$Q = \Delta E_b + p \cdot \Delta V$ | $W = 0$<br>$\Delta E_b = Q$ | $Q = 0$<br>$\Delta E_b = W$ |

## A hőtan I. főtétele

A belső energia megváltozása egyenlő a termikus kölcsönhatást jellemző $Q$ hőmennyiség és a mechanikai kölcsönhatást jellemző $W$ térfogati munkavégzés összegével:

$$\Delta E_b = Q + W$$

## Hőkapacitás, fajhő

**Hőkapacitás**

Ideális gázok esetén a gáz által felvett $Q$ hőmennyiség és a $\Delta T$ hőmérséklet-változás hányadosát hőkapacitásnak nevezzük. Jele: $C$.

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

**Fajhő**

Ideális gázok esetén, ha a gáz által felvett $Q$ hőmennyiséget elosztjuk a $\Delta T$ hőmérséklet-változás és az $m$ tömeg szorzatával, akkor a kapott fizikai mennyiséget fajhőnek nevezzük. Jele: $c$.

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

**Mólhő**

Ideális gázok esetén, ha a gáz által felvett $Q$ hőmennyiséget elosztjuk a $\Delta T$ hőmérséklet-változás és az $n$ anyagmennyiség szorzatával, akkor a kapott fizikai mennyiséget mólhőnek nevezzük. Jele: $c_M$.

$$c_M = \frac{C}{n} = \frac{Q}{n \cdot \Delta T}$$

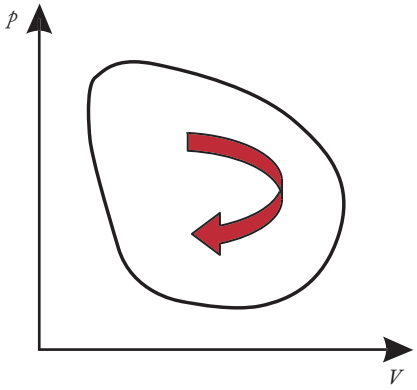
## Körfolyamatok

A körfolyamat gázzal végrehajtott állapotváltozások sorozata, melyek után a rendszer visszatér eredeti állapotába.

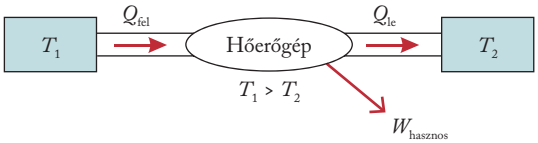
Egy teljes ciklusra nézve a gáz által végzett összes munka összege a gáz által felvett és leadott hő különbsége: $W = Q_{fel} - Q_{le}$.

## Hőerőgépek körfolyamata

A rendszer több hőt vesz fel, mint amennyit lead, így a végzett munka pozitív.

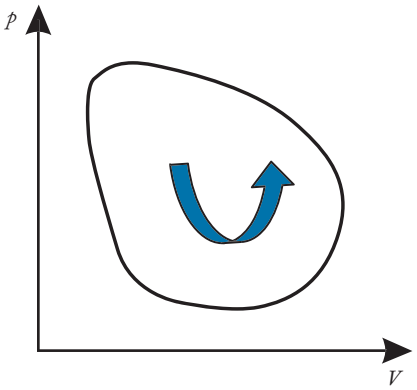


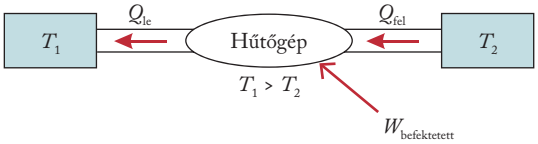

Hőerőgép termikus hatásfoka: $\eta = \frac{W}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} - Q_{le}}{Q_{fel}}$




## Hűtőgépek körfolyamata

A rendszeren munkát végez a környezete, és hőt ad le a környezetének.




A hűtőgép jósági tényezője:

$$\varepsilon = \frac{\text{A hideg tartálytól elvont hő}}{\text{Felhasznált munka}} = \frac{Q_{fel}}{W} = \frac{Q_{fel}}{Q_{le} - Q_{fel}}$$

## A termodinamika II. főtételének egyenértékű megfogalmazásai

A magára hagyott rendszerekben mindig a melegebb test ad át hőt a hidegebb testnek.

Nem lehet olyan periodikusan működő gépet szerkeszteni, amely egy hőtartályból hőmennyiséget von el, és azt egyéb változások bekövetkezése nélkül munkává alakítja át, azaz a hőerőgép termikus hatásfoka $\eta < 1$.

A természetben végbemenő folyamatok közben egy zárt rendszer rendezettsége nem növekedhet.

## Kalorimetria

A kalorimetria hőátadással kapcsolatos mérések módszere kémiai és fizikai folyamatokban.

A kalorimetriás mérésekhez használt eszközök a kaloriméterek.

A mérési adatokkal végzett számítás felhasználja, hogy a hő a termikus kölcsönhatásban az energiacsere egyik formája.

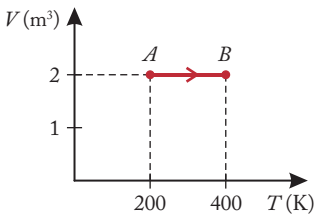
A kalorimetria alapegyenlete: $\Sigma Q_{le} = \Sigma Q_{fel}$.

Más alakban: $\Sigma Q = 0$.

# Összefoglaló feladatok

## TESZTFELADATOK

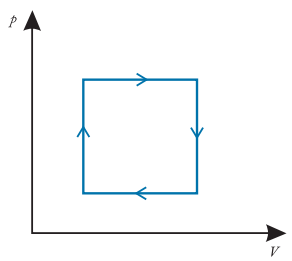
**1.** Melyik állítás IGAZ az alábbi diagram alapján a gáz állapotváltozására vonatkozóan?




A) A gázzal hőt közöltünk, amit a gáz munkavégzésre fordított.
B) A gáz nem vett fel és nem is adott le hőt, a folyamat adiabatikus.
C) A folyamat során a munkavégzés zérus.
D) A gáz belső energiája ebben a folyamatban nem változott.

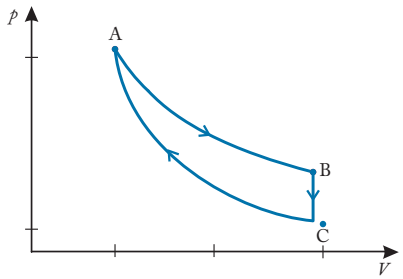
**2.** Egy ideális gázt $T = 300$ K hőmérsékletről először izochor, egy másik esetben az előzővel megegyező kezdeti állapotból izobár folyamattal juttatunk $T = 400$ K hőmérsékletű állapotba. Melyik folyamathoz kell nagyobb hőmennyiséget közölni a gázzal?
A) Az izobár esetben.
B) Az izochor esetben.
C) Ugyanannyi hőt kell közölni, hiszen mindkét esetben $\Delta T = 100$ K.

**3.** (Emelt szintű érettségi tesztfeladat, 2006.)
Az ábra valamely gázzal végzett körfolyamatot mutat a $p$–$V$ diagramon. Az alábbi megállapítások közül melyik helytálló?



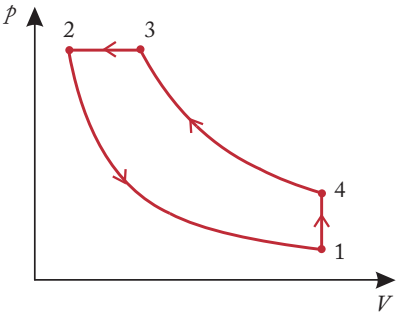

A) A körfolyamat során a gáz hőfelvétele a hőleadásnál kisebb.
B) A körfolyamat során a gáz hőfelvétele a hőleadásnál nagyobb.
C) A körfolyamat során a gáz hőfelvétele megegyezett a hőleadással.
D) A kérdés nem eldönthető az ábra alapján.

**4.** A következő ábra szerinti körfolyamatról tudjuk, hogy van egy adiabatikus és egy izotermikus részfolyamata. Válasszuk ki a HAMIS állítást!




A) A körfolyamatból hasznos munkát nyerünk.
B) Az A és C pontokhoz tartozó hőmérséklet azonos.
C) Az A és B pontokhoz tartozó belső energia azonos.
D) Az A-B folyamatban hőt vesz fel a gáz.

**5.** A mellékelt $p$–$V$ diagramon látható körfolyamatnak két olyan részfolyamata van, melyben nem történik hőcsere. Válasszuk ki a HAMIS állítást!




A) Az 1-2 és 3-4 folyamatban állandó a hőmérséklet.
B) A 2-3 folyamatban hőt vesz fel a gáz.
C) A 4-1 folyamatban a nyomás és a hőmérséklet értéke egyenesen arányos.
D) A 2-3 folyamatban a térfogat és a hőmérséklet értéke egyenesen arányos.

**6.** Elképzelhető, hogy egy tó vizének hűtésével fűtsünk egy épületet?
A) Csak akkor, ha a tó vizének hőmérséklete magasabb, mint az épületé.
B) Nem képzelhető el, mert a termodinamika II. főtétele szerint ez lehetetlen.
C) Igen elképzelhető; ha egy hőszivattyút működtetünk, melynek alacsonyabb hőmérsékletű hőtartálya a tó, magasabb hőmérsékletű hőtartálya az épület.

**7.** Mekkora a termodinamikai hatásfoka annak a hőerőgépnek, amely ciklusonként 30 J munkát végez, és a környezetnek 120 J hőt ad le?

A) 30%.
B) 25%.
C) 20%.
D) 15%.

**8.** Két egymással kémiai reakcióba nem lépő anyagot keverünk össze, az egyik $m_1$ tömegű, $c_1$ fajhőjű, a másik $m_2$ tömegű, $c_2$ fajhőjű. Hogyan számítjuk ki a keverék fajhőjét?

A) $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

B) $c = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

C) $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$.

D) $c = \frac{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

**9.** Válasszuk ki az alábbiak közül a HAMIS állítást!

A) Két test tökéletesen rugalmas ütközése reverzibilis folyamat.
B) Két test rugalmatlan ütközése irreverzibilis folyamat.
C) A természeti folyamatok nagy része reverzibilis.
D) Reverzibilis folyamat a valóságban nem létezik, modellfolyamatként használjuk.

**10.** Egy edényben lévő hideg vízbe meleg vaskockát helyezünk. Kis idő elteltével azt tapasztaljuk, hogy a vaskocka lehűl, a víz pedig felmelegszik. A jelenségre vonatkozó melyik állítás IGAZ az alábbiak közül?

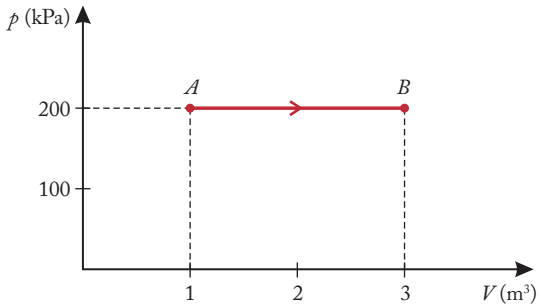
A) A folyamat reverzibilis, hiszen bármikor kivehetjük a kockát, lehűthetjük a vizet, és felmelegíthetjük a kockát.
B) Irreverzibilis a folyamat, mert a vaskocka magától nem fog hőt elvonni a víztől és felmelegedni.
C) Reverzibilis, mert nem történt fázisátalakulás.
D) Irreverzibilis, mert a vaskocka vízbe helyezésekor munkát végeztünk.

**11.** Egy szobában működtetett hűtőszekrény ajtaját nyitva tartjuk, hogy lehűtsük a szoba levegőjét. Mi történik?

A) A szoba levegője csakugyan lehűl, a hűtőszekrény légkondicionálóként működik.
B) A szoba hőmérséklete állandó marad, mert a hűtőszekrényből felvett hő és a szobának leadott hő egyenlő.
C) A szoba levegője melegszik.
D) Nem lehet eldönteni; a hűtőszekrény és a szoba méretétől függ.

## FELADATOK

**1.** A grafikonon 2,5 kg oxigéngáz állapotváltozását látjuk. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!



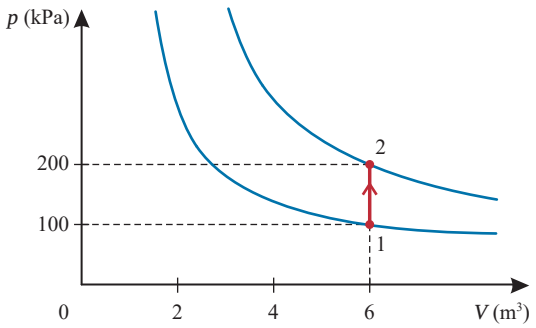

**a)** Milyen állapotváltozást mutat a grafikon?
**b)** Mennyi a gáz hőmérséklete az *A* és a *B* pontban?
**c)** Mennyi a gáz belső energiájának változása a folyamat során?
**d)** Mennyi a gáz által végzett térfogati munkavégzés?
**e)** Mennyi hőt közöltünk a gázzal a folyamat során?

**2.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2008)
Vízszintes, súrlódásmentesen mozgó, elhanyagolható tömegű dugattyúval elzárt tartályban 40 dm³ térfogatú oxigén van. Az oxigén moláris tömege 32 $\frac{g}{mol}$, a hőmérséklet 27 °C, a külső légnyomás $10^5$ Pa. A tartályban lévő gázt lassan, egyenletesen felmelegítettük, melynek során a gáz kitágult és 1000 J munkát végzett a környezetén.

**a)** Mekkora a bezárt oxigén tömege?
**b)** Mennyit változott a melegítés során a gáz térfogata, és mekkora a térfogat a folyamat végén?
**c)** Mekkora volt a hőfelvétel és a belső energia változása?
**d)** Mennyit változott a melegítés során a gáz hőmérséklete, és mekkora a végső hőmérséklet?

**3.** Az ábrán kétatomos molekulákból álló gáz állapotváltozása látható. A gáz hőmérséklete a kezdeti (1) állapotban 300 K.

**a)** Mennyivel változik a belső energiája?
**b)** Mennyi hőt vett fel a környezetéből?




*Az állapotváltozás p–V diagramja*

**4.** Oxigéngáz „A” állapotból „B” állapotba kerül. Az „A” pontban a nyomása $10^5$ Pa, a térfogata 1 dm$^3$, a hőmérséklet 500 K. A „B” pontban a nyomása $4 \cdot 10^5$ Pa, a térfogata 1 dm$^3$. A pontokat a $p$-$V$ diagramon egyenes szakasz köti össze.

**a)** Rajzoljuk meg a $p$-$V$ diagramot erre a folyamatra!

**b)** Mennyi az oxigéngáz anyagmennyisége?

**c)** Mennyi a hőmérséklet a „B” pontban?

**d)** Változott-e a gáz belső energiája, és ha igen, mennyivel?

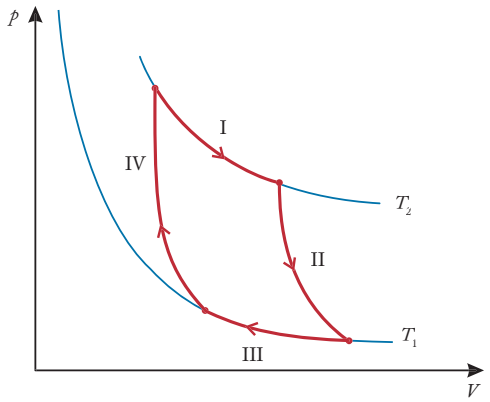
**e)** Mennyi munkát végzett a gáz?

**f)** Történt-e hőleadás vagy hőfelvétel, és ha igen, akkor mennyi ennek az értéke?

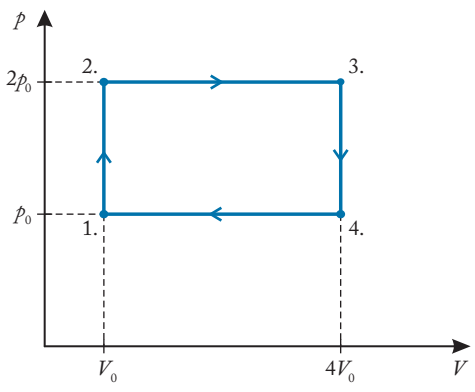
**5.** A grafikonon egy Carnot-körfolyamat $p$-$V$ diagramja látható. Tudjuk, hogy a zárt síkidom területe 200 J, valamint adott a $T_1 = 770$ K és $T_2 = 1100$ K hőmérséklet.

**a)** Mennyi a körfolyamat termikus hatásfoka?

**b)** Mennyi az egy ciklusban felvett és leadott hőmennyiség?




**6.** Héliumgáz az ábra szerinti körfolyamatot végzi. $p_0 = 10^5$ Pa , $V_0 = 4$ dm$^3$. Határozzuk meg a körfolyamat során a gáz által végzett hasznos munkát és a termikus hatásfokot!

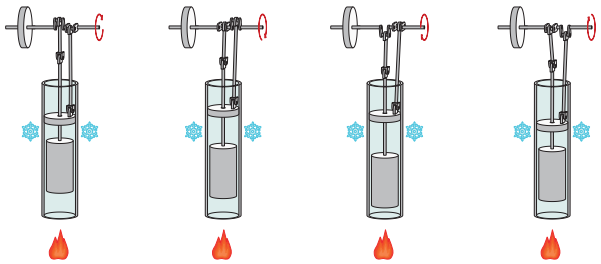



**7.** Az úgynevezett Stirling-motor körfolyamata két izoterm és két izochor folyamatból áll.

**a)** Készítsük el egy Stirling-körfolyamat $p$-$V$ diagramját!



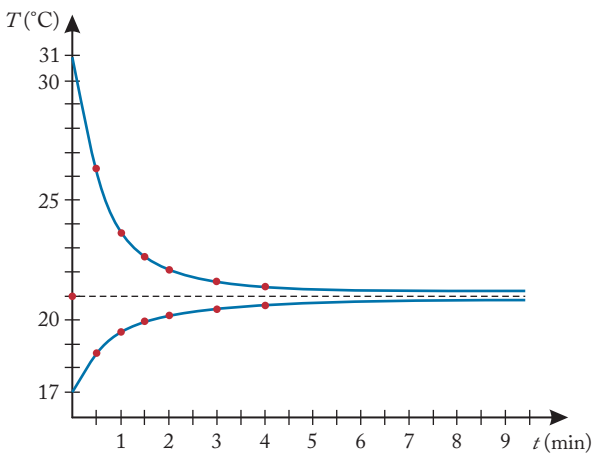
*Stirling-motor*



**b)** Melyik részfolyamat során vesz fel / ad le hőt, és mikor végez munkát?

**8.** A hőtan II. főtételének egyik megfogalmazása:
A hő nem mehet át spontán módon alacsonyabb hőmérsékletű testről magasabb hőmérsékletű testre.
Ismert tapasztalatunk, hogy fürdés után vizes testtel kilépve a szabadba, még napsütéses, meleg időben is didergünk, főleg ha a szél is fúj egy kicsit. Fázunk, tehát testünk hőt ad le akkor is, ha a hőmérséklete alacsonyabb, mint a környező levegőé. Ez az irány a II. főtétel által megszabottal ellentétes, „szabálytalan irányú”. Az ellentmondás természetesen feloldható. Hogyan?

**9.** Egy termikus kölcsönhatást vizsgáló mérés során az ábra szerinti összeállításban 300 ml 17 °C-os csapvizet öntöttünk a külső edénybe, majd 31 °C-os meleg vizet a belső alumíniumhengerbe.
A meleg víz mennyiségét nem mértük le. A hőmérsékleteket először félpercenként, utána percenként, később még nagyobb időközönként olvastuk le. A hőcserét a külső víz keverésével segítettük. Amikor a változás üteme egy idő után már nagyon lelassult, a mérést befejeztük. A mért adatokból grafikont készítettünk.

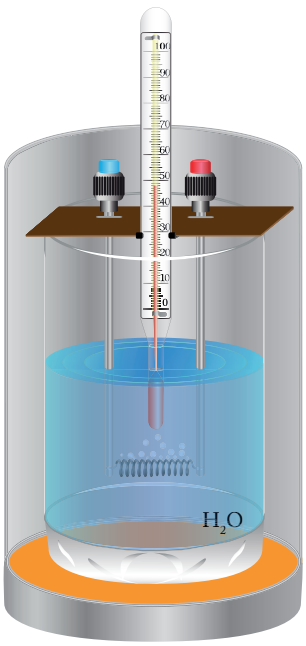


A grafikon alapján megbecsüljük az egyensúlyi hőmérséklet értékét: 21 °C.
A mérési adatok alapján adjunk becslést a meleg víz mennyiségére! A veszteségeket és az edények hőkapacitását hanyagoljuk el! Ha ezek után mégis megmérjük a meleg víz mennyiségét, akkor a számított értékhez képest mire számíthatunk?

**10.** Fűtőszálas, 21 $\frac{\text{J}}{\text{K}}$ hőkapacitású kaloriméterrel mérjük a 20%-os konyhasóoldat fajhőjét.
Egy kaloriméterbe 200 g tömegű oldatot töltünk. A rendszert 20 °C-os hőmérsékletről 7,5 perc alatt melegíti föl 30 °C-ra a 15 W teljesítményű fűtőszál. A mérés alapján mennyi a sóoldat fajhője?

**11.** A meleg tenger vizének hőmérséklete a felszín közelében 27 °C, a mélyebb részeken 7 °C. Mennyi lehet legfeljebb a tengervíz hőjét hasznosító hőerőgép hatásfoka?

**12.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2009)
Ismeretlen fém fajhőjét szeretnénk megmérni. Ehhez a fémből egy 2 kg-os, 70 °C hőmérsékletű darabot hőszigetelt edénybe helyezünk. Az edénybe előzőleg 2,5 kg tömegű vizet töltöttünk. A fémdarab behelyezésekor a víz és az edény hőmérséklete egyaránt 22 °C. Az edényt bezárjuk, és azt tapasztaljuk, hogy egy óra elteltével a víz hőmérséklete 28 °C-on állapodott meg. Mekkora az ismeretlen fém fajhője?




Az edény hőkapacitása: $C = 2100\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$,

a víz fajhője: $c = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

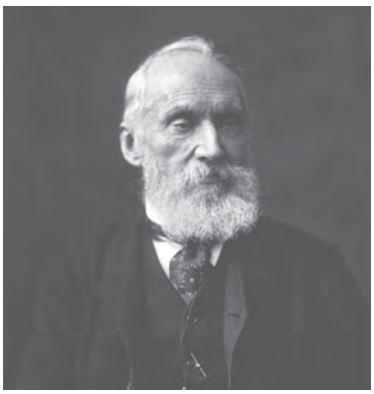
## ESSZÉKÉRDÉS

### Körfolyamatok, a hőtan második főtétele

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2019)

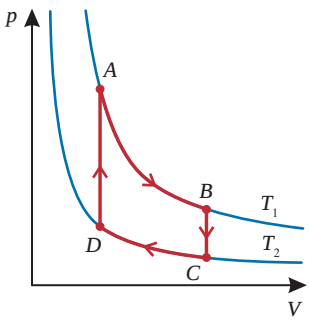
*„A valóságos gépekben, amelyekben a hő segítségével mechanikai munkát akarunk nyerni, az erő forrását nem a hő abszorpciójában vagy átalakításában kell keresnünk, hanem csupán a hő átfolyatásában […], a hő mechanikai munkává való átalakítása minden valószínűség szerint lehetetlen, legalábbis eddig még nem fedezték fel."*

(*Simonyi Károly:* A fizika kultúrtörténete – *Budapest, 1981)*



*Lord Kelvin*

**a)** Ismertesse, mit értünk a hőerőgépek termodinamikai hatásfoka alatt!
**b)** Az alábbi ábrán egy körfolyamat nyomás-térfogat diagramját látja. Ismertesse ezen a példán az egyes részfolyamatok energetikai jellemzése segítségével, hogyan határozhatjuk meg ennek a folyamatnak a termodinamikai hatásfokát!

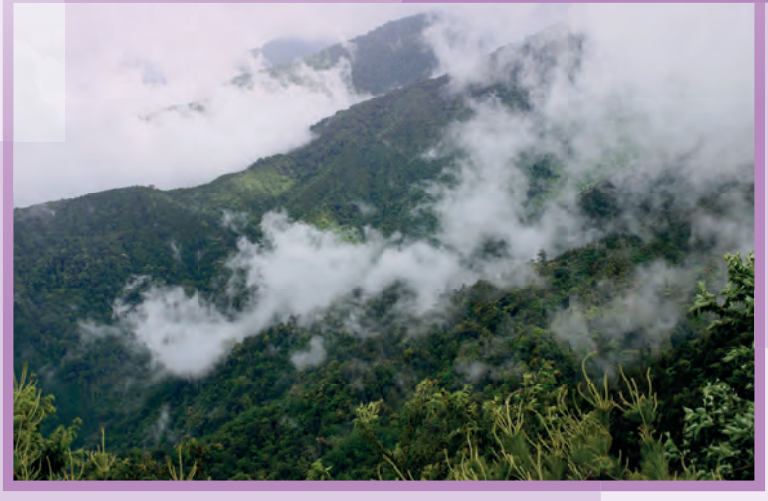



**c)** Fogalmazza meg, hogy mit mond ki a hőtan második főtétele a hőerőgépek hatásfokáról!
**d)** Mutassa meg, hogy a fent jellemzett körfolyamatban az előbbiekben megfogalmazott elv hogyan érvényesül!
**e)** Ismertesse a hőtan második főtételének a hőáramlás irányára vonatkozó megfogalmazását!
**f)** Mutassa be a hőtan második főtételének a folyamatok irányára vonatkozó megfogalmazását!
**g)** Adjon meg egy példát olyan elképzelt folyamatra, ami a hőtan első főtételének nem mond ellent, de a második főtétel miatt nem játszódik le a természetben!

# XII. Halmazállapot-változás







# 1. Halmazállapotok

**EMLÉKEZTETŐ**

## Halmazállapotok

**Olvadásnak nevezzük azt a halmazállapot-változást, amikor a szilárd halmazállapotú anyag cseppfolyóssá, azaz folyadékká válik. Az olvadás meghatározott hőmérsékleten következik be, amelyet olvadáspontnak nevezünk. Az olvadáspont függ az anyagi minőségtől és a külső nyomástól.**

Az olvadáshoz az anyag általában hőmennyiséget vesz fel a környezetétől, belső energiája növekszik, ugyanakkor a hőmérséklete változatlan marad.

Az **olvadáshő** megmutatja, hogy 1 kg olvadásponton lévő anyag megolvasztásához mekkora hőmennyiség szükséges. Jele: $L_o$.

$$L_o = \frac{Q}{m}$$

Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

**Fagyásnak nevezzük azt a halmazállapot-változást, amelynek során a folyékony anyag szilárd halmazállapotúvá válik, miközben hőmennyiséget ad le a környezetének, belső energiája pedig csökken. A fagyás egy meghatározott hőmérsékleten következik be, ez a fagyáspont. Ugyanazon anyag olvadáspontja és fagyáspontja egyenlő.**

A fagyáskor leadott, illetve az olvadáskor felvett hőmennyiségek abszolút értéke megegyezik, előjelük ellentétes. Adott anyag **fagyáshője** az olvadáshőjének mínusz 1-szerese.

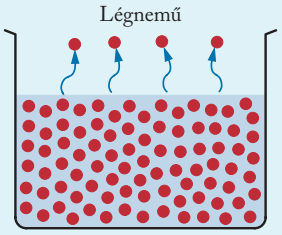
**Párolgásnak nevezzük azt a halmazállapot-változást, amikor a folyékony halmazállapotú anyag légneművé válik.**

A párolgás a folyadék minden hőmérsékletén bekövetkezik. A párolgás során az anyag $Q$ hőmennyiséget ad le a környezetének (nagyobb energiával rendelkező részecskék távoznak), $E_b$ belső energiája csökken.

A **párolgáshő** megmutatja, hogy 1 kg folyékony anyag gőzzé alakításához mekkora hőmennyiség szükséges. Jele: $L_p$.

$$L_p = \frac{Q}{m}$$

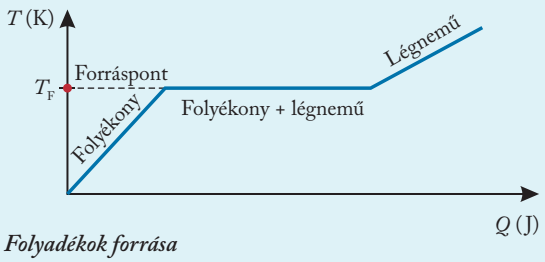
Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.




*Párolgás*

A párolgás függ:
- a párolgó anyag hőmérsékletétől (magasabb hőmérsékleten több folyadék párolog el),
- a folyadék szabad felszínétől,
- a környezet páratartalmától (minél alacsonyabb a páratartalma, annál gyorsabban párolog),
- az anyagi minőségétől (pl. az alkohol vagy a benzin gyorsabban párolog, mint a víz).

**Forrásról akkor beszélünk, amikor a párolgás nemcsak a folyadék szabad felszínén, hanem a teljes folyadéktérfogatban végbemegy, a folyadék belsejében is keletkeznek gőzbuborékok. A jelenség egy adott nyomáson csak meghatározott hőmérsékleten következik be, ez az adott anyag forráspontja. A teljes folyadék elforrásáig a hőmérséklet állandó marad.**




*Folyadékok forrása*

A **forráshő** megmutatja, hogy 1 kg forrásponton lévő folyékony anyag gőzzé alakításához mennyi hőmennyiségre van szükség. Jele: $L_f$.

$$L_f = \frac{Q}{m}$$

Mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

| Anyag | Forráspont (°C) | Forráshő $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right)$ |
|---|---|---|
| víz | 100 | 2256 |
| etil-alkohol | 78,4 | 906 |
| benzol | 80 | 396 |
| petróleum | 200 | 335 |

*Néhány anyag forráspontja és forráshője*

Egy anyag forrás- és párolgáshője jó közelítéssel megegyezik egymással: $L_f \approx L_p$.

**Lecsapódásnak nevezzük azt a halmazállapot-változást, amelynek során a légnemű (gőz) halmazállapotú anyag folyékonnyá válik. Eközben csökken a belső energiája, a környezetének hőmennyiséget ad le.**

Ha egy gőz halmazállapotú anyag hőmérsékletét csökkentjük, a lecsapódás a forrásponton kezdődik el. A lecsapódáskor leadott és a forráskor vagy a párolgáskor felvett hőmennyiségek abszolút értéke megegyezik, ezért egy adott anyag **lecsapódási hője** a párolgáshőjének (forráshőjének) mínusz 1-szerese.

A tapasztalatok szerint minden halmazállapot-változásra, mint más fizikai folyamatokra is, érvényes a tömegmegmaradás és az energiamegmaradás elve. A feladatok megoldásánál ezt mindig figyelembe kell venni!

Az olvadáspont és a forráspont függ a külső nyomástól: nagyobb külső nyomás esetén a forráspont növekszik. Az olvadáspont a legtöbb anyagnál szintén növekszik nagyobb nyomás hatására, ez alól azonban a víz kivétel, amelynél csökken.

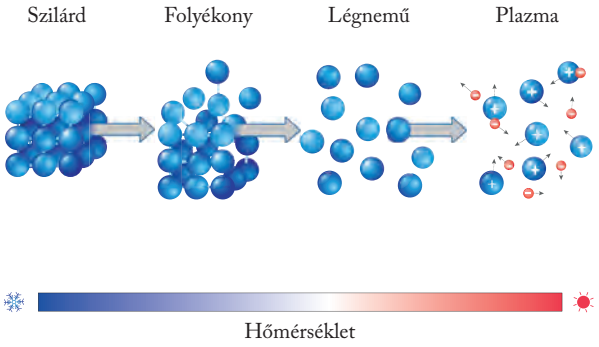
## Halmazállapotok jellemzése

A **halmazállapotokat** azért különböztetjük meg, mert a jellemző fizikai tulajdonságok a halmazállapot megváltozásakor ugrásszerűen megváltoznak. Ez vonatkozik többek közt az anyag sűrűségére (mechanikai tulajdonságára), a fajhőre és a hőtágulási együtthatókra (hőtani tulajdonságára), a fajlagos ellenállásra (elektromos tulajdonságára), a permeabilitásra (mágneses tulajdonságára), a törésmutatóra (optikai tulajdonságára). A magfizikai tulajdonságokat viszont nem befolyásolja a halmazállapot, így például a radioaktivitást jellemző felezési időt sem.

A **szilárd halmazállapotra** jellemző, hogy erős kötésekkel kapcsolódnak egymáshoz az atomok. Ilyen kötés a kovalens, a fémes, az ionos kötés. Emiatt csak viszonylag nagy erők hatására lehet az alakjukat és a térfogatukat megváltoztatni. A hőtágulási együtthatójuk is alapvetően emiatt általában egy nagyságrenddel nagyobb, mint a folyadéké.

A **folyékony halmazállapotban** szintén erős, de a szilárdhoz képest már gyengébb kötések a jellemzők, a folyadékrészecskék bár erősen kötődnek egymáshoz, de egymáson könnyedén elgördülhetnek. Emiatt az alakjuk könnyen, de térfogatuk csak nagy erők hatására változtatható meg. A nyugvó folyadékok az edény alakját veszik fel, szabad felszínük pedig merőleges a külső erők eredőjének irányára.

A **légnemű halmazállapotú** anyagok részecskéi szabadon mozognak a térben, azt teljesen kitöltik, köztük csak ütközések jönnek létre.




*Az anyag négy halmazállapota*

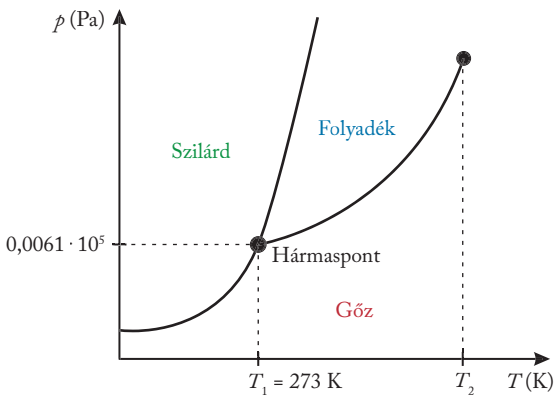
Az anyag számunkra különleges állapota a **plazmaállapot**, mert a Földön ritkán találkozunk vele. Az univerzumban azonban igen gyakori, anyagának több mint 99%-a ilyen állapotban van. Ez az állapot abban különbözik a légnemű halmazállapottól, hogy itt a részecskék számottevő része ionizált állapotban van, azaz a plazmában ionok és elektronok is nagy arányban vannak. Emiatt komoly szerepet játszanak az elektromos és mágneses jelenségek a plazma viselkedésében, és ez nagyon bonyolulttá teszi a leírását.

## Szublimáció

**Szublimációnak nevezzük azt a halmazállapot-változást, amelyben a szilárd anyag légneművé válik.**

Az anyagok hármaspontja egy olyan hőmérsékleten és nyomáson jön létre, amelyen mindhárom halmazállapot egyszerre jelen van.

Ha az anyag a **hármaspontjánál** alacsonyabb hőmérsékletű és alacsonyabb nyomású állapotban van, akkor az anyag folyékony halmazállapotban nem fordulhat elő. Ekkor a halmazállapot-változások közül csak a szublimáció,




*A víz hármaspontja fázisdiagramon*

azaz a folyadékfázis kihagyásával a szilárd anyagból gőz keletkezése valósulhat meg, illetve ennek fordítottja.

A hármaspont egy anyag fontos jellemzője, a víz hármaspontja $0{,}0061 \cdot 10^5$ Pa nyomásnál (ez a normál légköri nyomás 0,61%-a) és 0 °C hőmérsékletnél van.

A víz esetében szublimáció ezen tartomány alatt következik be, amely szintén függ a nyomástól.

**Példa:** Jó példák a szublimációra a bolygóközi térben keringő üstökösök. Ezek anyaga nagy százalékban tartalmaz fagyott vizet, azaz vízjeget. A bolygóközi térben a hőmérséklet igen alacsony. Az üstökösöket mozgásuk során a Naphoz közeledve egyre több napfény éri, így anyaguk melegszik. Külső nyomás viszont gyakorlatilag nincs, azaz nulla, így az üstökösök vízjégtartalma nem megolvad, hanem szublimálni kezd.

## Túlhűtés, túlhevítés

A halmazállapot-változások közül az olvadás mindig az adott nyomáshoz tartozó olvadásponton következik be. Az ellentétes folyamat, a fagyás azonban nem feltétlenül indul be a fagyásponton. A kristályos szerkezet kialakulását valamilyen külső körülménynek kell segítenie, például valamilyen mechanikai hatás (rázás), vagy valamilyen szennyezés jelenlétére van szükség. Ellenkező esetben az anyag az olvadáspontja alá hűthető, ez a **túlhűtés** jelensége.

**Példa:** A légkör felső rétegeiben a vízcseppek akár –40 °C-osak is lehetnek. Ehhez hasonlóan a vízgőz lecsapódását is elősegíti, ha apró szennyezőanyagok, úgynevezett kondenzációs magok vannak a légkörben.



*Túlhűtéskor mechanikai hatásra egy pillanat alatt megfagyhat a víz*

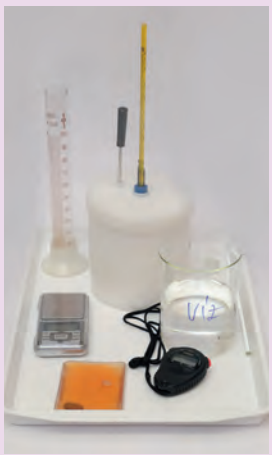
A folyadék – így a víz is – megfelelő körülmények közt a forráspontja fölé is felmelegíthető, ez a **túlhevítés** jelensége. Ez víz esetében általában akkor következik be, ha elegendően tiszta a víz és az edény, rázkódásmentesen tartjuk a folyadékot, és csak csekély mértékben van levegő a vízben.

**Példa:** A mikrohullámú sütőben egy pohárban lévő víz nagyjából egyenletesen melegszik, így nem alakulnak ki benne olyan intenzív áramlások, mint amikor egy edényben csak alulról melegítjük. Emiatt a mikrohullámú sütőben a víz könnyen túlhevülhet. Amikor az így felmelegített vízbe teafiltert, cukrot, vagy instant kávét teszünk, a forrás hirtelen beindul, és a keletkező gőz szétspricceli a forró folyadékot, amely magas hőmérséklete miatt komoly égési sérülést okozhat.

**MÉRÉSI FELADAT**

### Kristályosodási hő (fagyáshő) mérése

**Rendelkezésre álló eszközök:** Túlhűtött sóolvadék (kézmelegítő párna), ismert hőkapacitású, szoba-hőmérsékletű kaloriméter, hőmérő, stopper, szoba-hőmérsékletű állott víz, mérleg.



*Kristályosodási hő mérésére szolgáló eszközök*

**Mérés menete:** A mérleggel mérjük meg a sóolvadék tömegét!

Öntsünk a kaloriméterbe annyi vizet, amelynek a tömeg kb. 6-7-szerese a sóolvadék tömegének! Jegyezzük fel a szobahőmérsékletet! Pattintsuk be a párnában lévő fémlapot, majd rögtön tegyük bele a vízbe!

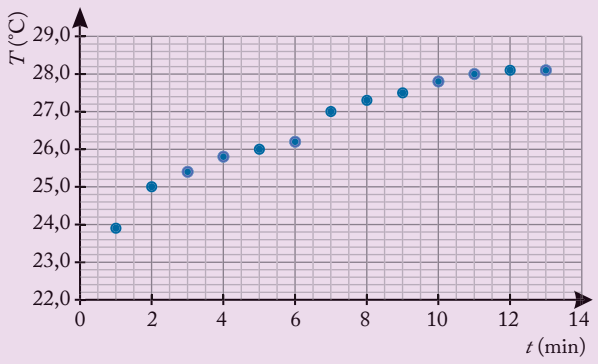
A kalorimétert fedjük le, indítsuk el a stoppert! Körülbelül percenként olvassuk le a hőmérsékletet, jegyezzük fel mindkét adatot (idő, hőmérséklet)! A kaloriméter keverőjével segítsük a víz melegedését! A mérést addig folytassuk, amíg a hőmérséklet már alig vagy egyáltalán nem változik!

A mérési adatokat táblázatba foglaljuk, majd elkészítjük a víz melegedésének idő-hőmérséklet grafikonját:

| $t$ (min) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ (°C) | 23,9 | 25,0 | 25,4 | 25,8 | 26,0 | 26,2 | 27,0 |

(*folytatás*)

| $t$ (min) | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ (°C) | 27,3 | 27,5 | 27,8 | 28,0 | 28,1 | 28,1 |




*A víz melegedésének hőmérséklet–idő grafikonja*

A táblázatból és a grafikonról is leolvasható, hogy a kialakuló közös hőmérséklet $T_{\text{közös}} = 28{,}1\ ^\circ\text{C}$.

A szobahőmérsékletet $T_{\text{szoba}} = 23{,}9\ ^\circ\text{C}$-nak mértük.

A sóolvadék tömege $m_{\text{sóolvadék}} = 87$ g, a vízé $m_{\text{víz}} = 574$ g.

A kaloriméter hőkapacitása adott:

$$C_{\text{kaloriméter}} = 170\ \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}},\ \text{a víz fajhője}\ c_{\text{víz}} = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$$

A kaloriméter, a víz és a kézmelegítő párna termikus kölcsönhatásba lépett egymással. A sóolvadék esetében csak a kristályosodási hőt (fagyáshő) vesszük figyelembe, a fagyáspontra való melegedés, illetve a közös hőmérsékletre való visszahűlés hőmennyiségét elhanyagoljuk. Így az energiamegmaradás a következőképpen alakul:

$$Q_{\text{kaloriméter}} + Q_{\text{víz}} + Q_{\text{sóolvadék}} = 0$$

$$C_{\text{kaloriméter}} \cdot (T_{\text{közös}} - T_{\text{szoba}}) + c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot (T_{\text{közös}} - T_{\text{szoba}}) +$$
$$+ m_{\text{sóolvadék}} \cdot L_{\text{f}} = 0$$

A megadott és a mérési adatokat felhasználva:

$$170 \cdot 4{,}2 + 4200 \cdot 0{,}574 + 0{,}087 \cdot L_{\text{f}} = 0\,,$$

ahonnan: $L_{\text{f}} = -124\ 590\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

A mérésünk szerint tehát a sóolvadék kristályosodási hője (fagyáshője) $-124\ 590\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Ebben a mérési feladatban a sóolvadék kezdetben túlhűtött állapotban van, fagyáspontja 54 °C, de még szobahőmérsékleten is folyékony. A kis fémlapka bepattintásával beindul a kristályosodás, és az anyag gyorsan felmelegszik a fagyáspontjára. Miközben tart a kristályosodás (fagyás) folyamata, a sóolvadék hőt ad le a környezetének. Ez a hő melegíti a kalorimétert és a vizet.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Nyári napon egy szoba-hőmérsékletű (25 °C-os) termoszba 0,5 liter 18 °C-os vizet teszünk. Szeretnénk, ha a víz még hidegebb lenne, ezért a –15 °C hőmérsékletű mélyhűtőből 50 g jeget is beleteszünk, majd lezárjuk a termoszt. Egy idő múlva kinyitjuk, és azt látjuk, hogy a jég már teljesen elolvadt. Egy hőmérővel megmérjük a víz hőmérsékletét, és azt tapasztaljuk, hogy az már nem változik.

**a)** Mekkora hőmérsékletet mutatott a hőmérő?

**b)** Mennyi hőt adott le a termosz?

A termoszunk igen jó hőszigetelő, ezért a környezettel való hőcserét elhanyagolhatjuk.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m_{\text{víz}} = 0{,}5$ kg, $t_{\text{víz}} = 18\ ^\circ\text{C}$, $m_{\text{jég}} = 50$ g, $t_{\text{jég}} = -15\ ^\circ\text{C}$,

$c_{\text{víz}} = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $L_{\text{olv, jég}} = 334\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, $\rho_{\text{víz}} = 1\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$,

$c_{\text{jég}} = 2100\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $C_{\text{termosz}} = 200\ \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$.

---

*a)* $t_{\text{k}} = ?$, *b)* $Q_{\text{termosz}} = ?$

**a)** A hőmérő a termosz, a víz és a megolvadt jég $t_{\text{k}}$ közös hőmérsékletét fogja mutatni. A folyamatban összesen öt hőmennyiséget kell figyelembe vennünk:

- a jég felmelegedése az olvadáspontra ($Q_1$),
- a jég teljes tömegének megolvadása ($Q_2$),
- a megolvadt jég felmelegedése a közös hőmérsékletre ($Q_3$),
- a víz lehűlése a közös hőmérsékletre ($Q_4$) és
- a termosz lehűlése ($Q_5$) a közös hőmérsékletre.

A folyamatban az energiamegmaradás miatt ezen hőmennyiségek összege zérus:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$$

A megfelelő hőtani összefüggéseket beírva:

$$c_{\text{jég}} \cdot m_{\text{jég}} \cdot \Delta t_{\text{jég}} + L_{\text{olv, jég}} \cdot m_{\text{jég}} + c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{jég}} \cdot (t_{\text{k}} - 0\ ^\circ\text{C}) +$$
$$+ c_{\text{víz}} \cdot m_{\text{víz}} \cdot (t_{\text{k}} - 18\ ^\circ\text{C}) + C_{\text{termosz}} \cdot (t_{\text{k}} - 25\ ^\circ\text{C}) = 0$$

Az adatokat behelyettesítve, majd az összevonásokat elvégezve:

$$1575 + 16\ 700\ 210\ t_{\text{k}} + 2100\ t_{\text{k}} - 37\ 800 +$$
$$+ 200\ t_{\text{k}} - 5000 = 0,$$

ahonnan: $t_{\text{k}} = 9{,}77\ ^\circ\text{C}$

A hőmérő által mutatott közös hőmérséklet 9,77 °C.

**b)** A termosz által leadott hőmennyiség:

$$Q_{termosz} = Q_5 = C_{termosz} \cdot (t_k - 25\ °C)$$

$$Q_{termosz} = C_{termosz} \cdot (t_k - 25\ °C) =$$

$$= 200\ \frac{J}{°C} \cdot (9{,}77\ °C - 25\ °C) = -3046\ J$$

A termosz 3046 J hőt adott le a környezetének.

## ALKALMAZÁSOK

### Sütés étolajjal

Sütés közben az étolajat a forráspontjáig (227 °C) melegítjük, ebben készül el az étel. Ez jóval magasabb hőmérséklet, mint a víz forráspontja. Amikor véletlenül víz kerül a forró olajba, akkor a víz egy része az olaj alá kerül, hiszen a sűrűsége körülbelül 10%-kal nagyobb, mint az olajé. Eközben gyorsan felmelegszik a forráspontjáig, majd el is forr. A keletkező vízgőz pedig a tágulása közben szétfröcsköli a valamennyire lehűlt, de még mindig igen forró olajat, amely komolyabb balesetet, égési sérülést okozhat.

### Víz használata tűzoltásra

A vizet igen gyakran használják tűzoltásra. A víz az izzó, égő tárgyakra kerülve felmelegszik és elforr. Főleg a forrás közben jelentős hőmennyiséget vesz fel a forró tárgyakról, mert igen nagy a forráshője. A tárgyak eközben lehűlnek, és a tűz kialszik. A víz és a vízgőz az égést tápláló oxigén jelenlétét is korlátozza, kiszorítja, ez pedig szintén az égés megszűnéséhez vezet.

### Jégakku

Nyáron gyakran használunk úgynevezett jégakkukat a hűtőtáskában. A jégakkuban valamilyen folyadék (sokszor némi adalékanyagot is tartalmazó víz) van. Ezt fagyasztószekrényben lehűtjük és megfagyasztjuk. A hűtőtáska és közvetetten a benne lévő élelmiszer termikus kölcsönhatásban van a környező levegővel, amely folyamatosan melegíti őket. A jégakku felmelegítéséhez és megolvasztásához sok hőmennyiség szükséges, így az élelmiszerek hőmérséklete sokáig megfelelően alacsonyan tartható.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Melyik anyag megolvasztásához kell több hőmennyiség az olvadáspontján: 1 kg vashoz vagy 1 kg vízhez?
2. Melyik mennyiség nagyobb általában egy adott anyagra nézve: az olvadáshő vagy a forráshő? Miért?
3. Teregetéskor azt szeretnénk, hogy az összes víz elpárologjon a ruhákból. Miért terítjük ki a ruhákat? Hogyan lehet gyorsítani a száradást?
4. A repülőgépek a légkörben kondenzcsíkot hoznak létre. Magyarázzuk meg a keletkezésüket!
5. A gleccserek igen lassan, de folyamatosan csúsznak lefelé. Magyarázzuk meg a jelenséget!



*A gleccserek lassan, de folyamatosan csúsznak lefelé*

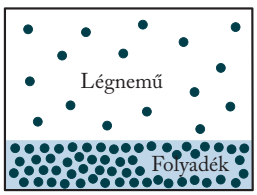
6. Mi történne a Földön a sarki jégtömeggel és a felszíni vizekkel, ha hirtelen eltűnne a légkör?
7. A szénégetés során a fából faszén lett, amit a kohászatban, kovácsműhelyekben lehetett felhasználni. Miért nem volt jó egyszerűen a fa égetése?

# 2. Gőz és gáz

## Telített és telítetlen gőz

Folyékony halmazállapotból párolgás és forrás, szilárd halmazállapotból szublimáció útján légneművé válik az anyag, gőz keletkezik. Ha a gőz szabadon eltávozhat a környezetbe, akkor az előbbi folyamatok addig tartanak, amíg a teljes folyadék vagy szilárd test teljesen légneművé nem válik. Más a helyzet, ha a gőz nem tud szabadon távozni. Példaként nézzük meg, mi történik, ha vizet teszünk egy légmentesen zárt edénybe, de nem töltjük teljesen tele!

A víz a felette lévő levegőrétegbe folyamatosan párolog, így a vízszint kis mértékben, de csökken. Egy idő után azonban a víz szintje nem csökken tovább. A levegő nem tud több vízgőzt megtartani, **telítetté** válik. A folyadék felszínéről továbbra is megszöknek vízmolekulák, és növelik a vízgőz tömegét a levegőben. A levegőben lévő vízgőzmolekulák közül viszont a megnövekedett sűrűség miatt egyre több kerül vissza a folyadék felszínére, illetve egyre több vízmolekula egyesül apró vízcseppekké a levegőben, és esik vissza a folyadékba. Így a folyadék és a gőze közt egy *dinamikus egyensúly* jön létre. Ez azt jelenti, hogy egy kis időtartamot megfigyelve, ugyanannyi folyadékrészecske lép ki a folyadékból (gőzzé válik), mint amennyi gőzrészecske lép vissza a folyadékba (a felesleges gőz lecsapódik a folyadékba). Általánosságban a folyadékjával dinamikus egyensúlyi állapotban lévő gőzt **telített gőznek** nevezzük. A telített gőz állapothoz egy állandó hőmérséklet- és nyomásérték tartozik.

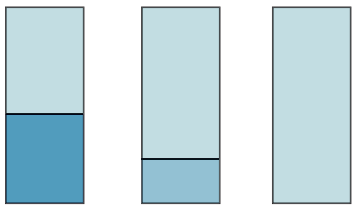



*Telített gőz*

Képzeljük most el, hogy egy viszonylag nagyobb, zárt edénybe, például egy hordóba csak egy csepp vizet teszünk! A vízcsepp teljesen elpárolog, de a levegő most nem lesz telített, mert még további vízgőzt lenne képes megtartani. Azt mondjuk, hogy most a vízgőz **telítetlen**.

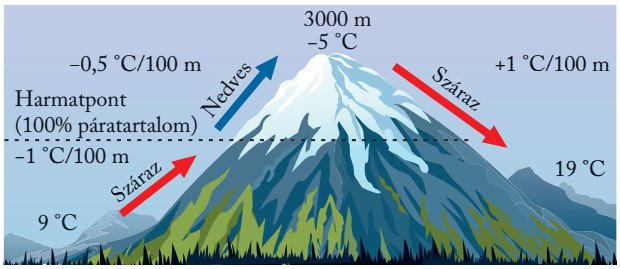
Ha egy zárt tartályban a telített vízgőzzel dinamikus egyensúlyban lévő vizet elkezdjük melegíteni, akkor azt tapasztaljuk, hogy a víz szintje valamelyest csökken, a folyadék feletti tér most több vízgőzt tud megtartani, ezért a folyadék mennyisége csökken *(ld. ábrán)*. A hőmérséklet emelkedésével a gőznyomás is növekszik.

Egy ponton (ún. kritikus hőmérsékleten) a folyadék és a gőz közötti elválasztófelület eltűnik, a teljes anyagmennyiség gőzzé alakul. A hőmérséklet további emelkedésével telítetlen gáz jön létre.




*A folyadék viselkedése egy zárt edényben a hőmérséklet emelkedésével:*
*a) kezdeti,*
*b) magasabb,*
*c) határfelület eltűnésekor (kritikus hőmérsékleten)*

Visszafelé is elvégezve a kísérletet, ha a telítetlen vízgőz hőmérsékletét elkezdjük csökkenteni, akkor egy bizonyos hőmérsékleten telítetté válik, és a többletvízgőz lecsapódik. Ezt a hőmérsékletet nevezzük **harmatpontnak**. A harmatpont tehát az a hőmérséklet, amelyre az adott vízgőzt le kell hűtenünk ahhoz, hogy telítetté váljon.




*A telítetlen száraz légtömegek emelkedés közben a hőmérséklet csökkenése miatt telítetté válnak, így nedves légtömegek keletkeznek*

## Abszolút páratartalom

A levegőben található vízgőzt párának is szoktuk nevezni.

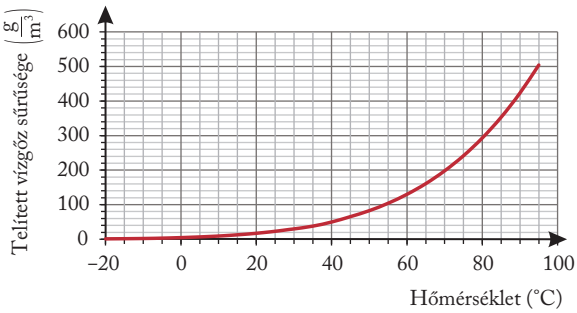
**Egy $m^3$ levegőben található vízgőz mennyiségét abszolút páratartalomnak nevezzük. Az abszolút páratartalom a vízgőz grammban mért $m$ tömegének és a levegő $V$ térfogatának ($m^3$-ben) a hányadosa.**

**Jele: $f$.**

$$f = \frac{m}{V}$$

**Mértékegysége: $\frac{g}{m^3}$ vagy $\frac{kg}{m^3}$.**

Az abszolút páratartalom definíciója a vízgőz sűrűségét adja meg. A grafikonon látható a telített vízgőz sűrűsége a hőmérséklet függvényében.




*A telített vízgőz sűrűsége –20 °C és 100 °C között*

Gyakran az abszolút páratartalomnál fontosabb az, hogy a vízgőzzel telített levegőhöz képest a levegő milyen arányban tartalmaz vízgőzt.

## Relatív páratartalom

**Az adott pillanatban mérhető abszolút páratartalomnak és az adott hőmérséklethez tartozó, vízgőzzel telített levegő páratartalmának hányadosa a relatív páratartalom. Ezt általában százalékban adjuk meg.**

A relatív páratartalom tehát adott hőmérsékleten mért abszolút páratartalomhoz viszonyított páratartalom %-ban megadott értéke. A relatív páratartalmat mindig százalékban adjuk meg. Értéke kisebb, mint 100%, mivel ha eléri a 100%-os relatív páratartalmat, vagyis a harmatpontot, akkor az addig légnemű pára lecsapódik és ismét vízzé válik.

A relatív páratartalom függ a hőmérséklettől, azaz a hőmérséklet emelkedésekor (pl. fűtéskor) úgy csökken, hogy a közben az abszolút páratartalom értéke azonos marad.

**Példa:** Az előzőek alapján tegyük fel, hogy egy adott abszolút páratartalmú levegő relatív páratartalma 60%-os. Ha ez a levegő a harmatpontjára lehűl, akkor a relatív páratartalma 100%-os lesz. További hűlés esetén a pára elkezd lecsapódni.

## A forrás értelmezése

A párolgás a folyadék belsejében is végbemegy, a keletkező gőz apró buborékokat hoz létre, amelyekben telített gőz van. Az állapotegyenlet alapján: $p = \frac{\rho}{M} \cdot R \cdot T$, azaz egy adott hőmérsékletű telített gőz nyomása egyértelműen meghatározott érték. Ha ez a nyomás kisebb, mint a folyadék feletti nyomás (többnyire a légnyomás), akkor a kis buborékok nem tudnak a felszínre jönni. Ha növeljük a hőmérsékletet, akkor nő a telített gőz sűrűsége, és e két mennyiség növekedése miatt a gőznyomás is növekszik. Egy bizonyos hőmérsékleten a telített gőz nyomása eléri a külső nyomás értékét, ekkor a buborékok kiszabadulnak, és beindul a forrás. Ez a bizonyos hőmérséklet lesz a folyadék forráspontja. Ezzel azt is megmagyarázhatjuk, hogy miért függ a forráspont a külső nyomástól: nagyobb külső nyomás esetén magasabb hőmérsékleten éri el a telített gőz nyomása ezt az értéket, tehát a forráspont emelkedik, alacsonyabb külső nyomás esetén pedig alacsonyabb lesz a forráspont.



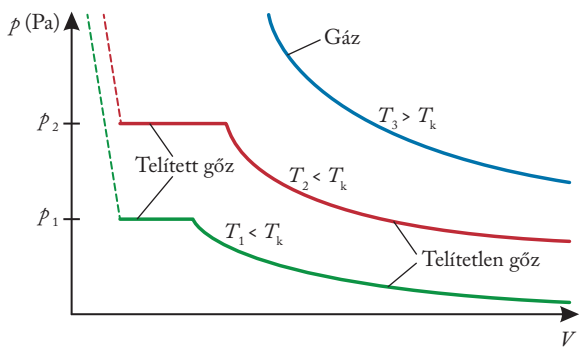
*A forrásban lévő vízben gőzbuborékok képződnek*

## A gázhalmazállapot

Egy vízgőzt tartalmazó zárt edényben elkezdjük csökkenteni a térfogatot, lassan összenyomjuk a gőzt egy dugattyúval. Az abszolút páratartalom emiatt növekszik, hiszen ugyanaz a vízgőztömeg egyre kisebb térfogatba kerül. Amikor eléri az adott hőmérséklethez tartozó telített vízgőz sűrűségét, elkezdődik a lecsapódás. A tapasztalat szerint azonban ezt a folyamatot nem tudjuk akármilyen hőmérsékleten véghezvinni.

**Egy bizonyos hőmérséklet felett az előbbihez hasonló izotermikus összenyomással nem lehet cseppfolyósítani az anyagot. Ezt a hőmérsékleti határt kritikus hőmérsékletnek nevezzük.**

**A kritikus hőmérséklet és a hozzá tartozó kritikus nyomás mindig magasabb, mint a hármasponthoz tartozó hőmérséklet és nyomás.**




*A kritikus hőmérséklet felett a gázok nem cseppfolyósíthatók*

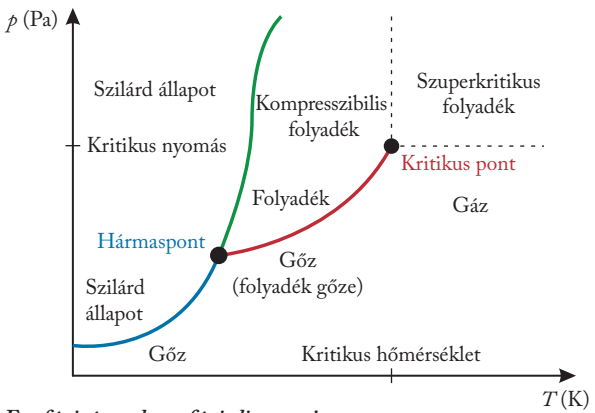
A kritikus hőmérséklet felett tehát az anyagnak csak légnemű halmazállapota létezik, és ezt **gázhalmazállapotnak** nevezzük. A gáz tehát pusztán összenyomással, a hőmérséklet csökkentése nélkül nem cseppfolyósítható. Ennek az a magyarázata, hogy a kritikus hőmérséklet felett a részecskék átlagos mozgási energiája már olyan nagy, hogy a folyékony vagy a szilárd halmazállapotra jellemző kötések már nem tudnak létrejönni.

**Példa:** A víz kritikus hőmérséklete például 374 °C, a szén-dioxidé 31 °C.

Ha az anyag nyomása is és a hőmérséklete is magasabb a kritikus ponthoz (állapothoz) tartozó értéknél, akkor **szuperkritikus állapotba** kerül. Ilyenkor az áramlása például hasonló a gázokéhoz, de a folyadékokhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik.

**Példák: 1.** Szuperkritikus állapotban lévő folyadékoknak palackban történő szállításához igen nagy nyomást alkalmaznak, az anyag ekkor is folyadékállapotban van. Leginkább hidrogént és metánt tárolnak ilyen állapotban.

**2.** A gyógyszer-, kozmetikai és élelmiszeriparban a feldolgozás során használnak oldószerként szuperkritikus állapotban lévő folyadékokat, például szén-dioxiodot ($CO_2$).




*Egyfázisú rendszer fázisdiagramja*

## KÍSÉRLET

**1. KÍSÉRLET Forrás alacsony nyomáson 1.**

**A mérés leírása:** Egy orvosi fecskendőbe körülbelül a feléig szoba-hőmérsékletű csapvizet szívunk fel. A fecskendőt függőlegesen, nyitott végével felfelé tartva, kinyomjuk az összes levegőt. Ezután erősen befogjuk a nyitott végét, majd a fecskendőt elkezdjük kihúzni.

**Tapasztalat:** A vízben buborékok keletkeznek, a víz forrni kezd (a hőmérséklete nem változik).

**Magyarázat:** A fecskendő kihúzásakor a víz felett igen alacsony lesz a nyomás, ezért a víz forráspontja sokkal alacsonyabb lesz, a folyadékban keletkező telített gőz nyomása eléri vagy meghaladja ezt az alacsony nyomást, a víz felforr.



*A fecskendő dugattyújának kihúzásakor a víz forrni kezd*

**2. KÍSÉRLET Forrás alacsony nyomáson 2.**

**A mérés leírása:** Egy gömblombikot félig megtöltünk szoba-hőmérsékletű vízzel, majd nyílással ellátott gumidugót teszünk bele. A gumidugó nyílásán keresztül szivattyú segítségével egyre több levegőt szívunk ki a lombikból. A szivattyút és a lombikot összekötő csövön egy nyomásmérőt is elhelyezünk.

**Tapasztalat:** Egy idő után a vízben buborékok keletkeznek, a víz forrni kezd (a hőmérséklete nem változik).

**Magyarázat:** A levegő mennyiségének csökkenése miatt a víz felett egyre kisebb a nyomás. Ezt a nyomáscsökkenést a nyomásmérő is mutatja. A képen a nyomásmérőn a légnyomáshoz képesti csökkenést látjuk. A víz forráspontja a nyomáscsökkenés miatt egyre alacsonyabb lesz, végül eléri az ehhez a nyomáshoz tartozó forráspontot, és a forrás beindul. Ha a levegőt visszaengedjük a lombikba, akkor a forrás abbamarad, hiszen a nyomás visszatér a légköri nyomás értékére, ahol a víz forráspontja 100 °C.



*A lombikban alacsony nyomáson a vízben buborékok képződnek, a víz forrni kezd*

## ALKALMAZÁSOK

### Élőlények élettani folyamatai

Az élőlények élettani folyamatai szempontjából általában a relatív páratartalom a lényeges. Az emberi tüdő optimális működéséhez 40-75%-os relatív páratartalom szükséges. Az orchideák 70-80%-os relatív páratartalom mellett fejlődnek legjobban, mert természetes élőhelyükön ilyen körülmények közt vannak, míg a kaktuszok 40%-os vagy ez alatti páratartalom mellett is jól megélnek.



*Az orchidea a magas relatív páratartalmat kedveli*

### Harmatpont jelentősége

Sátorozáskor a hajnali órákban a sátor belső fala vizesedni kezd. A sátor ugyanis egy jól zárt térnek számít, benne vízgőzt is tartalmazó levegő van. Az abszolút páratartalmat a benne alvó személy párologtatása (izzadás, lélegzés) tovább növeli. A levegő relatív páratartalma a hőmérséklet csökkenése miatt éjszaka és hajnalban folyamatosan növekszik. A harmatpont alatt elindul a lecsapódás, ez okozza a sátor belső falának vizesedését.



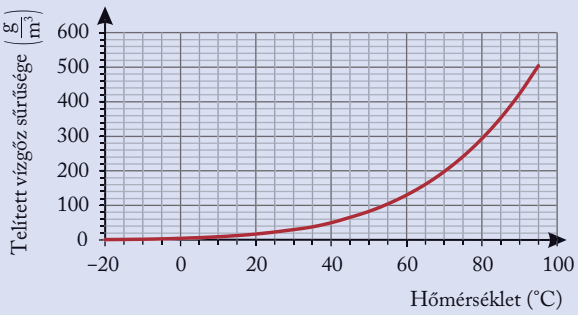
*A sátorban a hajnali órákban lecsapódik a vízgőz*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

### 1. FELADAT

**a)** Számítsuk ki a 95 °C-os telített vízgőz nyomását! A vízgőzt tekinthetjük ideális gáznak. Olvassuk le a grafikonról az adatokat!

**b)** Mennyi a víz forráspontja 850 hPa légköri nyomás esetén?




*Telített vízgőz sűrűsége a hőmérséklet függvényében*

### MEGOLDÁS

Adatok:

$T = 95\ °C = 368\ K$,

$p = 850\ hPa = 8{,}5 \cdot 104\ Pa$,

$M = 18\ \frac{g}{mol} = 0{,}018\ \frac{kg}{mol}$.

---

*a)* $p = ?$

*b)* $T = ?$

**a)** A grafikonról leolvasható a 95 °C-hoz tartozó telített vízgőz sűrűsége:

$$\rho = 500\ \frac{g}{m^3} = 0{,}5\ \frac{kg}{m^3}$$

Az ideális gáz állapotegyenletének a sűrűséggel kifejezett felírását alkalmazva:

$$p = \frac{\rho}{M} \cdot R \cdot T = \frac{0{,}5\ \frac{kg}{m^3}}{0{,}018\ \frac{kg}{mol}} \cdot 8{,}31\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 368\ K =$$

$$= 84\,947\ Pa$$

Ez körülbelül a normál légköri nyomás 85%-a, így körülbelül 850 hPa a kapott nyomás.

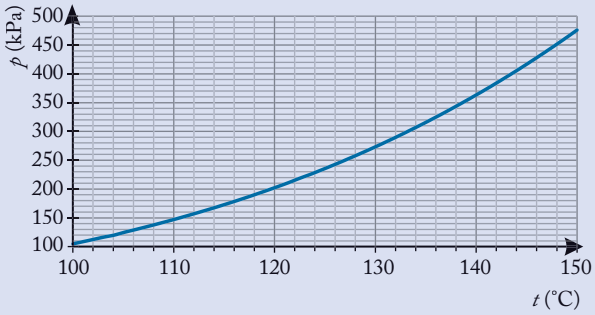
**b)** Ezen a nyomáson tehát a víz forráspontja éppen 95 °C.

### 2. FELADAT

Egy 4 literes régi konyhai kuktafazék szelepe egy egyszerű nehezék, ami elzárja a kuktában keletkező gőz útját, de egy bizonyos nyomásnál a gőz megemeli a nehezéket.

**a)** Mekkora a kuktafazékban a gőznyomás, ha a nehezék 40 grammos, és a kör keresztmetszetű szelep átmérője 1,5 mm?

**b)** Mekkora a víz és a gőz hőmérséklete ekkor a kuktafazékban?




*Telített vízgőz nyomása 100 °C és 150 °C között*

**c)** A kuktafazekat eredetileg ¾ részig töltöttük meg vízzel. Hány g gőz van a folyadék felett?

**d)** Legalább mekkora hőmennyiség kellett ahhoz, hogy a szelep megemelkedjen, ha 16 °C-os vizet tettünk a kuktafazékba?

A gőzt tekinthetjük ideális gáznak.

## MEGOLDÁS

Adatok:

$V = 4\ \text{l} = 4\ \text{dm}^3$,

$m = 40\ \text{g} = 0{,}04\ \text{kg}$,

$d = 1{,}5\ \text{mm} = 0{,}0015\ \text{m}$,

$c_{\text{víz}} = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}$, $L_{\text{f, víz}} = 2{,}2\ \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$,

$p_{\text{levegő}} = 10^5\ \text{Pa}$, $\rho_{\text{víz}} = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t_{\text{víz}} = 16\ \text{°C}$.

---

*a)* $p_{\text{gőz}} = ?$

*b)* $t = ?$

*c)* $m_{\text{gőz}} = ?$

*d)* $Q = ?$

**a)** A gőznyomás akkor tudja megemelni a szelepet, ha értéke éppen meghaladja a légnyomás és a szelepen lévő nehezék súlyából adódó nyomás összegét:

$$p_{\text{gőz}} = p_{\text{nehezék}} + p_{\text{levegő}}$$

A nehezék nyomása a súlyából és a kör alakú keresztmetszetből mint nyomott felületből számítható:

$$p_{\text{nehezék}} = \frac{F}{A} = \frac{m\cdot g}{\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi} = \frac{0{,}04\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\left(\frac{0{,}0015\ \text{m}}{2}\right)^2\cdot\pi} = 2{,}22\cdot 10^5\ \text{Pa}$$

A gőznyomás ebből és a levegő nyomásából:

$$p_{\text{gőz}} = 2{,}22\cdot 10^5\ \text{Pa} + 10^5\ \text{Pa} = 3{,}22\cdot 10^5\ \text{Pa}$$

**b)** A grafikonról leolvasható, hogy ehhez a gőznyomáshoz 136 °C tartozik, ez egyben az adott nyomáshoz tartozó forráspont is, azaz a folyadék és a gőz hőmérséklete is ennyi.

**c)** Az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletét felhasználva, és figyelembe véve, hogy a gőz térfogata 1 liter:

$$n_{\text{gőz}} = \frac{p_{\text{gőz}}\cdot V_{\text{gőz}}}{R\cdot T} = 0{,}0944\ \text{mol}$$

A víz moláris tömegét felhasználva:

$$m_{\text{gőz}} = n_{\text{gőz}}\cdot M_{\text{víz}} = 0{,}0944\ \text{mol}\cdot 18\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 1{,}7\ \text{g}$$

**d)** A teljes vízmennyiséget fel kell melegíteni 16 °C-ról 136 °C-ra. A víz fajhőjét és tömegét (1 $\text{dm}^3$ víz tömege 1 kg) felhasználva:

$$Q_{\text{melegítés}} = c_{\text{víz}}\cdot m_{\text{víz}}\cdot\Delta t =$$

$$= 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}\cdot 3\ \text{kg}\cdot(136\ \text{°C} - 16\ \text{°C}) = 1\,512\,000\ \text{J}$$

A vízből el kell forralni 1,7 g-ot, hogy gőzzé váljon. A víz forráshőjét felhasználva:

$$Q_{\text{forr}} = m_{\text{gőz}}\cdot L_{\text{f, víz}} = 0{,}0017\ \text{kg}\cdot 2\,200\,000\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 3740\ \text{J}$$

A szükséges hőmennyiség a kettő összege lesz:

$$Q = Q_{\text{melegítés}} + Q_{\text{forr}} = 1\,515\,740\ \text{J}$$



*A kuktafazékban nagy nyomású gőzben az ételek hamarabb megfőnek*

## ALKALMAZÁSOK

### Épületszerkezetek párásodása

Házakban, lakásokban gyakori probléma lehet a falak penészesedése. A penészgombák a magas, kb. 80% feletti relatív páratartalmú helyeken szaporodnak a legjobban. A rosszul szigetelt épületek falai hideg időben könnyen lehűlnek, és a belső felületük jóval hidegebb, mint a fűtött szoba levegője. Emiatt a falak közelében a levegő is hidegebb, vagyis itt az adott abszolút páratartalom mellett magasabb lesz a relatív páratartalom, amely kedvez a penészgombák megtelepedésének. A jelenség ellen megfelelő külső hőszigeteléssel és gyakori szellőztetéssel lehet védekezni.

### Nyomottvizes reaktorok

A Paksi Atomerőmű reaktorai PWR-típusúak (pressurized water reactor), magyarul nyomottvizes reaktorok. A primer körben a nyomás a normál légköri nyomás 123-szorosa. Ezen a nyomáson a víz forráspontja kb. 325 °C, így a primer körben áramló 265–295 °C-os víz folyékony halmazállapotú marad.

### Szauna páratartalma

A forró szaunában (finn szauna, száraz szauna) a levegő hőmérséklete a természetes levegő-hőmérséklethez képest igen magas, általában 90-95 °C-os. A levegő relatív páratartalma igen alacsony, 10% körüli. A szervezet a magas hőmérsékletre intenzív izzadással reagál, az izzadság párolog, és ezáltal jelentős hőt von el a szervezettől. Fokozódik a vérkeringés is, amely kedvező élettani hatással bír. Az alacsony relatív páratartalom a tüdőt, a fokozódó vérkeringés a szívet megterheli, ezért csak rövid ideig szabad a szaunában tartózkodni.

### Gejzírek működése

A szökőhévforrások vagy gejzírek kialakulásában is szerepe van a forráspont nyomásfüggésének. A föld alatti üregeket a talajról beszivárgó víz folyamatosan tölti, így egyre magasabb vízoszlop nehezedik az alsóbb rétegekre. Emellett a víz alulról folyamatosan melegszik, éppen ott, ahol a legnagyobb a nyomás, és emiatt magasabb a víz forráspontja. Amikor a legfelső réteg eléri a forráspontot, akkor elkezd forrni, viszont így az alacsonyabb rétegek felett csökken a nyomás, így ezek is forrásba jönnek. A folyamat gyakorlatilag azt eredményezi, hogy rövid időn belül az egész kürtő víztartalma felforr, és kilövell a felszínre. A felszínről a víz idővel visszaszivárog a talajba, és a folyamat újrakezdődik.



*Gejzírek*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** Nyári napokon, amikor hideg italt töltünk egy pohárba, azt tapasztaljuk, hogy a folyadék szintjéig a pohár kívülről párás lesz. Mi ennek az oka?



*Bepárásodó pohár*

**2.** A fából készült bútorokat, a vászonra készült festményeket meghatározott relatív páratartalom mellett célszerű tartani. Magyarázzuk meg, hogy miért!

**3.** Miért válik láthatóvá télen a lehelet?

**4.** Milyen szerepe van az izzadásnak?



*Intenzív sportoláskor megizzadunk*

**5.** Lehet-e vajon a szén-dioxidot szobahőmérsékleten cseppfolyósítani? És az oxigént?

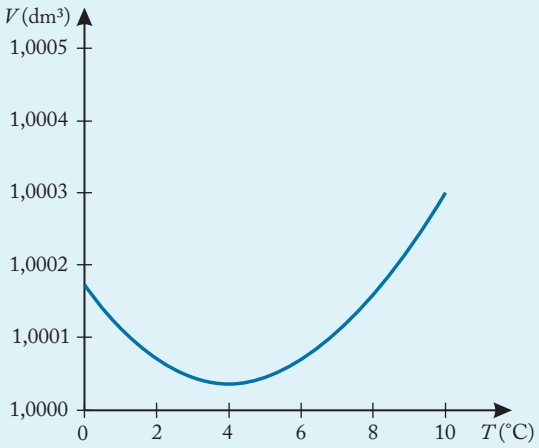
**6.** Mekkora lehetett a kísérletekben a fecskendőben, illetve a lombikban a gőznyomás? Használjuk a *Négyjegyű függvénytáblázatokat* a kérdés megválaszolásához!

# 3. A víz hőtani tulajdonságai, csapadékok

**EMLÉKEZTETŐ**

## A víz tulajdonságai

A víz folyékony halmazállapotban különleges hőtágulási tulajdonságot mutat. 0–4 °C között a hőmérséklet emelkedésével csekély mértékben, de csökken a térfogata, és ennek megfelelően nő a sűrűsége. Ezen a szakaszon rendellenes a hőtágulása. Adott tömegű víz térfogata 4 °C-on a legkisebb, a sűrűsége a legnagyobb. A víz 4–100 °C között már úgy tágul, mint a többi folyadék, azaz a hőmérséklet emelkedésével tágul, nő a térfogata, a sűrűsége csökken. A tavak befagyásakor a nagyobb sűrűségű 4 °C-os víz a tó aljára süllyed, ezáltal a víz folyamatosan keveredik, hőáramlás megy végbe. További hűléskor már leáll a víz hőáramlása, és fagypont alatti levegő-hőmérsékleten befagy a tó felszíne, amely hőszigetelő réteget alkot rajta. Így a tavak alja tartósan fagypont feletti hőmérsékleten marad, amely elengedhetetlen a halak téli túlélésében.



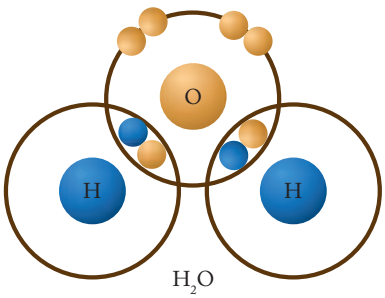

*A víz térfogata a hőmérséklet függvényében 0 °C és 10 °C között*

**Példák:**

1. A víz mindhárom halmazállapotában nagy mennyiségben megtalálható a Földön. Jég formájában a magas hegyeken és a sarkokon akár egész évben, folyadékfázisban a tengerekben, óceánokban stb. A vízfelületek folyamatosan párolognak, így a levegő mindig tartalmaz vízgőzt, azaz légnemű halmazállapotú vizet.
2. A víz viszonylag nagy fajhője és igen nagy párolgáshője miatt a nagy vízfelületek közelében nagymértékben befolyásolja az időjárást: környezetében lassabban hűl le, illetve lassabban melegszik fel a levegő.
3. A víz halmazállapot-változásai a Földön különböző csapadékokat eredményeznek. A vízfelületek párolgásából származó vízgőzt tartalmazó légtömegek a légkör felsőbb rétegeibe jutva felhőket képeznek. Az eső és a harmat folyékony halmazállapotú. A hó, a jégeső, a dér és a zúzmara szilárd csapadék. Az ónos eső túlhűtött vízcseppekből áll.

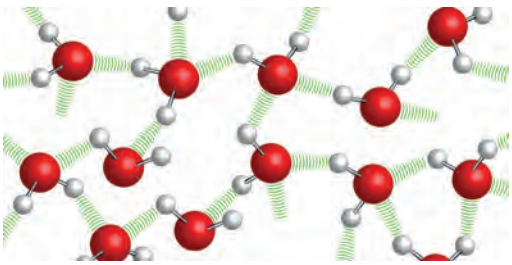
## A víz különleges hőtágulásának magyarázata

A vízmolekulák erősen polárosak, a két hidrogén felőli oldalon pozitív, az oxigén felőli oldalon negatív töltéstöbblet található. Az egyes molekulák közt emiatt gyenge, másodrendű hidrogénhídkötések alakulnak ki.




*A vízmolekulák közt másodrendű kötések alakulnak ki*

A képen zöld színnel látszanak azok a kötések, amelyekben az egyik vízmolekula egyik hidrogénje lép kölcsönhatásba a másik vízmolekula oxigénjével. Egy vízmolekula négy másikkal tud ilyen jellegű kötést kialakítani, emiatt a kialakuló szerkezet tetraéderes jellegű lesz.



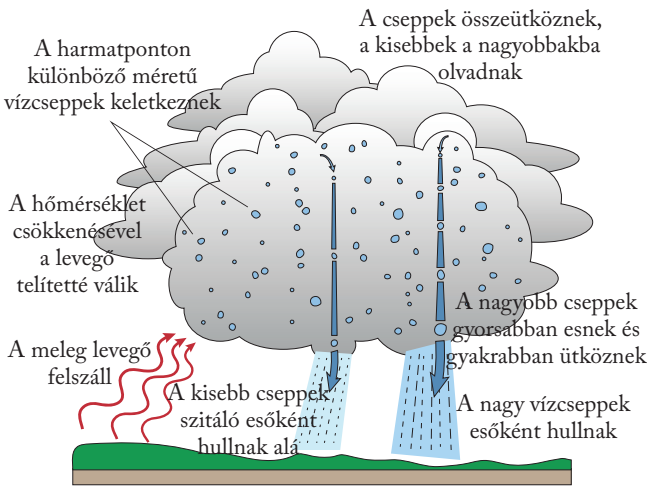
*A víz tetraéderes szerkezete*

A víz folyadék-halmazállapotában ez a tetraéderes szerkezet csak kis léptékben és csak az olvadáspont közelében érvényesül, hiszen a hőmozgás és a kötések gyenge jellege miatt ezek a kötések csak rövid ideig tudják összetartani a molekulákat. Ez az állapot kristályszerű, amit idegen szóval **kvázikristályos szerkezetnek** nevezünk.

Ez a kvázikristályos jelleg 0 °C-tól 4 °C felé haladva fokozatosan eltűnik, a kötések felbomlanak, így az eddigi laza szerkezet helyett a vízmolekulák kicsit közelebb kerülnek egymáshoz, ami a sűrűség enyhe növekedéséhez vezet. 4 °C felett azonban már a molekulák hőmozgásából következő egymástól való fokozatos távolodás a jellemző (ahogy a X. fejezetben a szilárd testek hőtágulásánál láttuk), azaz itt már a víz is normálisan tágul.

## Csapadékok

A nagy víztömegek felett többnyire telítetlen a levegő vízgőztartalma, a folyadék- és a gőzfázis nincs egyensúlyban, így a felszíni vizek folyamatosan párolognak, és növelik a levegő abszolút páratartalmát. A levegő a hőmérséklet- és nyomáskülönbségek miatt szinte folyamatosan áramlik. A talaj mentén többnyire melegebb a levegő, a hőmérséklet felfelé csökken, amely így egy szinte állandó felfelé áramlást eredményez. Az adott páratartalmú levegő egy bizonyos magasságban, ahol a hőmérséklet eléri a harmatpontot, telítetté válik, a vízgőz elkezd lecsapódni, és **felhőképződés** indul el: a vízgőz apró folyadékcseppekké alakul. Ezek a vízcseppek sokáig a levegőben tudnak maradni, mert a nehézségi erő és a felhajtóerő kiegyenlíti egymást. A cseppek a folyamatos lecsapódás, illetve az összeütközések miatti egyesülés következtében egyre növekednek. Végül a felhajtóerő már kisebb lesz a nehézségi erőnél, és a vízcseppek **eső** formájában lehullanak a földre.




*Eső képződése a felhőkben*

Nagyon meleg nyári napokon zivatarzónákban a feláramlás olyan gyors, hogy a levegő olyan magas légrétegekbe jut, ahol a vízgőz a lecsapódás után gyorsan meg is fagy. Ilyenkor **jégeső** keletkezik.

Télen a feláramlás lassú, viszont a hőmérséklet már alacsonyabb légrétegekben is fagypont alatti lesz. Ilyenkor a vízgőzből lecsapódó igen apró vízcseppek megfagynak, és **hó** keletkezik.

Megfelelő körülmények közt a leeső vízcseppek túlhűtöttek lehetnek. Amikor a talajra, növényzetre vagy tereptárgyra esnek, a mechanikai hatás beindítja a fagyást. Ez az esőtípus az **ónos eső**, amely egyre vastagabb, összefüggő jégréteget hoz létre a talajon és a járdákon, utakon is. Komoly baleseti forrás, mert eső esetén az ember általában nem számít az utakon jeges bevonat keletkezésére.

A felszín közelében létrejövő felhőt **ködnek** nevezzük. Kialakulása akkor valószínű, amikor a levegő relatív páratartalma magas, és légmozgás alig tapasztalható. A völgyekben többnyire kisebb, enyhébb légmozgások jellemzők, így ott gyakrabban alakul ki köd. Ilyenkor a hajnali órákra a hőmérséklet csökkenése miatt telítetté válik a levegő vízgőzzel, és a vízgőz apró cseppekben lecsapódik. Ahogy a nappali órákban melegszik a levegő, ezek a vízcseppek újra vízgőzzé párolognak, és a köd felszáll. Ha a nap nem süt ki, a melegedés lassú, vagy nincs is, ilyenkor a köd tartósan, akár napokig is megmaradhat.

A reggeli órákban a talaj mentén a relatív páratartalom eléri 100%-os értéket, hiszen a talajnedvesség folyamatosan párolog, és az aljnövényzetben a levegőáramlás korlátozott. További hűlés esetén a vízgőz a növényzetre, tereptárgyakra csapódik le, ez a csapadékforma a **harmat**.



*Harmatcseppek a levelek felszínén*

Amikor ködképződés után a talaj menti tárgyakra ráfagy a folyékony halmazállapotú víz, akkor **zúzmara** keletkezik. A zúzmara időnként igen vastag rétegben befedheti a növényzetet, villanyvezetékeket, és nagy súlyánál fogva letörheti, károsíthatja azokat.



*A zúzmara vastag rétegben befedi a növényzetet*

**Dérképződés** során a 0 °C alatti hőmérsékletű levegőben a vízgőz a folyadékfázis kihagyásával fagy meg (ezt depozíciónak is nevezik).



*A dérképződés 0 °C alatt megy végbe*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan változik a víz sűrűsége a hőmérséklet emelkedésével?
2. Mutassuk be a felhőképződés folyamatát!
3. Hogyan keletkeznek a következő csapadékok: jégeső, hó, ónos eső, köd, harmat, zúzmara, dér?
4. Miért van télen jégvirág a hagyományos üvegezésű ablakokon?
5. Hogyan lehet fűteni vízgőzzel?
6. Miért párásodik be a szemüvegünk, ha télen a hidegből fűtött szobába lépünk?

## ALKALMAZÁSOK

### Fűtés vízgőzzel

A vizet kiemelkedően magas lecsapódási hője miatt gőzfűtési rendszerekben is alkalmazzák. A kazánban a vizet forráspontig melegítik, elforralják, és ez a forró gőz áramlik a csöveken keresztül a radiátorokba. A visszatérő, már lecsapódott és lehűlt víz visszajut a kazánba. Bár a fűtéscsöveken kevesebb vízgőzt lehet áramoltatni, mint vizet, a nagy lecsapódási hő miatt még így is hatékonyabb. A 100 °C feletti hőmérsékletű gőz, valamint a csövek, radiátorok magas hőmérséklete miatt a gyakorlatban ritkábban használják, mert balesetek esetén magasabb az égési sérülés kockázata.

### Gőzfürdő

A gőzfürdőbe (nedves szauna, török szauna) mesterségesen juttatnak be nagy mennyiségű vízgőzt tartalmazó levegőt. A gőzfürdőben 100%-os a relatív páratartalom, a további vízgőz bejuttatásával ködképződés indul be, apró vízcseppek lebegnek a kamra levegőjében. A körülbelül 40 °C-os hőmérsékletű levegő izzadásra készteti a szervezetet, az izzadság viszont a 100%-os relatív páratartalom miatt nem tud elpárologni. Ez viszont fokozott vérkeringésre sarkallja az emberi testet, amelynek kedvező az élettani hatása, azonban hosszabb időt nem szabad a gőzfürdőben tartózkodni, hogy elkerüljük a szervezet túlterhelését.



*A gőzfürdő levegőjének 100%-os a páratartalma*

### Hóágyú

Sípályákon, amikor nem esik elég hó, akkor hóágyúk segítségével készítenek mesterségesen havat. A hóágyú egy ventilátor segítségével nagyon apró vízcseppeket fúj, porlaszt a sípálya fölé, amelyek a 0 °C alatti levegő-hőmérséklet miatt megfagynak. Ezek hó formájában lehullnak, és a pálya használhatóvá válik.



*Hóágyú egy sípályán*

### Ködképződés kondenzációs magvakon

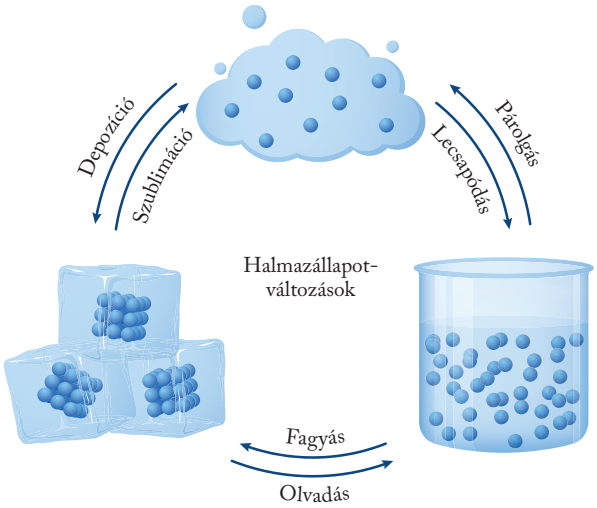
A tapasztalat szerint a telített vízgőzben sokkal könnyebben indul meg a ködképződés, a lecsapódás, ha apró méretű részecskék (pl. por, korom) vannak a gőztérben. Ezeken az úgynevezett kondenzációs magvakon hamar beindul a lecsapódás. Ezért van az, hogy ipari üzemek, városok környezetében gyakrabban alakul ki a köd.

Egy fontos alkalmazása ennek a jelenségnek az úgynevezett Wilson-féle ködkamra. Kezdetben a gőztérben túltelített, ködmagvak nélküli vízgőz van. Ha ebbe a gőztérbe ionizáló (pl. alfa-részecskékből álló) sugárzás jut, akkor a sugárzás által keltett ionok ködmagvakként beindítják a lecsapódást, így az alfa-sugárzás pályája láthatóvá válik.

# Összefoglalás

## Halmazállapot-változás

**Olvadásnak** nevezzük azt a halmazállapot-változást, amikor a szilárd halmazállapotú anyag cseppfolyóssá, azaz folyadékká válik.

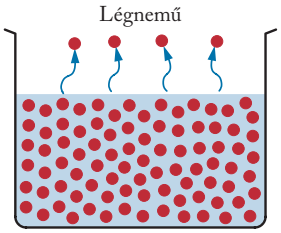



Az olvadás meghatározott hőmérsékleten, az **olvadáspontonban** következik be. Az olvadáspont függ az anyagi minőségtől és a külső nyomástól.

**Fagyásnak** nevezzük azt a halmazállapot-változást, amelynek során a folyékony anyag szilárd halmazállapotúvá válik, miközben hőmennyiséget ad le a környezetének, belső energiája pedig csökken.

A fagyás egy meghatározott hőmérsékleten következik be, ez a **fagyáspont**. Ugyanazon anyag olvadáspontja és fagyáspontja egyenlő.

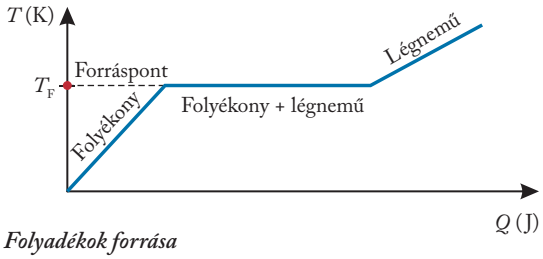
**Párolgásnak** nevezzük azt a halmazállapot-változást, amikor a folyékony halmazállapotú anyag légneművé válik.




*Párolgás*

**Forrásról** akkor beszélünk, amikor a párolgás nemcsak a folyadék szabad felszínén, hanem a teljes folyadéktérfogatban végbemegy, a folyadék belsejében is keletkeznek gőzbuborékok.

A jelenség egy adott nyomáson csak meghatározott hőmérsékleten következik be, ez az adott anyag **forráspontja**. A teljes folyadék elforrásáig a hőmérséklet állandó marad. A forráspont függ a külső nyomástól.



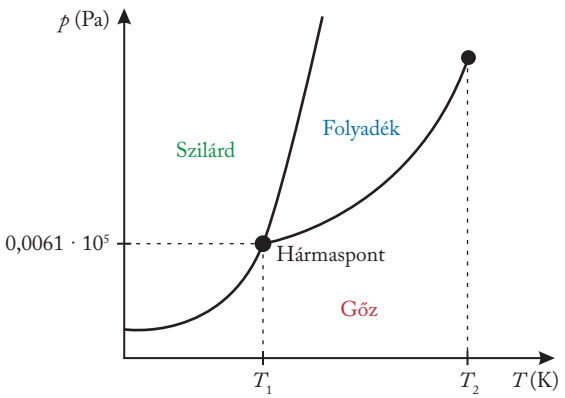

*Folyadékok forrása*

**Lecsapódásnak** nevezzük azt a halmazállapot-változást, amely során az anyag légnemű (gőz-) halmazállapotból folyékonnyá válik. Eközben csökken a belső energiája, a környezetének hőmennyiséget ad le.

**Szublimációnak** nevezzük azt a halmazállapot-változást, amelyben a szilárd anyag légneművé válik.

Az anyagok **hármaspontja** egy olyan hőmérsékleten és nyomáson jön létre, amelyen mindhárom halmazállapot egyszerre jelen van.

Ha az anyag a hármaspontjánál alacsonyabb hőmérsékletű és alacsonyabb nyomású állapotban van, akkor az anyag folyékony halmazállapotban nem fordulhat elő. Ekkor a halmazállapot-változások közül csak a szublimáció, azaz a folyadékfázis kihagyásával a szilárd anyagból gőz keletkezése valósulhat meg, illetve ennek fordítottja.




*A víz hármaspontja fázisdiagramon*

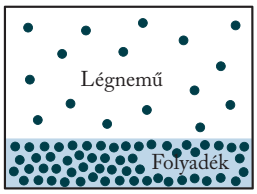
A halmazállapot-változást jellemző anyagi állandók, tömegegységre vonatkoztatott hőmennyiségek: az **olvadáshő, fagyáshő, lecsapódási hő, forráshő**:

$$L_o = \frac{Q}{m}$$

Az olvadás mindig az olvadásponton következik be, de a folyadék túlhűthető. A forrás a forrásponton következik be, de bizonyos esetekben túlhevíthető. Az anyag folyékony halmazállapotban csak a hármaspontja felett létezhet.

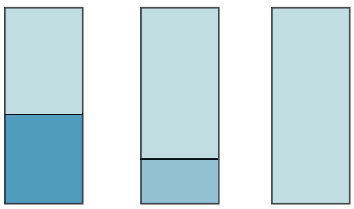
## Gőz

A folyadékjával egyensúlyban lévő gőz a **telített gőz**, adott gőzmennyiség a **harmatponton** válik telítetté. Efölött a gőz **telítetlen**.




*Telített gőz*

Zárt térben a hőmérséklet emelkedésével kritikus hőmérsékleten a folyadék és a gőz közötti elválasztófelület eltűnik, a teljes anyagmennyiség gőzzé alakul, majd telítetlen gáz jön létre.




*A folyadék viselkedése egy zárt edényben a hőmérséklet emelkedésével: a) kezdeti, b) magasabb, c) kritikus hőmérsékleten*

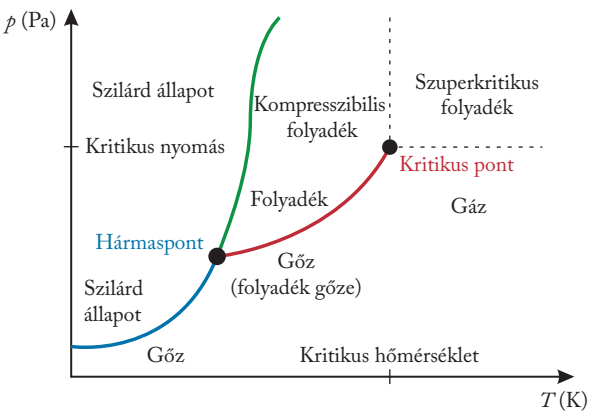
A telített gőz hűtésével elindul a lecsapódás. Az adott térfogatú levegőben található vízgőz mennyisége az **abszolút páratartalom**:

$$f = \frac{m}{V}$$

Az abszolút páratartalom és az adott hőmérséklethez tartozó vízgőzzel telített levegő páratartalmának hányadosa a **relatív páratartalom**. A telített vízgőz sűrűsége függ a hőmérséklettől.

Párolgáskor csak a folyadék felszínén keletkezik gőz. Forrás akkor indulhat meg, ha a folyadék belsejében képződő gőzbuborékok nyomása – a telített gőz nyomása – eléri a külső nyomást. Emiatt a forráspont függ a nyomástól.

## Gáz




*Egynemű anyag fázisdiagramja*

Az anyagra jellemző **kritikus hőmérséklet** felett izotermikus összenyomással nem lehet cseppfolyósítani a légnemű anyagot, ez a **gázhalmazállapot**. A gáz összenyomással, a hőmérséklet csökkentése nélkül nem cseppfolyósítható.

A kritikus hőmérséklet és a hozzá tartozó kritikus nyomás mindig magasabb, mint a hármasponthoz tartozó hőmérséklet és nyomás.

## Víz, csapadékok

A víz hőtágulása különleges, 4 °C-on a legsűrűbb. Ennek fontos következménye, hogy a tavak alja télen nem fagy be: a 4 °C-os víz lesüllyed a tó aljára. A víz fajhője, olvadáshője, forráshője kiemelkedően magas, ennek fontos szerepe van az éghajlatban és a gyakorlati alkalmazásokban (pl. fűtés). Mindhárom halmazállapotában jelen van a Földön.

A lecsapódó pára felhőket alkot, ebből **eső** hull. Nyáron, nagyobb magasságokban megfagy, ilyenkor **jégeső** lesz, télen **hó**.



*Jégeső*



*Ónos eső*

Az **ónos eső** túlhűtött vízcseppekből áll, amely mechanikai hatásra ráfagy a tereptárgyakra.

Amikor a felszín közelében csökken a hőmérséklet, a túltelített vízgőzből felszíni felhő, azaz **köd** képződik.

A hajnali órákban a növényzetre, tereptárgyakra a hőmérséklet csökkenése miatt lecsapódó vízgőz a **harmat**.

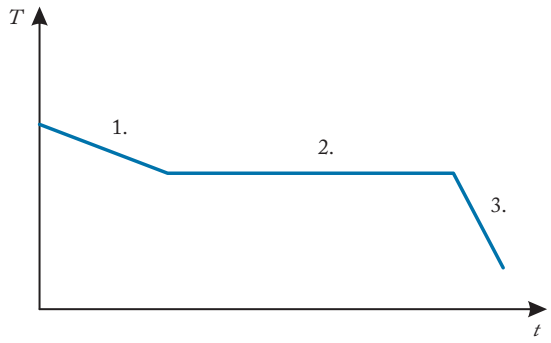
Ködképződés után a talaj menti tárgyakra a folyékony halmazállapotú víz ráfagy, ez a **zúzmara**.

A **dérképződés** során a 0 °C alatti hőmérsékletű levegőben a vízgőz a folyadékfázis kihagyásával fagy meg.

# Összefoglaló feladatok

## TESZTFELADATOK

**1.** Az alábbi grafikonon egy anyag hőmérsékletének időbeli változását látjuk. Tudjuk, hogy az anyag azonos idők alatt azonos mennyiségű hőt ad le a környezetének. Milyen folyamatot mutathat a grafikon?




A) Csak a következő folyamat lehet: 1. hűlés, 2. fagyás, 3. hűlés.
B) Csak ez a folyamat lehet: 1. hűlés, 2. lecsapódás, 3. hűlés.
C) Az előző kettő bármelyike lehet.

**2.** Egy átlagos szobában egy üres palackot lezárunk, majd elkezdjük csökkenteni a hőmérsékletet. Az alábbi állítások közül csak egy IGAZ, melyik?
A) A relatív páratartalom csökken, az abszolút páratartalom növekszik.
B) A relatív páratartalom növekszik, az abszolút páratartalom csökken.
C) A relatív páratartalom és az abszolút páratartalom is változatlan.
D) A relatív páratartalom növekszik, az abszolút páratartalom változatlan.

**3.** Az alábbi állítások közül csak egy IGAZ, melyik?
A) A víz olvadáspontja mindig 0 °C.
B) A víz olvadáspontja nagyobb külső nyomás esetén 0 °C-nál alacsonyabb.
C) A víz olvadáspontja nagyobb külső nyomás esetén 0 °C-nál magasabb.

**4.** Egy zárt edényben 10 $\frac{g}{m^3}$ az abszolút páratartalom. Az edényt lassan lehűtjük a harmatpontra. Hogyan változik az abszolút és a relatív páratartalom, ha lassan tovább hűtjük az edényt?
A) A relatív páratartalom tovább már nem változik, az abszolút páratartalom csökken.
B) Sem az abszolút, sem a relatív páratartalom nem változik.
C) Az abszolút páratartalom és a relatív páratartalom is növekszik.
D) Az abszolút páratartalom nem változik, a relatív páratartalom növekszik.

**5.** Mi az ónos eső?
A) A fokozott légszennyezés miatt nagyobb mennyiségű ónt tartalmazó csapadék.
B) Hirtelen lezúduló, nagy mennyiségű csapadék.
C) 0 °C alatti hőmérsékletű, túlhűtött vízcseppekből álló csapadék.

**6.** Hosszabb ideje lezárt palack félig van vízzel. Mit mondhatunk a folyadék feletti vízgőzről?
A) A vízgőz már nagy valószínűséggel telítetté vált.
B) Mivel a palack le van zárva, így a vízgőz biztosan telítetlen.
C) A vízgőz biztosan magasabb hőmérsékletű, mint a víz.

**7.** Mihez kell nagyobb hőmennyiség: –1 °C-os jégből +1 °C-os vizet csinálni, vagy +1 °C-os vízből +3 °C-os vizet csinálni?
A) Körülbelül ugyanannyi hőmennyiség szükséges.
B) A –1 °C-os jégből +1 °C-os vízhez kell több hőmennyiség.
C) +1 °C-os vízből +3 °C-os vízhez kell több hőmennyiség.

**8.** Két különböző anyagú, szilárd halmazállapotú testet olyan folyadékba teszünk, amelynek hőmérséklete magasabb mindkét anyag olvadáspontjánál. Az edény, amelyben a folyadék van, igen jó hőszigetelő.
Melyik eset NEM lehetséges az alábbiak közül?
A) A két szilárd anyag gőzzé válik.
B) A folyadék megfagy.
C) A folyadék egy része elforr.
D) Az egyik szilárd test megolvad, a másik nem.

**9.** Mihez kell nagyobb hőmennyiség: –1 °C-os jégből +1 °C-os vizet csinálni, vagy 99 °C-os vízből 101 °C-os vízgőzt csinálni?
A) Körülbelül ugyanannyi hőmennyiség szükséges.
B) A –1 °C-os jégből +1 °C-os vízhez kell több hőmennyiség.
C) A +99 °C-os vízből 101 °C-os vízgőz készítéséhez kell több hőmennyiség.

**10.** Egy adott tömegű vizet 4 °C-ról 0 °C-ra hűtünk. Melyik állítás helyes?

A) A víz tömege nő, térfogata csökken, sűrűsége növekszik.

B) A víz tömege változatlan, térfogata nő, sűrűsége csökken.

C) A víz tömege változatlan, térfogata csökken, sűrűsége nő.

## FELADATOK

**1.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2017)
Egy hőszigetelt edényben 1 kg szilárd anyagot kezdünk melegíteni. Tudjuk, hogy a melegítéshez használt elektromos fűtőszál teljesítménye állandó, valamint hogy az anyag fajhője szilárd fázisban 2400 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Az alábbi táblázatban található hőmérsékleti adatokat olvastuk le a melegítés bizonyos időszakaiban.

| ***t* (perc)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***T* (°C)** | 64,0 | 74,4 | 84,0 | 84,3 | 83,6 | 84,1 |

*(folytatás)*

| ***t* (perc)** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***T* (°C)** | 88,9 | 94,0 | 99,2 | 104,0 | 104,2 | 104,1 |

Ábrázoljuk a hőmérsékletet az idő függvényében! Mennyi az ismeretlen anyag olvadáspontja, forráspontja, olvadáshője és fajhője folyadékfázisban?

**2.** Egy öntödében hulladék vasat dolgoznak fel. Az egyik olvasztásnál 1300 kg, 30 °C-os vasat tesznek az olvasztókemencébe. A kemence hatásfoka 65%. A fűtéshez feketekőszenet használnak, ennek fűtőértéke 30 $\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$.

**a)** Hány kg szenet kellett felhasználni a teljes megolvasztáshoz? A további adatokat táblázatokból keressük ki!

**b)** Legalább mekkora a kemence űrtartalma?

**3.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2010)
Egy $m_{\text{vas}} = 2$ kg tömegű, $t_0 = 1000$ °C hőmérsékletű izzó vasdarabot vízbe mártva hűtöttünk le. A vasdarabot belehelyeztük egy hőszigetelt edénybe, amelyben $t_1 = 20$ °C-os víz volt, majd az edényt bezártuk. A vízbe merítés közben azonban a vas a vele közvetlenül érintkező vizet rögtön felforralta, és az így keletkező 100 °C-os gőz kiszökött a levegőbe. Kis idő elteltével az edényt kinyitottuk, és azt tapasztaltuk, hogy a víz, illetve a vasdarab közös hőmérséklete 60 °C volt, és az edényben 4,2 kg víz maradt. Mennyi víz forrt el, amikor a vasdarabot behelyeztük az edénybe?

Adatok: a víz fajhője $c_{\text{víz}} = 4{,}18\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}$, a víz forráshője $L_{\text{f}} = 2{,}25\ \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, a vas fajhője $c_{\text{vas}} = 465\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}$

**4.** A –15 °C-os fagyasztóból kivett 6 dl levest mikrohullámú sütőben gyorsan, a legnagyobb fokozaton melegítjük fel 70 °C-ra.

**a)** Mekkora energiabefektetés kellett ehhez? Az anyagi állandók szempontjából a levest tekinthetjük víznek.

**b)** Ugyanezt a levest, ha először hagyjuk szobahőmérsékletre (25 °C) melegedni, akkor mekkora energiát takaríthattunk volna meg, és hány % az energiamegtakarítás?

**5.** Ötvösműhelyben használt indukciós kemence teljesítménye 1500 W. A kemencével 1,5 kg szoba-hőmérsékletű (25 °C) ezüstöt olvasztunk meg.

**a)** Mennyi ideig tart a teljes megolvasztás, ha a kemence hatásfoka 90%? A szükséges adatokat vegyük a *Négyjegyű függvénytáblázatokból!*

**b)** Ha a kemencébe legfeljebb 2 kg ezüst fér, akkor mennyi aranyat tudunk egyszerre megolvasztani vele?

**c)** Legalább mekkora a kemence űrtartalma?

**6.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2012)
Az alábbi táblázat a vízpárával teljesen telített levegő (azaz a 100%-os relatív páratartalmú levegő) páratartalmát mutatja a hőmérséklet függvényében, normál nyomáson.

| °C | $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ | °C | $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ | °C | $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ | °C | $\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –20 | 1,2 | 1 | 5,2 | 13 | 11,4 | 25 | 23,1 |
| –10 | 2,2 | 3 | 6,0 | 15 | 12,9 | 27 | 25,8 |
| –5 | 3,3 | 5 | 6,8 | 17 | 14,5 | 29 | 28,7 |
| –3 | 3,8 | 7 | 7,8 | 19 | 16,3 | 30 | 30,0 |
| –1 | 4,5 | 9 | 8,8 | 21 | 18,4 | 35 | 38,0 |
| 0 | 4,8 | 11 | 10,0 | 23 | 20,6 | 40 | 50,0 |

**a)** Egy sátorban a levegő hőmérséklete 30 °C, a lehűlés során telítetté 5 °C-on válik (harmatpont). Mekkora a sátorban a relatív páratartalom?

**b)** Hány vízmolekula található 1 liternyi sátorbeli levegőben?

**c)** Hány gramm víz csapódik ki a zárt sátor levegőjének egy köbméteréből, ha a sátor 0 °C-ra hűl le? (A víz moláris tömege 18 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$.)

**7.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2021)
Egy mosógép 10 l vizet melegít fel egy mosási programhoz. A takarékos program 30 °C-os vízzel mos, a fehérneműprogram 60 °C-os vízzel, maga a mosás menete mindkét esetben megegyezik. A vizet a mosógép elektromos fűtőszállal melegíti fel.

**a)** Hány kWh elektromos energiával használ többet a mosógép a fehérneműprogramhoz, mint a takarékos programhoz? (A melegebb vízzel való mosás során fellépő többlethőveszteséget hanyagoljuk el!)

A modern vasalókban sokszor van gőzölési funkció, amellyel könnyebb kivasalni a gyűrött ruhákat. Bizonyos mennyiségű ruha vasalásához 2 dl, kezdetben 15 °C hőmérsékletű vizet forralt el a készülék.

**b)** Hány kWh elektromos energiát használt el a készülék a forraláshoz?

(A víz fajhője 4180 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}$, forráshője 2257 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, sűrűsége 1 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. A fűtőszál hatásfokát vegyük 100%-nak.)

**8.** Egy 10 m² alapterületű, 3 méter belmagasságú, zárt szobában a hőmérséklet 20 °C, a páratartalom 60%.

**a)** Hány gramm vizet kell elpárologtatni, hogy a szoba levegője telített legyen vízpárával?

**b)** Mekkora hőmennyiség kell ehhez, ha a víz párolgáshője 2200 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$?

**c)** Ezek után hány százalékos lesz a páratartalom, ha 5 °C-kal emelkedik a szoba hőmérséklete?

**d)** Mennyi vízgőz csapódik le, ha ezek után a szoba 10 °C-ra lehűl?

**e)** Mekkora hőmennyiség szabadul fel a lecsapódáskor?

A feladat megoldásához használja az alábbi táblázatot, amely a vízpárával telített levegő páratartalmát mutatja különböző hőmérsékleteken!

| **t (°C)** | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| **$\rho$ (kg/m³)** | 0,0048 | 0,0068 | 0,0094 | 0,0128 |

*(folytatás)*

| **t (°C)** | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| **$\rho$ (kg/m³)** | 0,0173 | 0,0230 | 0,0303 | 0,0396 |

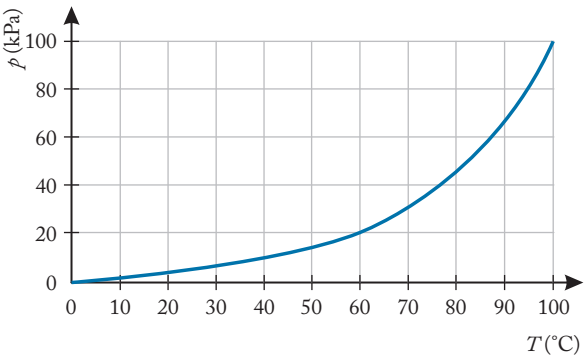
**9.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2022)
Egy hegymászó a Mount Everest III-as táborában, 7163 m magasságban –20 °C hőmérsékletű tömör hóból 2 dl vizet forralt fel egy gázfőzőn. A forrásban lévő víz előállításához 10 percre volt szüksége. Ez lényegesen hosszabb idő, mint amennyi időre a nyári bükki túráján szüksége volt, amikor egy hideg vizű forrásból hasonló mennyiségű forrásban lévő vizet állított elő. A magas hegyen használt modern gázfőző ugyanakkora hőteljesítményt adott le az oxigénszegény környezetben, mint a Bükkben használt.

**a)** Miért volt sokkal hosszabb a forrásban lévő víz előállításához szükséges idő, amikor hóból kellett vizet olvasztani? Milyen szerepet játszik a magas hegyen uralkodó hideg környezet?

**b)** Mekkora volt a vízmelegítés hasznos teljesítménye?

(A víz sűrűsége 1 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a hó fajhője 2100 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, a hó olvadáshője 334 500 $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$, a víz fajhője 4200 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$, a légnyomás 7163 m magasságban a melegítés idején 39 kPa volt.)

Az olvadáspont nyomásfüggőségétől eltekintünk. A telített vízgőz nyomását a hőmérséklet függvényében a grafikon mutatja.




*A telített vízgőz nyomása a hőmérséklet függvényében*

**10.** Egy edényben 3 dl forrásban lévő étolaj van. Figyelmetlenségből egy kevés, 16 °C-os víz belelöttyent, de nagyon gyorsan fedőt raktunk rá, így elkerülve a komolyabb balesetet. Rövid idő múlva a fedőn lévő termométer 100 °C-ot mutat. Hány gramm víz kerülhetett az edénybe? Az edény és a környezet hőmérséklet-változásától eltekinthetünk.

(Az étolaj sűrűsége 920 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, fajhője 1700 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}$, forráspontja 227 °C. A víz forráshője 2257 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$).

**11.** Egy szobában a relatív páratartalom 65%, a hőmérséklet 22 °C. Ebben a helyiségben egy 1,5 l térfogatú PET-palackba egy kevés vizet teszünk, majd lezárjuk. Legfeljebb mennyi lehetett a víz tömege, ha a víz egy idő után teljesen elpárolgott? A megoldáshoz használjuk a lecke grafikonjait!

**12.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2022)
A légkörben lévő gőz sűrűsége egy adott területen, 25 °C hőmérsékleten 12,8 $\frac{g}{m^3}$. Az alábbi táblázat a telített gőz sűrűségét tartalmazza a hőmérséklet függvényében.

| $T$(°C) | $\rho\left(\frac{g}{m^3}\right)$ | $T$(°C) | $\rho\left(\frac{g}{m^3}\right)$ | $T$(°C) | $\rho\left(\frac{g}{m^3}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,2 | 11 | 10,0 | 21 | 18,3 |
| 2 | 5,6 | 12 | 10,7 | 22 | 19,4 |
| 3 | 6,0 | 13 | 11,4 | 23 | 20,6 |
| 4 | 6,4 | 14 | 12,1 | 24 | 21,8 |
| 5 | 6,8 | 15 | 12,8 | 25 | 23,0 |
| 6 | 7,3 | 16 | 13,6 | 26 | 24,4 |
| 7 | 7,8 | 17 | 14,5 | 27 | 25,8 |
| 8 | 8,3 | 18 | 15,4 | 28 | 27,2 |
| 9 | 8,8 | 19 | 16,3 | 29 | 28,7 |
| 10 | 9,4 | 20 | 17,3 | 30 | 30,3 |

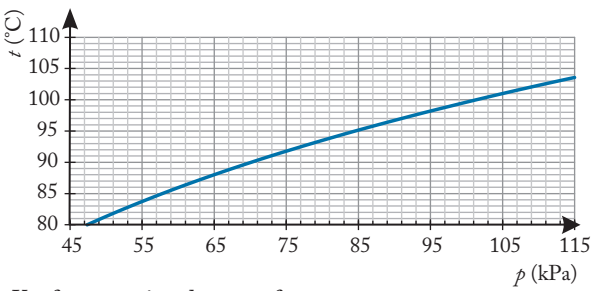
**a)** Mekkora a relatív páratartalom?
**b)** Mekkora hőmérsékleten van a harmatpont?
**c)** Hány gramm pára válik ki köd és páralecsapódás formájában a talaj 1 $m^2$-e fölött, ha a hőmérséklet 5 °C-ra hűl le, és a harmattal telt légtömegek magasságát 200 méternek tekintjük?
**d)** Számítsa ki, hogy mekkora 5 °C hőmérsékleten a telített vízgőz nyomása! A vízgőzt a számításnál tekinthetjük ideális gáznak. Számításához használja a *Négyjegyű függvénytáblázatok* adatait és azt, hogy a víz moláris tömege 18 $\frac{g}{mol}$!

**13.** Mennyi vizet lehetne elforralni azzal a hőmennyiséggel, amely 2,5 kg vas megfagyásakor felszabadul? A szükséges anyagi állandókat keressük meg a *Négyjegyű függvénytáblázatok*ban!

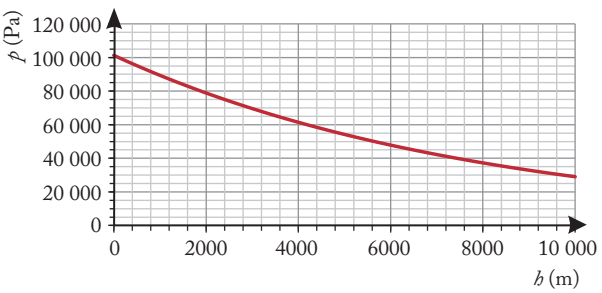
**14.** A vízjég olvadáshőjét az alábbi módszerrel szeretnénk megmérni. Egy 120 $\frac{J}{K}$ hőkapacitású termoszba 2 dl vizet teszünk, majd hosszú ideig hagyjuk szobahőmérsékleten (20 °C). Egy tálban olvadásban lévő jég van. A már megolvadt vízen úszó 50 g jégdarabot a termoszba teszünk, amit ezután gyorsan lezárunk. Pár perc múlva a jég már teljesen megolvadt, és egy hőmérővel megállapítjuk, hogy a termoszban lévő víz hőmérséklete 2 °C. Mennyi a mérésünk szerint a jég olvadáshője? A hőmérővel való termikus kölcsönhatástól eltekintünk. A víz sűrűségét és fajhőjét vegyük táblázatokból!

**15.** A Halley-üstökös 76 év alatt kerüli meg a Napot. Mozgása során a belső Naprendszerbe is eljut, és a Föld pályáját is keresztezi (csóvája okozza az Orionidák meteorrajt). Amikor a naptávolsága 1 CsE körül van, a Napból származó sugárzás, az úgynevezett napállandó 1361 $\frac{W}{m^2}$. Az üstökösnek a Nap felé eső merőleges felülete körülbelül 100 $km^2$, és a napsugárzás körülbelül 20%-a fordítódik a vízjég szublimációjára.
**a)** 1 nap alatt mennyi vízjég szublimál, ha a napállandót ezen idő alatt állandónak tekinthetjük? A szublimációs hőt számíthatjuk a víz olvadáshőjének és forráshőjének összegeként.
**b)** Ez mekkora része az üstökös teljes tömegének, amely $2{,}2 \cdot 10^{14}$ kg?

**16.** A víz forráspontjának nyomásfüggését és a légnyomás magasságfüggését az alábbi két grafikonon ábrázoltuk.



*Víz forráspontjának nyomásfüggése*



*Légnyomás függése a tengerszint feletti magasságtól*

**a)** Mennyi a víz forráspontja az alábbi magasságokban? Töltsük ki a táblázatot!

| $h$ (m) | 1000 | 3000 | 5000 |
|---|---|---|---|
| $T$(°C) | | | |

**b)** 0,5 liter 20 °C-os vizet mekkora hőmennyiséggel lehet elforralni 5000 m magasságban? A víz további adatait vegyük a *Négyjegyű függvénytáblázatok*ból!
**c)** Milyen magasságban lehetünk, ha a víz forráspontját 94 °C-nak mérjük?
**d)** A grafikonok alapján mennyi a telített vízgőz nyomása 90 °C-on?

## ESSZÉKÉRDÉSEK

### 1. A harmat képződése

(Emelt szintű érettségi feladat, 2009)

*A levegőből leszállt harmat olyan vízgőz, amely elveszítvén melegítőjét, melyet vagy a föld színe nyelt el, vagy a felsőbb levegőben esett változás ragadott el, megnehezül, s a földön levő testeknek felső színére leülepszik.*

(*Varga Márton:* A tsillagos égnek és a Föld golyóbissának az ő tüneményeivel együtt való természeti előadása, s megismertetése, *1809*)



Ismertesse zárt térben a folyadék és gőze között fennálló egyensúly jellemzőit!

Értelmezze az egyensúlyi állapotot a folyadékban és gőzében található részecskék számának változása alapján!

Ismertesse a telített és telítetlen gőz fogalmát, a relatív páratartalom jelentését!

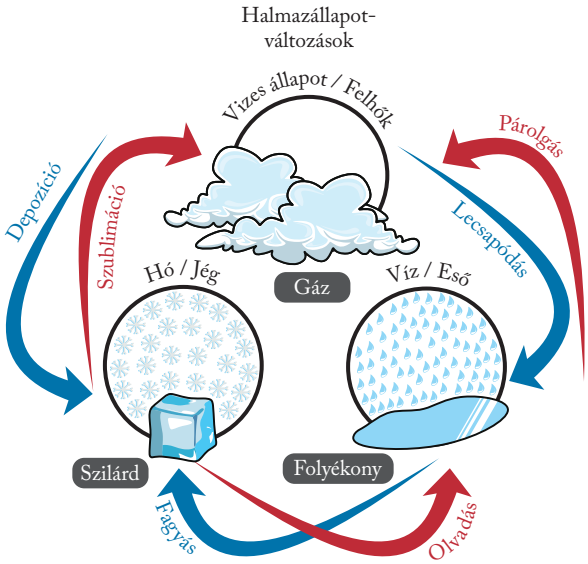
Mutassa be a harmatképződés folyamatát, ismertesse a harmat mennyiségét meghatározó feltételeket!

### 2. Halmazállapot-változások

(Emelt szintű érettségi feladat, 2013)

*Jegülés mely által a föloldott testnek részecskéi híg állapotból merőbe térnek, és magukra szabályos idomokat öltenek. Jegülésnél tehát a fő föltét az, hogy a jegőczczé válandó test híg legyen, miszerint részecskéi akadálytalanul engedhessenek kölcsönös vonzalmuknak, továbbá hogy a folyadék lassan térjen merő állapotba, s ez idő alatt a képelődésben miáltal sem gátoltassék.*

(*Schirkhuber Móricz:* Az elméleti és tapasztalati természettan alaprajza – *Pesten, 1851.*)




Ismertesse a szilárd, folyékony és légnemű halmazállapotok részecskemodelljét! Mutassa be az olvadás folyamatát! Ismertesse az olvadáspont és az olvadáshő fogalmát!

Milyen tényezők befolyásolják az olvadáspontot? Értelmezze az olvadáshőt a részecskemodell segítségével!

Mutassa be a párolgás jelenségét, a párolgást befolyásoló tényezőket! Ismertesse a párolgáshő fogalmát! Értelmezze a párolgás jelenségét és sajátságait a részecskemodell segítségével!

Mutassa be a forrás jelenségét, a forráspont és a forráshő fogalmát! Magyarázza el, miért befolyásolja a gőztér nyomása a forráspont értékét! Adjon meg egy gyakorlati példát a forráspont eltolódására!

# XIII. A folyadékok, gázok mechanikája







# 1. Nyomásviszonyok

EMLÉKEZTETŐ

## Folyadékok és gázok tulajdonságai

A **folyadékok** jellemző mechanikai tulajdonságai, hogy gyakorlatilag **összenyomhatatlanok**, azaz megtartják térfogatukat, kellő mennyiség esetén gravitációs környezetben **felveszik az edény alakját**, valamint **önthetők**. A folyadékoknak lehet szabad felszínük. Nyugvó folyadék szabad felszíne vízszintes, illetve nagyobb kiterjedés esetén követi a Föld görbületét.

A **gázok** jellemző mechanikai tulajdonságai, hogy akár jelentős mértékben **összenyomhatók**, és **kitöltik a rendelkezésre álló teret**. A gázoknak nincs szabad felszínük, illetve a légkör esetén a szabad felszín nem határozható meg egyértelműen.

Egy külső erő általában egy felületen keresztül fejti ki hatását a folyadékokra és a gázokra, ezért a jelenségekben a nyomóerő és a nyomott felület hányadosát, a nyomást vizsgáljuk. A folyadékok súlyából származó nyomást **hidrosztatikai nyomásnak** nevezzük.

**Egy folyadék felszíne alatt $h$ mélységben a $\rho$ sűrűségű folyadék súlyából származó nyomás minden irányban**

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h.$$

**Ezt hidrosztatikai nyomásnak nevezzük.**

A gázok sűrűsége sokkal kisebb a folyadékokénál, ezért a gázok súlyából származó nyomás gyakorlatilag csak a légkör esetében számottevő. A légkörben mért nyomás a **légnyomás**.

**Nemzetközi megállapodás alapján a normál légköri nyomás értéke tengerszinten, 0 °C-on:**

$$p_{lég} = 101\,325 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

A légnyomás értéke függ a tengerszint feletti magasságtól és a hőmérséklettől, befolyásolja a levegő páratartalma.

A légnyomás értékét Torricelli határozta meg először higanycsöves kísérletében. Mérései szerint a levegő nyomása 76 cm magas higanyoszlop súlyából származó nyomással tartott egyensúlyt.

*Megjegyzés:* A nyomás nem SI-mértékegységei a normál légköri nyomás esetén:

101 325 Pa = 76 Hgcm = 760 Hgmm = 1 atm,

$10^5$ Pa = 1 bar.

A folyadékok és a gázok nyomásviszonyait akkor tudjuk egy külső erővel megváltoztatni, ha a közeget bezárjuk. Ekkor érvényesül **Pascal törvénye**.

**Pascal törvénye: bezárt folyadék vagy gáz felületén egy külső erő által létrehozott nyomás a térfogat minden pontjában gyengítetlenül terjed tovább.**

A **közlekedőedények** jelensége a nyugvó folyadékok esetében azt eredményezi, hogy a közlekedőedények minden szárában azonos magasságban áll a folyadék.

**Példa:** A közlekedőedények elvén működő, a nyomáskülönbségen alapuló eszköz a pipetta, a szívószál, a szívó- és nyomókút, a nyomásmérő, a pumpa, a légszivattyú és a kompresszor (légsűrítő).

## Ideális folyadék, valódi folyadék

Az ideális folyadékokra jellemző tulajdonságok:

- A *folyadékokat összenyomhatatlannak tekintjük*, vagyis térfogatuk állandó. A valóságban a folyadékokat kismértékben össze lehet nyomni, ehhez azonban rendkívül nagy nyomás szükséges.
- A folyadékokra úgy gondolunk, hogy *nincs belső súrlódásuk*. Ez azt jelenti, hogy a folyadékrészecskék szabadon elgördülnek egymáson. A valóságban ez sem teljesen igaz.

A *belső súrlódástól mentes, összenyomhatatlan folyadékot* **ideális folyadéknak** nevezzük.

*A valóságban minden folyadéknak van kisebb-nagyobb belső súrlódása, amit* **viszkozitásnak** neveznek. Az ilyen folyadékok a **valódi folyadékok**.

**Példa:** A víznek kicsi a viszkozitása, könnyen folyó, míg a méz nagy viszkozitású, sűrűn folyó folyadék.

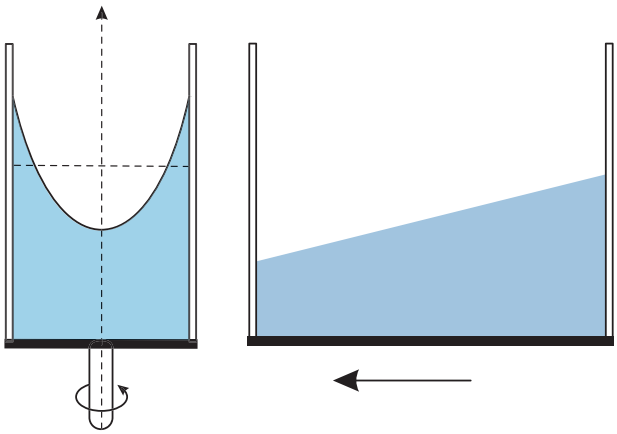
### Folyadékok szabad felszíne

Nyugalomban lévő ideális folyadék szabad felszíne a gravitáció hatására **vízszintes**, ugyanis ha a felületen lévő folyadékrészecske nem lenne azonos helyzeti energiájú a felület többi részecskéjével, akkor a gravitációs tér a többi szintjére görgetné azt. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a folyadék egy irányba és egyenletesen mozog.

*Ha* azonban *a folyadék gyorsul vagy forog, akkor a szabad felszíne már nem marad vízszintes*, új helyzetet vagy alakot vesz fel.

**Példa:** Egy vízszintes irányban gyorsuló edényben lévő folyadék szabad felszíne **ferde síkfelület**, melynek meredekségét a gyorsulás határozza meg.

Egy saját tengelye körül forgó edényben lévő folyadék szabad felszíne egy **forgási paraboloid** lesz.

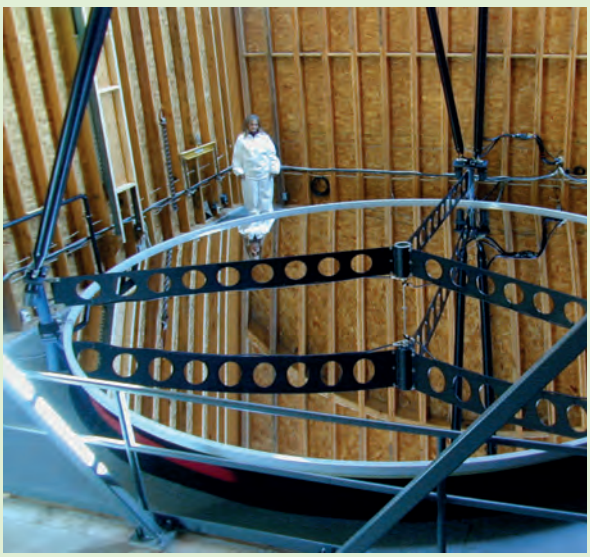


*Egyenletesen forgó és balra gyorsuló folyadék szabad felszíne*

**ALKALMAZÁSOK**

### Folyadéktükrös teleszkóp

A folyadéktükrös teleszkópban függőleges tengely körül egyenletesen forgó tálba higanyt öntenek. A higany szabad felszíne a forgás hatására forgási paraboloid alakot vesz fel, ami fénytani szempontból egy parabolatükörnek felel meg. Olcsó kialakítása mellett előnye a természetadta pontosságú görbülete, hátránya, hogy csak függőleges beállítással lehet használni.



*Folyadéktükrös teleszkóp*

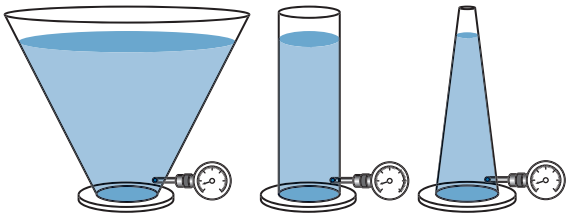
## A hidrosztatikai paradoxon

A folyadék hidrosztatikai nyomása a $p_h = \rho \cdot g \cdot h$ összefüggés alapján függ a felszíntől számított mélységtől és a folyadék sűrűségétől.

*Az összefüggés nem tartalmaz semmilyen paramétert az edény formájáról, tehát a hidrosztatikai nyomás nem függ az edény alakjától.*

Végezzünk el egy kísérletet!

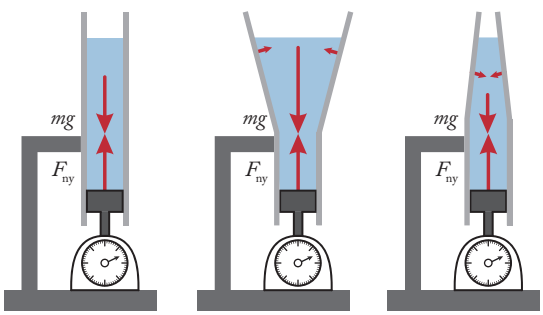
Öntsünk azonos magasságig vizet azonos alapterületű, de különböző alakú edényekbe, és mérjük meg a fenéknyomást mindegyik esetben! Azt tapasztaljuk, hogy a nyomásmérő azonos értéket mutat, ahogy az összefüggés is előre jelezte.



*Hidrosztatikai paradoxon*

Ugyanakkor nem hisszük, hogy helyes lenne a mérés, hiszen az egyik edényben több víz van, mint a másikban, tehát a víz súlya, nyomóereje is nagyobb kell legyen. Ezt a látszólagos ellentmondást **hidrosztatikai paradoxonnak** nevezzük.

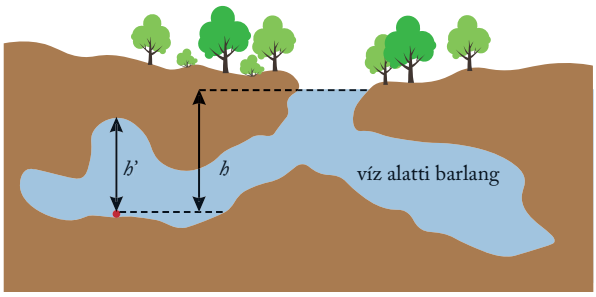
Az ellentmondás feloldható, ha belegondolunk abba, hogy a henger alakú edényhez képest a felfelé szélesedő edényben lévő „többlet"-víz igazából nem az edény fenekét, hanem az oldalfalat terheli. Más megközelítésben: a ferde oldalfalra ható, a hidrosztatikai nyomásból származó nyomóerő merőleges az oldalfalra, így az oldalfal tartóereje azzal ellentétes irányban ferdén felfelé mutat. Ennek a tartóerőnek a függőleges komponense kompenzálja a víz „többlet"-súlyát. A felfelé szűkülő edényben az oldalfal tartóereje ferdén lefelé mutató, így ennek az erőnek a függőleges komponense kiegészíti a „hiányzó" víz súlyát.




*A hidrosztatikai paradoxon magyarázata*

**Példa:** A hidrosztatikai paradoxonnal magyarázható az is, hogy a víz alatti barlangokban a fenéknyomás nem a víz

mérési hely fölötti magasságával arányos, hanem a szabad felszíntől mért mélységével.



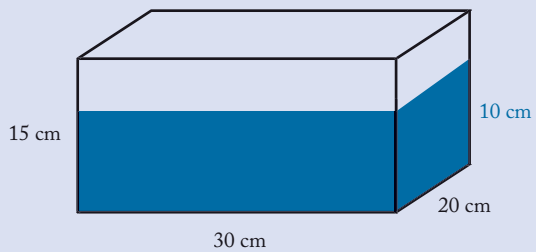

*A jelölt helyen a hidrosztatikai nyomás $\rho \cdot g \cdot h'$ helyett $\rho \cdot g \cdot h$*

## KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy 30 cm × 20 cm × 15 cm méretű, téglatest alakú zárt edény a legnagyobb lapján nyugszik, és benne 10 cm magasan áll a víz. $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

**a)** Mekkora az edény egyes lapjaira a víz által kifejtett nyomóerők nagysága?

**b)** Hogyan változnak az a) feladatra adott válaszok, ha az edény most a legkisebb lapján nyugszik?




### MEGOLDÁS

Adatok:

$A = 30\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m}$,

$A_1 = 30\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{m}$,

$A_2 = 20\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{m}$,

$h = 10\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{m}$,

$\rho_{\text{víz}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

---

*a)* $F_{\text{alap}} = ?$, $F_{\text{oldal,1}} = ?$, $F_{\text{oldal,2}} = ?$,

*b)* $F'_{\text{alap}} = ?$, $F'_{\text{oldal,1}} = ?$, $F'_{\text{oldal,2}} = ?$

**a)** Az alsó lapra kifejtett nyomóerő:

$$F_{\text{alap}} = p \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A =$$

$$= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 60\ \text{N}$$

Az oldallapokra kifejtett nyomás nagysága lefelé 0–1000 Pa értékig egyenletesen növekszik, ahogy egyre mélyebben vizsgáljuk. Egyenletes változása miatt egységesen $p_{\text{átl}} = 500$ Pa értékkel számolhatunk.

A nagyobb oldallapra kifejtett nyomóerő:

$$F_{\text{oldal,1}} = p_{\text{átl}} \cdot A_1 = 500\ \text{Pa} \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{m} = 15\ \text{N}$$

A kisebb oldallapra kifejtett nyomóerő:

$$F_{\text{oldal,2}} = p_{\text{átl}} \cdot A_2 = 500\ \text{Pa} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}1\ \text{m} = 10\ \text{N}$$

Az alaplapra kifejtett nyomóerő 60 N, míg az egyik oldallapra 15 N, a másikra 10 N.

**b)** Ha átfordítjuk az edényt a legkisebb lapjára, megváltozik a vízoszlop magassága. Viszont a víz térfogata (6 liter) nem változik. Így az új vízoszlop magassága:

$$h' = \frac{0{,}006\ \text{m}^3}{0{,}2 \cdot 0{,}15\ \text{m}} = 0{,}2\ \text{m}$$

Magyarázhatjuk úgy is, hogy a víz az edény $\frac{2}{3}$-át foglalja el, akárhogy is forgatjuk az edényt. Az alsó lapra kifejtett nyomóerő nem változik:

$$F'_{\text{alap}} = p \cdot A' = \rho \cdot g \cdot h' \cdot A' =$$

$$= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}15\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 60\ \text{N}$$

Az oldallapokra kifejtett nyomás átlagértéke:

$$p'_{\text{átl}} = 1000\ \text{Pa}$$

A nagyobb oldallapra kifejtett nyomóerő:

$$F'_{\text{oldal,1}} = p'_{\text{átl}} \cdot A_1 = 1000\ \text{Pa} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 40\ \text{N}$$

A kisebb oldallapra kifejtett nyomóerő:

$$F'_{\text{oldal,2}} = p'_{\text{átl}} \cdot A_2 = 1000\ \text{Pa} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}15\ \text{m} = 30\ \text{N}$$

Az alaplapra kifejtett nyomóerő 60 N, míg az egyik oldallapra 40 N, a másikra 30 N.

**2. FELADAT** Egy 10 cm² keresztmetszetű, U alakú csőbe annyi vizet öntünk, hogy mindkét szárában elég magasan álljon. Utána az egyik szárba még 840 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű és 20 cm magas olajréteget töltünk. Mekkora lesz a két folyadékszint közötti különbség?

### MEGOLDÁS

Adatok:

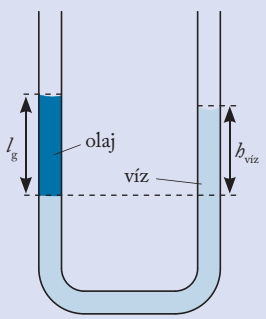
$A = 10\ \text{cm}^2$

$\varrho_{\text{víz}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$\varrho_{\text{g}} = 840 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0{,}84 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

---

$\Delta h = ?$



A két folyadék az ábra szerinti elrendezésben lesz a csőben. Mivel mindkét vég nyitott, egyformán hat a külső légnyomás mindkét folyadék felszínére, ezért annak értéke nem befolyásolja a kialakuló egyensúlyi állapotot.

A hidrosztatikai nyomásnak azonosnak kell lenni a két szárban a víz–gázolaj érintkezési síkban:

$\varrho_g \cdot g \cdot l_g = \varrho_{víz} \cdot g \cdot h_{víz}$,

$\varrho_g \cdot l_g = \varrho_{víz} \cdot h_{víz}$

Behelyettesítve:

$0{,}84 \frac{g}{cm^3} \cdot 20\ cm = 1 \frac{g}{cm^3} \cdot h_{víz}$

$h_{víz} = 16{,}8\ cm$

A szabad felszínek közötti magasságkülönbség:
$\Delta h = l_g - h_{víz} = 3{,}2\ cm$

## Nyugalomban lévő légkör

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

A Földet körülvevő légkör abból a szempontból hasonlít a folyadékokra, hogy a gravitáció hatására felveszi az edény alakját, jelen esetben rátelepszik a Föld felszínére. A nyugalomban lévő légkört ezért első közelítésben tekinthetjük úgy, mint egy hatalmas méretű, de kis sűrűségű folyadékot. A **légnyomás** ebből adódóan a nyugalomban lévő levegő súlyából származó aerosztatikai nyomás.

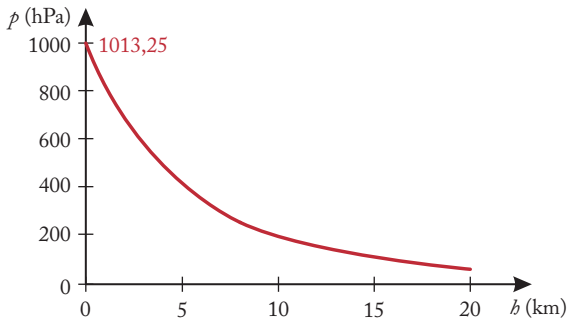
A levegő azonban összenyomható, és emiatt lényegesen eltér a folyadékoktól. Az összenyomhatósága miatt a légkör sűrűsége a magasság növekedésével változik, ellentétben egy vízoszlop különböző mélységben mért sűrűségével. A légkör önmagára nehezedik, ezért a földfelszínhez közeledve sűrűsége növekszik. Ezért az aerosztatikai nyomás magasságfüggése bonyolultabb, mint a hidrosztatikai nyomásé, összefüggését **barometrikus magasságformulának** nevezzük.

A magasságformula egy közelítő képlete:

$p_{lég} = 10^{\left(5 - \frac{h}{15\,500\ m}\right)}\ Pa$,

ahol a zárójeles kifejezés a 10 kitevője, és $h$ a tengerszint feletti magasság.

Tengerszinten a formula kiadja a légnyomás $10^5$ Pa közelítő értékét. A légnyomás nem egyenletes változását jól mutatja a formula grafikonja:




*A légnyomás magasságfüggése*

A grafikon eleje meredek, majdnem egyenesen halad, mert körülbelül 1 km-es magasságig a légkör sűrűsége megközelítőleg állandónak tekinthető. Ebben az alsó tartományban a felszíntől emelkedve méterenként hozzávetőlegesen 11 Pa-lal csökken a légnyomás értéke.

**Példa:** A légnyomáscsökkenés arányos közelítése teszi lehetővé az okostelefonok számára, hogy a GPS-magasságadatokból és az időjárásjelentés-adatokból kiszámítsa az adott tartózkodási helyen a légnyomás értékét. Így működik a légnyomásmérő-alkalmazás.

Még a barometrikus magasságformula sem írja le pontosan a légkör nyomását, ugyanis nem veszi figyelembe a hőmérsékleti viszonyokat.

**ALKALMAZÁSOK**

### Hidraulika és pneumatika

A folyadékokat munkavégzésre felhasználó gépek megalkotásával a **hidraulika** tudománya foglalkozik. A hidraulikus gépek és eszközök a folyadékok összenyomhatatlanságát, nyugvó vagy áramló állapotú nyomását használják ki. A mérnökök a folyadékokban uralkodó nyomást leggyakrabban bar mértékegységben adják meg.

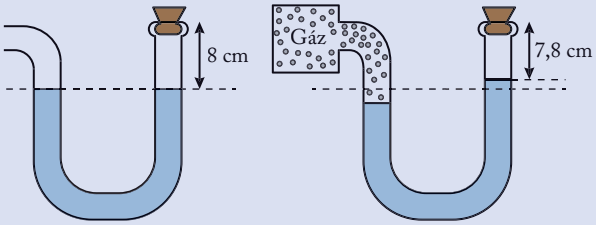
**Példa:** A hálózati víznyomás 2–5 bar nagyságú, egy magasnyomású mosó akár 20 bar víznyomást is szolgáltat.

A levegőt is lehet munkavégzésre használni, ezzel a **pneumatika** foglalkozik. A nyomáskülönbségen alapuló gépek a külső légköri nyomáshoz viszonyítva alakítanak ki vagy nagyobb, vagy kisebb légnyomást. Az előbbibe például a sűrített levegővel működő kompresszorok, pumpák tartoznak, míg az utóbbiba a különféle légszivattyúk és vákuumgépek. A külső légköri nyomáshoz viszonyított légnyomást **túlnyomásnak** nevezzük, ez a pneumatikus gépek jellemző tulajdonsága. A túlnyomás lehet pozitív (sűrített levegő), és lehet 0 és –1 bar közötti nagyságú (vákuum). A mérnöki gyakorlatban minden légritkított levegő vákuumnak felel meg, a tökéletes vákuum éppen –1 bar túlnyomású.

**Példa:** A nyomáskülönbségek fenntartásához és szabályozásához különféle **szelepeket** használunk.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy U alakú cső alsó részében higany található. A cső egyik szára nyitott, a másikban a higany felett 8 cm magasan szeleppel elzárt levegő van, a levegő kezdetben normál légköri nyomású. A cső nyitott szárára gáztartályt kapcsolunk, melynek hatására a másik szárban lévő levegőoszlop magassága 7,8 cm-re csökken.




**a)** Mekkora a gáztartály nyomása?
**b)** Mekkora túlnyomás esetén nyit a biztonsági szelep, ha a bezárt levegőoszlop 7,2 cm-es magasságánál lép működésbe?

A folyamat közben a hőmérsékleti hatásokat hagyjuk figyelmen kívül! A normál légköri nyomás legyen $p_0 = 10^5$ Pa = 1 bar = 760 Hgmm.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$h_0 = 8$ cm, $h_1 = 7{,}8$ cm, $p_0 = 10^5$ Pa = 1 bar = 760 Hgmm

*a)* $p = ?$, *b)* $p' = ?$

**a)** Kezdetben a közlekedőedények elve miatt a higanyszintek azonos magasságban vannak. A gáz nyomása a higany közvetítésével összenyomja a bezárt levegőt.

Az összenyomott levegő nyomását ($p_1$) a Boyle–Mariotte-törvény segítségével meghatározhatjuk:

$$p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1\,,\quad p_1 = \frac{V_0}{V_1} \cdot p_0$$

A bezárt levegő kezdeti és összenyomott térfogatának aránya a cső azonos keresztmetszete miatt a levegőoszlop magasságának arányával egyezik meg, ezért:

$$p_1 = \frac{8\text{ cm}}{7{,}8\text{ cm}} \cdot 1\text{ bar} = 1{,}03\text{ bar} = 779\text{ Hgmm}$$

A higany összenyomhatatlansága miatt a higanyszintek különbsége: $2 \cdot 0{,}2$ cm = 0,4 cm = 4 mm.

A közlekedőedények elve szerint a két szárban azonos nyomásnak kell kialakulni, ezért az egyik szárban a gáz + higanyoszlop nyomása megegyezik a másik szárban lévő 4 mm-rel magasabb higanyoszlop + bezárt levegő nyomásával. A higany alkalmazása miatt most célszerű a nyomásokat Hgmm-ben megadni:

$$p_{\text{gáz}} + p_{\text{Hg}} = (p_{\text{Hg}} + 4\text{ Hgmm}) + p_1$$

Egyszerűsítve, majd behelyettesítve:

$$p_{\text{gáz}} = 4\text{ Hgmm} + 779\text{ Hgmm} = 783\text{ Hgmm} = 1{,}03\text{ bar}$$

A gáztartály nyomása 1,03 bar.

*Megjegyzés:* A bezárt levegő és a gáz nyomása csak kerekítve egyenlő 1,03 barral, köztük 4 Hgmm a különbség. 5 értékes jegyre kerekítve: $p_1 = 1{,}0256$ bar és $p_{\text{gáz}} = 1{,}0303$ bar.

**b)** A szelep kinyitásakor a bezárt levegő nyomása:

$$p_2 = \frac{V_0}{V_2} \cdot p_0$$

Behelyettesítve:

$$p_2 = \frac{8\text{ cm}}{7{,}2\text{ cm}} \cdot 1\text{ bar} = 1{,}11\text{ bar}$$

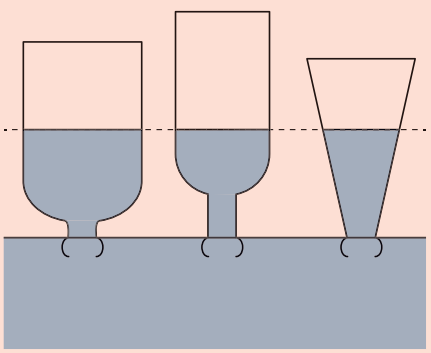
Így a szelep túlnyomása nyitáskor:

$$p_{\text{szelep}} = p_2 - p_0 = 0{,}11\text{ bar}$$

A biztonsági szelep 0,11 bar túlnyomáson nyit ki.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. A hangot a levegőben terjedő sűrűsödésekkel és ritkulásokkal írhatjuk le. Az ideális folyadékban terjed a hang?
2. Azonos átmérőjű nyakú üvegpalackokat teljesen vízbe merítünk, majd nyakukkal lefelé kiemeljük a vízből úgy, hogy a palackok szája a vízben maradjon. Mindegyik palackban azonos magasságban áll a víz, mégis különböző erővel kell tartani az üvegeket. Most miért nem érvényesül a hidrosztatikai paradoxon?



3. Egy autóban ülünk, ölünkben egy vízzel félig töltött akváriummal, melynek egyik oldalfalát a pólónkhoz szorítjuk, két oldalsó oldalfalát egy-egy kezünkkel szorítjuk. Mit csinált az autó, ha először a pólónk, majd a bal kezünk lett vizes?
4. Milyen magasságban lesz a légköri nyomás a tengerszinten mért légköri nyomás 10%-a?

# 2. A felhajtóerő

**EMLÉKEZTETŐ**

## Felhajtóerő

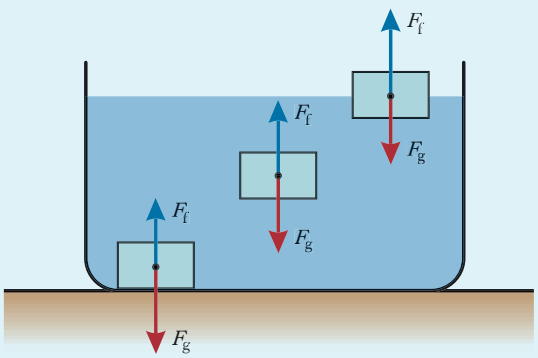
Folyadékba merített testre a folyadék által kifejtett, függőlegesen felfelé mutató **felhajtóerő** hat. A felhajtóerő nagysága

$$F_{fel} = \rho_{folyadék} \cdot V_{test,\,bem} \cdot g,$$

ahol $\rho_{folyadék}$ a folyadék sűrűsége, $V_{test,\,bem}$ a test folyadékba merülő részének térfogata és $g$ a nehézségi gyorsulás.

Egyéb erők hiányában egy folyadékba merített testre a nehézségi erő és a vele ellentétes felhajtóerő hat. A következő esetek jöhetnek létre:

- ha a nehézségi erő nagyobb ($m \cdot g > F_{fel}$), akkor a test **lemerül** a folyadék aljára;
- ha a két erő egyenlő ($m \cdot g = F_{fel}$) nagyságú, akkor a test **lebeg** a folyadékban;
- ha pedig a felhajtóerő nagyobb ($m \cdot g < F_{fel}$), akkor a test **felemelkedik**.




*Testek lemerülése, lebegése és felemelkedése*

Az erők összehasonlítása helyett elegendő a test átlagsűrűségét összehasonlítani a folyadék sűrűségével, ha nagyobb nála, akkor a test elmerül, ha megegyezik vele, lebeg, ha kisebb nála, felemelkedik a felszínére. Ez a **sűrűségfeltétel**.

A felhajtóerő nagysága egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával. Ezt a törvényt felfedezőjéről, az ókori görög **Arkhimédészről** nevezték el, aki az i. e. 3. században élt.

## Arkhimédész törvényének érvényessége

Arkhimédész törvényében **a felhajtóerő nagysága a kiszorított folyadék súlyával egyezik meg**.

**Súlytalanság állapotában nincs felhajtóerő**, ugyanis a felhajtóerő a hidrosztatikai nyomáskülönbségből származik, márpedig súlytalanság esetén nincs hidrosztatikai nyomás.

**Példa:** Egy szabadon eső folyadékba mártott pingponglabda a zuhanás alatt végig a folyadékban marad, nincs, ami a folyadék felszínére hajtaná. Az űrállomáson, súlytalanságban végzett vizes kísérleteknél sem alakul ki felhajtóerő, igaz, ott már a fel és a le fogalma sem értelmezhető.

**Arkhimédész törvénye a gázokra is érvényes.**

**Példa:** A légkörben elengedett lufira a nehézségi erőn kívül a légkörből származó felhajtóerő is hat. Ha a lufi átlagsűrűsége kisebb a levegő sűrűségénél, mint például a héliumos lufi esetében, akkor a felhajtóerő nagyobb lesz a nehézségi erőnél, és a lufi felemelkedik. A légkör sűrűsége azonban nem állandó nagyságú, a magassággal a sűrűség csökken, ezáltal az emelkedő héliumos lufira is egyre kisebb felhajtóerő hat. Így végül elér egy olyan magasságot, ahol a két erő egyenlő nagyságú lesz, és azon a magasságon lebegni fog a lufi.

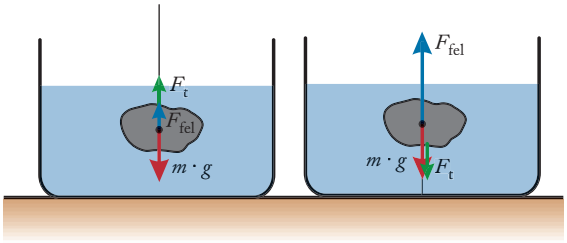
**Arkhimédész törvénye nem csak szilárd testekre érvényes.** Bármely nyugvó közegbe (folyadékba vagy gázba) merülő test lehet szilárd, folyékony vagy légnemű halmazállapotú. Ha a test több anyagból áll, akkor a test átlagsűrűsége határozza meg, hogy mi történik vele az adott közegben.

**Példa:** A vízbe csöppentett olaj a víz felszínén fog úszni, a méz a víz aljára merül, az üdítőben a buborékok felemelkednek, a bor érésekor képződő szén-dioxid a levegő alá kerül.

## Egyensúlyi helyzetek nyugalomban lévő közegben

Ha egy test átlagsűrűsége megegyezik a nyugalomban lévő közeg sűrűségével, akkor a test a közegben egyensúlyi helyzetbe kerül, **lebegni fog**. Ebben az esetben a testre ható $mg$ nehézségi erő és az $F_{fel}$ felhajtóerő kiegyenlíti egymást, az eredő erő nulla: $m \cdot g = F_{fel}$.

Ha a folyadékba merülő test és a folyadék sűrűsége nem egyezik meg, akkor az $F_e$ eredő erő nem nulla. Ebben az esetben egy újabb, $F_t$ tartóerő fellépte esetén áll fenn az egyensúly.




*A folyadéknál nagyobb átlagsűrűségű test egyensúlya*

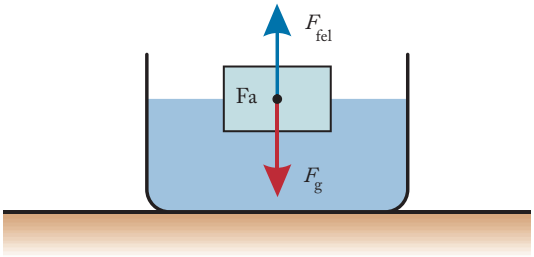
*A folyadéknál kisebb átlagsűrűségű test egyensúlya*

## Testek úszása

Ha egy test $\rho_{test}$ átlagsűrűsége kisebb a nyugalomban lévő $\rho_{folyadék}$ folyadék sűrűségénél, és az $mg$ nehézségi erőn, valamint a folyadék $F_{fel}$ felhajtóerején kívül más erők nem hatnak, akkor a test a folyadékban felemelkedik.

A folyadék felszínét elérve a test egy része kiemelkedik a felszínre, ezáltal kevesebb folyadékot fog kiszorítani, és így kisebb felhajtóerő fog rá hatni. Mint ahogy egy rezgésnél, úgy ebben az esetben is a test kiemelkedik, visszasüllyed, kiemelkedik, és így tovább, és ezt az ide-oda mozgást folytatja mindaddig, míg az egyensúly beáll. Az egyensúlyi helyzetben a nehézségi erő és az aktuális felhajtóerő kiegyenlíti egymást. Ezt az egyensúlyi állapotot nevezzük a **test úszásának**. A két erő egyenlőségét felírva:

$$m \cdot g = \rho_{folyadék} \cdot V_{test,\,bem} \cdot g$$




*Testek úszása esetén a két erő kiegyenlíti egymást*

A test tömegét a sűrűségével kifejezve és egyszerűsítve:

$$\rho_{test} \cdot V_{test} = \rho_{folyadék} \cdot V_{test,\,bem}$$

A két térfogat arányát felírva kapjuk:

$$\frac{V_{test,\,bem}}{V_{test}} = \frac{\rho_{test}}{\rho_{folyadék}}$$

Az összefüggés azt mutatja, hogy **a testek úszásakor a test térfogatának annyiadrésze merül majd a folyadékba, amekkora a test és a folyadék sűrűségének aránya**.

**Példa:** A jég sűrűsége a víz sűrűségének 90%-a, így egy jégkocka 90%-a merül el a vízben, 10%-a kiemelkedik a vízből.

### KIDOLGOZOTT FELADAT

**1. FELADAT** Egy üreges hasábot, melynek tömege 3 kg, vízbe merítünk, és az edény aljához rögzítjük egy fonál segítségével. A fonálban 5 N tartóerő ébred.

**a)** Mekkora a hasáb átlagsűrűsége?

**b)** Ha elvágjuk a fonalat, akkor a hasáb mekkora része emelkedik a víz fölé?

**c)** Mi történik, ha ezután a hasábot benzinbe merítjük?

A nehézségi gyorsulás értéke $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

### MEGOLDÁS

Adatok:

$m = 3$ kg,

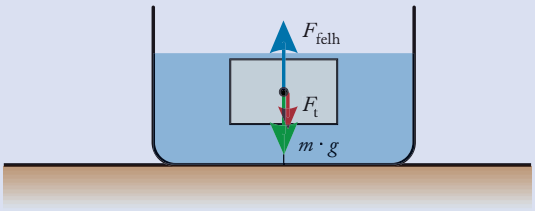
$F = 5$ N,

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$,

---

*a)* $\rho_{test} = ?$,

*b)* $\frac{V_{test,\,kint}}{V_{test}} = ?$




**a)** A hasáb a vízben egyensúlyban van, a rá ható erők kiegyenlítik egymást.

$$m \cdot g + F_t = \rho_{folyadék} \cdot V_{test} \cdot g$$

Ebből a test térfogata meghatározható:

$$V_{test} = \frac{m \cdot g + F_t}{\rho_{folyadék} \cdot g} = \frac{30\ \text{N} + 5\ \text{N}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Így a hasáb átlagsűrűsége:

$$\rho_{test} = \frac{m}{V} = \frac{3\ \text{kg}}{3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3} = 857\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

**b)** Ha elvágjuk a fonalat, a hasáb felemelkedik a vízben, egy része kiemelkedik, és úszni fog a víz felszínén. Az új egyensúlyi feltétel:

$$m \cdot g = \rho_{folyadék} \cdot V_{test,\,bem} \cdot g$$

A bemerülő rész térfogata:

$$V_{test,\,bem} = \frac{m \cdot g}{\rho_{folyadék} \cdot g} = \frac{30\ \text{N}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

A kiemelkedő rész aránya a hasáb egészéhez viszonyítva:

$$\frac{V_{\text{test, kint}}}{V_{\text{test}}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3} = 0{,}143$$

Tehát a hasáb 14,3%-a emelkedik ki a vízből és 85,7%-a merül a víz alá.

*Megjegyzés:* Ugyanezt az eredményt kapnánk a sűrűségek arányából:

$$\frac{\rho_{\text{test}}}{\rho_{\text{foly}}} = \frac{857\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0{,}857$$

**c)** A benzin sűrűsége a *Négyjegyű függvénytáblázatokból* $740\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, ami kisebb, mint a hasáb átlagsűrűsége, ezért a hasáb lemerül a benzin aljára.

**2. FELADAT** Egy edényben lévő víz alján egy 15 cm³ térfogatú kavics található, a víz felszínén pedig egy 8 cm × 10 cm alapterületű, 5 cm magas fahasáb úszik. A kavics sűrűsége $2500\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a fa sűrűsége $600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

**a)** Hány cm mélyre merül a vízbe a fahasáb, ha az a legnagyobb lapjával úszik a vízen?

**b)** A kavicsot kivesszük a vízből, és rátesszük a fahasábra. Mennyivel mélyebbre merül a fahasáb a vízben?

**c)** A kavics áthelyezésével hogyan változott meg az edényben a vízszint?

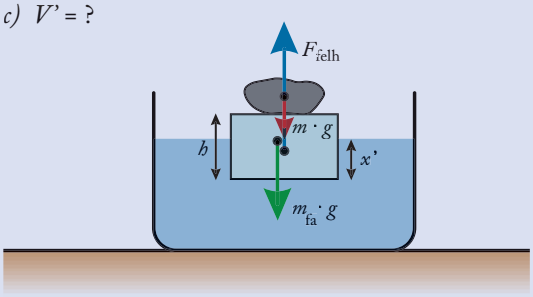
## MEGOLDÁS

Adatok:

$V_{\text{kavics}} = 15\ \text{cm}^3$,
$A_{\text{fa}} = 8\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm}$,
$h = 5\ \text{cm}$,
$\rho_{\text{kavics}} = 2500\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,
$\rho_{\text{fa}} = 600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

---

*a)* $x = ?$,
*b)* $x' = ?$,
*c)* $V' = ?$




**a)** A fahasáb bemerülését a sűrűségek aránya határozza meg:

$$\frac{V_{\text{test, bem}}}{V_{\text{fa}}} = \frac{\rho_{\text{fa}}}{\rho_{\text{foly}}} = \frac{600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0{,}6$$

A $h = 5$ cm magas fahasáb 60%-a merül be, azaz $x = 5 \cdot 0{,}6 = 3$ cm mélyre merül a vízbe a fahasáb.

**b)** A kavicsot rátesszük a fahasábra, ezáltal mélyebbre merül, és új egyensúlyi állapot alakul ki ($F_e = 0$):

$$m_{\text{fa}} \cdot g + m_{\text{kavics}} \cdot g = \rho_{\text{foly}} \cdot V_{\text{fa, bem}} \cdot g$$

A fahasáb és a kavics tömegét a sűrűségekből és a méretekből meghatározzuk, majd $g$-vel egyszerűsítünk:

$$\rho_{\text{fa}} \cdot V_{\text{fa}} + \rho_{\text{kavics}} \cdot V_{\text{kavics}} = \rho_{\text{foly}} \cdot V_{\text{fa, bem}}$$

Az összefüggésből fejezzük ki a fahasáb bemerülő és teljes térfogatának arányát:

$$\frac{V_{\text{fa, bem}}}{V_{\text{fa}}} = \frac{\rho_{\text{fa}}}{\rho_{\text{foly}}} + \frac{\rho_{\text{kavics}} \cdot V_{\text{kavics}}}{\rho_{\text{foly}} \cdot V_{\text{fa}}}$$

Az arányok miatt tetszőleges, de azonos mértékegységeket használhatunk. A sűrűséget $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$-ben, a térfogatot cm³-ben számítva:

$$\frac{V_{\text{fa, bem}}}{V_{\text{fa}}} = \frac{600}{1000} + \frac{2500 \cdot 15}{1000 \cdot 400} = 0{,}694$$

Most a $h = 5$ cm magas fahasáb 69,4%-a merül be, azaz $x' = 5 \cdot 0{,}694 = 3{,}47$ cm, ami $\Delta x = x' - x = 4{,}7$ mm-rel mélyebben van az eredeti bemerülésnél.

**c)** A kavics kivételekor a vízszint a kavics térfogatának mértékével, 15 cm³-rel csökkent. Amikor a kavicsot a hasábra raktuk, a hasáb újabb 0,47 cm · 8 cm · 10 cm = 37,6 cm³ térfogatú része került a víz alá, ennyivel több vizet szorított ki, tehát a vízszint a vízkiszorítás mértékével, $V' = 37{,}6$ cm³-rel nőtt. Összességében a vízszint emelkedett.

*Megjegyzés:* A c) feladatban az új egyensúlyi állapotban a kavics nehézségi erejét a megnövekedett felhajtóerő egyenlíti ki. Az extra tömeg extra felhajtóerőt és így extra vízkiszorítást eredményez: amekkora a kavics tömege, akkora tömegű extra vizet szorít ki. A kavics tömege a példában 37,5 g, tehát 37,5 g extra vizet szorít ki a hasáb, ami a kerekítésektől eltekintve a megoldásunkkal egyezik.

**MÉRÉSI FELADAT**

## Szilárd test és folyadék sűrűségének meghatározása felhajtóerővel

Határozzuk meg egy szilárd test sűrűségét rugós erőmérő és egy pohár víz segítségével, majd a mérési eredményt felhasználva határozzuk meg az ismeretlen folyadék sűrűségét digitális mérleg segítségével!

*Sűrűségmérés: a) mérési eszközök, b) szilárd test súlya levegőben és c) vízben*



*a)*



*b)*



*c)*

### a) Szilárd test sűrűségének meghatározása

Először megmérjük a szilárd test súlyát levegőben. A rugós erőmérővel a testet $F_1 = 0{,}8$ N erővel kellett tartani, hogy nyugalomban legyen. Ebből a test tömege $m_{test} = 0{,}08$ kg. Vízbe merítve a tartóerő $F_2 = 0{,}5$ N nagyságúra csökkent.

A csökkenés oka a víz felhajtóereje, tehát:

$$F_{fel} = F_1 - F_2 = 0{,}8\text{ N} - 0{,}5\text{ N} = 0{,}3\text{ N}$$

A felhajtóerőből a test térfogata:

$$V_{test} = \frac{F_{fel}}{\rho_{víz} \cdot g} = \frac{0{,}3\text{ N}}{1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}06 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$$

A számított adatokból a test sűrűsége:

$$\rho_{test} = \frac{m_{test}}{V_{test}} = \frac{0{,}08\text{ kg}}{3{,}06 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3} = 2610\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A mérés során használt test alumíniumhasáb volt, melynek irodalmi sűrűsége $2700\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

**A mérés relatív hibája:** Mérési eredményünk relatív hibája az irodalmi adattól:

$$\delta\rho_{test} = \frac{2700\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 2610\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2700\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0{,}0333,$$

ami 3,33%-os, igen pontosnak mondható mérést jelent.

### b) Ismeretlen folyadék sűrűségének meghatározása

Először mérjük meg az ismeretlen folyadékot tartalmazó edény tömegét!

A digitális mérleg kijelzése szerint: $m_1 = 174{,}49$ g.

Majd lógassuk bele az alumíniumhasábot, és így is mérjük meg a rendszer tömegét!

A kijelző szerint: $m_2 = 202{,}12$ g.




*a)*




*c)*



*b)*

*Folyadék sűrűségének mérése: a) folyadék tömege, b) folyadékba lógatott test és c) amit a mérleg jelez*

A megnövekedett tömeget a folyadékra ható alumíniumhasábbal magyarázhatjuk. A hasáb akkora erővel hat lefelé a folyadékra, mint amekkora erővel felfelé hat a hasábra a folyadék. Ez nem más, mint a felhajtóerő.

Mérésünkben: $m_2 - m_1 = 27{,}08$ g.

Az ennek megfelelő felhajtóerő:

$$F_{fel} = (m_2 - m_1) \cdot g = 0{,}2708\text{ N},$$

ebből a folyadék sűrűsége:

$$\rho_{foly} = \frac{F_{fel}}{V_{test} \cdot g} = \frac{0{,}2708\text{ N}}{3{,}06 \cdot 10^{-5}\text{ m}_3 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 903\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ismeretlen folyadéknak étolajat kaptunk, melynek sűrűsége a *Négyjegyű függvénytáblázatok* szerint 918–925 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ értékek közé esik. Mérésünk ismét jó közelítéssel igazolta az irodalmi adatokat.

## ALKALMAZÁSOK

### A felhajtóerő alkalmazása

**Mozgásterápia**

A felhajtóerő hatására közegben mindig könnyebb egy test, mint közeg nélkül. Ezt használják ki például az űrhajósok kiképzésénél, a merülőmedencében víz alatt végzett gyakorlatok hasonlítanak a mikrogravitációs környezethez. Szintén ezt a hatást használja ki a vízben végzett mozgásterápia, rehabilitáció vagy akvafitnesz is.

**Vízi élőlények, közlekedési eszközeink**

A bemerülő test térfogatának és ezáltal átlagsűrűségének változtatásával megváltozhat a test közegben felvett helyzete: felemelkedhet vagy lemerülhet. Ezt a módszert használják a **halak** az úszóhólyagjuk térfogatváltoztatásával, valamint a **tengeralattjárók** az átlagsűrűségük megváltoztatásával.

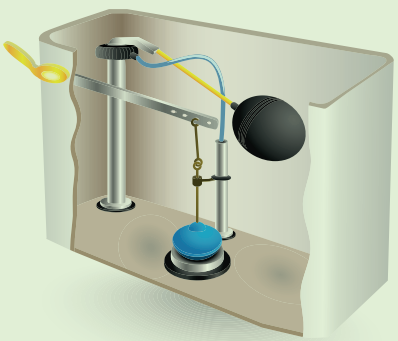
Fontos megjegyezni, hogy a tengeralattjárók a merülés során nem engednek ki levegőt a nagyobb átlagsűrűség érdekében, hiszen arra a levegőre szükségük lesz a felemelkedéskor, hanem a levegőt egy segédtartályba sűrítik, és annak a helyére áramlik be a tengervíz.

**Vízi közlekedési eszközeink** zöme úszik a folyókon, tavakon, tengereken, hiszen átlagsűrűségük kisebb a víz sűrűségénél. Egy adott helyet a vízben a víz felszínén úszó bójával jelölhetünk meg.

A levegőben a **hőlégballon** az átlagsűrűségét melegítéssel, illetve levegőkieresztéssel szabályozza.

**WC-tartály**

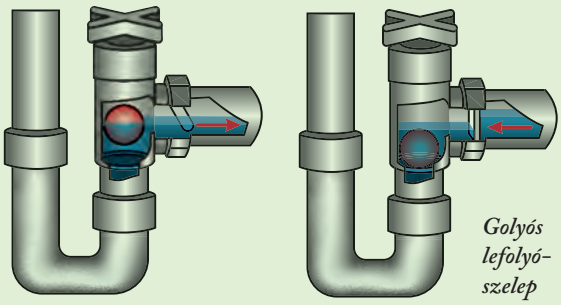
A testek úszását használja ki a **WC-tartály** mechanizmusa is. Amikor az öblítőkart lehúzzuk, az emelőpálca felemeli az öblítőszelepet, az kinyit, és a tartályban lévő víz kifolyik az öblítőnyíláson. Ahogy a tartályból fogy a víz, és csökken a vízszint, úgy a felszínen nyugvó úszó is ereszkedni kezd a vízzel, és az úszó karja megnyitja a beömlőszelepet, ami elkezdi tölteni a tartályt. Eközben a gyorsan kiömlő víz után az öblítőszelep újra lezár, így elkezdődik a tartály feltöltése. A vízszint emelkedése egyben az úszót is emeli, melynek karja egy bizonyos vízszint elérésekor visszazárja a beömlőszelepet.



*WC-tartály*

**Golyós lefolyószelep**

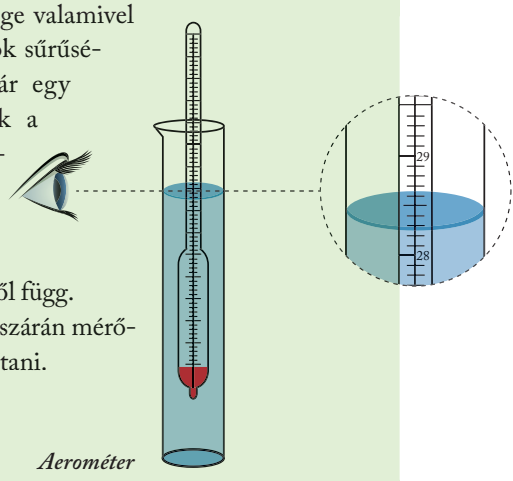
Az úszás jelensége figyelhető meg a **golyós lefolyószelep** működésében is. Amíg a víz folyik, addig a szelepgolyó a víz felszínén úszva engedi továbbfolyni a vizet. Ha a lefolyóba már több víz nem kerül, a vízszint csökken, és a szelepgolyó leereszkedik, elzárva a csatornából visszaáramló bűz útját.



*Golyós lefolyószelep*

**Aerométerek**

A felhajtóerőt alkalmazzák az úszó sűrűségmérőkben, **areométerekben**. A hosszúkás, szárán skálával ellátott eszköz átlagsűrűsége valamivel kisebb a folyadékok sűrűségénél, ezért a szár egy része kiemelkedik a folyadékból. A kiemelkedő rész aránya a felhajtóerőtől, az pedig a folyadék sűrűségétől függ. Így a sűrűségmérő szárán mérőskálát lehet kialakítani.




*Aerométer*

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

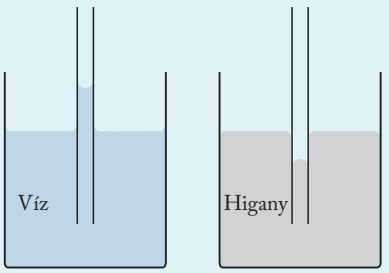
1. Véletlenül elejtünk egy pohár pezsgőt. Gyöngyözik-e a pohár fala az esés alatt?
2. A mofetta vagy szárazfürdő egy olyan gyógymedence, amelybe a föld mélyéről feljövő szén-dioxidot eresztenek. Az érrendszeri és mozgásszervi betegek ebbe a medencébe ülnek bele mellkasig. Miért lehet nyitott a medence teteje, és miért nem távozik a szén-dioxid a medencéből?
3. Mi lehet a színes csíkos koktélok elkészítésének szabálya?
4. Szükséges-e erőt kifejtenünk ahhoz, hogy egy ólomgolyót egy üveg higany közepében tartsunk? Ha igen, akkor milyen irányú erőre van szükség?
5. Szódavízbe ejtett mazsola a víz felszíne és alja közt liftezik. Mi lehet ennek a magyarázata?

# 3. Molekuláris jelenségek

**EMLÉKEZTETŐ**

### Kapillárisjelenség

Kis belső átmérőjű üvegcsövet (hajszálcső, kapilláris) vízzel teli pohárba állítva azt láthatjuk, hogy a csőben a vízszint a belső átmérőtől függően akár több centiméterrel is magasabb, mint a pohárban. Higany esetén a csőben a higanyszint alacsonyabban van, mint a pohárban, ez a **kapillárisjelenség**. A jelenség alapján veszi fel a szivacs a vizet, egy kerti fáklya kanóca a petróleumot, és fontos szerepe van a növények gyökérzetének vízfelvételében és a talaj vízháztartásában is.



*Hajszálcső vízben és higanyban*

## A folyadékmodell pontosítása

A folyadékok mechanikai jelenségeit eddig olyan folyadékmodellel magyaráztuk, amelyben a folyadékot egymással érintkező, egymáson elguruló golyók halmazának gondoltuk. Ebből adódott az összenyomhatatlanság és az önthetőség tulajdonsága. Bizonyos jelenségeket, például a már tanult kapillárisjelenséget, nem lehet ezzel a modellel megmagyarázni, a modellünket pontosítani kell. Ezek a jelenségek mind azt mutatják, hogy a folyadékrészecskék **vonzó kölcsönhatásba** kerülnek a környező részecskékkel. A vonzással magyarázható jelenségeket **molekuláris jelenségeknek** nevezzük, a továbbiakban ezeket a jelenségeket vizsgáljuk meg. A vonzás mibenlétét, a részecskék közötti kötéseket már a kémia tudománya vizsgálja.

## Kohéziós és adhéziós erő

A folyadékmolekula által a szomszédos molekulákkal kialakított vonzó kölcsönhatás alapvetően kétféle lehet.

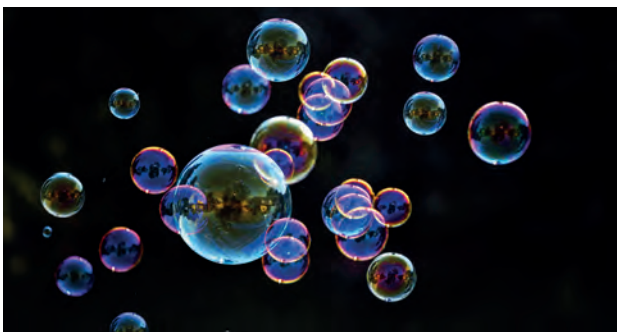
**Két azonos folyadékmolekula közötti vonzó kölcsönhatást kohéziós erőnek nevezzük** (kohézió jelentése: összetapadni).

**Két különböző minőségű molekula között kialakuló vonzó kölcsönhatást adhéziós erőnek nevezzük** (adhézió jelentése: hozzátapadni). Az adhéziós erő különböző halmazállapotú anyagok molekulái között is kialakul.

## Folyadékcseppek

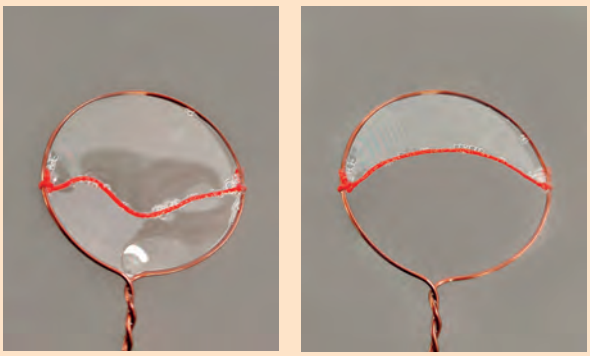
A folyadékmolekulák közötti kohéziós erő az oka annak, hogy kevés folyadékot nagy, vízszintes felületre kiöntve, az cseppekre szakadva teríti be a felületet. A **folyadékcseppeket** a molekulák közötti kohéziós erő tartja egyben. A csepp belsejében lévő molekulára a szomszédos molekulák minden irányból kohéziós vonzóerőt fejtenek ki, ezek eredő ereje nulla. A csepp felszínén lévő molekulát csak a felszín alatt lévő, szomszédos folyadékmolekulák kohéziós ereje vonzza, melyek eredője egy, a felszínre merőleges, a folyadék belseje felé mutató eredő erő. (A felszín felett lévő anyag – általában levegő – molekuláinak adhéziós ereje sokkal kisebb, hatásuk elhanyagolható.) Ezen erők együttese a folyadék egészét minden oldalról összehúzza, a folyadékot gömbbé rendezi. Ezt az alakot a külső erők, a nehézségi és tartóerők torzíthatják. A csepp méretét a kohéziós erő nagysága szabja meg. Ugyanígy magyarázható meg a szappanbuborékok gömb alakja is.


*Folyadékcseppek levél felszínén*


*A lebegő szappanbuborékok gömb alakúak*

**KÍSÉRLET**

Egy drótkeret átmérője mentén rögzítsünk lazán egy cérnaszálat, majd a keretet mártsuk szappanos oldatba. Az oldatból kiemelve a keretben szappanhártya alakult ki, melynek közepén a szappanoldathoz tapadva lazán tekereg a cérnaszál. Lyukasszuk ki a cérnaszál egyik oldalán a szappanhártyát! Azt tapasztaljuk, hogy a másik oldalon lévő szappanhártya összezsugorodik, a cérnaszál ívesen kifeszül. Ezzel a kísérlettel kimutatható, hogy a szappanhártya cérnaszálnál található felszínén a felszínre merőleges, a folyadék felé mutató összehúzó erők működnek.



*Szappanhártya kifeszülése drótkeretben*

## Felületi feszültség

Amikor szappanbuborékot fújunk, akkor munkát végzünk, hogy a szappanbuborék felületét megnöveljük. Az előző kísérletben a szappanbuborék kifeszítette a cérnaszálat, munkát végzett, mialatt a saját felületét összehúzta. Ez azt jelenti, hogy a folyadékok felszínének kialakításához munkát kell végezni, a folyadék kialakult felszíne **felületi energiával** rendelkezik. Gondos mérésekkel kimutatható a következő összefüggés.

**A folyadék felületét megváltoztató munka nagysága egyenesen arányos a folyadékfelszín nagyságának megváltozásával. Az arányossági tényezőt felületi feszültségnek nevezzük.**

**Jele: $\sigma$ (szigma).**

**Mértékegysége: $1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.**

$W = \sigma \cdot \Delta A$

A felületi feszültség az adott folyadékra jellemző mennyiség, értéke a *Négyjegyű függvénytáblázatokból* kikeresheto. Nagysága függ a hőmérséklettől, hiszen a nagyobb hőmozgás miatt kevesebb munkával is lehetséges ugyanakkora felületnövekedést elérni. A felületi feszültség hőmérsékletfüggését Eötvös Loránd dolgozta ki.

## Minimálfelületek

Az előző összefüggés alapján meghatározhatjuk egy $A$ nagyságú felszínnel rendelkező folyadék felületi energiáját:

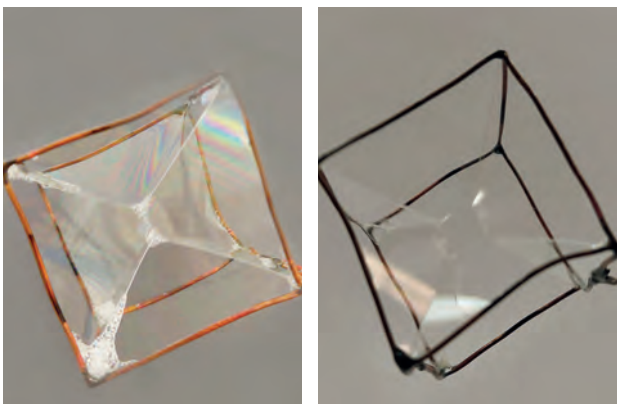
$E_{\mathrm{fel}} = \sigma \cdot A$

Minél kisebb a felület, annál kisebb a felületi energia is.

A folyadék nyugalmi helyzetében a lehető legkevesebb többletenergiával rendelkezik, ezért a felületi energia ilyenkor a körülményekhez képest minimális. Ezért *a nyugalomban lévő folyadék felszíne az adott körülményekhez képest a lehető legkisebb*, ezeket **minimálfelületeknek** nevezzük.

Súlytalanság állapotában (pl. a Nemzetközi Űrállomáson vagy szabadeséskor) a vízcseppek a térfogatukhoz tartozó lehető legkisebb felületet, a gömb alakot veszik fel. Az asztalon nyugvó vízcsepp már ovális alakú a tartóerő hatása miatt, ebben az esetben ez az alak rendelkezik a lehető legkevesebb többletenergiával.

Dróthurokban a szappanoldat lapos korong alakot vesz fel (felszíne két körlap, melyek között kevés folyadék található). Térbeli drótkeretben olyan érdekes szappanhártya-felületek alakulnak ki, amelyek az adott körülmények között a lehető legkisebb felülettel rendelkeznek.



*Térbeli drótkeretben kialakuló minimálfelületek*

## Nedvesítés jelensége

A folyadékot tartó edény fala közelében a folyadékok felszíne sajátos alakot vesz fel. Például üvegfal közelében a víz felszíne homorú, a higany felszíne domború. A görbült folyadékfelszínt más néven **meniszkusznak** nevezzük.

A meniszkusz jellegét a folyadék kohéziós ereje és az edény falával létrejött adhéziós ereje együttesen alakítja ki. Ha az adhéziós erő nagyobb, mint a kohéziós erő, akkor a felszín homorú lesz, és azt mondjuk, hogy a folyadék **nedvesíti** az edény falát. Ha az adhéziós erő kisebb a kohéziós erőnél, akkor a felszín domború lesz, ilyenkor a folyadék **nem nedvesíti** az edény falát.

## ALKALMAZÁSOK

A víz a legtöbb anyagfajtájú edényt nedvesíti, de például a viaszos felületet nem nedvesíti. A viasz és a víz esetében a kohéziós erő nagyobb, mint az adhéziós erő. Ezért azokat a felületeket, amelyeket a víztől meg akarunk óvni, viaszos réteggel vonjuk be, ezt **impregnálásnak** nevezzük. Sátrat, kabátot, cipőt, sőt asztalterítőt és szélvédőt is impregnálnak, hogy „víztaszító”, vízlepergető felületet hozzanak létre.

Az is megoldás lehet, ha magát a felületet alakítjuk úgy, hogy a vízcseppek leperegjenek róla. A lótusznövény levelénél és virágszirmainál figyelték meg, hogy felületükről az esőcseppek mindig leperegnek. Kiderült, hogy a felület mikroszkopikus kidudorodásai okozzák azt, hogy az adhéziós erők kevésbé tudnak kialakulni. A jelenséget a növényről **lótuszeffektusnak** nevezik, és ma már a nanotechnológiának köszönhetően számos helyen alkalmazzák, például üvegfelületeken, karosszérián, útjelző táblákon, főzőfelületeken, sőt még a kontaktlencséken is.

A **teflonfelület** olyan vékony bevonatot jelent egy felületen, amelyet a vízen kívül a legtöbb folyadék és számos más anyag nem nedvesít, ezért szívesen alkalmazzák sütőfelületek bevonására leragadásmentessége miatt.

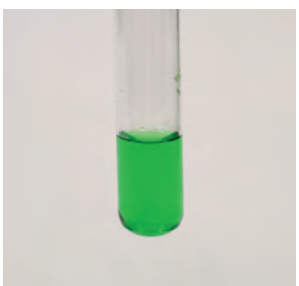
A víz felületi feszültségét szappan, illetve **mosószer** oldásával jelentősen csökkenteni lehet. Ennek hatására a víz jobban nedvesíti a texileket, könnyebben bejut a finom szövetszálak közé, és így a szennyeződéseket is könnyebben el tudja távolítani. A szappanos víz lecsökkent felületi feszültsége miatt lehet nagy méretű, kevésbé szétszakadó szappanbuborékokat fújni.

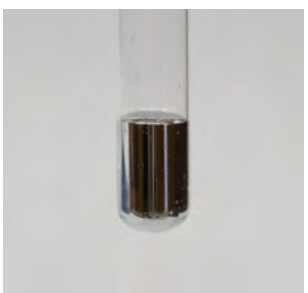
Könnyű alumíniumérmét, például régi fillért óvatosan víz felszínére tehetünk anélkül, hogy belemerülne és lesüllyedne. A víz viszonylag nagy felületi feszültsége, mint valami rugalmas hártya, megtartja a könnyű érmét.

Ezt a jelenséget használják ki a különféle vízi rovarok és más állatkák.

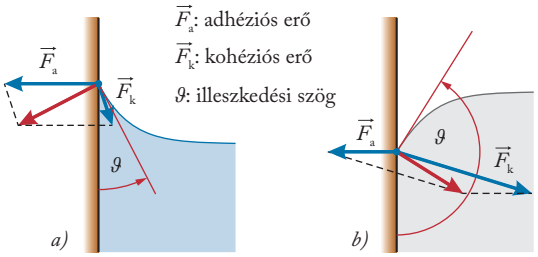


*A vízi rovarok súlyát megtartja a felületi feszültség hatására létrejövő erő*





*Folyadékok meniszkusza*




*Illeszkedési szög nedvesítés és nem nedvesítés esetén*

A nedvesítés jelensége nem kizárólag a folyadékok tulajdonsága, ezért nem mondhatjuk, hogy egy folyadék nedvesítő, vagy nem nedvesítő. Inkább fogalmazzunk úgy, hogy a folyadék az adott felületet nedvesíti, vagy nem nedvesíti. A nedvesítés jelenségével magyarázható a korábban tanult és az emlékeztetőben felidézett kapillárisjelenség is.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. A víz felületi feszültsége 0,0725 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$, a higanyé 0,472 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$, az olajé 0,0268 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Melyik folyadékcsepp lesz gömbölyűbb, melyik laposabb? Hogyan magyarázható ez a felületi feszültség értékeivel?
2. Ha a cérnaszálas drótkeretes kísérletben a cérnaszálat nem kötjük ki a keret két oldalához, hanem egy zárt hurkot képezve azt óvatosan a hártyába helyezzük, majd a hurok belsejében kilyukasztjuk a hártyát, akkor milyen elrendeződés alakul ki?
3. Az antarktiszi császárpingvinek extrém hideg időben egymáshoz búj nak, egy nagy csoportot alkotva. Azért teszik, hogy egymást melegítve a legkisebb energiaveszteséget szenvedjék el. A csoport formája közel kör alakú. A peremen lévő pingvinek a csoport belseje felé nyomulnak, a belül lévők idővel a peremre kerülnek. Hogyan modellezhető a folyadékok kohéziós ereje és felületi feszültsége a pingvinek csoportosulásával? Hogyan magyarázható, hogy a kör „minimálfelület”?

# 4. Folyadékok és gázok áramlása

**EMLÉKEZTETŐ**

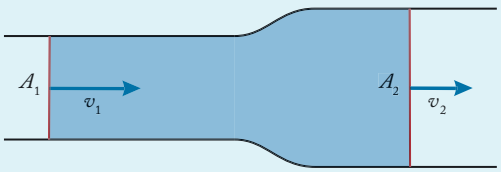
## Kontinuitási egyenlet

Ha a folyadékokat összenyomhatatlannak tekintjük, akkor a tapasztalatok szerint **az áramlási cső keresztmetszetének és az áramlási sebességnek a szorzata az áramlás bármely pontján ugyanakkora**.

**Az összenyomhatatlan áramló folyadékokra fennáll a kontinuitási (más néven folytonossági) egyenlet:**

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

A kontinuitási törvény következménye, hogy az áramlási sebesség szűkülő keresztmetszetnél növekszik, táguló keresztmetszetnél pedig csökken.




*A kontinuitási törvény*

*Megjegyzés:* A kontinuitási törvény érvényes nem nagy sebességgel áramló gázok esetén is, ugyanis ilyenkor a gáz csak elhanyagolható mértékben összenyomható.

## Bernoulli-egyenlet

Az áramló folyadékok vagy gázok nyomását vizsgálva megállapítottuk, hogy a még nyugalomban lévő közeg $p_0$ nyomása két összetevőre bomlik: az áramlás irányába ható $p_d$ torló-, más néven dinamikus nyomásra és az oldalfalakra ható $p_{sz}$ sztatikus nyomásra. A dinamikus nyomást az áramlás útjába tett kezünkkel is érezhetjük, nagysága függ az áramlás sebességétől:

$$p_d = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2$$

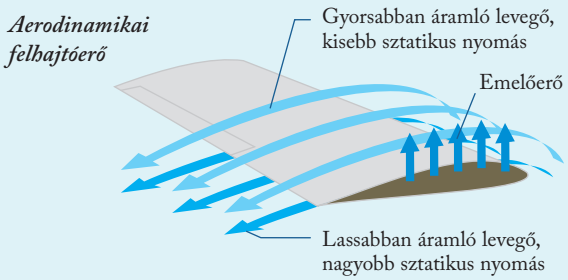
Az áramló közegek nyomásviszonyait a **Bernoulli-törvény** összefüggése adja meg:

$$p_0 = p_d + p_{sz} = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 + p_{sz} = \text{állandó}$$

Ez alapján a Bernoulli-törvény egyik megfogalmazása: **Áramló közegben a növekvő áramlási sebesség a csökkenő sztatikus nyomás miatt alakul ki.**

## Aerodinamikai felhajtóerő

A Bernoulli-törvény legjelentősebb következménye az **aerodinamikai felhajtóerő**. A repülőgépek nagy felületű szárnyainak kiképzése olyan, hogy a repülő gyors haladása esetén a szárnyak fölött nagyobb sebességgel áramlik a levegő, mint alattuk. Ezért a szárny felső felületére valamivel kisebb sztatikus nyomás hat, mint a szárny alsó felületére. A két nyomás különbségéből származó eredő erő emeli fel és tartja a levegőben a repülőgépet.




Az áramlási törvényeket ezenkívül még számos helyen alkalmazzák.

**Példa:**

- Nagyobb áramlási sebességet és ezzel együtt meszszebbre jutó locsolást eredményez, ha a locsolócső végének keresztmetszetét hüvelykujjunkkal szűkítjük.
- A versenyautók terelőszárnya egy „fordított" szárnyfelület, melyen az áramló levegő a föld felé mutató aerodinamikai „felhajtóerőt" fejt ki, megnövelve a nyomóerőt, ezzel a tapadást, ami végül az autó irányítását teszi stabilabbá.
- A sztatikus nyomás csökkenését használja ki a folyadékporlasztó vagy illatszerszóró, a vízlégszivattyú és a Bunsen-égő is.

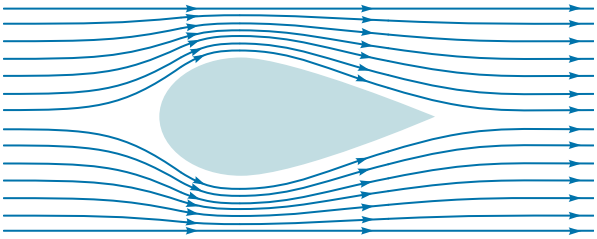
## Közegellenállás

Ha az áramló folyadék vagy gáz nem ideális, tehát van belső súrlódása, viszkozitása, akkor ez a közeg a belehelyezett testre közegellenállási erővel hat.

**Az áramló folyadékban vagy gázban a közegellenállási erő mindig olyan irányú, hogy csökkenti a test közeghez viszonyított mozgását. A közegellenállási erő nagysága négyzetesen arányos a test közeghez viszonyított sebességével, ezenkívül függ a közeg sűrűségétől, a test áramlásra merőleges keresztmetszetének nagyságától és a test alakjától.**

## Az áramló közeg jellemzése

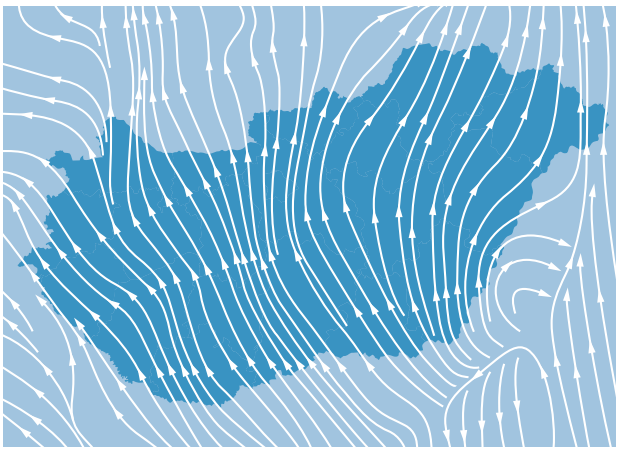
Az áramló közeg mozgását nem tudjuk egyetlen sebességadattal jellemezni. Az áramló közeg által kitöltött **áramlási tér** minden egyes pontjában és minden pillanatban meg kell határoznunk a közeg sebességét, ami nem könnyű feladat. Ehelyett az áramlási teret egy adott pillanatában a tér **áramvonalaival** szemléltethetjük. A közeg sebessége az adott ponton átmenő áramvonal érintőjének irányába mutat, a sebesség nagyságát a pont környezetében lévő áramvonalak sűrűsége jellemzi.



*Áramlási tér szemléltetése áramvonalakkal*

Az áramlási tér és az áramvonalak lehetnek időben változatlanok, és lehetnek időben változók.

**Példa:** Magyarország széltérképén egy adott időpillanatban felvett áramlási teret látunk.



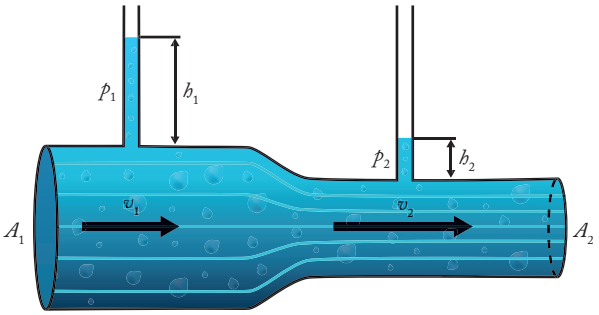
*Magyarország széltérképe*

## Az áramló folyadék nyomása

Vizsgáljuk meg egy változó, például szűkülő keresztmetszetű, vízszintes áramlási csőben az összenyomhatatlan közeg nyomását!

A kontinuitási törvény miatt a cső szűkebb tartományában *(ld. ábrán)* a $v_2$ áramlási sebesség nagyobb. Ez akkor lehetséges, ha a szűkebb csőszakaszban a közeg $p_2$ nyomása kisebb, mint a nagyobb keresztmetszetű szakaszon, így a $\Delta p = p_1 - p_2$ nyomáskülönbséggel magyarázható a jelenség.

Az ábrán a csőszakaszok falán lévő kis függőleges csövekben álló $h_1$ és $h_2$ folyadékoszlopok magassága jelzi az áramló folyadékban uralkodó nyomásokat.




*Egyenes, szűkülő csőben áramló folyadék nyomása*

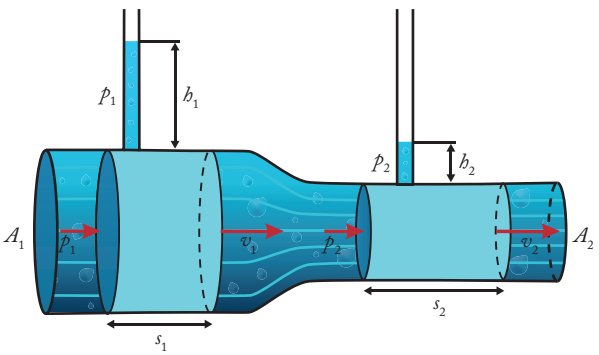
## Bernoulli-egyenlet levezetése

A tágabb csőszakaszban az $A_1$ felületre kívülről ható $p_1$ nyomású folyadék $F_1$ erővel tolja, míg a szűkebb csőszakaszban az $A_2$ felületre kívülről ható $p_2$ nyomású folyadék $F_2$ erővel visszatartja a közbülső folyadékrészt.

**A nyomáskülönbségből származó eredő erő:**

$$F_e = F_1 - F_2 = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2$$

Írjuk fel az $F_e$ eredő erő $\Delta t$ idő alatti munkavégzését! Az $A_1$ felület elmozdulása $s_1 = v_1 \cdot \Delta t$, az $A_2$ felületé $s_2 = v_2 \cdot \Delta t$.




*A nyomáskülönbség hozza létre az eredő erőt*

Így **a nyomáskülönbségből származó erők munkája**:

$$W = F_1 \cdot s_1 - F_2 \cdot s_2 = p_1 \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

A kontinuitási törvény miatt az $A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$, ami egyben a $\Delta t$ idő alatt befolyó, illetve kifolyó folyadékrész $\Delta V$ térfogata. Ezzel a végzett munka:

$$W = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V \qquad (1)$$

A munkatétel szerint az eredő erő munkája a vizsgált közeg mozgási energiáját változtatja meg.

Határozzuk meg az áramló folyadék mozgási energiájának megváltozását!

Képzeljük el úgy a kis $\Delta t$ idő alatti áramlást, mintha a cső tágabb végéről a $\Delta V$ térfogatú folyadékrész átkerülne a cső szűkebb végére. A vizsgált közeg mozgási energiája tehát a cső szűkebb végén megjelenő folyadékrész mozgási energiájával növekszik, míg a cső tágabb végén eltűnő folyadékrész mozgási energiájával csökken:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \rho\cdot \Delta V\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot \rho\cdot \Delta V\cdot v_1^2 \qquad (2)$$

A munkatétel alapján: $W = \Delta E_m$. Így az (1) és (2) egyenletek egyenlőek egymással. Egyszerűsítve $\Delta V$-vel:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\cdot \rho\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\cdot v_1^2$$

Átrendezve az egyenletet a Bernoulli-törvény egy alakját kapjuk:

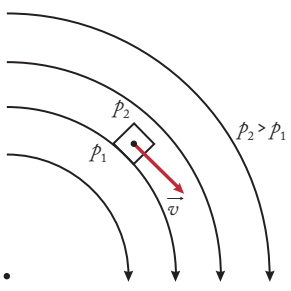
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2$$

**Bernoulli törvénye szerint egy összenyomhatatlan áramló közegben a $p + \frac{1}{2}\rho\cdot v^2$ összeg az áramlási tér minden pontjában ugyanakkora.**
**Az összeg első tagját sztatikus nyomásnak, a második tagját dinamikus nyomásnak nevezzük.**

## Nem egyenes vonalban áramló folyadék nyomása

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

Vizsgáljuk meg, hogy milyen nyomásviszonyok vannak egy egyenletes sebességgel ívesen áramló közegben, például egy vízvezetékhajlatban!



*Ívesen áramló folyadék nyomása*

Az ábrán látható, kiválasztott folyadékrész egyenletes körmozgást végez, centripetális gyorsulása van, ehhez a körív középpontja felé mutató eredő erőre van szükség. Ez az erő most is a folyadékban kialakuló nyomáskülönbséggel magyarázható, a $p_1$ nyomásnak kisebbnek kell lennie a $p_2$ nyomásnál.

**Az ívesen áramló közegben az ív középpontjához közelebbi, belső tartományban kisebb a nyomás, mint a külső tartományban.**

Sok áramlási jelenséget a Bernoulli-törvény helyett helyesebb a fenti magyarázattal indokolni.

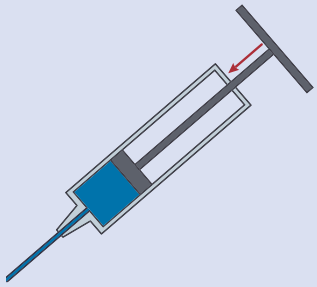
### KIDOLGOZOTT FELADAT

Védőoltás során egy 80 mm² keresztmetszetű fecskendővel 5 ml vakcinát adnak be 0,8 mm belső átmérőjű injekciós tűvel. A fecskendezés 5 másodpercig tart.

Mekkora erőt fejt ki az orvos, ha az izomban 2000 Pa túlnyomás alakul ki?

A vakcina sűrűsége megegyezik a víz sűrűségével, a légköri nyomás legyen $10^5$ Pa.

#### MEGOLDÁS



Adatok:
$A = 80\ \text{mm}^2$, $V = 5\ \text{ml}$,
$d = 0{,}8\ \text{mm}$, $t = 5\ \text{s}$,
$p = 2000\ \text{Pa}$,
$p_k = 10^5\ \text{Pa}$.

$F = ?$

A fecskendőből a tűbe jutó vakcinára érvényes a kontinuitási törvény, valamint a Bernoulli-törvény:

$$A_1\cdot v_1 = A_2\cdot v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2$$

A fecskendőből kiáramló vakcina térfogata:

$$\Delta V = A_1\cdot v_1\cdot \Delta t$$

Ebből meghatározhatjuk az áramlási sebességet:

$$v_1 = \frac{\Delta V}{A_1\cdot\Delta t} = \frac{5000\ \text{mm}^3}{80\ \text{mm}^2\cdot 5\ \text{s}} = 12{,}5\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} = 1{,}25\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A kontinuitási törvényből kiszámítható az áramlási sebesség a tűben. A tű keresztmetszetét a belső átmérőjéből számíthatjuk ki:

$$A_2 = r_2^2\cdot\pi = (0{,}4\ \text{mm})^2\cdot\pi \approx 0{,}5\ \text{mm}^2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\cdot v_1 = \frac{80\ \text{mm}^2}{0{,}5\ \text{mm}^2}\cdot 1{,}25\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az izom ellenállása miatt a tű végén a nyomás:

$$p_2 = 10^5\ \text{Pa} + 2000\ \text{Pa} = 102\,000\ \text{Pa}.$$

A Bernoulli-törvényből a fecskendőben uralkodó nyomás kiszámítható:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2$$

$$p_1 = 102\,000\ \text{Pa} + \frac{1}{2}\cdot 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\left(2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\left(1{,}25\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 104\,000\ \text{Pa},$$

ami $\Delta p = p_1 - p_2 = 4000\ \text{Pa}$ túlnyomás jelent.

Ezt a túlnyomást biztosítja az orvos ereje:

$F = \Delta p \cdot A_1 = 4000\ \text{Pa}\ 8 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2 = 0{,}32\ \text{N}$

Az orvos a fecskendőre 0,32 N erőt fejt ki.

## ALKALMAZÁSOK

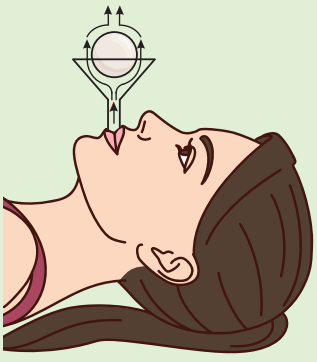
### Néhány áramlási jelenség

Folyassunk a csapból egyenletesen vizet! A függőleges vízsugár alakja egy lefelé keskenyedő áramlási cső alakját veszi fel. A lefelé eső víz a gravitáció hatására gyorsul, sebessége az ereszkedéssel egyre nő, ezáltal a kontinuitási törvénynek megfelelően az áramlási keresztmetszete csökken.



*Csapból kifolyó vízsugár elvékonyodik*

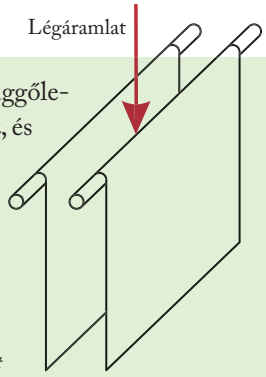
Fújjunk erősen egy tölcsérbe, miközben pingponglabdát teszünk bele! A labda rezegve hozzá-hozzákoccan a tölcsér falához, de nem képes eltávolodni tőle. Ennek magyarázata, hogy a pingponglabda körül ívesen áramló levegő belső tartományán kisebb a levegő nyomása, mint a labda tetején már lassabban és domború ívvel áramló levegőrészben. Ez a nyomáskülönbség a labdára egy lefelé, a tölcsér szűkülete felé mutató erőt eredményez. A tölcsérhez nyomódó labda elzárja egy pillanatra a légáram útját, így a befújt levegő megemeli a labdát, de a szűk részen nagy sebességgel áramló levegő ismét nyomáskülönbséget fog eredményezni.



*Tölcséren átáramló levegő rezgeti a pingponglabdát*

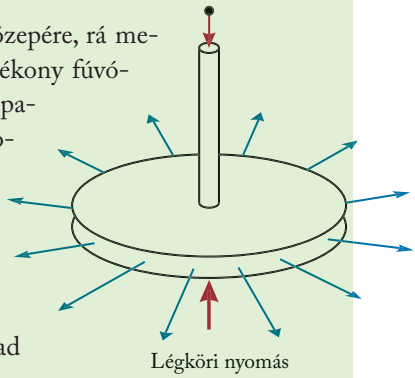
Hasonlóan magyarázhatjuk a következő jelenségeket is.

Ha két könnyű papírlapot függőlegesen tartunk közel egymáshoz, és a két papír közé levegőt fújunk, akkor a két papírlap összehajlik, egymást csapdosva lobog.



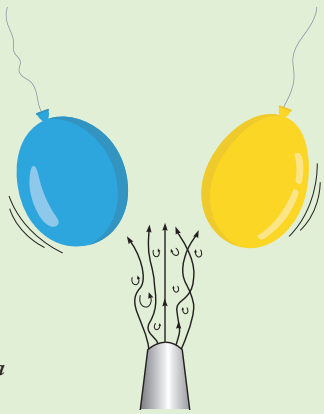

*Két papírlap között áramló levegő egymás felé mozdítja a papírlapokat*

Egy papírkorong közepére, rá merőlegesen rögzítsünk vékony fúvócsövet, majd tartsuk a papírkorongot párhuzamosan egy vele egybevágó papírlap fölé! Fújjunk a csőbe! Ekkor az alsó papírlap felemelkedik, és rezegve hozzá-hozzátapad a felső koronghoz.



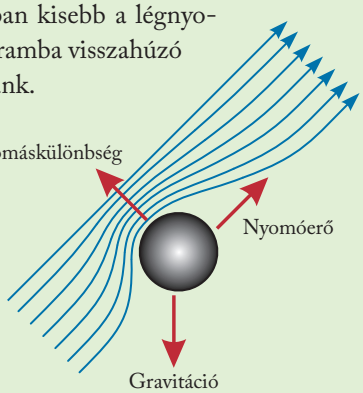

*Két papírkorong között áramló levegő fenntartja az alsó korongot*

Függesszünk fel fonálon két könnyű lufit egymáshoz közel! Fújjunk levegőt a két lufi közé! A lufik pattogva egymáshoz igyekeznek tapadni.



*Két léggömb között áramló levegő egymás felé mozdítja el a léggömböket*

Hajszárító felfelé fúvó légárama útjába óvatosan illesszünk pingponglabdát! A labda egy bizonyos hely körül kavarogva egyensúlyi helyzetben marad. A labda akkor sem esik le, ha a légáram irányát kissé megdöntjük. A labdát ívesen megkerülő légáram belső tartományában kisebb a légnyomás, amit egy légáramba visszahúzó hatásként érzékelünk.



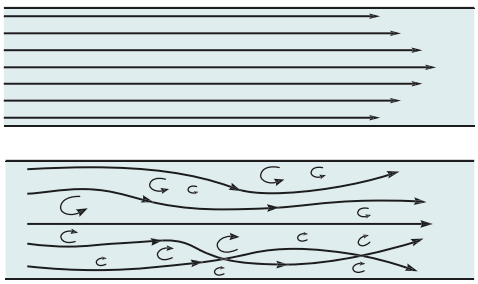

*A labdát kerülő légáramban lecsökken a légnyomás*

## Viszkózus közeg áramlása

Ha az áramló közegben nem tekinthetünk el a viszkozitástól, akkor az eddig tárgyalt törvények már nem teljesülnek. Például a belső súrlódás következménye, hogy a cső falánál az áramlási sebesség nulla. Hasonlóan a folyó partján és a meder szélénél gyenge a sodrás, a folyó belsejében erősebb.

Ezt a **réteges áramlást** úgy képzelhetjük el, mint amikor kihúzunk egy teleszkópos csövet.

Egy kritikus áramlási sebesség fölött már nem réteges az áramlás. Megjelennek benne **örvények**, melyek változtatják helyüket, újabbak jelenhetnek meg és tűnhetnek el. Ezt az időben folyton változó, kaotikus áramlást **turbulens áramlásnak** nevezzük. A közegben megjelenő örvények keletkezhetnek szilárd test körül, vagy különböző áramlási sebességű közegek határfelületén.



*Réteges és turbulens áramlás*

**Példa:** Turbulens áramlásnak megfelelő örvénysor lép fel egy folyószűkületnél, egy vízben haladó motorcsónak mögött, vagy légörvények keletkeznek a Jupiter felhőzetében különböző sebességű áramlási övek határfelületén.



*Örvénysor folyószűkületnél*

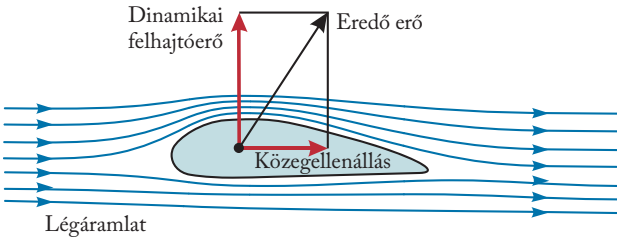
## Viszkózus közegben mozgó testek

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

A közeg belső súrlódása a közegben lévő testekre is hatással lesz. Ha egy nyugvó közegben egy test mozog, akkor a testre a közeg erőt fejt ki. Ugyanez a hatás akkor is érvényesül, ha a nyugvó test körül a közeg áramlik, vagy ha a test egy áramló közegben mozog.

Általánosan: erő hat a testre, ha a közeghez képest a relatív sebessége nem nulla. Az erő iránya általában eltér az áramlás vagy a relatív mozgás irányától, ezért az erőt mindig két komponensre bontjuk: a relatív mozgással párhuzamos ($F_{rel,||}$) és az arra merőleges komponensre ($F_{rel,\perp}$).

**Viszkózus közegben nem nulla relatív sebességgel mozgó testre erő hat, melynek a mozgással párhuzamos komponensét ($F_{rel,||}$) közegellenállásnak, az arra merőleges komponensét ($F_{rel,\perp}$) dinamikai felhajtóerőnek nevezzük.**




*Repülőgépszárny körül áramló közeg által kifejtett erők*

**Dinamikai felhajtóerő** akkor jelenik meg, ha a test aszimmetrikus (pl. szárnyprofil), vagy aszimmetrikusan helyezkedik el az áramlási térben (pl. diszkosz).

Fontos megjegyezni, hogy az elnevezés ellenére a dinamikai felhajtóerő nem csak függőlegesen felfelé mutató lehet (pl. a versenyautók terelőszárnyánál leszorítóerőként jelenik meg).

*A* **közegellenállás** *mértéke attól függ, hogy az áramlás során kialakulnak-e örvények, vagy sem.* Örvénymentes, réteges áramlásnál a közegellenállás a súrlódó közeg hatására alakul ki, ilyenkor a közegellenállás mértéke a viszkozitással és a relatív sebességgel egyenesen arányos. Ha az áramlás turbulenssé válik, a test mögött örvények keletkeznek, és ott a közeg nyomása jelentősen lecsökken, és az örvényeknek visszahúzó hatása lesz. Ilyenkor a közegellenállás mértéke a közeg relatív sebességének négyzetével arányos.

Az áramlás útjába kerülő testekre ható erők tanulmányozásában, valamint a turbulens áramlások és az örvények elméletében a magyar származású **Kármán Tódor** (1881–1963) végzett jelentős tudományos munkát és dolgozott ki alapvető elméletet. Hozzájárult a repüléstechnika fejlődéséhez, a szuperszonikus repülés és az űrrepülés kifejlesztéséhez.

**ALKALMAZÁSOK**

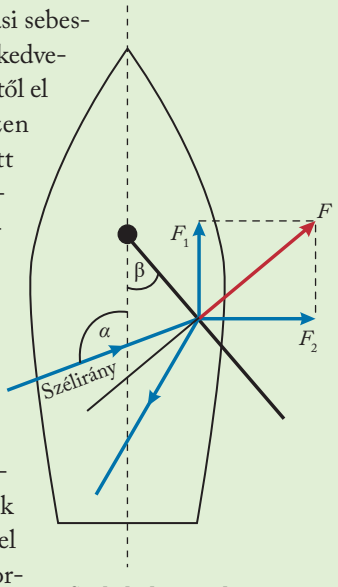
### A vitorlákra ható erő

A közegellenállás felhasználható egy test gyorsítására is, ezt használják ki például a vitorlás hajók.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a kifeszített vitorlát merev síklapnak, az áramlást változatlan irányú-

nak és egyenletes áramlási sebességűnek, valamint olyan kedvezőnek, hogy az örvényektől el tudjunk tekinteni. Ezen egyszerűsítések mellett figyeljük meg a felülnézeti ábrán a szél és a vitorla elhelyezkedését!

A hajótest szimmetriasíkja egyben a haladási irány is. A szél a haladási iránnyal $\alpha$ szöget bezáróan fúj, a vitorlát a haladási iránytól $\beta$ szöggel fordítottuk el. Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a szél a vitorlába beleütközve a visszaverődés szabályainak megfelelően visszatérül a vitorláról. Ennek a kölcsönhatásnak az eredménye a vitorla síkjára merőleges $F$ erő.



*Szél által a vitorlára kifejtett erő*

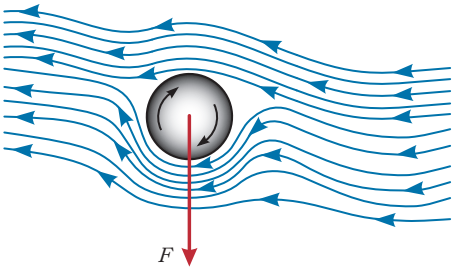
Ennek az erőnek van egy, a hajótest szimmetriasíkjával párhuzamos $F_1$ komponense, és egy arra merőleges $F_2$ komponense. A vitorlával szorosan egybekötött hajótestet az $F_1$ erő hajtja előre. A hajótest alakja biztosítja azt, hogy a vízben a haladási iránnyal szemben kis közegellenállás alakuljon ki, ezáltal az $F_1$ erővel ellentétesen minimális erő gátolja az előrehaladást, ugyanakkor a vízben oldalirányban nagy közegellenállás alakul ki, ami tulajdonképpen az $F_2$ erőt kiegyenlíti, így a hajó oldalirányba gyakorlatilag nem mozog.

Az ábráról az is kiderül, hogy ha az $\alpha$ szög csak valamivel nagyobb a $\beta$ szögnél, azaz közel széllel szembe állítjuk a hajót, még akkor is kialakul az $F_1$ erő, igaz, a nagysága kisebb lesz. Tehát egy jó kormányos még szél ellen is képes haladni a vitorlással.

## Magnus-effektus – A csavart labda pályája

Vizsgáljuk meg egy csavarva mozgatott labda, például csavartan rúgott focilabda vagy nyesett pingponglabda mozgását! A levegőben mozgó labdát tekinthetjük úgy is, mintha egy helyben forgó labda körül levegő áramlana. Az áramlás során most sem tekinthetünk el a levegő belső súrlódásától.

Az ábrán az áramlási vonalak sűrűségéből is látható, hogy a labda két oldalán eláramló levegő sebessége eltérő. Ez azért van, mert a súrlódás miatt a forgó labda magával sodorja a vele érintkező légréteget, így az egyik oldalon növelve, a másikon csökkentve az áramlási sebességet.



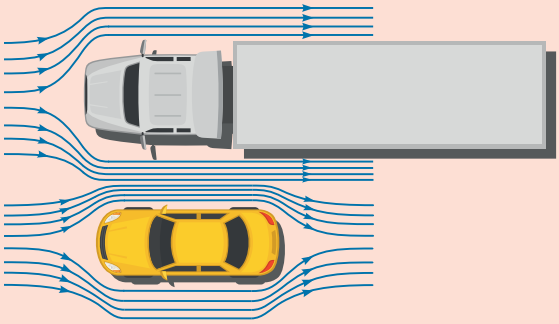
*Forgó labda körül áramló levegő*

A sebességnövekedéshez kisebb légnyomás, míg a -csökkenéshez nagyobb légnyomás tartozik, mint a forgás nélküli esetben.

A levegőben mozgó csavart labdára az áramlási viszonyokból fakadó nyomáskülönbség hatására egy, a forgástengelyre és a mozgás irányára is merőleges erő hat, mely az egyenes vonalban indított labda pályáját elgörbíti, ívessé teszi. Ezt a hatást **Magnus-effektusnak** nevezzük.

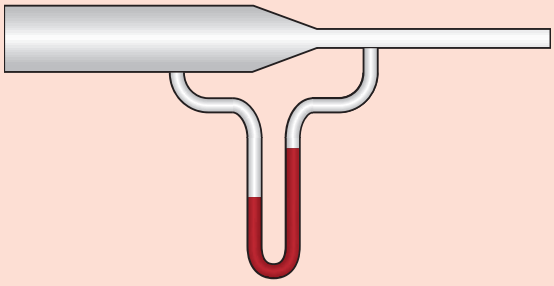
### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

**1.** Milyen hatásra lehet számítani, ha autópályán gyorsan haladó kamiont előzünk? Válaszunkat az ábra alapján fogalmazzuk meg!



**2.** Egy papírlap két végét lehajtjuk kis lábnak, majd az asztalra helyezzük, hogy a papír egy téglalap keresztmetszetű alagutat képezzen az asztal lapján. Mit tapasztalunk, ha levegőt fújunk az alagútba? Mi a magyarázata a jelenségnek?

**3.** Az ábrán látható áramlási cső kialakításában az U alakú részben folyadékszint-különbség észlelhető. Mi ennek az oka?



**4.** Adjunk magyarázatot arra, hogy bármely közegben leejtett tárgy sebessége, elegendő esési időt feltételezve, nem léphet túl egy, a közeg és a tárgy paramétereitől függő maximális sebességet!

# 5. Természeti környezet

**EMLÉKEZTETŐ**

## Időjárás, éghajlat

A Földet körülvevő légkör fizikai állapotának folyamatos változását időjárásnak nevezzük. Az **időjárás elemei** a hőmérséklet, a légnyomás, a felhőzet, a csapadék és a szél. Ezek megfigyelésével, mérésével, valamint az előrejelzésükkel a meteorológia foglalkozik.

**A sokéves, több évtizedes időjárási jellegzetességet éghajlatnak**, más néven **klímának** nevezünk.

Az időjárási jelenségek legfőbb energiaforrása a Napból érkező elektromágneses sugárzás, a napsugárzás. A Nap energiájának jelentős része infravörös, azaz hősugárzás, illetve látható fény formájában éri el a Föld légkörét, kisebb részben ultraibolya sugárzás formájában is kerül belőle a légkörbe.

A légkör felső tartományában lévő ózonréteg az ultraibolya sugárzás jelentős részét képes elnyelni, amivel nagy fokú védelmet nyújt az élővilág számára, ezért is nevezik a felső légköri ózont **ózonpajzsnak**.

## Az üvegházhatás

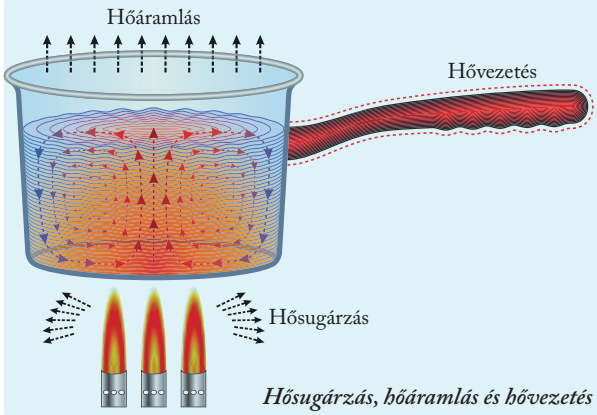
A légkörbe jutó napsugárzás egy része elnyelődik a légkörben, és csak a maradék része jut el a földfelszínig. A földfelszínről a sugárzás egy része visszaverődik a légkörbe, a maradék része a földfelszínben elnyelődve melegíti azt. A visszavert sugárzás egy része kijut a világűrbe, a maradék része pedig a légkörben nyelődik el. A levegő felmelegedéséért elsősorban nem a légkörben elnyelődő sugárzás felelős, a légkört alulról a felmelegedett földfelszín melegíti. A Föld légköre jelentős mennyiségű napsugárzást enged be, ugyanakkor keveset ereszt ki a világűrbe, ezt a jelenséget **üvegházhatásnak** nevezzük.




*Sugárzási egyenleg*

## A hőterjedés módjai

A légkör hőmérsékletének kialakulásában a hő terjedésének mindhárom módját felfedezhetjük: a **hősugárzást**, a **hőáramlást** és a **hővezetést**.




*Hősugárzás, hőáramlás és hővezetés*

A hősugárzás során az energia az anyagból elektromágneses hullám (foton) formájában terjed szét.

A hővezetés során az energiát a mozgó részecskék kölcsönhatás útján átadják a szomszédos részecskéknek.

Hőáramlás esetén az energiát az áramlásban részt vevő részecskék maguk szállítják. A közegek hővezetés helyett inkább hőáramlással juttatják el a hőt egyik helyről a másikra.

Az anyagok hővezető képessége szerint megkülönböztetünk jó hővezető és hőszigetelő anyagokat.

A **hőszigetelés** és a hőáramlás ismereteit alkalmazzák az épületek hőszabályozására, a fűtésre, a meleg megtartására, vagy éppen a léghűtésre. Erre jó példa a levegővel telt lyukacsos falazóelem, a gázzal töltött többrétegű ablak vagy a laza szerkezetű kőzetgyapot használata, idetartoznak a korábban tanult fűtési módok: tüzelőanyaggal vagy árammal működő fűtési rendszerek, hőszivattyúk, légkondicionáló berendezések.



*A kőzetgyapot rostjai közé szorult levegő adja az anyag szigetelőképességét*

## Az időjárás előrejelzése

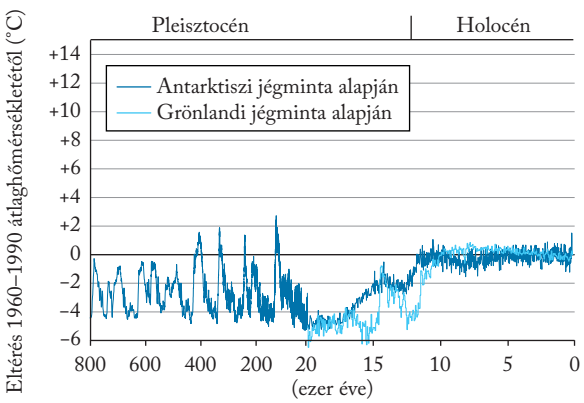
Az időjárás előrejelzése voltaképpen a légköri folyamatok leírására alkotott elmélet alkalmazását jelenti. A légkör egy kiválasztott légtömegében főként mechanikai és hőtani folyamatok játszódnak le. A **légköri folyamatokat leíró** elmélet **öt törvény** együttes alkalmazását használja:

- Newton törvénye szerint a légtömegre ható erők eredője határozza meg a légtömeg mozgását. (A forgó Föld felszíne nem inerciarendszer, így a meghatározás bonyolultabb.)
- A mozgó légtömegre alkalmazható a kontinuitási törvény.
- A légtömeg hőtani állapotát az állapotegyenlet segítségével lehet meghatározni.
- A légtömegben létrejövő hőtani folyamatok leírására a hőtan első főtételét használják.
- Végül a légtömegben lévő vízgőz mennyiségének meghatározásához (be- és kiáramlás, párolgás, halmazállapot-változások miatti mennyiségi változás) az úgynevezett nedvességszállítási egyenleteket használják.

Az egyenletek megoldásához a kiválasztott légtömeg fizikai jellemzőire van szükség (pl. légnyomás, hőmérséklet, páratartalom, szélerősség), melyeket méréssel megkaphatunk. Az előrejelzés ennek ellenére mindig több-kevesebb bizonytalanságot mutat a mérési pontosság és az egyenletmegoldás bonyolultsága miatt, valamint azért, mert a légkörnek csak az alsó határán végzünk méréseket.

## Az éghajlat és vizsgálata

Már az ókorban felismerték a különböző tájak eltérő éghajlatát, de a klíma tudományos vizsgálata csak a 20. században kezdődött. Leggyakrabban egy adott táj vagy régió éghajlatáról beszélünk, amiket éghajlati övezetekbe sorolunk. Ezeken belül kialakulhatnak olyan kis területek, melyek a környező területtől eltérő éghajlattal rendelkeznek, **mikroklímájuk** van. Az utóbbi években egyre többször utalnak a Föld egészét jellemző, **globális éghajlatra**.




*Az átlaghőmérséklet alakulása a Földön az elmúlt 800 ezer évben*

A klímakutatás módszerei közé tartoznak:

- az elmúlt közel százhetven év mérési adatainak statisztikai feldolgozása;
- statisztikai modellek alkalmazása használható klímamodellek megalkotásához;
- történelmi dokumentumok, régészeti leletek felhasználása az éghajlat becslésére a mérések előtti korokra, korszakokra;
- fák évgyűrűinek, sarkvidéki jégtakaró rétegeinek, koralloknak és kőzeteknek a vizsgálata az éghajlat múltbeli megismerésére.

A vizsgálatokból és kutatási adatokból, valamint a klímamodellekből mára a Föld 4,5 milliárd éves története alatt lejátszódó globális éghajlatváltozás derült ki, melyben rendszertelenül melegedések és hűlések figyelhetők meg. A klímakutatók megegyezése alapján az átlaghőmérséklet változásait az 1960–1990 évek időszakának átlaghőmérsékletéhez viszonyítják.

## Klímaváltozás

Az éghajlat tartós és jelentős mértékű megváltozását éghajlatváltozásnak vagy **klímaváltozásnak** nevezzük.

A klímaváltozás következményei megjelenhetnek az átlaghőmérséklet, az átlagos csapadékmennyiség vagy a széljárás érzékelhető megváltozásában.

Ha az emberi tevékenység által okozott klímaváltozás kedvezőtlen az élővilág, különösen az ember számára, akkor a környezeti elemeket megváltoztató negatív emberi tevékenységet **környezetszennyezésnek** nevezzük.




*Emberi tevékenység által okozott klímaváltozás*

## A klímaváltozás okai

A globális éghajlat megváltozásának okai mind azt eredményezik, hogy megváltozik a Nap által a Földre sugárzott és a Földről a világűrbe kisugárzott energia aránya. Az éghajlat változása a légkör mellett a tengerek, óceánok, a jégtakaró, a kőzetburok és a bioszféra megváltozását is jelentik.

**A klímaváltozás okai**

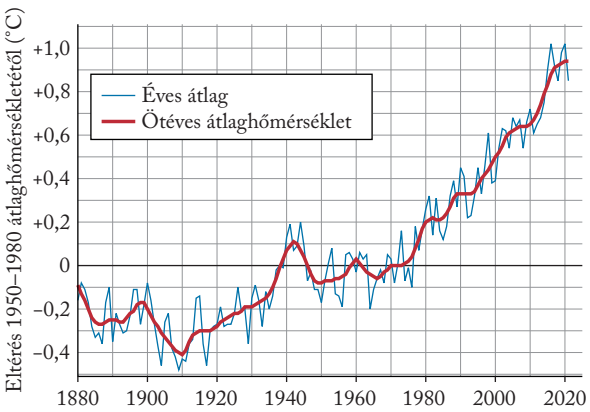
Természeti okok:
- belsők, ha az előbb felsorolt rendszer valamelyike okozza a változást (pl. az óceánok hőtehetetlensége a nagy hőkapacitásuk miatt, a kőzetburok albedójának megváltozása, vagy a fotoszintézis megjelenése az élővilágban);
- külsők (pl. a földpálya lapultságának változása, a vulkánkitörések során a légkörbe kerülő gázok, a lemeztektonika, vagy a Nap sugárzási teljesítményének változása).

Mesterséges okok:
- az emberi tevékenységből származó okok, melyek hatásai kedvezőtlen irányba változtatják a klímát.

## A globális felmelegedés és az átlaghőmérséklet

Az éghajlatkutatás eredményei azt mutatják, hogy a globális éghajlat átlaghőmérséklete és a légkörben lévő szén-dioxid-tartalom között szoros összefüggés van. Nagyobb mennyiségű légköri szén-dioxid nagyobb átlaghőmérsékletet eredményez. Ugyanis **a szén-dioxid a légkör egyik legjelentősebb üvegházhatású gáza**.

Az emberi tevékenység, elsősorban az ipar, a mezőgazdaság és a közlekedés az utóbbi 200 évben, de leginkább az utolsó 50 évben jelentősen megnövelte a levegő szén-dioxid-koncentrációját, ezzel kimutatható éghajlatváltozást okozott, mely a Föld átlaghőmérsékletének mérhető emelkedéséhez is vezetett, ezt **globális felmelegedésnek** nevezzük.



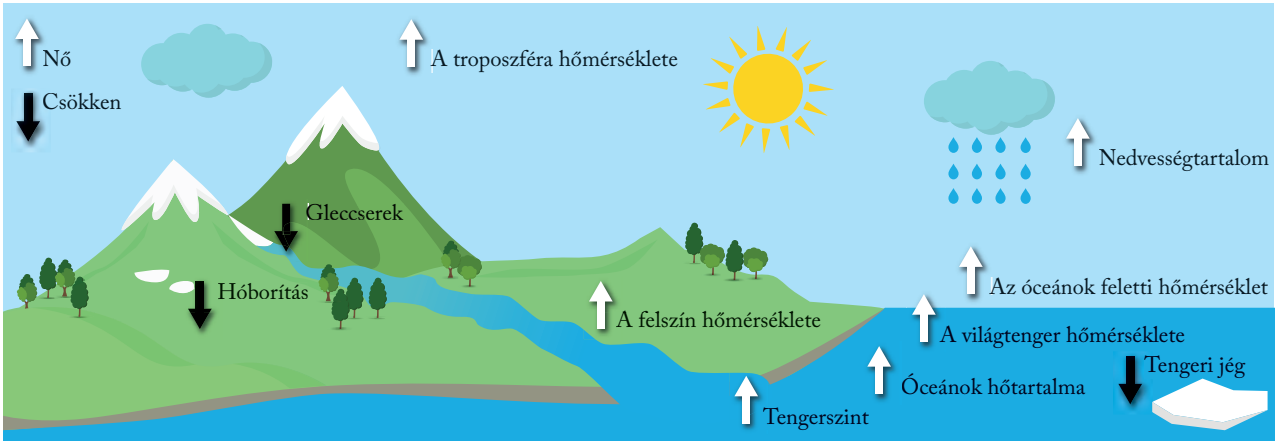

*A globális hőmérséklet változása 1880-tól napjainkig*

A jelenséget erősítik az erdőirtások, valamint az emberi tevékenységből származó egyéb **üvegházhatású gázok** és anyagok légkörbe jutása.

Egyes üvegházhatású gázok a felső légkörbe kerülve kémiai reakciók során az ózon bomlását okozzák, amivel az ózonréteg vékonyodását idézik elő. Az **ózonréteg elvékonyodása** több UV-sugárzást enged be a légkörbe, a sugárzás jelentősen károsíthatja a planktonokat, így kevesebb szén-dioxidot tudnak megkötni a levegőből. Az ózonréteg elvékonyodása szintén erősíti a globális felmelegedést.

## A globális felmelegedés egyéb következményei

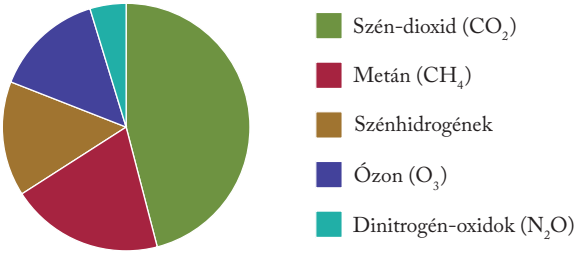
A globális felmelegedés nem csak a légkör átlaghőmérsékletében jelentkezik: a magasabb léghőmérséklet felmelegíti az óceánokat, tengereket és a szárazföldet is. Ennek több kedvezőtlen következménye is van:
- A jobban melegedő szárazföldek belsejében megjelennek az **aszályos területek**, megindul az **elsivatagosodás**.
- Szibéria jeges talajából a melegedés hatására felszabaduló nagy mennyiségű **metán** sokszorosára emeli az üvegházhatású gázok mennyiségét a levegőben.
- A tengerek melegedésének következménye lehet a nagy **tengeri áramlások** (pl. Golf-áramlás) dinamikájának megváltozása, ami befolyással van a regionális éghajlatokra.
- A vizek intenzívebben párolognak, amivel megnövekszik a vízkörforgásban részt vevő víz mennyisége. Erőteljesebb felhő- és csapadékképződés jön létre, ami nagy **esőzéseket**, **árvizeket** hozhat. Elkezdődik a **tavak** vízszintcsökkenése, kiszáradása.
- A légnyomás-ingadozás is nagyobb terjedelmű lehet, melynek következményei az egyre gyakrabban előforduló **szélviharok** és **forgószelek**.
- A nem úszó **jéghegyek elolvadása** a tengerszint drasztikus emelkedését okozza. A jégtakaró, a gleccserek nagyon hatékonyan verik vissza a napsugarakat, ezek visszahúzódása megváltoztatja a talaj fényelnyelő képességét, amivel még jobban erősíti a felmelegedést.
- A felmelegedésnek a **bioszférára** is lesz hatása, mivel megváltoznak az élőlények életben maradási feltételei. Egyes fajok kipusztulhatnak, mások elvándorolnak, más tájra költöznek. Magyarországon is egyre több, a délebbi területeken honos faj jelenik meg.
- Az **óceánok élővilága** is veszélyeztetett a magasabb vízhőmérséklet és a savasodás miatt.




*A globális felmelegedés bizonyítékai*

## A globális felmelegedés és az ember

A globális felmelegedés az embereket is veszélyezteti. Ilyen **veszélyek** az egészségre káros forróságban gyakori időszakok mellett a vízszintemelkedés, az ivóvízkészlet csökkenése, az ivóvízhiány, a mezőgazdaságban termelt növény- és állatfajok pusztulása, az éhínségveszély, vagy a fertőző betegségek megjelenése és terjedése. A veszélyek mértékének csökkentése vagy megszűnése érdekében az emberi tevékenységet úgy kell megváltoztatnunk, hogy egyrészt **alkalmazkodjunk a megváltozó klímához**, másrészt, amennyire csak lehetséges, **csökkentsük az üvegházhatású gázok légkörbe juttatását**.




*Az üvegházhatású gázok megoszlása a légkörben*

Az üvegházhatású gázok csökkentésére az utóbbi évtizedekben számos intézkedés történt. Erre a teljesség igénye nélkül most csak néhány példát sorolunk fel:

- szén-dioxid-kvóta,
- környezetvédelmi adó,
- fűtéskorszerűsítés – hőszigetelés,
- zöldenergia használata,
- közlekedés és áruszállítás optimalizálása,
- erdőirtások tilalma,
- energiatakarékosság,
- osztott energia- és élelmiszer-termelés, vállalatok helyett „családi” megoldások.

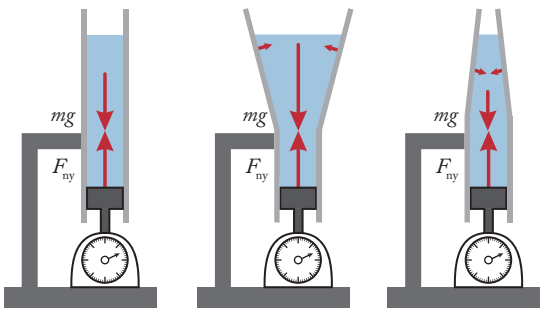
### ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Miért fontos, hogy az időjárás előrejelzéséhez figyelembe vegyük a gázok állapotegyenletét?
2. Hallhatunk időjárási előrejelzéseket a következő hónapokra vagy a következő évre vonatkozóan. Milyen bizonyossággal vegyük figyelembe ezeket?
3. Hogyan lehet mérési adatokat szerezni azokról a múltbéli éghajlatokról, amikor még nem voltak rendszeres tudományos mérések?
4. Lehet-e az emberi tevékenység kedvező hatású az éghajlatváltozásra?

# Összefoglalás

## Folyadékok

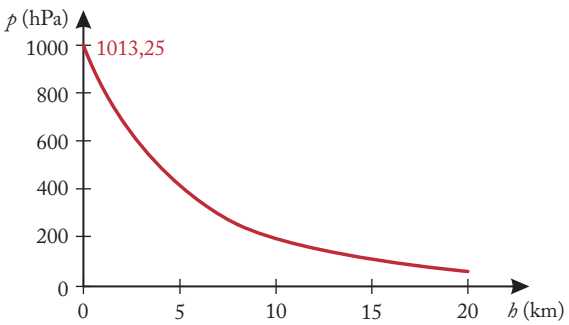
– **Ideális folyadék:** összenyomhatatlan és belsősúrlódásmentes;
– **valódi folyadék:** összenyomható, és van viszkozitása;
– nyugvó folyadék felszíne gravitációs térben vízszintes, vagy felveszi a Föld görbületét;
– **hidrosztatikai paradoxon:** elvárásainkkal ellentétben a fenéknyomás nem függ az edény alakjától, csak a vízoszlop magasságától és a folyadék sűrűségétől.




*Hidrosztatikai paradoxon*

## Légnyomás

– A **légnyomás** a nyugalomban lévő légkör súlyából származó nyomás;
– a légnyomás a magassággal nem egyenesen arányos, a kapcsolatot a **barometrikus magasságformula** adja meg;

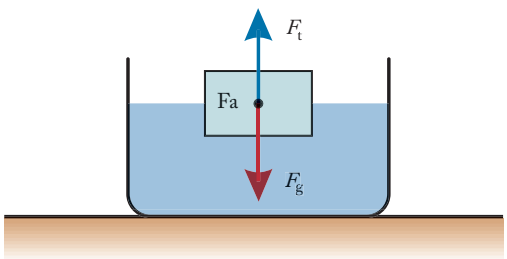



*A légnyomás magasságfüggése*

– a nyomásmérők a normál légköri nyomáshoz viszonyított, úgynevezett **túlnyomást** jelzik.

## Felhajtóerő

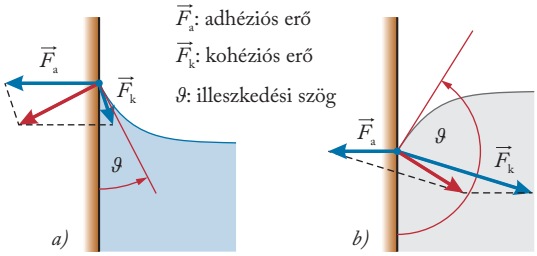
– **Arkhimédész törvénye** szerint a közeg felhajtóereje egyenlő a test közegbe merülő része által kiszorított közeg súlyával. A törvény nem érvényesül súlytalanság állapotában, és érvényes a légkörre mint közegre is.
– A folyadék felszínén megvalósuló egyensúlyi helyzetet **úszásnak** nevezzük. Ekkor a test bemerülő részének a teljes térfogatához viszonyított aránya megegyezik a folyadék és a test sűrűségének arányával.




*Testek úszása esetén* $F_f = F_g$

## Molekuláris jelenségek

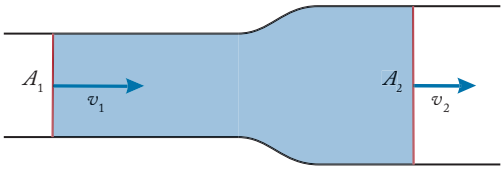
– **Kohéziós erő:** két azonos folyadékmolekula között ható vonzó kölcsönhatás.
– **Adhéziós erő:** két különböző minőségű molekula közötti vonzó kölcsönhatás.
– A kohéziós erő következménye a folyadékok cseppekké alakulása.
– A folyadék felszínének megnöveléséhez szükséges munka egyenesen arányos a felszínnövekedés mértékével. Az arányossági tényezőt **felületi feszültségnek** nevezzük.
$W = \sigma \cdot \Delta A$
– A folyadékok felszíne a lehető legkisebb méretre törekszik, ezek a **minimálfelületek**.
– Az adhéziós erő következménye a **nedvesítés** jelensége.




*Illeszkedési szög nedvesítés és nem nedvesítés esetén*

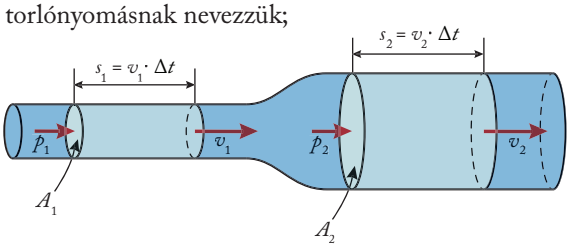
## Közegáramlás

– A közeg áramlási terét áramvonalakkal szemléltetjük;
– **kontinuitási törvény:** $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$;




*Kontinuitási egyenlet szemléltetése*

– **Bernoulli törvénye** szerint egy összenyomhatatlan áramló közegben a $p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$ összeg az áramlási tér minden pontjában ugyanakkora. Az összeg első tagját sztatikus nyomásnak, a második tagját dinamikus vagy torlónyomásnak nevezzük;

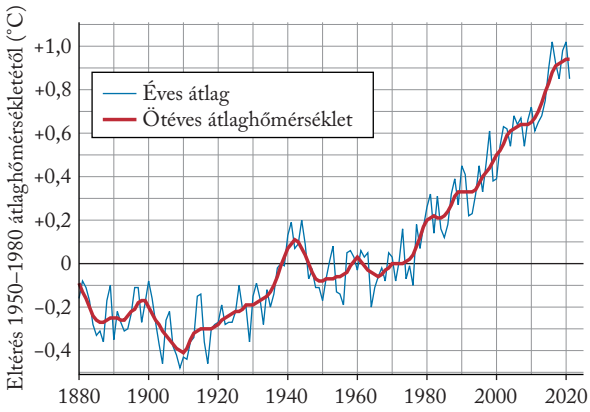



*Bernoulli-egyenlet*

– **viszkózus közegben** nem nulla relatív sebességgel mozgó testre erő hat, melynek a mozgással párhuzamos komponensét közegellenállásnak, az arra merőleges komponensét dinamikai felhajtóerőnek nevezzük.

## Természeti környezet

– Az **időjárás elemei** a hőmérséklet, a légnyomás, a felhőzet, a csapadék és a szél.
– A sokéves, több évtizedes időjárási jellegzetességet **éghajlatnak**, más néven **klímának** nevezzük.
– **Az éghajlat tartós és jelentős mértékű megváltozását éghajlatváltozásnak vagy kílmaváltozásnak nevezzük.** A **klímaváltozás oka** a légkörbe kerülő üvegházhatású gázok, elsősorban a szén-dioxid-koncentráció változása.
– Az utóbbi kétszáz évben az emberi tevékenység jelentősen hozzájárult egy kedvezőtlen folyamat, a **globális felmelegedés** felgyorsításához.




*A globális hőmérséklet változása 1880-tól napjainkig*

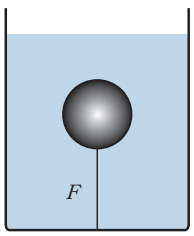
– A globális felmelegedés kedvezőtlen hatással van a légkör mellett a tengerekre, óceánokra, a szárazföldekre, a jégtakaróra és az élővilágra, benne az emberre.
– A kedvezőtlen klímaváltozás ellen például a hozzá való alkalmazkodással, illetve az üvegházhatású gázok kibocsátásának csökkentésével védekezhetünk.

# Összefoglaló feladatok

## TESZTFELADATOK

**1.** Egy vízzel teli edény felszínén egy parafa dugó úszik. Az edény egy konyhai mérlegen áll. Mit mutat a mérleg?
A) A víz és a parafa dugó együttes tömegét.
B) Az edény, a víz és a parafa dugó együttes tömegét.
C) Az edény és a víz együttes tömegét.
D) A felhajtóerőnek megfelelő tömeget.

**2.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2018)
Egy levegőben 5 N súlyú fagömböt teljesen a víz alá nyomunk, és egy fonállal az edény aljához kötjük az ábrán látható helyzetben, majd elengedjük. Ekkor a fonalat $F = 20$ N erő feszíti. Körülbelül mekkora a gömb térfogata?
A víz sűrűsége 1 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.




A) Körülbelül 0,5 $\text{dm}^3$.
B) Körülbelül 1,5 $\text{dm}^3$.
C) Körülbelül 2 $\text{dm}^3$.
D) Körülbelül 2,5 $\text{dm}^3$.

**3.** Elsüllyedt hajóroncsot emelnek ki egy daruval a tengerből egyenletes sebességgel. Mekkora a daru pillanatnyi teljesítménye a hajó felszíni kibukkanásának pillanatától a teljes kiemelés pillanatáig?
A) A pillanatnyi teljesítmény egyenletesen csökken.
B) A pillanatnyi teljesítmény állandó.
C) A pillanatnyi teljesítmény egyenletesen nő.

**4.** (Középszintű érettségi tesztkérdés, 2013)
Otto von Guericke 1654-ben egy látványos kísérletben kiszivattyúzta a levegőt két üreges fém félgömb közül, amelyeket azután 30 ló próbált meg egymástól szétválasztani – sikertelenül. Mit bizonyított be ezzel Guericke?



A) Azt bizonyította be, hogy a félgömbök között lévő légüres tér nagy erővel tartja össze azokat.
B) Azt bizonyította be, hogy a levegő nagy erővel nyomja össze a félgömböket.
C) Azt bizonyította be, hogy a félgömbök közti kohéziós erő a vákuum következtében nagymértékben megnő.

**5.** A bicikli kereke kissé leeresztett, nyomásmérőt kapcsolunk rá. A mérőműszer 0,8 bar nyomást jelzett. Mekkora a bicikliben lévő levegő aktuális nyomása? (1 bar = $10^5$ Pa.)
A) Kb. 0,8 bar.
B) Kb. 0,2 bar.
C) Kb. 1,8 bar.

**6.** (Emelt szintű érettségi tesztkérdés, 2019)
A csapból kifolyó vízsugár átmérője lefelé, a csapfejtől távolodva csökken. Mi lehet ennek a magyarázata?



A) A vízsugár rugalmasan megnyúlik a gravitációs erő hatására.
B) A nyomás a vízvezetékben nem állandó. Ennek megfelelően a víz a csapból változó sebességgel lép ki.
C) A külső légnyomás oldalról összenyomja a vízsugarat, minél hosszabb ideje esik, annál jobban.
D) A kifolyó vízsugár sebessége a csapfejtől távolodva nő, így lejjebb azonos mennyiségű víz kisebb keresztmetszeten folyik át.

**7.** Egy dróthurok két, átellenes pontjába rögzítjük két fonál egy-egy végét. Az egyik fonál feszes, a másik lazán áll. A hurkot szappanoldatba mártjuk, hogy szappanhártya alakuljon ki. Hogyan alakulhat ki a fonalak segítségével D-alak?
A) A laza fonál és a dróthurok közötti részt ki kell lyukasztani.
B) A két fonál közötti részt kivéve a többi hártyarészt ki kell lyukasztani.
C) A két fonál közötti részt ki kell lyukasztani.

**8.** Milyen hatással lehet egy nagy vulkánkitörés a klímaváltozásra?

A) A kitörő vulkáni hamu korlátozza a napsugárzást, ezért az átlaghőmérséklet csökken.

B) A kitörő vulkáni hamu üvegházhatású gázt tartalmaz, ezért az átlaghőmérséklet megemelkedik.

C) A vulkánkitörés lokális esemény, az átlaghőmérsékletre nincs hatással.

## FELADATOK

**1.** Egy pohár vízben egy 250 $cm^3$ térfogatú márványgolyó van. Mekkora a súlya?
A márvány sűrűsége 2700 $\frac{kg}{m^3}$.

**2.** Egy kocka tárgy teteje 1 cm-re lóg ki, ha vízben úszik, és 3 cm-re, ha glicerinben, melynek sűrűsége 1260 $\frac{kg}{m^3}$.

**a)** Mekkora a kocka éle?

**b)** Mekkora a kocka tömege?

**3.** Egy 12 N súlyú fakockát 20 N erővel kell a víz alatt tartani. Ha a tartóerőt megszüntetjük, a fakocka a víz felszínén úszik. Hány centiméterre lóg ki a teteje?
(A fa sűrűsége 600 $\frac{kg}{m^3}$.)

**4.** Egy 6 cm élű kocka sűrűsége 2500 $\frac{kg}{m^3}$. Mennyi munkával lehet a vízből kiemelni?
A munkát attól a pillanattól számítjuk, amikor a kocka teteje a felszínre kerül, és addig tart, ameddig az alja is eléri a felszínt. A kocka fedőlapja mindvégig vízszintes.

**5.** Glicerin felszínére radírgumit teszünk, majd az egészre vizet rétegzünk úgy, hogy a radírt teljesen ellepje. A radír térfogatának mekkora része merül a glicerinbe

**a)** a víz rétegzése előtt?

**b)** a víz rétegzése után?

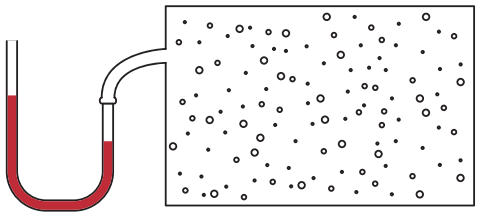
(A radír sűrűsége 1100 $\frac{kg}{m^3}$, a gliceriné 1260 $\frac{kg}{m^3}$.)

**6.** Mekkora erővel kell vízbe nyomni egy 5 g tömegű parafa dugót, hogy annyira merüljön el, mint egy jégkocka?
(A parafa sűrűsége 400 $\frac{kg}{m^3}$, a jégé 900 $\frac{kg}{m^3}$.)

**7.** Gáztartályhoz nyomásmérőt szerelünk az ábra szerint.

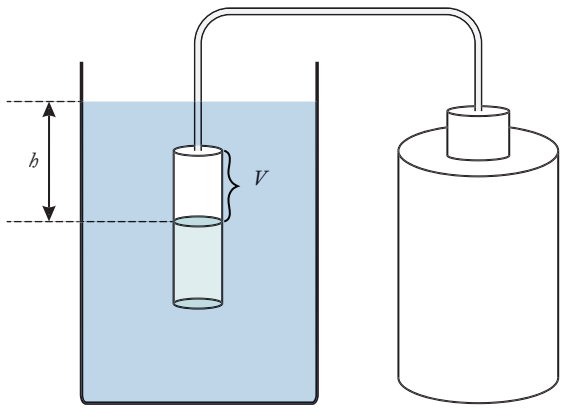
**a)** Mekkora a gáz nyomása, ha a higanyszintek közötti különbség 2 cm?

**b)** A tartály hűtésével elérhető, hogy a higanyszintek egy vonalba kerüljenek. Mekkora lett most a tartályban lévő gáz nyomása?



(A higany sűrűsége 13 600 $\frac{kg}{m^3}$, a külső légnyomás 1 bar.)

**8.** (Középszintű érettségi feladat, 2007)
*Mélységi nyomás vizsgálata vízben*
A víz mélységi nyomásának méréséhez az ábrán látható összeállítást használjuk. Egy 10 ml-es, alul nyitott mérőhengert nyomunk a víz alá, amelyet vékony cső köt össze egy nagyobb tartállyal. A tartályban és a hozzá csatlakozó csőben kezdetben együttesen 500 ml levegő van légköri nyomáson. A mérőhengerbe a víz valamennyire benyomul, a megmaradt, levegővel teli rész térfogatát ($V$) a mérőhengerről leolvashatjuk. Az edény vízszintje és a mérőhengerben lévő vízszint közötti távolság $h$.



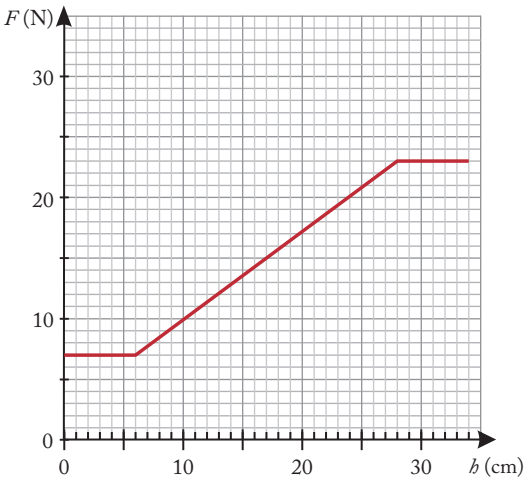

A következő táblázat a különböző $h$ mélységekben mért $V$ térfogatértékeket tartalmazza.
(A méréskor a légköri nyomás $10^5$ Pa volt. A levegő állapotváltozása izotermikusnak tekinthető.)

| $h$ (cm) | 0 | 2 | 6 | 12 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ (ml) | 10,0 | 9,0 | 7,0 | 4,1 | 2,6 | 0,2 |

**a)** Számítsa ki a megadott $h$ mélységekben a víz nyomását, vagyis a légköri nyomáshoz képest mérhető többletnyomást!
(A nyomást célszerű 1 hPa = 100 Pa egységben megadni.)

**b)** Grafikus vagy számításos módszerrel állapítsa meg a víznyomás és a mélység függvénykapcsolatát!

**9.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2019)
Egy hengeres test víz alatt van. Rugós erőmérő segítségével kiemeltük a vízből úgy, hogy a test tengelye végig függőleges volt. Az erőmérő által mutatott értékeket ($F$) feljegyeztük, és annak függvényében ábrázoltuk, hogy mennyit emelkedett a test a kezdeti helyzetéhez képest ($h$).




**a)** Milyen magas a test?
**b)** Mekkora a rá ható maximális felhajtóerő?
**c)** Mekkora a test térfogata és sűrűsége?

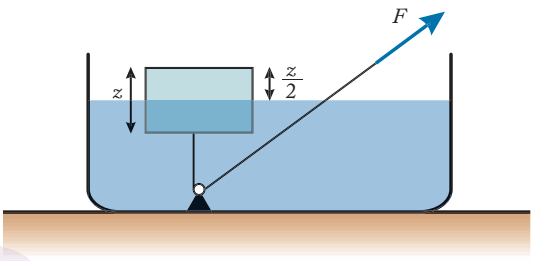
(A víz sűrűsége $\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

**10.** (Középszintű érettségi feladat, 2020)
Az ősmaradványok tanúsága szerint egy bizonyos fajta dinoszaurusz feje a szívénél 20 méterrel volt magasabban, a szív a talaj felett 8 m magasságban helyezkedett el.

**a)** Legalább mekkora nyomással kellett a szívének a vért pumpálnia, ha a dinoszaurusz agyának legalább 11 000 Pa vérnyomásra volt szükség?
**b)** Mekkora volt ekkor a vérnyomás a dinoszaurusz lábában?

(A vér sűrűsége $\rho = 1060\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

**11.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2022)
Egy $\rho = 400\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű, $V = 0{,}1\ \text{m}^3$ térfogatú és $z = 0{,}4$ m magasságú testet egy igen nagy medencébe helyezünk, és alulról, csigán keresztül kötéllel húzzuk az ábrán látható módon. A test kezdetben félig merül a vízbe, majd a kötéllel lassan teljesen a víz alá húzzuk.




**a)** Mekkora $F$ erővel lehet a testet az ábrán látható állapotban tartani?
**b)** Mekkora $F$ erővel lehet a testet teljes egészében a víz alatt tartani?
**c)** Ábrázolja a kötélerőt a test bemerülésének függvényében a kiinduló helyzettől kezdve!
**d)** Mekkora munkavégzés árán lehet a testet teljesen a víz alá húzni a kezdeti helyzetéből?

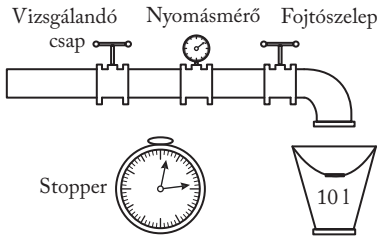
A medencében a vízszint változása a folyamat során elhanyagolható.

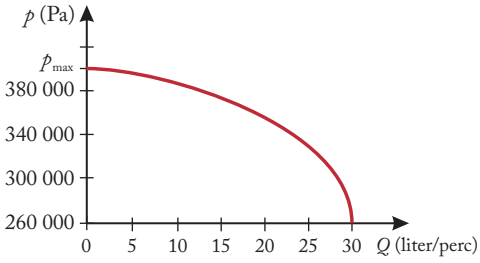
($g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a víz sűrűsége $\rho_{\text{víz}} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

**12.** Mennyi munkát kell végeznünk, ha egy 8 mm átmérőjű higanycseppet két egyenlő cseppé szeretnénk szétválasztani?

A higany felületi feszültsége $0{,}472\ \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$. A gömb alakot deformáló hatásoktól tekintsünk el.

**13.** (Középszintű érettségi feladat, 2021)
*Vízforrás adatainak meghatározása*
A társasház vízhálózatából vizet szeretnénk kivenni a kert öntözéséhez. Az öntözőrendszerek szórófejeinek működéséhez megfelelő nyomású és mennyiségű vízre van szükség. A csapból kilépő víz nyomását egy fojtószeleppel szabályozhatjuk. Meg kell mérnünk, hogy mekkora vízmennyiséget szolgáltat a hálózat az adott nyomáson. A kilépő vízsugár nyomását ábrázolhatjuk az időegységenként kifolyó víz mennyiségének függvényében. Az így kapott görbe a csőhálózat karakterisztikája.
A görbe egyes pontjait könnyen meghatározhatjuk egy fojtószeleppel ellátott nyomásmérő óra, egy stopper és egy ismert térfogatú vödör segítségével. Ha különböző nyomásértékeken megmérjük, hogy hány másodperc alatt telik meg a 10 literes vödör, akkor egyszerű számítással megkaphatjuk, hogy az adott nyomásértéken mekkora vízhozamot biztosít a vízhálózat.



Az ábrán látható karakterisztikájú hálózat maximális nyomása 400 000 Pa az adott öntözőcsapnál, ha az el van zárva. Ha teljesen ki van nyitva, 30 liter víz folyik ki rajta percenként.

**a)** Mennyi a vízhozam, ha a 10 literes vödör 30 s alatt telik meg?

**b)** Mekkora nyomáscsökkenéssel jár az öntözőcsap maximális kinyitása a teljesen zárt állapothoz képest?

**c)** Az öntözőrendszerünk üzemeltetésére 20 liter vízre van szükségünk percenként. Becsüljük meg, mennyi a nyomás ekkor a vízvezetékben!

**d)** 300 000 Pa nyomáson mennyi vizet ad a rendszer percenként?

**e)** Egy adott locsolócsővel a feladatban szereplő hálózatot használva mikor tudunk magasabbra locsolni? Ha a hálózati nyomás nagyobb, vagy ha kisebb? Válaszát indokolja!

(A cső keresztmetszetét a víz teljesen kitölti, és nem változtatjuk meg a keresztmetszetet a locsolás során.)

**14.** A vezetékes vízhálózat teljes nyomása 5 bar. Egy locsolócsőből kiáramló víz sztatikus nyomása 3 bar. Mekkora magasságba emelkedik a kiömlő víz, ha a locsolócsövet függőlegesen felfelé tartjuk?

**15.** (Emelt szintű érettségi feladat, 2005)
Nagy magasságban kezdősebesség nélkül elejtenek egy 0,4 kg tömegű, gömb alakú testet. A zuhanó test mozgását a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő fékezi. (A közegellenállási erő nagysága ezért $F_k = Cv^2$ alapján számítható, ahol $C$ állandó.) Esetünkben a közegellenállási erő nagysága 1 $\frac{m}{s}$ sebességnél 0,008 N. Az elejtett test mozgását vizsgálva megállapítható, hogy 20,7 méter zuhanás után a sebessége 16,8 $\frac{m}{s}$.

**a)** Mekkora a testre ható közegellenállási erő abban a pillanatban, amikor a sebessége 16,8 $\frac{m}{s}$?

**b)** Mekkora a test gyorsulása abban a pillanatban, amikor a sebessége 16,8 $\frac{m}{s}$?

**c)** Mekkora munkát végez a közegellenállási erő a vizsgált 20,7 méteres szakaszon?

**d)** Határozza meg, hogy mekkora maximális sebességre gyorsulhat fel a test!

(Számoljunk $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ értékkel!)

## ESSZÉFELADAT

### A Mohr–Westphal-mérleg

(Emelt szintű érettségi esszékérdés, 2021)

A Mohr–Westphal-mérleget folyadékok sűrűségének pontos meghatározására használják. Ez egy olyan kétkarú mérleg, melynek egyik karján (az ábra szerinti jobb oldalon) egy üvegtest függ, amelyet a másik karon (a bal oldalon) egy fémnehezék egyensúlyoz ki.

Ha az üvegtestet folyadékba merítjük, a mérleg egyensúlya felbillen. Ha a mérleg jobb oldali karjára kis súlyokat, úgynevezett lovasokat ültetünk a megfelelő helyre, az egyensúly helyreállítható. A mérleg jobb karja tíz egyenlő részre van osztva. Ha az üvegtestet 1 $\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű vízbe merítjük, akkor a legnehezebb lovast a tizedik osztásrészbe ültetve a mérleg egyensúlya helyreáll. A közepes méretű lovas tömege a nagynak a tizede, a legkisebb lovas tömege a nagynak a századrésze. Ha például a legnagyobb lovast a kilencedik, a közepest a harmadik és a legkisebbet az ötödik rovátkába ültetve áll helyre az egyensúly, akkor megállapíthatjuk, hogy a folyadék sűrűsége 0,935 $\frac{g}{cm^3}$.

**a)** Mutassa be a vízbe merülő testre ható erőket!

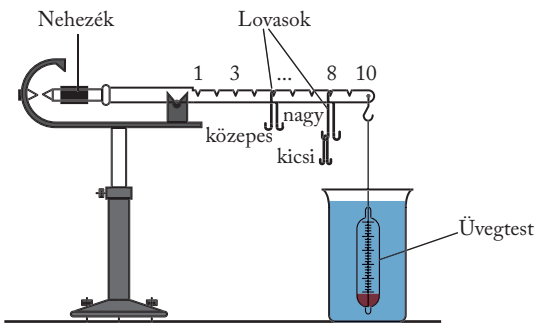
**b)** Ismertesse a kétkarú emelő egyensúlyának feltételeit!

**c)** Ha a legnagyobb lovast az ötödik osztásrészbe ültetve az egyensúly helyreáll, akkor elmondhatjuk, hogy a folyadék sűrűsége 0,5 $\frac{g}{cm^3}$. Az üvegtestre, valamint a lovasokra ható erők és ezek erőkarjai segítségével magyarázza meg, hogy miért!

**d)** Működik-e ez a mérőeszköz, ha nagy sűrűségű folyadék, például higany sűrűségét szeretnénk meghatározni vele? Válaszát indokolja!

**e)** Miért érdemes a folyadékba merülő üvegtestnek egy hőmérőt választani?

**f)** Az ábrán látható elrendezésben mekkora az olaj sűrűsége? Ha lassan melegíteni kezdjük az olajat, hogyan kell a lovasok helyzetén változtatnunk: jobbra vagy balra kell majd a legkisebb lovast tennünk?



# Név- és tárgymutató


**A, Á**

adhéziós erő, 317
alapmennyiségek, 8
állapotegyenlet, 242
állapothatározók 242
állapotváltozás
– adiabatikus, 260
– izobár, 259
– izochor, 259
– izoterm, 260
amplitúdó, 149
áramlási tér, 321
áramvonal, 321
areométer, 316
Arisztotelész, 219
átlagsebesség, 22
Avogadro
– állandó, 243
– törvénye, 243
Audacity mérőprogram, 227

**B**

ballisztikus görbe, 42
barometrikus magasságformula, 310
belső energia, 248
belső erők, 75
Bernoulli-törvény, 320
big-data, 115
biomassza, 113
bolygók
– belső, 212
– külső, 212
Boltzmann-állandó, 248
Boyle–Mariotte-törvény, 243
Brown-mozgás, 249

**C, CS**

Carnot-körfolyamat, 270
Cavendish, Henry, 219
centrifugális erő, 226
centripetális gyorsulás, 128
ciklois, 189
csiga
– állócsiga, 179
– mozgócsiga, 179
csigasor
– arkhimédeszi, 180
– közönséges, 180
csillapított rezgőmozgás, 163
csúszási súrlódási erő, 67

**D**

dér, 298
diffúzió, 249
dinamika alaptörvénye, 58
dinamikai felhajtóerő, 324
direkciós állandó, 64

**E, É**

éghajlat, 326
éghajlatváltozás, 327
egyenes vonalú
– egyenletes mozgás, 21
– egyenletesen gyorsuló mozgás, 28
egyenletes körmozgás dinamikai feltétele, 131
egyensúlyi helyzet, 149
egyesített gáztörvény, 242
egyetemes gázállandó, 242
ék, 180
ekliptika, 208
ekvipartíció tétele, 249
ekvipotenciális felület, 222
élelmiszerek energiatartalma, 102
ellipszis, 214
elmozdulás, 21
emelő
– egyoldalú, 178
– kétoldalú, 178
energia
– geotermikus, 113
– nap, 113
energiaforrások
– megújuló, 111
– nem megújuló, 111
energiatároló rendszerek, 115
entrópia, 266
Eötvös Loránd, 226
eredő erő, 58
erő-ellenerő, 54
erőhatások függetlenségének elve, 58
erőkar, 172
eső, 297
excentricitás, 215

**F**

fagyás, 285
fagyáshő, 285
fagyáspont, 285
fajhő,
– izobár, 261
– izochor, 261
Faraday, Michael, 220
fázis, 152
fázisszög, 152
fékút, 33
felhőképződés, 297
felületi energia, 318
felületi feszültség, 318
fizikai mennyiségek, 8
fókuszpont, 214
folyadék
– ideális, 307
– valódi, 307
folyadékcsepp, 317
folyamatok
– irreverzibilis (nem megfordítható), 265
– reverzibilis (megfordítható), 265
fonálinga, 158
fordulatszám, 124
forgási energia, 197
forgó merev testre vonatkozó munkatétel, 197
forgómozgás alapegyenlete, 190
forrás, 285
forráshő, 285
forráspont, 285
frekvencia, 149

**G, GY**

Galilei, Galileo, 26
Galilei-féle relativitási elv, 53
Gay-Lussac
– I. törvénye, 242
– II. törvénye, 242
gázhalmazállapot, 291
generátor, 111
geostacionárius műhold, 217
geoszinkron műhold, 217
globális felmelegedés, 328
gőz,
– telítetlen, 290
– telített, 290
grafikon
– gyorsulás-idő, 34, 153
– kitérés-idő, 152
– sebesség-idő, 153
gravitáció, 219
gravitációs
– erőtér, 98

– erővonal, 221
– térerősség, 221
gravitációs erőtér
– centrális, 221
– homogén, 221
gravitációs gyorsulás, 225
gravitációs potenciál, 221
gravitációs potenciális energia, 221
gyorsítási munka, 94
gyorsulás, 24

## H

hajítás
– felfelé, 35
– ferde, 41
– lefelé, 35
– vízszintes, 37
halmazállapot
– folyékony, 285
– légnemű, 286
– szilárd, 286
hármaspont, 286
harmat, 297
harmatpont, 290
harmonikus
– erő, 149
– rezgőmozgás, 149
hatásfok, 104
hatásfok mint a folyamatok gazdaságossága, 104
hegyesszögek szögfüggvényei, 12
helyzeti energia, 97
hengerkerék, 197
hidraulika, 310
hidrosztatikai paradoxon, 308
holdfogyatkozás, 210
hőerőgép, 267
hőkapacitás, 260
hőmérő
– digitális, 237
– folyadék, 237
– láz, 237
hőmérséklet, 237
hőmozgás, 249
hőszivattyú, 271
hőtágulás
– lineáris, 238
– térfogati, 238
hőtágulási együttható
– lineáris, 238
– térfogati, 238
hőtan
– I. főtétele, 259
– II. főtétele, 265
hőtartály, 267
hűtőgép, 268

## I, Í, J

ideális gáz, 248
időjárás, 326
inerciarendszer, 53
ingamozgás, 158
inverter, 114
izoterma, 243
jégeső, 297

## K

kaloriméter, 275
Kármán Tódor, 324
kazán, 111
kényszererő, 67
Kepler, Johannes, 214
Kepler
– I. törvénye, 214
– II. törvénye, 215
– III. törvénye, 216
kerék tisztán gördülése, 187
kerületi sebesség, 123
kezdősebesség, 31
kinetikus gázelmélet, 248
kisbolygó, 213
kisbolygók övezete, 214
kistengely, 214
kitérés, 149
klíma, 326
kohéziós erő, 317
kontinuitási egyenlet, 320
konzervatív erő, 98
kozmikus sebességek
– I. kozmikus sebesség, 225
– II. kozmikus sebesség, 225
– III. kozmikus sebesség, 225
köd, 297
körfrekvencia, 153
kötött keringés, 210
közegellenállás, 320
közegellenállási erő, 69
közelhatás elmélete, 220
kritikus hőmérséklet, 291
Kuiper-övezet, 214
külső erők, 75
kvázikristályos szerkezet, 296

## L

lebegés, 312
lecsapódás, 286
lecsapódási hő,286
légköri folyamat, 327
légnyomás, 307
lejtő, 72
lejtőn fellépő erők, 72
lendület, 79
lendületmegmaradás törvénye, 79
lendülettétel, 81
lengésidő, 158
librációs pont, 223
lineáris erőtörvény, 65
lövedék sebességének mérése ballisztikus ingával, 110

## M

Magnus-effektus, 325
matematikai inga, 158
mechanikai energia, 116
mechanikai energia megmaradásának törvénye, 116
mechanikai rezgés, 149
meniszkusz, 318
mennyiségegyenlet, 16
mérés
– abszolút hibája, 18
– eredménye, 18
– szisztematikus hibája, 18
– véletlen hibája, 19
mérési
– eljárások, 14
– jegyzőkönyv, 14
mérési eredmény
– grafikonon, 15
– táblázatban, 15
merev test, 172
merev test egyensúlya, 174
mesterséges gravitáció, 227
meteorid, 214
meteorit, 214
minimálfelület, 318
molekuláris jelenség, 317
mólhő, 261
mozgásállapot, 51
mozgásegyenlet, 58
mozgási energia, 94
munka,
– emelési, 97
– súrlódási, 96
munkatétel, 95

## N, NY

nagytengely, 214
napelem, 113
napelem hatásfoka, 114
napkollektor, 113
napközel, 215
Naprendszer, 213
naptávol, 215
nedvesítés, 318
négyzetes úttörvény, 26
nehézségi gyorsulás, 26
nevezetes szögek szögfüggvényei, 12

Newton, Isaac, 51
Newton
– I. törvénye, 51
– II. törvénye, 54
– III. törvénye, 54
– IV. törvénye, 58

## O, Ó, Ö, Ő

olvadás, 285
olvadáshő, 285
olvadáspont, 285
ónos eső, 297
örvény, 324

## P

pálya, 21
páratartalom
– abszolút, 290
– relatív, 291
párolgás, 285
párolgáshő, 285
perdület (impulzusnyomaték), 194
perdületmegmaradás törvénye, 194
perdülettétel, 194
periódusidő, 124
perpetuum mobile
– elsőfajú, 267
– másodfajú, 267
pillanatnyi
– sebesség, 22
– teljesítmény, 103
plazmaállapot, 286
pneumatika, 310
pontrendszer, 75
pontszerű test, 75
pontszerű test egyensúlya, 171
prefixumok, 8

## R

rakétaelv, 80
referencia-körmozgás, 152
relatív
– hosszváltozás, 239
– térfogatváltozás, 239
rendezettség – rendezetlenség, 266
réteges áramlás, 324
retrográd mozgás, 212
rezgés
– csatolt, 164
– csillapítatlan, 166
– kényszer, 166
– szabad, 166
– túlcsillapított, 163
rezgésidő, 156
rezgési energia, 161
rezonancia, 163
rezonanciagörbe, 163
robbanás, 109
rugalmassági energia, 100
rugóállandó, 100
rugóerő, 100

## S, Sz

sajátfrekvencia, 163
Segner-kerék, 80
skalármennyiség, 9
Steiner tétele, 192
súlyerő, 62
súlytalanság, 63
súrlódási együttható
– csúszási, 67
– gördülési, 69
– tapadási, 68
súrlódási erő
– csúszási, 67
– tapadási, 68
szabaderő, 67
szabadesés, 26
szabadsági fok, 248
számértékegyenlet, 16
származtatott mennyiségek, 8
szélenergia, 114
szélső helyzet (fordulópont), 149
szélturbina, 114
szögelfordulás, 123
szögfüggvények alkalmazása, 12
szöggyorsulás, 141
szögsebesség, 123
szublimáció, 286
szuperkritikus állapot, 292
szuperpozíció, 37

## T

tágulási munka, 259
tangenciális gyorsulás, 140
teherkar, 178
tehetetlenségi erők, 82, 226
tehetetlenségi nyomaték, 191
tehetetlenség törvénye, 51
teljesítmény, 103
teljes mozgási energia, 198
teljes napfogyatkozás, 211
teljes rezgés, 149
tengelyferdeség, 209
termikus
– egyensúly, 242
– kölcsönhatás, 275
tiszta gördülés, 187
torziós inga, 219
tömeg
– súlyos, 226
– tehetetlen, 226
tömegközéppont, 76, 174
tömegközéppont
– megmaradásának tétele, 77
– tétele, 76
tömegpont, 21
törpebolygó, 213
transzformátor, 111
trendvonal, 15
túlhevítés, 287
túlhűtés, 287
túlnyomás, 310
turbina, 111
turbulens áramlás, 324

## U, Ú, Ü, Ű

úszás, 313
út, 21
üstökös, 214
ütközés
– tökéletesen rugalmas, 106
– tökéletesen rugalmatlan, 106
üvegházhatású gázok, 328

## V

vektormennyiség, 9
vektorok
– különbsége, 10
– összegzése, 10
– skaláris szorzása, 11
– számszorosa, 10
– vektoriális szorzása, 12
viszkozitás, 307
vízenergia, 112
vízerőmű, 112
vonatkoztatási rendszer, 21, 134

## Z

zárt rendszer, 77
zúzmara, 297

# Fotók és ábrák forrásjegyzéke

(Oldalszámok utáni rövidítések: a = alsó, b = bal, f = felső, j = jobb, k = középső)

**Fotók**
Shutterstock, ebből szerkesztői: 7a (Art Konovalov), 42 (EvrenKalinbacak), 50k (Cholpan), 71 (Rena Schild), 78jf (g215), 90 (ParamePrizma), 92k (Nigel Jarvis), 122f (Shchipkova Elena), 122k (Paul Higley), 129jf (NYC Russ), 131 (Shahjehan), 141 (Hafiz Johari), 146j (motorsports Photographer), 148f (UlyssePixel), 195ba (Olga Besnard)
kivéve:
Atommagkutató Intézet: 81
Flickr: 167 (Steve Jurvetson/CC BY 2.0)
Härtlein Károly: 287b
ifj. Zátonyi Sándor: 109, 169
iStock: 195j
Library of Congress: 137
Magyar Bányászati és Földtani Szolgálat: 14
NASA: 212ba, 227f, 308
Sághegyi Múzeum: 227ba
Sánta Balázs: 30, 40, 138ja, 149, 157, 159, 165, 177, 180, 201, 227ja, 239, 244, 246, 275–277, 287j, 292, 315, 318, 319b
Smithsonian Libraries: 283
University of Oklahoma Libraries: 205
Vadász Sándor: 24, 38, 41, 74, 80jf, 171, 179, 238, 256
Wellcome Collection: 332ba
Wikimedia: 142j (Jmtrivial/CC BY-SA 3.0)

**Grafikák**
Técsi Zita Mária
kivéve:
Berkes Dávid: 290ja
Hegedűs-Egeresi Ilona Lilla: 320j
NASA: 223
Shutterstock: 11jk, 51, 53, 54j, 55b, 56b, 58, 65b, 80, 85f, 102, 111f, 112b, 113, 114jf, 115, 125ja, 126, 131ba, 131j, 146b, 147j, 174bf, 178bk, 178jf, 180ba, 181, 182bf, 182jf, 188jf, 190j, 193, 195, 214f, 230ja, 232, 237j, 242–243, 248b, 249j, 257, 259b, 265, 266bf, 274–275, 282jf, 283b, 286f, 296j, 297, 299bf, 305, 316ba, 321j, 326, 327j, 329f
Szalóki Dezső: 21, 22ba, 22j, 24, 25b, 26, 29ja, 31, 32b, 35–36, 37j, 38, 44, 45f, 54b, 55j, 56j, 59ba, 62, 63bf, 67, 68j, 69, 70bf, 70j, 71–72, 73b, 75, 76a, 78b, 82, 85f, 86k, 90jf, 94j, 98b, 110, 123b, 127bf, 128, 134bf, 134jf, 140, 141k, 141a, 142, 149, 152–153, 154b, 156–158, 163, 166j, 168ba, 171–173, 174ba, 174j, 178bf, 178ba, 179b, 179jf, 182bk, 182ba, 182ja, 184ja, 187, 188b, 188ja, 189, 190b, 191b, 191ja, 192, 194, 196–198, 212j, 220f, 226, 231bf, 231ba, 231jf, 237b, 239, 245, 248j, 250, 253, 259j, 260–262, 268ja, 269–270, 272, 278, 279j, 280bf, 281, 283j, 285, 290b, 299ba, 299jf, 300f, 309ja, 317, 319, 330ja
Wikimedia: 224 (MikeRun/CC BY-SA 4.0), 327b (Glen Fergus/CC BY-SA 3.0)

Az olvasó kezében lévő gyűjtemény a fizika emelt szintű érettségi vizsga tananyagát feldolgozó témakörök első részét tartalmazza. A második rész tananyagát az **OH-FIZ1112E** raktári számú, **Gyűjtemény a fizika emelt szintű oktatásához** gyűjteményben dolgoztuk fel.

Az OH-FIZ1112E raktári számú gyűjtemény témakörei:

I. Elektromos mező
II. Kondenzátorok, kapacitások
III. Egyenáramok
IV. Mágneses mező
V. Indukció, mágneses energia
VI. A váltakozó áram keletkezése, jellemzése
VII. Félvezetők
VIII. Hullámok, rezgőkör
IX. Optika
X. Atomfizika: foton és elektron
XI. Atommodellek
XII. A radioaktivitás
XIII. Nukleáris fizika
XIV. Fizika az orvoslásban
XV. Csillagok életútja
XVI. Kozmológia és a jelen kihívásai

