Kézikönyvek

I. N. Bronstejn
K. A. Szemengyajev
G. Musiol
H. Mühlig

9. kiadás

MATEMATIKAI KÉZIKÖNYV

TYPOTEX

I. N. Bronstejn, K. A. Szemengyajev

D. Musiol, H. Mühlig

MATEMATIKAI KÉZIKÖNYV



Budapest 2009

Az eredeti mű címe: Taschenbuch der Mathematik. A fordítás a 4. átdolgozott kiadás alapján készült.

© Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, Thun 1999.

Egyetemi tankönyv

E könyv hetedik kiadása az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított tankönyvtámogatási program keretében jelent meg.

© Hungarian translation TypoTEX, 2000

Fordították:

Bach Iván	5. fejezet
Bognár János	1., 2., 3., 11., 12., 15. fejezet
Csergőffy Tibor	5.9. szakasz, 18., 21. fejezet
Győrffy Judit	16., 19., 20. fejezet
Kovács Sándor	9., 10. fejezet
Stubnya Gusztávné	4., 13. fejezet
Szép Jenőné	6., 7., 8., 14. fejezet
Tóth János	17. fejezet

Lektorálták:

Barabás Béla	19., 20. fejezet
Csergőffy Tibor	4., 12. fejezet
Fogaras Dániel	5. fejezet
Kovács Sándor	2., 6., 7., 8., 14. fejezet
Marx Dániel	3. fejezet
Rácz András	1., 9., 10., 11., 13., 14., 15. fejezet, valamint 2., 12., 20. fejezetek ismételten
Szép Jenőné	16., 18. fejezet
Szili László	17. fejezet
Tikk Domonkos	5.9. szakasz

A magyar bibliográfiát Scharnitzky Viktor állította össze.

ISBN 978-963-279-079-4

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A Kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más adathordozó) nem sokszorosítható.

Előszó a javított, nyolcadik kiadáshoz

A „Bronstejn" legfrissebb kiadása mintegy 50 év kézikönyvszerkesztői tapasztalatait sűríti egybe.
Az első kiadás, amely 1953-ban jelent meg Moszkvában, az akkor klasszikusnak számító alkalmazói témaköröket tárgyalta, tehát elsősorban műszakiaknak, mérnököknek szólt. Mintegy irodalmi háttere volt az akkor egyedül létező számítástechnikai eszköznek, a logarlécnek.
Az akkori kötet táblázatokkal és grafikonokkal kezdődött, majd az elemi matematikán keresztül eljutott az analitikus és differenciálgeometriáig és folytatódott a matematikai analízissel. A kötetet a mérési eredmények kiértékelését tárgyaló fejezet zárta. Mindez a jelen könyv terjedelmének a harmadát tette ki.
Magyarországon a „Bronstejn" eddig hat plusz egy kiadást ért meg. A hatodik kiadás 1987-ben a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg, alapjául az 1980-as átdolgozott kiadás szolgált. Az átdolgozás azonban akkor is Németországban készült. A legutóbbi kiadás már számos új területtel bővítette az eredeti kötetet, pl.: halmazok, valószínűségszámítás és matematikai statisztika, matematikai programozás és numerikus módszerek. Az alkalmazások köre az elmúlt évtizedekben hihetetlen sebességgel és a legváratlanabb irányokban tovább bővült, és már korántsem korlátozódik a műszakiakra. A rendelkezésre álló eszköztár világszerte elterjedt hatékony programcsomagokat jelent, mint például a Mathematica vagy a Maple. A XXI. század feltalálói számára tehát még teljesebb átdolgozásra volt szükség. Ennek ékes bizonyítékát adja már maga a tartalomjegyzék is. Például külön fejezetek tárgyalják a dinamikus rendszereket, a számítógép-algebrát, és megtalálhatók a fuzzy logika, a kombinatorikus algoritmusok, a kriptológia, a műszaki jelanalízis új módszerei vagy az algebra modern ágai is. A tárgymutató még részletesebb eligazítást kínál közel 50 oldalon.
Az eredeti zsebkönyv legújabb kiadásai a lényegretörő tárgyalásmód, a hatékony szerkezeti felépítés és a míves tipográfia ellenére kézikönyvvé duzzadtak, a matematika felhasználhatóságát mintegy fizikai terjedelmükben is tanúsítva.
A Kiadó munkáját népes szakembergárda segítette. A fordítás alapjául szolgáló 1999-ben megjelent, negyedik átdolgozott és bővített német kiadás számos hiányosságát és pontatlanságát sikerült kijavítanunk. Ebben a munkában kiemelkedő szerepe volt Szép Gabriellának, a könyv angol nyelvű fordítójának és Rácz Andrásnak.
A jelen, nyolcadik kiadásban igyekeztünk gondosan kijavítani azokat a hibákat, amelyek az előző kiadás feszes határideje miatt sajnálatos módon előfordultak. Reméljük, hogy számukat már minimálisra szorítottuk vissza.
Itt említjük meg, hogy a mostani kiadásban már internet-honlapokat is feltüntettünk az irodalomjegyzékben, és a későbbi kiadásokban egyre bővíteni fogjuk az ilyen típusú hivatkozások számát. Emiatt arra kérjük a kedves Olvasót, hogy az újabb kiadásokra gondolva hívja fel a Kiadó figyelmét az általa hasznosnak tartott honlapokra.

2002. augusztus

A Kiadó

Tartalomjegyzék

1. Aritmetika **1**
1.1. Elemi számolási szabályok . . . 1
1.1.1. Számok . . . 1
1.1.1.1. Természetes, egész és racionális számok . . . 1
1.1.1.2. Irracionális és transzcendens számok . . . 1
1.1.1.3. Valós számok . . . 2
1.1.2. Bizonyítási módszerek . . . 4
1.1.2.1. Direkt bizonyítás . . . 4
1.1.2.2. Indirekt (ellentmondással történő) bizonyítás . . . 4
1.1.2.3. Teljes indukció . . . 5
1.1.2.4. Konstruktív bizonyítás . . . 5
1.1.2.5. Nemkonstruktív bizonyítás . . . 5
1.1.3. Összegek és szorzatok . . . 6
1.1.3.1. Összegek . . . 6
1.1.3.2. Szorzatok . . . 7
1.1.4. Hatványok, gyökök, logaritmusok . . . 7
1.1.4.1. Hatványok . . . 7
1.1.4.2. Gyökök . . . 8
1.1.4.3. Logaritmusok . . . 9
1.1.4.4. Speciális logaritmusok . . . 9
1.1.5. Algebrai kifejezések . . . 10
1.1.5.1. Definíciók . . . 10
1.1.5.2. Az algebrai kifejezések osztályozása . . . 11
1.1.6. Racionális egész kifejezések . . . 11
1.1.6.1. Előállítás polinomalakban . . . 11
1.1.6.2. Polinom felbontása tényezőkre . . . 11
1.1.6.3. Speciális képletek . . . 11
1.1.6.4. Binomiális tétel . . . 12
1.1.6.5. Két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározása . . . 14
1.1.7. Racionális törtkifejezések . . . 14
1.1.7.1. Visszavezetés a legegyszerűbb alakra . . . 14
1.1.7.2. A racionális egész rész meghatározása . . . 15
1.1.7.3. Parciális törtekre bontás . . . 15
1.1.7.4. Arányosságok átalakítása . . . 16
1.1.8. Irracionális kifejezések . . . 17
1.2. Véges sorok . . . 17
1.2.1. A véges sor definíciója . . . 17
1.2.2. Számtani sorok . . . 17
1.2.3. Mértani sor . . . 18
1.2.4. Speciális véges sorok . . . 19
1.2.5. Középértékek . . . 19

1.2.5.1. Számtani közép . . . 19
1.2.5.2. Mértani közép . . . 19
1.2.5.3. Harmonikus közép . . . 20
1.2.5.4. Négyzetes közép . . . 20
1.2.5.5. A középértékek összehasonlítása két pozitív $a \leq b$ mennyiség esetén 20
1.3. Pénzügyi matematika . . . 20
1.3.1. Százalékszámítás . . . 21
1.3.2. Kamatoskamat-számítás . . . 22
1.3.3. Törlesztésszámítás . . . 22
1.3.3.1. Törlesztés . . . 22
1.3.3.2. Egyenlő törlesztőrészletek . . . 23
1.3.3.3. Egyenlő annuitások . . . 24
1.3.4. Járadékszámítás . . . 24
1.3.4.1. Járadék . . . 24
1.3.4.2. Utólagos konstans járadék . . . 24
1.3.4.3. Számlaegyenleg n-szeri járadékfizetés után . . . 25
1.3.5. Leírások . . . 28
1.4. Egyenlőtlenségek . . . 28
1.4.1. Tiszta egyenlőtlenségek . . . 28
1.4.1.1. Definíciók . . . 28
1.4.1.2. Az I. és II. típusú egyenlőtlenségek tulajdonságai . . . 29
1.4.2. Speciális egyenlőtlenségek . . . 29
1.4.2.1. Háromszög-egyenlőtlenség . . . 29
1.4.2.2. Egyenlőtlenségek két szám különbségének abszolút értékére . . . 30
1.4.2.3. A számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség . . . 30
1.4.2.4. A számtani és a négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenség . . . 30
1.4.2.5. Valós számok különféle középértékeire vonatkozó egyenlőtlenségek 30
1.4.2.6. Bernoulli-egyenlőtlenség . . . 30
1.4.2.7. Binomiális egyenlőtlenség . . . 30
1.4.2.8. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség . . . 31
1.4.2.9. Csebisev-egyenlőtlenség . . . 31
1.4.2.10. Általánosított Csebisev-egyenlőtlenség . . . 32
1.4.2.11. Hölder-egyenlőtlenség . . . 32
1.4.2.12. Minkowski-egyenlőtlenség . . . 32
1.4.3. Első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldása . . . 32
1.4.3.1. Általános rész . . . 33
1.4.3.2. Elsőfokú egyenlőtlenségek . . . 33
1.4.3.3. Másodfokú egyenlőtlenségek . . . 33
1.4.3.4. A másodfokú egyenlőtlenség általános esete . . . 34
1.5. Komplex számok . . . 34
1.5.1. Képzetes és komplex számok . . . 34
1.5.1.1. Képzetes egység . . . 34
1.5.1.2. Komplex számok . . . 34
1.5.2. Geometriai szemléltetés . . . 34
1.5.2.1. Előállítás vektoralakban . . . 34
1.5.2.2. Komplex számok egyenlősége . . . 35
1.5.2.3. Komplex számok trigonometrikus alakja . . . 35
1.5.2.4. Komplex szám exponenciális alakja . . . 35
1.5.2.5. Konjugált komplex számok . . . 36
1.5.3. Számolás komplex számokkal . . . 36
1.5.3.1. Összeadás és kivonás . . . 36
1.5.3.2. Szorzás . . . 36

1.5.3.3. Osztás . . . 37
1.5.3.4. A négy alapműveletre vonatkozó általános szabályok . . . 37
1.5.3.5. Komplex szám hatványozása . . . 37
1.5.3.6. Komplex szám n-edik gyökének meghatározása . . . 38
1.6. Algebrai és transzcendens egyenletek . . . 38
1.6.1. Algebrai egyenletek normálalakra hozása . . . 38
1.6.1.1. Definíció . . . 38
1.6.1.2. n számú algebrai egyenletből álló rendszerek . . . 38
1.6.1.3. Hamis gyökök . . . 39
1.6.2. 1.–4. fokú egyenletek . . . 39
1.6.2.1. Elsőfokú (lineáris) egyenletek . . . 39
1.6.2.2. Másodfokú (kvadratikus) egyenletek . . . 39
1.6.2.3. Harmadfokú egyenletek . . . 40
1.6.2.4. Negyedfokú egyenletek . . . 41
1.6.2.5. Ötöd- és magasabbfokú egyenletek . . . 42
1.6.3. n-edfokú egyenletek . . . 42
1.6.3.1. Algebrai egyenletek általános tulajdonságai . . . 42
1.6.3.2. Valós együtthatójú egyenletek . . . 43
1.6.4. Transzcendens egyenletek visszavezetése algebrai egyenletekre . . . 45
1.6.4.1. Definíció . . . 45
1.6.4.2. Exponenciális egyenletek . . . 45
1.6.4.3. Logaritmikus egyenletek . . . 45
1.6.4.4. Trigonometrikus egyenletek . . . 45
1.6.4.5. Egyenletek hiperbolikus függvényekkel . . . 46

2. Függvények és előállításuk **47**
2.1. A függvény fogalma . . . 47
2.1.1. A függvény definíciója . . . 47
2.1.1.1. Függvény . . . 47
2.1.1.2. Valós függvény . . . 47
2.1.1.3. Többváltozós függvény . . . 47
2.1.1.4. Komplex függvény . . . 47
2.1.1.5. További függvények . . . 47
2.1.1.6. Funkcionálok . . . 47
2.1.1.7. Függvény és leképezés . . . 48
2.1.2. Módszerek valós függvények értelmezésére . . . 48
2.1.2.1. Függvény megadása . . . 48
2.1.2.2. Valós függvény analitikus előállítása . . . 49
2.1.3. Néhány függvényfajta . . . 49
2.1.3.1. Monoton függvények . . . 49
2.1.3.2. Korlátos függvények . . . 50
2.1.3.3. Függvény szélsőértékei . . . 50
2.1.3.4. Páros függvények . . . 50
2.1.3.5. Páratlan függvények . . . 50
2.1.3.6. Előállítás páros és páratlan függvény segítségével . . . 51
2.1.3.7. Periodikus függvények . . . 51
2.1.3.8. Inverz függvény . . . 51
2.1.4. Függvény határértéke . . . 52
2.1.4.1. Függvény határértékének definíciója . . . 52
2.1.4.2. Visszavezetés sorozat határértékére . . . 52
2.1.4.3. A Cauchy-féle konvergenciakritérium . . . 53
2.1.4.4. Végtelen mint függvény-határérték . . . 53

2.1.4.5. Függvény bal oldali és jobb oldali határértéke 53
2.1.4.6. Függvény határértéke a végtelenben 54
2.1.4.7. Függvények határértékeire vonatkozó tételek 54
2.1.4.8. Határértékek kiszámítása 55
2.1.4.9. Függvények nagyságrendje és a Landau-féle szimbólumok 56
2.1.5. Függvény folytonossága 58
2.1.5.1. A folytonosság és a szakadási hely fogalma 58
2.1.5.2. A folytonosság definíciója 58
2.1.5.3. Gyakran fellépő szakadásfajták 58
2.1.5.4. Elemi függvények folytonossága és szakadási helyei 59
2.1.5.5. Folytonos függvények tulajdonságai 60
2.2. Elemi függvények 61
2.2.1. Algebrai függvények 61
2.2.1.1. Racionális egész függvények (polinomok) 61
2.2.1.2. Racionális törtfüggvények 62
2.2.1.3. Irracionális függvények 62
2.2.2. Transzcendens függvények 62
2.2.2.1. Exponenciális függvények 62
2.2.2.2. Logaritmusfüggvények 62
2.2.2.3. Trigonometrikus függvények 62
2.2.2.4. Inverz trigonometrikus függvények 62
2.2.2.5. Hiperbolikus függvények 63
2.2.2.6. Inverz hiperbolikus függvények 63
2.3. Polinomok 63
2.3.1. Lineáris függvény 63
2.3.2. Másodfokú polinom 63
2.3.3. Harmadfokú polinom 64
2.3.4. n-edfokú polinom 64
2.3.5. n-edrendű parabola 65
2.4. Racionális törtfüggvények 65
2.4.1. Fordított arányosság 65
2.4.2. Harmadrendű görbe, I. típus 66
2.4.3. Harmadrendű görbe, II. típus 66
2.4.4. Harmadrendű görbe, III. típus 67
2.4.5. Reciprok hatvány 69
2.5. Irracionális függvények 70
2.5.1. Lineáris binom négyzetgyöke 70
2.5.2. Másodfokú polinom négyzetgyöke 70
2.5.3. Hatványfüggvény 71
2.6. Exponenciális és logaritmusfüggvények 72
2.6.1. Exponenciális függvények 72
2.6.2. Logaritmusfüggvények 72
2.6.3. Gauss-féle haranggörbe 72
2.6.4. Exponenciális összeg 73
2.6.5. Általánosított Gauss-féle haranggörbe 74
2.6.6. Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata 74
2.7. Trigonometrikus függvények 75
2.7.1. Elemi tudnivalók 75
2.7.1.1. Definíció és ábrázolás 75
2.7.1.2. Értékkészletek és a függvények menete 78
2.7.2. Trigonometrikus függvényekre vonatkozó további fontos formulák 80
2.7.2.1. Trigonometrikus függvények közötti összefüggések 80

2.7.2.2. Trigonometrikus függvények szögek összegéhez, ill. különbségéhez tartozó értékei . . . 80
2.7.2.3. Trigonometrikus függvények szögek többszöröseihez tartozó értékei 81
2.7.2.4. Trigonometrikus függvények szög feléhez tartozó értékei (félszögtételek) . . . 82
2.7.2.5. Trigonometrikus függvények két értékének összege, ill. különbsége (addíciós tételek) . . . 82
2.7.2.6. Trigonometrikus függvények értékeinek szorzata . . . 82
2.7.2.7. Trigonometrikus függvények hatványai . . . 83
2.7.3. Rezgések leírása . . . 83
2.7.3.1. A probléma megfogalmazása . . . 83
2.7.3.2. Rezgések szuperpozíciója vagy összetétele . . . 84
2.7.3.3. Rezgések vektordiagramja . . . 84
2.7.3.4. Rezgések csillapítása . . . 85
2.8. Ciklometrikus függvények (árkuszfüggvények) . . . 85
2.8.1. A ciklometrikus függvények definíciója . . . 86
2.8.2. Visszavezetés a főértékekre . . . 86
2.8.3. Összefüggések a főértékek között . . . 86
2.8.4. Képletek ellentett argumentumpárokra . . . 87
2.8.5. $\arcsin x$ és $\arcsin y$ összege és különbsége . . . 87
2.8.6. $\arccos x$ és $\arccos y$ összege és különbsége . . . 88
2.8.7. $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arctg} y$ összege és különbsége . . . 88
2.8.8. Speciális összefüggések az $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ függvényekre . . . 88
2.9. Hiperbolikus függvények . . . 89
2.9.1. A hiperbolikus függvények definíciója . . . 89
2.9.2. A hiperbolikus függvények grafikus előállítása . . . 89
2.9.2.1. Szinusz hiperbolikusz . . . 89
2.9.2.2. Koszinusz hiperbolikusz . . . 89
2.9.2.3. Tangens hiperbolikusz . . . 90
2.9.2.4. Kotangens hiperbolikusz . . . 90
2.9.3. Hiperbolikus függvényekre vonatkozó fontos képletek . . . 91
2.9.3.1. Egyező argumentumú hiperbolikus függvények . . . 91
2.9.3.2. Hiperbolikus függvény előállítása azonos argumentumú másikkal 91
2.9.3.3. Ellentett argumentumpárokra vonatkozó képletek . . . 91
2.9.3.4. Hiperbolikus függvények két argumentum összegéhez és különbségéhez tartozó értékei (addíciós tételek) . . . 91
2.9.3.5. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum kétszeresén felvett értékei . . . 92
2.9.3.6. Moivre-képlet hiperbolikus függvényekre . . . 92
2.9.3.7. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum felén felvett értékei . . . 92
2.9.3.8. Hiperbolikus függvény két helyen felvett értékének összege és különbsége sh-val és/vagy ch-val kifejezve . . . 92
2.9.3.9. Összefüggés a hiperbolikus és a trigonometrikus függvények között komplex z argumentum esetén . . . 92
2.10. Áreafüggvények . . . 93
2.10.1. Definíciók . . . 93
2.10.1.1. Área szinusz hiperbolikusz . . . 93
2.10.1.2. Área koszinusz hiperbolikusz . . . 93
2.10.1.3. Área tangens hiperbolikusz . . . 94
2.10.1.4. Área kotangens hiperbolikusz . . . 94
2.10.2. Az áreafüggvények előállítása a természetes alapú logaritmussal . . . 94

2.10.3. Összefüggések a különböző áreafüggvények között 95
2.10.4. Áreafüggvények két értékének összege és különbsége 95
2.10.5. Képletek ellentett argumentumpárokra 95
2.11. Harmadrendű görbék 95
2.11.1. Neil-parabola 95
2.11.2. Agnesi-féle kürt (verziera) 96
2.11.3. Descartes-levél 96
2.11.4. Cisszoid 97
2.11.5. Sztrofoid 97
2.12. Negyedrendű görbék 98
2.12.1. Nikomedes-féle konchoid 98
2.12.2. Általános konchoid 99
2.12.3. Pascal-féle csiga 99
2.12.4. Kardioid 100
2.12.5. Cassini-féle görbék 101
2.12.6. Lemniszkáta 102
2.13. Cikloisok 102
2.13.1. Közönséges ciklois 102
2.13.2. Hurkolt és nyújtott cikloisok, más néven trochoidok 103
2.13.3. Epiciklois 104
2.13.4. Hipociklois és asztroid 106
2.13.5. Hurkolt és nyújtott epiciklois és hipociklois 106
2.14. Spirálok 107
2.14.1. Archimédeszi spirál 107
2.14.2. Hiperbolikus spirál 107
2.14.3. Logaritmikus spirál 108
2.14.4. A kör evolvense 108
2.14.5. Klotoid 109
2.15. Különféle egyéb görbék 109
2.15.1. Láncgörbe 109
2.15.2. Traktrix 110
2.16. Empirikus görbék meghatározása 110
2.16.1. A módszer vázlata 110
2.16.1.1. Függvénygörbék összehasonlítása 110
2.16.1.2. Rektifikálás 110
2.16.1.3. A paraméterek meghatározása 111
2.16.2. A leggyakrabban használt empirikus képletek 111
2.16.2.1. Hatványfüggvények 111
2.16.2.2. Exponenciális függvények 112
2.16.2.3. Másodfokú polinom 113
2.16.2.4. Lineáris törtfüggvény 113
2.16.2.5. Másodfokú polinom négyzetgyöke 114
2.16.2.6. Általánosított Gauss-féle haranggörbe 114
2.16.2.7. Harmadrendű görbe, II. típus 114
2.16.2.8. Harmadrendű görbe, III. típus 114
2.16.2.9. Harmadrendű görbe, I. típus 115
2.16.2.10. Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata 115
2.16.2.11. Exponenciális összeg 116
2.17. Skálák és függvénypapírok 118
2.17.1. Skálák 118
2.17.2. Függvénypapírok 119
2.17.2.1. Egyszer logaritmikus függvénypapír 119

2.17.2.2. Kétszer logaritmikus függvénypapír 120
2.17.2.3. Függvénypapír reciprok skálával 120
2.17.2.4. Megjegyzés 121
2.18. Többváltozós függvények 121
2.18.1. Definíció és előállítás 121
2.18.1.1. Többváltozós függvények előállítása 121
2.18.1.2. Többváltozós függvények geometriai ábrázolása 122
2.18.2. Különféle értelmezési tartományok a síkban 122
2.18.2.1. Függvény értelmezési tartománya 122
2.18.2.2. Kétdimenziós tartományok 122
2.18.2.3. Három- és többdimenziós tartományok 123
2.18.2.4. Függvényértelmezési módszerek 123
2.18.2.5. Függvények analitikus előállítási módjai 124
2.18.2.6. Függvények összefüggése 126
2.18.3. Határértékek 127
2.18.3.1. Definíció 127
2.18.3.2. Egzakt megfogalmazás 128
2.18.3.3. Általánosítás több változóra 128
2.18.3.4. Többszörös határértékek 128
2.18.4. Folytonosság 128
2.18.5. Folytonos függvények tulajdonságai 129
2.18.5.1. Bolzano zérushely-tétele 129
2.18.5.2. Közbülsőérték-tétel 129
2.18.5.3. Függvény korlátosságáról szóló tétel 129
2.18.5.4. Weierstrass tétele a legnagyobb és legkisebb függvényérték létezéséről 129

3. Geometria **130**
3.1. Síkgeometria 130
3.1.1. Alapfogalmak 130
3.1.1.1. Pont, egyenes, félegyenes, szakasz 130
3.1.1.2. Szög 130
3.1.1.3. Két metsző egyenesnél fellépő szögek 130
3.1.1.4. Párhuzamosokat metsző egyenesnél fellépő szögpárok 131
3.1.1.5. Szög kifejezése fokokban és ívmértékben 131
3.1.2. A körfüggvények és a hiperbolikus függvények geometriai definíciója 132
3.1.2.1. A kör- vagy trigonometrikus függvények definíciója 132
3.1.2.2. A hiperbolikus függvények geometriai definíciója 133
3.1.3. Síkháromszögek 134
3.1.3.1. Síkháromszögekre vonatkozó állítások 134
3.1.3.2. Szimmetria 135
3.1.4. Síknégyszögek 136
3.1.4.1. Paralelogramma 136
3.1.4.2. Téglalap és négyzet 137
3.1.4.3. Rombusz 137
3.1.4.4. Trapéz 137
3.1.4.5. Általános négyszög 138
3.1.5. Síkbeli sokszögek 138
3.1.6. Síkbeli köralakzatok 139
3.1.6.1. Kör 139
3.1.6.2. Körszelet és körcikk 140
3.1.6.3. Körgyűrű 140

3.2. Síkbeli trigonometria . . . 141
3.2.1. Háromszögek adatainak kiszámítása . . . 141
3.2.1.1. Derékszögű síkháromszögekre vonatkozó számolások . . . 141
3.2.1.2. Síkháromszögekre vonatkozó számolások . . . 142
3.2.2. Geodéziai alkalmazások . . . 143
3.2.2.1. Geodéziai koordináták . . . 143
3.2.2.2. Szögek a geodéziában . . . 145
3.2.2.3. Méréstechnikai alkalmazások . . . 147
3.3. Térgeometria . . . 150
3.3.1. Egyenesek és síkok a térben . . . 150
3.3.2. Élek, csúcsok, térszögek . . . 151
3.3.3. Poliéderek . . . 152
3.3.4. Görbült felületekkel határolt testek . . . 154
3.4. Gömbháromszögtan (szférikus trigonometria) . . . 158
3.4.1. A gömbfelület geometriájának alapfogalmai . . . 158
3.4.1.1. Görbék, ívek és szögek a gömbön . . . 158
3.4.1.2. Speciális koordinátarendszerek . . . 160
3.4.1.3. Gömbkétszög . . . 161
3.4.1.4. Gömbháromszög . . . 162
3.4.1.5. Polárgömbháromszög . . . 162
3.4.1.6. Euler-féle és nem Euler-féle háromszögek . . . 163
3.4.1.7. Triéder . . . 163
3.4.2. A gömbháromszögek fő tulajdonságai . . . 163
3.4.2.1. Általános állítások . . . 163
3.4.2.2. Alapképletek és alkalmazásaik . . . 164
3.4.2.3. További képletek . . . 167
3.4.3. Gömbháromszögek megoldása . . . 168
3.4.3.1. Alapfeladatok, pontossági megfontolások . . . 168
3.4.3.2. Derékszögű gömbháromszög . . . 168
3.4.3.3. Ferdeszögű gömbháromszög . . . 170
3.4.3.4. Gömbfelületi görbék . . . 172
3.5. Vektoralgebra és analitikus geometria . . . 180
3.5.1. Vektoralgebra . . . 180
3.5.1.1. A vektor definíciója, számolási szabályok . . . 180
3.5.1.2. Skaláris szorzat és vektoriális szorzat . . . 183
3.5.1.3. Többszörös szorzási kapcsolatok . . . 185
3.5.1.4. Vektoregyenletek . . . 187
3.5.1.5. Vektor kovariáns és kontravariáns koordinátái . . . 187
3.5.1.6. A vektoralgebra geometriai alkalmazásai . . . 189
3.5.2. A sík analitikus geometriája . . . 189
3.5.2.1. Alapvető fogalmak és képletek, síkbeli koordinátarendszerek . . . 189
3.5.2.2. Egyenes . . . 193
3.5.2.3. Kör . . . 196
3.5.2.4. Ellipszis . . . 197
3.5.2.5. Hiperbola . . . 200
3.5.2.6. Parabola . . . 203
3.5.2.7. Másodrendű görbék (kúpszeletek) . . . 204
3.5.3. A tér analitikus geometriája . . . 207
3.5.3.1. Alapvető tudnivalók, térbeli koordinátarendszerek . . . 207
3.5.3.2. Térbeli egyenes és sík . . . 214
3.5.3.3. Másodrendű felületek, az egyenletek normálalakja . . . 220
3.5.3.4. Másodrendű felületek, általános elmélet . . . 223

3.6. Differenciálgeometria 224
3.6.1. Síkgörbék 225
3.6.1.1. Lehetőségek síkgörbék definiálására 225
3.6.1.2. Görbék lokális alkotóelemei 225
3.6.1.3. Görbék kitüntetett pontjai, aszimptoták 231
3.6.1.4. Görbék általános vizsgálata egyenletük alapján 235
3.6.1.5. Evoluták és evolvensek 236
3.6.1.6. Görbeseregek burkolói 237
3.6.2. Térgörbék 238
3.6.2.1. Térgörbék definiálására alkalmas lehetőségek 238
3.6.2.2. Kísérő triéder 238
3.6.2.3. Görbület és torzió 240
3.6.3. Felületek 243
3.6.3.1. Felület definiálására alkalmas lehetőségek 243
3.6.3.2. Érintősík és felületi normális 244
3.6.3.3. Felületi vonalelem 246
3.6.3.4. Felület görbülete 247
3.6.3.5. Vonalfelületek és lefejthető felületek 250
3.6.3.6. Felület geodetikus vonalai 250

4. Lineáris algebra **251**
4.1. Mátrixok 251
4.1.1. A mátrix fogalma 251
4.1.2. Kvadratikus mátrixok 252
4.1.3. Vektorok 253
4.1.4. Mátrixműveletek 253
4.1.5. Mátrixműveletek szabályai 257
4.1.6. Vektor- és mátrixnorma 258
4.1.6.1. Vektornormák 258
4.1.6.2. Mátrixnormák 258
4.2. Determinánsok 259
4.2.1. Definíciók 259
4.2.1.1. Determinánsok 259
4.2.1.2. Aldeterminánsok 259
4.2.2. Determinánsok számítási szabályai 259
4.2.3. Determinánsok kiszámítása 260
4.3. Tenzorok 261
4.3.1. Koordinátarendszerek transzformációja 261
4.3.2. Tenzorok megadása derékszögű koordinátákkal 262
4.3.3. Speciális tulajdonságú tenzorok 264
4.3.3.1. Másodrendű tenzorok 264
4.3.3.2. Invariáns tenzorok 264
4.3.4. Tenzorok görbevonalú koordinátarendszerekben 265
4.3.4.1. Kovariáns és kontravariáns bázisvektorok 265
4.3.4.2. Elsőrendű tenzorok kovariáns és kontravariáns koordinátái 266
4.3.4.3. Kovariáns, kontravariáns és vegyes koordinátái a másodrendű tenzoroknak 266
4.3.4.4. Számítási szabályok 268
4.3.5. Pszeudotenzorok 268
4.3.5.1. Ponttükrözés a koordinátarendszer kezdőpontjára 268
4.3.5.2. Pszeudotenzor fogalmának a bevezetése 269
4.4. Lineáris egyenletrendszerek 270

4.4.1. Lineáris rendszerek, elemcsere-eljárás . . . 270
4.4.1.1. Lineáris rendszerek . . . 270
4.4.1.2. Elemcsere-eljárás . . . 270
4.4.1.3. Lineáris függőség . . . 271
4.4.1.4. Mátrix invertálása . . . 271
4.4.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása . . . 272
4.4.2.1. Definíció és megoldhatóság . . . 272
4.4.2.2. Az elemcsere-eljárás alkalmazása . . . 273
4.4.2.3. Cramer-szabály . . . 274
4.4.2.4. Gauss-féle algoritmus . . . 275
4.4.3. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek . . . 276
4.4.3.1. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek és lineárisnégyzetes közép problémák . . . 276
4.4.3.2. A legkisebb négyzetek feladatának numerikus megoldása . . . 277
4.5. Mátrixok sajátérték-feladata . . . 277
4.5.1. Általános sajátérték-probléma . . . 277
4.5.2. Speciális sajátérték-probléma . . . 277
4.5.2.1. Karakterisztikus polinom . . . 277
4.5.2.2. Valós szimmetrikus mátrixok, hasonlósági transzformáció . . . 279
4.5.2.3. Kvadratikus alakok főtengelytranszformációja . . . 280
4.5.2.4. Útmutatás a sajátértékek numerikus meghatározásához . . . 281
4.5.3. Szinguláris értékek szerinti felbontás . . . 281

5. Algebra és diszkrét matematika **283**
5.1. Logika . . . 283
5.1.1. Ítéletkalkulus . . . 283
5.1.2. A predikátumkalkulus kifejezései . . . 286
5.2. Halmazelmélet . . . 287
5.2.1. A halmaz fogalma, különleges halmazok . . . 287
5.2.2. Műveletek halmazokkal . . . 288
5.2.3. Relációk és leképezések . . . 291
5.2.4. Ekvivalencia és rendezési relációk . . . 293
5.2.5. Halmazok számossága . . . 295
5.3. Klasszikus algebrai struktúrák . . . 295
5.3.1. Műveletek . . . 295
5.3.2. Félcsoportok . . . 295
5.3.3. Csoportok . . . 296
5.3.3.1. Definíció és alapvető tulajdonságok . . . 296
5.3.3.2. Részcsoportok és direkt szorzatok . . . 297
5.3.3.3. Csoportok közötti leképezések . . . 299
5.3.3.4. Lie-csoportok . . . 303
5.3.3.5. Lie-algebrák. . . . 306
5.3.3.6. Félegyszerű Lie-csoportok leképezése . . . 308
5.3.4. Csoportok alkalmazásai . . . 311
5.3.4.1. Szimmetria műveletek, szimmetria elemek . . . 311
5.3.4.2. Szimmetria csoportok . . . 312
5.3.4.3. Molekulák szimmetria műveletei . . . 312
5.3.4.4. A krisztallográfia szimmetria csoportjai . . . 313
5.3.4.5. A kvantummechanika szimmetria csoportjai . . . 316
5.3.4.6. Részecskefizikai alkalmazások . . . 316
5.3.4.7. További fizikai alkalmazási példák . . . 319
5.3.5. Gyűrűk és testek . . . 320

5.3.5.1. Definíciók 320
5.3.5.2. Részgyűrűk, ideálok 320
5.3.5.3. Homomorfizmusok, izomorfizmusok, homomorfia tétel 321
5.3.6. Vektorterek 321
5.3.6.1. Definíció 321
5.3.6.2. Lineáris függőség 322
5.3.6.3. Lineáris leképezések 322
5.3.6.4. Alterek, dimenziótétel 322
5.3.6.5. Euklideszi vektorterek, euklideszi norma 323
5.3.6.6. Lineáris operátorok vektorterekben 324
5.4. Elemi számelmélet 324
5.4.1. Oszthatóság 324
5.4.1.1. Oszthatóság és alapvető oszthatósági szabályok 324
5.4.1.2. Prímszámok 325
5.4.1.3. Oszthatósági kritériumok 326
5.4.1.4. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös 327
5.4.1.5. Fibonacci-számok 329
5.4.2. Lineáris Diophantoszi egyenletek 329
5.4.3. Kongruenciák és maradékosztályok 331
5.4.4. Fermat, Euler és Wilson tétele 335
5.4.5. Kódok 336
5.5. Kriptológia 338
5.5.1. A kriptológia feladata 338
5.5.2. Titkosítási rendszerek 338
5.5.3. Matematikai megfogalmazás 338
5.5.4. Titkosítási rendszerek biztonsága 339
5.5.4.1. A klasszikus kriptológia módszerei 339
5.5.4.2. Cserével végzett titkosítás 340
5.5.4.3. A Vigenere-kód 340
5.5.4.4. Mátrix helyettesítések 340
5.5.5. A klasszikus kriptoanalízis módszerei 341
5.5.5.1. Statisztikus analízis 341
5.5.5.2. A Kasiski–Friedman-próba 341
5.5.6. One-Time-Tape 342
5.5.7. Nyilvános kulcsú eljárások 342
5.5.7.1. Diffie és Hellman koncepciója 342
5.5.7.2. Egyirányú függvények 343
5.5.7.3. RSA eljárás 343
5.5.8. DES algoritmus (Data Encription Standard) 343
5.5.9. IDEA algoritmus (International Data Encryption Algorithm) 344
5.6. Univerzális algebra 344
5.6.1. Definíció 344
5.6.2. Kongruencia relációk, faktoralgebrák 345
5.6.3. Homomorfizmusok 345
5.6.4. Homomorfia tétel 345
5.6.5. Varietások 345
5.6.6. Kijelentésalgebrák, szabad algebrák 346
5.7. Boole-algebrák és kapcsolási algebrák 346
5.7.1. Definíció 346
5.7.2. A dualitási elv 347
5.7.3. Véges Boole-algebrák 347
5.7.4. Boole-algebra mint rendezés 348

5.7.5. Boole-függvények, Boole-kifejezések . . . 348
5.7.6. Normálformák . . . 349
5.7.7. Kapcsolások algebrája . . . 350
5.8. Gráfelméleti algoritmusok . . . 351
5.8.1. Alapfogalmak és jelölések . . . 351
5.8.2. Irányítatlan gráfok bejárása . . . 354
5.8.2.1. Élsorozatok . . . 354
5.8.2.2. Euler-utak . . . 356
5.8.2.3. Hamilton-körök . . . 357
5.8.3. Fák és favázak . . . 358
5.8.3.1. Fák . . . 358
5.8.3.2. Feszítő fa . . . 359
5.8.4. Párosítások . . . 360
5.8.5. Síkgráfok . . . 361
5.8.6. Pályák irányított gráfokban . . . 361
5.8.7. Szállítási hálózatok . . . 363
5.9. Fuzzy logika . . . 364
5.9.1. A fuzzy logika alapja . . . 364
5.9.1.1. A fuzzy halmazok értelmezése . . . 364
5.9.1.2. Tagsági függvények . . . 365
5.9.1.3. Fuzzy halmazok . . . 368
5.9.2. Fuzzy halmazműveletek . . . 369
5.9.2.1. Általános fuzzy halmazműveletek . . . 369
5.9.2.2. A gyakorlatban használt fuzzy halmazműveletek . . . 370
5.9.2.3. Aggregációs vagy kompenzáló operátorok . . . 371
5.9.2.4. Kiterjesztési szabály . . . 373
5.9.2.5. Fuzzy komplemensfüggvény . . . 373
5.9.3. Fuzzy relációk . . . 373
5.9.3.1. Fuzzy relációk folalma . . . 373
5.9.3.2. Fuzzy szorzatreláció $R \circ S$ . . . 375
5.9.4. Fuzzy következtető rendszerek . . . 376
5.9.5. Kiértékelési (defuzzyfikációs) módszerek . . . 378
5.9.6. Tudásalapú fuzzy rendszerek . . . 378
5.9.6.1. A Mamdani-módszer . . . 379
5.9.6.2. A Sugeno-módszer . . . 379
5.9.6.3. Alkalmazási példák . . . 380
5.9.6.4. Tudásalapú interpolációs rendszer . . . 381

6. Differenciálszámítás **384**
6.1. Egyváltozós függvények differenciálása . . . 384
6.1.1. Differenciálhányados . . . 384
6.1.2. Egyváltozós függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok . . . 385
6.1.2.1. Elemi függvények deriválása . . . 385
6.1.2.2. A differenciálás alapszabályai . . . 385
6.1.3. Magasabb rendű deriváltak . . . 391
6.1.3.1. A magasabb rendű derivált definíciója . . . 391
6.1.3.2. Egyszerűbb függvények magasabb rendű deriváltjai . . . 391
6.1.3.3. A Leibniz-formula . . . 391
6.1.3.4. Paraméteres alakban adott függvények magasabb rendű deriváltjai 392
6.1.3.5. Inverz függvények magasabb rendű deriváltjai . . . 393
6.1.4. A differenciálszámítás legfontosabb tételei . . . 393
6.1.4.1. Monotonitási feltételek . . . 393

6.1.4.2. Fermat tétele . . . 393
6.1.4.3. Rolle tétele . . . 394
6.1.4.4. A differenciálszámítás középértéktétele . . . 394
6.1.4.5. Az egyváltozós függvényekre vonatkozó Taylor-tétel . . . 395
6.1.4.6. A differenciálszámítás középértéktételének általánosítása . . . 395
6.1.5. A szélsőértékek és inflexiós pontok meghatározása . . . 395
6.1.5.1. Maximum és minimum . . . 395
6.1.5.2. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele . . . 396
6.1.5.3. Differenciálható, $y = f(x)$ explicit alakban adott függvény lokális szélsőértékei . . . 396
6.1.5.4. Abszolút (globális) szélsőértékek meghatározása . . . 397
6.1.5.5. Implicit alakban adott függvény szélsőértékeinek meghatározása . 397
6.2. Többváltozós függvények differenciálása . . . 398
6.2.1. Parciális deriváltak . . . 398
6.2.1.1. Függvény parciális deriváltja . . . 398
6.2.1.2. Geometriai jelentés két változó esetén . . . 398
6.2.1.3. A differenciál fogalma . . . 398
6.2.1.4. A differenciál főbb tulajdonságai . . . 399
6.2.1.5. Parciális differenciál . . . 399
6.2.2. Teljes differenciál és magasabb rendű differenciálok . . . 400
6.2.2.1. Többváltozós függvény teljes differenciáljának fogalma . . . 400
6.2.2.2. Magasabb rendű deriváltak és differenciálok . . . 401
6.2.3. Többváltozós függvények differenciálasi szabályai . . . 401
6.2.3.1. Összetett függvények differenciálása . . . 401
6.2.3.2. Implicit függvények differenciálása . . . 402
6.2.4. Változók helyettesítése differenciálkifejezésekben és koordinátatranszformációknál . . . 403
6.2.4.1. Egyváltozós függvény . . . 403
6.2.4.2. Kétváltozós függvények . . . 404
6.2.5. Többváltozós függvények szélsőértékei . . . 405
6.2.5.1. Definíció . . . 405
6.2.5.2. Geometriai jelentés . . . 406
6.2.5.3. Kétváltozós függvény szélsőértékeinek meghatározása . . . 406
6.2.5.4. Szélsőérték meghatározása n-változós függvény esetén . . . 406
6.2.5.5. Feladatok közelítő megoldása . . . 407
6.2.5.6. Feltételes szélsőérték meghatározása . . . 407

7. Végtelen sorok **409**
7.1. Számsorozatok . . . 409
7.1.1. Számsorozatok tulajdonságai . . . 409
7.1.1.1. Számsorozatok, alapfogalmak . . . 409
7.1.1.2. Monoton számsorozatok . . . 409
7.1.1.3. Korlátos sorozatok . . . 409
7.1.2. Számsorozat határértéke . . . 410
7.2. Konstans tagú sorok . . . 411
7.2.1. Általános konvergencia-tételek . . . 411
7.2.1.1. Végtelen sorok konvergenciája és divergenciája . . . 411
7.2.1.2. Sorok konvergenciájára vonatkozó tételek . . . 411
7.2.2. Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok . . . 412
7.2.2.1. Összehasonlító kritérium . . . 412
7.2.2.2. d'Alembert-féle hányadoskritérium . . . 412
7.2.2.3. A Cauchy-féle gyökkritérium . . . 413

7.2.2.4. Cauchy-féle integrálkritérium . . . 414
7.2.3. Abszolút és feltételes konvergencia . . . 414
7.2.3.1. Definíció . . . 414
7.2.3.2. Abszolút konvergens sorok tulajdonságai . . . 414
7.2.3.3. Alternáló sorok . . . 415
7.2.4. Néhány speciális sor . . . 415
7.2.4.1. Néhány konstans tagú sor összege . . . 415
7.2.4.2. Bernoulli- és Euler-féle számok . . . 417
7.2.5. A maradéktag becslése . . . 418
7.2.5.1. Becslés majoráns segítségével . . . 418
7.2.5.2. Alternáló konvergens sorok . . . 419
7.2.5.3. Speciális sorok . . . 419
7.3. Függvénysorok . . . 419
7.3.1. Definíciók . . . 419
7.3.2. Egyenletes konvergencia . . . 419
7.3.2.1. Definíció, Weierstrass-féle kritérium . . . 419
7.3.2.2. Egyenletesen konvergens sorok tulajdonságai . . . 420
7.3.3. Hatványsorok . . . 421
7.3.3.1. Definíció, konvergencia . . . 421
7.3.3.2. Műveletek hatványsorokkal . . . 421
7.3.3.3. Taylor-sorfejtés, MacLaurin-sor . . . 422
7.3.4. Közelítő formulák . . . 424
7.3.5. Aszimptotikus hatványsorok . . . 425
7.3.5.1. Aszimptotikus egyenlőség . . . 425
7.3.5.2. Aszimptotikus hatványsorok . . . 426
7.4. Fourier-sorok . . . 427
7.4.1. Trigonometrikus összeg és Fourier-sor . . . 427
7.4.1.1. Alapfogalmak . . . 427
7.4.1.2. A Fourier-sorok legfontosabb tulajdonságai . . . 428
7.4.2. Szimmetrikus függvények együtthatóinak meghatározása . . . 428
7.4.2.1. Különböző szimmetriák . . . 428
7.4.2.2. A Fourier-sorfejtés formulái . . . 430
7.4.3. Az együtthatók meghatározása numerikus módszerekkel . . . 430
7.4.4. Fourier-sor és Fourier-integrál . . . 431
7.4.5. Útmutató a Fourier-sorfejtések táblázatához . . . 431

8. Integrálszámítás **433**
8.1. Határozatlan integrál . . . 433
8.1.1. Primitív függvény vagy integrál (antiderivált) . . . 433
8.1.1.1. Határozatlan integrál (antiderivált) . . . 434
8.1.1.2. Elemi függvények integrálja . . . 434
8.1.2. Integrálási szabályok . . . 434
8.1.3. Racionális függvények integrálása . . . 437
8.1.3.1. Racionális egész függvények (polinomok) integrálja . . . 437
8.1.3.2. Racionális törtfüggvények integrálása . . . 437
8.1.3.3. A parciális törtekre való bontás négy esete . . . 438
8.1.4. Irracionális függvények integrálása . . . 441
8.1.4.1. Racionális függvény integrálására visszavezető helyettesítés . . . 441
8.1.4.2. Az integrál átalakítása trigonometrikus és hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integráljává . . . 441
8.1.4.3. Binomiális integrandus integrálása . . . 441
8.1.4.4. Elliptikus integrál . . . 443

8.1.5. Trigonometrikus függvények integrálása 444
8.1.5.1. Helyettesítés 444
8.1.5.2. Egyszerűsített módszerek 445
8.1.6. További transzcendens függvények integrálása 446
8.1.6.1. Exponenciális függvényt tartalmazó integrálok 446
8.1.6.2. Hiperbolikus függvények integrálja 446
8.1.6.3. A parciális integrálás alkalmazása 446
8.1.6.4. Transzcendens függvények integrálása 447
8.2. Határozott integrál 447
8.2.1. Alapfogalmak, szabályok és tételek 447
8.2.1.1. A határozott integrál fogalma 447
8.2.1.2. A határozott integrál jellemzői 448
8.2.1.3. Az integrációs határokra vonatkozó további tételek 450
8.2.1.4. A határozott integrál kiszámítása 451
8.2.2. A határozott integrál alkalmazása 454
8.2.2.1. A határozott integrál alkalmazásának általános elve 454
8.2.2.2. Geometriai alkalmazások 455
8.2.2.3. Mechanikai és fizikai alkalmazások 458
8.2.3. Improprius integrálok, Stieltjes- és Lebesgue-integrálok 460
8.2.3.1. Az integrálfogalom általánosításai 460
8.2.3.2. Végtelen integrációs határokkal rendelkező integrálok 461
8.2.3.3. Nemkorlátos függvény integrálja 464
8.2.4. Paraméteres integrál 466
8.2.4.1. A paraméteres integrál definíciója 466
8.2.4.2. Differenciálás az integráljel mögött 466
8.2.4.3. Integrálás az integráljelen belül 467
8.2.5. Integrálás sorbafejtéssel, speciális nem elemi függvények 467
8.3. Vonalintegrál 470
8.3.1. 1. típusú vonalintegrál 470
8.3.1.1. Definíciók 470
8.3.1.2. Egzisztenciatétel 471
8.3.1.3. 1. típusú vonalintegrálok kiszámítása 471
8.3.1.4. Az 1. típusú vonalintegrál alkalmazása 472
8.3.2. 2. típusú vonalintegrál 472
8.3.3. Általános típusú vonalintegrálok 475
8.3.4. A vonalintegrálnak az integrációs úttól való függetlensége 476
8.4. Többszörös integrálok 479
8.4.1. Kettős integrál 479
8.4.1.1. A kettős integrál fogalma 479
8.4.1.2. A kettős integrál kiszámítása 480
8.4.1.3. Kettős integrálok alkalmazása 483
8.4.2. Hármas integrál 483
8.4.2.1. A hármas integrál fogalma 483
8.4.2.2. A hármas integrál kiszámítása 485
8.4.2.3. A hármas integrálok alkalmazása 488
8.5. Felületi integrál 488
8.5.1. 1. típusú felületi integrál 488
8.5.1.1. 1. típusú felületi integrál fogalma 488
8.5.1.2. Az 1. típusú felületi integrál kiszámítása 490
8.5.1.3. Az 1. típusú felületi integrál alkalmazásai 491
8.5.2. 2. típusú felületi integrál 492
8.5.2.1. A 2. típusú felületi integrál fogalma 492

8.5.2.2. 2. típusú felületi integrálok kiszámítása 493
8.5.2.3. A felületi integrál egy alkalmazása 495

9. Differenciálegyenletek **496**
9.1. Közönséges differenciálegyenletek 496
9.1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek 496
9.1.1.1. Megoldások létezése, iránymező 496
9.1.1.2. Elemi úton integrálható differenciálegyenletek 497
9.1.1.3. Implicit differenciálegyenletek 501
9.1.1.4. Szinguláris integrálok és szinguláris pontok 502
9.1.1.5. Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldási módszerei . . 505
9.1.2. Magasabb rendű differenciálegyenletek, differenciálegyenlet-rendszerek . . 506
9.1.2.1. Alapvető fogalmak 506
9.1.2.2. A rendszám csökkentése 508
9.1.2.3. n-edrendű lineáris differenciálegyenletek 509
9.1.2.4. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldása . 511
9.1.2.5. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . 513
9.1.2.6. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek 516
9.1.3. Peremérték-feladatok 523
9.1.3.1. A probléma megfogalmazása 523
9.1.3.2. A sajátértékek és sajátfüggvények főbb tulajdonságai 524
9.1.3.3. A sajátfüggvények szerinti sorfejtés 524
9.2. Parciális differenciálegyenletek 525
9.2.1. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek 525
9.2.1.1. Elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletek 525
9.2.1.2. Elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek 527
9.2.2. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek 530
9.2.2.1. Két független változójú másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai 530
9.2.2.2. Több, mint két független változót tartalmazó másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai 532
9.2.2.3. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek megoldásának módszerei 533
9.2.3. A természet- és műszaki tudományok differenciálegyenletei 543
9.2.3.1. A probléma felvetése és a peremfeltételek 543
9.2.3.2. A hullámegyenlet 544
9.2.3.3. Hővezetés egyenlete és a diffúziós egyenlet homogén közegben . . 546
9.2.3.4. A Poisson-egyenlet 546
9.2.3.5. A Schrödinger-egyenlet és a kvantummechanika alapjai 547
9.2.4. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek, szolitonok 555
9.2.4.1. A probléma elméleti fizikai megközelítése 555
9.2.4.2. A Korteweg de Vries-egyenlet 556
9.2.4.3. Nemlineáris Schrödinger-egyenlet 557
9.2.4.4. A szinusz–Gordon-egyenlet 558
9.2.4.5. További szolitonmegoldással rendelkező nemlineáris evolúciós egyenletek 559

10. Variációszámítás **561**
10.1. A feladat kitűzése 561
10.2. Klasszikus feladatok 562
10.2.1. Izoperimetrikus probléma 562
10.2.2. A brachisztochron-probléma 562

10.3. Egydimenziós variációs problémák 563
10.3.1. A variációszámítás legegyszerűbb feladattípusa, extremálisok 563
10.3.2. A variációszámítás Euler-féle differenciálegyenlete 563
10.3.3. Variációs problémák mellékfeltételekkel 565
10.3.4. Magasabbrendű variációs problémák 566
10.3.5. Több függvényre vonatkozó variációs problémák 567
10.3.6. Paraméteres variációs problémák 567
10.4. Többdimenziós variációs problémák 568
10.4.1. A legegyszerűbb variációs probléma 568
10.4.2. Általánosabb variációs problémák 569
10.5. Variációs problémák numerikus megoldása 570
10.6. Kiegészítés 571
10.6.1. Első és második variáció 571
10.6.2. Fizikai alkalmazások 571

11. Lineáris integrálegyenletek **572**
11.1. Bevezetés és osztályozás 572
11.2. Másodfajú Fredholm-féle integrálegyenletek 573
11.2.1. Elfajuló magú integrálegyenletek 573
11.2.2. A sorozatos megközelítés (szukcesszív approximáció) módszere, Neumann-sor 576
11.2.3. Fredholm-féle megoldási módszer, Fredholm tételei 579
11.2.3.1. Fredholm-féle megoldási módszer 579
11.2.3.2. Fredholm tételei 581
11.2.4. Numerikus módszerek a Fredholm-féle másodfajú integrálegyenletek megoldására 582
11.2.4.1. Az integrál approximációja 582
11.2.4.2. Mag-approximáció 584
11.2.4.3. Kollokációs módszer 586
11.3. Fredholm-féle elsőfajú integrálegyenletek 587
11.3.1. Elfajuló magú integrálegyenletek 587
11.3.2. Fogalmak, analízisbeli segédeszközök 588
11.3.3. Az integrálegyenlet visszavezetése lineáris egyenletrendszerre 590
11.3.4. Az elsőfajú homogén integrálegyenlet megoldása 592
11.3.5. Megadott maghoz két speciális ortonormált rendszer meghatározása 593
11.3.6. Iterációs módszer 594
11.4. Volterra-féle integrálegyenletek 595
11.4.1. Elméleti alapok 595
11.4.2. Megoldás differenciálással 596
11.4.3. Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek megoldása Neumann-sorral . . . 597
11.4.4. Konvolúció típusú Volterra-féle integrálegyenletek 598
11.4.5. Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek numerikus tárgyalása 599
11.5. Szinguláris integrálegyenletek 600
11.5.1. Abel-féle integrálegyenlet 600
11.5.2. Szinguláris integrálegyenletek Cauchy-típusú magokkal 602
11.5.2.1. A feladat megfogalmazása 602
11.5.2.2. A megoldás létezése 602
11.5.2.3. A Cauchy-féle integrál tulajdonságai 603
11.5.2.4. Hilbert-féle peremérték-feladat 603
11.5.2.5. A Hilbert-féle peremérték-feladat megoldása 603
11.5.2.6. A karakterisztikus integrálegyenlet megoldása 604

12. Funkcionálanalízis **606**
12.1. Vektorterek . . . 606
12.1.1. A vektortér fogalma . . . 606
12.1.2. Lineáris és affin alterek . . . 607
12.1.3. Lineárisan független elemek . . . 609
12.1.4. Konvex részhalmazok és konvex burok . . . 610
12.1.4.1. Konvex halmazok . . . 610
12.1.4.2. Kúpok . . . 610
12.1.5. Lineáris operátorok és funkcionálok . . . 610
12.1.5.1. Leképezések . . . 610
12.1.5.2. Homomorfizmus és endomorfizmus . . . 611
12.1.5.3. Izomorf vektorterek . . . 611
12.1.6. Valós vektorterek komplexifikálása . . . 611
12.1.7. Rendezett vektorterek . . . 612
12.1.7.1. Kúpok és részbenrendezés . . . 612
12.1.7.2. Rendezésre nézve korlátos halmazok . . . 613
12.1.7.3. Pozitív operátorok . . . 613
12.1.7.4. Vektorhálók . . . 613
12.2. Metrikus terek . . . 615
12.2.1. A metrikus tér fogalma . . . 615
12.2.1.1. Gömbök és környezetek . . . 616
12.2.1.2. Sorozatok konvergenciája metrikus térben . . . 617
12.2.1.3. Zárt halmazok és lezárás . . . 617
12.2.1.4. Sűrű részhalmazok és szeparábilis metrikus terek . . . 618
12.2.2. Teljes metrikus terek . . . 618
12.2.2.1. Cauchy-sorozatok . . . 618
12.2.2.2. Teljes metrikus tér . . . 619
12.2.2.3. Néhány alapvető tétel teljes metrikus terekben . . . 619
12.2.2.4. A kontrakcióelv néhány alkalmazása . . . 620
12.2.2.5. Metrikus tér teljessé tétele . . . 624
12.2.3. Folytonos operátorok . . . 625
12.3. Normált terek . . . 626
12.3.1. A normált tér fogalma . . . 626
12.3.1.1. A normált tér axiómái . . . 626
12.3.1.2. A normált terek néhány tulajdonsága . . . 628
12.3.2. Banach-terek . . . 629
12.3.2.1. Sorok normált terekben . . . 629
12.3.2.2. A fontosabb Banach-terek . . . 629
12.3.2.3. Szoboljev-terek . . . 630
12.3.3. Rendezett normált terek . . . 631
12.3.4. Normált algebrák . . . 631
12.4. Hilbert-terek . . . 632
12.4.1. A Hilbert-tér fogalma . . . 632
12.4.1.1. Skalárszorzat . . . 632
12.4.1.2. Unitér terek és néhány tulajdonságuk . . . 633
12.4.1.3. Hilbert-tér . . . 633
12.4.2. Ortogonalitás . . . 634
12.4.2.1. Az ortogonalitás tulajdonságai . . . 634
12.4.2.2. Ortogonális rendszerek . . . 634
12.4.3. Fourier-sorok a Hilbert-térben . . . 635
12.4.3.1. Legjobb megközelítés . . . 635
12.4.3.2. Parseval-egyenlőség, Riesz–Fischer-tétel . . . 636

12.4.4. Bázis létezése. Izomorf Hilbert-terek 636
12.5. Folytonos lineáris operátorok és funkcionálok 637
12.5.1. Lineáris operátorok korlátossága, normája és folytonossága 637
12.5.1.1. Lineáris operátorok korlátossága és normája 637
12.5.1.2. A folytonos lineáris operátorok tere 637
12.5.1.3. Operátorsorozatok konvergenciája 638
12.5.2. Folytonos lineáris operátorok Banach-terekben 638
12.5.3. A lineáris operátorok spektrálelméletének elemei 641
12.5.3.1. Operátor rezolvenshalmaza és rezolvense 641
12.5.3.2. Operátor spektruma 641
12.5.4. Folytonos lineáris funkcionálok 642
12.5.4.1. Definíció 642
12.5.4.2. Folytonos lineáris funkcionálok a Hilbert-téren, Riesz Frigyes tétele 644
12.5.4.3. Folytonos lineáris funkcionálok L^p-ben 644
12.5.5. Lineáris funkcionálok kiterjesztése 645
12.5.6. Konvex halmazok elválasztása (szétválasztása) 645
12.5.7. Biduális tér és reflexív terek 646
12.6. Adjungált operátorok normált terekben 648
12.6.1. Korlátos operátor adjungáltja 648
12.6.2. Nem korlátos operátor adjungáltja 649
12.6.3. Önadjungált operátorok 649
12.6.3.1. Pozitív definit operátorok 649
12.6.3.2. Projektorok a Hilbert-térben 650
12.7. Kompakt halmazok és kompakt operátorok 650
12.7.1. Normált terek kompakt részhalmazai 650
12.7.2. Kompakt operátorok 650
12.7.2.1. A kompakt operátor fogalma 650
12.7.2.2. Kompakt lineáris operátorok tulajdonságai 650
12.7.2.3. Elemek gyenge konvergenciája 651
12.7.3. Fredholm-féle alternatíva 651
12.7.4. Kompakt lineáris operátorok a Hilbert-térben 652
12.7.5. Kompakt önadjungált operátorok a Hilbert-téren 652
12.8. Nemlineáris operátorok 652
12.8.1. Példák nemlineáris operátorra 652
12.8.2. Nemlineáris operátorok differenciálhatósága 653
12.8.3. Newton-módszer 654
12.8.4. Schauder-féle fixpont-elv 654
12.8.5. Leray–Schauder-elmélet 655
12.8.6. Pozitív, nemlineáris operátorok 655
12.8.7. Monoton operátorok Banach-terekben 656
12.9. Mérték és Lebesgue-integrál 656
12.9.1. σ-algebrák és mértékek 656
12.9.2. Mérhető függvények 658
12.9.2.1. Mérhető függvény 658
12.9.2.2. A mérhető függvények osztályának tulajdonságai 658
12.9.3. Integrálás 658
12.9.3.1. Az integrál definíciója 658
12.9.3.2. Az integrál néhány tulajdonsága 659
12.9.3.3. Konvergenciatételek 660
12.9.4. L^p-terek 660
12.9.5. Disztribúciók 661
12.9.5.1. A parciális integrálás képlete 661

12.9.5.2. Általánosított derivált 662
12.9.5.3. Disztribúció 662
12.9.5.4. Disztribúció deriváltja 662

13. Vektoranalízis és térelmélet **664**
13.1. A térelmélet alapfogalmai 664
13.1.1. Egyparaméteres vektor-skalárfüggvény 664
13.1.1.1. Definíciók 664
13.1.1.2. Vektorfüggvény differenciálhányadosa 664
13.1.1.3. Vektorfüggvények differenciálási szabályai 664
13.1.1.4. Vektorfüggvények Taylor-sorfejtése 665
13.1.2. Skalármezők 665
13.1.2.1. Skalármező vagy skalár pontfüggvény 665
13.1.2.2. Fontosabb skalármezők 665
13.1.2.3. Skalármezők megadása a koordináták függvényeként 666
13.1.2.4. Szintfelületek és szintvonalak 666
13.1.3. Vektormezők 666
13.1.3.1. Vektormező vagy vektoriális, azaz vektorértékű pontfüggvény . . 666
13.1.3.2. Fontosabb vektormezők 667
13.1.3.3. A vektormezők megadása a koordináták függvényeként 668
13.1.3.4. Áttérés egyik térbeli koordinátarendszerről egy másikra egy $\vec{V}(\vec{r})$ vektormező megadásában 669
13.1.3.5. Erővonalak 671
13.2. Térbeli differenciálszámítás 671
13.2.1. Iránymenti és térfogati differenciálhányados (derivált) 671
13.2.1.1. Skalármező iránymenti differenciálhányadosa 671
13.2.1.2. Vektormező iránymenti differenciálhányadosa 672
13.2.1.3. Térfogati vagy térbeli differenciálhányados 673
13.2.2. Skalármező gradiense 673
13.2.2.1. Gradiens definíciója 673
13.2.2.2. Gradiens és iránymenti differenciálhányados 673
13.2.2.3. Gradiens és térfogati differenciálhányados 674
13.2.2.4. A gradiens további tulajdonságai 674
13.2.2.5. Skalármező gradiense különböző koordinátarendszerekben 674
13.2.2.6. Műveleti és számítási szabályok 674
13.2.3. Vektorgradiens 675
13.2.4. Vektormező divergenciája 675
13.2.4.1. A divergencia definíciója 675
13.2.4.2. Divergencia megadása különböző koordinátarendszerekben . . . 676
13.2.4.3. A divergencia műveleti szabályai 676
13.2.4.4. Centrális mező divergenciája 676
13.2.5. Vektormező rotációja 676
13.2.5.1. Rotáció definíciója 676
13.2.5.2. Rotáció a különböző koordinátarendszerekben 677
13.2.5.3. A rotáció kiszámítási szabályai 678
13.2.5.4. Potenciálos mező rotációja 678
13.2.6. Nablaoperátor, Laplace-operátor 678
13.2.6.1. Nablaoperátor 678
13.2.6.2. A nablaoperátorra vonatkozó számítási szabályok 679
13.2.6.3. Vektorgradiens 679
13.2.6.4. A nablaoperátor kétszeres alkalmazása 679
13.2.6.5. Laplace-operátor 680

13.2.7. A térbeli differenciálszámítás áttekintése . . . 681
13.2.7.1. Vektoranalitikus kifejezések a derékszögű, henger- és gömbi koordinátarendszerben . . . 681
13.2.7.2. A differenciáloperátorokra vonatkozó fő összefüggések és eredmények 681
13.2.7.3. Differenciáloperátorok számítási szabályai . . . 682
13.3. Vektormezők integrálása . . . 682
13.3.1. Vonalintegrál és potenciál a vektormezőben . . . 682
13.3.1.1. Vonalintegrál vektormezőben . . . 682
13.3.1.2. A vonalintegrál mechanikai jelentése . . . 684
13.3.1.3. A vonalintegrál tulajdonságai . . . 684
13.3.1.4. A vonalintegrál, mint másodfajú általános típusú vonalintegrál . 684
13.3.1.5. Vektormező körintegrálja . . . 684
13.3.1.6. Konzervatív vagy potenciálos mező . . . 684
13.3.2. Felületi integrál . . . 685
13.3.2.1. Síkbeli felületdarab vektora . . . 685
13.3.2.2. Felületi integrál kiszámítása . . . 686
13.3.2.3. Felületi integrál és mezők fluxusa . . . 687
13.3.2.4. II. típusú felületi integrál kiszámítása derékszögű koordinátarendszerben . . . 687
13.3.3. Integráltételek . . . 688
13.3.3.1. Gauss integráltétele és integrálformulája . . . 688
13.3.3.2. Stokes integráltétele . . . 688
13.3.3.3. Green integráltételei . . . 689
13.4. Mezőszámítások . . . 690
13.4.1. Tiszta forrásmező . . . 690
13.4.2. Tiszta vagy forrásmentes örvénymező . . . 690
13.4.3. Pontszerű források vektormezei . . . 691
13.4.3.1. Ponttöltés Coulomb-mezeje . . . 691
13.4.3.2. Pontszerű tömeg gravitációs tere . . . 691
13.4.4. Mezők szuperpozíciója . . . 691
13.4.4.1. Diszkrét forráseloszlás . . . 691
13.4.4.2. Folytonos forráseloszlás . . . 692
13.4.4.3. Összefoglalás . . . 692
13.5. A térelmélet differenciálegyenletei . . . 692
13.5.1. Laplace-differenciálegyenlet . . . 692
13.5.2. Poisson-differenciálegyenlet . . . 693

14. Komplex függvénytan **694**
14.1. Egyváltozós komplex függvény . . . 694
14.1.1. Folytonosság, differenciálhatóság . . . 694
14.1.1.1. A komplex változós függvény definíciója . . . 694
14.1.1.2. Komplex változós függvény határértéke . . . 694
14.1.1.3. Komplex változós függvény folytonossága . . . 694
14.1.1.4. Komplex változós függvény differenciálhatósága . . . 694
14.1.2. Analitikus függvények . . . 695
14.1.2.1. Az analitikus függvény definíciója . . . 695
14.1.2.2. Példák analitikus függvényekre . . . 695
14.1.2.3. Analitikus függvények tulajdonságai . . . 696
14.1.2.4. Szinguláris pontok . . . 697
14.1.3. Konform leképezések . . . 697
14.1.3.1. A konform leképezés fogalma és tulajdonságai . . . 697
14.1.3.2. A legegyszerűbb konform leképezések . . . 698

14.1.3.3. A Schwarz-féle tükrözési elv 707
14.1.3.4. Komplex potenciál 707
14.1.3.5. A szuperpozíció elve 709
14.1.3.6. A komplex számsík tetszőleges leképezése 711
14.2. Integrálás a komplex síkon 711
14.2.1. Határozott és határozatlan integrál 711
14.2.1.1. A komplex integrál definíciója 711
14.2.1.2. Komplex integrálok tulajdonságai és kiszámítási módja 712
14.2.2. Cauchy-féle integráltétel, a komplex függvénytan alaptétele 714
14.2.2.1. Cauchy-féle integráltétel egyszeresen összefüggő tartományokra . 714
14.2.2.2. Cauchy integráltétele többszörösen összefüggő tartományokra . . 714
14.2.3. A Cauchy-féle integrálformulák 715
14.2.3.1. Analitikus függvény egy tartomány belsejében 715
14.2.3.2. Analitikus függvény egy tartományon kívül 715
14.3. Analitikus függvények hatványsorba való fejtése 716
14.3.1. Komplex tagú sorok konvergenciája 716
14.3.1.1. Komplex tagú sorozatok konvergenciája 716
14.3.1.2. Komplex tagú végtelen sor konvergenciája 716
14.3.1.3. Komplex tagú hatványsorok 716
14.3.2. Taylor-sorok 717
14.3.3. Az analitikus folytatás elve 718
14.3.4. Laurent-sorfejtés 718
14.3.5. Izolált szinguláris pontok és a reziduumtétel 719
14.3.5.1. Izolált szinguláris pontok 719
14.3.5.2. Meromorf függvények 719
14.3.5.3. Elliptikus függvények 719
14.3.5.4. Reziduum 720
14.3.5.5. Reziduumtétel 720
14.4. Valós integrálok meghatározása komplex integrálokkal 721
14.4.1. A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazása 721
14.4.2. A reziduumtétel alkalmazása 721
14.4.3. A Jordan-lemma alkalmazásai 722
14.4.3.1. Jordan-lemma 722
14.4.3.2. Példák a Jordan-lemma alkalmazására 722
14.5. Algebrai és elemi transzcendens függvények 724
14.5.1. Algebrai függvények 724
14.5.2. Elemi transzcendens függvények 725
14.5.3. Görbék egyenlete komplex alakban 727
14.6. Elliptikus függvények 730
14.6.1. Az elliptikus integrálokkal való összefüggés 730
14.6.2. Jacobi-féle függvények 731
14.6.3. Thétafüggvények 732
14.6.4. Weierstrass-féle függvények 733

15. Integráltranszformációk **735**
15.1. Az integráltranszformáció fogalma 735
15.1.1. Az integráltranszformációk általános definíciója 735
15.1.2. Speciális integráltranszformációk 735
15.1.3. Inverz transzformációk 735
15.1.4. Az integráltranszformációk linearitása 735
15.1.5. Többváltozós függvények integráltranszformációi 737
15.1.6. Az integráltranszformációk alkalmazásai 737

15.2. Laplace-transzformáció 738
15.2.1. A Laplace-transzformáció tulajdonságai 738
15.2.1.1. Laplace-transzformált, eredeti tartomány és képtartomány 738
15.2.1.2. Laplace-transzformációval kapcsolatos számolási szabályok . . . 739
15.2.1.3. Speciális függvények képfüggvényei 742
15.2.1.4. A Dirac-féle δ-függvény és a disztribúciók 745
15.2.2. Visszatranszformálás az eredeti tartományba 746
15.2.2.1. Visszatranszformálás táblázatok segítségével 746
15.2.2.2. Résztörtekre bontás 747
15.2.2.3. Sorfejtések 747
15.2.2.4. Inverz integrál 749
15.2.3. Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformáció segítségével . . . 749
15.2.3.1. Állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek 750
15.2.3.2. Változó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek 751
15.2.3.3. Parciális differenciálegyenletek 751
15.3. Fourier-transzformáció 753
15.3.1. A Fourier-transzformáció tulajdonságai 753
15.3.1.1. Fourier-integrál 753
15.3.1.2. Fourier-transzformáció és inverz transzformáció 754
15.3.1.3. A Fourier-transzformációra vonatkozó számolási szabályok 756
15.3.1.4. Speciális függvények képfüggvényei 759
15.3.2. Differenciálegyenletek megoldása Fourier-transzformáció segítségével . . . 760
15.3.2.1. Közönséges differenciálegyenletek 760
15.3.2.2. Parciális differenciálegyenletek 761
15.4. Z-transzformáció 762
15.4.1. A Z-transzformáció tulajdonságai 763
15.4.1.1. Diszkrét függvények 763
15.4.1.2. A Z-transzformáció definíciója 763
15.4.1.3. Számolási szabályok 764
15.4.1.4. Kapcsolat a Laplace-transzformációval 765
15.4.1.5. A Z-transzformáció invertálása 766
15.4.2. A Z-transzformáció alkalmazásai 767
15.4.2.1. Lineáris differenciaegyenletek általános megoldása 767
15.4.2.2. Másodrendű differenciaegyenletek (kezdetiérték-feladat) 768
15.4.2.3. Másodrendű differenciaegyenletek (peremérték-feladat) 769
15.5. Wavelet-transzformáció („hullámocska”-transzformáció) 770
15.5.1. Jelek 770
15.5.2. Wavelet-ek 770
15.5.3. Wavelet-transzformáció 771
15.5.4. Diszkrét wavelet-transzformáció 772
15.5.4.1. Gyors wavelet-transzformáció 772
15.5.4.2. Diszkrét Haar-wavelet transzformáció 772
15.5.5. Gábor-transzformáció 773
15.6. Walsh-függvények 773
15.6.1. Lépcsősfüggvények 773
15.6.2. Walsh-rendszerek 773

16. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika **775**
16.1. Kombinatorika 775
16.1.1. Permutációk 775
16.1.2. Kombinációk 775
16.1.3. Variációk 776

16.1.4. A kombinatorikai képletek összefoglalása . . . 777
16.2. Valószínűségszámítás . . . 777
16.2.1. Események, gyakoriságok és valószínűségek . . . 777
16.2.1.1. Események . . . 777
16.2.1.2. Gyakoriságok és valószínűségek . . . 778
16.2.1.3. Feltételes valószínűség, Bayes tétele . . . 780
16.2.2. Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény . . . 781
16.2.2.1. Valószínűségi változó . . . 781
16.2.2.2. Eloszlásfüggvény . . . 781
16.2.2.3. Várható érték, szórás, Csebisev-egyenlőtlenség . . . 783
16.2.2.4. Többdimenziós valószínűségi változók . . . 784
16.2.3. Diszkrét eloszlások . . . 784
16.2.3.1. Binomiális eloszlás . . . 785
16.2.3.2. Hipergeometrikus eloszlás . . . 785
16.2.3.3. Poisson-eloszlás . . . 786
16.2.4. Folytonos eloszlások . . . 787
16.2.4.1. Normális eloszlás . . . 787
16.2.4.2. Standard normális eloszlás, Gauss-hibafüggvény . . . 788
16.2.4.3. Logaritmikus normális eloszlás . . . 789
16.2.4.4. Exponenciális eloszlás . . . 790
16.2.4.5. Weibull-eloszlás . . . 790
16.2.4.6. χ^2-eloszlás . . . 791
16.2.4.7. Fisher-eloszlás . . . 792
16.2.4.8. Student-eloszlás . . . 793
16.2.5. A nagy számok törvényei, határértéktételek . . . 793
16.3. Matematikai statisztika . . . 794
16.3.1. Mintafüggvények . . . 794
16.3.1.1. Alapsokaság, minta, véletlen vektor . . . 794
16.3.1.2. Mintafüggvények, jellemzők . . . 795
16.3.2. Leíró statisztika . . . 797
16.3.2.1. Adott mérési eredmények statisztikai kiértékelése . . . 797
16.3.2.2. Statisztikai paraméterek . . . 798
16.3.3. Statisztikai próbák . . . 799
16.3.3.1. Normális eloszlásra vonatkozó próbák . . . 799
16.3.3.2. A mintaközepek eloszlása . . . 800
16.3.3.3. Megbízhatósági (konfidencia-) intervallum a sokaság várható értékére . . . 801
16.3.3.4. Megbízhatósági intervallum a sokaság szórásnégyzetére . . . 802
16.3.3.5. Hipotézisvizsgálat . . . 803
16.3.4. Korreláció és regresszió . . . 803
16.3.4.1. Kétváltozós lineáris korreláció . . . 804
16.3.4.2. Kétváltozós lineáris regresszió . . . 805
16.3.4.3. Többdimenziós regresszió . . . 806
16.3.5. Monte-Carlo módszerek . . . 807
16.3.5.1. Szimuláció . . . 807
16.3.5.2. Véletlen számok . . . 807
16.3.5.3. Példa Monte-Carlo szimulációra . . . 808
16.3.5.4. A Monte-Carlo módszerek alkalmazása a numerikus matematikában 809
16.3.5.5. A Monte-Carlo módszerek további alkalmazásai . . . 811
16.4. A mérési hibák elmélete . . . 811
16.4.1. Mérési hibák és azok eloszlása . . . 812
16.4.1.1. A mérési hibák osztályozása kvalitatív ismérvek alapján . . . 812

16.4.1.2. A mérési hiba sűrűségfüggvénye 812
16.4.1.3. A mérési hibák osztályozása kvantitatív ismérvek esetén 814
16.4.1.4. A mért eredmények megadása hibahatárokkal 816
16.4.1.5. Azonos pontosságú direkt mérések hibaszámítása 817
16.4.1.6. Különböző pontosságú direkt mérések hibaszámítása 817
16.4.2. Hibaterjedés és hibaanalízis 818
16.4.2.1. Gauss hibaterjedési törvénye 818
16.4.2.2. Hibaanalízis 820

17. Dinamikai rendszerek és káosz **821**
17.1. Közönséges differenciálegyenletek és leképezések 821
17.1.1. Dinamikai rendszerek 821
17.1.1.1. Alapfogalmak 821
17.1.1.2. Invariáns halmazok 823
17.1.2. A közönséges differenciálegyenletek kvalitatív elmélete 824
17.1.2.1. A folyam létezése és a fázistér szerkezete 824
17.1.2.2. Lineáris differenciálegyenletek 826
17.1.2.3. Stabilitáselmélet 827
17.1.2.4. Invariáns sokaságok 831
17.1.2.5. Poincaré-leképezés 834
17.1.2.6. Differenciálegyenletek topologikus ekvivalenciája 835
17.1.3. Diszkrét dinamikai rendszerek 836
17.1.3.1. Stacionárius pontok, periodikus pályák és határhalmazok 836
17.1.3.2. Invariáns sokaságok 836
17.1.3.3. Topologikusan konjugált diszkrét rendszerek 837
17.1.4. Strukturális stabilitás (robusztusság) 838
17.1.4.1. Strukturálisan stabilis differenciálegyenlet 838
17.1.4.2. Strukturálisan stabilis diszkrét rendszerek 839
17.1.4.3. Tipikus tulajdonságok 839
17.2. Az attraktorok kvantitatív leírása 840
17.2.1. Valószínűségi mértékek az attraktorokon 840
17.2.1.1. Invariáns mérték 840
17.2.1.2. Az ergodelmélet elemei 841
17.2.2. Entrópiák 843
17.2.2.1. Topologikus entrópia 843
17.2.2.2. Metrikus entrópia 844
17.2.3. Ljapunov-kitevők 844
17.2.4. Dimenziók 846
17.2.4.1. Metrikus dimenziók 846
17.2.4.2. Invariáns mértékkel definiált dimenziók 848
17.2.4.3. Lokális Hausdorff-dimenzió Douady és Oesterlé nyomán 851
17.2.4.4. Példák attraktorokra 851
17.2.5. Különös attraktorok és káosz 853
17.2.6. Káosz egydimenziós leképezéseknél 854
17.3. Bifurkációelmélet és a káoszhoz vezető átmenetek 854
17.3.1. Bifurkációk Morse–Smale-rendszerekben 854
17.3.1.1. Lokális bifurkációk stacionárius pontok közelében 854
17.3.1.2. Lokális bifurkációk periodikus pálya közelében 860
17.3.1.3. Globális bifurkációk 863
17.3.2. Káoszhoz vezető átmenetek 864
17.3.2.1. Periódusketttőződések kaszkádja 864
17.3.2.2. Intermittencia 865

17.3.2.3. Globális homoklinikus bifurkációk 865
17.3.2.4. A tórusz felbomlása 867

18. Optimalizálás **871**
18.1. Lineáris programozás 871
18.1.1. Problémafelvetés és geometriai ábrázolás 871
18.1.1.1. A lineáris programozási feladat alakjai 871
18.1.1.2. Egy példa és grafikus megoldása 872
18.1.2. A lineáris programozás alapfogalmai, normálalak 873
18.1.2.1. Csúcs és bázis 873
18.1.2.2. A lineáris programozási feladat normálalakja 875
18.1.3. Szimplex módszer 876
18.1.3.1. Szimplex tábla 876
18.1.3.2. Átmenet egy másik szimplex táblára 876
18.1.3.3. Egy kezdő szimplex tábla meghatározása 878
18.1.3.4. Módosított szimplex módszer 879
18.1.3.5. Dualitás a lineáris optimalizálásban 880
18.1.4. Speciális lineáris optimalizálási feladatok 881
18.1.4.1. Szállítási feladat 881
18.1.4.2. Hozzárendelési feladat 884
18.1.4.3. Elosztási feladat 884
18.1.4.4. Utazó ügynök problémája 884
18.1.4.5. Sorbarendezési feladat 885
18.2. Nemlineáris programozás 885
18.2.1. Problémafelvetés és elméleti alapok 885
18.2.1.1. Problémafelvetés 885
18.2.1.2. Optimalitási feltételek 885
18.2.1.3. Dualitás az optimalizálásban 886
18.2.2. Speciális nemlineáris optimalizálási feladatok 887
18.2.2.1. Konvex optimalizálás 887
18.2.2.2. Kvadratikus optimalizálás 887
18.2.3. Megoldási módszerek kvadratikus optimalizálási feladatokra 888
18.2.3.1. Wolfe-eljárás 888
18.2.3.2. Hildreth–d'Esopo-eljárás 890
18.2.4. Numerikus keresési eljárások 891
18.2.4.1. Egydimenziós keresés 891
18.2.4.2. Minimumkeresés n-dimenziós euklideszi vektortérben 891
18.2.5. Eljárás feltétel nélküli feladatokra 892
18.2.5.1. A legmeredekebb csökkenő irányú eljárás (gradiens módszer) . . . 892
18.2.5.2. A Newton-módszer alkalmazása 892
18.2.5.3. A konjugált gradiensek módszere 893
18.2.5.4. Davidon, Fletcher és Powell módszere (DFP) 893
18.2.6. Gradiens módszer egyenlőtlenségfeltételes feladatokra 894
18.2.6.1. Megengedett irányok módszere 894
18.2.6.2. A vetített gradiensek módszere 896
18.2.7. Büntető- és korlátozó módszerek 898
18.2.7.1. Büntető eljárás 898
18.2.7.2. Korlátozási eljárás 899
18.2.8. Metszősíkok módszere 900
18.3. Diszkrét dinamikus optimalizálás 900
18.3.1. Diszkrét dinamikus optimalizálás 900
18.3.1.1. n-lépcsős döntési folyamatok 901

18.3.1.2. Dinamikus optimalizálási feladatok 901
18.3.2. Példák diszkrét döntési modellekre 901
18.3.2.1. Bevásárlási feladat 901
18.3.2.2. Hátizsák-feladat 902
18.3.3. Bellmann-féle funkcionálegyenletek 902
18.3.3.1. A költségfüggvény tulajdonságai 902
18.3.3.2. A funkcionálegyenletek megfogalmazása 903
18.3.4. Bellmann-féle optimalitási kritérium 903
18.3.5. Bellmann-féle funkcionálegyenlet-módszer 903
18.3.5.1. A minimális költség meghatározása 903
18.3.5.2. Az optimális stratégia meghatározása 904
18.3.6. Példák funkcionálegyenlet-módszer alkalmazására 904
18.3.6.1. Optimális vásárlási stratégia 904
18.3.6.2. Hátizsák-feladat 905

19. Numerikus módszerek **907**
19.1. Egyismeretlenes nemlineáris egyenlet numerikus megoldása 907
19.1.1. Iterációs eljárások 907
19.1.1.1. Szukcesszív approximáció 907
19.1.1.2. Newton-eljárás 908
19.1.1.3. Regula falsi 909
19.1.2. Polinomegyenletek megoldása 910
19.1.2.1. Horner-elrendezés 910
19.1.2.2. A gyökök elhelyezkedése 911
19.1.2.3. Numerikus eljárások 912
19.2. Egyenletrendszerek numerikus megoldása 913
19.2.1. Lineáris egyenletrendszerek 913
19.2.1.1. Mátrix háromszög-faktorizációja 913
19.2.1.2. Cholesky-eljárás szimmetrikus mátrixokra 915
19.2.1.3. Ortogonalizálási eljárások 916
19.2.1.4. Iteráció teljes- és egyenkénti lépésekkel 918
19.2.2. Nemlineáris egyenletrendszerek 919
19.2.2.1. Általános iterációs eljárás 919
19.2.2.2. Newton-eljárás 920
19.2.2.3. Gauss–Newton-eljárás differenciálás nélkül 920
19.3. Numerikus integrálás 921
19.3.1. Általános kvadratúraformula 921
19.3.2. Interpolációs kvadratúrák 921
19.3.2.1. Téglányösszeg 922
19.3.2.2. Trapézformula 922
19.3.2.3. Hermite-féle trapézformula 922
19.3.2.4. Simpson-formula 923
19.3.3. Gauss-típusú kvadratúraformulák 923
19.3.3.1. Gauss-kvadratúra formulák 923
19.3.3.2. Lobatto-féle kvadratúraformulák 924
19.3.4. Romberg-eljárás 924
19.3.4.1. A Romberg-eljárás algoritmusa 924
19.3.4.2. Extrapoláció elve 925
19.4. Közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldása 926
19.4.1. Kezdetiérték-feladatok 926
19.4.1.1. Euler-féle poligonvonal-eljárás 926
19.4.1.2. 4-edrendű Runge–Kutta-eljárás 927

19.4.1.3. Többlépéses eljárások . . . 928
19.4.1.4. Prediktor–korrektor-módszerek . . . 928
19.4.1.5. Konvergencia, konzisztencia, stabilitás . . . 929
19.4.2. Peremérték-feladatok . . . 930
19.4.2.1. Differenciamódszerek . . . 930
19.4.2.2. Próbafüggvény-módszer . . . 931
19.4.2.3. Célmódszerek . . . 932
19.5. Parciális differenciálegyenletek közelítő integrálása . . . 933
19.5.1. Differenciamódszer . . . 933
19.5.2. Próbafüggvény-módszer . . . 935
19.5.3. Végeselem-módszer (FEM) . . . 936
19.6. Approximáció, kiegyenlítő számítás, harmonikus analízis . . . 939
19.6.1. Polinom-interpoláció . . . 939
19.6.1.1. Newton-féle interpolációs formula . . . 939
19.6.1.2. Lagrange-féle interpoláció . . . 939
19.6.1.3. Aitken–Neville-interpoláció . . . 941
19.6.2. Középben vett approximáció . . . 942
19.6.2.1. Folytonos feladat, normálegyenletek . . . 942
19.6.2.2. Diszkrét feladat, normálegyenletek, Householder-módszer . . . 943
19.6.2.3. Többdimenziós feladatok . . . 944
19.6.2.4. Nemlineáris négyzetesközép-feladatok . . . 945
19.6.3. Csebisev-approximáció . . . 946
19.6.3.1. A feladat kitűzése és az alternálási tétel . . . 946
19.6.3.2. A Csebisev-polinomok tulajdonságai . . . 946
19.6.3.3. Remes-algoritmus . . . 948
19.6.3.4. Diszkrét Csebisev-approximáció és optimizálás . . . 948
19.6.4. Harmonikus analízis . . . 949
19.6.4.1. A trigonometrikus interpoláció képletei . . . 949
19.6.4.2. Gyors Fourier-transzformáció (FFT) . . . 950
19.7. Görbék és felületek ábrázolása spline-ok segítségével . . . 954
19.7.1. Harmadfokú spline-ok . . . 954
19.7.1.1. Interpolációs spline-ok . . . 954
19.7.1.2. Kiegyenlítő spline-ok . . . 955
19.7.2. Kétdimenziós harmadfokú spline-ok . . . 955
19.7.2.1. A kétdimenziós harmadfokú spline-ok tulajdonságai . . . 955
19.7.2.2. Kétdimenziós harmadfokú interpolációs spline-ok . . . 956
19.7.2.3. Kétdimenziós harmadfokú kiegyenlítő spline . . . 957
19.7.3. Görbék és felületek Bernstein–Bézier-ábrázolása . . . 957
19.7.3.1. A B–B-görbeábrázolás elve . . . 958
19.7.3.2. B–B felületábrázolás . . . 958
19.8. Számítógépek használata . . . 959
19.8.1. Belső jelábrázolás . . . 959
19.8.1.1. Számrendszerek . . . 959
19.8.1.2. Belső számábrázolás . . . 960
19.8.2. Gépi számításoknál fellépő numerikus hibák . . . 962
19.8.2.1. Bevezetés, hibatípusok . . . 962
19.8.2.2. Normalizált tizedestörtek és kerekítés . . . 962
19.8.2.3. Numerikus számítások pontossága . . . 963
19.8.3. Numerikus módszereket tartalmazó programkönyvtárak . . . 967
19.8.3.1. NAG-könyvtárak . . . 967
19.8.3.2. IMSL-könyvtár . . . 968
19.8.3.3. FORTRAN SSL II . . . 968

19.8.3.4. Aacheni könyvtár 968
19.8.4. Számítógép-algebrai rendszerek alkalmazása 969
19.8.4.1. Mathematica 969
19.8.4.2. Maple 972

20. Matematikai programcsomagok **976**
20.1. Bevezetés 976
20.1.1. A matematikai programcsomagok rövid jellemzése 976
20.1.2. Bevezető példák a legfontosabb alkalmazási területekről 976
20.1.2.1. Képletkezelés 976
20.1.2.2. Numerikus számítások 977
20.1.2.3. Grafikus ábrázolások 978
20.1.2.4. Programozás a számítógépes környezetben 978
20.1.3. A matematikai programcsomagok felépítése és használata 978
20.1.3.1. Alapvető szerkezeti elemek 978
20.2. Mathematica 980
20.2.1. Alapvető szerkezeti elemek 980
20.2.2. Számábrázolás a Mathematicá-ban 981
20.2.2.1. A számok alaptípusai a Mathematicá-ban 981
20.2.2.2. Speciális számok 981
20.2.2.3. Számok ábrázolása és konvertálása 981
20.2.3. A fontos operátorok 982
20.2.4. Listák 983
20.2.4.1. Fogalom és jelentés 983
20.2.4.2. Többszintű listák 984
20.2.4.3. Műveletek listákkal 984
20.2.4.4. Speciális listák 984
20.2.5. Vektorok és mátrixok mint listák 985
20.2.5.1. Mátrixlisták létrehozása 985
20.2.5.2. Műveletek mátrixokkal és vektorokkal 986
20.2.6. Függvények 987
20.2.6.1. Alapfüggvények 987
20.2.6.2. Speciális függvények 987
20.2.6.3. Tiszta függvények 987
20.2.7. Mintázat 988
20.2.8. Függvényműveletek 989
20.2.9. Programozás 990
20.2.10. Kiegészítések a szintaxishoz, információk, üzenetek 991
20.2.10.1. Kontextusok, attribútumok 991
20.2.10.2. Információk 992
20.2.10.3. Üzenetek 992
20.3. Maple 992
20.3.1. Alapvető szerkezeti elemek 992
20.3.1.1. Típusok és objektumok 992
20.3.1.2. Bevitel és kivitel 993
20.3.2. Számábrázolás a Maple-ben 995
20.3.2.1. A számok alaptípusai a Maple-ben 995
20.3.2.2. Speciális számok 995
20.3.2.3. Számok ábrázolása és konvertálása 995
20.3.3. Fontos operátorok a Maple-ben 998
20.3.4. Algebrai kifejezések 999
20.3.5. Sorozatok és listák 999

20.3.6. Táblázat- és tömbstruktúrák, vektorok és mátrixok 1000
20.3.6.1. Táblázat- és tömbstruktúrák 1000
20.3.6.2. Egydimenziós tömbök 1001
20.3.6.3. Kétdimenziós tömbök 1001
20.3.6.4. Vektorokra és mátrixokra vonatkozó speciális utasítások 1002
20.3.7. Függvények és operátorok 1002
20.3.7.1. Függvények 1002
20.3.7.2. Operátorok 1003
20.3.7.3. Differenciáloperátorok 1004
20.3.7.4. A map utasítás 1004
20.3.8. Programozás a Maple-ben 1004
20.3.9. Kiegészítések a szintaxishoz, információk és segítség 1005
20.3.9.1. A Maple-könyvtár használata 1005
20.3.9.2. Környezeti változók 1005
20.3.9.3. Információk és segítség 1005
20.4. A matematikai programcsomagok alkalmazása 1006
20.4.1. Algebrai kifejezések kezelése 1006
20.4.1.1. Mathematica 1006
20.4.1.2. Maple 1008
20.4.2. Egyenletek és egyenletrendszerek megoldása 1012
20.4.2.1. Mathematica 1012
20.4.2.2. Maple 1014
20.4.3. A lineáris algebra elemei 1016
20.4.3.1. Mathematica 1016
20.4.3.2. Maple 1018
20.4.4. Differenciál- és integrálszámítás 1020
20.4.4.1. Mathematica 1020
20.4.4.2. Maple 1023
20.5. Számítógépes grafika 1026
20.5.1. Grafika a Mathematicá-val 1026
20.5.1.1. A grafika alapjai 1026
20.5.1.2. Grafikus elemek 1027
20.5.1.3. Grafikus opciók 1028
20.5.1.4. A grafikus ábrázolás szintaxisa 1028
20.5.1.5. Kétdimenziós görbék 1031
20.5.1.6. Görbék paraméteres ábrázolása 1032
20.5.1.7. Felületek és térgörbék ábrázolása 1033
20.5.2. Grafika a Maple-vel 1035
20.5.2.1. Kétdimenziós grafika 1035
20.5.2.2. Háromdimenziós grafika 1038

21. Táblázatok **1040**
21.1. Gyakran előforduló állandók 1040
21.2. Fizikai állandók 1040
21.3. Néhány függvény hatványsora 1042
21.4. Fourier-sorfejtés 1047
21.5. Határozatlan integrál 1050
21.5.1. Racionális függvények integrálása 1050
21.5.1.1. Az $ax + b$ kifejezést tartalmazó integrálok 1050
21.5.1.2. Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést tartalmazó integrálok 1052
21.5.1.3. Az $a^2 \pm x^2$ kifejezést tartalmazó integrálok 1053
21.5.1.4. Az $a^3 \pm x^3$ kifejezést tartalmazó integrálok 1055

21.5.1.5. Az $a^4 + x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok 1056
21.5.1.6. Az $a^4 - x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok 1056
21.5.1.7. Néhány tört parciális törtekre bontása 1056
21.5.2. Irracionális függvények integráljai 1057
21.5.2.1. A $\sqrt{x}$ és $a^2 \pm b^2 x$ kifejezéseket tartalmazó integrálok 1057
21.5.2.2. Egyéb, a $\sqrt{x}$ kifejezést tartalmazó integrálok 1057
21.5.2.3. A $\sqrt{ax+b}$ kifejezést tartalmazó integrálok 1058
21.5.2.4. A $\sqrt{ax+b}$ és $\sqrt{fx+g}$ kifejezéseket tartalmazó integrálok 1059
21.5.2.5. A $\sqrt{a^2-x^2}$ kifejezést tartalmazó intgrálok 1060
21.5.2.6. A $\sqrt{x^2+a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok 1061
21.5.2.7. A $\sqrt{x^2-a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok 1063
21.5.2.8. A $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kifejezést tartalmazó integrálok 1065
21.5.2.9. Egyéb irracionális kifejezéseket tartalmazó integrálok 1067
21.5.2.10. Rekurzív formulák a binomiális differenciál integráljának kiszámításához 1067
21.5.3. Trigonometrikus függvények integráljai 1068
21.5.3.1. Szinuszfüggvényt tartalmazó integrálok 1068
21.5.3.2. A koszinuszfüggvényt tartlmazó integrálok 1070
21.5.3.3. A szinusz- és koszinuszfüggvényeket tartalmazó integrálok 1072
21.5.3.4. A tangensfüggvényt tartalmazó integrálok 1076
21.5.3.5. A kotandensfüggvényt tartalmazó integrálok 1076
21.5.4. Egyéb transzcendens függvények integráljai 1077
21.5.4.1. A hiperbolikus függvények integráljai 1077
21.5.4.2. Exponenciális függvények integráljai 1078
21.5.4.3. Logaritmusfüggvények integráljai 1079
21.5.4.4. A trigonometrikus függvények inverzeinek integráljai 1081
21.5.4.5. A hiperbolikus függvények inverzeinek integráljai 1082
21.6. Határozott integrál 1083
21.6.1. Trigonometrikus függvények határozott integráljai 1083
21.6.2. Exponenciális függvények határozott integráljai 1085
21.6.3. Logaritmikus függvények határozott integráljai 1086
21.6.4. Algebrai függvények határozott integrálja 1087
21.7. Elliptikus integrál 1088
21.7.1. Elsőfajú elliptikus integrál $F(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$ 1088
21.7.2. Másodfajú elliptikus integrál $E(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$ 1088
21.7.3. Teljes elliptikus integrál, $k = \sin\alpha$ 1089
21.8. Gamma-függvény 1090
21.9. Bessel–függvények (hengerfüggvények) 1091
21.10. Legendre-polinomok (gömbfüggvények) 1093
21.11. Laplace-transzformáció 1094
21.12. Fourier-transzformáció 1100
21.12.1. Fourier-koszinusz-transzformáció 1100
21.12.2. Fourier-szinusz-transzformáció 1106
21.12.3. Exponenciális Fourier-transzformáció 1112
21.13. Z-transzformáció 1113
21.14. Poisson-eloszlás 1116
21.15. Standard normális eloszlás 1118
21.15.1. Standard normális eloszlás, ahol $0{,}00 \leq x \leq 1{,}99$ 1118
21.15.2. Standard normális eloszlás, ahol $2{,}00 \leq x \leq 3{,}90$ 1119
21.16. χ^2-eloszlás 1120
21.17. Fisher-féle F-eloszlás 1121

21.18. Student-féle t-eloszlás 1123
21.19. Véletlen számok 1124

Tárgymutató **1125**

Irodalomjegyzék **1181**

1. Aritmetika

1.1. Elemi számolási szabályok

1.1.1. Számok

1.1.1.1. Természetes, egész és racionális számok

1. Értelmezési tartományok és jelölések

Minden egész és törtszámot, köztük a pozitívokat, a negatívokat és a nullát, *racionális szám*nak nevezünk. Ezzel kapcsolatban a következő jelöléseket használjuk (lásd Halmazelmélet, 287. old.):

- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{p}{q} \text{ ahol } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ és } q \neq 0\}$.

A természetes számokat a számlálás, ill. rendezés szükséglete hozta létre. A természetes számokat *nemnegatív egész számok*nak is mondjuk.

2. A racionális számok halmazának tulajdonságai

- A racionális számok halmaza végtelen.
- A halmaz *rendezett*, vagyis bármely két különböző racionális szám, a és b közül meg lehet mondani, hogy melyik kisebb, mint a másik (lásd 2. old.).
- A halmaz önmagában *sűrű*, vagyis bármely két különböző a és b $(a < b)$ racionális szám között létezik legalább egy c $(a < c < b)$ racionális szám. Ebből következik, hogy két különböző racionális szám között végtelen sok további racionális szám fordul elő.

3. Aritmetikai műveletek

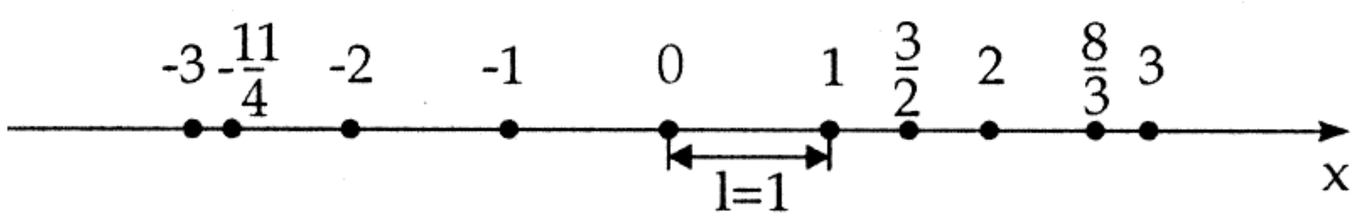
Két tetszőleges racionális számmal az aritmetikai műveletek (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) mindig elvégezhetők, és eredményül megint racionális számot adnak. Kivétel a *nullával való osztás*, amely *lehetetlen*: Az $a : 0$ kifejezésnek nincs értelme, mert nincs olyan meghatározott b racionális szám, amelyre $a \neq 0$ esetén teljesülne a $b \cdot 0 = a$ egyenlőség; ha pedig $a = 0$, akkor b tetszőleges racionális szám lehet. Az $a \neq 0$ esetben gyakran alkalmazott $a : 0 = \infty$ (végtelen) írásmód nem jelenti azt, hogy ez az osztás lehetséges; ez csupán a következő állítás rövidítése: ha a nevező nullához közeledik, a hányados abszolút értelemben véve minden határon túl növekszik.

4. Tizedes tört és lánctört

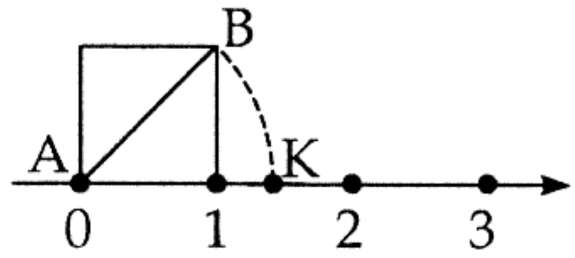
Minden racionális szám előállítható véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört, valamint lánctört alakjában (lásd 2. old.).

5. Geometriai ábrázolás

Ha egy egyenesen rögzítve van **(1.1. ábra)** egy 0 (*nullpont*), egy pozitív irány (*irányítás*) és egy l hosszúságegység (lépték, lásd még skála,118. old.), akkor minden a racionális számnak megfelel az egyenes egy meghatározott pontja. Ennek a koordinátája a, és ez a pont úgynevezett *racionális pont*. Az egyenest *számegyenes*nek nevezzük. Mivel a racionális számok halmaza mindenütt sűrű, bármely két racionális pont között végtelen sok további racionális pont van.



1.1. ábra.



1.2. ábra.

1.1.1.2. Irracionális és transzcendens számok

Az analízis céljaira a racionális számok halmaza nem elegendő. Bár a számegyenes mindenütt sűrű, azt nem tölti ki. Ha például az egységnégyzet AB átlóját A körül elforgatjuk úgy, hogy B a számegyenes

K pontjába menjen át **(1.2. ábra)**, akkor K-nak nincs racionális koordinátája. Csak az *irracionális számok* bevezetése teszi lehetővé, hogy a számegyenes minden pontjához számot tudjunk rendelni.
Az analízis tankönyvei az irracionális számokra szabatos definíciót adnak, például intervallumskatulyázással. A szemlélet beéri azzal a megállapítással, hogy az irracionális számok a számegyenesnek azokat a pontjait foglalják el, amelyek a racionális számok között hézagként jelentkeznek, és hogy minden irracionális számot nem szakaszos végtelen tizedes törttel lehet előállítani.
Az irracionális számok közé tartoznak többek között az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ alakú algebrai egyenletek valós, nem egész gyökei, ahol $n > 1$ *egész*, és az együtthatók is egész számok. Egy példa az $x^3 - 9x + 4 = 0$ egyenlet. Az ilyen gyököket *algebrai irracionalitás*oknak nevezzük. Algebrai irracionalitásra a legegyszerűbb példák az $x^n - a = 0$ egyenletek valós gyökei, vagyis az $\sqrt[n]{a}$ alakú számok, ha nem racionálisak.

■ $\sqrt[2]{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$ algebrai irracionalitások.

Azokat az irracionális számokat, amelyek nem algebrai irracionalitások, *transzcendens*nek nevezzük.

■ **A:** $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718281\ldots$ transzcendens számok.

■ **B:** Az egész számok tízes alapú logaritmusai, kivéve a 10^n alakúak logaritmusait, transzcendens számok.

1.1.1.3. Valós számok

Az összes racionális és irracionális számokat együtt valós számoknak mondjuk. Így kapjuk a *valós számok halmazát*, amelyet $\mathbb{R}$-rel jelöljünk.

1. Alaptulajdonságok

A valós számoknak a következő alaptulajdonságai vannak:
- A valós számok halmaza végtelen.
- A valós számok halmaza *rendezett* (lásd 1. old.).
- A valós számok halmaza önmagában *sűrű* (lásd 1. old.).
- A valós számok halmaza *teljesen rendezett*, vagyis a számegyenes minden pontjának megfelel egy valós szám. A racionális számok halmazára ez nem érvényes.

2. Aritmetikai műveletek

Valós számokkal az aritmetikai műveletek mindig elvégezhetők és mindig valós számot kapunk eredményül; kivétel a 0-val való osztás (lásd 1. old.). A hatványozás szintén lehetséges. Ami a megfordításait illeti, minden pozitív valós számból vonható tetszőleges gyök és van tetszőleges pozitív ($\neq 1$) alapú logaritmusa. Az analízis számfogalmának további általánosítása a *komplex szám*okhoz vezet (lásd 34. old.).

Valós számoknak egy a, b végpontokkal rendelkező összefüggő halmazát, ahol $a < b$ és a lehet $-\infty$, b pedig lehet $+\infty$, *az a, b végpontú intervallum*nak nevezzük. Intervallumot az a, b végpontokkal lehet megadni úgy, hogy zárójelbe tesszük őket. Szögletes félzárójel zárt, kerek félzárójel nyílt intervallumvéget jelöl. Megkülönböztetünk (a, b) mindkét oldalról *nyílt intervallumokat*, $[a, b)$, ill. $(a, b]$ *félig-nyílt intervallumokat* és $[a, b]$ *zárt intervallumokat.* Nyílt intervallumokra szokásos még (a, b) helyett az $]a, b[$, ugyanígy $[a, b)$ helyett az $[a, b[$ jelölés. Grafikus ábrázolásnál a nyílt intervallumok végpontjait nyílhegyekkel, a zárt intervallumok végpontjait kitöltött pontokkal jelöljük.

■ **A:** 52 és 273 esetében $273 = 5 \cdot 52 + 13$ majd $52 = 4 \cdot 13$ tehát a legnagyobb közös osztó a 13.

■ **B:** példa arra, hogy valamelyik lépésben a negatív maradék a kisebb abszolút értékű és ezért azzal folytatjuk tovább az eljárást. A kiindulási számpár 595 és 721: $721 = 1 \cdot 595 + 126$; $595 = 5 \cdot 126 - 35$; $126 = 4 \cdot 35 - 14$; $35 = 2 \cdot 14 + 7$; $14 = 2 \cdot 7$, tehát a legnagyobb közös osztó a 7.

3. Lánctörtek

Legyen x_0 tetszőleges, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig pozitív valós számok. Az $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ véges lánctört definíció szerint az

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}. \tag{1.1}$$

emeletes tört; a feltétel biztosítja, hogy az alulról felfelé történő egyszerűbb alakra hozásnál fellépő minden nevező értelmes, azaz nem 0, hiszen még az utolsó előtti is pozitív. A lánctört egyszerű, ha még az is teljesül, hogy az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ számok egészek.
Nyilvánvalóan minden véges egyszerű lánctört egy racionális számot állít elő. Megfordítva, minden racionális szám megadható véges, egyszerű lánctörtként (pontosan kétféle módon).

■ **A:** $\dfrac{61}{27} = 2 + \dfrac{7}{27} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{7}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}} = [2; 3, 1, 6].$

Általában, ha u_0/u_1 egyszerűsített alakban felírt racionális szám — tehát u_0 és u_1 relatív prímek —, továbbá u_1-et pozitívnak választva az euklideszi algoritmussal (csak annyi a kiülönbség, hogy ha u_0 negatív, akkor nem cseréljük ki az ellentettjére, hiszen most a keletkező hányadosokra van szükségünk) ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 a_0 + u_2, \quad 0 < u_2 < u_1 \\
u_1 &= u_2 a_1 + u_3, \quad 0 < u_3 < u_2 \\
u_2 &= u_3 a_2 + u_4, \quad 0 < u_4 < u_3 \\
&\vdots \\
u_{j-1} &= u_j a_{j-1} + u_{j+1}, \quad 0 < u_{j+2} < u_j \\
u_j &= u_{j+1} a_j,
\end{aligned}$$

amiből látszik, hogy u_0/u_1 lánctört-kifejtése tényleg véges és

$$u_0/u_1 = [a_0, a_1, \ldots, a_j] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{j-1} + \cfrac{1}{a_j}}}}}.$$

Ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat végtelen, egészekből áll és $a_1, a_2, \ldots$ pozítivak, akkor az $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ végtelen egyszerű lánctört értékén a $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ számot értjük. Az itteni $r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ racionális szám a lántört n-edik szelete. Belátható, hogy $r_0 < r_2 < r_4 < \cdots < r_{2n} < \cdots\cdots r_{2j+1} < r_{2j-1} < \cdots < r_5 < r_3 < r_1$, továbbá $\lim_k(r_k - r_{k-1}) = 0$.
Emiatt $(r_0, r_1), (r_2, r_3), (r_4, r_5), \ldots$ egymásbaskatulyázott intervallumok végtelen sorozata, amelyeknek egyetlen közös eleme van, tehát a fenti $\lim_{n\to\infty} r_n$ tényleg létezik.
Ezek szerint bármely végtelen egyszerű lánctört meghatároz egy valós számot; ez a szám mindig irracionális. Megfordítva, bármely irracionális szám egyértelmüen felírható végtelen egyszerű lánctörtként.

■ **B:** $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots = [1, 2, 2, 2, \ldots]$;

■ **C:** $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots = [2, 4, 4, 4, \ldots]$.

■ **D:** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180\ldots = [1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots]$.

4. Összemérhetőség

Azt mondjuk, hogy két szám, a és b *összemérhető*, ha létezik egy harmadik c szám, amelynek mindketten egész számú többszörösei. Ekkor $a = mc$, $b = nc$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ miatt

$$\frac{a}{b} = x \quad \text{és } x \text{ racionális}. \tag{1.2}$$

Ellenkező esetben a és b *összemérhetetlen.*

■ **A:** A szabályos ötszögben az átlók és az oldalak összemérhetetlen szakaszok, arányuk a fenti $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, egyúttal az aranymetszés aránya. Ma úgy tudjuk, hogy a metapontumi HIPPASZOSZ (Kr. e. 450) ezen a példán fedezte fel az irracionális számokat.

■ **B:** A négyzet átlójának és oldalának hosszúsága összemérhetetlen, mert hányadosuk az irracionális $\sqrt{2}$ szám.

1.1.2. Bizonyítási módszerek

Lényegében háromféle bizonyítási módszert különböztetünk meg:
- direkt bizonyítás,
- indirekt bizonyítás,
- teljes indukció.

Ezenkívül konstruktív és nemkonstruktív bizonyításról is szokás beszélni, ha a bizonyítás célja valamilyen matematikai objektum létezésének belátása.

1.1.2.1. Direkt bizonyítás

Egy már helyesnek bizonyult tételből (p feltevés) indulunk ki, és ebből vezetjük le a bizonyítandó tétel (q állítás) igaz voltát. A logikai következtetés során főként az implikációt vagy az ekvivalenciát alkalmazzuk.

a) Direkt bizonyítás implikáció segítségével: A $p \Rightarrow q$ *implikáció* esetén a feltevés igaz voltából következik az állítás igaz volta (lásd az implikáció igazságtáblázata 4. sorát, 283. old.).

■ Bizonyítandó az $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ egyenlőtlenség, ahol $a \geq 0$, $b \geq 0$. A feltevés a helyesnek elfogadott $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ binomiális képlet. Innen $4ab$ kivonásával adódik $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, ebből az egyenlőtlenségből pedig a középső kifejezés elhagyása, $4ab$ átvitele, és 4-gyel való osztás után közvetlenül az állítást kapjuk, ha a gyökvonásnál $a \geq 0$ és $b \geq 0$ miatt a pozitív előjelre szorítkozunk.

b) Direkt bizonyítás ekvivalencia segítségével: A bizonyítást *verifikálással*, vagyis a helyesség igazolásával végezzük. Ilyenkor a q állítás helyességéből indulunk ki, és megmutatjuk a p állítás helyességét, ami azonban csak a $p \Leftrightarrow q$ *ekvivalencia* fennállása esetén lehetséges. Ez pl. egy aritmetikai állításnál azt jelenti, hogy minden közbülső számolási lépésnek, amely a p állítást a q állításba viszi át, egyértelműen megfordíthatónak kell lennie.

■ Bizonyítandó az $1 + a + a^2 + \cdots + a^n < \dfrac{1}{1-a}$ egyenlőtlenség, ahol $0 < a < 1$.

Szorozva $(1-a)$-val kapjuk (mivel $1 - a > 0$, az egyenlőtlenségjel változatlanul érvényes, lásd még (1.97b)): $1 - a + a - a^2 + a^2 - a^3 + \cdots + a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1} < 1$.
Mivel $0 < a^{n+1} < 1$, az így nyert egyenlőtlenség helyes, és minthogy a végrehajtott számolási műveletek egyértelműen megfordíthatók, azért a kiindulási egyenlőtlenség is helyes.

1.1.2.2. Indirekt (ellentmondással történő) bizonyítás

A q állítás bizonyítása céljából a $\bar{q}$ *tagadás*ból indulunk ki, és utóbbiból egy hamis r állításra következtetünk, vagyis $\bar{q} \Rightarrow r$ (lásd még 285. old.). Ekkor azonban $\bar{q}$ is hamis kell hogy legyen, mert implikáció útján csak hamis feltevésből juthatunk hamis állításra (lásd az implikáció igazságtáblázatának 1. sorát, 283. old.). De ha $\bar{q}$ hamis, akkor q igaz kell hogy legyen.

■ Bizonyítandó, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ekkor $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ahol a, b egész számok és $b \neq 0$. Feltehető, hogy itt az a, b számok *relatív prímek*, vagyis nincs közös osztójuk. Azt kapjuk, hogy $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, azaz $a^2 = 2b^2$, tehát a^2 páros szám volna, ami csak akkor lehetséges, ha $a = 2n$ páros szám. Ekkor $a^2 = 4n^2 = 2b^2$ miatt b-nek is páros számnak kellene lennie. Ez nyilvánvalóan ellentmond annak a feltevésnek, hogy a és b relatív prímek.

1.1.2.3. Teljes indukció

Ezzel a bizonyítási módszerrel olyan tételeket vagy képleteket lehet bebizonyítani, amelyek természetes számoktól függnek. A teljes indukció elve a következő:
Ha egy állítás igaz egy n_0 természetes számra, és az állításnak bármely $n \geq n_0$ természetes számra való érvényességéből következik az állítás érvényessége az $n + 1$ számra, akkor az állítás minden $n \geq n_0$ természetes számra igaz. Ezek szerint a bizonyítás a következő lépésekben történik:

1. Az indukció kezdete: Megmutatjuk az állítás érvényességét az $n = n_0$ esetben. Többnyire választható $n_0 = 1$.

2. Indukciós feltevés: n-re az állítás igaz (p feltevés).

3. Indukciós állítás: $(n + 1)$-re az állítás igaz (q állítás).

4. Az implikáció bizonyítása: $p \Rightarrow q$.

A **3.** és **4.** lépést együtt *indukciós következtetés*nek vagy n-ről $(n+1)$-re való *következtetés*nek nevezzük.

■ Bizonyítandó az $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ képlet.

Az indukciós bizonyítás lépései a következők:

1. $n = 1: \ s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ nyilvánvalóan igaz.

2. $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ teljesüljön $n \geq 1$ esetén.

3. A **2.** alatti feltevés mellett meg kell mutatni, hogy $s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

4. Bizonyítás: $s_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

1.1.2.4. Konstruktív bizonyítás

Egy egzisztencia bizonyításról akkor mondják, hogy *konstruktív*, ha eljárást is ad a keresett matematikai objektum előállítására.

■ Konstruktív bizonyításra példa az euklideszi algoritmus, amely azáltal bizonyítja két egész szám legnagyobb közös osztójának létezését, hogy egy eljárást ad a tényleges előállításra.

1.1.2.5. Nemkonstruktív bizonyítás

Nemkonstruktív egzisztenciabizonyításra példa az ERDŐS PÁL által kezdeményezett ún. valószínűségi módszer, amellyel úgy bizonyítjuk például adott tulajdonságú gráf létezését, hogy leszámláljuk a keresett tulajdonsággal *nem* rendelkező gráfokat és a kapott felső becslés adja, hogy ezek nem lehetnek annyian, mint az összes szóbajövő gráf.

1.1.3. Összegek és szorzatok

1.1.3.1. Összegek

1. Definíció

Összegek rövid felírására a $\sum$ *szummajel*et használjuk:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \text{kiejtve szumma } k \text{ egyenlő 1-től } n\text{-ig } a \text{ index } k \tag{1.3}$$

Ez a rövidítés n darab a_k tag ($k = 1, 2, \ldots, n$) összegét jelöli. A k számot *futóindex*nek, a *szumma index*ének vagy *szummációs változó*nak nevezzük. Ha a szumma üres, azaz általánosabban $\sum_{k=l}^{n} a_l$ és $n < l$, akkor definíció szerint a szumma értéke 0.

2. Számolási szabályok

1. Egyenlő tagok összege , vagyis $a_k = a$, ha $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na \,. \tag{1.4a}$$

2. Szorzás konstans tényezővel

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{1.4b}$$

3. Összeg felbontása

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad (1 \le m < n) \,. \tag{1.4c}$$

4. Egyenlő tagszámú összegek összeadása

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k + \ldots) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k + \ldots \tag{1.4d}$$

(az egyenlőség két oldala felcserélhető).

5. Átszámozás

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m+1} \,, \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l} \,. \tag{1.4e}$$

6. Összegzések sorrendjének megfordítása

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \,. \tag{1.4f}$$

7. Az összegzések sorrendjének felcserélése kettős összegben

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \,, \tag{1.4g}$$

azaz egy táblázat elemeit összeadhatjuk úgy is, hogy először a sorokat összegezzük és úgy is, hogy először az oszlopokat.

Megjegyzendő, hogy mindezek az összefüggések „balról-jobbra" és „jobbról-balra" is használatosak.

1.1.3.2. Szorzatok

1. Definíció

Szorzatok rövid felírására a $\prod$ *produktumjel*et használjuk:

$$a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \,, \text{kiejtve produktum } k \text{ egyenlő 1-től } n\text{-ig } a \text{ index } k \tag{1.5}$$

Ez a rövidítés n darab a_k tényező ($k = 1, 2, \dots, n$) szorzatát jelöli. A k számot *futóindex*nek vagy a *produktum index*ének nevezzük. Itt az üres produktum értéke definíció szerint 1.

2. Számolási szabályok

1. **Egyenlő tényezők szorzata** , vagyis $a_k = a$, ha $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a^n \,. \tag{1.6a}$$

2. **Konstans tényező kiemelése**

$$\prod_{k=1}^{n} (c a_k) = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{1.6b}$$

3. **Felbontás részszorzatokra**

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{m} a_k \prod_{k=m+1}^{n} a_k \quad (1 \le m < n) \,. \tag{1.6c}$$

4. **Egyenlő tagszámú szorzatok szorzata**

$$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \dots = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k \prod_{k=1}^{n} c_k \dots \tag{1.6d}$$

(az egyenlőség két oldala felcserélhető).

5. **Átszámozás**

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m-+1} \,, \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l} \,. \tag{1.6e}$$

6. **Szorzat sorrendjének megfordítása**

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \,. \tag{1.6f}$$

7. **A szorzások felcserélése kettős szorzatban**

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_{ik} = \prod_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} a_{ik} \,, \tag{1.6g}$$

lásd az előző alpont (1.1.3.1.) 7. szabálya utáni megjegyzést.
Látható, hogy a szummára és a produktumra vonatkozó szabályok páronként megfeleltethetők és természetesen ez utóbbiak is mindkét irányban használatosak.

1.1.4. Hatványok, gyökök, logaritmusok

1.1.4.1. Hatványok

A *hatványozás*t, mint műveletet az a^x írásmóddal jelöljük. Az a szám neve *alap*, x neve *kitevő*, végül a^x neve hatvány. A hatvány definícióját az **1.1. táblázat** adja meg. Hatványokra, figyelemmel az alap és a kitevő értelmezési tartományára, a következő **számolási szabályok** érvényesek:

1.1. táblázat. A hatvány definíciója

alap a	*kitevő* x	*hatvány* a^x
tetszőleges valós, $\neq 0$	0	1
	$n = 1, 2, 3, \ldots$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$ (a az n-ediken)
	$n = -1, -2, -3, \ldots$	$a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$
pozitív valós	racionális: $\dfrac{p}{q}$ (p, q egész, $q > 0$)	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ (q-adik gyök a a p-ediken)
	irracionális: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_k}{q_k}$	$\lim\limits_{k\to\infty} a^{\frac{p_k}{q_k}}$
0	pozitív	0
0	0	1

$$a^x\, a^y = a^{x+y}, \quad a^x : a^y = a^{x-y} \quad (\text{ha } a^y \neq 0), \tag{1.7}$$

$$a^x\, b^x = (a\, b)^x, \quad a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (\text{ha } b^x \neq 0), \tag{1.8}$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\,y}, \tag{1.9}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \ (a > 0)\,. \tag{1.10}$$

Itt $\ln a$ az a szám természetes logaritmusa, és $e = 2{,}718281828459\ldots$ ennek a logaritmusnak az alapja.
Egy speciális hatvány a következő:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1, \text{ ha } n \quad \text{páros}, \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ne felejtsük el, hogy $a^0 = 1$.

1.1.4.2. Gyökök

Az **1.1. táblázat**tal összhangban az

$$\sqrt[n]{a} \ (a > 0, \text{ valós; } n > 0, \text{ egész}) \tag{1.12a}$$

pozitív számot az a szám n-edik gyökének mondjuk. Kiszámításánál *gyökvonás*ról beszélünk, és az a számot *gyökjel alatti mennyiség*nek, n-et pedig *gyökkitevő*nek hívjuk. A 2. és a 3. gyököt *négyzet-gyök*nek, ill. *köbgyök*nek is nevezzük.
Az

$$x^n = a \ (a \text{ valós vagy komplex}, \ n > 0\,, \text{ egész}) \tag{1.12b}$$

egyenlet megoldását gyakran az $x = \sqrt[n]{a}$ alakban írjuk; ez az előállítás n számú x_k értéket képvisel, amelyeket negatív vagy komplex a érték esetén (1.133b) szerint (lásd 38. old.) kell kiszámítani.

■ Az $x^3 = -8$ egyenlet három gyöke $x_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $x_2 = -2$ és $x_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1.1.4.3. Logaritmusok

1. Definíció Az $x > 0$ szám $b > 0$, $b \neq 1$ *alapra* vonatkozó *logaritmusán*, képletben: $u = \log_b x$, azt a kitevőt értjük, amelyre a b alapot hatványozni kell, hogy az x számot kapjuk. Tehát a

$$b^u = x \quad (1.13a) \qquad \text{egyenletből következik} \qquad \log_b x = u\,, \quad (1.13b)$$

és megfordítva: a második egyenletből következik az első. Speciálisan

$$\log_b 1 = 0\,, \quad \log_b b = 1\,. \quad (1.13c)$$

A logaritmus negatív argumentumokra való kiterjesztéséhez a komplex számokra van szükség.
Egy adott mennyiség logaritmusának megállapítását *logaritmuskeresés*nek nevezzük. Így hívhatjuk még egy logaritmust tartalmazó kifejezésnek az (1.14a, 1.14b) képletek szerinti átalakítását is. Egy mennyiségnek logaritmusából való meghatározását *hatványozás*nak nevezzük.

2. A logaritmusok néhány tulajdonsága

1. Minden pozítiv számnak van tetszőleges pozitív alapra vonatkozó logaritmusa, kivéve ha a b alap $= 1$.

2. Egy közös b alapra vonatkozó logaritmusokra a következő számolási szabályok érvényesek (az alapot most elhagytuk):

$$\log(xy) = \log x + \log y\,, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y\,, \quad (1.14a)$$

$$\log x^n = n \log x\,, \quad \text{speciálisan} \quad \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x\,. \quad (1.14b)$$

Ahhoz, hogy (1.14a, 1.14b) segítségével összegek és különbségek logaritmusát meg tudjuk keresni, először szorzattá vagy hányadossá kell őket átalakítani, ha lehet.

■ A $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$ kifejezés logaritmusának meghatározása: $\log \frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log\left(3x^2\sqrt[3]{y}\right) - \log(2zu^3) =$

$= \log 3 + 2\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u.$

Gyakran van szükség a fordított átalakításra, vagyis különböző mennyiségek logaritmusait tartalmazó kifejezés előállítására egyetlen kifejezés logaritmusaként.

■ $\log 3 + 2\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log \dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

3. A különböző alapú logaritmusok arányosak egymással, úgyhogy az a alapra vonatkozó logaritmusok így számíthatók ki b alapú logaritmusok segítségével:

$$\log_a x = M \log_b x, \quad \text{ahol} \quad M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,. \quad (1.15)$$

Az M számot transzformációs modulusnak is hívják.

1.1.4.4. Speciális logaritmusok

1. A 10 alapszámra vonatkozó logaritmusokat *tízes alapú* vagy BRIGGS-*féle logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_{10} x = \lg x\,, \quad \text{és fennáll} \quad \lg(x10^\alpha) = \alpha + \lg x\,. \quad (1.16)$$

2. Az e alapszámra vonatkozó logaritmusokat *természetes* vagy NAPIER-*féle logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_e x = \ln x\,. \quad (1.17)$$

A természetes logaritmusokat tízes alapúakba átvivő modulus

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342944819\ldots\,, \quad (1.18)$$

a tízes alapúakat a természetesekbe átvivő pedig

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3025850930\ldots . \tag{1.19}$$

3. A 2 alapszámra vonatkozó logaritmusokat *kettes alapú logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_2 x = \operatorname{ld} x \quad (\text{néha} \quad \log_2 x = \operatorname{lb} x)\,. \tag{1.20}$$

4. A tízes alapú és a természetes logaritmusokról *logaritmustáblázatok* állnak rendelkezésre. Ezeket korábban előszeretettel alkalmazták hatványok kiszámolására vagy szorzások és osztások elvégzésének megkönnyítésére. Legtöbbször a tízes alapú logaritmusokat használták erre a célra. Mára a zsebszámológépek és személyi számítógépek a logaritmustáblázatokat nagy mértékben kiszorították a számolás eszközei közül.

Minden pozitív tizedes tört, vagyis minden valós szám (ebben az összefüggésben *numerus*nak is mondják) egy k egész kitevőjű 10^k tízes hatvány kiemelésével előállítható az

$$x = \hat{x}10^k, \quad \text{ahol} \quad 1 \le \hat{x} < 10 \tag{1.21a}$$

félig logaritmikus alakban. Itt az $\hat{x}$ mennyiséget x számjegyeinek sorozata határozza meg, 10^k pedig x nagyságrendjét szolgáltatja. Azt kapjuk, hogy

$$\lg x = k + \lg \hat{x}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le \lg \hat{x} < 1, \quad \text{vagyis} \quad \lg \hat{x} = 0, \ldots . \tag{1.21b}$$

A k számot *karakterisztiká*nak, $\lg \hat{x}$ tizedesvessző után álló számjegysorozatát pedig *mantisszá*nak nevezzük. Utóbbit a logaritmustáblázatból lehet leolvasni.

■ $\lg 324 = 2{,}5105$, tehát a karakterisztika 2, a mantissza 5105. A 10^n-nel való szorzással vagy osztással keletkező számok, pl. 3240; $324\,000$; $3{,}24$; $0{,}0324$, logaritmusának mantisszája ugyanaz, esetünkben 5105, de karakterisztikája különböző. Ezért a *logaritmustáblázat*okban a mantisszák vannak feltüntetve. A mantissza leolvasásánál sem a tizedesvessző helyét, sem a számtól balra vagy jobbra álló nullákat (beleértve a tizedesvessző előtti nullát) nem kell figyelembe venni. Ezek meghatározott x numerushoz tartozó k karakterisztika megállapításánál játszanak szerepet.

A logaritmuson kívül igen fontos számolási segédeszköz volt a *logarléc*. A logarléc működésének alapja az (1.14a) képlet, amely lehetővé teszi, hogy szorzásokat és osztásokat összeadás és kivonás útján végezzünk el. Ezért a logarlécen a szakaszok logaritmikus léptékben vannak feltüntetve (lásd Skála- és függvénypapírok, 118. old.), úgyhogy az említett számolási műveletek szakaszok „összeadására" és „kivonására" vezethetők vissza.

1.1.5. Algebrai kifejezések

1.1.5.1. Definíciók

1. Algebrai kifejezésnek nevezünk egy vagy több algebrai mennyiséget, pl. számot vagy betűszimbólumot, amelyeket műveleti jelek, pl. $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{\ }$ stb., valamint az algebrai műveletek végrehajtási sorrendjének meghatározására szolgáló különféle zárójelek kapcsolnak össze.

2. Azonosság az olyan egyenlőségi kapcsolat két algebrai kifejezés között, amely érvényben marad, ha a benne szereplő betűszimbólumokat tetszőleges számértékekkel helyettesítjük.

3. Egyenletnek nevezünk egy egyenlőségi kapcsolatot két algebrai kifejezés között, ha a kapcsolat (az azonosság esetétől eltérően) csak egyes speciális értékek behelyettesítése esetén marad érvényes. Például az egyazon változó két függvénye közötti

$$F(x) = f(x) \tag{1.22}$$

egyenlőségi kapcsolatot akkor mondjuk *egyismeretlenes egyenlet*nek, ha csak a változó meghatározott értékei mellett teljesül. Ha az egyenlőségi kapcsolat az x változó tetszőleges értéke mellett igaz marad, akkor azonosságnak nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy az egyenlet azonosan teljesül.

4. Azonos átalakítás algebrai kifejezést másik, vele azonosan egyenlő kifejezésbe visz át. Az ilyen átalakítások a követett céltól függően különbözők lehetnek. Például segítségükkel rövidebb kifejezéseket nyerhetünk, és így könnyebben helyettesíthetünk be számokat vagy végezhetünk további szá-

molásokat. Máskor olyan átalakításra van szükségünk, amelynek végeredménye különösen alkalmas egyenletmegoldásra, logaritmuskeresésre, differenciálásra, integrálásra stb.

1.1.5.2. Az algebrai kifejezések osztályozása

1. Főmennyiségek *Főmennyiségek*nek nevezzük azokat az általános számokat (betűszimbólumokat), amelyek szerint az algebrai kifejezések osztályozása történik; ezeket minden egyes esetben külön kell megállapítani. Függvények esetén a független változók a főmennyiségek. A többi, számokkal még be nem helyettesített mennyiségek a kifejezés *paraméter*ei. Egyes kifejezésekben a paramétereket *együtthatók*nak nevezik.

■ Együtthatók lépnek fel pl. polinomokban, FOURIER-sorokban és lineáris differenciálegyenletekben.

Egy kifejezés attól függően tartozik az egyik vagy másik osztályhoz, hogy főmennyiségein milyen műveleteket kell végrehajtani. A főmennyiségeket többnyire az ábécé utolsó betűivel: x, y, z, u, v, ..., a paramétereket az első betűkkel: a, b, c, ... jelöljük. Az m, n, p, ... betűket pozitív egész paraméterértékekre, pl. összegzési és iterációs indexekre használjuk leginkább.

2. Racionális egész kifejezések azok, amelyekben a főmennyiségek összeadása, kivonása és szorzása, beleértve a nemnegatív egész kitevőjű hatványozást, fordul csak elő.

3. Racionális törtkifejezések a racionális egész kifejezéseknél említett műveleteken kívül a főmennyiségekkel való osztást is tartalmaznak, beleértve a negatív egész kitevőjű hatványozást és esetenként a főmennyiségek racionális egész kifejezéseivel való osztást.

4. Irracionális kifejezések jellemzője a gyökvonás, vagyis a törtkitevőjű hatványozás, pontosabban a főmennyiségek racionális egész vagy törtkifejezéseiből való gyökvonás.

5. Transzcendens kifejezések, vagyis exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus kifejezések: olyan algebrai kifejezéseket tartalmaznak, amelyeknél a főmennyiségek kitevőben, logaritmusjel alatt vagy szögfüggvények argumentumaként szerepelnek.

1.1.6. Racionális egész kifejezések

1.1.6.1. Előállítás polinomalakban

Minden racionális egész kifejezést elemi átalakítások, vagyis egynemű tagok összevonása, egytagú kifejezések és polinomok összeadása, kivonása és szorzása révén polinomként lehet előállítani.

■ $(-a^3 + 2a^2x - x^3)(4a^2 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) - (a^5 + 4a^3x^2 - 4ax^4) =$
$= -4a^5 + 8a^4x - 4a^2x^3 - 8a^4x + 16a^3x^2 - 8ax^4 + a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4 - a^5 - 4a^3x^2 + 4ax^4 =$
$= -5a^5 + 13a^3x^2 - 2a^2x^3 - 8ax^4$.

1.1.6.2. Polinom felbontása tényezőkre

A polinomok sok esetben előállíthatók egytagú kifejezések és polinomok szorzataként. Ehhez segédeszközül a *kiemelés* és *csoportosítás*, speciális képletek, továbbá az *egyenletek általános tulajdonságai* szolgálnak.

■ **A:** Kiemelés: $8ax^2y - 6bx^3y^2 + 4cx^5 = 2x^2(4ay - 3bxy^2 + 2cx^3)$.

■ **B:** Csoportosítás: $6x^2 + xy - y^2 - 10xz - 5yz = 6x^2 + 3xy - 2xy - y^2 - 10xz - 5yz =$
$= 3x(2x + y) - y(2x + y) - 5z(2x + y) = (2x + y)(3x - y - 5z)$.

■ **C:** Egyenlettulajdonságok alkalmazása (lásd még 42. old.): $P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2$.
a) x^2 kiemelése, **b)** annak megállapítása, hogy $\alpha_1 = 1$ és $\alpha_2 = -1$ a $P(x) = 0$ egyenletnek gyökei. $P(x)$-et elosztva az $x^2(x - 1)(x + 1) = x^4 - x^2$ kifejezéssel az $x^2 - 2x + 5$ hányadost kapjuk. Ezt már nem lehet további valós tényezőkre felbontani, mert $p = -2$, $q = 5$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, tehát adódik: $x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 5)$.

1.1.6.3. Speciális képletek

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \,, \tag{1.23}$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \,, \tag{1.24}$$

$$(x+y+z+\cdots+t+u)^2 = x^2+y^2+z^2+\cdots+t^2+u^2+ \\ +2xy+2xz+\cdots+2xu+2yz+\cdots+2yu+\cdots+2tu\,, \tag{1.25}$$

$$(x\pm y)^3 = x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3\,. \tag{1.26}$$

Az $(x\pm y)^n$ kifejezést a binomiális tétellel lehet kiszámítani (lásd (1.31a)–(1.31d)).

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2\,, \tag{1.27}$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\,, \tag{1.28}$$

$$\frac{x^n+y^n}{x+y} = x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1} \quad \text{(csak páratlan } n\text{-re)}\,, \tag{1.29}$$

$$\frac{x^n-y^n}{x+y} = x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1} \quad \text{(csak páros } n\text{-re)}\,. \tag{1.30}$$

1.1.6.4. Binomiális tétel

1. Első binomiális képlet Az

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+ \\ +\cdots+\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+nab^{n-1}+b^n \tag{1.31a}$$

képletet *binomiális tétel*nek nevezzük. A tétel minden valós vagy komplex a és b számra, továbbá minden $n=1,2,\dots$ értékre érvényes. A rövidebb írásmód kedvéért speciális együtthatókat vezettek be, a *binomiális együtthatók*at (lásd (1.32a)):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\,!+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n \tag{1.31b}$$

azaz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,. \tag{1.31c}$$

2. Második binomiális képlet Ha az (1.31a)–(1.31c) képletekben a b számot a $-b$ számmal helyettesítjük, kapjuk a *második binomiális képlet*et:

$$(a-b)^n = a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+ \\ +\cdots+(-1)^m\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+(-1)^nb^n \text{ vagy}$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^ka^{n-k}b^k\,. \tag{1.31d}$$

3. Binomiális együtthatók Ha n és k nemnegatív egész szám, az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (0\le k\le n)\,. \tag{1.32a}$$

kifejezést *binomiális együttható*nak nevezzük. Itt $n!$ a pozitív egész számok szorzata 1-től n-ig, amelyet *faktoriális*nak hívunk:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \quad (n=1,2,\dots)\,. \tag{1.32b}$$

Definícióként

$$0! = 1\,. \tag{1.32c}$$

A binomiális együtthatók értékét az úgynevezett PASCAL-*háromszög*ből lehet leolvasni:

n	Együtthatók
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
	$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
6	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$
$\vdots$	. . .

még 1042. old.) adja meg:

$$(a+b)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} a^{x-k}b^k = a^x + xa^{x-1}b + \frac{x(x-1)}{2!}a^{x-2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}a^{x-3}b^3 + \cdots . \quad (1.35)$$

1.1.6.5. Két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározása

1. Osztó és többszörös A $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ $(Q(x) \not\equiv 0)$ polinommal, ha létezik olyan $T(x)$ polinom, amelyre

$$P(x) = T(x)Q(x) \quad \text{és ekkor} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) \quad (1.36)$$

Ha a $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ polinommal, akkor azt mondjuk, hogy $Q(x)$ a $P(x)$-nek *osztója*, és hogy $P(x)$ a $Q(x)$-nek *többszöröse*.

2. Legnagyobb közös osztó Minden polinomot, amely a $P(x)$ és a $Q(x)$ polinom közös osztója, és amely ugyanakkor e két polinom minden más közös osztójának többszöröse, a $P(x)$ és a $Q(x)$ polinom *legnagyobb közös osztójának* nevezünk és $\mathrm{LNKO}(P,Q)$-val jelölünk.

■ $P(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4)\,,\ Q(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3) \Rightarrow \mathrm{LNKO}(P,Q) = (x-1)^2(x-2)\,.$

Ha $P(x)$-nek és $Q(x)$-nek nincs közös polinomtényezője, akkor *relatív prímek*nek mondjuk őket. Ilyenkor a legnagyobb közös osztó bármely konstans.

3. Euklideszi algoritmus Az *euklideszi algoritmus* két polinom, $P(x)$ és $Q(x)$ legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló módszer. $P(x)$ legyen n-edfokú, $Q(x)$ pedig m-edfokú, és tegyük fel, hogy $n \geq m \geq 0$. Elvégezzük a következő osztásokat:

a) A $P(x)$ polinomot elosztva a $Q(x)$ polinommal egy $T_1(x)$ hányadost és egy $R_1(x)$ maradékot kapunk:

$$P(x) = Q(x)T_1(x) + R_1(x)\,. \quad (1.37a)$$

b) A $Q(x)$ polinomot elosztva az $R_1(x)$ polinommal egy $T_2(x)$ hányadost és egy $R_2(x)$ maradékot kapunk:

$$Q(x) = R_1(x)T_2(x) + R_2(x), \quad (1.37b)$$

c) Az $R_1(x)$ polinomot elosztva az $R_2(x)$ polinommal egy $T_3(x)$-et és egy $R_3(x)$-et kapunk, stb. Ekkor a két polinom legnagyobb közös osztója az utolsó, 0-tól különböző $R_k(x)$ maradék. A módszer a természetes számok aritmetikájából ismert (lásd 328. old.).

A legnagyobb közös osztó meghatározása pl. egyenletek megoldása során használható, nevezetesen a többszörös gyökök leválasztásánál és a STURM-*módszer* alkalmazásánál (lásd 44. old.).

1.1.7. Racionális törtkifejezések

1.1.7.1. Visszavezetés a legegyszerűbb alakra

Minden racionális törtkifejezés felírható két relatív prím polinom hányadosaként. Ehhez csak elemi átalakításokra van szükség, nevezetesen polinomok és törtek összeadására, kivonására, szorzására és osztására, valamint törtek egyszerűsítésére.

■ $\dfrac{3x + \dfrac{2x+y}{z}}{x\left(x^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)} - y^2 + \dfrac{x+z}{z}$ legegyszerűbb alakjának megkeresése:

$$\frac{(3xz+2x+y)z^2}{(x^3z^2+x)z} + \frac{-y^2z+x+z}{z} = \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2+(x^3z^2+x)(-y^2z+x+z)}{x^3z^3+xz} =$$

$$\frac{3xz^3+2xz^2+yz^2-x^3y^2z^3-xy^2z+x^4z^2+x^2+x^3z^3+xz}{x^3z^3+xz}\,.$$ Itt a számláló és a nevező már relatív

prímek, mert az xz tag a nevezőben is szerepel.

1.1.7.2. A racionális egész rész meghatározása

Két, közös x főmennyiséggel rendelkező polinom hányadosát *valódi tört*nek nevezzük, ha a számlálóban álló polinom alacsonyabb fokú, mint a nevezőben álló. Ellenkező esetben *áltört*ről beszélünk. Minden áltört felbontható egy valódi tört és egy polinom összegére azáltal, hogy a számlálópolinomot elosztjuk a nevezőpolinommal, vagyis leválasztjuk a racionális egész részt, tehát a különbség 0-hoz tart és emiatt az aszimptotikus közelítés az aszimptota általánosítása.

■ $R(x)=\dfrac{3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4}{x^2-2ax+3a^2}$ racionális egész részének meghatározása:

$$(3x^4-10ax^3+22a^2x^2-24a^3x+10a^4):(x^2-2ax+3a^2)=3x^2-4ax+5a^2+\frac{-2a^3x-5a^4}{x^2-2ax-3a^2}$$

$$\begin{array}{r}
3x^4-\ 6ax^3+\ 9a^2x^2 \\
\hline
-\ 4ax^3+13a^2x^2-24a^3x \\
-\ 4ax^3+\ 8a^2x^2-12a^3x \\
\hline
5a^2x^2-12a^3x+10a^4 \\
5a^2x^2-10a^3x+15a^4 \\
\hline
-\ 2a^3x-\ 5a^4.
\end{array}$$

$$R(x)=3x^2-4ax+5a^2+\frac{-2a^3x-5a^4}{x^2-2ax+3a^2}.$$

Egy $R(x)$ racionális áltört függvény racionális egész részét $R(x)$ *aszimptotikus közelítés*ének is mondjuk, mert $|x|$ nagy értékeire $R(x)$ úgy viselkedik, mint ez a polinomiális rész.

1.1.7.3. Parciális törtekre bontás

Minden

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}\quad(n<m)\tag{1.38}$$

racionális valódi törtfüggvény egyértelműen felbontható

$$\frac{A}{x-\alpha^k}\quad\text{és}\quad\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}\tag{1.39}$$

alakú parciális törtek összegére, ahol α,p,q és A,C,D valós számok. Ezt a következőképpen érjük el:

1. A nevezőpolinom b_m együtthatóját 1-re változtatjuk azáltal, hogy (1.38) nevezőjét és számlálóját elosztjuk b_m eredeti értékével.

2. A (1.160) képlet (lásd 43. old.) szerint felírjuk a $Q(x)$ nevezőpolinom gyöktényezős előállítását:

$$\begin{aligned}Q(x)=&(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_l)^{k_l}\\&\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}\,.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Itt $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ a $Q(x)$ polinom l darab valós gyöke. Ezeken kívül $Q(x)$-nek van r pár konjugált komplex zérushelye is, amelyek az $x^2+p_ix+q_i\ \ (i=1,2,\ldots,r)$ másodfokú tényezők gyökeiként adódnak. A p_i,q_i számok valósak, és fennáll $\left(\dfrac{p_i}{2}\right)^2-q_i<0\,.$

3. A *parciális törtekre bontás* próbakifejezése a következő:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots}\\&=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\cdots\\&\quad\frac{B_1}{x-\alpha_2}+\frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\cdots\end{aligned}$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{m_1}x+D_{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\cdots$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{E_{m_2}x+F_{m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\cdots . \qquad (1.41)$$

4. Az $A_1, A_2, \ldots, F_1, F_2 \ldots$ konstansok meghatározása céljából az (1.41) próbakifejezést megszorozzuk a $Q(x)$ polinommal, majd összehasonlítjuk $P(x)$-et és a most kapott $Z(x)$ polinomot. Fennáll $Z(x) \equiv P(x)$. A $Z(x)$ polinomot x hatványai szerint rendezzük, majd $Z(x)$ és $P(x)$ azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük (*együttható-összehasonlítás* vagy a *határozatlan együtthatók módszere*).

■ **A:** $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}$.

Az egyenlet bal és jobb oldalának számlálójában x azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé téve a $6=A+B+C$, $-1=B-C$, $1=-A$, egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $A=-1$, $B=3$, $C=4$.

■ **B:** $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{B_1}{x-1}+\dfrac{B_2}{(x-1)^2}+\dfrac{B_3}{(x-1)^3}$. Az A_1, B_1, B_2, B_3 együtthatók meghatározása a határozatlan együtthatók módszerével történik.

■ **C:** $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\dfrac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}$. Az A, D_1, E_1, D_2, E_2 együtthatók meghatározása a határozatlan együtthatók módszerével történik.

Megjegyzés: Ha a $Q(x)$ nevezőpolinomnak csak az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ valós és egyszeres gyökei vannak, akkor az (1.41) próbakifejezés alakja

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}, \qquad (1.42)$$

és az együtthatók a következőképpen határozhatók meg:

$$A_1=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}, \quad A_2=\frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}, \quad \ldots, \quad A_m=\frac{P(\alpha_m)}{Q'(\alpha_m)}. \qquad (1.43)$$

(1.43) nevezőiben a $\dfrac{dQ}{dx}$ derivált $x=\alpha_1, x=\alpha_2, \ldots, x=\alpha_m$ helyeken felvett értékei állnak.

■ $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=+1$ és $\alpha_3=-1$; $P(x)=6x^2-x+1$, $Q'(x)=3x^2-1$, $A=\dfrac{P(0)}{Q'(0)}=-1$, $B=\dfrac{P(1)}{Q'(1)}=3$ és $C=\dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}=4$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x+1}$.

Ugyanaz a megoldás adódik, mint az **A** példában.

1.1.7.4. Arányosságok átalakítása

Az

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{(1.44a) arányosságból következik} \quad ad=bc, \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \qquad \text{(1.44b)}$$

és az

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}, \quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}, \quad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d} \text{ és } a\neq b,\ c\neq d \text{ esetén } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \qquad \text{(1.44c)}$$

levezetett arányosságok. Az

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \qquad \text{(1.45a)} \quad \text{arányosságokból } b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0 \text{ esetén következik}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}\,. \qquad (1.45b)$$

1.1.8. Irracionális kifejezések

Az irracionális kifejezések általában egyszerűbb alakra hozhatók, mégpedig a) a kitevő egyszerűsítésével, b) a gyökjel elé történő kiemeléssel és c) a nevező gyöktelenítésével.

1. A kitevő egyszerűsítése A *kitevő*t úgy lehet *egyszerűsíteni*, hogy a gyökjel alatt álló mennyiséget tényezőkre bontjuk, majd a gyökkitevőt és a gyökjel alatt álló mennyiség minden tényezőjének kitevőjét elosztjuk ezen összes kitevő legnagyobb közös osztójával.

■ $\sqrt[6]{16(x^{12} - 2x^{11} + x^{10})} = \sqrt[6]{4^2 \cdot x^{5\cdot 2}(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x^5(x-1)}\,.$

2. A nevező gyöktelenítése A *nevező gyöktelenítésé*re különböző módszerek vannak, amelyekben az a közös, hogy bővítjük a törtet.

■ **A:** $\sqrt{\frac{x}{2y}} = \sqrt{\frac{2xy}{4y^2}} = \frac{\sqrt{2xy}}{2y}\,.$ ■ **B:** $\sqrt[3]{\frac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\frac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \frac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}$, tehát azonos átalakításokkal megpróbáljuk a nevezőt ugyanannyiadik hatványra átírni, ahányadik gyököt kell vonni.

■ **C:** $\frac{1}{x + \sqrt{y}} = \frac{x - \sqrt{y}}{(x + \sqrt{y})\,(x - \sqrt{y})} = \frac{x - \sqrt{y}}{x^2 - y}\,.$

■ **D:** $\frac{1}{x + \sqrt[3]{y}} = \frac{x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{(x + \sqrt[3]{y})\left(x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)} = \frac{x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{x^3 + y}$, tehát az 1.1.6.3. speciális képleteket felhasználva bővítünk.

3. A hatványok és gyökök legegyszerűbb alakja Rendszerint a hatványokat és gyököket is a legegyszerűbb alakra hozzuk.

■ **A:** $\sqrt[4]{\frac{81x^6}{(\sqrt{2} - \sqrt{x})^4}} = \sqrt{\frac{9x^3}{(\sqrt{2} - \sqrt{x})^2}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{2 - x} = \frac{3x\sqrt{2x} + 3x^2}{2 - x}\,.$

■ **B:** $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^7}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}\right) = (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{7/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} - x^{5/12}) = x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x = x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}(1 - x^{1/6} - x^{1/3} + x^{1/2}) = \sqrt[4]{x^3}\,(1 - \sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\,.$

1.2. Véges sorok

1.2.1. A véges sor definíciója

Véges soron az

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad (1.46)$$

összeget értjük, amelynek az összeadandóit általában egy meghatározott szabály szerint kell képezni. Az a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ összeadandók számok, amelyeket a sor tagjainak nevezünk.

1.2.2. Számtani sorok

1. Elsőrendű számtani sor

az olyan (1.46) sor, amelynél két egymást követő összeadandó különbsége konstans, vagyis

$$\Delta a_i = a_{i+1} - a_i = d = \text{const}\,, \quad \text{tehát} \quad a_i = a_0 + id\,. \qquad (1.47a)$$

Ennélfogva

$$s_n = a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \cdots + (a_0 + nd), \tag{1.47b}$$

$$s_n = \frac{a_0 + a_n}{2}(n+1) = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nd)\,. \tag{1.47c}$$

2. k-adrendű számtani sor

az olyan sor, amelynél az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat k-adik differenciáiból, a $\Delta^k a_i$ számokból álló sorozat konstans. A magasabbrendű differenciákat rekurzív módon, a

$$\Delta^\nu a_i = \Delta^{\nu-1} a_{i+1} - \Delta^{\nu-1} a_i \quad (\nu = 2, 3, \ldots, k) \tag{1.48a}$$

előírás alapján képezzük. Ezek könnyen nyerhetők a következő *differenciasémá*ból (háromszög-elrendezésből):

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & & & & & & & & \\
 & \Delta a_0 & & & & & & & \\
a_1 & & \Delta^2 a_0 & & & & & & \\
 & \Delta a_1 & & \Delta^3 a_0 & & & & & \\
a_2 & & \Delta^2 a_1 & & \ddots & \Delta^k a_0 & & & \\
 & \Delta a_2 & & \Delta^3 a_1 & & & & & \\
a_3 & & \Delta^2 a_2 & & \ddots & \Delta^k a_1 & \ddots & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \Delta^n a_0 & & \\
\vdots & & \vdots & & & \Delta^k a_{n-k} & \cdots & & \\
 & & & \Delta^3 a_{n-3} & \cdots & & & & \\
 & & \Delta^2 a_{n-2} & & & & & & \\
 & \Delta a_{n-1} & & & & & & & \\
a_n\,. & & & & & & & &
\end{array} \tag{1.48b}$$

Ekkor a tagokra és az összegre fennáll

$$a_i = a_0 + \binom{i}{1}\Delta a_0 + \binom{i}{2}\Delta^2 a_0 + \cdots + \binom{i}{k}\Delta^k a_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.48c}$$

$$s_n = \binom{n+1}{1} a_0 + \binom{n+1}{2}\Delta a_0 + \binom{n+1}{3}\Delta^2 a_0 + \cdots + \binom{n+1}{k+1}\Delta^k a_0\,. \tag{1.48d}$$

1.2.3. Mértani sor

Az (1.46) összeget *mértani sor*nak nevezzük, ha két egymást követő tag hányadosa konstans, vagyis ha

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q = \text{const}, \quad \text{tehát} \quad a_i = a_0 q^i\,. \tag{1.49a}$$

Ekkor

$$s_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{ha} \quad q \neq 1\,, \tag{1.49b}$$

$$s_n = (n+1)a_0 \quad \text{ha} \quad q = 1\,. \tag{1.49c}$$

Ha a sor végtelen sok tagból áll, akkor *végtelen mértani sor*t kapunk, amelynek $|q| < 1$ esetén az összege

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_0}{1 - q}\,. \tag{1.49d}$$

1.2.4. Speciális véges sorok

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\,, \tag{1.50}$$

$$p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+n)=\frac{(n+1)(2p+n)}{2}\,, \tag{1.51}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2\,, \tag{1.52}$$

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)\,, \tag{1.53}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \tag{1.54}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,, \tag{1.55}$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}\,, \tag{1.56}$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)\,, \tag{1.57}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\,, \tag{1.58}$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\quad(x\neq 1)\,. \tag{1.59}$$

1.2.5. Középértékek

(lásd még 794. old. és 811. old.)

1.2.5.1. Számtani közép

Az n számú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség számtani közepének az

$$x_A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \tag{1.60a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_A=\frac{a+b}{2} \tag{1.60b}$$

Az a , x_A , b mennyiségek számtani sorozatot alkotnak.

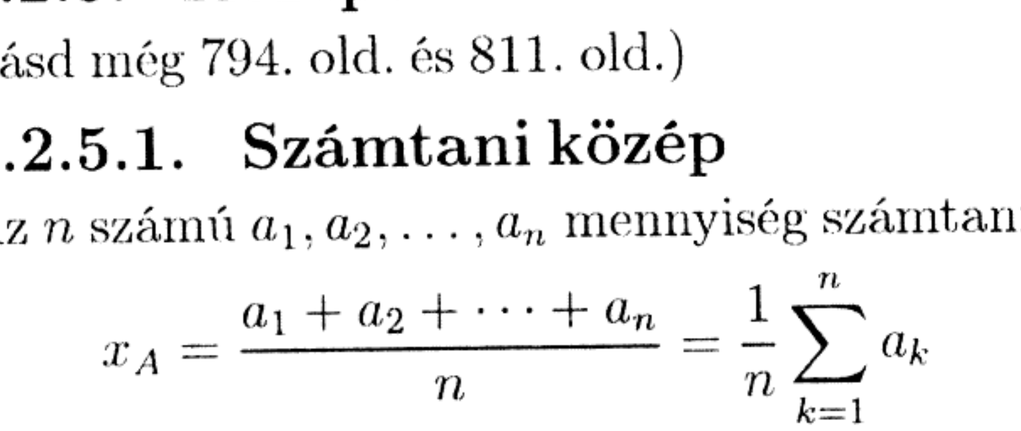
1.2.5.2. Mértani közép

Az n számú nem negatív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség mértani közepének az

$$x_G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}\,. \tag{1.61a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_G=\sqrt{ab}\,. \tag{1.61b}$$



1.3. ábra.

Az a, x_G , b mennyiségek mértani sorozatot alkotnak. Ha a és b két megadott szakasz, akkor egy $x_G=\sqrt{ab}$ hosszúságú szakaszt az **1.3.a** vagy az **1.3.b ábrán** feltüntetett szerkesztéssel lehet meghatározni.

Egy szakasznak az aranymetszés arányában történő felosztása (lásd 192. old.) a mértani közép speciális esete.

1.2.5.3. Harmonikus közép

Az n számú pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség harmonikus közepének az

$$x_H = \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{-1}. \tag{1.62a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_H = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}, \quad x_H = \frac{2ab}{a+b}. \tag{1.62b}$$

1.2.5.4. Négyzetes közép

Az n számú a_1 , a_2 , . . . , a_n mennyiség négyzetes közepének az

$$x_Q = \sqrt{\frac{1}{n}({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2}. \tag{1.63a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1.63b}$$

A *négyzetes közép*nek a megfigyelési hibák elméletében van jelentősége.

1.2.5.5. A középértékek összehasonlítása két pozitív $a \leq b$ mennyiség esetén

Az $x_A = \dfrac{a+b}{2}$, $x_G = \sqrt{ab}$, $x_H = \dfrac{2ab}{a+b}$, $x_Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ jelöléssel

1. $\boldsymbol{a < b}$ esetén

$$a < x_H(a,b) < x_G(a,b) < x_A(a,b) < x_Q(a,b) < b\,, \tag{1.64a}$$

és ugyanez a sorrend több tag esetén is, ha van köztük legalább két különböző.

2. $\boldsymbol{a = b}$ esetén

$$a = x_A = x_G = x_H = x_Q = b\,. \tag{1.64b}$$

1.3. Pénzügyi matematika

A pénzügyi matematika a számtani és mértani sorok, vagyis az (1.47a)–(1.47c) és (1.49a)–(1.49d) képletek alkalmazásain nyugszik, de ezek az alkalmazások a bankügyben olyan sokrétűek és speciálisak, hogy egy nagyszámú speciális fogalommal dolgozó külön diszciplína jött létre. Így a pénzügyi matematika nemcsak a tőkének kamatos kamat és járadékfizetés révén történő változását vizsgálja, hanem lényegében felöleli a kamatszámítás, törlesztésszámítás, részletfizetés- és járadékszámítás, leírások, árfolyam- és reálkamat-számítás, valamint a befektetéselemzés területét. A következőkben az alapvető kérdésfeltevéseket és megoldási képleteket ismertetjük. A pénzügyi matematika teljes spektrumát illetően be kell érnünk az irodalomra való hivatkozással (lásd [1.2], [1.11]).

A *biztosítási matematika* és a *kockázatelmélet*, amelyek a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszereire épülnek, önálló diszciplínákat képeznek, és itt nem kerülnek megtárgyalásra (lásd [1.3], [1.4]).

1.3.1. Százalékszámítás

1. Százalék A K *mennyiség* p *százaléka* kifejezés a $\dfrac{p}{100}K$ értéket jelenti, ahol a pénzügyi alkalmazások során K egy tőkeösszeg. A százalék jele %, vagyis fennáll

$$p\% = \frac{p}{100}, \qquad \text{ill.} \qquad 1\% = 0{,}01. \tag{1.65}$$

2. Felár Ha K-hoz $p\%$ felárat számítunk, a megnövelt érték

$$\tilde{K} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right) . \tag{1.66}$$

Ha a $K\frac{p}{100}$ felárat az új $\tilde{K}$ értékhez viszonyítjuk, akkor a $K\frac{p}{100} : \tilde{K} = \tilde{p} : 100$ arányosság alapján a $\tilde{K}$-ban foglalt felár

$$\tilde{p} = \frac{p \cdot 100}{100 + p} \tag{1.67}$$

százalék.

■ Ha egy áru értéke 200,– Ft és a felár 15%, akkor a végső ár 230,– Ft. Ez az ár a fogyasztó szempontjából $\tilde{p} = \frac{15 \cdot 100}{115} = 13{,}04$ százalék felárat tartalmaz.

3. Árengedmény Ha a K értékből $p\%$ *engedmény*t nyújtunk, a csökkentett érték

$$\tilde{K} = K\left(1 - \frac{p}{100}\right) . \tag{1.68}$$

Ha a $K\frac{p}{100}$ engedményt az új $\tilde{K}$ értékhez viszonyítjuk, akkor a nyújtott engedmény

$$\tilde{p} = \frac{p \cdot 100}{100 - p} \tag{1.69}$$

százalék.

■ Legyen az áru értéke 300,– Ft. Ha az engedmény 10%, akkor a fizetendő összeg 270,– Ft. A vevő szempontjából ez az ár $\tilde{p} = \frac{10 \cdot 100}{90} = 11{,}11$ százalék engedményt tartalmaz.

1.3.2. Kamatoskamat-számítás

1. Kamat

A kamat egy hitelért (kölcsönért) fizetendő díj vagy egy követelés révén elért bevétel. Egy teljes *kamatperiódus*ra (általában 1 évre) befektetett K tőkére a kamatperiódus végén

$$K\frac{p}{100} \tag{1.70}$$

kamatot fizetnek. Itt p a *kamatperiódusra vonatkozó kamatláb*, és azt mondjuk, hogy a K tőkére $p\%$ kamatot fizetnek.

2. Kamatos kamat

Mivel a tőke minden kamatperiódus végén megnő a kamat összegével, a következő kamatperiódusban a befolyt kamat is kamatozik a tőkével együtt. Ezt az együttkamatozást *kamatos kamat*nak nevezzük. Ha a tőke kamatos kamattal változik, több esetet kell megkülönböztetni.

1. Egyszeri befizetés Éves tőkésítés esetén a K tőke n év után a K_n végértékre növekszik fel. Az n-edik év végén fennáll

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \tag{1.71}$$

Rövidség kedvéért bevezetjük az $1 + \frac{p}{100} = q$ jelölést, és a q értéket *kamattényező*nek nevezzük.

*Évesnél gyakoribb tőkésítés*ről beszélünk, ha az év m darab egyenlő hosszúságú kamatperiódusra van felosztva, és a kamatot már minden ilyen kamatperiódus végén hozzáírják az aktuális, kezdetben K tőkéhez. Ekkor a kamatperiódusonkénti kamat $K_{\text{aktuális}}\frac{p}{100m}$, és n év után, amelyek mindegyike m

kamatperiódusból áll, a tőke a

$$K_{m\cdot n} = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m\cdot n} \tag{1.72}$$

értékre növekszik fel.

■ 5000,– Ft tőke, amely évi 7,2%-kal kamatozik, 6 év alatt a) éves tőkésítés esetén $K_6 = 5000(1+0{,}072)^6 = 7588{,}20$-ra, b) havi tőkésítés esetén $K_{72} = 5000(1+0{,}072/12)^{72} = 7691{,}74$ Ft-ra növekszik fel.

2. Rendszeres befizetés és tőkésítés Egyenlő időközönként egyenlő E nagyságú befizetéseket kell teljesíteni. Az időközök meg kell hogy egyezzenek a kamatperiódussal. Ha a befizetés mindig a kamatperiódus elején, ill. végén történik, *előzetes* (praenumerando), ill. *utólagos* (postnumerando) befizetésről beszélünk. Az n-edik kamatperiódus végén a számla egyenlege K_n, mégpedig

a) előzetes befizetésnél:

$$K_n = Eq\frac{(q^n - 1)}{q - 1}, \tag{1.73a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_n = E\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.73b}$$

3. Évesnél gyakoribb befizetés és évenkénti tőkésítés Az évet, ill. a kamatperiódust m darab egyenlő hosszúságú szakaszra bontjuk fel. Minden szakasz elején, ill. végén azonos E összeget fizetünk be, és az az év, ill. a kamatperiódus végéig időarányosan kamatozik. Ilyen módon egy év elteltével a K_1 egyenleget kapjuk, mégpedig

a) előzetes befizetésnél:

$$K_1 = E\left[m + \frac{(m+1)p}{200}\right], \tag{1.74a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_1 = E\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]. \tag{1.74b}$$

A második évben K_1 teljes egészében kamatozik, ehhez jönnek még az első évihez hasonló befizetések és kamatok, úgyhogy n év után, évesnél gyakoribb befizetés és éves tőkésítés esetén, a K_n egyenleg

a) előzetes befizetésnél:

$$K_n = E\left[m + \frac{(m+1)p}{200}\right]\frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{1.75a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_n = E\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.75b}$$

■ Egy betétes $p = 5{,}2$ éves kamatláb mellett havonként utólag 1000,– Ft-ot fizet be. Hány év alatt éri el az 500 000,–Ft-os egyenleget? Az (1.75b) képlet alapján $500\,000 = 1000\left[12 + \frac{11\cdot 5{,}2}{200}\right]\cdot\frac{1{,}052^n - 1}{0{,}052}$, tehát $n = 22{,}42$ év.

1.3.3. Törlesztésszámítás

1.3.3.1. Törlesztés

Törlesztésen a hitel visszafizetését értjük. Ha nem írjuk elő másként, feltesszük a következőket:
1. Az S adósság megmaradó részéért az adóstól minden kamatperiódus végén $p\%$ kamatot követelnek.
2. Az adósság N kamatperiódusnyi futamidő alatt teljes egészében törlesztésre kerül.

Az adós kamatperiódusonkénti terhe tehát kamatokból és törlesztőrészletből tevődik össze. Ha a kamatperiódus 1 év, az adós adott évi pénzbeli ráfordítását *annuitás*nak nevezzük.

Adósságok törlesztésére különböző lehetőségek vannak. Pl. a visszafizetések történhetnek a tőkésítési időpontokban vagy azok között, a visszafizetett összegek lehetnek különbözők vagy az egész futamidő alatt állandóak.

1.3.3.2. Egyenlő törlesztőrészletek

A törlesztés évnél (kamatperiódusnál) rövidebb időközökben történik, de évközi tőkésítés és kamatos kamat a megállapodás szerint *nincs*. Legyen

- S az adósság, (kamatperiódusonként $p\%$ kamatot kell fizetni az egyes törlesztési időpontokban fennálló adósságok átlaga után),
- m a törlesztőrészletek száma kamatperiódusonként,

- N az évek (kamatperiódusok) száma az adósság végleges törlesztéséig.
- $T = \dfrac{S}{mN}$ a törlesztőrészlet (állandó),

Ezekkel a jelölésekkel az adósnak a törlesztőrészletek fizetésén kívül a következő kamatterhei vannak:

a) Z_n kamat az n-edik kamatperiódusra:

$$Z_n = \frac{pS}{100}\left[1 - \frac{1}{N}\left(n\,\frac{m+1}{2m}\right)\right], \quad (1.76a)$$

b) Z összesített kamat az S adósság mN részletben, N kamatperiódus és p% kamatláb mellett történő utólagos törlesztésénél:

$$Z = \sum_{n=1}^{N} Z_n = \frac{pS}{100}\left[\frac{N-1}{2} + \frac{m+1}{2m}\right]. \quad (1.76b)$$

■ Egy 60 000,– Ft-os adósság éves kamata 8%. Utólagos törlesztéssel 60 hónapon át mindig 1000,– Ft-ot törlesztünk. Mekkorák az egyes évek végén fellépő kamatok? Az egyes évekre eső kamatot az (1.76a) képletből számíthatjuk ki, ahol $S = 60\,000$, $p = 8$, $N = 5$ és $m = 12$. Ezek a mellékelt táblázatban vannak feltüntetve.

A teljes kamatot (1.76b) segítségével is kiszámíthattuk volna: $Z = \dfrac{8 \cdot 60\,000}{100}\left[\dfrac{5-1}{2} + \dfrac{13}{24}\right] = 12\,200$,– Ft.

1. év:	$Z_1 =$	4360,– Ft
2. év:	$Z_2 =$	3400,– Ft
3. év:	$Z_3 =$	2440,– Ft
4. év:	$Z_4 =$	1480,– Ft
5. év:	$Z_5 =$	520,– Ft
	$Z =$	12 200,– Ft

1.3.3.3. Egyenlő annuitások

Változatlanul maradó $T = \dfrac{S}{mN}$ törlesztőrészletek esetén a hozzájövő kamatok az idő múlásával csökkennek (lásd az előző példát). Ezzel szemben *annuitástörlesztés* esetén minden kamatfizetési határidőkor összesítve azonos A annuitást, vagyis azonos kamat + törlesztés összeget kell fizetni. Így az adós terhelése az egész törlesztési időszakban állandó.

Legyen

- S az adósság (kamatperiódusonként p% kamattal),
- A az annuitás egy kamatperiódusra (állandó),
- a a törlesztőrészlet, ha kamatperiódusonként m törlesztés történik (állandó),
- $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ a kamattényező.

Ezekkel a jelölésekkel az S_n adósságmaradvány n kamatperiódus után

$$S_n = Sq^n - a\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]\frac{q^n - 1}{q-1}. \quad (1.77)$$

Itt az Sq^n tag az S adósság értékét adja meg kamatos kamattal n kamatperiódus után (lásd (1.71)), a második tag (1.77)-ben pedig a perióduson belüli a törlesztőrészletek összesített értékét írja le azok kamatos kamatozása mellett (lásd az (1.75b) képletet az $E = a$ választással). Az annuitásra fennáll

$$A = a\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]. \quad (1.78)$$

Itt A az m-szeri a (kamatozó) részletfizetés összértéke. (1.78) alapján $A \geq ma$. Mivel feltevés szerint N kamatperiódus után a törlesztés véget ér, az (1.77) képletet $S_N = 0$ mellett alkalmazva és felhasználva (1.78)-at kapjuk:

$$A = Sq^N\frac{q-1}{q^N - 1} = S\frac{q-1}{1-q^{-N}}. \quad (1.79)$$

Pénzügyi matematikai feladatok megoldása céljából (1.79)-et megoldhatjuk az A, S, q, N mennyiségek bármelyikére, ha a többiek értéke ismert.

■ **A:** Egy 60 000,– Ft-os törlesztéses adósság évi kamata 8%, és 5 év alatt kell törleszteni. Mekkora az

éves A törlesztés és a havi a törlesztőrészlet? (1.79)-ből, ill. (1.78)-ból kapjuk: $A = 60\,000\,\dfrac{0{,}08}{1-\dfrac{1}{1{,}08^5}} =$

$15027{,}39$ Ft, $a = \dfrac{15027{,}39}{12+\dfrac{11\cdot 8}{200}} = 1207{,}99$ Ft.

■ **B:** Egy $S = 100\,000{,}-$ Ft nagyságú hitelt rendszeres törlesztéssel 7,5% évi kamat mellett $N = 8$ év alatt kell visszafizetni. Minden év végén még 5000,– Ft-ot kell pótlólag törleszteni. Mennyi a havi törlesztőrészlet? Az éves A törlesztés (1.79) szerint $A = 100\,000\dfrac{0{,}075}{1-\dfrac{1}{1{,}075^8}} = 17072{,}70$ Ft. Mivel A évi 12 darab a nagyságú törlesztőrészletből és egy évvégi pótlólagos 5000,– Ft-os befizetésből tevődik össze, (1.78) segítségével adódik: $A = a\left[12+\dfrac{11\cdot 7{,}5}{200}\right] + 5000 = 17072{,}70$. Tehát a havi teher $a = 972{,}62{,}-$ Ft.

1.3.4. Járadékszámítás

1.3.4.1. Járadék

*Járadék*nak nevezzük azokat a fizetéseket, amelyek szabályos időközökben esedékesek; ezek lehetnek azonos vagy eltérő nagyságúak, előzetesek vagy utólagosak. Két esetet különböztetünk meg:

a) Befizetések A járadékösszegeket folyószámlára fizetik be, és azok kamatosan kamatoznak. Az 1.3.2. pont kamatoskamat-számítási képletei alkalmazhatók.

b) Visszafizetések A járadékfizetés egy kamatosan kamatozó tőkéből történik. Az 1.3.3. pont törlesztésszámítási képletei alkalmazhatók, de törlesztés helyett járadékot értünk. Ha mindig legfeljebb a keletkező kamatot fizetik ki járadékként, *örökjáradék*ról beszélünk.

A járadékfizetés (be- vagy visszafizetés) történhet a kamatozási fordulónapokon, tehát kamatozási fordulónap = járadékfizetési fordulónap, vagy a kamatperióduson (éven) belül rövidebb időközökben.

1.3.4.2. Utólagos konstans járadék

Ebben az esetben a kamatszámítás és a járadékfizetés fordulónapja meg kell hogy egyezzen. Legyen a kamatozás p% kamatos kamatú és legyen a járadékösszeg mindig azonos R nagyságú. Ekkor az R_n *járadék-végösszeg* megadja, hogy n kamatperiódus alatt a rendszeres járadékkifizetések mekkora értékre növekedtek fel:

$$R_n = R\frac{q^n-1}{q-1}\,. \tag{1.80}$$

Az R_0 *járadék-indulóösszeg* az az érték, amelyet az első kamatperiódus kezdetekor (egyetlen alkalommal) be kell fizetni ahhoz, hogy n kamatperiódus után kamatos kamattal az R_n járadék-végösszeget kapjuk:

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}, \qquad \text{ahol} \quad q = 1+\frac{p}{100}\,. \tag{1.81}$$

■ Egy cégtől valakinek 10 éven át minden év végén 5000,– Ft-ot kell kapnia. Az első kifizetés előtt a társaság csődöt jelent. A csődgondnoknál követelésként csak az R_0 járadék-indulóösszeget lehet érvényesíteni. Évi 4% kamat esetén fennáll

$$R_0 = \frac{1}{q^n}R\frac{q^n-1}{q-1} = R\frac{1-q^{-n}}{q-1} = 5000\frac{1-1{,}04^{-10}}{0{,}04} = 40\,554{,}48 \text{ Ft}\,.$$

1.3.4.3. Számlaegyenleg n-szeri járadékfizetés után

Utólagos járadékfizetés céljából álljon rendelkezésünkre K összegű tőke, amely p%-kal kamatozik. Minden kamatozási fordulónapon r járadékösszeg kerüljön kifizetésre. A K_n számlaegyenleg n kamatperi-

ódus, vagyis n járadékkifizetés után

$$K_n = Kq^n - R_n = Kq^n - r\frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{ahol} \quad q = 1 + \frac{p}{100}\,. \tag{1.82a}$$

Következmények:

$r = K\dfrac{p}{100}$ (1.82b) Azt kapjuk, hogy $K_n = K$, vagyis a tőke nem változik. Ez az *örökjáradék* esete.

$r > K\dfrac{p}{100}$ (1.82c) A tőke teljes egészében felhasználásra kerül, mégpedig N számú járadékfizetés után. (1.82a)-ból a $K_N = 0$ helyettesítéssel

$$K = \frac{1}{q^N} r \frac{q^N - 1}{q - 1}\,. \tag{1.82d}$$

Ha évközi (kamatperióduson belüli) tőkésítés és járadékfizetés történik, akkor az (1.80)–(1.82a) képletekben n helyébe mn, $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ helyébe pedig $q = 1 + \dfrac{p}{100m}$ írandó, feltéve hogy az eredeti kamatperiódust m darab egyenlő hosszúságú új kamatperiódusra osztottuk.

■ Mekkora összeget kell 20 éven át havonként utólag befizetni, hogy az utána következő 20 évben havonként 2000,– Ft járadékot lehessen felvenni? Legyen a kamatozás havi 0,5%.
(1.82d)-ből $n = 20 \cdot 12 = 240$ esetén a közvetlenül csatlakozó járadékfizetési időszakhoz szükséges K összegre a következőt kapjuk: $K = \dfrac{2000}{1{,}005^{240}} \dfrac{1{,}005^{240} - 1}{0{,}005} = 279\ 161{,}54$ Ft. Az ehhez megkívánt havonkénti R befizetés (1.80) szerint az $R_{240} = 279\ 161{,}54 = R\dfrac{1{,}005^{240} - 1}{0{,}005}$ összefüggésből adódik, tehát $R = 604{,}19$ Ft.

1.3.5. Leírások

1. Leírásfajták

Azoknál a javaknál, amelyek értéke pl. kopás vagy avulás miatt csökken, évenkénti *leírás*t szokás alkalmazni. A leírás következtében a pénzügyi év folyamán az éveleji *indulóérték* az évvégi *maradványérték*re csökken. Jelölések:

- A a beszerzési érték,
- N a használat időtartama (években),
- R_n a maradványérték n év után ($n \le N$),
- $a_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N)$ az n-edik évben leírt összeg.

A leírásfajták elsősorban a *leírt összeg meghatározásá*ban térnek el egymástól:

- *Lineáris leírás*nál az évenként leírt összeg változatlan.
- *Degresszív leírás*nál az évenként leírt összeg csökkenő.

2. Lineáris leírás

Az évi leírás konstans, vagyis az a_n leírt összegre és az R_n maradványértékre n év után fennáll

$$a_n = \frac{A - R_N}{N} = a\,, \tag{1.83}$$

$$R_n = A - n\frac{A - R_N}{N} \quad (n = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{1.84}$$

Ha $R_N = 0$, az azt jelenti, hogy N év elteltével az eredeti értéket teljesen leírjuk.

■ Legyen egy gép beszerzési ára $A = 50\ 000$,– Ft. A gépet 5 év alatt az $R_5 = 10\ 000$,– Ft maradványértékre kell leírni.

Év	Indulóérték	Leírás	Maradványérték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	8000	42 000	16,0
2	42 000	8000	34 000	19,0
3	34 000	8000	26 000	23,5
4	26 000	8000	18 000	30,8
5	18 000	8000	10 000	44,4

Lineáris leírásnál (1.83) és (1.84) alapján a bal oldali *leírási terv* adódik.
Látható, hogy a mindenkori indulóértékre vonatkoztatott százalékos leírás erősen emelkedik.

3. Számtani sorozat szerint csökkenő leírás

A leírás ebben az esetben nem konstans, hanem évenként azonos d összeggel, a *leírási meredekséggel* csökken. Az n-edik évben leírt összeg

$$a_n = a_1 - (n-1)d \quad (n = 2, 3, \ldots, N;\ a_1 \text{ és } d \text{ adott})\,. \tag{1.85}$$

Ebből az egyenletből az $A - R_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ összefüggés felhasználásával

$$d = \frac{2[Na_1 - (A - R_N)]}{N(N-1)}\,. \tag{1.86}$$

A $d = 0$ speciális esetben a lineáris leírást kapjuk. A $d > 0$ esetben (1.86) miatt

$$a_1 > \frac{A - R_N}{N} = a\,, \tag{1.87}$$

ahol a a lineáris leírás leírt összege. Végeredményben $a_N > 0$ miatt a számtani sorozat szerint csökkenő leírás a_1 első leírt összegének ki kell elégítenie a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{A - R_N}{N} < a_1 < 2\frac{A - R_N}{N}\,. \tag{1.88}$$

■ Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet 5 év alatt számtani sorozat szerint csökkenő módon 10 000,– Ft-ra kell leírni. Ennek során az első évben 15 000,– Ft-ot kell leírni.

Év	Indulóérték	Leírás	Maradványérték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	15 000	35 000	30,0
2	35 000	11 500	23 500	32,9
3	23 500	8 000	15 500	34,0
4	15 500	4 500	11 000	29,0
5	11 000	1 000	10 000	9,1

A bal oldali leírási terv, amelynek az adatait a megadott képletekkel számítottuk ki, azt mutatja, hogy a százalékos leírás az utolsó tétel kivételével kiegyenlítettnek tekinthető.

4. Digitális leírás

A *digitális* leírás a számtani sorozat szerint csökkenő leírásnak az a speciális esete, amelynél megköveteljük, hogy az a_N utolsó leírt összeg megegyezzen a d leírási meredekséggel. Az $a_N = d$ összefüggésből

$$d = \frac{2(A - R_N)}{N(N+1)}\,, \tag{1.89a}$$

$$a_1 = Nd\,,\ a_2 = (N-1)d\,,\ \ldots\,,\ a_N = d\,. \tag{1.89b}$$

■ Legyen egy gép beszerzési ára $A = 50\,000$,– Ft. Ezt a gépet 5 év alatt digitálisan az $R_5 = 10\,000$,– Ft maradványértékre kell leírni.

Év	Induló-érték	Leírás	Maradvány-érték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	$a_1 = 5d = 13\,335$	36 665	26,7
2	36 665	$a_2 = 4d = 10\,668$	25 997	29,1
3	25 997	$a_3 = 3d = 8\,001$	17 996	30,8
4	17 996	$a_4 = 2d = 5\,334$	12 662	29,6
5	12 662	$a_5 = d = 2\,667$	9 995	21,1

A bal oldali leírási terv, amelynek az adatait a megadott képletekkel számítottuk ki, azt mutatja, hogy a százalékos leírás lefutása kiegyenlített. (Az elméleti d értékhez legközelebbi egészre kerekített d-t tüntettük fel.)

5. Mértani sorozat szerint csökkenő leírás

A mértani sorozat szerint csökkenő leírásnál minden évben az előző évi maradványérték p%-át írják le. Az n év utáni R_n maradványértékre fennáll

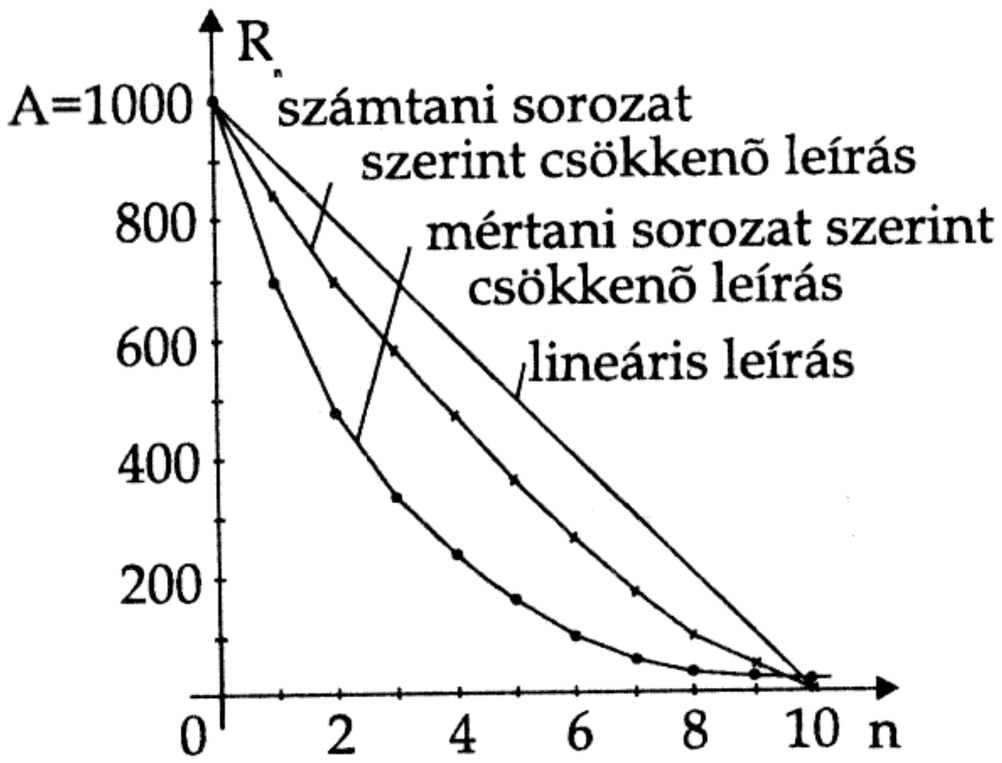
$$R_n = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{1.90}$$

Általában A adva van. Ha a futamidő N év, akkor (1.90) értelmében az R_N, p, N mennyiségek közül bármely kettő előírható, a harmadik pedig kiszámítható.

■ **A:** Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet évenként 10%-kal kell mértani sorozat szerint csökkenő módon leírni. Hány év után kerül a maradványérték 10 000,– Ft alá? (1.90) alapján

$$N = \frac{\ln(10000/50000)}{\ln(1 - 0{,}1)} = 15{,}27 \text{ év.}$$

■ **B:** Ábrázoljuk az R_n maradványértéket $A = 1000$,– Ft beszerzési érték esetén az $n = 1, 2, \ldots, 10$ évre a) lineáris, b) számtani sorozat szerint csökkenő, c) mértani sorozat szerint csökkenő leírás mellett. Az eredmény az **1.4. ábrán** látható.



1.4. ábra.

6. Leírás különböző leírásfajtákkal

Mivel a mértani sorozat szerint csökkenő leírásnál nulla maradványértéket véges n-re nem lehet elérni, egy meghatározott időponttól kezdve, például m év után, célszerű áttérni a mértani sorozat szerint csökkenő leírásról a lineáris leírásra. Az m értéket úgy választjuk meg, hogy ettől az időponttól kezdve a mértani sorozat szerint csökkenő leírás leírt összegei kisebbek legyenek, mint a lineáris leíráséi. Ezen követelmény értelmében

$$m > N - \frac{100}{p}\,. \tag{1.91}$$

Itt m a mértani sorozat szerint csökkenő leírás, N pedig a teljes leírás éveinek számát adja meg.

■ Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet 15 év alatt nullára kell leírni, mégpedig m éven át mértani sorozat szerint csökkenő leírással mindig a maradványérték 14%-ával, azután lineárisan. (1.91) értelmében $m > 15 - \dfrac{100}{14} = 7{,}76$, vagyis $m = 8$ év után célszerű a mértani sorozat szerint csökkenő leírásról a lineárisra áttérni.

1.4. Egyenlőtlenségek

1.4.1. Tiszta egyenlőtlenségek

1.4.1.1. Definíciók

1. Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenség jön létre, ha két algebrai kifejezést a következő jelek egyikével kapcsolunk egymáshoz:

I. típus	$>$	(„nagyobb")	II. típus	$<$	(„kisebb")
III. típus	$\neq$	(„különböző, nem egyenlő")	IIIa. típus	$<>$	(„nagyobb vagy kisebb")
IV. típus	$\geq$	(„nagyobb vagy egyenlő")	IVa. típus	$\not<$	(„nem kisebb")
V. típus	$\leq$	(„kisebb vagy egyenlő")	Va. típus	$\not>$	(„nem nagyobb").

A III. és IIIa., IV. és IVa., valamint V. és Va. jelpárok két tagja azonos jelentésű, tehát egymást kölcsönösen helyettesíthetik. A IIIa. jelet, ha olyan mennyiségekre vonatkozik, amelyekre a „nagyobb" és „kisebb" fogalma nincs értelmezve, pl. komplex számokra vagy vektorokra, a III. jellel helyettesíthetjük. Ha nem állítjuk kifejezetten az ellenkezőjét, a szereplő számok valósak.

2. Azonos, egyező irányú, ellentétes irányú és ekvivalens egyenlőtlenségek

1. Azonos egyenlőtlenségek azok, amelyek a bennük szereplő betűszimbólumok minden értékére teljesülnek.

2. Egyező irányú egyenlőtlenségekről beszélünk, ha két egyenlőtlenség mindegyike az I. típusba, vagy mindkettő a II. típusba tartozik.

3. Ellentétes irányú egyenlőtlenségekről beszélünk, ha az egyik egyenlőtlenség az I. típusba, a másik a II. típusba tartozik.

4. Ekvivalens egyenlőtlenségekkel van dolgunk, ha két, ugyanazon ismeretlenekre vonatkozó egyenlőtlenség az ismeretleneknek ugyanazokra az értékeire teljesül.

3. Egyenlőtlenségek megoldása

Az egyenlőtlenségekben, ugyanúgy mint az egyenletekben, ismeretlen mennyiségek is szerepelhetnek; ezeket rendszerint az ábécé utolsó betűivel jelöljük. Egy *egyenlőtlenség* vagy *egyenlőtlenségrendszer megoldása* azt jelenti, hogy meghatározzuk: milyen határok között mozoghatnak az ismeretlen mennyiségek ahhoz, hogy az egyenlőtlenség vagy a rendszer minden egyenlőtlensége érvényes maradjon. Mind az öt egyenlőtlenségtípus megoldására vannak heurisztikus módszerek; leggyakoribbak az I. és II. típusú, úgynevezett *tiszta egyenlőtlenségek.*

1.4.1.2. Az I. és II. típusú egyenlőtlenségek tulajdonságai

1. Az egyenlőtlenségjel irányának megváltozása

Ha $a > b$, akkor $b < a$, (1.92a)

ha $a < b$, akkor $b > a$. (1.92b)

2. Tranzitivitás

Ha $a > b$ és $b > c$, akkor $a > c$; (1.93a)

ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$. (1.93b)

3. Az egyenlőtlenség mindkét oldalának növelése/csökkentése ugyanazon értékkel

Ha $a > b$, akkor $a \pm c > b \pm c$; (1.94a)

ha $a < b$, akkor $a \pm c < b \pm c$. (1.94b)

Tehát mindkét oldalon ugyanazt a mennyiséget hozzáadva vagy kivonva az egyenlőtlenség továbbra is fennáll és iránya nem változik.

4. Egyenlőtlenségek összeadása

Ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a + c > b + d$; (1.95a)

ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$. (1.95b)

Két azonos irányú egyenlőtlenség megfelelő oldalait össze lehet adni.

5. Egyenlőtlenségek kivonása

Ha $a > b$ és $c < d$, akkor $a - c > b - d$; (1.96a)

ha $a < b$ és $c > d$, akkor $a - c < b - d$. (1.96b)

Egy egyenlőtlenségből egy vele ellentétes irányú egyenlőtlenséget tagonként másszóval oldalanként ki lehet vonni, minek során az első egyenlőtlenség egyenlőtlenségjele marad érvényben. Azonos irányú egyenlőtlenségek viszont nem vonhatók ki egymásból tagonként.

6. Egyenlőtlenségnek számmal való szorzása és osztása

Ha $a > b$ és $c > 0$, akkor $ac > bc$ és $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, (1.97a)

ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $ac < bc$ és $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, (1.97b)

ha $a > b$ és $c < 0$, akkor $ac < bc$ és $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, (1.97c)

ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$ és $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. (1.97d)

Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát egy pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, akkor az egyenlőtlenség iránya megmarad; ha viszont a szám negatív, akkor az egyenlőtlenségjel irányát meg kell fordítani.

7. Reciprok értékekre vonatkozó egyenlőtlenség

Ha $0 < a < b$ vagy $a < b < 0$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. (1.98)

Ha két szám a 0-tól ugyanabba az irányba esik, akkor reciprokaikra a köztük fennálló egyenlőtlenséggel ellentétes irányú egyenlőtlenség áll fenn.

1.4.2. Speciális egyenlőtlenségek

1.4.2.1. Háromszög-egyenlőtlenség

Bármely $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számokra fennáll

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \qquad |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \tag{1.99a}$$

Két vagy több valós szám összegének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint az egyes összeadandók abszolút értékének összege. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha minden összeadandó azonos előjelű; itt a 0-t tekinthetjük negatív vagy pozitív előjelűnek is.

Hasonlóan, bármely $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ komplex számokra

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|, \tag{1.99b}$$

ami $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ miatt magában foglalja az előző egyenlőtlenséget is. Itt az egyenlőség csak akkor érvényes, ha közülük bármely kettőre teljesül, hogy egyik a másiknak nemnegatív valós számszorosa; ez pedig megában foglalja a valósz számokra vonatkozó hasonló feltételt. A korábban (1.1.3.1. alpont) bevezetett $\sum$ jellel $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

1.4.2.2. Egyenlőtlenségek két szám különbségének abszolút értékére

Két $a, b \in \mathbb{R}$ valós számra fennáll

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|, \quad \text{sőt} \quad ||a| + |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|. \tag{1.100a}$$

Két valós szám különbségének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint e számok abszolút értékének összege, illetve nagyobb vagy egyenlő mint e számok abszolút értékének különbsége, sőt ennek abszolút

értéke.

Hasonlóan és megint kiterjesztve két $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra fennáll

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{1.100b}$$

1.4.2.3. A számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \text{ha} \quad a_i \geq 0 \,. \tag{1.101}$$

n számú nemnegatív szám számtani közepe nagyobb vagy egyenlő mint e számok mértani közepe. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha mind az n darab szám egyenlő.

1.4.2.4. A számtani és a négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenség

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{n}} \,. \tag{1.102}$$

Több szám számtani közepének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint a négyzetes közép.

1.4.2.5. Valós számok különféle középértékeire vonatkozó egyenlőtlenségek

Két a és b pozitív valós szám, $a < b$, számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepét az alábbi egyenlőtlenségek kötik össze (lásd még 20. old.):

$$a < x_H(a,b) < x_G(a,b) < x_A(a,b) < x_Q(a,b) < b \,. \tag{1.103a}$$

Itt a következő jelöléseket használtuk:

$$x_A = \frac{a+b}{2} \,,\; x_G = \sqrt{ab} \,,\; x_H = \frac{2ab}{a+b} \,,\; x_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \,. \tag{1.103b}$$

1.4.2.6. Bernoulli-egyenlőtlenség

Bármely $a \geq -1$ valós számra és $n \geq 1$ egész számra

$$(1+a)^n \geq 1 + n\,a \,. \tag{1.104}$$

Az egyenlőségjel $n = 1$ vagy $a = 0$ esetén érvényes.

1.4.2.7. Binomiális egyenlőtlenség

Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ valós számra

$$|a\,b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \,. \tag{1.105}$$

1.4.2.8. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

1. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség valós számokra Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ valós számokra fennáll a CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}\,\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2} \tag{1.106a}$$

vagyis

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \,. \tag{1.106b}$$

Két véges számsorozatra, amelyeknek mindegyike n számból áll, a páronkénti szorzatok összegének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint e számok négyzetösszegeiből vont két négyzetgyök szorzata. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$. (Ha valamely i-re a_i (vagy b_i) $= 0$, akkor b_i (a_i) is 0.)

Ha $n = 3$, és az $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ számhármasokat vektorok Descartes-féle derékszögű koordinátáinak fogjuk fel, akkor a CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség azt mondja, hogy két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint a vektorok abszolút értékének szorzata. Az $n > 3$ esetben ezt az állítást ki lehet terjeszteni az n-dimenziós euklideszi tér vektoraira; ez éppen (1.106a).

2. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség komplex számokra Tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ komplex számokra fennáll

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \overline{z_2} z_2 + \cdots + \overline{z_n} z_n}\, \sqrt{\overline{w_1} w_1 + \overline{w_2} w_2 + \cdots + \overline{w_n} w_n} =$$
$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \cdots + |w_n|^2}\,, \quad (1.107)$$

amiből látszik, hogy ez is kiterjesztése a valós egyenlőtlenségnek. Itt $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \ldots, \overline{w_n}$ a $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ számok komplex konjugáltjait jelölik (lásd 36. old.). Az egyenlőség feltétele: $z_1 : \overline{w_1} = z_2 : \overline{w_2} = \cdots = z_n : \overline{w_n}$. (Ha valamely i-re $z_i(w_i) = 0$, akkor $w_i(z_i)$ is 0.)

3. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség konvergens végtelen sorokra és integrálokra Az alábbi, konvergens végtelen sorokra, ill. határozott integrálokra vonatkozó CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség az (1.106b) képlet analogonja:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2\right), \quad (1.108)$$

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx\right). \quad (1.109)$$

1.4.2.9. Csebisev-egyenlőtlenség

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok, akkor

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \quad (1.110a)$$

ahol $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$
vagy $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$

továbbá

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \quad (1.110b)$$

ahol $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ vagy fordítva.

Két véges számsorozatra, amelyek n darab pozitív számból állnak, e sorozatok számtani közepeinek szorzata kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő, mint a páronkénti szorzatok számtani közepe, feltéve hogy egyszerre mindkét számsorozat csökkenő vagy növekedő, ill. az egyik sorozat növekedő és a másik csökkenő.

1.4.2.10. Általánosított Csebisev-egyenlőtlenség

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok, akkor

$$\sqrt[k]{\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_n}^k}{n}}\ \sqrt[k]{\frac{{b_1}^k + {b_2}^k + \cdots + {b_n}^k}{n}} \leq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \cdots + (a_n b_n)^k}{n}} \quad (1.111a)$$

ahol $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$
vagy $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$

továbbá

$$\sqrt[k]{\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_n}^k}{n}}\ \sqrt[k]{\frac{{b_1}^k + {b_2}^k + \cdots + {b_n}^k}{n}} \geq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \cdots + (a_n b_n)^k}{n}} \quad (1.111b)$$

ahol $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ vagy fordítva.

1.4.2.11. Hölder-egyenlőtlenség

1. Hölder-egyenlőtlenség sorokra Ha $p \geq 1$ és $q \geq 1$ két valós szám, amelyekre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ és ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tetszőleges $2n$ komplex szám, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right]^{\frac{1}{q}} . \tag{1.112a}$$

Ez az egyenlőtlenség megszámlálhatóan végtelen sok számpárra is érvényes:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right]^{\frac{1}{q}} , \tag{1.112b}$$

ahol a jobb oldal értéke vagy végtelen (és akkor az állítás triviális), vagy ha véges, akkor a jobb oldalon álló két sor konvergenciájából következik a bal oldalon álló sor konvergenciája.

2. Hölder-egyenlőtlenség integrálokra Ha $f(x)$ és $g(x)$ két mérhető függvény az $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren (lásd 658. old.), akkor

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \left[\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_X |g(x)|^q \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}} . \tag{1.112c}$$

1.4.2.12. Minkowski-egyenlőtlenség

1. Minkowski-egyenlőtlenség sorokra Ha $p \geq 1$, továbbá $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ két számsorozat, akkor

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} , \tag{1.113a}$$

ahol az előző alpont első állításához hasonlóan ha a jobb oldali két összeadandó legalább egyike végtelen, akkor az állítás triviális vagy mindkettő véges és ebből következik a bal oldal végessége.

2. Minkowski-egyenlőtlenség integrálokra Ha $f(x)$ és $g(x)$ két mérhető függvény az $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren (lásd 658. old.), akkor

$$\left[\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_X |f(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |g(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} . \tag{1.113b}$$

1.4.3. Első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

1.4.3.1. Általános rész

Egyenlőtlenséget úgy oldunk meg, hogy lépésről lépésre átalakítjuk ekvivalens egyenlőtlenségekké. Az egyenletek megoldásához hasonlóan összeadandókat vihetünk át egyik oldalról a másikra előjelük egyidejű megváltoztatásával. Továbbá az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy oszthatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal, miáltal az egyenlőtlenségjel iránya megmarad ha ez a szám pozitív, viszont megváltozik ha a szám negatív. Az elsőfokú egyenlőtlenségek ilyen módon mindig az

$$ax > b \tag{1.114}$$

alakra, a másodfokúak a legegyszerűbb esetben az

$$x^2 > m \tag{1.115a}$$

vagy

$$x^2 < m \tag{1.115b}$$

alakra, az általános esetben pedig az

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1.116a) \qquad \text{vagy} \qquad ax^2 + bx + c < 0 \qquad (1.116b)$$

alakra hozhatók.

1.4.3.2. Elsőfokú egyenlőtlenségek

Az elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása

$$x > \frac{b}{a} \text{ ha } a > 0 \qquad (1.117a) \qquad \text{és} \qquad x < \frac{b}{a} \text{ ha } a < 0. \qquad (1.117b)$$

■ $5x + 3 < 8x + 1\,, \quad 5x - 8x < 1 - 3\,, \quad -3x < -2\,, \quad x > \frac{2}{3}$. (Lásd még a 18. fejezetet.)

1.4.3.3. Másodfokú egyenlőtlenségek

Az $x^2 > m$ (1.118a) és $x^2 < m$ (1.118b)

másodfokú egyenlőtlenségek megoldásai az alábbiak.

a) $x^2 > m$: Ha $m \geq 0$ a megoldás $x > \sqrt{m}$ és $x < -\sqrt{m} \quad (|x| > \sqrt{m})\,,$ (1.119a)

ha $m < 0$ akkor az egyenlőtlenség azonosan teljesül. (1.119b)

b) $x^2 < m$: Ha $m > 0$ a megoldás $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m} \quad (|x| < \sqrt{m})\,,$ (1.120a)

ha $m \leq 0$, akkor nincs megoldás. (1.120b)

1.4.3.4. A másodfokú egyenlőtlenség általános esete

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1.121a) \qquad \text{vagy} \qquad ax^2 + bx + c < 0\,. \qquad (1.121b)$$

Az egyenlőtlenséget elosztjuk a-val, miáltal az $a < 0$ esetben az előjel megváltozik, úgyhogy az

$$x^2 + px + q < 0 \qquad (1.121c) \qquad \text{vagy} \qquad x^2 + px + q > 0 \qquad (1.121d)$$

alakot kapjuk. Teljes négyzetté való kiegészítéssel adódik

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad (1.121e) \qquad \text{vagy} \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\,. \qquad (1.121f)$$

$x + \frac{p}{2}$ helyett a z, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ helyett az m jelölést bevezetve kapjuk a

$$z^2 < m \qquad (1.122a) \qquad \text{vagy} \qquad z^2 > m\,. \qquad (1.122b)$$

egyenlőtlenséget. Ha ezt megoldjuk, x meghatározható,

■ **A:** $-2x^2 + 14x - 20 > 0\,,\ x^2 - 7x + 10 < 0\,,\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}\,,\ -\frac{3}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$.

A megoldás $2 < x < 5$.

■ **B:** $x^2 + 6x + 15 > 0\,,\ (x + 3)^2 > -6$. Az egyenlőtlenség azonosan teljesül.

■ **C:** $-2x^2 + 14x - 20 < 0\,,\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}\,,\ x - \frac{7}{2} > \frac{3}{2}$ és $x - \frac{7}{2} < -\frac{3}{2}$.

A megoldási tartományok $x > 5$ és $x < 2$.

Összefoglalva, a megfelelő másodfokú egyenlőség gyökei által méghatározott véges, nyílt intervallum vagy a két végtelen nyílt intervallum uniója a megoldás.

1.5. Komplex számok

1.5.1. Képzetes és komplex számok

1.5.1.1. Képzetes egység

Képzetes egységként bevezetésre kerül egy i szám, amelynek a négyzete „-1". Az elektrotechnikában i helyett legtöbbször a j betűt használják, hogy ne lehessen az i áramerősséggel összetéveszteni. A *képzetes egység* bevezetése a *számfogalom általánosítására* vezet, a *komplex számok*ra, amelyek az algebrában és az analízisben nagy szerepet játszanak, és a geometriában meg a fizikában számos konkrét interpretációt, ill. új leírási lehetőséget eredményeztek.

1.5.1.2. Komplex számok

A *komplex számok algebrai alakja* a következő:

$$z = a + \mathrm{i}\, b\,. \tag{1.123a}$$

Ha a és b minden lehetséges valós értéken végigfut, akkor előáll minden lehetséges z komplex szám. Az a számot z *valós részének*, a b számot z *képzetes részének* nevezzük:

$$a = \mathrm{Re}(z)\,, \quad b = \mathrm{Im}(z)\,. \tag{1.123b}$$

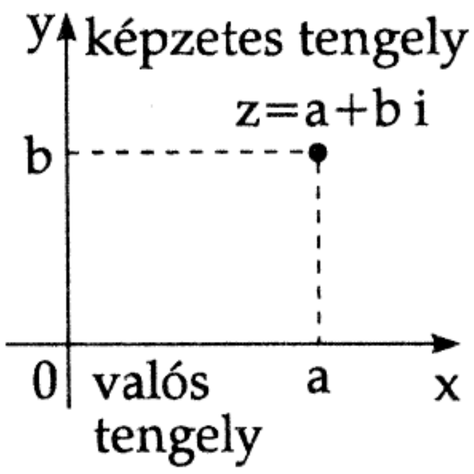
Ha $b = 0$, akkor $z = a$, úgyhogy a valós számok a komplex számok speciális esetei. Ha $a = 0$, akkor $z = \mathrm{i}\, b$ „tiszta képzetes szám".
A komplex számokból épül fel a komplex számok halmaza, amelyet $\mathbb{C}$-vel jelölünk.

Megjegyzés: A $z = x + \mathrm{i}\, y$ komplex változó $w = f(z)$ függvényeit a komplex függvénytan (lásd a 694. és a rákövetkező oldalakat) tárgyalja.

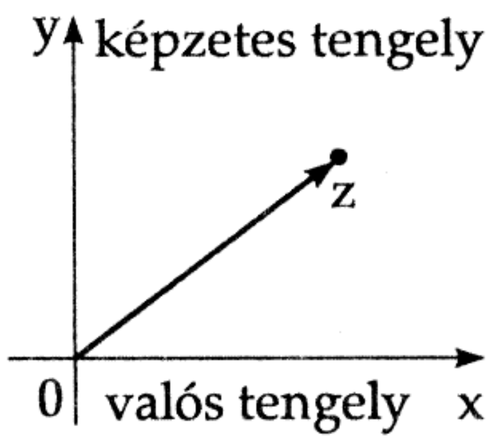
1.5.2. Geometriai szemléltetés

1.5.2.1. Előállítás vektoralakban

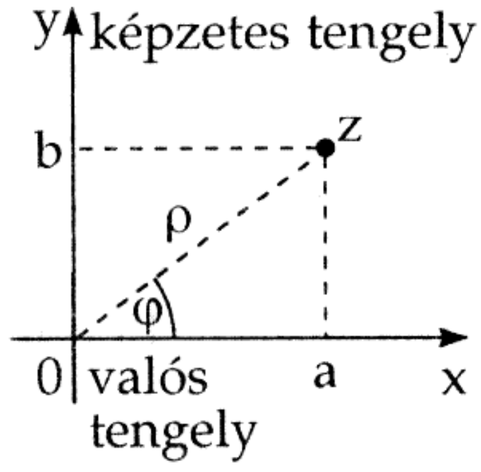
A valós számok számegyenesen való ábrázolásával analóg módon a komplex számokat egy sík, az úgynevezett GAUSS-*féle számsík* pontjaiként lehet ábrázolni. Ekkor a $z = a + \mathrm{i}\, b$ szám az a abszcisszájú és b ordinátájú pont **(1.5. ábra)**. A valós számok az abszcisszatengelyen helyezkednek el, amelyet valós tengelynek is hívnak, a képzetes számok pedig az ordinátatengelyen, más szóval a képzetes tengelyen. Az így megadott síkban minden pontot egyértelműen meghatároz egy *helyvektor* (lásd 181. old.), úgyhogy minden komplex számnak megfelel egy meghatározott vektor, amely ebben a síkban fekszik és a koordinátarendszer kezdőpontjából az illető pontba mutat **(1.6. ábra)**. A komplex számokat tehát pontokkal is, vektorokkal is ábrázolni lehet.



1.5. ábra.



1.6. ábra.



1.7. ábra.

1.5.2.2. Komplex számok egyenlősége

Definíció szerint két komplex szám egyenlő, ha *valós részeik* is, *képzetes részeik* is egyenlők. Geometriailag nézve két komplex szám akkor egyenlő, ha az őket ábrázoló vektorok egyenlők. Ellenkező esetben a komplex számok különbözők. A „nagyobb" és „kisebb" fogalma komplex számokra nem értelmezhető.

1.5.2.3. Komplex számok trigonometrikus alakja

A komplex számok

$$z = a + \mathrm{i}\, b \tag{1.124a}$$

előállítását algebrai alaknak nevezzük. Ha Descartes-koordináták helyett polárkoordinátákat használunk **(1.7. ábra)**, kapjuk a *komplex számok trigonometrikus alak*ban való előállítását:

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\,. \tag{1.124b}$$

A

$$|z| = \rho \quad (0 \le \rho < \infty) \tag{1.124c}$$

számot a z komplex szám *abszolút érték*ének vagy *modulus*ának, az

$$\arg z = \varphi + 2k\pi \quad (-\pi < \varphi \le +\pi\,;\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.124d}$$

számok bármelyikét pedig z *argumentum*ának nevezzük. A φ szöget a z *komplex szám argumentuma főértéké*nek hívjuk (1.124b).

Egy pont ρ, φ és a, b értékei között ugyanaz a kapcsolat, mint e pont Descartes-féle és polárkoordinátái között (lásd 191. old.):

$$a = \rho\cos\varphi\,, \tag{1.125a}$$

$$b = \rho\sin\varphi\,, \tag{1.125b}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \tag{1.125c}$$

ill.

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{\rho} & \text{ha } b \ge 0,\ \rho > 0\,, \\ -\arccos\dfrac{a}{\rho} & \text{ha } b < 0,\ \rho > 0\,, \\ \text{határozatlan} & \text{ha } \rho = 0 \end{cases} \tag{1.125d}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{ha } a > 0\,, \\ +\dfrac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0\,,\ b > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0\,,\ b < 0\,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0\,,\ b \ge 0\,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi & \text{ha } a < 0\,,\ b < 0\,. \end{cases} \tag{1.125e}$$

A $z = 0$ komplex szám abszolút értéke nulla, $\arg 0$ határozatlan.

1.5.2.4. Komplex szám exponenciális alakja

*Komplex szám exponenciális alakjá*nak nevezzük a

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.126a}$$

előállítást, ahol ρ az abszolút érték és φ az argumentum. Fennáll az EULER-*féle összefüggés*:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi\,. \tag{1.126b}$$

■ Egy komplex szám előállítása háromféle alakban:

a) $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ (algebrai alak), **b)** $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ (trigonometrikus alak),

c) $z = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ (exponenciális alak), a főértékre szorítkozva.

Ha nem szorítkozunk a főértékre, a következő előállításokat kapjuk:

d) $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\exp\left[\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.5.2.5. Konjugált komplex számok

A z és a $\overline{z}$ komplex számot *konjugált komplex szám*oknak nevezzük, ha valós részük egyenlő, képzetes részük viszont ellentétes előjelű:

$$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)\,, \quad \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)\,. \tag{1.127a}$$

Geometriailag kifejezve: a *konjugált komplex szám*oknak megfelelő pontok a valós tengelyre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Konjugált komplex számok abszolút értékei egyenlők, argumentumaik pedig csak előjelben különböznek:

$$z = a + \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi) = \rho e^{\mathrm{i}\,\varphi}\,, \tag{1.127b}$$

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin(-\varphi)) = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi) = \rho e^{-\mathrm{i}\,\varphi}\,. \tag{1.127c}$$

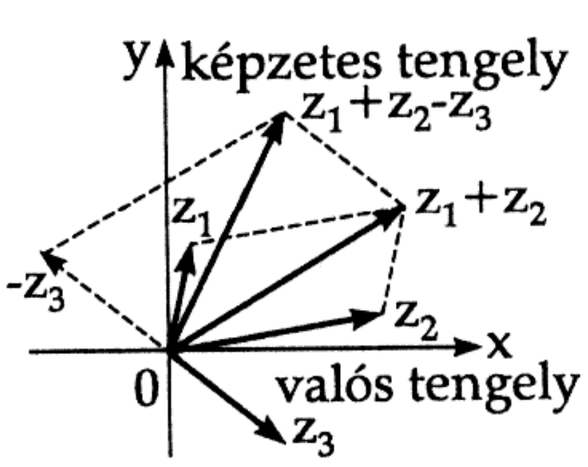
1.5.3. Számolás komplex számokkal

1.5.3.1. Összeadás és kivonás

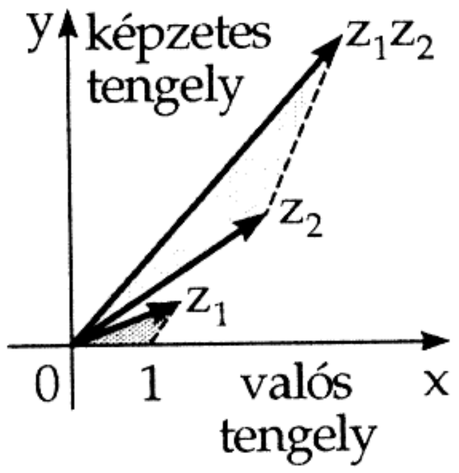
Két vagy több komplex szám összeadását és kivonását algebrai írásmódban a

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 + \cdots &= (a_1 + \mathrm{i}\,b_1) + (a_2 + \mathrm{i}\,b_2) - (a_3 + \mathrm{i}\,b_3) + \cdots \\ &= (a_1 + a_2 - a_3 + \cdots) + \mathrm{i}\,(b_1 + b_2 - b_3 + \cdots) \end{aligned} \tag{1.128}$$

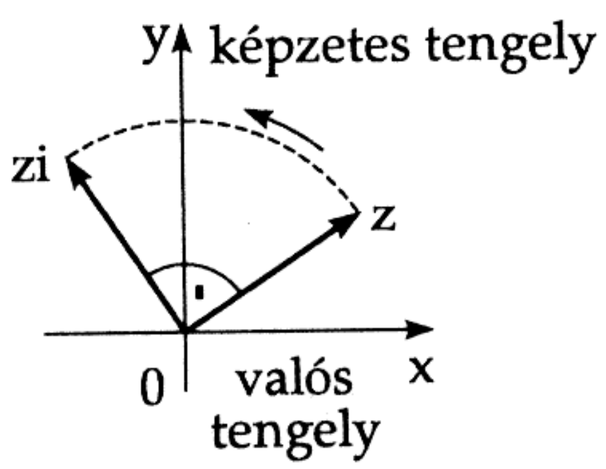
képlet értelmezi. A geometriai interpretációban az összeg-, ill. különbségképzéshez a szóbanforgó komplex számok vektorait kell összeadni, ill. kivonni **(1.8. ábra)**. Ennek során a vektorszámítás szokásos szabályai érvényesek (lásd 180. old.).



1.8. ábra.



1.9. ábra.



1.10. ábra.

1.5.3.2. Szorzás

Két komplex szám, z_1 és z_2 szorzását algebrai írásmódban a

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\,b_1)(a_2 + \mathrm{i}\,b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,. \tag{1.129a}$$

képlet értelmezi. A trigonometrikus írásmódban fennáll

$$z_1 z_2 = [\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{1.129b}$$

vagyis a szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékeinek szorzatával, a szorzat argumentuma pedig a tényezők argumentumainak összegével egyenlő.
Exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}\,. \tag{1.129c}$$

A geometriai interpretációban a z_1 és z_2 szorzatát ábrázoló vektort úgy kapjuk meg, hogy z_1 vektorát az óramutató járásával ellentétesen a z_2 argumentumának megfelelő szöggel elforgatjuk, és a kapott vektort a $|z_2|$ számmal való szorzás révén megnyújtjuk. A $z_1 z_2$ szorzatot hasonló háromszög szerkesztésével is megkaphatjuk **(1.9. ábra)**. Itt figyelembe kell venni, hogy a z komplex szám i-vel való szorzása vektorának $\pi/2$ szöggel való elforgatását jelenti, miközben az abszolút érték változatlan marad **(1.10. ábra)**.

1.5.3.3. Osztás

Két komplex szám osztását a szorzás fordított műveleteként definiáljuk. Algebrai írásmódban a törtnek a nevező konjugáltjával való bővítése után a következőt kapjuk ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \mathrm{i}\, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}\,. \tag{1.130a}$$

A trigonometrikus írásmód szerint

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\,, \tag{1.130b}$$

vagyis a hányados abszolút értéke az osztó és az osztandó abszolút értékeinek a hányadosával, a hányados argumentuma pedig a két argumentum különbségével egyenlő.
Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}\,. \tag{1.130c}$$

A geometriai szemléltetésben a z_1/z_2 hányadost ábrázoló vektort úgy kapjuk, hogy a z_1 számnak megfelelő vektort az óramutató járásával megegyezően $\arg z_2$ szöggel elforgatjuk, majd a $|z_2|$ értékkel való osztás útján zsugorítjuk.

Megjegyzés: A nullával való osztás nem $\mathbb{C}$-ben sem lehetséges.

1.5.3.4. A négy alapműveletre vonatkozó általános szabályok

Formális szempontból a $z = a + \mathrm{i}\, b$ komplex számokkal ugyanúgy lehet számolni, mint a közönséges kéttagú kifejezésekkel, csak azt kell figyelembe venni, hogy $\mathrm{i}^2 = -1$. Komplex számnak komplex számmal való osztásánál először ki kell küszöbölni a nevező képzetes részét úgy, hogy a számlálót és a nevezőt megszorozzuk a nevező komplex konjugáltjával. Ez lehetséges, mert az

$$(a + \mathrm{i}\, b)(a - \mathrm{i}\, b) = a^2 + b^2 \tag{1.131}$$

szám valós.

■ $\dfrac{(3 - 4\mathrm{i})(-1 + 5\mathrm{i})^2}{1 + 3\mathrm{i}} + \dfrac{10 + 7\mathrm{i}}{5\mathrm{i}} = \dfrac{(3 - 4\mathrm{i})(1 - 10\mathrm{i} - 25)}{1 + 3\mathrm{i}} + \dfrac{(10 + 7\mathrm{i})\mathrm{i}}{5\mathrm{i}\,\mathrm{i}} = \dfrac{-2(3 - 4\mathrm{i})(12 + 5\mathrm{i})}{1 + 3\mathrm{i}} + \dfrac{7 - 10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{-2(56 - 33\mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})}{(1 + 3\mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})} + \dfrac{7 - 10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{-2(-43 - 201\mathrm{i})}{10} + \dfrac{7 - 10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5}(50 + 191\mathrm{i}) = 10 + 38{,}2\mathrm{i}\,.$

1.5.3.5. Komplex szám hatványozása

Komplex szám n-edik hatványra emelése a MOIVRE-*képlet* segítségével történik:

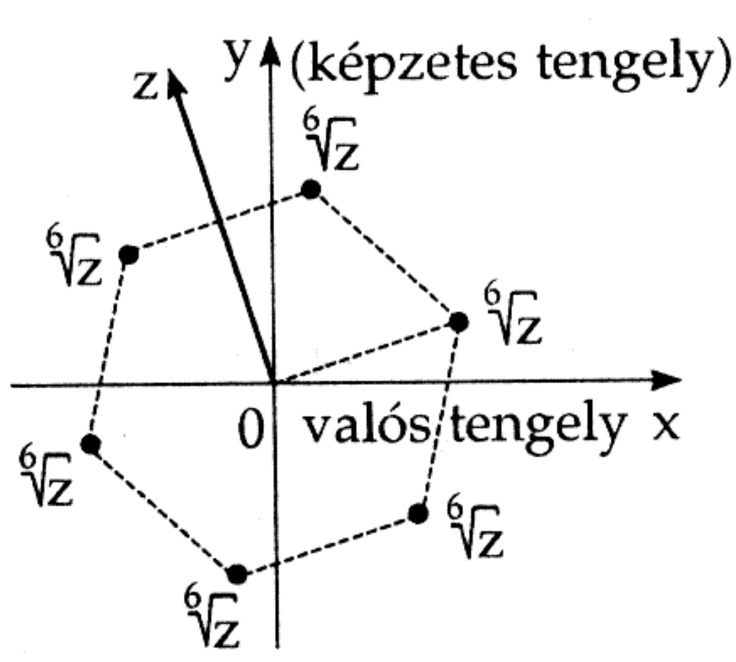
$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\,\sin n\varphi)\,, \tag{1.132a}$$

vagyis az abszolút értéket n-edik hatványra emeljük, az argumentumot pedig n-nel szorozzuk. Vegyük figyelembe, hogy

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{i}^4 = +1 \tag{1.132b}$$

és általában

$$\mathrm{i}^{4n+k} = \mathrm{i}^k\,. \tag{1.132c}$$



1.11. ábra.

1.5.3.6. Komplex szám n-edik gyökének meghatározása

Bármelyik n-edik gyök meghatározása a hatványozás egyik fordított művelete. Ha $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, akkor a

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z}, \quad \text{ahol} \quad n > 0, \ \text{egész}, \tag{1.133a}$$

írásmód az n darab

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.133b}$$

érték rövidített jelölése.
Míg az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és egész kitevőjű hatványozás egyértelmű eredményre vezet, az n-edik gyök meghatározása mindig n különböző ω_k megoldást ad, kivéve a $z = 0$ esetet, amikor minden gyök $= 0$.
Geometriailag az ω_k pontok egy olyan szabályos n-szög csúcspontjai, amelynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja. Az **1.11. ábra** $\sqrt[6]{z}$ 6 értékét tünteti fel.

1.6. Algebrai és transzcendens egyenletek

1.6.1. Algebrai egyenletek normálalakra hozása

1.6.1.1. Definíció

Az

$$F(x) = f(x) \tag{1.134}$$

egyenletben szereplő x változót ismeretlennek nevezzük, a változónak azokat a speciális $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeit pedig, amelyekre az egyenlet teljesül, az egyenlet *gyökei*nek vagy *megoldásai*nak mondjuk. Két egyenlet ekvivalens, ha pontosan ugyanazok a gyökeik.
*Algebrai egyenlet*ről akkor van szó, ha a benne fellépő $F(x)$ és $f(x)$ függvény algebrai, azaz racionális vagy irracionális; egyikük konstans is lehet. Minden algebrai egyenlet algebrai átalakításokkal a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.135}$$

*normálalak*ra hozható, amelynek ugyanazok a gyökei, mint az egyenlet eredeti alakjának; esetleg néhány további gyöke is van. Az a_n együttható értékét gyakran 1-re változtatjuk; egyébként az $a_n, \ldots, a_0$ együtthatókat itt és a továbbiakban is valósnak tételezzük fel, kivéve amikor külön felhívjuk a figyelmet ennek ellenkezőjére.
Az n kitevőt *az egyenlet fokán*ak nevezzük.

■ Keressük az $\dfrac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x-2)} = 1 + \dfrac{x-3}{x}$ egyenlet normálalakját. Többlépéses átalakítással: $x(x - 1 + \sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3)$, $x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18$, $x\sqrt{x^2-6} = 5x^2 - 20x + 18$, $x^2(x^2-6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324$, $24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0$. Az eredmény egy normálalakú negyedfokú egyenlet.

1.6.1.2. n számú algebrai egyenletből álló rendszerek

Minden *algebrai egyenletrendszer* normálalakra, azaz polinomiális alakra hozható:

$$P_1(x, y, z, \ldots) = 0\,, \quad P_2(x, y, z, \ldots) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad P_n(x, y, z, \ldots) = 0\,. \tag{1.136}$$

A P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények az $x, y, z, \ldots$ változók polinomjai.

■ Keressük a következő egyenletekből álló rendszer normálalakját: 1. $\dfrac{x}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{z}$, 2. $\dfrac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}$, 3. $xy = z$.

A normálalak: 1. $x^2z^2 - y = 0$, 2. $x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0$, 3. $xy - z = 0$.

1.6.1.3. Hamis gyökök

Algebrai egyenletnek az (1.135) normálalakra való átalakítása után előfordulhat, hogy a $P(x) = 0$ egyenletnek vannak olyan megoldásai, amelyek az (1.134) kiindulási egyenletnek nem megoldásai. Ezért próbára van szükség: $P(x) = 0$ gyökeit be kell helyettesíteni a kiindulási egyenletbe, és meg kell vizsgálni, hogy ezek (1.134)-nak is megoldásai-e vagy sem.

■ **A:** $\dfrac{x^3}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$. Ennek normálalakja $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$. A normálalaknak megoldása az $x = 1$ érték, de a kiindulási egyenletnek nem, mert utóbbi az $x = 1$ esetre nincs értelmezve.

■ **B:** $\sqrt{x+7}+1 = 2x$ vagyis $\sqrt{x+7} = 2x-1$. Négyzetre emeléssel kapjuk a $4x^2 - 5x - 6 = 0$ normálalakot, amelynek gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -3/4$. Az $x_1 = 2$ gyök a kiindulási egyenletnek is megoldása, az x_2 gyök azonban nem.

1.6.2. 1.–4. fokú egyenletek

1.6.2.1. Elsőfokú (lineáris) egyenletek

1. Normálalak:

$$ax + b = 0\,. \tag{1.137}$$

2. A megoldások száma: Mindig egy valós

$$x_1 = -\frac{b}{a} \tag{1.138}$$

megoldás van.

1.6.2.2. Másodfokú (kvadratikus) egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^2 + bx + c = 0\,. \tag{1.139a}$$

vagy a-val való osztás után:

$$x^2 + px + q = 0\,. \tag{1.139b}$$

2. A valós gyökök száma: A

$$D = 4ac - b^2 \quad \text{vagy} \quad D = q - \frac{p^2}{4} \tag{1.140}$$

diszkrimináns előjelétől függően kapjuk:

- $D < 0$ esetén 2 valós megoldás van (2 valós gyök),
- $D = 0$ esetén 1 valós megoldás van (2 egybeeső gyök),
- $D > 0$ esetén nincs valós megoldás (2 komplex gyök).

3. A másodfokú egyenlet gyökeinek tulajdonságai Ha x_1 és x_2 az (1.139a) vagy (1.139b) másodfokú egyenlet gyökei, akkor

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q\,. \tag{1.141}$$

4. Másodfokú egyenletek megoldása:

1. módszer: Ha meg tudjuk határozni, az

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad \text{(1.142a)} \qquad \text{vagy} \quad x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)\,, \quad \text{(1.142b)}$$

szorzatfelbontás közvetlenül megadja az

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta \tag{1.143}$$

gyököket.

■ $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

2. módszer: A megoldóképlet alkalmazása
a) az (1.139a) alak esetén az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.144a) \qquad \text{azaz} \qquad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}\,, \qquad (1.144b)$$

megoldásokra vezet, ahol a második képlet páros b mellett előnyös;
b) az (1.139b) alak esetén az

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (1.145)$$

megoldásokat adja.

1.6.2.3. Harmadfokú egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1.146a)$$

vagy a-val való osztás és az $y = x + \dfrac{b}{3a}$ helyettesítés után

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \qquad (1.146b)$$

ahol

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \;\text{ és }\; 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}\,. \qquad (1.146c)$$

2. A valós megoldások száma: A

$$D = q^2 + p^3 \qquad (1.147)$$

diszkrimináns előjelétől függően adódik

- $D > 0$ esetén esetén egy valós megoldás (egy valós és két komplex gyök),
- $D < 0$ esetén három valós megoldás (három különböző valós gyök),
- $D = 0$ esetén egy valós megoldás (egy háromszoros valós gyök) ha $p = q = 0$, vagy két valós megoldás (egy egyszeres valós gyök és egy kétszeres valós gyök) ha $p^3 = -q^2 \neq 0$.

3. A harmadfokú egyenlet gyökeinek tulajdonságai: Ha az (1.146a) harmadfokú egyenlet gyökei x_1, x_2 és x_3, akkor

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}\,, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}\,, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}\,. \qquad (1.148)$$

4. A harmadfokú egyenletek megoldása:

1. módszer: Ha meg tudjuk határozni, az egyenlet bal oldalának

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \qquad (1.149a)$$

szorzatfelbontása közvetlenül megadja az egyenlet

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta\,, \quad x_3 = \gamma \qquad (1.149b)$$

gyökeit.
■ $x^3 + x^2 - 6x = 0$, $x^3 + x^2 - 6x = x(x + 3)(x - 2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

2. módszer: CARDANO képletének alkalmazása. Az $y = u + v$ helyettesítéssel (1.146b) átmegy az

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 3p) + 2q = 0 \qquad (1.150a)$$

egyenletbe. Ez biztosan teljesül akkor, ha fennáll

$$u^3 + v^3 = -2q \quad \text{és} \quad uv = -p\,. \qquad (1.150b)$$

Ha az (1.150b) összefüggéseket az

$$u^3 + v^3 = -2q\,, \qquad u^3v^3 = -p^3\,, \qquad (1.150c)$$

alakban írjuk, akkor a két ismeretlen u^3 és v^3 mennyiség összegét is, szorzatát is ismerjük, úgyhogy a VIETA-féle gyöktétel alapján (lásd 43. old.) felfoghatjuk őket a

$$w^2 - (u^3 + v^3)w + u^3v^3 = w^2 + 2qw - p^3 = 0 \tag{1.150d}$$

másodfokú egyenlet megoldásainak. Innen

$$w_1 = u^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}\,, \qquad w_2 = v^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3}\,, \tag{1.150e}$$

úgyhogy az (1.146b) egyenlet y megoldásaira a

$$y = u + v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \tag{1.150f}$$

CARDANO-*féle képlet*et kapjuk. Mivel minden köbgyöknek három értéke van (lásd (1.133b), 38. old.), kilenc esetet lehetne megkülönböztetni, ezek azonban az $uv = -p$ összefüggés miatt a következő három megoldásra redukálódnak:

$y_1 = u_1 + v_1$ (u_1 és v_1 azok a valós köbgyökök (bármelyik ilyen pár), amelyekre $u_1 v_1 = -p$)\,, (1.150g)

$$y_2 = u_1(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3} + v_1(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3}\,, \tag{1.150h}$$

$$y_3 = u_1(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3} + v_1(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3}\,. \tag{1.150i}$$

■ $y^3 + 6y + 2 = 0$. Itt $p = 2$\,, $q = 1$\,, $q^2 + p^3 = 9$ és $u = \sqrt[3]{-1 + 3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599$\,, $v = \sqrt[3]{-1 - 3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874$\,. A valós gyök $y_1 = u + v = -0{,}3275$, a komplex gyökök $y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) = 0{,}1638 \pm \mathrm{i}\,2{,}4659$.

3. módszer: Az **1.2. táblázatban** feltüntetett *segédmennyiségek* alkalmazása. Bevezetjük az

$$r = \pm\sqrt{|p|} \tag{1.151}$$

jelölést, ahol p az (1.146b) egyenletből való, és r előjelét q előjelével egyezőnek választjuk. Ezután p és $D = q^2 + p^3$ előjelétől függően a táblázatból meghatározzuk a φ segédmennyiséget és ennek felhasználásával az y_1, y_2 és y_3 gyököt.

■ $y^3 - 9y + 4 = 0$. $p = -3$\,, $q = 2$\,, $q^2 + p^3 < 0$\,, $r = \sqrt{3}$\,, $\cos\varphi = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849$\,, $\varphi = 67°22'$\,. $y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}201$\,, $y_2 = 2\sqrt{3}\cos(60° - 22°27') = 2{,}747$\,, $y_3 = 2\sqrt{3}\cos(60° + 22°27') = 0{,}455$\,. Próba: $y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}001$, ami a kerekítési hibák miatt 0 helyett elfogaható.

4. módszer: Közelítő megoldás, lásd 910. old.

1.6.2.4. Negyedfokú egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,. \tag{1.152}$$

Ha az egyenlet minden együtthatója valós, akkor vagy 0, vagy 2, vagy 4 valós megoldása van.

2. Speciális alakok: Ha $b = d = 0$, akkor az

$$ax^4 + cx^2 + e = 0 \tag{1.153a}$$

egyenlet gyökeit az

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}\,, \quad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.153b}$$

képletekkel lehet kiszámítani. Ha $a = e$ és $b = d$, akkor az

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \tag{1.153c}$$

1.2. táblázat. Segédmennyiségek a harmadfokú egyenletek megoldásához

$p<0$		$p>0$
$q^2+p^3\le 0$	$q^2+p^3>0$	
$\cos\varphi=\dfrac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi=\dfrac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi=\dfrac{q}{r^3}$
$y_1=-2r\cos\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2=+2r\cos\left(60^\circ-\dfrac{\varphi}{3}\right)$ $y_3=+2r\cos\left(60^\circ+\dfrac{\varphi}{3}\right)$	$y_1=-2r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2=r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}+\mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_3=r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$	$y_1=-2r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2=r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}+\mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_3=r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$

egyenlet gyökeit a következő képletek segítségével nyerjük:

$$x_{1,2,3,4}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}\,,\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+8a^2}}{2a}\,. \tag{1.153d}$$

3. Az általános negyedfokú egyenlet megoldása:

1. módszer: A bal oldal szorzatfelbontásával

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \tag{1.154a}$$

közvetlenül megadja az

$$x_1=\alpha\,,\quad x_2=\beta\,,\quad x_3=\gamma\,,\quad x_4=\delta \tag{1.154b}$$

gyököket.

■ $x^4-2x^3-x^2+2x=0\,,\ x(x^2-1)(x-2)=x(x-1)(x+1)(x-2)\,;$
$x_1=0\,,\ x_2=1\,,\ x_3=-1\,,\ x_4=2\,.$

2. módszer: Az (1.154a) egyenlet gyökei $a=1$ esetén megegyeznek az

$$x^2+(b+A)\frac{x}{2}+\left(y+\frac{by-d}{A}\right)=0 \tag{1.155a}$$

egyenlet gyökeivel, ahol $A=\pm\sqrt{8y+b^2-4c}$ és y a következő harmadfokú egyenletnek egy valós gyöke:

$$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0\,. \tag{1.155b}$$

3. módszer: Közelítő megoldás, lásd 910. old.

1.6.2.5. Ötöd- és magasabbfokú egyenletek

általában nem oldhatók meg gyökvonásokkal és a többi algebrai művelettel.

1.6.3. n-edfokú egyenletek

1.6.3.1. Algebrai egyenletek általános tulajdonságai

1. Gyökök Az

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0 \tag{1.156a}$$

egyenlet bal oldalát n-edfokú $P_n(x)$ polinomnak, (1.156a) megoldásait a $P_n(x)$ polinom gyökeinek nevezzük. Ha α a polinom egy gyöke, akkor $P_n(x)$ osztható az $(x-\alpha)$ kifejezéssel. Az általános esetben fennáll

$$P_n(x)=(x-\alpha)P_{n-1}(x)+P_n(\alpha)\,. \tag{1.156b}$$

Itt $P_{n-1}(x)$ egy $n-1$-edfokú polinom. Ha $P_n(x)$ osztható az $(x-\alpha)^k$, de nem osztható az $(x-\alpha)^{k+1}$ kifejezéssel, akkor azt mondjuk, hogy α a $P_n(x)=0$ egyenletnek *k-szoros gyöke.* Ebben az esetben α a $P_n(x)$ polinomnak és legfeljebb $(k-1)$-edrendű deriváltjainak közös gyöke.

2. Az algebra alaptétele Minden n–edfokú egyenletnek, amelynek az együtthatói valós vagy komplex számok, n darab valós vagy komplex gyöke van, ha a k-szoros gyököket k-szor számoljuk. Ha $P(x)$ gyökei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ és ezeknek a multiplicitása (sokszorossága) rendre $k, l, m, \ldots$, akkor érvényes a

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x-\gamma)^m \ldots . \tag{1.157a}$$

szorzatelőállítás. A $P(x)=0$ egyenlet megoldását mindig meg lehet könnyíteni egy olyan egyenletre való visszavezetéssel, amelynek a gyökei ugyanazok, mint a kiindulási egyenletéi, de most már csak 1 multiplicitással. Ehhez a polinomot két tényezőre bontjuk a

$$P(x) = Q(x)T(x)\,, \tag{1.157b}$$

$$T(x) = (x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots, \quad Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots \tag{1.157c}$$

képleteknek megfelelően. $T(x)$-et a $P(x)$ polinom és deriváltja, $P'(x)$ legnagyobb közös osztójaként (lásd 14. old.) lehet meghatározni, mert $P(x)$ többszörös gyökei $P'(x)$-nek is gyökei. Ezután a $Q(x)$ polinomot úgy kapjuk meg, hogy $P(x)$-et elosztjuk a $T(x)$ polinommal; $Q(x)$ zérushelyei ugyanazok, mint $P(x)$-éi, de multiplicitásuk 1.

3. A Vieta-féle gyöktétel (gyökök és együtthatók közötti összefüggések) Az (1.156a) egyenlet n darab $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyöke és az együtthatók között fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1}\,,\\
x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_ix_j = a_{n-2}\,,\\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} x_ix_jx_k = -a_{n-3}\,,\\
&\ldots\\
x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n a_0.
\end{aligned} \tag{1.158}$$

1.6.3.2. Valós együtthatójú egyenletek

1. Komplex gyökök felléphetnek valós együtthatójú polinomegyenletek megoldásaiként is, de csak konjugált komplex párokban, vagyis ha $\alpha = a + \mathrm{i}\,b$ egy gyök, akkor $\beta = a - \mathrm{i}\,b$ is az, méghozzá ugyanazzal a multiplicitással. Másodfokú esetben a $p = -(\alpha+\beta) = -2a$ és $q = \alpha\beta = a^2 + b^2$ jelöléssel fennáll $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ és

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + px + q\,. \tag{1.159}$$

Ha az (1.157a) összefüggésben minden ilyen tényezőpár szorzatát (1.159) szerinti kifejezésével helyettesítjük, akkor a valós együtthatójú polinomnak egy *valós tényezők*re való felbontását kapjuk:

$$\begin{aligned}
P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots\\
\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}\,.
\end{aligned} \tag{1.160}$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ a $P(x)$ polinom l darab valós gyöke. $P(x)$-nek van továbbá r pár konjugált komplex gyöke, amelyeket az $x^2 + p_ix + q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ másodfokú tényezők zérushelyeiként nyerünk. Az α_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$, p_i és q_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ számok valósak, és fennáll $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2 - q_i < 0$. A gyökök multiplicitásai rendre $k_1, k_2, \ldots, k_l$ és $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

2. Valós együtthatójú egyenlet gyökeinek száma Az (1.159) összefüggéssel kapcsolatban elmondottakból következik, hogy minden páratlan fokú egyenletnek van legalább egy valós gyöke. Hogy az (1.156a) egyenletnek két tetszőleges a és b valós szám között, ahol $a < b$, hány valós gyöke van, azt a következőképpen lehet meghatározni:

a) A többszörös gyökök leválasztása: Először leválasztjuk a $P(x) = 0$ egyenlet többszörös gyökeit, miáltal olyan egyenletet kapunk, amelynek minden gyöke megvan, de már csak 1 multiplicitással. Ezt az algebra alaptételénél ismertetett módon lehet megtenni.

Célszerűbb azonban az euklideszi algoritmushoz nagyon hasonló STURM-*módszer* szerint mindjárt a STURM-*féle lánc* (a STURM-*függvények*) meghatározásával kezdeni. Ha az utolsó, nullától különböző P_m maradék nem konstans, akkor $P(x)$-nek vannak többszörös gyökei, amelyeket le kell választani. Mindenesetre ezután az új $P(x) = 0$ egyenletnek nincsenek többszörös gyökei, de újra meg kell határozni a STURM-féle láncot.

b) A Sturm-függvények sorozatának képzése:

$$P(x), P'(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m = \text{const}\,. \tag{1.161}$$

Itt $P(x)$ az adott egyenlet bal oldala, $P'(x)$ a $P(x)$ első deriváltja, $P_1(x)$ a $P(x)$ polinomnak a $P'(x)$ polinommal való osztásánál keletkező maradék, de ellenkező előjellel véve, $P_2(x)$ a $P'(x)$ polinomnak a $P_1(x)$ polinommal való osztásánál fellépő, szintén ellenkező előjellel vett maradék stb.; $P_m =$ konstans $\neq 0$ az utolsó, de konstans maradék. A számolás egyszerűsítése céljából szabad a kapott maradékokat konstans pozitív szorzókkal megszorozni, ettől az eredmény nem változik meg.

c) Sturm tétele: Ha az (1.161) sorozatban a jelváltások, vagyis a „+"-ról „−"-ra, ill. fordítva történő átmenetek száma $x = a$ esetén A és $x = b$ esetén B és $P(a)$ és $P(b) \neq 0$, akkor az $A - B$ különbség egyenlő a $P(x) = 0$ egyenlet (a, b) intervallumban található valós gyökeinek a számával. Ha a számsorozatban egyes számok nullával egyenlők, akkor azokat a jelváltások megszámlálásánál ki kell hagyni.

■ Határozzuk meg az $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ egyenlet gyökeinek számát a $[0, 2]$ intervallumban. A STURM-*függvények* kiszámításával a következőt kapjuk: $P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$; $P'(x) = 4x^3 - 10x + 8$; $P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16$; $P_2(x) = -3x + 284$; $P_3 = -1$. Az $x = 0$ helyettesítés a $-8, +8, +16, +284, -1$ sorozatot adja két jelváltással, az $x = 2$ helyettesítés pedig a $+4, +20, +12, +278, -1$ sorozatot egy jelváltással, úgyhogy $A - B = 2 - 1 = 1$, vagyis 0 és 2 között egy gyök található.

d) Descartes-féle előjelszabály: A $P(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökeinek száma (most multiplicitással számolva) nem nagyobb, mint a $P(x)$ polinom együttható-sorozatában a jelváltások száma, és utóbbitól csak páros számmal különbözhet (megint elhagyjuk a 0-kat az együtthatók sorozatából).

■ Mit lehet mondani az $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet gyökeiről? Az egyenlet együtthatóinak előjele rendre $+, +, -, +, -$, vagyis három jelváltás van. Az egyenletnek a DESCARTES-féle jelszabály szerint vagy egy, vagy három pozitív gyöke van. Mivel x helyébe $-x$ értéket írva az egyenlet gyökeinek előjele megváltozik, továbbá x helyébe az $x + h$ értéket írva a gyökök h-val csökkennek, a Descartes-féle jelszabály segítségével a negatív gyökök számát, valamint a h-nál nagyobb gyökök számát is becsülni lehet. A jelen példában x helyébe a $-x$ értéket írva az $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, tehát az egyenletnek egy negatív gyöke van. Ha x helyébe az $x + 1$ értéket írjuk, akkor $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$ adódik — aminek nyilvánvalóan nincs pozitív gyöke —, tehát az egyenlet minden pozitív gyöke (egy vagy három darab) 1-nél kisebb.

3. n-edfokú egyenletek megoldása $n > 4$ esetén az egyenletek általában csak közelítőleg oldhatók meg. A gyakorlatban azonban már a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldására is közelítő módszereket alkalmaznak. n-edfokú algebrai egyenlet összes gyökei, köztük a komplexek, közelítő meghatározására szolgál a BRODETSKY–SMEAL-féle módszer (lásd [1.9], [19.38]). Algebrai egyenletek egyes valós gyökeinek kiszámítása a nemlineáris egyenletek megoldására szolgáló általános közelítő módszerekkel is lehetséges (lásd 907. old.). Algebrai egyenletek komplex zérushelyeinek meghatározására a BAIRSTOW-féle eljárás használható (lásd [19.22]).

1.6.4. Transzcendens egyenletek visszavezetése algebrai egyenletekre

1.6.4.1. Definíció

Az $F(x) = f(x)$ egyenlet transzcendens, ha az $F(x)$, $f(x)$ függvények közül legalább az egyik nem algebrai.

■ **A:** $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$, ■ **B:** $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, ■ **C:** $3\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$,

■ **D:** $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$, ■ **E:** $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$, ■ **F:** $x\cos x = \sin x$.

Egyes esetekben a transzcendens egyenletek megoldását, pl. alkalmas helyettesítésekkel, algebrai egyenletek megoldására lehet visszavezetni. Általában azonban a transzcendens egyenleteket csak közelítőleg lehet megoldani. Alább néhány, algebrai egyenletre visszavezethető esetet tárgyalunk.

1.6.4.2. Exponenciális egyenletek

Exponenciális egyenletek, ha az x ismeretlen vagy egy $P(x)$ polinom csak egyes a, b, c, $\cdots$ mennyiségek kitevőjében szerepel, a következő két esetben vezethetők vissza algebrai egyenletre:

1. Ha az $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... hatványokat nem kötik egymáshoz összeadások vagy kivonások, az egyenlet mindkét oldalának tetszőleges alapra vonatkozó logaritmusát vesszük.

■ $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $x\log 3 = (x-2)\log 4 + x\log 2$; $x = \dfrac{2\log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}$.

2. Ha a, b, c, ... egyazon k szám egész vagy törtkitevőjű hatványai, vagyis $a = k^n$, $b = k^m$, $c = k^l$, ..., akkor bizonyos körülmények között az $y = k^x$ próbakifejezés segítségével y-ra algebrai egyenletet kapunk, amelynek megoldása után x-et az $x = \dfrac{\log y}{\log k}$ képlet révén számszerűen meg lehet határozni.

■ $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\dfrac{2^x}{2} = \dfrac{2^{3x}}{64} - \dfrac{2^{2x}}{16}$. Az $y = 2^x$ helyettesítéssel $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$ és $y_1 = 8$, $y_2 = -4$, $y_3 = 0$; $2^{x_1} = 8$, $2^{x_2} = -4$, $2^{x_3} = 0$, úgyhogy $x_1 = 3$. Több valós gyök nincs.

1.6.4.3. Logaritmikus egyenletek

Logaritmikus egyenleteket, ha az x ismeretlen vagy egy $P(x)$ polinom csak a logaritmusjel alatt fordul elő, a következő két esetben lehet algebrai egyenletre visszavezetni:

a) Ha az egyenlet csak egy bizonyos kifejezés logaritmusát tartalmazza, akkor ezt a logaritmust új ismeretlenként lehet bevezetni és az egyenletet erre megoldani. Az eredeti ismeretlent a logaritmusból számítjuk ki.

■ $m[\log_a P(x)]^2 + n = a\sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. Az $y = \log_a P(x)$ helyettesítés az $my^2 + n = a\sqrt{y^2 + b}$ egyenletre vezet. Az y mennyiség meghatározása után x-re a $P(x) = a^y$ egyenletet kapjuk.

b) Ha az egyenlet mindkét oldala olyan kifejezések egyazon a alapra vonatkozó logaritmusainak m, n, ... egész együtthatókkal képzett lineáris kombinációja, amelyek x-nek polinomjai, pl. az egyenlet $m\log_a P_1(x) + n\log_a P_2(x) + \cdots = 0$ alakú, akkor az egyenlet bal oldalát is, jobb oldalát is egyetlen kifejezés logaritmusára lehet visszavezetni.

■ $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, $\log_5 \dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = \log_5 1$, $\dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Az $x_1 = 0$ esetben a kiindulási egyenletbe való behelyettesítésnél egy negatív szám logaritmusa, vagyis komplex mennyiség lép fel, úgyhogy $x_1 = 0$ nem megoldás.

1.6.4.4. Trigonometrikus egyenletek

Trigonometrikus egyenleteket algebrai egyenletre lehet visszavezetni, ha az x ismeretlen vagy az n egész együtthatójú $nx + a$ kifejezés csak a trigonometrikus függvények argumentumában fordul elő. A trigonometrikus képletek alkalmazásával az egyenletet át lehet alakítani úgy, hogy x-nek csak egyetlen

függvényét tartalmazza, és ezt y-nal tesszük egyenlővé. Az így kapott egyenlet megoldása után meghatározzuk x-et. Ügyelni kell a megoldások többértelműségére.

■ $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$ vagyis $\sin x = 1 - \sin^2 x - \frac{1}{4}$. Az $y = \sin x$ helyettesítéssel $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$ és $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Az y_2 megoldás a kiindulási egyenletre $|\sin x| \leq 1$ miatt nem ad valós megoldást; az $y_1 = \frac{1}{2}$ megoldás az $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ és $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ gyökökre vezet, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$.

1.6.4.5. Egyenletek hiperbolikus függvényekkel

Hiperbolikus függvényeket tartalmazó egyenletek akkor vezethetők vissza algebrai egyenletre, ha az x ismeretlen csak a hiperbolikus függvények argumentumában fordul elő. Ehhez a hiperbolikus függvényeket exponenciális kifejezésekkel helyettesítjük, majd alkalmazzuk az $y = e^x$ és $\frac{1}{y} = e^{-x}$ helyettesítést, miáltal y-ra algebrai egyenletet kapunk. Ennek megoldása után már csak az $x = \ln y$ értéket kell kiszámítani.

■ $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$; $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$; $x_1 = \ln \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 2{,}1716$, $x_2 = \ln \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1{,}4784$.

2. Függvények és előállításuk

2.1. A függvény fogalma

2.1.1. A függvény definíciója

2.1.1.1. Függvény

Ha x és y két változó mennyiség, és ha egy adott x értékhez pontosan egy y érték van hozzárendelve, akkor az y mennyiséget x függvényének nevezzük és az

$$y = f(x)\,. \tag{2.1}$$

jelölést használjuk. A változó x mennyiséget az y függvény *független változójának* vagy *argumentumának* nevezzük. Azok az x értékek, amelyekhez y érték van hozzárendelve, alkotják az $f(x)$ függvény D *értelmezési tartományát.* A változó y mennyiség neve *függő változó*; az összes y értékek alkotják az $f(x)$ függvény W *értékkészletét.*

2.1.1.2. Valós függvény

Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet csak valós számokat tartalmaz, azt mondjuk, hogy $y = f(x)$ *valós változójú valós függvény.*

■ **A:** $y = x^2$, ahol $D:\ -\infty < x < \infty,\ W:\ 0 \le y < \infty\,.$

■ **B:** $y = \sqrt{x}$, ahol $D:\ 0 \le x < \infty,\quad W:\ 0 \le y < \infty\,.$

2.1.1.3. Többváltozós függvény

Ha az y változó egynél több $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változótól függ, akkor az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

jelölést használjuk és többváltozós függvényről beszélünk (lásd 121. old.).

2.1.1.4. Komplex függvény

Ha a független változó egy z *komplex szám*, akkor a $w = f(z)$ képlet *komplex változójú komplex függvényt* ír le, amelyet a komplex függvénytan (lásd 694. old.) tárgyal. A komplex függvények közé tartoznak azon függvények is, amelyek valós x argumentumokra vannak értelmezve, de komplex $f(x)$ függvényértékeket vesznek fel.

2.1.1.5. További függvények

Különböző alkalmazási területeken, pl. a vektoranalízisben olyan függvények kerülnek felhasználásra, amelyeknél az argumentum és a függvényértékek például a következőképpen vannak értelmezve:

a) Az argumentum valós – a függvény vektor értékű.

■ **A:** Vektorfüggvény (lásd 664. old.).

■ **B:** Síkbeli és térbeli görbék paraméteres előállítása (lásd 238. old.).

b) Az argumentum vektor értékű – a függvény valós.

■ Skalármező (lásd 665. old.).

c) Az argumentum vektor értékű – a függvény vektor értékű.

■ Vektormező (lásd 666. old.).

2.1.1.6. Funkcionálok

Ha egy meghatározott függvényosztály minden egyes $x = x(t)$ függvényéhez hozzá van rendelve egy valós szám, *funkcionál*ról beszélünk.

■ **A:** Ha $\varphi(t)$ adott, az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvény, akkor $f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)\,dt$ lineáris funkcionál, amely az összes, az $[a, b]$ intervallumon folytonos $x = x(t)$ függvényekre értelmezett (lásd 637. old.).

■ **B:** A variációszámítási feladatok integrálkifejezései (lásd 561. old.).

2.1.1.7. Függvény és leképezés

Legyen adva két nem üres halmaz, X és Y . *Leképezés*en, amelyet az

$$f : X \to Y \tag{2.3}$$

módon jelölünk, olyan előírást értünk, amely X minden x eleméhez Y-nak egy egyértelműen meghatározott y elemét rendeli. Az y elemet az x elem *képének* nevezzük, és használjuk az $y = f(x)$ írásmódot is. Azt mondjuk, hogy az Y halmaz az f *képtartománya* vagy *értékkészlete*, az X halmaz pedig f *értelmezési tartománya.*

■ **A:** Ha az értelmezési tartomány és a képtartomány a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza, vagyis $X = D \subset \mathbb{R}$ és $Y = W \subset \mathbb{R}$, akkor a (2.3) képlet az x valós változónak egy $y = f(x)$ valós függvényét írja le.

■ **B:** Ha f egy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ mátrix, továbbá $X = \mathbb{R}^n$ és $Y = \mathbb{R}^m$, akkor a (2.3) képlet $\mathbb{R}^n$-nek egy $\mathbb{R}^m$-be való leképezését írja le. A (2.3) előírás ekkor a következő, m lineáris egyenletből álló rendszert jelenti:

$$\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}, \qquad \text{ill.} \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\,, \end{aligned}$$

vagyis $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix x vektorral való szorzata.

Megjegyzések:

1. A leképezés fogalma a függvényfogalom általánosítása. Ezért a leképezéseket függvényeknek is nevezik.

2. A leképezések főbb tulajdonságai a 293, 293. oldalakon találhatók.

3. Az olyan leképezést, amely egy X absztrakt tér minden eleméhez egyértelműen egy, esetleg másik, Y absztrakt tér valamelyik elemét rendeli, *operátor*nak nevezzük. Itt *absztrakt tér*en általában függvényteret értünk, mert az alkalmazások szempontjából fontos terek elemei legtöbbször függvények. Absztrakt terek például a lineáris terek (lásd Vektorterek, 321. old.), a metrikus terek (lásd 615 old.) és mindkettőjük közös részosztálya, a normált terek (lásd 626. old.).

2.1.2. Módszerek valós függvények értelmezésére

2.1.2.1. Függvény megadása

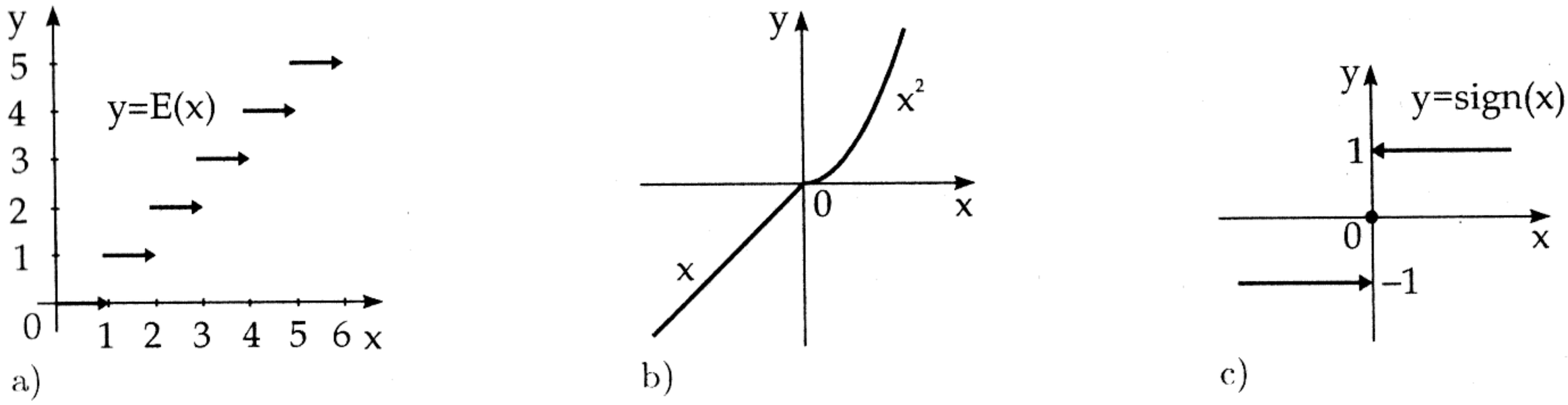
Függvényeket különbözőképpen lehet megadni vagy értelmezni, pl. értéktáblázattal, grafikus ábrázolással azaz görbével, egyetlen képlettel, amelyet *analitikus kifejezés*nek is neveznek, vagy (például szakaszonként) különböző képletekkel. Analitikus kifejezés *értelmezési tartomány*ában az argumentumnak csak olyan értékei szerepelhetnek, amelyekre a függvény értelmes, azaz egyértelműen meghatározott véges valós értéket vesz fel.

Példák szakaszonként eltérően megadott függvényekre:

■ **A:** $y = E(x) = [x] = n$, ha $n \le x < n + 1$, n egész.

■ **B:** $y = \begin{cases} x, & \text{ha } x \le 0\,, \\ x^2, & \text{ha } x \ge 0\,. \end{cases}$ ■ **C:** $y = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0\,, \\ 0, & \text{ha } x = 0\,, \\ +1, & \text{ha } x > 0\,. \end{cases}$

Itt $\operatorname{sign}(x)$, ejtsd: „szignum x", az *előjelfüggvény*t jelöli. Az $E(x)$, ill. $[x]$ függvény, ejtsd: „x egészrésze" azt a legnagyobb egész számot adja meg, amely kisebb vagy egyenlő mint x. A **2.1. ábrán** a megfelelő gráfok láthatók; a nyílhegyek arra utalnak, hogy végpontjuk nem tartozik a függvénygörbéhez.



2.1. ábra.

2.1.2.2. Valós függvény analitikus előállítása

Általában a következő három alakot használják:

1. Explicit előállítás: $y = f(x)$. (2.4)

■ $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Itt a koordinátarendszer kezdőpontja köré rajzolt egységkör felső feléről van szó.

2. Implicit előállítás: $F(x, y) = 0$, (2.5)

ha ez az egyenlet egyértelműen megoldható y-ra, azaz bármely x-hez legfeljebb egy y-ra teljesül.

■ $x^2+y^2-1 = 0$, $-1 \le x \le +1$, $0 \le y \le 1$. Itt is az egységkör felső feléről van szó. Megjegyezzük, hogy például az $x^2 + y^2 + 1 = 0$ összefüggés nem értelmez valós függvényt.

3. Paraméteres előállítás: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. (2.6)

x és y értékeit egy, *paraméter*nek nevezett, t segédváltozó függvényeként adjuk meg. A $\varphi(t)$, $\psi(t)$ függvények értelmezési tartománya azonos kell legyen.

■ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ahol $\varphi(t) = \cos t$ és $\psi(t) = \sin t$, $0 \le t \le \pi$. Itt ismét a koordinátarendszer kezdőpontja köré rajzolt egységkör felső felének előállításáról van szó.

Megjegyzés: Nem minden paraméteres előállítású függvénynek van paramétermentes explicit vagy implicit analitikus előállítása.

■ $x = t + 2\sin t = \varphi(t)$, $y = t - \cos t = \psi(t)$.

2.1.3. Néhány függvényfajta

2.1.3.1. Monoton függvények

Ha egy valós függvény az értelmezési tartományban bármely x_1 és x_2 argumentumra, ahol $x_2 > x_1$, teljesíti az

$$f(x_2) \ge f(x_1) \tag{2.7a}$$

feltételt, akkor *monoton növekedő függvény*nek nevezzük **(2.2.a ábra)**. Ha

$$f(x_2) \le f(x_1), \tag{2.7b}$$

akkor *monoton csökkenő függvény*ről beszélünk **(2.2.b ábra)**. Ha a monotonitási feltétel nem teljesül



2.2. ábra.

az értelmezési tartományhoz tartozó minden x értékre, hanem csak a tartomány egy részében, pl. egy intervallumban vagy egy féltengelyen, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *ebben a résztartományban monoton*. Azokat a függvényeket, amelyekre az

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{vagy az} \quad f(x_2) < f(x_1) \tag{2.7c}$$

feltétel érvényes, vagyis a (2.7a), (2.7b) képletekben az egyenlőségjel nincs megengedve, *szigorúan monoton növekedő*nek, ill. *csökkenő*nek nevezzük. A **2.2.a ábrán** egy szigorúan monoton növekedő függvény van feltüntetve, a **2.2.b ábrán** pedig egy x_1 és x_2 között állandó, azon kívül szigorúan monoton csökkenő függvény.

■ $y = e^{-x}$ szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-en, $y = \ln x$ pedig szigorúan monoton növekedő a pozitív féltengelyen.

2.1.3.2. Korlátos függvények

Egy valós értékű függvényt *felülről korlátos*nak nevezünk, ha értékei nem haladnak meg egy bizonyos számot (*felső korlát*), és *alulról korlátos*nak, ha értékei nem kisebbek egy meghatározott számnál (*alsó korlát*). A felülről is, alulról is korlátos függvényeket *korlátos*nak nevezzük.

■ **A:** $y = 1 - x^2$ felülről korlátos $(y \leq 1)$.

■ **B:** $y = e^x$ alulról korlátos $(y > 0)$.

■ **C:** $y = \sin x$ korlátos $(-1 \leq y \leq +1)$.

■ **D:** $y = \dfrac{4}{1 + x^2}$ korlátos $(0 < y \leq 4)$.

2.1.3.3. Függvény szélsőértékei

A D értelmezési tartományú valós $f(x)$ függvénynek az a helyen *abszolút* vagy *globális maximuma* van, ha minden $x \in D$ értékre fennáll

$$f(a) \geq f(x)\,. \tag{2.8a}$$

Az $f(x)$ függvénynek az a helyen *relatív* vagy *lokális maximuma* van, ha a (2.8a) egyenlőtlenség csak a egy környezetében teljesül, vagyis azokra az x-ekre, amelyek kielégítik az $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \varepsilon > 0, x \in D$ feltételt.

Az *abszolút* vagy *globális minimum*, valamint a *relatív* vagy *lokális minimum* definíciója a fentiekkel analóg, csak a (2.8a) egyenlőtlenséget az

$$f(a) \leq f(x)\,. \tag{2.8b}$$

egyenlőtlenséggel kell helyettesíteni.

Megjegyzések:

a) A maximum és minimum, közös néven *szélsőérték* fogalma nem kötődik a függvény differenciálhatóságához, tehát olyan függvényekre is vonatkozik, amelyek egyes helyeken nem, vagy éppen seholsem differenciálhatók. Tipikus példák erre bizonyos görbék csúcsai (lásd a **6.10.b, c ábrákat**, 396. old.).

b) Differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározására szolgáló módszerek a 6.1.5. fejezetben, a 395. oldaltól kezdődően találhatók.

2.1.3.4. Páros függvények

A *páros függvények* **(2.3.a ábra)** teljesítik az

$$f(-x) = f(x)\,. \tag{2.9a}$$

feltételt. Ha f értelmezési tartománya D, akkor teljesülnie kell, hogy

$$(x \in D) \Rightarrow (-x \in D)\,. \tag{2.9b}$$

■ **A:** $y = \cos x$, ■ **B:** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

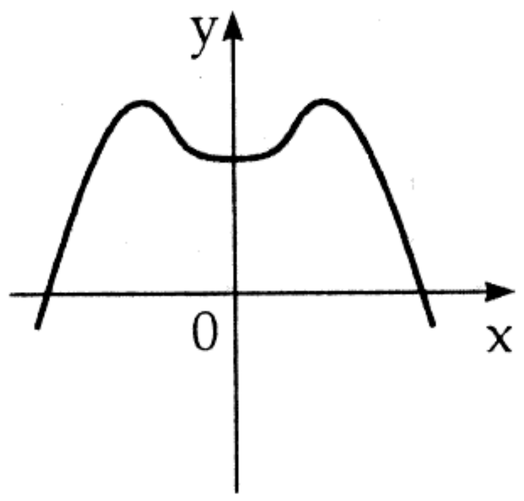
2.1.3.5. Páratlan függvények

A *páratlan függvények* **(2.3.b ábra)** teljesítik az

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{2.10a}$$

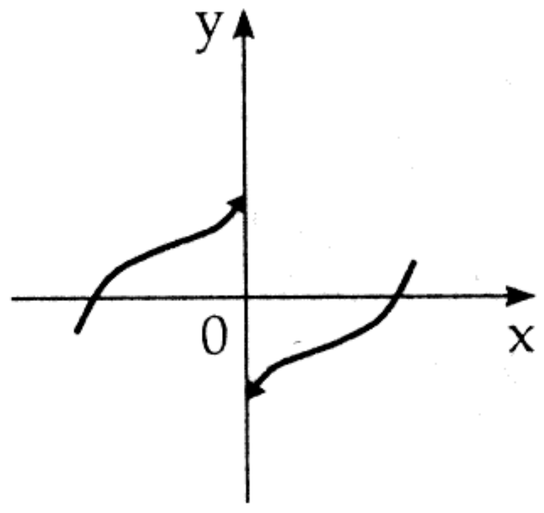
feltételt. Ha f értelmezési tartománya D, akkor megint

$$(x \in D) \Rightarrow (-x \in D)\,. \tag{2.10b}$$

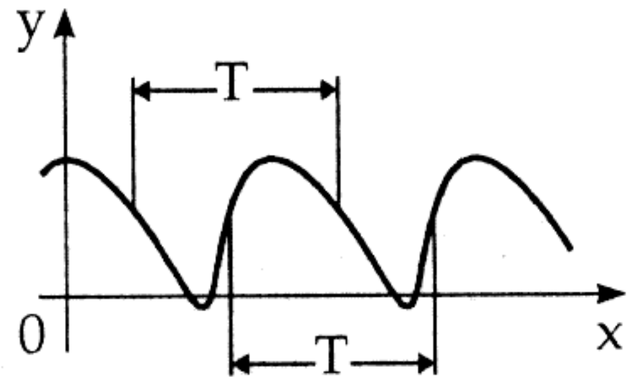


a)

2.3. ábra.



b)



2.4. ábra.

■ **A:** $y = \sin x$, ■ **B:** $y = x^3 - x$.

2.1.3.6. Előállítás páros és páratlan függvény segítségével

Ha az f függvény D értelmezési tartományára teljesül az előbbi „$x \in D$ esetén $-x \in D$" feltétel, akkor f előállítható egy g páros és egy u páratlan függvény összegeként:

$$f(x) = g(x) + u(x) \quad \text{ahol} \quad g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]\,, \quad u(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]\,. \tag{2.11}$$

■ $f(x) = e^x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ (l. 2.9.1.).

2.1.3.7. Periodikus függvények

A *periodikus függvények* valamely T-vel teljesítik az

$$f(x+T) = f(x)\,, \quad T = \text{konstans}, \quad T \neq 0\,. \tag{2.12}$$

feltételt. A periódikus, folytonos, nemkonstans függvények esetén mindenképpen létező legkisebb pozitív T számot, amelyre ez a feltétel teljesül, *periódus*nak hívjuk **(2.4. ábra)**.

2.1.3.8. Inverz függvény

A D értelmezési tartományú és W értékkészletű $y = f(x)$ függvény minden $x \in D$ értékhez egy $y \in W$ értéket rendel. Ha megfordítva, minden $y \in W$ értékhez is egyértelműen hozzárendelhető egy $x \in D$ érték, amelyre $y = f(x)$, akkor f *inverz függvényét* kapjuk. Ezt a φ vagy az f^{-1} jellel jelöljük. Ebben az esetben az f^{-1} jel függvényszimbólum, nem hatványt fejez ki.

Az $y = f(x)$ függvényről úgy térünk át az inverz függvényre, hogy x-et és y-t felcseréljük és az $x = f(y)$ egyenletet megoldjuk y-ra, miáltal az $y = \varphi(x)$ eredményre jutunk. Az $y = f(x)$ és az $x = \varphi(y)$ előállítás egymással ekvivalens. Innen adódik a következő két fontos képlet:

$$f(\varphi(y)) = y \quad \text{és} \quad \varphi(f(x)) = x\,. \tag{2.13}$$

■ Az $y = f(x) = e^x$ $(D: -\infty < x < \infty, W: y > 0)$ függvény ugyanazt a relációt fejezi ki, mint $x = \varphi(y) = \ln y$. Fennáll $e^{\ln y} = y, \ln e^x = x$.

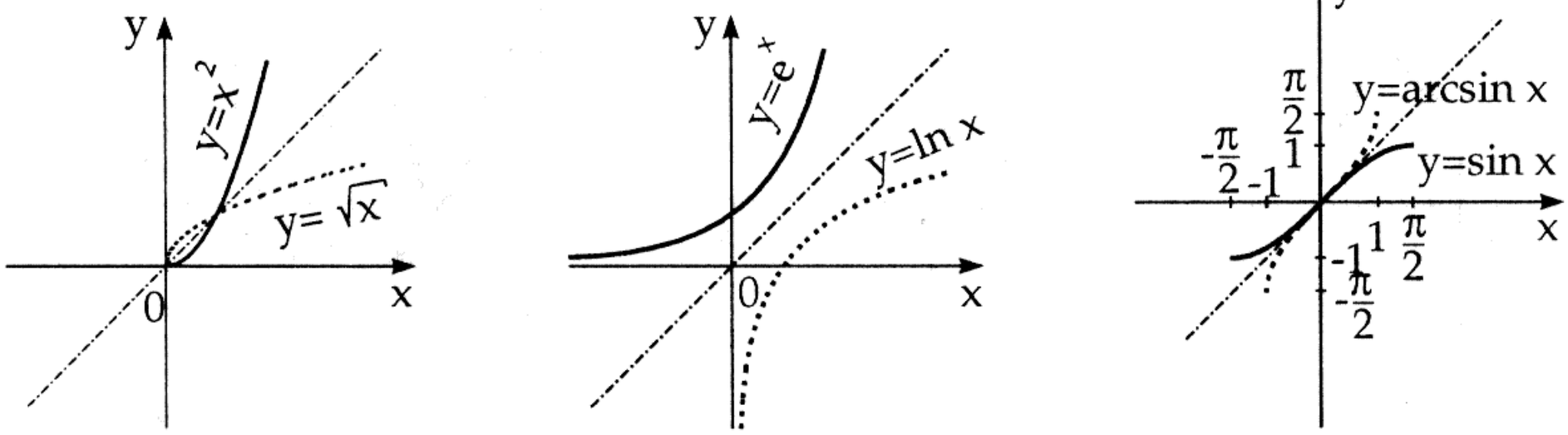
Az $y = \varphi(x)$ inverz függvény görbéje $y = f(x)$ görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével áll elő **(2.5. ábra)**.

Példák inverz függvényre:

■ **A:** $y = f(x) = x^2$, ahol D: $x \geq 0$, W: $y \geq 0$;
$y = \varphi(x) = \sqrt{x}$, ahol D: $x \geq 0$, W: $y \geq 0$.

■ **B:** $y = f(x) = e^x$, ahol D: $-\infty < x < \infty$, W: $y > 0$;
$y = \varphi(x) = \ln x$, ahol D: $x > 0$, W: $-\infty < y < \infty$.

■ **C:** $y = f(x) = \sin x$, ahol D: $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, W: $-1 \leq y \leq 1$;
$y = \varphi(x) = \arcsin x$, ahol D: $-1 \leq x \leq 1$, W: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.



a) b) c)

2.5. ábra.

Megjegyzések:

1. Ha az f függvény az $I \subseteq D$ intervallumban szigorúan monoton, akkor erre az intervallumra megszorítva létezik az f^{-1} inverz függvény.

2. Emiatt, ha egy nem monoton függvény értelmezési tartománya felbontható olyan egymásba nem nyúló szakaszokra, amelyeken szigorúan monoton, akkor ezeken külön-külön létezik az inverz függvény.

2.1.4. Függvény határértéke

2.1.4.1. Függvény határértékének definíciója

Legyen az $y = f(x)$ függvény értelmezve az a hely egy környezetében, magát az a helyet esetleg kivéve. A függvény *határértéke* vagy *limesze* az $x = a$ helyen A, jelben

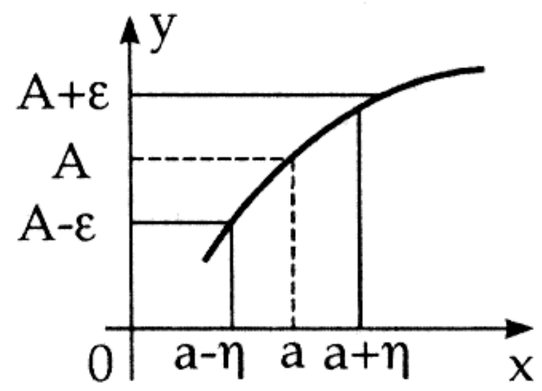
$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{vagy} \quad f(x) \to A \quad \text{ha} \quad x \to a\,, \tag{2.14}$$

ha miközben x minden határon túl közeledik a-hoz, az $f(x)$ függvény minden határon túl közeledik A-hoz. Nem szükséges, hogy az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen az A értéket vegye fel, sőt, megismételjük, hogy még az sem, hogy e helyen értelmezve legyen.

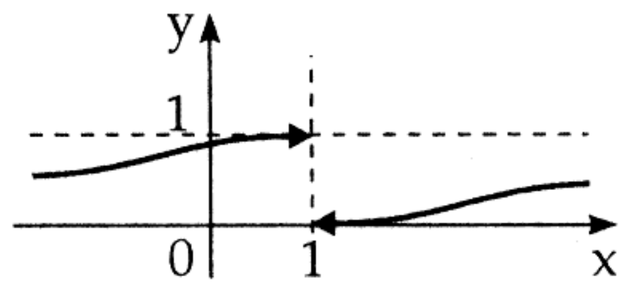
Egzakt megfogalmazás: A (2.14) határérték akkor létezik, ha megadva egy tetszőlegesen kicsi pozitív ε számot, található egy másik pozitív η szám úgy, hogy

$$|x - a| < \eta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \tag{2.15}$$

kivéve esetleg az $x = a$ értéket **(2.6. ábra)**.



2.6. ábra.



2.7. ábra.

Ha a egy szakasz határpontja, akkor az $|x - a| < \eta$ egyenlőtlenség az egyszerű $a - \eta < x$, ill. $x < a + \eta$ egyenlőtlenség közül az egyikre redukálódik.

2.1.4.2. Visszavezetés sorozat határértékére (lásd 410. old.)

Az $f(x)$ függvény határértéke az $x = a$ helyen A, ha az x értékek minden olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ sorozatára, amely az értelmezési tartományban fekszik és a-hoz konvergál, a megfelelő függvényértékek $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ sorozata A-hoz konvergál.

2.1.4.3. A Cauchy-féle konvergenciakritérium

Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen létezzen határértéke, szükséges és elégséges, hogy a független változó két tetszőleges, az értelmezési tartományhoz tartozó és a-hoz elég közel fekvő x_1, x_2 értékére a megfelelő $f(x_1)$, $f(x_2)$ függvényértékek egymástól tetszőlegesen kevéssé különbözzenek.
Egzakt megfogalmazás: Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen létezzen határértéke, szükséges és elégséges, hogy megadva egy tetszőlegesen kicsi pozitív ε számot, található legyen egy másik pozitív η szám úgy, hogy két tetszőleges, az értelmezési tartományhoz tartozó x_1, x_2 ($x_{1,2} \neq a$) értékre, amelyekre teljesül az

$$|x_1 - a| < \eta \quad \text{és} \quad |x_2 - a| < \eta \tag{2.16a}$$

feltétel, fennálljon az

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{2.16b}$$

egyenlőtlenség.

2.1.4.4. Végtelen mint függvény-határérték

A $$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty \tag{2.17}$$

képlet azt fejezi ki, hogy amikor x az a helyhez közeledik, $f(x)$ abszolút értéke minden határon túl növekszik.
Egzakt megfogalmazás: A (2.17) összefüggés akkor érvényes, ha megadva egy tetszőlegesen nagy pozitív K számot, található egy pozitív η szám úgy, hogy az

$$a - \eta < x < a + \eta \tag{2.18a}$$

intervallumban fekvő tetszőleges $x \neq a$ értékekre $|f(x)|$ megfelelő értéke nagyobb mint K:

$$|f(x)| > K. \tag{2.18b}$$

Ha valamely η-val ilyenkor az

$$a - \eta < x < a + \eta \tag{2.18c}$$

intervallumban $f(x)$ minden értéke pozitív, akkor a

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\,, \tag{2.18d}$$

írásmódot, ha pedig negatív, a

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\,. \tag{2.18e}$$

írásmódot használjuk és azt mondjuk, hogy a függvény az adott helyen a $+\infty$-be, illetve a $-\infty$-be tart.

2.1.4.5. Függvény bal oldali és jobb oldali határértéke

Az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a *bal oldali határértéke* A^-, ha az a számhoz minden határon túl alulról közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^- értékhez:

$$A^- = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0). \tag{2.19a}$$

Ehhez hasonlóan az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a *jobb oldali határértéke* A^+, ha az a számhoz minden határon túl jobbról közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^+ értékhez:

$$A^+ = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)\,. \tag{2.19b}$$

A $\lim_{x \to a} f(x) = A$ írásmód feltételezi, hogy a bal és a jobb oldali határérték létezik és megegyezik:

$$A^+ = A^- = A\,. \tag{2.19c}$$

■ Az $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ függvény $x \to 1$ esetén balról és jobbról két különböző határértékhez tart: $f(1-0) = 1,\ f(1+0) = 0$ **(2.7. ábra)**.

2.1.4.6. Függvény határértéke a végtelenben

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény D értelmezési tartománya felülről és/vagy alulról nem korlátos.
a eset) Azt mondjuk, hogy $x \to +\infty$ esetén az $f(x)$ függvény határértéke az

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x) \tag{2.20a}$$

szám, ha megadva egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot található olyan $N > 0$ szám, hogy tetszőleges $x > N$, $x \in D$ értékre a megfelelő $f(x)$ érték az $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ intervallumban helyezkedik el. Ehhez hasonlóan $x \to -\infty$ esetén az $f(x)$ függvény határértéke az

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x) \tag{2.20b}$$

szám, ha megadva egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot található olyan $-N < 0$ szám, hogy tetszőleges $x < -N$, $x \in D$ értékre a megfelelő $f(x)$ érték az $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ intervallumban helyezkedik el.

■ **A:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, ■ **B:** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, ■ **C:** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

b eset) Ha x korlátlan növekedése vagy korlátlan csökkenése esetén a függvény abszolút értéke minden határon túl növekszik, azt a következőképpen jelöljük:

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \infty\,; \tag{2.20c}$$

ha pedig valamely N-nel $x > N$ esetén $f(x) > 0$, illetve $f(x) < 0$, akkor $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, illetve $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ és hasonlóan $x < N$ esetén ∞ helyett $-\infty$-nel.

■ **A:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2} = +\infty$, ■ **B:** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty$,

■ **C:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x^3}{x^2} = -\infty$, ■ **D:** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x^3}{x^2} = +\infty$.

2.1.4.7. Függvények határértékeire vonatkozó tételek

1. Állandó függvény határértéke Állandó függvény határértéke egyenlő magával ezzel a mennyiséggel:

$$\lim_{x \to a} A = A\,. \tag{2.21}$$

2. Összeg vagy különbség határértéke Véges sok függvény bármilyen előjelekkel vett összegének határértéke egyenlő e függvények határértékeinek megfelelő előjelű összegével, feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) - \lim_{x \to a} \psi(x)\,. \tag{2.22}$$

3. Szorzat határértéke Véges sok függvény szorzatának határértéke egyenlő e függvények határértékeinek szorzatával, feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x \to a} [f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \left[\lim_{x \to a} \varphi(x)\right] \left[\lim_{x \to a} \psi(x)\right]\,. \tag{2.23}$$

4. Hányados határértéke Két függvény hányadosának határértéke egyenlő e függvények határértékeinek hányadosával:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}\,, \tag{2.24}$$

feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek, végesek és $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$.

5. Közrefogás (rendőrelv) Ha az $f(x)$ függvény értékeit az a pont valamely környezetében két másik függvény, $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ értékei közrefogják, azaz minden ilyen x-re vagy $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, vagy $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$, ha továbbá $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$ (itt A $\pm\infty$ is lehet), akkor

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\,. \tag{2.25}$$

Megjegyzés: A fenti tételekben a $\pm\infty$ is lehet.

2.1.4.8. Határértékek kiszámítása

Határértékek kiszámítására a felsorolt öt tétel, valamint számos átalakítás (pl. gyöktelenítés) és módszer használatos:

1. Alkalmas átalakítás A függvényt a határérték kiszámítására alkalmas alakra hozzuk.

■ **A:** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\,.$

■ **B:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}\,.$

■ **C:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sin 2x)}{2x}=2\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=2\,.$

2. Bernoulli–l'Hospital-szabály Ha $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ alakú határozatlan kifejezések lépnek fel, akkor a Bernoulli–l'Hospital-*szabályt* (röviden: l'Hospital-szabályt) alkalmazzuk.

a eset) $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ függvényre

1. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$ ($\dfrac{0}{0}$ alakú határozatlan kifejezés), vagy
$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezés),
2. a $\varphi(x)$, $\psi(x)$ függvények egy, az a pontot tartalmazó intervallumban értelmezve vannak (magában az a pontban a függvények nem kell hogy értelmezve legyenek) és differenciálhatók, továbbá $\psi'(x)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\,, \tag{2.26}$$

feltéve hogy ez utóbbi határérték létezik (Bernoulli–l'Hospital-*szabály*). Ha a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ képlet megint $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezést eredményez, az eljárást akárhányszor megismételhetjük.

■ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}=1\,.$

b eset) $0\cdot\infty$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az **a)** esethez hasonló differenciálhatósági feltételek mellett fennáll $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, akkor a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ vagy $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ alakra hozzuk, és ezzel a határérték kiszámítását visszavezet-

jük a $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ esetre.

■ $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\operatorname{tg}x=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi-2x}{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-2}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=2\,.$

c eset) $\infty-\infty$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az **a)** esethez hasonló feltételek mellett fennáll $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, akkor a $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ határérték kiszámítására a különbséget a $\frac{0}{0}$ vagy reciprokra áttérve $\frac{\infty}{\infty}$ alakra hozzuk. Ez különféle módokon történhet, például $\frac{0}{0}$-t kapunk így: $\varphi-\psi=\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\varphi}\right)\Big/\frac{1}{\varphi\psi}$.

■ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=\text{„}\frac{0}{0}\text{”}$. A L'HOSPITAL-szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{2}\,.$

d eset) 0^0, ∞^0, 1^∞ alakú határozatlan kifejezések: Ha a egy környezetében $\varphi(x)>0$, $f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$, akkor először az $\ln f(x)=\psi(x)\ln\varphi(x)$ kifejezés A határértékét számítjuk ki, amely $0\cdot\infty$ alakú (**b) eset**), és ha ez létezik ($\pm\infty$ is lehet), akkor utána pedig végeredményként az e^A értéket. Ha $\varphi(x)\geq0$, de a bármilyen kis környezetében van x, hogy $\varphi(x)=0$, akkor ezen x-ekre $\psi(x)\geq0$ lehet csak, és ekkor a határérték csak $0^0=1$ vagy $0^{\psi(x)}=0$ lehet aszerint, hogy mindezen x-ekre $\psi(x)=0$, vagy pedig a-hoz elég közel már $\psi(x)>0$; mindkét esetben csak a többi x-ekre (ahol $\varphi(x)>0$) kell és lehet a fenti eljárással eldönteni, hogy ezekre is 1, illetve 0-e a határérték.

A ∞^0, 1^∞ esetekben analóg módon lehet eljárni, megint figyelembe véve hogy a ∞^0 esetben a kitevő $\psi(x)\geq0$ lehet csak.

■ $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=X$, $\ln x^x=x\ln x$, $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0+0}(-x)=0$, azaz $A=\ln X=0$,

tehát $X=1$, és így $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=1$, tehát a fentiek féloldali határértékre is érvényesek, amely aleset másrészt biztosítja is a megkivánt feltételeket.

3. Taylor-sorfejtés Határozatlan kifejezések határértékének kiszámítására a L'HOSPITAL-szabályon kívül a TAYLOR-sorba történő kifejtés is alkalmazható, ha a magasabb rendben kicsi mennyiségeket tudjuk együtt kezelni (lásd 395. old.).

■ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\cdots\right)=\dfrac{1}{6}\,.$

2.1.4.9. Függvények nagyságrendje és a Landau-féle szimbólumok

Két függvény összehasonlításánál gyakran fontos tudni, hogy milyen a függvények egymáshoz viszonyított viselkedése bizonyos $x=a$ helyek valamilyen típusú környezetében, ahol a $\pm\infty$ is lehet. Ezzel kapcsolatban a következő nagyságrendi összefüggések bevezetésére került sor.

1. Az $f(x)$ függvény magasabb rendben válik végtelen naggyá, mint a $g(x)$ függvény, ha az $x\to a$ határátmenet során e függvények abszolút értéke és az $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ hányados abszolút értéke minden határon túl növekszik.

2. Az $f(x)$ függvény magasabb rendben válik végtelen kicsinnyé, azaz magasabb rendben tűnik el, mint a $g(x)$ függvény, ha az $x \to a$ határátmenet során e függvények abszolút értéke és az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ hányados nullához tart.

3. Két függvény, $f(x)$ és $g(x)$ azonos nagyságrendben tart nullához vagy végtelenhez, ha az $x \to a$ határátmenet során az $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ hányados abszolút értéke korlátos marad, pontosabban ha a-hoz elég közel fennáll $0 < m < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M < \infty$ (m és M konstans), tehát ez utóbbi az előző kettő antiszimmetrikussal ellentétetben szimmetrikus reláció, és így az alábbi jelöléssel $f(x) = O(g(x))$ és $g(x) = O(f(x))$.

4. A Landau-féle szimhólumok Két függvénynek egy tetszőleges $x = a$ helyre vonatkozó együttes viselkedését időnként a LANDAU-féle O („nagy ordó"), ill. o („kis ordó") szimbólumokkal írjuk le a következőképpen: $x \to a$ és teljesen hasonlóan $x \to a - 0$ vagy $x \to a + 0$ esetén

$$f(x) = O(g(x)) \text{ jelentése : } \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ korlátos } a \text{ valamely tekintett típusú környezetében}, \tag{2.21a}$$

és

$$f(x) = o(g(x)) \text{ jelentése : } \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,, \tag{2.21b}$$

ahol megint $a = \pm\infty$ is meg van engedve és megint megköveteljük, hogy a ezen környezetében f és g értelmezve legyen és g ne tűnjön el.

■ **A:** $\sin x = O(x)$, ha $x \to 0$, mert az $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ szereposztással még a többet mondó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ is fennáll, vagyis 0 környezetében $\sin x$ úgy viselkedik, mint x.

■ **B:** Ha $f(x) = 1 - \cos x$ és $g(x) = \sin x$, akkor $f(x)$ magasabb rendben tűnik el, mint $g(x)$:
$\lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}\right| = 0$, azaz $1 - \cos x = o(\sin x)$, ha $x \to 0$.

■ **C:** Ha $f(x) = 1 - \cos x$ és $g(x) = x^2$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ azonos nagyságrendben tűnik el:
$\lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{1 - \cos x}{x^2}\right| = \dfrac{1}{2}$, azaz $1 - \cos x = O(x^2)$ és $x^2 = O(1 - \cos x)$, ha $x \to 0$.
Végül megjegyzendő, hogy mindezek a relációk teljesen hasonlóan definiálhatók sorozatokra, másképpen arra az esetre is, amikor a függvények csak egy sorozaton vannak definiálva.

5. Polinomok Racionális egész függvény nagyságrendjét a polinom fokával lehet kifejezni. Így az $f(x) = x$ függvény nagyságrendje 1, és egy $(n+1)$-edfokú polinom nagyságrendje 1-gyel nagyobb, mint egy n-edfokúé. Ez a besorolás azonban nem minden (akár elemi) függvényre végezhető el.

6. Exponenciális függvény Az exponenciális függvény a $+\infty$-ben gyorsabban tart végtelenhez, mint a bármilyen nagy kitevőjű x^n hatvány (n rögzített természetes szám):

$$\lim_{x \to \infty} \left|\frac{e^x}{x^n}\right| = \infty\,. \tag{2.22a}$$

A L'HOSPITAL-szabály alapján ugyanis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty\,. \tag{2.22b}$$

7. Logaritmusfüggvény A logaritmusfüggvény a $+\infty$-ben lassabban tart végtelenhez, mint a bármilyen kicsiny pozitív kitevőjű x^c hatvány ($c > 0$):

$$\lim_{x \to \infty} \left|\frac{\log x}{x^c}\right| = 0\,. \tag{2.23}$$

A bizonyítás ismét, ahogy a fentebbi példákban is, például a L'HOSPITAL-szabállyal történhet.

2.1.5. Függvény folytonossága

2.1.5.1. A folytonosság és a szakadási hely fogalma

Az alkalmazásokban legtöbbször szereplő függvények *folytonos függvények*, vagyis olyan $f(x)$ függvények, amelyeknél az x argumentum kicsiny megváltozásakor a függvény értéke is keveset változik. Az ilyen függvény grafikus ábrázolása összefüggő görbét eredményez. Ha ellenben a görbe egyes helyeken megszakad, akkor azt mondjuk, hogy a megfelelő függvény *nem folytonos*, és az argumentumnak azokat az értékeit, amelyekre a szakadás fellép, *szakadási helyek*nek nevezzük. A **2.8. ábrán** egy *szakaszonként folytonos* függvény görbéje van feltüntetve. A szakadási helyek az A, B, C, D, E, F, G pontok. A nyilak azt fejezik ki, hogy végpontjuk nem tartozik a görbéhez.

2.1.5.2. A folytonosság definíciója

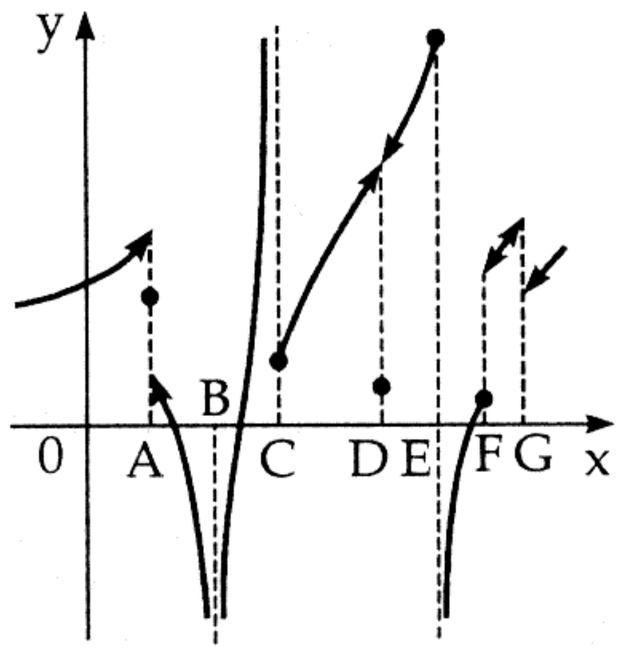
Azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvény az $x = a$ helyen *folytonos*, ha

1. $f(x)$ az a helyen értelmezve van és

2. a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ határérték létezik és egyenlő $f(a)$-val. Ez pontosan akkor teljesül, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található egy $\delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ minden olyan x-re, amelyre $|x - a| < \delta$. (2.24)

Egyoldali (*bal-* vagy *jobboldali*) *folytonosság*ról beszélünk, ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ helyett csak a $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ vagy a $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ határérték létezik és egyenlő $f(a)$-val.



2.8. ábra.

Ha a függvény egy adott, a-tól b-ig terjedő intervallum minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *folytonos ezen az intervallumon*, amely lehet nyílt, félig-nyílt vagy zárt (lásd 2. old.). Ha a függvény a számegyenes minden pontjában értelmezve van és folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *mindenütt folytonos*. Az értelmezési tartomány belsejében vagy határán elhelyezkedő $x = a$ érték a függvénynek *szakadási helye*, ha egy környezetében a függvény értelmezett, de ott nem, vagy $f(a)$ definiált, de nem egyezik meg a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ határértékkel, vagy a határérték nem létezik, azaz, ha a-ban a függvény nem folytonos.

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának egy intervallumán *szakaszonként folytonos*, ha az intervallumnak véges sok kivételtől eltekintve minden pontjában folytonos.

2.1.5.3. Gyakran fellépő szakadásfajták

1. Függvénykifutás a végtelenbe A függvénykifutás a végtelenbe a leggyakrabban előforduló szakadásfajta (a **2.8. ábrán** a B, C és E pont); legalább az egyik oldali határérték $+\infty$ vagy $-\infty$.

■ **A:** $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$. A görbe a 77. oldalon a **2.33. ábrán** látható; a szakadás olyan típusú, mint a **2.8. ábra** E pontjában fellépő.

■ **B:** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = +\infty$. A szakadási hely olyan, mint a **2.8. ábra** B pontja ($+\infty$ helyett $-\infty$-nel).

■ **C:** $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, $f(1+0) = 0$, $f(1-0) = \infty$. A szakadási hely olyan, mint a **2.8. ábra** C pontja, azzal a különbséggel, hogy az $f(x)$ függvény az $x = 1$ pontban nincs értelmezve.

2. Véges ugrás Az $x = a$ ponton való áthaladáskor az $f(x)$ függvény egy véges értékről egy másik véges értékre ugrik, tehát féloldali határértékei léteznek és különbözőek (a **2.8. ábrán** az A, F, G pontok). Az $f(x)$ függvény értéke az $x = a$ helyen nem kell, hogy definiálva legyen, ez a helyzet a G ponttal; az is lehetséges, hogy definiált, sőt megegyezik az $f(a-0)$ vagy az $f(a+0)$ értékkel (F pont),

de az is, hogy mindkettőtől különbözik (A pont).

■ **A:** $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$ **(2.7. ábra).**

■ **B:** $f(x) = E(x)$ **(2.1.a ábra)** $f(n-0)=n-1$, $f(n)=f(n+0)=n$ (n egész).

■ **C:** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$, $f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$, de $f(1)=\frac{1}{2}$.

3. Megszüntethető szakadás A $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határérték létezik, azaz $f(a-0)=f(a+0)$, de a függvény az $x=a$ helyen vagy nincs értelmezve, vagy $f(a)\neq\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (a **2.8. ábrán** a D pont). Ezt a szakadást *megszüntethető*nek mondjuk, hiszen $f(a)$ értékét a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határértékkel definiálva, az $f(x)$ függvény folytonossá válik az $x=a$ helyen. A függvénygörbéhez ily módon hozzáteszünk egy pontot, illetve egy „leugrott" pontot visszaviszünk a görbére. Megszüntethető szakadásra példák a különféle határozatlan kifejezések, főleg amelyek a L'HOSPITAL-szabállyal vagy más ismertetett módszerekkel vizsgálhatók és a velük definiált függvénynek véges határértéke van.

■ $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$: az $x=0$ helyen $\dfrac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés adódik, de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$; így az

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{ha } x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény folytonos.

2.1.5.4. Elemi függvények folytonossága és szakadási helyei

Az elemi függvények értelmezési tartományukban folytonosak; szakadási helyeik nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. A következő általános kijelentések igazak:

1. A racionális egész függvények, más néven polinomok az egész számegyenesen folytonosak.

2. A racionális törtfüggvények (alakjuk $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ahol $P(x)$ és $Q(x)$ polinom) mindenütt folytonosak, kivéve esetleg azon x értékeket, amelyekre $Q(x)=0$. Azokon az $x=a$ helyeken, ahol $Q(x)=0$, de $P(x)\neq 0$, a függvény szakad, mindkét oldalról valamilyen ∞ a határértéke, a szakadási helyet *pólusnak* nevezzük, ha P-t és Q-t kiterjesztjük a komplex síkra. Ha az a érték a nevezőnek és a számlálónak is zérushelye, akkor csak abban az esetben pólus, ha zérushelyként a multiplicitása (lásd 42. old.) a nevezőben nagyobb, mint a számlálóban. Ellenkező esetben a szakadás megszüntethető.

3. Irracionális függvények Ezen belül a polinomok pozitív egész kitevőjű gyökei; az értelmezési tartomány egészén folytonosak. Ha ez a kitevő páros, akkor az értelmezési tartomány intervallumokból áll, amelyek mindegyik határpontját az határozza meg, hogy ott a gyökjel alatti polinom pozitív értékekről negatívakra vált át. Törtfüggvények (pl. ha a gyökkitevő negatív) gyökei is ebbe a függvényosztályba tartoznak, ezek az említett eseten kívül még azokra az x értékekre sem folytonosak, amelyek a gyökjel alatti függvény szakadási helyei.

4. Trigonometrikus függvények A $\sin x$ és a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos; a $\operatorname{tg} x$ és a $\sec x$ függvénynek az $x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ helyeken végtelen ugrása van; a $\operatorname{ctg} x$ és a $\operatorname{cosec} x$ függvénynek az $x=n\pi$ (n most is egész) helyeken van végtelen ugrása.

5. Inverz trigonometrikus függvények A $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvények mindegyik ága invertálható; speciálisan a főágaik inverzei: az $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arcctg} x$ függvény is mindenütt folytonos. Az $\arcsin x$, $\arccos x$ függvények értelmezési tartománya a $-1\leq x\leq +1$ intervallum, mert ez a $\sin x$ a $\cos x$ főértékének, más szóval főágának (is) az értékkészlete és ezen inverzek is folytonosak az értelmezési tartomány minden pontjában.

6. Az e^x vagy általában a^x, $a > 0$ exponenciális függvény Mindenütt folytonos.

7. Tetszőleges pozitív alapú (az 1-et kivéve) log x logaritmusfüggvény A függvény minden pozitív x értékre folytonos, és az $x = 0$ helyen $\lim_{x\to 0+0} \log x = -\infty$ miatt nem megszüntethető szakadása van.

8. Elemi függvények általában A folytonosságot az összetett kifejezésben fellépő egyes elemi függvényeknél "belülről kifelé" minden x értékre a fent ismertetett eseteknek megfelelően meg kell vizsgálni (lásd még Közvetett függvények, 60. old.).

■ Meghatározandók az $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$ függvény szakadási helyei. Az $\dfrac{1}{x-2}$ kitevőnek az $x = 2$ helyen végtelen ugrása van; $x = 2$-re $e^{\frac{1}{x-2}}$-nek is végtelen ugrása van: $\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$, $\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty$. Az y függvénynek az $x = 2$ helyen véges nevezője van. Következésképpen az $x = 2$ helyen olyan típusú végtelen ugrás lép fel, mint a **2.8. ábrán** a C pontban (180°-kal elforgatva).
Az $x = 0$ helyen a nevező nullává válik, hasonlóan azokhoz az x helyekhez, amelyeken $\sin \sqrt[3]{1-x}$ egyenlő nullával. Az utóbbiak a $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$, azaz az $x = 1 - n^3\pi^3$ értékek, ahol n tetszőleges egész szám. A számláló ezen értékek egyikére sem nulla, úgyhogy a függvénynek az $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3$, ... helyeken mindkét oldalon ugyanolyan típusú szakadásai vannak, mint amilyen a **2.8. ábrán** az E pont jobboldali környezetében.

2.1.5.5. Folytonos függvények tulajdonságai

1. Folytonos függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának folytonossága Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor ott $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ és $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is folytonos függvény; a hányados esetében még fel kell tenni, hogy az intervallumban $g(x) \neq 0$.

2. Az $y = f(u(x))$ közvetett függvény folytonossága Ha $f(u)$ az u folytonos függvénye és $u(x)$ az x folytonos függvénye, továbbá $f(u)$ értelmezési tartománya tartalmazza $u(x)$ értékkészletét, akkor az $y = f(u(x))$ közvetett függvény x-re nézve folytonos, és fennáll $u(x)$ értelmezési tartományának bármely a pontjára — a végpontokban csak a megfelelő oldalról —, hogy

$$\lim_{x\to a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x\to a} u(x)\right) = f(u(a))\,. \tag{2.25}$$

Ez azt jelenti, hogy egyváltozós folytonos függvény bármely folytonos függvénye szintén folytonos.

3. Bolzano tétele Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és folytonos, és az intervallum végpontjaiban felvett $f(a)$, $f(b)$ függvényértékek különböző előjelűek, akkor létezik legalább egy c érték, amelyre $f(x)$ egyenlő nullával:

$$f(c) = 0, \quad \text{ahol} \quad a < c < b\,. \tag{2.26}$$

Geometriailag ez azt fejezi ki, hogy folytonos függvény görbéje az x-tengely egyik oldaláról a másik oldalára való átmenet során legalább egyszer metszi az x-tengelyt.

4. Középértéktétel Eszerint, ha az $f(x)$ függvény egy intervallumban értelmezve van és folytonos, továbbá az intervallum két a, b pontjában (legyen pl. $a < b$) különböző A, B értékeket vesz fel, azaz

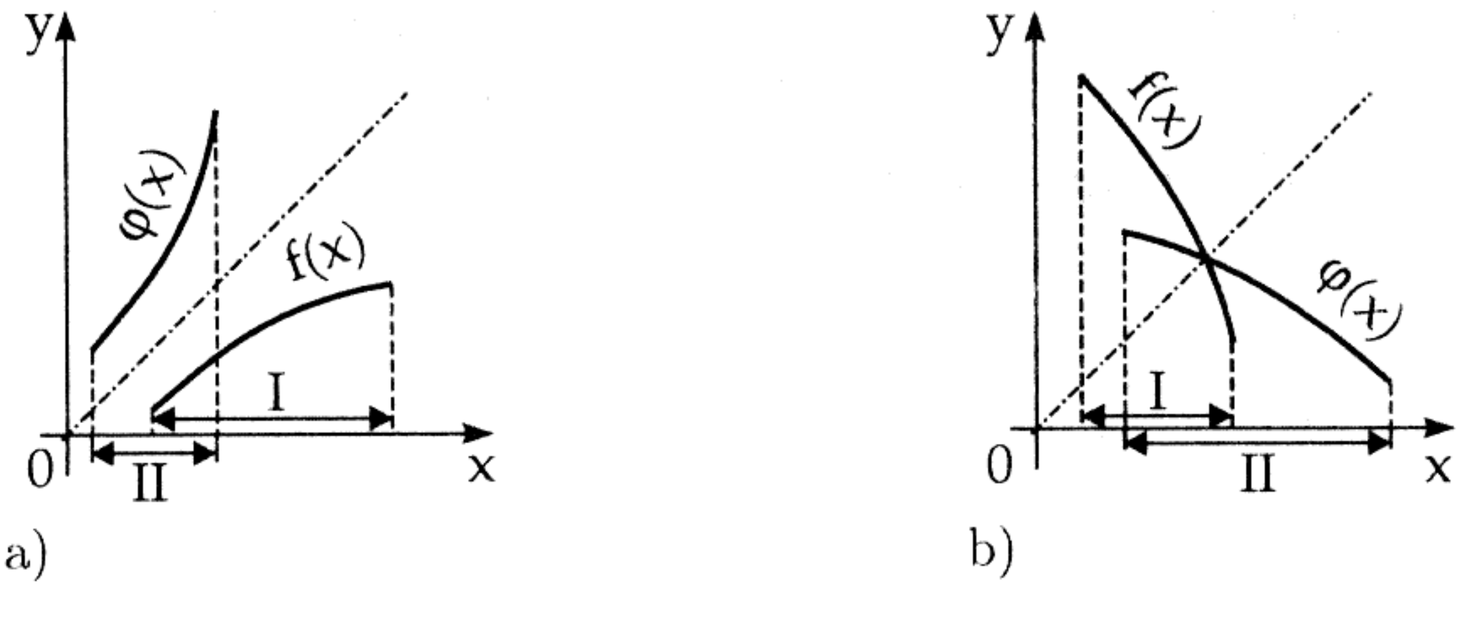
$$f(a) = A\,, \quad f(b) = B\,, \quad A \neq B\,, \tag{2.27a}$$

akkor az A és B közötti minden C számhoz található a és b között legalább egy c pont, amelyre teljesül

$$f(c) = C \quad (a < c < b\,, \quad A < C < B \text{ vagy } A > C > B). \tag{2.27b}$$

Másképpen kifejezve: A folytonos $f(x)$ függvény minden A és B közötti értéket legalább egyszer felvesz.

5. Inverz függvény létezése Ha az $f(x)$ függvény az I intervallumon értelmezve van, folytonos és szigorúan növekszik vagy csökken (lásd a két illusztrációt), akkor a függvénynek van folytonos, szintén szigorúan növekedő, ill. csökkenő $\varphi(x)$ inverz függvénye (lásd még 51. old.), amely az $f(x)$ függvény által felvett értékek mindig intervallumot adó II tartományában van értelmezve **(2.9. ábra)**, és általában is függvény és inverze grafikonja egymásból az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel kapható meg.



2.9. ábra.

6. Folytonos függvény korlátosságáról szóló tétel Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és ott folytonos, akkor ebben az intervallumban korlátos is, azaz található két m, M szám úgy, hogy

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{ha} \quad a \leq x \leq b. \tag{2.28}$$

7. Weierstrass tétele Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és folytonos, akkor a függvénynek ott létezik egy M abszolút maximuma és egy m abszolút minimuma, vagyis az intervallumban található legalább egy c és legalább egy d pont úgy, hogy $a \leq x \leq b$ esetén

$$m = f(d) \leq f(x) \leq f(c) = M\,. \tag{2.29}$$

Egy folytonos függvény legnagyobb és legkisebb értéke közötti különbséget a függvény *ingadozás*ának nevezzük a megadott intervallumon. Függvény adott intervallumon vett ingadozásának fogalma kiterjeszthető olyan függvényekre is, amelyeknek ott nincs legnagyobb vagy legkisebb értékük (amelyek szerepét átveszi a legkisebb felső korlát, azaz szuprémum [sup], illetve a legnagyobb alsó korlát, azaz infimum [inf]) (lásd [22.16], 3. kötet).

2.2. Elemi függvények

Az *elemi függvények*et olyan képletek definiálják, amelyekben véges sok, a független változóval és konstansokkal elvégzendő művelet szerepel. Műveleten itt a négy alapművelet, hatványozás tehát gyökvonás is értendő; felhasználható továbbá az exponenciális, a logaritmusfüggvény, valamint a trigonometrikus függvények és a függvénykompozíció, továbbá az inverz függvények képzése, minden olyan intervallumon, ahol "belülről kifelé" haladva a kapott függvények mindegyike definiált. Az elemi függvények *algebrai* — ezen belül racionális és irracionális — és *transzcendens* függvényekre oszthatók fel.
Elemi függvényeken kívül *nem elemi függvények*et is lehet definiálni pl. az analízis ismert eszközeivel (lásd pl. 467. old.).

2.2.1. Algebrai függvények

Az *algebrai függvényeket* az jellemzi, hogy az x argumentumot az y függvénnyel egy

$$p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \ldots + p_n(x)y^n = 0 \tag{2.30}$$

alakú *algebrai egyenlet* kapcsolja össze, ahol p_0, p_1, $\ldots$, p_n az x változó polinomjai.

■ $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$, azaz $p_0(x) = x^3 - 1$, $p_1(x) = -4x$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 3x$.

Ha sikerül a (2.30) algebrai egyenletből algebrai alapműveletekkel y-t kifejezni, akkor a következő, legegyszerűbb algebrai függvénytípusok valamelyikével van dolgunk (amelyek közül az első két típust együtt racionális függvényeknek hívjuk):

2.2.1.1. Racionális egész függvények (polinomok)

Az x argumentummal csak összeadást, kivonást és szorzást kell végezni.

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\,. \tag{2.31}$$

Speciálisan az $y = a$ függvényt *állandó*nak, az $y = ax + b$ függvényt *lineáris függvény*nek, az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt pedig *másodfokú* vagy *kvadratikus* függvénynek nevezzük.

2.2.1.2. Racionális törtfüggvények

Racionális törtfüggvény az, amelyik előállítható két racionális egész függvény hányadosaként:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}. \tag{2.32a}$$

Speciálisan az

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{2.32b}$$

függvények a *lineáris törtfüggvények.*

2.2.1.3. Irracionális függvények

A racionális törtfüggvényeknél említett műveleteken kívül itt az x argumentum még gyökjel alatt is felléphet, másképpen szólva a függvényt megadó formulában szerepelhet racionális kitevőjű hatványozás is.

■ **A:** $y = \sqrt{2x + 3}$, ■ **B:** $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)\sqrt{x}}$.

2.2.2. Transzcendens függvények

A *transzcendens függvények* nem írhatók le (2.30) típusú algebrai egyenlettel. A következőkben bemutatjuk a legegyszerűbb transzcendens elemi függvényeket.

2.2.2.1. Exponenciális függvények

Az exponenciális függvényeknél (lásd 72. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a kitevőben fordul elő.

■ **A:** $y = e^x$, ■ **B:** $y = a^x$, $(a > 0)$ ■ **C:** $y = 2^{3x^2-5x}$.

2.2.2.2. Logaritmusfüggvények

A logaritmusfüggvényeknél (lásd 72. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a logaritmusjel alatt fordul elő.

■ **A:** $y = \ln x$, ■ **B:** $y = \lg x$, ■ **C:** $y = \log_2(5x^2 - 3x)$.

2.2.2.3. Trigonometrikus függvények

A trigonometrikus függvényeknél (lásd 75. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a sin, cos, tg, ctg, sec, cosec valamelyikébe van behelyettesítve.

■ **A:** $y = \sin x$, ■ **B:** $y = \cos(2x + 3)$, ■ **C:** $y = \mathrm{tg}\,\sqrt{x}$.

Vegyük figyelembe, hogy a trigonometrikus függvények argumentumát nem közvetlenül szögben mérjük, mint a geometriai definíciónál, hanem radiánban, ami bármilyen valós szám lehet. A trigonometrikus függvények geometriai szemlélet nélkül, tisztán analitikus módon is definiálhatók. Megtehetjük pl., hogy e függvényeket sorfejtéssel állítjuk elő, vagy megoldjuk a $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ differenciálegyenletet az $x = 0$ helyre vonatkozó $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$ kezdeti feltételek mellett, aminek a $\sin x$ az egyedüli megoldása. Ha nem jelöljük másként, trigonometrikus függvények argumentuma számszerűen a szög radiánjával, másképp *ívmérték*ével egyezik meg.

2.2.2.4. Inverz trigonometrikus függvények

Az x változó vagy annak egy algebrai függvénye az arcsin, arccos stb. inverz trigonometrikus függvények (lásd 86. old.) argumentumában lép fel.

■ **A:** $y = \arcsin x$, ■ **B:** $y = \arccos\sqrt{1 - x}$.

2.2.2.5. Hiperbolikus függvények

(Lásd 90. old.)

2.2.2.6. Inverz hiperbolikus függvények

(Lásd 93. old.)

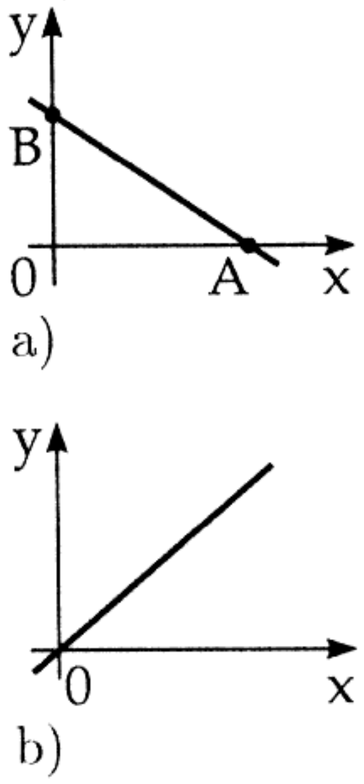
Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy az elemi függvények halmaza a felsoroltakból kiindulva az említett műveletek véges sokszori alkalmazásával adódó függvények összessége.

■ **A:** $y = \ln \sin x$, ■ **B:** $y = \dfrac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x}$.

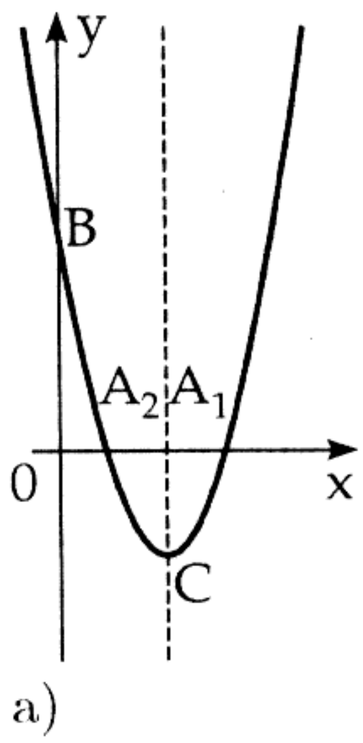
2.3. Polinomok

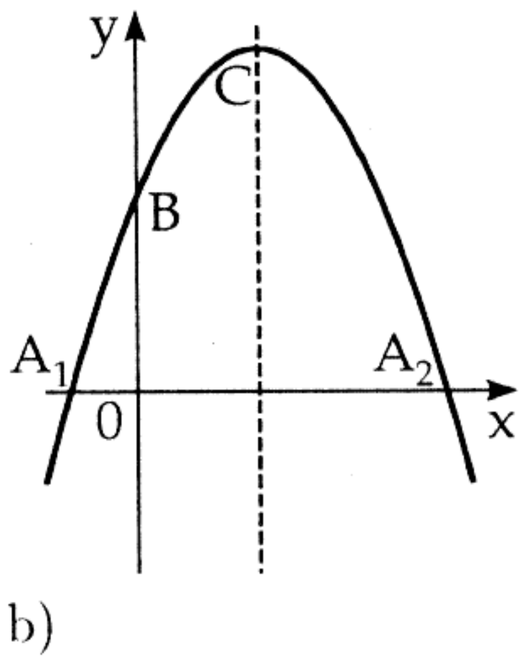
2.3.1. Lineáris függvény

Az
$$y = ax + b \tag{2.33}$$
lineáris függvény grafikus ábrázolása *egyenest* ad **(2.10.a ábra)**.
Ha $a > 0$, a függvény monoton növekszik, ha pedig $a < 0$, akkor monoton csökken; $a = 0$ esetén a függvény konstans. A tengelyekkel való metszéspontok $A(-b/a, 0)$ és $B(0, b)$ (részletesebben lásd 193. old.). A $b = 0$ esetben az
$$y = ax, \qquad \textit{egyenes arányosságot} \tag{2.34}$$
kapjuk, amelynek ábrája egy, a kezdőponton átmenő egyenes **(2.10.b ábra)**.



2.10. ábra.





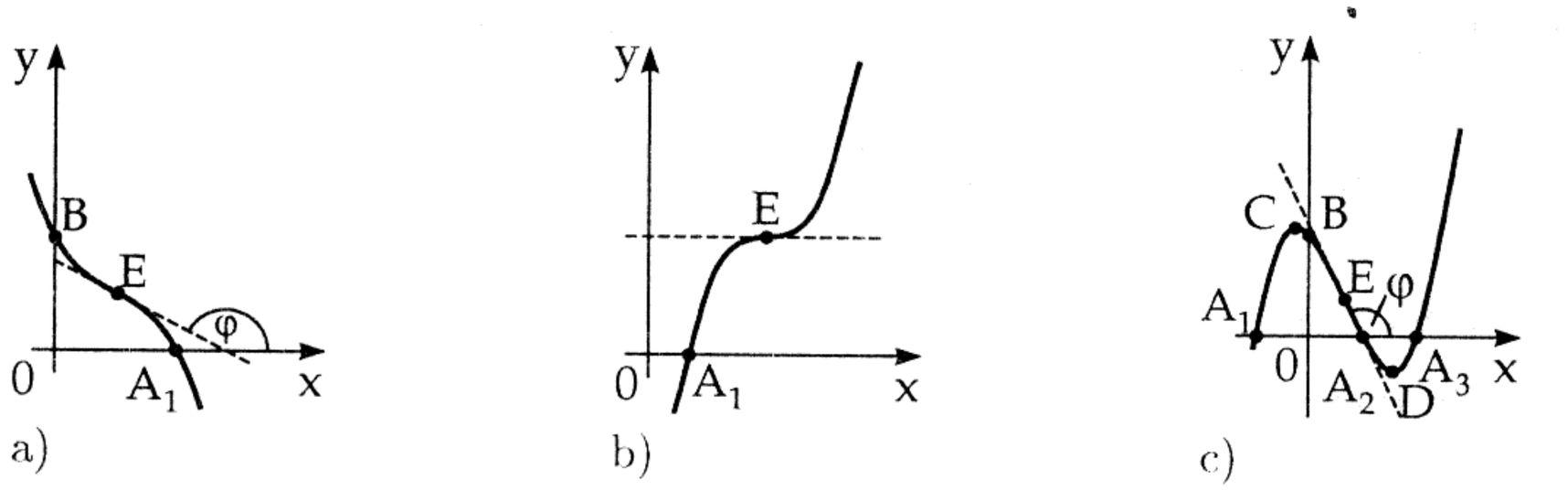
2.11. ábra.

2.3.2. Másodfokú polinom

Az
$$y = ax^2 + bx + c \tag{2.35}$$
másodfokú racionális egész függvény grafikus ábrázolása olyan *parabolát* ad, amelynek függőleges szimmetriatengelye az $x = -b/2a$ helyen metszi az x-tengelyt **(2.11. ábra)**. Ha $a > 0$, akkor a függvény a $-\infty$-ből indulva először csökken, elér egy minimumot, majd a $+\infty$-ig növekszik. Ha $a < 0$, akkor a függvény felcserélt értékhatárokkal először növekszik, elér egy maximumot, utána pedig csökken. Az x-tengellyel való A_1, A_2 metszéspontok $\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$, az y-tengellyel való B metszéspont $(0, c)$.
A szélsőérték-pont $C\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ (a paraboláról részletesebben lásd 203. old.).

2.3.3. Harmadfokú polinom

Az
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{2.36}$$
harmadfokú racionális egész függvény görbéje egy *harmadfokú parabola* **(2.12.a, b, c ábrák)**.



2.12. ábra.

A függvény viselkedése a-tól és a $\Delta = 3ac - b^2$ diszkriminánstól függ. Ha $\Delta \geq 0$ **(2.12.a, b ábrák)**, akkor a függvény $a > 0$ esetén monoton növekszik, $a < 0$ esetén monoton csökken. Ha $\Delta < 0$, akkor a függvénynek egy maximuma és egy minimuma van **(2.12.c ábra)**: Ebben az esetben, ha $a > 0$, akkor a függvény $-\infty$-ről a maximumra növekszik, majd a minimumra csökken, végül $+\infty$-ig növekszik; ha $a < 0$, akkor $+\infty$-ről a minimumra csökken, utána a maximumra növekszik, majd $-\infty$-re csökken. Az x-tengellyel való metszéspontok mint a (2.36)-ból $y = 0$ helyettesítéssel kapott egyenlet valós gyökei számíthatók ki. A valós gyökök száma lehet egy, kettő (ekkor egy gyök kétszeres és abban a pontban érintkezés van) vagy három: A_1, A_2 és A_3 . Az x-tengellyel való metszéspont $B(0, d)$, a C, D szélsőérték-pontok — a $\pm$-ok értéke azonos kell, hogy legyen — $\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, \frac{d + 2b^3 - 9abc \pm (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$. Az inflexiós pont, amely egyúttal a görbe szimmetriapontja, $E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$. Ebben a pontban az érintő iránytangense $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

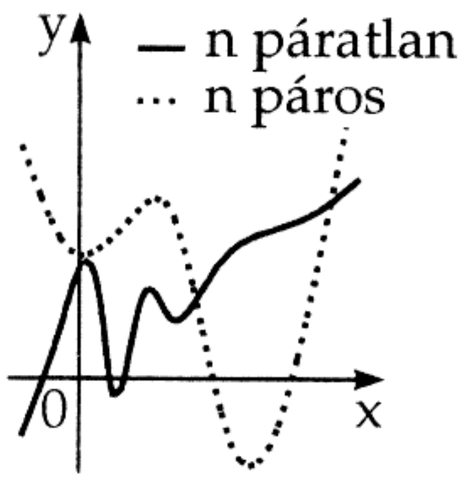
2.3.4. n-edfokú polinom

Az
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{2.37}$$
n-edfokú racionális egész függvény ábrája *parabolikus típusú n-edfokú görbe* (**2.13. ábra**; lásd 193. old.).

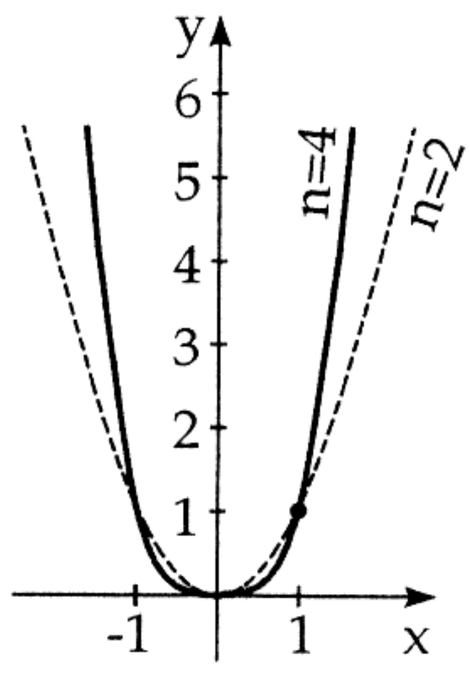
1. eset: n páratlan Ha $a_n > 0$, akkor y folytonosan halad $-\infty$ felől $+\infty$ felé, ha pedig $a_n < 0$, akkor $+\infty$ felől $-\infty$ felé. Az x-tengelyt a görbe legfeljebb n-szer metszheti, ill. érintheti (n-edfokú egyenletek megoldásáról lásd a 42 és a rákövetkező oldalakat, valamint a 910. oldalt). A (2.37) függvénynek vagy nincs szélsőértéke, vagy páros számú és $(n - 1)$-nél nem több szélsőértéke van, amelyek váltakozva minimumok és maximumok; az inflexiós pontok száma páratlan, amely 1 és $n-2$ közé esik. Aszimptoták és szinguláris pontok nincsenek.

2. eset: n páros Ha $a_n > 0$, akkor y folytonosan halad $+\infty$ felől $+\infty$ felé, ha pedig $a_n < 0$, akkor $-\infty$ felől $-\infty$ felé. A görbe az x-tengelyt legfeljebb n-szer metszheti, ill. érintheti; a maximumok és minimumok váltakozva fordulnak elő, páratlan sok van belőlük, és legfeljebb $n - 1$; az inflexiós pontok száma páros, amely most is 1 és $n - 2$ közé esik. Aszimptoták és szinguláris pontok nincsenek.

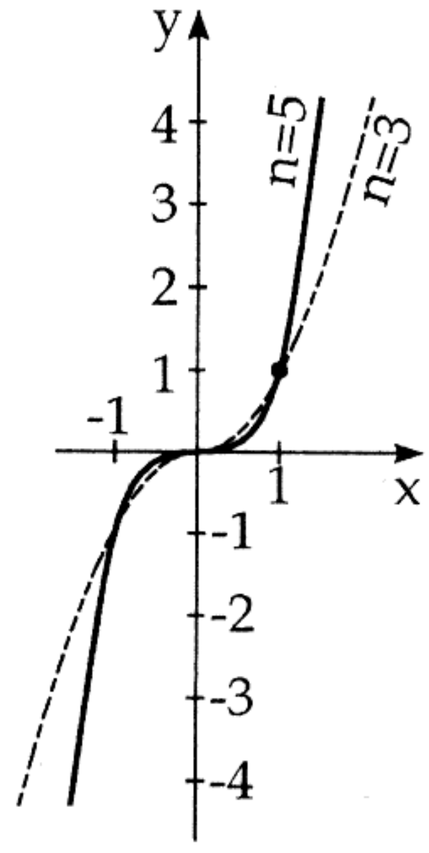
A görbe megrajzolása előtt ajánlatos először a szélsőértékeket, inflexiós pontokat és az első deriált ezen pontokban felvett értékét meghatározni, utána berajzolni a görbe itteni érintőit, végül pedig mindezen pontokat folytonosan összekötni egymással. Az alábbiakban az $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$ speciális esettel foglalkozunk.



2.13. ábra.



a)



b)

2.14. ábra.

2.3.5. n-edrendű parabola

Az $$y = ax^n \tag{2.38}$$ függvény görbéje egy *n-edrendű parabola* ($n > 0$ egész szám) **(2.14. ábra)**.

1. Az $a = 1$ speciális eset: Az $y = x^n$ görbe átmegy a $(0, 0)$, $(1, 1)$ pontokon, és érinti vagy metszi az x-tengelyt a koordinátarendszer kezdőpontjában. Páros n esetén az y-tengelyre szimmetrikus görbét kapunk, amelynek a kezdőpontban minimuma van. Páratlan n esetén a görbe centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára, és ez a pont egyben inflexiós pont is. Aszimptota nincs.

2. Az $a \neq 0$ általános eset:

Az $y = ax^n$ görbét az $y = x^n$ függvény görbéjéből az abszcisszák $|a|$-szeres megnyújtásával kapjuk. Ha $a < 0$, az $y = |a|x^n$ görbét tükrözzük az x–tengelyre.

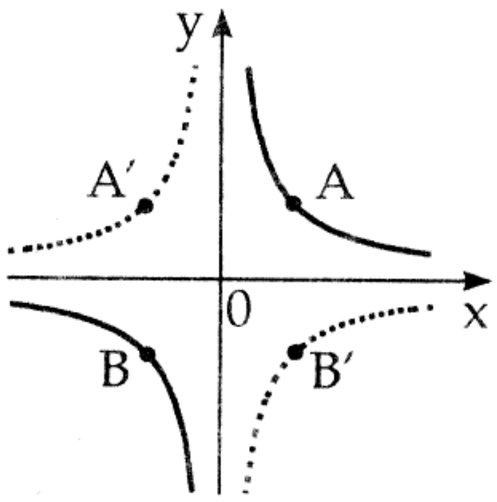
2.4. Racionális törtfüggvények

2.4.1. Fordított arányosság

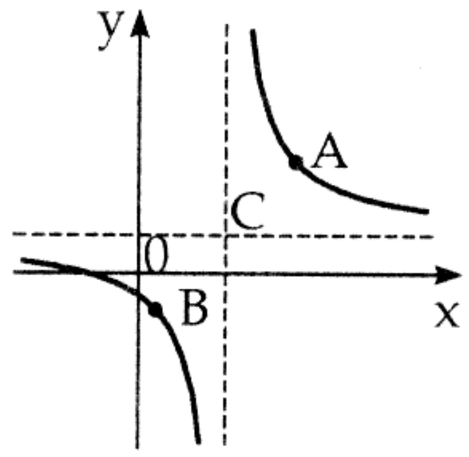
Az $$y = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0 \tag{2.39}$$ függvény görbéje olyan *egyenlő oldalú hiperbola*, amelynek a koordinátatengelyek az aszimptotái **(2.15. ábra)**. Az $x = 0$ helyen $y = \pm\infty$ típusú szakadás van. Ha $a > 0$, akkor a függvény 0-ról $-\infty$-re és $+\infty$-ről 0-ra csökken (folytonosan rajzolt vonal az 1. és 3. síknegyedben). Ha $a < 0$, akkor a függvény 0-ról $+\infty$-re és $-\infty$-ről 0-ra növekszik (szaggatott vonal a 2. és 4. síknegyedben). Az A, B, illetve A', B' $\left(\pm\sqrt{|a|}, +\sqrt{|a|}\right)$ és $\left(\pm\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|}\right)$ a görbe két ágának szimmetria-középpontja, ahol mindkét esetben a zárójelbeli vessző két oldalán $a > 0$ esetén az egyező, $a < 0$ esetén pedig az ellentétes előjelek veendők. Szélsőértékek nincsenek (a hiperboláról részletesebben lásd 200. old.).

1. Lineáris törtfüggvény

Az $$y = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}, \tag{2.40}$$ (ahol a_2 és az $a_1 b_2 - b_1 a_2$ determináns $\neq 0$) függvény görbéje olyan *egyenlő oldalú hiperbola*, amelynek az aszimptotái — $y = \frac{a_1}{a_2}$, ill. $x = -\frac{b_2}{a_2}$ — párhuzamosak a koordinátatengelyekkel **(2.16. ábra)**. A görbe



2.15. ábra.



2.16. ábra.

szimmetria-középpontja $C\left(-\frac{b_2}{a_2}\,,\frac{a_1}{a_2}\right)$. A (2.39) egyenlet a paraméterének a $-\frac{\Delta}{{a_2}^2}$ érték felel meg, ahol $\Delta=\begin{vmatrix}a_1\,b_1\\a_2\,b_2\end{vmatrix}$. A hiperbola két ágának A, B szimmetria-középpontjai $\left(-\frac{b_2\pm\sqrt{|\Delta|}}{a_2}\,,\frac{a_1+\sqrt{|\Delta|}}{a_2}\right)$ és $\left(-\frac{b_2\pm\sqrt{|\Delta|}}{a_2}\,,\frac{a_1-\sqrt{|\Delta|}}{a_2}\right)$, ahol mindkét esetben a vessző két oldalán $\Delta>0$ esetén az egyező, $\Delta<0$ esetén az ellentétes előjelek veendők. A szakadási hely $x=-\frac{b_2}{a_2}$. Ha $\Delta<0$, a függvény $\frac{a_1}{a_2}$-ről $-\infty$-re és $+\infty$-ről $\frac{a_1}{a_2}$-re csökken (az ábra ezt az esetet mutatja). Ha $\Delta>0$, a függvény $\frac{a_1}{a_2}$-ről $+\infty$-re és $-\infty$-ről $\frac{a_1}{a_2}$-re növekszik. Szélsőértékek nincsenek.

Most néhány olyan racionális függvénnyel foglalkozunk, ahol a számláló és a nevező legalább egyike másodfokú, és egyikük sem magasabb fokú.

2.4.2. Harmadrendű görbe, I. típus

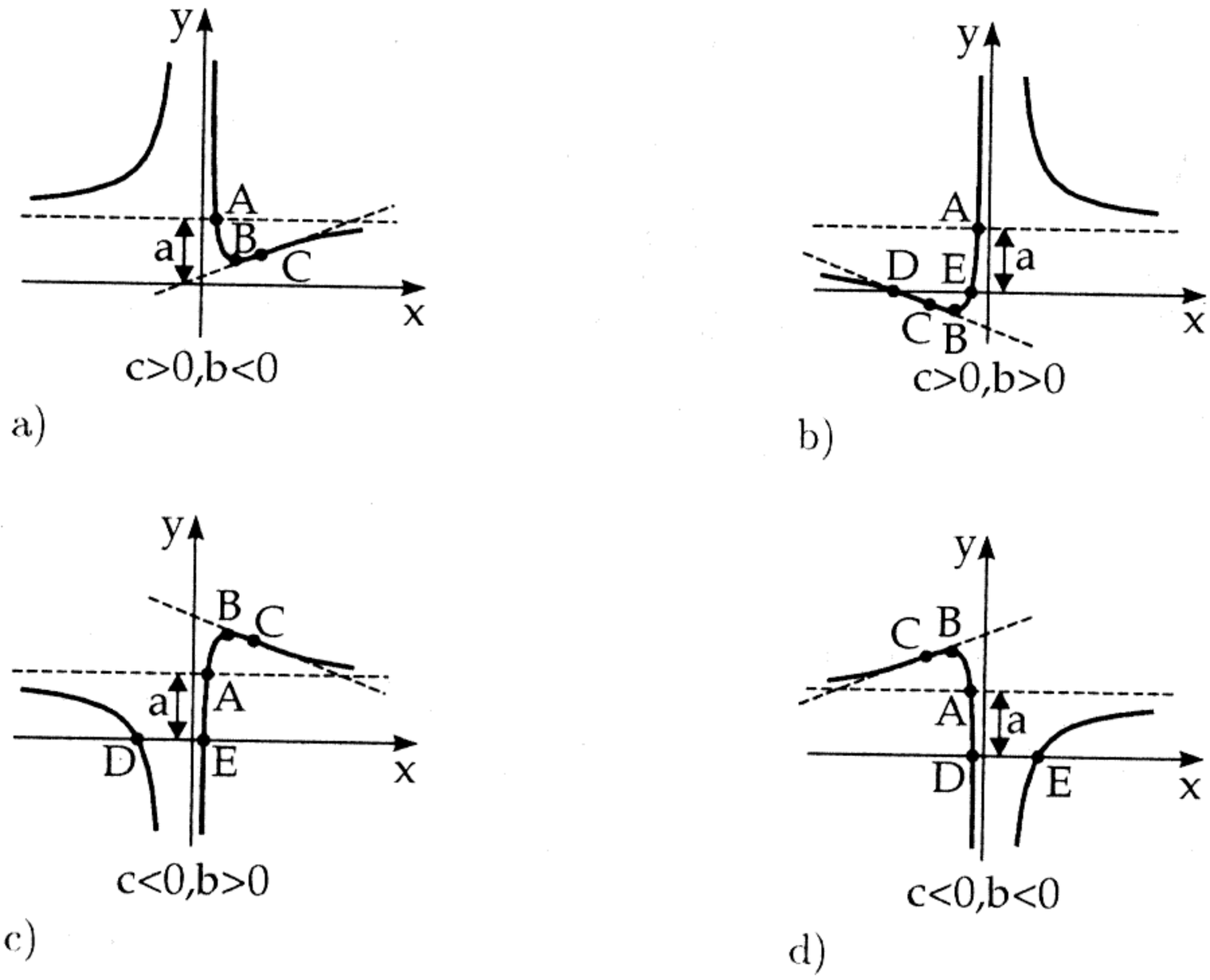
Az $$y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\quad\left(=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right)\quad(b\neq0\,,\ \ c\neq0)\tag{2.41}$$

függvény (**2.17. ábra**, $a>0$ eset) harmadrendű görbét (I. típus) ír le. Ennek két aszimptotája van, $x=0$ (c előjelétől függően az y-tengely pozitív, ill. negatív fele) és $y=a$, és két ágból áll, amelyek egyike mentén y monoton a és $+\infty$, ill. $-\infty$ értékhatárok között, míg a másik ág három jellegzetes ponton megy át: az aszimptotával való $A\left(-\frac{c}{b}\,,a\right)$ metszésponton, a $B\left(-\frac{2c}{b}\,,a-\frac{b^2}{4c}\right)$ szélsőérték-ponton és a $C\left(-\frac{3c}{b}\,,a-\frac{2b^2}{9c}\right)$ inflexiós ponton. Ezen ágak helyzete b és c előjelétől függően négyféle lehet (**2.17. ábra**). Az x-tengellyel való D, E metszéspontok $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$; számuk lehet kettő, egy (érintkezés) vagy nulla aszerint, amint $b^2-4ac>0\,,\ =0$ vagy <0.

A (2.41) függvény $b=0$ esetén az $y=a+\frac{c}{x^2}$ függvénybe (lásd a reciprok hatvány **2.20. ábráját**, $a=0$ eset), $c=0$ esetén pedig a már tárgyalt $y=\frac{ax+b}{x}$ lineáris törtfüggvénybe, (2.40) speciális esetébe megy át.

2.4.3. Harmadrendű görbe, II. típus

Az $$y=\frac{1}{ax^2+bx+c}\,,\quad a\neq0\tag{2.42}$$



2.17. ábra.

függvény *harmadrendű görbét* (II. típus) ír le, amely szimmetrikus az $x = -\dfrac{b}{2a}$ függőleges egyenesre, és amelynek aszimptotája az x-tengely **(2.18. ábra)**. Viselkedése a és $\Delta = 4ac - b^2$ előjelétől függ. Az $a > 0$ és $a < 0$ eset közül csak az elsővel foglalkozunk, mert a második az $y = \dfrac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ függvény görbéjének az x-tengelyre való tükrözésével adódik.

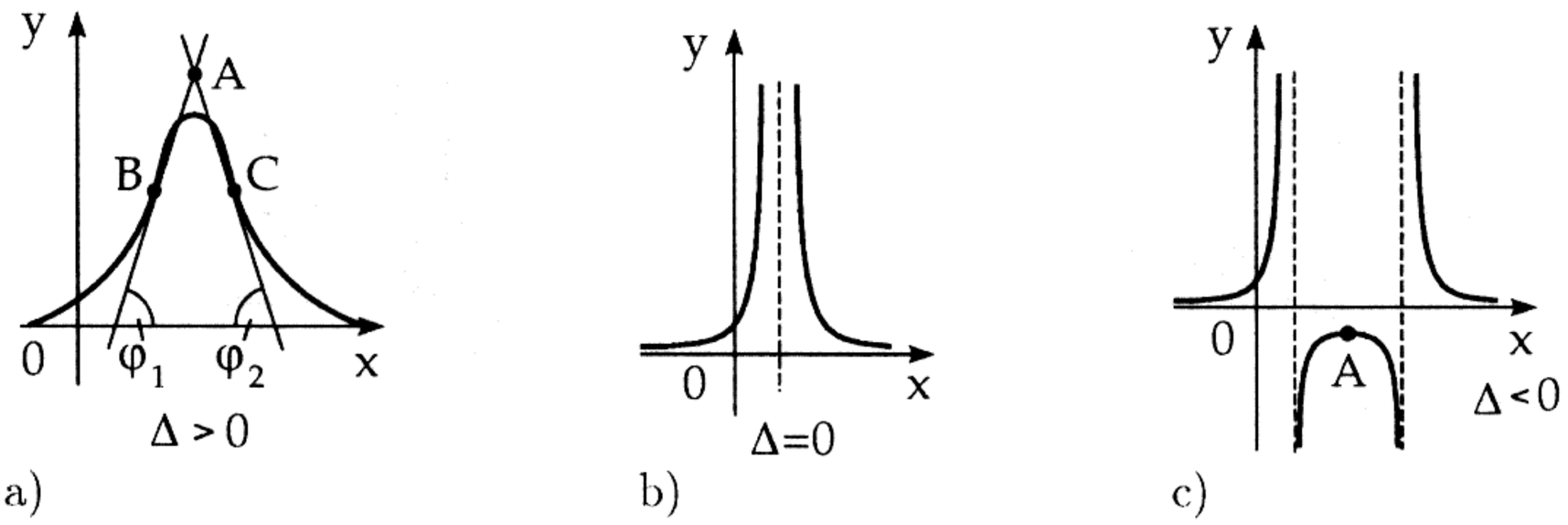
a) eset, $\Delta > 0$: A függvény minden x-re pozitív és folytonos; $x = -\infty$-ből indulva 0-ról a maximumra növekszik, majd megint 0-ra csökken. Az A maximumpont $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$, a B, C inflexiós pontok $\left(-\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \dfrac{3a}{\Delta}\right)$; az utóbbiakhoz tartozó *iránytangensek* $\operatorname{tg}\varphi = \pm a^2 \left(\dfrac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ **(2.18.a ábra)**.

b) eset, $\Delta = 0$: A függvény minden x-re pozitív, $x = -\infty$-ből indulva 0-ról $+\infty$-re növekszik, az $x = -\dfrac{b}{2a}$ helytől balra és jobbra folytonos, itt mindkét irányból $y = +\infty$ típusú szakadása van, és innen kezdve megint 0-ra csökken **(2.18.b ábra)**.

c) eset, $\Delta < 0$: A függvény $x = -\infty$-ből indulva 0-ról $+\infty$-ig növekszik, a szakadási helyen átugrik $-\infty$-re, innen egy maximumon keresztül újra $-\infty$ felé megy, ahonnan $+\infty$-re ugrik, végül $+\infty$-ben határértékben 0-ra csökken. Az A maximumhely $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$; a szakadási helyek $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$, ezen kívül folytonos **(2.18.c ábra)**.

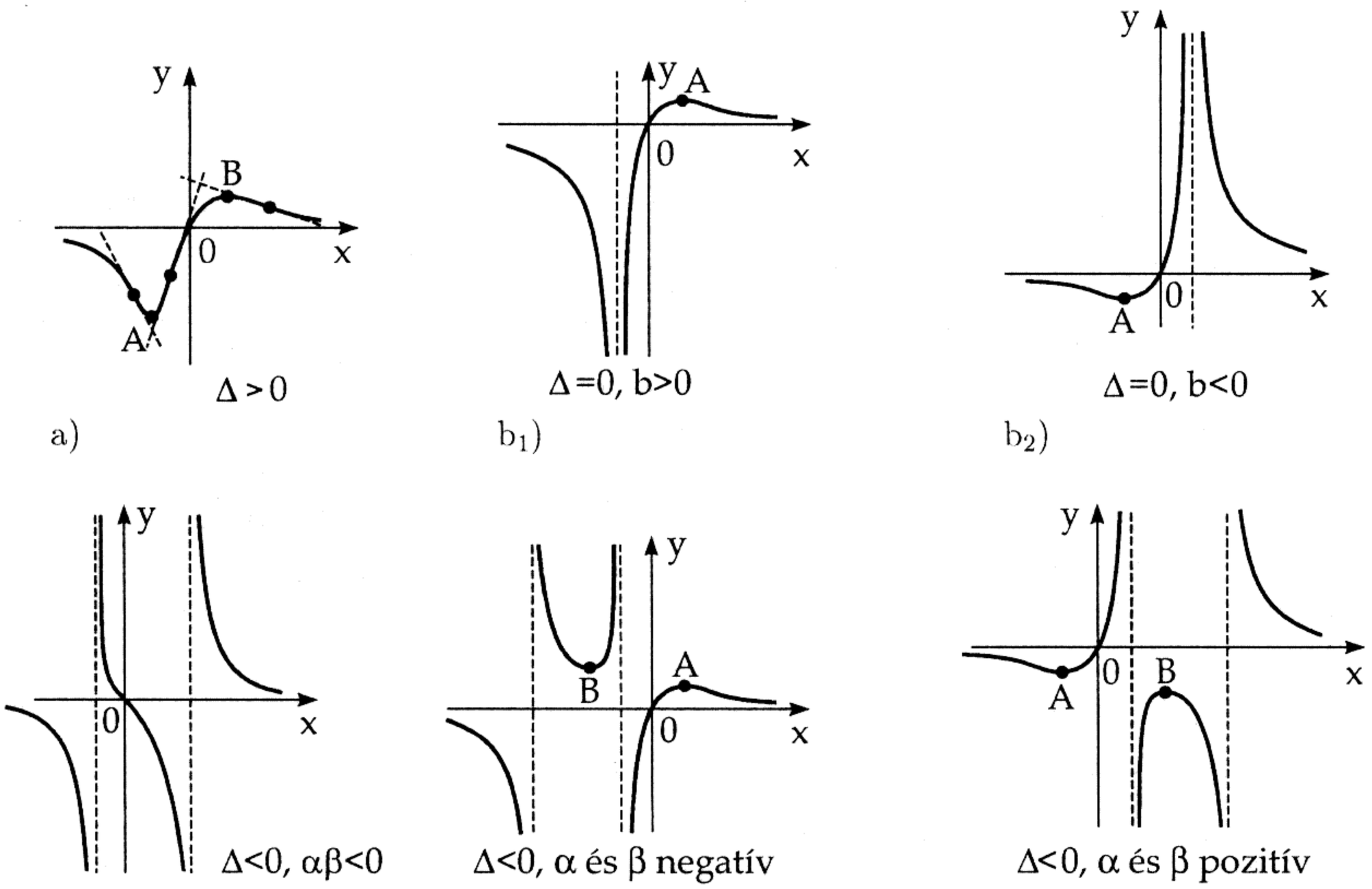
2.4.4. Harmadrendű görbe, III. típus

Az
$$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0 \tag{2.43}$$
függvény *harmadrendű görbét* (III. típus) ír le, amely átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján, és



2.18. ábra.

amelynek aszimptotája az x-tengely **(2.19. ábra)**. A függvény menete függ a és $\Delta = 4ac - b^2$ előjelétől, valamint $\Delta < 0$ esetén az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet α, β gyökeinek előjelétől, $\Delta = 0$ esetén pedig b előjelétől. Az $a > 0$ és $a < 0$ eset közül csak az elsővel foglalkozunk, mert a második az $y = \dfrac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ függvény görbéjének az x-tengelyre való tükrözésével adódik.



2.19. ábra.

a) eset, $\Delta > 0$: Emiatt $c > 0$, a függvény folytonos, $x = -\infty$-ből indulva negatív értékeken át határértékben 0-ról a minimumra csökken, utána — 0-tól jobbra pozitív értékeken át — a maximumra növekszik, majd határértékben újra 0-ra csökken.

Az A, B szélsőérték-pontok $\left(\pm\sqrt{\dfrac{c}{a}},\ \dfrac{1}{b \pm (a+c)}\right)$; ezenkívül három inflexiós pont van **(2.19.a ábra)**.

b) eset, $\Delta = 0$: A görbe menete b előjelétől függ (ha $b = 0$, akkor c is 0 és a már tárgyalt hiperbolát

kapnánk vissza; emiatt $b \neq 0$ és ekkor $c > 0$):

• $b > 0$: A függvény 0-ról $-\infty$-re csökken, van egy szakadási helye, amely után $-\infty$-ről a maximumra növekszik, majd 0-ra csökken **(2.19.b$_1$ ábra)**. A maximumpont $A\left(+\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{b+a+c}\right)$.

• $b < 0$: A függvény 0-ról a minimumra csökken, majd átmegy a kezdőponton, ezután 0-ról $+\infty$-re növekszik, van egy szakadási helye, végül $+\infty$-ről 0-ra csökken **(2.19.b$_2$ ábra)**. A minimumpont $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{b-(a+c)}\right)$.

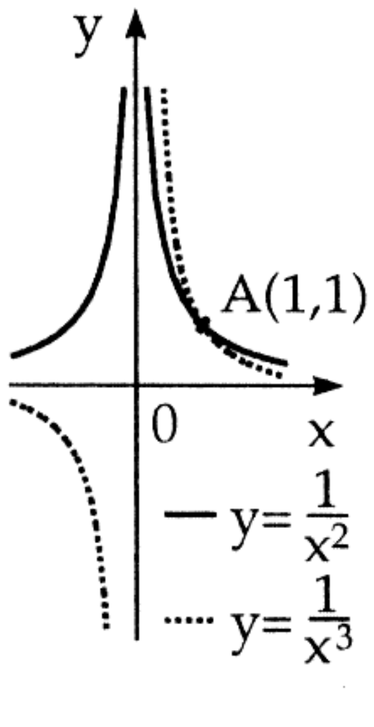
A szakadási hely mindkét esetben $x = -\frac{b}{2a}$, azon kívül a függvény folytonos; mindkét görbének egy inflexiós pontja van.

c) eset, $\Delta < 0$: A függvénynek két szakadási helye van, $x = \alpha$ és $x = \beta$; a függvény menete α és β előjelétől függ.

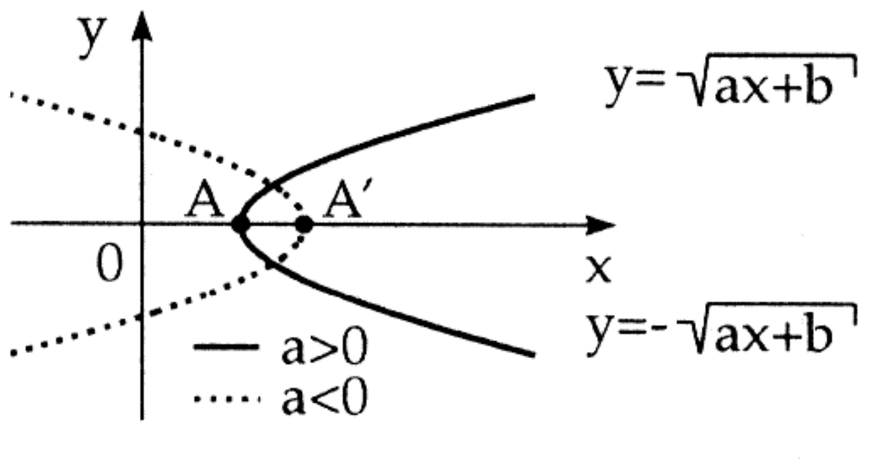
• α és β előjele különböző: A függvény 0-ról $-\infty$-re csökken, átugrik $+\infty$-re, $+\infty$-ről megint $-\infty$-ig csökken és közben áthalad a kezdőponton, másodszor is $+\infty$-re ugrik, majd onnan 0-ra csökken **(2.19.c$_1$ ábra)**. Szélsőértékek nem lépnek fel.

• α és β előjele negatív: A függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, átugrik $+\infty$-re, innen egy minimumon keresztül újra $+\infty$ felé halad, átugrik $-\infty$-re, egy maximumig növekszik, végül aszimptotikusan 0-ra csökken **(2.19.c$_2$ ábra)**.
Az A, B szélsőértékhelyek ugyanazokkal a képletekkel számíthatók ki, mint az **a)** esetben.

• α és β előjele pozitív: A függvény 0-ról a minimumra csökken, majd $+\infty$-ig növekszik, átugrik $-\infty$-re, áthalad egy maximumon és újra $-\infty$-hez tart, átugrik $+\infty$-re, végül pedig 0-hoz tart **(2.19.c$_3$ ábra)**.
Az A, B szélsőértékhelyek ugyanazokkal a képletekkel számíthatók ki, mint az **a)** esetben.
Mindhárom utóbbi esetben a görbének egy inflexiós pontja van. A szélsőértékhelyek képletében szereplő nevezőkről mindegyik esetben elemi számolással kimutatható, hogy nem lehetnek 0-k.



2.20. ábra.



2.21. ábra.

2.4.5. Reciprok hatvány

Az
$$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n} \quad (n > 0, \text{ egész}) \tag{2.44}$$
függvény *hiperbolikus típusú görbét* ír le, amelynek a koordinátatengelyek vagy féltengelyek lehetnek az aszimptotái. A szakadási hely $x = 0$ **(2.20. ábra)**.
a) eset Ha $\boldsymbol{a > 0}$, akkor páros n esetén a függvény $x = -\infty$-ből indulva határértékben 0-ról $+\infty$-ig növekszik, majd 0-ra csökken, és közben mindig pozitív marad. Páratlan n esetén a függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, 0-ban felugrik $+\infty$-re, majd 0-ra csökken.

b) eset Ha $a < 0$, akkor páros n esetén a függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, ettől kezdve pedig 0 felé tart, miközben mindig negatív marad. Páratlan n esetén a függvény 0-ról $+\infty$-ig növekszik, átugrik $-\infty$-re, majd 0-ra növekszik.
A függvénynek nincsenek sem szélsőértékei, sem inflexiós pontjai. A görbe annál gyorsabban közeledik aszimptotikusan az x-tengelyhez és annál lassabban az y-tengelyhez, minél nagyobb az n szám. Páros n esetén a görbe szimmetrikus az y-tengelyre, páratlan n esetén pedig centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára. A **2.20. ábra** az $a = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetet tünteti fel.

2.5. Irracionális függvények

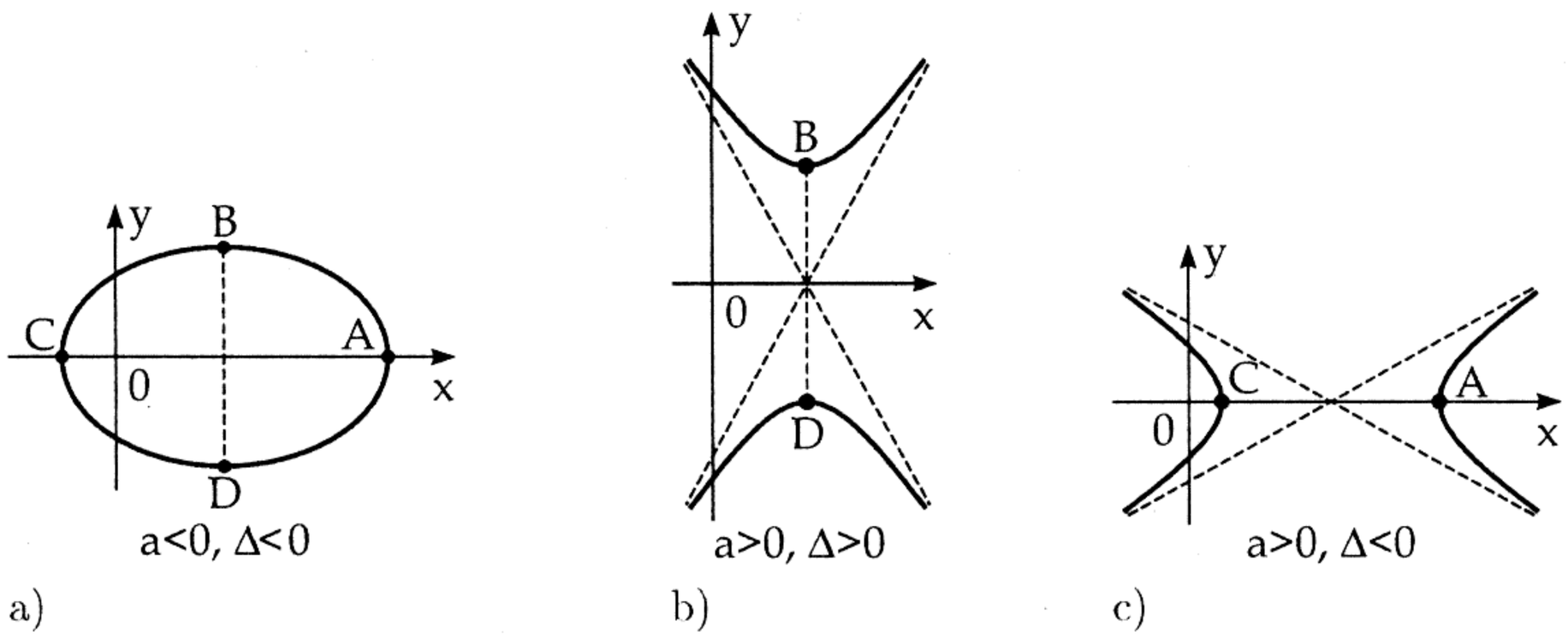
2.5.1. Lineáris binom négyzetgyöke

A két
$$y = \pm\sqrt{ax + b}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.45}$$
függvény együtt egy *parabolát* ír le, amelynek a szimmetriatengelye az x-tengely. Az A csúcspont helye $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, a *félparaméter*, azaz a parabola paraméterének a fele $p = \frac{a}{2}$. Az értelmezési tartomány $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$, ill. $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, aszerint, hogy $a < 0$ vagy $a > 0$ **(2.21. ábra)** (a paraboláról részletesebben lásd 203. old.).

2.5.2. Másodfokú polinom négyzetgyöke

A két
$$y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.46}$$
függvény együtt $a < 0$ esetén *ellipszist*, $a > 0$ esetén *hiperbolát* ír le **(2.22. ábra)**. A két tengely közül az egyik egybeesik az x-tengellyel, a másik az $x = -\frac{b}{2a}$ egyenes.

Az A, C és B, D csúcspontok $\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$ és $\left(-\frac{b}{2a}, \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)$, ahol $\Delta = 4ac - b^2$.



2.22. ábra.

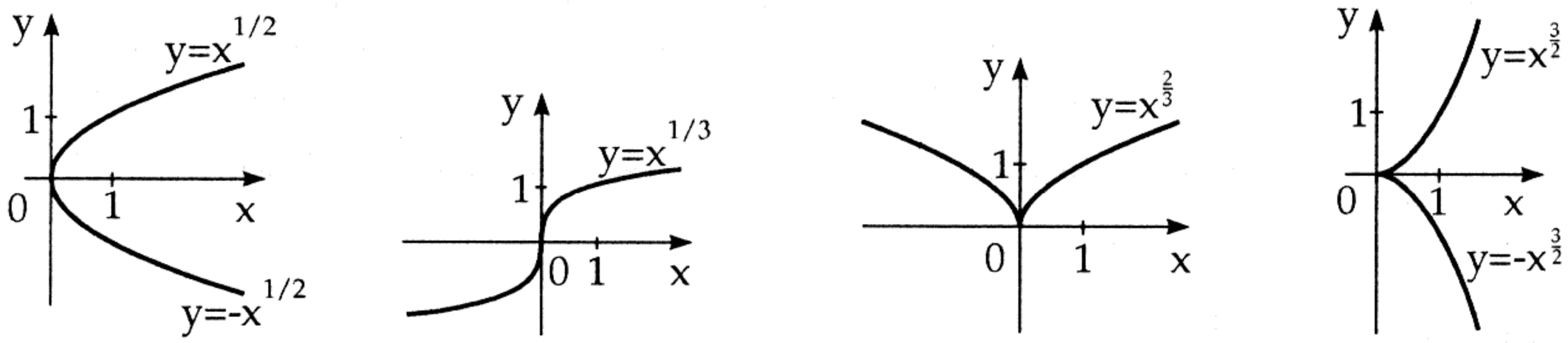
A függvények értelmezési tartománya és menete a és Δ előjelétől függ **(2.22. ábra)**. Ha $a < 0$ és $\Delta > 0$, akkor a függvényeknek csak képzetes értékeik vannak, úgyhogy ilyenkor a görbe nem létezik (az ellipszisről és hiperboláról részletesebben lásd 197 és 200. old.). Ha $\Delta = 0$, akkor két egyenest kapunk,

amelyek egymás tükörképei az x-tengelyre vonatkozóan.

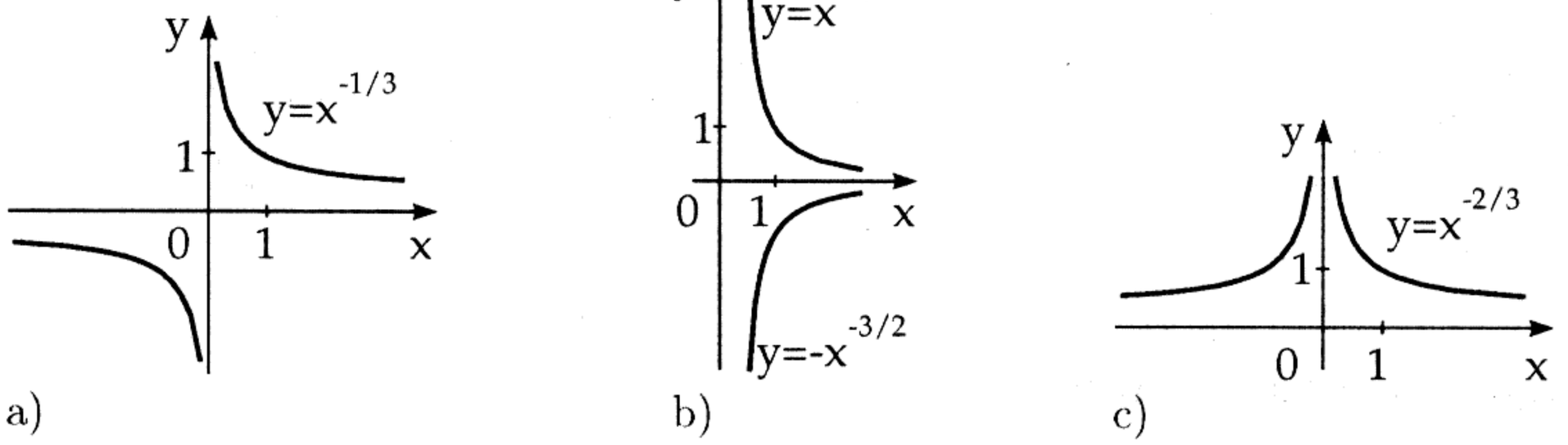
2.5.3. Hatványfüggvény

Az $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ m, n pozitív egész, relatív prím számok, $a \neq 0$ (2.47)

hatványfüggvényt a $k > 0$ és a $k < 0$ esetben külön-külön kell tárgyalni **(2.23. ábra)**. Feltehetjük, hogy $a = 1$, mert $a \neq 1$ esetén $y = x^k$ görbéjét elég az y-tengely irányában $|a|$-szeresre megnyújtani és negatív a esetén az x-tengelyre tükrözni; ezt is illusztrálja a **2.23.a,d** és a **2.24.b ábra**.



2.23. ábra.



2.24. ábra.

a) eset, $k > 0$, $y = x^{m/n}$: A görbe menetét az m és n mennyiségek négy jellegzetes megválasztása mellett a **2.23. ábra** tünteti fel. A görbe minden esetben átmegy a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ ponton. Ha $k > 1$, a kezdőpontban a görbe érinti az x-tengelyt **(2.23.d ábra)**, ha pedig $k < 1$, akkor, szintén a kezdőpontban, az y-tengelyt **(2.23.a,b,c ábrák)**. Páros n esetén két, az x-tengelyre szimmetrikus folytonos ág **(2.23.a,d ábrák)**, páros m esetén pedig két, az y-tengelyre szimmetrikus folytonos ág van **(2.23.c ábra)**. Páratlan m és n esetén a görbe centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára **(2.23.b, 2.24.a ábra)**. A kezdőpontban tehát a görbének lehet csúcsa, inflexiós pontja vagy visszatérő pontja **(2.23. ábra)**. Aszimptotája nincs. Ha n páros, akkor az értelmezési tartomány $[0, \infty)$, egyébként az egész $\mathbf{R}$; az első esetben minden ág szélsőértéke és -helye a 0, a második esetben pontosan akkor, ha m páros, egyébként nincs.

b) eset, $k < 0$, $y = x^{-m/n}$: A **2.24. ábrán** a görbe menete az m, n mennyiségek három jellegzetes megválasztása mellett van feltüntetve. A görbe hiperbolikus típusú, és aszimptotái egybeesnek a koordinátatengelyekkel, pontosabban folytonos áganként egy-egy féltengellyel **(2.24. ábra)**. Minden ág szakadási helye $x = 0$. A görbe az x-tengelyhez annál gyorsabban, az y-tengelyhez pedig annál lassabban közeledik aszimptotikusan, minél nagyobb a $|k|$ szám. A görbe menete és a koordinátatengelyekre, ill. a kezdőpontra vonatkozó szimmetria, ugyanúgy mint a $k > 0$ esetben, attól függ, hogy m és n páros vagy páratlan. Szélsőérték nincs.

2.6. Exponenciális és logaritmusfüggvények

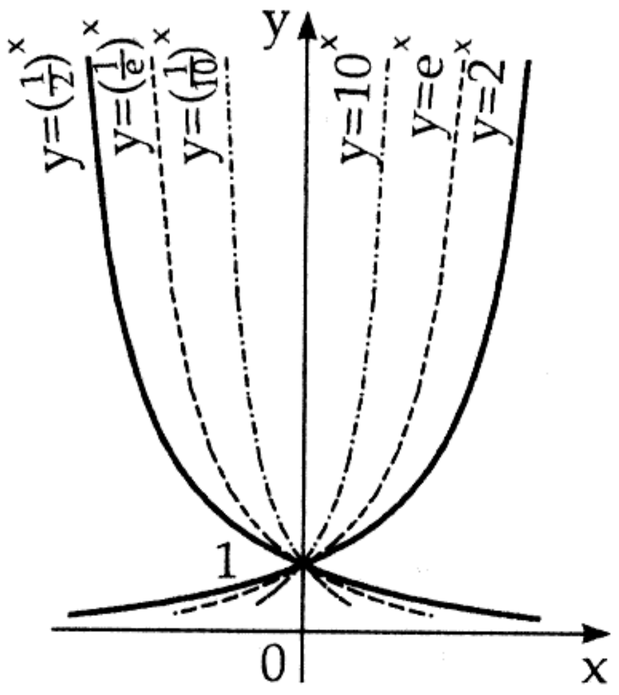
2.6.1. Exponenciális függvények

Az $$y = a^x = e^{bx} \quad (1 \neq a > 0\,, \quad b = \ln a) \tag{2.48}$$

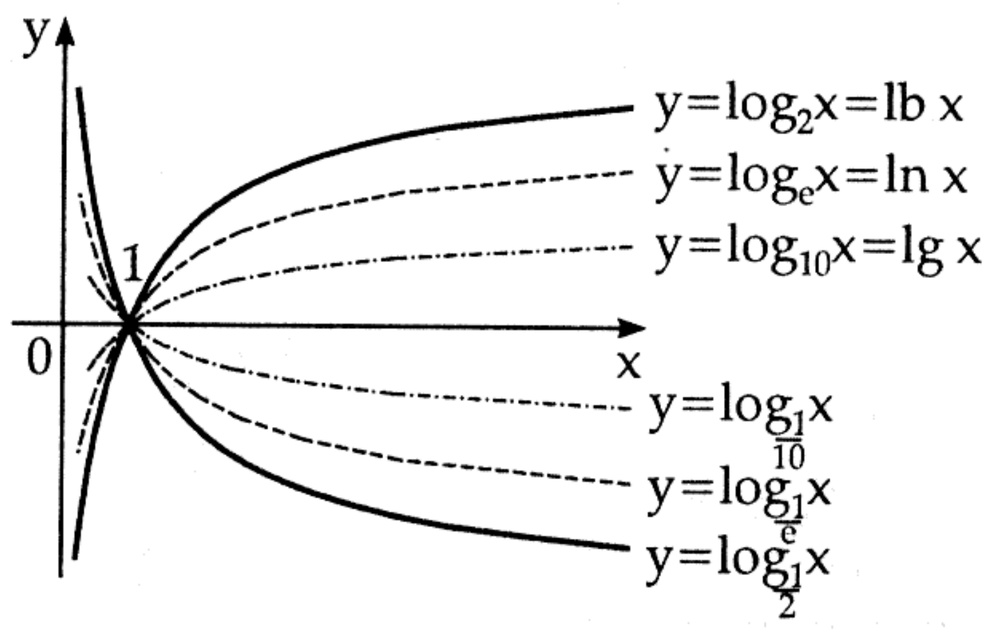
függvény grafikus képe az *exponenciális görbe* **(2.25. ábra)**. Ha $a = e$, kapjuk a

természetes alapú exponenciális görbét: $$y = e^x\,. \tag{2.49}$$

A függvény minden értéke pozitív. Ha $a > 1$ azaz $b > 0$, a függvény monoton növekszik határértékben 0-ról ∞-ig, mindkét határértékéhez annál gyorsabban tartva, minél nagyobb a b szám. Ha $a < 1$ azaz $b < 0$, akkor fordítva: annál gyorsabban csökken monoton módon, határértékben ∞-ről 0-ig, minél nagyobb a $|b|$, azaz minél kisebb az a szám. A görbe átmegy a $(0, 1)$ ponton, és aszimptotája az x-tengely negatív fele az $a > 1$, azaz $b > 0$ esetben; az $a < 1$, azaz $b < 0$ esetben a pozitív fele. Az $y = a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ függvény $a < 1$ esetén növekszik és $a > 1$ esetén csökken; az a^x és a^{-x} görbék egymás tükörképei az y-tengelyre vonatkozóan.



2.25. ábra.



2.26. ábra.

2.6.2. Logaritmusfüggvények

Az $$y = \log_a x \quad (a > 0\,, \;\; a \neq 1) \tag{2.50}$$

függvény a *logaritmusgörbét* írja le **(2.26. ábra)**; ez a görbe az a^x exponenciális görbe $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe, azaz a^x-nek $\log_a x$ az inverze. Az $a = e$ esetben az

$$y = \ln x \tag{2.51}$$

természetes logaritmus görbéjét kapjuk.
A valós számokon belül a logaritmusfüggvény csak $x > 0$ esetén van értelmezve. Ha $a > 1$, akkor monoton növekszik határértékben $-\infty$-ről $+\infty$-ig, ha pedig $a < 1$, akkor monoton csökken határértékben $+\infty$-ről $-\infty$-ig, éspedig az exponenciális függvényekhez hasonlóan mindkét esetben annál gyorsabban, minél kisebb az $|\ln a|$ szám. A görbe átmegy az $(1, 0)$ ponton, és $x \to 0 + 0$ esetén aszimptotikusan közeledik az y-tengelyhez, mégpedig $a > 1$ esetén az alsó, $a < 1$ esetén a felső feléhez, és ezt is hasonló módon annál gyorsabban teszi, minél nagyobb az $|\ln a|$ szám. Most $\log_a x$ és $\log_{\frac{1}{a}} x$ tükörképei egymásnak az x-tengelyre vonatkozóan.

2.6.3. Gauss-féle haranggörbe

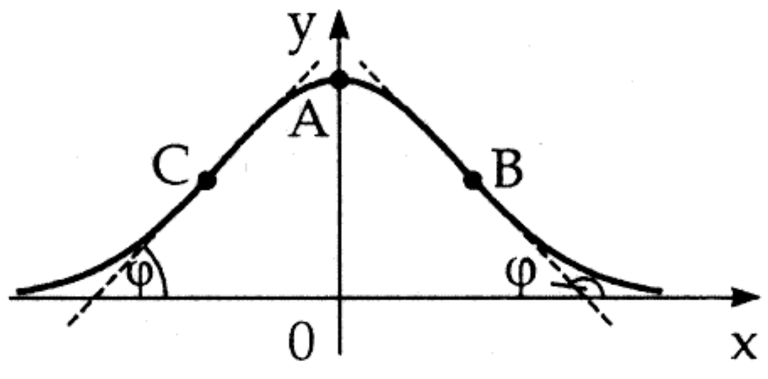
Az $$y = e^{-(ax)^2} \tag{2.52}$$

függvény a folytonos GAUSS-*féle haranggörbét* írja le **(2.27. ábra)**. Ez a görbe szimmetrikus az y-tengelyre, és annál gyorsabban közeledik mindkét irányban aszimptotikusan az x-tengelyhez, minél

nagyobb az $|a|$ szám. Az A maximum-pont $(0,1)$, a B, C inflexiós pontok $\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. A megfelelő iránytangensek $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{2/e}$.

A (2.52) által megadott GAUSS-*féle haranggörbe* fontos alkalmazása a *megfigyelési hibák normális eloszlástörvényének leírása* (lásd Grafikus előállítás és alkalmazás a valószínűségszámításban, 787. és a rákövetkező oldalak), ahol számszorosa a megfelelő sűrűségfüggvény:

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.53}$$



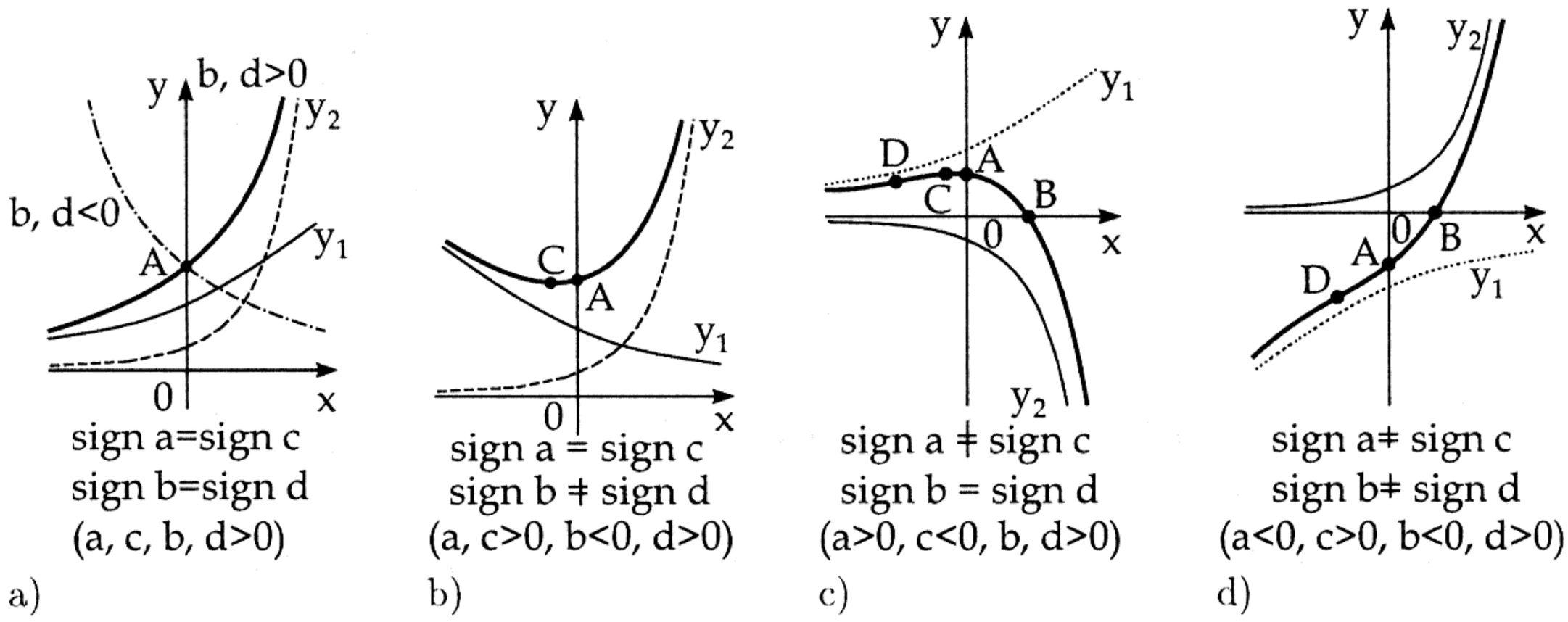
2.27. ábra.

2.6.4. Exponenciális összeg

Az

$$y = ae^{bx} + ce^{dx} \tag{2.54}$$

folytonos függvényt jellegzetes előjelviszonyok mellett a **2.28. ábra** tünteti fel. A szerkesztés úgy tör-



2.28. ábra.

ténik, hogy az $y_1 = ae^{bx}$, $y_2 = ce^{dx}$ összeadandók görbéinek ordinátáit összeadjuk. Ha az a, b, c, d számok egyike sem nulla, a görbe alakját a **2.28. ábrán** szereplő négy görbe valamelyike, vagy valamelyik tengelyre vett tükörképe adja meg. A $b \to -b$, $d \to -d$ helyettesítéssel kapott görbe az eredetinek az y-tengelyre vonatkozó tükörképe, az $a \to -a$, $c \to -c$ esetben pedig az x-tengelyre vonatkozó tükörképet kapjuk. Ezt illusztrálja a **2.28.a ábra** a $b, d > 0$ esetben, a szaggatott–pontozott görbe a tükrözött.

Az y-tengellyel, ill. x-tengellyel való A és B metszéspont $(0, a+c)$, ill. $\left(\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{a}{c}\right), 0\right)$, a C szélsőértékhely x-koordinátája $\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)$, a D inflexiós ponté pedig $\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)$, feltéve hogy ezek a pontok léteznek, azaz a formulák értelmesek.

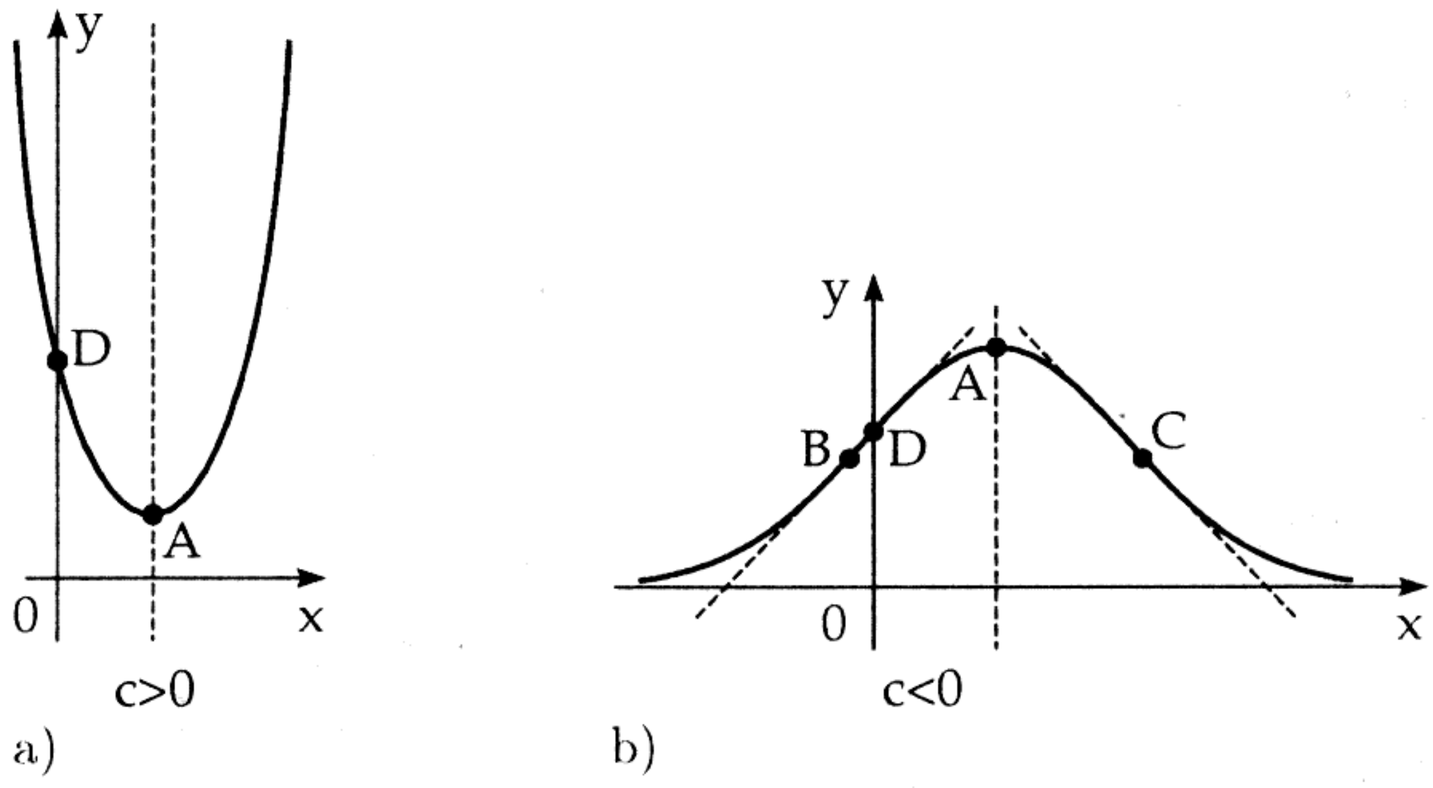
a) eset Az a és c, ill. b és d paraméterek előjele azonos: a függvény nem vált előjelet; értéke határértékben 0-ról $+\infty$-ig, ill. $-\infty$-ig, vagy $+\infty$-ről, ill. $-\infty$-ről 0-ra változik. Inflexiós pont nincs; aszimptota az x-tengely (**2.28.a ábra**, a, c, b, $d > 0$ eset).

b) eset Az a és c paraméterek azonos, b és d pedig ellenkező előjelűek: a függvény előjelváltás nélkül

határértékben $+\infty$-ről $+\infty$-ig változik és közben egy minimumon megy át, illetve $-\infty$-ről $-\infty$-ig változik és közben egy maximumon halad át. Inflexiós pont nincs (**2.28.b ábra**, $a, c > 0$, $b < 0$, $d > 0$ eset).

c) eset Az a és c paraméterek ellenkező, b és d pedig azonos előjelűek: a függvény határértékben 0-ról $+\infty$-ig, ill. $-\infty$-ig, vagy $+\infty$-ről, ill. $-\infty$-ről 0-ra változik, miközben egyszer előjelet vált, továbbá áthalad egy C szélsőérték-ponton és egy D inflexiós ponton. Aszimptota az x-tengely valamelyik fele (**2.28.c ábra**, $a > 0$, $c < 0$, $b, d > 0$ eset).

d) eset Az a és c paraméterek különböző előjelűek, b és d úgyszintén: a függvény monoton változik határértékben $-\infty$ és $+\infty$, illetve $+\infty$ és $-\infty$ között. Szélsőértéke nincs, viszont van egy D inflexiós pontja (**2.28.d ábra**, $a < 0$, $c > 0$, $b < 0$, $d > 0$ eset).



2.29. ábra.

2.6.5. Általánosított Gauss-féle haranggörbe

Az $$y = ae^{bx+cx^2}, \quad a \neq 0,\ c \neq 0 \tag{2.55}$$

folytonos függvényt a (2.52) GAUSS-*féle haranggörbe* általánosításának lehet felfogni; a görbe szimmetrikus az $x = -\dfrac{b}{2c}$ függőleges egyenesre, nem metszi az x-tengelyt, az y-tengellyel való D metszéspontja pedig $(0, a)$ **(2.29.a, b ábrák)**.

A függvény menete a és c előjelétől függ. Csak az $a > 0$ esettel foglalkozunk, mert az $a < 0$ esethez tartozó görbét az előbbiből az x-tengelyre való tükrözéssel lehet megkapni.

a) eset, $c > 0$: A függvény határértékben $+\infty$-ről minimumára csökken, majd megint $+\infty$-ig növekszik. Közben mindig pozitív marad. Az A minimumpont $\left(-\dfrac{b}{2c}, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$; inflexiós pont és aszimptota nincs **(2.29.a ábra)**.

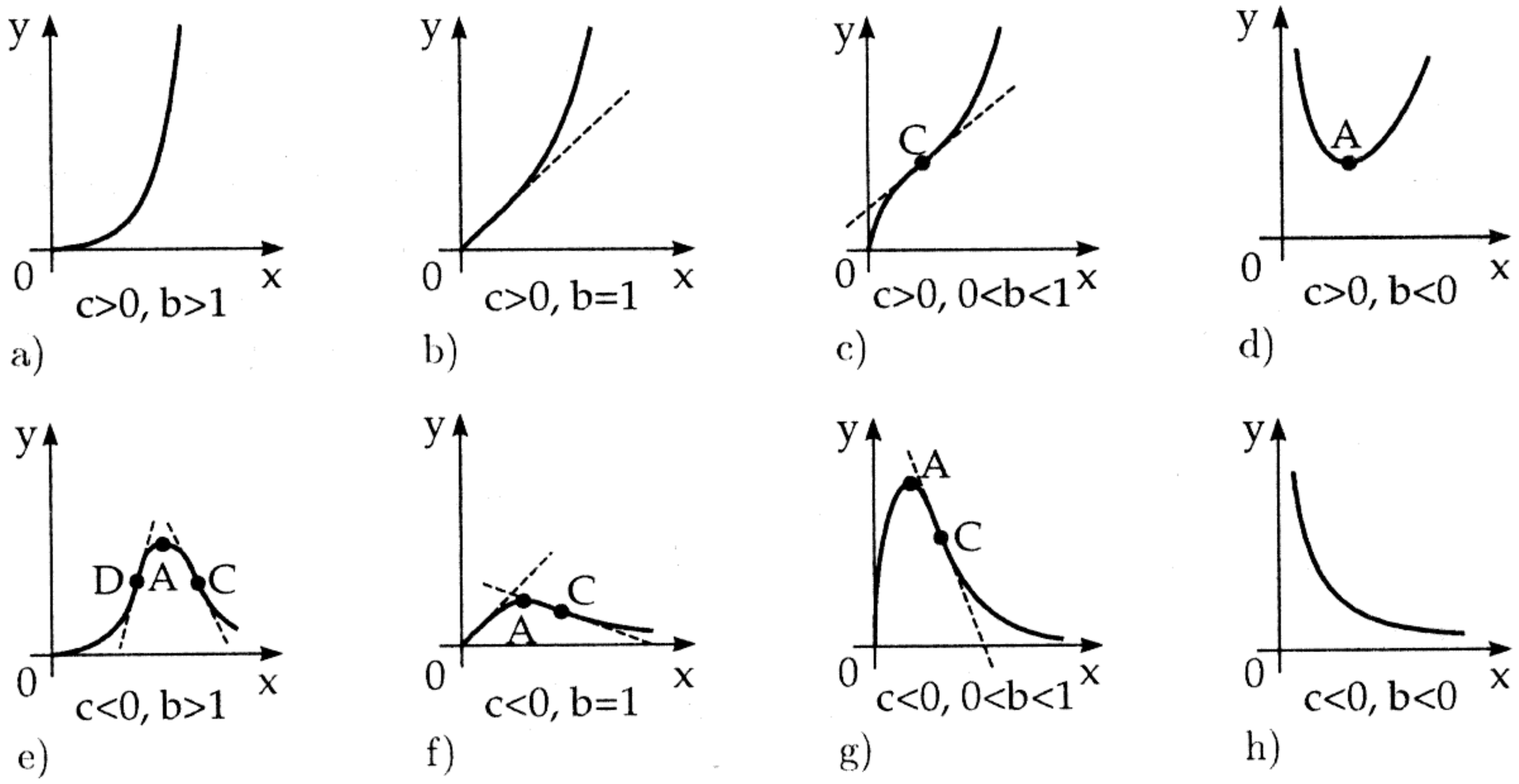
b) eset, $c < 0$: Az x-tengely aszimptota. Az A maximumpont $\left(-\dfrac{b}{2c}, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$, a B, C inflexiós pontok $\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{-2c}}{2c}, ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$, a függvény megint mindenhol pozitív **(2.29.b ábra)**.

2.6.6. Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata

Az $$y = ax^b e^{cx}, \quad a, b, c \neq 0 \tag{2.56}$$

folytonos függvényt csak az $a > 0$ esetben vizsgáljuk, mert az $a < 0$ esetben görbéje az előbbiből az x-tengelyre való tükrözéssel adódik, továbbá az általános hatványfüggvény jelenléte miatt b értékétől

függően csak nemnegatív vagy pozitív x-értékeket tekinthetünk, úgyhogy y minden értéke nemnegatív lesz, és 0 csak a 0-ban lehet **(2.30. ábra)**.
A 2.30. ábrán látható, hogy a paraméterek alkalmas kombinációjával a legkülönfélébb görbemeneteket lehet előállítani.
Ha $b > 0$, akkor a görbe áthalad a koordinátarendszer kezdőpontján. Az érintő ebben a pontban $b > 1$ esetén az x-tengely, $b = 1$ esetén az első síknegyed $y = x$ szögfelezője, $0 < b < 1$ esetén pedig az y-tengely, tehát a jobboldali deriváltja 0-ban rendre 0, a, ∞. Ha $b < 0$, akkor az y-tengely pozitív fele aszimptota. Ha $c > 0$, az x argumentummal együtt a függvény is minden határon túl növekszik; ha $c < 0$, a függvény $+\infty$-ben határértékben 0-ra csökken. Ha b és c előjele különböző, a függvénynek az $x = -\frac{b}{c}$ helyen egy A szélsőérték-pontja van. A görbének vagy nincs inflexiós pontja, vagy egy, ill. két C és D inflexiós pontja van $\left(x = -\frac{b \pm \sqrt{b}}{c}\right)$, aszerint hogy a képlet értelmes-e, és ekkor hány pozitív értéke van **(2.30.c, e, f, g ábrák)**.



2.30. ábra.

2.7. Trigonometrikus függvények

2.7.1. Elemi tudnivalók

2.7.1.1. Definíció és ábrázolás

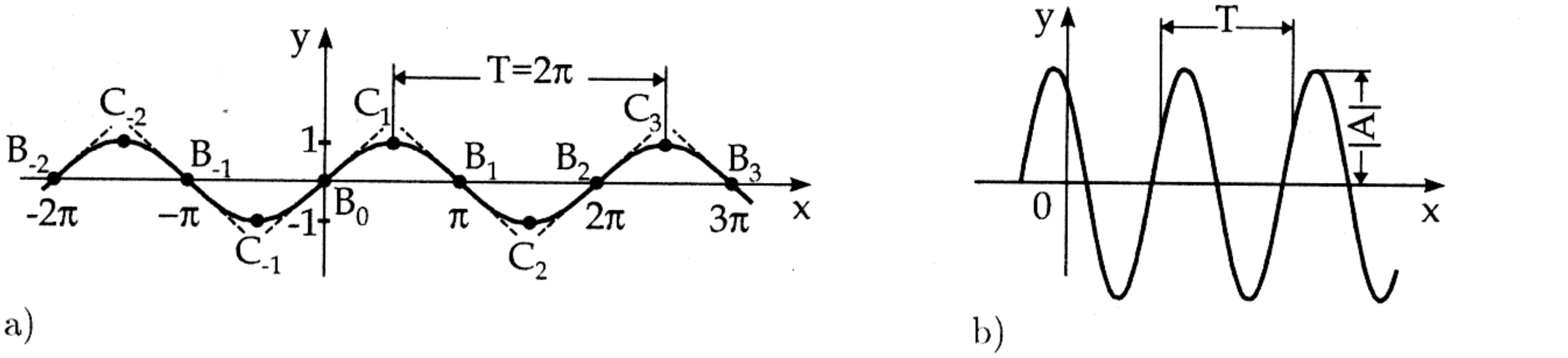
1. Definíció
A trigonometrikus függvények (más néven *szögfüggvények* vagy *goniometriai függvények*) klasszikus bevezetése geometriai úton történik. Ezért definíciójukat és az argumentum fokban vagy ívmértékben való megadását a 131. oldalon tárgyaljuk.

2. Szinusz

Az
$$y = \sin x \tag{2.57}$$
közönséges szinuszfüggvény görbéjét a **2.31.a ábra** mutatja. Ez egy $T = 2\pi$ periódusú folytonos görbe. A közönséges szinuszgörbe x-tengellyel való B_0, B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, ... metszéspontjai, ahol $B_k = (k\pi, 0)$

$(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ a görbének egyúttal inflexiós pontjai is. Ezekben a pontokban a görbe érintőjének az x-tengelyhez viszonyított hajlásszöge $\pm\frac{\pi}{4}$. A szélsőértékhelyek C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, $\ldots$ $C_k = \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, (-1)^k\right]$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Az
$$y = A\sin(\omega x + \varphi_0) \tag{2.58}$$



2.31. ábra.

általános szinuszfüggvény amplitúdója 1 helyett $|A|$, frekvenciája 1 helyett ω, kezdőfázisa, más néven fáziseltolódása pedig 0 helyett φ_0; görbéje a **2.31.b ábrán** látható.

A közönséges szinuszgörbével szemben az általános szinuszgörbe **(2.31.b ábra)** az $|A|$ tényezővel az y-irányban meg van nyújtva, az $\frac{1}{\omega}$ tényezővel az x-irányban össze van nyomva, és a $\frac{\varphi_0}{\omega}$ szakasszal el van tolva balra. A periódus $T = \frac{2\pi}{\omega}$; az x-tengellyel való metszéspontok $B_k = \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$;

a szélsőértékhelyek $C_k = \left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$, a fenti k-értékekkel.

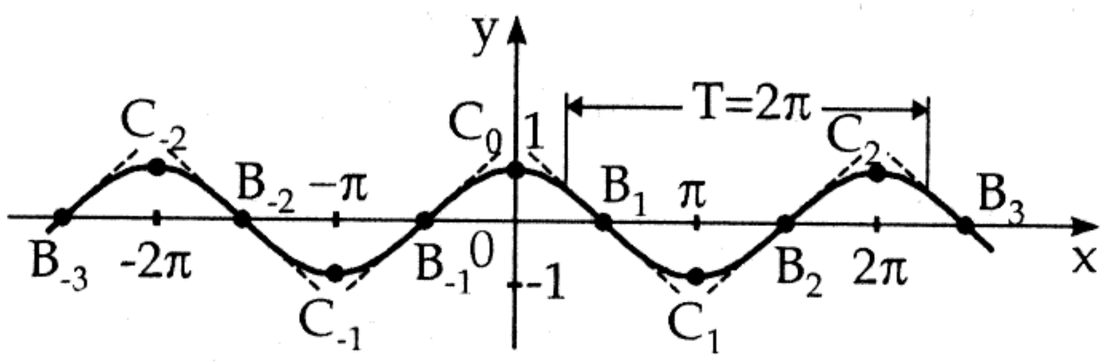
3. Koszinusz

Az
$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.59}$$

közönséges koszinuszfüggvény görbéje az x-tengelyt a B_0, B_1, B_{-1}, B_2, $\ldots$, $B_k = \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, 0\right]$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ pontokban metszi; ezek egyben az inflexiós pontok is, bennük az érintő irányszöge $\pm\frac{\pi}{4}$ **(2.32. ábra)**.

Szélsőértékhelyek: $C_0, C_1, C_{-1}, C_2, \ldots, C_k = (k\pi, (-1)^k)$.

Az
$$y = A\cos(\omega x + \varphi_0) \tag{2.60}$$
általános koszinuszfüggvény az
$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.61}$$
alakban is felírható, vagyis mint általános szinuszfüggvény $\varphi = 90°$ fáziseltolódással.

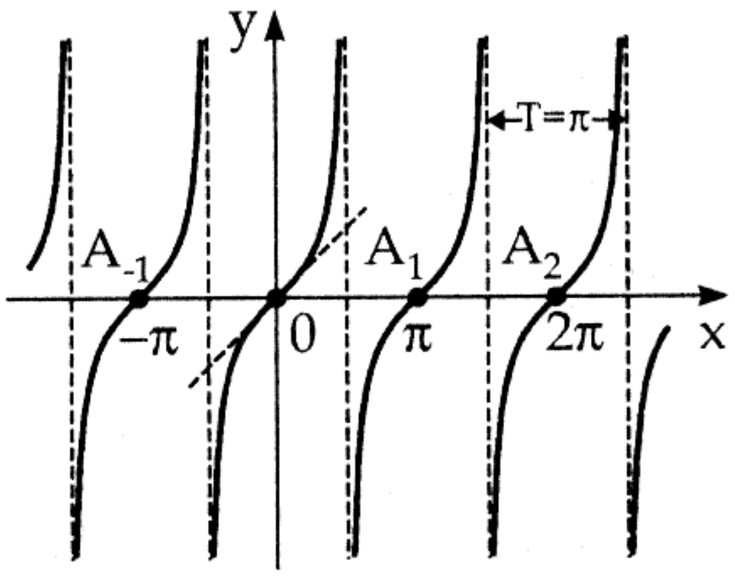


2.32. ábra.

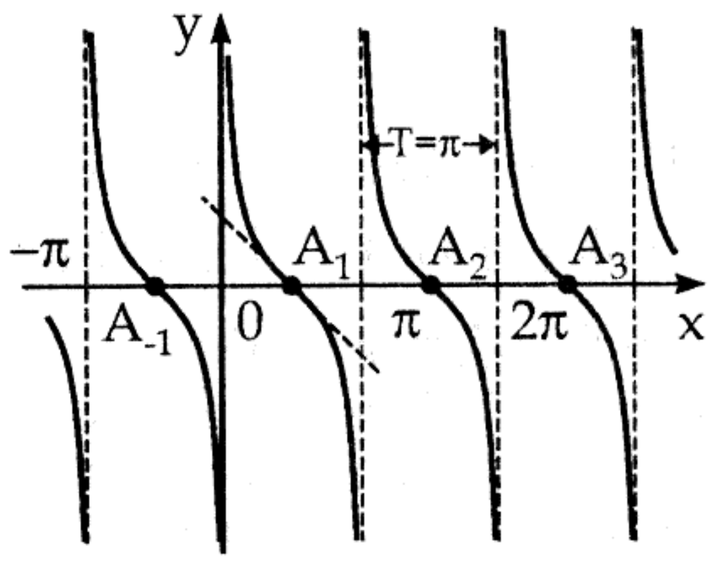
4. Tangens

Az
$$y = \operatorname{tg} x \tag{2.62}$$

tangensfüggvény periódusa $T = \pi$, aszimptotái az $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ egyenesek **(2.33. ábra)**. Ha x a $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között változik, a függvény monoton növekszik határértékben $-\infty$-ről $+\infty$-ig. Az x-tengellyel való 0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ..., $A_k = (k\pi, 0)$ metszéspontok egyúttal inflexiós pontok is, amelyekben az érintő irányszöge $\frac{\pi}{4}$.



2.33. ábra.



2.34. ábra.

5. Kotangens

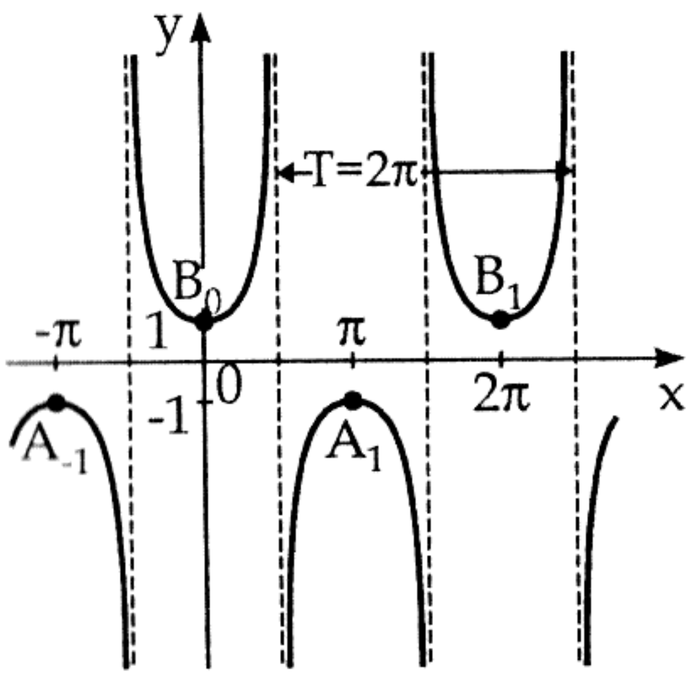
Az
$$y = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.63}$$

kotangensfüggvény az x-tengelyre tükrözött és $\frac{\pi}{2}$ szakasszal balra eltolt tangensgörbe **(2.34. ábra)**, tehát ez is π szerint periodikus. Az aszimptoták az $x = k\pi$ egyenesek. Ha x 0 és π között változik, y monoton csökken határértékben $+\infty$-ről $-\infty$-ig. Az x-tengellyel való A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ... metszéspontok, ahol $A_k = \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$, egyúttal inflexiós pontok is, amelyekben az érintő irányszöge $\frac{\pi}{4}$.

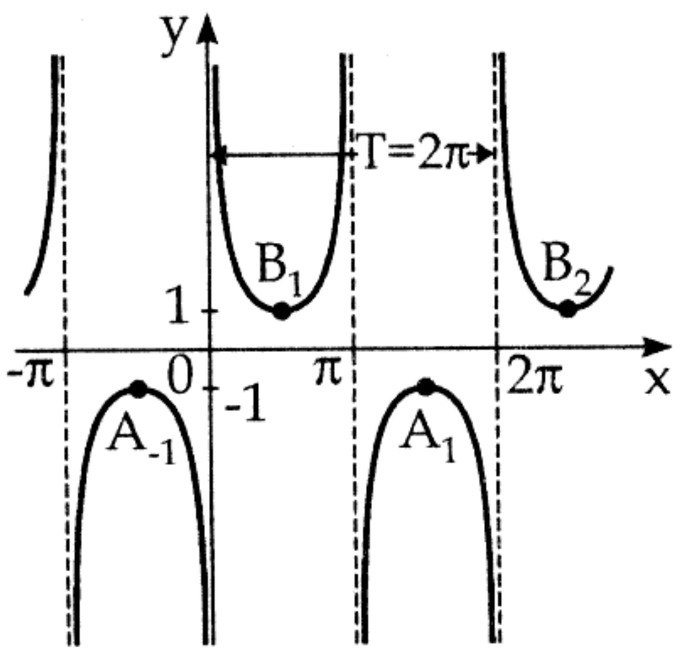
6. Szekáns

Az
$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{2.64}$$

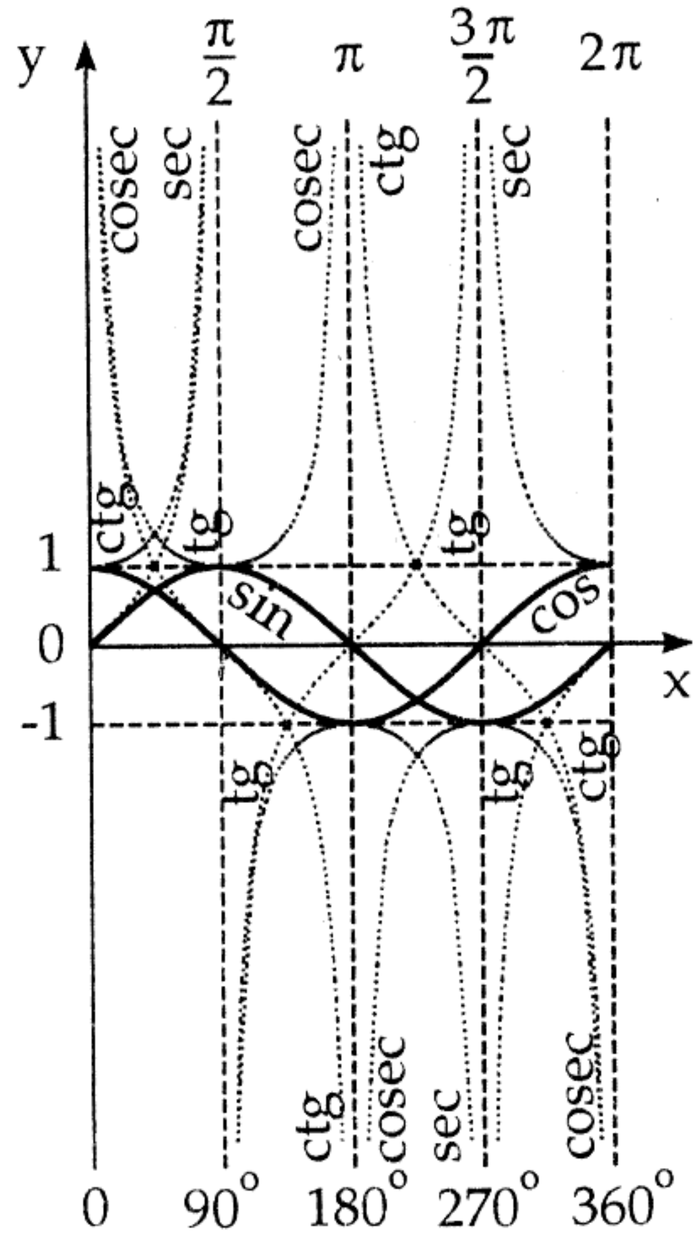
szekánsfüggvény periódusa $T = 2\pi$, az aszimptoták $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; mindig fennáll $|y| \geq 1$. A lokális maximumpontok A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ..., ahol $A_k = [(2k+1)\pi, -1]$; a lokális minimumpontok B_0, B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, ..., ahol $B_k = (2k\pi, +1)$ **(2.35. ábra)**.



2.35. ábra.



2.36. ábra.



2.37. ábra.

7. Koszekáns

Az
$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \tag{2.65}$$
koszekánsfüggvény görbéje egy $x = \frac{\pi}{2}$ szakasszal jobbra eltolt szekánsgörbe. Az aszimptoták $x = k\pi$.

A lokális maximumpontok $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots$, ahol $A_k = \left(\frac{4k+3}{2}\pi, -1\right)$; a lokális minimumpontok $B_0, B_1, B_{-1}B_2, B_{-2}, \ldots$, ahol $B_k = \left(\frac{4k+1}{2}\pi, +1\right)$ **(2.36. ábra)**.

Megjegyzés: Komplex argumentumú trigonometrikus függvények a 726. oldalon kerülnek tárgyalásra.

2.7.1.2. Értékkészletek és a függvények menete

1. $0 \leq x \leq 360°$ szögtartomány

A **2.37. ábrán** együtt látható mind a hat trigonometrikus függvény görbéje mind a négy síknegyedhez tartozó, vagyis 0° és 360° közötti, azaz ívmértékben 0 és 2π közötti szögekre.

A **2.1. táblázat** áttekintést ad az első 4 függvény értelmezési tartományáról és értékkészletéről. A 6 függvény előjelét, amely a megfelelő (szögben kifejezett) argumentumot tartalmazó síknegyedtől függ, a **2.2. táblázat** mutatja.

2.1. táblázat. A trigonometrikus függvények értelmezési tartománya (ívmértékben) és értékkészlete

Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq \sin x \leq 1$ $-1 \leq \cos x \leq 1$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	$-\infty < \operatorname{tg} x < \infty$ $-\infty < \operatorname{ctg} x < \infty$

2.2. táblázat. A trigonometrikus függvények előjele

Síknegyed	Szög nagysága (a határokat nem beleértve)	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	0°-tól 90°-ig	+	+	+	+	+	+
II	90°-tól 180°-ig	+	−	−	−	−	+
III	180°-tól 270°-ig	−	−	+	+	−	−
IV	270°-tól 360°-ig	−	+	−	−	+	−

2. Egyes speciális argumentumokhoz tartozó függvényértékek

2.3. táblázat.
A trigonometrikus függvények $0°, 30°, 45°, 60°$ és $90°$-hoz, illetve a megfelelő ívmértékhez tartozó értékei ($\pm\infty$ és $\mp\infty$ féloldali határértéket jelent)

Szög	Ívmérték	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$0°$	0	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

3. Tetszőleges szögek

Mivel a trigonometrikus függvények periodikusak (2π, ill. π periódussal), a tetszőleges x argumentumhoz tartozó függvényérték meghatározását megkönnyítik a következő szabályok (az ívmértékre való átírás — is — triviális).

Az x argumentum $> 360°$: Ha a szög nagyobb, mint $360°$ (ill. nagyobb, mint $180°$), akkor a trigonometrikus függvények értékét a következő szabályok segítségével vissza lehet vezetni olyan α szöghöz tartozó függvényértékekre, amelyekre $0 \le \alpha \le 360°$ (ill. $\le 180°$) (n egész):

$$\sin(360° \cdot n + \alpha) = \sin\alpha\,, \qquad (2.66)$$

$$\cos(360° \cdot n + \alpha) = \cos\alpha\,, \qquad (2.67)$$

$$\mathrm{tg}(180° \cdot n + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha\,, \qquad (2.68)$$

$$\mathrm{ctg}(180° \cdot n + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha\,. \qquad (2.69)$$

Az x argumentum < 0: Ha az argumentum negatív ($x = -\alpha$), akkor a függvényértékeket a következő képletekkel lehet pozitív argumentumhoz tartozó függvényértékekre visszavezetni:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (2.70)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,, \qquad (2.71)$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha\,, \qquad (2.72)$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha\,. \qquad (2.73)$$

Az x argumentumra $90° < x < 360°$: Ha $90° < x < 360°$, akkor a függvényértéket a **2.4. táblázatban** szereplő *redukciós képletek*kel egy α hegyesszöghöz tartozó függvényértékre lehet visszavezetni. Az olyan függvényértékek között fennálló összefüggéseket, amelyek egymástól $90°$-kal, $180°$-kal vagy $270°$-kal eltérő, illetve egymást $90°$-ra, $180°$-ra vagy $270°$-ra kiegészítő szögekhez tartoznak, *kvadránsreláció*knak nevezzük. (Itt is triviális az ívmértékre való átírás.)

2.4. táblázat. Trigonometrikus függvények redukciós képletei (kvadránsrelációk)

Függvény	$x = 90° \pm \alpha$	$x = 180° \pm \alpha$	$x = 270° \pm \alpha$	$x = 360° - \alpha$
$\sin x$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,x$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

A **2.4. táblázat** 1. és 2. oszlopa *pótszögtételek*et, 1. és 3. oszlopa *kiegészítőszög-tételek*et tartalmaz. Ismert, hogy $90° - \alpha$ az α szög *pótszöge* (lásd 131. old.), ezért hívjuk a

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)\,, \qquad (2.74a) \qquad \mp\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \qquad (2.74b)$$

és a táblázatban szereplő többi összefüggést *pótszögtételek*nek.

A trigonometrikus függvények kiegészítő szögekhez (lásd 131. old.) tartozó értékei közötti,

$$\mp\sin\alpha = \sin(180° - \alpha), \qquad (2.75a) \qquad -\cos\alpha = \cos(180° - \alpha) \qquad (2.75b)$$

és a többi feltüntetett összefüggést pedig hasonlóan *kiegészítőszög-tételek*nek nevezzük. A „+" előjelek csak a könnyebb megjegyezhetőség miatt szerepelnek.

Az x argumentumra $0° < x < 90°$: Ha hegyesszögről van szó ($0° < x < 90°$), a függvényértékeket korábban csak táblázatból állapították meg, most zsebszámológépről is leolvashatók.

■ $\sin(-1000°) = -\sin 1000° = -\sin(360° \cdot 2 + 280°) = -\sin 280° = +\cos 10° = +0,9848.$

4. Ívmértékben megadott szögek

Az ívmértékben, azaz radián egységekben megadott argumentumértékeket a (3.2) képlet segítségével lehet fokra átszámítani (lásd 132. old.).

2.7.2. Trigonometrikus függvényekre vonatkozó további fontos formulák

2.7.2.1. Trigonometrikus függvények közötti összefüggések

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (2.76) \qquad \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1, \qquad (2.79)$$

$$\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1, \qquad (2.77) \qquad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1, \qquad (2.80)$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1, \qquad (2.78) \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad (2.81)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (2.82) \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (2.83)$$

Az áttekinthetőség érdekében a további formulákat a **2.5. táblázatban** foglaltuk össze. E formulákban általános esetben a gyökjel elé aszerint kell pozitív vagy negatív előjelet tenni, hogy a szög melyik síknegyedben (ívmérték-intervallumban) helyezkedik el:

2.7.2.2. Trigonometrikus függvények szögek összegéhez, ill. különbségéhez tartozó értékei

(Itt és a továbbiakban csak annyi a megkötés a szereplő szögekre, hogy a formulák értelmesek legyenek.)

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \qquad (2.84) \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \qquad (2.85)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (2.86) \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (2.87)$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\end{aligned} \qquad (2.88)$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned} \qquad (2.89)$$

2.5. táblázat.
Trigonometrikus függvények kifejezése egymással $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

Szögfüggvény	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$-$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$-$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$-$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-$

2.7.2.3. Trigonometrikus függvények szögek többszöröseihez tartozó értékei

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{2.90}$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,, \tag{2.91}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,, \tag{2.92}$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,, \tag{2.93}$$
$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha\,, \tag{2.94}$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\,, \tag{2.95}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{2.96}$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,, \tag{2.99}$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\,, \tag{2.97}$$
$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}\,, \tag{2.100}$$
$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha\,,} \tag{2.98}$$
$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}\,. \tag{2.101}$$

Nagy n értékekre $\sin n\alpha$ és $\cos n\alpha$ meghatározására a MOIVRE-féle képletet célszerű alkalmazni. A binomiális tétel és az $\binom{n}{m}$ binomiális együttható (lásd 12. old.) használatával és $i^2 = -1$ figyelembevételével kapjuk:

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + in\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$$
$$-\mathrm{i}\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots, \tag{2.102}$$

innen pedig a valós és képzetes részek egyenlősége miatt

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots, \tag{2.103}$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots\,. \tag{2.104}$$

2.7.2.4. Trigonometrikus függvények szög feléhez tartozó értékei (félszögtételek)

A következő képletekben a gyökjel elé aszerint kell pozitív vagy negatív előjelet tenni, hogy a szög melyik félsíkban, illetve síknegyedben (ívmérték-intervallumban) helyezkedik el.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}, \tag{2.105}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}, \tag{2.106}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \tag{2.107}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{2.108}$$

2.7.2.5. Trigonometrikus függvények két értékének összege, ill. különbsége (addíciós tételek)

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.109}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.110}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.111}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.112}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{2.113}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{2.114}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \tag{2.115}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}. \tag{2.116}$$

2.7.2.6. Trigonometrikus függvények értékeinek szorzata

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \tag{2.117}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)], \tag{2.118}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)], \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[&\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)\\ &+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[&\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)\\ &+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[&-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)\\ &+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]\,. \tag{2.123}$$

2.7.2.7. Trigonometrikus függvények hatványai

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\,, \tag{2.124}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,, \tag{2.125}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)\,, \tag{2.126}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\,, \tag{2.127}$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3)\,, \tag{2.128}$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3)\,. \tag{2.129}$$

Nagy n értékekre $\sin^n\alpha$ és $\cos^n\alpha$ értékét hatányozás nélkül rekurzióval határozzuk meg, $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, …, $\cos n\alpha$ és $\sin\alpha, \sin 2\alpha, \ldots, \sin n\alpha$ 81. oldalon található képleteit átrendezve.

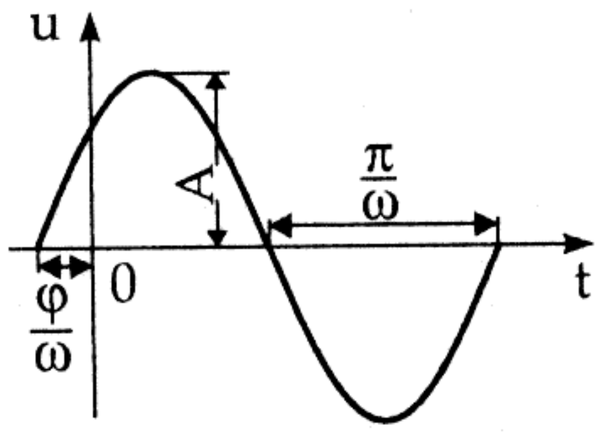
2.7.3. Rezgések leírása

2.7.3.1. A probléma megfogalmazása

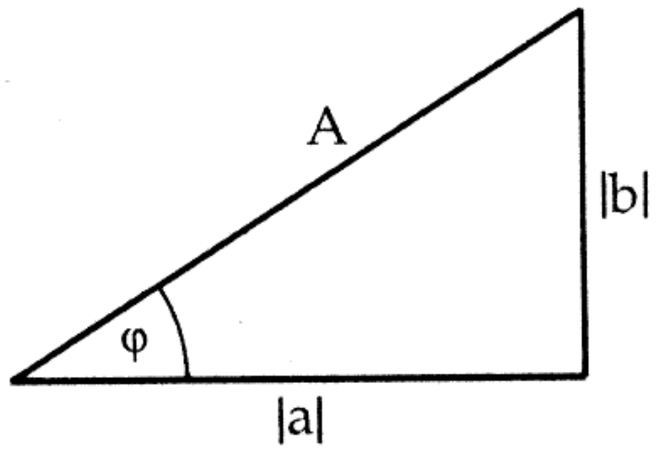
A technikában és a fizikában gyakran fordulnak elő a t-vel jelölt időtől függő,

$$u = A\sin(\omega t+\varphi)\,, \quad A>0 \tag{2.130}$$

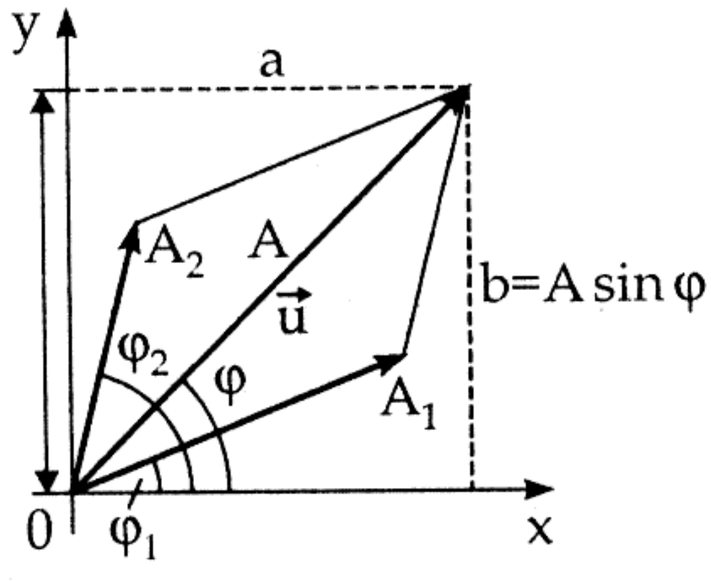
alakú mennyiségek. Ezeket néha *szinuszos mennyiségek*nek is hívják. Időbeli változásuk *harmonikus rezgést* ír le. (2.130) ábrázolása általános szinuszgörbét eredményez; lásd a **2.38. ábrát**.



2.38. ábra.



2.39. ábra.



2.40. ábra.

Az általános szinuszgörbe az $y=\sin x$ közönséges szinuszgörbéjétől a következőkben különbözhet:

a) az A *amplitúdó*ban, vagyis a t időtengelytől való legnagyobb kitérésben,

b) a $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ periódusban, amelyet itt *hullámhossz*nak hívunk (itt ω a *rezgési frekvencia*, amelyet a rezgéstanban *körfrekvenciá*nak hívnak),

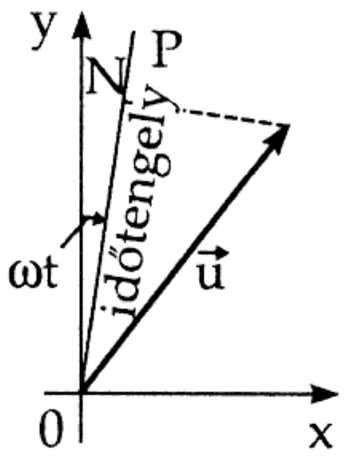
c) a φ *kezdeti szög*ben vagy *kezdőfázis*ban vagy *fáziseltolódás*ban, amelyről feltehető , hogy $[0,2\pi)$-be esik.

Az $u=u(t)$ mennyiség

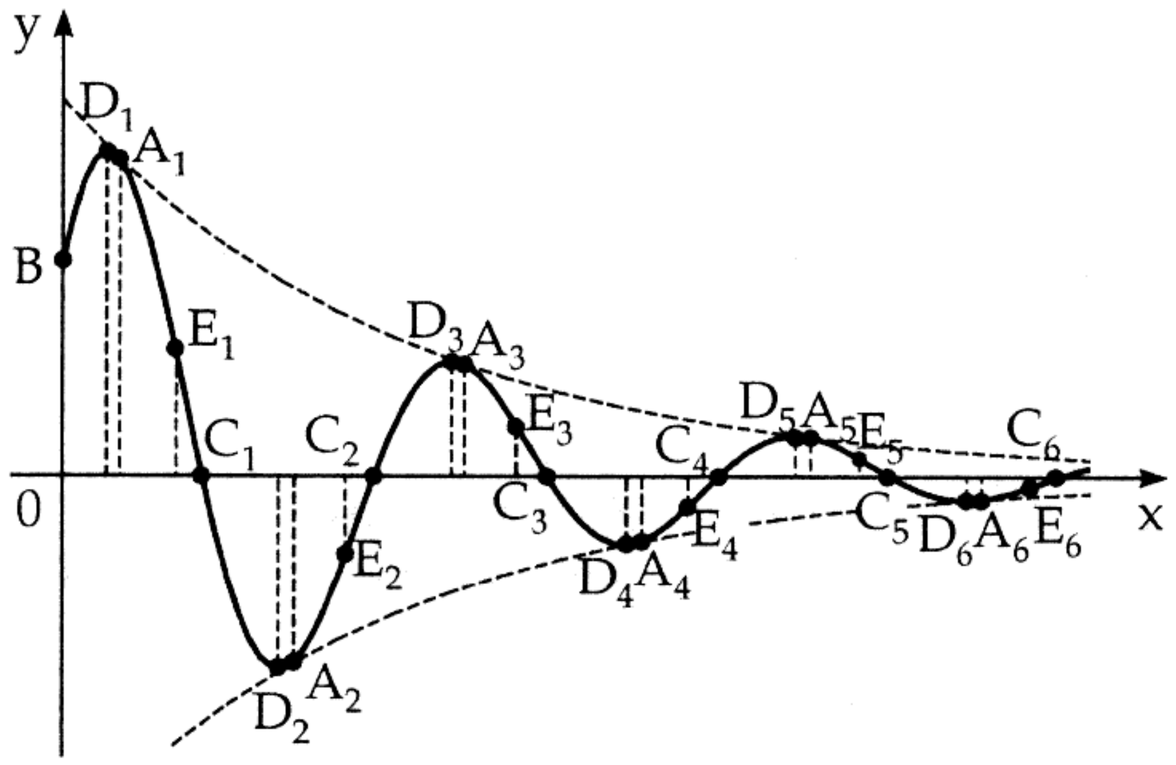
$$a\sin\omega t + b\cos\omega t \tag{2.131}$$

alakban is előállítható. Itt $t=0$ és $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ adja, hogy $A=\sqrt{a^2+b^2}$ és $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$, amiből a és

b egyértelműen meghatározható. Az a, b, A és φ mennyiségek a **2.39. ábra** szerint egy derékszögű háromszög meghatározó adatainak tekinthetők. (Ha φ $180° + \alpha$ alakú, akkor helyette $180° - \alpha$, és ha [ez] $90° + \beta$ alakú, akkor ehelyett $90° - \beta$ veendő, hogy végül hegyesszöget kapjunk, melynek tangense $\frac{|b|}{|a|}$.)



2.41. ábra.



2.42. ábra.

2.7.3.2. Rezgések szuperpozíciója vagy összetétele

Rezgések *szuperpozíciójának* (összetételének) nevezzük legegyszerűbb esetben *két, azonos frekvenciájú rezgés összeadását.* Ez ismét harmonikus rezgést ad, mégpedig ugyanazzal a frekvenciával:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{2.132a}$$

ahol a korábbi helyettesítésekkel

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{2.132b}$$

és

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \tag{2.132c}$$

(Ha az $A\cos\varphi$-vel egyenlő nevező 0, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2}$, aszerint, hogy az $A\sin\varphi$-vel egyenlő számláló pozitív vagy negatív; mivel a gyök alatti kifejezés ≥ 0, ebben és az általános esetben is $A \geq 0$ és φ egyértelműen meghatározott). Ezt egyre több összeadandóra alkalmazva kettőnél több, azonos frekvenciájú általános szinuszfüggvény *lineáris kombinációja* is általános szinuszfüggvényt (harmonikus rezgést) eredményez, ugyanazzal a frekvenciával:

$$\sum_i c_i A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{2.133}$$

ahol a (2.132b)-beli A és a (2.132c)-beli φ mennyiséget egy vektordiagramból **(2.40. ábra)** lehet meghatározni.

2.7.3.3. Rezgések vektordiagramja

A (2.130) és a vele egyenlő, (2.131) alakú általános szinuszfüggvény célszerűen reprezentálható egy közös síkban a $\rho = A, \varphi$ polárkoordinátákkal és az $x = a\,,\ y = b$ DESCARTES-féle koordinátákkal (lásd 191. old.), mert a korábbiak miatt az $\vec{u} \equiv (a, b)$ pont polárkoordinátái (A, φ). Két ilyen mennyiség összege ekkor a két, (a_1, b_1) és (a_2, b_2) vektor összegeként adódik **(2.40. ábra)**. Ugyanígy több ilyen vektor összege több általános szinuszfüggvény *lineáris kombinációját* adja. Ezt az ábrázolást *vektordiagram*nak nevezzük.

A megadott t időponthoz tartozó u mennyiséget a vektordiagram $\vec{u}$ vektorából a **2.41. ábra** szerint lehet meghatározni: Először a koordinátarendszer O kezdőpontján átfektetjük az $OP(t)$ időtengelyt, amely O körül az óramutató járásával egyező irányban, állandó ω szögsebességgel forog. A $t = 0$ kezdeti időpontban az y-tengely és ezen t-tengely egybeesik. Ezután bármely t időpontban $\vec{u}$-nak az időtengelyre ejtett ON vetületi hossza egyenlő az $u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ általános szinuszfüggvény abszolút értékével. A $t = 0$ időpontban $u(0) = A\sin\varphi$ $\vec{u}$-nak az y-tengelyre való vetülete **(2.41. ábra)**.

2.7.3.4. Rezgések csillapítása

Az
$$y = Ae^{-ax}\sin(\omega x + \varphi_0) \tag{2.134}$$
függvény $x > 0$ esetén *egy csillapított rezgés görbéjét* **(2.42. ábra)** írja le. A rezgés az x-tengely körül megy végbe, és közben a görbe aszimptotikusan közeledik az x-tengelyhez. A szinuszgörbe burkolói az $y = \pm Ae^{-ax}$ exponenciális görbék; az érintési pontok

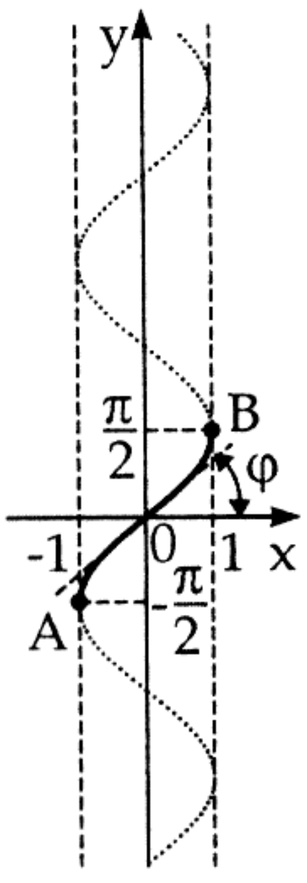
$$A_1, A_2, \ldots, A_k = \left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega},\ (-1)^k A \exp\left(-a\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega} \right) \right).$$

A koordinátatengelyekkel való metszéspontok $B = (0, A\sin\varphi_0), C_1, C_2, \ldots, C_k = \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$. A $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ szélsőértékhelyek az $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$ argumentumokhoz, az $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ inflexiós pontok az $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$ argumentumokhoz tartoznak, ahol $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega}{a}$.

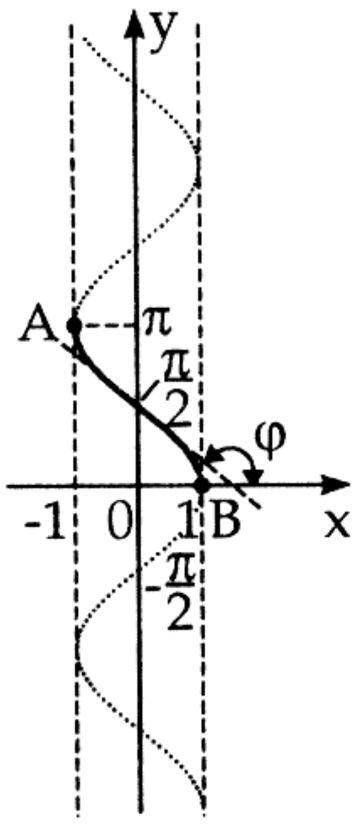
A $\delta = \ln\left|\frac{y_i}{y_{i+1}}\right| = a\frac{\pi}{\omega}$ mennyiséget a csillapítás *logaritmikus dekrementumának* nevezzük; itt y_i és y_{i+1} bármely két szomszédos argumentumú szélsőérték.

2.8. Ciklometrikus függvények (árkuszfüggvények)

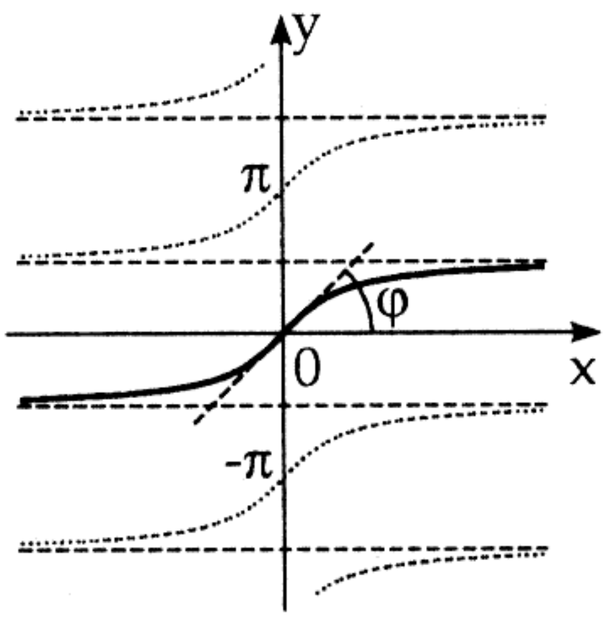
A ciklometrikus függvények a trigonometrikus függvények inverz függvényei. *Inverz trigonometrikus* vagy *árkuszfüggvények*nek is hívjuk őket. Egyértelmű definiálásuk céljából a trigonometrikus függvények értelmezési tartományát monotonitási intervallumokra bontjuk fel, így minden monotonitási intervallumra adódik egy inverz függvény. Ezeket a hozzájuk tartozó monotonitási intervallumnak megfelelő k indexszel látjuk el.



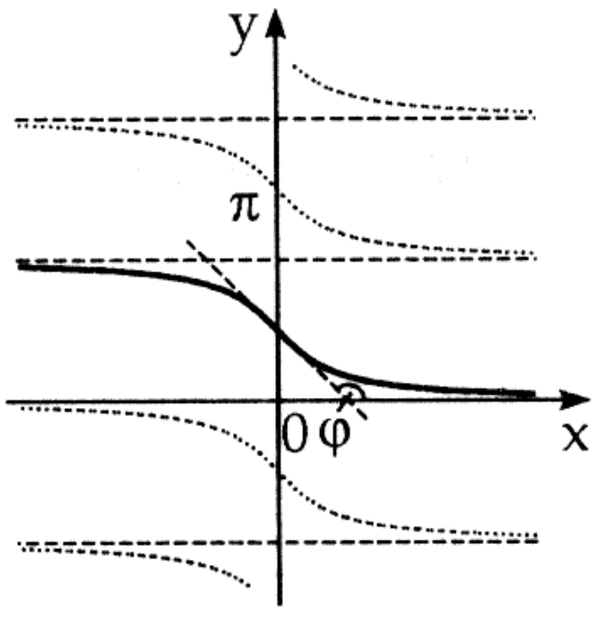
2.43. ábra.



2.44. ábra.



2.45. ábra.



2.46. ábra.

2.8.1. A ciklometrikus függvények definíciója

Az eljárást az árkusz szinusz függvény példáján mutatjuk be **(2.43. ábra)**. Az $y = \sin x$ függvény értelmezési tartományát a $k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$ monotonitási intervallumokra bontjuk fel, ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Az $y = \sin x$ függvény görbéjét az $y = x$ szögfelező egyenesre tükrözve kapjuk az

$$y = \mathrm{arc}_k \sin x \tag{2.135a}$$

inverz függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya és értékkészlete

$$-1 \leq x \leq +1\,, \quad \text{ill.} \quad k\pi - \frac{\pi}{2} \leq y \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{2.135b}$$

Az $y = \mathrm{arc}_k \sin x$ és az $x = \sin y$ írásmód ekvivalens. Analóg módon nyerhetők a többi árkuszfüggvények, amelyeket a **2.44.–2.46. ábrák** szemléltetnek (arccos, arctg, arcctg). Az árkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete, valamint a velük ekvivalens trigonometrikus függvények — azaz amelyből származnak — a **2.6. táblázatban** vannak feltüntetve.

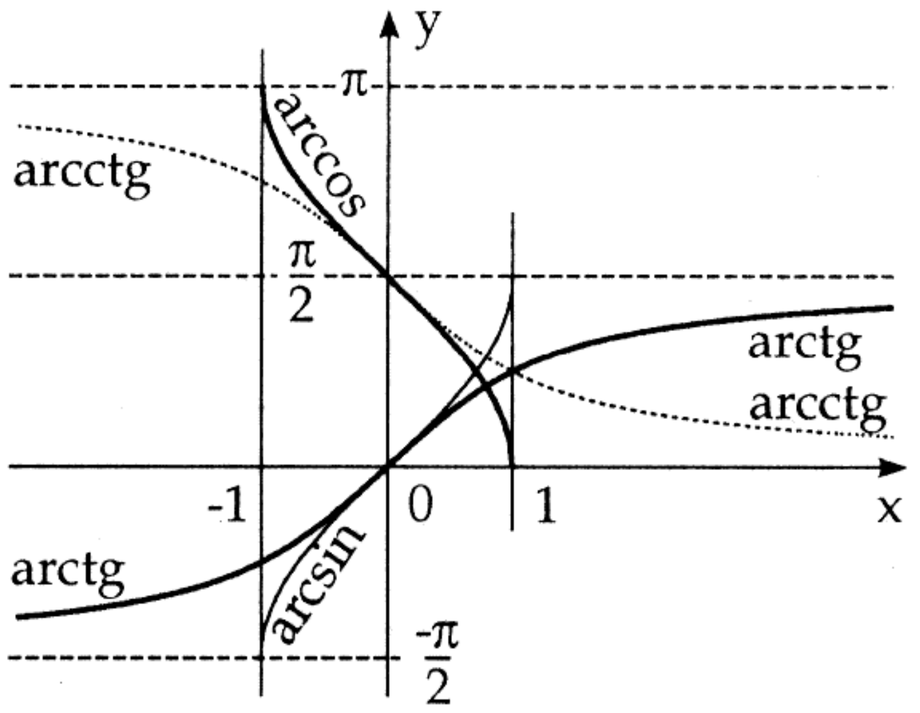
2.8.2. Visszavezetés a főértékekre

Az árkuszfüggvények közül a $k = 0$ indexnek megfelelő az úgynevezett *főérték*, amelyet a k index elhagyásával írunk, pl. $\arcsin x \equiv \mathrm{arc}_0 \sin x$.
A **2.47. ábrán** az árkuszfüggvények főértékei láthatók.

Megjegyzés: A főértékeket zsebszámológépről is le lehet olvasni. A főértékre való visszavezetés a következő képletekkel történik:

$$\mathrm{arc}_k \sin x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \tag{2.136}$$

$$\mathrm{arc}_k \cos x = \begin{cases} (k+1)\pi - \arccos x & (k \text{ páratlan}) \\ k\pi + \arccos x & (k \text{ páros})\,, \end{cases} \tag{2.137}$$



2.47. ábra.

$$\mathrm{arc}_k \,\mathrm{tg}\, x = k\pi + \mathrm{arctg}\, x\,, \tag{2.138}$$

$$\mathrm{arc}_k \,\mathrm{ctg}\, x = k\pi + \mathrm{arcctg}\, x\,. \tag{2.139}$$

■ **A:** $\arcsin 0 = 0\,,\ \mathrm{arc}_k \sin 0 = k\pi\,.$

■ **B:** $\mathrm{arcctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}\,,\ \mathrm{arc}_k \,\mathrm{ctg}\, 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi\,.$

■ **C:** $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{arc}_k \cos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi$ ha k páratlan és $= \frac{\pi}{3} + k\pi$ ha k páros.

2.8.3. Összefüggések a főértékek között

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \mathrm{arctg}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\arccos\sqrt{1-x^2} & (-1 \leq x \leq 0), \\ \arccos\sqrt{1-x^2} & (0 \leq x \leq 1)\,, \end{cases} \tag{2.140}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \mathrm{arcctg}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & (-1 \leq x \leq 0)\,, \\ \arcsin\sqrt{1-x^2} & (0 \leq x \leq 1)\,, \end{cases} \tag{2.141}$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\, x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{2.142}$$

2.6. táblázat. A ciklometrikus függvények értelmezési tartománya és értékkészlete

Árkuszfüggvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Eredeti trigonometrikus függvény
Árkusz szinusz $y = \operatorname{arc}_k \sin x$	$-1 \le x \le 1$	$k\pi - \frac{\pi}{2} \le y \le k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = \sin y$
Árkusz koszinusz $y = \operatorname{arc}_k \cos x$	$-1 \le x \le 1$	$k\pi \le y \le (k+1)\pi$	$x = \cos y$
Árkusz tangens $y = \operatorname{arc}_k \operatorname{tg} x$	$-\infty < x < \infty$	$k\pi - \frac{\pi}{2} < y < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = \operatorname{tg} y$
Árkusz kotangens $y = \operatorname{arc}_k \operatorname{ctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$k\pi < y < (k+1)\pi$	$x = \operatorname{ctg} y$
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A $k = 0$ esetben kapjuk az illető ciklometrikus függvény főértékét, amelyet index nélkül írunk (pl. $\arcsin x \equiv \operatorname{arc}_0 \sin x$).			

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} - \pi & (x < 0) \\ \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \le 0)\,, \\ \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \ge 0)\,, \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{2.143}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{2.144}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \pi & (x < 0) \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \le 0) \\ \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \ge 0)\,. \end{cases} \tag{2.145}$$

2.8.4. Képletek ellentett argumentumpárokra

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x\,, \tag{2.146}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x\,, \tag{2.147}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x\,, \tag{2.148}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x\,. \tag{2.149}$$

2.8.5. $\arcsin x$ és $\arcsin y$ összege és különbsége

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (xy \le 0 \text{ vagy } x^2+y^2 \le 1)\,, \tag{2.150a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x > 0, y > 0,\ x^2+y^2 \ge 1)\,, \tag{2.150b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x < 0, y < 0,\ x^2+y^2 \ge 1)\,. \tag{2.150c}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (xy \ge 0 \text{ vagy } x^2+y^2 \le 1)\,, \tag{2.151a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x>0,\, y<0,\; x^2+y^2 \geq 1)\,, \tag{2.151b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x<0,\, y>0,\; x^2+y^2 \geq 1)\,. \tag{2.151c}$$

2.8.6. $\arccos x$ és $\arccos y$ összege és különbsége

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \geq 0)\,, \tag{2.152a}$$

$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \leq 0)\,. \tag{2.152b}$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x \geq y)\,, \tag{2.153a}$$

$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x \leq y)\,. \tag{2.153b}$$

2.8.7. $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arctg} y$ összege és különbsége

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (xy<1)\,, \tag{2.154a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (x>0 \text{ és } xy>1\,, \quad \text{azaz} \quad y>0 \text{ és } xy>1) \tag{2.154b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (x<0,\, y<0,\, xy>1)\,, \tag{2.154c}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (xy=1)\,. \tag{2.154d}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (xy>-1)\,, \tag{2.155a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (x>0,\, y<0,\, xy<-1)\,, \tag{2.155b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (x<0,\, y>0,\, xy<-1)\,, \tag{2.155c}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (xy=-1)\,. \tag{2.155d}$$

2.8.8. Speciális összefüggések az $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ függvényekre

$$2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,, \tag{2.156a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1\right)\,, \tag{2.156b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,. \tag{2.156c}$$

$$2\arccos x = \arccos(2x^2-1) \quad (0 \leq x \leq 1)\,, \tag{2.157a}$$

$$= 2\pi - \arccos(2x^2-1) \quad (-1 \leq x \leq 0)\,. \tag{2.157b}$$

$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \quad (|x|<1)\,, \tag{2.158a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x > 1)\,, \tag{2.158b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x < -1)\,. \tag{2.158c}$$

$$\cos(n \arccos x) = T_n(x) \quad (n \geq 1)\,, \tag{2.159}$$

ahol n törtszám is lehet, és $T_n(x)$-et a

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2} \tag{2.160}$$

képlet határozza meg. Ha n egész szám, akkor $T_n(x)$ az x változónak valójában polinomja (CSEBISEV-*polinom*). A CSEBISEV-polinomok tulajdonságairól lásd: 946. old.

2.9. Hiperbolikus függvények

2.9.1. A hiperbolikus függvények definíciója

A *szinusz hiperbolikusz, koszinusz hiperbolikusz* és *tangens hiperbolikusz* definíciója a következő:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (\textit{szinusz hiperbolikusz})\,, \tag{2.161}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\textit{koszinusz hiperbolikusz})\,, \tag{2.162}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (\textit{tangens hiperbolikusz})\,. \tag{2.163}$$

A geometriai definíció, amely a Geometria fejezetben található meg (lásd 133. old.), analóg a trigonometrikus függvényekével.

A *kotangens hiperbolikusz, szekáns hiperbolikusz* és *koszekáns hiperbolikusz* az előző három hiperbolikus függvény reciprok értékeként van értelmezve:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (\textit{kotangens hiperbolikusz})\,, \tag{2.164}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad (\textit{szekáns hiperbolikusz})\,, \tag{2.165}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad (\textit{koszekáns hiperbolikusz})\,, \tag{2.166}$$

A hiperbolikus függvények menetét a **2.48.–2.52. ábrák** mutatják.

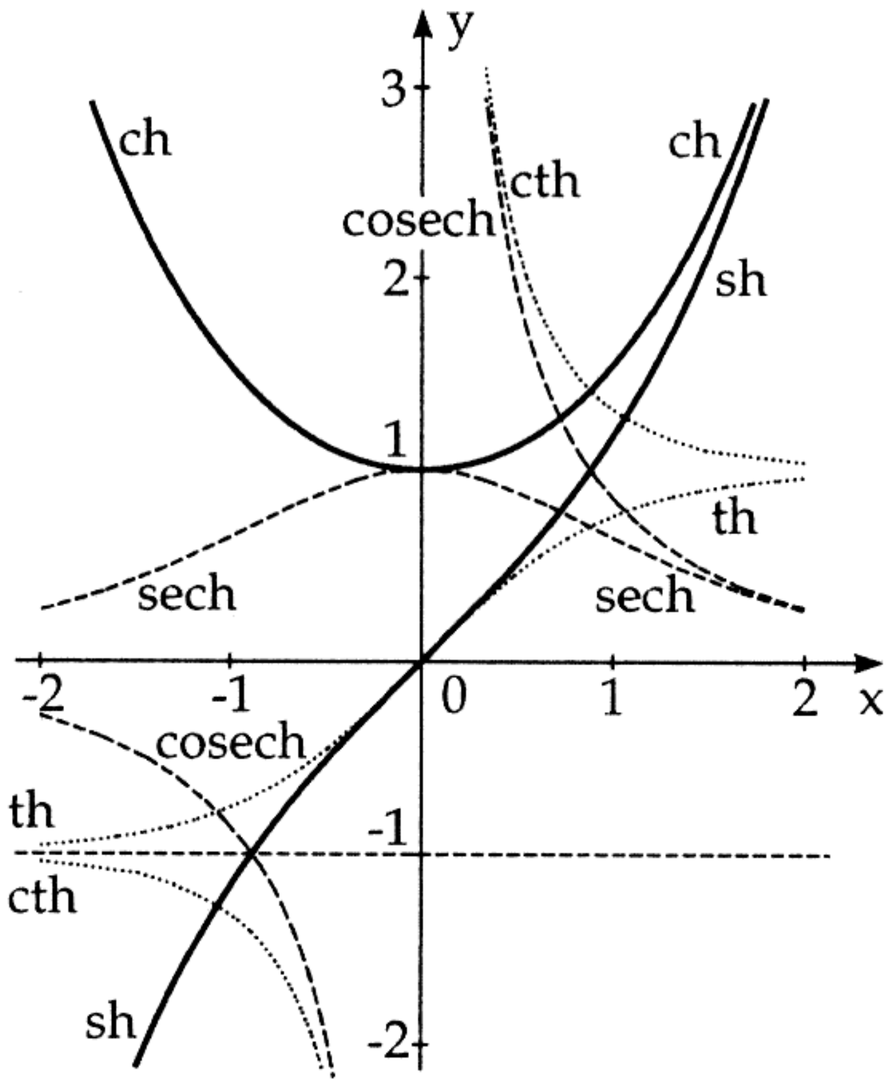
2.9.2. A hiperbolikus függvények grafikus előállítása

2.9.2.1. Szinusz hiperbolikusz

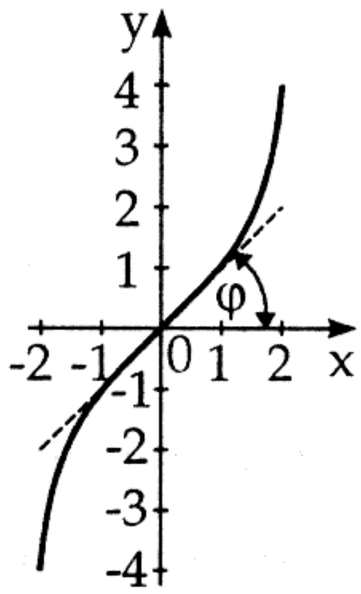
$y = \operatorname{sh} x$ (lásd 2.161) páratlan, $-\infty$ és $+\infty$ között monoton növekedő függvény **(2.49. ábra)**. A koordinátarendszer kezdőpontja egyszerre szimmetria-középpontja és inflexiós pontja is a görbének, a hozzá tartozó érintő irányszöge $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Aszimptota nincs.

2.9.2.2. Koszinusz hiperbolikusz

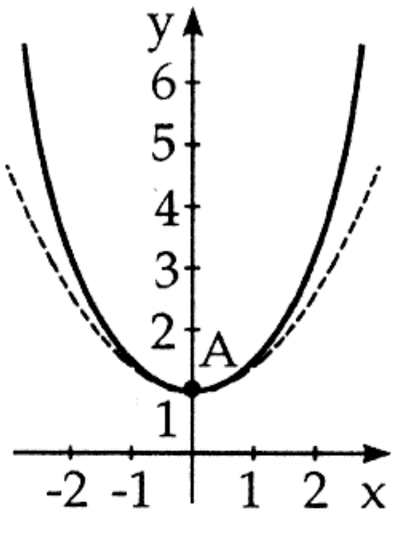
$y = \operatorname{ch} x$ (lásd 2.162) páros függvény, amely $-\infty < x \leq 0$-ban monoton csökken $+\infty$-ről 1-re, $0 \leq x < +\infty$-ben pedig monoton növekszik 1-ről $+\infty$-re **(2.50. ábra)**. A minimumpont $A(0, 1)$; aszimptota nincs. A görbe szimmetrikus az y-tengelyre, és az $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ parabola (az ábrán a szaggatott görbe)



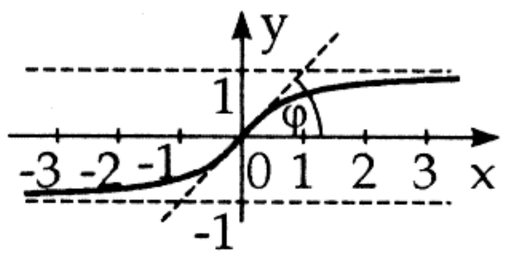
2.48. ábra.



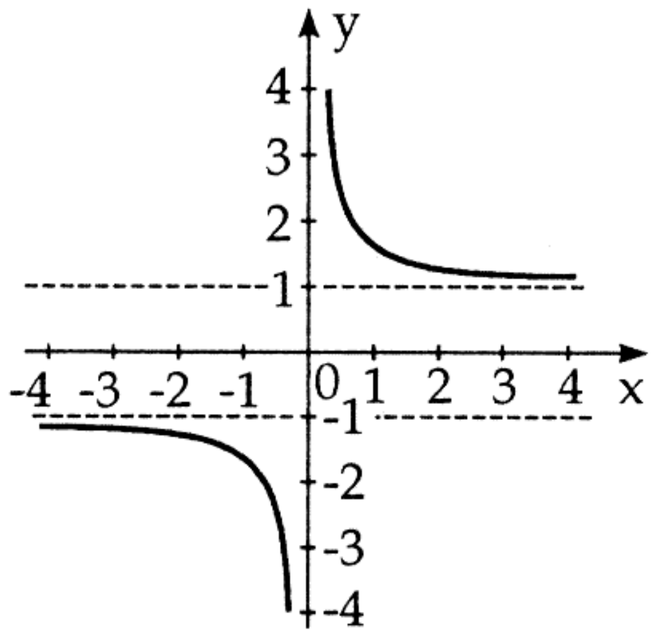
2.49. ábra.



2.50. ábra.



2.51. ábra.



2.52. ábra.

fölött marad (a másodrendű felfele nyitott parabolák közül ez érinti a görbét a 0-ban a 2. deriváltig bezárólag). A függvény *láncgörbét* ír le (lásd 109. old.).

2.9.2.3. Tangens hiperbolikusz

$y = \operatorname{th} x$ (lásd 2.163) páratlan függvény, amely x-nek $-\infty$-től $+\infty$ felé való haladásakor monoton növekszik (határértékben) -1-ről $+1$-ig **(2.51. ábra)**. A koordinátarendszer kezdőpontja a görbének egyszerre szimmetria-középpontja és inflexiós pontja is, a hozzá tartozó érintő irányszöge $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Az $y = \pm 1$ egyenesek aszimptoták.

2.9.2.4. Kotangens hiperbolikusz

$y = \operatorname{cth} x$ (lásd 2.164) páratlan függvény, amelynek az $x = 0$ pont szakadási helye **(2.52. ábra)**. A $-\infty < x < 0$-ban monoton csökken -1-ről $-\infty$-ig, a $0 < x < +\infty$-ben pedig (határértékben) $+\infty$-ről $+1$-ig. Szélsőérték és inflexiós pont nincs. Az $x = 0$ és az $y = \pm 1$ egyenesek aszimptoták.

2.9.3. Hiperbolikus függvényekre vonatkozó fontos képletek

A hiperbolikus függvényeket egymással összekapcsoló definíciók és képletek analógiát mutatnak a trigonometrikus függvényeknél megismertekkel. Így nem meglepő, hogy a megfelelő trigonometrikus képletekből lehet ez utóbbiakat levezetni a (2.194)–(2.201) összefüggések segítségével.

2.9.3.1. Egyező argumentumú hiperbolikus függvények

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,, \tag{2.167}$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1\,, \tag{2.168}$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1\,, \tag{2.169}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1\,, \tag{2.170}$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x\,, \tag{2.171}$$

$$\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x\,. \tag{2.172}$$

2.9.3.2. Hiperbolikus függvény előállítása azonos argumentumú másikkal

Áttekinthetőség céljából a megfelelő képleteket a **2.7. táblázatban** foglaltuk össze.

2.7. táblázat. Egyező argumentumú hiperbolikus függvények közötti összefüggések $x > 0$ esetén

Függvény	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{cth} x$
$\operatorname{sh} x$	–	$\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$	–	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$	–	$\dfrac{1}{\operatorname{cth} x}$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x}$	$\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	–

2.9.3.3. Ellentett argumentumpárokra vonatkozó képletek

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\,, \tag{2.173}$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x\,, \tag{2.174}$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\,, \tag{2.175}$$

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x\,. \tag{2.176}$$

2.9.3.4. Hiperbolikus függvények két argumentum összegéhez és különbségéhez tartozó értékei (addíciós tételek)

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,, \tag{2.177}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\,, \tag{2.178}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}\,, \tag{2.179}$$

$$\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}\,, \quad (x \neq -y,\ \text{ill. } x \neq y)\,. \tag{2.180}$$

2.9.3.5. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum kétszeresén felvett értékei

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,, \tag{2.181}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x\,, \tag{2.182}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}\,, \tag{2.183}$$

$$\operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}\,. \tag{2.184}$$

2.9.3.6. Moivre-képlet hiperbolikus függvényekre

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx. \tag{2.185}$$

2.9.3.7. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum felén felvett értékei

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)}\,, \quad (x \neq 0) \tag{2.186}$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)}\,. \tag{2.187}$$

(2.186)-ban a négyzetgyök előjelét $x > 0$ esetén pozitívnak, $x < 0$ esetén negatívnak kell venni.

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}\,, \tag{2.188}$$

$$\operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}\,. \tag{2.189}$$

(2.188)-ban az első egyenlőségben és (2.189)-ben mindkét törtkifejezésben $x \neq 0$.

2.9.3.8. Hiperbolikus függvény két helyen felvett értékének összege és különbsége sh-val és/vagy ch-val kifejezve

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}\,, \tag{2.190}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}\,, \tag{2.191}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}\,, \tag{2.192}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}\,. \tag{2.193}$$

2.9.3.9. Összefüggés a hiperbolikus és a trigonometrikus függvények között komplex z argumentum esetén

$$\sin z = -\mathrm{i} \operatorname{sh} \mathrm{i}z\,, \tag{2.194}$$

$$\cos z = \operatorname{ch} \mathrm{i}z\,, \tag{2.195}$$

$$\operatorname{tg} z = -\mathrm{i} \operatorname{th} \mathrm{i}z\,, \tag{2.196}$$

$$\operatorname{ctg} z = \mathrm{i} \operatorname{cth} \mathrm{i}z\,, \tag{2.197}$$

$$\operatorname{sh} z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z\,, \tag{2.198}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos \mathrm{i}z\,, \tag{2.199}$$

$$\operatorname{th} z = -\mathrm{i} \operatorname{tg} \mathrm{i}z\,, \tag{2.200}$$

$$\operatorname{cth} z = \mathrm{i} \operatorname{ctg} \mathrm{i}z\,. \tag{2.201}$$

Minden képlet, amely a szinusz, koszinusz hiperbolikusz függvények x vagy általánosabban ax (de nem $ax + b$) argumentumhoz tartozó értékeit egymással összekapcsolja, levezethető a szinusz, koszinusz trigonometrikus függvények α argumentumhoz tartozó értékeit összekapcsoló megfelelő képletekből úgy, hogy $\sin \alpha$ helyébe az $\mathrm{i} \operatorname{sh} x$, $\cos \alpha$ helyébe pedig a $\operatorname{ch} x$ kifejezést írjuk.

■ **A:** $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\operatorname{ch}^2 x + \mathrm{i}^2 \operatorname{sh}^2 x = 1$ vagyis $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

■ **B:** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\mathrm{i} \operatorname{sh} 2x = 2\mathrm{i} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ vagyis $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Az eddig említetteken kívül is minden algebrai, gyökmentes, trigonometrikus és hiperkolikus függvényeket tartalmazó azonosság a komplex függvénytan egyértelműségi tétele következtében érvényes komplex argumentumra is, ha a szereplő kifejezések értelmesek. Ehhez l. még 14.5.2.4.-et.

■ **A:** $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$.

■ **B:** $\mathrm{sh}\, 2z = 2\,\mathrm{sh}\, z\,\mathrm{ch}\, z$.

2.10. Áreafüggvények

2.10.1. Definíciók

Az *áreafüggvények* a hiperbolikus függvények inverzei, vagyis *inverz hiperbolikus függvények.* A $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{th}\, x$ és $\mathrm{cth}\, x$ függvény szigorúan monoton, ezért mindegyiknek pontosan egy (intervallumon definiált) inverz függvénye van; más a helyzet a $\mathrm{ch}\, x$ függvénnyel, amelynek két maximális, azonos értékkészletű monotonitási intervalluma, tehát két inverz függvénye van, és a $\mathrm{cth}\, x$-szel, amelynek a két ága diszkrét értékkészletű, tehát inverzének értelmezési tartománya két diszjunkt intervallumból áll. Az *área* (terület) elnevezés a függvény hiperbolacikk területeként történő, geometriai definíciójával függ össze (lásd 133. old.).

2.8. táblázat. Az áreafüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete

Áreafüggvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Eredeti hiperbolikus függvény
Área szinusz hiperbolikusz $y = \mathrm{arsh}\, x$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$x = \mathrm{sh}\, y$
Área koszinusz hiperbolikusz $y = \mathrm{arch}\, x$ $y = -\mathrm{arch}\, x$	$1 \le x < \infty$	$0 \le y < \infty$ $-\infty < y \le 0$	$x = \mathrm{ch}\, y$
Área tangens hiperbolikusz $y = \mathrm{arth}\, x$	$\lvert x\rvert < 1$	$-\infty < y < \infty$	$x = \mathrm{th}\, y$
Área kotangens hiperbolikusz $y = \mathrm{arcth}\, x$	$\lvert x\rvert > 1$	$-\infty < y < 0$ $0 < y < \infty$	$x = \mathrm{cth}\, y$

2.10.1.1. Área szinusz hiperbolikusz

Az

$$y = \mathrm{arsh}\, x \tag{2.202}$$

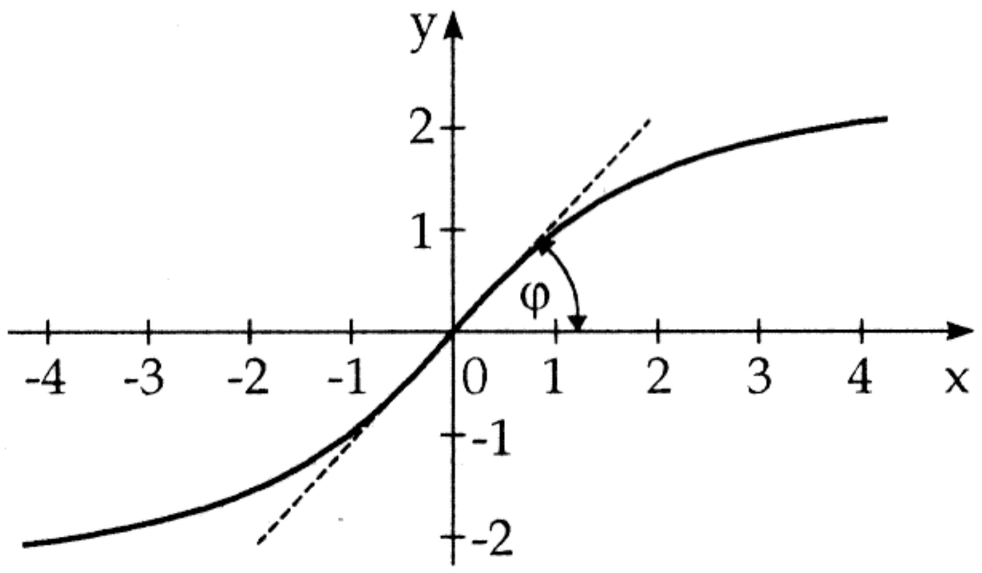
függvény **(2.53. ábra)** páratlan, szigorúan monoton növekszik, értelmezési tartományát és értékkészletét pedig a **2.8. táblázat** tartalmazza. (2.202) és $x = \mathrm{sh}\, y$ ugyanannak az összefüggésnek két írásmódja. A függvénynek a koordinátarendszer kezdőpontjában inflexiós pontja van, és itt az érintő irányszöge $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2.10.1.2. Área koszinusz hiperbolikusz

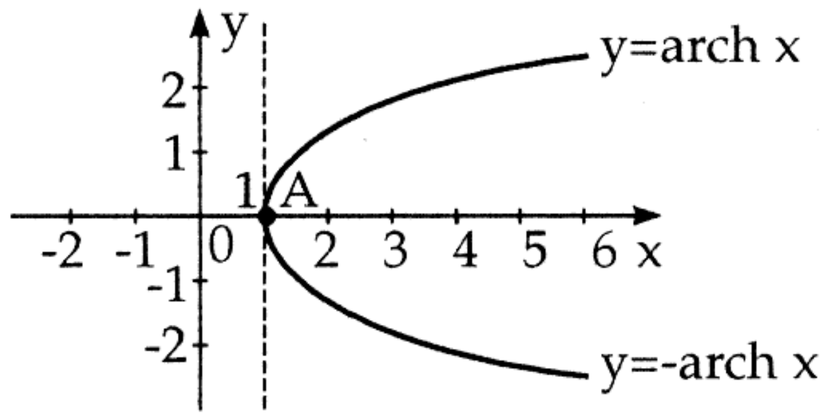
Az

$$y = \mathrm{arch}\, x \quad \text{(2.203a)} \qquad \text{és} \quad y = -\mathrm{arch}\, x \tag{2.203b}$$

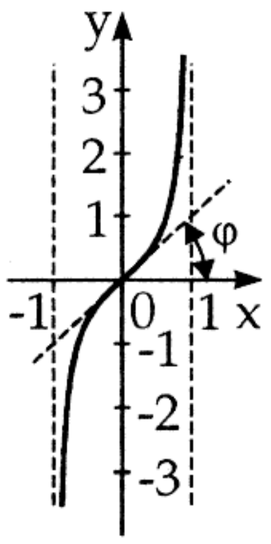
függvények **(2.54. ábra)** az $x = \mathrm{ch}\, y$ összefüggésnek felelnek meg. Értelmezési tartományuk és értékkészletük a **2.8. táblázatból** olvasható le. Csak $x \ge 1$ esetén vannak értelmezve. A függvénygörbéknek az $A(1, 0)$ pontban függőleges érintőjük van, ettől jobbra az egyik szigorúan monoton nő, a másik szigorúan monoton csökken.



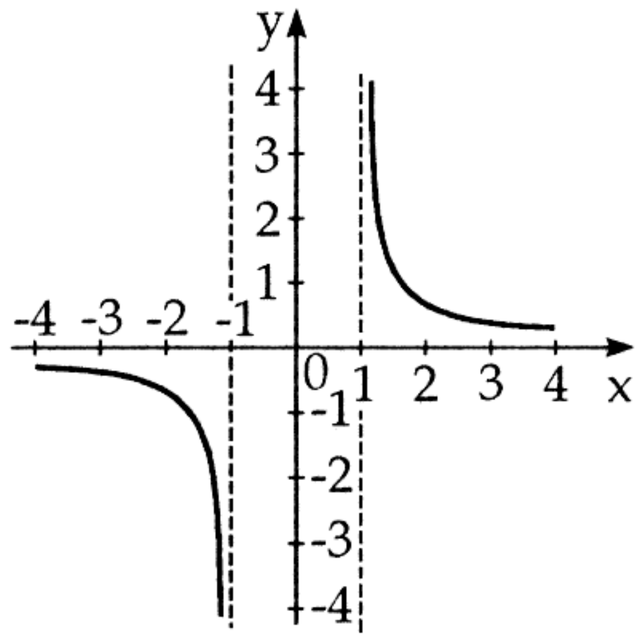
2.53. ábra.



2.54. ábra.



2.55. ábra.



2.56. ábra.

2.10.1.3. Área tangens hiperbolikusz

Az
$$y = \operatorname{arth} x \tag{2.204}$$
függvény **(2.55. ábra)**, amely az $x = \operatorname{th} y$ összefüggésnek felel meg, páratlan, és csak $|x| < 1$ esetén van értelmezve; értelmezési tartományát és értékkészletét a **2.8. táblázat** tartalmazza. A koordinátarendszer kezdőpontja inflexiós pont, és az érintő irányszöge itt $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Az $x = \pm 1$ egyenesek aszimptoták.

2.10.1.4. Área kotangens hiperbolikusz

Az
$$y = \operatorname{arcth} x \tag{2.205}$$
függvény **(2.56. ábra)**, amely az $x = \operatorname{cth} y$ összefüggésnek felel meg, páratlan, és csak $|x| > 1$ esetén van értelmezve; értelmezési tartományát és értékkészletét a **2.8. táblázat** tartalmazza. $-\infty < x < -1$ esetén határértékben 0-ról $-\infty$-ig, $1 < x < +\infty$ esetén pedig $+\infty$-ről 0-ra csökken szigorúan monoton módon. Három aszimptotája van, mégpedig az $y = 0$ és $x = \pm 1$ egyenesek.

2.10.2. Az áreafüggvények előállítása a természetes alapú logaritmussal

A hiperbolikus függvények ((2.161)–(2.166) definíciójából (lásd 89. old.) az áreafüggvények kifejezhetők a logaritmusfüggvény segítségével:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \tag{2.206}$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right) \quad (x \geq 1), \tag{2.207}$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1), \qquad (2.208) \qquad\qquad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1). \qquad (2.209)$$

2.10.3. Összefüggések a különböző áreafüggvények között

$$\operatorname{arsh} x = (\operatorname{sign} x) \operatorname{arch} \sqrt{x^2+1} = \operatorname{arth} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \qquad (2.210)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arch} x &= (\operatorname{sign} x) \operatorname{arsh} \sqrt{x^2-1} = (\operatorname{sign} x) \operatorname{arth} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \\ &= (\operatorname{sign} x) \operatorname{arcth} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad (2.211) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arth} x &= (\operatorname{sign} x) \operatorname{arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = (\operatorname{sign} x) \operatorname{arcth} \frac{1}{x} \\ &= (\operatorname{sign} x) \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \qquad (2.212) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcth} x &= \operatorname{arth} \frac{1}{x} = (\operatorname{sign} x) \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= (\operatorname{sign} x) \operatorname{arch} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (|x| > 1). \qquad (2.213) \end{aligned}$$

2.10.4. Áreafüggvények két értékének összege és különbsége

$$\operatorname{arsh} x \pm \operatorname{arsh} y = \operatorname{arsh} \left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2} \right), \qquad (2.214)$$

$$\operatorname{arch} x \pm \operatorname{arch} y = \operatorname{arch} \left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} \right), \qquad (2.215)$$

$$\operatorname{arth} x \pm \operatorname{arth} y = \operatorname{arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}. \qquad (2.216)$$

2.10.5. Képletek ellentett argumentumpárokra

$$\operatorname{arsh}(-x) = -\operatorname{arsh} x, \qquad (2.217)$$

$$\operatorname{arth}(-x) = -\operatorname{arth} x, \qquad (2.218) \qquad\qquad \operatorname{arcth}(-x) = -\operatorname{arcth} x. \qquad (2.219)$$

Míg arsh, arth és arcth páratlan függvény, addig arch (lásd 2.207) negatív x argumentumokra nincs értelmezve.

2.11. Harmadrendű görbék

Egy síkgörbét n-edrendű algebrai görbének nevezünk, ha egy kétváltozós, n összfokszámú, $F(x, y) = 0$ alakú polinomegyenlettel írható le, vagy megszokott alakja egy ilyennel ekvivalens.

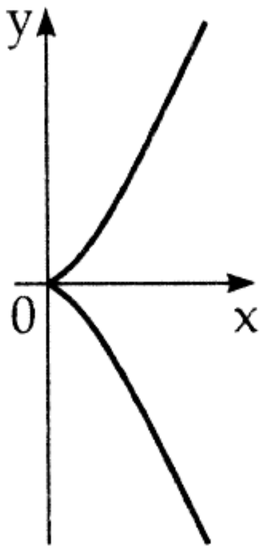
■ A kardioid, amelynek egyenlete $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax) - a^2y^2 = 0$, $(a > 0)$ negyedrendű görbe (lásd 99. old.). A jól ismert kúpszeletek (lásd 204. old.) másodrendű görbék.

2.11.1. Neil-parabola

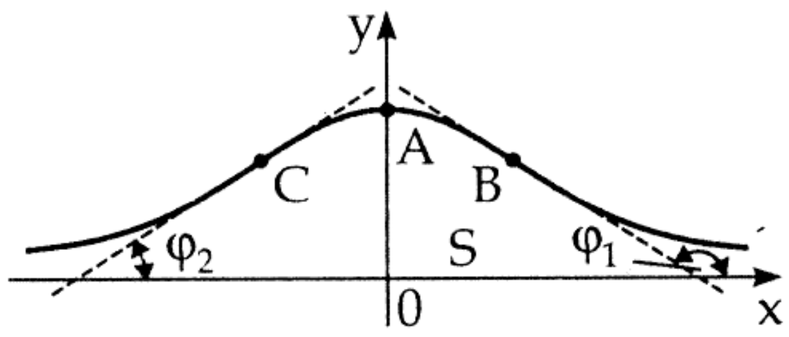
Az $$y = ax^{3/2} \quad (x \geq 0) \quad \text{egyenlet} \qquad (2.220a)$$

vagy a vele ekvivalens $\qquad x = t^2\,, \quad y = at^3\,, \quad 0 \le t < \infty \qquad$ (2.220b)

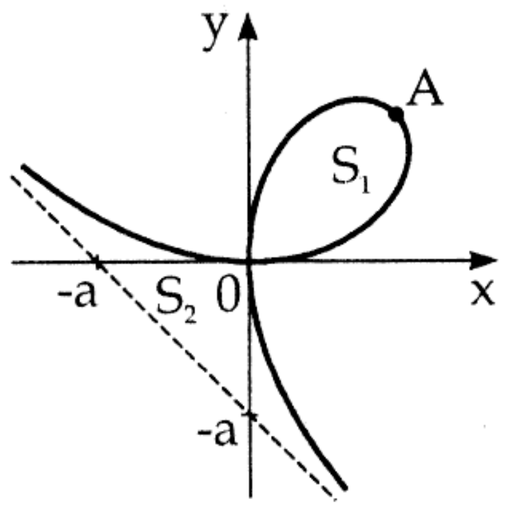
paraméteres előállítás ($a \neq 0$) a NEIL-*parabolát* **(2.57. ábra)** írja le. A koordinátarendszer kezdőpontja visszatérő pont (l. 3.6.1.3.2.); aszimptota nincs. $x > 0$-ra a $K = \dfrac{6a}{\sqrt{x}(4 + 9a^2x)^{3/2}}$ görbület (l. 3.6.1.2.4.) ∞-től 0-ig minden értéket felvesz. A koordinátarendszer kezdőpontja és egy $M(x, y)$ görbepont között a görbe ívhosszúsága $L = \dfrac{1}{27a^2}[(4 + 9a^2x)^{3/2} - 8]$.



2.57. ábra.



2.58. ábra.



2.59. ábra.

2.11.2. Agnesi-féle kürt (verziera)

Az $\qquad y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0) \qquad$ (2.221a)

egyenlet a **2.58. ábrán** feltüntetett AGNESI-*féle kürtöt (verzierát)* írja le. (Szokás x és y felcserélésével is definiálni, ill. ábrázolni.) Aszimptotája az x-tengely, maximumpontja $A(0, a)$, az ehhez tartozó görbületi sugár (l. 3.6.1.2.4.) $r = \dfrac{a}{2}$. A B, C inflexiós pontok koordinátái $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}\,, \dfrac{3a}{4}\right)$, a megfelelő érintők meredeksége $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \mp\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. A görbe és az aszimptota közötti terület $S = \pi a^2$. A (2.221a) AGNESI-féle görbe az

$$y = \frac{a}{b^2 + (x - c)^2} \quad (a > 0) \qquad (2.221b)$$

LORENTZ- vagy másképpen BREIT–WIGNER-féle görbe speciális esete ($a := a^3$, $b := a^2$, $c = 0$).
■ Egy speciális csillapított rezgés FOURIER-transzformáció szerinti képfüggvénye éppen a fenti LORENTZ- vagy BREIT–WIGNER-féle görbe $b = a$-val (lásd 760. old.).

2.11.3. Descartes-levél

Az $\quad x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0) \qquad$ (2.222a)

egyenlethez vagy a vele $y = tx$-ből adódóan ekvivalens

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},\ y = \frac{3at^2}{1 + t^3}, \quad \text{ahol } t = \operatorname{tg}\sphericalangle M0x,\ M = (x, y)\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \qquad (2.222b)$$

paraméteres előállításhoz tartozó görbe a DESCARTES-*levél* **(2.59. ábra)**. A koordinátarendszer kezdőpontja a rajta áthaladó két görbeág miatt kettőspont (l. 3.6.1.3.2.), amelyben mindkét koordinátatengely a görbének érintője. A koordinátarendszer kezdőpontjában mindkét görbeág görbületi sugara $r = \dfrac{3a}{2}$. Az aszimptota egyenlete $x + y + a = 0$, a zárt, korlátos huroknak az origótól legtávolabbi

pontja, azaz a csúcspont $A\left(\frac{3}{2}a\,,\,\frac{3}{2}a\right)$. A hurok $(0 \le t < \infty)$ területe $S_1 = \frac{3a^2}{2}$. A görbe és az aszimptota közötti S_2 terület ugyanekkora.

2.11.4. Cisszoid

Az $$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \quad (a>0,\, 0 \le x < a)\,, \quad \text{egyenlet, a vele ekvivalens} \tag{2.223a}$$

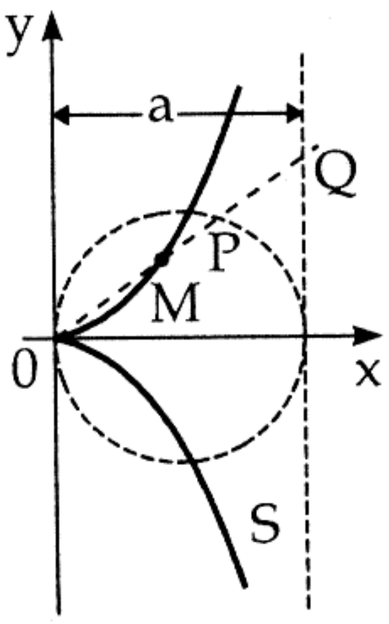
$$x = \frac{at^2}{1+t^2}\,,\; y = \frac{at^3}{1+t^2} \quad (-\infty < t < \infty,\ \text{ahol } 0 \neq t = \operatorname{tg} \sphericalangle M0x, M=(x,y)) \tag{2.223b}$$

paraméteres előállítás és a $$\rho = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \quad (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}) \tag{2.223c}$$

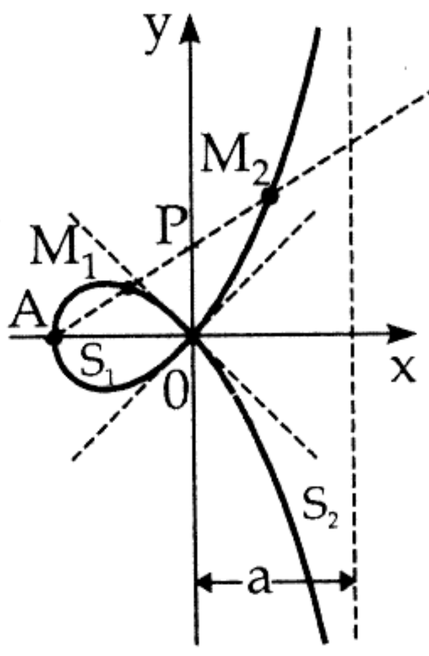
polárkoordinátás előállítás **(2.60. ábra)** azon M pontok mértani helyét határozza meg, amelyekre

$$\overline{0M} = \overline{PQ}\,. \tag{2.224}$$

Itt P az $\frac{a}{2}$ sugarú generál kör tetszőleges pontja, Q pedig a $0M$ egyenes és az $x=a$ aszimptota metszéspontja. A görbe és az aszimptota közötti terület $S = \frac{3}{4}\pi a^2$.



2.60. ábra.



2.61. ábra.

2.11.5. Sztrofoid

*Sztrofoid*nak hívjuk a negatív x-tengelyen lévő A ponttal együtt azon M_1 és M_2 pontok mértani helyét, amelyek az A pontból kiinduló tetszőleges nem függőleges félegyenesen fekszenek és amelyekre

$$\overline{PM_1} = \overline{PM_2} = \overline{0P}\,. \tag{2.225}$$

Itt P a félegyenes és az y-tengely metszéspontja **(2.61. ábra)**. A sztrofoid egyenlete derékszögű koordinátákban, polárkoordinátákban (ekkor az origó nélkül) és paraméteres alakban a következő (A és 0 távolsága $= a > 0$):

$$y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\,, \tag{2.226a}$$

$$\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} \quad (-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0,\, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ és } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4})\,, \tag{2.226b}$$

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1},\; y = at\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \text{ahol } -\infty < t < \infty \text{ és } t \neq \pm 1\text{-re } t = \operatorname{tg} \sphericalangle M\,0\,x, M=(x,y). \tag{2.226c}$$

A koordinátarendszer kezdőpontja a görbének kettőspontja, amelyben az érintők egyenlete $y = \pm x$. Az aszimptota egyenlete $x = a$. Az origótól legtávolabbi hurokpont, tehát a csúcspont $A(-a, 0)$. A hurok területe $S_1 = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$, a görbe és az aszimptota közötti terület pedig $S_2 = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2$.

2.12. Negyedrendű görbék

2.12.1. Nikomedes-féle konchoid

NIKOMEDES-*féle konchoid*nak (konchoisnak) **(2.62. ábra)** nevezzük azon M pontok mértani helyét, amelyekre teljesül az

$$\overline{0M} = \overline{0P} \pm l \quad (l > 0) \tag{2.227}$$

feltétel; itt P a $0M_1$, ill. $0M_2$ egyenes és egy eleve adott függőleges egyenes, az $x = a > 0$, mindkétághoz tartozó aszimptota metszéspontja. A + előjel a külső, az ábrán jobboldali, a − pedig a belső, baloldali görbeágat definiálja. A NIKOMEDES-*féle konchoid* egyenlete derékszögű koordinátákban, paraméteres alakban és ($l \geq a$ esetén az origó nélkül) polárkoordinátákban:

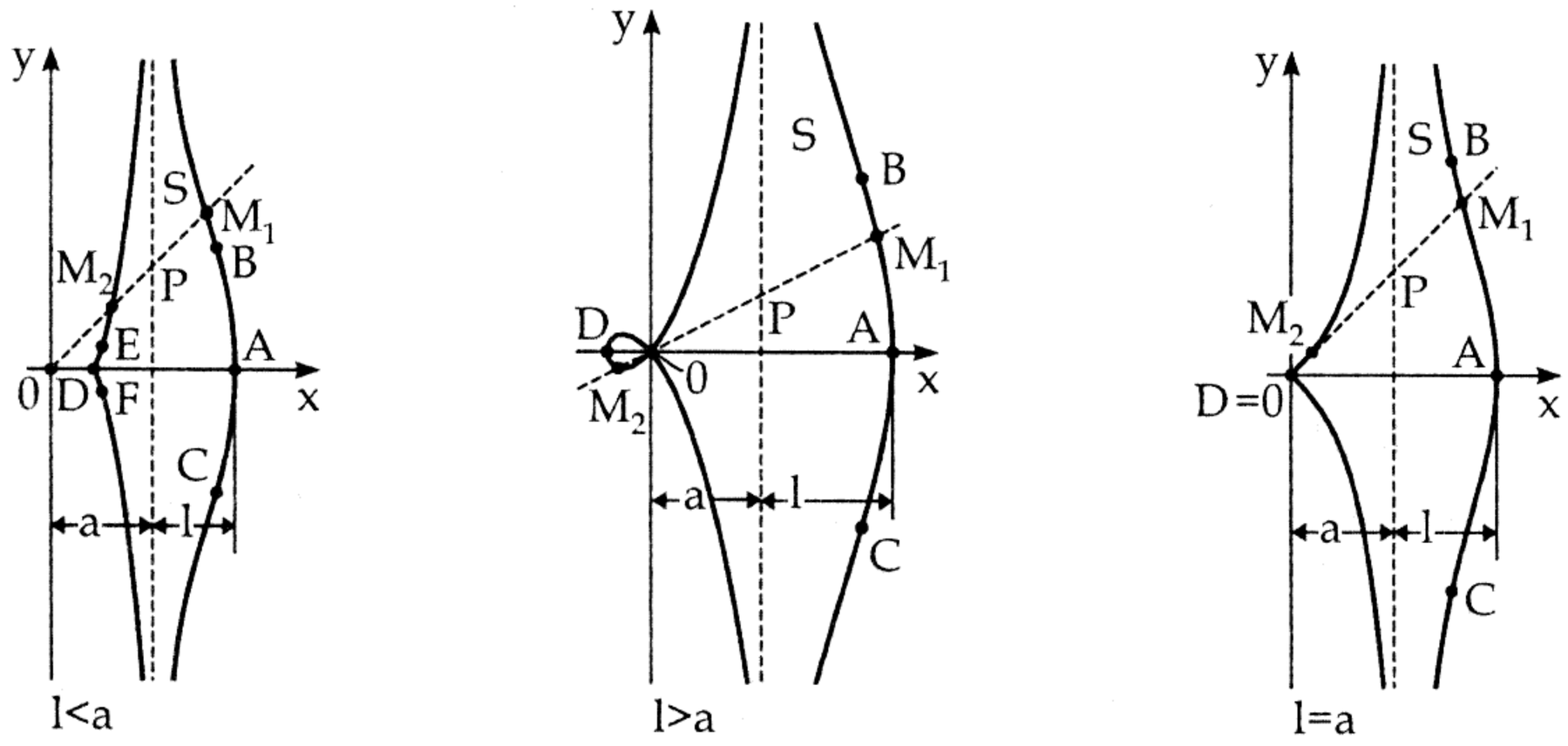
$$(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0\,, \tag{2.228a}$$

$$x = a \pm l\cos\varphi\,, \quad y = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \pm l\sin\varphi \tag{2.228b}$$

($l \leq a$ esetén $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $l > a$ esetén ehhez járul még a $\pi \pm \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$ paramétertartomány, ahol a negatív előjelekkel definiált formulák érvényesek),

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l \tag{2.228c}$$

(φ-re a fentiek érvényesek, $l \leq a$ esetén kettő, $l > a$ esetén három görbe definícióját kapjuk, a harmadik a hurok).



a) b) c)

2.62. ábra.

1. Jobboldali ág: Az aszimptota $x = a$. Az A csúcspont koordinátái $(a + l, 0)$, a B és a C inflexiós pont (ezek az x-tengely feletti, ill. alatti részgörbéhez, mint függvényhez tartoznak) x-koordinátája az $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$ egyenlet legnagyobb gyöke. A jobboldali ág és az aszimptota közötti terület $S = \infty$.

2. Baloldali ág: Az aszimptota $x = a$. A D csúcspont koordinátái $(a - l, 0)$. A kezdőpont szinguláris pont, amelynek jellege a-tól és l-től függ:

a) eset Ha $l < a$, akkor $0 \leq a - l \leq x$ és így izolált ponttal van dolgunk **(2.62.a ábra)**. Ilyenkor a felső és alsó részgörbének van egy-egy további inflexiós pontja, E és F, amelyeknek az abszcisszája az $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$ egyenlet második legnagyobb gyökeként adódik.

b) eset Ha $l > a$, akkor a koordinátarendszer kezdőpontja kettőspont **(2.62.b ábra)**. A görbe felső, ill. alsó félsíkba eső részének függvényként a $0 > x = a - \sqrt[3]{al^2}$ helyen maximuma, ill. minimuma van. A koordinátarendszer kezdőpontjában a részgörbékből összeillesztett deriválható függvények érintőinek α irányszögére fennáll: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$. Ugyanitt a görbületi sugár $r_0 = \dfrac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2a}$.

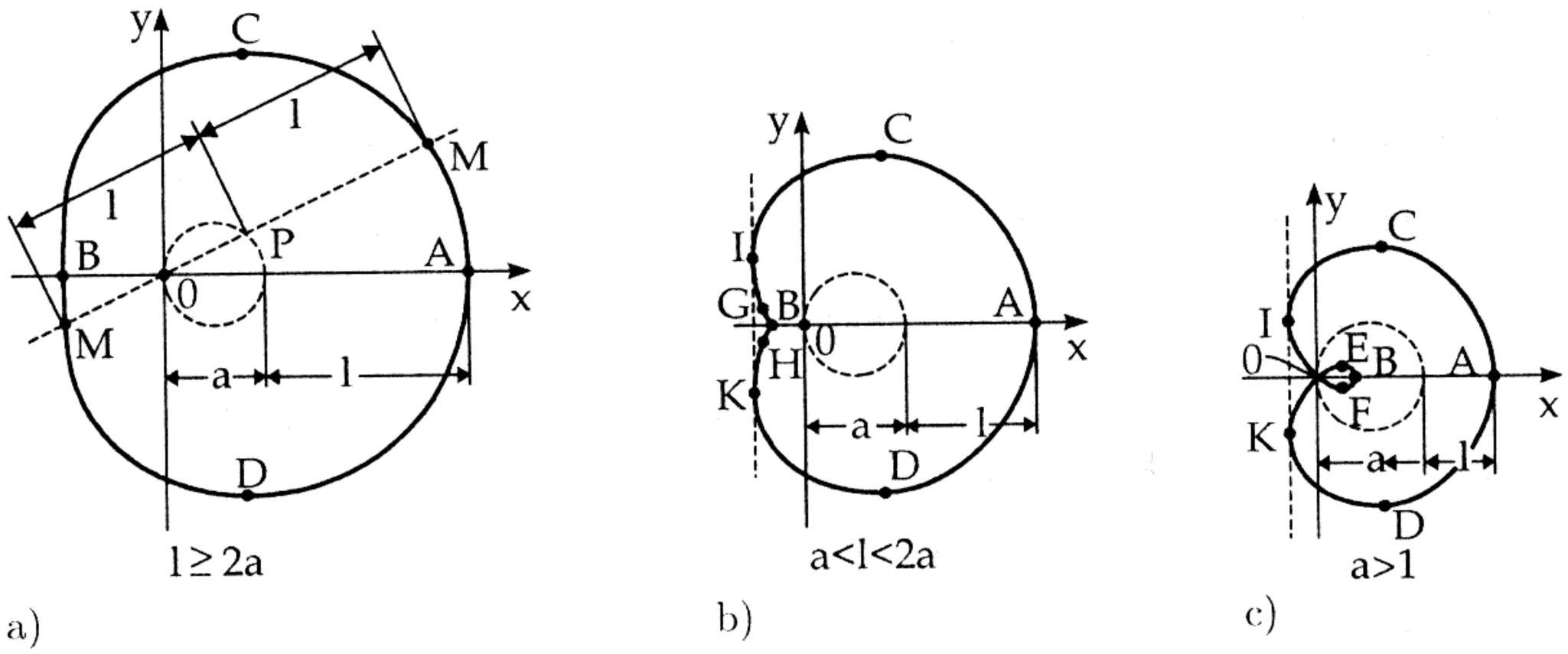
c) eset Ha $l = a$, akkor $0 \leq x$ és a koordinátarendszer kezdőpontja visszatérő pont **(2.62.c ábra)**.

2.12.2. Általános konchoid

A NIKOMEDES-*féle konchoid* az általános konchoid speciális esete. Adott görbe (2 görbéből álló) konchoidját úgy kapjuk, hogy minden pontjának rádiuszvektorát egy $\pm l$ konstans hosszúságú szakasszal meghosszabbítjuk. Ha a görbének van egyenlete polárkoordinátákban: $\rho = f(\varphi)$, továbbá $f(\varphi) \geq l$, akkor konchoidjának is van egyenlete polárkoordinátákban:

$$\rho = f(\varphi) \pm l\,. \tag{2.229}$$

A NIKOMEDES-féle konchoid az $x = a\ (> 0)$ *egyenes konchoidja.*



2.63. ábra.

M és P a b) és c) ábrákon is — habár ott nincs feltüntetve — a 0-n átmenő egyenesen van; ahogy P befutja a kört, a forgó egyenesen lévő M–M pontpár kirajzolja a görbét

2.12.3. Pascal-féle csiga

PASCAL-*féle csigának* **(2.63. ábra)** nevezzük a *kör konchoidját*, a (2.227), polárkoordinátákban a (2.229) feltétellel jellemzett általános konchoid egy további speciális esetét, amelynél a koordinátarendszer kezdőpontja a körön helyezkedik el. Ha a kör az ábra szerint a jobb félsíkban van és átmérője a, akkor egyenlete derékszögű koordinátákban és polárkoordinátákban ($a > 0$, $l > 0$; lásd még 107. old.):

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2) \tag{2.230a}$$

(így egy, a geometriailag definiáltnál bővebb, zárt görbét kapunk, mert még a $(0, \pm l)$ is hozzátartozik, továbbá a $(0, 0)$, a), b) esetben izolált pontot), illetve

$$\rho = a\cos\varphi \pm l\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,; \tag{2.230b}$$

a fenti 3 pont ekkor nem tartozik a görbéhez, pontosabban csak az origó és csak a — nem ábrázolt — $a = l$ esetben, amikor viszont nincs a jobb félsíkba eső hurok; „$-$”-szal kapjuk a bal félsíkbeli görbét

(és az $a > l$ esetben fellépő jobb félsíkbeli hurkot), illetve $\rho \geq 0$ miatt az $l > a$ esetben csak egy részét. Paraméteresen:

$$x = a\cos^2\varphi \pm l\cos\varphi, \quad y = a\cos\varphi\sin\varphi \pm l\sin\varphi\,, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,; \tag{2.230c}$$

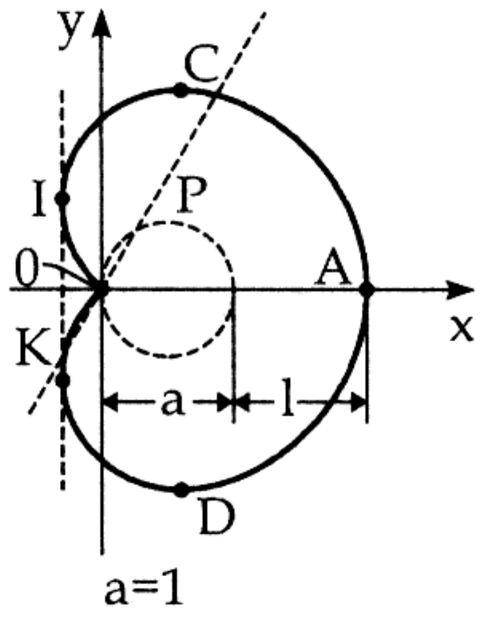
most $\pm\frac{\pi}{2}$-re a $(0, \pm l)$ pontok hozzátartoznak a görbéhez, az origó csak az $a = l$ esetben, a két előjellel együtt az ábrázolt zárt görbe egészét megkapjuk; φ itt is az (x, y) vektor hajlásszöge. Az A, B csúcspontok koordinátái $(a \pm l, 0)$. A görbe alakja az a, l mennyiségektől függ, amint az a **2.63.** és **2.64. ábrákból** látható. Az alábbiak a (2.230a)-val definiált legbővebb görbére vonatkoznak.

a) Szélsőértékek és inflexiós pontok: Ha $a > l$, a nyílt félgörbéknek és félhurkoknak (az IO és KO ívek és az A pont elhagyása után) négy: C, D, E, F szélsőértékpontja van, ha pedig $a \leq l$, akkor a B pont, illetve az IB és KB ívek elhagyása után kettő, C és D; a megfelelő vektorok hajlásszögét a $\cos\varphi = \dfrac{\pm l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}$ képlet adja meg (minden esetben az 1-nél szigorúan kisebb abszolút értéket adó előjel-kombinációval). Ha $a < l < 2a$, akkor van két, G és H inflexiós pont az IB, KB függvénygörbéken, a $\cos\varphi = -\dfrac{2a^2 + l^2}{3al}$ képlettel jellemzett félegyeneseken.

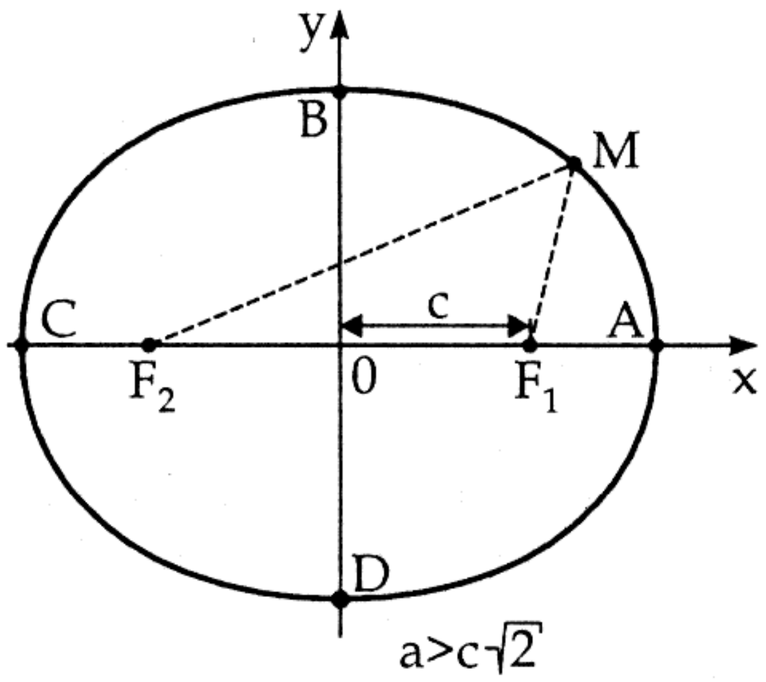
b) Közös érintők: Az $l < 2a$ esetben ((b) és c)) az I, K pontokhoz, amelyeknek koordinátái $\left(-\dfrac{l^2}{4a}\,, \pm\dfrac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a}\right)$, közös érintő húzható.

c) Szinguláris pontok: A koordinátarendszer kezdőpontja szinguláris pont: ez $a < l$ esetén izolált pont, $a > l$ esetén pedig olyan kettőspont, ahol az érintők iránytangense $\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$ és a görbületi sugár $r_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - l^2}$. Az $a = l$ esetben visszatérő pontról van szó; ekkor a görbe neve *kardioid.*

A csiga területe $S = \dfrac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$; ez a képlet az $a > l$ esetben **(2.63.c ábra)** a belső hurokkal határolt idom területét kétszeresen veszi számításba.



2.64. ábra.
I és K jelentése ugyanaz, mint a **2.63.b** és **c ábrán**



2.65.a ábra.

2.12.4. Kardioid

A *kardioid* **(2.64. ábra)** kétféleképpen definiálható, mégpedig mint:

1. A PASCAL-*féle csiga*

$$\overline{0M} = \overline{0P} \pm a \quad (a > 0)\,, \tag{2.231}$$

tulajdonsággal jellemezhető speciális esete, ahol $l = a$ egyúttal a belső kör átmérője.

2. Az *epicikloi*snak (l. 2.13.3) az a speciális esete, amikor a rögzített és a mozgó kör átmérője azonos a nagyságú, a rögzített kör az ábrán látható módon átmegy az origón, ahonnan a mozgó kerületi pont indul. Egyenlete mértani helyként

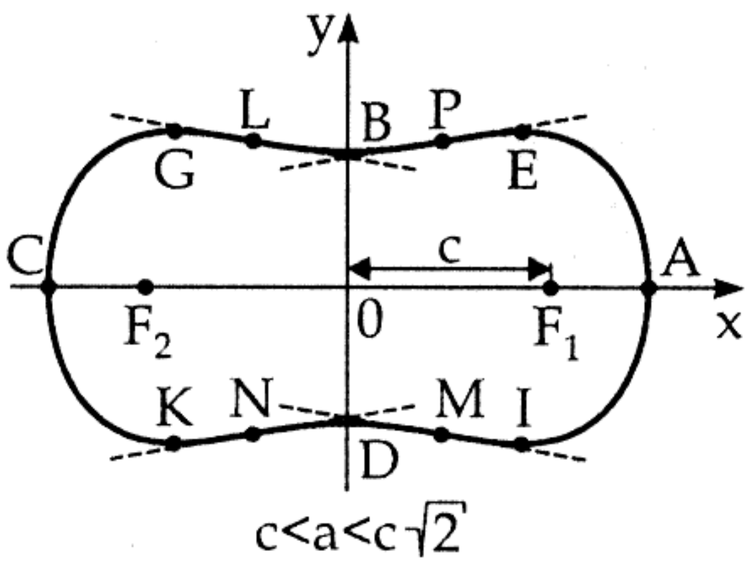
$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2\,, \tag{2.232a}$$

paraméteres alakban

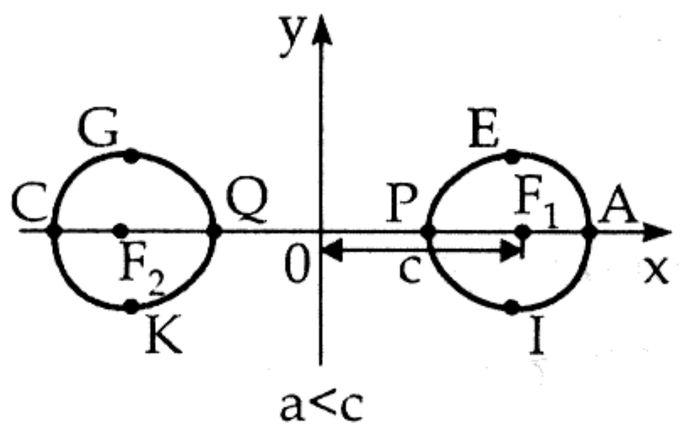
$$x = a\cos\varphi(1 + \cos\varphi)\,, \quad y = a\sin\varphi(1 + \cos\varphi) \quad (-\pi \le \varphi \le \pi)\,, \tag{2.232b}$$

ill. polárkoordinátákban (ekkor az origó nélkül)

$$\rho = a(1 + \cos\varphi) \quad (-\pi < \varphi < \pi) \tag{2.232c}$$



2.65.b ábra.



2.65.c ábra.

A koordinátarendszer kezdőpontja visszatérő pont. Az A csúcspont koordinátái $(2a, 0)$; a C maximumpontot és a D minimumpontot a $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ képlet adja meg, derékszögű koordinátáik $\left(\dfrac{3}{4}a\,, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$. A terület $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2$, vagyis az a átmérőjű kör területének hatszorosa. A görbe hosszúsága $L = 8a$.

2.12.5. Cassini-féle görbék

CASSINI-*féle görbé*nek **(2.65.a, b, c ábrák)** nevezzük azon M pontok mértani helyét, amelyek két rögzített F_1 és F_2 ponttól: a $(c, 0)$, ill. $(-c, 0)$ pontoktól $(c > 0)$ mért távolságának szorzata egy konstans a^2 $(a > 0)$ érték:

$$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = a^2. \tag{2.233}$$

Egyenlete derékszögű és ($a > c$ esetben) polárkoordinátákban a következő:

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$. Polárkoordinátákban: (2.234a)

$$\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}\,. \tag{2.234b}$$

(Ha $a > c$, akkor $0 \le \varphi < 2\pi$ és a gyökjel előtt csak „+” van; ha $a < c$ akkor a jobb félsíkban a 0-ra, a bal félsíkban a π-re szimmetrikus φ-intervallum végpontjait az határozza meg, hogy a gyökjel alatt nem állhat negatív szám; pozitív előjellel kapjuk mindkét esetben az origótól távolabbi részgörbét).
A görbe alakja az a, c mennyiségektől függ:

1. $a > c\sqrt{2}$ eset: Az $a > c\sqrt{2}$ esetben a görbe egy ellipszisszerű ovális **(2.65.a ábra)**. Az x-tengellyel való A, C metszéspontok $(\pm\sqrt{a^2 + c^2}\,, 0)$, az y-tengellyel való B, D metszéspontok pedig $(0\,,\ \pm\sqrt{a^2 - c^2})$.

2. $a = c\sqrt{2}$ eset: Az $a = c\sqrt{2}$ esetben változatlan típusú görbét kapunk, ahol az A, C pontok koordinátái $(\pm c\sqrt{3}\,,\ 0)$, a B, D pontokéi pedig $(0, \pm c)$, továbbá a B, D pontokban a görbület 0, tehát az $y = \pm c$ egyenesek érintők, sőt lokálisan függvényként előállítva még a 2. derivált is 0.

3. $c < a < c\sqrt{2}$ eset: Az $c < a < c\sqrt{2}$ esetben a görbe egy benyomott ovális **(2.65.b ábra)**. A tengelymetszetek ugyanazok, mint az $a > c\sqrt{2}$ esetben, a felső, ill. az alsó félsíkban függvénynek tekintve B és a D lokális minimum-, és maximumpontok; a további E, G, K, I lokális szélsőértékpontok $\left(\pm\dfrac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}\,,\ \pm\dfrac{a^2}{2c}\right)$, a négy P, L, M, N inflexiós pont pedig $\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(m-n)}\,,\ \ \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(m+n)}\right)$, ahol $n = \dfrac{a^4 - c^4}{3c^2}$ és $m = \sqrt{\dfrac{a^4 - c^4}{3}}$.

4. $a = c$ eset: Az $a = c$ esetben a *lemniszkáta* adódik.

5. $a < c$ eset: Az $a < c$ esetben két oválist kapunk **(2.65.c ábra)**. Az x-tengellyel való A, C, ill. P, Q metszéspontok $(\pm\sqrt{a^2 + c^2}, 0)$, ill. $(\pm\sqrt{c^2 - a^2}, 0)$, az E, G maximum- és K, I minimumpontok $\left(\pm\dfrac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c},\ \pm\dfrac{a^2}{2c}\right)$. A ρ-val kifejezett görbületi sugár $r = \dfrac{2a^2\rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4}$.

2.12.6. Lemniszkáta

*Lemniszkáta*nak **(2.66 ábra)** nevezzük a CASSINI-*féle görbék* $a = c$ speciális esetét; ezekre teljesül az

$$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = \left(\frac{\overline{F_1F_2}}{2}\right)^2\,, \tag{2.235}$$

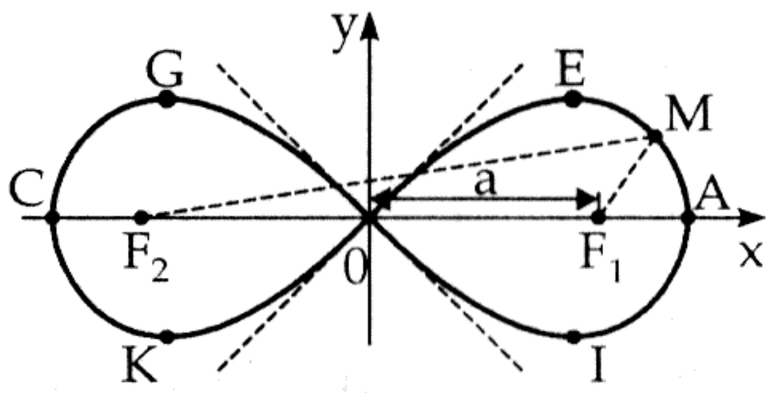
feltétel, ahol az F_1, F_2 pontok koordinátái $(\pm a, 0)$. Derékszögű koordinátákban az egyenlete

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\,, \tag{2.236a}$$

polárkoordinátákban pedig (az origó elhagyása után)

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4},\ \text{ill.}\ \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}\right). \tag{2.236b}$$

A koordinátarendszer kezdőpontja egyszerre kettőspont és inflexiós pont, amelyben az érintők az $y = \pm x$ egyenesek.



2.66 ábra.

Az x-tengellyel való A, C metszéspontok $(\pm a\sqrt{2}, 0)$, az E, G maximum- és K, I minimumpontok $\left(\pm\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\,,\ \pm\dfrac{a}{2}\right)$. Ezen pontokban a hajlásszög $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{6}$ és $\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$. A görbületi sugár a φ hajlásszögű pontban $r = \dfrac{2a^2}{3\rho}$, az egyes hurkok területe pedig $S = a^2$.

2.13. Cikloisok

2.13.1. Közönséges ciklois

*Cikloi*snak nevezzük az olyan görbét, amelyet egy egyenesen csúszás nélkül gördülő körnek egy kerületi pontja ír le **(2.67 ábra)**. Az origón átmenő kerületi pontú, *közönséges ciklois* egyenlete paraméteres alakban

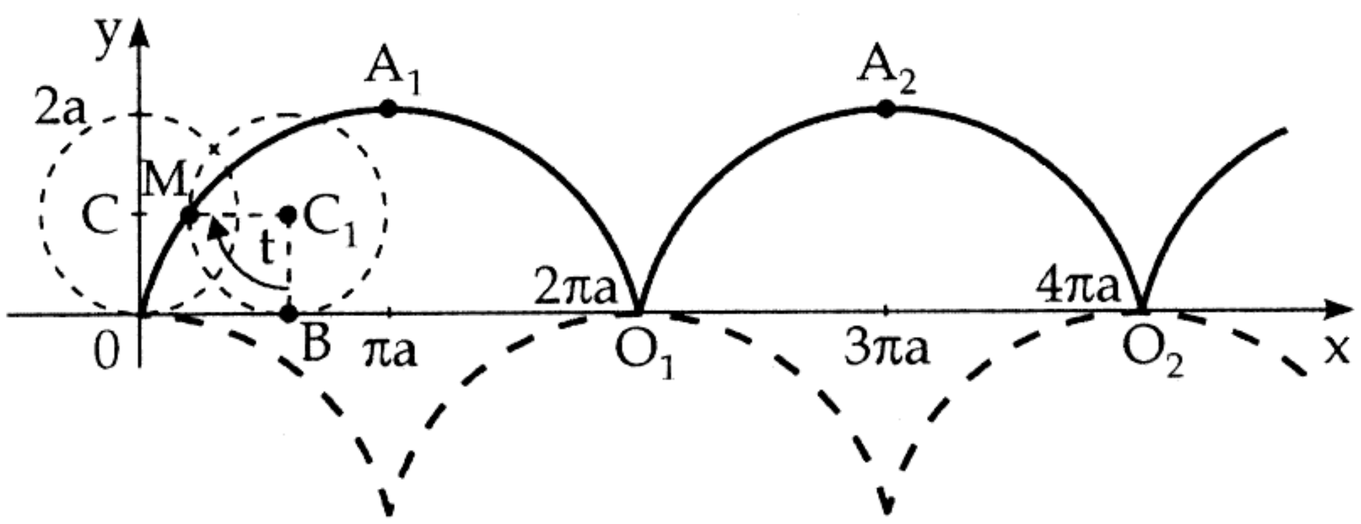
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (-\infty < t < \infty)\,, \tag{2.237a}$$

ahol a a kör sugara és t a $\sphericalangle MC_1B$ gördülési szög (C_1 a mindenkori középpont, B ennek vetülete az x-tengelyre, M pedig a hozzátartozó kerületi, azaz görbepont), derékszögű koordinátákban pedig

$$x + \sqrt{y(2a-y)} = a \arccos \frac{a-y}{a}\,; \tag{2.237b}$$

arccos a $k\pi a \le x \le (k+1)\pi a$ félágon a $[k\pi, (k+1)\pi]$-re megszorított koszinusz függvény inverze.

A görbe (függvényként) periodikus, periódusa (*a ciklois alapja*) $\overline{0O_1} = 2\pi a$. A visszatérő pontok 0, O_1, $O_2, \ldots, O_k = (2k\pi a, 0)$, függvényként a maximum- vagy csúcspontok $A_k = [(2k+1)\pi a, 2a]$.

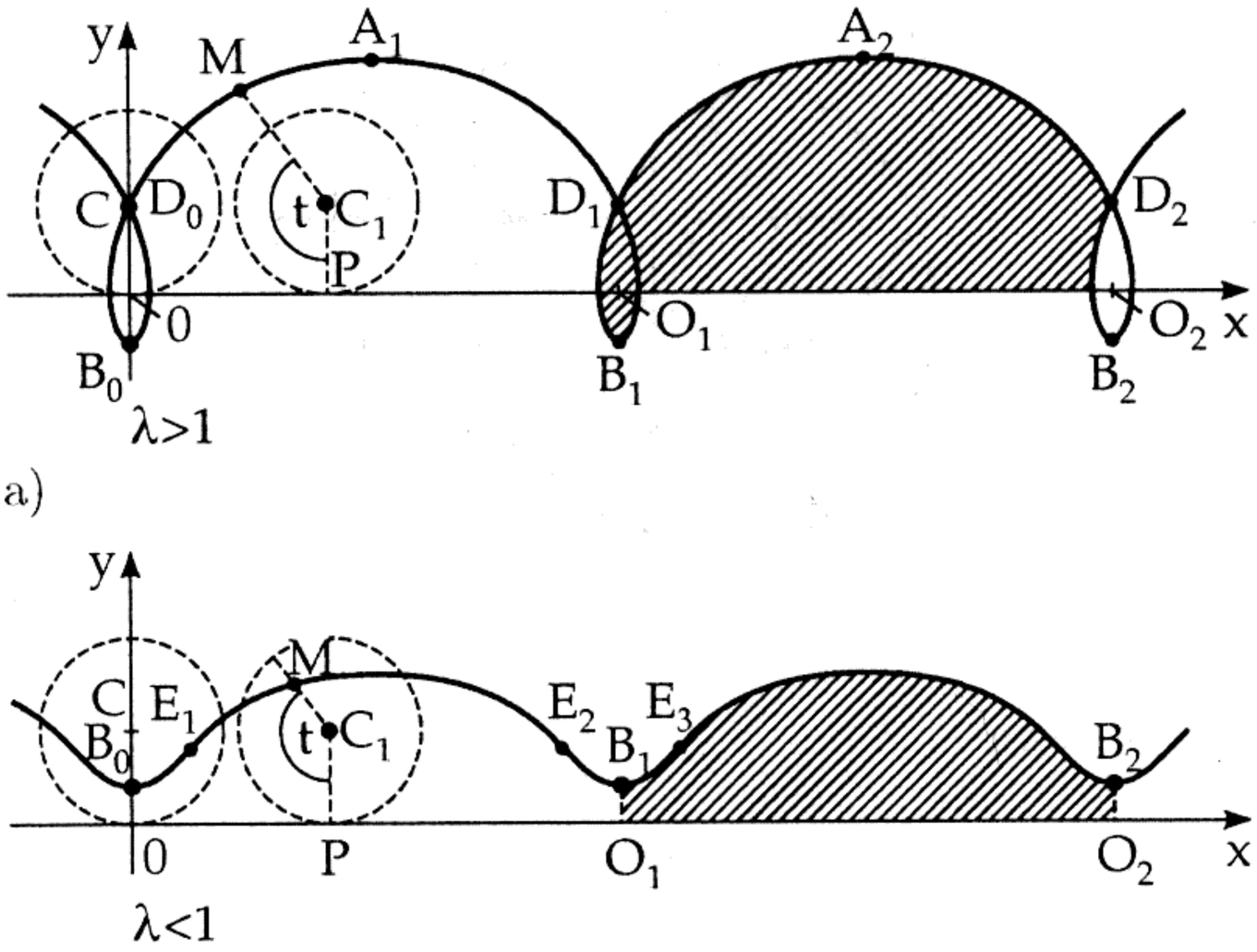


2.67 ábra.

Az $0M$ ív hosszúsága $L = 8a\sin^2(t/4)$ $(0 < t < 2\pi)$, egy ág hosszúsága $L_{0A_1O_1} = 8a$, a velc és az x-tengellyel határolt idom területe $S = 3\pi a^2$. A görbületi sugár $r = -4a\sin\frac{1}{2}t$, a csúcspontokban $r_A = -4a$. A ciklois evolútája (lásd 236. old.) egy, az *eredetivel egybevágó ciklois* (lásd a **2.67 ábrán** a szaggatott görbét).

2.13.2. Hurkolt és nyújtott cikloisok, más néven trochoidok

Hurkolt, ill. *nyújtott cikloist*, más néven *trochoidot* ír le egy egyenesen csúszás nélkül gördülő körhöz mereven rögzített, a kör középpontjából kiinduló félegyenesnek egy a körön kívül, ill. belül fekvő pontja **(2.68 ábra)**.



2.68 ábra.

Ha a kör sugara a, és az y-tengely átmegy a rögzített ponton egyik legalacsonyabb helyzetében, akkor a trochoid egyenlete paraméteres alakban

$$x = a(t - \lambda\sin t), \tag{2.238a}$$

$$y = a(1 - \lambda\cos t), \tag{2.238b}$$

ahol t az $\sphericalangle MC_1P$ szög.

Mivel $\lambda a = \overline{C_1M}$, a $\lambda = 1$ esetben közönséges, a $\lambda > 1$ esetben hurkolt, a $\lambda < 1$ esetben pedig nyújtott cikloisról van szó.

A görbék periódusa $\overline{0O_1} = 2\pi a$ (tehát ilyen hosszúságú vízszintes állású vektorral eltolva önmagukba mennek át), a csúcspontok A_1, $A_2, \ldots, A_k = [(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, a minimumpontok pedig B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_k = [2k\pi a, (1-\lambda)a]$.

A hurkolt cikloisnak kettőspontja van a $D_0,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_k = \left[2k\pi a\,,\, a\left(1-\sqrt{\lambda^2-{t_0}^2}\right)\right]$ pontokban, ahol t_0 a $t=\lambda\sin t$ egyenlet legkisebb pozitív gyöke. Függvényként a nyújtott cikloisnak inflexiós pontja van az $E_1, E_2, \ldots, E_k = \left[a\left(\arccos\lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right)\,, a(1-\lambda^2)\right]$ pontokban (arccos a 2.13.1.-beli megjegyzés értelmében).

Két szomszédos kettőspont közti ív hosszúsága $L = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt$. A **2.68 ábrán** mindkét vonalkázással megjelölt terület $S=\pi a^2(2+\lambda^2)$.

A görbületi sugár $r = a\dfrac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t-\lambda)}$, speciálisan a csúcspontokban $r_A = -a\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, a minimumpontokban pedig $r_B = a\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

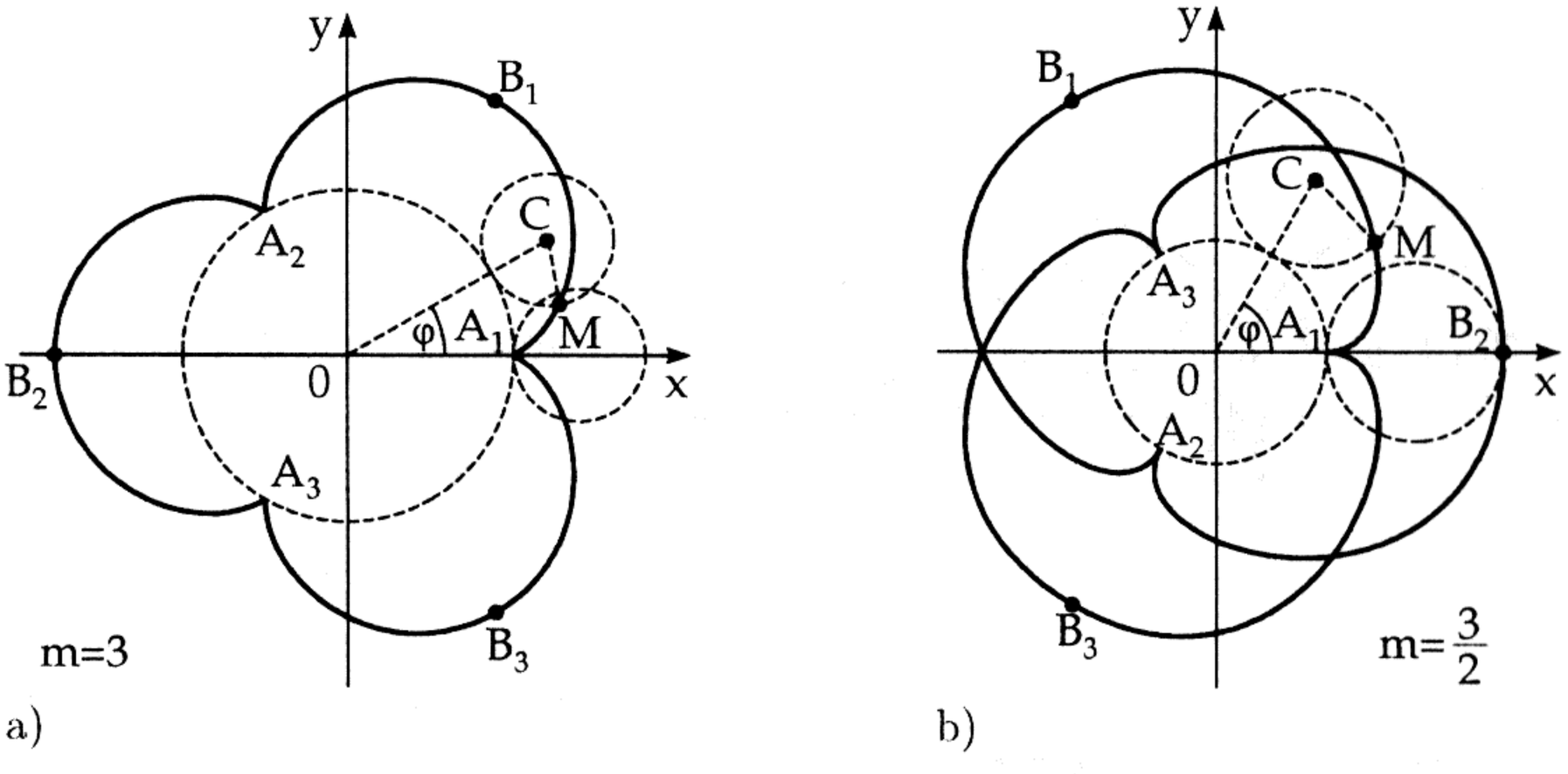
2.13.3. Epiciklois

*Epicikloi*snak nevezzük az olyan görbét, amelyet egy kör külső oldalán csúszás nélkül gördülő másik körnek egy kerületi pontja ír le **(2.69 ábra)**. Ha A a rögzített és a a gördülő kör sugara, akkor az epiciklois egyenlete paraméteres alakban

$$x=(A+a)\cos\varphi - a\cos\frac{A+a}{a}\varphi\,,\qquad y=(A+a)\sin\varphi - a\sin\frac{A+a}{a}\varphi\,, \tag{2.239}$$

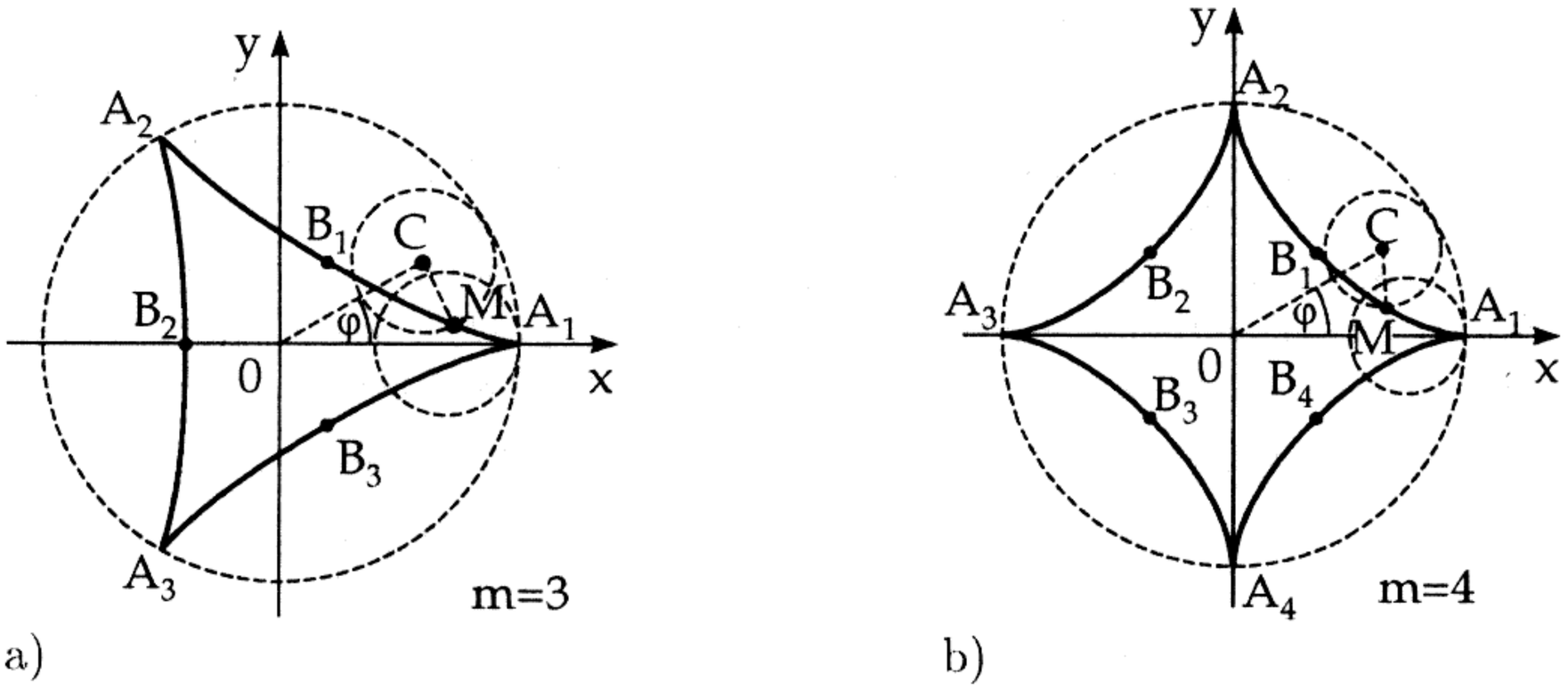
ahol $\varphi = \sphericalangle C0x$, $-\infty<\varphi<\infty$; a visszatérő pontokban egybeesik a görbepont hajlásszögével. A görbe alakja az $m=\dfrac{A}{a}$ hányadostól függ.

Az $m=1$ esetben a *kardioid*ot kapjuk.



2.69 ábra.

1. eset, m egész: Ha m egész szám, akkor a görbe a rögzített kört körülvevő m darab görbeágból áll **(2.69a ábra)**. Az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ visszatérő pontok $\Big($az origótól vett távolság $\rho = A$, szögük $\varphi = \dfrac{2k\pi}{m}\ (k=0,1,\ldots,m-1)\Big)$, a $B_1, B_2, \ldots, B_m$ csúcspontok $\left[\rho = A+2a,\ \text{szögük } \varphi = \dfrac{2\pi}{m}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]$.



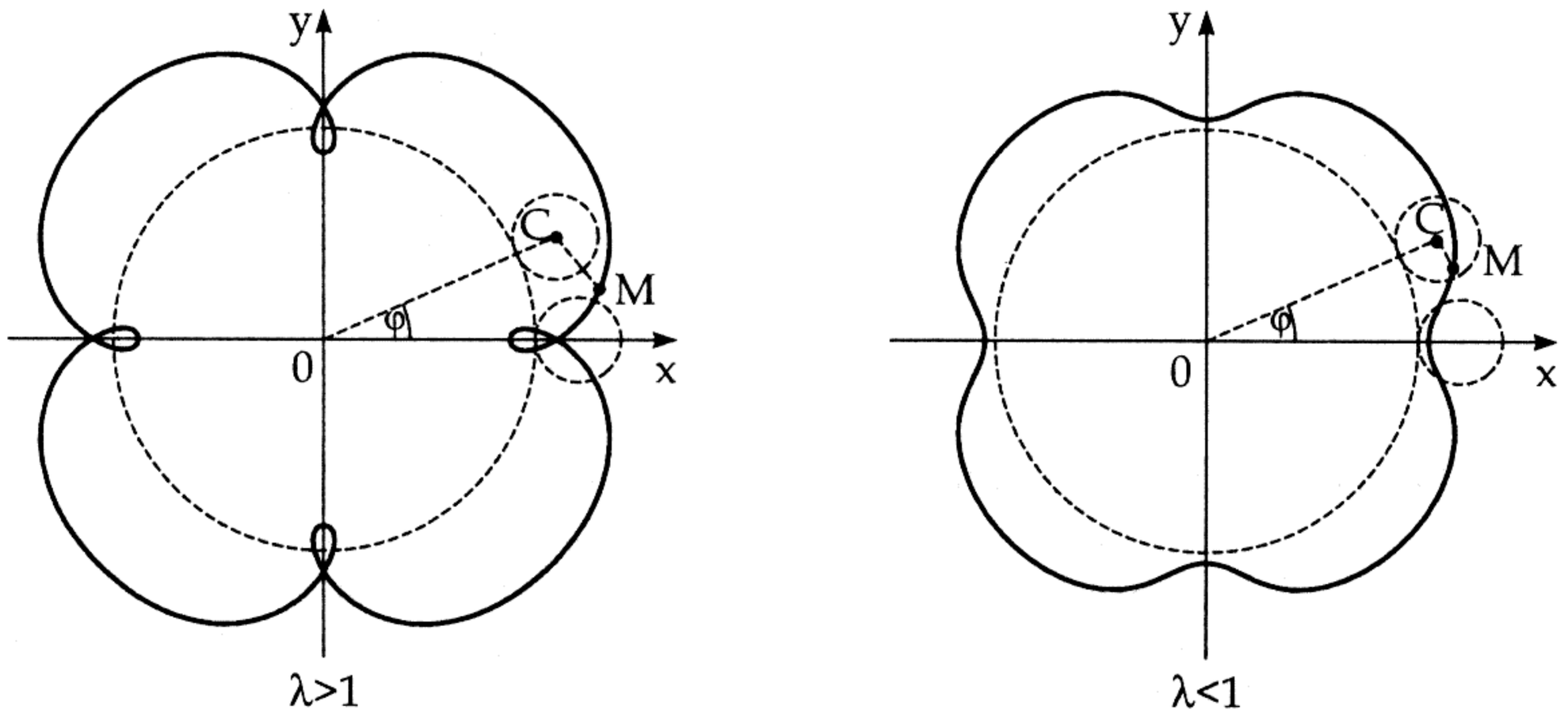
a) b)

2.70 ábra.

2. eset, m racionális tört: Ha m racionális törtszám, akkor az ágak kölcsönösen átfedik egymást, de a mozgó M pont véges sok végigfutás után visszatér kezdeti helyzetébe **(2.69b ábra)**.

3. eset, m irracionális: Ha m irracionális, akkor a végigfutások száma végtelen, és az M pont nem tér vissza kezdeti helyzetébe.

Egy ág, azaz két szomszédos visszatérő pont közti ív hosszúsága $L_{A_1B_1A_2} = \dfrac{8(A+a)}{m}$. Ha m egész, az egyszer befutott teljes görbe $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ hosszúsága $L_{\text{teljes}} = 8(A+a)$. Minden m-re az $A_1B_1A_2A_1$ szektor területe a rögzített körszektoré nélkül $S = \pi a^2 \left(\dfrac{3A+2a}{A}\right)$. A görbületi sugár $r = \dfrac{4a(A+a)}{2a+A} \sin\dfrac{A\varphi}{2a}$, speciálisan a B_i csúcspontokban $r_B = \dfrac{4a(A+a)}{2a+A}$.



a) b)

2.71 ábra.

2.13.4. Hipociklois és asztroid

Hipocikloisnak nevezzük az olyan görbét, amelyet egy kör belső oldalán csúszás nélkül gördülő másik körnek egy kerületi pontja ír le **(2.70 ábra)**. A hipociklois egyenlete, A és a jelentése, a csúcspontok és visszatérő pontok koordinátái, az ívhosszúságok, a szektorterület és a görbületi sugarak képletei megfelelnek az epicikloisra vonatkozóknak azzal a különbséggel, hogy „x" képletében „$-$" helyett „$+$", majd mindkét képletben „$+a$" helyébe „$-a$" írandó. A visszatérő pontok száma egész, tört és irracionális m esetén (most $m > 1$ lehet csak) az epicikloisnál megismertekkel azonos.

1. eset, $m = 2$: Ha $m = 2$, akkor a görbe a rögzített kör átmérőjévé fajul el.

2. eset, $m = 3$: Ha $m = 3$, akkor a hipocikloisnak három ága van **(2.70a ábra)**, és paraméteres egyenlete:

$$x = a(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)\,, \qquad y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)\,, 0 \le \varphi \le 2\pi\,. \tag{2.240a}$$

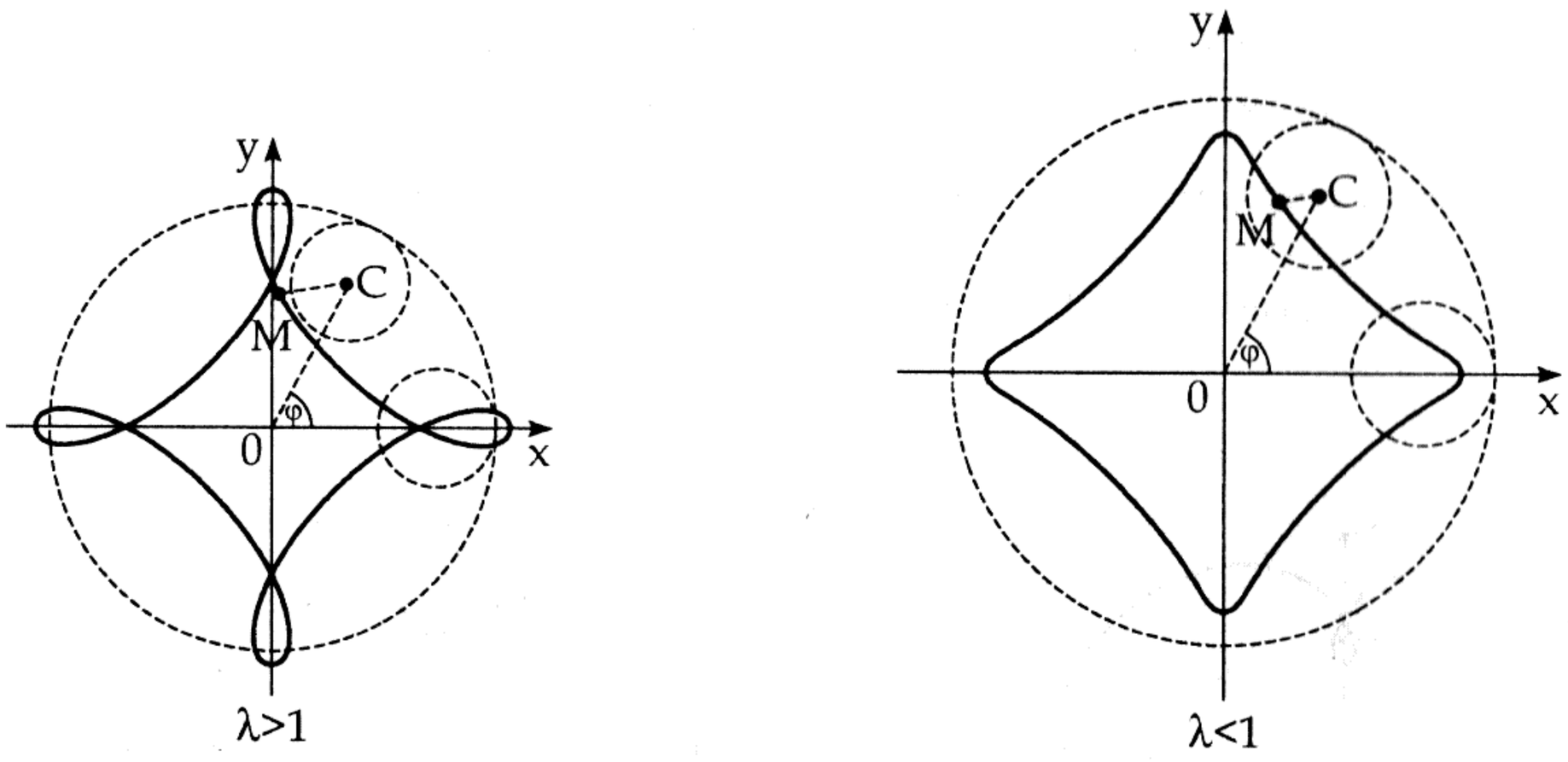
Fennáll $L_{\text{teljes}} = 16a$, a közrezárt görbevonalú háromszög területe, $S_{\text{teljes}} = 2\pi a^2$.

3. eset, $m = 4$: Ha $m = 4$ **(2.70b ábra)**, akkor a hipocikloisnak négy ága van, és a neve asztroid (asztrois). Egyenlete derékszögű koordinátákban és paraméteres alakban:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}\,, \tag{2.240b}$$

$$x = A\cos^3\varphi\,, \quad y = A\sin^3\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,. \tag{2.240c}$$

Fennáll $L_{\text{teljes}} = 24a = 6A$, a közrezárt terület: $S_{\text{teljes}} = \dfrac{3}{8}\pi A^2$.



2.72 ábra.

2.13.5. Hurkolt és nyújtott epiciklois és hipociklois

Hurkolt vagy *nyújtott epicikloist*, illetve *hurkolt* vagy *nyújtott hipocikloist*, más néven *epitrochoidot*, illetve *hipotrochoidot* **(2.71–2.72 ábrák)** ír le egy kör külső (epitrochoid), illetve belső (hipotrochoid) oldalán csúszás nélkül gördülő másik körhöz mereven rögzített, a kör középpontjából kiinduló félegyenesnek egy, a körön kívül vagy belül fekvő pontja.
Az epitrochoid egyenlete paraméteres alakban

$$x = (A+a)\cos\varphi - \lambda a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right)\,, \qquad y = (A+a)\sin\varphi - \lambda a\sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right)\,, \tag{2.241a}$$

ahol A a rögzített, a pedig a gördülő kör sugara, $0 \le \varphi \le 2\pi$, jelentése ugyanaz, mint korábbban. A hipotrochoid esetében — ahogy a hipocikloisnál — „x" képletében „$-$" helyett „$+$", majd mindkét

képletben „$+a$" helyébe „$-a$" írandó. Mivel $\lambda a = CM$, a görbe aszerint lesz hurkolt vagy nyújtott, hogy $\lambda > 1$ vagy $\lambda < 1$.

Ha $A = 2a$ és $\lambda \neq 1$, egyébként tetszőleges, akkor az

$$x = a(1+\lambda)\cos\varphi\,, \quad y = a(1-\lambda)\sin\varphi \tag{2.241b}$$

egyenletű hipotrochoid valójában ellipszis, amelynek féltengelyei $a(1+\lambda)$ és $a(1-\lambda)$. Ha $A = a$, akkor a PASCAL-*féle csigát* (lásd még 99. old.) kapjuk az epitrochoidból:

$$x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi)\,, \quad y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi)\,. \tag{2.241c}$$

Megjegyzés: A 99. oldalon a PASCAL-féle csiga tárgyalásánál a-val jelölt mennyiség most a $2\lambda a$ éréknek felel meg, l pedig a $2a$ átmérőnek. Ezenkívül a koordinátarendszer is megváltozott.

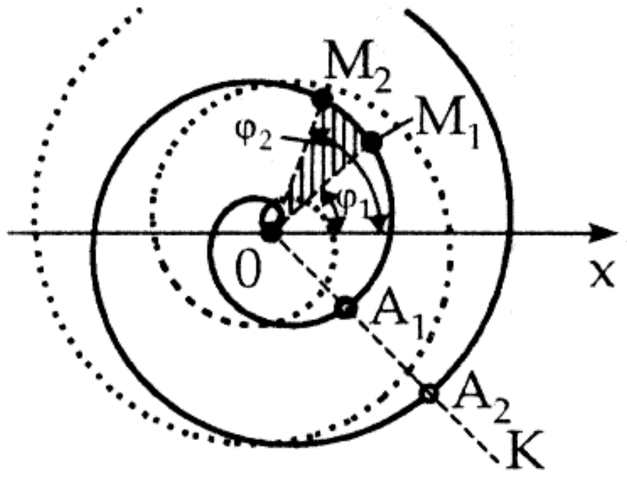
2.14. Spirálok

2.14.1. Archimédeszi spirál

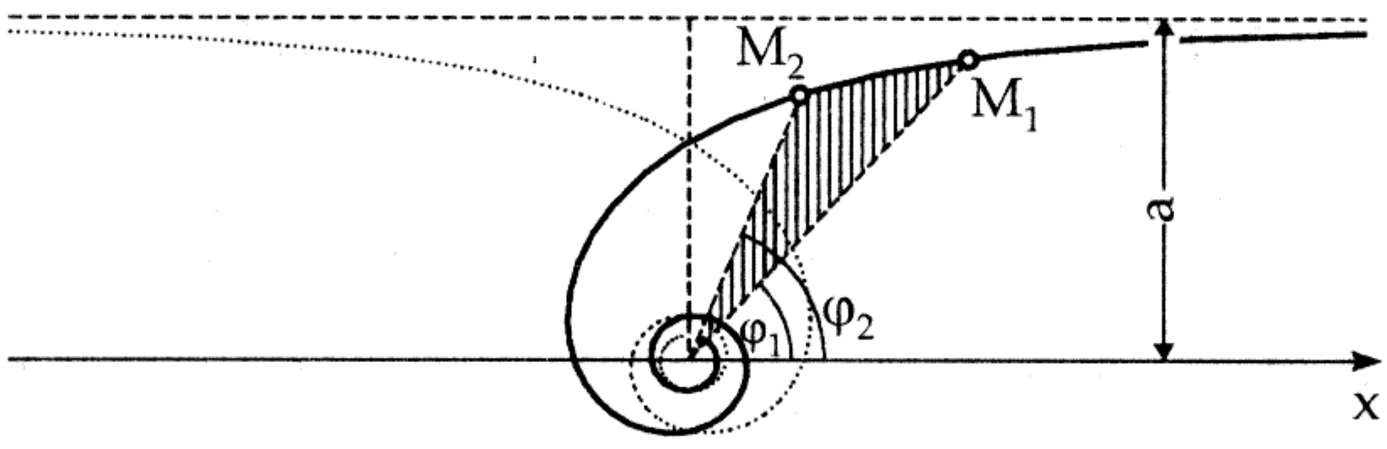
ARCHIMÉDESZI *spirál*nak nevezzük az olyan görbét **(2.73 ábra)**, amelyet egy, a koordinátarendszer kezdőpontja körül állandó ω szögsebességgel forgó félegyenesen állandó v sebességgel mozgó pont ír le. Az archimédeszi spirál egyenlete polárkoordinátákban

$$\rho = a\varphi, \quad a = \frac{v}{\omega}\,, \tag{2.242}$$

$0 < \varphi < \infty, \omega > 0$, tehát $a > 0$ és a másik ágon $0 > \varphi > -\infty, \omega < 0$, tehát ekkor $\rho = -a\varphi$. A görbének



2.73 ábra.



2.74 ábra.

két ága van, amelyek egymásnak az y-tengelyre vonatkozó tükörképei. Minden $0K$ félegyenes a görbét olyan 0, A_1, A_2, …, A_n,… pontokban metszi, amelyeknek egymástól mért távolsága $A_iA_{i+1} = 2\pi a$. Az $\overset{\frown}{0M}$ ív hosszúsága $L = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{arsh}\varphi\right)$, ami aszimptotikusan, tehát $\varphi \to \pm\infty$-re egyenlő $\frac{a\varphi^2}{2}$-vel. Az $M_1 0 M_2$ szektor területe $S = \frac{a^2}{6}({\varphi_2}^3 - {\varphi_1}^3)$. A görbületi sugár $r = a\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$, speciálisan a koordinátarendszer kezdőpontjában $r_0 = \frac{a}{2}$.

2.14.2. Hiperbolikus spirál

Polárkoordinátákban a *hiperbolikus spirál* egyenlete ($a > 0$)

$$\rho = \frac{a}{\varphi}\,, \tag{2.243}$$

$0 < \varphi < \infty$, és a másik ágon $0 > \varphi > -\infty$, tehát ekkor $\rho = -\frac{a}{\varphi}$.

A hiperbolikus spirál görbéje **(2.74 ábra)** is két ágból áll, amelyek egymásnak az y-tengelyre vonatkozó tükörképei. Az $y = a$ egyenes mindkét ágnak aszimptotája, a koordinátarendszer kezdőpontja pedig aszimptotikus pont. Az $M_1 0 M_2$ szektor területe $S = \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{\varphi_1} - \dfrac{1}{\varphi_2}\right)$, úgyhogy $\lim\limits_{\varphi_2 \to \infty} S = \dfrac{a^2}{2\varphi_1}$. A görbületi sugár $r = \dfrac{a}{\varphi}\left(\dfrac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

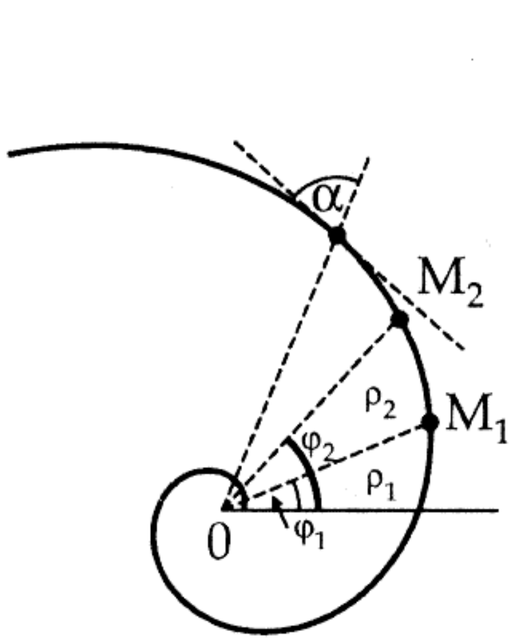
2.14.3. Logaritmikus spirál

*Logaritmikus spirál*nak nevezzük az olyan görbét **(2.75 ábra)**, amely a koordinátarendszer kezdőpontjából kiinduló minden félegyenest azonos α hegyesszög alatt metsz. A logaritmikus spirál egyenlete polárkoordinátákban

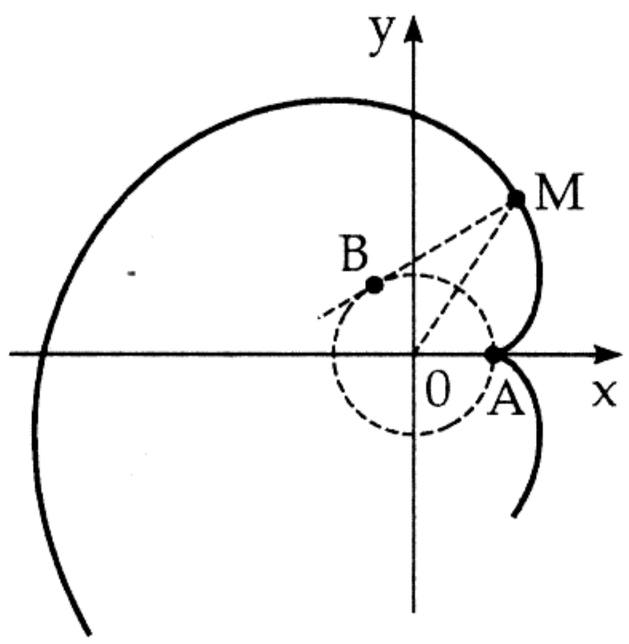
$$\rho = ae^{k\varphi} \qquad (a > 0,\ k = \operatorname{ctg}\alpha,\ -\infty < \varphi < \infty)\,. \tag{2.244}$$

Az origó a görbének a $\varphi \to -\infty$-hez tartozó aszimptotikus pontja. Az $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ ív hosszúsága $L = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1)$, amely aszimptotikusan $(\varphi_1 \to -\infty, \varphi_2 \to \infty)$ $L_0 = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho_2$. Az origótól $\rho_2 = \rho$ távolságú görbepontban a görbületi sugár $r = \sqrt{1+k^2}\rho = L_0 k$.

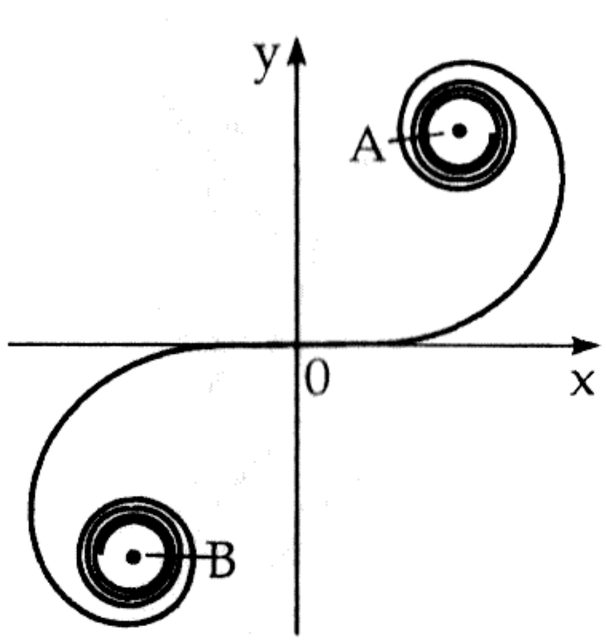
A kör mint határeset: Ha $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, akkor $k = 0$, és a görbéből kör lesz.



2.75 ábra.



2.76 ábra.



2.77 ábra.

2.14.4. A kör evolvense

*A kör evolvens*ének nevezzük az olyan görbét **(2.76 ábra)**, amelyet egy megfeszített, tehát minden pontban érintőirányú fonal végpontja ír le, amikor az egyszeresen feltekert fonalat a körről lefejtjük, tehát $\overset{\frown}{AB} = \overline{BM}$. *A kör evolvens*ének egyenlete paraméteres alakban

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi\,, \quad y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi\,, \tag{2.245}$$

ahol a a kör sugara és $\varphi = \sphericalangle B0x$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. A görbének két, az x-tengelyre szimmetrikus ága van (a másik ágat az ellentétes bejárás szerinti lefejtéssel kapjuk; $0 \ge \varphi \ge -2\pi$). A visszatérő pont $A(a, 0)$, az x-tengellyel való metszéspont helye $x = \dfrac{a}{\cos\varphi_0}$, ahol φ_0 a $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$ egyenlet legkisebb pozitív gyöke.

Az $\overset{\frown}{AM}$ ív hosszúsága $L = \dfrac{1}{2}a\varphi^2$. A görbületi sugár $r = a\varphi = \sqrt{2aL}$; a B görbületi középpont a körön helyezkedik el.

2.14.5. Klotoid

*Klotoid*nak nevezünk egy görbét **(2.77 ábra)**, ha az r görbületi sugara fordítottan arányos az origótól számított s ívhosszúsággal:

$$r = \frac{a^2}{s} \quad (a > 0)\,. \tag{2.246a}$$

A klotoid egyenlete paraméteres alakban s-sel paraméterezve

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\quad y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\quad \text{ahol } t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}},\quad s = \widehat{0M},\quad M = (x, y). \tag{2.246b}$$

Az integrálokat nem lehet elemi függvényekkel kifejezni; viszont bármely t paraméter-értékre ki lehet őket számítani numerikus integrálással (lásd 921. old.), úgyhogy a klotoidot pontonként meg lehet rajzolni. A számítógéppel történő kiszámításról lásd [3.12].
A görbe centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára, amely egyúttal (lokálisan függvénynek tekintve) inflexiós pont is. Az inflexiós pontban az érintő az x-tengely. Az A, B pontok a görbe aszimptotikus pontjai, ezek koordinátái $\left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right)$, ill. $\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right)$.
A klotoidot pl. útépítésnél alkalmazzák, ahol az egyenesről a körívre való áttérés klotoidív közbeiktatásával történik (lásd [3.12]).

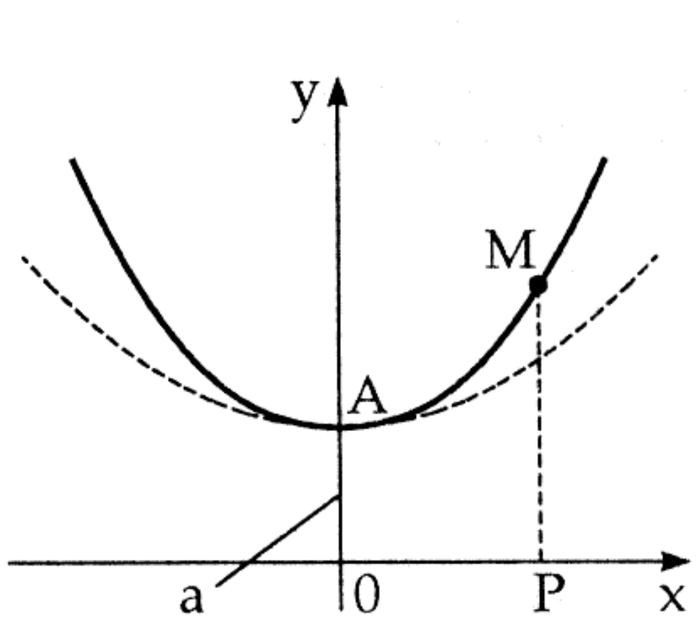
2.15. Különféle egyéb görbék

2.15.1. Láncgörbe

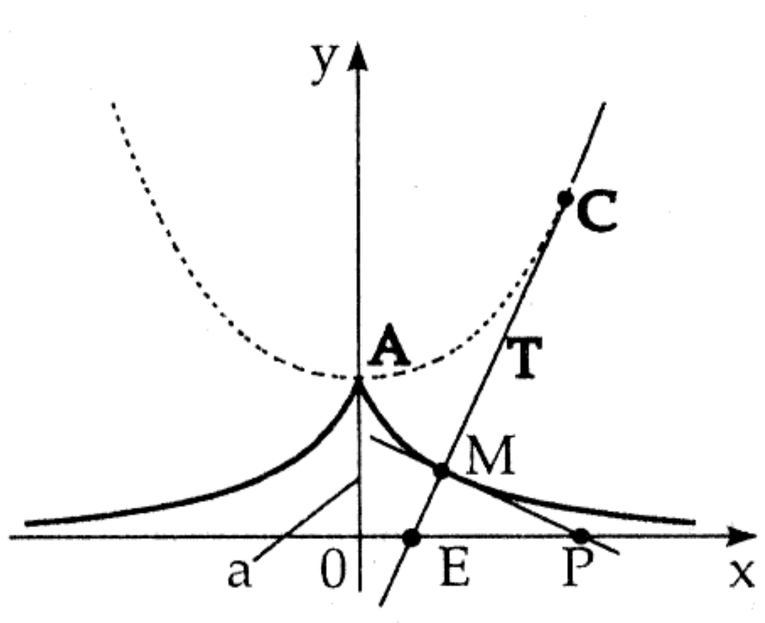
*Láncgörbé*nek nevezzük az olyan görbét (a **2.78 ábrán** a folytonos vonallal rajzolt), amelyet egy homogén, nyújthatatlan és mindkét végén felfüggesztett fonal alkot. A *láncgörbe* egyenlete

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \quad (a > 0)\,. \tag{2.247}$$

Az a paraméter meghatározza az A csúcspontot, amelynek koordinátái $(0, a)$. A görbe az y-tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, mégpedig magasabban, mint az $y = a + \frac{x^2}{2a}$ parabola (a **2.78 ábrán** a szaggatott vonallal rajzolt görbe). Az L ív $L = \widehat{AM}$ hosszúsága $L = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$. A $0AMP$ terület nagysága $S = a\,L = a^2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$. Az $M = (x, y)$ pontbeli görbületi sugár $r = \frac{y^2}{a} = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a} = a + \frac{L^2}{a}$.



2.78 ábra.



2.79 ábra.

A láncgörbe a traktrix evolútája (lásd 236. old.). Másrészt a traktrix (lásd a következő szakaszt) az $A(0,a)$ csúcspontú láncgörbe evolvense (lásd 236. old.).

2.15.2. Traktrix

*Traktrix*nak (a **2.79 ábrán** a folytonos vonallal rajzolt görbe) nevezzük az olyan tulajdonságú pontok mértani helyét, amelyekre az $\overline{MP}$ érintődarab, amely az M érintési ponttól az érintőnek egy vezéregyenessel, itt az x-tengellyel való P metszéspontjáig terjed, konstans a hosszúságú. Traktrixot ír le egy $a>0$ hosszúságú nyújthatatlan fonal egyik végéhez rögzített M pont, amelyet *vontatott pont*nak nevezünk, ha a másik, P végpont egy vezéregyenes, itt az x-tengely mentén mozog. A *traktrix* egyenlete

$$x=\pm\left[a\operatorname{arch}\frac{a}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right]=\pm\left[a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right]. \tag{2.248}$$

Az x-tengely a görbe aszimptotája. Az $A(0,a)$ pont visszatérő pont. A görbe szimmetrikus az y-tengelyre. Az $M=(x,y)$ pontig az $\overset{\frown}{AM}$ ív hosszúsága $L=a\ln\frac{a}{y}$. Ha az L ív hosszúsága a ∞-be tart, azaz $y\to 0$, az $L-x$ különbség az $a(1-\ln 2)\approx 0{,}307\,a$ értékhez közeledik, ahol x az M pont abszcisszája. A görbületi sugár $r=a\operatorname{ctg}\frac{x}{y}$. Az $\overline{MC}$ görbületi sugár és az $\overline{ME}=b$ normálisdarab egymással fordítottan arányos: $rb=a^2$.
A traktrix evolútája (lásd 236. old.), vagyis a traktrix C görbületi középpontjainak mértani helye (a **2.79 ábrán** szaggatott vonallal rajzolt görbe) a (2.247) láncgörbe.

2.16. Empirikus görbék meghatározása

2.16.1. A módszer vázlata

2.16.1.1. Függvénygörbék összehasonlítása

Közelítő képlet meghatározása egy $y=f(x)$ függvényhez, amelyről csak empirikus adataink vannak, két lépésben történhet. Először megválasztjuk a közelítő képlet fajtáját, amely általában néhány szabad paramétert tartalmaz. Ezután következik a paraméterértékek numerikus meghatározása. Ha a képlet megválasztásában elméleti megfontolások nincsenek segítségünkre, akkor a szóba jövő legegyszerűbb függvények között keresünk közelítő képletet úgy, hogy görbéjüket összehasonlítjuk az empirikus adatok görbéjével. A görbék hasonló voltának eldöntésében szemmértékünk csalhat. Ezért a közelítő függvény megválasztása után és a paraméterértékek meghatározása előtt rektifikálással meg kell vizsgálni, hogy a választott képlet csakugyan alkalmazható-e.

2.16.1.2. Rektifikálás

Feltesszük, hogy x és y között meghatározott függőség áll fenn, majd a választott közelítő képlet segítségével bevezetünk két, $X=\varphi(x,y)$ és $Y=\psi(x,y)$ függvényt úgy, hogy fennálljon köztük egy

$$Y=AX+B \tag{2.249}$$

alakú lineáris kapcsolat, ahol A és B valós szám. Ha a megadott x és y értékekhez kiszámítjuk a hozzájuk tartozó X és Y értékeket és ezeket grafikusan ábrázoljuk, könnyen megállapíthatjuk, hogy a kapott pontok közelítőleg tényleg egy egyenesen fekszenek-e. Ennek alapján el kell dönteni, hogy a választott képlet megfelel-e vagy sem.

■ **A:** Ha a közelítő képlet $y=\dfrac{x}{ax+b}$, akkor lehet $X=x$, $Y=\dfrac{x}{y}$ és azt kapjuk, hogy $Y=aX+b$.
Lehetséges volna az $X=\dfrac{1}{x}$, $Y=\dfrac{1}{y}$ helyettesítés is. Ekkor az adódna, hogy $Y=a+bX$.

■ **B:** Lásd az Egyszeresen logaritmikus ábrázolás című szakaszt, 119. old.

■ **C:** Lásd a Kétszeresen logaritmikus ábrázolás című szakaszt, 120. old.

Annak eldöntésére, hogy bizonyos empirikus adatokra teljesül-e egy $Y = AX + B$ lineáris összefüggés, a *lineáris regressziót* és *korrelációt* (lásd 803. old.) lehet felhasználni. Függvénykapcsolatnak lineáris kapcsolatra való visszavezetését *rektifikálás*nak nevezzük. Példák egyes képletek rektifikálására a 2.16.2. pontban (lásd 111. old.) találhatók, egy teljesen végigszámolt példa pedig a 116. oldalon szerepel.

2.16.1.3. A paraméterek meghatározása

A paraméterértékek meghatározására szolgáló legfontosabb eljárás a *legkisebb négyzetek módszere* (lásd 805. old.), más néven a hibanégyzet-módszer, amit mindkét néven több, más fejezetben tárgyalunk. Sok esetben azonban egyszerűbb módszerek is sikerrel alkalmazhatók, pl. a *középérték-módszer*.

1. Középérték-módszer A *középérték-módszer*nél a „rektifikált" X, Y változók közötti lineáris kapcsolatot, vagyis az $Y = AX + B$ összefüggést a következőképpen használjuk ki: A megadott Y_i, X_i értékpárokra vonatkozó $Y_i = AX_i + B$ feltételi egyenleteket két (páratlan számú értékpár esetén 1 különbséggel) egyenlő nagyságú csoportra osztjuk, miután az Y_i vagy az X_i értékeket nagyság szerint rendeztük. Az egyenleteket az egyik csoportban is, a másikban is összeadva két egyenletet kapunk, amelyekből a két, A és B ismeretlen meghatározható. Ha most az X, Y változókat újra a kiindulási x, y változókkal fejezzük ki, megkapjuk az x és y közötti keresett összefüggést.
Ha maradtak még meghatározatlan paraméterek, akkor ismét alkalmazni lehet a középérték-módszert, de ezúttal a rektifikálást más $\overline{X}$ és $\overline{Y}$ mennyiségekkel kell elvégezni (lásd pl. 116. old.).
A rektifikálást és a középérték-módszert elsősorban olyankor alkalmazzuk, amikor a közelítő képletben bizonyos paraméterek nemlineáris módon lépnek fel, mint pl. a (2.262b, 2.262c) képletekben.

2. Hibanégyzet-módszer A *hibanégyzet-módszer*, vagy *hiba-négyzetösszeg módszer nemlineáris kiegyenlítési feladatok*ra vezet, ha a közelítő képletben bizonyos paraméterek nemlineáris módon lépnek fel. Megoldásuk sok számolást és jó kiindulási közelítéseket igényel. Utóbbiak rektifikálással és a középérték-módszerrel nyerhetők.

2.16.2. A leggyakrabban használt empirikus képletek

Ebben a szakaszban néhány, empirikus függvénykapcsolathoz való illesztésre szolgáló igen egyszerű képletet és hozzájuk tartozó görbét ismertetünk. Minden ábrán több — az illető képletben szereplő paraméterek különböző értékeinek megfelelő — görbét tüntettünk fel. A paraméterértékeknek a görbék alakjára gyakorolt hatását a következő szakaszokban fogjuk vizsgálni.
Az alkalmas függvény kiválasztásánál tekintetbe kell venni, hogy az empirikus adatok meghatározásához a függvénygörbének többnyire csak egy részére van szükség, amelyet rendszerint úgy kapunk, hogy a független változót egy bizonyos intervallumra korlátozzuk — vagy eleve csak egy részintervallumból származnak az adatok. Így pl. tévedés volna azt gondolni, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ képlet csak akkor megfelelő, ha az empirikus adatok görbéjének is van egy (és csak egy) maximuma vagy minimuma.

2.16.2.1. Hatványfüggvények

1. Az $y = ax^b$ típus: Az

$$y = ax^b \tag{2.250a}$$

függvény görbéjének tipikus menete különféle b kitevőkre a **2.80 ábrán** látható. Lásd még a **2.14.**, **2.20.**, **2.23.**, **2.24.** és **2.25. ábrát**. A (2.38) képlettel jellemzett függvényeket *n-edrendű parabola* néven, a (2.39) képlettel jellemzetteket *fordított arányosság* néven, a (2.44) képlettel jellemzetteket pedig reciprok hatványfüggvény néven a 65 és 71. oldalakon tárgyaljuk. A rektifikálás logaritmusképzéssel történik:

$$X = \log x\,, \quad Y = \log y\colon \qquad Y = \log a + bX\,. \tag{2.250b}$$

2. Az $y = ax^b + c$ típus: Az

$$y = ax^b + c. \tag{2.251a}$$

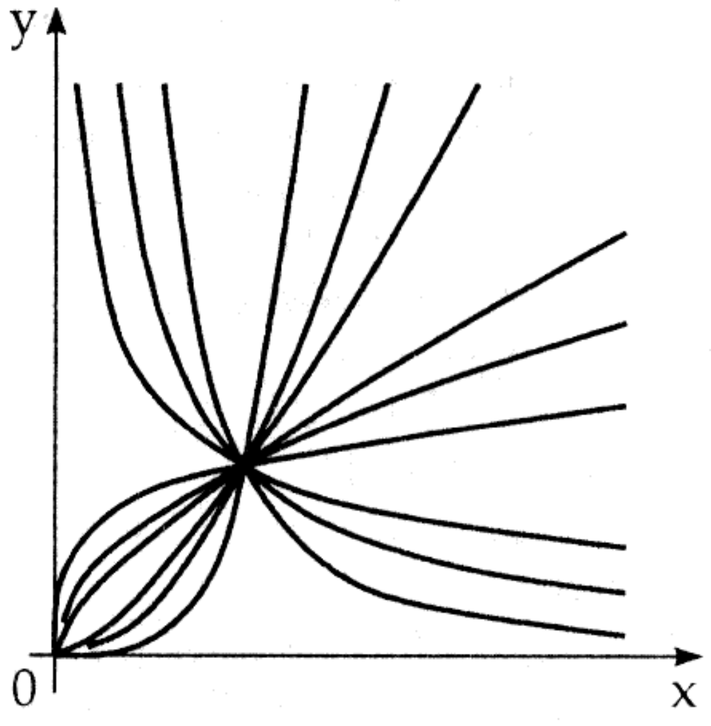
képlet ugyanazokat a görbéket adja, mint (2.250a), csak az y irányban c-vel eltolva **(2.82 ábra)**. Ha b adott, akkor a maradó két ismeretlen meghatározására a rektifikálás módja:

$$X = x^b\,, \quad Y = y\colon \qquad Y = aX + c\,. \tag{2.251b}$$

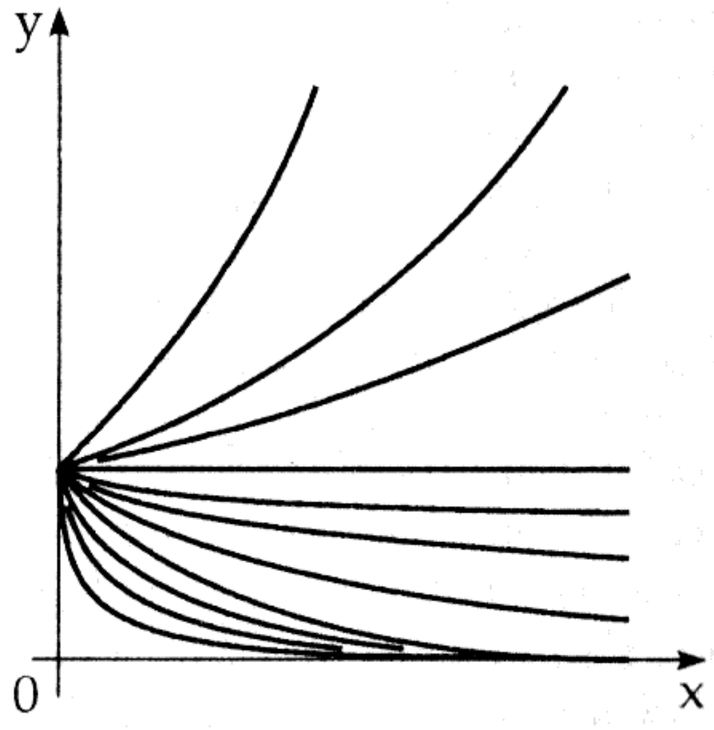
Ha b ismeretlen, akkor először meghatározzuk c értékét, majd az

$$X = \log x\,, \quad Y = \log(y - c): \qquad Y = \log a + bX \tag{2.251c}$$

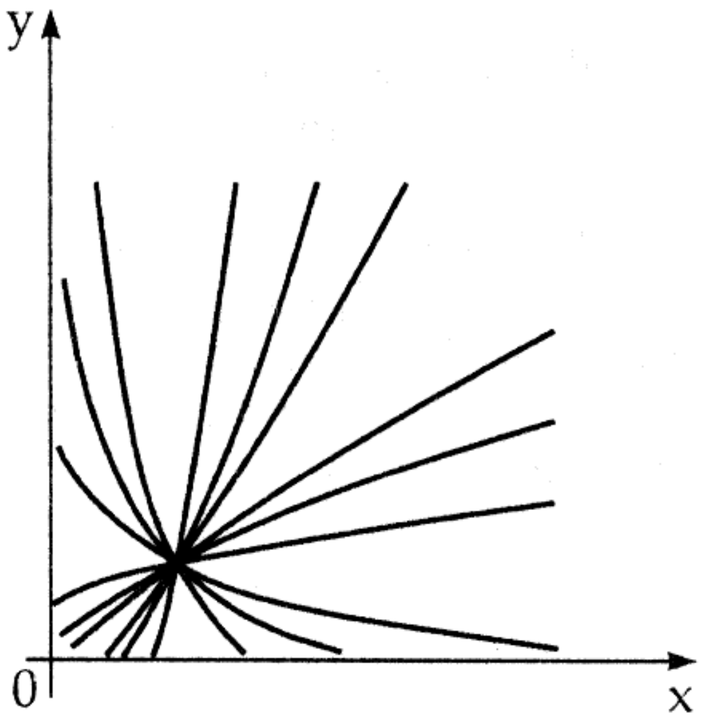
képletekkel rektifikálunk. A c érték meghatározására felveszünk három empirikus adatot, azaz pontot, amelyek abszcisszái közül x_1 és x_2 tetszőleges, $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$, ordinátáik pedig y_1, y_2 és y_3, és az ezekkel (2.251a)-ból adódó $c = \dfrac{y_1 y_2 - {y_3}^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ képletet alkalmazzuk. Miután megtörtént a és b meghatározása, c értékét korrigálni lehet úgy, hogy az $y - ax^b$ mennyiségek átlagának választjuk.



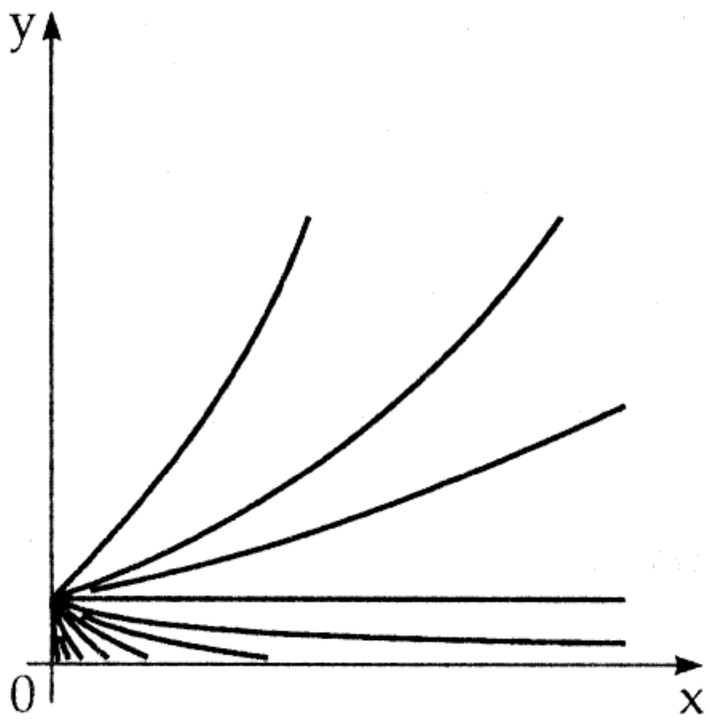
2.80 ábra.



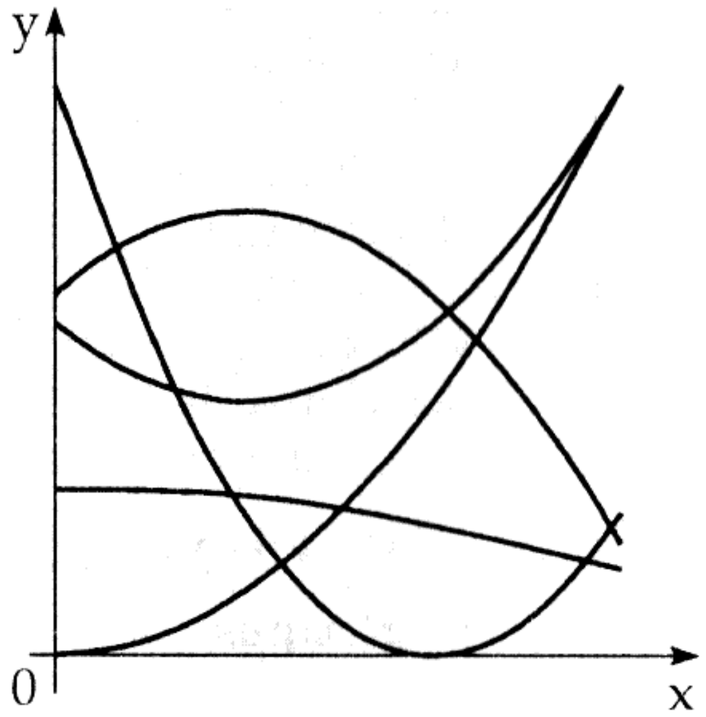
2.81 ábra.



2.82 ábra.



2.83 ábra.



2.84 ábra.

2.16.2.2. Exponenciális függvények

1. Az $y = a\,e^{bx}$ típus: Az

$$y = ae^{bx} \tag{2.252a}$$

függvények görbéjének néhány tipikus lefutását pozitív x-re és a-ra a **2.81 ábra** mutatja. A (2.48) *exponenciális függvény*nek és görbéje menetének **(2.25. ábra)** tárgyalása a 72. oldalon található. A rektifikálás logaritmusképzéssel történik:

$$X = x\,, \quad Y = \log y: \qquad Y = \log a + b \log e \cdot X\,. \tag{2.252b}$$

2. Az $y = a\,e^{bx} + c$ típus: Az

$$y = ae^{bx} + c \tag{2.253a}$$

képlet ugyanazokat a görbéket adja, mint (2.252a), csak az y irányban c-vel eltolva **(2.83 ábra)**. Meghatározzuk c értékét, és logaritmusképzéssel rektifikálunk az

$$Y = \log(y - c)\,, \quad X = x: \qquad Y = \log a + b \log e \cdot X\,. \tag{2.253b}$$

képletek szerint. A c érték meghatározására felveszünk három pontot, amelyek abszcisszái közül x_1 és x_2 tetszőleges, $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, ordinátáik pedig y_1, y_2 és y_3, és így a (2.253a)-ból adódóan $c = \dfrac{y_1 y_2 - {y_3}^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$.
Miután megtörtént a és b meghatározása, c pontosabb értékét utólag az $y - ae^{bx}$ mennyiségek átlagaként kaphatjuk meg.

2.16.2.3. Másodfokú polinom

Az

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2.254a}$$

másodfokú polinom görbéjének tipikus lefutásait pozitív x-re és y-ra a **2.84 ábra** szemlélteti. A (2.35) másodfokú polinomnak és görbéjének **(2.11. ábra)** tárgyalását lásd a 63. oldalon. Az a, b és c együtthatók meghatározása rendszerint a hibanégyzet-módszerrel történik, lehetséges azonban a rektifikálás is.
Rektifikálni egy rendelkezésünkre álló tetszőleges (x_1, y_1) adatpont megválasztása után az

$$X = x\,, \quad Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}: \qquad Y = (b + ax_1) + aX \tag{2.254b}$$

képletekkel lehet. Ha speciálisan a megadott x értékek $\Delta x = h$ különbségű számtani sorozatot alkotnak, akkor az

$$Y = \Delta y\,, \quad X = x: \qquad Y = (bh + ah^2) + 2ahX \tag{2.254c}$$

képletekkel rektifikálunk. Mindkét esetben a és b meghatározása után c értékét a

$$\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + nc \tag{2.254d}$$

egyenletből számítjuk ki, ahol n a megadott x értékek száma.

2.16.2.4. Lineáris törtfüggvény

Az

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{2.255a}$$

lineáris törtfüggvényt a 2.4. fejezetben tárgyaljuk a (2.40) egyenlettel és a **2.16. ábrával** kapcsolatban (lásd 65. old.).
Tetszőleges (x_1, y_1) adatpont kiválasztása után a rektifikálást az

$$Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}\,, \quad X = x: \qquad Y = A + BX \tag{2.255b}$$

képletek szerint végezzük. Az A, B értékek meghatározása után a kapott képletet a kerekítési hibák csökkentésére a (2.255c) alakban használhatjuk fel. Ha tudható, hogy $a = 1$, $b = 0$ vagy $a = 0$, $b = 1$, akkor elegendő a megfelelő (2.255d) alak is:

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx} \quad (2.255c) \qquad\qquad y = \frac{x}{cx + d} \quad \text{vagy} \quad y = \frac{1}{cx + d}\,. \tag{2.255d}$$

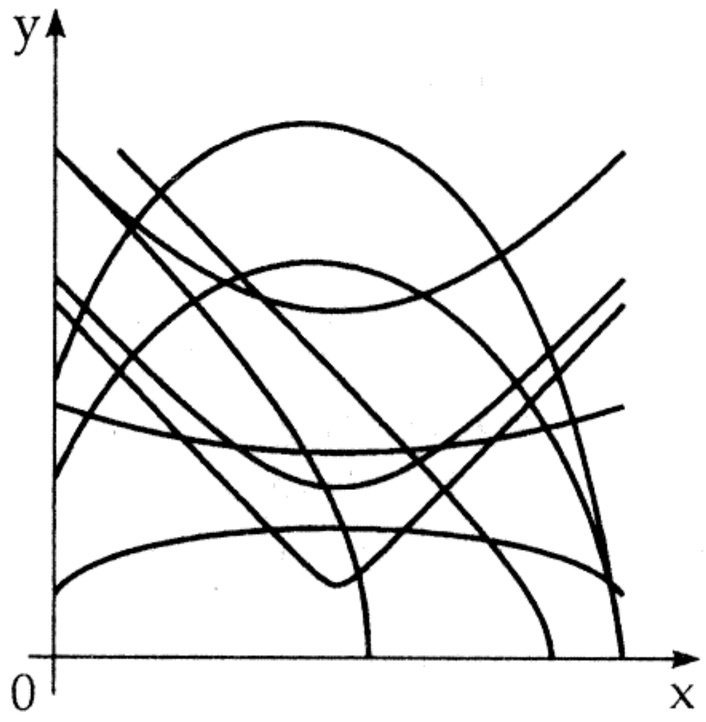
Ekkor a rektifikálás képletei mindkét speciális esetben $X = \dfrac{1}{x}$ és $Y = \dfrac{1}{y}$, vagy $X = x$ és $Y = \dfrac{x}{y}$ az elsőben, a másodikban pedig $X = x$ és $Y = \dfrac{1}{y}$.

2.16.2.5. Másodfokú polinom négyzetgyöke

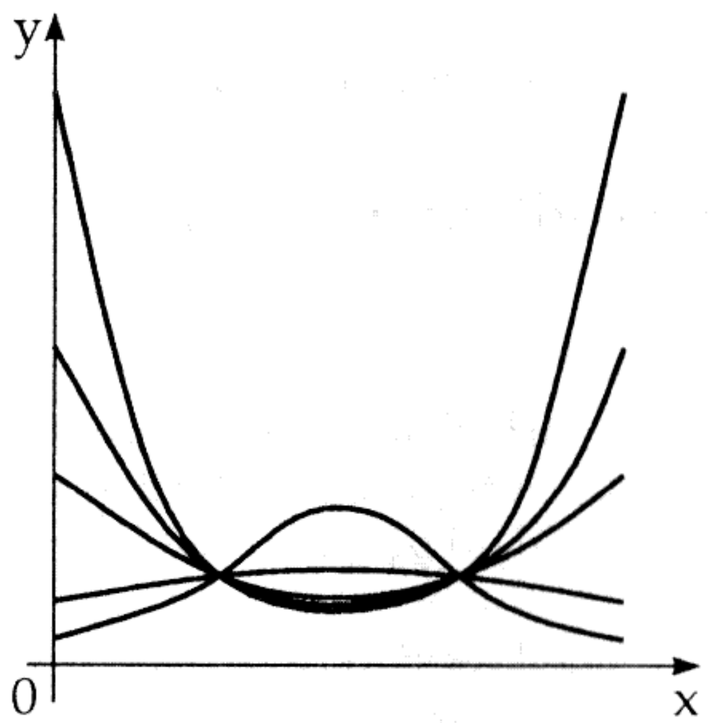
Az

$$y^2 = ax^2 + bx + c \tag{2.256}$$

egyenlettel meghatározott görbe több lehetséges lefutása pozitív x-re és y-ra a **2.85 ábrán** látható. Az ekvivalens (2.46) függvényt és görbéjének menetét **(2.22. ábra)** a 70. oldalon tárgyaljuk.
Az új $Y = y^2$ változó bevezetésével a további számolás a másodfokú polinom 2.16.2.3. pontban vizsgált esetére vezethető vissza; $a < 0$ esetén ugyanezt $-y$-ra, $|a|$-val végezzük el.



2.85 ábra.



2.86 ábra.

2.16.2.6. Általánosított Gauss-féle haranggörbe

Az ilyen típusú

$$y = ae^{bx+cx^2} \quad (a > 0) \quad \text{azaz} \quad \log y = \log a + bx \log e + cx^2 \log e \tag{2.257}$$

függvények görbéjének jellemző lefutásai pozitív x-re a **2.86 ábrán** vannak feltüntetve. Tárgyalásuk a 74. oldalon található.
A vonatkozó feladat az új $Y = \log y$ változó bevezetésével a másodfokú polinom 2.16.2.3. pontban tárgyalt esetére vezethető vissza; $a < 0$ esetén ugyanezt $-y$-ra, $|a|$-val végezzük el.

2.16.2.7. Harmadrendű görbe, II. típus

Az ilyen típusú

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}. \tag{2.258}$$

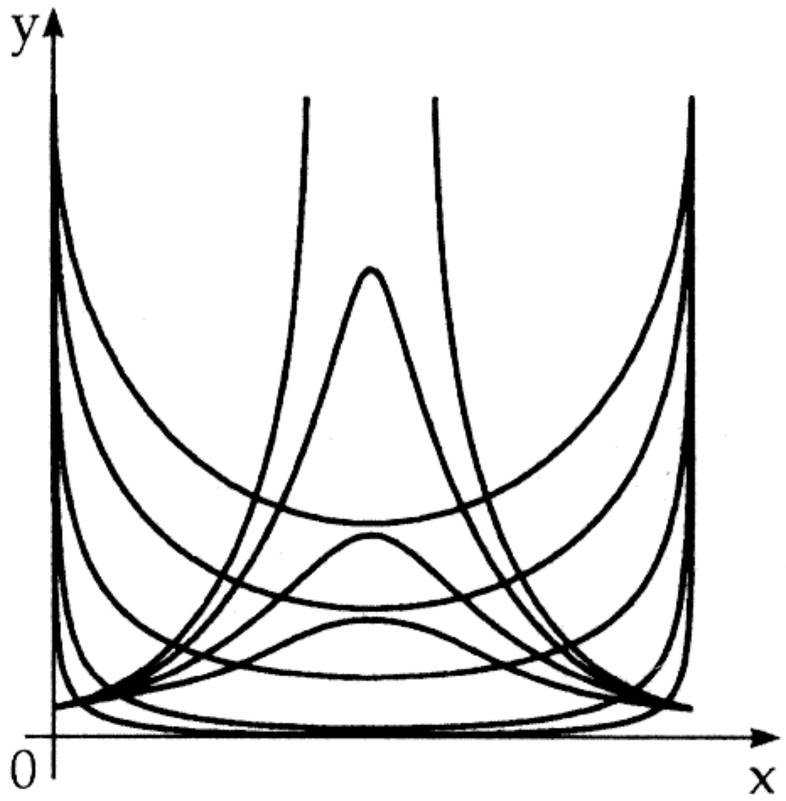
függvények görbéjének lehetséges lefutásai pozitív x-re és y-ra a **2.87 ábrán** vannak feltüntetve. Vizsgálatuk a 66. oldalon található.
A feladat az új $Y = \dfrac{1}{y}$ változó bevezetésével a másodfokú polinom 2.16.2.3. pontban tárgyalt esetére vezethető vissza.

2.16.2.8. Harmadrendű görbe, III. típus

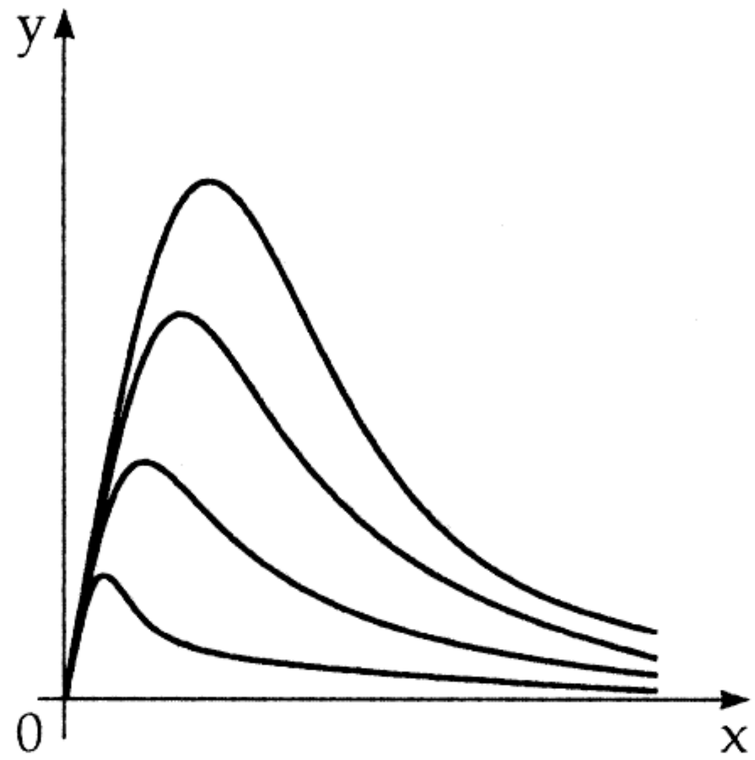
Ezek egyenlete:

$$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}, \tag{2.259}$$

a függvénygörbe néhány lehetséges lefutása pozitív x-re és y-ra a **2.88 ábrán** van feltüntetve. Vizsgálatuk a 67. oldalon található.
A feladat az új $Y = \dfrac{x}{y}$ változó bevezetésével a másodfokú polinom 2.16.2.3. pontban tárgyalt esetére vezethető vissza.



2.87 ábra.



2.88 ábra.

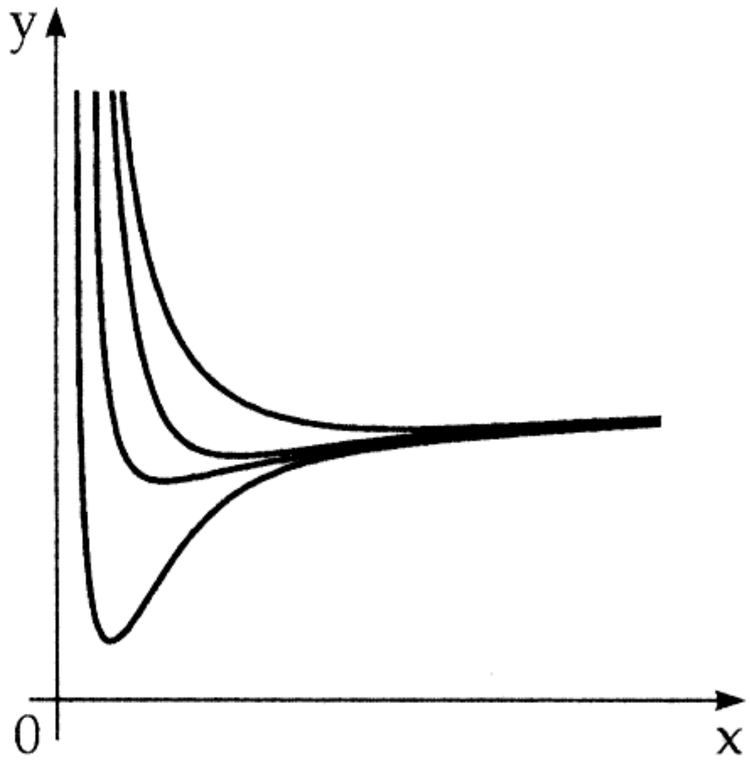
2.16.2.9. Harmadrendű görbe, I. típus

Az egyenlet:

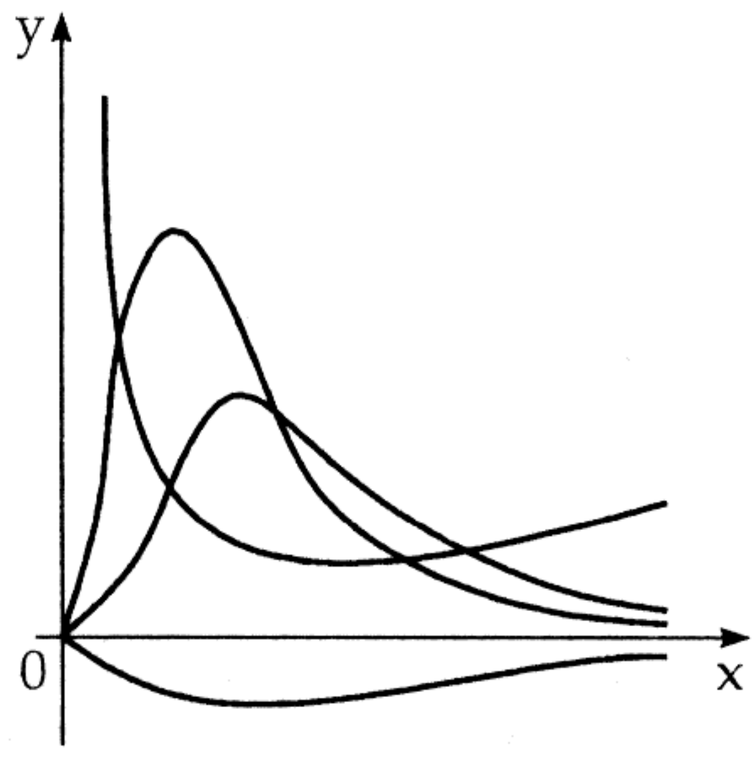
$$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\,, \tag{2.260}$$

a görbe néhány lehetséges lefutása pozitív x-re és y-ra a **2.89 ábrán** van feltüntetve. Vizsgálatuk a 66. oldalon található.

A feladat az új $X = \dfrac{1}{x}$ változó bevezetésével a másodfokú polinom 2.16.2.3. pontban tárgyalt esetére vezethető vissza.



2.89 ábra.



2.90 ábra.

2.16.2.10. Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata

Az ilyen típusú, tehát egy

$$y = ax^b e^{cx} \quad (a > 0) \tag{2.261a}$$

képlettel adott függvények görbéjének néhány lehetséges lefutása pozitív x-re a **2.90 ábrán** van feltüntetve. Vizsgálatuk a 74. oldalon található.

Ha az empirikus x értékek h különbségű számtani sorozatot alkotnak, akkor az

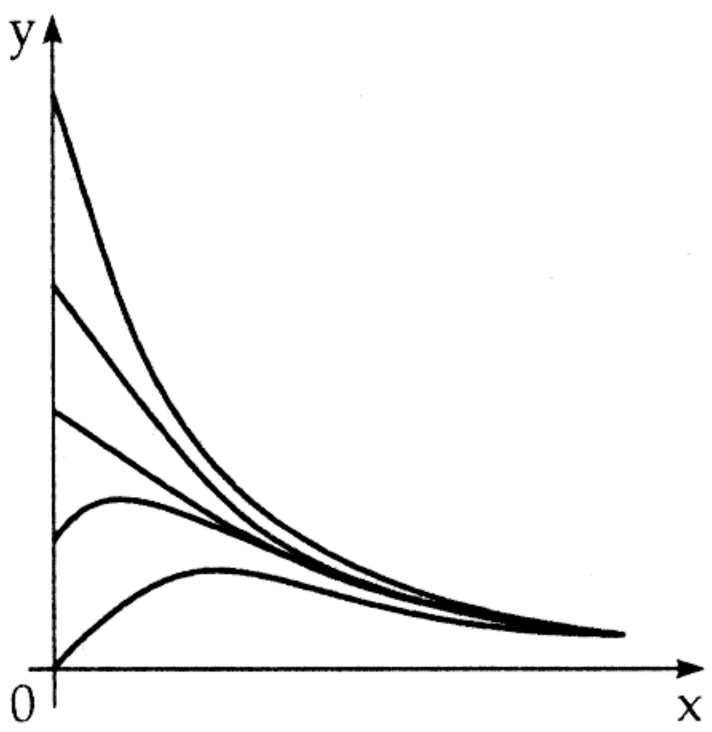
$$Y = \Delta \log y\,, \quad X = \Delta \log x\colon \qquad Y = hc \log e + bX \tag{2.261b}$$

képletek szerint rektifikálunk. Itt (2.254c)-hez hasonlóan $\Delta \log y$, ill. $\Delta \log x$ a $\log y$, ill. $\log x$ mennyiség két egymást követő értékének különbségét jelenti. Ha viszont az x értékek q hányadosú mértani

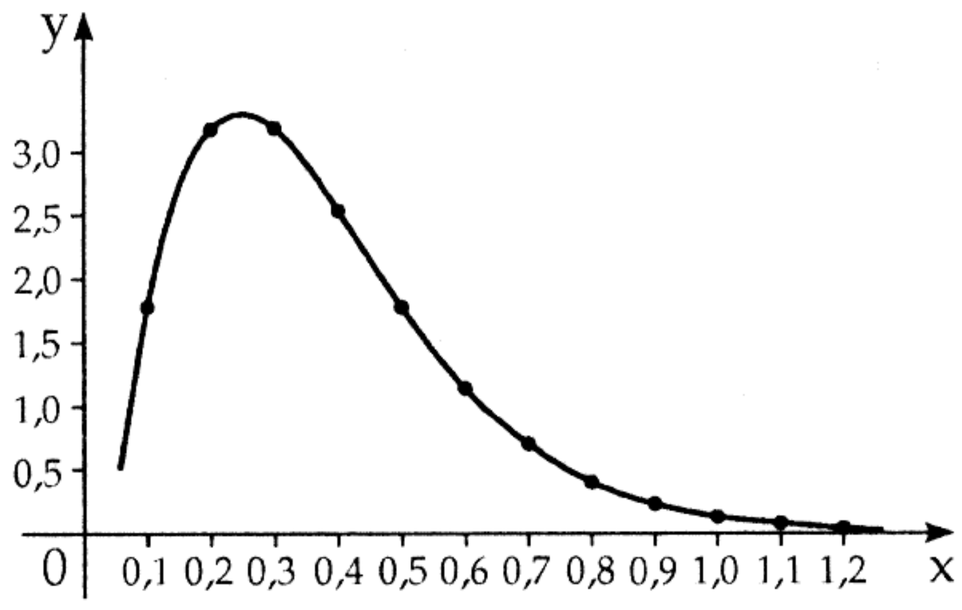
sorozatot alkotnak, akkor a rektifikálást az

$$X = x\,, \quad Y = \Delta \log y\colon \qquad Y = b \log q + c(q-1)X \log e\,. \tag{2.261c}$$

képletekkel végezzük. Mindkét esetben miután b és c értékét meghatároztuk, vesszük a megadott egyenlet logaritmusát, hogy $\log a$ értékét (2.254d) esetéhez hasonlóan számíthassuk ki. ($a < 0$ esetén megint $-y$-t rektifikáljuk $|a|$-kel.)
Ha a megadott x értékek nem alkotnak sem számtani, sem mértani sorozatot, de kiválasztható több x értékpár úgy, hogy hányadosuk egy konstans q érték, akkor a rektifikálásra ugyanaz a képlet érvényes, mint amikor az x értékek mértani sorozatot alkotnak, feltéve hogy az $Y = \Delta_1 \log y$ helyettesítést alkalmazzuk. Itt $\Delta_1 \log y$ a $\log y$ mennyiség két olyan értékének különbségét jelenti, amelyekhez tartozó x értékek hányadosa a konstans q érték (lásd a szakasz végén ismertetett példát).



2.91 ábra.



2.92 ábra.

2.16.2.11. Exponenciális összeg

Az

$$y = ae^{bx} + ce^{dx} \tag{2.262a}$$

exponenciális összeg görbéjének tipikus lefutásai pozitív x-re és y-ra és $a,\ c > 0,\ b,\ d < 0$ esetére a **2.91 ábrán** vannak feltüntetve. A függvény vizsgálata a 73. oldalon található.
Ha az x értékek h különbségű számtani sorozatot alkotnak, továbbá y, y_1, y_2 az adott függvény tetszőleges három egymást követő értéke, akkor a mindegyik ilyen hármasból adódó közös

$$Y = \frac{y_2}{y}\,, \quad X = \frac{y_1}{y}\colon \qquad Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh} \cdot e^{dh} \tag{2.262b}$$

képletekkel rektifikálunk. Miután b és d értékét ezen egyenlet segítségével meghatároztuk, a maradó a és c ismeretlenek meghatározására ismét rektifikálunk, most a következőképpen:

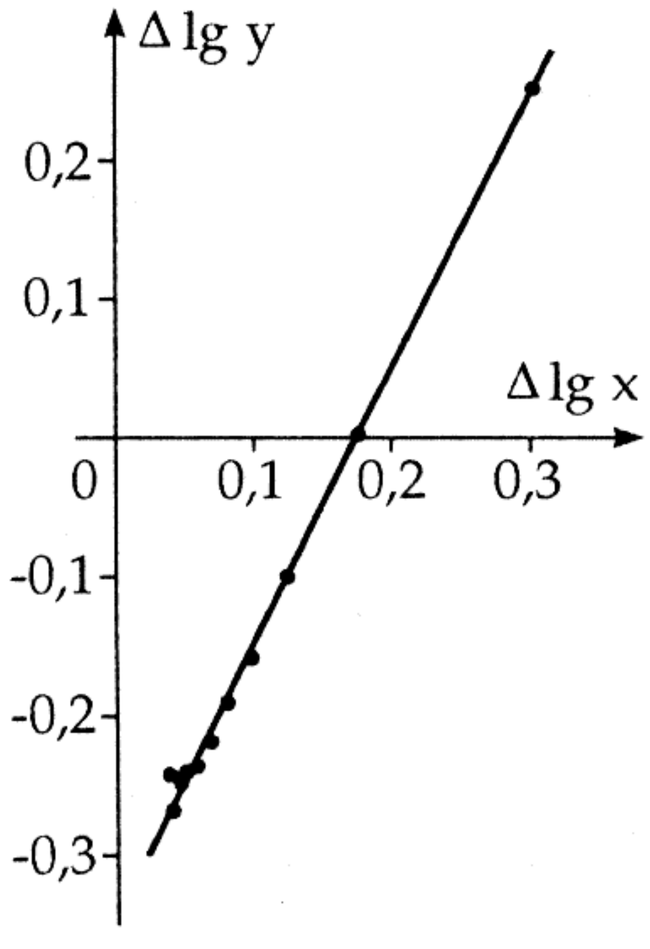
$$\overline{Y} = ye^{-dx}\,, \quad \overline{X} = e^{(b-d)x}\colon \qquad \overline{Y} = a\overline{X} + c\,. \tag{2.262c}$$

■ **Feladat:** Keressünk empirikus képletet a következő oldali **táblázattal** megadott összefüggésre x és y között!

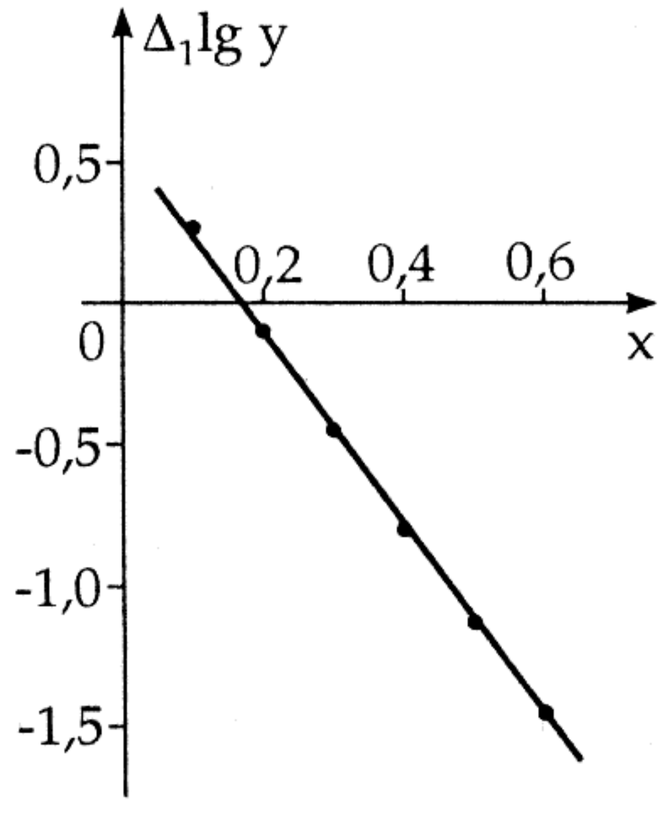
Táblázat: Kiindulási adatok egy empirikusan nyert függvénykapcsolat közelítő előállítására

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta\frac{x}{y}$	$\lg x$	lgy	$\Delta \lg x$	$\Delta \lg y$	$\Delta_1 \lg y$	y_{err}
0,1	1,78	0,056	0,007	−1,000	0,250	0,301	0,252	0,252	1,78
0,2	3,18	0,063	0,031	−0,699	0,502	0,176	+0,002	−0,097	3,15
0,3	3,19	0,094	0,063	−0,523	0,504	0,125	−0,099	−0,447	3,16
0,4	2,54	0,157	0,125	−0,398	0,405	0,097	−0,157	−0,803	2,52
0,5	1,77	0,282	0,244	−0,301	0,248	0,079	−0,191	−1,134	1,76
0,6	1,14	0,526	0,488	−0,222	0,057	0,067	−0,218	−1,455	1,14
0,7	0,69	1,014	0,986	−0,155	−0,161	0,058	−0,237	–	0,70
0,8	0,40	2,000	1,913	−0,097	−0,398	0,051	−0,240	–	0,41
0,9	0,23	3,913	3,78	−0,046	−0,638	0,046	−0.248	–	0,23
1,0	0,13	7,69	8,02	0,000	−0,886	0,041	−0,269	–	0,13
1,1	0,07	15,71	14,29	0,041	−1,155	0,038	−0,243	–	0,07
1,2	0,04	30,0	–	0,079	−1,398	–	–	–	0,04

A közelítő függvény megválasztása: Az adatok alapján kapott görbének (**2.92 ábra**) az eddigiekben tárgyalt görbékkel való összehasonlítása azt mutatja, hogy a **2.88** és **2.90 ábrán** látható görbéket leíró (2.259) vagy (2.261a) képlet megfelelő lehet.



2.93 ábra.



2.94 ábra.

A paraméterek meghatározása: Ha a (2.259) képletet vesszük, akkor a $\Delta\frac{x}{y}$ és az x mennyiséget kell rektifikálni. A számolás azonban azt mutatja, hogy az x és $\Delta\frac{x}{y}$ közötti kapcsolat távolról sem lineáris. (Ránézésre is látható, hogy az utóbbi egymásutáni értékei közti különbség messzemenően nem állandó.)
A (2.261a) képlet alkalmasságának megvizsgálása céljából megrajzoljuk a $\Delta \log x$ és $\Delta \log y$ közötti összefüggés görbéjét az adott $\Delta x = h = 0{,}1$ esetben **(2.93 ábra)**, valamint a $\Delta_1 \log y$ és x közöttiét a $q = 2$ esetben **(2.94 ábra)**. Mindkét esetben kielégítő pontossággal egyenest kapunk, úgyhogy az $y = ax^b e^{cx}$ képlet alkalmas a közelítésre.
Az a, b, c konstansok meghatározása céljából lineáris összefüggést keresünk x és a b értékével adott $\Delta_1 \log y$ között a középérték-módszer felhasználásával. A $\Delta_1 \log y = b \log 2 + cx \log e$ feltételi egyenletek

két, három-három egyenletből álló csoportban történő összeadásával azt kapjuk, hogy

$$-0{,}292 = 0{,}903b + 0{,}2606c\,, \qquad -3{,}392 = 0{,}903b + 0{,}6514c\,,$$

ahonnan $b = 1{,}966$ és $c = -7{,}932$. Az a érték meghatározása céljából összeadjuk az összes $\log y = \log a + b\log x + c\log e \cdot x$ típusú egyenleteket; így $-2{,}670 = 12\log a - 6{,}529 - 26{,}87$ adódik, amiből $\log a = 2{,}561$ miatt $a = 364$. Ha ezen értékekkel kiszámoljuk a $\Delta\dfrac{x}{y}$-nak megfelelő $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{y}\right)$-t, majd ennek egymásutáni értékei hányadosát $x = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 0{,}9$-re, akkor már értjük, hogy a megfelelő táblázatoszlop miért hasonlít egyre jobban egy kb. 2 hányadosú mértani sorozatra (számtani helyett). Az $y = 364x^{1{,}966}e^{-7{,}932x}$ képlettel kiszámított y értékek a közelítő előállításra szolgáló fenti **táblázat** utolsó y_{err} oszlopában vannak feltüntetve. A hibanégyzetek összege 0,0024.
Ha a rektifikálással nyert paramétereket mint kiindulási értékeket használjuk a

$$\sum_{i=1}^{12}[y_i - ax_i^b e^{cx_i}]^2 = \min$$

nemlineáris négyzetesközép-feladat (lásd 945. old.) második, iteratív megoldására, azt kapjuk, hogy $a = 396{,}601\,986$, $b = 1{,}998\,098$, $c = -8{,}000\,0916$, és a minimumot adó a, b, c értékekkel számított hibanégyzet-összeg 2 nagyságrenddel csökkent, 0,000 0916-ra.

2.17. Skálák és függvénypapírok

2.17.1. Skálák

Minden skála alapja egy $y = f(x)$ függvény. Ehhez a függvényhez *skálát* úgy készítünk, hogy valamilyen görbére, pl. egyenes vonalra, az y függvényértékeket mint hosszúságokat visszük fel, de az x argumentumértékekkel számozzuk meg. Tehát a skálát úgy lehet felfogni, mint a függvény értéktáblázatának egydimenziós ábrázolását.
Az $y = f(x)$ függvényhez tartozó *skálaegyenlet* a következő:

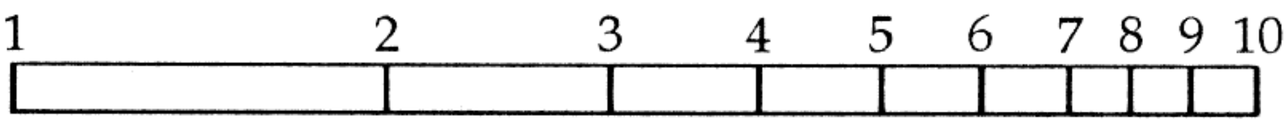
$$y = l[f(x) - f(x_0)]\,. \tag{2.263}$$

Az x_0 érték a skála kezdőpontját rögzíti. Az l hosszúság dimenziójú *léptéktényezővel* azt vesszük figyelembe, hogy egy bizonyos skálához csak egy meghatározott hosszúság áll rendelkezésre.

■ **A: Logaritmikus skála:** Ha $l = 10$ cm és $x_0 = 1$, akkor ennek skálaegyenlete $y = 10[\lg x - \lg 1] = 10\lg x$ (cm -ben). Az

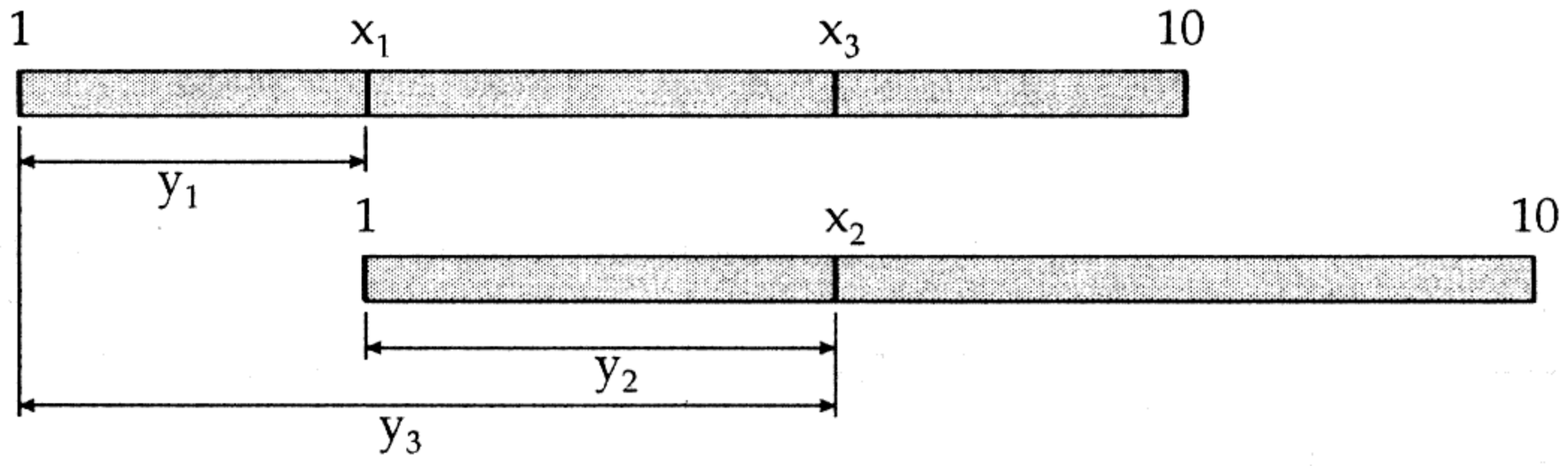
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = \lg x$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

értéktáblázathoz a **2.95 ábrán** feltüntetett, a ténylegessel arányos skálát kapjuk:

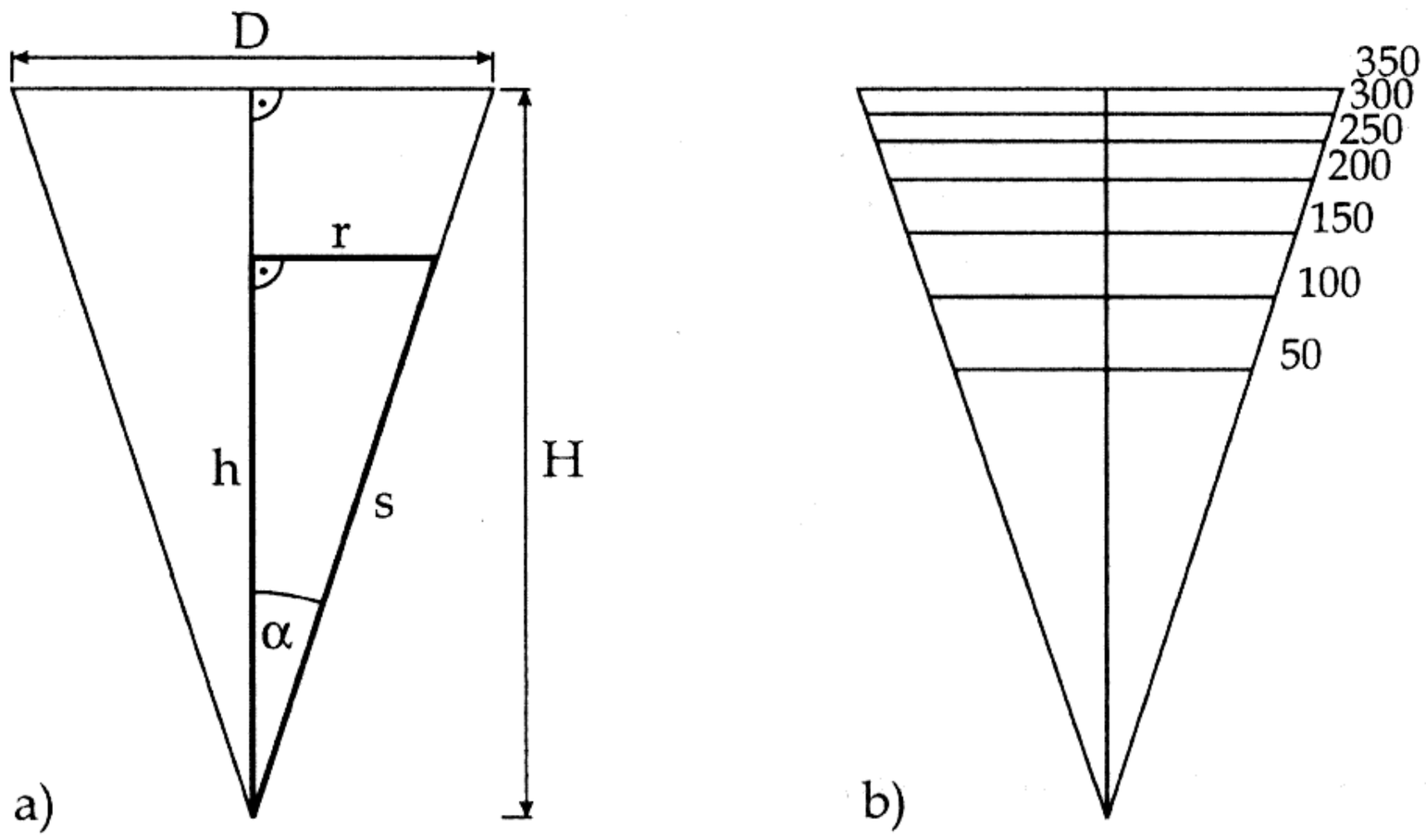


2.95 ábra.

■ **B: Logarléc:** A logaritmikus skála történelmileg legfontosabb alkalmazása a *logarléc* volt. Ennél pl. a szorzást és osztást két azonos léptéktényezőjű és egymás mentén eltolhatóan felerősített logaritmikus skála segítségével lehet elvégezni.
A **2.96 ábra** szerint: $y_3 = y_1 + y_2$, azaz $\lg x_3 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg x_1x_2$, tehát $x_3 = x_1 \cdot x_2$; másrészt $y_1 = y_3 - y_2$, azaz $\lg x_1 = \lg x_3 - \lg x_2 = \lg\dfrac{x_3}{x_2}$, tehát $x_1 = \dfrac{x_3}{x_2}$.



2.96 ábra.



2.97 ábra.

■ **C: Térfogatskála** kúp alakú mérőpoháron: Egy tölcsér palástjára a beleöntött folyadék térfogatának leolvasására alkalmas skálát kell felvinni. Legyenek a tölcsér méretei: magasság $H = 15$ cm, átmérő $D = 10$ cm. A **2.97 ábra** segítségével a skálaegyenlet a következőképpen vezethető le: Térfogat $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$, alkotó $s = \sqrt{h^2 + r^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h} = \frac{D/2}{H} = \frac{1}{3}$.

Innen $h = 3r, s = r\sqrt{10}$, $V = \frac{\pi\sqrt{s^3}}{(\sqrt{10})^3}$, úgyhogy az $s = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{\pi}}\sqrt[3]{V} \approx 2{,}16\sqrt[3]{V}$ skálaegyenlet adódik, azaz $l \equiv 1$, $s(V) = 2{,}16\sqrt[3]{V}$. Az alábbi értéktáblázat segítségével tehát a tölcséren az ábra szerinti bejelöléseket kapjuk, ahol $l = 1$ miatt a tölcsér aljától a V-értékig terjedő szakasz hossza éppen a hozzátartozó s-érték.

V cm^3-ben	0	50	100	150	200	250	300	350
s cm-ben	0	7,96	10,03	11,48	12,63	13,61	14,46	15,22

2.17.2. Függvénypapírok

A leggyakrabban használt függvénypapírok úgy állnak elő, hogy egy derékszögű koordinátarendszer tengelyei

$$x = l_1[f(u) - f(u_0)]\,, \quad y = l_2[f(v) - f(v_0)] \tag{2.264}$$

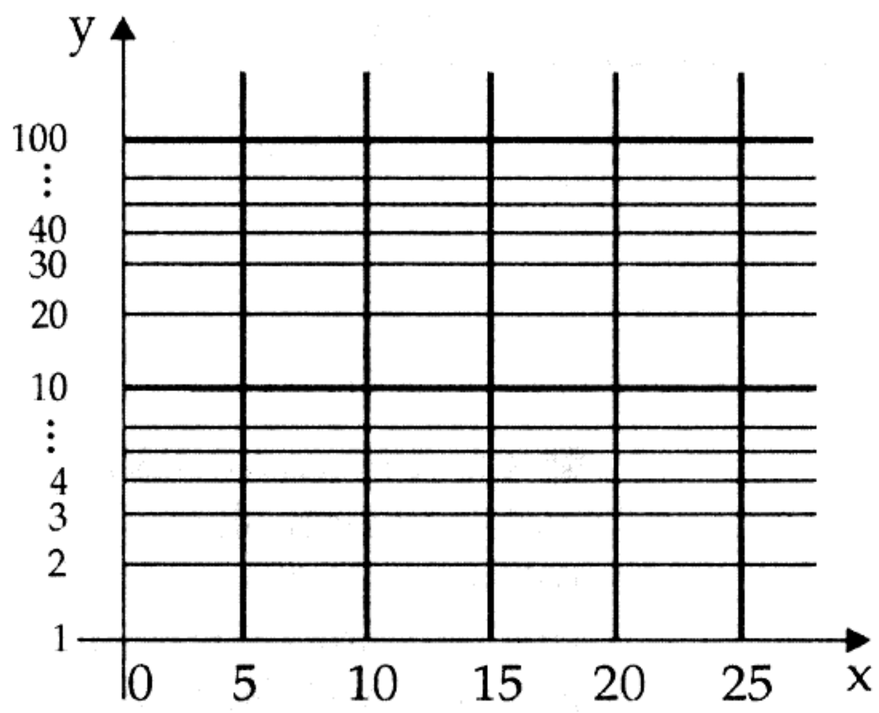
skálaegyenletű skálák. Itt l_1 és l_2 léptéktényezők; u_0 és v_0 a skálák kezdőpontjai.

2.17.2.1. Egyszer logaritmikus függvénypapír

Ha az x-tengely beosztása egyenközű (ekvidisztans), az y-tengelyé azonban logaritmikus, akkor egyszer logaritmikus függvénypapírról vagy *egyszer logaritmikus koordinátarendszer*ről beszélünk.

1. Skálaegyenletek

$$x = l_1[u - u_0] \quad \text{(lineáris skála)}, \qquad y = l_2[\lg v - \lg v_0] \qquad \text{(logaritmikus skála)} \tag{2.265}$$



2.98 ábra.

Egyszer logaritmikus papírra példa a **2.98 ábrán** látható.

2. Exponenciális függvények ábrázolása

Egyszer logaritmikus papíron az

$$y = \alpha e^{\beta x} \quad (\alpha, \beta \text{ konstans}) \tag{2.266a}$$

alakú exponenciális függvények ábrája egyenes (lásd Rektifikálás, 112. old.). Ezt a tulajdonságot a következőképpen lehet kihasználni: Ha egy egyszerű logaritmikus papírra berajzolt mérési pontok közelítőleg egy egyenesen fekszenek, akkor a változók között (2.266a) alakú összefüggést tételezhetiink fel. Ezen egyenes segítségével, amelyet a mérési pontokon szemmérték szerint fektetiink át, közelítőleg meghatározhatjuk az α és β paraméterek értékét:

Az egyenesen két, $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontot leolvasva azt kapjuk, hogy

$$\beta = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{és pl. } (x_1, y_1)\text{-ből} \quad \alpha = y_1 e^{-\beta x_1} . \tag{2.266b}$$

2.17.2.2. Kétszer logaritmikus függvénypapír

Ha egy derékszögű x, y-koordinátarendszer mindkét tengelyének beosztása logaritmikus, akkor kétszer logaritmikus függvénypapírról vagy *kétszer logaritmikus koordinátarendszer*ről beszélünk.

1. Skálaegyenletek

A skálaegyenletek alakja

$$x = l_1[\lg u - \lg u_0] , \qquad y = l_2[\lg v - \lg v_0] , \tag{2.267}$$

ahol l_1, l_2 a léptéktényezők, u_0 és v_0 a kezdőpontok.

2. Hatványfüggvények (lásd 71. old.) ábrázolása

Kétszer logaritmikus papíron az

$$y = \alpha x^{\beta} \quad (\alpha, \beta \text{ konstans}) \tag{2.268}$$

alakú hatványfüggvények ábrája egyenes vonal (lásd a hatványfüggvények rektifikálását, 111. old.). E tulajdonság felhasználása ugyanúgy történik, mint az egyszerű logaritmikus papírnál.

2.17.2.3. Függvénypapír reciprok skálával

A skálázandó koordinátatengely beosztása a fordított arányosság függvényének (2.39) egyenlete (lásd 65. old.) segítségével történik.

1. Skálaegyenlet

A skálaegyenletek

$$x = l_1[x - x_0] , \quad y = l \left[\frac{a}{x} - \frac{a}{x_0} \right] \quad (a \text{ konstans}) , \tag{2.269}$$

ahol l_1, l a léptéktényezők, x_0 a kezdőpont.

■ **Koncentráció egy kémiai reakció során:** Egy kémiai reakciónál a $c = c(t)$ koncentrációra, ahol t az idő, a következő értékeket mérték:

t (min)	5	10	20	40
$c \cdot 10^3$ (mol/l)	15,53	11,26	7,27	4,25

.

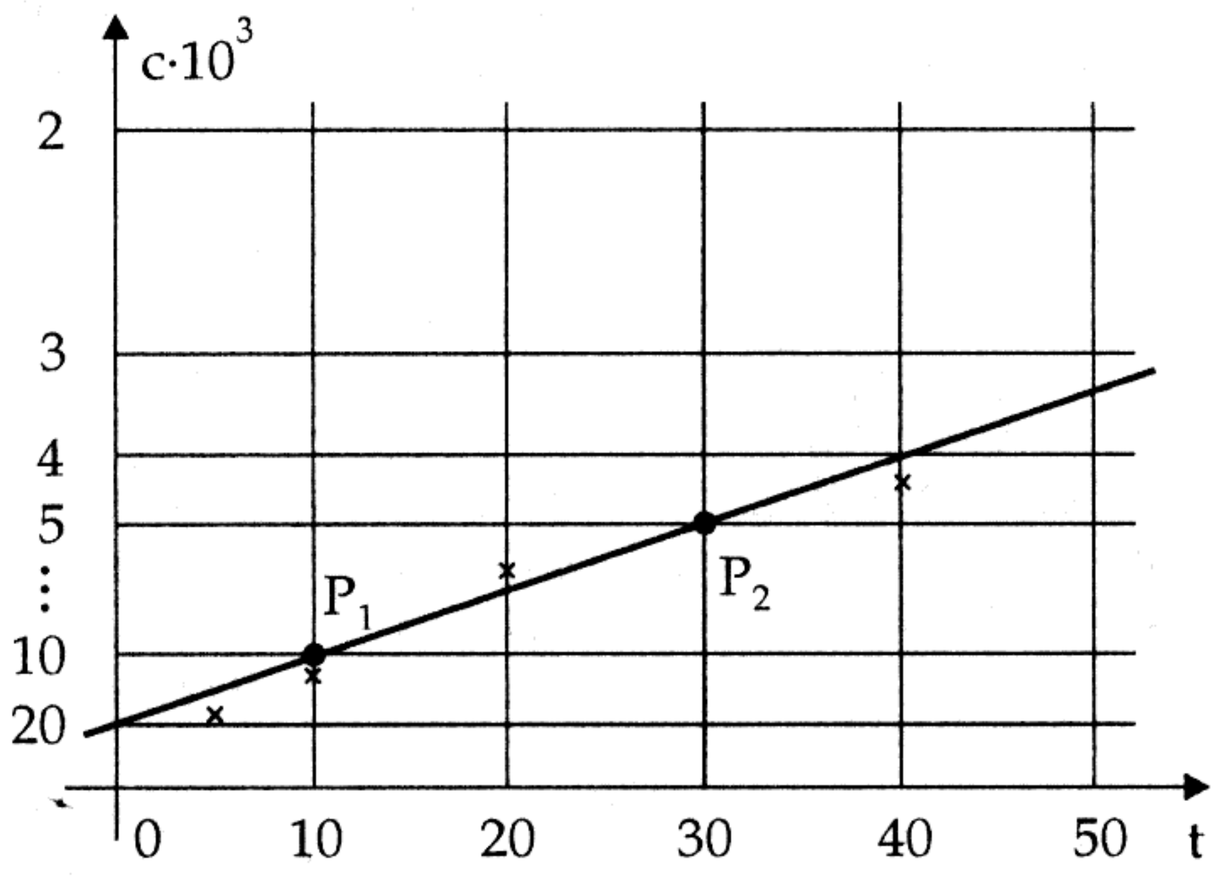
Feltesszük, hogy másodrendű reakcióról van szó, vagyis a következő összefüggés érvényes (a jobb láthatóság kedvéért bevezetett szorzótényező, azaz 10^3 elhagyásával):

$$c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0 k t} \quad (c_0, k \text{ konstans}). \qquad (*)$$

Ezen egyenlet reciprokára áttérve azt kapjuk, hogy $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + kt$, vagyis a $(*)$ összefüggést egy egyenes írja le, feltéve hogy a függvénypapíron az y-tengely reciprok beosztással, az x-tengely viszont lineáris beosztással van ellátva.

Az y-tengelyre vonatkozó skálaegyenlet például a következő lehet: $y = 10 \cdot \frac{1}{x}$ cm $(x_0 = 0, a = 1)$.

Az ehhez tartozó **2.99 ábrából** látható, hogy a mérési pontok közelítőleg egy egyenesen fekszenek, ami a $(*)$ összefüggés megerősítése.



2.99 ábra.

Továbbá az egyenes két pontja segítségével, pl. a $P_1(10, 10)$ és $P_2(30, 5)$ pontot leolvasva, közelítő értéket kapunk a két paraméterre, vagyis a reakciósebesség k konstansára és a c_0 kezdeti koncentrációra:

$$k = \frac{1/c_1 - 1/c_2}{t_1 - t_2} \approx 0{,}005, \quad c_0 \cdot 10^3 = \frac{c(t)}{1 - ktc(t)} \approx \frac{10}{1 - 0{,}005 \cdot 10 \cdot 10} = 20, \text{ tehát } c_0 \approx 20 \cdot 10^{-3}.$$

2.17.2.4. Megjegyzés

Függvénypapírok szerkesztésére és alkalmazására sok egyéb lehetőség is van. Bár a mérési adatok kiértékeléséhez ma legtöbbször nagy teljesítményű számítógépek állnak rendelkezésre, a laboratóriumi praxisban még gyakran használnak függvénypapírokat, hogy segítségükkel kisszámú mérési értékből a függvénykapcsolatra vonatkozó állítást nyerjenek, vagy közelítő paraméter-értékeket kapjanak, amelyekre numerikus eljárások alkalmazása során (lásd nemlineáris négyzetesközép-feladatok, 945. old.) mint kiindulási értékekre van szükség.

2.18. Többváltozós függvények

2.18.1. Definíció és előállítás

2.18.1.1. Többváltozós függvények előállítása

Egy változó u mennyiséget az n számú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *független változó* függvényének mondunk, ha a független változók adott értékei mellett u egyértelműen meghatározott értéket vesz fel. Aszerint, hogy két, három vagy n változó mennyiség függvényéről van szó, a következő írásmódokat alkalmazzuk:

$$u = f(x, y), \quad u = f(x, y, z), \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2.270)$$

Ha az n számú független változó helyébe konkrét számokat helyettesítünk, akkor a változók egy értékrendszerét kapjuk, amelyet mint *az n-dimenziós tér egy pontját* lehet interpretálni. Az egyes független változókat *argumentumok*nak is mondják; néha összefoglalóan az összes független változó együttesét nevezik a függvény argumentumának.

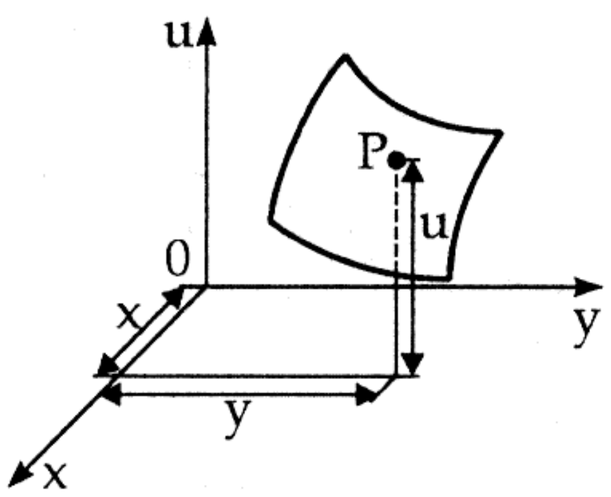
Példák függvényértékre:

■ **A:** Az $u = f(x, y) = xy^2$ függvénynek az $x = 2$, $y = 3$ értékrendszer mellett az értéke $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

■ **B:** Az $u = f(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$ függvény az $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$ értékrendszer mellett az $f(3, 4, 3, 1) = 3 \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$ értéket veszi fel.

2.18.1.2. Többváltozós függvények geometriai ábrázolása

1. A változók értékrendszereinek ábrázolása Egy két változóból, x-ből és y-ból álló argumentum értékrendszerét a sík x, y derékszögű koordinátákkal jellemzett pontjaként lehet ábrázolni; három x, y, z változó értékrendszerének a háromdimenziós térben az x, y, z derékszögű koordinátákkal adott pont felel meg. Négy vagy annál több koordinátából álló rendszereket már nem tudunk szemléletesen elképzelni.



2.100 ábra.

Mégis, a háromdimenziós tér analógiájára n számú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóból álló rendszereknél is az n-dimenziós tér $x_1, x_2, \ldots, x_n$ derékszögű koordinátákkal jellemzett pontjáról beszélünk. A fenti **B** példában az értékrendszer a négydimenziós térnek az a pontja, amelynek koordinátái $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$ és $t = 1$.

2. A kétváltozós $u = f(x, y)$ függvény ábrázolása

a) Két független változó függvényét, az egy független változójú függvények síkbeli függvénygörbéjének analógiájára, térbeli felületként lehet ábrázolni (**2.100 ábra**, lásd még 243. old.). Ehhez az értelmezési tartomány, tehát a sík (x, y) pontjára állított függőleges egyenesen felmérjük az $u = f(x, y)$ előjeles függvényértéket. E szakaszok végpontjai felületet alkotnak a háromdimenziós térben.

Példák függvényt ábrázoló felületre:

■ **A:** $u = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$: A kapott felület sík (**2.101a ábra**, lásd még 214. old.).

■ **B:** $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$: A felület elliptikus paraboloid (**2.101b ábra**, lásd még 221. old.).

■ **C:** $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$: A felület $r = 4$ sugarú félgömb **(2.101c ábra)**.

b) Az $u = f(x, y)$ függvény képe a koordinátasíkokkal párhuzamos vágások útján előálló metszetgörbék segítségével is meghatározható. Az „u = állandó" metszetgörbéket *szintvonalak*nak is hívjuk.

■ A **2.101b, c ábrák** esetében a szintvonalak koncentrikus körök (nincsenek berajzolva).

Megjegyzés: A három vagy több argumentumú függvények a háromdimenziós térben nem ábrázolhatók. A háromdimenziós tér felületeinek analógiájára ilyenkor az n-dimenziós tér *hiperfelületé*nek fogalmát használjuk.

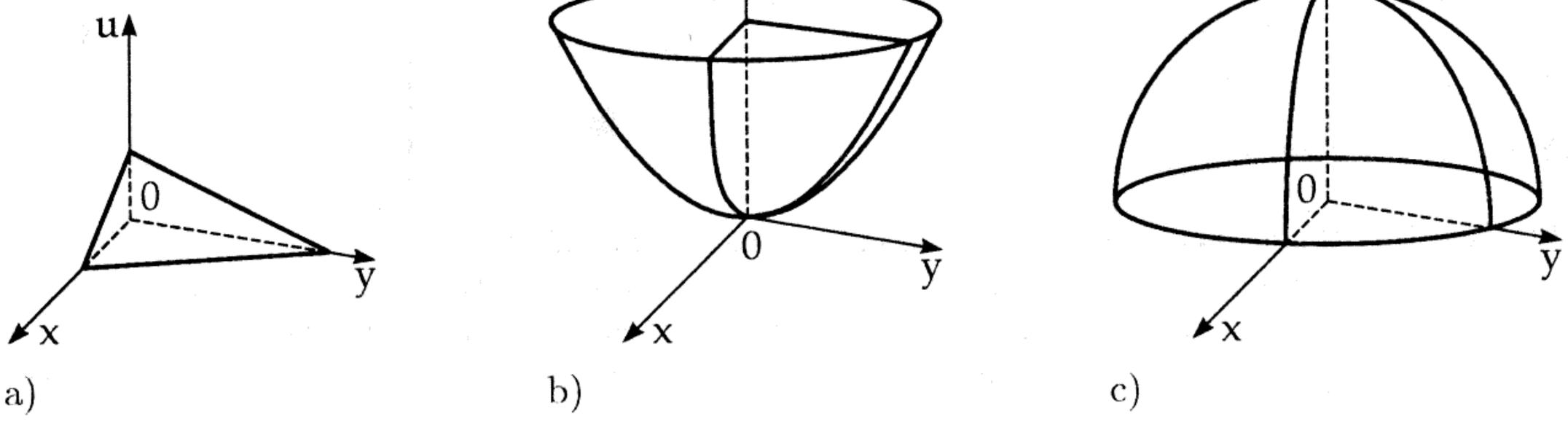
2.18.2. Különféle értelmezési tartományok a síkban

2.18.2.1. Függvény értelmezési tartománya

*Függvény értelmezési tartomány*ának nevezzük azon *értékrendszerek* vagy *pontok halmazát*, amelyeken a tekintett függvény változói végigfuthatnak. Az így előálló értelmezési tartományok nagyon különbözők lehetnek. Legtöbbször összefüggő, korlátos vagy nem korlátos *ponthalmazok* lépnek fel. Az értelmezési tartomány attól függően, hogy a határ hozzátartozik vagy sem, zárt vagy nyílt. Összefüggő nyílt ponthalmazt *tartomány*nak nevezünk. Ha egy tartományhoz hozzávesszük a határát, *zárt tartomány*ról beszélünk, ha pedig nem, és ezt külön hangsúlyozni akarjuk, akkor *nyílt tartomány*ról.

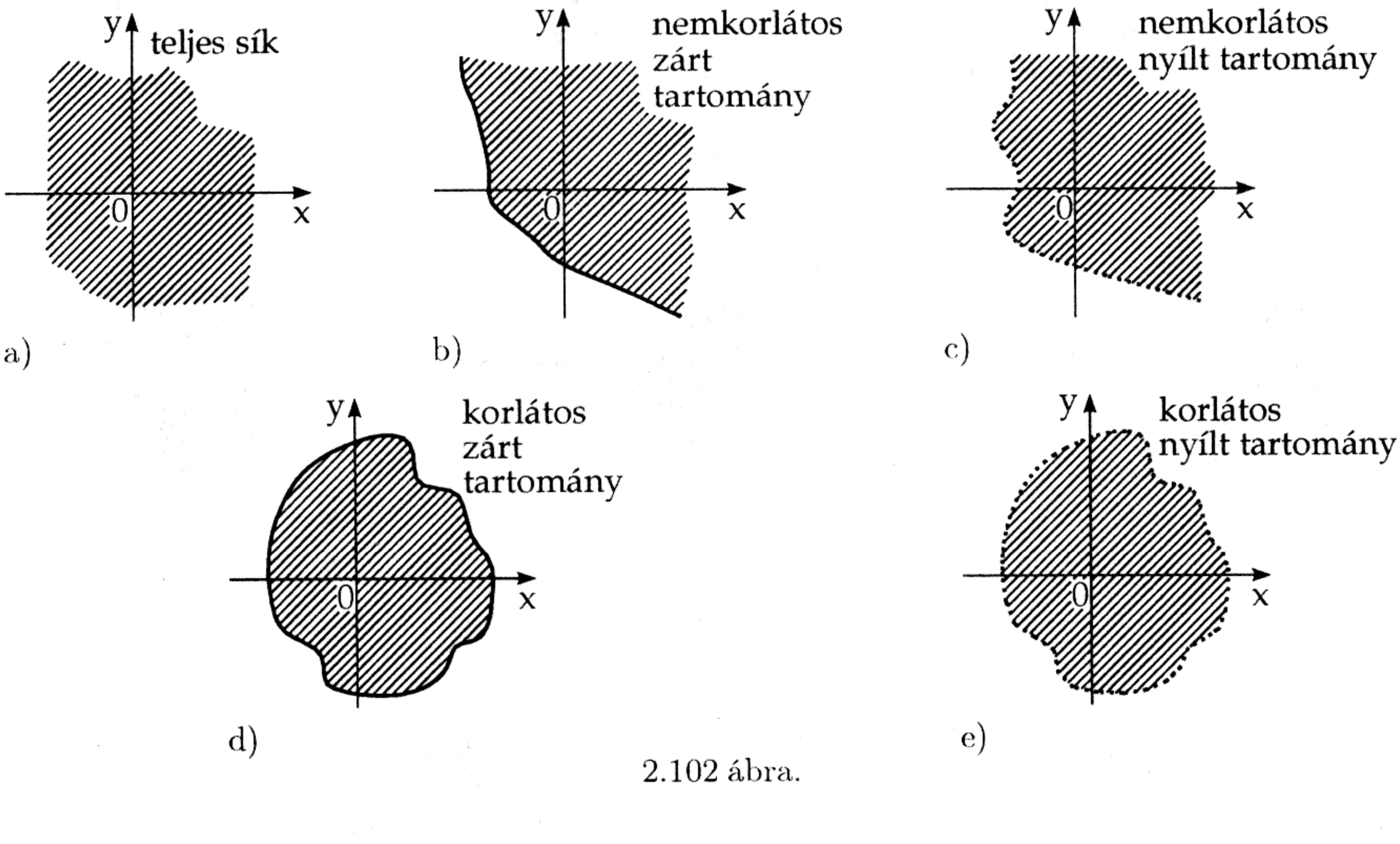
2.18.2.2. Kétdimenziós tartományok

Az **2.102 ábrán** a kétváltozós összefüggő ponthalmazok legegyszerűbb esetei és azok elnevezése látható. A tartományok vonalkázással vannak feltüntetve; a zárt tartományokat, vagyis azokat, amelyek



2.101 ábra.

határa beleszámít az értelmezési tartományt alkotó ponthalmazba, a tartomány körül folytonosan rajzolt határggörbe, a nyílt tartományokat szaggatott határgörbe veszi körül. A **2.102 ábrán** feltüntetett mindegyik esetben, beleértve az egész sík esetét is, *egyszeresen összefüggő tartomány*ról van szó.



2.102 ábra.

2.18.2.3. Három- és többdimenziós tartományok

Tárgyalásuk a kétdimenziós esettel analóg. Ez vonatkozik az egyszeresen és többszörösen összefüggő tartományok megkülönböztetésére is. Háromnál több változós függvények geometriai interpretálása a megfelelő n-dimenziós térben történik.

2.18.2.4. Függvényértelmezési módszerek

1. Értelmezés táblázat útján A többváltozós függvényeket lehet értéktáblázattal definiálni. Két független változójú függvények esetén példa az elliptikus integrálok (lásd 1088. old.) értéktáblázata.

Ennél a független változók értékei a táblázat felső és bal szélén szerepelnek. A keresett függvényérték a megfelelő sor és oszlop metszéspontjában található. Az ilyen táblázatokat *kétbemenetűek*nek mondjuk.

2. Értelmezés képlettel A többváltozós függvények (egy vagy több) képlettel is definiálhatók.

■ **A:** $u = xy^2$;

■ **B:** $u = x\,\ln(y - zt)$;

■ **C:** $u = \begin{cases} x + y & \text{ha } x \geq 0\,,\ y \geq 0\,, \\ x - y & \text{ha } x \geq 0\,,\ y < 0\,, \\ -x + y & \text{ha } x < 0\,,\ y \geq 0\,, \\ -x - y & \text{ha } x < 0\,,\ y < 0\,. \end{cases}$

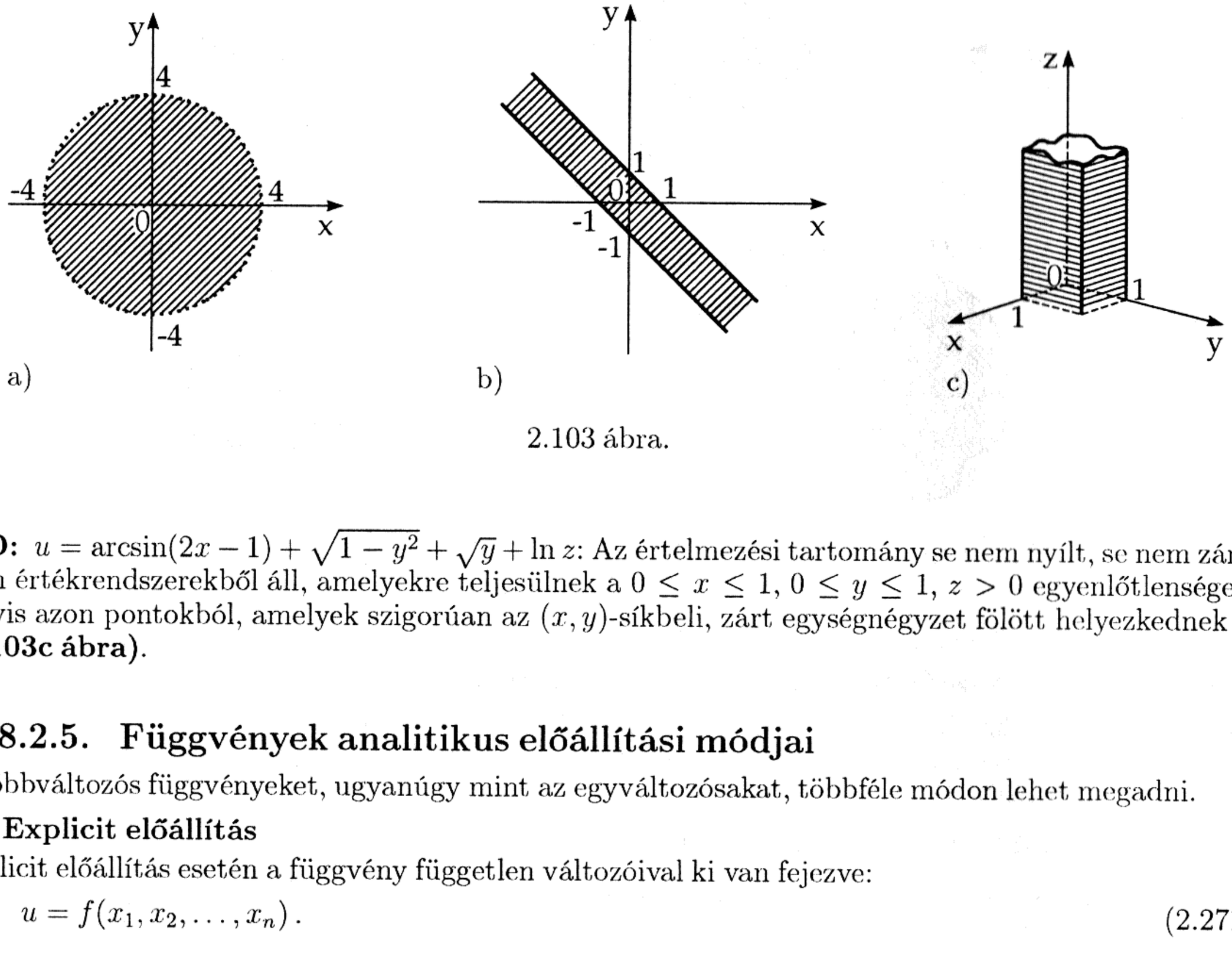
3. Képlettel megadott függvény értelmezési tartománya A matematikai analízisben legtöbbször olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek képlettel vannak értelmezve. Ilyenkor az értelmezési tartományba beleértjük a független változók mindazon értékrendszereit, amelyekre a függvény analitikus kifejezése értelmes, vagyis amelyekre a kifejezés egyértelműen meghatározott, véges, valós értéket vesz fel.

Példák értelmezési tartományra:

■ **A:** $u = x^2 + y^2$: Az értelmezési tartomány az egész sík.

■ **B:** $u = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$: Az értelmezési tartományt azon $(x,\ y)$ értékrendszerek alkotják, amelyekre teljesül az $x^2 + y^2 < 16$ egyenlőtlenség. Geometriailag ez a **2.103a ábrán** látható nyílt tartomány, azaz egy kör belseje.

■ **C:** $u = \arcsin(x + y)$: Az értelmezési tartományt azon $(x,\ y)$ értékrendszerek alkotják, amelyekre teljesül az $-1 \leq x + y \leq +1$ egyenlőtlenség, amely egy zárt tartomány, nevezetesen két párhuzamos egyenes közötti sáv a határegyeneseivel (**2.103b ábra**).



2.103 ábra.

■ **D:** $u = \arcsin(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln z$: Az értelmezési tartomány se nem nyílt, se nem zárt: azon értékrendszerekből áll, amelyekre teljesülnek a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z > 0$ egyenlőtlenségek, vagyis azon pontokból, amelyek szigorúan az (x, y)-síkbeli, zárt egységnégyzet fölött helyezkednek el **(2.103c ábra)**.

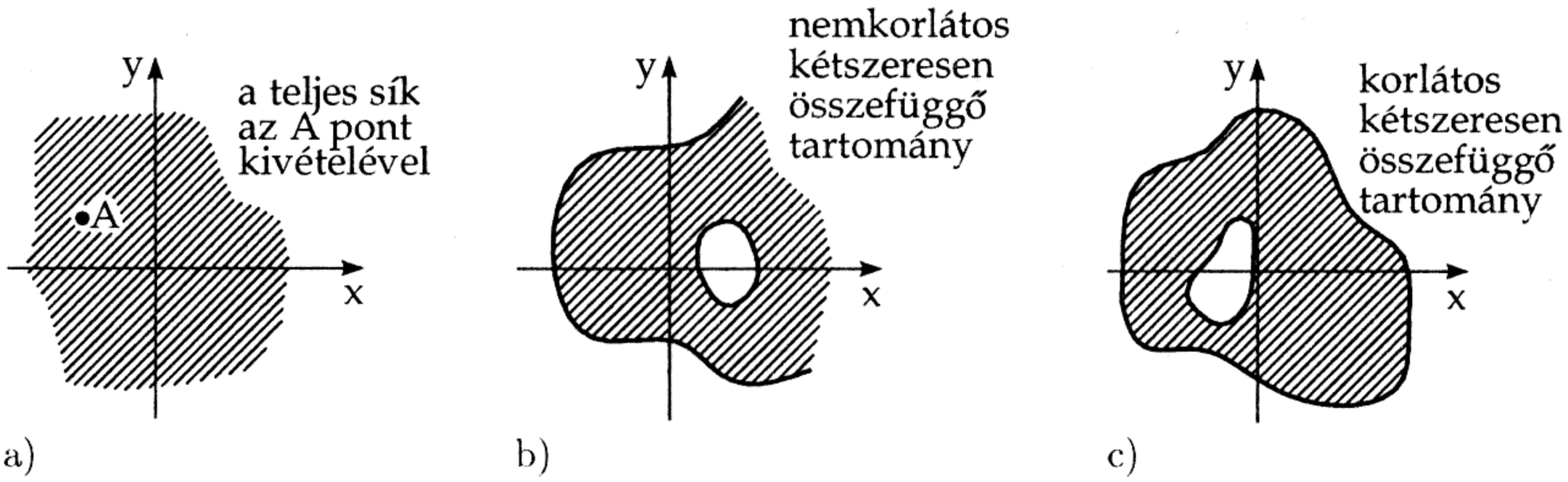
2.18.2.5. Függvények analitikus előállítási módjai

A többváltozós függvényeket, ugyanúgy mint az egyváltozósakat, többféle módon lehet megadni.

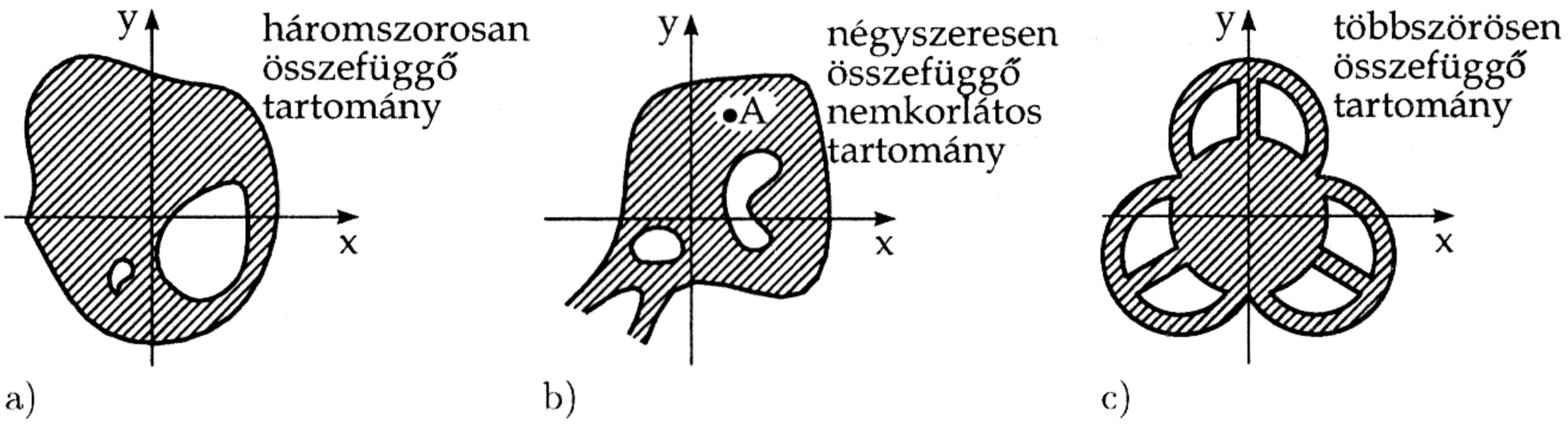
1. Explicit előállítás

Explicit előállítás esetén a függvény független változóival ki van fejezve:

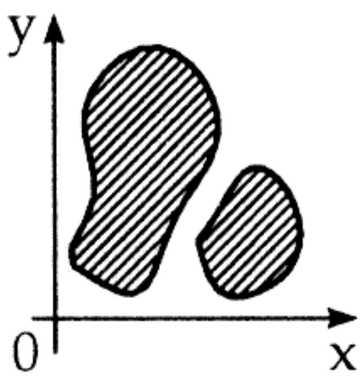
$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{2.271}$$



2.104 ábra.



2.105 ábra.



2.106 ábra.

Ha a tekintett síkdarab belsejében egy pontot vagy egy korlátos, egyszeresen összefüggő ponthalmazt az értelmezési tartományból a **2.104 ábra** szerint kizárunk, akkor *kétszeresen összefüggő tartomány*ról beszélünk. *Többszörösen összefüggő tartományok* a **2.105 ábrán** láthatók. Egy *nem összefüggő tartomány* a **2.106 ábrán** van feltüntetve.

2. Implicit előállítás

Implicit előállítás esetén az argumentumok és a függvény a következő típusú egyenlettel (vagy arra egyszerűen redukálhatóval) vannak összekapcsolva:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0\,. \tag{2.272}$$

3. Paraméteres előállítás

Paraméteres előállítás esetén az n számú argumentum általában ugyanannyi új változó (paraméter) segítségével van explicit módon kifejezve, tehát kétváltozós függvénynél

$$x = \varphi(r,s)\,, \quad y = \psi(r,s)\,, \quad u = \chi(x,y) = \overline{\chi}(r,s)\,, \tag{2.273a}$$

háromváltozós függvénynél

$$x = \varphi(r,s,t)\,, \quad y = \psi(r,s,t)\,, \quad z = \chi(r,s,t)\,, \quad u = \kappa(x,y,z) = \overline{\kappa}(r,s,t) \tag{2.273b}$$

stb.

4. Homogén függvény

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt akkor mondjuk homogén függvénynek, ha tetszőleges λ mellett teljesül rá az

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.274}$$

feltétel. Az m számot *a homogenitás fokának* nevezzük.

■ **A:** $u(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \dfrac{x^3}{y}}$, a homogenitás foka $m = 2$.

■ **B:** $u(x,y) = \dfrac{x+z}{2x-3y}$, a homogenitás foka $m = 0$.

2.18.2.6. Függvények összefüggése

1. Speciális eset: két függvény

Az egyazon halmazon értelmezett $u = f(x,y)$ és $v = \varphi(x,y)$ kétváltozós függvényeket *összefüggő függvényeknek* mondjuk, ha az egyik kifejezhető a másikkal egy $u = F(v)$ képlettel. Ekkor az értelmezési tartomány minden pontjában érvényes az $u = F(v)$, tehát az

$$f(x,y) = F[\varphi(x,y)] \quad \text{vagy} \quad \Phi(f,\varphi) = 0 \tag{2.275}$$

azonosság. Ha ilyen $F[\varphi]$ függvény vagy $\Phi(f,\varphi) \equiv 0$ implicit reláció nem létezik, akkor *független függvényekről* beszélünk.

■ $u(x,y) = (x^2+y^2)^2$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$ az $x^2+y^2 \geq 0$ tartományon értelmezve összefüggő függvények, mert $u = v^4$.

2. Általános eset: több függvény

Ugyanúgy, mint két függvény esetében, az n számú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változó m számú $u_1, u_2, \ldots, u_m$ függvénye egy közös értelmezési tartományon egymással összefüggő, ha valamelyikük, pl. u_i kifejezhető a többiek függvényeként, azaz ha az egész tartományon érvényes egy explicit

$$u_i = f(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_m)\,, \tag{2.276a}$$

azaz pontosabban egy

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(&u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_{i-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &u_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))\,, \end{aligned} \tag{2.276b}$$

vagy általánosabban egy

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv 0\,, \tag{2.276c}$$

pontosabban

$$\Phi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0 \tag{2.276d}$$

típusú implicit azonosság. Φ nem lehet triviális, azaz u_1, u_2, …, u_m függvényeként semmilyen nyílt halmazon nem lehet azonosan 0. Ha nincs ilyen összefüggés, független függvényekről beszélünk.

■ Az $u = x_1+x_2+\cdots+x_n$, $v = {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$ és $w = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$ függvények az egész $\mathbb{R}^n$-en összefüggők, mert $v = u^2 - 2w$.

3. Analitikus feltétel a függetlenségre

Most tegyük fel, hogy a tekintett függvények, sőt még elsőrendű parciális deriváltjaik is folytonosak egy közös nyílt halmazon és (2.276a) értelmében olyan Φ létezése vagy nem létezése érdekel minket,

amely valamely a fenti közös értelmezési tartomány $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ képét magában foglaló nyílt halmazon szintén összes elsőrendű parciális deriváltjaival együtt folytonos. Így értve a függetlenséget, ekvivalens feltétele az alábbi: Két $u = f(x, y)$ és $v = \varphi(x, y)$ függvény esetén a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \text{rövidítve} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \quad \text{vagy} \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)}, \tag{2.277a}$$

függvénydeterminánsnak (azaz — általános esetben is — JACOBI-determinánsnak) a vizsgált tartományon nem szabad azonosan eltűnnie. Hasonlóképpen, n számú n-változós $u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ függvény esetén

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \not\equiv 0\,. \tag{2.277b}$$

Általánosabban és pontosabban: Ha az u_1, u_2, $\ldots$, u_m függvények m száma nem feltétlenül egyenlő az x_1, x_2, $\ldots$, x_n változók n számával, továbbá a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{2.277c}$$

JACOBI-mátrix rangja r abban az értelemben, hogy van egy rögzített r-edrendű aldeterminánsa, amelyik a tartományon nem azonosan 0 és r a legnagyobb ilyen szám, akkor — minden ilyen aldeterminánsra — az oszlopaihoz tartozó u_{i_1}, u_{i_2}, $\ldots$, u_{i_r} függvények függetlenek, és bármelyik kihagyott függvény ezen r függvény által meghatározott, azaz ezektől függ. Eszerint ha $m > n$, akkor a megadott m számú függvény közül legfeljebb n számú lehet független.

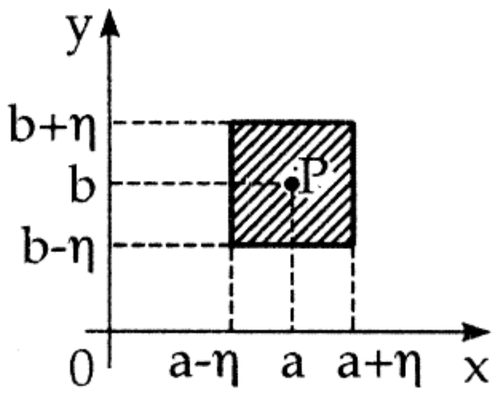
2.18.3. Határértékek

2.18.3.1. Definíció

A kétváltozós $u = f(x, y)$ függvénynek az (a, b)-ben az A szám a határértéke, ha az x változónak a-hoz és az y változónak b-hez való tetszőleges közeledésekor az $f(x, y)$ függvény tetszőlegesen közeledik A-hoz. Ezt a következőképpen jelöljük:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A\,. \tag{2.278}$$

Ilyenkor az (a, b) pontban a függvénynek nem feltétlenül kell az A értéket felvennie, sőt értelmezve sem kell lennie.



2.107 ábra.

2.18.3.2. Egzakt megfogalmazás

A kétváltozós $u = f(x, y)$ függvénynek létezik az $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ határértéke, ha megadva egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot található olyan pozitív η szám **(2.107 ábra)**, hogy

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{2.279a}$$

az

$$|x - a| < \eta, \quad |y - b| < \eta \tag{2.279b}$$

négyzet minden (x, y) pontjára, vagy ekvivalensen: az

$$\left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \eta\right\} \tag{2.279c}$$

körlemezen.

2.18.3.3. Általánosítás több változóra

a) Többváltozós függvény határértékének fogalmát a kétváltozós esettel analóg módon definiáljuk.

b) Többváltozós függvény határértékének létezésére vonatkozó kritériumokat az egyváltozós függvényekre vonatkozó kritériumok általánosításával kaphatunk, tehát sorozat határértékére való visszavezetéssel, másrészt a CAUCHY-féle konvergenciakritériummal (lásd 53. old.).

2.18.3.4. Többszörös határértékek

Ha a kétváltozós $f(x, y)$ függvénynek először $x \to a$ esetén, rögzített y mellett, képezzük a $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ határértékét, majd az így nyert függvénynek, amely már csak y-tól függ, képezzük a határértékét $y \to b$ esetén, akkor a kapott

$$B = \lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x, y)] \tag{2.280a}$$

számot *többszörös határérték*nek nevezzük. A sorrend megváltoztatása rendszerint egy másik,

$$C = \lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x, y)] \tag{2.280b}$$

határértékre vezet. Általában $B \neq C$, még ha létezik is mindkét határérték.

■ Az $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ függvényre $x \to 0$, $y \to 0$ esetén $B = -1$ és $C = +1$.

Ha azonban létezik az $f(x, y)$ függvény $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ határértéke, akkor $B = C = A$. Másrészt még a $B = C$ egyenlőségből sem következik az A határérték létezése.

2.18.4. Folytonosság

Azt mondjuk, hogy a kétváltozós $f(x, y)$ függvény folytonos az (a, b) pontban, ha 1. az (a, b) pont beletartozik a függvény értelmezési tartományába, és ha 2. az $x \to a$, $y \to b$ esetben a határérték létezik és

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = f(a, b) \tag{2.281}$$

Ellenkező esetben a függvénynek szakadása van az $x = a$, $y = b$ helyen. Ha egy függvény egy nyílt halmaz minden pontjában értelmezve van és folytonos, azt mondjuk, hogy a függvény folytonos a halmazon.

Kettőnél több változós függvények folytonosságát analóg módon definiálhatjuk.

2.18.5. Folytonos függvények tulajdonságai

2.18.5.1. Bolzano zérushely-tétele

Ha az $f(x,y)$ függvény értelmezve van és folytonos egy összefüggő tartományon, és ha a tartomány két különböző (x_1,y_1) és (x_2,y_2) pontjában felvett függvényértékek ellentétes előjelűek, akkor a tartománynak létezik legalább egy (x_3,y_3) pontja, ahol $f(x,y)$ a nulla értéket veszi fel:

$$f(x_3,y_3)=0, \quad \text{ha} \quad f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)<0\,. \tag{2.282}$$

2.18.5.2. Közbülsőérték-tétel

Általánosabban, ha az $f(x,y)$ függvény értelmezve van és folytonos egy összefüggő tartományon, és ha az (x_1,y_1) és (x_2,y_2) pontban a függvény két különböző $A=f(x_1,y_1)$ és $B=f(x_2,y_2)$ értéket vesz fel, akkor az A és B között fekvő bármely C számhoz található olyan (x_3,y_3) pont, amelyre

$$f(x_3,y_3)=C, \quad A<C<B \quad \text{vagy} \quad B<C<A\,. \tag{2.283}$$

2.18.5.3. Függvény korlátosságáról szóló tétel

Ha az $f(x,y)$ függvény egy korlátos zárt tartományon folytonos, akkor e tartományon korlátos is, vagyis létezik olyan m és M szám, hogy a tartomány minden (x,y) pontjára

$$m\le f(x,y)\le M\,. \tag{2.284}$$

2.18.5.4. Weierstrass tétele a legnagyobb és legkisebb függvényérték létezéséről

Ha az $f(x,y)$ függvény egy korlátos zárt tartományon folytonos, akkor létezik a tartománynak legalább egy (x',y') pontja, amelyre az $f(x',y')$ érték nagyobb–egyenlő, mint $f(x,y)$-nak a tartományban felvett összes többi értéke. Továbbá létezik ilyenkor legalább egy (x'',y'') pont, amelyre az $f(x'',y'')$ érték kisebb–egyenlő, mint $f(x,y)$-nak a tartományban felvett összes többi értéke. A tartomány tetszőleges (x,y) pontjára fennáll tehát

$$f(x',y')\ge f(x,y)\ge f(x'',y'')\,. \tag{2.285}$$

Megjegyzés: a fenti tételek értelemszerűen általánosítva igazak az n-dimenziós térben is.

3. Geometria

3.1. Síkgeometria

3.1.1. Alapfogalmak

3.1.1.1. Pont, egyenes, félegyenes, szakasz

1. Pont és egyenes

A pontot és az egyenest a modern matematikában nem definiálják. Csak a közöttük fennálló kapcsolatokat rögzítik axiómák formájában. Szemléletesen az *egyenest* olyan pont nyomvonalaként lehet definiálni, amely egy síkban két másik pontot összekötő legrövidebb úton mozog, miközben irányát sohasem változtatja meg.

*Pont*on két egyenes metszési helyét értjük.

2. Félegyenes és szakasz

Félegyenes egy egyenes összes olyan pontjainak a halmaza, amelyek az egyenes egy O pontjának ugyanazon az oldalán fekszenek, beleértve az O pontot is. A félegyenest egy pontnak az O pontban kezdődő és az egyenesen irányváltoztatás nélkül végbemenő mozgásával lehet szemléltetni, hasonlóan ahhoz, ahogyan a fénysugár halad kibocsátása után, amíg el nem térítik.

Az $\overline{AB}$ szakasz egy egyenes azon pontjainak halmaza, amelyek az egyenes A és B pontja között helyezkednek el, az A, B pontokat is beleértve. A szakasz a legrövidebb összeköttetés a sík A és B pontja között. Szakasz végigfutási értelmét az $\overrightarrow{AB}$ módon, azaz nyíllal jelöljük, vagy pedig mint az először megnevezett A pontból a másodszor megnevezett B pont felé mutató irányt fogjuk fel.

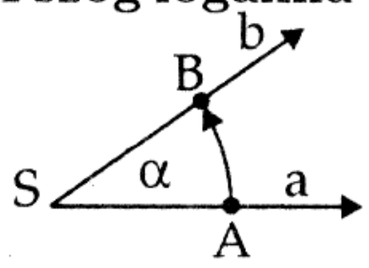
3. Párhuzamos és merőleges egyenesek

Az egymással *párhuzamos egyenesek* ugyanabban az irányban futnak, de nincs közös pontjuk, azaz nem közelednek egymáshoz, nem távolodnak egymástól, és nem metszik egymást. A e és e' egyenesek párhuzamosságának jelölése $e||e'$.

Az egymásra merőleges egyenesek a metszéspontban derékszöget alkotnak. Két egyenes merőlegessége, hasonlóan a párhuzamossághoz, a két egyenes kölcsönös helyzetét kifejező reláció.

3.1.1.2. Szög

1. A szög fogalma



3.1. ábra.

Szöget alkot két, közös S pontból kiinduló, forgatással egymásba átvihető a és b félegyenes **(3.1. ábra)**. Ha az a egyenesen ki van jelölve egy A pont és a b egyenesen egy B pont, akkor a szög jelölése a **3.1. ábrán** feltüntetett forgásirány esetén vagy (a, b), vagy $\sphericalangle ASB$, vagy egy görög betű. Az S pontot a *szög csúcsá*nak, az a, b félegyeneseket a szög *szárai*nak nevezzük.

A matematikában egy szöget pozitívnak ill. negatívnak mondunk, ha a forgatás az óramutató járásával ellentétes értelemben ill. az óramutató járásával megegyező értelemben történik. Tehát az $\sphericalangle ASB$ és az $\sphericalangle BSA$ szög között alapvető különbség van. Fennáll, hogy $\sphericalangle ASB = -\sphericalangle BSA$.

Megjegyzés: A geodéziában az óramutató járásával megegyező forgásirányú szöget tekintik pozitívnak (lásd 143. old.).

2. Szögfajták elnevezései

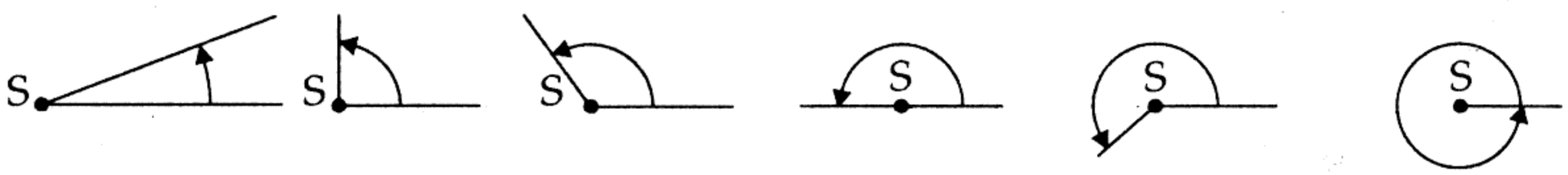
A szögeket száraik iránykülönbsége szerint nevezték el. A $0 \leq \alpha \leq 360°$ intervallumba tartozó α szögekre a szokásos elnevezéseket a **3.1. táblázat** tartalmazza (lásd még a **3.2. ábrát**).

3.1.1.3. Két metsző egyenesnél fellépő szögek

A sík két egyenese, e_1 és e_2 metszésénél négy különböző szög keletkezik: α, β, γ és δ **(3.3. ábra)**. Megkülönböztetünk mellékszögeket és csúcsszögeket, továbbá pótszögeket és kiegészítő szögeket.

3.1. táblázat. Fokokban és ívmértékben megadott szögek elnevezései

Szög elnevezése	Nagyság fokokban	Nagyság ívmértékben	Szög elnevezése	Nagyság fokokban	Nagyság ívmértékben
Teljesszög	$\alpha^\circ = 360^\circ$	$\alpha = 2\pi$	Derékszög	$\alpha^\circ = 90^\circ$	$\alpha = \pi/2$
Homorú szög	$\alpha^\circ > 180^\circ$	$\pi < \alpha < 2\pi$	Hegyesszög	$0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$	$0^\circ < \alpha < \pi/2$
Egyenesszög	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = \pi$	Tompaszög	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\pi/2 < \alpha < \pi$



hegyesszög derékszög tompaszög egyenesszög homorúszög teljesszög

3.2. ábra.

1. A mellékszögek két metsző egyenesnél fellépő szomszédos szögek, amelyeknek S csúcsa és egyik szára közös; a két nem egybeeső szár közös egyenesen fekszik, de különböző, S-ből kiinduló félegyeneseken, úgyhogy a mellékszögek egymást 180°-ra egészítik ki.

■ A **3.3. ábrán** ilyenek az $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta)$ és (α, δ) szögpárok.

2. A csúcsszögek két metsző egyenesnél egymással szemben fellépő, egyenlő nagyságú szögek, amelyeknek közös S csúcsuk van, de nincs közös száruk. Mindekettőt egy azonos nagyságú mellékszög 180°-ra egészíti ki.

■ A **3.3. ábrán** (α, γ) és (β, δ) csúcsszögekből állnak.

3. Két szög egymásnak pótszöge, ha egymást 90°-ra egészítik ki.

4. Két szög egymásnak kiegészítő szöge, ha egymást 180°-ra egészítik ki.

■ A **3.3. ábrán** az (α, β), ill. a (γ, δ) szögpár kiegészítő szögekből áll.

3.1.1.4. Párhuzamosokat metsző egyenesnél fellépő szögpárok

Ha a p_1, p_2 párhuzamos egyeneseket egy harmadik g egyenes metszi, nyolc darab szög keletkezik **(3.4. ábra)**. A közös S csúccsal rendelkező szögek között csúcsszögeket és mellékszögeket, a különböző csúcspontú szögek között váltószögeket, egyállású szögeket és társszögeket különböztetünk meg.

1. A váltószögek egyenlő nagyságú, a metsző egyenes és a párhuzamosok különböző oldalain fekvő szögek. A váltószögek szárai páronként ellentétes irányításúak.

■ A **3.4. ábrán** az $(\alpha_1, \gamma_2), (\beta_1, \delta_2), (\gamma_1, \alpha_2)$ és (δ_1, β_2) szögpárok váltószögek.

2. Az egyállású szögek egyenlő nagyságú, a metsző egyenes és a párhuzamosok azonos oldalán fekvő szögek. Az egyállású szögek szárai páronként egyező irányításúak.

■ A **3.4. ábrán** az $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)$ és (δ_1, δ_2) szögpárok egyállású szögek.

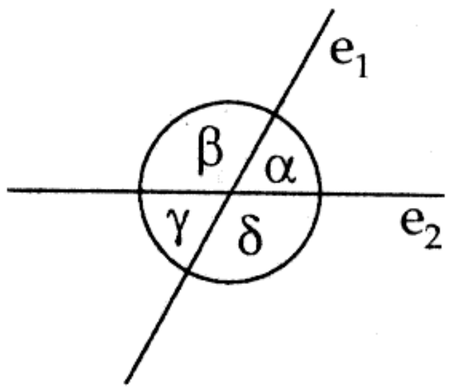
3. A társszögek a metsző g egyenes azonos oldalán, de a párhuzamosok ellenkező oldalán fekvő szögek, amelyek egymást 180°-ra egészítik ki. A szárak közül az egyik pár egyező irányítású, a másik pedig ellentétes irányítású.

■ A **3.4. ábrán** pl. az $(\alpha_1, \delta_2), (\beta_1, \gamma_2), (\gamma_1, \beta_2)$ és (δ_1, α_2) szögpárok társszögek.

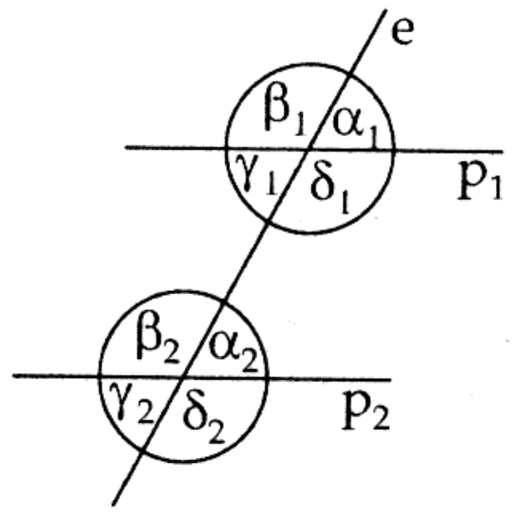
3.1.1.5. Szög kifejezése fokokban és ívmértékben

A szögeknek a geometriában szokásos, fokokban való mérése azon alapszik, hogy a *síkbeli teljesszöget* 360 egyenlő részre, azaz 360°-ra (fokra) osztjuk. Ez az ún. *régi fokbeosztás.* A további felosztás gyakran nem tízes, hanem hatvanas számrendszerben történik: $1^\circ = 60'$ (perc), $1' = 60''$ (másodperc). Ezt *hatvanas beosztás*nak is nevezik. Az új fokbeosztásról lásd a 145. oldalt.

Szögek kvantitatív megadására a fokokon kívül az ívmértéket is használjuk. Egy tetszőleges kör α *kö-*



3.3. ábra.



3.4. ábra.

*zépponti szög*ének **(3.5.a ábra)** nagyságát ilyenkor a szöghöz tartozó l körívnek és a kör r sugarának hányadosával adjuk meg:

$$\alpha = \frac{l}{r}\,. \tag{3.1}$$

Az *ívmérték egysége* a *radián* (rad), vagyis az a középponti szög, amelyhez tartozó ív egyenlő a sugárral. Fennáll:

1 rad	$= 57^\circ\,17'\,44{,}8'' = 57{,}2958^\circ$,
1°	$= 0{,}017453$ rad,
$1'$	$= 0{,}000291$ rad,
$1''$	$= 0{,}000005$ rad.

Ha α° a fokokban és α a radiánban mért szög, akkor az egyik mértékegységről a másikra való áttérés képletei:

$$\alpha^\circ = \varrho\alpha = 180^\circ\frac{\alpha}{\pi}\,, \qquad \alpha = \frac{\alpha^\circ}{\varrho} = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ, \quad \text{ahol} \quad \varrho = \frac{180^\circ}{\pi}\,. \tag{3.2}$$

Speciálisan $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \pi/2$, $270^\circ = 3\pi/2$ stb. A (3.2) képletekkel az eredményt decimális alakban kapjuk meg, a következő példákban viszont az átszámításnál percek és másodpercek is szerepelnek.

■ **A:** Fokokban megadott szög átszámítása radiánra:
$52^\circ\,37'\,23'' = 52 \cdot 0{,}017453 + 37 \cdot 0{,}000291 + 23 \cdot 0{,}000005 = 0{,}918447$ rad.

■ **B:** Radiánban megadott szög átszámítása fokokra:
$5{,}645$ rad $= 323 \cdot 0{,}017453 + 26 \cdot 0{,}000291 + 5 \cdot 0{,}000005 = 323^\circ\,26'\,05''$.
Ez a következőképpen jött ki:

$5{,}645 : 0{,}017453 = 323 + 0{,}007611$
$0{,}007611 : 0{,}000291 = 26 + 0{,}000025$
$0{,}000025 : 0{,}000005 = 5$.

Ha az összefüggésből világos, hogy szög ívmértékéről van szó, a rad jelet rendszerint elhagyjuk.

Megjegyzés: A geodéziában a teljesszöget 400 egyenlő részre, 400 gon-ra osztják fel. Ez az ún. *új fokbeosztás*. A derékszög ekkor 100 gon. A gont 1000 mgon-ra osztják tovább.
Zsebszámológépeken a DEG jel fokot (régi fokot), a GRAD jel gont (új fokot), a RAD jel pedig radiánt (ívmértéket) jelent. A különböző mértékegységek közötti átszámításról lásd a 145. oldalon álló táblázatot.

3.1.2. A körfüggvények és a hiperbolikus függvények geometriai definíciója

3.1.2.1. A kör- vagy trigonometrikus függvények definíciója

1. Egységkörös definíció Egy α szög trigonometrikus függvényeit vagy az $R = 1$ sugarú egységkör felhasználásával, vagy hegyesszög esetén egy derékszögű háromszögben **(3.5.a,b ábrák)** a szög mellett fekvő b *befogó*, a szöggel szemben fekvő a *befogó* és a c *átfogó* segítségével lehet definiálni. Az egységkörben a szögmérés egy 1 hosszúságú rögzített $\overline{OA}$ sugártól egy mozgó $\overline{OC}$ sugárig az óramutató járásával

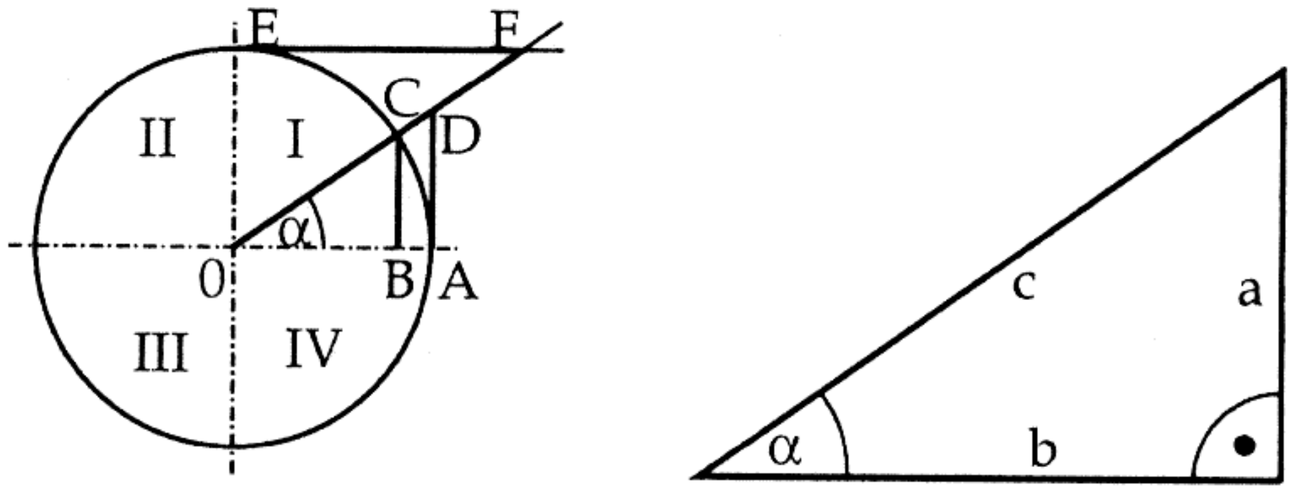
ellentétes forgási irányban (pozitív forgásirányban) történik:

szinusz : $\sin\alpha = \overline{BC} = \frac{a}{c}$, (3.3) *koszinusz* : $\cos\alpha = \overline{OB} = \frac{b}{c}$, (3.4)

tangens : $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AD} = \frac{a}{b}$, (3.5) *kotangens* : $\operatorname{ctg}\alpha = \overline{EF} = \frac{b}{a}$, (3.6)

szekáns : $\sec\alpha = \overline{OD} = \frac{c}{b}$, (3.7) *koszekáns* : $\operatorname{cosec}\alpha = \overline{OF} = \frac{c}{a}$. (3.8)

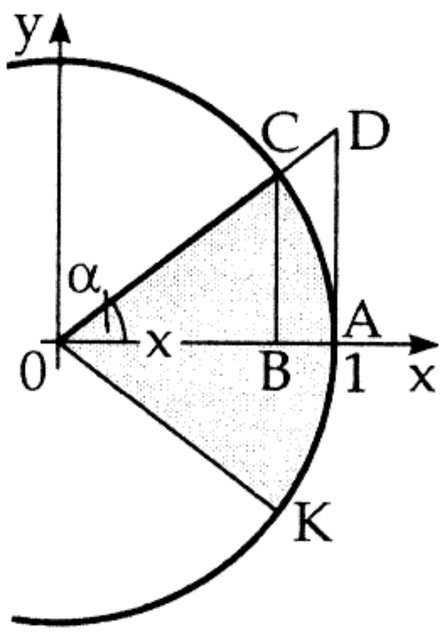
2. A trigonometrikus függvények előjele Attól függően, hogy a mozgó sugár az egységkör melyik negyedében **(3.5.a ábra)** helyezkedik el, a függvényeknek teljesen meghatározott előjelük van, amely a **2.2. táblázatból** (lásd 78. old.) olvasható le.



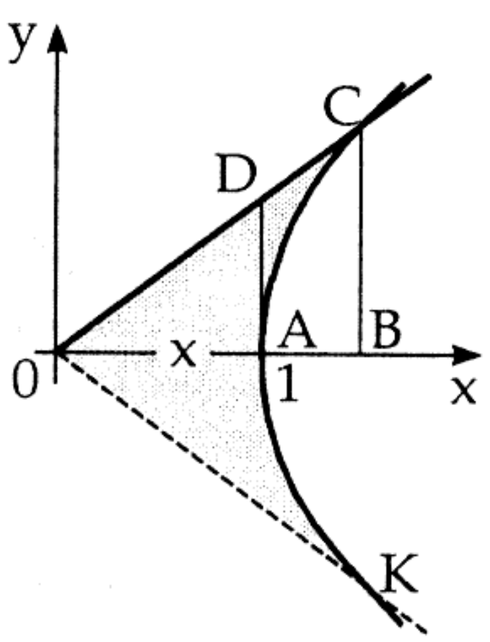
a) b)

3.5. ábra.

3. A trigonometrikus függvények definíciója körcikk területe segítségével



3.6. ábra.



3.7. ábra.

A $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ függvények az $R = 1$ sugarú egységkörben a $\overline{BC}$, $\overline{OB}$, $\overline{AD}$ szakaszokkal vannak értelmezve **(3.6. ábra)**, ahol az argumentum az $\alpha = \sphericalangle AOC$ középponti szög. Használhattuk volna e definícióhoz a **3.6. ábrán** vonalkázással jelölt COK körcikk x területét is. Ha a 2α középponti szöget radiánban mérjük, $R = 1$ esetén éppen azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{2}R^2 2\alpha = \alpha$. Így (3.3), (3.4) és (3.5) alapján a $\sin x = \overline{BC}$, $\cos x = \overline{OB}$, $\operatorname{tg} x = \overline{AD}$ definíciós egyenletek adódnak.

3.1.2.2. A hiperbolikus függvények geometriai definíciója

Annak analógiájára, ahogyan a trigonometrikus függvényeket a (3.3)–(3.5) képletek révén egy körcikk területe segítségével értelmeztük, most az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör cikkének területe helyett az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola (a **3.7. ábrán** a jobb oldali ág) megfelelő cikkének területét tekintjük. Ennek a **3.7. ábrán** vonalkázva rajzolt COK cikknek a területét x-szel jelölve a hiperbolikus függvények definíciós egyenletei a következők:

$\operatorname{sh} x = \overline{BC}$, (3.9) $\operatorname{ch} x = \overline{OB}$, (3.10) $\operatorname{th} x = \overline{AD}$. (3.11)

Az x területet integrálással kiszámítva és az eredményt a $\overline{BC}$, $\overline{OB}$ és $\overline{AD}$ szakaszokkal kifejezve azt kapjuk, hogy

$$x = \ln(\overline{BC} + \sqrt{\overline{BC}^2 + 1}) = \ln(\overline{OB} + \sqrt{\overline{OB}^2 - 1}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\overline{AD}}{1-\overline{AD}}, \tag{3.12}$$

úgyhogy a hiperbolikus függvények előállíthatók exponenciális függvények segítségével:

$$\overline{BC} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \tag{3.13a}$$

$$\overline{OB} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \tag{3.13b}$$

$$\overline{AD} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x\,. \tag{3.13c}$$

A hiperbolikus függvények ezen definíciós egyenletei érthetővé teszik a „hiperbolikus függvények" elnevezést.

3.1.3. Síkháromszögek

3.1.3.1. Síkháromszögekre vonatkozó állítások

1. Két oldal összege a síkháromszögben mindig nagyobb, mint a harmadik oldal **(3.8. ábra)**:

$$b + c > a\,. \tag{3.14}$$

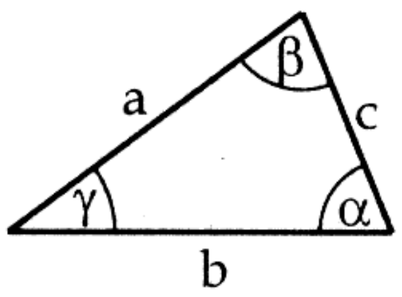
2. A szögek összege a síkháromszögben

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\,. \tag{3.15}$$

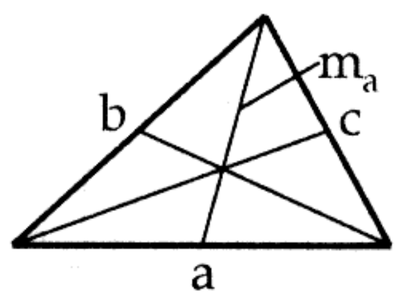
3. Háromszög teljes meghatározása Egy háromszöget teljesen meghatároznak a következő adatok:

- három oldal, vagy
- két oldal és az általuk bezárt szög, ill.
- egy oldal és a rajta fekvő két szög.

Ha két oldal és az egyikkel szemben fekvő szög van megadva, akkor ezen adatok alapján vagy két, vagy egy háromszöget lehet, illetve egyetlen háromszöget sem lehet szerkeszteni (lásd a **3.3. táblázatban** a 3. alapfeladatot).



3.8. ábra.



3.9. ábra.

4. A háromszög súlyvonalainak nevezzük azokat az egyeneseket, amelyek a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával kötik össze. A háromszög súlyvonalai egymást egy pontban, a háromszög *súlypont*jában metszik **(3.9. ábra)**; ez a súlyvonalakat a csúcsoktól számítva 2 : 1 arányban osztja.

5. A háromszög szögfelezőinek nevezzük azokat az egyeneseket, amelyek a háromszög három belső szöge közül az egyiket két egyenlő részre osztják.

6. Beírt körnek nevezzük a háromszög oldalait belülről érintő kört. Középpontja a háromszög szögfelezőinek közös metszéspontja **(3.10. ábra)**.

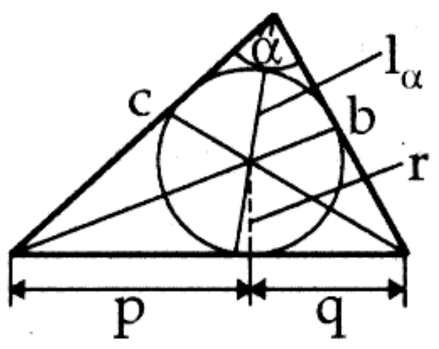
7. Körülírt körnek nevezzük a háromszög csúcsain átmenő kört **(3.11. ábra)**. Középpontja a háromszög három **oldalfelező merőlegesé**nek közös metszéspontja.

8. A háromszög magasságvonalainak nevezzük azokat az egyeneseket, amelyek átmennek a háromszög egyik csúcsán és merőlegesek az ezen csúccsal szemben fekvő oldalra. A háromszög magasságvonalai egymást az ún. *magasságpont*ban metszik.

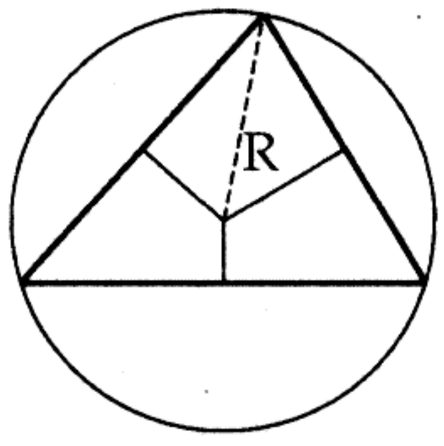
9. Egyenlőszárú háromszög Az *egyenlőszárú háromszög*nek van két egyenlő hosszúságú oldala. A harmadik oldalhoz tartozó magasságvonal, oldalfelező és szögfelező egybeesik. Két kiválasztott oldal egyenlősége a háromszög egyenlőszárú voltának elégséges feltétele.

10. Egyenlőoldalú háromszög Az *egyenlőoldalú háromszög*ben, melyben fennáll, hogy $a = b = c$, a beírt kör középpontja, a körülírt kör középpontja, a súlypont és a magasságpont egybeesik.

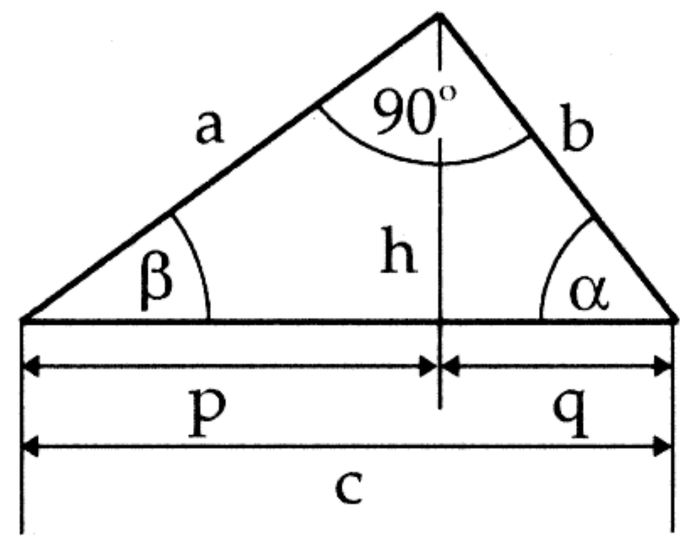
11. A középvonal olyan egyenes, amely a háromszög két oldalának felezőpontját köti össze; a középvonal párhuzamos a harmadik oldallal és fele olyan hosszú.



3.10. ábra.



3.11. ábra.



3.12. ábra.

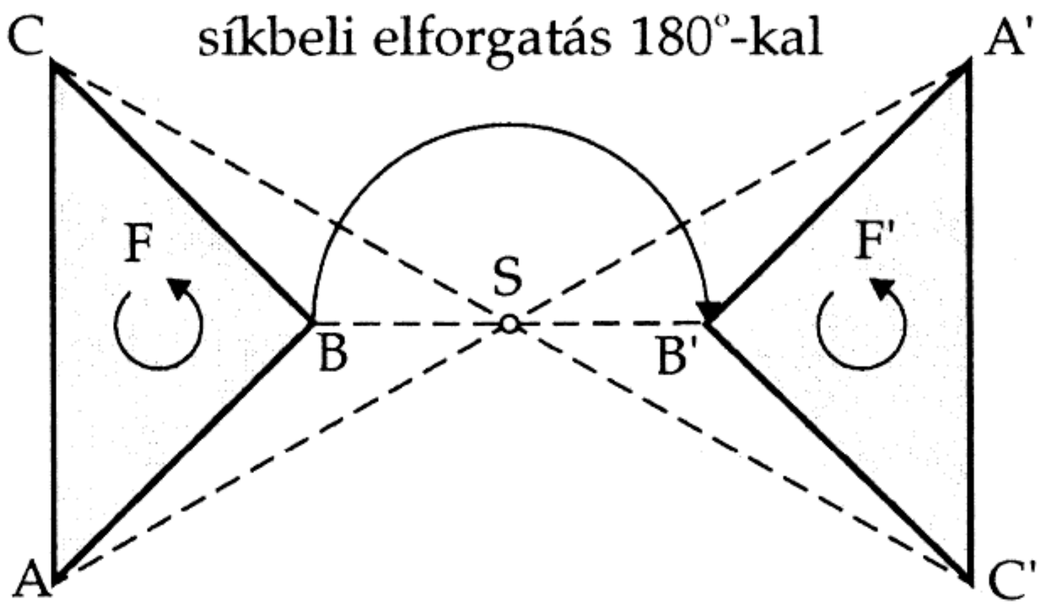
12. Derékszögű háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek egyik szöge 90°-os **(3.12. ábra)**.

3.1.3.2. Szimmetria

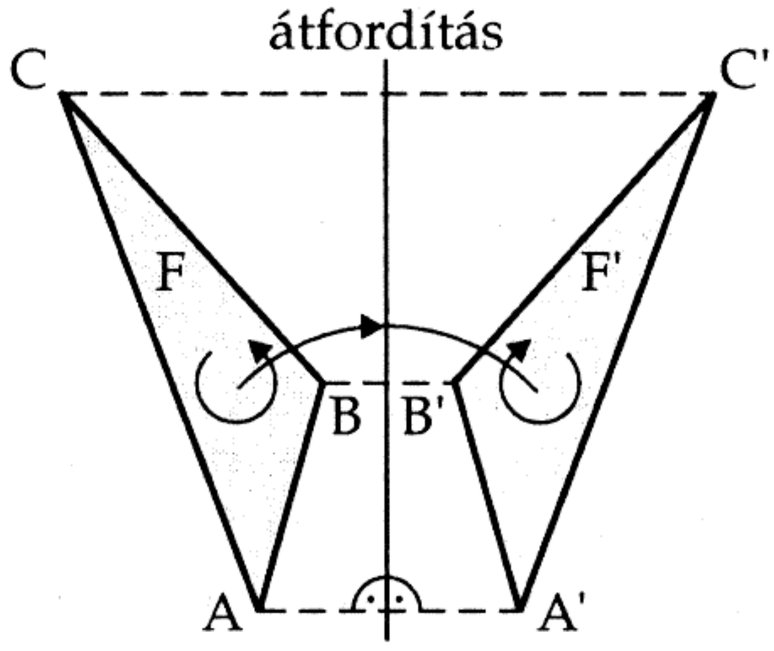
1. Centrális szimmetria

Egy síkbeli alakzatot *centrálisan szimmetrikus*nak mondunk, ha pontjait a *centrum* vagy *szimmetriaközéppont* körül 180°-kal a síkban elforgatva ismét az eredeti alakzatot kapjuk **(3.13. ábra)**. Mivel ennél a transzformációnál az alakzatok nagysága és formája változatlan marad, *egybevágósági transzformáció*ról beszélünk. E transzformáció során a síkbeli alakzatok *körüljárási iránya* is megmarad **(3.13. ábra)**. Az azonos körüljárási irány miatt az alakzatokat *azonos értelemben egybevágóak*nak mondjuk.

Alakzat *körüljárási irányán* az alakzat határának valamelyik forgásirányban való végigjárását értjük: ez a matematikai, vagyis az óramutató járásával ellentétes forgásirány esetén pozitív, az óramutató járásával egyező forgásirány esetén pedig negatív **(3.13., 3.14. ábrák)**.



3.13. ábra.



3.14. ábra.

2. Tengelyes vagy tükrözési szimmetria

Egy síkbeli alakzatot *tengelyesen szimmetrikus*nak vagy *tükrösen szimmetrikus*nak mondunk, ha egymásnak megfelelő pontjai egy g egyenes körüli 180°-os térbeli elforgatással fedésbe hozhatók **(3.14. ábra)**. Az egymáshoz rendelt pontoknak a szimmetriatengelytől, vagyis a g egyenestől mért merőleges távolsága egyforma nagy. Az elforgatott alakzat körüljárási iránya a g egyenesre való tükrözés során megfordul. Ezért az alakzatokat *nem azonos értelemben egybevágóak*nak mondjuk. Ezt a transzformációt *átfordítás*nak nevezzük. Mivel ennek során az alakzatok nagysága és formája változatlan marad, *nem azonos értelmű egybevágósági transzformáció*ról is beszélünk. Ennél a transzformációnál a síkbeli alakzatok *körüljárási iránya* megfordul **(3.14. ábra)**.

Megjegyzés: Térbeli alakzatokra analóg állítások érvényesek.

3. Egybevágó háromszögek, egybevágósági tételek

a) Egybevágóság: Síkbeli alakzatok *egybevágóságán* általában fedési egyenlőségüket értjük, vagyis teljes egyezésüket nagyság és forma tekintetében. Az egybevágó alakzatok három geometriai transzformációval, mégpedig *eltolás*sal, *elforgatás*sal és *tükrözés*sel, ill. ezek kombinációjával átvihetők egymásba.

Megkülönböztetünk *azonos értelemben egybevágó* és *nem azonos értelemben egybevágó alakzatokat* (lásd 135. old.). Az azonos értelemben egybevágó alakzatok eltolással vagy forgatással, valamint ezek kombinációjával vihetők át egymásba. Mivel a nem azonos értelemben egybevágó alakzatokat az ellentétes körüljárási irány (lásd 135. old.) különbözteti meg, egymásba való átvitelükhöz még egy egyenesre való tükrözés is szükséges.

■ A tükrösen szimmetrikus alakzatok nem azonos értelemben egybevágóak. Egymásba való átvitelükhöz mindhárom transzformációra szükség van.

b) Egybevágósági tételek: A háromszögek egybevágóságának feltételeit az egybevágósági tételek tartalmazzák. Két háromszög egybevágó, ha megegyezik

- három oldaluk (OOO), vagy
- két oldaluk és az azok által bezárt belső szögük (OSzO), vagy
- egy oldaluk és a rajta fekvő mindkét belső szögük (SzOSz), vagy
- két oldaluk és a nagyobbikkal szemben fekvő belső szögük (OOSz).

4. Hasonló háromszögek, hasonlósági tételek

Hasonlóságon általában síkbeli alakzatok formájának teljes egyezését értjük a méretek egyezése nélkül. Hasonló alakzatokat geometriai transzformációkkal át lehet vinni egymásba úgy, hogy az egyik alakzat pontjai kölcsönösen egyértelmű módon a másik alakzat pontjaira képeződjenek le, és közben az egyik alakzat minden szögének a másik alakzatnak egy ezzel egyenlő szöge feleljen meg. Ezzel a kijelentéssel egyenértékű a következő állítás: hasonló alakzatokban az egymásnak megfelelő szakaszok arányosak egymással.

a) Alakzatok hasonlósága megkívánja vagy az összes szögek egyezését, vagy az összes megfelelő szakaszpárok hosszúságarányának egyezését.

b) Területek *Hasonló síkbeli alakzatok területe* az egymásnak megfelelő lineáris elemek, például oldalak, magasságok, átlók stb. négyzetével arányos.

c) Hasonlósági tételek Háromszögekre a következő hasonlósági tételek érvényesek: Két háromszög hasonló, ha megegyezik

- két oldalarányuk,
- két azonos elhelyezkedésű belső szögük,
- két oldaluk aránya és az ezen oldalak által bezárt belső szögük,
- két oldaluk aránya és a nagyobbik oldallal szemben fekvő belső szögük.

Mivel a hasonlóságnál csak oldalarányok, nem pedig, mint az egybevágóságnál, oldalhosszúságok játszanak szerepet, a hasonlósági tételek egy adattal kevesebbet tartalmaznak, mint a megfelelő egybevágósági tételek.

3.1.4. Síknégyszögek

3.1.4.1. Paralelogramma

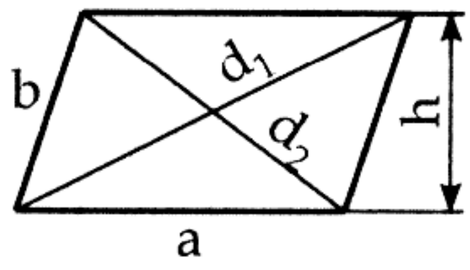
Paralelogrammának nevezzük az olyan négyszöget **(3.15. ábra)**, amelynek a következő fő tulajdonságai vannak:

- az egymással szemben fekvő oldalak egyenlő hosszúak;
- az egymással szemben fekvő oldalak párhuzamosak;
- az átlók felezik egymást;
- az egymással szemben fekvő szögek egyenlő nagyságúak.

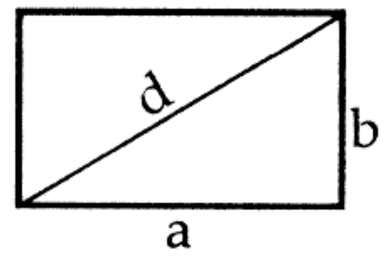
Ha egy négyszög e tulajdonságok egyikével rendelkezik, vagy valamelyik két szemben fekvő oldala egyenlő hosszúságú és párhuzamos, akkor rendelkezik az összes többi tulajdonsággal is.

Az átlókra és oldalakra, valamint a területre fennáll:

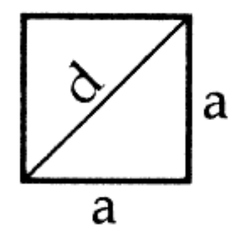
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)\,, \qquad (3.16) \qquad T = ah\,. \qquad (3.17)$$



3.15. ábra.



3.16. ábra.



3.17. ábra.

3.1.4.2. Téglalap és négyzet

A paralelogramma téglalap **(3.16. ábra)**, ha

- egyik szöge derékszög, vagy
- két átlója egyenlő hosszúságú, ahol az egyik tulajdonságból következik a másik.

A terület képlete

$$T = ab\,. \qquad (3.18)$$

Ha $a = b$ **(3.17. ábra)**, akkor a téglalapot *négyzet*nek nevezzük, és fennállnak a következők:

$$d = a\sqrt{2} \approx 1{,}414a\,, \quad (3.19) \qquad a = d\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707d\,, \quad (3.20) \qquad S = a^2 = \frac{d^2}{2}\,. \quad (3.21)$$

3.1.4.3. Rombusz

A rombusz **(3.18. ábra)** olyan paralelogramma, amelynek

- minden oldala egyforma hosszú,
- átlói merőlegesek egymásra, és
- szögeit az átlók felezik.

E tulajdonságok valamelyikének meglétéből következik a másik kettő. Fennáll:

$$d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}\,, \qquad (3.22) \qquad d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\,, \qquad (3.23) \qquad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2\,. \qquad (3.24)$$

$$T = ah = a^2\sin\alpha = \frac{d_1 d_2}{2}\,. \qquad (3.25)$$

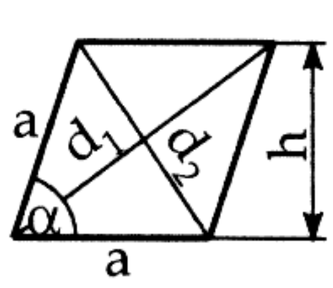
3.1.4.4. Trapéz

Trapéznak nevezzük az olyan négyszöget, amelynek két oldala párhuzamos **(3.19. ábra)**. A trapéz két *alapját* a-val és b-vel, *magasságát* h-val és *középvonalát*, amely a két nem párhuzamos oldal felezőpontját köti össze, m-mel jelölve kapjuk:

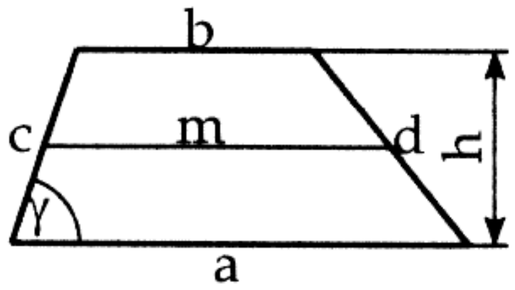
$$m = \frac{a+b}{2} \qquad (3.26) \qquad T = \frac{(a+b)h}{2} = mh\,. \qquad (3.27)$$

A $d = c$ tulajdonsággal jellemzett *egyenlőszárú trapéz*ra fennáll

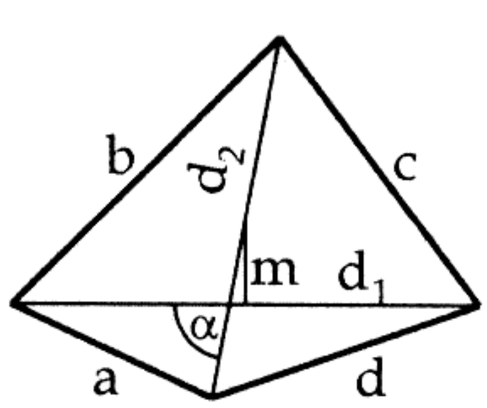
$$T = (a - c\cos\gamma)c\sin\gamma = (b + c\cos\gamma)c\sin\gamma\,. \qquad (3.28)$$



3.18. ábra.



3.19. ábra.



3.20. ábra.

3.1.4.5. Általános négyszög

Minden konvex négyszögben **(3.20. ábra)** a belső szögek összege 360°:

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 360° \,. \tag{3.29}$$

Továbbá

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2 \,, \tag{3.30}$$

ahol m az átlók felezőpontjait összekötő szakasz hosszúsága.
A terület

$$T = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha \,. \tag{3.31}$$

Egy négyszögbe akkor és csak akkor lehet kört beírni, ha

$$a + c = b + d \tag{3.32}$$

ilyenkor *érintőnégyszög*ről beszélünk **(3.21.a ábra)**. Egy négyszög köré akkor és csak akkor lehet kört írni, ha

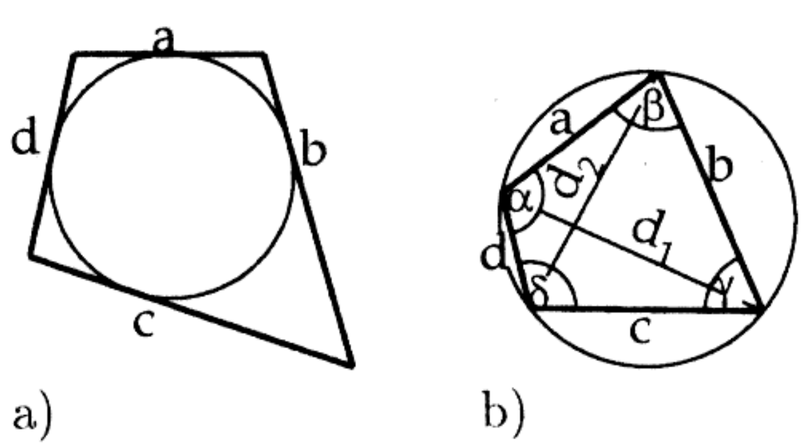
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180° \tag{3.33}$$

ebben az esetben *húrnégyszög*ről beszélünk **(3.21.b ábra)**. Húrnégyszögre fennáll

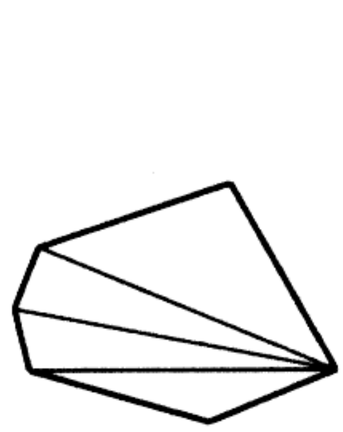
$$ac + bd = d_1 d_2 \,. \tag{3.34}$$

Ha $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ a négyszög félkerülete, akkor a terület

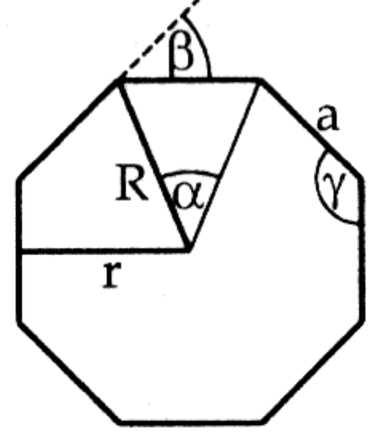
$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \,. \tag{3.35}$$



3.21. ábra.



3.22. ábra.



3.23. ábra.

3.1.5. Síkbeli sokszögek

Ha egy sokszög oldalainak a száma n **(3.22. ábra)**, akkor a belső szögek összege

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180°(n-2) \,, \tag{3.36}$$

a külső szögeké pedig 360° . A területet háromszögekre bontással lehet kiszámítani.
A *szabályos sokszögeket* az jellemzi, hogy minden oldaluk és minden szögük egyenlő. Szabályos n-szögekre, azaz n-oldalú szabályos sokszögekre **(3.23. ábra)** fennáll:

középponti szög $\alpha = \dfrac{360°}{n} \,,$ (3.37) **külső szög** $\beta = \dfrac{360°}{n} \,,$ (3.38)

belső szög $\gamma = 180° - \beta \,,$ (3.39)

oldalhosszúság $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin\dfrac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \,,$ (3.40)

terület $T = \frac{1}{2}nar = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}nR^2 \sin\alpha = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, (3.41)

ahol R a körülírt, r pedig a beírt kör sugara.

3.1.6. Síkbeli köralakzatok

3.1.6.1. Kör

A köröket r sugarukkal, d átmérőjükkel, valamint különféle szögekkel írjuk le, amelyeket most nem ívmértékben, hanem a megfelelő φ középponti szög fokokban mért értékével mérünk.

Kerületi szög (3.24. ábra) $\alpha = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\varphi$, (3.42a)

speciális eset: THALÉSZ tétele (141. old.) $\varphi = 180°$ esetén $\alpha = 90°$, (3.42b)

Húr-érintő szög $\beta = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AC}$, (3.43)

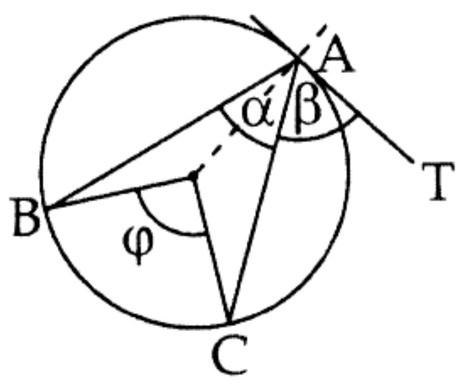
húrszög (3.25. ábra) $\gamma = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$, (3.44)

szelőszög (3.26. ábra) $\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$, (3.45)

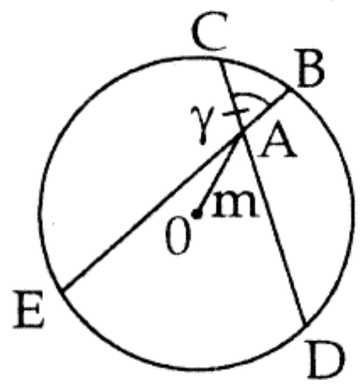
szelő-érintő szög $\beta = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{TE} - \overset{\frown}{TB})$, (3.46)

érintőszög (3.27. ábra) $\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BEC})$, (3.47)

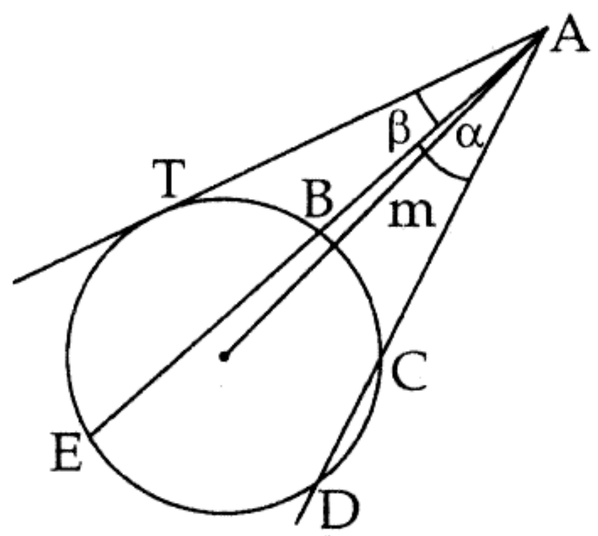
ahol D és E a bal, ill. jobb oldali körív tetszőleges pontja.



3.24. ábra.



3.25. ábra.



3.26. ábra.

Egymást metsző húrok (3.25. ábra) $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$, (3.48)

szelők (3.26. ábra) $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$, (3.49)

kerület $K = 2\pi r \approx 6{,}283r$, $K = \pi d \approx 3{,}142d$, $K = 2\sqrt{\pi T} \approx 3{,}545\sqrt{T}$, (3.50)

terület $T = \pi r^2 \approx 3{,}142r^2$, $T = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785d^2$, $T = \frac{Kd}{4} = 0{,}25Kd$, (3.51)

sugár $r = \frac{K}{2\pi} \approx 0{,}159K$, (3.52) **átmérő** $d = 2\sqrt{\frac{T}{\pi}} \approx 1{,}128\sqrt{T}$. (3.53)

A π szám $\pi = \frac{K}{d} = 3{,}141\,592\,653\,589\,793$. (3.54)

3.1.6.2. Körszelet és körcikk

Jellemző adatok az r sugár és az α középponti szög **(3.28. ábra)**. Kiszámítandó adatok:

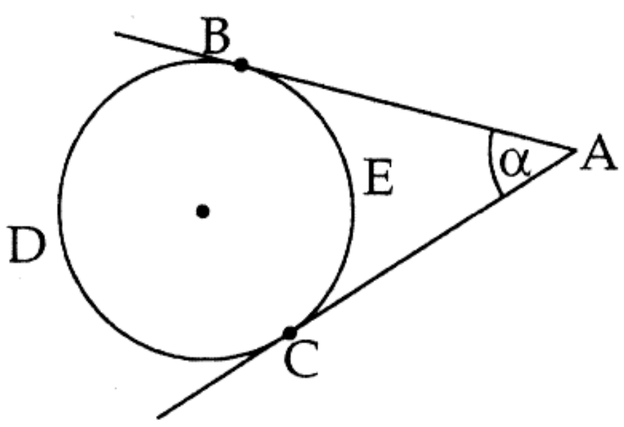
húr $$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin\frac{\alpha}{2}\,, \tag{3.55}$$

középponti szög $$\alpha = 2 \arcsin\frac{a}{2r}\,, \quad \text{fokokban mérve,} \tag{3.56}$$

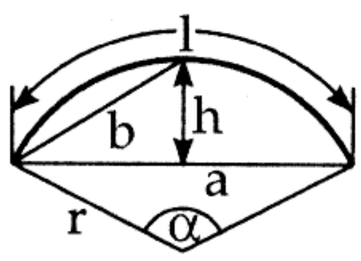
körszelet magassága $$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{4}\,, \tag{3.57}$$

ívhosszúság $$l = \frac{2\pi r\alpha}{360} \approx 0{,}01745 r\alpha\,, \tag{3.58a}$$

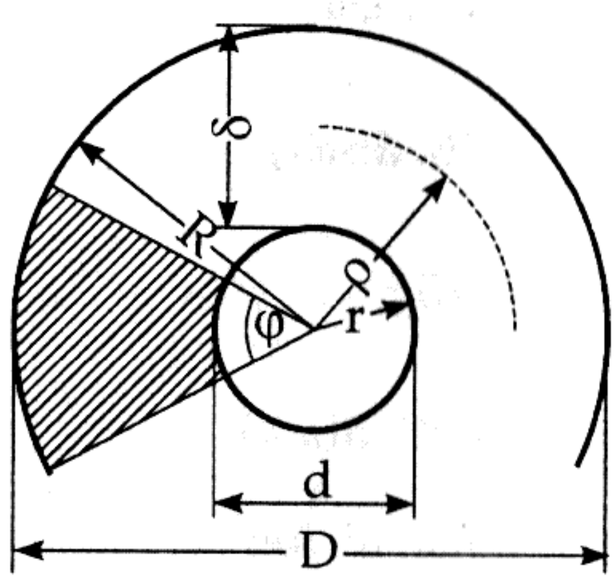
és közelítő pontossággal $$l \approx \frac{8b - a}{3} \quad \text{vagy} \quad l \approx \sqrt{a^2 + \frac{16}{3}h^2}\,, \tag{3.58b}$$



3.27. ábra.



3.28. ábra.



3.29. ábra.

körcikk területe $$T = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \approx 0{,}00873 r^2 \alpha\,, \tag{3.59}$$

körszelet területe $$T_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}[lr - a(r - h)]\,, \tag{3.60a}$$

és közelítő pontossággal $$T_1 \approx \frac{h}{15}(6a + 8b)\,. \tag{3.60b}$$

3.1.6.3. Körgyűrű

A körgyűrű jellemző adatai a R külső sugár, a r belső sugár és a φ középponti szög **(3.29. ábra)**.

Külső átmérő $$D = 2R\,, \tag{3.61}$$

belső átmérő $$d = 2r\,, \tag{3.62}$$

átlagos sugár $$\rho = \frac{R + r}{2}\,, \tag{3.63}$$

gyűrű szélessége $$\delta = R - r\,, \tag{3.64}$$

gyűrű területe $$T = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\,\rho\,\delta\,, \tag{3.65}$$

φ szöghöz tartozó gyűrűrész (a **3.29. ábrán** vonalkázással jelölve) területe

$$T_\varphi = \frac{\varphi\pi}{360}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\varphi\pi}{1440}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{\varphi\,\pi}{180}\rho\,\delta\,. \tag{3.66}$$

3.2. Síkbeli trigonometria

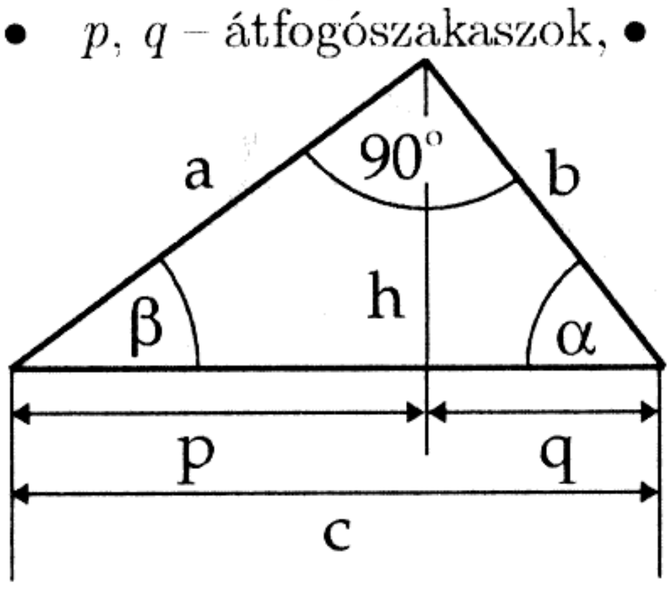
3.2.1. Háromszögek adatainak kiszámítása

3.2.1.1. Derékszögű síkháromszögekre vonatkozó számolások

1. Alapképletek

Felhasznált jelölések (**3.30. ábra**):

- a, b – befogók, • c – átfogó, • α, ill. β – az a, ill. b oldallal szemben fekvő szög, • h – magasság,
- p, q – átfogószakaszok, • T – terület.



3.30. ábra.

Szögösszeg $$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \text{ ahol } \gamma = 90°, \tag{3.67}$$

oldal kiszámítása $$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta\,, \tag{3.68}$$

Pitagorasz tétele $$a^2 + b^2 = c^2\,, \tag{3.69}$$

Thalész tétele

Derékszögű háromszögben a derékszög csúcsa az átfogó fölé rajzolt félkörön helyezkedik el, vagyis a félkörben minden kerületi szög derékszög (lásd **3.30. ábra** és (3.42b) képlet).

Eukleidész tételei $$h^2 = pq\,, \quad a^2 = pc\,, \quad b^2 = qc\,, \tag{3.70}$$

terület $$T = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{c^2}{4}\sin 2\beta\,. \tag{3.71}$$

2. Derékszögű síkháromszög oldalainak és szögeinek kiszámítása

A derékszögű háromszögben a hat meghatározó adat (az α, β, γ szögek és a velük szemben fekvő a, b, c oldalak) közül egy 90°-os szög, a **3.30. ábrán** γ, rögzítve van.

A síkháromszöget három adat határozza meg, ezek azonban nem írhatók elő tetszőlegesen (lásd a Háromszög teljes meghatározása pontot, 134. old.). Így csak két további adatot lehet előírni. A másik három adat a **3.2. táblázat** képletei, valamint (3.15), ill. (3.67) segítségével számítható ki.

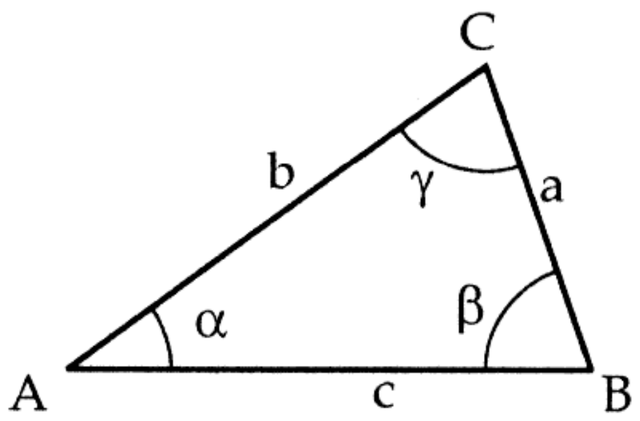
3.2. táblázat. Derékszögű síkháromszögek meghatározó adatai

megadva	Képletek a többi adatok meghatározására		
pl. a, α	$\beta = 90° - \alpha$	$b = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
pl. b, α	$\beta = 90° - \alpha$	$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
pl. c, α	$\beta = 90° - \alpha$	$a = c\sin\alpha$	$b = c\cos\alpha$
pl. a, b	$\dfrac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	$\beta = 90° - \alpha$

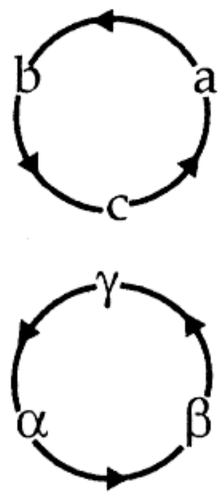
3.2.1.2. Síkháromszögekre vonatkozó számolások

1. Alapképletek

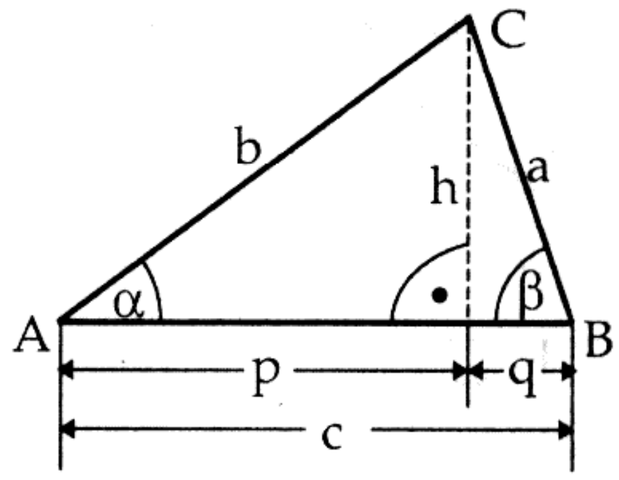
A következő jelöléseket fogjuk használni: a, b, c – oldalak; α, β, γ – a velük szemben fekvő szögek; T – terület; R – a körülírt kör sugara; r – a beírt kör sugara;
$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ – a háromszög félkerülete (**3.31. ábra**).



3.31. ábra.



3.32. ábra.



3.33. ábra.

Ciklikus felcserélések

Mivel a ferdeszögű háromszögben minden oldal és ugyanígy minden szög is egyenrangú, bármely képletből, amely meghatározott oldalakra és szögekre van bebizonyítva, két további képletet kaphatunk, ha az oldalakat és szögeket a **3.32. ábra** szerint ciklikusan felcseréljük.

■ Az $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ képletből (szinusztétel) ciklikus felcseréléssel kapjuk: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, $\quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Szinusztétel
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\,. \tag{3.72}$$

Vetítési tétel (lásd 3.33. ábra) $\quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha\,.$ (3.73)

Koszinusztétel vagy ferdeszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tétel
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,. \tag{3.74}$$

Mollweide-féle egyenletek

$$(a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \tag{3.75a}$$

$$(a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{3.75b}$$

Tangenstétel $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$. (3.76)

Félszög-tétel $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$. (3.77)

Tangensképletek $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta} = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$. (3.78)

További összefüggések

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \tag{3.79a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \tag{3.79b}$$

Egyenesszakaszok a háromszögben

Az a oldalhoz tartozó magasság $\quad h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta\,.$ (3.80)

Az a oldalhoz tartozó súlyvonal $$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}\,. \tag{3.81}$$

Az α szög szögfelezője $$l_\alpha = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}\,. \tag{3.82}$$

A körülírt kör sugara $$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}\,. \tag{3.83}$$

A beírt kör sugara $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = s\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} \tag{3.84}$$

$$= 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,. \tag{3.85}$$

Terület $$T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \tag{3.86}$$

A (3.86) képletet HERON-*féle területképlet*nek nevezzük.

2. Oldalak, szögek és területek kiszámítása a ferdeszögű háromszögben

Az egybevágósági tételek értelmében (lásd 136. old.) a háromszöget meghatározza három független adat, amelyek között lenni kell legalább egy oldalnak.
Ebből levezethető a négy ún. *alapfeladat*. Ha egy ferdeszögű háromszög hat meghatározó adata (az α, β, γ szögek és a velük szemben fekvő a, b, c oldalak) közül meg van adva három, akkor a másik három meghatározó adat a **3.3. táblázat** egyenletei segítségével kiszámítható.
Eltérően a gömbháromszögtantól (lásd **3.7. táblázat**, 2. alapfeladat), a ferdeszögű síkháromszögnél három megadott szögből az oldalak nem számíthatók ki.

3.2.2. Geodéziai alkalmazások

3.2.2.1. Geodéziai koordináták

Pontok megadására a geometriában rendszerint *jobbsodrású koordinátarendszer*eket használnak (**3.165. ábra**). Ezzel szemben a geodéziában a *balsodrású koordinátarendszerek* szokásosak.

1. Geodéziai derékszögű koordináták

A síkbeli balsodrású derékszögű koordinátarendszerben **(3.35. ábra)** az x-tengely a felfelé mutató abszcisszatengely, az y-tengely a jobbra mutató ordinátatengely. Egy P pont koordinátái y_P, x_P. Az x-tengely irányítása gyakorlati megfontolásokból ered. Nagyobb távolságú méréseknél, amelyekhez legtöbbször a SOLDNER-féle vagy a GAUSS–KRÜGER-féle koordinátarendszert használják (lásd 160. old.), a pozitív x-tengely a hálózati észak, a jobbra irányuló y-tengely kelet felé mutat. A síknegyedek számozása, a geometriában egyébként szokásos gyakorlattal ellentétben, az óramutató járásával megegyezően történik **(3.35., 3.36. ábrák)**.
Ha a pontok síkbeli elhelyezkedésén kívül magasságokra is szükség van, háromdimenziós balsodrású derékszögű (y, x, z) koordinátarendszert lehet használni, amelyben a z-tengely a *zenit* felé mutat **(3.34. ábra)**.

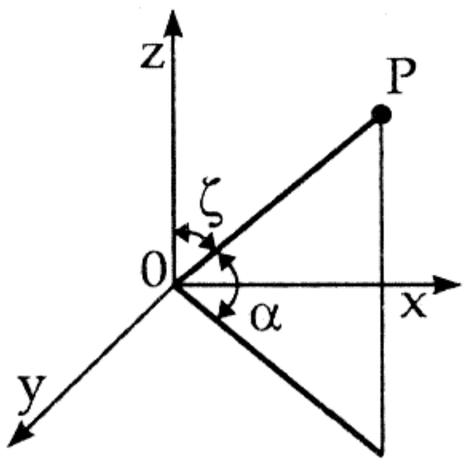
2. Geodéziai polárkoordináták

A síkbeli polárkoordináták balsodrású geodéziai rendszerében **(3.36. ábra)** a P pontot az abszcisszatengely és az s szakasz közötti t irányszög, valamint a pont és a koordinátarendszer kezdőpontja (amelyet pólusnak hívunk) közötti s távolság határozza meg. Geodéziában a szög megadásánál a pozitív irány megegyezik az óramutató járásával.
Magasságok meghatározására a ζ *zenitszög* vagy a *magassági szög*, ill. az α hajlásszög használatos. A derékszögű háromdimenziós balsodrású koordinátarendszerben való ábrázolás **(3.34. ábra)** azt mutatja

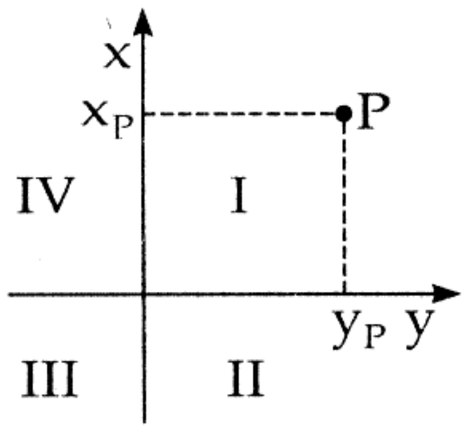
3.3. táblázat. Ferdeszögű síkháromszögek meghatározó adatai, alapfeladatok

Megadva	Képletek a többi adatok kiszámítására
1. Egy oldal és két szög (a, α, β)	$\gamma = 180° - \alpha - \beta, \quad b = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\alpha},$ $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad T = \dfrac{1}{2}\, ab \sin\gamma\,.$
2. Két oldal és a közbezárt szög (a, b, γ)	$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}, \quad \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \dfrac{1}{2}\gamma\,;$ α és β kiszámítása az $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ mennyiségekből történik, $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad T = \dfrac{1}{2}\, ab \sin\gamma\,.$
3. Két oldal és az egyikükkel szemben fekvő szög (a, b, α)	$\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a},$ Ha $a \geq b$, akkor $\beta < 90°$ és β egyértelműen meg van határozva. Ha $a < b$, akkor a következő esetek lehetségesek: 1. $b \sin\alpha < a$ esetén β-nak két értéke van $(\beta_2 = 180° - \beta_1)$; 2. $b \sin\alpha = a$ esetén β-nak pontosan egy értéke van $(90°)$; 3. $b \sin\alpha > a$ esetén nem lehet háromszöget szerkeszteni: $\gamma = 180° - (\alpha+\beta), \quad c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad T = \dfrac{1}{2}\, ab \sin\gamma\,.$
4. Három oldal (a, b, c)	$r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s-c}\,,$ $T = rs = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$

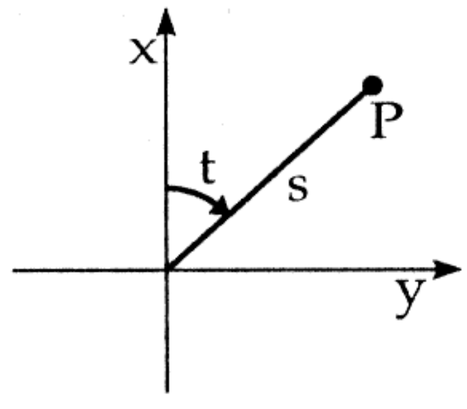
(lásd még Bal- és jobbsodrású koordinátarendszerek, 207. old.), hogy a zenitszög mérése a z zenittengely és az s szakasz között történik, a hajlásszögé pedig az s szakasz és annak y, x-síkbeli merőleges vetülete között.



3.34. ábra.



3.35. ábra.



3.36. ábra.

3. Méretarány

A térképészetben és műszaki rajzban M méretaránynak nevezzük a K_1 koordinátarendszerben elhelyezkedő s_{K1} szakasz viszonyát egy másik K_2 koordinátarenszerben elhelyezkedő s_{K2} szakaszhoz.

1. Szakaszok méretarányának kiszámítása Ha m a *modulus* vagy *méretszám*, továbbá az N, ill. K index a természetre, ill. a térképre utal, akkor

$$M = 1 : m = s_K : s_N \,. \tag{3.87a}$$

Két, különböző m_1, m_2 modulusú s_{K1}, s_{K2} szakaszra fennáll

$$s_{K1} : s_{K2} = m_2 : m_1 \,. \tag{3.87b}$$

2. Területek méretarányának kiszámítása Ha a területek kiszámítása az $F_K = a_K b_K$, $F_N = a_N b_N$ képletek szerint történik, akkor

$$F_N = F_K m^2 \,. \tag{3.88a}$$

Két, különböző m_1, m_2 modulusú F_1, F_2 területre pedig

$$F_{K1} : F_{K2} = m_2^2 : m_1^2 \,. \tag{3.88b}$$

3.2.2.2. Szögek a geodéziában

1. Újfok-beosztás

A geodéziában, ellentétben a matematikával (lásd 131. old.), az újfok-beosztás használatos. A teljesszög ekkor 400 gon (újfok). A fokok és újfokok közötti átszámítás a következő összefüggések alapján végezhető:

1 teljesszög	$= 360°$	$= 2\pi$ rad	$= 400$ gon
1 derékszög	$= 90°$	$= \frac{\pi}{2}$ rad	$= 100$ gon
1 újfok		$= \frac{\pi}{200}$ rad	$= 1000$ mgon

2. Irányszög

1. A t irányszög egy P pontban megadja egy irányított szakasznak a P ponton átmenő és az x-tengellyel párhuzamos egyeneshez viszonyított irányát **(3.37. ábra)**. Mivel a geodéziában a szög mérése az óramutató járásával megegyezően történik **(3.35., 3.36. ábrák)**, a síknegyedek számozásának sorrendje a síkbeli trigonometria jobbsodrású derékszögű koordinátarendszerében szokásosnak a fordítottja **(3.4. táblázat)**. A síkbeli trigonometria képletei azonban változtatás nélkül alkalmazhatók.

3. Koordinátatranszformációk

1. Polárkoordináták kiszámítása derékszögű koordinátákból Egy derékszögű koordinátarendszerben elhelyezett $A(y_A, x_A)$ és $B(y_B, x_B)$ pontra **(3.37. ábra)**, ha s_{AB} az A-tól B felé irányított szakasz, továbbá ha t_{AB}, t_{BA} két irányszög, fennáll

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} \,, \tag{3.89a}$$

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta y_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2} \,, \tag{3.89b}$$

$$\operatorname{tg} t_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} \,, \tag{3.89c}$$

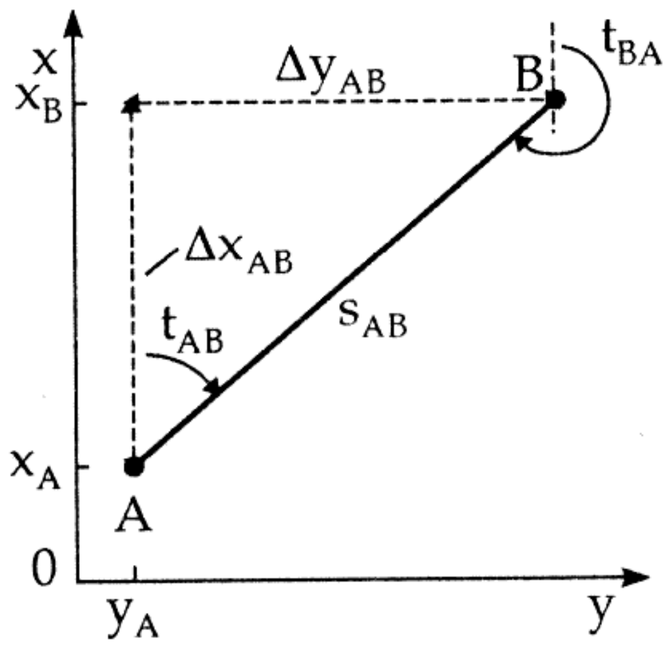
$$t_{BA} = t_{AB} \pm 200\,\text{gon} \,. \tag{3.89d}$$

A t szög síknegyede Δy_{AB} és Δx_{AB} előjelétől függ. Ha zsebszámológéppel való számolásnál $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ értékét előjelhű Δy-nal és Δx-szel visszük be, akkor az arctg vagy tg^{-1} gombbal kapott t_0 szöghöz síknegyedtől függően hozzá kell adni a **3.4. táblázatban** feltüntetett újfok-értéket.

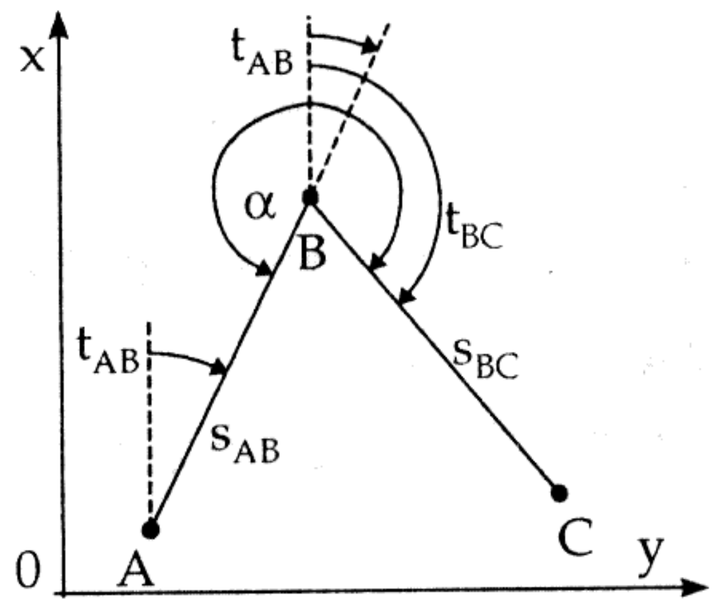
2. Derékszögű koordináták kiszámítása polárkoordinátákból egy pont poláris függése esetén Lokális polárkoordináta-rendszerben végzett mérések alapján egy derékszögű koordinátarend-

3.4. táblázat.
Irányszög meghatározása az arctg vagy tg^{-1} nyomógombbal a szakaszok előjelhű bevitele esetén

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	+	−	−	+
Síknegyed	I	II	III	IV
Kijelzés a zsebszámológépen	$\mathrm{tg} > 0$	$\mathrm{tg} < 0$	$\mathrm{tg} > 0$	$\mathrm{tg} < 0$
t irányszög	t_0 gon	$t_0 + 200$ gon	$t_0 + 200$ gon	$t_0 + 400$ gon



3.37. ábra.



3.38. ábra.

szerben meghatározandók a felveendő C pont koordinátái **(3.38. ábra)**.
Megadva: $y_A, x_A; y_B, x_B$. **Mérve:** α, s_{BC}. **Keresendő:** y_C, x_C.

Megoldás:

$$\mathrm{tg}\, t_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}\,, \qquad (3.90a)$$

$$t_{BC} = t_{AB} + \alpha \pm 200\,\mathrm{gon}\,, \qquad (3.90b)$$

$$y_C = y_B + s_{BC} \sin t_{BC}\,, \qquad (3.90c)$$

$$x_C = x_B + s_{BC} \cos t_{BC}\,. \qquad (3.90d)$$

Ha s_{AB} is mérésre került, akkor a helyben mért szakasz és a koordinátákból számított szakasz közötti különbséget a q *léptéktényezővel* lehet figyelembe venni:

$$q = \frac{\text{számított szakasz}}{\text{mért szakasz}} = \frac{\sqrt{\Delta y_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2}}{s_{AB}}\,, \qquad (3.91a)$$

$$y_C = y_B + s_{BC} q \sin t_{BC}\,, \qquad (3.91b)$$

$$x_C = x_B + s_{BC} q \cos t_{BC}\,. \qquad (3.91c)$$

3. Koordinátatranszformáció két derékszögű koordinátarendszer között Ha helyben meghatározott pontokat akarunk egy térképre felvenni, az y', x' lokális koordinátarendszert transzformálni kell az y, x országos rendszerbe **(3.39. ábra)**. Az y', x' rendszer az y, x rendszerhez képest φ szöggel el van forgatva és az y_0, x_0 értékekkel párhuzamosan el van tolva. Az y', x' rendszerben az irányszögeket ϑ-val jelöljük. Adva vannak A és B koordinátái mindkét rendszerben és egy C pont koordinátái az y, x rendszerben. A transzformáció a következő összefüggések segítségével történik:

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta y_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2}\,, \qquad (3.92a)$$

$$s'_{AB} = \sqrt{\Delta y'^2_{AB} + \Delta x'^2_{AB}}\,, \qquad (3.92b)$$

$$q = \frac{s_{AB}}{s'_{AB}}\,, \tag{3.92c}$$

$$\varphi = t_{AB} - \vartheta_{AB}\,, \tag{3.92d}$$

$$\operatorname{tg} t_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}\,, \tag{3.92e}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_{AB} = \frac{\Delta y'_{AB}}{\Delta x'_{AB}}\,, \tag{3.92f}$$

$$y_0 = y_A - q x_A \sin\varphi - q y_A \cos\varphi\,, \tag{3.92g}$$

$$x_0 = x_A + q y_A \sin\varphi - q x_A \cos\varphi\,, \tag{3.92h}$$

$$y_C = y_A + q\sin\varphi(x'_C - x'_A) + q\cos\varphi(y'_C - y'_A)\,, \tag{3.92i}$$

$$x_C = x_A + q\cos\varphi(x'_C - x'_a) - q\sin\varphi(y'_C - y'_A)\,. \tag{3.92j}$$

Megjegyzés: A következő két képlet próba végzésére alkalmas.

$$y_C = y_A + q s'_{AC}\sin(\varphi + \vartheta_{AC})\,, \tag{3.92k}$$

$$x_C = x_A + q s'_{AC}\cos(\varphi + \vartheta_{AC})\,. \tag{3.92l}$$

Ha az AB szakasz az x'-tengelyen fekszik, a képletek a következőkre redukálódnak:

$$a = \frac{\Delta y_{AB}}{y'_B} = q\sin\varphi\,, \tag{3.93a}$$

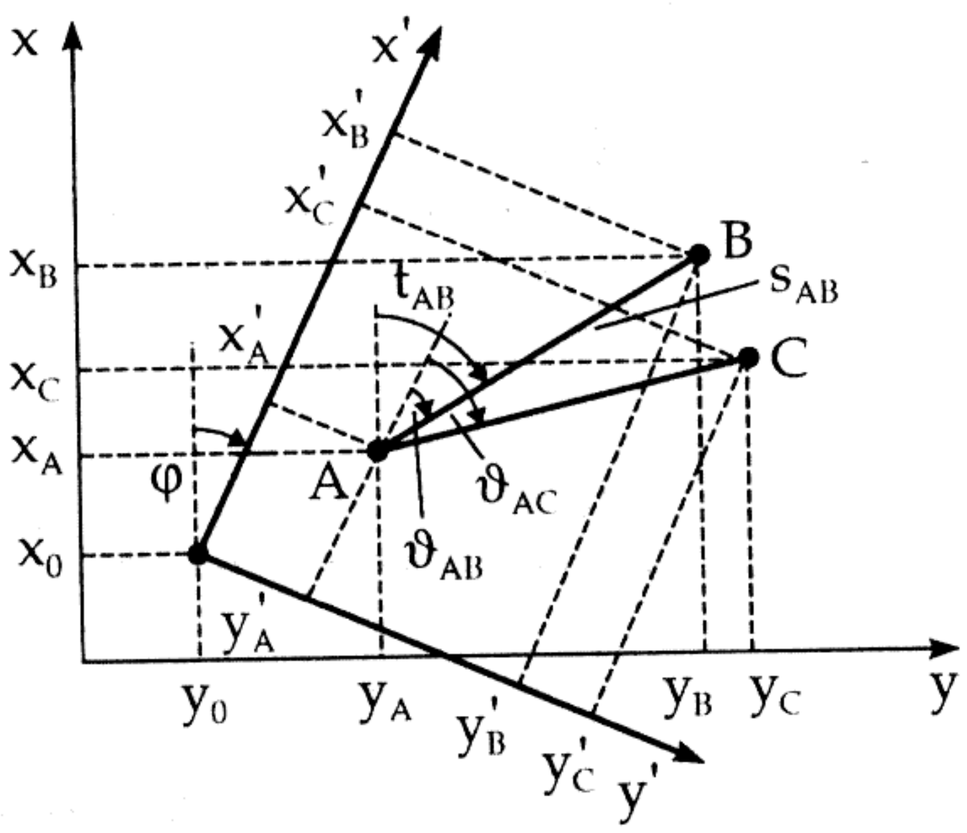
$$b = \frac{\Delta x_{AB}}{x'_B} = q\cos\varphi\,, \tag{3.93b}$$

$$y_C = y_A + a x'_C + b y'_C\,, \tag{3.93c}$$

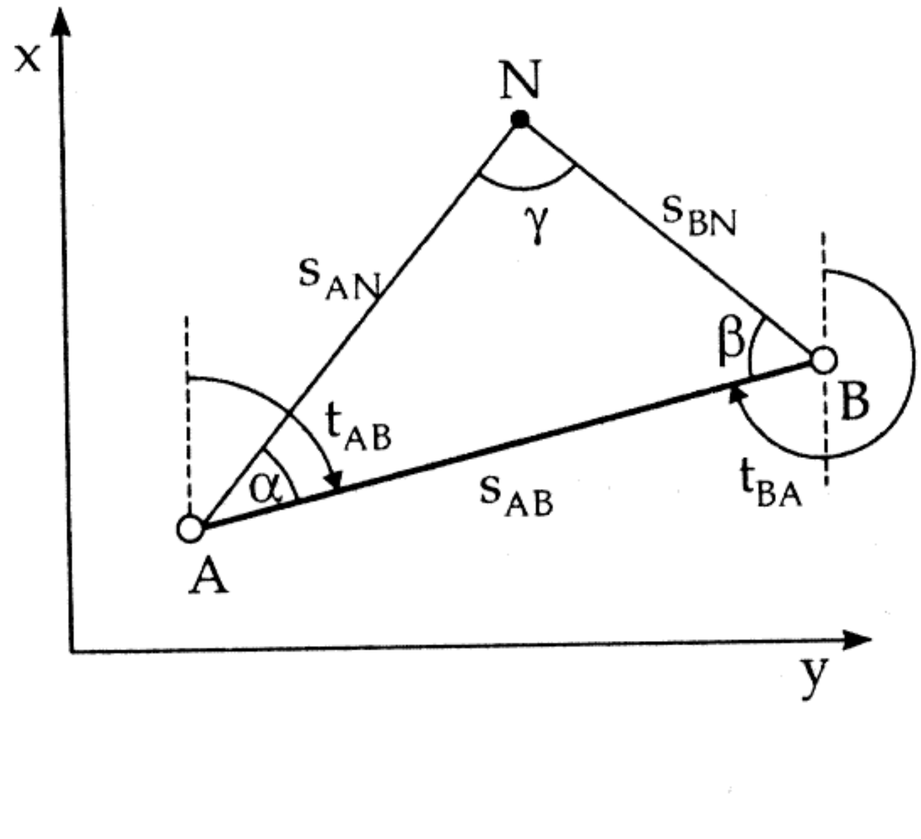
$$x_C = x_A + b x'_C - a y'_C\,, \tag{3.93d}$$

$$y'_C = \Delta y_{AC} b - \Delta x_{AC} a\,, \tag{3.93e}$$

$$x'_C = \Delta x_{AC} b + \Delta y_{AC} a\,. \tag{3.93f}$$



3.39. ábra.



3.40. ábra.

3.2.2.3. Méréstechnikai alkalmazások

A geodéziában gyakran fellépő méréstechnikai feladat egy felveendő N pont koordinátáinak meghatározása *háromszögelés* keretében. E feladat megoldására szolgáló eljárás az előmetszés, hátrametszés, ívmetszés, *szabad elhelyezés* és *sokszögelés*. Az utóbbi két eljárással itt nem foglalkozunk.

1. Előmetszés

1. Előmetszés két félegyenessel, vagy *a háromszögelés 1. főfeladata*: Egy felveendő N pont meghatározása két megadott A, B pontból az ABN háromszög segítségével **(3.40. ábra)**.
Megadva: $y_A, x_A; y_B, x_B$. **Mérve:** α, β, lehetőleg γ is, vagy $\gamma = 200$ gon$-\alpha-\beta$.
Keresendő: y_N, x_N.

Megoldás:

$$\operatorname{tg} t_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}\,, \tag{3.94a}$$

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta y_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2} = |\Delta y_{AB} \sin t_{AB}| + |\Delta x_{AB} \cos t_{AB}|\,, \tag{3.94b}$$

$$s_{BN} = s_{AB}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = s_{AB}\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,, \tag{3.94c}$$

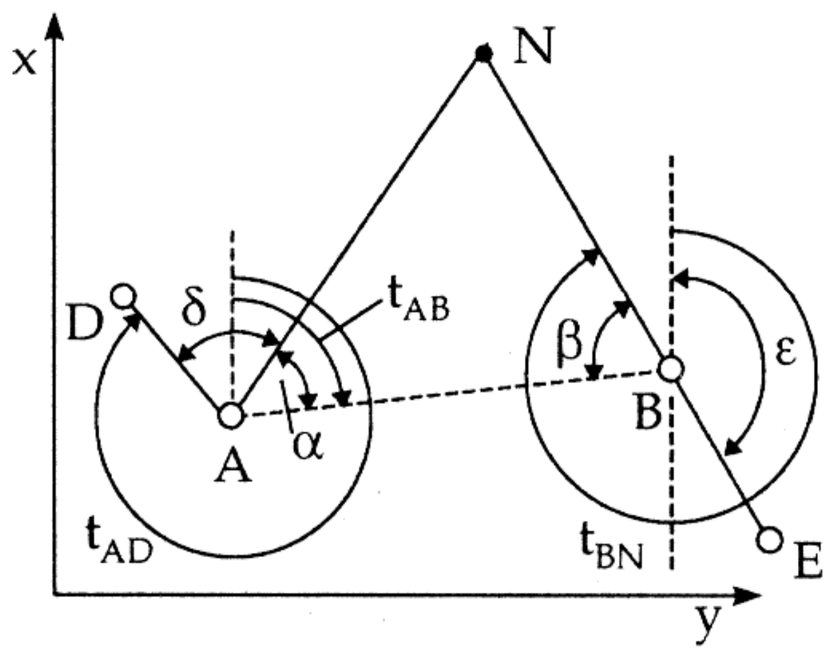
$$s_{AN} = s_{AB}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = s_{AB}\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,, \tag{3.94d}$$

$$t_{AN} = t_{AB} - \alpha\,, \tag{3.94e}$$

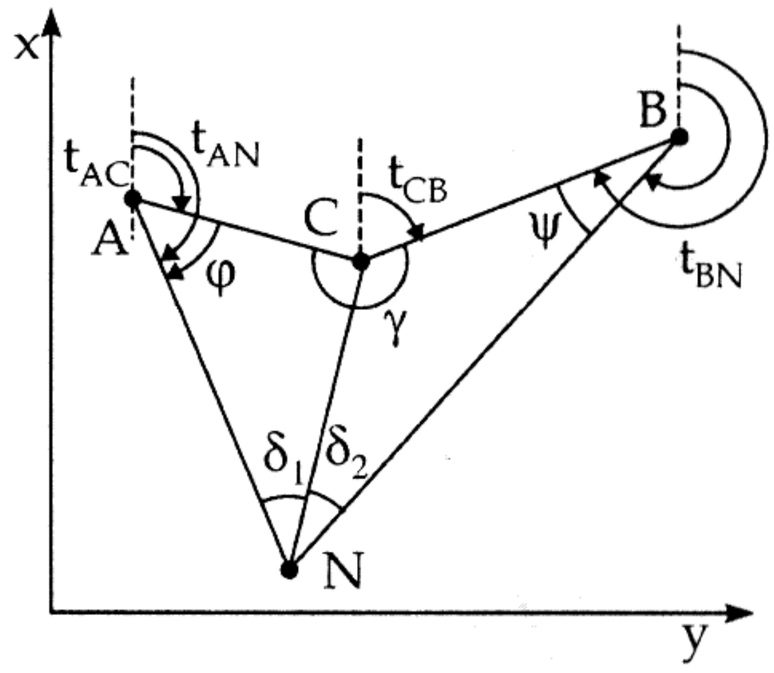
$$t_{BN} = t_{BA} + \beta = t_{AB} + \beta \pm 200\,\text{gon}\,, \tag{3.94f}$$

$$y_N = y_A + s_{AN}\sin t_{AN} = y_B + s_{BN}\sin t_{BN}\,, \tag{3.94g}$$

$$x_N = x_A + s_{AN}\cos t_{AN} = x_B + s_{BN}\cos t_{BN}\,. \tag{3.94h}$$



3.41. ábra.



3.42. ábra.

2. Előmetszés irányzás nélkül Ha a B pont az A pontból nem látható, a t_{AN} és a t_{BN} irányszöget más, látható és ismert koordinátájú D, E pontokba mutató csatlakozó irányok segítségével határozzuk meg **(3.41. ábra)**.
Megadva: $y_A, x_A; y_B, x_B; y_D, x_D; y_E, x_E$. **Mérve:** δ az A pontban, ϵ a B pontban, lehetőleg γ is.
Keresendő: y_N, x_N .
Megoldás: Visszavezetés az 1. főfeladatra, $\operatorname{tg} t_{AB}$ kiszámítása (3.94a) alapján és a következő képletek alkalmazása:

$$\operatorname{tg} t_{AD} = \frac{\Delta y_{AD}}{\Delta x_{AD}}\,, \tag{3.95a}$$

$$\operatorname{tg} t_{BE} = \frac{\Delta y_{EB}}{\Delta x_{EB}}\,, \tag{3.95b}$$

$$t_{AN} = t_{AD} + \delta\,, \tag{3.95c}$$

$$t_{BN} = t_{BE} + \varepsilon\,, \tag{3.95d}$$

$$\alpha = t_{AB} - t_{AN}\,, \tag{3.95e}$$

$$\beta = t_{BN} - t_{BA}\,, \tag{3.95f}$$

$$\operatorname{tg} t_{AN} = \frac{\Delta y_{NA}}{\Delta x_{NA}}\,, \tag{3.95g}$$

$$\operatorname{tg} t_{BN} = \frac{\Delta y_{NB}}{\Delta x_{NB}}\,, \tag{3.95h}$$

$$x_N = \frac{\Delta y_{BA} + x_A \sin t_{AN} - x_B \operatorname{tg} t_{BN}}{\operatorname{tg} t_{AN} - \operatorname{tg} t_{BN}}\,, \tag{3.95i}$$

$$y_N = y_B + (x_N - x_B)\operatorname{tg} t_{BN}\,. \tag{3.95j}$$

2. Hátrametszés

1. A hátrametszés Snellius-féle feladata, vagy egy felveendő N pont hátrametszése három megadott A, B, C pont segítségével, amit *a háromszögelés 2. főfeladatá*nak is neveznek **(3.42. ábra)**:
Megadva: $y_A, x_A; y_B, x_B; y_C, x_C$. **Mérve:** δ_1, δ_2 az N pontban. **Keresendő:** y_N, x_N.
Megoldás:

$$\operatorname{tg} t_{AC} = \frac{\Delta y_{AC}}{\Delta x_{AC}}\,, \qquad (3.96a)$$

$$\operatorname{tg} t_{BC} = \frac{\Delta y_{BC}}{\Delta x_{BC}}\,, \qquad (3.96b)$$

$$a = \frac{\Delta y_{AC}}{\sin t_{AC}} = \frac{\Delta x_{AC}}{\cos t_{AC}}\,, \qquad (3.96c)$$

$$b = \frac{\Delta y_{BC}}{\sin t_{BC}} = \frac{\Delta x_{BC}}{\sin t_{BC}}\,, \qquad (3.96d)$$

$$\gamma = t_{CA} - t_{CB} = t_{AC} - t_{BC}\,, \qquad (3.96e)$$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma + \delta_1 + \delta_2}{2}\,, \qquad (3.96f)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a \sin \delta_2}{b \sin \delta_1}\,, \qquad (3.96g)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{ctg}(45^\circ + \lambda)\,, \qquad (3.96h)$$

$$s_{AN} = \frac{a}{\sin \delta_1} \sin(\delta_1 + \varphi)\,, \qquad (3.96i)$$

$$s_{BN} = \frac{b}{\sin \delta_2} \sin(\delta_2 + \psi)\,, \qquad (3.96j)$$

$$s_{CN} = \frac{a}{\sin \delta_1} \sin \varphi = \frac{b}{\sin \delta_2} \sin \psi\,, \qquad (3.96k)$$

$$x_N = x_A + s_{AN} \cos t_{AN} = x_B + s_{BN} \cos t_{BN}\,, \qquad (3.96l)$$

$$y_N = y_A + s_{AN} \sin t_{AN} = y_B + s_{BN} \sin t_{BN}\,. \qquad (3.96m)$$

2. Cassini-féle hátrametszés
Megadva: $y_A, x_A; y_B, x_B; y_C, x_C$. **Mérve:** δ_1, δ_2 az N pontban. **Keresendő:** y_N, x_N.
Ennél a számolási eljárásnál két P, Q segédpontot használunk fel, amelyek közül az egyik az A, C, P pontokon, a másik a B, C, Q pontokon átmenő segédkörön helyezkedik el, és mindkettő egy az N ponton átmenő egyenesen fekszik **(3.43. ábra)**. A körök H_1, ill. H_2 középpontja $\overline{AC}$, ill. $\overline{BC}$ felezőmerőlegesének a PC, ill. QC összekötő egyenessel való metszéspontja. Az N pontban mért δ_1, δ_2 szögek megjelennek a P, ill. Q pontban is (kerületi szögek).
Megoldás:

$$y_P = y_A + (x_C - x_A) \operatorname{ctg} \delta_1\,, \qquad (3.97a)$$

$$x_P = x_A + (y_C - y_A) \operatorname{ctg} \delta_1\,, \qquad (3.97b)$$

$$y_Q = y_B + (x_B - x_C) \operatorname{ctg} \delta_2\,, \qquad (3.97c)$$

$$x_Q = x_B + (y_B - y_C) \operatorname{ctg} \delta_2\,, \qquad (3.97d)$$

$$t_{PQ} = \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}}\,, \qquad (3.97e)$$

$$x_N = x_P + \frac{y_C - y_P + (x_C - x_P) \operatorname{ctg} t_{PQ}}{\operatorname{tg} t_{PQ} + \operatorname{ctg} t_{PQ}}\,, \qquad (3.97f)$$

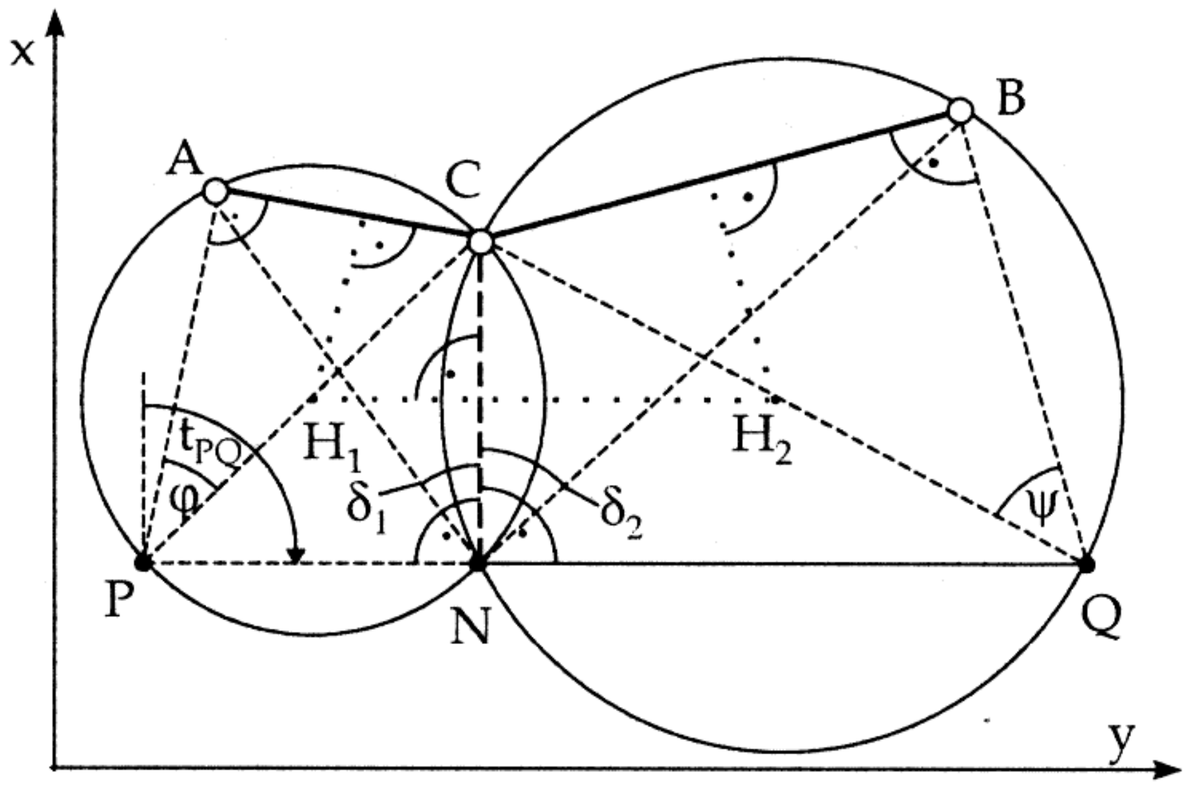
$$y_N = y_P + (x_N - x_P) \operatorname{tg} t_{PQ} \qquad (\operatorname{tg} t_{PQ} < \operatorname{ctg} t_{PQ})\,, \qquad (3.97g)$$

$$y_N = y_C - (x_N - x_C) \operatorname{ctg} t_{PQ} \qquad (\operatorname{ctg} t_{PQ} < \operatorname{tg} t_{PQ})\,, \qquad (3.97h)$$

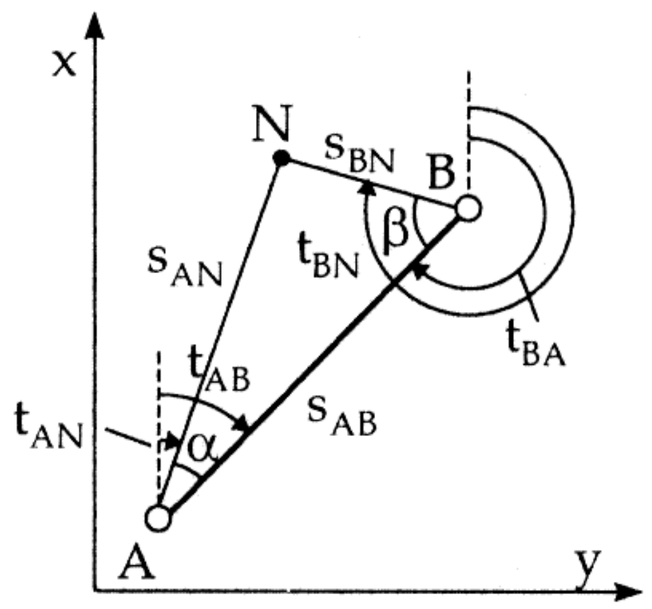
Veszélyes kör: A pontok kiválasztásánál gondoskodni kell arról, hogy a tekintett négy pont ne feküdjön egy körön, mert akkor nincs megoldás; ilyenkor *veszélyes kör*ről beszélünk. Minél közelebb vannak a pontok ahhoz, hogy veszélyes körön feküdjenek, annál pontatlanabb az eljárás.

3. Ívmetszet

A felveendő N pont az ismert koordinátájú A és B pont körül a mért s_{AN} és s_{BN} sugárral rajzolt ívek metszéspontjaként adódik **(3.44. ábra)**. Kiszámítjuk az ismeretlen s_{AB} hosszúságot és az ABN



3.43. ábra.



3.44. ábra.

háromszög most már ismert három oldalából a szögeket. Egy másik, itt nem vizsgált megoldás a ferdeszögű háromszög két derékszögű háromszögre való felbontásából indul ki.
Megadva: $y_A, x_A : y_B, x_B$. **Mérve:** $s_{AN}; s_{BN}$. **Keresendő:** s_{AB}, y_N, x_N.
Megoldás:

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta y_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2}\,, \qquad (3.98a)$$

$$\operatorname{tg} t_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}\,, \qquad (3.98b)$$

$$t_{BA} = t_{AB} + 200\,\text{gon}\,, \qquad (3.98c)$$

$$\cos\alpha = \frac{s_{AN}^2 + s_{AB}^2 - s_{BN}^2}{2 s_{AN} s_{AB}}\,, \qquad (3.98d)$$

$$\cos\beta = \frac{s_{BN}^2 + s_{AB}^2 - s_{AN}^2}{2 s_{BN} s_{AB}}\,, \qquad (3.98e)$$

$$t_{AN} = t_{AB} - \alpha\,, \qquad (3.98f)$$

$$t_{BN} = t_{BA} - \beta\,, \qquad (3.98g)$$

$$y_N = y_A + s_{AN} \sin t_{AN}\,, \qquad (3.98h)$$

$$x_N = x_A + s_{AN} \cos t_{AN}\,, \qquad (3.98i)$$

$$y_N = y_B + s_{BN} \sin t_{BN}\,, \qquad (3.98j)$$

$$x_N = x_B + s_{BN} \cos t_{BN}\,. \qquad (3.98k)$$

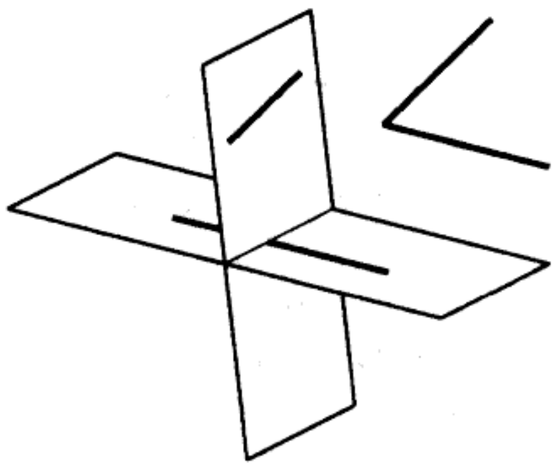
3.3. Térgeometria

3.3.1. Egyenesek és síkok a térben

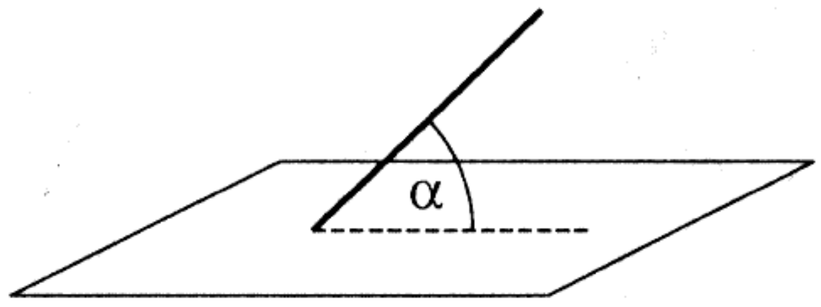
1. Két egyenes Két egyazon síkban fekvő egyenesnek vagy egy közös pontja van, vagy nincs közös pontja. Az utóbbi esetben az egyenesek *párhuzamosak.* Ha két egyenesen át nem lehet síkot fektetni, akkor *kitérő egyenesek*ről beszélünk. *Két kitérő egyenes szögén* két, velük párhuzamos, egymást metsző egyenes szögét értjük **(3.45. ábra)**. Két kitérő egyenes távolságát a mindkét egyenesre merőleges szakasz hosszúságával definiáljuk.

2. Két sík Két sík vagy egy egyenesben metszi egymást, vagy nincs közös pontjuk. Az utóbbi esetben a két sík párhuzamos. Ha két sík merőleges egyazon egyenesre, vagy mindkettőn található két metsző egyenes, amelyek páronként párhuzamosak, akkor a két sík egymással párhuzamos.

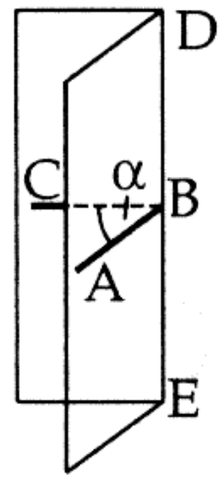
3. Egyenes és sík Egy egyenes vagy teljes egészében egy megadott síkban helyezkedik el, vagy a síkkal egyetlen közös pontja van, vagy a síkkal nincs közös pontja. Az utóbbi esetben az egyenes párhuzamos a síkkal. Egyenes és sík szögét az egyenes és a síkra vetett merőleges vetülete között mérjük **(3.46. ábra)**. Ha egy egyenes merőleges egy sík két egymást metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére merőleges, azaz *merőleges* a síkra.



3.45. ábra.



3.46. ábra.



3.47. ábra.

3.3.2. Élek, csúcsok, térszögek

1. Élnek nevezünk egy alakzatot, amelyet két, egy egyenesből kiinduló félsík alkot **(3.47. ábra)**. A napi szóhasználatban, e definíciótól eltérően, élen két félsík metszésvonalát értjük. Az él mértékéül az *ABC lapszög* szolgál, amelyet a B pontból kiinduló, a DE metszésvonalra merőleges, a két félsíkban haladó két félegyenes alkot.

2. A csúcs (a **3.48. ábrán** $OABCDE$) olyan alakzat, amelyet több, egy közös ponttal (O csúcspont) rendelkező és egymást e pontból kiinduló OA, OB, ... *egyenesekben metsző sík* (oldallap) alkot. Két, a csúcs valamely oldallapját határoló egyenes *élszöget* zár be, két szomszédos oldallap pedig élt alkot.
Csúcsok akkor egyenlők vagy *egybevágók*, ha egymással fedésbe hozhatók. Ehhez szükséges a csúcsok megfelelő elemeinek, vagyis a lapszögeknek és élszögeknek az egyenlősége. Ha a csúcsok megfelelő elemei egyenlők, de fordított sorrendben következnek, akkor bár a csúcsok fedésbe nem hozhatók, *szimmetrikus csúcsok*nak nevezzük őket, mert a **3.49. ábrán** feltüntetett, kölcsönösen szimmetrikus módon helyezhetők el.
Konvex csúcs bármely élének teljes egészében az egyik oldalán fekszik. Bármely konvex csúcs élszögeinek $AOB + BOC + \ldots + EOA$ összege **(3.48. ábra)** kisebb 360°-nál.

3. Háromoldalú csúcsok egybevágók, ha következő elemeik tekintetében megegyeznek:
- két oldallap és azok lapszöge,
- egy oldallap és a hozzá csatlakozó két lapszög,
- három egymásnak megfelelő és ugyanabban a sorrendben következő oldallap,
- három egymásnak megfelelő és ugyanabban a sorrendben következő lapszög.

4. Térszög A térben egy egy pontból kiinduló sugársor térszöget alkot **(3.50. ábra)**. Ezt Ω-val jelöljük és az

$$\Omega = \frac{F}{r^2}\,, \tag{3.99a}$$

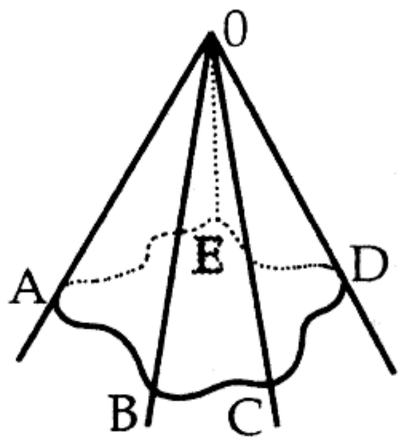
képlettel számítjuk ki. Itt F a térszög által a sugársor középpontja körüli, r sugarú gömbből kimetszett felületdarab. A térszög egysége a *szteradián* (sr). Fennáll:

$$1\,\mathrm{sr} = \frac{1\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{m}^2}\,, \tag{3.99b}$$

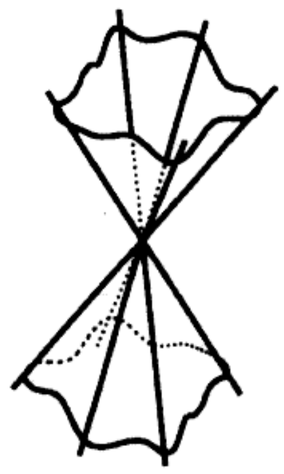
vagyis az 1 sr nagyságú térszög az ($r = 1\,\mathrm{m}$) sugarú egységgömbből $1\,\mathrm{m}^2$ felszínű darabot metsz ki.

■ **A:** A teljes térszög $\Omega = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$.

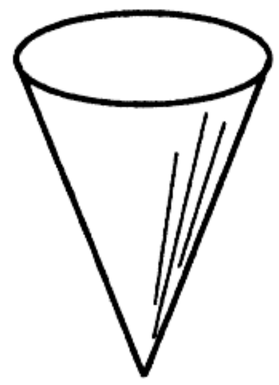
■ **B:** Az $\alpha = 120°$ nyílásszögű kúp térszöge $\Omega = 2\pi r^2 \cos(\alpha/2)/r^2 = \pi$, ahol felhasználtuk a gömbszeletre vonatkozó (3.148) képletet.



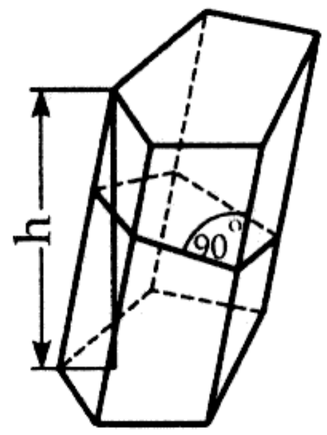
3.48. ábra.



3.49. ábra.



3.50. ábra.



3.51. ábra.

3.3.3. Poliéderek

Ebben a szakaszban a következő jelöléseket fogjuk használni: V – térfogat, F – teljes felszín, M – palástfelszín, h – magasság, A – alapterület.

1. Poliédernek nevezünk egy testet, ha síkok határolják.

2. Hasábnak (3.51. ábra) olyan poliédert nevezünk, amelynek alaplapjai egybevágók és oldallapjai paralelogrammák. Az *egyenes hasábot* az jellemzi, hogy oldalélei az alaplapokra merőlegesek, a *szabályos hasábot* pedig az, hogy egyenes és alaplapjai szabályos sokszögek. Hasábra fennáll:

$$V = Ah\,, \qquad (3.100) \qquad M = pl\,, \qquad (3.101) \qquad F = M + 2A\,. \qquad (3.102)$$

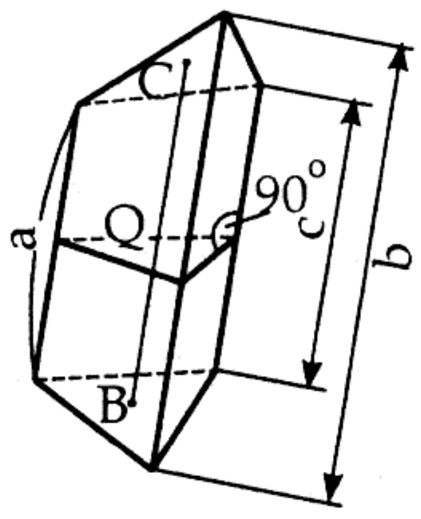
Itt p az oldalélekre merőleges síkmetszet kerülete és l az oldalélek hosszúsága. Háromoldalú hasábra, amelynek alaplapjai nem párhuzamosak egymással **(3.52. ábra)**, fennáll

$$V = \frac{(a+b+c)Q}{3}\,, \qquad (3.103)$$

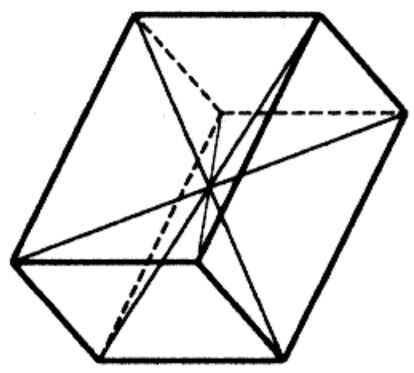
ahol Q egy merőleges keresztmetszet és a, b, c az oldalélek hosszúságai. n-oldalú hasábra, amelynek fedőlapja nem az alaplappal párhuzamosan van levágva, fennáll

$$V = lQ\,, \qquad (3.104)$$

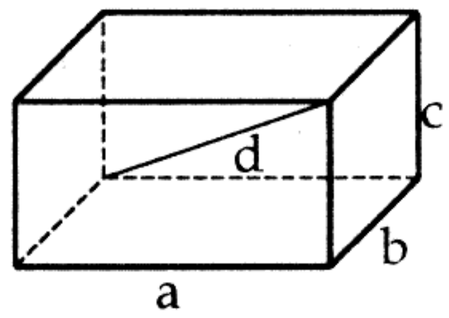
ahol l annak a $\overline{BC}$ szakasznak a hosszúsága, amely az alaplapok súlypontjait köti össze, és Q az ezen szakaszra merőleges keresztmetszet.



3.52. ábra.



3.53. ábra.



3.54. ábra.

3. Paralelepipedonnak (3.53. ábra) nevezzük azokat a hasábokat, amelyeknek az alaplapjai paralelogrammák. Paralelepipedonban mind a négy testátló egy pontban metszi és felezi egymást.

4. Téglatestnek azokat az egyenes paralelepipedonokat nevezzük, amelyeknek az alaplapjai téglalapok. A téglatest **(3.54. ábra)** testátlói egyforma hosszúak. Ha a, b, c a téglatest élhosszúságai és d az átló hosszúsága, akkor

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2\,, \qquad (3.105) \qquad V = abc\,, \qquad (3.106) \qquad F = 2(ab + bc + ca)\,. \qquad (3.107)$$

5. A kockák olyan téglatestek, amelyeknek az élei egyforma hosszúak: $a = b = c$,

$$d^2 = 3a^2\,, \qquad (3.108) \qquad V = a^3\,, \qquad (3.109) \qquad F = 6a^2\,. \qquad (3.110)$$

6. Gúlának (3.55. ábra) nevezzük az olyan poliédert, amelynek alaplapja sokszög, oldallapjai pedig egy pontban, a csúcspontban összefutó háromszögek. A gúlát *egyenes*nek mondjuk, ha a csúcspontból az A alaplapra bocsátott merőleges talppontja az alaplap középpontja, *szabályos*nak, ha az alaplap szabályos sokszög **(3.56. ábra)**, és *n-oldalúnak*, ha az alaplap n-szög. Az alaplappal együtt a gúlának $(n+1)$ lapja van. Fennáll:

$$V = \frac{Ah}{3}\,. \qquad (3.111)$$

Szabályos gúlára

$$M = \frac{1}{2}ph_s, \qquad (3.112)$$

ahol p az alaplap kerülete és h_s az oldallapok magassága.

7. Csonkagúlának nevezzük az olyan gúlát, amelynek csúcspontja egy, az alaplappal párhuzamos síkkal le van vágva **(3.55. és 3.57. ábra)**. Ha $\overline{SO}$ a gúla magassága, vagyis a csúcspontból az alaplapra bocsátott merőleges hosszúsága, akkor

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}} = \ldots = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{O_1O}}\,, \qquad (3.113)$$

$$\frac{ABCDEF \text{ terület}}{A_1B_1C_1D_1E_1F_1 \text{ terület}} = \left(\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}\right)^2. \qquad (3.114)$$

Ha a és A a felső és alsó alapterület, h a csonkagúla magassága, vagyis az alaplapok közötti távolság, továbbá c és C az alaplapok egymásnak megfelelő oldalai, akkor

$$V = \frac{1}{3}h\left[A + a + \sqrt{Aa}\right] = \frac{1}{3}hA\left[1 + \frac{c}{C} + \left(\frac{c}{C}\right)^2\right]. \qquad (3.115)$$

A szabályos csonkagúla palástjának felszíne

$$M = \frac{p+P}{2}h_s\,, \qquad (3.116)$$

ahol p és P az alaplapok kerületei és h_s az oldallapok magassága.

8. Tetraédernek nevezzük a háromoldalú gúlát **(3.58. ábra)**. Az $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{CA} = q$, $\overline{BC} = p$ és $\overline{AB} = r$ jelölésekkel fennáll

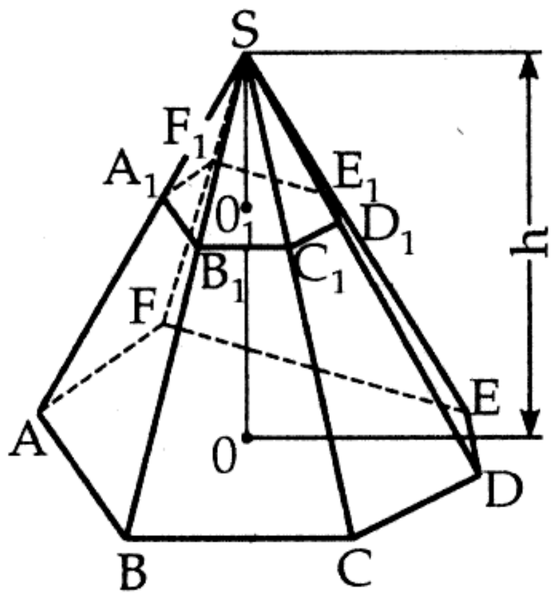
$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3.117)$$

9. Obeliszknek (gúlás poliédercsonknak) nevezzük az olyan poliédert, amelynek minden oldallapja trapéz. Az itt tekintett speciális esetben a párhuzamos alaplapok téglalapok **(3.59. ábra)**, az egymással szemben fekvő oldalélek az alaplaphoz képest azonos hajlásúak, de nem futnak össze egyetlen pontban. Ha a, b és a_1, b_1 az alaplapok oldalai és h az obeliszk magassága, akkor

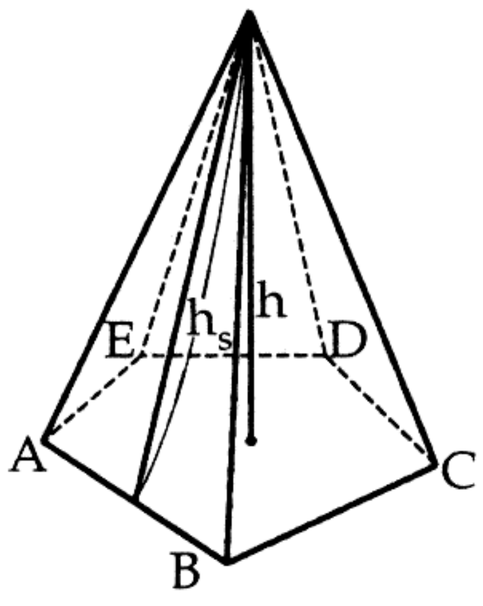
$$V = \frac{h}{6}\left[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1\right] = \frac{h}{6}\left[ab + (a + a_1)\,(b + b_1) + a_1b_1\right]. \qquad (3.118)$$

10. Az ék olyan poliéder, amelynek alaplapja téglalap és oldallapja két-két szemben fekvő egyenlőszárú háromszög, ill. trapéz **(3.60. ábra)**. Térfogata:

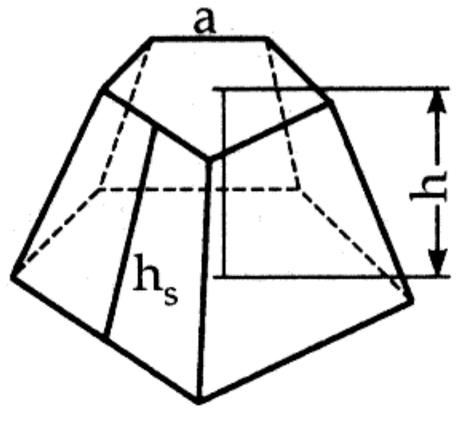
$$V = \frac{1}{6}\,(2a + a_1)\,b\,h\,. \qquad (3.119)$$



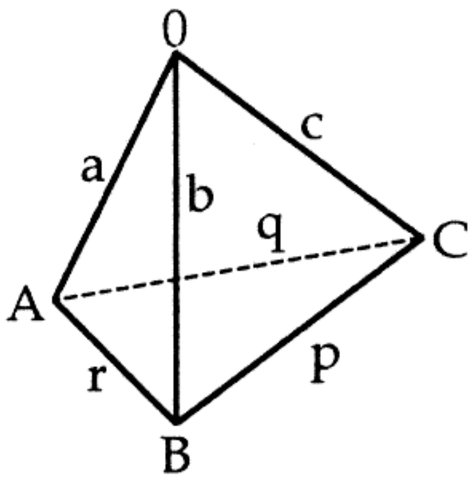
3.55. ábra.



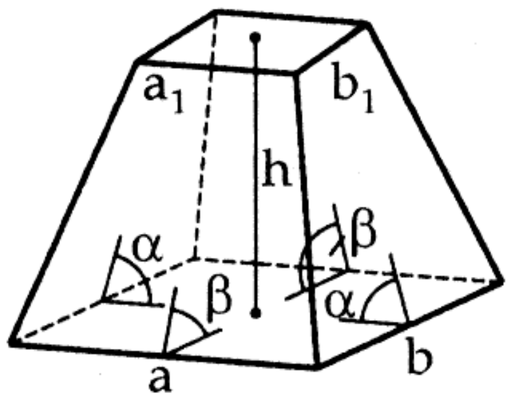
3.56. ábra.



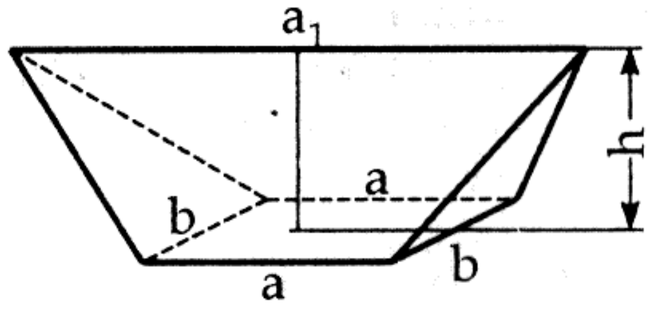
3.57. ábra.



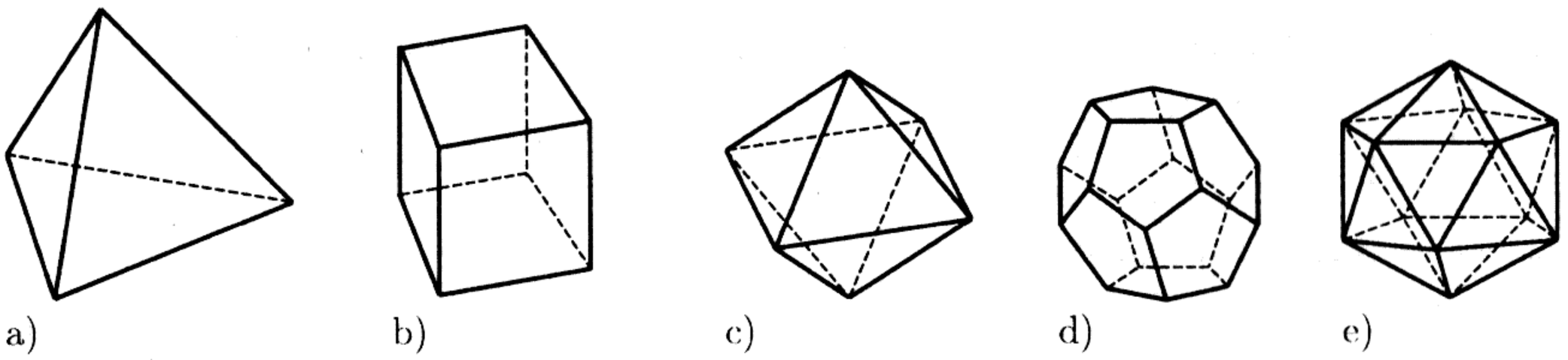
3.58. ábra.



3.59. ábra.



3.60. ábra.



3.61. ábra.

11. A szabályos poliédereket az jellemzi, hogy határoló lapjaik egybevágó szabályos sokszögek, csúcsaik pedig egybevágó szabályos csúcsok. Az öt lehetséges szabályos poliéder a **3.61. ábrán** látható; a megfelelő adatok a **3.5. táblázatban** szerepelnek.

12. Euler-féle poliéder-tétel Ha c a csúcsok száma, l a lapok száma és e az élek száma, akkor

$$c - e + l = 2 \tag{3.120}$$

bármely konvex poliéderre vagy olyan poliéderre, amely folytonos deformációval egy konvex poliéderbe vihető át. Példák a **3.5. táblázatban** találhatók.

3.3.4. Görbült felületekkel határolt testek

Ebben a szakaszban a következő jelöléseket fogjuk használni: V – térfogat, F – teljes felszín, M – palástfelszín, h – magasság, A – alapterület.

1. Hengerfelületnek nevezünk egy görbült felületet, amely egy egyenesnek (az *alkotó*nak) egy görbe (a *vezérgörbe*) mentén történő párhuzamos eltolásával jön létre **(3.62. ábra)**.

2. Hengernek nevezünk egy testet, amelyet egy zárt vezérgörbéjű hengerfelület, valamint két párhuzamos síkból a hengerfelület által kimetszett két párhuzamos alaplap határol. Ha egy tetszőleges henger **(3.63. ábra)** alaplap-kerülete p, az alkotóra merőleges keresztmetszet kerülete s és területe Q,

3.5. táblázat. Az a élhosszúságú szabályos poliéderek adatai

Megnevezés	Határoló lapok száma és alakja	Élek száma	Csúcsok száma	Teljes felszín F/a^2	Térfogat V/a^3
Tetraéder	4 háromszög	6	4	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	$\frac{\sqrt{2}}{12} = 0{,}1179$
Kocka	6 négyzet	12	8	$6 = 6{,}0$	$1 = 1{,}0$
Oktaéder	8 háromszög	12	6	$2\sqrt{2} = 3{,}4641$	$2\sqrt{3} = 0{,}4714$
Dodekaéder	12 ötszög	30	20	$3\sqrt{5(5+2\cdot\sqrt{5})} = 20{,}6457$	$\frac{15+7\cdot\sqrt{5}}{7} = 7{,}6631$
Ikozaéder	20 háromszög	30	12	$5\sqrt{3} = 8{,}6603$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12} = 2{,}1817$

az alkotó hosszúsága pedig l, akkor

$$V = Ah = Ql\,, \qquad (3.121) \qquad M = ph = sl\,. \qquad (3.122)$$

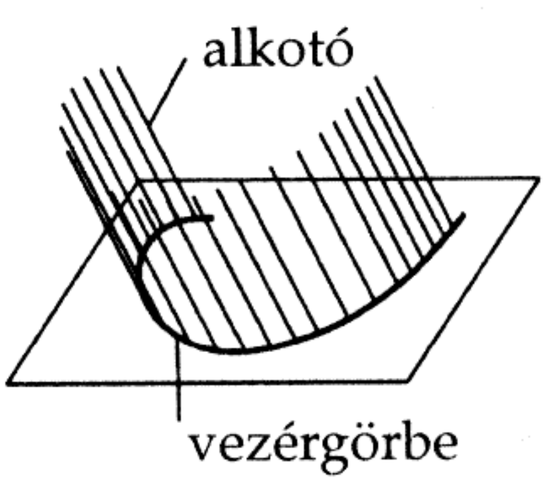
3. Az egyenes körhengereket az jellemzi, hogy alaplapjuk kör és alkotójuk merőleges a kör síkjára **(3.64. ábra)**. Ha az alaplap sugara R, akkor

$$V = \pi R^2 h\,, \qquad (3.123) \qquad M = 2\pi Rh\,, \qquad (3.124) \qquad F = 2\pi R(R+h)\,. \qquad (3.125)$$

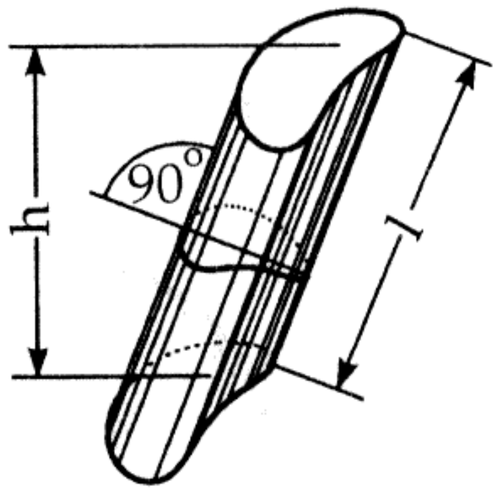
4. Ferdén levágott körhenger (3.65. ábra)

$$V = \pi R^2 \frac{h_1+h_2}{2}\,, \qquad (3.126) \qquad M = \pi R\,(h_1+h_2)\,, \qquad (3.127)$$

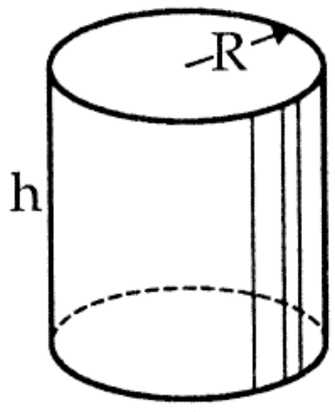
$$F = \pi R\left[h_1+h_2+R+\sqrt{R^2+\left(\frac{h_2-h_1}{2}\right)^2}\right]\,. \qquad (3.128)$$



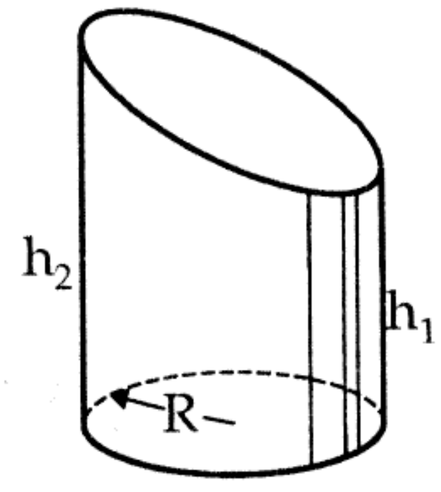
3.62. ábra.



3.63. ábra.



3.64. ábra.



3.65. ábra.

5. Hengerszelet A **3.66. ábra** jelöléseivel és az $\alpha = \varphi/2$ (rad egységben) választással fennáll

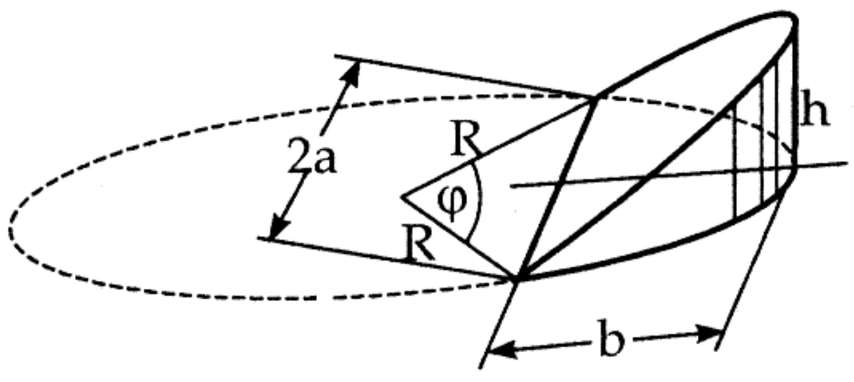
$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3R^2-a^2)+3R^2(b-R)\alpha\right] = \frac{hR^3}{b}\left(\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} - \alpha\cos\alpha\right)\,, \qquad (3.129)$$

$$M = \frac{2Rh}{b}\left[(b-R)\alpha + a\right]\,, \qquad (3.130)$$

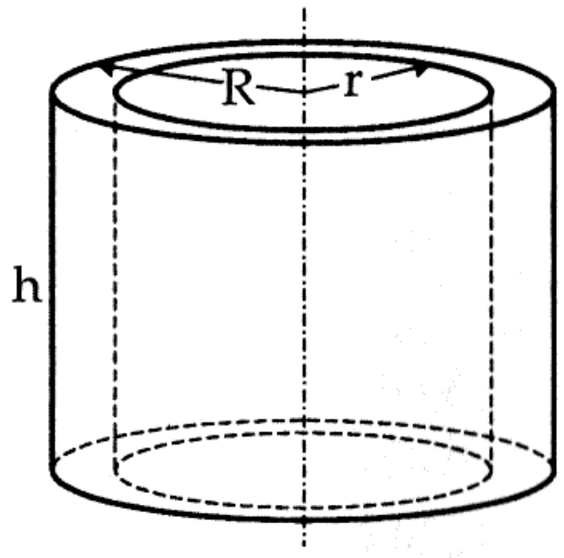
ahol a képletek a $b > R$, $\varphi > \pi$ esetben is érvényesek maradnak.

6. Üreges henger Ha a külső sugár R, a belső sugár r, a sugarak különbsége $\delta = R-r$ és a közepes sugár $\varrho = \dfrac{R+r}{2}$ **(3.67. ábra)**, akkor

$$V = \pi h(R^2-r^2) = \pi h\delta(2R-\delta) = \pi h\delta(2r+\delta) = 2\pi h\delta\varrho\,. \qquad (3.131)$$



3.66. ábra.

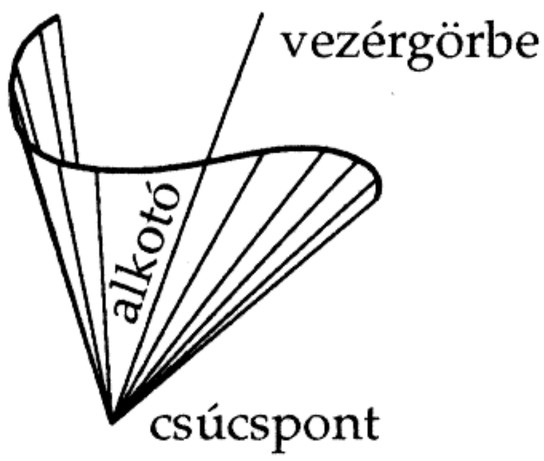


3.67. ábra.

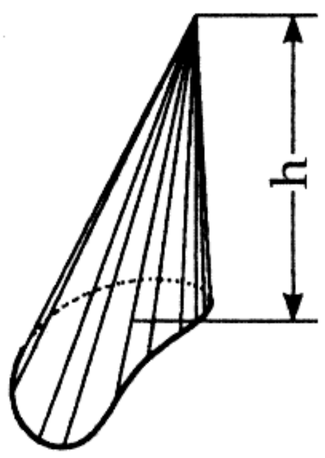
7. Kúpfelület keletkezik, amikor egy rögzített ponton (a csúcsponton) átmenő egyenest (az alkotót) egy görbe (vezérgörbe) mentén végigviszünk **(3.68. ábra)**.

8. A kúpokat (3.69. ábra) egy zárt vezérgörbéjű kúpfelület és egy a kúpfelületből kimetszett sík alaplap határolja. Tetszőleges kúpra fennáll:

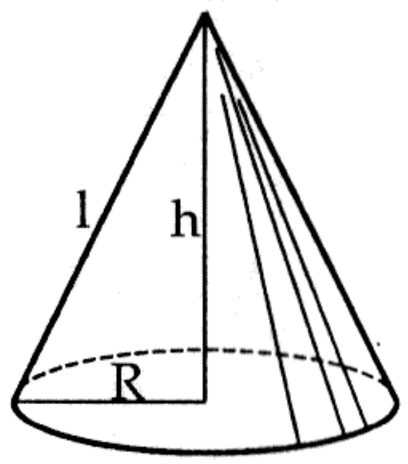
$$V = \frac{hA}{3}\,. \tag{3.132}$$



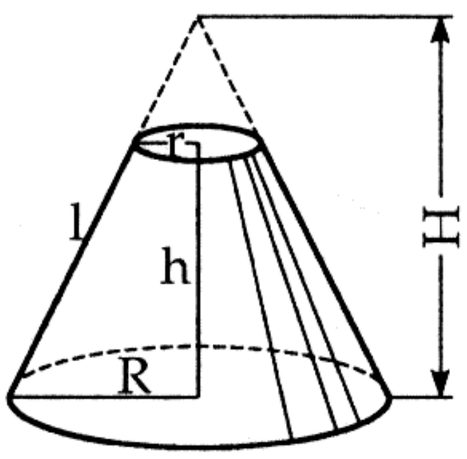
3.68. ábra.



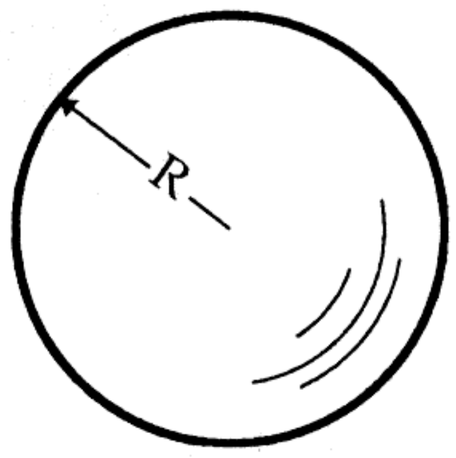
3.69. ábra.



3.70. ábra.



3.71. ábra.



3.72. ábra.

9. Az egyenes körkúpokat az jellemzi, hogy alaplapjuk kör és csúcspontjuk a kör középpontja fölött helyezkedik el **(3.70. ábra)**. Ha l az alkotó hosszúsága és R az alaplap sugara, akkor

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,, \quad (3.133) \qquad M = \pi R l = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}\,, \quad (3.134) \qquad F = \pi R(R + l)\,. \quad (3.135)$$

10. Egyenes csonka-körkúp (3.71. ábra)

$$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}\,, \tag{3.136}$$

$$M = \pi l(R+r)\,, \tag{3.137}$$

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)\,, \tag{3.138}$$

$$H = h + \frac{hr}{R-r}\,. \tag{3.139}$$

11. Kúpszeletek (lásd 204. old.).

12. Gömb (3.72. ábra) sugara R, átmérője $D = 2R$. Gömb minden síkmetszete kör. A gömb középpontján átmenő síkmetszet neve *főkör* (lásd 158. old.), ennek sugara R. A gömbfelület bármely két, nem átellenes pontján keresztül csak egy főkört lehet fektetni. A gömbfelület két pontját a gömbfelületen összekötő legrövidebb vonal a főkörív (lásd 158. old.).

Gömbfelszín- és gömbtérfogat-képletek:

$$F = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2\,, \tag{3.140a}$$

$$F = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2\,, \tag{3.140b}$$

$$F = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx 4{,}836\sqrt[3]{V^2}\,, \tag{3.140c}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189R^3\,, \tag{3.141a}$$

$$V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0{,}5236D^3\,, \tag{3.141b}$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{F^3}{\pi}} \approx 0{,}09403\sqrt{F^3}\,, \tag{3.141c}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}} \approx 0{,}2821\sqrt{F}\,, \tag{3.142a}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}6204\sqrt[3]{V}\,. \tag{3.142b}$$

13. Gömbcikk (3.73. ábra)

$$F = \pi R(2h + a)\,, \tag{3.143}$$

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}\,. \tag{3.144}$$

14. Gömbszelet (3.74. ábra)

$$a^2 = h(2R - h)\,, \tag{3.145}$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(3a^2 + h^2\right) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)\,, \tag{3.146}$$

$$M = 2\pi Rh = \pi\left(a^2 + h^2\right)\,, \tag{3.147}$$

$$F = \pi\left(2Rh + a^2\right) = \pi\left(h^2 + 2a^2\right)\,. \tag{3.148}$$

15. Gömbréteg (3.75. ábra)

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2\,, \tag{3.149}$$

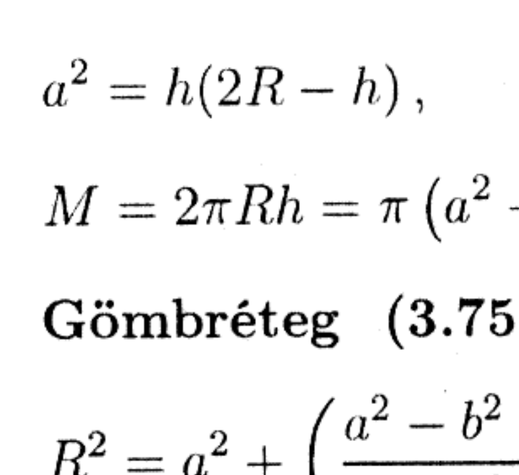
$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(3a^2 + 3b^2 + h^2\right)\,, \tag{3.150}$$

$$M = 2\pi Rh\,, \tag{3.151}$$

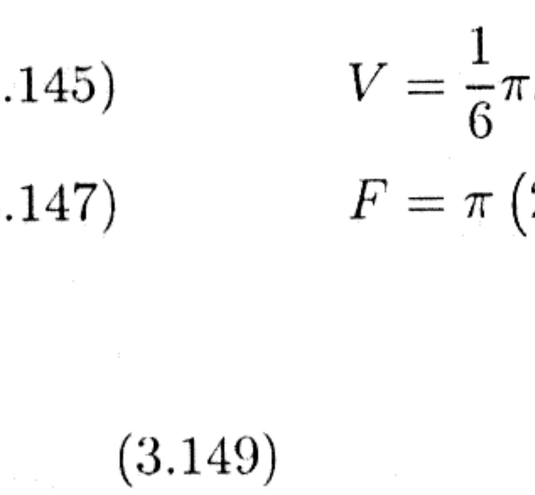
$$S = \pi\left(2Rh + a^2 + b^2\right)\,. \tag{3.152}$$

Ha V_1 a gömbrétegbe írt csonkakúp térfogata **(3.76. ábra)** és l az alkotó hosszúsága, akkor

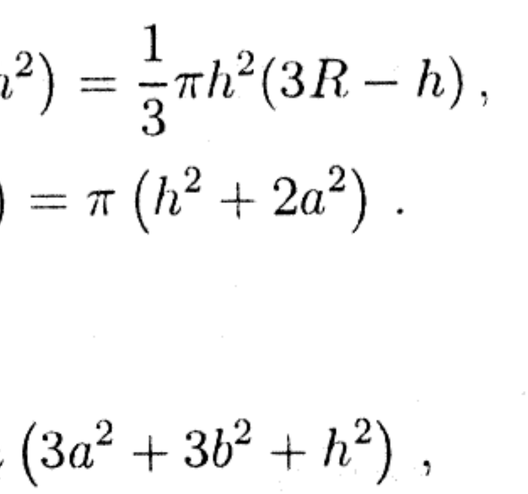
$$V - V_1 = \frac{1}{6}\pi h l^2\,. \tag{3.153}$$



3.73. ábra.



3.74. ábra.



3.75. ábra.

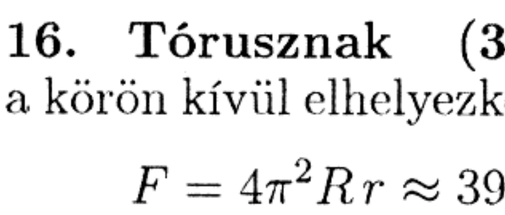
16. Tórusznak (3.77. ábra) nevezzük az olyan testet, amely egy körnek a kör síkjában fekvő, de a körön kívül elhelyezkedő tengely körüli forgatásával keletkezik.

$$F = 4\pi^2 R r \approx 39{,}48 R r\,, \qquad (3.154a)$$

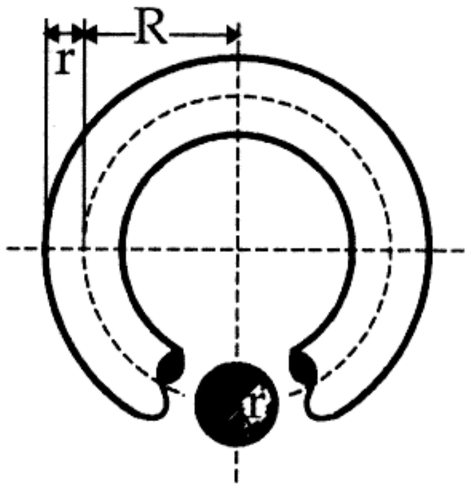
$$F = \pi^2 D\, d \approx 9{,}870 D\, d\,, \qquad (3.154b)$$

$$V = 2\pi^2 R r^2 \approx 19{,}74 R r^2\,, \qquad (3.155a)$$

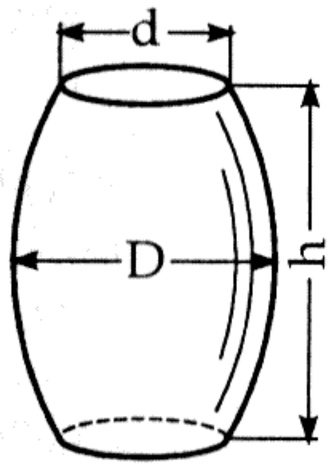
$$V = \frac{1}{4}\pi^2 D\, d^2 \approx 2{,}467 D\, d^2\,. \qquad (3.155b)$$



3.76. ábra.



3.77. ábra.



3.78. ábra.

17. Hordótestek (3.78. ábra) egy megfelelő görbületű alkotó forgatása révén jönnek létre; *kör-hordótestek* körszelet, *parabolikus hordótestek* parabolaszelet forgatásával. A kör-hordótestre közelítőleg fennáll

$$V \approx 0{,}262 h \left(2D^2 + d^2\right) \qquad (3.156a)$$

vagy

$$V \approx 0{,}0873 h (2D + d)^2\,; \qquad (3.156b)$$

a parabolikus hordótestre pedig

$$V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right) \approx 0{,}05236 h \left(8D^2 + 4Dd + 3d^2\right)\,. \qquad (3.157)$$

3.4. Gömbháromszögtan (szférikus trigonometria)

Nagyobb távolságokra kiterjedő geodéziai méréseknél tekintetbe kell venni, hogy a Föld gömb alakú. Ehhez a gömbön érvényes geometriára van szükség. Speciálisan szükség van gömbháromszögek, azaz gömbön fekvő háromszögek kiszámítására alkalmas képletekre. Ezt már az ókori Görögországban felismerték, így a síkbeli trigonometria mellett kialakult a gömbháromszögtan is; utóbbi megalapozójának HIPPARCHOS (Kr. e. 150 körül) tekinthető.

3.4.1. A gömbfelület geometriájának alapfogalmai

3.4.1.1. Görbék, ívek és szögek a gömbön

1. Gömbfelületi görbék, főkör és kis gömbi kör

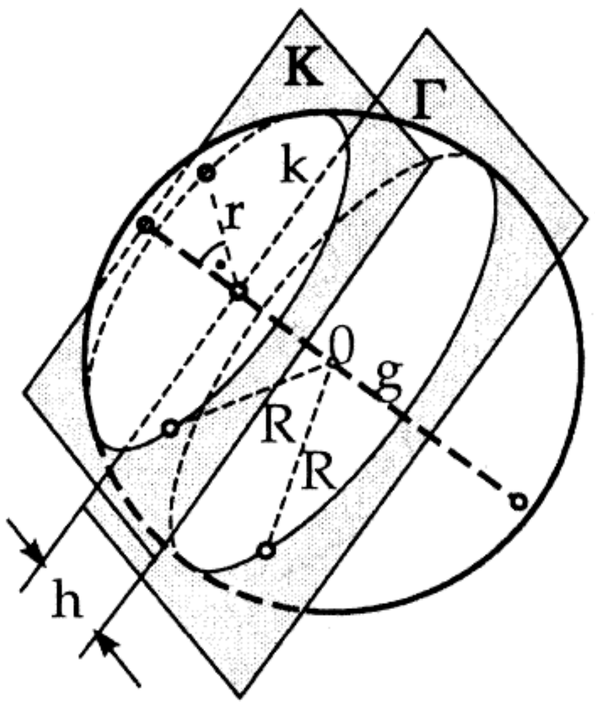
A gömbfelületen elhelyezkedő görbéket *gömbfelületi görbék*nek nevezzük. Fontos gömbfelületi görbék a főkörök vagy ortodrómák és a kis gömbi körök. Ezek a *gömböt átvágó síkok* (ún. *metsző síkok*) metszéskörei-ként állnak elő **(3.79. ábra)**.

Ha egy R sugarú gömböt elmetszünk egy, a gömb O középpontjától h távolságra levő K síkkal, akkor a metszéskör r sugarára fennáll

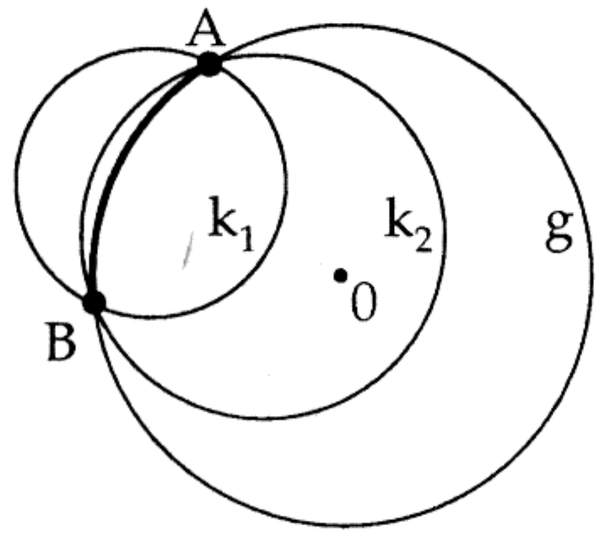
$$r = \sqrt{R^2 - h^2} \quad (0 \le h \le R)\,. \qquad (3.158)$$

A $h = 0$ esetben a metsző sík áthalad a gömb középpontján, és r felveszi legnagyobb értékét. A Γ síkban így keletkező g metszéskör neve *főkör*. Minden más metszéskört, amelyre tehát $0 \le h \le R$, *kis gömbi kör*nek nevezünk; ilyen pl. a **3.79. ábrán** a k kör. Ha $h = R$, a K sík a gömböt egyetlen pontban érinti, vagyis ún. *érintősíkká* válik.

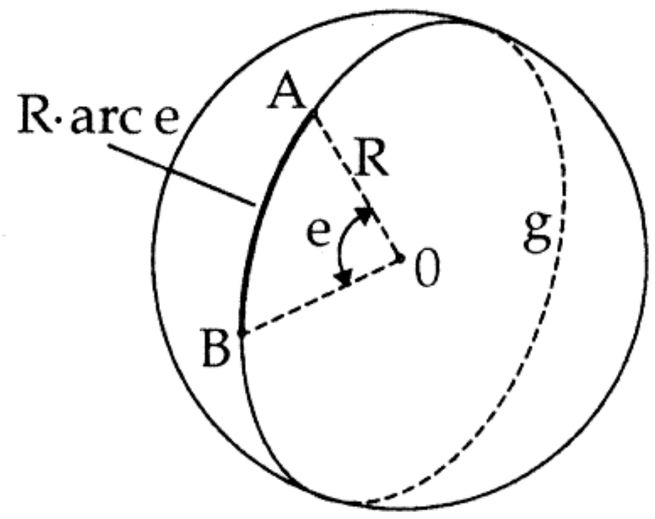
■ A Földgömbön az *egyenlítő*, valamint a *meridiánok* egyesítve ellenmeridiánjukkal (a Föld tengelyére vonatkozó tükörképükkel) főkörök. A szélességi körök kis gömbi körök (lásd még 160. old.).



3.79. ábra.



3.80. ábra.



3.81. ábra.

2. Gömbi távolság

A gömbfelszín két nem átellenes, vagyis nem egyazon átmérő végpontjait képező A és B pontján át végtelen sok kis gömbi kört lehet fektetni, de csak egy főkört (g főkör-síkjában). Fektessünk az A, B pontokon keresztül két k_1, k_2 kis gömbi kört, és forgassuk be őket az A, B pontokon átmenő főkör síkjába **(3.80. ábra)**. A főkörnek van a legnagyobb sugara, tehát a legkisebb görbülete; ezért A és B között a legrövidebb összekötő vonal a két ponton áthaladó főkör kisebbik íve. Ez az ív az A és B pont közötti legrövidebb út a gömb felszínén; hosszúságát *gömbi távolság*nak nevezzük.

3. Geodetikus vonalak

Tetszőleges felületen *geodetikus vonalak*nak nevezzük azokat a görbéket, amelyek bármely két pontjuk között a legrövidebb utat alkotják a felületen (lásd 250. old.).

■ A síkban az egyenesek, a gömbön a főkörök a geodetikus vonalak (lásd még 160. old.).

4. A gömbi távolság mérése

Két pont gömbi távolságát hosszmértékben vagy szögmértékben lehet kifejezni **(3.81. ábra)**.

1. A szögmértékben kifejezett gömbi távolság az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ sugár közötti szög, a gömb O középpontjában mérve. A gömbi távolsághoz ez a szög egyértelműen van hozzárendelve; a továbbiakban latin kisbetűkkel jelöljük. A jelet a gömb középpontjában vagy a főkör-íven lehet feltüntetni.

2. A hosszmértékben kifejezett gömbi távolság az A és B közötti főkör-ív hosszúsága. Jelölése a továbbiakban $\overset{\frown}{AB}$ (ejtsd: AB ív).

3. Az átszámítás szögmértékről hosszmértékre és fordítva a következő képletekkel történik:

$$\overset{\frown}{AB} = R \operatorname{arc} e = R\frac{e}{\varrho}, \qquad (3.159a) \qquad\qquad e = \overset{\frown}{AB}\,\frac{\varrho}{R}. \qquad (3.159b)$$

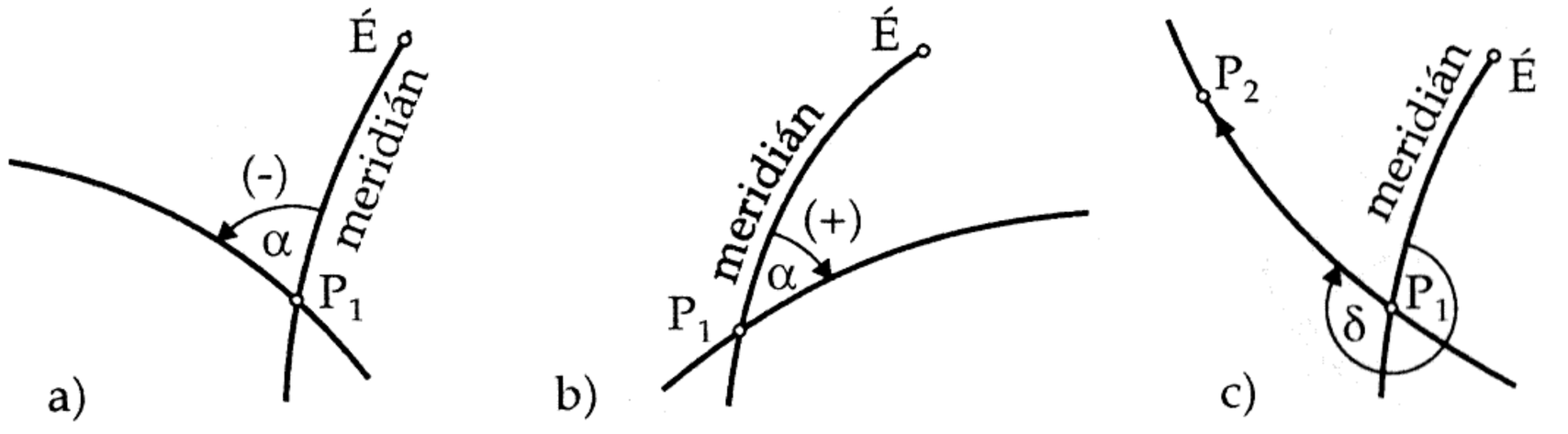
Itt e a fokokban és arc e a radiánban (lásd Ívmérték, 131. old.) mért szög. A ϱ átszámítási tényezőre fennáll

$$\varrho = 1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}2958^\circ = 3438' = 206265''. \qquad (3.159c)$$

A hossz-, ill. szögmértékben való megadás egyenértékű, de a gömbháromszögtanban a gömbi távolságokat rendszerint szögmértékben adjuk meg.

■ **A:** A Föld felületére vonatkozó gömbi számolásoknál olyan gömbből indulnak ki, amelynek térfogata a KRASSOWSKI-féle kéttengelyű referencia-ellipszoidéval egyenlő. Ez a Föld-sugár $R = 6371{,}110$ km, ahonnan $1^\circ \mathrel{\hat{=}} 111{,}2$ km, $1' \mathrel{\hat{=}} 1853{,}3$ m $= 1$ régi tengeri mérföld. Ma 1 tengeri mérföld $= 1852$ m.

■ **B:** A gömbi távolság Drezda és Szentpétervár között $\overset{\frown}{AB} = 1433$ km vagyis $e = \dfrac{1433\,\text{km}}{6371\,\text{km}} 57{,}3^\circ = 12{,}89^\circ = 12^\circ 53'$.



3.82. ábra.

5. Metszésszög, útirányszög és oldalszög (azimut)

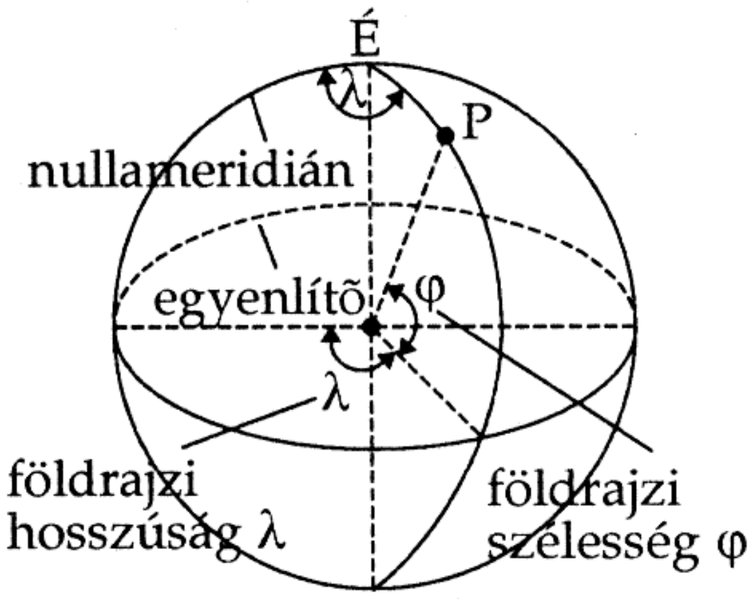
Két gömbfelületi görbe *metszésszög*én azt a szöget értjük, amelyet érintőik a görbék P_1 metszéspontjában bezárnak. Ha a két görbe közül az egyik egy meridián, akkor a P_1-től északra fekvő görbeszakaszok metszésszögét a navigációban *útirányszög*nek hívjuk és α-val jelöljük. A görbe keleti vagy nyugati elhajlásának megkülönböztetésére az útirányszöghöz előjelet rendelünk a **3.82.a,b ábrák** szerint, és a szöget a $-90° < \alpha \leq 90°$ intervallumra korlátozzuk. Tehát az útirányszög irányított, azaz előjellel ellátott szög. Az útirányszög független a görbe irányításától, vagyis befutási irányától.

A görbének a **3.82.c ábra** szerint P_1-től P_2 felé való irányítását a δ *oldalszög* írja le: ez a görbék P_1 metszéspontján átmenő, észak felé mutató meridián és a P_1-től P_2 felé haladó görbeszakasz közötti metszésszög. Az oldalszög számára a $0° \leq \delta < 360°$ intervallumot engedjük meg.

Megjegyzés: A navigációban a helykoordinátákat legtöbbször régi fokokban és hatvanas számrendszerben, viszont a gömbi távolságokat, valamint az útirányszögeket és oldalszögeket régi fokokban és tízes számrendszerben adják meg.

3.4.1.2. Speciális koordinátarendszerek

1. Földrajzi koordináták



3.83. ábra.

A Föld felszínének P pontját földrajzi koordinátákkal határozzuk meg **(3.83. ábra)**, vagyis gömbkoordinátákkal: a Föld sugarával, a λ *földrajzi hosszúság*gal és a φ *földrajzi szélesség*gel. A hosszúsági fokok számolásához a Föld felszínét az Északi-sarktól a Déli-sarkig húzódó fél főkörökre, a *meridiánokra* osztjuk fel. A nullameridiántól, amely a *Greenwhich*-i csillagvizsgálón halad át, kelet és nyugat felé 180–180, egész számmal jelzett meridiánt különböztetünk meg; ezek a keleti hosszúságot (k. h.), ill. nyugati hosszúságot (ny. h.) adják meg. A szomszédos párok egyenlítőn mért távolsága 111 km. A keleti hosszúságok pozitív, a nyugati hosszúságok negatív előjelet kapnak. Eszerint $-180° \leq \varphi \leq 180°$.

A szélességi fokok számolásához a Föld felszínét az egyenlítővel párhuzamos kis gömbi körökre, a szélességi körökre osztjuk fel. Az egyenlítőtől, amely főkör, észak és dél felé 90–90, egész számmal jelzett szélességi kört különböztetünk meg; ezek az északi szélességet (é. sz.), ill. déli szélességet (d. sz.) adják meg. Az északi szélességek pozitív, a déli szélességek negatív előjelet kapnak. Tehát $-180° \leq \varphi \leq 180°$.

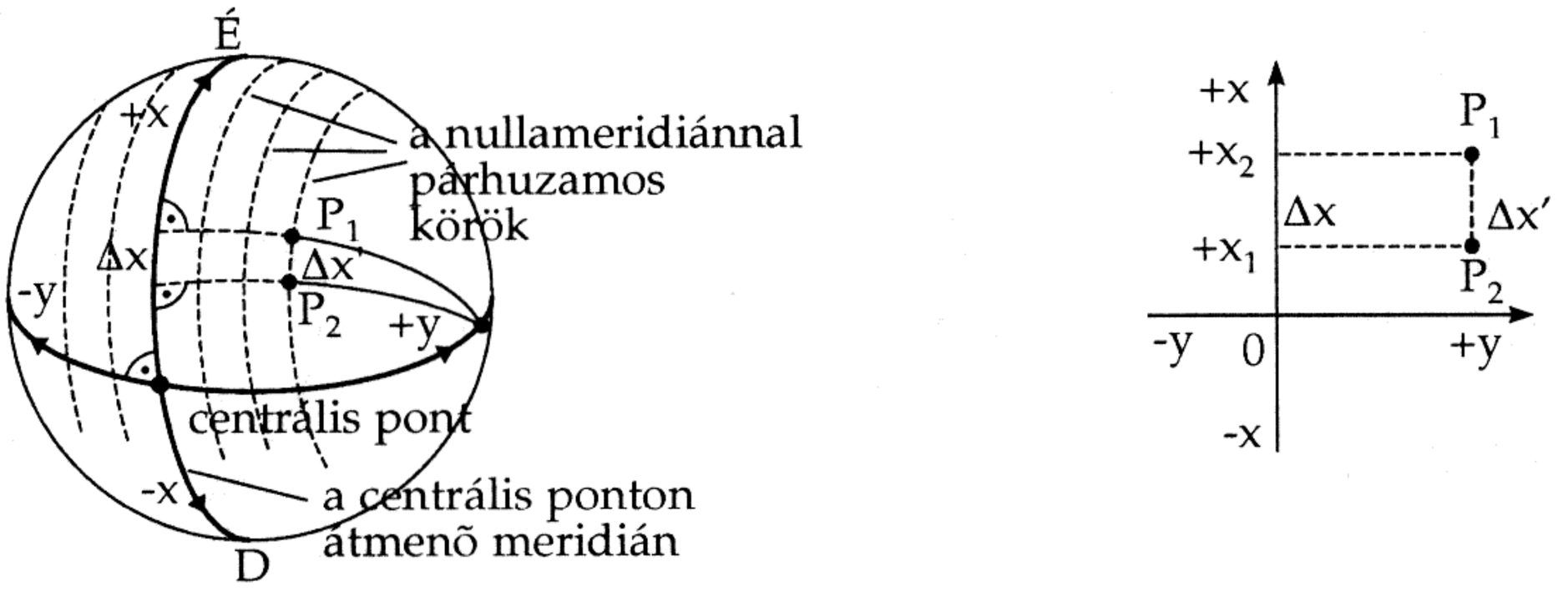
2. Soldner-koordináták

A derékszögű SOLDNER-*koordináták*nak és GAUSS–KRÜGER-*koordináták*nak nagy területre kiterjedő méréseknél van jelentőségük. Hogy a Föld görbült felszínének egy-egy részét ordinátairányban hosszú-

ságtartóan tudjuk egy síkbeli derékszögű koordinátarendszerbe leképezni, SOLDNERt követve az x-tengelyt egy meridiánra, a koordinátarendszer kezdőpontját pedig egy jól felmért centrális pontba helyezzük **(3.84.a ábra)**. Egy P pont y ordinátáját és x abszcisszáját a centrális ponton átmenő főmeridiánra, ill. a centrális ponton átmenő fő szélességi körre bocsátott gömbi merőleges talppontjától a centrális pontig mért szakasz adja meg **(3.84.b ábra)**. Amikor a gömbi abszcisszákat és ordinátákat átvisszük a síkbeli koordinátarendszerbe, a Δx szakaszok megnyúlnak és az irányok megváltoznak. Az abszcisszairányban az *a nyújtási tényező*

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta x'} = 1 + \frac{y^2}{2R^2}\,, \quad R = 6371\,\mathrm{km}\,. \tag{3.160}$$

A megnyúlás korlátozása céljából a rendszer a főmeridián mindkét oldalán legfeljebb 64 km távolságig terjedhet. Ha $y = 64$ km, akkor 1 km hosszúságú szakasz megnyúlása 0,05 m.



3.84. ábra.

3. Gauss–Krüger-koordináták

Hogy a Föld görbült felszínének egy-egy részét szögtartóan (konformisan) tudjuk a síkba leképezni, a GAUSS–KRÜGER-*rendszer* esetében meridiáncsíkokra való felosztást alkalmazunk. Németországban a középmeridiánok helyzete 6°, 9°, 12° és 15° k. h. **(3.85.a ábra)**. Mindegyik meridiáncsík koordinátarendszerének kezdőpontja a meridiánnak az egyenlítővel való metszéspontja. Észak-déli irányban a rendszerek az egész tartományt felölelik, kelet-nyugati irányban a tartományok mindkét oldalon 1°40′-re vannak korlátozva. Németországban ez kb. ±100 km. A kb. 20′-es átfedés itt kb. 20 km-nek felel meg.

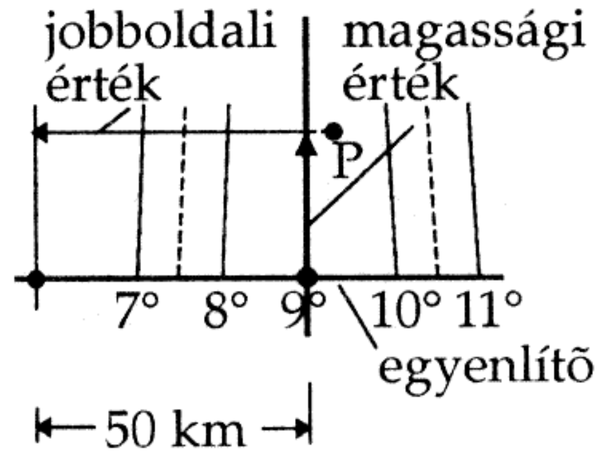
Az abszcisszairányú a nyújtási tényező **(3.85.b ábra)** ugyanaz, mint a SOLDNER-rendszernél (3.160). Mivel a leképezés szögtartó, az ordinátákat a merőlegesek talppontjaiban egy b érték hozzáadásával meg kell hosszabbítani:

$$b = \frac{y^3}{6R^2}\,. \tag{3.161}$$

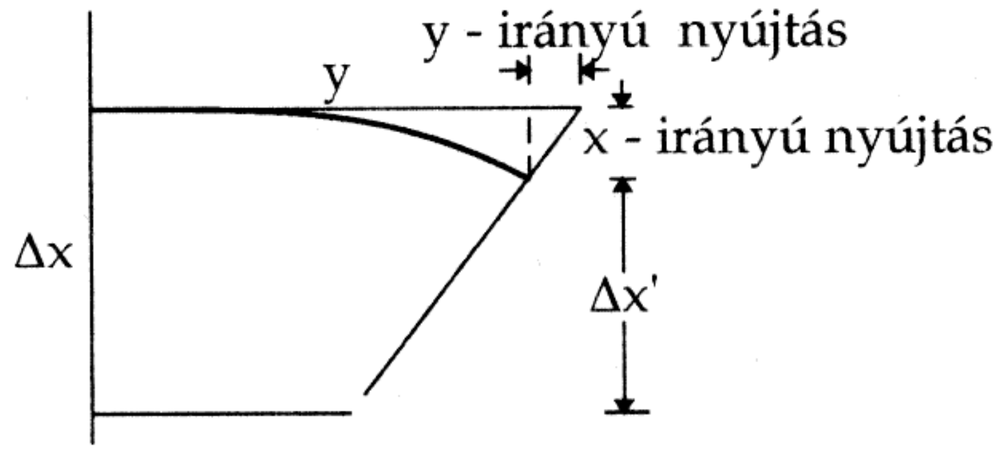
3.4.1.3. Gömbkétszög

Fektessünk a gömb valamely átmérőjének A és B végpontján keresztül egy Γ_1 és egy Γ_2 síkot, amelyek egymással α szöget zárnak be **(3.86. ábra)**, és amelyek egy g_1 és egy g_2 fél főkört határoznak meg. A gömbfelület két fél főkör által határolt részét *gömbkétszög*nek nevezzük. A gömbkétszög oldalainak nevezzük az A és B között a főkörökön mért gömbi távolságot. Ennélfogva mindegyik oldal 180°-os.

A gömbkétszög szögeit mint a g_1, g_2 főkörök A, B pontokban vett érintőinek szögét definiáljuk. Ezek egyenlők és megegyeznek a Γ_1 és Γ_2 közötti ún. *ékszög*gel, α-val. Ha C és D az A, B pontokon átmenő két főkör-ív felezőpontjai, akkor az α szöget mint a C és D pontok gömbi távolságát is fel lehet fogni. A

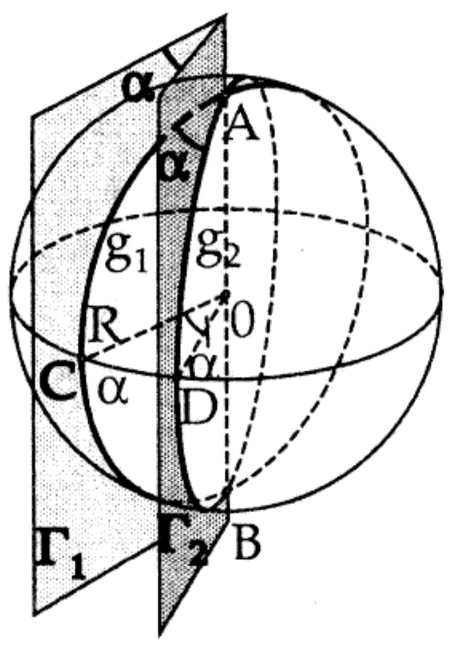


a)

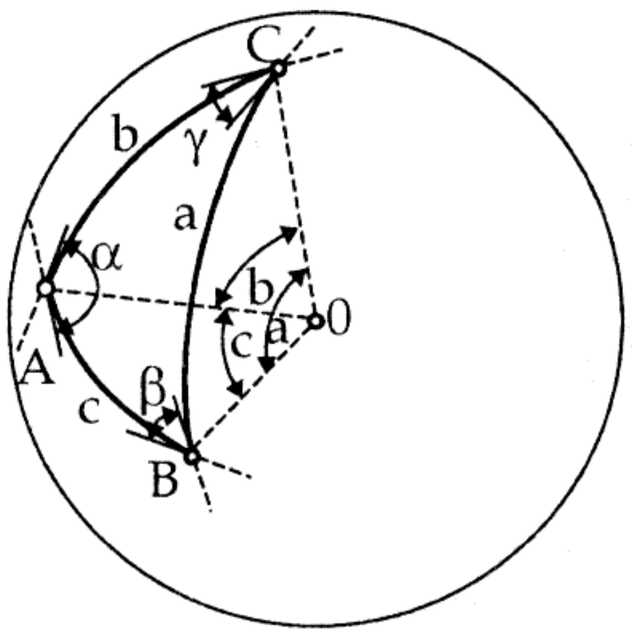


b)

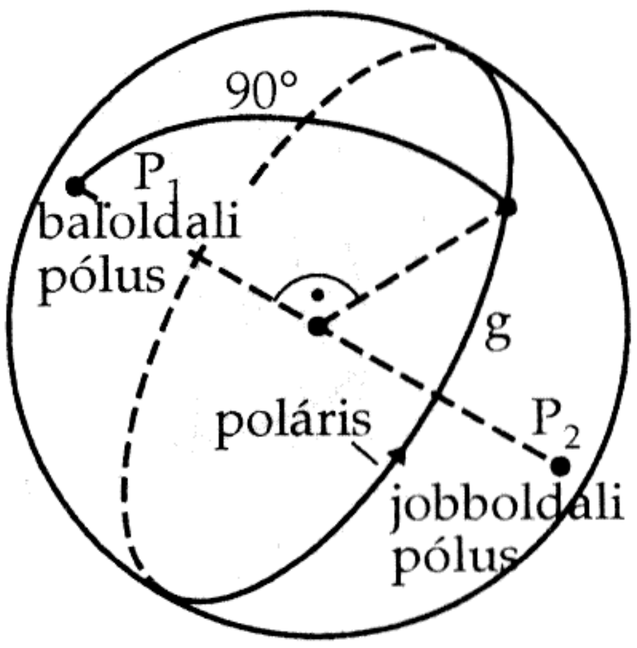
3.85. ábra.



3.86. ábra.



3.87. ábra.



3.88. ábra.

gömbkétszög A felszíne úgy aránylik a gömb felszínéhez, mint α aránylik a 360°-hoz. Ebből következik, hogy

$$A = \frac{4\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{2R^2\alpha}{\rho} = 2R^2 \operatorname{arc}\alpha\,. \tag{3.162}$$

3.4.1.4. Gömbháromszög

Legyen A, B és C egy gömbfelület három pontja, amelyek nem fekszenek egy főkörön. Ha két-két pontot főkörrel kötünk össze **(3.87. ábra)**, az *ABC gömbháromszöget* kapjuk.

A gömbháromszög oldalait az A, B, C pontok közötti gömbi távolságokkal, vagyis az $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ és $\overline{OC}$ sugarak között a gömb középpontjában mért szögekkel definiáljuk. Jelük a, b és c lesz, és a továbbiakban szögmértékben adjuk meg őket függetlenül attól, hogy a rajzon a gömb középpontjában elhelyezett szögként vagy a gömbfelületen levő főkör-ívként vannak feltüntetve. A gömbháromszög szögei a három főkör síkja közötti szögek. Jelük α, β és γ lesz. A gömbháromszög csúcsainak, oldalainak és szögeinek jelölési sorrendje analóg a síkbeli háromszögével. Ha egy gömbháromszögnek legalább az egyik oldala 90°-os, derékszögű háromszögnek nevezzük. A derékszögű gömbháromszög a derékszögű síkháromszög analogonja.

3.4.1.5. Polárgömbháromszög

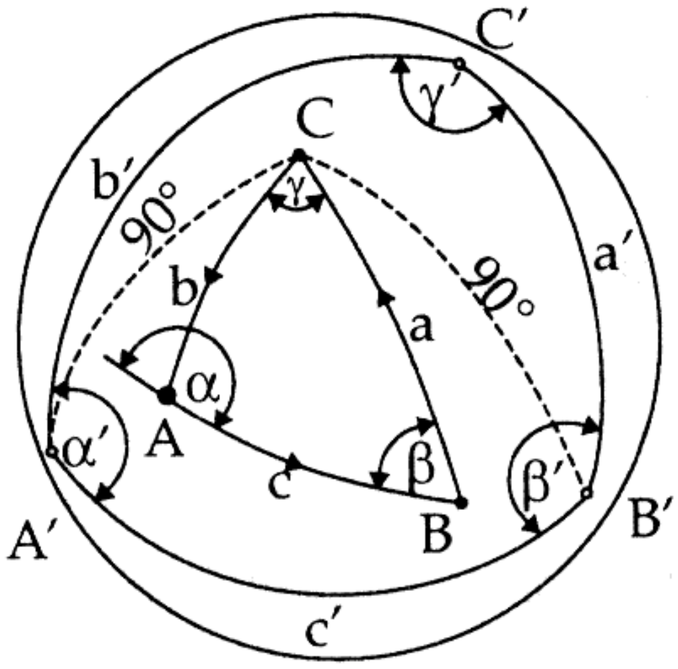
1. Pólusok és poláris A *poláris*nak nevezett g főkör síkjára merőleges gömbátmérő P_1, P_2 végpontjait **(3.88. ábra)** *pólusok*nak nevezzük. Egy pólustól a g főkör tetszőleges pontjáig mért gömbi távolság mindig 90°. A poláris irányítását szabadon lehet megválasztani. A poláris választott irányban történő bejárásakor balra eső pólust *bal oldali*, a jobbra esőt *jobb oldali pólus*nak nevezzük.

2. Polárgömbháromszög Az $A'B'C'$ gömbháromszög az adott A, B, C gömbháromszögnek polárgömbháromszöge, ha oldalaira vonatkozóan az adott háromszög csúcsai pólusok **(3.89. ábra)**. Min-

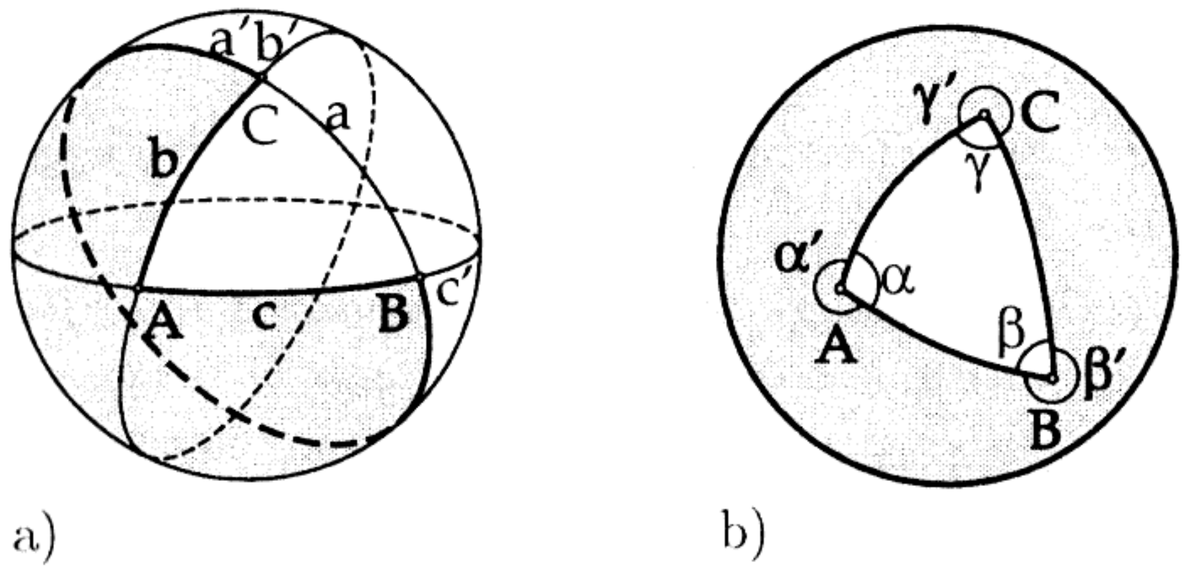
den ABC gömbháromszöghöz létezik egy $A'B'C'$ polárgömbháromszög. Ha az $A'B'C'$ háromszög az ABC gömbháromszögnek polárgömbháromszöge, akkor az ABC háromszög is polárgömbháromszöge az $A'B'C'$ háromszögnek. A gömbháromszög szögei és polárgömbháromszögének megfelelő oldalai egymás kiegészítő szögei, másrészt a gömbháromszög oldalai és a polárgömbháromszög szögei szintén kiegészítő szögek:

$$a' = 180° - \alpha\,, \qquad b' = 180° - \beta\,, \qquad c' = 180° - \gamma\,, \tag{3.163a}$$

$$\alpha' = 180° - a\,, \qquad \beta' = 180° - b\,, \qquad \gamma' = 180° - c\,. \tag{3.163b}$$



3.89. ábra.



3.90. ábra.

3.4.1.6. Euler-féle és nem Euler-féle háromszögek

A gömbháromszög A, B, C csúcsai a két csúcson átmenő mindegyik főkört két, általában nem egyenlő részre osztják. Ezáltal több különböző gömbháromszög jön létre, pl. a **3.90.a ábrán** vonalkázással jelölt, az a', b, c oldalakkal rendelkező gömbháromszög. Egy EULERtől származó konvenció szerint gömbháromszög oldalainak csak olyan főkör-íveket választunk, amelyek 180°-nál kisebbek. Ez megfelel annak a definíciónak, hogy az oldalak a csúcsok közötti gömbi távolságok. Ebben az összefüggésben azokat a gömbháromszögeket, amelyeknek minden oldala és minden szöge 180°-nál kisebb, EULER-féle háromszögeknek, a többieket pedig nem EULER-féle háromszögeknek nevezzük. A **3.90.b ábrán** egy EULER-féle és egy nem EULER-féle háromszög látható.

3.4.1.7. Triéder

*Triéder*nek nevezünk egy háromoldalú testszögletet, amelyet egy O csúcspontból kiinduló három s_a, s_b, s_c félegyenes **(3.91.a ábra)**, a három él, alkot. A triéder oldalait a két-két él által bezárt a, b, c szögekkel definiáljuk. A két él között elhelyezkedő tartományokat a triéder oldallapjainak nevezzük. A triéder szögei a két-két oldallap által bezárt α, β és γ ékszögek. A triéder az O csúcspont körüli gömbökből gömbháromszöget vág ki **(3.91.b ábra)**. A gömbháromszög és a hozzá tartozó triéder oldalai és szögei páronként megegyeznek. Ezért a triéderre levezetett tételek a megfelelő gömbháromszögre is érvényesek, és megfordítva.

3.4.2. A gömbháromszögek fő tulajdonságai

3.4.2.1. Általános állítások

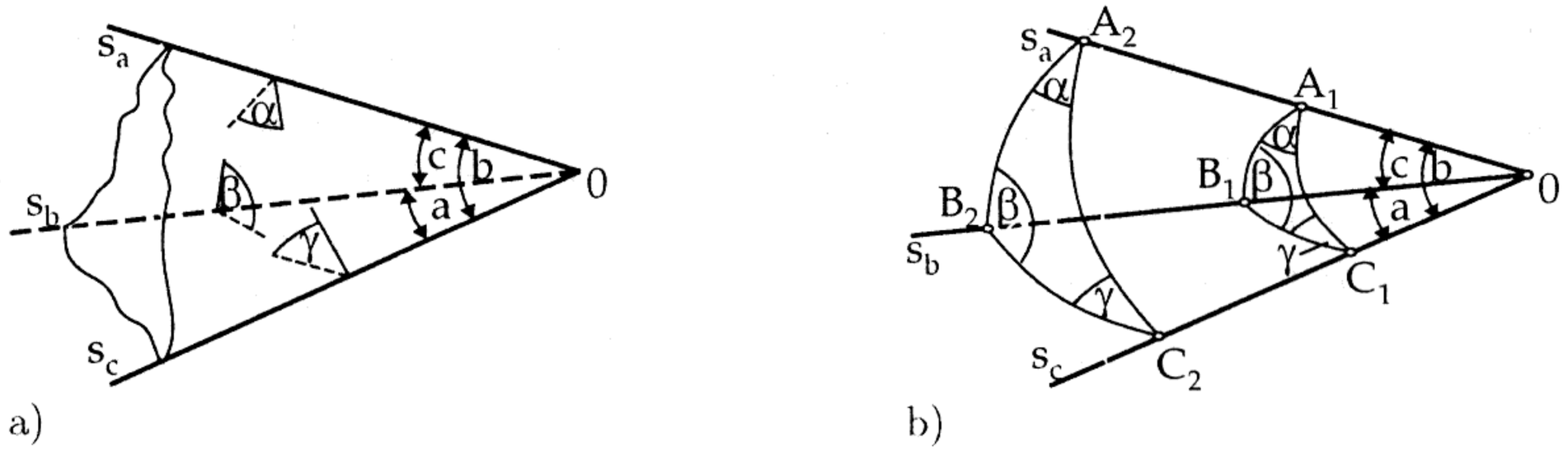
EULER-féle háromszögben, amelynek oldalai a, b, c és a velük szemben fekvő szögek α, β és γ teljesülnek a következő állítások:

1. **Az oldalak összege** Az oldalak összege 0° és 360° között van:

$$0° < a + b + c < 360°\,. \tag{3.164}$$

2. **Két oldal összege** Két oldal összege nagyobb, mint a harmadik, pl.

$$a + b > c\,. \tag{3.165}$$



3.91. ábra.

3. Két oldal különbsége Két oldal különbsége kisebb, mint a harmadik oldal, pl.

$$|a-b|<c\,. \tag{3.166}$$

4. A szögek összege A szögek összege 180° és 540° között van:

$$180^\circ<\alpha+\beta+\gamma<540^\circ\,. \tag{3.167}$$

5. Gömbi felesleg Az $\epsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ különbséget *gömbi felesleg*nek (*szférikus excesszusnak*) hívjuk.

6. Két szög összege Két szög összege kisebb, mint a 180°-kal megnövelt harmadik szög, pl.

$$\alpha+\beta<\gamma+180^\circ\,. \tag{3.168}$$

7. Szemben fekvő oldalak és szögek Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik, és viszont.

8. Felszín A gömbháromszög F felszínét az ϵ gömbi feleslegből és a gömb R sugarából az

$$F=\epsilon R^2\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{R^2\epsilon}{\varrho}=R^2\operatorname{arc}\epsilon \tag{3.169a}$$

képlettel lehet kiszámítani, ahol ϱ a (3.159c) átszámítási tényező. Ha a gömb felszíne F_G, akkor GIRARD tétele szerint

$$F=\frac{F_G}{720^\circ}\epsilon\,. \tag{3.169b}$$

Ha nem a gömbi felesleg, hanem az oldalak ismertek, akkor ϵ a L'HUILIER-féle (3.184) képlet segítségével számítható ki.

3.4.2.2. Alapképletek és alkalmazásaik

Az e szakaszban szereplő mennyiségek jelölését lásd a **3.87. ábrán**.

1. Szinusztétel

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,, \tag{3.170a}$$

$$\frac{\sin b}{\sin c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,, \tag{3.170b}$$

$$\frac{\sin c}{\sin a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,. \tag{3.170c}$$

A (3.170a)–(3.170c) egyenletek állandó arányként is felírhatók, vagyis a gömbháromszögben az oldalak szinuszai ugyanúgy viselkednek, mint a velük szemben fekvő szögek szinuszai:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}\,. \tag{3.170d}$$

A gömbháromszögtan szinusztétele megfelel a síkbeli trigonometria szinusztételének.

2. Koszinusztétel vagy oldalakra vonatkozó koszinusztétel

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha\,, \tag{3.171a}$$

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta\,, \tag{3.171b}$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma\,. \tag{3.171c}$$

A gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó koszinusztétele megfelel a síkbeli trigonometria koszinusztételének. Az „oldalakra vonatkozó koszinusztétel" elnevezés azt fejezi ki, hogy ebben a tételben a gömbháromszög három oldala szerepel.

3. Szinusz-koszinusztétel

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \,, \tag{3.172a}$$

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha \,. \tag{3.172b}$$

Ciklikus felcseréléssel további négy egyenletet kapunk **(3.32. ábra)**.
A szinusz-koszinusztétel a síkbeli trigonometria vetítési tételének felel meg. Mivel a gömbháromszög öt adatát tartalmazza, gömbháromszögek megoldására közvetlenül nem alkalmazzuk, hanem leginkább további egyenletek levezetésére.

4. Szögekre vonatkozó vagy poláris koszinusztétel

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \,, \tag{3.173a}$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \,, \tag{3.173b}$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \,. \tag{3.173c}$$

A szögekre vonatkozó koszinusztételben a gömbháromszög mindhárom szöge és egyik oldala szerepel. A tétel segítségével egy oldalból és a vele szomszédos két szögből kiszámítható a harmadik szög, illetve három szögből kiszámítható a háromszög egyik oldala vagy mindhárom oldal. Ezzel szemben a síkháromszögnél a harmadik szög a 180°-os szögösszegből adódik.

Megjegyzés: A síkháromszögnél három megadott szögből az oldalakat nem lehet kiszámítani, mert ezen adatokhoz végtelen sok, egymáshoz hasonló háromszög tartozik.

5. Poláris szinusz-koszinusztétel

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a \,, \tag{3.174a}$$

$$\sin \alpha \cos c = \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \cos \beta \cos a \,. \tag{3.174b}$$

Ciklikus felcseréléssel további négy egyenletet kapunk **(3.32. ábra)**.
A szögekre vonatkozó koszinusztételhez hasonlóan a poláris szinusz-koszinusztételt se nagyon használjuk gömbháromszögek közvetlen megoldására, annál inkább további képletek levezetésére.

6. Félszög-tétel

Gömbháromszög egy szögének a három oldalból való kiszámítására az oldalakra vonatkozó koszinusztételt lehet használni. A félszög-tétel, hasonlóan a síkbeli trigonometria félszög-tételéhez, lehetőséget nyújt, hogy a szöget a numerikus szempontból előnyösebb tangensfüggvényből számítsuk ki.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} \,, \tag{3.175a}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}} \,, \tag{3.175b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}} \,, \tag{3.175c}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \,. \tag{3.175d}$$

Ha egy gömbháromszög három oldalából mindhárom szöget ki kell számítani, kedvezőbb lehet a következő számolás:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \,, \tag{3.176a}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \,, \tag{3.176b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}, \quad \text{ahol} \tag{3.176c}$$

$$k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \,, \tag{3.176d}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \,. \tag{3.176e}$$

7. Féloldal-tétel

A féloldal-tétel segítségével a gömbháromszög három szögéből meg lehet határozni az egyik oldalt vagy mindhárom oldalt:

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}\,, \quad (3.177a) \qquad \operatorname{ctg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\alpha)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}}\,, \quad (3.177b)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}}\,, \quad (3.177c) \qquad \sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,, \quad (3.177d)$$

vagyis

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}=\frac{k'}{\cos(\sigma-\alpha)}\,, \quad (3.178a) \qquad \operatorname{ctg}\frac{b}{2}=\frac{k'}{\cos(\sigma-\beta)}\,, \quad (3.178b)$$

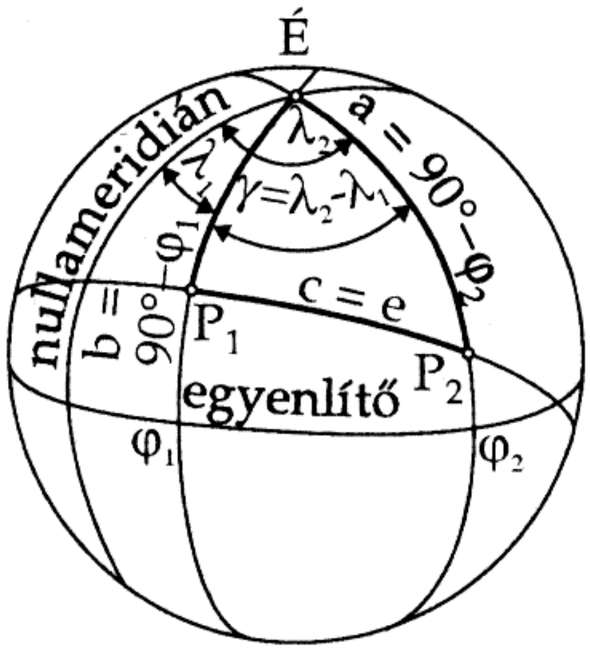
$$\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\frac{k'}{\cos(\sigma-\gamma)}, \quad \text{ahol} \quad (3.178c)$$

$$k'=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}\,, \quad (3.178d) \qquad \sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,. \quad (3.178e)$$

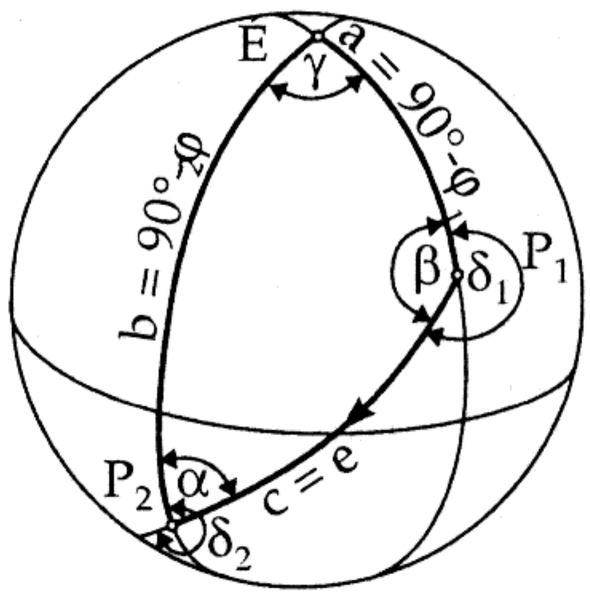
A gömbháromszög szögösszegére (3.167) szerint fennáll

$$180^\circ<2\sigma<540^\circ \quad \text{azaz} \quad 90^\circ<\sigma<270^\circ\,, \quad (3.179)$$

úgyhogy $\cos\sigma<0$ kell hogy legyen. Továbbá az EULER-féle háromszögekre vonatkozó konvenció miatt mindegyik előforduló négyzetgyök valós.



3.92. ábra.



3.93. ábra.

8. A gömbháromszögtan alapképleteinek alkalmazásai

Az ismertetett alapképletek segítségével pl. távolságokat és oldalszögeket, ill. útirányszögeket lehet a Földön meghatározni.

■ **A:** Kiszámítandó a Drezda ($\lambda_1=13^\circ46'$, $\varphi_1=51^\circ16'$) és Alma Ata ($\lambda_2=76^\circ55'$, $\varphi_2=43^\circ18'$) közötti legkisebb távolság.

Megoldás: A (λ_1,φ_1), (λ_2,φ_2) földrajzi koordináták és az $É$ Északi-sark **(3.92. ábra)** meghatározzák a $P_1P_2É$ háromszög két, meridiánokon fekvő $a=90^\circ-\varphi_2$ és $b=90^\circ-\varphi_1$ oldalát, valamint az általuk bezárt $\gamma=\lambda_2-\lambda_1$ szöget. A $c=e$ választással a (3.171a) koszinusztételből kapjuk:

$$\cos c=(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma)\,,$$
$$\cos e=\cos(90^\circ-\varphi_1)\cos(90^\circ-\varphi_2)+\sin(90^\circ-\varphi_1)\sin(90^\circ-\varphi_2)\cos(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\,. \tag{3.180}$$

Tehát $\cos e = 0{,}53498 + 0{,}20567 = 0{,}74065$, $e = 42{,}213°$. A P_1P_2 főkör-ív hosszúsága (3.159a) szerint 4694 km.

■ **B:** Egy hajó a Bombay ($\lambda_1 = 72°48'$, $\varphi_1 = 19°00'$) és Dar es Salaam ($\lambda_2 = 39°\ 28'$, $\varphi_2 = -6°49'$) közötti utat a főkör mentén teszi meg. Kiszámítandó a δ_1 indulási és δ_2 érkezési útirányszög, valamint a tengeri mérföldben kifejezett távolság.

Megoldás: A $(\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_2, \varphi_2)$ földrajzi koordináták által meghatározott $P_1P_2É$ gömbháromszög **(3.93. ábra)** két oldala $a = 90° - \varphi_1 = 71°00'$, $b = 90° - \varphi_2 = 96°49'$, az általuk bezárt szög pedig $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2 = 33°20'$. A (3.171c) $\cos c = \cos e = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$ koszinusztétel alapján $P_1P_2 = e = 41{,}777°$, és mivel $1' \approx 1$ sm (tengeri mérföld), azért $P_1P_2 \approx 2507$ sm.

Az oldalakra vonatkozó koszinusztételből $\alpha = \arccos\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 51{,}248°$ és

$\beta = \arccos\dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 125{,}018°$. Tehát $\delta_1 = 360° - \beta = 234{,}982°$ és $\delta_2 = 180° + \alpha = 231{,}248°$.

Megjegyzés: Oldalakat és szögeket szinusztétellel kiszámítani csak akkor van értelme, ha a feladatból kitűnik, hogy hegyesszögekről vagy tompaszögekről van szó.

3.4.2.3. További képletek

1. Delambre-féle egyenletek

A gömbháromszögekre vanatkozó, a síkbeli trigonometria MOLLWEIDE-féle képleteivel analóg képleteket DELAMBRE adta meg.

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,, \tag{3.181a}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,, \tag{3.181b}$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,, \tag{3.181c}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,. \tag{3.181d}$$

Mivel ciklikus felcseréléssel mindegyik egyenletből két továbbit kapunk, összesen 12 DELAMBRE-féle egyenlet lehetséges.

2. Napier-féle egyenletek és tangenstétel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,, \tag{3.182a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,, \tag{3.182b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,, \tag{3.182c}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,. \tag{3.182d}$$

Ezeket az egyenleteket NAPIER-analógiáknak is hívják. Belőlük levezethetők a síkbeli trigonometria tangenstételével analóg alábbi képletek:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad (3.183a)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}, \qquad (3.183b)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}. \qquad (3.183c)$$

3. L'Huilier-formula

Gömbháromszög felszínét az ϵ gömbi felesleg segítségével lehet kiszámítani. Ez történhet az ismert α, β, γ szögekből a (3.169a) képlettel vagy, ha az a, b, c oldalak az ismertek, a szögeket a (3.176a)–(3.176e) képletekből nyerjük. A L'HUILIER-formula azonban lehetővé teszi ϵ-nak az oldalakból való közvetlen kiszámítását:

$$\operatorname{tg}\frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}. \qquad (3.184)$$

A formula a síkbeli trigonometria HÉRON-féle területképletének felel meg.

3.4.3. Gömbháromszögek megoldása

3.4.3.1. Alapfeladatok, pontossági megfontolások

A gömbháromszögek megoldása során fellépő különféle eseteket ún. *alapfeladatok*ba soroljuk be. A ferdeszögű gömbháromszög mindegyik alapfeladatát többféleképpen lehet megoldani attól függően, hogy csak a (3.170a)–(3.174b) alapképleteket, vagy a (3.175a)–(3.184) képleteket is használjuk, és hogy a háromszögnek egy vagy több adatát keressük.
A tangensfüggvényt tartalmazó képletek pontosabb numerikus eredményt adnak, különösen azzal összehasonlítva, amikor a szinuszfüggvényből egy 90° körüli és a koszinuszfüggvényből egy 0° vagy 180° körüli adatot számítunk ki. Ezenkívül EULER-féle háromszögeknél a szinuszfüggvényből kiszámított adatoknak két értékük van, ugyanis a szinuszfüggvény mindkét első síknegyedben pozitív, viszont a többi függvényből egyértelmű adatokat kapunk.

3.4.3.2. Derékszögű gömbháromszög

1. Speciális képletek

A derékszögű gömbháromszög egyik szöge 90°-os. Az oldalak és szögek jelölése hasonlóan történik, mint a derékszögű síkháromszögben. Ha, mint a **3.94. ábrán**, γ derékszög, akkor a c oldalt átfogónak, az a és b oldalt pedig befogónak nevezzük. A (3.170a)–(3.184) összefüggésekből $\gamma = 90°$ esetén következik:

$$\sin a = \sin\alpha \sin c, \qquad (3.185a)$$

$$\sin b = \sin\beta \sin c, \qquad (3.185b)$$

$$\cos c = \cos a \cos b, \qquad (3.185c)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \qquad (3.185d)$$

$$\operatorname{tg} a = \cos\beta \operatorname{tg} c, \qquad (3.185e)$$

$$\operatorname{tg} b = \cos\alpha \operatorname{tg} c, \qquad (3.185f)$$

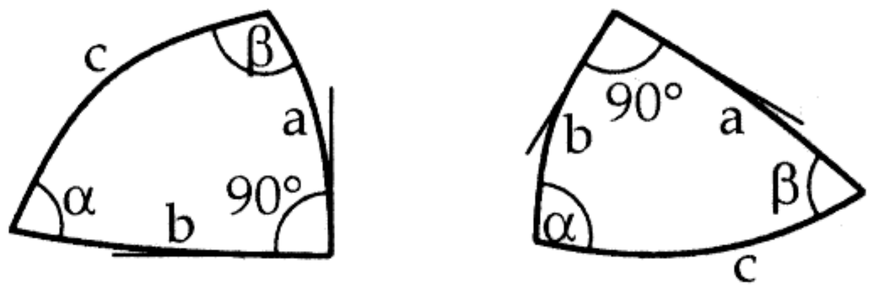
$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg}\beta, \qquad (3.185g)$$

$$\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg}\alpha, \qquad (3.185h)$$

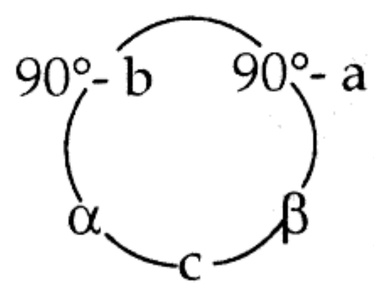
$$\cos\alpha = \sin\beta \cos a, \qquad (3.185i)$$

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos b, \qquad (3.185j)$$

Ha bizonyos feladatokban más oldalak és szögek lépnek fel, pl. α, β, γ helyett b, γ, α, akkor a szükséges egyenleteket ciklikus felcseréléssel lehet megkapni. Derékszögű gömbháromszögekkel való számolásoknál általában három megadott mennyiségből indulunk ki, a $\gamma = 90°$ szögből és két másik adatból. Így hat alapfeladat adódik; ezek a **3.6. táblázatban** vannak feltüntetve.



3.94. ábra.



3.95. ábra.

2. Napier-szabály

A NAPIER-szabály a (3.185a)–(3.185j) egyenletek összefoglalása. Ha a derékszögű gömbháromszög öt meghatározó adatát (a derékszöget nem szerepeltetve) egy kör mentén rendezzük el ugyanabban a sorrendben, mint ahogyan a háromszögben fellépnek, és ha ennek során az a, b befogókat a $90° - a$ és $90° - b$ pótszögekkel helyettesítjük **(3.95. ábra)**, akkor:

1. Bármely meghatározó adat koszinusza egyenlő a két vele szomszédos meghatározó adat kotangensének szorzatával.

2. Bármely meghatározó adat koszinusza egyenlő a vele nem szomszédos meghatározó adatok szinuszainak szorzatával.

3.6. táblázat. Derékszögű gömbháromszög meghatározó adatai

Alap-feladat	Megadott meghatározó adatok	Többi adatok meghatározására szolgáló képletek sorszáma
1.	Átfogó és egy befogó c, a	α (3.185a), β (3.185e), b (3.185c)
2.	Két befogó a, b	α (3.185h), β (3.185g), c (3.185c)
3.	Átfogó és egy szög c, α	a (3.185a), b (3.185f), β (3.185d)
4.	Egy befogó és a mellette fekvő szög a, β	c (3.185e), b (3.185j), α (3.185i)
5.	Egy befogó és a vele szemben fekvő szög a, α	b (3.185h), c (3.185a), β (3.185i)
6.	Két szög α, β	a (3.185i), b (3.185j), c (3.185d)

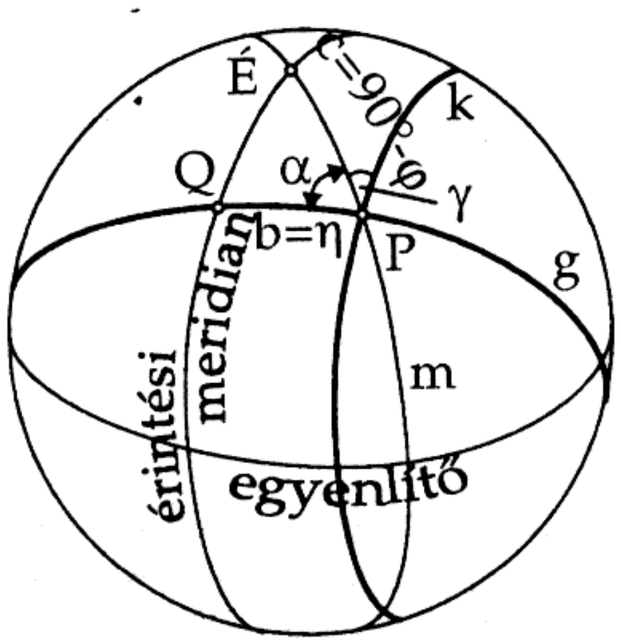
■ **A:** $\cos\alpha = \operatorname{ctg}(90° - b)\operatorname{ctg} c = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$ (lásd (3.185a)).

■ **B:** $\cos(90° - a) = \sin c \sin\alpha = \sin a$ (lásd (3.185f)).

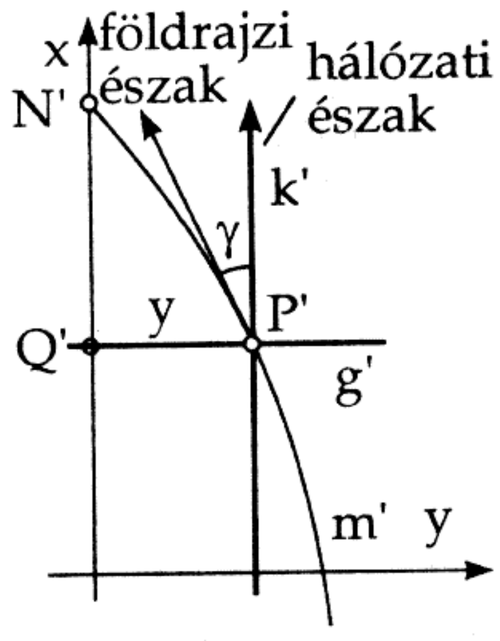
■ **C:** A gömb fokhálózatát olyan hengerre kell leképezni, amely a gömböt egy meridián mentén érinti. Az érintési meridián és az egyenlítő egy GAUSS–KRÜGER-féle koordinátarendszer tengelyeit alkotják **(3.96.a,b ábrák)**.

Megoldás: A gömbfelület P pontja a sík P' pontjába megy át. A P ponton áthaladó, az érintési meridiánra merőleges g főkör képe egy az x-tengelyre merőleges g' egyenes, a P ponton áthaladó, az érintési meridiánnal párhuzamos k kis gömbi köré pedig egy az x-tengellyel párhuzamos k' egyenes. A P ponton átmenő m meridián képe nem egyenes, hanem egy m' görbe. Az m' görbe P-beli érintőjének felfelé mutató iránya a *földrajzi északot*, k' felfelé mutató iránya pedig a *geodéziai északot* adja meg. A két északi irány közötti γ szöget *meridián-összetartás*nak hívjuk.

A $QP\acute{E}$ derékszögű gömbháromszögben, ahol $c = 90° - \varphi$ és $b = \eta$ a γ szög az $\alpha = 90° - \gamma$ képletből

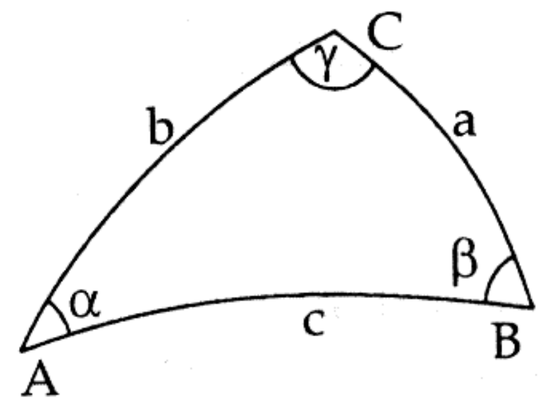


a)



b)

3.96. ábra.



3.97. ábra.

adódik. A NAPIER-szabály alapján $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$, vagyis $\cos(90° - \gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{tg}(90° - \varphi)}$, $\sin\gamma = \operatorname{tg}\eta\operatorname{tg}\varphi$. Mivel γ és η a legtöbb esetben kicsi, a $\sin\gamma \approx \gamma$, $\operatorname{tg}\eta \approx \eta$ képletek szerint innen $\gamma = \eta\operatorname{tg}\varphi$. E hengervázlat γ hossztorzítása kis η távolságok esetén kicsi, így alkalmazhatjuk az $\eta = \dfrac{y}{R}$ helyettesítést, ahol y a P jobb oldali értéke. Azt kapjuk, hogy $\gamma = \dfrac{y}{R}\operatorname{tg}\varphi$. Ha a γ szöget ívmértékről fokokra számítjuk át, akkor a $\varphi = 50°$, $y = 100$ km értékekkel a $\gamma = 0{,}018706$, azaz $\gamma = 1°04'19''$ meridián-összetartás adódik.

3.4.3.3. Ferdeszögű gömbháromszög

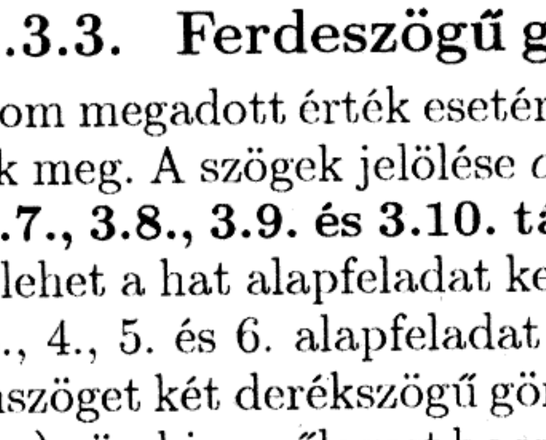
Három megadott érték esetén, mint a derékszögű gömbháromszögnél is, hat alapfeladatot különböztetünk meg. A szögek jelölése α, β, γ és a velük szemben fekvő oldalaké a, b, c **(3.97. ábra)**.

A **3.7., 3.8., 3.9. és 3.10. táblázatban** összefoglaltuk, mely képletekkel melyik meghatározó adatokat lehet a hat alapfeladat keretében különböző megoldási utakon át meghatározni.

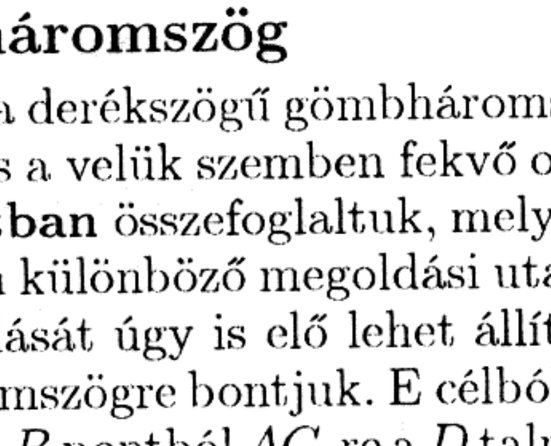
A 3., 4., 5. és 6. alapfeladat megoldását úgy is elő lehet állítani, hogy az adott ferdeszögű gömbháromszöget két derékszögű gömbháromszögre bontjuk. E célból a 3. és 4. alapfeladatnál **(3.98. és 3.99. ábra)** gömbi merőlegest bocsátunk a B pontból AC-re a D talppontig, az 5. és 6. alapfeladatnál **(3.100. ábra)** pedig a C pontból AB-re a D talppontig.

A **3.7., 3.8., 3.9. és 3.10. táblázat** fejlécében az illető alapfeladat során megadott oldalak és szögek O, ill. Sz betűvel vannak jelölve. Így pl. OSzO jelentése: adva van két oldal és az általuk bezárt szög.

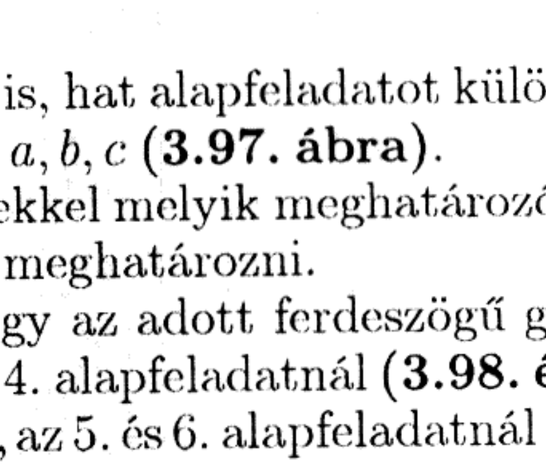
■ **A:** Egy háromoldalú gúla alaplapja ABC, csúcsa S **(3.102 ábra)**. Az ABS és BCS oldallap egymást 74°18′, BCS és CAS egymást 63°40′, végül CAS és ABS egymást 80°00′ szög alatt metszi. Páronként mekkora szög alatt metszi egymást az AS, BS és CS él?



3.98. ábra.



3.99. ábra.



3.100. ábra.

Megoldás: A gúla S csúcsa körüli gömbfelületből a triéder **(3.101. ábra)** egy a, b, c oldalú gömbháromszöget vág ki. Az oldallapok közötti szögek a gömbháromszög szögei, az élek közötti keresett szögek

3.7. táblázat. A ferdeszögű gömbháromszögek 1. és 2. alapfeladata

1. alapfeladat Adva van három oldal: a, b, c — OOO	2. alapfeladat Adva van három szög: α, β, γ — SzSzSz
Feltételek: $0° < a+b+c < 360°$, $a+b>c,\ a+c>b,\ b+c>a$.	Feltételek: $180° < \alpha+\beta+\gamma < 540°$, $\alpha+\beta < 180°+\gamma; \alpha+\gamma < 180°+\beta$, $\beta+\gamma < 180°+\alpha$.
1. megoldás: Keresendő α. $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$ vagy $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. 2. megoldás: Keresendő α, β, γ. $k = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{k}{\sin(s-a)}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{k}{\sin(s-b)}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{k}{\sin(s-c)}$. Próbák: $(s-a)+(s-b)+(s-c) = s$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\sin s = k$.	1. megoldás: Keresendő a. $\cos a = \dfrac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ vagy $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}$, $\sigma = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$. 2. megoldás: Keresendő a, b, c. $k' = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$. $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} = \dfrac{k'}{\cos(\sigma-\alpha)}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2} = \dfrac{k'}{\cos(\sigma-\beta)}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{c}{2} = \dfrac{k'}{\cos(\sigma-\gamma)}$. Próbák: $(\sigma-\alpha)+(\sigma-\beta)+(\sigma-\gamma) = \sigma$, $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{c}{2}(-\cos\sigma) = k'$.

a gömbháromszög oldalai. Az a, b, c szögek meghatározása a 2. alapfeladatnak felel meg. A **3.7. táblázat** szerinti 2. megoldást alkalmazva: $\sigma = 108°59'$, $\sigma-\alpha = 28°59'$, $\sigma-\beta = 34°41'$, $\sigma-\gamma = 45°19'$, $k' = 1{,}246983$, $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} = 1{,}425514$, $\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2} = 1{,}516440$, $\operatorname{ctg}\dfrac{c}{2} = 1{,}773328$.

■ **B Rádióiránymérés:** Két szárazföldi állomás, $P_1(\lambda_1, \varphi_1)$ és $P_2(\lambda_2, \varphi_2)$, rádióirányméréssel meghatározta egy hajó által kibocsátott rádióhullámok δ_1 és δ_2 oldalszögét **(3.102. ábra)**. Keresendők a hajó P_0 helyzetének földrajzi koordinátái. A *hajózás*ban *földi iránymérés* néven ismert feladat nem más, mint *előmetszés a gömbön*, amely a síkbeli előmetszéshez (lásd 147. old.) hasonlóan oldható meg.

1. Számolás a $P_1P_2\acute{E}$ háromszögben: A $P_1P_2\acute{E}$ háromszögben a $P_1\acute{E} = 90° - \varphi_1$, $P_2\acute{E} = 90° - \varphi_2$ oldalak és a $\sphericalangle P_1\acute{E}P_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ szög adott. Az $\sphericalangle\varepsilon_1$, ε_2 szögek és a $P_1P_2 = e$ szakasz a 3. alapfeladat szerint számíthatók ki.

2. Számolás a $P_1P_2P_0$ háromszögben: Mivel $\xi_1 = \delta_1 - \varepsilon_1$, $\xi_2 = 360° - (\delta_2 + \varepsilon_2)$, azért a $P_1P_0P_2$ háromszögben az e oldal és a hozzá csatlakozó ξ_1 és ξ_2 szög ismert. Az e_1 és az e_2 oldal kiszámítása a 4. alapfeladat, 3. megoldás szerint. A P_0 pont koordinátáit P_1 vagy P_2 oldalszögéből és távolságából, tehát kétféleképpen lehet kiszámítani.

3. Számolás az $\acute{E}P_1P_0$ háromszögben: Az $\acute{E}P_1P_0$ háromszögben az $\acute{E}P_1 = 90° - \varphi_1$, $P_1P_0 = e_1$ oldalak és az általuk bezárt δ_1 szög adott. Az $\acute{E}P_0 = 90° - \varphi_0$ oldalt és a $\Delta\lambda_1$ szöget a 3. alapfeladat, 1. megoldás szerint számítjuk ki. Ellenőrzésképpen az $\acute{E}P_0P_2$ háromszögben is kiszámíthatjuk az $\acute{E}P_0 = 90° - \varphi_0$ oldalt, továbbá a $\Delta\lambda_2$ szöget. Ezáltal meghatároztuk a P_0 pont $\lambda_0 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1 = \lambda_2 - \Delta\lambda_2$ hosszúságát és φ_0 szélességét.

3.8. táblázat. A ferdeszögű gömbháromszögek 3. alapfeladata

3. alapfeladat OSzO
Adva van két oldal és az általuk bezárt szög, pl.: a, b, γ

Feltétel: nincs

1. megoldás: Keresendő c, ill. c és α.

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \sin\gamma}{\sin c}\,.$$

α feküdhet az I. vagy a II. síknegyedben. Döntés a következő tétel segítségével: Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik.
Vagy ellenőrző számolás:

$$\cos a - \cos b \cos c \gtrless 0 \rightarrow \begin{matrix}\alpha \text{ az I. síknegy.}\\ \alpha \text{ a II. síknegy.}\end{matrix}$$

2.megoldás: Keresendő α, ill. α és c.

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} a \cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma \sin u}{\sin(b-u)}$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(b-u)}{\cos\alpha}\,.$$

3. megoldás: Keresendő α és (vagy) β.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$(-90° < \frac{\alpha-\beta}{2} < 90°)$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\,,\quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

4. megoldás: Keresendő α, β, c.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{Z}{N}\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{Z'}{N'}$$

$$(-90° < \frac{\alpha+\beta}{2} < 90°)$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\,,\quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$

$$\cos\frac{c}{2} = \frac{Z}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\,,\quad \sin\frac{c}{2} = \frac{Z'}{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\,.$$

Próba: c kétszeri kiszámítása.

3.4.3.4. Gömbfelületi görbék

A gömbháromszögtan egyik fontos alkalmazási területe a hajózás. Ennek egyik feladata olyan útirányszögek megválasztása, amelyek mellett a megtett út optimális lesz. További felhasználási terület a geodézia (lásd pl. Irod. [3.12], Programok és számpéldák), valamint a robotok mozgásfolyamatai.

1. Ortodróma

1. Fogalommeghatározás A gömbfelület geodetikus vonalait — vagyis azokat a görbéket, amelyek két A, B pontot a legrövidebb úton kötnek össze — *ortodrómák*nak vagy *főkörök*nek nevezzük (lásd 159. old.).

2. Az ortodróma egyenlete Ortodrómán való mozgás — kivéve a meridiánok és az egyenlítő esetét — szükségképp az útirányszög folyamatos változásával jár. Az olyan ortodrómák, amelyeken az α útirányszög helyfüggő, egyértelműen leírhatók Északisark-közeli $P_N(\lambda_N, \varphi_N)$ pontjuk segítségével, ahol $\varphi_N > 0°$. Az Északisark-közeli pontban az ortodróma útirányszöge $\alpha_N = 90°$. A P_N ponton és a hozzá képest tetszőleges helyzetű $Q(\lambda, \varphi)$ futó ponton átmenő ortodróma egyenlete a NAPIER-szabály és a **3.104. ábra** alapján:

$$\operatorname{tg}\varphi_N \cos(\lambda - \lambda_N) = \operatorname{tg}\varphi\,. \tag{3.186}$$

Északisark-közeli pont: Az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ $(\varphi_A \neq 90°)$ ponton átmenő és ott α_A $(\alpha_A \neq 0°)$ útirányszögű ortodróma Északisark-közeli $P_N(\lambda_N, \varphi_N)$ pontjának koordinátái, az A pont P_N-hez viszonyított helyze-

3.9. táblázat. A ferdeszögű gömbháromszögek 4. alapfeladata

<table>
<tr><td colspan="2">4. alapfeladat
Adva van egy oldal és a hozzá csatlakozó két szög, pl.: α, β, c SzOSz</td></tr>
<tr><td colspan="2">Feltétel: nincs</td></tr>
<tr><td>1. megoldás: Keresendő γ, ill. γ és a.
$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$,
$\sin a = \dfrac{\sin c\sin\alpha}{\sin\gamma}$.
a feküdhet az I. vagy a II. síknegyedben. Döntés a következő tétel segítségével: Nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik. Vagy ellenőrző számolás:
$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma \gtrless 0 \rightarrow$ α az I. síknegy.
α a II. síknegy.
2. megoldás: Keresendő a, ill. a és γ.
$\operatorname{ctg}\mu = \operatorname{tg}\alpha\cos c$, $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{tg} c\cos\mu}{\cos(\beta-\mu)}$,
$\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\operatorname{ctg}(\beta-\mu)}{\cos a}$.
3. megoldás: Keresendő a és (vagy) b.
$\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}$,
$\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}$</td><td>$(-90^\circ < \dfrac{a-b}{2} < 90^\circ)$,
$a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$, $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$.
4. megoldás: Keresendő a, b, γ.
$\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{Z}{N}$,
$\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{Z'}{N'}$
$(90^\circ < \dfrac{a-b}{2} < 90^\circ)$,
$a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$, $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$,
$\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{Z}{\sin\frac{a+b}{2}}$, $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{Z'}{\sin\frac{a-b}{2}}$.
Próba: γ kétszeri kiszámítása.</td></tr>
</table>

ténekés α_A előjelének figyelembe vételével, a NAPIER-szabály és a **3.103. ábra** alapján a következők:

$$\varphi_{\mathrm{N}} = \arccos(\sin|\alpha_A|\cos\varphi_A) \quad (3.187\mathrm{a}) \quad \text{és} \quad \lambda_{\mathrm{N}} = \lambda_A + \operatorname{sign}(\alpha_A)\left|\arccos\frac{\operatorname{tg}\varphi_A}{\operatorname{tg}\varphi_{\mathrm{N}}}\right|. \quad (3.187\mathrm{b})$$

Megjegyzés: Ha egy kiszámított λ földrajzi hosszúság nincs benne a $-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ$ értelmezési tartományban, akkor $\lambda \neq \pm k\cdot 180^\circ$ $(k \in \mathbb{N})$ esetén a λ_{red} *redukált földrajzi hosszúság* képlete:

$$\lambda_{\mathrm{red}} = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right). \quad (3.188)$$

Ebben az összefüggésben a szögnek az értelmezési tartományba való *visszahelyezéséről* beszélünk.

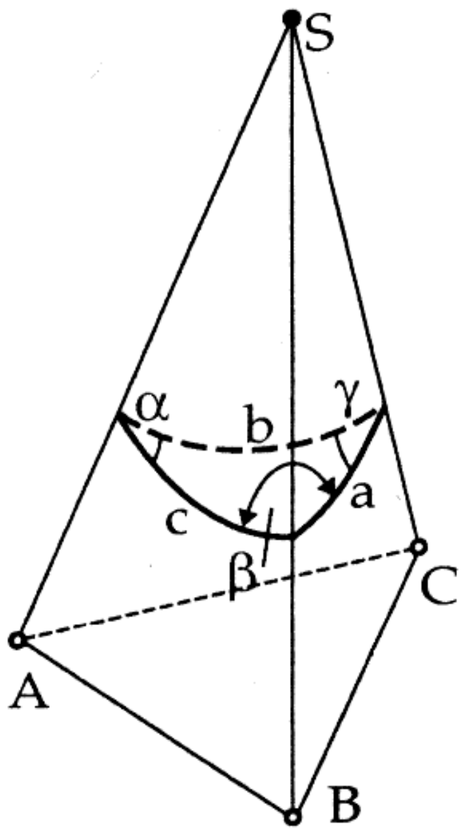
Metszéspontok az egyenlítővel: Az ortodrómának az egyenlítővel való $P_{\mathrm{E}_1}(\lambda_{\mathrm{E}_1}, 0^\circ)$ és $P_{\mathrm{E}_2}(\lambda_{\mathrm{E}_2}, 0^\circ)$ metszéspontja a (3.186) és a $\operatorname{tg}\varphi_{\mathrm{N}}\cos(\lambda_{\mathrm{E}_\nu} - \lambda_{\mathrm{N}}) = 0$ $(\nu = 1, 2)$ összefüggés alapján:

$$\lambda_{\mathrm{E}_\nu} = \lambda_{\mathrm{N}} \mp 90^\circ \qquad (\nu = 1, 2). \quad (3.189)$$

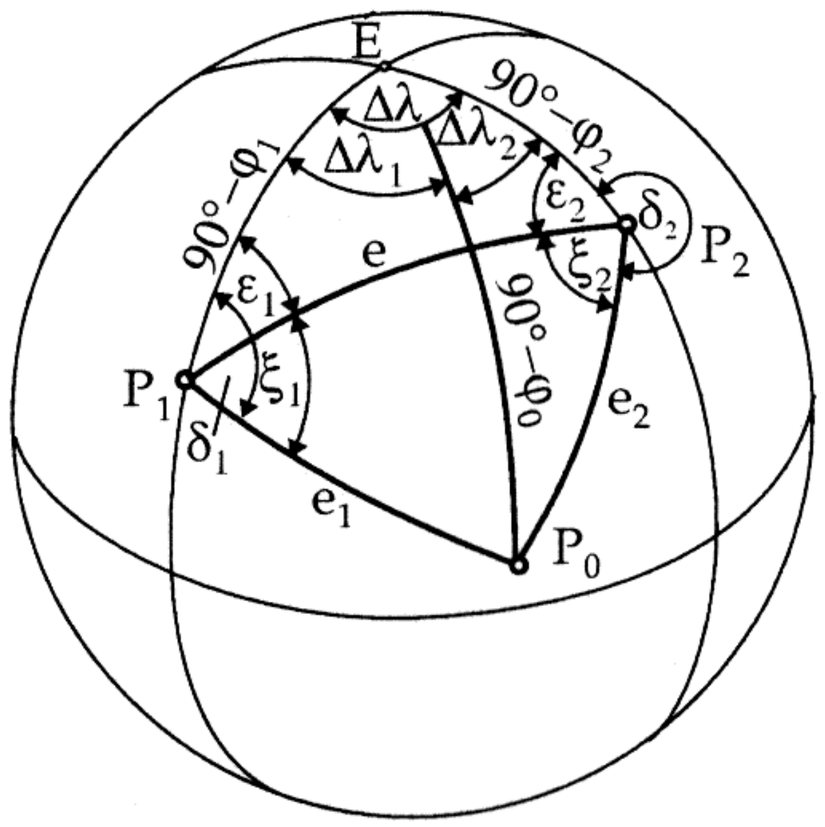
Megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

3. Ívhosszúság Ha az ortodróma átmegy az $A(\lambda_A, \varphi_A,)$ és a $B(\lambda_B, \varphi_B)$ ponton, akkor az oldalakra vonatkozó koszinusztétel szerint a két pont közötti d gömbi távolság vagy ívhosszúság

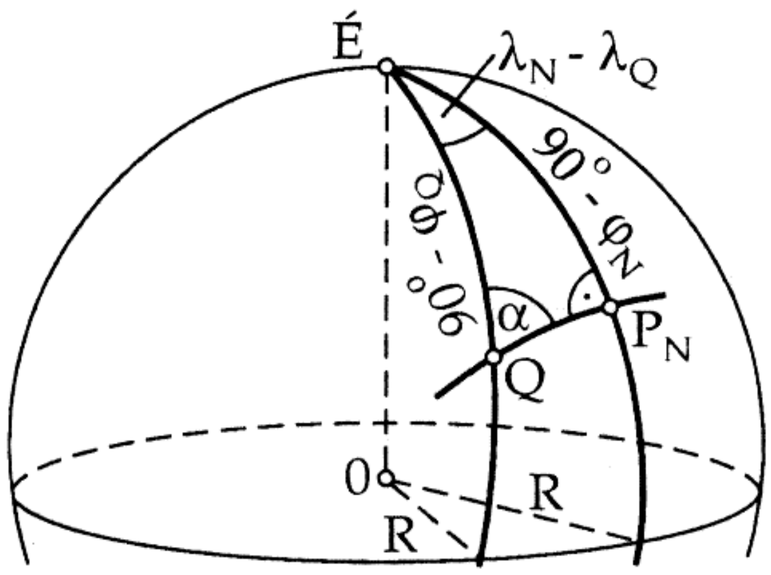
$$d = \arccos[\sin\varphi_A\sin\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_B - \lambda_A)]. \quad (3.190\mathrm{a})$$



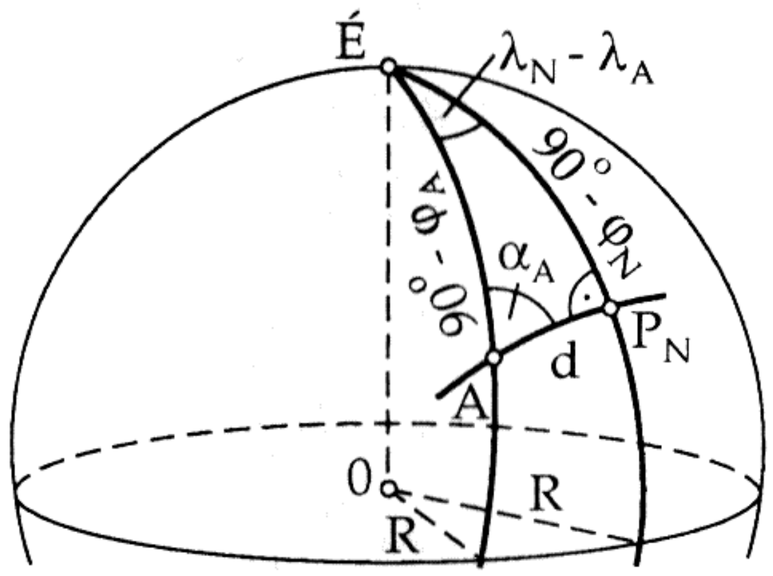
3.101. ábra.



3.102. ábra.



3.103. ábra.



3.104. ábra.

A Föld R sugarának felhasználásával ezt a középponti szöget át lehet számítani hosszúságra:

$$d = \arccos[\sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A)] \cdot \frac{\pi R}{180^\circ} . \tag{3.190b}$$

4. Útirányszög Ha a szinusztétel és az oldalakra vonatkozó koszinusztétel segítségével kiszámítjuk $\sin\alpha_A$ és $\cos\alpha_A$ értékét, majd az eredményeket elosztjuk egymással és kifejezzük az α_A útirányszöget, kapjuk:

$$\alpha_A = \operatorname{arctg} \frac{\cos\varphi_A \cos\varphi_B \sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin\varphi_B - \sin\varphi_A \cos d} . \tag{3.191}$$

Megjegyzés: A (3.190a), (3.191), (3.187a) és (3.187b) képlettel kiszámíthatók az A, B pontok által meghatározott ortodróma Északisark-közeli P_N pontjának koordinátái.

5. Szélességi körrel való metszéspontok Ortodróma $\varphi = \varphi_X$ szélességi körrel való $X_1(\lambda_{X_1}, \varphi_X)$ és $X_2(\lambda_{X_2}, \varphi_X)$ metszéspontjára (3.186) szerint fennáll:

$$\lambda_{X_\nu} = \lambda_\mathrm{N} \mp \arccos \frac{\operatorname{tg}\varphi_X}{\operatorname{tg}\varphi_\mathrm{N}} \quad (\nu = 1, 2) . \tag{3.192}$$

A NAPIER-szabály szerint az α_{X_1} és α_{X_2} metszési szögre, amely alatt a $P_\mathrm{N}(\lambda_\mathrm{N}, \varphi_\mathrm{N})$ Északisark-közeli ponttal rendelkező ortodróma a $\varphi = \varphi_X$ szélességi kört metszi, teljesül:

$$|\alpha_{X_\nu}| = \arcsin \frac{\cos\varphi_\mathrm{N}}{\cos\varphi_X} \qquad (\nu = 1, 2) . \tag{3.193}$$

3.10. táblázat. A ferdeszögű gömbháromszögek 5. és 6. alapfeladata

5. alapfeladat OOSz	6. alapfeladat SzSzO
Adva van két oldal és az egyikkel szemben fekvő szög, pl.: a, b, α	Adva van két szög és az egyikkel szemben fekvő oldal, pl.: a, α, β
Feltételek: lásd az esetszétválasztásokat.	Feltételek: lásd az esetszétválasztásokat.
Megoldás: Keresendők a hiányzó mennyiségek. $\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$, két β_1, β_2 érték lehetséges. Legyen β_1 hegyesszög és $\beta_2 = 180° - \beta_1$ tompaszög. Esetszétválasztás: 1. $\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} > 1$, 0 darab megoldás. 2. $\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} = 1$, 1 darab $\beta = 90°$ megoldás. 3. $\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a} < 1$: 3.1. $\sin a > \sin b$: 3.1.1. $b < 90°$, 1 darab β_1 megoldás. 3.1.2. $b > 90°$, 1 darab β_2 megoldás. 3.2. $\sin a < \sin b$: 3.2.1. $a < 90°, \alpha < 90°$ / $a > 90°, \alpha > 90°$ } 2 darab β_1, β_2 megoldás. 3.2.2. $a < 90°, \alpha > 90°$ / $a > 90°, \alpha < 90°$ } 0 megoldás. További számolás egy vagy két β szöggel:	Megoldás: Keresendők a hiányzó mennyiségek. $\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}$, két b_1, b_2 érték lehetséges. Legyen b_1 hegyesszög és $b_2 = 180° - \beta_1$ tompaszög. Esetszétválasztás: 1. $\frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha} > 1$ 0 darab megoldás. 2. $\frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha} = 1$ 1 darab $b = 90°$ megoldás. 3. $\frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha} < 1$: 3.1. $\sin\alpha > \sin\beta$. 3.1.1. $\beta < 90°$ 1 darab b_1 megoldás. 3.1.2. $\beta > 90°$ 1 darab b_2 megoldás. 3.2. $\sin\alpha < \sin\beta$: 3.2.1. $a < 90°, \alpha < 90°$ / $a > 90°, \alpha > 90°$ } 2 darab b_1, b_2 megoldás. 3.2.2. $a < 90°, \alpha > 90°$ / $a > 90°, \alpha < 90°$ } 0 megoldás. További számolás egy vagy két β oldallal:

1. eljárás:	2.eljárás:	
$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} b \cos\alpha$, $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} a \cos\beta$, $c = u + v$, $\operatorname{ctg}\varphi = \cos b \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\psi = \cos a \operatorname{tg}\beta$, $\gamma = \varphi + \psi$.	$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$, $= \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.	$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$, $= \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$.
Próba: $\frac{c}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ kétszeri kiszámítása.		

Az $|\alpha_{\min}|$ minimális útirányszögre az árkusz szinusz függvény argumentuma a φ_X változóra nézve extremális kell hogy legyen. Az adódik, hogy $\sin\varphi_X = 0 \Rightarrow \varphi_X = 0$, vagyis az egyenlítővel való metszéspontokban az útirányszög abszolút értéke minimális:

$$|\alpha_{X_{\min}}| = 90° - \varphi_N \,. \tag{3.194}$$

1. megjegyzés: A (3.192) képlet csak akkor eredményez megoldásokat, ha $|\varphi_X| \le \varphi_N$.

2. megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

6. Meridiánnal való metszéspont Ortodrómának $\lambda = \lambda_Y$ meridiánnal való $Y(\lambda_Y, \varphi_Y)$ metszéspontjára (3.186) alapján fennáll

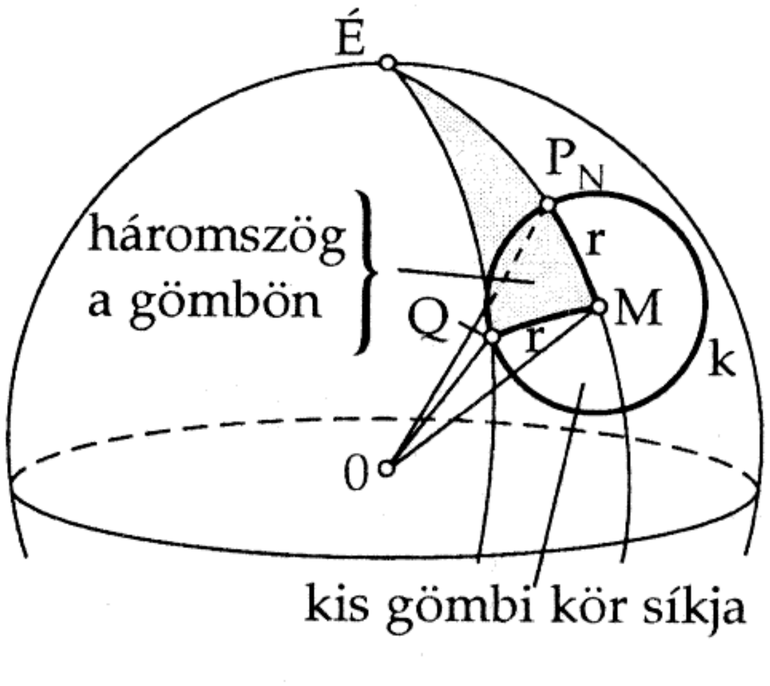
$$\varphi_Y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi_N \cos(\lambda_Y - \lambda_N)]\,. \tag{3.195}$$

2. Kis gömbi kör

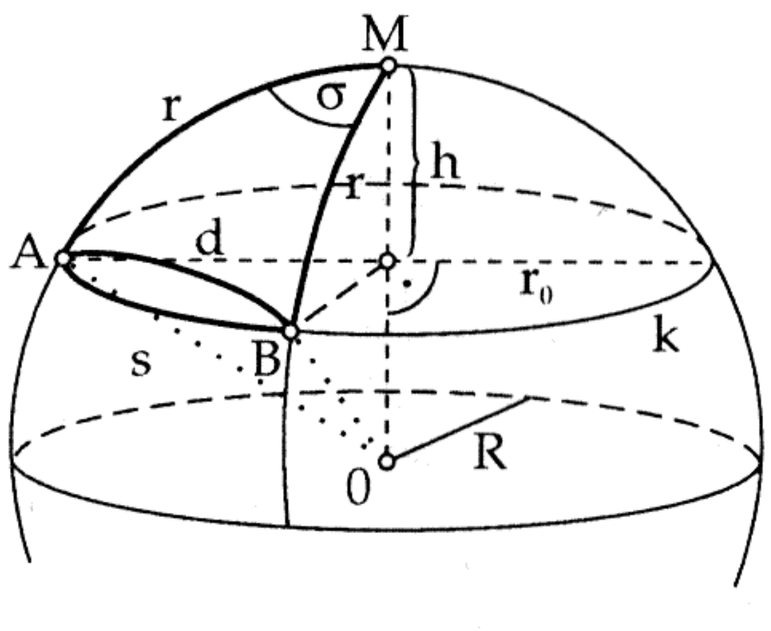
1. Fogalommeghatározás A gömbfelület kis gömbi köreinek definíciója a 158. oldalon adottnál részletesebb megfogalmazást kíván: Eszerint egy *kis gömbi kör* azon pontok mértani helye, amelyeknek a gömbfelület rögzített $M(\lambda_M, \varphi_M)$ pontjától mért gömbi távolsága r ($r < 90°$); lásd a **3.105. ábrát**. Azt mondjuk, hogy M a *gömbfelületi középpont*, és r a *kis gömbi kör gömbfelületi sugara.*

A kis gömbi kör síkja egy h magasságú gömbszelet alaplapja (lásd 157. old.). Az M gömbfelületi középpont a kis gömbi körnek a saját síkjában található középpontja fölött helyezkedik el. Az említett síkban a *kis gömbi kör síkbeli sugara* r_0 **(3.106. ábra)**. A szélességi körök speciális kis gömbi körök, amelyekre $\varphi_M = \pm 90°$.

■ Ha $r \to 90°$, akkor a kis gömbi kör ortodrómába megy át.



3.105. ábra.



3.106. ábra.

2. Kis gömbi kör egyenletei Jellemző paraméterként vagy M és r, vagy a kis gömbi kör Északisarkközeli $P_N(\lambda_N, \varphi_N)$ pontja és r alkalmazható. Ha a kis gömbi kör futó pontja $Q(\lambda, \varphi)$, akkor az oldalakra vonatkozó koszinusztétel és a **3.105. ábra** alapján a kis gömbi körre a következő egyenlet adódik:

$$\cos r = \sin\varphi \sin\varphi_M + \cos\varphi \cos\varphi_M \cos(\lambda - \lambda_M)\,. \tag{3.196a}$$

Innen $\varphi_M = \varphi_N - r$ és $\lambda_M = \lambda_N$ miatt kapjuk:

$$\cos r = \sin\varphi \sin(\varphi_N - r) + \cos\varphi \cos(\varphi_N - r) \cos(\lambda - \lambda_N)\,. \tag{3.196b}$$

■ **A:** Ha $\varphi_M = 90°$, a (3.196a) összefüggés $\cos r = \sin\varphi \Rightarrow \sin(90° - r) = \sin\varphi \Rightarrow \varphi =$ konstans miatt szélességi köröket ad.

■ **B:** Ha $r \to 90°$, a (3.196b) összefüggés ortodrómákat ír le.

3. Ívhossz A k kis gömbi kör $A(\lambda_A, \varphi_A)$ és $B(\lambda_B, \varphi_B)$ pontja közötti s ívhossz a **3.106. ábra** szerint az $\dfrac{s}{\sigma} = \dfrac{2\pi r_0}{360°}$, $\cos d = \cos^2 r + \sin^2 r \cos\sigma$ és $r_0 = R \sin r$ összefüggésből nyerhető:

$$s = \sin r \arccos \frac{\cos d - \cos^2 r}{\sin^2 r} \cdot \frac{\pi R}{180°}\,. \tag{3.197}$$

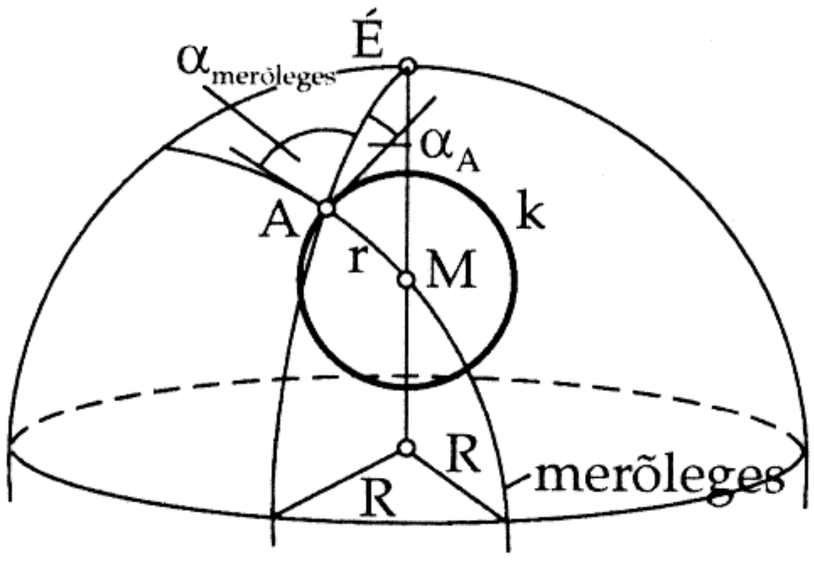
■ Ha $r \to 90°$, akkor a kis gömbi körből ortodróma lesz, és a (3.197), (3.190b) összefüggésekből következik, hogy $s = d$.

4. Útirányszög A **3.107. ábra** szerint az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ és $M(\lambda_M, \varphi_M)$ ponton átmenő ortodróma az r sugarú kis gömbi kört merőlegesen metszi. Az ortodróma α_{orth} útirányszögére (3.191) alapján fennáll:

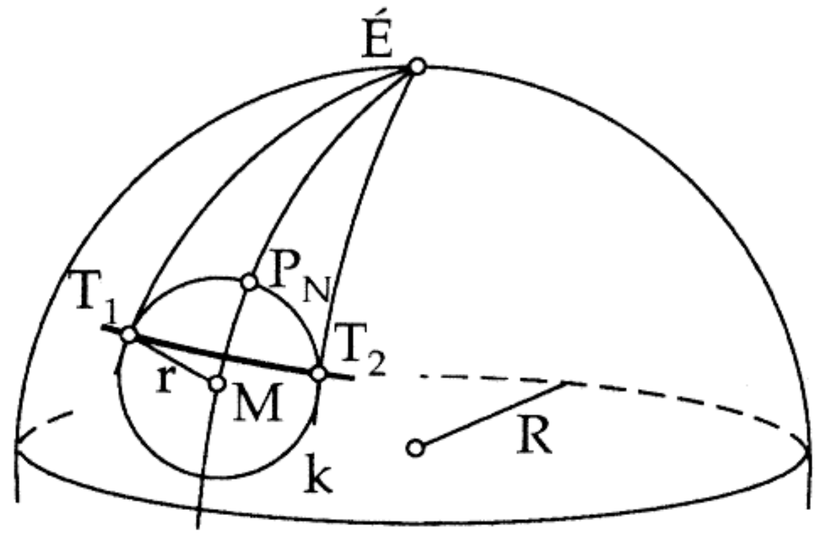
$$\alpha_{\text{orth}} = \operatorname{arctg} \frac{\cos\varphi_A \cos\varphi_M \sin(\lambda_M - \lambda_A)}{\sin\varphi_M - \sin\varphi_A \cos r}\,. \tag{3.198a}$$

Ennélfogva az A pontban a kis gömbi kör keresett α_A útirányszögére kapjuk:

$$\alpha_A = (|\alpha_{\text{orth}}| - 90°)\,\text{sign}(\alpha_{\text{orth}})\,. \tag{3.198b}$$



3.107. ábra.



3.108. ábra.

5. Szélességi körrel való metszéspontok Kis gömbi kör $\varphi = \varphi_X$ szélességi körrel való $X_1(\lambda_{X_1}, \varphi_X)$ és $X_2(\lambda_{X_2}, \varphi_X)$ metszéspontjának földrajzi hosszúságára a (3.196a) összefüggésből a következőt nyerjük:

$$\lambda_{X_\nu} = \lambda_M \mp \arccos \frac{\cos r - \sin\varphi_X \sin\varphi_M}{\cos\varphi_X \cos\varphi_M} \qquad (\nu = 1, 2)\,. \tag{3.199}$$

Megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

6. Érintési pontok A kis gömbi kört két meridián, az *érintőmeridiánok*, $T_1(\lambda_{T_1}, \varphi_T)$ és a $T_2(\lambda_{T_2}, \varphi_T)$ *érintési pont*ban érintik **(3.108.) ábra)**. Abból a követelményből, hogy ezekre az árkusz koszinusz argumentumának a (3.199) összefüggésben a φ_X változó függvényeként extremálisnak kell lennie, következik:

$$\varphi_T = \arcsin \frac{\sin\varphi_M}{\cos r}\,, \tag{3.200a}$$

$$\lambda_{T_\nu} = \lambda_M \mp \arccos \frac{\cos r - \sin\varphi_X \sin\varphi_M}{\cos\varphi_X \cos\varphi_M} \qquad (\nu = 1, 2)\,. \tag{3.200b}$$

Megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

7. Meridiánnal való metszéspontok A kis gömbi kör $\lambda = \lambda_Y$ meridiánnal való $Y_1(\lambda_Y, \varphi_{Y_1})$ és $Y_2(\lambda_Y, \varphi_{Y_2})$ metszéspontja földrajzi szélességét (3.196a) alapján a

$$\varphi_{Y_\nu} = \arcsin \frac{-AC \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \qquad (\nu = 1, 2)\,, \tag{3.201a}$$

egyenletekkel lehet kiszámítani, ahol

$$A = \sin\varphi_M, \qquad B = \cos\varphi_M \cos(\lambda_Y - \lambda_M), \qquad C = -\cos r\,. \tag{3.201b}$$

Ha $A^2 + B^2 > C^2$, akkor általában két különböző megoldás van, amelyek közül azonban az egyik elesik, ha valamelyik pólus a kis gömbi körben fekszik.

Ha $A^2 + B^2 = C^2$, és egyik pólus sem fekszik a kis gömbi körben, akkor a meridián a kis gömbi kört egy érintési pontban érinti, amelynek földrajzi szélessége $\varphi_{Y_1} = \varphi_{Y_2} = \varphi_T$.

3. Loxodróma

1. Fogalommeghatározás Egy gömbfelületi görbét *loxodrómá*nak nevezünk, ha minden meridiánt azonos útirányszög alatt metsz. A szélességi körök ($\alpha = 90°$) és a meridiánok ($\alpha = 0°$) tehát speciális loxodrómák.

2. A loxodróma egyenlete A **3.109. ábrán** egy α útirányszögű, a $Q(\lambda, \varphi)$ futó ponton és a hozzá „végtelenül közeli" $P(\lambda + d\lambda, \varphi + d\varphi)$ ponton átmenő loxodróma látható. A ΔQCP derékszögű gömbháromszöget, „differenciális méretei" miatt, síkháromszögnek tekinthetjük. Ezért fennáll:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{R\cos\varphi d\lambda}{R d\varphi} \;\Rightarrow\; d\lambda = \frac{\text{tg}\,\alpha\, d\varphi}{\cos\alpha}\,. \tag{3.202a}$$

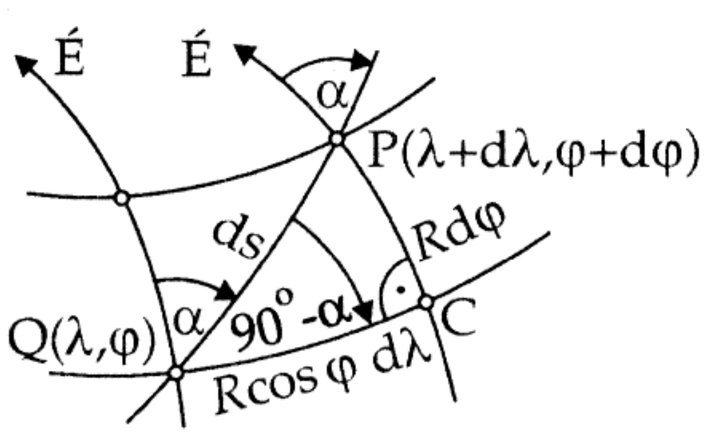
Figyelembe véve, hogy a loxodrómának át kell mennie az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ponton, innen integrálással a loxodróma egyenletét kapjuk:

$$\lambda - \lambda_A = \operatorname{tg}\alpha \ln \frac{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \frac{180°}{\pi} \qquad (\alpha \neq 90°)\,. \tag{3.202b}$$

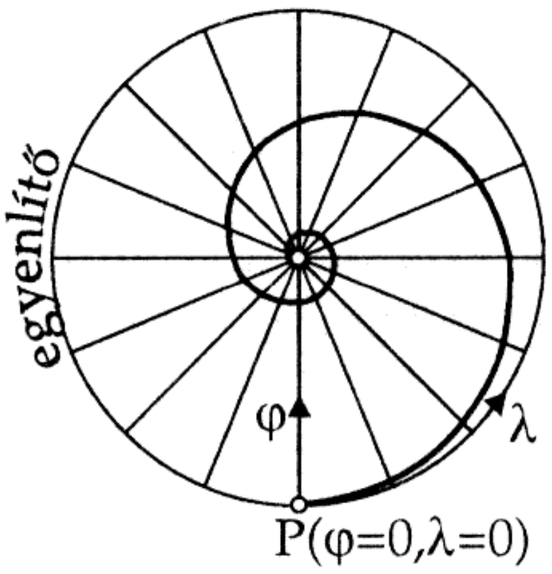
Ha A speciálisan a loxodrómának az egyenlítővel való $P_{\mathrm{E}}(\lambda_{\mathrm{E}}, 0°)$ metszéspontja, akkor innen

$$\lambda - \lambda_{\mathrm{E}} = \operatorname{tg}\alpha \ln \operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{180°}{\pi} \qquad (\alpha \neq 90°)\,. \tag{3.202c}$$

Megjegyzés: λ_{E} kiszámítása (3.207) segítségével történhet.



3.109. ábra.



3.110. ábra.

3. Ívhossz A **3.109. ábráról** leolvasható az alábbi „differenciális összefüggés":

$$\cos\alpha = \frac{Rd\varphi}{ds} \;\Rightarrow\; ds = \frac{Rd\varphi}{\cos\alpha}\,. \tag{3.203a}$$

φ szerinti integrálással az $A(\lambda_A, \varphi_A)$, $B(\lambda_B, \varphi_B)$ végpontú ívdarab s ívhosszára kapjuk:

$$s = \frac{|\varphi_B - \varphi_A|}{\cos\alpha} \cdot \frac{\pi R}{180°} \qquad (\alpha \neq 90°)\,. \tag{3.203b}$$

Ha A az indulóállomás és B a célállomás, akkor A, α és s megadása esetén először (3.203b) alapján kiszámítható φ_B, azután (3.202b) alapján λ_B.

Közelítő képlet: A **3.109. ábra** szerint a $Q = A$, $P = B$ választással és a földrajzi szélességek átlagolásával a (3.204a) próbakifejezést kapjuk, amellyel az l ívhossz (3.204b) közelítő képletére jutunk:

$$\sin\alpha \approx \frac{\cos\frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}(\lambda_B - \lambda_A)}{l} \cdot \frac{\pi R}{180°}\,. \tag{3.204a}$$

$$l \approx \frac{\cos\frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}}{\sin\alpha}(\lambda_B - \lambda_A) \cdot \frac{\pi R}{180°}\,. \tag{3.204b}$$

4. Útirányszög Az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ és $B(\lambda_B, \varphi_B)$ ponton, ill. az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ponton és az egyenlítővel való $P_{\mathrm{E}}(\lambda_{\mathrm{E}}, 0°)$ metszésponton átmenő loxodróma α útirányszöge (3.202b) és (3.202c) alapján:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(\lambda_B - \lambda_A)}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)}} \cdot \frac{\pi}{180°}\,, \tag{3.205a}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(\lambda_A - \lambda_E)}{\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} . \tag{3.205b}$$

5. Szélességi körrel való metszéspont Az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ponton átmenő, α útirányszögű loxodrómának a $\varphi = \varphi_X$ szélességi körrel való $X(\lambda_X, \varphi_X)$ metszéspontja (3.202b) alapján:

$$\lambda_X = \lambda_A + \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_X}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\alpha \neq 90^\circ) . \tag{3.206}$$

A (3.206) összefüggésből speciálisan az egyenlítővel való $P_E(\lambda_E, 0^\circ)$ metszéspont is kiszámítható:

$$\lambda_E = \lambda_A - \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\alpha \neq 90^\circ) . \tag{3.207}$$

Megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

6. Meridiánnal való metszéspontok A loxodrómák — kivéve a szélességi köröket és a meridiánokat — spirálisan aszimptotikus módon a pólusok köré csavarodnak **(3.110. ábra)**. Az $A(\lambda_A, \varphi_A)$ ponton átmenő, α útirányszögű loxodrómának a $\lambda = \lambda_Y$ meridiánnal való végtelen sok $Y_\nu(\lambda_Y, \varphi_{Y_\nu})$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ metszéspontjára (3.202b) szerint

$$\varphi_{Y_\nu} = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\frac{\lambda_Y - \lambda_A + \nu \cdot 360^\circ}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right] \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right) \right\} - 90^\circ \qquad (\nu \in \mathbb{Z}) . \tag{3.208a}$$

Ha A a loxodrómának az egyenlítővel való $P_E(\lambda_E, 0^\circ)$ metszéspontja, akkor a képlet egyszerűsödik:

$$\varphi_{Y_\nu} = 2 \operatorname{arctg} \exp \left[\frac{\lambda_Y - \lambda_E + \nu \cdot 360^\circ}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right] - 90^\circ \qquad (\nu \in \mathbb{Z}) . \tag{3.208b}$$

4. Gömbfelületi görbék metszéspontjai

1. Két ortodróma metszéspontjai Legyenek a tekintett ortodrómák Északisark-közeli pontjai $P_{N_1}(\lambda_{N_1}, \varphi_{N_1})$ és $P_{N_2}(\lambda_{N_2}, \varphi_{N_2})$, ahol $P_{N_1} \neq P_{N_2}$. Az $S(\lambda_S, \varphi_S)$ metszéspontnak a két ortodrómaegyenletbe való behelyettesítése a következő egyenletrendszerre vezet:

$$\operatorname{tg}\varphi_{N_1} \cos(\lambda_S - \lambda_{N_1}) = \operatorname{tg}\varphi_S , \tag{3.209a}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{N_2} \cos(\lambda_S - \lambda_{N_2}) = \operatorname{tg}\varphi_S . \tag{3.209b}$$

φ_S kiküszöbölésével és az addíciós tételeknek a koszinuszfüggvényekre való alkalmazásával kapjuk:

$$\operatorname{tg}\lambda_S = -\frac{\operatorname{tg}\varphi_{N_1} \cos\lambda_{N_1} - \operatorname{tg}\varphi_{N_2} \cos\lambda_{N_2}}{\operatorname{tg}\varphi_{N_1} \sin\lambda_{N_1} - \operatorname{tg}\varphi_{N_2} \sin\lambda_{N_2}} . \tag{3.210}$$

A (3.210) egyenlet a földrajzi hosszúságok $-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ$ értelmezési tartományában két λ_{S_1}, λ_{S_2} megoldást ad. A hozzájuk tartozó földrajzi szélességek a (3.209a) összefüggésből adódnak:

$$\varphi_{S_\nu} = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi_{N_1} \cos(\lambda_{S_\nu} - \lambda_{N_1})] \qquad (\nu = 1, 2) . \tag{3.211}$$

Az S_1, S_2 metszéspontok átellenes pontok, vagyis egymásból a gömb középpontjára való tükrözéssel származtathatók.

2. Két loxodróma metszéspontjai Legyen a tekintett loxodrómák egyenlítővel való metszéspontja $P_{E_1}(\lambda_{E_1}, 0^\circ)$, ill. $P_{E_2}(\lambda_{E_2}, 0^\circ)$, és útirányszögük α_1, ill. α_2 $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$. Az $S(\lambda_S, \varphi_S)$ metszéspont mindkét loxodrómaegyenletbe való behelyettesítése a következő egyenletrendszerre vezet:

$$\lambda_S - \lambda_{E_1} = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_S}{2}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\alpha_1 \neq 90^\circ) , \tag{3.212a}$$

$$\lambda_S - \lambda_{E_2} = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_S}{2}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\alpha_2 \neq 90^\circ) . \tag{3.212b}$$

λ_S-et kiküszöbölve és φ_S-et kifejezve egy végtelen sok megoldással rendelkező egyenletet kapunk:

$$\varphi_{S_\nu} = 2 \operatorname{arctg} \exp \left[\frac{\lambda_{E_1} - \lambda_{E_2} + \nu \cdot 360^\circ}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right] - 90^\circ \qquad (\nu \in \mathbb{Z}) . \tag{3.213}$$

A hozzájuk tartozó λ_{S_ν} földrajzi hosszúságok φ_{S_ν}-nek (3.212a)-ba való behelyettesítésével adódnak:

$$\lambda_{S_\nu} = \lambda_{E_1} + \operatorname{tg}\alpha_1 \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_{S_\nu}}{2}\right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\alpha_1 \neq 90^\circ), \quad (\nu \in \mathbb{Z}). \tag{3.214}$$

Megjegyzés: Bizonyos körülmények között szükség van a szögek (3.188) szerinti visszahelyezésére.

3.5. Vektoralgebra és analitikus geometria

3.5.1. Vektoralgebra

3.5.1.1. A vektor definíciója, számolási szabályok

1. Skalárok és vektorok

Azokat a mennyiségeket, amelyeknek az értékei valós számok, *skalárok*nak nevezzük. Példák: tömeg, hőmérséklet, energia és munka (a skaláris invarianciáról lásd 184., 212. és 269. old.).
Ezzel szemben azokat a mennyiségeket, amelyeknek a jellemzéséhez egy mérőszám, egy irány és néha egy térbeli forgásirány is szükséges, *vektorok*nak nevezzük. Példák: erő, sebesség, gyorsulás, szögsebesség, szöggyorsulás, valamint az elektromos és a mágneses térerősség. Vektorok ábrázolására a tér irányított szakaszait használjuk.
Ebben a könyvben a háromdimenziós euklideszi tér vektorainak jele $\vec{\mathbf{a}}$, a mátrixszámítással kapcsolatban pedig $\underline{\mathbf{a}}$.

2. Poláris és axiális vektorok

A *poláris vektorok* mérőszámmal és térbeli iránnyal rendelkező mennyiségeket (pl. sebesség, gyorsulás), az *axiális vektorok* viszont mérőszámmal, térbeli iránnyal és forgásiránnyal rendelkező mennyiségeket (pl. szögsebesség, szöggyorsulás) ábrázolnak. Rajzbeli megkülönböztetésükre poláris, ill. axiális nyilat használunk **(3.111. ábra)**. Matematikai tárgyalás tekintetében nincs közöttük különbség.

3. Abszolút érték és térbeli irány

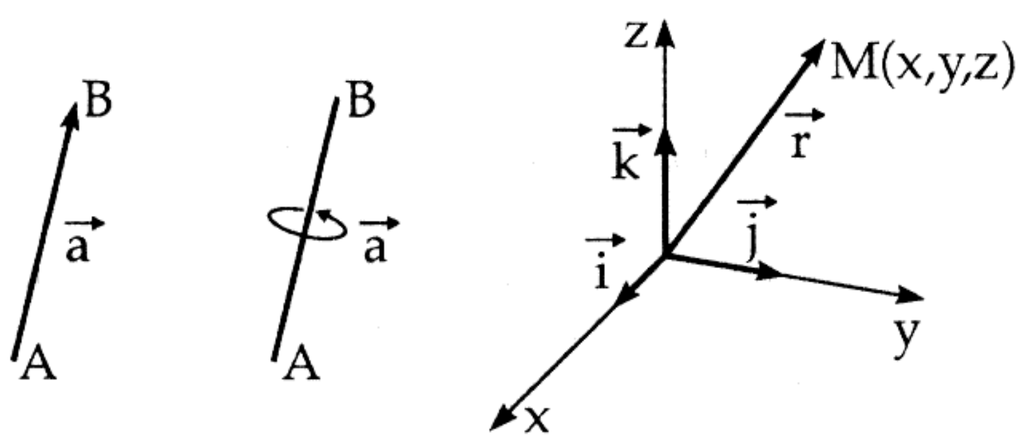
Az $\vec{\mathbf{a}}$ vagy $\underline{\mathbf{a}}$ vektor, mint egy A kezdőpont és egy B végpont közötti szakasz, kvantitatív leírására szolgál az $|\vec{\mathbf{a}}|$ *abszolút érték*, amely a szakasz hosszát adja meg, valamint a *térbeli irány*, amelyet bizonyos szögek összességével lehet megadni.

4. Vektorok egyenlősége

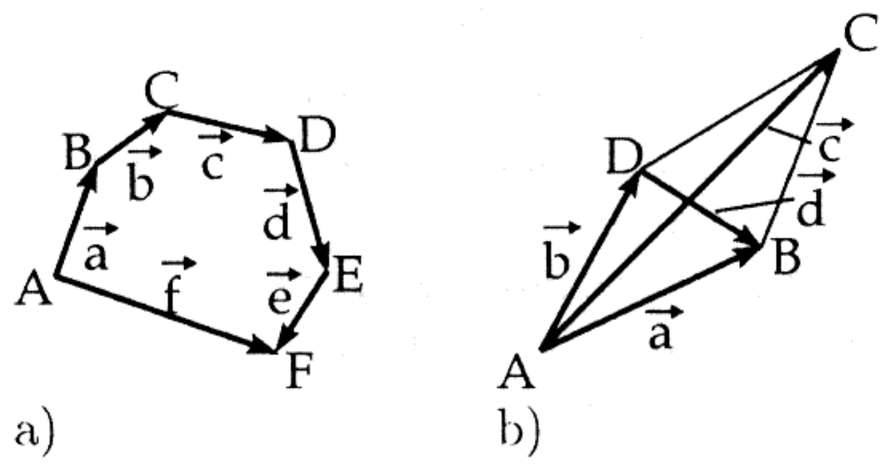
Két vektor, $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ akkor számít egyenlőnek, ha abszolút értékük egyenlő és irányuk megegyezik, vagyis a két vektor párhuzamos és azonos irányítású.
Az *ellentetten egyenlő vektorok*at egyenlő abszolút érték, de ellentétes irány jellemzi:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}, \quad \overrightarrow{BA} = -\vec{\mathbf{a}}, \qquad \text{de} \qquad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|. \tag{3.215}$$

Axiális vektoroknak ebben az esetben ellentetten egyenlő forgásirányuk van.



3.111. ábra. 3.112. ábra.



3.113. ábra.

5. Szabad, kötött és egyenes mentén eltolható vektorok

Szabad vektor a tulajdonságait, vagyis abszolút értékét és irányát nem változtatja meg, ha önmagával párhuzamosan úgy toljuk el, hogy kezdőpontja a tér tetszőleges pontjába kerül. Ha egy vektor tulajdonságai egy meghatározott kezdőponthoz kötődnek, *kötött vektor*ról beszélünk. *Egyenes mentén eltolható vektor* csak azon egyenes mentén tolható el, amelyben fekszik.

6. Speciális vektorok

a) Egységvektornak, $\underline{\mathbf{a}}^0 = \vec{\mathbf{e}}$ nevezzük az olyan vektort, amelynek hossza, azaz abszolút értéke 1-gyel egyenlő. Segítségével az $\vec{\mathbf{a}}$ vektort egy egységvektor és az abszolút érték szorzataként, az

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}\,|\vec{\mathbf{a}}| \tag{3.216}$$

alakban állíthatjuk elő. A növekedő koordinátaértékek irányába mutató három koordinátatengely jellemzésére gyakran az $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ vagy $\vec{\mathbf{e}}_i$, $\vec{\mathbf{e}}_j$, $\vec{\mathbf{e}}_k$ egységvektorokat használjuk **(3.115. ábra)**.
A **3.115. ábrán** a három egységvektor által meghatározott irányok egy merőleges *irányhármas*t alkotnak. Ezek az irányok továbbá *ortogonális koordinátarendszer*t is alkotnak, mert

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = 0\,. \tag{3.217}$$

Ráadásul fennáll

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = 1\,, \tag{3.218}$$

úgyhogy *ortonormális koordinátarendszer*ről beszélünk.
b) Nullvektor nevezünk egy vektort, amelynek abszolút értéke 0, tehát kezdő- és végpontja egybeesik, térbeli iránya pedig határozatlan.

c) Az M pont $\vec{\mathbf{r}}$ **helyvektorának** nevezzük az $\overrightarrow{OM}$ vektort, amelynek kezdőpontja a koordinátarendszer kezdőpontjával esik egybe **(3.112. ábra)**. Ilyenkor a koordinátarendszer kezdőpontját *pólus*nak hívjuk. Az M pontot helyvektora egyértelműen meghatározza.
d) A kollineáris vektorok párhuzamosak egy közös egyenessel.

e) A komplanáris vektorok párhuzamosak egy közös síkkal. Érvényes rájuk (3.243).

7. Vektor szorzása skalárral

Az $\alpha\,\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{a}}\,\alpha$ szorzatok egyenlők, és kollineárisak az $\vec{\mathbf{a}}$ vektorral. A szorzatvektor hossza, vagyis abszolút értéke $|\alpha||\vec{\mathbf{a}}|$, iránya $\alpha > 0$ esetén megegyezik $\vec{\mathbf{a}}$ irányával, $\alpha < 0$ esetén pedig ellentétes vele. Skalár és vektor szorzatának legfontosabb tulajdonságai:

$$\alpha\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}\,\alpha\,, \quad \alpha\,\beta\,\vec{\mathbf{a}} = \beta\,\alpha\,\vec{\mathbf{a}}\,, \quad (\alpha+\beta)\,\vec{\mathbf{a}} = \alpha\,\vec{\mathbf{a}} + \beta\,\vec{\mathbf{a}}\,, \quad \alpha\,(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\,) = \alpha\,\vec{\mathbf{a}} + \alpha\,\vec{\mathbf{b}}\,. \tag{3.219a}$$

Az $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \ldots, \vec{\mathbf{d}}$ vektorok $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ skalárokkal való lineáris kombinációja a

$$\vec{\mathbf{k}} = \alpha\,\vec{\mathbf{a}} + \beta\,\vec{\mathbf{b}} + \cdots + \delta\,\vec{\mathbf{d}} \tag{3.219b}$$

vektor.

8. Vektorok lineáris kombinációi

a) Több $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}$ **vektor összege** az az $\vec{\mathbf{f}} = \overrightarrow{AF}$ vektor, amely az adott vektorok által alkotott töröttvonalat lezárja **(3.113.a ábra)**. Két vektor, $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{\mathbf{b}}$ összege **(3.113.b ábra)** az az $\overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{c}}$ vektor, amely az $ABCD$ paralelogramma átlóját képezi. Két vektor összegének legfontosabb tulajdonságai:

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,, \quad (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\,) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}\,)\,, \quad |\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\,| \le |\vec{\mathbf{a}}\,| + |\vec{\mathbf{b}}\,|\,. \tag{3.220a}$$

Az egyenlőtlenség neve *vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség.*

b) Két vektor $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ **különbsége** felfogható mint az $\vec{\mathbf{a}}$ és a $-\vec{\mathbf{b}}$ vektor összege, úgyhogy

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}\,) = \vec{\mathbf{d}} \tag{3.220b}$$

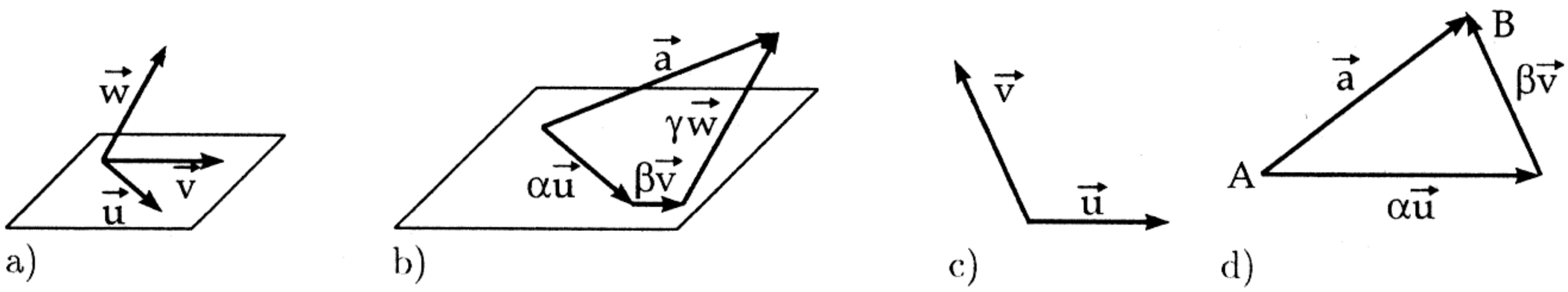
a **3.113.b ábrán** látható átló. Két vektor különbségének legfontosabb tulajdonságai:

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{(nullvektor)}\,, \qquad |\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}\,| \ge |\vec{\mathbf{a}}\,| - |\vec{\mathbf{b}}\,|\,. \tag{3.220c}$$

9. Vektorok felbontása

Bármely $\vec{\mathbf{a}}$ vektor egyértelműen felbontható három olyan vektor összegére, amelyek párhuzamosak három megadott, nem komplanáris $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ vektorral **(3.114.a,b ábrák)**:

$$\vec{\mathbf{a}} = \alpha\,\vec{\mathbf{u}} + \beta\,\vec{\mathbf{v}} + \gamma\,\vec{\mathbf{w}}\,. \tag{3.221}$$



a) b) c) d)

3.114. ábra.

Az $\alpha\,\vec{\mathbf{u}}$, $\beta\,\vec{\mathbf{v}}$ és $\gamma\,\vec{\mathbf{w}}$ összeadandókat a vektorfelbontás *komponenseinek*, az α, β, γ skalártényezőket *együtthatók*nak nevezzük. Vektorok, amelyek párhuzamosak egy síkkal, két, nem kollineáris $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ vektor segítségével az

$$\vec{\mathbf{a}} = \alpha\,\vec{\mathbf{u}} + \beta\,\vec{\mathbf{v}} \tag{3.222}$$

alakra hozhatók **(3.114.c,d ábrák)**.

10. Vektor koordinátái

1. Derékszögű koordináták (3.221) szerint bármely $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ vektor egyértelműen felbontható olyan vektorok összegére, amelyek párhuzamosak a koordinátarendszer $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ vagy $\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j, \vec{\mathbf{e}}_k$ alapvektoraival:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{i}} + a_y\vec{\mathbf{j}} + a_z\vec{\mathbf{k}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_i + a_y\vec{\mathbf{e}}_j + a_z\vec{\mathbf{e}}_k\,, \tag{3.223a}$$

ahol az a_x, a_y és a_z skalárok az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor *derékszögű koordinátái* az $\vec{\mathbf{e}}_i$, $\vec{\mathbf{e}}_j$ és $\vec{\mathbf{e}}_k$ egységvektorok által meghatározott koordinátarendszerben. Ezt a következőképpen is szoktuk írni:

$$\vec{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}\ . \tag{3.223b}$$

A három egységvektor által meghatározott irányok egy merőleges *irányhármas*t alkotnak. Egy vektor derékszögű koordinátái a vektor vetületei a koordinátatengelyeken **(3.115. ábra)**. Ha egy vektort valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosan vagy annak mentén eltolunk, koordinátái a másik két irányban nem változnak meg.
Több vektor lineáris kombinációjának koordinátái e vektorok koordinátáinak azonos alakú lineáris kombinációjaként nyerhetők, úgyhogy a (3.219b) vektoregyenlet három skaláris komponensegyenletnek felel meg:

$$\begin{aligned} k_x &= \alpha\,a_x + \beta\,b_x + \cdots + \delta\,d_x\,,\\ k_y &= \alpha\,a_y + \beta\,b_y + \cdots + \delta\,d_y\,,\\ k_z &= \alpha\,a_z + \beta\,b_z + \ldots + \delta\,d_z\ . \end{aligned} \tag{3.224}$$

Speciálisan két vektor

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \pm \vec{\mathbf{b}} \tag{3.225a}$$

összegének és különbségének koordinátáira fennáll:

$$c_x = a_x \pm b_x\,, \quad c_y = a_y \pm b_y\,, \quad c_z = a_z \pm a_z\,. \tag{3.225b}$$

Az $M(x, y, z)$ pont $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorának derékszögű koordinátái megegyeznek a pont derékszögű koordinátáival:

$$r_x = x\,, \quad r_y = y\,, \quad r_z = z\,; \quad \vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{3.226}$$

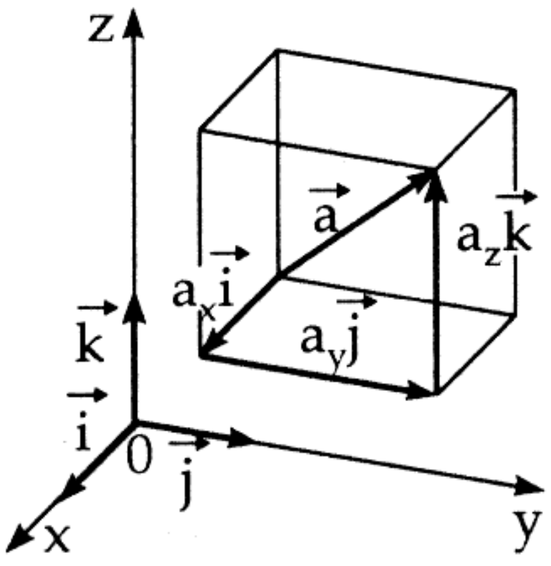
2. Az affin koordináták a derékszögű koordináták általánosításai egy három lineárisan független, nem komplanáris, már nem szükségképp egymásra merőleges $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ alapvektorból álló rendszerre három a^1, a^2, a^3 együtthatóval, ahol a felső indexeket a világért sem szabad kitevőknek felfogni. A (3.223a,b) összefüggésekkel analóg módon adódik:

$$\vec{\mathbf{a}} = a^1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + a^2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + a^3\,\vec{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.227a) \qquad \text{vagy} \qquad \vec{\mathbf{a}} = \left\{a^1\,,\,a^2\,,a^3\right\}\ . \tag{3.227b}$$

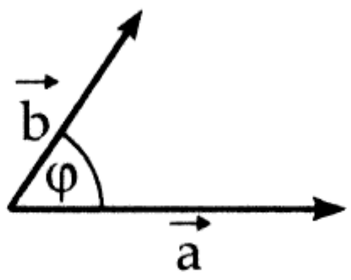
Ez az írásmód azért előnyös, mert az a^1, a^2, a^3 skalárok egy vektor kontravariáns koordinátái (lásd 187. old.). Ha $\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{k}}$, a (3.227a,b) képletek a (3.223a,c) képletekbe mennek át. Vektorok (3.219b) alakú lineáris kombinációjára, valamint két vektor (3.225a,b) összegére és különbségére érvényesek a (3.224) összefüggésekkel analóg alábbi komponensegyenletek:

$$\begin{aligned} k^1 &= \alpha\, a^1 + \beta\, b^1 + \cdots + \delta\, d^1\,, \\ k^2 &= \alpha\, a^2 + \beta\, b^2 + \cdots + \delta\, d^2\,, \\ k^3 &= \alpha\, a^3 + \beta\, b^3 + \cdots + \delta\, d^3\,; \end{aligned} \tag{3.228}$$

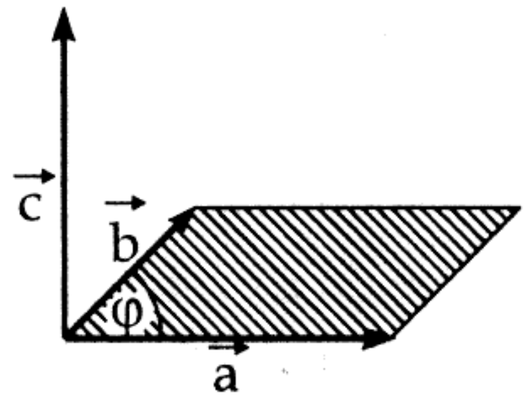
$$c^1 = a^1 \pm b^1\,, \quad c^2 = a^2 \pm b^2\,, \quad c^3 = a^3 \pm b^3\,. \tag{3.229}$$



3.115. ábra.



3.116. ábra.



3.117. ábra.

11. Irányténye̋ző vagy kifejtési együttható

Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor $\vec{\mathbf{a}}^0 = \vec{\mathbf{e}}$ egységvektor irányában vagy mentén vett irányténye̋ző̋jének vagy kifejtési együtthatójának nevezzük az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor $\vec{\mathbf{a}}^0 = \vec{\mathbf{e}}$ vektorra vetett vetületét, vagyis az

$$a_0 = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{a}}^0 = |\vec{\mathbf{a}}|\,\cos\varphi\,, \tag{3.230a}$$

skaláris szorzatot, ahol φ az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{a}}^0$ közötti szög.

Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektornak egy $\vec{\mathbf{b}}$ vektor mentén vett irányténye̋ző̋jére fennáll:

$$a_0 = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}^0, \;\text{ ahol }\; \vec{\mathbf{b}}^0 = \frac{\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|} \;\; (\vec{\mathbf{b}} \text{ irányú egységvektor}). \tag{3.230b}$$

Derékszögű koordinátarendszerben az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor irányténye̋zői az x-, y-, z-tengelyek mentén vett $\{a_x, a_y, a_z\}$ komponensek. Nem ortonormális koordinátarendszerben ez az állítás nem érvényes.

3.5.1.2. Skaláris szorzat és vektoriális szorzat

1. Skaláris szorzás Két vektor, $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ *skaláris szorzatát* az

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = (\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|\cos\varphi\,, \tag{3.231}$$

képlet definiálja, ahol φ az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ által bezárt szög, a közös kezdőpontra vonatkoztatva **(3.116. ábra)**. A skaláris szorzat értéke skalár.

2. A vektoriális szorzás az a művelet, amely két vektor, $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ *vektoriális szorzatára* vezet. Eredménye egy $\vec{\mathbf{a}}$-ra és $\vec{\mathbf{b}}$-re merőleges $\vec{\mathbf{c}}$ vektor, amelyre az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok jobbrendszert alkotnak **(3.117. ábra)**. Feltéve, hogy a három vektor kezdőpontját egy közös pontba helyeztük, ez akkor áll fenn, ha az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ által kifeszített síkra és egyúttal $\vec{\mathbf{c}}$ irányába nézve az $\vec{\mathbf{a}}$ vektort a $\vec{\mathbf{b}}$ vektor irányába átvivő legrövidebb forgatás az óramutató járásával megegyező értelmű. Ebben az esetben az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok irá-

nyítása olyan, mint a jobb kéz hüvelyk-, mutató- és középső ujjáé. Innen származik a *„jobbkéz-szabály"* fogalma. Kvantitatív szempontból az

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = \vec{\mathbf{c}} \tag{3.232a}$$

vektoriális szorzat értéke egy

$$|\vec{\mathbf{c}}\,| = |\vec{\mathbf{a}}\,|\,|\vec{\mathbf{b}}\,| \sin\varphi\,, \tag{3.232b}$$

hosszúságú vektor, ahol φ az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ által bezárt szög. A $\vec{\mathbf{c}}$ vektor hosszúsága numerikusan megegyezik az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ által kifeszített paralelogramma területével.

3. Vektorokkal képezett szorzatok tulajdonságai

a) A skaláris szorzat rendelkezik a kommutatív tulajdonsággal:

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}\,. \tag{3.233}$$

b) A vektoriális szorzat a tényezők felcserélésekor megváltoztatja előjelét:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}})\,. \tag{3.234}$$

c) A skalárral való szorzásra fennáll az asszociatív tulajdonság:

$$\alpha(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,) = (\alpha\,\vec{\mathbf{a}})\,\vec{\mathbf{b}}\,, \tag{3.235a}$$

$$\alpha(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\,) = (\alpha\,\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}}\,. \tag{3.235b}$$

d) Az asszociatív tulajdonság a kétszeres skaláris és vektoriális szorzatra nem áll fenn:

$$\vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,) \neq (\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,)\,\vec{\mathbf{c}}, \tag{3.236a}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) \neq (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\,) \times \vec{\mathbf{c}}\,. \tag{3.236b}$$

e) A disztributív tulajdonság fennáll:

$$\vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}\,) = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,, \tag{3.237a}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}\,) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}\,. \tag{3.237b}$$

f) Két vektor ortogonalitása $(\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}})$ akkor áll elő, ha

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = 0\,, \quad \text{és sem } \vec{\mathbf{a}}\text{, sem } \vec{\mathbf{b}} \text{ nem egyenlő a nullvektorral.} \tag{3.238}$$

g) Két vektor kollinearitása $(\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}})$ akkor áll fenn, ha

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{3.239}$$

h) Azonos vektorok szorzása:

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}^2 = a^2\,, \qquad \text{de} \quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{3.240}$$

i) Vektorok lineáris kombinációit ugyanúgy lehet szorozni, mint a skaláris polinomokat, ügyelni kell azonban arra, hogy vektoriális szorzásnál a tényező-felcserélések, pl. egynemű tagok összevonásakor, előjelváltozásokat okoznak.

■ **A:** $(3\vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}})\,(\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}} - 4\vec{\mathbf{c}}) = 3\vec{\mathbf{a}}^2 + 5\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{a}} - 6\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} - 10\vec{\mathbf{b}}^{\,2} + 4\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}} - 12\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}} - 20\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}} + 8\vec{\mathbf{c}}^{\,2}$

$$= 3\vec{\mathbf{a}}^2 - 10\vec{\mathbf{b}}^{\,2} + 8\vec{\mathbf{c}}^{\,2} - \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} - 14\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}} - 16\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}\,.$$

■ **B:** $(3\vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{b}} - 4\vec{\mathbf{c}}) = 3\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} - 2\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}} - 6\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} - 10\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{b}}$

$+4\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{b}} - 12\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} - 20\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} + 8\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{c}} = 0 - 5\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} + 2\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} - 6\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} + 0 - 4\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} - 12\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} - 20\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} + 0$

$= -11\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} - 10\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}} - 24\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} = 11\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} + 10\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{a}} + 24\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{b}}\,.$

j) Skalárinvariánsnak nevezzük az olyan skalárt, amelynek értéke a koordinátarendszer eltolásakor és elforgatásakor nem változik. Két vektor skaláris szorzata skalárinvariáns.

■ **A:** Egy $\vec{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor komponensei nem skalárinvariánsok, mert különböző koordinátarendszerekben különböző értékeket vehetnek fel.

■ **B:** Egy $\vec{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor hossza, vagyis a $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ mennyiség, skalárinvariáns, mert különböző koordinátarendszerekben ugyanaz az értéke.

■ **C:** Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata skalárinvariáns, nevezetesen $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{a}} = a^2 = |a|^2 \cos\varphi = |a^2|$, mert $\varphi = 0$.

3.5.1.3. Többszörös szorzási kapcsolatok

1. Kétszeres vektoriális szorzat

Az $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$ *kétszeres vektoriális szorzat* értéke egy új, $\vec{\mathbf{b}}$-vel és $\vec{\mathbf{c}}$-vel komplanáris vektor:

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}}\,(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}\,(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}})\,. \tag{3.241}$$

2. Vegyes szorzat

Az $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})\,\vec{\mathbf{c}}$ vegyes szorzat értéke olyan skalár, amely számszerűen megegyezik a három vektor által meghatározott paralelepipedon térfogatával; az érték pozitív, ha $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ jobbrendszert alkot, az ellenkező esetben pedig negatív. A vegyes szorzatnál a zárójel és a kereszt elhagyható:

$$(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{a}}\,. \tag{3.242}$$

A vegyes szorzatban, mindhárom tényező ciklikus felcserélésétől eltérően, két tényező felcserélése előjelváltozásra vezet.

*Komplanáris vektorok*ra, vagyis ha $\vec{\mathbf{a}}$ egy a $\vec{\mathbf{b}}$ és $\vec{\mathbf{c}}$ által meghatározott síkkal párhuzamos irányítású, fennáll

$$\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = 0\,. \tag{3.243}$$

3. Többszörös szorzatokra vonatkozó képletek

a) Lagrange-azonosság: $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})(\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{c}})\,(\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{d}}) - (\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}})\,(\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{d}})\,,$ (3.244)

b) $$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{e}}\,\vec{\mathbf{f}}\,\vec{\mathbf{g}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}} & \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{f}} & \vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{e}} & \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{f}} & \vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{g}} \\ \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{e}} & \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{f}} & \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{g}} \end{vmatrix}\,. \tag{3.245}$$

4. Szorzatokra vonatkozó képletek derékszögű koordinátákban

Ha az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok derékszögű koordinátái

$$\vec{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}\,, \quad \vec{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}\,, \quad \vec{\mathbf{c}} = \{c_x, c_y, c_z\} \tag{3.246}$$

akkor a szorzatokat a következő képletekből számíthatjuk ki:

1. Skaláris szorzat: $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$ (3.247)

2. Vektoriális szorzat: $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{\mathbf{k}}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\,. \tag{3.248}$$

3. Vegyes szorzat: $$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\,. \tag{3.249}$$

5. Szorzatokra vonatkozó képletek affin koordinátákban

1. Metrikus együtthatók és reciprok alapvektorok Ha az $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ rendszerben ismerjük két vektor, $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ affin koordinátáit, vagyis az

$$\vec{\mathbf{a}} = a^1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + a^2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + a^3\,\vec{\mathbf{e}}_3\,, \quad \vec{\mathbf{b}} = b^1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + b^2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + b^3\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{3.250}$$

felbontásokat, akkor ahhoz, hogy kiszámíthassuk az

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = a^1 b^1\,\vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + a^2\,b^2\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + a^3\,b^3\,\vec{\mathbf{e}}_3\,\vec{\mathbf{e}}_3 + \left(a^1\,b^2 + a^2\,b^1\right)\,\vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \left(a^2\,b^3 + a^3\,b^2\right)\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3 + \left(a^3\,b^1 + a^1\,b^3\right)\,\vec{\mathbf{e}}_3\,\vec{\mathbf{e}}_1 \tag{3.251}$$

skaláris szorzatot vagy az

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \left(a^2\,b^3 - a^3\,b^2\right)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3 + \left(a^3\,b^1 - a^1\,b^3\right)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1 + \left(a^1\,b^2 - a^2\,b^1\right)\,\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2\,, \tag{3.252a}$$

vektoriális szorzatot (felhasználtuk az

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{0}}\,, \tag{3.252b}$$

összefüggést), szükségünk van a koordinátavektorok páronkénti szorzataira. E páronkénti szorzatokat a skaláris szorzat esetében a hat darab

$$\begin{aligned} &g_{11} = \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_1\,, \quad g_{22} = \vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_2\,, \quad g_{33} = \vec{\mathbf{e}}_3\,\vec{\mathbf{e}}_3\,, \\ &g_{12} = \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_1\,, \quad g_{23} = \vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_3\,\vec{\mathbf{e}}_2\,, \quad g_{31} = \vec{\mathbf{e}}_3\,\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \tag{3.253}$$

metrikus együttható (szám), a vektoriális szorzat esetében pedig a három darab

$$\vec{\mathbf{e}}^{\,1} = \Omega\,(\vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3)\,, \quad \vec{\mathbf{e}}^{\,2} = \Omega\,(\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1)\,, \quad \vec{\mathbf{e}}^{\,3} = \Omega\,(\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2)\,, \tag{3.254a}$$

vektor, vagyis az $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ rendszerre vonatkozó három *reciprok vektor* adja meg, ahol az

$$\Omega = \frac{1}{\vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3}\,, \tag{3.254b}$$

együttható, amelynek nevezőjében a koordinátavektorok vegyes szorzata szerepel, kizárólag a későbbi képletek rövidebb írásmódját szolgálja. Az alapvektorok **3.11., 3.12. szorzótábláinak** használata az együtthatókkal végzett munkát áttekinthetőbbé teszi.

3.11. táblázat.
Alapvektorok skaláris szorzása

	$\vec{\mathbf{e}}_1$	$\vec{\mathbf{e}}_2$	$\vec{\mathbf{e}}_3$
$\vec{\mathbf{e}}_1$	g_{11}	g_{12}	g_{13}
$\vec{\mathbf{e}}_2$	g_{21}	g_{22}	g_{23}
$\vec{\mathbf{e}}_3$	g_{31}	g_{32}	g_{33}

$(g_{ki} = g_{ik})$

3.12. táblázat.
Alapvektorok vektoriális szorzása

szorzandók \ szorzók	$\vec{\mathbf{e}}_1$	$\vec{\mathbf{e}}_2$	$\vec{\mathbf{e}}_3$
$\vec{\mathbf{e}}_1$	0	$\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,3}}{\Omega}$	$-\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,2}}{\Omega}$
$\vec{\mathbf{e}}_2$	$-\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,3}}{\Omega}$	0	$\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,1}}{\Omega}$
$\vec{\mathbf{e}}_3$	$\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,2}}{\Omega}$	$-\frac{\vec{\mathbf{e}}^{\,1}}{\Omega}$	0

2. Alkalmazás derékszögű koordinátákra A derékszögű koordináták az affin koordináták speciális esetei. A **3.13., 3.14. táblázatokból** adódnak az

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{i}}\,, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{j}}\,, \quad \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{k}} \quad \text{alapvektorok, a} \tag{3.255a}$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,\ g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0,\ \Omega = \frac{1}{\vec{\mathbf{i}}\,\vec{\mathbf{j}}\,\vec{\mathbf{k}}} = 1 \quad \text{metrikus együtthatók, valamint az} \tag{3.255b}$$

$$\vec{\mathbf{e}}^{\,1} = \vec{\mathbf{i}}\,, \quad \vec{\mathbf{e}}^{\,2} = \vec{\mathbf{j}}\,, \quad \vec{\mathbf{e}}^{\,3} = \vec{\mathbf{k}} \quad \text{reciprok alapvektorok.} \tag{3.255c}$$

Tehát a reciprok alapvektorok megegyeznek a koordinátarendszer alapvektoraival, vagy másképpen kifejezve, derékszögű koordináták esetén az alapvektor-rendszerek önmaguk reciprok rendszerei.

3.13. táblázat.
Reciprok alapvektorok skaláris szorzása

	$\vec{\mathbf{i}}$	$\vec{\mathbf{j}}$	$\vec{\mathbf{k}}$
$\vec{\mathbf{i}}$	1	0	0
$\vec{\mathbf{j}}$	0	1	0
$\vec{\mathbf{k}}$	0	0	1

3.14. táblázat.
Reciprok alapvektorok vektoriális szorzása

szorzandók \ szorzók	$\vec{\mathbf{i}}$	$\vec{\mathbf{j}}$	$\vec{\mathbf{k}}$
$\vec{\mathbf{i}}$	0	$\vec{\mathbf{k}}$	$-\vec{\mathbf{j}}$
$\vec{\mathbf{j}}$	$-\vec{\mathbf{k}}$	0	$\vec{\mathbf{i}}$
$\vec{\mathbf{k}}$	$\vec{\mathbf{j}}$	$-\vec{\mathbf{i}}$	0

3. A skaláris szorzat koordinátás előállítása

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} g_{mn}a^m\,b^n = g_{\alpha\beta}a^\alpha\,b^\beta\,. \tag{3.256}$$

Derékszögű koordináták esetén (3.256) a (3.247) képletbe megy át.
A (3.256) összefüggés második egyenlőségjele után az összegek tenzorszámításban szokásos rövidített írásmódját alkalmaztuk (lásd 261. old.). Az utóbbi írásmód abban áll, hogy a teljes összeg helyett csak egy tipikus tagot írunk le, és összegezni kell minden, a tagban kétszer (egyszer alul és egyszer felül) szereplő index szerint. Az összegezési indexeket néha görög betűkkel jelöljük; esetünkben ezek az 1, 2, 3 számokon futnak végig. Tehát

$$\begin{aligned} g_{\alpha\,\beta}a^\alpha\,b^\beta = {} & g_{11}a^1\,b^1 + g_{12}a^1\,b^2 + g_{13}a^1\,b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2\,b^2 + g_{23}a^2\,b^3 \\ & + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3\,b^2 + g_{33}a^3\,b^3\,. \end{aligned} \tag{3.257}$$

4. A vektoriális szorzat koordinátás előállítása A (3.252a) összefüggés alapján fennáll

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3 \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}^1 & \vec{\mathbf{e}}^2 & \vec{\mathbf{e}}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3\,\left[(a^2\,b^3 - a^3\,b^2)\vec{\mathbf{e}}^1 + (a^3\,b^1 - a^1\,b^3)\,\vec{\mathbf{e}}^2 + (a^1\,b^2 - a^2\,b^1)\vec{\mathbf{e}}^3\right]\,. \end{aligned} \tag{3.258}$$

Derékszögű koordináták esetén (3.258) a (3.248) képletbe megy át.

5. A vegyes szorzat koordinátás előállítása A (3.252a) összefüggés alapján kapjuk:

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{e}}_1\,\vec{\mathbf{e}}_2\,\vec{\mathbf{e}}_3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}\,. \tag{3.259}$$

Derékszögű koordináták esetén (3.259) a (3.249) képletbe megy át.

3.5.1.4. Vektoregyenletek

A **3.15. táblázat** az egyszerű vektoregyenletekről ad összeállítást. Benne $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ ismert vektorokat jelent, $\vec{\mathbf{x}}$ a keresett vektor, α, β, γ ismert skalárok és x, y, z a keresett skalárok.

3.5.1.5. Vektor kovariáns és kontravariáns koordinátái

1. Definíciók Az $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ alapvektorok által meghatározott rendszerben egy $\vec{\mathbf{a}}$ vektornak az

$$\vec{\mathbf{a}} = a^1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + a^2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + a^3\,\vec{\mathbf{e}}_3 = a^\alpha\,\vec{\mathbf{e}}_\alpha\,, \tag{3.260}$$

képlettel definiált a^1, a^2, a^3 affin koordinátáit a vektor *kontravariáns koordinátái*nak is nevezzük. Ezzel szemben a vektor *kovariáns koordinátái* az $\vec{\mathbf{e}}^1$, $\vec{\mathbf{e}}^2$, $\vec{\mathbf{e}}^3$ alapvektorok szerinti, vagyis az $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$

3.15. táblázat. Vektoregyenletek

$\vec{\mathbf{x}}$ ismeretlen vektor, $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{d}}$ ismert vektorok
x, y, z ismeretlen skalárok, α, β, γ ismert skalárok

Egyenlet	Megoldás
1. $\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}$	$\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}}$
2. $\alpha\,\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{a}}$	$\vec{\mathbf{x}}=\dfrac{\vec{\mathbf{a}}}{\alpha}$
3. $\vec{\mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{a}}=\alpha$	Az egyenlet határozatlan; ha minden $\vec{\mathbf{x}}$ vektort, amelyre az egyenlet teljesül, ugyanabból a pontból mérünk fel, akkor a végpontok egy az $\vec{\mathbf{a}}$ vektorra merőleges síkon helyezkednek el. A (3) egyenletet e *sík vektoregyenletének* nevezzük.
4. $\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}\quad(\vec{\mathbf{b}}\perp\vec{\mathbf{a}})$	Az egyenlet határozatlan; ha minden $\vec{\mathbf{x}}$ vektort, amelyre az egyenlet teljesül, ugyanabból a pontból mérünk fel, akkor a végpontok egy az $\vec{\mathbf{a}}$ vektorral párhuzamos egyenesen helyezkednek el. A (4) egyenletet ezen *egyenes vektoregyenletének* nevezzük.
5. $\begin{cases}\vec{\mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{a}}=\alpha\\ \vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}\quad(\vec{\mathbf{b}}\perp\vec{\mathbf{a}})\end{cases}$	$\vec{\mathbf{x}}=\dfrac{\alpha\,\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}}{a^2}$
6. $\begin{cases}\vec{\mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{a}}=\alpha\\ \vec{\mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{b}}=\beta\\ \vec{\mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{c}}=\gamma\end{cases}$	$\vec{\mathbf{x}}=\dfrac{\alpha\,(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})+\beta\,(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})+\gamma\,(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})}{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}}=\alpha\,\tilde{\vec{\mathbf{a}}}+\beta\,\tilde{\vec{\mathbf{b}}}+\gamma\,\tilde{\vec{\mathbf{c}}}$, ahol $\tilde{\vec{\mathbf{a}}}$, $\tilde{\vec{\mathbf{b}}}$, $\tilde{\vec{\mathbf{c}}}$ az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok reciprok vektorai (lásd 186. old.).
7. $\vec{\mathbf{d}}=x\,\vec{\mathbf{a}}+y\,\vec{\mathbf{b}}+z\,\vec{\mathbf{c}}$	$x=\dfrac{\vec{\mathbf{d}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$, $y=\dfrac{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{d}}\,\vec{\mathbf{c}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$, $z=\dfrac{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{d}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$
8. $\vec{\mathbf{d}}=x(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})+y\,(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})+z\,(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$	$x=\dfrac{\vec{\mathbf{d}}\,\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$, $y=\dfrac{\vec{\mathbf{d}}\,\vec{\mathbf{b}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$, $z=\dfrac{\vec{\mathbf{d}}\,\vec{\mathbf{c}}}{\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}}}$

rendszer reciprok alapvektor-rendszere szerinti vektorfelbontás együtthatóinak felelnek meg (lásd Irod. [22.18], 11. kötet). Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor a_1, a_2, a_3 kovariáns koordinátáira fennáll

$$\vec{\mathbf{a}}=a_1\,\vec{\mathbf{e}}^{\,1}+a_2\,\vec{\mathbf{e}}^{\,2}+a_3\,\vec{\mathbf{e}}^{\,3}=a_\alpha\,\vec{\mathbf{e}}^{\,\alpha}\,. \tag{3.261}$$

Derékszögű koordinátarendszerben a vektorok kovariáns koordinátái megegyeznek a kontravariáns koordinátákkal.

2. Koordináták előállítása skaláris szorzatok segítségével Egy $\vec{\mathbf{a}}$ vektor bármely kovariáns koordinátája egyenlő a vektornak és a koordinátarendszer megfelelő alapvektorának skaláris szorzatával:

$$a_1=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}_1\,,\quad a_2=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}_2\,,\quad a_3=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}_3\,. \tag{3.262}$$

Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor bármely kontravariáns koordinátája egyenlő a vektor és a megfelelő reciprok alapvektor skaláris szorzatával:

$$a^1=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}^{\,1}\,,\quad a^2=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}^{\,2}\,,\quad a^3=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{e}}^{\,3}\,. \tag{3.263}$$

Derékszögű koordináták esetén a (3.262) és a (3.263) képlet megegyezik egymással:

$$a_x=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{i}}\,,\quad a_y=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{j}}\,,\quad a_z=\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{3.264}$$

3. Skaláris szorzat előállítása koordináták segítségével Két vektor skaláris szorzatának kontravariáns koordináták segítségével való előállítását a (3.256) képlet tartalmazza. Kovariáns koordinátákra a megfelelő képlet:

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}}=g^{\alpha\,\beta}\,a_\alpha\,b_\beta\,, \tag{3.265}$$

ahol $g^{mn} = \vec{\mathbf{e}}^m \vec{\mathbf{e}}^n$ a reciprok vektorrendszerre vonatkozó metrikus együtthatók. Utóbbiakat a g_{mn} együtthatókkal a

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n} A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}, \tag{3.266}$$

képlet kapcsolja össze, ahol A^{mn} a nevezőben álló determinánsnak az az aldeterminánsa, amely a g_{mn} elem sorának és oszlopának törlésével áll elő.

Ha az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor kontravariáns koordinátákkal, a $\vec{\mathbf{b}}$ vektor viszont kovariáns koordinátákkal van megadva, akkor skaláris szorzatuk

$$\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^\alpha b_\alpha\,, \tag{3.267}$$

és hasonlóképpen fennáll $\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = a_\alpha b^\alpha\,.$ (3.268)

3.5.1.6. A vektoralgebra geometriai alkalmazásai

A **3.16. táblázatban** a vektoralgebra néhány geometriai alkalmazása van feltüntetve. További, az analitikus geometriához tartozó alkalmazásokat, pl. a sík és az egyenes vektoregyenletét, a 188. és 214. oldalakon tárgyaljuk.

3.16. táblázat. A vektoralgebra geometriai alkalmazásai

Megnevezés	Vektoros képlet	Koordinátás képlet (derékszögű koordinátákban)
Az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor hosszúsága	$a = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}^2}$	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe	$S = \left\vert \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right\vert$	$S = \sqrt{\left\vert \begin{matrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{matrix} \right\vert^2 + \left\vert \begin{matrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{matrix} \right\vert^2 + \left\vert \begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{matrix} \right\vert^2}$
Az $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata	$V = \left\vert \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\,\vec{\mathbf{c}} \right\vert$	$V = \left\vert \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\vert$
Az $\vec{\mathbf{a}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok közötti szög	$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}}{\sqrt{\vec{\mathbf{a}}^2\vec{\mathbf{b}}^2}}$	$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

3.5.2. A sík analitikus geometriája

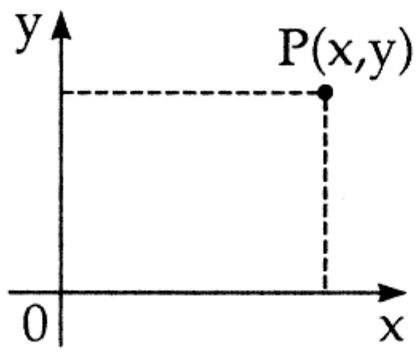
3.5.2.1. Alapvető fogalmak és képletek, síkbeli koordinátarendszerek

1. Síkbeli koordináták és síkbeli koordinátarendszerek

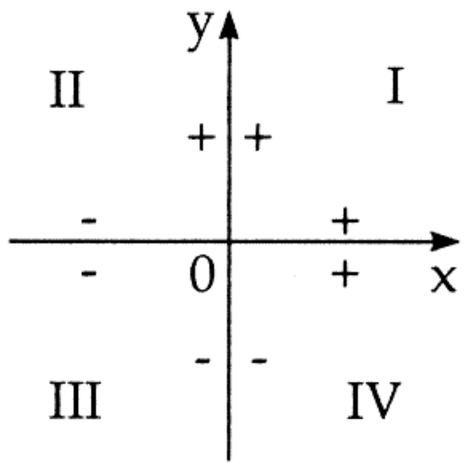
A sík bármely P pontjának helyzetét tetszőleges koordinátarendszer segítségével le lehet írni. A pont helyzetét meghatározó számokat koordinátáknak nevezzük. Legtöbbször a derékszögű koordinátákat és a polárkoordinátákat használjuk.

1. Derékszögű koordináták Egy P pont derékszögű koordinátái a pontnak két egymásra merőleges egyenestől, a *koordinátatengelyek*től mért, meghatározott előjellel ellátott és meghatározott méretarányban megadott távolságai **(3.118. ábra)**. A koordinátatengelyek 0 metszéspontját a *koordinátarendszer kezdőpontjá*nak nevezzük. A vízszintes koordinátatengelyt, amely többnyire az *x-tengely*, szokásosan *abszcisszatengely*nek nevezzük, a függőleges tengelyt pedig, amely többnyire az *y-tengely*, *ordinátatengely*nek. Ezeken a tengelyeken rögzítjük a pozitív irányt, mégpedig rendszerint úgy, hogy az

x-tengelyen jobbra, az y-tengelyen pedig fölfelé mutasson. Ekkor a P pont koordinátái aszerint pozitívok vagy negatívak, hogy a pont vetülete melyik féltengelyre esik **(3.119. ábra)**. Az x, ill. y koordinátát a P pont *abszcisszájának*, ill. *ordinátájának* nevezzük. A $P(a, b)$ írásmód egy a abszcisszájú és b ordinátájú pontot jelöl. A koordinátatengelyek az x, y-síkot négy *síknegyedre*, az I., II., III. és IV. síknegyedre bontják fel **(3.119.a,b ábrák)**.



3.118. ábra.



a)

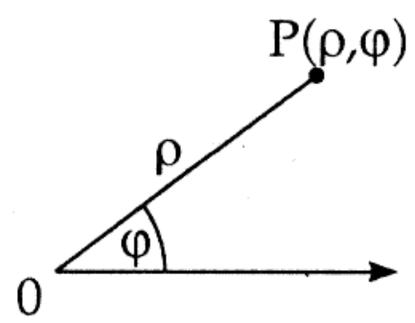
	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

b)

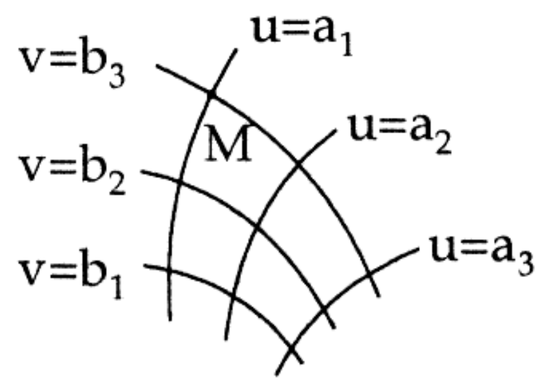
3.119. ábra.

2. Polárkoordináták Egy P pont polárkoordinátái **(3.120. ábra)** a ρ *sugár*, vagyis a pont távolsága egy megadott nullaponttól, a 0 *pólus*tól, és a φ *polárszög*, vagyis a $0P$ egyenesnek egy megadott, a póluson átmenő, irányított félegyenessel, a polártengellyel bezárt szöge. A nullapontot a koordinátarendszer kezdőpontjának is nevezhetjük. A polárszög pozitív, ha mérése a polártengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban történik; ellenkező esetben negatív.

3. Görbevonalú koordinátákat határoz meg a sík két egyparaméteres görbeserege, a koordinátavonal-seregek **(3.121. ábra)**. A sík bármely pontján a két seregnek csak egy-egy, a pontban egymást metsző görbéje halad át. A pontnak megfelelő paraméterek a pont *görbevonaú koordinátái.* A **3.121. ábrán** az M pont görbevonalú koordinátái $u = a_1$ és $v = b_3$. A görbevonalú koordinátáktól eltérően a derékszögű koordinátarendszerben a koordinátavonalak a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek, a polárkoordinátarendszerben pedig a pólus körüli koncentrikus körök és a pólusból kiinduló félegyenesek.



3.120. ábra.



3.121. ábra.

2. Koordinátatranszformációk

Egyik derékszögű koordinátarendszerről a másikra való áttérésnél a koordináták a következő szabályok szerint változnak meg:

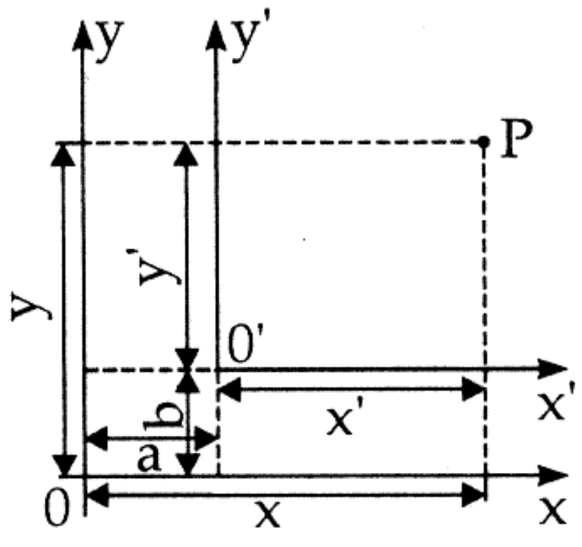
1. A koordinátatengelyek párhuzamos eltolása az a abszcissza- és b ordinátaszakasszal **(3.122. ábra)**. Ilyenkor az eltolás előtti x, y koordinátákra, az eltolás utáni x', y' koordinátákra, valamint az új koordinátarendszer $0'$ kezdőpontjának a régi koordinátarendszerre vonatkozó a, b koordinátáira fennáll:

$$x = x' + a\,, \quad y = y' + b\,, \qquad (3.269a) \qquad x' = x - a\,, \quad y' = y - b\,. \qquad (3.269b)$$

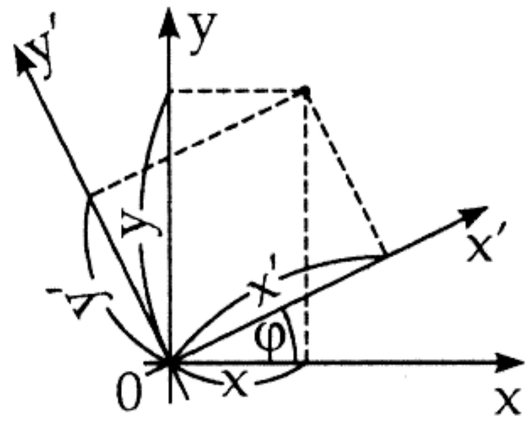
2. A koordinátatengelyek elforgatása φ szöggel **(3.123. ábra)**. Ilyenkor

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\,, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\,, \qquad (3.270a)$$

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi\,, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\,. \qquad (3.270b)$$



3.122. ábra.

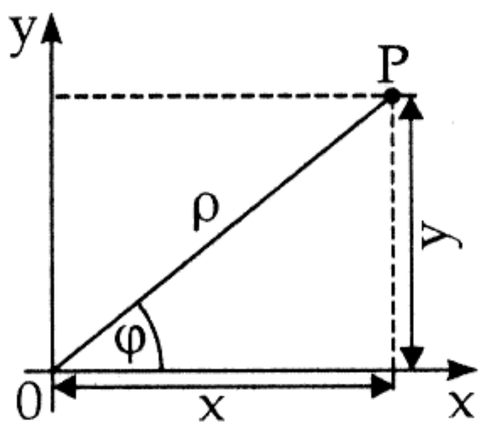


3.123. ábra.

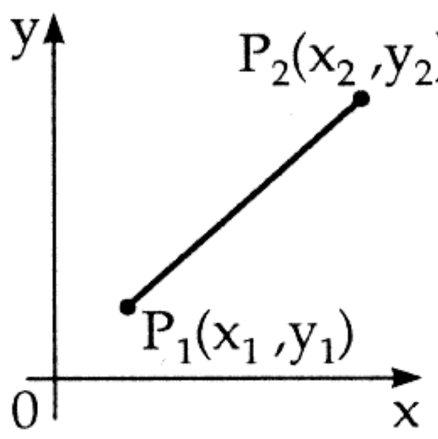
Általánosságban egy koordinátarendszerről egy másikra való áttérést olyan transzformációval lehet elvégezni, amely egy transzlációból (eltolásból) és egy rotációból (a koordinátatengelyek elforgatásából) áll. A (3.270a,b) rendszerhez tartozó

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ ahol } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ ill. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{D}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.270c}$$

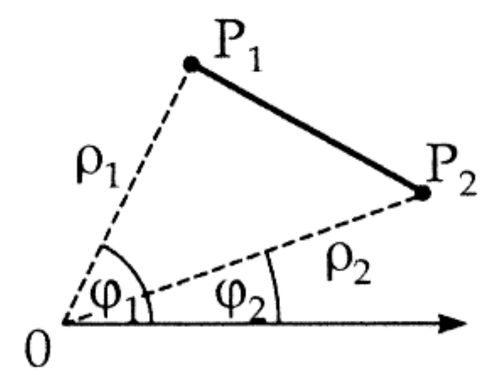
együttható-mátrixot *forgásmátrix*nak hívjuk.



3.124. ábra.



3.125. ábra.



3.126. ábra.

3. Áttérés derékszögű koordinátákról polárkoordinátákra és viszont Ezt a következő képletek segítségével lehet végrehajtani, ha feltesszük, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja és a pólus, valamint az abszcisszatengely és a polártengely egybeesik **(3.124. ábra)**:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad y = r(\varphi)\sin\varphi \quad (-\pi < \varphi \le \pi, \quad \rho \ge 0), \tag{3.271a}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3.271b}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0 \text{ és } y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0 \text{ és } y < 0, \\ \text{határozatlan}, & \text{ha } x = y = 0. \end{cases} \tag{3.271c}$$

3. Két pont közötti távolság

Ha derékszögű koordinátákban megadva a két pont $P_1\,(x_1, y_1)$ és $P_2\,(x_2, y_2)$ **(3.125. ábra)**, akkor

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{3.272}$$

ha pedig a $P_1\,(\rho_1, \varphi_1)$ és $P_2\,(\rho_2, \varphi_2)$ polárkoordinátás megadás az ismert **(3.126. ábra)**, akkor

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,. \tag{3.273}$$

4. Tömegközéppont (súlypont) koordinátái

Az m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tömegű $M_i\,(x_i, y_i)$ anyagi pontokból álló rendszer tömegközéppontjának x, y koordinátáit a következő képletekkel lehet kiszámítani:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\,, \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\,. \tag{3.274}$$

5. Szakasz felosztása

1. Adott arányú felosztás A $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \dfrac{m}{n} = \lambda$ osztásarányú P pont **(3.127.a ábra)** koordinátáit az

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,, \tag{3.275a}$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,. \tag{3.275b}$$

képletekkel számíthatjuk ki. A P_1P_2 szakasz *felezőpontjára* $\lambda = 1$ miatt kapjuk:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \tag{3.275c}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}\,. \tag{3.275d}$$

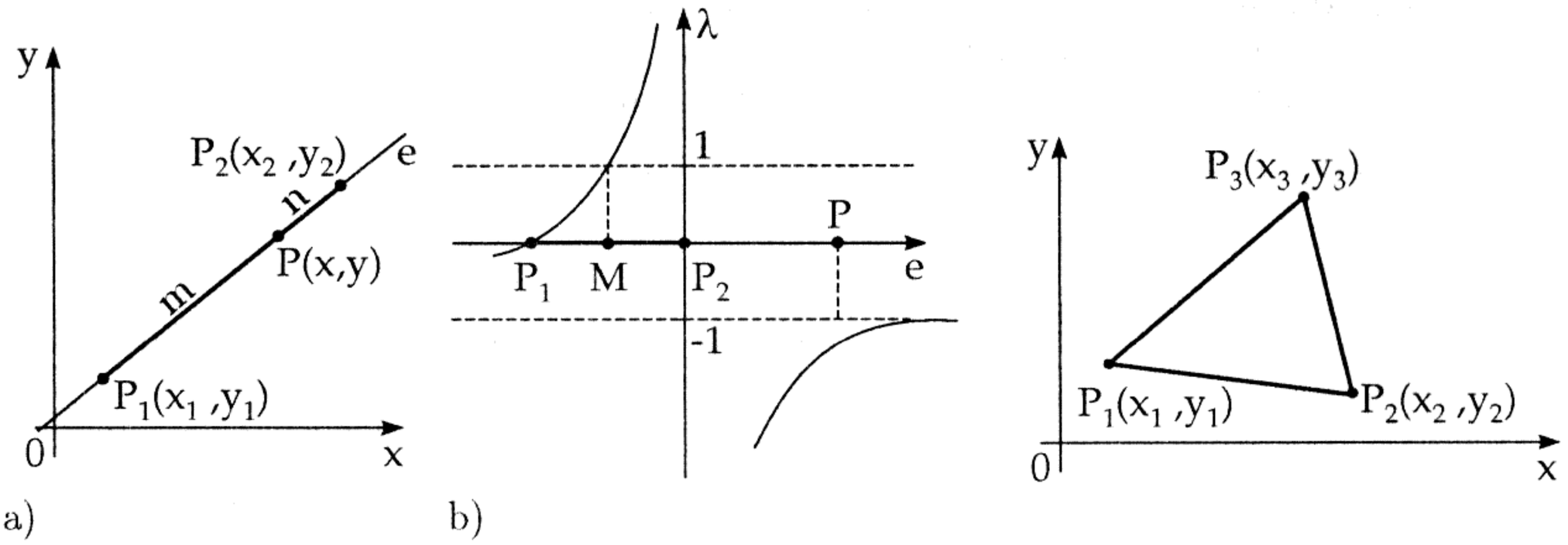
Ha a $\overline{P_1P}$ és $\overline{PP_2}$ szakaszhoz pozitív vagy negatív előjelet rendelünk attól függően, hogy irányuk egyezik-e $\overline{P_1P_2}$-ével vagy sem, akkor a (3.275a,b,c,d) képletek segítségével $\lambda < 0$ esetén olyan pontot határozhatunk meg, amely a $\overline{P_1P_2}$ szakaszt az előírt arányban kívülről osztja (*külső felosztás*), vagyis a $\overline{P_1P_2}$ szakaszon kívül helyezkedik el. Ha P a $\overline{P_1P_2}$ szakaszon belül található, belső felosztásról beszélünk. Megállapodunk, hogy

a) $\lambda = 0$, ha $P = P_1$,

b) $\lambda = \infty$, ha $P = P_2$ és

c) $\lambda = -1$, ha P az e egyenes végtelen távoli pontja, vagyis ha P az e egyenesen, P_1P_2-től végtelen távolságra fekszik. A λ érték menetét a **3.127.b ábra** mutatja.

■ Arra a P pontra, amelyre P_2 a $\overline{P_1P}$ szakasz közepén helyezkedik el, $\lambda = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -2$.



a) b)

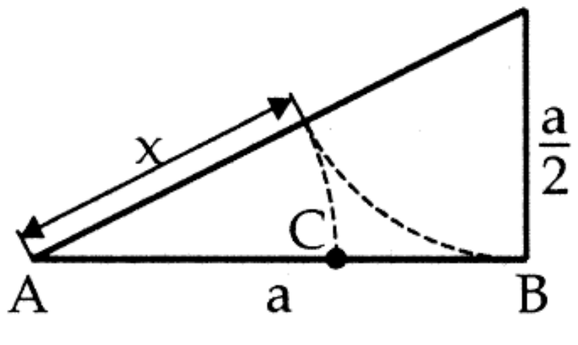
3.127. ábra. 3.128. ábra.

2. Aranymetszésnek nevezzük az a szakasz két, x és $a - x$ részszakaszra való felbontását, ha az x részszakasz úgy aránylik az a teljes szakaszhoz, mint az $a - x$ részszakasz aránylik az x részszakaszhoz:

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}\,. \tag{3.276a}$$

Ebben az esetben x az a és az $a-x$ mértani közepe, és fennáll:

$$x = \sqrt{a(a-x)}\,, \qquad (3.276b) \qquad x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 0,618 \cdot a\,. \qquad (3.276c)$$



3.129. ábra.

Az x részszakaszt a **3.129. ábra** szerinti geometriai szerkesztéssel is meg lehet határozni. Egyébként x annak a szabályos tízszögnek az oldalhosszúsága, amelynek körülírt köre a sugarú.
Az aranymetszés egyenletére vezet az a feladat is, amely szerint egy (3.276a) oldalarányú téglalapról le kell választani egy négyzetet úgy, hogy a megmaradó téglalapra is teljesüljön (3.276c).

6. Területek

1. Háromszög területe Ha adva vannak a $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$ és $P_3\,(x_3, y_3)$ csúcsok **(3.128. ábra)**, akkor a terület:

$$T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)\,(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)\,(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)\,(y_3 + y_1)\right]\,. \qquad (3.277)$$

Három pont akkor fekszik egy egyenesen, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (3.278)$$

2. Sokszög területe Ha adva vannak a $P_1\,(x_1, y_1)\,,\ P_2\,(x_2, y_2)\,,\ \ldots,\ P_n\,(x_n, y_n)$ csúcsok, akkor

$$T = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)\,(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)\,(y_2 + y_3) + \cdots + (x_n - x_1)\,(y_n + y_1)\right]\,. \qquad (3.279)$$

Ha a csúcsok számozása az óramutató járásával ellentétes forgásiránynak felel meg, a (3.277) és (3.279) képlet pozitív területet ad. Ellenkező esetben a terület negatív.

7. Görbe egyenlete

Az x, y koordinátákra vonatkozó minden $F(x, y) = 0$ egyenletnek megfelel egy görbe, amelynek az a tulajdonsága, hogy a görbe bármely P pontjának koordinátáira az egyenlet teljesül, és megfordítva: minden pont, amelynek koordinátáira az egyenlet teljesül, a görbén helyezkedik el. E pontok halmazát *mértani hely*nek is nevezzük. Ha az $F(x, y) = 0$ egyenlet a sík egyetlen valós pontjára sem teljesül, akkor nem tartozik hozzá semmilyen valós görbe; ilyenkor *képzetes görbé*ről beszélünk.

- **A Algebrai görbe:** $x^2 + y^2 + 1 = 0\,,$
- **B Transzcendens görbe:** $y = \ln\left(1 - x^2 - \operatorname{ch} x\right)\,.$

Ha $F(x, y)$ polinom, azt mondjuk, hogy $F(x, y) = 0$ *algebrai görbét* ad meg, és a polinom fokszámát a *görbe rendjé*nek nevezzük (lásd 64. old.). Ha nincs olyan $F(x, y)$ polinom, amellyel a görbe egyenlete $F(x, y) = 0$ alakra hozható, *transzcendens görbé*ről beszélünk.

Görbék egyenleteit más koordinátarendszerekben is analóg módon lehet tárgyalni. A továbbiakban azonban, ha mást nem mondunk, csak derékszögű koordinátákat fogunk használni.

3.5.2.2. Egyenes

1. Egyenes egyenlete

Minden, a koordinátákban lineáris egyenlet egyenest definiál, és megfordítva: bármely egyenes egyenlete elsőfokú lineáris egyenlet.

1. Az egyenes általános egyenlete

$$Ax + By + C = 0\,. \tag{3.280}$$

$A = 0$ esetén **(3.130. ábra)** az egyenes párhuzamos az x-tengellyel, $B = 0$ esetén az y-tengellyel, $C = 0$ esetén pedig az egyenes átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján.

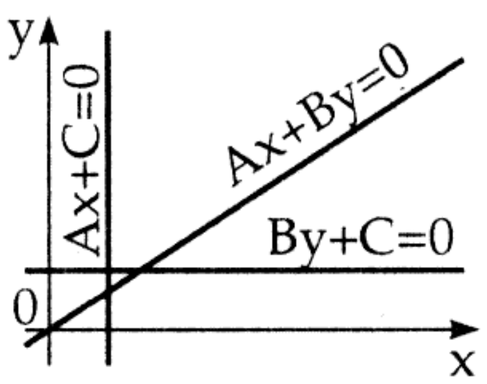
2. Az egyenes iránytényezős egyenlete Minden egyenes, amely nem párhuzamos az y-tengellyel, előállítható

$$y = kx + b \tag{3.281}$$

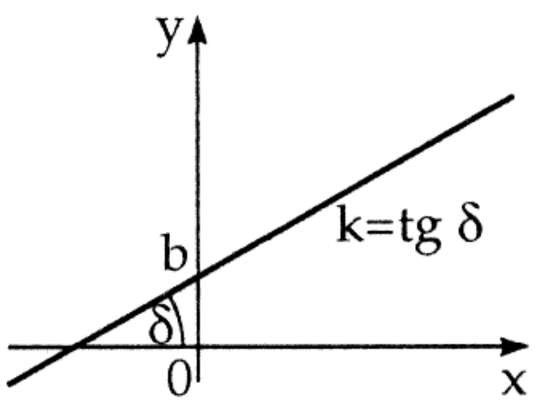
alakú egyenlettel. A k mennyiséget az egyenes *iránytényezőjének* nevezzük; ez egyenlő annak a szögnek a tangensével, amelyet az egyenes az x-tengely pozitív irányával zár be **(3.131. ábra)**. A b érték az egyenes által az y-tengelyből kimetszett szakaszt adja meg. Ez, akárcsak a tangens, az egyenes helyzetétől függően különböző előjelű lehet.

3. Adott ponton átmenő egyenes egyenlete Az adott $P_1\,(x_1, y_1)$ ponton átmenő, adott irányú egyenes **(3.132. ábra)** egyenlete

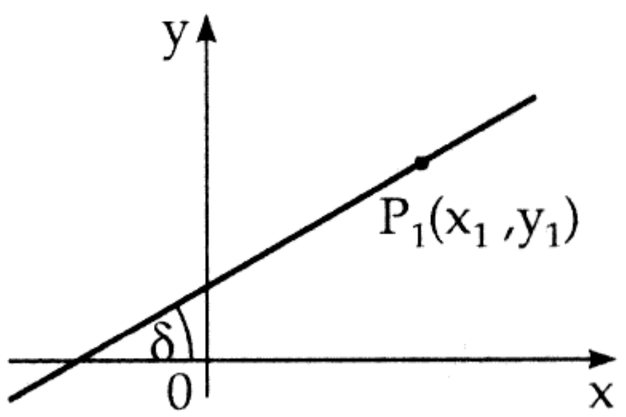
$$y - y_1 = k\,(x - x_1)\,, \quad \text{ahol} \quad k = \operatorname{tg}\delta\,. \tag{3.282}$$



3.130. ábra.



3.131. ábra.



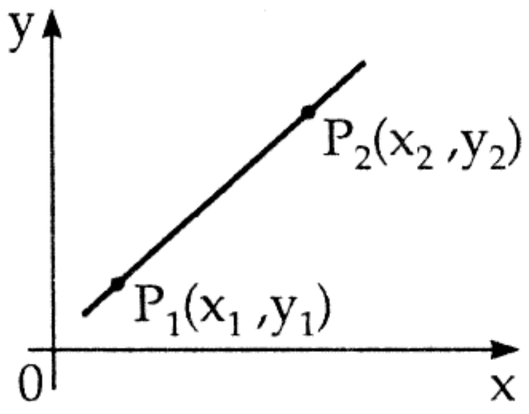
3.132. ábra.

4. Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete Ha az egyenesnek két $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$ pontja adott **(3.133. ábra)**, akkor az egyenes egyenlete

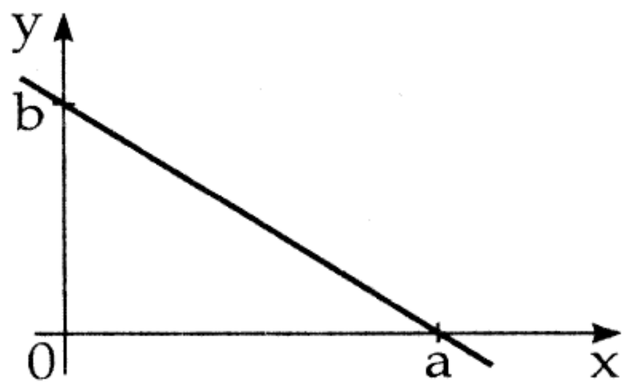
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{3.283}$$

5. Az egyenes tengelymetszetes egyenlete Ha az egyenes a tengelyekből az a, ill. b szakaszt metszi ki, ahol az előjeleket is tekintetbe kell venni, akkor az egyenlet **(3.134. ábra)**:

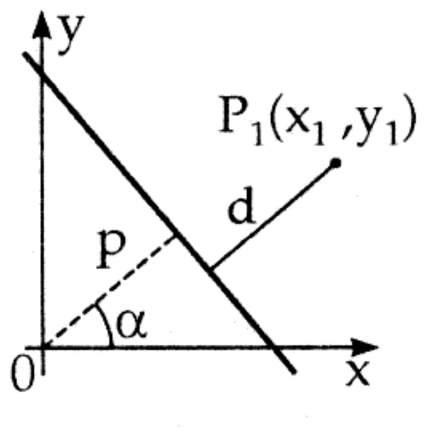
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,. \tag{3.284}$$



3.133. ábra.



3.134. ábra.



3.135. ábra.

6. Az egyenes egyenletének normálalakja (vagy HESSE-*féle normálalak*) Ha az egyenes távolsága a koordinátarendszer kezdőpontjától p, továbbá az x-tengely és a koordinátarendszer kezdőpontjából az egyenesre bocsátott normális által bezárt szög α **(3.135. ábra)**, ahol $p > 0$ és $0 \leq \alpha < 2\pi$, akkor a HESSE-féle normálalak a következő:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,. \tag{3.285}$$

A HESSE-féle normálalakot az egyenes általános egyenletéből a

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3.286}$$

*normáló tényező*vel való szorzás útján lehet levezetni. A μ tényező előjelét C előjelével ellentétesnek kell választani.

7. Az egyenes polárkoordinátás egyenlete (3.136. ábra) Ha a pólusnak az egyenestől mért távolsága (a pólustól az egyenesig terjedő normálisszakasz) p, továbbá a polártengely és a pólusból az egyenesre bocsátott normális közötti szög α, akkor

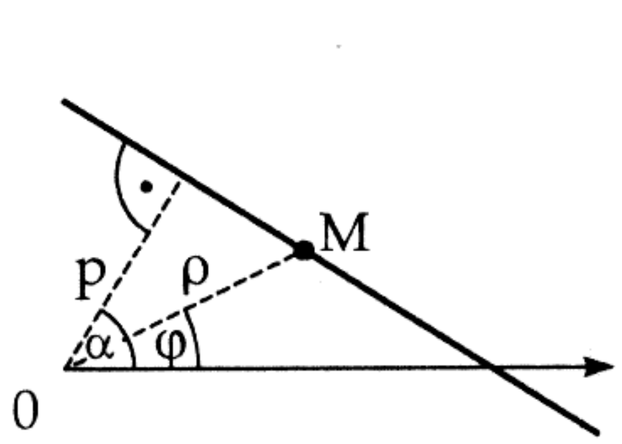
$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)} . \tag{3.287}$$

2. Pont és egyenes távolsága

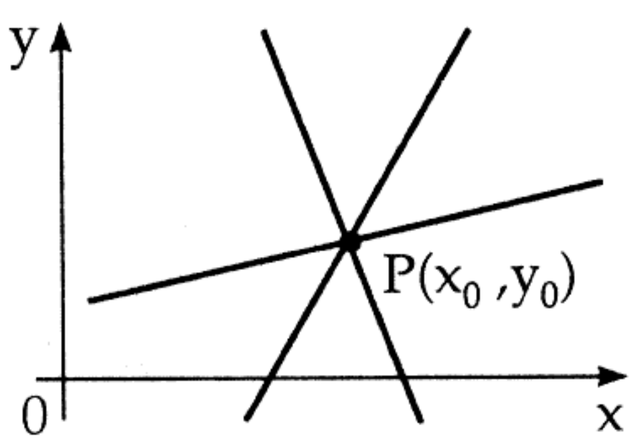
A $P_1(x_1, y_1)$ pontnak egy egyenestől való d távolságát **(3.135. ábra)** a HESSE-féle normálalakból úgy kapjuk meg, hogy (3.285) bal oldalába behelyettesítjük az adott pont koordinátáit:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p . \tag{3.288}$$

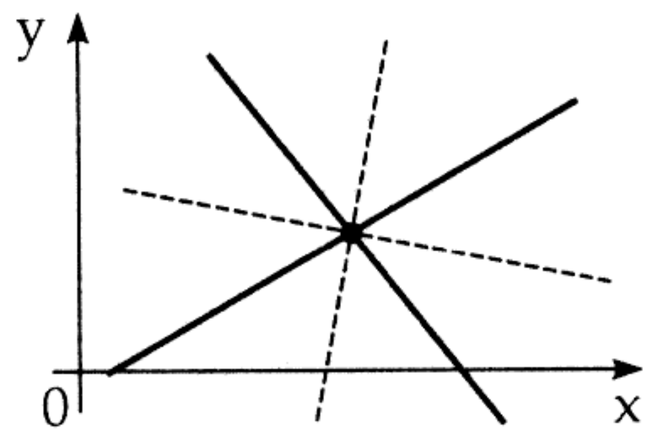
Ha P_1 és a koordinátarendszer kezdőpontja az egyenes különböző oldalain fekszik, akkor $d > 0$, ellenkező esetben $d < 0$.



3.136. ábra.



3.137. ábra.



3.138. ábra.

3. Egyenesek metszéspontja

1. Két egyenes metszéspontja Ahhoz, hogy kiszámítsuk két egyenes metszéspontjának x_0, y_0 koordinátáit, meg kell oldani az egyenleteikből alkotott egyenletrendszert. Ha az egyenesek az

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 , \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \tag{3.289a}$$

egyenletekkel vannak megadva, akkor

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} , \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} . \tag{3.289b}$$

Ha $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, akkor az egyenesek párhuzamosak. Ha $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, az egyenesek egybeesnek.

2. Sugársor Ha két egyenes metszéspontján egy harmadik,

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \tag{3.290a}$$

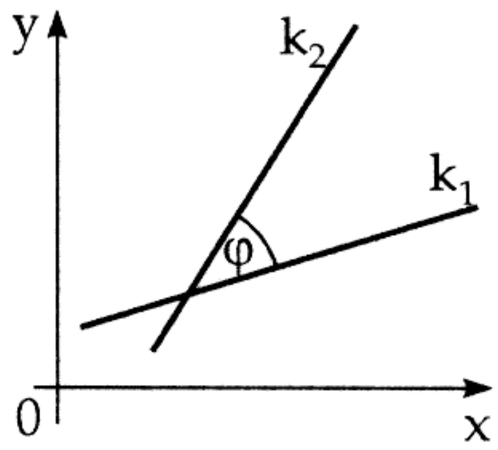
egyenletű egyenes halad át **(3.137. ábra)**, akkor teljesül a következő feltétel:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.290b}$$

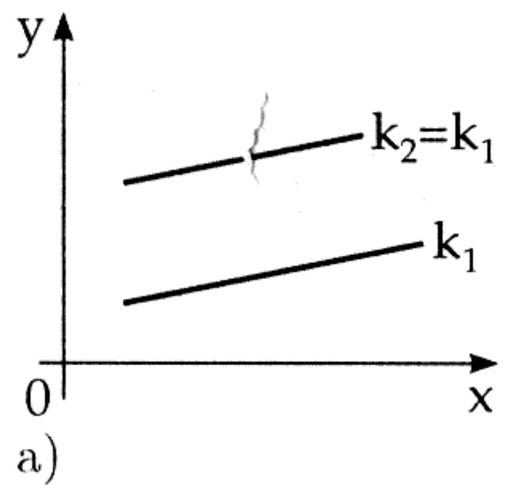
Az

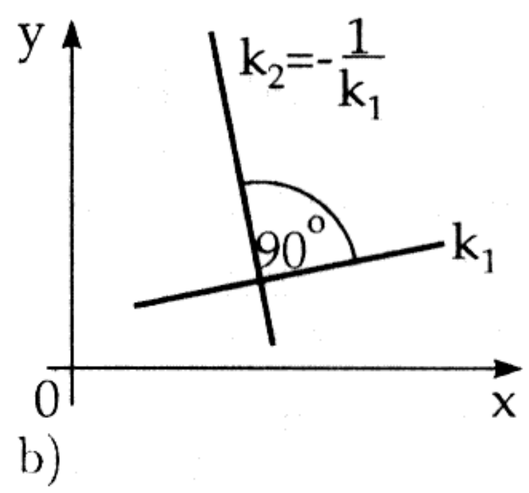
$$(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \qquad (-\infty < \lambda < +\infty) \tag{3.290c}$$

egyenlet leírja mindazokat az egyeneseket, amelyek átmennek a (3.289a) alatti két egyenes $P_0(x_0, y_0)$ metszéspontján. A (3.290c) egyenlet egy $P_0(x_0, y_0)$ tartójú sugársort definiál. Ha az első két egyenes egyenlete normálalakban van megadva, akkor a $\lambda = \pm 1$ választással a két egyenes által bezárt szögek szögfelezőinek egyenleteit kapjuk **(3.138. ábra)**.



3.139. ábra.





3.140. ábra.

4. Két egyenes szöge

Az egymást metsző egyenesek a **3.139. ábrán** láthatók. Ha az egyenesek egyenlete az

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{és} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{3.291a}$$

általános alakban van megadva, akkor fennáll

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\,, \tag{3.291b}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,, \tag{3.291c}$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,. \tag{3.291d}$$

A k_1 és k_2 iránytényezőkkel kapjuk:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\,, \tag{3.291e}$$

$$\cos\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}\,, \tag{3.291f}$$

$$\sin\varphi = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}\,. \tag{3.291g}$$

Ezeknél a képleteknél az egyik egyenestől a másikig terjedő φ szög mérése az óramutató járásával ellentétes irányban történik.

Párhuzamos egyenesekre **(3.140.a ábra)** fennáll $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, azaz $k_1 = k_2$.

Merőleges egyenesekre **(3.140.b ábra)** teljesül $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, azaz $k_2 = -1/k_1$.

3.5.2.3. Kör

1. A kör egyenlete derékszögű koordinátákban Ha a kör középpontja a koordinátarendszer kezdőpontjába esik **(3.141.a ábra)**, akkor derékszögű koordinátákban a kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = R^2\,. \tag{3.292a}$$

Ha a középpont a $C(x_0, y_0)$ pontban helyezkedik el **3.141.b ábra)**, akkor az egyenlet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\,. \tag{3.292b}$$

Az

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{3.293a}$$

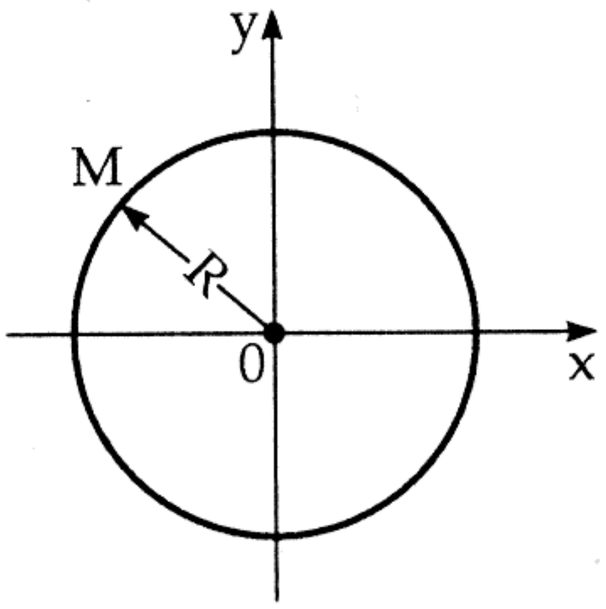
általános másodfokú egyenlet akkor és csak akkor eredményez kört, ha $b = 0$ és $a = c$. Ebben az esetben az egyenlet mindig az

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0 \tag{3.293b}$$

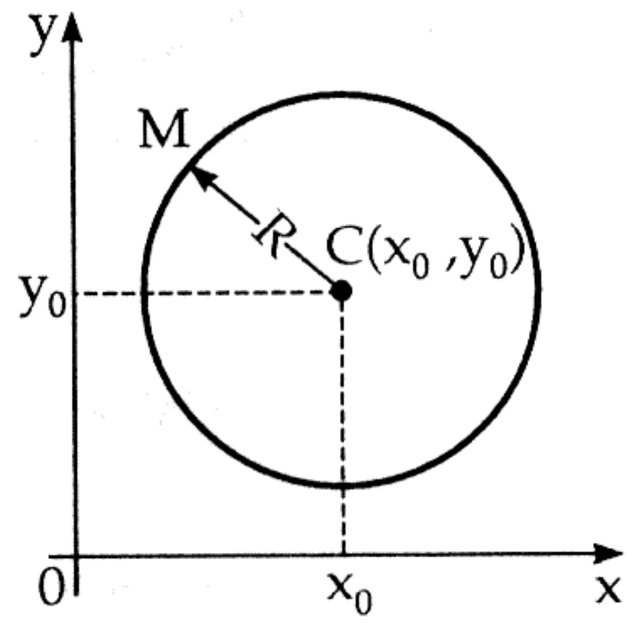
alakra hozható. Ekkor a kör sugarát és a középpont koordinátáit az

$$R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}\,, \qquad (3.294a) \qquad x_0 = -m\,, \quad y_0 = -n\,. \qquad (3.294b)$$

képletek adják meg. Ha $q > m^2 + n^2$, az egyenlet nem ad meg valós görbét; ha $q = m^2 + n^2$, akkor egyetlen $M\,(x_0, y_0)$ pontot kapunk.

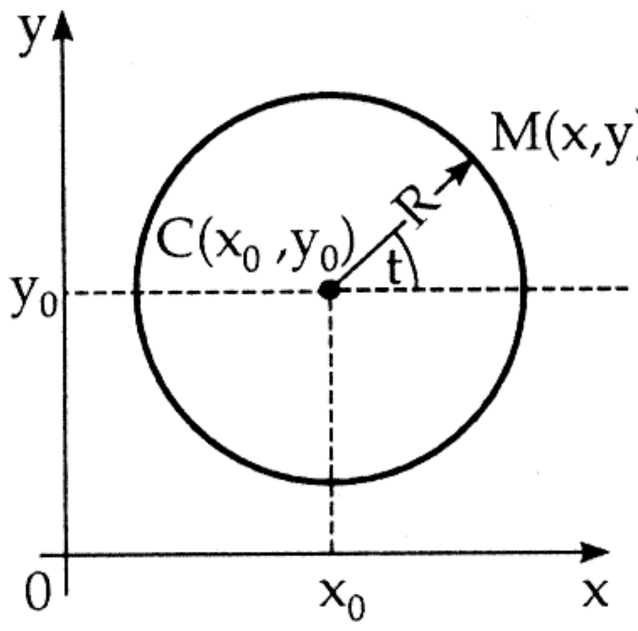


a)



b)

3.141. ábra.

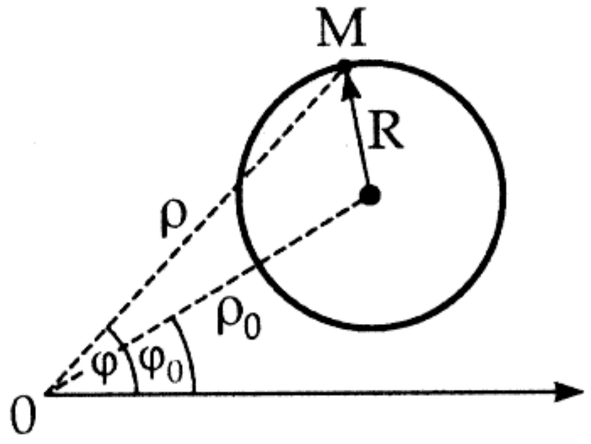


3.142. ábra.

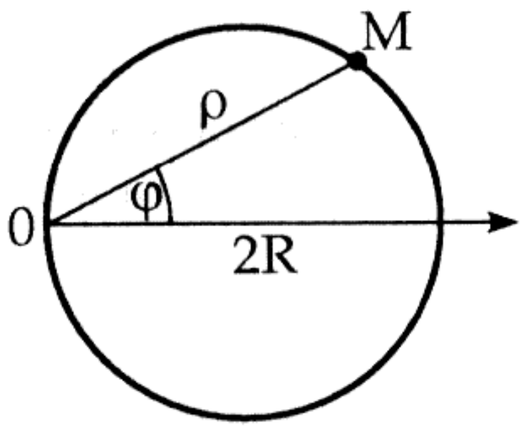
2. A kör paraméteres előállítása

$$x = x_0 + R\cos t\,, \quad y = y_0 + R\sin t\,, \qquad (3.295)$$

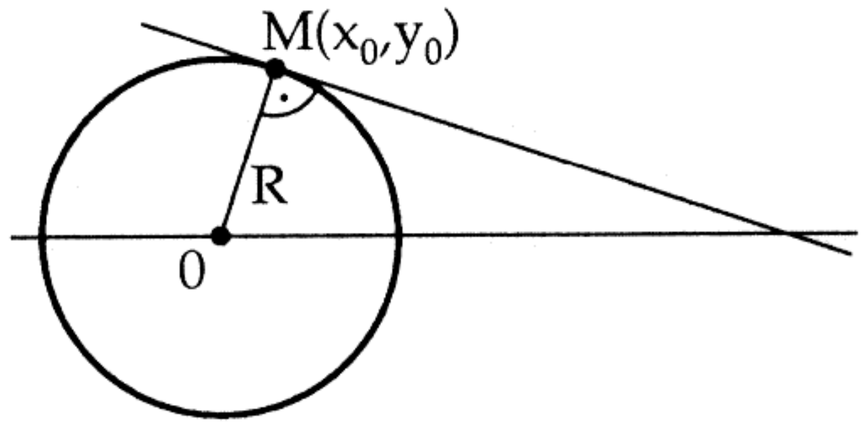
ahol t a mozgó sugár és a pozitív x-tengely közötti szög **(3.142. ábra)**.



3.143. ábra.



3.144. ábra.



3.145. ábra.

3. A kör polárkoordinátás egyenlete teljes általánosságban, a **3.143. ábra** szerint:

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2\,. \qquad (3.296a)$$

Ha a kör középpontja a polártengelyen van és a kör átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján **(3.144. ábra)**, akkor az egyenlet a következő egyszerű alakot ölti:

$$\rho = 2R\cos\varphi\,. \qquad (3.296b)$$

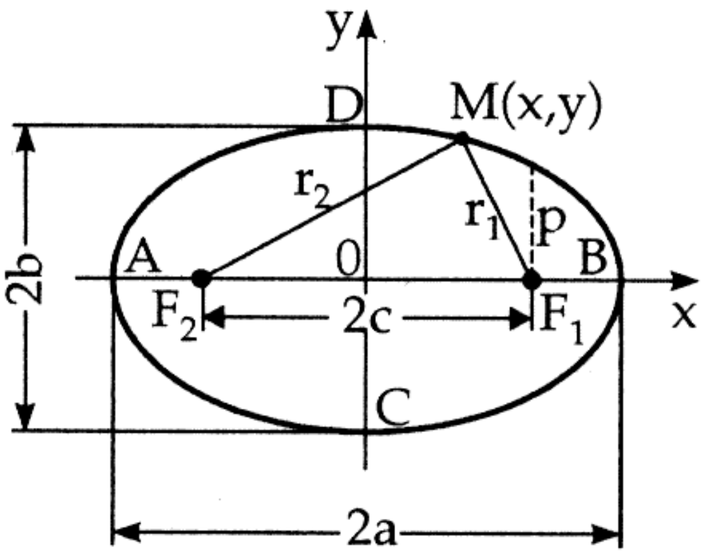
4. Kör érintője A (3.292a) egyenletű kör $M(x_0, y_0)$ pontbeli érintőjét (lásd **3.145. ábra**) az

$$xx_0 + yy_0 = R^2 \qquad (3.297)$$

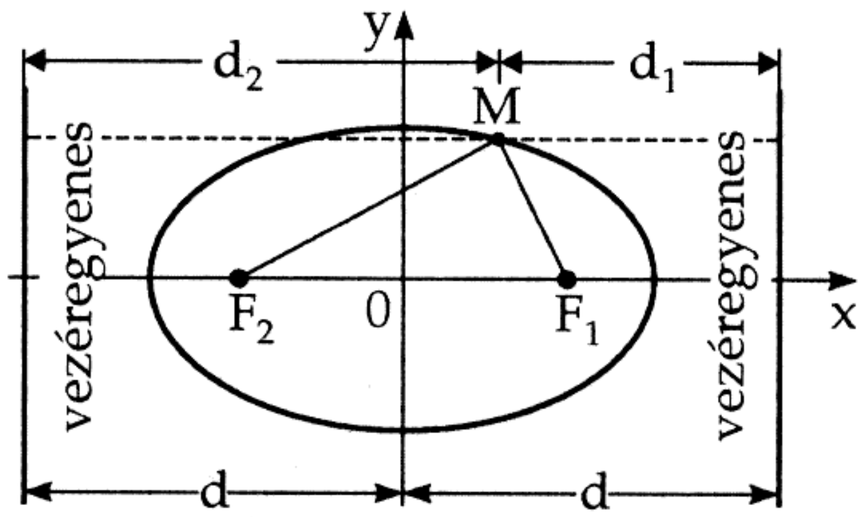
egyenlet írja le.

3.5.2.4. Ellipszis

1. Az ellipszis alkotóelemei A **3.146. ábrán** $\overline{AB} = 2a$ a *nagytengely*, $\overline{CD} = 2b$ a *kistengely*, A, B, C, D a *csúcspontok*, F_1, F_2 a *fókuszok* a középponttól mindkét oldalon $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ távolságra, $e = c/a < 1$ a *numerikus excentricitás* és $p = b^2/a$ a *félparaméter*, vagyis egy fókuszon át a kistengellyel párhuzamosan rajzolt húr fél hosszúsága.



3.146. ábra.



3.147. ábra.

2. Az ellipszis egyenlete Az ellipszis egyenlete normálalakban, azaz egybeeső koordináta- és ellipszistengelyek esetén, valamint paraméteres alakban:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \qquad (3.298a) \qquad x=a\cos t\,,\quad y=b\sin t\,. \qquad (3.298b)$$

Az ellipszis polárkoordinátás egyenletét lásd a 206. oldalon.

3. Az ellipszis fókuszainak tulajdonságai, az ellipszis definíciója Az ellipszis azon pontok mértani helye, amelyek két rögzített ponttól (fókusztól) való távolságának összege egy konstans $2a$ érték. Ezeket a távolságokat, amelyeket az ellipszispont vezérsugarainak hívunk, a következő képletekkel lehet az x abszcissza függvényében kiszámítani:

$$r_1=MF_1=a-ex\,,\quad r_2=MF_2=a+ex\,,\quad r_1+r_2=2a\,. \qquad (3.299)$$

Ennél, és a derékszögű koordinátákban felírt további képleteknél feltesszük, hogy az ellipszis normálalakban van megadva.

4. Az ellipszis vezéregyenesei a kistengellyel párhuzamosan, $d=a/e$ távolságban húzott egyenesek **(3.147. ábra)**. Az ellipszis tetszőleges $M(x,y)$ pontjára fennáll *az ellipszis vezéregyenes-tulajdonsága* (lásd 206. old.):

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e\,. \qquad (3.300)$$

5. Ellipszis átmérőinek nevezzük azokat a húrokat, amelyek átmennek az ellipszis középpontján és amelyeket a középpont felez **(3.148. ábra)**. Az ellipszis valamely átmérőjével párhuzamos húrok felezőpontjainak mértani helye ismét átmérő, az eredeti átmérő *konjugált átmérője*. Két konjugált átmérő k és k' irányténye zőjére

$$kk'=\frac{-b^2}{a^2}\,. \qquad (3.301)$$

Ha két konjugált átmérő hosszúsága $2a_1$ és $2b_1$, továbbá az átmérők és a nagytengely közötti hegyesszögek α és β, ahol $k=-\operatorname{tg}\alpha$ és $k'=\operatorname{tg}\beta$, akkor érvényes APOLLÓNIOSZ *tétele* a következő alakban:

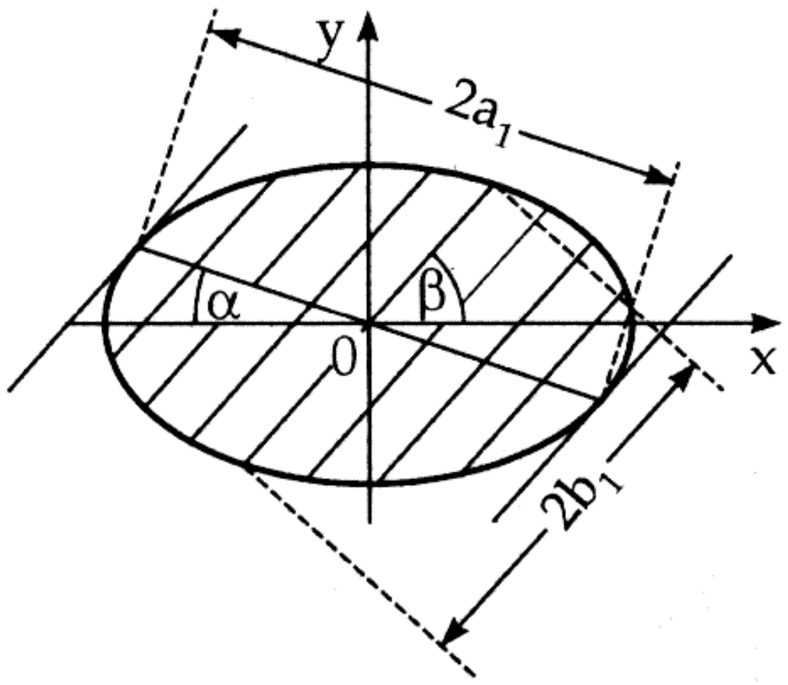
$$a_1b_1\sin(\alpha+\beta)=ab\,,\qquad a_1^2+b_1^2=a^2+b^2\,. \qquad (3.302)$$

6. Ellipszis érintője Az ellipszis $M(x_0,y_0)$ ponthoz tartozó érintőjét az

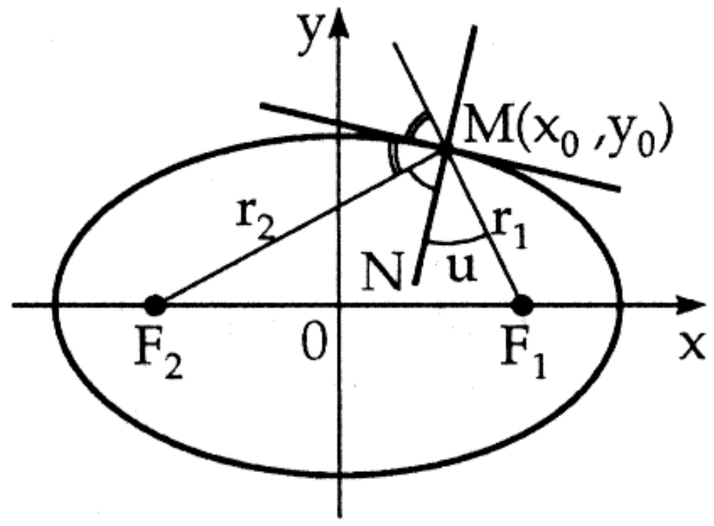
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1\,. \qquad (3.303)$$

egyenlet írja le. Az ellipszis normálisa és érintője **(3.149. ábra)** a fókuszokból az M érintési pontba vezető vezérsugarak belső, ill. külső szögének szögfelezője. Az $Ax+By+C=0$ egyenes az ellipszisnek akkor érintője, ha teljesül az

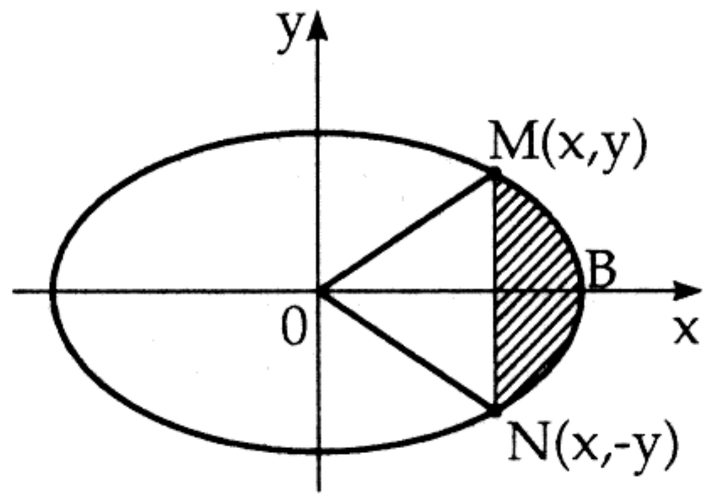
$$A^2a^2+B^2b^2-C^2=0 \qquad (3.304)$$



3.148. ábra.



3.149. ábra.



3.150. ábra.

egyenlet.

7. Az ellipszis görbületi körének sugara (3.149. ábra) Ha az érintő és az $M(x_0, y_0)$ érintési pont vezérsugara közötti szög u, akkor

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u}\,. \tag{3.305}$$

Az A, B, ill. C, D csúcspontokban **(3.146. ábra)** $R_A = R_B = \dfrac{b^2}{a} = p$, ill. $R_C = R_D = \dfrac{a^2}{b}$.

8. Ellipszis és ellipszisrészek területe (3.150. ábra)

a) Ellipszis:

$$T = \pi ab\,. \tag{3.306a}$$

b) BOM ellipsziscikk:

$$T_{BOM} = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}\,. \tag{3.306b}$$

c) MBN ellipszisszelet:

$$T_{MBN} = ab\arccos\frac{x}{a} - xy\,. \tag{3.306c}$$

9. Ellipszis ívhossza és kerülete Az ellipszis két A, B pontja közötti ívhosszat nem lehet elemien kiszámítani, mint a parabolánál, hanem csak egy $E(k, \varphi)$ másodfajú nem teljes elliptikus integrál (lásd 456. old.) segítségével.

Ennélfogva az ellipszis kerületét (lásd még 470. old.) az $E(e) = E\left(e, \dfrac{\pi}{2}\right)$ másodfajú teljes elliptikus integrállal számíthatjuk ki, ahol $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ a numerikus excentricitás és $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (a kerület negyedrészére):

$$L = 4aE(e) = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5} - \cdots\right]\,. \tag{3.307a}$$

A $\lambda = \dfrac{(a-b)}{(a+b)}$ helyettesítéssel

$$L = \pi(a+b)\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16384} + \cdots\right] \tag{3.307b}$$

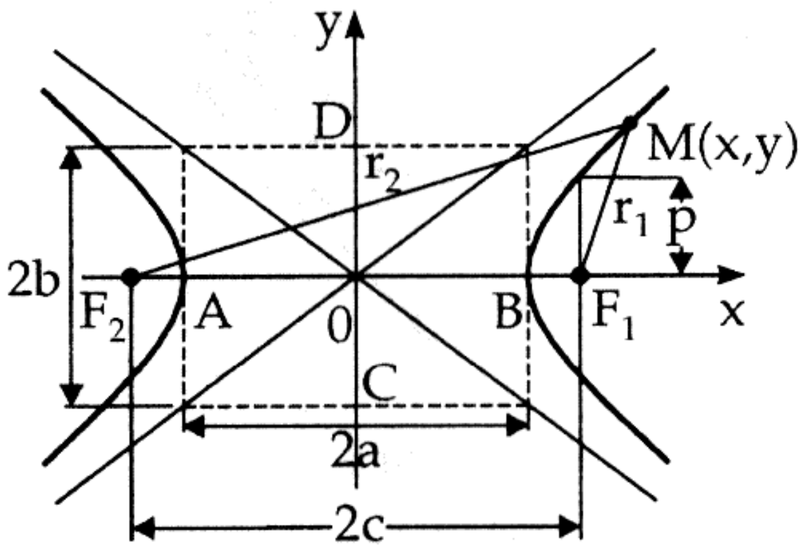
és közelítőleg

$$L \approx \pi\left[1,5(a+b) - \sqrt{ab}\right]\,; \quad L \approx \pi(a+b)\frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^2}\,. \tag{3.307c}$$

■ Ha $a = 1{,}5$ és $b = 1$, akkor (3.307c) a 7,93, viszont a másodfajú teljes elliptikus integrál segítségével (lásd 444. old.) történő pontosabb számolás a 7,98 értéket adja.

3.5.2.5. Hiperbola

1. A hiperbola alkotóelemei A **3.151. ábrán** $AB = 2a$ a valós tengely; A, B a *csúcspontok*; 0 a középpont; F_1 és F_2 a *fókuszok*, amelyek a *valós tengelyen* a középpont mindkét oldalán $c > a$ távolságra helyezkednek el; $CD = 2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$ a *képzetes tengely*; $p = b^2/a$ a *hiperbola félparamétere*, vagyis egy fókuszon át a valós tengelyre merőlegesen rajzolt húr fél hosszúsága; $e = c/a > 1$ a *numerikus excentricitás*.



3.151. ábra.

2. A hiperbola egyenlete A hiperbola egyenlete *normálalak*ban, azaz egybeeső x-tengely és valós tengely esetén, valamint paraméteres alakban:

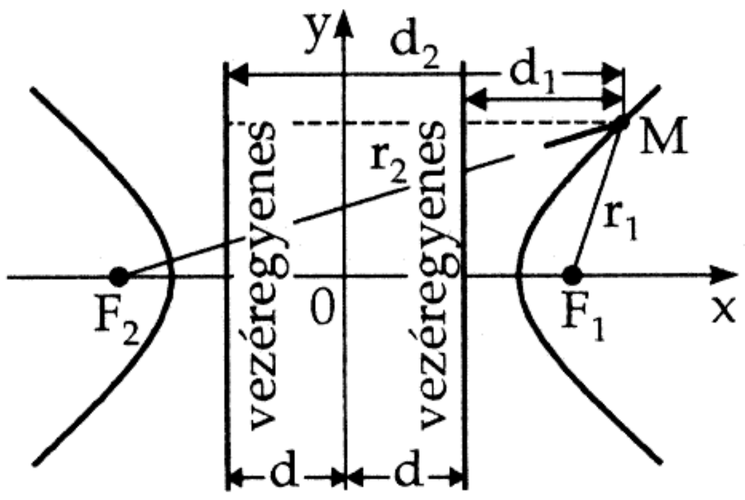
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (3.308a) \qquad x = a\,\mathrm{ch}\,t\,,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \quad \text{vagy} \quad x = \frac{a}{\cos t}\,,\ y = b\,\mathrm{tg}\,t\,. \qquad (3.308b)$$

Polárkoordinátákban lásd a 206. oldalt.

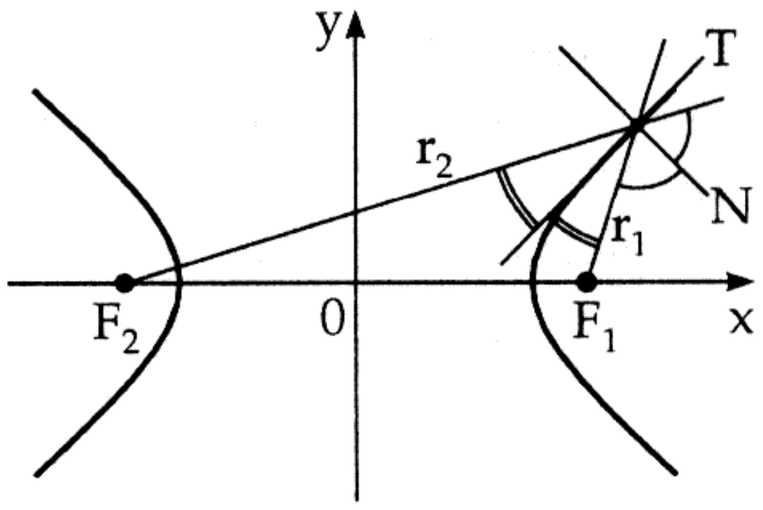
3. Hiperbola fókuszának tulajdonságai, a hiperbola definíciója A hiperbola azon pontok mértani helye, amelyek két rögzített ponttól (fókusztól) mért távolságának különbsége egy konstans $2a$ érték. Az $r_1 - r_2 = 2a$ tulajdonságú pontok az egyik ághoz (a **3.151. ábrán** a bal oldalihoz), az $r_2 - r_1 = 2a$ tulajdonságúak a másikhoz (a **3.151. ábrán** a jobb oldalihoz) tartoznak. E távolságok, amelyeket *vezérsugarak*nak hívunk, az

$$r_1 = \pm(ex - a)\,, \quad r_2 = \pm(ex + a)\,, \quad r_2 - r_1 = \pm 2a\,, \qquad (3.309)$$

képletekből számíthatók ki, ahol a felső előjel a bal oldali, az alsó előjel a jobb oldali ágra érvényes. Ezeknél és a derékszögű koordinátákban felírt további hiperbolaképleteknél feltesszük, hogy a hiperbola normálalakban van megadva.



3.152. ábra.



3.153. ábra.

4. A hiperbola vezéregyenesei a valós tengelyre merőleges, a középponttól $d = a/c$ távolságban elhelyezkedő egyenesek **(3.152. ábra)**. A hiperbola tetszőleges $M(x, y)$ pontjára fennáll a hiperbola vezéregyenes-tulajdonsága (lásd 206. old.):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e\,. \qquad (3.310)$$

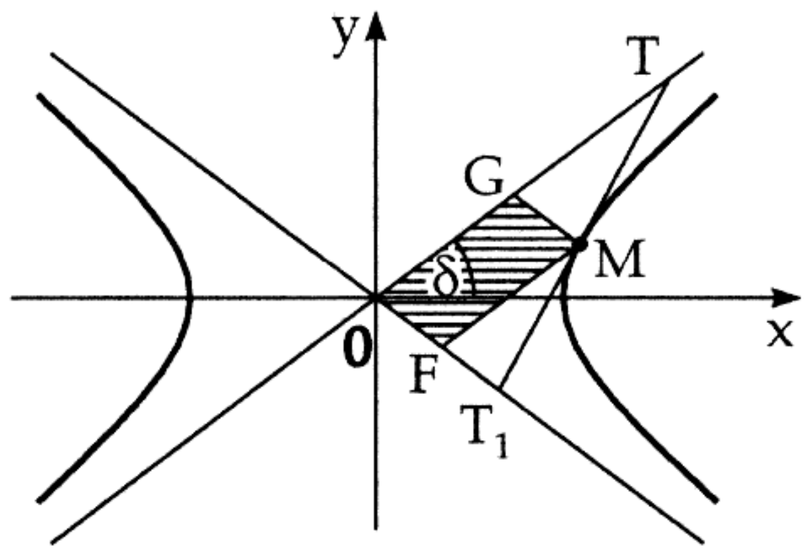
5. Hiperbola érintője A hiperbolának az $M(x_0, y_0)$ ponthoz tartozó érintőjét az

$$\frac{xx_0}{a_2} - \frac{yy_0}{b_2} = 1\,. \qquad (3.311)$$

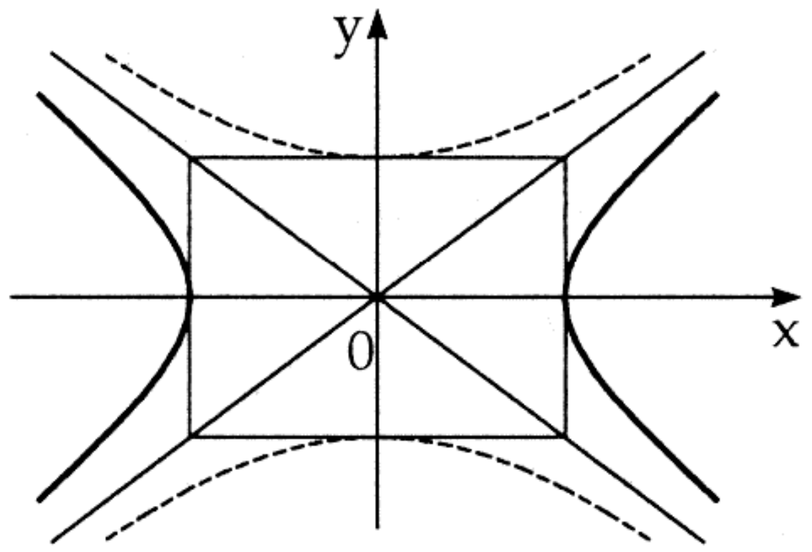
egyenlet írja le. A hiperbola normálisa és érintője **(3.153. ábra)** a fókuszokból az M érintési pontba vezető vezérsugarak belső, ill. külső szögének szögfelezője. Az $Ax + By + C = 0$ egyenes akkor érintő, ha teljesül az

$$A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 = 0\,. \tag{3.312}$$

egyenlet.



3.154. ábra.



3.155. ábra.

6. A hiperbola aszimptotái olyan egyenesek **(3.154. ábra)**, amelyek $x \to \infty$ esetén minden határon túl közelednek a hiperbola ágaihoz (az aszimptoták definícióját lásd a 234. oldalon). Az aszimptoták iránytényezője $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm b/a$. Az aszimptoták egyenletei a következők:

$$y = \pm \left(\frac{b}{a}\right) x\,. \tag{3.313}$$

Az aszimptoták a hiperbola egy M pontban vett érintőjével együtt a *hiperbola érintődarabját* alkotják, vagyis a $\overline{TT_1}$ szakaszt **(3.154. ábra)**. Az M érintési pont az érintődarabot felezi, tehát $\overline{TM} = \overline{T_1M}$. Az érintő és a két aszimptota közötti TOT_1 háromszög területe minden M érintési pontra

$$T = ab\,. \tag{3.314}$$

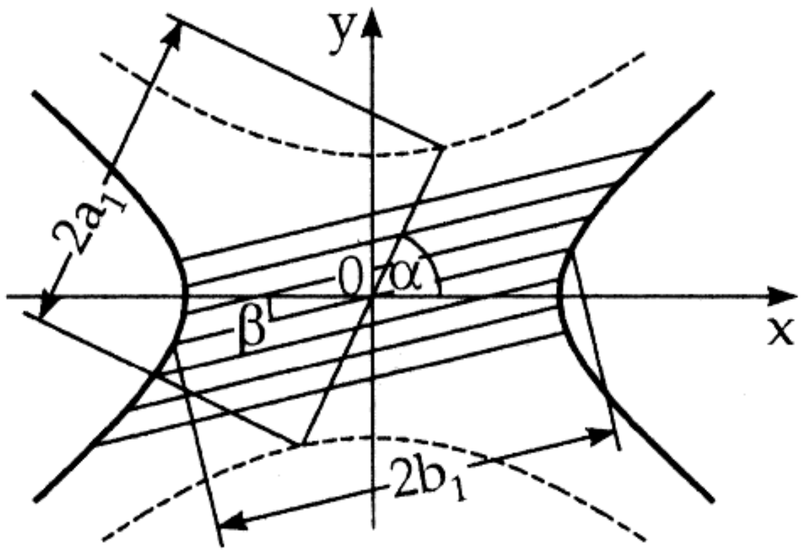
Az aszimptoták és két velük párhuzamos, az M pontból kiinduló egyenes által alkotott $\overline{OFMG}$ paralelogramma területe

$$T_P = \frac{(a^2 + b^2)}{4} = \frac{c^2}{4}\,. \tag{3.315}$$

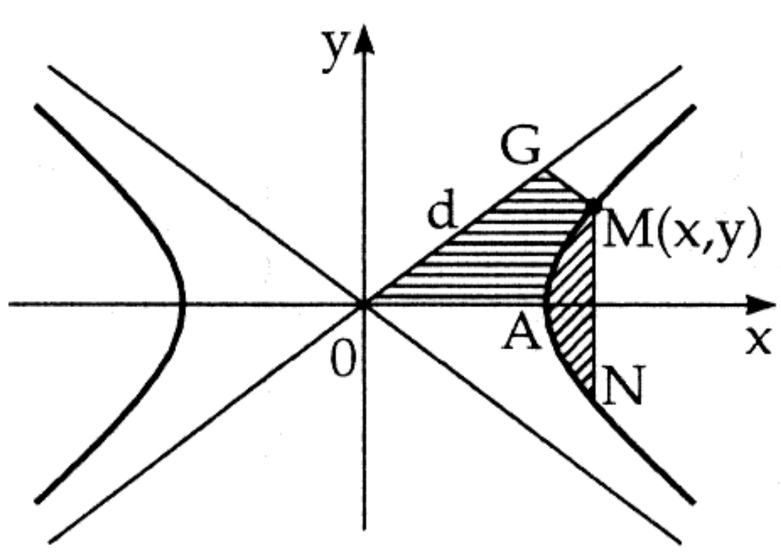
7. Konjugált hiperbolák (3.155. ábra) egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\,, \tag{3.316}$$

alakú; a másodiknak felírt hiperbola a **3.155. ábrán** vonalkázással van feltüntetve. Aszimptotáik közösek, továbbá az egyik hiperbola valós tengelye a másiknak képzetes tengelye, és megfordítva.



3.156. ábra.



3.157. ábra.

8. A hiperbola átmérőinek (3.156. ábra) a hiperbola két ága közötti azon *húrokat* nevezzük, amelyek átmennek a középponton és a középpont felezi őket. A hiperbola k irányítényezőjű és a konjugált hiperbola k' irányítényezőjű átmérőjét egymás konjugáltjának mondjuk, ha $kk' = b^2/a^2$. A két *konjugált átmérő* mindegyike az adott hiperbola vagy a vele konjugált hiperbola azon húrjait, amelyek a másik átmérővel párhuzamosak, két egyenlő részre osztja **(3.156. ábra)**. Két konjugált átmérő közül csak az metszi a hiperbolát, amelyre $|k| < b/a$. Az így keletkező húrt, amely a szó szűkebb értelmében is átmérő, a hiperbola középpontja felezi. Ha két konjugált átmérő hossza $2a_1$ és $2b_1$, továbbá az átmérők és a valós tengely közötti hegyesszögek α és $\beta < \alpha$ akkor fennáll

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2\,; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha - \beta)\,. \tag{3.317}$$

9. Hiperbola görbületi körének sugara A hiperbola $M(x_0, y_0)$ pontjában a görbületi kör sugara

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u}\,, \tag{3.318a}$$

ahol u az érintő és az érintési pont vezérsugara közötti szög. Speciálisan az A és a B csúcspontban **(3.151. ábra)**

$$R_A = R_B = p = \frac{b^2}{a}\,. \tag{3.318b}$$

10. Területek a hiperbolában (3.157. ábra)

a) *AMN* hiperbolaszelet:

$$T_{AMN} = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{arch} \frac{x}{a}\,. \tag{3.319a}$$

b) *OAMG* idom:

$$T_{OAMG} = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2d}{c}\,. \tag{3.319b}$$

Az $\overline{MG}$ szakasz párhuzamos az alsó aszimptotával, c a fókusztávolság, és $d = \overline{OG}$.

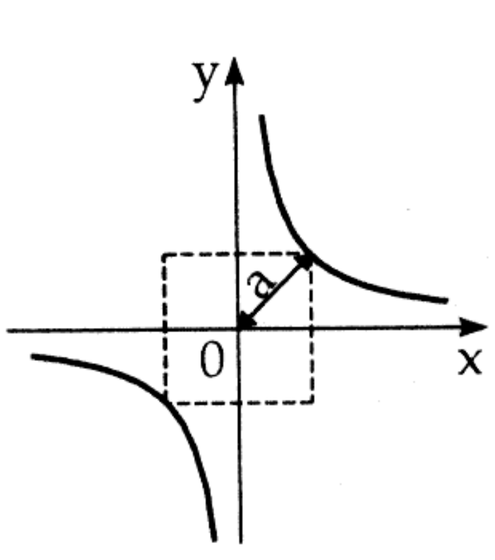
11. Hiperbolaív A hiperbola két A, B pontja közötti *ívhossz*at nem lehet elemien kiszámítani, mint a parabolánál, hanem csak egy $E(k, \varphi)$ másodfajú nem teljes elliptikus integrál (lásd 456. old.) segítségével, hasonlóan az ellipszis ívhosszához (lásd 199. old.).

12. Az egyenlőoldalú hiperbolákat azonos $a = b$ hosszúságú tengelyek jellemzik, tehát egyenletük

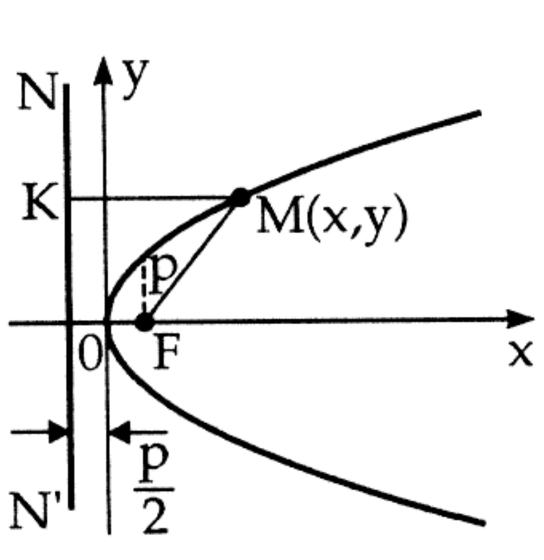
$$x^2 - y^2 = a^2\,. \tag{3.320a}$$

Az egyenlőoldalú hiperbola aszimptotái egymásra merőlegesek. Ha az aszimptoták egybeesnek a koordinátatengelyekkel **(3.158. ábra)**, akkor az egyenlet a következő:

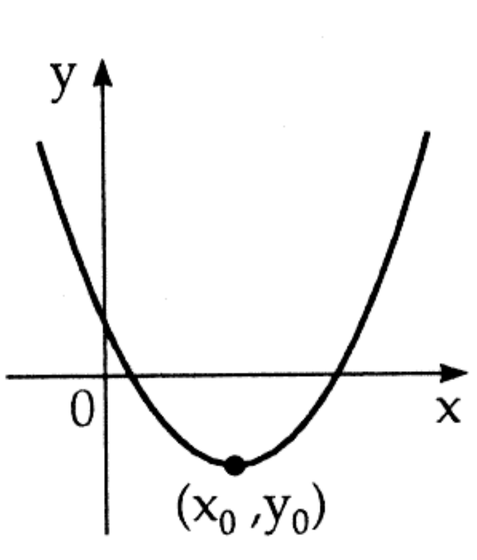
$$xy = \frac{a^2}{2}\,. \tag{3.320b}$$



3.158. ábra.



3.159. ábra.



3.160. ábra.

3.5.2.6. Parabola

1. A parabola alkotóelemei A **3.159. ábrán** az x-tengely azonos a *parabola tengelyével*, O a parabola *csúcspontja*, F a *parabola fókusza*, amely a koordinátarendszer kezdőpontjától $p/2$ távolságra az x-tengelyen található; a p értéket a *parabola félparaméterének* nevezzük. Az NN' *vezéregyenes* a parabola tengelyére merőleges egyenes, amely a tengelyt a fókusszal ellentétes oldalon $p/2$ távolságban metszi. A félparaméter egyenlő a fókuszban a tengelyre merőleges húr fél hosszúságával is. A *parabola numerikus excentricitása* 1 (lásd 206. old.).

2. A parabola egyenlete Ha a koordinátarendszer kezdőpontja a parabola csúcspontja, az x-tengely egybeesik a parabola tengelyével és a parabola csúcspontja balra mutat, akkor a *parabola egyenletének normálalakja*

$$y^2 = 2px\,. \tag{3.321}$$

A parabola polárkoordinátás egyenletét lásd a 206. oldalon. Függőleges tengelyű parabola **(3.160. ábra)** egyenlete:

$$y = ax^2 + bx + c\,. \tag{3.322a}$$

Az így megadott parabola *félparamétere* $$p = \frac{1}{2|a|}\,. \tag{3.322b}$$

Ha $a > 0$, akkor a parabola felülről, ha $a < 0$, akkor alulról nyitott. A csúcspont koordinátái:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}\,. \tag{3.322c}$$

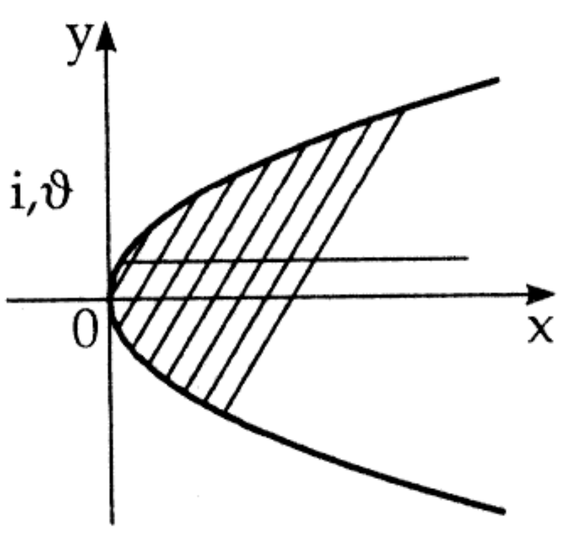
3. A parabola fő tulajdonsága (a parabola definíciója) A parabola azon $M(x, y)$ pontok mértani helye, amelyek egy rögzített ponttól, a fókusztól, és egy rögzített egyenestől, a vezéregyenestől, egyenlő távolságra vannak **(3.159. ábra)**. Itt, és a derékszögű koordinátákban felírt további képletekben a parabola egyenletének normálalakját használjuk. Ekkor

$$\overline{MF} = \overline{MK} = x + \frac{p}{2}\,, \tag{3.323}$$

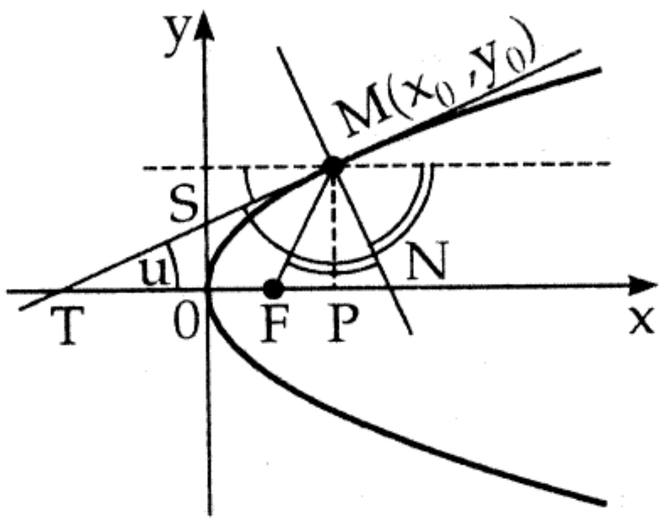
ahol $\overline{MF}$ a parabolapontnak a fókuszból kiinduló vezérsugara.

4. A parabola átmérőinek nevezzük a parabola tengelyével párhuzamos egyeneseket **(3.161. ábra)**. Minden *átmérő* felezi a végpontjához tartozó érintővel párhuzamos húrokat **(3.161. ábra)**. Ha a húrok iránytényezője k, akkor az átmérő egyenlete

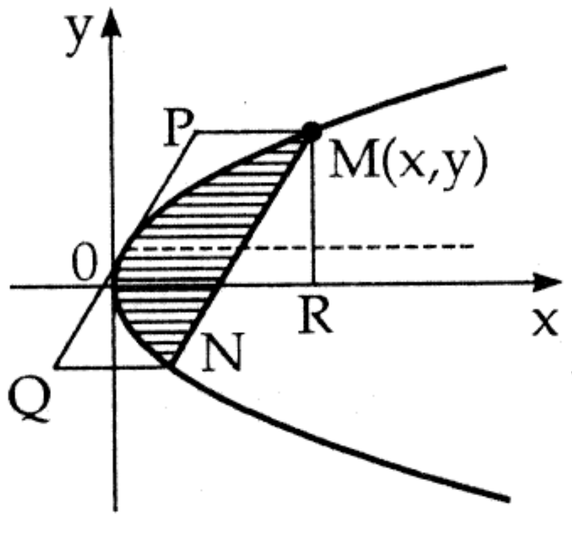
$$y = \frac{p}{k}\,. \tag{3.324}$$



3.161. ábra.



3.162. ábra.



3.163. ábra.

5. Parabola érintője (3.162. ábra) A parabola $M(x_0, y_0)$ pontjához tartozó érintő egyenlete

$$yy_0 = p\,(x + x_0)\,. \tag{3.325}$$

A parabola érintője és normálisa a fókuszból kiinduló vezérsugár és az érintési ponton áthaladó átmérő közötti szögek szögfelezői. A parabola érintőjének az érintési pont és az x-tengelyen fekvő parabolatengellyel való metszéspont közötti szakaszát a parabola csúcspontjához tartozó érintő, vagyis az y-tengely felezi:

$$\overline{TS} = \overline{SM}\,; \quad \overline{TO} = \overline{OP} = x_0\,; \quad \overline{PN} = p\,. \tag{3.326}$$

Egy $y = kx + b$ egyenletű egyenes a parabolának akkor érintője, ha

$$p = 2bk\,. \tag{3.327}$$

6. A parabola görbületi körének sugara az $M(x_1, y_1)$ pontban, ha az $\overline{MN}$ normálisdarab hossza l_n **(3.162. ábra)**, általában

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{l_n^3}{p^2} \tag{3.328a}$$

az O csúcspontban pedig

$$R = p\,. \tag{3.328b}$$

7. Területek a parabolában (3.163. ábra)

a) MON parabolaszelet:

$$T_{OMN} = \frac{2}{3} T_{PQNM} \quad (PQNM \text{ a parabola-paralelogramma}). \tag{3.329a}$$

b) OMR parabolaidom:

$$T_{OMR} = \frac{2xy}{3}\,. \tag{3.329b}$$

8. A parabola ívhossza az O csúcsponttól az $M(x, y)$ pontig:

$$l_{OM} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right] \tag{3.330a}$$

$$= \sqrt{x\left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}\,. \tag{3.330b}$$

Kicsiny $\dfrac{x}{y}$ értékekre közelítőleg fennáll

$$l_{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]\,. \tag{3.330c}$$

3.5.2.7. Másodrendű görbék (kúpszeletek)

1. A másodrendű görbék általános egyenlete A másodrendű görbék

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{3.331a}$$

általános egyenlete definiálja az ellipszist, ennek speciális eseteként a kört, továbbá a hiperbolát, a parabolát, valamint az egyenespárt mint szétesső másodrendű görbét. A normálalakra való visszavezetés a **3.17. és 3.18. táblázatban** megadott koordinátatranszformációk segítségével történhet.

Megjegyzés: A (3.331a) egyenlet együtthatói nem azonosak az egyes speciális kúpszeletek paramétereivel.

Megjegyzés: Ha két együttható (a és b vagy b és c) $= 0$, akkor a szükséges koordinátatranszformációk a koordinátatengelyek eltolására redukálódnak.

A $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ egyenlet az $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, az $ax^2 + 2dx + 2ey^2 + f = 0$ egyenlet az $(x - x_0)^2 = 2p\,(y - y_0)$ alakot veszi fel.

3.17. táblázat. Másodrendű görbék egyenletei. Centrális görbék $\delta \neq 0$ *1)

δ és Δ értéke			A görbe alakja
Centrális görbék $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Ellipszis: a) $\Delta \cdot S < 0$ esetén valós, b) $\Delta \cdot S > 0$ esetén képzetes*2)
		$\Delta = 0$	Két képzetes*2) egyenes valós közös ponttal
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hiperbola
		$\Delta = 0$	Két metsző egyenes

Szükséges koordinátatranszformáció	Az egyenlet normálalakja transzformáció után
1. A koordinátarendszer kezdőpontjának eltolása a görbe középpontjába, melynek koordinátái $x_0 = \dfrac{be - cd}{\delta}$, $y_0 = \dfrac{bd - ae}{\delta}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$
2. A koordinátatengelyek elforgatása α szöggel, ahol $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2b}{a-c}$. A $\sin 2\alpha$ mennyiség előjele meg kell hogy egyezzen $2b$ előjelével. Az új x'-tengely iránytényezője $k = \dfrac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}}{2b}$.	$a' = \dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, $c' = \dfrac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ Az a' és c' értékek az $u^2 - Su + \delta = 0$ másodfokú egyenlet gyökei.

*1) Δ, δ és S a (3.331b) alatt definiált számok.
*2) Az egyenletnek képzetes görbe felel meg.

2. Másodrendű görbe invariánsai a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad S = a + c \tag{3.331b}$$

mennyiségek. A koordinátarendszer forgatásai során ezek megmaradnak, vagyis ha egy koordinátatranszformáció után a görbe egyenlete

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0 \tag{3.331c}$$

alakú, akkor a Δ, δ, S mennyiségeket az új konstansokból kiszámítva az eredeti értékeket kapjuk.

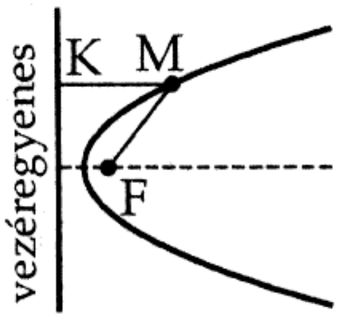
3. A másodrendű görbék alakja (kúpszeletek) Ha egy egyenes körkúpot elmetszünk egy síkkal, akkor a síkon kúpszelet jön létre. Ha a metsző sík nem megy át a csúcson, akkor hiperbola, parabola vagy ellipszis keletkezik attól függően, hogy a sík a kúpnak két, egy vagy nulla alkotójával párhuzamos. Ha a metsző sík átmegy a kúp csúcsán, akkor *széteső kúpszeletek* állnak elő, amelyekre $\Delta = 0$. Hengerré *elfajuló kúp*, amelynek csúcsa a végtelenben van, kúpszeleteként két párhuzamos egyenes adódik. A kúpszeletek alakját a **3.17. és 3.18. táblázat** tünteti fel.

3.18. táblázat. Másodrendű görbék egyenletei. Parabolikus görbék ($\delta = 0$)

δ és Δ értéke		A görbe alakja
Parabolikus görbék*[1], $\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Parabola
	$\Delta = 0$	Egyenespár: párhuzamos egyenesek ha $d^2 - af > 0$, kettős egyenes ha $d^2 - af = 0$, képzetes*[2] egyenesek ha $d^2 - af < 0$.

Szükséges koordinátatranszformáció	Az egyenlet normálalakja transzformáció után
1. A koordinátarendszer kezdőpontjának eltolása a parabola csúcspontjába, amelynek x_0 és y_0 koordinátáját az $ax_0 + by_0 + \dfrac{ad+be}{S} = 0$ és a $\left(d + \dfrac{dc-be}{S}\right)x_0 + \left(e + \dfrac{ae-bd}{S}\right)y_0 + f = 0$ egyenlet adja meg. 2. A koordinátatengelyek elforgatása α szöggel, ahol $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{a}{b}$; $\sin\alpha$ előjele a előjelével ellentétes kell hogy legyen.	$y'^2 = 2px'$ $p = \dfrac{ae-bd}{S\sqrt{a^2+b^2}}$
A koordinátatengelyek elforgatása α szöggel, ahol $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{a}{b}$; $\sin\alpha$ előjele a előjelével ellentétes kell hogy legyen.	Az $Sy'^2 + 2\dfrac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}}y' + f = 0$ egyenlet az $(y' - y'_0)(y' - y'_1) = 0$ alakra transzformálható.

*[1] A $\delta = 0$ esetben feltesszük, hogy az a, b, c együtthatók egyike sem nulla.
*[2] Az egyenletnek képzetes görbe felel meg.



3.164. ábra.

4. A másodrendű görbék vezéregyenes-tulajdonsága Azon M pontok mértani helye **(3.164. ábra)**, amelyeknél egy rögzített F ponttól, a fókusztól, és egy megadott egyenestől, a vezéregyenestől, való távolságok aránya egy konstans e érték, egy e *numerikus excentricitású* másodrendű görbe. Az $e < 1$ esetben ellipszis, az $e = 1$ esetben parabola, az $e > 1$ esetben pedig hiperbola adódik.

5. A görbe meghatározása öt pontjából Öt előírt ponton egy és csak egy másodrendű görbe halad át. Ha a pontok közül három egy egyenesen fekszik, akkor *széteső kúpszeletet* kapunk.

6. Másodrendű görbék poláregyenlete Minden másodrendű görbét az egyetlen

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{3.332}$$

poláregyenlet ír le, ahol p a félparaméter és e az excentricitás. Ilyenkor a pólus a fókuszban helyezkedik el, a polártengely pedig a fókusztól a közelebbi csúcspont felé irányul. A hiperbolánál ez az egyenlet csak az egyik ágat írja le.

3.5.3. A tér analitikus geometriája

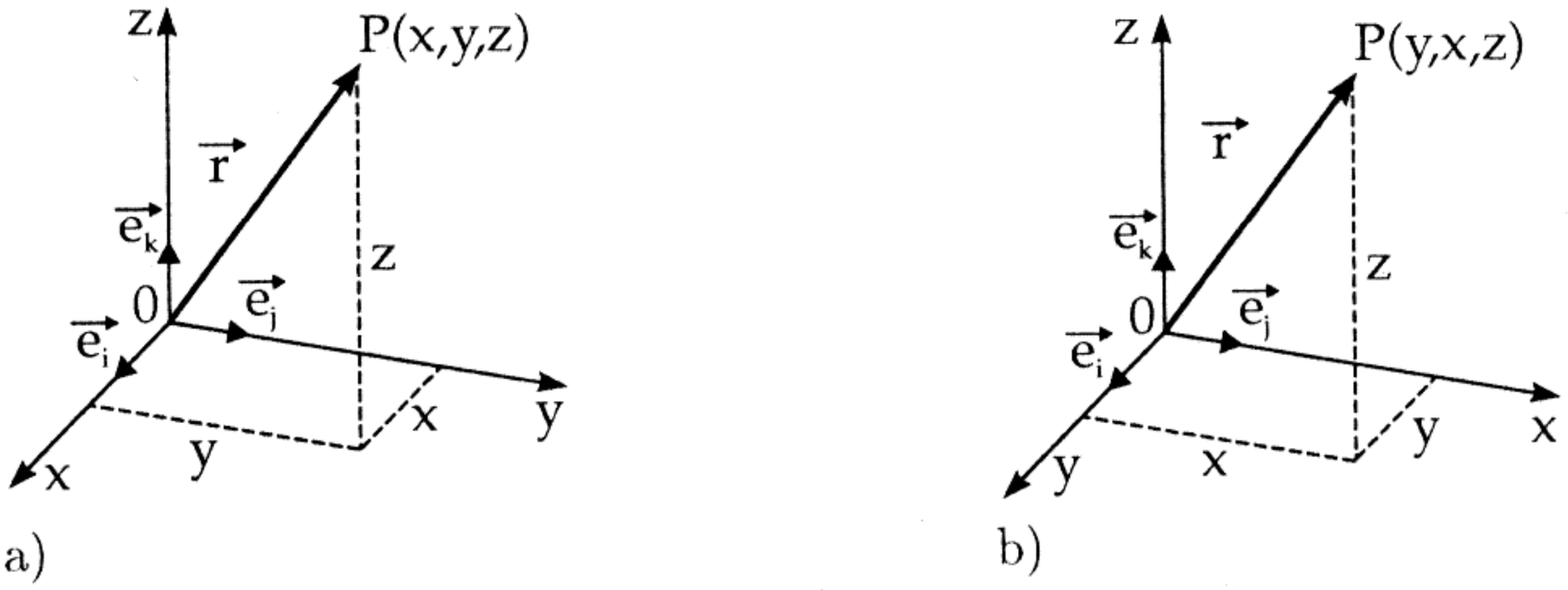
3.5.3.1. Alapvető tudnivalók, térbeli koordinátarendszerek

1. Koordináták és koordinátarendszerek

A tér tetszőleges P pontját koordinátarendszer segítségével lehet meghatározni. A koordinátavonalak irányát az egységvektorok iránya adja meg. A derékszögű koordinátarendszer esetén fennálló viszonyokat a **3.165.a ábra** a tünteti fel. Megkülönböztetünk derékszögű és ferdeszögű koordinátarendszereket. Bennük a koordinátavonalak egységvektorai egymással derékszöget, ill. ferdeszöget alkotnak. Egy másik fontos megkülönböztetés arra vonatkozik, hogy a koordinátarendszer jobbsodrású vagy balsodrású.

A leggyakrabban használt térbeli koordinátarendszerek a derékszögű, a henger- és a gömbkoordináták.

1. Jobbrendszerek és balrendszerek Attól függően, hogy a pozitív koordinátairányok milyen sorrendben követik egymást, megkülönböztetünk *jobbrendszereket* és *balrendszereket*, más szóval *jobbsodrású* és *balsodrású koordinátarendszereket*. Álljon egy rendszer pl. három, ábécérendben vett, nem komplanáris $\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j, \vec{\mathbf{e}}_k$ egységvektorból. Ez a rendszer akkor jobbrendszer, ha bármelyik vektorának az az elforgatása a koordinátarendszer közös kezdőpontja körül, amely őt az ábécé szerint rákövetkező vektorral hozza fedésbe, a harmadik vektor irányából nézve az óramutató járásával ellentétesen végezhető el a legrövidebben. Mindezt szimbolikusan a **3.32. ábra** fejezi ki; az oldalak ottani a, b, c jelölését az i, j, k indexekkel kell helyettesíteni. Balrendszernél az óramutató járásával megegyező irányú forgatásra van szükség.



3.165. ábra.

Jobb- és balrendszer az egységvektorok felcserélése útján egymásba átvihető. Két egységvektor felcserélése megváltoztatja a rendszer sodrását, azaz *irányítását*. Jobbrendszerből balrendszer, balrendszerből jobbrendszer lesz.

Vektorok felcserélésének fontos fajtája a *ciklikus felcserélés*, amely az irányítást megtartja. A **3.32. ábra** szerint jobbrendszernél a vektorok felcserélése az óramutató járásával ellentétes irányban, vagyis az $(i \to j \to k \to i, j \to k \to i \to j, k \to i \to j \to k)$ sémának megfelelően történik. Balrendszernél a vektorok felcserélése az óramutató járásával megegyezően, vagyis az $(i \to k \to j \to i, k \to j \to i \to k, j \to i \to k \to j)$ sémának megfelelően végezhető el.

Jobbrendszer balrendszerrel nem hozható fedésbe.

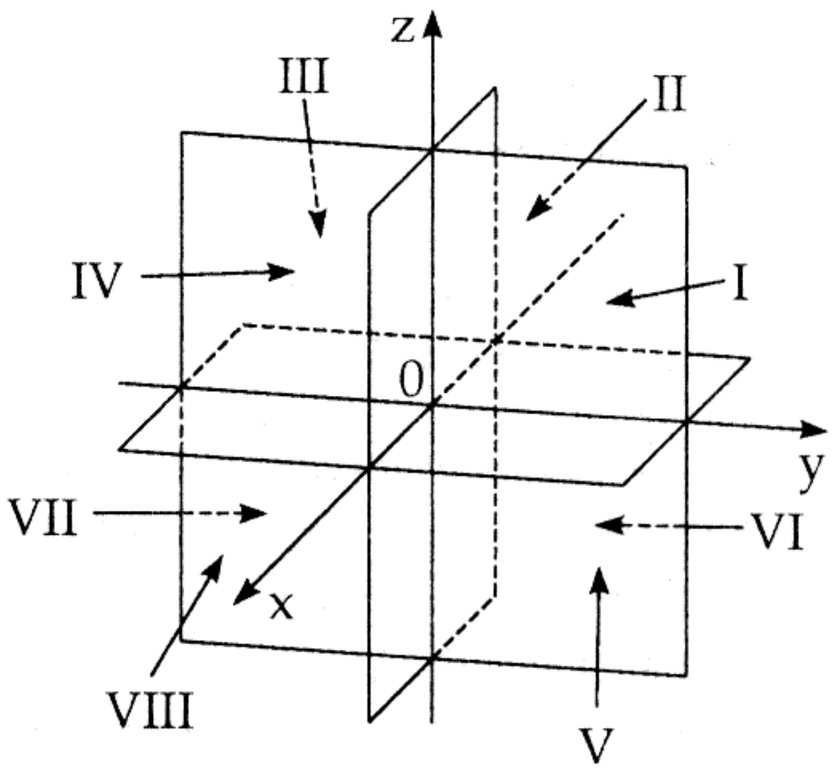
Jobbrendszert a koordinátarendszer kezdőpontjára tükrözve balrendszert kapunk (lásd 269. old.).

■ **A:** A derékszögű koordinátarendszer az x, y, z koordinátatengelyekkel jobbrendszer **(3.165.a ábra)**.

■ **B:** A derékszögű koordinátarendszer az x, z, y koordinátatengelyekkel balrendszer **(3.165.b ábra)**.

■ **C:** Az $\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j, \vec{\mathbf{e}}_k$ jobbrendszerből az $\vec{\mathbf{e}}_j$ és az $\vec{\mathbf{e}}_k$ egységvektor felcserélésével az $\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_k, \vec{\mathbf{e}}_j$ balrendszer áll elő.

■ **D:** Ciklikus felcseréléssel az $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$ jobbrendszerből az $\vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_i$ jobbrendszert, ebből pedig az $\vec{e}_k, \vec{e}_i, \vec{e}_j$ jobbrendszert kapjuk.



3.166. ábra.

2. Derékszögű koordináták Egy P pont derékszögű koordinátáinak nevezzük a pont három egymásra merőleges koordinátasíktól való, meghatározott előjellel ellátott és meghatározott mértékegységben megadott távolságát. Ezek a P pont $\vec{r}$ helyvektorának vetületei (lásd 181. old.) három egymásra merőleges koordinátatengelyre **(3.165. ábra)**. A koordinátatengelyek O metszéspontját a *koordinátarendszer kezdőpontjá*nak nevezzük. A $P(a, b, c)$ írásmód azt jelenti, hogy P koordinátái $x = a$, $y = b$ és $z = c$. A koordináták előjele attól a térnyolcadtól **(3.166. ábra)** függ, amelyben a P pont található **(3.19. táblázat)**.

3.19. táblázat. Koordináták előjele az egyes térnyolcadokban

Térnyolcad	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Jobbsodrású derékszögű koordinátarendszerben **(3.165.a ábra)** az egymásra merőleges és egymást az $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$ sorrendben követő egységvektorokra fennáll

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k\,, \quad \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \vec{e}_i\,, \quad \vec{e}_k \times \vec{e}_i = \vec{e}_j\,, \tag{3.333a}$$

azaz érvényes a *jobbkéz-szabály* (lásd 183. old.). A három képlet egymásból az egységvektorok *ciklikus felcserélésével* adódik.

Balsodrású derékszögű koordinátarendszerben **(3.165.b ábra)** fennáll

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\vec{e}_k\,, \quad \vec{e}_j \times \vec{e}_k = -\vec{e}_i\,, \quad \vec{e}_k \times \vec{e}_i = -\vec{e}_j\,. \tag{3.333b}$$

A vektoriális szorzatok negatív előjele az egységvektorok balsodrású sorrendjéből **(3.165.b ábra)**, vagyis az óramutató járásával megegyező elrendezéséből következik.

Megjegyezzük, hogy mindkét esetben

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{e}_j \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \times \vec{e}_k = \vec{0}\,. \tag{3.333c}$$

Általában jobbsodrású koordinátarendszereket használunk; a képletek azonban nem függnek ettől a választástól. A geodéziában alkalmazott koordinátarendszerek rendszerint balsodrásúak (lásd 143. old.).

3. Koordinátafelületek és koordinátavonalak A *koordinátafelületek*et az egyik koordináta konstans értéke jellemzi, úgyhogy derékszögű koordinátarendszerben ezek párhuzamosak a másik két koordinátatengely által kifeszített síkkal. A három $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ koordinátafelület a háromdimenziós teret nyolc térnyolcadra bontja **(3.166. ábra)**. A koordinátavonalak olyan görbék, amelyek mentén csak az egyik koordináta változik, pl. derékszögű koordinátarendszerben a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek. A koordinátafelületek egymást a koordinátavonalakban metszik.

4. Háromdimenziós görbevonalú koordináták állnak elő, ha három, tetszőleges felületekből álló sereg úgy van megadva, hogy a tér minden pontján a három sereg mindegyikének pontosan egy felülete

halad át. Ilyen koordinátarendszerben valamely pont helyzetét a ponton átmenő három koordinátafelület paraméterértékével határozzuk meg. Igen gyakran használt görbevonalú koordinátarendszerek a henger- és a gömbkoordináták.

5. Hengerkoordináták (3.167. ábra):

- a P pont x, y-síkra vett vetületének ϱ és φ polárkoordinátája és
- a P pont z-koordinátája.

A hengerkoordináta-rendszer koordinátafelületei:

- a $\varrho =$ konstans sugarú hengerfelületek,
- a z-tengelytől kiinduló $\varphi =$ konstans félsíkok és
- a z-tengelyre merőleges $z =$ konstans síkok.

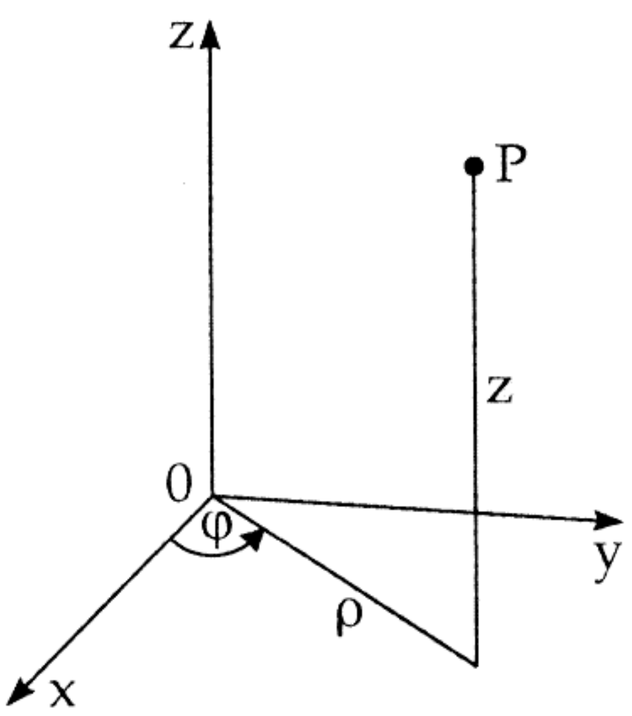
E koordinátafelületek metszésvonalai a koordinátavonalak.

A hengerkoordináták és a derékszögű koordináták közötti átmenetre a következő képletek szolgálnak (lásd még a **3.20. táblázatot**):

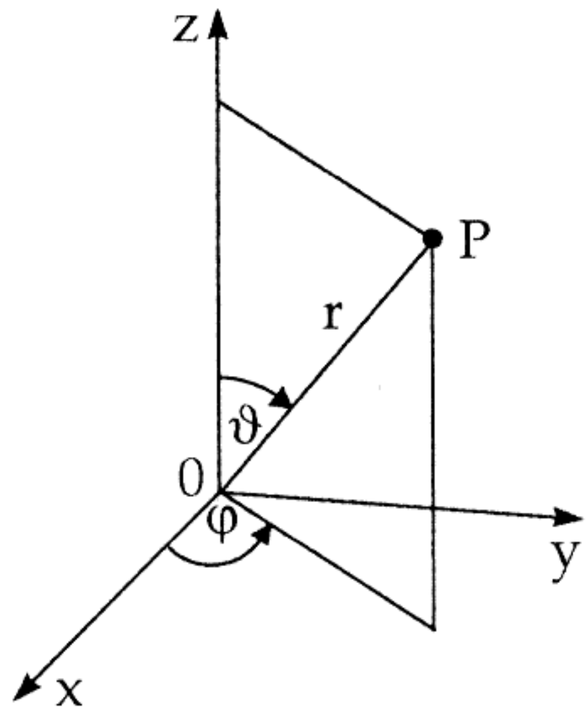
$$x = \varrho \cos\varphi\,, \quad y = \varrho \sin\varphi\,, \quad z = z\,; \tag{3.334a}$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\varrho}, \quad \text{ha} \quad x > 0\,. \tag{3.334b}$$

A φ-vel kapcsolatban szükséges esetszétválasztást lásd (3.271c) alatt.



3.167. ábra.



3.168. ábra.

6. Gömbkoordináták vagy térbeli polárkoordináták:

- az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektor r hosszúsága,
- a z-tengely és az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektor közötti ϑ szög, valamint
- az x-tengely és az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektor x, y-síkra vett vetülete közötti φ szög.

Itt a pozitív irány **(3.168. ábra)** r esetében a koordinátarendszer kezdőpontjától a P pont felé, ϑ esetében a z-tengelytől $\vec{\mathbf{r}}$ felé, végül φ esetében az x-tengelytől $\vec{\mathbf{r}}$-nek az x, y-síkra vett vetülete felé mutat. A $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $-\pi < \varphi \le \pi$ értékkészletek segítségével a tér minden pontja egyértelműen jellemezhető.

A gömbkoordináta-rendszer koordinátafelületei:

- a koordinátarendszer 0 kezdőpontja körüli $r =$ konstans sugarú gömbök,
- a $\vartheta =$ konstans kúpok, amelyeknek csúcsa a koordinátarendszer kezdőpontjában van és amelyeknek tengelye a z-tengely, valamint
- a z-tengelyből kiinduló $\varphi =$ konstans félsíkok.

A koordinátavonalak e felületek metszésvonalai.

A gömbkoordináták és a derékszögű koordináták közötti átmenetre a következő képletek szolgálnak (lásd még a **3.20. táblázatot**):

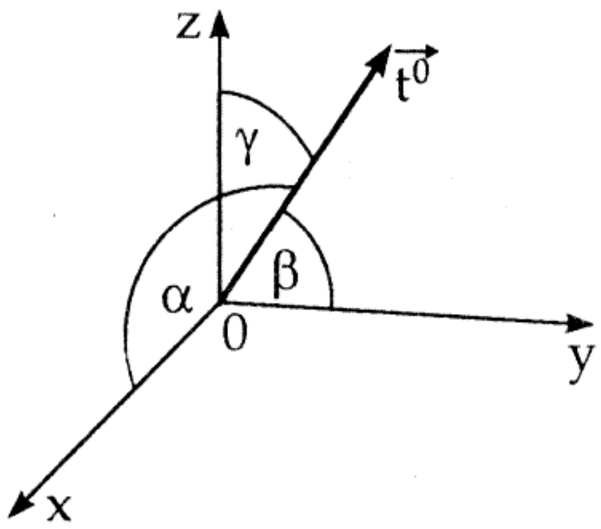
$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi\,, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi\,, \quad z = r \cos\vartheta\,, \tag{3.335a}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,. \tag{3.335b}$$

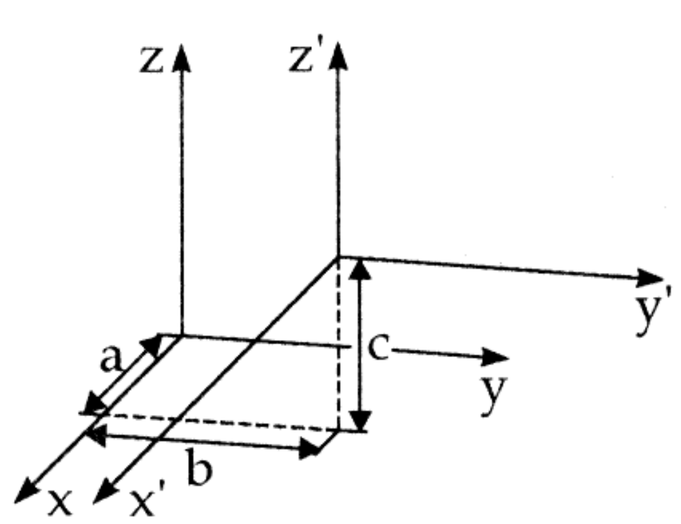
A φ-vel kapcsolatban szükséges esetszétválasztást lásd (3.271c) alatt. Analóg helyzet áll fenn ϑ-val kapcsolatban.

3.20. táblázat. Összefüggés a derékszögű, henger- és gömbkoordináták között

Derékszögű koordináták	Hengerkoordináták	Gömbkoordináták
x	$\varrho \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$\varrho \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	ϱ	$r \sin \vartheta$
$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	φ	φ
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\varrho^2 + z^2}$	r
$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$	$\operatorname{arctg} \frac{\varrho}{z}$	ϑ
$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	φ	φ



3.169. ábra.



3.170. ábra.

2. Térbeli irány

Térbeli irányt egy $\vec{\mathbf{t}}^0$ egységvektor segítségével jellemezhetünk (lásd 181. old.), melynek koordinátái az *iránykoszinusz*ok, vagyis a jellemzendő irány és a pozitív koordinátatengelyek közötti szögek koszinuszai **(3.169. ábra)**:

$$l = \cos \alpha\,, \quad m = \cos \beta\,, \quad n = \cos \gamma\,, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1\,. \tag{3.336a}$$

Két, az l_1, m_1, n_1 és l_2, m_2, n_2 iránykoszinuszokkal megadott irány közötti φ szög kiszámítása a következő képlettel történhet:

$$\cos \alpha = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\,. \tag{3.336b}$$

Két irány egymásra akkor merőleges, ha

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0\,. \tag{3.336c}$$

3. Derékszögű koordináták transzformálása

1. Párhuzamos eltolás Ha x, y, z az eredeti koordináták és x', y', z' az újak, továbbá a, b, c az új koordinátarendszer kezdőpontjának koordinátái az eredeti koordinátarendszerben **(3.170. ábra)**,

akkor

$$x = x' + a\,, \quad y = y' + b\,, \quad z = z' + c\,; \quad x' = x - a\,, \quad y' = y - b\,, \quad z' = z - c\,. \tag{3.337}$$

2. A koordinátatengelyek elforgatása Ha az új tengelyek iránykoszinuszait a **3.21. táblázat** szerint jelöljük **(3.171. ábra)**, akkor fennáll

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z'\,, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z'\,, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z'\,; \end{aligned} \tag{3.338a}$$

$$\begin{aligned} x' &= l_1x + m_1y + n_1z\,, \\ y' &= l_2x + m_2y + n_2z\,, \\ z' &= l_3x + m_3y + n_3z\,. \end{aligned} \tag{3.338b}$$

A (3.338a) rendszer D együttható-mátrixát, amelyet *forgásmátrix*nak nevezünk, és a transzformáció Δ determinánsát a következő képletek adják meg:

$$D = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}\,, \tag{3.338c}$$

$$\det D = \Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}\,. \tag{3.338d}$$

3.21. táblázat. Az iránykoszinuszok jelölése koordinátatranszformációnál

Régi, vonatkoztatási tengely	Új tengely iránykoszinusza		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

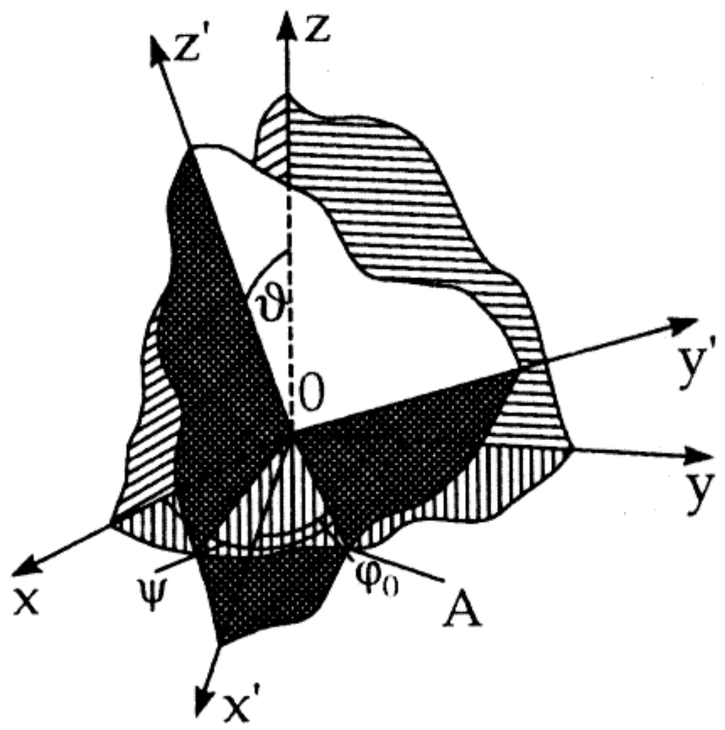
3. Transzformáció determinánsának tulajdonságai

a) $\Delta = \pm 1$, ahol az előjel pozitív ha a bal-, ill. jobbsodrás megmarad, viszont negatív ha a sodrás megváltozik.

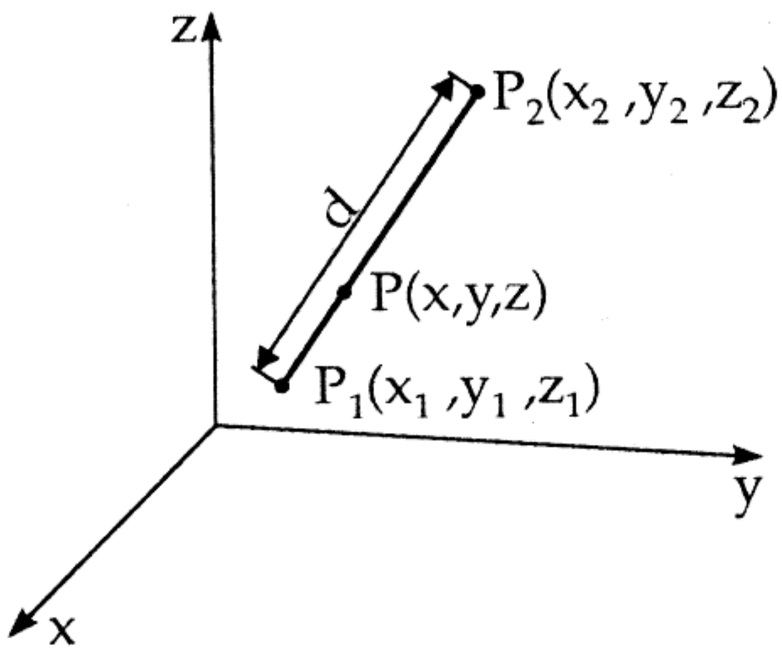
b) Minden sorban vagy oszlopban a négyzetek összege 1.

c) Két különböző sor vagy oszlop megfelelő elemei szorzatának összege 0 (lásd 256. old.).

d) Bármely elem a $\Delta = \pm 1$ érték és az adjungált szorzata (lásd 259. old.).



3.171. ábra.



3.172. ábra.

4. Euler-szögek Az új koordinátarendszer régihez viszonyított helyzete teljesen meghatározható három, EULER által bevezetett szög segítségével **(3.171. ábra)**.

a) A ϑ *nutációs szög* a z-tengely és a z'-tengely pozitív iránya közötti szög; értéke a $0 \leq \vartheta < \pi$ tartományba esik.

b) A ψ *precessziós szög* a pozitív x-tengely, valamint az x, y- és x', y'-sík OA metszésvonala közötti szög. A ϑ szög pozitív irányát úgy választjuk meg, hogy a z-tengely, a z'-tengely és OA által alkotott irányhármas (lásd 182. old.) irányítása ugyanolyan legyen, mint a koordinátatengelyeké. A ψ szöget az x-tengelytől az y-tengely felé mérjük; tartománya $0 \leq \psi < \pi$.
c) A φ *forgásszög* a pozitív x'-irány és az OA metszésvonal közötti szög; tartománya $0 \leq \varphi < 2\pi$.
A szögfüggvényekre a

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= c_1\,, \quad \cos\psi = c_2\,, \quad \cos\varphi = c_3\,, \\ \sin\vartheta &= s_1\,, \quad \sin\psi = s_2\,, \quad \sin\varphi = s_3 \end{aligned} \tag{3.339a}$$

rövidítéseket bevezetve fennáll:

$$\begin{aligned} l_1 &= c_2c_3 - c_1s_2s_3\,, & m_1 &= s_2c_3 + c_1c_2s_3\,, & n_1 &= s_1s_3\,; \\ l_2 &= -c_2s_3 - c_1s_2c_3\,, & m_2 &= -s_2s_3 + c_1c_2c_3\,, & n_2 &= s_1c_3\,; \\ l_3 &= s_1s_2\,, & m_3 &= -s_1c_2\,, & n_3 &= c_1\,. \end{aligned} \tag{3.339b}$$

5. Skalárinvariánsnak nevezünk egy skalárt, amely a koordinátarendszer eltolása és elforgatása során megtartja értékét. Két vektor skaláris szorzata *skalárinvariáns* (lásd 184. old.).

■ **A:** Egy $\vec{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor komponensei nem skalárinvariánsok, mert a koordinátarendszer eltolása és elforgatása során különböző értékeket vesznek fel.

■ **B:** Az $\vec{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor hossza, vagyis a $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ mennyiség, skalárinvariáns.

■ **C:** Vektor önmagával képezett skaláris szorzata skalárinvariáns:
$\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 \cos\varphi = |\vec{\mathbf{a}}^2|$, mert $\varphi = 0$.

4. Két pont távolsága

Két pont, $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ **(3.172. ábra)** távolsága

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{3.340a}$$

A két pontot összekötő szakasz iránykoszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}\,, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}\,, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}\,. \tag{3.340b}$$

5. Szakasz felosztása

Azon $P(x, y, z)$ pont koordinátáit, amely a $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ közötti szakaszt előírt

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{m}{n} = \lambda \tag{3.341}$$

arányban osztja, a következő képletek határozzák meg:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\,, \tag{3.342a}$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\,, \tag{3.342b}$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\,. \tag{3.342c}$$

A szakasz *felezőpont*jának koordinátái

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}\,, \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}\,. \tag{3.343}$$

Egy n számú m_i tömegű anyagi pontból álló rendszer *tömegközéppont*jának (amelyet helytelenül *súlypont*nak is szoktak nevezni) koordinátáit a következő képletekkel lehet kiszámítani, ahol az összegezések az 1-től n-ig terjedő i értékekre végzendők:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\,, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\,, \quad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}\,. \tag{3.344}$$

6. Négy pontból álló rendszer

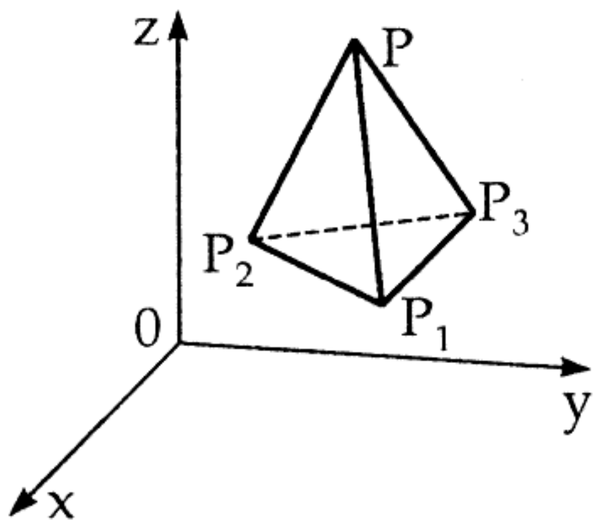
Négy pont, nevezetesen $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ és $P_3(x_3, y_3, z_3)$ vagy tetraédert alkot **(3.173. ábra)**, vagy egy síkban fekszik. A tetraéder térfogatát a

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} \tag{3.345}$$

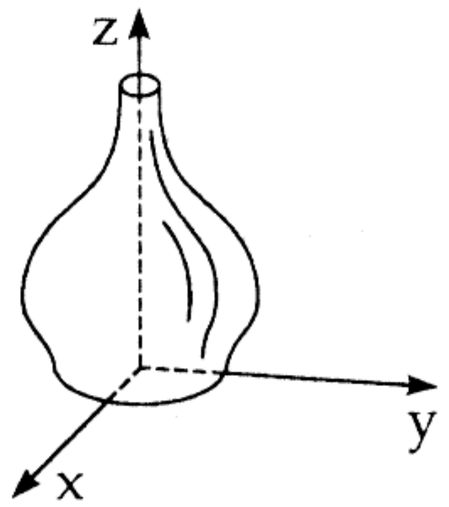
képlettel lehet kiszámítani, ahonnan csak akkor kapunk pozitív V értéket, ha a $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$, $\overrightarrow{PP_3}$ vektorhármas irányítása megegyezik a koordinátarendszer irányításával (lásd 182. old.). Ellenkező esetben negatív érték adódik.

A négy pont akkor és csak akkor fekszik egy síkban, ha teljesül az

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{feltétel.} \tag{3.346}$$



3.173. ábra.



3.174. ábra.

7. Felület egyenlete

Minden $F(x, y, z) = 0$ (3.347)

egyenletnek megfelel egy felület, amelynek az a tulajdonsága, hogy tetszőleges P pontjának koordinátái kielégítik az egyenletet. Megfordítva: minden pont, amelynek koordinátái kielégítik az egyenletet, ezen a felületen helyezkedik el. A (3.347) egyenletet a felület egyenletének nevezzük.

1. Hengerfelület egyenlete Olyan hengerfelület egyenlete (lásd 154. old.), amelynek alkotói párhuzamosak az x-tengellyel, nem tartalmaz x-koordinátát: $F(y, z) = 0$. Ugyanígy azon hengerfelületek egyenletei, amelyeknek alkotói az y-, ill. z-tengellyel párhuzamosak, nem tartalmaznak y- ill. z-koordinátát: $F(x, z) = 0$, ill. $F(x, y) = 0$. Az $F(x, y) = 0$ egyenlet a hengerfelület és az x, y-sík metszésgörbéjét írja le. Ha adva vannak a hengerfelület alkotóinak iránykoszinuszai vagy valamilyen velük arányos l, m, n mennyiségek, akkor az egyenlet alakja

$$F(nx - lz, ny - mz) = 0\,. \tag{3.348}$$

2. Forgásfelület egyenlete, vagyis olyan felületé, amely egy megadott, az x, z-síkban fekvő, $z = f(x)$ egyenletű görbe forgatásával jön létre **(3.174. ábra)**, általánosságban

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\,. \tag{3.349}$$

Analóg módon kapjuk azon felületek egyenletét, amelyek adott görbének egy másik koordinátatengely körüli forgatásával keletkeznek.

Olyan *kúpfelület* egyenlete, amelynek csúcsa a koordinátarendszer kezdőpontjában helyezkedik el (lásd 156. old.), $F(x, y, z) = 0$ alakú, ahol F a koordináták homogén függvénye (lásd 126. old.).

8. Térgörbe egyenlete

Térgörbét három

$$x = \varphi_1(t)\,, \quad y = \varphi_2(t)\,, \quad z = \varphi_3(t) \tag{3.350}$$

paraméteres egyenlettel lehet meghatározni. A t paraméter minden értékének, amelynek egyébként nem mindig lehet közvetlen geometriai jelentést tulajdonítani, megfelel a görbe egy meghatározott pontja.

A térgörbék jellemzésének egy másik módszere két

$$F_1(x, y, z) = 0\,, \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{3.351}$$

egyenlet megadásából áll. Ezek mindegyike felületet definiál. Azok a pontok, amelyek mindkét egyenletet kielégítik, térgörbét alkotnak, vagyis a térgörbe a két felület metszésvonala. Tetszőleges λ mellett minden

$$F_1 + \lambda F_2 = 0 \tag{3.352}$$

alakú egyenlet olyan felületet ad, amely átmegy a tekintett görbén, tehát (3.351) egyik egyenletét ezzel az egyenlettel helyettesíthetjük.

3.5.3.2. Térbeli egyenes és sík

1. Síkok egyenletei

Minden, a koordinátákban lineáris egyenlet síkot definiál, és megfordítva: minden sík egyenlete elsőfokú.

1. A sík általános egyenlete

a) koordinátás írásmódban: $Ax + By + Cz + D = 0\,,$ (3.353a)

b) vektoros írásmódban: $\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}} + D = 0\,,$ (3.353b)

ahol az $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C)$ vektor merőleges a síkra és ezért a *sík normálvektorá*nak nevezzük.* E vektor iránykoszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{3.353c}$$

Ha $D = 0$, a sík átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján. Ha $A = 0$, ill. $B = 0$ vagy $C = 0$, a sík párhuzamos az x-tengellyel, ill. az y- vagy a z-tengellyel. Ha $A = B = 0$, ill. $A = C = 0$ vagy $B = C = 0$, a sík párhuzamos az x, y-síkkal, ill. az x, z- vagy y, z-síkkal.

2. A sík egyenletének Hesse-féle normálalakja

a) koordinátás írásmódban: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,,$ (3.354a)

b) vektoros írásmódban: $\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}}^0 - p = 0\,,$ (3.354b)

ahol $\vec{\mathbf{N}}^0$ a sík normális egységvektora és p a sík távolsága a koordinátarendszer kezdőpontjától. A HESSE-féle normálalak a (3.353a) általános egyenletből a

$$\pm\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.354c}$$

normáló tényezővel való szorzás útján áll elő; ennek során μ előjelét D előjelével ellentétesnek kell választani.

3. A sík egyenletének tengelymetszetes alakja Ha a, b, c a sík által a koordinátatengelyekből levágott előjeles szakaszok, az ún. tengelymetszetek **(3.175. ábra)**, akkor fennáll

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \tag{3.355}$$

---

*Két vektor skaláris szorzatáról lásd Skaláris szorzat, 183. old., valamint Skaláris szorzat affin koordinátákban, 185. old.; a sík vektoros egyenletéről lásd Vektoregyenletek, 188. old.

4. Három ponton átmenő sík egyenlete Ha a három pont $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ és $P_3(x_3, y_3, z_3)$, akkor

a) koordinátás írásmódban:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.356a}$$

b) vektoros írásmódban:
$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1)(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)(\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}_1) = 0^{\dagger}\,. \tag{3.356b}$$

5. Két ponton átmenő, egy egyenessel párhuzamos sík egyenlete

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontokon átmenő és az $\vec{\mathbf{R}}(l, m, n)$ irányvektorú egyenessel párhuzamos sík egyenlete

a) koordinátás írásmódban:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.357a}$$

b) vektoros írásmódban:
$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1)(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1)\vec{\mathbf{R}} = 0\,. \tag{3.357b}$$

6. Adott ponton átmenő, két egyenessel párhuzamos sík egyenlete

Ha az irányvektorok $\vec{\mathbf{R}}_1(l_1, m_1, n_1)$ és $\vec{\mathbf{R}}_2(l_2, m_2, n_2)$, akkor az egyenlet

a) koordinátás írásmódban:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.358a}$$

b) vektoros írásmódban:
$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1)\vec{\mathbf{R}}_1\vec{\mathbf{R}}_2 = 0\,. \tag{3.358b}$$

7. Adott ponton átmenő, adott egyenesre merőleges sík egyenlete

Ha a pont $P_1(x_1, y_1, z_1)$, az egyenes irányvektora pedig $\vec{\mathbf{N}}(A, B, C)$, akkor

a) koordinátás írásmódban:
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,, \tag{3.359a}$$

b) vektoros írásmódban:
$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1)\vec{\mathbf{N}} = 0\,. \tag{3.359b}$$

8. Pont távolsága síktól Behelyettesítve az $M(a, b, c)$ pont koordinátáit a sík egyenletének (3.354a) alatti

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{3.360a}$$

HESSE-féle normálalakjába, kapjuk:

$$\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\delta - p\,. \tag{3.360b}$$

Ha M és a koordinátarendszer kezdőpontja a sík küönböző oldalain fekszik, akkor $\delta > 0$, ellenkező esetben $\delta < 0$.

9. Két sík metszésvonalán átmenő sík egyenlete Egy az $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, ill. $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ egyenlettel jellemzett síkok metszésvonalán átmenő sík egyenlete

a) koordinátás írásmódban: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0\,.$ (3.361a)

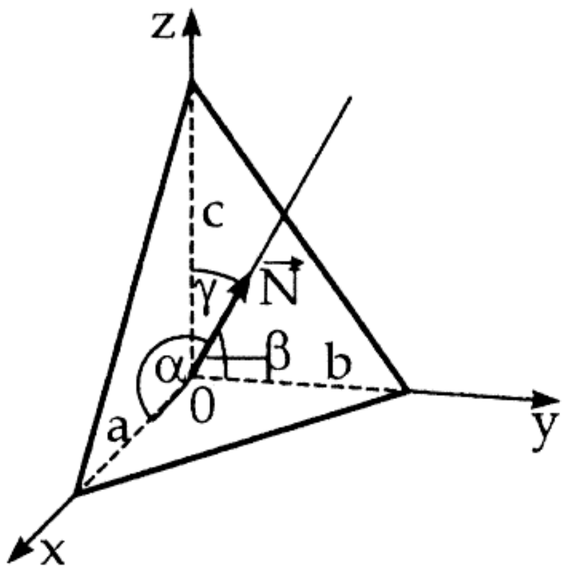
b) vektoros írásmódban: $\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}}_1 + D_1 + \lambda(\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}}_2 + D_2) = 0\,.$ (3.361b)

Itt λ valós paraméter, tehát a (3.361a) és (3.361b) egyenletek egy egész síksereget írnak le. A **3.176. ábra** a síksereg esetét három síkkal szemlélteti. Ha a (3.361a) és (3.361b) egyenletben λ végigfut minden $-\infty$ és $+\infty$ közötti értéken, akkor a sereghez tartozó összes síkot megkapjuk. A $\lambda = \pm 1$ választással a két eredeti sík közötti szögeket felező síkok egyenletét nyerjük, feltéve hogy az eredeti síkok egyenlete normálalakban volt megadva.*

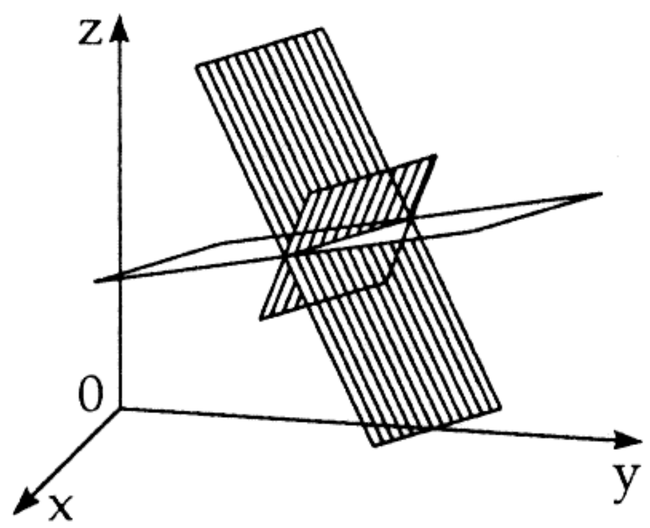
---

†Három vektor vegyes szorzatáról lásd a 185. oldalt.

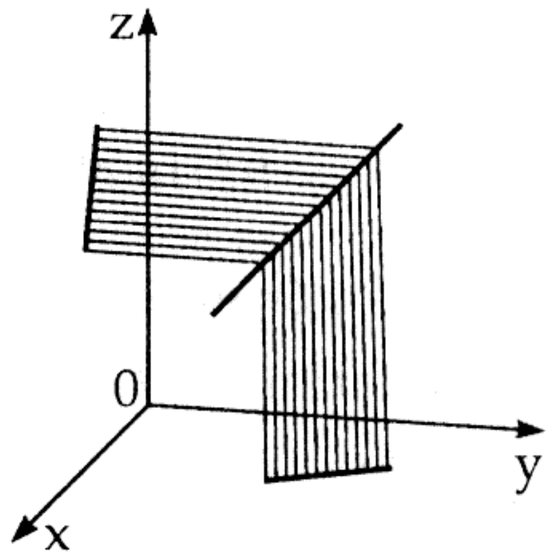
*Két vektor skaláris szorzatáról lásd Skaláris szorzat, 183. old., valamint Skaláris szorzat affin koordinátákban, 185. old.; a sík vektoros egyenletéről lásd Vektoregyenletek, 188. old.



3.175. ábra.



3.176. ábra.



3.177. ábra.

2. Két és több sík a térben

1. Két sík által bezárt szögek, általános eset: Az $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ és $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ egyenlettel megadott két sík által bezárt szögeket a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)\,(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}\,. \tag{3.362a}$$

Ha a síkok az $\vec{\mathbf{r}}\,\vec{\mathbf{N}}_1+D_1=0$, $\vec{\mathbf{r}}\,\vec{\mathbf{N}}_2+D_2=0$ vektoregyenletekkel vannak megadva, akkor

$$\cos\varphi=\frac{\vec{\mathbf{N}}_1\,\vec{\mathbf{N}}_2}{N_1N_2},\qquad \text{ahol } N_1=|\vec{\mathbf{N_1}}| \text{ és } N_2=|\vec{\mathbf{N_2}}|\,. \tag{3.362b}$$

2. Három sík metszéspontja: Három, az $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ egyenletekkel megadott sík metszéspontjának koordinátáit az

$$\bar{x}=\frac{-\Delta c_x}{\Delta c}\,,\quad \bar{y}=\frac{-\Delta c_y}{\Delta c}\,,\quad \bar{z}=\frac{-\Delta c_z}{\Delta c} \tag{3.363a}$$

képletekkel lehet kiszámítani, ahol

$$\Delta c=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\,,$$

$$\Delta c_x=\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1\\ D_2 & B_2 & C_2\\ D_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix},\quad \Delta c_y=\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1\\ A_2 & D_2 & C_2\\ A_3 & D_3 & C_3\end{vmatrix},\quad \Delta c_z=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & D_3\end{vmatrix}. \tag{3.363b}$$

Három sík egy pontban metszi egymást, ha $\Delta c\neq 0$. Ha $\Delta c=0$ és legalább egy másodrendű aldeterminánsa $\neq 0$, akkor a síkok párhuzamosak egy egyenessel; ha minden aldeterminánsa $=0$, akkor a síkok egy egyenesen mennek át.

3. Síkok párhuzamosságának és merőlegességének feltételei

1. Párhuzamossági feltétel: Két sík párhuzamos, ha

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\qquad \text{vagy}\qquad \vec{\mathbf{N_1}}\times\vec{\mathbf{N_2}}=0\,. \tag{3.364}$$

2. Merőlegességi feltétel: Két sík merőleges, ha

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\qquad \text{vagy}\qquad \vec{\mathbf{N_1}}\vec{\mathbf{N_2}}=0\,. \tag{3.365}$$

4. Négy sík metszéspontja Ha négy, az $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$, $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ egyenletekkel megadott sík metszéspontjának koordinátáit akarjuk kiszámítani, akkor először meghatározzuk valamelyik háromnak a metszéspontját

(lásd 216. old.). Ebben az esetben ($\delta = 0$) a negyedik egyenlet a másik három egyenlet következménye. Négy síknak akkor és csak akkor van közös pontja, ha

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3.366}$$

5. Két párhuzamos sík távolsága Ha teljesül a párhuzamossági feltétel (lásd 216. old.), továbbá a síkok egyenletei

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad Ax + By + Cz + D_2 = 0\,, \tag{3.364}$$

akkor a távolság

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{3.365}$$

3. Térbeli egyenes egyenlete

1. Térbeli egyenes egyenlete, általános eset Mivel minden térbeli egyenes két sík metszeteként definiálható, analitikusan két lineáris egyenletből álló rendszerrel állítható elő.

a) Koordinátás írásmódban:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,. \tag{3.366a}$$

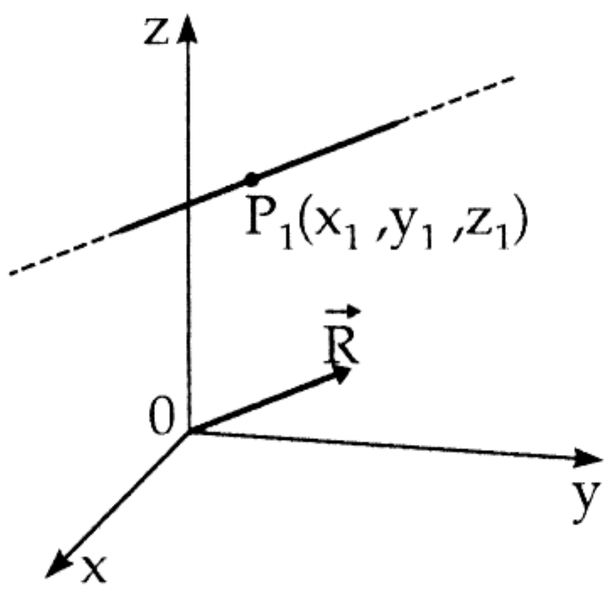
b) Vektoros írásmódban:

$$\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}}_1 + D_1 = 0\,, \quad \vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}}_2 + D_2 = 0\,. \tag{3.366b}$$

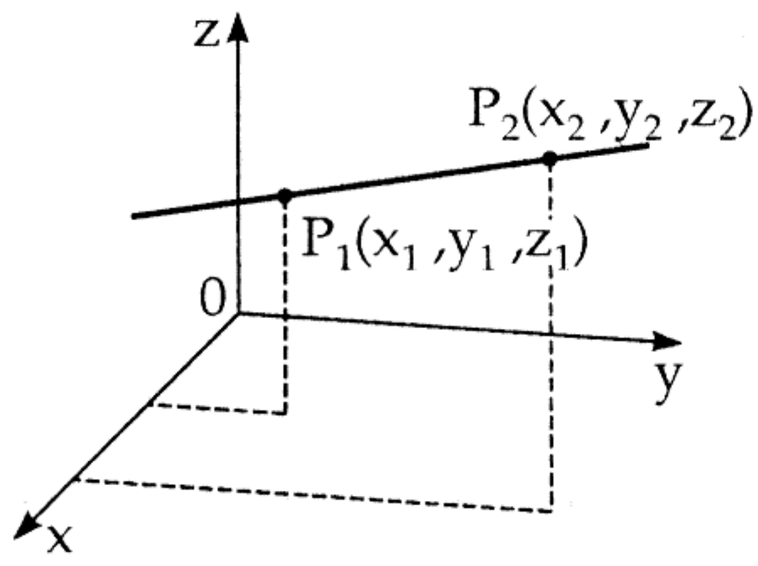
2. Két vetítősík metszetét képező egyenes egyenlete

Az $y = kx + a\,, \quad z = hx + b$ (3.367)

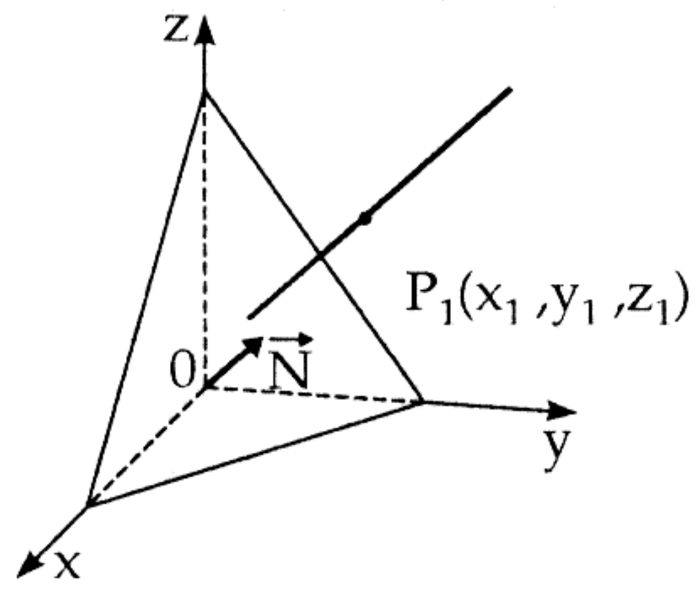
egyenletek egy-egy, az egyenesen átmenő és az x, y-síkra, ill. az x, z-síkra merőleges síkot definiálnak **(3.177. ábra)**. Ezeket vetítősíkoknak nevezzük. Az y, z-síkkal párhuzamos egyenesekre az előállítás ebben a formában nem alkalmazható, úgyhogy ilyenkor egy másik koordinátasík-párra kell vetíteni.



3.178. ábra.



3.179. ábra.



3.180. ábra.

3. Adott ponton átmenő, adott irányvektorral párhuzamos egyenes egyenlete

A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ ponton átmenő, az $\vec{\mathbf{R}}(l, m, n)$ irányvektorral párhuzamos egyenes **(3.178. ábra)** egyenlete

a) koordinátás előállításban és vektoros írásmódban:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}\,, \tag{3.368a}$$

$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}\,, \tag{3.368b}$$

b) paraméteres alakban és vektoros írásmódban:

$$x = x_1 + lt\,, \quad y = y_1 + mt\,, \quad z = z_1 + nt\,; \qquad (3.368c) \qquad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{R}}t\,. \qquad (3.368d)$$

A (3.368a) előállítás a (3.366a) egyenletekből adódik, ha

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\,, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\,, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\,, \qquad (3.369a)$$

azaz vektoros írásmódban $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2\,,$ (3.369b)

és ha az x_1, y_1, z_1 számokra teljesül (3.366a).

4. Két ponton átmenő egyenes egyenlete A $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ pontokon átmenő egyenes **(3.179. ábra)** egyenlete **koordinátás és vektoros írásmódban:**

a) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,,$ (3.370a) **b)** $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2) = \vec{\mathbf{0}}\,.$ (3.370b)

(Vektorok szorzatáról lásd 183. old.).

5. Adott ponton átmenő, adott síkra merőleges egyenes egyenlete Legyen a pont $P_1(x_1, y_1, z_1)$, és legyen a sík egyenlete $Ax + By + Cz + D = 0$ vagy $\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}} + D = 0$ alakú **(3.180. ábra)**. Ekkor az egyenes egyenlete koordinátás, valamint vektoros írásmódban:

a) $\dfrac{x - x_1}{A} = \dfrac{y - y_1}{B} = \dfrac{z - z_1}{C}\,,$ (3.371a) **b)** $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \times \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}\,.$ (3.371b)

4. Pont távolsága koordinátás alakban megadott egyenestől

Az $M(a, b, c)$ pont d távolsága a (3.368a) alakban megadott egyenestől a következő képlettel számítható ki:

$$d^2 = \frac{[(a - x_1)\,m - (b - y_1)\,l]^2 + [(b - y_1)\,n - (c - z_1)\,m]^2 + [(c - z_1)\,l - (a - x_1)\,n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}\,. \qquad (3.372)$$

5. Két, koordinátás alakban megadott egyenes legkisebb távolsága

A (3.368a) alakban megadott egyenesek távolsága

$$d = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}\,. \qquad (3.373)$$

Ha a számlálóban álló determináns nulla, akkor teljesül annak a feltétele, hogy a két térbeli egyenes messe egymást.

6. Sík és egyenes metszéspontjai

1. Az egyenes egyenlete koordinátás alakú Az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű sík és az $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ egyenletekkel megadott egyenes metszéspontjainak koordinátái

$$\bar{x} = x_1 - l\rho\,, \quad \bar{y} = y_1 - m\rho\,, \quad \bar{z} = z_1 - n\rho \qquad (3.374a)$$

ahol

$$\rho = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A\,l + B\,m + C\,n}\,. \qquad (3.374b)$$

Ha $A\,l + B\,m + C\,n = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal. Ha ezenkívül $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, akkor az egyenes benne fekszik a síkban.

2. Az egyenes egyenlete két vetítősíkkal van megadva Az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletű sík és az $y = kx + a$, $z = hx + b$ egyenletekkel megadott egyenes metszéspontjainak koordinátái

$$\bar{x} = -\frac{B\,a + C\,b + D}{A + B\,k + C\,h}\,, \quad \bar{y} = k\bar{x} + a\,, \quad \bar{z} = h\bar{x} + b\,. \tag{3.375}$$

Ha $A + B\,k + C\,h = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal. Ha ezenkívül $Ba + Cb + D = 0$, akkor az egyenes benne fekszik a síkban.

3. Két egyenes metszéspontja Az $y = k_1x + a_1$, $z = h_1x + b_1$ egyenletekkel megadott egyenes és az $y = k_2x + a_2$, $z = h_2x + b_2$ egyenletekkel megadott egyenes metszéspontját a következő képletekkel lehet kiszámítani:

$$\bar{x} = \frac{a_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2}\,, \quad \bar{y} = \frac{k_1a_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2}\,, \quad \bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}\,. \tag{3.376a}$$

Ezek a képletek csak az

$$(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) = (b_1 - b_2)(k_1 - k_2) \tag{3.376b}$$

feltétel mellett eredményeznek metszéspontot. Ellenkező esetben az egyenesek nem metszik egymást.

7. Síkok és egyenesek által bezárt szögek

1. Két egyenes szöge

a) Általános eset: Ha az egyenesek az $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ és $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ vagy vektorosan az $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \times \vec{\mathbf{R}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$ és $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2) \times \vec{\mathbf{R}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ egyenletekkel vannak megadva, akkor a szög kiszámítására szolgáló képlet

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\,(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}} \quad \text{vagy} \quad \cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{R}}_1\vec{\mathbf{R}}_2}{R_1R_2}. \tag{3.377}$$

b) Párhuzamossági feltétel: Két egyenesre a párhuzamosság feltétele

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \text{vagy} \qquad \vec{\mathbf{R}}_1 \times \vec{\mathbf{R}}_2 = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{3.378}$$

c) Merőlegességi feltétel: Két egyenesre a merőlegesség feltétele

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \vec{\mathbf{R}}_1\vec{\mathbf{R}}_2 = 0\,. \tag{3.379}$$

2. Egyenes és sík által bezárt szög **a) Egyenletek:** Ha az egyenes és a sík az $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$, ill. $Ax + By + Cz + D = 0$, vagy vektorosan az $(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1) \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$, ill. $\vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{N}} + D = 0$ egyenletekkel van megadva, akkor a szög a

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\,(l^2 + m^2 + n^2)}}, \text{ ill. } \sin\varphi = \frac{\vec{\mathbf{R}}\,\vec{\mathbf{N}}}{RN} \tag{3.380}$$

képlettel számítható ki.

b) Párhuzamossági feltétel: Egyenes és sík párhuzamosságának feltétele:

$$A\,l + B\,m + C\,n = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \vec{\mathbf{R}}\,\vec{\mathbf{N}} = 0\,. \tag{3.381}$$

c) Merőlegességi feltétel: Egyenes és sík merőlegességének feltétele:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \qquad \text{vagy} \qquad \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{3.382}$$

3.5.3.3. Másodrendű felületek, az egyenletek normálalakja

1. Centrális felületek A következőkben ismertetésre kerülő egyenletek, amelyeket a másodrendű felületek normálalakban felírt egyenleteinek nevezünk, a másodrendű felületek általános egyenletéből (lásd 223. old.) adódnak abban az esetben, amikor a középpont és a koordinátarendszer kezdőpontja egybeesik. A középpont felezi a rajta áthaladó húrokat. A koordinátatengelyek a felületek szimmetriatengelyeiben fekszenek, úgyhogy a koordinátasíkok egyben szimmetriasíkok is.

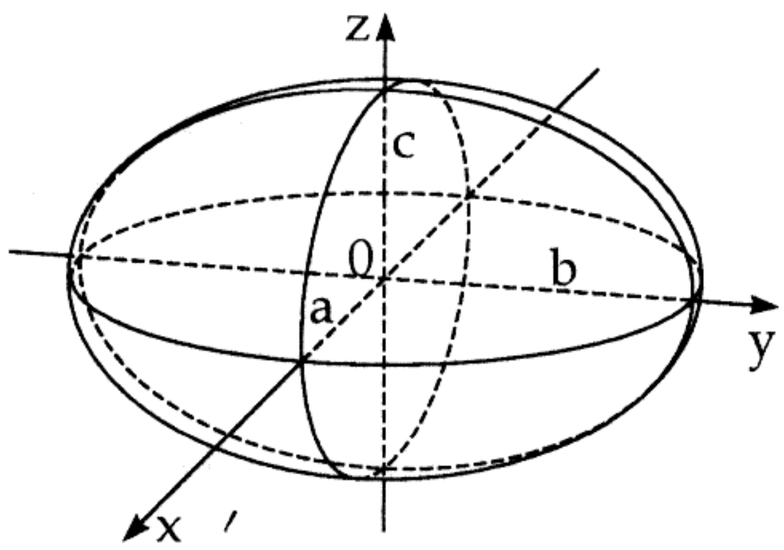
2. Ellipszoidok Az a, b, c féltengelyek **(3.181. ábra)** használatával az egyenlet:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{3.383}$$

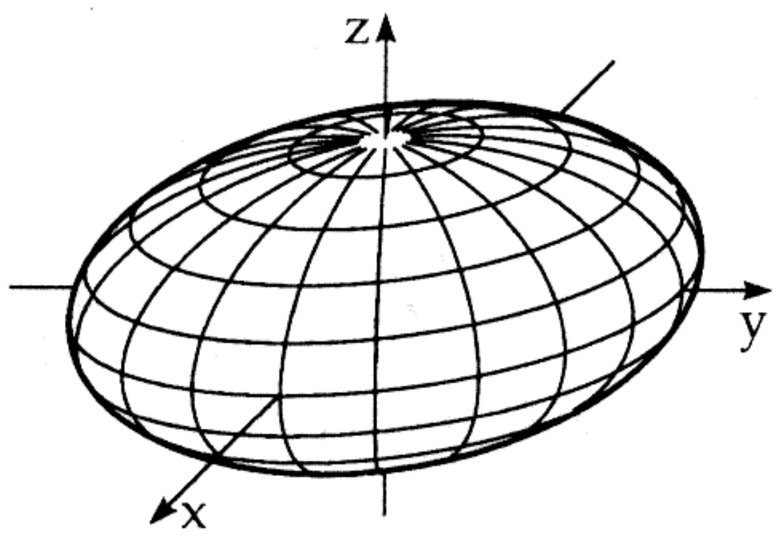
A következő speciális eseteket különböztetjük meg: **a)** $a=b>c$: összenyomott forgásellipszoid (*lencsealak*) **(3.182. ábra)**.
b) $a=b<c$: elnyújtott forgásellipszoid (*szivaralak*) **(3.183. ábra)**.
c) $a=b=c$: gömb, amelynek egyenlete $x^2+y^2+z^2=a^2$.

A kétféle forgásellipszoid egy x, z-síkbeli, a és c féltengelyű ellipszisnek a z-tengely körüli forgatásával, a gömb egy körnek valamelyik tengely körül való forgatásával áll elő. Ellipszoidot metsző sík metszési alakzata ellipszis, speciális esetben kör. Az ellipszoid térfogata

$$V=\frac{4\pi abc}{3}\,. \tag{3.384}$$



3.181. ábra.



3.182. ábra.

3. Hiperboloidok
1. Egyköpenyű hiperboloid (3.184. ábra) Az a és b valós, valamint a c képzetes féltengellyel fennáll

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{3.385}$$

(Az alkotókról lásd 222. old.)

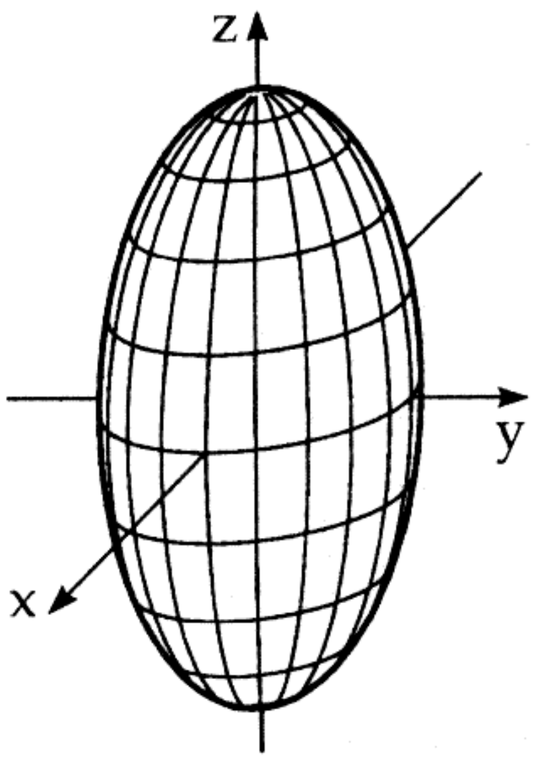
2. Kétköpenyű hiperboloid (3.185. ábra) A c valós és a, b képzetes féltengelyekkel fennáll

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,. \tag{3.386}$$

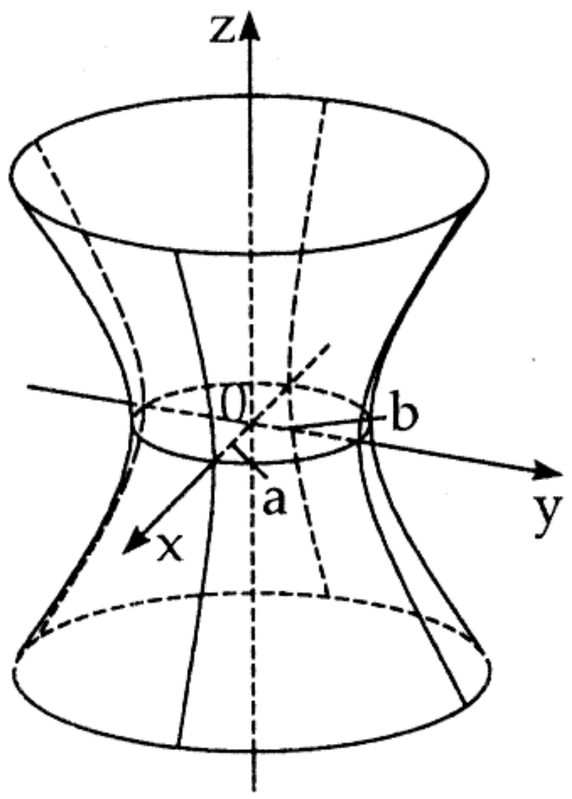
A z-tengellyel párhuzamos síkmetszetek mindkét hiperboloidnál hiperbolák. Az egyköpenyű hiperboloid esetében a metszet lehet metsző egyenespár is. Az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek. Ha $a=b$, a hiperboloidot egy a és c féltengelyű hiperbolának a $2c$ tengely körüli forgatásával lehet származtatni. Ez utóbbi tengely az egyköpenyű hiperboloid esetében képzetes, a kétköpenyű esetében valós.

4. Kúpok (3.186. ábra) Ha a csúcs a koordinátarendszer kezdőpontjában helyezkedik el, akkor az egyenlet:

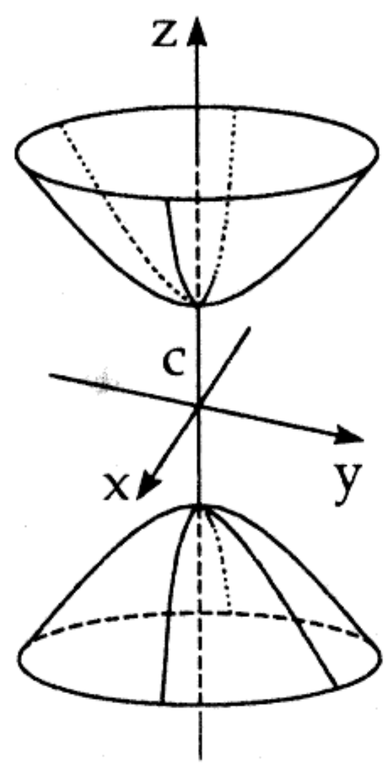
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,. \tag{3.387}$$



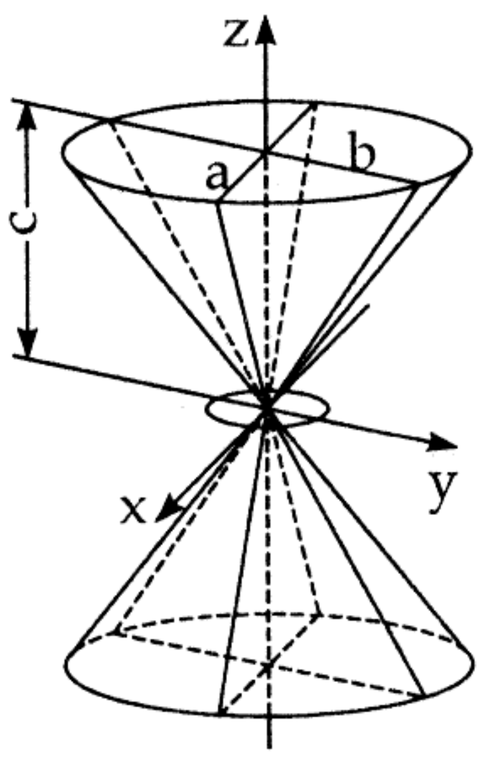
3.183. ábra.



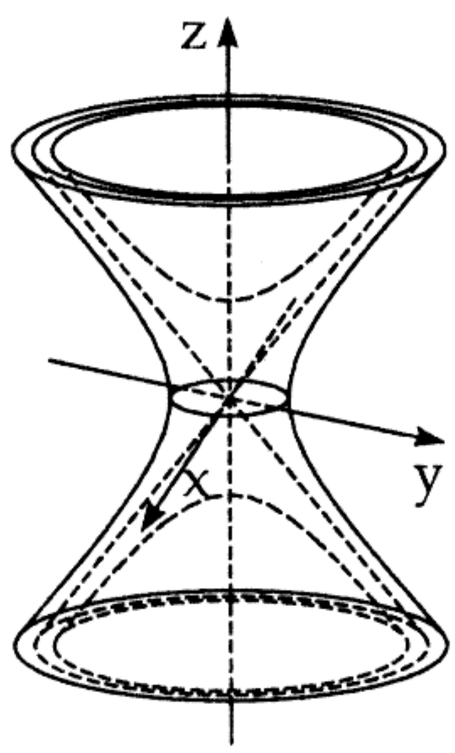
3.184. ábra.



3.185. ábra.



3.186. ábra.



3.187. ábra.

Vezérgörbéje egy olyan a és b féltengelyű ellipszis lehet, amelynek síkja a z-tengelyre merőleges és a koordinátarendszer kezdőpontjától c távolságra van. Ennél az előállításnál a kúp az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \tag{3.388}$$

hiperboloidok aszimptotikus kúpjának fogható fel, amelynek alkotója a végtelenben mindkét hiperboloidot határtalanul megközelíti **(3.187. ábra)**. Ha $a = b$, akkor egyenes körkúpot kapunk (lásd 156. old.).

5. Paraboloidok Mivel a paraboloidoknak nincs középpontjuk, a következő egyenletekben abból indulunk ki, hogy a paraboloid csúcspontja a koordinátarendszer kezdőpontjában helyezkedik el, a z-tengely szimmetriatengely, az x, z- és az y, z-sík pedig szimmetriasík.

1. Elliptikus paraboloid (3.188. ábra):

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,. \tag{3.389}$$

A z-tengellyel párhuzamos síkmetszetek parabolák, az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek.

2. Forgásparaboloid: Ha $a = b$, akkor forgásparaboloidot kapunk, amely a $z = x^2/a^2$ parabolának az x, z-síkban fekvő tengelye körüli forgatásával származtatható.

Azon paraboloidcsésze térfogata, amelyet egy a z-tengelyre merőleges sík h magasságban vág le,

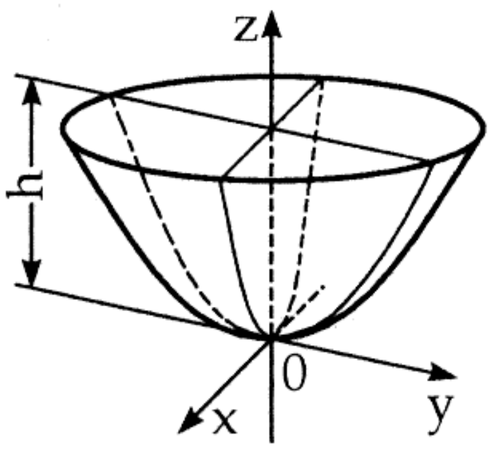
$$V=\frac{1}{2}\pi abh\,, \tag{3.390}$$

vagyis a vele azonos fedőlapú és magasságú elliptikus henger térfogatának a fele.

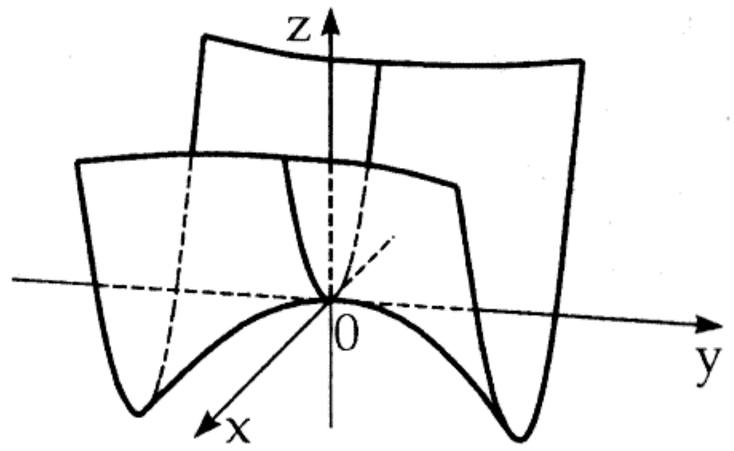
3. Hiperbolikus paraboloid (3.189. ábra):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,. \tag{3.391}$$

Az y, z-síkkal párhuzamos síkmetszetek és az x, z-síkkal párhuzamos síkmetszetek egybevágó parabolák, az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek pedig hiperbolák és egy metsző egyenespár.



3.188. ábra.



3.189. ábra.

6. Felület alkotói a teljesen a felületben fekvő egyenesek. Példák a kúp- és a hengerfelület alkotói.

1. Egyköpenyű hiperboloid (3.190. ábra):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.392}$$

Az egyköpenyű hiperboloidnak két alkotóserege van; ezek egyenletei

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right)\,, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}\,; \tag{3.393a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right)\,, \quad v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}\,, \tag{3.393b}$$

ahol u és v tetszőleges érték.

2. Hiperbolikus paraboloid (3.191. ábra):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{3.394}$$

A hiperbolikus paraboloidnak szintén két alkotóserege van; ezek egyenletei a következők:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u\,, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z\,; \tag{3.395a}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v\,, \quad v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z\,. \tag{3.395b}$$

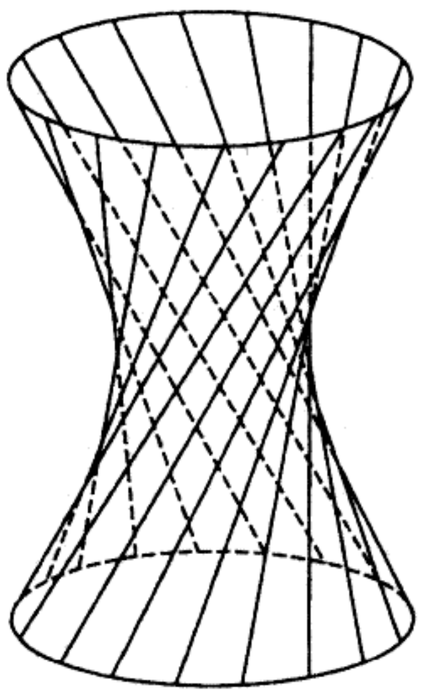
Itt u és v megint tetszőleges érték. Mindkét esetben a felület minden pontján két egyenes, seregenként egy alkotó, megy át, de a **3.190., 3.191. ábrákon** a kettő közül mindenütt csak az egyik van berajzolva.

7. Hengerek

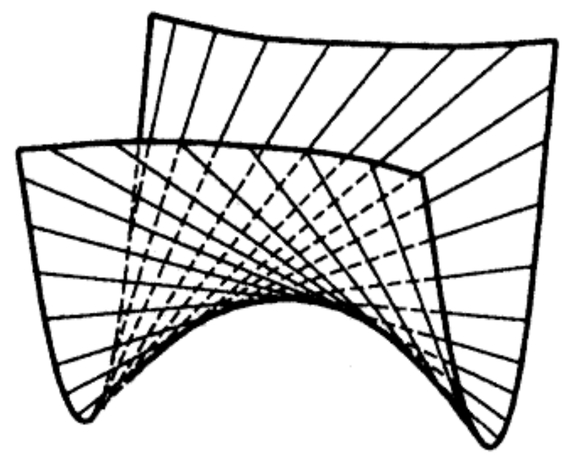
1. Elliptikus henger (3.192. ábra): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,.$ (3.396)

2. Hiperbolikus henger (3.193. ábra): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,.$ (3.397)

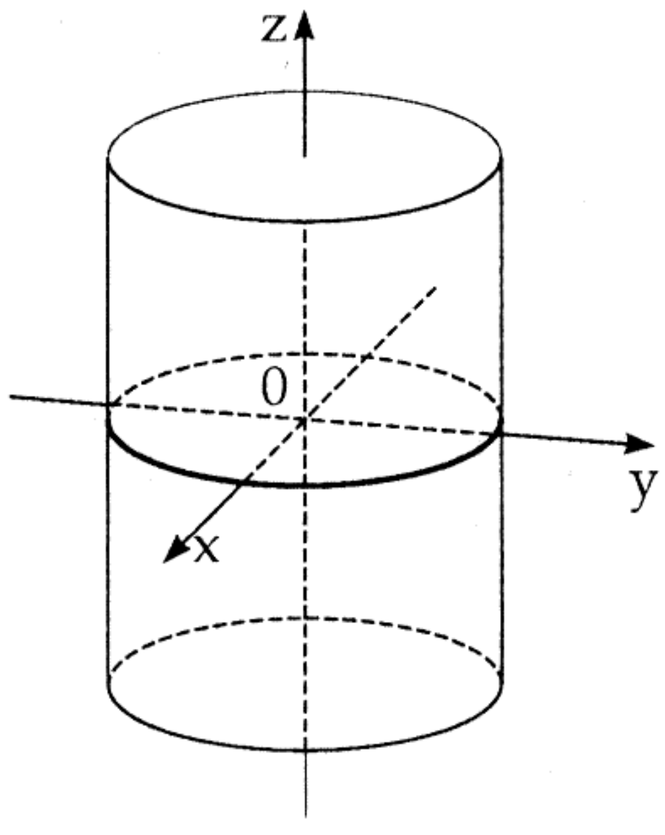
3. Parabolikus henger (3.194. ábra): $y^2 = 2px\,.$ (3.398)



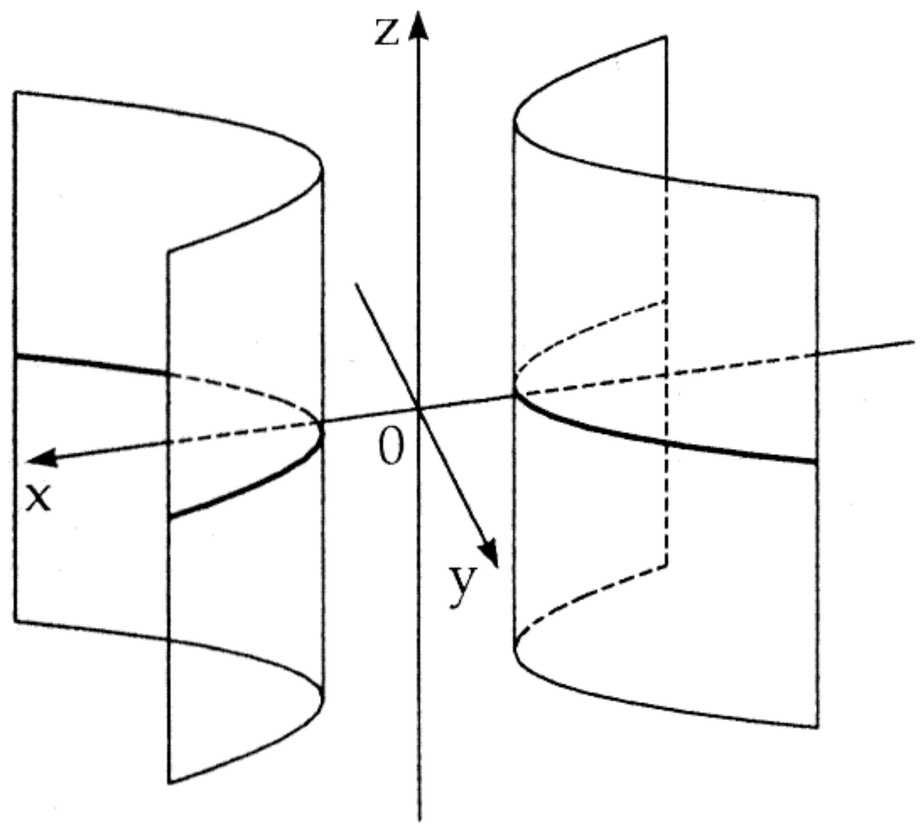
3.190. ábra.



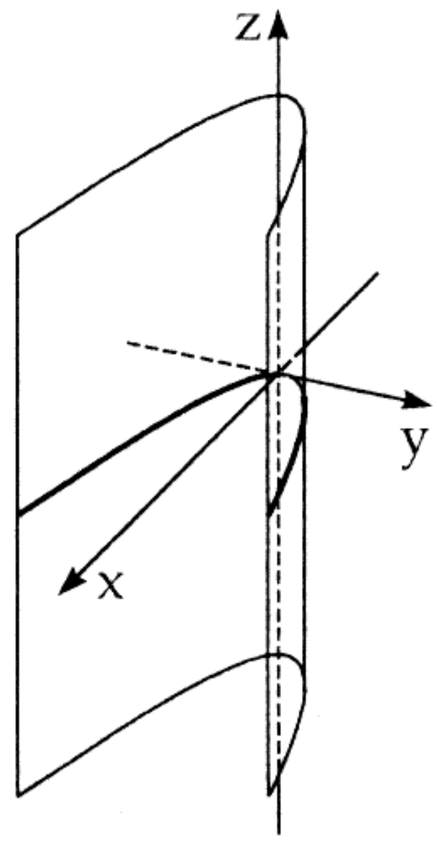
3.191. ábra.



3.192. ábra.



3.193. ábra.



3.194. ábra.

3.5.3.4. Másodrendű felületek, általános elmélet

1. Másodrendű felület általános egyenlete

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0\,. \quad (3.399)$$

2. Másodrendű felület alakjának megállapítása a felület egyenletéből Másodrendű felület alakját, ha a felület egyenletét ismerjük, a Δ, δ, S, T invariánsok előjele alapján, a **3.22.** és **3.23. táblázatból** határozhatjuk meg. E táblázatokban, a felület megnevezésén kívül, megtalálhatjuk egyenletének normálalakját is, amelyre egy megadott egyenlet átalakítható. Az ún. képzetes felületek egyenleteiből semmilyen valós pont koordinátáit sem lehet kiszámítani, kivéve a képzetes kúp csúcsát és két képzetes sík metszésvonalát.

3. Másodrendű felület invariánsai Az $a_{ik} = a_{ki}$ jelöléssel legyen

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\,; \quad (3.400a) \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\,; \quad (3.400b)$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}\,; \quad (3.400c)$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2\,. \quad (3.400d)$$

A koordinátatengelyek eltolása vagy elforgatása során ezek a mennyiségek nem változnak meg.

3.22. táblázat. A $\delta \neq 0$ tulajdonságú másodrendű felületek alakja (centrális felületek)

	$S \cdot \delta > 0\,, \quad T > 0$ [*1)]	$S \cdot \delta$ és T nem mindkettő > 0
$\Delta < 0$	Ellipszoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Kétköpenyű hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Képzetes ellipszoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Egyköpenyű hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Képzetes kúp (valós csúccsal) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kúp $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

[*1)] *1) Az S, δ és T mennyiségeket lásd 223. old.

3.23. táblázat.
A $\delta = 0$ tulajdonságú másodrendű felületek alakja (paraboloidok, hengerek és síkpárok)

	$\Delta < 0 \quad$ (ekkor $T > 0$) [*2)]	$\Delta c > 0 \quad$ (ekkor $T < 0$)
$\Delta \neq 0$	Elliptikus paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Hiperbolikus paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Hengerfelület, vezérgörbeként másodrendű görbével, mely utóbbinak az alakja különféle hengereket eredményez: $T > 0$ esetén valós vagy képzetes elliptikus, $T < 0$ esetén hiperbolikus és $T = 0$ esetén parabolikus hengereket, hacsak a felület nem esik szét két valós, képzetes vagy egybeeső síkra. A szétesés feltétele a következő: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$	

[*2)] *2) A Δ, T mennyiségeket lásd 223. old.

3.6. Differenciálgeometria

A differenciálgeometriában a sík- és térgörbéket, valamint felületeket a differenciálszámítás módszerével tanulmányozzuk. Ezért a görbék, ill. felületek egyenleteiben fellépő függvényekről feltesszük, hogy folytonosak és, a vizsgált probléma jellege által megkívánt rendig terjedően, folytonos deriváltakkal rendelkeznek. A görbének vagy felületnek csak egyes kivételes pontjaiban engedjük meg, hogy ez a feltétel ne teljesüljön. Ilyenkor *szinguláris pontok*ról beszélünk.

Amikor a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgáljuk, különbséget fogunk tenni az olyan tulajdonságok között, amelyek függnek a koordinátarendszer megválasztásától, pl. görbék vagy felületek metszéspontjai a koordinátatengelyekkel, érintők meredeksége, maximumok és minimumok, valamint az olyan invariáns tulajdonságok között, amelyek koordinátatranszformációtól függetlenek, pl. inflexiós pontok, csúcspontok, görbületek.

Továbbá a lokális tulajdonságokat, amelyek a görbéknek vagy felületeknek csak nagyon kicsiny részeire

vonatkoznak, pl. a felületek görbületei és vonalelemei, meg fogjuk különböztetni azoktól a tulajdonságoktól, amelyek a görbék és felületek egészével kapcsolatosak, amilyenek pl. a csúcspontok száma vagy egy zárt görbe hosszúsága.

3.6.1. Síkgörbék

3.6.1.1. Lehetőségek síkgörbék definiálására

1. Koordinátás egyenletek Síkgörbét analitikusan a következő módok valamelyikén lehet megadni.

1. Derékszögű koordinátákban:

a) implicit egyenlettel: $$0 = F(x, y)\,, \tag{3.401}$$

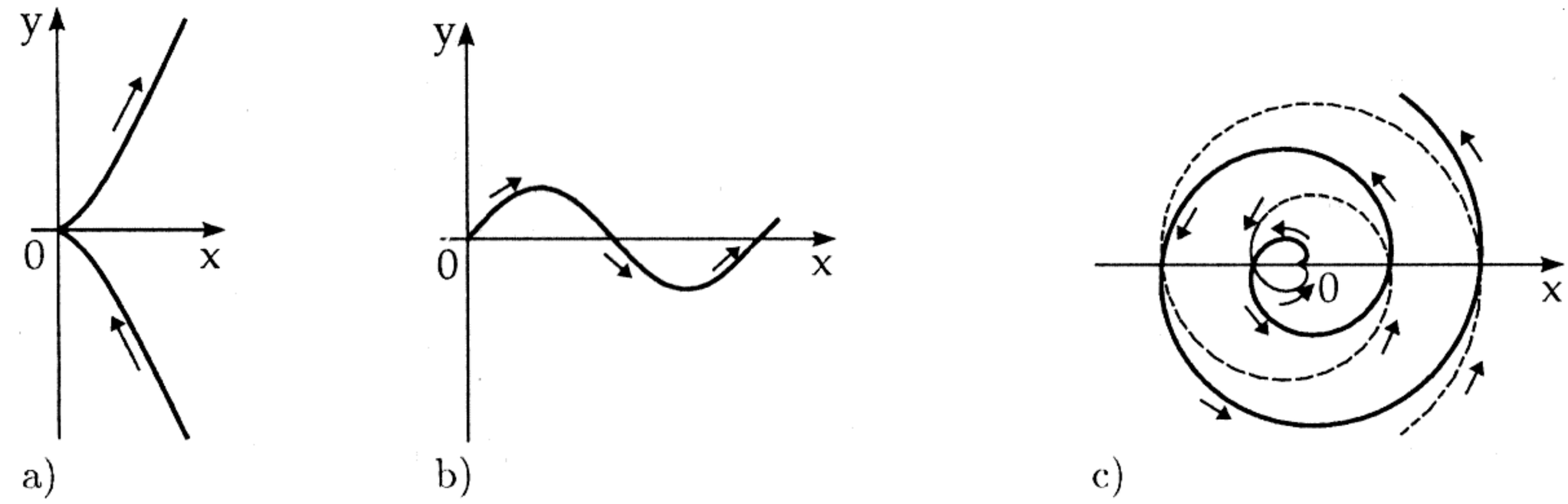
b) explicit egyenlettel: $$y = f(x)\,, \tag{3.402}$$

c) paraméteres alakban: $$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,. \tag{3.403}$$

2. Polárkoordinátákban: $$\rho = f(\varphi)\,. \tag{3.404}$$

2. Görbe pozitív bejárási iránya Egy (3.403) alakban megadott görbén azt az irányt nevezzük pozitívnak, amelyben a görbe $M[x(t), y(t)]$ pontja mozog, ha a t paraméter értékei növekednek. Ha a görbe a (3.402) alakban van megadva, akkor az abszcisszát paraméternek lehet felfogni $[x = x, y = f(x)]$, úgyhogy a növekvő abszcisszáknak megfelelő irány a pozitív. A (3.404) alak esetében a φ szög tekinthető paraméternek $[x = f(\varphi)\cos\varphi,\ y = f(\varphi)\sin\varphi]$, tehát a pozitív irány φ növekedésének felel meg, vagyis az óramutató járásával ellentétes.

■ **3.195.a, b, c ábrák:** **A:** $x = t^2\,,\ y = t^3\,;$ **B:** $y = \sin x\,;$ **C:** $\rho = a\varphi\,.$



3.195. ábra.

3.6.1.2. Görbék lokális alkotóelemei

Attól függően, hogy a görbén változó M pont a (3.402), (3.403) vagy (3.404) alakban van megadva, helyzetét x, t vagy φ határozza meg. Legyen N az M-hez tetszőlegesen közel fekvő pont, és legyen a hozzá tartozó paraméterérték $x + dx$, $t + dt$ vagy $\varphi + d\varphi$.

1. Ívelem

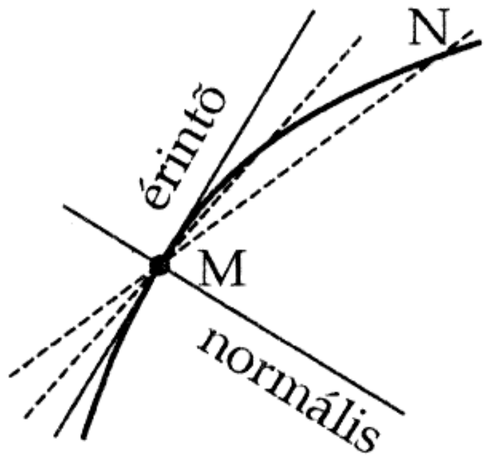
Ha s a görbének egy rögzített A ponttól az M pontig mért hosszúsága, akkor a $\Delta s = \overset{\frown}{MN}$ infinitezimális növekményt közelítőleg az ívhossz ds differenciáljával, az *ívelem*mel lehet kifejezni:

$$\Delta s \approx ds \begin{cases} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx & \text{a (3.402) alakra,} \quad (3.405) \\ = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt & \text{a (3.403) alakra,} \quad (3.406) \\ = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi & \text{a (3.404) alakra.} \quad (3.407) \end{cases}$$

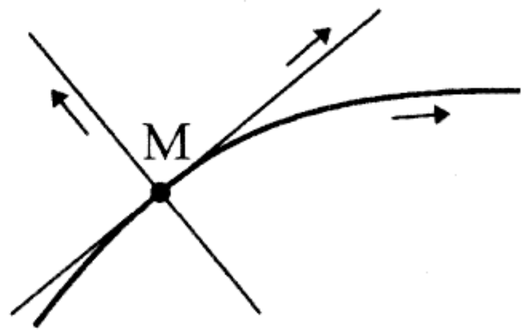
■ **A:** $y = \sin x\,,\ ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx\,.$

■ **B:** $x = t^2\,,\ y = t^3\,,\ ds = t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt\,.$

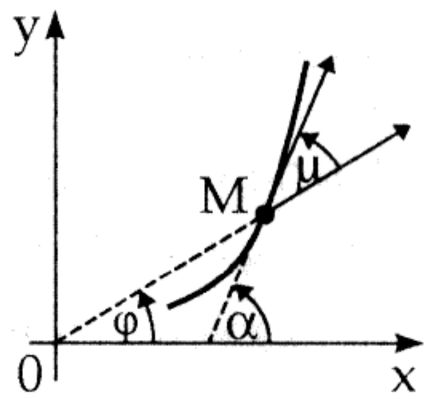
■ **C:** $\rho = a\varphi\,,\quad ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi\,.$



3.196. ábra.



3.197. ábra.



3.198. ábra.

2. Érintő és normális

1. ***M*-pontbeli érintőnek** nevezzük az MN szelő $N \to M$ esetén felvett határhelyzetét, *normális*nak pedig az M pontban az érintőre merőleges egyenest **(3.196. ábra)**.

2. Az érintő és a normális egyenletét a (3.401), (3.402) és (3.403) esetre a **3.24. táblázat** tartalmazza. Az M pont koordinátái x és y, az érintő és a normális futó pontjának koordinátái pedig X és Y. A deriváltak értékét az M pontban kell kiszámítani.

3.24. táblázat. Az érintő és a normális egyenletei

Az egyenlet fajtája	Az érintő egyenlete	A normális egyenlete
(3.401)	$\dfrac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0$	$\dfrac{X - x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \dfrac{Y - y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$
(3.402)	$Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$	$Y - y = -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(X - x)$
(3.403)	$\dfrac{Y - y}{y'} = \dfrac{X - x}{x'}$	$x'(X - x) + y'(Y - y) = 0$

Határozzuk meg az érintő és a normális egyenletét a következő görbékhez:

■ **A:** Az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz az $M(3, 4)$ pontban:

a) Az érintő egyenlete: $2x(X - x) + 2y(Y - y) = 0$. A kör egyenletének felhasználásával: $Xx + Yy = 25$. Az M pontban: $3X + 4Y = 25$.

b) A normális egyenlete: $\dfrac{X - x}{2x} = \dfrac{Y - y}{2y}$, azaz $Y = \dfrac{y}{x}X$; az M pontban: $Y = \dfrac{4}{3}X$.

■ **B:** Az $y = \sin x$ szinuszgörbéhez a $0(0, 0)$ pontban:

a) Az érintő egyenlete: $Y - \sin x = \cos x(X - x)$, azaz $Y = X\cos x + \sin x - x\cos x$; a 0 pontban: $Y = X$.

b) A normális egyenlete: $Y - \sin x = -\dfrac{1}{\cos x}(X - x)$, azaz $Y = -X\sec x + \sin x + x\sec x$; a 0 pontban: $Y = -X$.

■ **C:** Az $x = t^2\,, y = t^3$ görbéhez az $M(4, -8), t = -2$ pontban:

a) Az érintő egyenlete: $\dfrac{Y - t^3}{3t^2} = \dfrac{X - t^2}{2t}$, azaz $Y = \dfrac{3}{2}tX - \dfrac{1}{2}t^3$; az M pontban: $Y = -3X + 4$.

b) A normális egyenlete: $2t\,(X - t^2) + 3t^2\,(Y - t^3) = 0$, azaz $2X + 3tY = t^2\,(2 + 3t^2)$; az M pontban: $X - 3Y = 28$.

3. Pozitív irány a görbe érintőjén és normálisán Ha a görbe a (3.402), (3.403) vagy (3.404) alakban van megadva, akkor az érintőn és a normálison a pozitív irány meg van határozva. Az érintőn a pozitív irány megegyezik a görbének az érintési pontban vett pozitív irányával, a normálison pedig úgy kapjuk meg a pozitív irányt, hogy az érintő pozitív irányát az M pont körül 90°-kal elforgatjuk az óramutató járásával ellentétesen **(3.197. ábra)**. Az M pont az érintőt és a normálist egy pozitív és egy negatív félegyenesre osztja.

4. Az érintő meredekségét meghatározza

a) az érintő α *hajlásszöge*, vagyis az abszcisszatengely pozitív iránya és az érintő pozitív iránya közötti szög, illetve

b) ha a görbe polárkoordinátákban van megadva, az $\overline{OM} = \rho$ rádiuszvektor iránya és az érintő pozitív iránya közötti μ szög **(3.198. ábra)**. Az α és a μ szögre érvényesek a következő képletek, ahol ds kiszámítása (3.405)–(3.407) szerint történhet:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}\,, \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}\,; \tag{3.408a}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\dfrac{d\rho}{d\varphi}}\,, \quad \cos\mu = \frac{d\rho}{ds}\,, \quad \sin\mu = \rho\frac{d\varphi}{ds}\,. \tag{3.408b}$$

■ **A:** $y = \sin x\,,$ $\operatorname{tg}\alpha = \cos x\,,$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\,,$ $\sin\alpha = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\,;$

■ **B:** $x = t^2\,,\ y = t^3\,,$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3t}{2}\,,$ $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{4 + 9t^2}}\,,$ $\sin\alpha = \dfrac{3t}{\sqrt{4 + 9t^2}}\,;$

■ **C:** $\rho = a\varphi\,,$ $\operatorname{tg}\mu = \varphi\,,$ $\cos\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}\,,$ $\sin\mu = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}\,.$

5. Érintődarab, normálisdarab, szubtangens és szubnormális (3.199. ábra)

a) Derékszögű koordinátákban, (3.402) vagy (3.403) szerinti megadás esetén:

$$\overline{MT} = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right| \qquad (\textit{érintődarab}), \tag{3.409a}$$

$$\overline{MN} = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right| \qquad (\textit{normálisdarab}), \tag{3.409b}$$

$$\overline{PT} = \left|\frac{y}{y'}\right| \quad (\textit{szubtangens})\,, \tag{3.409c}$$

$$\overline{PN} = |yy'| \quad (\textit{szubnormális})\,. \tag{3.409d}$$

b) Polárkoordinátákban, (3.404) szerinti megadás esetén:

$$\overline{MT'} = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right| \qquad (\textit{polárérintő-darab})\ , \tag{3.410a}$$

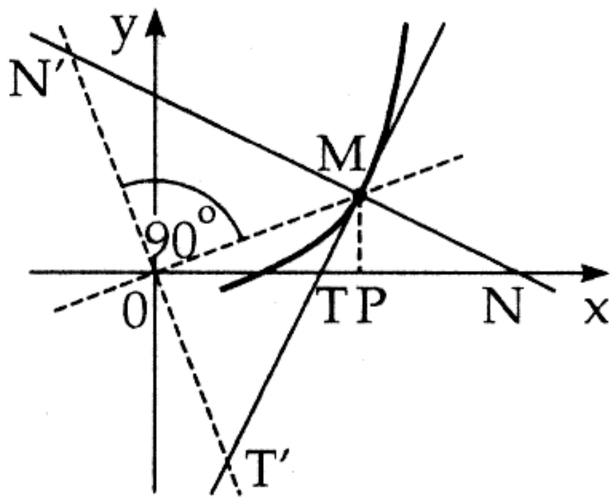
$$\overline{MN'} = \left|\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right| \qquad (\textit{polárnormális-darab})\ , \tag{3.410b}$$

$$\overline{0T'} = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right| \quad (\textit{polárszubtangens})\,, \tag{3.410c}$$

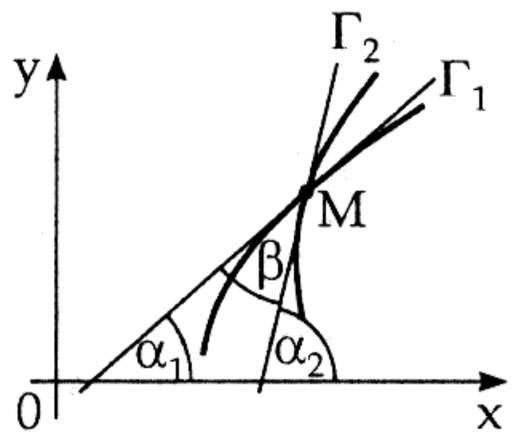
$$\overline{0N'} = |\rho'| \quad (\textit{polárszubnormális})\,. \tag{3.410d}$$

■ **A:** $y = \operatorname{ch} x$, $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+y'^2} = \operatorname{ch} x$; $\overline{MT} = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|$, $\overline{MN} = |\operatorname{ch}^2 x|$, $\overline{PT} = |\operatorname{cth} x|$, $\overline{PN} = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|$.

■ **B:** $\rho = a\varphi$, $\rho' = a$, $\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}$; $\overline{MT'} = \left|a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\right|$, $\overline{MN'} = \left|a\sqrt{1+\varphi^2}\right|$, $\overline{0T'} = \left|a\varphi^2\right|$, $\overline{0N'} = a$.



3.199. ábra.



3.200. ábra.

6. Két görbe által bezárt szög Tegyük fel, hogy a Γ_1, Γ_2 görbék egymást az M pontban metszik. A *két görbe közötti β szögön* a görbék M pontban vett érintőinek szögét értjük **(3.200. ábra)**. A β szög kiszámítását így visszavezettük a

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_M, \qquad (3.411a) \qquad\qquad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_M \qquad (3.411b)$$

iránytényezőjű egyenesek szögének kiszámítására, ahol $y = f_1(x)$ és $y = f_2(x)$ a Γ_1 ill. Γ_2 görbe egyenlete, a deriváltak pedig az M pontban veendők.

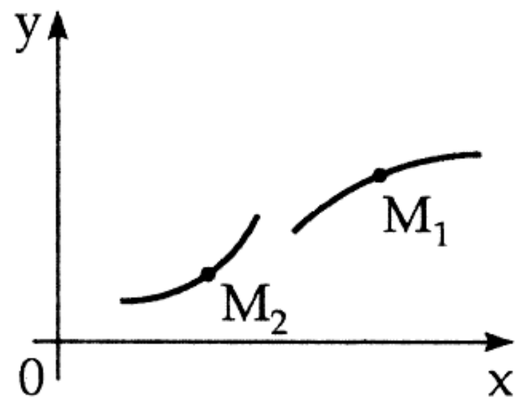
■ Meghatározandó az $y = \sqrt{x}$ parabola és az $y = x^2$ parabola közötti szög az $M(1,1)$ pontban:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=1} = 2, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3}{4}.$$

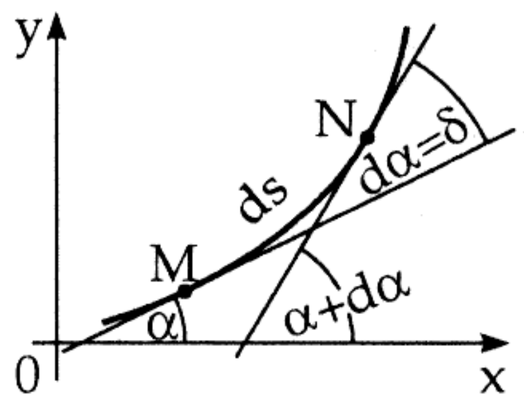
3. Görbe konvex és konkáv oldala

Ha egy görbe az $y = f(x)$ explicit alakban van megadva, akkor egy kis darabjára, amely tartalmazza az M pontot, meg lehet mondani, hogy a görbe konkáv oldala felfelé vagy lefelé néz. Kivétel az az eset, amikor M inflexiós vagy szinguláris pont (lásd 231. old.). Ha a második derivált $f''(x) > 0$, akkor a görbe konkáv oldala felfelé, vagyis a pozitív y-irányba néz (a **3.201. ábrán** az M_2 pont). Ha $f''(x) < 0$ (M_1 pont), akkor a görbe alulról konkáv. Az $f''(x) = 0$ esetben a problémát az inflexiós pont vizsgálata révén alaposabban kell elemezni.

■ $y = x^3$ **(2.14.b ábra)**; $y'' = 6x$; a görbe felülről konkáv ha $x > 0$, és alulról konkáv ha $x < 0$.



3.201. ábra.



3.202. ábra.

4. Görbület és görbületi sugár

1. Görbe görbülete Egy görbe K görbülete az M pontban az M és N ponthoz tartozó pozitív érintőirányok közötti δ szög **(3.202. ábra)** és az $\overset{\frown}{MN}$ ívhossz arányának határértéke az $\overset{\frown}{MN} \to 0$ esetben:

$$K = \lim_{\overset{\frown}{MN}\to 0} \frac{\delta}{\overset{\frown}{MN}} . \tag{3.412}$$

A görbület előjele megadja, hogy a görbe konkáv oldala a görbe normálisának pozitív ($K > 0$) vagy negatív ($K < 0$) oldala felé néz (lásd 227. old.). Másképpen kifejezve: a $K > 0$ esetben a görbületi középpont a görbe normálisának pozitív oldalán, a $K < 0$ esetben viszont a negatív oldalán fekszik. Néha a K görbületet eleve pozitív mennyiségnek fogjuk fel. Ilyenkor mindig a határérték abszolút értékét kell venni.

2. Görbe görbületi sugara Egy görbe R görbületi sugara az M pontban a görbület abszolút értékének reciproka:

$$R = |1/K| . \tag{3.413}$$

A K görbület az M pontban annál nagyobb, minél kisebb az R görbületi sugár.

■ **A:** Egy a sugarú körre a $K = 1/a$ görbület és az $R = a$ görbületi sugár konstans érték.

■ **B:** Az egyenesre $K = 0$ és $R = \infty$.

3. Képletek a görbületre és a görbületi sugárra A $\delta = d\alpha$ és $\overset{\frown}{MN} = ds$ választással **(3.202. ábra)** a következő általános érvényű képleteket kapjuk:

$$K = \frac{d\alpha}{ds} , \quad R = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right| . \tag{3.414}$$

A különböző módokon megadott görbeegyenletek esetén (lásd 225. old.) innen K-ra és R-re különféle kifejezések adódnak.

(3.402) szerinti megadásnál:
$$K = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} , \qquad R = \left| \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \right| , \tag{3.415}$$

(3.403) szerinti megadásnál:
$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} , \qquad R = \left| \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \right| , \tag{3.416}$$

(3.401) szerinti megadásnál:
$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}} , \qquad R = \left| \frac{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}} \right| , \tag{3.417}$$

(3.404) szerinti megadásnál:
$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}} , \qquad R = \left| \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \right| . \tag{3.418}$$

■ **A:** $y = \operatorname{ch} x\,, \quad K = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,;$

■ **B:** $x = t^2\,, \quad y = t^3\,, \quad K = \dfrac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}\,;$

■ **C:** $y^2 - x^2 = a^2\,, \quad K = \dfrac{a^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,;$

■ **D:** $\rho = a\varphi\,, \quad K = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\varphi^2+2}{(\varphi^2+1)^{3/2}}\,.$

5. Görbületi kör és középpontja

1. Görbületi kör A görbe M pontjához tartozó *görbületi kör*nek nevezzük az M-en és a görbe két hozzá közeli N és P pontján átmenő kör határhelyzetét, ha $N \to M$ és $P \to M$ **(3.203. ábra)**. Ez átmegy a szóbanforgó görbeponton, és ott ugyanaz az 1. és 2. deriváltja, mint a görbének, tehát az érintési pontban a görbéhez különösen jól simul. Ezért a görbületi kört *simulókör*nek is nevezzük. Sugarának neve *görbületi sugár*; kiderül róla, hogy a görbület abszolút értékének reciprokával egyenlő.

2. Görbületi középpont A görbületi kör C középpontja az M ponthoz tartozó görbületi középpont. A görbe konkáv oldalán, az M-hez tartozó normálison helyezkedik el.

3. A görbületi középpont koordinátái A görbületi középpont (x_C, y_C) koordinátáit a görbe egyenletének megadási módjától függően (lásd 225. old.) az alábbi képletek segítségével lehet kiszámítani.

(3.402) szerinti megadásnál:
$$x_C = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1+\left(\dfrac{dy}{d.x}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\,, \qquad y_C = y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\,. \tag{3.419}$$

(3.403) szerinti megadásnál:
$$x_C = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}\,, \qquad y_C = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}\,. \tag{3.420}$$

(3.404) szerinti megadásnál:
$$x_C = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\cos\varphi+\rho'\sin\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}\,,$$
$$y_C = \rho\sin\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\sin\varphi-\rho'\cos\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}\,. \tag{3.421}$$

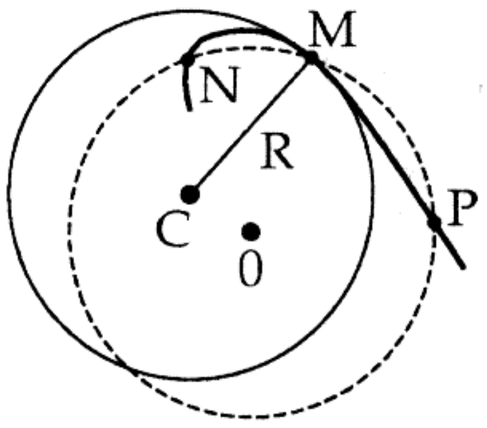
(3.401) szerinti megadásnál:
$$x_C = x + \frac{F'_x\left(F'^2_x+F'^2_y\right)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}\,, \qquad y_C = y + \frac{F'_y\left(F'^2_x+F'^2_y\right)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}\,. \tag{3.422}$$

Ezek a képletek az

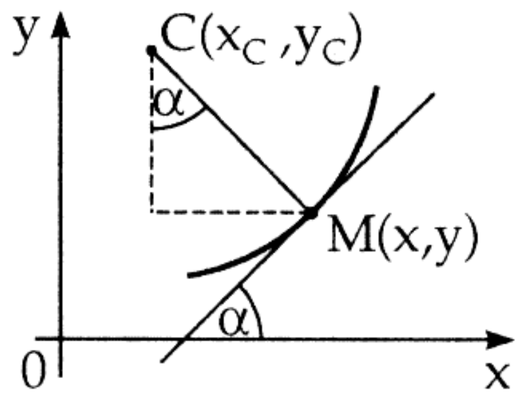
$$x_C = x - R\sin\alpha\,, \quad y_C = y + R\cos\alpha \qquad \text{vagy} \tag{3.423}$$

$$x_C = x - R\frac{dy}{ds}\,, \qquad y_C = y + R\frac{dx}{ds} \tag{3.424}$$

alakban is írhatók **(3.204.)**, ahol az R értéket (3.415)–(3.418) alapján lehet kiszámítani.



3.203. ábra.



3.204. ábra.



3.205. ábra.

3.6.1.3. Görbék kitüntetett pontjai, aszimptoták

Itt csak olyan pontokat vizsgálunk, amelyek koordinátatranszformációval szemben invariánsak. Maximumok és minimumok meghatározásáról lásd a 396. oldalt

1. Inflexiós pontok és a megtalálásukra szolgáló szabályok

Inflexiós pontnak nevezzük a görbéknek azokat a pontjait, amelyekben a görbület előjelet vált **(3.205. ábra)**. Ilyen pontnak egy kis környezetében a görbe nem fekszik teljesen az érintő egyik oldalán, hanem az érintő a görbét átmetszi. Inflexiós pontban $K = 0$ és $R = \infty$.

1. Görbe $y = f(x)$ explicit megadása (3.402) szerint

a) Szükséges feltétel az inflexiós pont létezésére, hogy a pontban a második derivált, ha van ilyen, nulla legyen:

$$f''(x) = 0 \tag{3.425}$$

(a nem létező második derivált esetét lásd **b)** alatt). Ha van második derivált, az inflexiós pontok meghatározásához meg kell keresni az $f''(x) = 0$ egyenlet összes $x_1, x_2, \ldots x_i \ldots, x_n$ megoldásait, és minden x_i értéket sorban be kell helyettesíteni a magasabbrendű deriváltakba. Az x_i pont akkor inflexiós pont, ha az első, ezen a helyen el nem tűnő derivált páratlan rendű. Ha a tekintett pont nem inflexiós pont, mert az első, el nem tűnő derivált k rendje páros szám, akkor a görbe $f^{(k)}(x) > 0$ esetén felülről, $f^{(k)}(x) < 0$ esetén alulról nézve konkáv.

b) Elégséges feltétel az inflexiós pont létezésére, hogy az $f''(x)$ második derivált az x_i pont bal oldali környezetéből a jobb oldali környezetébe való áthaladáskor jelet váltson. Ennélfogva azt a kérdést, hogy egy megtalált x_i érték egy inflexiós pont abszcisszája-e, a második derivált előjelének a megfelelő ponton való áthaladáskor tapasztalt viselkedése alapján lehet megválaszolni: ha az áthaladáskor az előjel megváltozik, inflexiós ponttal van dolgunk. Ez az eljárás az $y'' = \infty$ esetben is alkalmazható.

■ **A:** $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$, $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $f'''(x) = 24x\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^4}$, $f'''(x_{1,2}) \neq 0$;

inflexiós pontok: $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$.

■ **B:** $y = x^4$, $f''(x) = 12x^2$, $x_1 = 0$, $f'''(x) = 24x$, $f'''(x_1) = 0$, $f^{IV}(x) = 24$; inflexiós pont nincs.

■ **C:** $y = x^{\frac{5}{3}}$, $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$; ha $x = 0$, akkor $y'' = \infty$.

Negatív x-értékekről pozitívokra áttérve a második derivált előjele mínuszról pluszra változik, tehát a görbének az $x = 0$ helyen inflexiós pontja van.

Megjegyzés: A gyakorlatban, ha a görbe menetéből következik, hogy kell lenni inflexiós pontnak, pl. ha egy folytonos deriválttal rendelkező görbén egy minimumtól egy maximum felé haladunk, akkor csak az x_i értékek meghatározására szorítkozunk, és a magasabbrendű deriváltak vizsgálatát elhagyjuk.

2. Más megadási módok Az inflexiós pont létezésének (3.425) szükséges feltételét, amely a görbe (3.402) módon való megadása esetén alkalmazható, más megadási módok esetén a feltétel következő analitikus megfogalmazásaival kell helyettesíteni:

1. (3.403) szerinti, paraméteres megadásnál:
$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0; \tag{3.426}$$

2. (3.404) szerinti, poláregyenletes megadásnál:
$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0; \tag{3.427}$$

3. (3.401) szerinti, implicit megadásnál:
$$F(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.428}$$

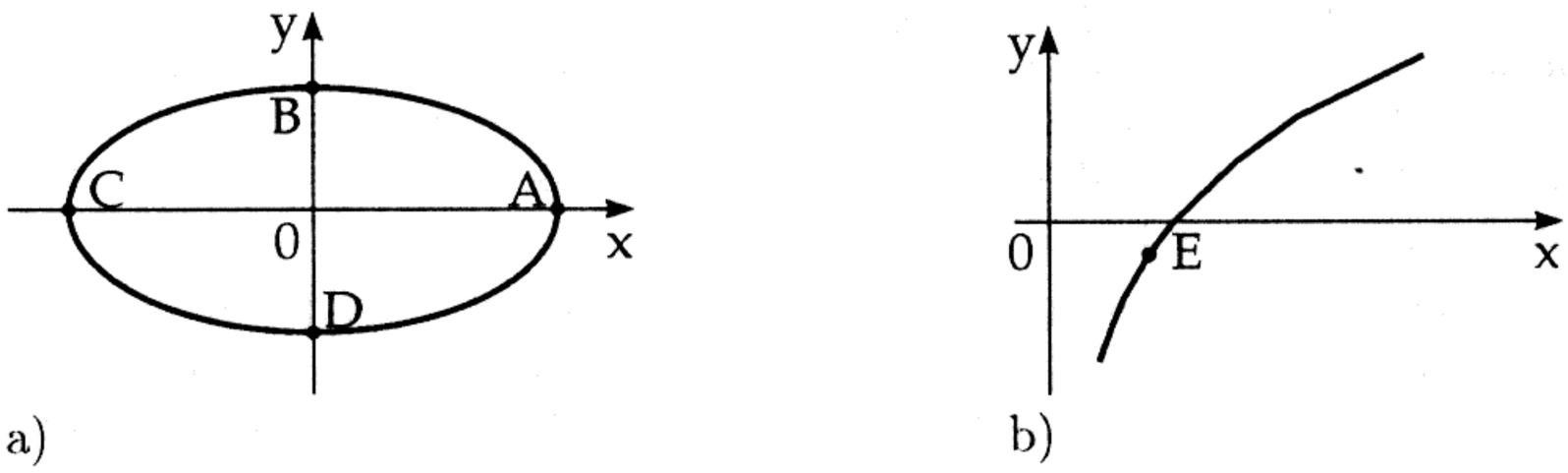
Ezen esetekben a megoldásrendszer a lehetséges inflexiós pontok koordinátáit szolgáltatja.

■ **A:** $x = a\left(t - \frac{1}{2}\sin t\right)$, $y = a\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right)$ (nyújtott ciklois, **(2.68b ábra)**, 104. old.);

$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} 2-\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1)$; $\cos t_k = \frac{1}{2}$; $t_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. A görbének minden t_k paraméter-értéknél, tehát végtelen sok helyen, van inflexiós pontja.

■ **B:** $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1)$. Az inflexiós pont a $\varphi = 1/2$ szöghöz tartozik.

■ **C:** $x^2 - y^2 = a^2$ (hiperbola). $\begin{vmatrix} F''_{\cdot\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8x^2 - 8y^2$. Az $x^2 - y^2 = a^2$ és a $8(x^2 - y^2) = 0$ egyenlet ellentmond egymásnak, tehát a hiperbolának nincs inflexiós pontja.



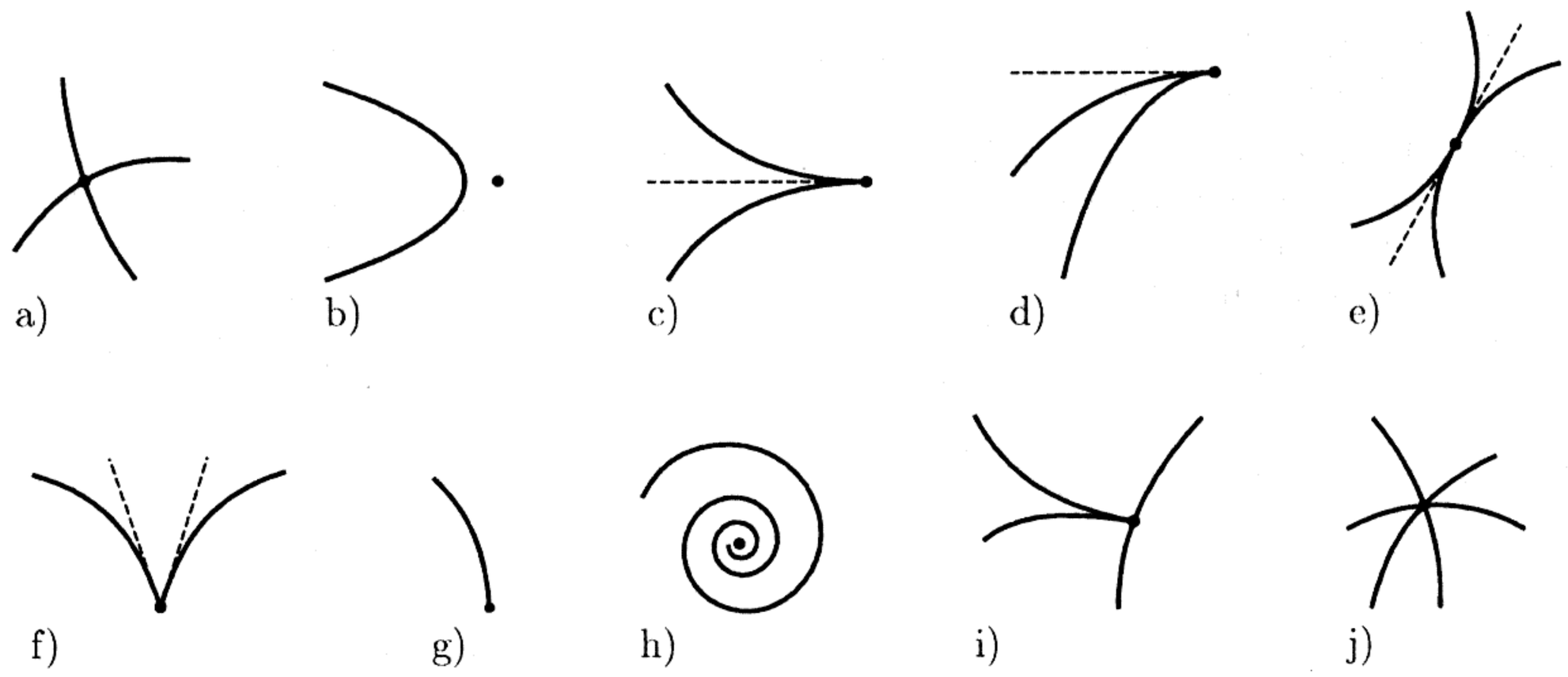
3.206. ábra.

2. Csúcspontok

a görbék olyan pontjai, amelyekben a görbületnek maximuma vagy minimuma van. Pl. az ellipszisnek négy A, B, C, D csúcspontja van, a logaritmusgörbe egyetlen csúcspontja az $E\,(1/\sqrt{2}\,, -\ln 2/2)$ pont **(3.206. ábra)**. A csúcspontokat K vagy, ha ez egyszerűbb, R szélsőértékeinek meghatározásával kereshetjük meg, felhasználva a (3.415)–(3.418) képleteket.

3. Szinguláris pontok

A *szinguláris pont* általános fogalma alá különböző speciális görbepontok tartoznak.



3.207. ábra.

1. Szinguláris pontok fajtái Az alábbi felsorolás a), b), . . . , j) pontjai a **3.207. ábra** ugyanígy jelzett részeinek felelnek meg.

a) Kettőspontok: *Kettőspontokban* a görbe önmagát metszi **(3.207.a ábra)**.

b) Izolált pontok: Az *izolált pontok* kielégítik a görbe egyenletét, de nincsenek rajta a görbén **(3.207.b ábra)**.

c), d) Visszatérési pontok: A *visszatérési pontokban* megváltozik a befutási irány; az érintőnek a görbeágakhoz viszonyított helyzete szerint megkülönböztetünk elsőfajú és másodfajú visszatérési pontokat **(3.207.c,d ábrák)**.

e) Önérintési pontok: *Önérintési pontokban* a görbe önmagát érinti **(3.207.e ábra)**.

f) Töréspontok: *Töréspontokban* a görbe ugrásszerűen megváltoztatja irányát, de a visszatérési ponttól eltérően a két görbeágnak két különböző érintője van **(3.207.f ábra)**.

g) Megszűnési pontok: *Megszűnési pontokban* a görbe nem folytatódik **(3.207.g ábra)**.

h) Aszimptotikus pontok: *Aszimptotikus pontok* körül a görbe végtelen sok csavarodást végez, miközben a pontot tetszőlegesen megközelíti **(3.207.h ábra)**.

i), j) Több szingularitás: Egy pontban két vagy három ilyen szingularitás is felléphet **(3.207.i,j ábrák)**.

2. Önérintési pontok, töréspontok, megszűnési pontok és aszimptotikus pontok meghatározása Ilyen szingularitások csak transzcendens függvények görbéinél lépnek fel (lásd 193. old.).

A töréspontoknak a $\frac{dy}{dx}$ derivált véges ugrása felel meg.

A megszűnési pontok az $y = f(x)$ függvény olyan szakadási helyeinek felelnek meg, ahol véges ugrás vagy tényleges megszűnés következik be.

Az aszimptotikus pontokat olyan görbéknél lehet a legegyszerűbben meghatározni, amelyek polárkoordinátás $\rho = f(\varphi)$ egyenlettel vannak megadva. Ha $\varphi \to \infty$ vagy $\varphi \to -\infty$ esetén a határérték $\lim \rho = 0$, akkor a pólus aszimptotikus pont.

■ **A:** A koordinátarendszer kezdőpontja az $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ görbének **(6.2.c ábra)** töréspontja.

■ **B:** Az $(1, 0)$ és $(1, 1)$ pont az $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ függvénynek **(2.7. ábra)** szakadási pontja.

■ **C:** A $\rho = ae^{k\varphi}$ logaritmikus spirálnak **(2.75 ábra)** van egy aszimptotikus pontja.

3. Többszörös pontok (a)–e), valamint i)–j) esetek) meghatározása A kettőspontokat, háromszoros pontokat stb. a *„többszörös pontok"* néven foglaljuk össze. Meghatározásukhoz a görbe $F(x, y) = 0$ alakú egyenletéből indulunk ki. Egy A pont, amelynek (x_1, y_1) koordinátái a három $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ egyenlet mindegyikét kielégítik, akkor kettőspont, ha a három F''_{xx}, F''_{xy} és F''_{yy} másodrendű derivált közül legalább az egyik nem nulla. Ellenkező esetben A háromszoros vagy annál is magasabb multiplicitású pont.

Kettőspont tulajdonságai az alábbi függvénydeterminánsa előjelétől függnek:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} . \tag{3.429}$$

1. $\Delta < 0$: Ha $\Delta < 0$, akkor a görbe önmagát metszi az A pontban; az A-beli érintők irányítényezői a következő egyenlet gyökeiként adódnak:

$$F''_{yy}k^2 + 2F''_{xy}k + F''_{xx} = 0 . \tag{3.430}$$

2. $\Delta > 0$**:** Ha $\Delta > 0$, akkor A izolált pont.
3. $\Delta = 0$**:** Ha $\Delta = 0$, akkor A vagy visszatérési, vagy önérintési pont; az érintő iránytényezője

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{F''_{xy}}{F''_{yy}}\,. \tag{3.431}$$

A többszörös pont alaposabb vizsgálatához célszerű a koordinátarendszert az A pontba helyezni és úgy elforgatni, hogy az x-tengely legyen a görbe érintője az A pontban. Ezután az egyenlet alakjából felismerhető, hogy első-, ill. másodfajú visszatérési pontról, vagy pedig önérintési pontról van szó.

■ **A:** $F(x,y) \equiv (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (lemniszkáta, **2.66 ábra**); $F'_x = 4x(x^2+y^2-a^2)$, $F'_y = 4y(x^2+y^2+a^2)$; az $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ egyenletrendszer a $(0,0)$, $(\pm a, 0)$ megoldásokat adja, amelyek közül csak az első felel meg az $F = 0$ feltételnek. A $(0,0)$ pontnak a második deriváltakba való behelyettesítésével $F''_{xx} = -4a^2$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = +4a^2$; $\Delta = -16a^4 < 0$, vagyis a koordinátarendszer kezdőpontjában a görbe önmagát metszi; az érintők iránytényezőjére $\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$ adódik, az érintők egyenlete $y = \pm x$.

■ **B:** $F(x,y) \equiv x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$; $F'_x = x(3x-2)$, $F'_y = y(3y-2)$; a $(0,0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ és $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pontok közül csak az első található a görbén; továbbá fennáll $F''_{xx} = -2$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = -2$, $\Delta = 4 > 0$, vagyis a koordinátarendszer kezdőpontja izolált pont.

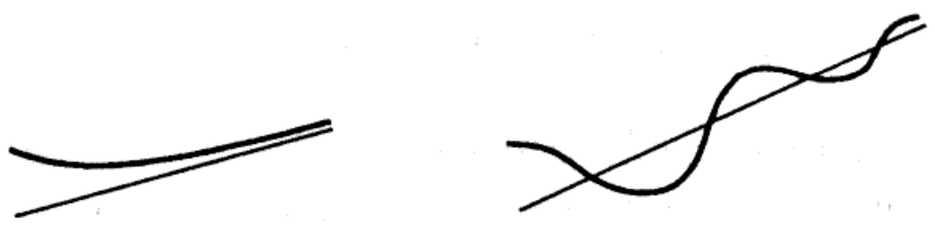
■ **C:** $F(x,y) \equiv (y-x^2)^2 - x^5 = 0$. Az $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ egyenletek az egyetlen $(0,0)$ megoldást adják, amelyre teljesül az $F = 0$ egyenlet is. Ezenkívül fennáll $\Delta = 0$ és $\operatorname{tg}\alpha = 0$, tehát a koordinátarendszer kezdőpontja másodfajú visszatérési pont, ami az egyenlet $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$ explicit alakjából is megállapítható. Ha $x < 0$, akkor y nincs értelmezve, ha pedig $0 < x < 1$, akkor y mindkét értéke pozitív; a koordinátarendszer kezdőpontjában az érintő vízszintes.

4. $F(x,y) = 0$ **($F(x,y)$ polinom x-ben és y-ban) típusú algebrai görbék** Ha az egyenlet sem konstans, sem elsőfokú tagokat nem tartalmaz, akkor a koordinátarendszer kezdőpontja kettőspont. Az ezekhez tartozó érintők meghatározására szolgáló egyenletet úgy kapjuk, hogy a másodfokú tagok összegét nullával tesszük egyenlővé.

■ A lemniszkátára (**2.66 ábra**) az $x^2 - y^2 = 0$ egyenletből $y = \pm x$ adódik. Ha az egyenlet kvadratikus tagokat sem tartalmaz, akkor a koordinátarendszer kezdőpontja háromszoros pont.

4. Aszimptoták

1. Definíció Az aszimptota olyan egyenes, amely a koordinátarendszer kezdőpontjától egyre távolabb kerülve a görbét minden határon túl megközelíti (**3.208. ábra**).
A megközelítés történhet az egyik oldalról (**3.208.a ábra**), vagy a görbe az egyenest újra és újra metszheti (**3.208.b ábra**).



3.208. ábra.

Nem minden, a koordinátarendszer kezdőpontjától határtalanul távolodó görbének (végtelen görbeágnak) van aszimptotája. Így pl. racionális törtfüggvényeknél a racionális egész részt aszimptotikus közelítésnek nevezzük (lásd 15. old.).

2. A függvény az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres alakban van megadva Az aszimptoták egyenletének meghatározásához meg kell állapítani azokat a t_i értékeket, amelyekre $t \to t_i$ esetén fennáll vagy $x(t) \to \pm\infty$ vagy $y(t) \to \pm\infty$.
A következő eseteket kell megkülönböztetni:

a) $x(t_i) \to \infty$, de $y(t_i) = a \neq \infty$: $y = a$ Az aszimptota egy vízszintes egyenes. (3.432a)

b) $y(t_i) \to \infty$, de $x(t_i) = a \neq \infty$: $x = a$ Az aszimptota egy függőleges egyenes. (3.432b)

c) Ha $y(t_i)$ is, $x(t_i)$ is végtelenhez tart, akkor képezni kell a $k = \lim\limits_{t\to t_i} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ és a $b = \lim\limits_{t\to t_i}[y(t) - k \cdot x(t)]$ határértéket. Ha ezek mindketten léteznek, akkor megadják az aszimptotaegyenes egyenletében szereplő konstansokat:

$$y(t_i) \to \infty \text{ és } x(t_i) \to \infty : y = kx + b\,. \tag{3.432c}$$

■ $x = \dfrac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ stb. A t_1-hez tartozó aszimptota megkeresése:

$x(t_1) = y(t_1) = \infty$, $k = \lim\limits_{t\to\pi/2} \dfrac{n}{m}(\sin t - t\cos t) = \dfrac{n}{m}$,

$$b = \lim_{t\to\pi/2}\left[n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m}\frac{m}{\cos t}\right] = n\lim_{t\to\pi/2}\frac{\sin t - t\cos t - 1}{\cos t} = -\frac{n\pi}{2}\,,\quad y = \frac{n}{m}x - \frac{n\pi}{2}\,.$$

A második stb. aszimptotára analóg módon kapjuk: $y = \dfrac{n}{m}x - \dfrac{n\pi}{2}$.

3. A függvény az $y = f(x)$ explicit alakban van megadva A függőleges aszimptotákat mint az $f(x)$ függvény végtelen ugráshoz tartozó szakadási helyeit (lásd 58. old.), a vízszintes és ferde aszimptotákat pedig mint a megfelelő határértékekkel képzett egyeneseket határozzuk meg:

$$x = a\,;\quad y = kx + b\,,\quad k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,,\quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]\,. \tag{3.433}$$

4. A függvény az $F(x, y) = 0$ algebrai implicit alakban van megadva
Az $F(x, y)$ függvény polinom x-ben és y-ban.
1. A vízszintes és függőleges aszimptoták meghatározásához az x, y változók $F(x, y)$ polinomjából kiválasztjuk a legmagasabb fokú, mondjuk m-edfokú tagokat, ezeket egy külön $\Phi(x, y) = 0$ egyenletben csoportosítjuk, majd x-re és y-ra megoldjuk:

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{alapján} \quad x = \varphi(y)\,,\quad y = \psi(x)\,. \tag{3.434}$$

Ha $x \to \infty$ esetén $y_1 = a$, akkor az $y = a$ vízszintes aszimptotát, ha pedig $y \to \infty$ esetén $x_1 = b$, akkor az $x = b$ függőleges aszimptotát kapjuk.
2. A ferde aszimptoták meghatározásához $F(x, y)$-ba behelyettesítjük az egyenes $y = kx+b$ egyenletét, majd az így nyert polinomot x hatványai szerint rendezzük:

$$F(x, kx + b) \equiv f_1(k, b)x^m + f_2(k, b)x^{m-1} + \cdots \tag{3.435}$$

A k és a b paramétert, feltéve létezésüket, az

$$f_1(k, b) = 0\,,\quad f_2(k, b) = 0 \tag{3.436}$$

egyenletekből kapjuk meg.
■ $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Descartes-levél, **2.59. ábra**). Az $F(x, kx + b) \equiv (1 + k^3)x^3 + 3(k^2b - ka)x^2 + \cdots$, $1 + k^3 = 0$ és a $k^2b - ka = 0$ egyenletből a $k = -1$, $b = -a$ megoldás adódik, tehát az aszimptota egyenlete $y = -x - a$.

3.6.1.4. Görbék általános vizsgálata egyenletük alapján

A (3.401)–(3.404) egyenletek valamelyikével megadott görbéket legtöbbször azért tanulmányozzuk, hogy megismerjük viselkedésüket, azaz alakjukat.

1. Az $y = f(x)$ explicit megadású függvény görbéjének megszerkesztése
a) Az értelmezési tartomány megállapítása (lásd 47. old.).

b) A görbe szimmetriájának megállapítása a koordinátarendszer kezdőpontjára és az y-tengelyre vonatkozóan, a görbe páratlan vagy páros volta alapján (lásd 50. old.).

c) A függvény végtelenbeli viselkedésének megállapítása a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ határérték kiszámítása útján (lásd 54. old.).

d) A szakadási helyek meghatározása (lásd 58. old.).

e) Az y-tengellyel, ill. x-tengellyel való metszéspontok meghatározása $f(0)$ kiszámítása, ill.

$f(x) = 0$ megoldása révén.

f) A maximumok és minimumok meghatározása, valamint a monotonitási (növekedési, ill. csökkenési) intervallumok megállapítása.

g) Az inflexiós pontok meghatározása a hozzájuk tartozó érintők egyenletével együtt (ld. 231. old.).

Az így meghatározott adatokkal a görbe felvázolható, és szükség esetén egyes pontok kiszámításával pontosabban is megrajzolható.

■ Megszerkesztendő az $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$ függvény görbéje:

a) A függvény $x = 0$ kivételével minden x-re értelmezve van.
b) Semmiféle szimmetria nem áll fenn.
c) Ha $x \to -\infty$, akkor $y \to 2$, tehát $y = 2 - 0$ (az alulról való közeledést kifejező írásmód), viszont ha $x \to \infty$, akkor $y \to 2$ mellett $y = 2 + 0$ (közeledés felülről).
d) $x = 0$ olyan szakadási hely, hogy a görbe balról is, jobbról is $-\infty$ felé tart, mert kis x-értékekre y negatív.
e) Mivel $f(0) = \infty$, azért a görbe az y-tengelyt nem metszi, ugyanakkor az $f(x) = 2x^2 + 3x - 4 = 0$ egyenlet az x-tengellyel az $x_1 \approx 0{,}85$ és $x_2 \approx -2{,}35$ metszéspontokat adja.
f) Maximum van az $x = 8/3 \approx 2{,}66$, $y \approx 2{,}56$ koordinátájú pontban.
g) Az $x = 4$, $y = 2{,}5$ pont inflexiós pont, és ott $\operatorname{tg}\alpha = -1/16$.
h) Miután a függvényt a nyert adatok alapján felvázoltuk **(3.209. ábra)**, kiszámíthatjuk a görbének az aszimptotával való metszéspontját: $x = 4/3 \approx 1{,}33$, $y = 2$.

2. Az $F(x, y) = 0$ implicit megadású függvény görbéjének megszerkesztése

Általános szabályokra nem teszünk javaslatot, mert azok gyakran körülményes számolásokra vezetnek. Lehetőség szerint a következő alkotóelemeket kell megállapítani:

a) Az összes metszéspont meghatározása a koordinátatengelyekkel.

b) A görbe szimmetriáinak megállapítása úgy, hogy x helyébe $(-x)$-et és y helyébe $(-y)$-t írunk.

c) A maximumok és minimumok meghatározása az x-tengelyre vonatkozóan, majd x és y felcserélésével az y-tengelyre vonatkozóan is (lásd 396. old.).

d) Az inflexiós pontoknak, valamint az érintők hajlásszögének a meghatározása (ld. 231. old.).

e) A szinguláris pontok meghatározása (lásd 232. old.).

f) A csúcspontok meghatározása (lásd 232. old.) és a hozzájuk tartozó görbületi körök megállapítása (lásd 230. old.). A görbék ívdarabjait gyakran még egy viszonylag nagy szakaszon is nehéz a görbületi kör ívdarabjaitól megkülönböztetni.

g) Az aszimptoták egyenletének meghatározása (lásd 234. old.) és a görbeágak aszimptotákhoz viszonyított helyzetének megállapítása.

3.6.1.5. Evoluták és evolvensek

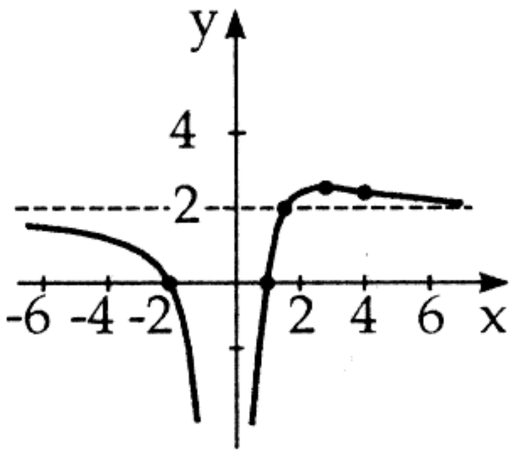
1. Evoluta Görbe evolutájának nevezzük azt a másik görbét, amely az eredeti görbe görbületi középpontjaiból áll (lásd 230. old.); ez egyben az eredeti görbe normálisainak burkolója is (lásd még 237. old.). Az evoluta paraméteres egyenlete a görbületi középpontok (3.421) képletéből adódik, ha az x_C és az y_C mennyiséget futó koordinátának tekintjük. Ha sikerül ezen egyenletekből a paramétert (x, t vagy φ) kiküszöbölni, akkor az evoluta egyenlete derékszögű koordinátákban is felírható.

■ Meghatározandó az $y = x^2$ parabola evolutája **(3.210. ábra)**. Mivel

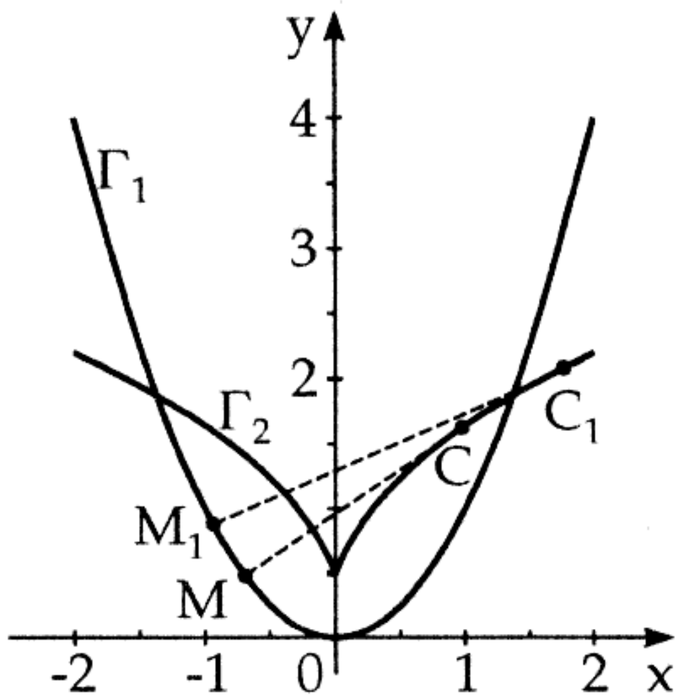
$$X = x - \frac{2x(1 + 4x^2)}{2} = -4x^3\,,\quad Y = x^2 + \frac{1 + 4x^2}{2} = \frac{1 + 6x^2}{2}$$ ahol X és Y az $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$

evoluta futó koordinátái.

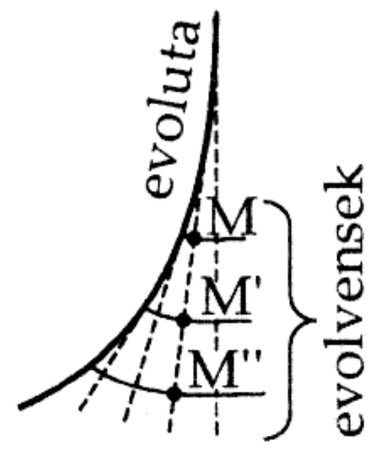
2. Evolvens Egy olyan Γ_1 görbét, amelynek Γ_2 az evolutája a Γ_2 görbe evolvensének nevezzük. Ennélfogva az evolvens bármely MC normálisa az evolutának érintője **(3.210. ábra)**, és az evoluta



3.209. ábra.



3.210. ábra.



3.211. ábra.

$\widehat{CC_1}$ ívhossza egyenlő az evolvens görbületi sugarának növekményével:

$$\widehat{CC_1} = \overline{M_1C_1} - \overline{MC}\,. \tag{3.437}$$

Ezek a tulajdonságok indokolják, hogy az evolvenst a Γ_2 görbe *lefejtési görbéjének* nevezzük, ugyanis Γ_2-ből az evolvens egy megfeszített fonal lefejtésével áll elő. Adott evolutához evolvensek egy serege tartozik, amelynek elemeit a megfeszített fonal eredeti hossza határozza meg **(3.211. ábra)**.
Az evoluta egyenletét az evoluta egyenletét előállító differenciálegyenlet-rendszer integrálásával kapjuk. A kör evolvensének egyenletét lásd a 109. oldalon.

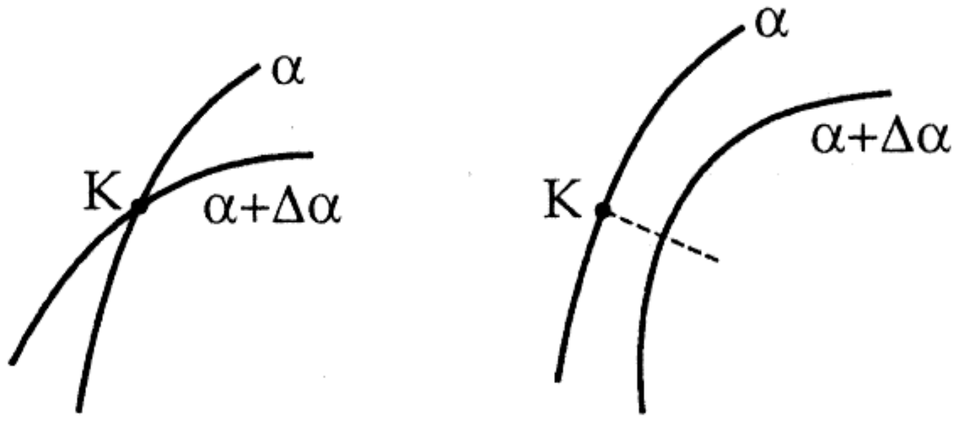
■ A katenoid a traktrix evolutája, a traktrix a katenoid evolvense (lásd 110. old.).

3.6.1.6. Görbeseregek burkolói

1. Karakterisztikus pontok Legyen egy egyparaméteres görbesereg az

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{3.438}$$

egyenlettel megadva. A sereg két, egymáshoz végtelen közelről szomszédos, a paraméter α és $\alpha + \Delta\alpha$ értékéhez tartozó görbéjének vannak *legjobban közelítő K pontjai.* Ezek vagy metszéspontjai az (α) és az $(\alpha + \Delta\alpha)$ görbének, vagy olyan pontok az (α) görbén, amelyeknek az $(\alpha + \Delta\alpha)$ görbétől a normálisok mentén mért távolsága $\Delta\alpha$-nál magasabb rendben infinitezimális mennyiség **(3.212.a,b ábrák)**. Ha $\Delta\alpha \to 0$, akkor az $(\alpha + \Delta\alpha)$ görbe tart az (α) görbéhez, és ennek során egyes esetekben a K pont egy *határhelyzet*hez, a határponthoz közeledhet.



a) b)

3.212. ábra.

2. A (3.438) egyenlettel rendelkező görbesereg karakterisztikus pontjainak mértani helye lehet egyetlen görbe vagy több görbe. Ezek vagy a sereg legjobban közelítő pontjaiból, ill. határpontjaiból állnak **(3.213.a) ábra)**, vagy a sereg burkolóját alkotják, azaz olyan görbét, amely a sereg minden görbéjét érinti **(3.213.b ábra)**. A két típusnak kombinációi is lehetségesek **(3.213.c,d ábrák)**.

3. A burkoló egyenlete A burkoló egyenletét a (3.438) egyenletből kapjuk meg úgy, hogy az alábbi egyenletrendszerből az α változót kiküszöböljük:

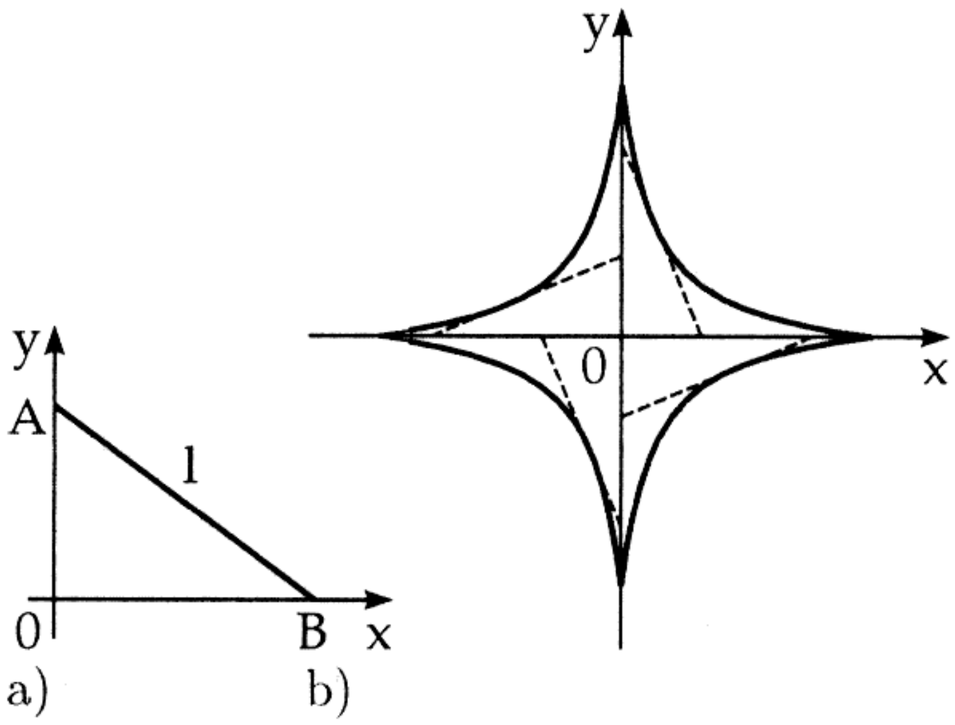
$$F = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{3.439}$$



3.213. ábra.

■ Meghatározandó annak az egyenesseregnek az egyenlete, amely akkor jön létre, ha egy $AB = l$ szakasz végpontjai a koordinátatengelyek mentén csúsznak **(3.214.a ábra)**. A görbesereg egyenlete $\dfrac{x}{l\sin\alpha} + \dfrac{y}{l\cos\alpha} = 1$ vagy

$F \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - l\sin\alpha\cos\alpha = 0\,,\ \dfrac{\partial F}{\partial\alpha} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - l\cos^2\alpha + l\sin^2\alpha = 0$. Az α változó kiküszöbölése az $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ egyenletet adja, tehát a burkoló egy asztrois **(3.214.b ábra**, lásd még 105. old.).



3.214. ábra.

3.6.2. Térgörbék

3.6.2.1. Térgörbék definiálására alkalmas lehetőségek

1. Koordinátás egyenletek Térgörbe definiálására a következő lehetőségek vannak:

1. Két felület metszete: $F(x,y,z) = 0\,,\quad \Phi(x,y,z) = 0\,.$ (3.440)

2. Paraméteres alak: $x = x(t)\,,\quad y = y(t)\,,\quad z = z(t)$ (3.441)

ahol t tetszőleges paraméter; speciálisan lehet $t = x$, y vagy z.

3. Paraméteres alak: $x = x(s)\,,\quad y = y(s)\,,\quad z = z(s)$ (3.442a)

ahol s az ívhossz egy rögzített A pont és a futó M pont között:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,. \tag{3.442b}$$

2. Vektoregyenletek Ha a görbe tetszőleges pontjának helyvektora $\vec{\mathbf{r}}$ (lásd 181. old.), akkor (3.441) a következő alakban írható:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t),\quad \text{ahol}\quad \vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}} \tag{3.443}$$

(3.442a) pedig a következő alakban:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(s),\quad \text{ahol}\quad \vec{\mathbf{r}}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{3.444}$$

3. A pozitív irány a görbe (3.441) és (3.443) alakú megadása esetén a t paraméter növekedésének iránya, a (3.442a) és (3.444) megadás esetén pedig az az irány, amelyben az ívhossz mérése történik.

3.6.2.2. Kísérő triéder

1. Definíciók

Térgörbe bármely M pontjában, kivéve a szinguláris pontokat, definiálni lehet három egyenest és három síkot, amelyek egymást az M pontban metszik és merőlegesek egymásra **(3.215. ábra)**.

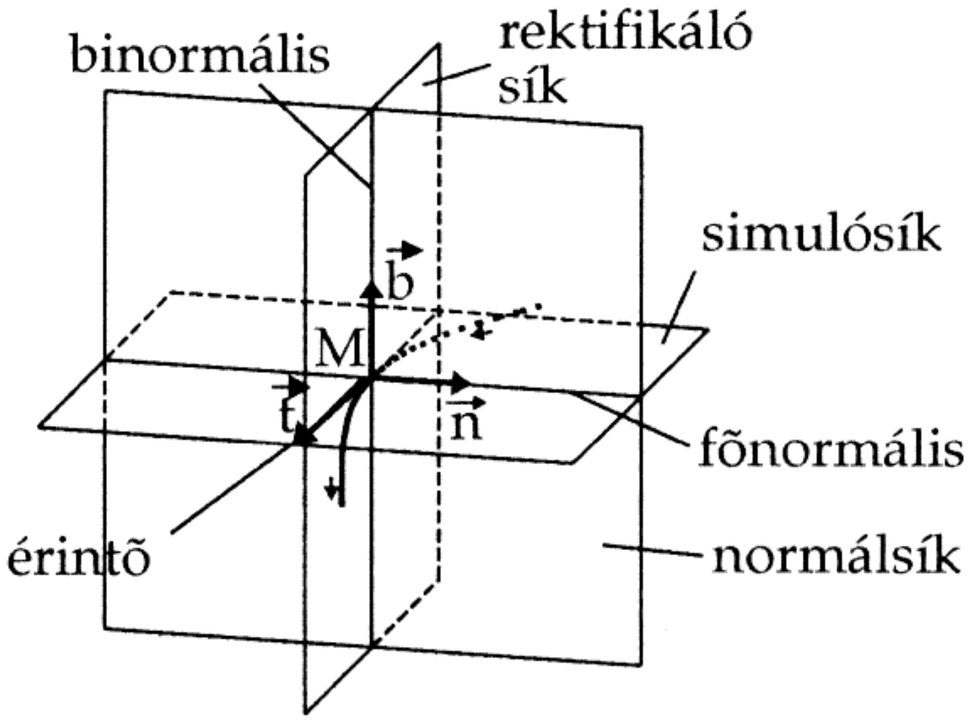
1. Az érintő az MN szelő határhelyzete, ha $N \to M$ **(3.216. ábra)**.

2. A normálsík az érintőre merőleges sík. Minden, az M ponton átmenő és e síkban fekvő egyenest a görbe M ponthoz tartozó normálisának nevezünk.

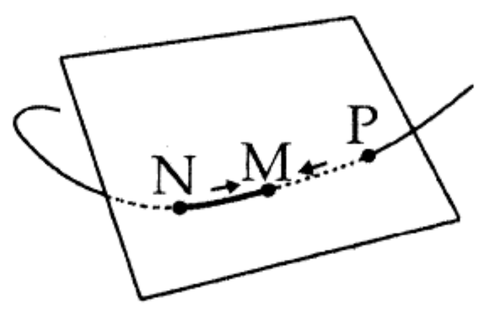
3. Simulósíknak nevezzük a görbe három szomszédos M, N, P pontján átmenő sík határhelyzetét, ha $N \to M$ és $P \to M$. A simulósíkban található a görbe érintője.

4. Főnormálisnak nevezzük a normálsík és a simulósík metszésvonalát, vagyis ez az a normális, amely a simulósíkban fekszik.

5. Binormálisnak nevezzük a simulósíkra merőleges egyenest.



3.215. ábra.



3.216. ábra.

6. Rektifikáló síknak nevezzük az érintő és a binormális által kifeszített síkot. Az (1), (4), (5) egyeneseken a pozitív irány a következőképpen van meghatározva:

a) Az érintőn a görbe pozitív iránya, amelyet a $\vec{\mathbf{t}}$ érintő egységvektor határoz meg.

b) A főnormálison a görbe görbületének iránya, amelyet az $\vec{\mathbf{n}}$ normálvektor határoz meg.

c) A binormálison a

$$\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{t}} \times \vec{\mathbf{n}} \tag{3.445}$$

egységvektor által meghatározott irány, ahol a $\vec{\mathbf{t}}$, $\vec{\mathbf{n}}$ és $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok jobbsodrású koordinátarendszert alkotnak, amelyet a térgörbe *kísérő triéder*ének nevezünk.

2. A görbe kísérő triéderhez viszonyított helyzete

Közönséges görbepont esetén a térgörbe az M pont környezetében a rektifikáló sík egyik oldalán fekszik, a normálsíkot és a simulósíkot pedig átmetszi **(3.217.a ábra)**. Ilyenkor egy M körüli kicsiny görbeszakasznak a három síkra való vetületei közelítőleg az alábbi alakot mutatják:

1. a simulósíkon egy másodfokú paraboláét **(3.217.b ábra)**;

2. a rektifikáló síkon egy harmadfokú paraboláét **(3.217.c ábra)**;

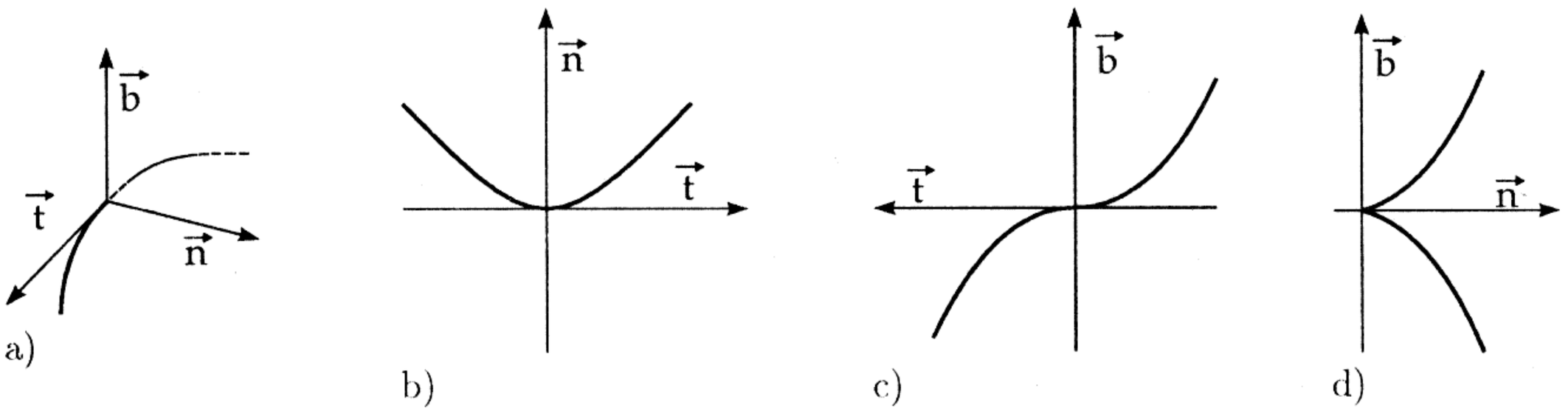
3. a normálsíkon egy szemi-kubikus (háromketted-fokú) paraboláét **(3.217.d ábra)**.

Ha az M pontban a görbe görbülete vagy torziója nulla, vagy ha M szinguláris pont, tehát ha $x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$, akkor a görbe alakja másmilyen is lehet (lásd Irod. [22.2], 2. kötet, 7. rész).

3. A kísérő triéder alkotóelemeinek egyenletei

1. A görbe a (3.440) alakban van megadva

1. Érintő:
$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}}. \tag{3.446}$$



3.217. ábra.

2. Normálsík:
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{3.447}$$

Itt x, y, z a görbe M pontjának koordinátái és X, Y, Z az érintő, ill. a normálsík futó koordinátái; a parciális deriváltak az M pontra vonatkoznak.

2. A görbe a (3.441, 3.443) alakban van megadva A **3.25. táblázatban** x, y, z, ill. $\vec{\mathbf{r}}$ az M pont koordinátái, ill. helyvektora. A triéderelemek futó koordinátái, ill. helyvektora X, Y, Z, ill. $\vec{\mathbf{R}}$. A t paraméter szerinti deriváltak az M pontra vonatkoznak.

3. A görbe a (3.442a, 3.444) alakban van megadva Ha az s ívhosszat választjuk paraméternek, akkor az érintőre és binormálisra, valamint a normálsíkra és simulósíkra ugyanazok az egyenletek érvényesek, mint a 2. esetben, csak t helyébe s írandó. A főnormális és a rektifikáló sík egyenletei egyszerűbbé válnak **(3.26. táblázat)**.

3.6.2.3. Görbület és torzió

1. Görbe görbülete

A *görbe* M-pontbeli *görbületé*nek nevezünk egy számot, amely megadja a görbének az egyenestől való eltérését e pont közvetlen környezetében.
Az egzakt definíció a következő **(3.218. ábra)**:

$$K = \lim_{\overset{\frown}{MN}\to 0} \left| \frac{\Delta \vec{\mathbf{t}}}{\overset{\frown}{MN}} \right| = \left| \frac{d\vec{\mathbf{t}}}{ds} \right| . \tag{3.448}$$

1. Görbületi sugár A görbületi sugár a görbület reciprok értéke:

$$\rho = \left| \frac{1}{K} \right| . \tag{3.449}$$

2. Képletek K és ρ kiszámítására
a) Ha a görbe a (3.442a) módon van megadva:

$$K = \left| \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{ds^2} \right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}\,, \tag{3.450}$$

3.25. táblázat. Térgörbéhez tartozó alakzatok vektoros és koordinátás egyenletei

Vektoregyenlet	Koordinátás egyenlet
Érintő:	
$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} + \lambda \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$	$\dfrac{X-x}{x'} = \dfrac{Y-y}{y'} = \dfrac{Z-z}{z'}$
Normálsík:	
$(\vec{\mathbf{R}} - \vec{\mathbf{r}})\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = 0$	$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$
Simulósík:	
$(\vec{\mathbf{R}} - \vec{\mathbf{r}})\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$
Binormális:	
$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} + \lambda\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right)$	$\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$
Rektifikáló sík:	
$(\vec{\mathbf{R}} - \vec{\mathbf{r}})\,\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right) = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$ ahol $l = y'z'' - y''z',\ m = z'x'' - z''x',\ n = x'y'' - x''y'$
Főnormális:	
$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} + \lambda\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right)$	$\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}$
$\vec{\mathbf{r}}$ – a térgörbe helyvektora, $\vec{\mathbf{R}}$ – a térgörbéhez tartozó alakzat helyvektora	

ahol s szerinti deriváltakról van szó.

b) Ha a görbe a (3.441) módon van megadva:

$$K^2 = \frac{\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)^2\left(\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right)^2 - \left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)^2\right|^3}$$

$$= \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2) - (x'x''+y'y''+z'z'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}\,. \tag{3.451}$$

A deriválásokat itt t szerint kell végezni.

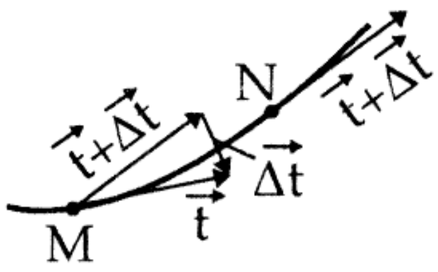
3. Csavarvonal Az

$$x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,, \quad z = bt \tag{3.452}$$

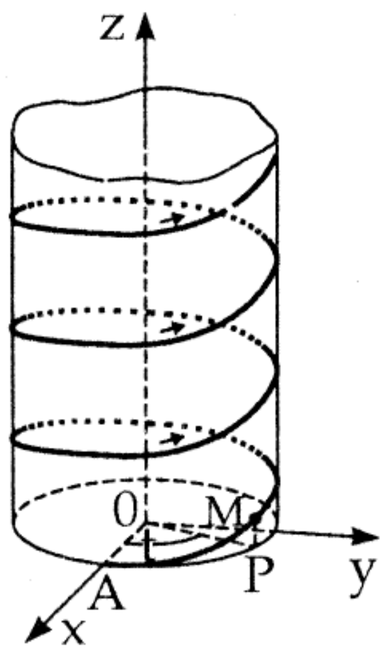
3.26. táblázat.
Térgörbéhez tartozó alakzatok vektoros és koordinátás egyenletei az ívhossz függvényében

Triéder-elem	Vektoregyenlet	Koordinátás egyenlet
Főnormális	$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} + \lambda \dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{ds^2}$	$\dfrac{X-x}{x''} = \dfrac{Y-y}{y''} = \dfrac{Z-z}{z''}$
Rektifikáló sík	$(\vec{\mathbf{R}} - \vec{\mathbf{r}})\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{ds^2} = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$
$\vec{\mathbf{r}}$ – a térgörbe helyvektora, $\vec{\mathbf{R}}$ – a térgörbéhez tartozó alakzat helyvektora		

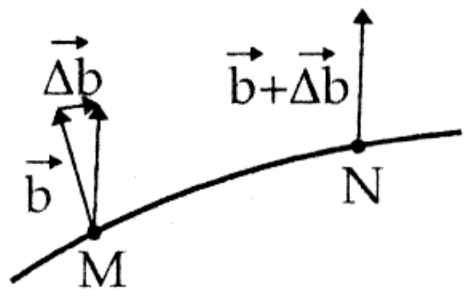
egyenletek az ún. csavarvonalat **(3.219. ábra)** mint *jobbcsavart* írják le. Ha egy megfigyelő a z-tengely (amely egyben csavartengely is legyen) pozitív irányába néz, akkor a csavar az emelkedés során az óramutató járásával megegyező irányban csavarodik. Az olyan csavarvonalat, amely ezzel ellentétes irányban csavarodik, *balcsavar*nak nevezzük.



3.218. ábra.



3.219. ábra.



3.220. ábra.

■ Meghatározandó a (3.452) csavarvonal görbülete. Ha a t paramétert az $s = t\sqrt{a^2+b^2}$ mennyiséggel helyettesítjük, kapjuk: $x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z = \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és (3.450) alapján $K = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $\rho = \dfrac{a^2+b^2}{a}$. A K érték is, a ρ érték is konstans. Másik lehetőség paramétertranszformáció nélkül a (3.451) képletet alkalmazni; ez ugyanarra az eredményre vezet.

2. Görbe torziója

A *görbe* M-pontbeli *torziójá*nak nevezünk egy számot, amely megadja a görbének egy síkgörbétől való eltérését e pont közvetlen közelében.
Az egzakt definíció a következő **(3.220. ábra)**:

$$T = \lim_{\overset{\frown}{MN}\to 0} \left| \frac{\Delta\vec{\mathbf{b}}}{\overset{\frown}{MN}} \right| = \left| \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{ds} \right| . \tag{3.453}$$

1. A torziósugár a $\tau = 1/T$ érték. (3.454)

1. Képletek T és τ kiszámítására

a) Ha a görbe (3.442a) szerint van megadva:

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds} \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{ds^2} \frac{d^3\vec{\mathbf{r}}}{ds^3} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)} , \tag{3.455}$$

ahol a deriválásokat s szerint kell végezni.

b) Ha a görbe (3.441) szerint van megadva:

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \frac{\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \dfrac{d^3\vec{\mathbf{r}}}{dt^3}}{\left| \left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \right)^2 \right|^3} = \rho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} , \tag{3.456}$$

ahol ρ kiszámítása (3.449) alapján történhet.

A (3.455, 3.456) segítségével kiszámított torzió lehet pozitív is, negatív is. A $T > 0$ esetben az a megfigyelő, aki a főnormálison a binormálissal párhuzamosan áll, úgy látja, hogy a görbe csavarodása jobbcsavarnak felel meg, a $T < 0$ esetben pedig hogy balcsavarnak.

■ Legyen egy csavarvonalnak konstans torziója. Ekkor aszerint, hogy R jobbcsavarról vagy L balcsavarról van szó, a torzió értéke

$$T_R = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right)^2 \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2]^3} = \frac{b}{a^2 + b^2} , \quad \tau = \frac{a^2 + b^2}{b} ; \quad T_L = -\frac{b}{a^2 + b^2} .$$

3. FRENET-képletek

A $\vec{\mathbf{t}}$, $\vec{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ vektorok deriváltját a FRENET-képletek segítségével lehet kifejezni:

$$\frac{d\vec{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{\rho} , \quad \frac{d\vec{\mathbf{n}}}{ds} = \frac{\vec{\mathbf{t}}}{\rho} - \frac{\vec{\mathbf{b}}}{\tau} , \quad \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{ds} = -\frac{\vec{\mathbf{n}}}{\tau} . \tag{3.457}$$

Itt ρ a görbületi és τ a torziósugár.

3.6.3. Felületek

3.6.3.1. Felület definiálására alkalmas lehetőségek

1. Felület egyenlete Felületeket különféleképpen lehet definiálni:

a) Implicit alak: $F(x, y, z) = 0 ,$ (3.458)

b) Explicit alak: $z = f(x, y) ,$ (3.459)

c) Paraméteres alak: $x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \quad z = z(u, v) ,$ (3.460)

d) Vektoralak: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v), \quad \text{ahol} \quad \vec{\mathbf{r}} = x(u, v)\vec{\mathbf{i}} + y(u, v)\vec{\mathbf{j}} + z(u, v)\vec{\mathbf{k}} .$ (3.461)

Ha az u, v paraméterek végigfutnak minden megengedett értéken, akkor (3.460) és (3.461) a felület minden pontjának koordinátáit és helyvektorát megadja. A (3.460) paraméteres alakból u és v kiküszöbölésével a (3.458) implicit alakot kapjuk. A (3.459) explicit alak a paraméteres alaknak az a speciális esete, amikor $u = x$ és $v = y$.

■ A gömb egyenlete derékszögű koordinátákban, paraméteres alakban és vektoralakban **(3.222. ábra)**:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 , \tag{3.462a}$$

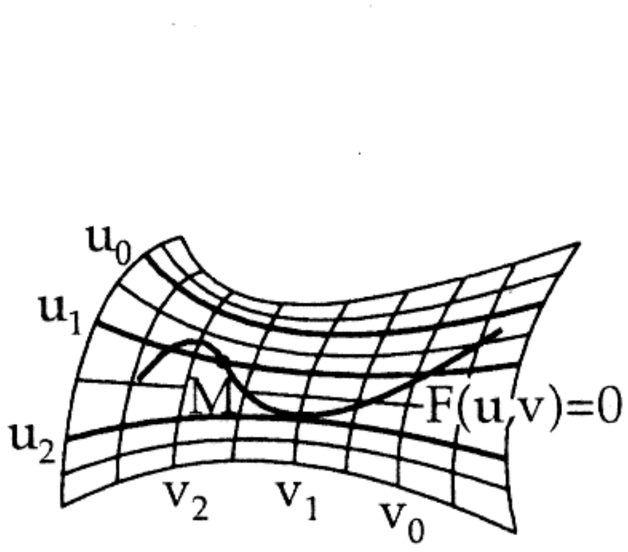
$$x = a\cos u \sin v, \; y = a\sin u \sin v, \; z = a\cos v ; \tag{3.462b}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = a(\cos u \sin v\vec{\mathbf{i}} + \sin u \sin v\vec{\mathbf{j}} + \cos v\vec{\mathbf{k}}) \,. \tag{3.462c}$$

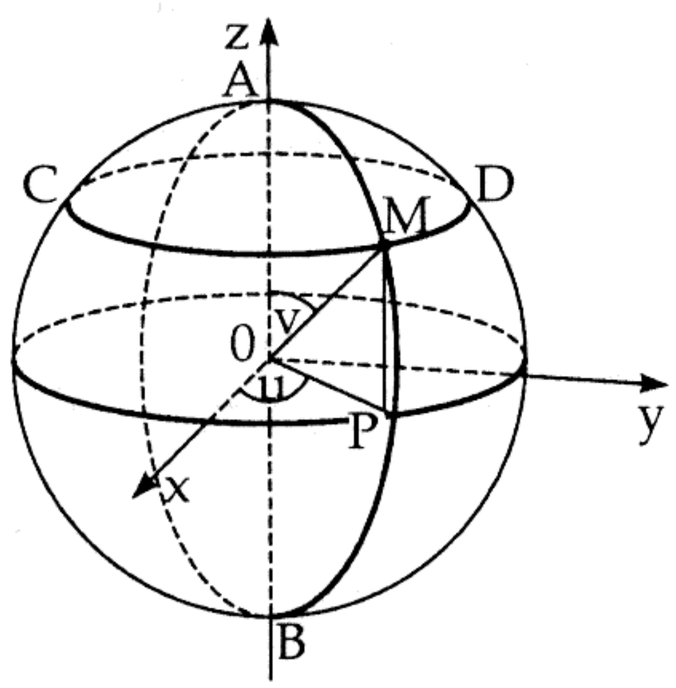
2. Görbevonalú felületi koordináták Ha egy (3.460) vagy (3.461) alakban megadott felületen az u paraméter változtatása mellett a $v = v_0$ értéket változatlanul hagyjuk, egy $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v_0)$ görbe $\vec{\mathbf{r}}(x, y, z)$ pontjait kapjuk. Ha a v paraméternek egymás után különböző, de rögzített $v = v_1, v = v_2, \ldots, v = v_n$ értékeket adunk, a felületen egy görbesereg jön létre. A $v =$ konstans görbéket, mivel rajtuk mozogva csak u változik, *u-vonalak*nak nevezzük **(3.221. ábra)**. Analóg módon, ha változatlan $u =$ konstans érték mellett a v paramétert változtatjuk, majd konstansnak rendre valamilyen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ értékeket választunk, egy második görbesereget kapunk, amelynek elemeit *v-vonalak*nak nevezzük. Így a (3.460) felületen egy koordinátavonalakból álló hálózatot létesíthetünk, amelyben az M felületi pontot két rögzített $u = u_i$ és $v = v_k$ szám, M görbevonalú vagy GAUSS-*féle koordinátái* jellemzik.

Ha a felület a (3.459) alakban van megadva, akkor a koordinátavonalak a felületnek az $x =$ konstans, ill. $y =$ konstans síkokkal való metszetei. Felületi görbéket a görbevonalú koordináták közötti $F(u, v) = 0$ alakú implicit egyenlettel vagy $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméteres egyenletekkel lehet jellemezni.

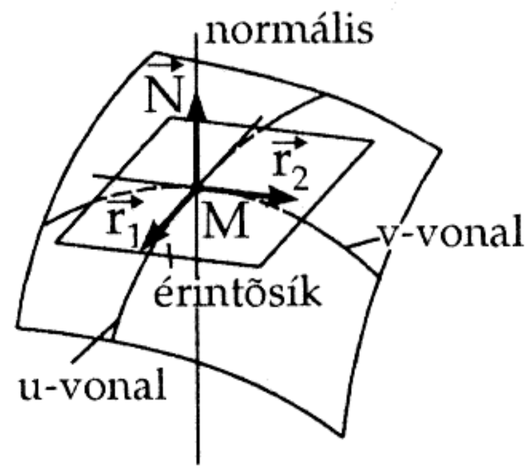
■ A gömb (3.462b,c) paraméteres egyenleteiben u az M pont *földrajzi hosszúsága*, v pedig M *pólustávolsága* vagy földrajzi szélessége. A v-vonalak az AMB *meridiánok*, az u-vonalak a CMD *szélességi körök* **(3.222. ábra)**.



3.221. ábra.



3.222. ábra.



3.223. ábra.

3.6.3.2. Érintősík és felületi normális

1. Definíciók

1. Érintősík Az $M(x, y, z)$ felületi ponton átmenő összes felületi görbe M-hez tartozó érintői általában egy közös síkban, a felület M ponthoz tartozó *érintősík*jában fekszenek. Kivételt képeznek az ún. *kúppontok* (lásd 245. old.).

2. Felületi normális Az M ponton átmenő, az érintősíkra merőleges egyenest az M ponthoz tartozó *felületi normális*nak nevezzük **(3.223. ábra)**.

3. Normálvektor Az érintősíkot két vektor feszíti ki, az u-vonal és a v-vonal

$$\vec{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \,, \quad \vec{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \tag{3.463a}$$

érintővektorai. A két érintővektor $\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2$ vektoriális szorzata olyan vektor, amely a felületi normális irányába mutat. E vektor

$$\vec{\mathbf{N}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2}{|\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2|} \tag{3.463b}$$

egységvektorát normálvektornak hívjuk. Hogy ez a felület egyik vagy másik oldala felé irányul, az határozza meg, hogy u vagy v az első vagy a második koordináta.

3.27. táblázat. Az érintősík és a felületi normális egyenletei

Az érintősík és a felületi normális egyenlete		
Egyenlet-típus	Érintősík	Felületi normális
(3.458)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(3.459)	$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$
(3.460)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3.461)	$(\vec{\mathbf{R}}-\vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r_1}}\vec{\mathbf{r_2}}=0$ *1) vagy $(\vec{\mathbf{R}}-\vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{N}}=0$	$\vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{r}}+\lambda(\vec{\mathbf{r_1}}\times\vec{\mathbf{r_2}})$ vagy $\vec{\mathbf{R}}=\vec{\mathbf{r}}+\lambda\vec{\mathbf{N}}$

Ebben a táblázatban x, y, z és $\vec{\mathbf{r}}$ a görbe M pontjának koordinátái és helyvektora; X, Y, Z és $\vec{\mathbf{R}}$ az M ponthoz tartozó érintősík vagy felületi normális pontjának futó koordinátái és helyvektora; továbbá $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ és $\vec{\mathbf{N}}$ a normálvektor.

*1) Három vektor vegyes szorzatáról (lásd 185. old.).

2. Az érintősík és a felületi normális egyenletei

(lásd a **3.27. táblázatot**)

■ **A:** A (3.462a) egyenletű gömb

1. érintősíkja:

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0 \quad \text{vagy} \quad xX+yY+zZ-a^2=0\,, \tag{3.464a}$$

2. felületi normálisa: $\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{2z}$ vagy $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}\,.$ (3.464b)

■ **B:** A (3.462b) egyenletű gömb

1. érintősíkja: $X\cos u\sin v+Y\sin u\sin v+Z\cos v=a\,,$ (3.464c)

2. felületi normálisa: $\frac{X}{\cos u\sin v}=\frac{Y}{\sin u\sin v}=\frac{Z}{\cos v}\,.$ (3.464d)

3. Felület szinguláris pontjai (kúppontok)

Ha egy (3.458) egyenletű felület $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ koordinátájú pontjára egyszerre fennállnak a

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=F(x,y,z)=0 \tag{3.465}$$

összefüggések, azaz ha az elsőrendű deriváltak eltűnnek, akkor az $M(x_1,y_1,z_1)$ pont *szinguláris pont*, más néven *kúppont*. A rajta átmenő érintők nem fekszenek egy síkban, hanem másodrendű kúpot al-

kotnak; ennek egyenlete

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y-y)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(Z-z)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(X-x)(Y-y)$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}(Z-z)(X-x)=0\,, \tag{3.466}$$

ahol a deriválás az M pontban történik. Ha az összes másodrendű derivált is eltűnik, akkor bonyolultabb típusú szinguláris pontról van szó. Ilyenkor harmadrendű vagy magasabb rendű kúp áll elő.

3.6.3.3. Felületi vonalelem

1. Ív differenciálja

Legyen a felület a (3.460) vagy (3.461) alakban megadva. Legyen $M(u,v)$ a felület tetszőleges pontja, és $N(u+du, v+dv)$ a felület egy M közelében fekvő másik pontja. Ekkor a felületi $\widehat{MN}$ ív hosszúságát közelítőleg az *ív differenciáljá*val, más néven a *felületi vonalelem*mel lehet a

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{3.467a}$$

képlet útján kiszámítani, ahol az

$$E=\vec{\mathbf{r}}_1^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\,,\quad F=\vec{\mathbf{r}}_1\vec{\mathbf{r}}_2=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,,$$
$$G=\vec{\mathbf{r}}_2^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \tag{3.467b}$$

együtthatók az M pontra vonatkoznak. A (3.467a) képlet jobb oldalát a *felület első kvadratikus alakjá*nak nevezzük.

■ **A:** A (3.462c) módon megadott gömbre

$$E=a^2\sin^2 v\,,\quad F=0\,,\quad G=a^2\,,\quad ds^2=a^2(sin^2 v du^2+dv^2)\,. \tag{3.468}$$

■ **B:** A (3.459) módon megadott felületekre

$$E=1+p^2\,,\quad F=pq\,,\quad G=1+q^2,\quad \text{ahol}\quad p=\frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}\,. \tag{3.469}$$

2. Felületi mérések

1. Ívhossz Az $u=u(t)\,,\ v=v(t)$ felületi görbe $t_0\le t\le t_1$ szakaszhoz tartozó ívhosszát az

$$L=\int_{t_0}^{t_1} ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt \quad \text{képlettel lehet kiszámítani.} \tag{3.470}$$

2. Görbék közötti szög Két, egymást az M pontban metsző és e pontban a $d\,\vec{\mathbf{r}}(du,dv)$, $\delta\,\vec{\mathbf{r}}(\delta u\,,\ \delta v)$ vektorokkal jellemzett irányú görbe közötti szög, vagyis az érintőik által bezárt szög **(3.224. ábra)**, a

$$\cos\alpha=\frac{|d\,\vec{\mathbf{r}}\,\delta\,\vec{\mathbf{r}}|}{\sqrt{(d\,\vec{\mathbf{r}})^2\,(\delta\,\vec{\mathbf{r}})^2}}$$
$$=\frac{E\,du\,\delta u+F\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}} \tag{3.471}$$

képlettel számítható ki. Az E, F, G együtthatókat az M pontra kell meghatározni. Ha (3.471) számlálója nulla, akkor a két görbe merőleges egymásra. A $\delta v=0$ esetben kapott $v=$ konstans és a $\delta u=0$ esetben kapott $u=$ konstans koordinátavonalak merőlegességének feltétele $F=0$.

3. Felületdarab felszíne Tetszőleges felületi görbe által határolt S felületdarab felszínét kettős integrállal lehet kiszámítani:

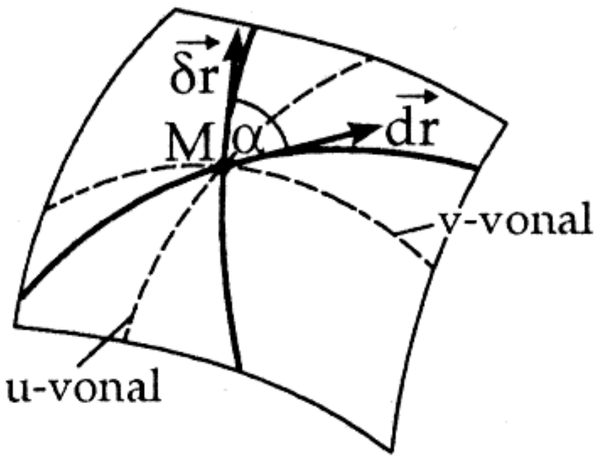
$$S = \int_{(S)} dS, \qquad (3.472a) \qquad \text{ahol} \qquad dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \qquad (3.472b)$$

dS neve *felületelem.*

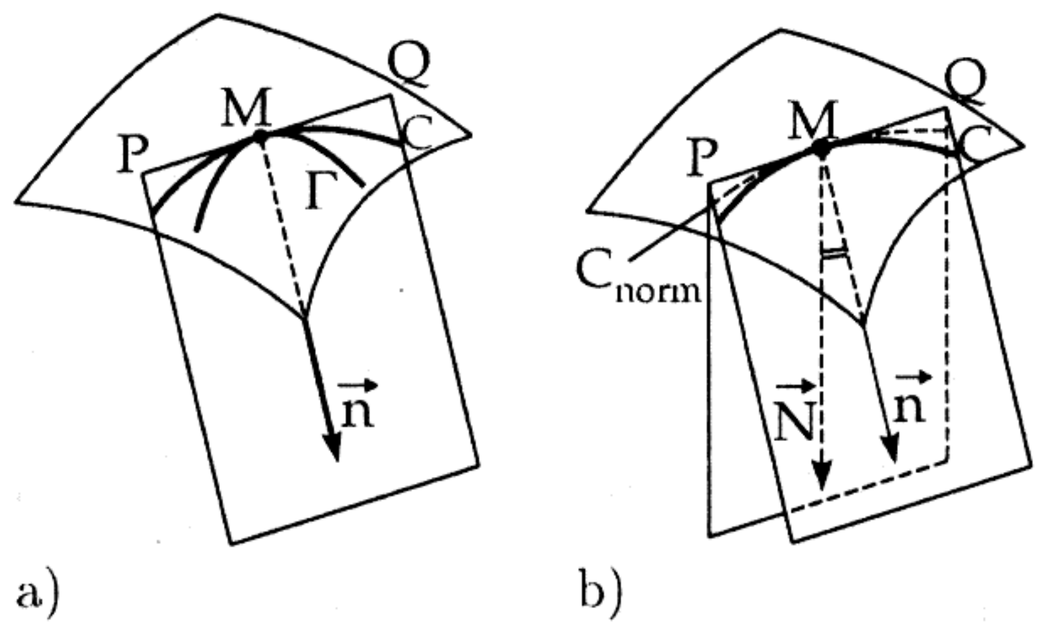
Ha ismerjük az első kvadratikus alapforma E, F és G együtthatóit, akkor a (3.470, 3.471 és 3.472a,b) képletek segítségével kiszámíthatjuk a felületi távolságokat, szögeket és felszíneket. Tehát az első kvadratikus alapforma a *felület metrikáját* definiálja.

3. Felületek egymásra fektetése hajlítás esetén

Ha egy felületet feszítés és bevágás nélkül meghajlítunk, akkor egyenlete megváltozik, de metrikája változatlan marad. Más szóval: az első kvadratikus alapforma tiszta hajlítással szemben invariáns. Tehát két különböző felület, amelynek első kvadratikus alapformája megegyezik, egymásra lefejthető.



3.224. ábra.



a) b) c)

3.225. ábra.

3.6.3.4. Felület görbülete

1. Felületi görbék görbülete

Ha egy felület M pontján át különböző, a felületen haladó Γ görbéket húzunk **(3.225. ábra)**, akkor ezek M-hez tartozó ρ görbületi sugarai a következő három viszonylatban állnak egymással:

1. Egy Γ görbe M ponthoz tartozó ρ görbületi sugara egyenlő azon C görbe görbületi sugarával, amely a felületnek a Γ görbe M ponthoz tartozó simulósíkjával való metszete **(3.225.a ábra)**.

2. Meusnier tétele Felület bármely C síkmetszetének **(3.224.b ábra)** görbületi sugarát a

$$\rho = R\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{N}}) \qquad (3.473)$$

képlettel lehet kiszámítani. Itt R azon C_{norm} normálmetszet görbületi sugara, amelynek síkja tartalmazza ugyanazt a PQ érintőt, mint C síkja, valamint az $\vec{\mathbf{N}}$ felületi normális egységvektort; $(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{N}})$ a C görbe $\vec{\mathbf{n}}$ főnormális egységvektora és az $\vec{\mathbf{N}}$ felületi normális egységvektor közötti szög. A (3.473) képletben ρ előjele pozitív, ha $\mathbf{N}$ a C_{norm} görbe konkáv oldalán fekszik, és negatív az ellenkező esetben.

3. Euler-féle képlet Felület M pontjához tartozó bármely normálmetszet görbületét az

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \qquad (3.474)$$

EULER-képlettel lehet kiszámítani, ahol R_1 és R_2 a *főgörbületi sugarak* (lásd (3.476a)), továbbá α a C_{norm} és C_1 metszet síkja közötti szög **(3.225.c ábra)**.

2. Főgörbületi sugarak

A *főgörbületi sugarak* a felület minimális és maximális görbületi sugarai. Meghatározni őket a C_1 és C_2 *főnormálmetszetek* **(3.225.c ábra)** segítségével lehet. C_1 és C_2 síkja egymásra merőleges, irányukat az

a $\frac{dy}{dx}$ érték határozza meg, amely a

$$[tpq - s(1+q^2)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1+p^2) - r(1+q^2)]\frac{dy}{dx} + [s(1+p^2) - rpq] = 0 \tag{3.475}$$

másodfokú egyenletből számítható ki.
Ha a felület a (3.459) explicit alakban van megadva, akkor R_1 és R_2 az

$$(rt - s^2)R^2 + h[2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r]R + h^4 = 0, \tag{3.476a}$$

másodfokú egyenlet gyökei, ahol

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{és} \quad h = \sqrt{1+p^2+q^2}. \tag{3.476b}$$

Az R, R_1, R_2 mennyiségek előjelét ugyanazzal a szabállyal lehet meghatározni, mint (3.473) esetében.
Ha a felület a (3.461) vektoralakban van megadva, akkor (3.475) és (3.476a) helyébe rendre a

$$(GM - FN)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GL - EN)\frac{dv}{du} + (FL - EM) = 0\,, \tag{3.477a}$$

$$(LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0 \tag{3.477b}$$

egyenletek lépnek, ahol L, M, N a *második kvadratikus alapforma* együtthatói, azaz

$$L = \vec{\mathbf{r}}_{11}\,\vec{\mathbf{R}} = \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \vec{\mathbf{r}}_{12}\,\vec{\mathbf{R}} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \vec{\mathbf{r}}_{22}\,\vec{\mathbf{R}} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{3.477c}$$

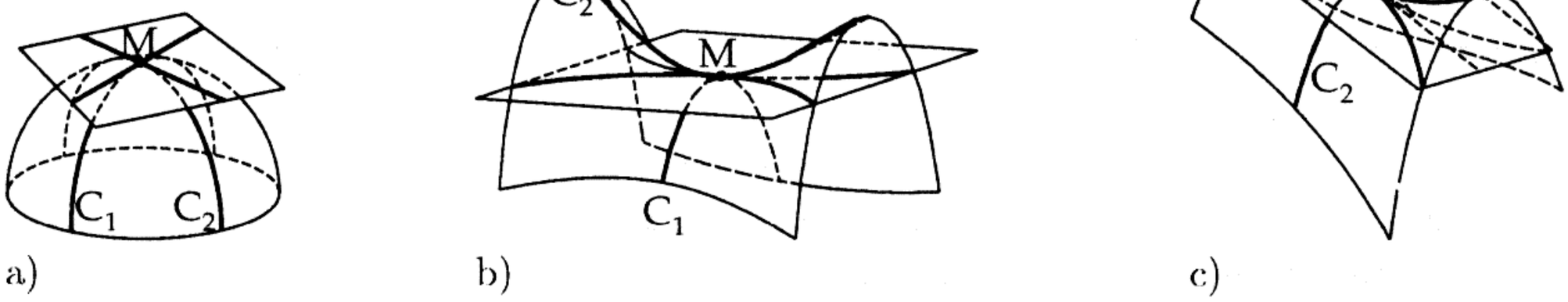
Itt az $\vec{\mathbf{r}}_{11}, \vec{\mathbf{r}}_{12}, \vec{\mathbf{r}}_{22}$ vektorok az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektor másodrendű parciális deriváltjai az u, v paraméterek szerint.
A számlálókban a következő determinánsok állnak:

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{3.477d}$$

Második kvadratikus alapformának, amely a felület görbületi tulajdonságait tartalmazza, az

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{3.477e}$$

kifejezést nevezzük.
*Görbületi vonal*nak hívjuk azokat a felületi görbéket, amelyek iránya minden pontban megegyezik a főnormálmetszetek irányával. Egyenletük (3.475) vagy (3.477a) integrálásával adódik.



3.226. ábra.

3. Felületi pontok osztályozása

1. Elliptikus és körpont Ha a felület M pontjában az R_1, R_2 főgörbületi sugarak azonos előjelűek, akkor M környezetében minden felületi pont az érintősíknak ugyanazon az oldalán fekszik; ilyenkor *elliptikus pont*ról beszélünk **(3.226.a ábra)**. Ezt az esetet analitikusan a következő feltétel jellemzi:

$$LN - M^2 > 0\,. \tag{3.478a}$$

2. Körpont A felület M pontját körpontnak nevezzük, ha ebben a pontban a főgörbületi sugarakra teljesül az

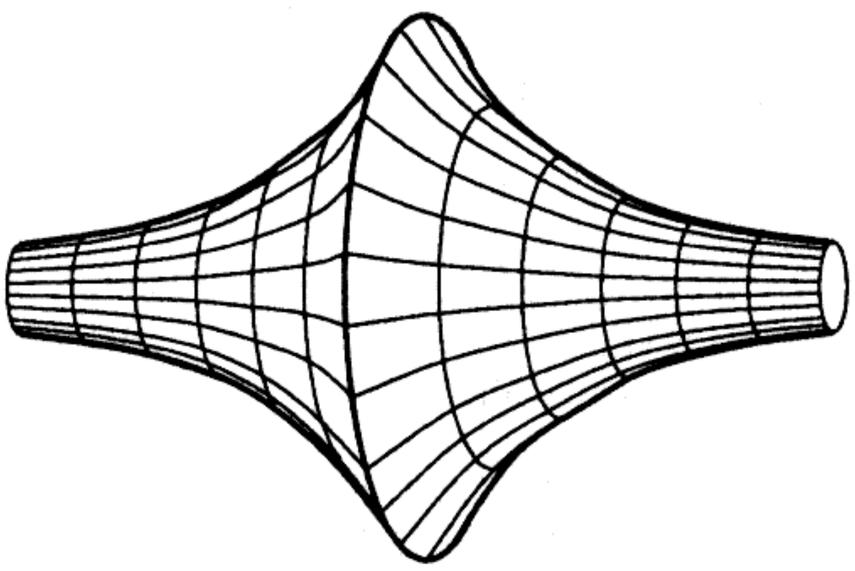
$$R_1 = R_2 \tag{3.478b}$$

feltétel. Az ilyen ponthoz tartozó normálmetszetekre $R =$ konstans.

3. Hiperbolikus pont Ha az R_1, R_2 főgörbületi sugarak különböző előjelűek, akkor a főnormálmetszetek konkáv oldalai egymással ellentétes irányba mutatnak. Az érintősík ilyenkor átmetszi a felületet, úgyhogy az M pont közelében a felület nyeregszerű. Ekkor M-et *hiperbolikus pont*nak nevezzük **(3.226.b ábra)**; a tulajdonságot analitikusan az

$$LN - M^2 < 0 \tag{3.478c}$$

feltétel jellemzi.



3.227. ábra.

4. Parabolikus pont Ha az R_1, R_2 főgörbületi sugarak egyike ∞, akkor az egyik főnormálmetszetnak vagy inflexiós pontja van, vagy ez a metszet egyenes. Ilyenkor M-et *parabolikus pont*nak nevezzük **(3.226.c ábra)**; analitikus jellemzése

$$LN - M^2 = 0\,. \tag{3.478d}$$

■ Ellipszoid összes pontjai elliptikusak, egyköpenyű hiperboloidéi hiperbolikusak, hengeréi pedig parabolikusak.

4. Felület görbülete

Felület görbületének numerikus jellemzésére leginkább a következő két mennyiséget használjuk:

1. a felület középgörbülete az M pontban: $$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\,; \tag{3.479a}$$

2. a felület Gauss-görbülete az M pontban: $$K = 1/R_1R_2\,. \tag{3.479b}$$

■ **A:** Az a sugarú körhengerre $H = 1/2a$ és $K = 0$.

■ **B:** Elliptikus pontokra $K > 0$, hiperbolikus pontokra $K < 0$, parabolikus pontokra pedig $K = 0$.

3. H és K kiszámítása, ha a felület a $z = f(x, y)$ alakban van megadva:

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}}\,, \tag{3.480a}$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\,. \tag{3.480b}$$

A p, q, r, s, t mennyiségek jelentését lásd (3.476b) alatt.

4. Felületek osztályozása görbületük alapján

1. A minimálfelületek olyan felületek, amelyek H középgörbülete minden pontban nulla, vagyis amelyekre $R_1 = -R_2$.

2. Az állandó görbületű felületeket az jellemzi, hogy GAUSS-görbületük $K =$ konstans

■ **A:** $K > 0$, pl. a gömb.

■ **B:** $K < 0$, pl. a pszeudoszféra **(3.227. ábra)**, vagyis a traktrix **(2.79 ábra)** forgásfelülete, ha aszimptotája körül forgatjuk.

3.6.3.5. Vonalfelületek és lefejthető felületek

1. Vonalfelületnek nevezünk egy felületet, ha egyenes térbeli mozgatásával lehet származtatni.

2. Lefejthető felületnek nevezünk egy vonalfelületet, ha síkra lefejthető. Nem minden vonalfelület lefejthető. Lefejthető felületre jellemző, hogy

a) minden pontjában a GAUSS-görbület nulla, és

b) ha a felület a $z = f(x, y)$ explicit alakban van megadva, akkor teljesül a lefejthetőség feltétele:

$$\text{a)} \quad K = 0\,, \qquad \text{b)} \quad rt - s^2 = 0\,. \tag{3.481}$$

Az r, t, s mennyiségek jelentését lásd (3.476b) alatt.

■ **A:** A kúp **(3.186. ábra)** és a henger **(3.192. ábra)** lefejthető felület.

■ **B:** Az egyköpenyű hiperboloid **(3.190. ábra)** és a hiperbolikus paraboloid **(3.191. ábra)** vonalfelület ugyan, de nem fejthető le a síkra.

3.6.3.6. Felület geodetikus vonalai

1. A geodetikus vonal fogalma (lásd még 159. old.). Egy $M(u, v)$ felület minden pontján keresztül minden, a $\frac{dv}{du}$ differenciálhányados által meghatározott felületi irányban áthaladhat egy képzelt görbe, amelyet *geodetikus vonal*nak nevezünk. Ez ugyanazt a szerepet játssza a felületen, mint az egyenes a síkon, és a következő tulajdonságok jellemzik:

1. A geodetikus vonal a felület két pontja között a legkisebb távolságot valósítja meg.

2. Előírt felületen való tartózkodásra kényszerített anyagi pont másik, ugyanazon a felületen található anyagi pont vonzásának hatására, más külső erő hiányában, geodetikus vonalon mozog.

3. Előírt felületre ráfeszített rugalmas fonal egy geodetikus vonal alakját veszi fel.

2. Definíció A geodetikus vonal olyan felületi görbe, amelynek főnormálisa minden pontban a felületi normális irányába esik.

■ Körhenger geodetikus vonalai csavarvonalak.

3. Geodetikus vonal egyenlete Ha a felület a $z = f(x, y)$ explicit alakban van megadva, akkor a geodetikus vonalak differenciálegyenlete

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (pr - 2qs)dydx - qr\,. \tag{3.482}$$

Ha a felület a (3.460) paraméteres alakban van megadva, akkor a geodetikus vonalak egyenlete bonyolultabb típusú. A p, q, r, s és t mennyiségek jelentését lásd (3.476b) alatt.

4. Lineáris algebra

4.1. Mátrixok

4.1.1. A mátrix fogalma

1. (mxn) típusú A mátrixnak (röviden $\mathbf{A}_{(m,n)}$)
nevezzük az alábbi m sorból és n oszlopból álló táblázatot:

$$\mathbf{A} = (a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow & 1.\text{ sor} \\ \leftarrow & 2.\text{ sor} \\ & \vdots \\ \leftarrow & m\text{-edik sor} \end{matrix} \tag{4.1}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1. & 2. & & n\text{-edik oszlop} \end{matrix} .$$

A mátrix elemei lehetnek számok (valós vagy komplex), függvények, differenciálhányadosok, vektorok stb. A mátrixokat a *mátrix típusá*nak a definíciója alapján, azaz a sorainak m száma és oszlopainak n száma alapján osztályozzuk. A mátrixokat *kvadratikus* és *téglalap alakú mátrixok*ra osztjuk fel aszerint, hogy a sorok és az oszlopok száma megegyezik vagy nem.

2. Valós és komplex mátrixok
Valós mátrixok elemei valósak, *komplex mátrixok* komplex elemekből állnak. Egy mátrix, amely az

$$a_{\mu\nu} + \mathrm{i}b_{\mu\nu} \tag{4.2a}$$

komplex elemekbő áll, két valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix segítségével

$$\mathbf{A} + \mathrm{i}\,\mathbf{B} \tag{4.2b}$$

alakban adható meg.
Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix és a hozzárendelt $\mathbf{A}^*$ *konjugált komplex mátrix* elemei közötti összefüggés

$$a^*_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\,(a_{\mu\nu}) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(a_{\mu\nu})\,. \tag{4.2c}$$

3. Transzponált $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ mátrix
Az (mxn) típusú $\mathbf{A}$ mátrixból a sorok és az oszlopok felcserélésével kapjuk az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ transzponált mátrixot, amelynek a típusa (nxm). Az elemekre érvényes:

$$(a_{\nu\mu})^{\mathrm{T}} = (a_{\mu\nu})\,. \tag{4.3}$$

4. Adjungált mátrix
Egy $\mathbf{A}$ komplex mátrixból megkapjuk az $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ *adjungált mátrix*ot úgy, hogy a hozzátartozó konjugált komplex $\mathbf{A}^*$ mátrixot transzponáljuk (lásd 259. old.):

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}\,. \tag{4.4}$$

5. Nullmátrixnak (0)
nevezzük azt a mátrixot, amelynek az összes eleme nullával egyenlő:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.5}$$

4.1.2. Kvadratikus mátrixok

1. Definíció

Kvadratikus mátrixok sorainak és oszlopainak a száma megegyezik, azaz $m = n$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{4.6}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix $a_{\mu\nu}$ elemeit, amelyeknek a sorindexe megegyezik az oszlopindexszel, *főátlóbeli elemek*nek nevezzük. Jelölésük $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

2. Diagonálmátrixok

azok a kvadratikus $\mathbf{D}$ mátrixok, amelyeknek a főátlón kívüli elemei nullával egyenlők:

$$a_{\mu\nu} = 0 \text{ ha } \mu \neq \nu\text{:} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & \mathbf{O} \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

3. Skalármátrix S

egy speciális diagonálmátrix, amelyben minden diagonálelem egy valós vagy komplex c állandóval egyenlő:

$$a_{\mu\nu} = 0 \,, \text{ ha } \quad \mu \neq \nu \,, \qquad a_{\mu\mu} = c \,. \tag{4.8}$$

4. Mátrix spurja (nyoma)

Egy kvadratikus mátrix *spur*ját a főátlóbeli elemek összegeként definiáljuk:

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu} \,. \tag{4.9}$$

5. Szimmetrikus mátrixok

azok az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixok, amelyek egyenlők a transzponáltjukkal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \,. \tag{4.10}$$

Azokra az elemekre, amelyek a főátlóra tükrösen helyezkednek el, érvényes:

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \,. \tag{4.11}$$

6. Normálmátrixok

kvadratikusak és kielégítik az alábbi egyenletet

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \,. \tag{4.12}$$

7. Ferdén szimmetrikus mátrixok

azok az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixok, amelyekre érvényes:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \,. \tag{4.13a}$$

Egy ferdén szimmetrikus mátrix $a_{\mu\nu}$ elemeire az

$$a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}, \quad a_{\mu\mu} = 0 \,, \tag{4.13b}$$

ezért egy ferdén szimmetrikus mátrix spurja eltűnik:

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}) = 0 \,. \tag{4.13c}$$

Azok az elemek, amelyek a főátlóra tükrösen helyezkednek el, csak előjelben különböznek.
Minden kvadratikus $\mathbf{A}$ mátrix felbontható egy szimmetrikus $\mathbf{A_s}$ mátrix és egy ferdén szimmetrikus $\mathbf{A_{as}}$ mátrix összegéren:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_s} + \mathbf{A_{as}} \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{A_s} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \,, \; \mathbf{A_{as}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \,. \tag{4.13d}$$

8. Hermitikus mátrixok vagy önadjungált mátrixok
azok az **A** kvadratikus mátrixok, amelyek egyenlők az adjungáltjukkal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} . \tag{4.14}$$

Valós elemű mátrixokra a szimmetrikus és hermitikus mátrix fogalma egybeesik. Hermitikus mátrix determinánsa valós.

9. Ferdén hermitikus mátrix
az a kvadratikus mátrix, amely megegyezik az adjungáltjának az ellentettjével:

$$\mathbf{A} = -(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} . \tag{4.15a}$$

Egy ferdén hermitikus mátrix $a_{\mu\nu}$ elemeire érvényes

$$a_{\mu\nu} = -a^*_{\nu\mu} . \tag{4.15b}$$

Minden kvadratikus **A** mátrix előállítható egy hermitikus $\mathbf{A_h}$ mátrix és egy ferdén hermitikus $\mathbf{A_{ah}}$ mátrix összegeként:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_h} + \mathbf{A_{ah}} \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{A_h} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{H}}) , \ \mathbf{A_{ah}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{H}}) . \tag{4.15c}$$

10. Egységmátrix E
Egységmátrixnak nevezzük azt a kvadratikus mátrixot, amelyben a főátló minden eleme egy, és minden más elem nullával egyenlő:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\mu\nu}) \qquad \text{ahol} \qquad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 \text{ ha } \mu \neq \nu , \\ 1 \text{ ha } \mu = \nu . \end{cases} \tag{4.16}$$

A $\delta_{\mu\nu}$ jelet KRONECKER-*szimbólum*nak nevezzük.

11. Háromszögmátrix
1. Felső háromszögmátrix R (angolban **U** jelöli, amely az upper szó első betűje) egy olyan mátrix, amelyben a főátló alatti összes elem nullával egyenlő:

$$\mathbf{R} = (r_{\mu\nu}) \quad \text{ahol} \quad r_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ha} \quad \mu > \nu . \tag{4.17}$$

2. Alsó háromszögmátrix L (angolban **L** jelöli, amely a lower szó első betűje) egy olyan mátrix, amelyben a főátló feletti összes elem nullával egyenlő:

$$\mathbf{L} = (l_{\mu\nu}) \quad \text{ahol} \quad l_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ha} \quad \mu < \nu . \tag{4.18}$$

4.1.3. Vektorok

Az $(n, 1)$ típusú mátrixokat egyoszlopú mátrixoknak vagy n dimenziós *oszlopvektorok*nak nevezzük; az $(1, n)$ típusú mátrixokat egysorú mátrixoknak vagy n dimenziós *sorvektorok*nak nevezzük:

$$\textbf{oszlopvektor: } \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} , \tag{4.19a}$$

$$\textbf{sorvektor: } \underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) . \tag{4.19b}$$

A transzponálás segítségével egy oszlopvektor sorvektorrá változik és fordítva. Egy n dimenziós sor-, illetve oszlopvektor egy pontot írhat le az n dimenziós euklideszi $\mathbb{R}^n$ térben.
A nullvektort $\underline{\mathbf{o}}$, illetve $\underline{\mathbf{o}}^{\mathrm{T}}$ jelöli.

4.1.4. Mátrixműveletek

1. Mátrixok egyenlősége
Két mátrix $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ és $\mathbf{B} = (b_{\mu\nu})$ egyenlő, ha azonos típusúak és az azonos helyen álló elemek megegyeznek:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \text{ha} \quad a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} \quad \text{minden} \quad \mu = 1 , \ldots , m ; \ \nu = 1 , \ldots , n\text{-re.} \tag{4.20}$$

2. Összeadás és kivonás

mátrixok között akkor lehetséges, ha azonos típusúak. Az összeadást és a kivonást elemenként végezzük, azaz az azonos helyen álló elemeket összeadjuk, illetve kivonjuk:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{\mu\nu}) \pm (b_{\mu\nu}) = (a_{\mu\nu} \pm b_{\mu\nu})\,. \tag{4.21a}$$

■ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

A mátrixok összeadása kommutatív és asszociatív művelet:

kommutativitási szabály: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. (4.21b)

asszociativitási szabály: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$. (4.21c)

3. Mátrix szorzása számmal

Egy (m, n) típusú $\mathbf{A}$ mátrixot az α valós vagy komplex számmal úgy szorozuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix minden elemét megszorozzuk az α számmal:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\,(a_{\mu\nu}) = (\alpha a_{\mu\nu})\,. \tag{4.22a}$$

■ $3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 21 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$.

A (4.22a) azt is állítja, hogy egy állandó tényező, amelyet a mátrix minden eleme tartalmaz, kiemelhető.

4. Mátrix osztása számmal

Mátrixok számmal való osztása visszavezethető az $\alpha = 1/\gamma$ számmal való szorzásra, ahol $\gamma \neq 0$.
Ez a művelet, azaz mátrix szorzása skalárral, *kommutatív, asszociatív* és *disztributív* művelet:

kommutativitási szabály: $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$; (4.22b)

asszociativitási szabály: $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$; (4.22c)

disztributivitási szabály: $(\alpha \pm \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \pm \beta\mathbf{A}$; $\quad \alpha(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} \pm \alpha\mathbf{B}$. (4.22d)

5. Mátrixok szorzása

1. Az AB szorzat az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok szorzata, *skaláris mátrixszorzat*nak is nevezik, csak akkor képezhető, ha az $\mathbf{A}$ bal oldali tényező oszlopainak a száma megegyezik a $\mathbf{B}$ jobb oldali tényező sorainak a számával. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix (m, n) típusú, akkor a $\mathbf{B}$ mátrixnak (n, p) típusúnak kell lennie, és az $\mathbf{AB}$ szorzat egy (m, p) típusú $\mathbf{C} = (c_{\mu\lambda})$ mátrix. Itt a $(c_{\mu\lambda})$ egyenlő az $\mathbf{A}$ bal oldali tényező μ-edik sorának és a $\mathbf{B}$ jobb oldali tényező λ-adik oszlopának a skalárszorzata:

$$\mathbf{AB} = (\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}b_{\nu\lambda}) = (c_{\mu\lambda}) = \mathbf{C} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m\,;\ \lambda = 1, 2, \ldots, p)\,. \tag{4.23}$$

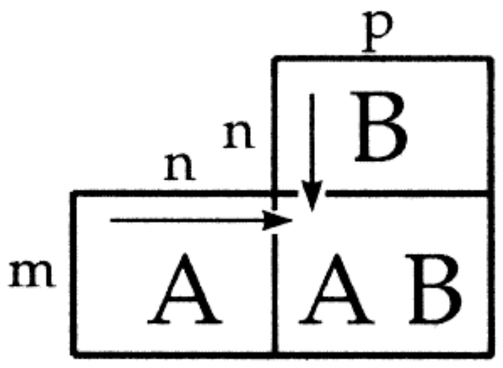
2. A mátrixszorzatok egyenlőtlensége Azokban az esetekben, amikor az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzatok léteznek, általában az $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, azaz, a kommutativitási szabály általában nem érvényes. Ha azonban az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat felcserélhetőknek nevezzük.

3. Falk-séma A mátrixszorzás gyakorlati elvégzéséhez az $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ egyenlőségnek megfelelően a jobb áttekinthetőség miatt alkalmazzuk a FALK-*sémát* **(4.1. ábra)**. A $\mathbf{C}$ szorzatmátrix $c_{\mu\lambda}$ eleme pontosan az $\mathbf{A}$ μ-edik sorának és a $\mathbf{B}$ λ-ik oszlopának a kereszteződésében jelenik meg.

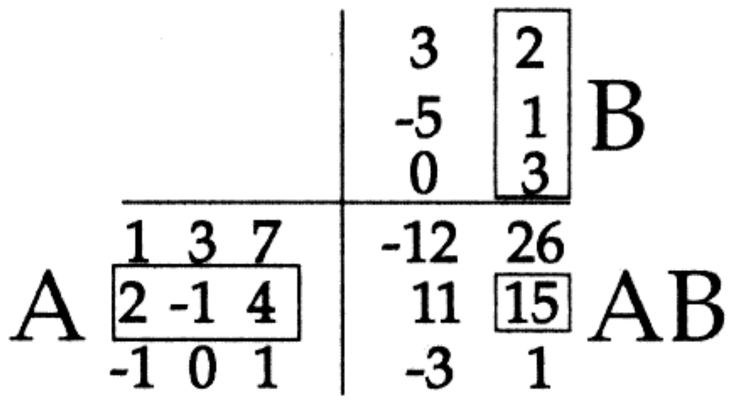
■ Az $\mathbf{A}_{(3,3)}$ és $\mathbf{B}_{(3,2)}$ mátrixok szorzata a **4.2. ábra** látható a FALK-séma felhasználásával.

4. A $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ komplex elemű mátrixok szorzása A komplex elemű mátrixok szorzásánál használhatjuk a valós és képzetes részekre való felbontást a (4.2b) értelmében:
$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A_1} + \mathrm{i}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{K_2} = \mathbf{A_2} + \mathrm{i}\mathbf{B_2}$. Itt az $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}$ mátrixok valósak. A szétbontás után a szorzat egy összeg, amelyben a tagok valós elemű mátrixok szorzataként számíthatók.

■ $(\mathbf{A} + \mathrm{i}\,\mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathrm{i}\,\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathrm{i}\,(\mathbf{BA} - \mathbf{AB})$. A felbontott mátrixok szorzásánál is tekintetbe vesszük, hogy a szorzásra általában nem érvényes a kommutativitási szabály, azaz, az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ nem cserélhető fel.



4.1. ábra.



4.2. ábra.

6. Két vektor skaláris és diadikus szorzata

Az $\underline{\mathbf{a}}$ és $\underline{\mathbf{b}}$ vektoroknak, amelyek egyoszlopú, illetve egysorú mátrixokként ábrázolhatók, a mátrixok szorzása alapján kétféle szorzatát képezhetjük:
Ha az $\underline{\mathbf{a}}$ $(1,n)$ típusú és a $\underline{\mathbf{b}}$ $(n,1)$ típusú, akkor a szorzat $(1,1)$ típusú, azaz egy szám. Ekkor a két vektor *skalárszorzatá*ról beszélünk. Ha azonban az $\underline{\mathbf{a}}$ $(n,1)$ típusú és a $\underline{\mathbf{b}}$ $(1,m)$ típusú, akkor a szorzat (n,m) típusú, azaz egy mátrix. Ebben az esetben a két vektor *diadikus szorzatá*ról beszélünk.

1. Két vektor skalárszorzata Egy n elemű $\underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sorvektornak egy n elemű $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ oszlopvektorral képzett skalárszorzatán az alábbi számot értjük

$$\underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{a}} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu \,. \tag{4.24}$$

A szorzás kommutativitási szabálya általában nem érvényes. Itt az $\underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}$ és $\underline{\mathbf{b}}$ sorrendjét pontosan be kell tartani. A sorrend felcserélése, azaz $\underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}$ egy diadikus szorzatot eredményezne.

2. Két vektor diadikus szorzata vagy tenzorszorzata Egy n dimenziós $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ oszlopvektornak egy m dimenziós $\underline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ sorvektorral vett *diadikus szorzat*án az alábbi (n,m) típusú mátrixot értjük

$$\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_m \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Itt a szorzás kommutativitási szabálya szintén nem érvényes.

3. Útmutatás két vektor vektorszorzatának a fogalmához A multivektorok vagy teljes alternáló tenzorok területén, itt ezt nem tudjuk bemutatni, van az úgynevezett progresszív alternáló vagy külső szorzat, amely a klasszikus háromdimenziós esetben a jól ismert *vektorszorzat* (lásd 183. old.).

7. Mátrix rangja

1. Definíció Egy $\mathbf{A}$ mátrixban a lineárisan független oszlopvektorok maximális r száma mindig megegyezik a lineárisan független sorvektorok maximális számával. Ezt az r számot nevezzük a *mátrix rangjá*nak, amelynek a jelölése $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = r$.

2. Mátrix rangjára vonatkozó tételek

a) Az m dimenziós vektortérben m-nél több sorvektor vagy oszlopvektor lineárisan összefügg (lásd 509. old.), egy (m,n) típusú $\mathbf{A}$ mátrix r rangja legfeljebb az m és n számok minimumával egyenlő:

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}_{(m,n)}) = r \leq \min(m,n)\,. \tag{4.26a}$$

b) Egy reguláris $\mathbf{A}_{(n,n)}$ kvadratikus mátrix rangjára, azaz $\det \mathbf{A} \neq 0$, érvényes

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}_{(n,n)}) = r = n. \tag{4.26b}$$

Egy (n,n) típusú kvadratikus mátrixot *reguláris mátrix*nak nevezzük, ha a rangja n. Ez pontosan akkor van, amikor a determinánsa $\det \mathbf{A}$ (lásd 260. old.) nullától különbözik. Egyéb esetekben *szinguláris mátrix*nak nevezzük.

c) Egy $\mathbf{A}_{(n,n)}$ szinguláris kvadratikus mátrix rangjára, azaz $\det \mathbf{A} = 0$, érvényes

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}_{(n,n)}) = r < n\,. \tag{4.26c}$$

d) A nullmátrix rangja

$$\operatorname{rang}(\mathbf{0}) = r = 0\,. \tag{4.26d}$$

3. A rang meghatározásának a szabályai Elemi átalakításoknál a mátrix rangja nem változik. *Elemi átalakítások* összefoglalása:

a) Két sor vagy két oszlop egymással való felcserélése.

b) Egy sor vagy oszlop szorzása egy nullától különböző számmal.

c) Egy sor hozzáadása egy másik sorhoz vagy egy oszlop hozzáadása egy másik oszlophoz.

A rang meghatározásánál minden mátrixot átalakíthatunk a sorok alkalmas lineáris kombinációjával úgy, hogy a μ-edik sorban ($\mu = 2, 3, \ldots, m$) legalább az első $\mu - 1$ elem nullával egyenlő (a GAUSS algoritmus elve, lásd 275. old.). A nullvektortól különböző sorvektorok száma az így átalakított mátrixban egyenlő a mátrix r rangjával.

8. Inverz vagy reciprok mátrix

Egy $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ reguláris mátrixhoz mindig létezik egy $\mathbf{A}^{-1}$ *inverz mátrix*, azaz, olyan mátrix, amellyel a mátrixot megszorozva egységmátrixot kapunk:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}\,. \tag{4.27a}$$

Az $\mathbf{A}^{-1} = (\beta_{\mu\nu})$ elemei

$$\beta_{\mu\nu} = \frac{\mathbf{A}_{\nu\mu}}{\det \mathbf{A}}\,, \tag{4.27b}$$

ahol az $\mathbf{A}_{\nu\mu}$ az $\mathbf{A}$ mátrix $a_{\nu\mu}$ eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsz (lásd 259. old.) . A gyakorlatban az $\mathbf{A}^{-1}$ meghatározására a 259. oldalon megadott eljárást alkalmazzuk. $(2, 2)$ típusú kvadratikus mátrix esetében:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\,. \tag{4.28}$$

Megjegyzés: Amiért a mátrixszámításban a mátrixok osztása nem értelmezhető, hanem az inverz mátrixszal számolunk, összefügg azzal, hogy az osztás nem magyarázható egyértelműen. Az alábbi egyenletek megoldása

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{X}_1 &= \mathbf{A} \\ \mathbf{X}_2\mathbf{B} &= \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\mathbf{B} \text{ reguláris}), \text{ azaz} \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \end{aligned} \tag{4.29}$$

általában különbözik.

9. Ortogonális mátrixok

Ha az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixra az

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}\,, \tag{4.30}$$

összefüggés érvényes, azaz, bármely két oszlop vagy sor skalárszorzata nullával egyenlő és minden sor vagy oszlop önmagával vett skalárszorzata egy, akkor a mátrixot *ortogonális mátrix*nak nevezzük.

Ortogonális mátrixok tulajdonságai:

1. Egy $\mathbf{A}$ ortogonális mátrix transzponáltja és az inverze is ortogonális mátrix; továbbá érvényes

$$\det \mathbf{A} = \pm 1\,. \tag{4.31}$$

2. Ortogonális mátrixok szorzata ismét ortogonális.

■ Egy koordinátarendszer forgatásánál alkalmazott $\mathbf{D}$ *forgatásmátrix*, amelynek az elemei az új tengelyirányok iránykoszinuszai (lásd 210. old.), ortogonális mátrix.

10. Unitér mátrix

Ha egy $\mathbf{A}$ komplex elemű mátrixra

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}\,, \tag{4.32}$$

érvényes, akkor a mátrixot *unitér mátrix*nak nevezzük. Valós esetekben az unitér és ortogonális mátrix fogalma egybeesik.

4.1.5. Mátrixműveletek szabályai

A következők csak akkor alkalmazhatók, ha a bennük előforduló műveletek elvégezhetők.

1. Mátrix szorzása egységmátrixszal,
*identikus leképezés*nek is nevezzük:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}\,. \tag{4.33}$$

2. Az A mátrix szorzása az S skalármátrixszal vagy az E egységmátrixszal
kommutatív:

$$\mathbf{AS} = \mathbf{SA} = c\mathbf{A} \quad \text{ahol } \mathbf{S} \text{ értelmezése(4.8)}\,, \tag{4.34a}$$

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}\,. \tag{4.34b}$$

3. Az A mátrix szorzása a 0 nullmátrixszal
nullmátrixot eredményez:

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0} \text{ és } \mathbf{0A} = \mathbf{0}\,. \tag{4.35}$$

Ennek a szabálynak a megfordítása általában nem érvényes, azaz, az $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$-ból nem szükségképpen következik, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

4. Két mátrix szorzatának eltűnése
Ha sem az $\mathbf{A}$ sem a $\mathbf{B}$ nem nullmátrix, a szorzatuk lehet nullmátrix:

$$\mathbf{AB} = 0 \text{ és } \mathbf{BA} = 0\,, \qquad \text{bár} \qquad \mathbf{A} \neq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{B} \neq \mathbf{0}\,. \tag{4.36}$$

■

		1	1
		0	0
0	1	0	0
0	1	0	0

.

5. Három mátrix szorzata

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})\,. \tag{4.37}$$

6. Két mátrix szorzatának és összegének a transzponáltja

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,, \qquad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,, \qquad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\,. \tag{4.38a}$$

Az $\mathbf{A}_{(n,n)}$ kvadratikus mátrixra ezenkívül érvényes:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\,. \tag{4.38b}$$

7. Két mátrix szorzatának az inverze

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\,. \tag{4.39}$$

8. Mátrixok hatványai

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{p \text{ számú tényező}} \qquad \text{ahol} \qquad p > 0\,, \text{ egész}\,, \tag{4.40a}$$

$$\text{a)} \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{E} \qquad (\det \mathbf{A} \neq 0)\,, \tag{4.40b}$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p \qquad (p > 0\,, \text{ egész}\,; \det \mathbf{A} \neq 0)\,, \tag{4.40c}$$

$$\text{c)} \quad \mathbf{A}^{p+q} = \mathbf{A}^p\mathbf{A}^q \qquad (p, q \text{ egész})\,. \tag{4.40d}$$

9. Kronecker-szorzat
Az $\mathbf{A}= (a_{\mu\nu})$ és $\mathbf{B}= (b_{\mu\nu})$ mátrixok KRONECKER-szorzatát az alábbi szabállyal definiáljuk

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{\mu\nu}\,\mathbf{B})\,. \tag{4.41}$$

A transzponáltra és a spurra vonatkozó szabályok:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,, \tag{4.42}$$

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{Sp}(\mathbf{B})\,. \tag{4.43}$$

4.1.6. Vektor- és mátrixnorma

Egy $\underline{\mathbf{x}}$ vektorhoz és egy $\mathbf{A}$ mátrixhoz mindig hozzárendelhető egy szám $\|x\|$ ($\underline{\mathbf{x}}$ *normája*), illetve $\|\mathbf{A}\|$ ($\mathbf{A}$ *normája*). Ezeknek a számoknak ki kell elégíteniük a norma axiómáit (lásd 626. old.). Ezek az axiómák az $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra:

1. $\|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 0$ minden $\underline{\mathbf{x}}$-re; $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 0$ pontosan akkor, ha $\underline{\mathbf{x}} = 0$. (4.44)

2. $\|\lambda\underline{\mathbf{x}}\| = |\lambda| \, \|\underline{\mathbf{x}}\|$ minden $\underline{\mathbf{x}}$ vektor és minden valós λ esetén. (4.45)

3. $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$ minden $\underline{\mathbf{x}}$ és $\underline{\mathbf{y}}$ vektorra(háromszög-egyenlőtlenség) (lásd 181. old.). (4.46)

Vektorok és mátrixok normáit különböző módon vezethetjük be. Célszerű, hogy egy $\|\underline{\mathbf{x}}\|$ vektornormához az $\|\mathbf{A}\|$ mátrixnormát úgy definiáljuk, hogy az

$$\|\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\underline{\mathbf{x}}\| \tag{4.47}$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség nagyon hasznos a hibabecslésben. Azokat a vektor- és mátrixnormákat, amelyek ezt az egyenlőtlenséget kielégítik *egymással kompatibilis*nek nevezzük. Ha létezik ezenkívül minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz egy $\underline{\mathbf{x}}$ nem-nullvektor úgy, hogy az egyenlőség érvényes, akkor az $\|\mathbf{A}\|$ *mátrixnormát az* $\|\underline{\mathbf{x}}\|$ *vektornorma által indukált* mátrixnormának nevezzük.

4.1.6.1. Vektornormák

Ha az $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ egy n-dimenziós vektor, azaz $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, akkor a szokásos vektornormák:

a) euklideszi norma:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, . \tag{4.48}$$

b) maximumnorma:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \, . \tag{4.49}$$

c) abszolút összeg norma:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, . \tag{4.50}$$

■ Az $\mathbb{R}^3$-ban, az elemi vektorszámításban, az $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2$ az $\underline{\mathbf{x}}$ vektor abszolút értékét jelöli. A vektor abszolút értéke az $|x| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_2$ megadja az $\underline{\mathbf{x}}$ vektor hosszát.

4.1.6.2. Mátrixnormák

a) spektrálnorma:

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})} \, . \tag{4.51}$$

Itt a $\lambda_{max}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$ a legnagyobb sajátértékét (lásd 277. old.) jelöli az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ mátrixnak.

b) sorösszegnorma:

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, . \tag{4.52}$$

c) oszlopösszegnorma:

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \, . \tag{4.53}$$

Ez mutatja, hogy a (4.51) mátrixnormát a (4.48) vektornormához rendeltük hozzá. Ugyanez érvényes a (4.52)-re és a (4.49)-re valamint a (4.53)-re és (4.50)-re is.

4.2. Determinánsok

4.2.1. Definíciók

4.2.1.1. Determinánsok

valós vagy komplex számok, amelyeket egyértelműen rendelünk hozzá a kvadratikus mátrixokhoz. Egy n-edrendű *determinánst*, amelyet az (n, n) típusú $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ mátrixhoz rendelünk hozzá,

$$\mathrm{D} = \det \mathbf{A} = \det (a_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} , \tag{4.54}$$

a LAPLACE-*féle kifejtési tétel* segítségével rekurzív módon definiáljuk:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \mathbf{A}_{\mu\nu} \qquad (\mu \text{ állandó, a } \mu\text{-edik sor elemei szerinti kifejtés}) \ , \tag{4.55a}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} \mathbf{A}_{\mu\nu} \qquad (\nu \text{ állandó, a } \nu\text{-edik oszlop elemei szerinti kifejtés}) \ . \tag{4.55b}$$

Itt az $\mathbf{A}_{\mu\nu}$ az $a_{\mu\nu}$ elemhez tartozó aldeterminánsz $(-1)^{\mu+\nu}$ -szerese.
Az $\mathbf{A}_{\mu\nu}$-t *előjeles aldeterminánsnak* vagy *algebrai komplementumnak* nevezzük.

4.2.1.2. Aldeterminánsok

Egy n-edrendű determináns $a_{\mu\nu}$ eleméhez tartozó $n-1$-edrendű *aldeterminánsnak* nevezzük azt a determinánst, amelyet az adott determinánsból a μ-edik sor és a ν-edik oszlop törlésével kapunk.

■ Egy negyedrendű determináns kifejtése a harmadik sor elemei szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} .$$

4.2.2. Determinánsok számítási szabályai

A LAPLACE-féle kifejtési tétel miatt a sorokra kimondott tételek érvényesek oszlopokra is.

1. Determináns értékének függetlensége

A determináns értéke független a kifejtés sorának a kiválasztásától.

2. Előjeles aldeterminánsok helyettesítése

Ha egy determináns valamely sor szerinti kifejtésében az elemekhez tartozó előjeles aldetrminánsokat egy másik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal helyettesítjük, akkor nullát kapunk:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \mathbf{A}_{\lambda\nu} = 0 \qquad (\mu, \lambda \text{ állandó; } \lambda \neq \mu) \, . \tag{4.56}$$

Ebből az összefüggésből és a kifejtési tételből kapjuk

$$\mathbf{A}_{\mathrm{adj}} \, \mathbf{A} = \mathbf{A} \, \mathbf{A}_{\mathrm{adj}} = (\det \mathbf{A}) \, \mathbf{E} \, . \tag{4.57}$$

Ebből az *inverz mátrix*ra az alábbi formula adódik

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}_{\mathrm{adj}} \, , \tag{4.58}$$

ahol az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A}_{\mathrm{adj}}$ *adjungált mátrix*át az $\mathbf{A}$ elemeinek az előjeles aldeterminánsaiból képezzük és végül ezt a mátrixot transzponáljuk. Ezt az $\mathbf{A}_{\mathrm{adj}}$ mátrixot nem szabad összecserélni egy komplex mátrix $\mathbf{A}^{\mathbf{H}}$ adjungált mátrixával (4.4).

3. Determináns nullává válása

Egy determináns értéke nulla, ha

a) egy sor csupa nullából áll vagy

b) két sor egymással megegyezik vagy

c) egy sor más sorok lineáris kombinációja.

4. Felcserélés és összeadás

Egy determináns nem változtatja az értékét, ha

a) a sorait az oszlopaival felcseréljük. Ekkor a *főátló*ra való *tükrözés*ről beszélünk, azaz, érvényes

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} , \tag{4.59}$$

b) valamelyik sorhoz egy másik sort hozzáadunk, illetve kivonunk,

c) valamelyik sorhoz egy másik sor többszörösét hozzáadjuk, illetve kivonjuk vagy

d) valamelyik sorhoz másik sorok egy lineáris kombinációját hozzáadjuk, illetve kivonjuk.

5. Sorok cseréjénél fellépő előjelváltás

Két sor felcserélésénél a determináns előjele megváltozik.

6. Determináns szorzása számmal

Egy determinánst az α számmal úgy szorzunk, hogy egyetlen sor elemeit szorozzuk ezzel a számmal. Az (n, n) típusú $\mathbf{A}$ mátrix α számmal való szorzásával szembeni különbség a következő formulában jut kifejezésre:

$$\det (\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A} . \tag{4.60}$$

7. Determinánsok szorzása

Két determináns szorzását mátrixaik szorzására vezetjük vissza:

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = \det (\mathbf{AB}) . \tag{4.61}$$

Mivel $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (lásd (4.59)), érvényes

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = \det (\mathbf{AB}) = \det (\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}) = \det (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \det (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) , \tag{4.62}$$

azaz, vagy sorokat oszlopokkal vagy sorokat sorokkal vagy oszlopokat sorokkal vagy oszlopokat oszlopokkal szorozhatunk skalárisan.

8. Determináns differenciálása

Egy n-edrendű determináns, amelynek az elemei a t paraméter differenciálható függvényei, azaz $a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(t)$, t szerinti deriváltját úgy kapjuk, hogy mindig egy sort differenciálunk és az így létrejött n determinánst összeadjuk.

■ Egy $(3, 3)$ típusú determinánsra kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} .$$

4.2.3. Determinánsok kiszámítása

1. Másodrendű determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} . \tag{4.63}$$

2. Harmadrendű determináns értéke

A SARRUS-*szabály* szerint, amely csak harmadrendű determinánsra érvényes, a kiszámítás az alábbi séma szerint történik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Az első két oszlopot a determinánstól jobbra mégegyszer leírjuk. Ekkor képezzük a kihúzott ferde sorokban álló elemek szorzatának az összegét. Ebből kivonjuk a vonalkázott ferde sorokban álló elemek szorzatának az összegét.

3. n-edrendű determináns értéke

Az n-edrendű determinánst a kifejtési tétel segítségével visszavezetjük n darab $(n-1)$-edrendű determinánsra. Célszerű az egyes determinánsokat a determinánsokra vonatkozó számítási szabályokkal úgy átalakítani, hogy lehetőleg sok nulla eleme legyen.

■
$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \left(-5 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

(4. szabály) (6. szabály) $= 0$ (3. szabály)

$$= -21 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -21 \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) = 147\,.$$

(4. szabály)

Különösen előnyös az n-edrendű determinánsok kiszámításánál, ha a mátrixok rangjának a meghatározásához (lásd 255. old.) hasonlóan alakítjuk át, azaz azok az elemek, amelyek az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ átló alatt vannak, nullával egyenlők. A determináns értéke ekkor egyenlő az átalakított determináns főátlójában álló elemek szorzatával.

4.3. Tenzorok

4.3.1. Koordinátarendszerek transzformációja

1. Lineáris transzformáció

Az

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \tilde{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \tilde{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{4.64}$$

lineáris transzformáció a háromdimenziós térben egy koordinátatranszformációt ír le, ha $\mathbf{A}$ teljes rangú, azaz $\mathbf{A}$ rangja 3. Itt az x_μ és az $\tilde{x}_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3)$ egy és ugyanazon pont koordinátái, két különböző K és $\tilde{K}$ koordinátarendszerre vonatkozóan.

2. Einstein-féle konvenció

A (4.64) helyett

$$\tilde{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{4.65a}$$

is, vagy röviden EINSTEIN szerint

$$\tilde{x}_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \tag{4.65b}$$

írhatjuk, azaz, a kétszeresen előforduló ν indexre összegzünk és az eredményt $\mu = 1, 2, 3$-re felírjuk. A *konvenció* általános: Ha egy kifejezésben egy index kétszer fordul elő, akkor a kifejezést ezen index

minden szóbajövő értékére összegezzük. Ha egy index egy egyenlet kifejezésében csak egyszer fordul elő, például a μ a (4.65b) egyenletben,ez azt jelenti, hogy az illető egyenlet minden olyan értékre érvényes, amelyet az index felvehet.

3. Koordinátarendszer forgatása

Amikor a $\tilde{K}$ derékszögű koordinátarendszer a K-ból forgatással keletkezik, akkor (4.64)-ban a transzformáció mátrixára $\mathbf{A} = \mathbf{D}$ érvényes. Itt a $\mathbf{D} = (d_{\mu\nu})$ ortogonális *forgatásmátrix.* Az $\mathbf{D}$ ortogonális forgatásmátrix tulajdonsága a

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}. \tag{4.66a}$$

A $\mathbf{D}$ mátrix $d_{\mu\nu}$ elemei a régi és az új koordinátatengelyek közötti szögek iránykoszinuszai. A $\mathbf{D}$ forgatásmátrix ortogonalitásából, azaz a

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \mathbf{E}\,, \tag{4.66b}$$

egyenlőségekből következik az elemekre:

$$\sum_{i=1}^{3} d_{\mu i} d_{\nu i} = \delta_{\mu\nu}\,, \qquad \sum_{k=1}^{3} d_{k\mu} d_{k\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)\,. \tag{4.66c}$$

A (4.66c) egyenletek azt fejezik ki, hogy a $\mathbf{D}$ mátrix sor- és oszlopvektorai *ortonormált*ak.
A forgatásmátrix $d_{\mu\nu}$ elemei az EULER-féle szög (lásd 211. old.) segítségével is meghatározhatók. A síkbeli forgatáshoz lásd 190. oldal, a térbelihez lásd 211. oldal.

4.3.2. Tenzorok megadása derékszögű koordinátákkal

1. Definíció

Egy matematikai vagy fizikai $\boldsymbol{T}$ mennyiséget egy K derékszögű koordinátarendszerben 3^n számú transzlációinvariáns $t_{ij\ldots m}$ elemmel írunk le. Itt legyen az $i, j, \ldots, m$ indexek száma pontosan n $(n \geq 0)$. Az indexeket rendezzük és minden index az 1, 2 és 3 értéket veszi fel.
Ha a $t_{ij\ldots m}$ elemekre a K koordinátarendszernek a $\tilde{K}$-ba való transzformálásánál a (4.64) értelmében érvényes a

$$\tilde{t}_{\mu\nu\ldots\rho} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\cdots\sum_{m=1}^{3} a_{\mu i} a_{\nu j} \cdots a_{\rho m} t_{ij\ldots m}\,, \tag{4.67}$$

akkor $\boldsymbol{T}$ egy *n-edrendű tenzor*t jelöl, és $t_{ij\ldots m}$ (legtöbbször számok) elemek rendezett indexekkel a $\boldsymbol{T}$ *tenzor komponensei.*

2. 0-adrendű tenzor

Egy *nulladrendű tenzor*nak csak egy komponense van, azaz, egy skalár. Az értéke minden koordinátarendszerben ugyanaz, ezért nevezzük *skalár invariáns*nak vagy *invariáns skalár*nak.

3. Elsőrendű tenzor

Egy *elsőrendű tenzor*nak 3 komponense van t_1, t_2 és t_3. A transzformációs szabály (4.67) alapján

$$\tilde{t}_\mu = \sum_{i=1}^{3} a_{\mu i} t_i \qquad (\mu = 1, 2, 3)\,. \tag{4.68}$$

Ez azonban a vektorok transzformációs szabálya, azaz, egy vektor egy elsőrendű tenzor.

4. Másodrendű tenzor

Az $n = 2$ esetben a $\boldsymbol{T}$ tenzornak 9 t_{ij} komponense van, amelyek mátrix alakba

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{4.69a}$$

rendezhetők. A transzformációs szabály (4.68) ekkor:

$$\tilde{t}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{\mu i}a_{\nu j}t_{ij} \qquad (\mu,\nu = 1,2,3)\,. \tag{4.69b}$$

Ebből következik, hogy minden másodrendű tenzor mátrixként ábrázolható.

■ **A:** Egy test Θ_g tehetetlenségi nyomatéka egy g egyenesre vonatkozóan, amely áthalad az origón és az irányvektora $\vec{a} = \underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}$, ábrázolható a

$$\Theta_g = \underline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\,\underline{\mathbf{a}} \tag{4.70a}$$

alakban, ahol a

$$\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_{ij}) = \begin{pmatrix} \Theta_x & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{xy} & \Theta_y & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{xz} & -\Theta_{yz} & \Theta_z \end{pmatrix} \tag{4.70b}$$

az úgynevezett *tehetetlenségi tenzor*. Itt a Θ_x , Θ_y és a Θ_z a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok és a Θ_{xy} , Θ_{xz} és a Θ_{yz} a koordinátetengelyekre vonatkozó *centrifugális nyomaték*ok.

■ **B:** Egy elasztikus deformált test terhelési állapotát a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

feszültségtenzor írja le. A σ_{ik} $(i,k = 1,2,3)$ elemek magyarázata: Az elasztikus test egy P pontjában választunk egy kis síkbeli felületelemet, amelynek a normálisa egy jobbsodrású derékszögű koordinátarendszer x_1-tengelyének az irányába mutat. Ezen a felületen az egységnyi felületre jutó anyagtól függő erő egy σ_{11}, σ_{12} és σ_{13} koordinátájú vektor. Hasonlóan magyarázzuk a fennmaradó két tengelyre vonatkozó komponenseket.

5. Számítási szabályok

1. Elemi algebrai műveletek Tenzor számmal való szorzása és az *azonos rendű* tenzorok összeadása és kivonása komponensenként végezhető el, hasonlóan a vektorok és a mátrixok megfelelő műveletéhez.

2. Tenzorszorzat Az $\boldsymbol{A}$, illetve $\boldsymbol{B}$ tenzorok komponensei $a_{ij\ldots}$, illetve $b_{rs\ldots}$, a rendjük m, illetve n. Akkor képezzük a 3^{m+n} számú

$$c_{ij\ldots rs\ldots} = a_{ij\ldots}b_{rs\ldots} \tag{4.72a}$$

skalárt, az $m+n$-edrendű $\boldsymbol{C}$ tenzor komponenseit. A $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ tenzort az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ *tenzorszorzat*ának nevezzük. Érvényes az asszociatív- és diszributív szabály:

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}), \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}\,. \tag{4.72b}$$

3. Diadikus szorzat Az $\boldsymbol{A} = (a_1,a_2,a_3)$ és $\boldsymbol{B} = (b_1,b_2,b_3)$ elsőrendű tenzorok szorzata egy másodrendű tenzor, amelynek az elemei

$$c_{ij} = a_ib_j \qquad (i,j = 1,2,3)\,, \tag{4.73a}$$

azaz, a tenzorszorzatot az

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{4.73b}$$

reprezentálja. Ezt nevezzük az $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{B}}$ vektorok *diadikus szorzat*ának.

4. Redukció Tegyünk egy m-edrendű $(m \geq 2)$ tenzorba két helyre azonos indexet és összegezzünk erre az indexre, így egy $m-2$-rendű tenzort kapunk és ez a tenzor *redukció*ja.

■ A másodrendű $\boldsymbol{C}$ tenzor (4.73a), amelynek az elemei $c_{ij} = a_ib_j$, az $\underline{\mathbf{A}} = (a_1,a_2,a_3)$ és $\underline{\mathbf{B}} = (b_1,b_2,b_3)$ vektorok tenzorszorzatát határozza meg, az i és j indexekre vonatkozó redukció az

$$a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{4.74}$$

skalárt, azaz egy nulladrendű tenzort kapunk. Ez az $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{B}}$ vektorok skalárszorzatát határozza meg.

4.3.3. Speciális tulajdonságú tenzorok

4.3.3.1. Másodrendű tenzorok

1. Számítási szabályok

A másodrendű tenzorokra ugyanazok a számítási szabályok érvényesek, mint a mátrixokra. Különösen fontos az, hogy minden $\boldsymbol{T}$ tenzor előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegeként:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right) . \tag{4.75a}$$

Egy $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$ tenzort *szimmetrikus*nak nevezünk, ha

$$t_{ij} = t_{ji} \qquad \text{minden } i\text{-re és } j\text{-re} \tag{4.75b}$$

érvényes. Ha

$$t_{ij} = -t_{ji} \qquad \text{minden } i\text{-re és } j\text{-re,} \tag{4.75c}$$

akkor a tenzort *ferdén szimmetrikus*nak vagy *antiszimmetrikus*nak nevezzük. A ferdén szimmetrikus tenzor t_{11} , t_{22} és t_{33} elemei nullával egyenlők. A szimmetria és a ferdén szimmetria (antiszimmetria) definíciója átvihető magasabbrendű tenzorokra is, ha ezt a definíciót az indexek meghatározott párjára vonatkoztatjuk.

2. Főtengelytranszformáció

Egy szimmetrikus $\boldsymbol{T}$ tenzorhoz, azaz $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$, mindig létezik egy $\mathbf{D}$ ortogonális transzformáció úgy, hogy a transzformáció után diagonál formát kapunk:

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{t}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{t}_{33} \end{pmatrix} . \tag{4.76a}$$

A $\tilde{t}_{11}$, $\tilde{t}_{22}$ és $\tilde{t}_{33}$ elemeket a $\boldsymbol{T}$ *tenzor sajátértékei*nek nevezzük. A sajátértékek egyenlők λ_1 , λ_2 és λ_3 -mal, amelyek a

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.76b}$$

harmadfokú egyenlet gyökei. A $\mathbf{D}$ transzformációmátrix $\underline{\mathbf{d}}_1$, $\underline{\mathbf{d}}_2$ és $\underline{\mathbf{d}}_3$ oszlopvektorait a sajátértékekhez tartozó *sajátvektorok*nak nevezzük és kielégítik a

$$\boldsymbol{T}\,\underline{\mathbf{d}}_\nu = \lambda_\nu \underline{\mathbf{d}}_\nu \qquad (\nu = 1,2,3) \tag{4.76c}$$

egyenletet. Az irányaik a *főtengelyirányok*, a $\boldsymbol{T}$ transzformációját diagonálalakra *főtengelytranszformáció*nak nevezzük.

4.3.3.2. Invariáns tenzorok

1. Definíció

Egy derékszögű tenzort *invariáns*nak nevezünk, ha a komponensei minden derékszögű koordinátarendszerben azonosak. Ekkor a fizikai mennyiségek mint skalárok és vektorok, amelyek a tenzorok speciális esetei, függetlenek attól a koordinátarendszertől, amelyben meghatároztuk, az értékei sem a K koordinátarendszer forgatásakor sem a koordinátarendszer kezdőpontjának az elmozdításakor nem változnak. Azt mondjuk, hogy *transzlációinvariáns* és *forgatásinvariáns* és általánosan *transzformációinvariáns.*

2. Deltatenzor

Ha egy másodrendű tenzor t_{ij} elemei a KRONECKER-szimbólum, azaz

$$t_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} , \tag{4.77a}$$

akkor a transzformációs szabályból (4.69b) következik a koordinátarendszer forgatásakor a (4.66c) figyelembevételével, hogy

$$\tilde{t}_{\mu\nu} = d_{\mu i} d_{\nu j} = \delta_{\mu\nu} \,, \tag{4.77b}$$

azaz, az elemek *forgatásinvariáns*ok. Ha beillesztjük egy koordinátarendszerbe úgy, hogy a kezdőpont választásától függetlenek, így *transzlációinvariáns*ok is, ekkor a δ_{ij} számokból képezünk egy másodrendű invariáns tenzort az úgynevezett *deltatenzor*t.

3. Epszilontenzor

legyenek az $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ és $\vec{e}_k$ vektorok egy derékszögű koordináterendszer tengelyeinek az irányába mutató egységvektorok, ekkor érvényes a vegyesszorzatra (lásd 185. old.)

$$\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \, (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i,j,k \text{ ciklikus (jobbkéz-szabály),} \\ -1, & \text{ha } i,j,k \text{ anticiklikus,} \\ 0, & \text{egyébként .} \end{cases} \tag{4.78a}$$

Ekkor összesen $3^3 = 27$ elem van, amelyek felfoghatók egy harmadrendű tenzor elemeiként. A koordinátarendszer forgatása esetén a transzformációs szabályból (4.67) következkezik, hogy

$$\tilde{t}_{\mu\nu\rho} = d_{\mu i} d_{\nu j} d_{\rho k} \epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} d_{\mu 1} & d_{\nu 1} & d_{\rho 1} \\ d_{\mu 2} & d_{\nu 2} & d_{\rho 2} \\ d_{\mu 3} & d_{\nu 3} & d_{\rho 3} \end{vmatrix} = \epsilon_{\mu\nu\rho} \,, \tag{4.78b}$$

azaz, az elemek *forgatásinvariáns*ok. Ha beillesztjük egy koordinátarendszerbe úgy, hogy függetlenek legyenek a kezdőpont választásától, így *transzlációinvariáns*ok is, ekkor képezzük az ϵ_{ijk} számok egy harmadrendű invariáns tenzorát, az úgynevezett *epszilontenzor*t.

4. Tenzorinvariánsok

Az invariáns tenzoroknak *tenzorinvariáns*ait kell megkülönböztetnünk. Az utóbbiak a tenzorkomponensek függvényei, amelyeknek az alakja és az értéke a koordinátarendszer forgatásánál ugyanaz marad.

■ **A:** A $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$ tenzor *nyom*ára, amikor a forgatáskor a tenzor a $\tilde{\boldsymbol{T}} = (\tilde{t}_{ij})$ tenzorba megy át, érvényes:

$$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{T}) = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \tilde{t}_{11} + \tilde{t}_{22} + \tilde{t}_{33} \,. \tag{4.79}$$

A $\boldsymbol{T}$ tenzor nyoma a sajátértékek (lásd 252. old.) összege.

■ **B:** A $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$ tenzor determinánsára érvényes:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} & \tilde{t}_{13} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} & \tilde{t}_{23} \\ \tilde{t}_{31} & \tilde{t}_{32} & \tilde{t}_{33} \end{vmatrix} \,. \tag{4.80}$$

A tenzor determinánsa a sajátértékek szorzata.

4.3.4. Tenzorok görbevonalú koordinátarendszerekben

4.3.4.1. Kovariáns és kontravariáns bázisvektorok

1. Kovariáns bázis

A változó

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{e}_x + y(u,v,w)\vec{e}_y + z(u,v,w)\vec{e}_z \tag{4.81a}$$

helyvektorral vezetjük be az u,v,w általános *görbevonalú koordináták*at. Az ehhez a rendszerhez tartozó *koordinátafelülete*ket úgy kapjuk meg, ha az $\vec{r}\,(u,v,w)$-ben az u, v, w független változók egyikét mindig állandónak tartjuk. A szóbajövő térrész minden pontján három koordinátafelület megy át, bármely kettő *koordinátavonal*ban metszi egymást, amelyek a kiszemelt ponton mennek keresztül. A három vektor

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \tag{4.81b}$$

az adott pontban a koordinátavonalak irányába mutat. Ezek képezik a a görbevonalú koordinátarendszer *kovariáns bázisát*.

2. Kontravariáns bázis

A három vektor

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right),\quad \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right),\quad \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right), \tag{4.82a}$$

ahol

$$D=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\quad\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\quad\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right| \tag{4.82b}$$

a függvénydeterminánsa, mindegyike merőleges a koordinátafelületek egyikére a megfigyelt felületelemben és ezek alkotják a görbevonalú koordinátarendszer úgynevezett *kontravariáns bázisát*.

Megjegyzés: Ortogonális görbevnalú koordinátákban, amelyekre

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=0\,,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}=0\,,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}=0\,, \tag{4.83}$$

érvényes, a kovariáns és a kontravariáns bázis irányai egybeesnek.

4.3.4.2. Elsőrendű tenzorok kovariáns és kontravariáns koordinátái

Az EINSTEIN-féle konvenciót alkalmazva, a kovariáns, illetve a kontravariáns bázisvektorok leírhatók az alábbi módon

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{g}_1\,,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{g}_2\,,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}=\vec{g}_3,\quad \text{illetve}\\ \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right)=\vec{g}^{\,1}\,,\quad \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)=\vec{g}^{\,2}\,,\quad \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)=\vec{g}^{\,3}\,.\end{gathered} \tag{4.84}$$

Egy $\vec{v}$ vektor ábrázolása ekkor

$$\vec{v}=V^1\vec{g}_1+V^2\vec{g}_2+V^3\vec{g}_3=V^k\vec{g}_k,\quad \text{illetve}\quad \vec{v}=V_1\vec{g}^{\,1}+V_2\vec{g}^{\,2}+V_3\vec{g}^{\,3}\,. \tag{4.85}$$

A V^k komponensek a kontravariáns koordinátáit, a V_k komponensek a kovariáns koordinátáit jelölik a $\vec{v}$ vektornak. A koordináták közötti összefüggés

$$V^k=g^{kl}V_l,\qquad \text{illetve}\qquad V_k=g_{kl}V^l \tag{4.86a}$$

ahol

$$g_{kl}=g_{lk}=\vec{g}_k\cdot\vec{g}_l,\qquad \text{illetve}\qquad g^{kl}=g^{lk}=\vec{g}^{\,k}\cdot\vec{g}^{\,l}\,. \tag{4.86b}$$

Továbbá érvényes a KRONECKER-szimbólummal a

$$\vec{g}_k\cdot\vec{g}^{\,l}=\delta_{kl}\,, \tag{4.87a}$$

és ebből következik a

$$g^{kl}g_{lm}=\delta_{km}\,. \tag{4.87b}$$

A V^k-ból a V_k-hoz, illetve a V_k-ból a V^k-hoz való átmenetet a (4.86b) alapján *index le-*, illetve *felemelés*nek nevezzük.

Megjegyzés: Derékszögű koordinátarendszerbena kovariáns és a kontravariáns koordináták egybeesnek.

4.3.4.3. Kovariáns, kontravariáns és vegyes koordinátái a másodrendű tenzoroknak

1. Koordinátatranszformáció

Egy derékszögű koordinátarendszerben az $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ és az $\vec{e}_3$ bázisvektorokkal egy $\boldsymbol{T}$ másodrendű tenzor a

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix} \tag{4.88}$$

mátrixszal adható meg. Az

$$\vec{r} = x_1(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_1 + x_2(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_2 + x_3(u_1, u_2, u_3)\vec{e}_3 \tag{4.89}$$

vektorral bevezetjük az u_1, u_2, u_3 görbevonalú koordinátákat. Az új bázist a $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ és a $\vec{g}_3$ vektorokkal jelöljük. Ekkor érvényes a

$$\vec{g}_l = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_l} = \frac{\partial x_1}{\partial u_l}\vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_l}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_l}\vec{e}_3 = \frac{\partial x_k}{\partial u_l}\vec{e}_k\,. \tag{4.90}$$

Ha $\vec{e}_l = \vec{g}^{\,l}$, akkor a $\vec{g}_l$ és a $\vec{g}^{\,l}$ tekinthetők kovariáns és kontravariáns bázisvektoroknak.

2. Lineáris vektorfüggvény

Egy állandó koordinátarendszerben a $\boldsymbol{T}$ tenzor felhasználásával a (4.88) értelmében

$$\vec{w} = \boldsymbol{T}\,\vec{v}\,, \tag{4.91a}$$

ahol

$$\vec{v} = V_k\vec{g}^{\,k} = V^k\vec{g}_k\,, \quad \vec{w} = W_k\vec{g}^{\,k} = W^k\vec{g}_k \tag{4.91b}$$

egy lineáris összefüggést ad meg a $\vec{v}$ és $\vec{w}$ vektorok között. Ezért a (4.91a) egy *lineáris vektorfüggvényt* határoz meg.

3. Vegyes koordináták

Egy új koordinátarendszerbe való átmenetnél a (4.91a) a

$$\tilde{\vec{w}} = \tilde{\boldsymbol{T}}\tilde{\vec{v}} \tag{4.92a}$$

összefüggésbe megy át. Ekkor a $\boldsymbol{T}$ és a $\tilde{\boldsymbol{T}}$ komponensei között létrejön a

$$\tilde{t}_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial x_n}{\partial u_l}t_{mn}\,. \tag{4.92b}$$

összefüggés. Bevezetve a

$$\tilde{t}_{kl} = T^k_{\cdot l} \tag{4.92c}$$

jelölést, a tenzor *vegyes koordinátái*ról beszélünk, ahol a k index a kontravariáns, az l index a kovariáns koordinátákra vonatkozik. A $\vec{v}$ és $\vec{w}$ vektorok komponenseire ekkor érvényes a

$$W^k = T^k_{\cdot l}V^l\,. \tag{4.92d}$$

Ha a $\vec{g}_k$ kovariáns bázist pótoljuk a $\vec{g}^{\,k}$ kontravariáns bázissal, akkor a (4.92b) és a (4.92c)-hoz hasonlóan kapjuk a

$$T_k^{\cdot l} = \frac{\partial x_m}{\partial u_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_n}t_{mn}\,, \tag{4.93a}$$

és a (4.92d) átmegy a

$$W_k = T_k^{\cdot l}V_l \tag{4.93b}$$

összefüggésbe. A $T_k^{\cdot l}$ és a $T^k_{\cdot l}$ vegyes koordináták között a

$$T^k_{\cdot l} = g^{km}g_{ln}T_m^{\cdot n} \tag{4.93c}$$

összefüggés van.

4. Tiszta kovariáns és kontravariáns koordináták

A (4.93b)-ba a V_l helyére helyettesítsük a $V_l = g_{lm}V^m$ összefüggést, ez az alábbit eredményezi

$$W_k = T_k^{\cdot l}g_{lm}V^m = T_{km}V^m\,, \tag{4.94a}$$

és ebből a

$$T_k^{\cdot l}g_{lm} = T_{km} \tag{4.94b}$$

adódik. A T_{km}-t a $\boldsymbol{T}$ tenzor tiszta kovariáns koordinátáinak nevezzük, mivel mindkét index kovariáns helyen áll. Analóg módon kapjuk a tiszta kontravariáns koordinátákat

$$T^{km} = g^{ml}T^k_{\cdot l}\,. \tag{4.95}$$

Explicit előállítások:

$$T_{kl} = \frac{\partial x_m}{\partial u_k}\frac{\partial x_n}{\partial u_l}t_{mn}\,, \tag{4.96a}$$

$$T^{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_l}{\partial x_n}t_{mn}\,. \tag{4.96b}$$

4.3.4.4. Számítási szabályok

A 264. oldalon már megadott szabályok mellett érvényesek a következő számítási szabályok:

1. Összeadás, kivonás Az ugyanolyanrendű tenzorokat, amelyekben az egymásnak megfelelő indexek mindkettőben kovariáns vagy kontravariáns helyen állnak, koordinátánként összeadjuk vagy kivonjuk és az eredmény ugyanolyanrendű tenzor.

2. Szorzás Egy n-edrendű tenzor koordinátáinak a szorzása egy m-edrendű tenzorral mindig egy $m+n$-edrendű tenzort eredményez.

3. Redukció Tegyünk n-edrendű ($n \geq 2$) tenzorba egy kovariáns és egy kontravariáns helyen álló indexbe egymással azonosat és összegezzünk az EINSTEIN-féle konvenciónak megfelelően erre az indexre, ekkor egy $n-2$-edrendű tenzor keletkezik. Ezt a műveletet nevezzük *redukció*nak.

4. Indexfelemelés A tenzorok *indexfelemelés*én a következő műveletet értjük: Mindkét tenzort megszorozzuk, és végül az eredmény redukcióját olymódon végezzük el, hogy az indexek, amelyek szerint redukálunk, különböző tényezőket érint.

5. Szimmetria Egy tenzort szimmetrikusnak nevezünk a kettős kovariáns vagy kettős kontravariáns indexre vonatkozóan, ha ezek felcserélésével nem változik.

6. Ferde szimmetria Egy tenzort ferdén szimmetrikusnak nevezünk a kettős kovariáns vagy kettős kontravariáns indexekre vonatkozóan, ha ezek felcserélésével -1-gyel szorzódik.

■ Az epszilontenzor (lásd 265. old.) ferdén szimmetrikus a kettős tetszőleges kovariáns vagy kontravariáns indexekre vonatkozóan.

4.3.5. Pszeudotenzorok

A fizikában gyakran meghatározott szerepet játszik a tenzorok tükrözési viselkedése. A különböző tükrözési viselkedések miatt különbséget teszünk *poláris* és *axiális vektorok* között (lásd 180. old.), bár matematikailag teljesen azonos módon kezelhetők. A leírásukban különböznek a poláris és az axiális vektorok azáltal, hogy az axiális vektorok a hosszuk és irányuk mellett egy forgásirány által ábrázolhatók. Az axiális vektorokat *pszeudovektorok*nak is nevezzük. A vektorokat, mint tenzorokat megérthetjük a pszeudotenzor fogalmának általános bevezetésével.

4.3.5.1. Ponttükrözés a koordinátarendszer kezdőpontjára

1. Tenzorviselkedés térinverziónál

1. A térinverzió fogalma *Térinverzió*n vagy *koordinátainverzió*n értjük a térpontok *helyvektorainak a tükrözését* a koordinátarendszer kezdőpontjára. A háromdimenziós derékszögű koordinátarendszerben a térinverzió a koordinátatengelyek előjelének a megfordítását jelenti:

$$(x, y, z) \to (-x, -y, -z)\,. \tag{4.97}$$

Ezért egy jobbsodrású koordinátarendszert átvisz egy balsodrású koordinátarendszerbe. Hasonló érvényes más koordinátarendszerekre is. Gömbi koordinátarendszerben a következőt kapjuk:

$$(r, \vartheta, \varphi) \to (-r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi)\,. \tag{4.98}$$

Ennél a tükrözésnél maradnak a vektorok hosszai és a közöttük lévő szög változatlan. Az átmenetet egy lineáris transzformáció közvetíti.

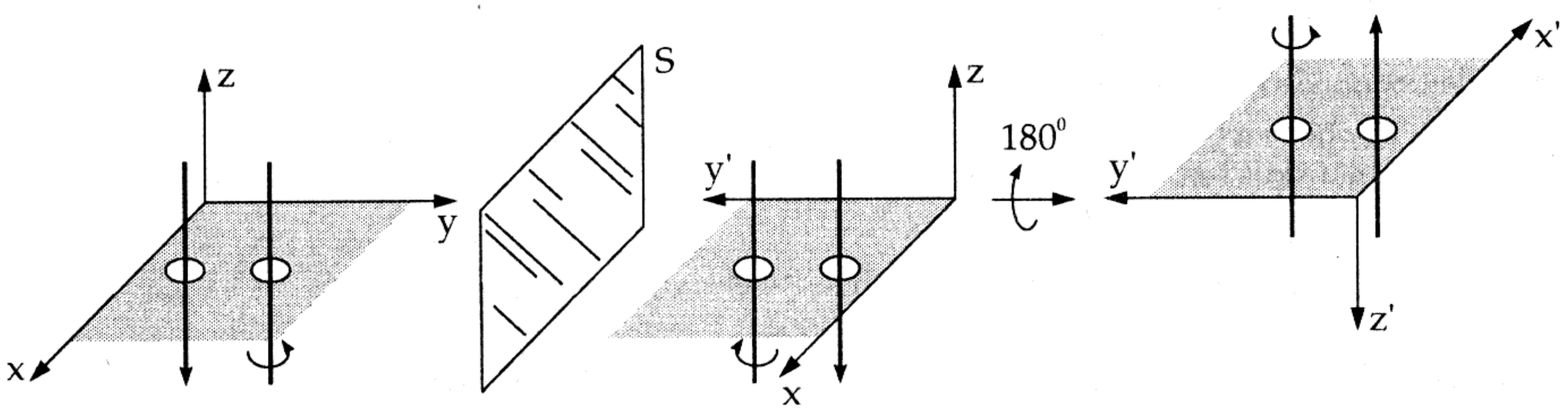
2. Transzformációmátrix Egy lineáris transzformáció $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ transzformációmátrixa a háromdimenziós térben a (4.64) értelmében a térinverziónál a következő tulajdonságú:

$$a_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \quad \det \mathbf{A} = -1\,. \tag{4.99a}$$

Egy n-edrendű tenzor komponenseire a (4.67)-ból következik

$$\tilde{t}_{\mu\nu\cdots\rho} = (-1)^n t_{\mu\nu\cdots\rho}\,. \tag{4.99b}$$

Ez a következőt jelenti: A koordinátarendszer kezdőpontjára való ponttükrözés alatt egy nulladrendű tenzor, egy skalár változatlan marad, egy elsőrendű tenzor, egy vektor, az előjelét változtatja, egy másodrendű tenzor változatlan marad, stb.



4.3. ábra.

2. Geometriai magyarázat
A térinverzió megvalósítását szemléltethetjük egy háromdimenziós derékszögű koordinátarendszerben geometriailag, amit két lépésben mutatunk be **(4.3. ábra)**:

1. Egy koordinátasíkra, például az x, z-síkra való tükrözésnél az x, y, z-koordinátarendszer átmegy az $x, -y, z$-koordinátarendszerbe. Egy jobbsodrású rendszer (lásd 207. old.) egy balsodrású rendszerhez vezet.

2. Az x, y, z-rendszernek az y-tengely körüli 180 °-os forgatása az x, y, z koordinátarendszer kezdőpontjára való tükrözéssel jön létre. Az első lépéshez hasonlítva megtartja a balsodrásúságot.

Eredmény: Térinverziónál egy poláris vektor az *irányát* a térben 180 ° -kal változtatja, egy axiális vektor megtartja a forgásirányát.

4.3.5.2. Pszeudotenzor fogalmának a bevezetése

1. Vektoriális szorzat a térinverziónál Térinverziónál két poláris vektor $\underline{\mathbf{a}}$ és $\underline{\mathbf{b}}$ átmegy a $-\underline{\mathbf{a}}$, illetve a $-\underline{\mathbf{b}}$ vektorokba, azaz, a komponenseikre teljesül az elsőrendű tenzorokra érvényes (4.99b) transzformációs formula. Ha azonban a $\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$ vektoriális szorzatot, mint axiális vektort tekintjük, akkor a koordinátarendszer kezdőpontjára való tükrözésnél $\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{c}}$-t kapunk, azaz az elsőrendű tenzorokra vonatkozó (4.99a) transzformációs formula nem teljesül. Ezért a $\underline{\mathbf{c}}$ axiális vektort *pszeudovektor*nak vagy általánosan *pszeudotenzor*nak mondjuk.

■ Az $\vec{r} \times \vec{v}$, $\vec{r} \times \vec{F}$, $\nabla \times \vec{v} = \mathrm{rot}\vec{v}$ vektorszorzatok, ahol $\vec{r}$ helyvektor, a $\vec{v}$ sebességvektor, az $\vec{F}$ erővektor és ∇ nablaoperátor olyan példák az axiális vektorokra, amelyeknek a tükrözési viselkedésük „hamis" .

2. Skalárszorzat a térinverziónál Az elsőrendű tenzorokra érvényes (4.99b) transzformációs formula megszegését eredményezi a térinverzió alkalmazása egy poláris és egy axiális vektor skalárszorzatára. A skalárszorzat eredménye egy skalár és ez minden koordinátarendszerben ugyanaz az érték, ez egy különös skalár, *pszeudoskalár*nak nevezzük, amelynek az a tulajdonsága van, hogy térinverziónál az előjele megváltozik. A skalár *forgásinvariáns* tulajdonságával a pszeudoskalár nem rendelkezik.

■ A poláris $\vec{r}$ (helyvektor) vektor, illetve a $\vec{v}$ (sebességvektor) skaláris szorzata az $\vec{\omega}$ (szögsebességvektor) axiális vektorral az $\vec{r} \cdot \vec{\omega}$ és az $\vec{v} \cdot \vec{\omega}$ skalárokat eredményezi, amelyek „hamis" tükrözési viselkedést mutatnak, pszeudoskalárok.

3. Vegyesszorzat a térinverziónál A vegyesszorzat $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \cdot \underline{\mathbf{c}}$ (lásd 185. old.), amelyben az $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{c}}$ poláris vektorok a (2.) értelmében egy *pszeudoskalár*, itt az $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})$ egy axiális vektor. A vegyesszorzat előjele megváltozik a térinverziónál.

4. Pszeudovektor és másodrendű ferdén szimmetrikus tenzor Az $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$ és $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$ axiális vektorok tenzorszorzata (4.72a) értelmében egy másodrendű tenzort eredményez,

amelynek a komponensei $t_{ij} = a_i b_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$. Minden másodrendű tenzor előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegeként, (4.79) miatt érvényes

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i) + \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i) \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.100}$$

A ferdén szimmetrikus rész (4.100) éppen az $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})$ vektor komponenseit erdményezi az $\frac{1}{2}$ tényező kivételével, úgy hogy a $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})$ axiális vektor a c_1, c_2, c_3 komponensekkel tekinthető egy másodrendű ferdén szimmetrikus tenzornak is, azaz

$$\boldsymbol{C} = \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.101a}$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{23} &= a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_1 \\ c_{31} &= a_3 b_1 - a_1 b_3 = c_2 \\ c_{12} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_3 \end{aligned}, \tag{4.101b}$$

amelynek a komponensei a másodrendű tenzorokra érvényes (4.99b) transzformációs formulákat kielégítik. Ebből következik, hogy minden axiális vektor (pszeudovektor vagy elsőrendű pszeudotenzor) $\underline{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$ ferdén szimmetrikus másodrendű $\boldsymbol{C}$ tenzor, amelyre érvényes:

$$\boldsymbol{C} = \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.102}$$

5. n-edrendű pszeudotenzorok A pszeudoskalár és a pszeudovektor fogalmának az általánosításában egy n-edrendű pszeudotenzort azzal jellemzünk, hogy a tiszta forgatásnál (a $\mathbf{D}$ forgatásmátrixra $\det \mathbf{D} = 1$) úgy viselkedik, mint egy n-edrendű tenzor, a tükrözési viselkedésnél azonban egy -1 tényezőben különbözik. A magasabbrendű pszeudotenzorokat lásd például [4.2].

4.4. Lineáris egyenletrendszerek

4.4.1. Lineáris rendszerek, elemcsere-eljárás

4.4.1.1. Lineáris rendszerek

Egy *lineáris rendszer* m lineáris egyenletből áll

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + a_m \end{aligned}, \qquad \text{illetve} \quad \underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{a}}. \tag{4.103a}$$

Itt az:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1, \\ a_2, \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1, \\ y_2, \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{4.103b}$$

Az (m, n) típusú $\mathbf{A}$ mátrix $a_{\mu\nu}$ elemei és az $\underline{\mathbf{a}}$ oszlopvektor a_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ komponensei állandók. Az $\underline{\mathbf{x}}$ oszlopvektor x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ komponensei *független*, az $\underline{\mathbf{y}}$ oszlopvektor y_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ komponensei *függő változók*.

4.4.1.2. Elemcsere-eljárás

1. Elemcsere-séma

Ha az (4.103a)-ban az a_{ik} elem nullától különbözik, akkor az úgynevezett *elemcsere-lépés*ben az y_i változó független és az x_k változó függő változó lesz. Az elemcsere-lépés az elemcsere-eljárás alapeleme,

amelynek a segítségével például lineáris egyenletrendszereket és lineáris optimalizálási feladatokat oldhatunk meg. Az elemcsere-lépést a

	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2k}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$							
y_i	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	$\boxed{a_{ik}}$	$\cdots$	a_{in}	a_i
$\vdots$							
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
x_k	α_{i1}	α_{i2}	$\cdots$	α_{ik}	$\cdots$	α_{in}	α_i

,

	x_1	x_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	x_n	1
y_1	α_{11}	α_{12}	$\cdots$	α_{1k}	$\cdots$	α_{1n}	α_1
y_2	α_{21}	α_{22}	$\cdots$	α_{2k}	$\cdots$	α_{2n}	α_2
$\vdots$							
x_k	α_{i1}	α_{i2}	$\cdots$	α_{ik}	$\cdots$	α_{in}	α_i
$\vdots$							
y_m	α_{m1}	α_{m2}	$\cdots$	α_{mk}	$\cdots$	α_{mn}	α_m

(4.104)

sémákkal vezetjük be, ahol a bal oldali séma a (4.103a) rendszernek felel meg.

2. Elemcsere szabályok

A bal oldali sémában kiemelt a_{ik} ($a_{ik} \neq 0$) elemet *főelem*nek (generáló elemnek) nevezzük; ez az elem a főelem oszlopának *főoszlop*nak és sorának *főso*rnak a kereszteződésében áll. Az új jobb oldali séma $\alpha_{\mu\nu}$ és α_μ elemeit a következő *elemcsere-szabályok*kal határozzuk meg:

1. $$\alpha_{ik} = \frac{1}{a_{ik}}\,, \tag{4.105a}$$

2. $$\alpha_{\mu k} = \frac{a_{\mu k}}{a_{ik}} \quad (\mu = 1, \ldots, m; \mu \neq i)\,, \tag{4.105b}$$

3. $$\alpha_{i\nu} = -\frac{a_{i\nu}}{a_{ik}}, \quad \alpha_i = -\frac{a_i}{a_{ik}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n; \nu \neq k)\,, \tag{4.105c}$$

4. $$\alpha_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - a_{\mu k}\frac{a_{i\nu}}{a_{ik}} = a_{\mu\nu} + a_{\mu k}\alpha_{i\nu}\,, \quad \alpha_\mu = a_\mu + a_{\mu k}\alpha_i \text{ (minden } \mu \neq i\text{-re és } \nu \neq k\text{-ra)}. \tag{4.105d}$$

A számolás könnyítéséhez (4. szabály) az $\alpha_{i\nu}$ elemeket az induló sémához $(m+1)$-edik sorként hozzávesszük. Ezeknek az elemcsere-szabályoknak a segítségével további változókat cserélhetünk fel.

4.4.1.3. Lineáris függőség

A (4.103a) lineáris formák pontosan akkor lineárisan függetlenek (lásd 509. old.), amikor az összes y_μ az x_ν független változókkal lecserélhető. A lineáris függetlenség szükséges lesz például a mátrixok rangjának a meghatározásához. Egyébként a függőségi reláció a sémából közvetlenül leolvasható.

■

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
y_1	2	1	1	0	−2
y_2	1	−1	0	0	2
y_3	1	5	2	0	0
y_4	0	2	0	1	0

Három elemcsere után (például $y_4 \to x_4$, $y_2 \to x_1$, $y_1 \to x_3$) kapjuk:

	y_2	x_2	y_1	y_4	1
x_3	−2	−3	1	0	6
x_1	1	1	0	0	−2
y_3	−3	$\boxed{0}$	2	0	10
x_4	0	−2	0	1	0

.

Az $\alpha_{32} = 0$ miatt nincs további elemcserére lehetőség és az $y_3 = 2y_1 - 3y_2 + 10$ függőségi reláció kiolvasható. Az elemcserék más sorrendben való elvégzésénél is maradna egy nem kicserélhető párja a változóknak.

4.4.1.4. Mátrix invertálása

Az (n, n) típusú $\mathbf{A}$ nemszinguláris mátrixnak az $\mathbf{A}^{-1}$ inverz mátrixát n elemcsere-lépés után kapjuk meg. Ezeket az elemcsere-lépéseket az $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}$ rendszerre alkalmazzuk.

■ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

	x_1	x_2	x_3
y_1	3	5	1
y_2	2	4	5
y_3	$\boxed{1}$	2	2

,

	y_3	x_2	x_3
y_1	3	−1	−5
y_2	2	0	$\boxed{1}$
x_1	1	−2	−2

,

	y_3	x_2	y_2
y_1	13	$\boxed{-1}$	−5
x_3	−2	0	1
x_1	5	−2	−2

,

	y_3	y_1	y_2
x_2	13	−1	−5
x_3	−2	0	1
x_1	−21	2	8

.

Az elemek rendezése után: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.4.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

4.4.2.1. Definíció és megoldhatóság

1. Lineáris egyenletrendszer

Az n ismeretlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ m lineáris egyenletéből álló rendszerét

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= a_m \end{aligned}, \qquad \text{illetve röviden} \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}\,, \tag{4.106a}$$

*lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük. Itt az :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1, \\ a_2, \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.106b}$$

Attól függően, hogy az $\underline{\mathbf{a}}$ oszlopvektor eltűnik ($\underline{\mathbf{a}} = \underline{0}$), vagy nem ($\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{0}$), *homogén*, illetve *inhomogén egyenletrendszer*ről beszélünk. Az úgynevezett $\mathbf{A}$ *együtthatómátrix* $a_{\mu\nu}$ elemei a rendszer együtthatói, míg az $\underline{\mathbf{a}}$ oszlopvektor a_μ komponensei a *konstans tagok*.

2. Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Egy lineáris egyenletrendszer megoldható, ha létezik legalább egy $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}}$ vektor, amelyre a (4.106a) azonossággá válik. Egyébként a rendszert nem megoldható. A megoldhatóság és a megoldások száma az $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ kibővített mátrix rangjától függ. A kibővített mátrix az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy kapható, hogy $(n+1)$-edik oszlopként hozzávesszük az $\underline{\mathbf{a}}$ vektor komponenseit. Ekkor érvényes:

1. Általános szabály az inhomogén rendszerre Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}$ inhomogén rendszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})\,. \tag{4.107a}$$

$r = \operatorname{rang}(\mathbf{A})$ esetén a következő esetszétválasztások vannak:

a) $r = n$ esetén a megoldás egyértelmű, (4.107b)

b) $r < n$ esetén a megoldás nem egyértelmű, (4.107c)

azaz $n - r$ ismeretlent, mint paramétert, szabadon választhatunk.

■ **A:**

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2, az $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ *kibővített együtthatómátrix* rangja 3, azaz a rendszernek nincs megoldása.

■ **B:**

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ és $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ mátrixok rangja 3. $r = n = 3$ miatt a megoldás egyértelmű. A megoldás: $x_1 = \frac{10}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_3 = -\frac{2}{7}$.

■ **C:**

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ és $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ mátrixok rangja 2. A rendszer megoldható, azonban az $r < n$ miatt a megoldás nem egyértelmű. $n - r = 2$ ismeretlent szabad paraméternek választhatunk és kapjuk például: $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$, $x_3 = x_4 + \frac{1}{2}$ (x_1, x_4 tetszőleges).

■ **D:**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, azonban a rang $(\mathbf{A}) = 2$, rang $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}}) = 3$ miatt a rendszer nem megoldható.

2. A homogén rendszer triviális megoldása és alaprendszere

a) Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása, az úgynevezett triviális megoldás

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\,. \tag{4.108a}$$

b) Ha az $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ egy nemtriviális megoldás, azaz $\underline{\boldsymbol{\alpha}} \neq \underline{\mathbf{0}}$, akkor az $\underline{\mathbf{x}} = k\underline{\boldsymbol{\alpha}}$, ahol k tetszőleges valós, is megoldása a homogén egyenletrendszernek. Ha van l nemtriviális, lineárisan független megoldás $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_l$, akkor ezek egy úgynevezett alaprendszert (lásd 509. old.) alkotnak, és a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása a következő alakban adható meg

$$\underline{\mathbf{x}} = k_1\underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + k_2\underline{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \cdots + k_l\underline{\boldsymbol{\alpha}}_l \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_l \text{ tetszőleges valós}). \tag{4.108b}$$

Ha a homogén egyenletrendszer $\mathbf{A}$ együtthatómátrixának a rangjára $r < n$ érvényes, ahol n az ismeretlenek száma, akkor létezik a homogén egyenletrendszer megoldásainak egy alaprendszere. Ha $r = n$, akkor a homogén rendszernek csak a triviális megoldása létezik.

Az $r < n$ esetben az alaprendszer meghatározásához $n - r$ ismeretlent szabad paraméternek választhatunk, és a megmaradt ismeretleneket ezekkel fejezzük ki, ekkor a megfelelő r-soros aldeterminánsnem lehet nulla. Az egyenletek és az ismeretlenek átrendezésével ez elérhető. Ha például

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ &\vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \end{aligned},$$

akkor az alapmegoldásokat például a szabad paraméterek következő választásával kapjuk:

	x_{r+1}	x_{r+2}	x_{r+3}	$\cdots$	x_n
1. alapmegoldás	1	0	0	$\cdots$	0
2. alapmegoldás	0	1	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-r)$-edik alapmegoldás	0	0	0	$\cdots$	1.

(4.109)

■ **E:**

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2. Az egyenletrendszert x_1 és x_2-re, megoldjuk és kapjuk: $x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4$, $x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4$ (x_3, x_4 tetszőleges). Alapmegoldások $\underline{\alpha}_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ és $\underline{\alpha}_2 = (-1, -2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

4.4.2.2. Az elemcsere-eljárás alkalmazása

1. Lineáris függvények rendszerének hozzárendelése

A (4.106a) megoldásához az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}$ lineáris egyenletrendszerhez hozzárendeljük az $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}}$ lineáris függvények rendszerét, amelyre alkalmazzuk az elemcsere-eljárást (lásd 270. old.):

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} \tag{4.110a}$$

ekvivalens

$$\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \tag{4.110b}$$

Az $\mathbf{A}$ (m, n) típusú mátrix, az $\underline{\mathbf{a}}$ m komponensű oszlopvektor, azaz, az egyenletek m számának nem kell megegyeznie az ismeretlenek n számával. Az elemcsere-eljárás végén $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{0}}$. Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}$ megoldhatóságát, megoldásainak a számát az utolsó elemcsere-sémából kiolvashatjuk.

2. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

A (4.110a) lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a lineáris függvények hozzárendelt rendszerére (4.110b) a következő két eset egyike érvényes:

1. Eset: Minden y_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ kicserélhető valamelyik x_ν-vel. Ez azt jelenti, hogy a lineáris függvények hozzátartozó rendszere lineárisan független.

2. Eset: Legalább egy y_σ-hoz nincs olyan x_ν, amellyel kicserélhető, azaz érvényes

$$y_\sigma = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m + \lambda_0 \,, \tag{4.111}$$

és $\lambda_0 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a lineáris függvények hozzátartozó rendszere lineárisan függő.

3. Nem megoldható lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszer nem megoldható, ha a fenti 2. esetben $\lambda_0 \neq 0$. Ekkor a rendszer ellentmondást tartalmaz.

■
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - \;\; x_4 &= \;\; 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= \;\; 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
y_1	1	−2	4	−1	−2
y_2	−3	3	−3	4	−3
y_3	2	−3	5	−3	1

3 elemcsere után (például $y_1 \to x_1$, $y_3 \to x_4$, $y_2 \to x_2$) kapjuk:

	y_1	y_2	x_3	y_3	1
x_1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	1
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$	−2
x_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	3.

Az eljárás az 1. esettel ér véget: y_1, y_2, y_3 és x_3 független változók. Legyen $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, és $x_3 = t$ $(-\infty < t < \infty)$ egy paraméter. Ekkor a megoldás $x_1 = 2t + 1$, $x_2 = 3t - 2$, $x_3 = t$, $x_4 = 3$.

4.4.2.3. Cramer-szabály

Abban a fontos speciális esetben, amelyben az ismeretlenek száma az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= a_n \end{aligned} \tag{4.112a}$$

rendszer egyenleteinek a számával megegyezik és az együtthatómátrix determinánsa $\mathrm{D} = \det \mathbf{A}$ nem tűnik el, azaz

$$\mathrm{D} = \det \mathbf{A} \neq 0 \,, \tag{4.112b}$$

az inhomogén egyenletrendszer (4.112a) megoldása explicit módon és egyértelműen adható meg:

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} \,, \quad x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}} \,, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{D}} \,. \tag{4.112c}$$

A D_ν jelöli azt a determinánst, amely a D-ből úgy keletkezik, hogy a D determináns ν-edik oszlopának $a_{\mu\nu}$ elemeit az a_μ állandó tagokkal helyettesítjük, például

$$\mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \,. \tag{4.112d}$$

Ha $\mathrm{D} = 0$ és nem minden $\mathrm{D}_\nu = 0$, akkor a (4.112a) rendszer nem megoldható.Ha a $\mathrm{D} = 0$ és $\mathrm{D}_\nu = 0$ minden $\nu = 1, 2, \ldots, n$ esetén, azaz D és minden D_ν nullával egyenlő, akkor létezik megoldás. A megoldás azonban nem egyértelmű (lásd útmutatás 275. old.).

■
$$\begin{aligned} 2x_1 + \;\; x_2 + 3x_3 &= \;\; 9 \\ x_1 - 2x_2 + \;\; x_3 &= -2 \,. \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= \;\; 7 \end{aligned} \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13 \,,$$

$$\mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13 \,, \quad \mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26 \,, \quad \mathrm{D}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39 \,.$$

Az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van $x_1 = \frac{D_1}{D} = -1$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = 2$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$.

Megjegyzés: A magasabb dimenziós lineáris egyenletrendszerek gyakorlati megoldására a Cramer-szabály nem alkalmas. A számítási igény a növekvő dimenzióval rendkívül gyorsan nő. Ezért alkalmazzuk a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására a GAUSS-féle algoritmust, illetve az elemcsere-eljárást vagy iterációs módszereket (lásd 907. old.).

4.4.2.4. Gauss-féle algoritmus

1. Gauss-féle eliminációs elve Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}$ (4.106a) lineáris egyenletrendszer megoldásához, amely m egyenletből áll és n ismeretlent tartalmaz, alkalmazható a GAUSS-*féle eliminációs elv*. Ez abból áll, hogy egy egyenlet segítségével egy ismeretlent a maradék egyenletekből eltávolítunk (kiküszöbölünk). Ezáltal létrejön $m-1$ egyenletből álló $n-1$ ismeretlent tartalmazó rendszer. Ezt az elvet megfelelő sokszor alkalmazzuk, amíg egy úgynevezett *háromszögmátrixú egyenletrendszer* jön létre, amelyből akkor a megoldás, illetve a kiindulási rendszer megoldhatósága, megoldásainak a száma egyszerűen megkapható, illetve kiolvasható.

2. Gauss-féle lépés Az első GAUSS-féle lépést az $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ kibővített együtthatómátrixon mutatjuk be (lásd 272. old.):

Legyen $a_{11} \neq 0$, amikor ez nem teljesül, akkor a megfelelő egyenleteket felcseréljük. Az alábbi mátrixban

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & a_m \end{array}\right) \tag{4.113a}$$

az 1. sor tagjait rendre megszorozzuk a $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ számokkal és az eredményt a 2., 3.,. . . , m-edik sorhoz hozzáadjuk. Az átalakított mátrix ekkor

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & a'_m \end{array}\right) . \tag{4.113b}$$

Az $(r-1)$-szeri alkalmazása ezeknek a GAUSS-féle lépéseknek a következő alakhoz vezet

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2n} & a'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \ldots & & a''_{3,r+1} & \ldots & a''_{3n} & a''_3 \\ \ldots & \ldots & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a^{(r-1)}_{r,r} & & a^{(r-1)}_{r,r+1} & \ldots & a^{(r-1)}_{rn} & a^{(r-1)}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & a^{(r-1)}_{r+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & a^{(r-1)}_m \end{array}\right) . \tag{4.114}$$

3. Megoldhatóság és megoldások száma A GAUSS-féle lépések elemi átalakítások, ezekkel az $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{a}})$ mátrix rangja és ezzel a rendszer megoldása és a megoldások viselkedése nem változik. A (4.114)-ből a megoldandó inhomogén lineáris egyenletrendszerre az alábbi eseteket kapjuk :

1. eset: A rendszer nem megoldható, ha az $a^{(r-1)}_{r+1}, a^{(r-1)}_{r+2}, \ldots, a^{(r-1)}_m$ számok egyike nullától különbözik.

2. eset: A rendszer megoldható, ha $a^{(r-1)}_{r+1} = a^{(r-1)}_{r+2} = \ldots = a^{(r-1)}_m = 0$. Továbbá megkülönböztetjük:

a) $r = n$: A megoldás egyértelmű.

b) $r < n$: A megoldás nem egyértelmű; $n - r$ ismeretlen mint paraméter szabadon választható.
A megoldhatóság esetében az ismeretleneket szukcesszíve, az utolsó egyenlettel kezdve a (4.114)-hez tartozó háromszögmátrixú egyenletrendszerből meghatározzuk.

■ **A:**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Három GAUSS-lépés után a kibővített együtthatómátrix alakja
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -40 \end{array}\right).$$

A megoldás egyértelmű és a hozzátartozó háromszögmátrixú lineáris egyenletrendszerből következik $x_1 = 0\,,\ x_2 = 1\,,\ x_3 = 0\,,\ x_4 = -1\,.$

■ **B:**
$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Két GAUSS-lépés után a kibővített együtthatómátrix alakja
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -12 & -5 \\ 0 & 5 & 17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Létezik megoldás, de nem egyértelmű. Egy ismeretlent szabad paraméternek választunk, például $x_3 = t$ $(-\infty < t < \infty)$, és kapjuk: $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{9}{5}t\,,\ x_2 = \frac{7}{5} - \frac{17}{5}t\,,\ x_3 = t\,.$

4.4.3. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek

4.4.3.1. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek és lineáris négyzetes közép problémák

1. Túlhatározott egyenletrendszerek

Az
$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} \tag{4.115}$$
lineáris egyenletrendszer derékszögű együtthatómátrixa $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ahol $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $m \geq n$. Az $\mathbf{A}$ mátrix és a jobb oldali $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ vektor ismert. Keressük az $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ vektort. Az $m \geq n$ miatt beszélünk *túlhatározott rendszer*ről. A megoldásának a viselkedése és adott esetben a megoldása meghatározható például az elemcsere-eljárással.

2. Legkisebb négyzetek feladata

Ha (4.115) egy gyakorlati példa matematikai modelljét adja meg ($\mathbf{A}$, $\underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{x}}$ valós), akkor a mérési hibák vagy más hibák alapján az egyes egyenletek (4.115) nem pontosan teljesíthetők, így kapunk egy $\underline{\mathbf{r}} = (r_1, r_2, \ldots, r_m)^{\mathrm{T}}$ maradékvektort, ahol
$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}\,, \qquad \underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{0}}. \tag{4.116}$$
Ebben az esetben az $\underline{\mathbf{x}}$ vektort úgy határozzuk meg, hogy
$$\sum_{i=1}^{m} r_i^2 = \underline{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{r}} = (\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}) = \min \tag{4.117}$$
érvényes legyen, azaz, hogy a *hibák négyzetösszege* minimális legyen. Ez az elv GAUSStól származik. A (4.117)-t *legkisebb négyzetek feladatá*nak nevezzük. Az $\|\underline{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}$ *normát* az $\underline{\mathbf{r}}$ maradékvektor (reziduum) *maradékának vagy a megoldás hibájá*nak nevezzük.

3. Gauss-transzformáció

Az $\underline{\mathbf{x}}$ vektor pontosan akkor megoldása a (4.117)-nak, ha az $\underline{\mathbf{r}}$ maradékvektor ortogonális az $\mathbf{A}$ minden oszlopára. Ez azt jelenti, hogy:
$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}) = \underline{\mathbf{0}} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{b}}\,. \tag{4.118}$$
Az (4.118) egyenlet egy lineáris egyenletrendszert határoz meg, amelynek kvadratikus együtthatómátrixa van. Ezt *normálegyenletek rendszeré*nek nevezzük, amelynek a dimenziója n. A (4.115)-ból az átmenetet a (4.118)-hoz GAUSS-*transzformáció*nak nevezzük. Az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus.

Ha az **A** mátrix rangja n ($m \geq n$ miatt ebben az esetben *teljes rang*ról beszélünk), akkor az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit és reguláris, azaz, normálegyenletek rendszerének teljes rangú **A** esetén egyértelmű megoldása van.

4.4.3.2. A legkisebb négyzetek feladatának numerikus megoldása

1. Cholesky-féle eljárás

Ha az **A** mátrix teljesrangú, akkor az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus és pozitív definit és így a normálegyenletrendszer megoldására a CHOLESKY-féle eljárás (lásd 915. old.) kínálkozik. Sajnos egy numerikusan instabil algoritmusról van szó, ámde azoknál a problémáknál numerikusan jóindulatúan viselkedik, amelyeknél az $\|r\|$ maradék nagy és $\|x\|$ kicsi.

2. Householder-eljárás

Numerikusan jó eljárás a legkisebb négyzetek feladat megoldására az *ortogonalizálási eljárás*, amely az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ faktorizáción alapszik. Alkalmazhatjuk a HOUSEHOLDER-*eljárás*t, ahol a **Q** egy (m, m) típusú ortogonális mátrix és **R** egy (m, n) típusú háromszögmátrix (lásd 253. old.).

3. Regularizálási probléma

Ha rang $(\mathbf{A}) < n$, a normálegyenletrendszer nem oldható meg egyértelműen és az ortogonalizálási eljárás használhatatlan eredményhez vezet. Ekkor a (4.117) átmegy az úgynevezett *regularizálási problémá*ba

$$\underline{\mathbf{r}}^T\underline{\mathbf{r}} + \alpha\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{x}} = \min. \tag{4.119}$$

Itt az $\alpha > 0$ egy *regularizálási paraméter*. A normálegyenletek a (4.119)-hoz:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbf{E})\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\underline{\mathbf{b}}\,. \tag{4.120}$$

Ezen lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $\alpha > 0$-ra pozitív definit és reguláris, azonban egy alkalmas regularizálási paraméter α választása egy nehéz probléma (lásd [4.8]).

4.5. Mátrixok sajátérték-feladata

4.5.1. Általános sajátérték-probléma

Legyen az **A** és **B** két kvadratikus (n, n) típusú mátrix. Elemeik valós vagy komplex számok lehetnek. A feladat, a λ számok és az $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ hozzátartozó vektorok meghatározása,

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{B}\underline{\mathbf{x}}\,, \tag{4.121}$$

fejezi ki az *általános sajátérték-problémát*. A λ számot *sajátérték*nek, az $\underline{\mathbf{x}}$ vektort *sajátvektor*nak nevezzük. Egy sajátvektort csupán egy tényezőtől eltekintve határozunk meg, mivel az $\underline{\mathbf{x}}$ vektorral együtt a $c\underline{\mathbf{x}}$ (c = konstans) is a λ-hoz tartozó sajátvektor. A $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ speciális eset, ahol **E** egy n-edrendű egységmátrix, azaz

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}, \qquad \text{illetve} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{4.122}$$

speciális sajátérték-problémát határoz meg. Sok alkalmazásban előfordul, többnyire szimmetrikus **A** mátrixszal. Ezt a következőkben részletesen tárgyaljuk. Az általános sajátérték-problémára vonatkozóan speciális irodalomra kell utalnunk (lásd [4.1]).

4.5.2. Speciális sajátérték-probléma

4.5.2.1. Karakterisztikus polinom

A (4.122) sajátérték egyenlet egy homogén lineáris egyenletrendszert határoz meg, amelynek pontosan akkor van nemtriviális $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ megoldása, amikor

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,. \tag{4.123a}$$

A $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$ kifejtéséből a következő egyenletet kapjuk

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \qquad (4.123b)$$

A sajátérték-feltétel egy polinomegyenletnek felel meg. Ezt az egyenletet *karakterisztikus egyenlet*nek; a $P_n(\lambda)$ polinomot *karakterisztikus polinom*nak nevezzük. A polinom zérushelyei az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. Érvényes tetszőleges (n, n) típusú kvadratikus $\mathbf{A}$ mátrixra:

1. eset: Az $\mathbf{A}_{(n,n)}$ mátrixnak pontosan n darab $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértéke van, ezek egy n-edfokú polinom n zérushelye, ha ezeket a megfelelő multiplicitásukkal együtt számoljuk. Nemszimmetrikus mátrix sajátértékei lehetnek komplex számok is.

2. eset: Ha az $\mathbf{A}_{(n,n)}$ mátrix összes sajátértéke (n darab) különböző, akkor létezik pontosan n lineárisan független $\underline{\mathbf{x}}_i$ sajátvektor, amelyek a $\lambda = \lambda_i$ -re kapott (4.122) egyenletrendszerek megoldásai.

3. eset: Ha a λ_i egy n_i-szeres sajátérték és az $\mathbf{A}_{(n,n)} - \lambda_i\mathbf{E}$ mátrix rangja r_i , akkor a λ_i-hez tartozó lineárisan független sajátvektorok száma egyenlő az úgynevezett *rangcsökkenés*sel azaz $n - r_i$ -vel. Ez érvényes, ha $1 \le n - r_i \le n_i$, azaz minden valós vagy komplex kvadratikus $\mathbf{A}_{(n,n)}$ mátrixnak legalább egy és legfeljebb n valós vagy komplex lineárisan független sajátvektora van.

■ **A:** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0.$

A sajátértékek $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. A sajátvektorokat a hozzájuk tartozó homogén lineáris egyenletrendszerekből határozzuk meg.

- $\lambda_1 = 0$: $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$.

Az elemcsere-eljárás után, ha az x_1 tetszőleges, akkor a következőt kapjuk: $x_2 = \dfrac{3}{10}x_1$, $x_3 = -2x_1 + 3x_2 = -\dfrac{11}{10}x_1$. Legyen $x_1 = 10$, ekkor a sajátvektor $\underline{\mathbf{x_1}} = C_1\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, ahol C_1 egy tetszőleges konstans.

- $\lambda_2 = 1$: A hozzátartozó homogén rendszer megoldásából kapjuk, hogy x_3 tetszőleges, $x_2 = 0, x_1 = 3x_2 - x_3 = -x_3$. Legyen $x_3 = 1$, ekkor a sajátvektor $\underline{\mathbf{x_2}} = C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ahol C_2 egy tetszőleges konstans.
- $\lambda_3 = -2$: A hozzátartozó homogén rendszer megoldásában x_2 tetszőleges, $x_1 = \dfrac{4}{3}x_2$, $x_3 = -4x_1 + 3x_2 = -\dfrac{7}{3}x_2$. Legyen $x_2 = 3$, ekkor a sajátvektor $\underline{\mathbf{x_3}} = C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, ahol C_3 egy tetszőleges konstans.

■ **B:** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0\,.$

A sajátértékek $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

- $\lambda_1 = 2$: Az x_3 tetszőleges, $x_2 = -x_3, x_1 = x_3$ és legyen $x_3 = 1$. Ezzel a sajátvektor $\underline{\mathbf{x_1}} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ahol C_1 egy tetszőleges konstans.
- $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$: Az x_2, x_3 tetszőleges, $x_1 = -x_3$. Két lineárisan független sajátvektor létezik például $x_2 = 1, x_3 = 0$-ra és $x_2 = 0$, $x_3 = 1$-re: $\underline{\mathbf{x_2}} = C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{x_3}} = C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ahol C_2, C_3 tetszőleges konstansok.

4.5.2.2. Valós szimmetrikus mátrixok, hasonlósági transzformáció

A speciális sajátérték-problémára (4.122), amelyben az **A** mátrix valós szimmetrikus mátrix, a következő tételek érvényesek:

1. A sajátérték-probléma tulajdonságai

1. A sajátértékek száma Az **A** mátrixnak pontosan n valós sajátértéke λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ van, amelyeket a megfelelő multiplicitásukkal számolunk.

2. A sajátvektorok ortogonalitása A különböző $\lambda_i \neq \lambda_j$ sajátértékekhez tartozó $\underline{\mathbf{x}}_i$ és $\underline{\mathbf{x}}_j$ sajátvektorok ortogonálisak, azaz érvényes az

$$\underline{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}}_j = 0. \tag{4.124}$$

3. p-szeres sajátértékkel rendelkező mátrix Egy p-szeres $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p$ sajátértékhez létezik p lineárisan független sajátvektor $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_p$. A (4.122) miatt ezek minden nemtriviális lineáris kombinációja a λ-hoz tartozó sajátvektor. Ezekből a GRAM–SCHMIDT-féle ortogonalizálási eljárással kiválasztható p ortogonális sajátvektor. Összefoglalva: Az **A** mátrixnak pontosan n valós ortogonális sajátvektora van.

4. Gram–Schmidt-féle ortogonalizálási eljárás Legyen V_n egy tetszőleges n-dimenziós EUKLIDÉSZ-i vektortér. Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n, \in V_n$ vektorok legyenek lineárisan függetlenek. Ekkor létezik az $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n, \in V_n$ vektoroknak egy ortogonális rendszere, amelyeket a következő módon konstruálhatunk meg:

$$\underline{y}_1 = \underline{x}_1\,, \underline{y}_k = \underline{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\underline{x}_k\,, \underline{y}_i)}{(\underline{y}_i\,, \underline{y}_i)}\, \underline{y}_i \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)\,. \tag{4.125}$$

Utalások:

1. Az $(\underline{x}_k, \underline{y}_i)$ az $\underline{x}_k$ és $\underline{y}_i$ vektorok skalárszorzatát jelöli.

2. Az $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n$ vektorok ortogonális rendszeréből megkapjuk az $\underline{\tilde{x}}_1, \underline{\tilde{x}}_2, \ldots, \underline{\tilde{x}}_n$ ortogonális rendszert a következőképpen $\underline{\tilde{x}}_1 = \dfrac{\underline{y}_1}{\|\underline{y}_1\|}$, $\underline{\tilde{x}}_2 = \dfrac{\underline{y}_2}{\|\underline{y}_2\|}, \ldots,$ $\underline{\tilde{x}}_n = \dfrac{\underline{y}_n}{\|\underline{y}_n\|}$, ahol $\|y_i\| = \sqrt{(\underline{y}_i, \underline{y}_i)}$ az $\underline{y}_i$ vektor EUKLIDESZi normáját jelöli.

■ $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ebből következik:

$$\underline{y}_1 = \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\tilde{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \underline{y}_2 = \underline{x}_2 - \frac{(\underline{x}_2, \underline{y}_1)}{(\underline{y}_1, \underline{y}_1)}\, \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\underline{y}_3 = \underline{x}_3 - \frac{(\underline{x}_3, \underline{y}_1)}{(\underline{y}_1, \underline{y}_1)}\, \underline{y}_1 - \frac{(\underline{x}_3, \underline{y}_2)}{(\underline{y}_2, \underline{y}_2)}\, \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\tilde{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Főtengelytranszformáció, hasonlósági transzformáció

Minden valós szimmetrikus **A** mátrixhoz létezik egy **U** ortogonális mátrix és egy **D** diagonálmátrix, amellyel

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\,. \tag{4.126}$$

Itt a **D** diagonálelemei az **A** sajátértékei, és az **U** oszlopai a hozzájuk tartozó normált sajátvektorok. A (4.126)-ből közvetlenül következik

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}\,. \tag{4.127}$$

A (4.127) egy *főtengelytranszformáció*. Ezzel az **A** mátrixot diagonálformába visszük át (lásd 252. old.). Ha az **A** kvadratikus mátrixot a reguláris **G** kvadratikus mátrixszal a

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{A}} \tag{4.128}$$

előírással transzformáljuk, akkor egy *hasonlósági transzformáció*ról beszélünk. Az $\mathbf{A}$ és $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixokat hasonlóknak nevezzük, és érvényes:

1. Az $\mathbf{A}$ és $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixoknak ugyanazok a sajátértékei, azaz, hasonlósági transzformációval a sajátértékek nem változnak.

2. Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $\tilde{\mathbf{A}}$ is szimmetrikus, a $\mathbf{G}$ ortogonális:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{G} \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} = \mathbf{E}\,. \tag{4.129}$$

A (4.129) összefüggést *hasonlósági transzformáció*nak nevezzük. Ez a transzformáció a sajátértékeket és a szimmetriát megtartja. A (4.127) azt jelenti, hogy egy szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális hasonlósági transzformációval diagonalizálható, azaz a $\mathbf{D}$ valós diagonálmátrixba transzformálható.

■ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$. A sajátértékek $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 2$.

• $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: A hozzátartozó homogén egyenletrendszerből kapjuk, hogy x_1 és x_2 tetszőleges, $x_3 = -x_1 - x_2$. Az $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 0$,$x_2 = 1$ választással két lineárisan független sajátvektort kapunk, az $\underline{\mathbf{x}}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\underline{\mathbf{x}}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorokat, ahol C_1 és C_2 tetszőleges konstansok.

• $\lambda_3 = 2$: Az x_1 tetszőleges és $x_2 = x_1$, $x_3 = x_1$, az $x_1 = 1$ választással a sajátvektor $\underline{\mathbf{x}}_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ahol C_3 egy tetszőleges konstans. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

4.5.2.3. Kvadratikus alakok főtengelytranszformációja

1. Valós kvadratikus alak, definíció

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók egy valós kvadratikus alakja Q a következő alakú

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}\,. \tag{4.130}$$

Itt az $\underline{\mathbf{x}} = (x_1; x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a változók vektora, és az $\mathbf{A} = (a_{ij})$ egy valós szimmetrikus mátrix.
A Q alakot *pozitív definit*nek vagy *negatív definit*nek nevezzük, ha csak pozitív vagy negatív értéket vesz fel, és a nulla értéket csak az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ értékrendszerre veszi fel.
A Q alakot *pozitív vagy negatív szemidefinit*nek nevezzük, ha az értékei ugyanolyan előjelűek, a nulla értéket azonban több különböző értékrendszerre is felveheti.
A Q viselkedésének megfelelően a hozzátartozó valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot is pozitív vagy negatív definitnek, illetve szemidefinitnek nevezzük.

2. Valós pozitív definit kvadratikus alak, tulajdonságok

1. Egy Q valós pozitív definit kvadratikus alakban a hozzátartozó valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix minden főátlóban álló eleme pozitív, azaz

$$a_{ii} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{4.131}$$

A pozitív definitségnek a (4.131) szükséges feltétele.

2. Egy Q valós kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha a hozzátartozó $\mathbf{A}$ mátrix összes sajátértéke pozitív.

3. Egy $Q = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}$ valós kvadratikus alakot, amelyben a hozzátartozó $\mathbf{A}$ mátrix rangja r, az

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\underline{\tilde{\mathbf{x}}} \tag{4.132}$$

lineáris transzformációval tiszta négyzetes tagok összegébe, az úgynevezett *normálalak*ba

$$Q = \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^{r} k_i \tilde{x}_i^{\,2} \tag{4.133}$$

lehet átvinni, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_r$ tetszőleges előre megadott pozitív értékek.

3. A normálalak előállítása

A (4.133) transzformáció gyakorlati megvalósítása a (4.127) főtengelytranszformációból következik. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a koordinátarendszert alávetjük az **A** mátrix sajátvektoraiból álló **U** ortogonális mátrixszal történő forgatásnak úgy, hogy a

$$Q = \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{x}_i^{\,2}\,. \tag{4.134}$$

alakot kapjuk, amelyben az **L** az **A** mátrix diagonálmátrixa. Ez befejeződik a **D** diagonálmátrixszal történő forgatással, amelyben a diagonálelemek $d_i = \sqrt{\dfrac{k_i}{\lambda_i}}$. A teljes transzformáció a

$$\mathbf{C} = \mathbf{UD}\,. \tag{4.135}$$

mátrixszal írható le, és kapjuk:

$$\begin{aligned} Q &= \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{UD}\underline{\tilde{\mathbf{x}}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{UD}\underline{\tilde{\mathbf{x}}}) = \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{AUD})\underline{\tilde{\mathbf{x}}} \\ &= \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{LD}\underline{\tilde{\mathbf{x}}} = \underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\underline{\tilde{\mathbf{x}}}\,. \end{aligned} \tag{4.136}$$

4.5.2.4. Útmutatás a sajátértékek numerikus meghatározásához

1. A sajátértékek kiszámolhatók a karakterisztikus egyenlet (4.123b) gyökeiként (ld. például 278. old.). Ehhez az **A** mátrix karakterisztikus polinomjának az a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ együtthatóit meg kell határozni. Ezek a közelítések azonban nem térnek ki arra, hogy egy rendkívül instabil algoritmust mutatnak be, azaz, az a_i együtthatók kis változása a λ_j zérushelyek nagyon nagy változásához vezetnek.

2. A szimmetrikus sajátérték-probléma numerikus megoldására számos algoritmust dolgoztak ki. Két eljárásosztályt különböztetünk meg (lásd [4.8]):

a) Transzformációs eljárások, például JACOBI-eljárás, HOUSEHOLDER-tridiagonalizálás, QR-algoritmus;

b) Iterációs eljárások, például vektoriteráció, RAYLEIGH–RITZ-algoritmus, inverz iteráció, LÁNCZOS-eljárás, felezési eljárás.

4.5.3. Szinguláris értékek szerinti felbontás

1. Szinguláris értékek és szinguláris vektorok Ha az **A** egy (m, n) típusú valós mátrix, amelynek a rangja r, akkor az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ mátrix λ_ν sajátértékeinek a pozitív négyzetgyökeit, a $d_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ számokat az **A** mátrix *szinguláris értékei*nek nevezzük. Az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ mátrixnak a hozzájuk tartozó $\underline{\mathbf{u}}_\nu$ sajátvektorait az **A** mátrix *jobb oldali szinguláris vektorai*nak, az $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ mátrixnak a hozzájuk tartozó $\underline{\mathbf{v}}_\nu$ sajátvektorait az **A** mátrix *bal oldali szinguláris vektorai*nak nevezzük. Az $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ mátrixnak ugyanaz az r darab nullától különböző λ_ν sajátértéke van, mint az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ mátrixnak:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}}_\nu = \lambda_\nu \underline{\mathbf{u}}_\nu\,, \quad \mathbf{AA}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}}_\nu = \lambda_\nu \underline{\mathbf{v}}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{4.137a}$$

Ezenkívül a jobb- és bal oldali szinguláris vektorok közötti összefüggés

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}}_\nu = d_\nu \underline{\mathbf{v}}_\nu\,, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}}_\nu = d_\nu \underline{\mathbf{u}}_\nu\,. \tag{4.137b}$$

Érvényes: Egy r rangú (m, n) típusú **A** mátrixnak van r pozitív d_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ szinguláris értéke. Ezekhez létezik r ortonormált $\underline{\mathbf{u}}_\nu$ jobb oldali szinguláris vektor és r ortonormált $\underline{\mathbf{v}}_\nu$ bal oldali szinguláris vektor. Ezenkívül létezik a nulla szinguláris értékekhez $n - r$ ortonormált $\underline{\mathbf{u}}_\nu (\nu = r + 1, \ldots, n)$ jobb oldali szinguláris vektor és $m - r$ ortonormált $\underline{\mathbf{v}}_\nu$ $(\nu = r + 1, \ldots, m)$ bal oldali szinguláris vektor.

Egy (m,n) típusú mátrixnak eszerint van n jobb oldali szinguláris vektora és m bal oldali szinguláris vektora, amelyek összefoglalhatók ortogonális mátrixokba (lásd 256. old.)

$$\mathbf{U} = (\underline{\mathbf{u_1}}, \underline{\mathbf{u_2}}, \ldots, \underline{\mathbf{u_n}}), \quad \mathbf{V} = (\underline{\mathbf{v_1}}, \underline{\mathbf{v_2}}, \ldots, \underline{\mathbf{v_m}}). \tag{4.138}$$

2. Szinguláris értékek szerinti felbontás Az alábbi előállítást

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}, \tag{4.139a}$$

ahol

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & d_2 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & & \cdots & d_r & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} r \text{ sor} \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} m-r \text{ sor} \end{array} \tag{4.139b}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r \text{ oszlop}} \quad \underbrace{\qquad}_{n-r \text{ oszlop}}$$

az $\mathbf{A}$ mátrix *szinguláris értékek szerinti felbontásának* nevezzük. Az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix is, mint az $\mathbf{A}$ mátrix (m,n) típusú és az első r diagonálelemen $a_{\nu\nu} = d_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$ kívül csak nullát tartalmaz. Itt a d_ν számok az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékei.

3. Alkalmazás A szinguláris értékek szerinti felbontás felhasználható az (m,n) típusú $\mathbf{A}$ mátrix rangjának a meghatározásához és az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ (lásd 276. old.) túlhatározott lineáris egyenletrendszer közelítő megoldásához az úgynevezett *regularizációs eljárással*, azaz a

$$\|\mathbf{A}\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{b}}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i\right]^2 + \alpha\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \min!\,, \tag{4.140}$$

feladat megoldásához, ahol $\alpha > 0$ egy regularizációs paraméter.

5. Algebra és diszkrét matematika

5.1. Logika

5.1.1. Ítéletkalkulus

1. Ítélet

Egy ítélet bizonyos helyzetek visszatükröződése természetes vagy mesterséges nyelvű mondat formájában. A kétértékűség elve (többértékű vagy fuzzy logika 5.9.1.) kimondja, hogy egy ítélet igazságértéke „igaz" vagy „hamis", amelyet T true (vagy 1) illetve F false (vagy 0) betűvel jelölünk. Az igazságértékeket ítéletkalkulusbeli állandóknak tekintjük.

2. Összetett ítéletek

Az ítéletkalkulus az összetett ítéletek igazságértékét az egyes ítéletek igazságértékének függvényében vizsgálja. Az ítéletkalkulus kizárólag extenzionális összetett ítéletekkel foglalkozik, ahol az összetett ítélet igazságértéke csakis a részítéletek igazságértékétől és az azokat összekapcsoló operátoroktól függ. Rögzítjük a klasszikus operátorok által meghatározott relációk nevét és jelentését:

„NEM A" $(\neg A)$, (5.1) „A ÉS B" $(A \wedge B)$, (5.2)

„A VAGY B" $(A \vee B)$, (5.3) „HA A, AKKOR B" $(A \Rightarrow B)$ (5.4)

és

„A AKKOR ÉS CSAKIS AKKOR, HA B" $(A \Leftrightarrow B)$, (5.5)

Itt a VAGY mindig inkluzív VAGY jelentésű. Az implikáció esetében az $A \Rightarrow B$ operátorra az alábbi szóhasználatok is általánosak:

A implikálja B-t, B szükséges A-hoz továbbá

A feltétele B-nek.

3. Igazságtáblázatok

Az operátorokhoz az alábbi igazságtáblázatokat mint igazságfüggvényeket rendelhetjük, ahol A és B szimbólumok olyan változók, amelyek csak T és F értéket vehetnek fel (ítéletváltozók):

5.1. táblázat. Az ítéletkalkulus igazságtáblázatai

Negáció

A	$\neg A$
F	T
T	F

Konjunkció

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Diszjunkció

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Implikáció

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Ekvivalencia

A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

4. Az ítéletkalkulus kifejezései

Az egyváltozós (negáció) és kétváltozós (konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia) relációk alapján bonyolult összetett ítéletek, kifejezések építhetőek fel. Ezeket a kifejezéseket induktív úton definiáljuk:

1. Minden állandó és változó kifejezés. (5.6)

2. Ha A és B kifejezés, akkor a következők is: $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$. (5.7)

Az írásmód egyszerűsítése érdekében a külső zárójeleket elhagyjuk, és a prioritásokat rögzítjük. Az alábbi felsorolásban minden operátor erősebben köt mint a sorrendben később következő:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow .$$

Gyakran az „$\neg A$" helyett „$\overline{A}$" -t írunk, illetve az $\wedge$ operátort elhagyjuk. Például a $((A \vee (\neg B)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee C))$ kifejezést egyszerűsítve így írhatjuk:

$$A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C .$$

5. Igazságfüggvények

Tulajdonítsunk a kifejezés minden ítéletváltozójának egy igazságértéket. Ezt a kifejezés egyik lehetséges behelyettesítésének mondjuk. Az operátorok igazságtáblázatai segítségével a kifejezés minden behelyettesítéséhez egy igazságértéket rendelhetünk. Például a fent megadott kifejezés egy háromváltozós igazságfüggvényt (BOOLE-függvényt) reprezentál. (lásd 5.7., **5.7.5.**).

A	B	C	$A \vee \overline{B}$	$AB \vee C$	$A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C$
F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

■ Minden összetett ítélet ílymódon egy n-változós igazságfüggvényt ad meg, vagyis az igazságértékek minden n-eséhez egy igazságértéket rendel. Így az n-változós igazságfüggvények száma 2^{2^n}, például két változóra ez a szám 16.

6. Az ítéletkalkulus alaptörvényei

Két összetett ítéletet akkor mondunk logikailag ekvivalensnek vagy értékazonosnak, ha ugyanazt az igazságfüggvényt reprezentálják. Ennek következtében összetett ítéletek logikai ekvivalenciája az igazságtáblázatok útján ellenőrizhető. Például $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C = B \vee C$, vagyis az $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C$ explicite nem függ az A változótól, amint az a fenti igazságtáblázatból már kiderült. Az ítéletkalkulusra az alábbi alapszabályok érvényesek:

1. Asszociativitás

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) , \qquad (5.8a) \qquad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) . \qquad (5.8b)$$

2. Kommutativitás

$$A \wedge B = B \wedge A , \qquad (5.9a) \qquad A \vee B = B \vee A . \qquad (5.9b)$$

3. Disztributivitás

$$(A \vee B)C = AC \vee BC , \qquad (5.10a) \qquad AB \vee C = (A \vee C)(B \vee C) . \qquad (5.10b)$$

4. Abszorpciós azonosságok

$$A(A \vee B) = A , \qquad (5.11a) \qquad A \vee AB = A . \qquad (5.11b)$$

5. Idempotencia

$$AA = A , \qquad (5.12a) \qquad A \vee A = A . \qquad (5.12b)$$

6. A harmadik kizárása

$$A\overline{A} = \mathrm{F} , \qquad (5.13a) \qquad A \vee \overline{A} = \mathrm{T} . \qquad (5.13b)$$

7. A de Morgan-azonosságok

$$\overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B} , \qquad (5.14a) \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A}\,\overline{B} . \qquad (5.14b)$$

8. A T és F logikai értékekre vonatkozó szabályok

$$AT = A\,, \qquad (5.15a) \qquad A \vee F = A\,, \qquad (5.15b)$$

$$AF = F\,, \qquad (5.15c) \qquad A \vee T = T\,, \qquad (5.15d)$$

$$\overline{T} = F\,, \qquad (5.15e) \qquad \overline{F} = T\,. \qquad (5.15f)$$

9. A kettős tagadás szabálya

$$\overline{\overline{A}} = A\,. \qquad (5.16)$$

Az implikáció és az ekvivalencia igazságtáblázataiból látható, hogy ezek más operátorokkal az alábbi egyenletek alapján kifejezhetőek:

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B \qquad (5.17a) \qquad A \Leftrightarrow B = AB \vee \overline{A}\,\overline{B} \qquad (5.17b)$$

Ezeket a szabályokat felhasználjuk majd összetett ítéletek átalakítására (egyszerűsítésére).

■ A $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C = B \vee C$ egyenlet az alábbiak szerint igazolható: $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C = \overline{A \vee \overline{B} \vee AB \vee C} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}} \vee AB \vee C = \overline{A}B \vee AB \vee C = (\overline{A} \vee A)B \vee C = TB \vee C = B \vee C\,.$

10. További átalakítások

$$A(\overline{A} \vee B) = AB\,, \qquad (5.18a) \qquad A \vee \overline{A}B = A \vee B\,, \qquad (5.18b)$$

$$(A \vee C)(B \vee \overline{C})(A \vee B) = (A \vee C)(B \vee \overline{C})\,, \qquad (5.18c) \qquad AC \vee B\overline{C} \vee AB = AC \vee B\overline{C}\,. \qquad (5.18d)$$

11. A NAND és NOR függvények Minden igazságfüggvény reprezentálható egy összetett ítélettel. Mégpedig a (5.17a) és (5.17b) miatt az implikáció és ekvivalencia elkerülésével. Tekintettel a DE MORGAN-azonosságokra vagy a konjunkció vagy a diszjunkció az igazságfüggvények előállításánál elhagyható. Sőt, létezik olyan kétargumentumú igazságfüggvény, amely egyedül elegendő valamennyi igazságfüggvény reprezentációjára. Ez a SHEFFER-függvény vagy NAND-függvény (jele |), és a PIERCE-függvény vagy NOR-függvény (jele ↓), amelyeket a mellékelt igazságtáblázatok definiálnak. A konjunkcióra illetve a diszjunkcióra vonatkozó igazságtáblázatok és ezen táblázatok összehasonlítása ad magyarázatot a NAND-függvény (NEM-ÉS) illetve a NOR-függvény (NEM-VAGY) elnevezésre.

5.2. táblázat.
NAND-függvény

A	B	$A\|B$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

5.3. táblázat.
NOR–függvény

A	B	$A \downarrow B$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

7. Tautológiák, matematikai végeredmények

Egy összetett ítélet akkor általános érvényű más szóval tautológia, ha a T értékű igazságfüggvénnyel logikailag ekvivalens. A matematikai végeredmények az ítéletkalkulus szabályait követik. Így például az általános érvényű

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}\,. \qquad (5.19a)$$

kifejezést felcserélhetőségi szabálynak nevezzük. Ezt az

$$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \qquad (5.19b)$$

formában felírt szabályt a következőképen magyarázhatjuk: Azt a tényt, hogy az A-ból következik B úgy is megmutathatjuk, hogy $\overline{B}$-ből következik $\overline{A}$ tényt igazoljuk. Az indirekt bizonyítás azon alapszik, hogy B állítást hamisnak feltételezve — amennyiben A igaz ellentmondásra jutunk. Formálisan ez az elv az ítéletkalkulus szabályai segítségével különbözőképpen írható le:

$$A \Rightarrow B = A\overline{B} \Rightarrow \mathrm{F} \qquad (5.20a) \qquad \text{vagy} \qquad A \Rightarrow B = A\overline{B} \Rightarrow B \qquad (5.20b)$$

$$\text{vagy} \qquad A \Rightarrow B = A\overline{B} \Rightarrow \overline{A}. \qquad (5.20c)$$

5.1.2. A predikátumkalkulus kifejezései

A matematikai logika megalapozására az ítéletkalkulusnál nagyobb kifejezőerejű logikára van szükség. Arra a célra, hogy matematikai objektumok tulajdonságait és a közöttük lévő relációkat leírhassuk a predikátumkalkulus szolgál.

1. Predikátumok

A vizsgált objektumokat egy X halmazba, például a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazába fogjuk össze. Az egyedi elemek tulajdonságait (például „n prímszám") és két elem közötti kapcsolatokat (például „m kisebb mint n") predikátumoknak nevezzük. Az X halmazon értelmezett n-változós predikátum egy P: $X^n \to \{\mathrm{F},\mathrm{T}\}$ leképezés, amely az egyedi elemek minden n-eséhez egy igazságértéket rendel. A természetes számokra fent bevezetett két predikátum egy-, illetve kétváltozós.

2. Kvantorok

A predikátumkalkulus jellegzetessége a kvantorok alkalmazása. Ezek az univerzális $\forall$, és az egzisztenciális $\exists$ kvantor. Legyen P az X halmazon értelmezett egyváltozós predikátum, ekkor azt a kijelentést, hogy „minden X-beli x elemre igaz $P(x)$ " rövidítve az $\forall\ x\ P(x)$ formában, míg a „létezik olyan X-beli x, amelyre igaz P(x) " a $\exists\ x\ P(x)$ formában írható le. A kvantifikáció útján az egyváltozós predikátumokból ítéletek lesznek. Legyen $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza és P az „n prímszám" egyváltozós predikátum, ekkor a $\forall\ n\ P(n)$ hamis de a $\exists\ n\ P(n)$ igaz állítás.

3. A predikátumkalkulus kifejezései

Általánosságban a predikátumkalkulus kifejezéseit ismét induktív módon definiáljuk.

1. Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ elemi változók és P egy n-változós predikátumváltozó, ekkor a

$$P(x_1, \ldots, x_n) \text{ kifejezést (elemi formulát) alkot.} \qquad (5.21)$$

2. Amennyiben A és B kifejezések, akkor kifejezést alkotnak az alábbiak is:

$$(\neg A)\,,\ (A \wedge B)\,,\ (A \vee B)\,,\ (A \Rightarrow B)\,,(A \Leftrightarrow B)\,,\ (\forall\ x\ A) \text{ és } (\exists\ x\ A)\,. \qquad (5.22)$$

Amennyiben az ítéletváltozókat független változó nélküli predikátumváltozóknak tekintjük, akkor kitűnik, hogy az ítéletkalkulus a predikátumlogika részét alkotja. Egy kifejezésben szereplő x egyedi változót lekötöttnek mondjuk, ha az x egy kvantor változója ($\forall\, x$ vagy $\exists\, x$), és ennek hatáskörében van. Különben x ebben a kifejezésben szabad változó. Az olyan predikátumlogikai kifejezéseket, amelyekben nem szerepel szabad változó zárt formuláknak nevezzük.

4. A predikátumkalkulus kifejezéseinek interpretációja

Egy predikátumkalkulusbeli kifejezés interpretációja

- egy halmaz (tartomány)
- és minden n-változós predikátumváltozóhoz egy n-változós predikátum kijelölését jelenti.

Így egy zárt formula interpretációja egy ítélet. Ha a predikátumkalkulusbeli kifejezés szabad változókat is tartalmaz, akkor ennek a kifejezésnek egy interpretációja egy a halmazon értelmezett reláció.

■ Legyen P a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán a $\leq$ relációt leíró kétváltozós predikátum.

• Ekkor $P(x, y)$ azoknak az (x, y) természetes számpároknak a halmaza, amelyre a $\leq$ (kétváltozós $\mathbb{N}$-beli reláció) igaz; itt x és y szabad változók.

• $\forall\ y\ P(x, y)$ (egyváltozós reláció) $\mathbb{N}$-nek azt a részhalmazát adja, amely csak a 0 számból áll; itt x szabad és y kötött változó.

• $\exists\ x\ \forall\ y\ P(x, y)$ ítélet szerint „létezik legkisebb természetes szám" .

A predikátumkalkulus egy kifejezése egy adott interpretáció esetén igaz, ha az értelmezési tartomány elemeit a szabad változókba tetszőleges módon behelyettesítve igaz állítást kapunk. A predikátumkalkulus kifejezése általános érvényű vagy tautológia, ha bármilyen interpretáció esetén igaz.

5. A predikátumkalkulus tautológiái

A predikátumkalkulus kifejezéseinek negációja a következő tautológiákkal írható le:

$$\neg\forall x\, P(x) = \exists x\, \neg P(x) \quad \text{ill.} \quad \neg\exists x\, P(x) = \forall x\, \neg P(x)\,. \tag{5.23}$$

Ezek segítségével a $\forall$ és $\exists$ kvantorok egymással kifejezhetőek:

$$\forall x\, P(x) = \neg\exists x\, \neg P(x) \quad \text{ill.} \quad \exists x\, P(x) = \neg\forall x\, \neg P(x)\,. \tag{5.24}$$

További predikátumkalkulusbeli tautológiák:

$$\forall x\, \forall y\, P(x,y) = \forall y\, \forall x\, P(x,y)\,, \tag{5.25}$$

$$\exists x\, \exists y\, P(x,y) = \exists y\, \exists x\, P(x,y)\,, \tag{5.26}$$

$$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) = \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))\,, \tag{5.27}$$

$$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) = \exists x\, (P(x) \vee Q(x))\,. \tag{5.28}$$

Ezen kívül érvényesek az alábbi implikációk:

$$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))\,, \tag{5.29}$$

$$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)\,, \tag{5.30}$$

$$\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x))\,, \tag{5.31}$$

$$\forall x\, (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, Q(x))\,, \tag{5.32}$$

$$\exists x\, \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x,y)\,. \tag{5.33}$$

Az implikációk megfordítása általában nem igaz. Különösen arra kell ügyelni, hogy a különböző kvantorok nem cserélhetőek fel (lásd az utolsó implikációt).

6. Korlátozott kvantifikáció

Gyakran célszerű, ha a kvantifikációt egy adott halmaz elemeire korlátozzuk. E célra a következő rövidítések használatosak:

$$\forall x\, (x \in X \Rightarrow P(x)) \quad \text{helyett} \quad \forall x \in X\, P(x) \quad \text{és} \tag{5.34}$$

$$exists\, x\, (x \in X \wedge P(x)) \quad \text{helyett} \quad \exists x \in X\, P(x)\,. \tag{5.35}$$

5.2. Halmazelmélet

5.2.1. A halmaz fogalma, különleges halmazok

A halmazelmélet alapjait GEORG CANTOR (1845–1918) fogalmazta meg. Az általa alkalmazott fogalomalkotás jelentőségét csak később ismerték fel. A halmazelmélet a matematika úgyszólván valamennyi területét döntően előmozdította, illetve egyáltalában lehetővé tette művelését. Mostanra a matematika és alkalmazásai egyik meg nem kerülhető eszközévé vált.

1. Az eleme reláció

1. Halmazok és elemeik A halmazelmélet alapvető fogalma az eleme reláció. Egy A halmaz meghatározott, jól megkülönböztethető a objektumok szemléletünkben vagy gondolatunkban egy egésszé történő összefogása. Ezeket az objektumokat a halmaz elemeinek nevezzük. Az „a eleme A-nak” illetve „a nem eleme A-nak” relációkat az „$a \in A$” illetve „$a \notin A$” módon jelölhetjük. Egy halmaz leírható elemeinek kapcsos zárójelek közötti felsorolásával, például $M = \{a, b, c\}$ vagy $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Továbbá leírható valamely meghatározott tulajdonsága alapján, amelyet csakis a halmaz elemei teljesítenek, például a páratlan természetes számok U halmaza leírható az alábbiak szerint: $U = \{x \mid x \text{ páratlan természetes szám}\}$. A számhalmazoknál az alábbi jelölések általánosak:

$\mathbb{N}$	$= \{0, 1, 2, \ldots\}$	természetes számok halmaza,
$\mathbb{Z}$	$= \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	egész számok halmaza,
$\mathbb{Q}$	$= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$	racionális számok halmaza,
$\mathbb{R}$		valós számok halmaza és
$\mathbb{C}$		komplex számok halmaza.

2. A halmazok kizárólagosságának elve Az A és B halmazok pontosan akkor egyenlők, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák, azaz:

$$A = B \Leftrightarrow \forall\, x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,. \tag{5.36}$$

■ A $\{3, 1, 3, 7, 2\}$ és $\{1, 2, 3, 7\}$ halmazok egyenlők.

2. Részhalmazok

1. Részhalmazok Az A halmazt B halmaz részhalmazának nevezzük, ha érvényes az alábbi összefüggés:

$$\forall\, x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)\,. \tag{5.37}$$

Más szavakkal: ha A részhalmaza a B halmaznak, akkor valamennyi eleme egyúttal B halmazhoz is tartozik. Amennyiben $A \subseteq B$ és B halmaz tartalmaz még további olyan elemeket, amelyek az A halmaznak nem elemei, akkor A valódi részhalmaza a B halmaznak, és ezt az alábbi írásmóddal fejezhetjük ki $A \subset B$.

■ Legyen $B = \{1, 2, 3, ...10\}$ a természetes számok egy halmaza, és $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ a páros számok egy halmaza. Minthogy az A halmaz a páratlan számokat nem tartalmazza ezért A valódi részhalmaza a B halmaznak.

2. Az üres halmaz Célszerűnek mutatkozik az egyetlen elemet sem tartalmazó üres halmaz bevezetése. A kizárólagossági elv alapján csak egyetlen ilyen halmaz létezik.

■ **A:** Az $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x + 2 = 0\}$ halmaz üres halmaz.

■ **B:** Minden M halmazra igaz, hogy $\emptyset \subseteq M$, vagyis az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

3. Halmazok azonossága Két halmaz pontosan akkor azonos, ha egymásnak részhalmazai:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A\,. \tag{5.38}$$

Ezt a tényt gyakran felhasználjuk két halmaz azonosságának bizonyítására.

4. Hatványhalmaz Egy M halmaz valamennyi részhalmaza alkotja a halmaz hatványhalmazát. Jelölje $\mathbb{P}(M)$ az M halmaz hatványhalmazát, akkor $\mathbb{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$.

■ Az $M = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza

$$\mathbb{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\,.$$

Igazak az alábbi állítások:

a)Ha az M véges halmaz elemeinek száma m, akkor a $\mathbb{P}(M)$ hatványhalmaz elemeinek száma 2^m.

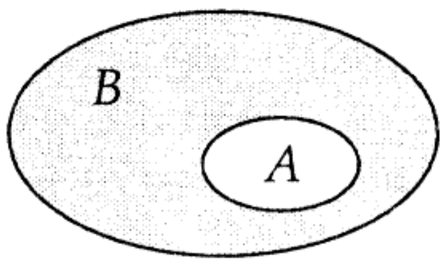
b) Az $\emptyset \in \mathbb{P}(M)$, kifejezés minden M halmazra igaz, vagyis az üres halmaz bármely M halmaz hatványhalmazának eleme.

5. Számosság Egy M véges halmaz elemeinek számát a halmaz számosságának vagy kardinalitásának nevezzük, és card$M$ vagy néha $|M|$ írásmóddal jelöljük. A kardinalitást későbbiekben végtelen halmazokon is értelmezzük (lásd 5.2.5.).

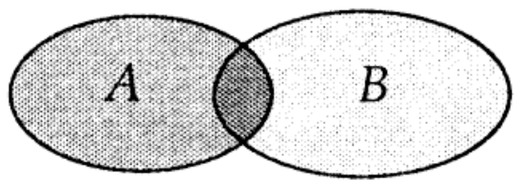
5.2.2. Műveletek halmazokkal

1. Venn-diagram

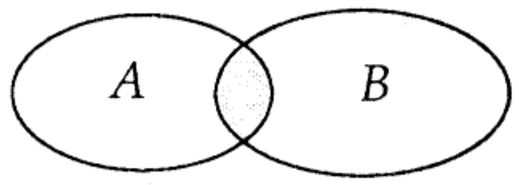
Halmazok, köztük lévő relációk és halmazműveletek ábrázolására a Venn-diagramokat használjuk. A halmazokat Venn-diagramokon síkbeli ábrákkal írjuk le. Például az $A \subseteq B$ részhalmaza reláció az **5.1. ábrán** látható.



5.1. ábra.



5.2. ábra.



5.3. ábra.

2. Unió, metszet, komplemens

A halmazműveletek olyan halmazokon értelmezett operációk, melyek eredménye egy halmaz.

1. Unió (egyesítés) Az A és B halmazok uniója az $A \cup B$-vel (ejtsd: A unió B) jelölt halmaz, melyre

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \tag{5.39}$$

Amennyiben A és B az E_1 illetve az E_2 tulajdonságokkal meghatározott, akkor az $A \cup B$ elemeire legalább az egyik tulajdonság igaz, vagyis a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei. Az unióhalmazt az **5.2. ábra** árnyékolt tartománya tünteti fel.

■ $\{1,2,3\} \cup \{2,3,5,6\} = \{1,2,3,5,6\}$.

2. Metszet Az A és B halmazok metszete az $A \cap B$-vel (ejtsd: A metszet B) jelölt halmaz, melyre

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \tag{5.40}$$

Amennyiben A és B az E_1 illetve az E_2 tulajdonságokkal meghatározott, akkor az $A \cap B$ halmaz azokat az elmeket tartalmazza, amelyekre mindkét tulajdonság helytálló. Az **5.3. ábra** árnyékolt része alkotja a metszetet.

■ Az a és b számok osztóiból képzett $T(a)$ és $T(b)$ halmazok metszete alapján meghatározhatjuk a két szám legnagyobb közös osztóját (jele: lnko(a,b)). Legyen $a = 12$ és $b = 18$. Ekkor $T(a) = \{1,2,3,4,6,12\}$ és $T(b) = \{1,2,3,6,9,18\}$, vagyis $T(12) \cap T(18)$ legnagyobb eleme az lnko$(12,18) = 6$ eredmény.

3. Diszjunkt halmazok Az A és B halmazokat diszjunktnak mondjuk, ha nincs közös elemük. Az ilyen halmazokra

$$A \cap B = \emptyset, \tag{5.41}$$

vagyis metszetük az üres halmaz.

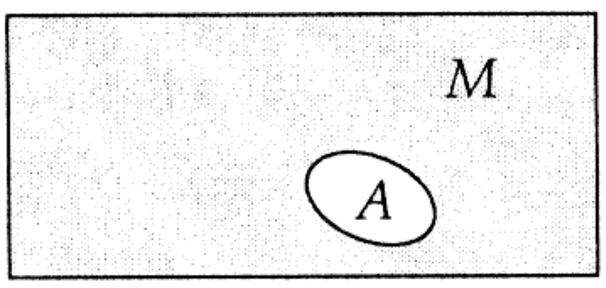
■ A páros illetve páratlan számok halmazának metszete az üres halmaz:

$$\{\text{páratlan számok}\} \cap \{\text{páros számok}\} = \emptyset.$$

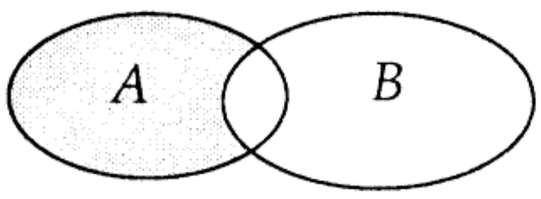
4. Komplemens Amennyiben egy előre megadott M alaphalmaz $A \subseteq M$ részhalmazait vizsgáljuk, akkor az A halmaz M halmazra vonatkozó komplementer halmaza vagy komplelmense (jele: $C_M(A)$) az M halmaz valamennyi olyan elemét tartalmazza, amely nem eleme az A halmaznak, azaz

$$C_M(A) = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}. \tag{5.42}$$

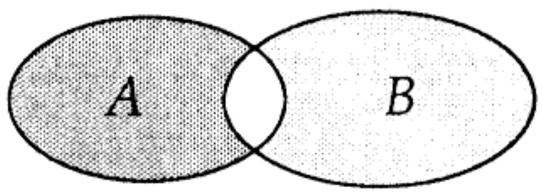
Ha az M alaphalmaz az összefüggésekből egyértelmű, akkor az $\overline{A}$ szimbólum is használható. Az **5.4. ábrán** az A komplemensét az árnyékolt terület mutatja.



5.4. ábra.



5.5. ábra.



5.6. ábra.

3. A halmazalgebra alaptörvényei

A fent bevezetett halmazműveletek az ítéletkalkulus operátoraival analóg tulajdonsággal bírnak. A halmazalgebra alapszabályai a következő táblázatban találhatók, ahol M az alaphalmazt és $\emptyset$ az üres halmazt jelöli.

1. Asszociativitás

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{5.43}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \tag{5.44}$$

2. Kommutativitás

$$A \cap B = B \cap A, \tag{5.45}$$

$$A \cup B = B \cup A. \tag{5.46}$$

3. Disztributivitás

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, \quad (5.47) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,. \quad (5.48)$$

4. Abszorpciós azonosságok

$$A \cap (A \cup B) = A\,, \quad (5.49) \qquad A \cup (A \cap B) = A\,. \quad (5.50)$$

5. Idempotencia

$$A \cap A = A\,, \quad (5.51) \qquad A \cup A = A\,. \quad (5.52)$$

6. A de Morgan-azonosságok

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,, \quad (5.53) \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,. \quad (5.54)$$

7. További szabályok

$$A \cap \overline{A} = \emptyset\,, \quad (5.55) \qquad A \cup \overline{A} = M \;\; M\,, \quad (5.56)$$

$$A \cap M = A\,, \quad (5.57) \qquad A \cup \emptyset = A\,, \quad (5.58)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset\,, \quad (5.59) \qquad A \cup M = M\,, \quad (5.60)$$

$$\overline{M} = \emptyset\,, \quad (5.61) \qquad \overline{\emptyset} = M\,. \quad (5.62)$$

$$\overline{\overline{A}} = A\,. \quad (5.63)$$

Ezt a táblázatot az ítéletkalkulus alapszabályaiból is megkapjuk, ha az alábbi helyettesítéseket elvégezzük:
a $\wedge$ szimbólum helyett $\cap$, a $\vee$ helyett $\cup$, T helyett M és F helyett $\emptyset$. Erre a nem véletlen összefüggésre az 5.7. pontban részletesen kitérünk.

4. További halmazműveletek

A fent bevezetett halmazműveleteken kívül értelmezzük a különbséghalmazt vagy differenciát, a diszkrepanciát vagy szimmetrikus differenciát és a DESCARTES-szorzatot.

1. Két halmaz különbsége Az A halmaz azon elemei, amelyek nem elemei a B halmaznak alkotják az A és B halmaz $A \setminus B$-vel jelölt különbségét, azaz

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}\,. \quad (5.64a)$$

Amennyiben az A halmazt az E_1 és a B halmazt az E_2 tulajdonság jellemzi, akkor az $A \setminus B$ különbséghalmaz elemei rendelkeznek az E_1 , de nem rendelkeznek az E_2 tulajdonsággal. Az **5.5. ábrán** az árnyékolt rész mutatja a különbséghalmazt.

■ $\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}\,.$

2. Két halmaz szimmetrikus differenciája Az A és B halmazok $A \triangle B$-vel jelölt szimmetrikus differenciájának elemei a két halmaz közül csakis azok egyikéhez tartoznak, azaz

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}\,. \quad (5.64b)$$

A definícióból következik:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,, \quad (5.64c)$$

vagyis a szimmetrikus differencia elemeire az A halmaz E_1 illetve a B halmaz E_2 tulajdonságai közül pontosan egy igaz.
Az **5.6. ábra** árnyékolt része mutatja a szimmetrikus differenciát.

■ $\{1,2,3,4\} \triangle \{3,4,5\} = \{1,2,5\}.$

3. Két halmaz Descartes-szorzata Az A és B halmazok $A \times B$-vel jelölt DESCARTES-szorzata az a halmaz, melyre

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}. \quad (5.65a)$$

Az (a, b) elemeket rendezett pároknak mondjuk és az alábbiak szerint értelmezzük köztük az egyenlőséget:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d\,. \tag{5.65b}$$

Ha az A és B halmazok végesek, akkor DESCARTES-szorzatuk elemeinek számát az alábbi összefüggés adja:

$$\operatorname{card}(A \times B) = (\operatorname{card} A)(\operatorname{card} B)\,. \tag{5.65c}$$

■ **A:** Az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok DESCARTES-szorzata $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ és $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ Mivel $\operatorname{card} A = 3$, $\operatorname{card} B = 2$, $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(B \times A) = 6$.

■ **B:** Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ DESCARTES-szorzattal (ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza) az x, y sík valamennyi pontját leírhatjuk. A koordináták (a, b) halmazát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz szolgáltatja:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

4. Több halmaz Descartes-szorzata

A sorrend rögzítésével n elemből egy n-est kapunk, melynek jelölése: (1.elem, 2.elem,. . . , n.elem). Egy n-es i-ik elemét i-ik komponensnek is nevezzük. Az $n = 3, 4, 5$ esetben hármas, négyes és ötös elnevezés használatos. Az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$-nel jelölt n-szeres DESCARTES-szorzat az összes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rendezett n-esek halmaza, ahol $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \ \ (i = 1, \ldots, n)\}\,. \tag{5.66a}$$

Amennyiben valamennyi A_i halmaz véges, akkor a rendezett elemek számát az alábbi képlet adja:

$$\operatorname{card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{card} A_1 \operatorname{card} A_2 \cdots \operatorname{card} A_n\,. \tag{5.66b}$$

Megjegyzés: Egy A halmaz önmagával vett n-szeres szorzatát A^n jelöli.

5.2.3. Relációk és leképezések

1. n-változós relációk

A relációk egyetlen halmaz elemei, vagy különböző halmazok elemei közötti kapcsolatokat írnak le. Az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok közötti n-változós reláció ezen halmazok DESCARTES-szorzatának részhalmaza, vagyis $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Amennyiben valamennyi A_i halmaz azonos az A halmazzal, akkor $R \subseteq A^n$, és az A halmazon értelmezett n-változós relációról beszélünk.

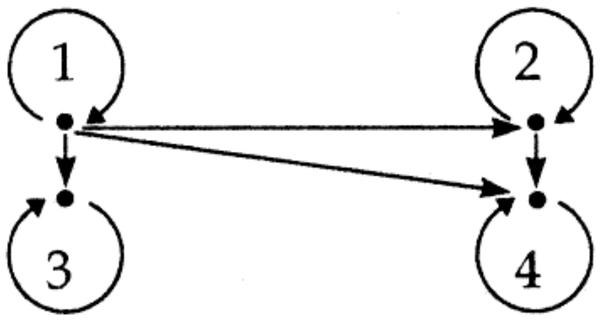
2. Bináris relációk

1. Egy halmaz bináris relációjának fogalma Fokozott jelentőségűek egy halmaz kétváltozós (bináris) relációi, $R \subseteq A \times A$. Bináris relációk estében az $(a, b) \in R$ helyett az aRb jelölésmód is szokásos.

■ Példaképpen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz oszthatósági relációit tárgyaljuk.

$$T = \{(a, b) \mid a, b \in A \wedge \ \ a \text{ osztója } b\text{-nek}\}\,. \tag{5.67}$$

2. Nyíldiagramok Egy A halmaz véges bináris relációit nyíldiagramokkal vagy relációs mátrixokkal ábrázolhatjuk. Az A elemeit síkbeli pontokként tüntetjük fel, és az a pontból a b pontba akkor és csak akkor vezet nyíl, ha aRb igaz. Az **5.7. ábra** a T reláció nyíldiagramját mutatja.



5.7. ábra.

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Táblázat. Relációs mátrix

3. Relációs mátrix Egy A halmaz elemei egy mátrix sorainak és oszlopainak felelnek meg (lásd az **5.7. ábra** táblázatát). Az $a \in A$ sor és $b \in B$ oszlop kereszteződésében akkor áll 1, ha aRb igaz, egyébként értéke 0. A fenti táblázat a T reláció relációs mátrixát mutatja.

3. Relációk szorzata, inverz relációk

A relációk speciális halmazok, így a szokásos halmazműveletek végrehajthatóak rajtuk. Kétváltozós relációk esetében a relációk szorzatának és az inverz relációnak különös jelentősége van. Az $R \subseteq A \times B$ és $S \subseteq B \times C$ kétváltozós relációk szorzata az $R \circ S$-sel jelölt bináris reláció, melyre

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists\, b\, (b \in B \wedge aRb \wedge bSc)\}\,. \tag{5.68}$$

A relációs szorzat asszociatív, de nem kommutatív.

Az R reláció R^{-1}-gyel jelölt inverz relációja az a bináris reláció, melyre

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \tag{5.69}$$

Egy A halmaz bináris relációira a következő összefüggések érvényesek:

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)\,, \tag{5.70}$$

$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)\,, \tag{5.71}$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}\,, \tag{5.72}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}\,, \tag{5.73}$$

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}\,. \tag{5.74}$$

4. Bináris relációk tulajdonságai

Egy A halmazon értelmezett R bináris reláció

$$\text{reflexív, ha } \forall\, a \in A\; aRa, \tag{5.75}$$

$$\text{irreflexív, ha } \forall\, a \in A\; \neg aRa, \tag{5.76}$$

$$\text{szimmetrikus, ha } \forall\, a, b \in A\; (aRb \Rightarrow bRa), \tag{5.77}$$

$$\text{antiszimmetrikus, ha } \forall\, a, b \in A\; (aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b), \tag{5.78}$$

$$\text{tranzitív, ha } \forall\, a, b, c \in A\; (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc), \tag{5.79}$$

$$\text{lineáris, ha } \forall\, a, b \in A\; (aRb \vee bRa)\,. \tag{5.80}$$

Ezek a tulajdonságok a relációk szorzatával is leírhatóak. Például egy bináris reláció akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.

Az R reláció tranzitív lezártja $\mathrm{tra}(R)$ az a bináris reláció, amelyik tranzitív, tartalmazza R relációt és minimális elemszámú. Ebből következik, hogy

$$\mathrm{tra}(R) = \bigcup_{n \geq 1} R^n = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots\,, \tag{5.81}$$

ahol az R^n az R reláció önmagával vett n-szeres relációs szorzatát jelöli.

■ Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz R bináris relációját az alábbi M relációs mátrix adja.

M	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	0

M^2	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0

M^3	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	1
4	0	1	0	1	1
5	0	1	0	0	1

Az M^2 mátrixot mátrixszorzással képezzük, ahol a szorzás helyett konjunkciót, az összeadás helyett diszjunkciót alkalmazunk a 0 és 1 számokon mint igazságértékeken. Az így nyert M^2 az R^2 relációhoz tartozó relációs mátrix lesz. Hasonlóan lehet az R^3, R^4, stb. relációs mátrixokat is előállítani.

$M \vee M^2 \vee M^3$	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1
4	0	1	0	1	1
5	0	1	0	1	1

Az $R \cup R^2 \cup R^3$ relációhoz tartozó relációs mátrixot úgy kapjuk, hogy az M, M^2 és M^3 mátrixokat elemenként diszjunktív módon összeadjuk. Minthogy M magasabb hatványai nem hoznak új elemet a mátrixba, ez lesz egyúttal R tranzitív lezártjához tartozó relációs mátrix is. A relációs mátrixok és relációs szorzatok gráfpontok távolságának vizsgálatánál is szerepet játszanak.

Véges bináris relációk esetében ezeket a tulajdonságokat többnyire a nyíldiagram vagy relációs mátrix alapján könnyen felismerhetjük. Például a reflexivitást a nyíldiagram „hurkai" illetve a relációs mátrix főátlójában álló egyesek alapján állapíthatjuk meg. Szimmetria esetén a nyíldiagram valamennyi nyilához létezik egy vele ellentétes irányú nyíl, illetve a relációs mátrix szimmetrikus. A nyíldiagramból vagy a relációs mátrixból kiolvasható, hogy a T oszthatósági reláció reflexív, de nem szimmetrikus.

5. Leképezések

Egy A halmazról egy B halmazra való $f\colon A \to B$ leképezés (vagy függvény lásd 2.1.1., **2.1.1.1.**) kapcsolat egy hozzárendelési szabály, amely minden $a \in A$ elemhez egyértelműen egy $f(a) \in B$ elemet rendel. Az f leképezést úgy is tekinthetjük, mint az A és B halmazok közötti kétváltozós relációt ($f \subseteq A \times B$). Az $f \subseteq A \times B$ relációt az A halmaz B halmazra való leképezésének nevezzük, ha

$$\forall a \in A \, \exists b \in B \, ((a,b) \in f) \qquad \text{és} \tag{5.82}$$

$$\forall a \in A \, \forall b_1, b_2 \in B \, ((a,b_1),(a,b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2)\,. \tag{5.83}$$

Az f függvényt injektívnek nevezzük, ha ezen túlmenően

$$\forall a_1, a_2 \in A \, \forall b \in B \, ((a_1,b),(a_2,b) \in f \Rightarrow a_1 = a_2)\,. \tag{5.84}$$

Általában a leképezésnél csak azt követeljük meg, hogy minden eredeti elemnek pontosan egy képe legyen, az injektivitás azt jelenti, hogy minden képnek csak egy eredetije lehet.
Az f függvényt az A halmaznak a B halmazra való szürjektív leképezésének nevezzük, ha

$$\forall b \in B \, \exists a \in A \, ((a,b) \in f)\,. \tag{5.85}$$

Az olyan leképezést amely injektív és szürjektív bijektív leképezésnek nevezzük. A bijektív $f\colon A \to B$ leképezés esetén az inverz reláció szintén egy leképezés, mely fordított irányú leképezést valósít meg, jele : $f^{-1}\colon B \to A$.
A leképezésekre alkalmazott relációs szorzat a leképezések egymást követő végrehajtását írja le. Legyenek $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ leképezések, ekkor az $f \circ g$ az A halmazt a C halmazba képezi le és

$$(f \circ g)(a) = g(f(a))\,. \tag{5.86}$$

Felhívjuk a figyelmet az f és g függvények sorrendjére (az irodalomban eltérő értelmezés is előfordul!)

5.2.4. Ekvivalencia és rendezési relációk

Egy halmaz bináris relációi közül kiemelkedő jelentőségűek az ekvivalencia és rendezési relációk osztályai.

1. Ekvivalencia relációk

Egy A halmazon értelmezett R relációt ekvivalencia relációnak mondunk, ha az reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az aRb jelölés helyett ilyenkor az $a \sim_R b$ vagy az $a \sim b$ írásmód is használatos, az utóbbi abban az esetben, ha az R ekvivalencia reláció az összefüggésekből ismert. Ejtsd: „a az R relációra vonatkozóan ekvivalens b-vel" .

■ Példák ekvivalencia relációkra
A: Legyen $A = \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ egy szám. Az $a \sim_R b$ pontosan akkor igaz, ha az a és b számokat az m számmal osztva ugyanazt a maradékot kapjuk (modulo m kongruencia).

■ **B:** Azonossági kapcsolat különböző halmazokban. Például a $\mathbb{Q}$ racionális számokra igaz $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow$ $p_1 q_2 = p_2 q_1$, ahol az első egyenlőségjel a $\mathbb{Q}$ halmazban, míg a második a $\mathbb{Z}^2$ halmazban határoz meg

egy ekvivalencia relációt.

C: Geometriai ábrák hasonlósága vagy kongruenciája.

D: Összetett ítéletek logikai ekvivalenciája. (lásd 5.1.1., **6.**).

2. Ekvivalencia osztályok, felosztások

1. Ekvivalencia osztályok Egy az A halmazon értelmezett ekvivalencia reláció a halmazt nem üres, páronként diszjunkt részhalmazokra osztja fel.

$$[a]_R := \{b \mid b \in A \wedge a \sim_R b\} \tag{5.87}$$

az R relációra vonatkozó az a elemhez tartozó ekvivalencia osztály. Az ekvivalencia osztályokra igaz

$$[a]_R \neq \emptyset,\ \ a \sim_R b \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R \quad \text{és} \quad a \not\sim_R b \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset\,. \tag{5.88}$$

Az ekvivalencia osztályokból alkotott halmaz jele: A/R.

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}\,. \tag{5.89}$$

Az A halmaz hatványhalmazának egy $Z \subseteq \mathbb{P}(A)$ részhalmazát az A halmaz felosztásának nevezzük, ha fennáll

$$\emptyset \notin Z, \quad X, Y \in Z \wedge X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset\,, \quad \bigcup_{X \in Z} X = A\,. \tag{5.90}$$

2. Felosztási tétel Egy A halmazon értelmezett valamennyi R ekvivalencia reláció az A halmaz egy Z felosztását hozza létre. Fordítva, egy A halmaz minden felosztása egy az A halmazon értelmezett R ekvivalencia relációt határoz meg.

$$a \sim_R b \Leftrightarrow \exists X \in Z\,(a \in X \wedge b \in X)\,. \tag{5.91}$$

Egy A halmazon értelmezett ekvivalencia relációt az azonossági kapcsolat általánosításaként foghatunk fel. Eltekintünk az A halmaz elemeinek „lényegtelen" sajátságaitól, és azokat az elemeket amelyek egy bizonyos tulajdonság tekintetében nem különböznek egy ekvivalencia osztályba soroljuk.

3. Rendezési relációk

Egy M halmazon értelmezett R bináris relációt akkor nevezünk rendezési relációnak, ha R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ha ezen túlmenően R lineáris is, akkor R teljes rendezés vagy lánc. Az M halmazt az R segítségével rendezettnek, vagy teljesen rendezettnek mondjuk. Egy teljesen rendezett halmazban bármely két elem összehasonlítható. Az aRb jelölés mellett ilyenkor az $a \leq_R b$, vagy az $a \leq b$ írásmód is használatos, az utóbbi akkor, ha az R reláció az összefüggések alapján ismert.
A rendezett kifejezés helyett a részben rendezett, vagy parciálisan rendezett szóhasználat is alkalmazható.

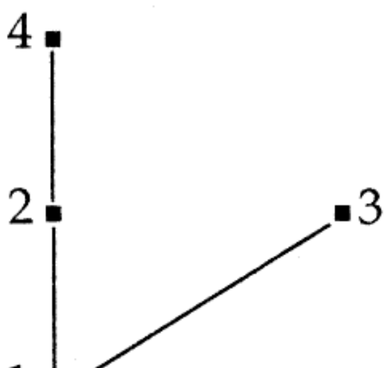
■ Példák rendezési relációkra:

A: Az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ számhalmazok a szokásos $\leq$ relációval teljesen rendezettek.

B: Egy halmaz részhalmazai között a részhalmaza reláció egy nem teljes rendezés.

C: A német szavak lexikografikus rendezése láncot alkot.

4. Hasse-diagram



5.8. ábra.

Véges rendezett halmazokat HASSE-diagramon ábrázolhatjuk. Adott egy véges halmazon a $\leq$ rendezési reláció. Az A halmaz elemeit síkbeli pontokként ábrázoljuk, mégpedig olymódon, hogy $b \in A$ pont az $a \in A$ felett helyezkedjék el, amennyiben $a < b$ helytálló. Továbbá ha nincsen olyan $c \in A$, amelyre $a < c < b$ igaz, akkor az a és b pontokat egy vonallal összekötjük, és ilyenkor az a és b elemeket szomszédosnak mondjuk. Egy HASSE-diagram tehát egy „lecsupaszított" nyíldiagram, ahol minden hurok, minden nyílhegy és minden olyan nyíl, amely a tranzitivitás következménye nem szerepel. Az **5.8. ábrán** az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz T oszthatósági relációját tüntettük fel, amelyet a HASSE-diagrammal ábrázoltunk.

5.2.5. Halmazok számossága

Az 5.2.1. fejezetben egy véges halmaz elemeinek számát kardinalitásnak neveztük. Ezt a fogalmat terjesztjük ki végtelen halmazokra is.

1. Számosság, kardinalitás

Az A és B halmazokat azonos számosságúnak mondjuk, ha létezik közöttük bijektív leképezés. Minden A halmazhoz hozzárendelünk egy kardinalitást (jele: $|A|$ vagy $\mathrm{card}A$) olymódon, hogy azonos számosságú halmazok azonos kardinalitásúak legyenek. Mivel egy halmaz sohasem lehet azonos számosságú hatványhalmazával, nincsen „legnagyobb" kardinalitás.

2. Végtelen halmazok

Minden végtelen halmaznak van olyan valódi részhalmaza, amely a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazával azonos számosságú. Így a „legkisebb" végtelen kardinalitás a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának kardinalitása. Egy végtelen halmazt megszámlálhatónak mondunk, ha az $\mathbb{N}$ halmazzal azonos számosságú. Ez annyit jelent, hogy elemei felsorolhatóak azaz, hogy elemei felírhatóak mint egy $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozat.

Egy végtelen halmaz megszámlálhatatlan, ha nem azonos számosságú az $\mathbb{N}$ halmazzal. Így minden nem felsorolható halmaz megszámlálhatatlan.

- **A:** Az egész számok $\mathbb{Z}$ és a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.
- **B:** A valós számok $\mathbb{R}$ és a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza megszámlálhatatlan.

5.3. Klasszikus algebrai struktúrák

5.3.1. Műveletek

1. n-változós műveletek

A struktúra fogalma a matematikában és alkalmazásaiban központi szerepet játszik. Egy algebrai struktúra egy halmazból és azon értelmezett műveletekből áll. Az A halmazon értelmezett n-változós művelet egy olyan φ: $A^n \to A$ leképezés, amely az A elemeiből alkotott minden n-eshez az A halmaz egy elemét rendeli.

2. Bináris műveletek tulajdonságai

Különösen fontos az $n = 2$ eset, ekkor bináris műveletről beszélünk. Ilyen a számok vagy mátrixok összeadása és szorzása, illetve halmazok egyesítése és metszete. Egy bináris művelet is leképezés: $* : A \times A \to A$. A szabályokban a „*(a,b)" jelölés helyett általában az infix írásmódot „a*b" használjuk.
Az A halmaz * bináris művelete asszociatív, ha

$$(a * b) * c = a * (b * c) \tag{5.92}$$

és kommutatív, ha

$$a * b = b * a \tag{5.93}$$

igaz teszőleges $a, b, c \in A$ elemek esetében.
Az $e \in A$ elemet a * műveletre nézve neutrális elemnek mondjuk, ha

$$a * e = e * a = a \quad \text{minden} \quad a \in A\,. \tag{5.94}$$

3. Külső műveletek

A külső műveletek olyan a $K \times A$ halmazról az A halmazra történő leképezések, ahol K egy külső, többnyire szintén strukturált halmaz.

5.3.2. Félcsoportok

A struktúrákat műveleteik száma és tulajdonságai alapján csoportosítjuk. Egy H halmaz egy rajta értelmezett művelettel félcsoportot alkot, ha * asszociatív; jelölése $(H, *)$.

Példák félcsoportra:

- **A:** Bármelyik említett számhalmaz az összeadás vagy szorzás műveletével.
- **B:** Egy halmaz hatványhalmaza az egyesítés (unió) vagy metszet műveletével.

■ **C:** Az n-edrendű négyzetes mártixok az összeadás vagy szorzás műveletével.

■ **D:** Egy A „ABC" feletti összes „szavak" A^* halmaza, az egymásután írás (konkatenáció) műveletével.

Megjegyzés: a mátrixok szorzásától, és a szavak egymásután írásától eltekintve valamennyi említett művelet kommutatív; ekkor kommutatív félcsoportról beszélünk.

5.3.3. Csoportok

5.3.3.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

1. Definíció

A G halmazt a rajta értelmezett * bináris művelettel $(G, *)$ csoportot alkot, ha

- $*$ asszociatív,
- $*$ műveletre vonatkozóan létezik e neutrális elem, továbbá
- minden $a \in G$ elemhez tartozik olyan a^{-1} inverz elem, amelyre

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e\,. \tag{5.95}$$

Minden csoport egyúttal félcsoport is.

Egy csoport neutrális eleme egyértelmű. Ezen túlmenően a csoport minden elemének egyetlen inverz eleme van. Ha a * művelet kommutatív, akkor ABEL-csoportról beszélünk. Ha a csoport műveletét az összeadás + műveleti jelével írjuk, akkor a neutrális elem jelölése 0, az a elem inverzéé $-a$.

Példák csoportokra:

■ **A:** A $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ számhalmazok az összeadás műveletével.

■ **B:** $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a szorzással.

■ **C:** $S_M := \{f : M \to M \wedge f \text{ bijektiv}\}$ ábrák egymás után rajzolására mint műveletre vonatkozóan (szimmetrikus csoport).

■ **D:** A D_n halmaz tartalmazza a szabályos n-oldalú sokszög minden olyan transzformációját, amely a sokszöget önmagába viszi át. Ha d jelöli a sokszög $2\pi/n$ szöggel való elforgatását, és σ egy tengelyre való tükrözést, akkor a D_n halmaz $2n$ eleme a következőképpen írható:

$$D_n = \{e, d, d^2, \ldots, d^{n-1}, \sigma, d\sigma, \ldots, d^{n-1}\sigma\}\,.$$

Az egymásután alkalmazás transzformációjával D_n csoportot, melyet diédercsoportnak nevezünk. Ebben a csoportban igaz, hogy $d^n = \sigma^2 = e$ és $\sigma d = d^{n-1}\sigma$.

■ **E:** Valamennyi a valós vagy komplex számok feletti reguláris n-edrendű mátrix a szorzás műveletével.

Megjegyzés: Az alkalmazásokban, különösképpen lineáris transzformációk leírásában a mátrixoknak fontos szerepe van.

2. Csoporttáblázatok

Véges csoportok leírására táblázatokat alkalmazunk: a csoport elemei szolgáltatják a táblázat sorait és oszlopait. Az a elem sorának és a b elem oszlopának kereszteződésében az $a * b$ elem áll. Legyen $M = \{1, 2, 3\}$, ekkor az S_M szimmetrikus csoportot S_3 is jelölheti. Ekkor S_3 az $\{1, 2, 3\}$ halmazon értelmezett valamennyi bijektív leképezésből (permutációkból) áll, ezért $3! = 6$ eleme van. A permutációkat többnyire két sorral írjuk le, ahol az első sorba M elemeit, a másodikba azok képeit írjuk. Így az S_3 elemei a következők:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ p_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.96}$$

A leképezések egymás utáni végrehajtásával az S_3 csoportra az alábbi táblázatot nyerjük:

$\circ$	ε	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
ε	ε	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	ε	p_5	p_4	p_3	p_2
p_2	p_2	p_4	ε	p_5	p_1	p_3
p_3	p_3	p_5	p_4	ε	p_2	p_1
p_4	p_4	p_2	p_3	p_1	p_5	ε
p_5	p_5	p_3	p_1	p_2	ε	p_4

(5.97)

- A táblázatból kitűnik, hogy az ε identikus permutáció a csoport neutrális eleme.
- A táblázat valamennyi sorában és oszlopában minden elem csak egyszer szerepel.
- Egy elem inverze leolvasható a táblázatból; például az S_3 csoport p_4 elemének inverze p_5, hiszen a p_4 sor és a p_5 oszlop kereszteződésében az ε neutrális elem áll.

- Ha a csoportművelet kommutatív (ABEL-csoport), akkor a táblázat a főátlóra nézve szimmetrikus; az S_3 csoport nem szimmetrikus, hiszen például $p_1 \circ p_2 \neq p_2 \circ p_1$.
- Az asszociativitás nem olvasható le a táblázatból.

5.3.3.2. Részcsoportok és direkt szorzatok

1. Részcsoportok

Legyen $(G, *)$ egy csoport, és $U \subseteq G$. Amennyiben $(U, *)$ is csoportot alkot, akkor $(U, *)$ struktúrát $(G, *)$ részcsoportjának nevezzük.
Az $(U, *)$ pontosan akkor részcsoportja $(G, *)$ csoportnak (ahol U nem üres részhalmaza G-nek), ha valamennyi $a, b \in U$ elemre igaz, hogy $a * b$ és a^{-1} szintén az U halmaz elemei (részcsoport kritérium).

1. Ciklikus részcsoportok Maga a $(G, *)$ és az $(\{e\}, *)$ csoportok $(G, *)$ triviális részcsoportjai. Ezen túlmenően minden $a \in G$ elem egy részcsoportot, az a elem által generált részcsoportot határoz meg.

$$< a > = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots\}\,. \tag{5.98}$$

Ekkor $< a >$ csoport G legkisebb olyan részcsoportja, amely az a elemet tartalmazza.
Amennyiben a csoportművelet összeadás, akkor az a^k rövidítés helyett a önmagával vett k-szoros összekapcsolását egészszámú szorzatként ka rövidítjük, éppúgy mint az a önmagával vett k-szoros összegét.

$$< a > = \{\ldots, (-2)a, -a, 0, a, 2a, \ldots\}\,. \tag{5.99}$$

Léteznek végtelen ciklikus csoportok mint $\mathbb{Z}$ az összeadással, és véges ciklikus csoportok mint a $\mathbb{Z}_m$ a modulo m maradékosztályok halmaza a modulo m összeadással. (lásd 5.4.3.,**3.**).

■ Amennyiben a G csoport elemeinek száma prím, akkor G ciklikus.

2. Általánosítás A ciklikus csoportok fogalma a következőképpen általánosítható: Legyen M egy G csoport nem üres részhalmaza, akkor $< M >$ a G csoportnak azt a részcsoportját jelöli, amely M elemeinek véges sok szorzataként és azok inverzeiként áll elő. Az M részhalmaz $< M >$ generáló halmaza. Ha M egyetlen elemből áll, akkor $< M >$ ciklikus.

3. Csoportok rendje, bal- és jobb oldali mellékosztályok

A csoportelméletben egy véges G csoport elemeinek számát ord$G$ jelöli. Amennyiben a csoport egy a eleme által generált $< a >$ ciklikus részcsoport véges, akkor ennek rendjét az a elem rendjének mondjuk, vagyis ord$< a >$=ord$a$. Legyen $(U, *)$ a $(G, *)$ csoport részcsoportja, és $a \in G$. Ekkor az alábbi részhalmazokat $(G, *)$ csoport $(U, *)$ részcsoporthoz tartozó bal oldali illetve jobb oldali mellékosztályainak nevezzük:

$$aU := \{a * u | u \in U\} \quad \text{ill.} \quad Ua := \{u * a | u \in U\}. \tag{5.100}$$

A jobb- és bal oldali mellékosztályok is partícionálják a G halmazt. (lásd 5.2.4., **2.**).

Egy U részcsoport valamennyi jobb- illetve bal oldali mellékosztályának azonos számú, nevezetesen ord$U$ eleme van. Ennek folytán a jobb oldali mellékosztályok száma azonos a bal oldaliakéval. Ezt a számot U indexének mondjuk. Az elmondottakból következik LAGRANGE tétele.

4. Lagrange tétele Egy részcsoport rendszáma osztója a csoport rendszámának. Általában nem könnyű egy csoport valamennyi részcsoportját megadni. Véges csoportok esetében LAGRANGE tétele mint szükséges feltétel segítséget nyújthat részcsoportok létezésének megállapítására.

2. Normálosztó

Egy U részcsoportra aU általában különbözik az Ua melléklosztálytól (viszont $|aU| = |Ua|$ igaz). Amennyiben $aU = Ua$ valamennyi $a \in G$ elemre, akkor az U részcsoportot normálosztónak mondjuk. Ezek a speciális részcsoportok képezik faktorcsoportok kialakításának alapját (lásd 5.3.3.3., 3.). Az ABEL-csoportokban természetesen minden részcsoport normálosztó.

Példák részcsoportokra és normálosztókra:

■ **A:** $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a szorzás műveletével a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ részcsoportjai.

■ **B:** A páros egész számok az összeadásra vonatkozóan $\mathbf{Z}$ részcsoportját alkotják.

■ **C:** Az S_3 csoport részcsoportjai LAGRANGE tétele értelmében a 6 elemből álló S_3 csoportnak (a triviális részcsoportokon kívül) csak olyan részcsoportjai lehetnek, ahol az elemek száma 2 vagy 3. Valóban az S_3 csoportnak a következő részcsoportjai vannak: $E = \{\varepsilon\}$, $U_1 = \{\varepsilon, p_1\}$, $U_2 = \{\varepsilon, p_2\}$, $U_3 = \{\varepsilon, p_3\}$, $U_4 = \{\varepsilon, p_4, p_5\}$, S_3.
A nem triviális részcsoportok U_1, U_2, U_3 és U_4 ciklikusak, minthogy az elemek száma minden esetben prímszám. Ugyanakkor S_3 nem ciklikus. A triviális normálosztókon kívül az S_3 csoportnak csak az U_4 részcsoport normálosztója. Általában egy G csoportnak minden olyan U részcsoport amelyre $|U| = |G|/2$ normálosztója. A szimmetrikus S_M csoprtot és részcsoportjaikat permutáció csoportoknak nevezzük.

■ **D:** Az $n \times n$ méretű reguláris $GL(n)$ mátrixoknak a mátrix szorzásra vonatkozó speciális részcsoportjai:

$SL(n)$	az 1 determinánsú mátrixok csoportja,
$O(n)$	az ortogonális mátrixok csoportja és
$SO(n)$	az 1 determinánsú ortogonális mátrixok csoportja.

Az $SL(n)$ normálosztója a $GL(n)$, míg az $SO(n)$ normálosztója az $O(n)$ csoportnak.

■ **E:** A komplex reguláris mátrixok csoportjának részcsoportjaként említsük meg az (lásd 4.1.4.):

$U(n)$	valamennyi unitér mátrix és
$SU(n)$	az 1 determinánsú unitér mátrixok csoportját.

3. Direkt szorzatok

1. Definíció Legyenek $(A, *_A)$ és $(B, *_B)$ csoportok. Az $A \times B$ DESCARTES-szorzatban előírhatunk egy * műveletet, melyre

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 *_A a_2, b_1 *_B b_2)\,. \tag{5.101a}$$

Így $(A \times B, *)$ csoport, melyet a két csoport direkt szorzatának nevezünk; egységeleme (e_A, e_B) és az (a, b) elem inverze (a^{-1}, b^{-1}). Véges A és B csoportokra

$$\operatorname{ord} A \times B = \operatorname{ord} A \cdot \operatorname{ord} B\,. \tag{5.101b}$$

Az $A' := \{(a, e) | a \in A\}$ illetve $B' := \{(e, b) | b \in B\}$ az A illetve B csoporttal izomorf normálosztói az $A \times B$ csoportnak.
ABEL-csoportok direkt szorzata szintén ABEL-csoport. Két A és B ciklikus csoport direkt szorzata akkor ciklikus, ha a csoportok rendjének legnagyobb közös osztója 1.

■ **A:** A $Z_2 = \{e, a\}$ és $Z_3 = \{e, b, b^2\}$ csoportokból képzett $Z_2 \times Z_3 = \{(e, e), (e, b), (e, b^2), (a, e), (a, b), (a, b^2)\}$ a Z_6 csoporttal izomorf csoport, amelyet (a, b) generál.

■ **B:** Ugyanakkor a $Z_2 \times Z_2 = \{(e, e), (e, b), (a, e), (a, b)\}$ nem ciklikus. Ezt a 4 rendű csoportot KLEIN-*féle csoport*nak nevezzük, mely a négyszög transzformációit írja le.

2. Abel-csoportok alaptétele Minthogy a direkt szorzatok képzése olyan szerkesztés, amely „kis" csoportokból „nagy" csoportokat csinál, felmerül a kérdés fordítottja: mikor lehet egy nagy G csoportot az A és B kisebb csoportok direkt szorzataként előállítani, másképpen, mikor lesz G illetve $A \times B$ izomorf? Az ABEL-csoportok alaptétele kimondja:
Minden ABEL-csoport előállítható prímrendű ciklikus csoportok direkt szorzataként.

5.3.3.3. Csoportok közötti leképezések

1. Homomorfizmusok és izomorfizmusok

1. Csoporthomomorfizmus Algebrai struktúrák között speciális, „struktúratartó" leképezéseket fogunk vizsgálni: Legyenek $(G_1, *)$ és $(G_2, \circ)$ csoportok. Egy h: $G_1 \to G_2$ leképezést csoporthomomorfizmusnak nevezünk, ha minden $a, b \in G_1$ elempárra igaz, hogy a szorzat képe a képek szorzata, azaz

$$h(a * b) = h(a) \circ h(b)\,. \tag{5.102}$$

■ (lásd 4.2.2., **7.**)Példaképpen megemlítjük a determinánsok szorzását:

$$(\det A)(\det B) = \det(AB)\,. \tag{5.103}$$

Itt a bal oldalon valós (zérustól különböző) számok, míg a jobb oldalon reguláris mátrixok szorzata szerepel.

Legyen h: $G_1 \to G_2$ egy csoporthomomorfizmus, ekkor G_1 olyan elemeinek halmaza ker$h$ (kernel), amelyet a h leképezés a G_2 neutrális elemébe visz át a h leképezés magját alkotja. A h magja G_1 normálosztója.

2. Csoportizomorfizmus Amennyiben a h csoporthomomorfizmus még bijektív is, akkor h csoportizomorfizmus, továbbá a G_1 és G_2 csoport izomorfak (jelölése $G_1 \cong G_2$). Ilyenkor: ker$h = \{e\}$. Az izomorf csoportok azonos struktúrájúak, vagyis csak elemeik megnevezésében különböznek.

■ Az S_3 szimmetriacsoport és a D_3 diédercsoport egymással izomorfak, rendjük 6 és az egyenlő oldalú háromszög transzformációit írják le.

2. Cayley tétele

CAYLEY tétele azt állítja, hogy minden csoport strukturálisan leírható permutáció csoportokkal (lásd 5.3.3.2., **2.**).

Valamennyi csoport izomorf egy permutáció csoporttal. Egy $(G, *)$ csoport azzal a P permutáció csoporttal izomorf, amely azokból a π_g $(g \in G)$ permutációkból alkotott S_G részcsoport, ahol a képe $a * g$. A hozzátartozó f: $G \to P$ izomorfizmust a $f(g) = \pi_g$ határozza meg.

3. Csoportok homomorfizmus tétele

A G csoport N normálosztóra vonatkozó mellékosztályainak halmaza az

$$aN \circ bN = abN \tag{5.104}$$

művelettel egy csoportot alkot, amelyet G csoportnak az N normálosztóra vonatkozó faktor csoportjának nevezünk, jelölése G/N.

Az alábbi tétel összefüggést ad meg egy csoport homomorf leképezései és faktor csoportjai között, ezért csoportok homomorfizmus tételének hívjuk.

Egy h: $G_1 \to G_2$ homomorfizmus ker$\,h$ magja az a halmaz, melyre ker$\,h = \{a \in G_1 | h(a) = e\}$. A homorfizmus ker$\,h$ magja G_1 csoport normálosztója. A $G_1/\ker h$ faktor csoport izomorf a $h(G_1) = \{h(a) | a \in G_1\}$ homomorf képpel. Fordítva a G_1 csoport minden N normálosztója egy homomorf leképezést határoz meg nat_N: $G_1 \to G_1/N$, ahol $nat_N(a) = aN$ és nat_N leképezés neve természetes homomorfizmus.

■ Minthogy a determináns leképezés det: $GL(n) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ csoporthomomorfizmus, amelynek magja $SL(n)$, így $SL(n)$ a $GL(n)$ csoport normálosztója, és (a csoportok homomorfizmus tétele alapján) $GL(n)/SL(n)$ izomorf a valós számok $R \setminus \{0\}$ multiplikatív csoportjával. (Jelöléseket lásd 5.3.3.2.,**2.**).

4. Csoportok ábrázolása*

1. Definíció Egy G csoport $D(G)$ ábrázolása a G csoport (homomorf) leképezése a (valós vagy komplex) n dimenziós V_n vektortér D nem szinguláris lineáris transzformációiba:

$$D(G) : a \to D(a), \quad a \in G\,. \tag{5.105}$$

*Ebben a fejezetben a vektorokat általában nem kövér írásmóddal jelöljük.

A V_n vektortér neve képtér; n az ábrázolás dimenziója (lásd 609. old.). Egy $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bázis bevezetésével minden x vektor a bázisvektorok lineáris kombinációjaként írható fel:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,, \quad x \in \mathrm{V}_n \,. \tag{5.106}$$

A $D(a)$, $a \in G$ hatását az x vektorra egy négyzetes mátrix $(D_{ik}(a))$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ definiálja, amely a transzformált x' vektor koordinátáit szolgáltatja az e_i bázisban: $(D_{ik}(a))$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$

$$x' = D(a)x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i \,, \qquad x'_i = \sum_{i=1}^{n} D_{ik}(a) x_k \,. \tag{5.107}$$

Ezt a transzformációt bázis transzformációként $\{e_i\} \to \{e'_i\}$ is felfoghatjuk:

$$e'_i = e_i D(a) = \sum_{i=1}^{n} D_{ik}(a) e_k \,. \tag{5.108}$$

Ekkor az a csoportelemhez hozzárendeljük a $(D_{ik}(a))$ leképezési mátrixot:

$$D(G) : a \to (D_{ik}(a)) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \,, a \in G \quad . \tag{5.109}$$

A leképezési mátrix függ a bázis választásától.

2. Hű leképezés Hű leképezés esetén $G \to D(G)$ izomorfizmus, vagyis a csoportelemek és a leképezési mátrixok közötti hozzárendelés egyértelmű.

3. A leképezés tulajdonságai Egy leképezés tulajdonságai a következők:

$$D(a * b) = D(a) \cdot D(b) \,, \quad D(a^{-1}) = D^{-1}(a) \,, \quad D(e) = I \,, \tag{5.110}$$

ahol $a, b \in G$ és I az identicitás operátor.

5. Speciális leképezések

1. Identikus leképezés Minden G csoportnak létezik egy triviális egydimenziós leképezése (identikus leképezés), ahol a csoport valamennyi eleméhez az identicitási operátor van hozzárendelve: $a \to I$ minden $a \in G$.

2. Adjungált leképezés A $D(G)$ leképezéshez tartozó $D^+(G)$ adjungált leképezést a $D(G)$ leképezésből úgy kapjuk, hogy a leképezés mátrixának komplex konjugáltját képezzük és a mátrixot transzponáljuk:

$$\mathbf{D}^+(G) = \tilde{\mathbf{D}}^*(G) \,. \tag{5.111}$$

3. Unitér leképezés Unitér leképezés esetén valamennyi leképezési mátrix unitér:

$$\mathbf{D}(G) \cdot \mathbf{D}(G) = \mathbf{E} \,, \tag{5.112}$$

ahol E az egységmátrix.

4. Ekvivalens leképezések Két $D(G)$ és $D'(G)$ leképezést akkor mondunk ekvivalensnek, ha a csoport minden a eleméhez tartozó leképezési mátrixok ugyanazzal a T nem szinguláris mátrixszal jellemzett hasonlósági transzformációval elállíthatóak:

$$\mathbf{D}'(a) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}(a) \cdot \mathbf{T} \,, \quad D'_{ik}(a) = \sum_{j,l=1}^{n} \left(T^{-1}\right)_{ij} \cdot D_{jl}(a) \cdot T_{lk} \,. \tag{5.113}$$

Ellenkező esetben nem ekvivalens leképezésről beszélünk. A $D(G)$ leképezésről a $D'(G)$ leképezésre való átmenet megfelel a V_n leképezési tér bázistranszformációjának $T : \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \to \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$

$$e' = eT \,, \quad e'_i = \sum_{k=1}^{n} T_{ki} e_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \,. \tag{5.114}$$

Egy véges csoport minden leképezése egy unitér leképezéssel ekvivalens.

5. Egy csoportelem karaktere Egy a csoportelem $\chi(a)$ karaktere egy $D(G)$ leképezésre vonatkozóan a leképezési mátrix nyoma (a főátló elemeinek összege):

$$\chi(a) = \mathrm{Sp}\,(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(a)\,. \tag{5.115}$$

Az e neutrális elem karaktere $\chi(e) = n$ a leképezés dimenziója. Minthogy hasonlósági transzformációk alkalmával a mátrix nyoma invariáns, az a csoportelem ekvivalens leképezéseinek karaktere azonos.

■ Az S_3 szimmetrikus csoport egy háromdimenziós leképezését vizsgáljuk. Az atom- vagy magfizika héjmodellje szerint három részecskéjének legyenek a koordinátái rendre x_1, x_2, x_3 és két részecske legyen a φ_α, egy pedig a φ_β állapotban ($\alpha^2\beta$ konfiguráció). A lehetséges eloszlások $\varphi_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\beta(x_3) = e_1, \varphi_\alpha(x_1)\varphi_\beta(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = e_2, \varphi_\beta(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = e_3$ a V_3 szimmetrikus csoport $D^{(1)}(G)$, $D^{(2)}(G)$ vektorterében egy $\{e_1, e_2, e_3\}$ bázist alkotnak. A leképezési mátrixok elemei a csoportelemek alkalmazásának útján ennek megfelelően adják meg az e_i bázisra vonatkozó koordinátákat. Így például

$$\begin{aligned} p_1 e_1 &= p_1\varphi_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\beta(x_3) = \varphi_\alpha(x_1)\varphi_\beta(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = D_{21}(p_1)e_2\,, \\ p_1 e_2 &= p_1\varphi_\alpha(x_1)\varphi_\beta(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = \varphi_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\beta(x_3) = D_{12}(p_1)e_1\,, \\ p_1 e_3 &= p_1\varphi_\beta(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = \varphi_\beta(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\alpha(x_3) = D_{33}(p_1)e_3\,. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Mindezt összevetve az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(e) &= \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(p_1) = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(p_2) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}(p_3) &= \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(p_4) = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(p_5) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.117}$$

A karakterre a következők adódnak:

$$\chi(e) = 3\,, \quad \chi(p_1) = \chi(p_2) = \chi(p_3) = 1\,, \quad \chi(p_4) = \chi(p_5) = 0\,.$$

6. Leképezések direkt összege

Az n_1, n_2 dimenziójú leképezések egy $n = n_1 + n_2$ dimenziójú V_n leképezésbe foglalhatóak össze, ahol a leképezési mátrixok direkt összege az alábbiak szerint adható meg:

$$\mathbf{D}(a) = \mathbf{D}^{(1)}(a) \oplus \mathbf{D}^{(2)}(a) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(1)}(a) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(2)}(a) \end{pmatrix}. \tag{5.118}$$

A leképezési mátrix blokkdiagonál alakja arra utal, hogy a $\mathrm{V}_{n_1}, \mathrm{V}_{n_2}$ leképezési tér mint két invariáns V_m $(m < n)$ altér direkt összege áll elő:

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_{n_1} \oplus \mathrm{V}_{n_2}\,, \quad n = n_1 + n_2\,. \tag{5.119}$$

Egy V_n alteret akkor mondunk invariáns altérnek, ha a $D(a)$, $a \in G$ transzformáció során minden $x \in \mathrm{V}_m$ vektor leképezése ismét V_m eleme lesz, azaz

$$x' = D(a)x \quad \text{esetén} \quad x' \in \mathrm{V}_m\,. \tag{5.120}$$

A leképezés karaktere az egyes leképezések karaktereinek összege:

$$\chi(a) = \chi^{(1)}(a) + \chi^{(2)}(a)\,. \tag{5.121}$$

7. Leképezések direkt szorzata

Legyenek e_i $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$ és e'_k $(k = 1, 2, \ldots, n_2)$ a V_{n_1} és a V_{n_2} leképezési terek bázisai, ekkor a tenzorszorzat

$$e_{ik} = \{e_i e_k\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1\,;\ \ k = 1, 2, \ldots, n_2) \tag{5.122}$$

a $\mathrm{V}_{n_1} \otimes \mathrm{V}_{n_2}$ szorzattér $n_1 \cdot n_2$ dimenziós bázisát alkotja. A $D^{(1)}(G)$ és $D^{(2)}(G)$ a V_{n_1} illetve V_{n_2} térben érvényes leképezésekből a szorzattérben egy $n_1 \cdot n_2$ dimenziójú $D(G)$ leképezést kapunk, ha a leképezési

mátrixok direkt, vagy (belső) Kronecker-féle szorzatát képezzük:

$$\mathbf{D}(G) = \mathbf{D}^{(1)}(G) \otimes \mathbf{D}^{(2)}(G)\,, \quad (D(G))_{ik,jl} = D^{(1)}_{ik}(a) \cdot D^{(2)}_{jl}(a)\,,$$
$$\text{ahol} \quad i,k = 1,2,\ldots,n_1\,; \quad j,l = 1,2,\ldots,n_2\,. \tag{5.123}$$

Két leképezés Kronecker-szorzatának jellege a tényezők jellegének szorzata:

$$\chi^{(1\times 2)}(a) = \chi^{(1)}(a) \cdot \chi^{(2)}(a)\,. \tag{5.124}$$

8. Reducibilis és irreducibilis leképezések

Amennyiben a V_n leképezési térnek a csoportműveletekre vonatkozóan létezik $\mathrm{V}_m \quad (m < n)$ invariáns altere, akkor alkalmas T bázistranszformációk segítségével a V_n térben a leképezési mátrix az alábbi alakra hozható:

$$T^{-1} \cdot D(a) \cdot T = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1(a) & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{D}_2(a) \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \ m & \text{sor} \\ \} \ n-m & \text{sor.} \end{matrix} \tag{5.125}$$

A $\mathbf{D}_1(a)$ és $\mathbf{D}_2(a)$ $a \in G$ maguk is mátrixleképezések, dimenzióik m illetve $n-m$.

Amennyiben a V_n térben nincs valóságos invariáns résztér, akkor a $D(G)$ leképezést irreducibilisnek mondjuk. Egy véges csoport nem ekvivalens irreducibilis leképezéseinek száma véges. Amennyiben létezik olyan T bázistranszformáció, amely a V_n teret invariáns részterek direkt összegébe viszi át, vagyis:

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{n_j}\,, \tag{5.126}$$

akkor a $\mathbf{D}(a)$ leképezési mátrix minden $a \in G$ esetében egy megfelelő T hasonlósági transzformációt követően blokkdiagonál alakba megy át:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}(a) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}^{(1)}(a) \oplus \cdots \oplus \mathbf{D}^{(n_j)}(a) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(1)}(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{D}^{(n_j)}(a) \end{pmatrix}\,. \tag{5.127}$$

Egy ilyen leképezést teljesen reducibilisnek mondunk.

Megjegyzés: A csoportelmélet természettudományi alkalmazásainál az alapvető feladat abban áll, hogy egy csoportnak megtaláljuk valamennyi nem ekvivalens irreducibilis leképezésének osztályát.

■ Az S_3 szimmetrikus csoport (5.117)-ben tárgyalt ábrázolása reducibilis. Az alábbi bázistranszformáció segítségével $\{e_1, e_2, e_3\} \longrightarrow \{e_1' = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2' = e_2,\ e_3' = e_3\}$ például a p_3 permutáció leképezési mátrixára a következőket nyerjük:

$$\mathbf{D}(p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D_1}(p_3) & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{D_2}(p_3) \end{pmatrix}\,,$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \mathbf{D_1}(p_3) = 1$

$$\mathbf{D}_2(p_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Első Schursch-lemma

Legyen C egy olyan operátor, amelyik egy csoport D irreducibilis leképezéseivel kommutatív, vagyis helytálló a $[C, D(a)] = C \cdot D(a) - D(a) \cdot C = 0\,,\ \ a \in G$ összefüggés, és a V_n leképezési tér C tér invariáns altere, akkor C az egységoperátor többszöröse, vagyis olyan $((C_{ik}))$ mátrix amely irreducibilis leképezés valamennyi mátrixával kommutatív, így az $\mathbf{E}$ egységmátrix többszöröse, azaz $\mathbf{C} = \lambda \cdot \mathbf{E}\,,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$.

10. Clebsch-Gordan-sorok

Két $D^{(1)}(G)\,,\ D^{(2)}(G)$ irreducibilis leképezés általában reducibilis. A szorzattér egy alkalmas bázistranszformációja útján a $D^{(1)}(G) \otimes D^{(2)}(G)$ irreducibilis $D^{(\alpha)}\ \ (\alpha = 1,2,\ldots,n)$ részekre bontható fel

(CLEBSCH–GORDAN-tétel). Ezt a kifejtést CLEBSCH–GORDAN-*sor*nak nevezzük:

$$D^{(1)}(G) \otimes D^{(2)}(a) = \sum_{\alpha=1}^{n} \oplus m_\alpha D^{(\alpha)}(G)\,. \tag{5.128}$$

Itt m_α az a multiplicitás, amellyel a $D^{(\alpha)}(G)$ irreducibilis leképezés a CLEBSCH–GORDAN-sorban jelentkezik.
A szorzattér bázistranszformációjának mátrixelemeit, amelyek a KRONECKER-szorzat irreducibilis részeire való redukcióját eredményezik, CLEBSCH–GORDAN-együtthatónak hívjuk.

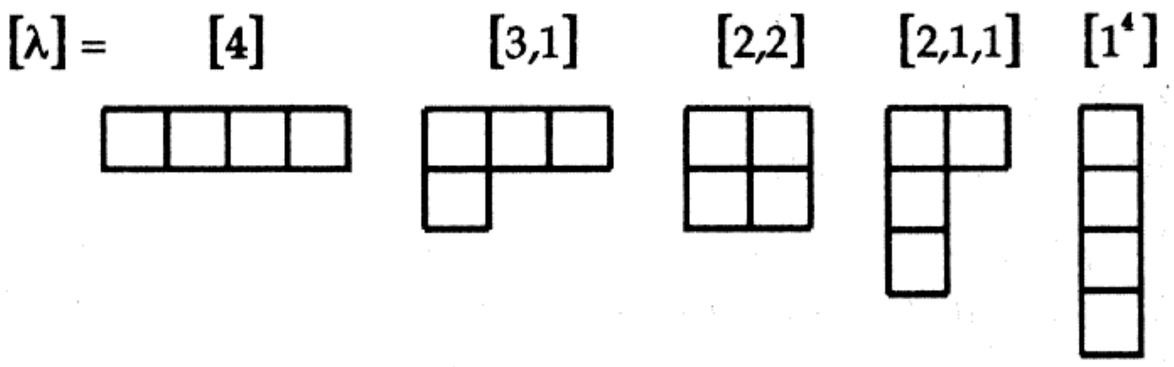
11. Az S_M szimmetrikus csoport irreducibilis leképezései

1. Az S_M szimmetrikus csoport Az S_M szimmetrikus csoport nem ekvivalens irreducibilis leképezései az M $[\lambda]$ felosztásaival egyértelműen jellemezhetőek, vagyis M értékének egész számokra való felbontásával:

$$[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M]\,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_M = M\,, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M \geq 0\,. \tag{5.129}$$

A felosztás grafikus reprezentációja dobozkákkal történhet, amelyeket YOUNG-keretekhez rendelünk:

■ Az S_4 csoport öt ilyen, mellékelten bemutatott YOUNG-keretet tartalmaz:



Az $[\lambda]$ dimenzióját az alábbi kifejezés szolgáltatja:

$$n^{[\lambda]} = M! \frac{\prod\limits_{i<j\leq k} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i + k - i)!}\,. \tag{5.130}$$

A konjugált $[\tilde{\lambda}]$ YOUNG-keretek λ alapján a sorok és oszlopok felcseréléséből adódnak. Az S_M irreducibilis leképezései általában reducibilisekké válnak, ha $S_{M-1}, S_{M-2}, \cdots$ részcsoportokra korlátozzuk vizsgálatainkat.

■ Azonos félértékű spinnel bíró rendszer esetén a kvantummechanika Pauli-elve olyan többrészecskés-hullámfüggvények szerkesztését követeli meg, ahol két tetszőleges részecske valamennyi koordinátájának felcserélése antiszimmetrikus. Gyakran a hullámfüggvény egy hely- és egy spinfüggvény szorzataként áll elő. Ha ebben az esetben a helyfüggvényt a részecskepermutációk útján a szimmetrikus csoport egy $[\tilde{\lambda}]$ irreducibilis leképezésébe transzformáljuk, akkor azt azzal a spinfüggvénnyel kell kombinálnunk, amely a konjugált $[\tilde{\lambda}]$ leképezés szerint transzformálódik, annak érdekében, hogy a két részecske eredő hullámfüggvénye antiszimmetrikus legyen.

5.3.3.4. Lie-csoportok

1. Folytonos csoportok

Egy folytonos G csoport a elemét valós paraméterek $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mondataként egyértelműen és teljesen jellemezhetjük, miközben legalább egyik a csoport végig haladásakor folytonosan változik. A paraméterek n számát a folytonos csoport d dimenziójának mondjuk. Egy folytonos csoport rendje végtelen.

Minden $a(\alpha)$ csoportelemnek megfelel egy $P(a) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ pont az R_n, n-dimenziós paraméter térben. Annak rögzítésével, hogy a csoport e neutrális elemének a paraméter térben a $\{0, \ldots, 0\}$ n-es felel meg, vagyis $e(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e(0, \ldots, 0)$. Az R_n térben egy koordinátarendszert vezetünk be. Egy $U(a)$ pont minden $P(a)$ környezete az R_n térben megfelel a csoportban egy $W(a)$ környezetnek. Legyenek $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ és $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n\}$ az a elem illetve az a^{-1} inverz elem paraméterei, akkor az $a * b = c$ szorzatra igaz:

$$a(\alpha) * b(\beta) = c(\gamma)\,, \quad a^{-1}(\bar{\alpha}) * a(\alpha) = e(0)\,, \quad a(\alpha) * e(0) = a(\alpha)\,, \quad e(0) * b(\beta) = b(\beta)\,. \tag{5.131}$$

■ A sík egy rögzített pontja körüli kétdimenziós forgatások egy egydimenziós folytonos csoportot alkotnak. Az R csoportelemeit a φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ határozza meg, $R(\varphi) = R(\varphi + 2\pi)$. A csoport neutrális

eleme $R(\varphi = 0)$. Egy elem inverze $R^{-1} = R(-\varphi)$ egy azonos szöggel ellentétes irányban történő elforgatást jelent: $R(\varphi_2) * R(\varphi_1) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$. Ez a csoport ABEL-csoport, mert $R(\varphi_2) * R(\varphi_1) = = R(\varphi_1) * R(\varphi_2)$.

A φ elforgatási szög bevezetése nem az egyetlen lehetőség csoportelemek parametrizálására. Bármely monoton $f(\varphi)$ függvény ugyanúgy felhasználható lenne a csoportelemek jellemzésére.

2. A Lie-csoportok definíciója

Egy folytonos G csoportot LIE-*csoport*nak nevezünk, ha igazak az alábbiak:

1. A csoportszorzás művelet folytonos, vagyis az $a * b$ minden W környezetéhez tartozik egy U a környezet és egy V b környezet olymódon, hogy minden $a' \in V$ esetén $a' * b' \in W$. A γ szorzat $c = a * b$ paraméterei ekkor folytonos valós függvényei az a és b α és β paramétereinek:

$$\gamma_i = \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1 \ldots, \beta_n) \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{5.132}$$

A φ_i függvény tulajdonságai, amelyek a G-beli szorzatot meghatározzák a csoportaxiómákból következnek:

$$\begin{aligned} &\varphi_i\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n; 0, \ldots, 0) = \alpha_i\,, \qquad \varphi_i(0, \ldots, 0; \beta_1, \ldots, \beta_n) = \beta_i\,, \\ &\varphi_i\ (\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\,, \quad \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_n) = 0\,, \\ &\varphi_i\ (0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0\,. \end{aligned} \tag{5.133}$$

2. A φ_i függvények valamennyi $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ paraméter szerint akárhányszor folytonosan differenciálhatóak.

A φ_i függvények ekkor az $\alpha = \beta = 0$ vagyis a neutrális elem környezetében Taylor-sorba fejthetőek. A neutrális elem infinitézimális környezetétől eltekintve, és a φ_i függvény sajátságainak (lásd (5.133)) figyelembe vételével a $c(\gamma) = a(\alpha) * b(\beta)$ szorzatelem és az $\bar\alpha_i$ inverz elem γ_i paraméterére $(i = 1, \ldots, n)$ a következőket kapjuk:

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)} \alpha_j \beta_k\,, \quad \bar\alpha_i = -\alpha_i + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)} \alpha_j \alpha_k\,, \quad a_{jk}^{(i)} = \left.\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha_j \partial \beta_k}\right|_{\alpha=\beta=0}\,. \tag{5.134}$$

3. Infinitézimális generátorok

Ez az eljárás alkalmas minden $a(\alpha)$ csoportelemnek a neutrális elem környezetében érvényes linearizálására:

$$a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\,, \quad \alpha_i \to 0\,. \tag{5.135a}$$

Az (5.135a) elemek alkotják a lokális LIE-csoportokat a neutrális elem környezetében. Az X_i parciális deriváltak

$$X_i = \left.\frac{\partial a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_i = 0} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.135b}$$

a LIE-csoport infinitézimális generátorai.

Az **5.4. táblázat** áttekintést ad a klasszikus LIE-csoportokról, amelyeknek a csoportelmélet természettudományos alkalmazásainál alapvető jelentőségük van.

4. Infinitézimális forgatások

1. A mátrixok $SO(3)$ csoportja

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.136}$$

szolgáltatja a háromméretű tér $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ helyvektorainak az i $(i = 1, 2, 3)$ tengely körüli φ_i szöggel történő elforgatásait egy derékszögű koordináta rendszerben.

Valamennyi háromdimenziós forgatás (valódi forgatás inverzió nélkül) alkotja az $SO(3)$ háromparaméteres speciális ortogonális csoportot; a kétdimenziós forgatások az $SO(2)$ és $SO(3)$ egyparaméteres

ABEL-féle részcsoportjai.

A $\mathbf{D}_i$ mátrixelemek trigonometriai függvényeinek sorbafejtése $\mathbf{D}_i$ $(\cos\varphi = 1 + O(\varphi^2), \sin\varphi + O(\varphi^3))$ adja az infinitézimális $\varphi_i \to 0$ forgatásokra a transzformáció egy linearizálását:

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{E} + \varphi_i \mathbf{X}_i + \mathbf{O}(\varphi^2) \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{5.137}$$

ahol $\mathbf{E}$ a háromdimenziós egységmátrixot jelöli, az $\mathbf{O}$ mátrix elemei pedig legfeljebb $O(\varphi^2)$ ordójúak, így az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.138}$$

lesznek az $SO(3)$ LIE-csoport infinitézimális generátorainak egy lehetséges reprezentációi. A lokális LIE-csoport elemei azok a

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{E} + \varphi_i \mathbf{X}_i\,, \quad \varphi_i \to 0\,, \tag{5.139}$$

mátrixok, amelyeknek főátlón kívüli elemei csak kevéssé különböznek nullától. Annak érdekében, hogy az R tér valamennyi háromdimenziós forgatását leíró globális LIE-csoportot megkapjuk, az infinitézimális forgatásokat ismételten végre kell hajtani:

$$D(R) = e^{s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3}\,, \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}\,. \tag{5.140}$$

Az s_1, s_2, s_3 paraméterek helyett a ϑ forgatási szög és a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő, és a forgástengely irányába mutató $\vec{\mathbf{a}}$ egységvektor a_1, a_2, a_3 komponenseit is megadhattuk volna a forgatási csoport elemeinek meghatározása céljából:

$$D(R) = e^{(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3)\vartheta}\,. \tag{5.141}$$

2. Euler-féle szög Egy derékszögű (x, y, z) koordinátarendszer az EULER-féle szög φ, ϑ, ψ körüli nem felcserélhető forgatással (lásd **5.9. ábra** és 211. old.) az alábbi módon vihető át egy $(x', y'z')$ koordinátarendszerbe.

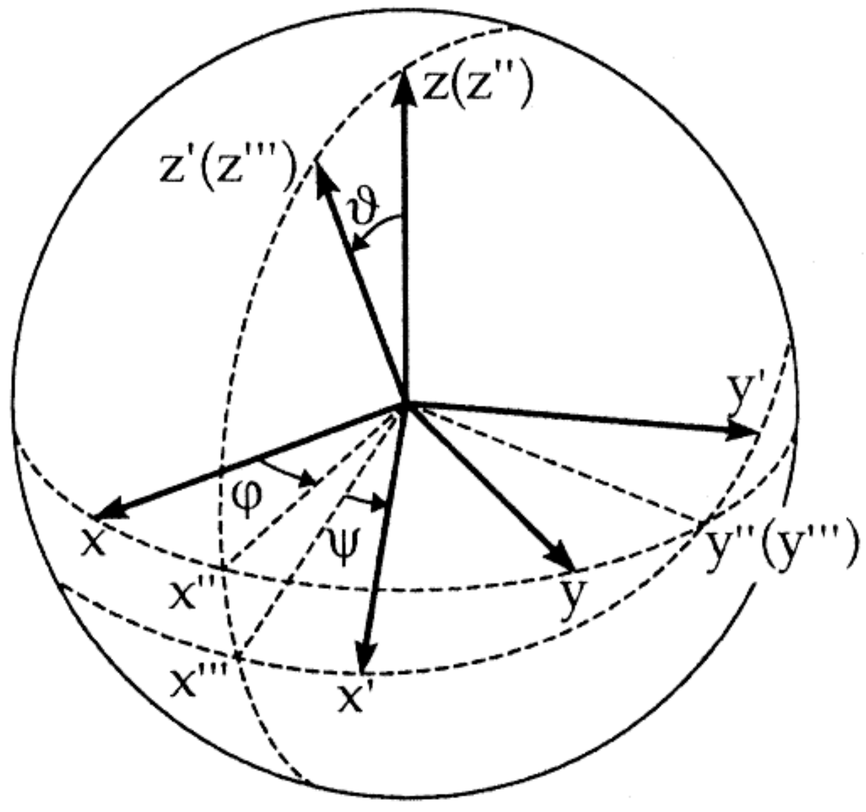
1. Forgatás a x tengely körül φ szöggel.

2. Forgatás az új y tengely körül ψ porecessziós szöggel.

3. Forgatás az új z tengely körül a ϑ nutációs szöggel.

Az EULER-féle szög alkalmazásával egy véges forgatás a következőképpen képezhető le:

$$D(R) = e^{\varphi X_3} e^{\vartheta X_2} e^{\psi X_3}\,. \tag{5.142}$$



5.9. ábra.

5. Forgatási impulzus operátor

Ha egy f függvény függ az $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ helyvektortól, $f = f(\vec{\mathbf{x}})$, akkor az i koordináta tengely körüli α szöggel történő elforgatást az f egy lineáris transzformációja adja:

$$(D_i f)(\vec{\mathbf{x}}) = f(D_i^{-1}\vec{\mathbf{x}}) = f(\vec{\mathbf{x}}) - \alpha(L_i f)(\vec{\mathbf{x}}) + O(\alpha^2)\,, \quad \alpha \to 0\,. \tag{5.143}$$

Ha az $D_i f$ függvény az $\vec{\mathbf{x}}$ pontban ugyanazt az értéket veszi fel mint az f függvény a $D_i^{-1} f$ helyen, akkor az infinitézimális változás a $\partial/\partial x_i$ differenciál operátorokkal számítható:

$$L_1 = x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\,, \quad L_2 = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\,, \quad L_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\,. \tag{5.144}$$

Megjegyzés: Az L_i $(i = 1, 2, 3)$ operátorok szintén előállítják az $SO(3)$ forgatási csoportot A kvantummechanikában ezek a $\hbar/\mathrm{i}$ tényezőtől eltekintve az $\hat{\vec{\mathbf{I}}}$ forgatási impulzus operátor derékszögű komponenseinek felelnek meg.:

$$\hat{\vec{\mathbf{I}}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}(L_1, L_2, L_3)\,. \tag{5.145}$$

6. Kompakt és összefüggő Lie-csoportok

Egy LIE-csoportot kompaktnak mondunk, ha a pararmétertere zárt és korlátos. Egy LIE-csoportot összefüggőnek mondunk, ha a paramétertér két pontja egy folytonos görbével összeköthető.

■ A klasszikus $U(n), SU(n), O(n), SO(n)$ LIE-csoportok és az $Sp(2n)$ LIE-csoport kompaktak, ugyanakkor $GL(n, k)$ nem kompakt. Összefüggő LIE-csoportok például az $SO(n)$ és $SU(n)$ csoportok.

5.3.3.5. Lie-algebrák.

1. A Lie-algebra definiciója

Egy LIE-csoport X_i $(i = 1, \ldots, n)$ infinitézimális generátorai egy n-dimenziós lineáris tér bázisát alkotják, amely $\mathcal{L}(G)$ LIE-algebrávt alkot, ha azt az $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n\,,\ \ c_i \in K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ és az $[X_i, X_k] = X_iX_k - X_kX_i$ kommutátor képzéssel lezárjuk. Két generátor kommutátora előállítható a generátorok lineáris kombinációjaként:

$$[X_i, X_k] = X_iX_k - X_kX_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ik}^{j} X_j\,. \tag{5.146}$$

A C_{ik}^{j} tényezők az $\mathcal{L}(G)$ LIE-algebra strukturális állandói. Az $\mathcal{L}(G)$ algebra bázistranszformációja esetén ezek mint harmadfokú tenzorok transzformálódnak.

2. A kommutátor képzés tulajdonságai

1. Antikommutativitás:

$$[X_i, X_k] = -[X_k, X_i]\,. \tag{5.147}$$

2. Linearitás:

$$[c_1X_i + c_2X_j, X_k] = c_1[X_i, X_k] + c_2[X_j, X_k]\,. \tag{5.148}$$

3. Jacobi-identitás:

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_i, X_j]] + [X_j, [X_k, X_i]] = 0\,. \tag{5.149}$$

Ezek relációk kapcslatot teremtenek a strukturális állandók között:

$$C_{ik}^{j} = -C_{ki}^{j}\,, \quad \sum_{k} \left(C_{jk}^{i}C_{lm}^{k} + C_{lk}^{i}C_{mj}^{k} + C_{mk}^{i}C_{jl}^{k}\right) = 0\,. \tag{5.150}$$

3. Abel-féle Lie-algebra

Egy ABEL-féle LIE-algebrában valamennyi generátor egymással felcserélhető, azaz $[X_i, X_k] = 0, C_{ik}^{j} = 0$ minden i, j, k . Az $\mathcal{L}$ algebrának egy $\mathcal{L}'$ részalgebrája akkor invariáns algebra (ideál), ha $[X_i, X_k] \in \mathcal{L}'$ minden $X_i \in \mathcal{L}'$ és $X_k \in \mathcal{L}$.

Egy egyszerű LIE-algebrának nincsen nem triviális invariáns részalgebrája. Egy félegyszerű LIE-algebrának nincsen ABEL-féle invariáns részalgebrája. A kompakt LIE-csoportok egyszerűek.

4. Casimir-operátor

A C CASIMIR-operátor olyan operátor, amely minden generátorral és így a LIE-algebra minden elemével kommutál. Ez a generátorokban egy kvadratikus alak.

$$C = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}X_iX_k\,, \quad [C, X_k] = 0 \text{ minden } k\,. \tag{5.151}$$

■ Az $SO(3)$ csoport $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ generátorai (lásd 5.138) bázist alkotnak az $SO(3)$ csoport $SO(3)$ valós LIE-algebrájára a $\mathbf{d} = s_1\mathbf{X}_1 + s_2\mathbf{X}_2 + s_3\mathbf{X}_3\,,\ s_i \in \mathbb{R}$ elemekkel. Minthogy $\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} = -\mathbf{X}_i$ az

5.4. táblázat. A LIE-csoportok és LIE-algebrák

Jelölések: G LIE-csoport, d a csoport dimenziója, $\mathcal{L}(G)$ LIE-algebra $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ négyzetes mátrixok, $\mathbf{E}_n$ n-dimenziós egységmátrix, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ transzponált mátrix, $\mathbf{A}^*$ konjugált komplex mátrix, $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$ adjungált mátrix, K a valós ($\mathbb{R}$) vagy komplex ($\mathbb{C}$) számok teste.

• LIE–csoport • LIE-algebra	Tulajdonságok	Dimenzió
• Általános lineáris csoport $G = GL(n, K)$ • $\mathcal{L}(G) = gl(n, K)$	• minden reguláris $n \times n$–mátrix $\mathbf{A}$ K-beli értékekkel , $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ • minden $n \times n$–mátrix $\mathbf{A}$ K-beli értékekkel	$d = n^2$ ha $K = \mathbb{R}$ $d = 2n^2$ ha $K = \mathbb{C}$
• Speciális lineáris csoport $G = SL(n, K)$ • $\mathcal{L}(G) = sl(n, K)$	• minden $\mathbf{A} \in GL(n, K)$,ahol $\det \mathbf{A} = +1$ • minden $\mathbf{B} \in gl(n, K)$,ahol $\mathrm{Sp}(\mathbf{B}) = 0$	$d = n^2 - 1$ ha $K = \mathbb{R}$ $d = 2(n^2 - 1)$ ha $K = \mathbb{C}$
• Unitáris csoport $G = U(n)$ • $\mathcal{L}(G) = u(n)$	• minden $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ • minden $\mathbf{B} \in gl(n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{B}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{B}$ (minden ferdén hermitikus $n \times n$–es mátrixra)	$d = n^2$
• Speciális unitáris csoport $G = SU(n)$ • $\mathcal{L}(G) = su(n)$	• minden $\mathbf{A} \in U(n)$,ahol $\det \mathbf{A} = +1$ • minden $\mathbf{B} \in u(n)$,ahol $\mathrm{Sp}(\mathbf{B}) = 0$	$d = n^2 - 1$
• Ortogonális csoport $G = O(n)$ • $\mathcal{L}(G) = o(n)$	• minden $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R})$,ahol $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ • minden $\mathbf{B} \in gl(n, \mathbb{R})$,ahol $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{B}$ (minden ferdén hermitikus $n \times n$-es mátrixra)	$d = \dfrac{n(n-1)}{2}$
• Speciális ortogonális csoport $G = SO(n)$ • $\mathcal{L}(G) = so(n)$	• minden $\mathbf{A} \in O(n)$,ahol $\det \mathbf{A} = +1$ • $so(n) = o(n)$	$d = n^2 - 1$
• Komplex ortogonális csoport $G = O(n, \mathbb{C})$ • $\mathcal{L}(G) = o(n, \mathbb{C})$	• minden $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ • minden $\mathbf{B} \in gl(n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{B}$	$d = n(n-1)$
• Szimplektikus csoport $G = Sp(2n, \mathbb{C})$ • $\mathcal{L}(G) = sp(2n, \mathbb{C})$	• minden $\mathbf{A} \in GL(2n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J}$ és $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix}$ • minden $\mathbf{B} \in gl(2n, \mathbb{C})$,ahol $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = -\mathbf{J}\mathbf{B}$	$d = 2n(2n+1)$

$SO(3)$ LIE-algebra valamennyi antiszimmetrikus $\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{d}$ 3×3-as mátrixból áll. A generátorok között érvényes a felcserélhetőségi reláció:

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3\,, \quad [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1\,, \quad [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_2\,, \tag{5.152}$$

vagyis az $SO(3)$ LIE-algebra nullától különböző struktúrális állandói $c_{12}^3 = c_{12}^1 = c_{31}^2 = 1$, $c_{ik}^j = 0$ egyébként. Az $SO(3)$ C CASIMIR-operátora amely a LIE-algebra valamennyi elemével kommutál a $\mathbf{C} = \mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2 + \mathbf{X}_3^2$ (minden $g_{ik} = 1$) . (valamennyi g_{ik}=0) kifejezéssel adható meg.

Megjegyzés: A LIE-algebra elemei geometriailag a G neutrális e elemén áthaladó $a(\alpha(t))(t\ )\ a(\alpha(t))$ $a(\alpha(t))\, b(\beta(t))$b((t)) $\vec{\mathbf{w}} = [\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}]$ w=[u,v| kommutátor a $c(\gamma(t)) = a(\alpha(t)) * b(\beta(t)) * a(\alpha(t))^{-1} * b(\beta(t))^{-1}$

görbe érintővektora definíció szerint.
A LIE-algebra bevezetésével egy globális LIE-csoport vizsgálata a neutrális elem környezetében érvényes lokális struktúra vizsgálatára vezethető vissza, ahol az analízis módszerei alkalmazhatóak.

5.3.3.6. Félegyszerű Lie-csoportok leképezése

1. Cartan–Weyl-bázis

CARTAN egy elméleti eredménye szerint egy n-dimenziós félegyszerű LIE-algebránál

$$\{X_i\}\ (i=1,\ldots,n) \to \{H_i\ (i=1,\ldots,l)\,,\ E_\alpha\ (\alpha=1,\ldots,n-l)\} \tag{5.153}$$

transzformációk útján egy olyan speciális $\{H_i, E_\alpha\}$ bázis (CARTAN–WEYL-bázis, standardbázis) vezethető be, hogy l lineárisan független egymással kommutáló H_i operátor

$$[H_i, H_k] = 0\ \ (i,k=1,\ldots,l) \tag{5.154}$$

egy részalgebrát feszítenek ki. Az l szám a LIE-algebra (LIE-csoport) rangja. Az E_α operátorok az $(n-l)$-dimenziós tér részalgebráját feszítik ki. Ezek sem egymással sem a H_i bázis elemekkel nem kommutálnak. Például:

$$[H_i, E_\alpha] = r_{i\alpha} E_\alpha\ \ (\alpha=1,\ldots,l)\,. \tag{5.155}$$

Az $r_{i\alpha}$ valós számokat az l-dimenziós tér egy $\vec{\mathbf{r}}_\alpha$ vektorába (gyökvektor) foghatjuk össze:

$$\vec{\mathbf{r}}_\alpha = (r_1\alpha,\ldots,r_{l\alpha})\,. \tag{5.156}$$

A gyökvektorok rendszere felhasználható a lehetséges LIE-algebrák osztályozására. Minthogy a LIE-algebrák valamennyi leképezéséhez hozzátartozik a megfelelő lokális LIE-csoport leképezése, a LIE-algebrák leképezésének megtalálására elegendő, ha a LIE-csopotok leképezéseit osztályozzuk.

2. Súlyok és létraoperátorok

Egy félegyszerű LIE-algebrának a standardbázisban való, leképezése a V_m leképezési térben $\mathbf{D}_i$ $(i=1,\ldots,l)$ és $\mathbf{D}_\alpha$ $(\alpha=1,\ldots,n-l)$ $m\times m$-es mátrixokat eredményez. Minthogy valamennyi $\mathbf{D}_i$ mátrix kommutál ezek egyidejűen diagonál alakra hozhatóak; n lineárisan független $\vec{\mathbf{x}}_\nu \in V_m$ közös sajátvektoruk van

$$\mathbf{D}_i\vec{\mathbf{x}}_\nu = m_i^{(\nu)}\vec{\mathbf{x}}_\nu\ \ (i=1,\ldots,l\,;\ \ \nu=1,\ldots,n)\,. \tag{5.157}$$

Az alábbi vektort

$$\vec{\mathbf{m}} = \left(m_1^{(\nu)},\ldots,m_l^{(\nu)}\right) \tag{5.158}$$

az l-dimenziós térben az $\vec{\mathbf{x}}_\nu$ sajátvektor súlyának mondjuk. A $\mathbf{D}_i$ diagonál mátrix elemei az n súlyvektor $\vec{\mathbf{m}}$ i-ik komponensei.

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} m_i^{(1)} & & \mathbf{O} \\ & m_i^{(2)} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & m_i^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{5.159}$$

Egy LIE-algebra $\vec{\mathbf{r}}_\alpha$ gyökei, és egy leképezés $\vec{\mathbf{m}}$ súlyai azonos dimenziójú vektortérben vannak megadva. A nem elfajuló súlyokat egyszerűnek mondjuk. Az $\vec{\mathbf{m}}'$ súlyt az $\vec{\mathbf{m}}$ súlynál nagyobbnak mondjuk, ha az $\vec{\mathbf{m}}' - \vec{\mathbf{m}} = (m_1' - m_1,\ldots,m_l' - m_l)$ vektor első zérustól különböző rendezője pozitív. A leképezés legnagyobb súlyát legnagyobb súlynak is nevezik. Egy félegyszerű LIE-algebra valamennyi irreducibilis leképezése a legnagyobb súlyával, amely mindig egyszerű, egyértelműen jellemezhető. Ezenkívül kimutatható, hogy ha az $\vec{\mathbf{x}}$ vektor súlya $\vec{\mathbf{m}}$, akkor a $\mathbf{D}_\alpha\vec{\mathbf{x}}$ súlya $\vec{\mathbf{m}} + \vec{\mathbf{r}}_\alpha$:

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{D}_\alpha\vec{\mathbf{x}}) = (m_i + r_{i\alpha})\mathbf{D}_\alpha\vec{\mathbf{x}}\,. \tag{5.160}$$

Így a $\mathbf{D}_\alpha, \mathbf{D}_{-\alpha}$ létraoperátorok segítségével — kiindulva az $\vec{\mathbf{x}}_0$ vektorból és eljutva a legnagyobb $\vec{\mathbf{m}}$ vektorig — az összes többi súlyhoz is megszerkeszthetjük a sajátvektorokat:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}_\alpha \vec{\mathbf{x}}_0 = 0 \\
&\mathbf{D}_{-\alpha} \vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{x}}_1 \qquad \text{súly } \vec{\mathbf{m}} - \vec{\mathbf{r}}_\alpha \\
&\mathbf{D}_{-\alpha} \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_2 \qquad \text{súly } \vec{\mathbf{m}} - \mathbf{2}\vec{\mathbf{r}}_\alpha \\
&\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
&\mathbf{D}_{-\alpha} \vec{\mathbf{x}}_n = \vec{\mathbf{x}}_{n+1} = 0 \,.
\end{aligned} \tag{5.161}$$

3. Az $SO(3)$ forgatási csoport

Az (5.145) szerint az $\hat{\vec{\mathbf{l}}}_x = -\mathrm{i}(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$, $\hat{\vec{\mathbf{l}}}_y = -\mathrm{i}(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$, $\hat{\vec{\mathbf{l}}}_z = -\mathrm{i}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$ $(\hbar = 1)$ forgatási impulzus operátorok kifeszítik az $SO(3)$ forgatási csoport $so(3)$ LIE-algebráját, így a z tengely körüli φ szöggel történő infinitézimális forgatás esetében egy $\psi(x, y, z)$ függvény az alábbiak szerint transzformálódik:

$$R_z(\varphi)\psi(x, y, z) = (1 - \mathrm{i}\varphi\hat{l}_z)\psi(x, y, z)\,, \quad \varphi \to 0\,. \tag{5.162}$$

Minthogy valamennyi infinitézimális generátor egymás között nem kommutál

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = \mathrm{i}\hat{l}_z\,, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = \mathrm{i}\hat{l}_x\,, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = \mathrm{i}\hat{l}_y \tag{5.163}$$

az $so(3)$ rangjára az $\tilde{l} = 1$ érték adódik, vagyis csakis olyan bázis választható, amelynél a három generátor legfeljebb egyike állítható elő diagonál mátrix formájában. Standardbázisként általában

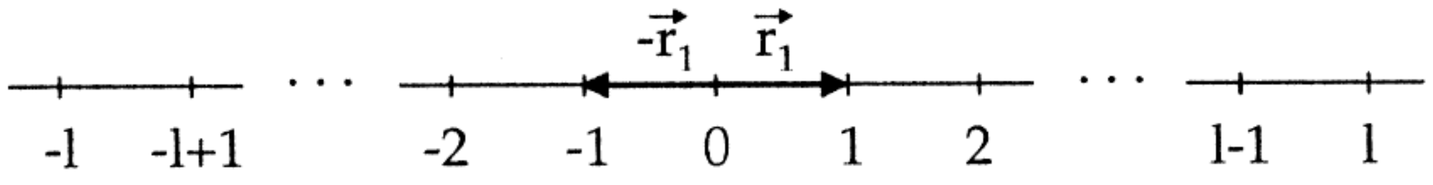
$$H_1 = \hat{l}_z\,, \quad E_1 = E_+ = \hat{l}_x + \mathrm{i}\hat{l}_y\,, \quad E_2 = E_- = \hat{l}_x - \mathrm{i}\hat{l}_y \tag{5.164}$$

kerül bevezetésre, ahol $E_\pm$ a létraoperátorokat jelöli. Ezen bázistranszformációt $\{\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z\} \to \{H_1, E_+, E_-\}$ követően igaz lesz az új bázis elemeire:

$$[H_1, E_\pm] = \pm E_\pm\,, \tag{5.165a}$$

$$[E_+, E_-] = 2H_i\,. \tag{5.165b}$$

Az a tér, amelyben az $so(3)$ LIE-algebra gyökereit és súlyait ábrázolhatjuk egydimenziós $(\tilde{l} = 1)$. Az (5.165a) szerint a gyökérvektorok rendszere az $\vec{\mathbf{r}}_1 = (1)$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-1) = -\vec{\mathbf{r}}_1$ vektorokból áll (lásd az **5.10. ábrát**).



5.10. ábra.

Az $so(3)$ (és ezzel együtt az $SO(3)$) irreducibilis nem ekvivalens leképezéseinek súlyai egész értékűek, és egymástól 1 értékkel különböznek. Az $so(3)$ irreducibilis leképezésének legnagyobb súlya legyen $m = l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, a hozzátartozó sajátvektor jelölése pedig $\psi_{l,m=l}$. A lehetséges további súlyokhoz tartozó sajátvektorokat az E_- létraoperátornak a $\psi_{l,m=l}$ vektorra való ismételt alkalmazásával számíthatjuk, amíg az $m = -l$ értékhez tartozó sajátvektort $(E_-\psi_{l,m=-l} = 0)$ el nem érjük. Minden lépésnél a súly (5.161) alapján az m értékről az $m - r_1 = m - 1$ értékre redukálódik. Az $SO(3)$ egy irreducibilis D^l leképezésének — ahol a legnagyobb súly l, $l \in \mathbb{Z}$ —, súlydiagrammja a számegyenesen az $l, l-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -l+1, -l$ pontokból áll (lásd **5.10. ábra**). A leképezés így $2l+1$ dimenziós. A leképezési tér bázisvektorai a forgásimpulzus z komponensének $\hat{l}_z$ operátorához és az m sajátértékhez tartozó $\psi_{l,m}$ sajátfüggvényei:

$$\hat{l}_z\psi_{l,m} = m\psi_{l.m} \quad (m = l, \ldots, 0, \ldots, -l)\,, \tag{5.166}$$

így az $SO(3)$ irreducibilis leképezésének m súlyai fizikailag az $\vec{\mathbf{I}}$ forgatási impulzus a kvantáló tengelyre (z tengely) vett vetületének lehetséges mérési értékeit adja (iránykvantálás. Minthogy a CASIMIR-operátor $C = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \hat{l}^2$ valamennyi generátorral kommutál,

$$[\hat{l}_x\,,\ \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \hat{l}^2] = [\hat{l}_y\,,\ \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \hat{l}^2] = [\hat{l}_z\,,\ \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 = \hat{l}^2] = 0\,, \tag{5.167}$$

a $\psi_{l,m}$ függvények a forgatási impulzus négyzetének is sajátfüggvényei. Az $l(l+1)$ sajátértékek:

$$\hat{\vec{\mathbf{I}}}^2 \psi_{l,m} = l(l+1)\psi_{l,m}\,. \tag{5.168}$$

Az $SO(3)$ irreducibilis leképezéseit specifikáló l szám a forgatási impulzus $|\vec{\mathbf{I}}| = \sqrt{l(l+1)}$ nagyságát is megszabja.

Véges háromdimenziós az EULER-szög körüli $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ forgatásoknál a $\psi_{l,m}$ függvények egymás között az alábbiak szerint transzformálódnak:

$$R(\varphi, \vartheta, \psi)\psi_{l,m} = \sum_{m'=-l}^{+l} D^{(l)}_{m'm}(\varphi, \vartheta, \psi)\psi_{l,m'}\,. \tag{5.169}$$

4. Forgatási impulzus csatolás

Azok az ψ_{l_1,m_1} és ψ_{l_2,m_2} függvények, amelyek szférikus potenciáltérben két részecske forgási impulzus állapotát leírják háromdimenziós forgatásoknál a fogatási csoport $D^{(l_1)}$ és $D^{(l_2)}$ irreducibilis leképezései szerint transzformálódnak. A szorzattér $\psi_{l_1 m_1}\psi_{l_2 m_2}$ bázisa a $D^{(l_1)} \otimes D^{(l_2)}$ KRONECKER-szorzat alapján transzformálódik. A két részecskéből álló rendszer $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{l_1}} + \vec{\mathbf{l_2}}$ eredő forgási impulzusa a szorzatelőállítás CLEBSCH–GORDAN-sor szerinti redukciója útján adódik (5.128):

$$D^{(l_1)} \otimes D^{(l_2)} = \sum_L \oplus\, D^{(L)}\,, \quad |l_1 - l_2| \le L \le l_1 + l_2\,. \tag{5.170}$$

A leképezési tér dimenziójára: $(2l_1+1)(2l_2+1) = \sum_L (2L+1)$.

A szorzattér bázisa $\psi_{l_1 m_1}\psi_{l_2 m_2}$. Az $\{l_1 m_1 l_2 m_2 | LM\}$ CLEBSCH–GORDAN-együtthatók segítségével végrehajtott transzformáció ezt a bázist, amelynek elemei az $\{l_1 m_1 l_2 m_2\}$ egyrészecskeállapot forgási impulzus kvantumszámai alapján vannak specifikálva, az invariáns alterekhez igazodó ψ_{LM} bázisba viszi át, amelynek elemei az L eredő forgási impulzus kvantumszámával és a kvantáló tengelyre vett M, $M = -L, \ldots, L$ vetületeivel jellemezhetőek:

$$\psi_{LM} = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = M}} (l_1 m_1 l_2 m_2 | LM)\psi_{l_1,m_1}\psi_{l_2,m_2}\,. \tag{5.171}$$

■ Az $l_1 = 1$, $l_2 = 3$ értékpárra a CLEBSCH–GORDAN-sorokban irreducibilis $D^{(L)}$ részeire, amelyek az $\vec{\mathbf{l_1}}, \vec{\mathbf{l_2}}$ forgási impulzusoknak az eredő $L = 2, 3, 4$ forgási impulzusra való vektoriális összekapcsolásánál adódik

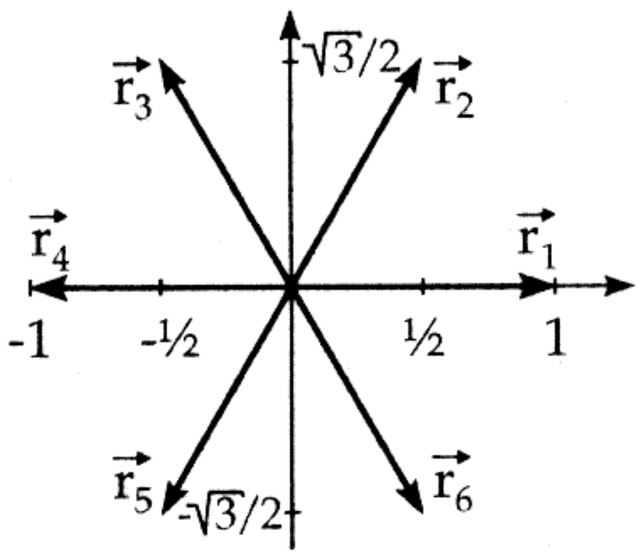
$$D^{(1)} \otimes D^{(3)} = D^{(2)} \oplus D^{(3)} \oplus D^{(4)}\,. \tag{5.172}$$

5. Az $SU(3)$ speciális unitér csoport

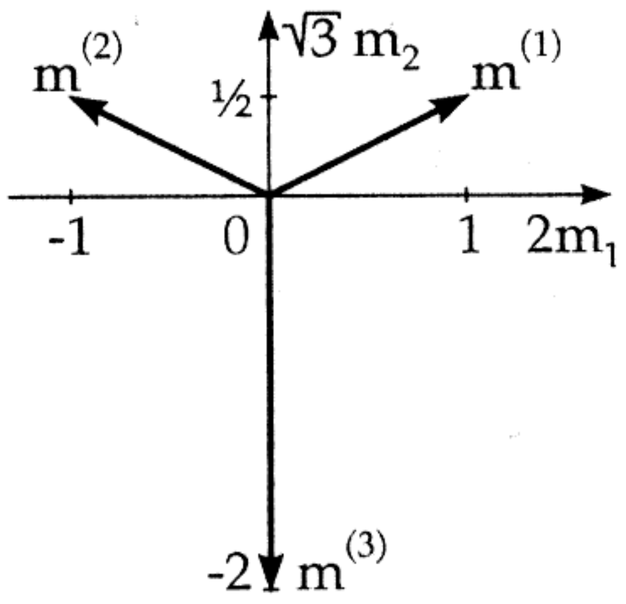
Az $SU(n=3)$ speciális unitér csoport dimenziója $d = n^2 - 1 = 8$. A hozzátartozó $SO(3)$ LIE-algebrát így 8 infinitézimális generátor feszíti ki, amelyek közül a CARTAN–WEYL-bázisra való áttéréskor egyidejűen kettő hozható diagonál alakra:

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,. \tag{5.173}$$

Az $SO(3)$ LIE-algebra rangja $l = 2$, így a gyökérdiagramm (lásd **5.11. ábra**), és az $SU(3)$ ábrák irreducibilis leképezések súlydiagrammjai a síkon a következőek lesznek:



5.11. ábra.



5.12. ábra.

(5.173) szerint az alap leképezés súlyait az alábbi vektorok szolgáltatják:

$$\vec{\mathbf{m}}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{\mathbf{m}}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{\mathbf{m}}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \tag{5.174}$$

ahol $\vec{\mathbf{m}}^{(1)}$ a legnagyobb súly (**5.12. ábra**). A hat gyökérvektorra a következő adódik:

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (1,0) = -\vec{\mathbf{r}}_4\,, \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{2}\left(1, \sqrt{3}\right) = -\vec{\mathbf{r}}_5\,, \quad \vec{\mathbf{r}}_3 = \frac{1}{2}\left(-1, \sqrt{3}\right) = -\vec{\mathbf{r}}_6\,. \tag{5.175}$$

Az $SU(3)$ minden irreducibilis leképezésének legnagyobb súlya két vektor $\vec{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $\vec{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$ lineáris kombinációjaként állítható elő:

$$\vec{\mathbf{m}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} + \mu\vec{\mathbf{y}} \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{5.176}$$

A λ, μ egész számok szabják meg a $D(\lambda, \mu)$ irreducibilis leképezés dimenzióját:

$$n(\lambda, \mu) = (1+\lambda)(1+\mu)\left(1 + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\right)\,. \tag{5.177}$$

5.3.4. Csoportok alkalmazásai

Csoportokat alkalmaznak a kémiában és fizikában a megfelelő objektumok „szimmetriájának" leírására. Ilyen objektumok például a molekulák, kristályok, szilárdtest struktúrák vagy a kvantummechanikai rendszerek. Ezek az alkalmazások szolgáltatják a von NEUMANN-elv alapját: Ha egy rendszer, egy csoport szimmetria műveleteket tartalmaz, akkor a rendszer valamennyi fizikai megfigyelési értéke ugyanilyen szimmetriát kell mutasson.

5.3.4.1. Szimmetria műveletek, szimmetria elemek

Egy térbeli objektum s szimmetria műveletén a teljes tér önmagába történő olyan leképezését értjük, ahol a hosszak változatlanok maradnak és az objektum önmagával fedésbe kerül. A Fix s a szimmetria művelet fixpontjainak halmazát jelöli, vagyis a tér azon pontjainak halmazát, amelyek az s művelet során helyben maradnak. Fix s az s művelet szimmetria eleme. A szimmetria művelet leírására a SCHÖNFLIESS-féle szimbolikát használjuk. Kétféle szimmetria műveletet különböztetünk meg: fixpont nélkülieket és legalább egy fixponttal rendelkezőeket.

1. Fixpont nélküli szimmetria műveletek Ilyen műveletek a behatárolt térbeli objektumok esetében nem keletkezhetnek, ezért ezeket itt nem tárgyaljuk részletesen. Egy fixpont nélküli szimmetria művelet például a parallel eltolás.

2. Legalább egy fixponttal bíró szimmetria műveletek Például a forgatások és tükrözések. Ide tartoznak az alábbi műveletek:

a) Egy tengely körüli φ szöggel történő elforgatások A $\varphi = 2\pi/n$ szögre mind a forgatási tengelyt mind magát a forgatást C_n jelöli. A forgatási tengelyt ilyenkor n-fogúnak mondjuk.

b) Síkban történő tükrözés Mind a tükrözési síkot, mind magát a tükrözést σ jelöli. Ha ezen kívül van a fő forgási tengelyünk is, akkor ezt merőleges rajzoljuk meg. Az erre a tengelyre merőleges tükrözési síkokat σ_h (h mint horizontális) és a forgási tengelyen átmenő síkokat σ_v (v mint vertikális), vagy σ_d (d mint dihedrális amikor ennek következtében bizonyos szögek feleződnek) jelöli.

c) Forgatási tükrözések Azt a műveletet, amikor egy C_n forgatást egy σ_h tükrözés követ forgatási tükrözésnek nevezzük és S_n-nel jelöljük. A forgatás és a tükrözés felcserélhető. A forgatási tengely neve itt n-ed fokú forgatási-tükrözési tengely, jelölése szintén S_n. A tengelyt hozzátartozó szimmetria elemenek mondjuk, jóllehet az S_n művelet alkalmazásánál csakis a szimmetria centruma marad helyben. Az $n = 2$ esetén a forgatási tükrözést ponttükrözésnek vagy inverziónak is mondjuk (lásd 4.3.5.1.).

5.3.4.2. Szimmetria csoportok

Minden szimmetria műveletlhez tartozik egy inverz S^{-1} művelet, amelyik az S műveletet „visszacsinálja" , vagyis

$$SS^{-1} = S^{-1}S = \epsilon\,. \tag{5.178}$$

Itt ϵ az identicitási műveletet jelöli, vagyis amelyik az egész teret változatlanul hagyja. Egy térbeli objektum szimmetria műveleteinek összessége az egymás utáni alkalmazásra vonatkozóan csoportot alkot, amely általános esetben az objektum nem kommutatív szimmetria csoportja. Itt a következő összefüggések érvényesek:

a) Minden forgatás két tükrözés szorzata. A két tükrözési sík metszésvonala a forgástengely.

b) Két σ és σ' tükrözésre pontosan akkor igaz

$$\sigma\sigma' = \sigma'\sigma\,, \tag{5.179}$$

ha a hozzátartozó tükrözési síkok azonosak vagy egymásra merőlegesek.

c) Két egymást metsző forgástengellyel bíró forgatás szorzata szintén forgatás, amelynek forgástengelye áthalad az adott forgástengelyek metszéspontján.

d) Két azonos vagy két egymásra merőleges tengely körüli forgatásra igaz

$$C_2C_2' = C_2'C_2\,. \tag{5.180}$$

A szorzat szintén egy forgatás. Első esetben a hozzátartozó forgástengely az adott tengely, a második esetben a forgástengely merőleges a két adott tengelyre.

5.3.4.3. Molekulák szimmetria műveletei

Nagy tapasztalat szükséges ahhoz, hogy egy objektum valamennyi szimmetria elemét felismerjük. Az irodalomban, lásd például az [5.17], [5.19], [5.24] irodalmi hivatkozásokat, részletesen leírják hogyan lehet molekulák szimmetria csoportjait megkapni, ha valamennyi szimmetria elem ismeretes. Molekulák térbeli ábrázolására a következő szimbolikát használhatjuk: A C feletti jel (lásd **5.13. ábrát**) jelentése, hogy itt az OH csoport a rajz síkja felett található, a C jobb oldalán lévő jel pedig, hogy az OC_2H_5 csoport alatta helyezkedik el.
A szimmetria csoport meghatározása a következő eljárással történhet:

1. Nincs forgástengely

a) ha nincs szimmetria elem, vagyis $G = \{\epsilon\}$, azaz az ϵ identitáson kívül a molekula nem tesz lehetővé szimmetria műveletet.

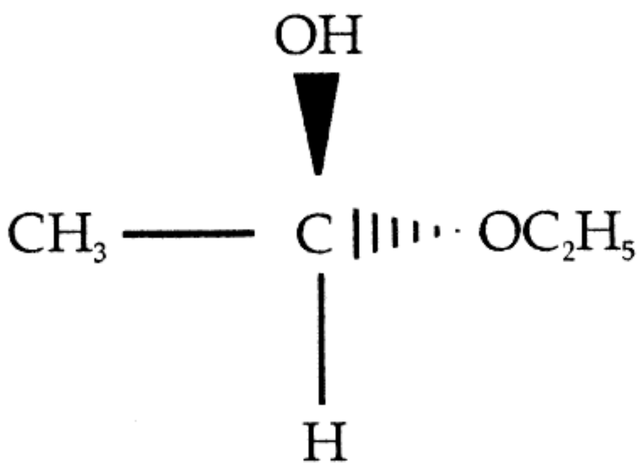
■ A félacetál molekula nem síkbeli, és négy különböző atomcsoportot tartalmaz.

b) Amennyiben σ egy tükrözés illetve i egy inverzió, akkor $G = \{\epsilon, \sigma\} =: C_s$ illetve $G = \{\epsilon, i\} =: C_i$, és így mindig izomorf Z_2-vel.

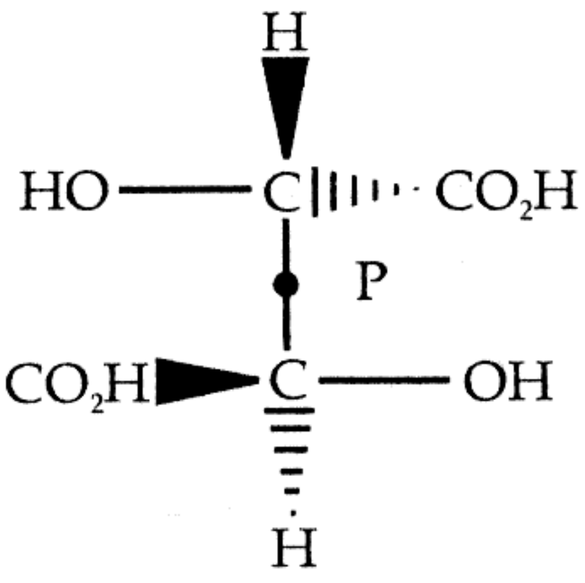
■ A szőlősav molekulája (lásd **5.14. ábra**) a P középpont körül tükrözhető (inverzió).

2. Pontosan egy C forgástengely

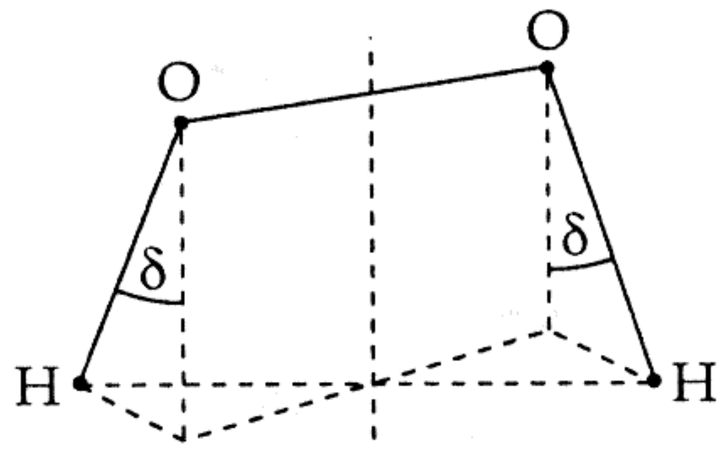
a) Tetszőleges szöggel történhet a forgatás, vagyis $C = C_\infty$, a molekula lineáris, és a szimmetria cso-



5.13. ábra.



5.14. ábra.



5.15. ábra.

port végtelen.

■ **A:** A kősó Na—Cl típusú molekulája esetén nincs vízszintes tükrözés. A C körüli valamennyi forgatáshoz tartozó szimmetria csoportot $C_{\infty v}$ jelöli.

■ **B:** Az O_2 molekulának egy vízszintes tükrözése van. Az ehhez tartozó szimmetria csoport a forgatásokból és a tükrözésből keletkezik, jelölése $D_{\infty h}$.

b) A forgástengely n-fogú, $C = C_n$, nincs azonban $2n$-rendű forgatás-tükrözési tengely.
További szimmetria elemek létezése esetén G egy π/n szöggel történő d elforgatás útján a C_n rendszerbe megy át, vagyis $G =< d > \cong Z_n$. Ebben az esetben G jelölése C_n.
Ha létezik vertikális σ_v tükrözés is, akkor $G =< d, \sigma_v > \cong D_n$ (lásd 5.3.3.1.), és G jelölése C_{nv}.
Ha azonban a σ_h tükrözés horizontális, akkor
$G =< d, \sigma_v > \cong Z_n \times Z_2$. A G jelölése ekkor C_{nh} és páratlan n esetén ciklikus (lásd 5.3.3.2.).

■ **A:** Hidrogén-hiperoxid esetében (lásd **5.15. ábra**) ez a három eset a fent megadott sorrendben lép fel: $0 < \delta < \pi/2, \delta = 0$ illetve $\delta = \pi/2$ esetben.

■ **B:** A H_2O vízmolekula szimmetria elemei egy kétfogú forgási tengely, és egy vertikális tükrözési sík. Ennek következtében a víz szimmetria csoportja izomorf a D_2 csoporttal, amely a KLEIN-féle V_4 csoporttal izomorf (lásd 5.3.3.2., **3.**).

c) A forgástengely n-fogú, de egyúttal van $2n$-rendű forgási-tükrözési tengely. Itt két esetet kell megkülönböztetnünk:
α) Nincs további vertikális tükrözés, ilyenkor $G \cong Z_{2n}$, és G jelölése S_{2n}.

■ Erre példa a $C_3(OH)_4$ képletű (lásd **5.16. ábrát**) tetrahidroxy-allén molekula.

β) Van vertikális tükrözés, ekkor G csoport $4n$-rendű, amelyet D_{nh} jelöl.

■ Az $n = 2$ esetre $G \cong D_4$, vagyis a csoport 8-rendű diédercsoport. Erre példa az allén-molekula (lásd **(5.17. ábra)**.

3. Több forgástengely Több forgástengely esetén további eset megkülönböztetéseket kell tennünk. Ha speciálisan $n \geq 3$ rendű forgástengelyeink vannak, akkor a következő csoportok adódnak járulékos szimmetria csoportok gyanánt.

a) A T_d tetraéder csoport Izomorf az S_4 csoporttal, ord $T_d = 24$;

b) Az O_h oktaéder csoport Izomorf az $S_4 \times Z_2$ csoporttal, ord $O_h = 48$;

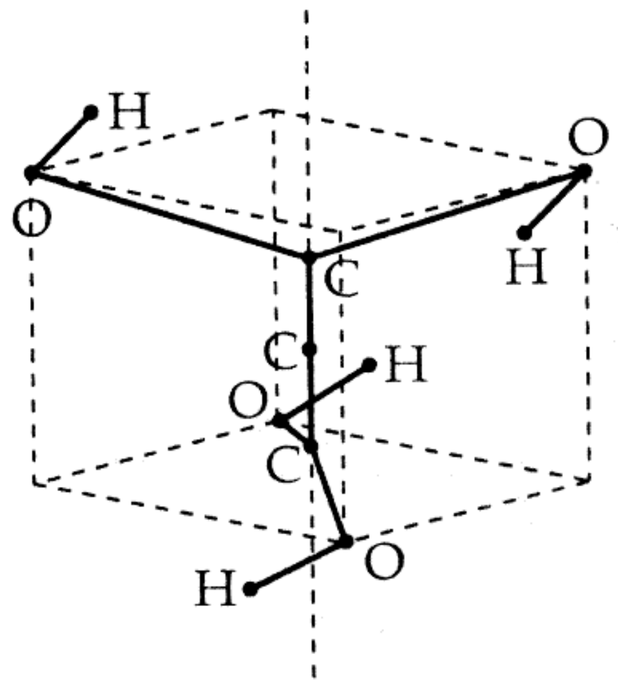
c) Az I_h ikozaéder csoport ord $I_h = 120$.
Ezek a csoportok a 154. oldalon tárgyalt (lásd **3.61. ábra**) reguláris poliéderek szimmetria csoportjai.

■ A metán molekula (lásd **5.18. ábra**) szimmetria csoportja a T_d tetraédercsoport.

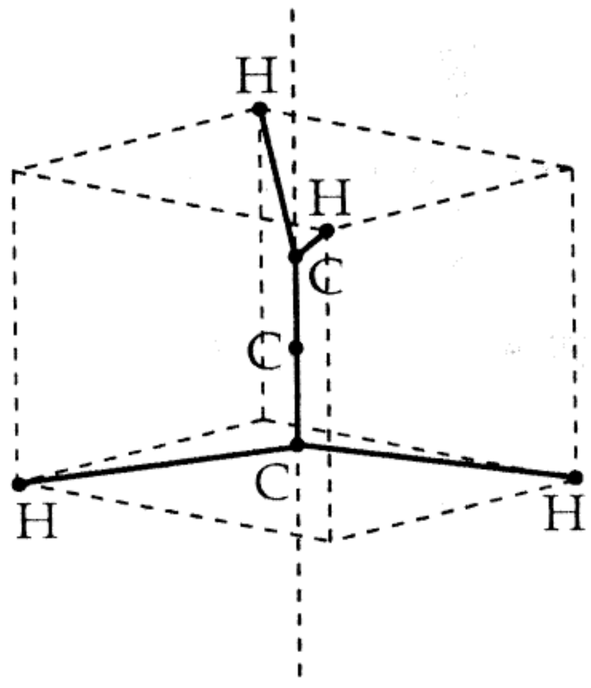
5.3.4.4. A krisztallográfia szimmetria csoportjai

1. Rácsszerkezetek

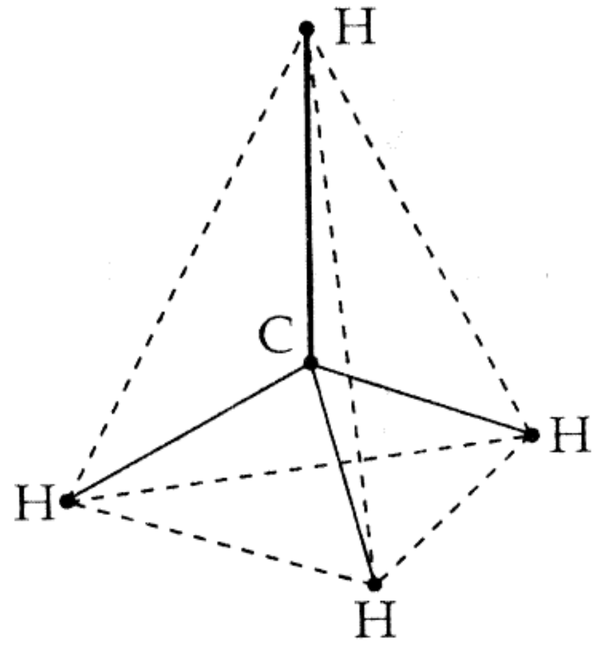
A $\vec{\mathbf{t}}_n$ transzlációk összessége alkotja a T transzláció csoportot. A transzlációk mint rácsvektorok az $L = \{\vec{\mathbf{t}}_n\}$ rács térbeli pontjait határozzák meg. A csoport művelete a következő: $cT(\vec{\mathbf{t}}_n) * T(\vec{\mathbf{t}}_m) =$



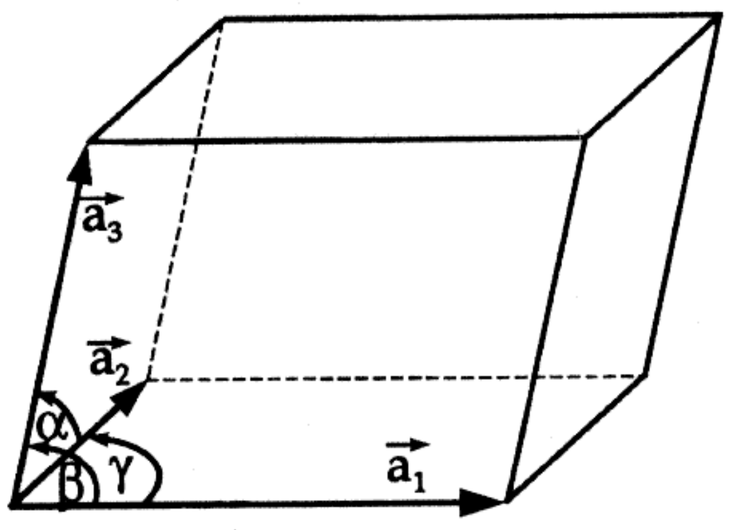
5.16. ábra.



5.17. ábra.



5.18. ábra.



5.19. ábra.

A krisztallográfiában egy kristályrács elemi cellái paralellepipedont alkotnak függetlenül attól, hogy azt atomokból vagy ionokból áll. A paralellepipedont három, egy kiválasztott rácspontból kiinduló nem komplanáris $\vec{\mathbf{a}}_i$ bázisvektor határozza meg (lásd **5.19. ábra**).

A végtelen geometriai rácsstruktúra primitív $\vec{\mathbf{t}}_n$ transzlációk alkalmazásával adódik:

$$\vec{\mathbf{t}}_n = n_1\vec{\mathbf{a}}_1 + n_2\vec{\mathbf{a}}_2 + n_3\vec{\mathbf{a}}_3\,, \quad n = (n_1, n_2, n_3) \quad n_i \in \mathbb{Z}\,, \qquad (5.181)$$

ahol az n_i együtthatók valamennyi egész számot felvesznek.

5.5. táblázat. Primitív Barvais-rácsok

Elemi cella	A bázisvektorok hosszviszonyai	Közbezárt szög
triklin	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$
monoklin	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$
rombikus	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$
trigonális	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma < 120°(\neq 90°)$
hexagonális	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = 90°, \gamma = 120°$
tetragonális	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$
kocka	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$

$T(\vec{\mathbf{t}}_n + \vec{\mathbf{t}}_m)$; egy $T(\vec{\mathbf{t}}_n)$ csoportelem inverze a $T^{-1}(\vec{\mathbf{t}}_n) = T(-\vec{\mathbf{t}}_n)$ elem. Egy $T(\vec{\mathbf{t}}_n)$ csoportelemnek az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorra való alkalmazása esetén:

$$T(\vec{\mathbf{t}}_n)\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{t}}_n\,. \qquad (5.182)$$

2. Bravais-rácsok

Ha figyelembe vesszük az $\vec{\mathbf{a}}_i$ bázisvektorok relatív hosszának, a páronként köztük lévő α, β, γ szögeknek (különösen a 90 és 120 szögértékek) lehetséges kombinációit, akkor a megfelelő rácsokhoz 7 különböző típusú primitív elemi cella adódik (Barvais-rácsok, lásd az **5.19. ábrát** és az **5.5. táblázatot**). Ez a rendszer további 7 nem primitív rácsra fejleszthető tovább, ahol az elemi cellák szimmetriájának meg-

hagyása mellett a sík- vagy térátlók metszéspontjaiban további rácspontokat alkalmazunk. Itt megkülönböztetünk egy oldalon síkközpontú, belső központú, és minden oldalon síkközpontú rácsokat.

3. Szimmetria műveletek kristályrács struktúrákban

Azok között a szimmetria műveletek között, amelyek a térrácsot ekvivalens helyzetbe viszik át, vannak pont-csoport műveletek, mint forgatások, forgási tükrözések és tükrözések síkra vagy pontokra. Természetesen nem minden pont-csoport alkot a krisztallográfia szempontjából pontcsoportot. Az a követelmény, hogy a csoportelemeknek egy $\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}}$ rácsvektorra való alkalmazása egy $\vec{\mathbf{t}'_\mathbf{n}} \in L$ (L a rácspontok összessége) rácsvektort eredményezzen a megengedett P pontcsoportokat a $P(R)$ csoportelemekre korlátozza:

$$P = \{R : R\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}} \in L\}\,, \quad \vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}} \in L\,. \tag{5.183}$$

Itt R egy valóságos ($R \in SO(3)$) vagy nem valóságos $R = IR' \in O(3)$, $R' \in SO(3)$, I : inverz operátor, $I\vec{\mathbf{r}} = -\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{r}}$: helyvektor) forgatási operátor. Például a rácsstruktúrának csak 1,2,3,4 vagy 6 fogszámú forgástengely felel meg. Összességében 32 krisztallográfiai P pontcsoport létezik.

Egy térrács szimmetria csoportjai olyan műveleteket is tartalmazhatnak, amelyek forgatások és primitív transzlációk egyidejű alkalmazásából állnak. Ilymódon csúszó tükrözéseket kaphatunk, vagyis olyan tükrözéseket, amelyek egy síkra való tükrözést és a síkkal párhuzamos transzlációt, illetve csavarásokat, $2\pi/n$ szöggel történő forgatásokat és $m\vec{\mathbf{a}}/n$ transzlációkat tartalmaz ($m = 1, 2, \ldots, n-1$, $\vec{\mathbf{a}}$: bázistranszláció).

Ezeket a műveleteket $\vec{\mathbf{V}}(R)$ nem primitív transzlációknak nevezzük, minthogy a „megtört" transzlációknak felelnek meg. A csúszótükrözés esetén R tükrözés, míg a csavarásnál R valóságos forgatás.

A G tércsoport azon elemei, amelyeket egy kristályrács változatlanul hagy szintén a P krisztallográfiai pontcsoport, a $T(\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}})$ primitív, és $\vec{\mathbf{V}}(R)$ nem primitív transzlációk alapján adódnak:

$$G = \{\{R|\vec{\mathbf{V}}(R) + \vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}} : R \in P\,, \quad \vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}} \in L\}\}\,. \tag{5.184}$$

A tércsoport neutrális eleme $\{e|0\}$, ahol e a P neutrális elemét jelöli. Az $\{e|\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}}\}$ primitív transzlációt, az $\{R|0\}$ pedig forgatást vagy tükrözést jelöl. Az $\{R|\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}}\}$ csoportelemnek az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorra való alkalmazásának erdménye:

$$\{R|\vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}}\}\vec{\mathbf{r}} = R\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{t}_\mathbf{n}}\,. \tag{5.185}$$

5.6. táblázat. Barvais-rácsok, kristályrendszerek és kristályosztályok
Jelölések: C_n – egy n-fogú forgástengely körüli forgatás, D_n – diédercsoport, T_n – tetraédercsoport, O_n – oktaédercsoport, S_n – forgási tükrözés n-fogú forgási-tükrözési síkkal

Rácstípus	Kristályrendszer (Holoedria)	Kristályosztály
triklin	C_i	C_1, C_i
monoklin	C_{2h}	C_2, C_h, C_{2h}
rombikus	D_{2h}	C_{2v}, D_2, D_{2h}
tetragonális	D_{4h}	$C_4, S_4, C_{4h}, D_4, C_{4v}, D_{2d}, D_{4h}$
hexagonális	D_{6h}	$C_6, C_{3h}, C_{6h}, D_6, C_{6v}, D_{3h}, D_{6h}$
trigonális	D_{3d}	$C_3, S_6, D_3, C_{3v}, D_{3d}$
kocka	O_h	T, T_h, T_d, O, O_h

4. Kristályrendszerek (Holoedria)

Kimutatható, hogy a 14 Barvais-rácsból, a 32 $P = \{R\}$ krisztallográfiai pontcsoportból és a megengedett $\vec{\mathbf{V}}(R)$ nem primitív transzlációkból összesen 230 $G = \{R|\vec{\mathbf{V}}(R) + \vec{\mathbf{t_n}}\}$ tércsoport szerkeszthető. A pontcsoportoknak 32 kristályosztály felel meg. A 32 pontcsoportból 7 csoport nem részcsoportjai más pontcsoportnak, ugyanakkor tartalmaz részcsoportként további pontcsoportokat. Ez a 7 pontcsoport mindig kristályrendszert (holoedriát) alkot. A 7 holoedria szimmetriáit megtaláljuk a 7 BARVAIS-rács szimmetriái között. A 32 kristályosztály felosztása a 7 kristályrendszer között, és jelölésmódjuk **5.6. táblázatban** van megadva.

Megjegyzés: A G tércsoport az „üres" rács szimmetria csoportja. A valóságos kristály úgy áll elő, hogy meghatározott atomok vagy ionok mint kristály építőkövek szerepelnek a kristályhelyeken, miközben eloszlásuk egy saját szimmetriát mutat. Éppen ezért a G_0 szimmetriacsoport általában kisebb mértékű szimmetriát mutat mint G $(G \supset G_0)$.

5.3.4.5. A kvantummechanika szimmetria csoportjai

Azok a lineáris koordináta transzformációk, amelyeket egy kvantummechanikai rendszer $\hat{H}$ HAMILTON-operátora változatlanul hagy egy olyan szimmetria csoportot jelentenek, amelynek g elemei a $\hat{H}$ operátorral kommutálnak:

$$[g, \hat{H}] = g\hat{H} - \hat{H}g = 0\,, \quad g \in G\,. \tag{5.186}$$

A g és $\hat{H}$ felcserélhetősége annyit jelent, hogy a g és $\hat{H}$ elemekből alkotott egy φ állapotban alkalmazott operátor szorzatok esetén az operátor műveletek elvégzési sorrendje tetszőleges:

$$g(\hat{H}\varphi) = \hat{H}(g\varphi)\,. \tag{5.187}$$

Ebből következik, hogyha $\varphi_{E\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ az n-szeresen elfajuló E sajátértékhez tartozó $\hat{H}$ sajátállapotok, vagyis:

$$\hat{H}\varphi_{E\alpha} = E\varphi_{E\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{5.188}$$

akkor a transzformált $g\varphi_{E\alpha}$ állapotok ugyanahhoz az E sajátértékhez tartozó sajátállapotok lesznek:

$$g\hat{H}\varphi_{E\alpha} = \hat{H}g\varphi_{E\alpha} = Eg\varphi_{E\alpha}\,. \tag{5.189}$$

A transzformált $g\varphi_{E\alpha}$ állapotok a $\varphi_{E\alpha}$ sajátállapotok lineáris kombinációjaként írhatóak:

$$g\varphi_{E\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n} D_{\beta\alpha}(g)\varphi_{E\beta}\,. \tag{5.190}$$

Ezek szerint a $\varphi_{E\alpha}$ sajátállapotok az n-dimenzionális leképezési tér bázisát alkotják. A $\hat{H}$ HAMILTON-operátorok G szimmetria csoportjának a $(D_{\alpha\beta}(g))$ leképezési mátrixokkal történő $D(G)$ leképezése céljából. Amennyiben nincs „eldugott" szimmetria, akkor ez a leképezés irreducibilis. Rögzíthető, hogy egy kvantummechanikai rendszer energia sajátállapotai a HAMILTON-operátor szimmetria csoportjának irreducibilis leképezése útján osztályozhatóak.

Csoportok leképezésének elmélete egy kvantummechanikai rendszer ilyen srtuktúráit illető olyan minőségi megállapításokat tesz lehetővé, amelyek egyedül annak belső és külső szimmetriáira vezethetőek vissza. A rendszer szimmetriáját megtörő zavar hatására elfajzott energiaszintek felosztása, és az energia sajátállapotok közötti mátrixelemek kiválasztása egyaránt azon leképezések vizsgálatából következnek, amelyek szerint a szóban forgó állapotok és operátorok a csoportműveletek során transzformálódnak.

A csoportelmélet kvantummechanikai alkalmazását az irodalom részletesen tárgyalja, például [5.11], [5.13], [5.21], [5.22], [5.23].

5.3.4.6. Részecskefizikai alkalmazások

A részecskéknek belső szimmetriájuk van, amelyek a spin- és izospin szabadságfokkal írhatóak le.

1. Az $SU(2)$ speciális unitér csoport

Egy részecske spin és izospin függvényei a kétdimenziós ($n = 2$) $SU(n)$ speciális unitér csoport irreducibilis leképezései szerint transzformálódnak, amelynek elemeit három valós paraméterrel lehet jellemezni. A hozzátartozó $su(2)$ LIE-algebrát három infinitézimális generátor feszíti ki:

$$\mathbf{A}_j = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{5.191a}$$

Az antihermitikus és zérus nyomú mátrixokat:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.191b}$$

PAULI-mátrixoknak nevezzük. A következő felcserélési relációk érvényesek:

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \mathbf{A}_3\,, \quad [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = \mathbf{A}_1\,, \quad [\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1] = \mathbf{A}_2\,. \tag{5.192}$$

A kvantummechanikai spin- vagy izospinoperátorokat az alábbi kifejezések adják:

$$\hat{\vec{\mathbf{s}}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3)\,, \quad \hat{s}_j = \mathrm{i}\hbar\mathbf{A}_j\,, \qquad \text{ill..} \qquad \hat{\vec{\mathbf{t}}} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)\,, \quad \hat{t}_j = \mathrm{i}\mathbf{A}_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{5.193a}$$

a megfelelő felcserélési relációkkal:

$$[\hat{s}_1, \hat{s}_2] = \mathrm{i}\hbar s_3\,, \quad [\hat{s}_2, \hat{s}_3] = \mathrm{i}\hbar s_1\,, \quad [\hat{s}_3, \hat{s}_1] = \mathrm{i}\hbar s_2\,, \quad \text{ill..}$$

$$[\hat{t}_1, \hat{t}_2] = \mathrm{i}t_3\,, \quad [\hat{t}_2, \hat{t}_3] = \mathrm{i}t_1\,, \quad [\hat{t}_3, \hat{t}_1] = \mathrm{i}t_2\,. \tag{5.193b}$$

Az $\mathbf{A}_j$ infinitézimális generátorok az (5.192) szerint nem kommutálnak egymással, az su(2) LIE-algebra rangja $l = 1$ $\left(H_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_3\,,\ E_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_1\,,\ E_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_2\right)$.

Az SU(2) irreducibilis leképezéseit is egyetlen szám $s = \frac{N}{2}$ $(N = 0, 1, \ldots)$ határozza meg. A szomszédos súlyok különbsége 1; a leképezés dimenziója 2s+1, súlyai $-s, \ldots, +s$.

Megjegyzés: Az su(2) LIE-algebra $\mathbf{A}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ báziselemei közötti (5.192) felcserélési relációk megfelelnek az $su(2)$ LIE-algebra generátorai közötti (5.151) felcserélési relációknak, így a két algebra azonos struktúra állandók esetében izomorf. Ezért az $SO(3)$ és $SU(2)$ csoportok a neutrális elem környezetében lokálisan izomorfak, ami a globális csoportokra nem teljesül.

Az $su(2)$ és $so(2)$ közötti izomorfia nyilvánvalóvá teszi, miért lehet egy részecske spinjét saját forgási impulzusként interpretálni. Minden $R \in SO(3)$ forgatáshoz az $SU(2)$-ben pontosan két $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1$ mátrix tartozik. Ezért $SU(2)$-t az $SO(3)$ lefedő csoportjának is nevezik; $SU(2)$ kétszeresen fedi le az $SO(3)$-t.

2. Spin multiplettek

Egy $s = 1/2$ spin kvantumszámmal bíró részecske spinfüggvényei az $SU(2)$ csoport $D^{(1/2)}$ leképezése szerint transzformálódnak. A legnagyobb súly $m_s = s = +1/2$. Ennek megfelelően a leképezési térnek csak az $m_s = -1/2$ súlyhoz tartozó bázisállapota létezik, így az $\vec{\mathbf{s}}$ részecske spinnek a kvantáló tengelyre csak két beállási lehetősége van, $s_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$. A spin nagyságát az $su(2)$ LIE-algebra CASIMIR-operátorának sajátértéke szabja meg: $|\vec{\mathbf{s}}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{3/4}\hbar$.

Az s=1/2 spin esetén két részecske spinfüggvénye a $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$ szorzatleképezés szerint transzformálódik. A négydimenziós szorzattérben alkalmas bázistranszformációval ez a leképezés két irreducibilis leképezéssé esik szét, amelynek spinösszege $S = 1, 0$:

$$D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}\,. \tag{5.194}$$

Egy spintriplett $S = 1, M_S = 0, \pm 1$ és egy spinszinglett $S = 0, M_S = 0$ adódik.

3. Izospin multiplettek

A nukleonnak $t = 1/2$ izospinje van. Kétféle töltési állapotban létezik, az izospin kettős $t_3 = +1/2$ (proton) és $t_3 = -1/2$ (neutron) a nukleonok izospin függvényei ugyancsak az $SU(2)$ $D^{(1/2)}$ irreducibilis

leképezés szerint transzformálódik. A (5.194) szerint egy két nukleonból álló rendszer izomultiplettként vagy $T = 1$ (triplett $T_3 = 0, \pm 1$) vagy $T = 0$ (szinglett $T_3 = 0$) léphet fel.

4. Barionok és mezonok osztályozása

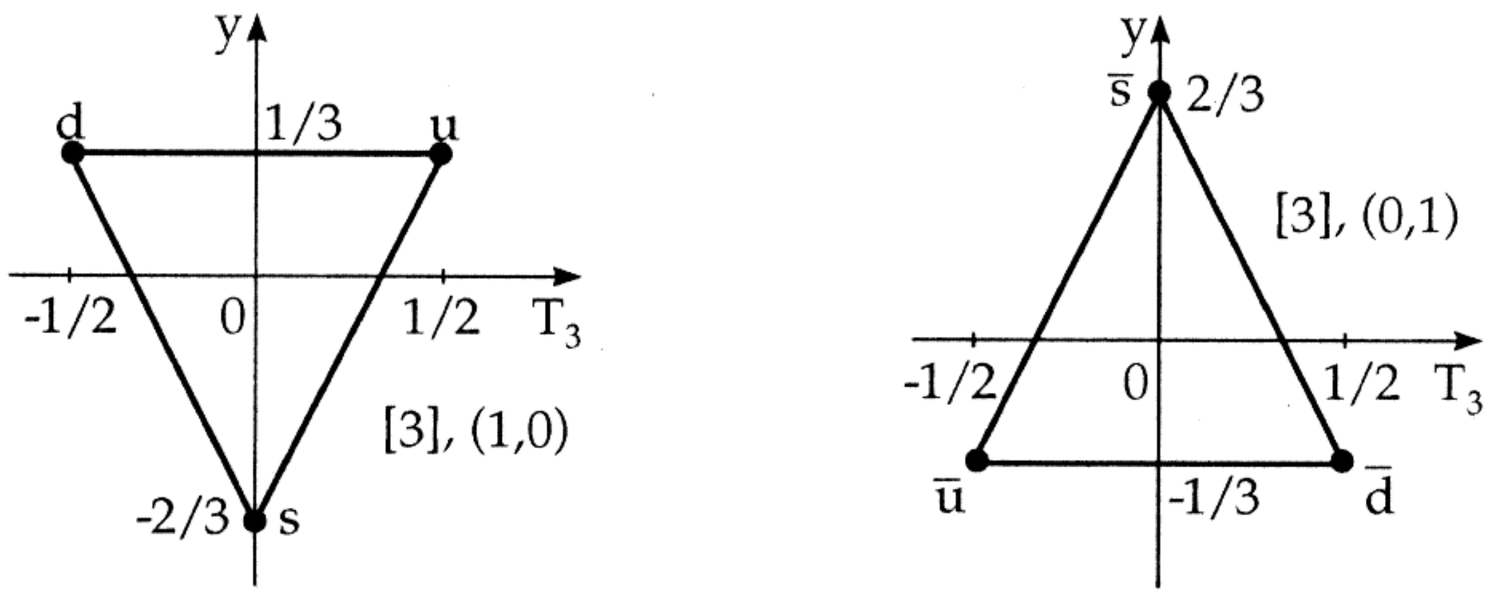
1. Kvark-szín állapotok Ha az (5.173)-ben az $su(2)$ LIE-algebrába a CARTAN–WEYL-bázis H_1, H_2 generátorait az alábbiak szerint helyettesítjük:

$$\hat{T}_3 = H_1\,, \quad \hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}} H_3 \tag{5.195}$$

a T_3 és Y sajátértékkel, ahol T_3 a T izospin harmadik komponensét, Y pedig a hipertöltést (villamos töltés Q=T_3+Y/2) jelenti, akkor a súlyokra (5.175) az $SU(3)$ $D(1,0)$ alap leképezését kapjuk:

$$m^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\,, \quad m^{(2)} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\,, \quad m^{(3)} = \left(0, -\frac{2}{3}\right)\,. \tag{5.196}$$

A fizikus irodalom a $D(0,1)$ leképezésre a [3] jelölést is használja, minthogy ez egy $SU(3)$ három bázisállapottal bíró multiplettet reprezentál. Annak érdekében, hogy a hadronokra (mezonok és barionok) egy osztályozást kapjunk, ezeket az állapotokat a három kvark-szín állapottal azonosítjuk $q = u, d, s$ **(Abb.5.20.a)**.



a) b)

5.20. ábra.

A $\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ antikvarkokra illetve a hozzátartozó antirészecskékre áttérve ellentétes hipertöltéssel, és az izospin ellentétes T_3 komponensével jellemzett állapotok állnak elő. Ezek az állapotok feszítik ki az $SU(3)$ csoport kontragradienseit vagy [3] (vagy $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ duális leképezéseit az alábbi súlyokkal:

$$\overline{m}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\,, \quad \overline{m}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\,, \quad \overline{m}^{(3)} = \left(0, \frac{2}{3}\right)\,, \tag{5.197}$$

ahol $\overline{m}^{(2)}$ a legnagyobb súly (lásd **5.20.b ábrát**). (A $D(H_e), D(E_\alpha)$ kontragradienseit vagy duális leképezéseit a $\mathbf{D}(H_l) \to \mathbf{D}(H_l)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D}(E_\alpha) \to -\mathbf{D}(E_\alpha)^{\mathrm{T}}$ átmenet útján nyerjük.)

2. A barionok $SU(3)$ multiplettjei A kvarkmodell szerint a barionok három kvarkból állanak. A barion állapotok (qqq) tehát a kvarkállapotokban harmadrendű tenzorokat alkotnak, amelyek az $SU(3)$ csoport alap leképezésének direkt szorzata $[3] \otimes [3] \otimes [3]$ (vagy $(1,0) \otimes (1,0) \otimes (1,0)$) szerint transzformálódnak. A szorzattér dimenziója $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Egy redukció a CLEBSCH–GORDAN-sorhoz: (lásd 302. old.)

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1] \tag{5.198}$$

(vagy $(3,0) \oplus (1,1) \oplus (1,1) \oplus (0,0)$), ahol [1] (vagy $(0,0)$) az identikus leképezést $T_3 = Y = 0$ értékkel jelenti. A leképezési tér tehát szétesik rendre 10,8,8 és 1 dimenziós invariáns alterek direkt összegére. Ezzel megkapjuk az $SU(3)$ szín multiplettjeit, egy dekaplettet, két oktettet és egy szinglettet. Az irreducibilis leképezésekben szereplő súlyok határozzák meg a barionok lehetséges T_3,Y kvantumszámait.

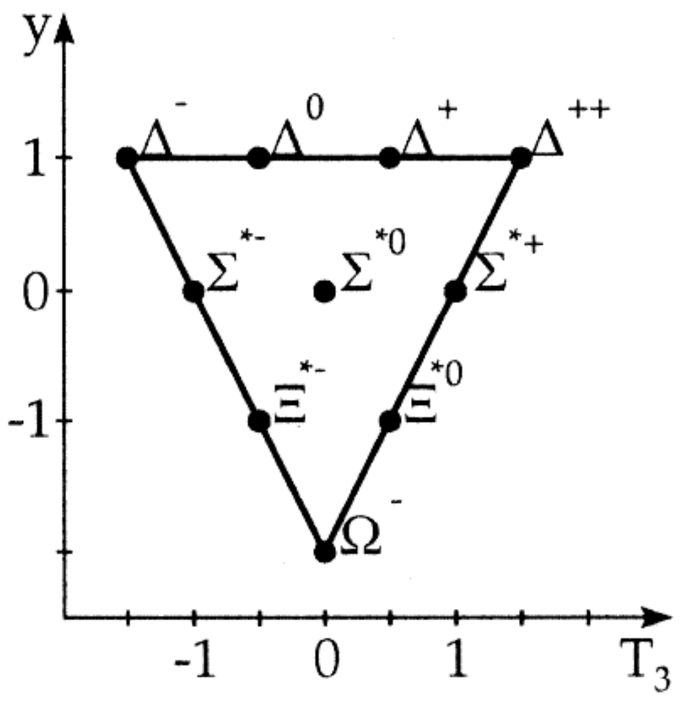
Egy a λ, μ értékkel jellemzett irreducibilis leképezés esetén a következő T izospin és Y hipertöltés értékek lépnek fel:

$$0 \leq T \leq \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\,, \quad -T \leq T_3 \leq T\,; \quad \frac{1}{3}(\lambda-\mu)-\lambda \leq Y \leq \frac{1}{3}(\lambda-\mu)-\mu\,. \tag{5.199}$$

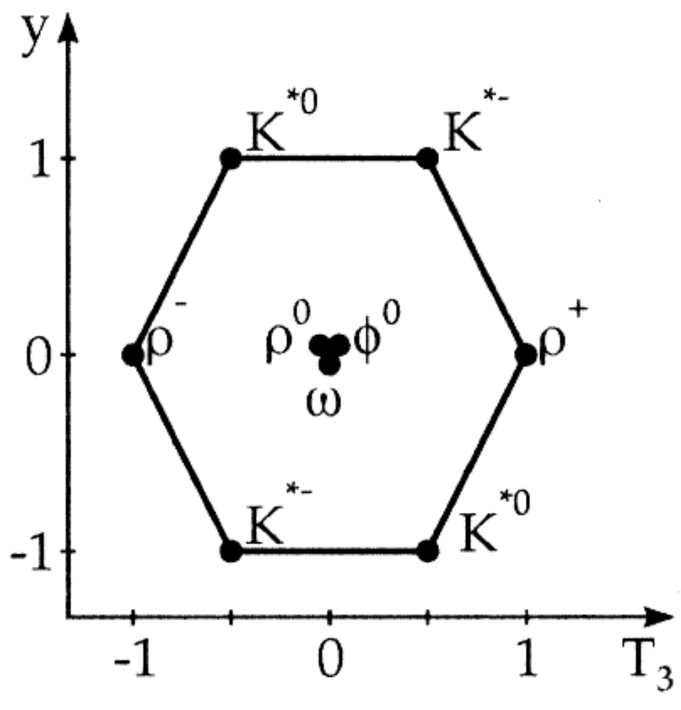
Az (5.198) szétesés során keletkező multiplettekre a következőket nyerjük:

$$[10]: T_z = \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\,, \;\; Y = 1, 0, -1, -2\,; \quad [8]: T_z = 1, \frac{1}{2}, 0\,, \;\; Y = 1, 0, -1\,. \tag{5.200}$$

Az **5.21. ábrán** tízes multiplettje I=3/2 spin esetére van feltüntetve. A Δ^{++} rezonancia a legnagyobb súlyú állapotot reprezentálja.



5.21. ábra.



5.22. ábra.

3. Mezonok $SU(3)$ multiplettjei A mezonok egy kvarkból és egy antikvarkból épülnek fel. Ezért a mezon állapotok a 9-dimenziós $(q, \bar{q})$ szorzattérben helyezkednek el; A $[3] \otimes [\bar{3}]$ vagy $(1,0) \otimes (0,1)$ szorzatleképezés szerint transzformálódnak, amelyek a CLEBSCH–GORDAN-sor szerint

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1] \tag{5.201}$$

(vagy $(1,0) \otimes (0,1) = (1,1) \oplus (0,0)$) esnek szét. Az invariáns alterek egy oktettet és egy szinglettet alkotnak. Az oktettben kapott állapotokat T=Y=0 és az egyszeres állapotait T=Y=0 egyetlen súlydiagrammban foghatjuk össze, amely az $SU(3)$ multiplett állapotainak a természetben megvalósuló kevert állapotai. =gy az állapotok nonettjét kapjuk.

Az **5.22. ábra** az I=1 spinértékhez tartozó vektormezonok nonettjét mutatja. A ρ^+-mezon (T=1,T_3=-1) a legnagyobb súlyú állapotot reprezentálja. Annak az izospin multiplettnek része, amelyhez még a ρ^--mezon (T=1,T_3=-1) és a ρ^0 -mezon (T=1,T_3=0) tartozik. A fizikai Φ^0 - és ω- mezonok az (ω) oktett és az (Φ^0) szinglett $SU(3)$- (T=Y=0) állapotainak szuperpozíciói.

5.3.4.7. További fizikai alkalmazási példák

A speciális folytonos csoportok fizikai alkalmazására itt csak egyszerű felsorolással adhatunk példákat. Részletesebb irodalom: [5.11], [5.15].

$U(1)$: Az elektrodinamika mértéktranszformációi.

$SU(3)$: A magfizika négyrészecske problémája.

$SO(4)$: A hidrogénspektrum elfajulásai.

$SU(4)$: Az atommagok héjmodelljében a spin- és izospin szabadságfokok egyesítéséből adódó WIGNER-szupermultiplett; A kvarkmodell flavor-multiplettjének leírása charm szabadságfok figyelembe vételével.

$SU(6)$: A kvarkmodell flavor és spin szabadságfokainak kombinációja útján előálló multiplett; magstruktúra modellek.

$U(n)$: Az atom és magfizika héjmodelljei.
$SU(n), SO(n)$: A magfizika többrészecske problémái.
$SU(2) \otimes U(1)$: A gyenge villamos kölcsönhatás standard modellje.
$SU(5) \supset SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$: Az alapvető kölcsönhatások egységesítése.

5.3.5. Gyűrűk és testek

Ebben a fejezetben két bináris művelettel bíró algebrai struktúrákat tárgyalunk.

5.3.5.1. Definíciók

1. Gyűrűk
A + és * bináris művelettel bíró R halmazt gyűrűnek nevezünk (jelölése: $(R\,,+\,,*)$), ha

- $(R,+)$ ABEL-csoport,
- $(R,*)$ félcsoport és
- a disztributivitási szabályok érvényesek:

$$a*(b+c)=(a*b)+(a*c), \quad (b+c)*a=(b*a)+(c*a)\,. \tag{5.202}$$

Amennyiben $(R,*)$ kommutatív illetve van neutrális eleme akkor az $(R,+,*)$ kommutatív illetve egységelemes gyűrű.

2. Testek
Testnek nevezünk egy olyan gyűrűt, amelyben $(R\setminus\{0\},*)$ ABEL-csoport. Ilymódon minden test egy speciális egységelemes kommutatív gyűrű.

3. Testbővítések
Legyenek $(K.*,+)$ és $(E.*,+)$ testek. Amennyiben $K\subseteq E$, akkor $(E.*,+)$ a $(K.*,+)$ test bővítése.
Példák gyűrűkre és testekre:

■ **A:** A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ számhalmazok az összeadással és a szorzással egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak; A $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ ráadásul testek is. A páros számok halmaza az egységelem nélküli gyűrűre szolgáltat példát. A $\mathbb{C}$ test az $\mathbb{R}$ test bővítése.

■ **B:** A valós számok feletti valamennyi n-edrendű mátrix nem kommutatív gyűrű, az egységmátrixszal mint egységelemmel.

■ **C:** A valós polinomok $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ halmaza az közönséges összeadásra és szorzásra vonatkozóan gyűrűt, az $R[x]$ polinomgyűrűt alkotja. Általánosabban az R feletti polinomgyűrű helyett bármely egységelemes kommutatív gyűrű feletti polinomgyűrűt értelmezhetünk.

■ **D:** Véges gyűrűkre példa a Z_m modulo m maradékosztály gyűrű: Z_m az egész számok azon $[a]_m$ osztályából áll, amelyek az m számmal osztva ugyanazt a maradékot adják ($[a]_m$ az a egész szám által meghatározott ekvivalencia osztály a 5.2.4.-ben bevezetett $\sim_R$ relációra vonatkoztatva). Ekkor Z_m gyűrűben a $\oplus$ és $\odot$ gyűrű műveleteket vezetünk be:

$$[a]_m\oplus[b]_m=[a+b]_m \quad \text{és} \quad [a]_m\odot[b]_m=[a\cdot b]_m\,. \tag{5.203}$$

Amennyiben az m természetes szám prím, akkor $(\mathbb{Z}_m\,,\oplus\,,\odot)$ test is.

5.3.5.2. Részgyűrűk, ideálok

1. Részgyűrű Legyen $(R,+,*)$ egy gyűrű, és $U\subseteq R$ a + és * műveletekre szintén egy gyűrű. Ekkor $(U,+,*)$ az R gyűrű részgyűrűje. Az $(R,+,*)$ gyűrű egy U nem üres részhalmaza akkor részgyűrűje R-nek, ha minden $a,b\in U$ esetén $a+(-b)$ és $a*b$ szintén U elemei (részgyűrű kritérium).

2. Ideál Egy I részgyűrű akkor ideál, ha valamennyi $r\in R$ és $a\in I$ estében mind $r*a$ és $a*r$ elemei I-nek. Ezek a speciális részgyűrűk képezik az alapját faktorgyűrűk kialakításának (lásd 5.3.4., 5.3.5.3.).
Az $\{0\}$ és R *triviális részgyűrűk* szintén R ideáljai. Testeknek csak triviális ideáljai léteznek.

3. Főideál A $\mathbb{Z}$ minden ideálja főideál, ezek azok az ideálok, amelyek egyetlen gyűrűelemmel generálhatóak. Ezeket az $m\mathbb{Z} = \{mg \mid g \in \mathbb{Z}\}$ alakban írjuk, és (m)-mel jelöljük.

5.3.5.3. Homomorfizmusok, izomorfizmusok, homomorfia tétel

1. Gyűrűhomomorfizmus és gyűrűizomorfizmus

Gyűrűhomomorfizmus: Az $(R_1, +, *)$ és $(R_2, +_\circ, *_\circ)$ gyűrűk között egy h: $R_1 \to R_2$ leképezés gyűrűhomomorfizmus, ha az alábbiak érvényesek:

$$h(a+b) = h(a) +_\circ h(b) \quad \text{és} \quad h(a*b) = h(a) *_\circ h(b)\,. \tag{5.204}$$

Mag: A h leképezés magját azok az R_1-beli elemek alkotják, amelyeknek leképezése az $(R_2, +)$ neutrális eleme (0). Jelölése ker$h$:

$$\ker h = \{a \in R_1 \mid h(a) = 0\}\,. \tag{5.205}$$

A ker$h$ ideálja az R_1 gyűrűnek.

Gyűrűizomorfizmus: Amennyiben a h leképezés ezen túlmenően bijektív is, akkor h neve izomorfizmus, és az R_1 és R_2 gyűrűk egymással izomorfak.

Faktorgyűrűk: Legyen I egy $(R, +, *)$ gyűrű ideálja, ekkor az R gyűrű $(R, +)$ additív csoportjában az $\{a + I \mid a \in R\}$ mellékosztályainak halmaza (lásd 5.3.3., **1.**) az alábbi műveletekkel egy gyűrűt alkot:

$$(a+I) +_\circ (b+I) = (a+b) + I \quad \text{és} \quad (a+I) *_\circ (b+I) = (a*b) + I\,, \tag{5.206}$$

egy a gyűrűt az R -nek I szerinti faktorgyűrűjének mondjuk, és R/I-vel jelöljük.
A $\mathbb{Z}$ (m) főideáljai mint faktorgyűrűk éppen a $Z_m = Z_{/(m)}$ maradékgyűrűket szolgáltatják (lásd a gyűrűkre és testekre vonatkozó fenti példát).

2. A gyűrűkre vonatkozó homomorfia tétel Ha a csoportokra vonatkozó homomorfia tételben a normálosztót ideállal helyettesítjük, akkor megkapjuk a gyűrűk homomorfia tételét. Egy h: $R_1 \to R_2$ gyűrű homomorfizmus R_1 egy ideálját határozza meg, nevezetesen a $\ker h = \{a \in R_1 \mid h(a) = 0\}$ ideált. Az $R_1/\ker h$ faktorgyűrű izomorf az $h(R_1) = \{h(a) \mid a \in R_1\}$ homomorf képével. Fordítva minden R_1 ideálja egy nat_I: $R_1 \to R_2/I$ homomorf leképezést határoz meg. Itt $nat_I(a) = a + I$, amely leképezést természetes homomorfizmusnak nevezünk.

5.3.6. Vektorterek *

5.3.6.1. Definíció

Egy K test feletti vektortér (K-vektortér) „vektorok" additívnak tekintett $V = (V, +)$ ABEL-csoportjából, a „skalárok" $K = (K, +, *)$ testéből valamint egy külső szorzásból $K \times V \to V$ áll, amely utóbbi minden rendezett (k, v) párhoz ($k \in K$ és $v \in V$) egy $kv \in V$ vektort rendel. Itt a következő szabályok érvényesek:

(V1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ minden $u, v, w \in V$. (5.207)

(V2) Létezik egy vektor $0 \in V$, amire $v + 0 = v$ minden $v \in V$. (5.208)

(V3) Minden v vektorhozvan egy olyan $-v$ vektor, amire $v + (-v) = 0$. (5.209)

(V4) $v + w = w + v$ minden $v, w \in V$. (5.210)

(V5) $1v = v$ minden $v \in V$, 1 jelöli a test egységelemét . (5.211)

(V6) $r(sv) = (rs)v$ minden $r, s \in K$ és minden $v \in V$. (5.212)

(V7) $(r+s)v = rv + sv$ minden $r, s \in K$ és minden $v \in V$. (5.213)

(V8) $r(v+w) = rv + rw$ minden $r \in K$ és minden $v, w \in V$. (5.214)

Amennyiben $K = \mathbb{R}$ akkor valós vektortérről beszélünk.

---

*Ebben a fejezetben a vektorokat általában nem jelöljük kövér írásmóddal.

Példák vektorterekre:

■ **A:** Az $(n, 1)$ illetve $(1, n)$ méretű mátrixok a mátrix összeadás és egy valós számmal való külső szorzással egy valós $\mathbb{R}^n$ vektorteret alkotnak (ez az oszlopvektorok illetve sorvektorok vektortere, ld. 4.1.3.).

■ **B:** Valamennyi (m, n) méretű valós mátrix valós vektorteret alkot.

■ **C:** Egy $[a, b]$ intervallumon folytonos valós függvények az alább definiált műveletekre vonatkozóan:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{és} \quad (kf)(x) = k \cdot f(x) \tag{5.215}$$

valós vektorteret alkotnak. A függvényterek a funkcionál analízisben fontos szerepet játszanak.

5.3.6.2. Lineáris függőség

Legyen V egy K-vektortér. A $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathrm{V}$ vektorokat lineárisan függetlennek mondjuk, ha nem találhatóak olyan $k_1, k_2, \ldots, k_m \in K$ nem mind nullával azonos elemek, hogy $0 = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m$ igaz legyen. Ellenkező esetben ezek a vektorok lineárisan függenek egymástól. Vektorok lineáris függősége azt is jelenti, hogy egy vektor a többiek segítségével előállítható.

Amennyiben a V vektorai közül maximálisan n lineárisan független vektor található, akkor V n-dimenziós tér. Ez az n szám a dimenzió, és egyértelműen meghatározható. Bármely n lineárisan független vektor a V térben bázist alkot. Amennyiben ilyen maximális szám nem található, akkor a vektortér végtelen dimenziójú. A fent megadott vektorterek rendre n, $m \cdot n$ és végtelen dimenziójúak.
Az $\mathbb{R}^n$ vektortér n vektora csakis akkor lineárisan függő, ha az vektorokat oszlopok vagy sorok formájában tartalmazó mátrix determinánsa 0.
Legyen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ az n-dimenziós K-vektortérnek egy bázisa, ekkor minden $v \in V$ vektor egyértelműen előállítható $v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$ formában, ahol $k_1, k_2 \ldots, k_n \in K$.
Egy vektortér lineárisan független vektorainak halmaza
kiegészíthető ezen vektortér bázisává.

5.3.6.3. Lineáris leképezések

A vektorterek struktúrájával összeegyeztethető leképezéseket lineáris leképezéseknek nevezzük. Az f: $V_1 \to V_2$ leképezés lineáris, ha valamennyi $u, v \in V_1$ és $k \in K$ esetén igaz

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{és} \quad f(ku) = k \cdot f(u)\,. \tag{5.216}$$

Az $\mathbb{R}^n$ térből az $\mathbb{R}^m$ térbe történő f leképezéseket egy $m \times n$ méretű $\mathbf{A}$ mátrix segítségével az $f(v) = \mathbf{A}v$ formában írhatjuk le.

5.3.6.4. Alterek, dimenziótétel

1. Altér Legyen V egy vektortér és U a V tér részhalmaza. Amennyiben U a V téren értelmezett műveletekre nézve maga is vektorteret alkot, akkor U a V tér altere.
A V egy nem üres U részhalmaza akkor altér, ha bármely $u_1, u_2 \in U$ és $k \in K$ esetén $u_1 + u_2$ és ku_1 az U eleme (altér kritérium). Alternatív alakban: minden $u_1, u_2 \in U$ és $k_1, k_2 \in K$ esetén $k_1u_1 + k_2u_2 \in U$.

2. Magtér, képtér Legyenek V_1 és V_2 vektorterek ugyanazon test felett. Legyen továbbá f: $V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés, ekkor a magtér (jelölése $\operatorname{Ker} f$) és képtér (jelölése $\operatorname{Im} f$) altereket az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V_1 \mid f(v) = 0_{V_2}\}\,, \tag{5.217a}$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V_1\} = \{v_2 \in V_2 \mid \exists v_1 \in V_1, \text{ hogy } f(v_1) = v_2\}\,. \tag{5.217b}$$

Például egy homogén lineáris egyenletrendszer $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ megoldásainak halmaza az $\mathbf{A}$-val definiált lineáris leképezés magtere.

3. Dimenziótétel A $\dim \operatorname{Ker} f$ és $\dim \operatorname{Im} f$, vagyis a fent definiált alterek dimenziói között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V_1\,, \tag{5.218}$$

amelyet *dimenziótétel*nek hívunk. $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ekvivalens azzal, hogy az f lineáris leképezés injektív. Ha $V_1 = V_2 = V$ és V véges dimenziós, akkor $\operatorname{Im} f = V \iff \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Szokás $\dim \operatorname{Im} f$-et f rangjának is hívni. Ha f kvadratikus mátrix, akkor rendszámának és rangjának különbségét a mátrix *nul-*

*litár*ának vagy *defektus*ának nevezzük. A mátrix által meghatározott lineáris leképezésre alkalmazva a dimenziótételt, azt kapjuk hogy

$$d = n - r, \tag{5.219}$$

ahol d a mátrix defektusa, n a rendszáma, r a rangja.
Legyen U altér a V vektortérben és tekintsük U összes (különböző) eltoltjainak, tehát a $v+U = \{v+u \mid u \in U\}$ affin sokaságoknak az F halmazát. Definiáljuk F-en az $\oplus$ összeadást és a $\odot$ szorzást így:

$$(v_1 + U) \oplus (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U \quad \text{és} \quad \lambda \odot (v + U) = \lambda v + U.$$

Így F vektortérré válik ugyanazon test felett, mint V; F nulleleme U. Ezen F-et V vektortér U altere szerinti faktorterének nevezzük és $V|U$-val jelöljük. Elemei egybeesnek a $v_1 \, R \, v_2 =: v_1 - v_2 \in U$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályaival. A $v \to v + U$ homomorfizmus V-ből $V|U$-ba, ezt természetes homomorfizmusnak hívjuk. A dimenziótétel értelmében $\dim V = \dim U + \dim(V|U)$.

5.3.6.5. Euklideszi vektorterek, euklideszi norma

Annak érdekében, hogy absztrakt vektorterekben az olyan fogalmakat mint hossz, szög, ortogonalitás értelmezni tudjuk bevezetjük az euklideszi vektortereket.

1. Euklideszi vektorterek Legyen V egy valós vektortér. Amennyiben φ: $V \times V \to \mathbb{R}$ ($\varphi(v, w)$ helyett $v \cdot w$ írható) leképezés eleget tesz a következő feltételeknek minden $u, v, w \in V$ és $r \in \mathbb{R}$ esetében:

(S1) $v \cdot w = w \cdot v$, (5.220)

(S2) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$, (5.221)

(S3) $r(v \cdot w) = (rv) \cdot w = v \cdot (rw)$, (5.222)

(S4) $v \cdot v > 0$ akkor és csak akkor, ha $v \neq 0$, (5.223)

akkor φ leképezés a V vektortérben skaláris szorzat.
Amennyiben a V térben értelmezett a skaláris szorzat, akkor V euklideszi vektortér.

2. Euklideszi norma A $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ kifejezés a v vektor euklideszi normáját (hosszát) jelöli. A V tér v és w vektorai közötti α szöget a

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \tag{5.224}$$

formula szolgáltatja. Ha $v \cdot w = 0$ akkor v és w vektorokat ortogonálisnak nevezzük.

■ **Trigonometriai függvények ortogonalitása** A FOURIER-sorokkal összefüggésben (lásd 7.4.1.1.) vizsgáljuk a $\sin kx$ és $\cos kx$ alakú függvényeket. A $C[a, b]$ függvénytérben definiáljunk egy skaláris szorzatot:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)\,dx\,. \tag{5.225}$$

Az alábbiak következtében:

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin lx \; dx = 0 \quad (k \neq l)\,, \tag{5.226}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos lx \; dx = 0 \quad (k \neq l)\,, \tag{5.227}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos lx \, dx = 0 \tag{5.228}$$

a $\sin kx$ és $\cos kx$ függvények minden $k, l \in \mathbb{N}$ esetén páronként egymással ortogonálisak. A trigonometriai függvények ortogonalitását a harmonikus analízis a FOURIER-együtthatók számításánál (lásd

7.4.1.1.) kihasználja.

5.3.6.6. Lineáris operátorok vektorterekben

1. Két lineáris operátor összege

Az a és b lineáris operátor összege egy c operátor:

$$a + b = c\,. \tag{5.229a}$$

Egy ψ függvényre való alkalmazásból adódóan:

$$(a + b)\,\psi = c\,\psi = a\,\psi + b\,\psi \tag{5.229b}$$

Ha a és b hermitikus, akkor az $a + b$ összeg is hermitikus.

2. Két lineáris operátor szorzata, felcserélhetőség

Az a és b lineáris operátorok szorzata a következő:

$$a\,b = c\,. \tag{5.230a}$$

Egy ψ függvényre való alkalmazása:

$$(a\,b)\,\psi = c\,\psi = a\,(b\,\psi)\,. \tag{5.230b}$$

Két operátor szorzata általában nem kommutatív, vagyis általánosságban:

$$a\,b - b\,a = [a, b] \neq 0\,. \tag{5.231a}$$

Az $[a, b] = a\,b - b\,a$ kifejezést kommutátornak nevezzük. Amennyiben az a és b operátorok nem felcserélhetőek, akkor egy függvényre való alkalmazásuk során ügyelni kell a sorrendre:

$$a\,(b\,\psi) \neq b\,(a\,\psi)\,. \tag{5.231b}$$

A felcserélhetőség akkor áll fenn, ha

$$[a, b] = a\,b - b\,a = 0\,. \tag{5.231c}$$

5.4. Elemi számelmélet

Az elemi számelmélet az egész számok oszthatósági tulajdonságaival foglalkozik.

5.4.1. Oszthatóság

5.4.1.1. Oszthatóság és alapvető oszthatósági szabályok

1. Osztó Egy $b \in \mathbb{Z}$ egész szám akkor osztható az a egész számmal maradék nélkül, ha van olyan q egész szám, amelyre az alábbi feltétel teljesül:

$$qa = b\,. \tag{5.232}$$

Ekkor az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazában az a osztója és q komplemens osztója a b számnak; b az a többszöröse. Az „a osztója a b számnak" szöveg helyett az $a|b$ jelölést is alkalmazhatjuk. Az „a nem osztója a b számnak" jelölhető $a \not| b$-vel. Az oszthatósági kapcsolat a $\mathbb{Z}$ halmazon egy bináris reláció. Hasonló módon definiálható az oszthatóság a természetes számok halmazán.

2. Alapvető oszthatósági szabályok

(TR1) Minden $a \in \mathbb{Z}$ számra $1|a,\ a|a$ és $a|0\,.$ (5.233)

(TR2) Ha $a|b$ igaz, akkor $(-a)|b$ és $a|(-b)\,.$ (5.234)

(TR3) Az $a|b$ és $b|a$ igaz voltából következik $a = b$ vagy $a = -b\,.$ (5.235)

(TR4) Ha $a|1$ igaz, akkor $a = 1$ vagy $a = -1.$ (5.236)

(TR5) Ha $a|b$ és $b \neq 0,$ akkor $|a| \leq |b|\,.$ (5.237)

(TR6) Az $a|b$ igaz voltából következik $a|zb$ minden $z \in \mathbb{Z}\,.$ (5.238)

(TR7) Az $a|b$ igaz voltából következik $az|bz$ minden $z \in \mathbb{Z}\,.$ (5.239)

(TR8) Ha $az|bz$ igaz és $z \neq 0,$ akkor $a|b$ minden $z \in \mathbb{Z}\,.$ (5.240)

(TR9) Az $a|b$ és $b|c$ igaz voltából következik $a|c\,.$ (5.241)

(TR10) Az $a|b$ és $c|d$ igaz voltából következik $ac|bd$. (5.242)

(TR11) Ha $a|b$ és $a|c$ igaz, akkor $a|(z_1b + z_2c)$ bármilyen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. (5.243)

(TR12) Ha $a|b$ és $a|(b + c)$ igaz, akkor igaz $a|c$. (5.244)

5.4.1.2. Prímszámok

1. Definíció és a prímszámok tulajdonságai Egy $p > 1$ természetes számot prímszámnak nevezünk, ha a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazában csak az 1 és a p osztója. Azokat a természetes számokat, amelyek nem prímszámok összetett számoknak mondjuk.
Egy egész számnak legkisebb, az 1 számtól különböző osztója prímszám. Végtelen sok prímszám létezik.
Egy $p > 1$ természetes szám akkor prímszám, ha tetszőleges a,b természetes számok esetén: a $p|(ab)$, igaz voltából vagy $p|a$ vagy $p|b$ igazsága következik.

2. Erathosztenész szitája Erathosztenész szitája segítségével minden előre megadott n természetes számnál kisebb szám prím volta megállapítható.

a) Írjuk fel valamennyi 2 és n közötti természetes számot.

b) Jelöljük meg a 2 számot, és a 2 számtól kezdve húzzunk ki minden második számot.

c) Ha p az első nem kihúzott és nem megjelölt szám, akkor jelöljük meg a p számot és a p számtól kezdve húzzunk ki minden p-ik számot.

d) A c) lépést végezzük el valamennyi $p \leq \sqrt{n}$ számra és ezzel fejezzük be az algoritmust.

Valamennyi megjelölt vagyis nem kihúzott szám prímszám. Ezzel minden n-nél nem nagyobb prímszámot megkaptunk.
Az egész számok halmazában a prímszámokat és ellentetjeiket prímelemeknek nevezzük.

3. Ikerprímszámok Két olyan prímszám amelynek „távolsága" 2 ikerprímszámokat alkot.

■ $(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103)$ ikerprímszámok.

4. Prímszámhármasok Prímszámhármasokról beszélünk, ha négy egymást követő páratlan szám közül három prímszám.

■ $(5, 7, 11), (7, 11, 13), (11, 13, 17), (13, 17, 19), (17, 19, 23), (37, 41, 43)$ prímszámhármasok.

5. Prímszámnégyesek Öt egymást követő páratlan szám prímszámnégyest ad, ha az első kettő és az utolsó kettő is ikerprímszám.

■ $(5, 7, 11, 13), (11, 13, 17, 19), (101, 103, 107, 109), (191, 193, 197, 199)$ prímszámnégyesek.

Egy máig nem bebizonyított sejtés, hogy végtelen sok ikerprímszám, prímszámhármas és prímszámnégyes létezik.

6. Az elemi számelmélet alaptétele Minden $n > 1$ természetes szám előállítható prímszámok szorzataként. Ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Úgy mondjuk, hogy az n számnak csak egyetlen prímtényezős alakja van.

■ $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Megjegyzés: Hasonló módon lehet (a -1,0 és 1 kivételével) az egész számokat a tényezők előjelétől és sorrendjétől eltekintve prímelemek szorzataként előállítani.

7. Kanonikus prímtényezős előállítás Szokásos egy természetes szám prímtényezős előállításakor a prímtényezőket nagyság szerint rendezni, és az azonos tényezőket hatvány formájában összefogni. Ha a prímtényezős felbontásban nem szereplő összes prímszámhoz a 0 kitevőt rendeljük, akkor minden természetes szám a prímtényezős előállítás kitevőinek sorozatával egyértelműen meghatározott.

■ Az $1533312 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11^3$ számhoz a $(7, 2, 0, 0, 3, 0, 0, \ldots)$ kitevő sorozat tartozik.

Egy n természetes számnak páronként különböző prímosztói $p_1, p_2, \ldots p_m$ számok, és jelölje α_i a p_i prímszám kitevőjét az n prímtényezős előállításában. Ekkor az n szám az alábbiak szerint írható fel:

$$n = \prod_{k=1}^{m} {p_k}^{\alpha_k}, \tag{5.245a}$$

amelyet az n szám kanonikus prímtényezős előállításának nevezünk. A következő írásmód is gyakori:

$$n = \prod_p p^{\nu_p(n)}\,, \tag{5.245b}$$

ahol valamennyi p prímszám szorzatát kell képezni, és $\nu_p(n)$ pedig a p szám mint n osztójának többszörösségét jelenti. Ez véges szorzat, minthogy csak véges sok $\nu_p(n)$ kitevő értéke különbözik nullától.

Pozitív osztók: Ha egy $n \geq 1$ természetes szám a kanonikus prímtényezős felbontásával adott, akkor n minden pozitív t osztója az alábbi formába hozható:

$$t = \prod_{k=1}^{m} {p_k}^{\tau_k}\,, \quad \text{ahol } \tau_k \in \{0, 1, 2, \ldots, \alpha_k\}\,. \tag{5.246a}$$

Az n összes pozitív osztójának a száma $\tau(n)$, melyre

$$\tau(n) = \prod_{k=1}^{m} (\alpha_k + 1)\,. \tag{5.246b}$$

■ **A:** $\tau(5040) = \tau(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = (4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 60\,.$

■ **B:** $\tau(p_1 p_2 \cdots p_r) = 2^r$, ha $p_1, p_2, \ldots, p_r$ páronként különböző prímszámok.

Az n szám összes pozitív osztójának $P(n)$ szorzatát az alábbi kifejezés adja meg:

$$P(n) = n^{\frac{1}{2}\tau(n)}\,. \tag{5.246c}$$

■ **A:** $P(20) = 20^3 = 8000\,.$ ■ **B:** $P(p^3) = p^6$, ha p prímszám.

■ **C:** $P(pq) = p^2 q^2$, amennyiben p és q két különböző prímszám.

Az n szám összes pozitív osztójának $\sigma(n)$ összege:

$$\sigma(n) = \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\,. \tag{5.246d}$$

■ **A:** $\sigma(120) = \sigma(2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 15 \cdot 4 \cdot 6 = 360\,.$ ■ **B:** $\sigma(p) = p + 1$, ha p prímszám.

5.4.1.3. Oszthatósági kritériumok

1. Jelölések Legyen n a decimális helyértékes rendszerben ábrázolt természetes szám:

$$n = (a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0\,. \tag{5.247a}$$

Ekkor az n szám elsőfokú számjegyösszege illetve alternáló számjegyösszege:

$$Q_1(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \tag{5.247b}$$

illetve

$$Q_1'(n) = a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots + (-1)^k a_k\,. \tag{5.247c}$$

A másodfokú számjegyösszeg illetve a másodfokú alternáló számjegyösszeg:

$$Q_2(n) = (a_1 a_0)_{10} + (a_3 a_2)_{10} + (a_5 a_4)_{10} + \cdots \qquad \text{illetve a} \tag{5.247d}$$

$$Q_2'(n) = (a_1 a_0)_{10} - (a_3 a_2)_{10} + (a_5 a_4)_{10} - + \cdots\,. \tag{5.247e}$$

Továbbá a harmadfokú számjegyösszeg illetve harmadfokú alternáló számjegyösszeg:

$$Q_3(n) = (a_2 a_1 a_0)_{10} + (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} + \cdots \tag{5.247f}$$

illetve

$$Q_3'(n) = (a_2 a_1 a_0)_{10} - (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} - + \cdots\,. \tag{5.247g}$$

■ A 123 456 789 számnak a következő számjegyösszegei vannak: $Q_1 = 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$, $Q_1' = 9-8+7-6+5-4+3-2+1 = 5$, $Q_2 = 89+67+45+23+1 = 225$, $Q_2' = 89-67+45-23+1 = 45$,

$Q_3 = 789 + 456 + 123 = 1368$ és $Q'_3 = 789 - 456 + 123 = 456$.

2. Oszthatósági kritériumok A következő oszthatósági kritériumok érvényesek:

TK-1: $3|n \Leftrightarrow 3|Q_1(n)$, (5.248a)

TK-2: $7|n \Leftrightarrow 7|Q'_3(n)$, (5.248b)

TK-3: $9|n \Leftrightarrow 9|Q_1(n)$, (5.248c)

TK-4: $11|n \Leftrightarrow 11|Q'_1(n)$, (5.248d)

TK-5: $13|n \Leftrightarrow 13|Q'_3(n)$, (5.248e)

TK-6: $37|n \Leftrightarrow 37|Q_3(n)$, (5.248f)

TK-7: $101|n \Leftrightarrow 101|Q'_2(n)$, (5.248g)

TK-8: $2|n \Leftrightarrow 2|a_0$, (5.248h)

TK-9: $5|n \Leftrightarrow 5|a_0$, (5.248i)

TK-10: $2^k|n \Leftrightarrow 2^k|(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)_{10}$, (5.248j)

TK-11: $5^k|n \Leftrightarrow 5^k|(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)_{10}$. (5.248k)

■ **A:** $a = 123\,456\,789$ kilenccel osztható, mivel $Q_1(a) = 45$ és $9|45$,. Ugyanakkor a nem osztható héttel, minthogy $Q'_3(a) = 456$ és $7 \not| 456$.

■ **B:** 91619 osztható 11-gyel, mert $Q'_1(91619) = 22$és $11|22$.

■ **C:** 99 994 096 osztható 2^4-nel, mert $2^4|4096$.

5.4.1.4. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. Legnagyobb közös osztó

A nem mind 0 értékű $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok esetében az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ közös osztóinak halmazában a legnagyobb számot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok legnagyobb közös osztójának nevezzük és jelölése: $\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

A legnagyobb közös osztó meghatározására elegendő, ha csak a pozitív közös osztókat vizsgáljuk. Legyen

$$a_i = \prod_p p^{\nu_p(a_i)} \tag{5.249a}$$

a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számoknak a kanonikus prímtényezős felbontása. Ekkor

$$\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_p p^{\left\{ \min\limits_i [\nu_p(a_i)] \right\}}. \tag{5.249b}$$

■ Az $a_1 = 15400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, a_2 = 7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7, a_3 = 3850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ számok legnagyobb közös osztója $\text{lnko}(a_1, a_2, a_3) = 5^2 \cdot 7 = 175$.

2. Euklideszi algoritmus

Az a és b természetes számok a legnagyobb közös osztóját az euklideszi algoritmus segítségével a prímtényezős felbontás nélkül határozhatjuk meg. Ennek érdekében az alábbi séma szerint maradékos osztás sorozatot kell végrehajtanunk. Ha $a > b$ akkor legyen $a_0 = a$ és $a_1 = b$, és a továbbiakban:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_1a_1 + a_2\,, & 0 < a_2 < a_1\,,\\
a_1 &= q_2a_2 + a_3\,, & 0 < a_3 < a_2\,,\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\
a_{n-2} &= q_{n-1}a_{n-1} + a_n\,, & 0 < a_n < a_{n-1}\,,\\
a_{n-1} &= q_na_n\,.
\end{aligned} \tag{5.250a}$$

Az osztási algoritmus véges sok lépésben befejeződik, hiszen az a_2, a_3, ... sorozat természetes számok szigorúan monotonon csökkenő sorozata. A legnagyobb zérustól különböző maradék a_n lesz az a_0 és a_1 számok legnagyobb közös osztója.

■ A lnko(38, 105) = 1 helytálló, hiszen $105 = 2{\cdot}38{+}29$; $38 = 1{\cdot}29{+}9$; $29 = 3{\cdot}9{+}2$; $9 = 4{\cdot}2{+}_$; $2 = 2{\cdot}1$.

Az euklideszi algoritmus ismételt alkalmazásával $n > 2$ természetes számra is meghatározható a legnagyobb közös osztó. a következő redukciós szabály alkalmazásával:

$$\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{lnko}(\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)\,. \tag{5.250b}$$

■ lnko(150, 105, 56) = lnko(lnko(150, 105), 56) = lnko(15, 56) = 1.

■ Két szám legnagyobb közös osztójának kiszámítására az euklideszi algoritmus különösen sok számítási lépést igényel, ha a számok a FIBONACCI-sorozatban szomszédos elemek. Egy példát mellékelünk, ahol a kiszámított hányadosok értéke mindig 1.

$$\begin{aligned}
55 &= 1 \cdot 34 + 21\\
34 &= 1 \cdot 21 + 13\\
21 &= 1 \cdot 13 + 8\\
13 &= 1 \cdot 8 + 5\\
8 &= 1 \cdot 5 + 3\\
5 &= 1 \cdot 3 + 2\\
3 &= 1 \cdot 2 + 1\\
2 &= 1 \cdot 1 + 1\\
1 &= 1 \cdot 1.
\end{aligned}$$

1. Az euklideszi algoritmushoz kapcsolódó tétel Az a és b, $a > b > 0$ természetes számokra legyen $\lambda(a, b)$ az euklideszi algoritmusban szükséges maradékos osztások száma, $\kappa(b)$ pedig a b szám helyértékes számjegyeit adja decimális számrendszerben. Ekkor

$$\lambda(a, b) \leq 5 \cdot \kappa(b). \tag{5.251}$$

3. A legnagyobb közös osztó mint lineárkombináció

Az euklideszi algoritmusból következik, hogy

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_0 - q_1 a_1 = c_0 a_0 + d_0 a_1\,,\\
a_3 &= a_1 - q_2 a_2 = c_1 a_0 + d_1 a_1\,,\\
&\vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5.252a)\\
a_n &= a_{n-2} - q_{n-1} a_{n-1} = c_{n-2} a_0 + d_{n-2} a_1\,,
\end{aligned}$$

ahol c_{n-2} és d_{n-2} egész számok. Így a $\text{lnko}(a_0, a_1)$ előállítható az a_0 és a_1 számok egész együtthatós lineáris kombinációjaként:

$$\text{lnko}(a_0, a_1) = c_{n-2} a_0 + d_{n-2} a_1\,. \tag{5.252b}$$

A $\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is előállítható az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok lineáris kombinációjaként:

$$\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{lnko}(\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n) = c \cdot \text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + d a_n\,. \tag{5.252c}$$

■ lnko(150, 105, 56) = lnko(lnko(150, 105), 56) = lnko(15, 56) =1, ahol $15 = (\text{-}2){\cdot}150 + 3 \cdot 105$ és $1 = 15 \cdot 15 + (-4) \cdot 56$, tehát $\text{lnko}(150, 105, 56) = (-30) \cdot 150 + 45 \cdot 105 + (-4) \cdot 56$.

4. Legkisebb közös többszörös

A nem zérus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok pozitív közös többszöröseinek halmazából a legkisebb számot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ legkisebb közös többszörösének nevezzük, jelölése: $\text{lkkt}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Ha adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok kanonikus prímtényezős felbontásai, akkor

$$\text{lkkt}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_p p^{\left\{ \max\limits_i \left[\nu_p(a_i)\right] \right\}}. \tag{5.253}$$

■ Az $a_1 = 15400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, a_2 = 7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7, a_3 = 3850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ számokra igaz, hogy $\text{lkkt}(a_1, a_2, a_3) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 = 693000$.

5. Összefüggés a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös között

Tetszőleges egész számokra igaz:

$$|ab| = \text{lnko}(a, b) \cdot \text{lkkt}(a, b)\,. \tag{5.254}$$

Így a lkkt(a, b) az a és b számokra alkalmazott euklideszi algoritmus segítségével a számok prímtényezős felbontásának ismerete nélkül is meghatározható.

5.4.1.5. Fibonacci-számok

1. Fibonacci-sorozat Az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ahol

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ és } F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \tag{5.255}$$

FIBONACCI-sorozatnak nevezzük. A sorozat az alábbi elemekkel kezdődik: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$.

■ Ennek a sorozatnak a vizsgálatára az 1202-ben FIBONACCI által felvetett kérdés vezethető vissza: Hány nyúlpár származik az év végéig egyetlen nyúlpártól, ha minden pár minden hónap végén egy újabb párt hoz létre, és ezek az utódpárok életük második hónapjától kezdve szaporodnak? A válasz $F_{14} = 377$.

2. A Fibonacci-számok explicit kifejezése A FIBONACCI-számoknak a rekurzív definíción kívül létezik explicit előállítása is:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n\right) . \tag{5.256}$$

A FIBONACCI-számok néhány fontos sajátságát a következőkben megemlítjük:
minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra igaz:

(1) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} \quad (m > 1)$, (5.257a)

(2) $F_m | F_{mn}$, (5.257b)

(3) Ha lnko$(m, n) = d$ akkor lnko$(F_m, F_n) = F_d$, (5.257c)

(4) lnko$(F_n, F_{n+1}) = 1$, (5.257d)

(5) $F_m | F_k$ akkor és csak akkor, ha $m|k$, (5.257e)

(6) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$, (5.257f)

(7) Ha lnko$(m, n) = 1$ akkor $F_mF_n | F_{mn}$, (5.257g)

(8) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, (5.257h)

(9) $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, (5.257i)

(10) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$, (5.257j)

(11) $F_{n+2}^2 - F_n^2 = F_{2n+2}$. (5.257k)

5.4.2. Lineáris Diophantoszi egyenletek

1. Diophantoszi egyenletek

Egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ egyenletet DIOPHANTOSZ-i egyenletnek hívunk, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy polinom, amelynek együtthatói az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazának elemei, b egy egész konstans, és kizárólag az egész megoldásokat keressük. A „DIOPHANTOSZ-i" megjelölés a 250 körül élt DIOPHANTOSZ görög matematikusra emlékeztet. A gyakorlatban Diophantikus egyenletek akkor lépnek fel, ha darabszámra vonatkozó összefüggéseket akarunk leírni.
Általános megoldás mindeddig csak kétváltozós másodfokú DIOPHANTOSZ-i egyenletekre ismeretes. Magasabb fokú DIOPHANTOSZ-i egyenletekre csak speciális esetekben van ismert megoldás.

2. n-változós lineáris Diophantoszi egyenletek

Az n-változós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenlet formája a következő:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \quad (a_i \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}) , \tag{5.258}$$

ahol az egész értékű megoldásokat keressük.

3. Megoldási feltétel

Feltételezve, hogy nem minden a_i együttható zérus a lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha a lnko$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ osztója a b számnak.

■ $114x + 315y = 3$ megoldható, miután lnko$(114, 315) = 3$.

Ha egy n-változós ($n > 1$) DIOPHANTOSZ-i egyenletnek van megoldása, és $\mathbb{Z}$ a változók tartománya, akkor az egyenletnek végtelen sok megoldása van. A megoldások halmazában ilyenkor $n - 1$ szabad paraméter található. A $\mathbb{Z}$ részhalmazaira azonban ez nem helytálló.

4. Megoldási módszer $n = 2$ esetén

Legyen

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0) \tag{5.259a}$$

egy megoldható lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenlet, vagyis lnko$(a_1, a_2)|b$. Az egyenlet egy speciális megoldásának magtalálásához osszuk el az egyenletet lnko(a_1, a_2) értékével. Ekkor az eredmény $a_1'x_1' + a_2'x_2' = b'$ lesz és lnko$(a_1', a_2') = 1$.
Amint azt 5.4.1., **3.**-ban leírtuk, kiszámítjuk a lnko(a_1', a_2') legnagyobb közös osztót az euklideszi algoritmus segítségével, hogy végeredményben az 1 értéket egy a_1' és a_2' lineáris kombinációjaként megkapjuk: $a_1'c_1' + a_2'c_2' = 1$.
A kiindulási egyenletbe való behelyettesítés útján meggyőződhetünk arról, hogy az egész számok $(c_1'b', c_2'b')$ rendezett párja az adott DIOPHANTOSZ-i egyenlet megoldása.

■ $114x + 315y = 6$. Minthogy 3 a legnagyobb közös osztó $3 =$ lnko$(114, 315)$ osszunk 3-mal. Ebből $38x + 105y = 2$ és $38 \cdot 47 + 105 \cdot (-17) = 1$ (lásd 5.4.1., **3.**). Tehát a$(47 \cdot 2, (-17) \cdot 2) = (94, -34)$ rendezett pár lesz a DIOPHANTOSZ-i egyenlet egy speciális megoldása.

Az egyenlet megoldásainak összességét a következőképpen kapjuk: Legyen (x_1^0, x_2^0) valamilyen speciális megoldás, amelyet akár próbálgatásokkal is megtalálhatunk, akkor a megoldások halmaza:

$$\{(x_1^0 + t \cdot a_2', x_2^0 - t \cdot a_1') | t \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.259b}$$

■ A $114x + 315y = 6$ egyenlet megoldásainak halmaza: $\{(94 + 315t, -34 - 114t) | t \in \mathbb{Z}\}$.

5. Redukciós eljárás $n > 2$ esetében

Adott egy megoldható lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenlet:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{5.260a}$$

ahol $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ és lnko$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Amennyiben lnko$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 1$, akkor az egyenletet el kell osztanunk lnko$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ értékével. Az alábbi átalakítás után

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} = b - a_nx_n \tag{5.260b}$$

az x_n változót egész értékű konstansnak kezeljük, és így egy $n - 1$ változós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletet kapunk, amely akkor oldható meg, ha lnko$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ osztója a $b - a_nx_n$ kifejezésnek. Az alábbi feltétel

$$\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) | b - a_nx_n \tag{5.260c}$$

akkor teljesül, ha léteznek olyan $\underline{c}, \underline{c}_n$ egész számok, amelyekre

$$\text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \cdot \underline{c} + a_n\underline{c}_n = b. \tag{5.260d}$$

igaz. Ez egy kétváltozós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenlet, amelyet 5.4.2., **4.** alapján meg tudunk oldani. Ha ez a megoldás ismeretes, akkor már csak egy $n-1$ változós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletet kell megoldanunk.
A fenti redukció tovább folytatható, egészen addig, míg egy kétváltozós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletet nem kapunk, amelynek megoldására már van eljárásunk.
A közben megoldott kétváltozós lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletek megoldási halmazából kell meghatároznunk a kiindulási egyenlet megoldási halmazát.

■ Oldjuk meg az alábbi DIOPHANTOSZ-i egyenletet:

$$2x + 4y + 3z = 3. \tag{5.261a}$$

Az egyenlet megoldható, hiszen lnko(2, 4, 3) osztója 3-nak.
Az x és y változókra vonatkozó DIOPHANTOSZ-i egyenlet

$$2x + 4y = 3 - 3z \tag{5.261b}$$

csakis akkor oldható meg, ha lnko(2, 4) a $3 - 3z$ értékének osztója. A hozzátartozó DIOPHANTOSZ-i egyenlet $2z' + 3z = 3$ megoldási halmaza $\{(-3 + 3t, 3 - 2t)|t \in \mathbb{Z}\}$. Ebből következik, hogy $z = 3 - 2t$, és most már a $2x + 4y = 3 - 3(3 - 2t)$ illetve

$$x + 2y = -3 + 3t \tag{5.261c}$$

minden $t \in \mathbb{Z}$ esetén megoldható DIOPHANTOSZ-i egyenlet megoldási halmazát kell megkeresnünk. Az egyenlet megoldható, hiszen lnko$(1, 2) = 1|(-3+3t)$. Így $1\cdot(-1)+2\cdot 1 = 1$ valamint $1\cdot(3-3t)+2\cdot(-3+3t) = -3+3t$. A megoldási halmaz $\{((3-3t)+2s, (-3+3t)-s)|s \in \mathbb{Z}\}$. Ebből viszont $x = (3-3t)+2s$ és $y = (-3+3t)-s$, vagyis az egyenlet megoldási halmaza (5.261a) $\{(3-3t+2s, -3+3t-s, 3-2t)|s, t \in \mathbb{Z}\}$.

5.4.3. Kongruenciák és maradékosztályok

1. Kongruenciák

Legyen m egy természetes szám, $m > 1$. Ha két a és b egész számnak az m számmal való osztási maradéka azonos, akkor azt mondjuk, hogy a és b kongruens modulo m, jelölése $a \equiv b \bmod m$, vagy $a \equiv b(m)$.

■ $3 \equiv 13 \bmod 5, \quad 38 \equiv 13 \bmod 5, \quad 3 \equiv -2 \bmod 5.$

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy $a \equiv b \bmod m$ akkor igaz, ha m osztója az $a - b$ különbségnek. A „kongruens mod m" az egész számok halmazán egy ekvivalencia reláció (lásd 5.2.4., **1.**), ugyanis az alábbi állítások minden $a, b, c \in \mathbb{Z}$ esetén helytállóak:

$$a \equiv a \bmod m\,, \tag{5.262a}$$

$$a \equiv b \bmod m \Rightarrow\ b \equiv a \bmod m\,, \tag{5.262b}$$

$$a \equiv b \bmod m \wedge b \equiv c \bmod m\ \Rightarrow\ a \equiv c \bmod m\,. \tag{5.262c}$$

2. Számítási szabályok

$$a \equiv b \bmod m \wedge c \equiv d \bmod m \Rightarrow a + c \equiv b + d \bmod m\,, \tag{5.263a}$$

$$a \equiv b \bmod m \wedge c \equiv d \bmod m \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m\,, \tag{5.263b}$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m \wedge\ \text{lnko}(c, m) = 1\ \Rightarrow\ a \equiv b \bmod m\,, \tag{5.263c}$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m \wedge\ c \neq 0 \Rightarrow\ a \equiv b \bmod \frac{m}{\text{lnko}(c, m)}\,. \tag{5.263d}$$

3. Maradékosztályok, maradékosztály gyűrűk

Minthogy a „kongruens modulo m" a $\mathbb{Z}$ halmazban egy ekvivalencia reláció, ez a reláció a $\mathbb{Z}$ halmazt osztályokra bontja, neviik modulo m maradékosztályok:

$$[a]_m = \{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x \equiv a \bmod m\}\,. \tag{5.264}$$

Az „a modulo m" maradékosztály mindazokat az egész számokat tartalmazza, amelyeknek az m számmal való osztásakor ugyanaz az osztási maradéka mint az a számnak. Az $[a]_m = [b]_m$ pontosan akkor igaz, ha $a \equiv b \bmod m$.
Az m modulushoz pontosan m maradékosztály tartozik, amelynek szabályszerű leírására a legkisebb nem negatív reprezentánsát alkalmazzuk:

$$[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\,. \tag{5.265}$$

A modulo m maradékosztályok $\mathbb{Z}_m$ halmazában az alábbi

$$[a]_m \oplus [b]_m := [a + b]_m\,, \tag{5.266}$$

$$[a]_m \odot [b]_m := [a \cdot b]_m \tag{5.267}$$

maradékosztály összeadást illetve maradékosztály szozást értelmezzük.
A maradékosztály műveletek a reprezentánsok választásától függetlenek, vagyis $[a]_m = [a']$ és $[b]_m = [b']_m$ esetén:

$$[a]_m \oplus [b]_m = [a']_m \oplus [b']_m \text{ és}$$
$$[a]_m \odot [b]_m = [a']_m \odot [b']_m \,. \tag{5.268}$$

A modulo m maradékosztályok a maradékosztály összeadásra illetve a maradékosztály szorzásra vonatkoztatva egy egységelemes gyűrűt (lásd 5.4.3., **1.**) alkotnak, a modulo m maradékosztály gyűrűt. Amennyiben p prímszám, akkor a modulo p maradékosztály gyűrű egyben test is. (lásd 5.4.3., **1.**).

4. Prím maradékosztályok

Egy $[a]_m$ maradékosztályt, ha $\text{lnko}(a, m) = 1$, modulo m prím maradékosztálynak nevezzük. Amennyiben p prímszám, akkor a $[0]_p$ kivételével valamennyi maradékosztály modulo p prím maradékosztály.
A modulo m prím maradékosztályok a maradékosztály szorzással Abel-csoportot alkotnak, a modulo m prím maradékosztály csoportot. Ennek a csoportnak a rendje $\varphi(m)$, ahol φ az EULER-függvény. (lásd 5.4.4., **1.**).

■ **A:** $[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8$ mind modulo 8 prím maradékosztályok.

■ **B:** $[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5$ modulo 5 prím maradékosztályok.

■ **C:** Így $\varphi(8) = \varphi(5) = 4$.

5. Primitív maradékosztályok

Egy $[a]_m$ prím maradékosztályt primitív maradékosztálynak nevezünk, ha a modulo m prím maradékosztály csoport rendje $\varphi(m)$.

■ **A:** $[2]_5$ egy modulo 5 primitív maradékosztály, mivel $([2]_5)^2 = [4]_5$, $([2]_5)^3 = [3]_5$, $([2]_5)^4 = [1]_5$.

■ **B:** Modulo 8 primitív maradékosztály nem létezik, minthogy $[1]_8$ rendje 1, és $[3]_8, [5]_8, [7]_8$ rendje a primitív maradékosztály csoportban 2.

Megjegyzés: Pontosan akkor létezik modulo m primitív maradékosztály, ha $m = 2, m = 4, m = p^k$ vagy $m = 2p^k$, ahol p egy páratlan prímszám, k pedig egy természetes szám.
Amennyiben létezik modulo m primitív maradékosztály, akkor a modulo m primitív maradékosztály csoport ciklikus csoport.

6. Lineáris kongruenciák

1. Definíció Legyenek a, b és $m > 0$ egész számok, ekkor az

$$ax \equiv b(m) \tag{5.269}$$

kifejezést (az x változóra vonatkozó) lineáris kongruenciának nevezzük.

2. Megoldások Az olyan x^* egész szám, amely az $ax^* \equiv b(m)$ megkötést kielégíti, megoldása ennek a kongruenciának. Minden olyan szám amely az x^* számmal kongruens modulo m, ugyanígy megoldás. Ha valamennyi megoldást meg akarjuk adni, akkor elegendő azokat a páronként nem kongruens modulo m egész számokat megadnunk, amelyek ezt a kongruenciát kielégítik.
A kongruencia akkor oldható meg, ha $\text{lnko}(a, m)$ b-nek osztója. A megoldások modulo m száma ilyenkor éppen $\text{lnko}(a, m)$.
Ha speciálisan $\text{lnko}(a, m) = 1$, akkor a kongruencia modulo m értelemben egyértelműen megoldható.

3. Megoldási módszerek Lineáris kongruencia megoldására többféle módszer létezik. Átalakíthatjuk például az $ax \equiv b(m)$ kongruenciát egy $ax + my = b$ alakú lineáris DIOPHANTOSZ-i egyenletbe, majd az $a'x + m'y = b'$ DIOPHANTOSZ-i egyenlet, ahol $a' = a/\text{lnko}(a, m), m' = m/\text{lnko}(a, m), b' = b/\text{lnko}(a, m)$, egy speciális (x^0, y^0) megoldását határozzuk meg (lásd 5.4.2.).
Az $a'x \equiv b'(m')$ kongruencia $\text{lnko}(a', m') = 1$ modulo m' egyértelműen megoldható:

$$x \equiv x^0(m') \,. \tag{5.270a}$$

Az $ax \equiv b(m)$ kongruenciának éppen $\text{lnko}(a, m)$ modulo m megoldása van:

$$x^0, x^0 + m, x^0 + 2m, \ldots, x^0 + (\text{lnko}(a, m) - 1)m \,. \tag{5.270b}$$

■ $114x \equiv 6 \bmod 315$ megoldható, hiszen lnko(114, 315) osztója 6-nak, és modulo 315 éppen 3 megoldása van.
$38x \equiv 2 \bmod 105$ egyértelműen megoldható: $x \equiv 94 \bmod 105$ (lásd 5.4.2., **4.**). Ezek szerint 94, 199 és 304 lesznek a $114x \equiv 3 \bmod 315$ kongruencia megoldásai.

7. Szimultán lineáris kongruenciák

Adott véges sok kongruencia

$$x \equiv b_1(m_1), x \equiv b_2(m_2), \ldots, x \equiv b_t(m_t)\,, \tag{5.271}$$

ekkor szimultán lineáris kongruenciák rendszeréről beszélünk. A megoldási halmazról a kínai maradék tétel tesz egy megállapítást:
Adott egy $x \equiv b_1(m_1), x \equiv b_2(m_2), \ldots, x \equiv b_t(m_t)$ rendszer, ahol $m_1, m_2, \ldots, m_t$ páronként relatív prímek. Az

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_t, a_1 = \frac{m}{m_1}, a_2 = \frac{m}{m_2}, \ldots, a_t = \frac{m}{m_t} \tag{5.272a}$$

behelyettesítés után válasszuk az x_j elemeket olymódon, hogy az $a_j x_j \equiv b_j(m_j)$ $j = 1, 2, \ldots, t$ kongruenciákat kielégítsék, ekkor

$$x' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_t x_t \tag{5.272b}$$

az eredeti rendszer egyik megoldása. Továbbá a megoldás modulo m erejéig egyértelműen megoldható, vagyis x' mellett azok az x'' számok szolgáltatják a további megoldásokat, amelyekre $x'' \equiv x'(m)$.

■ Legyen a megoldandó rendszer $x \equiv 1\,(2), \quad x \equiv 2\,(3), \quad x \equiv 4\,(5)$. Itt $2, 3, 5$ páronként relatív prímek. Így $m = 30, a_1 = 15, a_2 = 10, a_3 = 6$. A $15x_1 \equiv 1\,(2), \ 10x_2 \equiv 2\,(3), \ 6x_3 \equiv 4\,(5)$ speciális megoldásai $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 4$. Az adott rendszer modulo 30 egyértelmű megoldása $x \equiv 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4\,(30)$, vagyis $x \equiv 29\,(30)$.

Megjegyzés: Szimultán lineáris kongruencia rendszerek felhasználhatóak arra, hogy nem lineáris modulo m kongruenciákat visszavezessük olyan kongruenciák megoldására, ahol a modulus prímszám hatványa. (lásd 5.4.3., **9.**).

8. Kvadratikus kongruenciák

1. Kvadratikus maradékok modulo m

Valamennyi $ax^2 + bx + c \equiv 0(m)$ kongruencia megoldható, amennyiben valamennyi $x^2 \equiv a(m)$ kongruenciát meg tudjuk oldani, ugyanis

$$ax^2 + bx + c \equiv 0(m) \Leftrightarrow (2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac(m)\,. \tag{5.273}$$

Először a kvadratikus maradékokat modulo m tesszük vizsgálat tárgyává: Legyen $m \in \mathbb{N}, m > 1$ és $a \in \mathbb{Z}$, lnko$(a, m) = 1$. Az a számot kvadratikus maradék modulo m-nek nevezzük, ha van olyan $x \in \mathbb{Z}$, amely mellett $x^2 \equiv a(m)$.

Ha adott m prímtényezős felbontása, vagyis

$$m = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\,, \tag{5.274}$$

akkor az r abban az esetben lesz kvadratikus maradék modulo m, ha r kvadratikus maradék modulo $p_i^{\alpha_i}$ az $i = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.

Ha az a kvadratikus maradék modulo a p prímszám szerint, akkor ezt röviden $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ formában, ha nem kvadratikus maradék modulo p, akkor $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ formában írhatjuk (LEGENDRE-szimbólum).

■ Az 1,4,7 számok kvadratikus maradékok modulo 9.

2. Kvadratikus kongruenciák tulajdonságai

(E1) Ha $p \nmid ab$ és $a \equiv b(p)$, akkor $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$. (5.275a)

(E2) $\left(\frac{1}{p}\right) = 1\,.$ (5.275b)

(E3) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,.$ (5.275c)

(E4) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\cdot\left(\frac{b}{p}\right)$; továbbá $\left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\,.$ (5.275d)

(E5) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\,.$ (5.275e)

(E6) A kvadratikus reciprocitási szabály: ha p és q két páratlan prímszám,

akkor $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\,.$ (5.275f)

■ $\left(\frac{65}{307}\right) = \left(\frac{5}{307}\right)\cdot\left(\frac{13}{307}\right) = \left(\frac{307}{5}\right)\cdot\left(\frac{307}{13}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{8}{13}\right) = (-1)^{\frac{5^2-1}{8}}\left(\frac{2^3}{13}\right) = -\left(\frac{2}{13}\right) = -(-1)^{\frac{13^2-1}{8}} = 1.$

Általánosan igaz: Egy $x^2 \equiv a(2^\alpha)$, $\text{lnko}(a,2) = 1$ akkor oldható meg, ha $a \equiv 1(4)$ az $\alpha = 2$ esetben, és $a \equiv 1(8)$ az $\alpha \geq 3$ esetben. Amennyiben ezek a megkötések teljesülnek, akkor $\alpha = 1$ estén egy, $\alpha = 2$ esetén két, míg $\alpha \geq 3$ esetén négy megoldás van modulo 2^α .
Az általános alakú kongruenciákra

$$x^2 \equiv a(m)\,,\ m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}\,,\quad \text{lnko}(a,m) = 1 \tag{5.276a}$$

a megoldhatóságnak az alábbiak szükséges feltételei:

$$a \equiv 1(4) \text{ ha } \alpha = 2\,,\quad a \equiv 1(8) \text{ ha } \alpha \geq 3\,,\quad \left(\frac{a}{p_1}\right) = 1\,,\ \left(\frac{a}{p_2}\right) = 1\,,\ \ldots,\ \left(\frac{a}{p_t}\right) = 1\,. \tag{5.276b}$$

Ha valamennyi feltétel teljesül, akkor a megoldások száma $\alpha = 0$, és $\alpha = 1$ esetében 2^t, ha $\alpha = 2$ akkor 2^{t+1}, végül $\alpha \geq 3$ esetén 2^{t+2}.

9. Polinom kongruenciák

Legyenek $m_1, m_2, \ldots, m_t$ páronként relatív prímek, ekkor az alábbi kongruencia

$$f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \equiv 0(m_1 m_2 \cdots m_t) \tag{5.277a}$$

ekvivalens a következő kongruencia rendszerrel:

$$f(x) \equiv 0(m_1),\ f(x) \equiv 0(m_2),\ \ldots,\ f(x) \equiv 0(m_t)\,. \tag{5.277b}$$

Jelölje k_j az $f(x) \equiv 0(m_j)$ megoldásainak számát $j = 1, 2, \ldots, t$, ekkor $k_1 k_2 \cdots k_t$ az $f(x) \equiv 0(m_1 m_2 \cdots m_t)$ megoldásainak számát adja. A következő kongruenciák

$$f(x) \equiv 0\ (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t})\,, \tag{5.277c}$$

ahol $p_1, p_2, \ldots, p_t$ prímek, megoldása is visszavezethető az $f(x) \equiv 0(p^\alpha)$ kongruenciák megoldására, ezek viszont az $f(x) \equiv 0(p)$ a p prímszám modulus mellett:

a) Az $f(x) \equiv 0(p^\alpha)$ megoldásai kielégítik az $f(x) \equiv 0(p)$ kongruenciát is.

b) Az $f(x) \equiv 0(p)$ valamennyi $x \equiv x_1(p)$ megoldása azzal a feltétellel, hogy $f'(x_1)$ nem osztható a p számmal, meghatároz egyetlen megoldást modulo p^α:
Legyen $f(x_1) \equiv 0(p)$. Helyettesítünk az x helyébe az $x = x_1 + pt_1$ kifejezést, és határozzuk meg a modulo p egyértelmű t_1' megoldását az alábbi lineáris kongruenciának

$$\frac{f(x_1)}{p} + f'(x_1)t_1 \equiv 0(p)\,. \tag{5.278a}$$

A $t_1 = t_1' + pt_2$ kifejezést $x = x_1 + pt_1$ -be írva $x = x_2 + p^2 t_2$ -t kapjuk. Határozzuk most meg a

$$\frac{f(x_2)}{p^2} + f'(x_2)t_2 \equiv 0(p) \tag{5.278b}$$

kongruencia modulo p^2 egyértelműen meghatározott t_2' megoldását, és ekkor $t_2 = t_2' + pt_3$ kifejezést $x = x_2 + p^2 t_2$-be írva $x = x_3 + p^3 t_3$ áll fenn. Az eljárás folytatásával megkapjuk az $f(x) \equiv 0\,(p^\alpha)$ kongruencia megoldását.

■ Oldjuk meg az $f(x) = x^4+7x+4 \equiv 0\,(27)$ kongruenciát. Az $f(x) = x^4+7x+4 \equiv 0\,(3)$ összefüggésből $x \equiv 1\,(3)$, vagyis $x = 1 + 3t_1$. Minthogy $f'(x) = 4x^3 + 7$ és $3 \nmid f'(1)$ először az $f(1)/3 + f'(1) \cdot t_1 \equiv 4 + 11t_1 \equiv 0\,(3)$ kongruencia megoldását keressük: $t_1 \equiv 1\,(3)$, azaz $t_1 = 1 + 3t_2$ és $x = 4 + 9t_2$.
A továbbiakban tekintjük a $f(4)/9 + f'(4) \cdot t_2 \equiv 0\,(3)$ kongruenciát, amire megoldásként kapjuk: $t_2 \equiv 2\,(3)$, azaz $t_2 = 2 + 3t_3$ és $x = 22 + 27t_3$. Tehát 22 a modulo 27 egyértelműen meghatározott megoldása a $x^4 + 7x + 4 \equiv 0\,(27)$ kongruenciának.

5.4.4. Fermat, Euler és Wilson tétele

1. Az Euler-függvény

Minden $m > 0$ természetes számhoz $\varphi(m)$ az m számhoz relatív prím x-ek száma, amelyekre $1 \leq x \leq m$. A φ függvényt EULER-függvénynek nevezzük. A $\varphi(m)$ függvényérték a prím maradékosztályok modulo m számát adja (lásd 5.4.3., **4.**).
Ezek érétke $\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,\ \varphi(6) = 2,\ \varphi(7) = 6,\ \varphi(8) = 4$ stb.
Minden p prímszámra $\varphi(p) = p - 1$, és $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ minden p^α prímhatványra. Egy tetszőleges m természetes szám esetében $\varphi(m)$ a következőképpen számítható:

$$\varphi(m) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) , \tag{5.279a}$$

ahol a szorzatot az m valamennyi p prímosztójára kell képezni.
■ $\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 360 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 96$.
Ezen túlmenően

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m\,. \tag{5.279b}$$

Ha $\text{lnko}(m, n) = 1$, akkor $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
■ $\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$.

2. Fermat és Euler tétele

A FERMAT–EULER-tétel az elemi számelmélet egyik legfontosabb tétele. Legyenek a és m relatív prím természetes számok, ekkor

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(m)\,. \tag{5.280}$$

■ Határozzuk meg a 9^{9^9} szám decimális alakjának utolsó három számjegyét. Ezek szerint azt az x számot keressük, melyre $x \equiv 9^{9^9}\ (1000)$ és $0 \leq x \leq 999$. Mivel $\varphi(1000) = 400$, és a FERMAT–EULER-tételből adódóan $9^{400} \equiv 1\,(1000)$. Igaz továbbá, hogy $9^9 = (80+1)^4 \cdot 9 \equiv \left(\binom{4}{0} 80^0 \cdot 1^4 + \binom{4}{1} 80^1 \cdot 1^3\right) \cdot 9 = (1 + 4 \cdot 80) \cdot 9 \equiv -79 \cdot 9 \equiv 89\,(400)$.
Ebből következik, hogy $9^{9^9} \equiv 9^{89} = (10-1)^{89} \equiv \binom{89}{0} 10^0 \cdot (-1)^{89} + \binom{89}{1} 10^1 \cdot (-1)^{88} + \binom{89}{2} 10^2 \cdot (-1)^{87} = -1 + 89 \cdot 10 - 3916 \cdot 100 \equiv -1 - 110 + 400 = 289(1000)$. A 9^{9^9} decimális alakja tehát 289-re végződik.
Megjegyzés: A fenti tétel $m = p$ esetére érvényes formája, vagyis $\varphi(p) = p - 1$ FERMAT eredménye, az általános alak EULERtől ered. Ez a tétel képezi egy kódolási eljárás alapját (lásd 5.4.5.). A tétel egy természetes szám prím voltára nézve szükséges feltételt jelent: Ha p prímszám, akkor a $a^{p-1} \equiv 1(p)$ minden olyan a számra amelyre $p \nmid a$.

3. Wilson tétele

Egy másik prímszám feltételt szolgáltat WILSON tétele:
Minden p prímszámra igaz $(p-1)! \equiv -1(p)$.
A tétel megfordítása is igaz állítás:
a p szám csak akkor prím, ha $(p-1)! \equiv -1(p)$.

5.4.5. Kódok

1. RSA-kód

AZ EULER–FERMAT tétel alapján R. RIVEST, A. SHAMIR és L. ADLEMAN (lásd ir. [5.28]) kidolgoztak egy üzenetek titkosítására szolgáló kódolási eljárást, amelyet a szerzők nevének kezdőbetűit felhasználva RSA-titkosítási eljárásnak neveznek. Ezzel összefüggésben beszélünk nyilvános kulcsú kódokról, mivel a dekódoláshoz szükséges kulcsok egy része nyilvánosan közreadható anélkül, hogy az üzenet titkosságát veszélyeztetnénk.
Az RSA-eljárásnál a B fogadó két nagy p és q prímszámot választ, képezi az $m = pq$ szorzatot és keres egy olyan r számot, mely relatív prím az $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$ értékéhez és $1 < r < \varphi(m)$. Az m és r számokat B nyilvánosságra hozza, mivel ezek ismeretére a kódolásnál szükség van.
Ha az A küldő a B fogadónak egy titkos üzenetet kíván továbbítani, akkor az üzenet szövegét egyforma hosszú, száznál kevesebb jegyet tartalmazó N blokká alakítja át. Ezután A kiszámítja az N^r hatvány R maradékát modulo m:

$$N^r \equiv R(m)\,. \tag{5.281a}$$

Az A küldő az R számot továbbítja a B fogadónak valamennyi az eredeti szövegből létrejött N számblokkra. A fogadó képes az R üzenetet dekódolni, ha ismeri az $rs \equiv 1\,(\varphi(m))$ lineáris kongruencia egy megoldását. Az N egyenlő R^s az m számmal osztva kapott maradékkal:

$$R^s \equiv (N^r)^s \equiv N^{1+k\varphi(m)} \equiv N \cdot (N^{\varphi(m)})^k \equiv N(m)\,, \tag{5.281b}$$

ahol az EULER–FERMAT-tételt használtuk fel, amely szerint $N^{\varphi(m)} \equiv 1(m)$ igaz. Végül B a számsorozatot visszaalakítja szöveggé.

■ A fogadó az A küldőtől titkos üzenetet vár, kiválasztja a $p = 29$ és $q = 37$ prímszámokat (gyakorlati felhasználásnál ezek túl kicsi számok), kiszámolja a szorzatot $m = 29 \cdot 37 = 1073$ (tehát $\varphi(1073) = \varphi(29) \cdot \varphi(37) = 1008$) és végül rögzíti az $r = 5$ értéket (lnko$(5, 1008) = 1$)). A B fogadó közli az A küldővel,hogy $m = 1073$ és $r = 5$.
Az A az $N = 8$ titkos üzenetet küldi B-nek, amelyet az $N^r = 8^5 \equiv 578\,(1073)$ alapján kódol, azaz $R = 578$, és elküldi B-nek az $R = 578$ üzenetet. A B fogadó megoldja az $5 \cdot s \equiv 1\,(1008)$ kongruenciát, és az $s = 605$ birtokában meghatározza az $R^s = 578^{605} \equiv 8 = N\,(1073)$ üzenetet.

Megjegyzés: Az RSA-kód biztonsága attól az időtől függ, amely alatt egy jogosulatlan az m szám prímfelbontását meg tudja találni. A mai számítógép sebességek mellett az RSA-kód alkalmazójának két legalább 100 jegyű p és q prímszámra van szüksége, hogy a jogosulatlannak mintegy 74 évig tartó dekódolási időráfordítást okozzon. Az alkalmazónak ugyanakkor számítástechnikailag lényegesen kisebb ráfordítást jelent egy a $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ számhoz relatív prím számot találnia.

2. Nemzetközi Könyvszámozási Szabvány (ISBN)

A szám kongruencia egyik egyszerű alkalmazása a Nemzetközi Könyvszámozási Szabvány, ISBN ellenőrző kódjainak kidolgozása. A könyvekhez egy 10 jegyű és az alábbi alakú számkombinációt rendelünk:

$$\text{ISBN } a - bcd - efghi - p \tag{5.282a}$$

Legyen a a csoportszám (például $a = 3$ azt jelenti, hogy a könyv Németországból, Ausztriából vagy Svájcból származik), bcd a kiadó száma, végül $efghi$ a szóban forgó kiadó egy meghatározott könyvét jelöli. Ellenőrző kódként a p számot bevezetve felismerhetjük a téves könyvrendeléseket, és így az ezzel kapcsolatos többletkiadásokat minimalizálni tudjuk. A p ellenőrző kód az a legkisebb nem negatív szám amely az alábbi kongruenciát kielégíti:

$$10a + 9b + 8c + 7d + 6e + 5f + 4g + 3h + 2i + p \equiv 0(11)\,. \tag{5.282b}$$

A 10 alkalmazása helyett a nem numerikus X jelet is használják ellenőrző kódként (lásd 5.4.5., **4.**). Így minden megküldött ISBN-számot ellenőrizni lehet, hogy a megadott ellenőrző kód a maradék számkombinációval előállított ellenőrző kóddal megegyezik-e. Egy esetleges eltérés bizonyosan egy hiba következménye. Az ISBN ellenőrző szám eljárás a következő hibákat mindig felfedezi:

- Egy számjegy téves írása.
- Két számjegy felcserélése („*forgatási hiba*").

Statisztikai vizsgálatok szerint ezzel a módszerrel a hibák több mint 90%-a felfedezhető. A többi megfigyelt hibatípusok relatív gyakorisága 1% alatt van. Az esetek többségében két szám téves írását, illetve teljes számjegy blokkok felcserélését a leírt kódolási eljárás kideríti.

3. Központi gyógyszerszám

A patikákban a gyógyszerek azonosítására egy hasonló ellenőrző kóddal működő számrendszert alkalmaznak. Minden gyógyszer egy hétjegyű központi gyógyszerszámot kap:

$$abcdefp\,. \tag{5.283a}$$

Az utolsó szám a p ellenőrző kód az a legkisebb nem negatív szám, amely az alábbi kongruenciát kielégíti.

$$2a + 3b + 4c + 5d + 6e + 7f \equiv p(11) \tag{5.283b}$$

Ezzel az ellenőrző kód eljárással egy számjegy elírása és két szám felcseréléséből adódó forgatási hiba mindig felismerődik.

4. Egységes számlaszám rendszer (EKONS)

Az EKONS az egységes számlaszám rendszer rövidítése, amelyet bankok és takarékpénztárak alkalmaznak. A számok legfeljebb 10 jegyűek (az üzleti forgalom nagyságától függően). Az első számjegyek (legfeljebb 4) a számla osztályozására szolgálnak. A többi 6 jegy adja a tulajdonképpeni számlaszámot beleértve az ellenőrző kódot is, amely az utolsó helyen áll. A különböző bankoknál és takarékpénztáraknál eltérő ellenőrző kód eljárások szokásosak, például:

a) A számjegyeket jobbról kezdve felváltva eggyel illetve kettővel megszorozzuk, ezeknek a szorzatoknak az összegéhez a p ellenőrző kód utján a legközelebbi 10-zel osztható számmá egészítjük ki vagyis az $abcd\ e\ f\ ghi\ p$ számlaszámra a p kódszámmal érvényes az alábbi kongruencia:

$$2i + h + 2g + f + 2e + d + 2c + b + 2a + p \equiv 0(10)\,. \tag{5.284}$$

b) Az **a)** eljárásban a korábbiaktól eltérően nem a szorzatok, hanem — feltéve, hogy a szorzat eredménye kétjegyű — a szorzatok keresztösszege kerül alkalmazásra.

Az **a)** variáns esetében két szomszédos számjegy felcserélését valamennyi esetben, egy számjegy elírását pedig majd minden esetben felderítjük.

A **b)** variáns esetében viszont egy szám elírásából álló hibát mindig, két szomszédos számjegy felcseréléséből származó hibát pedig majdnem mindig felismerjük. Két nem szomszédos számjegy felcseréléséből, illetve két számjegy elírásából eredő hibákat gyakran nem tudjuk felismerni.

Nem matematikai okai vannak annak, hogy nem alkalmaznak a 11 moduluson alapuló hatékonyabb ellenőrző kód rendszert. Így (a 10-es ellenőrző kód helyett (lásd 5.4.5., **2.**)) nem numerikus X jel alkalmazása a tasztatúra kiegészítését igényli. Ugyanakkor a 10-es ellenőrző kóddal ellátott számlaszámról való lemondás az egységes számrendszerre történő áttéréskor az esetek jelentős számában nem engedné meg az eredeti számlaszámok kiegészítését.

5. Európai árucikkszámozás (EAN)

Az EAN az Európai Árucikkszámozás rövidítése, amelyet nagyon sok árucikken vagy vonalkód, vagy 13 illetve 8 jegyű számjegy sorozat formájában találunk. Egy szkenner segítségével a számítógépes kasszák a vonalkódot be tudják olvasni.

A 13 jegyű szám esetében az első két jegy az előállítási országot adja meg, például 40, 41, 42, 43 és 44 Németországot jelenti. A következő 5 számjegy az áru előállítóját adja meg, és egy további, szintén 5 számjegyet tartalmazó csoport határozza meg a szóban forgó terméket. Az utolsó jegy a p ellenőrző kód.

Az ellenőrző kódot megkapjuk, ha az első 12 számjegyet váltakozva eggyel és hárommal szorozzuk, és a

szorzatok ezen összegét a p ellenőrző kód hozzáadásával a legközelebbi tízzel osztható számra egészítjük ki. Így az $ab\ cdef\ hikmn\ p$ árukódra a p ellenőrző kóddal fennáll:

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p \equiv 0(10)\,. \tag{5.285}$$

Ezzel az ellenőrző kód eljárással az EAN rendszerben egy jegy elírásából származó hibát mindig, két szomszédos jegy felcseréléséből származót pedig az esetek többségében felismerjük. A nem szomszédos számjegyek felcseréléséből eredő forgatási hibát, illetve két számjegy elírása következtében előálló hibát a rendszer gyakran nem ismeri fel.

5.5. Kriptológia

5.5.1. A kriptológia feladata

A kriptológia az a tudomány, amely adatok transzformációja útján információk titkosítására szolgál.

Az a gondolat, hogy adatokat illetéktelen olvasóktól megvédjünk már régi. A kriptológia mint önálló tudomány századunk 70-es éveiben, a nyilvános kulcsú titkosítási rendszerek bevezetésével jelent meg. Ma már a kriptológiai vizsgálatok feladatai közé tartozik az adatok illetéktelen hozzáféréstől vagy illetéktelen megváltoztatástól való megvédése is.

A „klasszikus" katonai alkalmazások mellett az információkat kezelő vállalkozások igényei egyre nagyobb jelentőségűek. Példaként említjük az e-mail utján létesített átvitel biztonságának a megvalósítását, az elektronikus pénzforgalmat (home banking) és az EC kártyák PIN kódjait.

A kriptológia fogalma alatt ma már mindkét részterületet, a kriptográfiát és kriptoanalízist együttesen értjük. A kriptográfia keretében olyan titkosítási rendszerek kerülnek kidolgozásra, amelyeknek kriptográfiai erejét a rendszer feltöréséhez szükséges kriptoanalitikai módszerek alapján lehet megítlélni.

5.5.2. Titkosítási rendszerek

Egy absztrakt titkosítási rendszer a következő elemekből áll: az M üzenettér, a C kódolt szöveg tere, a K és K' kulcsterek, végül az $\mathbb{E}$ és $\mathbb{D}$. függvényterek.

Egy $m \in M$ üzenetet egy $E \in \mathbb{E}$ leképezéssel a $k \in K$ kulccsal egy $c \in C$ kódolt szöveggé kódoljuk, és egy információs csatornán keresztül átvisszük. A fogadó a c szövegből reprodukálni tudja az m üzenetet, amennyiben rendelkezik a $D \in \mathbb{D}$ leképezéshez kapcsolódó $k' \in K'$ kulccsal.

Kétféle titkosítási rendszert különböztetünk meg:

1. Szimmetrikus titkosítási rendszerek A klasszikus szimmetrikus titkosítási rendszereknél ugyanazt a k kulcsot alkalmazzuk az üzenet kódolására, és a kódolt szöveg dekódolására.
A klasszikus titkosítási rendszerek kidolgozásánál az alkalmazó szabadjára eresztheti fantáziáját. A kódolás és dekódolás azonban nem lehet túl komplikált. Mindenesetre a biztos átvitel a két kommunikáló partner között elengedhetetlen.

2. Aszimmetrikus titkosítási rendszerek Aszimmetrikus titkosítási rendszerek esetében (lásd 342. old.) két kulcsot alkalmazunk, egy privát (szigorúan titkosat) és egy nyilvános kulcsot. A nyilvános kulcsot ugyanazon az úton vihetjük át mint a kódolt szöveget. A kommunikáció biztonságát itt az úgynevezett egyirányú függvények (lásd 343. old.) biztosítják, amelyek lehetetlenné teszik, hogy a hozzáférésre jogosulatlan támadók a kódolt szövegből az eredeti szöveget kinyomozzák.

5.5.3. Matematikai megfogalmazás

Egy $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ alfabéta egy véges, nem üres, teljesen rendezett halmaz, amelynek a_i elemeit betűknek nevezzük. Az alfabéta hossza $|A|$. Egy olyan $n \in \mathbb{N}$ hosszúságú $w = a'_1 a'_2 \ldots a'_n$ jelsorozat, amely az A alfabéta betűiből áll, az A alfabéta feletti n hosszúságú szó. Jelölje A^n az A feletti n hosszúságú szavak halmazát. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ valamint A és B alfabéták végül S egy véges halmaz.

Egy titkosítási függvény egy $t\colon A^n \times S \to B^m$ leképezés, ahol a $t_s\colon A^n \to B^m$ minden $s \in S$ értékre injektív. Ekkor a t_s illetve t_s^{-1} leképezést a kódoló illetve dekódoló függvénynek nevezzük, míg $w \in A^n$ illetve $t_s(w) \in B^m$ az eredeti illetve a kódolt szöveg.

Egy titkosítási függvényt tekintve a $\{t_s\}_{s \in S}$ egyparaméteres leképezés sereg egy T_S titkosítási rendszert

alkot. A titkosítási rendszer fogalmát akkor használjuk, ha a t leképezés mellett a kulcshalmaz struktúrája és nagysága is jelentőséggel bír. Az S halmazt, az egy titkosítási rendszerhez tartozó kulcsok halmazát kulcstérnek mondjuk. Ha $n = m$ és $A = B$, akkor az A feletti titkosítási rendszer:

$$T_s = \{t_s \colon A^n \to A^n | s \in S\} . \tag{5.286}$$

Egy A^n feletti T_S titkosítási rendszert t_s folytonos kódúnak mondunk, ha $n = 1$; ellenkező esetben t_s blokk kódolású.

Egy A^n feletti titkosítási rendszer titkosítási függvényei tetszőlegesen hosszú eredeti szövegek kódolását elvégzik. Ebből a célból a szöveget n hosszúságú blokkokra bontjuk fel, és a függvényt minden blokkra egyedileg alkalmazzuk. Mindazonáltal a szöveghez egy pótlékot kell hozzáfűznünk annak érdekében, hogy a szöveget n-nel osztható hosszra kiegészítsük. Ez a pótlék az eredeti szöveg értelmét nem zavarhatja.

Megkülönböztetünk környezetfüggetlen és környezetfüggő kódolást. Az első esetben a kódolt szöveg blokkja csak a megfelelő eredeti blokk és a kulcs függvénye, a második esetben a kódolt szöveg az üzenet más blokkjaitól is függ. Ideális esetben a kódolt szöveg minden betűje függ az eredeti szöveg és a kulcs minden betűjétől. Ilyenkor az eredeti szöveg vagy a kulcs kis változtatásai nagymértékben megváltoztatják a kódolt szöveget (lavinahatás).

5.5.4. Titkosítási rendszerek biztonsága

A kriptoanalízisben olyan módszerek kidolgozása a cél, melyek segítségével a kódolt szövegből a kulcs ismerete nélkül az eredeti szövegről minél több információt nyerhetünk. A. KERCKHOFF szerint egy titkosítási rendszer biztonsága egyedül a kulcs pontosabban a dekódolási függvény megtalálásának nehézségétől függ. A biztonság nem alapulhat magának a rendszernek titkos kezelésén.

Egy titkosítási rendszer biztonságának megítélésére különböző szempontok léteznek:

1. Teljesen biztos titkosítási rendszerek: Csupán egyetlen abszolút biztos titkosítási rendszer van a one-time-tape rendszer. Ezt információelméleti eszközökkel SHANNON bizonyította be.

2. Analitikusan biztos titkosítási rendszerek: Nincsen olyan eljárás, amellyel ez a titkosítási rendszer szisztematikusan feltörhető. Annak bizonyítása, hogy ilyen eljárás nem létezik a dekódoló függvény kiszámíthatatlanságának igazolása útján lehetséges.

3. Komplexitás elméletileg biztos titkosítási rendszerek: Nincsen olyan algoritmus, amely a titkosítási rendszert (a szöveg hosszúságára vonatkoztatott) polinom időben fel tudja törni.

4. Gyakorlatilag biztos titkosítási rendszerek: Nem ismeretes olyan eljárás, amely a titkosítási rendszert a rendelkezésre álló eszközök segítségével elfogadható költséggel feltörhetné.

A kriptoanalízisben gyakran alkalmaznak statisztikai módszereket (a betűk vagy szavak gyakoriságelemzése). A teljes keresés és a Próba-és-Hiba-Módszere mellett elképzelhető a titkosítási rendszer strukturális analízise is (egyenlet rendszerek megoldása).
A titkosítási rendszerek feloldásakor megkísérelhető egyes gyakori titkosítási hibák kihasználása, ilyenek a sztereotipikus fogalmazás alkalmazása, a kevéssé megváltoztatott eredeti szövegek küldése, a szerencsétlen, előrelátható kulcsválasztás és a kitöltő jelek alkalmazása.

5.5.4.1. A klasszikus kriptológia módszerei

A titkosítási függvények alkalmazásán kívül lehetőség van az eredeti szöveg titkosítási kódokkal való titkosítására (kódolás). Ez alatt az A alfabéta feletti szavak A' részhalmazának egy a B feletti szavak B' részhalmazára való bijektív leképezését értjük. Az eredeti-kép párok halmazát kódkönyvnek nevezzük.

■

ma este	0815
holnap este	1113

Ennek előnye, hogy hosszú eredeti szövegeket rövid üzenetekkel helyettesítünk, ezzel szemben hátrány, hogy azonos eredeti szövegrészek azonos kódolt szövegrészekbe mennek át, és hogy a csak részben kompromittált kódkönyvet nagy költséggel teljesen ki kell cserélni.

A továbbiakban csakis titkosítási függvényekkel megvalósított kódolásokat vizsgálunk. Ezeknek az a

járulékos előnyük, hogy a kicserélendő üzenetek tartalmát illetően nincs szükség semmiféle előzetes megállapodásra.

Klasszikus kriptoműveletek a helyettesítés és a transzpozíció. A transzpozíciók a kriptológiában speciális, geometriai ábrákon definiált permutációk. A továbbiakban a helyettesítést részletesebben bemutatjuk. Megkülönböztetünk monoalfabétikus és polialfabétikus helyettesítéseket aszerint, hogy egy vagy több alfabétát használunk a kódolt szöveg kialakítására. Általában monoalfabétikus helyettesítésről beszélünk abban az esetben is, ha csak egy alfabétát használunk, de az eredeti szöveg jeleinek kódolása a jelnek a szövegben elfoglalt pozíciójától is függ.
Ezen kívül is ésszerű a monoalfabétikus és polialfabétikus helyettesítésre való felosztás. Az első esetben egyes egyedi jeleket helyettesítünk, a másodikban rögzített egynél nagyobb hosszúságú jelsorozatokat.

5.5.4.2. Cserével végzett titkosítás

Legyen $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ betűkészlet és $k, s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ahol $\text{lnko}(k, n) = 1$, akkor azt a t_s^k permutációt amely minden a_i betűhöz a $t_s^k(a_i) = a_{ki+s}$ leképezést rendeli csere titkosításnak nevezzük.
Az A felett $n\,\varphi(n)$ különböző cseretitkosítás létezik.
A shiftelés is cseretitkosítás $k = 1$ esetére. Az $s = 3$ esetére érvényes shiftelést már JULIUS CAESAR (i.e. 100-tól 44-ig) is alkalmazta, ezért CAESAR-kód a neve.

5.5.4.3. A Vigenere-kód

A VIGENERE-kóddal való titkosítás egy betűiben páronként különböző kulcsszó periódikus alkalmazásán alapszik.
A L. CAROLL által kidolgozott változat a kódolásra és dekódolásra egy úgy nevezett (itt mellékelt) VIGENERE-táblázatot használ. Amennyiben az eredeti szöveg jele az i-ik sorban, a kódolási jel a j-ik oszlopban áll, akkor a kódolt jelet a táblázatban ezek kereszteződésében olvashatjuk ki. A dekódolás ellentétes sorrendben történik.

	A	B	C	D	E	F	$\ldots$
A	A	B	C	D	E	F	$\ldots$
B	B	C	D	E	F	G	$\ldots$
C	C	D	E	F	G	H	$\ldots$
D	D	E	F	G	H	I	$\ldots$
E	E	F	G	H	I	J	$\ldots$
F	F	G	H	I	J	K	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

■ Válasszuk kulcsnak a „Hut" szót:

eredeti szöveg:	E	S	W	A	R	E	I	N	M	A	L
kulcs:	H	U	T	H	U	T	H	U	T	H	U
kódolt szöveg:	L	M	P	H	L	X	P	H	F	H	F

Formálisan a VIGENERE-kódot a következőképpen írhatjuk le: Legyen a_i az eredeti szöveg jele, a_j pedig a kódolási jel, ekkor a kódolt betű a_k, ahol $i + j = k$

5.5.4.4. Mátrix helyettesítések

Legyen $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ egy alfabéta, $S = (s_{ij})$, $s_{ij} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, olyan $m \times m$-es nem szinguláris mátrix, amelyre $\text{lnko}(\det S, n) = 1$. Az a titkosítást amely az eredeti szöveg minden $a_{t(1)}, a_{t(2)}, \ldots, a_{t(m)}$ blokkjához az alábbi index sorrenddel bíró kódolt szövegblokkot rendeli (a számítást modulo n kell elvégezni) HILL-kódnak nevezzük:

$$\left(S \cdot \begin{pmatrix} a_{t(1)} \\ a_{t(2)} \\ \vdots \\ a_{t(m)} \end{pmatrix}^T \right) \tag{5.287}$$

Ez tulajdonképpen egy monoalfabétikus mátrix helyettesítés.

■ $S = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; az alfabéta betűi legyenek $a_0 = A, a_1 = B, \ldots, a_{25} = Z$. Válasszuk eredeti szövegnek a HERBST szót, ekkor a HER és BST betűsorozatokhoz a (7,4,17) illetve (21,18,19) index-

sorozatok vannak hozzárendelve. Eredményünk $S \cdot (7,4,17)^\top = (181,110,46)^\top$ és $S \cdot (1,18,19)^\top = (215,136,58)^\top$. A modulo 26 szerint elvégzett redukció után kapott indexsorozatok (25,6,20) és (7,6,6), így a nekik megfelelő betűsorozatok ZGU illetve HGG. Ezek szerint az eredeti szöveg HERBST szavának kódolt szava ZGUHGG.

5.5.5. A klasszikus kriptoanalízis módszerei

A kriptoanalitikai vizsgálatok célja abban áll, hogy a kódolt szövegből a kulcs ismerete nélkül az eredeti szövegre vonatkozóan minél több információt nyerjünk. Ezek a vizsgálatok nem csak a jogosulatlan támadó számára bírnak jelentőséggel, hanem az alkalmazók szempontjából a titkosítási rendszer biztonságának megítélése tekintetében is.

5.5.5.1. Statisztikus analízis

Minden természetes nyelvre létezik az egyedi betűknek, betű pároknak, szavaknak gyakorisági eloszlása. Például a német nyelvben az „E" a leggyakoribb betű.

Betűk	Gyakoriságok
E, N	27,18 %
I, S, R, A, T	34,48 %
D, H, U, L, C, G, M, O, B, W, F, K, Z	36,52 %
P, V, J, Y, X, Q	1,82 %

Kellően hosszú kódolt szöveg alapján a gyakorisági eloszlás kihasználásával mód van monoalfabétikus, monografikus helyettesítések feltörésére.

5.5.5.2. A Kasiski–Friedman-próba

KASISKI és FRIEDMAN kombinált módszerével lehetséges a VIGENERE-kód feltörése. Itt azt a körülményt használják ki, hogy ez a titkosítási eljárás a kulcsszót periodikusan alkalmazza. Ilymódon a kódolt szövegben olyan ismétlődő részsorozatok vannak, amelyek azonos eredeti szövegrészeket azonos kódolt szövegrészekbe fordítanak. Az ilyen azonos kettőnél nagyobb hosszúságú részsorozatok távolsága a kulcsszó hosszának többszörösei. Ha több ismétlődő kódolt szövegrészt találunk, akkor a kulcsszó hossza a köztük lévő távolságoknak legnagyobb közös osztója. Ezt a megfontolást KASISKI-szövegnek nevezik. Figyelembe kell azonban venni azt a lehetőséget is, hogy ilyen azonosságok véletlenszerűen is előállhatnak, ami az eredményt meghamisítja.

Míg a KASISKI-szöveg a kulcsszóhosszt csak egy osztó többszöröseként szolgáltatja, a FRIEDMAN-próba megadja a kulcsszóhossz nagyságrendjét is. Egy VIGENERE-kódolt német nyelvű eredeti szöveg l kulcsszóhossza egy n hosszú (betűszám) kódolt szöveg alapján

$$l = \frac{0,0377n}{(n-1)IC - 0,0385n + 0,0762} . \tag{5.288a}$$

Itt IC a kódolt szöveg koincidencia indexe, amelyet a kódolt szövegben az a_i $(i \in \{0,1,\ldots,25\})$ betűnek n_i számából határozhatunk meg:

$$IC = \frac{\sum_{i=1}^{26} n_i(n_i-1)}{n(n-1)} . \tag{5.288b}$$

A kulcsszó kinyomozására az n hosszúságú kódolt szöveget l oszlopba írjuk. Elegendő ha oszloponként megtaláljuk az „E" betű megfelelőjét, mivel a VIGENERE-kódban az oszlopok shiftelés útján vannak kódolva. Legyen például „V" a leggyakoribb betű valamely oszlopban, akkor a VIGENERE-táblázatban

$$\begin{matrix} \mathrm{E} \\ \vdots \\ \mathrm{R}\ldots\mathrm{V} \end{matrix} \tag{5.288c}$$

megtaláltuk a kulcsszó R betűjét.

Amennyiben a VIGENERE-kód nagyon hosszú kulcsot (például az eredeti szöveg hosszával összemérhetőt), akkor a leírt módszerek nem vezetnek eredményre. Azt azonban fel tudjuk ismerni, hogy az adott titkosítás monoalfabétikus, kis periódusú polialfabétikus vagy nagy periódusú polialfabétikus.

5.5.6. One-Time-Tape

A one-time-tape az egyetlen elméletileg biztos kódolás. A titkosítás itt a VIGENERE-kódnál alkalmazott elvek alapján történik, azonban kulcsként betűk olyan véletlen sorozatát alkalmazzuk, amelynek hossza az eredeti szöveg hosszával megegyezik.

Szokás szerint a one-time-tape kódot bináris VIGENERE-kódként implementálják: az eredeti szöveg és a kulcs duális számokként szerepelnek, és modulo 2 összegük a titkos szöveg egy betűje. Ilyen feltételek mellett a kódolás involutórikus, vagyis a titkosítás újabb alkalmazása az eredeti szöveget állítja elő. A bináris VIGENERE-kód technikai megvalósítása shiftregiszter kapcsolásokkal történik. Ezalatt olyan kapcsolásokat értünk, amelyek megadott szabályok szerint 0 és 1 állapotot felvenni képes memóriaelemekből, és kapcsolókból vannak összeállítva.

5.5.7. Nyilvános kulcsú eljárások

Jóllehet a kriptológia klasszikus eljárásai a mai számítástechnika segítségével hatékonyan megvalósíthatóak, és kétoldali összeköttetés kialakítására csak egyetlen kulcs szükséges, egy sereg hátránnyal rendelkezik:

- A titkosítás biztonsága egyedül a kulcs titkos voltán múlik.
- A kulcsot a kommunikáció előtt egy kellően biztonságos csatornán ki kell cserélni; spontán kommunikációra nincs lehetőség.
- Továbbá egy harmadikkal szemben nem lehet kimutatni, hogy egy adott küldő egy adott üzenetet elküldött-e vagy sem.

5.5.7.1. Diffie és Hellman koncepciója

A nyilvános kulcsú eljárások koncepcióját 1976-ban DIFFIE és HELLMAN dolgozta ki. Minden résztvevő rendelkezik egy nyilvános kulccsal, amelyet egy általánosan hozzáférhető listában nyilvánosságra hoznak, és egy privát kulccsal (szigorúan titkos), amely csakis a szóban forgó résztvevő számára ismeretes. Az ilyen eljárásokat aszimmetrikus titkosítási eljárásoknak nevezzük (lásd 338. old.).

Az i-ik résztvevő nyilvános kulcsa határozza meg az E_i titkosítási lépést; az i-ik résztvevő KS_i privát kulcsa szabja meg a D_i dekódolást. Itt a következő feltételeket kell teljesíteni:

1. A $D_i \circ E_i$ leképezés identikus.

2. Az E_i és D_i legyen hatékonyan megvalósítható.

3. A KS_i privát kulcs ne legyen a rendelkezésre álló eszközökkel belátható idő alatt a nyilvános KP_i kulcsból előállítható.

4.Minthogy $E_i \circ D_i$ identikus leképezés, szükség van a nyilvános kulcs segítségével egy szignatúra eljárásra. A szignatúra eljárás az üzenet küldőjének lehetővé teszi, hogy azt egy nem hamisítható aláírással ellássa.

Tételezzük fel, hogy A egy m üzenetet akar kódolni, és azt B-nek elküldeni. Ekkor A a listából kikeresi a B résztvevő KP_B nyilvános kulcsát, ezzel rögzíti az E_B titkosítási függvényt és kódolja az üzenetet: $E_B(m) = c$.
Ezután A a kódolt c szöveget a nyilvános hálózaton B-nek elküldi, amit B a KS_B privát kulcsa segítségével (amely a D_B dekódoló függvényt rögzíti) az üzenet eredeti szövegét meghatározza: $D_B(c) = D_B(E_B(m)) = m$.
A hamis üzenetek megakadályozása céljából A egy szignatúra eljárással a nyilvános kulcs segítségével a B-nek szóló m üzenetet a következőképpen szignálhatja: A az eredeti m szöveget saját privát kulcsával kódolja $D_A(m) = d$, a szöveghez hozzáfűzi saját „A" aláírását, és az aláírt d szöveget B nyilvános kulcsával kódolja: $E_B(D_A(m), , , A'') = E_B(d, , , A'') = e$. Az aláírt szöveget A elküldi B-nek.
A B résztvevő a szöveget privát kulcsával dekódolja, eredménye: $D_B(e) = D_B(E_B(d, , , A'')) = (d, , , A'')$.

Az üzenetből B felismeri, hogy a küldő A volt, és ezek után a D szöveget A nyilvános kulcsával dekódolhatja: $E_A(d) = E_A(D_A(m)) = m$.

5.5.7.2. Egyirányú függvények

A nyilvános kulcsú eljárásokban alkalmazott titkosítási függvényeknek „csapóajtóval" ellátott egyirányú függvényeknek kell lenniük. Csapóajtó alatt itt egy titkos többletinformációt értünk.
Egy injektív $f\colon X \to Y$ függvényt csapóajtóval ellátott egyirányú függvénynek mondunk, ha a következők teljesülnek:

1. Létezik az f és az f^{-1} kiszámítására hatékony eljárás.

2. Az f^{-1} kiszámítására szolgáló hatékony eljárást az f függvényből nem lehet titkos többletinformáció nélkül alkalmazni.

Azt nem lehet bizonyítani, hogy léteznek egyirányú függvények, de vannak olyan függvények amelyek mint kandidátusok egyirányú függvényként szóba jöhetnek.

5.5.7.3. RSA eljárás

A számelmélet fejezetben leírt (lásd 336. old.) RSA-eljárás a legnépszerűbb aszimmetrikus titkosítási eljárás.

1. Előfeltételek: Válasszunk két nagy p és q prímszámot és legyen $n = pq$ (a gyakorlatban ilyenkor $pq > 10^{200}$). A p és q prímek mint decimális számok különbözzenek mind hosszukban mind egyes számjegyeikben; a p és q közötti különbség azonban ne legyen túl nagy. Továbbá $p-1$ és $q-1$ tartalmazzon nagy prímtényezőket, ugyanakkor $p-1$ és $q-1$ legnagyobb közös osztója lehetőleg kicsi legyen. Válasszunk egy olyan $e > 1$ számot, amely a $(p-1)(q-1)$ számhoz relatív prím, és számítsunk ki egy d számot, amelyre $d \cdot e = 1$ modulo $(p-1)(q-1)$. Ekkor n és e lesznek a nyilvános kulcsok, míg d a privát kulcs.

2. Kódolási művelet:

$$E\colon \{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\} \quad E(x) := x^e \text{ modulo } n\,. \tag{5.289a}$$

3. Dekódolási művelet:

$$D\colon \{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\} \quad D(x) := x^d \text{ modulo } n\,. \tag{5.289b}$$

Ekkor bármilyen m üzenetre igaz $D(E(m)) = E(D(m)) = m$

A titkosításra alkalmazott függvény $n = pq > 10^{200}$ esetében kandidátusa a csapóajtóval ellátott egyirányú függvénynek. A járulékos információ ez esetben n prímtényezős alakjának ismerete. Ezen információ hiányában gyakorlatilag lehetetlen a
$d \cdot e = 1$ modulo $(p-1)(q-1)$ kongruenciát megoldani.

Az RSA-eljárás gyakorlatilag messzemenően biztonságosnak tekinthető, amennyiben a fenti feltételek teljesülnek. Más eljárásokkal szemben hátránya a viszonylag nagy kulcshosszúság, és az a körülmény, hogy az RSA összevetve a DES módszerrel körülbelül 1000-szer lassabb.

5.5.8. DES algoritmus (Data Encription Standard)

A DES eljárást az amerikai Nemzeti Szabványügyi Hivatal 1976-ban az Egyesült Államok hivatalos titkosítási szabványának nyilvánította. Az algoritmus szimmetrikus titkosítási eljárás (lásd 338. old.) és a kriptológiai eljárások között még ma is megkülönböztetett jelentőségű. Ugyanakkor nem alkalmas nagy titkosságú információk kódolására, mivel az utóbb rendelkezésre álló technikai lehetőségek a valamennyi kulcs kipróbálása útján történő támadást már nem zárhatják ki.

A DES algoritmusban permutációk és nem lineáris helyettesítések egymást követően kerülnek alkalmazásra. Az algoritmus egy 56 bit hosszúságú kulcsot használ, pontosabban a kulcs 64 bites, de ebből csak 56 bit választható tetszőlegesen, a maradék 8 bit a páratlan paritású 7 bites jeleket egészíti ki.

Az eredeti szöveget 64 bites blokkokba kell szétosztani. A DES a 64 bites eredeti blokkot egy 64 bites titkos blokkba viszi át.

Az eredeti blokkokat először egy bemeneti permutációnak vetjük alá, amely 16 kulcsfüggő menetben titkosít. Ebből a célból a 64 kulcsbitből 16
$K_1, K_2, \ldots, K_{16}$ részkulcsot képezünk, amelyeket ebben a sorrendben alkalmazunk az egyes menetekben a titkosítás során.
Ezt követően használjuk fel a bemeneti permutáció inverz permutációját, és így állítjuk elő az eredeti blokkhoz tartozó kódolt blokkot.

A dekódolás lényegében ugyanezen az úton történik, azzal a különbséggel, hogy a részkulcsokat K_{16}, $K_{15}, \ldots, K_1$ fordított sorrendben kell alkalmazni.

Ennek a titkosítási eljárásnak az ereje az egyes iterációs lépésekben alkalmazott leképezések konstrukciójában van. Megmutatható, hogy a kódolt szöveg minden bitje a hozzátartozó eredeti szöveg és a kulcs mindenegyes bitjétől függ.

Jóllehet mióta a DES algoritmus részleteiben nyilvánosságra került máig sem ismeretes olyan lehetőség, amely a kódolás feltörését valamennyi 2^{56} kulcs végig próbálása nélkül megoldaná.

5.5.9. IDEA–Algoritmus (International Data Encryption Algorithm)

Az IDEA algoritmust 1991-ben szabadalmaztatta LAI és MASSAY. A DES algoritmushoz hasonlóan itt is szimmetrikus titkosítási eljárásról van szó; Az IDEA potenciális utódja a DES eljárásnak. Az algoritmus az e-mailek titkosítására szolgáló PGP (Pretty Good Privacy) ismert szoftvercsomag részeként ismeretes. Szemben a DES eljárással itt nemcsak az algoritmus, hanem a tervezési alapelvek is nyilvánosságra kerültek. A cél lehetőleg egyszerű műveletek alkalmazása (modulo 2 összeadás, modulo 2^{16} összeadás, modulo 2^{16+1} szorzás).

Az IDEA eljárással 64 bites eredeti blokkokat titkosíthatunk, és a részkulcsok fordított sorrendben történő választásával dekódolhatunk. Titkosításkor minden 64 bites eredeti blokk négy egyenként 16 bites részblokkba van felosztva. Az IDEA 128 bites kulcsot alkalmaz, amelyből 52 egyenként 16 bites részkulcsot származtat. A 8 kódolási menetben mindig 6 részkulcs szükséges; a fennmaradó 4 részkulcsot egy kimeneti transzformációnál négy szövegblokkal összekapcsolva egy 64 bites kódolt blokká fogjuk össze.

Az IDEA mintegy kétszer olyan gyors mint a DES eljárás, de hardverben nehezebben implementálható. Hivatalosan nem váltak ismertté az IDEA eljárás elleni sikeres támadások.

5.6. Univerzális algebra

Egy algebra egy alaphalmazból és rajta értelmezett műveletekből áll. Egyszerű példák erre a 5.3.2., 5.3.3. és 5.3.5. fejezetekben tárgyalt félcsoportok, csoportok, gyűrűk és testek.
Az univerzális (többnyire többelemű vagyis több alaphalmazzal bíró) algebrákat különösen az elméleti informatika vizsgálja. Absztrakt adattípusok alapjául és (algebrai) specifikálásuk céljául továbbá kifejezés cserélő rendszerek alkalmazására használják.

5.6.1. Definíció

Legyen Ω operátorszimbólumok olyan halmaza, amely páronként diszjunkt Ω_n $(n \in \mathbb{N})$ részhalmazokra esik szét. Az Ω_0 halmazban a konstansok, $n > 0$ esetén az Ω_n halmazban az n-operandusú operátorszimbólumok szerepelnek. Az $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ családot típusnak vagy szignatúrának nevezzük. Ha A egy halmaz és minden n-operandusú $\omega \in \Omega_n$ operátorszimbólumhoz tartozik egy az A halmazon értelmezett n-operandusú ω^A művelet, akkor $(A, \{\omega^A | \omega \in \Omega\})$ egy Ω-algebra (Ω típusú vagy szignatúrájú algebra).
Amennyiben Ω véges ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$), akkor az $(A, \omega_1^A, \ldots, \omega_k^A)$ írásmód is használható. Amennyiben egy gyűrűt (lásd 5.3.5.) Ω-algebrának tekintünk, akkor Ω szétesik $\Omega_0 = \{\omega_1\}$, $\Omega_1 = \{\omega_2\}$ és $\Omega_2 = \{\omega_3, \omega_4\}$ részekre, ahol az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 operátorszimbólumok rendre a 0 konstansnak, az additív inverznek illetve az összeadásnak és a szorzásnak felelnek meg.

Legyenek A és B Ω-algebrák. Ekkor B az A Ω-részalgebrája, ha $B \subseteq A$ és az ω^B műveletek az ω^A $(\omega \in \Omega)$ műveleteknek a B részhalmazra érvényes korlátozottjai.

5.6.2. Kongruencia relációk, faktoralgebrák

Mint az a csoportok és gyűrűk esetében történt, az univerzális algebrában is faktorstruktúrák kialakítására van szükség, melyhez segítséget nyújt a kongruencia reláció fogalma. A kongruencia reláció egy, a struktúrával kompatibilis ekvivalencia reláció: Legyen $(A, \{\omega^A | \omega \in \Omega\})$ egy Ω-algebra és R egy az A halmazon értelmezett ekvivalencia reláció. Az R az A halmazban kongruencia reláció, ha $a_i R b_i$ $(a_i, b_i \in A;\ i = 1, \ldots, n)$ esetén minden $\omega \in \Omega_n$ $(n \in \mathbb{N})$ műveletre:

$$\omega^A(a_1, \ldots, a_n)\ R\ \omega^A(b_1, \ldots, b_n)\,. \tag{5.290}$$

A halmaznak egy kongruencia relációra vonatkozó ekvivalencia osztályai (faktorhalmazai) a helyesen reprezentáló számítógép számára szintén Ω-algebrát alkotnak: Legyen $A = (A, \{\omega^A | \omega \in \Omega\})$ egy Ω-algebra és R egy az A halamazon értelmezett reláció. Az A/R faktorhalmazok (lásd 5.2.4.) az alábbi $\omega^{A/R}$ $(\omega \in \Omega_n\,,\ n \in \mathbb{N})$ műveletekre vonatkozóan A/R Ω-algebrát alkotnak:

$$\omega^{A/R}([a_1]_R, \ldots, [a_n]_R) = [\omega^A(a_1, \ldots, a_n)]_R, \tag{5.291}$$

az A halmaznak az R szerinti faktoralgebráját.

Csoportok és gyűrűk kongruencia relációit különleges részstruktúrák, normálosztók (lásd 5.3.3.2., **2.**) illetve ideálok segítségével írhatjuk le. Általános esetben, például félcsoportok esetében a kongruencia relációk ilyen leírása nem lehetséges.

5.6.3. Homomorfizmusok

Mint a klasszikus algebrai struktúráknál a homomorfia tétel szerint összefüggés áll fenn a homorfizmusok és kongruencia relációk között.

Legyenek A és B Ω-algebrák. Egy h: $A \to B$ leképezést homomorfizmusnak nevezünk, ha minden $\omega \in \Omega_n$ és minden $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetében helytálló:

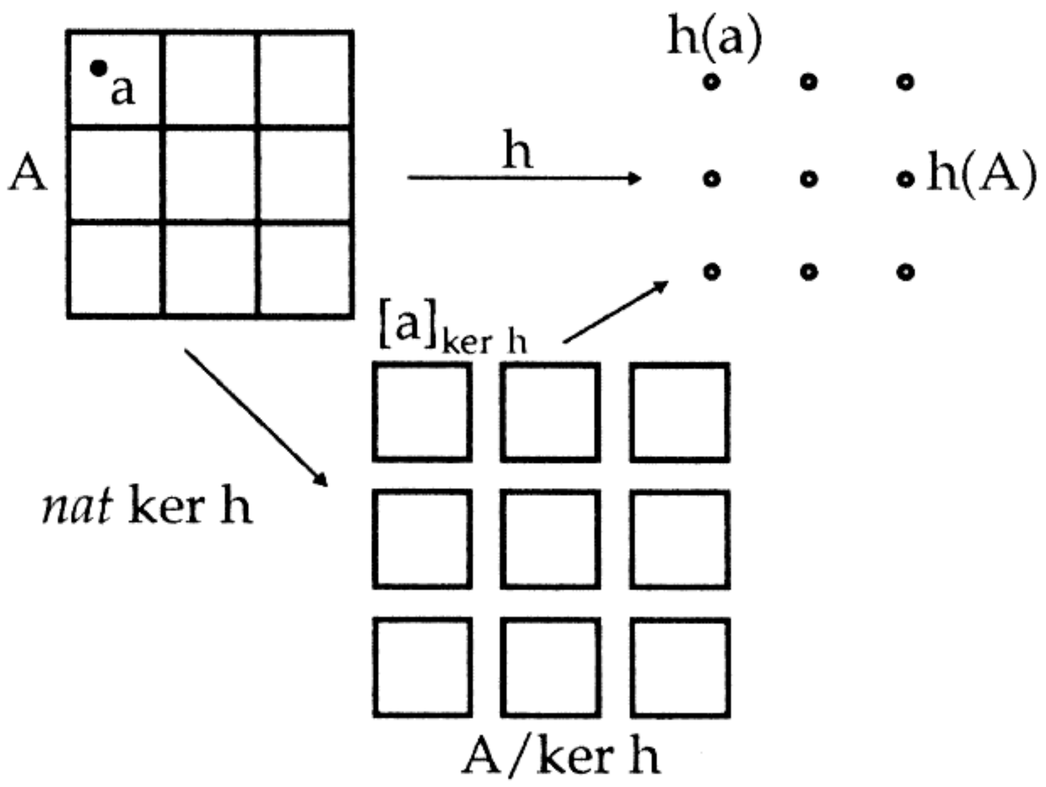
$$h(\omega^A(a_1, \ldots, a_n)) = \omega^B(h(a_1), \ldots, h(a_n))\,. \tag{5.292}$$

Ha h még bijektív is, akkor h izomorfizmus továbbá A és B egymással izomorf algebrák. Egy Ω-algebra $h(A)$ homomorf képe a B Ω-részalgebrája lesz. A h homomorfizmus esetén az A azonos képet adó elemekre történő felosztása egy kongruencia relációt jelent, amelyet h magjának nevezünk:

$$\ker h = \{(a, b) \in A \times A | h(a) = h(b)\}\,. \tag{5.293}$$

5.6.4. Homomorfia tétel

Az A és B Ω-algebrák között h: $A \to B$ egy homomorf leképezés. A h homomorfizmus az A felett egy $\ker h$ kongruencia relációt határoz meg. Az $A/\ker h$ faktoralgebra izomorf a $h(A)$ homomorf képpel. Fordítva minden R kongruencia reláció egy nat_R: $A \to A/R$ homomorf leképezést határoz meg, ahol $nat_R(a) = [a]_R$. Az **5.23. ábra** a homomorfia tétel szemléltetésére szolgál.



5.23. ábra.

5.6.5. Varietások

Az Ω-algebrák egy osztálya akkor V varietás, ha zárt a részalgebrák képzésére, homomorf leképezésre és direkt szorzásra, vagyis ezen műveletek nem vezetnek ki a V osztályból. Itt a direkt szorzat definíciója a következő:

Az Ω-algebrák alaphalmazainak direkt szorzatán az egyes Ω-algebráknak megfelelő műveleteket komponensenként hajtjuk végre, ekkor egy Ω-algebrát kapunk, melyet az algebrák direkt szorzatának nevezünk. BIRKHOFF (lásd 5.6., **5.6.6.**) olyan Ω-algebra osztályként jellemzi a változatokat, amelyek egyenletekkel definiálhatóak.

5.6.6. Kijelentésalgebrák, szabad algebrák

Legyen egy $(\Omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ szignatúra, és X egy megszámlálható halmaz. Az X feletti Ω-termek $T_\Omega(X)$ halmaza az alábbiak szerint van induktíve definiálva:

1. $X \cup \Omega_0 \subseteq T_\Omega(X)$.

2. Amennyiben $t_1, \ldots, t_n \in T_\Omega(X)$ és $\omega \in \Omega_n$, akkor $\omega t_1 \ldots t_n \in T_\Omega(X)$.

Az így definiált $T_\Omega(X)$ halmaz egy Ω-algebra alaphalmaza, az X feletti Ω típusú $T_\Omega(X)$ kijelentésalgebra az alábbi műveletekkel: Ha $t_1, \ldots, t_n \in T_\Omega(X)$ és $\omega \in \Omega_n$, akkor $\omega^{T_\Omega(X)}$ értelmezése a következő:

$$\omega^{T_\Omega(X)}(t_1, \ldots, t_n) = \omega t_1 \ldots t_n \,. \tag{5.294}$$

Valamennyi Ω-algebra osztály közül a termalgebrák „legáltalánosabb" algebrák, a kijelentésalgebrában semmiféle „egyenlet" nem érvényes. Az ilyen algebrákat szabad algebráknak nevezzük.

Egy egyenlet az $x_1, \ldots, x_n$ változókban az Ω-termek egy párja $(s(x_1, \ldots, x_n)\,,\ t(x_1, \ldots, x_n))$. Egy A Ω-algebra kielégít egy ilyen egyenletet, ha minden $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén fennáll:

$$s^A(a_1, \ldots, a_n) = t^A(a_1, \ldots, a_n) \,. \tag{5.295}$$

Az Ω-algebrák egyenletekkel definiált osztálya egy olyan Ω-algebra osztály, amely egyenletek egy adott halmazát kielégíti.

Birkhoff tétele: A változatok éppen az egyenletekkel definiált osztályok.

■ Változat például valamennyi félcsoport osztálya, valamennyi csoport osztálya, valamennyi ABEL-csoport osztálya és valamennyi gyűrű osztálya. Másrészt ellenpéldaként megemlítjük, hogy ciklikus csoportok direkt szorzata nem ciklikus csoport és testek direkt szorzata nem test, ezért a ciklikus csoportok és a testek nem alkotnak változatot, és nem definiálhatóak egyenletek útján.

5.7. Boole-algebrák és kapcsolási algebrák

Az 5.2.2., **3.** fejezetben a halmazalgebra és az ítéletkalkulus (5.1.1., **6.**) alapszabályai (számítási szabályai) közötti említett analógia más matematikai objektumokkal végzett műveletek számítási szabályai között is fellép. Az ilyen számítási szabályok vizsgálata vezet a BOOLE-algebra fogalmához.

5.7.1. Definíció

A bináris $\sqcap$ („konjunkció") és $\sqcup$ („diszjunkció") valamint az egyváltozós („negáció" $\bar{}$) művelettel és két kitüntetett 0 és 1 elemmel bíró B halmazt B BOOLE-algebrának nevezzük $(B\,, \sqcap\,, \sqcup\,, \bar{}\,,\ \,, 0, 1)$, amennyiben érvényesek a következő szabályok:

(1) Asszociativitás

$$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)\,, \tag{5.296}$$

$$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)\,. \tag{5.297}$$

(2) Kommutativitás

$$a \sqcap b = b \sqcap a\,, \tag{5.298}$$

$$a \sqcup b = b \sqcup a\,. \tag{5.299}$$

(3) Abszorpciós azonosságok

$$a \sqcap (a \sqcup b) = a\,, \tag{5.300}$$

$$a \sqcup (a \sqcap b) = a\,. \tag{5.301}$$

(4) Disztributivitás

$$(a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c)\,, \tag{5.302}$$

$$(a \sqcap b) \sqcup c = (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)\,. \tag{5.303}$$

(5)

$$a \sqcap 1 = 1\,, \tag{5.304}$$

$$a \sqcup 0 = a\,, \tag{5.305}$$

$$a \sqcap 0 = 0\,, \tag{5.306}$$

$$a \sqcup 1 = 1\,, \tag{5.307}$$

$$a \sqcap \overline{a} = 0\,, \tag{5.308}$$

$$a \sqcup \overline{a} = 1\,. \tag{5.309}$$

Egy olyan struktúrát, amelyben az asszociatív, kommutatív és abszorpciós szabályok érvényesek hálónak nevezünk. Ha ezen túlmenően még a disztributivitási szabály is igaz, akkor disztributív hálóról beszélünk. Ezek szerint a BOOLE-algebra egy speciális disztributív háló.

Megjegyzés: A műveleteknek a BOOLE-algebrában alkalmazott jelölése nem azonos szükségképpen az ítéletkalkulusnál azonos viszonylatot kifejező műveletek jelöléseivel.

5.7.2. A dualitási elv

1. Duális képzés: Egy BOOLE-alebra fenti „axiómáiban" a következő dualitások ismerhetőek fel: Ha egy axiómában az $\sqcap$ műveleti jelet a $\sqcup$ jellel és a 0 állandót az 1 állandóval felcseréljük, akkor mindig ugyanak a sornak egy másik axiómáját kapjuk. Azt mondjuk, hogy egy sor axiómái egymás duálisai és ezt a helyettesítési folyamatot duális képzésnek nevezzük. A duális képzés útján a BOOLE-algebra egy állításából ennek duális állítását kaphatjuk meg.

2. Boole-algebrák dualitási elve: Egy igaz állítás duális állítása egy BOOLE-algebrában szintén igaz, vagyis bármely állítás bizonyításakor egyúttal annak duális állítását is igazoljuk.

3. Tulajdonságok: Az axiómákból például a BOOLE-algebra alábbi tulajdonságai következnek:

(E1) Idempotencia

$$a \sqcap a = a\,, \tag{5.310}$$

$$a \sqcup a = a\,. \tag{5.311}$$

(E2) A de Morgan-azonosságok

$$\overline{a \sqcap b} = \overline{a} \sqcup \overline{b}\,, \tag{5.312}$$

$$\overline{a \sqcup b} = \overline{a} \sqcap \overline{b}\,, \tag{5.313}$$

(3) egy további tulajdonság

$$\overline{\overline{a}} = a\,. \tag{5.314}$$

Itt is elegendő az egymás mellett álló (duális) állítások egyikét igazolnunk, míg a harmadik állítás önmaga duálja.

5.7.3. Véges Boole-algebrák

Valamennyi BOOLE-algebra „izomorfiától" eltekintve egyszerűen adható meg. Legyenek B_1 és B_2 BOOLE-algebrák, és legyen $f\colon B_1 \to B_2$ egy bijektív leképezés. Az f leképezés izomorfizmus amennyiben

$$f(a \sqcap b) = f(a) \sqcap f(b), \quad f(a \sqcup b) = f(a) \sqcup f(b) \quad \text{és} \quad f(\overline{a}) = \overline{f(a)}\,. \tag{5.315}$$

Minden véges BOOLE-algebra izomorf egy véges halmaz hatványhalmazán értelmezett BOOLE-algebrával. Minden véges BOOLE-algebra elemeinek száma 2^n, és az azonos elemszámú BOOLE-algebrák izomorfak.

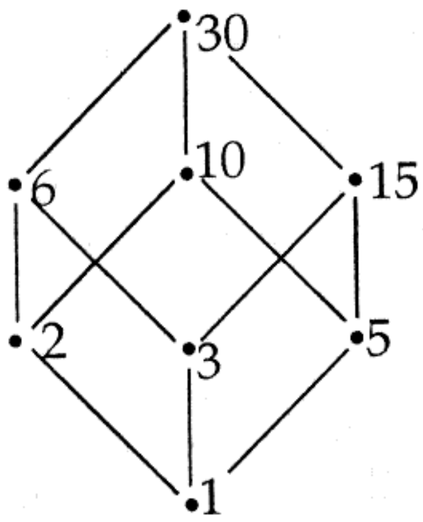
A továbbiakban a $\{0,1\}$ elemeket tartalmazó B BOOLE-algebrát vizsgáljuk, amelynek műveletei a következők:

$\sqcap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\sqcup$	0	1
0	0	1
1	1	1

	$-$
0	1
1	0

Amennyiben ennek n-szeres DESCARTES-szorzatát képezzük $B^n = \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$ és a műveleteket $(\sqcap, \sqcup, \overline{\ })$ komponensenként értelmezzük, akkor B^n a $0 = (0,\ldots,0)$ és $1 = (1,\ldots,1)$ elemekkel ismét BOOLE-algebra. A B^n neve a B n-szeres direkt szorzata. Minthogy B^n elemeinek a száma 2^n ezzel a módszerrel valamennyi véges BOOLE-algebra izomorfiától eltekintve előállítható.



5.24. ábra.

5.7.4. Boole-algebra mint rendezés

Minden B BOOLE-algebrához egy rendezési relációt rendelhetünk: Akkor tekintjük az $a \leq b$ relációt igaznak, ha $a \sqcap b = a$ (vagy ezzel egyenértékűen $a \sqcup b = b$). Ilymódon minden BOOLE-algebra egy HASSE-diagrammal ábrázolható (lásd 5.2.4., **4.**).

■ B halmaz a 30 szám osztóit tartalmazza: $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. A kétargumentumú műveletek a legnagyobb közös osztó illetve a legkisebb közös többszörös és az egyargumentumú művelet a komplementálás. A kitüntetett 0 illetve 1 elemeknek az 1 és 30 szám felel meg. A hozzátartozó HASSE-diagramot az **5.24. ábra** mutatja.

5.7.5. Boole-függvények, Boole-kifejezések

1. Boole-függvények Jelölje B ismét mint az 5.7., **5.7.3.** fejezetben a két elemű BOOLE-algebrát. Egy f n-változós BOOLE-függvény egy B^n-ről B-re való leképezés. Pontosan 2^{2^n} n-változós BOOLE-függvény létezik. Valamennyi n-változós F_n BOOLE-függvény B halmaza az alábbi műveletekkel BOOLE-algebrát alkot:

$$(f \sqcap g)(b) = f(b) \sqcap g(b)\,, \qquad (5.316) \qquad (f \sqcup g)(b) = f(b) \sqcup g(b)\,, \qquad (5.317)$$

$$\overline{f}(b) = \overline{f(b)}\,, \qquad (5.318)$$

ahol b a $B = \{0, 1\}$ halmaz elemeinek n-esei, és az egyenletek jobb oldalán álló műveleteket a B halmazon értelmezettek. A kitüntetett 0 illetve 1 elemeknek az f_0 illetve f_1 függvények felelnek meg:

$$f_0(b) = 0\,, \quad f_1(b) = 1 \quad \text{minden} \quad b \in B^n\,. \qquad (5.319)$$

■ **A:** Az $n = 1$ esetén, vagyis amikor csak egyetlen b BOOLE-változónk van négy Booole-függvény lehetséges

$$\begin{array}{llll} \text{Identitás} & f(b) = b\,, & \text{Negáció} & f(b) = \overline{b}\,, \\ \text{Tautológia} & f(b) = 1\,, & \text{Kontradikció} & f(b) = 0\,. \end{array} \qquad (5.320)$$

■ **B:** Az $n = 2$ esetben, amikor két a és b BOOLE-változónk van 16 különböző BOOLE-függvény létezik, amelyek közül a fontosabbaknak külön nevük és külön szimbólumuk van. Ezeket az **5.7. táblázatban** foglaltuk össze.

2. Boole-kifejezések A BOOLE-kifejezéseket induktív úton definiáljuk: Legyen $X = \{x, y, z, \ldots\}$ BOOLE-változók megszámlálható halmaza (amelyek csak a 0 és 1 értéket vehetik fel):

1. A konstansok (0 és 1) valamint az X BOOLE-változói BOOLE-kifejezések. (5.321)

2. Ha S és T BOOLE-kifejezések, akkor BOOLE-kifejezések a következők is:
$\overline{T}$, $(S \sqcap T)$ és $(S \sqcup T)$. (5.322)

Ha egy BOOLE-kifejezés tartalmazza az $x_1, \ldots, x_n$ változókat, akkor az egy n-változós f_T BOOLE-függvényt reprezentál.
Legyen b az $x_1, \ldots, x_n$ BOOLE-változók egy behelyettesítése, vagyis $b = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$.
Az induktív definíciót figyelembe véve a T kifejezésekhez az alábbiak szerint rendelünk BOOLE-függvényeket:

1. Ha $T = 0$, akkor $f_T = f_0$; Ha $T = 1$, akkor $f_T = f_1$. (5.323a)

2. Ha $T = x_i$, akkor $f_T(b) = b_i$; Ha $T = \overline{S}$, akkor $f_T(b) = \overline{f_S(b)}$. (5.323b)

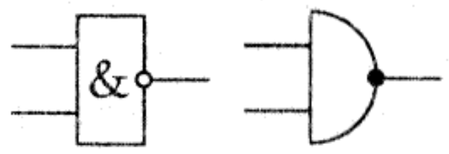
3. Ha $T = R \sqcap S$, akkor $f_T(b) = f_R(b) \sqcap f_S(b)$. (5.323c)

4. Ha $T = R \sqcup S$, akkor $f_T(b) = f_R(b) \sqcup f_S(b)$. (5.323d)

Fordítva minden f BOOLE-függvény előállítható az T BOOLE-kifejezéssel (lásd 5.7., **5.7.6.**).

3. Értékazonos Boole-kifejezések Az S és T BOOLE-kifejezéseket értékazonosnak mondjuk, ha ugyanazt a BOOLE-függvényt reprezentálják. BOOLE-kifejezések csakis akkor azonosak, ha a BOOLE-

5.7. táblázat. Néhány kétváltozós BOOLE-függvény

A függvény neve	Különböző írásmódok	Különböző szimbólumok	Értéktáblázat $\binom{a}{b} = \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}$
SCHEFFER, ill. NAND	$\overline{a \cdot b}$ $a \mid b$ NAND (a, b)		1, 1, 1, 0
PEIRCE, ill. NOR	$\overline{a + b}$ $a \downarrow b$ NOR a, b		1, 0, 0, 0
Antivalencia, ill. XOR	$\overline{a}\, b \quad + \quad a\, \overline{b}$ a XOR b $a \not\equiv b$ $a \oplus b$		0, 1, 1, 0
Ekvivalencia	$\overline{a}\,\overline{b} + a\, b$ $a \equiv b$ $a \leftrightarrow b$		1, 0, 0, 1
Implikáció	$\overline{a} + b$ $a \rightarrow b$		1, 1, 0, 1

algebra axiómáinak megfelelő átalakítások segítségével egymásba átvihetőek.

BOOLE-kifejezések átalakításakor két szempont kerül előtérbe:

- A lehető legegyszerűbb kifejezéssé való átalakítás (lásd 5.7., **5.7.7.**).
- „Normálformára" való átalakítás.

5.7.6. Normálformák

1. Elemi konjunkció, elemi diszjunkció Legyen $(B, \sqcap, \sqcup, \overline{\ }, 0, 1)$ egy BOOLE-algebra és legyen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ BOOLE-változók egy halmaza. Minden olyan konjunkció illetőleg diszjunkció, amelyben minden változó vagy annak negáltja legfeljebb egyszer fordul elő (az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül) elemi konjunkció illetőleg elemi diszjunkció.
Ha $T(x_1, \ldots, x_n)$ egy BOOLE-kifejezés, akkor az elemi konjunkciók egy D diszjunkcióját, ahol $D = T$ a T kanonikus diszjunktív normálformájának (KDNF) nevezünk. Az elemi diszjunkciók K konjunkcióját, ahol $K = T$ a T kanonikus konjunktív normálformája (KKNF).

■ **1. Rész:** Minden f BOOLE-függvény előállítható BOOLE-kifejezéssel. Ennek bizonyítására a mellékelt táblázatban megadott f függvényre megszerkesztjük annak KDNF formáját. Az f BOOLE-függvény KDNF formája a következő elemi konjunkciókból áll: $\overline{x} \sqcap \overline{y} \sqcap z$, $x \sqcap \overline{y} \sqcap z$, $x \sqcap y \sqcap \overline{z}$.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Ezek az elemi konjunkciók a b változónak ahhoz a kiértékeléséhez tartoznak, amelyek az f függvény esetében az 1 értéket veszik fel. Ha b-ben v változó értéke 1, akkor v ellenkező esetben $\overline{v}$ vétetik figyelembe az elemei konjunkciókban.

■ **2. Rész:** A fenti példa (lásd 1.Rész) KDNF alakja:

$$(\overline{x} \sqcap \overline{y} \sqcap z) \sqcup (x \sqcap \overline{y} \sqcap z) \sqcup (x \sqcap y \sqcap \overline{z})\,. \tag{5.324}$$

A KDNF duálja a KKNF: az elemi diszjunkciók a változók olyan b a behelyettesítéséhez tartoznak, ahol $f(b) = 0$. Amennyiben b-ben egy v változó 0 értékű , akkor szerepel az elemi konjuknciókban, ellenkező esetben $\overline{v}$ szerepel.

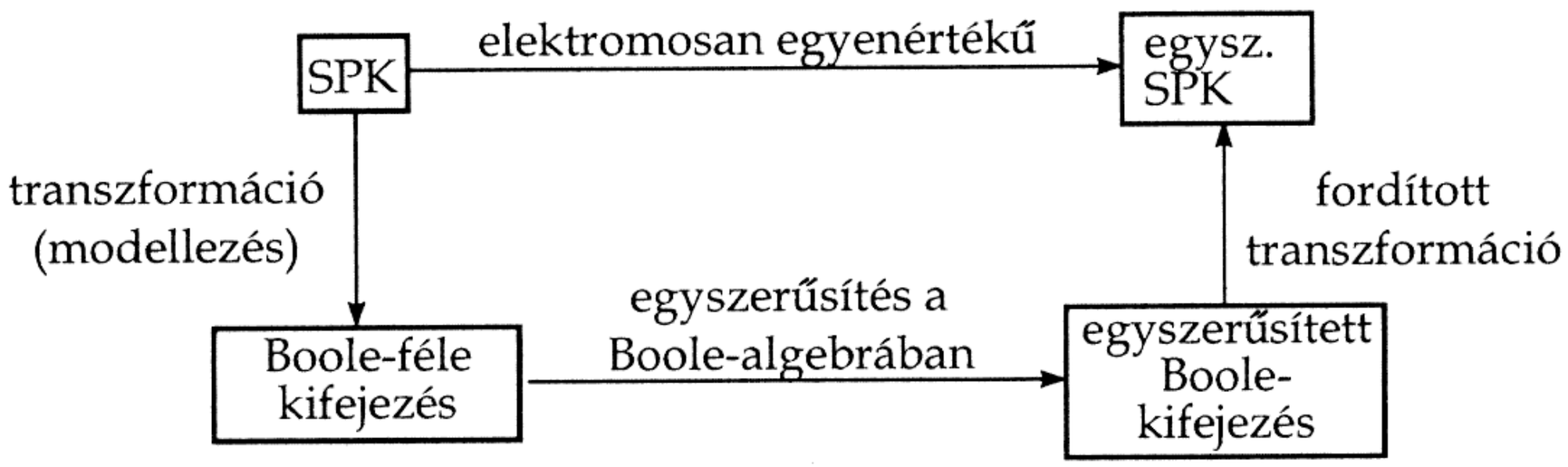
Ezek szerint a KKNF alak:

$$(x \sqcup y \sqcup z) \sqcap (x \sqcup \overline{y} \sqcup z) \sqcap (x \sqcup \overline{y} \sqcup \overline{z}) \sqcap (\overline{x} \sqcup y \sqcup z) \sqcap (\overline{x} \sqcup \overline{y} \sqcup \overline{z}) \,. \tag{5.325}$$

Egy f függvény KDNF és KKNF alakja eltekintve a változók és a kiértékelések sorrendjétől egyértelműen meghatározott. Például a kiértékeléseket kettes alapú számoknak tekinthetjük és nagyság szerint rendezhetjük.

2. Kanonikus normálfomák Egy T BOOLE-kifejezés kanonikus normálformája alatt a hozzátartozó f_T BOOLE-függvény kanonikus nomálformáját értjük.
Két BOOLE-függvény egyenértékűségének ellenőrzését gyakran a probléma átalakításával végezzük el. A kanonikus normálformák ekkor nagy segítséget jelentenek: két BOOLE-kifejezés akkor és csak akkor értékazonos, ha a hozzájuk tartozó egyértelműen meghatározott kanonikus normálformák betűről betűre megegyeznek.

■ **3. Rész:** A már tárgyalt példában (lásd 1. és 2. rész) a $(\overline{y} \sqcap z) \sqcup (x \sqcap y \sqcap \overline{z})$ és a $(x \sqcup ((y \sqcup z) \sqcap (\overline{y} \sqcup z) \sqcap (\overline{y} \sqcup \overline{z}))) \sqcap (\overline{x} \sqcup ((y \sqcup z) \sqcap (\overline{y} \sqcup z)))$ kifejezések egymással értékazonosak, mivel mindkettőjüknek azonos a diszjunktív (illetve konjunktív) normálformájuk.



5.25. ábra.

5.7.7. Kapcsolások algebrája

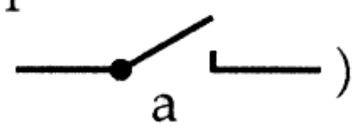
A BOOLE-algebra egy tipikus alkalmazási területe a soros-párhuzamos kapcsolások egyszerűsítése (SPK). Ebből a célból egy soros-párhuzamos kapcsoláshoz egy BOOLE-kifejezést rendelünk (transzformáció). Ezt a kifejezést a BOOLE-algebra átalakítási szabályai szerint „egyszerűsítjük" . Végezetül ehhez a kifejezéshez egy soros-párhuzamos kapcsolást rendelünk (visszatranszformáció). Végeredményben egy olyan egyszerűsített soros-párhuzamos kapcsolást kapunk, amelynek a kiindulási kapcsolással azonos kapcsolási tulajdonságai vannak **(5.25. ábra)**.

A soros-párhuzamos kapcsolások alapelemekből vannak összeállítva (munka és nyugvóérintkezőkből), amelyeknek két állapota van (nyitott és zárt). A szimbolikát rendesen a következőképpen kell értelmezni: Ha a vezérelt kapcsoló berendezéseket bekapcsoljuk, a munkaérintkezők zárnak, a nyugvóérintkezők nyitnak. A vezérelt kapcsoló berendezések érintkezőihez BOOLE-változókat rendelünk. A kapcsoló berendezés „ki" illetve „be" állapota felel meg a BOOLE-változók 0 illetve 1 értékének. Egy berendezést kapcsoló érintkezőknek a berendezés BOOLE-változója lesz a szimbóluma. Egy soros-párhuzamos kapcsolás kapcsolási értéke 0 illetve 1, aszerint hogy a kapcsolás villamosan vezető illetve nem vezető állapotban van. A kapcsolási érték az érintkezők állásának S függvénye (kapcsolási függény). S egy BOOLE-függvény, mely csak a kapcsoló berendezésekhez rendelt változóktól függ. Az **5.26. ábrán** az érintkezők, a kapcsolások, a szimbólumok és a nekik megfelelő BOOLE-kifejezések láthatóak.
A soros-párhuzamos kapcsolások kapcsolási függvényeit reprezentáló BOOLE-kifejezéseknek az a sajátosságuk, hogy a negáció csak változókra (és nem részkifejezésekre) értelmezhető.

■ Az **5.27. ábra** soros-párhuzamos kapcsolását kell egyszerűsítenünk. Ehhez a kapcsoláshoz az

$$S = (\overline{a} \sqcap b) \sqcup (a \sqcap b \sqcap \overline{c}) \sqcup (\overline{a} \sqcap (b \sqcup c)) \tag{5.326}$$

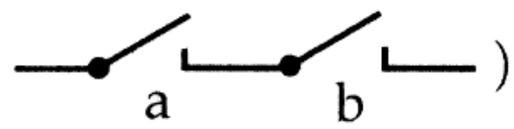
nyitott kapcsoló

(jele: 

)

$S = a$

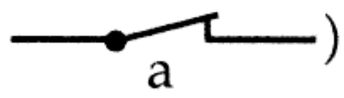
soros kapcsolás

(jele: 

)

$S = a \sqcap b$

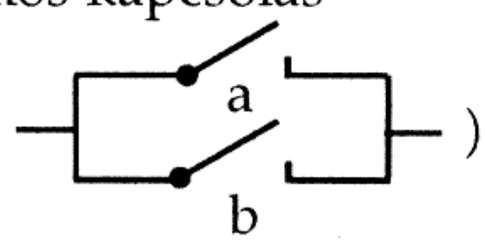
zárt kapcsoló

(jele: 

)

$S = \bar{a}$

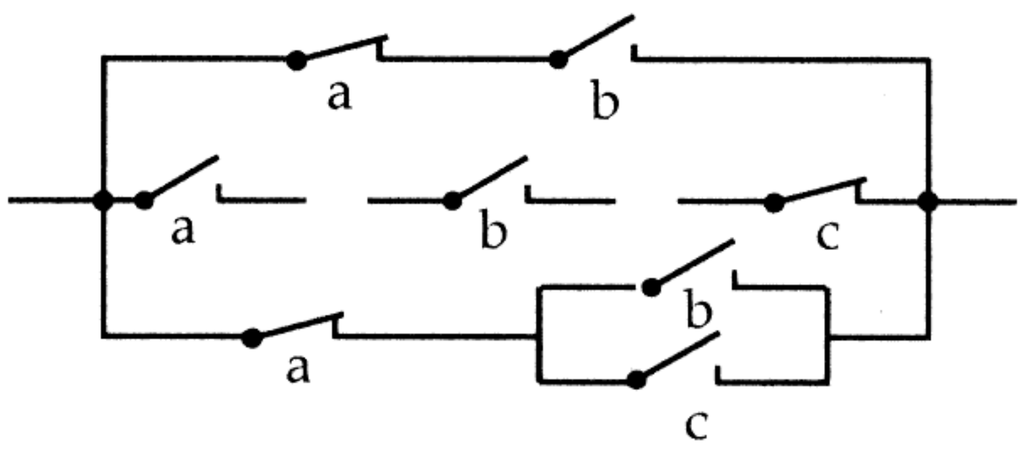
párhuzamos kapcsolás

(jele: 

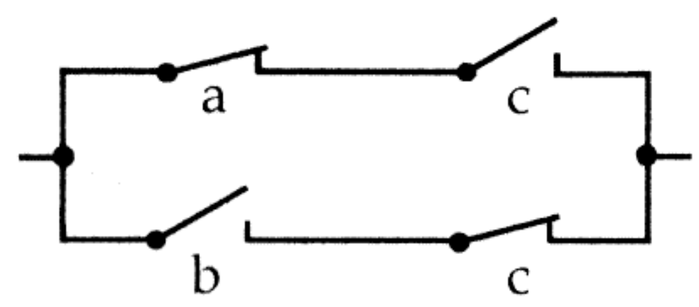
)

$S = a \sqcup b$

5.26. ábra.



5.27. ábra.



5.28. ábra.

kapcsolási függvény tartozik. A BOOLE-algebra átalakítási szabályai szerint adódik:

$$\begin{aligned} S &= (b \sqcap (\bar{a} \sqcup (a \sqcap \bar{c}))) \sqcup (\bar{a} \sqcap (b \sqcup c)) \\ &= (b \sqcap (\bar{a} \sqcup \bar{c})) \sqcup (\bar{a} \sqcap (b \sqcup c)) \\ &= (\bar{a} \sqcap b) \sqcup (b \sqcap \bar{c}) \sqcup (\bar{a} \sqcap c) \\ &= (\bar{a} \sqcap b \sqcap c) \sqcup (\bar{a} \sqcap b \sqcap \bar{c}) \sqcup (b \sqcap \bar{c}) \sqcup (a \sqcap b \sqcap \bar{c}) \sqcup (\bar{a} \sqcap c) \sqcup (\bar{a} \sqcap \bar{b} \sqcap c) \\ &= (\bar{a} \sqcap c) \sqcup (b \sqcap \bar{c}) \,. \end{aligned} \tag{5.327}$$

Itt $\bar{a} \sqcap c$ kifejezés a $(\bar{a} \sqcap b \sqcap c) \sqcup (\bar{a} \sqcap c) \sqcup (\bar{a} \sqcap \bar{b} \sqcap c)$-ből a $b \sqcap \bar{c}$ pedig a $(\bar{a} \sqcap b \sqcap \bar{c}) \sqcup (b \sqcap \bar{c}) \sqcup (a \sqcap b \sqcap \bar{c})$-ből áll elő. Így kapjuk meg az **5.28. ábrán** bemutatott egyszerűsített soros-párhuzamos kapcsolást.
Ez a példa is szemlélteti, hogy a „legegyszerűbb" BOOLE-kifejezésre vezető átalakításokat nem mindig könnyű megtalálni. Az irodalom eljárásokat mutat erre a célra.

5.8. Gráfelméleti algoritmusok

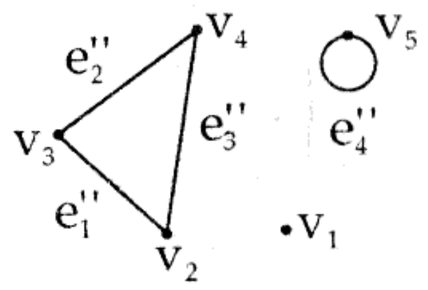
A diszkrét matematika részterületei közül a gráfelmélet az informatikában különös jelentőségre tett szert, például adatstruktúrák ábrázolásánál, véges automatáknál és kommunikációs hálózatoknál, levezetéseknél formális nyelvekben stb. Ezen kívül léteznek alkalmazásai a fizikában, kémiában, elektrotechnikában, biológiában és pszichológiában. Továbbá felhasználható hálózati gráfok folyamainál, operáció kutatásnál és kombinatorikus optimalizálásnál.

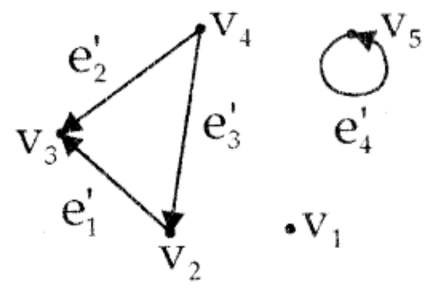
5.8.1. Alapfogalmak és jelölések

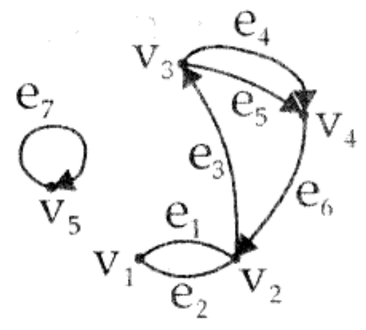
1. Irányítatlan és irányított gráfok

Egy G gráf a csúcsok V (vertex) halmazából és az élek E (edge) halmazából áll. Az E egy *incidencia függvény*nek nevezett leképezés, amely E minden eleméhez V rendezett vagy nem rendezett (nem szükségképpen különböző) elemeinek párját rendeli. Ha E minden eleméhez nem rendezett párt rendelünk, akkor G *irányítatlan gráf* **(5.29. ábra)**. Ha viszont minden E-beli elemhez egy rendezett pár tartozik,

akkor irányított gráfról beszélünk **(5.30. ábra)**, és E elemeit íveknek vagy *irányított élek*nek nevezzük. Minden más gráf neve vegyes gráf.
A grafikus ábrázolásban a gráf csúcsai mint pontok, az irányított élek mint nyilak, az irányítatlan élek mint irányítatlan vonalak szerepelnek.







5.29. ábra. 5.30. ábra. 5.31. ábra.

■ **A:** A G gráfra az **5.31. ábrán** igaz: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$,
$f_1(e_1) = \{v_1, v_2\}$, $f_1(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $f_1(e_3) = (v_2, v_3)$, $f_1(e_4) = (v_3, v_4)$, $f_1(e_5) = (v_3, v_4)$,
$f_1(e_6) = (v_4, v_2)$, $f_1(e_7) = (v_5, v_5)$.
■ **B:** A G gráfra az **5.30. ábrán** igaz: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$
$f_2(e'_1) = (v_2, v_3)$, $f_2(e'_2) = (v_4, v_3)$, $f_2(e'_3) = (v_4, v_2)$, $f_2(e'_4) = (v_5, v_5)$.
■ **C:** A G gráfra az **5.29. ábrán** igaz: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E'' = \{e''_1, e''_2, e''_3, e''_4\}$,
$f_3(e''_1) = \{v_2, v_3\}$, $f_3(e''_2) = \{v_4, v_3\}$, $f_3(e''_3) = \{v_4, v_2\}$, $f_3(e''_4) = \{v_5, v_5\}$.

2. Illeszkedés

Ha $(v, w) \in E$ akkor a v csúcs illeszkedik vagyis szomszédos a w csúccsal. A v csúcs a (v, w) él kiindulási pontja, a w a célpontja, továbbá v és w végpontja a (v, w) élnek. Ennek megfelelően definiáljuk az illeszkedést irányítatlan gráfokban, és a végpontokat irányítatlan éleknél.

3. Egyszerű gráfok

Ha több élhez vagy ívhez ugyanaz a rendezett vagy nem rendezett csúcs pár tartozik, akkor többszörös élekről beszélünk. Azt az élt vagy ívet, amelynek végpontjai azonosak, *hurok*nak mondjuk. A hurkokat, illetve többszörös éleket vagy íveket nem tartalmazó gráfokat *egyszerű gráfok*nak mondjuk.

4. Csúcsok fokszáma

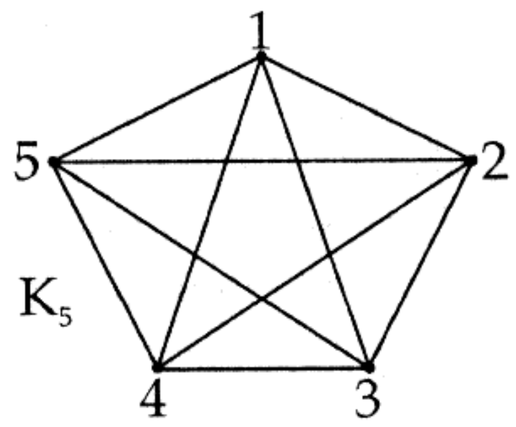
Egy v csúcs esetén $d_G(v)$ a csúcs fokszáma jelöli a v csúccsal incidens élek vagy ívek számát. A hurkokat kétszeresen számoljuk. Ha egy csúcs fokszáma 0, akkor *izolált csúcs*nak mondjuk. Egy irányított G gráf minden v csúcsánál megkülönböztetünk kimenő- $d^+_G(v)$ és bemenő $d^-_G(v)$ fokszámot:

$$d^+_G(v) = |\{w|(v, w) \in E\}|, \qquad (5.328a) \qquad d^-_G(v) = |\{w|(w, v) \in E\}|. \qquad (5.328b)$$

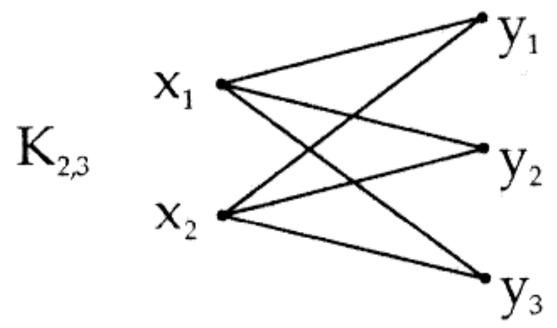
5. Gráfok speciális osztályai

A véges gráfoknak véges sok csúcsa és véges sok éle van. Ellenkező esetben végtelen gráfokról beszélünk.
Az r fokszámú reguláris gráf minden csúcsának fokszáma r.
Egy egyszerű irányítatlan gráfot V csúcshalmazzal *teljes gráf*nak mondunk, ha V bármely két csúcsa szomszédos. Egy n-csúcsú teljes gráf jelölése: K_n.

Amennyiben egy irányítatlan egyszerű G gráf csúcsait az X és Y osztályba úgy tudjuk felosztani, hogy G minden éle egy X-beli és egy Y-beli csúcsot köt össze, akkor G páros gráf.
Egy páros gráfot *teljes páros gráf*nak nevezünk, ha X minden csúcsát Y minden csúcsával él köti össze. Ha X halmaz n-elemű, Y pedig m-elemű, akkor a teljes páros gráf jelölése: $K_{n,m}$.
■ Az **5.32. ábra** egy 5 csúcspontú teljes gráfot mutat.
■ Az **5.33. ábra** egy teljes páros gráfot mutat, ahol X csúcshalmaz 2 elemű Y pedig 3 elemű.
További speciális gráf osztályok a síkgráfok, a fák és a hálózati gráfok. Ezek tulajdonságait rendre a következő fejezetekben tárgyaljuk.



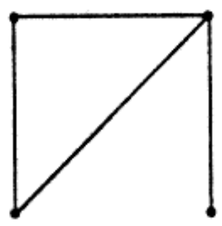
5.32. ábra.



5.33. ábra.

6. Gráfok ábrázolása

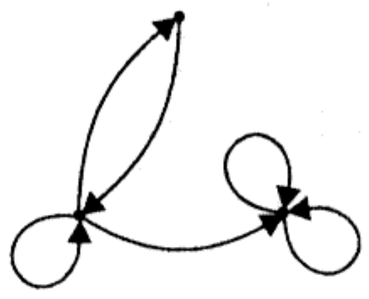
Véges gráfokat úgy szemléltethetünk, hogy minden csúcsához a sík egy pontját rendeljük hozzá, és két pontot csak akkor kötünk össze egy irányított vagy irányítatlan görbével, ha a gráf a megfelelő élt tartalmazza. Az **5.34.–5.37. ábrák** erre mutatnak példákat. Az **5.37. ábra** a PETERSEN-gráfot mutatja, amely arról nevezetes, hogy sok téves gráfelméleti sejtés esetében bizonyult megfelelő ellenpéldának.



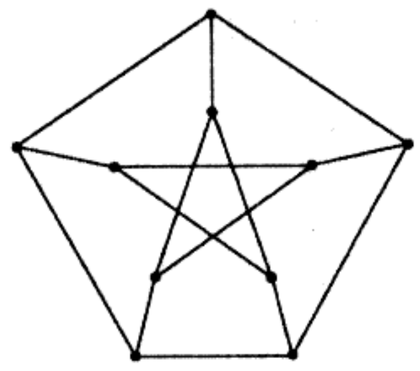
5.34. ábra.



5.35. ábra.



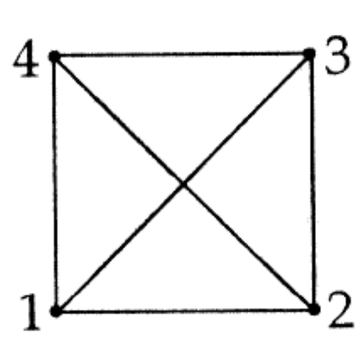
5.36. ábra.



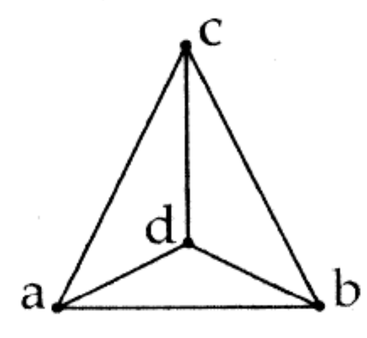
5.37. ábra.

7. Gráfok izomorfiája

Egy $G_1 = (V_1, E_1)$ gráf izomorf egy $G_2 = (V_2, E_2)$ gráffal, ha létezik egy φ a V_1-ről a V_2-re és egy ψ az E_1-ről az E_2-re történő illeszkedéstartó bijektív leképezés. Ez annyit jelent, hogy ha u és v egy él végpontjai illetőleg u egy ív kezdőpontja és v célpontja, akkor $\varphi(u)$ és $\varphi(v)$ végpontjai egy élnek illetőleg $\varphi(u)$ és $\varphi(v)$ kezdő és célpontja egy ívnek. A φ leképezés ahol $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = d$ izomorfia. Tulajdonképpen minden az $\{1, 2, 3, 4\}$-ről az $\{a, b, c, d\}$-re történő bijektív leképezés izomorfia, mivel a gráfok teljes gráfok megegyező a csúcsszámmal.
Az **5.38.** és **5.39. ábrák** két egymással izomorf gráfot tüntetnek fel.



5.38. ábra.



5.39. ábra.

8. Részgráfok, faktorok

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, ekkor $G' = (V', E')$ gráf G részgráfja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$.
Amennyiben E' pontosan azokat az E-beli éleket tartalmazza, amelyek V' csúcsait kötik össze, akkor G' a G gráfnak a V' által feszített részgráfja.
Egy G gráf F faktora alatt G olyan reguláris részgráfját értjük, amely G valamennyi csúcsát tartalmazza.

9. Illeszkedési mátrix

Véges gráfokat az alábbiak szerint mátrixokkal is leírhatjuk: Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, ahol $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Jelölje $m(v_i, v_j)$ a v_i csúcsból a v_j csúcsba vezető élek számát. Irányítatlan gráfoknál a hurkokat duplán, irányított gráfoknál pedig egyszeresen számítjuk. Az $n \times n$-es $A = (m(v_i, v_j))$ mátrix az illeszkedési mátrix. Amennyiben a gráf ezen túlmenően egyszerű gráf, akkor az illeszkedési mátrix alakja:

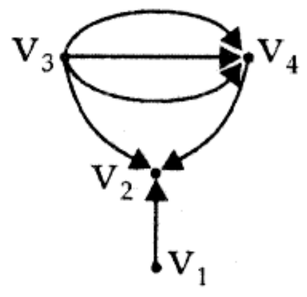
$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (v_i, v_j) \in E\,, \\ 0, & \text{ha } (v_i, v_j) \notin E\,. \end{cases} \tag{5.329}$$

vagyis az A mátrix i-ik sorának j-ik oszlopában pontosan akkor áll 1, ha a v_i csúcsból megy él a v_j csúcsba.

Irányítatlan gráfok esetén az illeszkedési mátrix szimmetrikus.

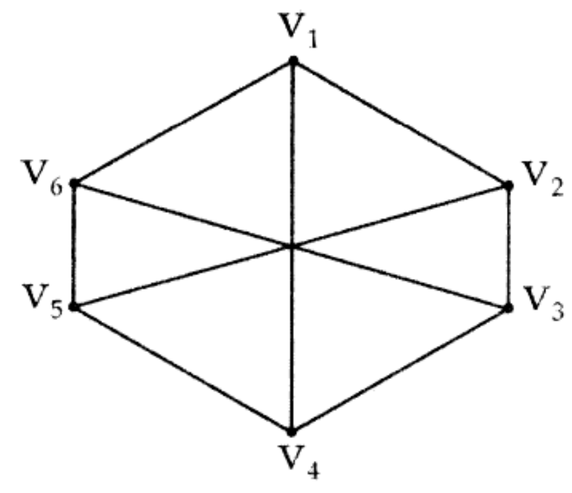
■ **A:** Az **5.40. ábra** mellett a G_1 irányított gráf $A(G_1)$ illeszkedési mátrixa látható.

■ **B:** A G_2 irányítatlan egyszerű gráf mellett $A(G_2)$ illeszkedési mátrixát láthatjuk.



5.40. ábra.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5.41. ábra.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Incidencia mátrix

Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfhoz ($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$) egy I $n \times m$-es incidencia mátrixot rendelünk az alábbiak szerint:

$$I = (b_{ij}) = \begin{cases} 0, & v_i \text{ nincs összekötve } e_j\text{-vel}\,, \\ 1, & v_i \text{ össze van ötve } e_j\text{-vel és } e_j \text{ nem hurokél}\,, \\ 2, & v_i \text{ össze van ötve } e_j\text{-vel és } e_j \text{ egy hurokél}\,. \end{cases} \tag{5.330}$$

Irányított gráfok esetében az incidencia mátrix a következők alapján adott:

$$I = (b_{ij}) = \begin{cases} 0, & v_i \text{ nincs összekötve } e_j\text{-vel}\,, \\ 1, & v_i \text{ az } e_j \text{ kezdőpontja és } e_j \text{ nem hurokél}\,, \\ -1, & v_i \text{ az } e_j \text{ végpontja és } e_j \text{ nem hurokél}\,, \\ -0, & v_i \text{ össze van kötve } e_j\text{-vel és } e_j \text{ egy hurokél}\,. \end{cases} \tag{5.331}$$

11. Súlyozott gráfok

Amennyiben adott a $G = (V, E)$ gráfhoz egy olyan f leképezés, amely minden élhez egy valós számot rendel, akkor a (V, E, f) egy súlyozott gráf, és $f(e)$ az e él súlya vagy hossza.

Sok alkalmazásnál az élek súlyai költségeket jelentenek, amelyek az összeköttetés építésével, fenntartásával vagy használatával kapcsolatosak.

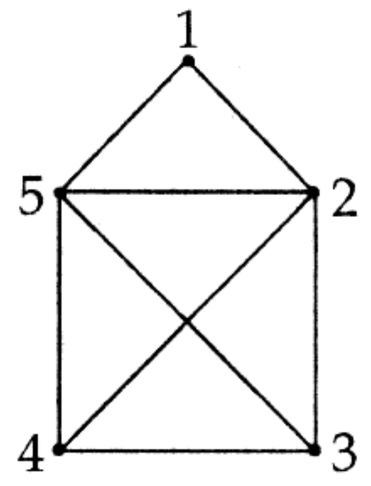
5.8.2. Irányítatlan gráfok bejárása

5.8.2.1. Élsorozatok

1. Élsorozatok

Irányítatlan gráfoknál minden az E elemeiből álló $F = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_s, v_{s+1}\})$ sorozatot s *hosszúságú élsorozat*nak nevezünk. Ha $v_1 = v_{s+1}$ akkor zárt élsorozatról vagy körről ellenkező esetben nyitott élsorozatról beszélünk. Egy F élsorozat út ha $v_1, v_2, \ldots, v_s$ páronként különböző csomópontok. A zárt út neve elemi kör.

■ Az **5.42. ábrán** $F_1 = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,5\},\{5,2\},\{2,4\})$ egy 5 hosszúságú nyitott élsorozat,
$F_2 = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,2\},\{2,1\})$ egy 5 hosszúságú zárt élsorozat,
$F_3 = (\{2,3\},\{3,5\},\{5,2\},\{2,1\})$ egy élsorozat, míg $F_4 = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\})$ egy út és $F_5 = (\{1,2\},\{2,5\},\{5,1\})$ egy elemi kör.



5.42. ábra.

2. Összefüggő gráfok, komponensek

A G gráfot *összefüggő*nek mondjuk, ha a G bármely két pontja között létezik út, amely a két pontot összeköti. Ha G nem összefüggő, akkor G komponensekre esik szét, vagyis maximális csomópontszámmal bíró összefüggő részgráfokra.

3. Két csomópont távolsága

Egy irányítatlan gráfban a v és w csomópont $\delta(v,w)$ távolsága a v és w csomópontot minimális élszámmal összekötő út hossza. Amennyiben ilyen út nem létezik, akkor $\delta(v,w) = \infty$.

4. A legrövidebb út problémája

Legyen $G = (V,E,f)$, ahol valamennyi $e \in E$-re $f(e) > 0$ egy súlyozott egyszerű gráf. A G két különböző v és w csomópontja közötti legrövidebb utat keressük, vagyis azt a v-ből w-be vezető utat, amelyre az élek vagy ívek súlyának összege minimális.
Ezen probléma megoldására DANTZIG hatékony algoritmust adott, amelyet irányított gráfokra fogalmazott meg, de értelemszerűen irányítatlan gráfokra is alkalmazható (lásd 5.8.6.).

Minden súlyozott egyszerű $G = (V,E,f)$ gráfra, ahol $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ meghatározható az $n \times n$-es D távolsági mátrix:

$$D = (d_{ij}) \quad \text{ahol} \quad d_{ij} = \delta(v_i, v_j) \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{5.332}$$

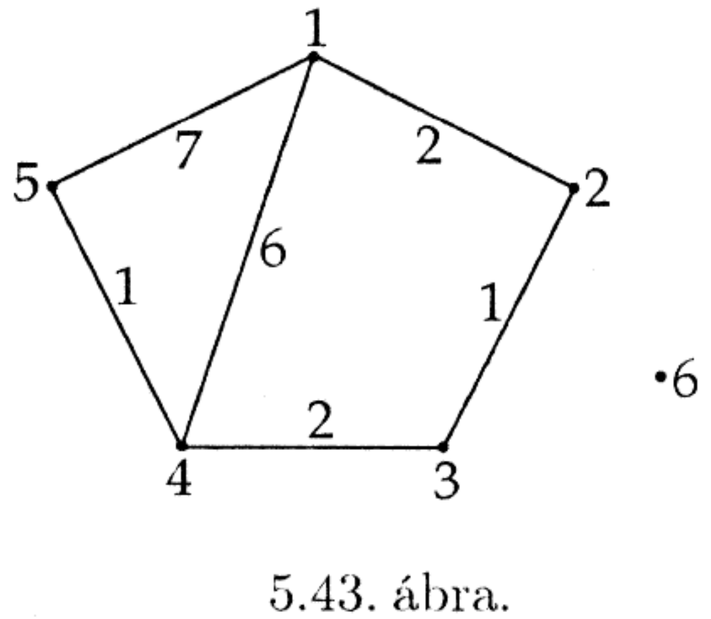
Abban a speciális esetben, amikor az élek súlya 1, vagyis a v és w közötti távolság egyenlő azon élek számával, amelyeket be kell járnunk, hogy a gráfban a v csomóponttól a w csomópontba kerüljünk, akkor két csomópont távolságát az illeszkedési mátrixból kiszámíthatjuk: Legyenek G csomópontjai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Jelölje továbbá G illeszkedési mátrixát $A = (a_{ij})$ az illeszkedési mátrixnak a szokásos mátrix szorzással (lásd 4.1.4., **5.**) előállított hatványait pedig $A^m = (a_{ij}^m)$, $m \in \mathbb{N}$.
A v_i csomópontból a v_j $(i \neq j)$ csomópontba akkor vezet egy k hosszúságú legrövidebb út, ha

$$a_{ij}^k \neq 0 \quad \text{és} \quad a_{ij}^s = 0 \quad (s = 1,2,\ldots,k-1)\,. \tag{5.333}$$

■ Az **5.43. ábrán** feltüntetett súlyozott gráf mellett látható a távolsági mátrixa.

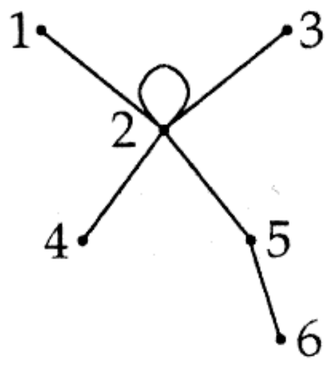
■ Az **5.44. ábra** gráfja mellett szerepel az illeszkedési mátrixa, és $m = 2$, illetve $m = 3$ esetére az A^2 és A^3 mátrix is.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 6 & \infty \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & \infty \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & \infty \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & \infty \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$



5.43. ábra.

Kettő hosszúságú legrövidebb utak kötik össze az 1 és 3, az 1 és 4, az 1 és 5, a 2 és 6, a 3 és 4, a 3 és 5 valamint a 4 és 5 csomópontokat. Ugyanakkor három hosszúságú legrövidebb út van az 1 és 6, a 3 és 6 illetve a 4 és 6 csomópontok között.



5.44. ábra.

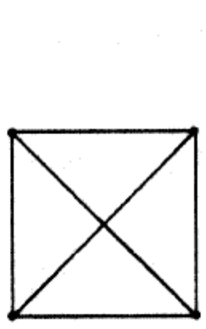
$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&0 \\ 1&5&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&2&0 \\ 0&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1&5&1&1&1&1 \\ 5&9&5&5&6&1 \\ 1&5&1&1&1&1 \\ 1&5&1&1&1&1 \\ 1&6&1&1&1&2 \\ 1&1&1&1&2&0 \end{pmatrix}.$$

5.8.2.2. Euler-utak

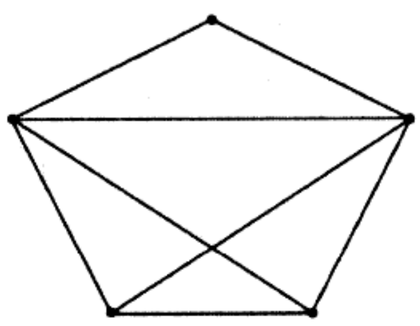
1. Euler-utak, Euler-gráfok

Az olyan élút, amely a gráf valamennyi élét tartalmazza a G gráf nyitott vagy zárt EULER-útja.
Az olyan összefüggő gráf amely zárt EULER-utat (EULER-kört) tartalmaz EULER-gráf.

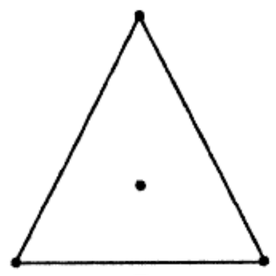
■ Az **5.45. ábra** G_1 gráfjának nincsen EULER-útja. Az **5.46. ábra** G_2 gráfjának van ugyan egy EULER-útja, de nem EULER-gráf. Az **5.46. ábra** G_3 gráfjának van ugyan egy zárt EULER-útja (EULER-köre), mégsem EULER-gráf. Az **5.48. ábra** G_4 gráfja EULER-gráf.



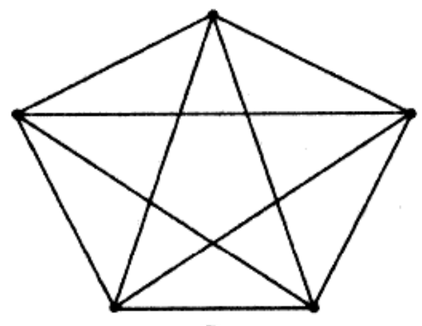
5.45. ábra.



5.46. ábra.



5.47. ábra.



5.48. ábra.

2. Euler-Hierholzer-tétel

Egy gráf akkor és csak akkor EULER-gráf, ha összefüggő és minden csomópontjának fokszáma pozitív páros szám.

3. Euler-kör szerkesztése

Legyen G egy EULER-gráf. Válasszunk a G gráfban egy tetszőleges v_1 csomópontot, és szerkesszünk a G gráfban egy F_1 élutat mindaddig, amíg azt már nem tudjuk folytatni. Amennyiben F_1 nem tartalmazza G valamennyi élét, akkor képezzünk az F_1 által útba ejtett, de az F_1-ben nem szereplő éllel is érintkező v_2 csomópontból egy F_2 élutat mindaddig, amíg azt folytatni már nem tudjuk. A két F_1 és F_2 élutat egy zárt élútba vonjuk össze olymódon, hogy v_1-ből kiindulva az F_1 útját követjük egészen v_2-ig, majd befutjuk az F_2 utat, végül az F_1 út még fel nem használt részén át jutunk el a v_1 csomópontba. Ennek az eljárásnak folytatása véges lépés után egy EULER-kört eredményez.

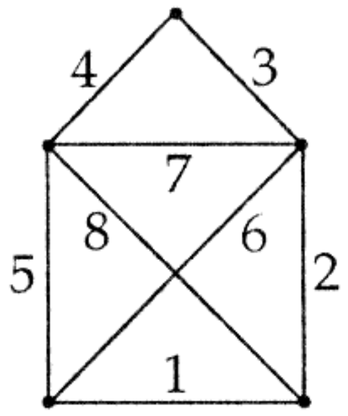
4. Nyitott Euler-utak

Egy G gráfban akkor van nyitott EULER-út, ha pontosan két olyan csomópont van, amelynek fokszáma páratlan. Az **5.49. ábra** olyan gráfot mutat, amelynek nincs EULER-köre, de van nyitott EULER-útja. Az éleket egy EULER-út mentén haladva számoztuk. Az **5.50. ábrán** egy EULER-kört tüntettünk fel.

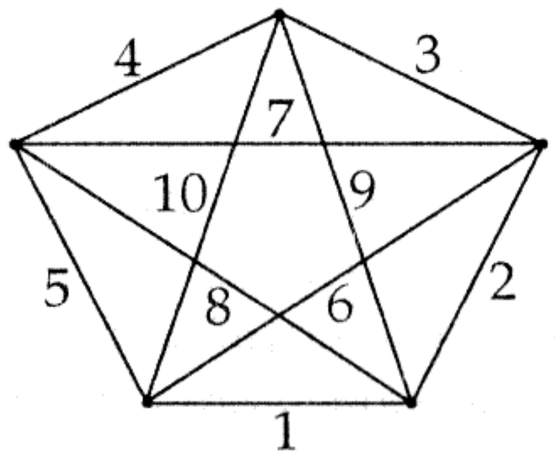
5. A kínai postás problémája

Azt a problémát, hogy egy postás kézbesítéskor körzetének utcáit legalább egyszer bejárja, kiindulási helyére visszatérjen, és eközben a lehető legrövidebb utat fussa be, gráfelméletileg a következőképpen fogalmazhatjuk meg: Legyen $G = (V, E, f)$ egy súlyozott gráf ahol $f(e) \geq 0$ valamennyi $e \in E$ élre. Egy olyan az összes élt tartalmazó élsorozatot keresünk, amelyre

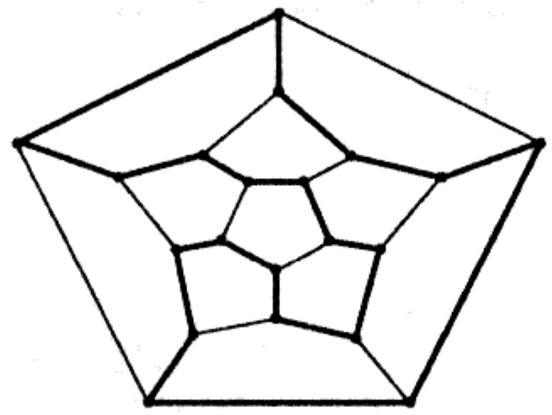
$$L = \sum_{e \in F} f(e) \tag{5.334}$$



5.49. ábra.



5.50. ábra.



5.51. ábra.

minimális. A probléma elnevezése KUAN kínai matematikusra utal, aki először foglalkozott ezzel a problémával. A megoldásnál két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. G EULER-gráf, ekkor minden EULER-kör optimális.

2. G gráfnak nincs EULER-köre, ennek az esetnek a megoldására EDMONDS és JOHNSON dolgozott ki hatékony algoritmust (lásd [5.37]).

5.8.2.3. Hamilton-körök

1. Hamilton-kör

Egy G gráf olyan elemi körét, amely valamennyi csomópontot érint, HAMILTON-*kör*nek nevezzük.

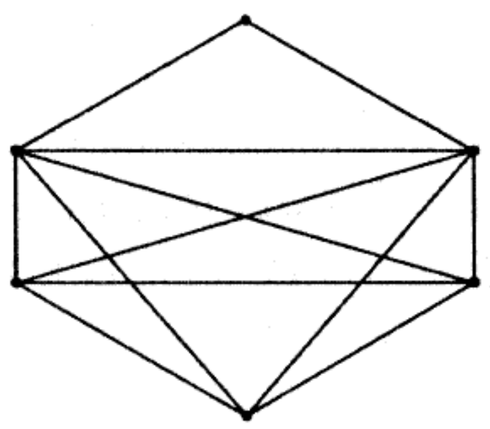
■ Az **5.51. ábrán** a vastagított vonalak egy HAMILTON-kört alkotnak.
Egy olyan játék gondolata, hogy egy pentagon dodekaédert ábrázoló gráfban HAMILTON-köröket találjunk sir W. HAMILTONhoz fűződik.

Megjegyzés: Gráfok HAMILTON-körökkel való jellemzésének kérdése az egyik klasszikus NP-teljes problémára vezet. Ezért HAMILTON-körök szerkesztésére feltehetőleg nem létezik hatékony algoritmus.

2. Dirac tétele

Ha egy legalább három csomópontú G egyszerű gráf minden csomópontjára igaz, hogy $d_G(v) \geq |V|/2$, akkor a G gráf tartalmaz HAMILTON-kört. Ez a HAMILTON-kör létezésére vonatkozó elegendő feltétel azonban nem szükséges. Az alábbi általánosított feltételeket említő tételek is csak elegendő feltételt adnak a HAMILTON-kör létezésére.

■ Az **5.52. ábra** olyan gráfot mutat, amely nem teljesíti ORE alábbi tételének feltételeit.



5.52. ábra.

3. Ore tétele

Ha egy legalább három csomóponttal bíró egyszerű gráfra igaz, hogy bármely két v és w egymással nem szomszédos csomópontjára $d_G(v)+d_G(w) \geq |V|$, akkor a G gráfnak van HAMILTON-köre.

4. Pósa tétele

Legyen $G = (V, E)$ egy legalább három csomóponttal bíró egyszerű gráf.
Ha az alábbi feltételek teljesülnek a gráf tartalmaz HAMILTON-kört:

1. Legyen igaz $1 \leq k < (|V| - 1)/2$ értékekre, hogy azon csomópontok száma amelyek fokszáma legfeljebb k a k számnál kisebb.

2. Ha $|V|$ páratlan, akkor azon csomópontok száma amelyeknek fokszáma legfeljebb $(|V| - 1)/2$ nem lehet nagyobb mint $(|V| - 1)/2$.

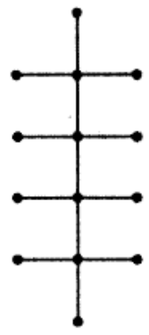
5.8.3. Fák és favázak

5.8.3.1. Fák

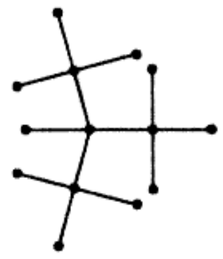
1. Fák

Az olyan összefüggő irányítatlan gráfot, amely nem tartalmaz köröket, *fá*nak nevezzük. Minden legalább két csomóponttal rendelkező gráfnak van legalább két 1 fokszámú csomópontja. Az n csomóponttal bíró fáknak pontosan $n-1$ éle van.

■ Az **5.53.** és **5.54. ábrák** két nem izomorf 14 csomópontot tartalmazó fát tüntetnek fel. Ezek a bután illetve izobután kémiai struktúráját mutatják be

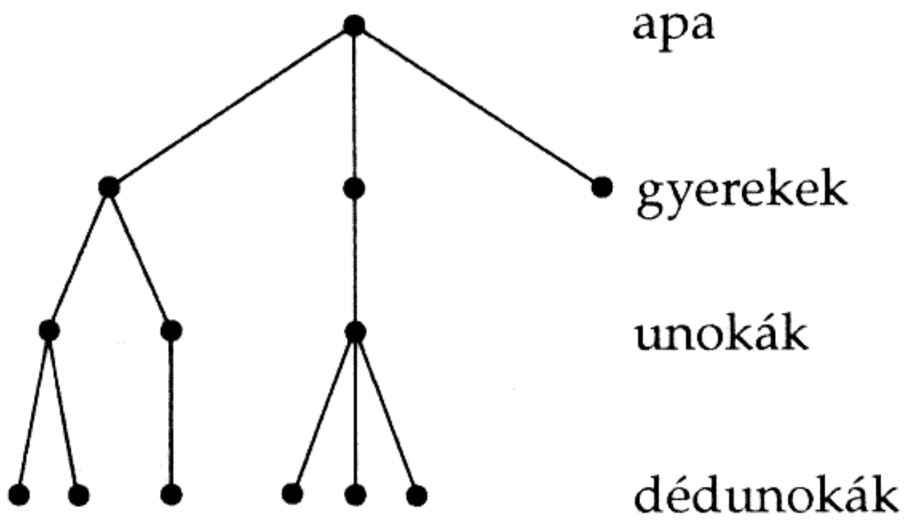


5.53. ábra.



5.54. ábra.

2. Gyökeres fák



5.55. ábra.

Egy kiválasztott csomóponttal bíró fát *gyökeres fá*nak nevezünk, a kiválasztott csomópont pedig gyökér. Egy gyökeres fa ábrájánál a gyökeret felül helyezzük el, és az utakat a gyökértől távolodó irányban értelmezzük (lásd **5.55. ábra**). A gyökeres fák hierarchikus struktúrák, például üzemekben alárendeltségi viszonyok, származási fák vagy grammatikai struktúrák ábrázolására szolgálnak.

■ Az **5.55. ábra** egy család leszármazási fáját mutatja gyökeres fa formájában. A gyökér itt az apához rendelt csomópont.

3. Reguláris bináris fák

Ha egy fának csak egyetlen 2 fokszámú csomópontja van, a többi csomópont fokszáma 1 vagy 3, akkor ezt a fát *reguláris bináris fá*nak nevezzük.

Egy reguláris bináris fa csomópontjainak száma páratlan. Ha a reguláris fa csomópontjainak száma n, akkor $(n+1)/2$ csomópont fokszáma lesz 1. Egy csomópont szintje a csomópont gyökértől való távolsága. A legnagyobb előforduló szintet a fa magasságának hívjuk. A reguláris bináris gyökeres fáknak különböző alkalmazási lehetőségei vannak, például az informatikában.

4. Rendezett bináris fák

Rendezett bináris fáknál egy 3 fokszámú pont gyökértől távolabb eső szomszédai között megkülönböztetünk bal- illetve jobb oldalit. Aritmetikai kifejezéseket rendezett bináris fákkal lehet grafikusan szemléltetni. Ekkor a számokhoz és a változókhoz 1 fokszámú csomópontokat rendelünk, a műveleteknek $(+, -, \cdot)$ egynél nagyobb fokszámú csomópontok felelnek meg, és a jobb- illetve bal oldali részfa az első és második operandust reprezentálja, ami általános esetben szintén kifejezés.

A rendezett bináris fákat három rekurzíven leírható különböző úton járhatjuk be (lásd még az **5.56. ábrát**):

Inorder bejárás: a gyökér bal oldali részfájának (inorder) bejárása,
a gyökér bejárása,
a gyökér jobb oldali részfájának (inorder) bejárása.

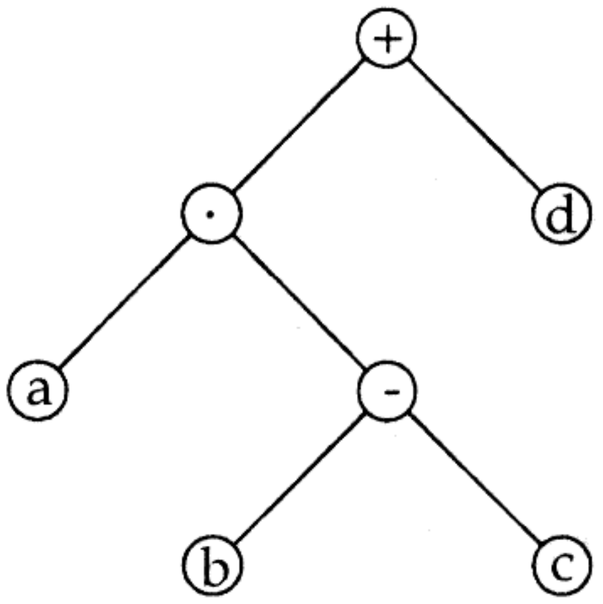
Preorder bejárás: a gyökér bejárása,
a gyökér bal oldali részfájának (preorder) bejárása,
a gyökér jobb oldali részfájának (preorder) bejárása.

Posztorder bejárás: a gyökér bal oldali részfájának (posztorder) bejárása,
a gyökér jobb oldali részfájának (posztorder) bejárása,
a gyökér bejárása.

Az inorder bejáráskor nem változik meg a sorrend a kiinduláshoz képest. A posztorder bejáráskor adódó írásmódot *posztfix jelölés*nek vagy *lengyel notáció*nak nevezzük. Hasonlóképpen kapjuk preorder bejáráskor a prefix jelölést, vagy fordított lengyel notációt.

Fák implementálásánál ki használható az a tény, hogy a prefix- és posztfix kifejezések a fát egyértelműen meghatározzák.

■ Az **5.56. ábrán** az $a \cdot (b-c)+d$ kifejezést tünteti fel a gráf. Az inorder bejárásnál $a \cdot (b-c)+d$, a preordernél $+ \cdot a - bcd$ végül a posztorder bejárásnál $abc - \cdot d+$. eredményt kapunk.



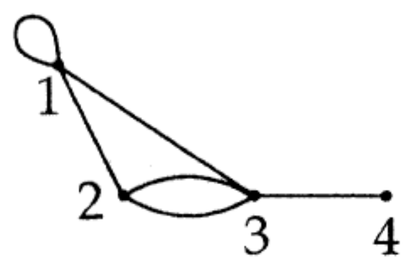
5.56. ábra.

5.8.3.2. Feszítő fa

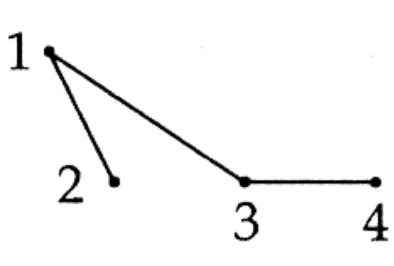
1. Feszítő fák

Ha a G összefüggő gráf tartalmaz kört, akkor a G gráfból eltávolítjuk a körnek egy élét. Az így előálló G_1 gráf szintén összefüggő, és G_1 körének, feltéve hogy ilyen létezik, egy élének eltávolításával egy összefüggő G_2 gráfot állíthatunk elő. Véges sok lépés után G egy feszítő fáját kapjuk.

■ Az **5.58. ábra** az **5.57. ábrán** bemutatott G gráf egy feszítő fáját tünteti fel.



5.57. ábra.



5.58. ábra.

Az olyan fát, amely egy irányítatlan G gráf részgráfja és G összes pontját tartalmazza, G *feszítő fá*jának nevezzük. Minden összefüggő véges G gráf tartalmaz egy H feszítő fát az alábbiak alapján:

2. Cayley tétele

Minden $n > 1$ csomópontú teljes gráfnak pontosan n^{n-2} feszítő fája van.

3. Mátrix-fa-tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, ahol $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n > 1)$ és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. A $D = (d_{ij})$ értékekkel definiálunk egy $n \times n$-es mátrixot, amelyet *valencia* vagy *fokszám mátrix*nak nevezünk:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ha } i \neq j\,, \\ d_G(i) \text{ ha } i = j\,. \end{cases} \tag{5.335a}$$

A valenciamátrix és az illeszkedési mátrix különbsége a G gráf L admittancia mátrixa:

$$L = D - A\,. \tag{5.335b}$$

Az L mátrixból az i-ik sor és az i-ik oszlop törlésével kapjuk az L_i mátrixot. Ennek determinánsa megadja a G gráf feszítő fáinak a számát.

■ Az **5.57. ábra** gráfjának illeszkedési- , fokszám- és admittancia mátrixa a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 2&1&1&0 \\ 1&0&2&0 \\ 1&2&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4&0&0&0 \\ 0&3&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 2&-1&-1&0 \\ -1&3&-2&0 \\ -1&-2&4&-1 \\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix}.$$

Minthogy $\det L_3 = 5$ a gráfnak 5 fája van.

4. Minimális feszítő fák

Legyen $G = (V, E, f)$ egy összefüggő súlyozott gráf. A G gráf H feszítő fáját *minimális*nak nevezzük, ha az $f(H)$ összhossza minimális, ahol

$$f(H) = \sum_{e \in H} f(e)\,. \tag{5.336}$$

Minimális feszítő fákat keresünk, például akkor, ha az élek súlyai költségeket reprezentálnak, és minket a minimális összköltség érdekel. A minimális feszítő fa meghatározására szolgáló eljárás KRUSKAL

algoritmusa:

a) Válasszunk egy minimális súlyú élt.

b) Csatlakoztassunk a már kiválasztott élekhez egy olyan lehető legkisebb súlyú élt, amely a már kiválasztott élekkel nem alkot kört.

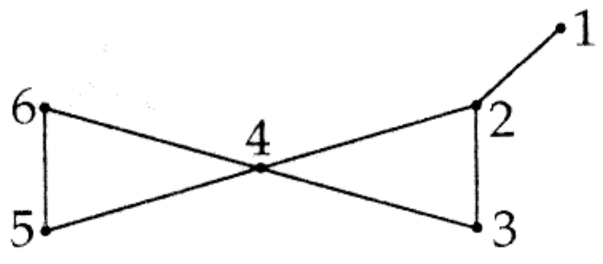
A b) lépésben említett megengedett él kiválasztását az alábbi jelölési algoritmus megkönnyítheti:

- A gráf csomópontjait páronként különbözőképpen jelöljük.
- Minden lépésben csakis olyan éleket fűzhetünk a gráfhoz, amelyek különbözőképpen jelölt csomópontokat kötnek össze.
- Egy él hozzáfűzése után a nagyobb értékkel jelölt végpontot a két jelölés kisebbikével átjelöljük.

5.8.4. Párosítások

1. Párosítások

A G gráf éleinek M halmazát *párosítás*nak mondjuk, ha M nem tartalmaz hurkot, és az M bármely két élének nincs közös végpontja.
A G gráf egy M^* párosítását *telített*nek mondjuk, ha a G gráfnak nincs olyan M párosítás amelyre $M^* \subset M$.
A G gráf egy M^{**} párosítása maximális, ha a G gráfnak nincs olyan M párosítása, amelyre $|M| > |M^{**}|$ igaz.
Amennyiben a G gráf M párosítására igaz, hogy G valamennyi csomópontja incidens az M párosítás valamelyik élével, akkor a párosítás teljes.



5.59. ábra.

■ Az **5.59. ábra** G gráfjában az $M_1 = \{\{2,3\},\{5,6\}\}$ telített párosítás, míg $M_2 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ maximális párosítás, amely egyúttal teljes is.

Megjegyzés: Páratlan pontszámú gráfokban nincsen teljes párosítás.

2. Tutte tétele

Egy $G = (V, E)$ gráfnak akkor van teljes párosítása, ha $|V|$ páros és a csomópontok minden S részhalmazára $q(G - S) \leq |S|$. Itt $G - S$ azt a gráfot jelenti, amely a G gráfból az S csomópontok és a hozzájuk csatlakozó élek eltávolításából keletkezik. A $q(G - S)$ a $G - S$ azon komponenseinek számát jelenti, amelyeknél a csomópontok száma páratlan.
Teljes párosítással bírnak például azok a teljes gráfok, amelyeknek csomópontszáma páros, a $K_{n,n}$ teljes páros gráfok, továbbá azok a reguláris páros gráfok, ahol a regularitás foka $r > 0$.

3. Alternáló utak

Legyen adott egy G gráf M párosítása. A G gráf egy W útját *alternáló*nak nevezzük, ha a W úton minden $e \in M$ (illetőleg $e \notin M$) élt egy $e' \notin M$ (illetőleg $e \in M$) él követ.
Egy nyitott alternáló út javító út, ha egyik végpontja sem érintkezik az M párosításhoz tartozó éllel.

4. Berge tétele

A G gráf M párosítása akkor maximális, ha nincs a G gráfban alternáló javító út.
Legyen W a G gráfban egy alternáló javító út, és az általa befutott élek halmaza $E(W)$. Ekkor az $M' = (M \setminus E(W)) \cup (E(W) \setminus M)$ a G gráf olyan párosítása lesz, amelyre $|M'| = |M| + 1$. Ezzel összefüggésben cserélési eljárásról beszélünk.

■ Az **5.59. ábra** gráfjában $(\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\})$ út az M_1 párosításra vonatkoztatva javító alternáló út. A cserélési eljárást alkalmazva nyerjük ebből az M_2 párosítást.

5. Maximális párosítás szerkesztése.

Legyen adott egy G gráf és M párosítása.

a) Készítsünk az M párosításhoz egy M^* párosítást, melyre $M \subseteq M^*$.

b) Válasszunk a G gráfban egy olyan v csomópontot, amelyik M^* éleivel nem érintkezik, és keressünk

egy olyan javító alternáló utat, amely a v csomóponton kezdődik.

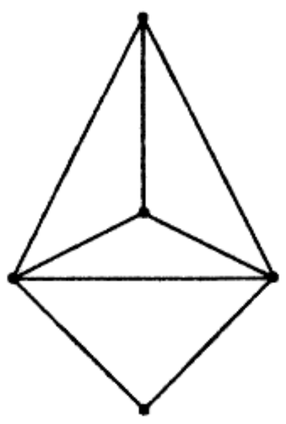
c) Amennyiben létezik ilyen út, akkor az imént leírt cserélési eljárás egy M' párosításhoz vezet, amelyre $|M'| > |M^*|$. Amennyiben ilyen út nincsen, akkor távolítsuk el a G gráfból a v csomópontot és a hozzá csatlakozó éleket, és ismételjük meg a b) lépést.
EDMONDS írt le a maximális párosítás megtalálására szolgáló bonyolult algoritmust. (lásd [5.36]).

5.8.5. Síkgráfok

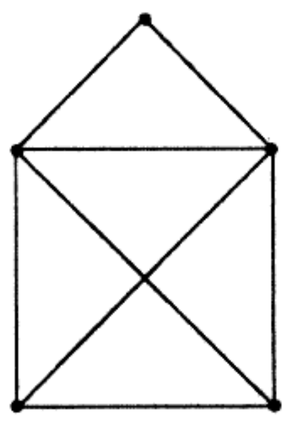
Ebben a fejezetben az irányítatlan gráfokra korlátozzuk vizsgálatainkat, mivel egy irányított gráf éppen akkor síkbeli, ha a neki megfelelő irányítatlan az.

1. Síkbeli gráfok, síkgráfok

Egy gráf olymódon rajzolható fel egy síkban, hogy az élek csakis a csomópontokban metszik egymást. Egy síkbeli gráffal izomorf gráfot *síkgráf*nak mondunk. Az **5.60. ábra** egy G_1 síkbeli gráfot mutat, míg az **5.61. ábra** egy G_1 gráffal izomorf G_2 gráfot tüntet fel, amely nem síkbeli, de a G_1 gráfhoz való izomorf kapcsolata révén síkgráf.



5.60. ábra.



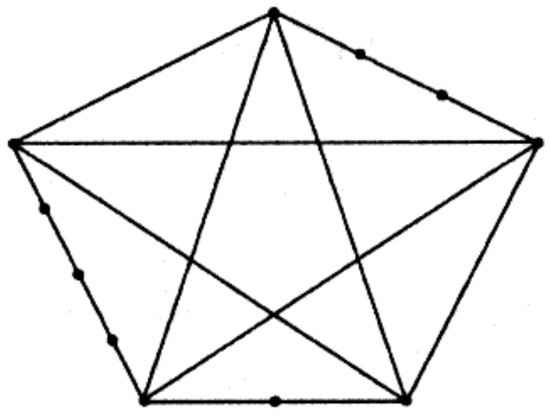
5.61. ábra.

2. Nem síkgráfok

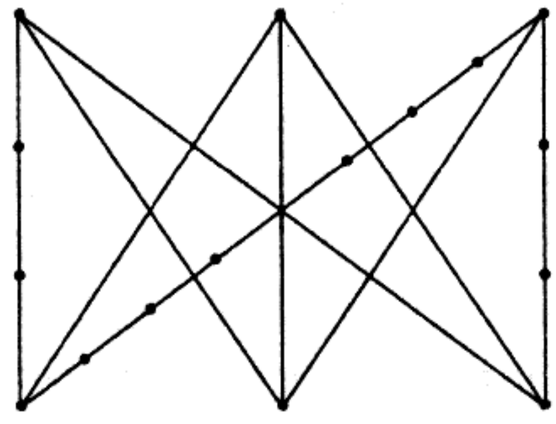
A K_5 teljes gráf és a $K_{3,3}$ teljes páros gráf nem síkgráf.

3. Felosztások

Egy G gráf felosztottját úgy kaphatjuk, hogy egyes éleken kettő fokszámú csomópontokat létesítünk. Minden gráf önmaga felosztottjának tekinthető. Az **5.62.** és **5.63. ábrákon** a K_5 és $K_{3,3}$ gráfok felosztottjait tüntettük fel.



5.62. ábra.



5.63. ábra.

4. Kuratowski tétele

Egy gráf pontosan akkor nem síkgráf, ha a $K_{3,3}$ teljes páros gráf vagy a K_5 teljes gráf felosztottját tartalmazza.

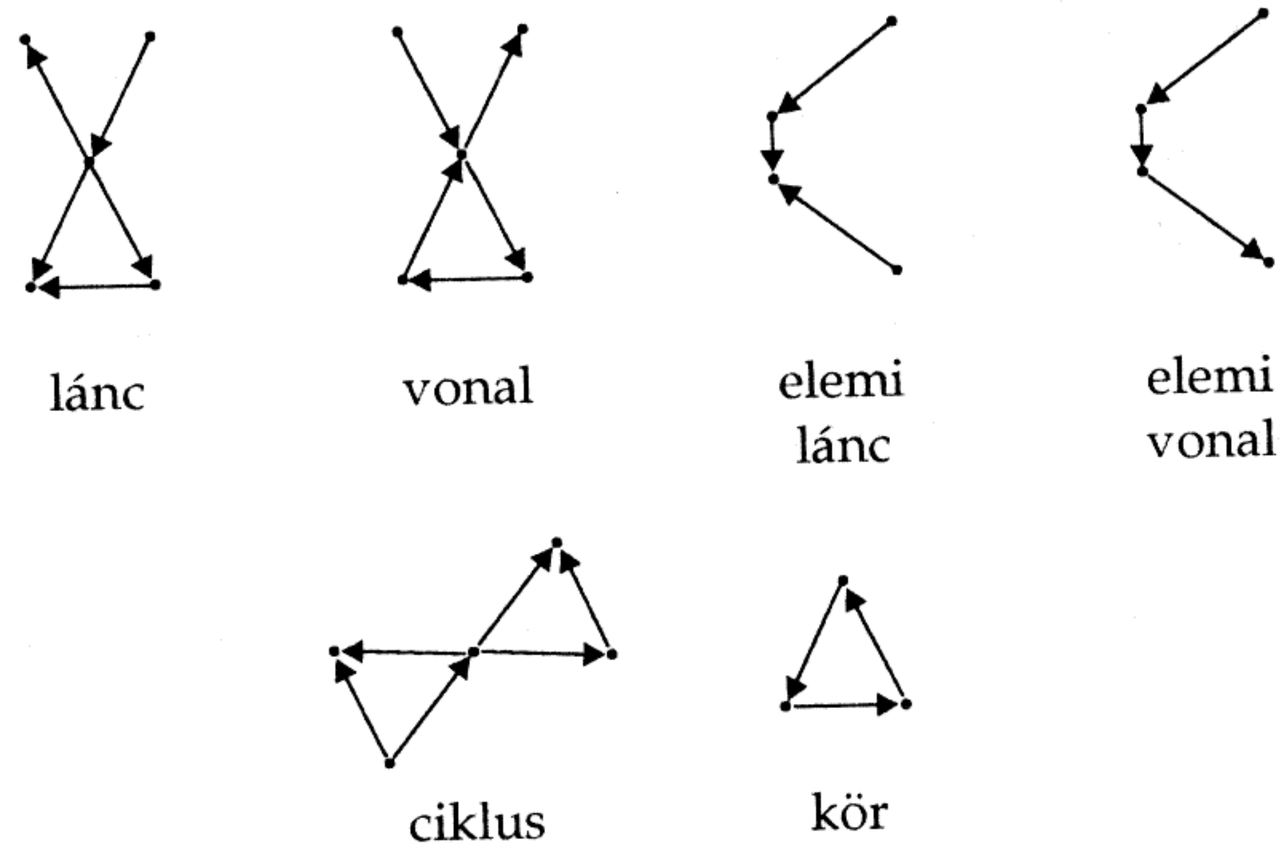
5.8.6. Pályák irányított gráfokban

1. Ívsorozatok

Egy irányított gráfban az ívek $F = (e_1, e_2, \ldots, e_s)$ sorozatát *s hosszúságú láncnak* nevezzük, ha F egy ívet sem tartalmaz kétszer, és az e_i ívekre $i = 2, 3, \ldots, s-1$ igaz, e_i hogy az egyik végpont az e_{i-1} ívvel a másik pedig az e_{i+1} ívvel közös.

Egy lánc akkor pálya, ha valamennyi ív esetén az $i = 1, 2, \ldots, s-1$ ív célpontja az e_{i+1} ív kezdőpontjával egybeesik.
A gráf valamennyi csomópontját legalább egyszer befutó láncok illetve pályák az elemi láncok illetve elelmi pályák.
A zárt lánc neve ciklus. Az olyan zárt pálya, ahol minden csomópont pontosan két ív végpontja kör.

■ Az **5.64. ábra** példaként különböző ívsorozatokat mutat be.



5.64. ábra.

2. Összefüggő és erősen összefüggő gráfok

Egy irányított gráfot *összefüggő*nek mondunk, ha G bármely két csomópontja lánccal van összekötve. Erősen összefüggő az a gráf, amely a G gráf bármely v és w csomópontját pálya köti össze.

3. Dantzig algoritmusa

Legyen $G = (V, E, f)$ egy egyszerű súlyozott irányított gráf, ahol $f(e) > 0$ minden e ívre. A következő algoritmus a G gráf egy bizonyos v_1 csomópontjából elérhető valamennyi csomópontot szolgáltatja a v_1 csomóponttól mért távolságával együtt:

a) A v_1 csomópont $t(v_1) = 0$ jelzést kap. Legyen $S_1 = \{v_1\}$.

b) Legyen a megjelölt csomópontok halmaza S_m.

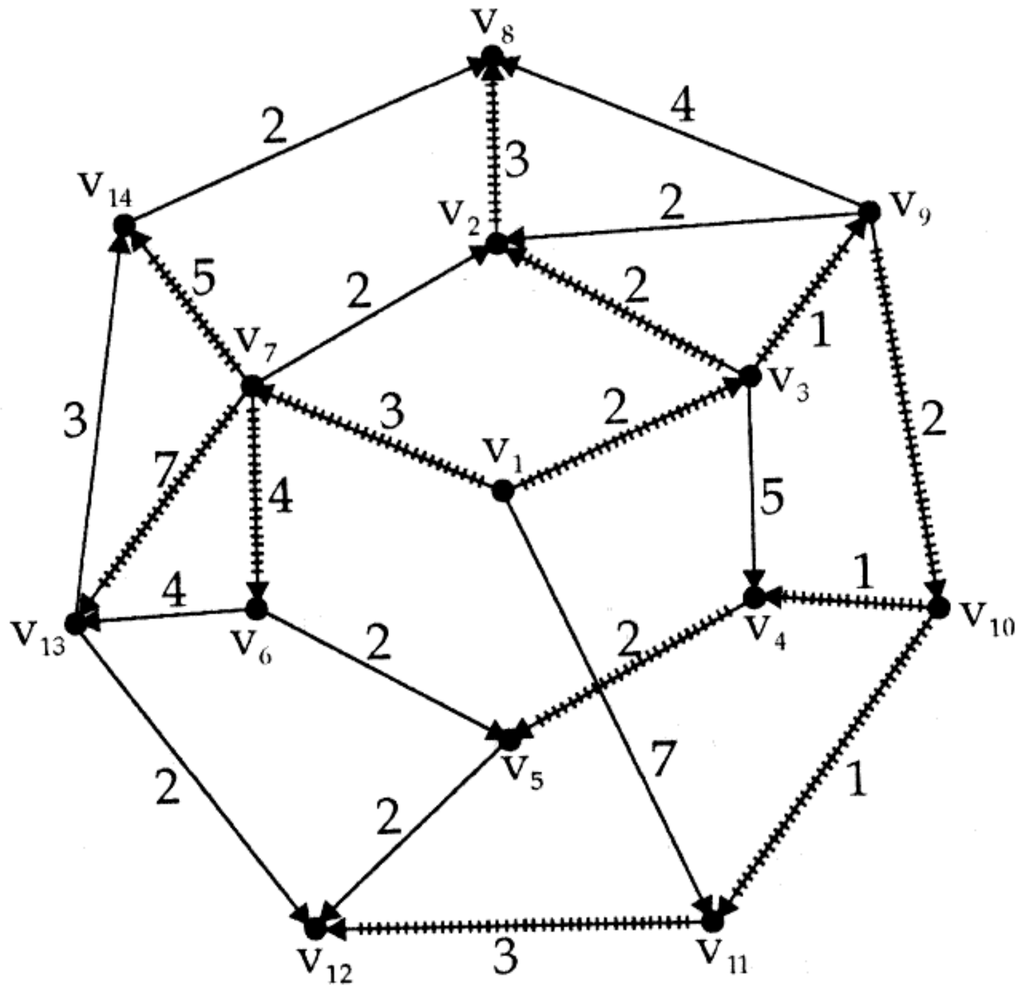
c) Amennyiben $U_m = \{e | e = (v_i, v_j) \in E,\ v_i \in S_m,\ v_j \notin S_m\} = \emptyset$, fejezzük be az algoritmust.

d) Egyébként válasszunk egy $e^* = (x^*, y^*)$ ívet, amelyre $t(x^*) + f(e^*)$ minimális. Jelöljük meg az e^*-ot és y^*-ot, legyen $t(y^*) = t(x^*) + f(e^*)$ és $S_{m+1} = S_m \cup \{y^*\}$, és ismételjük meg a b) lépést $m := m + 1$ értékkel.

Ha a G gráf v csomópontja nem lett megjelölve, akkor nincs a v_1 csomópontból a v csomópontba vezető pálya.

Amennyiben valamennyi ív súlya 1, akkor az illeszkedési mátrix segítségével (lásd 5.8.2.1., **4.**) találhatjuk meg a v csomópontból a w csomópontba vezető legrövidebb pálya hosszát.

Ha v jelölése $t(v)$, akkor $t(v)$ egy ilyen pálya hossza. A v_1 csomópontból a v csomópontba vezető legrövidebb pályát a valamennyi megjelölt csomópontot és ívet magában foglaló fa, a v_1 csomópontra vonatkozó távolsági fa tartalmazza.



5.65. ábra.

■ Az **5.65. ábra** gráfján a megjelölt ívek alkotják a v_1 csomópontra vonatkozó távolsági fát. A legrövidebb pályák hossza

$v_1\ v_3$:	2	$v_1\ v_6$:	7
$v_1\ v_7$:	3	$v_1\ v_8$:	7
$v_1\ v_9$:	3	$v_1\ v_{14}$:	8
$v_1\ v_2$:	4	$v_1\ v_5$:	8
$v_1\ v_{10}$:	5	$v_1\ v_{12}$:	9
$v_1\ v_4$:	6	$v_1\ v_{13}$:	10
$v_1\ v_{11}$:	6.		

Megjegyzés: Arra az esetre amikor $G = (V, E, f)$ negatív hosszúságú íveket is tartalmaz a legrövidebb pálya megszerkesztésére módosított algoritmus szolgál (lásd |5.39|).

5.8.7. Szállítási hálózatok

1. Szállítási hálózat

Egy összefüggő irányított gráfot *szállítási hálózat*nak nevezünk, ha van benne két kitüntetett csomópont a Q forrás és az S nyelő, továbbá az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

a) Létezik olyan u_1 ív, amely S-ből a Q-ba mutat, és u_1 az egyetlen olyan ív amely az S csomópontból indul ki, és egyetlen amelynek a Q csomópont a célpontja.

b) Minden az u_1 ívtől különböző u_i ívhez egy valós szám $c(u_i) \geq 0$ az ív kapacitása van hozzárendelve, míg az u_1 ív kapacitása ∞. Azt a φ függvényt, amely a G gráf minden ívéhez egy valós számot rendel, *folyam*nak nevezzük, hogy minden csomópontra érvényes:

$$\sum_{(u,v)\in G} \varphi(u,v) = \sum_{(v,w)\in G} \varphi(v,w)\,. \tag{5.337a}$$

Az

$$\sum_{(Q,v)\in G} \varphi(Q,v) \tag{5.337b}$$

összeg a folyam erőssége. Egy φ folyam akkor egyeztethető össze a kapacitásokkal, ha a G gráf minden u_i ívére igaz, hogy $0 \leq \varphi(u_i) \leq c(u_i)$.

■ Szállítási hálózatok lásd 363. old.

2. Ford és Fulkerson maximális folyam algoritmusa

A maximális folyam algoritmus segítségével megállapítható, hogy egy adott φ folyam maximális-e vagy sem.

Legyen G egy szállítási halózat, és φ a kapacitásokkal összegyeztethető v_1 erősségű folyam. Az algoritmus a csomópontok megjelölésére a következő lépéseket tartalmazza, amelyek végrehajtását követően leolvasható, hogy a kiválasztott jelölési lépések függvényében milyen mértékben növelhető meg a folyam erőssége:

a) Jelöljük meg a Q csomópontot, és legyen $\varepsilon(Q) = \infty$.

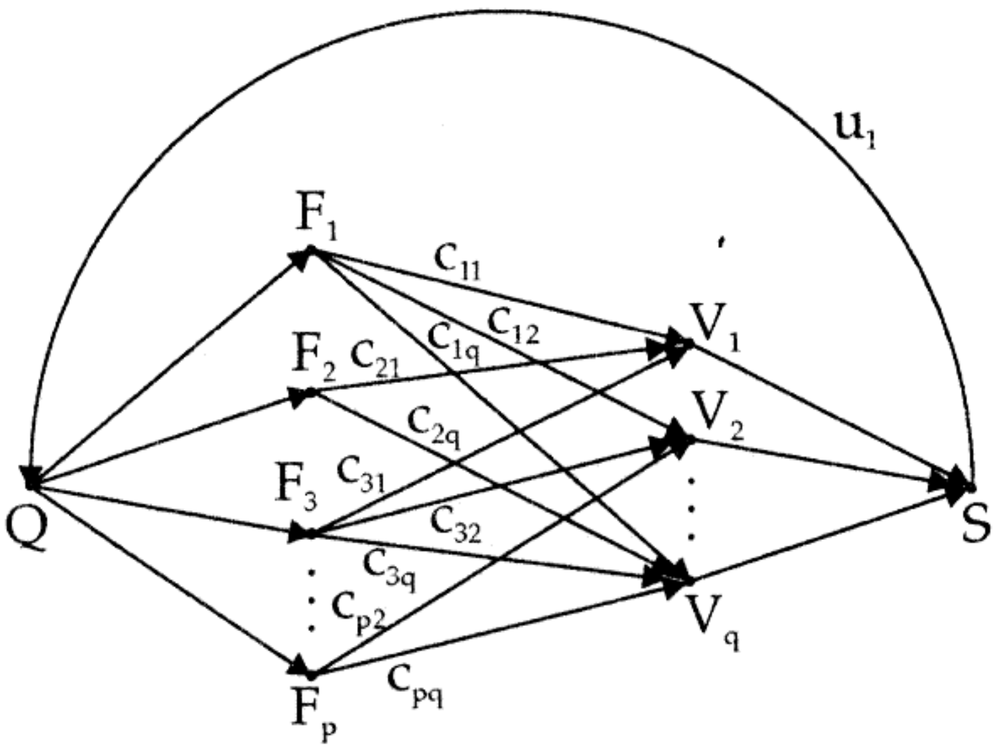
b) Amennyiben létezik olyan $e_i = (x,y)$ ív, ahol x már megjelölt, és y még neg nem jelölt csomópont, és $\varphi(e_i) < c(e_i)$, akkor jelöljük meg az x csomópontot, és állítsuk be az $\varepsilon(y) = \min\{\varepsilon(x), c(u_i) - \varphi(u_i)\}$ értéket, majd ismételjük meg a b) lépést, egyébként folytassuk a c) lépéssel.

c) Amennyibenn létezik olyan $e_i = (x,y)$ ív, ahol x nincsen y pedig már meg van jelölve, y, $\varphi(u_i) > 0$ és $u_i \neq u_1$, akkor jelöljük meg az x csomópontot és az (x,y) ívet, állítsuk be az $\varepsilon(x) = \min\{\varepsilon(y), \varphi(u_i)\}$ értéket, majd ha lehetséges hajtsuk végre a b) lépést.

Egyébként fejezzük be az algoritmust.

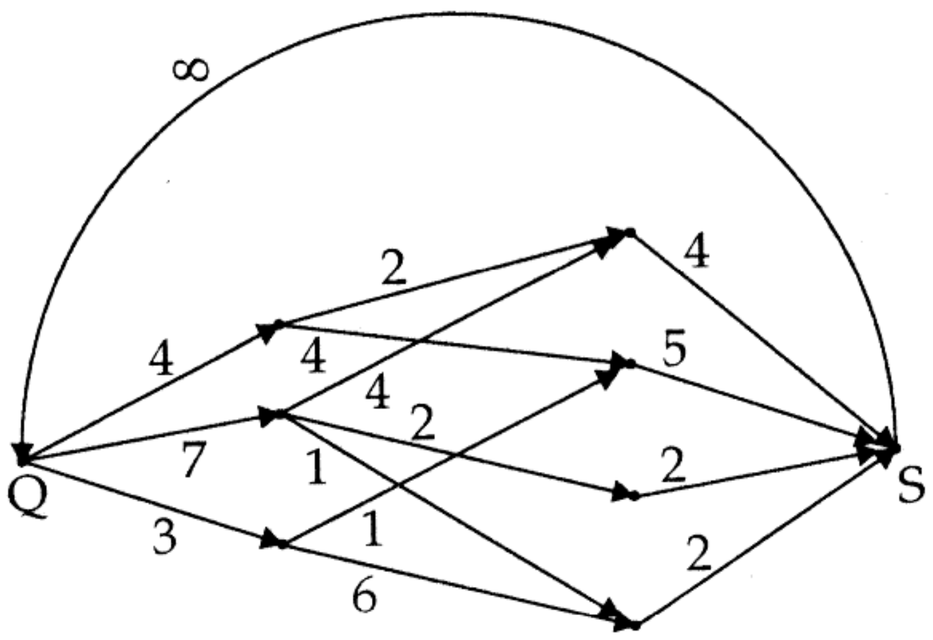
Amennyiben a G gráf S nyelőpontját megjelöltük, akkor a G gráf $e(S)$ folyama javítható. Ha az S nyelőpontot nem jelöltük meg a folyam maximális.

■ Szállítási hálózat: Egy vállalat p termékeket állít elő: $F_1, F_2, \ldots, F_p$. A fogyasztók száma q: $V_1, V_2, \ldots, V_q$. Megadott idő alatt az F_i vállalat s_i terméket gyárt, ugyanakkor a V_j fogyasztó t_j egységet igényel.
A megadott idő alatt c_{ij} egység szállítható az F_i termelőtől a V_j fogyasztóhoz. Kielégíthetőek-e ez alatt az idő alatt az igények? Az ennek megfelelő gráfot mutatja az **5.66. ábra**.

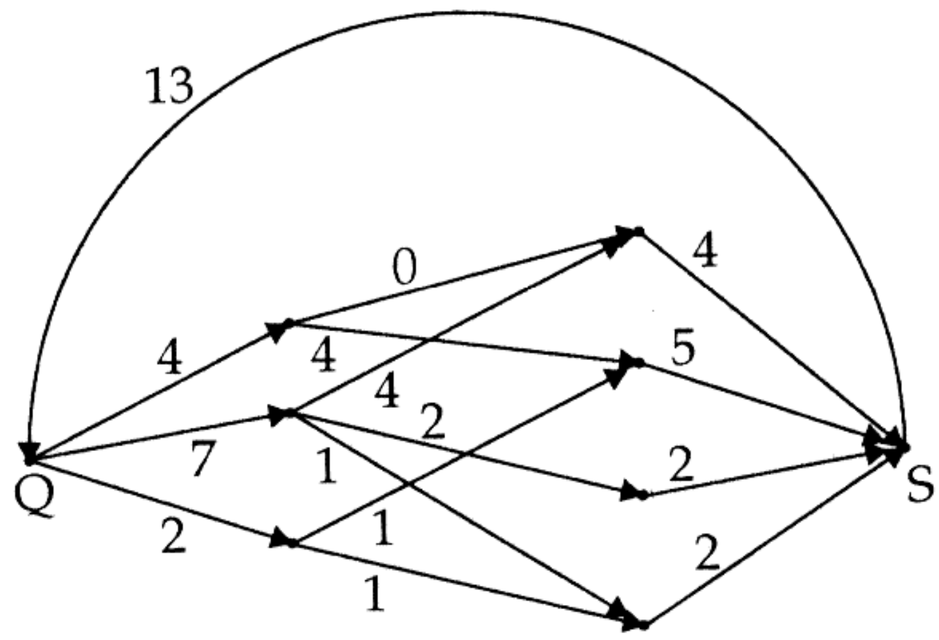


5.66. ábra.

■ Maximális folyam: az **5.67. ábrán** a gráfban feltüntettük az élek súlyai az élek kapacitását jelölik. Az **5.68. ábra** súlyozott gráfjában egy 13 erősségű, ezekkel a kapacitásokkal összeegyeztethető folyam van feltüntetve. Ez az adott esetben maximális folyam.



5.67. ábra.



5.68. ábra.

5.9. Fuzzy logika

5.9.1. A fuzzy logika alapja

5.9.1.1. A fuzzy halmazok értelmezése

Az angol „fuzzy" szó jelentése rojtos, maszatos, bizonytalan vagy inkább homályos. Innen származik a *fuzzy logika* elnevezés. A homályosság két típusát különböztetjük meg: a *határozatlanság*ot és a *bizonytalanság*ot. Matematikai értelemben két elmélet áll ezek mögött: a fuzzy halmazelmélet és a fuzzy mértékelmélet. A következő gyakorlati bevezetőben a többértékű logika segítségével bemutatásra kerülnek a — jelenleg matematikai segédeszközként elismert — fuzzy halmazokkal kapcsolatos fogalmak, módszerek és elméletek.

1. A klasszikus halmaz és a fuzzy halmaz

A klasszikus halmazfogalom a kétértékű, klasszikus BOOLE-algebrán alapul, amely izomorf a kétértékű ítéletkalkulussal. Bármely X alaphalmaz feletti A halmazhoz megadható az

$$f_A\colon X \to \{0,1\}\,, \tag{5.338a}$$

alakú *karakterisztikus függvény*, amely minden $x \in X$ elemre megadja, hogy az A halmazhoz tartozik-e vagy nem:

$$f_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \quad \text{és} \quad f_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A\,. \tag{5.338b}$$

A fuzzy halmazok elmélete azon az elképzelésen alapul, hogy valamely elem alaphalmazbeli tagságát olyan állításnak tekintjük, melynek igazságát egy $[0,1]$ intervellumbeli szám jellemez. Egy A fuzzy halmaz matematikai modellezéséhez olyan függvényre van szükség, mely a $\{0,1\}$ halmaz helyett a $[0,1]$ intervallumba képez, azaz:

$$\mu_A\colon X \to [0,1]\,. \tag{5.339}$$

Tehát minden $x \in X$ elemhez hozzárendelhető egy $[0,1]$ intervallumbeli $\mu_A(x)$ érték, mely azt mutatja, hogy az x elem milyen mértékben tartozik A-hoz. A $\mu_A(x)$ leképezés neve *tagsági függvény* (más néven *hozzátartozási függvény*). Az x helyen felvett $\mu_A(x)$ érték neve *tagsági érték*. Mivel a tagsági függvény egyértelműen meghatározza az általa definiált fuzzy halmazt, ezért bármely fuzzy halmaz és tagsági függvénye között bijektív reláció van (ezért a jelölésükre használt szimbólumok felcserélhetők).
Az X feletti fuzzy halmazokat az X alaphalmaz fuzzy részhalmazainak is nevezzük. Az X halmaz feletti fuzzy halmazok összességét, azaz X *fuzzy hatányhalmaz*át $\mathcal{F}(X)$-szel jelöljük.

2. Fuzzy halmazok tulajdonságai

A definíció nyilvánvaló következményei a következő tulajdonságok:
(T1) A klasszikus halmazok felfoghatók 0 és 1 tagsági értékű fuzzy halmazokként.

(T2) Az A fuzzy halmaz tartója (angolul: support) azon x elemekből áll, melyek A-ban pozitív tagsági értékkel szereplenek, tehát melyekre:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\} \ . \tag{5.340}$$

(T3) Az X alaphalmaz felett értelmezett A és B fuzzy halmaz azonos, ha a tagsági függvényeik megegyeznek:

$$A = B, \text{ ha } \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ teljesül minden } x \in X \text{ esetén.} \tag{5.341}$$

(T4) Diszkrét ábrázolás vagy értékpár ábrázolás: Véges elemszámú X alaphalmaz, azaz $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ esetén célszerű a fuzzy halmazok tagsági függvényét táblázatba foglalni. Az A fuzzy halmazt táblázatos formában az **5.8. táblázat** mutatja.

5.8. táblázat.
Egy fuzzy halmaz táblázatos ábrázolása

x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mu_A(x_1)$	$\mu_A(x_2)$	$\ldots$	$\mu_A(x_n)$

Diszkrét fuzzy halmazokat az alábbi alakban is írhatjuk:

$$A := \mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i \, . \tag{5.342}$$

Itt a törtjelek és a szumma jel csupán szimbolikus értelműek: az előbbi az adott elem és értékpár összetartozását, az utóbbi pedig azt szimbolizálja, hogy a párok összessége határozza meg az A fuzzy halmazt.

(T5) Ultra fuzzy halmazok: olyan fuzzy halmazokat, melyek tagsági értéke maga is egy fuzzy halmaz, ZADEH után *ultra* vagy *másodfajú fuzzy halmaz*nak hívjuk.

3. Fuzzy nyelvezet

Amennyiben egy természetes nyelvi fogalmakat, pl. „alacsony", „közepes" vagy „magas", modellezhetjük fuzzy halmazokkal. Ekkor a nyelvi kifejezést a fuzzy halmaz címkéjének, *nyelvi értéke*nek nevezzük, a fuzzy halmaz értelmezési tartománya pedig a *nyelvi változó*, melyen a halmaz megadható például egy meghatározott tartójú grafikonnal (5.9.1.2.). A fuzzy halmazok száma (jelen esetben három) feladatfüggő.
5.9.1.2.-ben a nyelvi változót x jelöli. Például x jelenthet hőmérsékletet, nyomást, hangerőt, frekvenciát, sebességet, fényességet, kort, használódottsági fokot stb., de lehet orvosi, elektromos, kémiai, ökológiai stb. változó is.

■ A $\mu_A(x)$ tagsági függvény segítségével meghatározható egy konkrét értéknek valamely bizonytalan, (fuzzy) halmazbeli tagságának mértéke. Egy mennyiség fuzzy halmazzal való modellezését, legyen ez a mennyiség a hőmérséklet esetében a „magas" nyelvi érték, trapéz alakú tagsági függvényt feltételezve **(5.69. ábra)** a következőképpen végezhetjük: Jelölje x a hőmérséklet változóját és legyen α egy konkrét hőmérsékleti érték. Ekkor α-nak a „magas" fuzzy halmazban a tagsági értéke β.

5.9.1.2. Tagsági függvények

A gyakorlatban a tagsági függvényeket 0 és 1 közötti értéket felvevő függvényekkel modellezik (bár elméletileg megadható más, bővebb értékkészletű tagsági függvény is). Segítségükkel lehet egy halmazhoz való tartozás mértékét ábrázolni.

1. Trapéz alakú tagsági függvények

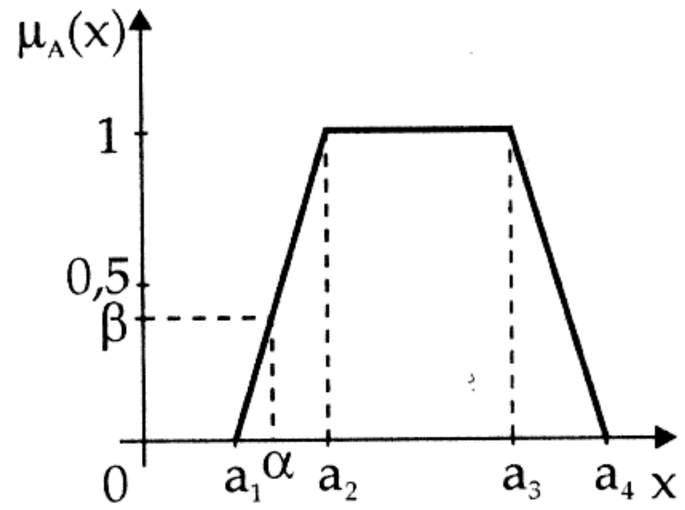
A gyakorlatban a trapéz alakú tagsági függvények a legelterjedtebbek. Gyakran találkozhatunk e szakasz példáiban ilyen típusú szakaszonként folytonosan differenciálható tagsági függvényekkel és speciális eseteivel, a háromszög alakú tagsági függvénnyel. Sokkal simább eredményfüggvényekhez jutunk, ha folytonos, illetve szakaszonként folytonos függvényeket használunk egymással kapcsolatba hozandó fuzzy értékű mennyiségek ábrázolásához.

■ **A:** Trapéz alakú függvény **(5.69. ábra)** (5.343) alapján. Amennyiben $a_2 = a_3 = a$ és $a_1 < a < a_4$, akkor a halmaz grafikonja háromszög alakú. Az $a_1, \ldots, a_4$ értékek megválasztása alapján kaphatunk szimmetrikus vagy aszimmetrikus trapéz, illetve háromszög alakú függvényeket ($a_2 = a_3 = a$ és

$|a - a_1| = |a_4 - a|$ szimmetrikus háromszög; $a_2 = a_3 = a$ és $|a - a_1| \neq |a_4 - a|$ aszimmetrikus háromszög).

■ **B:** V alakú tagsági függvény **(5.70. ábra)** (5.344) alapján:

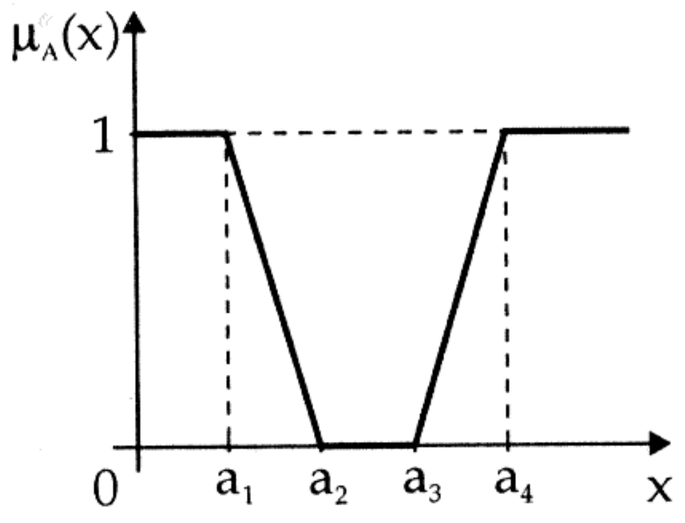
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1\,, \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x < a_2\,, \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3\,, \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 < x < a_4\,, \\ 0 & x \geq a_4. \end{cases} \qquad (5.343)$$



5.69. ábra.

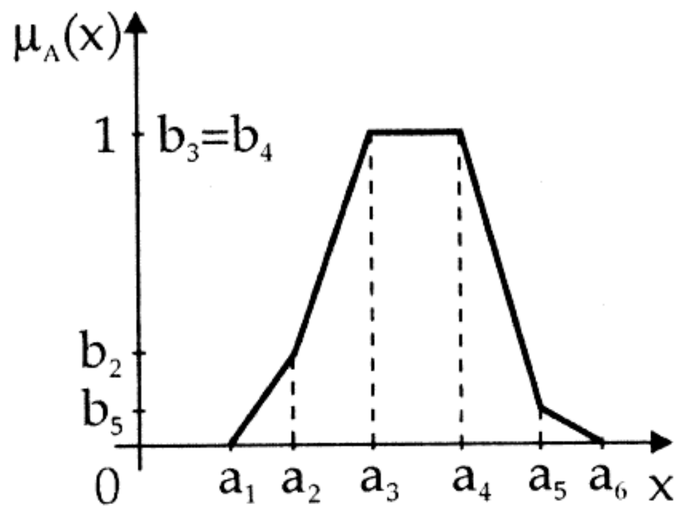
■ **C:** Általánosított trapéz alakú függvények **(5.71. ábra)** (5.345) alapján.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a_1\,, \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1} & a_1 < x < a_2\,, \\ 0 & a_2 \leq x \leq a_3\,, \\ \dfrac{x - a_3}{a_4 - a_3} & a_3 < x < a_4\,, \\ 1 & a_4 \leq x\,. \end{cases} \qquad (5.344)$$



5.70. ábra.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1\,, \\ \dfrac{b_2(x - a_1)}{a_2 - a_1} & a_1 < x < a_2\,, \\ \dfrac{(b_3 - b_2)(x - a_2)}{a_3 - a_2} + b_2 & a_2 \leq x \leq a_3\,, \\ b_3 = b_4 = 1 & a_3 < x < a_4\,, \\ \dfrac{(b_4 - b_5)(a_4 - x)}{a_5 - a_4} + b_5 & a_4 \lessdot x \leq a_5\,, \\ \dfrac{b_5(a_6 - x)}{a_6 - a_5} & a_5 < x < a_6\,, \\ 0 & a_6 \leq x\,. \end{cases} \qquad (5.345)$$



5.71. ábra.

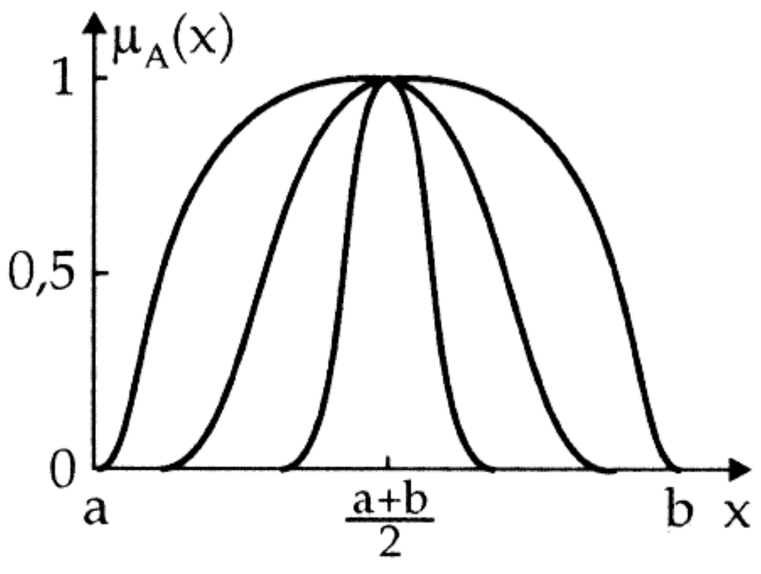
2. Harangalakú tagsági függvények

■ **A:** A harangalakú, differenciálható függvények egy osztályát alkotják (5.346) alakú függvények, ha $p(x)$-et alkalmasan választjuk meg: A $p(x) = k(x - a)(b - x)$ és pl. $k = 10$, $k = 1$, ill. $k = 0{,}1$ és az $1/f(\dfrac{a+b}{2})$ normáló tényező választásával $\mu_A(x) = f(x)/f(\dfrac{a+b}{2})$ egyenletű tagsági függvények

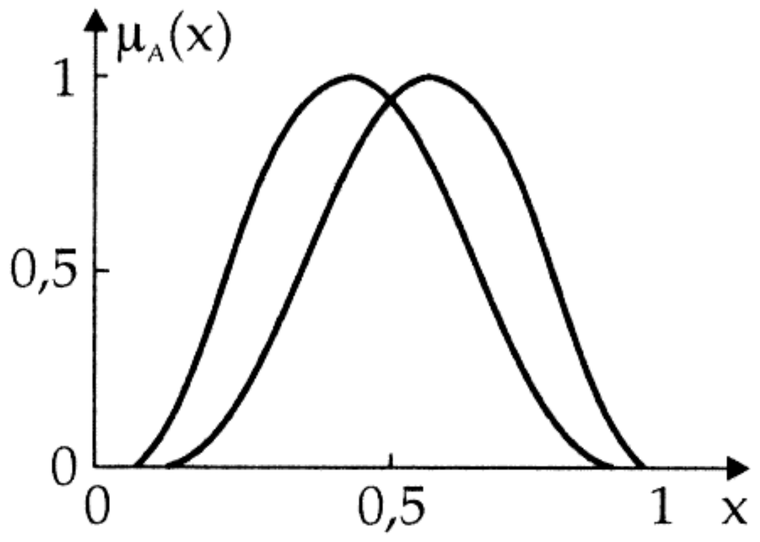
(5.72. ábra) különböző szélességű szimmetrikus görbeseregéhez jutunk. Ezek közül a $k = 10$ értékhez tartozik a legszélesebb, a $k = 0{,}1$ értékhez a legkeskenyebb görbe.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a\,, \\ e^{-1/p(x)} & a < x < b\,, \\ 0 & x \geq b\,. \end{cases} \tag{5.346}$$

Aszimmetrikus tagsági függvényt $[0, 1]$-en úgy kaphatunk, ha pl. $p(x) = x(1-x)(2-x)$-et vagy $p(x) = x(1-x)(x+1)$-et **(5.73. ábra)** választjuk a megfelelő normálással. Az első polinom $(2-x)$ tényezője a függvény maximumát balra tolja, így kapunk egy balra ferdülő aszimmetrikus görbét. Hasonlóan, a második polinom $(x+1)$ tényezője jobbra ferdülő aszimmetrikus görbét eredményez.



5.72. ábra.



5.73. ábra.

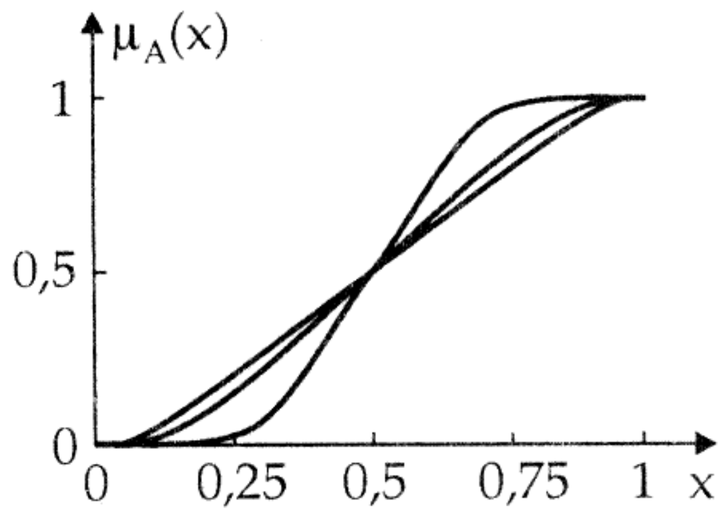
■ **B:** A tagsági függvények még tágabb osztályát kapjuk, amennyiben $[a, b]$-n a

$$F_t(x) = \frac{\int_a^x f\left(t(u)\right) du}{\int_a^b f\left(t(u)\right) du}\,, \tag{5.347}$$

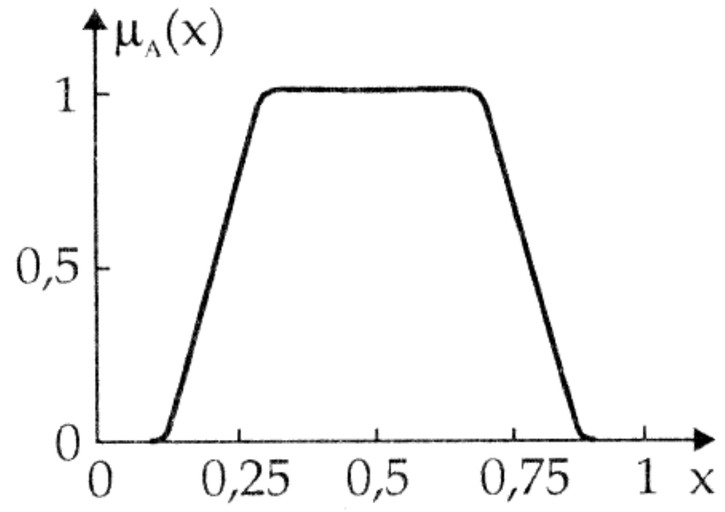
formula alapján elvégezzük a t transzformációt, ahol f (5.346)-ben $p(x) = (x-a)(b-x)$-szel van megadva. Ha a t transzformáció sima $[a, b]$-n — azaz t végtelen sokszor differenciálható ezen intervallumon — akkor f simaságából következik F_t simasága. Amennyiben t simasága mellett megköveteljük, hogy növekvő vagy csökkenő legyen, akkor a transzformáció lehetővé teszi a tagsági függvény alakjának további megváltoztatását. A gyakorlatban polinomokat alkalmaznak transzformációként. Az $[a, b] = [0, 1]$ intervallumon a legelterjedtebb polinom az identitás $t(x) = x$.

A második legegyszerűbb polinom, amelyik rendelkezik a fenti tulajdonságokkal a $t(x) = -\frac{2}{3}cx^3 + cx^2 + (1 - \frac{c}{3})x$, ahol $c \in [-6, 3]$ állandó. A maximális görbületű $q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$ polinomot a $c = -6$ érték választásával kapjuk. Legyen q_0 az identitás függvényt, tehát $q_0(x) = x$. Ekkor q segítségével rekurzív módon $q_i = q \circ q_{i-1}, i \in N$ összefüggéssel további polinomokat számíthatunk ki. Ha (5.347)-ban a megfelelő $q_0, q_1, \ldots$ polinomokat helyettesítjük a t transzformáció helyébe, akkor a $F_{q_0}, F_{q_1}, F_{q_2} \ldots$ **(5.74. ábra)** sima függvénysereghez jutunk, melyek tagsági függvényként értelmezhetők. Ekkor F_{q_n} egy egyeneshez tart. Egy trapéz alakú tagsági függvényt az F_{q_2}, illetve a tükörképe, valamint egy vízszintes egyenes segítségével lehet közelíteni **(5.75. ábra)**.

Összefoglalás: Pontatlan információkat fuzzy halmazokkal lehet leírni, melyeket tagsági függvényekkel lehet megadni. Nyelvi állításokat HA–AKKOR szabályok segítségével értékelhetők ki.



5.74. ábra.



5.75. ábra.

5.9.1.3. Fuzzy halmazok

1. Üres és univerzális fuzzy halmaz

a) Üres fuzzy halmaz: Egy X feletti A halmaz *üres*, ha $\mu_A(x) = 0 \quad \forall\, x \in X$-re teljesül.

b) Univerzális fuzzy halmaz: Egy halmaz akkor *univerzális*, ha $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$-re teljesül.

2. Fuzzy részhalmaz

Amennyiben $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \quad \forall x \in X$, akkor a B az A-nak *fuzzy részhalmaza* (jelölés: $B \subseteq A$).

3. Fuzzy halmaz magja

Legyen A konvex fuzzy halmaz X felett, ekkor

$$\text{core}\,(A) = [a, b] = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\} \quad (a, b \text{ konstans},\ a \leq b) \tag{5.348}$$

intervallum jelöli az A fuzzy halmaz *mag*ját. (Ha A nem konvex, akkor a mag nem szükségszerűen összefüggő)

■ **A:** Az **5.69. ábrán** $[a_2, a_3]$ a mag.

■ **B:** $a_2 = a_3 = a$ esetén **(5.69. ábra)** egy μ háromszög alakú tagsági függvény keletkezik. A hozzátartozó fuzzy halmaznak magja egy elemű. Ha $a_1 = a = a_4$, akkor egyetlen konkrét értéket kapunk (mely egyelemű klasszikus halmazként is felfogható), melyet *szingleton*nak nevezünk. Egy szingleton fuzzy halmaz magja és tartója egyaránt egyelemű.

4. Folytonos és diszkrét fuzzy halmazok egymásba való átalakítása

Legyen adva egy folytonos fuzzy halmaz a tagsági függvényével. Ha ezt diszkretizáljuk, akkor szingletonok halmazát kapjuk. Fordítva, egy diszkrét halmazból interpolációval juthatunk folytonos halmazhoz.

5. Normális és szubnormális fuzzy halmazok

Az X feletti A fuzzy halmaz *magasságán*

$$H(A) := \sup\{\mu_A(x) | x \in X\}\,. \tag{5.349}$$

kifejezést értjük. *Normális* fuzzy halmazról beszélünk, ha $H(A) = 1$, különben *szubnormális*ról.
A bemutatott fogalmak és módszerek, melyek normális fuzzy halmazokra vonatkoznak, könnyen kiterjeszthetőek szubnormális fuzzy halmazokra is.

6. Fuzzy halmazok szinthalmazai

Egy A fuzzy halmaz α-nál nem kisebb, illetve szigorúan nagyobb tagsági értékű elemeinek összességét α-*vágat*nak vagy α-*szint*nek (jelölés: A^α), illetve *szigorú* α-*vágat*nak vagy *szigorú* α-*szint*nek (jelölés: $A^{>\alpha}$) hívjuk. Ezen fogalmakat a

$$A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}\,, \qquad A^{>\alpha} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}\,, \quad \alpha \in [0, 1]\,. \tag{5.350}$$

formulák definiálják.

1. Tulajdonságok

a) A fuzzy halmazok szinthalmazai klasszikus értelemben vett halmazok.

b) A $\text{supp}(A)$ tartó egy speciális α-vágat, hiszen $\text{supp}(A) = A^{>0}$.

c) Az 1-szinthalmaz azonos a *mag*gal: $A^1 = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}$.

2. Karakterizációs tétel

Minden X feletti A fuzzy halmazhoz egyértelműen hozzárendelhető α-vágatainak és szigorú α-vágatainak $(A^{\alpha})_{\alpha\in(0,1]}$ és $(A^{>\alpha})_{\alpha\in[0,1)}$ családja. Az α-vágatok és a szigorú α-vágatok mint részhalmazok monoton halmazcsaládot alkotnak, azaz

$$\alpha < \beta \Rightarrow A^{\alpha} \supseteq A^{\beta} \quad \text{és} \quad A^{>\alpha} \supseteq A^{>\beta} \,. \tag{5.351a}$$

teljesül. Fordítva, ha az X halmaz felett adottak az $(U_{\alpha})_{\alpha\in[(0,1]}$, illetve $(V_{\alpha})_{\alpha\in[0,1)}$ részhalmazokból álló monoton halmazcsaládok, akkor ezek egyértelműen meghatározzák az X feletti U, ill. V fuzzy halmazokat úgy, hogy $U^{\alpha} = U_{\alpha}$ és $V^{>\alpha} = V_{\alpha}$ teljesül, továbbá:

$$\mu_U(x) = \sup\{\alpha \in [0,1) | x \in U_{\alpha}\} \,, \qquad \mu_V(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] | x \in V_{\alpha}\} \,. \tag{5.351b}$$

7. A és B fuzzy halmazok hasonlósága

1. A $\mu_A, \mu_B : X \to [0,1]$ tagsági függvényekkel megadott A, B fuzzy halmazok fuzzy értelemben hasonlóak, ha minden $\alpha \in (0,1]$-re létezik α_i, amely kielégíti az $\alpha < \alpha_i \leq 1 (i = 1,2)$ egyenlőtlenséget, és az alábbiak teljesülnek:

$$\mathrm{supp}(\alpha_1 \mu_A)_{\alpha} \subseteq \mathrm{supp}(\mu_B)_{\alpha} \,, \qquad \mathrm{supp}(\alpha_2 \mu_B)_{\alpha} \subseteq \mathrm{supp}(\mu_A)_{\alpha} \,. \tag{5.352}$$

2. Tétel: A $\mu_A, \mu_B : X \to [0,1]$ tagsági függvényekkel megadott A, B fuzzy halmazok fuzzy értelemben hasonlóak, ha magjuk megegyezik:

$$\mathrm{supp}(\mu_A)_1 = \mathrm{supp}(\mu_B)_1 \,, \tag{5.353a}$$

mivel a mag megegyezik a fuzzy halmaz 1 magasságú α-szintjével:

$$\mathrm{supp}(\mu_A)_1 = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\} \,. \tag{5.353b}$$

3. A $\mu_A, \mu_B : X \to [0,1]$ tagsági függvényekkel megadott A, B fuzzy halmazok fuzzy értelemben szigorúan hasonlóak, ha magjuk és tartójuk azonos:

$$\mathrm{supp}(\mu_A)_1 = \mathrm{supp}(\mu_B)_1 \,, \tag{5.354a}$$

$$\mathrm{supp}(\mu_A)_0 = \mathrm{supp}(\mu_B)_0 \,. \tag{5.354b}$$

5.9.2. Fuzzy halmazműveletek

Fuzzy halmazokra vonatkozó műveletek fuzzy halmazok összekapcsolására, kombinálására alkalmasak. Számos lehetőség van a hagyományos unió (egyesítés), metszet és a komplemens halmazműveletek fuzzy halmazokra történő általánosítására.

5.9.2.1. Általános fuzzy halmazműveletek

A hagyományos unió és metszet fogalmát olyan módon általánosítjuk, hogy az $A \cup B$, ill. $A \cap B$ halmazok tetszőleges $x \in X$ elemének tagsági értéke csak az A és B fuzzy halmazok $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ tagsági függvényétől függjön. Az

$$s, t \colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \,, \tag{5.355}$$

függvények segítségével definiáljuk két fuzzy halmaz unióját és metszetét:

$$\mu_{A\cup B}(x) := s\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \,, \tag{5.356}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) := t\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \,. \tag{5.357}$$

A t és s függvények elnevezése t-norma és t-konorma, az utóbbit s-normának is hívják. (A t-norma elnevezés arra utal, hogy ezen függvények axiomatikus tulajdonságaikat illetőleg megegyeznek a valószínűségi mértékek egy érdekes geometriai interpretációja alapján nyerhető műveletekkel, melyeket a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése miatt triangularis normáknak, röviden t-normáknak neveznek).

Értelmezés: A $\mu_{A\cup B}$ és $\mu_{A\cap B}$ tagsági függvények a $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ tagsági függvények kombinációjából adódnak.

A t-norma definíciója: A t-norma egy bináris leképezés $[0,1]$-en:

$$t \colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \,. \tag{5.358}$$

A t-norma kétváltozós, szimmetrikus, asszociatív, monoton növő operátor, nulleleme a 0, egységeleme pedig az 1. $x, y, z, v, w \in [0,1]$ tagsági értékekre teljesülnek a következő tulajdonságok:

(T1) Kommutativitás: $t(x,y) = t(y,x) \,.$ (5.359a)

(T2) Asszociativitás: $t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$. (5.359b)

(T3) Peremfeltételek (kapcsolat az egységelemmel és a nullelemmel):

$t(x, 1) = x$ és (T1) miatt: $t(1, x) = x$; $t(x, 0) = t(0, x) = 0$. (5.359c)

(T4) Monotonitás: Ha $x \leq v$ és $y \leq w$, akkor $t(x, y) \leq t(v, w)$. (5.359d)

Az s-norma definíciója: Az s-norma egy bináris leképezés $[0, 1]$-en:

$s\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, (5.360)

amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(S1) Kommutativitás: $s(x, y) = s(y, x)$. (5.361a)

(S2) Asszociativitás: $s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z)$. (5.361b)

(S3) Peremfeltételek (kapcsolat az egységelemmel és a nullelemmel):

$s(x, 0) = s(0, x) = x$, $s(x, 1) = s(1, x) = 1$. (5.361c)

(S4) Monotonitás: Ha $x \leq v$ és $y \leq w$, akkor $s(x, y) \leq s(v, w)$. (5.361d)

A fenti tulajdonságokat kielégítő t-normák, illetve s-normák halmazát T-vel, illetve S-sel jelölve teljesülnek a következő állítások:

$\min\{x, y\} \geq t(x, y)\ \forall\, t \in T$, $\forall\, x, y \in [0, 1]$ és (5.361e)

$\max\{x, y\} \leq s(x, y)\ \forall\, s \in S$, $\forall\, x, y \in [0, 1]$. (5.361f)

5.9.2.2. A gyakorlatban használt fuzzy halmazműveletek

1. Két fuzzy halmaz metszete

A $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ tagsági függvényekkel megadott A és B fuzzy halmazok $A \cap B$ *metszetét* a min operátorral az alábbi módon definiáljuk:

$C := A \cap B$ és $\mu_C(x) := \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ $\forall\, x \in X$, ahol (5.362a)

$$\min(a, b) := \begin{cases} a, & \text{ha } a \leq b, \\ b, & \text{ha } a > b. \end{cases} \tag{5.362b}$$

A metszet operáció megfelel a két tagsági függvény logikai ÉS művelettel való összekapcsolásának **(5.76. ábra)**. A $\mu_C(x)$ a $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ értékek minimuma.

2. Két fuzy halmaz uniója (egyesítése)

A $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ tagsági függvényekkel megadott A és B fuzzy halmazok $A \cup B$ *unióját* (*egyesítését*) a max operátorral az alábbi módon definiáljuk:

$C := A \cup B$ és $\mu_C(x) := \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ $\forall\, x \in X$, ahol (5.363a)

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq b, \\ b, & \text{ha } a < b. \end{cases} \tag{5.363b}$$

Az egyesítés operáció megfelel a két tagsági függvény logikai VAGY művelettel való összekapcsolásának. Az **5.77. ábrán** látható, hogy $\mu_C(x)$ a $\mu_A(x)$ és $\mu_B(x)$ értékek maximuma.

■ A $t(x, y) = \min\{x, y\}$ t-norma két fuzzy halmaz metszetét **(5.78. ábra)**, az $s(x, y) = \max\{x, y\}$ s-norma azok unióját **(5.79. ábra)** jelenti.

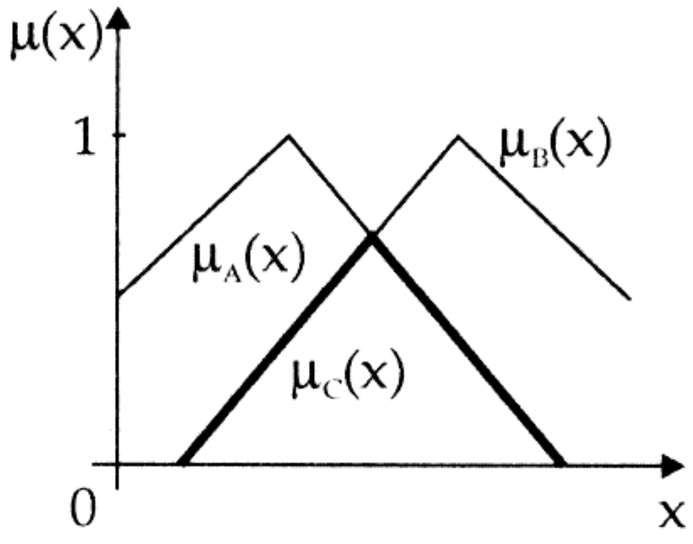
3. További lehetőségek a metszet és unió műveletekre

A *korlátos különbség*, az *algebrai szorzat*, valamint a *drasztikus metszet*, illetve a *korlátos* és *algebrai összeg*, valamint a *drasztikus unió* a t-normák, illetve t-konormák tulajdonságainak eleget tevő további fuzzy metszetek, illetve fuzzy uniók definiálására mutat példát **(lásd 5.9. táblázat)**.

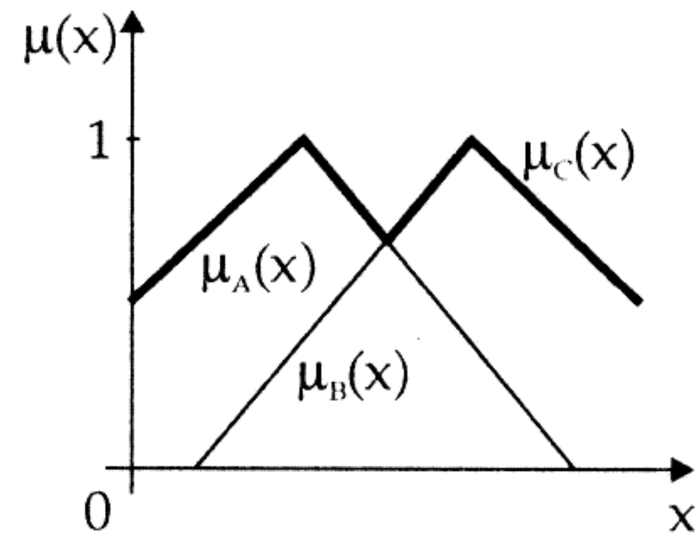
Például az algebrai összeg definíciója:

$C := A + B$ és $\mu_C(x) := \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ minden $x \in X$. (5.364a)

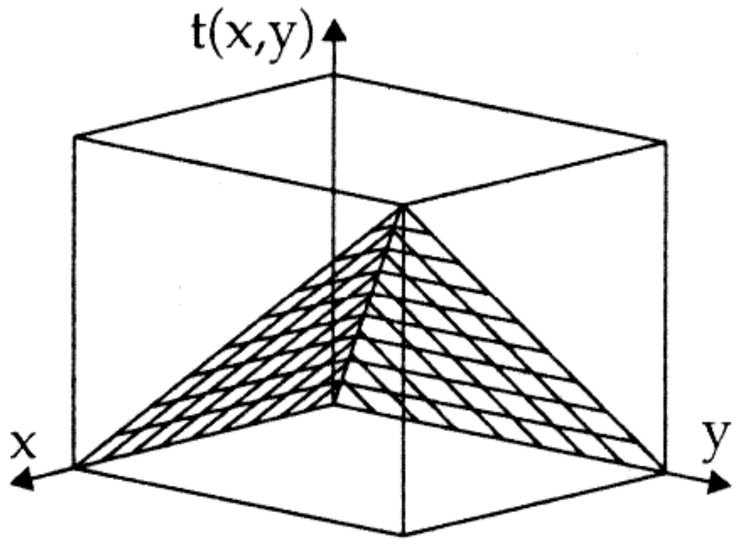
További t-normákat ismertetünk az **5.9. táblázat** középső oszlopában.



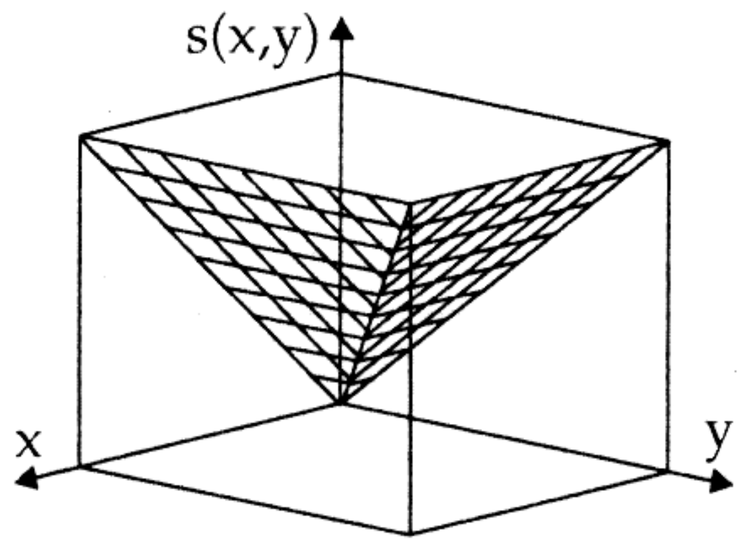
5.76. ábra.



5.77. ábra.



5.78. ábra.



5.79. ábra.

Az algebrai szorzat definíciója:

$$C := A \cdot B \text{ és } \mu_C(x) := \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \text{minden } x \in X\,. \tag{5.364b}$$

További s-normákat ismertetünk az **5.9. táblázat** jobb oldali oszlopában.

5.9.2.3. Aggregációs vagy kompenzáló operátorok

Esetenként szükség lehet a t- és az s-normák közé eső intervallumba képező operátorokra (lásd **5.9. táblázat** megjegyzése); ezeket *aggregációs* vagy *kompenzáló operátorok*nak hívjuk. Példaképpen említjük a lambda- és a gamma-operátort.

1. Lambda-operátor

$$\mu_{A\lambda B}(x) = \lambda\left[\mu_A(x)\mu_B(x)\right] + (1-\lambda)\left[\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)\right], \quad \text{ahol} \quad \lambda \in [0,1]\,. \tag{5.366}$$

$\lambda = 0$ eset: Az (5.366) egyenlőség az algebrai összeget adja (**5.9. táblázat**, s-normák).

$\lambda = 1$ eset: Az (5.366) egyenlőség az algebrai szorzatot adja (**5.9. táblázat**, t-normák).

2. Gamma-operátor

$$\mu_{A\gamma B}(x) = \left[\mu_A(x)\mu_B(x)\right]^{1-\gamma}\left[1-(1-\mu_A(x))\,(1-\mu_B(x))\right]^{\gamma}, \quad \text{ahol } \gamma \in [0,1]\,. \tag{5.367}$$

$\gamma = 1$ eset: az algebrai összeget adja.

$\gamma = 0$ eset: az algebrai szorzatot adja.

A gamma-operátor használata tetszőleges számú fuzzy halmaz esetén:

$$\mu(x) = \left[\prod_{i=1}^{n}\mu_i(x)\right]^{1-\gamma}\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i(x))\right]^{\gamma}, \tag{5.368}$$

és ugyanez δ_i súlyozással:

$$\mu(x) = \left[\prod_{i=1}^{n}\mu_i(x)^{\delta_i}\right]^{1-\gamma}\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i(x))^{\delta_i}\right]^{\gamma}, \text{ ahol } x \in X\,, \quad \sum_{i=1}^{n}\delta_i = 1\,, \quad \gamma \in [0,1]\,. \tag{5.369}$$

5.9. táblázat. t- és s-normák, $p \in \mathbb{R}$

Szerző	t-norma	s-norma
ZADEH	metszet: $t(x,y) = \min\{x,y\}$	unió: $s(x,y) = \max\{x,y\}$
ŁUKASIEWICZ	korlátos különbség $t_b(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$	korlátos összeg $s_b(x,y) = \min\{1, x+y\}$
	algebrai szorzat $t_a(x,y) = xy$	algebrai összeg $s_a(x,y) = x+y-xy$
	drasztikus metszet $t_{dp}(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, \text{ ha } x=1 \\ \quad\quad\quad \text{vagy } y=1 \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$	drasztikus unió $s_{ds}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, \text{ ha } x=0 \\ \quad\quad\quad \text{vagy } y=0 \\ 1 \text{ különben} \end{cases}$
HAMACHER $(p \geq 0)$	szorzat $t_h(x,y) = \dfrac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$	összeg $s_h(x,y) = \dfrac{x+y-xy-(1-p)xy}{1-(1-p)xy}$
EINSTEIN	szorzat $t_e(x,y) = \dfrac{xy}{1+(1-x)(1-y)}$	összeg $s_e(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$
FRANK $(p>0,\ p\neq 1)$	$t_f(x,y) =$ $\log_p\left[1+\dfrac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}\right]$	$s_f(x,y) = 1-$ $\log_p\left[1+\dfrac{(p^{1-x}-1)(p^{1-y}-1)}{p-1}\right]$
YAGER $(p>0)$	$t_{ya}(x,y) = 1-$ $\min\left(1, ((1-x)^p+(1-y)^p)^{1/p}\right)$	$s_{ya}(x,y) = \min\left(1, (x^p+y^p)^{1/p}\right)$
SCHWEIZER $(p>0)$	$t_s(x,y) = \max(0, x^{-p}+y^{-p}-1)^{-1/p}$	$s_s(x,y) = 1-$ $\max\left(0, (1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1\right)^{-1/p}$
DOMBI $(p>0)$	$t_{do}(x,y) =$ $\left\{1+\left[\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^p+\left(\dfrac{1-y}{y}\right)^p\right]^{1/p}\right\}^{-1}$	$s_{do}(x,y) = 1-$ $\left\{1+\left[\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^p+\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^p\right]^{1/p}\right\}^{-1}$
WEBER $(p \geq -1)$	$t_w(x,y) = \max(0, (1+p)$ $\cdot(x+y-1)-pxy)$	$s_w(x,y) = \min(1, x+y+pxy)$
DUBOIS $(0 \leq p \leq 1)$	$t_{du}(x,y) = \dfrac{xy}{\max(x,y,p)}$	$s_{du}(x,y) =$ $\dfrac{x+y-xy-\min(x,y,(1-p))}{\max((1-x),(1-y),p)}$

Megjegyzés: A táblázatban felsorolt t- és s-normák értékei a következő relációban állnak egymással:

$$t_{dp} \leq t_b \leq t_e \leq t_a \leq t_h \leq t \leq s \leq s_h \leq s_a \leq s_e \leq s_b \leq s_{ds} \tag{5.365}$$

5.9.2.4. Kiterjesztési szabály

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan lehet kiterjeszteni a klasszikus halmazelméleti alapműveleteket fuzzy halmazokra. A $\Phi : X^n \to Y$ leképezés, mely egy $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ ponthoz a $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ függvényértéket rendeli analóg módon átültethető fuzzy halmazokra. Eszerint a $\hat{\Phi} : \mathcal{F}(X)^n \to \mathcal{F}(Y)$ leképezés a $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{F}(X)^n$ tagsági függvényekhez $(x_1, \ldots, x_n)$ helyeken felvett $\hat{\Phi}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ értékeit rendeli.

5.9.2.5. Fuzzy komplemensfüggvény

A $c : [0,1] \to [0,1]$ *fuzzy komplemensfüggvény*, ha az alábbi tulajdonságokat minden $x, y \in [0,1]$ esetén kielégíti:

(K1) Peremfeltételek: $c(0) = 1$ és $c(1) = 0$. (5.370a)

(K2) Monotonitás: $x < y \Rightarrow c(x) \geq c(y)$. (5.370b)

(K3) Involutivitás: $c(c(x)) = x$. (5.370c)

(K4) Folytonosság: $c(x)$ folytonos minden $x \in [0,1]$. (5.370d)

■ **A:** A leggyakrabban használt komplemensfüggvény (intuitív definíció) folytonos és involutív:

$$c(x) := 1 - x\,. \tag{5.371}$$

■ **B:** További folytonos és involutív komplemensek:
SUGENO-*komplemens* $c_\lambda(x) := (1-x)(1+\lambda x)^{-1}$, ahol $\lambda \in (-1, \infty)$,
YAGER-*komplemens* $c_p(x) := (1-x)^{1/p}$, ahol $p \in (0, \infty)$.

5.10. táblázat. A BOOLE- és a fuzzy logika alapműveleteinek összehasonlítása

operátor	BOOLE-logika	fuzzy logika $(\mu_A, \mu_B \in [0,1])$
ÉS	$C = A \wedge B$	$\mu_{A\cap B} = \min(\mu_A, \mu_B)$
VAGY	$C = A \vee B$	$\mu_{A\cup B} = \max(\mu_A, \mu_B)$
NEM	$C = \neg A$	$\mu_A^C = 1 - \mu_A$ (μ_A^C komplemense μ_A-nak)

5.9.3. Fuzzy relációk

5.9.3.1. Fuzzy relációk folalma

1. Fuzzy relációk modellezése

Fuzzy relációk, mint például a „nagyjából egyenlő" (példánkban a továbbiakban R_1), „lényegesen nagyobb" (R_2) vagy „lényegesen kisebb" stb., jelentős szerepet játszanak a gyakorlati alkalmazásokban. Az R_1 reláció modellezéséhez induljunk ki az „=" egyenlőség hagyományos (nem fuzzy) reláció a következő definíciójából:

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\} \tag{5.372}$$

ami a valós számsíkon az $x = y$ egyenest határozza meg.
Az R_1 „nagyjából egyenlő" reláció modellezése esetében egy klasszikus halmaz határához lehet igazítani (jelen esetben az $\mathbb{R}^2$, általánosságban pedig az $\mathbb{R}^n$ egyenese $\mathcal{A}$ toleranciával) egy átmeneti halmazt, ahol a tagsági függvény az előírt módon (lineárisan vagy kvadratikusan) 0-hoz tart. A lineáris átmenet az alábbiak szerint valósítható meg:

$$\mu_{R_1}(x,y) = \max\{0, 1 - a|x-y|\}, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbb{R}\,,\ a > 0. \tag{5.373}$$

Az R_2 reláció modellezéséhez a $\leq$ relációból célszerű kiindulni. A hozzátartozó értékhalmaz:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\} \tag{5.374}$$

az $x = y$ egyenes feletti félsíkot írja le. A „lényegében" természetes nyelvi módosítószót a kifejezésben úgy modellezzük, hogy a félsík alatti keskeny terület még bizonyos mértékben a relációhoz tartozzon. Az R_2 modellje ezek alapján:

$$\mu_{R_2}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \max\{0, 1 - a|x-y|\} & \text{ha } y < x \\ 1 & \text{ha } y \geq x \end{array} \right\}, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbb{R}\,,\ a > 0\,. \tag{5.375}$$

Amennyiben az egyik változó értékét rögzítjük, például $y = y_0$, akkor (5.375) definícióból R_2 a másik változóra vonatkozó *bizonytalan határ*ként interpretálható. A bizonytalan határok fontos szerepet játszanak matematikai közelítő eljárások optimatizálásában, minőségi adatelemzésben és a mintafelismerésnél és -osztályozásnál.

A fenti példa azt mutatja, hogy a fuzzy relációk több objektum közötti bizonytalan kapcsolatot írnak le. A továbbiakban a bináris fuzzy relációkat tárgyaljuk, tehát olyan relációkat, melyek alaphalmaza két halmaz DESCARTES-szorzata.

2. Direkt szorzat

Legyenek X és Y fuzzy alaphalmazok, $X \times Y$ jelöli a G *direkt szorzat*ukat az alaphalmazon:

$$G = X \times Y = \{(x,y) | x \in X \text{ és } y \in Y\}\,. \tag{5.376}$$

A klasszikus halmazelméletnek megfelelően valamely G-n értelmezett fuzzy halmaz egy *fuzzy reláció* lesz, mivel az alaphalmaz elempárjait tartalmazza. Az R fuzzy reláció G-ben, ha annak fuzzy részhalmaz ($R \in \mathcal{F}(G)$), ahol $\mathcal{F}(G)$ az $X \times Y$ szorzathalmazon értelmezett fuzzy hatványhalmaz. R-et egy $\mu_R(x,y)$ tagsági függvénnyel lehet leírni, amely minden $(x,y) \in G$ elemhez hozzárendel $[0,1]$-ből egy $\mu_R(x,y)$ értéket.

3. Fuzzy relációk tulajdonságai

(T1) Mivel a fuzzy relációk speciális fuzzy halmazok, ezért a fuzzy halmazokra kimondott állítások ezekre is érvényesek.

(T2) Minden fuzzy halmazokra definiált művelet alkalmazható fuzzy relációkra is, és az eredmény szintén fuzzy reláció lesz.

(T3) Az α-vágat fogalma fuzzy relációkra is átültethető.

(T4) Az $R \in \mathcal{F}(G)$ fuzzy reláció tartója (azaz 0-vágata) egy G feletti (hagyományos) reláció.

(T5) $\mu_R(x,y)$ jelöli az (x,y) pár tagsági értéket, tehát annak a fokát, hogy e párra az R reláció milyen mértékben igaz.

(T6) Legyen $R \in \mathcal{F}(G)$ egy fuzzy reláció, akkor R inverze, $S := R^{-1}$, a következőképpen definiálható:

$$\mu_S(x,y) = \mu_R(y,x) \quad \text{minden } (x,y) \in G\text{-re}\,. \tag{5.377}$$

■ Az R_2^{-1} inverz reláció jelentése: „jelentősen kisebb" (lásd 5.9.3.1., **1.**); az R_1-el történő egyesítése, $R_1 \cup R_2^{-1}$, a „jelentősen kisebb vagy nagyjából egyenlő" jelentéssel bír.

4. *n*-szeres direkt szorzat

n alaphalmazból képzett DESCARTES-*szorzat* a fentivel megegyezően n fuzzy halmaz *direkt szorzat*a, tehát egy n-áris fuzzy reláció.

Következtetés: Az eddig tanulmányozott fuzzy halmazok egyértékű fuzzy relációk, az elemi analízis nyelvén görbék az alaphalmaz felett. Ezzel az analógiával egy bináris fuzzy reláció a G alaphalmaz feletti felületnek tekinthető. Egy bináris fuzzy reláció véges diszkrét alaphalmazon értelmezhető *fuzzy relációmátrix*ként.

■ Szín–érettségi fok reláció: A jólismert összefüggést a gyümölcs színe (x) és az érettségi foka (y) között egy bináris relációmátrixszal szemléltetjük, ahol $X = \{\text{zöld, sárga, piros}\}$ és $Y = \{\text{éretlen, félig érett, érett}\}$ fuzzy halmazok adottak. A relációmátrixot az (5.378) táblázat alapján adjuk meg:

	éretlen	félérett	érett
zöld	1	0	0
sárga	0	1	0
piros	0	0	1

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.378}$$

A relációmátrix értelmezése: A relációmátrix elemeit az alábbi szabályokkal fogalmazhatjuk meg: „HA a gyümölcs zöld, AKKOR éretlen"; „HA a gyümölcs sárga, AKKOR félérett"; „HA a gyümölcs piros, AKKOR érett". A zöldhöz egyértelműen az éretlen, a sárgához a félérett, a piroshoz az érett van hozzárendelve. Amennyiben egy zöld bizonyos százalékkal tekinthető félérettnek, a táblázat a következőképpen módosul:

$$\begin{array}{llll} \mu_R\,(\text{zöld, éretlen}) & = 1{,}0\,, & \mu_R\,(\text{zöld, félérett}) & = 0{,}5\,, \\ \mu_R\,(\text{zöld, érett}) & = 0{,}0\,, & \mu_R\,(\text{sárga, éretlen}) & = 0{,}25\,, \\ \mu_R\,(\text{sárga, félérett}) & = 1{,}0\,, & \mu_R\,(\text{sárga, éretlen}) & = 0{,}25\,, \\ \mu_R\,(\text{piros, éretlen}) & = 0{,}0\,, & \mu_R\,(\text{piros, félérett}) & = 0{,}5\,, \\ \mu_R\,(\text{piros, éerett}) & = 1{,}0\,. & & \end{array}$$

A relációmátrix, ahol $\mu_R \in [0,1]$ a következő:

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}25 & 1{,}0 & 0{,}25 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix}. \tag{5.379}$$

5. Számítási szabály

Fuzzy halmazok összekapcsolásra nézzük példaként a különböző alaphalmazú $\mu_1 : X \to [0,1]$ és $\mu_2 : Y \to [0,1]$ halmazok min operátorral történő ÉS összekapcsolását:

$$\mu_R(x,y) = \min(\mu_1(x), \mu_2(y)) \text{ vagy } (\mu_1 \times \mu_2)(x,y) = \min(\mu_1(x), \mu_2(y)) \quad \text{ahol} \tag{5.380a}$$

$$\mu_1 \times \mu_2 \colon G \to [0,1]\,, \text{ és } \quad G = X \times Y\,. \tag{5.380b}$$

Az összekapcsolás eredménye egy R fuzzy reláció a G direkt szorzaton, ahol $(x,y) \in G$. Amennyiben X és Y véges diszkrét halmazok és ezáltal $\mu_1(x), \mu_2(y)$ vektorként ábrázolhatóak, akkor fennáll:

$$\mu_1 \times \mu_2 = \mu_1 \circ \mu_2^T \text{ és } \mu_{R^{-1}}(x,y) := \mu_R(y,x) \quad \forall\,(x,y) \in G\,. \tag{5.381}$$

A $\circ$ *összekapcsolási operátor* nem a szokásos mátrixszorzás helyett áll. Itt a szorzatképzést a min operációval, az összeadást a max operációval végezzük.

Az R^{-1} inverz reláció tagsági értéke (x,y)-on megegyezik az R tagsági értékével (y,x)-en.

Az azonos szorzathalmazon definiált fuzzy relációk összekapcsolására vonatkozó számítási szabályok a következő módon adhatóak meg: $R_1, R_2 \colon X \times Y \to [0,1]$ két bináris fuzzy reláció és $(x,y) \in G$ legyenek adottak. Az ÉS összekapcsolást a min operáció segítségével hajtjuk végre:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \min\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\right). \tag{5.382}$$

A VAGY összekapcsolás a max operációval valósítható meg:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \max\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\right). \tag{5.383}$$

5.9.3.2. Fuzzy szorzatreláció $R \circ S$

1. Fuzzy relációk kompozíciója

Amennyiben $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ és $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, akkor ezen fuzzy relációk $X \times Z$ szorzathalmazon értelmezett $R \circ_{\mathbf{TS}} S$ *kompozícióját* az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\mu_{R \circ_{\mathbf{TS}} S}(x,z) := \mathbf{S}_{y \in Y}\{\mathbf{T}(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))\}\ \forall\,(x,z) \in X \times Z\,, \tag{5.384}$$

ahol $\mathbf{S}$, illetve $\mathbf{T}$, tetszőleges s-normát, illetve t-normát jelöl. Véges alaphalmazokon, (5.379)-hoz hasonlóan mátrixábrázolást alkalmazva, $R \circ_{\mathbf{TS}} S$ kompozíció a következőképpen adható meg: legyen adott $X = \{x_1, \ldots, x_n\}, Y = \{y_1, \ldots, y_m\}, Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ és $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, továbbá R és S mátrixalakja az $R = (r_{ij})$ és $S = (s_{jk})$ formában, ahol $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, l$, illetve

$$r_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) \quad \text{és} \quad s_{jk} = \mu_S(y_j, z_k)\,. \tag{5.385}$$

A $T = R \circ S$ mátrixalakjára adódik:

$$t_{ik} = \mathbf{S}_j \mathbf{T}\{r_{ij}, s_{jk}\}\,. \tag{5.386}$$

■ Az r_{ij} és s_{jk} jelöléssel, illetve az (5.384) egyenlettel az R^{-1} inverz reláció mátrixalakját megkaphatjuk az (r_{ij}) transzponáltjaként $R^{-1} = (r_{ij})^{\mathrm{T}}$.

Interpretáció: Legyen R egy reláció X-ből Y-ba és S egy reláció Y-ból Z-be, akkor a többek közt a következő kompozíciókat definiálhatjuk:

a) Ha az R és S $R \circ S$ kompozíciójában a max s-normát, illetve a min t-normát használjuk, akkor az $R \circ S$ relációt *max-min kompozíció*nak nevezzük

$$\mu_{R \circ_{\max \min} S}(x,z) := \max_{y \in Y} \{ \min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)) \} \; \forall (x,z) \in X \times Z \,. \tag{5.387}$$

Ha nem létezik a maximum, akkor helyette a sup operátort alkalmazzuk. Ha nem okoz félreértést, akkor a kompozíció művelet indexét elhagyjuk. Ez a legelterjedtebb kompozíció a gyakorlatban.

b) Ha t-normaként a szorzatot alkalmazzuk (algerbai szorzat), akkor a *max-szorzás kompozíció*t kapjuk.

c) A max–átlag összekapcsolódásnál a „szorzást " középértékszámítással helyettesítjük.

2. Műveleti szabályok

Az $R, S, T \in \mathcal{F}(G)$ fuzzy relációk kompozíciójára a következő szabályok érvényesek:

(T1) Asszociativitás:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T) \,. \tag{5.388}$$

(T2) Disztributivitás unió esetén:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T) \,. \tag{5.389}$$

(T3) Disztributivitás gyenge alakja metszetképzés esetén:

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T) \,. \tag{5.390}$$

(T4) Inverzképzés:

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \,, \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \quad \text{és} \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \,. \tag{5.391}$$

(T5) Komplemens- és inverzképzés:

$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R \,, \quad \left(R^{C}\right)^{-1} = \left(R^{-1}\right)^{C} \,. \tag{5.392}$$

(T6) Monotonitás:

$$R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T \quad \text{és } T \circ R \subseteq T \circ S \,. \tag{5.393}$$

■ Az unió-, metszet- és komplemensképzés kapcsolata az α-vágatokkal: $(A \cup B)^{alpha} = A^{\alpha} \cup B^{\alpha}$, $(A \cap B)^{\alpha} = A^{\alpha} \cap B^{\alpha}$, $(A^C)^{\alpha} = A^{<1-\alpha} = \{x \in X | \mu_A(x) \leq 1 - \alpha\}$. Hasonló igaz szigorú α-vágatokra is.

3. Következtetés a fuzzy logikában

HA–AKKOR szabályok alapján végzett következtetés például a $\mu_2 = \mu_1 \circ R$ összekapcsolással lehetséges. A μ_2 fuzzy halmaz adja meg a végső következtetést, ami képletekkel kifejezve:

$$\mu_2(y) = \max_{x \in X} \Big(\min \left(\mu_1(x) \,, \, \mu_R(x,y) \right) \Big), \tag{5.394}$$

ahol $y \in Y$, $\mu_1 \colon X \to [0,1]$, $\mu_2 \colon Y \to [0,1]$, $R \colon G \to [0,1]$ és $G = X \times Y$.

5.9.4. Fuzzy következtető rendszerek

Pontatlan információk esetén fuzzy logikai következtetésre fuzzy relációk felhasználásával *fuzzy következtető rendszereket* (ZADEH approximate reasoning alapján) használunk (lásd 5.9.6.3.). Ebben az összefüggésben a pontatlan információ nem bizonytalanságot jelent.

1. Fuzzy szabályok

A *fuzzy szabálybázis* HA–AKKOR *szabályok*ból áll. A szabály HA része a premissza (vagy *antecedens*) és a feltételt fogalmazza meg. Az AKKOR rész a következtetés (más néven *konzekvens*). A kiértékelés $\mu_2 = \mu_1 \circ R$ és (5.394) segítségével történik.

2. Fuzzy szabályok kiértékelése

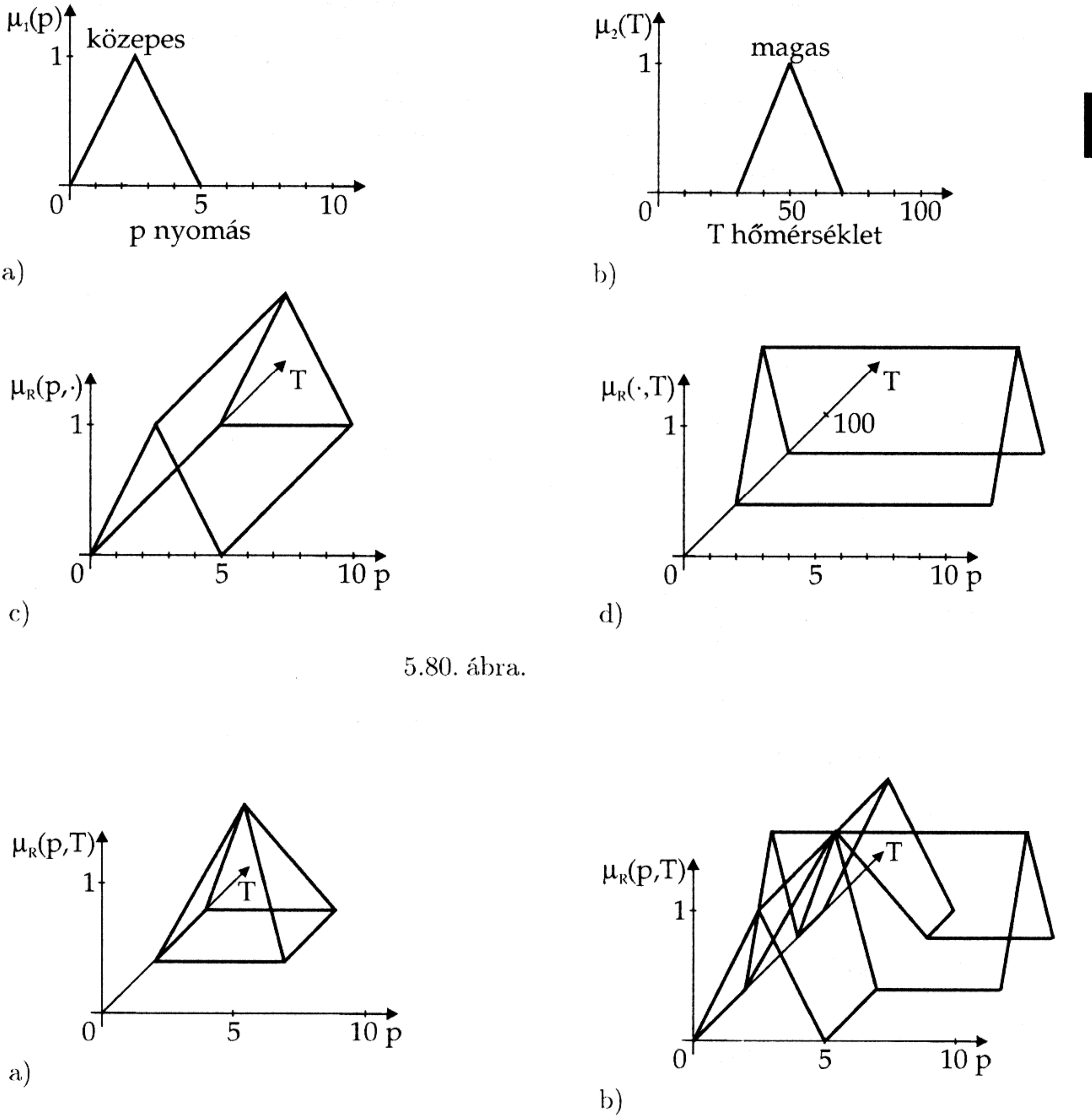
A HA A_1 ÉS A_2 ÉS $A_3 \ldots$ ÉS A_n AKKOR B szabályt, ahol $A_i \colon \mu_i \colon X_i \to [0,1]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és a konzekvens tagsági függvénye $B \colon \mu \colon Y \to [0,1]$ az $(n+1)$ változós reláció írja le:

$$\mathrm{R} \colon X_1 \times X_2 \times \cdots X_n \times Y \to [0,1] \,. \tag{5.395a}$$

Az aktuális $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ érték esetén $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $y \in Y$-ra a fenti szabály az alábbi eredményt adja:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_R(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y) = \min(\mu_1(x'_1), \mu_2(x'_2), \ldots, \mu_n(x'_n), \mu_B(y)) \,. \tag{5.395b}$$

Megjegyzés: A $\min(\mu_1(x'_1)\,,\, \mu_2(x'_2)\,,\, \ldots\, \mu_n(x'_n))$ jelenti a szabály *tüzelési értékét* és a $\{\mu_1(x'_1)\,,\, \mu_2(x'_2)\,,\, \ldots\,, \mu_n(x'_n)\}$ mennyiségek jelentik a fuzzy bemeneti értékeket.



5.80. ábra.

5.81. ábra.

■ A „közepes" nyomás és a „magas" hőmérséklet mennyiségek közötti összefüggés fuzzy relációval történő ábrázolása **(5.80. ábra)**: $\tilde{\mu}_1(p, T) = \mu_1(p)\ \forall T \in X_2$, ahol μ_1: $X_1 \to [0, 1]$ a „közepes nyomás" fuzzy halmaznak **(5.80.a ábra)** *hengeres kiterjesztése* **(5.80.c ábra)**. Hasonlóan $\tilde{\mu}_2(p, T) = \mu_2(T)\ \forall p \in X_1$, ahol μ_2: $X_2 \to [0, 1]$ a magas hőmérséklet fuzzy halmaz **(5.80.b ábra)** hengeres kiterjesztése **(5.80.d ábra)**, ahol $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$: $G = X_1 \times X_2 \to [0, 1]$.

Az **5.81.a ábra** a fuzzy relációk képzésének eredményét mutatja grafikusan: Az **5.81.b ábra** a közepes nyomás ÉS a magas hőmérséklet min operációval történt összekapcsolásának eredményét $\mu_R(p,T) = \min(\mu_1(p), \mu_2(T))$ ábrázolja, és **(5.81.b ábra)** mutatja a VAGY kapcsolódás eredményét a max operátorral $\mu_R(p,T) = \max(\mu_1(p), \mu_2(T))$.

5.9.5. Kiértékelési (defuzzyfikációs) módszerek

Fuzzy következtető rendszerek következtető algoritmusa fuzzy halmazt ad eredményül. Egy konkrét (nem fuzzy) kimeneti érték kiszámításához a kapott fuzzy halmaz *kiértékelésére* (defuzzyfikálására) van szükség. Az alábbiakban a legelterjedtebb módszereket ismertetjük.

1. Maximum kritérium módszer Válasszunk ki egy tetszőleges $\eta \in Y$ értéket abból a tartományból, melyben a $\mu^{\text{Output}}_{x_1,\ldots,x_n}$ fuzzy halmaz a maximális tagsági értéket veszi fel.

2. Maximumátlag módszer (MÁM) A kimenő értéket a maximális tagsági értékek középértéke határozza meg:

$$\sup(\mu^{\text{Output}}_{\mu_{x_1,\ldots,x_n}}) := \{y \in Y | \mu_{x_1,\ldots,x_n}(y) \geq \mu_{x_1,\ldots,x_n}(y^*)\ \forall\, y^* \in Y\}\ . \quad (5.396)$$

Az Y halmaz egy intervallum, amely nemüres és (5.396) írja le, amiből (5.397) következik.

$$\eta_{\text{MÁM}} = \frac{\int_{y \in \sup(\mu^{\text{Output}}_{x_1,\ldots,x_n})} y\, dy}{\int_{y \in \sup(\mu^{\text{Output}}_{x_1,\ldots,x_n})} dy}\ . \quad (5.397)$$

3. Súlypont módszer (S)
A súlypont módszer a fuzzy halmaznak mint geometriai alakzatnak az X alaphalmazra vetített, normált súlypontját határozza meg.

$$\eta_{\text{S}} = \frac{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y) y\, dy.}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)\, dy}\ . \quad (5.398)$$

4. Paraméteres súlypont módszer (PS)
Az előző módszert a $\gamma \in \mathbb{R}$ paraméterrel általánosítva a paraméteres súlypont módszert kapjuk. (5.399) alapján, ha $\gamma = 1$, akkor $\eta_{\text{PS}} = \eta_{\text{S}}$; ha $\gamma \to 0$, akkor $\eta_{\text{PS}} = \eta_{\text{MÁM}}$.

$$\eta_{\text{PS}} = \frac{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma y\, dy}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma\, dy}\ . \quad (5.399)$$

5. Általánosított súlypont módszer (ÁS)

Amennyiben a paraméteres súlypont módszer γ kitevőjét y függvényének tekintjük, egyből adódik (5.400). Az ÁS módszer a PS módszer általánosítása. Akkor használjuk, ha $\mu(y)$-nak egy y-tól függő súlyt akarunk adni.

$$\eta_{\text{ÁS}} = \frac{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^{\gamma(y)} y\, dy}{\int_{y_{\text{inf}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^{\gamma(y)}\, dy}\ . \quad (5.400)$$

6. Területfelezéses módszer (TF)
Egy az ordináta tengellyel párhuzamos egyenes helyzetét úgy számítjuk ki, hogy a bal és a jobb oldalán a tagsági függvény alatti terület ugyanakkora legyen.

$$\int_{y_{\text{inf}}}^{\eta} \mu(y)\, dy = \int_{\eta}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)\, dy\,. \quad (5.401)$$

7. Paraméteres területfelezéses módszer (PTF)

$$\int_{y_{\text{inf}}}^{\eta_{\text{PTF}}} \mu(y)^\gamma\, dy = \int_{\eta_{\text{PTF}}}^{y_{\text{sup}}} \mu(y)^\gamma\, dy\,. \quad (5.402)$$

8. A legnagyobb felület módszere (LF) Az egész halmazból kiválasztjuk a szignifikáns részt, és azt a jól ismert módszerekkel, például a súlypont- (S) vagy a területfelezéses-módszerrel (TF), kiértékeljük.

5.9.6. Tudásalapú fuzzy rendszerek

A többértékűség segítségével a $[0, 1]$ intervallumra épülő fuzzy logika számos alkalmazási lehetőséget rejt magában mind műszaki, mind más alkalmazási területeken. Az alapelv az, hogy a bemeneti értéke-

ket fuzzyfikáljuk, ezen fuzzy értékeket a szabálybázis segítségével kiértékeljük, a különböző szabályok által meghatározott eredményeket kombináljuk, majd valamilyen defuzzyfikációs módszer segítségével konkrét eredményt kapunk.

5.9.6.1. A Mamdani-módszer

Egy fuzzy irányítású folyamatra a következő tervezési lépéseket alkalmazzuk:

1. **Szabálybázis** Legyen i-edik szabály például:

$$\mathrm{R}^i: \text{ HA } e = E^i \text{ ÉS } \dot{e} = \Delta E^i \text{ AKKOR } u = U^i\,, \tag{5.403}$$

ahol e a hiba, $\dot{e}$ a hiba változása és u az eredmény értékének változása (nem fuzzy értékű). Ezen mennyiségek az hozzájuk tartozó értelmezési tartományon (E, ΔE és U) adottak. A teljes értelmezési tartomány legyen $E \times \Delta E \times U$. Ezen értelmezési tartomány felett fuzzyfikáljuk a hiba és hibaváltozás mennyiségeket, azaz nyelvi leírásokat alkalmazva fuzzy halmazok segítségével modellezzük őket.

2. **Fuzzyfikálási algoritmus** Általában az e hiba és annak $\dot{e}$ változása nem fuzzy értékűek, ezért nyelvi leírásokkal fuzzyfikálni kell azokat. Ezen fuzzy értékek lesznek a szabálybázis HA–AKKOR szabályainak antecedens halmazai (premisszái). Az adott konkrét megfigyeléstől függ, hogy az egyes szabályok milyen súllyal vesznek részt a végső következtetés előállításában. A pozitív súllyal rendelkező szabályokat *aktív* vagy *tüzelő szabályok*nak nevezzük.

3. **Következtetési algoritmus** A különböző súlyú aktív szabályokból valamilyen kompozíció segítségével kiszámoljuk ezen szabályok következtetéseit, majd az így kapott értékeket valamilyen t-konorma segítségével (általában a max) kombináljuk. Az eredményre alkalmazzuk a kiértékelési (defuzzyfikálási) algoritmust.

4. **Kiértékelés** A fuzzy irányítás során általában egy konkrét kimeneti értékre van szükségünk. Ezért a fuzzy végkövetkeztetésre a kiértékelési operációt alkalmazzuk, s így egy nem fuzzy értékű mennyiséget nyerünk. Ez a mennyiség azt fejezi ki, hogy a rendszert milyen értékre kell állítani, hogy a szabályoktól való eltérés csekély legyen.

A fuzzy irányítás azt jelenti, hogy **1.**-től **4.**-ig ismételni kell a lépéseket, amíg a legkisebb e szabályeltérést és annak $\dot{e}$ eltérését el nem érjük.

5.9.6.2. A Sugeno-módszer

A SUGENO-módszer szintén egy fuzzy irányítású folyamat megtervezésére szolgál. A MAMDANI-felfogástól a szabálybázis jellegében és a kimeneti érték meghatározásának módjában különbözik. A módszer a következő lépésekből áll:

1. Szabálybázis: A szabálybázis következő formájú szabályokat tartalmaz:

$$R^i: \text{ HA } x_1 = A_1^i \text{ ÉS } \ldots \text{ ÉS } x_k = A_k^i \text{ AKKOR } u_i = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \cdots + p_k^i x_k\,. \tag{5.404}$$

Jelölés:
A_j: tagsági függvénnyel jellemezhető fuzzy halmazok;
x_j: konkrét bemeneti értékek, mint például az e hiba és $\dot{e}$ hibaváltozás, amelyek a rendszer dinamikáját adják;
p_j^i: az $x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$ paramétersúlyai;
u_i: az i-dik szabályhoz tartozó kimeneti érték $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Fuzzyfikálási algoritmus: Minden R^i szabályhoz meghatározunk egy $\mu_i \in [0, 1]$ értéket.

3. Kiértékelés: A fuzzyfikálásból származó μ_i-vel súlyozott u_i-k átlaga lesz a nem fuzzy értékű kimeneti érték:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \right)^{-1} \qquad \text{(itt } u \text{ konkrét értéket jelöl).} \tag{5.405}$$

A MAMDANI-módszer kiértékelési eljárása itt nem használható. A p_j^i súlyparaméterek meghatározását végezhetjük gépi tanulási eljárással (például egy mesterséges neurális hálózat segítségével generálva ezen paraméterek értékét), ami lényegesen egyszerűbbé teszi a tervezési szakaszt.

5.9.6.3. Alkalmazási példák

A fuzzy következtetési rendszerek alkalmazására tekintsük a fordított inga MAMDANI-módszerrel történő **(5.82. ábra)** irányítását. Az irányítás célja egy vízszintes tengellyel rögzített rúd függőleges helyzetben való tartása, melyet a tengelyt tartó kocsi vízszintes irányú mozgatásával érünk el (azaz a függőlegestől való szögeltérés és a szögsebesség közelítően zérus legyen). A modellt egy emberi szakértő segítségével határozhatjuk meg. A szakértő a tudását nyelvi szabályokban fogalmazza meg. A nyelvi szabályok általában egy premisszából (azaz a mennyiségek bemeneti értékeiből) és egy következtetésből (ami egy alkalmas kimeneti érték) állnak.

A mennyiségek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ alaphalmazain és az Y kimeneti alaphalmazon a szabályokban szereplő fogalmaknak megfelelő nyelvi kifejezéseket (azaz fuzzy halmazokat) definiálunk; pl. „nagyjából zérus", „kis pozitív" stb. Így a „nagyjából zérus" kifejezésnek teljesen más jelentése lehet a x_1 mennyiségre vonatkozóan, mint x_2-re vonatkozóan, hiszen más alaphalmazon más értékhatárok között lehetnek értelmezve.

1. A fordított inga példája

1. Modellezés Válasszunk az X_1 (szög értékei) halmazhoz hét nyelvi kifejezést: negatív nagy (nn), negatív közepes (nk), negatív pici (np), nagyjából zérus (nz), pozitív pici (pp), pozitív közepes (pk) és pozitív nagy (pn) és ennek megfelelően az X_2 (szögsebesség értékei) mennyiségre is.

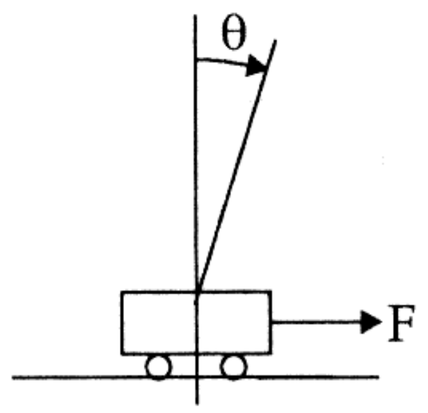
A matematikai modellezésnél minden nyelvi kifejezéshez egy fuzzy halmazt tartozik **(5.81. ábra)**, melyek grafikus ábrázolását az 5.9.4. pontban ismertettük. Az értékhatárok megállapítása:

- Szögértékek: $\theta(-90° < \theta < 90°)$: $X_1 := [-90°, 90°]$.
- Szögsebesség-értékek: $\dot{\theta}(-45°\mathrm{s}^{-1} \leq \dot{\theta} \leq 45°\mathrm{s}^{-1})$:

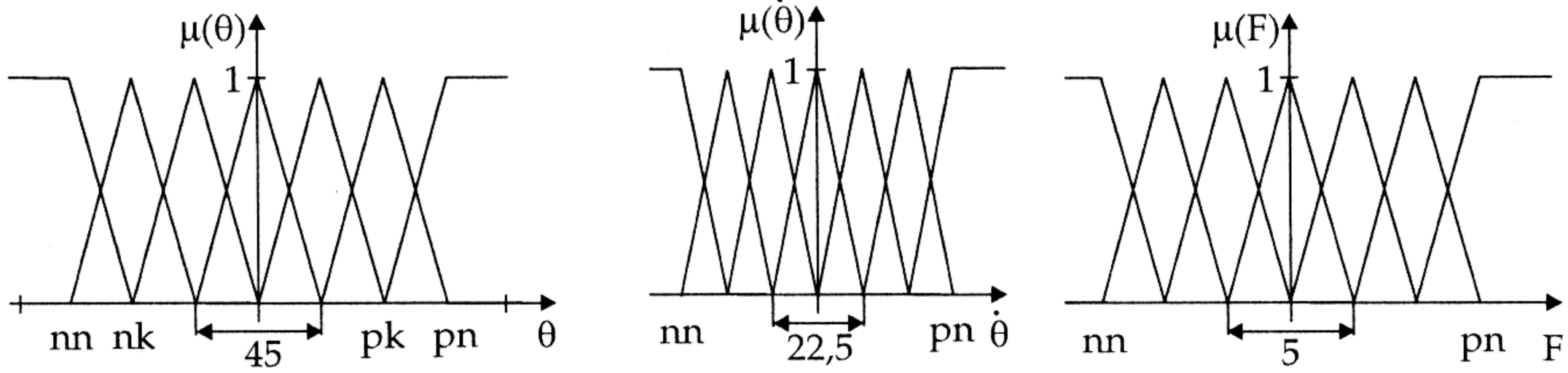
$X_2 := [-45°\mathrm{s}^{-1}, 45°\mathrm{s}^{-1}]$.

- Erőértékek F: $(-10\mathrm{N} \leq F \leq 10\mathrm{N})$: $Y := [-10\mathrm{N}, 10\mathrm{N}]$.

Az X_1 és X_2 bemeneti mennyiségek és Y kimeneti mennyiség felosztását a fordított ingára az **(5.83. ábra)** mutatja. A kezdőértékek általában aktuális mért értékek, például $\theta = 36°$, $\dot{\theta} = -2{,}25°\mathrm{s}^{-1}$.



5.82. ábra.



a) b) c)

5.83. ábra.

2. Az aktív szabályok kiválasztása A következő táblázat alapján a lehetséges 49 szabály (7×7) közül 19 a gyakorlatban is érvényes. Ezek közül az **R1** és **R2** szabályokat vizsgáljuk.

R1: Ha θ pozitív pici (pp) és $\dot{\theta}$ nagyjából zérus (nz), akkor F pozitív pici (pp). A szabály tüzelési értéke: $\alpha = \min\left\{\mu^{(1)}(\theta); \mu^{(1)}(\dot{\theta})\right\} = \min\{0{,}4; 0{,}8\} = 0{,}4$. Az (5.406) kimeneteli halmazt úgy kapjuk, hogy a pozitív pici (pp) kimeneti fuzzy halmaz α-vágatát képezzük $\alpha = 0{,}4$ magasságban **5.84.c ábra**.

Táblázat. Szabálybázis 19 gyakorlati szabállyal

$\theta\backslash\dot{\theta}$	nn	nk	np	nz	pp	pk	pn
nn			pp	pn			
nk				pk			
np	nk		np	pp			
nz	nn	nk	np	nz	pp	pk	pn
pp				np	pp		pk
pk				nk			
pn				nn	np		

R2: Ha θ pozitív közepes (pk) és $\dot{\theta}$ nagyjából zérus (nz), akkor F pozitív közepes (pk).
A szabály tüzelési értéke: $\alpha =$
$= \min\left\{\mu^{(2)}(\theta); \mu^{(2)}\dot{\theta}\right\} = \min\{0{,}6; 0{,}8\} = 0{,}6.$
Az (5.407) kimeneteli halmaz **R1**-hez hasonlóan adódik **(5.84.f ábra)**.

$$\mu_{36;-2,25}^{\text{Output}(R1)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}y & 0 \le y \le 1\,, \\ 0{,}4 & 1 \le y \le 4\,, \\ 2 - \frac{2}{5}y & 4 \le y \le 5\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases} \tag{5.406}$$

$$\mu_{36;-2,25}^{\text{Output}(R2)}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}y - 1 & 2{,}5 \le y \le 4\,, \\ 0{,}6 & 4 \le y \le 6\,, \\ 3 - \frac{2}{5}y & 6 \le y \le 7{,}5\,, \\ 0 & \text{különben}\,. \end{cases} \tag{5.407}$$

3. Következtetési algoritmus Az **R1** szabály konzekvensét az **5.84.a–c ábrán** látható módon a min operációval határozzuk meg. Az **R2** szabály megfelelő kiértékelését az **5.84.d-f ábra** mutatja. A fuzzy kimeneti halmazból **(5.84.g ábra)** egy tetszőleges kiértékelési módszerrel kapjuk meg a végső értéket.
a) A kapott fuzzy halmazok kiértékelése (lásd max-min kompozíció 376. old.) A következtetési algoritmus szerint:

$$\mu_{x_1,\ldots,x_n}^{\text{Output}} : Y \to [0,1]\,; y \to \max_{r\in\{1,\ldots,k\}} \left\{ \min\left\{ \mu_{i_{l,r}}^{(1)}(x_1), \ldots, \mu_{i_{l,r}}^{(n)}(x_n), \mu_{i_r}(y) \right\} \right\}. \tag{5.408}$$

b) A kimeneti fuzzy halmazok értékére a maximumképzés után (5.409) adódik.

c) A többi 17 szabály tüzelési értéke nulla, tehát nem játszanak szerepet a végső következtetést kialakításában.

4. Kiértékelés A következtetési algoritmus nem konkrét értéket szolgáltat, hanem egy fuzzy halmazt. Ez azt jelenti, hogy a módszer minden $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ érték n-esre Y egy $\mu_{x_1,\ldots,x_n}^{\text{Output}}$ fuzzy halmazát adja eredményül.

$$\mu_{36;-2,25}^{\text{Output}}(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}y, & \text{ha} \quad 0 \le y \le 1, \\ 0{,}4, & \text{ha} \quad 1 \le y \le 3,5, \\ \frac{2}{5}y - 1, & \text{ha} \quad 3{,}5 \le y \le 4, \\ 0{,}6, & \text{ha} \quad 4 \le y \le 6, \\ 3 - \frac{2}{5}y, & \text{ha} \quad 6 \le y \le 7{,}5, \\ 0, & \text{ha} \quad \text{különben.} \end{cases} \tag{5.409}$$

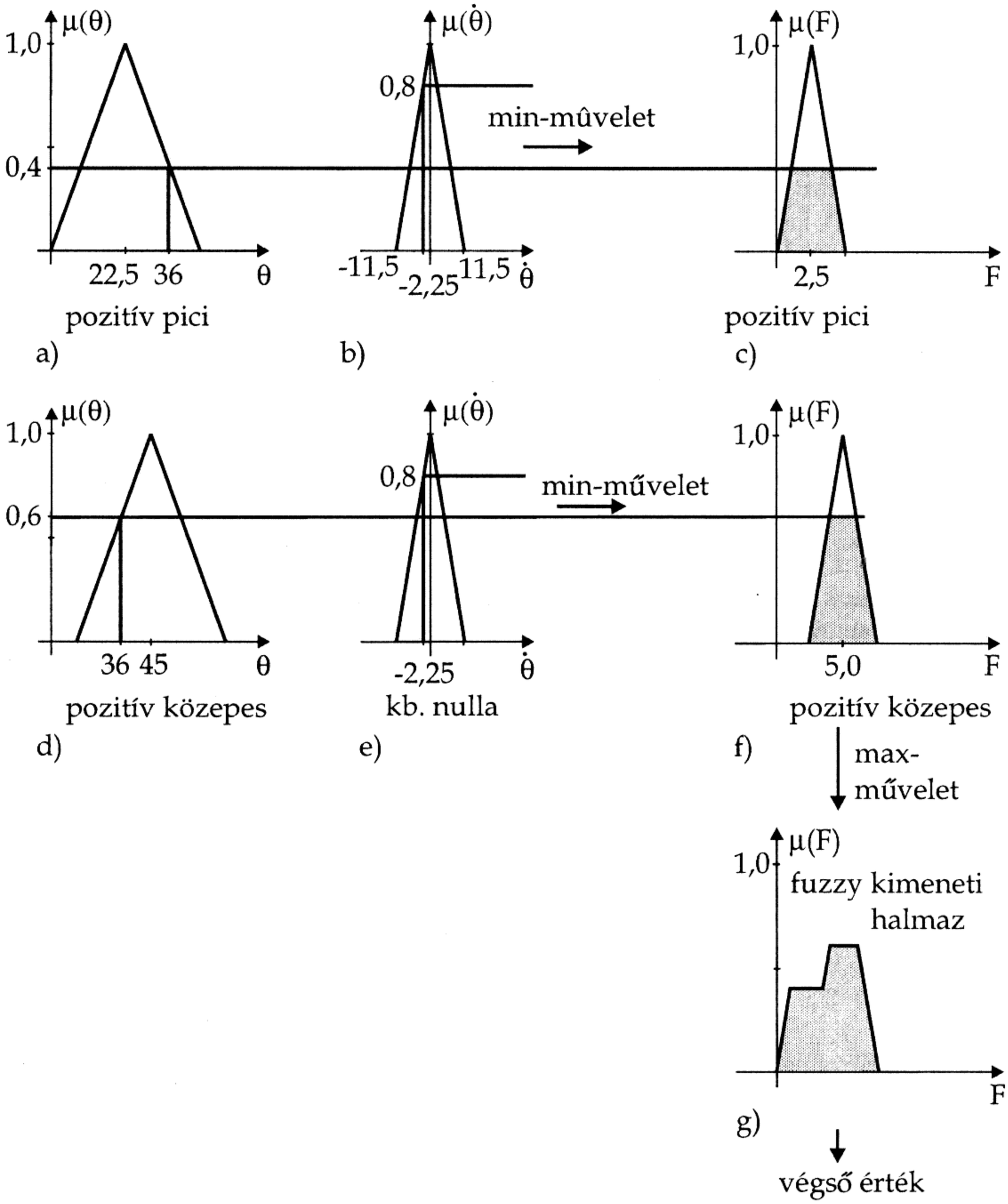
A kiértékelés egy konkrét kimeneti értéket ad meg.
A súlypont- és a maximum kritérium módszer az $F = 3{,}95$, ill. $F = 5{,}0$ értékeket adják.

5.9.6.4. Tudásalapú interpolációs rendszer

1. Interpolációs mechanizmusok

A fuzzy logika segítségével felépíthetők az interpolációs mechanizmusok. A fuzzy rendszerek pontatlan információk feldolgozására alkalmas rendszerek, melyek felhasználhatók függvények approximálására és interpolálására. A legegyszerű fuzzy rendszer esetében (a SUGENO–szabályozó) megvizsgálták ezen jellemzőket. E rendszernek n számú bemenő változója van $\xi_1, \ldots, \xi_n$ és meghatározza az $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n$ szabályok alapján az y kimeneti változó értékét. A szabályok alakja:

$$\mathrm{R}_i\colon \text{ HA } \xi_1 \ A_1^{(i)} \text{ és } \cdots \text{ és } \xi_n \ A_n^{(i)}\,, \text{AKKOR } y = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{5.410}$$



5.84. ábra.

Az $A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(k)}$ fuzzy halmazcsaládok az X_j bemeneti halmazokat partícionálják. A szabályok által generált $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ konklúziók szingletonok, melyek függhetnek a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bemeneti változóktól. A kiértékelés egyszerű módja, ha az y kimeneti értéket súlyozott összegként számoljuk.

A szabályozó minden R_i-re a különböző bemeneti értékek tagsági értékéből egy t-normával kiszámolja az α_i tüzelési értéket, és meghatározza a kimeneti értéket:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} . \tag{5.411}$$

2. Megszorítás az egydimenziós esetre

Csak egy $x = \xi_1$ bemenettel rendelkező fuzzy rendszerek esetén gyakran használnak háromszög alakú fuzzy halmazokat, amelyeket úgy helyeznek el, hogy az egymás melleti halmazok metszetének magassága 0,5 (ilyen partíciók láthatók az **5.83. ábrán** is). Az ilyen fuzzy halmazcsaládok kielégítik az alábbi három feltételt:

1. Minden R_i szabályhoz van olyan x_i bemenet, melyre csak egy szabály teljesül. Erre az x_i bemenetre kiszámítjuk az f_i kimenetet. Így a fuzzy rendszer kimenete N osztóponton $(x_1, \ldots, x_N)$ van rögzítve. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a fuzzy rendszer interpolálja az $x_1, \ldots, x_N$ osztópontokat. Az a feltétel, hogy az x_i osztópontokon csak az R_i legyen érvényes egy pontos interpolációhoz elégséges, de nem szükséges. Két R_1 és R_2 szabályra az elégséges feltétel: $\alpha_1(x_2) = \alpha_2(x_1) = 0$, ez egyben 1. feltétel teljesítését is jelenti.

2. Két egymást követő osztópont között legfeljebb 2 szabály lehet aktív. Ha x_1 és x_2 két ilyen osztópont az R_1 és R_2 szabályokkal, akkor az $x \in [x_1, x_2]$ bemenetekre az y kimenet a

$$y = \frac{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = f_1 + g(f_2 - f_1) \tag{5.412}$$

képlettel számolható, ahol f_1, f_2, α_1 és α_2 x-től függ, továbbá $g := \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Az interpolációs görbét az x_1 és x_2 között a g függvény adja meg, amit görbemenetnek nevezünk. Csak az α_1 és α_2 értékektől függ, amelyek a $\mu_{A_i^{(1)}}$ és $\mu_{A_i^{(2)}}$ tagsági függvények x helyen felvett értékei, azaz $\alpha_1 = \mu_{A^{(1)}}(x)$ és $\alpha_2 = \mu_{A^{(2)}}(x)$, vagy röviden $\alpha_1 = \mu_1(x)$ és $\alpha_2 = \mu_2(x)$. A görbemenet csak a tagsági függvények μ_1/μ_2 kapcsolatától függ.

3. A tagsági függvények pozitívak, így az f_i konklúziók konvex kombinációja az y kimenet. Ezért teljesül:

$$\min(f_1, f_2) \leq y \leq \max(f_1, f_2), \tag{5.413}$$

illetve az általános esetben

$$\min_{i=1,2,\ldots,N} f_i \leq y \leq \max_{i=1,2,\ldots,N} f_i\,. \tag{5.414}$$

Konstans konklúziók esetén az f_1 és f_2 kifejezések csak eltolásként és nyújtásként hatnak a g görbemenetre. Amennyiben a konklúziók függnek a bemeneti változóktól, akkor a görbemenet a különböző szakaszokon különböző alakú lesz. Így egy másik kimeneti függvényt kaphatunk.

Ha az x bemenettől lineárisan függő konklúziókat és konstans összegű tagsági függvényeket használunk, akkor a kimenet $y = c\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x)$, ahol α_i x-től függ és c konstans, így interpolációs függvényként másodfokú polinomokat kapunk. Ezeket a polinomokat felhasználhatjuk egy másodfokú polinomokkal való interpolációs eljárás megkonstruálásához.

Általánosságban a konklúziók n-ed fokú polinomként való megválasztása egy $n+1$-ed fokú interpolációs polinomot eredményez. Ezért lehet a szokványos interpolációs eljárások, melyek lokálisan polinomokkal interpolálnak (például spline-ok), a fuzzy rendszerekkel is elvégezhetők.

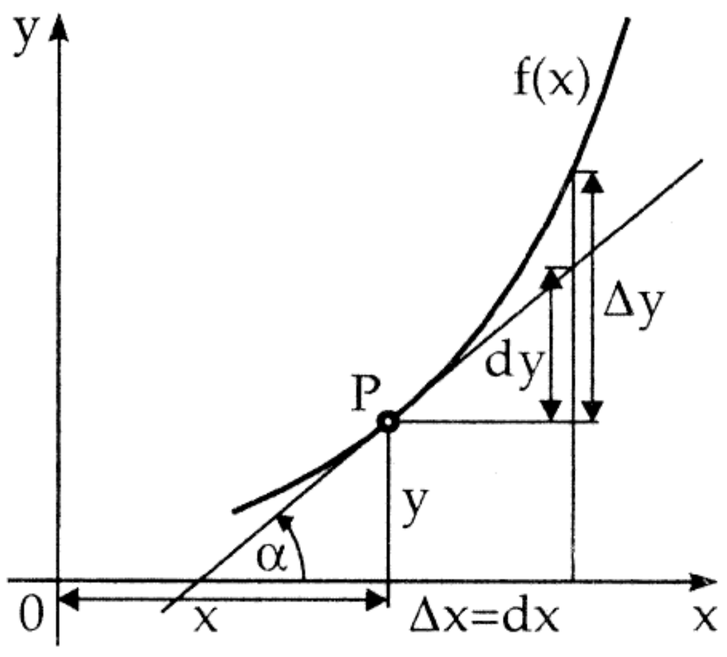
6. Differenciálszámítás

6.1. Egyváltozós függvények differenciálása

6.1.1. Differenciálhányados

1. Differenciálhányados, függvény deriváltja Az $y = f(x)$ függvény deriváltjának jelölése: y', $\dot{y}$, Dy, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $Df(x)$ vagy $\frac{df(x)}{dx}$. Jelöljük x és y változását Δx-szel, illetve Δy-nal. A deriváltat megkapjuk, ha a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadosnak vesszük a határértékét, amikor $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$



6.1. ábra.

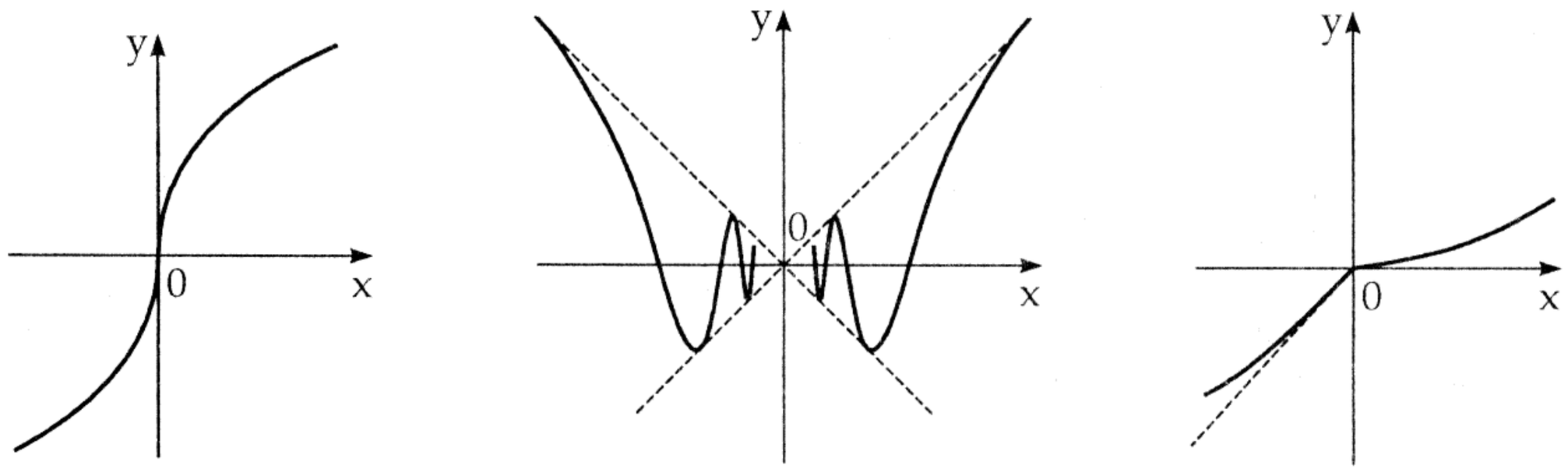
2. A derivált geometriai jelentése Ha a függvényt a DESCARTES-féle koordinátarendszerben ábrázoljuk és az x- és y-tengelyre ugyanakkora egységet veszünk fel **(6.1. ábra)**, akkor

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha\,. \tag{6.2}$$

Az x-tengelynek és a görbe adott pontjához húzott érintőnek α hajlásszöge határozza meg az *érintő meredekségét* (lásd 227. old.). A szög pozitív, ha a pozitív x tengelyt az óramutató járásával ellentétes irányba elforgatva jutunk az érintőhöz. Az α szöget az érintő *irányszög*ének nevezzük.

3. Differenciálhatóság Az $f(x)$ függvény deriváltja az x változónak azon értékeire létezik, amelyekre a (6.1) differenciálhányados véges.

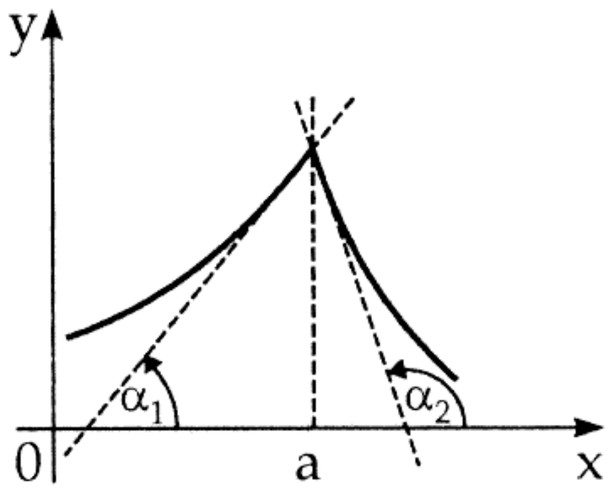
Ha egy x pontban nem létezik differenciálhányados, akkor ennek két oka lehet: vagy az adott pontban nem húzható érintő, vagy az érintő merőleges az x-tengelyre. Ebben az utóbbi esetben a kérdéses (6.2) határérték végtelen. Itt az $f'(x) = +\infty$, ill. $f'(x) = -\infty$ jelölést használjuk.



6.2. ábra.

■ **A:** $f(x) = \sqrt[3]{x}$: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0) = \infty$. Az $x = 0$ helyen a derivált a végtelenhez tart, tehát a differenciálhányados itt nem értelmezhető, nem létezik. Az érintő pedig merőleges az x-tengelyre **(6.2.a ábra)**.

■ **B:** $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $f(0) = 0$: Az $x = 0$ helyen az $f(x)$ függvénynek nincs differenciálhányadosa, a kérdéses határérték nem értelmezhető **(6.2.b ábra)**.



6.3. ábra.

4. Bal és jobb oldali derivált Ha az $x = a$ helyen a (6.2) előírás szerint nem létezik határérték, de van bal oldali és jobb oldali határérték, akkor ezeket bal, illetve jobb oldali deriváltaknak nevezzük. A görbe megfelelő pontjához csak két oldalról húzható érintő, de magához az $(a, f(a))$ ponthoz nem.

$$f'(a-0) = \operatorname{tg}\alpha_1\,, \quad f'(a+0) = \operatorname{tg}\alpha_2 \tag{6.3}$$

Geometriailag vizsgálva, ez a két derivált jelzi azt, hogy a görbének az $x = a$ helyen törése van **(6.2.c ábra, 6.3. ábra)**.

■ **C:** $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$: Az $x = 0$ helyen (6.1) szerint nincs deriváltja, de van bal- és jobb oldali határértéke

$f'(-0) = 1$ és $f'(+0) = 0$, így a görbe az $x = 0$ helyen megtörik **(6.2.c ábra)**.

6.1.2. Egyváltozós függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok

6.1.2.1. Elemi függvények deriválása

Az elemi függvények az értelmezési tartományuk pontjaiban általában differenciálhatók. Ez alól csak egyes pontok alkotnak kivételt, ezt láthatjuk az **6.2. ábrán** is.

Az elemi függvények deriváltjait a **6.1. táblázatban** találhatjuk meg. További elemi függvények deriváltjait a határozatlan integrálokat tartalmazó **8.1. táblázat** adataiból visszakövetkeztetéssel határozhatjuk meg.

Megjegyzés: A gyakorlati feladatok megoldásakor célszerű a függvény deriválása előtt a függvényt, amennyire ez lehetséges, összeg formájában felírni. Ennek érdekében zárójeleket bonthatunk fel (lásd 11. old.), a törtek egész részét különválaszthatjuk (lásd 14. old.), vehetjük a kifejezés logaritmusát (lásd 9. old.), stb.

■ **A:** $y = \dfrac{2-3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+x^2}{x} = \dfrac{2}{x} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + x\,; \quad \dfrac{dy}{dx} = -2x^{-2} + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} + 1\,.$

■ **B:** $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)\,; \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right) = -\dfrac{2x}{x^4-1}\,.$

6.1.2.2. A differenciálás alapszabályai

Az x független változó függvényeit az u, v, w és y betűkkel jelöljük, ezeknek a függvényeknek az x szerinti deriváltjait pedig az u', v', w' és y' szimbólumokkal. A differenciálok jelölése: du, dv, dw és dy. (lásd 398. old.). A differenciálás szabályait az alábbiakban ismertetjük. Ezeket a szabályokat áttekinthető formában a **6.2. táblázat** tartalmazza a 390. oldalon.
A továbbiakban feltesszük, hogy az u, v, w, y függvények valamennyien differenciálhatók ott, ahol hivatkozunk rájuk.

1. Konstans deriváltja

A c konstans deriváltja nulla.

$$c' = 0\,. \tag{6.4}$$

2. Konstanssal szorzott függvény deriváltja

A c konstans szorzót kivihetjük a differenciálszimbólum elé:

$$(cu)' = cu'\,, \quad d(cu) = c\,du\,. \tag{6.5}$$

3. Összeg deriváltja

Több függvény összegének deriváltja egyenlő ezen függvények deriváltjainak összegével. (Különbség esetén tekinthetjük úgy, hogy a kivonandó függvény (-1)-szeresét vesszük összeadandónak.)

$$(u+v-w)' = u' + v' - w', \tag{6.6a}$$

$$d(u+v-w) = du + dv - dw\,. \tag{6.6b}$$

6.1. táblázat. Elemi függvények deriváltjai olyan intervallumokon, ahol léteznek és ahol a nevező $\neq 0$.

Függvény	**Derivált**	**Függvény**	**Derivált**
C (konstans)	0	$\sec x$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
x	1	$\operatorname{cosec} x$	$\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{R})$	nx^{n-1}	$\arcsin x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arccos x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{R},\ n \neq 0,\ x > 0)$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arccosec} x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$e^{bx} \quad (b \in \mathbb{R})$	be^{bx}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$a^x \quad (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$a^{bx} \quad (b \in \mathbb{R},\ a > 0)$	$ba^{bx} \ln a$	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{cth} x \quad (x \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x \quad (x > 0)$	$\dfrac{1}{x}\lg e \approx \dfrac{0,4343}{x}$	$\operatorname{arch} x \quad (x > 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arth} x \quad (\lvert x\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arcth} x \quad (\lvert x\rvert > 1)$	$-\dfrac{1}{x^2-1}$
$\operatorname{tg} x \quad (x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$[f(x)]^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
$\operatorname{ctg} x \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\ln f(x) \quad (f(x) > 0)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4. Szorzat deriváltja

Függvényekből álló két, három, ill. n tényezőből álló szorzat deriválására a következő szabályok vonatkoznak:

a) Két tényezős szorzat esetén:

$$(u\,v)' = u'\,v + uv'\,, \quad d(u\,v) = v\,du + u\,dv\,. \tag{6.7a}$$

b) Három tényezős szorzat esetén:

$$(u\,v\,w)' = u\,v\,w' + u\,v'w + u'v\,w\,, \quad d(u\,v\,w) = u\,v\,dw + u\,w\,dv + v\,w\,du\,. \tag{6.7b}$$

c) n tényezős szorzat esetén:

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1u_2\cdots u_i'\cdots u_n\,. \tag{6.7c}$$

■ **A:** $y = x^3\cos x\,, \quad y' = 3x^2\cos x - x^3\sin x\,.$

■ **B:** $y = x^3e^x\cos x\,, \quad y' = 3x^2e^x\cos x + x^3e^x\cos x - x^3e^x\sin x\,.$

5. Hányados deriváltja

Két függvény hányadosának a deriváltját az alábbi előírás szerint határozzuk meg, természetesen azzal a feltétellel, hogy $v(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}\,, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \tag{6.8}$$

■ $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\,, \quad y' = \dfrac{(\cos x)(\sin x)' - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,.$

6. Összetett függvény deriváltja (láncszabály)

Az $y = u(v(x))$ közvetett függvény (lásd 60. old,) deriváltja:

$$\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}\,, \tag{6.9}$$

itt az $u = u(v)$ és a $v = v(x)$ differenciálható függvények, ezek argumentuma is leolvasható. Az $u(v)$ függvényt külső, a $v(x)$ függvényt belső függvénynek nevezzük. Így $\dfrac{du}{dv}$ a *külső függvény deriváltja* és $\dfrac{dv}{dx}$ a *belső függvény deriváltja.*

Hasonlóan járunk el, ha a „lánc" több, egymásba írt függvényből áll. Így például az $y = u(v(w(x)))$ függvény deriváltja:

$$y = u(v(w(x)))\,, \quad y' = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}\,. \tag{6.10}$$

■ **A:** $y = e^{\sin^2 x}\,, \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\left(e^{\sin^2 x}\right)}{d\left(\sin^2 x\right)}\dfrac{d\left(\sin^2 x\right)}{d\left(\sin x\right)}\dfrac{d\left(\sin x\right)}{dx} = e^{\sin^2 x}\,2\,\sin x\cos x\,.$

■ **B:** $y = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\,; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\left(e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\right)}{d\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}\dfrac{d\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{d\left(\sqrt{x}\right)}\dfrac{d(\sqrt{x})}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,.$

7. Logaritmikus differenciálás

Ha $y(x) > 0$, akkor az y' derivált meghatározásához kiindulhatunk az $\ln y(x)$ függvényből. A láncszabály értelmében:

$$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y(x)}y'\,. \tag{6.11}$$

Ebből azonnal következik:

$$y' = y(x)\,\frac{d(\ln y)}{dx}\,. \tag{6.12}$$

1. Megjegyzés: A logaritmikus differenciálás segítségével sok feladatot lényegesen egyszerűbben, sőt egyeseket csak így tudunk megoldani. Ez érvényes a következő alakú függvényekre:

$$y = u(x)^{v(x)} \text{ ahol } u(x) > 0 \tag{6.13}$$

Ennek a függvénynek a logaritmikus differenciálása a következőképpen történik (6.12):

$$y' = y\,\frac{d\,(\ln u^v)}{dx} = y\,\frac{d(v\ln u)}{dx} = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right). \tag{6.14}$$

■ $y = (2x+1)^{3x}$, $\ln y = 3x\ln(2x+1)$, $\dfrac{y'}{y} = 3\ln(2x+1) + \dfrac{3x\cdot 2}{2x+1}$;

$$y' = 3\,(2x+1)^{3x}\left(\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}\right).$$

2. Megjegyzés: A logaritmikus differenciálást akkor is gyakran használjuk, ha függvények szorzatát kell differenciálnunk.

■ **A:** $y = \sqrt{x^3 e^{4x}\sin x}$, $\ln y = \dfrac{1}{2}(3\ln x + 4x + \ln\sin x)$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + 4 + \frac{\cos x}{\sin x}\right), \quad y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^3 e^{4x}\sin x}\left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x\right).$$

■ **B:** $y = uv$, $\ln y = \ln u + \ln v$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{u}u' + \dfrac{1}{v}v'$. Ebből következik: $y' = (uv)' = vu' + uv'$. Így is eljuthatunk a szorzat deriválásának szabályához (6.7a).

■ **C:** $y = \dfrac{u}{v}$, $\ln y = \ln u - \ln v$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{u}u' - \dfrac{1}{v}v'$. Ebből következik: $y' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v} - \dfrac{uv'}{v^2} = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$. Így is megkaptuk a hányados deriválási szabályát (6.8).

8. Inverz függvény deriváltja

Ha $y = \varphi(x)$ az eredeti $y = f(x)$ függvény inverze, akkor igaz az, hogy az $y = f(x)$ és az $x = \varphi(y)$ alakok egyenértékűek. Ha feltételezzük, hogy $\varphi'(y) \neq 0$ és $f(x)$ differenciálható, akkor az f függvény deriváltja és az ő inverzfüggvényének φ-nek a deriváltja között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{ill.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}. \tag{6.15}$$

■ A $(-1 < x < 1)$ intervallumon értelmezett $y = f(x) = \arcsin x$ függvény és a $-\pi/2 < y < \pi/2$ intervallumon értelmezett $x = \varphi(y) = \sin y$ függvény ekvivalens. (6.15)-ből következik, hogy

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Tudjuk, hogy a $-\pi/2 < y < \pi/2$ intervallumon $\cos y \neq 0$.

9. Implicit függvény deriváltja

Az $y = f(x)$ függvényt adja meg implicit alakban az $F(x,y) = 0$ egyenlet. A többváltozós függvények differenciálási szabályainak (lásd 398. old.) megfelelően, x szerint deriválva nyerjük:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0, \quad \text{ill.} \quad y' = -\frac{F_x}{F_y}, \tag{6.16}$$

amennyiben az F_y parciális derivált nem nulla.

■ Az a és a b féltengelyekkel rendelkező ellipszis $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ egyenlete felírható az $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ alakban. Az ellipszis (x,y) pontjához húzott érintő iránytangensét (6.16) szerint határozhatjuk meg:

$$y'=-\frac{2x}{a^2}\Big/\frac{2y}{b^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\,.$$

10. Paraméteres alakban adott függvény deriváltja

Ha az $y=f(x)$ függvény az $x=x(t)\,,\ y=y(t)$ paraméteres alakban adott, akkor az y' deriváltat a következő formula segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{\dot y}{\dot x} \tag{6.17}$$

ahol $\dot y(t)=\dfrac{dy}{dt}$ és $\dot x(t)=\dfrac{dx}{dt}$ a t paraméter szerinti deriváltak, valamint feltételezzük azt is, hogy $\dot x(t)\neq 0$.

■ **Polárkoordinátákkal adott függvény deriváltja** Ha egy függvény $r=r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban adott (lásd 191. old.), akkor paraméteres alakja

$$x=r(\varphi)\cos\varphi\,,\quad y=r(\varphi)\sin\varphi \tag{6.18}$$

Itt a φ szög a paraméter. A görbe érintőjének y' meredekségét (lásd 227. old. vagy 384. old.) (6.17) szerint határozhatjuk meg:

$$y'=\frac{\dot r\sin\varphi+r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi-r\sin\varphi}\quad\text{ahol }\ \dot r=\frac{dr}{d\varphi}\,. \tag{6.19}$$

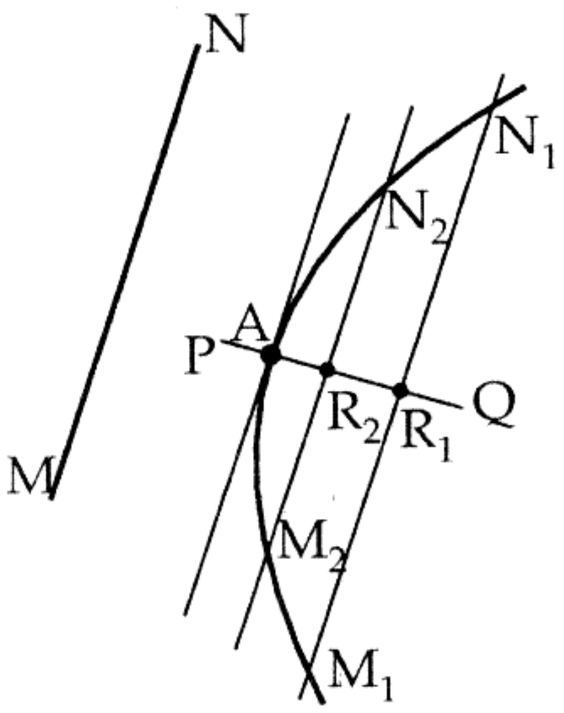
Megjegyzések:

1. $\dot x$ és $\dot y$ adja a görbe $(x(t)\,,\ y(t))$ pontjához tartozó érintővektor komponenseit.

2. Gyakran előnyösen használható a komplex számokra vonatkozó alábbi szabály:

$$x(t)+\mathrm{i}\,y(t)=z(t),\quad \dot x(t)+\mathrm{i}\,\dot y(t)=\dot z(t)\,,\ \ldots\,. \tag{6.20}$$

■ **Körmozgás:** $z(t)=re^{\mathrm{i}\omega t}\quad(r=\text{const})\,,\quad \dot z(t)=ri\omega e^{\mathrm{i}\omega t}=r\omega e^{\mathrm{i}(\omega t+\frac{\pi}{2})}$. Az érintővektor a helyvektort $\pi/2$ fáziseltolódással megelőzi.



6.4. ábra.

11. Grafikus differenciálás

Ha az $y=f(x)$ differenciálható függvény Γ görbéjét a DESCARTES-féle koordinátarendszerben adott $a<x<b$ intervallumon ábrázoljuk, akkor közelítő módszerrel megszerkeszthetjük a deriváltjának Γ'-nek a görbéjét is. A görbe egy adott pontjához szemmérték szerint húzott érintő nagyon rosszul sikerülhet. Ha azonban ismerjük az érintő MN irányát **(6.4. ábra)**, akkor az A érintési pontot nagyobb pontossággal tudjuk meghatározni.

a) Az érintő érintési pontjának meghatározása

Az érintő adott MN irányával párhuzamosan úgy húzunk meg két szelőt, $\overline{M_1N_1}$ és $\overline{M_2N_2}$, hogy azok a görbét két közeli pontban messék. A szelők felezőpontjain keresztül meghúzzuk a PQ egyenest, ez a görbét az A pontban metszi. Ez az érintési pont. Az érintő iránya az adott MN irány. A pontosságot úgy ellenőrizhetjük, hogy az első két szelőtől nem nagy távolságra egy harmadik szelőt húzunk. A rajz pontos, ha a PQ egyenes ezt a szelőt a felezőpontjában metszi.

b) Derivált függvény görbéjének megszerkesztése

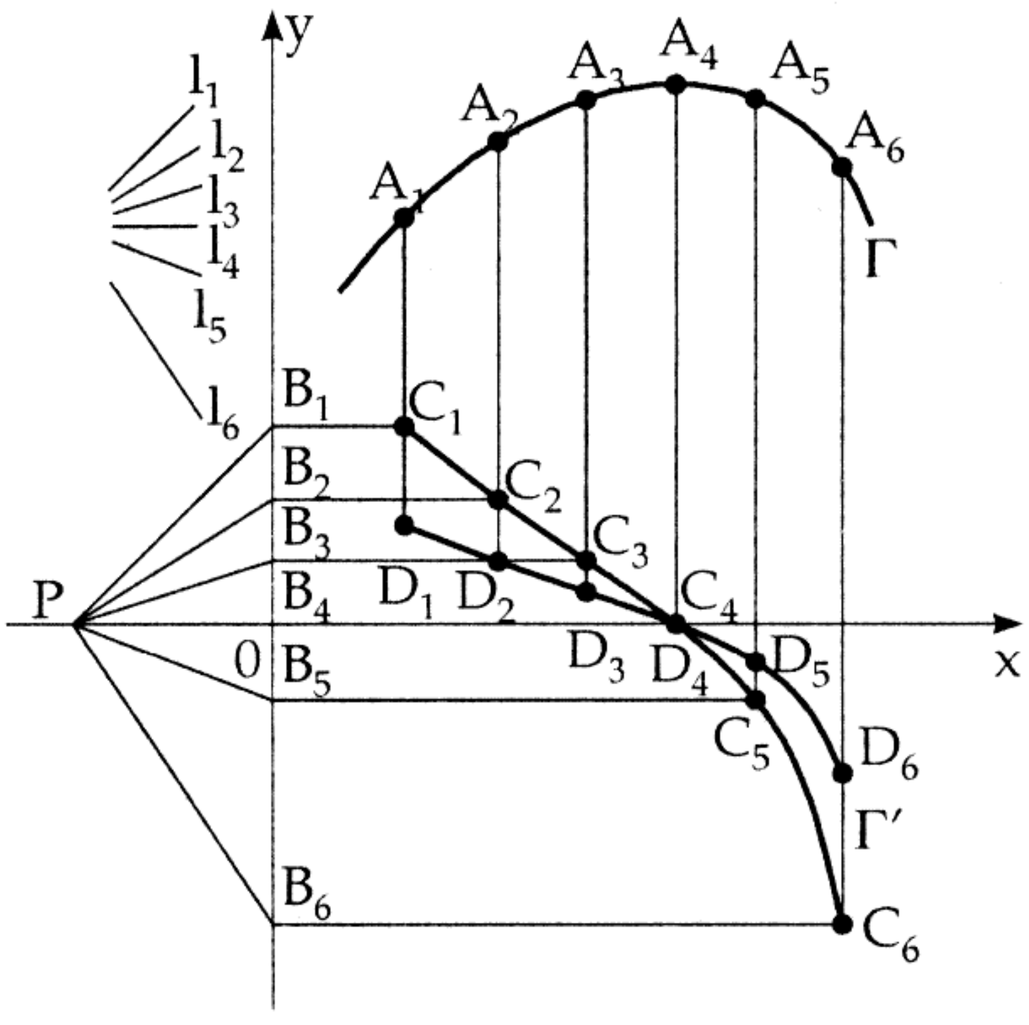
1. Ismeretes néhány irány: $l_1,l_2,\ldots,l_n$, ezek az $y=f(x)$ görbe vizsgált intervallumában az érintők

6.2. táblázat. Differenciálási szabályok

Függvény	**A derivált alakja**
Konstans	$c' = 0 \quad (c \text{ konst})$
Konstanssal szorzott függvény	$(cu)' = cu' \quad (c \text{ konst})$
Függvények összege	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Két függvény szorzata	$(uv)' = u'v + uv'$
n függvény szorzata	$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$
Két függvény hányadosa	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
Összetett függvény (láncszabály)	$y = u(v(x))\colon \quad y' = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$
Láncszabály három függvényre	$y = u(v(w(x)))\colon \quad y' = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$
Hatványfüggvény	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$ spec. : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
Függvény logaritmusa	$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y}y' \Longrightarrow y' = y\frac{d(\ln y)}{dx}$ spec. : $(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) \quad (u > 0)$
Inverzfüggvény	az f függvény inverze φ, azaz $y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)$: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ vagy $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
Implicit függvény	$F(x,y) = 0\colon \quad F_x + F_y\, y' = 0$ vagy $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y};\ F_y \neq 0\right)$
Paraméteres alakban adott függvény	$x = x(t),\ y = y(t)$ (t paraméter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right)$
Polárkoordinátákkal adott függvény	$r = r(\varphi)\colon \quad \begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}$ (a φ szög paraméter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi} \quad \left(\dot{r} = \frac{dx}{d\varphi}\right)$

irányainak felelnek meg **(6.5. ábra)**. Ismerjük a hozzájuk tartozó $A_1, A_2, \ldots, A_n$ érintési pontokat. Az érintők megszerkesztése felesleges.

2. A negatív x-tengelyen választunk egy *alappont*ot, a P pontot, úgy, hogy a $PO = a$ szakasz annál nagyobb legyen, minél laposabb a görbe.



6.5. ábra.

3. Rajzoljuk meg az $l_1, l_2, \ldots,$ ill. l_n irányokkal párhuzamos egyeneseket, melyek a P alappontból kiindulva az y-tengelyt a $B_1, B_2, \ldots,$ ill. B_n pontokban metszik.

4. Megrajzoljuk a $B_1C_1, B_2C_2, \ldots, B_nC_n$ vízszintes egyenes-szakaszokat a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontoktól a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pontokig, azaz az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ -ből húzott függőlegesekkel való metszéspontjukig.

5. Kössük össze egy görbe vonalzóval a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pontokat. Az így nyert görbe az $y = af'(x)$ függvénynek felel meg. Ha az a szakaszt úgy választottuk, hogy akkora mint az y-tengelyen felvett hosszúságegység, akkor az így nyert görbe a keresett derivált-függvény görbéje. Ha nem ez az eset, akkor a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pontok ordinátáit $\frac{1}{a}$-val kell szoroznunk. Az így nyert $D_1, D_2, \ldots, D_n$ pontok **(6.5. ábra)** a mértéknek megfelelő Γ' görbére illeszkednek.

6.1.3. Magasabb rendű deriváltak

6.1.3.1. A magasabb rendű derivált definíciója

Az $y' = f'(x)$ függvény deriváltját, tehát az $(y')'$ vagy a $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ függvényt az $y = f(x)$ függvény másodrendű deriváltjának nevezzük és a következő szimbólumok egyikével jelöljük: $y'', \ddot{y}, \frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$ vagy $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. A magasabb rendű deriváltakat is hasonló módon definiáljuk. Az $y = f(x)$ függvény n-edik deriváltjának jelölései:

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} \quad \left(n = 0, 1, \ldots\,;\ y^{(0)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x)\right) . \tag{6.21}$$

6.1.3.2. Egyszerűbb függvények magasabb rendű deriváltjai

A **6.3. táblázatban** találjuk az egyszerűbb függvények n-dik deriváltjait.

6.1.3.3. A Leibniz-formula

Két függvény szorzatának n-dik deriváltját a LEIBNIZ-formula segítségével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} D^n(uv) = u\,D^nv\, &+\frac{n}{1}Du\,D^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}D^2u\,D^{n-2}v + \cdots \\ &+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}D^mu\,D^{n-m}v + \cdots + D^nu\,v \end{aligned} \tag{6.22}$$

6.3. táblázat. Néhány elemi függvény magasabb rendű deriváltja

Függvény	***n*-edik derivált**
x^m	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ (ha m egészszám és $n>m$, akkor az n-edik derivált 0)
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin(x+\frac{n\pi}{2})$
$\cos x$	$\cos(x+\frac{n\pi}{2})$
$\sin kx$	$k^n\sin(kx+\frac{n\pi}{2})$
$\cos kx$	$k^n\cos(kx+\frac{n\pi}{2})$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$, ha n páros, $\operatorname{ch} x$ ha n páratlan
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$, ha n, páros, $\operatorname{sh} x$ ha n, páratlan

ahol $D^{(n)}=\dfrac{d^n}{dx}$. Ha a $D^0u=u$ és a $D^0v=v$ helyettesítést elvégezzük, olyan formulához jutunk, amelynek alakja a binomiális tétel alakjával egyezik meg (lásd 12. old.):

$$D^n(uv)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}D^m u D^{n-m}v\,. \tag{6.23}$$

■ **A:** $(x^2\cos ax)^{(50)}$: A $v=x^2$, $u=\cos ax$ helyettesítéssel kapjuk $u^{(k)}=a^k\cos\left(ax+k\frac{\pi}{2}\right)$, $v'=2x$, $v''=2$, $v'''=v^{(4)}=\dots=0$. Az első három tag kivételével a többi összeadandó értéke nulla, így
$(uv)^{(50)}=x^2a^{50}\cos\left(ax+50\frac{\pi}{2}\right)+\dfrac{50}{1}\cdot 2xa^{49}\cos\left(ax+49\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2a^{48}\cos\left(ax+48\dfrac{\pi}{2}\right)=$
$=a^{48}[(2450-a^2x^2)\cos ax-100ax\sin ax]$.

■ **B:** $(x^3e^x)^{(6)}=\binom{6}{0}\cdot x^3e^x+\binom{6}{1}\cdot 3x^2e^x+\binom{6}{2}\cdot 6xe^x+\binom{6}{3}\cdot 6e^x$.

6.1.3.4. Paraméteres alakban adott függvények magasabb rendű deriváltjai

Ha az $y=f(x)$ függvény $x=x(t)$, $y=y(t)$ paraméteres alakját ismerjük, akkor magasabb rendű deriváltjait (y'', y''' stb.) az alábbi formulák alapján határozhatjuk meg, ahol $\dot y(t)=\dfrac{dy}{dt}$, $\dot x(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $\ddot y(t)=\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $\ddot x=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ stb. a t paraméter szerinti deriváltakat jelenti:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot x\ddot y-\dot y\ddot x}{\dot x^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dot x^2\dddot y-3\dot x\ddot x\ddot y+3\dot y\ddot x^2-\dot x\dot y\dddot x}{\dot x^5},\dots. \tag{6.24}$$

Ennek az a feltétele, hogy $\dot{x}(t) \neq 0$.

6.1.3.5. Inverz függvények magasabb rendű deriváltjai

Ha $y = \varphi(x)$ az eredeti $y = f(x)$ függvény inverz függvénye, akkor igaz az, hogy az $y = f(x)$ és az $x = \varphi(y)$ alakok ekvivalensek. Amennyiben feltételezzük, hogy $\varphi'(y) \neq 0$ akkor az f függvény és φ inverzének a deriváltjai között fennáll a (6.15) összefüggés. Magasabb rendű deriváltakra (y'', y''' stb.) fennáll:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \ldots . \tag{6.25}$$

6.1.4. A differenciálszámítás legfontosabb tételei

6.1.4.1. Monotonitási feltételek

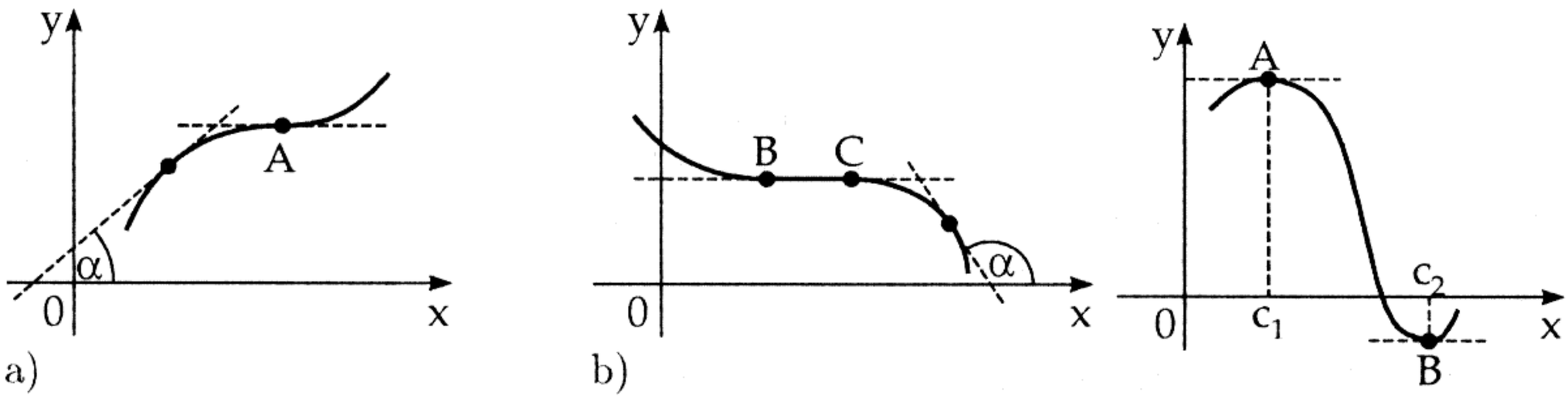
Ha egy összefüggő halmazon (azaz intervallumon) az $f(x)$ függvény mindenütt értelmezve van és folytonos, valamint ezen intervallum minden belső pontjában deriválható, akkor a függvény monotonitásának szükséges és elégséges feltétele:

$$f'(x) \geq 0: \quad \text{monoton növekedő függvény,} \tag{6.26a}$$

$$f'(x) \leq 0: \quad \text{monoton csökkenő függvény.} \tag{6.26b}$$

Ha azt kívánjuk, hogy a függvény szigorúan monoton növekedő vagy csökkenő legyen, akkor hozzá kell tennünk azt a feltételt, hogy az $f'(x)$ derivált a fenti intervallum egyetlen részintervallumában sem azonosan nulla. Ez a feltétel nem teljesül a **6.6.b ábra** $\overline{BC}$ szakaszán.

A monotonitási feltétel geometriailag azt jelenti, hogy a monoton növekedő függvény görbéje — balról jobbfelé haladva — sehol sem süllyed, azaz vagy emelkedik, vagy vízszintesen halad **(6.6.a ábra)**. Ennek megfelelően a görbe egyes pontjaihoz húzott érintő vagy hegyesszöget zár be a pozitív x-tengellyel, vagy vele párhuzamos. Hasonlóan tárgyalhatjuk a monoton csökkenő függvényeket is **(6.6.b ábra)**. Ha a függvény szigorúan monoton, akkor az érintő csak egyes pontokban lehet az x-tengellyel párhuzamos, mint például a **6.6.a ábra** A pontjában, de nem egy egész részintervallumon, mint a **6.6.b ábra** $\overline{BC}$ szakaszán.



6.6. ábra.

6.7. ábra.

6.1.4.2. Fermat tétele

Ha egy összefüggő halmazon (azaz intervallumon) az $y = f(x)$ fügvény értelmezve van, és ennek az intervallumnak valamely belső $x = c$ helyén a függvénynek maximuma vagy minimuma van **(6.7. ábra)**, azaz, ha ezen intervallum minden pontjára fennáll

$$f(c) > f(x) \tag{6.27a}$$ vagy $$f(c) < f(x)\,, \tag{6.27b}$$

és a függvény a c helyen deriválható, akkor itt a derivált értéke csak nulla lehet:

$$f'(c) = 0\,. \tag{6.27c}$$

FERMAT tételének az a geometriai jelentése, hogy ha egy függvény a tétel feltételeit kielégíti, akkor a görbéjének a kérdéses pontban (lásd a **6.7. ábra** A és B pontját) az x-tengellyel párhuzamos érintője van.

De ebből még nem következik a tétel megfordítása. Az, hogy a függvénynek egy adott pontban vízszintes érintője van, csak arra utal, hogy itt lehet szélsőértéke, de ez nem biztos. A **6.6.a ábrán** láthatjuk, hogy az A pontban $f'(x) = 0$, az érintő vízszintes, még sincs szélsőérték. Másrészt, egy függvénynek lehet szélsőértéke olyan helyen is, ahol nem differenciálható. A **6.8.d ábra** E pontjához nem húzható érintő, itt a függvény nem deriválható, mégis maximum van.

6.1.4.3. Rolle tétele

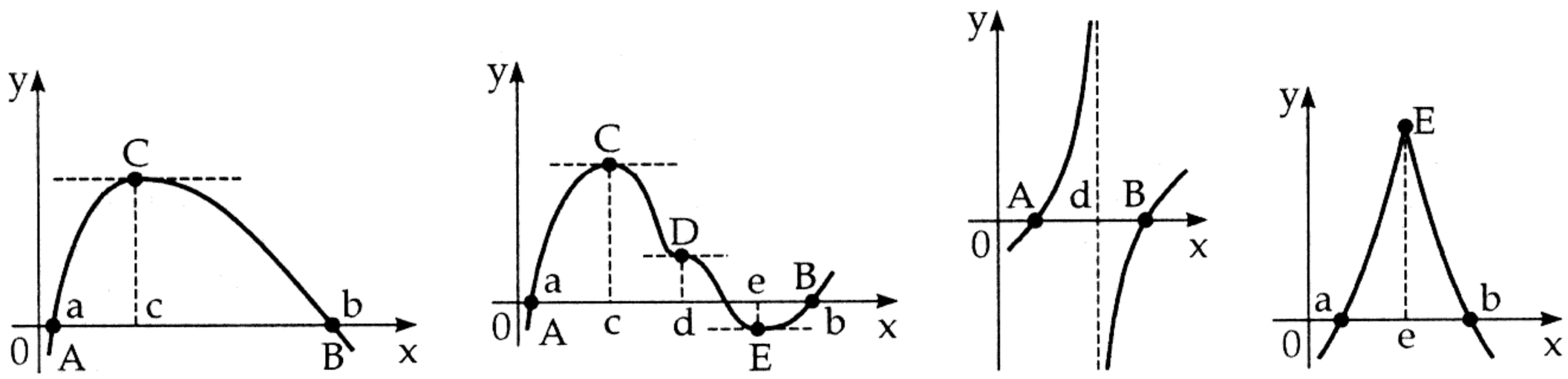
Ha az $y = f(x)$ függvény a zárt $[a, b]$ intervallumban folytonos és legalább az (a, b) nyílt intervallumon deriválható, valamint az intervallum határain a nulla értéket veszi fel, azaz fennáll

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0 \quad (a < b), \tag{6.28a}$$

akkor az a és b között biztosan van legalább egy olyan c hely, hogy

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)\,. \tag{6.28b}$$

ROLLE tételének geometriai jelentése szerint, ha egy $y = f(x)$ függvény görbéje az x-tengelyt két pontban, az A és a B pontban metszi és ha az általuk meghatározott intervallumban folytonos és minden belső pontban létezik nem függőleges érintője, akkor az A és a B pont között van legalább egy olyan C pont, amely helyen a görbe érintője párhuzamos az x-tengellyel. **(6.8.a ábra)**. Az intervallumban több



a) b) c) d)

6.8. ábra.

ilyen pont is lehet, például a C, D és az E pont a **6.8.b ábrán**. Lényeges feltétel az, hogy a függvény az intervallum minden pontjában folytonos és differenciálható legyen. Ez látható a **6.8.c ábrán**, itt az $x = d$ helyen a függvénynek szakadása van, és nincs is vízszintes érintő. A **6.8.d ábrán** azt láthatjuk, hogy az $x = e$ helyen a függvény nem differenciálható. Itt sincs olyan C pont, melyre $f'(x) = 0$ érvényes lenne.

6.1.4.4. A differenciálszámítás középértéktétele

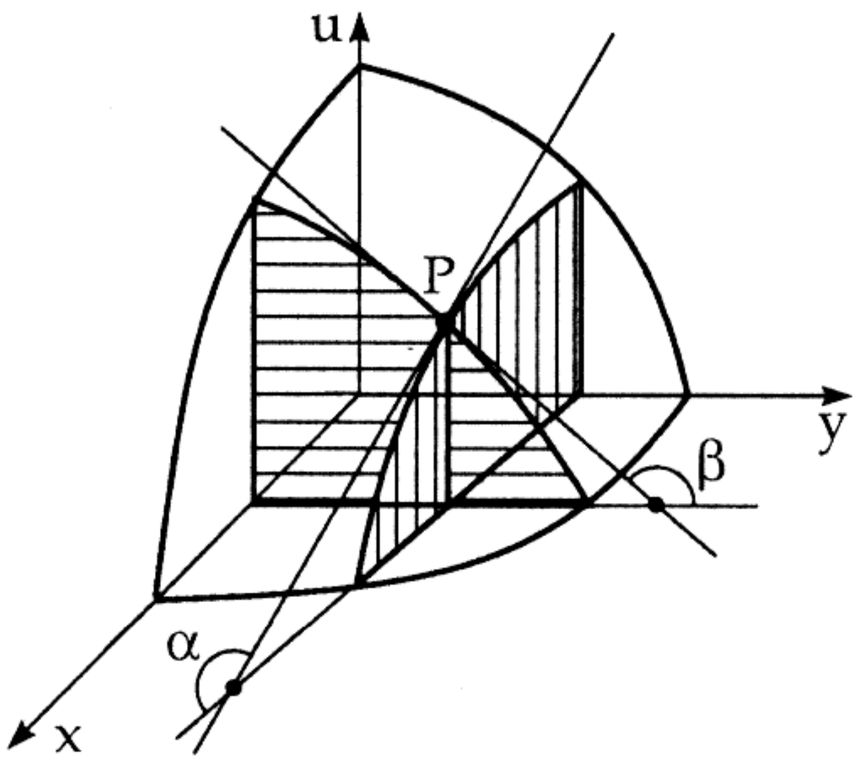
Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az intervallum belsejében mindenütt deriválható, akkor az a és b között van legalább egy olyan c hely, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)\,. \tag{6.29a}$$

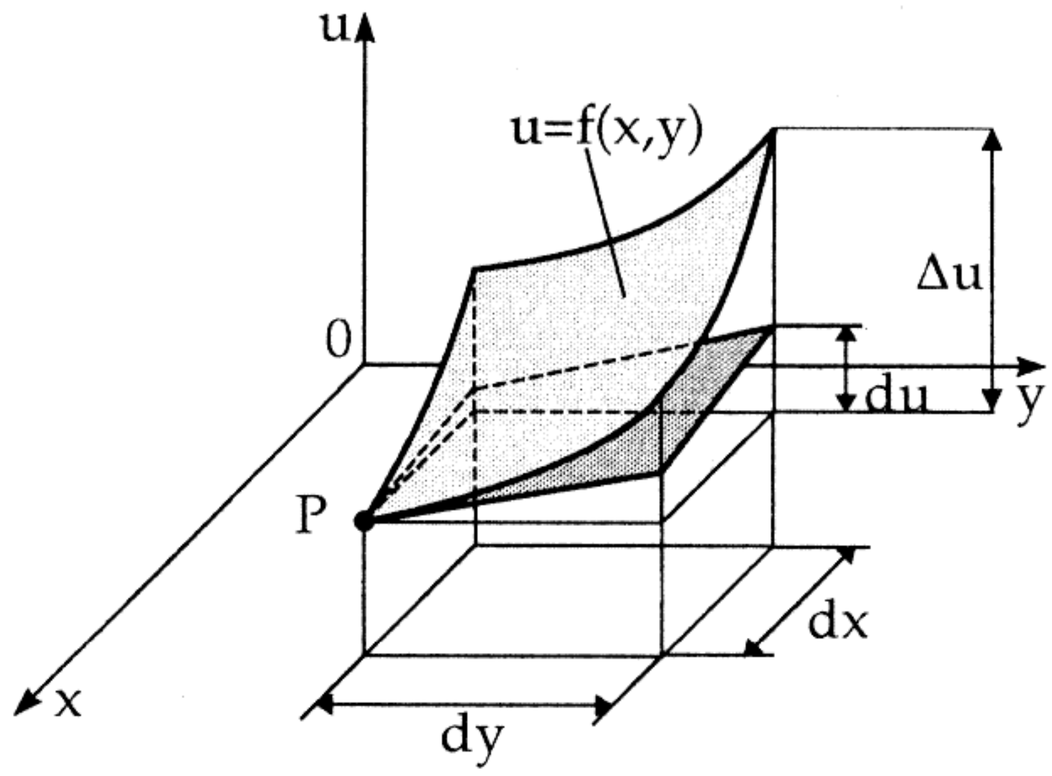
Ha elvégezzük a $b = a + h$ helyettesítést és Θ-val jelölünk egy 0 és 1 között lévő számot, akkor a tételt másként is felírhatjuk:

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \Theta h) \quad (0 < \Theta < 1)\,. \tag{6.29b}$$

1. Geometriai jelentés A tétel geometriailag azt jelenti, hogy az olyan $y = f(x)$ függvénygörbének, amelyik az A és B pontok között folytonos **(6.9. ábra)** és minden pontjához húzható nemfüggőleges érintő, van legalább egy olyan C pontja, amelyhez húzott érintő párhuzamos az AB húrral. Adódhat több ilyen pont is **(6.8.b ábra)**. Hogy a folytonosság és a deriválhatóság feltétele mennyire fontos, láthatjuk a **6.8.c,d** ábrán.



6.14. ábra.



6.15. ábra.

1. Az x független változó differenciáljának nevezzük az x tetszőleges növekményét:

$$dx = \Delta x\,. \tag{6.38a}$$

Itt Δx tetszés szerinti értekű lehet.

2. Az egyváltozós $y = f(x)$ függvény differenciáljának nevezzük adott x érték és egy adott dx differenciálérték mellett az alábbi szorzatot:

$$dy = f'(x)\,dx\,. \tag{6.38b}$$

3. A differenciál geometriai jelentése Ábrázoljuk a függvény görbéjét a DESCARTES-féle koordinátarendszerben és húzzuk meg az x abszcisszájú pont érintőjét. Ha x megváltozása dx, akkor dy jelenti az érintő ordinátájának megváltozását.

6.2.1.4. A differenciál főbb tulajdonságai

1. Invariancia Függetlenül attól, hogy x független változó-e, vagy egy további t változó függvénye, fennáll, hogy

$$dy = f'(x)\,dx\,. \tag{6.39}$$

2. Nagyságrendi viszony Ha dx tetszőleges kicsiny mennyiség, akkor dy is és $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ is tetszőleges kicsiny, de ekvivalens nagyságúak, azaz $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$. Ezért különbségük is végtelen kicsi, még magasabb rendben, mint dx, dy és Δx (kivéve, ha $dy = 0$). A következő összefüggés adódik:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1\,, \quad \Delta y \approx dy = f'(x)\,dx\,. \tag{6.40}$$

Ez az összefüggés teszi lehetővé, hogy egy függvény kis *változását* differenciálja segítségével jellemezzünk. A közelítő számításoknál gyakran ezt az eljárást követjük (lásd 395. old. és 819. old.).

6.2.1.5. Parciális differenciál

Az $u = f(x, y, \ldots)$ többváltozós függvény valamelyik változója szerinti, például az x szerinti parciális differenciálját a következőképpen definiáljuk:

$$d_x u = d_x f = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx \tag{6.41}$$

6.2.2. Teljes differenciál és magasabb rendű differenciálok

6.2.2.1. Többváltozós függvény teljes differenciáljának fogalma

1. Differenciálhatóság

Az $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény az $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{n0})$ pontban differenciálható, ha egy szomszédos $M(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \ldots, x_{i0} + dx_i, \ldots, x_{n0} + dx_n)$ pontba való áttéréskor tetszőleges kicsi $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ mellett a függvény növekményének, a

$$\begin{aligned}\Delta u = {} & f(x_{10} + dx_1, x_{20} + dx_2, \ldots, x_{i0} + dx_i, \ldots, x_{n0} + dx_n) \\ & - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{n0})\end{aligned} \tag{6.42a}$$

értéknek a valamennyi parciális differenciálból képezett összegtől, azaz a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)_{x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}} \tag{6.42b}$$

értéktől való eltérése nagyságrendben kisebb, mint az

$$\overline{M_0M} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}\,. \tag{6.42c}$$

távolság.

Egy folytonos többváltozós függvény egy pontban differenciálható, ha parciális deriváltjai mint többváltozós függvények folytonosak ebben a pontban és ennek a pontnak egy környezetében. Ez elégséges, de nem szükséges feltétel. Csupán a parciális deriváltak létezéséből még nem következtethetünk a függvény folytonosságára.

2. Teljes differenciál

Ha u differenciálható függvény, akkor a (6.42b) összeget a függvény *teljes differenciáljának* nevezzük.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\,. \tag{6.43a}$$

Ha felírjuk az alábbi két vektort:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{6.43b}$$

$$dr = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)^{\mathrm{T}}, \tag{6.43c}$$

akkor a teljes differenciált a két vektor skaláris szorzataként is felírhatjuk:

$$du = \operatorname{grad} u \cdot dr \tag{6.43d}$$

A (6.43b)-ben a 673. oldalon lévő n független változó esetére definiált gradiensről van szó.

3. Geometriai jelentés

Az $u = f(x, y)$ kétváltozós függvényt a DESCARTES-féle koordinátarendszerben mint felületet ábrázolhatjuk **(6.15. ábra)**. A függvény du teljes differenciálja egyenlő az érintősík (a kérdéses pontra illeszkedő alsó felület) megfelelő pontjának megemelkedésével, ha dx és dy az x és az y növekménye.

A kétváltozós függvényekre vonatkozó TAYLOR-formula (lásd 424. old.) a következő:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1\,. \tag{6.44a}$$

Ha az R_1 maradéktagot elhagyjuk, akkor

$$u = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{6.44b}$$

az $u = f(x, y)$ függvénynek megfelelő felület $P_0(x_0, y_0, u_0)$ pontjához tartozó érintősík egyenlete.

4. A teljes differenciál legfőbb tulajdonsága

A teljes differenciál fogamlmán az egyváltozós függvények differenciáljához (6.39) analóg módon definiált invarianciát értjük, a megfelelő változókra vonatkoztatva.

5. Alkalmazás a hibaszámításnál

A du teljes differenciál segítségével a Δu hibát (lásd (6.42a)) becsülhetjük meg (lásd pl. 816. old.). A TAYLOR-formulából (lásd 424. old.) következik, hogy

$$|\Delta u| = |du + R_1| \leq |du| + |R_1| \approx |du|\,, \tag{6.45}$$

azaz $|\Delta u|$ abszolút hibát első közelítésben $|du|$-val helyettesíthetjük. Így du lineáris közelítése Δu-nak.

6.2.2.2. Magasabb rendű deriváltak és differenciálok

1. Másodrendű parciális derivált

Az $u = f(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_i\,, \ldots, x_n)$ függvény másodrendű parciális deriváltját képezhetjük ugyanazon változó szerint mint az elsőt, így $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,, \ldots$, de képezhetjük egy másik változó szerint is, azaz $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\,,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}\,,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1}\,, \ldots$. Ebben a második esetben vegyes deriváltakról beszélünk. Adott x_1 és x_2 változókra vonatkozóan $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$, azaz a két vegyes derivált értéke független a deriválás sorrendjétől, ha a vegyes derivált a kérdéses pontban folytonos (SCHWARZ-*féle felcserélési tétel*). A magasabb rendű parciális deriváltakat analóg módon definiáljuk. Például: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,,\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\,, \ldots$

2. Egyváltozós függvény másodrendű differenciálja

Az $y = f(x)$ egyváltozós függvény másodrendű differenciálját (jelölése $d^2y\,,\ d^2f(x)$) úgy képezzük mint az első differenciál differenciálját: $d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2$. Ezek a jelölések mindenesetre csak akkor alkalmazhatók, ha x független változó, és nem lehet ezeket alkalmazni, ha x például $x = z(v)$ alakban adott. Magasabb rendű differenciálokat hasonló módon definiálunk. Amennyiben az $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ változók maguk is függvények, akkor bonyolultabb formulák adódnak (lásd 403. old.).

3. Másodrendű teljes differenciál

Az $u = f(x, y)$ függvényre teljesül, hogy

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2, \tag{6.46a}$$

illetve szimbolikusan

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u\,. \tag{6.46b}$$

4. Kétváltozós függvény n-ed rendű teljes differenciálja

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u\,. \tag{6.47}$$

5. Többváltozós függvény n-ed rendű teljes differenciálja

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^n u\,. \tag{6.48}$$

6.2.3. Többváltozós függvények differenciálási szabályai

6.2.3.1. Összetett függvények differenciálása

1. Egy független változó közvetett függvénye

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad x_1 = \varphi(\xi)\,, \quad x_2 = \psi(\xi)\,, \ldots\,, \quad x_n = \chi(\xi) \tag{6.49a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\xi}\,. \tag{6.49b}$$

2. Több független változó közvetett függvénye

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \qquad x_1 = \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau)\,, \quad x_2 = \psi(\xi, \eta, \ldots, \tau), \ldots, \quad x_n = \chi(\xi, \eta, \ldots, \tau) \tag{6.50a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \eta}, \\
\vdots &= \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \tau} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.50b}$$

6.2.3.2. Implicit függvények differenciálása

Egy- és többváltozós függvények implicit módon a következő formában fordulhatnak elő:

1. Ha az egyváltozós $y = f(x)$ függvény

$$F(x, y) = 0 \,. \tag{6.51a}$$

implicit alakját ismerjük, akkor a (6.51a) függvényt (6.49b) alapján x szerint differenciálva nyerjük:

$$F'_x + F'_y y' = 0 \qquad \text{és} \qquad (6.51\text{b}) \qquad y' = -\frac{F'_x}{F'_y}\,. \tag{6.51c}$$

A (6.51b) függvényt hasonló módon differenciálva nyerjük:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2 + F'_y y'' = 0\,. \tag{6.51d}$$

A (6.51b) összefüggést figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}\,. \tag{6.51e}$$

Hasonló eljárással nyerjük a következő formulát:

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}y' + 3F'''_{xyy}(y')^2 + F'''_{yyy}(y')^3 + 3F''_{xy}y'' + 3F''_{yy}y'y'' + F'_y y''' = 0\,. \tag{6.51f}$$

Ezt az egyenletet y'''-re rendezhetjük.

2. Többváltozós függvény Ha az $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ függvényt az

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n, u) = 0\,. \tag{6.52a}$$

implicit alakban ismerjük, akkor a parciális deriváltakat az előzőekhez hasonló módon, de a (6.50b) segítségével határozzuk meg:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_u}. \tag{6.52b}$$

A magasabb rendű parciális deriváltakat is ilyen módon állítjuk elő.

3. Ha ugyanazon x független változónak két függvényét, az $y = f(x)$ és $z = \varphi(x)$ függvényeket az

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{és} \quad \Phi(x, y, z) = 0\,. \tag{6.53a}$$

egyenletrendszer határozza meg, akkor differenciálásuk a (6.49b) formula alapján végezhető el:

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0\,, \quad \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' = 0\,, \tag{6.53b}$$

$$y' = \frac{F'_z\Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y\Phi'_z - F'_z\Phi'_y}\,, \qquad z' = \frac{F'_x\Phi'_y - F'_y\Phi'_x}{F'_y\Phi'_z - F'_z\Phi'_y}\,. \tag{6.53c}$$

2. Alkalmazások A differenciálszámítás középértéktételének számos gyakorlati alkalmazása ismeretes.

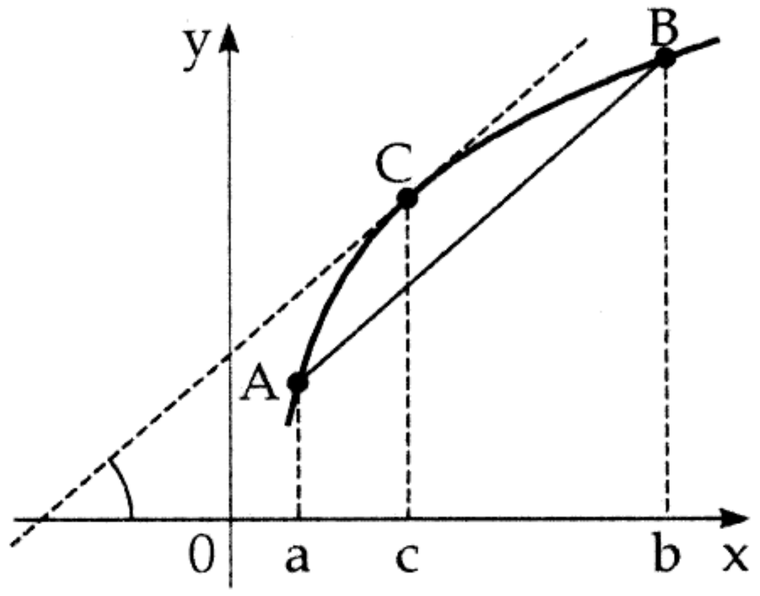
■ **A:** A hibák nagyságát megbecsülhetjük a következő összefüggés alapján:

$$|f(b) - f(a)| < K|b - a|\,, \tag{6.30}$$

itt K-val jelöltük az $[a, b]$ intervallum összes x helyéhez számított $|f'(x)|$ értékek felső határát.

■ **B:** Legfeljebb mekkora pontossággal adhatjuk meg $f(\pi) = \dfrac{1}{1+\pi^2}$ értékét, ha π kerekített értékével $\overline{\pi} = 3{,}14$-gyel számolunk? $|f(\pi) - f(\bar{\pi})| = \left|\dfrac{2c}{(1+c^2)^2}\right| |\pi - \bar{\pi}| \leq 0{,}053 \cdot 0{,}0016 = 0{,}000\,085$, így

$$0{,}092084 - 0{,}000085 \leq \frac{1}{1+\pi^2} \leq 0{,}092084 + 0{,}000085\,. \tag{6.31}$$



6.9. ábra.

6.1.4.5. Az egyváltozós függvényekre vonatkozó Taylor-tétel

Ha az $y = f(x)$ függvény az $[a, a+h]$ intervallumon folytonos és ebben a zárt intervallumban léteznek a magasabb rendű deriváltjai is, az $(n-1)$-dikig bezárólag, valamint az $(a, a+h)$ nyílt intervallumban létezik az n-edrendű derivált, és ez folytonos, akkor felírhatjuk a TAYLOR-formulát vagy TAYLOR-sort:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\Theta h) \tag{6.32}$$

ahol $0 < \Theta < 1$. A h értéke lehet pozitív vagy negatív. A differenciálszámítás középértéktétele (6.29a) a TAYLOR-formula speciális esete, ha $n = 1$.

6.1.4.6. A differenciálszámítás középértéktételének általánosítása

Ha két függvény $y = f(x)$ és $y = \varphi(x)$ ugyanazon az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az intervallum belsejében mindenütt deriválható, valamint $\varphi'(x)$ az intervallumban sehol sem tűnik el, akkor létezik az intervallumnak legalább egy olyan belső c pontja úgy, hogy az alábbi összefüggés teljesül:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a < c < b)\,. \tag{6.33}$$

Az általános középértéktétel geometriai jelentése megfelel a közönséges középértéktétel geometriai jelentésének. Induljunk ki például a következőkből. Ha a **6.9. ábrán** lévő görbét az $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ paraméteres alakban adjuk meg, ahol az A és B pontok a $t = a$, ill. $t = b$ értékeknek felelnek meg, akkor a C pontra igaz, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,. \tag{6.34}$$

Amennyiben $\varphi(x) = x$, úgy az általános középértéktétel a közönséges középértéktételbe megy át.

6.1.5. A szélsőértékek és inflexiós pontok meghatározása

6.1.5.1. Maximum és minimum

Egy függvény lokális (helyi) maximumát vagy lokális (helyi) minimumát nevezzük közös néven *lokális* vagy *helyi szélsőérték*nek. Az $f(x)$ függvény azon $f(x_0)$ értékeit nevezzük *lokális maximum*nak (M), ill. *lokális minimum*nak (m) amelyekre az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:

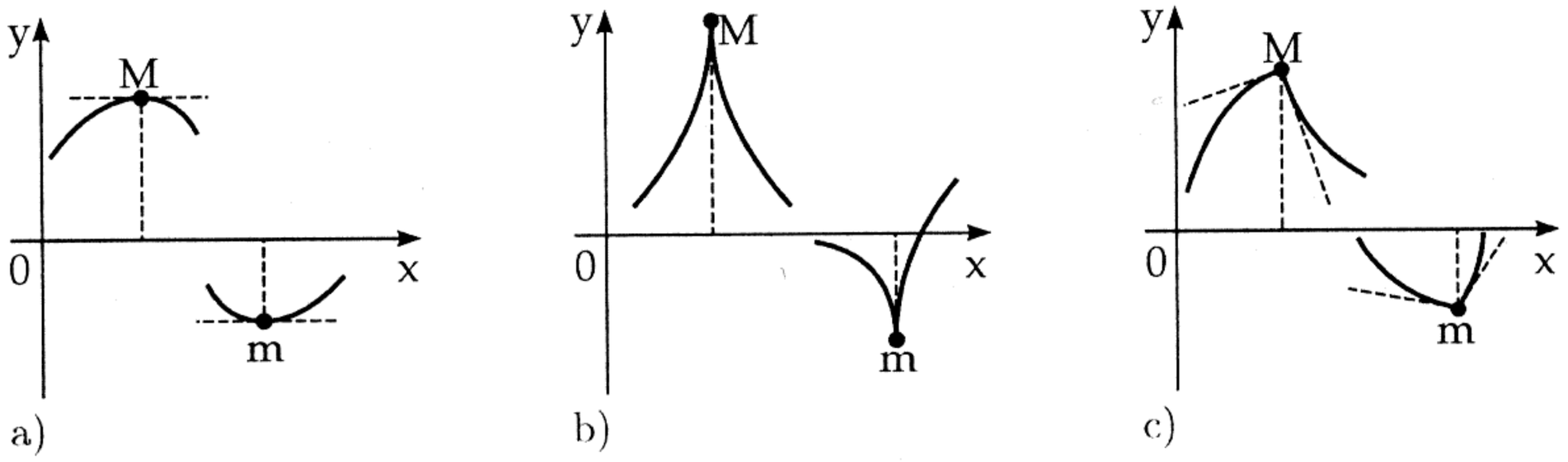
$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \text{(maximum van)}\,, \tag{6.35a}$$

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \quad \text{(minimum van)} \tag{6.35b}$$

Itt h valamilyen kis abszolút értékű pozitív vagy negatív szám lehet, de úgy, hogy az x_0+h hely is a függvény értelmezési tartományában legyen. Lokális maximum esetén az $f(x_0)$ nagyobb, mint a szomszédos függvényértékek, minimum esetén pedig kisebb náluk. Az adott intervallumon felvett legnagyobb, ill. legkisebb függvényértéket az adott intervallumra vonatkozó *abszolút vagy globális maximum*nak, ill. *abszolút vagy globális minimum*nak nevezzük.

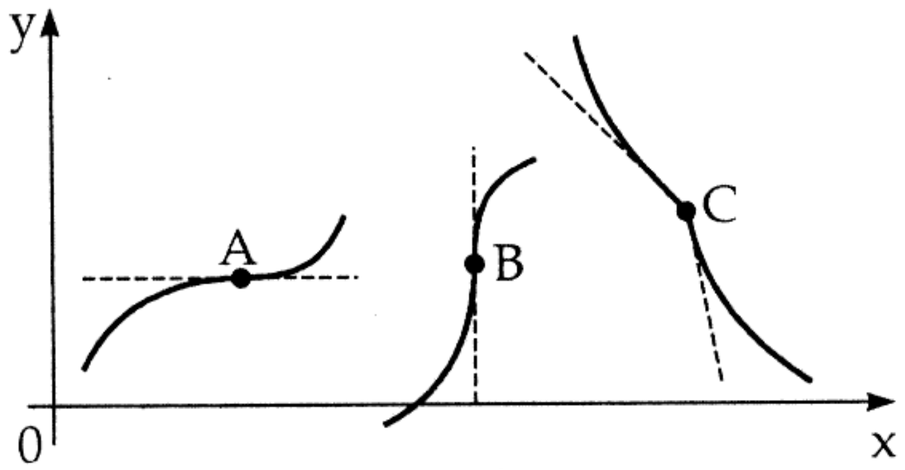
6.1.5.2. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Folytonos függvénynek csak olyan pontjainál lehet szélsőérték, ahol a derivált vagy eltűnik, vagy egyáltalán nincs értelmezve. Ez azt jelenti, hogy a függvénygörbe lokális szélsőértékeihez tartozó pontjaiban az érintő vagy párhuzamos az x-tengellyel **(6.10.a ábra)**, vagy párhuzamos az y-tengellyel **(6.10.b ábra)**, vagy egyáltalán nem létezik **(6.10.c ábra)**. Ezek a feltételek csupán szükségesek, de nem elégségesek, amint ezt az **6.11** ábrán az A, B, C pontoknál rögtön észrevehetjük. Ezeknél a pontoknál a fenti feltételek teljesülnek, még sincs szélsőérték.



6.10. ábra.

Ha egy folytonos függvénynek lokális szélsőértékei vannak, akkor a maximum- és minimumhelyek egymást váltják úgy, hogy két szomszédos maximumhely között mindig van egy minimumhely, és fordítva.



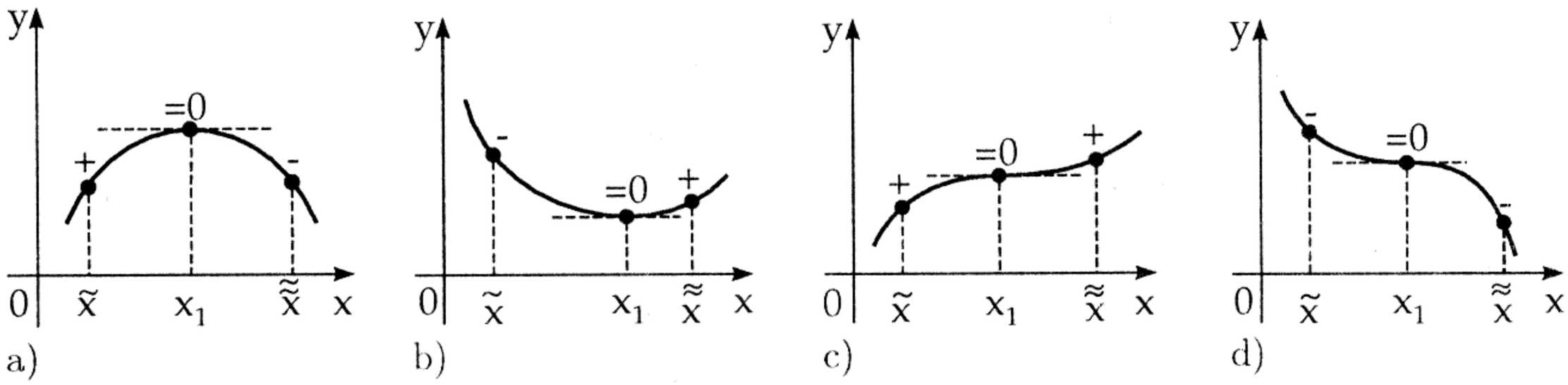
6.11. ábra.

6.1.5.3. Differenciálható, $y = f(x)$ explicit alakban adott függvény lokális szélsőértékei

1. Szélsőértékhelyek meghatározása Mivel a szélsőértékhelyeken az $f'(x) = 0$ szükséges feltétel, az $f'(x)$ derivált meghatározása után az $f'(x) = 0$ egyenlet $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ valós gyökeit kell megkeresnünk. Ezek mindegyikét, pl. x_i-t az alábbi módszerek egyike alapján vizsgájuk meg.

2. Az előjelvizsgálat módszere Ha a derivált folytonos, minden x_i -nél valamivel kisebb x_- helyhez, illetve a nála valamivel nagyobb x_+ helyhez meghatározzuk az $f'(x)$ derivált előjelét.
Természetesen az $f'(x)$-nek nem lehet az x_i és x_-, ill. x_+ között további zérushelye. Ha az $f'(x_-)$ helyről az $f'(x_+)$ helyre való átmenetnél az $f'(x)$ előjele „+" -ról „−"-ra változik, akkor az $f(x)$ függvénynek az $x = x_i$ helyen lokális maximuma van. **(6.12.a ábra)**. Ha a változás ellenkező irányú, azaz a derivált negatívról pozitívra vált, akkor itt lokális minimum van **(6.12.b ábra)**. Amennyiben a derivált előjele nem változik **(6.12.c,d ábra)**, akkor a görbének az $x = x_i$ helyen nincs szélsőértéke, hanem inflexiós pontja van. Az ehhez a ponthoz húzott érintő párhuzamos az x-tengellyel.

3. Magasabb rendű deriváltak módszere Ha a függvénynek az $x = x_i$ helyen magasabb rendű deriváltjai is léteznek, akkor minden x_i gyököt az $f''(x)$ másodrendű deriváltba is behelyettesítünk.



6.12. ábra.

Amennyiben $f''(x_i) < 0$, akkor az x_i helyen lokális maximum van, ha $f''(x_i) > 0$, akkor itt lokális minimum van, ha $f''(x_i) = 0$, akkor x_i-t az $f'''(x)$ harmadrendű deriváltba helyettesítjük. Ha itt $f'''(x_i) \neq 0$, adódik, akkor az $x = x_i$ helyen nincs szélsőérték, hanem inflexiós pont van.

4. Szélsőértékekre és inflexiós pontokra vonatkozó feltételek Ha az $x = x_i$ helyen az első el nem tűnő derivált rendje páros szám, akkor az $f(x)$ függvénynek ezen a helyen lokális szélsőértéke van: amennyiben ez az érték negatív, akkor lokális maximum, ha pozitív, akkor lokális minimum. Amikor az első el nem tűnő derivált rendje páratlan szám, akkor ezen a helyen nincs szélsőérték (hanem inflexiós pont van). Ha az első derivált létezik ott, ahol a függvénynek inflexiós pontja van, akkor ezen a helyen az első deriváltnak szélsőértéke van. Az inflexiós pontok helyét megtalálhatjuk, ha megkeressük azokat a helyeket, ahol az első deriváltnak szélsőértéke van.
Megjegyzés Az előjelvizsgálat-módszert használhatjuk akkor is, ha nem létezik differenciálhányados, mint az a **6.10.b,c** és a **6.1.5.2. ábrákon** látható.

6.1.5.4. Abszolút (globális) szélsőértékek meghatározása

A független változó kérdéses intervallumát olyan részintervallumokra bontjuk, amelyekben a függvény deriválható. Az abszolút szélsőértékeket a részintervallumok szélsőértékei és a részintervallumok határpontjain felvett függvényértékek közül kell kiválasztani.

Példák a szélsőértékek meghatározására:

■ **A:** $y = e^{-x^2}$, intervallum $[-1, +1]$, maximum az $x = 0$ helyen. **(6.13.a ábra).**

■ **B:** $y = x^3 - x^2$, intervallum $[-1, +2]$, maximum az $x = +2$ helyen, **(6.13.b ábra**, az intervallum jobb határpontján).

■ **C:** $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, intervallum $[-3, +3]$, maximum az $x = 0$ helyen, megállapodás értelmében itt: $y = 1$ **(6.13.c ábra).**

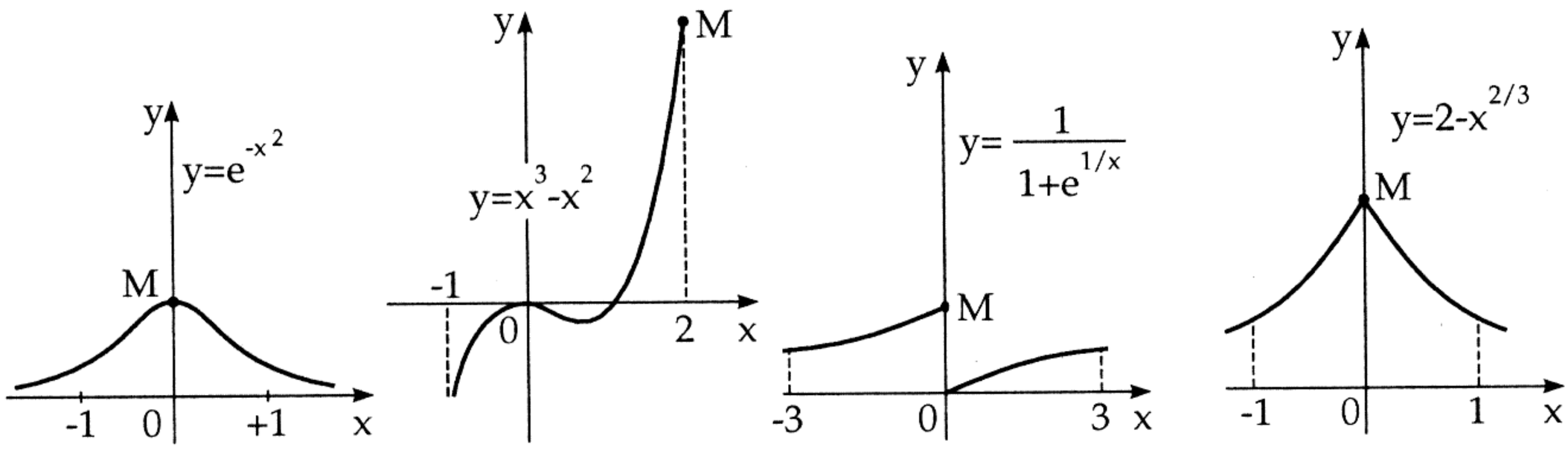
■ **D:** $y = 2 - x^{\frac{2}{3}}$, intervallum $[-1, +1]$, maximum az $x = 0$ helyen **(6.13.d ábra).**

6.1.5.5. Implicit alakban adott függvény szélsőértékeinek meghatározása

Amennyiben a függvény $F(x, y) = 0$ implicit alakját ismerjük, és maga az F függvény is és F_x, F_y parciális deriváltjai is folytonosak, a szélsőértékeket a következőképpen határozhatjuk meg:

1. Megoldjuk az egyenletrendszert: $F(x, y) = 0, F_x(x, y) = 0$. Az így nyert $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots,$ $(x_i, y_i), \ldots$ gyököket az F_y -ba és F_{xx} -be helyettesítjük.

2. Előjelvizsgálat az (x_i, y_i) pontban felvett F_y és F_{xx} értékekre Különböző előjelek esetén az $y = f(x)$ függvénynek az x_i helyen minimuma van, ha az F_y és F_{xx} előjele megegyezik, akkor a függvénynek az x_i helyen maximuma van. Amennyiben F_y vagy F_{xx} az (x_i, y_i) behelyettesítésekor eltűnik, akkor a további vizsgálat bonyolultabb.



a) b) c) d)

6.13. ábra.

6.2. Többváltozós függvények differenciálása

6.2.1. Parciális deriváltak

6.2.1.1. Függvény parciális deriváltja

Az $u = f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)$ függvény x_i szerinti parciális deriváltja az alábbi differenciálhányados

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}. \tag{6.36}$$

Az u függvény n változója közül példánkban az x_i-t választottuk. Az összes többi $n-1$ változót konstansnak tekintjük; úgy járunk el, mintha a függvény csak az x_i változó függvénye lenne. A parciális deriváltak jelölése: $\frac{\partial u}{\partial x}$, u'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x. Egy n-változós függvénynek n darab elsőrendű parciális deriváltját képezhetjük: $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$. A parciális deriváltak meghatározása ugyanazon szabályok szerint történik, mint amelyeket az egyváltozós függvényeknél megismertünk.

■ $u = \frac{x^2 y}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$.

6.2.1.2. Geometriai jelentés két változó esetén

Az $u = f(x, y)$ függvényt mint felületet ábrázoljuk a DESCARTES-féle koordináta-rendszerben. A P felületi ponton át az x, u-síkkal párhuzamos síkot állítunk **(6.14. ábra)**. A sík és a felület közös pontjai egy metszetgörbén helyezkednek el. Húzzunk érintőt ehhez a görbéhez a P pontban. Az α szög ennek az érintőnek a pozitív x-tengely irányával bezárt szöge. Ezt a szöget az x-tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban az érintőig mérjük. Így a tekintet a pozitív y-tengely felé irányul. Ekkor fennáll

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{6.37a}$$

Az α szög analógiájára definiálhatjuk a β szöget. Ekkor fennáll

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta\,. \tag{6.37b}$$

Egy adott irány szerinti deriváltról (*iránymenti derivált*), ill. egy térfogat szerintiről (*térfogati derivált*) a Vektoranalízis fejezetben (lásd 673. old.) lesz szó.

6.2.1.3. A differenciál fogalma

Minden $x_1, x_2, \ldots$ változóhoz képezhetünk egy $dx_1, dx_2, \ldots, dx_i, \ldots, dx_n$ differenciált. A definíció a szerint különböző, hogy egy független változónak vagy egy függvénynek a differenciáljáról van-e szó.

Ezután megoldjuk a fenti egyenletrendszert. Megoldás pl. $M(x_{10}, x_{20}, \ldots, y_{n0})$. A másodrendű deriváltakból mátrixot készítünk. A mátrix elemei: $a_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Ezután az egyenletrendszer egy megoldását ezekbe az elemekbe helyettesítjük, meghatározzuk az $((a_{1,1}); (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}); \ldots)$ bal felső aldeterminánsok előjelét. A következő esetek lehetségesek:
1. Az aldeterminánsok előjelének sorrendje: -,+,-,+, ...
ekkor itt maximum van.
2. Az aldeterminánsok előjelének sorrendje:+,+,+,+, ...
ekkor itt minimum van.
3. Az aldeterminánsok között 0 értékű is van, de a nem nulla aldeterminánsok előjelei megfelelnek a fenti sorozatok valmelyikének, akkor ezen a helyen lehetséges szélsőérték.
4. Ha a nem nulla aldeterminánsok előjelei nem felelnek meg egyik fenti sorozatnak sem, akkor nincs szélsőérték.
Ha az előbbiek alapján nem tudunk dönteni, akkor annak eldöntéséhez, hogy a (6.69) egyenletrendszer $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ megoldása szélsőértékhely-e vagy sem, a függvénynek az $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ helyhez közeli helyeken felvett értékeit kell megvizsgálnunk.

6.2.5.5. Feladatok közelítő megoldása

A többváltozós függvények szélsőértékének meghatározása segítségével több approximációs feladatot oldhatunk meg. Ezek *illesztési feladatok* vagy *négyzetesközép feladatok* néven ismeretesek.

Megoldandó feladatok:

- FOURIER-együtthatók meghatározása (lásd 428. és 949. old.);
- Közelítő függvények becsült együtthatóinak meghatározása (lásd 942. old.);
- Túlhatározott lineáris egyenletrendszer közelítő megoldása (lásd 916. old.).

Megoldások: A megoldási módszerek szokásos elnevezései:

- GAUSS-féle hibanégyzetmódszer (pl. lásd 942. old.),
- A legkisebb négyzetek módszere,
- Közép-approximáció (folytonos és diszkrét)(pl. 942. old.),
- Illesztési feladatok (lásd 942. old.) és regresszió (lásd 805. old).

6.2.5.6. Feltételes szélsőérték meghatározása

Tegyük fel, hogy az $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós függvény szélsőértékeit keressük, de itt a változók nem függetlenek egymástól, hanem a

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,,\ \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots,\ \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{6.70a}$$

k számú feltétel alapján összefüggenek egymással (ahol $k < n$). Ha a feltételi egyenletből k ismeretlent ki tudjuk fejezni a többivel, és ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítjük, akkor $n - k$ változós szélsőérték-problémát kapunk. A másik mód a LAGRANGE-féle multiplikátor-módszer. Bevezetünk k darab határozatlan *multiplikátor*t, ezek legyenek: $\lambda, \mu, \ldots, \kappa$. Felírjuk a LAGRANGE-*függvényt*, az $(n + k)$ ismeretlent $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda, \mu, \ldots, \kappa)$ tartalmazó Φ függvényt:

$$\begin{aligned}\Phi\ &(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda, \mu, \ldots, \kappa)\\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu\,\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots\\ &\qquad + \kappa\,\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.\end{aligned} \tag{6.70b}$$

A Φ függvény szélsőértékének szükséges feltételét az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda, \mu, \ldots, \kappa$ ismeretleneket tartalmazó $(n + k)$ egyenletből álló egyenletrendszer (6.69) szolgáltatja:

$$\varphi = 0, \psi = 0\,,\ \ldots\,,\ \chi = 0\,,\ \Phi'_{x_1} = 0\,,\ \Phi'_{x_2} = 0\,, \ldots, \Phi'_{x_n} = 0\,. \tag{6.70c}$$

Az f függvénynek akkor lehet szélsőértéke (szükséges feltétel), ha az $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, \lambda_0, \mu_0, \ldots, \kappa_0$ értékrendszer a fenti egyenletrendszert kielégíti.

■ Az $u = f(x, y)$ függvénynek a $\varphi(x, y) = 0$ feltétel melletti szélsőértékét az alábbi három egyenletből

álló egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg:

$$\varphi(x,y)=0\,,\ \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)]=0\,,\ \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)]=0 \tag{6.71}$$

Az így kapott x, y, λ mutatja meg, hogy hol lehet az u függvénynek szélsőértéke.

7. Végtelen sorok

7.1. Számsorozatok

7.1.1. Számsorozatok tulajdonságai

7.1.1.1. Számsorozatok, alapfogalmak

A *végtelen számsorozat* meghatározott sorrendbe rendezett, végtelen sok számból áll:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{vagy röviden } \{a_k\} \text{ ahol } k = 1, 2, \ldots . \tag{7.1}$$

A számsorozatban lévő számok a *számsorozat tagjai.* A tagok között lehetnek egyenlők is. Egy számsorozatot akkor tekintünk adottnak, ha ismerjük a *képzési szabályt*, amely szerint a sorozat tetszés szerinti tagját fel tudjuk írni. Rendszerint az a_n általános tag alakját adjuk meg.

Példák a számsorozatokra:

■ **A:** $a_n = n$: 1, 2, 3, 4, 5, ...

■ **B:** $a_n = 4 + 3(n-1)$: 4, 7, 10, 13, 16, ...

■ **C:** $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$: $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$.

■ **D:** $a_n = (-1)^{n+1}$: 1, −1, 1, −1, 1, ...

■ **E:** $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$: $1, 2, 2\,\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \ldots$; $\left(2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}\right)$

■ **F:** $a_n = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot 10^{-\frac{n-1}{2}}$, ha n páratlan, és $a_n = 3\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 10^{-\frac{n}{2}+1}$, ha n páros.

n: 3, 4, 3,3; 3,4; 3,33; 3,34; 3,333; 3,334; . . . .

■ **G:** $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

■ **H:** $a_n = (-1)^{n+1}n$: 1, −2, 3, −4, 5, −6, ...

■ **I:** $a_n = -\frac{n+1}{2}$ ha n páratlan, és $a_n = 0$, ha n páros: −1, 0, −2, 0, −3, 0, −4, 0,. . . .

■ **J:** $a_n = 3 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - \frac{3}{2}}$, ha n páratlan, és $a_n = 13 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 2}$ ha n páros: $1, 11, 2, 12, 2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}$, ...

7.1.1.2. Monoton számsorozatok

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat *monoton növekedő*, ha

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots . \tag{7.2}$$

A sorozat *monoton csökkenő*, amennyiben

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots . \tag{7.3}$$

A sorozat *szigorúan monoton növekedő sorozat*, ill. *szigorúan monoton csökkenő sorozat*, ha az egyenlőség ség (7.2)-ben, ill. (7.3)-ban nincs megengedve.

Példák monoton számsorozatokra:

■ **A:** Az **A**–**J** sorozatok közül **A, B, E** szigorúan monoton növekedő.

■ **B:** A **G** sorozat szigorúan monoton csökkenő.

7.1.1.3. Korlátos sorozatok

Egy sorozat *korlátos*, ha minden tagjára fennáll

$$|a_n| < K\,, \tag{7.4}$$

ahol $K > 0$. Ha nem létezik ilyen K szám (*korlát*), akkor a sorozat *nem korlátos sorozat.*

■ Az **A** - **J** sorozatok közül korlátos a **C** sorozat ($K = 4$), a **D** sorozat ($K = 2$), az **E** sorozat ($K = 3$), az **F** korlátja lehet $K = 5$, a **G** sorozaté $K = 2$ és a **J** sorozaté $K = 13$.

7.1.2. Számsorozat határértéke

1. Számsorozat határértéke

Egy végtelen számsorozat (7.1) *határértéke* más szóval *limesze* az A szám, ha növekedő n index mellett az $a_n - A$ különbség abszolút értéke tetszőlegesen kicsiny lehet. Pontosabban fogalmazva: ha bármilyen kicsiny pozitív ε számhoz található egy $n_0(\varepsilon)$ index úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén fennáll:

$$|a_n - A| < \varepsilon\,. \tag{7.5}$$

2. Számsorozat konvergenciája

Az $\{a_n\}$ számsorozat *konvergens*, ha a (7.5) egyenlőtlenséget kielégíti, és határértéke A. Úgy is mondhatjuk a sorozat A-hoz konvergál, A-hoz tart. Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \text{ill.} \quad a_n \to A\,. \tag{7.6}$$

■ Az előző oldalon szereplő **A** - **J** sorozatok közül konvergensek: **C**, határértéke $A = 0$; **E** határértéke $A = 3$; és **F**, itt $A = 3\frac{1}{3}$, valamint **G**, itt $A = 0$.

3. Számsorozat divergenciája

A nem konvergens számsorozat *divergens*. A divergens sorozatok között meg kell különböztetnünk azokat a sorozatokat, amelyeknek a tagjai egy bizonyos n-től kezdve akármilyen nagy számnál nagyobbak (ill. akármilyen kis számnál kisebbek). Az ilyen divergens sorozatok határértéke végtelen (ill. mínusz végtelen). Ennek jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ , illetve } \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,. \tag{7.7}$$

Természetesen vannak olyan divergens sorozatok is, amelyeknek semmilyen értelemben sincs határértéke. Egy sorozat konvergens, ha van véges határértéke.

Példák divergens számsorozatokra:

■ **A:** Az előbbi oldalon szereplő **A**–**J** sorozzatok közül az **A** és **B** divergens sorozatok, (tágabb értelemben vett) határértékük $+\infty$.

■ **B:** A sorozatok közül a **D, H, I, J** divergens sorozatoknak egyáltalán nincs határértéke.

4. Számsorozatok határértékére vonatkozó tételek

a) Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens sorozatok, akkor igazak az alábbi tételek

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,, \tag{7.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)\,, \tag{7.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\,, \quad \text{ha} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \qquad \text{és egyetlen } b_n \text{ sem nulla.} \tag{7.10}$$

b) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ fennáll és legalább az n_1 indextől kezdve mindig igaz, hogy $a_n \le c_n \le b_n$, akkor fennáll az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A\,. \tag{7.11}$$

c) Monoton korlátos sorozatnak mindig van véges határértéke. Ha az $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots$ monoton növekedő sorozat felülről korlátos, azaz minden n-re fennáll, hogy $a_n \le K_1$, illetve, ha egy monoton csökkenő sorozat alulról korlátos, azaz minden n-re $a_n \ge K_2$ úgy a sorozat olyan határértékhez tart, ami nem nagyobb, mint a K_1 *felső korlát*, illetve nem kisebb, mint a K_2 *alsó korlát*. Monoton növekedő korlátos sorozat határértéke a legkisebb felső korlát, monoton csökkeő sorozat határértéke a legnagyobb alsó korlát.

Az y'' és z'' második deriváltakat hasonló módon határozhatjuk meg (6.53b) differenciálásával, figyelembe véve y' és z' értékeket.

4. Ugyanazon x független változónak n függvényét, az $y_1 = f(x), y_2 = \varphi(x), \ldots, y_n = \psi(x)$ függvényeket az alábbi n egyenletből álló rendszer határozza meg:

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\,, \quad \Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\,, \quad \ldots, \Psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\,. \tag{6.54a}$$

Ezek differenciálása ugyancsak (6.49b) alapján történik:

$$\left.\begin{aligned} F'_x + F'_{y_1} y'_1 + F'_{y_2} y'_2 + \cdots + F'_{y_n} y'_n &= 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_{y_1} y'_1 + \Phi'_{y_2} y'_2 + \cdots + \Phi'_{y_n} y'_n &= 0 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad &= 0 \\ \Psi'_x + \Psi'_{y_1} y'_1 + \Psi'_{y_2} y'_2 + \cdots + \Psi'_{y_n} y'_n &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6.54b}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása szolgáltatja az $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ értékeket. Hasonló módon készíthetjük a magasabb rendű deriváltakat.

5. A kétváltozós $u = f(x, y), v = \varphi(x, y)$ függvényeket az alábbi egyenletrendszer határozza meg:

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{és} \quad \Phi(x, y, u, v) = 0. \tag{6.55a}$$

Ezeket a (6.50b) formula alapján x és y szerint differenciálva nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\,, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.55b}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\,, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.55c}$$

A (6.55b) rendszerből adódó $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ megoldások, valamint a (6.55c) rendszer $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ megoldásai szolgáltatják az elsőrendű parciális deriváltakat. A magasabb rendű deriváltakat is ilyen módon határozzuk meg.

6. n darab m-változós függvényt n egyenletből álló rendszer határoz meg Az első- és magasabb rendű parciális deriváltak meghatározása ugyanazon séma szerint történik, mint ahogyan azt az előző esetekben megmutattuk.

6.2.4. Változók helyettesítése differenciálkifejezésekben és koordinátatranszformációknál

6.2.4.1. Egyváltozós függvény

Amennyiben adott egy függvény és egy olyan függvénykapcsolat, amely a független változó, a függvény és annak deriváltjai között áll fenn:

$$y = f(x)\,, \tag{6.56a}$$

$$H = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right), \tag{6.56b}$$

akkor a deriváltakat a változók helyettesítésével a következő eljárások szerint határozhatjuk meg:

1.a eset: Az x változót a t változóval helyettesítjük, ha a köztük lévő kapcsolat:

$$x = \varphi(t) \tag{6.57a}$$

alakú. Ekkor fennáll:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left\{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right\}\,, \tag{6.57b}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\,\varphi'(t)\,\varphi''(t)\frac{d^2y}{dt^2} + [3[\varphi''(t)]^2 - \varphi'(t)\,\varphi'''(t)]\frac{dy}{dx}\right\}. \tag{6.57c}$$

1.b eset: Ha a változók közti kapcsolat nem explicit, hanem a

$$\Phi(x,t)=0 \tag{6.58}$$

implicit alakban ismert, akkor a $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ deriváltakat ugyanezzel a formulával határozzuk meg, de a $\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t)$ deriváltakat az implicit függvényekre vonatkozó szabályok szerint kell képezni. Ebben az esetben előfordulhat, hogy a (6.56b) összefüggésben az x változó is szerepel. Ezt a (6.58) összefüggés felhasználásával szüntethetjük meg.

2. eset: Az y függvényt az u függvénnyel helyettesítjük, kapcsolatukat

$$y=\varphi(u) \tag{6.59a}$$

fejezi ki. A deriváltakat a következő formulák szerint határozhatjuk meg:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(u)\frac{du}{dx}\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\varphi'(u)\frac{d^2u}{dx^2}+\varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2\,, \tag{6.59b}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\varphi'(u)\frac{d^3u}{dx^3}+3\varphi''(u)\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}+\varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3\,,\ldots\,. \tag{6.59c}$$

3. eset: Az x és y változókat a t és u változókkal helyettesítjük, közöttük az alábbi kapcsolat van:

$$x=\varphi(t,u)\,,\quad y=\psi(t,u). \tag{6.60a}$$

A deriváltak meghatározását az alábbi formulák alapján végezhetjük el:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\,, \tag{6.60b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right]=\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}\right], \tag{6.60c}$$

$$\frac{1}{B}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{B^3}\left(B\frac{dA}{dt}-A\frac{dB}{dt}\right), \tag{6.60d}$$

ahol $A=\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\,,$ (6.60e) $B=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\,.$ (6.60f)

A $\frac{d^3y}{dx^3}$ harmadik derivált kiszámítása analóg módon történik.

■ A DESCARTES-féle koordinátáknak polárkoordinátákkal való átalakításakor

$$x=\rho\cos\varphi\,,\quad y=\rho\sin\varphi \tag{6.61a}$$

alapján az első és második deriváltat a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}\,, \tag{6.61b}$$ $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^3}\,. \tag{6.61c}$$

6.2.4.2. Kétváltozós függvények

Tegyük fel, adott egy függvény és egy olyan függvénykapcsolat, amelyben a független változók, a függvény és ennek parciális deriváltjai szerepelnek:

$$\omega=f(x,y)\,, \tag{6.62a}$$

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \dots\right). \tag{6.62b}$$

Ha x és y változókat az új u és v változókkal helyettesítjük, ahol

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{6.63a}$$

Akkor az elsőrendű parciális deriváltakat meghatározhatjuk a

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v} \tag{6.63b}$$

egyenletrendszerből, ha bevezetjük az új u és v változók függvényeit, az A, B, C és D függvényeket:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = C\frac{\partial\omega}{\partial u} + D\frac{\partial\omega}{\partial v}. \tag{6.63c}$$

A másodrendű parciális deriváltakat ugyanezzel a formulával számíthatjuk, de itt azokat nem ω-ra, hanem annak parciális deriváltjaira: a $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ és a $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$ deriváltakra alkalmazzuk. Pl.

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) = A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)$$
$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right). \tag{6.64}$$

A magasabb rendű parciális deriváltakat ugyanezen a módon számíthatjuk.

■ A LAPLACE-operátor (lásd 680. old.) polárkoordinátákkal (lásd 190. old.) való kifejezése:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \tag{6.65a}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{6.65b}$$

A számítás menete:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Analóg módon határozzuk meg $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$-t, és így

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}. \tag{6.65c}$$

Megjegyzés: Ha függvényeket több változóval kell helyettesítenünk, hasonló helyettesítési formulákat vezethetünk le.

6.2.5. Többváltozós függvények szélsőértékei

6.2.5.1. Definíció

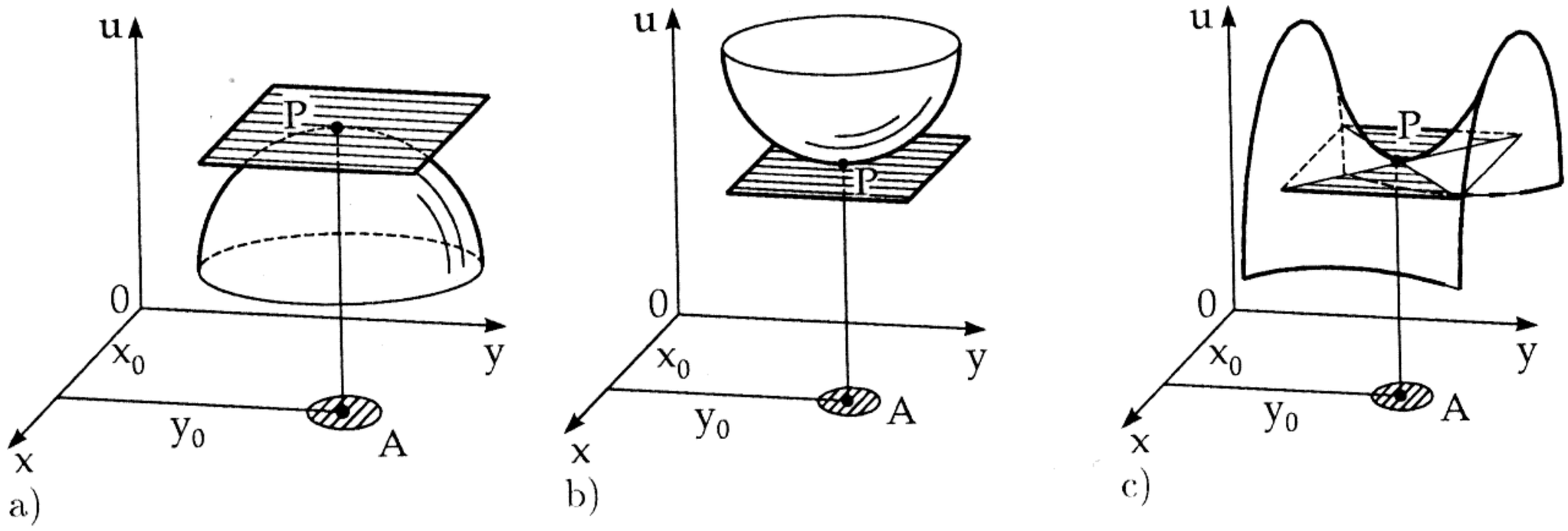
Az $u = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ függvénynek a $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})$ pontban lokális szélsőértéke van, ha megadható egy pozitív ϵ szám úgy, hogy az
$x_{10} - \epsilon < x_1 < x_{10} + \epsilon, x_{20} - \epsilon < x_2 < x_{20} + \epsilon, \dots, x_{n0} - \epsilon < x_n < x_{n0} + \epsilon$ tartomány a függvény értelmezési tartományához tartozzék, és ezen tartomány bármely pontjára (a P_0 pont kivételével) maximum esetén az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \tag{6.66a}$$

és minimum esetén az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \tag{6.66b}$$

egyenlőtlenség áll fenn. A többdimenziós tér fogalmának (lásd 122. old.) megfelelően a lokális maximumpontban a függvényérték nagyobb, minimum esetén, kisebb, mint a pont ϵ-nal meghatározott környezetében.



6.16. ábra.

6.2.5.2. Geometriai jelentés

Egy kétváltozós függvényt a DESCARTES-féle koordináta-rendszerben mint egy felületet ábrázolhatunk (lásd 122. old.). A függvény lokális szélsőértéke abban az A pontban van, amelynek van olyan környezete, hogy abban a pontok u koordinátája nagyobb (kisebb), mint az A-hoz tartozó P pont u koordinátája **(6.16. ábra)**.
Ha a felületnek a lokális szélsőértéket képviselő P pontban érintősíkja van, akkor ez a sík párhuzamos az x, y-síkkal **(6.16.a,b ábra)**. Ez a feltétel szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy a P pontban maximum vagy minimum legyen. A **(6.16.c ábrán)** a felületnek a P pontban vízszintes érintősíkja van, de a függvénynek itt mégsincs szélsőértéke, ez nyeregpont.

6.2.5.3. Kétváltozós függvény szélsőértékeinek meghatározása

Adott $u = f(x, y)$ esetén az $f'_x = 0, f'_y = 0$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Az így nyert (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ értékpárokat helyettesítjük az alábbi kifejezésekbe

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{6.67}$$

Ezután az alábbi kifejezés vizsgálata ad felvilágosítást az u függvény szélsőértékeiről:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = [f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2]_{x=x_i, y=y_i} \tag{6.68}$$

1. Ha az (x_i, y_i) értékpárra $\Delta > 0$ akkor ezen a helyen az $f(x, y)$ függvénynek szélsőértéke van, mégpedig, ha $f''_{xx} < 0$, akkor maximuma, ha $f''_{xx} > 0$ akkor minimuma (elégséges feltétel).

2. Ha $\Delta < 0$ akkor ezen a helyen az $f(x, y)$ függvénynek nincs szélsőértéke.

3. Amennyiben $\Delta = 0$ tovább kell folytatni a vizsgálatot, de ez meglehetősen bonyolult is lehet.

6.2.5.4. Szélsőérték meghatározása n-változós függvény esetén

Annak, hogy egy $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénynek egy adott $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ helyen szélsőértéke legyen (deriválható függvények esetén), szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy ezen a helyen valamennyi parciális derivált eltűnjön:

$$f'_{x_1} = 0\,, \; f'_{x_2} = 0\,, \; \ldots, f'_{x_n} = 0 \tag{6.69}$$

7.2. Konstans tagú sorok

7.2.1. Általános konvergencia-tételek

7.2.1.1. Végtelen sorok konvergenciája és divergenciája

1. Végtelen sor és összege

Az $\{a_k\}$ *végtelen számsorozat* (lásd 409. old.) a_k tagjaiból az

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{7.12}$$

formális összeget képezhetjük, és ezt *végtelen sor*nak nevezzük. Az

$$S_1 = a_1\,,\quad S_2 = a_1 + a_2\,,\quad \ldots,\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{7.13}$$

összegeket *részletösszeg*eknek mondjuk. Ezek a részletösszegek is sorozatot alkotnak.

2. Konvergens és divergens sorok

*Konvergens sor*ról (7.12) akkor beszélünk, ha a $\{S_n\}$ részletösszegek sorozata konvergens. Az

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{7.14}$$

*határérték*et vagy *limesz*t nevezzük a sor *összeg*ének, az a_k-t pedig a sor *általános tagj*ának. Ha ilyen véges határérték nem létezik (7.14), akkor a sor *divergens sor*. Ebben az esetben a részletösszegek minden határon túl növekedhetnek, vagy oszcillálhatnak. A végtelen sor konvergenciájának kérdése így visszavezethető az $\{S_n\}$ sorozat határértékének meghatározására.

■ **A:** A *geometriai sor* (lásd 18. old.)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{7.15}$$

konvergens.

■ **B:** A *harmonikus sor*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (7.16), \qquad \text{a} \quad 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \quad \text{és az} \tag{7.17}$$

$$1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots \tag{7.18}$$

sor divergens. A (7.16) és a (7.17) soroknál $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, a (7.18) sor alternáló sor.

3. Sor maradéktagja

Az $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens sor *maradék*a vagy *maradéktag*ja jelenti az S összegének és az S_n részletösszegnek a különbségét:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\,. \tag{7.19}$$

7.2.1.2. Sorok konvergenciájára vonatkozó tételek

1. Sor konvergenciájának szükséges feltétele Egy sor konvergenciájának szükséges feltétele az, hogy a sor tagjainak a sorozata 0-hoz tartson:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \tag{7.20}$$

Ez *szükséges*, de nem *elégséges feltétel*:

■ A harmonikus sornál (7.16) a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, teljesül, de mégis $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

2. Véges számú tag elhagyása, hozzáírása vagy cseréje Ha egy sorból véges számú tagot elhagyunk, vagy véges számú tagot hozzáírunk, valamint ha véges számú tagot egymással felcserélünk ezzel nem változtatjuk meg azt, hogy a sor konvergens-e vagy sem. (Természetesen az összeg maga megváltozhat.)

3. Az összes tag szorzása Ha egy konvergens sor minden tagját ugyanazzal a c számmal megszorozzuk, akkor a sor konvergenciája megmarad, az összege a c tényezővel szorzódik.

4. Tagonkénti összeadás vagy kivonás Konvergens sorokat tagonként összeadhatunk vagy kivonhatunk. Az

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_1 \quad (7.21a) \qquad b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_2 \quad (7.21b)$$

sorok konvergenciájából következik az alábbi sor konvergenciája és összege:

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots = S_1 \pm S_2\,. \quad (7.21c)$$

7.2.2. Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok

7.2.2.1. Összehasonlító kritérium

Ha az

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (7.22a) \qquad \text{és a } b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (7.22b)$$

csak pozitív tagokat tartalmaz ($a_n > 0$, $b_n > 0$), és ha bizonyos n-től kezdve $a_n \geq b_n$, akkor a (7.22a) sor konvergenciájából következik a (7.22b) sor konvergenciája. Fordítva, a (7.22b) sor divergenciájából következik a (7.22a) sor divergenciája.

■ **A:** Ha a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots \quad (7.23a)$$

sor tagjait összehasonlítjuk a (7.15) geometriai sor tagjaival, megállapíthatjuk, hogy a (7.23a) sor konvergens. Ugyanis, ha $n \geq 2$ a (7.23a) tagjai kisebbek, mint a (7.15) konvergens sor tagjai:

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2)\,. \quad (7.23b)$$

■ **B:** Ha az

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \quad (7.24a)$$

sor tagjait a (7.16) harmonikus sor tagjaival összehasonlítjuk, megállapíthatjuk, hogy a (7.24a) sor divergens. Ugyanis, ha $n > 1$ akkor a (7.24a) sor tagjai nagyobbak mint a (7.16) divergens sor tagjai.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} \quad (n > 1)\,. \quad (7.24b)$$

7.2.2.2. d'Alembert-féle hányadoskritérium

Ha az

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (7.25a)$$

sorban egy bizonyos n- től kezdve minden $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados kisebb mint egy $q < 1$ szám, akkor a sor konvergens:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1\,. \tag{7.25b}$$

Ha ezek a hányadosok egy bizonyos n -től kezdve nagyobbak, mint egy $Q > 1$ szám, akkor a sor divergens. Ebből következik, hogy amennyiben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho\,, \tag{7.25c}$$

akkor a sor $\rho < 1$ esetén konvergens, $\rho > 1$ esetén pedig divergens.

■ **A**: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$ (7.26a)

Ez a sor konvergens, mert

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}\,. \tag{7.26b}$$

■ **B**: Ha a $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{n+1}{n^2} + \cdots$ (7.27a)

sorra alkalmazzuk a hányadoskritériumot

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2} \right) = 1, \tag{7.27b}$$

akkor ennek alapján nem dönthetjük el, hogy a sor konvergens vagy divergens.

7.2.2.3. A Cauchy-féle gyökkritérium

Ha egy

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7.28a}$$

sorra fennáll, hogy egy bizonyos n-től kezdve minden $\sqrt[n]{a_n}$ számra teljesül az, hogy

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1\,, \tag{7.28b}$$

akkor a sor konvergens. Fordítva, ha egy bizonyos n-től kezdve minden $\sqrt[n]{a_n}$ számra fennáll, hogy nagyobb, mint egy Q szám, ahol $Q > 1$, akkor a sor divergens. Vezessük be a következő jelölést:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho. \tag{7.28c}$$

Ha $\rho < 1$, akkor a sor konvergens, ha $\rho > 1$, akkor divergens. Ha $\rho = 1$, akkor nem mondhatunk semmit arról, hogy a sor konvergens-e vagy sem.

■ $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \cdots$ (7.29a)

Ez a sor konvergens, mert

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1\,. \tag{7.29b}$$

7.2.2.4. Cauchy-féle integrálkritérium

1. Konvergencia Az $a_n = f(n)$ általános tagú sor konvergens, ha az $f(x)$ monoton csökkenő függvény és az

$$\int_c^\infty f(x)\,dx \qquad \text{(lásd 461. old.)} \tag{7.30}$$

improprius integrál konvergens.

2. Divergencia Az $a_n = f(n)$ általános tagú sor divergens, ha a (7.30) integrál divergens.

Noha a c alsó integrációs határ tetszés szerinti, mégis úgy kell megválasztani, hogy az $f(x)$ függvény a $c < x < \infty$ intervallumon mindenütt értelmezve legyen és sehol se legyen szakadása.

■ A (7.27a) sor divergens, mert

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int_c^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_c^\infty = \infty\,. \tag{7.31}$$

7.2.3. Abszolút és feltételes konvergencia

7.2.3.1. Definíció

A (7.12) sor tagjai különböző előjelűek lehetnek, mint például az alternáló sorok tagjai. Vizsgálhatjuk az

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tag{7.32}$$

sorokat is, ezeknek tagjait a (7.12) sor tagjainak abszolút értéke alkotja.

Ha a (7.32) sor konvergens, akkor a (7.12) sor is konvergens. Ebben az esetben a (7.12) sor *abszolút konvergens* . Ha a (7.32) sor divergens, akkor a (7.12) sor lehet divergens vagy konvergens. Az utóbbi esetben mondjuk azt, hogy a (7.12) sor *feltételesen konvergens.*

■ **A**: Tekintsük a következő sort $\dfrac{\sin\alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n\alpha}{2^n} + \cdots\,,$ (7.33a)

Itt α tetszés szerinti állandó. Ez a sor abszolút konvergens, mivel a $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$ tagokból álló sor is konvergens. Erről meggyőződhetünk, ha a (7.15) geometriai sorral majoráljuk:

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}\,. \tag{7.33b}$$

■ **B**: Az $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} + \cdots$ (7.34)

sor konvergens (7.36b), de csak feltételesen konvergens, mert $|a_n| = \dfrac{1}{n}$ (lásd (7.16) harmonikus sor).

7.2.3.2. Abszolút konvergens sorok tulajdonságai

1. Tagok felcserélése

a) Az abszolút konvergens sor tagjai egymással tetszés szerint felcserélhetők: a sor összege ezáltal nem változik.

b) Ha egy feltételesen konvergens sor tagjainak felcserélését úgy végezzük el, hogy ebbe az áthelyezésbe tetszőlegesen sok tagot vonunk be, akkor ezáltal a sor összege megváltozhat. RIEMANN *tétele* szerint ilyen módon elérhető, hogy akármilyen tetszőleges adott szám legyen a sor összege.

2. Összeadás és kivonás

Abszolút konvergens sorokat tagonként összeadhatunk vagy kivonhatunk.

3. Szorzás

Abszolút konvergens sorokat, mint közönséges polinomokat egymással összeszorozhatunk. Az eredmény ismét mint sor írható fel, pl.:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots) \\ = \underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_2b_1 + a_1b_2} + \underbrace{a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3} + \cdots \\ + \underbrace{a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n} + \cdots .\end{aligned} \tag{7.35a}$$

Ha a sorok összegét $\sum a_n = S_a$ és $\sum b_n = S_b$ értékeket ismerjük, akkor felírhatjuk a sorok szorzatából nyert sor összegét:

$$S = S_aS_b\,. \tag{7.35b}$$

Ha két sor, az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, és közülük legalább az egyik abszolút konvergens akkor a kettő szorzatából nyert sor is konvergens, de ez nem feltétlenül abszolút konvergens.

7.2.3.3. Alternáló sorok

1. Leibniz-féle konvergenciakritérium (Leibniz-tétele)

Az

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \pm a_n \mp \cdots\,, \tag{7.36a}$$

sor alternáló sor, ha a_n pozitív szám. Az alternáló sor konvergens, ha az alábbi két feltétel teljesül:

$$\textbf{1.}\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{és} \quad \textbf{2.}\ a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots\,. \tag{7.36b}$$

■ A (7.34) sor konvergens, mert ennek a két feltételnek eleget tesz.

2. Az alternáló sor maradéktagjának becslése

Ha egy konvergens alteráló sornál csak az első n tagot vesszük figyelembe akkor az R_n maradéktag előjele megegyezik az első elhagyott a_{n+1} tag előjelével, és az R_n abszolút értéke kisebb, mint $|a_{n+1}|$:

$$\operatorname{sign} R_n = \operatorname{sign}(a_{n+1}) \quad \text{ahol} \quad R_n = S - S_n\,, \tag{7.37a}$$

$$|S - S_n| < |a_{n+1}|\,. \tag{7.37b}$$

■ Az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots = \ln 2 \tag{7.38a}$$

sor maradéktagjára fennáll, hogy

$$R_n = |ln2 - S_n| < \frac{1}{n+1}\,. \tag{7.38b}$$

7.2.4. Néhány speciális sor

7.2.4.1. Néhány konstans tagú sor összege

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e\,, \tag{7.39}$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!} \mp \cdots = \frac{1}{e}\,, \tag{7.40}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots = \ln 2\,, \tag{7.41}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2\,, \tag{7.42}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\pm\frac{1}{2^n}\mp\cdots=\frac{2}{3}\,, \tag{7.43}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\pm\frac{1}{2n-1}\mp\cdots=\frac{\pi}{4}\,, \tag{7.44}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1\,, \tag{7.45}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots=\frac{1}{2}\,, \tag{7.46}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\cdots=\frac{3}{4}\,, \tag{7.47}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\,, \tag{7.48}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots=\frac{1}{4}\,, \tag{7.49}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\ldots l}+\frac{1}{2\cdot 3\ldots(l+1)}+\cdots+\frac{1}{n\ldots(n+l-1)}+\cdots=\frac{1}{(l-1)(l-1)!}\,, \tag{7.50}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\,, \tag{7.51}$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\pm\frac{1}{n^2}\mp\cdots=\frac{\pi^2}{12}\,, \tag{7.52}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}\,, \tag{7.53}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}\,, \tag{7.54}$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots\pm\frac{1}{n^4}\pm\cdots=\frac{7\pi^4}{720}\,, \tag{7.55}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}\,, \tag{7.56}$$

$$1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\cdots+\frac{1}{n^{2k}}+\cdots=\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}B_k\,,^{*} \tag{7.57}$$

$$1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\cdots\pm\frac{1}{n^{2k}}\mp\cdots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k\,, \tag{7.58}$$

$$1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^{2k}}+\cdots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k\,, \tag{7.59}$$

$$1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\cdots\pm\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}\mp\cdots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k\,.^{\dagger} \tag{7.60}$$

---

*B_k az BERNOULLI-féle számokat jelöli

†E_k az EULER-féle számokat jelöli

7.2.4.2. Bernoulli- és Euler-féle számok

1. A Bernoulli-féle számok első definíciója A B_k BERNOULLI-féle számok bizonyos függvények hatványsorba-fejtésekor fordulnak elő. Ilyen függvények pl. a $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ trigonometrikus függvények, a $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ és $\operatorname{cosech} x$ hiperbolikus függvények. A B_k BERNOULLI-féle számokat az alábbiak szerint definiálhatjuk:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} \pm \cdots + (-1)^{n+1}B_n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots \qquad (|x| < 2\pi)\,. \tag{7.61}$$

A B_k számokat az x hatványaira vonatkozó együtthatók összehasonlítása segítségével határozhatjuk meg. Az így nyert értékeket a **7.1. táblázatban** találhatjuk meg.

7.1. táblázat. Első Bernoulli-féle számok

k	B_k	k	B_k	k	B_k	k	B_k
1	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{30}$	7	$\frac{7}{6}$	10	$\frac{174611}{330}$
2	$\frac{1}{30}$	5	$\frac{5}{66}$	8	$\frac{3617}{510}$	11	$\frac{854513}{138}$
3	$\frac{1}{42}$	6	$\frac{691}{2730}$	9	$\frac{43867}{798}$		

2. A Bernoulli-féle számok második definiciója Egyes szerzők a BERNOULLI-féle számokat az alábbi meggondolás alapján határozzák meg:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 + \overline{B_1}\frac{x}{1!} + \overline{B_2}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \overline{B_{2n}}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (|x| < 2\pi). \tag{7.62}$$

Így az alábbi rekurziós formulához jutunk:

$$\overline{B_{k+1}} = (\overline{B}+1)^{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7.63}$$

Itt a binomiális tételt (lásd 12. old.) alkalmazva, mindenütt a $\overline{B}^{\nu}$ kifejezést $\overline{B}_{\nu}$ -val kell helyettesíteni, azaz a kitevőből index lesz. Az első számok a következők:

$$\begin{aligned}
&\overline{B_1} = -\frac{1}{2}, \quad \overline{B_2} = \frac{1}{6}, \quad \overline{B_4} = -\frac{1}{30}, \quad \overline{B_6} = \frac{1}{42}, \\
&\overline{B_8} = -\frac{1}{30}, \quad \overline{B_{10}} = \frac{5}{66}, \quad \overline{B_{12}} = -\frac{691}{2730}, \quad \overline{B_{14}} = \frac{7}{6}, \\
&\overline{B_{16}} = -\frac{3617}{510}, \qquad \overline{B_3} = \overline{B_5} = \overline{B_7} = \cdots = 0.
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Fennáll az alábbi összefüggés:

$$B_k = (-1)^{k+1}\overline{B_{2k}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7.65}$$

3. Az Euler-féle számok első definíciója Az E_k-val jelölt EULER-féle számok bizonyos speciális függvények hatványsorba fejtésénél szerepelnek, pl. a $\sec x$ und $\operatorname{sech} x$ függvényeknél. Az E_k EULER-féle számokat az alábbiak szerint definiálhatjuk:

$$\sec x = 1 + E_1\frac{x^2}{2!} + E_2\frac{x^4}{4!} + \cdots + E_n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.66}$$

Az x hatványaira vonatkozó együtthatók összehasonlításával az E_k számok meghatározhatók. Az így nyert értékek a **7.2. táblázatban** találhatók.

4. Az Euler-féle számok második definíciója Az EULER-*féle számok* meghatározásához (7.63) analogiájára az alábbi

$$(\overline{E}+1)^k+(\overline{E}-1)^k=0 \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{7.67}$$

rekurziós formula alapján is eljuthatunk. Itt is a binomiális tételt alkalmazva, mindenütt a $\overline{E^\nu}$ jelölést $\overline{E_\nu}$ -vel kell helyettesíteni. Az első számok a következők:

$$\begin{aligned}&\overline{E_2}=-1,\quad \overline{E_4}=5,\quad \overline{E_6}=-61,\quad \overline{E_8}=1385,\\ &\overline{E_{10}}=-50521,\quad \overline{E_{12}}=2702765,\quad \overline{E_{14}}=-199360981,\\ &\overline{E_{16}}=19391512145,\qquad \overline{E_1}=\overline{E_3}=\overline{E_5}=\cdots=0.\end{aligned} \tag{7.68}$$

Érvényes az alábbi összefüggés:

$$E_k=(-1)^k\overline{E_{2k}} \qquad (k=1,2,3,\ldots). \tag{7.69}$$

7.2. táblázat. Első Euler-féle számok

k	E_k	k	E_k
1	1	5	50521
2	5	6	2702765
3	61	7	199360981
4	1385		

5. Az Euler-féle és Bernoulli-féle számok közötti összefüggés alapján:

$$\overline{E_{2k}}=\frac{4^{2k+1}}{2k+1}\left(\overline{B_k}-\frac{1}{4}\right)^{2k+1} \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{7.70}$$

7.2.5. A maradéktag becslése

7.2.5.1. Becslés majoráns segítségével

Ha azt akarjuk megbecsülni, milyen pontossággal közelíti meg a sor összegét az n-edik részletösszeg, a maradéktag nagyságát kell megbecsülnünk.

$$|S-S_n|=|R_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \tag{7.71}$$

A $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|$ sor összegét megbecsülhetjük, ha geometriai sorral majoráljuk. Majorálásra természetesen más olyan sort is választhatunk amelynek összege könnyen meghatározható vagy megbecsülhető.

■ Az $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ sor maradéktagjának becslése. Ez a sor konvergens, mert két egymásra következő tag hányadosára, ha $m\ge n+1$, fennáll:
$\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{m!}{(m+1)!}=\frac{1}{m+1}\le\frac{1}{n+2}=q<1$. Így az $R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$ maradéktagot majorálhatjuk azzal a geometriai sorral (7.15), melynek hányadosa $q=\frac{1}{n+2}$ és az első tagja $a=\frac{1}{(n+1)!}$. Így

$$R_n<\frac{a}{1-q}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n!}\frac{n+2}{n^2+2n}=\frac{1}{n\cdot n!}. \tag{7.72}$$

7.2.5.2. Alternáló konvergens sorok

Az olyan konvergens alternáló soroknál, amelyeknél a tagok abszolút értéke monoton tart a nullához, egyszerűen becsülhető a maradéktag (lásd 415. old.):

$$|R_n| = |S - S_n| < |a_{n+1}| \,. \tag{7.73}$$

7.2.5.3. Speciális sorok

Néhány speciális sornál, mint pl. a TAYLOR-soroknál, meghatározott formulák segítségével határozhatjuk meg a maradéktagot (lásd 422. old.).

7.3. Függvénysorok

7.3.1. Definíciók

1. Függvénysor nak nevezzük az olyan sort, melynek tagjai egy és ugyanazon x változónak a függvényei.

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \,. \tag{7.74}$$

2. Részletösszeg nek nevezzük a (7.74) sor első n tagjának összegét. Jelölése $S_n(x)$.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \,. \tag{7.75}$$

3. Konvergenciatartomány A (7.74) függvénysor konvergenciatartományát alkotja az összes olyan $x = a$ érték, amely beletartozik valamennyi $f_n(x)$ függvény értelmezési tartományának közös részébe és amelyre a konstans tagú

$$f_1(a) + f_2(a) + \cdots + f_n(a) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \tag{7.76}$$

sor konvergens, azaz amelyekre a $S_n(a)$ *részletösszegek határértéke* létezik:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(a) = S(a) \,. \tag{7.77}$$

4. A sor összege (7.74) maga az $S(x)$ függvény. Azt mondjuk, hogy a sor az $S(x)$ függvényhez konvergál.

5. Maradéktag ($R_n(x)$) jelenti valamely konvergens függvénysor $S(x)$ összegének és $S_n(x)$ részletösszegének a különbségét:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x) + \cdots \,. \tag{7.78}$$

7.3.2. Egyenletes konvergencia

7.3.2.1. Definíció, Weierstrass-féle kritérium

A számsorozat határértékének definíciójával (lásd 410. és 411. old.) összhangban a (7.74) sor egy adott tartományon konvergens, ha tetszés szerinti kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz található egy N egész szám úgy, hogy ha $n > N$, akkor $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. A függvénysoroknál itt két esetet tudunk megkülönböztetni:

1. Egyenletesen konvergens sor Található egy olyan N szám, amely a (7.74) sor értelmezési tartományának minden x-értékére egyaránt érvényes. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a vizsgált tartományon a sor *egyenletesen konvergens sor.*

2. Nem egyenletesen konvergens sor Nem található olyan N szám, amelyik az értelmezési tartomány minden x-értékére érvényes lenne. Azaz a sor konvergencia-tartományában van legalább egy olyan x szám, amelyikre a $|S(x) - S_n(x)| > \varepsilon$ teljesül, függetlenül n megválasztásától. Ebben az esetben a sor *nem egyenletesen konvergens sor.*

■ **A** : Az $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$ (7.79a)

sor, melynek összege e^x (lásd 1044. old.) konvergens minden x értékre. Tetszés szerinti véges értelmezési tartomány esetén a sor egyenletesen konvergens. Amennyiben $|x| < a$, alkalmazva MACLAURIN maradéktagra vonatkozó formuláját (lásd 423. old.), a sorra vonatkozó egyenlőtlenség az alábbi:

$$S(x) - S_n(x)| < \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}\right| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^a \qquad (0 < \Theta < 1)\,. \tag{7.79b}$$

Mivel $(n+1)!$ gyorsabban növekszik mint a^{n+1} az egyenlőtlenség jobb oldala, megfelelő nagy n esetén x-től függetlenül kisebb, mint ε. Az egész számegyenesre vonatkozóan már nem lehetséges egyenletes konvergencia, n-et bármilyen nagyra is választjuk, mindig található olyan x szám, hogy $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}\right|$ nagyobb, mint egy tetszőlegesen adott ε.

■ **B:** Az alábbbi sor konvergens a $[0, 1]$ zárt intervallum minden x helyén.

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots + x(1-x)^n + \cdots\,, \tag{7.80a}$$

Ugyanis a D'ALEMBERT*kritérium* (lásd 412. old.) szerint:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1-x| < 1, \quad \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ (ha } x = 0 \text{ akkor } S = 0)\,. \tag{7.80b}$$

A konvergencia azonban nem egyenletes, mivel

$$S(x) - S_n(x) = x[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \cdots] = (1-x)^{n+1}. \tag{7.80c}$$

Belátható, hogy itt bármilyen nagy n estén is, mindig található olyan kicsiny x, amelyre $(1-x)^{n+1}$ akármilyen közel lehet 1-hez, így nem kisebb, mint ε. Egyenletesen konvergens a sor, ha az $a \le x \le 1$ intervallumon tekintjük azzal a feltétellel, hogy $0 < a < 1$.

3. Weierstrass egyenletes konvergenciára vonatkozó kritériuma Adott tartományon az

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{7.81a}$$

sor egyenletesen konvergens, ha van olyan konstans tagú

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \tag{7.81b}$$

konvergens sor, hogy ennek a tartománynak minden x-értékére az

$$|f_n(x)| \le c_n \tag{7.81c}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ekkor (7.81c) sort a (7.81a) sor majoránsának mondjuk.

7.3.2.2. Egyenletesen konvergens sorok tulajdonságai

1. Folytonosság Ha $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ folytonos függvények érteémezési tartománya azonos, és ha ezen a tartományon az $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ sor egyenletesen konvergens, akkor ezen a tartományon a sor $S(x)$ összege folytonos függvény. Ha egy sor valamely véges tartományon nem egyenletesen konvergens, akkor lehetséges, hogy $S(x)$ összege a tartomány egyes helyein nem folytonos.

■ **A:** A (7.80a) sor összege nem folytonos az $x = 0$ helyen. $S(x) = 0$, ha $x = 0$ és $S(x) = 1$, ha $x > 0$.

■ **B:** A (7.79a) sor összege folytonos függvény. A sor nem egyenletesen konvergens, de ez nem egy véges tartományra, hanem a teljes számegyenesre vonatkoztatva igaz.

2. Egyenletesen konvergens sorok integrálása és deriválása Az $[a, b]$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens sort tagonként integrálhatunk. Ugyyanígy deriválható tagonként egy konvergens sor is, ha az így keletkezett sor egyenletesen konvergens. Ennek értelmében:

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \quad \text{ha } x_0, x \in [a, b]\,, \tag{7.82a}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \text{ha } x \in [a, b]\,. \tag{7.82b}$$

7.3.3. Hatványsorok

7.3.3.1. Definíció, konvergencia

1. Definíció A legfontosabb függvénysorok az alábbi alakban adott *hatványsorok*:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7.83a}$$

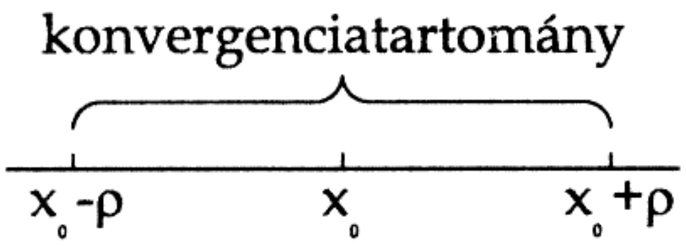
vagy

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \,, \tag{7.83b}$$

Itt a kifejtés helyét jelölő x_0 és az a_i együtthatók konstans számok.

2. Abszolút konvergencia és konvergenciasugár Egy hatványsor konvergens, ha vagy $x = x_0$, vagy ha x tetszőleges, vagy létezik egy olyan $\rho > 0$ szám, a konvergenciasugár, hogy a sor $|x - x_0| < \rho$ abszolút konvergens és $|x - x_0| > \rho$ esetén divergens **(7.1. ábra)**.
A *konvergenciasugár*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{vagy} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{7.84}$$



7.1. ábra.

alapján határozható meg, amennyiben ezek a határértékek léteznek. Ha ilyen határérték nincs, akkor a közönséges limesz (lim) helyett a *limes superior*t ($\overline{\lim}$) kell vennünk (lásd [7.10]) A konvergencia-intervallum határpontjain a sor konvergens vagy divergens is lehet. Ezek a határpontok a (7.83a) sornál $x = +\rho$ és $x = -\rho$ és a (7.83b) sornál $x = x_0 + \rho$ és $x = x_0 - \rho$ (lásd [7.10]).

3. Egyenletes konvergencia A hatványsor konvergencia-tartományának minden $|x - x_0| \le \rho_0 < \rho$ zárt részintervallumán egyenletesen konvergens (ABEL *tétele*).

■ Az $1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \cdots$ sorra $\dfrac{1}{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, azaz $\rho = 1$. (7.85)

Így a sor $-1 < x < +1$ esetén abszolút konvergens, ha $x = -1$ akkor feltételesen konvergens (lásd (7.34) sor a 414. oldalon) és ha $x = 1$, akkor divergens (lásd a (7.16) harmonikus sor a 411. oldalon). ABEL tétele szerint ez a sor minden olyan $[-\rho_1, +\rho_1]$ intervallumon, ahol ρ_1 tetszőleges 0 és 1 közé eső szám, egyenletesen konvergens.

7.3.3.2. Műveletek hatványsorokkal

1. Összeg és szorzat Konvergens hatványsorokat a közös konvergencia-tartományukon belül tagonként összeadhatunk, egymással összeszorozhatunk és tetszés szerinti konstans számmal szorozhatunk.
Két hatványsor szorzata:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2$$
$$+ (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \cdots . \tag{7.86}$$

2. Hatványsorok néhány hatványa

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \cdots \tag{7.87}$$

$$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4$$
$$+ 2(af + be + cd)x^5 + \cdots , \tag{7.88}$$

$$\sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \cdots\right], \tag{7.89}$$

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = S^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \cdots\right], \tag{7.90}$$

$$\frac{1}{S} = S^{-1} = a^{-1}\left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \cdots\right], \tag{7.91}$$

$$\frac{1}{S^2} = S^{-2} = a^{-2}\left[1 - 2\frac{b}{a}x + \left(3\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(6\frac{bc}{a^2} - 2\frac{d}{a} - 4\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(6\frac{bd}{a^2} + 3\frac{c^2}{a^2} - 2\frac{e}{a} - 12\frac{b^2c}{a^3} + 5\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \cdots\right]. \tag{7.92}$$

3. Két hatványsor hányadosa

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \frac{a_0}{b_0}\frac{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots}{1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots} = \frac{a_0}{b_0}[1 + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_2 - \alpha_1\beta_1 + {\beta_1}^2 - \beta_2)x^2 + (\alpha_3 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \beta_3 - {\beta_1}^3 + \alpha_1{\beta_1}^2 + 2\beta_1\beta_2)x^3 + \cdots]. \tag{7.93}$$

Ezt a formulát úgy nyerjük, hogy a hányadost felírjuk mint c_i határozatlan együtthatókkal bíró sort, majd ezt a nevezőben lévő sorral megszorozzuk. Az így keletkezett sor együtthatóit a számlálóban lévő sor együtthatóival összehasonlítva határozhatjuk meg a c_i együtthatókat.

4. Hatványsor inverze Adott az

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \cdots \quad (a \neq 0) \tag{7.94a}$$

sor. Az inverzén az alábbi sort értjük:

$$x = \varphi(y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \cdots. \tag{7.94b}$$

Az együtthatók az alábbiak szerint adódnak:

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a^3}, \quad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac), \quad D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$
$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c), \tag{7.94c}$$
$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5).$$

Az inverz-sor konvergenciáját minden példánál külön kell megvizsgálni.

7.3.3.3. Taylor-sorfejtés, MacLaurin-sor

A fontosabb elemi függvények hatványsorba fejtett alakját a **21.3. táblázat** (lásd 1042. old.) tartalmazza. Ezeket a TAYLOR-sorba való fejtés szabályai szerint határozták meg.

1. Egyváltozós függvények Taylor-sora

Az olyan folytonos $f(x)$ függvény, amelyik az $x = a$ helyen végtelen sokszor differenciálható a TAYLOR-formula (lásd 395. old.) segítségével gyakran hatványsor összegeként írható fel.

a) A felírás első alakja:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots \tag{7.95a}$$

A (7.95a) sorbafejtést azokra az x-értékekre végezhetjük el, amelyekre az $R_n = f(x) - S_n$ maradéktag az $n \to \infty$ esetén nullához tart. Itt ügyelnünk kell arra, hogy a maradéktag fogalma a 419. oldalon ugyanezen a néven bevezetett fogalommal csak akkor azonos, ha a (7.95b) formula itt is alkalmazható, és ez a nullához tart.

A maradéktagot kétféle módon írhatjuk fel:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad (a < \xi < x) \quad \text{vagy} \quad (x < xi < a) \quad \text{(Lagrange-féle alak)}\,, \tag{7.95b}$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \text{(integrál-alak)}\,. \tag{7.95c}$$

b) A felírás második alakja:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots\,. \tag{7.96a}$$

A maradéktag felírható:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1)\,, \tag{7.96b}$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\,dt\,. \tag{7.96c}$$

2. MacLaurin-sor

A MACLAURIN-*sor* a TAYLOR-sor speciális esete, amikor az $f(x)$ függvényt az $a = 0$ helyen fejtjük sorba. Így

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \tag{7.97a}$$

A maradéktag:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta x) \qquad (0 < \Theta < 1)\,, \tag{7.97b}$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{7.97c}$$

A TAYLOR- és MACLAURIN-sor konvergenciájának megállapításához vagy az R_n maradéktagot kell megvizsgálnunk, vagy a konvergenciasugarat (lásd 421. old.) kelI meghatároznunk. Ebben a második esetben előfordulhat, hogy a sor ugyan konvergens, de ennek $S(x)$ összege nem egyenlő a sorbafejtett $f(x)$ függvénnyel.

3. Kétváltozós függvények Taylor-sora

a) Az előállítás első alakja:

$$f(x,y) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}(x-a) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)}(y-b)$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Big|_{(x,y)=(a,b)}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(a,b)}(x-a)(y-b)$$
$$+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Big|_{(x,y)=(a,b)}(y-b)^2\Big\}+\frac{1}{6}\{\ldots\}+\cdots+\frac{1}{n!}\{\ldots\}+R_n\,. \tag{7.98a}$$

Itt (a,b) az a hely, ahol a sorbafejtés történik, R_n a maradéktag. Előfordul, hogy pl. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$ helyett a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ rövidebb jelölésmódot használjuk. A (7.98a)-ban szereplő magasabb rendű parciális deriváltakat tartalmazó tagok felírását operátorok segítségével tehetjük áttekinthetővé:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\Big\{(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\Big\}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$
$$+\frac{1}{2!}\Big\{(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\Big\}^2 f(x,y)\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$
$$+\frac{1}{3!}\{\ldots\}^3 f(x,y)\Big|_{(x,y)=(a,b)}+\cdots+\frac{1}{n!}\{\ldots\}^n f(x,y)\Big|_{(x,y)=(a,b)}+R_n\,. \tag{7.98b}$$

Ez a szimbolikus jelölési mód azt jelenti, hogy a $\frac{\partial}{\partial x}$ ill. a $\frac{\partial}{\partial y}$ differenciáloperátorok hatványait a binomiális tétel alkalmazása után az $f(x,y)$ függvényre vonatkozó magasabb rendű deriválás előírásának tekintjük. A differenciálhányadosokat az (a,b) helyen kell meghatároznunk.

b) Az előállítás második alakja:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x,y)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^3 f(x,y)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x,y)+R_n\,. \tag{7.98c}$$

A maradéktag:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x+\Theta h,y+\Theta k)\qquad(0<\Theta<1)\,. \tag{7.98d}$$

4. m-változós függvény Taylor-sora

A differenciáloperátorokkal felírt analóg előállítás a következő:

$$f(x+h,y+k,\ldots,t+l)=f(x,y,\ldots,t)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\cdots+\frac{\partial}{\partial t}l\right)^i f(x,y,\ldots,t)+R_n\,. \tag{7.99a}$$

A maradéktag az

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\cdots+\frac{\partial}{\partial t}l\right)^{n+1} f(x+\Theta h,y+\Theta k,\ldots,t+\Theta l)\qquad(0<\Theta<1) \tag{7.99b}$$

összefüggés segítségével határozható meg.

7.3.4. Közelítő formulák

A TAYLOR-sorba való fejtés segítségével, ha a sorfejtés helyének korlátozottan megfelelő kis környezetét vesszük figyelembe, sok függvényhez gyakorlatilag jó közelítő formulák állíthatók elő. Néhány függvényhez tartozó ilyen formula első tagjai a **7.3. táblázatban** találhatók. A pontosságra vonatkozó adatok a maradéktag becslése alapján határozhatók meg. Függvények közelítő formuláinak meghatározása

történhet pl. interpolációval, kiegyenlítő polinomokkal vagy spline-függvényekkel. Ezekről a (19.6.) és (19.7.) fejezetekben lesz szó.

7.3. táblázat. Néhány gyakran használt függvény közelítő alakja

Közelítés	Következő tag	Az x számára adott intervallum, amennyiben a hiba					
		0,1%		1%		10%	
		-tól	-ig	-tól	-ig	-tól	-ig
$\sin x \approx x$	$-\frac{x^3}{6}$	$-0{,}077$ $-4{,}4°$	$0{,}077$ $4{,}4°$	$-0{,}245$ $-14{,}0°$	$0{,}245$ $14{,}0°$	$-0{,}786$ $-45{,}0°$	$0{,}786$ $45{,}0°$
$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$	$+\frac{x^5}{120}$	$-0{,}580$ $-33{,}2°$	$0{,}580$ $33{,}2°$	$-1{,}005$ $-57{,}6°$	$1{,}005$ $57{,}6°$	$-1{,}632$ $-93{,}5°$	$1{,}632$ $93{,}5°$
$\cos x \approx 1$	$-\frac{x^2}{2}$	$-0{,}045$ $-2{,}6°$	$0{,}045$ $2{,}6°$	$-0{,}141$ $-8{,}1°$	$0{,}141$ $8{,}1°$	$-0{,}415$ $-25{,}8°$	$0{,}415$ $25{,}8°$
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^4}{24}$	$-0{,}386$ $-22{,}1°$	$0{,}386$ $22{,}1°$	$-0{,}662$ $-37{,}9°$	$0{,}662$ $37{,}9°$	$-1{,}036$ $-59{,}3°$	$1{,}036$ $59{,}3°$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$+\frac{x^3}{3}$	$-0{,}054$ $-3{,}1°$	$0{,}054$ $3{,}1°$	$-0{,}172$ $-9{,}8°$	$0{,}172$ $9{,}8°$	$-0{,}517$ $-29{,}6°$	$0{,}517$ $29{,}6°$
$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$	$+\frac{2}{15}x^5$	$-0{,}293$ $-16{,}8°$	$0{,}293$ $16{,}8°$	$-0{,}519$ $-29{,}7°$	$0{,}519$ $29{,}7°$	$-0{,}895$ $-51{,}3°$	$0{,}895$ $51{,}3°$
$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}$ $= \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+x}{a}\right)$	$-\frac{x^2}{8a^3}$	$-0{,}085a^2$	$0{,}093a^2$	$-0{,}247a^2$	$0{,}328a^2$	$-0{,}607a^2$	$1{,}545a^2$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} \approx \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$	$+\frac{3x^2}{8a^5}$	$-0{,}051a^2$	$0{,}052a^2$	$-0{,}157a^2$	$0{,}166a^2$	$-0{,}488a^2$	$0{,}530a^2$
$\frac{1}{a+x} \approx \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$+\frac{x^2}{a^3}$	$-0{,}031a$	$0{,}031a$	$-0{,}099a$	$0{,}099a$	$-0{,}301a$	$0{,}301a$
$e^x \approx 1 + x$	$+\frac{x^2}{2}$	$-0{,}045$	$0{,}045$	$-0{,}134$	$0{,}148$	$-0{,}375$	$0{,}502$
$\ln(1+x) \approx x$	$-\frac{x^2}{2}$	$-0{,}002$	$0{,}002$	$-0{,}020$	$0{,}020$	$-0{,}176$	$0{,}230$

7.3.5. Aszimptotikus hatványsorok

A függvények helyettesítési értékének meghatározásához divergens sorok is hasznosak lehetnek. A következőkben $\frac{1}{x}$-re vonatkozó aszimptotikus hatványsor segítségével határozzuk meg néhány függvény nagy $|x|$ -hez tartozó helyettesítési értékét.

7.3.5.1. Aszimptotikus egyenlőség

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények értelmezési tartománya $x_0 < x < \infty$. Akkor mondjuk, hogy $x \to \infty$, esetén *aszimptotikusan egyenlők*, ha fennáll

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{(7.100a)} \qquad \text{ill.} \quad f(x) = g(x) + O(g(x)) \quad \text{amikor} \quad x \to \infty \qquad \text{(7.100b)}$$

Itt az $O(g(x))$ tag felírásakor a O LANDAU-szimbólumot „nagy ordo"-t használtuk (lásd 57. old.). Ha (7.100b) teljesül, akkor azt így jelöljük: $f(x) \sim g(x)$.

■ **A:** $\sqrt{x^2+1} \sim x$. ■ **B:** $e^{\frac{1}{x}} \sim 1$. ■ **C:** $\dfrac{3x+2}{4x^3+x+2} \sim \dfrac{3}{4x^2}$.

7.3.5.2. Aszimptotikus hatványsorok

1. Az aszimptotikus sor fogalma

Legyen az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $x > x_0$. Az $\sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{a_\nu}{x^\nu}$ sorról akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény *aszimptotikus hatványsora*, ha

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{x^\nu} + O(\frac{1}{x^{n+1}}) \tag{7.101}$$

minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén fennáll. Itt az $O(\dfrac{1}{x^{n+1}})$ tagban a LANDAU-szimbólumot „nagy ordó "-t használtuk. Ha a (7.101) összefüggés fennáll, akkor $f(x) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{a_\nu}{x^\nu}$. alakban is felírható.

2. Aszimptotikus hatványsorok tulajdonságai

a) Egyértelműség: Ha egy $f(x)$ függvénynek létezik aszimptotikus hatványsora, akkor ez egyértelmű. Az aszimptotikus hatványsor azonban nem határozza meg egyértelműen a függvényt.

b) Konvergencia: Az aszimptotikus hatványsornak nem kell konvergensnek lennie.

■ **A:** Az $e^{\frac{1}{x}} \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{\nu! x^\nu}$ olyan aszimptotikus sor, amelyik minden x-re konvergens, ha $|x| > x_0$ $(x_0 > 0)$.

■ **B:** Ismételt parciális integrálással az $f(x) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$ $(x > 0)$ paraméteres integrált, (ami $x > 0$ esetén konvergens), az $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1!}{x^2} + \dfrac{2!}{x^3} - \dfrac{3!}{x^4} \pm \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} + R_n(x)$ alakban írhatjuk fel, ahol $R_n(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^n} \int_0^\infty \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Mivel $|R_n(x)| \le \dfrac{n!}{x^n} \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ az $R_n(x) = O(\dfrac{1}{x^{n+1}})$ és ezzel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu!}{x^{\nu+1}}. \tag{7.102}$$

A (7.102) aszimptotikus hatványsor divergens minden x-re. Ugyanis az $(n+1)$-edik és n-edik tag hányadosa $\dfrac{n+1}{x}$. Mégis ezt a divergens sort az $f(x)$ függvény helyettesítési értékeinek becsléséhez jól használhatjuk. Így pl. $x = 10$ esetén az $S_4(10)$ és $S_5(10)$ részletösszegek segítségével felírhatjuk az alábbi becslést: $0{,}0914 < \int_0^\infty \dfrac{e^{-10t}}{1+t}\,dt < 0{,}09164$.

7.4. Fourier-sorok

7.4.1. Trigonometrikus összeg és Fourier-sor

7.4.1.1. Alapfogalmak

1. Periodikus függvények Fourier-előállítása (Fourier-analízis)

Gyakran szükséges, vagy előnyös az, hogy egy adott T periódusú $f(x)$ periodikus függvényt exakt vagy közelítő módon trigonometrikus függvények összegeként állítsunk elő:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \cdots + a_n \cos n\omega x$$
$$+b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \cdots + b_n \sin n\omega x \tag{7.103}$$

Ezt az eljárást FOURIER-*sorfejtés*nek nevezzük. Itt a körfrekvencia $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Ha $T = 2\pi$, akkor $\omega = 1$.

Az $f(x)$ legjobb közelítését a 428. oldalon közöltek értelmében olyan $s_n(x)$ közelítő-függvény segítségével érjük el ahol az a_k és b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ együtthatókat az adott függvény FOURIER-*együtthatóit* választjuk. Ezek pontos értékét az EULER-*féle formulák* felhasználásával határozhatjuk meg:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x \, dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x \, dx$$
$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) + f(-x)] \cos k\omega x \, dx \,, \tag{7.104a}$$

és

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x \, dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin k\omega x \, dx$$
$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) - f(-x)] \sin k\omega x \, dx \,, . \tag{7.104b}$$

Közelítő megoldást találhatunk a *harmonikus analízis módszerének* (lásd 949. old.) segítségével.

2. Fourier-sor

Ha bizonyos x értékekre $n \to \infty$ esetén az $s_n(x)$ függvény egy meghatározott $s(x)$ határértékhez tart, akkor az adott függvénynek ezekre az x értékekre *konvergens* FOURIER-*sor*a van. Ez felírható az

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \cdots + a_n \cos n\omega x + \cdots$$
$$+b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \cdots + b_n \sin n\omega x + \cdots \tag{7.105a}$$

alakban. De felírható

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \cdots + A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) + \cdots \tag{7.105b}$$

alakban is. Ebben az utóbbi esetben:

$$A_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \,. \tag{7.105c}$$

3. A Fourier-sor komplex alakja

Sok esetben előnyös a komplex alak:

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x} \,, \tag{7.106a}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\mathrm{i}k\omega x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 & \text{ha } k = 0\,, \\ \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) & \text{ha } k > 0\,, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k}) & \text{ha } k < 0\,. \end{cases} \tag{7.106b}$$

7.4.1.2. A Fourier-sorok legfontosabb tulajdonságai

1. Kvadratikus középhiba

Ha az $f(x)$ függvényt az

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\omega x + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\omega x \tag{7.107a}$$

trigonometrikus összeggel, más néven FOURIER-*összeg*gel közelítjük, úgy az

$$F = \frac{1}{T}\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2\,dx \tag{7.107b}$$

kvadratikus (négyzetes) középhiba (lásd 942. old. és 950. old.) akkor a legkisebb, ha az a_k és b_k értékeket az adott függvény FOURIER-együtthatóiként (7.104a,b) határozzuk meg.

2. Középértékben való konvergencia, Parseval-egyenlőség

A FOURIER-sor középértékben tart az adott függvényhez, azaz fennáll:

$$\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2\,dx \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty\,, \tag{7.108a}$$

ha a függvény korlátos és a $0 < x < T$ intervallumon legalább szakaszonként folytonos. A középértékben való konvergencia egyik következménye a PARSEVAL-*féle egyenlőség*:

$$\frac{2}{T}\int_0^T [f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2)\,. \tag{7.108b}$$

3. Dirichlet-féle feltételek

Ha az $f(x)$ függvény megfelel a DIRICHLET-féle feltételeknek, azaz, ha

a) a kérdéses intervallum véges sok olyan részintervallumra bontható, amelyekben az $f(x)$ függvény folytonos és monoton, és

b) az $f(x)$ minden x szakadási helyén az $f(x+0)$ és $f(x-0)$ értelmezve vannak,

akkor a FOURIER-sor konvergál ehhez a függvényhez. A sor összege ott, ahol $f(x)$ folytonos, egyenlő $f(x)$-szel, a a szakadási helyeken a sor összege $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

4. A Fourier-együtthatók aszimptotikus viselkedése

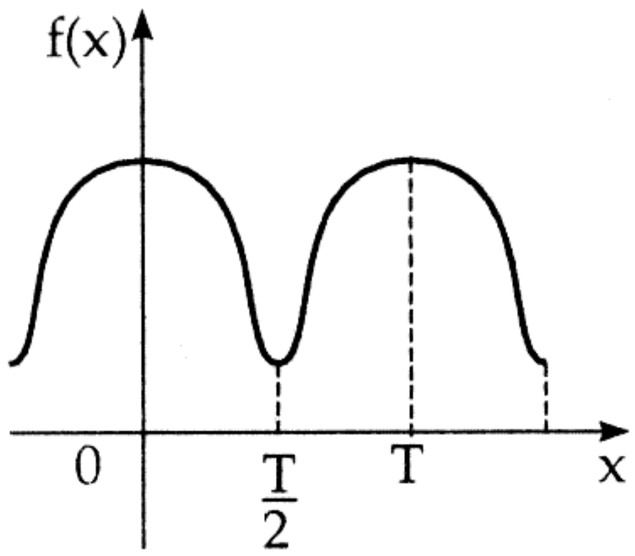
Ha az $f(x)$ periodikus függvény és deriváltjai is, egészen a k-adrendűikig folytonosak, akkor $n \to \infty$ esetén az $a_n n^{k+1}$ és $b_n n^{k+1}$ kifejezések nullához tartanak.

7.4.2. Szimmetrikus függvények együtthatóinak meghatározása

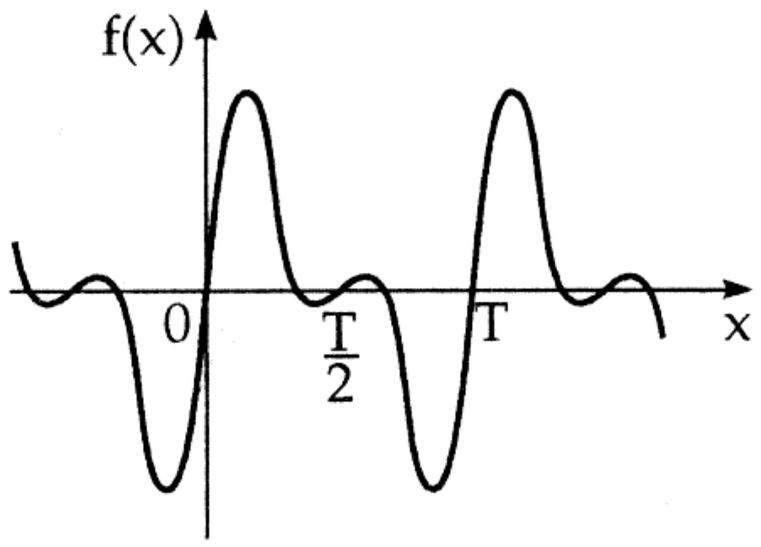
7.4.2.1. Különböző szimmetriák

1. szimmetria Ha $f(x)$ páros függvény, azaz ha $f(x) = f(-x)$ **(7.2. ábra)**, akkor az együtthatók:

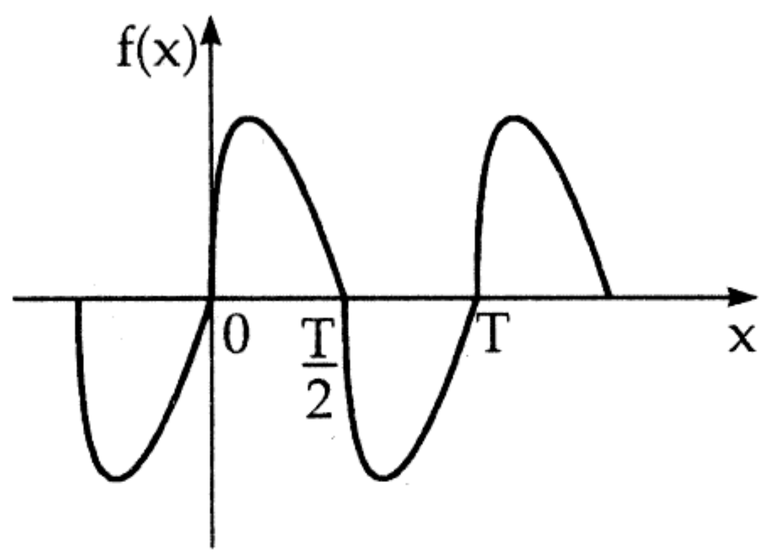
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\frac{2\pi x}{T}\,dx\,, \quad b_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.109}$$



7.2. ábra.



7.3. ábra.



7.4. ábra.

2. szimmetria Ha $f(x)$ páratlan függvény, azaz ha $f(x) = -f(-x)$ **(7.3. ábra)**, akkor az együtthatók:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin k \frac{2\pi x}{T}\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.110}$$

3. szimmetria Ha $f(x + T/2) = -f(x)$ **(7.4. ábra)**, akkor az együtthatók

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx\,, \quad a_{2k} = 0\,, \tag{7.111a}$$

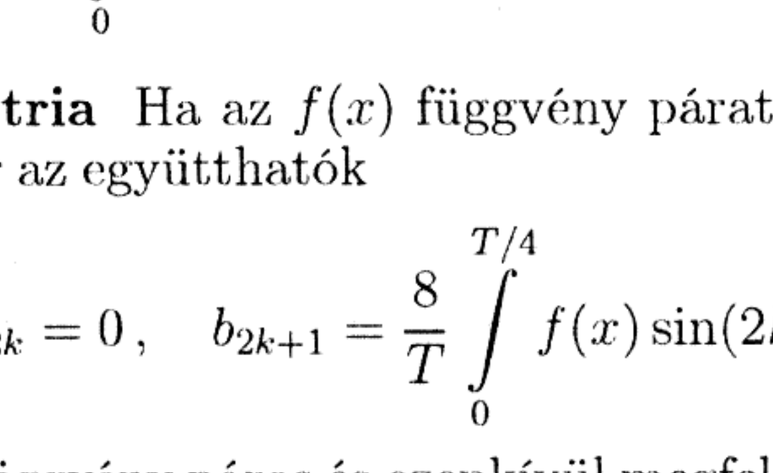
$$b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx\,, \quad b_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.111b}$$

4. szimmetria Ha az $f(x)$ függvény páratlan és ezenkívül eleget tesz a 3. szimmetriának **(7.5.a ábra)**, akkor az együtthatók

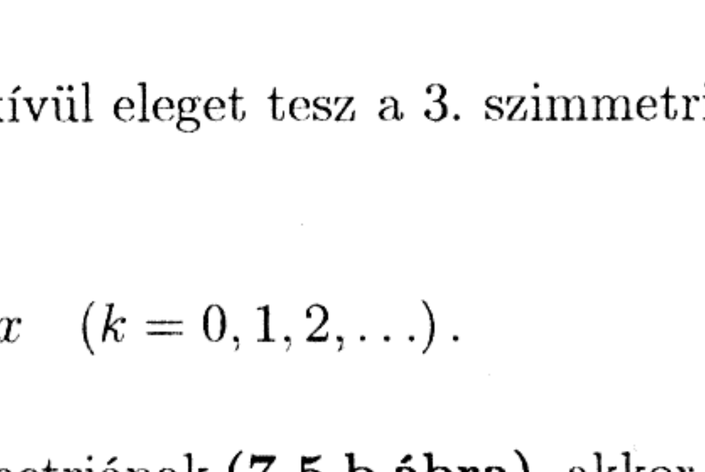
$$a_k = b_{2k} = 0\,, \quad b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \sin(2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.112}$$

Ha az $f(x)$ függvény páros és ezenkívül megfelel a 3. szimmetriának **(7.5.b ábra)**, akkor az együtthatók:

$$b_k = a_{2k} = 0\,, \quad a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \cos(2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.113}$$

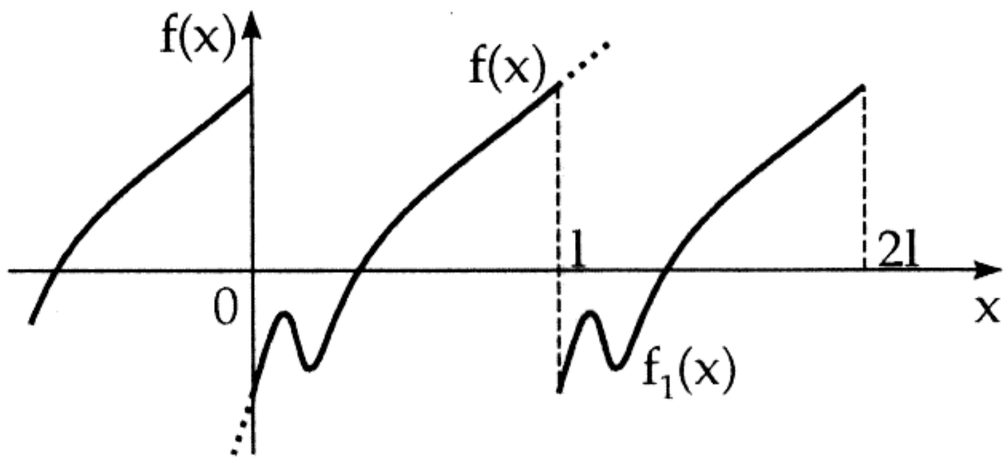


a)

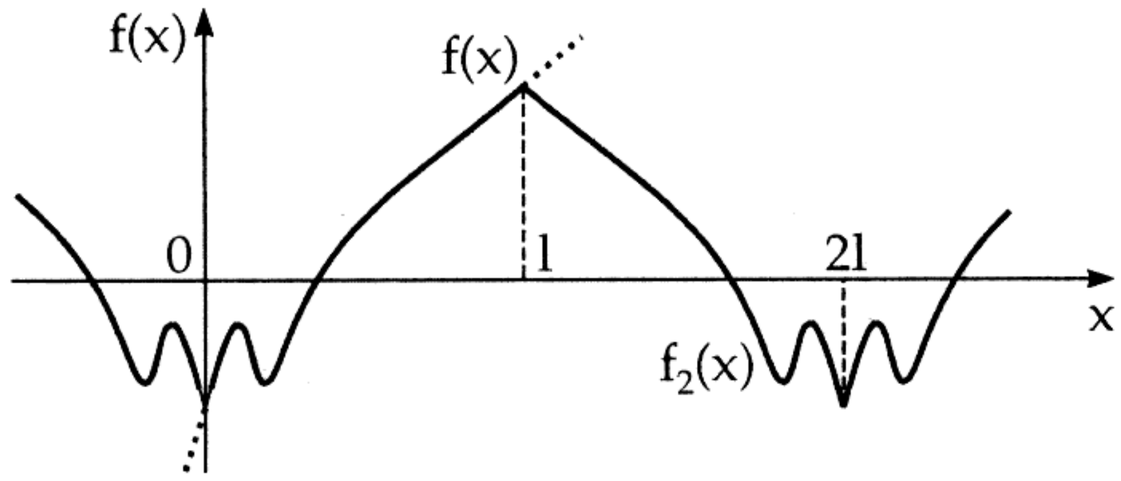


b)

7.5. ábra.



7.6. ábra.



7.7. ábra.

7.4.2.2. A Fourier-sorfejtés formulái

Minden $f(x)$ függvény, amelyik az $0 \leq x \leq l$ intervallumon a DIRICHLET-féle feltételeknek (lásd 428. old.) eleget tesz, ezen az intervallumon az alábbi formulák szerint konvergens sorokba fejthető:

1. $$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{l} + \cdots + a_n \cos n\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$+ b_1 \sin\frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin 2\frac{2\pi x}{l} + \cdots + b_n \sin n\frac{2\pi x}{l} + \ldots . \qquad (7.114a)$$

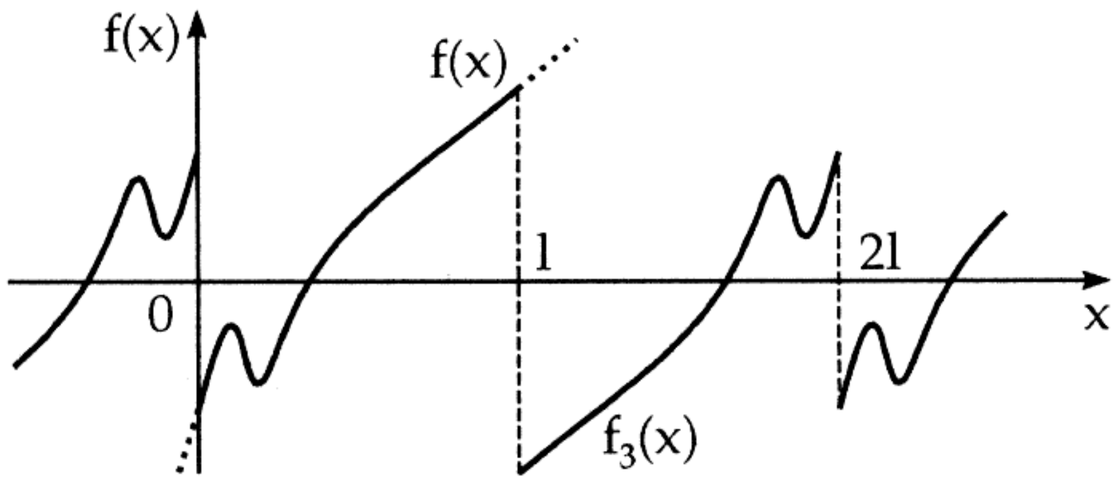
Az $f_1(x)$ függvény periódusa $T = l$; a $0 < x < l$ intervallumon $f_1(x)$ azonos az $f(x)$ függvénnyel **(7.6. ábra)**. A szakadási helyeken $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$. A sorfejtési együtthatókat az EULER-féle formulák (7.104a,b) segítségével $\omega = \frac{2\pi}{l}$ értékre kell meghatározni.

2. $$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2\frac{\pi x}{l} + \cdots + a_n \cos n\frac{\pi x}{l} + \cdots . \qquad (7.114b)$$

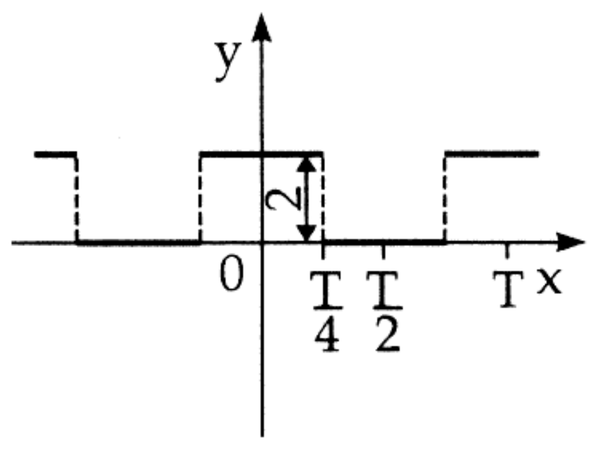
Az $f_2(x)$ függvény periódusa $T = 2l$; az $0 \leq x \leq l$ intervallumban az $f_2(x)$ függvény 1. szimmetriájú, és azonos $f(x)$-szel **(7.7. ábra)**. Az $f_2(x)$ függvény sorfejtési együtthatóit az 1. szimmetria szerint határozzuk meg, de $T = 2l$.

3. $$f_3(x) = b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin 2\frac{\pi x}{l} + \cdots + b_n \sin n\frac{\pi x}{l} + \cdots . \qquad (7.114c)$$

Az $f_3(x)$ periódusa $T = 2l$; a $0 < x < l$ intervallumban az $f_3(x)$ függvény 2. szimmetriájú, és azonos $f(x)$-szel **(7.8. ábra)**. A sorfejtési együtthatókat a 2. szimmetria szerint határozzuk meg, figyelembe véve, hogy itt $T = 2l$.



7.8. ábra.



7.9. ábra.

7.4.3. Az együtthatók meghatározása numerikus módszerekkel

Ha az $f(x)$ periodikus függvény bonyolult, vagy a $0 \leq x < T$ intervallumon az $x_k = \frac{kT}{N}$ (ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) diszkrét helyeken van értelmezve, akkor a FOURIER-együtthatóknak csak közelítő

értékét tudjuk meghatározni. Itt a mérési eredmények kiértékelésénél pl. az N szám nagyon nagy lehet. Ilyenkor a *numerikus harmonikus analízis* (lásd 949. old.) módszereihez kell fordulnunk.

7.4.4. Fourier-sor és Fourier-integrál

1. Fourier-integrál

Ha az $f(x)$ függvény egy tetszőleges véges intervallumban eleget tesz a DIRICHLET-féle feltételeknek (lásd 428. old.), és ezenkívül az $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ improprius integrál konvergens (lásd 461. old.), akkor előállítható a FOURIER-integrál segítségével:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega x}\,d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt\,. \tag{7.115a}$$

A szakadási helyeken:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]\,. \tag{7.115b}$$

2. Nemperiodikus függvény, mint határeset

A (7.115a) formulát felfoghatjuk úgy, mint az $f(x)$ nemperiodikus függvény trigonometrikus sorfejtésének egy határesetét. Az intervallum felfogható mint $(-l, +l)$, ahol $l \to \infty$.

A FOURIER-féle sorfejtéssel a T periódusú $f(x)$ periodikus függvény $\omega_n = n\dfrac{2\pi}{T}$ (ahol $n = 1, 2, \ldots$) frekvenciájú és A_n amplitúdójú harmonikus rezgések összegeként állítható elő. Ez az előállítás így *diszkrét frekvenciaspektrum*on alapszik.

Ettől eltérően a FOURIER-integrál az $f(x)$ nemperiodikus függvényt, mint végtelen sok folytonosan változó ω frekvenciájú harmonikus rezgés összegét állítja elő. Így a FOURIER-integrál az $f(x)$ függvénynek egy *folytonos frekvenciaspektrum*ba való fejtését adja. Itt az ω frekvencia a spektrum sűrűségének felel meg:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt\,. \tag{7.115c}$$

A FOURIER-integrál egyszerűbb alakú, ha $f(x)$ vagy **a)** páros, vagy **b)** páratlan függvény:

$$\textbf{a)}\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos\omega x\,d\omega \int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,, \tag{7.116a}$$

$$\textbf{b)}\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin\omega x\,d\omega \int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\,. \tag{7.116b}$$

■ Az $f(x) = e^{-|x|}$ páros függvény esetén felírhatjuk a frekvenciaspektrum sűrűségét és a függvény előállítását:

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1} \quad (7.117a) \qquad \text{és} \quad e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}\,d\omega\,. \quad (7.117b)$$

7.4.5. Útmutató a Fourier-sorfejtések táblázatához

A **21.4. táblázatban** néhány egyszerű függvény FOURIER-sora szerepel. Ezek egy meghatározott intervallumra vonatkoznak, ezen túl periodikusan folytatódnak. A sorbafejtett függvények görbéit grafikusan ábrázoltuk.

1. A koordináta-transzformáció alkalmazása

Sok egyszerűbb periodikus függvényt visszavezethetünk a **21.4. táblázatban** bemutatott függvényekre, amennyiben a koordinátatengelyeken lévő mértékegységet megváltoztatjuk vagy az origót eltoljuk.

■ Az $f(x) = f(-x)$ függvényt az alábbi feltételek határozzák meg:

$$y = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 < x < \dfrac{T}{4}, \\ 0 & \text{ha } \dfrac{T}{4} < x < \dfrac{T}{2} \end{cases} \tag{7.118a}$$

(7.9. ábra). Ezt a függvényt a **21.4. táblázat** 5. alakjára hozhatjuk, ha az $a = 1$ helyettesítést elvégezzük, valamint az $Y = y - 1$ és az $X = \dfrac{2\pi x}{T} + \dfrac{\pi}{2}$ új változókat bevezetjük. Mivel $\sin(2n+1)\left(\dfrac{2\pi x}{T} + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos(2n+1)\dfrac{2\pi x}{T}$, a változók helyettesítésével az 5. sorban, az előállítandó (7.118a) függvényre a következő kifejezést kapjuk:

$$y = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi x}{T} - \frac{1}{3}\cos 3\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{5}\cos 5\frac{2\pi x}{T} - \cdots\right). \tag{7.118b}$$

2. Komplex függvények sorbafejtésének előnye

Komplex változójú függvények hatványsorba való fejtésével a **21.4. táblázat** formulái közül sok előállítható. Ez a táblázat a függvények trigonometrikus sorát tartalmazza.

■ Fejtsük hatványsorba az alábbi komplex függvényt:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{7.119}$$

Mivel

$$z = ae^{\mathrm{i}\varphi} \tag{7.120}$$

a valós és képzetes részek szétválasztása után azt kapjuk, hogy

$$1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \cdots + a^n\cos n\varphi + \cdots = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},$$

$$a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \cdots + a^n\sin n\varphi + \cdots = \frac{a\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \quad \text{ahol } |a| < 1. \tag{7.121}$$

8. Integrálszámítás

1. Integrálszámítás és határozatlan integrál Az integrálás a differenciálás következő értelemben vett megfordítását jelenti, míg a differenciálás során az adott $f(x)$ függvényhez a deriváltját, az $f'(x)$ függvényt kell meghatároznunk, az integrálásnál az adott $f'(x)$ deriválthoz kell megkeresnünk olyan függvényt, amelynek a deriváltja az adott $f'(x)$. Az eljárás eredménye nem egyértelmű, ezért nevezik *határozatlan integrál*nak.

2. Határozott integrál Az integrálszámítás szemléletes feladatából indulunk ki. Meg kell határoznunk az $y = f(x)$ görbe alatti területet. Ez történhet pl. úgy, hogy megfelelően kis alapélű téglalapok összegével közelítünk a kérdéses területhez **(8.1. ábra)**. Ha a beosztást minden határon túl finomítjuk, akkor az ilyen téglányösszeg határértéke a *határozott integrál.*

3. A határozatlan és határozott integrál kapcsolata A két integrál-típus közötti összefüggést a *differenciál- és integrálszámítás főtétele* (lásd 448. old.) segítségével kaphatjuk meg.

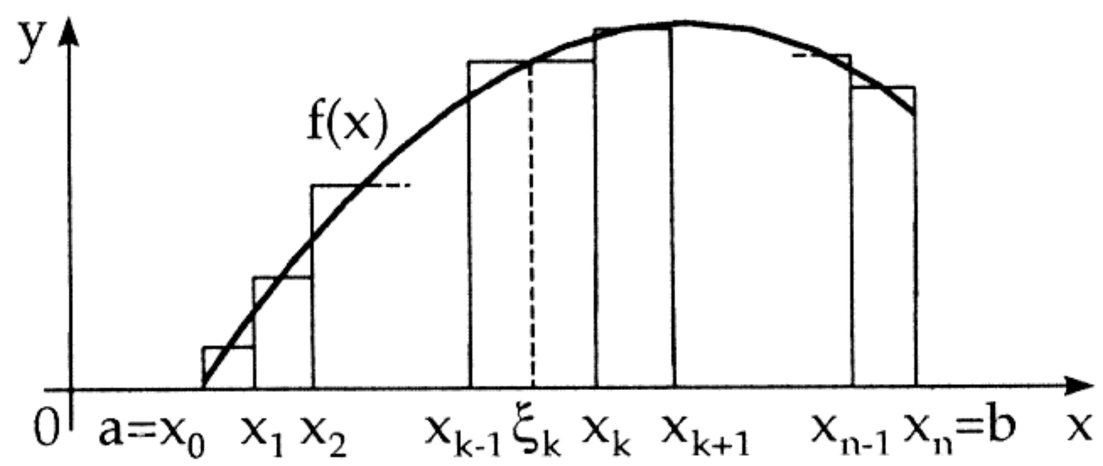
8.1. Határozatlan integrál

8.1.1. Primitív függvény vagy integrál (antiderivált)

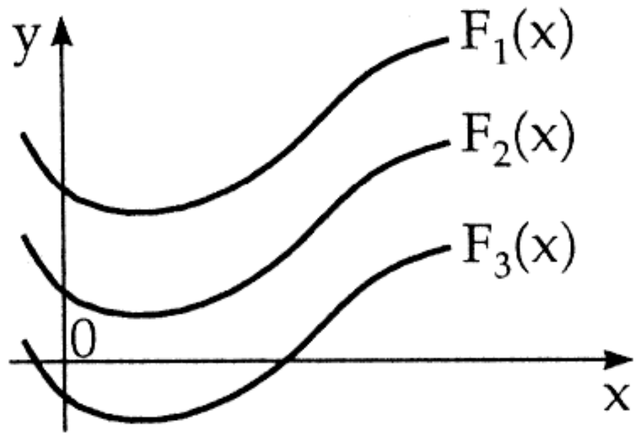
1. Definíció Az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény primitív függvénye az az $F(x)$ függvény, amelyik ugyanazon az intervallumon differenciálható, és amelynek deriváltja $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)\,. \tag{8.1}$$

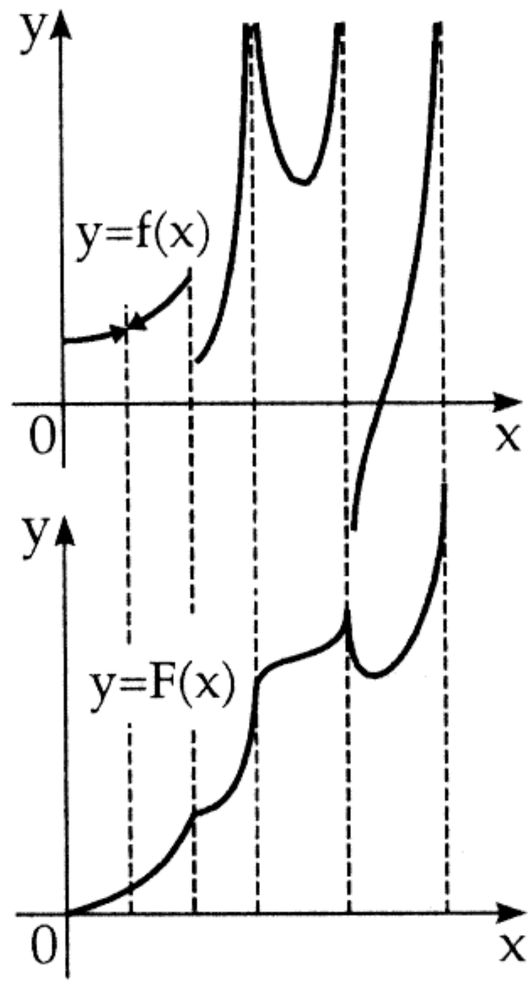
Mivel deriváláskor a konstans összeadandó eltűnik, így egy adott $f(x)$ függvényhez végtelen sok primitív függvény tartozik, amennyiben ilyen létezik. Két primitív függvény különbsége állandó. Így egy adott függvényhez tartozó $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ primitív függvények görbéi előállíthatók egy partikuláris primitív függvény görbéjének az ordináta tengely mentén való párhuzamos eltolásával **(8.2. ábra)**.



8.1. ábra.



8.2. ábra.



8.3. ábra.

2. Egzisztencia Ha az $f(x)$ függvény egy adott intervallumon folytonos, akkor ezen az intervallumon létezik primitív függvénye. Amennyiben szakadási helyek vannak, az intervallumot olyan részintervallumokra bontjuk, amelyeken az $f(x)$ függvény folytonos. **(8.3. ábra)**. Az adott $y = f(x)$ függvény az ábra felső részén, az $y = F(x)$ primitív függvény az alsó részén található.

8.1.1.1. Határozatlan integrál (antiderivált)

Egy adott $f(x)$ függvény határozatlan integrálja (antideriváltja):

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx\,. \tag{8.2}$$

Az $\int$ integráljel után álló $f(x)$ függvény neve *integrandus*, x az *integrációs változó*, C pedig az *integrációs állandó*. Szokásos jelölés, többnyire a fizikában, hogy a dx differenciált közvetlenül az integráljel mögé, azaz az $f(x)$ elé helyezik.

8.1.1.2. Elemi függvények integrálja

1. Alapintegrálok

Elemi függvények integrálása analitikus formában alapintegrálok sorozatára vezethető vissza. Ezeket az alapintegrálokat közvetlenül az ismert elemi függvények deriváltjaiból nyerhetjük, hiszen az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja az $F(x)$ primitív függvény meghatározását jelenti.
A **8.1. táblázatban** összeállított integrálok az „Elemi függvények deriváltjai" című **6.1. táblázatban** szereplő fontosabb differenciálási szabályok megfordításából adódnak. A C integrációs állandók nincsenek feltüntetve.

2. Általános eset

Az integrálfeladatok megoldásánál megkíséreljük az adott feladatot algebrai és trigonometriai átalakítások, ill. az integrálási szabályok alkalmazásával alapintegrálokra visszavezetni. Az „Integrálás szabályai" című fejezetben (lásd 434. old.) adott integrálási módszerek segítségével az elemi primitív függvénnyel rendelkező függvények integrálása könnyen elvégezhető. Az integrálások eredményeit a **21.5. táblázat** (Határozatlan integrálok) foglalja össze. A táblázat használatához a következő megjegyzéseket vegyük figyelembe:

a) Az integrációs állandót többnyire elhagytuk, kivéve egyes olyan integrálokat, amelyek különböző alakban különböző tetszőleges állandók segítségével állíthatók elő.

b) Ha a primitív függvényben az $\ln f(x)$ kifejezés fordul elő akkor ezen mindig $\ln|f(x)|$ értendő.

c) Ha a primitív függvényt hatványsor állítja elő, akkor a függvény elemi módon nem integrálható.

(Részletesebb összeállítást találhatunk ennek a kézikönyv-sorozatnak [8.1] és [8.3] táblázatokat tartalmazó műveiben.)

3. Alapintegrálok táblázata

Az Alapintegrálok táblázatában felsorolt integrálok az **6.1. táblázat** (Elemi függvények deriváltjai) fontosabb differencálási formáinak megfordításával állíthatók elő. A C integrációs állandó nincs jelezve.

8.1.2. Integrálási szabályok

Tetszés szerinti elemi függvényekből álló integrandus primitív függvényének (antideriváltjának) meghatározására általános szabály nem adható. Gyakorlással az integrálásban bizonyos készségre lehet szert tenni. Ma már általában számítógépet használnak az integrál kiszámításához.

A határozatlan integrál legfontosabb szabályait a következő sorokban ismertetjük. Ezeket összefoglalva a **8.2. táblázatban** (Határozatlan integrálra vonatkozó főbb integrálási szabályok) találhatjuk meg.

1. Az integrandus konstans szorzót tartalmaz

Az integrandusban szereplő konstans szorzót kiemelhetjük az integráljel elé (*konstansszoros integrálja*):

$$\int \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx\,. \tag{8.3}$$

8.1. táblázat. Alapintegrálok (Elemi függvények integrálja)

Hatványok	**Exponenciális függvények**
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int e^x\,dx = e^x$ $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
Trigonometrikus függvények	Hiperbolikus függvények
$\int \sin x\,dx = -\cos x$ $\int \cos x\,dx = \sin x$ $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$ $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert$ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$ $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$ $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{ch} x\rvert$ $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$ $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$ $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
Racionális törtfüggvények	Irracionális függvények
$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$ (ha $\lvert x\rvert < a$) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$ (ha $\lvert x\rvert > a$)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arsh}\dfrac{x}{a} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arch}\dfrac{x}{a} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$

2. Összeg, ill. különbség integrálása

Összeg, ill. különbség integrálását elvégezhetjük tagonkénti integrálással, ha az integrálokat külön-külön ismerjük (*összeg integrálja*).:

$$\int (u+v-w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx\,. \tag{8.4}$$

Az u, v, w változók az x függvényei.

■ $\displaystyle\int (x+3)^2(x^2+1)\,dx = \int (x^4+6x^3+10x^2+6x+9)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C\,.$

3. Az integrandus átalakítása

Valamely bonyolultabb integrandust sokszor algebrai vagy trigonometriai átalakítással egyszerűbben integrálható alakra hozhatunk.

■ $\int \sin 2x \cos x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) \, dx$.

4. Lineáris transzformáció az argumentumban

Ha $\int f(x) \, dx = F(x)$ ismeretes, pl. egy integráltáblázatból, és az argumentum x lineáris függvénye, akkor:

$$\int f(ax) \, dx = \frac{1}{a} F(ax) + C \,, \qquad (8.5a) \qquad \int f(x+b) \, dx = F(x+b) + C \,, \qquad (8.5b)$$

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \,. \qquad (8.5c)$$

■ **A:** $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$. ■ **B:** $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$.

■ **C:** $\int \frac{dx}{1+(x+a)^2} = \operatorname{arctg}(x+a) + C$.

5. Logaritmikus integrálás

Ha az integrandus olyan tört, ahol a számláló a nevező deriváltja, akkor ennek integrálja egyenlő a nevező logaritmusának abszolút értékével:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \int \frac{d\, f(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C \,. \qquad (8.6)$$

■ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} \, dx = \ln |x^2+3x-5| + C$.

6. Helyettesítési módszer

Ha $t = \psi(x)$ inverze az $x = \varphi(t)$ függvénynek, akkor a deriválásnál megismert láncszabályt figyelembe véve igaz, hogy

$$\int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt \quad \text{vagy} \quad \int f(x) \, dx = \int \frac{f(\varphi(t))}{\psi'(\varphi(t))} \, dt \,. \qquad (8.7)$$

■ **A:** $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx$. Az $x = \ln t$, $(t > 0)$ és a $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ helyettesítést elvégezve, parciális törtekre való bontás után azt kapjuk, hogy:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt = 2 \ln(e^x + 1) - x + C \,.$$

■ **B:** $\int \frac{x \, dx}{1+x^2}$. Helyettesítés: $1 + x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 2x$: $\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

A megoldás másik módja pl.:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \,, \qquad (8.8)$$

7. Parciális integrálás

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) \, dx \,, \qquad (8.9)$$

Itt szükséges, hogy az $u(x)$ és $v(x)$ függvények deiváltjai folytonosak legyenek.

■ Az $\int x e^x \, dx$ integrált parciális integrálással határozhatjuk meg, ha úgy vesszük, hogy $u = x$ és $v' = e^x$, ebből $u' = 1$ és $v = e^x$, és így: $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = (x-1) e^x + C$.

8. Nemelemi integrálok

Elemi függvények integrálja nem mindig elemi függvény. Ilyen integrálokat többnyire a következő három módszer segítségével oldunk meg. Itt a primitív függvényt adott pontossággal közelítve határozzuk meg.

1. Értéktáblázatok Az olyan integrálok, melyek elméletileg vagy gyakorlatilag fontosak, de elemi függvényekkel nem fejezhetők ki, értéktáblázat segítségével határozhatók meg. Itt az integrál alsó határa az, ami az integrációs konstanst meghatározza. Természetesen a táblázatban egy partikuláris függvény értékei szerepelnek. Ilyen speciális függvényeket külön névvel és jellel látnak el. Például:

■ **A:** *Integrállogaritmus* (lásd 468. old.):

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{Li}\,(x)\,. \tag{8.10}$$

■ **B:** *Elliptikus integrál, első fajú* (lásd 443. old.):

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k,\varphi)\,. \tag{8.11}$$

■ **C:** *Hiba-függvény*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = erf(x). \tag{8.12}$$

2. Integrálás sorfejtéssel Az integrandust sorba fejtjük. Amennyiben ez a sor egyenletesen konvergens, tagonként integrálhatjuk.

3. Grafikus integrálás Ez egy harmadik közelítő módszer, amelyet a 453. oldalon ismertetünk.

8.1.3. Racionális függvények integrálása

Racionális függvények integrálját mindig kifejezhetjük elemi függvényekkel.

8.1.3.1. Racionális egész függvények (polinomok) integrálja

Racionális egész függvényeket tagonként integrálhatunk.

$$\int (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + C\,. \tag{8.13}$$

8.1.3.2. Racionális törtfüggvények integrálása

Racionális törtfüggvény integrálja $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ alakú. Itt $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok, melyeknek fokszáma m, ill. n. Ezek az integrálok algebrai átalakításokkal könnyen integrálható alakúra hozhatók. A következő eljárás ajánlott:

1. A tört egyszerűsítése mindaddig amíg a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomoknak már nincs közös osztójuk.

2. Az egész rész leválasztása, ha $m \geq n$, ilyenkor a $P(x)$ polinomot elosztjuk $Q(x)$ polinommal. Az integrálásra így maradt egy polinom és egy valódi tört.

3. A $Q(x)$ nevező felbontása lineáris és kvadratikus tényezők szorzatára (lásd 43. old.):

$$Q(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\cdots(x^2+px+q)^r(x^2+p'x+q')^s\cdots \tag{8.14a}$$

$$\text{ahol}\quad \frac{p^2}{4}-q<0\,,\quad \frac{p'^2}{4}-q'<0\,,\ldots \tag{8.14b}$$

4. Az a_n konstans szorzó kiemelése az integráljel elé.

5. Parciális törtekre való bontás: Az így nyert valódi törtet, ami tovább már nem egyszerűsíthető, és

8.2. táblázat. Határozatlan integrálra vonatkozó fontos szabályok

Szabály	**Az integrálás formulája**
Integrációs állandó	$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C \text{ állandó})$
Integrálás és differenciálás	$F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = f(x)$
Konstans szorzó kiemelése	$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \qquad (\alpha \text{ állandó})$
Összeg integrálja	$\int [u(x) \pm v(x)]\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$
Parciális integrálás	$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$
Helyettesítési szabály	$x = u(t) \quad \text{bzw.} \quad t = v(x)$; u és v inverze egymásnak: $\int f(x)\,dx = \int f(u(t))u'(t)\,dt, \quad \text{ill.}$ $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{f(u(t))}{v'(u(t))}\,dt$
Különleges alakú integrandusok	1. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ (logaritmikus integrálás) 2. $\int f'(x)f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}f^2(x) + C$
Inverz függvények integrálása	u legyen inverze v-nek: $\int u(x)\,dx = xu(x) - F(u(x)) + C_1 \quad \text{ahol}$ $F(x) = \int v(x)\,dx + C_2 \quad (C_1\,,\, C_2 \text{ konst})$

amelynek nevezője tovább nem bontható tényezők szorzatából áll, parciális törtek összegeként állítjuk elő (lásd 15. old.). Ezeket könnyen integrálhatjuk.

8.1.3.3. A parciális törtekre való bontás négy esete

1. Eset: A nevező minden gyöke egyszeres és valós

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda) \tag{8.15a}$$

a) A felbontás alakja:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots + \frac{L}{x-\lambda}\,. \tag{8.15b}$$

$$\text{ahol} \quad A = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}, \quad B = \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}, \ldots, L = \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}\,. \tag{8.15c}$$

b) Az $A, B, C, \ldots, L$ számokat a határozatlan együtthatók módszere alapján is kiszámíthatjuk (lásd 16. old.).

c) Az integrálás

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha|\,. \tag{8.15d}$$

alapján történik.

■ $I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$: $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$, $A = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=0} =$

$= -\frac{3}{2}$, $B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=1} = \frac{5}{3}$, $C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=-2} = -\frac{1}{6}$,

$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right) dx = -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + C_1 = \ln\frac{C(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}\,.$

2. Eset: A nevező minden gyöke valós, de vannak közöttük többszörös gyökök is.

$$Q(x) = (x-\alpha)^l(x-\beta)^m\cdots\,. \tag{8.16a}$$

a) A felbontás alakja:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \cdots\,. \tag{8.16b}$$

b) Az $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$ konstansokat a határozatlan együtthatók módszere alapján határozzuk meg (lásd 16. old.).

c) Az integrálás az alábbi szabályok szerint történik:

$$\int \frac{A_1\,dx}{x-\alpha} = A_1\ln(x-\alpha)\,, \quad \int \frac{A_k\,dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \quad (k>1)\,. \tag{8.16c}$$

■ $I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$: $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$. A konstansok kiszámítása a határozatlan együtthatók módszere alapján történik. Azt kapjuk, hogy: $A+B_1 = 1$, $-3A-2B_1+B_2 = 0$, $3A + B_1 - B_2 + B_3 = 0$, $-A = 1$; $A = -1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$, $B_3 = 2$. Az integrálás menete a következő:

$I = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right] dx = -\ln x + 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C =$

$= \ln\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{x}{(x-1)^2} + C\,.$

3. Eset: A nevező néhány gyöke egyszeres komplex

$$P(x) = (x-\alpha)^l(x-\beta)^m\ldots(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\ldots \tag{8.17a}$$

$$\text{ahol} \quad \frac{p^2}{4} < q\,, \quad \frac{p'^2}{4} < q'\,, \ldots\,. \tag{8.17b}$$

a) A felbontás alakja:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \cdots\,. \tag{8.17c}$$

b) A konstansok kiszámítása a határozatlan együtthatók módszere alapján történik (lásd 16. old.).

c) A $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$ kifejezés integrálása

$$\int \frac{(Cx+D)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{D-\dfrac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\,. \tag{8.17d}$$

alapján történik.

■ $I=\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^3+4x}$: $\quad \dfrac{4}{x^3+4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$. A határozatlan együtthatók módszere alapján eljárva azt kapjuk, hogy: $A+C=0$, $D=0$, $4A=4$, $A=1$, $C=-1$, $D=0$.

$I=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \ln C_1 = \ln\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2+4}}$, ennél a feladatnál az arctan függvényt tartalmazó tag már elmaradt.

4. Eset: A nevező néhány gyöke többszörös komplex

$$P(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n\ldots\,. \tag{8.18a}$$

a) A felbontás alakja:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} \\ & + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m} \\ & + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \cdots + \frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n}\,.\end{aligned} \tag{8.18b}$$

b) A konstansokat a határozatlan együtthatók módszere alapján határozzuk meg.

c) A $\dfrac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$ kifejezést, amennyiben $m>1$ a következő lépésekben integráljuk:

α) átalakítjuk a számlálót:

$$C_mx+D_m = \frac{C_m}{2}(2x+p) + \left(D_m - \frac{C_mp}{2}\right)\,. \tag{8.18c}$$

β) A kérdéses integrált két tag összegére bontjuk. Ezek közül az elsőt azonnal tudjuk integrálni:

$$\int \frac{C_m}{2}\frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^m} = -\frac{C_m}{2(m-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}\,. \tag{8.18d}$$

γ) A második összeadandót, konstans együttható nélkül, a következő rekurziós formula segítségével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = {} & \frac{x+\dfrac{p}{2}}{2(m-1)\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}} \\ & + \frac{2m-3}{2(m-1)\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}\,.\end{aligned} \tag{8.18e}$$

■ $I=\displaystyle\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$: $\quad \dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}$.

A határozatlan együtthatók módszerének segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$A + C_1 = 0$, $-2C_1 + D_1 = 0$, $2A + C_1 - 2D_1 + C_2 = 2$, $-2C_1 + D_1 - 2C_2 + D_2 = 2$,
$A - 2D_1 - 2D_2 = 13$, ebből következik $A = 1$, $C_1 = -1$, $D_1 = -2$, $C_2 = -3$, $D_2 = -4$,

$$I = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right) dx .$$

A (8.18e) szerint $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$, így végül az eredmény: $I = \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C$.

8.1.4. Irracionális függvények integrálása

8.1.4.1. Racionális függvény integrálására visszavezető helyettesítés

Irracionális függvények integrálja csak bizonyos esetekben elemi függvény. A **21.5. táblázat** tartalmazza számos irracionális függvény integrálját. Az egyszerűbb esetekben bevezethetünk megfelelő helyettesítéseket, mint ahogyan ezt a **8.1.4.1. táblázat** mutatja. Ilyen módon az integrál visszavezethető racionális függvények integrálására.

Az $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ integrált a következő három forma egyikével tudjuk egyszerűen integrálható alakra hozni:

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}\right) dx , \qquad (8.19a)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-\alpha^2}\right) dx , \qquad (8.19b)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2-x^2}\right) dx \qquad (8.19c)$$

Ugyanis az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom mindig felírható mint két négyzet összege, vagy mint különbsége.

■ **A:** $4x^2 + 16x + 17 = 4\left(x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{4}\right) = 4\left[(x+2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4\left[x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$,

ahol $x_1 = x + 2$.

■ **B:** $x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x_1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$, ahol $x_1 = x + \frac{3}{2}$.

■ **C:** $-x^2 + 2x = 1 - x^2 + 2x - 1 = 1^2 - (x-1)^2 = 1^2 - x_1^2$, ahol $x_1 = x - 1$.

8.1.4.2. Az integrál átalakítása trigonometrikus és hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integráljává

Az **8.4. táblázatban** adott helyettesítésekkel olyan racionális kifejezések integráljához jutunk, ahol trigonometrikus vagy hiperbolikus függvények vannak (lásd 444. és 446. old.).

8.1.4.3. Binomiális integrandus integrálása

*Binomiális integrandus*nak nevezzük az alábbi kifejezést:

$$x^m(a + bx^n)^p \qquad (8.20)$$

ahol a és b tetszés szerinti valós szám és m, n, p tetszés szerinti pozitív vagy negatív racionális szám. CSEBISEV *tétele* szerint az

$$\int x^m(a + bx^n)^p \, dx \qquad (8.21)$$

integrál csak a következő három esetben fejezhető ki elemi függvények segítségével:

8.3. táblázat. Irracionális függvények integrálásához ajánlott helyettesítések I.

Integrál *	**Helyettesítés**
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}\right)\,dx$ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}, \dots\right)\,dx$	$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}} = t$ $\sqrt[r]{\dfrac{ax+b}{cx+e}} = t$ ahol r az $m, n, \dots$ számok legkisebb közös többszöröse
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$ 1. Ha $a > 0$ † 2. Ha $c > 0$ 3. Ha az ax^2+bx+c polinomnak különböző valós gyökei vannak: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$	A három EULER*-féle helyettesítés* egyike: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$

* Az R szimbólum a zárójelben lévő kifejezések *racionális függvénye*. Az $n, m, \dots$ számok egészek.
† Ha $a < 0$ és az ax^2+bx+c polinomnak komplex gyökei vannak, úgy az integrandusz semmilyen x-re sincs értelmezve, így az $\sqrt{ax^2+bx+c}$ az x minden valós értékére képzetes lesz. Így nincs értelme az integrálnak.

8.4. táblázat. Irracionális függvények integrálásához ajánlott helyettesítések II.

Integrál	**Helyettesítés**
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}\right)\,dx$	$x = \alpha \operatorname{sh} t$ vagy $x = \alpha \operatorname{tg} t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-\alpha^2}\right)\,dx$	$x = \alpha \operatorname{ch} t$ vagy $x = \alpha \sec t$
$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2-x^2}\right)\,dx$	$x = \alpha \sin t$ vagy $x = \alpha \cos t$

1. eset: Ha p egész szám, akkor az $(a+bx^n)^p$ kifejezést a binomiális tétel szerint kifejtjük.Így a zárójelek felbontása után az integrandus cx^k alakú tagok összege lesz, és így könnyen integrálható.

2. eset: Ha $\dfrac{m+1}{n}$ egész szám, a (8.21) integrált racionális függvény integrálására vezethetjük vissza: a $t = \sqrt[r]{a+bx^n}$ helyettesítést (ahol r a p tört nevezője) kell elvégeznünk.

3. eset: Ha $\dfrac{m+1}{n} + p$ egész szám, akkor a (8.21) integrál a $t = \sqrt[r]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$ helyettesítéssel, ahol r a p tört nevezője, racionális függvény integráljára vezethető vissza.

■ **A:** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}\,dx\,;\, m=-\frac{1}{2}\,,\; n=\frac{1}{4}\,,\; p=\frac{1}{3},\; \frac{m+1}{n}=2\,,$ (2. eset): helyettesítés: $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\; x=(t^3-1)^4,\; dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt;\; \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int(t^6-t^3)\,dt =$

$= \frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C\,.$

■ **B:** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^3(1+x^3)^{-1/4}:\;\; m=3,\;\; n=3,\;\; p=-\frac{1}{4};\;\; \frac{m+1}{n}=\frac{4}{3}\,,\;\; \frac{m+1}{n}+p=\frac{13}{12}\,.$
Mivel a három feltétel egyike sem teljesül, az integrál nem lehet elemi függvény.

8.1.4.4. Elliptikus integrál

1. Határozatlan elliptikus integrál

Elliptikus integrálok az alábbi alakú integrálok:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+e}\right)dx\,,\qquad \int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+f}\right)dx\,. \tag{8.22}$$

Általában ezek nem fejezhetők ki elemi függvényekkel. Amennyiben ez mégis lehetséges, akkor *pszeudoelliptikus*nak nevezzük őket. Az elnevezés onnan származik, hogy ilyen típusú integrál akkor tűnt fel először, amikor az ellipszis kerületét számították ki (lásd 456. old.). Az elliptikus integrálok inverzei az elliptikus függvények (lásd 730. old.). A (8.22) integrálok, melyek elemi módon nem integrálhatók, átalakítások egész sorával visszavezethetők elemi függvényekre és a következő három típusú integrál egyikére (lásd [21.1], [21.2], [21.6]):

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)\,; \tag{8.23a}$$

$$\int \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)\,; \tag{8.23b}$$

$$\int \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)\,. \tag{8.23c}$$

Az n paraméterre vonatkozóan különféle esetek vizsgálata szükséges (lásd [14.1]).

A $t=\sin\varphi\;\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ helyettesítéssel a (8.23a)–(8.23c) integrálok a LEGENDRE-*féle alak*ra hozhatók:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (\textbf{elsőfajú elliptikus integrál})\,; \tag{8.24a}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \qquad (\textbf{másodfajú elliptikus integrál})\,; \tag{8.24b}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (\textbf{harmadfajú elliptikus integrál})\,. \tag{8.24c}$$

2. Határozott elliptikus integrál

A fenti határozatlan integrálokhoz tartozó határozott integrálok alsó határa nulla, jelölésük a következő:

$$\textbf{I.}\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k,\varphi) \qquad (0<k<1)\,; \tag{8.25a}$$

$$\textbf{II.}\quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = E(k,\varphi) \qquad (0<k<1)\,; \tag{8.25b}$$

$$\textbf{III.}\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \Pi(n,k,\varphi) \qquad (0<k<1)\,. \tag{8.25c}$$

Ezeket az integrálokat első-, másod- és harmadfajú *nem teljes elliptikus integrál*oknak hívjuk. Amennyiben $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, úgy az I és II integrál *teljes elliptikus integrál*, ezek jelölése a következő:

$$\textbf{I.}\quad K = F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{8.26a}$$

$$\textbf{II.}\quad E = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\,. \tag{8.26b}$$

Az **21.7.1, 2, 3 táblázatokban** találhatók a nem teljes és teljes elliptikus integrálokra (F, E, valamint K és E) vonatkozó értéktáblázatok.

■ Az ellipszis kerületének meghatározása egy másodfajú teljes integrálhoz, mint az e numerikus excentricitás függvényéhez vezet (lásd 456. old.). Ha $a = 1{,}5;\ b = 1$, akkor $e = 0{,}74$. Mivel $e = k = 0{,}74$ a **21.7.3 táblázatból** leolvasható: $\sin\alpha = 0{,}74$, azaz $\alpha = 47°$ és $E(k,\dfrac{\pi}{2}) = E(0{,}74) = 1{,}33$. Ebből következik, hogy $U = 4aE(0{,}74) = 4aE(\alpha = 47°) = 4\cdot 1{,}33a = 7{,}98$. A (3.307c) közelítő formula alapján a kapott érték 7,93.

8.1.5. Trigonometrikus függvények integrálása

8.1.5.1. Helyettesítés

Az *általános helyettesítés*:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad \text{azaz}\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,,\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,. \tag{8.27}$$

Ennek segítségével az

$$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx \tag{8.28}$$

alakú integrál racionális függvény integráljára vezethető vissza. Itt R racionális függvénye az argumentumának. Egyes esetekben egyszerűbb helyettesítéssel is célt érhetünk. Ha a (8.28) integrandusban az $\sin x$ és $\cos x$ függvényeknek csak egész kitevőjű hatványai szerepelnek, akkor $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel lényegesen egyszerűbben jutunk racionális függvény integráljához.

■ $$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\,dt = \frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\,.$$

8.1.5.2. Egyszerűsített módszerek

1. eset:

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx\,. \qquad \text{Helyettesítés:} \quad t=\sin x\,, \quad \cos x\,dx=dt\,. \tag{8.29}$$

2. eset:

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx\,. \qquad \text{Helyettesítés:} \quad t=\cos x\,, \quad \sin x\,dx=-dt\,. \tag{8.30}$$

3. eset:

$$\int \sin^n x\,dx\,. \tag{8.31a}$$

a) $n=2m+1$, páratlan:

$$\int \sin^n x\,dx=\int (1-\cos^2 x)^m \sin x\,dx=-\int (1-t^2)^m\,dt, \qquad \text{ahol} \quad t=\cos x\,. \tag{8.31b}$$

b) $n=2m$, páros:

$$\int \sin^n x\,dx=\int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^m\,dx=\frac{1}{2^{m+1}}\int (1-\cos t)^m\,dt, \qquad \text{ahol} \quad t=2x\,. \tag{8.31c}$$

Így megfeleztük a hatványkitevőt. A zárójelek feloldása után tagonként integrálhatunk.

4. eset:

$$\int \cos^n x\,dx\,. \tag{8.32a}$$

a) $n=2m+1$, páratlan:

$$\int \cos^n x\,dx=\int (1-\sin^2 x)^m \cos x\,dx=\int (1-t^2)^m\,dt, \qquad \text{ahol} \quad t=\sin x\,. \tag{8.32b}$$

b) $n=2m$, páros:

$$\int \cos^n x\,dx=\int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^m\,dx=\frac{1}{2^{m+1}}\int (1+\cos t)^m\,dt, \qquad \text{ahol} \quad t=2x\,. \tag{8.32c}$$

A hatványkitevőt így megfeleztük. A zárójelek feloldása után tagonként lehet integrálni.

5. eset:

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx\,. \tag{8.33a}$$

a) Amennyiben az m és az n számok egyike páratlan, úgy a feladat visszavezethető az 1. vagy a 2. esetre.

■ **A:** $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx=\int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx=\int t^2(1-t^2)^2\,dt, \quad \text{ahol} \quad t=\sin x\,.$

■ **B:** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx=-\int \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \text{ahol} \quad t=\cos x\,.$

b) Amennyiben mind az m és mind az n szám páros: visszavezethető a 3. vagy 4. esetre a hatványkitevő felezésével és a

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\,, \qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,. \tag{8.33b}$$

trigonometriai összefüggések felhasználásával.

■ $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx=$

$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx+\frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+C\,.$

6. eset:

$$\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,(\mathrm{tg}\,x)'\,dx - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx\,. \tag{8.34a}$$

Ezt az eljárást ismételve csökkentjük a kitevőt és végül páros, ill. páratlan n esetén

$$\int dx = x, \qquad \text{ill.} \qquad \int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\ln\cos x \qquad \text{adódik..} \tag{8.34b}$$

7. eset:

$$\int \mathrm{ctg}^n x\,dx\,. \tag{8.35}$$

A megoldás a 6. esethez hasonló módon történik.

8. Megjegyzés: A **21.5. táblázat** trigonometrikus függvények integráljának egész sorát tartalmazza.

8.1.6. További transzcendens függvények integrálása

8.1.6.1. Exponenciális függvényt tartalmazó integrálok

Exponenciális függvényeket tartalmazó integrálok akkor alakíthatók racionális függvények integráljává, ha

$$\int R\left(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px}\right) dx \tag{8.36a}$$

alakúak, ahol $m, n, p, \ldots$ racionális számok. Ehhez két helyettesítésre van szükség:

1. A $t = e^x$ helyettesítés a következő integrálhoz vezet:

$$\int \frac{1}{t} R\left(t^m, t^n, \ldots, t^p\right) dt\,. \tag{8.36b}$$

2. A $z = \sqrt[r]{t}$ helyettesítés racionális függvény integráljához vezet. Itt r az $m, n, \ldots, p$ törtek nevezőjének legkisebb közös többszöröse.

8.1.6.2. Hiperbolikus függvények integrálja

A hiperbolikus függvények integrálja az integrandusban $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{th}\,x$ és $\mathrm{cth}\,x$ függvényeket tartalmaz. Ezeket úgy integráljuk, hogy a hiperbolikus függvényeket a megfelelő exponenciális függvényekkel helyettesítjük. A leggyakoribb esetekben $\int \mathrm{sh}^n x\,dx$, $\int \mathrm{ch}^n x\,dx$, $\int \mathrm{sh}^n x\,\mathrm{ch}^m x\,dx$ fordul elő. Ezeknek a meghatározása a trigonometrikus függvényekéhez hasonló módszerrel történik (lásd 444. old.).

8.1.6.3. A parciális integrálás alkalmazása

Ha az integrandus logaritmusokat, inverz trigonometrikus függvényeket (arcus függvényeket), inverz hiperbolikus (area) függvényeket, vagy x^m és $\ln x, e^{ax}$, $\sin ax$ vagy $\cos ax$ szorzatát tartalmazza, akkor a parciális integrálás egyszeri vagy többszöri alkalmazásával juthatunk megoldáshoz.
Egyes esetekben az ismételt parciális integrálás ismét az eredeti integrálhoz vezet. Ekkor az integrált algebrai egyenlet megoldásaként határozhatjuk meg. Így számíthatjuk ki kétszeres parciális integrálással pl. a következő integrálokat: $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$. Az u tényezőnek mindkét esetben ugyanazon típusú függvényt kell választanunk, az exponenciális vagy a trigonometrikus függvényt.
Parciális integrálást alkalmazunk a következő integrálok meghatározásához is:
$\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x) \sin bx\,dx$, $\int P(x) \cos bx\,dx$, ahol $P(x)$ egy polinom. Ha u tényezőnek a polinomot választjuk, akkor ennek a fokszáma az újabb parciális integrálás során mindig eggyel csökken.

8.1.6.4. Transzcendens függvények integrálása

A **21.5. táblázat** számos transzcendens függvény integrálját tartalmazza.

8.2. Határozott integrál

8.2.1. Alapfogalmak, szabályok és tételek

8.2.1.1. A határozott integrál fogalma

1. A határozott integrál definíciója

Az $y = f(x)$ korlátos függvénynek az $[a, b]$ zárt intervallumon vett határozott integrálja egy szám, amelyet egy összeg határértékeként definiálunk. Itt akár $a < b$ (A eset) vagy $a > b$ (B eset) lehetséges. Az intervallum zártságának megkövetelése azt jelenti, hogy az intervallumnak is korlátosnak kell lennie.

A határozott integrál (lásd 460. old.) egy általánosítása megenged olyan függvényeket is, amelyek tetszőlegesen összefüggő tartományon vannak értelmezve. Ilyen tartomány pl. egy nyitott vagy félig nyitott intervallum, a féltengely, vagy az egész számegyenes, akár olyan tartomány, ami csak szakaszonként összefüggő, azaz véges számú hely kivételével mindenütt összefüggő. Az ilyen típusú integrálok az *improprius integrál*okhoz tartoznak (lásd 460. old.).

2. Határozott integrál mint összeg határértéke

Azt a határértéket, ami a határozott integrál fogalmához vezet, a következő módon képezzük **(8.1. ábra)**:

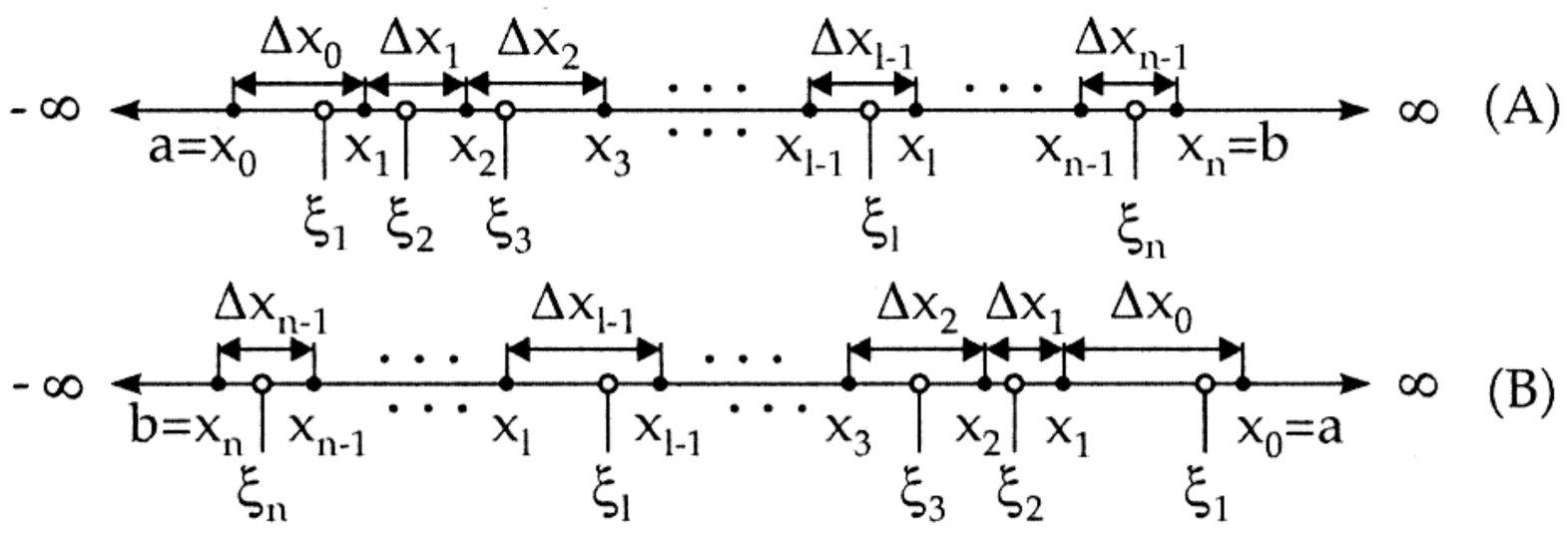
1. lépés: Az $[a, b]$ intervallumot $n - 1$ tetszés szerinti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ponttal n *elemi intervallum*ra bontjuk. A pontokat úgy választjuk meg, hogy az alábbi esetek egyike teljesüljön:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad \text{(A eset)} \quad \text{vagy} \tag{8.37a}$$

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > \cdots > x_{n-1} > x_n = b \qquad \text{(B eset)}\,. \tag{8.37b}$$

2. lépés: Amint az a **8.4. ábrán** látható, minden egyes elemi intervallum belsejében vagy a határán választunk egy ξ_i számot:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \quad \text{(A esetben)} \qquad \text{vagy} \qquad x_{i-1} \ge \xi_i \ge x_i \quad \text{(B esetben)}\,. \tag{8.37c}$$



8.4. ábra.

3. lépés: Az $f(x)$ függvénynek ezekben a kiválasztott pontokban vett $f(\xi_i)$ helyettesítési értékét megszorozzuk a hozzátartozó $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ különbséggel, azaz a részintervallum hosszával. Az A esetben ezt pozitív, a B esetben negatív előjellel kell vennünk. Így az A esetben a **8.1. ábrán** lévő kép keletkezik.

4. lépés: Az így nyert összes $f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}$ szorzatot összeadjuk.

5. lépés: A keletkezett téglányösszeg (*integrálközelítő-összeg*):

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1} \tag{8.38}$$

határértékét keressük meg arra az esetre, ha minden Δx_{i-1} elemi intervallum hossza nullához tart, és így az elemi intervallumok száma ∞-hez tart. Ezen az alapon mondhatjuk, hogy Δx_{i-1} infinitezimálisan kicsi.

Ha ez a határérték létezik és az x_i és a ξ_i helyek megválasztásától független, akkor ezt a kérdéses függvénynek az adott intervallumra vonatkozó RIEMANN-féle határozott integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}\,. \tag{8.39}$$

Az intervallum két végpontja az *integrációs határok*; ezek rögzítik az *integrációs intervallumot*. Az a az *integrál alsó*, a b az *integrál felső határa*. x az *integrációs változó*, $f(x)$ az *integrandus*.

3. A határozott integrál egzisztenciája

Az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvény határozott integrálja mindig értelmezhető, azaz a (8.39) határérték mindig létezik és független az x_i és ξ_i számok választásától. A határozott integrál definiálható olyan korlátos függvény esetén is, amelyik az $[a,b]$ zárt intervallumon csak véges számú helyen nem folytonos. Azt a függvényt, amelyiknek adott intervallumon határozott integrálja létezik, ezen az intervallumon *integrálható függvény*nek nevezzük.

8.2.1.2. A határozott integrál jellemzői

A határozott integrál fontosabb tulajdonságait a következőkben ismertetjük. Ezeket összefoglalva a **8.5. táblázat** tartalazza.

1. Az integrálszámítás alaptétele

Az integrálszámítás alaptétele, a NEWTON–LEIBNIZ*-tétel*: Ha az $f(x)$ integrandus az $[a,b]$ intervallumon folytonos és egy primitív függvénye az $F(x)$ függvény, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8.40}$$

A határozott integrál kiszámítása visszavezethető a megfelelő határozatlan integrál meghatározására, azaz a primitív függvény (antiderivált) megkeresésére:

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C\,. \tag{8.41}$$

Megjegyzés: Vannak integrálható függvények, melyeknek nincs primitív függvényük. De látni fogjuk, ha egy függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

2. Geometriai interpretáció és előjelszabály

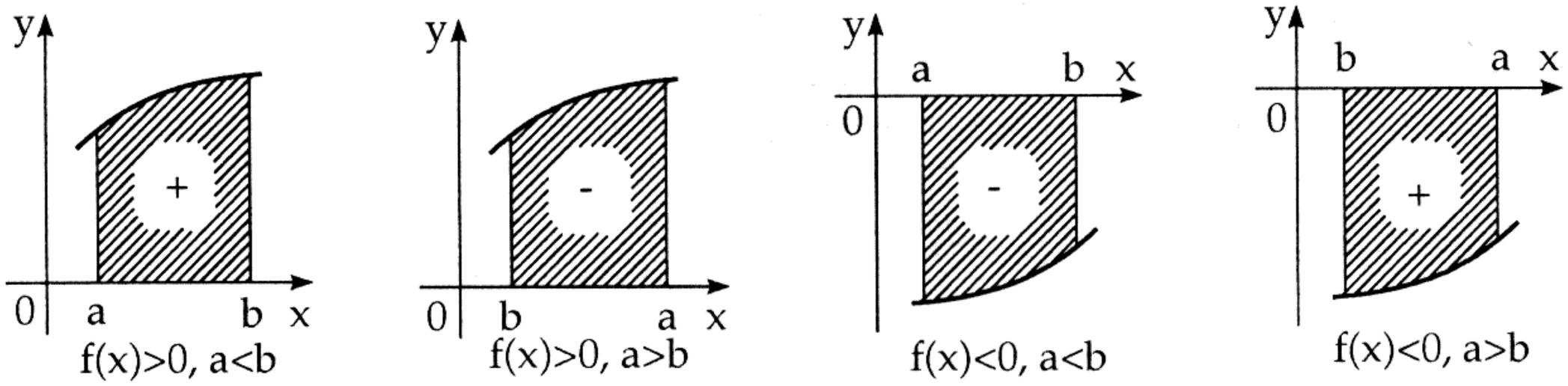
1. Görbe alatti terület Az $[a,b]$ intervallumon legyen $f(x) \geq 0$. Ekkor a (8.38) összeg a téglalapok területének összegét jelenti, amivel az $y = f(x)$ görbe alatti terület nagysága megközelíthető. **(8.1. ábra)** Ezért adja ennek az összegnek a határértéke, és így a határozott integrál az A terület nagyságát, annak a területnek, melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, és az y-tengellyel párhuzamos $x = a$ és $x = b$ egyenes-szakaszok határolnak:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (a < b \quad \text{és} \quad f(x) \geq 0, \quad \text{ha} \quad a \leq x \leq b)\,. \tag{8.42}$$

2. Előjel-szabály Amennyiben az $y = f(x)$ függvény az integrációs intervallumon felváltva pozitív vagy negatív **(8.5. ábra)**, akkor a részintegrálok a megfelelő részintervallumokon, és így a részterületek is pozitív vagy negatív értékeket vesznek fel. A teljes intervallumon vett integrál a területek különbségét szolgáltatja.

A következő **8.5.a,b,c,d ábrán** a területek előjelviszonyainak négy lehetséges esetét láthatjuk.

■ **A:** $\int_{x=0}^{x=\pi} \sin x\,dx$ (olv. integrál $x = 0$-tól $x = \pi$-ig) $= -\cos x\big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$



8.5. ábra.

■ **B:** $\int_0^{x=2\pi} \sin x\,dx$ (olv. integrál $x=0$-tól $x=2\pi$)-ig $= -\cos|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$.

3. Integrál változó felső határral

1. Partikuláris integrál Ha az integrál felső határa nem rögzített, hanem változó **(8.6. ábra**, $ABCD$ terület), akkor a terület az integrál felső határának a függvénye. Változó területi-értékek miatt területi-függvényről beszélünk. Ennek alakja:

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad (a < b \quad \text{és} \quad f(x) \geq 0, \quad \text{amennyiben} \quad x \geq a)\,. \tag{8.43}$$

Itt az integrációs változót t-vel jelöljük, hogy ne lehessen összetéveszteni az integrációs határt jelölő x változóval.

2. Integrál felső határ szerinti deriváltja Változó felső határral bíró határozott integrál, $\int_a^x f(t)\,dt$, ha ez létezik, akkor ez az x felső határnak folytonos függvénye: $F(x)$, ez az integrandus primitív függvénye. Így, ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és $x \in (a,b)$, akkor

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{vagy} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,. \tag{8.44}$$

Ennek a tételnek a geometriai jelentése az, hogy egy $A(x)$ terület-függvény deriváltja egyenlő az NM záróordinátával **(8.9. ábra)**. Az ordinátához hasonlóan a területet itt is az előjelszabálynak megfelelő előjellel kell ellátni **(8.5. ábra)**.

4. Az integrációs intervallum felosztása

Az $[a,b]$ integrációs intervallumot részintervallumokra bonthatjuk. A határozott integrálnak az egész intervallumra vonatkozott értéke:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{8.45}$$

Ezt az összefüggést *intervallumszabály*nak is mondják. Ha az integrandusnak véges számú szakadási helye van, akkor az intervallumot olyan részintervallumokra kell bontani, hogy azokban a függvény folytonos legyen. Az egész integrált a részintervallumokon nyert integrálokból lehet összeállítani.

8.2.1.3. Az integrációs határokra vonatkozó további tételek

1. Az integrációs határokra vonatkozó függetlenség

A határozott integrál értéke független az integrációs változó megválasztásától:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt\,. \tag{8.46}$$

2. Azonos integrációs határok

A határozott integrál értéke nulla, ha az integrációs határok azonosak:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,. \tag{8.47}$$

3. Az integrációs határok megcserélése

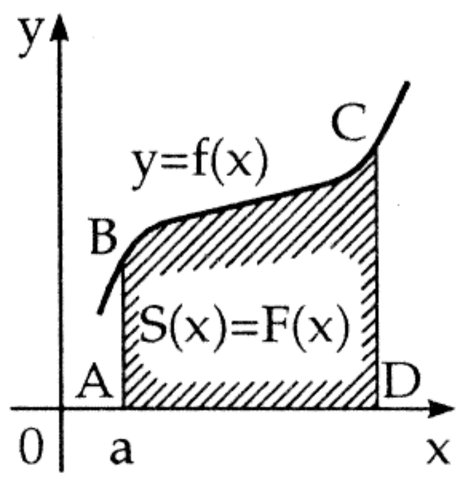
Az integrációs határok megcserélése megváltoztatja az integrál értékének az előjelét (Megcserélési szabály):

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,. \tag{8.48}$$

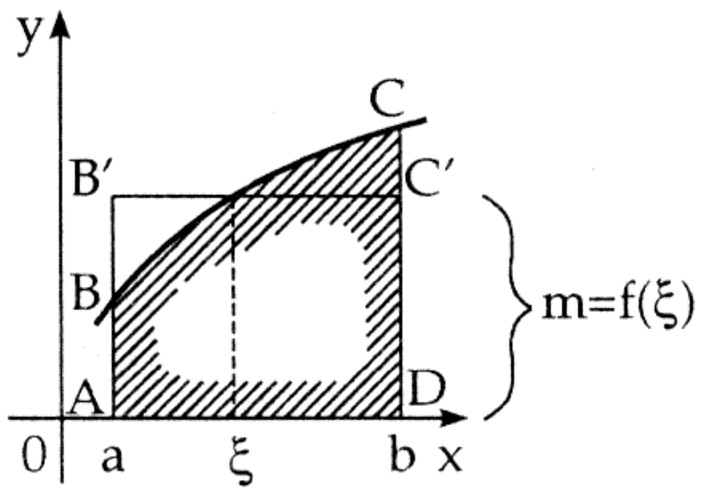
4. Középértéktétel

1. Középértéktétel Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumban folytonos, akkor az intervallum belsejében van legalább egy olyan ξ hely, hogy amennyiben $a<\xi<b$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi) \qquad \text{ha} \quad a<\xi<b\,. \tag{8.49}$$



8.6. ábra.



8.7. ábra.

Ennek a tételnek a geometriai jelentése az, hogy az a és b pont között kell lennie olyan ξ pontnak, amelyre az $ABCD$ alakzat területe egyenlő az $AB'C'D$ téglalap területével **(8.7. ábra)**

Az $[a,b]$ intervallumon a *középérték* vagy *az $f(x)$ függvény aritmetikai közepe*:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.50}$$

2. A középértéktétel általánosítása Amennyiben az $f(x)$ és $\varphi(x)$ folytonosak az $[a,b]$ zárt intervallumban és a $\varphi(x)$ függvény nem vált előjelet ebben az intervallumban, akkor igaz a következő tétel:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (a<\xi<b)\,. \tag{8.51}$$

8.5. táblázat. Határozott integrálra vonatkozó tételek

Tétel	**Formula**
Az integrálszámítás alaptétele (Newton–Leibniz-formula)	$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$, ahol $F(x) = \int f(x)\,dx + C$, ill. $F'(x) = f(x)$
A határok felcserélése	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
Azonos határok	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Az intervallum felbontása	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
Az integrációs változótól való függetlenség	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$
A felső határ szerinti deriválás	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x)$
Az integrálszámítás középértéktétele	$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi) \quad (a < \xi < b)$

5. A határozott integrál becslése

Jelölje m (ill. M) azt a legkisebb (ill. legnagyobb) értéket, amit az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban felvesz. Az $f(x)$ függvénynek erre az intervallumra vonatkozó határozott integrálja nem kisebb, mint $m(b-a)$, és nem nagyobb, mint $M(b-a)$. Itt (b-a) az intervallum hosszát jelöli. Ekkor

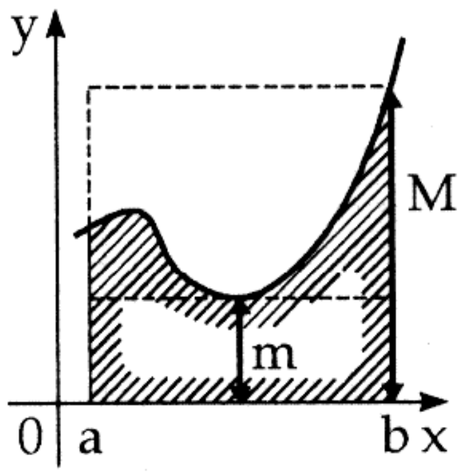
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,. \tag{8.52}$$

Ennek a tételnek a geometriai jelentése az **8.8. ábráról** egyszerűen leolvasható.

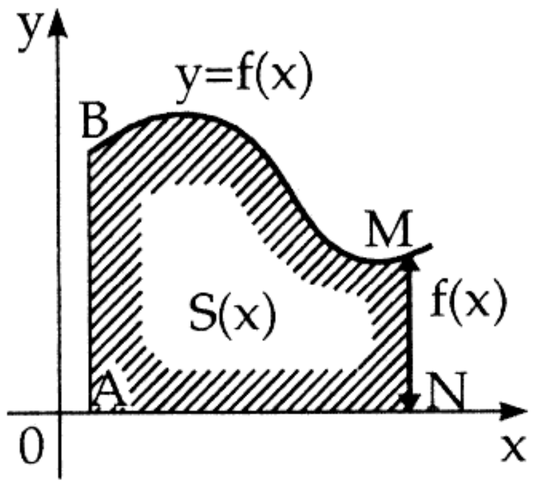
8.2.1.4. A határozott integrál kiszámítása

1. A leggyakrabban használt módszer

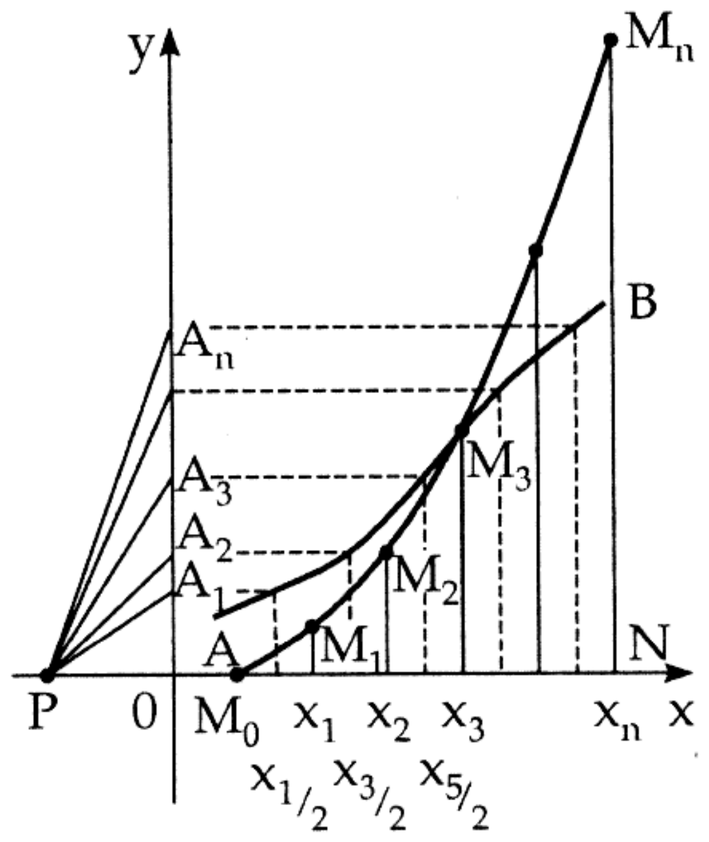
Határozott integrál kiszámítását leggyakrabban az integrálszámítás alaptétele segítségével végezzük el, azaz meghatározzuk a határozatlan integrált (lásd 448. old.), pl. a **21.5. táblázat** segítségével. Itt arra kell ügyelnünk, hogy a határok beírásakor ne keletkezzenek improprius integrálok.
Ma már általánosan computeralgebrai eszközöket használnak a határozatlan és határozott integrálok kiszámításához (lásd 20.1. fejezet).



8.8. ábra.



8.9. ábra.



8.10. ábra.

2. A határozott integrál átalakítása

A határozott integrálokat sok esetben megfelelő helyettesítéssel vagy a parciális integrálás módszerével tudjuk meghatározni.

■ **A:** A helyettesítési módszert alkalmazzuk az $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

integrál meghatározásához.

1. A változó helyettesítése: $x = \varphi(t) = a \sin t$, $t = \psi(x) = \arcsin \frac{x}{a}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(a) = \frac{\pi}{2}$. Azt kapjuk, hogy:

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt .$$

2. A változó helyettesítése: $t = \varphi(z) = \frac{z}{2}$, $z = \psi(t) = 2t$, $\psi(0) = 0$, $\psi(\frac{\pi}{2}) = \pi$.

$$I = \frac{a^2}{2} [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi} \cos z\, dz = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4} [\sin z]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4} .$$

■ **B:** A parciális integrálás módszere: $\int_0^1 x\, e^x\, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - (e - 1) = 1$.

3. Bonyolultabb integrálok kiszámításának módszerei

Amennyiben egy integrál meghatározása nagyon bonyolult, vagy ha elemi függvényekkel nem lehet megoldani, akkor különféle módszerek (néha művészi fogások) segítségével mégis meg lehet határozni az integrál értékét. Ide tartoznak a komplex változójú függvények integráljai (lásd a 721. oldalon és a 721–724. oldalon lévő példákat), ide tartozik egy integrálnak egy paraméter szerinti deriválása (lásd 466. old.):

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x,t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx . \tag{8.53}$$

■ $I = \int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\, dx$. Bevezetjük a t paramétert: $F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx$; $F(0) = 0$; $F(1) = I$. A (8.53)-t alkalmazzuk $F(t)$-re: $\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{x^t - 1}{\ln x}\right] dx = \int_0^1 \frac{x^t \ln x}{\ln x}\, dx = \int_0^1 x^t\, dx = \left[\frac{1}{t+1} x^{t+1}\right]_0^1 =$

$= \dfrac{1}{t+1}$. Integrálás: $F(t) - F(0) = \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{t+1} = [\ln(t+1)]_0^t = \ln(t+1)$. Eredmény: $I = F(1) = \ln 2$.

4. Integrálás sorfejtéssel

Ha az $f(x)$ integrandus az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvegens sorba fejthető, azaz

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots \tag{8.54}$$

akkor az integrál is

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int \varphi_n(x)\,dx + \cdots \tag{8.55}$$

alakban írható fel. Ilyen módon a határozott integrált konvergens számsorként állíthatjuk elő:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \cdots . \tag{8.56}$$

Amennyiben a $\varphi_k(x)$, függvények könnyen integrálhatók, mint pl. ha az $f(x)$ függvény olyan hatványsorba fejthető, amelyik az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen konvergens, akkor az $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrált tetszés szerinti pontossággal meg lehet határozni.

■ Az $I = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ integrált kell 0,0001 pontosságig meghatároznunk. Az $e^{-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^8}{4!} - \cdots$ sor Abel tétele (lásd 421. old) értelmében bármely véges intervallumban egyenletesen konvergens, és így: $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx = x\left(1 - \frac{x^2}{1!\cdot 3} + \frac{x^4}{2!\cdot 5} - \frac{x^6}{3!\cdot 7} + \frac{x^8}{4!\cdot 9} - \cdots\right)$ áll fenn.

Ebből következik: $I = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 1!\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{2^6\cdot 3!\cdot 7} + \frac{1}{2^8\cdot 4!\cdot 9} - \cdots\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{160} - \dfrac{1}{2688} + \dfrac{1}{55296} - \cdots\right)$. A feladat értelmében az integrál meghatározásánál 0,0001 pontosságot kell elérnünk. Így LEIBNIZ-nek az alternáló sorokra vonatkozó tétele szerint (lásd 415. old.) elegendő a sorbafejtés első négy tagját kiszámítani:

$$I \approx \frac{1}{2}(1 - 0{,}08333 + 0{,}00625 - 0{,}00037) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}92255 = 0{,}46127\,, \quad \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = 0{,}4613\,.$$

5. Grafikus integrálás

A grafikus integrálás **(8.10. ábra)** olyan szerkesztéses eljárás, melynek segítségével az AB görbével adott $y = f(x)$ függvény integrálját, azaz az $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrált, — ami az M_0ABN terület nagyságát adja — grafikusan tudjuk ábrázolni.

1. Az M_0N szakaszt az

$$x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1/2} \tag{8.57a}$$

pontokkal $2n$ egyenlő részre osztjuk. Az eredmény annál pontosabb, minél több az osztópontok száma.

2. Az

$$x_{1/2}, x_{3/2}, \ldots, x_{n-1/2} \tag{8.57b}$$

osztópontokban függőleges egyeneseket emelünk a görbével való metszéspontig. Ezeket a metszéspontokat kivetítjük az ordináta-tengelyre. Így keletkeznek az $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ pontok.

3. A negatív x-tengelyen felveszünk egy P pontot. Az OP szakasz nagysága tetszés szerinti. Majd a P pontot összekötjük az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokkal.

4. Az M_0 ponton át PA_1 szakasszal párhuzamost húzunk az x_1 osztóponthoz tartozó ordinátáig. Itt lesz az M_1 pont. Ebből a pontból a PA_2-vel húzunk párhuzamost az x_2 osztóponthoz húzott ordinátáig. Ebből az M_2 pontból folytatjuk az eljárást amíg az utolsó ordinátán az M_n pontig el nem érünk.
A keresett integrál értéke egyenlő az OP és NM_n szakaszok hosszának szorzatával.

$$\int_a^b f(x)\,dx = OP \cdot NM_n\,. \tag{8.58}$$

A szabadon választott OP szakasz meghatározza a rajz méreteit. Minél kisebb a rajz megengedhető mérete, annál nagyobbra kell az OP szakaszt választani. Ha $OP = 1$, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = NM_n$, és az $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ poligonvonal megközelíti az $f(x)$ egyik primitív függvényének a görbéjét, azaz az $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált.

6. Planiméterek és integráfok

A *planiméterek* zárt síkgörbék területének meghatározására szolgáló eszközök, így alkalmasak a görbéje által adott $y = f(x)$ függvény határozott integráljának a meghatározására is. Speciális planiméterek alkalmasak nemcsak az $\int y\,dx$, hanem az $\int y^2\,dx$ és $\int y^3\,dx$ integrálok meghatározására is.

Az *integráfok* az $Y = \int_a^x f(t)\,dt$ primitív függvény görbéjének megrajzolására alkalmas eszközök, ha az adott $y = f(x)$ függvény görbéje ismeretes (lásd [19.36]).

7. Numerikus integrálás

Ha egy határozott integrál integrandusa nagyon bonyolult, ha nem lehet elemi módon integrálni, vagy ha csak diszkrét függvényértékek állnak rendelkezésre, mint pl. egy értéktáblázat, akkor az úgynevezett kvadratúra-formákhoz vagy a numerikus matematika más módszereihez kell folyamodni (lásd 921. old.).

8.2.2. A határozott integrál alkalmazása

8.2.2.1. A határozott integrál alkalmazásának általános elve

1. A meghatározandó mennyiséget felbontjuk nagy számú elegendően kicsi, azaz infinitezimálisan kicsi mennyiségekre:

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,. \tag{8.59}$$

2. Minden ilyen infinitezimális a_i mennyiséget helyettesíteni kell egy olyan $\tilde{a}_i$ mennyiséggel, ami a_i-től csak kevéssé tér el, de aminek a meghatározása ismert formula szerint lehetséges. Itt még az szükséges, hogy az $\alpha_i = a_i - \tilde{a}_i$ hiba a_i-hez és $\tilde{a}_i$-hez képest legalább egy nagyságrenddel kisebb legyen.

3. Az $\tilde{a}_i$ mennyiséget egy jól megválasztott x változó, és egy $f(x)$ függvény segítségével úgy kell előállítani, hogy $\tilde{a}_i$ felírható legyen, mint $f(x_i)\,\Delta x_i$.

4. A keresett mennyiség kiszámítható, mint az alábbi összeg határértéke:

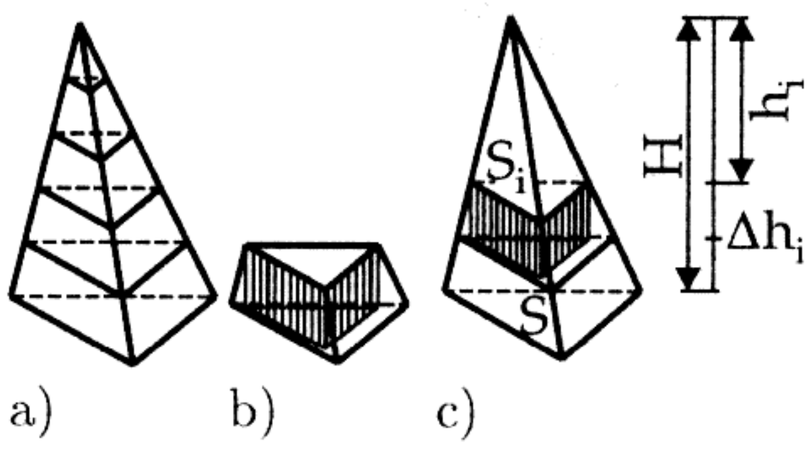
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{8.60}$$

ahol minden i-re igaznak kell lennie, hogy $\Delta x_i \geq 0$. Az x határát a és b jelöli.

■ S alapterületű és H magasságú gúla térfogatának kiszámítása **(8.11.a-c ábra)**:

a) A meghatározandó V térfogatot síkmetszetekkel laposabb csonkagúlák térfogatainak összegére bontjuk **(8.11.a ábra)**: $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

b) Minden v_i térfogatú csonkagúlát olyan $\tilde{v}_i$ térfogatú hasábbal helyettesítünk, amely ugyanolyan magasságú, és amelynek az alapterülete a csonkagúla fedőlap-területével egyenlő. **(8.11.b ábra)**. A térfogatuk különbsége magasabb rendben kicsi, mint v_i .



8.11. ábra.

c) Az $\tilde{v}_i$ térfogatot $\tilde{v}_i = S_i\,\Delta h_i$ alakba írjuk át, ahol h_i jelöli a fedőlapnak a gúla csúcsától való távolságát **(8.11.c) ábra**. Mivel $S_i : S = h_i^2 : H^2$, írhatjuk: $\tilde{v}_i = \dfrac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i$.

d) Ekkor az összeg határértéke:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i = \int_0^H \frac{Sh^2}{H^2}\,dh = \frac{SH}{3}\,.$$

8.2.2.2. Geometriai alkalmazások

1. Síkidomok területe

1. A B és a C pontok közötti görbevonallal határolt trapéz területe (8.12.a ábra). Explicit alakban ($y = f(x)$ és $a \le x \le b$), ill. paraméteres alakban ($x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$) adott görbe egyenletével:

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt\,. \tag{8.61a}$$

2. A G és a H pontok közötti görbevonallal határolt trapéz területe (8.12.b ábra) Explicit alakban ($x = g(y)$ und $\alpha \le y \le \beta$), ill. paraméteres alakban ($x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$) adott görbe egyenletével:

$$S_{EFGH} = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)\,dt\,. \tag{8.61b}$$

3. Görbeszektor területe (8.12.c ábra) Az a szektorterület, amit a K és L pontok között a ($\rho = \rho(\varphi)\,,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$) polárkoordinátákkal adott függvény görbéje határol a következő:

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi\,. \tag{8.61c}$$

Bonyolultabb alakzatok területét vonalintegrálok (lásd 470. old.) vagy kettős integrálok (lásd 479. old.) segítségével határozhatjuk meg.

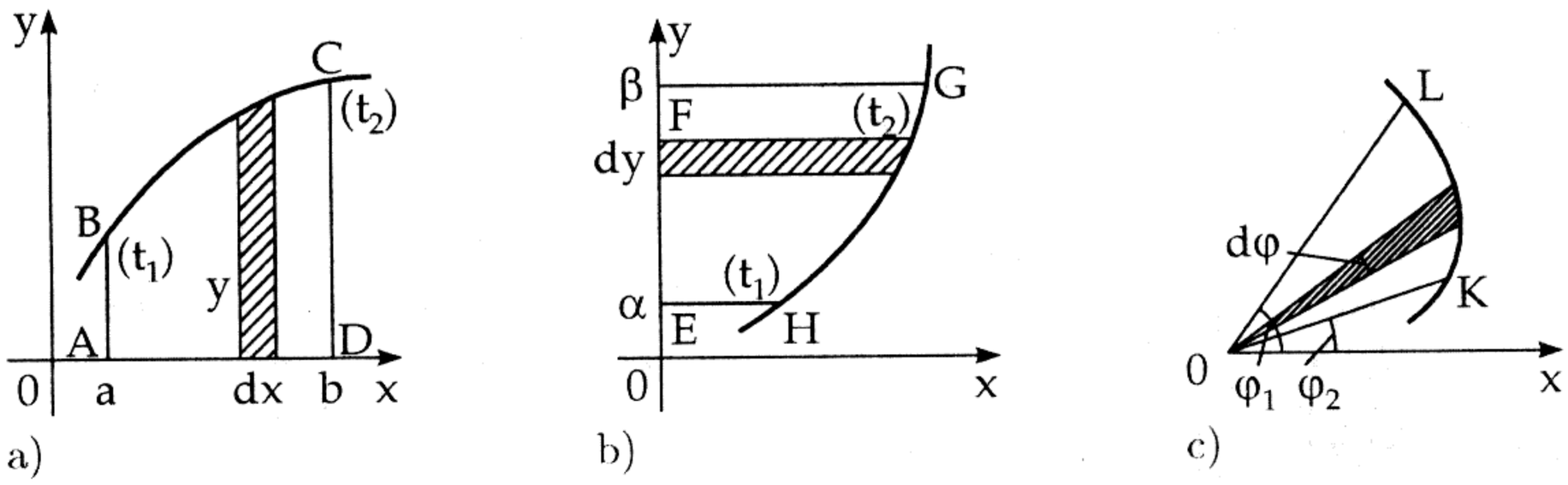
2. Síkgörbék ívhossza

1. Görbe két pontja közötti ívhosszúság (I) Az A és B pont között explicit alakban ($y = f(x)$, ill. $x = g(y)$) vagy paraméteres alakban ($x = x(t)\,,\ y = y(t)$) adott függvény görbéjének ívhossza **(8.13.a ábra)**:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{8.62a}$$

Ez az ívhosszúság differenciáljával dl-lel kifejezve:

$$L = \int dl \qquad \text{ahol} \qquad dl^2 = dx^2 + dy^2\,. \tag{8.62b}$$



8.12. ábra.

■ Az ellipszis kerületét (8.62a) szerint az $x = x(t) = a\sin t,\ y = y(t) = b\cos t$ helyettesítésekkel nyerjük:

$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t}\, dt = a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - e^2\sin^2 t}\, dt$, ahol $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ az ellipszis numerikus excentricitása.

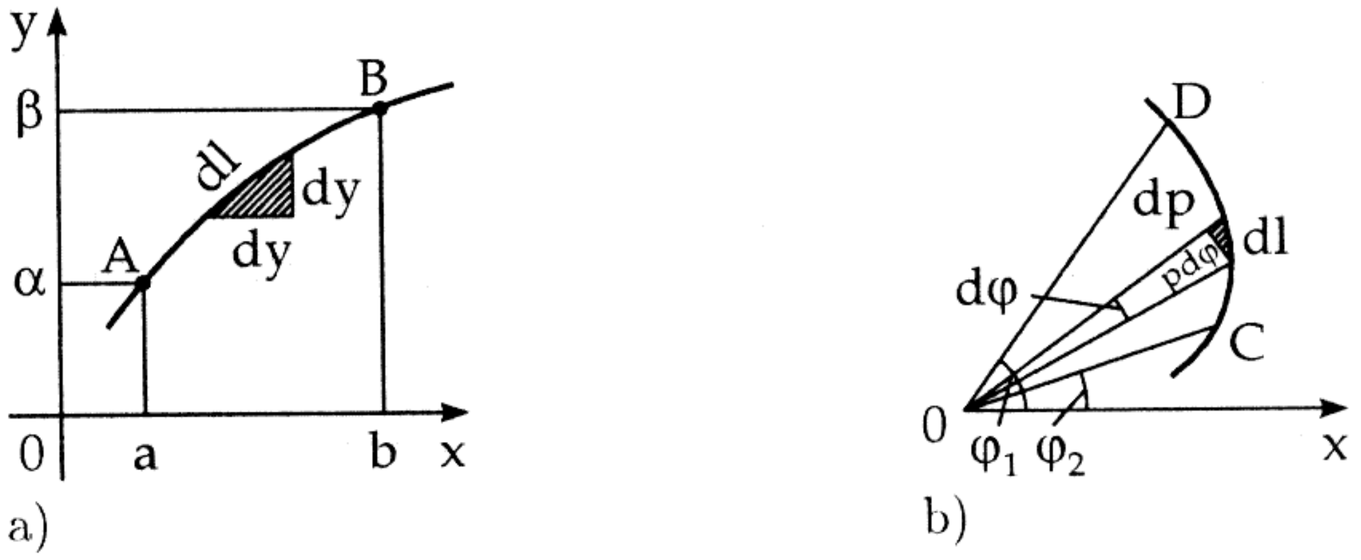
Az első negyedre vonatkozó integrációs határokkal: $t_1 = a,\ t_2 = 0$ az $x = 0, y = b$, ill. $x = a, y = 0$ értékpároknak megfelelően $L_{\overset{\frown}{AB}} = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2 t}\, dt = a\,E(k, \frac{\pi}{2})$, ahol $k = e$. Az integrál $E(k, \frac{\pi}{2})$ értékét a **21.7. táblázatból** olvashatjuk ki (lásd a 444. oldalon lévő példát).

2. Görbe két pontja közötti ívhossz (II) A C és a D pont között a $(\rho = \rho(\varphi))$ polárkoordinátákkal adott függvény görbéjének ívhossza **(8.13.b ábra)**:

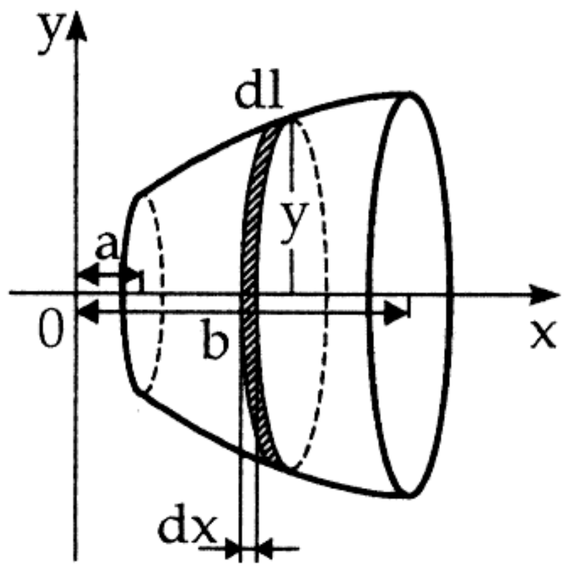
$$L_{\overset{\frown}{CD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi\,. \tag{8.62c}$$

Ez az ívhossz differenciáljával, dl-lel kifejezve:

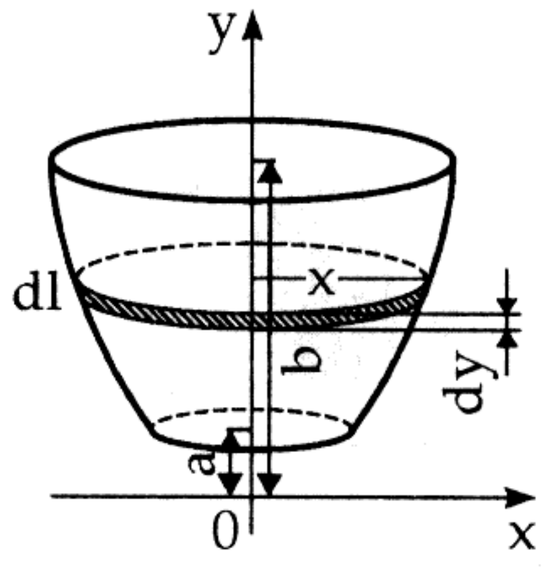
$$L = \int dl \qquad \text{ahol} \qquad dl^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2\,. \tag{8.62d}$$



8.13. ábra.



a)



b)

8.14. ábra.

3. Forgástest palástjának felszíne (lásd még Guldin első tételét, 460. old.)

1. Az $y = f(x)$ függvény görbéjének az x-tengely körüli forgatásakor keletkezett palást területe **(8.14.a ábra)**:

$$S = 2\pi \int_a^b y\, dl = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,. \tag{8.63a}$$

2. Az $x = f(y)$ függvény görbéjének az y-tengely körüli forgatásakor keletkezett palást területe **(8.14.b ábra)**:

$$S = 2\pi \int_a^b x\, dl = 2\pi \int_a^b x(y) \sqrt{\left(1 + \frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy\,. \tag{8.63b}$$

Bonyolultabb testek felszínének meghatározásához lásd a „Kettős integrálok alkalmazása" című fejezetet (484. old.), és az „1. típusú felületi integrál" című fejezetet (488. old.) A kettős integrállal történő felszínszámítás általános formuláit a „Kettős integrálok alkalmazása" című **8.8. táblázatban** találjuk.

4. Térfogatok (lásd a 2. Guldin tételt is, 460. old.)

1. Forgásszimmetrikus test térfogata az x-tengely körüli forgáskor **(8.14.a ábra)**:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx\,. \tag{8.64a}$$

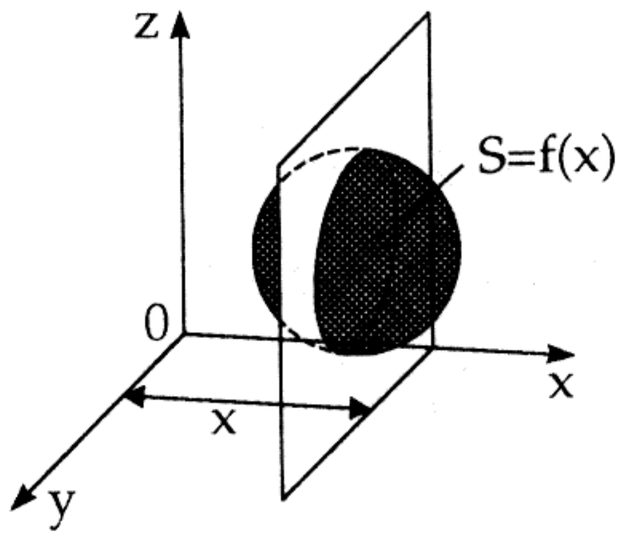
2. Forgásszimmetrikus test térfogata az y-tengely körüli forgáskor **(8.14.b ábra)**:

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy\,. \tag{8.64b}$$

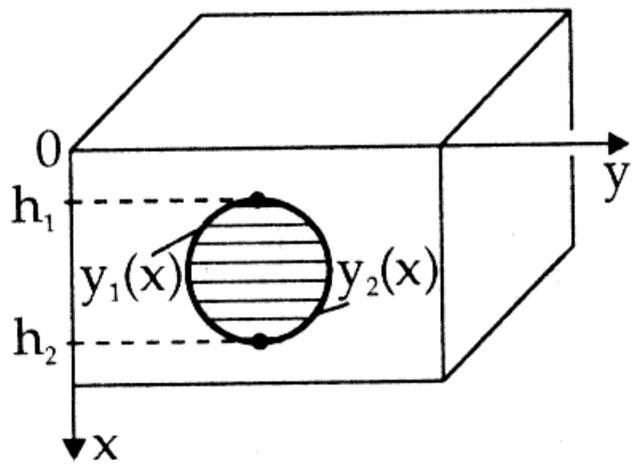
3. Olyan test térfogata, melynek az x-tengelyre merőleges keresztmetszetének a területét egy $S = f(x)$ függvény adja **(8.15. ábra)**:

$$V = \int_a^b f(x)\, dx\,. \tag{8.65}$$

Többszörös integrállal történő térfogatszámítás általános formuláit a „Kettős integrálok alkalmazása" című **8.8. táblázatban**, a 484. oldalon, és a „Háromszoros integrálok alkalmazása" című **8.10. táblázatban**, a 489. oldalon találhatjuk.



8.15. ábra.



8.16. ábra.

8.2.2.3. Mechanikai és fizikai alkalmazások

1. Egy pont által megtett út

Egy pont által a t_0 időponttól a T időpontig megtett út az időtől függő $v = f(t)$ sebesség mellett:

$$s = \int_{t_0}^{T} v\,dt\,. \tag{8.66}$$

2. Munka

Erőtérben mozgó test munkája a képletben szereplő skaláris szorzat miatt függ az iránytól. Ha az erő és elmozdulás iránya állandó és irányuk egybeesik, akkor az x-tengelyt felvehetjük az erő és elmozdulás irányában. Ha az $\vec{\mathbf{F}}$ erő nagysága változó, azaz $|\vec{\mathbf{F}}| = f(x)$, akkor az a W munka, mely a testnek az x-tengely mentén az $x = a$ pontból az $x = b$ pontba való eltolásához szükséges a következő:

$$W = \int_{a}^{b} f(x)\,dx\,. \tag{8.67}$$

Általános esetben, amikor az erő és az elmozdulás iránya nem esik egybe, akkor a munkát minden $\vec{\mathbf{r}}$ pontban az adott út mentén az erő és elmozdulás skaláris szorzatának vonalintegrálja határozzuk meg (lásd 477. old. (8.132) formula).

3. Nyomás

A ϱ sűrűségű nyugalomban lévő folyadékban kétféle nyomás lép fel: a *hidrosztatikai nyomás* és az *oldalnyomás*. Az utóbbit a folyadék egy, a függőlegesen belémerülő lemez oldalán fejti ki. Mindkét nyomás a mélységgel együtt növekszik.

1. Hidrosztatikai nyomás A p_h hidrosztatikai nyomás nagysága h mélységben:

$$p_h = \varrho\, p\, h\,, \tag{8.68}$$

ahol g a gravitációs gyorsulás.

2. Oldalnyomás A p_s oldalnyomás, pl. egy folyadéktartó-edény oldalán lévő kifolyó zárólapjára ható nyomás, $h_1 - h_2$ mélységkülönbség esetén **(8.16. ábra)**:

$$p_s = \varrho\, g \int_{h_1}^{h_2} x[y_2(x) - y_1(x)]\,dx\,. \tag{8.69}$$

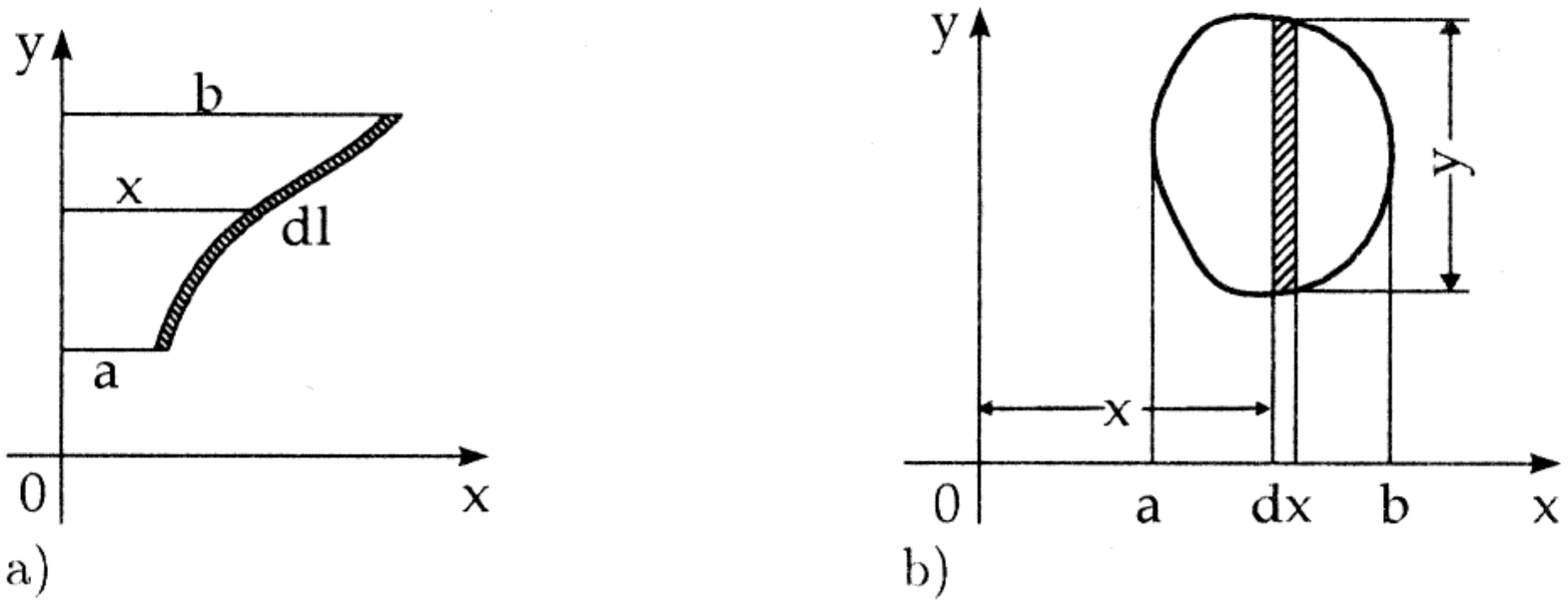
Az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvények a zárólap bal, ill. jobb szélét írják le.

4. Tehetetlenségi nyomaték

1. Ívszakasz tehetetlenségi nyomatéka Az $y = f(x)$ függvény állandó ϱ sűrűségű, homogén görbéjének az y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az $[a, b]$ intervallumon **(8.17.a ábra)**:

$$I_y = \varrho \int_a^b x^2 \, dl = \varrho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \, . \tag{8.70}$$

Amennyiben a sűrűség nem állandó, hanem x függvénye, úgy a $\varrho(x)$ kifejezést is be kell vonni az integrálásba.

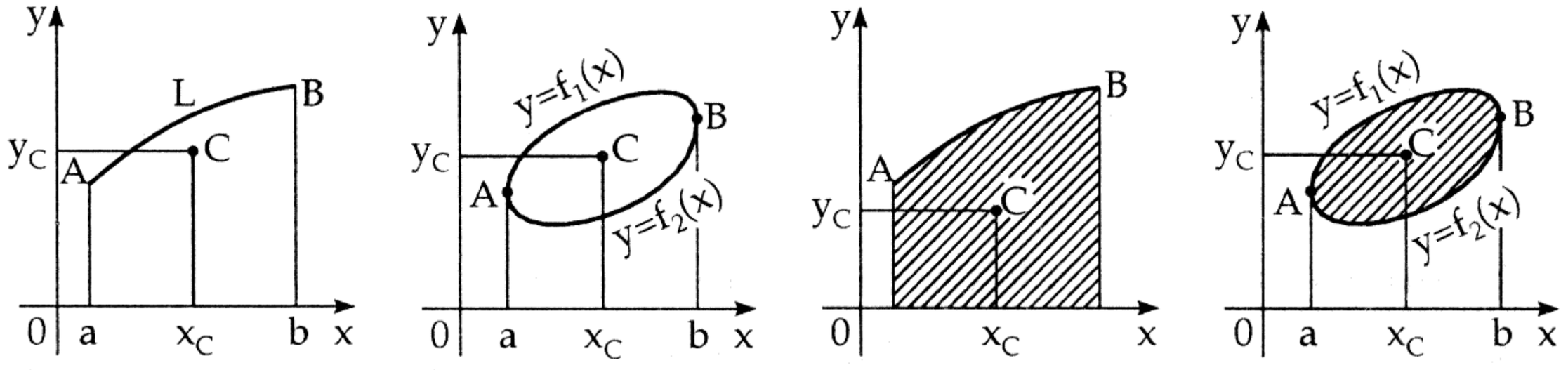


8.17. ábra.

2. Síkidom tehetetlenségi nyomatéka A ϱ sűrűségű homogén síkidomnak az y-tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka (itt y az y-tengellyel párhuzamos metszet hossza **(8.17.b ábra)**):

$$I_y = \varrho \int_a^b x^2 y \, dx \, . \tag{8.71}$$

(lásd még **8.8. táblázat** (Kettős integrál alkalmazása) (484. old.). Abban az esetben, ha a sűrűség a helytől is függ, akkor a megfelelő analitikai kifejezést is be kell vonni az integrálásba.



8.18. ábra.

5. Súlypont, Guldin-tételek

1. Ívszakasz súlypontja Az $y = f(x)$ homogén síkgörbe egy L hosszúságú ívszakaszának C súlypontja az $[a, b]$ intervallumban **(8.18.a ábra)** megadható (8.62a) figyelembevételével (lásd 455. old.):

$$x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L} \, , \qquad y_C = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} \, dx}{L} \, . \tag{8.72}$$

2. Zárt görbe súlypontja Az $y = f(x)$ zárt görbe súlyypontját kell meghatározni **(8.18.b ábra)**. Az $y_1 = f_1(x)$ az alsó, és $y_2 = f_2(x)$ a fölső görberész egyenlete, az összhosszúság L. Így:

$$x_C = \frac{\int_a^b x(\sqrt{1+(y_1')^2} + \sqrt{1+(y_2')^2})\,dx}{L}, \quad y_C = \frac{\int_a^b (y_1\sqrt{1+(y_1')^2} + y_2\sqrt{1+(y_2')^2})\,dx}{L}. \tag{8.73}$$

3. Guldin első tétele Forgassunk egy görbedarabot olyan tengely körül, amelyik a görbe síkjában fekszik és ami nem metszi a görbét. GULDIN tétele szerint ennek a testnek S_{rot} felszínét megkapjuk, ha annak a körnek a kerületét, amely kört a görbedarab súlypontja forgáskor a tengelytől y_C távolságra leír, tehát a $2\pi y_C$ szorzatot megszorozzuk a görbedarab L hosszával:

$$S_{\text{rot}} = L\,2\pi y_C\,. \tag{8.74}$$

4. Trapéz súlypontja Homogén, az A és B pontok között görbevonallal határolt trapéz **(8.18.c ábra)** súlypontjának koordinátái:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\,y\,dx}{S}, \qquad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S}. \tag{8.75}$$

Amikor a trapéz területe S, az AB görbedarab egyenlete $y = f(x)$.

5. Tetszés szerinti síkidom súlypontja Az S felszínű tetszés szerinti síkidom **(8.18.d ábra)** C súlyponját meghatározhatjuk a felül és alul határoló görbék $y_1 = f_1(x)$, ill. $y_2 = f_2(x)$ egyenletének ismeretében:

$$x_C = \frac{\int_a^b x(y_1 - y_2)\,dx}{S}, \qquad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{S}. \tag{8.76}$$

A súlypontszámításhoz szükséges többszörös integrállal való számítások formulái a **8.8. táblázatban** (Kettős integrálok alkalmazása, 484. old.) és **8.10. táblázatban** (Hármas integrálok alkalmazása, 489. old.) találhatók.

6. Guldin második tétele Forgassunk egy síkidomot egy vele egy síkban fekvő olyan tengely körül, amelyik nem metszi az idomot. Az így keletkezett test térfogatát megkapjuk, ha az idom súlypontja által leírt kör kerületét, tehát a $2\pi y_C$ szorzatot megszorozzuk az idom S területével:

$$V_{\text{rot}} = S \cdot 2\pi y_C\,. \tag{8.77}$$

8.2.3. Improprius integrálok, Stieltjes- és Lebesgue-integrálok

8.2.3.1. Az integrálfogalom általánosításai

A határozott integrál fogalmát (lásd 447. old.) mint RIEMANN-integrált (lásd 447. old) vezettük be, feltételezve egy korlátos $f(x)$ függvényt és egy zárt $[a, b]$ intervallumot. Ez a két feltétel lett a kiindulópontja a RIEMANN-féle integrálfogalom általánosításának. A következőkben ismertetünk néhányat.

1. Improprius integrálok

Kiterjesztjük az integrálfogalmat nemkorlátos függvényekre és nemkorlátos integrációs intervallumokra. Ezekről a következő fejezetekben lesz szó: *Végtelen integrációs határokkal rendelkező integrálok, improprius integrálok* és *Nemkorlátos integrandusú integrálok.*

2. Egyváltozós függvények Stieltjes-integrálja

Két véges függvényből, az $f(x)$ és $g(x)$ függvényekből indulunk ki, melyek az $[a, b]$ véges intervallumon értelmezve vannak. Ahogyan azt a RIEMANN-integrálnál, itt is felosztjuk az intervallumot elemi

részintervallumokra, de a RIEMANN-féle közelítőösszeg (8.38) helyett az alábbi összeget képezzük:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \tag{8.78}$$

Ha ennek az összegnek létezik határértéke arra az esetre, amikor az elemi intervallumok hossza nullához tart, függetlenül az x_i és ξ_i pontok választásától, akkor ezt a határértéket *határozott* STIELTJES-*integrál*nak nevezzük (lásd [8.16], [8.18]). A STIELTJES-integrál egy meglepő alkalmazására ld. 12.5.4.1.-et.

■ Ha $g(x) = x$, akkor a STIELTJES-integrál RIEMANN-integrálba megy át.

3. Lebesgue-integrál

Az integrálfogalom egy további kiterjesztése a mértékelmélettel (lásd 656. old.) kapcsolatos, ahol bevezetést nyert egy halmaz mértéke, a mértéktér, a mérhető függvények fogalma. A funkcionálanalízisben a LEBESGUE-integrált (lásd 659. old.) ezeknek a fogalmaknak a segítségével definiáljuk (lásd [8.12]). Egy általánosítást jelent pl. a RIEMANN-integrállal szemben az, hogy az integrációs tartomány lehet az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza, amit mérhető részhalmazokra kell bontani.

Az integrálfogalom általánosításának jelölései nem egységesek. (lásd [8.16]).

8.2.3.2. Végtelen integrációs határokkal rendelkező integrálok

1. Definíciók

a) Ha az integrációs tartomány az $[a, +\infty)$ féltengely, és ha az integrandus függvény ezen mindenütt értelmezve van, akkor a definíció értelmében

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx\,. \tag{8.79}$$

Amennyiben ez a határérték létezik, úgy *konvergens improprius integrál*ról beszélünk. Ha a határérték nem létezik, akkor *divergens improprius integrál*ról beszélünk (8.79).

b) Analóg módon definiálunk akkor, ha a függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, b]$ féltengely vagy az egész számegyenes:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx\,, \tag{8.80a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} \int_A^B f(x)\,dx\,. \tag{8.80b}$$

c) A (8.80b) esetben az A és B számok egymástól függetlenül tartanak a végtelenhez. Ha a határérték (8.80b) szerint nem létezik, de létezik a

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx\,, \tag{8.80c}$$

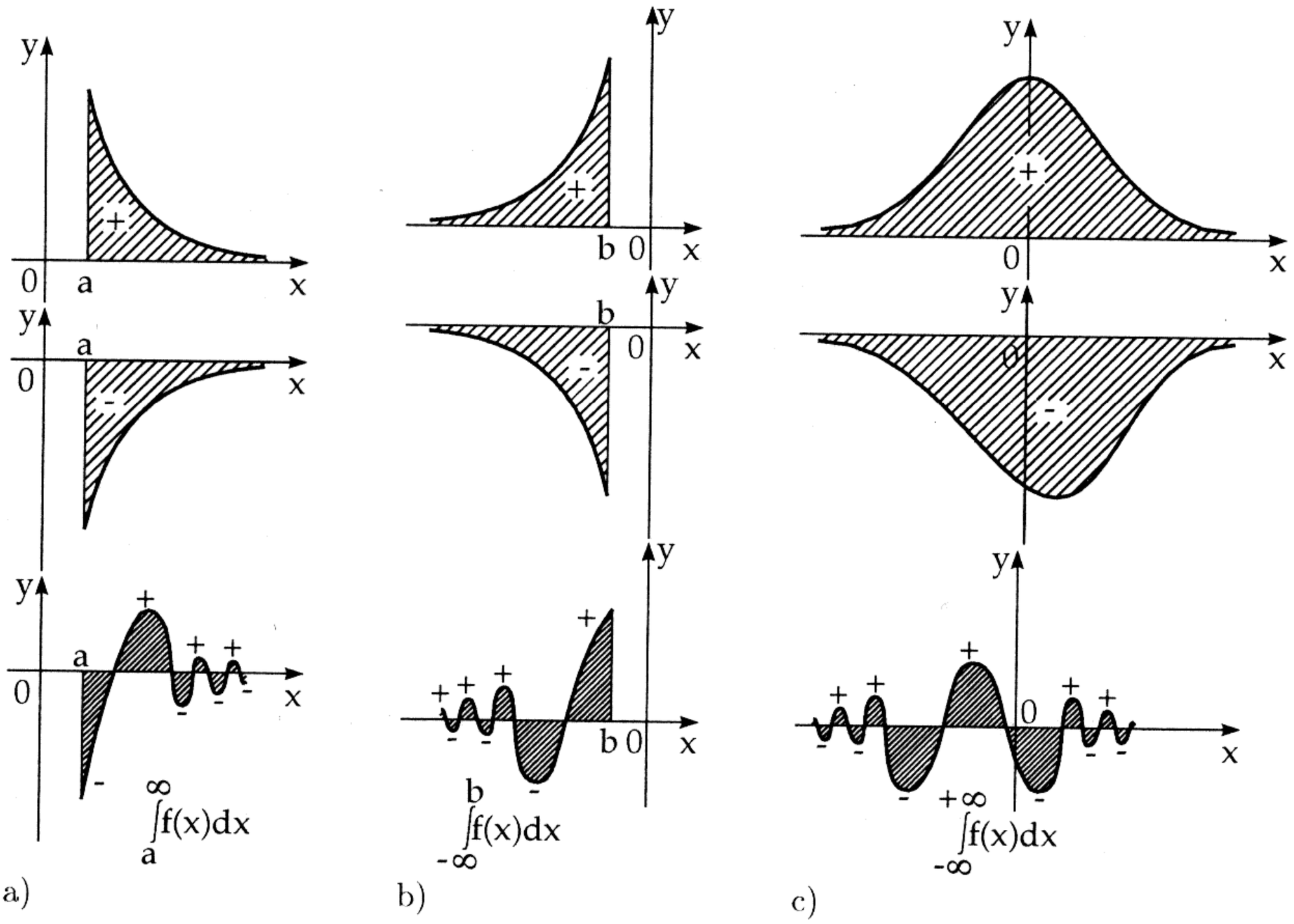
határérték, akkor a (8.80c) határértéket az *improrius integrál főértékének* nevezzük.

2. Improprius integrál geometriai jelentése

A (8.79), (8.80a) és (8.80b) integrálok azoknak az alakzatoknak a területét adják, amelyeket az **8.19. ábrán** láthatunk.

■ **A:** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty$ (divergens).

■ **B:** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \int_2^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{2}$ (konvergens).



a)

8.19. ábra.

■ **C:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (konvergens).

3. A konvergencia elégséges feltételei

Amennyiben a (8.79), (8.80a) és (8.80b) határértékek meghatározása nehezen megoldható, vagy ha csupán az érdekel bennünket, hogy egy improprius integrál konvergens-e vagy divergens, akkor használhatjuk a következő elégséges kritériumok egyikét. Itt most csak a (8.79) integrált vizsgáljuk. A (8.80a) integrált (8.79) típusúra alakíthatjuk át, ha az x helyébe $-x$ értéket helyettesítünk:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{+\infty} f(-x)\,dx\,. \tag{8.81}$$

A (8.80b) típusú integrált két integrál összegeként írhatjuk fel, egy (8.79) típusú és egy (8.80a) típusú integrál összegeként:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \tag{8.82}$$

ahol c egy tetszés szerinti szám.

1. kritérium: Ha az $f(x)$ függvény majdnem mindenütt folytonos, és az

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx \tag{8.83}$$

integrál létezik, akkor létezik a (8.79) integrál is. A (8.79) integrálról ilyenkor azt mondjuk, hogy *abszolút konvergens* és az $f(x)$ függvény *abszolút integrálható* az $[a, +\infty)$ féltengelyen.

2. kritérium: Ha az $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényekre fennáll:

$$f(x) > 0\,,\quad \varphi(x) > 0 \quad \text{és} \quad f(x) \le \varphi(x) \ \text{ha}\ a \le x < +\infty\,, \tag{8.84a}$$

akkor az

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \tag{8.84b}$$

integrál konvergenciájából következtethetünk az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{8.84c}$$

integrál konvergenciájára is. Fordítva, a (8.84c) divergenciájából következtethetünk az (8.84b) integrál divergenciájára is.

3. kritérium: Ha a (8.84a) integrálba φ helyébe

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha} \tag{8.85a}$$

értéket írunk be, és figyelembe vesszük, hogy a (8.85b) integrál $\alpha > 1$ esetén adott határértékhez konvergál:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} \quad \text{ha} \quad \alpha > 1\,, \tag{8.85b}$$

míg ha $\alpha \le 1$ esetén divergens, akkor a 2. konvergenciakritériumból további következtetéseket vonhatunk le:

Ha az $f(x)$ függvény az $a \le x < \infty$ intervallumon pozitív, és ha van olyan $\alpha > 1$ szám, hogy elég nagy x mellett

$$f(x)\,x^\alpha < K < \infty \tag{8.85c}$$

fennáll, akkor a (8.79) integrál konvergens. Amennyiben $f(x)$ pozitív és létezik olyan $\alpha \le 1$ szám, hogy bizonyos helytől kezdve

$$f(x)\,x^\alpha > c > 0 \tag{8.85d}$$

fennáll, akkor az integrál divergens (8.79).

■ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}\,dx}{1+x^2}$. Legyen $\alpha = \frac{1}{2}$, ekkor $\displaystyle\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,x^{1/2} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1$. Az integrál divergens.

4. Az improprius integrálok és a végtelen sorok közötti kapcsolat

Amennyiben $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tetszés szerinti, nem korlátos, monoton növekedő végtelen sorozat, azaz ha fennáll, hogy

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = \infty\,, \tag{8.86a}$$

és ha az $f(x)$ függvény pozitív az $a \le x < \infty$ intervallumon, akkor az integrál konvergenciájának kérdése (8.79) visszavezethető az alábbi sor konvergenciájára:

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \cdots \tag{8.86b}$$

Ha a (8.86b) sor konvergens, akkor a (8.79) integrál is konvergens és a (8.86b) sor összegével egyenlő. Ha a (8.86b) divergens, akkor a (8.79) integrál is divergens. Így a sorokra vonatkozó konvergenciakritériumokat az integrálok konvergenciájára vonatkozó vizsgálatoknál is alkalmazhatjuk. A sorokra vonatkozó integrálkritériumnál (lásd 414. old.) fordított a helyzet, improprius integrál konvergenciájából következtethetünk a sor konvergenciájára.

8.2.3.3. Nemkorlátos függvény integrálja

1. Definíciók

1. A definíció jobbról nyitott, vagy zárt intervallumra vonatkozik Az $f(x)$ függvény $[a,b)$ jobbról nyitott intervallumra vonatkozó improprius integráljának a definíciója ugyanaz, mint az $[a,b]$ zárt intervallumra vonatkozó, abban az esetben, ha a b pontban $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$. A definíció mindkét esetben:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,. \tag{8.87}$$

Ha ez a határérték létezik, akkor létezik, ill. konvergens az (8.79) integrál is és *konvergens improprius integrál*ról beszélünk. Ha a határérték nem létezik, akkor az integrál nem létezik, ill. nem konvergens az integrál, és akkor *divergens improprius integrál*ról beszélünk.

2. Definíció balról nyitott, vagy zárt intervallumra Az $f(x)$ függvény improprius integráljának definíciója ugyanaz, ha az $(a,b]$ intervallumra vonatkozik, mint ha $[a,b]$ zárt intervallumra vizsgálnánk akkor, ha az a pontban $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. A (8.87) analógiájára:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,. \tag{8.88}$$

3. A definíció két, egymással érintkező, félig nyitott intervallumra vonatkozik Az $f(x)$ függvény improprius integráljának definíciója az $[a,b]$ zárt intervallumra, egyetlen belső c pont kivételével $(a < c < b)$, azaz olyan $f(x)$ függvényre, amelyik két szomszédos félig nyitott $[a,c)$ és $(c,b]$ intervallumon van értelmezve, de a c pontban a határértéke $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, a következő:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\,. \tag{8.89a}$$

Itt az ε és δ egymástól független. Ha a (8.89a) határérték nem létezik, de az alábbi igen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\}, \tag{8.89b}$$

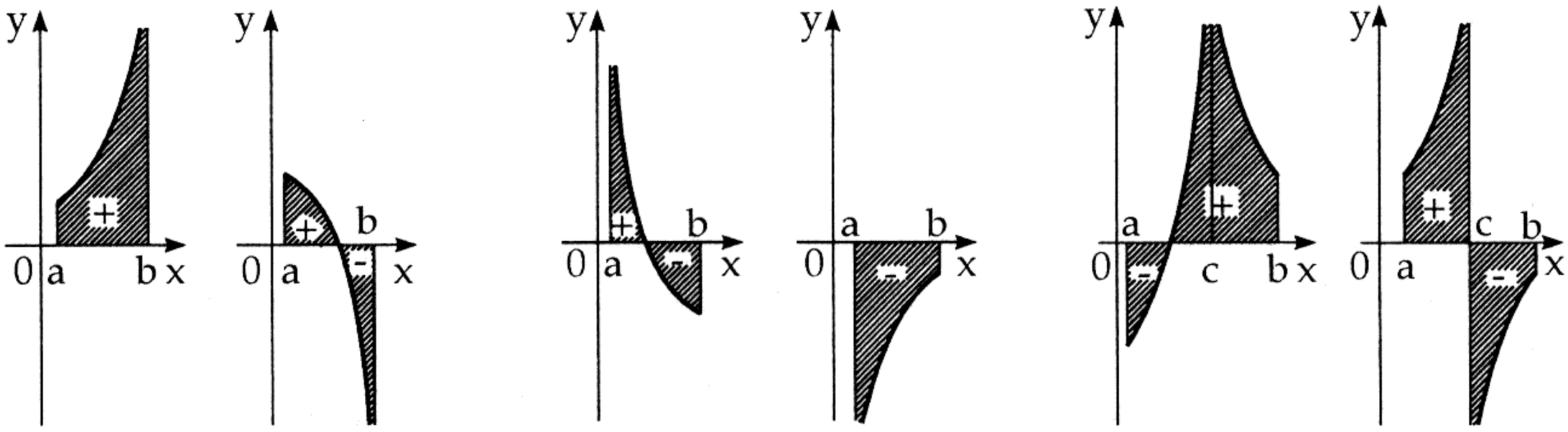
akkor a (8.89b) határértéket az *improprius integrál főértéké*nek vagy CAUCHY-*féle főérték*nek nevezzük.

2. Geometriai jelentés

A nem folytonos függvények integráljának (mint pl. (8.87), (8.88) és (8.89a)) az a geometriai jelentősége, hogy velük olyan alakzatok teületét is meg tudjuk határozni, amelyek egy függőleges aszimptota mentén a végtelenbe nyúlnak **(8.20. ábra)**

■ **A:** $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; a (8.88) eset, szinguláris pont: $x = 0$.

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{b} \quad \text{(konvergens)}.$$



a) lásd (8.87) b) lásd (8.88) c) lásd (8.89a)

8.20. ábra.

■ **B:** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$; a (8.87) eset, szinguláris pont: $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \operatorname{tg} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln\cos 0 - \ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right] = \infty \quad \text{(divergens)}.$$

■ **C:** $\int_{-1}^{8} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; a (8.89a) eset, szinguláris pont: $x = 0$.

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2}(\varepsilon^{2/3}-1) + \lim_{\delta\to 0} \frac{3}{2}(4-\delta^{2/3}) = \frac{9}{2} \text{ (konvergens)}.$$

■ **D:** $\int_{-2}^{2} \dfrac{2x\,dx}{x^2-1}$; a (8.89a) eset szinguláris pont: $x = \pm 1$.

$$\int_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \nu\to 0}} \int_{-1+\delta}^{1-\nu} + \lim_{\gamma\to 0} \int_{1+\gamma}^{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \cdots = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1) - \ln 3] + \cdots = \infty \quad \text{(divergens)}.$$

3. A differenciál- és integrálszámítás alaptételének alkalmazása

1. Figyelmeztetés (8.89a) típusú improprius integrálok meghatározása a

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \quad \text{ahol} \quad F'(x) = f(x) \tag{8.90}$$

formula (lásd 447. old.) mechanikus alkalmazásakor, ha az $[a, b]$ intervallumban lévő szinguláris pontokat figyelmen kívül hagyjuk durva hibákat okozhat.

■ **E:** Így van ez a **D** példánál, ha az alaptételt csak formálisan alkalmazzuk:

$$\int_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{2} = \ln 3 - \ln 3 = 0\,,$$

Míg a valóságban ez az integrál divergens.

2. Általános szabály A differenciál- és integrálszámítás alaptételét (8.89a) csak akkor szabad használni, ha az $f(x)$ primitív függvényét a szinguláris helyen folytonossá lehet tenni.

■ **F:** A **D** példában az $\ln(x^2-1)$ függvénynek az $x = \pm 1$ helyen szakadása van, így a fenti feltétel nem teljesül. Ezzel szemben a **C** példában az $y = \dfrac{3}{2}\,x^{2/3}$ függvény, ami az $[a, 0)$ és $(0, b]$ intervallumokon $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ primitív függvénye az $x = 0$ helyen folytonossá tehető ezért a **C** példa megoldásakor alkalmazhatjuk

az alaptételt:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\, x^{2/3}|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}(8^{2/3} - 1^{2/3}) = \frac{9}{2}\,.$$

Megjegyzés: A primitív függvény definíciójában benne volt, hogy mindenütt differenciálható. Itt a részintervallumokon vett primitív függvények összekapcsolásáról van szó.

4. Improprius integrál konvergenciájának elégséges feltétele, ha az integrandus nem korlátos

1. Ha az $\int_a^b |f(x)|\,dx$ integrál létezik, akkor létezik az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál is. Ebben az esetben *abszolút konvergens integrál*ról beszélünk, és $f(x)$ *abszolút integrálható függvény* a kérdéses intervallumon.

2. Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b)$ intervallumon pozitív, és ha létezik olyan $\alpha < 1$ szám, hogy a b-hez elegendően közeli x-értékekre fennáll, hogy

$$f(x)\,(b-x)^{\alpha} < \infty\,, \tag{8.91a}$$

akkor az integrál konvergens (8.89a). Ha pedig az $f(x)$ függvény az $[a, b)$ intervallumon pozitív, és létezik egy $\alpha > 1$ szám úgy, hogy a b-hoz elegendően közeli x-értékekre fennáll:

$$f(x)\,(b-x)^{\alpha} > c > 0\,, \tag{8.91b}$$

akkor az integrál divergens (8.89a).

8.2.4. Paraméteres integrál

8.2.4.1. A paraméteres integrál definíciója

Az alábbi határozott integrál

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = F(y) \tag{8.92}$$

az y változó függvénye, amit ebben az összefüggésben paraméternek nevezünk. Sok esetben az $F(y)$ függvény már nem elemi függvény. A (8.92) integrál lehet közönséges vagy improprius integrál, az $f(x,y)$ integrandus lehet korlátos, vagy nem korlátos. Paramétertől függő improprius integrálok konvergenciájára vonatkozó elméleti meggondolások találhatók pl. [8.4]-ben.

■ **Gammafüggvény** vagy EULER**-féle másodfajú integrál** (lásd 469. old.):

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x}\,dx \qquad (\text{konvergens, ha } y > 0)\,. \tag{8.93}$$

8.2.4.2. Differenciálás az integráljel mögött

1. Tétel Ha a (8.92) függvény értelmezve van az $c \le y \le e$ intervallumon és $f(x,y)$ folytonos az $a \le x \le b$, $c \le y \le e$ téglalapon és van y szerinti parciális deriváltja, akkor a $[c, e]$ intervallumban tetszés szerinti y esetén fennáll:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\,. \tag{8.94}$$

Úgy mondjuk: *differenciálás az integráljel mögött.*

■ Ha $y > 0$ tetszőleges, akkor $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)dx = -\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}\,.$

Próba: $\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\,y\ln\frac{y^2}{1+y^2}\,;\ \frac{d}{dy}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\,y\ln\frac{y^2}{1+y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}\,.$
Ha $y=0$, akkor a folytonossági feltétel nem teljesül, így itt nincs derivált.

2. Általánosítás paramétertől függő integrációs határok esetén A (8.94) formulát általánosíthatjuk, ha az $\alpha(y)$ és a $\beta(y)$ függvények ugyanazon feltételek mellett, mint amelyeket (8.94)-nél megkívántunk az $[c,e]$ intervallumban definiálva vannak, folytonosak és differenciálhatók, és ha az $x=\alpha(y)\,,\ x=\beta(y)$ görbék az $a\le x\le b\,,\ c\le y\le e$ téglalapot nem hagyják el:

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + \beta'(y)\,f\left(\beta(y)\,,y\right) - \alpha'(y)\,f\left(\alpha(y)\,,y\right)\,. \tag{8.95}$$

8.2.4.3. Integrálás az integráljelen belül

Ha a (8.92) függvény a $[c,e]$ intervallumon értelmezve van és az $f(x,y)$ függvény az $a\le x\le b\,,\ c\le y\le e$ téglalapon folytonos, akkor fennáll:

$$\int_c^e \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]\,dy = \int_a^b \left[\int_c^e f(x,y)\,dy\right]\,dx\,. \tag{8.96}$$

Ebben az esetben *integáljelen belüli integrálás*ról beszélünk.

■ **A:** Integráljuk az $f(x,y)=x^y$ függvényt a $0\le x\le 1\,,\ a\le y\le b$ téglalapon. Az x^y függvény az $x=0\,,\ y=0$ helyen nincs értelmezve, ha $a>0$ akkor folytonos. Így az integrálás sorrendje $\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\,dx\right]\,dy = \int_0^1\left[\int_a^b x^y\,dy\right]\,dx$ értelmében felcserélhető. A bal oldalon azt kapjuk, hogy: $\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a}$, jobbra: $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$. A határozatlan integrált nem lehet elemi függvényekkel kifejezni. A határozott integrál ismert, így az eredmény: $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a} \qquad (0<a<b)\,.$

■ **B:** Integráljuk az $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ függvényt a $0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1$ téglalapon. A függvény a $(0,0)$ pontban nincs értelmezve, így a (8.96) formula nem alkalmazható. A próba eredménye:

$$\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2}\,; \qquad \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\,;$$

$$\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2+1}\,; \qquad -\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}\,.$$

8.2.5. Integrálás sorfejtéssel, speciális nem elemi függvények

Nem mindig lehet az integrált elemi függvényekkel kifejezni, még akkor sem, ha az integrandus elemi függvény. Sok esetben az ilyen *nem elemi integrálok* sorfejtéssel adhatók meg. Ha az integrandus az $[a,b]$ intervallumban egyenletesen konvergens sorba fejthető, akkor ebből tagonkénti integrálással hasonlóképpen a határozott integrálok egyenletesen konvergens sorát nyerjük az $\int_a^x f(t)\,dt$ határozott integrálra.

1. Integrálszinusz ($|x|<\infty$), (lásd 723. old. is)

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} + \cdots \tag{8.97}$$

2. Integrálkoszinusz ($0 < x < \infty$)

$$\mathrm{Ci}\,(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = C + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt$$

$$= C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \cdots \tag{8.98a}$$

$$C = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t\,dt = 0{,}577215665 \qquad (\text{EULER-féle konstans})\,. \tag{8.98b}$$

3. Integrállogaritmus ($0 < x < 1$, ha $1 < x < \infty$, akkor Cauchy-féle főérték)

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = C + \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} + \cdots \tag{8.99}$$

4. Integrálexponenciális függvény ($-\infty < x < 0$, ha $0 < x < \infty$, akkor Cauchy-féle főérték)

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt = C + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \cdots \tag{8.100a}$$

$$\mathrm{Ei}\,(\ln x) = \mathrm{Li}\,(x)\,. \tag{8.100b}$$

5. Gauss-féle hibaintegrál és hibafüggvény

A GAUSS-féle hibaintegrál értelmezési tartománya: $|x| < \infty$. Ekkor

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,, \tag{8.101a}$$

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1\,, \tag{8.101b}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(x) - \frac{1}{2}\,. \tag{8.101c}$$

A $\Phi(x)$ függvény a normális eloszlás normált eloszlásfüggvénye (lásd 788. old.). A **21.15. táblázatban** (lásd 1118. old.) találhatjuk a megfelelő értéktáblázatot.

A statisztikában gyakran alkalmazott $\mathrm{erf}\,(x)$ hibafüggvény, amit error-függvénynek is neveznek (lásd 788. old. is), szoros összefüggésben áll a GAUSS-féle hibaintegrállal:

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = 2\Phi_0(x\sqrt{2})\,, \tag{8.102a}$$

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{erf}\,(x) = 1\,, \tag{8.102b}$$

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} + \cdots \right)\,, \tag{8.102c}$$

$$\int_0^x \operatorname{erf}(t)\,dt = x\operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-x^2} - 1\right), \qquad (8.102d) \qquad \frac{d\operatorname{erf}(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \qquad (8.102e)$$

6. Gammafüggvény és faktoriális

1. Definíció A *gammafüggvény*, a másodfajú EULER-féle integrál (8.93), lehetővé teszi a faktoriális fogalmának kiterjesztését tetszés szerinti x számokra, még komplex számra is, a negatív egész számok kivételével. Kétféle módon definiálhatjuk:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad (x > 0), \qquad (8.103a)$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}. \qquad (8.103b)$$

2. A gammafüggvény tulajdonságai

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad (8.104a)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \qquad (8.104b)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \qquad (8.104c)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}, \qquad (8.104d)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \qquad (8.104e)$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n n!2^{2n}\sqrt{\pi}}{(2n)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \qquad (8.104f)$$

Hasonló jelölések érvényesek komplex argumentum esetén is, de z komplex számra csak $\operatorname{Re}(z) > 0$.

3. A faktoriális fogalmának általánosítása Az eddig csak pozitív egész számokra értelmezett *faktoriális* fogalmát (lásd 12. old.) az

$$x! = \Gamma(x+1) \qquad (8.105a)$$

függvény segítségével ki lehet terjeszteni tetszőleges valós számokra. Érvényesek a következő összefüggések:

Pozitív egész x számokra: $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$, (8.105b)

ha $x = 0$: $0! = \Gamma(1) = 1$, (8.105c)

ha x negatív egész szám: $x! = \pm\infty$, (8.105d)

ha $x = \frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (8.105e)

ha $x = -\frac{1}{2}$: $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, (8.105f)

ha $x = -\frac{3}{2}$:
$$\left(-\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}\,. \tag{8.105g}$$

Tetszés szerinti nagy számok (> 10) faktoriálisát, tört n számokét is, közelítő számítással a STIRLING-*formula* segítségével határozhatjuk meg:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \cdots\right), \tag{8.105h}$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}\,. \tag{8.105i}$$

A $\Gamma(x)$ és $\pi(x)$ függvények görbéit az **8.21. ábra** mutatja. A **21.8. táblázatban** a számértékek szerepelnek.

7. Elliptikus integrálok

A teljes elliptikus integrálokra (lásd 443. old.) a következő sorfejtések érvényesek:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right], \tag{8.106}$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right] \tag{8.107}$$

ahol $k^2 < 1$.

Az elliptikus integrálokra vonatkozó számadatokat az **21.7. táblázat** tartalmazza.

8.3. Vonalintegrál

Az integrálfogalom különböző irányyokban általánosítható. Amíg a közönséges határozott integrál integrációs tartománya a számegyenes egy részintervalluma, a vonalintegál, más néven (*görbementi integrál*) integrációs tartománya egy síkbeli vagy egy térgörbe egy darabja. Ez azt jelenti, hogy olyan összegek határértékét keressük, amelyeknek az összeadandói egy görbétől, az integrációs úttól függenek. Ha a görbe, azaz az integrációs út zárt, akkor a vonalintegrál neve *körintegrál*. Megkülönböztetünk 1. típusú, 2. típusú és általános vonalintegrált.

8.3.1. 1. típusú vonalintegrál

8.3.1.1. Definíciók

1. típusú vonalintegrál vagy *ívhosszúságon vett integrál*nak nevezzük az

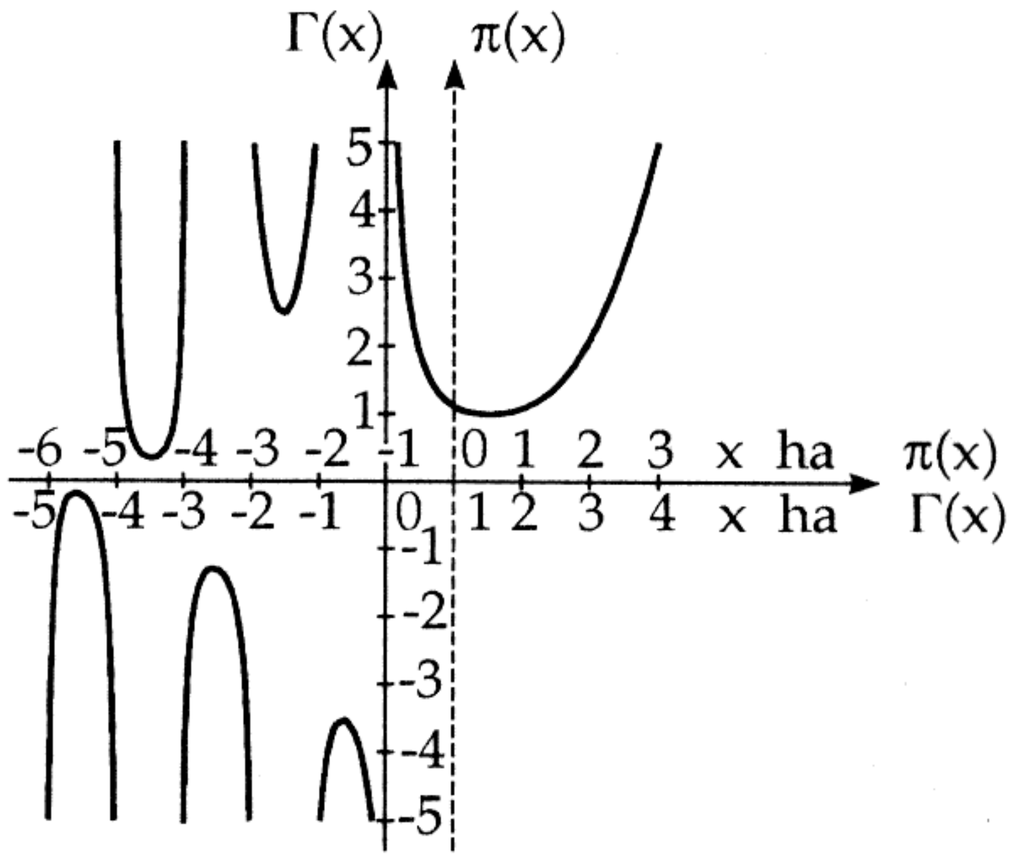
$$\int_{(K)} f(x,y)\,ds \tag{8.108}$$

határozott integrált, ahol $u = f(x,y)$ egy összefüggő tartományon értelmezett kétváltozós függvény.

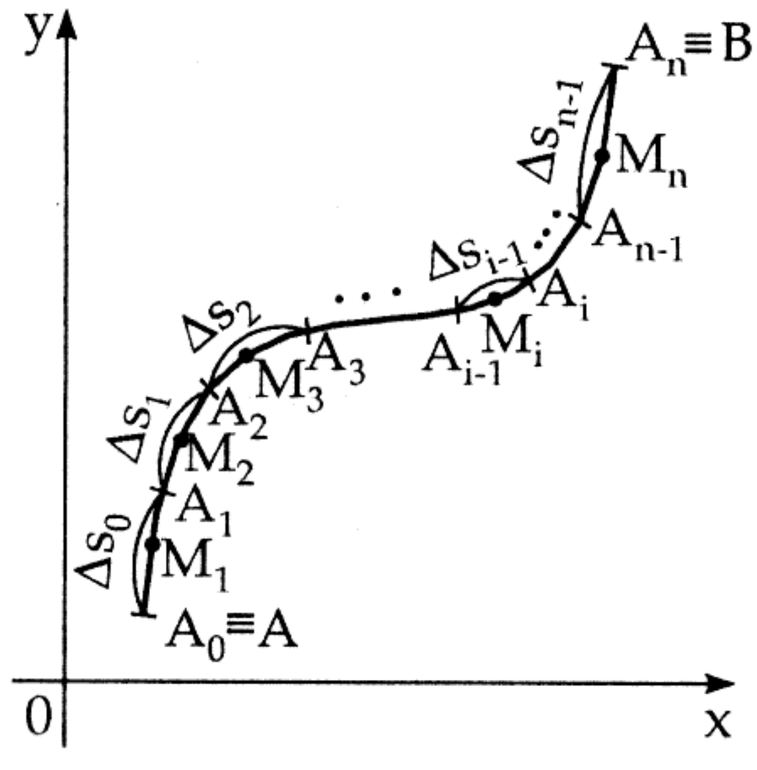
Az integrálást egy, az egyenletével megadott síkgörbe $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ ívén végezzük el. A kérdéses ívdarab ugyanabban a tartományban van és a neve *integrációs út*. Az 1. típusú vonalintegrál számértékét a következő módon határozzuk meg **(8.22. ábra)**:

1. Az $\overset{\frown}{AB}$ ívdarabot felosztjuk n darab elemi ívdarabkára tetszés szerint választott $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, pontokkal, kezdve az $A \equiv A_0$ kezdőponttal egészen az utolsó $B \equiv A_n$ pontig.

2. Mindegyik $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ elemi ív belsejében vagy a határán kiválasztunk egy tetszés szerinti M_i pontot, ennek koordinátái: ξ_i és η_i.



8.21. ábra.



8.22. ábra.

3. A választott pontban felvett $f(\xi_i, \eta_i)$ függvényértéket megszorozzuk a pozitívnak vett $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = \Delta s_{i-1}$ ívhosszúsággal.

4. Az így nyert n darab $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1}$ szorzatot összeadjuk.

5. Meghatározzuk az alábbi összeg határértékét:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1} \tag{8.109a}$$

arra az esetre, ha minden egyes Δs_{i-1} elemi ívdarab hossza nullához tart, és így n tart a ∞-hez.
Ha (8.109a) határértéke létezik és független az A_i és az M_i pontok megválasztásától, akkor a neve *1. típusú vonalintegrál* és a jelölése:

$$\int_{(K)} f(x,y)\,ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_{i-1}\,. \tag{8.109b}$$

Az $f(x,y)$ függvényről ilyenkor azt mondjuk, hogy a K görbe mentén integrálható.
Ugyanígy definiáljuk a háromváltozós $u = f(x,y,z)$ függvény 1. típusú vonalintegrálját, ha az integrációs út egy térgörbe ívdarabja:

$$\int_{(K)} f(x,y,z)\,ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_{i-1}\,. \tag{8.109c}$$

8.3.1.2. Egzisztenciatétel

A (8.109b) és a (8.109c) 1. típusú vonalintegrál létezik, ha az $f(x,y)$, ill. az $f(x,y,z)$ függvény a K ívszakasz mentén folytonos, és a görbének ott folytonosan változó érintője van. Másként fogalmazva: ebben az esetben a kérdéses határértékek léteznek és függetlenek az A_i és a M_i pont megválasztásától. Az $f(x,y,z)$ függvényről ilyenkor azt mondjuk, hogy a K görbe mentén integrálható.

8.3.1.3. 1. típusú vonalintegrálok kiszámítása

Az 1. típusú vonalintegrálok kiszámítása visszavezethető a határozott integrálok kiszámítására.

1. Az integrációs út egyenlete paraméteres alakban ismert
Ha egy síkbeli paraméteres út egyenletei $x = x(t)$ és $y = y(t)$, akkor:

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\,. \tag{8.110a}$$

Térbeli integrációs út esetén, ha $x = x(t)$, $y = y(t)$ és $z = z(t)$, akkor

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\,, \tag{8.110b}$$

ahol t_0 jelenti a t paraméter értékét az A pontban, és T jelenti a t paraméter értékét értékét a B pontban. Az A és a B pontokat úgy kell megválasztani, hogy a $t_0 < T$ feltétel teljesüljön.

2. Az integrációs út egyenlete explicit alakban ismert $t = x$ helyettesítéssel (8.110a) sík esetén:

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx\,, \tag{8.111a}$$

és (8.110b) térbeli esetben

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f[x,y(x),z(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2+[z'(x)]^2}\,dx\,, \tag{8.111b}$$

ahol a és b az A és B pontok abszcisszái. Itt is teljesülnie kell az $a < b$ feltételnek. Ezen kívül feltételezzük azt is, hogy az K ívszakasz vetítésekor minden pontnak az x-tengelyen pontosan egy pont felel meg, azaz egy abszcisszapont egyértelműen meghatározza a görbe egy pontját. Amennyiben ez nem teljesül, az ívdarabot több részintervallumra kell bontani úgy, hogy ezek mindegyike megfeleljen a fenti követelménynek. Az egész ívszakaszra vonatkozó vonalintegrál ekkor egyenlő lesz a részintervallumokra vonatkozó vonalintegrálok összegével.

8.3.1.4. Az 1. típusú vonalintegrál alkalmazása

A **8.7. táblázatban** találhatók a vonalintegrál kiszámításához szükséges ívelemek különböző koordináta-rendszerekben.

8.3.2. 2. típusú vonalintegrál

1. Definíciók

2. típusú vonalintegrál vagy *vetítéses integrál* (az x-, y- vagy z-tengelyre) az elnevezése az alábbi határozott integráloknak

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,dx \tag{8.112a}$$

vagy

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dx, \tag{8.112b}$$

ahol $f(x,y)$, ill. $f(x,y,z)$ egy összefüggő tartományon értelmezett két-, ill. háromváltozós függvény. Az integrálás az egyenletével adott sík- vagy térgörbe egy $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ szakaszának az x-, y- vagy z-tengelyre való vetületén történik. Az integrációs út ugyanabban a tartományban van. A 2. típusú vonalintegrált az 1. típusúhoz hasonlóan kapjuk, azzal a különbséggel, hogy a harmadik lépésnél az $f(\xi_i,\eta_i)$, ill. az $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ függvényértéket nem az elemi görbeszakasz hosszával $(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$-vel, hanem ennek az egyik koordinátatengelyre való vetületével szorozzuk. **(8.23. ábra**, lásd 476. old.).

8.6. táblázat. 1. típusú vonalintegrálok

A K görbedarab hossza	$L = \int\limits_{(K)} ds$
A K inhomogén görbedarab tömege	$M = \int\limits_{(K)} \varrho\, ds \quad (\varrho = f(x,y,z)$ sürűségfüggvény$)$
Súlypont-koordináták	$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(K)} x\varrho ds\,, \quad y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(K)} y\varrho ds\,, \quad z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(K)} z\varrho ds$
Síkgörbe tehetetlenségi nyomatéka az x, y tengelyekre vonatkozóan	$I_x = \int\limits_{(K)} x^2\varrho ds\,, \quad I_y = \int\limits_{(K)} y^2\varrho ds$
Térgörbe tehetetlenségi nyomatéka a koordináta-tengelyekre	$I_x = \int\limits_{(K)} (y^2+z^2)\varrho ds\,, \quad I_y = \int\limits_{(K)} (x^2+z^2)\varrho ds\,,$ $I_z = \int\limits_{(K)} (x^2+y^2)\varrho ds$
Homogén görbék esetén a fenti formulákba $\varrho = 1$ értéket kell helyettesíteni.	

8.7. táblázat. Ívelemek

Síkgörbe az x, y-síkban	$x, y = y(x)$ derékszögű koordináták	$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$
	Polárkoordináták $\varphi, \rho = \rho(\varphi)$	$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi$
	Paraméteres előállítás derékszögű koordinátákkal $x = x(t), y = y(t)$	$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$
Térgörbe	Parameteres előállítás derékszögű koordinátákkal $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$	$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$

1. Vetítés az x-tengelyre:

$$\mathrm{Pr}_x\, \overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1} \tag{8.113}$$

Így

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_{i-1}\,, \tag{8.114a}$$

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_{i-1}\,. \tag{8.114b}$$

2. Vetítés az y-tengelyre:

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_{i-1}\,, \tag{8.115a}$$

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta y_{i-1}\,. \tag{8.115b}$$

3. Vetítés a z-tengelyre:

$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dz = \lim_{\substack{\Delta z_{i-1}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta z_{i-1}\,. \tag{8.116}$$

2. Egzisztenciatétel

A (8.114a), (8.115a), (8.114b), (8.115b) és (8.116) 2. típusú vonalintegrál létezik, ha az $f(x,y)$, ill. $f(x,y,z)$, valamint a K ívdarab mentén a görbe folytonos, valamint folytonosak a görbe függvényének a deriváltjai is.

3. 2. típusú vonalintegrál kiszámítása

A 2. típusú vonalintegrál kiszámítása visszavezethető a határozott integrál kiszámítására.

1. Az integrációs út egyenletének paraméteres alakja ismert

Az integrációs út paraméteres egyenletei:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{és (a térgörbére)} \quad z = z(t) \tag{8.117}$$

Az alábbi formulák adódnak:

(8.114a) esetén:
$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t)]x'(t)\,dt\,. \tag{8.118a}$$

(8.115a) esetén:
$$\int\limits_{(K)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t)]y'(t)\,dt\,. \tag{8.118b}$$

(8.114b) esetén:
$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\,dt\,. \tag{8.118c}$$

(8.115b) esetén:
$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\,dt\,. \tag{8.118d}$$

(8.116) esetén:
$$\int\limits_{(K)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\,dt\,. \tag{8.118e}$$

Itt t_0, ill. T a t paraméter értékei az ívdarab A kezdőpontjában, ill. a B végpontjában. Itt az 1. típusú vonalintegrállal ellentétben nem áll fenn a $t_0 < T$ követelmény.

Megjegyzés: Az integrációs út megfordításakor, azaz az A és B pontok megcserélésekor az integrál előjelet vált.

2. Az integrációs út egyenlete explicit alakban adott
Az integrációs út egyenletei sík-, ill. térgörbe esetén:

$$y = y(x), \qquad \text{illetve} \qquad y = y(x)\,,\ z = z(x) \tag{8.119}$$

Az A és a B pont abszcisszái a és b. Itt az $a < b$ követelmény nem feltétlenül szükséges. A (8.114a) formulától a (8.116) formuláig mindenütt a t paraméter helyére az x abszcissza kerül.

8.3.3. Általános típusú vonalintegrálok

1. Definíció
Az általános típusú vonalintegrál jelenti egy görbeszakasz minden lehetséges 2. típusú vonalintegráljának az összegét. Ha az adott K görbeszakasz mentén két $P(x,y)$ és $Q(x,y)$ kétváltozós függvény vagy három $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ és $R(x,y,z)$ háromváltozós függvény van definiálva, és a megfelelő 2. típusú vonalintegrálok léteznek, akkor egy sík-, ill. térgörbére az alábbi formulák érvényesek:

1. Síkgörbe:

$$\int\limits_{(K)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{(K)} P\,dx + \int\limits_{(K)} Q\,dy\,. \tag{8.120a}$$

2. Térgörbe:

$$\int\limits_{(K)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int\limits_{(K)} P\,dx + \int\limits_{(K)} Q\,dy + \int\limits_{(K)} R\,dz\,. \tag{8.120b}$$

Az általános típusú vonalintegrál vektoros bemutatására, valamint egy alkalmazására a mechanikában a „Vektoranalízis és térelmélet" című fejezetben (lásd 682. old.) kerül sor.

2. Az általános típusú vonalintegrál tulajdonságai

1. Az integrációs út felosztása történhet egy C osztópont segítségével, amelyik illeszkedhet a görbére az $\widehat{AB}$ görbeszakaszon kívül is **(8.24. ábra)**. Ezzel az integrált két részintegrálra bontottuk:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\widehat{AC}} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{\widehat{CB}} (P\,dx + Q\,dy)\,.^* \tag{8.121}$$

2. Az integrációs út megfordítása az integrál előjelének megváltozásához vezet.

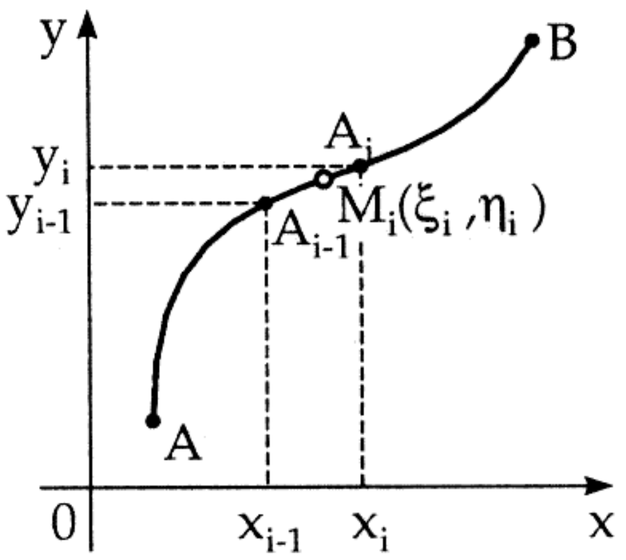
$$\int\limits_{\widehat{AB}} (P\,dx + Q\,dy) = -\int\limits_{\widehat{BA}} (P\,dx + Q\,dy)\,.^* \tag{8.122}$$

3. Az úttól való függőség Általában a vonalintegrál értéke ugyanúgy függ a kezdő- és végponttól is, mint az integrációs úttól **(8.25. ábra)**:

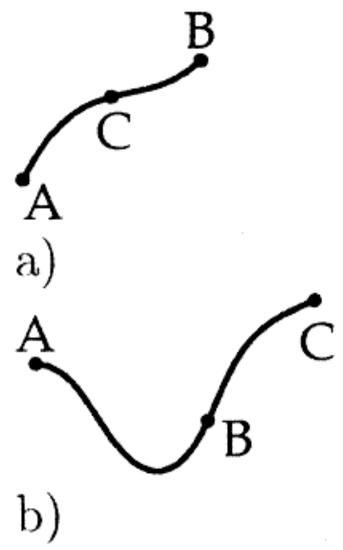
$$\int\limits_{\widehat{ACB}} (P\,dx + Q\,dy) \neq \int\limits_{\widehat{ADB}} (P\,dx + Q\,dy)\,.^* \tag{8.123}$$

■ **A:** $I = \int\limits_{(K)} (xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz)$, ahol K a csavarvonal egy menete, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (lásd 242. old.), t_0-tól T-ig $= 2\pi$: $I = \int\limits_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2 bt \sin t \cos t + ab^2 t \cos t)\,dt = -\dfrac{\pi a^2 b}{2}$.

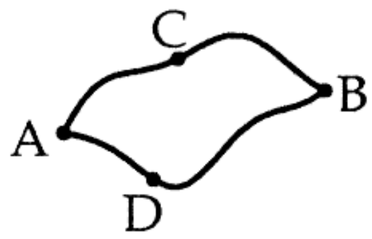
*Három változó esetén hasonló formulák érvényesek



8.23. ábra.



8.24. ábra.



8.25. ábra.

■ **B:** $I = \int\limits_{(K)} [y^2\,dx + (xy - x^2)\,dy]$, ahol K az $y^2 = 9x$ parabola íve az $A(0,0)$ és a $B(1,3)$ pontja között: $I = \int_0^3 \left[\frac{2}{9}y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81}\right)\right] dy = 6\frac{3}{20}$.

3. Körintegrál

1. A körintegrál fogalma A *körintegrál* egy K zárt integrációs úton számított vonalintegrál, itt az A kezdőpont és a B végpont egybeesik. Jelölése:

$$\oint\limits_{(K)} (P\,dx + Q\,dy) \qquad \text{vagy} \qquad \oint\limits_{(K)} (P\,dx + Q\,dy) + R\,dz. \tag{8.124}$$

Általában a körintegrál nullától különböző. Ennek ellenére lehet nulla is, ha a 477. oldalon jelzett feltétel teljesül, vagy ha az integrálás konzervatív mezőben történik (lásd 684. old.; A körintegrál eltűnése, 684. old.).

2. Egy síkbeli alakzat területének a kiszámítása tipikus példa a körintegrál alkalmazására az alábbi alakban:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(K)} (x\,dy - y\,dx)\,, \tag{8.125}$$

ahol K a síkbeli alakzat határgörbéje. Az integrációs utat pozitívnak tekintjük, ha az óramutató járásával ellentétes irányú.

8.3.4. A vonalintegrálnak az integrációs úttól való függetlensége

Azt a feltételt, hogy a vonalintegrál független legyen az integrációs úttól *a teljes differenciál integrálhatósága* néven is említik.

1. Kétdimenziós eset

$P(x,y)$ és $Q(x,y)$ egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett kétváltozós folytonos függvény. Ahhoz, hogy a

$$\int [P(x,y), dx + Q(x,y)\,dy] \tag{8.126}$$

vonalintegrál értéke csak az A kezdőponttól és B végponttól függjön, és ne az őket összekötő integrációs úttól, azaz tetszés szerinti A és B és tetszőleges ACB, ill. ADB **(8.25. ábra)** esetén

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\overset{\frown}{ADB}} (P\,dx + Q\,dy) \tag{8.127}$$

érvényben legyen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen egy olyan kétváltozós $U(x,y)$ függvény, amelynek teljes differenciálja a vonalintegrál integrandusa:

$$P\,dx + Q\,dy = d\,U\,, \qquad \text{(8.128a)} \qquad \text{azaz} \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}\,. \qquad \text{(8.128b)}$$

Az $U(x,y)$ függvény tehát a (8.128a) teljes differenciál primitív függvénye. A fizikában az $U(x,y)$ primitív függvényt mint egy vektormező potenciálját értelmezzük (lásd 685. old.).

2. A primitív függvény létezése

A *primitív függvény* létezésének, a $P\,dx + Q\,dy$ kifejezés *integrálhatóságának* szükséges és elégséges feltétele, hogy a parciális deriváltak egyenlők legyenek:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \qquad \text{(8.129)}$$

Ezektől meg kell kívánni azt is, hogy folytonosak legyenek.

3. Háromdimenziós eset

Annak a feltétele, hogy a

$$\int [P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz] \qquad \text{(8.130)}$$

vonalintegrál független legyen az integrációs úttól **(8.27. ábra)** hasonló, mint a kétdimenziós esetben: Szükség van egy $U(x,y,z)$ primitív függvény létezésére, amelyre fennáll:

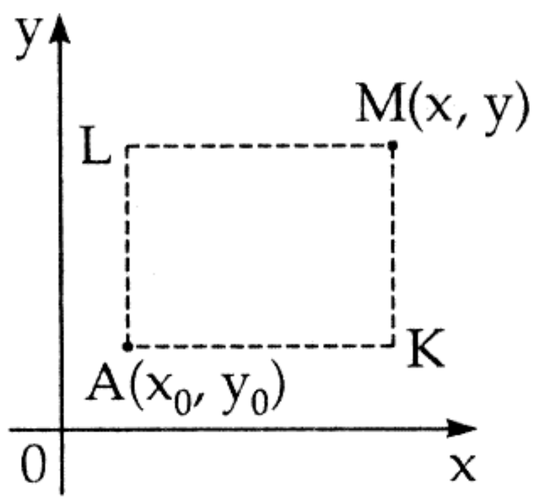
$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\,U\,, \qquad \text{(8.131a)}$$

és

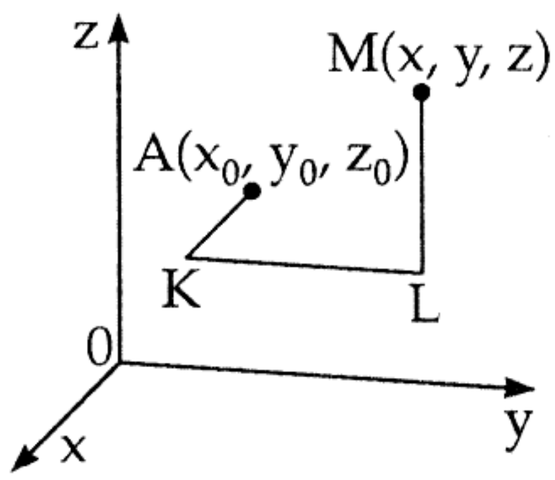
$$P = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}\,, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}\,. \qquad \text{(8.131b)}$$

Az integrálhatóság feltétele ebben az esetben három, egyidejűleg megoldandó egyenlet a parciális deriváltak között, melyeknek folytonosnak is kell lenniük:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{(8.131c)}$$



8.26. ábra.



8.27. ábra.

■ Definíció szerint a W munka (lásd 458. old.) az $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ erő és az $\vec{\mathbf{s}}$ út skaláris szorzata. Konzervatív mezőben a munka csak az $\vec{\mathbf{r}}$ elmozdulástól függ, és nem függ a $\vec{\mathbf{v}}$ sebességtől. Ha $\vec{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{e}}_x + Q\vec{\mathbf{e}}_y + R\vec{\mathbf{e}}_z = \mathrm{grad}V$ és $d\vec{\mathbf{s}} = dx\vec{\mathbf{e}}_x + dy\vec{\mathbf{e}}_y + dz\vec{\mathbf{e}}_z$, akkor ezzel a $V(\vec{\mathbf{r}})$ potenciálra teljesül (8.131a), (8.131b), és (8.131c) fennáll. Függetlenül a P_1 és P_2 közti úttól azt kapjuk, hogy:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{P_1}^{P_2} [P\,dx + Q\,dy + R\,dz] = V(P_2) - V(P_1)\,. \qquad \text{(8.132)}$$

4. A primitív függvény meghatározása

1. Kétdimenziós eset Amennyiben a (8.129) integrálhatósági feltétel teljesül, akkor a (8.129) érvényességi tartományán belül egy tetszés szerinti integrációs úton (amelyik egy tetszőlegesen rögzített $A(x_0, y_0)$ pontot a változó $M(x, y)$ ponttal összeköt **(8.26. ábra)**), az $U(x, y)$ primitív függvény egyenlő a vonalintegrállal:

$$U = \int_{\overset{\frown}{AM}} (P\,dx + Q\,dy)\,. \tag{8.133}$$

A gyakorlati számításoknál kényelmes, ha a koordinátatengelyekkel párhuzamos integrációs utat választunk, azaz az AKM vagy ALM utak egyikét, ha ez nem kerül a (8.129) érvényességi tartományán kívülre. Így az $U(x, y)$ primitív függvény és a $P\,dx + Q\,dy$ teljes differenciál kiszámításához két képlet van:

$$U = U(x_0, y_0) + \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KM}} = C + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta\,, \tag{8.134a}$$

$$U = U(x_0, y_0) + \int_{\overline{AL}} + \int_{\overline{LM}} = C + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi\,. \tag{8.134b}$$

2. Háromdimenziós eset (8.27. ábra) Amennyiben a (8.131c) feltétel teljesült, a primitív függvényt az $AKLM$ integrációs úton a

$$\begin{aligned} U &= U(x_0, y_0, z_0) + \int_{\overline{AK}} + \int_{\overline{KL}} + \int_{\overline{LM}} \\ &= \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x, y, \xi)\,d\xi + C \end{aligned} \tag{8.135}$$

formulával határozhatjuk meg. Olyan szakaszokra, amelyek a koordinátatengelyekkel párhuzamosak további öt lehetőség van az integrációs útra, ezekre további öt formula készíthető.

■ **A:** $P\,dx + Q\,dy = -\dfrac{y\,dx}{x^2+y^2} + \dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}$. A (8.131c) feltétel teljesül: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Alkalmazzuk a (8.134b) formulát és $x_0 = 0\,,\ y_0 = 1$ helyettesítést (az $x_0 = 0\,,\ y_0 = 0$ helyettesítést nem választhatjuk, mivel a P és Q függvények a $(0,0)$ pontban nem folytonosak), így azt kapjuk:

$$U = \int_1^y \frac{0\cdot d\eta}{0^2+\eta^2} + \int_0^x \frac{-y\,d\xi}{\xi^2+y^2} + U(0,1) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_1\,.$$

■ **B:** $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = z\left(\dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \dfrac{z}{xy^2}\,dy + \left(\dfrac{x}{x^2+z^2} - \dfrac{1}{xy}\right)dz$. A (8.131c) feltételek teljesülnek. A (8.135) aalkalmazása és $x_0 = 1\,,\ y_0 = 1\,,\ z_0 = 1$ helyettesítése után nyerjük:

$$U = \int_1^x 0\cdot d\xi + \int_1^y 0\cdot d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2+\zeta^2} - \frac{1}{xy}\right)d\zeta + C = \operatorname{arctg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C\,.$$

5. A körintegrál eltűnése

A körintegrál egy zárt görbe mentén, azaz az $P\,dx + Q\,dy$ vonalintegrálja nullával egyenlő, ha (8.129) teljesül, és ha a zárt görbén belül a P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ és $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ függvények minden pontban értelmezve vannak és folytonosak.

8.4. Többszörös integrálok

Az integrálfogalom a közönséges integrálhoz és a vonalintegrálhoz képest tovább bővíthető, ha az integrációs tartományt tovább növeljük. Ha az integrácciós tartomány egy sík felületdarab, akkor területi integrálról, ha egy térbeli felületdarab, akkor *felületi integrál*ról, amennyiben egy térrész, akkor *térfogati integrál*ról beszélünk. Ezen túl a különböző alkalmazási területeken különböző integrál-elnevezések használatosak.

8.4.1. Kettős integrál

8.4.1.1. A kettős integrál fogalma

1. Definíció

Az $u = f(x, y)$ kétváltozós függvénynek az S felületrészen vett kettős integráljának jelölése:

$$\int_S f(x, y)\, dS = \iint_S f(x, y)\, dy\, dx \tag{8.136}$$

Ez tulajdonképpen egy számérték, amit a következő módon határozhatunk meg **(8.28. ábra)**:

1. Az S felületrészt tetszés szerint felosztjuk n elemi kis felületrészre.

2. Minden elemi felületrész belsején vagy a határán választunk egy $M_i(x_i, y_i)$ pontot.

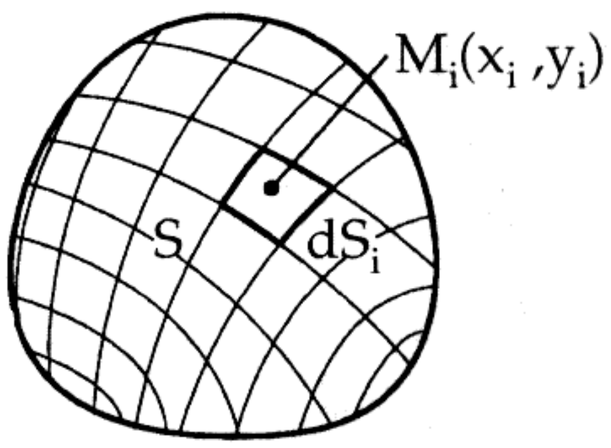
3. Az ezen a ponton felvett $u = f(x_i, y_i)$ függvényértéket megszorozzuk a megfelelő elemi területrész ΔS_i nagyságával.

4. Az így nyert szorzatokat összeadjuk. $f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

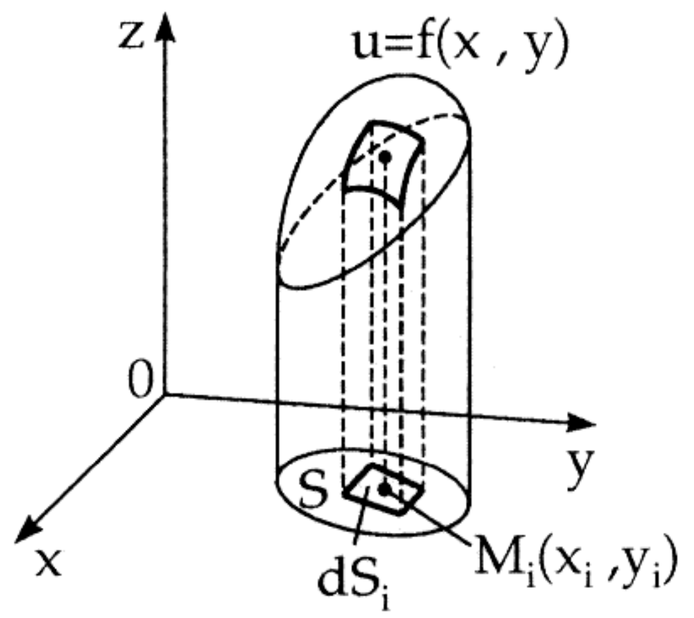
5. Meghatározzuk a

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \quad . \tag{8.137a}$$

összeg határértékét arra az esetre, amikor minden ΔS_i területrész nullához tart, és így a számuk (n) tart a végtelenhez. Közben arra is kell figyelni, hogy nem elegendő pusztán az a feltétel, hogy ΔS nullához tartson. Azt is rögzíteni kell, hogy az elemi területrész két, egymáshoz legtávolabbi pontjának távolsága, azaz *az elemi területrész átmérője* nullához tartson. Ugyanis egy téglalap területe akkor is nulla lehet, ha egyik oldala nulla, de az átmérője nem, így a választott pontok távol lehetnek egymástól.



8.28. ábra.



8.29. ábra.

Ha ez a határérték létezik és független az S területrésznek elemi területrészekre való felosztásától valamint az $M_i(x_i, y_i)$ pontok megválasztásától, akkor ez a határérték az $u = f(x, y)$ függvénynek az S területrészre, az integrációs tartományra, vonatkozó kettős integrálja:

$$\int_S f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S\,. \tag{8.137b}$$

2. Egzisztenciatétel

A (8.137b) kettős integrál létezik, ha az $f(x, y)$ függvény az egész integrációs tartományon, beleértve a határát is, folytonos. Ez a feltétel elégséges, de nem szükséges.

3. Geometriai jelentés

A kettős integrál geometriai jelentősége nemcsak az, hogy egy felület nagyságát lehet vele kiszámítani, hanem az is, hogy lehetővé teszi egy olyan test térfogatának a meghatározását, amelyet az x,y-síkban fekvő S területrész, egy hengerfelület, melynek alkotói a z-tengellyel párhuzamosak, és az $u = f(x, y)$ felület egy része határolnak **(8.29. ábra)**. A (8.137b) összeg minden egyes $f(x_i, y_i)\Delta S_i$ tagja egy olyan elemi hasábszerű test térfogatának felel meg, amelynek az alapterülete ΔS_i és a magassága $f(x_i, y_i)$. Az össztérfogat előjele pozitív, ill. negatív aszerint, hogy az $u = f(x, y)$ felületnek a kérdéses része az x , y-sík fölött vagy alatt helyezkedik-e el. Ha metszi a síkot, akkor a térfogat a résztérfogatok algebrai összege.

8.4.1.2. A kettős integrál kiszámítása

A kettős integrál kiszámítását két integrálnak egymás utáni kiszámítására vezetjük vissza, ezek az alkalmazott koordinátarendszer szerint különböző alakúak.

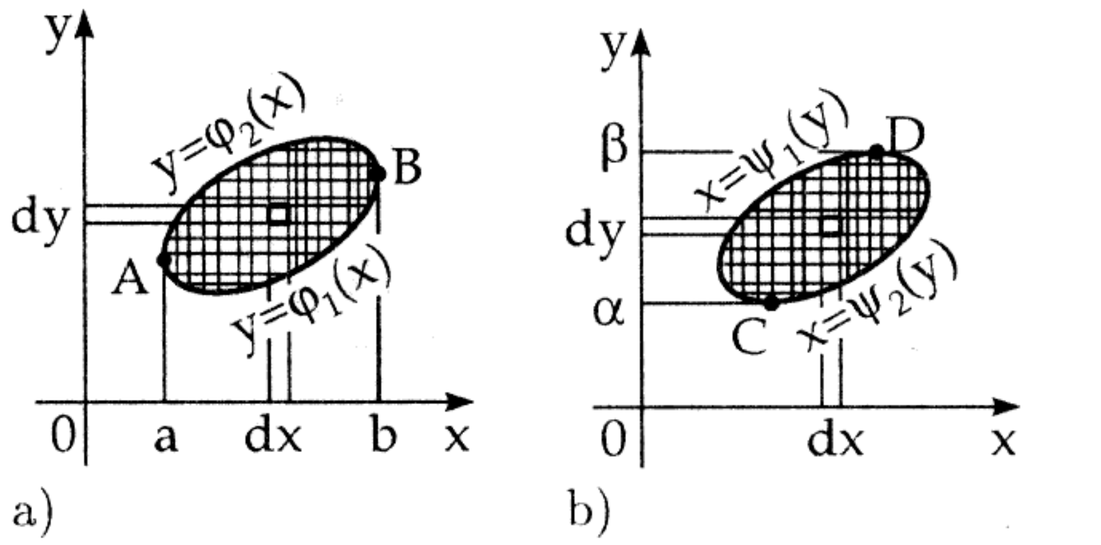
1. Számítás derékszögű koordinátákkal

Az integrációs tartományt, amit területrésznek fogunk fel, felosztunk a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű infinitezimális téglalapokra **(8.30.a ábra)**. Ezután következik az összes $f(x, y)dS$ differenciál összegezése kezdve minden téglalapnál, minden függőleges egyenes mentén, azután minden vízszintes csík mentén. Az analitikai alak a következő (ez a FUBINI-tétel legegyszerűbb esete):

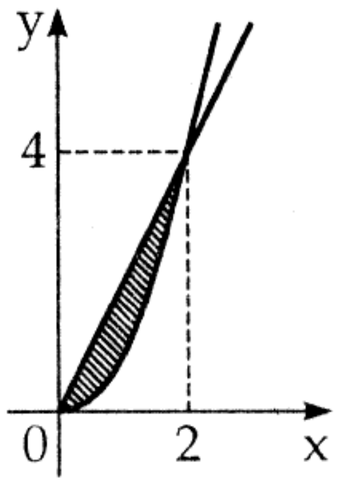
$$\int_S f(x,y)\,dS = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx\,. \tag{8.138a}$$

Itt $y = \varphi_2(x)$ és $y = \varphi_1(x)$ az S területdarabot felül és alul határoló $(\overset{\frown}{AB})_{\text{felül}}$ és $(\overset{\frown}{AB})_{\text{alul}}$ görbeíveknek az egyenlete. Az a, ill. b konstansok jelzik a balra, ill. jobbra legtávolabb lévő pontok abszcisszáját. A területelem derékszögű koordináták esetén:

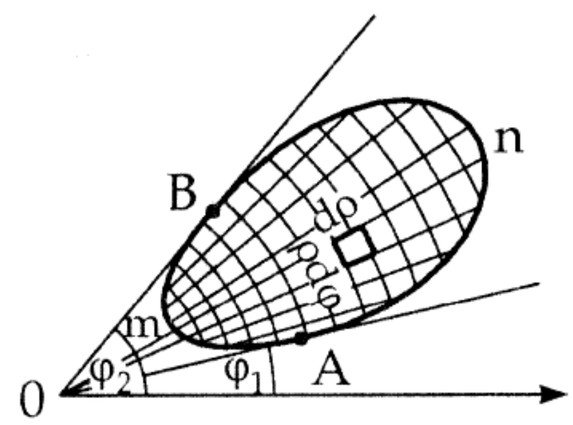
$$dS = dx\,dy\,. \tag{8.138b}$$



8.30. ábra.



8.31. ábra.



8.32. ábra.

Az első integráláskor x konstansnak tekintendő. A (8.138a) alakban lévő szögletes zárójeleket rendszerint elhagyjuk. Megállapodás szerint a belső integrált a belső integrációs változóhoz rendeljük, a külsőt a második helyen álló integrációs változóhoz. (8.138a)-ben a dx és dy differenciáljelek az integrandus végén állnak. Hasonlóképpen szokás ezeket a jeleket közvetlenül az integráljel mögé, a függvény elé helyezni.

Derékszögű koordinátákkal a számítást fordított sorrendben is elvégezhetjük **(8.30.b ábra)**:

$$\int_S f(x,y)\,dS = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{8.138c}$$

■ $A = \int_S xy^2\,dS$, ahol S az $y = x^2$ parabola és az $y = 2x$ egyenes közti terület **(8.31. ábra)** $A = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2\,dy\,dx = \int_0^2 x\,dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} = \frac{1}{3}\int_0^2 (8x^4 - x^7)\,dx = \frac{32}{5}$ vagy

$$A = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\,dy = \int_0^2 y^2\,dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2\left(y - \frac{y^2}{4}\right)\,dy = \frac{32}{5}\,.$$

2. Számítás polárkoordinátákkal

Az integrációs tartományt, a területet koordinátavonalakkal infinitezimális területrészekre osztjuk fel, ezeket mindenkor két koncentrikus körív és két, a póluson áthaladó egyenes határolja **(8.32. ábra)**. Az integrandus polárkoordinátákkal kifejezve: $w = f(\rho, \varphi)$, a *területelem polárkoordinátás alakja*:

$$\rho\,d\rho\,d\varphi = dS\,. \tag{8.139a}$$

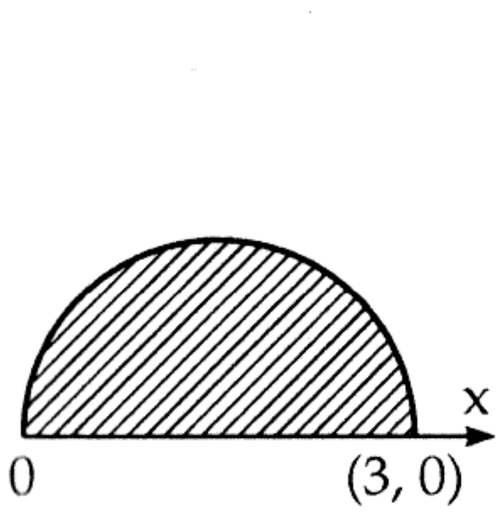
Összegezzünk először minden körszektor belsejében, azután minden szektoron:

$$\int_S f(\rho,\varphi)\,dS = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{8.139b}$$

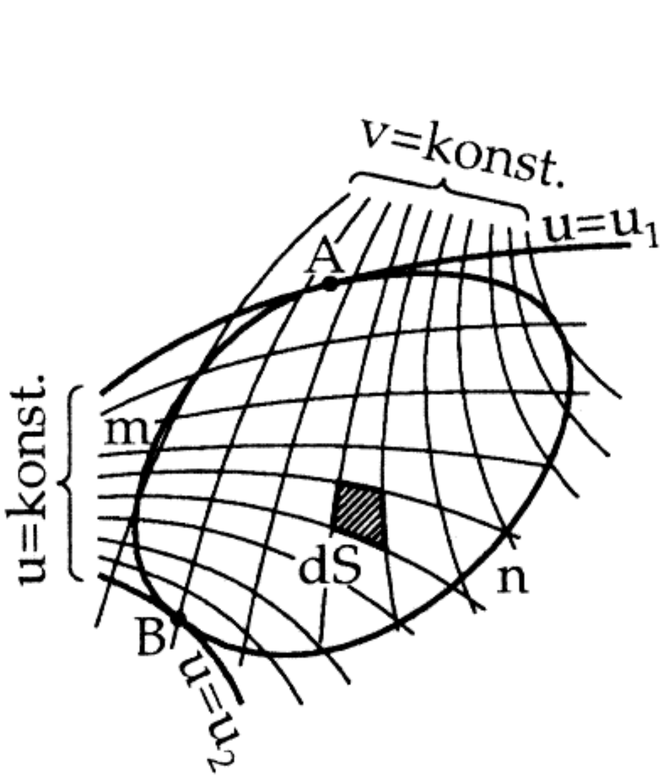
ahol $\rho = \rho_1(\varphi)$ és $\rho = \rho_2(\varphi)$ az S terület belső, ill. külső (AmB), ill. (AnB) görbeívének egyenlete és φ_1, ill. φ_2 azoknak az érintőknek a polárszögei, amelyek a területrészt a szélein érintik. A fordított integrációs sorrendet ritkán használják.

■ $A = \int_S \rho \sin^2\varphi\,dS$, ahol S a félkör területe, $\rho = 3\cos\varphi$ **(8.33. ábra)**:

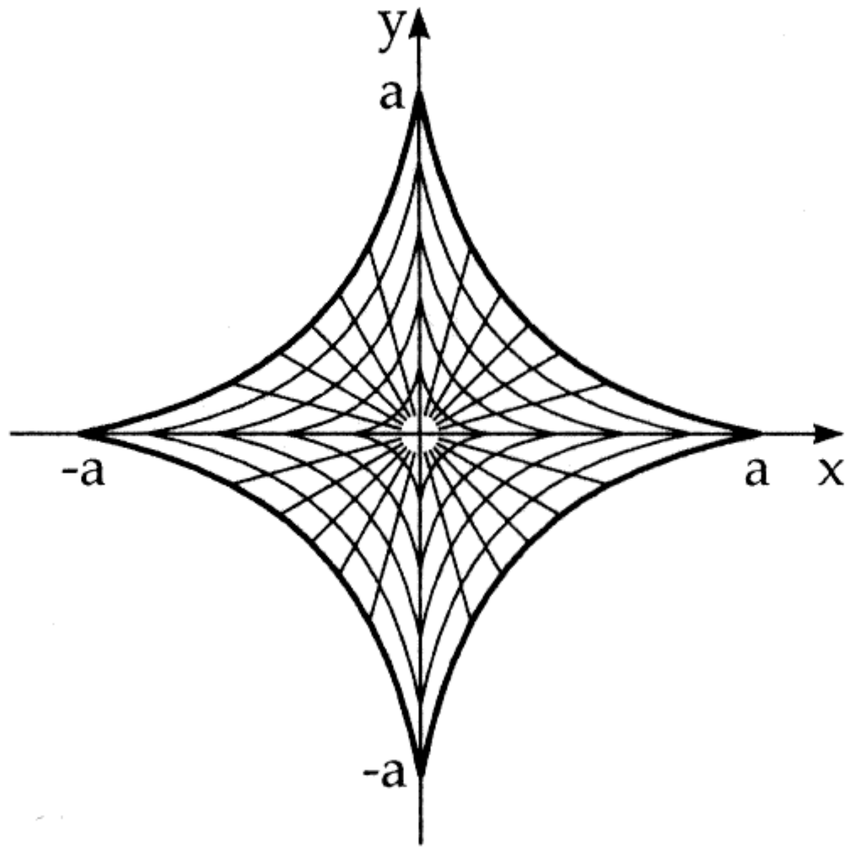
$$A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi \cdot d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\,d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{3\cos\varphi} = 9\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{6}{5}\,.$$



8.33. ábra.



8.34. ábra.



8.35. ábra.

3. Számítás tetszőleges u és v görbevonalú koordinátákkal

A koordinátákat az

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v) \tag{8.140}$$

összefüggések határozzák meg (lásd 244. old.). A területrészt az $u =$ konst. és $v =$ konst koordinátaegyenesekkel infinitezimális elemi területrészekre osztjuk **(8.34. ábra)** és az integrandust u és v-vel fejezzük ki. Először egy koordinátacsík mentén összegezünk, pl. a $v =$ const mentén, majd minden csíkra:

$$\int\limits_S f(u,v)\,dS = \int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u,v)|D|\,dv\,du\,. \tag{8.141}$$

Itt $v = v_1(u)$, ill. $v = v_2(u)$ az S terület belső, ill. külső $\overset{\frown}{AmB}$ és $\overset{\frown}{AnB}$ határoló íveinek az egyenletei. u_1 és u_2 határozzák meg az S terület két külső határvonalának koordinátáit. $|D|$-vel jelöljük a *függvénydeterminánsabszolút értékét*

$$D = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\,. \tag{8.142a}$$

Így görbevonalú koordinátákkal fel tudjuk írni a felületelem területét:

$$|D|\,dv\,du = dS\,. \tag{8.142b}$$

A (8.139b)formula speciális esete a (8.141) formulának, polárkoordinátákra: $x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,.$ A függvénydeterminánsitt $D = \rho\,.$

A görbevonalú koordinátákat úgy választjuk, hogy a (8.141) integrál értékét egyszerűen lehessen meghatározni.

■ **A:** Az $A = \int\limits_S f(x,y)\,dS$ integrált arra az esetre kell meghatározni, amikor S az asztrois felszíne (lásd 106. old.), ahol $x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t$ **(8.35. ábra)**. Először bevezetjük az $x = u\cos^3 v\,, y = u\sin^3 v$ görbevonalú koordinátákat, ezeknek $u = c_1$ koordinátavonalai az $x = c_1\cos^3 t$ és $y = c_1\sin^3 t$ egyenletű hasonló asztroisok egész seregét állítják elő. A $v = c_2$ koordinátavonalak $y = kx$ egyenletű sugarak, ahol $k = \mathrm{tg}^3 c_2$. Így azt kapjuk, hogy:

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u\cos^2 v\sin v \\ \sin^3 v & 3u\sin^2 v\cos v \end{vmatrix} = 3u\sin^2 v\cos^2 v,\ A = \int_0^a\int_0^{2\pi} f(x(u,v),y(u,v))\cdot 3u\sin^2 v\cos^2 v\,dv\,du\,.$$

■ **B:** Valós improprius integrálok kiszámítására is felhasználhatjuk a területi integrálást.

$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = ?$ Legyen $I(R) = \int_0^R e^{-x^2}\,dx$, ekkor $I = \lim_{R\to\infty} I(R)$, mert az improprius integrál létezik (és véges); $e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^2}$, (ha $x > x_0$) és $\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x^2}\,dx < \dfrac{1}{n^2}$ és végül $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ véges (ld. (8.86b)).

Először foglalkozzunk $I^2(R)$-rel:

$$I^2(R) = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right) = \iint\limits_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Most alkalmazzuk a polárkoordinátás integráltranszformációt: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ekkor $D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = |r| = r$, tehát az új integrandus re^{-r^2} lesz. Az új integrációs tartomány az (r,φ)-síkon nem egyszerű, amit úgy hidalhatunk át, hogy felhasználjuk az integrandus pozitivitását, és azt, hogy valójában nem $I(R)$-t akarjuk kiszámolni, hanem csak a limeszét. Ezért alulról és felülről is becsülni fogjuk úgy, hogy mindkét becslés $R\to\infty$ esetén ugyanoda tartson (rendőrelv). A becsléshez

egyrészt tekintjük az első síknegyedbe eső, R sugarú negyedkörlapot, amelyik része $I(R)$ integrációs tartományának, tehát az első síknegyedbeli, 0-ra támaszkodó R oldalú négyzetnek; másrészt tekintjük a (például) $2R$ sugarú negyedkörlapot, amelyik nála bővebb.
Ezeken integrálva:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{R} re^{-r^2}\,dr\,d\varphi < I^2(R) < \int_0^{\pi/2}\int_0^{2R} re^{-r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Felhasználva

$$\iint\limits_{[0,M]\times[0,N]} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_0^M f(x)\,dx\right)\left(\int_0^N g(y)\,dy\right)\text{-t}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{R} re^{-r^2}\,dr < I^2(R) < \frac{\pi}{2}\int_0^{2R} re^{-r^2}\,dr.$$

$$\int re^{-r^2}\,dr = -\frac{e^{-r^2}}{2}$$

miatt

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{R} < I^2(R) < \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{2R},$$

azaz

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < I^2(R) < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-4R^2}\right)$$

amiből $R\to\infty$-re

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \le I = \lim_{R\to\infty} I(R) \le \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

azaz

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

adódik.

8.4.1.3. Kettős integrálok alkalmazása

Ketttős integrálok néhány alkalmazása a **8.8. táblázatban** található.

A szükséges területelemeket derékszögű és polárkoordinátákkal a **8.9. táblázat** tartalmazza.

8.4.2. Hármas integrál

A *hármas integrál* az integrálfogalomnak egy háromdimenziós integrációs tartományra való kiterjesztése. Mondják *térfogati integrál*nak is.

8.4.2.1. A hármas integrál fogalma

1. Definíció

A háromvátozós $f(x,y,z)$ függvénynek egy háromdimenzós tartományon, pl. egy V térrészen vett hármas integrálját hasonlóképpen definiáljuk, mint a kétváltozós függvény kettős integrálját. Jelölése:

$$\int\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,. \tag{8.143}$$

A V térfogatot **(8.36. ábra)** elemi térfogatrészekre, térfogatelemekre bontjuk, ezekkel az $f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ szorzatokat képezzük. Az $M_i(x_i,y_i,z_i)$ pont egy elemi térfogatrész belsejében vagy a határán lehet. A hármas integrál az összes ilyen szorzat összegének a határértéke akkor, ha minden

8.8. táblázat. Kettős integrálok alkalmazása

Általános alak	**Derékszögű koordináták**	**Polárkoordináták**
1. Síkidom területe:		
$S = \int\limits_S dS$	$= \iint dydx$	$= \iint \rho\, d\rho d\varphi$
2. Felszín:		
$S_O = \int\limits_S \frac{dS}{\cos\gamma}$	$= \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dydx$	$= \iint \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\rho d\varphi$
3. Henger térfogata:		
$V = \int\limits_S z\, dS$	$= \iint z\, dydx$	$= \iint z\rho\, d\rho d\varphi$
4. Síkidom tehetetlenségi nyomatéka, x-tengelyre:		
$I_x = \int\limits_S y^2\, dS$	$= \iint y^2\, dydx$	$= \iint \rho^3 \sin^2\varphi\, d\rho d\varphi$
5. Síkidom tehetetlenségi nyomatéka, origóra:		
$I_0 = \int\limits_S \rho^2\, dS$	$= \iint (x^2 + y^2)\, dydx$	$= \iint \rho^3\, d\rho d\varphi$
6. Síkidom tömege, ϱ sűrűségfüggvénnyel:		
$M = \int\limits_S \varrho\, dS$	$= \iint \varrho\, dydx$	$= \iint \varrho\rho\, d\rho d\varphi$
7. Homogén síkidom súlypontjának koordinátái		
$x_C = \frac{\int\limits_S x\, dS}{S}$	$= \frac{\iint x\, dydx}{\iint dydx}$	$= \frac{\iint \rho^2 \cos\varphi\, d\rho d\varphi}{\iint \rho\, d\rho d\varphi}$
$y_C = \frac{\int\limits_S y\, dS}{S}$	$= \frac{\iint y\, dydx}{\iint dydx}$	$= \frac{\iint \rho^2 \sin\varphi\, d\rho d\varphi}{\iint \rho\, d\rho d\varphi}$

8.9. táblázat. Sík területelemek

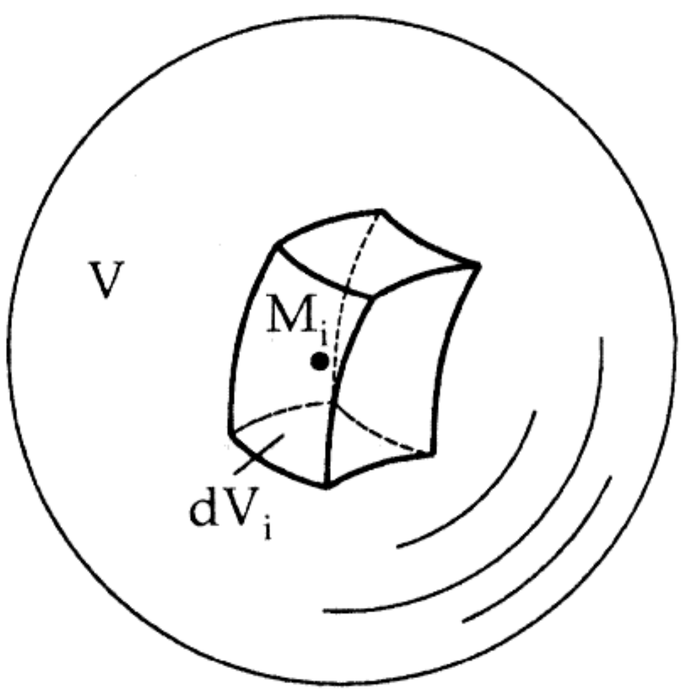
Koordináták	**Területelemek**
Derékszögű koordináták x, y	$dS = dx\,dy$
Polárkoordináták $\rho\,, \varphi$	$dS = \rho\,d\rho\,d\varphi$
Tetszőleges görbevonalú koordináták u, v	$dS = \lvert D\rvert\,du\,dv$ (D: függvénydeterminánsa)

elemi rész térfogata nullához tart, és így számuk a ∞-hez. Itt is, mint a kettős integrálnál, ügyelni kell arra, hogy az elemi térfogatrész átmérője nullához tartson, nemcsak az egyik kiterjedése.

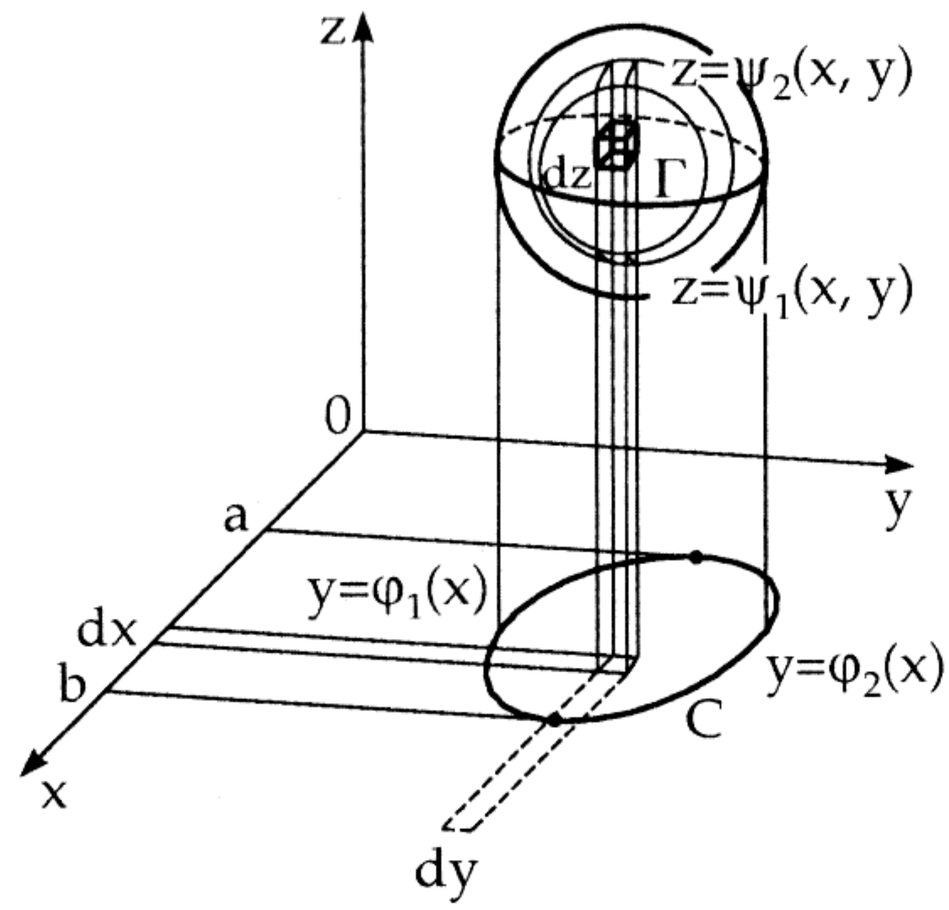
$$\int\limits_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{\substack{\Delta V_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i\,. \tag{8.144}$$

2. Egzisztenciatétel

A hármas integrálra vonatkozó egzisztenciatétel pontosan ugyanaz, mint a kettős integrálra vonatkozó.



8.36. ábra.



8.37. ábra.

8.4.2.2. A hármas integrál kiszámítása

A hármas integrál kiszámítása visszavezethető három, egymás utáni integrál kiszámítására, ezek az alkalmazott koordinátarendszer szerint különbözőnek látszanak.

1. Számítás derékszögű koordinátákkal

Az integrációs tartományt, amit itt mint V térfogatot foghatunk fel, koordinátafelületekkel, ezek ebben az esetben síkok, infinitezimális paralelepipedonokra osztjuk fel **(8.37. ábra)**. Itt ugyanúgy, mint a kettős integrálnál ügyelnünk kell arra, hogy a határátmenetnél az elemi rekeszek átmérője nullához tartson. A felosztás után következik az összes $f(x,y,z)\,dV$ szorzat összeadása, kezdve minden paralelepipedonnál egy függőleges oszlop mentén, azaz az összegezést z-re végezve. Ezután folytatjuk az

összegezést minden függőleges réteg szerint y-ra, és végül x-re. Az analitikus megfogalmazás:

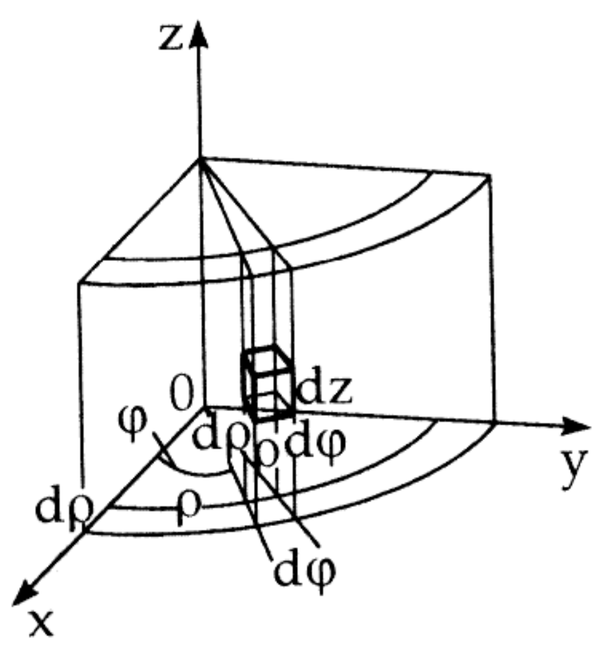
$$\int\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,. \quad (8.145a)$$

Itt $z=\psi_1(x,y)$ és $z=\psi_2(x,y)$ a V térfogat alsó és felső felületeinek egyenletei a C görbétől kiindulva. (A C görbe a V térfogat x,y-síkra való vetületének a határvonala **(8.37. ábra)**.) Derékszögű koordinátákkal a **térfogatelem:** $dx\,dy\,dz$. Az $y=\varphi_1(x)$ és $y=\varphi_2(x)$ függvények a C görbe alsó és fölső ívének egyenletei az $x=a$ és $x=b$ határpontokkal. Az integrációs tartományra vonatkozóan az alábbi követelmények állnak fenn: az $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ függvények az $a\le x\le b$ intervallumon legyenek értelmezve, legyenek folytonosak, és tegyenek eleget a $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ egyenlőtlenségnek. A $\psi_1(x,y)$ és $\psi_2(x,y)$ függvények legyenek a $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$ tartományon értelmezve, legyenek itt folytonosak és tegyenek eleget a $\psi_1(x,y)\le\psi_2(x,y)$ egyenlőtlenségnek. Így minden olyan (x,y,z) pont benne van V-ben, amelyik az alábbi feltételeknek eleget tesz:

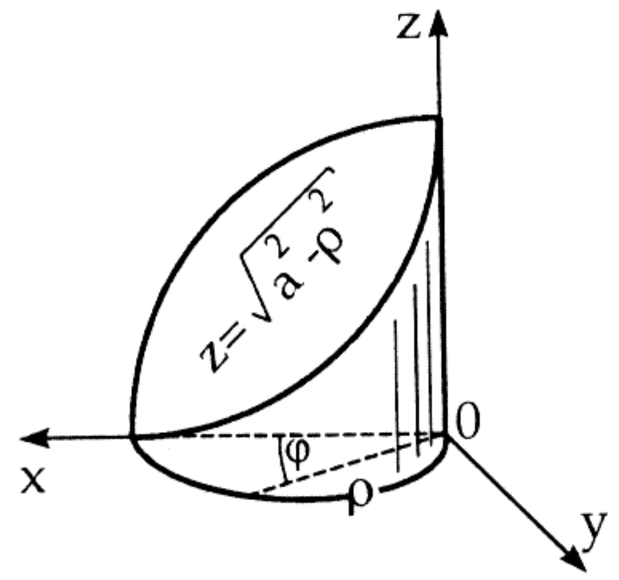
$$a\le x\le b,\qquad \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\,,\qquad \psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y) \quad (8.145b)$$

■ Határozzuk meg az $I=\int\limits_V (y^2+z^2)\,dV$ integrál értékét olyan gúlára, amelyet a koordinátasíkok és az $x+y+z=1$ sík határolnak:

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}(y^2+z^2)\,dz\right]dy\right\}dx=\frac{1}{30}\,.$$



8.38. ábra.



8.39. ábra.

2. Számítás hengerkoordinátákkal

Az integrációs taromány a $\rho=$ konst., $\varphi=$ konst., $z=$ konst. koordináta-felületekkel infinitezimalis elemi részekre bontjuk **(8.38. ábra)**. A *térfogatelem hengerkoordinátákban*:

$$dV=\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi\,. \quad (8.146a)$$

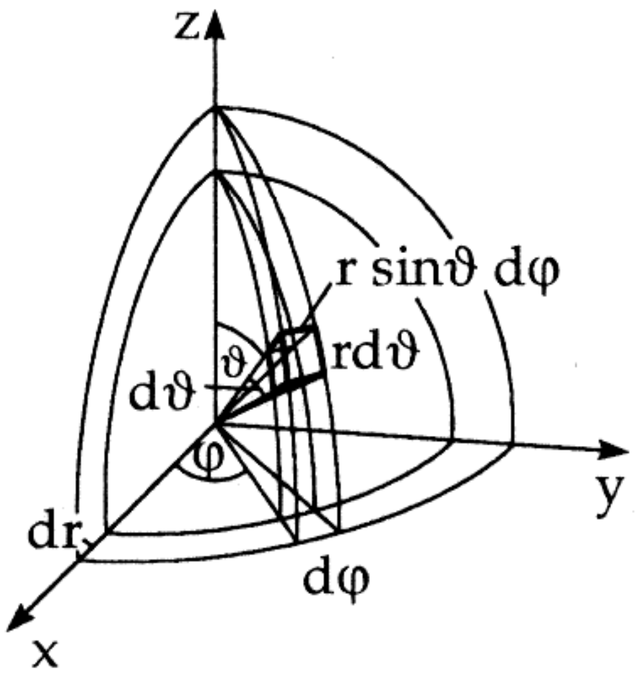
Az $f(\rho,\varphi,z)$ integrandus kijelölése után az integrál a következő alakú:

$$\int\limits_V f(\rho,\varphi,z)\,dV=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi\,. \quad (8.146b)$$

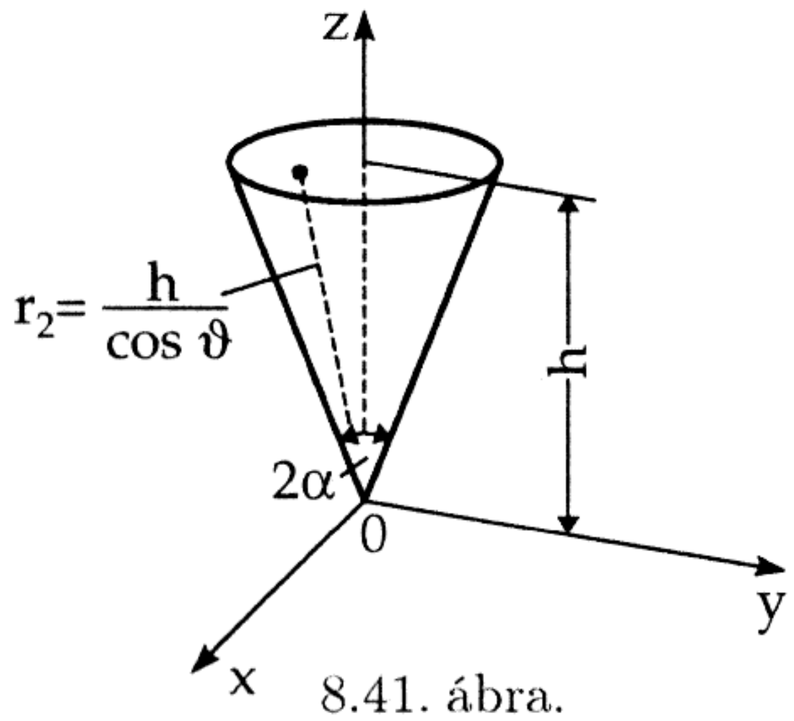
■ Számítsuk ki az $I=\int\limits_V dV$ integrált olyan testre **(8.39. ábra)**, melynek térfogatát az x,y-sík, az x,z-sík, az $x^2+y^2=ax$ henger és az $x^2+y^2+z^2=a^2$ gömb határolnak: $z_1=0$, $z_2=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=$

$= \sqrt{a^2-\rho^2}$; $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = a\cos\varphi$; $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. $I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi}\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi =$

$= \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{a\cos\varphi}\left[\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} dz\right]\rho\,d\rho\right\}d\varphi = \frac{a^3}{18}(3\pi-4)$. Mivel $f(\rho,\varphi,z)=1$, az integrál egyenlő a test térfogatával.



8.40. ábra.



8.41. ábra.

3. Számítás gömbkoordinátákkal

Az integrációs tartományt az r = konst., φ = konst., ϑ = konst. koordinátafelületekkel infinitezimális elemi rekeszekre osztjuk **(8.40. ábra)**. A *térfogatelem gömbkoordinátákban*:

$$dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,. \tag{8.147a}$$

Miután az $f(r,\varphi,\vartheta)$ integrandust gömbkoordinátákban felírtuk, felírhatjuk az integrált:

$$\int_V f(r,\varphi,\vartheta)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\vartheta_1(\varphi)}^{\vartheta_2(\varphi)}\int_{r_1(\vartheta,\varphi)}^{r_2(\vartheta,\varphi)} f(r,\varphi,\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,\varphi\,. \tag{8.147b}$$

■ Számítsuk ki az $I = \int_V \frac{\cos\vartheta}{r^2}\,dV$ integrált olyan kúpra, amelynek a csúcsa a koordinátarendszer origójában van és amelyiknek a z-tengely a szimmetria-tengelye. A csúcsszög 2α, a kúp magassága h **(8.41. ábra)**. Továbbá: $r_1 = 0, r_2 = \frac{h}{\cos\vartheta}$; $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \alpha$; $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$.

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{h\cos\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}\cos\vartheta\sin\vartheta\left[\int_0^{h\cos\vartheta} dr\right]d\vartheta\right\}d\varphi = 2\pi h(1-\cos\alpha)$.

4. Számítás tetszőleges u, v, w görbevonalú koordinátákkal

A koordinátákat az alábbi összefüggések határozzák meg:

$$x = x(u,v,w)\,, \qquad y = y(u,v,w)\,, \qquad z = z(u,v,w) \tag{8.148}$$

(lásd 244. old.). Az integrációs tartományt az u = konst., v = konst., w = konst. koordinátafelületekkel infinitezimális, *tetszőleges koordinátákkal adott térfogatelemek*re osztjuk fel:

$$dV = |D|\,du\,dv\,dw, \qquad \text{ahol} \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \tag{8.149a}$$

Itt D a függvénydeterminánsa. Ha az integrandust az u, v, w koordinátákkal fejezzük ki, akkor az integrál a következő:

$$\int_V f(u,v,w)\,dV = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)}\int_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} f(u,v,w)\,|D|\,dw\,dv\,du\,. \tag{8.149b}$$

Megjegyzés: Az (8.146b) és a (8.147b) formula a (8.149b) formula speciális esete.
Hengerkoordinátákra $D = \rho$, gömbkoordinátákra $D = r^2 \sin\vartheta$.
Előszeretettel használnak olyan görbevonalú koordinátákat, melyekre az integrál (8.149b) értékének a kiszámítása lehetőleg egyszerű.

8.4.2.3. A hármas integrálok alkalmazása

A hármas integrálok néhány alkalmazását a **8.10. táblázat** foglalja össze.

A szükséges felületelemeket különböző koordinátákkal kifejezve a **8.9. táblázat** tartalmazza.

A számításhoz szükséges térfogatelemeket különböző koordinátákkal kifejezve a **8.11. táblázat** tartalmazza.

8.5. Felületi integrál

A három különböző vonalintegrálhoz hasonlóan (lásd 470. old.) megkülönböztetünk 1., 2. és általános típusú felületi integrált.

8.5.1. 1. típusú felületi integrál

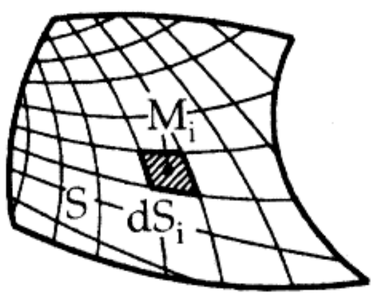
A *felületi integrál* vagy *egy térbeli felületrészen való integrál* a kettős integrál egy általánosítását adja, hasonlóan mint az 1. típusú vonalintegrál (lásd 470. old.) a közönséges határozott integrál egy általánosítása.

8.5.1.1. 1. típusú felületi integrál fogalma

1. Definíció
Egy összefüggő tartományon értelmezett, háromváltozós $u = f(x,y,z)$ függvény *1. típusú felületi integrál*ja az alábbi integrál

$$\int_S f(x,y,z)\,dS\,, \tag{8.150}$$

amit a fenti tartományon egy S felületrészen számítunk. Az 1. típusú felületi integrál számértéke a következő módon határozható meg: **(8.42. ábra)**:



8.42. ábra.

1. Az S felületrészt tetszőlegesen felosztjuk n elemi felületrészre.
2. Minden egyes elemi felületrész belsejében vagy a határán tetszés szerint kiválasztunk egy $M_i(x_i, y_i, z_i)$ pontot.
3. Az ezen a helyen felvett $f(x_i, y_i, z_i)$ függvényértéket megszorozzuk a megfelelő elemi felületrészhez tartozó ΔS_i-vel.
4. Adjuk össze az összes így nyert $f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$ szorzatot.
5. Számítsuk ki az

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i \tag{8.151a}$$

összeg határértékét arra az esetre, ha minden elemi ΔS_i felületrész nullához tart, így a számuk a végtelenhez tart. Itt ismét figyelni kell arra, hogy az elemi rész átmérője is nullához tartson, ne csak az

8.10. táblázat. Hármas integrálok alkalmazása

Általános alak	**Derékszögű koordináták**	**Hengerkoordináták**	**Gömbkoordináták**
1. Test térfogata			
$V = \int\limits_V dV =$	$\iiint dz dy dx$	$\iiint \rho\, dz d\rho d\varphi$	$\iiint r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$
2. Test tehetetlenségi nyomatéka z–tengelyre			
$I_z = \int\limits_V \rho^2\, V =$	$\iiint (x^2+y^2)\, dz dy dx$	$\iiint \rho^3\, dz d\rho d\varphi$	$\iiint r^4 \sin^3\vartheta dr d\vartheta d\varphi$
3. Test tömege, ϱ sűrűségfüggvénnyel			
$M = \int\limits_V \varrho\, dV =$	$\iiint \varrho\, dz dy dx$	$\iiint \varrho\rho\, dz d\rho d\varphi$	$\iiint \varrho r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$
4. Homogén test súlypontjának koordinátái			
$x_C = \dfrac{\int\limits_V x\, dV}{V} =$	$\dfrac{\iiint x\, dz\, dy\, dx}{\iiint dz\, dy\, dx}$	$\dfrac{\iiint \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\iiint \rho d\rho\, d\varphi\, dz}$	$\dfrac{\iiint r^3 \rho \sin^2\vartheta \cos\varphi\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}{\iiint r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi}$
$y_C = \dfrac{\int\limits_V y\, dV}{V} =$	$\dfrac{\iiint y\, dz dy dx}{\iiint dz dy dx}$	$\dfrac{\iiint \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\iiint \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$	$\dfrac{\iiint r^3 \sin^2\vartheta \sin\varphi\, dr\, d\vartheta d\varphi}{\iiint r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi}$
$z_C = \dfrac{\int\limits_V z\, dV}{V} =$	$\dfrac{\iiint z\, dz dy dx}{\iiint dz dy dx}$	$\dfrac{\iiint \rho z\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\iiint \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$	$\dfrac{\iiint r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}{\iiint r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi}$

8.11. táblázat. Térfogatelemek

Koordináták	**Térfogatelemek**
Derékszögű koordináták x, y, z	$dV = dx\, dy\, dz$
Hengerkoordináták $\rho\,, \varphi\,, z$	$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$
Gömbkoordináták $r\,, \vartheta\,, \varphi$	$dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$
Tetszőleges görbevonalú koordináták u, v, w	$dV = \lvert D\rvert\, du\, dv\, dw$ (D: függvénydeterminánsa)

egyik kiterjedése. Ha ez a határérték létezik és független az S felületrész elemi részekre való felosztásától éppen úgy, mint az $M_i(x_i, y_i, z_i)$ pontok megválasztásától, akkor ezt a határértéket nevezzük az $u = f(x, y, z)$ függvény S felületrészen vett 1. típusú felületi integráljának. Ezt így írjuk:

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i\,. \tag{8.151b}$$

2. Egzisztenciatétel

Az 1. típusú felületi integrál létezik, ha az $f(x, y, z)$ függvény a vizsgált tartományon folytonos és azoknak a függvényeknek, amelyek a felületek egyenleteinél szerepelnek, a deriváltjai is folytonosak ezen a tartományon.

8.5.1.2. Az 1. típusú felületi integrál kiszámítása

Az 1. típusú felületi integrál kiszámítását visszavezethetjük a kettős integrálnak egy sík tartományon való kiszámítására (lásd 479. old.).

1. A felületet explicit függvény írja le Amennyiben az S felületet az

$$z = z(x, y) \tag{8.152}$$

explicit függvény jellemzi, úgy

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S'} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy\,, \tag{8.153a}$$

ahol S' az S vetülete az x,y-síkra és p és q parciális deriváltak $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Itt feltételeztük azt, hogy az S felület minden pontjának az x,y-síkon kölcsönösen egyértelműen felel meg az ő vetületi pontja, az S' pont. Ez azt jelenti, hogy a felületi pontot a koordinátái egyértelműen meghatározzák. Ha ez nem így van, akkor az S felületrészt felosztjuk néhány kisebb felületrészre úgy, hogy ez a feltétel mindegyiknél teljesüljön. Az egész S területrészen számított integrál ekkor a felosztással keletkezett részeken vett integrálok algebrai összege. A (8.153a) egyenletet más alakban is felírhatjuk:

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\frac{d\,S_{xy}}{\cos\gamma} \tag{8.153b}$$

Ugyanis a (8.152) felületi normálisának az egyenlete $\dfrac{X-x}{p} = \dfrac{Y-y}{q} = \dfrac{Z-z}{-1}$ (lásd 245. old.). Így a normális iránya és a z-tengely által bezárt szögre fennáll: $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Az 1. típusú felületi integrál számításakor ezt a γ szöget mindig hegyesszögnek vesszük, így mindig: $\cos\gamma > 0$.

2. A felület paraméteres előállítása ismert Amennyiben az S implicite (burkolt alakban) az

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v) \tag{8.154a}$$

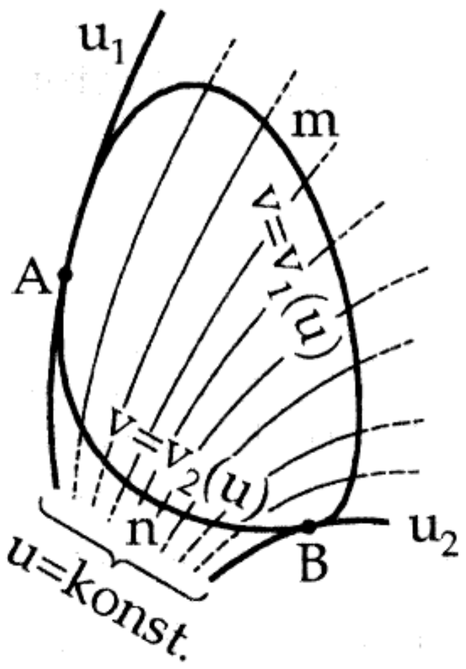
egyenletek által paraméteres alakban adott **(8.43. ábra)**, akkor

$$\int_S f(x,y,z)\,dS$$

$$= \iint_\Delta f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{8.154b}$$

ahol az E, F és G függvények meghatározása a 246. oldalon található. A *paraméteres alakban adott felületelem*:

$$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = dS\,, \tag{8.154c}$$



8.43. ábra.

Δ jelenti az u és v értelmezési tartományát. Az integrál kiszámításához rendre v és u szerint kell integrálni:

$$\int_S \Phi(u,v)\,dS = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dv\,du\,,$$

$$\Phi = f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\,. \tag{8.154d}$$

Itt u_1 és u_2 az u = konst. koordinátavonalak közül a legkülsők, amelyek az S felületrészt közrezárják **(8.43. ábra)**. $v = v_1(u)$ és $v = v_2(u)$ az S felületrészt közrezáró AmB és AnB görbék egyenletei.

Megjegyzés: A (8.153a) formula speciális esete a (8.154b) formulának, amikor

$$u = x\,,\quad v = y\,,\quad E = 1+p^2\,,\quad F = p\,q\,,\quad G = 1+q^2\,. \tag{8.155}$$

3. Görbe felületek felületelemei

8.12. táblázat. Görbe felületek felületelemei

Koordináták	**Felületelemek**
Derékszögű koordináták $x, y, z = z(x,y)$	$dS = \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy$
Hengerfelület R (konstans sugár), Koordináták φ, z	$dS = R\,d\varphi\,dz$
Gömbfelület R (konstans sugár), Koordináták $\vartheta\,, \varphi$	$dS = R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$
Tetszőleges görbevonalú koordináták u, v (E, F, G az ív differenciáljai (lásd 246. old.))	$dS = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$

8.5.1.3. Az 1. típusú felületi integrál alkalmazásai

1. Görbe felületrész területe

$$S = \int_S dS\,. \tag{8.156}$$

2. Inhomogén S görbe által határolt felületrész tömege

A koordinátáktól függő $\varrho = f(x,y,z)$ sűrűséggel:

$$M_S = \int_S \varrho\,dS\,. \tag{8.157}$$

8.5.2. 2. típusú felületi integrál

A *2. típusú felületi integrál*, más néven *vetületen értelmezett integrál*, éppen úgy, mint az 1. típusú felületi integrál a kettős integrál fogalmának általánosítása.

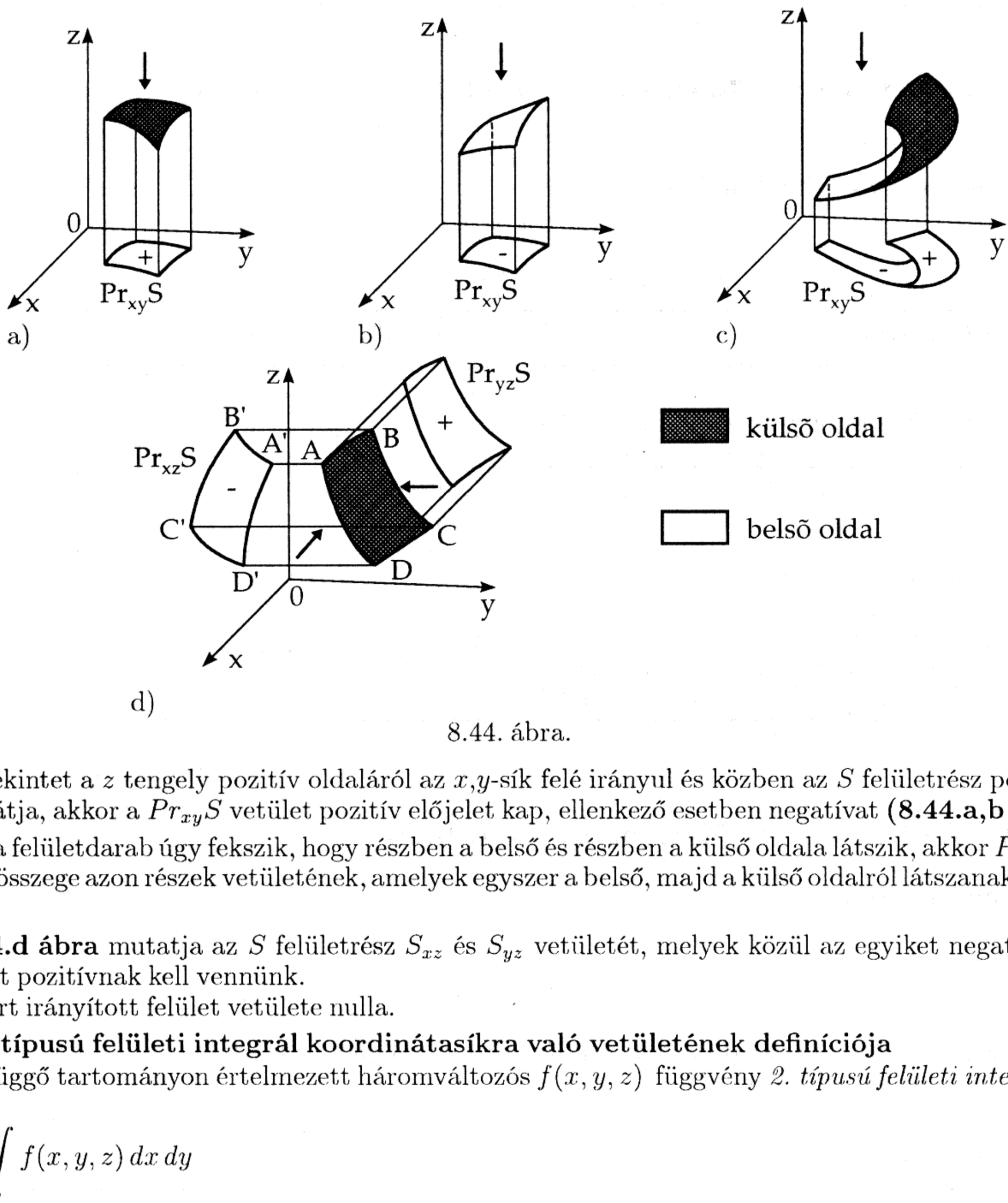
8.5.2.1. A 2. típusú felületi integrál fogalma

1. Az irányított felület fogalma

Egy felületnek általában két oldala van, ezek egyikét önkényesen külső oldalnak jelöljük. Ha már a külső oldalt kiválasztottuk, *irányított felület*ről beszélünk. Itt nem foglalkozunk olyan felületekkel, amelyeknél nem lehet két oldalról beszélni. (lásd [8.14]).

2. Irányított felületrész koordinátasíkon való vetülete

Ha egy irányított felület elhatárolt S részét egy koordinátasíkra vetítjük, pl. az x,y-síkra, akkor ehhez a $Pr_{xy}\,S$ vetülethez a következőképpen rendelhetünk előjelet **(8.44. ábra)**:



8.44. ábra.

Ha a tekintet a z tengely pozitív oldaláról az x,y-sík felé irányul és közben az S felületrész pozitív oldalát látja, akkor a $Pr_{xy}S$ vetület pozitív előjelet kap, ellenkező esetben negatívat **(8.44.a,b ábra)**.

b) Ha a felületdarab úgy fekszik, hogy részben a belső és részben a külső oldala látszik, akkor $Pr_{xy}\,S$ algebrai összege azon részek vetületének, amelyek egyszer a belső, majd a külső oldalról látszanak **(8.44.c ábra)**.

A **8.44.d ábra** mutatja az S felületrész S_{xz} és S_{yz} vetületét, melyek közül az egyiket negatívnak, a másikat pozitívnak kell vennünk.
Egy zárt irányított felület vetülete nulla.

3. 2. típusú felületi integrál koordinátasíkra való vetületének definíciója

Összefüggő tartományon értelmezett háromváltozós $f(x,y,z)$ függvény *2. típusú felületi integrál*ja az az

$$\int_S f(x,y,z)\,dx\,dy \tag{8.158}$$

integrál, amelyet az ugyanazon a tartományon definiált, irányított felületrész x,y-síkon való vetületén értelmeztünk. Az integrál számértékét ugyanúgy nyerjük, mint az 1. típusú felületi integrálnál, kivéve a harmadik lépést, amikor az $f(x_i, y_i, z_i)$ függvényértéket nem a ΔS_i felületelemmel, hanem ennek az x,y-síkra vett vetületével, $Pr_{xy}\Delta S_i$-vel kell szorozni. Így azt kapjuk, hogy

$$\int_S f(x,y,z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,Pr_{xy}\,\Delta S_i\,. \tag{8.159a}$$

Ehhez hasonlóan számítjuk ki egy függvénynek a 2. típusú felületi integrálját az irányított S felületrésznek az y,z- és z,x-síkokra való vetületén:

$$\int_S f(x,y,z)\,dy\,dz = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,Pr_{yz}\,\Delta S_i\,, \tag{8.159b}$$

$$\int_S f(x,y,z)\,dz\,dx = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,Pr_{zx}\,\Delta S_i\,. \tag{8.159c}$$

4. A 2. típusú felületi integrálra vonatkozó egzisztenciatétel

A (8.159a,b,c) 2. típusú felületi integrálok léteznek, ha az $f(x, y, z)$ függvény, valamint a felületek egyenleteinek függvényei folytonosak és folytonos deriváltakkal rendelkeznek.

8.5.2.2. 2. típusú felületi integrálok kiszámítása

A legügyesebb módszer a kettős integrálra való visszavezetés.

1. A felület egyenlete explicit alakban ismert

Ha az S felületet a

$$z = \varphi(x,y) \tag{8.160}$$

explicit alakú függvény állítja elő, akkor a (8.159c) integrált az

$$\int_S f(x,y,z)\,dx\,dy = \int_{Pr_{xy}S} f[x,y,\varphi(x,y)]\,dS_{xy} \tag{8.161a}$$

formula szerint számoljuk, ahol: $S_{xy} = Pr_{xy}S$. Az $f(x, y, z)$ függvénynek a másik koordinátasíkokra való vetületein való 2. típusú felületi integráljait is analóg módon számítjuk ki:

$$\int_S f(x,y,z)\,dy\,dz = \int_{Pr_{yz}S} f[\psi(y,z),y,z]\,dS_{yz}\,, \tag{8.161b}$$

ahol $x = \psi(y, z)$ az S felület egyenletének x-re rendezett alakja, és az $S_{yz} = Pr_{yz}S$ helyettesítést is el kell végezni.

$$\int_S f(x,y,z)\,dz\,dx = \int_{Pr_{zx}S} f[x,\chi(z,x),z]\,dS_{zx}\,, \tag{8.161c}$$

itt $y = \chi(z, x)$. Ez az S felület egyenletének y-ra rendezett alakja, és $S_{zx} = Pr_{zx}S$. Amennyiben a felület irányítása megváltozik, azaz, ha a külső és a belső oldal megcserélődik, akkor az integrál a vetületen előjelet vált.

2. A felület egyenlete paraméteres alakban adott

Ha az S felületet az

$$x = x(u,v)\,, \qquad y = y(u,v)\,, \qquad z = z(u,v) \tag{8.162}$$

egyenetek paraméteres alakban határozzák meg, akkor a (8.159a,b,c) integrálokat az alábbi formulák szerint számíthatjuk ki:

$$\int_S f(x,y,z)\,dx\,dy = \int_\Delta f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv\,, \tag{8.163a}$$

$$\int_S f(x,y,z)\,dy\,dz = \int_\Delta f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,du\,dv\,, \tag{8.163b}$$

$$\int_S f(x,y,z)\,dz\,dx = \int_\Delta f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,du\,dv\,. \tag{8.163c}$$

Itt a $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ kifejezések a függvénydeterminánsai a függvénypároknak: x, y, z-nek u-ra és v-re vonatkozóan. Δ az S felületrész u és v változójának az értelmezési tartománya.

3. Általános típusú felületi integrál

Ha egy összefüggő tartományon értelmezve van három darab háromismeretlenes függvény: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ és egy S irányított felületrész, akkor általános típusú felületi integrálnak nevezzük a minden vetületen értelmezett 2. típusú felületi integrálok összegét:

$$\int_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \int_S P\,dy\,dz + \int_S Q\,dz\,dx + \int_S R\,dx\,dy\,. \tag{8.164}$$

A következő általános formula segítségével az általános felületi integrált közönséges kettős integrálra tudjuk visszavezetni:

$$\int_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \int_\Delta \left[P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right] du\,dv\,, \tag{8.165}$$

ahol a $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ kifejezések és Δ a fentebb megadott jelentéssel bírnak.

Megjegyzés: Az általános típusú felületi integrál elméletének vektoros alakban történő bemutatásáról a „Vektoranalízis és térelmélet" című fejezetben van szó (lásd 685. old.).

4. A felületi integrál tulajdonságai

1. Ha az integrációs tartományt, azaz az S felületrészt valamilyen módon az S_1 és S_2 részekre osztjuk, akkor

$$\int_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = \int_{S_1} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) + \int_{S_2} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)\,. \tag{8.166}$$

2. A felület külső és belső oldalának felcserélésével, azaz a felület irányítottságának megváltoztatásával megváltozik az integrál előjele:

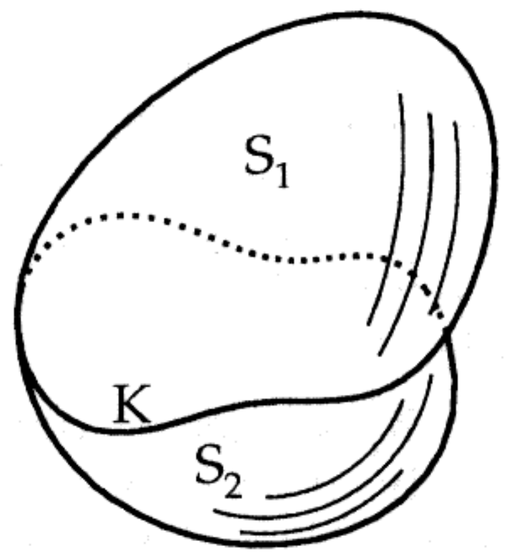
$$\int_{S^+} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) = -\int_{S^-} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy). \tag{8.167}$$

ahol S^+ és S^- egy és ugyanazon felületnek a jelölése, csak ellenkező irányítottsággal.

3. Általában a felületi integrál éppúgy függ az S felületi részt határoló görbétől, mint magától a felülettől. Ezért az S_1 és S_2 felületen vett integrálok egy és ugyanazon C határoló görbe esetén is általában különbözők **(8.45. ábra)**:

$$\int\limits_{S_1} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

$$\neq \int\limits_{S_2} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)\,. \tag{8.168}$$



8.45. ábra.

8.5.2.3. A felületi integrál egy alkalmazása

Egy zárt S felülettel határolt test V térfogatát mint felületi integrált határozhatjuk meg:

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy), \tag{8.169}$$

Itt S irányítottsága olyan, hogy a felület külső oldalát vesszük pozitívnak.

9. Differenciálegyenletek

1. Differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben egy (vagy több) független változó, ennek (vagy ezeknek) valamilyen ismeretlen függvénye (vagy függvényei) és ennek a függvénynek (vagy függvényeknek) a független változó (vagy változók) szerinti közönséges (vagy parciális) deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek. A differenciálegyenlet rendje a benne szereplő legmagasabb rendű derivált rendje.

2. Közönséges és parciális differenciálegyenletek: ha a differenciálegyenletben szereplő függvény egyváltozós, és ennek a független változó szerinti, ún. közönséges deriváltjai lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük; ha ez a függvény két vagy többváltozós, és ennek a független változók szerinti parciális deriváltjai lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet parciális differenciálegyenletnek nevezzük.

■ **A:** $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5\frac{dy}{dx} + \sin y = 0$; ■ **B:** $xd^2ydx - dy(dx)^2 = e^y(dy)^3$; ■ **C:** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$.

9.1. Közönséges differenciálegyenletek

1. Általános alakú n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet

*Implicit alakú*nak nevezzük a következő egyenletet:

$$F\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right] = 0\,. \tag{9.1}$$

Ha ebből az egyenletből $y^{(n)}(x)$ kifejezhető, akkor *explicit alakú* n-ed rendű közönséges differenciálegyenletről beszélünk.

2. Differenciálegyenlet megoldása (integrálja)

A differenciálegyenlet megoldása minden olyan, a véges vagy végtelen $a \leq x \leq b$ intervallumon értelmezett függvény, amely azonosan kielégíti az egyenletet. Általános megoldásnak (vagy általános integrálnak) nevezzük azt a megoldást, amely pontosan n tetszőleges, egymástól független $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandót (paramétert) tartalmaz. Ha az általános megoldásban szereplő $c_1, c_2, \ldots, c_n$ állandóknak meghatározott értékeket adunk, akkor partikuláris megoldásokat (vagy partikuláris integrálokat) kapunk.

■ A $-y'\sin x + y\cos x = 1$ differenciálegyenlet általános megoldása az $y = \cos x + c\sin x$ függvény. $c = 0$ esetén az egyenlet partikuláris megoldása az $y = \cos x$ függvény.

9.1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

9.1.1.1. Megoldások létezése, iránymező

1. Megoldások létezése

A CAUCHY-féle egzisztencia-tétel értelmében, ha az $f(x, y)$ függvény folytonos az (x_0, y_0) pont egy $|x - x_0| < a$ és $|y - y_0| < b$ által meghatározott környezetében, akkor az

$$y' = f(x, y) \tag{9.2}$$

differenciálegyenletnek létezik az x_0-t tartalmazó fenti intervallumon olyan megoldása, amely az $x = x_0$ helyen az y_0 értéket veszi fel. Másszóval abban a tartományban, amelyben a (9.2) vagy a (9.4) differenciálegyenletre fennállnak az egzisztencia-tétel feltételei, minden $M(x_0, y_0)$ ponton keresztül halad át integrálgörbe **(9.2. ábra)**.

2. Lipschitz-feltétel

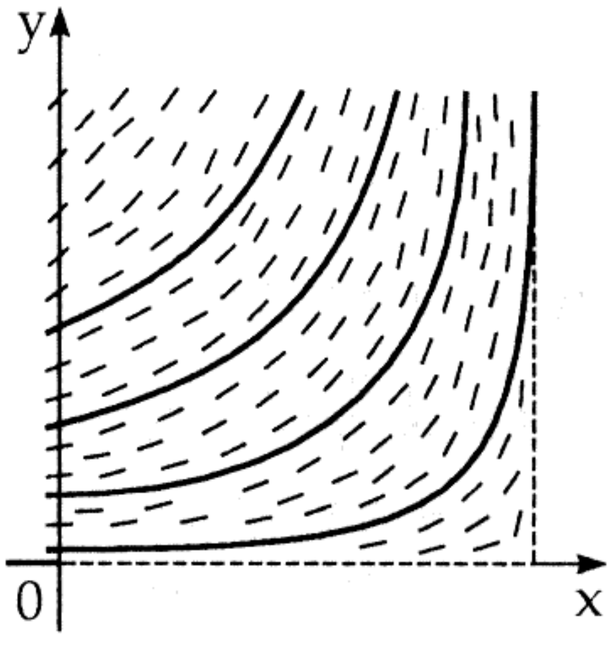
Azt mondjuk, hogy G-ben teljesül a LIPSCHITZ-*feltétel* az N Lipschitz-állandóval, ha minden G-beli (x, y_1) és (x, y_2) pontra teljesül az

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \tag{9.3}$$

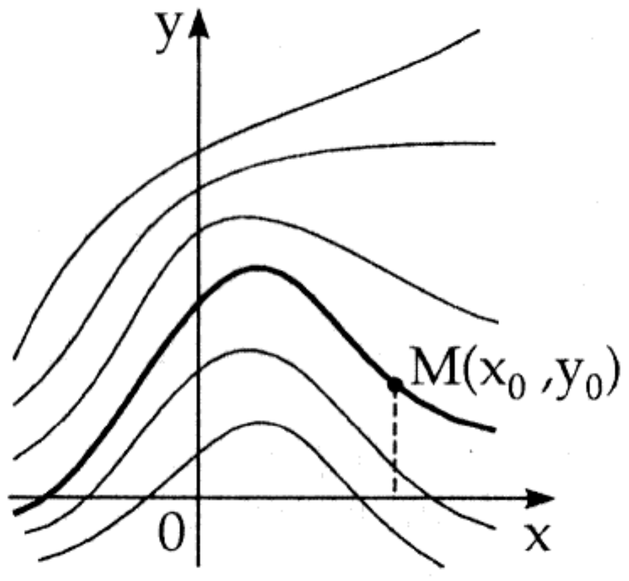
egyenlőtlenség, ahol tehát N nem függ sem x-től, sem y_1-től, sem pedig y_2-től. Ha teljesül a Lipschitz-feltétel, akkor (9.2)-nek egy az y_0 kezdeti feltételtől folytonosan függő megoldása van. A LIPSCHITZ-feltétel fennáll, ha $f(x,y)$-nek a G tartományban korlátos $\partial f/\partial y$ parciális deriváltja van. A 9.1.1.4. pontban olyan differenciálegyenleteket vizsgálunk, amelyek nem elégítik ki a CAUCHY-tétel feltételeit.

3. Iránymező

Ha az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet $y = \varphi(x)$ megoldásának grafikonja keresztülhalad az $M(x,y)$ ponton, akkor a görbe $M(x,y)$ pontbeli érintőjének dy/dx meredeksége közvetlenül a differenciálegyenlet által adott. Így a vizsgált tartomány minden pontjában a differenciálegyenlet meghatározza a megoldásgörbe érintőjének irányát. Ezeknek az irányoknak az összessége egy *iránymező*t alkot **(9.1. ábra)**. A pontot a hozzárendelt iránnyal együtt az iránymező vonalelemének nevezzük. Így geometriailag egy elsőrendű differenciálegyenlet integrálása az iránymező elemeinek *integrálgörbék*be való egyesítését jelenti, oly módon, hogy az integrálgörbe minden pontjában az érintő iránya megegyezik az iránymező azon pontbeli vektora irányával.



9.1. ábra.



9.2. ábra.

4. Függőleges irányok

Ha egy differenciálegyenletet nem képlettel, hanem iránymezővel adunk meg, és az iránymezőben függőleges irányok is szerepelnek, akkor a függő és a független változó szerepe felcserélődik, és a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{9.4}$$

differenciálegyenletet az adott (9.2) egyenlettel ekvivalensnek tekintjük. Itt $f(x,y)$ az iránymező megfelelő vektorának iránytangense, ha az irány függőleges, akkor $\dfrac{1}{f(x,y)} = 0$.

5. Általános integrál

Az integrálgörbék egy $\varphi(x,C)$ egyparaméteres görbesereget alkotnak, amely egy szabadon választható állandót tartalmaz, esetünkben a C paramétert. Ahhoz, hogy az $y_0 = \varphi(x_0)$ feltételt kielégítő $y = \varphi(x)$ partikuláris integrált a (9.6a) általános integrálból megkapjuk, az

$$y_0 - \varphi(x_0, C) = 0\,. \tag{9.5}$$

egyenletből meg kell határoznunk a C állandót.

9.1.1.2. Elemi úton integrálható differenciálegyenletek

1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha egy differenciálegyenlet az

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{9.6a}$$

alakra hozható, akkor felírható az

$$R(x)dx + S(y)dy = 0 \tag{9.6b}$$

alakban is. Ez könnyen belátható, ha a (9.6a) egyenletet $P(x)N(y)$-nal osztjuk; az átírás azért előnyös, mert az x, illetve az y változó csak egyetlen tagban szerepel. Az általános integrál alakja a következő:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C\,, \tag{9.7}$$

amelyből a kiintegrálások után szerencsés esetben y kifejezhető. Ha valamely $x = \overline{x}$ vagy $y = \overline{y}$ esetén $P(x)$ vagy $N(y)$ nulla értéket vesz fel, akkor $x = \overline{x}$ vagy az említett változócserével $y = \overline{y}$ szintén a differenciálegyenlet integrálja, azaz megoldása.

■ $y' = \dfrac{-y}{x}$, azaz $xdy + ydx = 0$; $\displaystyle\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C$; $\ln|y| + \ln|x| = C = \ln|c|$; $yx = c$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$; $y = \dfrac{c}{x}$ $(x \neq 0)$.

2. Homogén differenciálegyenletek

Ha $M(x,y)$ és $N(x,y)$ ugyanolyan fokú homogén függvények (lásd 126. old.), akkor az $u = y/x$ új ismeretlen függvény bevezetésével az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad \text{azaz} \quad M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{9.8}$$

egyenlet változói szétválaszthatók.

■ $x(x-y)y' + y^2 = 0$. Az egyenlet az $y = u(x)x$ helyettesítéssel az $(1-u)u' + \dfrac{u}{x} = 0$ alakra hozható. Ebből a változók szétválasztásával azt kapjuk hogy $\displaystyle\int \frac{1-u}{u}\,du = -\int \frac{dx}{x}$. Így ennek illetve az eredeti egyenletnek az általános integrálja $\ln|x| + \ln|u| - u = C = \ln c$, $ux = ce^u$, $y = ce^{y/x}$, $c \neq 0$; ebből y-t nem tudjuk kifejezni. Mint ahogy az az **1.**-ből is kitűnik (a változók szétválasztása, 497. old.) az $x = 0$ egyenletű egyenes is integrálgörbéje az iránymezőnek.

3. Egzakt differenciálegyenlet

*Egzakt differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\,, \quad \text{ill.} \quad N(x,y)y' + M(x,y) = 0 \tag{9.9a}$$

alakú egyenletet, ha $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ M és N értelmezési tartománya metszetén, pontosabban ennek azon részhalmazán, amit az explicit alakból adódó $N \neq 0$ (vagy $M \neq 0$, de akkor $x = x(y)$ a keresett függvény) feltétel határoz meg. Ha egy egyszeresen összefüggő tartományban az $M(x,y)$ és $N(x,y)$ függvények, valamint elsőrendű parciális deriváltjaik folytonosak, akkor az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv d\,\Phi(x,y) \tag{9.9b}$$

egyenletet kielégítő $\Phi(x,y)$ függvény, azaz ha (9.9a) bal oldala az $\Phi(x,y)$ függvény teljes differenciálja (lásd 400. old.). (9.9a) általános integrálját a

$$\Phi(x,y) = C\,, \tag{9.9c}$$

implicit képlettel adja, amelyből szerencsés esetben y kifejezhető. Φ a

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)\,d\eta \tag{9.9d}$$

integrállal vagy, ha az $(x_0,y_0) \to (x_0,y) \to (x,y)$ töröttvonal nincs benne a tartományban, akkor az (x_0,y_0) és az (x,y) pontokat összekötő bármely más, a tartományban haladó egyszerű, rektifikálható görbén vett vonalintegrállal állítható elő, ahol x_0 és y_0 tetszőlegesen választható (ez felel meg C tetszőleges választásának). Sok esetben Φ az egzaktsági feltétel alapján egyváltozós primitív függvények meghatározásával is megkapható.

■ Példákkal a későbbiekben foglalkozunk.

4. Integráló tényező

*Integráló tényező*nek nevezzük a $\mu(x,y)$ függvényt, ha a (9.9a), tehát az

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{9.10a}$$

egyenletet $\mu(x,y)$-nal szorozva egzakt differenciálegyenletet kapunk. Az integráló tényező kielégíti az

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{9.10b}$$

differenciálegyenlet, amelynek viszont tetszőleges megoldása integráló tényező. Sok esetben a $\mu(x,y)$ integráló tényező speciális alakú: $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(xy)$, ill. $\mu(x^2+y^2)$.

■ Oldjuk meg az $(x^2+y)dx - x\,dy = 0$ differenciálegyenletet. Az integráló tényező a $-x\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - (x^2+y)\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = 2$ egyenlet megoldása. y-tól független integráló tényezőhöz jutunk az $x\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = -2$ egyenlet megoldásával, amelyből például $\mu = \frac{1}{x^2}$. Ha az adott differenciálegyenlet μ-vel szorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy $\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$. Így (9.9d) alapján az $x_0=1$, $y_0=0$-nak megfelelő általános integrál a következő alakú: $\Phi(x,y) \equiv \int_1^x \left(1+\frac{y}{\xi^2}\right)d\xi - \int_0^y d\eta = C$ vagy $x - \frac{y}{x} = C_1$.

5. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

*Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{9.11a}$$

egyenletet, mert a keresett függvénynek csak első deriváltját tartalmazza, továbbá y-ban és y'-ben is lineáris és szorzatuk nem szerepel benne. Ennek a differenciálegyenletnek egy integráló tényezője

$$\mu = \exp\left(\int P\,dx\right)\,; \tag{9.11b}$$

általános megoldása pedig

$$y = \exp\left(-\int P\,dx\right)\left[\int Q\exp\left(\int P\,dx\right)dx + C\right] \tag{9.11c}$$

minden olyan — most intervallumon — ahol P és Q értelmezhető; hasonló megjegyzés teendő minden későbbi esetben is.

Ha az iménti formulában a határozatlan integrálokat x_0-tól x-ig terjedő határozott integrálokkal helyettesítjük, akkor $y(x_0) = C$ (lásd 448. old.). Ha y_1 a differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldása, akkor az általános megoldást az

$$y = y_1 + C\exp\left(-\int P\,dx\right)\,. \tag{9.11d}$$

formulából kapjuk. A lineárisan független $y_1(x)$ és $y_2(x)$ partikuláris megoldások (lásd 509. old.) ismeretében az általános megoldás integrálás nélkül is megkapható:

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1)\,. \tag{9.11e}$$

■ Oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát: $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$, $y_0 = 0$ ha $x_0 = 0$. Mivel $\exp\left(-\int_0^x \mathrm{tg}\,x\,dx\right) = \cos x$, (9.11c) alapján a megoldás:

$$y = \frac{1}{\cos x}\int_0^x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\sin x\cos x + x}{2}\right] = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2\cos x}\,.$$

6. Bernoulli-féle differenciálegyenlet

BERNOULLI-*féle differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1) \tag{9.12}$$

egyenletet, amely y^n-nel való osztással, majd a $z = y^{-n+1}$ új változó bevezetésével lineáris differenciálegyenletre vezet, amelyet z-re megoldva és abból y-t kifejezve megkapjuk (9.12) megoldásait.

■ Oldjuk meg az $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$ differenciálegyenletet. Mivel $n = 1/2$, $\sqrt{y}$-nal való osztással, majd a $z = \sqrt{y}$ új változó bevezetsével az $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2z}{x} = \dfrac{x}{2}$ egyenletet kapjuk. Ez egy lineáris differenciálegyenlet, amelynek megoldása $\exp(\int P\,dx) = \dfrac{1}{x^2}$ miatt $z = x^2\left[\int \dfrac{x}{2}\dfrac{1}{x^2}dx + C\right] = x^2\left[\dfrac{1}{2}\ln x + C\right]$. Az eredeti egyenlet megoldása tehát $y = x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x + C\right)^2$.

7. Riccati-féle differenciálegyenlet

RICCATI-*féle differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)\,, \tag{9.13a}$$

egyenletet. Általános esetben ez a differenciálegyenlet nem oldható meg kvadratúrával, azaz a megoldás nem határozható meg véges számú integrálással. Ha azonban ismeretes egy y_1 partikuláris megoldás, akkor az

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \tag{9.13b}$$

helyettesítéssel a $z(x)$-re vonatkozó inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk, amelynek megoldásaiból visszaszámolva megkapjuk az eredeti egyenlet többi megoldásait. Ha y_2, egy másik partikuláris megoldás is ismert, akkor

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \tag{9.13c}$$

a $z(x)$-re vonatkozó fenti lineáris egyenlet egy partikuláris megoldása, ami egyszerűsíti ennek az egyenletnek az megoldását. Mivel bármely 4 megoldás kettősviszonyban van, ezért ha három partikuláris megoldás, y_1, y_2 és y_3 ismert, akkor a RICCATI-féle differenciálegyenlet általános megoldása egyszerűen adódik:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C\text{-ből.} \tag{9.13d}$$

Ha olyan intervallumon keressük a megoldást, ahol $P \neq 0$ és P'' létezik, akkor a

$$y = \frac{u}{P(x)} - \frac{QP + P'}{2P^2} \tag{9.13e}$$

könnyen invertálható helyettesítéssel a RICCATI-féle differenciálegyenlet a

$$\frac{du}{dx} = u^2 + R_1(x) \tag{9.13f}$$

kanonikus alakra hozható, amelyben a keresett függvény négyzetének együtthatója $= 1$ és első hatványa már nem szerepel. Más úton, az

$$y = -\frac{v'}{P(x)v} \tag{9.13g}$$

helyettesítéssel (9.13a)-ból a

$$Pv'' - (P' + PQ)v' + P^2Rv = 0\,. \tag{9.13h}$$

másodrendű homogén (lásd (9.30)) lineáris differenciálegyenletre jutunk (lásd 516. old.).

■ Oldjuk meg az $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$ differenciálegyenletet! Legyen $y = \frac{u}{P} + \beta(x)$, ekkor u első hatványának együtthatójára $2\beta + 1/x$ adódik, amely $\beta(x) = -1/2x$ esetén eltűnik. Így a következő egyenletet kapjuk: $u' - u^2 + \frac{15}{4x^2} = 0$. A partikuláris megoldásokat $u = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$ próbafüggvény-alakban keressük; $x \to \infty$ vizsgálatából egyből látható, hogy $c = 0$. Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = -\frac{5}{2}$, azaz két partikuláris megoldást kapunk: $u_1 = \frac{3}{2x}$, $u_2 = -\frac{5}{2x}$. Az $y = \frac{1}{z} + y_1 = \frac{1}{z} + \frac{2}{x}$ helyettesítéssel $z' = \frac{5z}{x} = 1$. A $z = \frac{1}{y_2 - y_1} = -\frac{x}{4}$ partikuláris megoldást ide behelyettesítve a $z = Cx^5 - \frac{x}{4}$ általános megoldást kapjuk, amiből a többi megoldás $y = \frac{1}{z} + \frac{1}{2x} = \frac{2Lx^4 + 2}{Lx^5 - x}$.

9.1.1.3. Implicit differenciálegyenletek

1. Megoldás paraméteres alakban

Adott egy F háromváltozós függvénnyel az

$$F(x, y, y') = 0 \tag{9.14}$$

implicit differenciálegyenlet. Egy $M(x_0, y_0)$ ponton pontosan n integrálgörbe halad át, ha az alábbi két feltétel teljesül:

a) Az $F(x_0, y_0, p) = 0$ egyenletnek n gyöke van: $p_1, \ldots, p_n$.

b) Az $F(x, y, p)$ függvény valamint első deriváltjai folytonosak az $M(x_0, y_0, p_i)$ pontokban és ezekben a pontokban $\partial F/\partial p \neq 0$.

Ha az adott egyenletből y' — n-értékű — függvényként kifejezhető, akkor n számú explicit differenciálegyenletre esik szét, amelyek megoldásával n integrálgörbét kapunk. Amennyiben egy egyenlet $x = \varphi(y, y')$ vagy $y = \psi(x, y')$ alakú, akkor az $y' = p$ paraméter behelyettesítésével, és y, ill. x szerinti differenciálással dp/dy-ra, ill. dp/dx-re vonatkozó egyenletet kapunk, amelyben y' ki van fejezve. Megoldásuk a kiindulási egyenlet (9.14) megoldásával együtt szolgáltatja a paraméteres megoldást.

■ Oldjuk meg az $x = yy' + y'^2$ differenciálegyenletet! Legyen $y' = p$, ekkor $x = py + p^2$. y-szerinti differenciálással és a $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy}$ vagy $\frac{dy}{dp} - \frac{py}{1 - p^2} = \frac{2p^2}{1 - p^2}$. Ennek, az y-ban lineáris egyenletnek a megoldása $y = -p + \frac{c + \arcsin p}{\sqrt{1 - p^2}}$. Ha ezt a kiindulási egyenletben y helyébe írjuk, akkor paraméteres alakban, y'-vel kifejezett megoldáshoz jutunk; szerencsés esetben ebből már y'-t is ki tudjuk fejezni.

2. Lagrange-féle differenciálegyenlet

LAGRANGE-*féle differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0 \tag{9.14a}$$

egyenletet. Ez az egyenlet a fent ismertetett módon mindig integrálható kvadratúrákkal. Ha $p = p_0$ esetén

$$a(p) + b(p)p = 0, \tag{9.14b}$$

akkor

$$a(p_0)x + b(p_0)y + c(p_0) = 0 \tag{9.14c}$$

egy szinguláris integrál, nevezetesen egy p_0 meredekségű egyenes.

3. Clairaut-féle differenciálegyenlet

CLAIRAUT-*féle differenciálegyenlet*nek nevezzük a LAGRANGE-féle differenciálegyenlet következő speciális esetét:

$$a(p) + b(p)p = 0, \tag{9.15a}$$

amely az

$$y = y'x + f(y') \tag{9.15b}$$

alakra hozható. Ennek általános, a fenti értelemben paraméterezett megoldása:

$$y = Cx + f(C)\,. \tag{9.15c}$$

Az általános megoldás mellett van még a CLAIRAUT-féle differenciálegyenletnek egy szinguláris integrálja is, amelyet a C állandónak az

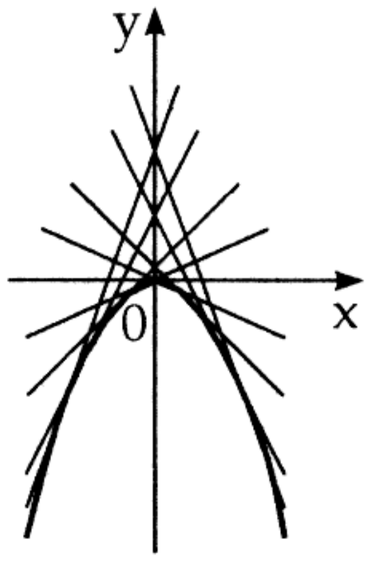
$$y = Cx + f(C) \tag{9.15d}$$

és a C szerinti deriválásával adódó

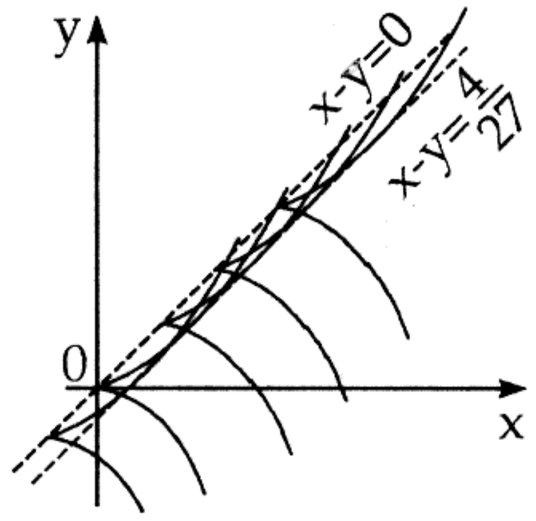
$$0 = x + f'(C) \tag{9.15e}$$

egyenletből való kiküszöbölésével kapunk meg. A szinguláris integrál általában is geometriailag nem más, mint az általános megoldás által meghatározott egyenessereg **(9.3. ábra)** burkoló görbéje (lásd 237. old.).

■ Oldjuk meg az $y = xy' + y'^2$ differenciálegyenletet! Általános integrálja: $y = Cx + C^2$, szinguláris integrálját úgy kapjuk meg, hogy az $x + 2C = 0$ egyenletből kiküszöböljük a C állandót: $x^2 + 4y = 0$. Ezt szemlélteti a **9.3. ábra**.



9.3. ábra.



9.4. ábra.

9.1.1.4. Szinguláris integrálok és szinguláris pontok

1. Szinguláris elem

Az (x_0, y_0, y_0') rendezett hármast a differenciálegyenlet *szinguláris elem*ének nevezzük, ha az

$$F(x, y, y') = 0 \tag{9.16a}$$

differenciálegyenleten kívül még a

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{9.16b}$$

egyenletet is kielégíti.

2. Szinguláris integrál

Szinguláris elemek első két koordinátáiból, mint pontokból álló integrálgörbét *szinguláris integrálgörbé*nek neveziink, ha így egy olyan differenciálható y függvényt kapunk, amelyre $(x, y(x), y'(x))$ minden x-re szinguláris elem. Egy szinguláris integrálgörbe

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{9.16c}$$

egyenletét pedig *szinguláris integrál*nak nevezzük. Az integrálgörbék burkolói szinguláris integrálgörbék **(9.3. ábra)**; ezek is szinguláris elemekkel megadott pontokból tevődnek össze.
Egy szinguláris integrálgörbe egyik pontjában sem biztosított a megoldás egyértelműsége (lásd az egzisztenciatételt; 496. old.).

3. A szinguláris integrálok meghatározása

Általános esetben a szinguláris integrál nem kapható meg az általános integrálból úgy, hogy a tetszőleges konstansnak konkrét értéket adunk. Egy (9.16a) alakú differenciálegyenlet szinguláris integráljainak meghatározásához a

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0 \tag{9.16d}$$

egyenletből kell kiindulnunk, és p-t kell kiküszöbölnünk ($p = y'$). Ha az így nyert összefüggés az adott differenciálegyenlet egy integrálja, akkor az már szinguláris integrál. Az integrált meghatározó egyenletet először olyan alakra kell hozni, amely nem tartalmaz többértékű függvényeket, főleg nem radikálokat, ahol komplex függvényértékeket is figyelembe kellene venni.

A *radikál*ok olyan kifejezések, amelyek algebrai egyenletek egymásba való helyettesítésekor fordulnak elő (lásd 61. old.). Ha ismert az integrálgörbe-sereg egyenlete, azaz az adott differenciálegyenlet általános integrálja, akkor a görbesereg burkolóinak (szinguláris integráljainak) meghatározása differenciálgeometriai eszközökkel történhet. (lásd 237. old.).

■ **A:** Oldjuk meg az $x - y - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 = 0$ differenciálegyenletet! A hozzá tartozó (9.16d) egyenlet megoldásával azt kapjuk, hogy $-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2 = 0$. p kiküszöbölésével egyrészt a) $x - y = 0$ másrészt pedig b) $x - y = \frac{4}{27}$, ahol a) nem megoldás, b) pedig szinguláris megoldás; ez utóbbi az $(y - C)^2 = (x - C)^3$ általános megoldás egyik burkológörbéje. Az a) és b) görbéket a **9.4. ábra** szemlélteti .

■ **B:** Vizsgáljuk az $y' - \ln|x| = 0$ differenciálegyenletet! $\frac{dF}{dP} = 1 \neq 0$ miatt nincs szinguláris integrálja.

4. Differenciálegyenlet szinguláris pontjai

Egy, a keresett vektorértékű függvény gradiensére nézve explicit differenciálegyenletrendszer szinguláris pontjának nevezzük azt a pontot, amelyben a jobb oldalak eltűnnek. Ez a tulajdonság jól látható a következő alakú differenciálegyenletrendszer esetében:

1.

$$\begin{aligned} y'(t) &= ax(t) + by(t) \\ x'(t) &= cx(t) + ey(t) \end{aligned} \qquad (ae - bc \neq 0). \tag{9.17}$$

Ennek a $(0, 0)$ pont *izolált szinguláris pont*ja, mivel más szinguláris pontja a feltételek miatt nincsen. Az $ax + by = 0$ egyenesen kívül minden megoldáspár y koordinátafüggvénye invertálható, ezért x mint y függvénye kielégíti a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + ey}{ax + by} \tag{9.18}$$

egyenletet; hasonló a helyzet a $cx + ey = 0$ egyenesen kívül, fordított szereposztással.
A szinguláris pont környezetében az integrálgörbék jellege a

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ae = 0 \tag{9.19}$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek függvénye. Három eset különböztethető meg:

1. eset. Ha a gyökök valósak és azonos előjelűek, akkor a szinguláris pontot *csomópont*nak nevezzük. Ha nem egyeznek meg, akkor egy kivétellel az összes megoldásgörbe a szinguláris pontban érinti egymást. Ha a gyökök megegyeznek, akkor vagy az integrálgörbéknek a szinguláris pontban közös érintőjük van, vagy a szinguláris pontból minden irányban pontosan egy integrálgörbe indul ki.

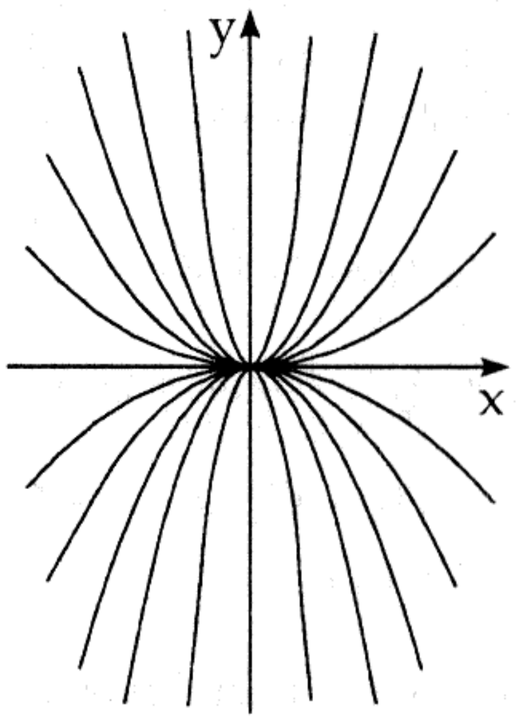
■ **A:** A $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Az integrálgörbék egyenlete: $y = Cx^2$ **(9.5. ábra)**. Az $x = 0$ egyenes — a közös érintő — szintén eleme az általános megoldásseregnek, amely az $x^2 = C_1 y$ alakból is látható.

■ **B:** A $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Az integrálgörbék egyenlete: $y = x \ln|x| + Cx$ **(9.6. ábra)**. A szinguláris pontot *csomópont*nak nevezzük.

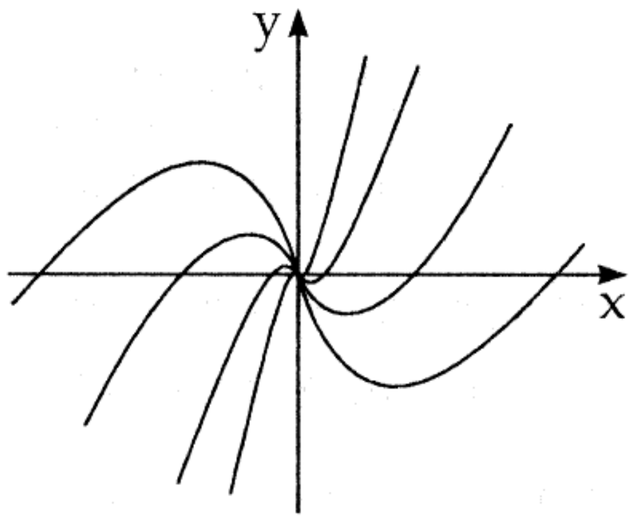
■ **C:** A $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Az integrálgörbék egyenlete: $y = Cx$ **(9.7. ábra)**. A szinguláris pont ismét csomópont

(ún. *dikritikus csomópont*).

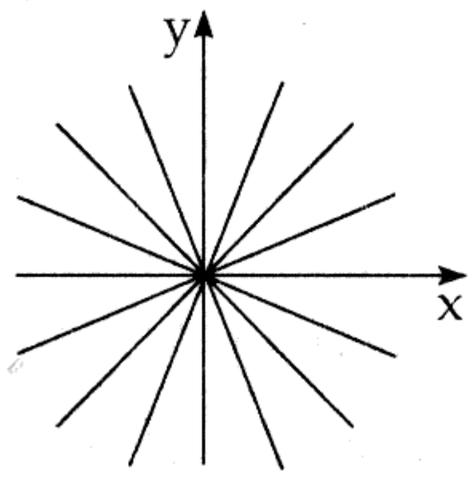
2. eset. Ha a gyökök valósak és különböző előjelűek, akkor a szinguláris pontot *nyeregpont*nak nevezzük. A szinguláris ponton csak két integrálgörbe megy át.



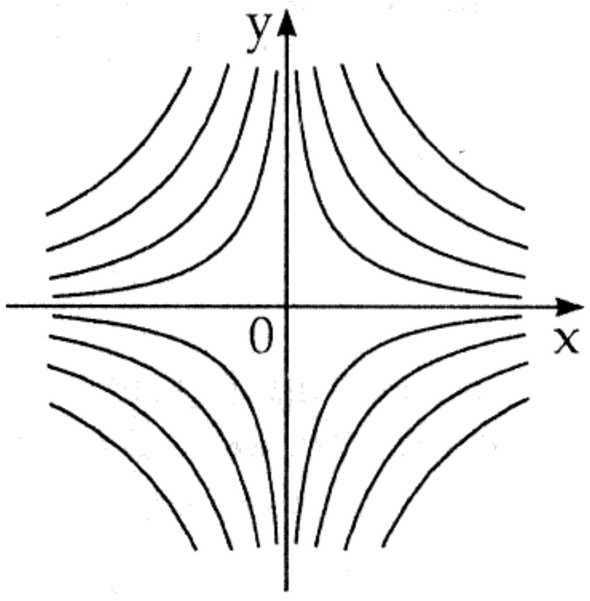
9.5. ábra.



9.6. ábra.



9.7. ábra.

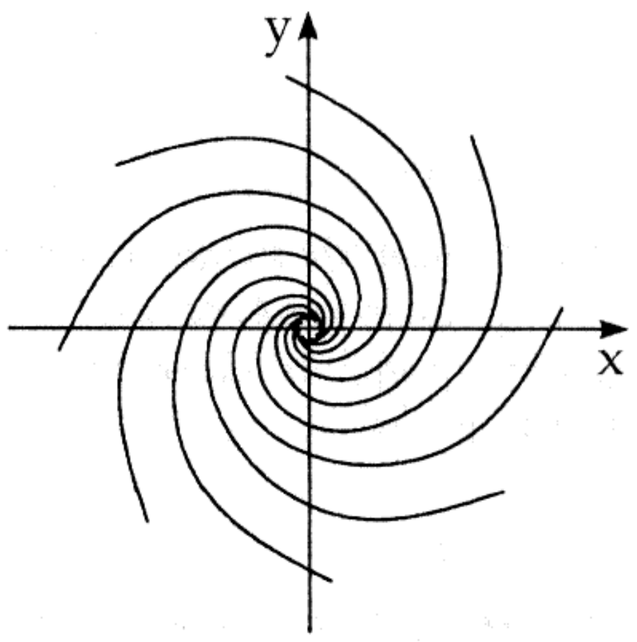


9.8. ábra.

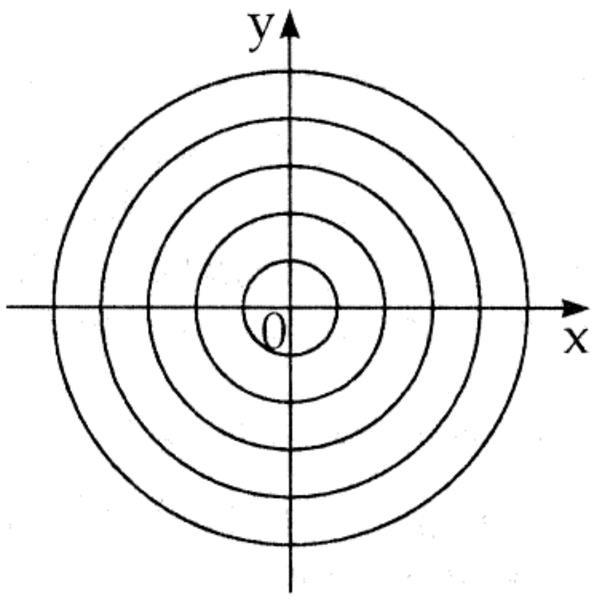
■ **D:** A $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 1 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$. Az integrálgörbék egyenlete: $xy = C$ **(9.8. ábra)**. $C = 0$ esetén a két partikuláris integrál $x = 0$, $y = 0$.

3. eset. Ha a gyökök komplex konjugáltak (de nem tisztán képzetesek), akkor a szinguláris pontot *fókusz*nak nevezzük. Az integrálgörbék a szinguláris pont körül végtelen sok fordulatot tesznek.

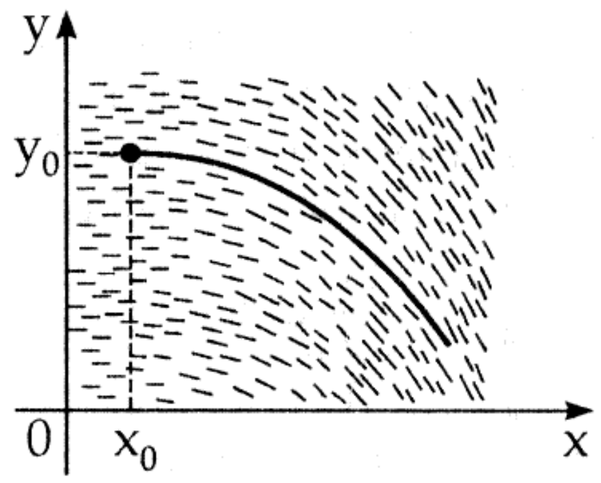
■ **E:** A $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$. Az integrálgörbék polárkoordinátákkal: $r = Ce^{\varphi}$ **(9.9. ábra)**.



9.9. ábra.



9.10. ábra.



9.11. ábra.

4. eset. Ha a gyökök tisztán képzetes konjugáltak, akkor a szinguláris pontot *centrum*nak (*örvénypont*nak) nevezzük. Az integrálgörbék olyan zárt görbék, amelyek körülfogják a szinguláris pontot.

■ **F:** A $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 1 = 0$, melynek gyökei: $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$. Az integrálgörbék egyenlete: $x^2 + y^2 = C$ **(9.10. ábra)**.

2. Az

$$y'(t) = P(x(t), y(t))$$
$$x'(t) = Q(x(t), y(t)) \tag{9.17a}$$

általánosabb differenciálegyenlet szinguláris pontjainak egyenlete:

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0, \tag{9.17b}$$

amelynek legyen (x_0, y_0) egy megoldása. Ha P és Q folytonos olyan folytonos függvények, amelyek parciális deriváltjai is folytonosak, akkor (9.17a) a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + P_1(x, y)}{c(x - x_0) + e(y - y_0) + Q_1(x, y)} \tag{9.17c}$$

alakba írható. Ha az (x, y) pont az (x_0, y_0) szinguláris ponthoz tart, akkor $P_1(x, y)$ valamint $Q_1(x, y)$ erősebben tartanak nullához, mint az $P_1(x, y)$ pontnak az (x_0, y_0) szinguláris ponttól való távolsága. Ezen feltételek mellett az adott differenciálegyenlet adott szinguláris pontjának jellege (kivéve az alábbi két esetet) ugyanaz, mint az *első közelítés egyenletének* szinguláris pontjáé, amelyet P_1 és Q_1 elhagyásával kapunk és amely már az előbb tárgyalt alakú.

A kivételes esetek: **a)** Ha az első közelítés egyenletének szinguláris pontja centrum, akkor a kiindulási egyenlet szinguláris pontja vagy fókusz vagy centrum.

b) Ha $ae - bc = 0$, azaz $\frac{a}{c} = \frac{b}{e}$ vagy $a = c = 0$, ill. $a = b = 0$, akkor a szinguláris pont jellegének meghatározására a magasabbrendű tagokat is figyelembe kell venni.

9.1.1.5. Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldási módszerei

1. A Picard-féle fokozatos közelítési módszer

Az

$$y' = f(x, y), \tag{9.18a}$$

$y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma mindkét oldalának integrálásával azt kapjuk, hogy

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx\,. \tag{9.18b}$$

Ha (9.18b) jobb oldalán y helyébe egy megfelelően választott $y_1(x)$ függvényt helyettesítünk, akkor egy olyan $y_2(x)$ függvényt kapunk, amely akkor különbözik $y_1(x)$-től, ha $y_1(x)$ még nem megoldása (9.18a)-nek. Ha (9.18b) jobb oldalán y helyébe $y_2(x)$-t helyettesítünk, akkor az $y_3(x)$ függvényhez jutunk. Ha teljesülnek az egzisztencia-tétel feltételei, akkor az eljárás folytatásaként nyert y_1, y_2, y_3, ... függvénysorozat egy bizonyos, az x_0-at tartalmazó intervallumon a keresett függvényhez konvergál. (lásd 496. old.).

A PICARD-*féle szukcesszív approximáció* egy *speciális iterációs módszer* (lásd 907. old.).

■ Oldjuk meg a következő kezdetiérték-feladatot: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$! Integráljuk mindkét oldalt, majd alkalmazzuk a szukcesszív approximáció módszerét az $y_0 = 0$ kezdőfüggvénnyel. Ekkor a keresett függvénysorozat első két tagja: $y_1 = \int_0^x e^x\, dx = e^x - 1$, $y_2 = \int_0^x \left[e^x - (e^x - 1)^2\right]\, dx = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2}$.

2. Integrálás sorok segítségével

Egy differenciálegyenlet megoldásának (lásd 423. old.) TAYLOR-sora az

$$y = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2}y_0'' + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}y_0^{(n)} + \cdots \tag{9.19}$$

alakba írható, ha a megoldás y_0', y_0'',..., $y_0^{(n)}$, ... deriváltjai ismertek az x_0 pontban. Ezeket a differenciálegyenlet szukcesszív differenciálásával, majd a kezdeti feltételek behelyettesítésével kaphatjuk meg. Ha a differenciálegyenlet differenciálása végtelen sokszor elvégezhető, akkor az így nyert sor x_0 egy bizonyos környezetében konvergál. Ez a módszer az n-edrendű differenciálegyenletekre is alkalmazható.

Gyakran előnyös, ha a megoldást határozatlan együtthatós sor alakjában keressük, ahol az együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy a sort behelyettesítjük a differenciálegyenletbe.

■ **A:** Keressük a fenti $y' = e^x - y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ differenciálegyenlet megoldását az $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ sor alakjában. Helyettesítsük be a sort az egyenletbe, majd vegyük figyelembe a (7.86)-ot:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + \left[{a_1}^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + ({a_2}^2 + 2a_1a_3)x^4 + \cdots\right] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

Innen az együtthatók egyenlővé tételével: $a_1 = 1$, $2a_2 = 1$, $3a_3 + {a_1}^2 = \frac{1}{2}$, $4a_4 + 2a_1a_2 = \frac{1}{6}$ stb. Így a keresett megoldás soralakban: $y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \cdots$.

■ **B:** Ugyanez a kezdetiérték-feladat a következő módon is megoldható: helyettesítsünk $x = 0$-át a differenciálegyenletbe, ekkor azt kapjuk, hogy $y_0' = 1$. Továbbá $y'' = e^x - 2yy'$, $y_0'' = 1$, $y''' = e^x - 2y'^2 - 2yy''$, $y_0''' = -1$, $y^{(4)} = e^x - 6y'y'' - 2yy'''$, $y_0^{(4)} = -5$, stb. Így a TAYLOR-formula alapján $y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \cdots$.

3. Differenciálegyenletek grafikus integrálása

Differenciálegyenletek grafikus integrálása az iránymező fogalmán alapul (lásd 497. old.). Az integrálgörbét megközelíti az előírt kezdőpontból kiinduló töröttvonal **(9.11. ábra)**. Ez rövid szakaszokból áll, és minden szakasz kezdőpontjában, ami egyben az előző szakasz végpontja, mindegyikük iránya egybeesik az iránymezővel.

4. Differenciálegyenletek numerikus integrálása

Differenciálegyenletek numerikus integrálásával a 19.4. fejezetben részletesen foglalkozunk (ld. 926. old.). Általában akkor van arra szükség, hogy az $y' = f(x, y)$ egyenletet numerikusan oldjuk meg, ha nem tartozik az eddig említett típusok valamelyikébe vagy ha $f(x, y)$ túlságosan bonyolult alakú. Ez különösen akkor fordul elő, ha $f(x, y)$ nem lineáris y-ban.

9.1.2. Magasabb rendű differenciálegyenletek, differenciálegyenlet-rendszerek

9.1.2.1. Alapvető fogalmak

1. A megoldás létezése és egyértelműsége

1. Az átviteli elv Minden

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.20a}$$

n-edrendű explicit differenciálegyenlet az

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)} \tag{9.20b}$$

változók bevezetésével n elsőrendű

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{9.20c}$$

differenciálegyenletre vezethető vissza.

2. A megoldásrendszer létezése Az (9.20c)-nél általánosabb n egyenletből álló

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.21a}$$

differenciálegyenlet-rendszernek az $y_i(x_0) = {y_i}^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kezdeti feltételek mellett van, mégpedig pontosan egy, az $x_0 - h < x < x_0 + h$ intervallumon folytonos függvényekből álló

$$y_i = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{9.21b}$$

megoldásrendszere, ha az $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ függvények folytonosak és kielégítik az alábbi LIPSCHITZ-feltételt.

3. Lipschitz-feltétel Az f_i függvényeknek egy közös K állandóval eleget kell tenniük az

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \ldots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \\ \leq K\,(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \cdots + |\Delta y_n|) \end{aligned} \tag{9.22a}$$

egyenlőtlenségeknek, ahol x, y_i és $y_i + \Delta y_i$ a kezdeti értékek egy bizonyos környezetéből valók (lásd 496. old.). Ebből (9.20a)-ra az következik, hogy ha az $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ függvény folytonos és teljesül rá a LIPSCHITZ-feltétel (9.22a), akkor az

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.22b}$$

egyenletnek pontosan egy olyan megoldása van, amely $x = x_0$ esetén kielégíti az $y = y_0$, $y' = {y_0}'$,..., $y^{(n-1)} = {y_0}^{(n-1)}$ kezdeti feltételeket, és az $(n-1)$-edik rendig bezárólag folytonos deriváltakkal rendelkezik.

2. Általános megoldás

1. A (9.22b) differenciálegyenlet általános megoldása n tetszőleges állandót tartalmaz:

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,. \tag{9.23a}$$

2. Geometriai szempontból az (9.23a) egyenlet egy n-paraméteres integrálgörbe-sereget definiál. Ezen integrálgörbék mindegyikét, azaz a megfelelő partikuláris megoldások grafikonját a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ állandóknak megfelelő értékeket adva kaphatjuk meg. Amennyiben a partikuláris megoldás kielégíti a fent megadott kezdeti feltételeket, akkor a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ értékeket a következő egyenletekből kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} y(x_0, C_1, \ldots, C_n) &= y_0\,, \\ \left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} &= {y_0}'\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} &= {y_0}^{(n-1)}\,. \end{aligned} \tag{9.23b}$$

Ha egy bizonyos tartományban ezek az egyenletek ellentmondásosak, akkor nem beszélhetünk ebben a tartományban általános megoldásról, azaz a tetszőleges állandók nem adhatók meg egymástól függetlenül.

3. A (9.21a) rendszer megoldása is n független állandót tartalmaz. Ez az általános megoldás kétféle módon kapható meg. Vagy kifejezzük az ismeretlen függvényeket:

$$y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n),\ \ y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n) \tag{9.24a}$$

vagy pedig kifejezzük a tetszőleges állandókat:

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1,\ \ \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \ldots, \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n\,. \tag{9.24b}$$

(9.24b) esetében minden

$$\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i \tag{9.24c}$$

alakú összefüggés a (9.21a) rendszer *első integrál*ja. Az első integrált az általános integráltól függetlenül a (9.24c) típusú összefüggés definiálja. Itt abból indulunk ki, hogy ha $y_1, y_2, \ldots, y_n$ helyébe egy adott rendszer valamely partikuláris megoldását helyettesítjük a hozzátartozó C_i állandókkal, akkor (9.24c) azonossággá válik.
Ha valamely (9.24c) alakú első integrál ismert, akkor a $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ függvény kielégíti a következő

parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \cdots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0\,. \tag{9.24d}$$

Fordítva is igaz: a (9.24d) differenciálegyenlet minden $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ megoldása a (9.21a) rendszer egy első integrálját adja (9.24c) alakban. A (9.21a) rendszer általános integrálját a (9.21a) rendszer n első integráljából kaphatjuk, ahol a megfelelő $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények lineárisan függetlenek (lásd 509. old.).

9.1.2.2. A rendszám csökkentése

Az

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{9.25}$$

n-edrendű differenciálegyenlet integrálásának egyik legfontosabb módszere a változóknak olyan helyettesítése, amelynek révén egyszerűbb differenciálegyenleteket kapunk, különösen akkor, ha a származtatott egyenletek alacsonyabb rendűek. Három esetet különböztetünk meg:

1. $f = f(y, y', \ldots, y^{(n)})$, x nem lép fel explicit módon:

$$f\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,. \tag{9.26a}$$

A

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \tag{9.26b}$$

helyettesítéssel a differenciálegyenlet rendjét n-ről $(n-1)$-re csökkenthetjük.

■ Eggyel csökken a rend az $yy'' - y'^2 = 0$ differenciálegyenlet esetében, ha az $y' = p, p\,dp/dy = y''$ helyettesítést alkalmazzuk, amiből $ypdp/dy - p^2 = 0$ és $y\,dp/dy - p = 0$ majd $p = Cy = dy/dx$, $y = C_1e^{Cx}$ következik. A p-vel való egyszerűsítéssel nem vesztünk megoldást, ugyanis $p = 0$ olyan megoldás, amelyet az $y = C_1$ általános megoldás $C = 0$ esetén tartalmaz.

2. $f = f(x, y', \ldots, y^{(n)})$, y nem lép fel explicit módon:

$$f\left(x, y', ..., y^{(n)}\right) = 0\,. \tag{9.27a}$$

A differenciálegyenlet rendjét az

$$y' = p \tag{9.27b}$$

helyettesítéssel n-ről $(n-1)$-re csökkenthetjük. Ha a kiindulási egyenletben az első k deriváltat tartalmazó tag hiányzik, akkor a következő helyettesítést kell alkalmazni:

$$y^{(k+1)} = p\,. \tag{9.27c}$$

■ Az $y''-xy'''+(y''')^3 = 0$ differenciálegyenlet rendjét az $y'' = p$ helyettesítéssel csökkenthetjük, így egy $p - x\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3 = 0$ CLAIRAUT-féle differenciálegyenletetre jutunk, amelynek általános megoldása: $p = C_1x - {C_1}^3$. Ebből azt kapjuk, hogy $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{{C_1}^3x^2}{2} + C_2x + C_3$. A CLAIRAUT-féle differenciálegyenlet $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}$ szinguláris megoldásából az eredeti differenciálegyenlet $y = \frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2} + C_1x + C_2$ szinguláris megoldását kapjuk.

3. $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ homogén függvény (lásd 126. old.) y, y', y'',…,$y^{(n)}$-ben:

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{9.28a}$$

A differenciálegyenlet rendjét a

$$z = \frac{y'}{y}, \quad \text{azaz} \quad y = e^{\int z\,dx} \tag{9.28b}$$

helyettesítéssel csökkenthetjük.

■ A $yy'' - y'^2 = 0$ differenciálegyenletet a $z = y'/y$ helyettesítéssel a $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{yy'' - y'^2}{y^2}$ alakra hozzuk.

Ekkor eggyel csökken a differenciálegyenlet rendje. Ebből azt kapjuk, hogy $z = C_1$, amiből $\ln y = C_1 x + C_2$ vagy $y = Ce^{C_1 x}$ következik, ahol $\ln C = C_2$.

4. $f = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$-ből $y^{(n)}$ kifejezhető egyedül x függvényeként:

$$y^{(n)} = f(x)\,. \tag{9.29a}$$

Az általános megoldást n-szeri integrálással kapjuk:

$$c_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_{n-1}(x-x_0) + c_n + \psi(x), \tag{9.29b}$$

ahol

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)\,(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt \tag{9.29c}$$

tehát az n-szeres integrálás kifejezhető egyetlen integrálással.

9.1.2.3. n-edrendű lineáris differenciálegyenletek

1. Osztályozás

n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük az

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = F \tag{9.30}$$

alakú egyenletet. Az F függvényről és az a_i együtthatókról feltesszük, hogy a vizsgált intervallumon az x független változó folytonos függvényei. Amennyiben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstans függvények, akkor *állandó együtthatójú differenciálegyenlet*ről beszélünk. Ha $F \equiv 0$, akkor *homogén lineáris differenciálegyenlet*ről, ha $F \not\equiv 0$, akkor *inhomogén* egyenletről beszélünk.

2. Alaprendszer

Egy homogén lineáris differenciálegyenlet $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldásainak egy rendszerét *alaprendszer*nek nevezzük, ha ezek a függvények *lineárisan függetlenek*, azaz egy $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ lineáris kombinációjuk csak $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ esetén tűnik el azonosan az adott intervallumban. Egy homogén lineáris differenciálegyenlet $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldásai pontosan akkor alkotnak alaprendszert, ha a

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \tag{9.31}$$

WRONSKI-*determináns* nullától különböző. Egy homogén lineáris differenciálegyenlet minden megoldásrendszerére igaz a LIOUVILLE-*formula*:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx\right)\,. \tag{9.32}$$

(9.32)-ból következik, hogy a WRONSKI-determináns 0 csak úgy lehet, ha azonosan zérus. Ez a következőt jelenti: egy homogén lineáris differenciálegyenlet $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldásai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha az adott intervallum egyetlen x_0 pontjában is $W(x_0) = 0$. Ha azonban az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldások alaprendszert alkotnak, akkor a homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása (9.30):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n\,. \tag{9.33}$$

3. A rendszám csökkentése

Ha ismert egy homogén differenciálegyenlet y_1 partikuláris megoldása, akkor az

$$y = y_1(x)u(x) \tag{9.34}$$

helyettesítéssel csökkenthető az egyenlet rendje és minden további megoldást, egy az $u'(x)$-ban $n-1$-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletből kaphatunk meg.

4. A szuperpozíció elve

Ha y_1 és y_2 az (9.30) differenciálegyenlet egy-egy megoldása, ahol a jobb oldalak F_1, ill. F_2 , akkor $y = y_1+y_2$ összegük is ugyanannak a differenciálegyenletnek a megoldása, ahol a jobb oldal $F = F_1+F_2$. Ebből következik, hogy egy inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározásához elegendő, ha a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet valamely partikuláris megoldását.

5. A felbontási tétel

Ha a (9.30) inhomogén egyenlet együtthatói valós számok és a jobb oldal $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$ alakú, ahol F_1 és F_2 valós függvény, akkor az $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$ megoldás is komplex függvény. Ezeknek a komplex függvényeknek a valós és képzetes része két, F_1 és F_2 jobb oldalú, (9.30) inhomogén differenciálegyenlet y_1 és y_2 valós megoldása.

6. A (9.30) inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kvadratúrákkal

Ha ismert a megfelelő homogén differenciálegyenlet $\{y_i\}$ alaprendszere, akkor az eredeti inhomogén egyenlet megoldására a következő két módszer áll rendelkezésünkre:

1. Az állandók variálásának módszere Írjuk fel a keresett megoldást az

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \tag{9.35a}$$

alakban. A $C_1, C_2, \ldots, C_n$ együtthatókat nem számoknak, hanem x függvényeinek tekintjük. Ezután C_i függvények deriváltjait a következő egyenletrendszerből állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n &= 0\,, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' &= 0\,, \qquad (9.35b) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} &= F\,, \qquad (9.35c) \end{aligned}$$

amit úgy kaptunk, hogy y egymásutáni deriváltjait kiszámoljuk, de csak azért, hogy egy-egy azonos szerkezetű részszummáról további kikötésként előírjuk, hogy azonosan 0 legyen. Így a (9.35a)-nak (9.30)-ba történő behelyettesítésével adódó eredeti egyenlet bal oldala is hasonló, „egyszerű szerkezetű", mint az előzőeké, mert a kezdetben még ott lévő n számú szumma sorban egyenlő (9.30) bal oldalának $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y helyébe történő behelyettesítésével adódó értékével, azaz 0-val. Így (9.35b) $W(x)(C_1', C_2', \ldots, C_n') = (0, 0, \ldots, F)$ alakban is felírható, amelyből $(C_1', C_2', \ldots, C_n') = W^{-1}(x)(0, 0, \ldots, F)$ ($W(x)$ most a $0 \neq$ WRONSKI-determinánshoz tartozó mátrixot jelöli). Ha ezt megoldjuk, megkapjuk a C_1', C_2', $\ldots$, C_n' függvényeket, amelyek integráljai a keresett $C_1, C_2, \ldots, C_n$ függvények.

■ $y'' + \dfrac{x}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x}y = x - 1\,.$

Az $x > 1$, ill. az $x < 1$ intervallumokon az együtthatók folytonosak. Először az $\overline{y}'' + \dfrac{x}{1-x}\overline{y}' - \dfrac{1}{1-x}\overline{y} = 0$ homogén egyenletet oldjuk meg. Az egyik partikuláris megoldás: $\varphi_1 = e^x$. A $\varphi_2 = e^x u(x)$ helyettesítéssel (tehát most ráadásul a másodrendű egyenlet kétdimenziós megoldáshalmaza másik bázismegoldását is az ue^x megoldássereg állandójának variálásával határozzuk meg) $u'(x) = v(x)$ esetén a $v' + \left(1 + \dfrac{1}{1-x}\right)v = 0$ differenciálegyenletet kapjuk. Ennek a differenciálegyenletnek egy megoldása: $v(x) = (1-x)e^{-x}$ és így $u(x) = \displaystyle\int v(x)\,dx = \int (1-x)e^{-x}\,dx = xe^{-x}$. Ekkor a második megoldás:

$\varphi_2 = x$. Ezért a homogén egyenlet általános megoldása: $\overline{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x$. Az inhomogén egyenlet keresett $y(x)$ megoldására az állandók variálásával azt kapjuk, hogy

$$y(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)x\,,$$

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)x = 0\,,$$

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x) = x - 1\,,$$

tehát

$$u_1'(x) = xe^{-x}\,, u_2'(x) = -1\,, \quad \text{azaz} \quad u_1(x) = -(1+x)e^{-x} + C_1\,,\ \ u_2(x) = -x + C_2\,.$$

Így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = -(1+x) + C_1 e^x + (C_2 - x)x = -(1+x^2) + C_1^* e^x + C_2^* x\,.$$

2. Cauchy módszere A (9.30)-hoz tartozó homogén egyenlet

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{9.36a}$$

általános megoldásában az α szabadon választható paramétertől függő együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy fennálljanak az $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0, \ldots, y^{(n-2)}(\alpha) = 0$, $y^{(n-1)}(\alpha) = F(\alpha)$ feltételek. Ha $\varphi(x, \alpha)$ a homogén egyenlet így kapott megoldása, akkor

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha \tag{9.36b}$$

a (9.30) inhomogén differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldása, amely $x = x_0$-ban $(n-1)$-edik rendig bezárólag minden deriváltjával együtt eltűnik.

■ Az **1.** pontban az állandók variálásával megoldott differenciálegyenlet esetén a homogén esetben $y = C_1 e^x + C_2 x$, ami abból adódik, hogy $y(\alpha) = C_1 e^\alpha + C_2 \alpha = 0$, $y'(\alpha) = C_1 e^\alpha + C_2 = \alpha - 1$ és ezzel $\varphi(x, \alpha) = \alpha e^{-\alpha} e^x - x$, tehát $c_1(\alpha) = \alpha e^{-\alpha}$, $c_2(\alpha) = -1$, tehát az inhomogén differenciálegyenlet $y(x)$ partikuláris megoldása az $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ feltétel figyelembe vételével:
$y(x) = \int_{x_0}^{x} (\alpha e^{-\alpha} e^x - x)\, d\alpha = (x_0+1)e^{x-x_0} + (x_0-1)x - x^2 - 1$. Innen az inhomogén differenciálegyenlet $y(x) = C_1^* e^x + C_2^* x - (x^2+1)$ általános megoldását is megkaphatjuk.

9.1.2.4. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldása

1. Az operátor-írásmód

A (9.30) differenciálegyenletet szimbolikusan a

$$P_n(D)y \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n\right) y = F \tag{9.37a}$$

alakba írhatjuk, ahol D egy differenciáloperátor:

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \ldots, D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}\,. \tag{9.37b}$$

Ha az a_i együtthatók számok, akkor $P_n(D)$ a D operátor egy n-edrendű polinomja.

2. A homogén egyenlet

Az $F = 0$ jobb oldalú (9.37a) homogén differenciálegyenlet, azaz

$$P_n(D)y = 0 \tag{9.38a}$$

megoldásához szükség van a

$$P_n(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0\,. \tag{9.38b}$$

karakterisztikus egyenlet (lásd 278. old.) $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gyökeinek meghatározására. Minden r_i gyök esetén $e^{r_i x}$ az $P_n(D)y = 0$ egyenlet egy megoldása. Ha egy r_i gyök multiplicitása k, akkor $xe^{r_i x}$, $x^2 e^{r_i x}$,

$\ldots$, $x^{k-1}e^{r_i x}$ szintén megoldások. Ezeknek a megoldásoknak a lineáris kombinációja a homogén differenciálegyenlet

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + e^{r_i x}\left(C_i + C_{i+1}x + \cdots + C_{i+k-1}x^{k-1}\right) + \cdots . \tag{9.38c}$$

általános megoldását adja, ami ugyanígy tovább bővül, ha a többi gyök multiplicitása is egynél nagyobb. Ha minden a_i valós szám, akkor a karakterisztikus egyenletnek páros számú, konjugált párokból álló komplex gyöke van. Ekkor, ha pl. $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ és $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, akkor az általános megoldás megfelelő tagjaiban $e^{r_1 x}$ és $e^{r_2 x}$ helyébe $e^{\alpha x}\cos\beta x$-t és $e^{\alpha x}\sin\beta x$-et kell írni. Ekkor $C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ alakú kifejezéseket kapunk, amelyek $A\cos(\beta x + \varphi)$ alakba is írhatók, ahol A és φ konstansok.

■ Az $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete: $r^6 + r^4 - r^2 - 1 = 0$, melynek gyökei: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_{3,4} = \mathrm{i}$, $r_{5,6} = -\mathrm{i}$. Az általános megoldás két alakban is felírható:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x)\cos x + (C_5 + C_6 x)\sin x\,,$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A_1\cos(x + \varphi_1) + x A_2\cos(x + \varphi_2)\,.$$

3. Hurwitz tétele

Gyakorlati alkalmazásoknál, pl. a rezgőmozgás elméletében, nagy jelentőséggel bír az állandó együtthatójú homogén differenciálegyenlet megoldásai aszimptotikájának vizsgálata, azaz pl. annak eldöntése, hogy a megoldás $x \to +\infty$ esetén zérushoz konvergál-e. Ez utóbbi akkor áll fenn, ha az

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \quad (a_0 > 0) \tag{9.39a}$$

karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. Ez viszont a HURWITZ-*tétel* szerint pontosan akkor igaz, ha a következő determinánsok pozitívak

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{(ahol } a_m = 0 \quad m > n \quad \text{esetén).} \tag{9.39b}$$

4. Az állandó együtthatós inhomogén egyenlet

Az inhomogén egyenletet megoldására az eddig említett mindhárom módszer alkalmas: a CAUCHY-módszer, az operátormódszer (lásd 542. old.) vagy az állandók variálásának módszere. Ha (9.30) jobb oldala speciális alakú, akkor ún. próbafüggvény-alakban igen könnyű partikuláris megoldás meghatározása.

1. alak: $\boldsymbol{F(x) = Ae^{\alpha x}, \quad P_n(\alpha) \neq 0.}$ (9.40a)

Az

$$y = \frac{Ae^{\alpha x}}{P_n(\alpha)}\,. \tag{9.40b}$$

függvény partikuláris megoldás. Ha α a karakterisztikus egyenlet m-szeres gyöke, azaz ha

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(m-1)}(\alpha) = 0\,, \quad \text{de} \quad P_n^{(m)}(\alpha) \neq 0\,, \tag{9.40c}$$

akkor $y = \dfrac{Ax^m e^{\alpha x}}{P_n^{(m)}(\alpha)}$ partikuláris megoldás. Ezeket a formulákat a felbontási tétel segítségével felhasználhatjuk, ha

$$F(x) = Ae^{\alpha x}\cos\omega x \quad \text{vagy} \quad Ae^{\alpha x}\sin\omega x. \tag{9.40d}$$

A megfelelő partikuláris megoldások ugyanazon differenciálegyenlet megoldásának valós-, ill. képzetes részeiből tevődnek össze, ahol a jobb oldal nem más, mint

$$F(x) = Ae^{\alpha x}(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x) = Ae^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)x}. \tag{9.40e}$$

■ **A:** Az $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ differenciálegyenlet esetében az operátor-polinom a következő: $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$, ennek deriváltja: $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$, így a megoldás: $y = -\dfrac{xe^{2x}}{2}$.

■ **B:** Az $y'' + y' + y = e^x \sin x$ differenciálegyenlet esetén az operátoregyenlet a következő: $(D^2 + D + 1)y = e^{(1+\mathrm{i})x}$. Ennek $y = \dfrac{e^{(1+\mathrm{i})x}}{(1+\mathrm{i})^2 + (1+\mathrm{i}) + 1} = \dfrac{e^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x)}{2 + 3\mathrm{i}}$ megoldása segítségével kapjuk a differenciálegyenlet $y_1 = \dfrac{e^x}{13}(2\sin x - 3\cos x)$ partikuláris megoldását; itt y_1 y képzetes része.

2. alak: $F(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$, $Q_n(x)$ n-edfokú polinom. (9.41)

Ha α a karakterisztikus egyenlet m-szeres gyöke, $R(x)$ egy x^m-mel szorzott n-edfokú polinom, akkor a partikuláris megoldást mindig kereshetjük $y = R(x)e^{\alpha x}$ alakban. Ha ezen ismeretlen együtthatójú $R(x)$ polinomot helyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor az ismeretlen együtthatók egy lineáris egyenletrendszer segítségével meghatározhatók.

Ezt a módszert különösen abban az esetben használjuk, ha $F(x) = Q_n(x)$ ($\alpha = 0$) és $F(x) = Q_n(x)e^{rx}\cos\omega x$ vagy ha $F(x) = Q_n(x)e^{rx}\sin\omega x$ ($\alpha = r \pm \mathrm{i}\omega$). Ekkor a megoldást az $y = x^m e^{rx}[M_n(x)\cos\omega x + N_n(x)\sin\omega x]$ alakban keressük.

■ Az $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 6x + 2x\sin x$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = -1$. A szuperpozíció elve miatt (lásd 510. old.) az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásait úgy kaphatjuk meg, hogy rendre a jobb oldal egyes tagjait vesszük figyelembe. Ha az első tagot vesszük figyelembe és $y_1 = x^2(ax + b)$-et helyettesítünk a $12a + 2b + 6ax = 6x$ jobb oldalba, akkor azt kapjuk, hogy $a = 1$ és $b = -6$. Ha a második tagot vesszük figyelembe, akkor ugyanezzel az eljárással az $y_2 = (cx + d)\sin x + (fx + g)\cos x$ függvényhez jutunk. Az együtthatókat összevetve azt kapjuk, hogy $(2g + 2f - 6c + 2fx)\sin x - (2c + 2d + 6f + 2cx)\cos x = 2x\sin x$, tehát $c = 0$, $d = -3$, $f = 1$, $g = -1$. Így az általános megoldás: $y = c_1 + c_2x - 6x^2 + x^3 + (c_3x + c_4)e^{-x} - 3\sin x + (x-1)\cos x$.

3. Az Euler-féle differenciálegyenlet:

A

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(cx + d)^k y^{(k)} = F(x) \tag{9.42a}$$

EULER-féle differenciálegyenlet a

$$cx + d = e^t \tag{9.42b}$$

helyettesítéssel állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletre vezethető vissza.

■ Az $x^2y'' - 5xy' + 8y = x^2$ differenciálegyenlet az EULER-féle differenciálegyenlet egy speciális esete ($n = 2$). Az $x = e^t$ helyettesítéssel az **A** példában (513. old.) vizsgált $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = e^{2t}$ differenciálegyenlet lineáris differenciálegyenletre vezethető vissza. Így az általános megoldás: $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - \dfrac{t}{2}e^{2t} = C_1x^2 + C_2x^4 - \dfrac{x^2}{2}\ln x$.

9.1.2.5. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

1. Normál alak

*Normál alakú*nak nevezzük a következő elsőrendű, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszert:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n\,, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.43a}$$

Az ilyen rendszerek általános megoldásának meghatározásához először az

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0 \tag{9.43b}$$

karakterisztikus egyenlet megoldása szükséges. Az egyenlet minden, 1 multiplicitású r_i gyökéhez partikuláris megoldások egy

$$y_1 = A_1 e^{r_i x}\,, \quad y_2 = A_2 e^{r_i x}\,, \dots, y_n = A_n e^{r_i x}\,, \tag{9.43c}$$

rendszere tartozik, ahol az A_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ együtthatók az

$$\begin{aligned} &(a_{11}-r_i)A_1 + a_{12}A_2 + \dots + a_{1n}A_n = 0\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \dots + (a_{nn}-r_i)A_n = 0 \end{aligned} \tag{9.43d}$$

homogén lineáris, 0 determinánsú egyenletrendszer megoldásai. Mivel ezzel a módszerrel csak az A_k együtthatók arányait lehet meghatározni (lásd triviális megoldás és alaprendszer 273. old.), ezért az így nyert partikuláris megoldások minden r_i esetén egy paramétert tartalmaznak. Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei páronként különbözőek, akkor ezek a partikuláris megoldások n paramétert tartalmaznak úgy, hogy ez a rendszer általános megoldását adja. Ha valamely r_i a karakterisztikus egyenlet m-szeres gyöke, akkor ehhez a gyökhöz partikuláris megoldások egy

$$y_1 = A_1(x) e^{r_i x}\,, \quad y_2 = A_2(x) e^{r_i x}\,, \dots, y_n = A_n(x) e^{r_i x}\,, \tag{9.43e}$$

rendszere tartozik, ahol $A_1(x), \dots, A_n(x)$ legfeljebb $m-1$-edfokú polinomok. Ezeket az ismeretlen együtthatójú függvényeket a differenciálegyenlet-rendszerbe helyettesítjük, majd osztunk $e^{r_i x}$-szel, s végül x megfelelő hatványainak a bal és a jobb oldalon lévő együtthatóit egyenlővé tesszük. Így egy lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlen együtthatókra, amelyek közül m szabadon választható, a többi ezek segítségével fejezhető ki. Ezért a megoldás m szabadon választott paramétert tartalmaz. Ha például a (9.43a) rendszer szimmetrikus, azaz, ha $a_{ik} = a_{ki}$, akkor elég, ha az $A_i(x)$ polinomokat konstansnak tekintjük. Ha a karakterisztikus egyenletnek komplex gyökei vannak, akkor az általános megoldás megfelelő tagjai éppúgy valós alakra hozhatók, mint ahogy azt a kontans együtthatójú differenciálegyenlet esetében tárgyaltuk (lásd 511. old.).

■ Az $y_1' = 2y_1 + 2y_2 - y_3$, $y_2' = -2y_1 + 4y_2 + y_3$, $y_3' = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3$ rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0\,.$$

Az $r_1 = 6$ egyszeres multiplicitású gyök esetén azt kapjuk, hogy $-4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $-2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0$, $-3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0$. Ebből az következik, hogy $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}A_3 = C_1$, $y_1 = 0$, $y_2 = C_1 e^{6x}$, $y_3 = 2C_1 e^{6x}$. Az $r_2 = 1$ többszörös multiplicitású gyök esetén azt kapjuk, hogy $y_1 = (P_1 x + Q_1)e^x$, $y_2 = (P_2 x + Q_2)e^x$, $y_3 = (P_3 x + Q_3)e^x$. Helyettesítsünk be az egyenletbe:

$$P_1 x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3)x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3)\,,$$

$$P_2 x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3)x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3)\,,$$

$$P_3 x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3)x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3)\,,$$

amiből az következik, hogy $P_1 = 5C_2$, $P_2 = C_2$, $P_3 = 7C_2$, $Q_1 = 5C_3 - 6C_2$, $Q_2 = C_3$, $Q_3 = 7C_3 - 11C_2$. Tehát az általános megoldás: $y_1 = (5C_2 x + 5C_3 - 6C_2)e^x$, $y_2 = C_1 e^{6x} + (C_2 x + C_3)e^x$, $y_3 = 2C_1 e^{6x} + (7C_2 x + 7C_3 - 11C_2)e^x$.

2. Elsőrendű homogén rendszerek

Az ilyen rendszerek általános alakja:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} {y_k}' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{9.44a}$$

Amennyiben a determináns nem tűnik el, azaz

$$\det |a_{ik}| \neq 0\,, \tag{9.44b}$$

akkor a (9.44a) rendszer a (9.43a) normál alakra hozható; $\det(a_{ik}) = 0$ esetén külön vizsgálatra van szükség (lásd [9.26]).

A megoldás általános alakja ugyanazzal a módszerrel írható fel, mint amit a normál alaknál kell alkalmazni. Ekkor a karakterisztikus egyenlet a következő alakú:

$$\det(a_{ik} r + b_{ik}) = 0\,. \tag{9.44c}$$

A (9.43c) megoldásban fellépő, az r_j gyököknek megfelelő A_i együtthatók ebben az esetben a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} r_j + b_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.44d}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásai; egyébként ugyanazt a megoldási módszert kell alkalmazni, mint a normálforma tárgyalásakor.

■ Az $5{y_1}' + 4y_1 - 2{y_2}' - y_2 = 0$, ${y_1}' + 8y_1 - 3y_2 = 0$ differenciálegyenlet-rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 5r + 4 & -2r - 1 \\ r + 8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0\,, \quad r_1 = 1\,, \quad r_2 = -2\,.$$

Az A_1 és az A_2 együtthatót $r_1 = 1$ esetén a $9A_1 - 3A_2 = 0$, $9A_1 - 3A_2 = 0$, ill. az $A_2 = 3A_1 = 3C_1$ egyenletek megoldásával határozhatjuk meg. $r_2 = -2$ esetén hasonlóan: $\overline{A}_2 = 2\overline{A}_1 = 2C_2$. Így az általános megoldás: $y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^{x} + 2C_2 e^{-2x}$.

3. Elsőrendű inhomogén rendszerek

Az ilyen rendszerek általános alakja:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} {y_k}' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{9.45}$$

1. A szuperpozíció elve: Ha ${y_j}^{(1)}$ és ${y_j}^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ olyan inhomogén rendszerek megoldásai, amelyek csak az $F_i^{(1)}$, ill. $F_i^{(2)}$ jobb oldalukban különböznek egymástól, akkor $y_j = {y_j}^{(1)} + {y_j}^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ is megoldása a rendszernek, ahol a jobb oldalakra $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$ teljesül. Ezért az inhomogén rendszer általános megoldásának meghatározásához elegendő, ha az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldását a megfelelő homogén rendszer általános megoldásához adjuk.

2. Az állandók variálása most is használható, ha pl. az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer egy partikuláris megoldását szeretnének meghatározni. Ehhez a homogén rendszer általános megoldását az inhomogén rendszerbe kell helyettesíteni.A $C_1, C_2, \ldots, C_n$ állandókat $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ függvényeknek tekintjük. Az ${y_k}'$ deriváltakat tartalmazó tagokban a $C_k(x)$ függvények deriváltjai is fellépnek. Az adott rendszerbe való helyettesítéssel csak ezek a tagok maradnak meg, mert a többiek egymást kölcsönösen kiejtik, ugyanis a feltételek szerint $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a homogén rendszer megoldásai. Így a ${C_k}'(x)$-kre egy inhomogén lineáris egyenletrendszert kapunk, amit meg kell oldani. n-szeres integrálás után a következő függvényeket kapjuk: $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$. Ha ezeket a függvényeket a homogén rendszer megoldásaiban, a konstansok helyébe helyettesítjük, akkor az inhomogén rendszer keresett partikuláris megoldását kapjuk.

■ Az $5{y_1}' + 4y_1 - 2{y_2}' - y_2 = e^{-x}$, és az ${y_1}' + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$ egyenletből álló inhomogén differenciálegyenlet-rendszer homogén rendszerének általános megoldása (lásd 515. old.): $y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$,

$y_2 = 3C_1e^x + 2C_2e^{-x}$. Ha behelyettesítünk az adott egyenletbe, majd C_1-et és C_2-t x függvényének tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy $5{C_1}'e^x + 5{C_2}'e^{-2x} - 6{C_1}'e^x - 4{C_2}'e^{-2x} = e^{-x}$, ${C_1}'e^x + {C_2}'e^{-2x} = 5e^{-x}$ vagy ${C_2}'e^{-2x} - {C_1}'e^{-x} = e^{-x}$, ${C_1}'e^x + {C_2}'e^{-2x} = 5e^{-x}$. Ebből az következik, hogy $2{C_1}'e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{konstans}$, $2{C_2}'e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + \text{konstans}$. Mivel partikuláris megoldást keresünk, minden konstans nulla lesz, amiből azt kapjuk, hogy $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$. Így az általános megoldás: $y_1 = 2e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1e^x + 2C_2e^{-2x}$.

3. A határozatlan együtthatók módszere (próbafüggvény-módszer) különösen akkor alkalmazható előnyösen, ha a jobb oldalon speciális alakú függvények, mint pl. $Q_n(x)e^{\alpha x}$ állnak; az n-edrendű differenciálegyenlet esetében leírtakhoz hasonlóan kell eljárni (lásd 513. old.). Ha a megoldást nem zárt alakban, hanem függvénysor alakjában kapjuk meg, akkor először azt kell ellenőrizni, hogy konvergál-e az adott intervallumon vagy az adott pont valamely környezetében, és utána természetesen azt is, hogy tényleg megoldás-e.

4. Másodrendű rendszerek

Az eddig megismert módszerek magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre is átvihetők. A

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}{y_k}'' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}{y_k}' + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.46}$$

rendszer esetében $y_i = A_ie^{r_ix}$ alakú partikuláris megoldások is megkaphatók. Ehhez az $\det(a_{ik}r^2 + b_{ik}r + c_{ik}) = 0$ karakterisztikus egyenletből r_i-t, majd a megfelelő lineáris egyenletrendszerből A_i-t kell meghatározni.

9.1.2.6. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

A differenciálegyenleteknek ehhez az osztályához sok, a gyakorlatban is használatos és ebben a fejezetben tárgyalt speciális alakú differenciálegyenlet tartozik. Részletesen lásd [9.26].

1. Általános módszerek

1. Az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x) \tag{9.47a}$$

egyenlet.

1. A megfelelő homogén differenciálegyenlet ($F(x) \equiv 0$) általános megoldása:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2\,, \tag{9.47b}$$

ahol y_1 és y_2 ennek az egyenletnek két, lineárisan független partikuláris megoldása (lásd 509. old.). Ha ismert az $y_1 \neq 0$ partikuláris megoldás, akkor bármely ilyen intervallumon egy további y_2 megoldást határozhatunk meg a LIOUVILLE-formula (9.32) következményeként adódó

$$y_2(x) = Ay_1 \int \frac{\exp\left(-\int p\,dx\right)}{{y_1}^2}\,dx \tag{9.47c}$$

egyenletből, ahol A tetszőlegesen választható; a 2 integrációs út alsó határa egy-egy tetszőleges pont, a felső határaik x-szel egyenlők.

2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y = \frac{1}{A}\int_{x_0}^{x} F(\xi)\exp\left(\int p(\xi)\,d\xi\right)[y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)]\,d\xi \tag{9.47d}$$

formula segítségével kaphatjuk meg, ahol y_1 és y_2 a megfelelő homogén differenciálegyenlet két partikuláris megoldása.

3. Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével is meghatározhatjuk (lásd 510. old.).

2. Az

$$s(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x) \tag{9.48a}$$

egyenlet, ahol a szereplő $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ és $F(x)$ függvények polinomok vagy olyan függvények, amelyek egy bizonyos tartományban $(x - x_0)$ hatványai szerinti sorba fejthetők, ahol $s(x_0) \neq 0$. Ekkor ennek a differenciálegyenletnek a megoldásai szintén $(x - x_0)$ hatványai szerinti sorba fejthetők, amelyek ugyanabban a tartományban konvergálnak. A határozatlan együtthatók módszerével a megoldást az

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{9.48b}$$

hatványsor alakjában keressük, majd ezt az alakot a (9.48a) differenciálegyenletbe helyettesítjük és $(x - x_0)$ azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük.

■ Oldjuk meg az $y'' + xy = 0$ differenciálegyenletet! Legyen $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$ és $y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots$. Ekkor azt kapjuk, hogy $2a_2 = 0$, $6a_3 + a_0 = 0, \ldots$. Ezeknek az egyenleteknek a megoldásai: $a_2 = 0$, $a_3 = -\dfrac{a_0}{2 \cdot 3}$, $a_4 = -\dfrac{a_1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = 0$, $\ldots$, így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása: $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \cdots\right) + a_1\left(x - \dfrac{x^4}{3 \cdot 4} + \dfrac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \cdots\right)$.

3. Az

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{9.49a}$$

egyenletet — mint (9.48a) speciális esetét — a határozatlan együtthatók módszerével oldhatjuk meg, ha $p(x)$-et és $q(x)$-et x hatványai szerinti konvergens hatványsorba lehet fejteni. A megoldások

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots), \tag{9.49b}$$

alakúak (ami r-től függően hatványsor vagy függvénysor), ahol az r első nem feltétlenül eltűnő kitevőt meghatározó *indexegyenlet*:

$$r(r - 1) + p(0)r + q(0) = 0. \tag{9.49c}$$

Ha ennek az egyenletnek két különböző gyöke van és a gyökök különbsége nem egész szám, akkor ezen gyökökkel (9.49a) két lineárisan független megoldását kapjuk. Ellenkező esetben a határozatlan együtthatók módszerével csak egy megoldást kapunk. Ezen $y_1(x)$-ből $y(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{i=1}^{\infty} b_ix^{r+i}$ alakban a határozatlan együtthatók módszerével már előállítható egy második megoldás. Ha pedig az indexegyenletnek nincs valós gyöke, akkor (9.49a)-nak nincs (9.49b) alakú megoldása.

■ A — (9.49a) speciális eseteként adódó — (9.50a) BESSEL-féle differenciálegyenlet esetében a határozatlan együtthatók módszerével a következő alakú megoldást kapjuk: $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{n+2k}$ $(a_0 \neq 0)$, amely egy konstans szorzó erejéig megegyezik $J_n(x)$-nel ((9.51a)). Mivel $\exp\left(-\int p\,dx\right) = \dfrac{1}{x}$ egy további megoldása az egyenletnek a (9.47c) formula alapján felírt függvény:

$$y_2 = Ay_1\int \frac{dx}{x \cdot x^{2n}\left(\sum a_kx^{2k}\right)^2} = Ay_1\int \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^{2k}}{x^{2n+1}}dx = By_1\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} d_kx^{2k}.$$

Itt már nem könnyű a c_k és d_k együtthatókat az a_k együtthatók segítségével meghatározni. Az utóbbi kifejezés segítségével azonban mégis lehetőség van arra, hogy a határozatlan együtthatók módszerével megkapjuk a megoldást. Nyilvánvalóan ez nem más, mint $Y_n(x)$ hatványsora (9.51c).

2. A Bessel-féle differenciálegyenlet

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\,. \tag{9.50a}$$

1. Az indexegyenlet ebben az esetben a következő:

$$r(r - 1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0\,. \tag{9.50b}$$

Innen az következik, hogy $r = \pm n$. Ha

$$y = x^n(a_0 + a_1 x + \cdots)\text{-t} \tag{9.50c}$$

a fenti egyenletbe helyettesítjük, akkor x^{n+k} együtthatójára a következő egyenletet kapjuk:

$$k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0\,. \tag{9.50d}$$

$k = 1$ esetén $(2n+1)a_1 = 0$ (a_{-1}, a_{-2} értéke legyen 0). Ekkor

$$a_{2m+1} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)\,, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}\,,$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)}\,, \ldots\,, \quad a_0 \text{ tetszőleges}\,. \tag{9.50e}$$

2. Bessel- vagy hengerfüggvények A (9.50a) BESSEL-féle differenciálegyenlet azon partikuláris megoldása), amelyet az $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ (a Γ gamma-függvénnyel kapcsolatban lásd 469. old.) esetén kapunk, az n-edrendű elsőfajú BESSEL- vagy *hengerfüggvény*:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\,. \tag{9.51a}$$

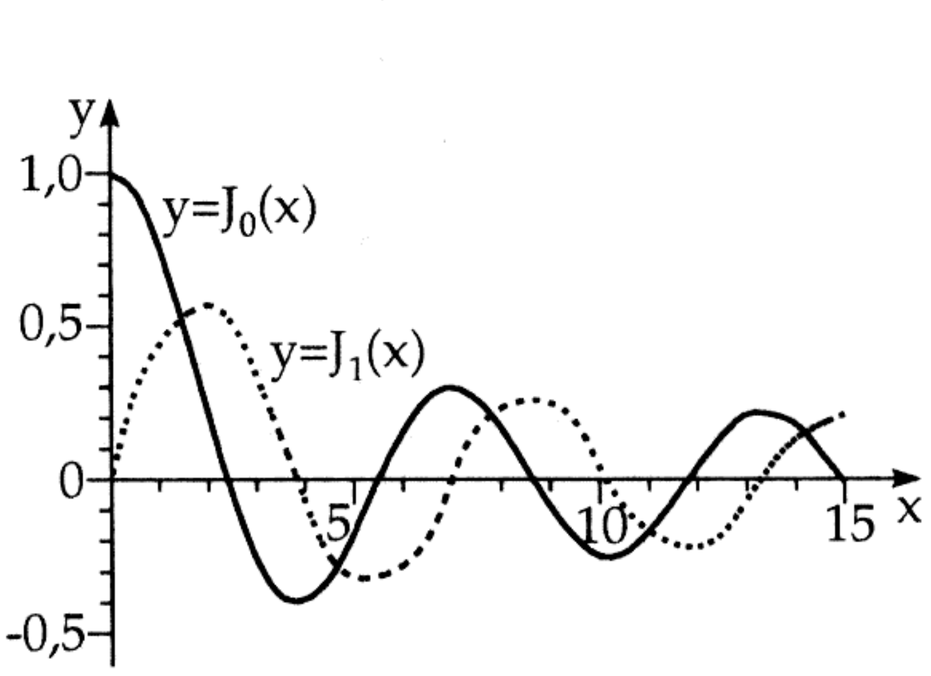
A J_0 és J_1 függvények grafikonja a **9.12.** ábrán látható.
Ha n nem egész, akkor a BESSEL-féle differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)\,, \tag{9.51b}$$

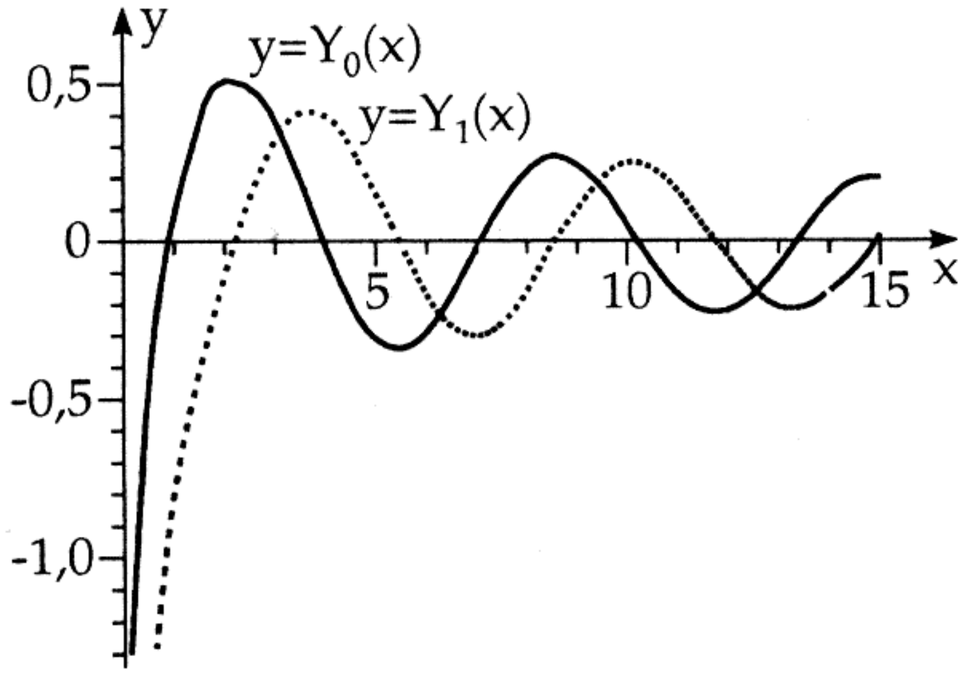
ahol $J_{-n}(x)$ sorát $J_n(x)$ sorából úgy kapjuk, hogy n helyébe $-n$-et írunk (a formula a $\sum$-val kifejezett alakban akkor is értelmes, ha n nem egész); egész n esetén pedig: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Mivel ebben az esetben J_n és J_{-n} lineárisan összefügg, ezért a (9.51b) általános megoldásban $J_{-n}(x)$ helyébe az

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} \frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}\,, \tag{9.51c}$$

másodfajú BESSEL-függvényt helyettesítjük, amelyet szokás WEBER-*függvény*nek vagy NEUMANN-*függvény*nek is nevezni. $Y_n(x)$ hatványsora megtalálható pl. [9.26]. Az Y_0 és az Y_1 függvény grafikonja az **9.13.** ábrán láthatók.



9.12. ábra.



9.13. ábra.

3. Képzetes változójú Bessel-függvények Egyes alkalmazásokban a tisztán képzetes változójú BESSEL-függvények fordulnak elő. Jelölje $I_n(x)$ az $\mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x)$ kifejezést, ekkor

$$I_n(x) = \mathrm{i}^{-n}J_n(\mathrm{i}x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} + \cdots . \tag{9.52a}$$

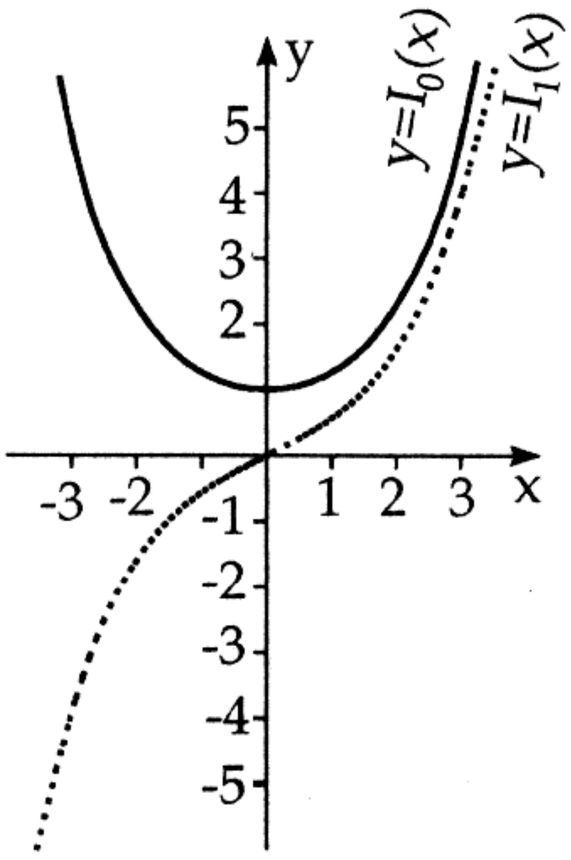
Ez a függvény nem más, mint az

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \tag{9.52b}$$

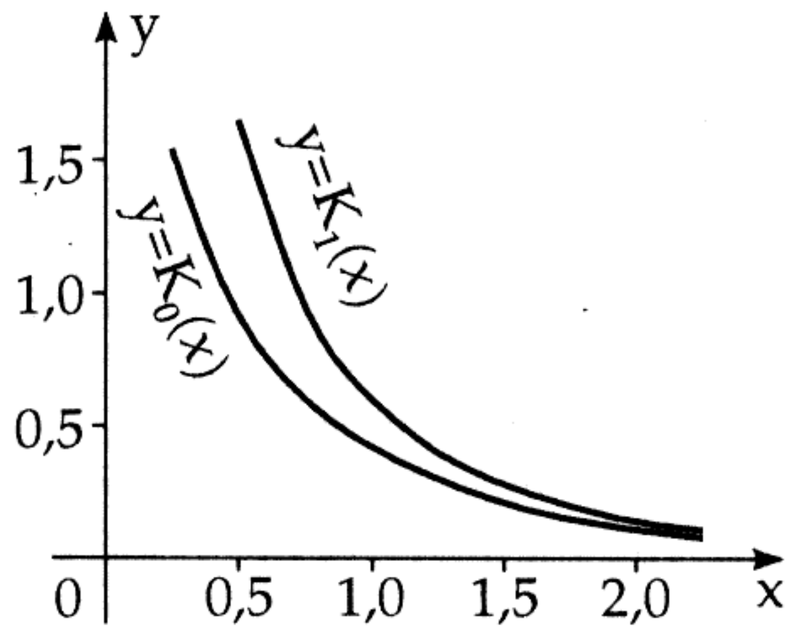
differenciálegyenlet megoldása. Ennek az egyenletnek egy másik megoldása a MACDONALD-*függvény*:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} . \tag{9.52c}$$

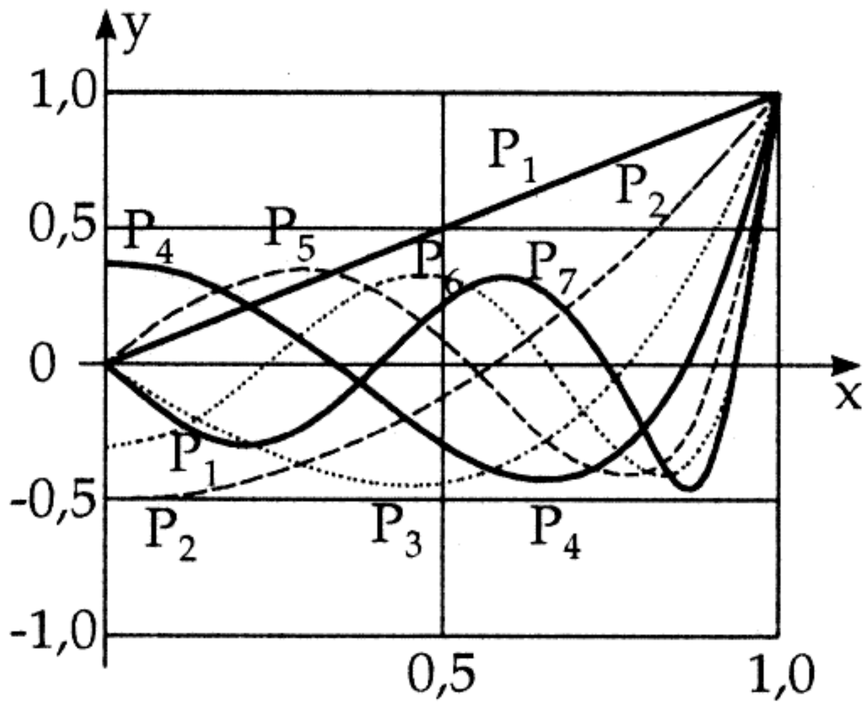
Ha n egy egész számhoz konvergál, akkor $K_n(x)$-nek van határértéke.
Az $I_n(x)$ és az $K_n(x)$ függvényt *módosított* BESSEL-*függvény*nek is nevezzük.
Az I_0 és az I_1 függvény grafikonja az **9.14.** ábrán, a K_0 és a K_1 függvényé pedig az **9.15.** ábrán látható.
A $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ függvények értékeit tartalmazza az **21.9.** táblázat.



9.14. ábra.



9.15. ábra.



9.16. ábra.

4. A $J_n(x)$ Bessel-függvényekre vonatkozó formulák

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) , \quad \frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x}J_n(x) + J_{n-1}(x) . \tag{9.53a}$$

Hasonló formulák vonatkoznak a módosított BESSEL-függvényekre:

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x} , \quad \frac{dI_n(x)}{dx} = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x}I_n(x) , \tag{9.53b}$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2nK_n(x)}{x} , \quad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x}K_n(x) . \tag{9.53c}$$

Ha $n = 0, 1, 2, \ldots$, akkor

$$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi \, d\varphi , \tag{9.53d}$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi \tag{9.53e}$$

vagy közös képlettel, komplex alakban:

$$J_n(x) = \frac{(-\mathrm{i})^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\mathrm{i}x\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi\,. \tag{9.53f}$$

A $J_{n+1/2}(x)$ függvények kifejezhetők elemi függvények segítégével, pl.:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,, \tag{9.54a}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,. \tag{9.54b}$$

Az (9.53a)–(9.53f) rekurziós formulák egymásutáni alkalmazásával egész n esetén $J_{n+1/2}(x)$-re vonatkozó összefüggéseket írhatunk fel. Nagy x értékekre igazak a következő aszimptotikus formulák:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \tag{9.55a}$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \tag{9.55b}$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \tag{9.55c}$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{9.55d}$$

Itt $O\left(\frac{1}{x}\right)$ a LANDAU-szimbólum, lásd 57. old.

A BESSEL-függvényekről további információ található: lásd [21.1]-ban.

3. A Legendre-féle differenciálegyenlet

Nemnegatív egész n és valós x esetén a LEGENDRE-féle differenciálegyenlet alakja a következő:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad \text{vagy} \quad ((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0. \tag{9.56a}$$

1. Legendre-polinomok vagy elsőfajú gömbfüggvények $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén a LEGENDRE-féle differenciálegyenlet partikuláris megoldásait Legendre-polinomoknak vagy elsőfajú gömbfüggvényeknek nevezzük, amelyek hatványsor alakja a határozatlan együtthatók módszerével számítva a következő:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - + \cdots\right]. \tag{9.56b}$$

$$(|x| < \infty)\,.$$

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,, \tag{9.56c}$$

ahol F a hipergeometrikus sort jelöli (lásd 522. old.). Az első nyolc polinomot viszonylag könnyű felírni (lásd 1093. old.):

$$P_0(x) = 1\,,\quad (9.56\mathrm{d})\ P_1(x) = x\,,\quad (9.56\mathrm{e})\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,,\quad (9.56\mathrm{f})\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,,\quad (9.56\mathrm{g})$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,, \qquad (9.56\mathrm{h})\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,, \tag{9.56i}$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),\quad (9.56\mathrm{j})\ P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x). \tag{9.56k}$$

A $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, 7)$ függvények grafikonjai az **9.16.** ábrán láthatók. Az egyes helyettesítési értékeket zsebszámológéppel vagy táblázat segítségével könnyen megkaphatjuk.

2. Az elsőfajú Legendre-polinomok tulajdonságai

a) $$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x \pm \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(x \pm \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}\,. \tag{9.57a}$$

Mindkét előjel mindkét egyenlőségben ugyanazt az értéket adja.

b) Rekurziós formulák:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)\,, \tag{9.57b}$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx} = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]\,. \tag{9.57c}$$

c) Ortogonalitás:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq n\,, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{ha } m = n\,. \end{cases} \tag{9.57d}$$

d) Zérushelyek: $P_n(x)$-nek n gyöke van, ezek mind valósak és egyszeresek, és a $(-1, 1)$ intervallumba esnek.

e) Az elsőfajú LEGENDRE-polinomokat úgy is megkaphatjuk, hogy az

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n \tag{9.57e}$$

függvényt hatványsorba fejtjük.

Az elsőfajú LEGENDRE-polinomokról további információ található: lásd [21.1].

3. Legendre-függvények vagy másodfajú gömbfüggvények A Legendre-féle differenciálegyenlet egy másik, $P_n(x)$-tól lineárisan független, nem polinomiális $Q_n(x)$ megoldását kapjuk a $\sum_{\nu=-\infty}^{-(n+1)} b_\nu x^\nu$ sorfejtéssel. Ha $|x| > 1$:

$$Q_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{-(n+1)}F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}; \frac{1}{x^2}\right)\,. \tag{9.58a}$$

$|x| < 1$ esetén $Q_n(x)$ pedig:

$$Q_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\left[x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)} + \cdots\right]. \tag{9.58b}$$

Az első- és másodfajú gömbfüggvényeket *asszociált* LEGENDRE-*függvények*nek is nevezzük (lásd 552. old. is).

4. A hipergeometrikus differenciálegyenlet

*Hipergeometrikus differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0\,, \tag{9.59a}$$

egyenletet. Az α, β és γ állandóktól függően a következő speciális eseteket különböztetjük meg:

a) Ha $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$ és $x = \dfrac{1-z}{2}$ akkor a LEGENDRE-féle differenciálegyenletet kapjuk.

b) Ha $\gamma \neq 0$ sem nem negatív egész szám, akkor a fenti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása a hipergeometrikus sor: :

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1} + \cdots , \tag{9.59b}$$

amely $|x| < 1$ esetén abszolút konvergens. $x = \pm 1$ esetén a hipergeometrikus sor konvergenciája függ a $\delta = \gamma - \alpha - \beta$ értéktől. $x = 1$ esetén konvergens, ha $\delta > 0$, divergens, ha $\delta \leq 0$. $x = -1$ esetén abszolút konvergens, ha $\delta > 0$, feltételesen konvergens, ha $-1 < \delta \leq 0$ és divergens, ha $\delta \leq -1$.

c) Ha $2 - \gamma \neq 0$ sem nem negatív egész szám, akkor a fenti differenciálegyenlet partikuláris megoldása az

$$y = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x)\,. \tag{9.59c}$$

függvény.

d) Néhány esetben a hipergeometrikus sor összege vagy valamelyik paraméter szerinti limesze elemi függvény. Pl.:

$$F(1,\beta,\beta,x) = F(\alpha,1,\alpha,x) = \frac{1}{1-x}\,, \tag{9.60a}$$

$$F(-n,\beta,\beta,-x) = (1+x)^n\,, \tag{9.60b}$$

$$F(1,1,2,-x) = \frac{\ln(1+x)}{x}\,, \tag{9.60c}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}, \tag{9.60d}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} F\left(1,\beta,1,\frac{x}{\beta}\right) = e^x\,. \tag{9.60e}$$

5. A Laguerre-féle differenciálegyenlet

Nemnegatív egész n és valós x esetén a LAGUERRE-*féle differenciálegyenlet* alakja a következő:

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0\,. \tag{9.61a}$$

A differenciálegyenlet partikuláris megoldásai az

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}\,. \tag{9.61b}$$

LAGUERRE-*polinomok.* $n \geq 1$ esetén igaz a következő rekurziós formula:

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,, \tag{9.61c}$$

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)} = 1+\alpha-x\,. \tag{9.61d}$$

$\alpha > -1$ esetén az $e^{-x}x^\alpha$ súlyfüggvénnyel $(0,\infty)$-en fennáll a következő ortogonalitási reláció:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq n\,, \\ \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(1+\alpha) & \text{ha } m = n\,. \end{cases} \tag{9.61e}$$

6. Az Hermite-féle differenciálegyenlet

A szakirodalomban ennek az egyenletnek két alakja található meg:

a) 1. alak:

$$y'' - xy' + ny = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)\,. \tag{9.62a}$$

b) 2. alak:

$$y'' - 2xy' + ny = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots)\,. \tag{9.62b}$$

A Hermite-féle differenciálegyenlet partikuláris megoldásait HERMITE-*polinom*oknak nevezzük (az első alak esetén $He_n(x)$, a második alak esetén $H_n(x)$).

a) Hermite-polinomok az első alak esetén:

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
$$= x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} + 1\cdot 3\binom{n}{4} x^{n-4} - 1\cdot 3\cdot 5\binom{n}{6} x^{n-6} + \cdots \quad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{9.62c}$$

$He_0(x) = 1$, $He_1(x) = x$ és $n \geq 1$ esetén igazak a következő rekurziós formulák:

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x)\,, \tag{9.62d}$$

Az Hermite-polinomok az $e^{-x^2/2}$ súlyfüggvénnyel $(-\infty, \infty)$-en ortogonálisok:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} He_m(x) He_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq n\,, \\ n!\sqrt{2\pi} & \text{ha } m = n\,. \end{cases} \tag{9.62e}$$

b) Hermite-polinomok a második alak esetén:

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{9.62f}$$

A kétféle HERMITE-polinom közötti összefüggés a következő:

$$He_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (n \in \mathbb{N})\,. \tag{9.62g}$$

9.1.3. Peremérték-feladatok

9.1.3.1. A probléma megfogalmazása

1. A peremérték-feladat fogalma

Sok esetben, pl. a matematikai fizikában (lásd 543. old.), nem egyszerűen differenciálegyenletet, ill. kezdetiérték-feladatot, hanem ún. *peremérték-feladat*ot kell megoldani. Itt egy adott differenciálegyenlet olyan megoldását kell keresnünk, amely bizonyos feltételeknek tesz eleget egy adott intervallum végpontjaiban. Ennek speciális esete a lineáris peremérték-feladat, amikor lineáris differenciálegyenletnek keressük lineáris peremfeltételeknek eleget tevő megoldását. A következőkben csak másodrendű lineáris és lineáris peremfeltételű differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

2. Önadjungált differenciálegyenletek

*Önadjungált differenciálegyenlet*nek nevezzük a a következő másodrendű differenciálegyenletet:

$$[py']' - qy + \lambda \varrho y = f\,. \tag{9.63a}$$

Legyenek adottak a következő homogén lineáris peremfeltételek:

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0\,, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0. \tag{9.63b}$$

A $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\varrho(x)$ és az $f(x)$ függvények folytonosak az $a \leq x \leq b$ intervallumon. Nem korlátos intervallum esetén lényegesen más eredményeket kapunk (lásd [9.6]). Ezenkívül megköveteljük még olyan p_0 és ϱ_0 létezését, amelyekre teljesül, hogy $p(x) > p_0 > 0$, $\varrho(x) > \varrho_0 > 0$. A λ érték a differenciálegyenlet egy konstans paramétere. Ha $f = 0$, akkor az adott *inhomogén peremérték-feladat*hoz tartozó *homogén peremérték-feladat*ról beszélünk.

Amennyiben $[a, b]$-n $A \neq 0$, akkor minden

$$Ay'' + By' + Cy + \lambda Ry = F \tag{9.63c}$$

másodrendű differenciálegyenlet p/A-val való szorzással (9.63a) alakú önadjungált differenciálegyenletté válik a

$$p = e^{\int \frac{R}{A}\, dx}\,, \quad q = -\frac{pC}{A}\,, \quad \varrho = \frac{pR}{A} \tag{9.63d}$$

helyettesítések alkalmazásával.
Az

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = C_0\,, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = C_1 \tag{9.63e}$$

inhomogén feltételeket kielégítő megoldást úgy kaphatjuk meg, ha a jobb oldalon az ismeretlen függvény helyébe $y = z + u$-t helyettesítünk és az egyenletet megoldjuk u-ra és y-ra is: u olyan tetszőleges, kétszer differenciálható függvény, amely kielégíti az inhomogén peremfeltételeket, míg z olyan új ismeretlen függvény, amely a megfelelő homogén peremfeltételeknek tesz eleget ($c_0 = c_1 = 0$).

3. A Sturm–Liouville-feladat

Rögzített λ esetén a következő két eset lehetséges:

1. Tetszőleges $f(x)$ esetén az inhomogén peremérték-feladatnak pontosan egy megoldása van, míg a megfelelő homogén feladatnak csak a triviális ($= 0$) megoldása van;

2. A megfelelő homogén feladatnak vannak nemtriviális, azaz nem mindenhol eltűnő megoldásai. Ekkor az inhomogén feladat nem minden jobb oldal esetén oldható meg; ha pedig van megoldás, az nem egyértelmű.

A második esetben, azaz amikor a homogén problémának vannak nemtriviális megoldásai, a λ paramétert a *peremérték-feladat sajátértékének*, az említett nemtriviális megoldásokat pedig a peremérték-feladat *sajátfüggvény*einek nevezzük. A (9.63a) differenciálegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei meghatározására vonatkozó feladatot STURM–LIOUVILLE-*feladat*nak nevezzük.

9.1.3.2. A sajátértékek és sajátfüggvények főbb tulajdonságai

1. A peremérték-feladat sajátértékei egy

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots\,, \tag{9.64a}$$

monoton növő számsorozatot alkotnak, amely a végtelenhez tart.

2. A λ_n sajátértékhez tartozó sajátfüggvénynek az $a < x < b$ intervallumban pontosan n zérushelye van.

3. Ha $y(x)$ és $z(x)$ két, ugyanazon λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény, akkor egyik a másik konstansszorosa.

4. Ha az $y_1(x)$ a λ_1 és $y_2(x)$ a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátfüggvény, akkor *ortogonális*ak:

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \varrho(x)\, dx = 0\,, \tag{9.64b}$$

itt a $\varrho(x)$-t *súlyfüggvény* közvetlenül (9.63a)-ból származik.

5. Ha (9.63a)-ban a $p(x)$ és $q(x)$ együtthatók helyére a $\tilde{p}(x) \geq p(x)$ és a $\tilde{q}(x) \geq q(x)$ függvényeket helyettesítjük, akkor a sajátértékek nem csökkennek, azaz az eredeti, valamint a módosított egyenlet λ_n és $\tilde{\lambda}_n$ sajátértékeire $\tilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$ $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ha azonban a $\varrho(x)$ helyébe egy $\tilde{\varrho}(x) \geq \varrho(x)$-et helyettesítünk, akkor a sajátértékek nem nőnek, azaz: $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$. Minden n-re az n-edik sajátérték az egyenlet együtthatóinak folytonos függvénye, azaz az együtthatók elegendően kicsi megváltozásakor az n-edik sajátérték is csak kicsit változik meg.

6. Ezzel szemben az $[a, b]$ intervallum szűkítéséből nem következik a sajátértékek csökkenése.

9.1.3.3. A sajátfüggvények szerinti sorfejtés

1. A sajátfüggvény normálása

Minden λ_n-hoz olyan $\varphi_n(x)$ függvényt választunk, hogy fennálljon az

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \varrho(x)\, dx = 1 \tag{9.65a}$$

egyenlőség. Ilyenkor *normált sajátfüggvény*ről beszélünk.

2. Fourier-sorfejtés

Minden, az $[a, b]$-n értelmezett $g(x)$ függvényhez hozzárendelhetjük a peremérték-feladat sajátértékei szerinti

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\,, \quad c_n = \int_a^b g(x)\,\varphi_n(x)\,\varrho(x)\,dx \tag{9.65b}$$

FOURIER-*sor*át, amennyiben a (9.65b)-beli integrálok léteznek.

3. A sorbafejthetőségre vonatkozó tétel

Ha $g(x)$ folytonosan deriválható és a megfelelő peremérték-feladat megoldása, akkor a FOURIER-sor abszolút és egyenletesen konvergál és összege a $g(x)$ függvény.

4. A Parseval-egyenlőség

Ha a bal oldalon lévő integrál létezik, akkor igaz a következő egyenlőség:

$$\int_a^b [g(x)]^2 \varrho(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} {c_n}^2\,. \tag{9.65c}$$

A $g(x)$ függvény FOURIER-sora négyzetes középben $g(x)$-hez konvergál, azaz igaz a következő egyenlőség:

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[g(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x)\right]^2 \varrho(x)\,dx = 0\,. \tag{9.65d}$$

5. Szingularitások

Az elméleti fizikai feladatok FOURIER-módszerrel történő megoldásánál gyakran találkozhatunk hasonló peremérték-feladatokkal, azzal a különbséggel, hogy ott az $[a, b]$ intervallum végpontjaiban a differenciálegyenletnek szingularitásai lehetnek: például $p(x)$ eltűnik. Ilyen szinguláris pontokban megköveteljük a megoldásra vonatkozó bizonyos feltételek teljesülését: folytonosság, vagy korlátosság, esetleg adott rendnél nem gyorsabb növekedés. Az ilyen feltételek játsszák most a homogén peremfeltételek (lásd 546. old.) szerepét. Ezenkívül az is előfordulhat, hogy némely peremérték-feladatnál olyan homogén peremfeltételeket kell kielégíteni, amelyek a megoldásfüggvényeknek, ill. deriváltjainak az intervallum két végpontjában felvett értékei között létesítenek kapcsolatot. Ezek a feltételek gyakran a következő alakúak:

$$y(a) = y(b), \quad p(a)y'(a) = p(b)y'(b), \tag{9.66}$$

amelyek $p(a) = p(b)$ esetén periodicitási feltételeket jelentenek. Az ilyen típusú peremérték-feladatokra érvényes minden eddig tett kijelentésünk, kivéve a 9.1.3.2. 3. állítását. A probléma részletesebb tanulmányozása céljából [9.6]-ra hívjuk fel az Olvasó figyelmét.

9.2. Parciális differenciálegyenletek

9.2.1. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek

9.2.1.1. Elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

1. Lineáris és kvázilineáris parciális differenciálegyenletek

Az

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y \tag{9.67a}$$

egyenletet *elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlet*nek nevezzük. Itt az ismeretlen z az $x_1, \ldots, x_n$ változók függvénye, $X_1, \ldots, X_n, Y$ pedig ezen x_i-k adott függvényei. Ha $X_1, \ldots, X_n, Y$ még z-től is függenek, akkor *kvázilineáris parciális differenciálegyenlet*ről beszélünk. Ha pedig

$$Y \equiv 0, \tag{9.67b}$$

akkor az egyenlet homogén.

2. Egy homogén lineáris parciális differenciálegyenlet integrálása

A homogén lineáris parciális differenciálegyenlet integrálása minden esetben ekvivalens az úgynevezett

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{9.68a}$$

karakterisztikus rendszer integrálásával. A karakterisztikus rendszert kétféle módon lehet megoldani:

1. Ha $X_k \neq 0$, akkor tekintsük x_k-t független változónak; ekkor a fenti rendszer a következő alakú lesz:

$$\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{X_j}{X_k} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9.68b}$$

2. Kényelmesebb, ha a szimmetria megtartása mellett egy új t változót vezetünk be, ahol

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j. \tag{9.68c}$$

A (9.68a) rendszer minden első integrálja a (9.67b) homogén lineáris parciális differenciálegyenlet megoldása. Ennek a megfordítása is igaz: (9.67b) minden megoldása (9.68a) első integrálja (lásd 507. old.). Ha itt az $n-1$

$$\varphi_i(x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{9.68d}$$

$n-1$ integrál független (lásd 509. old.), akkor

$$z = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{9.68e}$$

ahol Φ a φ_i argumentumok tetszőleges függvénye, amely (9.67b) általános megoldása.

3. Inhomogén lineáris és kvázilineáris parciális differenciálegyenletek integrálása

A (9.67a) inhomogén lineáris és kvázilineáris parciális differenciálegyenlet integrálásához keressük a z megoldást a $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$ implicit alakban. A V függvény az

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + Y\frac{\partial V}{\partial z} = 0\,, \tag{9.69a}$$

$n+1$ ismeretlen függvényt tartalmazó homogén lineáris egyenlet megoldása, amelynek

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Y} \tag{9.69b}$$

karakterisztikus rendszerét a (9.67a) *eredeti egyenlet karakterisztikus rendszer*ének nevezünk.

4. Geometriai előállítás és a rendszer karakterisztikái

A

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \tag{9.70a}$$

két független — $x_1 = x$ és $x_2 = y$ — változójú differenciálegyenlet minden $z = f(x, y)$ megoldása a háromdimenziós térben egy felületnek tekinthető, amelyet a differenciálegyenlet *integrálfelület*ének, ill. *megoldásfelület*ének nevezünk. A (9.70a) azt jelenti, hogy a $z = f(x, y)$ megoldásfelület minden pontjában a $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$ normálvektor merőleges a megfelelő (P, Q, R) vektorra. Ekkor a (9.69b) rendszer a következő alakú:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{9.70b}$$

Ebből az következik, hogy (lásd 671. old.) a *rendszer integrálgörbéi*, amelyeket a *rendszer karakterisztikái*nak is nevezünk, átmennek a (P, Q, R) pontokon. Ezért minden olyan karakterisztika, amelynek a $z = f(x, y)$ megoldásfelülettel legalább egy közös pontja van, teljes egészében a megoldásfelülethez

tartozik. A 506. oldalon szereplő egzisztencia-tétel feltételei mellett a tér minden pontján a karakterisztikus rendszer egy integrálgörbéje halad, tehát az integrálfelületek karakterisztikákból állnak.

5. A Cauchy-feladat

Legyen adott a $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ $n-1$ független változó n függvénye:

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\,,\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots,\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\,. \tag{9.71a}$$

A (9.67a) differenciálegyenletre vonatkozó CAUCHY-feladat értelmében a differenciálegyenlet olyan

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{9.71b}$$

megoldását keressük, amelybe (9.71a) függvényeit behelyettesítve egy előre megadott $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$-et kapunk:

$$\varphi[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\,,\ x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots,\ x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})] = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})\,. \tag{9.71c}$$

Két változó esetén a feladat olyan integrálfelület keresésére egyszerűsödik, amely adott görbére illeszkedik. Ha ennek a görbének folytonos érintője van és nem érint semmilyen karakterisztikát semmilyen pontban, akkor a CAUCHY-feladatnak ezen görbe bizonyos környezetében pontosan egy megoldása van. Ekkor a megoldásfelület az összes olyan karakterisztika halmaza, amely metszi az adott görbét. ACAUCHY-feladat megoldásának létezésére vonatkozó tétel egzakt megfogalmazása megtalálható [9.26]-ben.

■ **A:** Az $(mz - ny)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\dfrac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ (l, m, n konstansok) elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet karakterisztikáinak egyenletei a következők: $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}$. Ennek a rendszernek az integráljai: $lx + my + nz = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. A karakterisztikus görbék körök, amelyek középpontjai olyan, az origón átmenő egyeneneseken vannak, amelyek iránykoszinuszai l, m, n-nel arányosak. A megoldásfelületek ezen egyenesek mint forgástengelyek körüli forgásfelületek.

■ **B:** Határozzuk meg a $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ elsőrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenletnek azt a megoldásfelületét, amely tartalmazza az $x = 0$, $z = \varphi(y)$ görbét. A karakterisztikák egyenletei: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{z}$. Az (x_0, y_0, z_0) ponton áthaladó karakterisztikák: $y = x - x_0 + y_0$, $z = z_0 e^{x - x_0}$. A keresett megoldásfelület paraméteres alakja $x_0 = 0$, $z_0 = \varphi(y_0)$ behelyettesítése után: $y = x + y_0$, $z = e^x \varphi(y_0)$. y_0 kiküszöbölésével kapjuk, hogy $z = e^x \varphi(y - x)$.

9.2.1.2. Elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek

1. Az elsőrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja

az

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z\,,\ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{9.72a}$$

implicit egyenlet.

1. Teljes integrálok Teljes integrálnak nevezzük az n darab $a_1, \ldots, a_n$ paramétertől függő

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)\,, \tag{9.72b}$$

megoldást, ahol (lásd 126. old.) a szóbajövő $x_1, \ldots, x_n, z$ értékekre a φ-ből képzett függvény determinánsa nem tűnik el:

$$\frac{\partial\left(\varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n}\right)}{\partial(a_1, \ldots, a_n)} \neq 0\,. \tag{9.72c}$$

2. A karakterisztikus sáv

A (9.72a) differenciálegyenlet integrálását a

$$\frac{dx_1}{P_1} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + \cdots + p_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \cdots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z} \tag{9.72d}$$

karakterisztikus rendszer integrálására vezetjük vissza, ahol

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z},\quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i},\quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}\quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9.72e}$$

A karakterisztikus rendszer minden olyan megoldását, amelyre

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{9.72f}$$

*karakterisztikus sáv*nak nevezzük.

2. Differenciálegyenletek kanonikus rendszerei

Néha előnyösebb olyan differenciálegyenlet megoldásával foglalkozni, amely nem tartalmazza a z ismeretlen függvényt explicit módon. Az effajta függvényekre való áttéréshez egy további $x_{n+1} = z$ független változót és egy $V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ ismeretlen függvényt vezetünk be. Ezen V-ből a keresett $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-t a

$$V(x_1, \ldots, x_n, z) = C \tag{9.73a}$$

egyenletből lehet meghatározni. E célból (9.72a)-ban $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ helyére a $-\dfrac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial V}{\partial x_{n+1}}$ függvényt helyettesítjük $(i = 1, \ldots, n)$. Ezt követően a (9.72a) differenciálegyenletet átírjuk V parciális deriváltjaira. A megfelelő független változót a maradék változók megfelelő átszámozása után x-szel jelöljük. Végül a (9.72a) egyenlet a következő alakú lesz:

$$p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0\,,\quad p = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}\quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{9.73b}$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus rendszere így a

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.73c}$$

és a

$$\frac{dV}{dx} = p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial H}{\partial p_n} - H\,,\quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{9.73d}$$

egyenletrendszerbe megy át. (9.73c) egy $2n$ közönséges differenciálegyenletből álló rendszer, ahol $H = H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ egy tetszőleges $2n + 1$ változójú függvény. Ezt a közönséges differenciálegyenlet-rendszert *kanonikus* vagy *normális differenciálegyenlet-rendszer*nek nevezzük.

Ilyen alakú rendszerre vezet a mechanika és az elméleti fizika sok feladata. A (9.73b) egyenlet

$$V = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_n) + a \tag{9.73e}$$

teljes integráljának ismeretében meghatározható a (9.73c) normális rendszer általános megoldása, ugyanis a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_i} = b_i\,,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egyenletek (ahol a_i és b_i $2n$ tetszőleges paraméter) a (9.73c) normális rendszer egy $2n$-paraméteres megoldását határozzák meg.

3. A Clairaut-egyenlet

Ha a differenciálegyenlet a

$$z = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\,,\quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.74a}$$

alakra hozható, akkor CLAIRAUT-féle differenciálegyenletről beszélünk. Ebben az esetben a teljes integrál meghatározása igen egyszerű, ugyanis

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,. \tag{9.74b}$$

teljes integrál, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ szabadon választható paraméterek.

■ **A kéttest-probléma és a Hamilton-függvény** A NEWTON-törvény szerint az egymást kölcsönösen vonzó két anyagi pont állandóan egy rögzített síkban mozog. Ezért hasznos, ha az egyik pontot

tekintjük a koordináta-rendszer kezdőpontjának, mert akkor a mozgásegyenletek felírhatók a következő alakban:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{9.75a}$$

A (9.75a) rendszer a

$$H = \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{9.75b}$$

HAMILTON-függvény bevezetésével a

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad x, y \tag{9.75c}$$

változókra vonatkozó

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{9.75d}$$

normális egyenletrendszerré alakul. Ekkor a differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{9.75e}$$

A ϱ, φ polárkoordináták bevezetésével a (9.75e) egyenlet olyan alakú differenciálegyenletként írható fel, amelynek az a, b, c paraméterekkel

$$z = -at - b\varphi + c - \int_{\varrho_0}^{\varrho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}}\, dr, \tag{9.75f}$$

a megoldása. A (9.75d) rendszer általános megoldását a következő egyenletekből kapjuk:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -t_0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = -\varphi_0. \tag{9.75g}$$

4. Két független változót tartalmazó elsőrendű differenciálegyenletek

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = p$, $p_2 = q$ esetén a karakterisztikus sáv (lásd 527. old.) geometriailag nem más, mint egy olyan görbe, amelynek minden (x, y, z) pontjában létezik $p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$ érintősíkja. Ezáltal az a CAUCHY-feladat, amelyben az

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{9.76}$$

egyenlet adott görbét tartalmazó megoldásfelületét kell meghatározni, a következő feladatra vezethető vissza: húzzunk a kezdeti görbe pontjain keresztül olyan karakterisztikus sávokat, amelyekhez tartozó sík ezt a görbét érinti. A kezdeti görbe pontjaiban a p és q értékeket az $F(x, y, z, p, q) = 0$ és $pdx + qdy = dz$ összefüggésekből kaphatjuk meg, amelyeknek általában, nemlineáris differenciálegyenletek esetében több megoldásuk van.

Hogy a CAUCHY-feladatnak pontosan egy megoldása legyen, a kezdeti görbe mentén két olyan folytonos p és q függvényt kell megadnunk, amely kielégíti mindkét feltételt.
A CAUCHY-feladatra vonatkozó egzisztencia-feltétel megtalálható a következő könyvben: [9.26].

■ **A:** A $pq = 1$ parciális differenciálegyenlet és az $y = x^3$, $z = 2x^2$ kezdeti görbe esetében legyen $p = x$ és $q = 1/x$. Ekkor a karakterisztikus rendszer a következő alakú:

$$\frac{dx}{dt} = q, \quad \frac{dy}{dt} = p, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

A $t = 0$-hoz tartozó x_0, y_0, z_0, p_0 és q_0 kezdeti értékekkel definiált karakterisztikus sáv kielégíti az $x = x_0 + q_0 t$, $y = y_0 + p_0 t$, $z = 2p_0 q_0 t + z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ egyenleteket. $p_0 = x_0$, $q_0 = 1/x_0$ esetén a

karakterisztikus sávhoz tartozó, a kezdeti görbe (x_0, y_0, z_0) pontján átmenő görbe egyenlete:

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}\,, \quad y = {x_0}^3 + t x_0\,, \quad z = 2t + 2{x_0}^2\,.$$

Az x_0 és a t paraméterek kiküszöbölésével azt kapjuk, hogy $z^2 = 4xy$. A kezdeti görbe mentén megadott p-nek és q-nak más értékeire más megoldás adódott volna.

Egy egyparaméteres megoldásfelület-sereg burkolója szintén megoldásfelület. Ezen körülmény figyelembevételével a CAUCHY-feladat megoldható a teljes integrál segítségével. Ehhez egy olyan egyparaméteres megoldássereget keresünk, amely azokat a síkokat érinti, amelyeket a kezdeti görbe pontjai határoznak meg. Ekkor még ennek a seregnek a burkolóját kell meghatározni.

■ **B:** A $z - px - qy + pq = 0$ CLAIRAUT-féle differenciálegyenlet esetében határozzuk meg azt a megoldásfelületet, amely tartalmazza az $y = x\,,\ z = x^2$ görbét. A differenciálegyenlet teljes integrálja $z = ax + by - ab$. Mivel a kezdeti görbe mentén $p = q = x$, az $a = b$ feltétel segítségével határozzuk meg a szükséges egyparaméteres megoldásfelület-sereget. Miután a burkolót meghatároztuk, azt kapjuk, hogy $z = \frac{1}{4}(x + y)^2$.

5. Teljes differenciálokat tartalmazó elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

Az ilyen típusú egyenletek a következő alakúak:

$$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n\,, \tag{9.77a}$$

ahol $f_1, f_2, \ldots, f_n$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ változók adott függvényei. *Teljesen integrálható differenciálegyenlet*ről beszélünk, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és z között pontosan egy olyan összefüggés adható meg, amely egy szabadon választható állandót tartalmaz, és amely a (9.77a) egyenletre vezet. Ekkor (9.77a)-nak pontosan egy megoldása van: $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, amely a független változók kezdeti ${x_1}^0, \ldots, {x_n}^0$ értékeire adott z_0 értéket vesz fel. Ekkor $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ esetén a tér minden pontján pontosan egy megoldásfelület halad át.

A (9.77a) differenciálegyenlet esetében pontosan akkor beszélhetünk *teljes integrálhatóság*ról, ha az $\frac{n(n-1)}{2}$ darab

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_k}{\partial z} \quad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{9.77b}$$

összefüggés az $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ változókban azonosan teljesül.

Ha a differenciálegyenlet szimmetrikus alakú:

$$f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n = 0, \tag{9.77c}$$

akkor a teljes integrálhatoság feltétele az az, hogy az i, j, k indexek minden kombinációjára fennálljon:

$$f_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right) + f_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) + f_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 0\,. \tag{9.77d}$$

Ha teljesül a teljes integrálhatóság feltétele, akkor a (9.77a) differenciálegyenlet megoldása egy $n-1$-paraméteres közönséges differenciálegyenlet integrálására vezethető vissza.

9.2.2. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

9.2.2.1. Két független változójú másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai

1. Általános alak

Az $x\,,\ y$ két független változót és ezeknek a változóknak egy ismeretlen u függvényét tartalmazó másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet alakja a következő:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f\,, \tag{9.78a}$$

ahol az A, B, C, a, b, c együtthatók és f az x és az y ismert függvényei.
A differenciálegyenlet megoldásának típusa egy adott tartományban a

$$\delta = AC - B^2 \tag{9.78b}$$

diszkriminánsa előjelétől függ. A következő típusokat különböztetjük meg:

1. $\delta < 0$: hiperbolikus típus;

2. $\delta = 0$: parabolikus típus;

3. $\delta > 0$: elliptikus típus;

4. δ váltakozó előjelű: vegyes típus.

A δ diszkrimináns egyik fontos tulajdonsága az, hogy invariáns a független változók tetszőleges transzformációjával szemben (pl. ha az x, y-síkban új koordinátákat vezetünk be). Így a differenciálegyenlet típusa is invariáns a független változók megválasztásával szemben.

2. Karakterisztikák

A másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet karakterisztikáinak nevezzük az

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0 \quad \text{vagy a} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{A} \tag{9.79}$$

differenciálegyenlet integrálgörbéit. Az egyes típusok esetében a karakterisztikákra vonatkozóan a következők mondhatók:

1. hiperbolikus típus: valós karakterisztikák két serege létezik.

2. parabolikus típus: a valós karakterisztikáknak csak egy serege létezik.

3. elliptikus típus: nem léteznek valós karakterisztikák.

4. A (9.78a) differenciálegyenletből koordináta-transzformációval adódó differenciálegyenlet karakterisztikái ugyanazok, mint a (9.78a) differenciálegyenleté.

5. Ha a karakterisztikák serege egybeesik a koordinátavonalak seregével, akkor (9.78a)-ban hiányzik az ismeretlen függvénynek a megfelelő független változó szerinti második parciális deriváltját tartalmazó tag. Parabolikus differenciálegyenletnél még a vegyes deriváltakat tartalmazó tag is hiányzik.

3. Normál-, illetve kanonikus alak

(9.78a)-nak kanonikus alakra való hozására a következő lehetőségek kínálkoznak:

1. Normálalakra való hozás A (9.78a) differenciálegyenlet a

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{és a} \quad \eta = \psi(x, y) \tag{9.80a}$$

új független változók bevezetésével a (9.78b) diszkrimináns előjelének megfelelően a következő három normálalak egyikére hozható:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0\,, \quad \delta < 0\,, \quad \text{hiperbolikus típus}\,; \tag{9.80b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0, \quad \delta = 0\,, \quad \text{parabolikus típus}\,; \tag{9.80c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots = 0\,, \quad \delta > 0\,, \quad \text{elliptikus típus}\,. \tag{9.80d}$$

Itt ...-tal jelöltük azokat a tagokat, amelyek az ismeretlen függvény egyetlen másodrendű parciális deriváltját sem tartalmazzák.

2. A (9.80b) normálalak a hiperbolikus esetben Ha a hiperbolikus esetben az új (9.80a) koordinátarendszerben a karakterisztikák seregét választjuk a koordinátavonalak seregének, azaz ha a $\xi_1 = \varphi(x, y)$, $\eta_1 = \psi(x, y)$ karakterisztika-seregek egyenleteiben elvégezzük a $\varphi(x, y) =$ állandó, $\psi(x, y) =$ állandó helyettesítést, akkor (9.78a) a következő alakú lesz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \cdots = 0\,. \tag{9.80e}$$

Ezt a *hiperbolikus differenciálegyenlet normálalakjá*nak is nevezzük. Innen a

$$\xi = \xi_1 + \eta_1\,, \quad \eta = \xi_1 - \eta_1 \tag{9.80f}$$

helyettesítéssel a (9.80b) normálalakra jutunk.

3. A (9.80c) normálalak a parabolikus esetben Ebben az esetben egyetlen karakterisztika-sereg van, amelyet az $\xi =$ állandó seregnek választunk, ahol η x és y tetszőleges olyan függvénye, amely nem függhet ξ-től.

4. A (9.80d) normálalak az elliptikus esetben Ha az $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ analitikus függvények (lásd 695. old.), akkor a karakterisztikák egyenlete az elliptikus esetben két komplex konjugált, $\varphi(x,y) =$ állandó, $\psi(x,y) =$ állandó görbesereget határoz meg. A $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = \mathrm{i}(\varphi - \psi)$ helyettesítéssel az egyenlet a (9.80d) normálalakra hozható.

4. Általánosítás

Az osztályozásra és a normálalakra való hozásra vonatkozó minden kijelentés igaz marad az általánosabb

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,, \tag{9.81}$$

egyenlet esetében is, amelyben az u ismeretlen függvény és $\partial u/\partial x$ és $\partial u/\partial y$ parciális deriváltjai (9.78a)-vel ellentétben már nem csak lineárisan lépnek fel.

9.2.2.2. Több, mint két független változót tartalmazó másodrendű differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai

1. Az általános alak

Egy ilyen differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \cdots = 0\,, \tag{9.82a}$$

ahol a_{ik} a független változók adott függvényei és a (9.82a)-beli kipontozott rész olyan tagokat tartalmaz, amelyekben az ismeretlen függvény másodrendű deriváltjai nem fordulnak elő.
Általában a (9.82a) differenciálegyenlet nem hozható a független változók transzformációjával egyszerű normálalakra. Van azonban egy fontos osztályozás, amely hasonló a 9.2.2.1.-ben tárgyalt osztályozáshoz (lásd [9.6]).

2. Állandó együtthatójú másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

Ha a (9.82a)-beli a_{ik} együtthatók konstansok, akkor független változók egy homogén lineáris transzformációjával az egyenlet a

$$\sum_{i} \kappa_i \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + \cdots = 0 \tag{9.82b}$$

egyszerűbb normálalakra hozható, ahol κ_i ± 1 vagy 0 lehet. Az alábbi eseteket különböztetjük meg:

1. Elliptikus differenciálegyenlet Minden κ_i együttható nullától különböző és azonos előjelű. Ebben az esetben *elliptikus differenciálegyenlet*ről beszélünk.

2. Hiperbolikus és ultrahiperbolikus differenciálegyenlet Minden κ_i együttható nullától különböző, de egynek az előjele az összes többiétől különböző. Ebben az esetben *hiperbolikus differenciálegyenlet*ről beszélünk. Ha van legalább kettő pozitív és legalább kettő negatív előjelű együttható, akkor *ultrahiperbolikus differenciálegyenlet*ről beszélünk.

3. Parabolikus differenciálegyenlet A κ_i együtthatók egyike zérus, a többi nullától különböző és azonos előjelű. Ebben az esetben *parabolikus differenciálegyenlet*ről beszélünk.

4. Az egyszerűen megoldható eset Egy viszonylag egyszerűen megoldható esettel állunk szemben, ha nemcsak az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltjának együtthatói konstansok, hanem

az elsőrendű deriváltaké is. Azon elsőrendű deriváltakat tartalmazó tagok, amelyekben $\kappa_i \neq 0$ változóhelyettesítéssel kiküszöbölhetők. Ehhez legyen

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_k}{\kappa_k} x_k}, \tag{9.82c}$$

ahol a $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a (9.82b)-beli b_k együtthatója, és az összegzés minden $\kappa_i \neq 0$-ra történik. Ily módon minden állandó együtthatójú elliptikus és hiperbolikus differenciálegyenlet egyszerű alakra hozható:

a) elliptikus esetben: $\Delta v + kv = g\,.$ (9.82d)

b) hiperbolikus esetben: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + kv = g\,.$ (9.82e)

Δ-val a LAPLACE-operátort jelöljük:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial {x_n}^2}. \tag{9.82f}$$

9.2.2.3. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek megoldásának módszerei

1. A változók szétválasztásának módszere

Sok, a fizikában előforduló differenciálegyenlet összes megoldását nem mindig tudjuk speciális helyettesítés segítségével megadni, viszont lehetőség van megoldások olyan seregének meghatározására, amelyek tetszőlegesen választott paraméterektől függenek. Lineáris, különösen másodrendű differenciálegyenletek esetében gyakran célra vezet a következő helyettesítés:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n). \tag{9.83}$$

Mivel az a célunk, hogy a $\varphi_k(x_k)$ függvényeket külön-külön, azaz egy-egy olyan közönséges differenciálegyenlet megoldásaként adjuk meg, amely már csak az x_k-t tartalmazza, (9.83) esetében a *változók szétválasztásának módszeréről* beszélünk. Sok esetben *a változók szétválasztásának a módszerét* csak akkor használhatjuk, ha az adott differenciálegyenlet megoldását a (9.83) alakban keressük. Ha itt az eredeti differenciálegyenlet megoldásainak bizonyos homogén peremfeltételeknek kell eleget tenniük, akkor elegendő, ha a $\varphi_1(x_1)\,, \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_n(x_n)$ függvényeknek csak egy része tesz eleget a szétválasztásból adódó új peremfeltételeknek.

Az így meghatározott megoldásokból összegzéssel, differenciálással és integrálással új megoldásokat kapunk. A paramétereket pedig úgy kell megválasztani, hogy a maradék kezdeti- és peremfeltételek is teljesüljenek (lásd: példák). Végül még azt is figyelembe kell venni, hogy az ezzel a módszerrel nyert megoldás, legyen az sor vagy improprius integrál, *formális megoldás*. Ez azt jelenti, hogy ellenőrizni kell, hogy a megoldásnak van-e fizikai jelentése, azaz pl., hogy a sor konvergens-e, hogy az eredeti differenciálegyenletet és peremfeltételeit kielégíti-e, hogy tagonként differenciálható-e és hogy a tartomány határához közelítve is létezik-e összege.

Az ebben a fejezetben tárgyalt példákban a sorok és az improprius integrálok konvergensek, amennyiben a kezdeti feltételeket meghatározó függvények bizonyos megszorításoknak eleget tesznek; az első két példában ilyen feltétel pl. a folytonosság.

■ **A: A rezgő húr egyenlete** A rezgő húr egyenletének nevezzük a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.84a}$$

másodrendű lineáris hiperbolikus parciális differenciálegyenletet. Ennek az egyenletnek a segítségével a feszített húr mozgását lehet leírni. A fenti egyenletet az

$$u\Big|_{t=0} = f(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)\,, \quad u|_{x=0} = 0\,, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{9.84b}$$

kezdeti- és peremfeltételek mellett kell megoldanunk.
Keressük a rezgő húr egyenletének megoldását az

$$u = X(x)T(t) \tag{9.84c}$$

alakban. Behelyettesítve a (9.84a) differenciálegyenletbe a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}\,. \tag{9.84d}$$

A változókat szétválasztottuk, emiatt a fenti egyenlet bal oldala nem függ x-től, azaz x-ben állandó, ezért a jobb oldal is állandó kell hogy legyen; hasonlóan, miután a jobb oldal t-től független, ezért a bal oldal is állandó. Ezért a bal és a jobb oldal közös $-\lambda^2$ állandóval egyenlő, amit negatívnak választottunk, ugyanis az $u(x,t) = 0$ triviális megoldás az egyetlen nemnegatív megoldás. Így a következő két lineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$X'' + \lambda^2 X = 0\,, \tag{9.84e}$$

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0\,. \tag{9.84f}$$

A peremfeltételekből következik, hogy $X(0) = X(l) = 0$. Látható, hogy $X(x)$ a STURM–LIOUVILLE-féle peremérték-feladat egy sajátfüggvénye és λ^2 a hozzátartozó sajátérték (lásd 524. old.). A (9.84e) differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is figyelembe vevő megoldása:

$$X(x) = C\sin\lambda x \quad \text{ahol} \quad \sin\lambda l = 0\,, \quad \text{azaz} \quad \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{9.84g}$$

Minden egyes λ sajátértékre integrálva a (9.84f) egyenletet a (9.84a) eredeti differenciálegyenlet megfelelő partikuláris megoldását kapjuk:

$$u_n = \left(a_n\cos\frac{na\pi}{l}t + b_n\sin\frac{na\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,. \tag{9.84h}$$

Ha megköveteljük, hogy $t = 0$ esetén

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{9.84i}$$

megegyezzék $f(x)$-szel és $\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ megegyezzék $\varphi(x)$-szel, akkor a szinuszos FOURIER-sorfejtés segítségével (lásd 427. old.) azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,. \tag{9.84j}$$

■ **B: A rezgő rúd egyenlete** A rezgő rúd egyenletének nevezzük azt a másodrendű lineáris hiperbolikus parciális differenciálegyenletet, amelynek segítségével a rúd hosszirányú rezgéseit lehet leírni. Ezek a rezgések az egyik végén szabad rúdban ébrednek, amelynek rögzített végére a kezdeti időpontban állandó p erő hat. Ugyanazt a differenciálegyenletet kell megoldani, mint az **A** példában (533. old.), azaz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{9.85a}$$

egyenletet, ugyanazon kezdeti feltétel, de más inhomogén peremfeltétel mellett:

$$u\Big|_{t=0} = f(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)\,, \tag{9.85b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{(szabad vég)}\,, \tag{9.85c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = kp\,. \tag{9.85d}$$

Ezek a feltételek helyettesíthetők a következő homogén feltételekkel:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \tag{9.85e}$$

ahol u helyébe a

$$z = u - \frac{kpx^2}{2l} \tag{9.85f}$$

új ismeretlen függvényt írjuk. Ekkor a differenciálegyenlet inhomogén lesz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}\,. \tag{9.85g}$$

Az egyenlet megoldását a $z = v + w$ összeg alakjában keressük. Itt v az alábbi homogén differenciálegyenletet valamint a kezdeti- és peremfeltételeket elégíti ki:

$$z\Big|_{t=0} = f(x) - \frac{kpx^2}{2}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)\,. \tag{9.85h}$$

w pedig az inhomogén differenciálegyenletet valamint a homogén kezdeti- és peremfeltételeket elégíti ki. Ezért $w = \dfrac{ka^2pt^2}{2l}$. Ha a differenciálegyenletbe a

$$v = X(x)T(t) \tag{9.85i}$$

szorzatot behelyettesítjük, akkor az **A** példához hasonlóan (533. old.), a szétválasztott változókra közönséges differenciálegyenleteket kapunk:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2\,. \tag{9.85j}$$

Ha integráljuk a bal oldali egyenletet, majd figyelembe vesszük az $X'(0) = X'(l) = 0$ peremfeltételeket, akkor a sajátfüggvények a következők:

$$X_n = \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{9.85k}$$

a megfelelő sajátértékek pedig

$$\lambda_n{}^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{9.85l}$$

Ugyanazzal a módszerrel, mint az **A** példában (533. old.) végül azt kapjuk, hogy

$$u = \frac{ka^2pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l}b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n}\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{9.85m}$$

ahol a_n és b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ az $f(x) - \dfrac{kpx^2}{2}$ és az $\dfrac{l}{a\pi}\varphi(x)$ függvények FOURIER-sorának együtthatói a $(0, l)$ intervallumon (lásd 427. old.).

■ **C: A rezgő membrán egyenlete** Egy kör alakú, a peremén kifeszített membrán rezgéseit tárgyaljuk.

Az adott differenciálegyenlet lineáris, parciális és hiperbolikus, derékszögű illetve polárkoordinátákban (lásd 209. old.)a következő alakú:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{9.86a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,. \tag{9.86b}$$

A kezdeti- és a peremfeltételek a következők:

$$u|_{t=0} = f(\rho, \varphi)\,, \tag{9.86c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(\rho, \varphi), \tag{9.86d}$$

$$u|_{\rho=R} = 0. \tag{9.86e}$$

Ha a

$$u = U(\rho)\Phi(\varphi)T(t) \tag{9.86f}$$

szorzatot a differenciálegyenlet polárkoordinátás alakjába helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{U''}{U}+\frac{U'}{\rho U}+\frac{\Phi''}{\rho^2\Phi}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda^2\,. \tag{9.86g}$$

Ebből, az **A** (533. old.) és a **B** példákhoz hasonlóan (534. old.) a következő differenciálegyenleteket kapjuk:

$$T''+a^2\lambda^2T=0\,, \tag{9.86h}$$

$$\frac{\rho^2U''+\rho U'}{U}+\lambda^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\nu^2\,, \tag{9.86i}$$

ill.

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0\,. \tag{9.86j}$$

A $\Phi(0)=\Phi(2\pi)\,,\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$ periodicitási feltételekből az következik, hogy

$$\Phi(\varphi)=a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi,\quad \nu^2=n^2\quad (n=0,1,2,\ldots)\,. \tag{9.86k}$$

U-t és λ-t a $[\rho U']'-\dfrac{n^2}{\rho}U=-\lambda^2\rho U$ és az $U(R)=0$ egyenletekből határozhatjuk meg. A $\rho=0$ esetén $U(\rho)$-ra vonatkozó magától értetődő megszorítás figyelembevételével és a $\lambda\rho=z$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$z^2U''+zU'+(z^2-n^2)U=0\,,\quad \text{azaz}\quad U(\rho)=J_n(z)=J_n\left(\mu\frac{\rho}{R}\right)\,, \tag{9.86l}$$

ahol a J_n-ek a BESSEL-függvények (lásd 518. old.), $\lambda=\dfrac{\mu}{R}$ és $J_n(\mu)=0$. Ha μ_{nk} a $J_n(z)$ függvény k-adik pozitív zérushelye, akkor a

$$U_{nk}(\rho)=J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right)\quad (k=1,2,\ldots) \tag{9.86m}$$

függvénysorozat az önadjungált STURM–LIOUVILLE-probléma sajátfüggvényeinek teljes rendszere; ezek a sajátfüggvények páronként ortogonálisak a ρ súlyfüggvény mellett.
A feladat megoldását az

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{nk}\cos n\varphi+b_{nk}\sin n\varphi)\cos\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right.$$
$$\left.+(c_{nk}\cos n\varphi+d_{nk}\sin n\varphi)\sin\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right]J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right) \tag{9.86n}$$

kettős sor alakjában keressük. A kezdeti feltételekből $t=0$ esetén az következik, hogy

$$f(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi+b_{nk}\sin n\varphi)J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right)\,, \tag{9.86o}$$

$$F(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_{nk}}{R}(c_{nk}\cos n\varphi+d_{nk}\sin n\varphi)J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right)\,, \tag{9.86p}$$

amiből

$$a_{nk}=\frac{2}{\pi R^2J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(\rho,\varphi)\cos n\varphi J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho, \tag{9.86q}$$

$$b_{nk}=\frac{2}{\pi R^2J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(\rho,\varphi)\sin n\varphi J_n\left(\mu_{nk}\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho. \tag{9.86r}$$

$n=0$ esetén a számlálóban lévő 2 helyébe 1-et kell írni. Hogy a c_{nk} és a d_{nk} együtthatókat meghatározhassuk, az a_{nk}-ra és a b_{nk}-ra vonatkozó formulákban $f(\rho,\varphi)$ helyére $F(\rho,\varphi)$-t írunk, majd $\dfrac{R}{a\mu_{nk}}$-val

szorzunk.

■ **D: A Dirichlet-feladat** (lásd 692. old.) az $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ téglalapra **(9.17. ábra)**. Az elliptikus

$$\Delta u = 0 \tag{9.87a}$$

LAPLACE-egyenlet $u(x, y)$ megoldását keressük az

$$u(0, y) = \varphi_1(y)\,, \quad u(a, y) = \varphi_2(y)\,, \text{ és az } u(x, 0) = \psi_1(x)\,, \quad u(x, b) = \psi_2(x) \tag{9.87b}$$

peremfeltételek mellett.

A feladatot először a $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$ peremfeltételekkel oldjuk meg. A változók

$$u = X(x)Y(y) \tag{9.87c}$$

szétválasztásával kapott differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2, \tag{9.87d}$$

ahol az **A**–**C** feladatokban említettekhez hasonlóan λ sajátérték (533. old.) (535. old.). Mivel $X(0) = X(a) = 0$, a keresett partikuláris megoldás:

$$X = C \sin \lambda x\,, \quad \lambda = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{9.87e}$$

A második lépésben az

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0 \tag{9.87f}$$

differenciálegyenlet általános megoldását az

$$Y = a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \tag{9.87g}$$

alakban keressük. Ekkor az $u(0, y) = u(a, y) = 0$ peremfeltételek mellett a (9.87a) egy partikuláris megoldása a következő formális sor

$$u_n = \left[a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right] \sin \frac{n\pi}{a} x\,. \tag{9.87h}$$

A harmadik lépésben az általános megoldást a

$$u = \sum u_n \tag{9.87i}$$

sor alakjában keressük úgy, hogy $y = 0$ és $y = b$ esetén

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{9.87j}$$

ahol a sor együtthatóit a következő módon számítjuk ki:

$$a_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\, dx\,, \quad b_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\, dx \tag{9.87k}$$

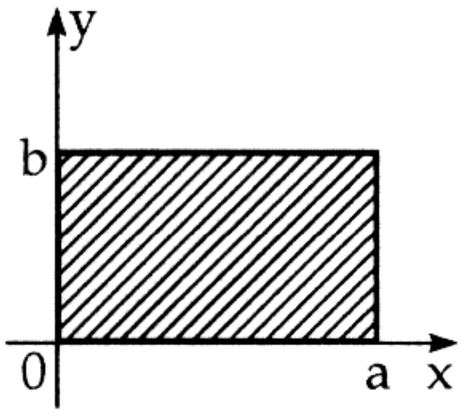
Hasonlóan oldható meg a feladat a $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$ peremfeltételekkel is, amely megoldásokból végül is megkapjuk (9.87a)–(9.87b) megoldásait.

■ **E: A hővezetés egyenlete** A végtelen hosszú, egyik irányban végtelenbe nyúló, a másik végén állandó hőmérsékleten tartott rúdban lejátszódó hővezetési folyamatot egy

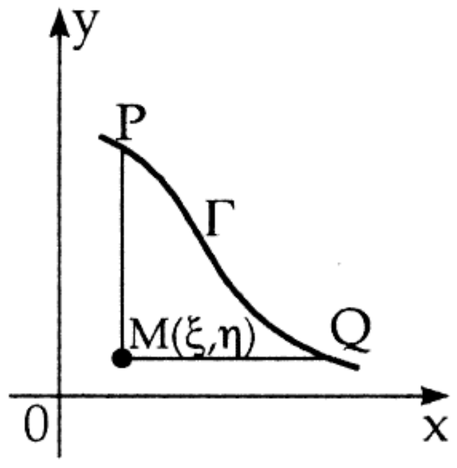
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{9.88a}$$

parabolikus másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet ír le, amely a $0 \le x < +\infty$, $t \ge 0$ tartományban az

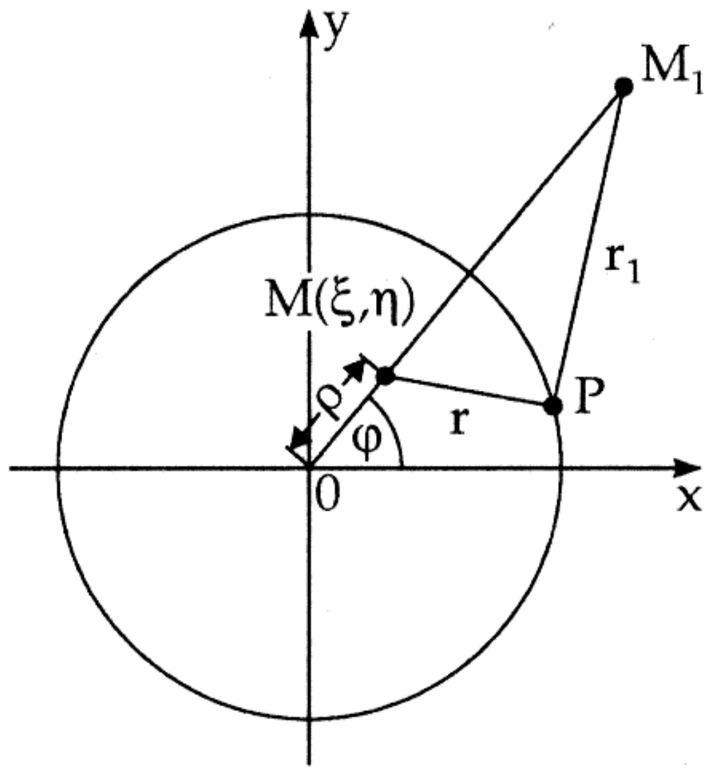
$$u|_{t=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = 0 \tag{9.88b}$$



9.17. ábra.



9.18. ábra.



9.19. ábra.

kezdeti- és peremfeltételeknek tesz eleget. Legyen a végtelenben a hőmérséklet zérus és tegyük fel, hogy az egyenletnek van

$$u = X(x)T(t)\,, \tag{9.88c}$$

nemtriviális, szétválasztott megoldása. Behelyettesítve (9.88a)-be az

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2\,, \tag{9.88d}$$

összefüggést kapjuk, ahol a λ paraméter jelentése ugyanaz, mint az **A–D** (533–537. old.) példákban. Ekkor $T(t)$-re azt kapjuk, hogy

$$T(t) = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}\,. \tag{9.88e}$$

$X(x)$-re az$X(0) = 0$ peremfeltétel mellett azt kapjuk, hogy

$$X(x) = C\sin\lambda x \qquad \text{(9.88f)} \qquad \text{és így} \quad u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}\sin\lambda x\,, \tag{9.88g}$$

ahol λ tetszőleges valós szám. Ezért a formális megoldás alakja a következő:

$$u(x,t) = \int_0^\infty C(\lambda)e^{-\lambda^2 a^2 t}\sin\lambda x\,d\lambda. \tag{9.88h}$$

A $u|_{t=0} = f(x)$ kezdeti feltételből az

$$f(x) = \int_0^\infty C(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda\,, \tag{9.88i}$$

egyenlőség következik, ahol

$$C(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\sin\lambda s\,ds \tag{9.88j}$$

(lásd 427. old.). Behelyettesítve (9.88i)-be azt kapjuk, hogy

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\left(\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\sin\lambda s\sin\lambda x\,d\lambda\right)ds\,, \tag{9.88k}$$

és ha a szinuszfüggvények szorzatát koszinuszfüggvények különbségével helyettesítjük ((2.117), 82. old.), akkor a 1085. old. (21.27) formula alapján végül azt kapjuk, hogy

$$u(x,t) = \int_0^\infty f(s)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}}\right]ds\,. \tag{9.88l}$$

2. A hiperbolikus differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat megoldásának Riemann-féle módszere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F \tag{9.89a}$$

1. **Riemann-függvény** nek nevezzük azt a $v(x, y; \xi, \eta)$ függvényt, ahol ξ és η paraméter, és amely megoldása a (9.89a) alábbi adjungált homogén differenciálegyenletének

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0, \tag{9.89b}$$

és eleget tesz a

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = \exp\left(\int_{\xi}^{x} b(s, \eta)\, ds\right), \quad v(\xi, y; \xi, \eta) = \exp\left(\int_{\eta}^{y} a(\xi, s)\, ds\right) \tag{9.89c}$$

feltételeknek. Általában a másodrendű lineáris differenciálegyenletek és adjungáltjaik a következő alakúak:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \tag{9.89d}$$

és

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv = 0\,. \tag{9.89e}$$

2. **Riemann-formulának** nevezzük azt az integrálformulát, amelynek segítségével meghatározható az az $u(\xi, \eta)$ függvény, amely az adott (9.89a) differenciálegyenlet megoldása, és amely az adott Γ görbén **(9.18. ábra)** a görbenormálisok irányában vett iránymenti deriváltjaival együtt (lásd 226. old.) adott értékeket vesz fel:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_P + \frac{1}{2}(uv)_Q - \int_{\overset{\frown}{QP}} \left[buv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dx \\ - \left[auv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy\,. \end{aligned} \tag{9.89f}$$

A sima Γ görbének **(9.18. ábra)** nem lehetnek a koordináta-tengelyekkel párhuzamos érintői, azaz nem érinthet karakterisztikákat. A fenti formulában előforduló vonalintegrál kiszámítható, ugyanis a függvénynek és a görbeív mentén vett nemérintő irányú deriváltjainak értékeiből meghatározható mindkét parciális derivált értéke.

A CAUCHY-feladatban gyakran a görbe menti normális irányú derivált helyett az ismeretlen függvény egyik parciális deriváltjának értékei vannak megadva, pl. $\frac{\partial u}{\partial y}$. Ekkor a RIEMANN-formula egy másik alakját használjuk:

$$u(\xi, \eta) = (uv)_P - \int_{\overset{\frown}{QP}} \left(buv - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \left(auv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy\,. \tag{9.89g}$$

■ **Telegráfegyenlet**nek nevezzük az

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.90a}$$

hiperbolikus másodrendű parciális differenciálegyenletet, ahol $a > 0$, b és c állandók, és amely az elektromos áram terjedését írja le vezetőben. Ez az egyenlet a rezgő húr egyenletének egy általánosítása.

Ha az $u(x,t)$ ismeretlen függvényre az $u = ze^{-(b/a)t}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor (9.90a) a következő alakú:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z \quad \left(m^2 = \frac{1}{a},\ n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2} \right) . \tag{9.90b}$$

Ez az egyenlet a független változók

$$\xi = \frac{n}{m}(mt + x), \quad \eta = \frac{n}{m}(mt - x) \tag{9.90c}$$

helyettesítésével a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{z}{4} = 0 \tag{9.90d}$$

kanonikus alakra hozható, amely nem más, mint egy hiperbolikus lineáris parciális differenciálegyenlet (lásd 531. old.). Ennek a differenciálegyenletnek megoldása a $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ RIEMANN-függvény, amely $\xi = \xi_0$ és hasonlóan $\eta = \eta_0$ esetén az 1 értéket veszi fel. Ha $v = f(w)$-ben w helyébe

$$w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)\text{-t} \tag{9.90e}$$

írunk, akkor $f(w)$ a

$$w\frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} - \frac{1}{4} f = 0 \tag{9.90f}$$

differenciálegyenletnek egy, az $f(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása. A $w = \alpha^2$ helyettesítéssel ebből az egyenletből a

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{df}{d\alpha} - f = 0\,, \tag{9.90g}$$

nulladrendű Bessel-féle differenciálegyenlet lesz (lásd 517. old.), ezért megoldása a következő alakú:

$$v = I_0 \left[\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right] . \tag{9.90h}$$

A (9.90a) eredeti differenciálegyenlet

$$z\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x) \tag{9.90i}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy a v-re kapott értéket behelyettesítjük a RIEMANN-formulába, majd áttérünk az eredeti változóra:

$$z(x,t) = \frac{1}{2}[f(x - mt) + f(x + mt)]$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt} \left[g(s) \frac{I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}\right)}{m} - f(s) \frac{ntI_1\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}\right)}{\sqrt{m^2t^2 - (s-x)^2}} \right] ds. \tag{9.90j}$$

3. A két független változójú elliptikus peremérték-feladatok megoldásának Green-féle módszere

Ez a módszer sok hasonlóságot mutat a hiperbolikus differenciálegyenletekre vonatkozó CAUCHY-feladat megoldásának RIEMANN-féle módszerével.
Ha a feladat olyan $u(x,y)$ függvény meghatározása, amely egy adott tartományban a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{9.91a}$$

elliptikus másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletnek a tartomány határán megadott értékeket felvevő megoldása, akkor először a tartomány $G(x,y,\xi,\eta)$ GREEN-*függvényét* keressük meg (ξ és η paraméter). A GREEN-függvény tulajdonságai:

1. A $G(x, y; \xi, \eta)$ függvény az egész tartományon, kivéve a $x = \xi, y = \eta$ pontokat, a következő homogén adjungált differenciálegyenlet megoldása:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial(aG)}{\partial x} - \frac{\partial(bG)}{\partial y} + cG = 0\,. \tag{9.91b}$$

2. A $G(x, y; \xi, \eta)$ függvény felírható a következő alakban

$$U \ln \frac{1}{r} + V \qquad (9.91c) \qquad \text{ahol} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\,, \tag{9.91d}$$

és ahol U az $x = \xi$, $y = \eta$ pontban az 1 értéket veszi fel, továbbá az U és a V függvény másodrendű deriváltjaikkal bezárólag folytonos.

3. A $G(x, y; \xi, \eta)$ függvény az adott tartományon kívül zérus.

Ezután a peremérték-probléma megoldása a GREEN-függvény segítségével a következő:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S u(x, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \eta)\, ds - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D f(x, y) G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy, \tag{9.91e}$$

ahol S az adott D tartomány határa, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ pedig a perem belső normálisa irányában vett derivált.

A **3.** tulajdonság mindig az adott feladat függvénye. Ha pl. az adott tartomány határán nem az ismeretlen függvény értéke adott, hanem a normális irányú deriváltja, akkor még azt is ki kell kötni, hogy a peremen

$$\frac{\partial G}{\partial n} - (a \cos \alpha + b \cos \beta) G = 0 \tag{9.91f}$$

teljesüljön, ahol α és β a normálisoknak a koordináta-tengelyekkel bezárt szögeit jelöli. Ekkor a differenciálegyenlet megoldása a következő alakú:

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} G\, ds - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D f G\, dx\, dy. \tag{9.91g}$$

4. A három független változójú peremérték-feladatok megoldásának Green-féle módszere

Tegyük fel, hogy a

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + eu = f \tag{9.92a}$$

differenciálegyenlet megoldásának az adott térbeli tartomány peremén adott értéket kell felvennie. A megoldás előállításához először a GREEN-függvényt konstruáljuk meg, azzal a különbséggel, hogy most már három paraméterünk van: ξ , η és ζ. Az adjungált differenciálegyenlet, amelynek a GREEN-függvény megoldása a következő alakú:

$$\Delta G - \frac{\partial(aG)}{\partial x} - \frac{\partial(bG)}{\partial y} - \frac{\partial(cG)}{\partial z} + eG = 0\,. \tag{9.92b}$$

$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ **2.** tulajdonsága ebben az esetben a következő ekvivalens alakot jelenti:

$$U \frac{1}{r} + V \qquad (9.92c) \qquad \text{ahol} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{9.92d}$$

Ekkor a peremértékfeladat megoldása a következő:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S u \frac{\partial G}{\partial n}\, ds - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D f G\, dx\, dy\, dz. \tag{9.92e}$$

A RIEMANN- és a GREEN-módszerben az a közös, hogy először a differenciálegyenlet egy speciális megoldását keressük meg, amelynek segítségével tetszőleges kezdeti-, ill. peremfeltételt kielégítő megoldás

előállítható. A RIEMANN- és a GREEN-függvény közötti egyik különbség az, hogy amíg az előző csak a differenciálegyenlet bal oldalától függ, a másik még az adott tartománytól is. A GREEN-függvényt még abban az esetben is viszonylag nehéz meghatározni, amikor létezése biztosított, ezért a GREEN-módszert általában elméleti problémák megoldására használják.

■ **A:** Konstruáljuk meg a GREEN-függvényt a

$$\Delta u = 0 \tag{9.93a}$$

a LAPLACE-egyenletre vonatkozó DIRICHLET-feladat esetén (lásd 692. old.), ahol az adott tartomány kör **(9.19. ábra)**.
Ekkor a GREEN-függvény a következő alakú:

$$G(x,y;\xi,\eta) = \ln\frac{1}{r} + \ln\frac{r_1\varrho}{R}\,, \tag{9.93b}$$

ahol $r = \overline{MP}$, $\varrho = \overline{OM}$, $r_1 = \overline{M_1P}$ és R az adott kör sugara **(9.19. ábra)**. Az M és M_1 pontok a körre nézve egymás inverzei, azaz az őket összekötő egyenes körbe érő része a körnek átmérője, és

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM}_1 = R^2\,. \tag{9.93c}$$

A DIRICHLET-feladatra megoldására adott (9.91e) formula alapján a GREEN-függvény normális irányú deriváltjának behelyettesítésével és néhány átalakítással az

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\varrho^2}{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos(\psi-\varphi)}u(\varphi)\,d\varphi \tag{9.93d}$$

POISSON-integrált kapjuk. A jelölések ugyanazok, mint fent. $u(\varphi)$ jelenti u-nak a kör peremén felvett értékeit. Az $M(\xi,\eta)$ pont koordinátái: $\xi = \varrho\cos\psi$, $\eta = \varrho\sin\psi$.

■ **B:** Konstruáljuk meg a GREEN-függvényt a

$$\Delta u = 0, \tag{9.94a}$$

LAPLACE-egyenletre vonatkozó DIRICHLET-feladat esetén (lásd 692. old.), ahol az adott tartomány egy R sugarú gömb. Ekkor a GREEN-függvény a következő alakú:

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1\varrho}\,, \tag{9.94b}$$

ahol $\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ a (ξ,η,ζ) pontnak a gömb középpontjától, tehát most az origótól mért távolsága, r az (x,y,z) és az (ξ,η,ζ) pont távolsága, r_1 az (x,y,z) és (ξ,η,ζ) gömbre vonatkozó inverze, azaz $\left(\frac{R\xi}{\varrho},\frac{R\eta}{\varrho},\frac{R\zeta}{\varrho}\right)$ távolsága. Az **A** példabeli jelölésekkel (533. old.) a POISSON-integrál a következő:

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{R^2-\varrho^2}{Rr^3}u\,ds\,. \tag{9.94c}$$

5. Az operátormódszer

Épp úgy, mint közönséges differenciálegyenletek esetén, a parciális differenciálegyenletek megoldására is sikerrel alkalmazható az oparátormódszer. (lásd 737. old.). A módszer lényege az, hogy a keresett függvényről áttérünk annak transzformáltjára (lásd 735. old.). A keresett függvényt az egyik független változó függvényének tekintjük, és a többi változót paraméterként kezeljük. A keresett függvény képének meghatározására így egy olyan differenciálegyenletet nyerünk, amely eggyel kevesebb független változót tartalmaz, mint az eredeti egyenlet. Ha például az eredeti egyenletben két független változó szerepelt, akkor közönséges differenciálegyenletet kapunk. Ha az így nyert differenciálegyenletből meg tudjuk határozni a keresett függvény képét, akkor maga a függvény a transzformáltak táblázatából kikereshető, vagy az inverziós formula alapján kapható meg.

6. Közelítő módszerek

Parciális differenciálegyenletre vezető konkrét feladatok megoldásakor gyakran alkalmazunk különféle közelitő módszereket. Különbséget kell tenni analitikus és numerikus módszerek között.

1. **Az analitikus módszerek** az ismeretlen függvényt közelítő analitikus kifejezések meghatározását teszik lehetővé.

2. **A numerikus módszerek** a független változók adott értékeire a megfelelő függvényértékeket közelítő értékeket szolgáltatnak. Ezek a következők (lásd 933. old.):

a) A véges differenciák módszere, röviden *differenciamódszer*: A differenciálhányados helyett differenciahányadost vizsgálunk úgy, hogy a kezdeti- és peremértékfeladatot algebrai egyenletté alakítjuk. Így a lineáris kezdeti-, ill. peremértékfeladatból lineáris egyenletrendszer lesz.

b) A végeselem-módszer (VEM), amellyel peremérték-feladatokat lehet megoldani: a peremértékfeladathoz egy variációs problémát rendelünk hozzá. A keresett megoldást egy spline-approximáció segítségével közelítjük, miután a peremérték-feladat értelmezési tartományát szabályos résztartományokra osztottuk fel. A spline-approximáció együtthatóit egy szélsőérték-feladat megoldásaiként kapjuk meg.

c) Peremintegrál-módszerek speciális peremérték-feladatok esetén: a peremérték-feladatot egy vele ekvivalens, a tartomány peremén értelmezett integrálegyenletté alakítjuk. Ehhez a vektoranalízis integráltételeit, pl. a GREEN-formulákat használjuk fel. A megmaradó peremintegrálokat alkalmas kvadratúrák segítségével numerikusan oldjuk meg.

3. **Numerikus megoldások:** differenciálegyenletek numerikus megoldásait kísérleti úton is meghatározhatjuk. Itt azt a tényt használjuk fel, hogy igen különböző fizikai jelenségeket ugyanolyan egyenletek segítségével lehet leírni. Először egy modellt állítunk fel, amely segítségével az adott probléma jól szimulálható és kísérleti méréseket végezhetünk, melyek eredményeként az ismeretlen függvény értékeit kapjuk. Mivel ezeket a modelleket szándékosan úgy konstruálják, hogy mindenféle lehetséges paramétert tartalmaznak, lehetőség van arra, hogy a független változók igen nagy paraméterei esetén is vizsgálhassunk differenciálegyenleteket.

9.2.3. A természet- és műszaki tudományok differenciálegyenletei

9.2.3.1. A probléma felvetése és a peremfeltételek

1. A probléma felvetése

A klasszikus elméleti fizikában, különösen a modell értelmében strukturálatlan vagy tetszőlegesen kis hibával leírható közegek, például gázok, stukturálatlannak feltételezett folyadékok valamint szilárdtestek (vagy a klasszikus fizikában a rugók) elméletének keretein belüli fizikai jelenségek matematikai modellezése parciális differenciálegyenletekre vezet, mint pl. a hullámegyenlet (lásd 544. old.) vagy a hővezetési egyenlet (lásd 546. old.). A nemklasszikus fizikában is, mint pl. a közegek és mezők nem folytonos jellegének felismerésén alapuló kvantummechanikában, parciális differenciálegyenletekkel találkozunk. A kvantummechanika esetében ez a SCHRÖDINGER-egyenlet. Különösen gyakran találkozunk olyan másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletekkel, amelyeknek a modern műszaki- és a természettudományokban nagy jelentőségük van.

2. Kezdeti- és peremfeltételek

Fizikai, műszaki és természettudományos problémák megoldásához alapvetően két dolog teljesülése szükséges:

1. A megoldásnak nemcsak a differenciálegyenletet kell kielégítenie, hanem még kezdeti- és peremfeltételeket is. Itt előfordulhatnak olyan feladatok, ahol csak kezdeti feltételek vagy csak peremfeltételek vagy vegyesen: kezdeti- és peremfeltételek is fellépnek. A differenciálegyenletnek az adott kezdeti- és/vagy peremfeltételek mellett pontosan egy megoldása lehet.

2. A megoldásnak folytonosan kell függenie az adatoktól (stabilitás), azaz a kezdeti- és/vagy peremfeltételek tetszőleges, de elég kicsiny megváltozásának (*perturbációjának*) a megoldásnak csak kicsiny megváltozását szabad előidéznie. Ekkor azt mondjuk, hogy a feladat korrekt kitűzésű.

Csak akkor állíthatjuk, hogy a matematikai modell az adott valós jelenség leírására alkalmas, ha ezek a feltételek teljesülnek.

A CAUCHY-feladat pl. korrekt kitűzésű azon hiperbolikus differenciálegyenletek esetében, amelyek folytonos közegekben lejátszódó rezgési folyamatokat írnak le. Ez azt jelenti, hogy egy kezdeti sokaságon, azaz egy görbén vagy felületen az ismeretlen függvény valamint nem érintő, sokszor normális irányú de-

riváltjainak értékei adottak. Elliptikus diferenciálegyenletek esetében, amelyek folytonos közegekben lejátszódó statikus, ill. egyensúlyi folyamatokat írnak le, korrekt kitűzésű feladatról beszélhetünk.

3. Inhomogén feltételek és inhomogén differenciálegyenletek

Homogén, ill. inhomogén lineáris parciális differenciálegyenleteknek inhomogén kezdeti- és peremfeltételeket kielégítő megoldása visszavezethető olyan egyenlet megoldására, amely az eredetitől alapvetően az ismeretlen függvényt már nem tartalmazó szabad tagban különbözik, azonban más homogén feltételekkel. Ehhez elegendő, ha az ismeretlen függvényt helyettesítjük saját maga és egy tetszőleges kétszer differenciálható függvény különbségével, mely különbség az adott inhomogén feltételeket kielégíti.

Általában felhasználjuk azt a tényt, hogy adott inhomogén kezdeti- és peremfeltételek mellett minden inhomogén lineáris parciális differenciálegyenlet megoldása felírható az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának és a homogén egyenlet általános megoldásának összegeként.

Ha a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = g(\vec{\mathbf{x}}, t) \tag{9.95a}$$

inhomogén lineáris parciális differenciálegyenlet homogén

$$u\Big|_{t=0} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{9.95b}$$

kezdeti feltételek melletti megoldását a megfelelő homogén differenciálegyenletre vonatkozó CAUCHY-feladat megoldására akarjuk visszavezetni, akkor az ismeretlen függvényt az

$$u = \int_0^t \varphi(\vec{\mathbf{x}}, t; \tau)\, d\tau \tag{9.95c}$$

alakban keressük. Itt $\varphi(\vec{\mathbf{x}}, t; \tau)$ a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0 \tag{9.95d}$$

differenciálegyenletnek az

$$u\Big|_{t=\tau} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = g(\vec{\mathbf{x}}, \tau) \tag{9.95e}$$

peremfeltételeket kielégítő megoldása. $L[u]$ a $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ deriváltat tartalmazó lineáris differenciáloperátort jelöl, amely nem tartalmazhat t-szerinti magasabb rendű deriváltakat.

9.2.3.2. A hullámegyenlet

Homogén közegekben hullámszerűen terjedő rezgéseket ír le a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(\vec{\mathbf{x}}, t) \tag{9.96a}$$

hullámegyenlet, amelynek $Q(\vec{\mathbf{x}}, t)$ jobb oldala a „zavaró" hatást jelöli. A Δ LAPLACE-operátort a következő módon definiáljuk:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}\,. \tag{9.96b}$$

A hullámegyenlet u megoldását *hullámfüggvény*nek nevezzük. A (9.96a) differenciálegyenlet hiperbolikus típusú.

1. A homogén feladat A fenti,

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{\mathbf{x}})\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(\vec{\mathbf{x}}) \tag{9.97}$$

kezdeti feltételű homogén probléma ($Q(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0$) megoldását egy, kettő, ill. három dimenzióban a következő integrálok segítségével lehet meghatározni.

a) $n = 3$ (Kirchhoff-formula):

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{(S_{\text{at}})} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(S_{\text{at}})} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma\right], \tag{9.98a}$$

ahol az S_{at} integrációs tartomány egy gömbfelület, amelyet $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = a^2t^2$ definiál.

b) $n = 2$ (Poisson-formula):

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\Big[\iint\limits_{(K_{\text{at}})} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(K_{\text{at}})} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\Big], \tag{9.98b}$$

ahol K_{at} az integrációs tartomány egy körlap, amelyet $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \le a^2t^2$ definiál.

c) $n = 1$ (d'Alembert-formula):

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - at}^{x_1 - at} \psi(\alpha)\, d\alpha\,. \tag{9.98c}$$

2. Az inhomogén feladat Ha $Q(\vec{\mathbf{x}}, t) \neq 0$, akkor a (9.98a,b,c) formulák jobb oldalához az alábbi tagok hozzáadandók:

a) $n = 3$ (Retardált potenciál): (A K tartományt $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2} \le at$ definiálja):

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{(K)} \frac{Q\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \dfrac{r}{a}\right)}{r}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\,. \tag{9.99a}$$

b) $n = 2$:

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_{(K)} \frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau)\, d\xi_1 d\xi_2 d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\,, \tag{9.99b}$$

ahol K a ξ_1, ξ_2, τ háromdimenziós tér egy olyan tartománya, amelyre $0 \le \tau \le t$,
$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \le a^2(t - \tau)^2$ teljesül.

c) $n = 1$:

$$\frac{1}{2a}\iint\limits_{(T)} Q(\xi, \tau)\, d\xi d\tau\,, \tag{9.99c}$$

ahol T egy olyan háromszög, amelyre $0 \le \tau \le t$, $|\xi - x_1| \le a|t - \tau|$ teljesül. A fenti formulákban a (9.96a)-beli a a Q hullám terjedési sebességét jelenti.

9.2.3.3. A hővezetés egyenlete és a diffúziós egyenlet homogén közegben

1. A hővezetés egyenlete három dimenzióban

A hőterjedést homogén közegben a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = Q(\vec{\mathbf{x}}, t) \tag{9.100a}$$

másodrendű parabolikus lineáris parciális differenciálegyenlettel lehet leírni, ahol Δ a maximálisan $n = 3$ dimenziós LAPLACE-operátor és az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorral is le lehet írni. Ha a hőáramnak sem forrásai sem nyelői nincsenek, akkor $Q(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0$ miatt a jobboldal eltűnik.
A CAUCHY-feladat a következőképpen fogalmazható meg: Olyan, $t > 0$ esetén korlátos $u(\vec{\mathbf{x}}, t)$ megoldást keresünk, amelyre $u(\vec{\mathbf{x}}, 0) = u|_{t=0} = f(\vec{\mathbf{x}})$ teljesül. A korlátosság megkövetelése egyben a megoldás egyértelműségét is biztosítja.
A homogén ($Q(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0$) differenciálegyenlet megoldása a következő *hullámfüggvény*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2}{4a^2 t} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \,. \tag{9.100b}$$

Az inhomogén ($Q(\vec{\mathbf{x}}, t) \neq 0$) differenciálegyenlet esetében (9.100b) jobb oldalához a következő integrált kell hozzáadni:

$$\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{[2a\sqrt{\pi(t - \tau)}]^n} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left(-\frac{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2}{4a^2(t - \tau)} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \right] d\tau \,. \tag{9.100c}$$

Ha $u(\vec{\mathbf{x}}, 0)$ adott, akkor $t < 0$ esetére (9.100a) így nem oldható meg általánosan , mert ekkor a CAUCHY-feladat nem korrekt kitűzésű.
Mivel a hőmérséklet egyenesen arányos a hőmennyiséggel, az $u = T(\vec{\mathbf{r}}, t)$ (a hőmérséklet helyi értékét megadó skalármező) és $a^2 = D_W$ (hővezetési együttható) összefüggések segítségével azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D_W \Delta T = Q_W(\vec{\mathbf{r}}, t) \,. \tag{9.100d}$$

2. A háromdimenziós diffúziós egyenlet

A hővezetéshez hasonlóan a C koncentráció terjedését homogén közegben ugyanaz a (9.100a), ill. a (9.100d) lineáris parciális differenciálegyenlet írja le, ahol D_W helyébe a D_C *háromdimenziós diffúziós együtthatót* kell írni. Ekkor a *diffúziós egyenlet* a következő:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_C \Delta C = Q_C(\vec{\mathbf{r}}, t) \,. \tag{9.101}$$

A megoldást ugyanúgy kapjuk, mint a (9.100b) és a (9.100c) hullámegyenlet esetében.

9.2.3.4. A Poisson-egyenlet

POISSON-*egyenlet*nek vagy *potenciálegyenlet*nek (lásd 693. old.) nevezzük a

$$\Delta u = -4\pi\varrho \tag{9.102a}$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletet, amelynek megoldása a valós értékű $u(\vec{\mathbf{x}})$ potenciálfüggvény; Δ megint a LAPLACE-operátor. A megoldás, azaz az $M(x_1, x_2, x_3)$ pontbeli $u_M(x_1, x_2, x_3)$

potenciál megtalálható a 693. oldalon.
Ha $\varrho \equiv 0$, akkor a LAPLACE-*egyenlet*et kapjuk (lásd 692. old.):

$$\Delta u = 0\,. \tag{9.102b}$$

A (9.102a) és a (9.102b) differenciálegyenletek elliptikus tipusúak.

9.2.3.5. A Schrödinger-egyenlet és a kvantummechanika alapjai

1. A Schrödinger-egyenlet

1. Az egyenlet felállítása A SCHRÖDINGER-egyenlet kvantummechanikai rendszereket ír le, azaz részecskeállapotok tulajdonságainak meghatározását teszi lehetővé; megoldásai a ψ *hullámfüggvény*ek. Olyan parciális differenciálegyenlet, amely a hullámfüggvény térszerinti második, ill. az időszerinti első deriváltját tartalmazza:

$$\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x_1, x_2, x_3, t)\,\psi = \hat{H}\;\psi \tag{9.103a}$$

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{\mathbf{r}}, t)\,, \quad \hat{p} \equiv \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\vec{\mathbf{r}}} \equiv \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla\,, \tag{9.103b}$$

ahol Δ a LAPLACE-operátor, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ a redukált PLANCK-állandó, i a képzetes egység és ∇ a nablaoperátor. Egy m tömegű szabad részecske p impulzusa és (anyagi hullámként) λ hullámhossza között a következő összefüggés áll fenn: $\lambda = h/p$.

2. Speciális jellemzők

• A kvantummechanikában minden mérhető mennyiségnek egy operátor felel meg. A klasszikus mechanikai rendszerek HAMILTON-függvényének szerepét átvevő, a (9.103a)-ban és a (9.103b)-ban felépő $\hat{H}$ („*Hamiltonian*") HAMILTON-operátor (lásd 528. old.) jelentése a rendszer összenergiája, amely a mozgási és a pontenciális energia összege. $\hat{H}$ definíciójában az első tag a mozgási energia operátora, a második a potenciális energiáé.

• A képzetes egység a SCHRÖDINGER-egyenletben explicit módon jelenik meg. Ezért a hullámfüggvények komplex értékű függvények. A megfigyelhető mennyiségek értekeinek kiszámításához a $\psi^{(1)}+\mathrm{i}\psi^{(2)}$-beli mindkét függvényre szükség van. További feltételek vonatkoznak a hullámfüggvény $|\Psi|^2$ négyzetére, amely a részecskének a vizsgált tartomány tetszőleges dV térfogatelemében való dw tartózkodási valószínűségét írja le.

• Minden speciális megoldás a potenciálon kívül még függ az adott probléma kezdeti és peremfeltételei közötti *kölcsönható erő*től is. Általában másodrendű lineáris peremértékfeladatról van szó, amelynek megoldásai csak a sajátértékek esetében bírnak fizikai jelentéssel. A lehetséges megoldásokat az tünteti ki, hogy abszolút értékük négyzete mindenütt egyértelmű, regulárisok és a végtelenben eltűnnek.

• A *hullám-részecske kettősség* alapján az elemi részecskéknek egyszerre vannak hullám- és részecsketulajdonságaik is, ezért a SCHRÖDINGER-egyenlet (lásd 544. old.) a DE BROGLIE-féle anyaghullámok hullámegyenlete.

• A nemrelativisztikus problémákra való korlátozódás azt jelenti, hogy a v részecskesebesség sokkal kisebb, mint a c fénysebesség ($v \ll c$).

A SCHRÖDINGER-egyenletről további részletes tudnivalók találhatók elméleti fizikai tankönyvekben (lásd pl. [9.6], [9.8], [9.16], [22.17]). Ebben a fejezetben néhány alapvető példával foglalkozunk.

2. A nemstacionárius, időfüggő Schrödinger-egyenlet

Az m tömegű nemrelativisztikus spinmentes részecske állapotát tér- és időfüggő $U(x_1, x_2, x_3, t)$ potenciál esetén az időfüggő SCHRÖDINGER-egyenlet írja le (9.103a). Az **1.**-ben megfogalmazott, a hullámfüggvényre vonatkozó speciális feltételek a következők:
a) A ψ-függvény folytonos és korlátos.

b) A $\partial\psi/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial x_2$ és $\partial\psi/\partial x_3$ parciális deriváltak folytonosak.
c) A $|\psi|^2$ integrálható, azaz

$$\iiint_V |\psi(x_1, x_2, x_3, t)|^2 \, dV < \infty. \tag{9.104a}$$

A normálási feltételeknek megfelelően 1 annak a valószínűsége, hogy a részecske az adott tartományban van. Ehhez elegendő (9.104a), mert az integrál értéke a ψ előtti alkalmas konstans faktorral 1-ggyé tehető.
Az időfüggő SCHRÖDINGER-egyenlet megoldása a következő alakú:

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \Psi(x_1, x_2, x_3) e^{-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t} \, . \tag{9.104b}$$

A részecske állapotát egy az időváltozóban $\omega = E/\hbar$ körfrekvencia szerint periodikus függvény írja le. Ha az adott állapotban a részecske energiája állandó, akkor nem függ az időtől annak a dw valószínűsége, hogy a részecske a dV térfogatelemben található:

$$dw = |\psi|^2 \, dV = \psi\psi^* \, dV \, . \tag{9.104c}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy részecske *állapota stacionárius.*

3. A stacionárius, időfüggetlen Schrödinger-egyenlet

Ha az U potenciál nem függ az időtől, azaz $U = U(x_1, x_2, x_3)$, akkor az állapotok leírásához elegendő az időtől független SCHRÖDINGER-egyenletet kielégítő $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ hullámfüggvény. A nemstacionárius SCHRÖDINGER-egyenletből (9.103a) a (9.104b)segítségével vezethető le:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \, . \tag{9.105a}$$

Ebben a szintén nemrelativisztikus esetben

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{9.105b}$$

a részecske energiája. A differenciálegyenletet kielégítő Ψ hullámfüggvények annak *sajátértékei*; ezek csak bizonyos E *energia-értékek* esetén léteznek, amelyek az adott probléma esetében a specifikus peremfeltételekből adódnak. Az energiaértékek összessége adja a részecske *energiaspektrumát*. Ha U egy véges mélységű potenciálvögy, amely a végtelenben eltűnik, akkor a negatív sajátértékek *diszkrét spektrum*ot alkotnak.

Ha az adott tartomány az egész tér, akkor lehetséges peremfeltétel, hogy Ψ LEBESGUE-értelemben az egész téren négyzetesen integrálható (lásd 659. old. és [8.11]. old). Ha az adott tartomány korlátos, pl. gömb vagy henger, akkor az első peremérték-feladat lehet pl. az, hogy $\Psi = 0$.
Az $U(\vec{\mathbf{x}}) = 0$ speciális esetben a HELMHOLTZ-*féle differenciálegyenlet*et kapjuk

$$\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0 \qquad (9.106a) \qquad \text{ahol a sajátérték} \quad \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2} \, . \tag{9.106b}$$

Ebben az esetben a peremfeltétel gyakran az, hogy $\Psi = 0$ a peremen. Korlátos tartomány esetén (9.106a) adott térbeli korlátozásnak alávetett akusztikai rezgésekre vonatkozó kiindulási egyenlet.

4. Dobozba zárt részecske erőmentes mozgása

1. A probléma felvetése Tegyük fel, hogy egy m részecske erőmentes mozgást végez egy áthatolhatatlan falú, a, b, c élű, téglatest alakú doboz belsejében úgy, hogy egy olyan potenciálzárvány tartja fogva, amely a tér mindhárom irányában áthatolhatatlansága miatt végtelen magasan van, azaz a részecske tartózkodási a valószínűsége, a Ψ hullámfüggvénnyel együtt a dobozon kívül eltűnik. Ekkor a SCHRÖDINGER-egyenlet és a peremfeltételek a következők:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0 \, , \quad (9.107a) \qquad \Psi = 0 \quad \text{ha} \quad \begin{cases} x = 0 \, , & x = a \, , \\ y = 0 \, , & y = b \, , \\ z = 0 \, , & z = c \, . \end{cases} \tag{9.107b}$$

2. A megoldási módszer Keressük a megoldást a következő szétválasztott alakban:

$$\Psi(x,y,z) = \Psi_x(x)\,\Psi_y(y)\,\Psi_z(z). \tag{9.108a}$$

Ekkor (9.107a)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Psi_x}\frac{d^2\Psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_y}\frac{d^2\Psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\Psi_z}\frac{d^2\Psi_z}{dz^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E = -B\,. \tag{9.108b}$$

A bal oldal mindhárom tagja csak egyetlen — más-más — változótól függ. Ezért tetszőleges x, y és z esetén összegük csak akkor lehet a $-B$ állandóval egyenlő, ha mind a három tag külön-külön is állandó. Ebben az esetben a parciális differenciálegyenlet három közönséges differenciálegyenletre esik szét:

$$\frac{d^2\Psi_x}{dx^2} = -{k_x}^2\Psi_x\,,\quad \frac{d^2\Psi_y}{dy^2} = -{k_y}^2\Psi_y\,,\quad \frac{d^2\Psi_z}{dz^2} = -{k_z}^2\Psi_z\,. \tag{9.108c}$$

A $-{k_x}^2$, $-{k_y}^2$, $-{k_z}^2$ szeparációs állandók között a következő összefüggés áll fenn:

$${k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2 = B\,, \tag{9.108d}$$

amiből az következik, hogy

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}({k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2)\,. \tag{9.108e}$$

3. Megoldások A (9.108c) egyenletek megoldásai a következő függvények:

$$\Psi_x = A_x \sin k_x\,x,\quad \Psi_y = A_y \sin k_y\,y\,,\quad \Psi_z = A_z \sin k_z\,z\,, \tag{9.109a}$$

ahol A_x, A_y, A_z állandók. Így Ψ kielégíti a következő peremfeltételeket: $\Psi = 0$ ha $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$. Hogy $\Psi = 0$ $x = a$, $y = b$ és $z = c$ esetén is teljesüljön, kell hogy

$$\sin k_x\,a = \sin k_y\,b = \sin k_z\,c = 0 \tag{9.109b}$$

teljesüljön, azaz

$$k_x = \frac{\pi n_x}{a}\,,\quad k_y = \frac{\pi n_y}{b}\,,\quad k_z = \frac{\pi n_z}{c} \tag{9.109c}$$

ahol n_x, n_y és n_z egész számok.

Ekkor az összenergia

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2\right] \quad (n_x, n_y, n_z = \pm1, \pm2, \ldots)\,, \tag{9.109d}$$

amiből az következik, hogy a részecskének a környezetével való energiacseréje nem folytonosan, hanem adagokban (kvantumokban) történik. Az energia *sajátérték*eihez tartozó n_x, n_y és n_z számokat *kvantumszám*oknak nevezzük.

Az

$$(A_xA_yA_z)^2 \int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin^2\frac{\pi n_x x}{a}\,\sin^2\frac{\pi n_y y}{b}\,\sin^2\frac{\pi n_z z}{c}\,dx\,dy\,dz = 1 \tag{9.109e}$$

*normálási feltétel*ből könnyen megkapható a konstans $A_xA_yA_z$ szorzat, amelyből már adódnak a három kvantumszámot jellemző állapotok teljes *sajátfüggvényei*:

$$\Psi_{n_x,n_y,n_z} = \sqrt{\frac{8}{abc}}\,\sin\frac{\pi n_x x}{a}\,\sin\frac{\pi n_y y}{b}\,\sin\frac{\pi n_z z}{c}\,. \tag{9.109f}$$

A doboz oldalain eltűnnek a sajátfüggvények, mert a szinuszfüggvények valamelyike zérus. Ez a falakon kívül is igaz, ha:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{n_x}\,,\ \frac{2a}{n_x},\ldots,\ \frac{(n_x-1)a}{n_x}\,,\\ y &= \frac{b}{n_y}\,,\ \frac{2b}{n_y},\ldots,\ \frac{(n_y-1)b}{n_y}\,,\\ z &= \frac{c}{n_z}\,,\ \frac{2c}{n_z},\ldots,\ \frac{(n_z-1)c}{n_z}\,. \end{aligned} \tag{9.109g}$$

Így n_x-1, n_y-1, ill. n_z-1 az x-, y-, ill. z-tengelyre merőleges síkunk van, amelyeken Ψ eltűnik. Ezeket a síkokat *csomósíkok*nak nevezzük.

4. Egy speciális (elfajult) eset: a kocka Az $a=b=c$, azaz kocka esetén a részecske állapotát olyan, különböző lineárisan független sajátfüggvények írják le, amelyeknek ugyanaz az energiájuk. Ez az eset áll fenn, ha az ${n_x}^2+{n_y}^2+{n_z}^2$ összeg különböző állapotokban ugyanazt az értéket veszi fel. Ekkor *elfajult állapot*okról beszélünk; ha i darab azonos energiájú állapotunk van, akkor *i-szeres elfajulás*sal van dolgunk.
Az n_x, n_y és n_z kvantumszámok nulla kivételével minden egész értéket felvehetnek. Ha a nulla értéket is felvehetnék, akkor az azt jelentené, hogy a hullámfüggvény azonosan zérus, azaz a részecske nem lehetne sehol a doboz belsejében. Ezért a részecskének kell, hogy legyen energiája az abszolút nulla fok elérésekor. Ennek a *zérusponti transzlációs energiá*nak az értéke a kocka esetén:

$$E_0=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\,. \tag{9.109h}$$

5. Részecske mozgása centrálszimmetrikus erőtérben

(lásd 665. old.)

1. A probléma felvetése Tegyük fel, hogy egy részecske egy minden sugár mentén ugyanolyan, centrálszimmetrikus $V(r)$ potenciál hatása alatt mozog. Ez a modell az elektronnak a pozitív töltésű mag elektrosztatikus terében történő mozgását írja le. Mivel a probléma gömbszimmetrikus, célszerű gömbi koordinátákra áttérnünk **(9.20. ábra)**:

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, & x&=r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\\ \vartheta&=\arccos\frac{z}{r}\,, & y&=r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\\ \varphi&=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, & z&=r\cos\vartheta\,, \end{aligned} \tag{9.110a}$$

ϑ a polárszög és φ a vetület és az x-tengely szöge. Ekkor a LAPLACE-operátor

$$\Delta\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\,, \tag{9.110b}$$

polárkoordinátás alakja következtében a stacionárius SCHRÖDINGER-egyenlet a következő alakú:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(r)]\Psi=0\,. \tag{9.110c}$$

2. A megoldás módja Keressük a megoldást

$$\Psi(r,\vartheta,\varphi)=R_l(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi) \tag{9.111a}$$

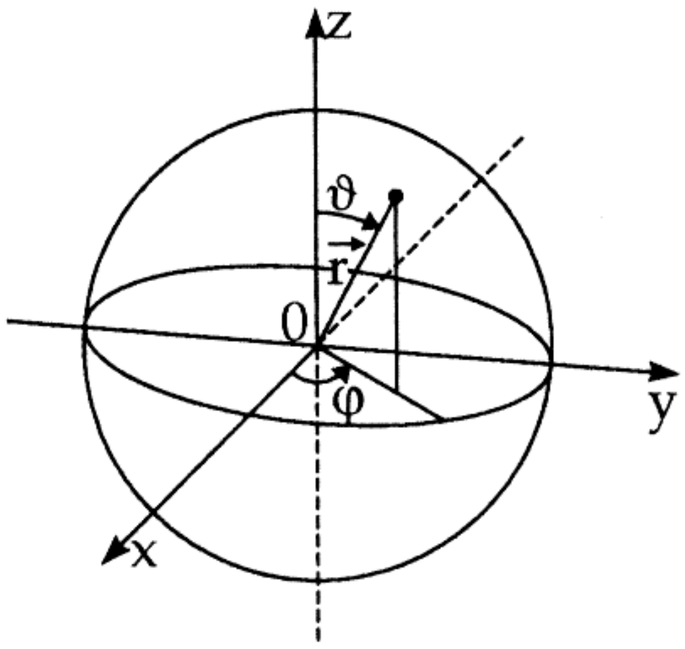
alakban, ahol R_l csak r-től függ, és $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ csak a szögektől függő hullámfüggvény. (9.111a)-t (9.110c)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R_l}{\partial r}\right)Y_l^m+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(r)]R_lY_l^m\\ &=-\left\{\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_l^m}{\partial\vartheta}\right)R_l+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2Y_L^m}{\partial\varphi^2}R_l\right\}\,. \end{aligned} \tag{9.111b}$$

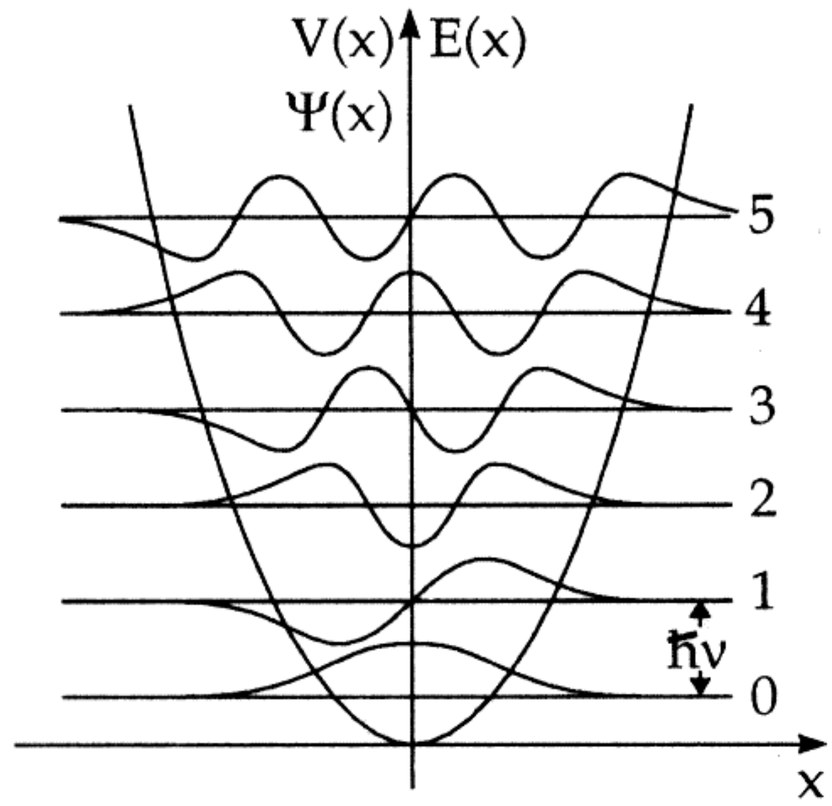
$R_lY_l^m$-mel való osztással, majd r^2-tel szorozva végül a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{R_l}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=-\frac{1}{Y_l^m}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_l^m}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2Y_l^m}{\partial\varphi^2}\right\}\,. \tag{9.111c}$$

A (9.111c) egyenletben a változók a 2 oldalra szeparáltak, tehát csak akkor oldható meg, ha a két oldal ugyanazon állandóval egyezik meg. Ekkor a parciális differenciálegyenletből két közönséges differenci-



9.20. ábra.



9.21. ábra.

álegyenlet adódik. Ha a fent említett állandó $l(l+1)$, akkor egy csak r-től és $V(r)$-től függő ún. *radiális egyenlet*et kapunk:

$$\frac{1}{R_l r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]=0\,. \tag{9.111d}$$

A szögtől függő részt ismét szétválasztjuk:

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi)=\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \tag{9.111e}$$

Ha (9.111e)-t behelyettesítjük (9.111c)-be, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sin^2\vartheta\left\{\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+l(l+1)\right\}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\,. \tag{9.111f}$$

A megfelelő állandót célszerű m^2-nek választani, ekkor az ún. *poláregyenlet*:

$$\frac{1}{\Theta\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}=0\,, \tag{9.111g}$$

ill. az *azimutális egyenlet*:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0\,. \tag{9.111h}$$

Mindkét egyenlet független a potenciáltól, tehát minden centrálszimmetrikus potenciál esetében teljesülnek.

A (9.111a) megoldásokkal kapcsolatban három dolgot követelünk meg: $r\to\infty$ esetén tartsanak 0-hoz, a gömb felületén legyenek egyértelműek, és legyenek négyzetesen integrálhatók.

3. A radiális egyenlet megoldása A (9.111d) radiális egyenlet a $V(r)$ potemciál mellett meg az $l(l+1)$ állandót is tartalmazza. Mivel az $u_l(r)$ függvény négyzete a részecskének az r és $r+dr$ gömbhéjak közötti $|u_l(r)|^2dr=|R_l(r)|^2r^2dr$ tartózkodási valószínűségét adja meg, legyen

$$u_l(r)=r\cdot R_l(r)\,. \tag{9.112a}$$

Ezzel a helyettesítéssel a következő egydimenziós SCHRÖDINGER-egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]u_l(r)=0\,. \tag{9.112b}$$

Az egyenletben megtalálható a két részből álló

$$V_{\text{eff}}=V(r)+V_l(l)\,, \tag{9.112c}$$

effektív potenciál. A

$$V_{\text{rot}}(l) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \tag{9.112d}$$

forgási energiát centrifugális potenciálnak nevezzük.
Az l *pálya-impulzusnyomaték-kvantumszám* fizikai jelentése a forgó részecske klasszikus

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\vec{\omega}^2 = \frac{(\Theta\vec{\omega})^2}{2\Theta} = \frac{\vec{l}^{\,2}}{2\Theta} = \frac{\vec{l}^{\,2}}{2mr^2} \tag{9.112e}$$

forgási energiájának mintájára adódik, ahol $\Theta = \mu r^2$ tehetetlenségi nyomaték és $\vec{l} = \Theta\vec{\omega}$ a pálya-impluzusnyomaték:

$$\vec{l}^{\,2} = l(l+1)\hbar^2\,, \quad \left|\vec{l}^{\,2}\right| = \hbar\sqrt{l(l+1)}\,. \tag{9.112f}$$

4. A poláregyenlet megoldása Az $l(l+1)$ és az m^2 állandót tartalmazó a (9.111g) poláregyenlet egy LEGENDRE-féle differenciálegyenlet (9.56a). A $\Theta_l^m(\vartheta)$ megoldását a hatványsorba fejtés módszerével lehet meghatározni. Véges, egyértelmű és folytonos megoldást kapunk $l(l+1) = 0, 2, 6, 12, \ldots$ esetén. Ezért:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, \quad |m| \le l\,. \tag{9.113a}$$

Így m összesen $(2l+1)$ értéket vehet fel:

$$-l,\ (-l+1),\ (-l+2), \ldots, 0, \ldots\ (l-2),\ (l-1),\ l. \tag{9.113b}$$

A megfelelő LEGENDRE-polinomokat $m \neq 0$ esetén kapjuk, és a következőképpen definiáljuk őket:

$$P_l^m(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\cos^2\vartheta)^{m/2}\frac{d^{l+m}(\cos^2\vartheta - 1)^l}{(d\cos\vartheta)^{l+m}}\,. \tag{9.113c}$$

Az $l = 0$, $m = n$, $\cos\vartheta = x$ speciális esetben elsőfajú LEGENDRE-polinomot kapunk (9.56c) (520. old.). Normálással azt kapjuk, hogy

$$\Theta_l^m(\vartheta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\cdot P_l^m(\cos\vartheta) = N_l^m P_l^m(\cos\vartheta)\,. \tag{9.113d}$$

5. Az azimutális egyenlet megoldása Mivel a részecske $V(r)$ potenciál által meghatározott mozgása akkor is független az azimutális szögtől, ha a tér egy bizonyos iránya ki van tüntetve, pl. ha abban az irányban mágneses téren halad át, ezért a $\Phi = \alpha e^{\mathrm{i}\,m\varphi} + \beta e^{-\mathrm{i}\,m\varphi}$ általános megoldást a

$$\Phi_m(\varphi) = Ae^{\pm\mathrm{i}\,m\varphi}\,, \tag{9.114a}$$

alakban keressük, hogy $|\Phi_m|^2$ független legyen φ-től. Az egyértékűségből adódó

$$\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi) \tag{9.114b}$$

miatt m csak a $0, \pm1, \pm2, \ldots$ értékeket veheti fel.
Az

$$\int_0^{2\pi} |\Phi|^2\, d\varphi = 1 = |A|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi|A|^2 \tag{9.114c}$$

normálási feltétel miatt:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}\,m\varphi} \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)\,. \tag{9.114d}$$

Az m kvantumszámot *mágneses kvantumszám*nak nevezzük.

6. A szögtől függő megoldások (9.111e) értelmében a polár- és az azimutális egyenleteket össze kell szorozni:

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}N_l^m P_l^m(\cos\vartheta)e^{\mathrm{i}m\varphi}\,. \tag{9.115a}$$

Az $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ függvények az úgynevezett *gömbfüggvények.*
Ha az $\vec{\mathbf{r}}$ rádiuszvektort tükrözzük az origóra ($\vec{\mathbf{r}} \to -\vec{\mathbf{r}}$), akkor ϑ-ból $\pi-\vartheta$ és φ-ból $\varphi+\pi$ lesz, ami Y_l^m előjelét megváltoztathatja:

$$Y_l^m(\pi-\vartheta,\varphi+\pi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta,\varphi)\,. \tag{9.115b}$$

Ebből megkapjuk a tekintett hullámfüggvény *paritás*át:

$$P = (-1)^l\,. \tag{9.116a}$$

7. paritás A *paritás* az a tulajdonság, amely a hullámfüggvény viselkedését jellemzi az $\vec{\mathbf{r}} \to -\vec{\mathbf{r}}$ *tértükrözés*kor (lásd 268. old.). Ezt a $\mathbf{P}$ inverziós, más néven a paritásoperátorral jellemezhetjük: $\mathbf{P}\Psi(\vec{\mathbf{r}},t) = \Psi(-\vec{\mathbf{r}},t)$. Jelöljük ennek az operátornak a sajátértékét P-vel, akkor $\mathbf{P}$ kétszeri alkalmazásával, azaz $\mathbf{PP}\Psi(\vec{\mathbf{r}},t)$-vel azt kapjuk, hogy $\mathbf{PP}\Psi(\vec{\mathbf{r}},t) = \Psi(\vec{\mathbf{r}},t)$, azaz az eredeti hullámfüggvényt. Innen az következik, hogy

$$P^2 = 1\,, \quad P = \pm 1\,. \tag{9.116b}$$

Azt mondjuk, hogy egy hullámfüggvény *páros*, ha tértükrözésnél nem változtatja előjelét, ill. *páratlan*, ha tértükrözésnél előjelet vált.

6. Lineáris harmonikus oszcillátor

1. A probléma felvetése *Harmonikus rezgés*ek keletkeznek, ha az oszcillátorban a visszatérítő erő $F = -kx$ alakú (HOOKE-törvény). A rezgés frekvenciájára, körfrekvenciájára és a potenciális energiára igazak a következő összefüggések:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9.117a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9.117b}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{\omega^2}{2}x^2. \tag{9.117c}$$

(9.106a)-be való behelyettesítéssel a SCHRÖDINGER-egyenlet a következő alakú:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{\omega^2}{2}mx^2\right]\Psi = 0. \tag{9.118a}$$

Az

$$y = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \tag{9.118b}$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \tag{9.118c}$$

helyettesítéssel, ahol λ most paraméter, nem a hullámhossz, (9.118a) egyszerűbb alakra hozható:

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + (\lambda - y^2)\Psi = 0, \tag{9.118d}$$

ez a WEBER-féle differenciálegyenlet.

2. A megoldás menete Keressük a WEBER-féle differenciálegyenlet megoldását a

$$\Psi(y) = e^{-y^2/2}H(y) \tag{9.119a}$$

alakban. Differenciálással azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = e^{-y^2/2}\left[\frac{d^2H}{dy^2} - 2y\frac{dH}{dy} + (y^2-1)H\right]\,. \tag{9.119b}$$

Ha behelyettesítünk a (9.118d) SCHRÖDINGER-egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2H}{dy^2} - 2y\frac{dH}{dy} + (\lambda-1)H = 0. \tag{9.119c}$$

Keressük H-t hatványsor alakban:

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i, \quad \text{amiből} \quad \frac{dH}{dy} = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i y^{i-1}, \quad \frac{d^2H}{dy^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i y^{i-2}. \tag{9.120a}$$

(9.120a)-et (9.119c)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i y^{i-2} - \sum_{i=1}^{\infty} 2ia_i y^i + \sum_{i=0}^{\infty} i(\lambda-1)a_i y^i = 0. \tag{9.120b}$$

y^j együtthatóinak összehasonlításával adódik a következő rekurziós formula:

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} = [2j-(\lambda-1)]a_j \quad (j=0,1,2,\ldots). \tag{9.120c}$$

y páros kitevőinek a_j együtthatóit a_0 segítségével, páratlan hatványának együtthatóit a_1 segítségével lehet kifejezni, ezért a_0 és a_1 szabadon választható.

3. Fizikai megoldások Keressük az adott részecske tartózkodási valószínűségét az adott állapotokban. Ezeket az állapotokat egy fizikailag értelmes, azaz normálható, y nagy értékeire nullához tartó sajátfüggvény és egy négyzetesen integrálható $\Psi(x)$ hullámfüggvény segítségével írjuk le.
A (9.119a)-beli $\exp(-y^2/2)$ exponenciális függvény biztosítja, hogy $y \to \infty$ esetén $\Psi(y)$ nullához tart, ha $H(y)$ egy polinom. Ezért a (9.120a)-beli a_j együtthatók egy bizonyos n indextől kezdve eltűnnek, azaz ha $j > n$, akkor $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots = 0$. $j = n$ esetén most a (9.120c) rekurziós formula a következő alakú:

$$a_{n+2} = \frac{2n-(\lambda-1)}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{9.121a}$$

Ennek $a_n \neq 0$, $a_{n+2} = 0$ esetén csak akkor van megoldása, ha

$$2n-(\lambda-1) = 0, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1. \tag{9.121b}$$

Így megfelelő λ esetén eltűnnek az $a_{n+2}, a_{n+4}, \ldots$ együtthatók. Hogy az $a_{n+1}, a_{n+3}, \ldots$ együtthatók is eltűnjenek, teljesülnie kell $a_{n-1} = 0$-nak.
$a_n = 2^n$, $a_{n-1} = 0$ esetén HERMITE-*polinom*okat kapunk (lásd 522. old.). Az első hat polinom a következő:

$$\begin{aligned} &n=0\colon\ H_0 = 1; \quad n=1\colon\ H_1 = 2y; \quad n=2\colon\ H_2 = -2+4y^2; \\ &n=3\colon\ H_3 = -12y+8y^3; \quad n=4\colon\ H_4 = 12-48y^2+16y^4; \\ &n=5\colon\ H_5 = 120y-160y^3+32y^5. \end{aligned} \tag{9.121c}$$

Az n *rezgési kvantumszám* esetén a $\Psi(y)$ megoldás a következő:

$$\Psi_n = N_n e^{-y^2/2} H_n(y), \tag{9.122a}$$

ahol N_n normálási állandó, amelyet az $\int {\Psi_n}^2\, dy = 1$ normálási feltételből kaphatunk meg:

$${N_n}^2 = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad \text{ahol} \quad \sqrt{\alpha} = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \tag{9.122b}$$

A rezgési energia sajátértékei mint *kvantálási feltételek* a következők:

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{9.122c}$$

Az energiaállapotok ekvidisztans spektrummal rendelkeznek. A zárójelben a $+1/2$-ed tag azt jelenti, hogy a kvantummechanikai oszcillátornak, ellentétben a klasszikus oszcillátorral, még a legalacsonyabb $n = 0$ energiaállapotban is van energiája, ez a *zérusponti rezgési energia.*
A **9.21. ábra** az ekvidisztans energiaállapotokat, a megfelelő $\Psi_0, \ldots, \Psi_5$ hullámfüggvényeket valamint a (9.117c) potenciális energiafüggvényt szemlélteti. A potenciális energiát szemléltető parabola pontjai a klasszikus oszcillátor fordulópontjait jelölik, amelynek amplitúdója $a = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ és energiája $E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$. A $dw_{qu} = |\Psi(x)|^2\, dx$ formula adja annak kvantummechanikai valószínűségét, hogy egy

részecske a $(x, x+dx)$ intervallumban tartózkodik . Ez a valószínűség ezeken a pontokon kívül is különbözik nullától. Így pl. $n = 1$, azaz $E = (3/2)\hbar\omega$ esetén $dw_{qu} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda x^2}\,dx$, melynek maximumhelye:

$$x_{max,qu} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda}} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{9.122d}$$

Ugyanez a megfelelő klasszikus harmonikus oszcillátor esetében:

$$x_{max,kl} = \pm a = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \pm\sqrt{\frac{3\hbar}{m\omega}}. \tag{9.122e}$$

Nagy n kvantumszámok esetén a kvantummechanikai eloszlássűrűség a klasszikus középértékhez közelít.

9.2.4. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek, szolitonok

9.2.4.1. A probléma elméleti fizikai megközelítése

1. A szoliton fogalma

A *szoliton*ok — vagy szolitér hullámok — fizikailag egy nemlineáris közeg vagy mező valamilyen módon lokalizált zavarai; a megfelelő energia valamely tartományra van koncentrálva. Ez a jelenség előfordul:

- szilárd testekben, pl. anharmónikus rácsokban, JOSEPHSON-érintkezőkben, üveg-, ill. kvázi-egydimenziós vezetőkben,
- folyadékokban felületi vagy spinhullámokként,
- plazmákban LANGMUIR-szolitonokként,
- lineáris molekulákban,
- a klasszikus kvantumtérelméletben.

A szolitonok rendelkeznek mind részecske-, mind pedig hullámtulajdonságokkal; minden időpontban lokalizálhatók, és az a tartomány illetve az a pont, ahol a hullámot lokalizálták, úgy mozog, mint egy szabad részecske, sőt nyugalomban is lehet. A szoliton mint hullám permanens alakkal rendelkezik: a nemlinearitás és a diszperzió közötti összefüggés alapján nem változtatja formáját és sebességét.
Matematikailag a szolitonok bizonyos nemlineáris parciális differenciálegyenletek megoldásai, amelyek a fizikában, a műszaki tudományokban és az alkamazott matematikában kerülnek elő. Különlegességüket mindenfajta disszipáció hiánya és az adja, hogy a nemlineáris tagokat nem lehet perturbációs módszerekkel kezelni.
A legfontosabb ilyen egyenletek:

a) a Korteweg de Vries-(KdV)-egyenlet
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0\,, \tag{9.123}$$

b) a nemlineáris Schrödinger-(NLS)-egyenlet
$$\mathrm{i}\,u_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0\,, \tag{9.124}$$

c) a szinusz–Gordon-(SG)-egyenlet
$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,. \tag{9.125}$$

x, ill. t mint index most parciális deriváltakat jelöl, pl. $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$.
Ezekben az egyenletekben az egydimenziós esettel foglalkozunk, azaz $u = u(x,t)$, ahol x a helykoordináta és t az időkoordináta. Az egyenleteket dimenziótlanítottuk, azaz x és t dimenzió nélküli mennyiségek. A gyakorlatban ezeket meg kell szorozni az adott problémának megfelelő dimenzióval ellátott x_0 és t_0 mennyiségekkel. Hasonló igaz a sebességre is mint származtatott mennyiségre.

2. Szolitonok kölcsönhatása

Ha két különböző sebességű szoliton találkozik, akkor a kölcsönhatás után úgy viselkednek, mintha áthatoltak volna egymáson, azaz mindegyik szoliton formája és sebessége aszimptotikusan megmarad; fellép viszont egy fáziskésés. Két szoliton anélkül is kölcsönhatásba léphet egymással, hogy egymást megsemmisítenék. Ekkor elasztikus kölcsönhatásról beszélünk. Az utóbbi ekvivalens egy N-szolitonmegoldással, ahol N a szolitonok száma. A kezdetiérték-feladat megoldásánál látható, hogy egy adott kezdeti impulzus szolitonokra bomlik, amelyek száma nem az impulzus formájától, hanem felületétől függ.

3. Nemlineáris evolúciós egyenletek

*Evolúciós egyenlet*nek nevezzük az olyan egyenletet, amely valamely fizikai mennyiség időbeli alakulását írja le. Evolúciós egyenlet például a hullámegyenlet (lásd 544. old.), a hővezetési egyenlet (lásd 546. old.) és a SCHRÖDINGER-egyenlet (lásd 547. old.). Az evolúciós egyenletek megoldásait szokás *evolúciós függvény*eknek is nevezni.

A lineáris evolúciós egyenletekkel ellentétben a (9.123), (9.124) és a (9.125) nemlineáris evolúciós egyenlet tartalmazza a következő nemlineáris tagokat: $u\partial u/\partial x$, $|u|^2u$, ill. $\sin u$.

9.2.4.2. A Korteweg de Vries-egyenlet

1. Előfordulás

A KdV-egyenlettel a következő problémák matematikai tárgyalásakor találkozhatunk:

- sík vízfelületen keletkező felületi hullámok,
- nemlineáris rácsok anharmonikus rezgései,
- plazmafizikai problémák és
- nemlineáris elektromos hálózatok.

2. Az egyenlet és megoldásai

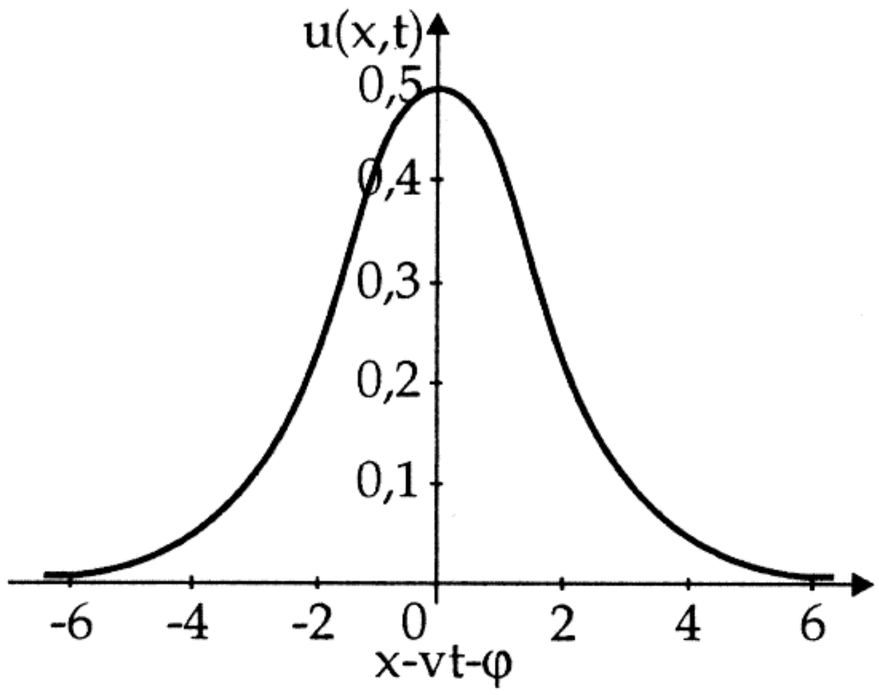
Az u evolúciós függvényre vonatkozó KdV-egyenlet a következő:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0\,. \tag{9.126}$$

Ennek szoliton-megoldása

$$u(x,t) = \frac{v}{2\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(x - vt - \varphi)\right]}\,. \tag{9.127}$$

Ezen KdV-szolitont egyértelműen meghatározza a v (> 0) paraméter és φ. A **(9.22. ábrán)** $v = 1$. Egy tipikus nemlineáris effektussal állunk szemben, amikor a v szolitonsebesség eléri a szoliton amplitúdóját és szélességét: nagyobb amplitúdójú és keskenyebb KdV-szolitonok gyorsabban mozognak, mint a kisebb amplitúdójú és nagyobb szélességűek. A φ szolitonfázis a szoliton maximumának helyzetét írja le $t = 0$-ban.



9.22. ábra.

A (9.126) egyenletnek vannak N-szolitonmegoldásai is. Egy ilyen N-szolitonmegoldás a $t \to \pm\infty$ aszimptotikus esetben felírható egy-szolitonmegoldások összegeként:

$$u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t)\,. \tag{9.128}$$

Itt minden $u_n(x,t)$ evolúciós függvényt a v_n sebesség és a $\varphi_n^{\pm}$ fázis jellemez. A kölcsönhatás előtti φ_n^- kezdeti fázisok különböznek a kölcsönhatás utáni φ_n^+ végfázisoktól, míg a $v_1, v_2, \ldots, v_N$ sebességek nem változnak, azaz elasztikus kölcsönhatásról van szó.

$N = 2$ esetén (9.126)-nek van két-szolitonmegoldása. Nem asziptotikus esetben nem írható fel az előbbi alakban, a megoldás a $k_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n}$ és $\alpha_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n}(x - v_nt - \varphi_n)$ $(n = 1, 2)$ jelölésekkel a következő alakú:

$$u(x,t) = 8\frac{k_1^2e^{\alpha_1} + k_2^2e^{\alpha_2} + (k_1 - k_2)^2e^{(\alpha_1+\alpha_2)}\left[2 + \dfrac{1}{(k_1+k_2)^2}\left(k_1^2e^{\alpha_1} + k_2^2e^{\alpha_2}\right)\right]}{\left[1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \left(\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)}\right]^2}\,. \tag{9.129}$$

A (9.129) egyenlet a $t \to -\infty$ esetben aszimptotikusan leír két kölcsönható szolitont, melyek sebességeire $v_1 = 4k_1^2$ és $v_2 = 4k_2^2$ teljesül; egy kölcsönhatási folyamat után $t \to +\infty$-re megint aszimptotikusan két ugyanolyan sebességű nem kölcsönható szolitonba mennek át. A

$$w_t + 6(w_x)^2 + w_{xxx} = 0 \tag{9.130a}$$

nemlineáris evolúciós egyenletnek a $w = \dfrac{F_x}{F}$ jelöléssel

$$\textbf{a)} \quad F(x,t) = 1 + e^{\alpha}\,, \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{v}(x - vt - \varphi) \tag{9.130b}$$

esetén egy szolitonmegoldása van és

$$\textbf{b)} \quad F(x,t) = 1 + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{9.130c}$$

esetén pedig egy két-szolitonmegoldása. A $2w_x = u$ helyettesítéssel (9.130a)-ből a (9.126) egyenletet kapjuk. A (9.129) egyenlet és a (9.130c)-ből w-re adódó kifejezés példák nemlineáris szuperpozícióra.

Ha (9.126)-ban a $+6uu_x$ tagot $-6uu_x$-szel helyettesítjük, akkor (9.127) jobb oldalát meg kell szorozni (-1)-gyel. Ebben az esetben *antiszolitonokról* is beszélünk.

9.2.4.3. Nemlineáris Schrödinger-egyenlet

1. Előfordulás

A nemlineáris Schrödinger-egyenlettel a következő problémák matematikai tárgyalásakor találkozhatunk:

- a nemlineáris optikában, amikor az n törésmutató függ az $\vec{\mathbf{E}}$ elektromos térerősségtől. Ilyen pl. a KERR-effektus, ahol $n(\vec{\mathbf{E}}) = n_0 + n_2|\vec{\mathbf{E}}|^2$, $n_0, n_2 =$ állandók és
- az öngravitáló szeletek hidrodinamikájában, ami a galaktikus spirálkarok leírását teszi lehetővé.

2. Az egyenlet és megoldásai

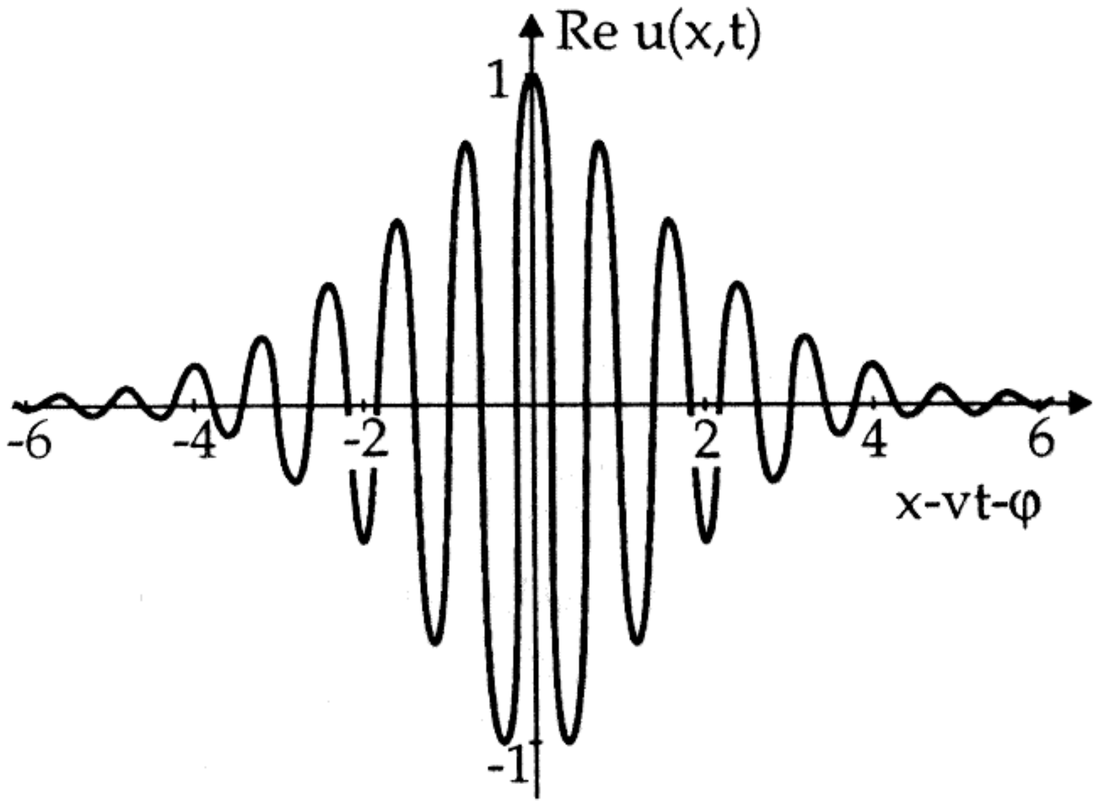
Az u evolúciós függvényre vonatkozó nemlineáris Schrödinger-egyenlet és szolitonmegoldásai a következő alakúak:

$$\mathrm{i}\,u_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0\,, \tag{9.131}$$

$$u(x,t) = 2\eta \frac{e^{\mathrm{i}[2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t - \chi]}}{\mathrm{ch}[2\eta(x + 4\xi t - \varphi)]}\,. \tag{9.132}$$

A **9.23. ábra** (9.132) valós részét szemlélteti, ahol $v = -4\xi, \eta = 1/2$ és $\xi = 2/5$.

Itt $u(x,t)$ komplex értékű függvény. A nemlináris Schrödinger-szolitont a következő négy, dimenzió nélküli paraméter jellemzi: η, ξ, φ és χ. A hullámcsomag burkolója a -4ξ sebességgel mozog, a burkoló hullám fázissebessége
$2(\eta^2 - \xi^2)/\xi$.
A KdV-szolitonnal (9.127) ellentétben az (η) amplitúdó és a (ξ) sebesség egymástól független.
N kölcsönható szoliton esetében ezeket $4N$ szabadon választott paraméter jellemzi: η_n, ξ_n, φ_n, χ_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Amennyiben a szolitonok különböző sebességűek, az N-szolitonmegoldás a $t \to \pm\infty$ aszimptotikus esetekben N (9.132) alakú individuális szolitonra bomlik.



9.23. ábra.

9.2.4.4. A szinusz–Gordon-egyenlet

1. Előfordulás

A szinusz–Gordon-egyenletet a térben inhomogén kvantummechanikai 2-szintes-rendszereket leíró BLOCH-egyenletből kaphatjuk. A következő hullámjelenségeket modellezi:

- rezonáns lézerközegek ultrarövid impulzusait (önindukált transzparencia),
- nagyfelületű JOSEPHSON-érintkezők mágneses folyamait, azaz két szupravezető közötti alagútkapcsolatokat
- szupravezetű 3-as hélium (^{3}He) spinhullámait.

A SG-egyenlet szolitonmegoldásait egy ingából és egy rugóból álló mechanikai rendszerrel lehet modellezni. Egy pont környezetében az evolúciós függvény folytonosan átvált a nulla értékről egy állandó c értékre. Az angol „kink" szó nyomán az *SG-szoliton*okat többnyire *kink-szoliton*oknak nevezik. Megfordítva, ha az evolúciós függvény az állandó c értékről a nulla értékre vált, akkor úgynevezett *antikink-szoliton*okról beszélünk. Az ilyen megoldások segítségével tartományfalak is leírhatók.

2. Az egyenlet és megoldásai

Az u evolúciós függvényre vonatkozó SG-egyenlet az alábbi:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,. \tag{9.133}$$

Ennek az alábbiak a szolitonmegoldásai:

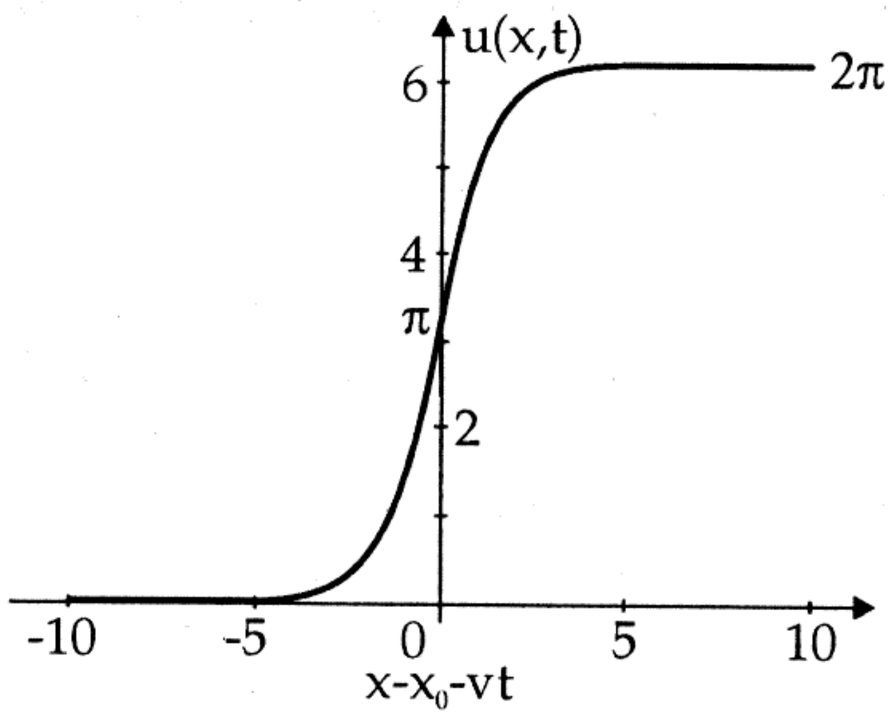
1. Kink-szoliton

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{\gamma(x-x_0-vt)}\,, \tag{9.134}$$

ahol $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ és $-1 < v < +1$.

A **9.24. ábrán** a $v = 1/2$ értékhez tartozó (9.134) kink-szoliton grafikonja látható. A kink-szolitont két dimenziómentes paraméter, v és x_0 határozza meg. A sebesség nem függ az amplitúdótól, az idő és hely szerinti deriváltak szokásos lokalizált szolitonok:

$$-\frac{u_t}{v} = u_x = \frac{2\gamma}{\mathrm{ch}\,\gamma(x-x_0-vt)}\,. \tag{9.135}$$



9.24. ábra.

2. Antikink-szoliton

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{-\gamma(x-x_1-vt)}\,. \tag{9.136}$$

3. Kink-antikink-szoliton $v = 0$ esetén (9.134, 9.136)-ből egy statikus kink-antikink-szoliton keletkezik:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{\pm(x-x_0)}\,. \tag{9.137}$$

(9.133) további megoldásai:

4. Kink-kink-kollízió

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[v\frac{\mathrm{sh}\,\gamma x}{\mathrm{ch}\,\gamma vt}\right]\,. \tag{9.138}$$

5. Kink-antikink-kollízió

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{v}\frac{\mathrm{sh}\,\gamma vt}{\mathrm{ch}\,\gamma x}\right]\,. \tag{9.139}$$

6. Kettős- vagy Breather-szoliton, másnéven kink-antikink dublett

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\frac{\sin\omega t}{\mathrm{ch}\,\sqrt{1-\omega^2}x}\right]\,. \tag{9.140}$$

A (9.140) egyenlet megoldása egy stacionárius hullám, amelynek burkolója az ω frekvenciával van modulálva.

7. Térben periodikus kink-rács

$$u(x,t) = 2\arcsin\left[\pm\mathrm{sn}\left(\frac{x-vt}{k\sqrt{1-v^2}},k\right)\right]+\pi\,. \tag{9.141a}$$

A λ hullámhossz és a k rácsállandó között a következő összefüggés áll fenn:

$$\lambda = 4K(k)k\sqrt{1-v^2}\,. \tag{9.141b}$$

$k=1$ esetén, azaz, ha $\lambda\to\infty$, a megoldás a következő alakú:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\,e^{\pm\gamma(x-vt)}\,, \tag{9.141c}$$

azaz ismét (9.134) és (9.136) kink-antikink-szoliton, ahol $x_0=0$.

Megjegyzés: sn x egy JACOBI-féle elliptikus függvény, ahol a modulus k és a periódus K (ld. 731. old.):

$$\mathrm{sn}x = \sin\varphi(x,k)\,, \tag{9.142a}$$

$$x = \int_0^{\sin\varphi(x,k)} \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2)(1-k^2q^2)}}\,, \tag{9.142b}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\,. \tag{9.142c}$$

A (9.142b) egyenletet (14.97b)-ből, 731. old. a $\sin\psi = q$ helyettesítéssel kaphatjuk meg. A teljes elliptikus integrál sorfejtése a (8.106), 470. old.) egyenlettel van megadva.

9.2.4.5. További szolitonmegoldással rendelkező nemlineáris evolúciós egyenletek

1. A módosított KdV-egyenlet

$$u_t \pm 6u^2u_x + u_{xxx} = 0\,. \tag{9.143}$$

A még általánosabb egyenlet a következő:

$$u_t + u^pu_x + u_{xxx} = 0, \tag{9.144}$$

megoldása az

$$u(x,t) = \left[\frac{\frac{1}{2}|v|(p+1)(p+2)}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{1}{2}p\sqrt{|v|}(x-vt-\varphi)\right]}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{9.145}$$

szoliton.

2. A szinuszhiperbolikusz–Gordon-egyenlet

$$u_{tt} - u_{xx} + \mathrm{sh}\,u = 0\,. \tag{9.146}$$

3. A Boussinesq-egyenlet

$$u_{xx} - u_{tt} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0\,. \tag{9.147}$$

Nemlineáris elektromos hálózatok leírásánál van szerepe, amikor a töltés-feszültség kapcsolatot kontinuummal közelítjük.

4. Hirota-egyenlet

$$u_t + \mathrm{i}3\alpha|u|^2u_x + \beta u_{xx} + \mathrm{i}\sigma u_{xxx} + \delta|u|^2u = 0\,, \qquad \alpha\beta = \sigma\delta\,. \tag{9.148}$$

5. Burgers-egyenlet

$$u_t - u_{xx} + uu_x = 0\,. \tag{9.149}$$

Turbulens jelenségek modellezésénél játszik szerepet. A HOPF–COLE-transzformáció segítségével diffúziós egyenletbe, azaz lineáris differenciálegyenletbe megy át.

6. Kadomzev–Pedviaswili-egyenlet

Az

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = u_{yy} \tag{9.150a}$$

egyenlet megoldása az

$$u(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left[\frac{1}{k^2} + \left|x + \mathrm{i}ky - 3k^2t\right|^2\right] \tag{9.150b}$$

szoliton. A (9.150a) egyenlet példa többváltozós szolitonegyenletre (két térváltozó lép fel benne).

10. Variációszámítás

10.1. A feladat kitűzése

1. Funkcionál szélsőértéke A differenciálszámítás egyik legfontosabb alapfeladata azoknak az x-értékeknek a meghatározása, amelyekre egy adott $y(x)$ függvény szélsőértéket vesz fel. Hasonlóan, a variációszámításban olyan függvényeket keresünk, amelyeken egy a függvénytől, illetve annak deriváltjaitól függő integrandusú határozott integrál szélsőértéket vesz fel; a feladathoz hozzátartozik a szélsőérték létezésének diszkussziója is. Tehát a variációszámításban olyan $y(x)$ függvényt keresünk, amelyen az

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx \tag{10.1}$$

funkcionál szélsőértéket vesz fel, ahol $y(x)$ egy bizonyos, jóldefiniált függvényosztály eleme. Előfordulhat, hogy az $y(x)$ függvény és deriváltjai még további feltételeket, úgynevezett *perem-* és *mellékfeltételek*et is kell, hogy teljesítsenek.

2. Funkcionálok (10.1)-ben az x független változó helyett több változó is előfordulhat. Ekkor a megfelelő deriváltak parciálisok, és a (10.1)-beli integrálból többszörös integrál lesz. A variációszámítás alapvetően a következő funkcionálokkal foglalkozik:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx\,, \tag{10.2}$$

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\, dx\,, \tag{10.3}$$

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx\,, \tag{10.4}$$

$$I[u] = \iint_\Omega F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy\,, \tag{10.5}$$

ahol $u = u(x, y)$ az ismeretlen függvény, Ω pedig síkbeli integrációs tartomány;

$$I[u] = \iiint_R F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)\, dx\, dy\, dz\,, \tag{10.6}$$

ahol $u = u(x, y, z)$ az ismeretlen függvény, R pedig térbeli integrációs tartomány.
A variációs probléma megoldásaival kapcsolatban további peremfeltételeket szokás megfogalmazni, amelyek az egydimenziós esetben legtöbbször az integrációs intervallum két szélén: a-ban és b-ben, illetve kétdimenziós esetben az Ω integrációs tartomány határán kell teljesülniük. Ezen felül még különféle mellékfeltételeket lehet előírni a megoldásra vonatkozóan, pl. integrál-kifejezés vagy differenciálegyenlet formájában.
Azt mondjuk, hogy egy variációs probléma *első*, illetve *magasabb rendű*, ha a funkcionál integrandusában lévő F függvény az y függvénynek csak az első deriváltját, y'-t, ill. magasabbrendű $y^{(n)}$-t deriváltjait $(n > 1)$ is tartalmazza.

3. Paraméteres variációs probléma Előfordulhat, hogy paraméteres variációs problémát kell megoldani. Ilyenkor pl. az $x = x(t)\,,\ y = y(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$ paraméterezéssel előállított síkgörbén

értelmezett integrál bevezetése a (10.2) funkcionált a következő alakúvá teszi:

$$I[x,y] = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\, dt\,. \tag{10.7}$$

(Felfoghatjuk úgy is, mint (10.3) speciális esetét, ahol F argumentumai között nem szerepel a független változó; továbbá szokásos peremfeltétel az $(x(\alpha), y(\alpha))$ és az $(x(\beta), y(\beta))$ pontok megadása.)

10.2. Klasszikus feladatok

10.2.1. Izoperimetrikus probléma

Az *általános izoperimetrikus probléma* lényege abban áll, hogy adott kerületű síkidomok közül a legnagyobb területűt meghatározzuk. A probléma megoldása (adott kerületű kör) DIDO királynőtől származik, aki a monda szerint Karthágó alapításakor csak akkora területet foglalhatott el, amekkorát egy bika bőrével be tudott keríteni. Csíkokra vágta a bőrt, és ezekből a csíkokból egy körvonalat rakott ki. Az általános izoperimetrikus probléma speciális esete az a feladat, amikor derékszögű koordinátarendszerben az $A(a,0)$ és $B(b,0)$ koordinátájú pontokat összekötő, adott l hosszúságú $y = y(x)$ görbét kell meghatározni úgy, hogy a görbe és az $\overline{AB}$ szakasz közötti terület a lehető legnagyobb legyen **(10.1. ábra)**. Ez a feladat lényegében nem más, mint a következő matematikai probléma: adjunk meg olyan legalább egyszer folytonosan differenciálható $y(x) \geq 0$ függvényt, amelyre

$$I[y] = \int_{a}^{b} y(x)\, dx = \max, \tag{10.8a}$$

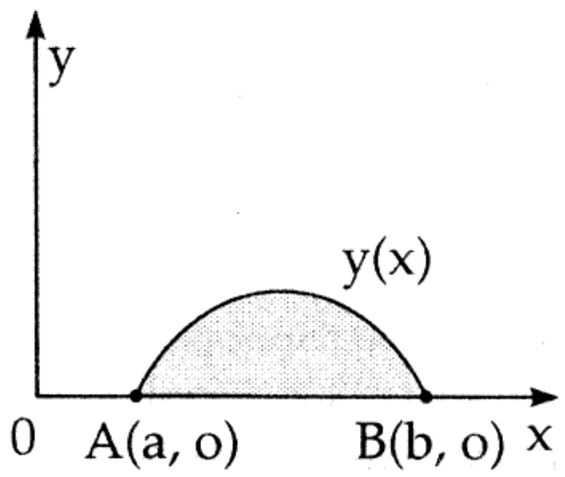
és amely kielégíti a

$$G[y] = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = l \tag{10.8b}$$

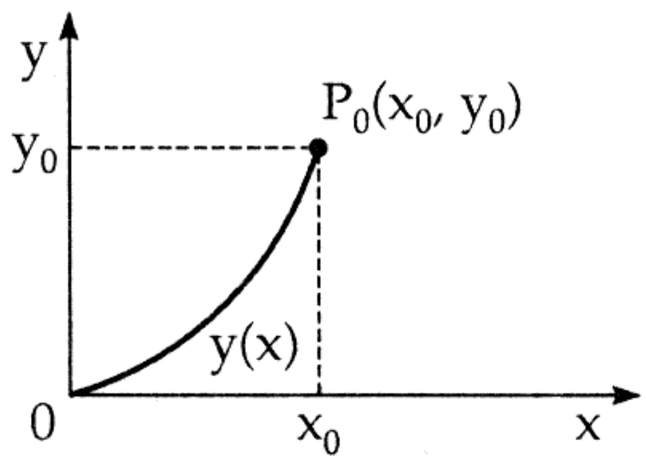
mellékfeltételt, valamint az

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{10.8c}$$

peremfeltételt.



10.1. ábra.



10.2. ábra.

10.2.2. A brachisztochron-probléma

A brachisztochron-problémát J. BERNOULLI vetette fel 1696-ban. A probléma a következő: a függőleges x, y-síkban fekvő $P_0(x_0, y_0)$-ot és az origót kössük össze egy $y = y(x)$ görbevonallal úgy, hogy P_0-ból az origóba egy anyagi pont súrlódás nélkül, csak a nehézségi erő hatása alatt jusson el a legrövidebb idő

alatt **(10.2. ábra)**. A T esési időt kifejező integrál segítségével a probléma matematikai megfogalmazása a következő: Keressünk olyan egyszer folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvényt, amelyre

$$T[y] = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\, dx = \min, \tag{10.9}$$

(ahol g a nehézségi gyorsulás), és amely kielégíti a következő peremfeltételeket:

$$y(0) = 0\,, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{10.10}$$

Vegyük figyelembe, hogy (10.9)-ben $x = x_0$ esetén szingularitás lép fel, azaz az integrandus x_0-ban nem korlátos.

10.3. Egydimenziós variációs problémák

10.3.1. A variációszámítás legegyszerűbb feladattípusa, extremálisok

A *variációszámítás legegyszerűbb feladattípusá*ba tartozik a következő probléma: olyan kétszer folytonosan differenciálható, az $y(a) = A$, $y(b) = B$ peremfeltételeket kielégítő $y(x)$ függvényt keresünk, amelyen az

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{10.11}$$

funkcionál szélsőértéket vesz fel. Az a, b, A, B értékeket valamint az F háromváltozós függvényt adottnak tekintjük. A (10.11) példa funkcionálra, ha minden, egy bizonyos függvényosztályba tartozó $y(x)$ függvényhez hozzárendel egy valós számot.
Ha például a (10.11)-beli $I[y]$ funkcionál az $y_0(x)$ függvényen veszi fel maximumát, akkor

$$I[y_0] \geq I[y], \tag{10.12}$$

ahol y olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, amely kielégíti a peremfeltételeket. Az $y(x) = y_0(x)$ görbét *extremális*nak nevezzük. Néha a variációszámítás EULER-féle differenciálegyenletének összes megoldását nevezzük extremálisoknak, függetlenül attól, hogy a funkcionál szélsőértékhelyei-e vagy sem.

10.3.2. A variációszámítás Euler-féle differenciálegyenlete

A váriációszámítás legegyszerűbb feladattípusára vonatkozó szükséges feltételt kapunk, ha a (10.12)-beli $y_0(x)$ extremálisokhoz úgynevezett *összehasonlító függvény*eket konstruálunk:

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon\, \eta(x) \tag{10.13}$$

ahol $\eta(x)$ az $\eta(a) = \eta(b) = 0$ speciális peremfeltételeket kielégítő, kétszer folytonosan differenciálható függvény. ϵ valós paramétert jelöl. (10.13)-nek (10.11)-be való helyettesítésével az $I[y]$ helyébe az ϵ-tól függő

$$I(\epsilon) = \int_a^b F(x, y_0 + \epsilon\, \eta\,, y_0' + \epsilon\, \eta')\, dx\,, \tag{10.14}$$

függvény lép; azt a követelményt pedig, miszerint az $I[y]$ funkcionál $y(x)$-on szélsőértéket vegyen fel, a következő feltétel váltja fel: az ϵ-tól függő $I(\epsilon)$ függvénynek $\epsilon = 0$-ban szélsőrtéke van. Így a variációs problémából olyan szélsőérték-probléma válik, amelynek bármely I megoldására a

$$\frac{dI}{d\epsilon} = 0 \quad \text{ha} \quad \epsilon = 0 \tag{10.15}$$

szükséges feltételnek teljesülnie kell.
Ha a háromváltozós F integrandus megfelelően sokszor differenciálható parciálisan, akkor $(x, y_0(x), y_0'(x))$ körüli TAYLOR-sorfejtéssel (lásd 422. old.) azt kapjuk, hogy

$$I(\epsilon) = \int_a^b \left[F(x, y_0, y_0') + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\epsilon\,\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\epsilon\,\eta' + O(\epsilon^2) \right] dx\,. \tag{10.16}$$

A (10.15) szükséges feltétel értelmében — a paraméteres integrál paraméter szerinti deriválhatóságára vonatkozó tételt használva a deriválást elvégezhetjük az integrandusban —:

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_a^b \eta \frac{\partial F}{\partial y}\,dx + \int_a^b \eta' \frac{\partial F}{\partial y'}\,dx = 0\,, \tag{10.17}$$

és ebből a második tag parciális integrálásával, majd az $\eta(x)$-ra vonatkozó peremfeltétel figyelembevételével

$$\int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right) dx = 0 \tag{10.18}$$

következik. Az η szorzójának folytonosságából és abból a tényből, hogy a (10.18)-beli integrál minden szóba jövő $\eta(x)$ függvényre eltűnik, azt kapjuk, hogy $[a, b]$-n ez a (valójában az extremálissal definiált) szorzó eltűnik:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{10.19}$$

A (10.19) egyenlet nem más, mint a *legegyszerűbb variációs feladattípus extremálisaira vonatkozó szükséges feltétel*, amit a *variációszámítás* EULER*-féle differenciálegyenlet*ének nevezünk. A (10.19)-beli differenciálegyenlet az összetett függvény deriválási szabályát figyelembevéve a

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \tag{10.20}$$

alakba írható. $F_{y'y'} \neq 0$ esetén ez egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet.
Az EULER-féle differenciálegyenlet egyszerűbb alakot ölt a következő speciális esetekben:
1. $F(x, y, y') = F(y')$, azaz F egyváltozós, x-től és y-tól valójában nem függ. Ekkor a (10.19) helyett a következő két feltételt kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{10.21a}$$

és ebből

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \text{ tehát } \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{állandó}. \tag{10.21b}$$

2. $F(x, y, y') = F(y, y')$, azaz most x nem szerepel változóként. Tekintsük a következő összefüggést:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right), \tag{10.22a}$$

ekkor (10.19) miatt a kiindulási

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,, \tag{10.22b}$$

azaz

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{állandó}, \tag{10.22c}$$

ami a variációszámítás legegyszerűbb feladattípusára vonatkozó szükséges feltétel az $F = F(y, y')$ esetben.

■ **A:** Az x, y-síkbeli $P_1(a, A)$ és $P_2(b, B)$ pontokat összekötő legrövidebb görbére igaz, hogy

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \min\,. \tag{10.23a}$$

(10.21b)-ből $F = F(y') = \sqrt{1+y'^2}$ esetén következik, hogy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3} = 0\,, \tag{10.23b}$$

tehát $y'' = 0$, azaz a pontokat összekötő legrövidebb görbe az egyenes.

■ **B:** Ha a $P_1(a, A)$ és a $P_2(b, B)$ pontot összekötő $y(x)$ görbeívet megforgatjuk az x-tengely körül, akkor az

$$I[y] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \tag{10.24a}$$

felszínű forgásfelületet kapjuk. Mely $y(x)$ görbére lesz ez a felszín a lehető legkisebb? $F = F(y, y') = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$ esetén (10.22c)-ből azt kapjuk, hogy $y = \frac{c}{2\pi}\sqrt{1+y'^2}$ vagy $y'^2 = \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1$, ahol $c_1 = \frac{c}{2\pi}$. Ez a differenciálegyenlet megoldható a változók szétválasztásának módszerével (lásd 533. old.), s a megoldás nem más, mint az úgynevezett *láncgörbe* (lásd 109. old.):

$$y = c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right) \qquad (c_1,\ c_2 = \text{állandó})\,, \tag{10.24b}$$

A c_1 és a c_2 állandó az $y(a) = A$ és az $y(x) = B$ peremfeltétel segítségével határozható meg. Ehhez pedig egy nemlineáris egyenletrendszert (lásd 913. old.) kell megoldanunk; a megoldhatósághoz további vizsgálatokra van szükség.

10.3.3. Variációs problémák mellékfeltételekkel

Ezek lényegében izoperimetrikus problémák (lásd 562. old.). A variációszámítás legegyszerűbb feladattípusával (lásd 563. old.), kapcsolatban további mellékfeltételt támasztunk:

$$\int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx = l, \tag{10.25}$$

ahol a funkcionál (10.11) alakú, l és G pedig adott állandó, illetve függvény. Az ilyen problémák megoldásának egyik módszere LAGRANGE-tól származik (szélsőértékek egyenlet alakjában adott mellékfeltételekkel). Legyen a (10.11)-ben szereplő F-fel

$$H(x, y(x), y'(x), \lambda) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x))\,, \tag{10.26}$$

ahol λ egy paraméter, és oldjuk meg az

$$\int_a^b H(x, y(x), y'(x), \lambda) = \text{extrémum!}\,, \tag{10.27}$$

feladatot, mint mellékfeltételt már nem tartalmazó szélsőérték-problémát. A megfelelő EULER-féle differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) = 0\,. \tag{10.28}$$

A fenti egyenlet $y = y(x, \lambda)$ megoldása még a λ paraméternek is függvénye, amelynek értékét $y = y(x, \lambda)$-nak a (10.25) mellékfeltételbe való helyettesítésével kapjuk meg.

■ A (10.2.1.) izoperimetrikus probléma esetén azt kapjuk, hogy

$$H(x, y(x), y'(x), \lambda) = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}\,. \tag{10.29a}$$

Mivel H nem függ x-től, (10.22c)-nek megfelelően a (10.28) EULER-féle differenciálegyenlet helyett a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1, \qquad \text{ill.} \qquad y'^2 = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 - y)^2}}{c_1 - y}, \tag{10.29b}$$

melynek általános megoldása az

$$(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2 \qquad (c_1, c_2, \lambda \text{ állandók}) \tag{10.29c}$$

körsor. c_1-et, c_2-t és λ-t az $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ feltételekből és abból lehet meghatározni, hogy az A és a B pont közötti görbedarab hossza l. λ-ra egy nemlineáris egyenletet kapunk, amelyet iteratív módon egy alkalmas approximációs eljárás segítségével oldhatunk meg.

10.3.4. Magasabbrendű variációs problémák

Kétféle feladattípussal foglalkozunk.

1. $\boldsymbol{F = F(x, y, y', y'')}$**:** A variációs probléma a következő:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'')\, dx = \text{extrémum!} \tag{10.30a}$$

a következő peremfeltételek mellett:

$$y(a) = A\,, \quad y(b) = B\,, \quad y'(a) = A'\,, \quad y'(b) = B'\,, \tag{10.30b}$$

ahol a, b, A, B, A' és B' adott állandók, valamint F adott függvény. A 10.3.2. fejezethez hasonlóan bevezetjük az $y(x) = y_0(x) + \epsilon\,\eta(x)$ összehasonlító függvényeket, ahol $\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = 0$, és így a (10.30a) variációs probléma megoldására vonatkozó szükséges feltételként a

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \tag{10.31}$$

EULER-*féle differenciálegyenlet*et kapjuk. (10.31) egy negyedrendű differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása négy tetszőleges állandót tartalmaz; ezeket az állandókat a (10.30b) mellékfeltételek segítségével lehet meghatározni.

■

$$I[y] = \int_0^1 (y''^2 - \alpha y'^2 - \beta y^2)dx = \text{extrémum!}, \tag{10.32a}$$

ahol tehát $F = F(y, y', y'') = y''^2 - \alpha y'^2 - \beta y^2$. Ebből az következik, hogy $F_y = -2\beta y$, $F_{y'} = -2\alpha y'$, $F_{y''} = 2y''$, $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = -2\alpha y''$, $\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 2y^{(4)}$, és az EULER-féle differenciálegyenlet a következő alakú:

$$y^{(4)} + \alpha y'' - \beta y = 0\,. \tag{10.32b}$$

Ez egy állandó együtthatójú negyedrendű lineáris differenciálegyenlet (lásd 509. old.).

2. $\boldsymbol{F = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}$**:** Ebben az általános esetben, amikor a variációs feladatbeli $I[y]$ funkcionál az ismeretlen y függvény magasabbrendű deriváltjaitól (az n-edik ($n \geq 1$) rendig bezárólag) függ, a megfelelő EULER-*féle differenciálegyenlet* a következő alakú

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0\,, \tag{10.33}$$

amely megoldásának (10.30b)-hez hasonlóan $n - 1$ mellékfeltételt kell kielégítenie.

10.3.5. Több függvényre vonatkozó variációs problémák

Tegyük fel, hogy az adott variációs probléma a következő alakú:

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx\,, \tag{10.34}$$

ahol az $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ismeretlen függvények $x = a$ és $x = b$ esetén megadott értéket vesznek fel. Ekkor n darab kétszer folytonosan differenciálható összehasonlító függvényünk van:

$$y_i(x) = y_{i0}(x) + \epsilon_i \eta_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{10.35}$$

ahol az $\eta_i(x)$ függvények a határpontokban eltűnnek.

(10.35) figyelembevételével (10.34) $I(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ alakú lesz, I értelmezési tartományának most a $(0, 0, \ldots, 0)$ belső pontja és a többváltozós függvények szélsőértékeire vonatkozó

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \epsilon_i}\right|_{\epsilon_i = 0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.36}$$

szükséges feltételek a következő alakot öltik:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right) = 0\,, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right) = 0\,; \tag{10.37}$$

ez n darab EULER-féle differenciálegyenlet, amelyek $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ megoldásai még az adott határfeltételeket is ki kell, hogy elégítsék.

10.3.6. Paraméteres variációs problémák

Némely variációs probléma esetében (pl. ha görbéket keresünk) nem célszerű az extremálisokat $y = y(x)$ explicit alakban megadni, hanem paraméteresen:

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2) \tag{10.38}$$

ahol t_1 és t_2 az (a, A) és (b, B) pontoknak megfelelő paraméterek. Ekkor a variációszámítás legegyszerűbb feladattípusa (lásd 563. old.) a következő alakot ölti:

$$I[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt = \text{extrémum!}, \tag{10.39a}$$

ahol a peremfeltételek a következők:

$$x(t_1) = a\,, \quad x(t_2) = b\,, \quad y(t_1) = A\,, \quad y(t_2) = B\,. \tag{10.39b}$$

$\dot{x}$ és $\dot{y}$, mint az általában a paraméteres megadásnál szokásos, az x és y függvénynek a t paraméter, mint független változó szerinti deriváltját jelöli.

A (10.39a) variációs problémának csak akkor van értelme, ha az integrál értéke az extremálisok paraméterezésétől nem függ. Ahhoz, hogy a (10.39a)-beli integrál értéke csak az (a, A) és (b, B) pontokat összekötő görbétől függjön, de a választott paraméteres előállítástól nem, F-nek pozitív elsőrendű *homogén függvény*nek kell lennie a 3. és a 4. változójában, azaz teljesülnie kell az

$$F(x, y, \mu\dot{x}, \mu\dot{y}) = \mu F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (\mu > 0) \tag{10.40}$$

feltételnek.

Mivel a (10.39a) variációs probléma (10.34) speciális esetének tekinthető, ezért a megfelelő EULER-féle differenciálegyenletek a következő alakot öltik:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0\,. \tag{10.41}$$

Ezek az egyenletek nem függetlenek, hanem az EULER-féle differenciálegyenletek úgynevezett WEIERSTRASS-alakjával ekvivalensek:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial y} + M(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = 0 \tag{10.42a}$$

ahol

$$M = \frac{1}{\dot{y}^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\dot{x}\dot{y}}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} = \frac{1}{\dot{x}^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}\,. \tag{10.42b}$$

A paraméteresen adott görbe R görbületi sugarára vonatkozó formula alapján (lásd 225. old.) (10.42a)-t figyelembe véve, az *extremálisok* $R = R(t)$ *görbületi sugarára* azt kapjuk, hogy

$$R = \left|\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\right| = \left|\frac{M\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{F_{\dot{x}y} - F_{x\dot{y}}}\right|\,. \tag{10.42c}$$

■ A paraméteres izoperimetrikus probléma (10.8a-tól 10.8c-ig) (lásd 562. old.) következő alakú:

$$I[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt = \max,\ \text{(10.43a)} \quad \text{ahol} \quad G[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = l\,. \text{ (10.43b)}$$

(10.26)-nek megfelelően a mellékfeltételes variációs problémából mellékfeltétel nélküli variációs probléma lesz a

$$H = H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = y\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{10.43c}$$

bevezetésével. Látható, hogy H-ra teljesül a (10.40) feltétel, azaz H pozitív elsőrendű homogén függvény. Továbbá, mivel

$$M = \frac{1}{\dot{y}^2}H_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\lambda}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\,, \quad H_{\dot{x}y} = 1\,, \quad H_{x\dot{y}} = 0\,, \tag{10.43d}$$

ezért (10.42c)-ből a görbületi sugárra azt kapjuk, hogy $R = |\lambda|$. Mivel λ állandó, a görbületi sugár is az, ezért az extremálisok körívek.

10.4. Többdimenziós variációs problémák

10.4.1. A legegyszerűbb variációs probléma

A legegyszerűbb típusú többdimenziós variációs probléma a következő:

$$I[u] = \iint\limits_{(G)} F(x, y, u(x,y), u_x, u_y)\,dx\,dy = \text{extrémum!} \tag{10.44}$$

Itt az ismeretlen $u = u(x,y)$ függvény a G síktartomány Γ peremén meghatározott értéket kell, hogy felvegyen. 10.3.2.-höz hasonlóan (563. old.) az *összehasonlító függvények* a következő alakot öltik:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \epsilon\eta(x,y), \tag{10.45}$$

ahol $u_0(x,y)$ a (10.44) variációs probléma megengedett megoldása, tehát amely a peremen előírt értékeket vesz fel, míg $\eta(x,y)$-ra igaz, hogy

$$\eta(x,y) = 0 \quad \text{a } \Gamma \text{ peremen}, \tag{10.46}$$

és $u_0(x,y)$-hoz hasonlóan elegendően sokszor differenciálható, ϵ pedig paraméter. Az $u = u(x,y)$ függvény gráfja egy az $u_0(x,y)$ gráfja alkotta felülettel szomszédos. (10.45) miatt $I[u]$ $I(\epsilon)$ alakú lesz, azaz a (10.44) variációs problémából olyan szélsőérték-probléma válik, amelynek a 0-beli szélsőértékhelyére a következő szükséges feltétel vonatkozik:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = 0 \qquad \epsilon = 0\text{-ban.} \tag{10.47}$$

Ebből vezethető le az

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \tag{10.48}$$

EULER-*féle differenciálegyenlet*, mint a (10.44) variációs probléma megoldására vonatkozó szükséges feltétel.

■ Tegyük fel, hogy az x, y-síkban adott a G tartomány, és Γ peremére ki van feszítve egy deformálatlan membrán. Ekkor a membrán által lefedett terület egybeesik G területével:

$$I_1 = \iint\limits_{(G)} dx\, dy\,. \tag{10.49a}$$

Ha valamely erő hatására a mebrán úgy deformálódik, hogy pontjainak z-irányú kitérése $u = u(x, y)$, akkor felszínét az

$$I_2 = \iint\limits_{(G)} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \tag{10.49b}$$

formula segítségével számítjuk ki. Ha a (10.49b)-beli integrandust TAYLOR-sorba fejtjük az elsőrendű tagig bezárólag, akkor azt kapjuk, hogy

$$I_2 \approx I_1 + \frac{1}{2} \iint\limits_{(G)} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy\,. \tag{10.49c}$$

A deformált membrán U potenciális energiája:

$$U = \sigma(I_2 - I_1) = \frac{\sigma}{2} \iint\limits_{(G)} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy\,, \tag{10.49d}$$

ahol a σ állandó a membránban keletkező feszültséget jelöli. Ebből adódik az úgynevezett DIRICHLET-*féle variációs probléma*: határozzuk meg azt az $u = u(x, y)$ függvényt, amelyen az

$$I[u] = \iint\limits_{(G)} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \tag{10.49e}$$

funkcionál szélsőértéket (azaz most maximumot) vesz fel, és amely a G síkbeli tartomány Γ peremén eltűnik. A megfelelő EULER-féle differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{10.49f}$$

Ez a kétváltozós függvényekre vonatkozó LAPLACE-egyenlet (lásd 692. old.).

10.4.2. Általánosabb variációs problémák

A variációszámítás legegyszerűbb feladattípusát kétféleképpen fogjuk általánosítani.

1. $\boldsymbol{F = F(x, y, u(x, y), u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})}$

A variációs problémabeli funkcionál az ismeretlen $u(x, y)$ függvény magasabbrendű parciális deriváltjainak függvénye. Ebben az esetben, amikor másodrendűnél magasabbrendű parciális deriváltak nem fordulnak elő, az EULER-féle differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\right) = 0\,. \tag{10.50}$$

2. $\boldsymbol{F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})}$

Az olyan variációs probléma esetében, ahol az integrandus n független $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változót tartalmaz, az EULER-féle differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}}\right) = 0\,. \tag{10.51}$$

10.5. Variációs problémák numerikus megoldása

Variációs problémák megoldására a gyakorlatban kétféle módszert használnak.

1. Az Euler-féle differenciálegyenlet megoldása és a megoldásoknak a peremfeltételekhez való illesztése

Sok esetben, a legegyszerűbbektől eltekintve, az EULER-féle differenciálegyenletet nem lehet pontosan megoldani, ezért a közönséges és parciális differenciálegyenletek elméletében megismert numerikus módszereket kell alkalmazni a peremérték-feladatok megoldására. (lásd 933. old., ill. 976. old.).

2. A variációszámítás direkt módszerei

A direkt módszerek közvetlenül a variációs problémán alapulnak, és sok esetben elkerülik az EULER-féle differenciálegyenlet megoldását. Az egyik legrégebbi és legelterjedtebb módszer a RITZ-*módszer*, amely az úgynevezett heurisztikus módszerek közé tartozik. Ezeket a módszereket közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldására használják (lásd 931. old., ill. 935. old.). Vizsgáljuk ezt a módszert egy példán.

■ Az

$$\int_0^1 y'^2(x)\,dx = \text{extrémum!} \quad (10.52a) \qquad \text{ahol} \qquad \int_0^1 y^2(x)dx = 1 \quad \text{és} \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (10.52b)$$

izoperimetrikus problémát kell numerikusan megoldani. 10.3.3. alapján a normáló integrálfeltétel nélküli variációs probléma a következő:

$$I[y] = \int_0^1 \left[y'^2(x)dx - \lambda y^2(x)\right] = \text{extrémum!} \qquad (10.52c)$$

A közelítő megoldást az

$$y(x) = a_1 x(x-1) + a_2 x^2(x-1) \qquad (10.52d)$$

alakban keressük. Az $x(x-1)$ és $x^2(x-1)$ függvények lineárisan függetlenek, és kielégítik a peremfeltételeket. (10.52d) miatt (10.52c) az

$$I(a_1, a_1) = \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{2}{15}a_2^2 + \frac{1}{3}a_1 a_2 - \lambda\left(\frac{1}{30}a_1^2 + \frac{1}{105}a_2^2 + \frac{1}{30}a_1 a_2\right) \qquad (10.52e)$$

alakot ölti, és a $\dfrac{\partial I}{\partial a_1} = \dfrac{\partial I}{\partial a_2} = 0$ szükséges feltételeket a

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{\lambda}{15}\right)a_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{30}\right)a_2 = 0\,, \qquad \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{30}\right)a_1 + \left(\frac{4}{15} - \frac{2\lambda}{105}\right)a_2 = 0 \qquad (10.52f)$$

homogén lineáris egyenletrendszer szolgáltatja. Ennek a rendszernek létezik nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa eltűnik. Ezért

$$\lambda^2 - 52\lambda + 420 = 0\,, \quad \text{azaz} \quad \lambda_1 = 10\,,\ \lambda_2 = 42\,. \qquad (10.52g)$$

$\lambda = \lambda_1 = 10$ esetén (10.52f) megoldásai a következők: $a_2 = 0$, a_1 tetszőleges, így a $\lambda_1 = 10$-hez tartozó normált megoldás:

$$y = 5,48x(x-1)\,. \qquad (10.52h)$$

Összehasonlításképpen írjuk fel még a (10.52c) variációs problémához tartozó EULER-féle differenciálegyenletet. Ekkor a peremérték-feladat a következő:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{ahol} \quad y(0) = y(1) = 0; \qquad (10.52i)$$

melynek sajátértékei: $\lambda_k = k^2\pi^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és a megfelelő sajátfüggvények: $y_k = c_k \sin k\pi x$. $k = 1$ esetén $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9{,}87$, tehát a normált sajátfüggvény a következő:

$$y = \sqrt{2}\sin \pi x\,, \qquad (10.52j)$$

amelynek grafikonja lényegében nem különbözik a (10.52h) közeltő megoldásának grafikonjától.

Megjegyzés: A hardware- és a software-fejlesztés mai állása mellett a variációs problémák megoldásához mindenek előtt a *végeselem-módszereket* kell alkalmazni. Ezen módszer alapjait az 936. old. a differenciálegyenletek numerikus megoldásánál tárgyaljuk. Ott a differenciálegyenletek és a variációs egyenletek közötti olyan összefüggésekkel foglalkozunk, amelyek pl. (19.145a,b)-nek megfelelően EULER-féle differenciálegyenletek vagy bilineáris formák alakjában jelennek meg.

A nemlineáris optimumszámítási feladatoknál (lásd 894. old.) tárgyalt *gradiensmódszerek* is jól használhatók variációs problémák numerikus megoldására.

10.6. Kiegészítés

10.6.1. Első és második variáció

Az EULER-féle differenciálegyenlet levezetésénél az összehasonlító függvények (lásd 563. old.) segítségével az $I(\epsilon)$-beli integrandus ϵ-szerinti TAYLOR-sorfejtését csak a lineáris tagig végeztük el, ahol

$$I(\epsilon) = \int_a^b F(x, y_0 + \epsilon\eta, y_0' + \epsilon\eta')\, dx\,. \tag{10.53}$$

Ha a másodrendű tagokat is figyelembe vesszük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I(\epsilon) - I(0) = \epsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\eta'\right] dx \\ + \frac{\epsilon^2}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y_0')\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y_0')\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0')\eta'^2 + O(\epsilon)\right] dx\,. \end{aligned} \tag{10.54}$$

Ha az $I[y]$ funkcionál δI **első variációja**

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\eta'\right] dx \quad \text{és} \tag{10.55}$$

$\delta^2 I$ **második variációja**

$$\delta^2 I = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y_0')\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y_0')\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0')\eta'^2\right] dx\,, \tag{10.56}$$

akkor:

$$I(\epsilon) - I(0) \approx \epsilon\, \delta I + \frac{\epsilon^2}{2}\, \delta^2 I\,. \tag{10.57}$$

Ezeknek a variációknak a segítségével fogalmazhatók meg az $I[y]$ funkcionálra vonatkozó különböző optimalitási feltételek (lásd [10.6]).

10.6.2. Fizikai alkalmazások

A variációszámításnak döntő szerepe van a fizikában. A mechanika NEWTON-féle egyenletei a JACOBI–HAMILTON-elmélet egyik variációs elvéből vezethetők le, de az atom- és kvantumfizikában is nagy szerepe van a variációszámításnak. Nyilvánvalóvá vált, hogy szükségszerű a klasszikus matematikai fogalmak általánosítása és továbbfejlesztése. Ezért kellett a variációszámítást modern matematikai diszciplínák, mint pl. funkcionálanalízis vagy optimumszámítás keretei között tárgyalni. Az eddigi fejezetekben alapjában véve csak betekintést adhattunk a variációszámítás klasszikus fejezeteibe (lásd [10.3], [10.4], [10.6]).

11. Lineáris integrálegyenletek

11.1. Bevezetés és osztályozás

1. Definíciók

Integrálegyenleten olyan egyenletet értünk, amelyben egy meghatározandó függvény egy integrál integrandusában is fellép. Az integrálegyenletek tárgyalására nincs egységes eljárás. A megoldás tulajdonsága és módszerei az integrálegyenlet speciális alakjától függenek.
Ha a keresett függvény minden tagban csak lineárisan fordul elő, *lineáris integrálegyenlet*ről beszélünk.
A lineáris integrálegyenlet általános alakja:

$$g(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \quad c \le x \le d\,. \tag{11.1}$$

A $\varphi(x)$ függvényt kell meghatározni, a $K(x,y)$ függvényt az *integrálegyenlet magjá*nak, az $f(x)$ függvényt pedig *zavarófüggvény*nek hívjuk. Ezek a függvények komplex értékeket is felvehetnek. Ha az $f(x)$ függvény a tekintett $[c,d]$ intervallumon eltűnik, azaz $f(x) \equiv 0$, akkor az integrálegyenletet *homogén*nek, ellenkező esetben *inhomogén*nek mondjuk. A λ mennyiség általában *komplex paraméter.*

A (11.1) egyenlet két speciális esetének kiemelt jelentősége van. Ha az integrálás határai nem függnek x-től, tehát konstans értékek, vagyis $a(x) \equiv a$ és $b(x) \equiv b$, akkor FREDHOLM-féle integrálegyenletről (11.2a,11.2b) van szó.

Ha pedig $a(x) \equiv a$ és $b(x) = x$, akkor VOLTERRA-féle integrálegyenletről (11.2c, 11.2d) beszélünk.

Ha a meghatározandó $\varphi(x)$ függvény csak az integrálban fordul elő, azaz $g(x) \equiv 0$, akkor *elsőfajú* integrálegyenlettel (11.2a,11.2c) van dolgunk. A *másodfajú* integrálegyenleteket (11.2b,11.2d) az jellemzi, hogy $g(x) \equiv 1$.

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11.2a}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11.2b}$$

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11.2c}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.2d}$$

2. Kapcsolat a differenciálegyenletekkel

Viszonylag kevés fizikai vagy mechanikai feladat vezet közvetlenül integrálegyenletre. Gyakoribb az ilyen problémák differenciálegyenletekkel való leírása. Az integrálegyenletek jelentőségét elsősorban az adja, hogy számos differenciálegyenlet, beleértve a hozzá tartozó peremérték- és kezdetiérték-feltételeket, integrálegyenletbe írható át.

■ Az $y'(x) = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-feladatból x_0-tól x-ig történő integrálással kapjuk:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\,d\xi\,. \tag{11.3}$$

Itt a keresett $y(x)$ függvény az egyenlet bal oldalán és az integrandusban is fellép. A (11.3) integrálegyenlet akkor lineáris, ha az $f(\xi, y(\xi))$ függvény $f(\xi, \eta(\xi)) = a(\xi) \cdot y(\xi) + b(\xi)$ alakú, vagyis ha az alapul szolgáló differenciálegyenlet szintén lineáris.

Megjegyzés: A jelen 11 fejezetben csak FREDHOLM- és VOLTERRA-féle első- és másodfajú integrálegyenletekkel, valamint néhány szinguláris integrálegyenlettel foglalkozunk.

11.2. Másodfajú Fredholm-féle integrálegyenletek

11.2.1. Elfajuló magú integrálegyenletek

Ha az *integrálegyenlet* $K(x,y)$ *magja* véges sok, két függvény szorzatából álló tag összege, ahol az egyik függvény mindig csak x-től, a másik pedig csak y-tól függ, akkor *elfajuló mag*ról beszélünk.

1. Próbakifejezés elfajuló mag esetén

Az elfajuló magú, másodfajú, FREDHOLM-féle integrálegyenlet lineáris algebrai megoldása véges lineáris egyenletrendszerre vezet. Tekintsük a

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \quad \text{integrálegyenletet, ahol} \tag{11.4a}$$

$$K(x,y) = \alpha_1(x)\beta_1(y) + \alpha_2(x)\beta_2(y) + \ldots + \alpha_n(x)\beta_n(y) \tag{11.4b}$$

Tegyük fel, hogy az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ és $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$ függvények az $[a,b]$ intervallumban vannak értelmezve és ott folytonosak. Továbbá legyenek az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ függvények egymástól lineárisan függetlenek, ami azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\,\alpha_k(x) \equiv 0 \tag{11.5}$$

összefüggés, ahol c_k konstans együtthatók, csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ esetén teljesül minden $[a,b]$-beli x-re. (Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor (11.4b)-ben áttérhetünk új függvényekre, amelyek már függetlenek.)
A (11.4a) és (11.4b) összefüggésből

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\alpha_1(x)\int_a^b \beta_1(y)\varphi(y)\,dy + \ldots + \lambda\alpha_n(x)\int_a^b \beta_n(y)\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.6a}$$

A fellépő integrálok már nem függnek az x változótól, tehát konstans értékek, amelyeket A_k-val jelölünk:

$$A_k = \int_a^b \beta_k(y)\varphi(y)\,dy\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,, \tag{11.6b}$$

tehát ha (11.4a) megoldható, akkor a $\varphi(x)$ megoldásfüggvény próbafüggvény alakban is felírható, mit az $f(x)$ zavarófüggvény és az $\alpha(x)$ függvények egy lineáris kombinációjának az összege:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda A_1\alpha_1(x) + \lambda A_2\alpha_2(x) + \ldots + \lambda A_n\alpha_n(x)\,. \tag{11.6c}$$

2. A próbakifejezés együtthatóinak meghatározása

Az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatókat a következőképpen lehet meghatározni. A (11.6c) egyenletet megszorozzuk a $\beta_k(x)$ függvénnyel, majd x szerint integrálunk a-tól b-ig:

$$\int_a^b \beta_k(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b \beta_k(x)f(x)\,dx + \lambda A_1\int_a^b \beta_k(x)\alpha_1(x)\,dx + \ldots + \lambda A_n\int_a^b \beta_k(x)\alpha_n(x)\,dx\,. \tag{11.7a}$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala (11.6b) miatt A_k-val egyenlő. A

$$b_k = \int_a^b \beta_k(x)f(x)\,dx \quad \text{és} \quad c_{kj} = \int_a^b \beta_k(x)\alpha_j(x)\,dx \tag{11.7b}$$

rövidítésekkel $k = 1, \ldots, n$ esetén kapjuk:

$$A_k = b_k + \lambda c_{k1}A_1 + \lambda c_{k2}A_2 + \ldots + \lambda c_{kn}A_n\,. \tag{11.7c}$$

A (11.7c) lineáris egyenletrendszer az $A_1, \ldots, A_n$ ismeretlenekre vonatkozó n egyenletből áll:

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda c_{11})A_1 \quad -\lambda c_{12}\,A_2 - \ldots \quad -\lambda c_{1n}\,A_n = b_1\,,\\
&-\lambda c_{21}\,A_1 + (1-\lambda c_{22})A_2 - \ldots \quad -\lambda c_{2n}\,A_n = b_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\lambda c_{n1}\,A_1 \quad -\lambda c_{n2}\,A_2 - \ldots + (1-\lambda c_{nn})A_n = b_n\,.
\end{aligned} \tag{11.7d}$$

(Lehetséges, hogy az integrálok nem számíthatók ki egzaktul. Ebben az esetben közelítő képletet (lásd 921. old.) kell alkalmazni.) Megjegyzendő. hogy az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ függvények függetlensége miatt a fenti lépések megfordíthatók, tehát (11.7c) minden megoldása tényleg (11.4a) egy megoldását adja; továbbá (11.7d) megoldásvektorai és így (11.6c) lineáris része is zárt a számmal való szorzásra és összeadásra.

3. A megoldás vizsgálata, sajátértékek és sajátfüggvények

A lineáris egyenletrendszerek elméletéből ismeretes, hogy a (11.7d) rendszernek pontosan akkor van egyértelműen meghatározott $A_1, \ldots, A_n$ megoldása, ha az együtthatóiból álló determináns nem nulla:

$$\mathrm{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda c_{11}) & -\lambda c_{12} & \ldots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & (1-\lambda c_{22}) & \ldots & -\lambda c_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & \ldots & (1-\lambda c_{nn}) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{11.8}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{D}(x)$ nem azonosan nulla, ugyanis $\mathrm{D}(0) = 1$. Ezenkívül $\mathrm{D}(x)$ folytonossága miatt van olyan $R > 0$ szám, amelyre $\mathrm{D}(x) \neq 0$ ha $|x| < R$. A további vizsgálatokhoz két esetet kell megkülönböztetni.

1. $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$:
Az integrálegyenletnek is pontosan egy megoldása van és ezt (11.6c) adja meg, ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók a (11.7d) egyenletrendszer megoldásaként nyerhetők. Ha a (11.4a) integrálegyenlet homogén, azaz $f(x) \equiv 0$, akkor $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Az ilyenkor homogén (11.7d) egyenletrendszernek csak a triviális $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$ megoldása van. A homogén integrálegyenlet csak $\varphi(x) \equiv 0$ esetén teljesül. (Homogén esetben (11.1)-nek $\varphi(x) \equiv 0$ mindig megoldása.)

2. $\mathrm{D}(\lambda) = 0$;
ekkor tehát (11.7d)-nek és vele (11.4a)-nak is nincs megoldása vagy (11.7d)-nek végtelen sok van. $\mathrm{D}(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom és így, mint ismeretes, legfeljebb n — általában komplex — gyöke van. A λ paraméter ezen értékeire a (11.7d) homogén egyenletrendszernek ($b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$) a triviális megoldáson kívül vannak el nem tűnő megoldásai is, úgyhogy a homogén integrálegyenletnek (ha az integrálegyenlet homogén, akkor a lineáris egyenletrendszer is az; fordítva általában nem igaz) az $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$-ből adódó $\varphi(x) \equiv 0$ triviális megoldáson kívül szintén vannak további,

$$\varphi(x) = A_1\alpha_1(x) + A_2\alpha_2(x) + \ldots + A_n\alpha_n(x)$$

alakú megoldásai is; mivel az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ függvények lineárisan függetlenek, $\varphi(x)$ nem azonosan nulla. A $\mathrm{D}(\lambda)$ determináns zérushelyeit az *integrálegyenlet sajátértékei*nek nevezzük. A homogén integrálegyenlet hozzájuk tartozó, nem azonosan nulla megoldásait a λ sajátértékhez tartozó *sajátfüggvények*nek hívjuk. Egy sajátértékhez több, lineárisan független sajátfüggvény is tartozhat. Általánosabb magú integrálegyenleteknél azokat a λ számokat nevezzük sajátértékeknek, amelyekre a homogén integrálegyenletnek létezik nem triviális megoldása. Egyes művekben a $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ feltételt kielégítő λ számokat karakterisztikus értékeknek hívják, és a $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ számokat hívják sajátértékeknek. Ez a szóhasználat az integrálegyenlet λ-val elosztott $\mu\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy$ alakjából ered.

4. Transzponált integrálegyenlet

Meg kell még vizsgálni, hogy a $\mathrm{D}(\lambda)=0$ esetben — feltételezve (11.7d) megoldhatóságát és ismertnek tekintve általában is egy homogén integrálegyenlet megoldáshalmazát — milyen feltételek mellett van megoldása az inhomogén integrálegyenletnek is. E célból bevezetjük a (11.4a) *integrálegyenlet transzponáltját*:

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy\,, \tag{11.9a}$$

amit (11.4b)-ből x és y, tehát az α-k és β-k szerepcseréjével kaptunk. Legyen λ sajátérték, és legyen $\varphi(x)$ a (11.4a) inhomogén integrálegyenletnek egy megoldása. Ekkor meg lehet mutatni, hogy λ a transzponált egyenletnek is sajátértéke (ehhez csak az kell, hogy a $\beta_1(x),\beta_2(x),\ldots,\beta_n(x)$ függvényeket is redukáljuk független rendszerré, ami az α_i-k függetlenségének megőrzésével megtehető). Szorozzuk meg a (11.4a) egyenlet mindkét oldalát a transzponált homogén integrálegyenlet valamely $\psi(x)$ megoldásával, majd integráljunk a-tól b-ig x szerint:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx+\int_a^b\left(\lambda\int_a^b K(x,y)\psi(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.9b}$$

Az utolsó integrálban az $[a,b]\times[a,b]$ halmazra (8.138a)-t mindkét lehetséges módon alkalmazva megcseréltük az integrálások sorrendjét. Mivel feltettük, hogy (megint $x\leftrightarrow y$) $\psi(y)=\lambda\int_a^b K(x,y)\psi(x)\,dx$, kapjuk az $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx=0$ szükséges, sőt valójában elégséges követelményt.

Összefoglalva: A (11.4a) inhomogén integrálegyenlet a λ sajátérték mellett pontosan akkor oldható meg, ha az $f(x)$ zavarófüggvény *ortogonális* a transzponált homogén integrálegyenlet ugyanazon λ-hoz tartozó összes megoldására. A zavarófüggvényre vonatkozó ortogonalitási feltétel egyenértékű (11.7d) megoldhatóságával, de annál könnyebben ellenőrizhető, továbbá nem korlátozódik az elfajuló magú integrálegyenletekre, hanem általánosabb magú integrálegyenletek esetén is ekvivalens feltétele a megoldhatóságnak, természetesen a sajátérték fogalmának említett általánosításával.

■ **A:** $\varphi(x)=x+\int_{-1}^{+1}(x^2y+xy^2-xy)\varphi(y)\,dy\,,\ \alpha_1(x)=x^2\,,\ \alpha_2(x)=x\,,\ \alpha_3(x)=-x\,,\ \beta_1(y)=y\,,$ $\beta_2(y)=y^2\,,\ \beta_3(y)=y\,.$ Az $\alpha_k(x)$ függvények lineárisan összefüggnek. Ezért az integrálegyenletet átalakítjuk: $\varphi(x)=x+\int_{-1}^{+1}[x^2y+x(y^2-y)]\varphi(y)\,dy\,.$ Erre az integrálegyenletre: $\alpha_1(x)=x^2\,,\ \alpha_2(x)=x\,,$ $\beta_1(y)=y\,,\ \beta_2(y)=y^2-y\,,$ és az új α-k már függetlenek. Ha létezik egy $\varphi(x)$ megoldás, akkor tudjuk, hogy $A_1x^2+A_2\,x$ alakban állítható elő.

$$c_{11}=\int_{-1}^{+1}x^3\,dx=0\,,\qquad c_{12}=\int_{-1}^{+1}x^2\,dx=\frac{2}{3}\,,\qquad b_1=\int_{-1}^{+1}x^2\,dx=\frac{2}{3}\,,$$
$$c_{21}=\int_{-1}^{+1}(x^4-x^3)\,dx=\frac{2}{5}\,,\quad c_{22}=\int_{-1}^{+1}(x^3-x^2)\,dx=-\frac{2}{3}\,,\quad b_2=\int_{-1}^{+1}(x^3-x^2)\,dx=-\frac{2}{3}\,.$$

Tehát az A_1 és A_2 meghatározására szolgáló egyenletrendszer a következő: $A_1-\frac{2}{3}A_2=\frac{2}{3}\,,$ $-\frac{2}{5}A_1+\left(1+\frac{2}{3}\right)A_2=-\frac{2}{3}\,.$ Innen $A_1=\frac{10}{21}\,,\ A_2=-\frac{2}{7}$ és $\varphi(x)=\frac{10}{21}x^2+\frac{5}{7}x\,.$

■ **B:** $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\,dy\,,$ azaz: $K(x,y)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\,,$ ami eb-

ben az alakban már elfajuló és $\alpha_1(x)\sin x$, $\alpha_2(x)=\cos(x)$ függetlenek $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^\pi \sin x\cos y\,\varphi(y)+$ $\cos x\sin y\,\varphi(y)\,dy$.

$$c_{11}=\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx=0\,,\quad c_{12}=\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\,,\quad b_1=\int_0^\pi x\cos x\,dx=-2\,,$$

$$c_{21}=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2},\quad c_{22}=\int_0^\pi \cos x\sin x\,dx=0,\quad b_2=\int_0^\pi x\sin x\,dx=\pi\,.$$

Így a (11.7d) egyenletrendszer a következő alakot ölti: $A_1-\lambda\frac{\pi}{2}A_2=-2$, $-\lambda\frac{\pi}{2}A_1+A_2=\pi$. Ennek egyértelmű megoldása van minden olyan λ-ra, amelyre $\mathrm{D}(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & -\lambda\frac{\pi}{2}\\ -\lambda\frac{\pi}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\lambda^2\frac{\pi^2}{4}\neq 0$. Ekkor tehát $|\lambda|\neq\frac{\pi}{2}$, λ nem sajátértéke az integrálegyenletnek és $A_1=\dfrac{\lambda\frac{\pi^2}{2}-2}{1-\lambda^2\frac{\pi^2}{4}}$, $A_2=\dfrac{\pi(1-\lambda)}{1-\lambda^2\frac{\pi^2}{4}}$, és ilyen λ-kra az integrálegyenlet megoldása $\varphi(x)=x+\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2\frac{\pi^2}{4}}\left[\left(\lambda\frac{\pi^2}{2}-2\right)\sin x+\pi(1-\lambda)\cos x\right]$. Az integrálegyenlet sajátértékei $\lambda_1=\frac{2}{\pi}$, $\lambda_2=-\frac{2}{\pi}$.

Ennélfogva $(k=1,2)$ a $\varphi(x)=\lambda_k\int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y)\,dy$ homogén integrálegyenletnek vannak $\varphi_k(x)=$ $=A_1\sin x+A_2\cos x$ alakú, nem triviális megoldásai. A $\lambda_1=\frac{2}{\pi}$ sajátérték mellett $A_1=A_2$, tehát tetszőleges A konstanssal kapjuk az összes megoldást: $\varphi_1(x)=A(\sin x+\cos x)$. Hasonlóan, $\lambda_2=-\frac{2}{\pi}$ esetén $A_1=-A_2$ és emiatt tetszőleges B konstanssal fennáll $\varphi_2(x)=B(\sin x-\cos x)$. Meg kell még vizsgálni az ortogonalitási feltételt: $K(x,y)=K(y,x)$ miatt az eredeti és a transzponált homogén egyenlet egybeesik és így megoldásaik is ugyanazok. Emiatt λ_1 esetén $\int_0^\pi x(\sin x+\cos x)\,dx=0$ a feltétel, ami nem teljesül; λ_2 esetén $\int_0^\pi x(\sin x-\cos x)\,dx=0$ a feltétel és az sem teljesül, tehát ezen λ-kra nincs megoldás, ami természetesen abból is látható volt, hogy az A-kra vonatkozó inhomogén lineáris egyenletrendszer ezen λ-kra ellentmondó.

Megjegyzés: Az ismertetett megoldási módszer nagyon egyszerű, de az elfajuló magok esetére korlátozódik. Közelítő módszerként azonban az eljárás általánosabb magú integrálegyenletekre is alkalmazható, ha a magot elfajuló maggal elég jól megközelíthetjük.

11.2.2. A sorozatos megközelítés (szukcesszív approximáció) módszere, Neumann-sor

1. Iterációs eljárás

A közönséges differenciálegyenletek megoldására szolgáló PICARD-*féle iterációs eljárás*hoz hasonlóan (lásd 505. old.), módszert keresünk a FREDHOLM-féle másodfajú integrálegyenlet megoldásának iteratív meghatározására. E célból, kiindulva a

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11.10}$$

egyenletből, rekurzíve lépésre definiálunk egy $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ függvényekből álló sorozatot. Első iteráltnak a $\varphi_0(x) = f(x)$ függvényt választjuk. Minden további $\varphi_n(x)$-et a következő előírás alapján képezünk:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\,dy \quad (n = 1, 2, \ldots; \quad \varphi_0(x) = f(x))\,. \tag{11.11a}$$

A lépéseket részletezve először is

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy\,. \tag{11.11b}$$

A megadott iterációs előírás szerint ezt a kifejezést (11.10) jobb oldalán be kell helyettesíteni $\varphi(y)$ helyébe. Tévedések elkerülése céljából a (11.11b) egyenletben az x-et y-ra és y integrációs változó jelölését η-ra változtatjuk. Kapjuk:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) \left[f(y) + \lambda \int_a^b K(y,\eta) f(\eta)\,d\eta \right] dy \tag{11.11c}$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,y) K(y,\eta) f(\eta)\,dy\,d\eta\,. \tag{11.11d}$$

Bevezetve a $K_1(x,y) = K(x,y)$ és $K_2(x,y) = \int_a^b K(x,\xi) K_1(\xi,y)\,d\xi$ jelölést, továbbá a kettős integrálban felcserélve az integrálás sorrendjét (FUBINI-tétel) és y helyett ξ-t, η helyett ismét az y-t használva, $\varphi_2(x)$ a következőképpen írható:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,y) f(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,y) f(y)\,dy\,. \tag{11.11e}$$

Analóg módon, a

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,y)\,d\xi \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{11.11f}$$

jelöléssel kapjuk a $\varphi_n(x)$ n-edik iterált előállítását:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,y) f(y)\,dy + \ldots + \lambda^n \int_a^b K_n(x,y) f(y)\,dy\,. \tag{11.11g}$$

A $K_n(x,y)$ kifejezést $K(x,y)$ *n-edik iterált magjának* nevezzük.

2. A Neumann-sor konvergenciája

A $\varphi(x)$ megoldás meghatározásához vizsgálni kell a λ változójú

$$f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x,y) f(y)\,dy\,, \tag{11.12}$$

hatványsor, az ún. NEUMANN-sor konvergenciáját. Ha a $K(x,y)$ és a $f(x)$ függvény korlátos, azaz fennáll

$$|K(x,y)| < M \quad (a \le x \le b, \quad a \le y \le b) \quad \text{és} \qquad |f(x)| < N \quad (a \le x \le b)\,, \tag{11.13a}$$

akkor az

$$N\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,|M(b-a)|^n \tag{11.13b}$$

sor a (11.12) hatványsornak majoránsa. Ez a geometriai sor konvergál, ha

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}\,. \tag{11.13c}$$

Ennélfogva a NEUMANN-sor is abszolút és egyenletesen konvergál mindazon λ értékekre, amelyekre teljesül (11.13c). A NEUMANN-sor tagjainak élesebb becslésével a konvergencia-intervallumot még pontosabban lehet megadni és valójában bővebb. Eszerint a NEUMANN-sor pontosan akkor konvergál, ha

$$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt{\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K(x,y)|^2\,dx\,dy}}\,; \tag{11.13d}$$

a nevező végességét biztosítja például K folytonossága a $[a,b]\times[a,b]$ négyzeten. A λ paraméternek ez a korlátozása nem jelenti azt, hogy $|\lambda|$ nagyobb értékeire általában ne létezne megoldás, csak azt, hogy a megoldást bizonyos körülmények között nem lehet a NEUMANN-sorral megadni. A

$$\Gamma(x,y;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y) \tag{11.14a}$$

kifejezést az integrálegyenlet *rezolvens*ének vagy *rezolvens mag*jának nevezzük. A rezolvens segítségével a megoldást a

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,y;\lambda)f(y)\,dy\,. \tag{11.14b}$$

alakban lehet előállítani. ■ A $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1 xy\,\varphi(y)\,dy$ másodfajú inhomogén FREDHOLM-féle integrálegyenletre $K_1(x,y)=xy$, $K_2(x,y)=\int_0^1 x\xi\,\eta\xi\,d\xi=\frac{1}{3}xy$, $K_3(x,y)=\frac{1}{9}xy,\ldots,$ $K_n(x,y)=\frac{xy}{3^{n-1}}$ és így $\Gamma(x,y;\lambda)=xy\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{3^n}\right)$. A (11.13c) korlátra való tekintettel a sor biztosan konvergál, ha $|\lambda|<1$, ugyanis $|K(x,y)|\le M=1$. A $\Gamma(x,y;\lambda)=\dfrac{xy}{\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)}$ rezolvens azonban $\frac{1}{3}$ hányadosú geometriai sor, amely még $|\lambda|<3$ esetén is konvergál. Tehát (11.14b) alapján kapjuk:

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1\frac{xy^2}{\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)}\,dy=\frac{x}{1-\frac{\lambda}{3}}\,.$$

Megjegyzés: Ha $K(x,y)$ folytonos magú és egy konkrét λ-ra a (11.13d) feltétel nem teljesül, akkor a mag a $K(x,y)=K^1(x,y)+K^2(x,y)$ képlet szerint két folytonos magra bontható fel, ahol $K^1(x,y)$ elfajuló mag, $K^2(x,y)$ pedig olyan kicsi, hogy rá már teljesül (11.13d). Így speciálisan minden olyan λ-ra is, amely nem sajátérték, egyértelmű megoldása van (lásd a Fredholm 3. tételét 11.2.3.2.-ben, 581. old.).

11.2.3. Fredholm-féle megoldási módszer, Fredholm tételei

11.2.3.1. Fredholm-féle megoldási módszer

1. Közelítő megoldás diszkretizálással

A

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.15}$$

FREDHOLM-féle másodfajú integrálegyenletet közelítőleg egy lineáris egyenletrendszerrel lehet megoldani. Tegyük fel, hogy a $K(x,y)$ és az $f(x)$ függvény $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ esetén folytonos.
A (11.15) egyenletben szereplő integrált a bal oldali téglalap-formulával (lásd 922. old.) akarjuk megközelíteni. Használhatnánk azonban a numerikus integrálás (lásd 921. old.) bármely más képletét is. Az

$$y_k = a + (k-1)h \quad (k = 1, 2, \cdots, n;\ h = \frac{b-a}{n}) \tag{11.16a}$$

ekvidisztans pontokkal a

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda h\left[K(x,y_1)\varphi(y_1) + \ldots + K(x,y_n)\varphi(y_n)\right]. \tag{11.16b}$$

közelítést kapjuk. Helyettesítsük itt $\varphi(x)$-et egy $\overline{\varphi}(x)$ függvénnyel, amely egzaktul kielégíti a (11.16b) egyenletet:

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda h\left[K(x,y_1)\overline{\varphi}(y_1) + \ldots + K(x,y_n)\overline{\varphi}(y_n)\right]. \tag{11.16c}$$

E közelítő megoldás kiszámításához szükségünk van a $\overline{\varphi}(x)$ függvény $x_k = a + (k-1)h$ alappontokban felvett értékeire. Ha a (11.16c) egyenletben egymás után elvégezzük az $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_n$ helyettesítéseket, lineáris egyenletrendszert kapunk az n számú keresett $\overline{\varphi}(x_k)$ függvényértékre. A

$$K_{jk} = K(x_j, y_k)\,,\ \overline{\varphi}_k = \overline{\varphi}(x_k)\,,\ f_k = f(x_k) \tag{11.17a}$$

rövidítésekkel ez az egyenletrendszer a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
(1-\lambda h K_{11})\varphi_1 \quad & -\lambda h K_{12}\varphi_2 - \ldots \quad -\lambda h K_{1n}\varphi_n = f_1\,,\\
-\lambda h K_{21}\varphi_1 \; & +(1-\lambda h K_{22})\varphi_2 - \ldots \quad -\lambda h K_{2n}\varphi_n = f_2\,,\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-\lambda h K_{n1}\varphi_1 \quad & -\lambda h K_{n2}\varphi_2 - \ldots +(1-\lambda h K_{nn})\varphi_n = f_n\,.
\end{aligned} \tag{11.17b}$$

A rendszer együtthatóiból képzett determináns

$$\mathrm{D}_n(\lambda) = \begin{vmatrix}
(1-\lambda h K_{11}) & -\lambda h K_{12} & \ldots & -\lambda h K_{1n}\\
-\lambda h K_{21} & (1-\lambda h K_{22}) & \ldots & -\lambda h K_{2n}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
-\lambda h K_{n1} & -\lambda h K_{n2} & \ldots & (1-\lambda h K_{nn})
\end{vmatrix}. \tag{11.17c}$$

E determináns szerkezete ugyanaz, mint azé az együttható-determinánsé, amely az elfajuló magú integrálegyenletek tárgyalásánál lép fel. A (11.17b) egyenletrendszernek minden olyan λ-ra létezik egyértelmű megoldása, amelyre fennáll $\mathrm{D}_n(\lambda) \neq 0$. Ez a megoldás a keresett $\varphi(x)$ függvény alappontokban felvett értékeinek közelítéseiből áll. A $\mathrm{D}_n(\lambda) = 0$ feltételt kielégítő λ számok az integrálegyenlet sajátértékeinek közelítései. A (11.17b) egyenletrendszer megoldása hányadosként állítható elő (lásd CRAMER-szabály, 274. old.):

$$\varphi_k = \frac{\mathrm{D}_n^k(\lambda)}{\mathrm{D}_n(\lambda)} \approx \varphi(x_k), \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{11.18}$$

Itt $\mathrm{D}_n^k(\lambda)$ úgy áll elő, hogy $\mathrm{D}_n(\lambda)$ k-adik oszlopa elemeit az $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n$ értékekkel helyettesítjük.

2. A rezolvens meghatározása

Ha n tart végtelenhez, akkor a $\mathrm{D}_n(\lambda)$ determinánsnak van

$$\mathrm{D}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_n(\lambda) \tag{11.19a}$$

limesze, amelynek segítségével a $\Gamma(x, y; \lambda)$ rezolvens magot (lásd a 11.2.2. szakaszt) a

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathrm{D}(x, y; \lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)} \tag{11.19b}$$

alakban lehet előállítani, ahol $\mathrm{D}(\lambda)$ zérushelyei éppen $\Gamma(x, y; \lambda)$ pólusai. Ugyanakkor a $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei pontosan a (11.15) integrálegyenlet sajátértékeivel azonosak. Ebben az esetben a homogén integrálegyenletnek léteznek nem nulla megoldásai: a λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvények. A $\Gamma(x, y; \lambda)$ rezolvens ismerete, ha $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$, lehetővé teszi a megoldás explicit előállítását:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y; \lambda) f(y)\, dy = f(x) + \frac{\lambda}{\mathrm{D}(\lambda)} \int_a^b \mathrm{D}(x, y; \lambda) f(y)\, dy\,. \tag{11.19c}$$

A rezolvens meghatározásához felhasználjuk a $\mathrm{D}(x, y; \lambda)$ és $\mathrm{D}(\lambda)$ egész függvények λ szerinti hatványsorfejtését:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathrm{D}(x, y; \lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_n(x, y) \cdot \lambda^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n \cdot \lambda^n}. \tag{11.20a}$$

Itt $d_0 = 1, \quad K_0(x, y) = K(x, y)$. A további együtthatók felváltva nyerhetők a következő rekurziós képletekkel:

$$d_n = \frac{1}{n} \int_a^b K_{n-1}(x, x)\, dx, \quad K_n(x, y) = K(x, y) \cdot d_n - \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, y)\, dt\,. \tag{11.20b}$$

■ **A:** $\varphi(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y\, \varphi(y)\, dy$. Ezen integrálegyenlet egzakt megoldása $\lambda \neq 2$ esetén $\varphi(x) = \dfrac{2}{2 - \lambda} \sin x$. Az $n = 3$ esetben az $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_3 = \dfrac{\pi}{3}$, $h = \dfrac{\pi}{6}$ választással kapjuk:

$$\mathrm{D}_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\lambda\pi}{12} & 1 - \dfrac{\sqrt{3}\lambda\pi}{24} & -\dfrac{\lambda\pi}{24} \\ -\dfrac{\sqrt{3}\lambda\pi}{12} & -\dfrac{3\lambda\pi}{24} & 1 - \dfrac{\sqrt{3}\lambda\pi}{24} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}\lambda\pi}{24}\right)^2 - \frac{\lambda^2\pi^2}{192} = 1 - \frac{\sqrt{3}\lambda\pi}{12}.$$ A $\lambda = \dfrac{12}{\sqrt{3}\pi} \approx 2{,}205$ érték a $\lambda = 2$ egzakt sajátérték közelítése. A (11.17b) rendszer első egyenletéből $f_1 = 0$ miatt $\varphi_1 = 0$ adódik. Ezen eredmény behelyettesítése után a második és harmadik egyenlet a következő alakot ölti: $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}\lambda\pi}{24}\right) \varphi_2 - \dfrac{\lambda\pi}{24} \varphi_3 = \dfrac{1}{2}, \quad -\dfrac{3\lambda\pi}{24} \varphi_2 + \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}\lambda\pi}{24}\right) \varphi_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. E rendszer megoldása $\varphi_2 = \dfrac{1}{2 - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\lambda}$, $\varphi_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2 - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\lambda}$. Speciálisan $\lambda = 1$ esetén $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0{,}915$, $\varphi_3 = 1{,}585$. A $\varphi(x) = \dfrac{2}{2 - 1} \sin x = 2 \sin x$ egzakt megoldás értékei: $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1{,}732$.

Nagyobb pontosság eléréséhez növelni kell az alappontok számát.

■ **B:** $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (4xy - x^2) \varphi(y)\, dy$; $d_0 = 1$, $\quad K_0(x, y) = 4xy - x^2$, $d_1 = \int_0^1 3x^2\, dx = 1$,

$K_1(x,y) = 4xy - x^2 - \int_0^1 (4xt - x^2)(4ty - t^2)\,dt = x + 2x^2y - \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}xy\,, d_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 K_1(x,x)\,dx = \frac{1}{18}\,,$
$K_2(x,y) = \frac{1}{18}(4xy - x^2) - \int_0^1 K(x,t)K_1(t,y)\,dt = 0\,.$ Ennélfogva d_3, $K_3(x,y)$ és minden további d_k és $K_k(x,y)$ mennyiség nullával egyenlő; $\Gamma(x,y;\lambda) = \dfrac{4xy - x^2 - \left[x + 2x^2y - \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}xy\right]\lambda}{1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{18}}$. A $\mathrm{D}(\lambda) = 1 - \lambda + \dfrac{\lambda^2}{18} = 0$ egyenletből a két sajátérték $\lambda_{1,2} = 9 \pm 3\sqrt{7}$. Ha λ nem sajátérték, a megoldásra kapjuk: $\varphi(x) = x + \lambda\int_0^1 \Gamma(x,y;\lambda)f(y)\,dy = \dfrac{3x(2\lambda - 3\lambda x + 6)}{\lambda^2 - 18\lambda + 18}$.

11.2.3.2. Fredholm tételei

A

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.21a}$$

Fredholm-féle másodfajú integrálegyenlethez tartozó transzponált integrálegyenlet (tetszőleges zavarófüggvénnyel)

$$\psi(x) = g(x) + \lambda\int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy. \tag{11.21b}$$

Erre a két integrálegyenletre érvényesek a következő állítások (11.2.1. szakasz).

1. Fredholm-féle másodfajú integrálegyenletnek csak megszámlálhatóan sok sajátértéke van, és ezek csak a végtelenben torlódhatnak, azaz minden R valós számhoz csak véges sok olyan λ sajátérték található, amelyre $|\lambda| < R$.

2. Ha λ nem sajátértéke a (11.21a) egyenletnek, akkor mindkét inhomogén integrálegyenlet tetszőleges $f(x)$, ill. $g(x)$ zavarófüggvény mellett egyértelműen oldható meg, és a hozzájuk tartozó homogén integrálegyenleteknek csak triviális megoldásuk van.

3. Ha λ a (11.21a) egyenletnek sajátértéke, akkor λ a (11.21b) transzponált egyenletnek is sajátértéke. Ekkor mindkét homogén integrálegyenletnek vannak nem nulla megoldásai, és a lineárisan független sajátfüggvények maximális száma a két egyenletnél megegyezik.

4. Az inhomogén integrálegyenlet pontosan akkor megoldható, ha a zavarófüggvény ortogonális a transzponált homogén integrálegyenlet minden megoldására, azaz ha a

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy \tag{11.22a}$$

integrálegyenlet minden megoldására fennáll $\displaystyle\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0\,.$ (11.22b)

Ezekből a tételekből következik a Fredholm-*féle alternatívatétel*: Vagy az inhomogén integrálegyenlet megoldható tetszőleges $f(x)$ zavarófüggvény mellett, vagy a megfelelő homogén egyenletnek léteznek nem triviális megoldásai.

11.2.4. Numerikus módszerek a Fredholm-féle másodfajú integrálegyenletek megoldására

Gyakran előfordul, hogy egy

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.23}$$

FREDHOLM-féle másodfajú integrálegyenletet a 11.2.1., 11.2.2. és 11.2.3. szakaszban leírt eljárások valamelyikével vagy egyáltalán nem, vagy csak nagy ráfordítással lehet egzaktul megoldani. Ilyen esetben numerikus közelítő módszerekhez kell folyamodnunk. A következőkben a (11.23) típusú integrálegyenletek numerikus megoldási eljárásainak három osztályát mutatjuk be.

11.2.4.1. Az integrál approximációja

1. Szemidiszkrét probléma

A (11.23) integrálegyenletet úgy tesszük kezelhetővé, hogy az integrált közelítő kifejezéssel helyettesítjük. Az ilyen közelítéseket *kvadratúraformulák*nak nevezzük. Alakjuk

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Q_{[a,b]}(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k)\,, \tag{11.24}$$

vagyis az integrál helyett az x_k *alappontok*ban felvett és bizonyos ω_k számokkal súlyozott függvényértékek összege áll. Itt ω_k megválasztása alkalmas (f-től független) módon történik. A (11.23) egyenlet ekkor közelítőleg a következőképpen írható:

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda Q_{[a,b]}(K(x,\cdot)\varphi(\cdot)) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \omega_k K(x,y_k)\varphi(y_k)\,. \tag{11.25a}$$

A $Q_{[a,b]}(K(x,\cdot)\varphi(\cdot))$ kvadratúraformula még függ az x változótól. A függvények argumentumában a pont azt jelzi, hogy a kvadratúraformulát az y független változóra alkalmaztuk. Most áttérünk a

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \omega_k K(x,y_k)\overline{\varphi}(y_k) \tag{11.25b}$$

egyenletre. Itt $\overline{\varphi}(x)$ a $\varphi(x)$ egzakt megoldásnak egy approximációja. A (11.25b) problémát *szemidiszkrét*nek mondjuk, mert az y változó tekintetében diszkrét értékekre tértünk át, az x változó viszont még tetszőlegesen választható.

Ha egy $\overline{\varphi}(x)$ függvényre a (11.25b) egyenlet minden $x \in [a,b]$ pontban teljesül, akkor természetesen teljesül az $x = x_k$ alappontokban is:

$$\overline{\varphi}(x_k) = f(x_k) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \omega_j K(x_k,y_j)\overline{\varphi}(y_j)\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,. \tag{11.25c}$$

Ez n egyenletből álló lineáris egyenletrendszer az n számú $\overline{\varphi}(x_k)$ ismeretlenre. A megoldási értékeket a (11.25b) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a szemidiszkrét probléma megoldását. Ennek az eljárásnak a pontossága és számolásigénye a kvadratúraformula jóságától függ. Ha pl. a bal oldali téglalapformulát és az $y_k = x_k = a + h(k-1)$, $h = (b-a)/n$, $(k = 1,\ldots,n)$ ekvidisztans alappontokat használjuk, tehát

$$\int_a^b K(x,y)\overline{\varphi}(y)dy \approx \sum_{k=1}^{n} hK(x,y_k)\overline{\varphi}(y_k)\,, \tag{11.26a}$$

akkor a

$$K_{jk} = K(x_j,y_k), \quad f_k = f(x_k), \quad \varphi_k = \overline{\varphi}(x_k) \tag{11.26b}$$

jelölésekkel a (11.25c) rendszer a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned}
(1-\lambda hK_{11})\varphi_1 \quad & -\lambda hK_{12}\,\varphi_2 - \ \ldots \quad & -\lambda hK_{1n}\,\varphi_n = f_1\,,\\
-\lambda hK_{21}\,\varphi_1 \ & +(1-\lambda hK_{22}\varphi_2) - \ \ldots \quad & -\lambda hK_{2n}\,\varphi_n = f_2\,,\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\
-\lambda hK_{n1}\,\varphi_1 \quad & -\lambda hK_{n2}\,\varphi_2 - \ \ldots \ & +(1-\lambda hK_{nn})\varphi_n = f_n\,.
\end{aligned} \tag{11.26c}$$

Éppen ezt a rendszert vezettük le a FREDHOLM-féle megoldási módszer vizsgálata során (lásd 579. old.). Mivel azonban a bal oldali téglalap-formula nem nagyon pontos, az integrál jó approximációjához nagyszámú alappontot kell a számolásba bevonni, ami megnöveli az egyenletrendszer méretét és a számolási időt. Ezért ajánlatos alkalmasabb kvadratúraformulákat használni.

2. Nyström-módszer

A NYSTRÖM-*módszer*nél az integrál approximációjára a GAUSS-féle kvadratúraformulákat (lásd 923. old.) használjuk fel. Ezek levezetése céljából tekintsük az

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{11.27a}$$

integrált. Helyettesítsük az integrandust egy $p(x)$ polinommal, amely az $f(x)$ függvényt az x_k alappontokban interpolálja:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x) f(x_k), \tag{11.27b}$$

ahol $$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\,. \tag{11.27c}$$

Az így definiált $p(x)$ polinomra fennáll

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 1,\ldots,n\,.$$

Az $f(x)$ integrandus $p(x)$ polinommal való helyettesítése a következő kvadratúraformulát adja:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,dx, \tag{11.27d}$$

ahol tehát $$\omega_k = \int_a^b L_k(x)\,dx\,. \tag{11.27e}$$

A GAUSS-féle kvadratúraformuláknál az alappontok megválasztása nem tetszőleges, hanem az

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t_k, \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{11.28a}$$

előírás szerint történik. A t_k számok a

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^n\,[(t^2-1)^n]}{dt^n}\,. \tag{11.28b}$$

elsőfajú LEGENDRE-polinom (lásd 520. old.) n zérushelyei. E zérushelyek mindannyian a $[-1,+1]$ intervallumban helyezkednek el. Az ω_k együtthatók az $x - x_k = \dfrac{b-a}{2}(t-t_k)$ integrálhelyettesítéssel határozhatók meg:

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \int_a^b L_k(x)\,dx = (b-a)\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\ldots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\ldots(t_k-t_n)}\,dt \\
&= (b-a)A_k\,.
\end{aligned} \tag{11.29}$$

A **11.1. táblázatban** az elsőfajú LEGENDRE-polinomok zérushelyei, valamint az A_k súlyok vannak feltüntetve $n = 1, \ldots, 6$ esetén.

11.1. táblázat. Elsőfajú LEGENDRE-polinomok zérushelyei

n	t	A	n	t	A
1	$t_1 = 0$	$A_1 = 1$	5	$t_1 = -0{,}9062$	$A_1 = 0{,}1185$
2	$t_1 = -0{,}5774$	$A_1 = 0{,}5$		$t_2 = -0{,}5384$	$A_2 = 0{,}2393$
	$t_2 = 0{,}5774$	$A_2 = 0{,}5$		$t_3 = 0$	$A_3 = 0{,}2844$
3	$t_1 = -0{,}7746$	$A_1 = 0{,}2778$		$t_4 = 0{,}5384$	$A_4 = 0{,}2393$
	$t_2 = 0$	$A_2 = 0{,}4444$		$t_5 = 0{,}9062$	$A_5 = 0{,}1185$
	$t_3 = 0{,}7746$	$A_3 = 0{,}2778$	6	$t_1 = -0{,}9324$	$A_1 = 0{,}0857$
4	$t_1 = -0{,}8612$	$A_1 = 0{,}1739$		$t_2 = -0{,}6612$	$A_2 = 0{,}1804$
	$t_2 = -0{,}3400$	$A_2 = 0{,}3261$		$t_3 = -0{,}2386$	$A_3 = 0{,}2340$
	$t_3 = 0{,}3400$	$A_3 = 0{,}3261$		$t_4 = 0{,}2386$	$A_4 = 0{,}2340$
	$t_4 = 0{,}8612$	$A_4 = 0{,}1739$		$t_5 = 0{,}6612$	$A_5 = 0{,}1804$
				$t_6 = 0{,}9324$	$A_6 = 0{,}0857$

■ Közelítőleg megoldandó a $\varphi(x) = \cos \pi x + \dfrac{x}{x^2 + \pi^2}(\mathrm{e}^x + 1) + \displaystyle\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)\,dy$ integrálegyenlet a NYSTRÖM-módszerrel $n = 3$ esetén.

$$
\begin{aligned}
n = 3: \quad & x_1 = 0{,}1127, && x_2 = 0{,}5, && x_3 = 0{,}8873,\\
& A_1 = 0{,}2778, && A_2 = 0{,}4444, && A_3 = 0{,}2778,\\
& f_1 = 0{,}96214, && f_2 = 0{,}13087, && f_3 = -0{,}65251,\\
& K_{11} = 1{,}01278, && K_{22} = 1{,}28403, && K_{33} = 2{,}19746,\\
& K_{12} = K_{21} = 1{,}05797, && K_{13} = K_{31} = 1{,}10517, && K_{23} = K_{32} = 1{,}55838.
\end{aligned}
$$

A φ_1, φ_2 és φ_3 meghatározására szolgáló (11.25c) egyenletrendszer a következő:

$$
\begin{aligned}
0{,}71864\varphi_1 - 0{,}47016\varphi_2 - 0{,}30702\varphi_3 &= 0{,}96214\,,\\
-0{,}29390\varphi_1 + 0{,}42938\varphi_2 - 0{,}43292\varphi_3 &= 0{,}13087\,,\\
-0{,}30702\varphi_1 - 0{,}69254\varphi_2 + 0{,}38955\varphi_3 &= -0{,}65251\,.
\end{aligned}
$$

A rendszer megoldása: $\varphi_1 = 0{,}93651$, $\varphi_2 = -0{,}00144$, $\varphi_3 = -0{,}93950$. Összehasonlításul az egzakt megoldás értéke az alappontokban: $\varphi(x_1) = 0{,}93797$, $\varphi(x_2) = 0$, $\varphi(x_3) = -0{,}93797$.

11.2.4.2. Mag-approximáció

A $K(x, y)$ magot helyettesítjük egy $\overline{K}(x, y)$ maggal, amelyre $\overline{K}(x, y) \approx K(x, y)$ az $c \le x \le d$, $a \le y \le b$ tartományon. Ezt a magot úgy választjuk meg, hogy a keletkező

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \overline{K}(x, y)\overline{\varphi}(y)\,dy \tag{11.30}$$

integrálegyenletet lehetőleg könnyű legyen megoldani.

1. Tenzorszorzat-approximáció

A mag gyakran alkalmazott közelítése a

$$K(x, y) \approx \overline{K}(x, y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} d_{jk}\,\alpha_j(x)\beta_k(y) \tag{11.31a}$$

alakú *tenzorszorzat-approximáció*, ahol az $\alpha_0(x), \ldots, \alpha_n(x)$, ill. $\beta_0(y), \ldots, \beta_n(y)$ függvények lineárisan függetlenek. E függvényeket előírják, a d_{jk} együtthatókat pedig meg lehet határozni úgy, hogy a kettős szumma a magot bizonyos értelemben jól approximálja. A (11.31a) elfajuló mag átalakításával kapjuk:

$$\overline{K}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) \left[\sum_{k=0}^{n} d_{jk}\beta_k(y) \right], \quad \delta_j(y) = \sum_{k=0}^{n} d_{jk}\beta_k(y), \quad \overline{K}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x)\delta_j(y). \tag{11.31b}$$

Ennélfogva alkalmazható a 11.2.1. szakaszban bemutatott, elfajuló magú

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x)\delta_j(y) \right] \overline{\varphi}(y)\, dy \tag{11.31c}$$

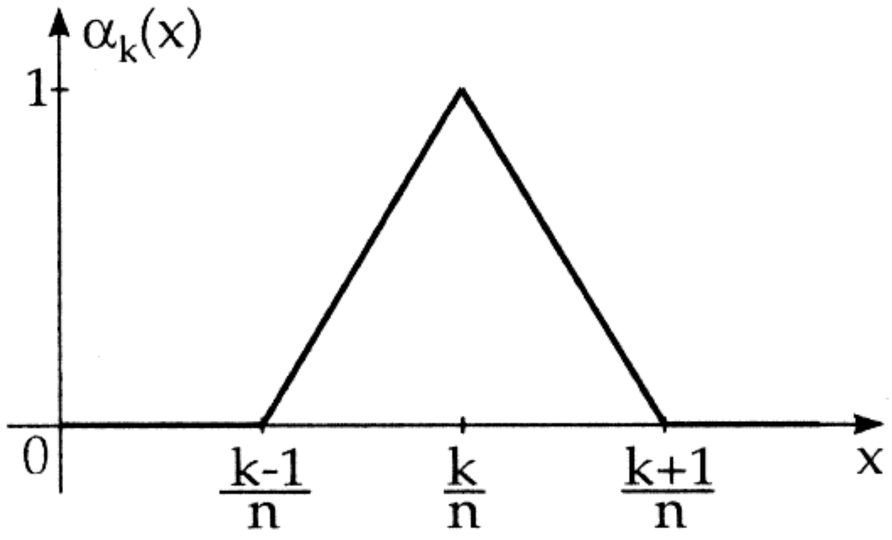
integrálegyenlet megoldására szolgáló eljárás. Az $\alpha_0(x), \ldots \alpha_n(x)$, ill. $\beta_0(y), \ldots, \beta_n(y)$ függvények megválasztásánál gondolni kell arra, hogy a (11.31a) összefüggésben szereplő d_{jk} számokat könnyű legyen meghatározni, és hogy a (11.31c) tárgyalásához szükséges számolás mennyisége csekély maradjon.

2. Speciális spline-próbakifejezés

Egy speciális mag-approximációnál az $[a,b] = [0,1]$ integrációs intervallumon az

$$\alpha_k(x) = \beta_k(x) = \begin{cases} 1 - n\left|x - \dfrac{k}{n}\right| & \text{ha} \quad \dfrac{k-1}{n} \le x \le \dfrac{k+1}{n}, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{11.32}$$

választással élünk. Az $\alpha_k(x)$ függvény csak a $\left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right)$ intervallumon, az úgynevezett *tartón*, különbözik nullától **(11.1. ábra)**.



11.1. ábra.

Hogy a (11.31a) összefüggésben fellépő d_{jk} együtthatókat meghatározhassuk, tekintsük a $\overline{K}(x,y)$ függvényt az $x = l/n$, $y = i/n$ $(l, i = 0, 1, \ldots, n)$ helyeken. Ekkor fennáll

$$\alpha_j\left(\frac{l}{n}\right)\alpha_k\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = l,\ k = i, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{11.33}$$

tehát $\overline{K}(l/n, i/n) = d_{li}$. Ennek alapján legyen $d_{li} = \overline{K}\left(\dfrac{l}{n}, \dfrac{i}{n}\right) = K\left(\dfrac{l}{n}, \dfrac{i}{n}\right)$. Így a (11.31a) egyenlet alakja a következő:

$$\overline{K}(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} K\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\alpha_j(x)\alpha_k(y). \tag{11.34}$$

(11.31c) megoldása, mint ismeretes, előállítható a

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + A_0\alpha_0(x) + \ldots + A_n\alpha_n(x) \tag{11.35}$$

alakban. Itt az $A_0\alpha_0(x) + \ldots + A_n\alpha_n(x)$ kifejezés geometriailag egy töröttvonal, amely az $x_k = k/n$ helyen az A_k értéket veszi fel. Ha a (11.31c) egyenlet megoldására azt az eljárást alkalmazzuk, amelyet az elfajuló magoknál ismertünk meg, akkor az $A_0, \ldots, A_n$ számokra egy lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda c_{00})A_0 \quad & -\lambda c_{01}A_1 - \ \ldots \quad & -\lambda c_{0n}A_n = b_0, \\ -\lambda c_{10}A_0 \ & +(1 - \lambda c_{11}A_1) - \ \ldots \quad & -\lambda c_{1n}A_n = b_1, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda c_{n0}A_0 \quad & -\lambda c_{n1}A_1 - \ \ldots + & (1 - \lambda c_{nn})A_n = b_n. \end{aligned} \tag{11.36a}$$

Itt

$$c_{jk} = \int_0^1 \delta_j(x)\alpha_k(x)\,dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n} K\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right)\alpha_i(x)\right]\alpha_k(x)\,dx$$

$$= K\left(\frac{j}{n},\frac{0}{n}\right)\int_0^1 \alpha_0(x)\alpha_k(x)\,dx + \ldots + K\left(\frac{j}{n},\frac{n}{n}\right)\int_0^1 \alpha_n(x)\alpha_k(x)\,dx\,. \tag{11.36b}$$

Az integrálokra a következő adódik:

$$I_{jk} = \int_0^1 \alpha_j(x)\alpha_k(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{3n} & \text{ha} \quad j=0,\ k=0 \text{ és } j=n,\ k=n\,, \\ \dfrac{2}{3n} & \text{ha} \quad j=k,\ 1\le j<n\,, \\ \dfrac{1}{6n} & \text{ha} \quad j=k+1,\ j=k-1\,, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{11.36c}$$

A (11.36a) alatt fellépő b_k számokat a

$$b_k = \int_0^1 f(x)\left[\sum_{j=0}^{n} K\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n}\right)\alpha_j(x)\right]dx \tag{11.36d}$$

képlet adja meg. Ha a (11.36a) alatt szereplő c_{jk} számokat egy $\mathbf{C}$ mátrixba, a $K(j/n,k/n)$ értékeket egy $\mathbf{B}$ mátrixba, az I_{jk} értékeket pedig egy $\mathbf{A}$ mátrixba foglaljuk össze, ha továbbá a $b_0,\ldots,b_n$ számokból egy $\underline{\mathbf{b}}$ vektort, a keresett $A_0,\ldots,A_n$ számokból pedig egy $\underline{\mathbf{a}}$ vektort képzünk, akkor a (11.36a) egyenletrendszer mátrixos írásmódban az

$$(I-\lambda\mathbf{C})\underline{\mathbf{a}} = (I-\lambda\mathbf{BA})\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}} \tag{11.36e}$$

alakot veszi fel. Ha az $(I-\lambda\mathbf{BA})$ mátrix reguláris, akkor ennek a rendszernek létezik egyértelmű $\underline{\mathbf{a}} = (A_0,\ldots,A_n)$ megoldása.

11.2.4.3. Kollokációs módszer

Eleve adva van n számú, az $[a,b]$ intervallumon lineárisan független $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ függvény. E függvényekkel a $\varphi(x)$ megoldáshoz egy $\overline{\varphi}(x)$ próbafüggvényt képezünk:

$$\varphi(x) \approx \overline{\varphi}(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)\,. \tag{11.37a}$$

A feladat az $a_1,\ldots,a_n$ együtthatók meghatározása. Egy ilyen módon definiált $\overline{\varphi}(x)$ függvényhez általában nem találhatók $a_1,\ldots,a_n$ értékek úgy, hogy megkapjuk a (11.23) integrálegyenlet $\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)$ egzakt megoldását. Ezért az integrációs intervallumban felveszünk n számú $x_1,\ldots,x_n$ alappontot, és pusztán azt próbáljuk elérni, hogy a (11.37a) próbafüggvény az integrálegyenletet legalább ezekben a pontokban elégítse ki:

$$\overline{\varphi}(x_k) = a_1\varphi_1(x_k) + \ldots + a_n\varphi_n(x_k) \tag{11.37b}$$

$$= f(x_k) + \lambda\int_a^b K(x_k,y)\left[a_1\varphi_1(y) + \ldots + a_n\varphi_n(y)\right]dy \quad (k=1,\ldots,n)\,. \tag{11.37c}$$

Némi átalakítás után ez az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\left[\varphi_1(x_k) - \lambda\int_a^b K(x_k,y)\varphi_1(y)\,dy\right]a_1 + \ldots + \left[\varphi_n(x_k) - \lambda\int_a^b K(x_k,y)\varphi_n(y)\,dy\right]a_n$$

$$= f(x_k) \quad (k=1,\ldots,n)\,. \tag{11.37d}$$

Ha bevezetjük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \text{ ahol } \beta_{jk} = \int_a^b K(x_j, y)\varphi_k(y)\,dy \quad (11.37e)$$

mátrixokat és az

$$\underline{\mathbf{a}} = [a_1, \ldots, a_n]^\top, \quad \underline{\mathbf{b}} = [f(x_1), \ldots, f(x_n)]^\top, \quad (11.37f)$$

vektorokat, akkor az $a_1, \ldots, a_n$ számok meghatározására szolgáló egyenletrendszer mátrixalakban is felírható:

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{B})\,\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}}. \quad (11.37g)$$

■ $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \displaystyle\int_0^1 \sqrt{xy}\,\varphi(y)\,dy$. Próbafüggvény: $\overline{\varphi}(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$, tehát a lineárisan független függvények természetes választásával az „első három" polinom $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = 1$. Alappontok: $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{7} & \frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (11.38)$$

Az egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0, \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{7}\right) a_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{5}\right) a_2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) a_3 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ \frac{5}{7}\,a_1 + \frac{3}{5}\,a_2 + \frac{1}{3}\,a_3 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

E rendszer megoldása $a_1 = -0{,}8197$, $a_2 = 1{,}8092$, $a_3 = 0$, tehát fennáll $\overline{\varphi}(x) = -0{,}8197\,x^2 + 1{,}8092\,x$, ahol $\overline{\varphi}(0) = 0$, $\overline{\varphi}(0{,}5) = 0{,}6997$, $\overline{\varphi}(1) = 0{,}9895$. Összehasonlításul az integrálegyenlet egzakt megoldása $\varphi(x) = \sqrt{x}$, ahol $\varphi(0) = 0$, $\varphi(0{,}5) = 0{,}7071$, $\varphi(1) = 1$.

Ha e példában a pontosságot javítani akarjuk, a próbapolinom fokszámát növelni nem célszerű, mert a magasabb fokú polinomok numerikusan instabilisak. Sokkal inkább ajánlható különféle spline-próbafüggvények használata, pl. a szakaszonként lineáris $\overline{\varphi}(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$ próbafüggvényé, ahol $\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 - n\left|x - \dfrac{k}{n}\right| & \text{ha } \dfrac{k-1}{n} \le x \le \dfrac{k+1}{n}, \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$ a 11.2.4.2. már említett függvények.

A $\varphi(x)$ megoldás közelítése ebben az esetben egy $\overline{\varphi}(x)$ töröttvonallal történik.

Megjegyzés: A kollokációs módszernél az alappontok helyzetének megválasztására elvileg nincs korlátozás. Ha azonban ismeretes, hogy egy részintervallumban a megoldásfüggvény erősen ingadozik, akkor ebben az intervallumban az alappontokat sűrűbben kell elhelyezni.

11.3. Fredholm-féle elsőfajú integrálegyenletek

11.3.1. Elfajuló magú integrálegyenletek

1. A feladat megfogalmazása Az elfajuló magú

$$f(x) = \int_a^b (\alpha_1(x)\beta_1(y) + \ldots + \alpha_n(x)\beta_n(y))\varphi(y)\,dy \qquad (c \le x \le d), \qquad (a \le y \le b) \qquad (11.39a)$$

FREDHOLM-féle elsőfajú integrálegyenlet tárgyalásához, mint a 11.2. szakaszban is, bevezetjük az

$$A_j = \int_a^b \beta_j(y)\varphi(y)\,dy \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.39b}$$

konstansokat. Ekkor a (11.39a) egyenlet az

$$f(x) = A_1\alpha_1(x) + \ldots + A_n\alpha_n(x)\,, \tag{11.39c}$$

alakban írható, vagyis az integrálegyenletnek csak akkor van megoldása, ha az adott $f(x)$ az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ függvények lineáris kombinációja. Ha ez a feltétel teljesül, akkor természetesen az $A_1, \ldots, A_n$ konstansok ismertek.

2. Próbakifejezés A

$$\varphi(x) = c_1\beta_1(x) + \ldots + c_n\beta_n(x) \tag{11.40a}$$

próbakifejezés, ahol $c_1, \ldots, c_n$ ismeretlen együtthatók, a (11.39b) egyenletbe való behelyettesítés után az

$$A_i = c_1 \int_a^b \beta_i(y)\beta_1(y)\,dy + \ldots + c_n \int_a^b \beta_i(y)\beta_n(y)\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{11.40b}$$

összefüggésekre vezet. A

$$K_{ij} = \int_a^b \beta_i(y)\beta_j(y)\,dy \tag{11.40c}$$

jelöléssel a $c_1, \ldots, c_n$ együtthatók meghatározására a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} K_{11}c_1 + \ldots + K_{1n}c_n &= A_1\,, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \quad \vdots \\ K_{n1}c_1 + \ldots + K_{nn}c_n &= A_n\,. \end{aligned} \tag{11.40d}$$

3. Megoldások Az együttható-mátrix reguláris, ha feltesszük, hogy a $\beta_1, (y), \ldots, \beta_n(y)$ függvények lineárisan függetlenek (lásd 12.1.3. szakasz). Az így meghatározott (11.40a) megoldás azonban nem az egyetlen megoldása az integrálegyenletnek. Az elfajuló magú másodfajú integrálegyenlettel ellentétben az elsőfajú elfajuló magú homogén integrálegyenlet mindig megoldható. Ha $\varphi^h(x)$ a homogén egyenletnek bármely megoldása és $\varphi(x)$ a (11.39a) egyenlet bármely megoldása, akkor $\varphi(x) + \varphi^h(x)$ is megoldása a (11.39a) egyenletnek.

Hogy a homogén egyenlet összes megoldását meghatározhassuk, tekintsük a (11.39c) egyenletet az $f(x) = 0$ esetben. Feltéve az $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ függvények lineáris függetlenségét, az egyenlet pontosan akkor teljesül, ha

$$A_j = \int_a^b \beta_j(y)\varphi(y)\,dy = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{11.41}$$

vagyis minden $\varphi^h(y)$ függvény, amely ortogonális az összes $\beta_j(y)$ függvényekre, megoldása a homogén integrálegyenletnek.

11.3.2. Fogalmak, analízisbeli segédeszközök

1. Próbakifejezés a megoldásra Az

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy \qquad (c \le x \le d) \tag{11.42}$$

FREDHOLM-féle elsőfajú integrálegyenlet számos megoldási módszerénél a $\varphi(y)$ megoldásnak egy $(\beta_n(y)) = \{\beta_1(y), \beta_2(y), \ldots\}$ függvényrendszerre vonatkozó függvénysorként való előállításából indulunk ki, vagyis a megoldásra a

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \beta_j(y) \tag{11.43}$$

próbakifejezést választjuk, ahol a c_j együtthatók kezdetben határozatlanok. A $(\beta_n(y))$ függvényrendszer megválasztásánál gondolni kell arra, hogy e függvények a megoldások egész terét kifeszítik, és hogy a c_j együtthatókat alkalmas módon lehessen előállítani.
Az áttekinthetőség érdekében az alábbi megfontolásokat csak valós értékű függvényekre végezzük el, de mindegyik állítás átvihető komplex értékű függvényekre is. A tárgyalt megoldási módszerek megalapozásához a $K(x, y)$ magfüggvényre bizonyos kikötéseket kell tenni (lásd [11.2], [11.10]). Mindig úgy fogjuk tekinteni, hogy ezek a kikötések teljesülnek. Először néhány segédeszközt ismertetünk.

2. Négyzetes integrálhatóság Azt mondjuk, hogy a $\psi(y)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon *négyzetesen integrálható*, ha

$$\int_a^b |\psi(y)|^2 \, dy < \infty \,. \tag{11.44}$$

Speciálisan minden, az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény négyzetesen integrálható. Az összes, az $[a, b]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvényekből álló függvénytér jele $L^2[a, b]$.

3. Ortonormális rendszer A négyzetesen integrálható $\beta_i(y), \beta_j(y), y \in [a, b]$ függvényeket egymásra ortogonálisnak mondjuk, ha

$$\int_a^b \beta_i(y)\beta_j(y) \, dy = 0 \,. \tag{11.45a}$$

Az $L^2[a, b]$ térhez tartozó $(\beta_n(y))$ függvényrendszert *ortonormált rendszer*nek nevezzük, ha teljesülnek a fentiek és elemeik még normáltak is, tehát

$$\int_a^b \beta_i(y)\beta_j(y) \, dy = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad i = j \,, \\ 0 & \text{ha} \quad i \neq j \,. \end{cases} \tag{11.45b}$$

Továbbá az ortonormált rendszer *teljes*, ha $L^2[a, b]$-ben nincs olyan $\tilde{\beta}(y) \neq 0$ függvény, amely az ortonormált rendszer minden függvényére ortogonális. Egy teljes ortonormált rendszer megszámlálhatóan sok függvényből áll, és ezek az $L^2[a, b]$ térben *bázis*t alkotnak. A SCHMIDT-féle ortogonalizálási eljárással egy $(\beta_n(y))$ függvényrendszerből egy $(\beta_n^*(y))$ ortonormált rendszert lehet definiálni úgy, hogy az $n = 1, 2, \ldots$ értékekre egymás után meghatározzuk azokat a $b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nn}$ együtthatókat, amelyekre a

$$\beta_n^*(y) = \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \beta_j(y) \tag{11.45c}$$

függvény normált és a $\beta_1^*(y), \ldots, \beta_{n-1}^*(y)$ függvények mindegyikére ortogonális.

4. Fourier-sorok Legyen $(\beta_n(y))$ ortonormált rendszer, és legyen $\psi(y) \in L^2[a, b]$. Ekkor a

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j \beta_j(y) = \psi(y) \tag{11.46a}$$

sort, ill. a d_j számokat a $\psi(y)$ függvény $(\beta_n(y))$ rendszerre vonatkozó FOURIER-sorának, ill. FOURIER-együtthatóinak nevezzük. A (11.45b) összefüggés alapján a sor együtthatóira fennáll

$$\int_a^b \beta_k(y)\psi(y)\,dy = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \int_a^b \beta_j(y)\beta_k(y)\,dy = d_k\,. \tag{11.46b}$$

Ha a $(\beta_n(y))$ rendszer teljes, akkor érvényes a PARSEVAL-egyenlőség:

$$\int_a^b |\psi(y)|^2\,dy = \sum_{j=1}^{\infty} |d_j|^2. \tag{11.46c}$$

11.3.3. Az integrálegyenlet visszavezetése lineáris egyenletrendszerre

Olyan lineáris egyenletrendszert akarunk felállítani, amelyből kiszámíthatók a $\varphi(y)$ megoldásfüggvénynek egy ortonormált rendszerre vonatkozó FOURIER-együtthatói. Ehhez kiválasztunk egy $(\beta_n(y))$, $y \in [a,b]$ teljes ortonormált rendszert. Hasonlóképpen legyen $(\alpha_n(x))$ teljes ortonormált rendszer a $[c,d]$ intervallumon. Az $f(x)$ függvény $(\alpha_n(x))$ rendszerre vonatkozó FOURIER-sora

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\alpha_i(x) \quad \text{ahol} \quad f_i = \int_c^d \alpha_i(x)f(x)\,dx\,. \tag{11.47a}$$

Megszorozva a (11.42) integrálegyenletet az $\alpha_i(x)$ függvénnyel, majd x szerint integrálva c-től d-ig, kapjuk (megint megcserélve a téglalapon az integrálások sorrendjét):

$$\begin{aligned} f_i &= \int_c^d \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\alpha_i(x)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d K(x,y)\alpha_i(x)\,dx \right\} \varphi(y)\,dy \qquad (i=1,2,\ldots)\,. \end{aligned} \tag{11.47b}$$

A kapcsos zárójelben álló kifejezés y függvénye; ennek FOURIER-előállítása

$$\int_c^d K(x,y)\alpha_i(x)\,dx = K_i(y) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}\beta_j(y) \tag{11.47c}$$

$$\text{ahol} \quad K_{ij} = \int_a^b \int_c^d K(x,y)\alpha_i(x)\beta_j(y)\,dx\,dy.$$

A $$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\beta_k(y) \tag{11.47d}$$

FOURIER-soros próbakifejezéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} f_i &= \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}\beta_j(y) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\beta_k(y) \right) \right\} dy \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{ij}c_k \int_a^b \beta_j(y)\beta_k(y)\,dy \quad (i=1,2,\ldots)\,. \end{aligned} \tag{11.47e}$$

A (11.45b) ortonormalitási tulajdonság alapján adódik az

$$f_i = \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} c_j \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{11.47f}$$

végtelen sok egyenletből álló lineáris egyenletrendszer a $c_1, c_2, \ldots$ FOURIER-együtthatók meghatározására. Az együtthatók

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{11.47g}$$

mátrixát *magmátrix*nak nevezzük. Az f_i és K_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ számok ismert mennyiségek, de függnek az ortonormált rendszer megválasztásától.

■ $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\cos y - \cos x} \varphi(y)\, dy\,, \quad 0 \le x \le \pi$. Itt az improprius integrál CAUCHY-féle főértékét kell venni. Az alkalmazásra kerülő teljes ortonormált rendszerek:

1. $\alpha_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \quad \alpha_i(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos ix \;\; (i = 1, 2 \ldots)\,,$ **2.** $\beta_j(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin jy \;\; (j = 1, 2, \ldots)\,.$

(11.47d) alapján a magmátrixban szereplő együtthatók a következők:

$$K_{0j} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y \sin jy}{\cos y - \cos x}\, dx\, dy = 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$K_{ij} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y \sin iy \cos ix}{\cos y - \cos x}\, dx\, dy = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin y \sin iy \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\cos ix}{\cos y - \cos x}\, dx \right\} dy \;\; (i, j = 1, 2, \ldots)\,.$$

A belső integrál:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ix}{\cos y - \cos x}\, dx = -\pi \frac{\sin iy}{\sin y}\,. \tag{11.48}$$

Innen $K_{ij} = -\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin jy \sin iy\, dy = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad i \ne j\,, \\ -1 & \text{ha} \quad i = j\,. \end{cases}$

(11.47a) szerint $f(x)$ FOURIER-együtthatói: $f_i = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \alpha_i(x)\, dx \;\; (i = 0, 1, 2, \ldots)$. Az egyenletrendszer a következő: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Az első egyenlet értelmében a rendszernek csak akkor van megoldása, ha $f_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \alpha_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$. Ekkor $c_j = -f_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, de ebből nem az következik, hogy $\varphi = -f$, mert a c_j-k és az f_j-k különböző rendszerek szerinti kifejtések együtthatói. Viszont így (11.47f) -ből $c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} f_j$ $(i = 1, 2, \ldots)$ lesz, tehát visszakövetkeztetve $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b K(x, y) f(x)\, dx$, azaz $\varphi(y) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\cos y - \cos x} f(x)\, dx$, hacsak $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$ (hiszen $f_0 = 0$) és különben nincs megoldás.

11.3.4. Az elsőfajú homogén integrálegyenlet megoldása

Ha $\varphi(y)$, ill. $\varphi^h(y)$ az

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \qquad (11.49a) \qquad \text{ill.} \quad 0 = \int_a^b K(x,y)\varphi^h(y)\,dy\,, \qquad (11.49b)$$

inhomogén, ill. homogén integrálegyenlet tetszőleges megoldása, akkor a $\varphi(y) + \varphi^h(y)$ összeg is az inhomogén egyenlet egy megoldása. Ezért először meg kell határozni a homogén integrálegyenlet összes megoldásait. Ez a feladat azonos a

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}c_j = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) \qquad (11.50)$$

lineáris egyenletrendszer összes nem triviális megoldásainak a megkeresésével. Mivel ezt néha nehéz elvégezni, a homogén megoldások kiszámítására a következő eljárást alkalmazhatjuk.
Ha van egy $(\alpha_n(x))$ teljes ortonormált rendszerünk, képezzük a

$$K_i(y) = \int_c^d K(x,y)\alpha_i(x)\,dx \qquad (i = 1,2,\ldots) \qquad (11.51a)$$

függvényeket. Ha $\varphi^h(y)$ a homogén egyenlet tetszőleges megoldása, azaz fennáll

$$\int_a^b K(x,y)\varphi^h(y)\,dy = 0\,, \qquad (11.51b)$$

akkor megszorozva ezt az egyenletet az $\alpha_i(x)$ függvénnyel, majd x szerint integrálva kapjuk:

$$0 = \int_a^b \varphi^h(y) \int_c^d K(x,y)\alpha_i(x)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi^h(y)K_i(y)\,dy \quad (i = 1,2,\ldots)\,, \qquad (11.51c)$$

vagyis a homogén egyenlet tetszőleges $\varphi^h(y)$ megoldása ortogonális kell hogy legyen minden $K_i(y)$ függvényre. Ha a $(K_n(y))$ rendszert a SCHMIDT-eljárással egy ortonormált $(K_n^*(y))$ rendszerrel helyettesítjük, akkor a (11.51c) feltétel a következő alakot ölti:

$$\int_a^b \varphi^h(y)K_i^*(y)\,dy = 0\,. \qquad (11.51d)$$

Ha a $(K_n^*(y))$ rendszert akárhogy teljes ortonormált rendszerré egészítjük ki, akkor $\varphi^h(y)$ elő kell, hogy álljon pusztán a hozzávett függvények lineáris kombinációjaként. Ha a $(K_n^*(y))$ ortonormált rendszer már teljes, akkor csak a $\varphi^h(y) = 0$ triviális megoldás létezik.
Teljesen hasonló módon lehet meghatározni a következő, transzponált homogén integrálegyenlet megoldásrendszerét:

$$\int_c^d K(x,y)\psi(x)\,dx = 0\,. \qquad (11.51e)$$

■ $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos y - \cos x}\varphi(y)\,dy = 0\,,\ 0 \le x \le \pi$. Ortonormális rendszer: $\alpha_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin ix$ $(i = 1,2,\ldots)\,, K_i(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x \sin ix}{\cos y - \cos x}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(i-1)x - \cos(i+1)x}{\cos y - \cos x}\,dx$. A (11.48)

összefüggés kétszeri alkalmazásával adódik $K_i(y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(i-1)y - \sin(i+1)y}{\sin y}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos iy$ $(i = 1, 2, \ldots)$. A $(K_i(y))$ rendszer már ortonormált. A $K_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ függvény ezt a rendszert teljessé teszi. A homogén egyenlet egyedüli megoldásai tehát $\varphi^h(y) = c\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \tilde{c}$, tehát $\varphi^h(y) =$ állandó.

11.3.5. Megadott maghoz két speciális ortonormált rendszer meghatározása

1. Az eljárás elvi vázlata

A 11.3.3. szakaszban felállított végtelen lineáris egyenletrendszert általában nem egyszerűbb megoldani, mint az eredeti problémát. Az $(\alpha_n(x))$ és a $(\beta_n(y))$ ortonormált rendszer alkalmas megválasztásával azonban a $\mathbf{K}$ magmátrixot olyan ritkává lehet tenni, hogy az egyenletrendszer könnyen megoldhatóvá váljon. Az alábbi eljárással definiálhatunk két olyan ortonormált rendszert, hogy a segítségükkel nyert magmátrixban a K_{ij} együttható csak $i = j$ és $i = j + 1$ esetén nem egyenlő nullával.

Az előző szakasz módszerével először meghatározzuk a homogén integrálegyenlet, ill. a transzponált homogén integrálegyenlet egy-egy $(\beta_n^h(y))$, ill. $(\alpha_n^h(x))$ ortonormált megoldásrendszerét, tehát e két integrálegyenlet minden megoldása előállítható a $\beta_n^h(y)$, ill. $\alpha_n^h(x)$ függvények lineáris kombinációjaként. Ezek az ortonormált rendszerek nem teljesek. A következő algoritmus eredményeként, bizonyos $\alpha_j(x)$, $\beta_j(y)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ függvények egyenkénti hozzávételével, e rendszerek teljes ortonormált rendszerekké válnak.

2. Algoritmus

Meghatározunk egy, az $(\alpha_n^h(x))$ rendszer minden függvényére ortogonális $\alpha_1(x)$ normált függvényt. Utána a $j = 1, 2, \ldots$ indexek mindegyikére egymásután elvégezzük a következő két lépést, amelyek nagyon hasonlítanak a SCHMIDT-féle ortogonalizációs eljárás megfelelő lépéseihez (az algoritmussal egy SCHMIDT-féle általánosított rendszert konstruálunk, lásd [11.2]):

1. A

$$\nu_1\beta_1(y) = \int_c^d K(x,y)\alpha_1(x)\,dx\,, \quad \text{ill.} \tag{11.52a}$$

$$\nu_j\beta_j(y) = \int_c^d K(x,y)\alpha_j(x)\,dx - \mu_{j-1}\beta_{j-1}(y) \quad (j \neq 1)\,, \tag{11.52b}$$

egyenletből kiszámítjuk a $\beta_j(y)$ függvényt és a ν_j számot úgy, hogy ν_j mindig különbözzék nullától, pontosabban úgy választandó, hogy $\beta_j(y)$ normált legyen. Ekkor $\beta_j(y)$ ortogonális a $((\beta_n^h(y)), \beta_1(y), \ldots, \beta_{j-1}(y))$ függvények mindegyikére.

2. A

$$\mu_j\alpha_{j+1}(x) = \int_a^b K(x,y)\beta_j(y)\,dy - \nu_j\alpha_j(x) \tag{11.52c}$$

egyenletből meghatározzuk a normált $\alpha_{j+1}(x)$ függvényt és a μ_j számot. Aszerint, hogy a jobboldal $\neq 0$ vagy $= 0$, két eset lehetséges:

a) $\mu_j \neq 0$: Az $\alpha_{j+1}(x)$ függvény ortogonális az $((\alpha_n^h(x)), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_j(x))$ függvények mindegyikére.

b) $\mu_j = 0$: Az $\alpha_{j+1}(x)$ függvény nincs egyértelműen meghatározva. Megint két esetet különböztetünk meg:

$\mathbf{b_1}$) Az $((\alpha_n^h(x)), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_j(x))$ rendszer teljes. Ekkor a $((\beta_n^h(y)), \beta_1(y), \ldots, \beta_j(y))$ rendszer is teljes, és az eljárás végetért.

b₂) Az $((\alpha_n^h(x)), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_j(x))$ rendszer nem teljes. Ekkor választunk egy tetszőleges, ezen függvényekre ortogonális $\alpha_{j+1}(x)$ függvényt.

Az eljárást addig ismételjük, amíg az ortonormált rendszer teljes nem lesz. Előfordulhat, hogy az algoritmus során egy bizonyos lépéstől kezdve és további megszámlálhatóan végtelen sok lépés után sem következik be a **b)** eset. Ha az így kapott, megszámlálhatóan végtelen $((\alpha_n^h(x)), \alpha_1(x), \ldots)$ függvénysorozat nem teljes, akkor egy mindezen függvényekre ortogonális $\tilde{\alpha_1}(x)$ függvénnyel az eljárás újraindítható.

Az eljárás során meghatározott $\alpha_j(x), \beta_j(y)$ függvényeket és ν_j, μ_j számokat alkalmas módon átnevezve az adódó $\mathbf{K}$ magmátrix a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{K}^{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{K}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & \ldots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{K}^{(m)} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(m)} & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1^{(m)} & \nu_2^{(m)} & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2^{(m)} & \nu_3^{(m)} & \cdots \\ \vdots & & \ldots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{11.53}$$

A $\mathbf{K}^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ mátrixok végesek, ha az algoritmus során véges sok lépés után bekövetkezik a $\mu_j^{(m)} = 0$ eset; viszont végtelenek, ha megszámlálhatóan végtelen sok j lépésre $\mu_j^{(m)} \neq 0$. A $\mathbf{K}$-ban található nullasorok, ill. nullaoszlopok száma megfelel az $(\alpha_n^h(x))$, ill. $(\beta_n^h(y))$ rendszerben szereplő függvények számának. Különösen egyszerű eset áll elő, ha a $\mathbf{K}^{(m)}$ mátrixok csak egyetlen $\nu_1^{(m)} = \nu_m$ számot tartalmaznak, tehát minden $\mu_j^{(m)}$ szám nullával egyenlő.

A 11.3.3. szakasz jelöléseivel a végtelen egyenletrendszer megoldása, feltéve hogy $\alpha_j(x) \in (\alpha_n^h(x))$ esetén $f_j = 0$, a következő:

$$c_j = \begin{cases} \dfrac{f_j}{\nu_j} & \text{ha} \quad \beta_j(y) \notin (\beta_n^h(y)), \\ \text{tetszőleges} & \text{ha} \quad \beta_j(y) \in (\beta_n^h(y)). \end{cases} \tag{11.54}$$

11.3.6. Iterációs módszer

Az

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy \qquad (c \le x \le d) \tag{11.55a}$$

integrálegyenlet megoldása céljából képezzük a

$$\beta_n(y) = \int_c^d K(x,y)\alpha_{n-1}(x)\,dx \tag{11.55b}$$

és

$$\alpha_n(x) = \int_a^b K(x,y)\beta_n(y)\,dy\,. \tag{11.55c}$$

függvényeket, ahol $\alpha_0(x) = f(x)$ és $n = 1, 2, \ldots$. Ha a (11.55a) egyenletnek létezik négyzetesen integrálható $\varphi(y)$ megoldása, akkor fennáll

$$\int_a^b \varphi(y)\beta_n(y)\,dy = \int_a^b \int_c^d \varphi(y)K(x,y)\alpha_{n-1}(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d f(x)\alpha_{n-1}(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11.55d}$$

A (11.55b,c) alapján meghatározott függvényrendszerek ortonormálásával egy $(\alpha_n^*(x))$ és egy $(\beta_n^*(y))$ ortonormált rendszert kapunk. Ha erre a célra a SCHMIDT-féle ortogonalizálási eljárást használjuk,

akkor $\beta_n^*(y)$ a

$$\beta_n^*(y) = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\beta_j(y) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11.55e}$$

alakban állítható elő. Most feltesszük, hogy a (11.55a) egyenlet $\varphi(y)$ megoldása ($\beta_n^*(y)$) szerint kifejtett végtelen sorként írható fel:

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_n\beta_n^*(y). \tag{11.55f}$$

Ekkor a c_n együtthatókra (11.55d) miatt fennáll

$$c_n = \int_a^b \varphi(y)\beta_n^*(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\int_a^b \varphi(y)\beta_j(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\int_c^d f(x)\alpha_{j-1}(x)\,dx\,. \tag{11.55g}$$

(11.55f) alakú megoldás létezéséhez szükségesek és elégségesek a következő feltételek:

1. $\displaystyle\int_c^d [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\int_c^d f(x)\alpha_n^*(x)\,dx\Big|^2$, (11.56a) **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < \infty\,.$ (11.56b)

11.4. Volterra-féle integrálegyenletek

11.4.1. Elméleti alapok

A VOLTERRA-féle másodfajú integrálegyenlet alakja a következő:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.57}$$

Keressük a $\varphi(x)$ megoldásfüggvényt, amelynek értelmezési tartománya az $I = [a, b]$ zárt, ill. az $I = [a, \infty)$ félig nyílt intervallum. A VOLTERRA-féle másodfajú integrálegyenlet megoldására érvényes a következő állítás. Ha az $f(x)$ függvény I-n, a $K(x, y)$ függvény pedig az $x \in I$, $y \in [a, x]$ háromszögtartományon folytonos, akkor az integrálegyenletnek *pontosan egy*, I-n folytonos $\varphi(x)$ megoldása van. Sok esetben a VOLTERRA-féle elsőfajú integrálegyenleteket másodfajú integrálegyenletbe lehet átvinni. A megoldás létezésére és egyértelműségére vonatkozó állítások ilyenkor módosított alakban érvényesek.

1. Átalakítás differenciálással Ha feltesszük, hogy $\varphi(x)$, $K(x, y)$ és $\dfrac{\partial}{\partial x}K(x, y)$ folytonos, akkor f deriválható és az

$$f(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)\,dy \tag{11.58a}$$

elsőfajú integrálegyenletet az x paraméter szerinti differenciálással az

$$f'(x) = K(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x, y)\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.58b}$$

egyenletbe lehet átvinni. Ha minden $x \in I$ helyen fennáll $K(x, x) \neq 0$, akkor az egyenletet eloszthatjuk a $K(x, x)$ függvénnyel, miáltal másodfajú integrálegyenletet kapunk.

2. Átalakítás parciális integrálással Feltéve, hogy $\varphi(x)$, $K(x,y)$ és $\dfrac{\partial}{\partial y}K(x,y)$ folytonos, a (11.58a) egyenletben szereplő integrált parciális integrálással lehet kiszámítani. Az

$$\int_a^x \varphi(y)\,dy = \psi(x) \qquad \text{helyettesítéssel kapjuk:} \tag{11.59a}$$

$$f(x) = [K(x,y)\psi(y)]_{y=a}^{y=x} - \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right)\psi(y)\,dy = K(x,x)\psi(x) - \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right)\psi(y)\,dy. \tag{11.59b}$$

Ha $x \in I$ esetén $K(x,x) \neq 0$, akkor a $K(x,x)$ függvénnyel való osztás a

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{K(x,x)} + \frac{1}{K(x,x)}\int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right)\psi(y)\,dy\,, \tag{11.59c}$$

másodfajú integrálegyenletre vezet, amelynek $\psi(x)$ megoldásából a (11.58a) egyenlet $\varphi(x)$ megoldását differenciálással lehet megkapni.

11.4.2. Megoldás differenciálással

A VOLTERRA-féle integrálegyenletek egyes osztályainál az egyenlet x paraméter szerinti differenciálásával az integrál kiküszöbölhető, ill. alkalmas módon helyettesíthető. Ha feltesszük, hogy $K(x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,y)$ és $\varphi(x)$ folytonos, továbbá a másodfajú integrálegyenlet esetében hogy $\varphi(x)$ differenciálható, akkor az

$$f(x) = \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \quad \text{ill.} \tag{11.60a}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.60b}$$

egyenlet x paraméter szerinti differenciálásával kapjuk:

$$f'(x) = K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\,\varphi(y)\,dy\,, \quad \text{ill.} \tag{11.60c}$$

$$\varphi'(x) = f'(x) + K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\,\varphi(y)\,dy\,. \tag{11.60d}$$

■ Keresendő $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ esetén az $\displaystyle\int_0^x \cos(x-2y)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2}x\sin x$ (I) egyenlet $\varphi(x)$ megoldása.

Kétszer differenciálva x szerint adódik $\varphi(x)\cos x - \displaystyle\int_0^x \sin(x-2y)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2}(\sin x + x\cos x)$ (IIa), $\varphi'(x)\cos x - \displaystyle\int_0^x \cos(x-2y)\varphi(y)\,dy = \cos x - \frac{1}{2}x\sin x$ (IIb). Az utóbbi integrál megegyezik az (I) integrálegyenlet bal oldalával. Innen $\varphi'(x)\cos x = \cos x$ és, mivel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ esetén $\cos x \neq 0$, következik $\varphi'(x) = 1$, tehát $\varphi(x) = x + C$.
A C konstans meghatározására a (IIa) egyenletben x helyébe nullát helyettesítünk: $\varphi(0) = 0$. Tehát fennáll $C = 0$, és így (I) megoldása $\varphi(x) = x$.

Megjegyzés: Ha a VOLTERRA-féle integrálegyenlet magja polinom, akkor a differenciálás módszerével mindig sikerül az integrálegyenletet lineáris differenciálegyenletbe átvinni. Ha a magban fellépő

legmagasabb x-hatvány foka n, akkor x szerint $(n+1)$-szer differenciálva elsőfajú integrálegyenlet esetén n-edrendű, másodfajú integrálegyenlet esetén $(n+1)$-edrendű differenciálegyenletet kapunk. Ennek során feltesszük, hogy $\varphi(x)$ és $f(x)$ megfelelően sokszor differenciálható.

■ $\int_0^x [2(x-y)^2+1]\varphi(y)\,dy = x^3$ (I'). Háromszor differenciálva x szerint kapjuk:

$\varphi(x)+4\int_0^x (x-y)\varphi(y)\,dy = 3x^2$ (II'a), $\quad \varphi'(x)+4\int_0^x \varphi(y)\,dy = 6x$ (II'b), $\quad \varphi''(x)+4\varphi(x) = 6$ (II'c).

E differenciálegyenlet általános megoldása $\varphi(x) = A\sin 2x + B\cos 2x + \dfrac{3}{2}$. A (II'a), ill. (II'b) egyenletben x helyébe nullát helyettesítve: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ és így $A = 0$, $B = -1{,}5$. Ennélfogva az (I') integrálegyenlet megoldása $\varphi(x) = \dfrac{3}{2}(1-\cos 2x)$.

11.4.3. Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek megoldása Neumann-sorral

A VOLTERRA-féle másodfajú integrálegyenlet megoldását NEUMANN-sorral (vö. 11.2.3. szakasz) lehet előállítani. Legyen az egyenlet

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.61}$$

Alkalmazzuk a

$$\overline{K}(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{ha } y \le x, \\ 0 & \text{ha } y > x \end{cases} \tag{11.62a}$$

formális kiterjesztést. Ekkor (11.61) megegyezik a

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \overline{K}(x,y)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11.62b}$$

FREDHOLM-féle integrálegyenlettel, ahol $b = \infty$ is megengedett. A megoldás a

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(x,y)f(y)\,dy\,. \tag{11.62c}$$

alakban állítható elő. A $K_1, K_2, \ldots$ *iterált magok*at a következő egyenletek definiálják:

$$K_1(x,y) = \overline{K}(x,y)\,, K_2(x,y) = \int_a^b \overline{K}(x,\eta)\overline{K}(\eta,y)\,d\eta = \int_y^x K(x,\eta)K(\eta,y)\,d\eta, \ldots \tag{11.62d}$$

és általában:

$$K_n(x,y) = \int_y^x K(x,\eta)K_{n-1}(\eta,y)\,d\eta\,. \tag{11.62e}$$

Az iterált magokra is fennáll, hogy $K_j(x,y) \equiv 0$ ha $y > x$ $(j = 1,2,\ldots)$. Ha a (11.61) egyenletnek létezik megoldása, akkor a NEUMANN-sor (ellentétben a FREDHOLM-féle integrálegyenlet esetével) tetszőleges λ paraméter mellett a megoldáshoz konvergál.

■ $\varphi(x) = 1+\lambda\int_0^x \mathrm{e}^{x-y}\varphi(y)\,dy$. $K_1(x,y) = K(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$, $K_2(x,y) = \int_y^x \mathrm{e}^{x-\eta}\mathrm{e}^{\eta-y}\,d\eta =$

$= \mathrm{e}^{x-y}(x-y), \ldots,$ $K_n(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{x-y}}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}$.

A rezolvens meghatározása: $\Gamma(x,y;\lambda) = \mathrm{e}^{x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(x-y)^n = e^{(x-y)(\lambda+1)}$. Mint ismeretes, a sor λ minden értékére konvergens.

Az adódik, hogy $\varphi(x) = 1 + \lambda\int_0^x \mathrm{e}^{(x-y)(\lambda+1)}\,dy = 1 + \lambda\mathrm{e}^{(\lambda+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{-(\lambda+1)y}\,dy$, és speciálisan $\lambda = -1$ esetén $\varphi(x) = 1 - x$, $\lambda \neq -1$ esetén pedig $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda+1}\left(1 + \lambda\mathrm{e}^{(\lambda+1)x}\right)$.

11.4.4. Konvolúció típusú Volterra-féle integrálegyenletek

Ha egy VOLTERRA-féle integrálegyenlet magja

$$k(x,y) = \begin{cases} k(x-y) & \text{ha} \quad 0 \le y \le x\,, \\ 0 & \text{ha} \quad 0 \le x < y\,, \end{cases} \tag{11.63a}$$

alakú, akkor az

$$\int_0^x k(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x)\,, \tag{11.63b}$$

ill.

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-y)\varphi(y)\,dy \tag{11.63c}$$

egyenlet megoldására a LAPLACE-transzformáció tulajdonságait lehet felhasználni. Ha az $\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \Phi(p)\,, \mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, $\mathcal{L}\{k(x)\} = K(p)$ LAPLACE-transzformáltak léteznek, akkor a konvolúciótétel (lásd 741. old.) alapján a transzformált feladatok a következők:

$$K(p)\Phi(p) = F(p)\,, \tag{11.64a}$$

ill.

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p). \tag{11.64b}$$

Innen azonnal következik, hogy

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)}\,, \tag{11.64c}$$

ill.

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}\,. \tag{11.64d}$$

Visszatranszformálással megkapjuk az eredeti probléma $\varphi(x)$ megoldását. A másodfajú integrálegyenlet megoldásának LAPLACE-transzformáltját a

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)} = F(p) + \frac{K(p)}{1-K(p)}F(p) \tag{11.64e}$$

módon átalakítva és feltéve, hogy a

$$\frac{K(p)}{1-K(p)} = H(p) \tag{11.64f}$$

kifejezés egy $h(x)$ függvény transzformáltja, kapjuk a megoldás

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x h(x-y)f(y)\,dy \tag{11.64g}$$

előállítását. A $h(x-y)$ függvény az integrálegyenlet rezolvens magja.

■ $\varphi(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-y}\varphi(y)\,dy$: $\Phi(p) = F(p) + \frac{1}{p-1}\Phi(p)$, azaz $\Phi(p) = \frac{p-1}{p-2}F(p)$. Visszatranszformálással adódik $\varphi(x)$. Mivel $H(p) = \frac{1}{p-2}$, azért $h(x) = e^{2x}$. A (11.64g) egyenlet alapján megkapjuk a $\varphi(x) = f(x) + \int_0^x e^{2(x-y)}f(y)\,dy$ megoldást.

11.4.5. Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek numerikus tárgyalása

Keressük a

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{11.65}$$

egyenlet megoldását az $I = [a,b]$ intervallumban. Minden numerikus megközelítés alapja, hogy az integrált valamilyen kvadratúraformulával közelítjük:

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \approx Q_{[a,x]}(K(x,\cdot)\varphi(\cdot))\,. \tag{11.66a}$$

Az integrálás intervalluma, és így a kvadratúraformula, függ x-től. Ezt a körülményt a $Q_{[a,x]}(\cdots)$ mennyiség $[a,x]$ indexe juttatja kifejezésre. A (11.65) egyenlet közelítő alakjaként kapjuk:

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) + Q_{[a,x]}(K(x,\cdot)\overline{\varphi}(\cdot))\,. \tag{11.66b}$$

A $\overline{\varphi}(x)$ függvény a (11.65) egyenlet megoldásának egy közelítése. A kvadratúraformula alappontjainak száma és helyzete függ x-től, ami erősen korlátozza megválasztásukat. Ha ξ a $Q_{[a,x]}(K(x,.)\overline{\varphi}(.))$ kvadratúra valamely alappontja, akkor $(K(x,\xi)\overline{\varphi}(\xi))$ és speciálisan $\overline{\varphi}(\xi)$ ismert kell hogy legyen. Ez azonban megköveteli (11.66b) jobb oldalának előzetes kiszámítását az $x = \xi$ helyen, ami egy az $[a,\xi]$ intervallumon végzett kvadratúrának felel meg. Emiatt a sok esetben kedvelt GAUSS-féle kvadratúraformulák alkalmazása nem lehetséges.

A feladat megoldása céljából felveszünk bizonyos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots$ alappontokat, és alkalmazzuk a $Q_{[a,x_n]}$ kvadratúraformulákat az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontokkal. Az alappontokban felvett függvényértékekre a $\varphi_k = \overline{\varphi}(x_k) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ rövidített jelölést vezetjük be. A φ_0 értékre kapjuk (vö. 11.3.1.):

$$\varphi_0 = f(x_0) = f(a)\,, \tag{11.66c}$$

$$\text{és így} \quad \varphi_1 = f(x_1) + Q_{[a,x_1]}(K(x_1,\cdot)\overline{\varphi}(\cdot))\,. \tag{11.66d}$$

Itt $Q_{[a,x_1]}$ alappontjai x_0 és x_1, tehát alakja

$$Q_{[a,x_1]}(K(x_1,\cdot)\overline{\varphi}(\cdot) = w_0 K(x_1,x_0)\varphi_0 + w_1 K(x_1,x_1)\varphi_1 \tag{11.66e}$$

ahol w_0 és w_1 alkalmas együtthatók. Az eljárást folytatva, és felhasználva a

$$\varphi_k = f(x_k) + Q_{[a,x_k]}(K(x_k,\cdot)\overline{\varphi}(\cdot)), \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{11.66f}$$

általános összefüggést, egymás után meghatározhatjuk a φ_k értékeket. A $Q_{[a,x_k]}$ kvadratúraformulák alakja a következő:

$$Q_{[a,x_k]}(K(x_k,\cdot)\overline{\varphi}(\cdot) = \sum_{j=0}^{k} w_{jk} K(x_k,x_j)\varphi_j\,. \tag{11.66g}$$

Tehát (11.66f) így írható:

$$\varphi_k = f(x_k) + \sum_{j=0}^{k} w_{jk} K(x_k,x_j)\varphi_j\,. \tag{11.66h}$$

A legegyszerűbb kvadratúraformula a *bal oldali téglalap-formula* (lásd 922. old.). Ennél

$$w_{jk} = x_{j+1} - x_j \quad \text{ha } j < k \quad \text{és} \quad w_{kk} = 0\,. \tag{11.66i}$$

Ily módon a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= f(a)\,, \\ \varphi_1 &= f(x_1) + (x_1 - x_0)K(x_1,x_0)\varphi_0\,, \\ \varphi_2 &= f(x_2) + (x_1 - x_0)K(x_2,x_0)\varphi_0 + (x_2 - x_1)K(x_2,x_1)\varphi_1 \end{aligned} \tag{11.67a}$$

és általában

$$\varphi_k = f(x_k) + \sum_{j=0}^{k-1} (x_{j+1} - x_j) K(x_k, x_j) \varphi_j \,. \tag{11.67b}$$

Az integrál valamivel pontosabb approximációját adja a *trapézformula* (lásd 922. old.), amely szerint ha az alappontok az egyszerűség kedvéért ekvidisztansak, azaz $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, akkor

$$\int_a^b g(x)\, dx \approx \frac{h}{2} \left[g(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} g(x_j) + g(x_k) \right] . \tag{11.67c}$$

Ezt a (11.66f) összefüggésre alkalmazva adódik:

$$\varphi_0 = f(a)\,, \tag{11.67d}$$

$$\varphi_k = f(x_k) + \frac{h}{2} \left[K(x_k, x_0)\varphi_0 + K(x_k, x_k)\varphi_k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} K(x_k, x_j)\varphi_j \right] . \tag{11.67e}$$

Itt a mindenkori kiszámítandó φ_k mennyiség a jobb oldalon is fellép. Az egyenletek azonban könnyen átrendezhetők a keresett függvényértékek szerint.

Megjegyzés: Az ismertetett módszer nemlineáris integrálegyenletek közelítő megoldására is alkalmas. Ebben az esetben, ha a φ_k értékek meghatározására a trapézformulát használjuk, mindig egy-egy nemlineáris egyenletet kell megoldani. Ezt úgy lehet elkerülni, hogy a trapézformulát csak az $[a, x_{k-1}]$ intervallumra alkalmazzuk, az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumot pedig a bal oldali téglalap-formulával kezeljük. Ha h elég kicsi, akkor ez a kvadratúrahiba nem nagyon befolyásolja a megoldást.

■ Keresendő a $\varphi(x) = 2 + \int_0^x (x - y)\varphi(y)\, dy$ integrálegyenlet közelítő megoldása a bal oldali téglalap-formulával, a (11.66f) előírás szerint. Legyenek az alappontok az ekvidisztans $x_k = k \cdot 0{,}1$ értékek, tehát $h = 0{,}1$.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= 2, \\
\varphi_1 &= f(x_1) + hK(x_1, x_0)\varphi_0 \\
&= 2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 2{,}02, \\
\varphi_2 &= f(x_2) + h(K(x_2, x_0)\varphi_0 + K(x_2, x_1)\varphi_1) \\
&= 2 + 0{,}1(0{,}2 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 2{,}02) = 2{,}0602
\end{aligned}$$

stb.

x	egzakt	téglalap-formula	trapézformula
0,2	2,0401	2,0602	2,0401
0,4	2,1621	2,2030	2,1620
0,6	2,3709	2,4342	2,3706
0,8	2,6749	2,7629	2,6743
1,0	3,0862	3,2025	3,0852

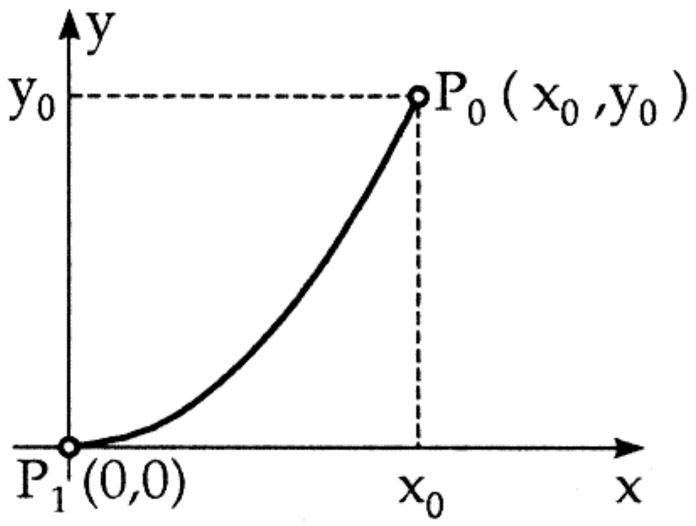
A táblázatban összehasonlítás céljából fel vannak tüntetve az egzakt megoldás, a bal oldali téglalap-formulával kapott megoldás és a pontosabb trapézformulával kapott megoldás értékei. A számolás a $h = 0{,}1$ lépéshosszal történt.

11.5. Szinguláris integrálegyenletek

Az integrálegyenletet *szingulárisnak* mondjuk, ha az egyenletet meghatározó integrál integrációs tartománya nem korlátos, vagy ha a magnak az integrációs tartományban szingularitásai vannak. Feltesszük, hogy a fellépő integrálok léteznek mint improprius integrálok vagy CAUCHY-féle főértékek (lásd 460. old.). A szinguláris integrálegyenletek tulajdonságaikban és megoldásaik viselkedésében erősen különböznek a „közönséges" integrálegyenletektől. A következő szakaszokban csak néhány speciális kérdés vizsgálunk meg. Átfogóbb tárgyalást lásd Irod. [11.2], [11.9].

11.5.1. Abel-féle integrálegyenlet

Az integrálegyenletek egyik első alkalmazása a fizika problémáira ABELtől származik. Mozogjon egy tömegpont egy függőleges síkban valamilyen görbe mentén, kizárólag a nehézségi erő hatása alatt, a $P_0(x_0, y_0)$ ponttól a $P_1(0, 0)$ pontig **(11.2. ábra)**.



11.2. ábra.

A mozgó pont sebessége a görbe valamely pontjában

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y_0 - y)}\,. \tag{11.68}$$

Integrálással megkapjuk az esési időt y_0 függvényében:

$$T(y_0) = \int_0^l \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\,. \tag{11.69a}$$

Ha s-et y függvényeként, vagyis az $s = f(y)$ alakban állítjuk elő, akkor a következő adódik:

$$T(y_0) = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{f'(y)}{\sqrt{y_0 - y}}\,dy\,. \tag{11.69b}$$

Mármost vizsgálni lehet azt a feladatot, hogy megadott esési idő mellett milyen lesz a görbe alakja y_0 függvényében. A

$$\sqrt{2g} \cdot T(y_0) = F(y_0) \quad \text{és} \quad f'(y) = \varphi(y) \tag{11.3}$$

helyettesítéssel, ha még az y_0 változót átnevezzük x-nek, az

$$F(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x - y}}\,dy\,. \tag{11.4}$$

VOLTERRA-féle elsőfajú integrálegyenletet kapjuk. A további tárgyalás során az ennél valamivel általánosabb

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(y)}{(x - y)^\alpha}\,dy \qquad \text{ahol} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{11.70}$$

egyenletet vesszük alapul. Ennek az egyenletnek a magja $y = x$ esetén nem korlátos. A (11.70) egyenletben az y változót formálisan ξ-nek, az x változót y-nak nevezzük át. Ezzel elérjük, hogy a megoldás a $\varphi = \varphi(x)$ alakban adódik. A (11.70) egyenlet mindkét oldalát megszorozva az $\dfrac{1}{(x - y)^{1-\alpha}}$ függvénnyel, majd y szerint integrálva a-tól x-ig a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_a^x \frac{1}{(x - y)^{1-\alpha}} \left(\int_a^y \frac{\varphi(\xi)}{(y - \xi)^\alpha}\,d\xi \right) dy = \int_a^x \frac{f(y)}{(x - y)^{1-\alpha}}\,dy\,. \tag{11.71a}$$

Az egyenlet bal oldalán fellépő integrálások sorrendjének felcserélésével:

$$\int_a^x \varphi(\xi) \left\{ \int_\xi^x \frac{dy}{(x - y)^{1-\alpha}(y - \xi)^\alpha} \right\} d\xi = \int_a^x \frac{f(y)}{(x - y)^{1-\alpha}}\,dy\,. \tag{11.71b}$$

A belső integrált az $y = \xi + (x - \xi)u$ helyettesítéssel ki lehet számítani:

$$\int_\xi^x \frac{dy}{(x - y)^{1-\alpha}(y - \xi)^\alpha} = \int_0^1 \frac{du}{u^\alpha (1 - u)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\,. \tag{11.71c}$$

A nyert kifejezést behelyettesítjük a (11.71b) összefüggésbe. A keresett $\varphi(x)$ függvényt ezután x szerinti

differenciálással határozhatjuk meg:

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\, dy\,. \tag{11.71d}$$

■ $x = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy\,, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y}{\sqrt{x-y}}\, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{x}\,.$

11.5.2. Szinguláris integrálegyenletek Cauchy-típusú magokkal

11.5.2.1. A feladat megfogalmazása

Adva van az

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{K(x,y)}{y-x}\varphi(y)\, dy = f(x)\,, \quad x \in \Gamma \tag{11.72}$$

integrálegyenlet. Itt Γ a komplex sík véges sok sima, kettőspont nélküli, zárt Γ_l görbéjéből álló rendszer, amely egy összefüggő és a 0 pontot tartalmazó S^+ belső tartományt, valamint egy S^- külső tartományt határoz meg. Γ pozitív irányú bejárásakor S^+ a bal oldalra esik. Szakaszonként sima nyílt vagy zárt görbékből álló rendszerekről lásd Irod. |11.2| Egy $u(x)$ függvény a Γ görberendszeren HÖLDER-*folytonos*, ha tetszőleges $x_1,\ x_2 \in \Gamma$ párra fennáll

$$|u(x_1) - u(x_2)| < K|x_1 - x_2|^\beta\,, \quad 0 < \beta \le 1\,, \quad K > 0\,. \tag{11.73}$$

Feltesszük, hogy $a(x)$, $f(x)$ és $\varphi(x)$ HÖLDER-folytonos a β_1 kitevővel, $K(x,y)$ pedig mindkét változójára nézve HÖLDER-folytonos a $\beta_2 > \beta_1$ kitevővel. A $K(x,y)(y-x)^{-1}$ magnak $x = y$ esetén erős szingularitása van. Az integrál mégis létezik mint CAUCHY-féle főérték. A $K(x,x) = b(x)$ és $k(x,y) = (K(x,y) - K(x,x))/(y-x)$ jelöléssel (11.72) a következő alakban adódik:

$$(\mathcal{L}\varphi)(x) := a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy + \frac{1}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma k(x,y)\varphi(y)\, dy = f(x)\,, \quad x \in \Gamma\,. \tag{11.74a}$$

Az $(\mathcal{L}\varphi)(x)$ kifejezés az integrálegyenlet bal oldalát írja le rövidített alakban. Az $\mathcal{L}$ operátor szinguláris. A $k(x,y)$ magfüggvény csak gyengén szinguláris. Kössük ki pótlólag az $a(x)^2 - b(x)^2 \neq 0$, $x \in \Gamma$ normalitási feltételt. Az

$$(\mathcal{L}_0\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x)\,, \quad x \in \Gamma \tag{11.74b}$$

egyenlet a (11.74a) összefüggéshez rendelt *karakterisztikus egyenlet.* Az $\mathcal{L}_0$ operátor az $\mathcal{L}$ operátor karakterisztikus része. A (11.74a) integrálegyenlet transzponáltja

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^\top\psi)(y) &= a(y)\psi(y) - \frac{b(y)}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\psi(x)dx}{x-y} + \frac{1}{\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \left(k(x,y) - \frac{b(x)-b(y)}{x-y}\right)\psi(x)\, dx \\ &= g(y)\,, \quad y \in \Gamma\,.\end{aligned} \tag{11.74c}$$

11.5.2.2. A megoldás létezése

Az $(\mathcal{L}\varphi)(x) = f(x)$ egyenletnek pontosan akkor létezik $\varphi(x)$ megoldása, ha az $(\mathcal{L}^\top\psi)(y) = 0$ transzponált homogén egyenlet minden $\psi(y)$ megoldására teljesül az

$$\int_\Gamma f(y)\psi(y)\, dy = 0 \tag{11.75a}$$

ortogonalitási feltétel. Ugyanígy az $(\mathcal{L}^\top \psi)(y) = g(y)$ transzponált egyenletnek pontosan akkor létezik megoldása, ha az $(\mathcal{L}\varphi)(x) = 0$ homogén egyenlet minden $\varphi(x)$ megoldására fennáll

$$\int_\Gamma g(x)\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{11.75b}$$

11.5.2.3. A Cauchy-féle integrál tulajdonságai

A

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y-z}\,dy\,, \quad z \in \mathbb{C} \tag{11.76a}$$

függvényt Γ mentén vett CAUCHY-*integrál*nak nevezzük. Ha $z \notin \Gamma$, az integrál létezik a közönséges értelemben és holomorf függvényt állít elő (lásd 695. old.). Fennáll $\Phi(\infty) = 0$. Ha $z = x \in \Gamma$, akkor a (11.76a) mennyiségen a

$$(\mathcal{H}\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy \quad x \in \Gamma\,, \tag{11.76b}$$

CAUCHY-féle főértéket értsük. A $\Phi(z)$ CAUCHY-integrál S^+-ról, ill. S^--ról folytonosan kiterjeszthető Γ-ra. A z pontnak az $x \in \Gamma$ ponthoz való közeledése esetén a határérték legyen $\Phi^+(x)$, ill. $\Phi^-(x)$. Ekkor érvényesek a

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + (\mathcal{H}\varphi)(x)\,, \qquad \Phi^-(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + (\mathcal{H}\varphi)(x)\,. \tag{11.76c}$$

PLEMELJ–SZOHOCKIJ-féle képletek.

11.5.2.4. Hilbert-féle peremérték-feladat

1. Kapcsolat

A HILBERT-féle peremérték-feladat szorosan összefügg a karakterisztikus integrálegyenlet megoldásával. Ha $\varphi(x)$ a (11.74b) egyenletnek egy megoldása, akkor (11.76a) holomorf függvény S^+-on és S^--on, továbbá fennáll $\Phi(\infty) = 0$. A (11.76c) PLEMELJ–SZOHOCKIJ-féle képletek szerint

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x)\,, \qquad 2(\mathcal{H}\varphi)(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x)\,, \quad x \in \Gamma\,. \tag{11.77a}$$

A

$$G(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)} \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{f(x)}{a(x) + b(x)} \tag{11.77b}$$

jelöléssel a karakterisztikus integrálegyenlet a következő:

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,. \tag{11.77c}$$

2. Hilbert-féle peremérték-feladat

Keresendő egy S^+-on és S^--on holomorf, a végtelenben eltűnő $\Phi(z)$ függvény, amelyre Γ mentén teljesül a (11.77c) peremfeltétel. A HILBERT-féle feladat $\Phi(z)$ megoldásai a (11.76a) alakban állíthatók elő. (11.77a) első egyenlete szerint ezek meghatározzák a karakterisztikus integrálegyenlet $\varphi(x)$ megoldásait.

11.5.2.5. A Hilbert-féle peremérték-feladat megoldása

1. Homogén peremfeltételek

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,. \tag{11.78}$$

A $\log G(x)$ függvény értéke a Γ_l görbe egyszeri bejárása alkalmával a $2\pi\,\mathrm{i}\lambda_l$ értékkel változik meg, ahol λ_l egész szám. Az egész Γ görberendszer egyszeri bejárása esetén $\log G(x)$ értékváltozása

$$\sum_{l=0}^{n} 2\pi\,\mathrm{i}\,\lambda_l = 2\pi\,\mathrm{i}\,\kappa\,. \tag{11.79a}$$

A $\kappa = \sum_{l=0}^{n} \lambda_l$ számot a HILBERT-*féle feladat indexé*nek nevezzük. Képezzük a

$$G_0(x) = (x - a_0)^{-\kappa} \Pi(x) G(x) \tag{11.79b}$$

függvényt, ahol

$$\Pi(x) = (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \cdots (x - a_n)^{\lambda_n} \tag{11.79c}$$

továbbá $a_0 \in S^+$, és $a_l \ \ (l = 1, \ldots, n)$ tetszőlegesen rögzített pont Γ_l belsejében. Ha $\Gamma = \Gamma_0$ egyszerű zárt görbe $(n = 0)$, akkor definíció szerint $\Pi(x) = 1$. Az

$$I(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{\log G_0(y)}{y - z} \, dy \tag{11.79d}$$

jelöléssel a homogén HILBERT-feladat következő speciális, alapmegoldásnak is nevezett, megoldását kapjuk:

$$X(z) = \begin{cases} \Pi^{-1}(z) \exp I(z) & \text{ha} \quad z \in S^+ , \\ (z - a_0)^{-\kappa} \exp I(z) & \text{ha} \quad z \in S^- . \end{cases} \tag{11.79e}$$

A homogén HILBERT-feladat legáltalánosabb, a végtelenben el nem tűnő megoldása $\kappa > 0$ esetén

$$\Phi_h(z) = X(z) P_{\kappa - 1}(z) , \qquad z \in \mathbb{C} \tag{11.80}$$

ahol $P_{\kappa-1}(z)$ tetszőleges, legfeljebb $(\kappa - 1)$-edfokú polinom. Ha $\kappa \leq 0$, akkor csak a $\Phi_h(z) = 0$ triviális megoldás létezik. Ha $\kappa > 0$, akkor a homogén HILBERT-feladatnak κ számú lineárisan független, a végtelenben eltűnő megoldása van.

2. Inhomogén peremfeltételek

Az inhomogén HILBERT-feladat megoldása a következő:

$$\Phi(z) = X(z) R(z) + \Phi_h(z) \tag{11.81}$$

$$\text{ahol} \quad R(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{g(y) dy}{X^+(y)(y - z)} . \tag{11.82}$$

Ha $\kappa < 0$, akkor a megoldás létezéséhez ezenfelül teljesülniük kell az

$$\int_{\Gamma} \frac{y^k g(y) dy}{X^+(y)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, -\kappa - 1) \tag{11.83}$$

kikötéseknek is.

11.5.2.6. A karakterisztikus integrálegyenlet megoldása

1. Homogén karakterisztikus integrálegyenlet

Ha a hozzárendelt homogén HILBERT-feladat megoldása $\Phi_h(z)$, akkor a (11.77a) összefüggésből következik, hogy a homogén integrálegyenlet megoldása a

$$\varphi_h(x) = \Phi_h^+(x) - \Phi_h^-(x) , \quad x \in \Gamma \tag{11.84a}$$

alakban állítható elő. Ha $\kappa \leq 0$, akkor csak a $\varphi_h(x) = 0$ triviális megoldás létezik. Ha $\kappa > 0$, akkor az általános megoldás

$$\varphi_h(x) = [X^+(x) - X^-(x)] P_{\kappa - 1}(x) \tag{11.84b}$$

ahol $P_{\kappa-1}$ legfeljebb $\kappa - 1$-edfokú polinom.

2. Inhomogén karakterisztikus integrálegyenlet

Ha az inhomogén HILBERT-feladat általános megoldása $\Phi(z)$, akkor az inhomogén integrálegyenlet megoldását (11.77a) alapján lehet meghatározni:

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \tag{11.85a}$$

$$= X^+(x) R^+(x) - X^-(x) R^-(x) + \Phi_h^+(x) - \Phi_h^-(x) , \quad x \in \Gamma . \tag{11.85b}$$

A (11.76c) PLEMELJ–SZOHOCKIJ-képletek $R(z)$-re való alkalmazásával kapjuk:

$$R^+(x) = \frac{1}{2} \frac{g(x)}{X^+(x)} + \left(\mathcal{H} \frac{g}{X^+} \right)(x) , \quad R^-(x) = -\frac{1}{2} \frac{g(x)}{X^+(x)} + \left(\mathcal{H} \frac{g}{X^+} \right)(x) . \tag{11.85c}$$

Végül a (11.85c) kifejezéseket a (11.85a) összefüggésbe behelyettesítve és figyelembe véve a (11.76b) és a $g(x) = f(x)/(a(x) + b(x))$ összefüggést, a megoldásra adódik:

$$\varphi(x) = \frac{X^+(x) + X^-(x)}{2(a(x) + b(x))X^+(x)} f(x) + (X^+(x) - X^-(x)) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(y)}{(a(y) + b(y))X^+(y)(y - x)} dy + \varphi_h(x), \quad x \in \Gamma\,. \tag{11.86}$$

(11.83) szerint $\kappa < 0$ esetén a megoldás létezéséhez pótlólag teljesülniük kell a következő feltételeknek:

$$\int_\Gamma \frac{y^k f(y)}{(a(y) + b(y))X^+(y)} dy = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, -\kappa - 1)\,. \tag{11.87}$$

■ Adva van az $a\,\varphi(x) + \dfrac{b}{\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = f(x)$ karakterisztikus integrálegyenlet, ahol a és b konstans együttható. Legyen Γ egyszerű zárt görbe, tehát $\Gamma = \Gamma_0$ $(n = 0)$. A (11.77b) összefüggésből következik, hogy $G = \dfrac{a - b}{a + b}$ és $g(x) = \dfrac{f(x)}{a + b}$. Mivel G konstans, azért $\kappa = 0$. Ennélfogva $\Pi(x) = 1$ és

$$G_0 = G = \frac{a - b}{a + b}\,.\; I(z) = \log \frac{a - b}{a + b} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{y - z} dy = \begin{cases} \log \dfrac{a - b}{a + b}\,, & z \in S^+\,, \\ 0\,, & z \in S^-\,. \end{cases}$$

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{a - b}{a + b}\,, & z \in S^+\,, \\ 1\,, & z \in S^-\,, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad X^+ = \frac{a - b}{a + b}\,,\; X^- = 1\,.$$

Mivel $\kappa = 0$, a HILBERT-féle homogén peremérték-feladat egyetlen, a végtelenben eltűnő megoldása $\Phi_h(z) = 0$. A megoldás (11.86) előállítása alapján következik, hogy

$$\varphi(x) = \frac{X^+ + X^-}{2(a + b)X^+} f(x) + \frac{X^+ - X^-}{2(a + b)X^+} \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(y)}{y - x} dy = \frac{a}{a^2 - b^2} f(x) - \frac{b}{a^2 - b^2} \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(y)}{y - x} dy\,.$$

12. Funkcionálanalízis

1. A funkcionálanalízis akkor keletkezett, amikor a matematikusok rájöttek, hogy a különböző tudományterületeken, pl. természet- és műszaki tudományokban, közgazdaságtanban felmerülő számos problémának közös szerkezete van. Egységes fogalomvilágot fejlesztettek ki és általános érvényű elveket fedeztek fel, amelyek összekötötték a matematikai analízist, lineáris algebrát, geometriát, valamint a matematika egyéb ágait.

2. Végtelen dimenziójú terek Sok feladat, amelynek matematikai megfogalmazása végtelen sok tagú egyenlet- vagy egyenlőtlenségrendszerre, differenciál- vagy integrálegyenletre, approximációs, variációs vagy optimalizálási stb. problémára vezet, szétfeszíti a véges dimenziójú tér szűk kereteit, és természetes környezete valamilyen végtelen dimenziós tér, amelyben a feladatot rendszerint operátorok közti összefüggések segítségével lehet megfogalmazni, tanulmányozni és megoldani.

3. Lineáris és nemlineáris operátorok Míg a funkcionálanalízis kezdeti időszakában — nagyjából a 20. század első felében — a túlnyomórészt lineáris vagy linearizált problémák a lineáris operátorok elméletének fejlődését eredményezték, addig az utóbbi évtizedekben — főként a gyakorlati alkalmazások követelményei miatt — a funkcionálanalízis pillanatnyi állapotát egyre inkább a nemlineáris jelenségek és ezeknek a jól kidolgozott lineáris módszerekkel való kezelhetősége határozzák meg, ami a nemlineáris operátorok elméletének kiépítésére vezetett. Az alkalmazások szempontjából egyre fontosabbak a differenciálegyenletek, a numerikus módszerek, az optimalizálás stb., ami a mérnökök és más alkalmazók számára nélkülözhetetlenné teszi a funkcionálanalízis gondolkodásmódjának és módszereinek ismeretét.

4. Alapstruktúrák Ebben a fejezetben csak az alapstruktúrákat és csak vázlatosan tudjuk bemutatni: a leggyakrabban használt tértípusokat és ezek operátorainak néhány osztályát. Az absztrakt fogalomvilágot olyan példákkal fogjuk megvilágítani, amelyeket más fejezetekben is (részben önállóan) megtárgyaltunk, de amelyeknek a megoldhatóságát vagy megoldásuk egyértelműségét ott csak kijelentettük vagy egyedi esetekben speciális módszerekkel igazoltuk. Látni fogjuk, hogy ilyen és más kérdésfeltevések esetén a funkcionálanalízis, absztrakt nézőpontjánál fogva, egész sor általános összefüggést mutat ki matematikai tételek formájában, amelyek konkrét feladatok megoldásában segítik az alkalmazókat.

12.1. Vektorterek

12.1.1. A vektortér fogalma

A nem üres V halmazt *vektortér*nek vagy *lineáris tér*nek nevezzük a $\mathbb{K}$ — mindig kommutatív — test felett, ha értelmezve van két művelet — elemei összeadása és elemei szorzása $\mathbb{K}$-beli számokkal (skalárokkal) — a következőképpen:

1. Bármely két $x, y \in \mathrm{V}$ elemre értelmezett a $z = x + y \in \mathrm{V}$ elem: x és y *összege*,

2. bármely $x \in \mathrm{V}$ elemre és bármely $\alpha \in \mathbb{K}$ skalárra értelmezett egy $\alpha x \in \mathrm{V}$ elem: az x elem és az α skalár *szorzata* (vagy helyesebben: az x elem α-szorosa), úgy, hogy a következő *vektortér-axiómák* teljesülnek tetszőleges $x, y, z \in \mathrm{V}$ elemekre és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ skalárokra:

(V1)	$x + (y + z) = (x + y) + z\,.$	(12.1)
(V2)	$x + y = y + x\,.$	(12.2)
(V3)	Az összeadásnak van egységeleme, tehát van olyan $\mathbf{0} \in \mathrm{V}$ elem, a nullelem, vagy nullvektor, amelyre $x + \mathbf{0} = x$.	(12.3)
(V4)	Minden $v \in \mathrm{V}$-hez létezik egy $-v$-vel jelölt eleme V-nek, hogy $v + (-v) = \mathbf{0}$.	(12.4)
(V5)	$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x\,.$	(12.5)
(V6)	$1 \cdot x = x.$	(12.6)
(V7)	$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y\,.$	(12.7)
(V8)	$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\,.$	(12.8)

(V1)–(V4) együtt kifejezhető úgy is, hogy V az összeadásra kommutatív csoport. Megjegyzendő továbbá, hogy sokszor nem különböztetik meg a test és a tér nullelemét, mert általában a szövegösszefüggés alapján könnyű felismerni, hogy melyikről van szó.
A két legfontosabb esetben a V teret valós, ill. komplex vektortérnek nevezzük attól függően, hogy $\mathbb{K}$ a valós számok $\mathbb{R}$, ill. a komplex számok $\mathbb{C}$ teste. $\mathbb{K}$ véges test is lehet; a kombinatorikában újabban egyre fontosabbak az ilyen, véges dimenziós (ld. 12.1.3.) vektorterek. Minden test vektortér saját maga felett a testbeli összeadással és szorzással mint vektorműveletekkel, és a test 0-jával mint a vektortér nullvektorával. V elemeit pontoknak vagy, a lineáris algebra szóhasználatával *vektorok*nak hívjuk, de a funkcionálanalízisben az $\vec{x}$ vagy $\underline{x}$ jelöléstől eltekinthetünk anélkül, hogy ez az érthetőség vagy az áttekinthetőség kárára lenne.

A V vektortérben **(V4)** értelmében minden $x \in \mathrm{V}$ elemhez található egyértelműen meghatározott $-x \in \mathrm{V}$ ellentett elemet egyúttal $-x = (-1)x$ képlet is megadja. Ezáltal a V téren bármely két $x, y \in \mathrm{V}$ vektor $x - y$ különbsége is értelmezhető, nevezetesen $x - y = x + (-y)$. Ebből következik az $x + y = z$ egyenlet egyértelmű megoldhatósága bármely y és z esetén. A megoldás: $x = z - y$. A **(V1)–(V8)** axiómákból adódnak a következő tulajdonságok:

- a $\mathbf{0}$ nullvektor egyértelműen meg van határozva,
- $0 \cdot x = \mathbf{0}$ minden $x \in \mathrm{V}$-re,
- ha $\alpha x = \beta x$ és $x \neq \mathbf{0}$, akkor $\alpha = \beta$,
- ha $\alpha x = \alpha y$ és $\alpha \neq 0$, akkor $x = y$,
- $-(\alpha x) = \alpha \cdot (-x)$.

12.1.2. Lineáris és affin alterek

1. Lineáris altér

A V vektortér nem üres V_0 részhalmazát *lineáris altér*nek, vagy *lineáris sokaság*nak nevezzük, ha bármely két $x, y \in \mathrm{V}_0$ elemre és bármely két $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ skalárra az $\alpha x + \beta y$ lineáris kombináció is V_0-hoz tartozik, tehát V_0 zárt a műveletekre. V_0 maga is vektortér, tehát kielégíti a **(V1)–(V8)** axiómákat. A V_0 altér állhat egyedül a nullvektorból is; ez az egyik triviális altér, a másik az egész V tér. Ez természetesen azt is jelenti, hogy a $\mathbf{0}$ önmagában is vektortér bármely test felett.

2. Affin altér

A V vektortér bármely

$$\{x_0 + y \mid y \in \mathrm{V}_0\} = x_0 \oplus \mathrm{V}_0 \tag{12.9}$$

alakú részhalmazát, ahol $x_0 \in \mathrm{V}$ rögzített elem, V_0 pedig lineáris altér, *eltolt altér*nek, *affin altér*nek vagy *affin sokaság*nak nevezzük, amely ($x_0 \neq \mathbf{0}$ esetén) egy — az origót általában nem tartalmazó — $\mathbb{R}^2$- vagy $\mathbb{R}^3$-beli egyenes vagy $\mathbb{R}^3$-beli sík általánosításának tekinthető.

3. Lineáris burok

V tetszőleges számú lineáris alterének metszete ismét lineáris altér. Ennélfogva minden nem üres $E \subset \mathrm{V}$ részhalmazhoz létezik egy őt tartalmazó $lin(E)$ vagy $[E]$ legszűkebb lineáris altér V-ben, nevezetesen az E halmazt tartalmazó összes lineáris alterek metszete. A $lin(E)$ halmazt E *lineáris burká*nak hívjuk. Ez megegyezik az összes olyan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \tag{12.10}$$

(véges) lineáris kombinációk halmazával, amelyek tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ elemekből és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ skalárokból képezhetők. Ha $lin(E) = \mathrm{V}$, akkor E-t V generátorrendszerének hívjuk. Ezt úgy is mondjuk, hogy E generálja V-t.

4. Példák sorozatokból álló vektorterekre

■ **A: $\mathbb{K}^n$ vektortér:** Legyen n valamely rögzített természetes szám, és legyen V az összes n-elemű $\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$ számsorozatok halmaza. Legyenek a műveletek komponensenként értelmezve, azaz ha $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ és $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ a V tér két tetszőleges eleme és $\alpha \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalár, akkor legyen

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n), \tag{12.11a}$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n). \tag{12.11b}$$

Természetesen $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ és minden későbbi példában is ennek természetes megfelelője a nullvektor.
Ily módon kapjuk a $\mathbb{K}^n$ vektorteret, tehát speciálisan $n = 1$ esetén a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lineáris teret. Ez a példa kétféle szempontból is általánosítható (ld. a **B**, **C** példákat):

■ **B: Az összes számsorozatok *s* vektortere:** Az $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\xi_n \in \mathbb{K}$ végtelen sorozatok a (12.11a), (12.11b) szerint tagonként értelmezett műveletekkel összes számsorozatok $\mathbf{s}$ vektorterét alkotják.

■ **C: Az összes véges számsorozatok φ (vagy $\mathbf{c_{00}}$) vektortere:** Legyen V az fenti $\mathbf{s}$ tér azon elemeinek halmaza, amelyeknek csak véges sok tagja különbözik nullától, természetesen a nullától különböző tagok száma általában elemenként más és más lehet. Az így keletkező — megint a tagonként definiált műveletekkel ellátott — vektorteret φ-vel vagy $\mathbf{c_{00}}$-lal jelöljük és az összes *véges* számsorozatok terének nevezzük.

■ **D: Az összes korlátos sorozatok m vektortere:** Az $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat pontosan akkor tartozik $\mathbf{m}$-hez, ha $\exists\, C_x > 0$, amelyre $|\xi_n| \le C_x$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$. Erre a vektortérre gyakran használják az $\mathbf{l}^\infty$ jelölést is.

■ **E: Az összes konvergens sorozatok c vektortere:** $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{c}$ pontosan akkor, ha a sorozat konvergens, azaz létezik a $\xi_0 \in \mathbb{K}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index úgy, hogy minden $n > n_0$-ra teljesül $|\xi_n - \xi_0| < \varepsilon$ (ld. 410. old.).

■ **F: Az összes nullsorozatok $\mathbf{c_0}$vektortere:** Az összes nullsorozatok $\mathbf{c_0}$ vektortere a $\mathbf{c}$ térnek az az altere, amely az összes nullához tartó ($\xi_0 = 0$) sorozatokból áll.

■ **G: Az $\mathbf{l}^p$ vektortér:** $\mathbf{l}^p$-vel ($1 \le p < \infty$) jelöljük azon $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok vektorterét, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ sor konvergens.
Az triviális, hogy ez a halmaz a számmal való szorzásra tényleg zárt; az hogy két $\mathbf{l}^p$-beli sorozat összege ismét $\mathbf{l}^p$-beli sorozat, vagyis a koordinátánkénti összegek abszolút értékének p-edik hatványaiból álló sor abszolút konvergens, a MINKOWSKI-egyenlőtlenségből (ld. 32. old.) következik.

Megjegyzés: Az **A**–**G** példákban bevezetett, sorozatokból álló vektorterekre közös $\mathbb{K}$ esetén érvényesek a következő tartalmazási relációk:

$$\varphi \subset \mathbf{l}^p \subset \mathbf{l}^q \subset \mathbf{c_0} \subset \mathbf{c} \subset \mathbf{m} \subset \mathbf{s}, \quad \text{ahol} \quad 1 \le p < q < \infty. \tag{12.12}$$

5. Példák függvényekből álló vektorterekre

■ **A: Az $\mathcal{F}(T)$vektortér:** Legyen V a T halmazon értelmezett összes valós vagy komplex értékű korlátos függvények halmaza, ahol a függvényekre a műveleteket pontonként értelmezzük, vagyis ha $x = x(t)$ és $y = y(t)$ a V halmaz két tetszőleges eleme és $\alpha \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalár, akkor az $x + y$ és $\alpha \cdot x$ elemet a következőképpen definiáljuk:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t) \quad \forall\, t \in T, \tag{12.13a}$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha \cdot x(t) \quad \forall\, t \in T. \tag{12.13b}$$

Az így kapott vektorteret $\mathcal{F}(T)$-vel jelöljük.
Megfelelő T esetén e vektortér alterei többek között az alábbi példákban szereplő terek.

■ **B: A $\mathcal{B}(T)$ vagy $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ vektortér:** A $\mathcal{B}(T)$ tér az összes, a T halmazon korlátos függvényekből áll. Ezt a vektorteret gyakran $\mathcal{M}(T)$-vel is jelölik. A $T = \mathbb{N}$ esetben az előző szakasz **D** példájában szereplő $\mathcal{M}(\mathbb{N}) = \mathbf{m}$ teret kapjuk.

■ **C: A $\mathcal{C}([a, b])$ vektortér:** $\mathcal{C}([a, b])$ az összes, az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények (ld. 58. old.) halmaza, ahol T szerepét most $[a, b]$ játssza.

■ **D: A $\mathcal{C}^k([a, b])$ vektortér:** Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az összes, az $[a, b]$ intervallumon k-szor folytonosan differenciálható függvények (ld. 384–389. old.) $\mathcal{C}^k([a, b])$ halmaza vektortér. Ha a vagy b véges, akkor az $[a, b]$ intervallum a és b végpontjában a deriváltak jobb-, ill. baloldali deriváltnak értendők.

Megjegyzés: A jelen szakasz **A**–**D** példáiban felsorolt vektorterekre a $T = [a, b]$, a, b véges esetben a következő tartalmazások érvényesek:

$$\mathcal{C}^l([a, b]) \subset \mathcal{C}^k([a, b]) \subset \mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b]) \subset \mathcal{F}([a, b]), \quad \text{ahol} \quad l > k; \tag{12.14}$$

Ha a vagy b végtelen, vagy legalább egyik végpontja nem tartozik a T intervallumhoz, akkor ugyanezek igazak $\mathcal{B}([a,b])$ elhagyásával.

■ **E: A $\mathcal{C}(T)$ vektortér:** Tetszőlegesen rögzített $t_0 \in T$ esetén az $\{x \in \mathcal{C}(T) \mid x(t_0) = 0\}$ halmaz lineáris altér az $\mathcal{F}(T)$ térben és $T = [a,b]$ vagy (a,b) vagy $[a,b)$ vagy $(a,b]$ esetén bármelyik fenti vektortérben, ha annak definícióját kiegészítjük a $x(t_0) = 0$ feltétellel.

12.1.3. Lineárisan független elemek

1. Lineáris függetlenség

A V vektortér valamely véges vagy végtelen részhalmazát *lineárisan független*nek mondjuk, ha annak bármely véges $\{x_1, \dots, x_n\}$ részhalmazára

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0} \quad \text{esetén mindig következik, hogy} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \tag{12.15}$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a részhalmaz *lineárisan összefüggő*. Ha $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, és $x_1, \dots, x_n$ a V tér tetszőleges vektorai, akkor a vektortér axiómái szerint $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ triviális módon V nullvektorával egyenlő. Az $x_1, \dots, x_n$ vektorok lineáris függetlensége azt jelenti, hogy a nullvektor $\mathbf{0} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ előállítása csak a triviális $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ választással lehetséges. Ezt a fontos fogalmat a lineáris algebrából jól ismerjük (ld. 322. old.), és már felhasználtuk a homogén differenciálegyenletek megoldásaiból álló alaprendszerek definiálására (ld. 509. old.).

■ Ha e_k-val jelöljük azt a sorozatot, amelynek tagjai a k-adik kivételével mind 0-val egyenlők, k-adik tagja pedig 1, akkor e_k benne van a φ térben, tehát minden fent definiált sorozattérben. Az $\{e_1, e_2, \dots\}$ halmaz φ-ben, tehát mindezekben a terekben lineárisan független. A $\mathcal{C}([0,\pi])$ térben pl. az

$$\{1,\ \sin nt\,,\ \cos nt\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

függvényrendszer lineárisan független, viszont az $1, \cos 2t, \cos^2 t$ függvények lineárisan összefüggnek (ld. 2.92, 81. old.).

2. Vektortér bázisa és dimenziója

V-nek egy lineárisan független B részhalmazát, amely az egész V teret generálja, vagyis amelyre $lin(B) = \mathrm{V}$, a V vektortér *(algebrai) bázisá*nak vagy ha B végtelen HAMEL-*bázisá*nak nevezzük (ld. 322. old.). Tehát $B = \{x_\xi \mid \xi \in I\}$ pontosan akkor bázisa V-nek, ha minden $x \in \mathrm{V}$ vektor előállítható $x = \sum_{\xi \in I} \alpha_\xi x_\xi$ alakban, ahol az α_ξ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva és közülük csak véges (x-től függő) számú különbözik nullától. Minden, a nullvektornál bővebb V vektortérnek van legalább egy algebrai bázisa, és V bármely lineárisan független E részhalmaza kibővíthető V-nek algebrai bázisává.

A V vektorteret *m-dimenziós*nak mondjuk, ha van m számú vektorból álló bázisa. Ez azt jelenti, hogy V -ben található m számú lineárisan független vektor, és bármely $m+1$ vektorból álló rendszer lineárisan összefügg. Minden test egydimenziós vektortér önmaga felett.

A vektorteret *végtelen dimenziójú*nak vagy *végtelen dimenziós*nak mondjuk, ha nincs véges bázisa, azaz ha minden m természetes számra található V-nek m számú lineárisan független vektora.

A $\mathbb{K}^n$ tér kivételével, amelynek dimenziója n-nel egyenlő, a példákban szereplő összes többi vektorterek végtelen dimenziósak. A $lin(\{1, t, t^2\}) \subset \mathcal{C}([a,b])$ altér háromdimenziós. Hasonlóan a véges dimenziós esethez, végtelen dimenziós V vektortérben is bármely két bázisnak ugyanaz a számossága (kardinalitása); ezt a számosságot dim(V)-vel jelöljük. A dimenzió tehát a vektorteret jellemzi és nem függ az algebrai bázis konkrét megválasztásától, azaz invariáns az egyik bázisról a másikra való áttéréssel szemben. A $\mathbb{K}$ feletti $\mathbb{K}^n$ természetes bázisa az $\{e_i\}_{i=1}^n$ halmaz, ahol $e_i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$. Tetszőleges, akár véges $\mathcal{F}$ testre is $\mathcal{F}^n$, tehát az $\mathcal{F}$-beli n hosszúságú sorozatok halmaza a műveletek koordinátánkénti értelmezésével vektortér, amelynek a fenti $\{e_i\}_{i=1}^n$ halmaz bázisa, amit ekkor is természetes bázisnak hívunk; 1 itt $\mathcal{F}$ egyértelmű multiplikatív, 0 pedig az additív egységeleme. Ha n végtelen számosság, akkor is vektorteret kapunk ezzel a konstrukcióval, sőt kettőt aszerint, hogy megköveteljük-e, hogy a tekintett sorozatok csak véges sok helyen tartalmazzanak 0-tól különböző elemet, vagy az összeset tekintjük. Az előbbi esetben az egyetlen helyen 1-et, a többi helyen 0-t tartalmazó sorozatok bázist

alkotnak, az utóbbi esetben csak egy lineárisan független halmazt.

12.1.4. Konvex részhalmazok és konvex burok

12.1.4.1. Konvex halmazok

Az $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ feletti V vektortér C részhalmazát *konvex*nek mondjuk, ha tetszőleges $x, y \in C$ vektorpárra az összes $\lambda x + (1-\lambda)y,\ 0 \le \lambda \le 1$ alakú vektorok is C-hez tartoznak. Más szóval a C halmaz konvex, ha bármely két x, y elemével együtt x és y

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \ 0 \le \lambda \le 1\}\,, \tag{12.16}$$

összekötő szakaszát teljesen tartalmazza ($\mathbb{R}^2$-beli konvex halmazra példa a **12.5. ábrán** látható A és B jelű halmaz).

Tetszőleges számú konvex halmaz metszete ismét konvex halmaz (ez lehet az üres halmaz is, de a definíció értelmében az is konvex). Ennélfogva minden $E \subset \mathrm{V}$ részhalmazhoz található egy E-t tartalmazó legszűkebb konvex halmaz, nevezetesen V összes konvex és E-t tartalmazó részhalmazainak a metszete. Ezt az E halmaz *konvex burká*nak hívjuk és $co\,(E)$-vel jelöljük. A $co\,(E)$ konvex burok megegyezik az E elemeiből képzett összes *konvex* lineáris kombinációk halmazával, vagyis $co\,(E)$ a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ alakú elemekből áll, ahol $x_1, \ldots, x_n$ az E halmaz tetszőleges elemei és a $\lambda_i \in [0,1]$ számok kielégítik a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ egyenletet. A lineáris és az affin alterek mindig konvexek.

12.1.4.2. Kúpok

A valós V vektortér nem üres K részhalmazát *(konvex) kúp*nak nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

1. K konvex halmaz.
2. Ha $x \in K$ és $\lambda \ge 0$, akkor $\lambda x \in K$.
3. Ha $x \in K$ és $-x \in K$, akkor $x = \mathbf{0}$.

A kúpok a **3.** feltétel és az alábbi feltétel együttesével is jellemezhetők:

$$x, y \in K \quad \text{és} \quad \lambda, \mu \ge 0 \quad \text{esetén} \quad \lambda x + \mu y \in K. \tag{12.17}$$

A $\mathbf{0}$ minden kúpban benne van.

■ **A:** Az összes nemnegatív komponensű $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vektorok $\mathbb{R}^n_+$ halmaza kúp $\mathbb{R}^n$-ben.

■ **B:** Az összes nemnegatív értékű, az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények C_+ halmaza kúp a $\mathcal{C}([a,b])$ térben.

■ **C:** Az összes nemnegatív tagú $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ számsorozatok halmaza kúp $\mathbf{s}$-ben. Ugyanígy kúpok adódnak a **C**–**G** példák vektortereiben (607. old.), ha csak a nemnegatív sorozatok halmazát tekintjük.

■ **D:** A $C \subset \mathbf{l}^p$ $(1 \le p < \infty)$ halmaz, amely valamely fix $a > 0$-ra az összes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \le a \tag{12.18}$$

tulajdonságú sorozatokból áll — mint egy adott norma (ld. (12.94d)) szerinti gömb — konvex halmaz $\mathbf{l}^p$-ben, de a 2. és 3. axióma nem teljesülése miatt nyilvánvalóan nem kúp.

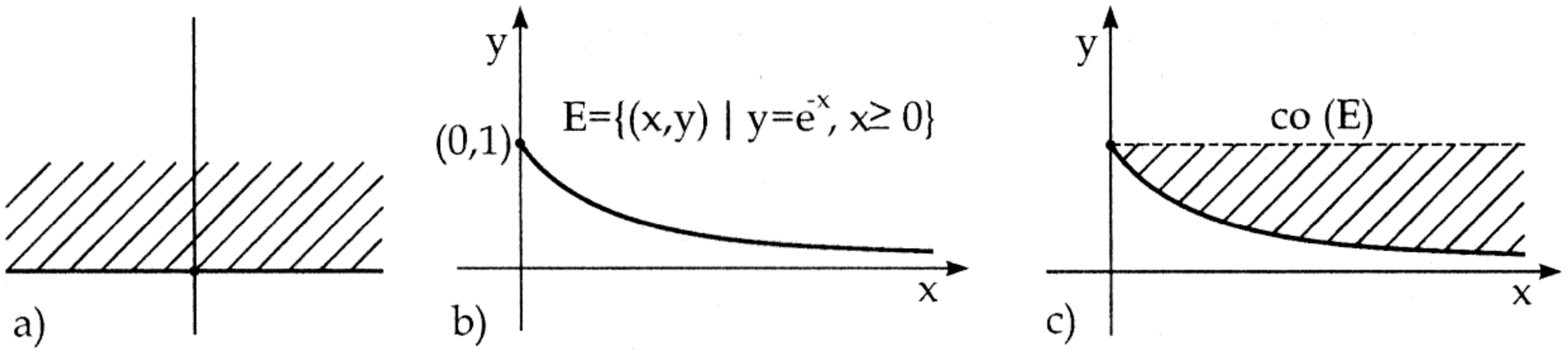
■ **E:** $\mathbb{R}^2$-beli példák, lásd **12.1. ábra**: a) konvex halmaz, de nem kúp, b) nem konvex halmaz, c) az előbbi konvex burka.

12.1.5. Lineáris operátorok és funkcionálok

12.1.5.1. Leképezések

Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathrm{X}$ halmaznak az Y halmazba való $T\colon D \longrightarrow \mathrm{Y}$ leképezése

- *injektív*, ha
$$T(x) = T(y) \Longrightarrow x = y\,, \tag{12.19}$$
- *szürjektív*, ha
$$\forall\, y \in \mathrm{Y} \quad \text{esetén létezik olyan} \quad x \in D, \quad \text{hogy} \quad T(x) = y\,, \tag{12.20}$$



12.1. ábra.

• *bijektív*, ha T egyszerre injektív és szürjektív. A D halmazt a T leképezés, vagy más szóval operátor *értelmezési tartomány*ának nevezzük és D_T-vel vagy $D(T)$-vel jelöljük, az $\mathbb{Y}$ halmaz $\{y \in \mathbb{Y} \mid \exists x \in D_T$ amelyre $T(x) = y\}$ részhalmazát pedig a T operátor *értékkészlet*ének hívjuk és $\mathcal{R}(T)$-vel vagy $Im(T)$-vel jelöljük.

12.1.5.2. Homomorfizmus és endomorfizmus

Legyen $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ két vektortér ugyanazon $\mathbb{K}$ test felett, és legyen D lineáris altere $\mathbb{X}$-nek. Egy $T\colon D \longrightarrow \mathbb{Y}$ leképezést *lineáris leképezés*nek, *lineáris transzformáció*nak, *lineáris operátor*nak, *homogén lineáris leképezés*nek vagy *homomorfizmus*nak nevezünk, ha tetszőleges $x, y \in D$ vektorokra és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ skalárokra fennáll

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)\,. \tag{12.21}$$

Ez a korábban már tárgyalt mátrix általánosítása, mert a tetszőleges $\mathbb{K}$ test feletti (n, m)-es mátrix a $\mathbb{K}^m$ vektortérből a $\mathbb{K}^n$ vektortérbe ható lineáris operátor a mátrixnak $\mathbb{K}^m$ vektoraira való megszokott alkalmazásával.

Lineáris operátorokra, a lineáris függvényekhez hasonlóan, a Tx jelölés terjedt el és a továbbiakban, ha csak lehet, ezt használjuk, általában operátorokra viszont a $T(x)$ jelölés használatos. Az $N(T) = \{x \in \mathbb{X} \mid Tx = \mathbf{0}\} = T^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{Y}})$ halmazt a T operátor *nullterének* vagy *magterének* nevezzük és $\operatorname{Ker} T$-vel vagy $\operatorname{Ker}(T)$-vel jelöljük. Az $\mathbb{X}$ vektortér önmagába való lineáris leképezéseit $\mathbb{X}$ *endomorfizmusai*nak nevezzük. Ha T injektív lineáris leképezés, akkor az $\mathcal{R}(T)$ halmazon az

$$y \longmapsto x\,,\ \text{ahol } Tx = y\,,\ y \in \mathcal{R}(T) \tag{12.22}$$

képlettel definiált $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathbb{X}$ leképezés is lineáris; ezt a leképezést T *inverzének* hívjuk. Ha $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{K}$ vektortér, akkor az $f\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ lineáris leképezéseket *lineáris funkcionálok*nak vagy *lineáris formák*nak nevezzük. Ha $D = \mathbb{Y}$, akkor az $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lineáris operátorok halmazát $\operatorname{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-nal jelöljük. Ez maga is vektortér $\mathbb{K}$ felett a leképezések pontonkénti összeadásával és skalárral való szorzásával, aminek az azonosan 0 leképezés a nullvektora.

12.1.5.3. Izomorf vektorterek

A bijektív $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ lineáris leképezéseket az $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ azonos test feletti vektorterek *izomorfizmusai*nak nevezzük. Azt mondjuk, hogy két tér *izomorf*, ha van izomorfizmusuk. Ez ekvivalens azzal, hogy ugyanannyi a dimenziójuk (ugyanaz a számosságuk).

12.1.6. Valós vektorterek komplexifikálása

Minden valós V vektorteret ki lehet bővíteni $\tilde{\mathrm{V}}$ komplex vektortérré. Ennek elemei heurisztikusan az $x + \mathrm{i}y$ szimbólumok $(x, y \in \mathrm{V})$, amelyeket egyszerre tekintünk vektoroknak és komplex számoknak; ebből összeadásuk és komplex számokkal való szorzásuk definíciója könnyen adódik. Formálisan a $\tilde{\mathrm{V}}$ halmaz az (x, y) párokból áll, ahol $x, y \in \mathrm{V}$. $\tilde{\mathrm{V}}$-ben az összeadást és $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ komplex számmal való szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \tag{12.23a}$$

$$(a + \mathrm{i}b)(x, y) = (ax - by, bx + ay)\,. \tag{12.23b}$$

Ellenőrizhető, hogy a 12.1.1.-beli **(V1)**–**(V8)** axiómák $\tilde{\mathrm{V}}$-re is teljesülnek. Az is látható, hogy speciális esetként $\mathrm{V} = \mathbb{R}$-ből így $\mathrm{V} = \mathbb{C}$-t kapjuk.
Mivel speciálisan fennáll

$$(x, y) = (x, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, y) \text{ és } \mathrm{i}(y, \mathbf{0}) = (0 + \mathrm{i}1)(y, \mathbf{0}) = (0 \cdot y - 1 \cdot \mathbf{0}, 1y + 0 \cdot \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, y) \qquad (12.24)$$

az (x, y) pár helyett $(x, \mathbf{0})$ és x azonosításával $x + \mathrm{i}y$ is írható. Így a $\tilde{\mathrm{V}}$ halmaz komplex vektortér, és V a $\tilde{\mathrm{V}}_0 = \{(x, \mathbf{0}) \mid x \in \mathrm{V}\}$ $\tilde{\mathrm{V}}$-beli lineáris altérrel azonosítható, tehát x mint $(x, \mathbf{0})$ vagy a fenti átírásban $x + \mathrm{i}\mathbf{0}$ fogható fel és $\mathbf{0}_{\tilde{\mathrm{V}}} = (\mathbf{0}_{\mathrm{V}}, \mathbf{0}_{\mathrm{V}})$.
Az ismertetett eljárást a V vektortér *komplexifikálásá*nak nevezzük. Ha egy halmaz lineárisan független V-ben, akkor a fenti megfeleltetéssel neki megfelelő halmaz lineárisan független $\tilde{\mathrm{V}}$-ban. Hasonló állítás érvényes V generátorrendszereire, speciálisan bázisaira, amiből következik, hogy $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\tilde{\mathrm{V}})$.

12.1.7. Rendezett vektorterek

12.1.7.1. Kúpok és részbenrendezés

Ha a valós V vektortérben rögzítve van egy K kúp, akkor bizonyos V-beli vektorpárokra *rendezési relációt* lehet bevezetni úgy, hogy ha $x, y \in \mathrm{V}$ és $x - y \in K$, akkor egyszerűen az $x \geq y$ vagy $y \leq x$ írásmódot alkalmazzuk, és azt mondjuk, hogy x *nagyobb vagy egyenlő* mint y, ill. y kisebb vagy egyenlő mint x. Ilyenkor a V teret, pontosabban szólva a (V, K) párt a K kúppal *rendezett* vagy *részben rendezett vektortér*nek nevezzük. Az x elemet *pozitív*nak mondjuk, ha $x \geq \mathbf{0}$ vagy, ami ugyanaz, $x \in K$. Már az $\mathbb{R}^2_+$ első síknegyeddel mint K kúppal rendezett $\mathbb{R}^2$ vektortér példáján is látható az a rendezett vektorterekben tipikus jelenség, amelyre a „részben" jelző is utal, hogy ti. két tetszőleges vektornak nem feltétlenül kell összehasonlíthatónak lennie. Az $x = (1, -1)$ és $y = (0, 2)$ vektorból képzett különbségek, vagyis az $x - y = (1, -3)$ és az $y - x = (-1, 3)$ vektor egyike sincs benne K-ban, úgyhogy sem $x \geq y$, sem $x \leq y$ nem teljesül. A vektortérben kúp által bevezetett rendezés tehát csak parciális vagy részbenrendezés.
Meg lehet mutatni, hogy a $\geq$ relációnak a következő tulajdonságai vannak:

(O1) $x \geq x \; \forall \, x \in \mathrm{V}$ (reflexivitás). (12.25)

(O2) Ha $x \geq y$ és $y \geq z$, akkor $x \geq z$ (tranzitivitás). (12.26)

(O3) Ha $x \geq y$ és $\alpha \geq 0$, akkor $\alpha x \geq \alpha y$. (12.27)

(O4) Ha $x_1 \geq y_1$ és $x_2 \geq y_2$, akkor $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$. (12.28)

Ezenkívül $\geq$ a nem azonos vektorpárokra megszorítva antiszimmetrikus. Megfordítva, ha egy V vektortéren értelmezve van egy $\geq$ bináris reláció, amelyre teljesülnek az **(O1)**–**(O4)** axiómák, akkor bevezetve a

$$\mathrm{V}_+ = \{x \in \mathrm{V} \mid x \geq \mathbf{0}\} \qquad (12.29)$$

jelölést, meg lehet mutatni, hogy a V_+ halmaz kúp (ami állhat esetleg csak az üres halmazból) . A V-ben most V_+ révén bevezethető $\geq_{\mathrm{V}_+}$ rendezés azonos a kiindulási $\geq$ rendezéssel; ennélfogva a két említett módszer, amellyel vektortérben rendezést lehet bevezetni, ekvivalens.
A $K \subset \mathrm{X}$ kúpot *generáló*nak mondjuk, ha minden $x \in \mathrm{X}$ elem előállítható $x = u - v$ alakban, ahol $u, v \in K$. Ezt a körülményt az $\mathrm{X} = K - K$ írásmóddal is kifejezhetjük.

■ **A:** Az $\mathbf{s}$ térben (ld. 608. old.) rendezést például a

$$K = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \xi_n \geq 0 \quad \forall \, n\} \qquad (12.30)$$

kúppal (ld. 12.1.4. szakasz, **C** példa) vezethetünk be. A többi sorozattérben (ld. 12.12 szakasz) a természetes, koordinátánkénti rendezést tekintjük, tehát $x \geq y$, ha ez fennáll minden koordinátában. Ez annak a kúpnak a segítségével adódik, amely K (ld. (12.30)) és az illető tér metszete (kúp és altér metszete kúp). Így mindezen rendezett vektorterekben a nemnegatív tagú sorozatok lesznek a pozitív elemek. Magától értetődik, hogy ezekben a terekben más kúpokat, és ezáltal a természetes részbenrendezéstől eltérő rendezéseket is lehet tekinteni (ld. [12.20], [12.22]).

■ **B:** Az $\mathcal{F}(T)$, $\mathcal{B}(T)$, $\mathcal{C}(T)$, $\mathcal{C}^{(k)}([a,b])$ valós függvényterekben (ld. 608. old.) a fentiekhez hasonlóan a természetes rendezést úgy definiáljuk, hogy két függvény, x és y között akkor áll fenn $x \geq y$, ha $x(t) \geq y(t)\ \forall\, t \in T$, ill. $\forall\, t \in [a,b]$; e rendezés szerint $x \geq \mathbf{0}$ pontosan azt jelenti, hogy x a T halmazon mindenütt nemnegatív. A megfelelő kúpok jelölése szokásos módon ismét $\mathcal{F}_+(T)$, $\mathcal{B}_+(T)$ stb. Tehát például fennáll $C_+ = C_+(T) = \mathcal{F}_+(T) \cap \mathcal{C}(T)$. Általában is egy V vektortér pozitív elemeinek halmazát szokás V_+-szal jelölni.

12.1.7.2. Rendezésre nézve korlátos halmazok

Legyen E a V rendezett vektortér tetszőleges, nem üres halmaza. Minden $z \in \mathrm{V}$ elemet, amelyre $x \leq z$, $\forall\, x \in E$, az E halmaz *felső korlátjá*nak nevezünk. Az E halmaz *alsó korlátja* minden olyan $u \in \mathrm{V}$ elem, amelyre $u \leq x$, $\forall\, x \in E$. Két $x, y \in \mathrm{V}$ elemre, ahol $x \leq y$, az

$$[x,y] = \{v \in \mathrm{V} \mid x \leq v \leq y\} \tag{12.31}$$

halmazt *rendezési intervallum*nak vagy (0)-*intervallum*nak nevezzük.
Nyilvánvaló, hogy x, ill. y az $[x,y]$ halmaznak alsó, ill. felső korlátja, és bele is tartoznak a halmazba. Az $E \subset \mathrm{V}$ halmazt a *rendezésre nézve korlátos*nak vagy egyszerűen (0)- *korlátos*nak mondjuk, ha E egy rendezési intervallum részhalmaza, azaz ha létezik két $u, z \in \mathrm{V}$ elem úgy, hogy $u \leq x \leq z$, $\forall\, x \in E$ vagy, ami ezzel ekvivalens, $E \subset [u,z]$. Egy halmaz *felülről*, ill. *alulról korlátos*, ha van felső, ill. alsó korlátja V -ben.

12.1.7.3. Pozitív operátorok

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{X}_+)$ rendezett vektortérnek az $\mathbb{Y} = (\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_+)$ rendezett vektortérbe ható $T\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ lineáris operátora (ld. [12.2], [12.20]) *pozitív*, ha

$$T(\mathrm{X}_+) \subset \mathrm{Y}_+, \quad \text{vagyis} \quad x \geq \mathbf{0}_{\mathrm{X}} \quad \text{esetén} \quad Tx \geq \mathbf{0}_{\mathrm{Y}}. \tag{12.32}$$

12.1.7.4. Vektorhálók

1. Vektorháló

A valós számok $\mathbb{R}^1$ vektorterében a nemnegatív számok kúpjával definiált rendezés szerinti (0)-korlátosság és a (hagyományos értelemben vett) korlátosság fogalma egybeesik, hiszen a kúppal definiált rendezés egybeesik a megszokottal. Ismeretes, hogy valós számok bármely felülről korlátos halmazának létezik felső határa, azaz legkisebb felső korlátja. Általánosabb vektorterekben a felső és alsó határ létezését általában még véges részhalmazokra sem lehet bebizonyítani, hanem axióma formájában kell megkövetelni. A rendezett V vektorteret *vektorhálónak* vagy *lineáris hálónak* nevezzük (az angol nyelvű irodalomban a RIESZ-*tér*, az orosz nyelvűben a *K-lineál* elnevezés is használatos), ha bármely két $x, y \in \mathrm{V}$ elemhez található egy $z \in \mathrm{V}$ elem, amelynek a következő tulajdonságai vannak:

1. $x \leq z$ és $y \leq z$,

2. ha egy $u \in \mathrm{V}$ elemre teljesül $x \leq u$ és $y \leq u$, akkor $z \leq u$.

Ezt a z elemet, amely **2.** miatt egyértelműen meg van határozva, az $x \vee y$ jellel jelöljük, és az x, y elemek, pontosabban: az x-ből és y-ból álló halmaz *legkisebb felső korlátjá*nak nevezzük. Vektorhálóban bármely két x, y elem *legnagyobb alsó korlátja* is létezik, ezt az $x \wedge y$ jellel jelöljük, és értéke $-((-x) \vee (-y))$. Ebből már indukcióval következik, hogy vektorhálóban bármely véges halmaznak is van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja (a kételemű halmazra kimondott definíció értelemszerű módosításával). Végtelen halmaz esetén a valós számok esetéhez hasonlóan egyik korlát létezéséből általában nem következik a másik korlát létezése és egyik se létezik minden esetben.
Ha $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ vektorhálók és $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ pozitív operátor, akkor

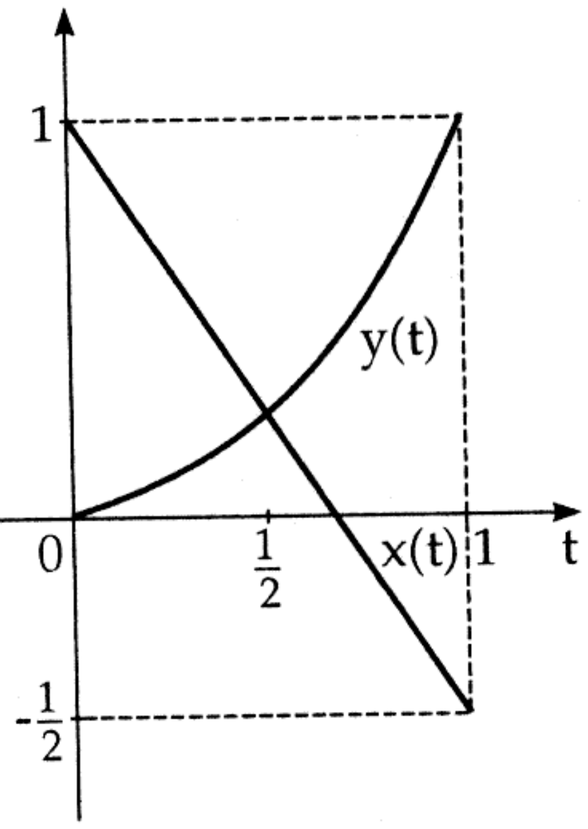
$$T(x_1 \vee_{\mathbb{X}} x_2) = Tx_1 \vee_{\mathbb{Y}} Tx_2 \quad \text{és} \quad T(x_1 \wedge_{\mathbb{X}} x_2) = Tx_1 \wedge_{\mathbb{Y}} Tx_2\,. \tag{12.33}$$

Vektorhálók pozitív operátorainak alkalmazásairól lásd egyebek között: [12.3].

■ **A:** Az $\mathcal{F}(T)$ valós vektortér a nemnegatív függvények kúpjával definiált rendezéssel vektorháló, ahol (ld. 608. old.) két függvény, x és y legkisebb felső korlátját pontonként, az

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\} \tag{12.34}$$

képlettel számíthatjuk ki.



12.2. ábra.

Ha $T=[0,1]$, $x(t)=1-\frac{3}{2}t$ és $y(t)=t^2$ **(12.2. ábra)**, akkor

$$(x\vee y)(t)=\begin{cases}1-\frac{3}{2}t, & \text{ha}\quad 0\le t\le\frac{1}{2},\\ t^2, & \text{ha}\quad \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}\tag{12.35}$$

■ **B:** A $\mathcal{C}([a,b])$ és a $\mathcal{B}([a,b])$ tér (ld. 608. old.) szintén vektorháló, viszont a $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ a fenti rendezéssel nem vektorháló, mert két, egyszer folytonosan deriválható függvény minimuma és maximuma általában olyan függvény, amely nem kell, hogy $[a,b]$ minden pontjában akár csak differenciálható legyen, amit jól mutat a fenti két függvény, melynek se minimuma, se maximuma, tehát egyik korlátja se differenciálható $\frac{1}{2}$-ben (a féloldali deriváltak nem egyenlőek).

Az $\mathbb{X}$ vektorhálónak az $\mathbb{Y}$ vektorhálóba való $T\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ lineáris operátorát *vektorháló-homomorfizmus*nak nevezzük, ha $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ esetén fennáll (12.33).

2. Pozitív és negatív rész, elemek abszolút értéke (modulusa)

A $\mathbb{V}$ vektorháló tetszőleges x elemére az

$$x_+=x\vee\mathbf{0}\,,\quad x_-=(-x)\vee\mathbf{0}\quad\text{és}\quad |x|=x_++x_-\tag{12.36}$$

elemet rendre x *pozitív részé*nek, *negatív részé*nek és *abszolút értéké*nek hívjuk. Bármely $x\in\mathbb{V}$ esetén ezen $x_+,x_-,|x|$ elemek pozitívak, és fennállnak a következő összefüggések:

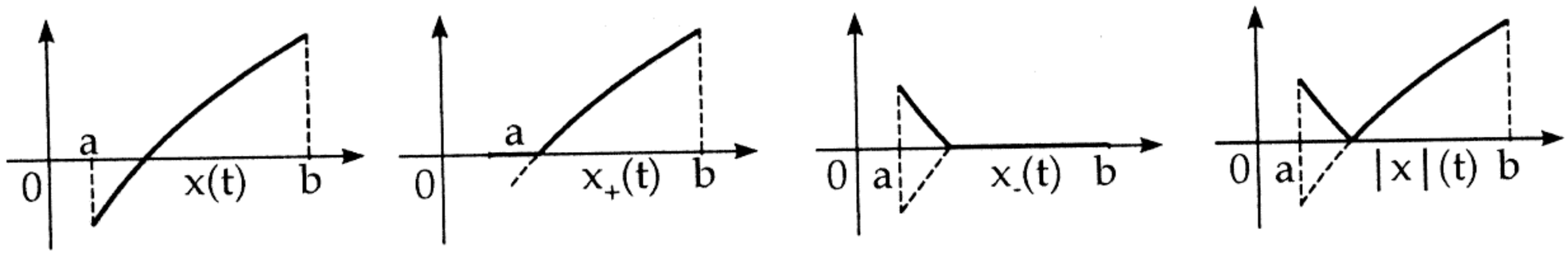
$$x\le x_+\le|x|\,,\qquad x\le|x|\,,\qquad x=x_+-x_-\,,\qquad x_+\wedge x_-=\mathbf{0}\,,\qquad |x|=x\vee(-x)\,,\tag{12.37a}$$

$$(x+y)_+\le x_++y_+\,,\qquad (x+y)_-\le x_-+y_-\,,\qquad |x+y|\le|x|+|y|\,,\tag{12.37b}$$

$$\text{ha}\quad x\le y,\quad\text{akkor}\quad x_+\le y_+\quad\text{és}\quad x_-\ge y_-,\tag{12.37c}$$

továbbá — ha $\mathbb{R}$ feletti a vektortér — tetszőleges $\alpha\ge 0$ számra

$$(\alpha\,x)_+=\alpha\,x_+\,,\qquad (\alpha\,x)_-=\alpha\,x_-\,,\qquad |\alpha\,x|=\alpha|x|\,.\tag{12.37d}$$



12.3. ábra.

Az $\mathcal{F}([a,b])$ és a $\mathcal{C}([a,b])$ vektorhálóban egy $x(t)$ függvény pozitív és negatív részét, valamint abszolút értékét a következő képletek adják meg **(12.3. ábra)**:

$$x_+(t)=\begin{cases}x(t), & \text{ha}\ x(t)\ge 0\,,\\ 0, & \text{ha}\ x(t)<0\,,\end{cases}\tag{12.38a}$$

$$x_-(t)=\begin{cases}0, & \text{ha}\ x(t)>0\,,\\ -x(t), & \text{ha}\ x(t)\le 0\,,\end{cases}\tag{12.38b}$$

$$|x|(t)=|x(t)|\quad\forall\,t\in[a,b]\,.\tag{12.38c}$$

12.2. Metrikus terek

12.2.1. A metrikus tér fogalma

Az X halmazon minden $x, y \in \mathrm{X}$ elempárhoz legyen hozzárendelve egy $\rho(x, y)$ valós szám úgy, hogy tetszőleges $x, y, z \in \mathrm{X}$ elemekre teljesüljenek a metrikus tér axiómái, vagyis a következő tulajdonságok:

$$\textbf{(M1)} \quad \rho(x,y) \geq 0 \text{ és } \rho(x,y) = 0 \text{ pontosan akkor, ha } x = y \qquad \text{(nemnegativitás)}, \tag{12.39}$$

$$\textbf{(M2)} \quad \rho(x,y) = \rho(y,x) \qquad \text{(szimmetria)}, \tag{12.40}$$

$$\textbf{(M3)} \quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \qquad \text{(háromszög-egyenlőtlenség)}. \tag{12.41}$$

Egy $\rho : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1_+$ függvényt, amely rendelkezik az **(M1)**–**(M3)** tulajdonságokkal, az X halmazon vett *metrikának* vagy *távolságnak*, az $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \rho)$ párt pedig *metrikus térnek* nevezzük. Az $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \rho)$ metrikus tér bármely Y részhalmazát (önálló) metrikus térré lehet természetes módon változtatni úgy, hogy az X tér ρ metrikáját az Y halmazra szorítjuk meg, azaz csak az $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$ halmazon tekintjük. Az (Y, ρ) teret az X metrikus tér *alterének* nevezzük.

■ **A:** Az $\mathbb{R}^n$ és a $\mathbb{C}^n$ halmaz metrikus tér például a

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2} \tag{12.42}$$

euklideszi metrikával, ahol $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ és $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ két pont.

■ **B:** Ha az $\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$ halmazban egy x értékhez (azaz vektorhoz) rendelkezésre áll egy közelítő érték, mondjuk az $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$ vektor, akkor fontos lehet az eltérés nagysága, a $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \tilde{\xi}_k|$ mennyiség. Ezt veszi figyelembe a

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k| \tag{12.43}$$

metrika. Mind a (12.42), mind a (12.43) metrika az $n = 1$ esetben az $|x-y|$ abszolút értéket adja a valós, ill. komplex számok $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ és $\mathbb{C}$ halmazán és így mindkettő annak általánosítása a többdimenziós esetre. Továbbá ezek a formulák a természetes bázis helyett bármely más bázis szerinti koordinátákkal is metrikát definiálnak.

■ **C:** A véges 0–1 sorozatokat — amilyen pl. 1110 és 010110 — a kódoláselméletben *szavaknak* hívják. Ha megszámoljuk azokat a helyeket, amelyeken két egyforma hosszú (n hosszúságú) szó különbözik, tehát $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\xi_k, \eta_k \in \{0, 1\}$, $\varrho(x, y) =$ azon $k \in \{1, \ldots, n\}$ értékek száma, amelyekre $\xi_k \neq \eta_k$, akkor az összes n hosszúságú szavak halmazán egy metrikát kapunk, a HAMMING-távolságot; pl. $\varrho((1110), (0100)) = 2$.

■ **D:** Az **m** halmazon és ennek **c** és $\mathbf{c_0}$ részhalmazán (ld. (12.12)) metrikát definiálhatunk a következő képlettel:

$$\rho(x,y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k|. \tag{12.44}$$

■ **E:** A konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ sorösszegű sorozatok $\mathbf{l}^p$ $(1 \leq p < \infty)$ halmazán a definícióból adódóan természetesen tekinthetjük a következő metrikát:

$$\rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p}. \tag{12.45}$$

■ **F:** A $\mathcal{C}([a,b])$ halmazon tekinthetjük a (12.44) általánosításaként az alábbi metrikát:

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{12.46}$$

■ **G:** A $\mathcal{C}^{(k)}([a,b])$ halmazon (12.46) kiterjesztéseként definiálni lehet a következő metrikát:

$$\rho(x,y) = \sum_{l=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(l)}(t) - y^{(l)}(t)| \,. \tag{12.47}$$

■ **H:** Az $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ halmazon, amely a korlátos és LEBESGUE-mérhető $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon majdnem mindenütt definiált, valós vagy akár komplex értékű LEBESGUE-mérhető, p-edik hatványon abszolút integrálható függvények ekvivalenciaosztályaiból áll (ld. 12.9. szakasz), (12.45) általánosításaként metrikát értelmez a következő képlet:

$$\rho(x,y) = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |x(t) - y(t)|^p \, d\mu} \,. \tag{12.48}$$

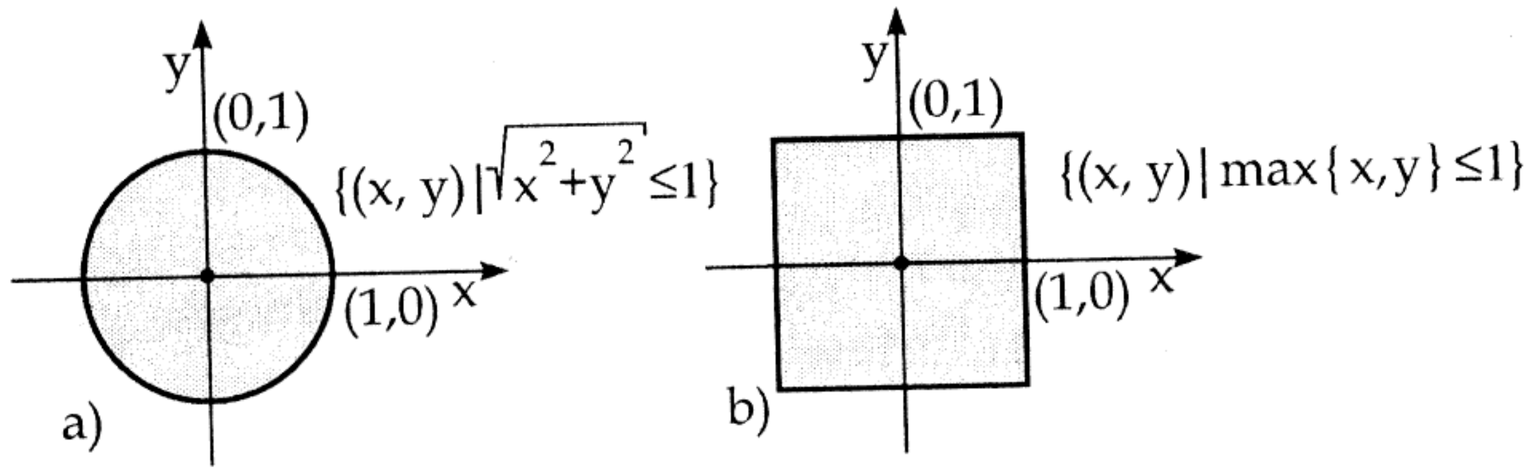
Ennek $p \to \infty$ limesze a (12.46) metrika. Ez utóbbi formula a legáltalánosabb esetben, tehát az $\mathcal{F}(T)$ vektortéren is metrika, $[a,b]$ helyett a T alaphalmazzal és a nem mindig létező max helyett sup-pal; itt az integrállal definiált (12.48) értelmetlenné is válik, mert T-n nincs semmilyen struktúra.
Vegyük észre, hogy az említett metrikus terek egyúttal vektorterek is, és mindegyik metrika csak a különségvektortól, pontosabban annak (a természetes bázis szerinti koordinátái, függvények esetén a pontonkénti) abszolút értékeitől függ. Így tehát mindegyik vektortérben — a $z = x - y$ jelöléssel — $\rho(x,y) = \rho(z,\mathbf{0})$, sőt a vektor abszolút értékének fenti definíciójával $\rho(|z|,\mathbf{0})$. Végül az is igaz, hogy minden $\alpha \in \mathbb{K}$-val $\rho(\alpha z, 0) = |\alpha|\rho(z,0)$ (ld. 12.3.1.1.), ahol a megfelelő vektortereken az egyes $\rho(|z|,\mathbf{0})$ metrikákkal egy-egy normát fogunk definiálni. A tetszőleges X halmazon értelmezett ρ_1 és ρ_2 metrikákkal értelmezett $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$ függvény is metrika. Az $(\mathrm{X}_1,\rho_1),(\mathrm{X}_2,\rho_2),\ldots,(\mathrm{X}_n,\rho_n)$ metrikus terek DESCARTES-szorzata az $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \cdots \times \mathrm{X}_n$ alaphalmaz a $\rho((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i,y_i)^2}$ metrikával. Ennek speciális esete (12.42) az $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 = \ldots = \mathrm{X}_n = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ és a $\rho_1(x,y) = \rho_2(x,y) = \cdots = \rho_n(x,y) = |x-y|$ választással. (X_1,ρ_1) és (X_2,ρ_2) izometrikus egymással, ha létezik egy $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ mindkét irányban távolságtartó bijekció, amit ekkor izometriának hívunk.

12.2.1.1. Gömbök és környezetek

Az $\mathrm{X} = (\mathrm{X},\rho)$ metrikus térben, amelynek elemeit pontoknak is nevezzük, tetszőleges $r > 0$ valós számra és rögzített x_0 pontra a

$$B(x_0;r) = \{x \in \mathrm{X} | \rho(x,x_0) < r\} \,, \tag{12.49}$$ és a $$\overline{B}(x_0;r) = \{x \in \mathrm{X} | \rho(x,x_0) \le r\} \tag{12.50}$$

halmazokat r sugarú, x_0 középpontú *nyílt*, ill. *zárt gömb*nek hívjuk.
A (12.42), ill. (12.43) metrikával ellátott $\mathbb{R}^2$ vektortérben az $x_0 = 0$ és $r = 1$ választáshoz tartozó zárt gömb a **12.4.a, b ábrákon** feltüntetett halmaz.



12.4. ábra.

Az $\mathrm{X} = (\mathrm{X},\rho)$ metrikus tér U részhalmazát az x_0 pont *környezeté*nek nevezzük, ha x_0 egy egész nyílt gömbbel együtt U-hoz tartozik, azaz $\exists r > 0$, amelyre $B(x_0;r) \subset U$. Az x pont U környezetére az $U(x)$ jelölést is használjuk. Nyilvánvaló, hogy minden gömb saját középpontjának környezete; a nyílt

gömbök ezenfelül (12.41) miatt bármely pontjuknak környezetei. Az x_0 pontot az $A \subset \mathrm{X}$ halmaz *belső pontjá*nak nevezzük, ha x_0 és egy környezete A-hoz tartozik, azaz létezik x_0-nak olyan U környezete, hogy $x_0 \in U \subset A$. A belső pontjainak összességét A belsejének hívjuk és $\mathrm{Int}(A)$-val jelöljük. Végül egy metrikus tér valamely részhalmazát *nyílt*nak mondjuk, ha minden pontja belső pontja.
Tetszőleges metrikus tér (az eddigiekben csak elnevezés szerint) nyílt gömbjei, speciálisan $\mathbb{R}$ összes nyílt intervallumai, a nyílt halmazok prototípusai. Bármely metrikus térben a nyílt halmazok összességére teljesülnek a következő tulajdonságok, amelyek együttese éppen emiatt a metrikus tér általánosításának, az ún. *topologikus tér*nek (a sok ekvivalens közül az egyik) axiómarendszere:

- Ha adott egy I indexhalmaz és a G_α halmazok $\forall \alpha \in I$-re nyíltak, akkor az $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ halmaz is nyílt.
- Ha $G_1, G_2, \ldots, G_n$ véges sok, tetszőleges nyílt halmaz, akkor a $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ halmaz is nyílt.
- A $\emptyset$ üres halmaz definíció szerint nyílt.

Egy metrikus tér A részhalmazát *korlátos*nak mondjuk, ha bizonyos x_0 elemre (amelynek nem feltétlenül kell A-hoz tartoznia) és bizonyos $R > 0$ számra az A halmaz a $B(x_0; R)$ gömbben helyezkedik el, más szóval ha $\rho(x, x_0) < R \quad (\forall\, x \in A)$. Természetesen, ha ez valamely x_0-ra fennáll, akkor minden más elemre is, más és más R-rel. Továbbá mindegy, hogy ezen definícióban nyílt vagy zárt gömböt szerepeltetünk. Egy (X, d) metrikus térben két részhalmaz, A és B távolságát a $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ képlettel definiáljuk.

12.2.1.2. Sorozatok konvergenciája metrikus térben

Legyen $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \rho)$ metrikus tér, $x_0 \in \mathrm{X}$ valamely pont, és $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathrm{X}$ az X tér elemeinek egy sorozata.
Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat *tart* (*konvergál*) az x_0 ponthoz, ha minden $U(x_0)$ környezethez található olyan $n_0 = n_0(U)$, hogy $\forall\, n > n_0$ indexre fennáll $x_n \in U$. Ezt rendszerint az

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x \tag{12.51}$$

írásmóddal fejezzük ki, és az x_0 pontot az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat *határérték*ének nevezzük. Sorozat határértéke — ha létezik — egyértelműen meg van határozva. Az x_0 pont tetszőleges (általános) környezete helyett elég, ha tetszőlegesen kicsiny sugarú nyílt gömbökre szorítkozunk, úgyhogy (12.51) ekvivalens a következővel: $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz (itt mindjárt a $B(x_0; \varepsilon)$ nyílt gömbre gondolunk) található olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy $\forall\, n > n_0$ indexre teljesül a $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Tehát (12.51) pontosan azt jelenti, hogy $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$.
A bevezetett fogalmak lehetővé teszik, hogy konkrét metrikus terekben megadjuk két pont távolságát és vizsgáljuk pontsorozatok konvergenciáját, aminek pl. numerikus módszereknél vagy függvényeknek meghatározott osztályba tartozó függvényekkel való approximációjánál (ld. pl. 939. old.) van jelentősége.
Az $\mathbb{R}^n$ és a $\mathbb{C}^n$ térben a megadott metrikák bármelyikével definiált konvergenciáról belátható, hogy bármely bázis esetén azonos a koordinátánkénti konvergenciával.
A $\mathcal{B}([a, b])$ és a $\mathcal{C}([a, b])$ térben a (12.45) metrikával definiált konvergencia éppen a függvénysorozat egyenletes konvergenciája az $[a, b]$ intervallumon (ld. 7.3.2.).
Az $L^2(\Omega)$ térben a (négyzetes) középben való konvergencia adódik, vagyis $x_n \to x_0$ ekvivalens azzal, hogy

$$\int_{\Omega} |x_n - x_0|^2 \, d\mu \longrightarrow 0 \quad \text{ha} \quad n \longrightarrow \infty\,. \tag{12.52}$$

12.2.1.3. Zárt halmazok és lezárás

1. Zárt halmaz

Azt mondjuk, hogy az X metrikus tér F részhalmaza *zárt*, ha $\mathrm{X} \setminus F$ nyílt halmaz. Metrikus tér minden zárt gömbje, speciálisan $\mathbb{R}$ minden $[a, b]$, továbbá $[a, \infty)$ és $(-\infty, a]$ típusú intervalluma is zárt halmaz.
A 12.2.1.1.-beli nyílthalmaz-axiómákkal duális módon, azaz azokból következően egy metrikus tér zárt halmazainak összessége a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Ha az F_α halmazok $\forall \alpha \in I$ index esetén zártak, akkor az $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ halmaz is zárt.
- Ha $F_1, \ldots, F_n$ véges sok, tetszőleges zárt halmaz, akkor a $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ halmaz is zárt.
- A $\emptyset$ üres halmaz zárt.

A $\emptyset$ és az X halmaz egyszerre nyílt és zárt. Az X metrikus tér x_0 pontját az $A \subset$ X halmaz *érintkezési pontjá*nak nevezzük, ha minden $U(x_0)$ környezetre fennáll

$$U(x_0) \cap A \neq \emptyset \tag{12.53}$$

Ha ezenfelül a metszet semmilyen $U(x_0)$-ra sem csak az egyetlen x_0 pontból áll, akkor az x_0 pontot az A halmaz *torlódási pontjá*nak nevezzük. Az olyan érintkezési pontot, amely nem torlódási pont (tehát ha mégis van ilyen $U(x_0)$ környezet), *izolált pont*nak hívjuk.
Ezek szerint A torlódási pontjainak nem feltétlenül kell A-hoz tartozniuk, amire példa az a pont az $A = (a, b]$ halmazra vonatkozóan, viszont az izolált pontok szükségképpen hozzátartoznak az A halmazhoz, mert általában az érintkezési pontok hozzátartoznak, hiszen $x \in U(x)$ minden környezetre.
x_0 pontosan akkor érintkezési pontja A-nak, ha található olyan, az A halmaz x_n elemeiből álló $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, amely x_0-hoz tart; izolált x_0 pont esetén az $x_n = x_0\,,\ \forall\, n \geq n_0$ (lehet csak) ilyen sorozat.

2. Lezárás

Az X metrikus tér bármely A részhalmaza nyilvánvalóan benne van az X zárt halmazban. Mindig létezik tehát egy legszűkebb zárt halmaz, amely tartalmazza az A halmazt, nevezetesen X összes, az A halmazt tartalmazó zárt halmazainak metszete. Ezt a halmazt A *zárt burká*nak vagy *lezárásá*nak nevezzük és általában „A-felülvonással", azaz $\overline{A}$-sal jelöljük. $\overline{A}$ nem más, mint A összes érintkezési pontjainak a halmaza; az A halmazból úgy kapjuk meg, hogy A pontjaihoz hozzávesszük A torlódási pontjait. A zárt halmazok éppen azok az A halmazok, amelyekre $A = \overline{A}$. Ennélfogva sorozatokkal is jellemezhetők, a következőképpen: A pontosan akkor zárt, ha A-beli elemeknek egy tetszőleges $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára, amely az X térben egy x_0 ($\in$ X) elemhez tart, ezen x_0 határérték is A-hoz tartozik.

12.2.1.4. Sűrű részhalmazok és szeparábilis metrikus terek

Azt mondjuk, hogy az X metrikus tér A részhalmaza *mindenütt sűrű*, ha $\overline{A} =$ X, más szóval ha minden $x \in$ X pont az A halmaznak érintkezési pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in$ X elemhez található A-beli elemeknek egy $\{x_n\}$ sorozata, amelyre $x_n \longrightarrow x$, másképpen minden x-re minden ε-hoz létezik $x_\varepsilon \in A$, melyre $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$.

■ A WEIERSTRASS-féle approximációs tétel szerint minden, a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvényt a $\mathcal{C}([a, b])$ tér metrikájában, azaz egyenletesen, tetszőleges pontossággal meg lehet közelíteni polinomokkal. Ezt a tételt most már a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Az $[a, b]$ intervallumon tekintett polinomok halmaza mindenütt sűrű $\mathcal{C}([a, b])$-ben.

■ Az $\mathbb{R}$ térben mindenütt sűrű halmazra példa az összes racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza, valamint az összes irracionális számok halmaza.

Az X metrikus teret *szeparábilis*nak mondjuk, ha X-ben létezik megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz. Például $\mathbb{R}^n$-ben az összes racionális komponensű vektorok halmaza egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz. Az $\mathrm{l} = \mathrm{l}^1$ tér, tehát az abszolút konvergens sorösszegű valós sorozatok tere a (12.45) metrikával is szeparábilis, benne egy megszámlálható és mindenütt sűrű részhalmaz például az összes $(r_1, r_2, \ldots, r_N, 0, 0, \ldots)$ alakú elemek halmaza, ahol r_i racionális számok és N tetszőleges természetes szám.
■ Ezzel szemben a korlátos sorozatok $\mathbf{m}$ tere a (12.44) metrikával nem szeparábilis, mert ezt általában is kizárja ha van a térben megszámlálhatónál több, páronként diszjunkt gömb, amit viszont biztosít, ha valamely $\varepsilon > 0$-ra létezik megszámlálhatónál több, páronként legalább ε távolságra eső pont. $\mathbf{m}$-ben például ilyenek az $\mathbb{N}$ indexhalmaz összes részhalmazának karakterisztikus függvényei $\varepsilon = 1$-gyel.

12.2.2. Teljes metrikus terek

12.2.2.1. Cauchy-sorozatok

Legyen X = (X, ρ) metrikus tér. Az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, ahol minden $x_n \in$ X CAUCHY-*sorozat*nak, *fundamentális sorozat*nak vagy *önmagában konvergens sorozat*nak nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz található

olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index, hogy $\forall\, n, m > n_0$ indexre teljesül a

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{12.54}$$

egyenlőtlenség. Minden CAUCHY-sorozat korlátos halmaz. Továbbá igaz az is, hogy minden konvergens sorozat CAUCHY-sorozat. A megfordítás általában *nem* igaz, amint az alábbi példa mutatja.

■ Tekintsük az $\mathbf{l}^1$ teret az $\mathbf{m}$ tér (12.44) metrikájával, valamint a minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre nyilvánvalóan $\mathbf{l}^1$-hez tartozó $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ elemeket, ekkor az $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat ebben a térben CAUCHY-sorozat. Ha az $\{x^{(n)}\}$ sorozat konvergens volna, akkor koordinátánként is konvergálnia kellene, mégpedig az $x^{(0)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$ elemhez. Ez az elem azonban $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ miatt (ld. 411. old., harmonikus sor) nem tartozik $\mathbf{l}^1$-hez.

12.2.2.2. Teljes metrikus tér

Egy metrikus teret *teljes*nek mondunk, ha benne minden CAUCHY-sorozat konvergens. A teljes metrikus terek tehát éppen azok, amelyekben érvényes a valós számoknál megismert CAUCHY-*féle konvergenciaelv*: Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha CAUCHY-sorozat. Teljes metrikus tér zárt altere (önálló metrikus térnek felfogva) is teljes. Bizonyos értelemben igaz a megfordítás: Ha egy (nem szükségképp teljes) X metrikus tér Y altere teljes, akkor az Y halmaz zárt X-ben.

■ Teljes metrikus terek például: $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}^p$ $(1 \leq p < \infty)$, $\mathbf{c}$, $\mathcal{B}(T)$, $\mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{C}^{(k)}([a,b])$, $L^p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$.

12.2.2.3. Néhány alapvető tétel teljes metrikus terekben

A teljes metrikus terek fontossága többek között abból ered, hogy érvényes bennük egy egész sor jelentős tétel és elv, amely a valós analízisben ismert és hasznos, és amelyről szeretnénk, hogy a végtelen dimenziójú terekben is rendelkezésünkre álljon.

1. Gömbskatulyázási tétel Legyen X teljes metrikus tér. Ha

$$\overline{B}(x_1; r_1) \supset \overline{B}(x_2; r_2) \supset \cdots \supset \overline{B}(x_n; r_n) \supset \cdots \tag{12.55}$$

olyan egymásba skatulyázott zárt gömbök sorozata, amelyekre $r_n \longrightarrow 0$, akkor e gömbök metszete nem üres és egyetlen pontból áll. Megfordítva, ha egy metrikus térben ez a tétel érvényes, akkor a tér teljes.

2. Baire-féle kategóriatétel Legyen X teljes metrikus tér, és legyen $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ az X tér nyílt, mindenütt sűrű halmazainak egy megszámlálható halmaza. Ekkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ nemüres, sőt mindenütt sűrű X-ben. Ennek következménye, hogy a tétel akkor is igaz, ha a G_n-ek maguk nem feltétlenül nyíltak, hanem olyanok mint a tétel metszethalmaza, tehát megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként előálló, mindenütt sűrű halmazok.

Másik, gyakran használt következménye: Legyen X teljes metrikus tér, és legyen $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ az X tér zárt halmazainak egy megszámlálható halmaza, amelyre $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \mathrm{X}$. Ekkor van olyan F_{k_0}, amelynek létezik belső pontja.

3. Banach-féle, másképpen Banach–Cacciopoli-féle, néha Banach–Cacciopoli-Tyihonov-féle fixponttétel Legyenek (X_1, ρ_1) és (X_1, ρ_2) metrikus terek, $T\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_2$, amelyre

$$\rho_2(Tx, Ty) \leq q\rho_1(x, y), \quad \text{ahol} \quad q < 1. \tag{12.56}$$

Ekkor T-t *kontraktív* vagy *kontraháló operátor*nak vagy *leképezés*nek vagy *transzformáció*nak, egyszerűbben *kontrakció*nak hívjuk.

Speciális esetként legyen F az (X, ρ) teljes metrikus tér zárt, nemüres részhalmaza. (Általában F-et X-nek választjuk.) Legyen $T\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ kontrakció, azaz amelyre $q < 1$. Ekkor:

1. Tetszőleges x_0 kezdeti érték esetén az

$$x_{n+1} := Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{12.57}$$

iterációs sorozat konvergens, azaz tart egy x^* ponthoz.
2. Fennáll

$$Tx^* = x^*\,, \quad \text{vagyis} \quad x^* \text{ a } T \text{ operátornak fixpontja.} \tag{12.58}$$

3. x^* a T egyetlen fixpontja.
4. $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n \rho(x_0, x_1)$ és emiatt érvényes a következő hibabecslés:

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0)\,. \tag{12.59}$$

5. Ha $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset F$, akkor $x^* \in F$.

A BANACH-*féle fixponttétel*lel kapcsolatban beszélünk a *kontraktív leképezés elvé*ről vagy *kontrakció-elv*ről vagy *kontrakciótétel*ről, és q-t *kontrakciós együtthatónak* vagy *állandónak* vagy *konstans*nak hívjuk. Természetesen, ha T kontrakció, akkor T^n „annál inkább" az (kontrakciós együtthatója $\leq q^n$), így T helyett T^n-nel is igaz a fixponttétel. Ennek azonban a megfordítása is igaz, ami tehát a fixponttétel egy hasznos élesítése (ld. 12.2.2.4.3.): ha a fenti feltételekkel valamely n-re T^n kontrakció, akkor T-nek van és pontosan 1 fixpontja.

12.2.2.4. A kontrakcióelv néhány alkalmazása

1. Iterációs eljárás lineáris egyenletrendszerek megoldására

Legyen adott a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$-beli a_{ij} és b_l számokkal definiált

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,,\\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 &+ a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{12.60}$$

lineáris egyenletrendszer. Ekvivalensen $-\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + b_j = 0, j = 1, 2, \ldots, n$. Mivel elkülönítve is meg akarjuk jeleníteni az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretleneket, ezért még ezt is átírjuk a $x_j - \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + b_j = x_j$ alakra $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Most már jól látható, hogy ezen — és így az eredeti — egyenletrendszer megoldásai éppen a

$$Tx = \left(x_1 - \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + b_1, \ldots, x_n - \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k + b_n\right) \tag{12.61}$$

képlettel definiált $T\colon\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ operátor

$$x = Tx \tag{12.62}$$

fixpontjai az euklideszi (12.42), a $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$ vagy a (12.43) metrikával a teljes $\mathbb{K}^n$ térben. 12.2.1. vége alapján T kontraktivitásának vizsgálatához az $x - y = z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$-t hasonlítjuk össze a $Tx - Ty = \left(z_1 - \sum_{k=1}^n a_{1k}z_k, z_2 - \sum_{k=1}^n a_{2k}z_k, \ldots, z_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}z_k, \ldots, z_n - \sum_{k=1}^n a_{nk}z_k\right)$ vektorral a $\mathbb{K}^n$-en definiált valamelyik m metrika szerint, azaz $m(z, \mathbf{0})$-t $m(\tilde{T}z, \mathbf{0})$-val, amely $\tilde{T}z$-ben a b_i-k már nem szerepelnek. Ki kell tehát számolnunk $\sup\limits_{z \neq \mathbf{0}} \dfrac{m(\tilde{T}z, \mathbf{0})}{m(z, \mathbf{0})}$-t, vagy legalábbis felső becslést kell rá adnunk.

Más szóval — mivel a b_j-k elhagyásával kapott $\tilde{T}$ már lineáris — ezen $\tilde{T}$ valamelyik speciális normáját kell megbecsülnünk (ld. 12.5.1.1.). Itt $\tilde{T}$ természetesen az $E - A$ mátrixszal van definiálva, ahol E az egységmátrix, A pedig az a_{ik} együtthatókból áll. 12.5.1.1.-ből tudjuk, hogy $\tilde{T}$ pontosan akkor kontraktív, ha — $\mathbb{K}^n$ (pld. valamely metrikából származó) valamely normájával kompatibilis (specifikusan az adott normával indukált) — normája 1-nél kisebb. Tehát több alternatíva van az említett speciális normára, amelyek közül, a felsorolt metrikák által indukált normáknak megfelelően egy, a gömb, azaz euklideszi normával kompatibiliset, a kockanorma által indukált abszolút sorösszegnormát, és végül az

oktaédernorma által indukált oszlopösszegnormát tekintjük ($\tilde{t}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & \text{ha } i = j \\ -a_{ij}, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$). Ha tehát a

$$\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |\tilde{t}_{jk}|^2}\,, \qquad \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |\tilde{t}_{jk}|, \qquad \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{t}_{jk}| \tag{12.63}$$

számok valamelyike 1-nél kisebb, akkor T biztosan kontraktív operátor, és a BANACH-féle fixponttétel szerint létezik pontosan egy fixpontja, vagyis az eredeti lineáris egyenletrendszer megoldása, amely az iterációs sorozat komponensenkénti határértéke tetszőleges $\mathbb{K}^n$-beli kezdeti értékből kiindulva. Végül megjegyezzzük, hogy a három eset bármelyikében minden jobboldalra van megoldás, tehát A-nak van inverze, de megfordítva természetesen nincs így: lehetséges, hogy A-nak van inverze, azaz (12.60) minden jobboldalra egyértelműen megoldható, de az iteráció nem (vagy nem minden kezdeti értékből kiindulva) konvergens, vagy esetleg mindig konvergens, de mégis mindhárom norma 1-nél nagyobb.

2. Fredholm-féle integrálegyenlet

Az $[a,b] \times [a,b]$-n folytonos $K(x,y)$ maggal és $[a,b]$-n folytonos $f(x)$ jobboldallal rendelkező

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)\,, \quad x \in [a,b] \tag{12.64}$$

másodfajú lineáris inhomogén (ha $f(x) \equiv 0$, akkor homogén) FREDHOLM-féle integrálegyenlet $\varphi(x)$ megoldását (ld. 11.2.) úgy lehet iterációval meghatározni, hogy ekvivalensen a

$$(T\varphi)(x) := \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}([a,b])\,, \forall x \in [a,b] \tag{12.65}$$

képlettel definiált $T:\ \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$ FREDHOLM-féle integráloperátor fixpontjait keressük a maximumnormával teljes $\mathcal{C}([a,b])$ metrikus térben (12.46). Biztosan alkalmazhatjuk a fixponttételt, ha $\max\limits_{a\le x\le b} \int_a^b |K(x,y)|\,dy < 1$, mert ez a maximum felső becslése a $\dfrac{\rho(T\varphi_1, T\varphi_2)}{\rho(\varphi_1,\varphi_2)}$ értékeknek (φ_1 és $\varphi_2 \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$), tehát ekkor T kontrakció. Az egyértelmű megoldást mint a $\{T^n\varphi_0\}_{n=1}^{\infty}$ iterációs sorozat egyenletes limeszét kapjuk meg, a fixponttétel 1. állítása értelmében az iterációt egy tetszőleges $\varphi_0(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ függvénnyel kezdve. Megjegyezzük, hogy ha az integrál előtt még van egy fix λ szorzó, akkor az integráloperátor, tehát a $\varphi \to T\varphi$, $(T\varphi)(x) := \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$ kontraktivitását és így tetszőleges φ_0-val a $(T^n\varphi_0)_{n=0}^{\infty}$ iterációs sorozat konvergenciáját a megoldáshoz, azaz a T egyértelműen létező fixpontjához a $|\lambda| < \left(\max\limits_{a\le x\le b} \int_a^b K(x,y)\,dy\right)^{-1}$ feltétel biztosítja. Továbbá 12.7.3.-ban általánosabb környezetben is vizsgáljuk a FREDHOLM-féle integrálegyenletet.

3. Volterra-féle integrálegyenlet

Ha az előbbi feladattól eltérően az integrálás felső határa is változik, akkor a $\Delta = \{(x,y) \mid a \le y \le x \le b\}$ háromszögön folytonos $K(x,y)$ maggal és $[a,b]$-n folytonos $f(x)$ jobboldallal rendelkező

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)\,, \quad x \in [a,b] \tag{12.66}$$

másodfajú lineáris inhomogén (ha $f(x) \equiv 0$, akkor homogén) VOLTERRA-féle integrálegyenletet (ld. 11.4.) kapjuk. A

$$(V\varphi)(x) := \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}([a,b])\,, \forall x \in [a,b] \tag{12.67}$$

jelöléssel most a megoldáshoz ekvivalensen a (12.65)-höz hasonlóan definiált $T : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$, $T\varphi = f + V\varphi$ VOLTERRA-féle integráloperátor $T\varphi = \varphi$ fixpontjait keressük (most is lehetne még egy λ fix szorzó az integrál előtt). Most viszont minden feltétel nélkül igaz, hogy van megoldás és egyértelmű, de most valamely n-re a $\{T^{nm}\varphi_0\}_{m=1}^{\infty}$ minden φ_0-ra létező és egybeeső egyenletes limesze adja az integrálegyenlet megoldását, mert elég nagy n-re a T^n már kontrakció (ha már $\dfrac{(|\lambda|M(b-a))^n}{n!} \leq 1$, ahol M $|K|$ maximuma a Δ háromszögön) és így alkalmazhatjuk a BANACH-féle fixponttétel említett erősítését. Ez tehát azt jelenti, hogy ha iterációval akarunk közelítő megoldást kapni, akkor az iterációs sorozatnak csak minden n-edik tagját vehetjük figyelembe, vagy — ami nagyon valószínűtlen — kezelhető alakra hozzuk $\tilde{T} = T^n$-et és ezzel képezzük a $(\tilde{T}^m)_{m=1}^{\infty}$ sorozatot. A FREDHOLM- és a VOLTERRA-esetben is érvényes a (12.59) hibaformula, a FREDHOLM-egyenlet esetében $q = |\lambda| \max\limits_{a\leq x\leq b} \int_a^b |K(x,y)|\,dy$, a VOLTERRA-egyenlet esetében $\tilde{T}$-mal iterálva q a fenti $\dfrac{(|\lambda|M(b-a))^n}{n!}$.

4. A Picard–Lindelöf-tétel elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszer lokálisan egyértelmű megoldhatóságáról (ld. még 9.1.1.5.)

Legyen f $\mathbb{R}^{n+1}$ valamely tartományán értelmezett $\mathbb{R}^n$-be ható folytonos leképezés és tekintsük az

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{12.68}$$

elsőrendű explicit differenciálegyenletet-rendszert, ahol $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ és így a ponttal jelölt deriválás a — gyakran időnek tekintett — t szerint értendő. Legyen $(t_0, x_0) \in D(f)$ és itt legyen f x függvényeként lokálisan LIPSCHITZ-folytonos (ld. 12.2.3.). Eszerint tehát léteznek az α_0, r pozitív állandók és az L pozitív LIPSCHITZ-állandó, hogy $F_{\alpha_0,r} = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leq \alpha_0,\, \|x-x_0\| \leq r\} \subset D(f)$ és minden itteni $(t,x_1), (t,x_2)$ pontpárra $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$. Itt $\|\cdot\|$ a 12.3.1.-ben bevezetendő norma $\mathbb{R}^n$-en, amely a (12.42)-vel definiált ρ euklideszi metrikával a $\rho(x,y) = \|x-y\|$, azaz $\|x\| = \rho(x,\mathbf{0})$ kapcsolatban áll; továbbá felhasználjuk, hogy a dimenzió végessége miatt a gömbi és a maximumnorma ekvivalensek, így egy $\mathbb{R}^{n+1}$-beli pont minden euklideszi, azaz gömbi környezete tartalmaz valamilyen α_0-val és r-rel DESCARTES-szorzat alakú téglalapszerű (zárt) F-környezetet. Tipikus esete a LIPSCHITZ-feltétel teljesülésének f x szerinti deriváltja (azaz az x_i-k szerinti parciális deriváltak) létezése és korlátossága (t_0, x_0) egy környezetében. A későbbiek érdekében megjegyzendő az is, hogy a LIPSCHITZ-feltétel „átöröklődik", azaz triviálisan fennáll (t_0, x_0)-on kívül $\mathrm{Int}(F_{\alpha,r})$ minden más pontjára is, természetesen α_0 és r helyett más — kisebb — paraméterekkel. Ekkor az $x(t_0) = x_0$ követelménnyel meghatározott (12.68) kezdetiérték-feladatnak lokálisan egyértelmű megoldása van, azaz valamilyen $\alpha > 0$-val létezik a $D(\varphi) = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$-n definiált folytonos $\varphi(t)$, amelyre $\varphi(t_0) = x_0$ és $D(\varphi)$-n $\dot{\varphi}(t) = f(t,\varphi(t))$, továbbá ilyen feltételek mellett φ egyértelmű. Ugyanis ismert, hogy φ pontosan akkor megoldása a nyílt $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$-ra vonatkozó feladatnak, ha $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s$ teljesül $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ bármely zárt részintervallumán, ezért ekvivalensen áttérhetünk ezen utóbbi integrálegyenlet egyértemű megoldhatóságának vizsgálatára a folytonos függvények körében. Másképpen fogalmazva a $(T\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s$, $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$ integráloperátor fixpontjának létezését és egyértelműségét vizsgáljuk elég kis α-ra. Legyen most $m := \max\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in F_{\alpha_0,r}\}$ és $\alpha < \min\{\alpha_0, \dfrac{r}{m}, \dfrac{1}{L}\}$, egyébként tetszőleges. Tekintsük az $M :=$

$\{\varphi \mid \varphi$ folytonos, $D(\varphi) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $R(\varphi) \subset \overline{B}(x_0; r)$, $\varphi(t_0) = x_0\}$ halmazt, amely az egyenletes konvergenciát metrizáló $d(\varphi_1, \varphi_2) := \max\{\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \mid t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha\}$ metrikával teljes metrikus tér. Tekintsük M-en a $(T\varphi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s$ előírással definiált leképezést, $t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha$. M zárt T-re, azaz $\varphi \in M \longrightarrow T\varphi \in M$, mert $(T\varphi)(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s$ és

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} m\,\mathrm{d}s \right| = m|t - t_0| \le m\alpha \le m\frac{r}{m} = r,$$

mert $\alpha \le \frac{r}{m}$, azaz $R(T\varphi) \subset B(x_0; r)$, tehát annál inkább $R(T\varphi) \subset \overline{B}(x_0; r)$, az integrálfüggvény folytonossága miatt $T\varphi$ is folytonos, és triviálisan $(T\varphi)(t_0) = x_0$ (az első becslésben az abszolút érték a $t < t_0$ eset miatt kellett).
Itt felhasználtuk, hogy általában

$$\left\| \int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_a^b \|g(s)\|\,\mathrm{d}s \quad (a < b),$$

ahol $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ és $\|\cdot\|$ norma $\mathbb{R}^n$-n. Ez azért igaz, mert ha az egyes koordinátákban szereplő integrálokat a közelítő összegek limeszeiként számoljuk ki és az n számú integrál mindegyikéhez ugyanazt a felosztássorozatot és minden felosztásra ugyanazon közbülső pontokat választjuk, akkor

$$\int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s \le \lim_{K \to \infty} \sum_{i=1}^{K} \Delta s_i g(\tau_i) \quad \left(\sum_{i=1}^{K} \Delta s_i = b - a \right)$$

és

$$\left\| \sum_{i=1}^{K} \Delta s_i g(\tau_i) \right\| \le \sum_{i=1}^{K} \Delta s_i \|g(\tau_i)\|, \quad \text{ami} \quad \int_a^b \|g(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$$

közelítő összege. Tehát a norma folytonossága miatt

$$\left\| \int_a^b g(s)\,\mathrm{d}s \right\| = \lim_{K \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{K} \Delta s_i g(\tau_i) \right\| \le \lim_{K \to \infty} \sum_{i=1}^{K} \Delta s_i \|g(\tau_i)\| \longrightarrow \int_a^b \|g(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau.$$

Továbbá T kontrakció:

$$\begin{aligned}
d(T\varphi_1, T\varphi_2) &= \max_{t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha} \|(T\varphi_1)(t) - (T\varphi_2)(t)\| = \\
&= \max_{t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha} \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \le \\
&\le \max_{t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha} \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \le \\
&\le \max_{t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha} \left| \int_{t_0}^{t} L\,\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|\,\mathrm{d}s \right| \le \\
&\le L \int_{t_0}^{t} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|\,\mathrm{d}s \le L \int_{t_0}^{t_0 + \alpha} \max_{t_0 - \alpha \le s \le t_0 + \alpha} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|\,\mathrm{d}s = \\
&= L \int_{t_0}^{t_0 + \alpha} d(\varphi_1, \varphi_2)\mathrm{d}s = L\alpha d(\varphi_1, \varphi_2)
\end{aligned}$$

tehát $d(T\varphi_1, T\varphi_2) \le L\alpha d(\varphi_1, \varphi_2)$ és $\alpha < \frac{1}{L}$ miatt $L\alpha < 1$, azaz T tényleg kontrakció. Itt felhasználtuk a LIPSCHITZ-feltételt, amihez kellett hogy $(s, \varphi_1(s))$ és $(s, \varphi_2(s)) \in F_{\alpha_0, r}$; ezért szerepelt az $R(\varphi) \subset$

$\overline{B}(x_0;r)$ feltétel M definíciójában. Végül M teljes metrikus tér, mert definiáló feltételei átöröklődnek az egyenletesen konvergens φ_n sorozatról a limeszre. Ezek szerint a fixponttétel feltételei teljesülnek, tehát M-ben $T\varphi = \varphi$-nek és így a kiindulási kezdetiérték-feladatnak egyértelmű megoldása van minden $\alpha < \min\{\alpha_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}\}$-ra $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$-n, amely megoldások egymás kiterjesztései az egyértelműség miatt, tehát valójában $I = \left(t_0 - \min\{\alpha_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}\}, t_0 + \min\{\alpha_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}\}\right)$-on. Ezt a megoldást az M bármely eleméből kiinduló $\varphi \to T\varphi \to T^2\varphi \to \ldots \to T^n\varphi \to \ldots$ sorozat egyenletes limeszeként kaphatjuk meg, szakszóval szukcesszív approximációval. Tényleges közelítő megoldásnál általában a konstans x_0-t választjuk kezdőértéknek.
Minden más, azaz M-en kívüli $\tilde{\varphi}$ megoldás is egybeesik ezzel a kitüntetettel t_0 elég kis környezetében, mert folytonossága miatt innen $\overline{B}(x_0;r)$-be képez. Így ha I egészén nem esne egybe, akkor t_0-tól jobbra $\tilde{t} := (\sup =) \max\{t \mid t_0 < t,\ \varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)\}$, illetve $\tilde{t} := (\inf =) \min\{t \mid t_0 > t,\ \varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)\}$ I-ben lenne és így $\tilde{\varphi}(\tilde{t})(= \varphi(\tilde{t})) \in B(x_0;r)$, azaz $\left(\tilde{t}, \tilde{\varphi}(\tilde{t})\right) \in \mathrm{Int}(F_{\alpha_0,r})$, tehát ennek a pontnak is lenne a LIPSCHITZ-feltételnek eleget tevő környezete, de akkor a $\left(\tilde{t}, \tilde{\varphi}(t_0)\right)$ kezdetiérték-feladatra is fennállna, hogy bármely két megoldása $\tilde{t}$ elég kis környezetében egybeesik, amit φ és $\tilde{\varphi}$ nyilvánvalóan nem teljesít, tehát a $\sup = \max$ és/vagy az $\inf = \min$ I végpontja lehet csak, azaz a fixponttétellel talált megoldás nemcsak M-ben, hanem minden korlátozás nélkül is az egyedüli megoldása a (t_0, x_0)-paraméterű kezdetiérték-feladatnak. Ez azt jelenti, hogy a megoldás unicitása nem csak abban a gyengébb értelemben áll fenn, hogy bármely két megoldás t_0 elég kis környezetében egybeesik, hanem az erősebb értelemben, tehát létezik egy közös intervallum — a fenti I —, hogy azon bármely két megoldás egybeesik.
A módszer az $y^{(n)} = f\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ n-edrendű explicit differenciálegyenletre a 9.1.2.1.-ben említett átviteli elv alkalmazása után akkor használható, ha $f = f(x,y)$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n)$ folytonos és az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ kezdeti feltétel egy környezetében y-ban LIPSCHITZ-folytonos (ld. (9.22a), ahol az abszolútösszeg-normával van megfogalmazva). Ekkor az állítás is hasonló: elég kis $h > 0$-ra egyértelműen létezik az $y(x) \in \mathcal{C}^n\left((x_0 - h, x_0 + h)\right)$, amelyre

$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = y_0 \quad \text{és} \quad y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right),$$

ha $x_0 - h < y < x_0 + h$ és $y(x)$ a — például az y_0 konstans függvényből induló —

$$\left(T\begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right)(t) := y_0 + \int_{x_0}^{t} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ f\left(x, y(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}x \qquad (|t - x_0| < h)$$

képlettel definiált szukcesszív approximáció limeszvektorának, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} T^n y_0$-nak első koordinátája.

Végül visszatérve (12.68)-ra legyen például $\alpha = \min\{\alpha_0, \frac{r}{m}, \frac{1}{L}\}/2$. Ekkor az M metrikus téren ható T leképezés kontrakciós együtthatója $q \le \frac{1}{2}$, tehát a fixponttétel hibabecslése alapján $d(\varphi, \varphi_n) < \frac{d(\varphi_1, x_0)}{2^{n-1}} \le \frac{r}{2^n}$, azaz x_0-ból indulva adott $\varepsilon > 0$ esetén $\left\lceil \lg_2 \frac{r}{\varepsilon} \right\rceil$ iterációs lépés után a kapott függvény az egész $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$-n ε-nál közelebb lesz a kezdetiérték-feladat egzakt megoldásához.

12.2.2.5. Metrikus tér teljessé tétele

Tetszőleges, tehát általában nem teljes (X, ρ) metrikus tér teljessé tehető; pontosabban szólva létezik egy „legszűkebb" $\tilde{\mathrm{X}}$ metrikus tér a következő tulajdonságokkal:

1. $\tilde{\mathbb{X}}$ tartalmaz egy, az $\mathbb{X}$ térrel izometrikus (ld. 12.2.3., ??, ??. old.) $\mathbb{Y}$ alteret, azaz $\mathbb{X}$ izometrikusan beágyazható $\tilde{\mathbb{X}}$-ba.
2. $\mathbb{X}$ mindenütt sűrű $\tilde{\mathbb{X}}$-ban.
3. $\tilde{\mathbb{X}}$ teljes metrikus tér.
4. Bármely két ilyen $\tilde{\mathbb{X}}_1$ és $\tilde{\mathbb{X}}_2$ az eredeti $\mathbb{X}$-et elemenként fixen hagyva izometrikus egymással.
Az ilyen módon izometria erejéig egyértelműen meghatározott teljes metrikus teret az $\mathbb{X}$ tér *lezárásának*, *lezártjának*, *teljes bővítésének* vagy *teljes metrikus burkának* nevezzük. Például a racionális számok metrikus terének ($\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$) lezártja a valós számok halmaza; általában $\tilde{\mathbb{Q}}^n = \mathbb{R}^n$. $\tilde{\mathbb{X}}$-t például az $\mathbb{X}$-beli CAUCHY-konvergens sorozatok ekvivalenciaosztályaiként kaphatjuk meg: (x_n) és (y_n) ekvivalens, ha $\rho(x_n, y_n) \to 0$. Ha $x \in \mathbb{X}$-et azonosítjuk a konstans $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ sorozattal, akkor ezek ekvivalenciaosztályai alkotják a tételben említett $\mathbb{Y}$ alteret. A $\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}^1_+$ függvény tétel szerinti egyértelmű kiterjesztése, a $\tilde{\rho} : \tilde{\mathbb{X}} \times \tilde{\mathbb{X}} \to \mathbb{R}^1_+$, amivel $(\tilde{\mathbb{X}}, \tilde{\rho})$ teljes metrikus tér — ha általában $[(x_n)]$-nel jelöljük az (x_n) sorozatot tartalmazó ekvivalenciaosztályt — így adható meg: $\tilde{\rho}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Ez a definíció értelmes, azaz független a reprezentáns sorozatok választásától.

12.2.3. Folytonos operátorok

1. Folytonos operátorok

Legyen $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ az $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, \rho)$ metrikus térnek az $\mathbb{Y} = (\mathbb{Y}, \varrho)$ metrikus térbe való leképezése. A T leképezést az $x_0 \in \mathbb{X}$ *pontban folytonos*nak mondjuk, ha az $y_0 = T(x_0)$ pont minden $V = V(y_0)$ környezetéhez található $U = U(x_0)$ környezet, amelyre

$$T(x) \in V \quad \forall\, x \in U\,, \qquad \text{azaz} \qquad T(U) \subset V\,. \tag{12.69}$$

Azt mondjuk, hogy T *folytonos az $A \subset \mathbb{X}$ halmazon*, ha T az A halmaz minden pontjában folytonos. $\mathcal{C}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ a $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ folytonos leképezések halmaza. Az $\mathbb{X}$ téren való folytonossággal ekvivalens tulajdonságok:
a) Ha $x \in \mathbb{X}$ tetszőleges pont és $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ tetszőleges sorozat, amelyre $x_n \longrightarrow x$, akkor $T(x_n) \longrightarrow T(x)$, tehát $\rho(x_n, x_0) \to 0$ esetén $\varrho(T(x_n), T(x_0)) \to 0$; ezt szokás átviteli elvnek is hívni.
b) Tetszőleges $G \subset \mathbb{Y}$ nyílt részhalmazra a $T^{-1}(G)$ inverz kép $\mathbb{X}$-nek nyílt részhalmaza.
c) Tetszőleges $F \subset \mathbb{Y}$ zárt részhalmazra a $T^{-1}(F)$ inverz kép $\mathbb{X}$-nek zárt részhalmaza.
d) Tetszőleges $A \subset \mathbb{X}$ részhalmazra fennáll $T(\overline{A}) \subset \overline{T(A)}$.

2. Lipschitz-folytonos leképezések

$\mathcal{C}(A; B)$ fontos részhalmaza a LIPSCHITZ-folytonos leképezések: T LIPSCHITZ-*folytonos* az L LIPSCHITZ-*állandó*val, ha

$$\varrho(T(x_1), T(x_2)) \le L\rho(x_1, x_2)\,. \tag{12.70}$$

Nyilván L nem egyértelmű, csak a szóbajövő L-ek minimuma az. T az x_0 pontban *lokálisan* LIPSCHITZ-*folytonos*, ha x_0 valamely $V(x_0)$ környezetén, mint altéren az, tehát ha (12.70) $x_1, x_2 \in V(x_0)$ esetén teljesül. A (lokális) LIPSCHITZ-folytonosság fogalmával mát találkoztunk speciális esetekben, legutoljára 12.2.2.4.4.-ben. Ha speciálisan valamely $L < 1$-gyel is teljesül a (12.70) feltétel, akkor visszakapjuk a kontrakció fogalmát (ld. 12.2.2.3.3.).
Legyen $f : (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \varrho)$ folytonos leképezés, és tegyük fel, hogy az $(\mathbb{X}, \rho)$ metrikus tér nem teljes. Legyen ennek a teljes bővítése $(\tilde{\mathbb{X}}, \tilde{\rho})$. Legyen $(\tilde{\mathbb{Y}}, \tilde{\varrho})$ az $(\mathbb{Y}, \rho)$ teljes bővítése; illetve ha ez már teljes, akkor önmaga. Ekkor f-nek egyértelműen létezik egy $\tilde{f} : (\tilde{\mathbb{X}}, \tilde{\rho}) \mapsto (\tilde{\mathbb{Y}}, \tilde{\varrho})$ folytonos kiterjesztése (amely maga is LIPSCHITZ-folytonos ugyanazzal a LIPSCHITZ-állandóval, mint f, ha f az volt). Sok esetben f műveleti tulajdonságai átöröklődnek $\tilde{f}$-ra, főleg, ha ezek algebrailag, például egyenlőségekkel, vagy egyenlőtlenségekkel vannak kifejezve. Erre példa normált tér kibővítése teljes normált térré, ahol f maga a norma és $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^1_+$ (ld. 12.3.2.).

12.3. Normált terek

12.3.1. A normált tér fogalma

(Véges dimenziós $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{C}^n$ esetére ld. még 4.1.6.)

12.3.1.1. A normált tér axiómái

Legyen X vektortér a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ test felett. Egy $\|\cdot\|\colon \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$ függvényt az X vektortéren értelmezett *normá*nak, az $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ párt pedig $\mathbb{K}$ feletti *normált tér*nek nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in \mathrm{X}$ elemekre és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{K}$ számra fennállnak a következő tulajdonságok, a *normált tér axiómái*:

$$\textbf{(N1)} \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{és} \quad \|x\| = 0 \quad \text{pontosan akkor, ha } x = 0\,, \tag{12.71}$$

$$\textbf{(N2)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \qquad \text{(homogenitás)}\,, \tag{12.72}$$

$$\textbf{(N3)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(háromszög-egyenlőtlenség)}\,. \tag{12.73}$$

A háromszög-egyenlőtlenség másik alakja:

$$\|x - y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|\,. \tag{12.74}$$

Ha **(N1)** helyett csak $\|x\| \geq 0$ igaz, tehát létezik $x \neq \mathbf{0}$, amire $\|x\| = 0$, akkor *félnormált tér*ről, ill. *félnormá*ról beszélünk. Ilyenkor $\{x \mid \|x\| = 0\}$ altere X-nek, ami pontosan az $xRy : \|x - y\| = 0$ ekvivalenciareláció $\mathbf{0}$-t tartalmazó osztálya. Az ekvivalenciaosztályokon a félnorma állandó. X-et ezen altér szerint lineáris algebrai értelemben faktorizálva és a faktortér elemeihez a megfelelő ekvivalenciaosztály, azaz eltolt altér elemeinek közös félnormáját hozzárendelve már normált teret kapunk. A

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in \mathrm{X} \tag{12.75}$$

definícióval minden normált tér meghatároz egy metrikus teret úgy, hogy a kiindulási $\|\cdot\|$ norma: $(\mathrm{X}, \rho) \to \mathbb{R}^1_+$ 1 állandójú LIPSCHITZ-folytonos függvény és a (12.75) metrika még a vektortér műveleteivel is kompatibilis, azaz

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)\,, \tag{12.76a}$$

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{K}\,. \tag{12.76b}$$

Így a normált terekben mind a vektorterek, mind a metrikus terek tulajdonságai — méghozzá (12.76a) és (12.76b) értelmében egymással kompatibilisen — érvényesek. Ebből adódik egyrészt az, hogy a legtöbb lokális, egy pontra vonatkozó kérdést vissza lehet vezetni a $\mathbf{0}$-ra, mert a két

$$B(\mathbf{0}; 1) = \{x \in \mathrm{X} \mid \|x\| < 1\} \quad \text{és} \quad \overline{B}(\mathbf{0}; 1) = \{x \in \mathrm{X} \mid \|x\| \leq 1\} \tag{12.77}$$

egységgömb eltolásinvariáns, ami azt jelenti hogy

$$B(x; r) = \{y \in \mathrm{X} \mid \|y - x\| < r\} = x + rB(\mathbf{0}; 1) = \mathrm{X} + B(\mathbf{0}; r) \quad \forall\, x \in X \ \text{ és } \ \forall\, r > 0 \tag{12.78}$$

és hasonlóan $\overline{B}(x; r) = x + \overline{B}(\mathbf{0}; r)$, másrészt pedig a kiindulási vektortér műveletei a normával definiált metrikában folytonosak, azaz

$$\begin{aligned} &x_n \to x, \quad y_n \to y, \quad \alpha_n \to \alpha \quad \text{esetén} \\ &x_n + y_n \to x + y\,, \quad \alpha_n x_n \to \alpha x\,, \quad \|x_n\| \to \|x\|\,. \end{aligned} \tag{12.79}$$

(Pontosabban $x + y : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mapsto (\mathrm{X}, \rho)$, ahol $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ az (X, ρ) metrikus tér önmagával vett direkt szorzata és ehhez hasonlóan αx a $\mathbb{K}$ és (X, ρ) metrikus terek direkt szorzatán értelmezett és (X, ρ)-ba ható leképezésként folytonos.) Normált térben minden $B(x; r)$ és $\overline{B}(x; r)$ gömb konvex.
Normált és félnormált terekben $x_n \to x_0$ konvergens sorozatokra (12.51) helyett a vele ekvivalens

$$\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \tag{12.80}$$

írásmódot is szokás használni.

A félnormából ugyanúgy származtathatunk félmetrikát (ami azt jelenti, hogy (12.39)-ből csak $\rho(x,y) \geq 0$-t követeljük meg), mint ahogy a normából metrikát. Ha a félnormált vektortér mint félmetrikus tér teljes, akkor a normált faktortér a normából származó metrikával szintén teljes metrikus tér lesz.

1. Példák normált terekre $\mathbf{K}^n$-ben

1. oktaédernorma , más néven abszolútösszeg-norma

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{12.81}$$

$\mathbb{R}$-ben ezen norma egységgömje a $[-1,1]$ intervallum. $\mathbb{R}^2$-ben a $\mathbf{0}$ közepű egységnégyzet 45°-kal elforgatva és $\sqrt{2}$-szeresen felnagyítva, $\mathbb{R}^n$-ben egy oktaéder.

2. gömbnorma , vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = |a| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}. \tag{12.82}$$

Eza a norma egyenlő a vektor hosszával és egységgömbje az n-dimenziós egységgömb.

3. l^p-norma:

$$\|a\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{12.83}$$

Ennek az előző kettő speciális esete $p = 1$, illetve $p = 2$-vel.

4. kockanorma , más néven maximumnorma, vagy végtelen norma:

$$\|a\|_\infty = \max_i |a_i|. \tag{12.84}$$

$\mathbb{R}^n$-ben egységgömje az n-dimenziós egységkocka. Továbbá

$$\|a\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|a\|_p.$$

Mindegyik fenti norma esetén $x_k \to x$ pontosan akkor, ha $\lim_{k\to\infty} \|a_k - a\| = 0$, továbbá pontosan akkor, ha minden koordinátára $(x_k) \to (x)_k$. Továbbá mindezek $\mathbb{K}^n$ bármely más normájára is érvényesek, hiszen véges dimenziós vektortérben bármely két norma ekvivalens.

2. Négyzetes mátrixok vektorterének normái, azaz speciális normák $\mathbf{K}^{n^2}$-en

1. $$M(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \tag{12.85}$$

2. $$N(A) = \sqrt{\mathrm{Sp}(A^{\mathrm{H}} A)} \tag{12.86}$$

ami nem más mint a $\mathbb{K}^{n^2}$-en definiált euklideszi norma, azaz $\sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$ egy másik alakja.

Ha adott egy $\|\cdot\|$ norma $\mathbb{K}^n$-en és egy $\|\cdot\|$ norma a $\mathbb{K}$ feletti $n \times n$-es mátrixok vektorterén, akkor a mátrixnorma kompatibilis a vektornormával, ha minden A mátrixra és minden x vektorra

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|. \tag{12.87}$$

$M(A)$ kompatibilis a kocka-, oktaéder- és gömbnormával, $N(A)$ pedig a gömbnormával.
Adott $\|\cdot\|$ vektornormával kompatibilis mátrixnormák között van egy kitüntetett, a vektornormához hozzárendelt természetes mátrixnorma, más néven a vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \tag{12.88}$$

Az oktaéder-, gömb-, és kockanorma által indukált mátrixnormák a következők: az

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{oszlopösszegnorma,} \tag{12.89}$$

vagyis az „abszolút oszlopösszegek" maximuma;

$$\|A\|_2 = \max_k \sqrt{\lambda_k(A^{\mathrm{H}}A)}, \tag{12.90}$$

ahol $\lambda_k(B)$ a B mátrix sajátértékei, és mivel $A^{\mathrm{H}}A$ hermitikus mátrix, azért sajátértékei valósak; a

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{sorösszegnorma,} \tag{12.91}$$

vagyis az „abszolút sorösszegek" maximuma. $\|A\|_2$-t szokás a mátrix spektrálnormájának is nevezni. Egy négyzetes mátrix bármely sajátértékét abszolút értékben felülről becsli bármely normája.

12.3.1.2. A normált terek néhány tulajdonsága

Az összes metrikus vektorterek közül pontosan azok *normálhatók*, vagyis azokban lehet az $\|x\| = \rho(x, \mathbf{0})$ definícióval — a metrikát generáló — normát bevezetni, amelyeknek a metrikája kielégíti a (12.76a) és a (12.76b) feltételt.

Az X és Y normált tereket *normaizomorf*nak mondjuk, ha van olyan $T\colon \mathrm{X} \mapsto Y$ bijektív lineáris leképezés, hogy $\|Tx\|_Y = \|x\|_{\mathrm{X}}$; ekkor természetesen mint metrikus terek izometrikusak. Legyen megadva az X vektortéren egy $\|\cdot\|_1$ és egy $\|\cdot\|_2$ norma. Azt mondjuk, hogy a $\|\cdot\|_1$ norma *erősebb* a $\|\cdot\|_2$ normánál, ha van olyan $\gamma > 0$ szám, hogy $\|x\|_2 \le \gamma\|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$. Ebben az esetben egy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat $\|\cdot\|_1$ normában való konvergenciája x-hez, vagyis $\|x_n - x\|_1 \longrightarrow 0$ maga után vonja, hogy a sorozat a $\|\cdot\|_2$ normában is tart x-hez, vagyis $\|x_n - x\|_2 \longrightarrow 0$.

Egy $\|\cdot\|$ és egy $|||\cdot|||$ normát egymással *ekvivalens*nek mondunk, ha létezik két $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ szám, amelyre $\forall\, x \in \mathbf{X}$ esetén fennáll $\gamma_1\|x\| \le |||x||| \le \gamma_2\|x\|$, vagy ekvivalensen létezik $0 < m_1 < m_2$, hogy minden $\mathbf{0} \neq x$-re $m_1 < \dfrac{\|x\|}{|||x|||} < m_2$.

Két (és ugyanígy akárhány) közös test feletti vektortér szorzatát úgy értelmezzük, hogy az alaphalmazok DESCARTES-szorzatán koordinátánként definiáljuk a vektortér műveleteit. Ha $(E_1, \|\cdot\|_1)$ és $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normált terek, akkor az $E_1 \times E_2$ szorzattéren az (x_1, x_2) vektorhoz rendelt $\max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$, $\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ és $\sqrt{\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2}$ normák ekvivalensek. Másrészt $C[(0,1)]$-en (és hasonlóan $C[(a,b)]$-n) az $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$ integrálnorma és a $\max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ maximumnorma nem ekvivalensek. Ennek oka, hogy $C[(0,1)]$ a maximumnormával jól ismerten teljes metrikus tér (ez a norma metrizálja az egyenletes konvergenciát), az integrálnorma viszont nem. Ezt mutatja az

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \le t \le 1, \\ \left(\frac{1}{2}, 0\right)\text{-t és } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right)\text{-et összekötő lineáris,} & \text{ha } \dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Természetesen (f_n) CAUCHY-konvergens, de a limesze az integrálnormában $\left[0, \dfrac{1}{2}\right)$-en 0, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right]$-en 1, ami nem lehet folytonos. Ha most a két norma ekvivalens lenne, akkor f_n a maximumnormában is CAUCHY-konvergens lenne (közvetlenül is látszik, hogy ez nem áll fenn), de akkor lenne limesze, de akkor ugyanez lenne a limesze az ekvivalens integrálnormában, holott láttuk, hogy ebben a normában nincs limesze.

Az általános tanulság tehát egyrészt az, hogy egy vektortér lehet egy normával teljes, egy másikkal pedig nem teljes, és másrészt, hogy két ilyen norma nem lehet ekvivalens.
Másrészt két teljes norma sem mindig ekvivalens. Erre példa az $L^1 = L^1([0,1],\lambda)$ vektortér az $N_1(f)$ és az $N_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} f$ normával (ld. 12.9.4.; ezek valójában félnormák, de ugyanazon az altéren 0-k, ezért eszerint faktorizálva ugyanazon a faktortéren lesznek normák). Így kapjuk az $(\mathcal{L}^1(\lambda), \|f\|_1 = N_1(f))$ és az $(\mathcal{L}^\infty(\lambda), \|f\|_\infty = N_\infty(f))$ BANACH-tereket (megint ld. 12.9.4.). Legyen

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \le t \le 1 - \dfrac{1}{n} \\ \sqrt{n}, & \text{ha } 1 - \dfrac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}.$$

Ekkor $N_1(f_n) \to 0$, $N_\infty(f_n) \to \infty$, tehát a két — teljes — norma nem ekvivalens.
Véges dimenziójú vektortéren minden norma ekvivalens. Mivel a $\mathbb{K}$ test feletti $\mathbb{V}$ vektortér izomorf $\mathbb{K}^{\dim V}$-vel, tehát a $\mathbb{K}$-beli elemekből álló, $\dim \mathbb{V}$ hosszúságú sorozatokkal (ez végtelen dimenzió esetén is igaz), a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós $\mathbb{V}$ vektortér bármely normával teljes, mert egyrészt a bármely bázissal definiált euklideszi normával az, másrészt a fenti norma-ekvivalencia egyenértékű azzal, hogy ha $x_n \to x$ valamelyik normában, akkor $x_n \to x$ bármelyik másikban.
Normált tér alterén zárt lineáris alteret értünk.

12.3.2. Banach-terek

A normából származó metrikára, röviden a normára teljes, azaz teljes normált tereket BANACH-*tereknek* hívjuk. Ez a tulajdonság a korábbiak értelmében tehát azt jelenti, hogy ha az (x_n) sorozatra minden ε-ra létezik $n(\varepsilon)$, hogy $n, m > n(\varepsilon)$ esetén $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, akkor létezik x, hogy $x_n \to x$, azaz $\|x_n - x\| \to 0$. Bármely $\mathbb{X}$ normált teret beágyazhatunk egy legszűkebb $\tilde{\mathbb{X}}$ BANACH-térbe úgy, hogy alkalmazzuk a 12.2.2.5. szakaszban ismertetett teljessé tételt, majd az algebrai műveleteket és a normát a 12.2.3.-ban említett tétellel természetes módon kiterjesztjük $\tilde{\mathbb{X}}$-ra; így kapjuk $\mathbb{Q}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-t, illetve a racionális valós és képzetes komplex részű szám n-esekből $\mathbb{C}^n$-t, vagy az $[a,b]$-n definiált polinomok maximumnormával ellátott vektorteréből $\mathcal{C}([a,b])$-t a maximumnormával. Azaz ha $x = [(x_n)]$ a teljes metrikus tér egy eleme, ami a kiindulási tér CAUCHY-konvergens (x_n) sorozatának ekvivalenciaosztálya, akkor

$$\|[(x_n)]\| := \lim \|x_n\|, \quad [(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)] \quad \text{és} \quad \alpha[(x_n)] = [(\alpha x_n)].$$

Belátható, hogy ezek a definíciók értelmesek, azaz függetlenek a reprezentáns sorozat megválasztásától.

12.3.2.1. Sorok normált terekben

Normált térben vizsgálni lehet térbeli elemekből képzett

$$x_1 + x_2 + \dots \tag{12.92}$$

sorokat. Egy sort *konvergens*nek mondunk, ha a részletösszegek sorozatának létezik határértéke:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n = s\,, \quad s \in \mathbb{X}\,. \tag{12.93}$$

Ilyenkor az s határértéket a sor *összeg*ének nevezzük és az $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ írásmódot alkalmazzuk. A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sort *abszolút konvergens*nek mondjuk, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ numerikus sor konvergens. BANACH-térben minden abszolút konvergens sor konvergens, és az összegre fennáll $\|s\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

12.3.2.2. A fontosabb Banach-terek

■ **A** : $\mathbb{K}^n$ ahol $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, ha $1 \le p < \infty$, tehát a korábbi (12.83);

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|\,, \qquad \text{tehát a korábbi (12.84), ami } \lim_{p\to\infty} \|x\|_p\text{-vel egyenlő, ezért jelöljük így.} \tag{12.94a}$$

Az egyazon $\mathbb{K}^n$ vektortéren ily módon keletkező normált terekre gyakran az $\mathbf{l}^p(n)$ $(1 \le p \le \infty)$ jelölést használjuk, és ha $1 \le p < \infty$, akkor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *euklideszi tereknek*, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén pedig *unitér tereknek* hívjuk őket. További példák a $\mathbb{K}^n$-en korábban bevezetett többi normák és általában $\mathbb{K}^n$ bármely normával, megintcsak azért, mert véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens és ekvivalens normára a teljesség átöröklődik, azaz egy — akár végtelen dimenziós — BANACH-tér bármely ekvivalens normával szintén BANACH-tér.

■ **B** : $\mathbf{m}$ ahol $\|x\| = \sup_k |\xi_k|\,.$ (12.94b)

■ **C** : $\mathbf{c}$ és $\mathbf{c_0}$ az $\mathbf{m}$ tér normájával. (12.94c)

■ **D** : $\mathbf{l}^p$ ahol $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty)\,.$ (12.94d)

■ **E** : $\mathcal{C}([a,b])$ ahol $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|\,,$ ami (12.94b) természetes általánosítása. (12.94e)

■ **F** : $L^p((a,b))$ $(1 \le p < \infty)$ ahol $\|x\| = \left\{\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}$, ami a fenti $\mathbf{l}^p$ természetes általánosítása. (12.94f)

■ **G** : $\mathcal{C}^{(k)}([a,b])$ ahol $\|x(t)\| = \sum_{l=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(l)}(t)|\,,$ aminek az **E** példa $k = 0$-hoz tartozó speciális esete. (12.94g)

12.3.2.3. Szoboljev-terek

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan korlátos tartomány, azaz nyílt és összefüggő halmaz, amelynek $\partial\Omega$ határa elég sima (legalább 2-szer folytonosan deriválható). Ha $n = 1$, akkor az Ω tartomány egy (a,b) intervallum, ha pedig $n = 2$ vagy 3, akkor tipikusan ilyen egy nyílt kör vagy gömb, általában egy nyílt konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f\colon \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény az $\overline{\Omega}$ zárt tartományon k-szor folytonosan differenciálható, ha f az Ω (nyílt) tartományon k-szor folytonosan differenciálható, és mindegyik legfeljebb k-ad rendű parciális deriváltjának van határértéke, akárhogy is tartunk Ω belsejéből Ω tetszőleges határpontjához; ezt biztosítja a határ simasága, vagy a szóbanforgó deriváltak egyenletes folytonosága Ω-n. Más szóval mindegyik, legfeljebb k-ad rendű parciális derivált folytonosan és korlátosan kiterjeszthető Ω lezárására. Ebben a vektortérben bevezetjük az

$$\|f\|_{k,p} = \|f\| = \left\{\int_{\overline{\Omega}} |f(x)|^p\,d\lambda + \sum_{1\le|\alpha|\le k} \int_{\overline{\Omega}} |D^\alpha f|^p\,d\lambda\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{12.95}$$

normát (ami a fenti **A**, **D**, **F** és **G** egyfajta közös általánosítása), ahol $p \in [1,\infty)$ és λ a LEBESGUE-mérték $\mathbb{R}^n$-ben (ld. 658. old.). Az így kapott normált teret a $W^{k,p}(\Omega)$-val jelöljük. Itt α *multiindex*, azaz nem feltétlenül különböző nemnegatív egész számokból álló $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ rendezett n-es, amelyre legyen $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Az $f(x) = f(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — ahol $x = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \overline{\Omega}$ — függvénnyel kapcsolatban (12.95)-ben a

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}} \tag{12.96}$$

rövidített írásmódot alkalmaztuk. A $W^{k,p}(\Omega)$ normált tér nem teljes. Teljes burkát $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$-val vagy a $p = 2$ esetben $\mathbb{H}^k(\Omega)$-val jelöljük és SZOBOLJEV-*tér*nek hívjuk.

12.3.3. Rendezett normált terek

1. Kúpok a normált térben

Legyen $\mathbf{X}$ valós normált tér a $\|\cdot\|$ normával. Egy $\mathbf{X}_+ \subset \mathbf{X}$ kúpot *tömör*nek mondunk, ha $\mathbf{X}_+$ tartalmaz valódi gömböt, azaz $\mathrm{Int}(\mathbf{X}_+)$, tehát a belseje nem üres.

■ Az $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([a,b])$, $\mathbf{c}$ terekben a szokásos kúpok, tehát $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$, a nemnegatív, illetve a nempozitív folytonos függvények, a nemnegatív, illetve a nempozitív számokból álló konvergens sorozatok tömörek, az $L^p([a,b])$ és $\mathbf{l}^p$ $(1 \le p < \infty)$ terekben a hasonlóan definiáltak viszont nem.

Az $\mathbf{X}_+$ kúpot *normális*nak mondjuk, ha a norma $\mathbf{X}$-en a kúppal definiált rendezésre szemimonoton, vagyis ha létezik olyan $M > 0$ konstans, hogy

$$0 \le x \le y \implies \|x\| \le M\|y\|. \tag{12.97}$$

Ha $\mathbf{X}$ egy $\mathbf{X}_+$ kúp segítségével rendezett BANACH-tér, akkor pontosan abban az esetben lesz minden (0)-intervallum normában korlátos, ha az $\mathbf{X}_+$ kúp normális. A normalitás és ezen ekvivalencia ténye nem változik ekvivalens normára való áttéréskor.

■ A nemnegatív komponensű vektorok, ill. a nemnegatív függvények kúpja az $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c_0}$, $\mathcal{C}$, $\mathbf{l}^p$ és L^p térben normális.

A kúpot *reguláris*nak mondjuk, ha a vele definiált rendezésben minden monoton növekedő, felülről korlátos

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le z \tag{12.98}$$

sorozat CAUCHY-sorozat $\mathbf{X}$-ben. BANACH-térben minden zárt reguláris kúp normális.

■ Az $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{l}^p$ és L^p $(1 \le p < \infty)$ terekben a kúpok regulárisak, a $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{m}$ térben viszont nem ($\mathbf{c}$-ben például az $x_n = (1, 1, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots)$ vektorok sorozata nem CAUCHY-konvergens).

2. Normált vektorhálók és Banach-hálók

Legyen $\mathbf{X}$ vektorháló, amely egyidejűleg normált tér is. $\mathbf{X}$-et *normált hálónak* vagy *normált vektorhálónak* nevezzük (ld. [12.18], [12.22], [12.25], [12.26]), ha a normára teljesül az

$$|x| \le |y| \quad \text{esetén} \quad \|x\| \le \|y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X} \qquad \text{(a norma monotonitása)} \tag{12.99}$$

feltétel. A (normára nézve) teljes normált hálókat BANACH-*hálók*nak hívjuk.

■ A $\mathcal{C}([a,b])$, L^p, $\mathbf{l}^p$, $\mathcal{B}([a,b])$ terek BANACH-hálók.

12.3.4. Normált algebrák

A $\mathbb{K}$ fölötti $\mathbb{X}$ vektorteret *algebrá*nak nevezzük, ha az $\mathbb{X}$ vektortéren értelmezett és a **(V1)**–**(V7)** axiómákat (ld. 12.1.1.) kielégítő műveleteken kívül tetszőleges két $x, y \in \mathbb{X}$ elemre értelmezve van ezek $x \cdot y \in \mathbb{X}$, vagy egyszerűbb írásmóddal xy szorzata úgy, hogy tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén fennállnak a következő tulajdonságok:

$$\textbf{(A1)} \quad x(yz) = (xy)z\,, \text{ tehát a szorzás asszociatív;} \tag{12.100}$$

$$\textbf{(A2)} \quad x(y+z) = xy + xz\,; \tag{12.101}$$

$$\textbf{(A3)} \quad (x+y)z = xz + yz\,, \tag{12.102}$$

tehát — (12.101)-vel együtt — a szorzás az összeadásra mindkét oldalról disztributív;

$$\textbf{(A4)} \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)\,. \tag{12.103}$$

Így az összeadás és a szorzás együtt gyűrűt definiál.
Az algebra *kommutatív*, ha minden elempárra fennáll $xy = yx$. Az $\mathbb{X}$ algebrát az $\mathbb{Y}$ algebrába leképező $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ lineáris operátort (ld. 12.21) *algebra-homomorfizmus*nak nevezzük, ha szorzattartó, azaz tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ elempárra fennáll

$$T(x_1 \cdot x_2) = Tx_1 \cdot Tx_2\,. \tag{12.104}$$

T izomorfizmus, ha még kölcsönösen egyértelmű is. $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ izomorf, ha van köztük izomorfizmus.
Az $\mathbb{X}$ algebrát *normált algebrá*nak, ill. BANACH-*algebrá*nak nevezzük, ha $\mathbb{X}$ normált vektortér, ill. BANACH-tér, és a norma a következő további tulajdonsággal rendelkezik:

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{12.105}$$

Normált algebrában mindegyik művelet, tehát a (12.79) összefüggéseken kívül a szorzás, mint $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ művelet is folytonos, azaz $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$, tehát $x_n \longrightarrow x$ és $y_n \longrightarrow y$ esetén $x_n y_n \longrightarrow xy$ is teljesül (ld. [12.23]).

Minden normált algebrát teljessé tétellel BANACH-algebrává lehet bővíteni úgy, hogy még a szorzatot is kiterjesztjük a normával képzett metrikus tér teljes bővítésére a 12.2.3.-ban leírtak szerint. A vektortér-műveletek kiterjesztéséről már volt szó korábban; $xy = [(x_n)][(y_n)] := [(x_n y_n)]$, ahol $(x_n y_n)$ CAUCHY-konvergenciáját (12.105) biztosítja és a definíció megint független $[(x_n)]$ és $[(y_n)]$ reprezentációjának megválasztásától.
Az $\mathbb{X}$ BANACH-algebra egységelemes, ha a vektorszorzásnak van egységeleme, és az 1 normájú. Ha az $\mathbb{X}$ BANACH-algebrában a szorzásnak van egységeleme, akkor van az eredeti normával ekvivalens norma, amellyel $\mathbb{X}$ egységelemes BANACH-algebra (természetesen ugyanazzal az egységelemmel). Minden nem egységelemes $\mathbb{X}$ BANACH-algebra izometrikus és izomorf módon beágyazható egy egységelemes BANACH-algebrába: ennek alaphalmaza $\mathbb{X} \dot{\times} \mathbb{K}$, az összeadás és a skalárral szorzás koordinátánként végzendő el, $(x, \alpha)(y, \beta) := (xy + \alpha y + \beta x + \alpha\beta)$, $\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|$ és egységeleme a $(\mathbf{0}, 1)$.

■ **A:** $\mathcal{C}([a, b])$ a (12.94e) normával és a folytonos függvényeknél megszokott (pontonkénti) szorzással BANACH-algebra, az $\|f\| = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}$ normával és az $fg = \left(\int_a^b |fg|\right)^{1/2}$ vektorszorzattal normált algebra, melynek teljes bővítése az $L^2([a, b])$ BANACH-, sőt HILBERT-tér.

■ **B:** Az abszolút konvergens FOURIER-sorba fejthető, komplex értékű, a $[0, 2\pi]$ intervallumon folytonos, $x(0) = x(2\pi)$-t kielégítő $x(t)$ függvények, tehát az

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (c_n \in \mathbb{C}), \tag{12.106}$$

alakban felírhatók $W([0, 2\pi])$ vektortere az $\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ normával és a pontonkénti szorzással.

■ **C:** Az $\mathbb{X}$ normált téren korlátos lineáris operátorok $L(\mathbb{X}) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ tere az operátornormával és a szokásos algebrai műveletekkel (ld. 12.5.1.2.), ahol két operátor $T \cdot S$ szorzatán az egymás utáni elvégzést, vagyis a $TS(x) = T(S(x))$, $x \in \mathbb{X}$ képlettel definiált operátort értjük. $L(\mathbb{X})$ normált tér, ha $\mathbb{X}$ normált tér, és BANACH-tér, ha $\mathbb{X}$ is az. Sőt, ekkor egységelemes BANACH-algebra, melynek egységeleme a $Tx \equiv x$ identikus lineáris operátor, melynek operátornormája 1.

■ **D:** A valós tengelyen mérhető és abszolút integrálható valós vagy komplex értékű függvények $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti $L^1(-\infty, \infty)$ tere (ld. 12.9.) az

$$\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt\,, \tag{12.107}$$

normával, ha két függvény szorzatát az $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - s)y(s)\, ds$ konvolúcióval definiáljuk.

12.4. Hilbert-terek

12.4.1. A Hilbert-tér fogalma

12.4.1.1. Skalárszorzat

A $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ konjugálásra zárt test feletti $\mathbb{V}$ vektorteret (legtöbbször a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetet tekintjük) *skalárszorzattal ellátott tér*nek, *belsőszorzattér*nek, *euklideszi tér*nek vagy *prehilbert-tér*nek nevezzük, ha minden $x, y \in \mathbb{V}$ elempárhoz hozzá van rendelve egy $(x, y) \in \mathbb{K}$ szám, x és y *skalárszorzata* úgy, hogy

tetszőleges $x, y, z \in \mathbf{V}$ elemekre és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{K}$ számra teljesülnek a következő feltételek, a skalárszorzat axiómái:

$$\textbf{(H1)}\ (x,x)\ \text{valós},\ \ (x,x) \geq 0\,, \tag{12.108}$$

$$\textbf{(H2)}\ (\alpha x, y) = \alpha(x,y)\,, \tag{12.109}$$

$$\textbf{(H3)}\ (x+y, z) = (x,z) + (y,z)\,, \tag{12.110}$$

$$\textbf{(H4)}\ (x,y) = \overline{(y,x)}\,. \tag{12.111}$$

($\overline{\omega}$ az ω szám komplex konjugáltja.)
Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tehát valós vektortérről van szó, akkor **(H4)** egyszerűen a skalárszorzat kommutativitását követeli meg. Az axiómákból azonnal adódnak a következő tulajdonságok:

$$(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y) \quad \text{és} \quad (x, y+z) = (x,y) + (x,z)\,. \tag{12.112}$$

tehát a második változóból — szemben az elsővel — a szorzó konjugáltja emelhető ki. Tehát a skalárszorzat mindkét változójában additív és első változójában homogén lineáris, második változójában konjugáltan lineáris, $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ esetén szintén homogén lineáris.
Ha $\mathbb{K}^n$-ben adott egy bázis és a vektorokat ezen bázis szerinti koordinátáikkal reprezentáljuk, akkor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\mathbb{K} \supsetneq \mathbb{R}$ esetén $\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ skalárszorzat. Ha $\mathbf{X} = R([a,b])$, tehát az $[a,b]$-n (például) RIEMANN-integrálható függvények vektortere, vagy annak bármely altere, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, ill. komplex értékű függvények esetén $\displaystyle\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ skalárszorzat.

12.4.1.2. Unitér terek és néhány tulajdonságuk

Prehilbert-térben a skalárszorzat az

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{12.113}$$

definícióval félnormát generál. A $\mathbf{H} = (\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ normált teret *unitér*nek mondjuk, ha benne skalárszorzatot lehet bevezetni, amely a normával a (12.113) kapcsolatban áll. Unitér térben a skalárszorzat létezése és a (12.113) összefüggés alapján fennállnak a következő, figyelemre méltó tulajdonságok:

1. Háromszög-egyenlőtlenség:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \tag{12.114}$$

2. Cauchy–Schwarz- vagy Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (ld. (1.107)-et mint elemi változatát):

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}\,. \tag{12.115}$$

3. Paralelogramma-egyenlőség: Teljesül prehilbert-terekben, sőt az unitér tereket jellemzi a normált terek osztályában.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\,. \tag{12.116}$$

4. A skalárszorzat folytonossága:

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad \text{esetén} \quad (x_n, y_n) \to (x,y)\,. \tag{12.117}$$

12.4.1.3. Hilbert-tér

A teljes unitér tereket HILBERT-*tereknek* nevezzük. A HILBERT-terek ezek szerint egyben BANACH-terek is, tehát rendelkeznek azok tulajdonságaival (ld. a 12.3.1., 12.3.1.2., 12.3.2. szakaszokat). Ehhez jönnek még az unitér terek tulajdonságai (12.4.1.2. szakasz). HILBERT-tér alterén zárt lineáris alteret értünk: ha $x_n \to x$, $(x_n) \subset$ altér, akkor x is az altérben van.

■ **A:** $\mathrm{l}^2(n)$, l^2 és az $L^2([a,b])$ a 12.4.1.1.-ben definiált képlet szerinti skalárszorzatokkal.

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k}\,,\ (x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k} \quad \text{és} \quad (x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt\,. \tag{12.118}$$

■ **B:** A $\mathbb{H}^k(\Omega)$ tér az

$$(f,g) = \int_{\overline{\Omega}} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \sum_{1\le|\alpha|\le l}\int_{\overline{\Omega}} D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx, \quad l \le k, \tag{12.119}$$

skalárszorzattal, ami illusztrálja azt is, hogy skalárszorzatok összege is skalárszorzat.
■ **C:** Legyen $\varphi(t)$ az $[a,b]$ intervallumon mérhető és pozitív függvény. A komplex $L^2([a,b],\varphi)$ tér, amely az összes mérhető, az $[a,b]$ intervallumon a φ *súlyra* nézve négyzetesen integrálható függvényekből áll, HILBERT-térré válik, ha bevezetjük a következő skalárszorzatot:

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\varphi(t)\,dt\,. \tag{12.120}$$

12.4.2. Ortogonalitás

A $\mathbb{H}$ HILBERT-tér (e szakasz fogalmai prehilbert térben, ill. unitér térben is értelmesek) két x, y elemét egymásra *merőleges*nek vagy *ortogonális*nak mondjuk (és ezt $x \perp y$-nal jelöljük), ha $(x,y) = 0$. Tetszőleges $A \subset \mathbb{H}$ részhalmaz esetén az A minden vektorára ortogonális vektorok

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{H} \mid (x,y) = 0 \quad \forall\, y \in A\} \tag{12.121}$$

halmaza $\mathbb{H}$-nak (zárt) altere, amelyet A *ortogonális komplementumá*nak nevezünk. Az $A \perp B$ jelölés azt fejezi ki, hogy $(x,y) = 0\ \forall\, x \in A$ és $\forall\, y \in B$. Ha A csak az x elemből áll, akkor nem $\{x\}$-ot írunk, hanem az $x \perp B$ írásmódot alkalmazzuk.

12.4.2.1. Az ortogonalitás tulajdonságai

A nullvektor $\mathbb{H}$ minden vektorára ortogonális. Fennáll:
a) Ha $x \perp y$ és $x \perp z$, akkor $x \perp (\alpha y + \beta z)$.
b) Ha $x \perp y_n$ és $y_n \to y$, akkor $x \perp y$.
c) A fentiekből adódóan pontosan akkor lesz $x \perp A$, ha $x \perp \overline{lin(A)}$, ahol $\overline{lin(A)}$ az A halmaz zárt lineáris burka, tehát a legszűkebb tartalmazó zárt lineáris altér, ami ezek metszete.
d) Ha $x \perp A$, ahol A *zárt rendszer*, azaz $lin(A)$ mindenütt sűrű $\mathbb{H}$-ban, akkor $x = \mathbf{0}$.
e) PITAGORASZ **tétele**: Ha az $x_1, \ldots, x_n$ elemek páronként ortogonálisak, azaz $x_k \perp x_l$ ha $k \ne l$, akkor

$$\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2\,. \tag{12.122}$$

f) Projekciótétel: Ha $\mathbb{H}_0$ a $\mathbb{H}$ tér altere, akkor minden $x \in \mathbb{H}$ vektor egyértelműen előállítható az

$$x = x' + x'', \quad x' \in \mathbb{H}_0\,,\ x'' \perp \mathbb{H}_0\,,\ \text{azaz}\ \ x'' \in \mathbb{H}_0^\perp \tag{12.123}$$

alakban.
g) Approximációs feladat: Továbbá fennáll $\|x''\| = \rho(x,\mathbb{H}_0) = \inf_{y\in\mathbb{H}_0}\{\|x-y\|\}$, úgyhogy x' az

$$\|x-y\| \to \inf \quad y \in \mathbb{H}_0 \tag{12.124}$$

feladat egyetlen megoldása $\mathbb{H}_0$-ban, azaz X-et $\mathbb{H}_0$-ból lehetséges legjobban megközelíteni, más szóval approximálni és a legjobban közelítő, azaz legjobban approximáló vektor egyértelmű. Mi több, ezen egyértelmű legjobb megközelíthetőség szempontjából $\mathbb{H}_0$ helyettesíthető $\mathbb{H}$ bármely konvex, zárt, nem üres részhalmazával (minden altér ilyen).
Az x' elemet az x elem $\mathbb{H}_0$-ra való *projekciójá*nak nevezzük, mert x'-nek van az x-től ($\mathbb{H}_0$-ig) mért legkisebb távolsága. A (12.123)-mal kifejezett tulajdonságot úgy is mondjuk, hogy a $\mathbb{H}$ tér $\mathbb{H}_0$-lal ortogonálisan felbontható, formálisan kifejezve: $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_0^\perp$.

12.4.2.2. Ortogonális rendszerek

$\mathbb{H}$-beli vektorok $\{x_\xi \mid \xi \in I\}$ halmazát *ortogonális* rendszernek nevezzük, ha a nullvektor nem tartozik a halmazhoz és fennáll $x_\xi \perp x_\eta$, ha $\xi \ne \eta$. Az ortogonális rendszert *ortonormált*nak mondjuk, ha még $\|x_\xi\| = 1$ is teljesül minden ξ-re. Természetesen a definíció értelmes minden prehilbert-térre is.
Szeparábilis HILBERT-térben bármely ortogonális rendszer legfeljebb megszámlálhatóan sok elemből

állhat. Ezért a továbbiakban mindig $I = \mathbb{N}$ lesz.

■ **A:** Az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \ldots \tag{12.125}$$

rendszer a valós $L^2([-\pi,\pi])$ térben és az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{12.126}$$

rendszer a komplex $L^2([-\pi,\pi])$ térben ortonormált rendszer. Mindkettőt *trigonometrikus* rendszernek hívjuk (a skalárszorzat a szorzat integrálja, ahogy a többi példában is).

■ **B:** A

$$P_n(t) = \frac{d^n}{d\,t^n}[(t^2-1)^n] \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{12.127}$$

elsőfajú LEGENDRE-polinomok (ld. 521. old.) az $L^2([-1,1])$ térben ortogonális rendszert alkotnak. A megfelelő ortonormált rendszer:

$$\tilde{P}_n(t) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{(2n)!!}\,P_n(t). \tag{12.128}$$

■ **C:** AZ HERMITE-féle differenciálegyenlet ((9.62b) második definíciója szerinti)

$$H_n(t) = e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2} \quad (n = 1, \ldots) \tag{12.129}$$

HERMITE-függvények (ld. 522, 554. old.) ortogonális rendszert alkotnak az $L^2((-\infty,\infty))$ térben.

■ **D:** AZ $L^2((0,\infty))$ térben a LAGUERRE-függvények ortogonális rendszert alkotnak (ld. 522. old.). Minden $L^2((a,b))$ térben, sőt minden euklideszi térben minden ortogonális rendszer lineárisan független, mert a nullvektort eleve kizártuk és $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = \mathbf{0}$-t x_j-vel skalárszorozva $\lambda_j\|x_j\| = 0$, azaz $\lambda_j = 0$ adódik. Megfordítva, ha $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ lineárisan független elemekből álló véges vagy végtelen rendszer egy euklideszi térben, akkor a GRAM–SCHMIDT-féle *ortogonalizálási eljárás*sal megadhatók $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ vektorok, amelyek ortonormált és emiatt független rendszert alkotnak, és amelyek egy 1 abszolút értékű szorzótényezőtől eltekintve egyértelműen meg vannak határozva, azzal a feltétellel, hogy minden n-re $lin(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = lin(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$, vagy ekvivalensen, minden n-re $x_n \in lin(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$ és $e_n \in lin(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$.

12.4.3. Fourier-sorok a Hilbert-térben

12.4.3.1. Legjobb megközelítés

Legyen

$$\{e_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \tag{12.130}$$

rögzített ortonormált rendszer $\mathbb{H}$-ban. Tetszőleges $x \in \mathbb{H}$-ra a $c_n = (x, e_n)$ számokat az x elem (12.130) rendszerre vonatkozó FOURIER-*együtthatói*nak nevezzük. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \tag{12.131}$$

(formális) sort az x elem (12.130) rendszerre vonatkozó FOURIER-*sorá*nak hívjuk (ld. 427. old.). Az x elem FOURIER-sorának n-edik részletösszege a *legjobb megközelítés* tulajdonságával rendelkezik, azaz minden n-re $\mathbb{H}_n = lin(\{e_1, \ldots, e_n\})$ összes vektorai közül a FOURIER-sor n-edik részletösszegén, vagyis a

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_n)e_n \tag{12.132}$$

elemen veszi fel az $\|x-y\|$ $(y \in \mathbb{H}_n)$, azaz az $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|$ kifejezés a legkisebb értékét, tehát az $\alpha_k = (x, e_k)$ választással. Az $x - \sigma_n$ vektor ortogonális $\mathbb{H}_n$-re, és érvényes a BESSEL-egyenlőtlenség:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2\,, \quad c_n = (x, e_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{12.133}$$

12.4.3.2. Parseval-egyenlőség, Riesz–Fischer-tétel

Tetszőleges $x \in \mathbb{H}$ elem FOURIER-sora mindig konvergál, mégpedig az x elem $\mathbb{H}_0 = \overline{lin(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})}$ altérre való projekciójához. Ha egy $x \in \mathbb{H}$ elem előállítható az $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ konvergens végtelen sorként, akkor az α_n számok x FOURIER-együtthatói, azaz $\alpha_n = (x, e_n)$. Ha $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tetszőleges számsorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, akkor $\mathbb{H}$-ban létezik pontosan egy x elem, amelynek FOURIER-együtthatói éppen az α_n számok: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Ekvivalensen: l^2 — és akkor a vele izometrikusan izomorf L^2 is — teljes metrikus tér; ez a RIESZ–FISCHER-tétel. Ezen x-re érvényes a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2 \tag{12.134}$$

zártsági reláció vagy PARSEVAL-egyenlőség, amely a BESSEL-egyenlőtlenség éles alakja, egyúttal a PITAGORASZ-tétel általánosítása is. Szeparábilis HILBERT-téren a PARSEVAL-egyenlőség és a RIESZ–FISCHER-tétel ekvivalensek.

A $\mathbb{H}$-beli $\{e_n\}$ ortonormált rendszert *teljes*nek mondjuk, ha a nullvektoron kívül nincs olyan y vektor, amely minden e_n-re ortogonális; a rendszert geometriai vagy SCHAUDER-*bázis*nak nevezzük, ha minden $x \in \mathbb{H}$ vektor egyértelműen előállítható az $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ alakban, tehát egyrészt $\alpha_n = (x, e_n)$ és x FOURIER-sora konvergens, másrészt x egyenlő is FOURIER-sorának az összegével. Ha ez csak bizonyos x-ekre teljesül, akkor szokás azt is mondani, hogy egy ilyen x FOURIER-sorba fejthető. A következő állítások ekvivalensek:

a) $\{e_n\}$ zárt rendszer $\mathbb{H}$-ban.
b) $\{e_n\}$ teljes $\mathbb{H}$-ban.
c) $\{e_n\}$ SCHAUDER-bázis $\mathbb{H}$-ban.
d) $\forall\, x, y \in \mathbb{H}$ esetén a megfelelő c_n és d_n $(n = 1, 2, \ldots)$ FOURIER-együtthatókra fennáll:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}\,. \tag{12.135}$$

e) Minden $x \in \mathbb{H}$ vektorra érvényes a (12.134) PARSEVAL-egyenlőség.

■ **A:** A (12.125) trigonometrikus rendszer bázis az $L^2([-\pi, \pi])$ térben.

■ **B:** A (12.128) normált LEGENDRE-polinomok $\tilde{P}_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ rendszere teljes, és ezért bázist alkot az $L^2([-1, 1])$ térben.

12.4.4. Bázis létezése. Izomorf Hilbert-terek

Minden szeparábilis HILBERT-térnek van SCHAUDER-bázisa. Ebből következik, hogy minden ortonormált rendszert bázissá lehet kiegészíteni.

A $\mathbb{H}_1$ és a $\mathbb{H}_2$ HILBERT-teret egymással *izomorf*nak mondjuk, ha létezik olyan T: $\mathbb{H}_1 \longrightarrow \mathbb{H}_2$ lineáris bijektív leképezés, amelyre $(Tx, Ty)_{\mathbb{H}_2} = (x, y)_{\mathbb{H}_1}$, vagyis a skalárszorzatot megtartja. Igaz a következő: Bármely két végtelen dimenziójú, szeparábilis HILBERT-tér izomorf, tehát speciálisan minden ilyen tér izomorf az $\mathbf{l}^2$ térrel.

12.5. Folytonos lineáris operátorok és funkcionálok

12.5.1. Lineáris operátorok korlátossága, normája és folytonossága

12.5.1.1. Lineáris operátorok korlátossága és normája

(A $\dim(\mathbb{X})$ és $\dim(\mathbb{Y})$ végessége esetén véges mátrixszal reprezentálható operátorok esetében ld. még 4.1.6.-ban mátrixnormaként).

Legyen $\mathbb{X} = (X, \|\cdot\|)$ és $\mathbb{Y} = (Y, \|\cdot\|)$ két normált tér. Az $\mathbb{X}$ téren értelmezett norma $\|\cdot\|_X$ jeléből a tér megjelölését a továbbiakban elhagyjuk, mert a mindenkori szövegösszefüggésből úgyis kiderül, hogy a normát melyik térben tekintjük. A $T\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ operátort *korlátos*nak mondjuk, ha van olyan $\lambda > 0$ valós szám, amelyre

$$\|T(x)\| \le \lambda\|x\| \quad (\forall\, x \in \mathbb{X})\,. \tag{12.136}$$

Ez ekvivalens azzal, hogy folytonos, és azzal, hogy LIPSCHITZ-folytonos.

Egy λ konstanssal korlátos operátor minden vektort legfeljebb λ-szorosára „nyújt meg", továbbá minden $\mathbb{X}$-beli korlátos halmazt $\mathbb{Y}$-beli korlátos halmazba visz át, speciálisan az $\mathbb{X}$-beli egységgömb képe $\mathbb{Y}$-ban korlátos. Az utóbbi tulajdonsággal a lineáris operátor korlátosságát jellemezni is lehet. Egy lineáris operátor pontosan akkor folytonos (12.2.3. szakasz), ha korlátos.

A legkisebb λ konstanst, amellyel (12.136) még érvényes, a T *operátor normájá*nak nevezzük és a $\|T\|$ módon jelöljük, azaz ha T korlátos, akkor

$$\|T\| := \inf\{\lambda > 0 \mid \|Tx\| \le \lambda\|x\|,\ x \in \mathbb{X}\} = \min\{\lambda > 0 \mid \|Tx\| \le \lambda\|x\|,\ x \in \mathbb{X}\} =$$

$$= \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\| \tag{12.137}$$

egyenlőségek, valamint a következő becslés:

$$\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\| \quad (\forall\, x \in \mathbb{X})\,. \tag{12.138}$$

T pontosan akkor kontrakció, ha normája < 1.

■ A (12.94d) normával ellátott $\mathcal{C}([a,b])$ térben az $\{a \le s, t \le b\}$ négyzeten folytonos, komplex értékű $K(s,t)$ függvény segítségével definiált

$$(Tx)(s) = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \quad (s \in [a,b]) \tag{12.139}$$

lineáris operátor korlátos, amely a $\mathcal{C}([a,b])$ teret a $\mathcal{C}([a,b])$ térbe képezi le. Az operátor normája

$$\|T\| = \max_{s \in [a,b]} \int_a^b |K(s,t)|\,dt\,. \tag{12.140}$$

12.5.1.2. A folytonos lineáris operátorok tere

Két $S, T\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ lineáris operátor $S + T$ összege és αT többszöröse pontonként van értelmezve:

$$U(x) = S(x) + T(x)\,, \qquad (\alpha T)(x) = \alpha \cdot T(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{X} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\,. \tag{12.141}$$

Az összes, $\mathbb{X}$-et $\mathbb{Y}$-ba leképező T folytonos lineáris operátorok $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ — $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ esetén $L(\mathbb{X})$ — vagy, egy másik gyakori jelöléssel, $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ halmaza így vektortérré válik, amelyen a (12.137) $\|T\|$ norma. Ezáltal $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-ból normált tér, sőt ha $\mathbb{Y}$ BANACH-tér, akkor BANACH-tér lesz. Speciálisan teljesülnek tehát a **(V1)**–**(V7)** és **(N1)**–**(N3)** axiómák.

Ha $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$, akkor két tetszőleges $S, T \in L(\mathbb{X}) = B(\mathbb{X})$ elem szorzatát az

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (\forall\, x \in \mathbb{X}) \tag{12.142}$$

képlettel definiáljuk, amely kielégíti a 12.3.4. szakaszban felsorolt **(A1)**–**(A4)** axiómákat, valamint a norma fenti, pl. (12.136) definíciójával a normával való kompatibilitás (12.105) feltételét, és így $L(\mathbb{X})$ (általában nem kommutatív) normált algebrává és, ha $\mathbb{X}$ BANACH-tér, BANACH-algebrává is válik. Ilyenkor minden $T \in L(\mathbb{X})$ operátornak értelmezve vannak a

$$T^0 = I,\ T^n = T^{n-1}T \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12.143}$$

hatványai, ahol I az identikus operátor: minden x-re $Ix = x$ (természetesen ez a definíció, éppúgy mint az összeadásé és a szorzásé, a korlátosság nélkül is, tehát az összes $\mathrm{X} \to \mathrm{X}$ lineáris operátor körében is értelmes). Fennáll

$$\|T^n\| \le \|T\|^n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{12.144}$$

továbbá mindig létezik az

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf\left\{ \sqrt[n]{\|T^n\|} \right\}, \tag{12.145}$$

(véges) határérték, amelyet a T operátor *spektrálsugarának* nevezünk, és amelyre teljesülnek az

$$r(T) \le \|T\|, \quad r(T^n) = [r(T)]^n, \quad r(\alpha T) = |\alpha| r(T), \quad r(T) = r(T^*) \tag{12.146}$$

összefüggések; itt T^* a T operátor adjungáltja (ld. 12.6. szakasz és (12.169)). Ha $L(\mathrm{X})$ BANACH-tér, azaz teljes, akkor a $(\lambda I - T)^{-1}$ operátor $|\lambda| > r(T)$ esetén előállítható a

$$(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1} I + \lambda^{-2} T + \ldots + \lambda^{-n} T^{n-1} + \ldots, \tag{12.147}$$

NEUMANN-sorral, amely $|\lambda| > r(T)$ esetén $L(\mathrm{X})$ operátornormájában konvergens, és emiatt $(\lambda I - T)^{-1}$ korlátos.

12.5.1.3. Operátorsorozatok konvergenciája

1. Pontonkénti konvergencia Definíció szerint a $T_n\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ folytonos lineáris operátorok sorozata pontonként tart a $T\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ operátorhoz, ha Y-ban fennáll

$$T_n x \longrightarrow Tx \qquad (\forall\, x \in \mathrm{X}). \tag{12.148}$$

2. Egyenletes konvergencia Ez a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ operátorsorozat szokásos, normában való konvergenciája az $L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ térben egy T operátorhoz, vagyis

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \tag{12.149}$$

az X egységgömbjén vagy ekvivalensen pusztán a határán ($\|x\| = 1$) való *egyenletes* konvergencia. Következik belőle a pontonkénti konvergencia, de a megfordítás általában nem igaz.

3. Alkalmazások Kvadratúraformulák konvergenciája, ha az alappontok száma ∞-hez tart, szummációs és limitációs eljárások permanenciaelve stb.

12.5.2. Folytonos lineáris operátorok Banach-terekben

Most kimondjuk a lineáris analízis néhány fontos tételét, melyek közül az első három az ún. főtételek.

1. Banach–Hahn-tétel, algebrai alak Legyen X egy valós vektortér és $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ szubadditív, pozitív homogén függvény X-en, tehát minden $x, y \in \mathrm{X}$-re és minden $\alpha \ge 0$-ra

$$p(x + y) \le p(x) + p(y) \quad \text{és} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x). \tag{12.150}$$

Továbbá legyen f_0 az X_0 altéren definiált lineáris funkcionál, amelyre

$$f_0(x) \le p(x) \quad \text{minden } x \in \mathrm{X}_0\text{-ra}. \tag{12.151}$$

Ekkor f_0-nak létezik f — általában nem egyértelmű – lineáris kiterjesztése X-re, tehát egy f funkcionál, amelyre $f(x) = f(x_0)$, ha $x \in \mathrm{X}_0$, és

$$f(x) \le p(x) \quad \text{az egész } \mathrm{X}\text{-en}. \tag{12.152}$$

Azaz valós lineáris tér alterén definiált és szubadditív, pozitív homogén fügvénnyel majorált lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a majorálás megtartásával.

Ezt $\mathrm{X}_0 = \{\mathbf{0}\}$, $f_0(\mathbf{0}) = 0$-ra alkalmazva kapjuk: Legyen X valós vektortér, $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ szubadditív, pozitív homogén függvény X-en. Ekkor létezik olyan pozitív lineáris funkcionál, hogy minden $x \in \mathrm{X}$-re

$$-p(-x) \le f(x) \le p(x). \tag{12.153}$$

Ebből pedig homogén p-re $|f(x)| \le |p(x)|$, és ha p félnorma, speciálisan norma, akkor $|f(x)| \le p(x)$ következik, ami már az ún. analitikus alak speciális esete.

A BANACH–HAHN-tétel $\mathbb{K} = \mathbb{C}$-re így szól: Legyen X komplex vektortér és p félnorma X-en, továbbá legyen f_0 az X_0 altéren definiált lineáris funkcionál, melyre minden $x \in \mathrm{X}_0$-ra

$$|f_0(x)| \le p(x). \tag{12.154}$$

Ekkor f_0-nak létezik — általában megint nem egyértelmű — kiterjesztése X-re, tehát egy f funkcionál, amelyre $f(x) = f_0(x)$, ha $x \in \mathrm{X}_0$, és

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \text{az egész X-en.} \tag{12.155}$$

Azaz komplex lineáris tér egy alterén definiált, és abszolút értékben félnormával majorált lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a majorálás megtartásával. A fentinek megfelelő következmény szerint az X komplex vektortéren adott p félnormához létezik olyan $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, hogy minden $x \in \mathrm{X}$-re

$$|f(x)| \leq p(x), \tag{12.156}$$

ami megint csak az analitikus alak speciális esete.

Megemlítjük a (valós) tétel egy híres következményét: a valós, korlátos sorozatok l_∞ vektorterén létezik Banach-limesz, azaz olyan L lineáris funkcionál, amely pozitív, tehát ha minden n-re $x_n \geq 0$ és $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$, akkor $L(x) \geq 0$, eltolásinvariáns, tehát $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = L(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ és (például így) normált: $L(1, 1, \ldots, 1, \ldots) = 1$. A Banach–Hahn-tétel ún. analitikus, tehát normált terekre vonatkozó, és a geometriai alakját általánosságban 12.5.5.-ben, illetve 12.5.6.-ban tárgyaljuk.

2. Banach–Steinhaus-tétel (az egyenletes korlátosság elve) A tétel egy folytonos lineáris operátorokból álló sorozatnak egy folytonos lineáris operátorhoz való pontonkénti konvergenciáját a következő két feltétellel ekvivalensen jellemzi:

a) Egy mindenütt sűrű $D \subset \mathrm{X}$ részhalmaz minden elemére a $\{T_n x\}$ sorozatnak létezik határértéke Y-ban, és

b) egy C konstanssal fennáll $\|T_n\| \leq C\,,\ \forall\, n\,.$

3. A nyílt leképezés tétele A tétel azt mondja ki, hogy ha X és Y Banach-terek, akkor minden, X-et Y-ra leképező folytonos lineáris operátor *nyílt*, azaz X bármely nyílt G halmazának $T(G)$ képe nyílt halmaz Y-ban.

4. Zártgráf-tétel A $T : D(T) \longrightarrow \mathrm{Y}$ operátort, ahol $D(T)$ altér X-ben, *zárt*nak mondjuk, ha abból, hogy egy $x_n \in D_T$ sorozatra $x_n \to x_0$ az X térben és $Tx_n \to y_0$ az Y metrikus szorzattérben, mindig következik, hogy $x_0 \in D_T$ és $y_0 = Tx_0$. Ehhez szükséges és elégséges, hogy az $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ metrikus szorzattérben a T operátor gráfja, vagyis a

$$\Gamma_T = \{(x, Tx) \mid x \in D_T\} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \tag{12.157}$$

halmaz zárt legyen. Ha $D(T)$ zárt és T folytonos, akkor T zárt is. Fennáll: Ha X és Y Banach-terek, akkor a T zárt operátor folytonos.

5. Hellinger és Toeplitz tétele Legyen T lineáris operátor a $\mathbb{H}$ Hilbert-térben. Ha minden $x, y \in \mathbb{H}$ elempárra $(x, Ty) = (Tx, y)$, (azaz önadjungált, ld. 12.6.3.) akkor T folytonos (elég, ha minden x-re $(x, Tx) = (Tx, x)$) .

6. Krejn és Lozanovszkij pozitív lineáris operátorok folytonosságáról szóló tétele Ha $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{X}_+, \|\cdot\|)$ és $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_+, \|\cdot\|)$ két rendezett normált tér, ahol X_+ generáló kúp, akkor az összes folytonos, lineáris és pozitív (tehát $T(\mathrm{X}_+) \subset \mathrm{Y}_+$) T operátorok $L_+(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ halmaza kúp $L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$-ban. Ekkor M. G. Krejn *és* G. J. Lozanovszkij *tétele* (ld. [12.20]) a következőket mondja: Ha az X. ill. Y rendezett Banach-térben X_+, ill. Y_+ zárt kúp és X_+ generáló, akkor minden pozitív lineáris operátor folytonos.

7. Inverz operátor Legyen X és Y két tetszőleges normált tér, és legyen T: $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ lineáris, nem szükségképp folytonos operátor. A T operátornak akkor létezik folytonos T^{-1}: $\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ inverze, ha $T\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ és egy $m > 0$ konstanssal minden $x \in \mathrm{X}$ elemre igaz a $\|Tx\| \geq m\|x\|$ becslés. Ilyenkor továbbá fennáll $\|T^{-1}\| \leq \dfrac{1}{m}$.

Ha X is, Y is Banach-tér, akkor érvényes

8. Banach tétele az inverz operátor folytonosságáról Ha T folytonos lineáris bijektív operátor X-ről Y-ra, akkor a T^{-1} inverz operátor folytonos.

Ebből fontos alkalmazásként adódik például $(\lambda I - T)^{-1}$ folytonossága injektív és szürjektív $\lambda I - T$ esetén, aminek operátorok spektrumának vizsgálatakor (ld. 12.5.3.2. szakasz) van jelentősége, valamint

9. A megoldás folytonos függése a jobboldaltól és a kezdeti értékektől lineáris differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatainál. Ezt az alábbi kezdetiérték-problémán mutatjuk be.

■ Az

$$L(x)(t) = \ddot{x}(t) + p_1(t)\dot{x}(t) + p_2(t)x(t) = q(t),\ \ t \in [a,b], \quad x(t_0) = \xi,\ \dot{x}(t_0) = \dot{\xi},\ \ t_0 \in [a,b] \tag{12.158a}$$

kezdetiérték-feladatnak, ahol $p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{C}([a,b])$, minden $q(t) \in \mathcal{C}([a,b])$ jobboldalra és minden $\xi,\ \dot{\xi}$ számpárra pontosan egy $\mathcal{C}^2([a,b])$-beli x megoldása van, és ez *folytonosan* függ $q(t)$-től, ξ-től és $\dot{\xi}$-tól a következő értelemben. Ha $q_n(t) \in \mathcal{C}([a,b])$, és ha $\forall\, n$-re $(x_n(t), \xi_n, \dot{\xi}_n)$ megoldás, azaz

$$\ddot{x}_n(t) + p_1(t)\dot{x}_n(t) + p_2(t)x_n(t) = q_n(t)\,, \quad x_n(a) = \xi_n\,,\ \dot{x}_n(a) = \dot{\xi}_n\,, \tag{12.158b}$$

akkor

$$\left.\begin{array}{r} q_n(t) \to q_0(t) \quad \text{a} \quad \mathcal{C}([a,b]) \ \text{térben,} \\ \xi_n \to \xi\,; \\ \dot{\xi}_n \to \dot{\xi} \end{array}\right\} \quad \text{esetén fennáll } x_n \to x \text{ a } \mathcal{C}^2([a,b]) \ \text{térben.} \tag{12.158c}$$

Ebben az esetben $T\colon\ \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b]) \times \mathbb{R}^2$, $T(x) = (L(x), x(a), \dot{x}(a))$, T triviálisan szürjektív a tétel miatt, $x \in \mathcal{C}^{\in}([a,b])$-re

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)| + \max_{a\le t\le b} |\dot{x}(t)| + \max_{a\le t\le b} |\ddot{x}(t)| \quad \text{és}$$

$$\|L(x), x(a), \dot{x}(a)\| = \max_{a\le t\le b} |L(x)(t)| + |x(a)| + |\ddot{x}(a)|\,,$$

és ez utóbbit nyilván felülről becsli

$$\|x\| \left(1 + \max_{a\le t\le b} |p_1(t)| + \max_{a\le t\le b} |p_2(t)|\right) + \|x\| + \|x\|\,,$$

tehát

$$\|T\| \le 3 + \max_{a\le t\le b} |p_1(t)| + \max_{a\le t\le b} |p_2(t)| < +\infty,$$

azaz T folytonos is, tehát a 8. tétel szerint az inverze is folytonos, ami éppen az állított (12.158c).

10. A szukcesszív approximáció módszere az

$$x - Tx = y \tag{12.159}$$

alakú egyenletek megoldására, ahol T folytonos lineáris operátor az $\mathbf{X}$ BANACH-téren, y pedig megadott vektor $\mathbf{X}$-ben. A módszer abban áll, hogy tetszőleges x_0 kezdeti közelítésből kiindulva és az

$$x_{n+1} = y + Tx_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{12.160}$$

előírást alkalmazva képezzük a közelítő megoldásokból álló $\{x_n\}$ sorozatot, amely tart a (12.159) egyenlet x^* megoldásához az $\mathbf{X}$ térben. A módszer konvergenciája, vagyis az $x_n \to x^*$ összefüggés a (12.147) sor $\lambda = 1$ esetben való konvergenciájából következik. Ez utóbbira és az előállításra részletesen ez mondható:

Legyen $\|T\| \le q < 1$. Ekkor $r(T) \le \|T\|$ miatt $r(T) < 1$, tehát $1 = \lambda > r(T)$, azaz a (12.147) NEUMANN-sor 1-ben konvergens az $L(\mathbf{X})$ BANACH-térben. Így érvényesek a következő állítások:

a) Az $I - T$ operátornak létezik folytonos inverze, erre fennáll $\|(I-T)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-q}$, és a (12.159) egyenletnek tetszőleges y mellett pontosan egy megoldása van.

b) A (12.147) sor konvergens, és összege az $(I-T)^{-1}$ operátor.

c) A (12.160) eljárás tetszőleges x_0 kiindulási érték esetén a (12.159) egyenlet egyértelmű x^* megoldásához tart. Továbbá érvényes a következő becslés:

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|Tx_0 - x_0\| \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{12.161}$$

Mindez természetesen semmi más, mint a már tárgyalt BANACH-féle fixponttétel újabb alkalmazása, hiszen az $x \to Tx + y$ leképezés LIPSCHITZ-konstansa $\le \|T\| \le q < 1$, tehát a leképezés tényleg

kontrakció. Analóg módon (ld. 11 fejezet és [12.9]) tárgyalhatók a következő típusú egyenletek, amik a FREDHOLM-feladat általánosításai:

$$x - \mu Tx = y\,, \quad \text{alternatív alakban} \quad \lambda x - Tx = y\,, \qquad \mu\,, \lambda \in \mathbb{K}\,. \tag{12.162}$$

12.5.3. A lineáris operátorok spektrálelméletének elemei

12.5.3.1. Operátor rezolvenshalmaza és rezolvense

Egyenletek megoldhatóságának vizsgálatánál arra törekszünk, hogy a feladatot a (12.159), tehát az

$$(I - T)x = y \tag{12.163}$$

alakra hozzuk, ahol a T operátor normája lehetőleg kicsi, ugyanis (12.146) és (12.147) miatt ez az alak különösen alkalmas a funkcionálanalízis módszereivel történő tárgyalásra. Annak érdekében, hogy $\|T\|$ nagy értékeit is kezelni tudjuk, az $\mathbf{X}$ komplex BANACH-térben általánosabban egy egész

$$(\lambda I - T)x = y \qquad (x \in \mathbf{X})\,, \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{12.164}$$

egyenletsereget vizsgálunk. Legyen T lineáris, nem feltétlenül korlátos operátor az $\mathbf{X}$ BANACH-térben. Azon komplex számok $\varrho(T)$ halmazát, amelyek λ elemeire fennáll $(\lambda I - T)^{-1} \in B(\mathbf{X}) = L(\mathbf{X})$, *rezolvenshalmaz*nak, vagy T *reguláris értéke*inek és ezen λ-kra az $R_\lambda = R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ operátort pedig *rezolvens*nek nevezzük. Legyen most T korlátos lineáris operátor az $\mathbf{X}$ komplex BANACH-térben. Ekkor igazak a következő állítások:

1. A $\varrho(T)$ halmaz nyílt (de általában nem összefüggő). Pontosabban, ha $\lambda_0 \in \varrho(T)$ és a $\lambda \in \mathbb{C}$ számra teljesül a

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\,, \tag{12.165}$$

egyenlőtlenség, akkor R_λ is létezik, és fennáll

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}^2 + (\lambda - \lambda_0)^2 R_{\lambda_0}^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k-1} R_{\lambda_0}^k\,. \tag{12.166}$$

2. $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|T\|\} \subset \varrho(T)$. Pontosabban, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ értékre, amelyre $|\lambda| > \|T\|$, az R_λ operátor létezik, és fennáll

$$R_\lambda = -\frac{I}{\lambda} - \frac{T}{\lambda^2} - \frac{T^2}{\lambda^3} - \ldots \tag{12.167}$$

3. R_λ folytonosan függ λ-tól: $\|R_\lambda - R_{\lambda_0}\| \to 0$, ha $\lambda \to \lambda_0 \quad (\lambda, \lambda_0 \in \varrho(T))$, és $\|R_\lambda\| \to 0$, ha $\lambda \to \infty$ (ekkor 2. miatt $\lambda \in \varrho(T)$).

4. $\left\| \dfrac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} - R_{\lambda_0}^2 \right\| \longrightarrow 0$, ha $\lambda \to \lambda_0$.

5. Tetszőleges $\lambda\,, \mu \in \varrho(T)\,, \lambda \neq \mu$ esetén

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} \quad \text{(HILBERT-formula). Ebből:} \tag{12.168}$$

6. Tetszőleges $f \in \mathbf{X}^*$ funkcionálra és tetszőleges $x \in \mathbf{X}$ elemre $F(\lambda) = f(R_\lambda(x))$ λ-nak holomorf függvénye a $\varrho(T)$ halmazon.

12.5.3.2. Operátor spektruma

1. A spektrum definíciója

A $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ halmazt a T operátor *spektrumá*nak nevezzük. Tehát $\lambda \in \sigma(T)$, ha $\lambda I - T$-nek nincs inverze, vagy van inverze, de az nem folytonos, de ezen utóbbi eset BANACH-tér esetén nem fordulhat elő a fenti 8. tétel értelmében. Mivel nyilvánvaló, hogy az $I - T$ operátornak pontosan akkor létezik folytonos inverze (és ennélfogva a (12.163) egyenletnek a jobboldaltól folytonosan függő megoldása), ha $1 \in \varrho(T)$, szükség van a T operátor $\sigma(T)$ spektrumának lehető legalaposabb ismeretére. A komplementer rezolvenshalmaz tulajdonságaiból rögtön következik, hogy a $\sigma(T)$ spektrum $\mathbb{C}$ zárt

részhalmaza, amely a $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$ körben helyezkedik el; sok esetben azonban $\sigma(T)$ ennél a körnél lényegesen kisebb. Komplex BANACH-téren minden folytonos lineáris operátor spektruma nem üres, és fennáll

$$r(T) = (\max =) \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| . \tag{12.169}$$

Sok gyakran használt operátorosztály esetében a spektrumról közelebbit is lehet mondani.
Ha T egy véges dimenziójú X tér operátora, és a $(\lambda I - T)x = \mathbf{0}$ egyenletnek csak triviális megoldása van, azaz $\lambda I - T$ injektív, akkor már következik, hogy $\lambda \in \varrho(T)$, azaz $\lambda I - T$ szürjektív, tehát van — nyilván folytonos inverze. Az implikáció megfordítása általánosabb: ha ennek az egyenletnek valamely BANACH-térben létezik nem triviális megoldása, azaz a $\lambda I - T$ operátor nem injektív, akkor emiatt $(\lambda I - T)^{-1}$ nem létezik.
A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot a T lineáris operátor *sajátértékének* hívjuk, ha a $\lambda x = Tx$ egyenletnek létezik nem triviális megoldása. Minden ilyen megoldást a T operátor λ-hoz tartozó *sajátvektorának* vagy, ha X függvénytér (ami az alkalmazásoknál gyakran előfordul), *sajátfüggvényének* nevezünk. Az általuk kifeszített alteret λ-hoz tartozó *sajáltérnek* hívjuk. A T operátor összes sajátértékeinek $\sigma_p(T)$ halmazát T *pontspektrumának* nevezzük. Nyilván $\lambda \in \sigma_p(T)$ esetén $\lambda I - T$-nek nincs inverze, ami még úgy is előfordulhat, hogy $\lambda I - T$ injektív, de nem szürjektív. Emiatt $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

2. Összehasonlítás a lineáris algebrával, reziduális spektrum

Fontos különbség a lényegében véve a lineáris algebrában tekintett véges dimenziójú eset és a funkcionálanalízisben tárgyalt végtelen dimenziójú eset között a jelen vonatkozásban az, hogy az előbbi esetben mindig teljesül $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, az utóbbiban viszont a spektrum általában olyan pontokat is tartalmaz, amelyek nem sajátértékei T-nek, tehát $\sigma_p(T) \subsetneq \sigma(T)$. Ha $\lambda I - T$ injektív és szürjektív, tehát van inverze, akkor az inverz operátor folytonosságáról szóló 8. tétel (ld. 639. old.) értelmében $\lambda \in \varrho(T)$. Ellentétben a véges dimenziójú esettel, ahol a szürjektivitás az injektivitásból automatikusan következik, a végtelen dimenziójú esetben ez nincs így, ezért sokkal differenciáltabban kell eljárni.

Azon $\lambda \in \sigma(T)$ számok $\sigma_c(T)$ halmazát, amelyekre $\lambda I - T$ injektív és $Im(\lambda I - T)$ mindenütt sűrű X-ben — $\lambda I - T$ szürjektív nem lehet, mert tudjuk, hogy akkor $\lambda \notin \sigma(T)$ — a T operátor *folytonos spektrumának*, azon λ számok $\sigma_r(T)$ halmazát pedig, amelyekre $\lambda I - T$ injektív és értékkészlete nem sűrű, T *maradékspektrumának* vagy *reziduális spektrumának* nevezzük.

Az X komplex BANACH-tér T korlátos lineáris operátorára ezek szerint fennáll

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T), \tag{12.170}$$

ahol a jobboldali halmazok diszjunktak.

12.5.4. Folytonos lineáris funkcionálok

12.5.4.1. Definíció

Ha $\mathbb{Y} = \mathbb{K}$, akkor a lineáris leképezést *lineáris funkcionálnak* vagy *lineáris formának* nevezzük. A továbbiakban HILBERT-térrel kapcsolatban a komplex, majdnem minden esetben a valós esetet fogjuk tekinteni. Az összes folytonos lineáris funkcionálok már korábban bevezetett $L(\mathrm{X}, \mathbb{K})$ BANACH-terét X *duálisának*, *duális terének* vagy *konjugált terének* nevezzük és az X^* (néha az X') jellel jelöljük. Az $f \in \mathrm{X}^*$ folytonos lineáris funkcionál $x \in \mathrm{X}$ elemen felvett ($\mathbb{K}$-beli) értékét az $f(x)$ jellel, gyakran azonban — hogy X és X^* bilineáris kapcsolatának a dualitáselméletben alapvető gondolatát kiemeljük — az (x, f) jellel, tehát két különböző halmaz elempárjain definiált általánosított skalárszorzattal is jelöljük (vö. még RIESZ FRIGYESnek a HILBERT-tér folytonos lineáris funkcionáljairól szóló tételével, ld. a következő szakaszt), hiszen (x, f) mindkét változójában additív. Hasznos jellemzése egy normált téren adott funkcionál folytonosságának, hogy az ekvivalens magterének zártságával.

■ **A:** Minden véges dimenziós X normált tér normaizomorf és így azonosítható a duálisával: Legyen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormált bázis és $F \in \mathrm{X}^*$. Ekkor F-et meghatározza az $F(e_1), F(e_2), \ldots, F(e_n)$ számsorozat, azaz a $\sum_{i=1}^{n} F(e_i)e_i \in \mathrm{X}$ vektor. Ez az $F \to \mathrm{X}$ hozzárendelés nyilván lineáris és szürjektív.

Mi a viszony $\|F\|$ és $\left\|\sum_{i=1}^{n} F(e_i)e_i\right\|$ között? Az utóbbi $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |F(e_i)|^2}$; $\|F\|$ meghatározásához tekintsük X-ben a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$-t, aminek 1 a normája, ha $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1$. $F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(e_i)$ és ennek abszolút értéke $\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |F(e_i)|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |F(e_i)|^2}$ (1.107), tehát egyrészt $\|F\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} F(e_i)e_i\right\|$, másrészt tudjuk, hogy az egyenlőség elérhető ($\lambda = c\overline{F(e_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, olyan $c \in \mathbb{R}$-rel, hogy $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1$). Tehát $\|F\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} F(e_i)e_i\right\|$, tehát $F \to \mathrm{X}$ normatartó is, azaz normaizomorfia az $\mathrm{X} \to \mathbb{K}$ funkcionálok és X között, tehát végülis X és X^* normaizomorf, azaz $\mathrm{X} = \mathrm{X}^*$.

■ **B:** Legyenek $t_1, t_2, \ldots, t_n$ rögzített pontok az $[a, b]$ intervallumban, és legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós számok. Az

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k) \tag{12.171}$$

képlet az abszolútérték-normával ellátott $\mathcal{C}([a, b])$ téren egy folytonos lineáris funkcionált értelmez, melynek normája $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$. (12.171) speciális eseteként kapjuk a

$$\delta_t(x) = x(t) \qquad (x \in \mathcal{C}([a, b]))\,. \tag{12.172}$$

δ-funkcionált, ahol $t \in [a, b]$ rögzített pont. Erről felismerhető, hogy ez egyúttal egy STIELTJES-integrál is (ld. 8.2.3.1.2.), és így logikus, hogy $\mathcal{C}([a, b])$ folytonos lineáris funkcionáljait általában is jellemzi RIESZ FRIGYES alábbi tétele, amely egy STIELTJES-integrállal állítja elő őket:

Ha $\varphi(t)$ korlátos változású függvény $[a, b]$-n, akkor az $x(t) \in \mathcal{C}([a, b])$-hez hozzárendelt $\int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t)$ lineáris funkcionál, melynek normája φ teljes változása $[a, b]$-n, és megfordítva, ha adott $\mathcal{C}([a, b])$-n egy korlátos lineáris funkcionál, akkor létezik egy $\varphi(t)$ korlátos változású függvény $[a, b]$-n, amellyel a funkcionál értéke $\mathcal{C}([a, b])$ minden $x(t)$ elemére $\int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t)$ és a funkcionál (indukált) normája φ teljes változása. (Egy f függvénynek az I intervallumon vett teljes változása — más néven totális variációja — a $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ értékek (véges vagy végtelen) szuprémuma, ahol $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, miközben $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ befutja az I összes véges részhalmazát. Egy függvény korlátos változású, ha teljes változása véges. Minden korlátos változású függvény két monoton különbsége. Ha $x(t)$ folytonos és $\varphi(t)$ korlátos változású, akkor az $\int_a^b x(t)\mathrm{d}\varphi(t)$ STIELTJES-integrál mindig létezik.)

Így például a (12.171)-hez tartozó $\varphi(t)$-k értéke t-től balra 0, t-től jobbra 1, t-ben pedig tetszőleges. RIESZ tétele akkor is érvényes, ha a szereplő függvények komplex értékűek, tehát $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; a norma $C([a, b])$-n — a valós értékű részhalmaz normájának kiterjesztéseként — formálisan ugyanaz: $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f|$, a teljes változás és a korlátos változású függvény definíciója is formálisan ugyanaz, megint az abszolút értéket használó definíció miatt. A STIELTJES-integrál létezését komplex esetben is biztosítja az említett feltétel és az $\int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$ definíciója is ugyanaz: az integrál létezik és értéke I ($\in \mathbb{C}$), ha a

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k)$ közelítő összegek I-hez tartanak, amikor $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ (ld. (8.78)).

■ **C:** Ha $\varphi(t)$ RIEMANN- vagy akár LEBESGUE-integrálható függvény (12.9.3.1. szakasz) az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(RIEMANN- vagy LEBESGUE-integrál)} \tag{12.173}$$

is folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{C}([a, b])$-n (sőt az $[a, b]$-n RIEMANN- vagy akár a korlátos, LEBESGUE-integrálható függvények vektorterén is, ugyanazzal a $\max_{a\le x\le b} |x(t)|$ normával), melynek normája $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$ és a fenti tétel szerinti generáló, korlátos változású függvénye: $g(x) = \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t + C$, ahol C egy konstans, tehát $\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t) = \int_a^b \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t$ és g teljes változása $= \int_a^b |\varphi(t)|\mathrm{d}t$.

Végül megjegyezzük, hogy ha bijektív hozzárendelést akarunk, akkor szorítkozhatunk például a $\varphi(a) = 0$, $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}$ $(a < x < b)$ feltételeknek eleget tevő altérre a korlátos változású függvények vektorterében, és ezt tekinthetjük $\mathcal{C}([a, b])^*$-nak A valamely integrálnormával ellátott $\mathcal{C}([a, b])$ helyett a bővebb L^p-terek duálisát 12.5.4.3.-ban tárgyaljuk.

12.5.4.2. Folytonos lineáris funkcionálok a Hilbert-téren, Riesz Frigyes tétele

A $\mathbb{H}$ HILBERT-térben minden $y \in \mathbb{H}$ elem skalárszorzással az $f(x) = (x, y)$ képlettel folytonos lineáris funkcionált definiál, amelynek normája $\|f\| = \|y\|$. Másrészt ha f folytonos lineáris funkcionál a $\mathbb{H}$ téren, akkor létezik pontosan egy $y \in \mathbb{H}$ elem, amelyre

$$f(x) = (x, y) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{H})\,. \tag{12.174}$$

E tétel szerint a $\mathbb{H}$ és a $\mathbb{H}^*$ tér egymással izomorf, úgyhogy azonosnak lehet őket tekinteni.
RIESZ FRIGYES ezen tétele utalást tartalmaz arra, hogyan lehet az ortogonalitást vektortér és funkcionáljai elempárjain bevezetni, ahogy erre már céloztunk 12.5.4.1. bevezetőjében, ahol $(x, f) := f(x)$ skalárszorzatot is definiáltuk a párokon. Speciálisan tetszőleges normált térben legyen $A \subset \mathrm{X}$ és $B^* \subset \mathrm{X}^*$. Ekkor az

$$A^\perp = \{f \in \mathrm{X}^* \mid f(x) = 0 \quad \forall\, x \in A\} \quad \text{és az} \quad B^{*\perp} = \{x \in \mathrm{X} \mid f(x) = 0 \quad \forall\, f \in B^*\} \tag{12.175}$$

halmazt A, ill. B^* *ortogonális komplementumának* vagy *annullátorának* nevezzük.

12.5.4.3. Folytonos lineáris funkcionálok L^p-ben

Legyen $p \ge 1$. Azt mondjuk, hogy q a p *konjugált kitevője*, ha $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; a $p = 1$ (∞) esetben $q = \infty$ (1) értendő. Ez a reláció természetesen szimmetrikus, tehát mondhatjuk, hogy p és q konjugált kitevők.

■ Az integrálokra vonatkozó HÖLDER-egyenlőtlenség alapján (ld. 32. old.) a (12.173) funkcionált az $L^p([a, b])$ $(1 \le p \le \infty)$ tereken is tekinthetjük (ld. 12.9.4. szakasz), ha $\varphi \in L^q([a, b])$ ahol $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ekkor a funkcionál normája

$$\|f\| = \|\varphi\| = \begin{cases} \left[\int_a^b |\varphi(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}, & \text{ha} \quad 1 < p \le \infty\,, \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|\,, & \text{ha} \quad p = 1 \end{cases} \tag{12.176}$$

(ess sup $|\varphi|$ definícióját ld. (12.218) alatt, 660. old.). Minden, az $L^p([a,b])$ téren folytonos lineáris f funkcionálhoz található egy (ekvivalenciaosztálya erejéig) egyértelműen meghatározott $y \in L^q([a,b])$ elem, azaz vektor, azaz függvény, más szóval egyértelműen létezik egy ekvivalenciaosztály, amelynek bármely y elemére

$$f(x) = (x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \quad x \in L^p \quad \text{és} \quad \|f\| = \|y\|_q = \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{12.177}$$

Így tehát a normaizomorfia alapján $1 \le p < \infty$-re $(L^p)^*$-ot azonosíthatjuk L^q-val. A $p = \infty$ esetről lásd [12.18].

12.5.5. Lineáris funkcionálok kiterjesztése

A következő problémáról fokozatosan kiderült, hogy megoldása az elméleti és az alkalmazott matematika szempontjából egyaránt alapvető fontosságú: Egy $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ lineáris altéren megadott lineáris funkcionál kiterjesztendő az egész térre, mégpedig — a triviális és érdektelen esetek kizárása céljából — bizonyos „jó" tulajdonságok megtartásával. E probléma egyfajta megoldásáról szól a

1. Banach–Hahn–féle kiterjesztési tétel (analitikus alak) Legyen $\mathbf{X}$ normált vektortér $\mathbb{K}$ felett, f_0 folytonos lineáris funkcionál az $\mathbf{X}_0$ altéren. Ekkor f korlátosan, sőt az $\mathbf{X}_0$-beli normájának megtartásával kiterjeszthető $\mathbf{X} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionállá (általában megint nem egyértelműen). A bizonyításhoz elég a $p(x) = \|f_0\|_{\mathbf{X}_0} \cdot \|x\|$ normával, tehát félnormával a BANACH–HAHN-tétel 12.5.2.-beli algebrai alakját alkalmazni.

Az utóbbinak fontos következménye a normált terek duálisainak „tartalmassága": Minden $x \neq \mathbf{0}$ elemhez található $f \in \mathbf{X}^*$ funkcionál, amelyre $f(x) = \|x\|$ és $\|f\| = 1$. (Itt $\mathbf{X}_0$ a $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ egydimenziós altér, amelyen $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$.) Egy másik fontos következmény: Minden $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ lineáris altérhez és $x_0 \notin \mathbf{X}_0$ elemhez, amelynek metrikus térbeli halmazok távolságának korábban bevezetett definíciójának értelmében (ld. 617. old.) $\mathbf{X}_0$-tól való távolsága $d = \inf_{x \in X_0} \|x - x_0\| > 0$, található $f \in \mathbf{X}^*$ úgy, hogy

$$f(x) = 0 \ \ (\forall\, x \in \mathbf{X}_0)\,, \qquad f(x_0) = 1 \quad \text{és} \quad \|f\| = \frac{1}{d}\,. \tag{12.178}$$

(Itt a kiindulási altér $lin(x_0, \mathbf{X}_0)$, amelynek egy $\lambda x_0 + y$ elemén $(y \in \mathbf{X}_0)$ f értéke λ.) Továbbá, ha az $\mathbf{X}$ normált tér egy x elemére $f(x) = 0$ minden $f \in \mathbf{X}^*$-ra, akkor $x = 0$ (triviálisan az 1. következményből). Végül ha az $\mathbf{X}$ normált tér x_1, x_2 elemeire $f(x_1) = f(x_2)$ minden $f \in \mathbf{X}^*$-ra, akkor $x_1 = x_2$ ($x_1 - x_2$-re alkalmazva az előzőt). Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy $\mathbf{X}^*$ *elválasztó függvénycsalád* $\mathbf{X}$ felett: általában egy T halmazon definiált $F(T)$ függvénycsalád elválasztó, ha T minden $x \neq y$ elemeihez van $f \in F(T)$, melyre $f(x) \neq f(y)$.

12.5.6. Konvex halmazok elválasztása (szétválasztása)

1. Hipersíkok A (valós) $\mathbf{X}$ vektortér $\mathbf{X}$-től különböző L alterét *hiper-altér*nek vagy (a $\mathbf{0}$ ponton átmenő) hipersíknak nevezzük, ha van olyan $x_0 \in \mathbf{X}$, hogy $\mathbf{X} = lin(x_0, L)$ (azaz dimenziója „csak 1-gyel kevesebb", mint a téré). Az $x + L$ alakú halmazok affin sokaságok (ld. a 12.1.2. szakaszt). Ha L hiper-altér, akkor e sokaságokat *hipersíkok*nak hívjuk.

A hipersíkok és a lineáris funkcionálok szoros kapcsolatban állnak egymással: Egyrészt az $\mathbf{X}$-en értelmezett $0 \neq f$ lineáris funkcionál $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) = 0\}$ magtere hipersík $\mathbf{X}$-ben, és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számhoz található $x_\lambda \in \mathbf{X}$ elem úgy, hogy $f(x_\lambda) = \lambda$ és $f^{-1}(\lambda) = x_\lambda + f^{-1}(0)$, tehát egy hipersík. Másrészt tetszőleges $L \subset X$ hiper-altérhez, $x_0 \notin L$ elemhez és $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ számhoz található egy egyértelműen meghatározott f lineáris funkcionál $\mathbf{X}$-en, amelyre $f^{-1}(0) = L$ és $f(x_0) = \lambda$. Normált $\mathbf{X}$ tér esetén $f^{-1}(0)$ zártsága ekvivalens az f funkcionál folytonosságával.

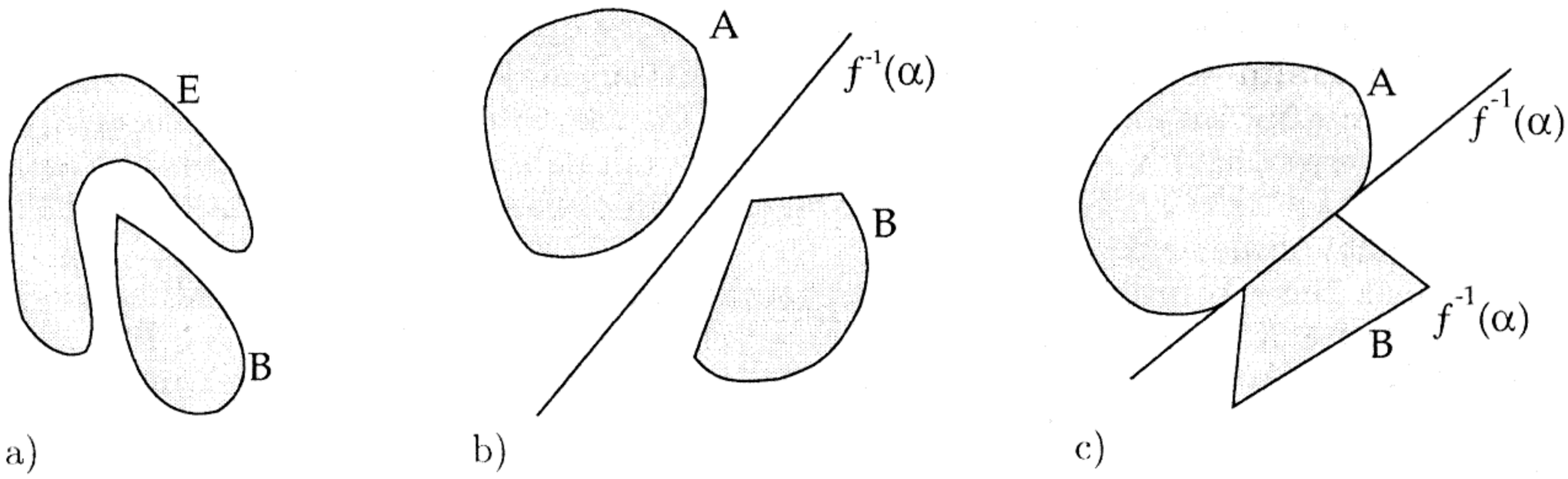
2. Halmazok elválasztása és erős elválasztása Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{X}$ valós normált tér két A, B részhalmaza *elválasztható*, ha van olyan $f \in \mathbf{X}^*$ funkcionál, hogy

$$\sup_{x \in A} f(x) \le \inf_{y \in B} f(y) \qquad (\text{vagy} \quad \sup_{x \in A} f(x) \ge \inf_{y \in B} f(y))\,. \tag{12.179}$$

Ekkor elválasztó hipersík például $f^{-1}(\alpha)$, ahol $\alpha = \sup\limits_{x\in A} f(x)$; ez azt jelenti, hogy a halmazok a két különböző

$$\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) \le \alpha\} \qquad \text{és} \qquad \{x \in \mathrm{X} \mid f(x) \ge \alpha\} \tag{12.180}$$

*féltér*ben fekszenek. α lehet $\left[\sup\limits_{x\in A} f(x), \inf\limits_{x\in B} f(x)\right]$ bármely eleme; egyúttal most definiáltuk a féltér fogalmát. A **12.5.b,c ábrákon** a hipersíkkal való elválasztás két esete látható. Ha $\sup \gneqq \inf$, vagy $\sup \lneqq \inf$, azaz $\sup \neq \inf$, akkor azt mondjuk, hogy f *erősen elválasztja* A-t és B-t. Másképpen: van olyan $c_1 \neq c_2$, hogy $f(x) \le c_1 < c_2 \le f(y)$ $(x \in A,\ y \in B)$. Ez azt jelenti, hogy a két altér diszjunkt, tehát az erős elválasztásnak előfeltétele A és B diszjunktsága.
Két halmaz elválasztásánál nem a diszjunktság a döntő. A **12.5.a ábrán** két halmaz, E és B van feltüntetve, amelyek nem elválaszthatók, bár diszjunktak és B konvex. Sokkal inkább a halmazok konvexitásának van jelentősége, mert nincs kizárva, hogy a két elválasztandó halmaznak vannak közös pontjai, amelyeken a hipersík áthalad.



12.5. ábra.

3. A Banach–Hahn-tétel geometriai, másképpen elválasztási alakja, amit 3 változatban mondunk ki: Ha A olyan konvex halmaz az X normált térben, amelynek $\mathrm{Int}(A)$ belseje nem üres, továbbá $B \subset \mathrm{X}$ olyan konvex, nem üres halmaz, hogy $\mathrm{Int}(A) \cap B = \emptyset$, akkor A és B elválasztható. Ha pedig az X normált térben A és B nemüres, diszjunkt, konvex halmazok, egyikük zárt, a másikuk kompakt (ld. 12.7.1.), akkor erősen elválaszthatók. Végül: Legyen X normált tér, $x_0 \in \mathrm{X}$, és L az X térnek egy lineáris altere. Ekkor tetszőleges nem üres, konvex, nyílt, az $\{x_0 + L\}$ affin sokaságot nem metsző K halmazhoz található egy H zárt hipersík úgy, hogy $\{x_0 + L\} \subset H$ és $H \cap K = \emptyset$, tehát $f \in \mathrm{X}^*$-gal elválaszthatók.
Azt mondjuk, hogy a (valós) $f \in \mathrm{X}^*$ funkcionál az A halmaz *támaszfunkcionálja* az $x_0 \in \partial A$ határpontban, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, amelyre fennáll $f(x_0) = \lambda$ és $A \subset \{x \in \mathrm{X} \mid f(x) \le \lambda$ (vagy $f(x) \ge \lambda)\}$. Ilyenkor az $f^{-1}(\lambda)$ hipersíkot az A halmaz x_0-pontbeli *támaszhipersíkjá*nak hívjuk.
Bármely konvex K halmaznak, amelynek belseje nem üres, minden határpontjában létezik támaszfunkcionálja. Komplex tér esetén a fenti fogalmakat f helyett $\mathrm{Re}\, f$-fel vagy $\mathrm{Im}\, f$-fel definiáljuk.

Megjegyzés: Konvex halmazok elválaszthatósága segítségével bizonyíthatók a KUHN–TUCKER-feltételek (ld. a 18.2. szakaszt, 886. old.), amelyekből gyakorlati módszerek nyerhetők konvex halmaz feletti optimalizálási feladat megoldására (ld. [12.5]).

12.5.7. Biduális tér és reflexív terek

Már tudjuk, hogy az X normált tér X^* duális tere az $\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)|$ normával ismét normált tér, úgyhogy képezni lehet az X tér $(\mathrm{X}^*)^* = \mathrm{X}^{**}$ *biduálisát* vagy *második konjugáltját.* A

$$J\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}^{**} \quad \text{ahol} \quad Jx = F_x\,, \quad \text{amelyre} \quad F_x(f) = f(x) \qquad (\forall\, f \in \mathrm{X}^*) \tag{12.181}$$

kanonikus beágyazás normaizomorfia (ld. a 12.3.1. szakaszt), tehát X azonosítható a $J(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}^{**}$ altérrel. Egy BANACH-teret *reflexív*nek vagy *reguláris*nak mondunk, ha fennáll $J(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{**}$, vagyis ha a

kanonikus beágyazás szürjektív. Nyilván, ha $\mathbb{X} = \mathbb{X}^*$, akkor x reflexív; ha pedig $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ egymás duálisai, akkor $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ mindketten reflexívek.

■ Ezért minden véges dimenziós BANACH-tér reflexív (12.5.4.1.) és minden HILBERT-tér reflexív (12.5.4.2.), ugyanígy az L^p $(1 < p < \infty)$ terek (12.5.4.3.), viszont $\mathcal{C}([a,b])$, $L^1([0,1])$ és $\mathbf{c_0}$ nem reflexív terek:

■ **A:** $\mathcal{C}([a,b])$ esetében először rendeljük hozzá minden, az $[a,b]$-n korlátos változású $\alpha(x)$-hez, pontosabban csak a 12.5.4.1. szerinti $\mathcal{C}([a,b])^*$ elemeihez a véges $= \sum_{x\in[a,b]} (\alpha(x+0) - \alpha(x-0))$, ún. *ugrásösszeg*et (a végpontokban a „kívüleső" határérték az ottani függvényérték; a kifejezés korlátos változású függvények ott említett felbontási tétele miatt értelmes). Ez lineáris funkcionál a teljes változással, mint normával ellátott $\mathcal{C}([a,b])^*$ téren, és korlátos is, mert a fenti kifejezés abszolút értékét felülről becsli α teljes változása (tehát a normája ≤ 1, valójában 1). Ha $\mathcal{C}([a,b])^{**} = \mathcal{C}([a,b])$ fennállna, akkor létezne egy $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, amellyel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = \sum_{x\in[a,b]} (\alpha(x+0) - \alpha(x-0))$. Ez azonban lehetetlen, mert ez $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < x_0 \\ 1, & \text{ha } x \geq x_0 \end{cases}$ választásával adná, hogy $f(x_0) = 1$, és mivel $x_0 \in [a,b]$ tetszőleges, ezért $f \equiv 1$ lehetne csak, de akkor $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = \int_a^b 1\mathrm{d}\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, ami például $\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, & \text{ha } x = \frac{1}{2} \\ 2x, & \text{ha } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ esetén 2-t ad, holott ekkor $\sum_{x\in[a,b]} (\alpha(x+0) - \alpha(x-0)) = \frac{1}{2} \neq 2$. Tehát ilyen $f \in \mathcal{C}([a,b])$ nincsen, azaz $\mathcal{C}([a,b]) \subsetneq \mathcal{C}([a,b])^{**}$.

■ **B:** Ami $L^1([0,1])$-et, vagy általában $L^1([a,b])$-t illeti, azt már tudjuk, hogy duálisa $= L^\infty$ az indukált $\operatorname{ess\,sup}|g|$, $g \in L^\infty([a,b])$ normával. De az utóbbinak a duálisa bővebb L^1-nél, tehát van olyan eleme, amely nem fejezhető ki $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ alakban valamely $g(x) \in L^1([a,b])$-vel. Ennek belátásához legyen $x_0 \in (a,b)$, x_0 fix és definiáljunk egy F funkcionált egyelőre csak a $\mathcal{C}([a,b])$ altéren az $Ff = f(x_0)$ előírással. Mivel $|f(x_0)| \leq 1 \cdot \operatorname{ess\,sup}|f| = 1 \cdot \max_{x\in[a,b]}|f|$ ezért ez korlátos (normája 1). A BANACH–HAHN-tétellel (ld. 1.) terjesszük ki F-et az egész $L^1([a,b])$-re a korlátosság megőrzésével, hogy megkapjuk $L^1([a,b])^*$ egy elemét. Még a $\mathcal{C}([a,b])$ részhalmazon sem állhat fenn $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$ $(f \in \mathcal{C}([a,b]))$, mert akkor $|f(x_0)| \leq \operatorname{ess\,sup}|g| \cdot \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = M\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ valamely fix M-mel, ami lehetetlen, ha f x_0 közelében elég nagy, máshol pedig elég közel van a 0-hoz, tehát $L^1([a,b]) \subsetneq L^1([a,b])^{**}$.

■ **C:** c_0, tehát a 0-sorozatok vektortere (norma a sorozatelemek abszolútértékének maximuma) esetében is először meghatározzuk c_0^*-ot. Legyen $F \in c_0^*$, $e_i \in c_0$, $e_i = (0,0,\ldots,\underbrace{1}_{i},0,\ldots,0,\ldots)$ és $F(e_i) = \lambda_i$, $i = 1,2,\ldots$. Ha $x = (x_1,x_2,\ldots) \in c_0$, akkor $(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots,0,\ldots) \to x$ a tekintett abszolútérték-normában, ezért F folytonossága miatt $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots,0,\ldots) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i \to F(x)$, azaz $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i\lambda_i$. $(\lambda)_{i=1}^\infty$ meghatározza F-et, de $\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \cdots + \tilde{e}_n \in c_0$ és $\|\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \cdots + \tilde{e}_n\| = 1$, tehát $F(\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \cdots + \tilde{e}_n) = \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|$ közös korlát alatt maradnak (itt $\tilde{e}_i$ csak abban különbözik e_i-től, hogy az egyetlen nem 0 koordinátája 1 abszolút értékű, úgy hogy λ_i-vel szorozva $|\lambda_i|$ legyen). Így $\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i| < \infty$ és megfordítva, ha $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i$ abszolút konvergens,

akkor $x \in c_0$ esetén $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\lambda_i$ konvergens, mert abszolút konvergens, hiszen bármely $n > n_0$-ra (alkalmas n_0-lal) $|x_n\lambda_n| \leq |\lambda_n|$. Tehát c_0^* elemei az abszolút konvergens sorozatok és ez a hozzárendelés lineáris és szürjektív. Ha $\|x\| = 1$, akkor $|F(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\lambda_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right|$ tehát $\|F\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$, és $x = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \cdots + \tilde{e}_n$-re $\|x\| = 1$, $F(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, tehát $\|F\| \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, azaz $\|F\| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$, tehát együtt $\|F\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$. Tehát c_0^* az abszolút konvergens sorok vektortere az abszolútösszeg-normával, azaz l^1. A befejezés hasonló az előzőhöz: azt kell eldönteni, hogy a valamely $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$-lal definiált $l^1 \to \mathbb{K}$, $(l_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$-hez $\sum_{i=1}^{\infty} l_i x_i$-t hozzárendelő funkcionálokon kívül van-e még más l^1-en. Legyen $F \in (l^1)^*$, $F((l_n)_{n=1}^{\infty}) = \lambda_{n_0}$ (normája nyilván 1). Tegyük fel, hogy létezik $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, azaz $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, amellyel $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\lambda_i = \lambda_{n_0}$, ha $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$. Tekintsük ezek közül csak azokat, amelyek 1 koordinátában 1-ek, a többiben 0-k. Ezzel kapjuk: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots = \lambda_{n_0}$, ami $x_n \to 0$ miatt azt jelenti, hogy $\lambda_{n_0} = 0$, márpedig (n_0 bármely rögzítésével) l^1-nek nyilván van olyan eleme, melynek n_0-adik koordinátája $\neq 0$, így tehát $(l^1)^* \supsetneq c_0$, azaz $c_0 \subsetneq (c_0)^{**}$.

12.6. Adjungált operátorok normált terekben

12.6.1. Korlátos operátor adjungáltja

Ha $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ folytonos lineáris operátor ($\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ normált terek), akkor minden $g \in \mathbb{Y}^*$ funkcionálhoz az $f(x) = g(Tx)$ $(\forall\, x \in \mathbb{X})$ képlettel hozzárendelhetiink egy $f \in \mathbb{X}^*$ funkcionált. Ily módon egy

$$T^*\colon \mathbb{Y}^* \longrightarrow \mathbb{X}^*\,, \qquad (T^*g)(x) = g(Tx) \qquad (\forall\, g \in \mathbb{Y}^*,\quad \forall\, x \in \mathbb{X})\,, \tag{12.182}$$

folytonos lineáris operátor áll elő, amelyet a T operátor *adjungáltjá*nak nevezüink, és amelynek a következő tulajdonságai vannak:
$(T+S)^* = T^* + S^*$, $(ST)^* = T^*S^*$, $\|T^*\| = \|T\|$, ahol a $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ és $S\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ folytonos lineáris operátorokra ($\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ normált terek) az $ST\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ operátor a természetes módon, az $ST(x) = S(T(x))$ képlettel van definiálva. A 12.1.5. és a 12.5.4.2. szakaszban bevezetett jelölésekkel tetszőleges $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ operátorra érvényesek a következő azonosságok:

$$\overline{Im(T)} = Ker(T^*)^{\perp}\,, \qquad \overline{Im(T^*)} = Ker(T)^{\perp}\,, \tag{12.183}$$

ahol $Im(T)$ zártsága maga után vonja $Im(T^*)$ zártságát.

A T^*-ból a $(T^*)^*$ képlettel nyert T^{**} operátor a következő tulajdonságú: Ha $F_x \in \mathbb{X}^{**}$, akkor $T^{**}F_x = F_{Tx} \in \mathbb{Y}^{**}$. Tehát a $T^{**}\colon \mathbb{X}^{**} \to \mathbb{Y}^{**}$ operátor a T operátor kiterjesztése.

A $\mathbb{H}$ HILBERT-térben RIESZ FRIGYES tétele szerint az adjungáltat a $(Tx, y) = (x, T^*y)$, $x, y \in \mathbf{H}$ skalárszorzat segítségével lehet bevezetni, továbbá $\mathbf{H}$ és $\mathbf{H}^{**}$ azonosítása miatt a $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$ és $I^* = I$ összefüggésen kívül $T^{**} = T$ is fennáll. Ha T bijektív, akkor T^* is az, és teljesül $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. A T és a T^* operátor rezolvensére érvényes az

$$[R_\lambda(T)]^* = R_{\overline{\lambda}}(T^*)\,, \tag{12.184}$$

összefüggés, ahonnan az adjungált operátor spektrumára $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ adódik.

■ **A:** Legyen T folytonos magú integráloperátor,

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\,, \tag{12.185}$$

amelyet az $L^p([a,b])$ $(1<p<\infty)$ térben tekintünk. A T operátor adjungáltja szintén integráloperátor,

$$(T^*g)(t)=\int_a^b K^*(t,s)y_g(s)\,ds \tag{12.186}$$

amelynek magja $K^*(s,t)=K(t,s)$, és ahol y_g az L^q térnek az az eleme, amely (12.177) szerint a $g\in(L^p)^*$ funkcionálhoz tartozik.

■ **B:** A véges dimenziójú komplex térben az $A=(a_{ij})$ mátrix által előállított operátor adjungáltját éppen az az A^* mátrix definiálja, amelyre $a^*_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

12.6.2. Nem korlátos operátor adjungáltja

Legyen $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ valós normált tér, és legyen T lineáris (nem szükségképp korlátos) operátor, amelynek (lineáris) értelmezési tartománya $D(T)\subset\mathbb{X}$, és amelynek értékei $\mathbb{Y}$-hoz tartoznak. Ekkor rögzített $g\in\mathbb{Y}^*$ funkcionálra a $g(Tx)$ kifejezés, amelyről nyilvánvaló, hogy lineárisan függ x-től, értelmes. Tehát fel lehet tenni a kérdést: létezik-e egy jól meghatározott $f\in\mathbb{X}^*$ funkcionál, amelyre

$$f(x)=g(Tx)\quad\forall\,x\in D(T). \tag{12.187}$$

Legyen $D^*\subset\mathbb{Y}^*$ azon $g\in\mathbb{Y}^*$ funkcionálok halmaza, amelyekre bizonyos $f\in\mathbb{X}^*$ mellett érvényes a (12.187) előállítás. Ha $\overline{D(T)}=\mathbb{X}$, akkor megadott g esetén f egyértelműen meg van határozva, tehát előáll egy $f=T^*g$ lineáris operátor, amelynek értelmezési tartománya $D(T^*)=D^*$. Ilyenkor tetszőleges $x\in D(T)$ elemre és $g\in\mathbb{Y}^*$ funkcionálra fennáll

$$g(Tx)=(T^*g)(x)\qquad(\forall\,x\in\mathbb{X}\quad\forall\,g\in D(T^*))\,. \tag{12.188}$$

A T^* operátort, amely ráadásul zárt is, T *adjungáltjá*nak nevezzük. Ez az általánosabb megközelítés azért természetes, mert pontosan akkor lesz $D(T^*)=\mathbb{Y}^*$, ha T korlátos a $D(T)$ halmazon. Ebben az esetben fennáll $T^*\in B(\mathbb{Y}^*,\mathbb{X}^*)$ és $\|T^*\|=\|T\|$.

12.6.3. Önadjungált operátorok

A $T\in B(\mathbb{H})$ operátort *önadjungált*nak mondjuk, ha $T^*=T$. Ebben az esetben $\forall\,x\in\mathbb{H}$ elemre a (Tx,x) szám és emiatt T minden sajátértéke is valós. Fennáll

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)| \tag{12.189}$$

továbbá az $m=m(T)=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)$ és $M=M(T)=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$ jelöléssel

$$m(T)\|x\|^2\le(Tx,x)\le M(T)\|x\|^2\quad\text{és}\quad\|T\|=r(T)=\max\{|m|,M\}\,. \tag{12.190}$$

Önadjungált (korlátos) operátor spektruma az $[m,M]$ intervallumban helyezkedik el, és fennáll $m,M\in\sigma(T)$.

12.6.3.1. Pozitív definit operátorok

A $B(\mathbb{H})$-hoz tartozó összes önadjungált operátorok halmazán a

$$T\ge0\quad\text{pontosan akkor, ha}\quad(Tx,x)\ge0\quad(\forall\,x\in\mathbb{H})\,, \tag{12.191}$$

megállapodással részleges rendezést lehet bevezetni: $T_1>T_2$, ha $T_1-T_2\ge0$. Ha $T\ge0$, akkor azt mondjuk, hogy a T operátor *pozitív* (*definit*). Tetszőleges T önadjungált operátorra ((**H1**) értelmében, ld. a 12.4.1.1. szakaszt) fennáll $(T^2x,x)=(Tx,Tx)\ge0$, tehát T^2 pozitív definit. Megfordítva, minden pozitív definit T operátornak létezik négyzetgyöke, azaz van pontosan egy pozitív definit W operátor, amelyre $W^2=T$. Ezenfelül az önadjungált operátorok vektortere egyben vektorháló is (ld. a 12.1.7.4. szakaszt), és a

$$|T|=\sqrt{T^2}\,,\quad T^+=\frac{1}{2}(|T|+T)\,,\quad T^-=\frac{1}{2}(|T|-T) \tag{12.192}$$

operátorok fontos szerephez jutnak az önadjungált operátorok STIELTJES-integrál segítségével történő spektrálfelbontása, valamint spektrál- és integrál-előállítása során (ld. 460. old., valamint [12.1], [12.12], [12.13], [12.15], [12.18], [12.21]).

12.6.3.2. Projektorok a Hilbert-térben

Legyen $\mathbb{H}_0$ a $\mathbb{H}$ HILBERT-tér valamely altere. Ekkor a projekciótétel szerint (ld. a 12.4.2. szakaszt) értelmezve van tetszőleges $x \in \mathbb{H}$ elem $\mathbb{H}_0$-ra való x' projekciója és így az a P operátor is, amelyet a $Px = x'$ képlet definiál, és amely a $\mathbb{H}$ teret a $\mathbb{H}_0$ altérre képezi le. A P operátort $\mathbb{H}_0$-hoz tartozó *projektor*nak vagy *projekció*nak, vagy *ortogonális projekció*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy P lineáris, folytonos, $\mathbb{H}_0$-on az identitás, és fennáll $\|P\| = 1$. A $\mathbb{H}$ térben folytonos lineáris P operátor pontosan akkor (egy megfelelő altérhez tartozó) projektor, ha:
a) $P = P^*$, azaz P önadjungált, és
b) $P^2 = P$, azaz P *idempotens*. Ha P projektor, akkor a $\mathbb{H}_0$ altér P képtere, másképpen $I - P$ magtere.

12.7. Kompakt halmazok és kompakt operátorok

12.7.1. Normált terek kompakt részhalmazai

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ normált tér egy A részhalmaza
- *kompakt*, ha A elemeinek bármely sorozata tartalmaz olyan konvergens részsorozatot, amelynek határértéke A-hoz tartozik,
- *relatíve kompakt* vagy *relatív kompakt* vagy *feltételesen kompakt* vagy *prekompakt*, ha a lezárása, tehát $\overline{A}$ (ld. a 12.2.1.3. szakaszt) kompakt, ami azt jelenti, hogy A elemeinek bármely sorozata tartalmaz konvergens részsorozatot (amely nem szükségképpen A-beli, de mindenképpen $\overline{A}$-beli elemhez tart)[‡].

Az analízisben ez éppen a BOLZANO–WEIERSTRASS-tétel, ezért azt mondjuk, hogy az ilyen halmaz rendelkezik a BOLZANO–WEIERSTRASS-*tulajdonsággal.*
Minden kompakt halmaz szeparábilis (mint metrikus tér altere), továbbá zárt és korlátos. Megfordítva, ha az $\mathbb{X}$ tér véges dimenziójú, akkor minden ilyen halmaz kompakt. Az $\mathbb{X}$ normált tér zárt egységgömbje pontosan akkor kompakt, ha $\mathbb{X}$ véges dimenziójú. A relatíve kompakt halmazok jellemzéséről metrikus terekben (HAUSDORFF tétele véges ε-háló létezéséről), valamint az $\mathbf{s}$, $\mathbf{c}$ terekben (ARZELA–ASCOLI-tétel) és az $\boldsymbol{L^p}$ $(1 < p < \infty)$ terekben ld. [12.18].

12.7.2. Kompakt operátorok

12.7.2.1. A kompakt operátor fogalma

Az $\mathbb{X}$ normált teret az $\mathbb{Y}$ normált térbe leképező tetszőleges $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ operátort *kompakt*nak mondjuk, ha bármely $A \subset \mathbb{X}$ korlátos halmaz $T(A)$ képe relatíve kompakt halmaz $\mathbb{Y}$-ban. Ha a T operátor még folytonos is, akkor azt mondjuk, hogy T *teljesen folytonos.* Minden kompakt lineáris operátor korlátos és ennek következtében teljesen folytonos. Ha a kompaktságot nem tesszük fel, akkor már a korlátosságból nem következik a teljesen folytonosság, amit mutat az identikus operátor ($\mathbb{X} = \mathbb{Y}$), ami természetesen folytonos, de nem kompakt, mert egy korlátos halmaz nem feltétlenül relatíve kompakt: ha $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ végtelen ortonormált, tehát korlátos sorozat egy végtelen dimenziós euklideszi térben (bármely végtelen, független sorozatból kaphatunk ilyet a GRAM–SCHMIDT-eljárással), akkor nem lehet konvergens részsorozata, mert nem CAUCHY-konvergens: $\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2$, azaz $\varepsilon < \sqrt{2}$-vel már nem teljesül a CAUCHY-konvergencia kritériuma. *Lineáris* operátor kompaktságához elég megkövetelni, hogy $\mathbb{X}$ egységgömbjét $\mathbb{Y}$-nak egy relatíve kompakt halmazába vigye át.

12.7.2.2. Kompakt lineáris operátorok tulajdonságai

Egy $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-hoz tartozó operátor kompaktságát sorozatokkal a következőképpen lehet jellemezni: Az $\mathbb{X}$ tér bármely korlátos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára a $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Kompakt operátorok lineáris kombinációja is kompakt. Ha az $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $S \in B(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ operátorok egyike kompakt, akkor ST kompakt. Ha $\mathbb{Y}$ BANACH-tér, akkor érvényesek a következő fontos állítások.
1. Konvergencia Ha a kompakt operátorokból álló $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens az operátornormában teljes $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-ban, akkor a határérték is kompakt operátor.

[‡]E fogalmak bevezetéséhez elég feltenni, hogy $\mathbb{X}$ metrikus (vagy még általánosabban topologikus) tér. Erre az általánosításra azonban a továbbiakban nem lesz szükség (ekkor a fenti kompaktság az ún. sorozatkompaktságot definiálná, de már metrikus terekben is ekvivalens ez a két fogalom).

2. Schauder tétele Ha T folytonos lineáris operátor, akkor T és T^* egyszerre kompakt (vagy nem kompakt).

3. Kompakt T operátor spektrális tulajdonságai a (végtelen dimenziójú) X BANACH-térben (most $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$): A nullvektor a spektrumhoz tartozik. A $\sigma(T)$ spektrum minden, nullától különböző pontja egy véges dimenziójú $\mathbb{X}_\lambda = \{x \in \mathbb{X} \mid (\lambda I - T)x = 0\}$ sajátaltérrel rendelkező sajátérték, továbbá $\forall\, \varepsilon > 0$ számra a $\{|\lambda| \leq \varepsilon\}$ körön kívül T-nek csak véges sok sajátértéke van, végül pedig a sajátértékek halmazának egyetlen torlódási pontja a nulla lehet, és emiatt megszámlálható sok sajátértéke lehet. Ha $\lambda = 0$ nem sajátértéke T-nek, akkor T^{-1} létezik, de nem korlátos.

4. A képtér vagy véges dimenziós és emiatt zárt, vagy végtelen dimenziós és akkor nem zárt, viszont szeparábilis.

■ Kompakt lineáris operátorok a korábban tárgyalt FREDHOLM- és VOLTERRA-féle integráloperátorok a $\mathcal{C}([a,b])$ és $\boldsymbol{L^p}\ (a,b)$ $(1 < p < \infty)$ terekben.

12.7.2.3. Elemek gyenge konvergenciája

Azt mondjuk, hogy az X normált tér elemeinek $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata gyengén tart az x_0 elemhez, ha minden $f \in \mathbb{X}^*$ funkcionálra fennáll az $f(x_n) \to f(x_0)$ összefüggés (jelölés: $x_n \rightharpoonup x_0$). Nyilvánvaló, hogy $x_n \to x_0$ esetén $x_n \rightharpoonup x_0$. Ha $\mathbb{Y}$ is normált tér, és $T\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ folytonos lineáris operátor, akkor:

a) $x_n \rightharpoonup x_0$ esetén $Tx_n \rightharpoonup Tx_0$,

b) ha T kompakt, akkor $x_n \rightharpoonup x_0$ esetén még $Tx_n \to Tx_0$ is teljesül.

Egy operátor *véges rendű*, másképpen *véges rangú*, ha képtere véges dimenziós.

■ **A:** Minden véges rendű operátor kompakt. Ebből is következik, hogy végtelen dimenziójú tér identikus operátora sohasem lehet kompakt (ld. 12.7.2.1.).

■ **B:** Legyen $\mathbb{X} = \mathrm{l}^2$, és legyen T a

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

végtelen mátrix segítségével megadott

$$Tx = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{1k}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk}x_k, \ldots \right) \tag{12.193}$$

operátor az l^2 téren. Ha $\sum_{k,n=1}^{\infty} |t_{nk}|^2 = M < \infty$, akkor T az l^2 teret az l^2 térbe leképező kompakt operátor, amelyre $\|T\| \leq M$.

12.7.3. Fredholm-féle alternatíva

Legyen T kompakt lineáris operátor az X BANACH-téren. Tekintsük az alábbi, tetszőleges $\lambda \neq 0$ paramétert tartalmazó, másodfajú egyenleteket, ahol x, illetve f az ismeretlen:

$$x - \lambda Tx = y\,, \quad x - \lambda Tx = 0 \quad \text{(a FREDHOLM-féle integrálegyenlet általánosítása)}, \tag{12.194a}$$

$$f - \lambda T^* f = g\,, \quad f - \lambda T^* f = 0\,. \tag{12.194b}$$

Igazak a következők:

1. $\dim(Ker(I - \lambda T)) = \dim(Ker(I - \lambda T^*))$, vagyis a homogén egyenleteknek mindig azonos véges számú lineárisan független megoldásuk van.

2. $Im(\lambda I - T) = Ker(\lambda I - T^*)^{\perp}$ és[§] $Im(\lambda I - T^*) = Ker(\lambda I - T)^{\perp}$.

3. $Im(\lambda I - T) = \mathbb{X}$ pontosan akkor, ha $Ker(\lambda I - T) = 0$.

4. FREDHOLM-*féle alternatíva* (hívják RIESZ–SCHAUDER-*tétel*nek is). Azt mondja ki, hogy csak két eset lehetséges:

a) A homogén egyenletnek csak triviális megoldása van. Ebben az esetben fennáll $\lambda \in \varrho(T)$, a $(\lambda I - T)^{-1}$ operátor korlátos, és az inhomogén egyenletnek tetszőleges $y \in \mathbb{X}$ mellett pontosan egy $x = (\lambda I - T)^{-1} y$ megoldása van.

[§]Itt BANACH-térbeli ortogonalitás (ld. (12.5.4.2.)) értendő.

b) A homogén egyenletnek létezik legalább egy, nem triviális megoldása. Ebben az esetben: λ a T operátornak sajátértéke, azaz $\lambda \in \sigma(T)$, és az inhomogén egyenletnek pontosan akkor létezik (nem egyértelmű) megoldása, ha az y jobb oldal a $T^*f = \lambda f$ adjungált egyenlet minden f megoldására kielégíti az $f(y) = 0$ feltételt.
Az utóbbi esetben az inhomogén egyenlet minden megoldása az $x = x_0 + h$ alakban nyerhető, ahol x_0 az inhomogén egyenlet egy rögzített megoldása és $h \in Ker(\lambda I - T)$.
A $Tx = y$ alakú lineáris egyenleteket, ahol T kompakt operátor, elsőfajúnak mondjuk. Ezeknek a tárgyalása általában valamivel nehezebb (ld. [12.12], [12.21]).

12.7.4. Kompakt lineáris operátorok a Hilbert-térben

Legyen $T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ kompakt lineáris operátor, tehát $T \in B(\mathbb{H})$. Ekkor T egy véges rendű operátorokból álló sorozat határértéke ($B(\mathbb{H})$-ban). A véges rendű esethez való ilyen értelmű közelség többek között a következőkből látható:
Ha C véges dimenziójú lineáris operátor és $T = I - C$, akkor T injektivitásából következik szürjektivitása, T^{-1} létezése és az, hogy $T^{-1} \in B(\mathbb{H})$.
Ha C kompakt operátor, akkor $T = I - C$-re az alábbi állítások ekvivalensek:

1. T^{-1} létezik és folytonos,

2. $x \neq 0 \Rightarrow Tx \neq 0$, azaz T injektív,

3. $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, azaz T szürjektív, tehát T injektív $\rightarrow$ T szürjektív $\rightarrow$ T^{-1} létezik és folytonos, ahogy a véges esetben.

12.7.5. Kompakt önadjungált operátorok a Hilbert-téren

1. Sajátértékek Kompakt önadjungált $T \neq 0$ operátornak van legalább egy (nullától különböző) sajátértéke. Pontosabban, T-nek mindig van olyan λ sajátértéke, amelyre $|\lambda| = \|T\|$.

2. A Hilbert–Schmidt-tétel T előállítható a $T = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}$ alakban, ahol λ_k a T operátor különböző sajátértékeit, P_λ pedig a $\mathbb{H}_\lambda$ sajátaltérhez tartozó projektort jelenti. Ezt néha úgy fejezzük ki, hogy a T operátor diagonalizálható. Innen adódik, hogy $Tx = \sum_k \lambda_k (x, e_k) e_k$ minden $x \in \mathbb{H}$ elemre, ahol $\{e_k\}$ a T operátor sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer; itt azonban már egy adott P_λ $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots$ sajátbázisvektoraira $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \cdots = \lambda$. Egyszerű következménye:
Ha T kompakt önadjungált operátor a szeparábilis $\mathbb{H}$ HILBERT-térben, akkor $\mathbb{H}$-nak van T sajátvektoraiból álló bázisa. Ezen felbontási formula felhasználásával a sajátértékek ismeretében egyszerű képlet adható (12.194b) megoldására.
Az ún. spektrál-(leképezési) tételek (ld. [12.9], [12.11], [12.13], [12.15], [12.16], [12.21]) a HILBERT–SCHMIDT-tétel nem kompakt, önadjungált (korlátos vagy nem korlátos) operátorokra való általánosításának tekinthetők.

12.8. Nemlineáris operátorok

A nemlineáris operátoregyenletek elméletében lényegileg olyan megoldási módszereket használunk, amelyek az alábbi elveken nyugszanak:
1. Kontraktív leképezés elve, azaz a Banach-féle fixponttétel (ld. a 12.2.2.3. és a 12.2.2.4. szakaszt. Az elv további módosításairól és változatairól ld. [12.9], [12.12], [12.15], [12.21]).
2. A Newton-módszer (ld. a 18.2.5.2. és a 19.1.1.2. szakaszt) általánosítása a végtelen dimenziójú esetre.
3. Schauder-féle fixpont-elv.
4. Leray–Schauder-elmélet.
Az **1.** és **2.** elven alapuló módszerek a megoldásról átfogó információt adnak, pl. létezés, egyértelműség, konstruálhatóság stb., viszont a **3.** és **4.** elven alapuló vizsgálati módszerek általában „csak" a megoldás létezésére vonatkozó kvalitatív kijelentéseket tesznek lehetővé. Speciális tulajdonságú operátorok esetén azonban lásd a 12.8.6. és 12.8.7. szakaszt.

12.8.1. Példák nemlineáris operátorra

Nemlineáris operátorokra a 12.5.1. szakaszban a lineáris esetre megemlített összefüggés folytonosság és korlátosság között általában már nem érvényes. Nemlineáris operátoregyenletek, pl. nemlineáris

peremérték-feladatok vagy integrálegyenletek tárgyalása során gyakran fellépnek a következő, nemlineáris operátorok.

1. Nyemickij-operátor Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér mérhető részhalmaza (12.9.1. szakasz), és legyen $f:\ \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy kétváltozós $f(x,s)$ függvény, amely egyrészt $x \in \Omega$-ban folytonos majdnem minden s-re, másrészt s-ben mérhető minden x-re (CARATHÉODORY-feltételek). Az $\mathcal{F}(\Omega)$ téren, tehát az összes függvények pontonkénti műveletekkel definiált vektorterén az

$$(\mathcal{N}u)(x) = f[x, u(x)] \quad (x \in \Omega) \tag{12.195}$$

képlettel értelmezett, nemlineáris $\mathcal{N}$ operátort NYEMICKIJ-*operátor*nak hívjuk. Ez folytonos és korlátos, ha $L^p(\Omega)$-ból $L^q(\Omega)$-ba képez le, ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ez a helyzet például akkor, ha

$$|f(x,s)| \le a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}, \quad \text{ahol} \quad a(x) \in L^q(\Omega) \qquad (b > 0) \tag{12.196}$$

vagy ha $f:\ \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Az $\mathcal{N}$ operátor csak kivételes esetekben kompakt.

2. Hammerstein-operátor Legyen Ω az $\mathbb{R}^n$ tér kompakt részhalmaza, f a CARATHÉODORY-feltételeket kielégítő, $K(x,y)$ pedig folytonos függvény az $\Omega \times \Omega$ halmazon. Az $\mathcal{F}(\Omega)$ téren a

$$(\mathcal{H}u)(x) = \int_\Omega K(x,y) f[y, u(y)]\, dy \quad (x \in \Omega) \tag{12.197}$$

képlettel értelmezett, nemlineáris $\mathcal{H}$ operátor neve HAMMERSTEIN-*operátor*. A K mint mag által generált, u-ban lineáris $\mathcal{K}$ integráloperátor,

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_\Omega K(x,y) u(y)\, dy \quad (x \in \Omega) \tag{12.198}$$

segítségével $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H} = \mathcal{K} \cdot \mathcal{N}$ alakban írható. Mármost ha a $K(x,y)$ mag kielégíti az

$$\int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^q\, dx\, dy < \infty \tag{12.199}$$

feltételt, az f függvény pedig a (12.196) feltételt, akkor $\mathcal{H}$ folytonos és kompakt operátor az $L^p(\Omega)$ téren (most is $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

3. Uriszon-operátor Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz és adott a $K(x,y,s):\ \Omega\times\Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor az $\mathcal{F}(\Omega)$ téren az

$$(\mathcal{U}u)(x) = \int_\Omega K[x, y, u(y)]\, dy \quad (x \in \Omega) \tag{12.200}$$

képlettel értelmezett, nemlineáris $\mathcal{U}$ operátort URISZON-*operátor*nak nevezzük. Ha a K magra teljesülnek a megfelelő feltételek, akkor $\mathcal{U}$ folytonos és kompakt operátor a $\mathcal{C}(\Omega)$, ill. $L^p(\Omega)$ térben.

12.8.2. Nemlineáris operátorok differenciálhatósága

Legyenek $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ BANACH-terek, $D \subset \mathbb{X}$ nyílt halmaz és $T:\ D \longrightarrow \mathbb{Y}$. Azt mondjuk, hogy a T operátor az $x \in D$ pontban FRÉCHET-*differenciálható*, másképpen FRÉCHET-*deriválható*, ha van olyan (általában az x helytől függő, folytonos lineáris) $L \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ operátor, hogy

$$T(x+h) - T(x) = Lh + \omega(h), \quad \text{ahol} \quad \|\omega(h)\| = o(\|h\|), \tag{12.201}$$

vagy másképpen írva

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0 \tag{12.202}$$

azaz $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, amelyre $\|h\| < \delta$ esetén $\|T(x+h) - T(x) - Lh\| \le \varepsilon\|h\|$. Az L operátort, amelyet rendszerint a $T'(x)$, $T'(x,\cdot)$ vagy $T'(x)(\cdot)$ módon jelölünk, a T operátor x pontban vett FRÉCHET-*deriváltjá*nak hívjuk. A $dT(x;h) = T'(x)h$ értéket a T operátor x pontban vett (a h növekményhez

tartozó) FRÉCHET-*differenciáljá*nak nevezzük. Mindegyik jelölésből látható az operátornak az x helytől való függése, a 2.-ban és a 3.-ban pedig a zárójelbeli pont „kijelöli az argumentum helyét", amelyre az operátort alkalmazni lehet.
Ha egy operátor valamely pontban differenciálható, akkor ott folytonos is. Ha $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, azaz maga az operátor lineáris és folytonos, akkor T minden $x \in X$ pontban differenciálható, és deriváltja állandó, éppen T-vel egyenlő.

12.8.3. Newton-módszer

Legyen $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, T és D olyan, mint az előző szakaszban. Feltéve, hogy T a D halmaz minden pontjában differenciálható, értelmezve van a $T'\colon D \longrightarrow B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ operátor, amely minden $x \in D$ ponthoz a $T'(x) \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ elemet rendeli. Legyen a T' operátor a $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$-on definiált operátornormában folytonos a D halmazon (tehát $(T_n) \subset B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ esetén $T_n \to T$, ha $\|T_n - T\| \to 0$, ahol $\|\cdot\|$ az $\mathbb{X}$-beli norma által indukált operátornormát jelenti és a feltétel szerint, ha $(x_n) \subset D$, $x \in D$ és $x_n \to x$, akkor $T'(x_n) \to T'(x)$); ebben az esetben azt mondjuk, hogy T folytonosan differenciálható a D halmazon. Tegyük fel, hogy D tartalmazza a

$$T(x) = 0 \tag{12.203}$$

egyenlet valamely x^* megoldását. Tegyük fel továbbá, hogy $\forall x \in D$ pontban a $T'(x)$ operátor folytonosan invertálható, azaz $[T'(x)]^{-1} \in B(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$. Tetszőleges $x_0 \in D$ esetén (12.201) alapján az a sejtésünk, hogy a $T(x_0) = T(x_0) - T(x^*)$ és a $T'(x_0)(x_0 - x^*)$ elem „közel" van egymáshoz, és így a *lineáris* egyenlet megoldása, vagyis (a tett feltevések mellett)

$$x_1 = x_0 - [T'(x_0)]^{-1} T(x_0)\,, \tag{12.204}$$

approximálja a keresett x^* vektort. Ily módon, x_0-ból kiindulva, megkonstruáljuk az ún. NEWTON-féle közelítéssorozatot:

$$x_{n+1} = x_n - [T'(x_n)]^{-1} T(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)\,. \tag{12.205}$$

Az ismertetett eljárás használhatóságát, azaz (x_n) konvergenciáját (12.203) egy megoldásához számos tétel biztosítja, ezek egymástól a tett feltevések általánossági fokában vagy speciális helyzetekhez való illeszkedésében különböznek.
A *módosított* NEWTON-*módszert* akkor kapjuk, ha a (12.205) képletben $[T'(x_n)]^{-1}$ helyett minden n-re, tehát minden iterációs lépésben ugyanazt a $[T'(x_0)]^{-1}$ operátort használjuk. A konvergenciasebesség további becsléseiről és a módszernek az x_0 kiindulási ponttól való (általában érzékeny) függéséről ld. [12.7], [12.13], [12.15], [12.21].

12.8.4. Schauder-féle fixpont-elv

Legyen T nemlineáris operátor, amely az $\mathbb{X}$ BANACH-tér D halmazán van értelmezve és azt $\mathbb{X}$-be képezi le. Kérdés, hogy van-e az $x = T(x)$ egyenletnek legalább egy megoldása, tehát hogy van-e T-nek fixpontja; az $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ és $D = [a, b]$ speciális esetben ismeretes, hogy bármely folytonos függvénynek, amely a D halmazt a D halmazba képezi le, létezik fixpontja D-ben. Ha $\mathbb{X}$ tetszőleges, *véges dimenziójú* normált tér ($\dim\mathbb{X} \geq 2$), akkor érvényes a BROUWER-féle fixponttétel:

1. Brouwer-féle fixponttétel Legyen D nem üres, zárt, korlátos, konvex halmaz egy véges dimenziójú normált térben. Ha T folytonos operátor, amely a D halmazt önmagába képezi le, akkor T-nek létezik (legalább egy) fixpontja D-ben. Tetszőleges végtelen dimenziójú BANACH-tér esetében a választ a SCHAUDER-féle fixponttétel adja meg.

2. Schauder-féle fixponttétel Legyen D nem üres, zárt, korlátos, konvex halmaz egy BANACH-térben. Ha a $T : D \longrightarrow \mathbb{X}$ operátor folytonos és kompakt (tehát teljesen folytonos), továbbá a D halmazt önmagába képezi le, akkor T-nek van (legalább egy) fixpontja D-ben.
E tétel segítségével meg lehet például mutatni, hogy a (12.68) kezdetiérték-feladatnak $t \geq 0$ esetén még akkor is van lokális megoldása, ha a jobboldalról a LIPSCHITZ-feltétel helyett csak annyit teszünk fel, hogy folytonos.

12.8.5. Leray–Schauder-elmélet

Az $x = T(x)$ vagy az általánosabb $(I + T)(x) = y$ alakú egyenletek megoldásainak létezésére vonatkozóan, ahol T teljesen folytonos operátor, a leképezés fokának mélyen fekvő tulajdonságai alapján egy további elvet fedeztek fel, amely sikerrel alkalmazható pl. nemlineáris peremérték-feladatok megoldásának egzisztenciabizonyítása során. Az elmélet itt ismertetett eredményei gyakorlati célokra messze a legalkalmasabbak, a megfogalmazásokat pedig úgy választottuk meg, hogy az említett leképezésfok ne szerepeljen.

1. Leray–Schauder-tétel Legyen D az $\mathbf{X}$ valós BANACH-tér nyílt, korlátos halmaza, és legyen $T : \overline{D} :\longrightarrow \mathbf{X}$ teljesen folytonos operátor. Legyen $y \in D$ olyan pont, hogy $x + \lambda T(x) \neq y$ teljesül minden $x \in \partial D$ határpontra és $\lambda \in [0, 1]$ számra. Ekkor az $(I + T)(x) = y$ egyenletnek létezik legalább egy megoldása.

Az alkalmazások során e tétel következő változata is gyakran előnyös: Legyen T teljesen folytonos operátor az $\mathbf{X}$ BANACH-téren. Ha az

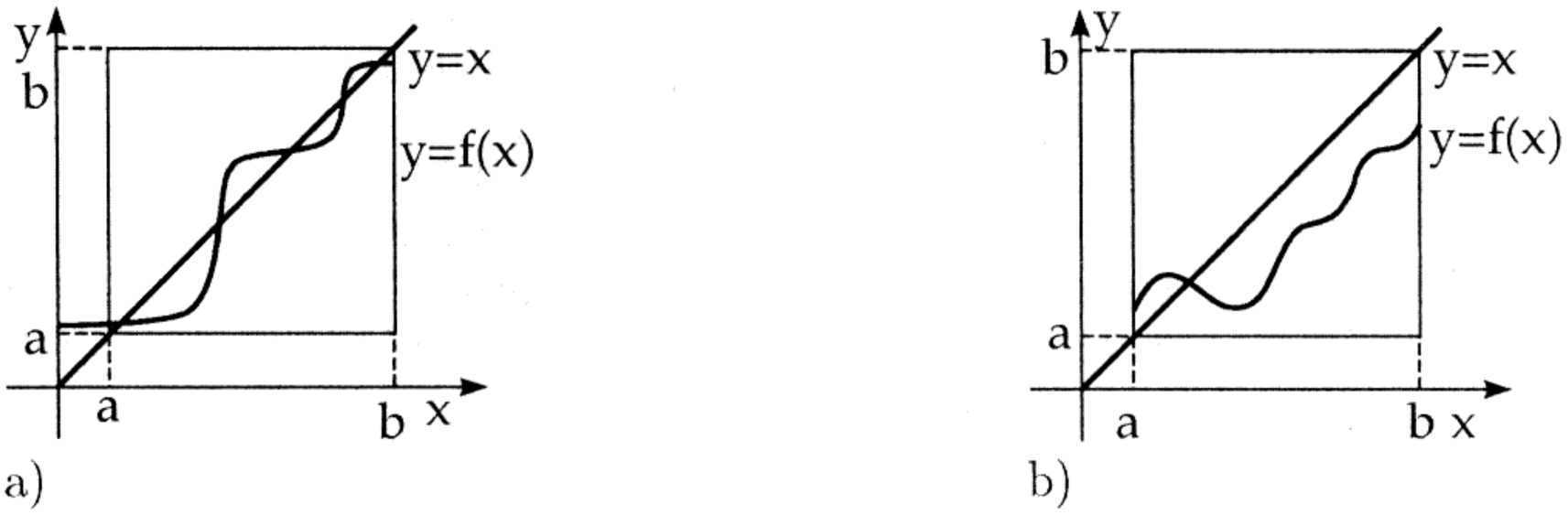
$$x = \lambda T(x) \quad (\lambda \in [0, 1]) \tag{12.206}$$

egyenletsereg megoldásaira egyenletes a priori becslés adható, azaz tudható, hogy $\exists c > 0$ úgy, hogy $\forall\, \lambda$ és $\forall\, x$ esetén, amelyre teljesül (12.206), fennáll az $\|x\| \leq c$ egyenlőtlenség, akkor az $x = T(x)$ egyenletnek létezik megoldása (ez lényegében a fenti $y = \mathbf{0}$ eset).

12.8.6. Pozitív, nemlineáris operátorok

A SCHAUDER-féle fixponttétel alkalmazhatósága megkívánja egy megfelelő tulajdonságú halmaz kiválasztását, amelyet a tekintett operátor önmagába képez le. Az alkalmazásoknál, különösen a nemlineáris peremérték-feladatok elméletében, a vizsgált terek többnyire rendezett normált (függvényekből álló) terek, az operátorok pedig nem ritkán pozitív (ld. 12.1.7.3.), vagy erősebb feltételként *izoton növekedő*, azaz olyan T operátorok, amelyekre $x \leq y$ esetén $T(x) \leq T(y)$. Ha tévedésről (ld. pl. a 12.8.7. szakaszt) nem lehet szó, az ilyen operátorokat *monotonok*nak is mondjuk. (Mivel T nemlineáris, a pozitivitásból nem következik az izoton monotonitás.)

Legyen most $\mathbf{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{X}_+, \|\cdot\|)$ egy X_+ zárt kúppal rendezett BANACH-tér, és legyen $[a, b]$ valamely rendezési intervallum X-ben (ld. 12.1.7.2.). Ha X_+ normális (ld. (12.97)), és a teljesen folytonos (nem szükségképp izoton) T operátorra fennáll $T([a, b]) \subset [a, b]$, akkor T-nek létezik legalább egy fixpontja $[a, b]$-ben. Illusztrációként az $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ esetben, tehát amikor a és $b \in \mathbb{R}$, ld. a **12.6.b ábrát**, ami tehát a 12.8.4. bevezetőjében említett eset egy újabb általánosítása.



12.6. ábra.

A rendezett terekben végzett vizsgálatok további előnye, hogy izoton növekedő T operátorra, amely az $\mathbf{X}$ tér $[a, b]$ (0)-intervallumán van értelmezve triviálisan, ha az a, b végpontokat $[a, b]$-be képezi le, azaz kielégíti a $T(a) \geq a$ és a $T(b) \leq b$ feltételt, automatikusan fennáll $T([a, b]) \subset [a, b]$. Ezenfelül az

$$x_0 = a \text{ és } x_{n+1} = T(x_n) \ (n \geq 0), \qquad \text{ill. } y_0 = b \text{ és } y_{n+1} = T(y_n) \ (n \geq 0) \tag{12.207}$$

képlettel jól definiált (azaz $x_n, y_n \in [a, b]$, $n = 0, 1, \ldots$) sorozatok közül nyilván az első monoton növekedő, a második pedig monoton csökkenő, vagyis $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ és $b = y_0 \geq y_1 \geq \ldots y_n \geq \ldots$. Végül a T operátor x_*, ill. x^* fixpontját *minimális*nak, ill. *maximális*nak mondjuk, ha T

bármely z fixpontjára fennáll $x_* \leq z$, ill. $z \leq x^*$; ezek nyilván egyértelműek.
Mármost érvényesek a következő állítások **(12.6.a ábra)**: Legyen $\mathbb{X}$ egy $\mathbb{X}_+$ zárt kúppal rendezett BANACH-tér, $D \subset \mathbb{X}$, továbbá legyen $T: D \longrightarrow \mathbb{X}$, folytonos és izoton növekedő operátor. Legyen $[a,b] \subset D$, ahol $T(a) \geq a$ és $T(b) \leq b$. Ekkor fennáll $T([a,b]) \subset [a,b]$, és a T operátornak létezik fixpontja $[a,b]$-ben, ha teljesül a következő feltételek valamelyike:
a) $\mathbb{X}_+$ normális és T kompakt,
b) $\mathbb{X}_+$ reguláris (ld. (12.98)).
Ekkor a (12.207) szerint definiált $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat $\mathbb{X}$-ben tart a T operátor $[a,b]$-beli minimális, ill. maximális fixpontjához.
Ezeken az eredményeken alapszik a *felső megoldás* és *alsó megoldás* fogalma (ld. [12.17], [12.13], [12.14]).

12.8.7. Monoton operátorok Banach-terekben

1. Speciális tulajdonságok Azt mondjuk, hogy a tetszőleges $T: D \subset \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ ($\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ normált terek) operátor az $x_0 \in D$ pontban *demi-folytonos*, ha minden ($\mathbb{X}$ normájában) x_0-hoz tartó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ sorozat esetén a $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat az $\mathbb{Y}$ térben gyengén tart $T(x_0)$-hoz. A T operátort *demi-folytonos*nak mondjuk a D halmazon, ha T a D minden pontjában demi-folytonos.

Ebben a szakaszban a valós analízisből ismert monotonitás egy másik, az izoton monotonitástól eltérő általánosítását vezetjük be. Legyen $\mathbb{X}$ valós BANACH-tér, $\mathbb{X}^*$ a duális tere, $D \subset \mathbb{X}$ és $T: D \longrightarrow \mathbb{X}^*$ egy nemlineáris operátor. Ekkor a T operátort *monoton*nak mondjuk, ha $\forall\, x, y \in D$ elempárra fennáll a $(T(x) - T(y), x - y) \geq 0$ egyenlőtlenség. Ha $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ HILBERT-tér, akkor itt $(\cdot,\cdot)$ skalárszorzatot jelent, BANACH-tér esetén pedig a jelölést illetően a 12.5.4.1. szakaszra utalunk. A T operátort *szigorúan monoton*nak mondjuk, ha több is igaz: van olyan $c > 0$ konstans, hogy $\forall\, x, y \in D$ elempárra fennáll $(T(x) - T(y), x - y) > c\|x - y\|^2$. A $T: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}^*$ operátor *koercitív*, ha $\lim_{\|x\| \to \infty} \dfrac{(T(x), x)}{\|x\|} = \infty$ (ez a szigorú monotonitás következménye, ha $\mathbf{0}_{\mathbb{X}} \in D$ és $T(\mathbf{0}_{\mathbb{X}})(y) = \mathbf{0}_{\mathbb{Y}}$ minden $y \in \mathbb{Y}$-ra).

2. Egzisztenciaállítások Monoton operátort tartalmazó operátoregyenletek megoldásairól szóló egzisztenciaállításokra itt csak példákat tudunk említeni: Ha a T operátor, amely a valós szeparábilis $\mathbb{X}$ BANACH-teret $\mathbb{X}^*$-ba képezi le, monoton, demi-folytonos és koercitív, akkor a $T(x) = f$ egyenletnek tetszőleges $f \in \mathbb{X}^*$ esetén létezik megoldása.
Ha T még szigorúan monoton is, akkor a megoldás egyértelmű, tehát ebben az esetben létezik a T^{-1} inverz operátor.
Ha a $\mathbb{H}$ HILBERT-térben a $T: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ operátor monoton és demi-folytonos, akkor fennáll $Im(I + T) = \mathbb{H}$, tehát $\mathbb{X} + Tx = y$ minden $y \in \mathbb{H}$-ra megoldható és $(I + T)^{-1}$ folytonos. Ha T-ről szigorú monotonitást tételezünk fel, akkor maga T bijektív és T^{-1} folytonos.
A HILBERT-téren monoton T operátorral felírt $T(x) = \mathbf{0}$ egyenlet megoldására szolgáló konstruktív közelítő eljárások a GALERKIN-módszer ötletén alapulnak (ld. 19.4.2.2. vagy [12.11], [12.21]). Ezzel az elmélettel tárgyalni lehet többértékű $T: \mathbb{X} \longrightarrow 2^{X^*}$ operátorokat is, amelyekre a monotonitás fogalma az $(f - g, x - y) \geq 0, \forall\, x, y \in D_T$ és $f \in T(x) \subset \mathbb{X}^*$, $g \in T(y) \subset \mathbb{X}^*$ definícióval általánosítható (ld. [12.14]).

12.9. Mérték és Lebesgue-integrál

12.9.1. σ-algebrák és mértékek

A mérték fogalmának kiindulópontja az $\mathbb{R}$-beli intervallumok hosszúságfogalmának, valamint bizonyos $\mathbb{R}^2$-beli és $\mathbb{R}^3$-beli halmazok terület-, ill. térfogatfogalmának általánosítása. Erre az általánosításra azért van szükség, hogy minél több halmazt lehessen „mérni", és minél több függvényt lehessen „integrálhatóvá tenni". Például a

$$Q = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\} \tag{12.208}$$

n-dimenziós tégla térfogata $\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$, ez a definíció lesz a kiindulópontunk.

1. σ-algebra

Legyen $\mathbf{X}$ tetszőleges halmaz. $\mathbf{X}$ részhalmazainak egy nem üres $\mathcal{A}$ rendszerét σ-algebrának nevezzük, ha

a) $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbf{X} \setminus A \in \mathcal{A}$ és (12.209a)

b) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (12.209b)

Minden σ-algebra tartalmazza a $\emptyset$ és az $\mathbf{X}$ halmazt, megszámlálhatóan sok halmazzal együtt azok metszetét, valamint két halmazzal együtt azok különbséghalmazát is.
Jelölje a továbbiakban $\overline{\mathbb{R}}$ az $\mathbb{R}$ halmaznak a $\{-\infty\}$ és $\{+\infty\}$ elemmel való bővítését (kiterjesztett számegyenes), ahol a számolási műveletek és rendezés $\mathbb{R}$-ről $\overline{\mathbb{R}}$-ra való átvitele a természetes módon történik és így szokásos tulajdonságaik megőrződnek. Ennek során a $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ és a $\frac{\infty}{\infty}$ kifejezés nincs megengedve, viszont $0 \cdot (+\infty)$ és $0 \cdot (-\infty)$ a 0 értéket kapja.

2. Mérték

Az $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett $\mu\colon\ \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ függvényt *mérték*nek nevezzük, ha

a) $\mu(A) \geq 0 \quad (\forall\, A \in \mathcal{A})$, (12.210a)

b) $\mu(\emptyset) = 0$, (12.210b)

c) $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_l = \emptyset\ \ (k \neq l)$ esetén $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. (12.210c)

A c) tulajdonságot a mérték σ-*additivitás*ának nevezzük. Ha μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán és $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonitás). Ha $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, akkor $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (alulról félig folytonosság).
Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathbf{X}$ részhalmazainak egy σ-algebrája, és legyen μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Az $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktér*nek nevezzük, az $\mathcal{A}$-hoz tartozó halmazokat pedig *mérhető*knek vagy $\mathcal{A}$-*mérhető*knek mondjuk.

■ **A:** Legyen $\mathbf{X}$ az $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ véges halmaz, $\mathcal{A}$ az $\mathbf{X}$ összes részhalmazainak σ-algebrája, és legyen minden x_k-hoz $(k = 1, \ldots, N)$ hozzárendelve egy p_k nemnegatív szám. Ekkor a minden $A \in \mathcal{A}$, $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\}$ halmazra a $\mu(A) = p_{n_1} + p_{n_2} + \cdots + p_{n_k}$ képlettel értelmezett függvény mérték, a $(\mu(\mathbf{X}) = p_1 + \cdots + p_N < \infty$ miatt) csak véges értékeket felvevő ún. számlálómérték.

■ **B: Dirac-mérték:** Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathbf{X}$ halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája, és legyen a tetszőlegesen rögzített pont $\mathbf{X}$-ben. A

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad a \in A, \\ 0, & \text{ha} \quad a \notin A \end{cases}$$

képlet mértéket definiál az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ezt (a-ra koncentrált) δ-*függvény*nek hívjuk. Nyilvánvaló, hogy $\delta_a(A) = \delta_a(\chi_A) = \chi_A(a)$ (ld. a 12.5.4. szakaszt), ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus függvénye.

■ **C: Lebesgue-mérték:** Legyen $\mathbf{X}$ metrikus tér, és legyen $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ az $\mathbf{X}$ tér részhalmazainak legkisebb, $\mathbf{X}$ összes nyílt halmazait tartalmazó σ-algebrája. $\mathcal{B}(\mathbf{X})$-et mint az összes nyílt halmazokat tartalmazó σ-algebrák metszetét kapjuk meg, és $\mathbf{X}$ BOREL-*féle* σ-*algebrájá*nak nevezzük. $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ elemeit BOREL-*halmazok*nak hívjuk (ld. [12.6]).

Legyen most $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Egy részben halmazelméleti kiterjesztési eljárás segítségével meg lehet adni egy σ-algebrát és rajta egy mértéket, amely az $\mathbb{R}^n$-beli téglák halmazán a térfogattal egyezik meg. Pontosabban: Létezik egy $\mathbb{R}^n$ részhalmazaiból álló, egyértelműen meghatározott $\mathcal{A}$ σ-algebra és ezen

egy egyértelműen meghatározott λ mérték a következő tulajdonságokkal:
a) $\mathbb{R}^n$ minden nyílt halmaza $\mathcal{A}$-hoz tartozik, más szóval $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.
b) Ha $A \in \mathcal{A}$, $\lambda(A) = 0$ és $B \subset A$, akkor $B \in \mathcal{A}$ és $\lambda(B) = 0$, tehát a mérték *komplett.*
c) Ha Q tégla, akkor $Q \in \mathcal{A}$, és fennáll $\lambda(Q) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$.
d) λ eltolásinvariáns, azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra és minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra fennáll $x + A = \{x + y \mid y \in A\} \in \mathcal{A}$ és $\lambda(x + A) = \lambda(A)$.
$\mathcal{A}$ elemeit $\mathbb{R}^n$ LEBESGUE-*mérhető* részhalmazainak nevezzük. λ az (n-dimenziós) LEBESGUE-*mérték* $\mathbb{R}^n$-ben.

Megjegyzés: A mérték- és integrálelméletben azt mondjuk, hogy egy állítás (tulajdonság, feltétel) az X halmazon a μ mértékre nézve *majdnem mindenütt* vagy μ-*majdnem mindenütt* teljesül, ha annak a halmaznak, amelyen nem teljesül, a mértéke nulla. Ezt úgy írjuk, hogy m. m., ill. μ-m. m.¶ Tehát például ha λ a LEBESGUE-mérték $\mathbb{R}$-en, A és B két diszjunkt halmaz, amelyekre $\mathbb{R} = A \cup B$, és f az a függvény $\mathbb{R}$-en, amelyre $f(x) = 1\ \forall x \in A$ és $f(x) = 0\ \forall\, x \in B$, akkor $f = 1$ λ-m. m. $\mathbb{R}$-en pontosan akkor, ha $\lambda(B) = 0$.

12.9.2. Mérhető függvények

12.9.2.1. Mérhető függvény

Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája. Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvény *mérhető*, ha tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \mid x \in \mathrm{X},\ f(x) > \alpha\}$ halmaz $\mathcal{A}$-hoz tartozik. Ezzel ekvivalens, ha „$> \alpha$" helyett „$\geq \alpha$"-t, vagy „$< \alpha$"-t vagy „$\leq \alpha$"-t követelünk meg: ha f-re valamelyik típusú egyenlőtlenséggel definiált ún. nívóhalmazok $\mathcal{A}$-hoz tartoznak, akkor a másik 3-mal is.
A komplex értékű $g + ih$ függvényt mérhetőnek mondjuk, ha a g, h függvények mindketten mérhetők. Ha $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}^n$ tér LEBESGUE-mérhető halmazainak σ-algebrája és $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = f^{-1}((\alpha, +\infty))$ halmaz (12.2.3.) szerint minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén nyílt, tehát f mérhető függvény is.

12.9.2.2. A mérhető függvények osztályának tulajdonságai

A mérhető függvény fogalmához nem mértékre, hanem csak σ-algebrára van szükség. Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája, és legyenek $f, g, f_n : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvények. Ekkor a következő függvények (ld. 12.1.7.4.) is mérhetők:
a) αf, ha $\alpha \in \mathbb{R}$; $f \cdot g$;
b) f_+, f_-, $|f|$, $f \vee g$ és $f \wedge g$;
c) $f + g$, ha X egyetlen pontjában sem lép fel $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ alakú kifejezés;
d) $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n (= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k)$, $\liminf f_n$ (mindegyik pontonként értelmezett);
e) a pontonkénti $\lim f_n$ határérték, ha létezik.
Az $f\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt *egyszerű* nek mondjuk, ha létezik véges sok, páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmaz és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ valós szám úgy, hogy $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_k$, ahol χ_k az A_k halmaz karakterisztikus függvénye, tehát f az egyes halmazokon konstans. $f|_{A_k} = \alpha_k$. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, és így tetszőleges egyszerű függvény is, mérhető. Hasznos, hogy minden mérhető függvény tetszőleges pontossággal megközelíthető egyszerű függvényekkel: Minden $f \geq 0$ mérhető függvényhez található nemnegatív egyszerű függvényeknek egy monoton növekedő sorozata, amely pontonként f-hez tart.

12.9.3. Integrálás

12.9.3.1. Az integrál definíciója

Legyen $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Egy mérhető f függvény $\int_X f\, d\mu$ (vagy egyszerűen $\int f\, d\mu$) integrálját több lépésben, a következőképpen lehet definiálni:

¶Itt és a továbbiakban m. m. annak a rövidítése, hogy „majdnem mindenütt".

1. Legyen f egyszerű függvény: $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_k$. Ennek az integrálja legyen

$$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k)\,. \tag{12.211}$$

2. Ha $f\colon \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $(f \geq 0)$, akkor legyen

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{ \int g\,d\mu \mid \quad g \text{ egyszerű függvény, amelyre} \quad 0 \leq g(x) \leq f(x),\ \forall x \in \mathrm{X} \right\}. \tag{12.212}$$

3. Ha $f\colon \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, továbbá f_+, ill. f_- az f pozitív, ill. negatív része, akkor legyen

$$\int f\,d\mu = \int f_+\,d\mu - \int f_-\,d\mu \tag{12.213}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon legalább az egyik integrál véges és így a $\infty - \infty$ határozatlan kifejezés nem lép fel.

4. Komplex értékű $f = g + \mathrm{i}h$ függvényre, ha a g, h függvények (12.213) szerint definiált integrálja véges, legyen

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu + \mathrm{i}\int h\,d\mu\,. \tag{12.214}$$

5. Ha a mérhető A halmazra és az f függvényre az $f\chi_A$ függvény integrálját a fenti megállapodásokkal értelmezni lehet, akkor legyen

$$\int\limits_A f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu\,. \tag{12.215}$$

Mérhető függvény integrálja általában $\overline{\mathbb{R}}$-beli szám. Az $f : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényt az X halmazon μ-re nézve *integrálható*nak mondjuk, ha f mérhető és fennáll $\int |f|\,d\mu < \infty$.

12.9.3.2. Az integrál néhány tulajdonsága

Legyen $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, legyenek $f, g : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvények és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Ha f integrálható, akkor f m. m. véges, azaz $\mu\{x \in \mathrm{X} \mid |f(x)| = +\infty\} = 0$.

2. Ha f integrálható, akkor fennáll $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$.

3. Ha f integrálható és $f \geq 0$, akkor $\int f\,d\mu \geq 0$.

4. Ha $0 \leq g(x) \leq f(x)$ az X halmazon és f integrálható, akkor g integrálható és fennáll $\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu$.

5. Ha f és g integrálható, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható és fennáll $\int (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu$.

6. Ha f és g integrálható az $A \in \mathcal{A}$ halmazon és $g(x) \leq f(x)$ az A halmazon, továbbá $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$, akkor $f = g$ az A halmazon μ-m. m.

Ha $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ és λ a LEBESGUE-mérték, akkor (n-dimenziós) LEBESGUE-*integrál*ról beszélünk (ld. még 461. old.). Ha $n = 1$ és $A = [a, b]$, akkor minden az $[a, b]$ intervallumon folytonos f függvényre az $\int_a^b f(x)\,dx$ RIEMANN-integrál is (ld. 447. old.), az $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$ LEBESGUE-integrál is értelmezve van. A két érték véges és megegyezik. Mi több, ha f az $[a, b]$ intervallumon nem feltétlenül folytonos, de korlátos és RIEMANN-integrálható függvény, akkor LEBESGUE-integrálható is (integrálható a LEBESGUE-féle értelemben), és a két integrál értéke megegyezik (a LEBESGUE-integrál a RIEMANN-integrál kiterjesztése).

A LEBESGUE-integrálható függvények halmaza azonban lényegesen bővebb, továbbá számos előnnyel rendelkezik, ami különösen az integráljel alatt elvégzett határátmeneteknél mutatkozik meg.

12.9.3.3. Konvergenciatételek

1. Beppo Levi tétele a monoton konvergenciáról Tekintsük az $\overline{\mathbb{R}}$-beli értékű, nemnegatív, integrálható függvényekből álló, m. m. monoton növekedő $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot. Fennáll $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu = \int \lim f_n\,d\mu$.

2. Fatou tétele Tekintsük az $\overline{\mathbb{R}}$-értékű, nemnegatív, mérhető függvényekből álló $\{f_n\}$ sorozatot. Fennáll $\int \liminf f_n\,d\mu \le \liminf \int f_n\,d\mu$.

3. Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról Legyen $\{f_n\}$ mérhető függvényekből álló sorozat, amely X-en m. m. konvergens és f-hez tart. Ha van olyan integrálható $0 \le g$ függvény, amelyre minden n-re $|f_n| \le g$ m. m., akkor f is integrálható és $\lim \int f_n\,d\mu = \int(\lim f_n)\,d\mu$.

1. Radon–Nikodym-tétel

1. Feltevések Legyen $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ tetszőleges σ-véges mértéktér, ami azt jelenti, hogy létezik egy $\{A_n\}$, sorozat, $A_n \in \mathcal{A}$, amelyre fennáll $\mathrm{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ és $\mu(A_n) < \infty$, $\forall n$. A mértéket *véges*nek mondjuk, ha $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, és *valószínűségi mérték*nek, ha $\mu(\mathrm{X}) = 1$. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett φ valós halmazfüggvény μ-re nézve *abszolút folytonos*, ha $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$ esetén $\varphi(A) = 0$. Jelölése: $\varphi \prec \mu$.
Ha f integrálható függvény, akkor az $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ halmazfüggvény σ-additív és a μ mértékre nézve nyilván abszolút folytonos. Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszeren értelmezett halmazfüggvény σ-additív, ha $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \ne j)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(a_n) = \varphi(A)$,

abban az értelemben, hogy ha $\varphi(A)$ véges, akkor a baloldali sor abszolút konvergens, ha pedig végtelen, akkor a baloldalon az ellentétes előjelű tagok összege véges. Sok elméleti vizsgálat és gyakorlati alkalmazás szempontjából alapvető jelentőségű, hogy ezt az állítást meg is lehet fordítani:

2. Radon–Nikodym-tétel Legyen megadva az $\mathcal{A}$ σ-algebrán egy σ-additív φ halmazfüggvény és egy μ mérték, amelyekre $\varphi \prec \mu$. Ekkor létezik egy μ-integrálható f függvény úgy, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra teljesül a

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu \tag{12.216}$$

összefüggés. Itt az f függvény ekvivalenciaosztály erejéig (ld. lejjebb) egyértelműen meg van határozva, és φ pontosan akkor nemnegatív, ha $f \ge 0$ μ-m. m.

12.9.4. L^p-terek

Legyen $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és p valós szám, $1 \le p < \infty$. Ha f mérhető függvény, akkor $|f|$ és $|f|^p$ is mérhető, úgyhogy az

$$N_p(f) = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12.217}$$

mennyiség értelmezve van (de értéke lehet $+\infty$ is). Az $f\colon \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényt p-edik *hatványon integrálható*nak mondjuk, ha $N_p(f) < +\infty$ vagy, ami ezzel ekvivalens, ha $|f|^p$ integrálható.

Ha $1 \le p < +\infty$, akkor $\mathcal{L}^p(\mu)$-vel vagy $\mathcal{L}^p(\mathrm{X})$-szel vagy, egészen részletesen, $\mathcal{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$-vel jelöljük az X halmazon a μ mértékre nézve p-edik hatványon integrálható függvények halmazát; a $p = 1$ esetben az $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ rövidített jelölést használjuk; a $p = 2$ esetben a függvényeket *négyzetesen integrálható*knak mondjuk.

$\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$-vel jelöljük az X halmazon mérhető, μ-m. m. korlátos függvények halmazát, és egy f függvény lényeges szuprémumát a következőképpen definiáljuk:

$$N_{\infty}(f) = \operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a \in \mathbf{R} \mid |f(x)| \le a \ \ \mu\text{-m. m.}\}. \tag{12.218}$$

A mérhető függvényeknél szokásos műveletekkel és az integrálokra vonatkozó MINKOWSKI-egyenlőtlenség (ld. 32. old.) figyelembe vételével azt kapjuk, hogy minden p-re, $1 \le p \le \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ vektortér,

$N_p(\cdot)$ pedig félnorma ezen a vektortéren. Azzal a megállapodással, hogy $f \leq g$ akkor, ha $f(x) \leq g(x)$ μ-m. m., $\mathcal{L}^p$ egyben vektorháló is. Két $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ függvényt *ekvivalens*nek mondunk (vagy egyenlőnek nyilvánítunk), ha $f = g$ az $\mathbf{X}$ halmazon μ-m. m.(beleértve azt is, hogy eleve csak μ-m. m. definiáltak). Ily módon azokat a függvényeket, amelyek μ-m. m. megegyeznek, azonosítjuk egymással. Ezáltal (az $\mathcal{L}^p(\mathbf{X})$ halmazt az $N_p^{-1}(0) = \{f \mid |f| = 0 \ \mu\text{-m. m.}\}$ lineáris altér szerint faktorizálva) egy ekvivalenciaosztályokból álló halmazt kapunk, amelyre az algebrai műveletek és a rendezés természetesen átvihetők az osztályokból vett reprezentánsok tetszőleges választásával úgy, hogy ismét vektorháló keletkezzék, amelyet most $L^p(\mathbf{X}, \mu)$-vel vagy $L^p(\mu)$-vel (vagy a megfelelő részletesebb jelöléssel) jelölünk. Ennek elemeit továbbra is függvényeknek nevezzük, pedig valójában ekvivalens függvények osztályairól van szó.

Lényeges körülmény, hogy az $L^p(\mu)$ téren $\|\hat{f}\|_p = N_p(f)$ normát definiál (itt $\hat{f}$ az f függvényből keletkező ekvivalenciaosztály, amelyet a továbbiakban egyszerűen az f jellel fogunk jelölni), és $(L^p(\mu), \|f\|_p)$ minden p-re, $1 \leq p \leq +\infty$, BANACH-háló lesz a norma és a rendezés közötti sok jó kompatibilitási tulajdonsággal, a $p = 2$ esetben pedig még HILBERT-tér is az $(f, g) = \int f\overline{g}\, d\mu$ skaláris szorzattal (ld. [12.15]).

Gyakran előfordul, hogy egy mérhető $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ részhalmaz esetén tekintjük az $L^p(\Omega)$ teret. Az utóbbi tér definiálása, tekintettel az integrál bevezetésénél ismertetett 5. lépésre, semmilyen nehézséget sem okoz.

Az $L^p(\Omega, \lambda)$ terek az $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ halmazon folytonos x függvények $\|x\|_p = \left(\int |x|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$ integrálnormával ellátott, nem teljes $\mathcal{C}(\Omega)$ normált terének teljes bővítéseként adódnak (ld. a 12.2.2.5. és a 12.3.2. szakaszt; [12.21]).

Legyen $\mathbf{X}$ véges mértékű halmaz, azaz $\mu(\mathbf{X}) < +\infty$, és legyen $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. Ekkor fennáll $L^{p_2}(\mathbf{X}, \mu) \subset L^{p_1}(\mathbf{X}, \mu)$, és egy x-től nem függő $C = C(p_1, p_2, \mu(\mathbf{X})) > 0$ konstanssal minden $x \in L^{p_2}$ elemre érvényes az $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ becslés, ahol $\|x\|_k$ az $L^{p_k}(\mathbf{X}, \mu)$-beli norma $(k = 1, 2)$.

12.9.5. Disztribúciók

12.9.5.1. A parciális integrálás képlete

Tetszőleges $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ (nyílt) tartomány esetén $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$-val jelöljük azoknak az Ω-ban akárhányszor differenciálható φ függvényeknek a halmazát, amelyek tartója kompakt, vagyis amelyekre a $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ halmaz $\mathbf{R}^n$-ben kompakt és része Ω-nak, $L^1_{loc}(\Omega)$-val pedig az $\mathbf{R}^n$-beli LEBESGUE-mértékre nézve *lokálisan integrálható* függvények halmazát, vagyis az Ω tartományon mérhető összes olyan f függvényekét (ekvivalens függvények alkotta osztályokét), amelyekre tetszőleges $\omega \subset \Omega$ korlátos tartomány esetén $\int_\omega |f|\, d\lambda < +\infty$.

Mindkét halmaz vektortér (a természetes algebrai műveletekre nézve).

Minden p-re, $1 \leq p \leq \infty$, fennáll $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, és korlátos Ω esetén $L^1_{loc}(\Omega) = L^1(\Omega)$ is teljesül.

Ha bármely k-ra és p-re $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ elemeit mint az általuk $L^p(\Omega)$-ban generált osztályokat fogjuk fel, akkor korlátos Ω esetén igaz a $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$ tartalmazás, sőt $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ sűrű is $L^p(\Omega)$-ban. Ha Ω nem korlátos, akkor (ugyanebben az értelemben) a $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ halmaz sűrű $L^p(\Omega)$-ban.

A parciális integrálás képlete előírt rögzített $f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ függvény esetén a D^α differenciáloperátor $D^\alpha\varphi\,|_{\partial\Omega} = 0$ tulajdonsága miatt az

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi(x) D^\alpha f(x)\, d\lambda \tag{12.219}$$

alakot ölti minden $|\alpha| \leq k$ tulajdonságú α multiindexre, amit kiindulópontnak tekinthetünk $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ függvények általánosított deriváltjának definiálásához.

12.9.5.2. Általánosított derivált

Legyen $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ha van olyan $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ függvény, hogy valamely α multiindexre $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ esetén fennáll

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, d\lambda \tag{12.220}$$

akkor a g függvényt az f függvény α-drendű *általánosított deriváltjá*nak, SZOBOLJEV-*féle deriváltjá*nak vagy *disztribúciós deriváltjá*nak nevezzük, és rá a klasszikus esethez hasonlóan a $g = D^\alpha f$ jelölést használjuk.
A $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ vektortérben a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ sorozatnak a $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ függvényhez való konvergenciáját a következőképpen definiáljuk:

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi \text{ pontosan akkor, ha } \begin{cases} \text{a) } \exists\, K \subset \Omega \text{ kompakt halmaz, amelyre } \operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K\ \forall n\,, \\ \text{b) } D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi \text{ a } K \text{ halmazon egyenletesen, minden } \alpha\text{-ra.} \end{cases} \tag{12.221}$$

Az ezen sorozatkonvergenciával ellátott $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ teret alaptérnek hívjuk, $\mathcal{D}(\Omega)$-val jelöljük, és elemeit gyakran próbafüggvényeknek fogjuk nevezni.

12.9.5.3. Disztribúció

Egy a $\mathcal{D}(\Omega)$ téren értelmezett ℓ lineáris funkcionált, amely folytonos (ld. 625. old.) abban az értelemben, hogy

$$\text{ha } \varphi_k,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ és } \varphi_k \longrightarrow \varphi, \quad \text{akkor} \quad \ell(\varphi_k) \longrightarrow \ell(\varphi) \tag{12.222}$$

*általánosított függvény*nek vagy *disztribúció*nak nevezünk.

■ **A:** Ha $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, akkor az

$$\ell_f(\varphi) = (f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, d\lambda\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{12.223}$$

képlet disztribúciót értelmez. Az ilyen — lokálisan integrálható függvénnyel a (12.223) képlet útján származtatott — disztribúciót *reguláris*nak mondjuk. Két reguláris disztribúció pontosan akkor egyenlő, azaz $\ell_f(\varphi) = \ell_g(\varphi)\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ha $f = g$ m. m. λ-ra nézve.

■ **B:** Legyen $a \in \Omega$ tetszőleges rögzített pont. Ekkor $\ell_{\delta_a}(\varphi) = \varphi(a)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ szintén folytonos lineáris funkcionál a $\mathcal{D}(\Omega)$ téren, tehát disztribúció, amelyet DIRAC-disztribúciónak, δ-disztribúciónak vagy δ-függvénynek nevezünk.
Mivel ez a funkcionál nem származtatható lokálisan integrálható függvény segítségével (ld. [12.12], [12.28]), ℓ_{δ_a} példa nem reguláris disztribúcióra.

A disztribúciók összességét $\mathcal{D}'(\Omega)$-val jelöljük. Egy a (12.5.4.) alatt jelzettnél általánosabb dualitáselméletből kiderül, hogy $\mathcal{D}'(\Omega)$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ duális tere. Szigorúan véve tehát a $\mathcal{D}^*(\Omega)$ jelölést kellene használni. A $\mathcal{D}'(\Omega)$ tér elemein, ill. ezen elemek és $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-beli függvények között, sok műveletet lehet definiálni, például disztribúciók deriváltját vagy két disztribúció konvolúcióját, ami a teret nemcsak elméleti vizsgálatokra, hanem elektrotechnikai, mechanikai stb. alkalmazásokra is kiválóan alkalmassá teszi.
Az általánosított függvények áttekintését és nagyszámú alkalmazási lehetőségük egyszerű példáit lásd [12.12], [12.28]. Itt csupán az általánosított függvény deriváltjának fogalmát tárgyaljuk.

12.9.5.4. Disztribúció deriváltja

Megadott ℓ disztribúció esetén a

$$(D^\alpha \ell)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \ell(D^\alpha \varphi)\,, \qquad (\varphi \in D(\Omega))\,, \tag{12.224}$$

képlettel értelmezett $D^\alpha \ell$ disztribúciót az ℓ disztribúció α-drendű *disztribúciós deriváltjá*nak nevezzük.
Legyen f folytonosan differenciálható függvény, mondjuk $\mathbb{R}$-en (ezáltal f lokálisan integrálható $\mathbb{R}$-en,

úgyhogy f felfogható disztribúciónak is), f' az elsőrendű klasszikus derivált és $D^1 f$ az elsőrendű disztribúciós derivált. Ekkor fennáll

$$(D^1 f, \varphi) = \int_{\mathrm{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx\,, \tag{12.225a}$$

ahonnan parciális integrálással következik, hogy

$$(D^1 f, \varphi) = -\int_{\mathrm{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'). \tag{12.225b}$$

Ha ℓ_f reguláris disztribúció, ahol $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, akkor a

$$(D^\alpha \ell_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\ell_f(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi\,d\lambda \tag{12.226}$$

összefüggés miatt az f függvény általánosított deriváltját kapjuk a SZOBOLJEV-féle értelemben (ld. (12.220)).

■ **A:** A nyilvánvalóan lokálisan integrálható

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ha } x \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{12.227}$$

HEAVISIDE-függvényhez rendelt reguláris disztribúció a nem reguláris δ-disztribúció deriváltjaként adódik.

■ **B:** Műszaki és fizikai problémák matematikai modellezésénél gyakran lépnek fel (bizonyos tekintetben idealizált,) pontra koncentrált hatások, pl. „pontszerű" erők, tűimpulzusok, ütközési folyamatok stb., amelyek matematikailag a δ-függvény vagy a HEAVISIDE-függvény alkalmazásával írhatók le, például egy l hossúságú tartó a pontjában $(0 \leq a \leq l)$ koncentrált m tömegpont az $m\delta_a$ tömegsűrűséggel. Egy rugó–tömeg rendszernek, amelyre a t_0 időpontban F nagyságú pillanatnyi külső erő hat, a mozgásegyenlete $\ddot{x} + \omega^2 x = F\delta_{t_0}$ alakú. Az $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett a megoldás $x(t) = \dfrac{F}{\omega}\sin(\omega(t - t_0))\Theta(t - t_0)$.

13. Vektoranalízis és térelmélet

13.1. A térelmélet alapfogalmai

13.1.1. Egyparaméteres vektor-skalárfüggvény

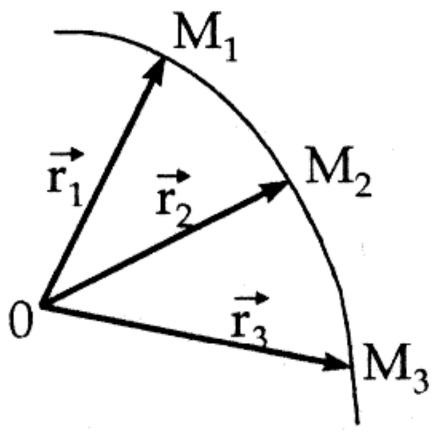
13.1.1.1. Definíciók

1. **A t skalár változó vektorfüggvényének** nevezzük az $\vec{\mathbf{a}}$ vektort, ha a komponensei t függvényei:

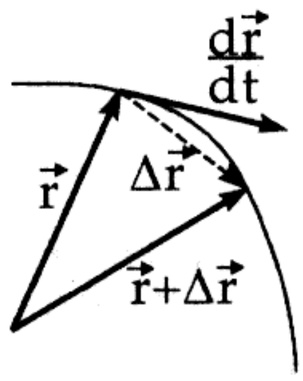
$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{e}}_x + a_y(t)\vec{\mathbf{e}}_y + a_z(t)\vec{\mathbf{e}}_z\,. \tag{13.1}$$

Az $\vec{\mathbf{a}}(t)$ függvény határértéke, folytonossága és differenciálhatósága egy t_0 helyen a komponensei ugyanezen t_0 helyen vett határértékeiből álló vektort, illetve komponenseinek t_0-beli folytonosságát, differenciálhatóságát jelenti.

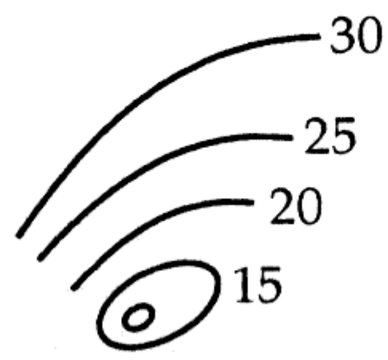
2. Vektorfüggvény hodográfja. Ha az $\vec{\mathbf{a}}(t)$ vektorfüggvényt egy mozgó M pont hely- vagy rádiuszvektoraként, azaz $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$ vektorként fogjuk fel, akkor ezek az $\vec{\mathbf{a}}(t)$ vektorok a t változásával egy térgörbét határoznak meg **(13.1. ábra)**. Ez a térgörbe az $\vec{\mathbf{a}}(t)$ vektorfüggvény hodográfja.



13.1. ábra.



13.2. ábra.



13.3. ábra.

13.1.1.2. Vektorfüggvény differenciálhányadosa

A (13.1) t szerinti differenciálhányadosa egy új vektorfüggvénye a t változónak:

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mathbf{a}}(t+\Delta t)-\vec{\mathbf{a}}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{da_y(t)}{dt}\vec{\mathbf{e}}_y + \frac{da_z(t)}{dt}\vec{\mathbf{e}}_z. \tag{13.2}$$

A helyvektor $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ differenciálhányadosa olyan vektor, amely megadja a térgörbe M pontjában az érintő irányát **(13.2. ábra)**. Hosszúsága és iránya tehát a t paraméter értékétől függ. Ha a t időt jelent, akkor az $\vec{\mathbf{r}}(t)$ vektor az M pont mozgását írja le a térben, míg a $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ a mozgás sebességének irányát és nagyságát adja meg. Ha a térgörbe ívhosszra paraméterezett, tehát $t = s$ a térgörbe ívhossza (egy meghatározott görbeponttól mérve), akkor $\left|\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds}\right| = 1\,.$

13.1.1.3. Vektorfüggvények differenciálási szabályai

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}} \pm \vec{\mathbf{b}} \pm \vec{\mathbf{c}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} \pm \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} \pm \frac{d\vec{\mathbf{c}}}{dt}\,, \tag{13.3a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi\vec{\mathbf{a}}\right) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{\mathbf{a}} + \varphi\frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} \qquad (\varphi \text{ ugyanazon } t \text{ paraméter skalár függvénye}), \tag{13.3b}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}\,, \tag{13.3c}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} \qquad \text{(a tényezők sorrendje nem felcserélhető);} \tag{13.3d}$$

ezen utóbbi 3 összefüggés mind a szorzat deriváltjára vonatkozó szabály általánosítása,

$$\frac{d}{dt}\,\vec{\mathbf{a}}[\varphi(t)] = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{(láncszabály)}, \tag{13.3e}$$

másképpen

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{a}}[\varphi(t)]\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\right|_{t=\varphi(t_0)} \cdot \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}$$

(A szereplő $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ természetesen csak rövid jelölése a $\vec{\mathbf{a}}(t)$-nek, $\vec{\mathbf{a}}(t)$-nek, illetve $\vec{\mathbf{c}}(t)$-nek.)

Ha $|\vec{\mathbf{a}}(t)| = $ állandó, azaz $\vec{\mathbf{a}}^2(t) = \vec{\mathbf{a}}(t)\cdot\vec{\mathbf{a}}(t) = $ állandó, akkor a (13.3c)-ből következik, hogy $\vec{\mathbf{a}}\cdot\dfrac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} = 0$, azaz $\dfrac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}$ és $\vec{\mathbf{a}}$ egymásra merőleges vektorok. Példák:

■ **A:** Kör rádiusz- és érintővektora a síkban és

■ **B:** Gömbre illeszkedő görbe hely- és érintővektora. A hodográf ekkor egy *szférikus görbe*.

13.1.1.4. Vektorfüggvények Taylor-sorfejtése

$$\vec{\mathbf{a}}(t+h) = \vec{\mathbf{a}}(t) + h\frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\vec{\mathbf{a}}}{dt^2} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n\vec{\mathbf{a}}}{dt^n} + \cdots\,. \tag{13.4}$$

Vektorfüggvény TAYLOR-sorfejtésének csak akkor van értelme, amikor a sor konvergens. Hogy ezen sorok adott helyen konvergensek-e, az (éppenúgy, mint tetszőleges vektortagú soré) ugyanazokkal a módszerekkel dönthető el, mint a komplextagú sorok konvergenciája (lásd 717. old.): vektortagú sorok konvergenciája visszavezethető az elemeik komponenseiből álló számsorok konvergenciájára.
A $\vec{\mathbf{a}}(t)$ vektorfüggvény differenciáljának a definíciója:

$$d\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\Delta t\,. \tag{13.5}$$

13.1.2. Skalármezők

13.1.2.1. Skalármező vagy skalár pontfüggvény

Ha egy térrész minden M pontjához hozzárendelünk egy U számértéket (skalárt), akkor azt írjuk, hogy

$$U = U(M) \tag{13.6a}$$

és (13.6a)-t *skalármező*nek nevezzük.

■ Például skalármező egy test hőmérséklete, sűrűsége, potenciálja stb.

Az $U = U(M)$ skalármező leírható az

$$U = U(\vec{\mathbf{r}}) \tag{13.6b}$$

skalár-vektorfüggvénnyel is, ahol az $\vec{\mathbf{r}}$ vektor az M pont helyvektora (lásd 181. old.).

13.1.2.2. Fontosabb skalármezők

1. **Síkbeli mező** az a mező, amely csak a tér valamely síkjának a pontjaira értelmezett.

2. **Centrális mező** Ha egy függvény minden M pontban, amely az origótól azonos távolságra van, egyforma értéket vesz fel, akkor egy *centrálszimmetrikus mező*ről vagy *centrális*, ill. *gömbmező*ről beszélünk. Ekkor az U függvény csupán a $\overline{CM} = |\vec{\mathbf{r}}|$ távolságtól függ:

$$U = f(|\,\vec{\mathbf{r}}\,|)\,. \tag{13.7a}$$

■ Egy pontszerű sugárforrás erősségének (intenzitásának) a mezeje, például a fényerősség mezeje, a sugárforrástól mért $r = |\vec{\mathbf{r}}|$ távolsággal kifejezhető:

$$U = \frac{c}{r^2}\,. \tag{13.7b}$$

3. Axiális mező Ha a függvény egy egyenestől azonos távolságra lévő pontokban ugyanazt az értéket veszi fel, akkor *hengerszimmetrikus*, ill. *tengelyszimmetrikus mezőről*, vagy röviden *axiális mezőről* beszélünk.

13.1.2.3. Skalármezők megadása a koordináták függvényeként

Ha egy mezőrész pontjait koordinátáival adjuk meg (derékszögű, henger-vagy gömbi koordináták), akkor a hozzátartozó skalármezők (13.6a) általánosságban egy háromváltozós függvénnyel írhatók le:

$$U = \Phi(x, y, z)\,, \qquad U = \Psi(\rho, \varphi, z) \qquad \text{vagy} \qquad U = X(r, \vartheta, \varphi)\,. \tag{13.8a}$$

Síkbeli mező esetén elég egy kétváltozós függvény, amelynek az alakja derékszögű, ill. polárkoordinátákkal:

$$U = \Phi(x, y), \qquad \text{ill.} \qquad U = \Psi(\rho, \varphi)\,. \tag{13.8b}$$

Feltesszük, hogy a (13.8a) és (13.8b) függvények folytonosak, kivéve néhány szakadási pontot, görbét vagy felületet. A függvények

$$\begin{aligned} &\textbf{a) centrális mezőre:} \quad U = U(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = U(\sqrt{\rho^2+z^2}) = U(r)\,, \\ &\textbf{b) axiális mezőre:} \quad\;\; U = U(\sqrt{x^2+y^2}) = U(\rho) = U(r\sin\vartheta)\,, \end{aligned} \tag{13.9a}$$

ha a mező a z-tengelyre szimmetrikus.
Centrális mezők vizsgálatára a gömbi koordináták, az axiális mezőkére a hengerkoordináták a legalkalmasabbak.

13.1.2.4. Szintfelületek és szintvonalak

1. Szintfelületnek nevezzük a térben azon pontok összességét, amelyekben a (13.6a) függvény valamely U = állandó értéket vesz fel. Különböző $U_0, U_1, U_2, \ldots$ állandókhoz különböző szintfelületek tartoznak. Minden ponton keresztül pontosan egy szintfelület halad át, kivéve azokat a pontokat, amelyekben a függvény nincs (egyértelműen) definiálva. A három eddig használt koordinátarendszerben a szintfelületek egyenletei:

$$U = \phi(x, y, z) = \text{állandó}\,, \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{állandó}\,, \quad U = X(r, \vartheta, \varphi) = \text{állandó}\,. \tag{13.10}$$

■ Példák különböző mezők szintfelületeire:

A: $U = \vec{\mathbf{c}}\,\vec{\mathbf{r}} = c_x x + c_y y + c_z z$: párhuzamos síkok.
B: $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2 =$ (pozitív) állandó: hasonló és egybeeső tengelyű ellipszoidok.
C: centrális mező: koncentrikus gömbök.
D: axiális mező: koaxiális, azaz azonos tengelyű hengerek.

2. Szintvonalak A síkbeli mezőnek szintfelületek helyett szintvonalai vannak. Egyenletük szintén:

$$U = \text{állandó}\,. \tag{13.11}$$

Gyakran a szintvonalakat meghatározott, egyenlőközű U-értékekre ábrázoljuk, és az U értékét a hozzátartozó U-vonalra ráírjuk **(13.3. ábra)**.

■ Ismert példák az időjárás izobár vonalai és a földrajzi térképek magasságvonalai.

Speciális esetekben a szintfelületek pontokká vagy egyenesekké, a szintvonalak izolált pontokká fajulhatnak el.

■ Az a) $U = xy$, b) $U = \dfrac{y}{x^2}$, c) $U = r^2$, d) $U = \dfrac{1}{r}$ mezők szintvonalait a **13.4. ábra** mutatja.

13.1.3. Vektormezők

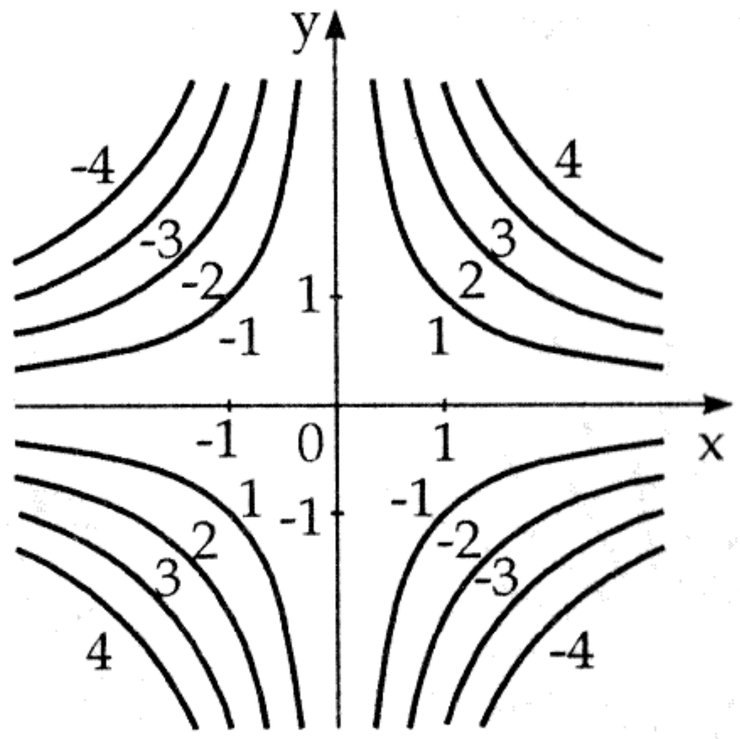
13.1.3.1. Vektormező vagy vektoriális, azaz vektorértékű pontfüggvény

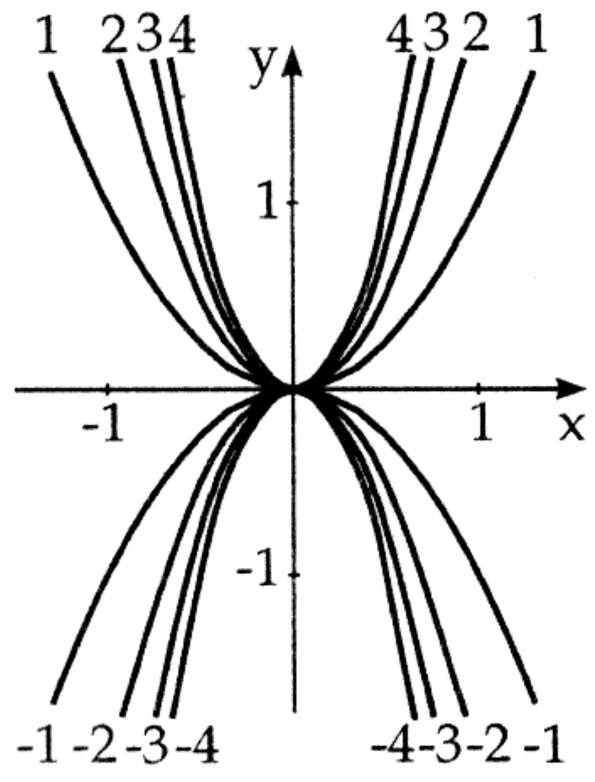
Ha egy térrész minden M pontjához hozzárendelünk egy $\vec{\mathbf{V}}$ vektort, akkor azt írjuk, hogy

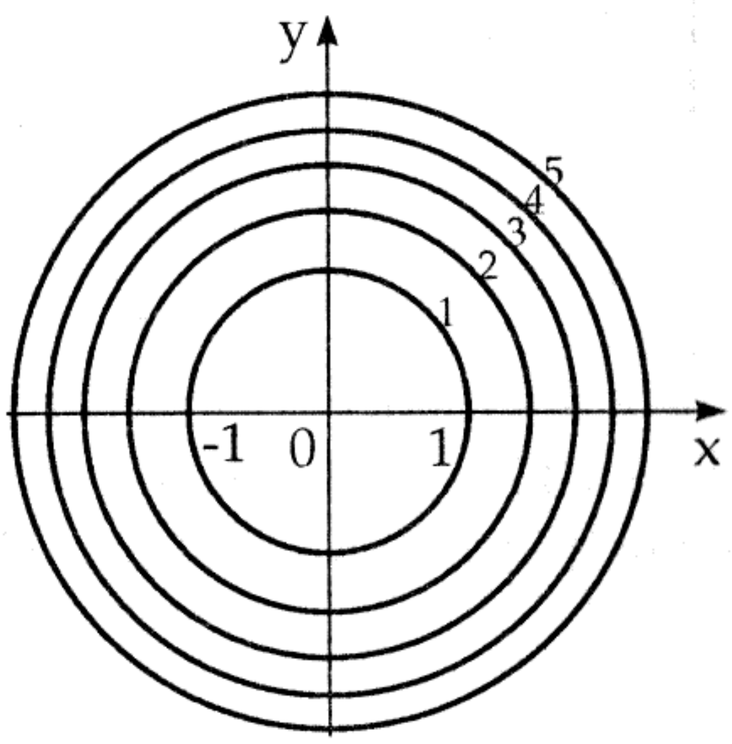
$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(M) \tag{13.12a}$$

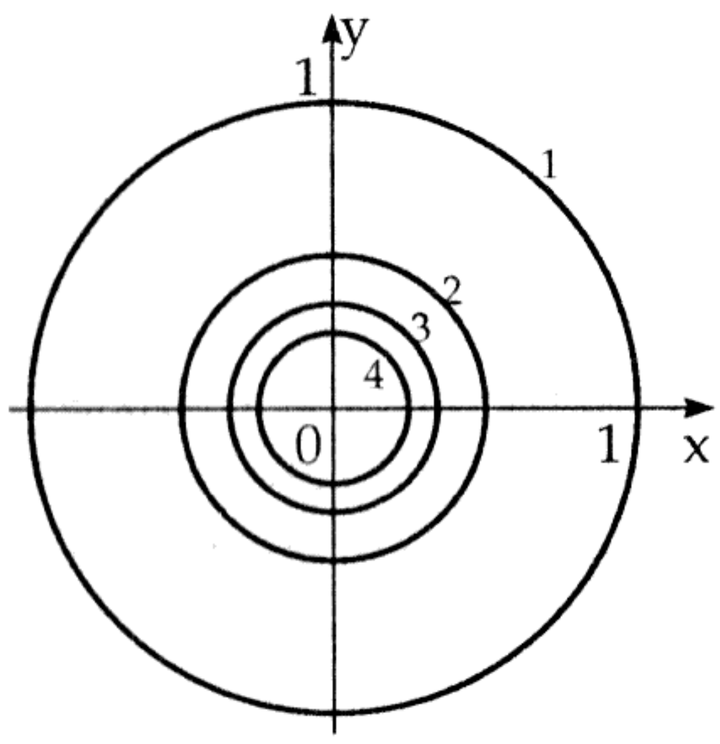
és *vektormezőnek* nevezzük.

■ Ilyen vektormezők például az áramló folyadékrészecskék sebességének mezeje, valamint az erő- és









13.4. ábra.

térerősség terek.

A $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(M)$ vektormező leírható a

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \tag{13.12b}$$

vektor-vektorfüggvénnyel, ahol $\vec{\mathbf{r}}$ az M pont origóra vonatkozó helyvektora. Síkbeli vektormezőről beszélünk, ha minden $\vec{\mathbf{r}}$-érték és minden $\vec{\mathbf{V}}$-érték egy síkban van (lásd 189. old.).

13.1.3.2. Fontosabb vektormezők

1. Centrális vektormező Minden $\vec{\mathbf{V}}$ vektor speciális egyeneseken van, amelyek egy meghatározott ponton, a *centrum*on mennek át **(13.5.a ábra)**. Ha a koordinátarendszer kezdőpontját a centrumba helyezzük, akkor a mezőt a

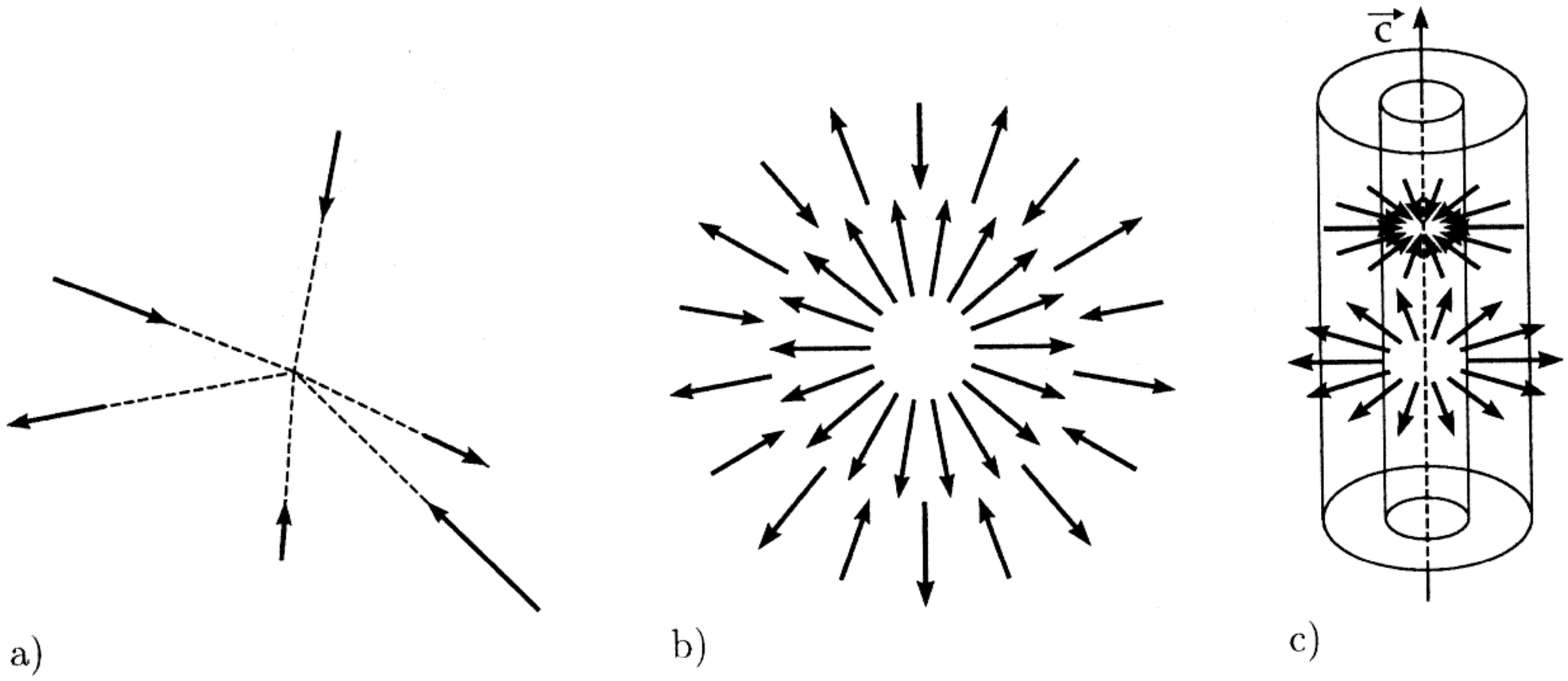
$$\vec{\mathbf{V}} = f(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{r}} \tag{13.13a}$$

formula határozza meg, minden $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorral párhuzamos és $f(\vec{\mathbf{r}}) \geq 0$ esetén $\vec{\mathbf{r}}$ irányába mutat.

Gyakran hasznos ezeket a mezőket a

$$\vec{\mathbf{V}} = \varphi(\vec{\mathbf{r}})\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} \tag{13.13b}$$

formulával leírni, ahol a $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$ a $\vec{\mathbf{V}}$ vektor előjeles hosszát adja meg és $\dfrac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$ az $\vec{\mathbf{r}}$ irányú egységvektor, tehát $r = |\vec{\mathbf{r}}|$.



a) b) c)

13.5. ábra.

2. Szférikus vektormező A szférikus vektormező a centrális vektormező speciális esete, amelyben a $\vec{\mathbf{V}}$ hossza csak az $|\vec{\mathbf{r}}|$ távolságtól függ, tehát $f(\vec{\mathbf{r}}) = f(|\vec{\mathbf{r}}|)$ és $\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \varphi(|\vec{\mathbf{r}}|)$ **(13.5.b ábra)**.

■ Például egy pontszerű sokaság, illetve egy elektromos ponttöltés NEWTON-*féle* és COULOMB-*féle erőtere*:

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{c}{r^3}\vec{\mathbf{r}} = \frac{c}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\,. \tag{13.14}$$

A síkbeli szférikus vektormező speciális esetét *körmező*nek nevezzük.

3. Hengeres vektormező, vagy hengermező

a) Minden $\vec{\mathbf{V}}$ vektor olyan egyeneseken van, amelyek egy meghatározott egyenesre (tengelyre) merőlegesek és metszik ezt az egyenest, és

b) minden $\vec{\mathbf{V}}$ vektor a tengelytől egyenlő távolságra lévő pontokban azonos nagyságú és vagy a tengely felé vagy ellenkező irányba mutat **(13.5.c ábra)**. Ha a koordinátarendszer kezdőpontja a $\vec{\mathbf{c}}$ vektor által meghatározott tengelyen van, akkor ez a mező a

$$\vec{\mathbf{V}} = \varphi(\rho)\frac{\vec{\mathbf{r}}^*}{\rho} \tag{13.15a}$$

$$\text{ahol} \quad \vec{\mathbf{r}}^* = \vec{\mathbf{c}} \times (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{c}}) \tag{13.15b}$$

formulával írható le. Az $\vec{\mathbf{r}}^*$ vektor az $\vec{\mathbf{r}}$ vektor vetülete arra a síkra, amely a tengelyre merőleges, $p = |\vec{\mathbf{r}}^*|$. Ezen mezőknek a tengelyre merőleges síkokra való megszorításai hasonló körmezők.

13.1.3.3. A vektormezők megadása a koordináták függvényeként

1. Vektormező derékszögű koordinátarendszerben Egy vektormező három skalármező $V_1(\vec{\mathbf{r}})$, $V_2(\vec{\mathbf{r}})$ és $V_3(\vec{\mathbf{r}})$ segítségével adható meg, amelyek a $\vec{\mathbf{V}}$ vektor három nem egysíkú $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ és $\vec{\mathbf{e}}_3$ vektorok szerinti felbontásában az együtthatók:

$$\vec{\mathbf{V}} = V_1\vec{\mathbf{e}}_1 + V_2\vec{\mathbf{e}}_2 + V_3\vec{\mathbf{e}}_3\,. \tag{13.16a}$$

Legyenek ezek a vektorok a koordinátatengelyek irányába mutató $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ és $\vec{\mathbf{k}}$ egységvektorok, és fejezzük ki a V_1, V_2, V_3 együtthatókat derékszögű koordinátákkal, akkor:

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + V_y(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + V_z(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}\,. \tag{13.16b}$$

Tehát a vektormező meghatározható három háromváltozós skalárfüggvénnyel.

2. Vektormező henger- és gömbi (térbeli polár-) koordinátarendszerben A henger- és gömbi koordinátarendszer egységvektorai nem állandóak ($\vec{\mathbf{e}}_z$ kivételével):

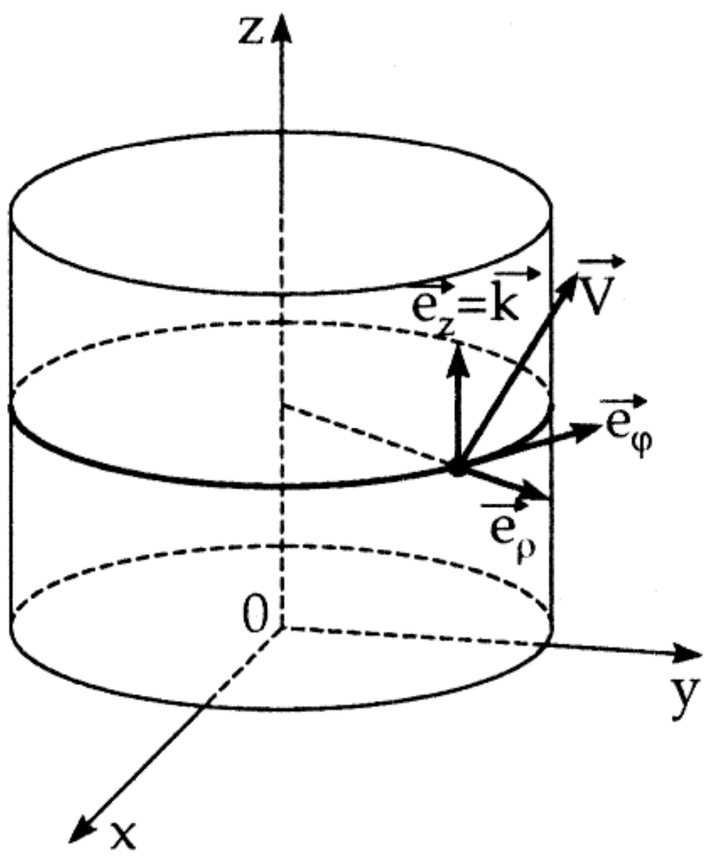
$$\vec{\mathbf{e}}_\rho\,, \quad \vec{\mathbf{e}}_\varphi\,, \quad \vec{\mathbf{e}}_z\ (=\vec{\mathbf{k}})\,, \qquad \text{ill.} \qquad \vec{\mathbf{e}}_r\ (=\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r})\,, \quad \vec{\mathbf{e}}_\vartheta, \quad \vec{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{13.17a}$$

amelyek az $\vec{\mathbf{r}}$ ponton átmenő szintfelületek érintői; ρ = állandó, φ = állandó, z = állandó, ill. r, ϑ, φ = állandó **(13.6., 13.7. ábra)**. Ebben a sorrendben mindig egy ortonormált jobbrendszert alkotnak. Az együtthatókat ekkor a megfelelő koordináták függvényeiként kell megadni:

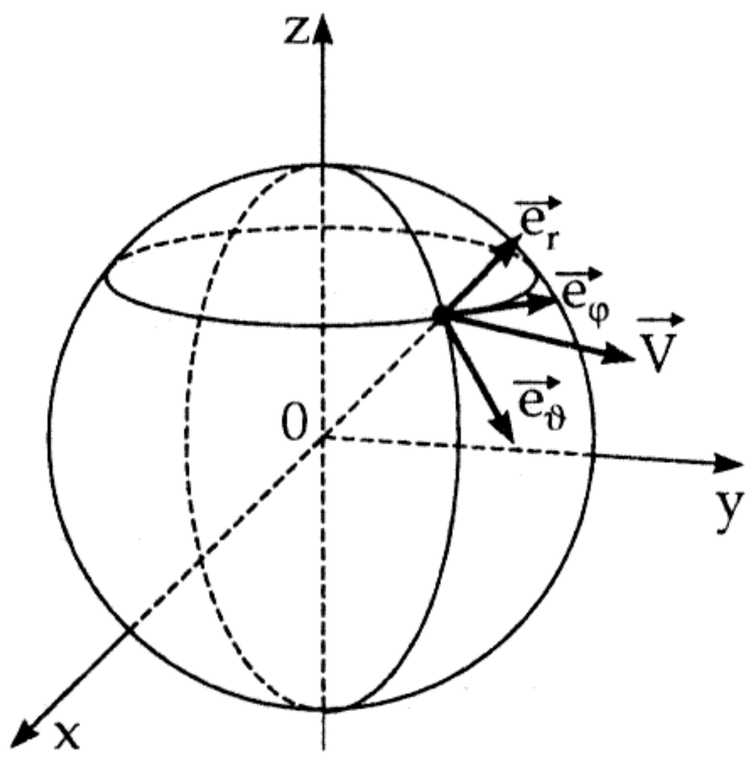
$$\vec{\mathbf{V}} = V_\rho(\rho,\varphi,z)\vec{\mathbf{e}}_\rho + V_\varphi(\rho,\varphi,z)\vec{\mathbf{e}}_\varphi + V_z(\rho,\varphi,z)\vec{\mathbf{e}}_z\,, \tag{13.17b}$$

$$\vec{\mathbf{V}} = V_r(r,\varphi,\vartheta)\vec{\mathbf{e}}_r + V_\varphi(r,\varphi,\vartheta)\vec{\mathbf{e}}_\varphi + V_\vartheta(r,\varphi,\vartheta)\vec{\mathbf{e}}_\vartheta. \tag{13.17c}$$

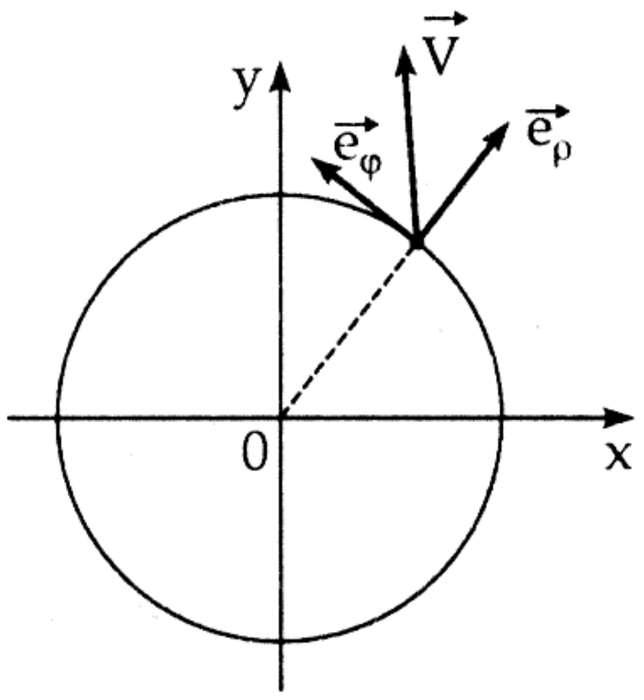
Bár az egységvektorok iránya általában pontról pontra változik, az ortonormáltság miatt mindig merőlegesek egymásra.



13.6. ábra.



13.7. ábra.



13.8. ábra.

13.1.3.4. Áttérés egyik térbeli koordinátarendszerről egy másikra egy $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező megadásában

Lásd a **13.1. táblázatot**.

13.1. táblázat.
Összefüggés egy vektormező térbeli derékszögű, henger- és gömbi koordinátái között

derékszögű koordináták (x, y, z)	**hengerkoordináták** (ρ, φ, z)	**gömbi koordináták** (r, ϑ, φ)
$\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) = V_x\vec{\mathbf{e}}_x + V_y\vec{\mathbf{e}}_y + V_z\vec{\mathbf{e}}_z$	$= V_\rho\vec{\mathbf{e}}_\rho + V_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi + V_z\vec{\mathbf{e}}_z$	$= V_r\vec{\mathbf{e}}_r + V_\vartheta\vec{\mathbf{e}}_\vartheta + V_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi$
$V_x =$	$V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$	$V_r\sin\vartheta\cos\varphi + V_\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$
$V_y =$	$V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$	$V_r\sin\vartheta\sin\varphi + V_\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$
$V_z =$	V_z	$V_r\cos\vartheta - V_\vartheta\sin\vartheta$
$V_x\cos\varphi + V_y\sin\varphi$	$= V_\rho =$	$V_r\sin\vartheta + V_\vartheta\cos\vartheta$
$-V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi$	$= V_\varphi =$	V_φ
V_z	$= V_z =$	$V_r\cos\vartheta - V_\vartheta\sin\vartheta$
$V_x\sin\vartheta\cos\varphi + V_y\sin\vartheta\sin\varphi + V_z\cos\vartheta$	$V_\rho\sin\vartheta + V_z\cos\vartheta$	$= V_r$
$V_x\cos\vartheta\cos\varphi + V_y\cos\vartheta\sin\varphi - V_z\sin\varphi$	$V_\rho\cos\vartheta - V_z\sin\vartheta$	$= V_\vartheta$
$-V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi$	V_φ	$= V_\varphi$

1. Szférikus vektormező kifejezése derékszögű koordinátákkal

$$\vec{\mathbf{V}} = \varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})\,. \tag{13.18}$$

2. z-tengelyű hengeres vektormezők kifejezése derékszögű koordinátákkal

$$\vec{\mathbf{V}} = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}})\,. \tag{13.19}$$

Ahogy már említettük, gömbterekben — $\vec{\mathbf{V}} = V(r)\vec{\mathbf{e}}_r$ — előnyös a gömbi koordináták alkalmazása, a hengerterek — $\vec{\mathbf{V}} = V(\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ — vizsgálatára pedig a hengerkoordináták alkalmazása. Síkbeli mezőkre **(13.8. ábra)**

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x(x,y)\vec{\mathbf{i}} + V_y(x,y)\vec{\mathbf{j}} = V_\rho(x,y)\vec{\mathbf{e}}_\rho + V_\varphi(x,y)\vec{\mathbf{e}}_\varphi\,, \tag{13.20}$$

speciálisan körmezőkre

$$\vec{\mathbf{V}} = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}) = \varphi(r)\vec{\mathbf{e}}_r\,, \tag{13.21}$$

emiatt célszerű henger- és gömbi koordináták síkbeli közös megfelelőjét, azaz a polárkoordinátákat használni.

Itt tehát nem arról van szó, hogy egy $\vec{\mathbf{r}}$ vektor adott koordinátarendszerbeli koordinátáit kifejezzük valamely másik koordinátarendszerbeli koordinátáival (ld. **3.20. táblázatot** a térbeli esetben és a (3.271a), (3.271b), (3.271c) képleteket a megfelelő síkbeli esetben), hanem $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ adott koordinátáiból — melyek a henger- és gömbi koordináták esetében az $\vec{\mathbf{r}}$-rel együtt változó, „helyi" egységvektorokkal történő felírása együtthatói — kifejezzük $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ valamely más koordinátarendszerbeli koordinátáit. Ehhez felhasználjuk $\vec{\mathbf{r}}$ koordinátáit is, bizonyos esetekben a régiket, bizonyos esetekben „vegyes" kifejezést kapva az újakat, aszerint, hogy melyik ad egyszerűbb képletet. Megjegyzendő, hogy az adott $\vec{\mathbf{r}}$ ponthoz tartozó „helyi" koordináta rendszer 3 ortonormált egységvektorát mindegyik koordinátarendszer esetében ugyanazon módon határozzuk meg: tekintjük az adott koordináta $= \vec{\mathbf{r}}$ megfelelő koordinátája, tehát koordináta = állandó $\vec{\mathbf{r}}$-en átmenő 3 szintfelület $\vec{\mathbf{r}}$-beli érintőegységvektorát (látható, hogy

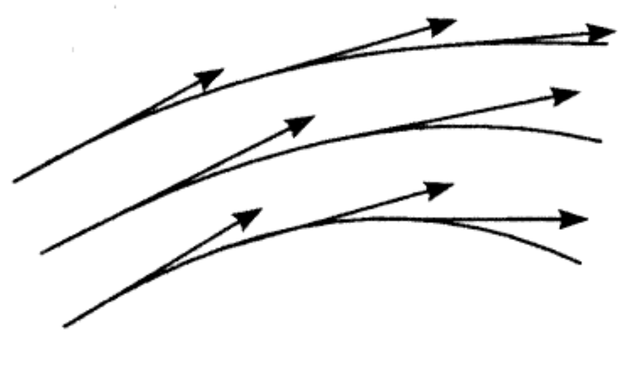
a derékszögű koordinátarendszer esetében $\vec{\mathbf{r}}$-től függetlenül mindig a 3 ismert $\vec{\mathbf{e}}_x$, $\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{\mathbf{e}}_z$ egységvektort kapjuk meg). Síkban — szintfelületek helyett szintvonalakkal — ugyanúgy származtatjuk a polárkoordinátarendszer két helyi egységvektorát. Magát a polárkoordinátarendszert az x, y-síkban úgy kapjuk meg, hogy itt gömbi koordináták esetében $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (tehát $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$), $V_\vartheta = 0$; a hengerkoordináták esetében $V_z = z = 0$, végül $r = \rho$; ezeket behelyettesítve a két koordinátarendszer egybeesik és éppen a polárkoordinátákat kapjuk. Ennek megfelelően a **13.1. táblázat** egymásnak megfelelő formulái is egybeesnek, és így megkapjuk az x, y-síkon értelmezett és ott fekvő vektormezőkre vonatkozó hasonló **13.2. táblázatot**:

13.2. táblázat.

derékszögű koordináták (x, y)	**polárkoordináták** (r, φ)
$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{e}}_x + V_y\vec{\mathbf{e}}_y$	$= V_r\vec{\mathbf{e}}_r + V_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi$
$V_x =$ $V_y =$	$V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$ $V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$
$V_x\cos\varphi + V_y\sin\varphi$ $-V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi$	$= V_r$ $= V_\varphi$

13.1.3.5. Erővonalak

A C görbét a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező **(13.9. ábra)** *erővonal*ának nevezzük, ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor minden M görbepontban érintővektor. A tér minden pontján egy erővonal halad át. Az erővonalak nem metszik egymást, kivéve azokat a pontokat, amelyekben a $\vec{\mathbf{V}}$ függvény nincs értelmezve vagy eltűnik. Derékszögű koordinátákkal adott $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező erővonalainak a differenciálegyenletei



13.9. ábra.

a) általános: $$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}\,, \quad (13.22a)$$ **b) síkbeli mezőre:** $$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}\,, \quad (13.22b)$$

ami azt fejezi ki, hogy az $(x(t), y(t), z(t))$ görbe deriváltvektora minden t-re párhuzamos a $(V_{x(t)}, V_{y(t)}, V_{z(t)})$ mezővektorral. Ezen differenciálegyenletek megoldásához lásd 497., ill. 526. old.

■ **A:** Centrális mező erővonalai olyan félegyenesek, amelyek a centrumból indulnak ki.

■ **B:** A $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{r}}$ vektormező erővonalai körök, amelyek a $\vec{\mathbf{c}}$ vektorra merőleges síkban vannak. Középpontjuk a $\vec{\mathbf{c}}$ vektorral párhuzamos, origón áthaladó tengelyen van.

13.2. Térbeli differenciálszámítás

13.2.1. Iránymenti és térfogati differenciálhányados (derivált)

13.2.1.1. Skalármező iránymenti differenciálhányadosa

Az $U = U(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező iránymenti differenciálhányadosát az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú M pontban a $\vec{\mathbf{c}}$ vektor irányában **(13.10. ábra)** a

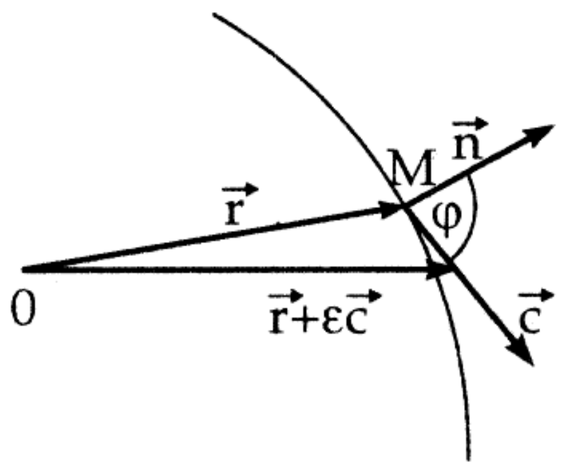
$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U(\vec{\mathbf{r}} + \varepsilon\vec{\mathbf{c}}) - U(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon} \quad (13.23)$$

határértékkel definiáljuk. Ha az U differenciálhányadosát a $\vec{\mathbf{c}}$ vektor irányába mutató $\vec{\mathbf{c}}^0$ egységvektor irányában $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}^0}$-lal jelöljük, akkor az $U(\vec{\mathbf{r}})$ függvény $\vec{\mathbf{c}}$ irányú és $\vec{\mathbf{c}}^0$ irányú differenciálhányadosai között bármely pontban a

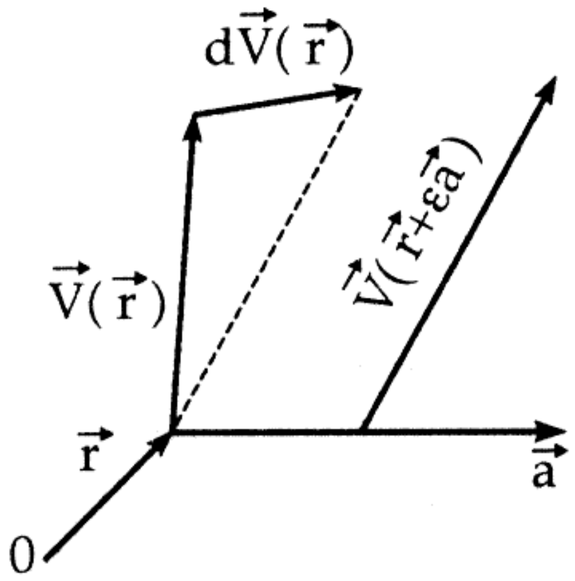
$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}} = |\vec{\mathbf{c}}| \frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}^0} \,. \tag{13.24}$$

összefüggés áll fenn. Az $\vec{\mathbf{r}}$ pontban az egységvektor irányában vett $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}^0}$ differenciálhányados azt méri, hogy az U függvény a $\vec{\mathbf{c}}^0$ irányban milyen gyorsan növekszik. Egy pontban a különböző irányú egységvektorok irányában vett differenciálhányadosok között a $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ a legnagyobb értékű, ahol az $\vec{\mathbf{n}}$ az $\vec{\mathbf{r}}$ ponton átmenő szintfelület normális irányú egységvektora. Az $\vec{\mathbf{n}}$ és egy tetszőleges $\vec{\mathbf{c}}^0$ irányban vett iránymenti differenciálhányadosok közötti összefüggés

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{c}}^0} = \frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \cos(\vec{\mathbf{c}}^0, \vec{\mathbf{n}}) = \frac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \cos\varphi \,. \tag{13.25}$$



13.10. ábra.



13.11. ábra.

13.2.1.2. Vektormező iránymenti differenciálhányadosa

Egy skalármező iránymenti differenciálhányadosához hasonlóan, vektormezőnek is van iránymenti differenciálhányadosa. A $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező iránymenti differenciálhányadosát **(13.11. ábra)** az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú M pontban az $\vec{\mathbf{a}}$ vektor irányában a

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})}{\varepsilon} \tag{13.26}$$

határértékkel definiáljuk. Ha a $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező differenciálhányadosát az $\vec{\mathbf{r}}$ pontban az ($\vec{\mathbf{a}}$ irányába mutató) $\vec{\mathbf{a}}^0$ egységvektor irányában $\dfrac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}^0}$-lal jelöljük, akkor:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} = |\vec{\mathbf{a}}| \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}^0} \,. \tag{13.27}$$

A formulákkal való könnyebb bánásmód érdekében célszerű a differenciáloperátorokat — jelen esetben a $\vec{\mathbf{V}}$-hez a grad $\overline{V}$-t rendelőt, tehát a grad-ot — számoknak vagy szimbolikus vektoroknak tekinteni, amelyeknek így képezhetjük formális polinomjait, vagy vehetjük vektorokkal, sőt vektormezőkkel vett skalárszorzatait, sőt vektoriális szorzatait is. Így (a grad definícióját lásd 13.2.2.-ben és 13.2.3.-ban) derékszögű koordinátarendszerben, azaz $\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{e}}_x + V_y\vec{\mathbf{e}}_y + V_z\vec{\mathbf{e}}_z$, $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y + a_z\vec{\mathbf{e}}_z$ esetén érvényes:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} = (\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{grad}\, V_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{grad}\, V_y)\vec{\mathbf{e}}_y + (\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{grad}\, V_z)\vec{\mathbf{e}}_z \,, \tag{13.28a}$$

és emiatt ezzel definiáljuk $(\vec{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}}$-t. Általános koordinátarendszerben érvényes:

$$(\vec{\mathbf{a}}\operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{a}}) + \operatorname{grad}(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{V}}) + \vec{\mathbf{a}}\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} \times \operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}} \times \operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}) . \tag{13.28b}$$

(rot definícióját lásd 13.2.5.-ban, div-ét lásd 13.2.4.-ben).

13.2.1.3. Térfogati vagy térbeli differenciálhányados

Az $U = U(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező vagy a $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormező $\vec{\mathbf{r}}$ pontbeli térfogati differenciálhányadosának az alábbi eljárással kapott három mennyiséget nevezzük:

1. Körülfogjuk a skalármező vagy a vektormező $\vec{\mathbf{r}}$ pontját a Σ zárt felülettel. Ezt a zárt felületet az $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\vec{\mathbf{e}}_x + y(u, v)\vec{\mathbf{e}}_y + z(u, v)\vec{\mathbf{e}}_z$ vektor-skalárfüggvénnyel írhatjuk le, úgy hogy a hozzátartozó vektoriális felületelem a

$$d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial v}\, du\, dv \tag{13.29a}$$

egyenlőséggel adható meg.

2. Integráljunk a zárt Σ felület mentén. Számoljuk ki a következő három típusú integrált:

$$\oiint_{(\Sigma)} U\, d\vec{\mathbf{S}}\,, \qquad \oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,, \qquad \oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathbf{V}} \times d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.29b}$$

3. Határozzuk meg a

$$\lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_{(\Sigma)} U\, d\vec{\mathbf{S}}\,, \quad \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,, \quad \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathbf{V}} \times d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.29c}$$

határértékeket, ahol V jelöli annak a térrésznek a térfogatát, amely az $\vec{\mathbf{r}}$ pontot belsejében tartalmazza és amelyet a Σ zárt felület határol.

A (13.29c) határértékek a térfogati differenciálhányadosokat jelölik és az adott sorrendben egy skalármező *gradiens*ének, valamint egy vektormező *divergenciá*jának és *rotáció*jának a definíciói.

13.2.2. Skalármező gradiense

13.2.2.1. Gradiens definíciója

*Gradiens*nek nevezünk egy vektort, amelyet az $U = U(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező minden pontjához hozzárendelhetünk (jelölése $\operatorname{grad} U$), és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\operatorname{grad} U$ az $U =$ állandó szintfelület normálisával egyenlő állású,

2. $\operatorname{grad} U$ az U függvény növekedésének megfelelő irányítású,

3. $|\operatorname{grad} U| = \dfrac{\partial U}{\partial\vec{\mathbf{n}}}$, azaz a $\operatorname{grad} U$ hossza megegyezik az U függvény normális irányú deriváltjával.

A következő két szakaszban két gradienshez kapcsolódó definíciót tárgyalunk.

13.2.2.2. Gradiens és iránymenti differenciálhányados

Az U skalármező $\vec{\mathbf{c}}^0$ egységvektor irányú *iránymenti differenciálhányados*a megegyezik a $\operatorname{grad} U$ vektor $\vec{\mathbf{c}}^0$ egységvektor irányú vetületével:

$$\frac{\partial U}{\partial\vec{\mathbf{c}}^0} = \vec{\mathbf{c}}^0 \cdot \operatorname{grad} U\,, \tag{13.30}$$

azaz bármely pontban az iránymenti differenciálhányados az adott irányú egységvektor és a mező gradiensének a skaláris szorzataként számítható ki.

13.2.2.3. Gradiens és térfogati differenciálhányados

Az $U = U(\vec{\mathbf{r}})$ skalármező minden $\vec{\mathbf{r}}$ pontjában úgy is megkaphatjuk a $\operatorname{grad} U$ vektort, mint a skalármező első típusú *térfogati differenciálhányadosát*:

$$\operatorname{grad} U = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_{(\Sigma)} U \, d\vec{\mathbf{S}}}{V} \,. \tag{13.31}$$

Itt megint V annak a térrésznek a térfogata, amely az $\vec{\mathbf{r}}$ futópontot tartalmazza és amelyet a Σ zárt felület határol.

13.2.2.4. A gradiens további tulajdonságai

1. A gradiens abszolút értéke nagyobb azokban a pontokban, amelyekben az erővonalak sűrűsége nagyobb.

2. A gradiens eltűnik ($\operatorname{grad} U = \vec{\mathbf{0}}$) azokban a pontokban, amelyekben az U függvénynek maximuma vagy minimuma van. Ezekben a pontokban a szintvonalak, ill. a szintfelületek ponttá fajulnak el.

13.2.2.5. Skalármező gradiense különböző koordinátarendszerekben

1. Gradiens a derékszögű koordinátarendszerben

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{\mathbf{k}} \,. \tag{13.32}$$

2. Gradiens a hengerkoordinátarendszerben ($x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = z$)

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}_\rho U\vec{\mathbf{e}}_\rho + \operatorname{grad}_\varphi U\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \operatorname{grad}_z U\vec{\mathbf{e}}_z, \qquad \text{ahol} \tag{13.33a}$$

$$\operatorname{grad}_\rho U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\,, \quad \operatorname{grad}_\varphi U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,, \quad \operatorname{grad}_z U = \frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{13.33b}$$

3. Gradiens a gömbi koordinátarendszerben ($x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\vartheta$)

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}_r U\vec{\mathbf{e}}_r + \operatorname{grad}_\vartheta U\vec{\mathbf{e}}_\vartheta + \operatorname{grad}_\varphi U\vec{\mathbf{e}}_\varphi, \qquad \text{ahol} \tag{13.34a}$$

$$\operatorname{grad}_r U = \frac{\partial U}{\partial r}\,, \quad \operatorname{grad}_\vartheta U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\,, \quad \operatorname{grad}_\varphi U = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,. \tag{13.34b}$$

4. Gradiens az általános ortogonális koordinátarendszerben (ξ, η, ζ)

Az $\vec{\mathbf{r}}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{i}} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{j}} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{k}}$ pontban:

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}_\xi U\vec{\mathbf{e}}_\xi + \operatorname{grad}_\eta U\vec{\mathbf{e}}_\eta + \operatorname{grad}_\zeta U\vec{\mathbf{e}}_\zeta\,, \qquad \text{ahol:} \tag{13.35a}$$

$$\operatorname{grad}_\xi U = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|}\frac{\partial U}{\partial\xi}, \quad \operatorname{grad}_\eta U = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|}\frac{\partial U}{\partial\eta}, \quad \operatorname{grad}_\zeta U = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|}\frac{\partial U}{\partial\zeta}\,. \tag{13.35b}$$

13.2.2.6. Műveleti és számítási szabályok

A továbbiakban tegyük fel, hogy a $\vec{\mathbf{c}}$ vektor és a c állandó.

$$\operatorname{grad} c = 0, \quad \operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2, \quad \operatorname{grad}(cU) = c\operatorname{grad} U. \tag{13.36}$$

$$\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1\operatorname{grad} U_2 + U_2\operatorname{grad} U_1, \quad \operatorname{grad}\varphi(U) = \frac{d\varphi}{dU}\operatorname{grad} U\,. \tag{13.37}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{\mathbf{V}}_1\vec{\mathbf{V}}_2) = (\vec{\mathbf{V}}_1\cdot\operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}}_2 + (\vec{\mathbf{V}}_2\cdot\operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_1\times\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_2\times\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_1. \tag{13.38}$$

$$\operatorname{grad}(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{c}}\,. \tag{13.39}$$

1. **Skalármező differenciálja, mint az U függvény teljes differenciálja**

$$dU = \operatorname{grad} U d\vec{\mathbf{r}} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{13.40}$$

2. **Az U függvény differenciálhányadosa az $\vec{\mathbf{r}}(t)$ térgörbe mentén**

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{13.41a}$$

3. **Centrális mező gradiense**

$$\operatorname{grad} U(r) = U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(gömbmező)}, \tag{13.42a}$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} \qquad \text{(egységvektorok mezeje)}. \tag{13.42b}$$

13.2.3. Vektorgradiens

A (13.28a) összefüggésben:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial \vec{\mathbf{a}}} = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{grad})(V_x\vec{\mathbf{e}}_x + V_y\vec{\mathbf{e}}_y + V_z\vec{\mathbf{e}}_z) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}} \tag{13.43a}$$

a $\operatorname{grad}\vec{\mathbf{V}}$-t *vektorgradiens*nek nevezzük. A (13.43a) mátrixjelölésből következik, hogy a vektorgradiens, mint tenzor, egy mátrix segítségével adható meg:

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \tag{13.43b}$$

$$\operatorname{grad}\vec{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{13.43c}$$

Ezek a tenzorok igen fontosak a mérnöki tudományokban, például a feszültség (263. old.) és rugalmasság (263. old.) matematikai leírásánál.

13.2.4. Vektormező divergenciája

13.2.4.1. A divergencia definíciója

Egy $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőhöz megadhatunk egy skalármezőt, a vektormező *divergenciáját*. Az $\vec{\mathbf{r}}$ pontbeli divergenciát a vektormező térfogati differenciálhányadosaként definiáljuk:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \lim_{V\to 0} \frac{\oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}}{V}. \tag{13.44}$$

Egy vektormező divergenciáját meghatározhatjuk speciális forrássűrűségként is, abban az esetben, ha $\vec{\mathbf{V}}$ egy áramlásmezőt ír le; ekkor megadja azt a folyadékmennyiséget, amely a $\vec{\mathbf{V}}$ mező illető pontjában térfogat- és időegység alatt keletkezik. $\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} > 0$ esetén *forrás*, $\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} < 0$ esetén *nyelő* létezéséről beszélünk.

13.2.4.2. Divergencia megadása különböző koordinátarendszerekben

1. Divergencia derékszögű koordinátarendszerben

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (13.45a) \qquad \text{ha} \quad \vec{\mathbf{V}}(x,y,z) = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}\,. \qquad (13.45b)$$

A div $\vec{\mathbf{V}}$ skalármező meghatározható a nabla operátor és a $\vec{\mathbf{V}}$ vektor formális skaláris szorzataként a

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \nabla\cdot\vec{\mathbf{V}} \qquad (13.45c)$$

képlettel és látható innen, hogy eltolás- és forgásinvariáns, tehát skalárinvariáns is (lásd 264. old.).

2. Divergencia hengerkoordinátarendszerben

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (13.46a) \quad \text{ahol} \quad \vec{\mathbf{V}}(\rho,\varphi,z) = V_\rho\vec{\mathbf{e}}_\rho + V_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi + V_z\vec{\mathbf{e}}_z\,. \quad (13.46b)$$

3. Divergencia gömbi koordinátarendszerben

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta V_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (13.47a)$$

$$\text{ahol} \quad \vec{\mathbf{V}}(r,\vartheta,\varphi) = V_r\vec{\mathbf{e}}_r + V_\vartheta\vec{\mathbf{e}}_\vartheta + V_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi\,. \qquad (13.47b)$$

4. Divergencia általános ortogonális koordinátarendszerben

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathrm{D}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|V_\xi\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|V_\eta\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|V_\zeta\right)\right\} \qquad (13.48a)$$

$$\text{ahol} \quad \vec{\mathbf{r}}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{i}} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{j}} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{k}}\,, \qquad (13.48b)$$

$$\mathrm{D} = \left|\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right)\right| = \left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|\cdot\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|\cdot\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right| \qquad (13.48c)$$

$$\text{és} \quad \vec{\mathbf{V}}(\xi,\eta,\zeta) = V_\xi\vec{\mathbf{e}}_\xi + V_\eta\vec{\mathbf{e}}_\eta + V_\zeta\vec{\mathbf{e}}_\zeta\,. \qquad (13.48d)$$

Itt a D és a másik három hasonló mennyiség a JACOBI-*determináns* vagy a JACOBI-*féle függvénydeterminánsok*.

13.2.4.3. A divergencia műveleti szabályai

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{c}} = 0\,, \quad \operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) = \operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}_1 + \operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}_2\,, \quad \operatorname{div}(c\vec{\mathbf{V}}) = c\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}\,. \qquad (13.49)$$

$$\operatorname{div}(U\vec{\mathbf{V}}) = U\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{V}}\operatorname{grad}U \qquad \left(\text{speciálisan } \operatorname{div}(\vec{\mathbf{rc}}) = \frac{\vec{\mathbf{rc}}}{r}\right)\,. \qquad (13.50)$$

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_1\times\vec{\mathbf{V}}_2) = \vec{\mathbf{V}}_2\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_1\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_2\,. \qquad (13.51)$$

13.2.4.4. Centrális mező divergenciája

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{r}} = 3\,, \quad \operatorname{div}\varphi(r)\vec{\mathbf{r}} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r)\,. \qquad (13.52)$$

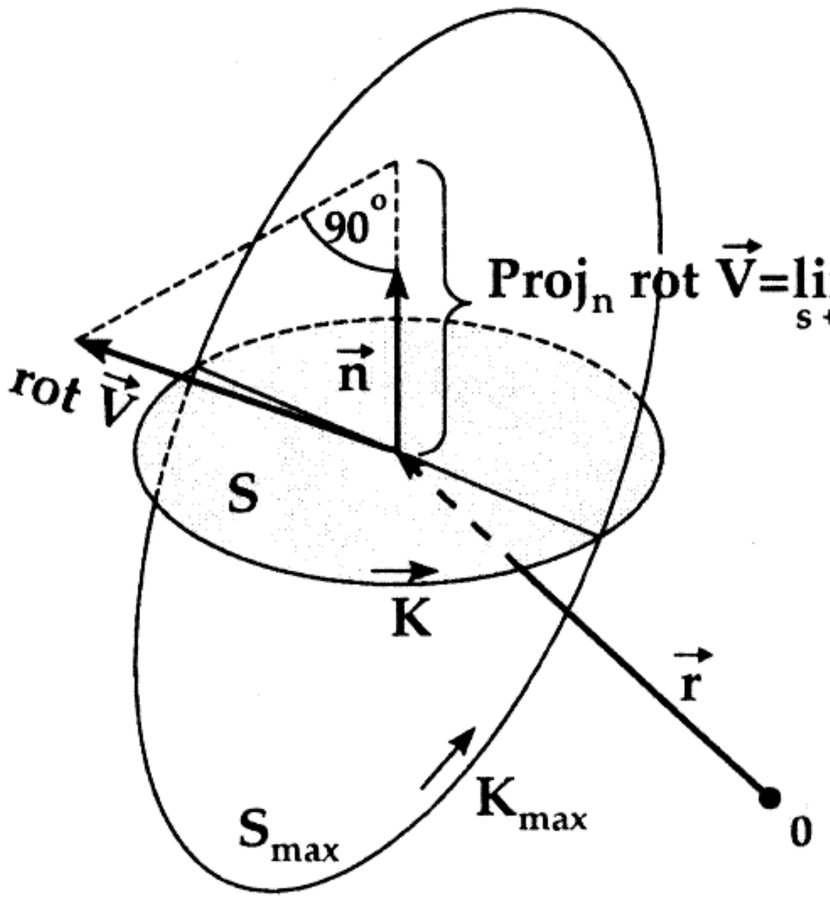
13.2.5. Vektormező rotációja

13.2.5.1. Rotáció definíciója

1. Definíció Egy $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőhöz hozzárendelhetjük a vektormező negatív előjelű térfogati differenciálhányadosát, mint a mező rotációját (jelölése: rot $\vec{\mathbf{V}}$, curl $\vec{\mathbf{V}}$ vagy a nablaoperátor segítségével $\nabla\times\vec{\mathbf{V}}$):

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = -\lim_{V\to0}\frac{\oiint_{(\Sigma)}\vec{\mathbf{V}}\times d\vec{\mathbf{S}}}{V} = \lim_{V\to0}\frac{\oiint_{(\Sigma)}d\vec{\mathbf{S}}\times\vec{\mathbf{V}}}{V}\,. \qquad (13.53)$$

2. Definíció Egy $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektormezőhöz hozzárendelhetünk egy másik vektormezőt, a rotációját, a következő eljárással:



13.12. ábra.

a) Fektessünk egy kis **S** síkdarabot (**13.12. ábra**) az $\vec{\mathbf{r}}$ ponton át. Ez a felületdarab leírható az $\vec{\mathbf{S}}$ vektorral, amely az $\vec{\mathbf{n}}$ normális irányába mutat és a nagysága a felületdarab felszíne. A felületdarab peremgörbéjét jelöljük K-val.

b) Számoljuk ki az $\oint_{(K)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ körintegrált a felületdarab K peremgörbéje mentén.

c) Meghatározzuk a

$$\lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_{(K)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}},$$

határértéket, úgy, hogy a felületdarab helyzete változatlan maradjon.

d) Változtassuk a felületdarab helyzetét úgy, hogy a kapott határérték maximális értékű legyen. A hozzátartozó felületdarab felszíne S_{max} és a peremgörbéje K_{max} .

e) A rot $\vec{\mathbf{V}}$ vektor az $\vec{\mathbf{r}}$ pontban az a vektor, amelynek az abszolút értéke a talált maximális érték és az iránya a felületdarab normálisának az irányával megegyezik. Ekkor:

$$\left|\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}\right| = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{(K_{\max})} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}{S_{\max}}. \tag{13.54a}$$

A rot $\vec{\mathbf{V}}$ vektor vetülete az $\vec{\mathbf{n}}$ vektor (az eredeti S felszínű síkrész normálisa) irányában, azaz a rot $\vec{\mathbf{V}}$ vektor komponense az $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{l}}$ tetszőleges vektor irányában az $\vec{\mathbf{n}}$-re merőleges síkrész S felületével kifejezve

$$\vec{\mathbf{l}} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \operatorname{rot}_l \vec{\mathbf{V}} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{(K)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}{S}. \tag{13.54b}$$

A rot $\vec{\mathbf{V}}$ mező erővonalait a $\vec{\mathbf{V}}$ *vektormező örvényvonalai*nak nevezzük.

13.2.5.2. Rotáció a különböző koordinátarendszerekben

1. Rotáció derékszögű koordinátarendszerben

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \tag{13.55a}$$

A rot $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező a nablaoperátorból és a $\vec{\mathbf{V}}$ vektorból szimbólikus vektoriális szorzattal

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \nabla \times \vec{\mathbf{V}} \tag{13.55b}$$

alakban határozható meg.

2. Rotáció hengerkoordinátarendszerben

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = \operatorname{rot}_\rho\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\rho + \operatorname{rot}_\varphi\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \operatorname{rot}_z\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_z \qquad \text{ahol} \tag{13.56a}$$

$$\operatorname{rot}_\rho\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_\varphi\vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}, \quad \operatorname{rot}_z\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\varphi) - \frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right\}. \tag{13.56b}$$

3. Rotáció gömbi koordinátarendszerben

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = \operatorname{rot}_r\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_r + \operatorname{rot}_\vartheta\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\vartheta + \operatorname{rot}_\varphi\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\varphi, \qquad \text{ahol} \tag{13.57a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_r\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta V_\varphi) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial\varphi}\right\},\\
\operatorname{rot}_\vartheta\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi),\\
\operatorname{rot}_\varphi\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rV_\vartheta) - \frac{V_r}{\partial\vartheta}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.57b}$$

4. Rotáció általános ortogonális koordinátarendszerben

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = \operatorname{rot}_\xi\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\xi + \operatorname{rot}_\eta\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\eta + \operatorname{rot}_\zeta\vec{\mathbf{V}}\vec{\mathbf{e}}_\zeta \qquad \text{ahol} \tag{13.58a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_\xi\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{\mathrm{D}}\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|V_\zeta\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|V_\eta\right)\right],\\
\operatorname{rot}_\eta\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{\mathrm{D}}\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|V_\xi\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|V_\zeta\right)\right],\\
\operatorname{rot}_\zeta\vec{\mathbf{V}} &= \frac{1}{\mathrm{D}}\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|V_\eta\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|V_\xi\right)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{13.58b}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{i}} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{j}} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{k}}; \qquad \mathrm{D} = \left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\xi}\right|\cdot\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\eta}\right|\cdot\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\zeta}\right|. \tag{13.58c}$$

13.2.5.3. A rotáció kiszámítási szabályai

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) = \operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_1 + \operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}_2, \quad \operatorname{rot}(c\vec{\mathbf{V}}) = c\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}}. \tag{13.59}$$

$$\operatorname{rot}(U\vec{\mathbf{V}}) = U\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} + \operatorname{grad}U\times\vec{\mathbf{V}}. \tag{13.60}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{V}}_1\times\vec{\mathbf{V}}_2) = (\vec{\mathbf{V}}_2\operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}}_1 - (\vec{\mathbf{V}}_1\operatorname{grad})\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_1\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_2\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}_1. \tag{13.61}$$

13.2.5.4. Potenciálos mező rotációja

A STOKES-integráltételből (lásd 688. old.) következik, hogy potenciálos mező rotációja nullával egyenlő:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\mathrm{U}) = \vec{\mathbf{0}}. \tag{13.62a}$$

Ez következik a (13.55a)-ból is a $\vec{\mathbf{V}} = \operatorname{grad}U$ vektormezőre, amennyiben a SCHWARZ-féle felcserélési tétel feltételei teljesülnek (lásd 401. old.).

■ Az $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ vektorra, amelynek a nagysága $r = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$: $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$ és $\operatorname{rot}(\varphi(r)\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}$, ahol $\varphi(r)$ az r differenciálható függvénye.

13.2.6. Nablaoperátor, Laplace-operátor

13.2.6.1. Nablaoperátor

*Nablaoperátor*nak egy szimbolikus ∇ vektort nevezünk, amelyet gyakran használunk a térbeli differenciáloperátorok meghatározásához. Ennek az operátornak a bevezetése a vektoranalízisbeli számításokat egyszerűsíti. A *gradiens*, *vektorgradiens*, *divergencia* és *rotáció* operátorokra érvényes:

$$\operatorname{grad}U = \nabla U \quad (U \text{ gradiense (lásd 673. old.)}), \tag{13.63a}$$

$$\text{grad}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\vec{\mathbf{V}} \quad (V \text{ vektogradiense (lásd 675. old.)}), \tag{13.63b}$$

$$\text{div}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\cdot\vec{\mathbf{V}} \quad (V \text{ divergenciája (lásd 675. old.)}), \tag{13.63c}$$

$$\text{rot}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\times\vec{\mathbf{V}} \quad (V \text{ rotációja (lásd 676. old.)}). \tag{13.63d}$$

Derékszögű koordinátarendszerben:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}. \tag{13.63e}$$

A nablaoperátor komponensei a parciális differenciáloperátorok, azaz a $\frac{\partial}{\partial x}$ szimbólum az x szerinti parciális differenciálhányadost jelenti, amelynek kiszámításánál a többi változó értékét rögzítjük. A *térbeli differenciáloperátor*ok formulái derékszögű koordinátarendszerben formálisan adódnak ezen vektoroperátornak az U skalárral vagy a $\vec{\mathbf{V}}$ vektorral való szorzásából.

13.2.6.2. A nablaoperátorra vonatkozó számítási szabályok

1. Ha a ∇ operátort a $\sum a_i X_i$ lineáris kombinációra alkalmazzuk, amelyben az a_i-k állandók és az X_i-k pontfüggvények (függetlenül attól, hogy skalár- vagy vektorértékűek), akkor fennáll, hogy:

$$\nabla(\sum a_i X_i) = \sum a_i \nabla X_i\,. \tag{13.64}$$

2. Ha a ∇ operátor argumentuma skalár- vagy vektorértékű függvények szorzata, akkor az operátort mindegyik függvényre egymásután alkalmazzuk, az aktuális argumentuma felett $\downarrow$ áll és végül az eredményeket a

$$\nabla(XYZ) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ) + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z) + \nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}) \tag{13.65}$$

formula értelmében összeadjuk. Ennek alapján a kapott szorzatokat a vektoralgebra szabályai szerint olymódon alakítjuk át, hogy a ∇ operátor minden lépésben csak a $\downarrow$ jellel megjelölt tényezőre vonatkozik. A számítás befejezése után a jelet elhagyjuk.

■ **A:** $\text{div}\,(U\vec{\mathbf{V}}) = \nabla(U\vec{\mathbf{V}}) = \nabla(\overset{\downarrow}{U}\vec{\mathbf{V}}) + \nabla(U\overset{\downarrow}{\vec{\mathbf{V}}}) = \vec{\mathbf{V}}\nabla U + U\nabla\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}\,\text{grad}\,U + U\,\text{div}\,\vec{\mathbf{V}}$.

■ **B:** $\text{grad}\,(\vec{\mathbf{V}}_1\vec{\mathbf{V}}_2) = \nabla(\vec{\mathbf{V}}_1\vec{\mathbf{V}}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{\mathbf{V}}_1}\vec{\mathbf{V}}_2) + \nabla(\vec{\mathbf{V}}_1\overset{\downarrow}{\vec{\mathbf{V}}_2})$. A $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$ egyenlőség értelmében kapjuk: $\text{grad}\,(\vec{\mathbf{V}}_1\vec{\mathbf{V}}_2) = (\vec{\mathbf{V}}_2\nabla)\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2\times(\nabla\times\vec{\mathbf{V}}_1) + (\vec{\mathbf{V}}_1\nabla)\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_1\times(\nabla\times\vec{\mathbf{V}}_2) =$

$= (\vec{\mathbf{V}}_2\text{grad}\,)\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2\times\,\text{rot}\,\vec{\mathbf{V}}_1 + (\vec{\mathbf{V}}_1\text{grad}\,)\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_1\times\,\text{rot}\,\vec{\mathbf{V}}_2$.

13.2.6.3. Vektorgradiens

A $\text{grad}\,\vec{\mathbf{V}}$ vektorgradiens a nablaoperátor segítségével a

$$\text{grad}\,\vec{\mathbf{V}} = \nabla\vec{\mathbf{V}} \tag{13.66a}$$

képlettel határozható meg. A vektorgradiens korábbi $(\vec{\mathbf{a}}\nabla)\vec{\mathbf{V}}$ kifejezésével összhangban érvényes a következő egyenlőség:

$$2(\vec{\mathbf{a}}\nabla)\vec{\mathbf{V}} = \text{rot}\,(\vec{\mathbf{V}}\times\vec{\mathbf{a}}) + \text{grad}\,(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{V}}) + \vec{\mathbf{a}}\text{div}\,\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\text{div}\,\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}\times\text{rot}\,\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\times\text{rot}\,\vec{\mathbf{a}}\,. \tag{13.66b}$$

Ezenkívül az $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ vektorra érvényes:

$$(\vec{\mathbf{a}}\nabla)\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}}\,. \tag{13.66c}$$

13.2.6.4. A nablaoperátor kétszeres alkalmazása

Minden $\vec{\mathbf{V}}$ mezőre érvényes:

1. $\nabla(\nabla\times\vec{\mathbf{V}}) = \text{div}\,\text{rot}\,\vec{\mathbf{V}} = 0\,,$ (13.67)

2. $\nabla \times (\nabla U) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \vec{\mathbf{0}}$, (13.68)

3. $\nabla(\nabla U) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$. (13.69)

13.2.6.5. Laplace-operátor

1. Definíció

A nablaoperátor önmagával vett skaláris szorzatát LAPLACE-operátornak nevezzük:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 . \tag{13.70}$$

A LAPLACE-operátor alkalmazható mind skalár- mind vektorértékű függvényre. Ha skalárértékű függvényre alkalmazzuk, akkor értéke szám, a másodrendű parciális deriváltak (differenciálhányadosok) összege. Ha vektorértékű függvényre alkalmazzuk, akkor koordinátánként kell alkalmazni és az eredmény vektor. A LAPLACE-operátor *invariáns mennyiség*, azaz alakja a koordinátarendszer eltolásával és/vagy elforgatásával nem változik.

2. A Laplace-operátor alakja különböző koordinátarendszerekben

A következő formulákban a LAPLACE-operátort az $U(\vec{\mathbf{r}})$ skalár-vektorfüggvényre alkalmazzuk. Ekkor az eredmény egy skalár. Ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor-vektorfüggvényre alkalmazzuk, akkor az eredmény a $\Delta\vec{\mathbf{V}}$ vektor, amelynek a komponensei ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z .

1. Laplace-operátor derékszögű koordinátarendszerben

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} . \tag{13.71}$$

2. Laplace-operátor hengerkoordinátarendszerben

$$\Delta U(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} . \tag{13.72}$$

3. Laplace-operátor gömbi koordinátarendszerben

$$\Delta U(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} . \tag{13.73}$$

4. Laplace-operátor általános ortogonális koordinátarendszerben

$$\Delta U(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mathrm{D}}{\left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \xi}\right|^2}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mathrm{D}}{\left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \eta}\right|^2}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mathrm{D}}{\left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \zeta}\right|^2}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)\right] , \tag{13.74a}$$

ahol $\vec{\mathbf{r}}(\xi,\eta,\zeta) = x(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{i}} + y(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{j}} + z(\xi,\eta,\zeta)\vec{\mathbf{k}}$, (13.74b) $\quad \mathrm{D} = \left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \xi}\right| \cdot \left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \eta}\right| \cdot \left|\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \zeta}\right| .$ (13.74c)

3. Speciális összefüggések

$$\nabla(\nabla\vec{\mathbf{V}}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}, \tag{13.75}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{V}}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}, \tag{13.76}$$

$$\nabla(\nabla\vec{\mathbf{V}}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{V}}) = \Delta\vec{\mathbf{V}}, \tag{13.77}$$

ahol

$$\Delta\vec{\mathbf{V}} = (\nabla\nabla)\vec{\mathbf{V}} = \Delta V_x\vec{\mathbf{i}} + \Delta V_y\vec{\mathbf{j}} + \Delta V_z\vec{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{\mathbf{i}}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{\mathbf{k}} . \tag{13.78}$$

13.2.7. A térbeli differenciálszámítás áttekintése

13.2.7.1. Vektoranalitikus kifejezések derékszögű, henger- és gömbi koordinátarendszerben

13.3. táblázat. Vektoranalitikus kifejezések derékszögű, henger- és gömbi koordinátarendszerben

	derékszögű koordináták	hengerkoordináták	gömbi koordináták
$d\vec{\mathbf{s}} = d\vec{\mathbf{r}}$	$\vec{\mathbf{e}}_x dx + \vec{\mathbf{e}}_y dy + \vec{\mathbf{e}}_z dz$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho d\rho + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z dz$	$\vec{\mathbf{e}}_r dr + \vec{\mathbf{e}}_\vartheta r d\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_\varphi r \sin\vartheta d\varphi$
$\mathrm{grad} U$	$\vec{\mathbf{e}}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{\mathbf{e}}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$
$\mathrm{div}\vec{\mathbf{V}}$	$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(V_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$
$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{V}}$	$\vec{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \vec{\mathbf{e}}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \vec{\mathbf{e}}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right) + \vec{\mathbf{e}}_z \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)$	$\vec{\mathbf{e}}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(V_\varphi \sin\vartheta) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi}\right] + \vec{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r V_\varphi)\right] + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r V_\vartheta) - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta}\right]$
ΔU	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

13.2.7.2. A differenciáloperátorokra vonatkozó fő összefüggések és eredmények

13.4. táblázat. A differenciáloperátorok fő összefüggései

Operátor	Szimbólum	Összefüggés	Argumentum	Eredmény	Jelentés
gradiens	$\mathrm{grad}\, U$	∇U	skalár	vektor	maximális növekedés
vektorgradiens	$\mathrm{grad}\, \vec{\mathbf{V}}$	$\nabla \vec{\mathbf{V}}$	vektor	másodfajú tenzor	
divergencia	$\mathrm{div}\, \vec{\mathbf{V}}$	$\nabla \vec{\mathbf{V}}$	vektor	skalár	források, ill. nyelők
rotáció	$\mathrm{rot}\, \vec{\mathbf{V}}$	$\nabla \times \vec{\mathbf{V}}$	vektor	vektor	örvény
LAPLACE-operátor	ΔU	$(\nabla\nabla)U$	skalár	skalár	potenciálos mező-források
	$\Delta \vec{\mathbf{V}}$	$(\nabla\nabla)\vec{\mathbf{V}}$	vektor	vektor	

13.2.7.3. Differenciáloperátorok számítási szabályai

$$\operatorname{grad}(U_1 + U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2 \qquad (U, U_1, U_2, F \text{ skalárértékű függvények}). \tag{13.79}$$

$$\operatorname{grad}(cU) = c \operatorname{grad} U \qquad (c \text{ állandó}). \tag{13.80}$$

$$\operatorname{grad}(U_1 U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1 . \tag{13.81}$$

$$\operatorname{grad} F(U) = F'(U) \operatorname{grad} U. \tag{13.82}$$

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) = \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}_1 + \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}_2 \qquad (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\mathbf{V}}_1, \vec{\mathbf{V}}_2 \text{ vektorértékű függvények}). \tag{13.83}$$

$$\operatorname{div}(c\vec{\mathbf{V}}) = c \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}. \tag{13.84}$$

$$\operatorname{div}(U\vec{\mathbf{V}}) = \vec{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}. \tag{13.85}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_1 + \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_2 . \tag{13.86}$$

$$\operatorname{rot}(c\vec{\mathbf{V}}) = c \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}. \tag{13.87}$$

$$\operatorname{rot}(U\vec{\mathbf{V}}) = U \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}} \times \operatorname{grad} U. \tag{13.88}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} \equiv 0. \tag{13.89}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv \vec{\mathbf{0}}. \tag{13.90}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U. \tag{13.91}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} - \Delta \vec{\mathbf{V}}. \tag{13.92}$$

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{V}}_1 \times \vec{\mathbf{V}}_2) = \vec{\mathbf{V}}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_2 . \tag{13.93}$$

13.3. Vektormezők integrálása

Vektormezőket legtöbbször derékszögű, henger- vagy gömbi koordinátákkal megadva integrálunk, gyakran görbe, felület mentén vagy egy térrészen. Az ehhez szükséges vonal-, felület- és térfogatelemeket a **13.5. táblázat** adja meg.

13.3.1. Vonalintegrál és potenciál a vektormezőben

13.3.1.1. Vonalintegrál vektormezőben

1. Definíció A $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektor-vektorfüggvény $\overset{\frown}{AB}$ görbe **(13.13. ábra)** mentén vett görbementi- vagy vonalintegráljának nevezzük a

$$P = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \text{ skalárt.} \tag{13.94a}$$

2. A vonalintegrál kiszámítási lépései (13.13. ábra)

1. Az $\overset{\frown}{AB}$ ívet **(13.13. ábra)** felosztjuk a közbülső $A_1(\vec{\mathbf{r}}_1)$, $A_2(\vec{\mathbf{r}}_2), \ldots, A_{n-1}(\vec{\mathbf{r}}_{n-1})$ ($A \equiv A_0$, $B \equiv A_n$) pontokkal n kis részgörbére, amelyeket az $\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_{i-1} = \Delta\vec{\mathbf{r}}_{i-1}$ vektorokkal közelítünk.

2. Minden részgörbén (belsejében vagy a határán) választunk egy M_i pontot, amelynek a helyvektora $\vec{\mathbf{r}}_i$.

3. A kiválasztott pontban a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i)$ függvényértéket skalárisan megszorozzuk a $\Delta\vec{\mathbf{r}}_{i-1}$ vektorral.

4. Az ilymódon kapott n szorzatot összeadjuk.

5. Kiszámítjuk $n \to \infty$ esetén a kapott $\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{i-1}$ összeg határértékét, ha minden $\Delta\vec{\mathbf{r}}_{i-1} \to 0$.

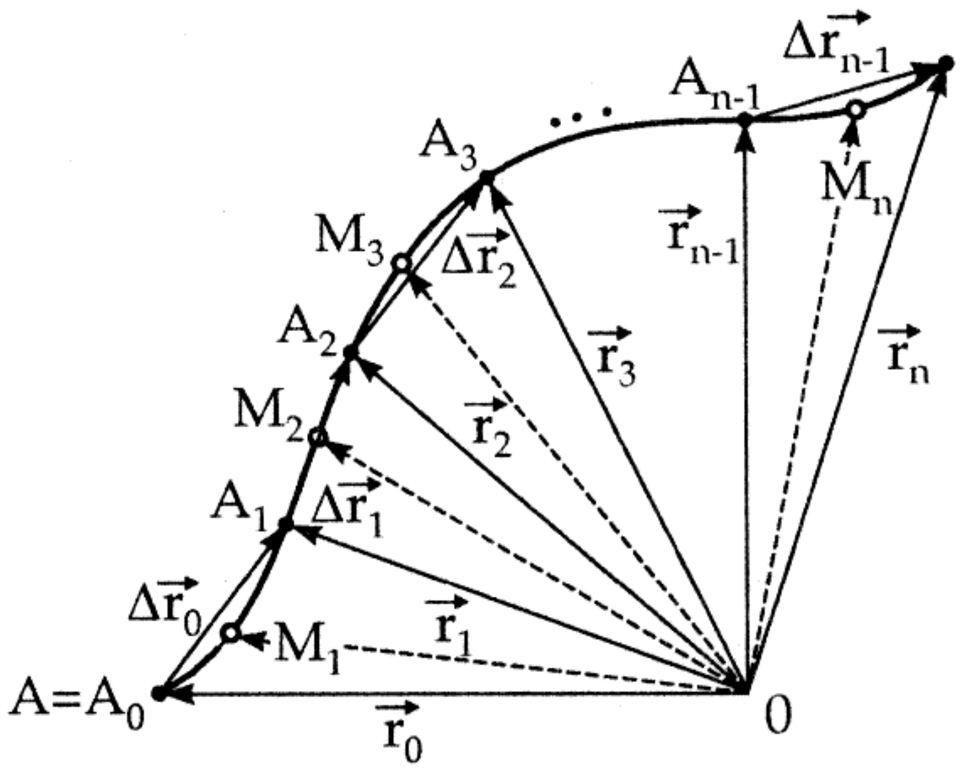
13.5. táblázat. Vonal-, felület- és térfogatelemek derékszögű, henger- és gömbi koordinátákban

	derékszögű koordináták	**hengerkoordináták**	**gömbi koordináták**
$d\vec{r}$	$\vec{\mathbf{e}}_x dx + \vec{\mathbf{e}}_y dy + \vec{\mathbf{e}}_z dz$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho d\rho + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi + \vec{\mathbf{e}}_z dz$	$\vec{\mathbf{e}}_r dr + \vec{\mathbf{e}}_\vartheta r d\vartheta + \vec{\mathbf{e}}_\varphi r \sin\vartheta$
$d\vec{S}$	$\vec{\mathbf{e}}_x dydz + \vec{\mathbf{e}}_y dxdz + \vec{\mathbf{e}}_z dxdy$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho \rho d\varphi dz + \vec{\mathbf{e}}_\varphi d\rho dz + \vec{\mathbf{e}}_z \rho d\rho d\varphi$	$\vec{\mathbf{e}}_r r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ $+\vec{\mathbf{e}}_\vartheta r \sin\vartheta dr d\varphi$ $+\vec{\mathbf{e}}_\varphi r dr d\vartheta$
$dv^{*)}$	$dxdydz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$
	$\vec{\mathbf{e}}_x = \vec{\mathbf{e}}_y \times \vec{\mathbf{e}}_z$ $\vec{\mathbf{e}}_y = \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_x$ $\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{e}}_y$	$\vec{\mathbf{e}}_\rho = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \times \vec{\mathbf{e}}_z$ $\vec{\mathbf{e}}_\varphi = \vec{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{e}}_\rho$ $\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_\rho \times \vec{\mathbf{e}}_\varphi$	$\vec{\mathbf{e}}_r = \vec{\mathbf{e}}_\vartheta \times \vec{\mathbf{e}}_\varphi$ $\vec{\mathbf{e}}_\vartheta = \vec{\mathbf{e}}_\varphi \times \vec{\mathbf{e}}_r$ $\vec{\mathbf{e}}_\varphi = \vec{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{e}}_\vartheta$
	$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$	$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$	$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
	Az i és j indexek az x, y, z, ill. a ρ, φ, z, ill. az r, ϑ, φ helyett állnak.		
*)	A térfogatot itt a szokásos gyakorlattól eltérően a v szimbólummal jelöljük, hogy ne keverjük össze a vektorértékű függvény $\lvert\vec{\mathbf{V}}\rvert = V$ abszolút értékével.		

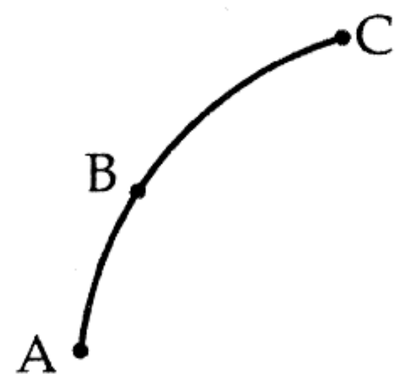
Ha a határérték az A_i és M_i pontok választásától függetlenül létezik, akkor ezt nevezzük vonalintegrálnak:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \lim_{\substack{\Delta\vec{\mathbf{r}} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{i-1}. \tag{13.94b}$$

A (13.94a,b) vonalintegrál létezik, ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektorértékű függvény $\overset{\frown}{AB}$-n és az $\overset{\frown}{AB}$ görbe folytonos és a görbe érintői is folytonosan változnak. A $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektorértékű függvény folytonos, ha a megadásához szükséges három skalárfüggvény, tehát a komponensei folytonosak.



13.13. ábra.



13.14. ábra.

13.3.1.2. A vonalintegrál mechanikai jelentése

Ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ vektorértékű függvény egy erőteret határoz meg, azaz, $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$, akkor a (13.94a) az a munka, amelyet az $\vec{\mathbf{F}}$ erő végez, amikor egy egységnyi tömeget az $\overset{\frown}{AB}$ úton A-ból B-be visz.

13.3.1.3. A vonalintegrál tulajdonságai

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ABC}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(13.14. ábra)}\,. \tag{13.95}$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \tag{13.96}$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \left[\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) + \vec{\mathbf{W}}(\vec{\mathbf{r}})\right] \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{W}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \tag{13.97}$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} c\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = c\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \tag{13.98}$$

13.3.1.4. A vonalintegrál, mint másodfajú általános típusú vonalintegrál

Derékszögű koordinátákkal kifejezve:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \left(V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz\right)\,. \tag{13.99}$$

13.3.1.5. Vektormező körintegrálja

Vektormező körintegráljának nevezzük ezen mező vonalintegrálját egy zárt integrációs út mentén. Ha az integrált P és a zárt görbét K jelöli, akkor:

$$P = \oint\limits_{(K)} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \tag{13.100}$$

13.3.1.6. Konzervatív vagy potenciálos mező

1. Definíció *Konzervatív mező*ről vagy *potenciálos mező*ről beszélünk, ha egy vektormező vonalintegráljának (13.94a) P értéke csak az A és B pontok helyzetétől függ, tehát nem függ az ezen két pontot összekötő integrációs úttól.

Konzervatív mezőben a körintegrál értéke mindig nullával egyenlő:

$$\oint \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0\,. \tag{13.101}$$

Konzervatív mező mindig örvénymentes:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{0}}\,. \tag{13.102}$$

Sőt, ez az összefüggés szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a mező konzervatív legyen, ha még azt is feltesszük, hogy a vektor-vektorfüggvény komponenseinek a parciális deriváltjai folytonosak $\vec{\mathbf{V}}$ értelmezési tartományán, ami egyszeresen összefüggő. Háromdimenziós térre ez a *keresztbe vett parciálisok megegyezésé*nek nevezett összefüggés (lásd 477. old.) derékszögű koordinátákkal kifejezve a következő

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}\,. \tag{13.103}$$

2. Konzervatív mező potenciálja Potenciálfüggvénynek vagy röviden potenciálnak nevezzük a skalárértékű primitív függvényt

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \,. \tag{13.104a}$$

Ez az integrál konzervatív erőtérben a fix $A(\vec{\mathbf{r}}_0)$ kezdőpont és a változó $B(\vec{\mathbf{r}})$ végpont közötti vonalintegrállal határozható meg

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \,. \tag{13.104b}$$

Figyelembevéve, hogy a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ függvény fizikában használatos $\varphi^*(\vec{\mathbf{r}})$ potenciálja csak előjelben különbözik az előzőekben definiált potenciáltól:

$$\varphi^*(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \,. \tag{13.105}$$

3. A gradiens, vonalintegrál és potenciál közötti összefüggés Ha $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) = \operatorname{grad} U(\vec{\mathbf{r}})$, akkor az $U(\vec{\mathbf{r}})$ a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ mező potenciálja, és fordítva a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ egy potenciálos vagy konzervatív mező. A fizikában a (13.105) értelmében a negatív előjellel használjuk.

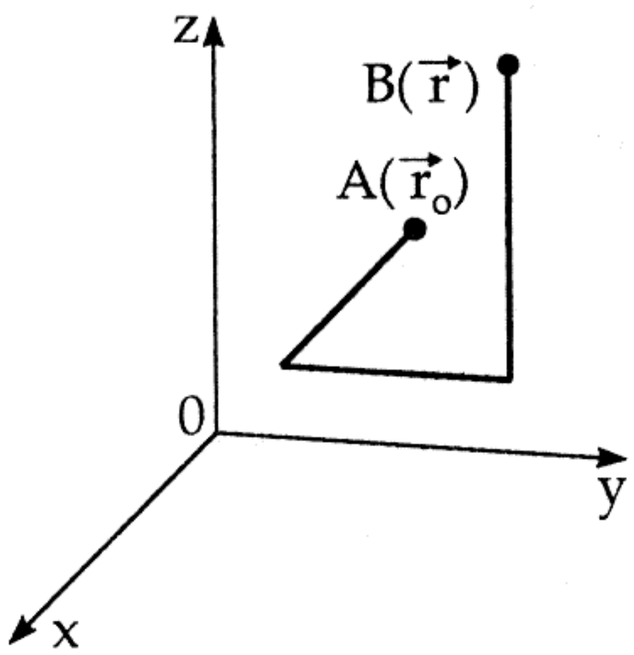
4. Konzervatív mező potenciáljának kiszámítása Ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ függvény derékszögű koordinátarendszerben adott, $\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$, akkor a potenciálfüggvényének a teljes differenciálja:

$$dU = V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz \,. \tag{13.106a}$$

Ehhez a V_x, V_y, V_z együtthatókra a (13.103) feltételnek teljesülni kell. Az U meghatározható az alábbi egyenletrendszerből:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x \,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y \,, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z \,. \tag{13.106b}$$

A gyakorlatban a potenciált vonalintegrállal határozzuk meg, amelynél — ha ez megtehető — a kezdő- és végpontot a koordinátatengelyekkel párhuzamos törött vonallal kötjük össze **(13.15. ábra)**, és ezen a görbén integrálunk:



13.15. ábra.

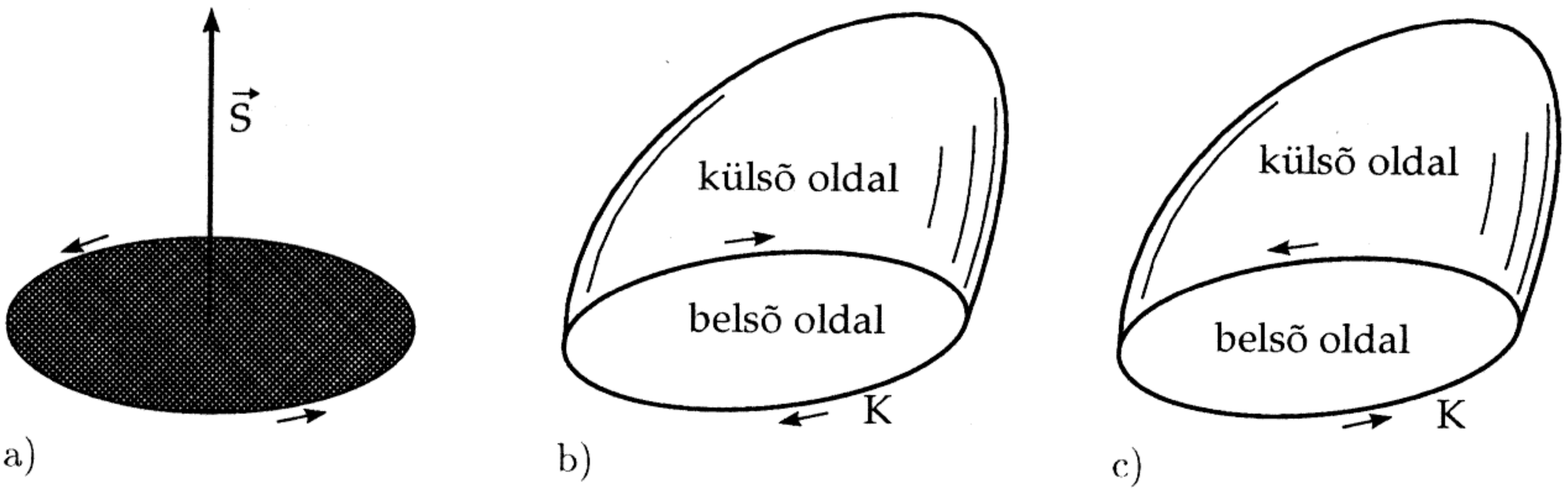
$$U = \int_{\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\,dz \,. \tag{13.107}$$

13.3.2. Felületi integrál

13.3.2.1. Síkbeli felületdarab vektora

A másodfajú általános típusú felületi integrál meghatározása (lásd 494. old.) szükségessé teszi egy $\vec{\mathbf{S}}$ vektor hozzárendelését egy síkbeli S felületdarabhoz, amely merőleges erre a felületre és amelynek az abszolút értéke egyenlő az S felszínével. Egy síkbeli felületdarab esetében ezt mutatja az **13.16.a ábra**. A *jobbkéz-szabály* értelmében a határoló zárt K görbe körüljárási iránya olyan, hogy az $\vec{\mathbf{S}}$ vektor csúcsának az irányából nézve a *határoló görbe pozitív irányítású*, azaz az óramutató járásával ellentétes.

A határoló görbe pozitív körüljárásának ez a választása egyidejűleg meghatározza, hogy melyik a felület külső oldala, azaz az az oldal, amelyből a vektor kiindul. Ez a meghatározás tetszőleges, zárt görbével határolt görbült felületre általánosítható **(13.16.b,c ábra)**.



a) b) c)

13.16. ábra.

13.3.2.2. Felületi integrál kiszámítása

Skalár- vagy vektormező felületi integrálját a következő eljárással számítjuk ki, függetlenül attól, hogy az S egy zárt görbével határolt felület vagy maga zárt felület,:

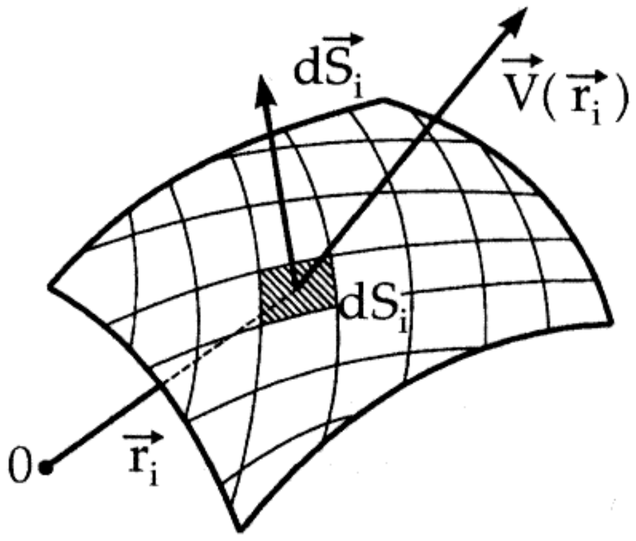
1. Osszuk fel az S felületdarabot, amelynek a külső oldalát a határoló görbe körüljárási iránya határozza meg **(13.17. ábra)**, tetszőleges n számú ΔS_i részfelületdarabra olymódon, hogy minden részfelületdarabot síkbeli felületdarabbal közelítünk. Minden ΔS_i felületdarabhoz hozzárendelünk a (13.29a) értelmében egy $\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$ vektort. Zárt felület esetén a $\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$ felületelem-vektor a zárt térrészből kifelé mutat.

2. Válasszunk minden részfelületdarab belsejében vagy a határán egy tetszőleges pontot, amelynek a helyvektora $\vec{\mathbf{r}}_i$.

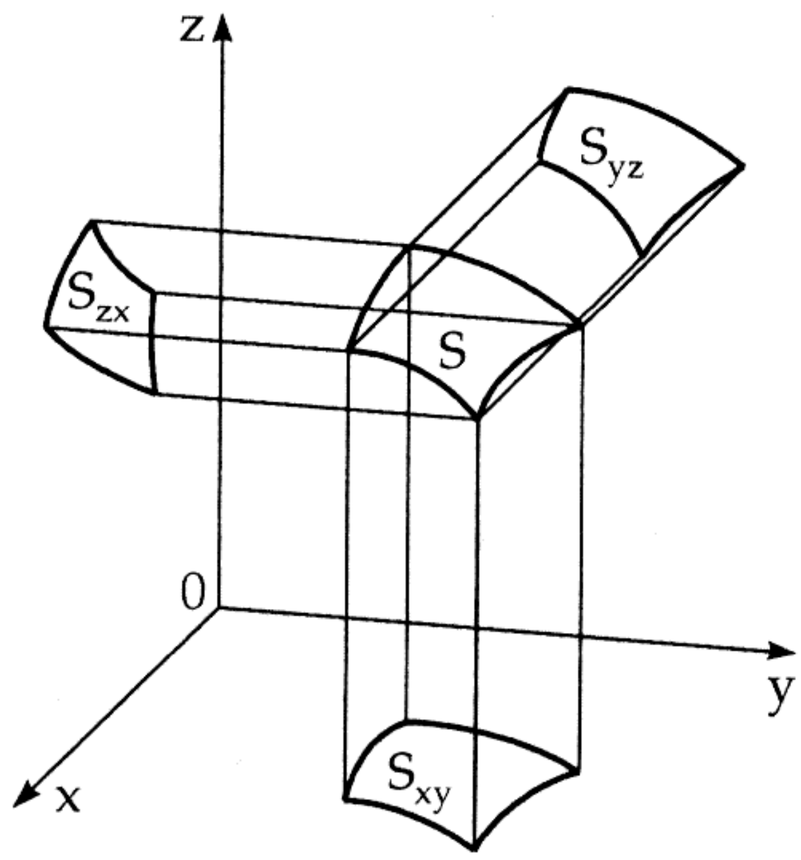
3. Képezzük a $U(\vec{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$ szorzatot skalármező esetén és a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$ vagy a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\times\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$ szorzatokat vektormező esetén.

4. Adjuk össze a részfelületdarabokhoz ilymódon hozzárendelt szorzatokat.

5. Képezzük a határértéket, amikor $\Delta\vec{\mathbf{S}}_i \to 0$ és $n \to \infty$. Itt a részfelületdaraboknak a kettősintegrál kiszámításánál megadott értelemben (lásd 479. old.) kell nullához tartani.



13.17. ábra.



13.18. ábra.

13.3.2.3. Felületi integrál és mezők fluxusa

1. Skalármező fluxusa

$$\vec{\mathbf{P}} = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} U(\vec{\mathbf{r}}_i)\, \Delta\vec{\mathbf{S}}_i = \int\limits_{(S)} U(\vec{\mathbf{r}})\, d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.108}$$

2. Vektormező skaláris fluxusa

$$Q = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \cdot \Delta\vec{\mathbf{S}}_i = \int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.109}$$

3. Vektormező vektorfluxusa

$$\vec{\mathbf{R}} = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \times \Delta\vec{\mathbf{S}}_i = \int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) \times d\vec{\mathbf{S}}. \tag{13.110}$$

13.3.2.4. II. típusú felületi integrál kiszámítása derékszögű koordinátarendszerben

$$\int\limits_{(S)} U\, d\vec{\mathbf{S}} = \iint\limits_{(S_{yz})} U\, dy\, dz\, \vec{\mathbf{i}} + \iint\limits_{(S_{zx})} U\, dz\, dx\, \vec{\mathbf{j}} + \iint\limits_{(S_{xy})} U\, dx\, dy\, \vec{\mathbf{k}}\,. \tag{13.111}$$

$$\int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint\limits_{(S_{yz})} V_x\, dy\, dz + \iint\limits_{(S_{zx})} V_y\, dz\, dx + \iint\limits_{(S_{xy})} V_z\, dx\, dy\,. \tag{13.112}$$

$$\int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \times d\vec{\mathbf{S}} = \iint\limits_{(S_{yz})} (V_z\vec{\mathbf{j}} - V_y\vec{\mathbf{k}})\, dy\, dz + \iint\limits_{(S_{zx})} (V_x\vec{\mathbf{k}} - V_z\vec{\mathbf{i}})\, dz\, dx + \iint\limits_{(S_{xy})} (V_y\vec{\mathbf{i}} - V_x\vec{\mathbf{j}})\, dx\, dy\,. \tag{13.113}$$

Ezekre az integrálokra a 493. oldalon megadotthoz hasonló egzisztencia tétel érvényes.
A kétszeres integrál kiszámításához először képezzük az S vetületeit a koordinátasíkokra, ehhez az x, y vagy z változók közül mindig egyet a másik két változó segítségével az S felület egyenletéből ki kell fejezni **(13.18. ábra)**.

Megjegyzés: A zárt felületen vett integrálokat a következőképpen jelöljük:

$$\oint\limits_{(S)} U\, d\vec{\mathbf{S}} = \oiint\limits_{(S)} U\, d\vec{\mathbf{S}}\,, \qquad \oint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \oiint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,, \qquad \oint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \times d\vec{\mathbf{S}} = \oiint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \times d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.114}$$

■ **A:** Számoljuk ki a $\vec{\mathbf{V}} = \int\limits_{(S)} xyz\, d\vec{\mathbf{S}}$ integrált, ahol a felület az $x + y + z = 1$ síknak a három koordinátasík által határolt része. A felső oldal a pozitív:

$$\vec{\mathbf{P}} = \iint\limits_{(S_{yz})} (1 - y - z)yz\, dy\, dz\, \vec{\mathbf{i}} + \iint\limits_{(S_{zx})} (1 - x - z)xz\, dx\, dz\, \vec{\mathbf{j}} + \iint\limits_{(S_{xy})} (1 - x - y)xy\, dx\, dy\, \vec{\mathbf{k}}\,;$$

$\iint\limits_{(S_{yz})} (1 - y - z)yz\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - y - z)yz\, dy\, dz = \frac{1}{120}$. Ehhez hasonlóan számíthatjuk ki a másik két integrált is. Az eredmény: $\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{120}(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})$.

■ **B:** Számoljuk ki a $Q = \int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint\limits_{(S_{yz})} x\,dy\,dz + \iint\limits_{(S_{zx})} y\,dz\,dx + \iint\limits_{(S_{xy})} z\,dx\,dy$ integrált ugyanarra a síkdarabra mint az **A** feladatban: $\iint\limits_{(S_{yz})} x\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx = \frac{1}{6}$. A másik két integrál hasonlóképpen számolható. Az eredmény: $Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

■ **C:** Számoljuk ki az $\vec{\mathbf{R}} = \int\limits_{(S)} \vec{\mathbf{r}} \times d\vec{\mathbf{S}} = \int\limits_{(S)} (x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) \times (dy\,dz\,\vec{\mathbf{i}} + dz\,dx\,\vec{\mathbf{j}} + dx\,dy\,\vec{\mathbf{k}})$ integrált ugyanarra a síkdarabra mint az **A** feladatban. A számítás elvégzése után az eredmény: $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$.

13.3.3. Integráltételek

13.3.3.1. Gauss integráltétele és integrálformulája

1. Gauss integráltétele

A GAUSS-integráltétel összefüggést ad meg a v térfogatra vonatkozó térfogati integrál és egy, az ezen térfogatot körülfogó zárt S felületre vonatkozó felületi integrál között. A felület irányítása legyen olyan (lásd 492. old.), hogy a felületi normális a zárt felületből kifelé mutat. Ha a $\vec{\mathbf{V}}$ vektor-vektorfüggvény és az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor

$$\oint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}\, dv\,, \tag{13.115a}$$

tehát a $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező skalár fluxusa a zárt S felületen keresztül egyenlő $\vec{\mathbf{V}}$ divergenciájának az S által bezárt v térrészre vonatkozó térfogati integráljával. Derékszögű koordinátákban:

$$\oiint\limits_{(S)} (V_x\,dy\,dz + V_y\,dz\,dx + V_z\,dx\,dy) = \iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz\,. \tag{13.115b}$$

2. Gauss-integrálformula

Az x, y-sík esetében a GAUSS-integráltétel átmegy a GAUSS-integrálformulába. Ez összefüggést ad meg egy vonalintegrál és a hozzátartozó felületi integrál között:

$$\iint\limits_{(B)} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dx\,dy = \oint\limits_{(K)} \left[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right]. \tag{13.116}$$

Itt B egy síkbeli felületet jelöl, amelyet a K görbe határol. A P és Q függvények valamint az elsőrendű parciális deriváltjaik folytonosak.

3. Szektorformula

*Szektorformulá*nak nevezzük a GAUSS-integrálformula egy speciális esetét, amelynek a segítségével síktartományok F területe könnyen számolható. A $Q = x$, $P = -y$ függvényekre alkalmazva az integrálformulát:

$$F = \iint\limits_{(B)} dx\,dy = \frac{1}{2} \oint\limits_{(K)} \left[x\,dy - y\,dx \right]. \tag{13.117}$$

13.3.3.2. Stokes integráltétele

A STOKES-integráltétel összefüggést ad meg a $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező értelmezési tartományába eső görbült, irányított S felület mentén vett felületi integrál és az S felületet határoló K-n vett görbementi körintegrál között. A K körüljárási irányát úgy választjuk meg, hogy a felületi normális irányából nézve

pozitív legyen (a görbe irányítása a felületi normálissal *jobbsodrású* rendszert alkot) (lásd 685. old.). Ha a $\vec{\mathbf{V}}$ vektor-vektorfüggvény és az elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor

$$\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \oint\limits_{(K)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}. \tag{13.118a}$$

Tehát a rotáció vektoriális fluxusa a K zárt görbe által határolt S felületen egyenlő a $\vec{\mathbf{V}}$ vektormezőnek az S felület K határgörbéje mentén vett körintegráljával.
Derékszögű koordinátákban:

$$\oint\limits_{(K)} (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz) =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz\,dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx\,dy \right]. \tag{13.118b}$$

A STOKES-integráltétel síkbeli esete ugyanúgy, mint a GAUSS-integráltételé (13.116) a GAUSS-integrálformulára vezet.

13.3.3.3. Green integráltételei

A GREEN-integráltételek minden esetben egy térfogati és egy felületi integrál között adnak meg összefüggést. Ha a GAUSS-tételt alkalmazzuk a $\vec{\mathbf{V}} = U_1 \operatorname{grad} U_2$ függvényre, ahol az U_1 és U_2 skalárértékű függvények és a v az S felület által bezárt térrész, akkor

$$\iiint\limits_{(v)} (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_2 \cdot \operatorname{grad} U_1)\,dv = \oiint\limits_{(S)} U_1 \operatorname{grad} U_2 \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,, \tag{13.119}$$

$$\iiint\limits_{(v)} (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1)\,dv = \oiint\limits_{(S)} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1) \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.120}$$

Speciálisan az $U = 1$ függvényre:

$$\iiint\limits_{(v)} \Delta U\,dv = \oiint\limits_{(S)} \operatorname{grad} U \cdot d\vec{\mathbf{S}}\,. \tag{13.121}$$

Derékszögű koordinátákban ezen 3. GREEN-tétel a következő alakú:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dv = \oiint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial U}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial U}{\partial z}\,dx\,dy \right). \tag{13.122}$$

■ **A:** Számoljuk ki az $I = \oint\limits_{(K)} (x^2 y^3\,dx + dy + z\,dz)$ vonalintegrált, ahol a K görbe az $x^2 + y^2 = a^2$ henger és a $z = 0$ sík metszésvonala. A STOKES-tételből kapjuk:

$$I = \oint\limits_{(K)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\iint\limits_{(S^*)} 3x^2 y^2\,dx\,dy = -3 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{a} r^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = -\frac{a^6}{8}\pi$$

ahol $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = -3x^2 y^2 \vec{\mathbf{k}}$, $d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{k}}\,dx\,dy$ és az S^* körtartomány: $x^2 + y^2 \le a^2$.

■ **B:** Keressük meg az $I = \oiint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ fluxust a $\vec{\mathbf{V}} = x^3\vec{\mathbf{i}} + y^3\vec{\mathbf{j}} + z^3\vec{\mathbf{k}}$ áramlásmezőben az S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ gömbfelületen át. A GAUSS-tételből:

$$I = \oint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}\, dv = 3 \iiint\limits_{(v)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = 3 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{a} r^4 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$\frac{12}{5} a^5 \pi$.

■ **C:** Hővezetési egyenlet: A Q hőtartalom időbeli változására egy v hőforrást nem tartalmazó térrészben ez adódik: $\dfrac{dQ}{dt} = \iiint\limits_{(v)} c\varrho \dfrac{\partial T}{\partial t}\, dv$ (c fajhő, ϱ a V-ben lévő anyag sűrűsége, T a hőmérséklet).

Ugyanekkor ezen időbeli változás a v-t határoló S felület felhasználásával $\dfrac{dQ}{dt} = \iint\limits_{(S)} \lambda \operatorname{grad} T \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ (λ hővezetési együttható) felületi integrállal fejezhető ki. Alkalmazzuk a GAUSS-tételt a felületi integrálra. A $\iiint\limits_{(v)} \left[c\varrho \dfrac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \right] dv = 0$ egyenletből kapjuk a pontonkénti $c\varrho \dfrac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$

hővezetési egyenletet, amely homogén test esetén (c, ϱ, λ állandók) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T$ alakot ölt.

13.4. Mezőszámítások

13.4.1. Tiszta forrásmező

*Tiszta forrásmező*nek vagy *örvénymentes forrásmező*nek nevezzük a $\vec{\mathbf{V}}_1$ vektormezőt, ha a rotációja mindenhol nulla. Ha a *forrássűrűség* $q(\vec{\mathbf{r}})$, akkor:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}_1 = q(\vec{\mathbf{r}}), \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{0}}. \tag{13.123}$$

Ebben az esetben a mezőnek van U potenciálja, amelyet minden pontban a POISSON *differenciálegyenlet* határoz meg

$$\vec{\mathbf{V}}_1 = \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = q(\vec{\mathbf{r}}). \tag{13.124a}$$

(A fizikában általában a $\vec{\mathbf{V}}_1 = -\operatorname{grad} U$ alakot használják.) Az U kiszámítása:

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{(v)} \frac{\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}^*)\, dv(\vec{\mathbf{r}}^*)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|}. \tag{13.124b}$$

Az integrálást az egész térre végezzük **(13.19. ábra)**. A $\vec{\mathbf{V}}$ divergenciájának differenciálhatónak kell lennie és nagyon nagy távolságra elég gyorsan kell csökkennie.

13.4.2. Tiszta vagy forrásmentes örvénymező

Tiszta — néha *szolenoid* — *örvénymező*nek nevezzük a $\vec{\mathbf{V}}_2$ vektormezőt, ha a divergenciája mindenhol nulla; ez a mező forrásmentes is. Ha az *örvénysűrűség* $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$, akkor:

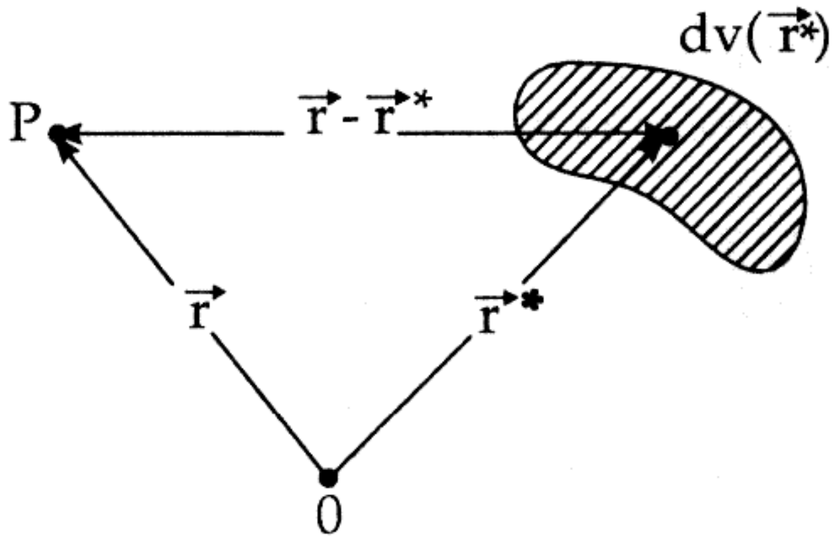
$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}_2 = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}}_2 = \vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}). \tag{13.125a}$$

A $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}})$ örvénysűrűséget nem lehet tetszőlegesen megadni, mert a $\operatorname{div} \vec{\mathbf{w}} = 0$ feltételnek teljesülnie kell. A következő feltétellel:

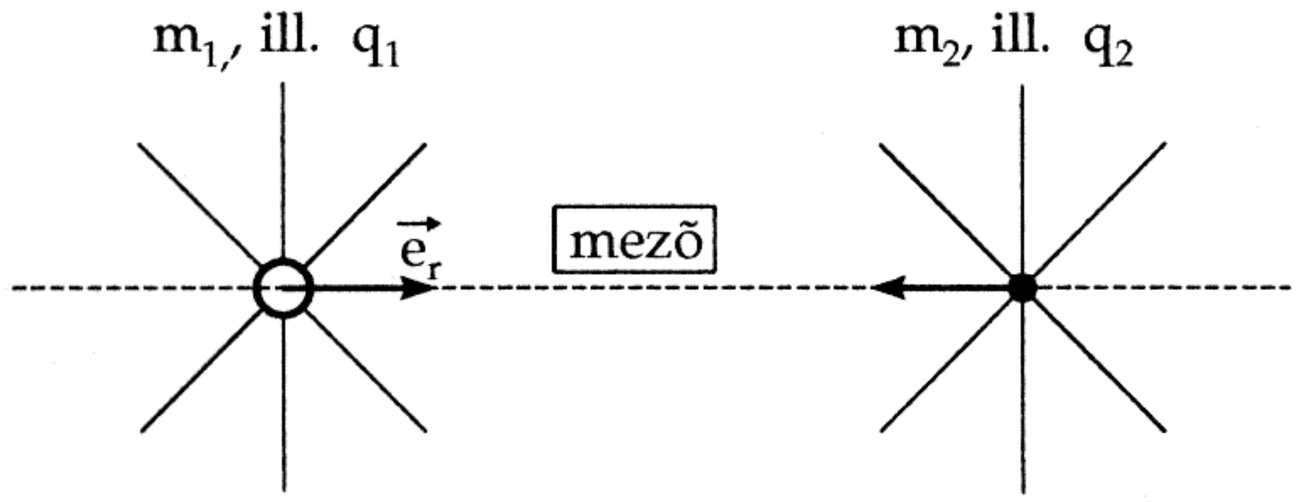
$$\vec{\mathbf{V}}_2(\vec{\mathbf{r}}) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) \quad \text{és} \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = 0, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{w}} \tag{13.125b}$$

a (13.92) értelmében

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} - \Delta \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{w}}, \quad \text{azaz} \quad \Delta \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{w}}. \tag{13.125c}$$



13.19. ábra.



$\vec{F}_N = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$, ill. $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$

13.20. ábra.

Ezzel az $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ formálisan kielégíti a POISSON-differenciálegyenletet, épp úgy, mint az örvénymentes $\vec{\mathbf{V}}_1$ mező U potenciálja és ezért *vektorpotenciál*nak nevezzük. Minden pontra érvényes ekkor

$$\vec{\mathbf{V}}_2 = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \qquad \text{ahol} \quad \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{(v)} \frac{\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}^*)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|} \, dv(\vec{\mathbf{r}}^*) \,. \tag{13.125d}$$

Az $\vec{\mathbf{r}}$ jelentése ugyanaz mint a (13.124b)-ben; az integrálást az egész térre végezzük.

13.4.3. Pontszerű források vektormezei

13.4.3.1. Ponttöltés Coulomb-mezeje

A COULOMB-*mező* egy fontos példa az örvénymentes mezőre, amely mindenhol, kivéve a ponttöltés helyét, tehát a forráshelyet, szolenoid is, azaz forrásmentes **(13.20. ábra)**. A COULOMB-erő vonzza a különböző előjelű q_1, q_2 töltéseket és taszítja az azonos előjelűeket. A mező- és potenciálegyenlet:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{e}{r^3}\vec{\mathbf{r}}, \qquad U = -\frac{e}{r}, \quad \text{a fizikában} \quad \frac{e}{r} \,. \tag{13.126a}$$

A skalár fluxus $4\pi e$, ill. 0, aszerint, hogy az S felület az e forrást körülzárja vagy nem:

$$\oint\limits_{(S)} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \begin{cases} 4\pi e \,, \\ 0 \,. \end{cases} \tag{13.126b}$$

Az e nagyságát a forrás *bőség*ének vagy *intenzitás*ának nevezzük.

13.4.3.2. Pontszerű tömeg gravitációs tere

Pontszerű tömeg gravitációs tere egy másik példa a pontszerű tömeghelyét kivéve mindenhol örvénymentes szolenoid mezőre. Ezt NEWTON-térnek is nevezzük. Minden meggondolás, ami a COULOMB-mezőre érvényes, hasonló módon alkalmazható a NEWTON-térre is.

13.4.4. Mezők szuperpozíciója

13.4.4.1. Diszkrét forráseloszlás

A fizikai terek szuperpozíciójához hasonlóan szuperponálódnak a matematika vektormezei is. A *szuperpozíció elve*: Ha a $\vec{\mathbf{V}}_\nu$ vektormezőknek van U_ν potenciáljuk, akkor a $\vec{\mathbf{V}} = \Sigma\vec{\mathbf{V}}_\nu$ vektormezőnek is van U potenciálja és $U = \Sigma U_\nu$.
Ha n diszkrét e_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ forrássűrűségű forráspont mezői szuperponálódnak, akkor az eredő

mező az U_ν potenciálok algebrai összeadásával meghatározható:

$$\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\text{grad} \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \qquad \text{ahol} \qquad U_\nu = \frac{e_\nu}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_\nu|} \,. \tag{13.127a}$$

Itt az $\vec{\mathbf{r}}$ a vizsgált pont helyvektora, míg az $\vec{\mathbf{r}}_\nu$ vektorok a forráspontok helyvektorai.
Ha a $\vec{\mathbf{V}}_1$ örvénymentes és a $\vec{\mathbf{V}}_2$ forrásmentes mezők mindenhol folytonosak, akkor:

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2 = -\frac{1}{4\pi} \left[\text{grad} \iiint\limits_{(v)} \frac{q(\vec{\mathbf{r}}^*)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|} \, dv(\vec{\mathbf{r}}^*) - \text{rot} \iiint\limits_{(v)} \frac{\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}^*)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|} \, dv(\vec{\mathbf{r}}^*) \right] . \tag{13.127b}$$

Kiterjesztve a vektormezőt a végtelenbe, a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ meghatározása egyértelmű, ha a $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$ elég gyorsan eltűnik $r = |\vec{\mathbf{r}}| \to \infty$ esetén.

13.4.4.2. Folytonos forráseloszlás

Ha a forrásokat vonalakon, felületeken vagy térbeli tartományon folytonosan osztjuk szét, akkor a véges e_ν forrássűrűségek helyén infinitezimális mennyiségek lépnek fel, amelyek a forráseloszlás sűrűségének felelnek meg, és az összeg helyére a forrástartomány feletti integrál lép. A forrás folytonos térbeli eloszlása esetén a forrássűrűség $q(\vec{\mathbf{r}}) = \text{div}\, \vec{\mathbf{V}}$.
Hasonló érvényes az örvények által előállított mező potenciáljára is. Egy folytonos térbeli örvényeloszlás esetén az *örvényfluxussűrűség*et a $\vec{\mathbf{w}}(\vec{\mathbf{r}}) = \text{rot}\, \vec{\mathbf{V}}$ határozza meg.

13.4.4.3. Összefoglalás

Egy vektormezőt a forrásainak és az örvényeinek a megadása az egész térben teljesen és egyértelműen meghatározza, ha ezek a források és örvények egy korlátos térrészben fekszenek.

13.5. A térelmélet differenciálegyenletei

13.5.1. Laplace-differenciálegyenlet

Ha a $\vec{\mathbf{V}}_1 = \text{grad}\, U$ vektortmező, amelyben nincsenek források és U potenciáljának a meghatározása a feladat, akkor ez a (13.123) értelmében $q(\vec{\mathbf{r}}) = 0$-val a következőre vezet

$$\text{div}\, \vec{\mathbf{V}}_1 = \text{div}\, \text{grad}\, U = \Delta U = 0 \,, \tag{13.128a}$$

azaz a LAPLACE-*differenciálegyenlet*re. Derékszögű koordinátákkal:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \,. \tag{13.128b}$$

Minden, az első- és másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonos függvényt, amely ezt a differenciálegyenletet kielégíti, LAPLACE- vagy *harmonikus függvény*nek nevezzük.
A peremérték-feladat három alapesete:

1. Peremérték- vagy DIRICHLET-*feladat*: Keresünk egy olyan $U(x, y, z)$ függvényt, amely egy adott térbeli, ill. síkbeli tartomány belsejében harmonikus és a tartomány határán előre megadott értéket vesz fel.

2. Peremérték- vagy NEUMANN-*feladat*: Keresünk egy olyan $U(x, y, z)$ függvényt, amely egy adott tartomány belsejében harmonikus és a normális irányú differenciálhányadosa, $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ a tartomány határán előre megadott értéket vesz fel.

3. Peremérték-feladat: Keresünk egy olyan $U(x, y, z)$ függvényt, amely egy tartomány belsejében harmonikus, és a tartomány határán az alábbi kifejezés:
$\alpha U + \beta \dfrac{\partial U}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ ($\alpha, \beta =$ állandó, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) előre megadott értéket vesz fel.

13.5.2. Poisson-differenciálegyenlet

A feladat a $\vec{\mathbf{V}}_1 = \operatorname{grad} U$ forrásokat tartalmazó vektormező U potenciáljának a meghatározása. Ez a (13.123) értelmében a $q(\vec{\mathbf{r}}) \neq 0$ feltétellel a következőre vezet

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}}_1 = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = q(\vec{\mathbf{r}}) \neq 0\,, \tag{13.129a}$$

azaz a POISSON-*differenciálegyenlet*re. Derékszögű koordinátákkal:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,. \tag{13.129b}$$

A LAPLACE-differenciálegyenlet (13.128b) speciális esete a POISSON-differenciálegyenletnek (13.129b). A megoldás a NEWTON-potenciál (pontszerű tömegre) vagy a COULOMB-potenciál (ponttöltésre)

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = U = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{(v)} \frac{q(\vec{\mathbf{r}}^*)\, dv(\vec{\mathbf{r}}^*)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}^*|}\,, \tag{13.129c}$$

amely abszolút értékben növő $\vec{\mathbf{r}}$-re elég erősen tart nullához (lásd [13.1]).

A POISSON-differenciálegyenlethez ugyanazon három peremérték-feltételt lehet megadni, mint a LAPLACE-differenciálegyenlet megoldásához. Az első és a harmadik peremérték-feladat egyértelműen oldható meg, a második esetében ehhez még speciális feltételeket kell megadni (lásd [9.6]).

14. Komplex függvénytan

14.1. Egyváltozós komplex függvény

14.1.1. Folytonosság, differenciálhatóság

14.1.1.1. A komplex változós függvény definíciója

A valós függvényekhez hasonlóan a $z = x + \mathrm{i}\,y$ komplex számokhoz is hozzárendelhetünk $w = u + \mathrm{i}\,v$ komplex értékeket, ahol $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$ kétváltozós valós függvények. Jelölés: $w = f(z)$. A $w = f(z)$ függvény a komplex z-síkot a komplex w-síkra képezi le.
A $w = f(z)$ komplex változós függvény határértékét, folytonosságát és deriválhatóságát hasonlóan definiáljuk, mint a valós változós függvényeknél.

14.1.1.2. Komplex változós függvény határértéke

Az $f(z)$ függvény határértéke a z_0 helyen a w_0 komplex szám, ha fennáll, hogy ha z tart z_0-hoz, akkor $f(z)$ tart w_0-hoz:

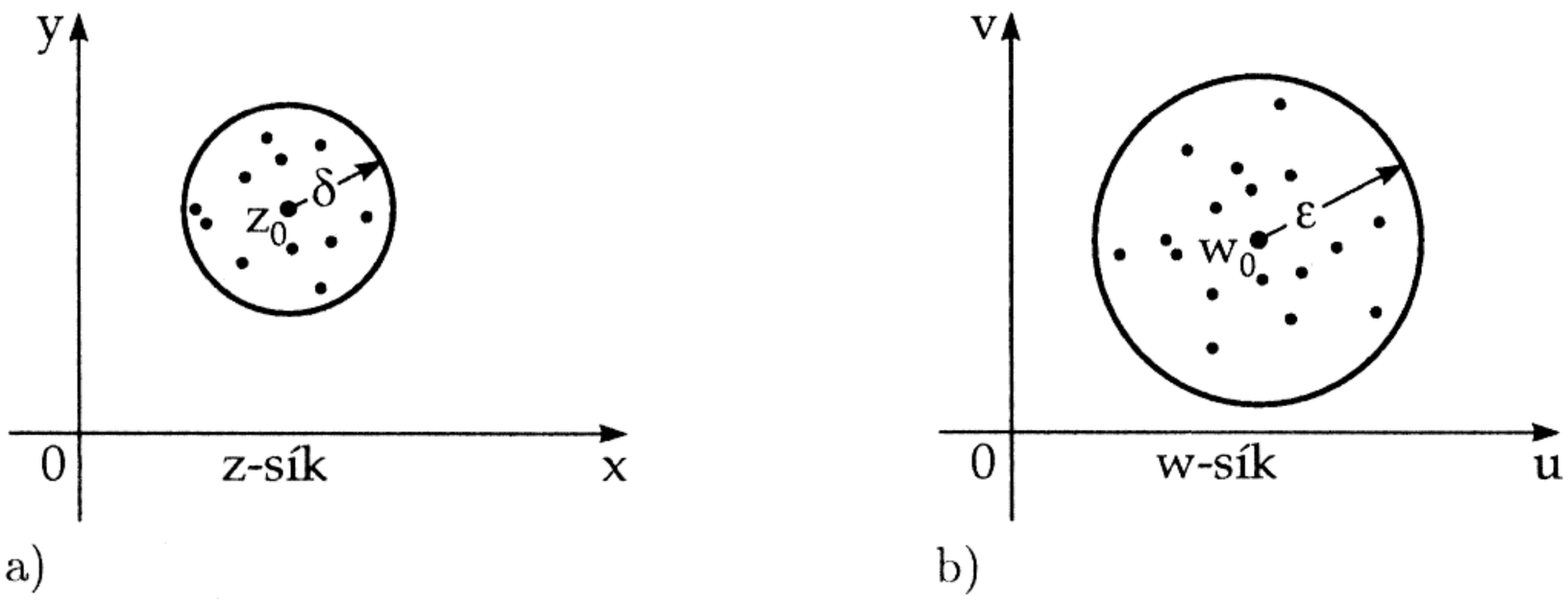
$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)\,. \tag{14.1a}$$

Másik definíció: az $f(z)$ függvény határértéke a z_0 helyen a w_0 komplex szám, ha akármilyen pozitív ε számhoz található olyan δ, hogy bármely $z \neq z_0$ komplex számra, ha

$$|z_0 - z| < \delta\,, \tag{14.1b}$$

$$\text{akkor } |w_0 - f(z)| < \varepsilon. \tag{14.1c}$$

A geometriai jelentést szemlélteti a **14.1. ábra**: A z-sík tetszés szerinti $z \neq z_0$ pontjának, amelyik a z_0 középpontú és δ sugarú körben van, olyan w pont felel meg a w-síkban, amelyik a w_0 középpontú és ε sugarú körben van. A δ és ε sugarú nyílt körlapokat a z_0, ill. w_o pontok környezetének nevezzük. Jelölésük: $U_\varepsilon(w_0)$ és $U_\delta(z_0)$.



14.1. ábra.

14.1.1.3. Komplex változós függvény folytonossága

Az $w = f(z)$ függvény a z_0 helyen folytonos, ha itt van helyettesítési értéke, van határértéke és ez a kettő egyenlő. Ez azt jelenti, hogy a w-sík $w_0 = f(z_0)$ pontjának bármelyik $U_\varepsilon(w_0)$ környezetéhez tartozik a z-sík z_0 pontjának olyan $U_\delta(z_0)$ környezete, hogy ebből az $w = f(z)$ által meghatározott képpontok az $U_\varepsilon(w_0)$ környezetbe kerülnek.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{\delta \to 0} f(z_0 + \delta) = f(z_0) \ \text{(itt } \delta \text{ komplex szám!)}. \tag{14.2}$$

14.1.1.4. Komplex változós függvény differenciálhatósága

A $w = f(z)$ függvény a z helyen differenciálható, ha a

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{14.3}$$

differenciahányadosnak $\Delta z \to 0$ esetén van határértéke, függetlenül attól, hogyan közeledik Δz a nullához. Ezt a határértéket az $f(z)$ függvény deriváltjának hívjuk, jelölése: $f'(z)$.

■ Az $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ függvény sehol sem differenciálható, mert ha a z_0 ponthoz az x-tengellyel párhuzamos egyenes mentén közeledünk, akkor a differenciálhányados 1-hez tart, ha pedig az y-tengellyel párhuzamos mentén, akkor nullához.

14.1.2. Analitikus függvények

14.1.2.1. Az analitikus függvény definíciója

Az $f(z)$ függvény a G tartományon akkor *analitikus*, *reguláris* vagy *holomorf*, ha a G tartomány minden pontjában differenciálható. Ha ez nem teljesül, akkor G-nek vannak *szinguláris pont*jai, amelyekben $f'(z)$ nem létezik.

Az $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ függvény pontosan akkor differenciálható a G tartományban, ha az u és v függvényeknek van G-ben folytonos x és y szerinti parciális deriváltja, és ezek a CAUCHY–RIEMANN-*differenciálegyenlete*ket kielégítik:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{14.4}$$

Egy analitikus függvény valós és képzetes részei eleget tesznek a LAPLACE-féle differenciálegyenletnek:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{14.5a}$$

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,. \tag{14.5b}$$

Komplex elemi függvények deriváltjait ugyanazon szabályok szerint számítjuk ki, mint a megfelelő valós függvényekét.

■ **A:** $f(z) = z^3\,, \quad f'(z) = 3z^2\,;$ ■ **B:** $f(z) = \sin z\,, \quad f'(z) = \cos z\,.$

14.1.2.2. Példák analitikus függvényekre

1. Függvényosztályok Az elemi algebrai és transzcendens függvények egyes izolált szinguláris pontok (elég kis környezetükben nincs más szinguláris pont) kivételével az egész z-síkon analitikusak, minden reguláris pontban rendelkeznek tetszőleges magasabb rendű deriváltakkal.

A $w = z^2$ függvény mindenütt analitikus $(u = x^2 - y^2,\ v = 2xy)$.

■ **B:** A $w = u + \mathrm{i}v$ függvény egyetlen pontban sem analitikus, ha $u = 2x + y\,,\ v = x + 2y\,.$

■ **C:** Az $f(z) = z^3$ függvény analitikus, és $f'(z) = 3z^2$.

■ **D:** Az $f(z) = \sin z$ analitikus, és $f'(z) = \cos z$.

2. Az u, illetve v függvények meghatározása egymásból Ha az u és v függvények mindegyike eleget tesz a LAPLACE-féle differenciálegyenletnek, akkor *harmonikus függvények* (lásd 692. old.). Ha a kettő közül az egyik harmonikus függvény ismert, pl. u, akkor a másikat egy additív konstanstól eltekintve, mint v konjugált harmonikus függvényét, a CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenletek segítségével vonalintegrállal határozhatjuk meg:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{du}{dy}dx + \frac{du}{dx}dy \right)\,, \tag{14.6}$$

ahol az integrálás az u és v függvények közös értelmezési tartományában, a G tartományban a rögzített (x_0, y_0) pontot és a változó (x, y) pontot összekötő bármely egyszerű rektifikálható görbe mentén elvégezhető. Egyváltozós integrálással is megkapható v:

$$v(x, y) = \left(\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{du}{dy} \right) dx \right) + \varphi(y)\,, \tag{14.7}$$

amiből

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{du}{dy} \right) dx \right) + \varphi'(y); \tag{14.8}$$

a még fel nem használt $\frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}$ segítségével tehát

$$\frac{du}{dx} - \frac{d}{dy}\left(\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{du}{dy}\right)dx\right) = \varphi'(y), \tag{14.9}$$

amiből végül φ egy additív konstans erejéig meghatározható (ez és x_0 tetszőleges választhatósága felel meg (x_0, y_0) szabadon választhatóságának a (14.6) képletben). Hasonló módon határozhatjuk meg az u függvényt, ha a v ismert.

14.1.2.3. Analitikus függvények tulajdonságai

1. Analitikus függvény abszolút értéke (modulusa) Egy analitikus függvény abszolút értéke a függvényérték mint komplex szám abszolút értéke:

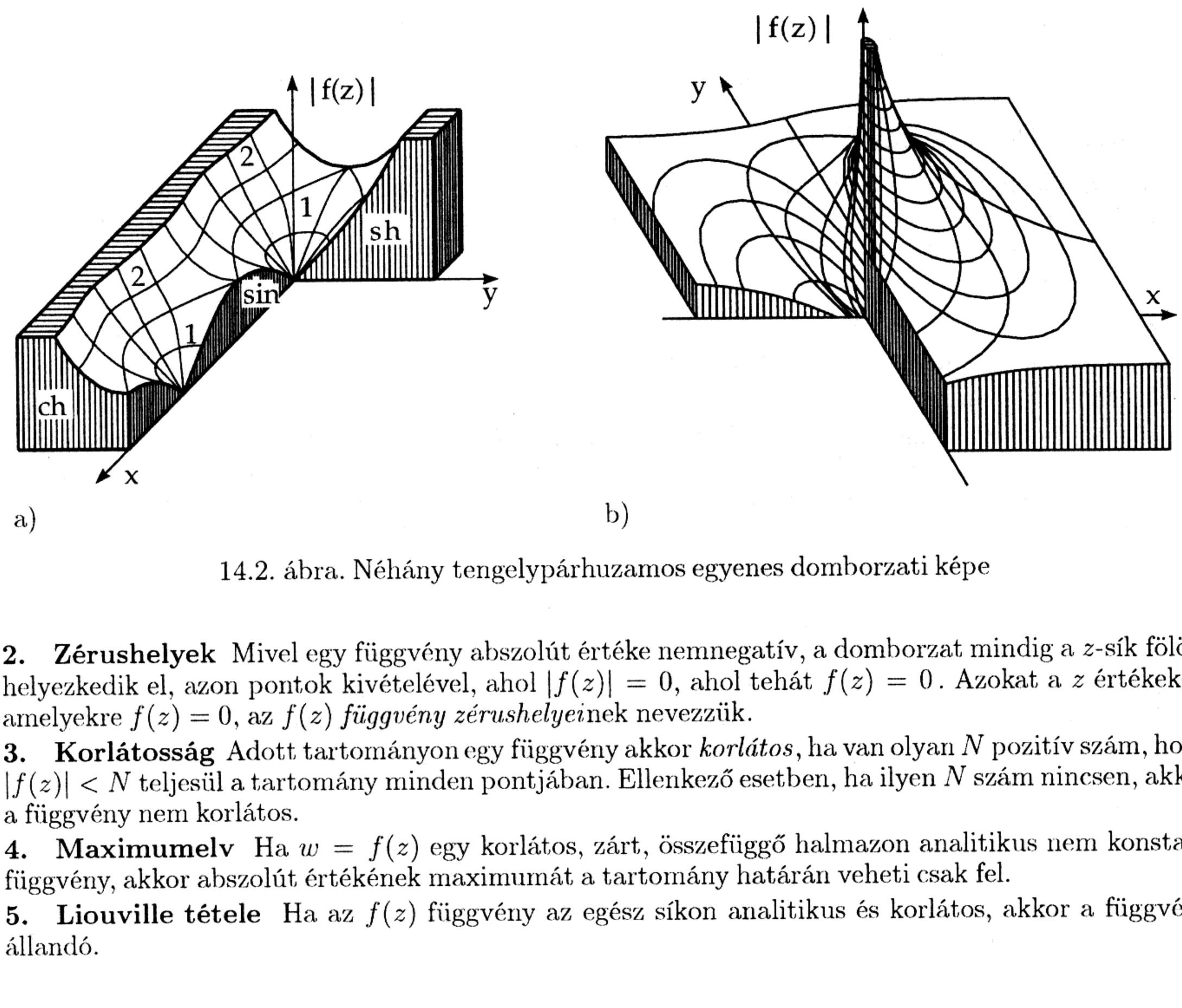
$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2} = \varphi(x,y)\,. \tag{14.10}$$

Ha a $|w| = \varphi(x,y)$ modulusfüggvényt geometriailag felületnek tekintjük, akkor a w függvény *dombor-zat*ának nevezzük.

■ **A:** A $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y$ függvény abszolút értéke: $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$. A domborzata $\frac{\pi}{2}$-vel elforgatva a **14.2.a ábrán** látható.

■ **B:** A $w = e^{1/z}$ függvény domborzatát a **14.2.b ábra** mutatja.

Sok analitikus függvény domborzata látható [14.10]-ben.



14.2. ábra. Néhány tengelypárhuzamos egyenes domborzati képe

2. Zérushelyek Mivel egy függvény abszolút értéke nemnegatív, a domborzat mindig a z-sík fölött helyezkedik el, azon pontok kivételével, ahol $|f(z)| = 0$, ahol tehát $f(z) = 0$. Azokat a z értékeket, amelyekre $f(z) = 0$, az $f(z)$ *függvény zérushelyei*nek nevezzük.

3. Korlátosság Adott tartományon egy függvény akkor *korlátos*, ha van olyan N pozitív szám, hogy $|f(z)| < N$ teljesül a tartomány minden pontjában. Ellenkező esetben, ha ilyen N szám nincsen, akkor a függvény nem korlátos.

4. Maximumelv Ha $w = f(z)$ egy korlátos, zárt, összefüggő halmazon analitikus nem konstans függvény, akkor abszolút értékének maximumát a tartomány határán veheti csak fel.

5. Liouville tétele Ha az $f(z)$ függvény az egész síkon analitikus és korlátos, akkor a függvény állandó.

14.1.2.4. Szinguláris pontok

Ha az $f(z)$ függvény egy $z = a$ pont környezetében analitikus, azaz egy a középpontú, tetszés szerinti kis kör belsejében analitikus, kivéve legfeljebb az a pontot, akkor a szingularitás szempontjából a következő esetek lehetségesek:

1. Ha $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$, akkor az $f(z)$ függvény az a pontban is analitikus.

2. Ha $\lim_{z \to a} f(z) = w_0$ létezik, de az $f(a)$ érték ettől különböző, vagy nincs is értelmezve, akkor az a pont szinguláris hely. De itt *megszüntethető szingularitás*ról beszélünk, mert ha az a pontban $f(z)$ értékét a $\lim_{z \to a} f(z)$ értéknek definiáljuk, akkor az $f(z)$ függvény a-ban is analitikus lesz. (Hasonlóan az egyváltozós függvények megszüntethető szakadási helyeihez, lásd 59. old.)

3. Ha az $f(z)$ függvény a $z = a$ pont egy környezetében analitikus, de semmilyen környezetében nem korlátos, úgy az a szinguláris pont. Ennek két alesete van:

4. Ha az a ponthoz z-vel bárhogyan közeledve $|f(z)| \to \infty$, akkor az a pont neve: *pólus*, és azt írjuk, hogy: $f(a) = \infty$. Különböző rendű pólusokról lásd a 719. oldalt.

5. Ha az $|f(z)|$ függvénynek nincs határértéke az a helyen, mivel más és más $(z_n) \to a$ sorozatokra az $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ sorozatoknak más és más határértéke van, akkor az a pont *lényeges szingularitás*. Ebben az esetben lehet z-vel a-hoz úgy közelíteni, hogy $f(z)$ határértéke az a helyen (legfeljebb egy érték kivételével) tetszés szerinti, adott komplex szám legyen.

■ **A:** A $w = \dfrac{1}{z - a}$ függvénynek az a pontban pólusa van.

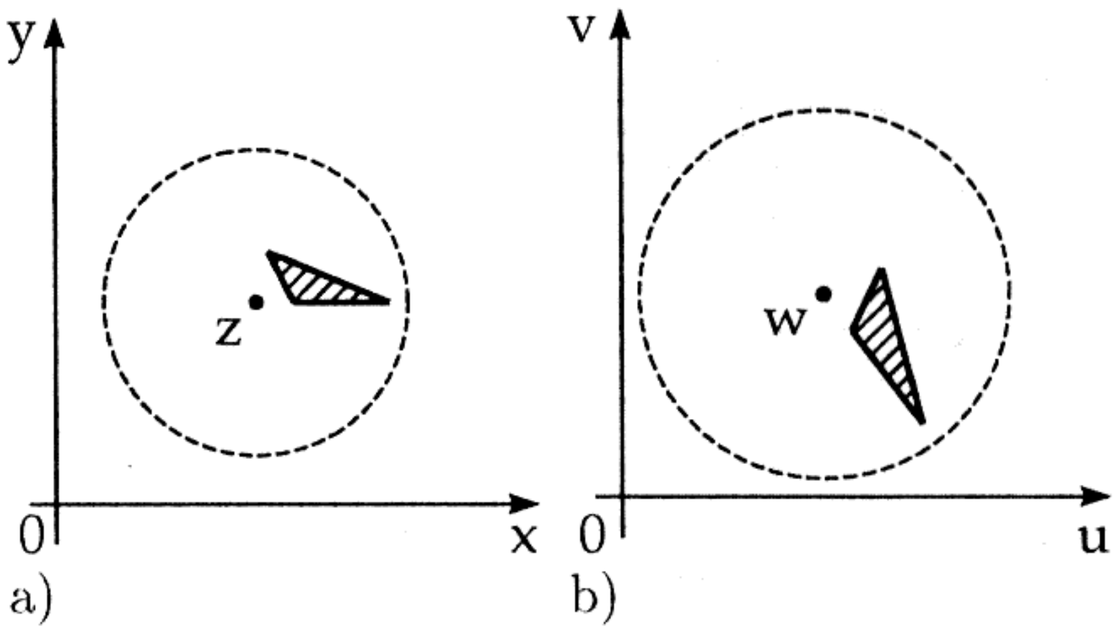
■ **B:** A $w = e^{1/z}$ függvénynek a 0 pont lényegesen szinguláris pontja. **(14.2.b ábra)**.

14.1.3. Konform leképezések

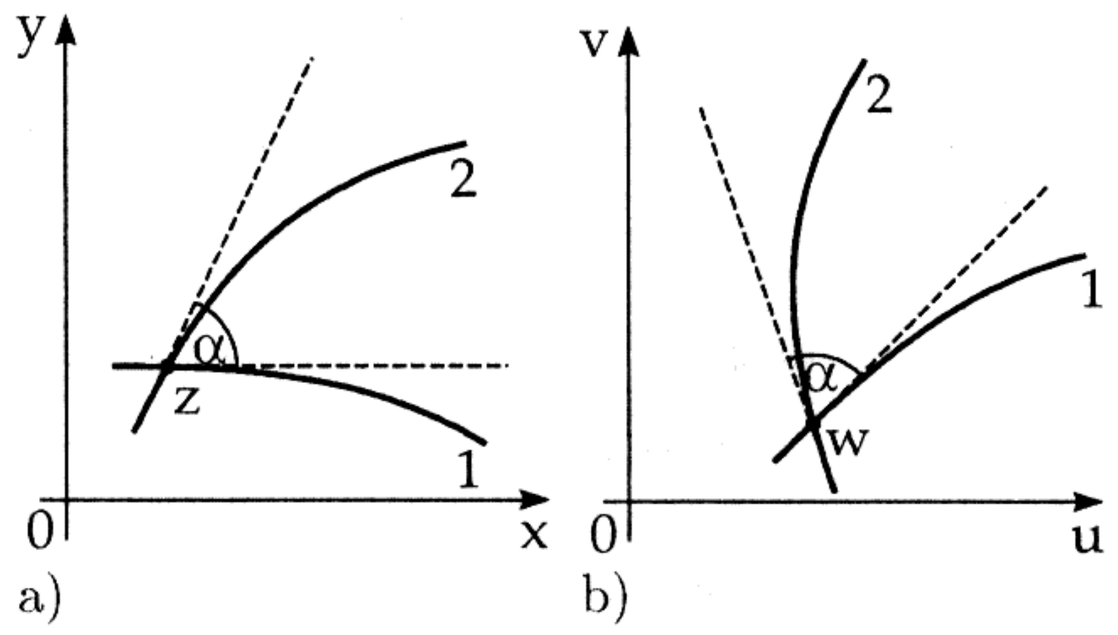
14.1.3.1. A konform leképezés fogalma és tulajdonságai

1. Definíció Egy $f(z)$ leképezést egy adott tartományon konform leképezésnek hívunk, ha $f(z)$ analitikus, és $f'(z) \neq 0$ minden, a tartománybeli z-re. A konform leképezés tulajdonságai:

A z pont $dz = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ vonaleleme és a leképezéskor keletkező w pont $dw = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ vonaleleme megnyúlásának az aránya $\sigma = |f'(z)|$ és az elforgatás szöge: $\alpha = \arg f'(z)$. Így infinitezimális méretű geometriai alakzatok hasonló alakzatokká transzformálódnak a leképezés során **(14.3. ábra)**. A korlátos geometriai alakzatok eltorzulnak ugyan, de két egymást metsző görbe hajlásszöge, többek között görbeseregek merőlegessége is megőrződik **(14.4. ábra)**.



14.3. ábra.



14.4. ábra.

Megjegyzés: Konform leképezéseket széles területen alkalmaznak a fizikában, elektrotechnikában, hidro- és aerodinamikában és a matematika egyéb alkalmazási területein.

2. Konform leképezés mint affin differenciáltranszformáció : dz és dw közötti kapcsolat affin differenciáltranszformációval a következő:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy \tag{14.11a}$$

Mátrixjelöléssel

$$dw = \mathbf{A}\,dz, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\,. \tag{14.11b}$$

A CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenletek miatt $\mathbf{A}$ a forgatva-nyújtás mátrixa, ahol σ a nyújtási tényező (lásd 191. old.):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,, \tag{14.12a}$$

$$u_x = v_y = \sigma\cos\alpha\,, \tag{14.12b}$$

a konformitás miatt

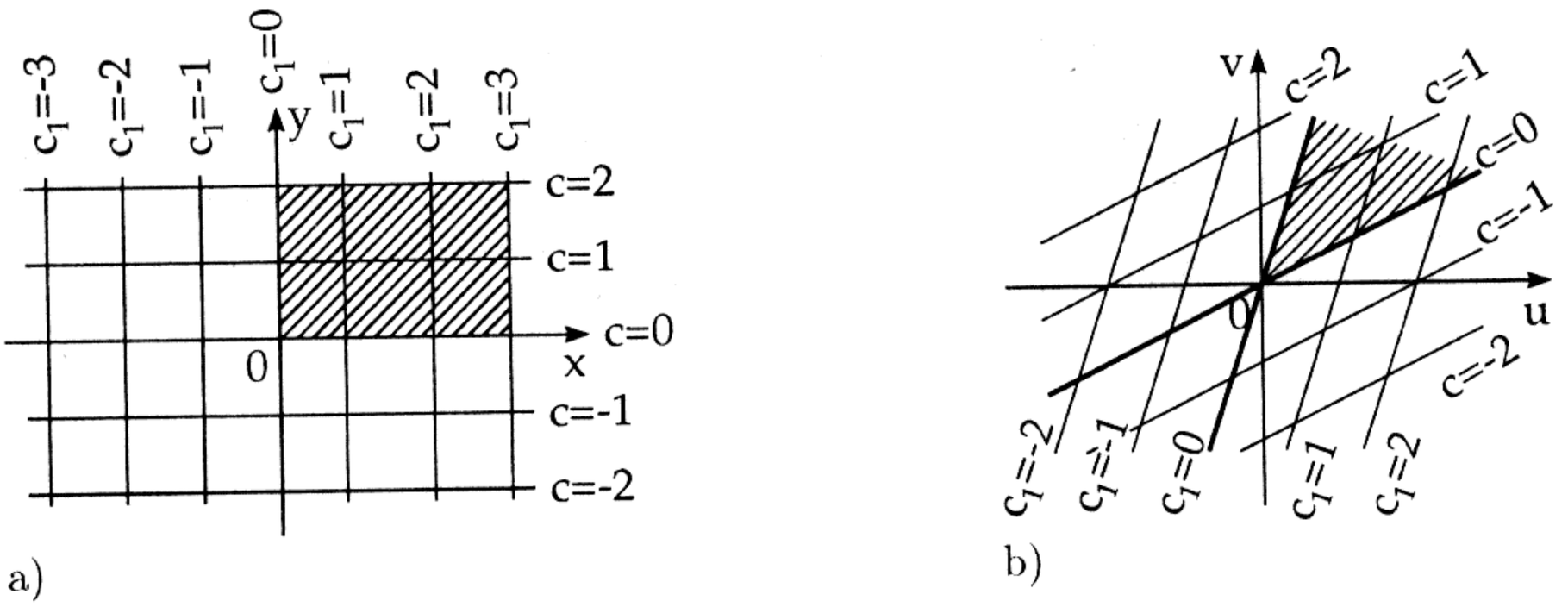
$$\delta = \sqrt{\det \mathbf{A}} = \sigma = |f'(z)| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,, \tag{14.12c}$$

$$-u_y = v_x = \sigma\sin\alpha\,, \tag{14.12d}$$

$$\alpha = \arg f'(z) = \arg(u_x + \mathrm{i}v_x)\,. \tag{14.12e}$$

3. Merőleges görbeseregek A z-sík $x =$ állandó és $y =$ állandó koordinátavonalait bármely konform leképezés két merőleges görbesereggé transzformálja. Általában analitikus függvények segítségével görbevonalú koordináták merőleges rendszerének sokaságát lehet létrehozni. Megfordítva, minden konform leképezéshez létezik egy görbeháló, ami a DESCARTES-féle koordinátarendszerben tengelypárhuzamos egyenesek, más néven koordinátavonalak merőleges hálójába invertálható az adott függvény inverzével.

■ **A:** Abban az esetben, ha $u = 2x + y\,,\ v = x + 2y$, tehát $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = 2x + y + \mathrm{i}\,(v - 2y)$, **(14.5. ábra)** a merőlegesség nem áll fenn, mert $-u_y \neq v_x = 1$.

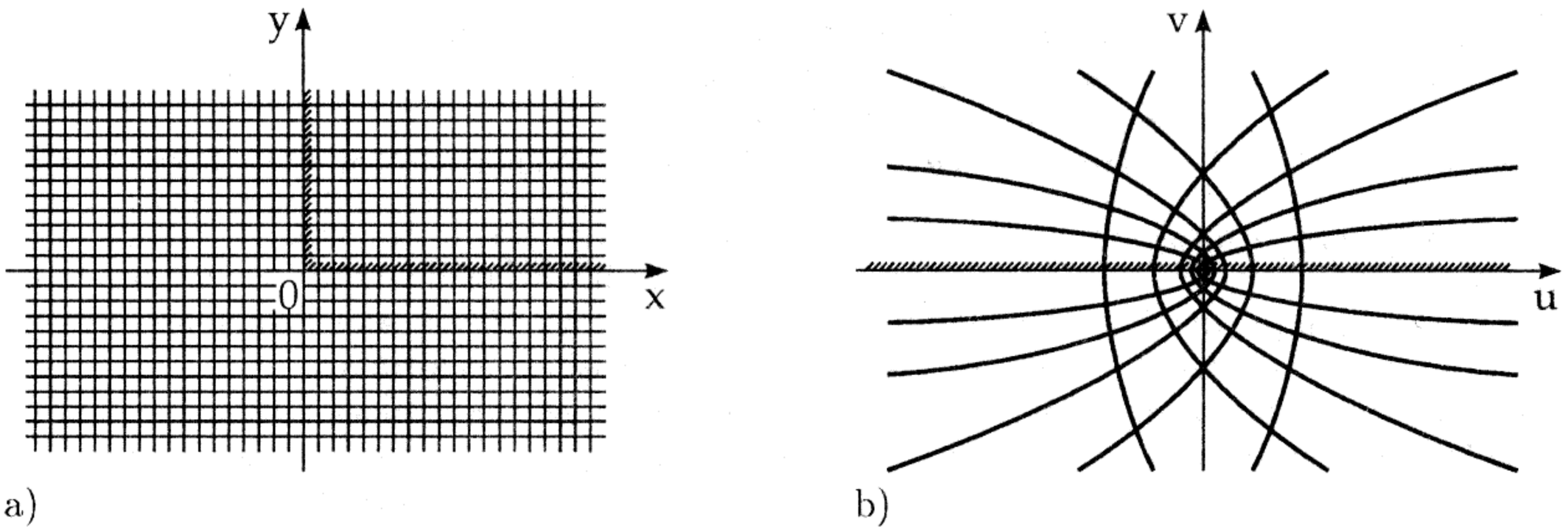


14.5. ábra.

■ **B:** A $w = z^2$ esetben az adott z pontba merőlegesen befutó görbék merőlegessége megőrződik, kivéve a $z = 0$ pontot, mivel ott $w' = 0$. A koordinátavonalak a két tengely kivételével két merőleges, konfokális ($= (0, 0)$) parabolaseregbe mennek át **(14.6. ábra)**, a z-sík első negyede a w-sík felső felére képződik le.

14.1.3.2. A legegyszerűbb konform leképezések

Ebben a fejezetben a transzformációk és azok legfontosabb tulajdonságai mellett néhány esetben szemléltetjük azon görbéket, amelyek a tengelypárhuzamos egyenesekbe mennek át. Továbbá sűrű, a tar-



14.6. ábra.

tományból „kifelé mutató" keskeny vonalkázás jelöli azon z tartomány szélét, amelynek a képe a w-sík felső félsíkjára kerül. A feketén jelzett területek a tárgyalt konform leképezéssel a w-sík egységnégyzetébe mennek át **(14.7. ábra)**.

1. Lineáris függvény

A

$$w = az + b \tag{14.13a}$$

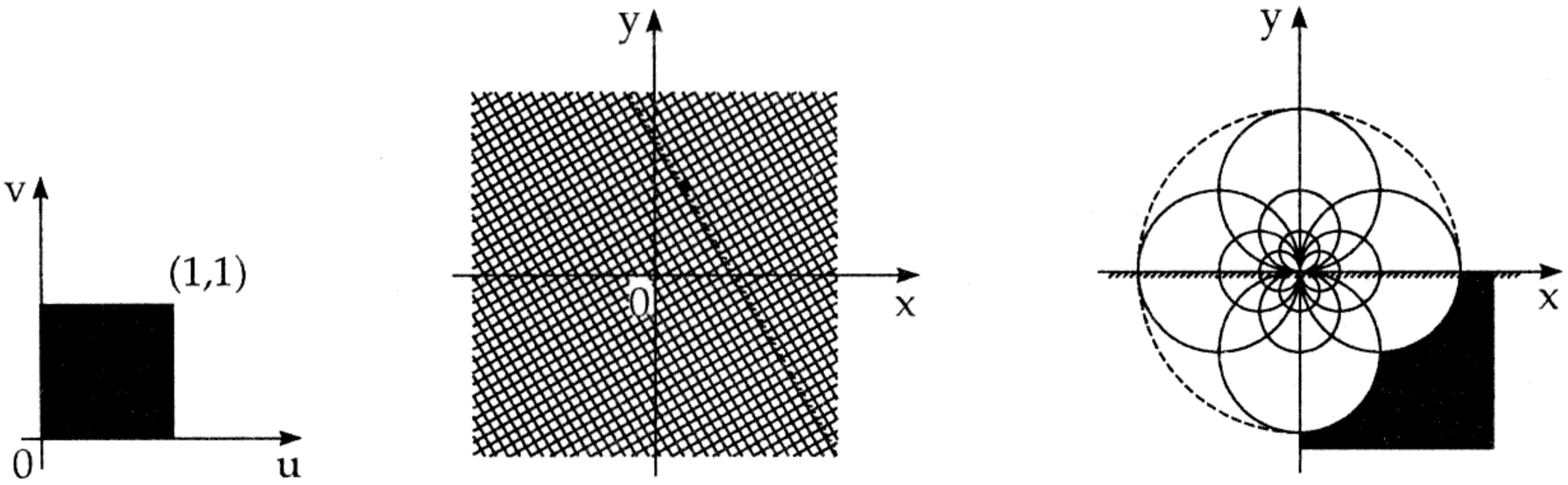
lineáris transzformáció felbontható három egyszerű leképezés kompozíciójára:

a) a sík elforgatása $\alpha = \arg a$ szöggel: $w_1 = e^{i\alpha} z$ (14.13b)

b) nyújtás az $|a|$ tényezővel: $w_2 = |a| w_1$, (14.13c)

c) párhuzamos eltolás b-vel: $w = w_2 + b$. (14.13d)

Összességében így minden alakzat hasonló alakzatba megy át. A $z_1 = \infty$ és $z_2 = \dfrac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$ pontok önmagukba mennek át, ezért *fixpontok* (ha $a \neq 1$; ha $a = 1$, akkor $b \neq 0$ esetén csak z_1 fixpont, $b = 0$ esetén minden pont fixpont). A **14.8. ábra** mutatja a fent említett tartomány (most félsík), másik tartomány (most ez is négyzet) és görbesereg egy lehetséges elhelyezkedését.



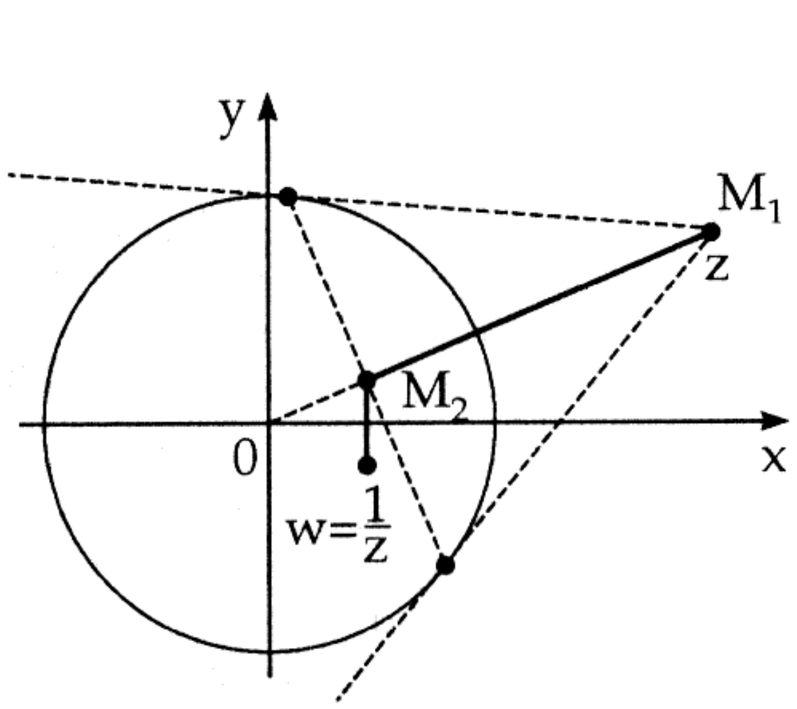
14.7. ábra. 14.8. ábra. 14.9. ábra.

2. Reciprok függvény (a lineáris törtfüggvény speciális esete)

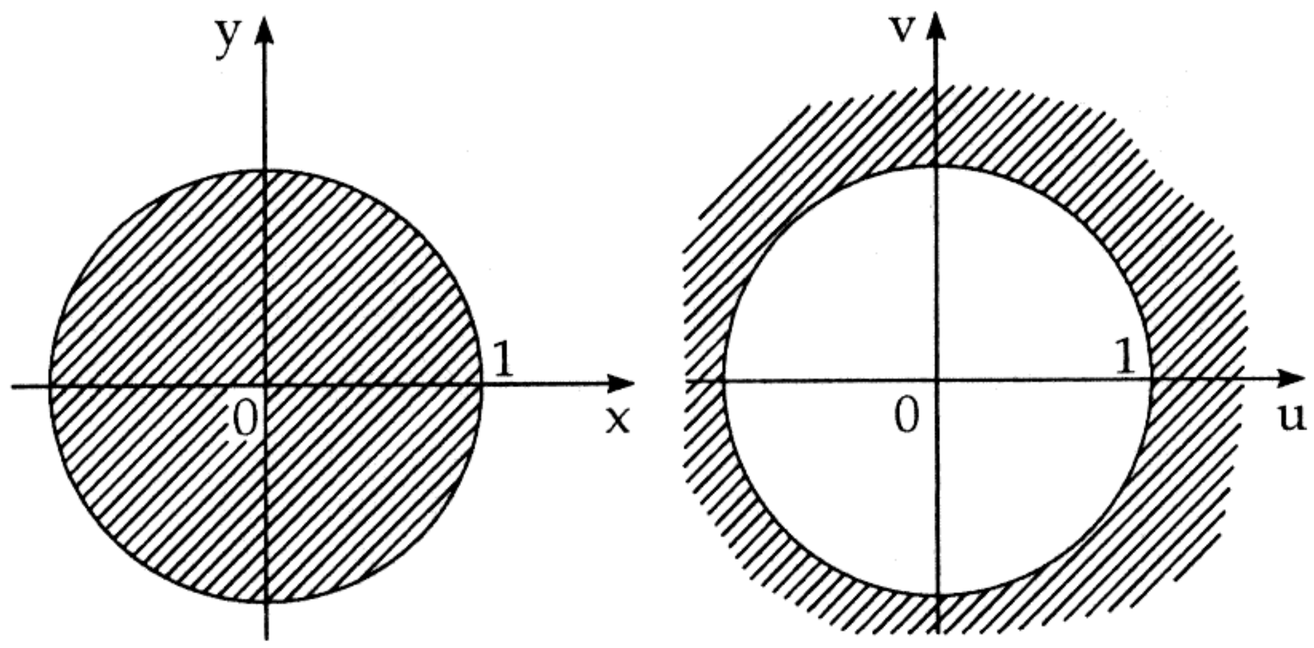
A reciprok függvénynek nevezett

$$w = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0 \tag{14.14}$$

konform leképezésnél a z-sík r modulusú z pontja a w-sík $1/r$ modulusú w pontjába, annak φ szöge a $-\varphi$ szögbe megy át. Az említett alakzatokat a **14.9. ábra** mutatja. A transzformáció más néven az egységkörre való tükrözés, amit a **14.10. ábra** mutat.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az origó középpontú, R sugarú körön kívül fekvő r_1 abszolút értékű M_1 először egy inverzióval a körön belül lévő M_2 pontba kerül. M_2 az $\overrightarrow{OM_1}$ félegyenesen van, az O origótól $\overline{OM_2} = r_2 = R^2/r_1$ távolságra, majd M_1 M_2-ből átkerül annak az x-tengelyre vonatkozó tükörképébe (konjugáltjába). Hasonlóan $|w| = 1/|z|$ miatt a z-sík egységköre a w-sík egységkörébe megy át **(14.11. ábra)**. Körön belüli pontok külső pontok lesznek, és fordítva.
Ha a komplex számsíkot kibővítjük a ∞-nel (amelyen a vele ekvivalens RIEMANN-gömbre áttérve távolságot is tudunk értelmezni), akkor a reciprok függvényt is kiterjeszthetjük: legyenek 0 és ∞ egymás képei. Más szóval kiterjesztjük a műveleteket (de $\infty \cdot 0$-t és $\infty \pm \infty$-t nem tudjuk értelmezni) és $\frac{1}{0}$-t ∞-nek, $\frac{1}{\infty}$-t 0-nak definiáljuk. A kiterjesztett reciprok függvény 0-ban és ∞-ben is folytonos, sőt deriválható (ha létezik a $\lim_{z\to\infty} f(z)$ határérték, akkor $f(\infty)$-nek ezen értéket adva definíció szerint f a ∞-ben folytonos; ha $f(\infty)$ véges, akkor egyszerű definíció szerint f differenciálható ∞-ben, ha $g(z) = f(\frac{1}{z})$ differenciálható 0-ban, ahol tehát $g(0) = \lim_{z\to\infty} f(z)$).
Ezen konform leképezés *fixpontjai*: $z = -1$ és $z = 1$.



14.10. ábra.



a) b)

14.11. ábra.

3. Lineáris törtfüggvény, más néven törtlineáris függvény

A

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{14.15a}$$

(feltesszük, hogy a w-hez hozzárendelhető $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ mátrixdeterminánsra $\neq 0$; ezzel kizárjuk a konstansokat és a $c \neq 0$, amivel kizárjuk a lineáris függvényeket) lineáris törtfüggvénnyel való konform leképezést három lépésre bonthatjuk:

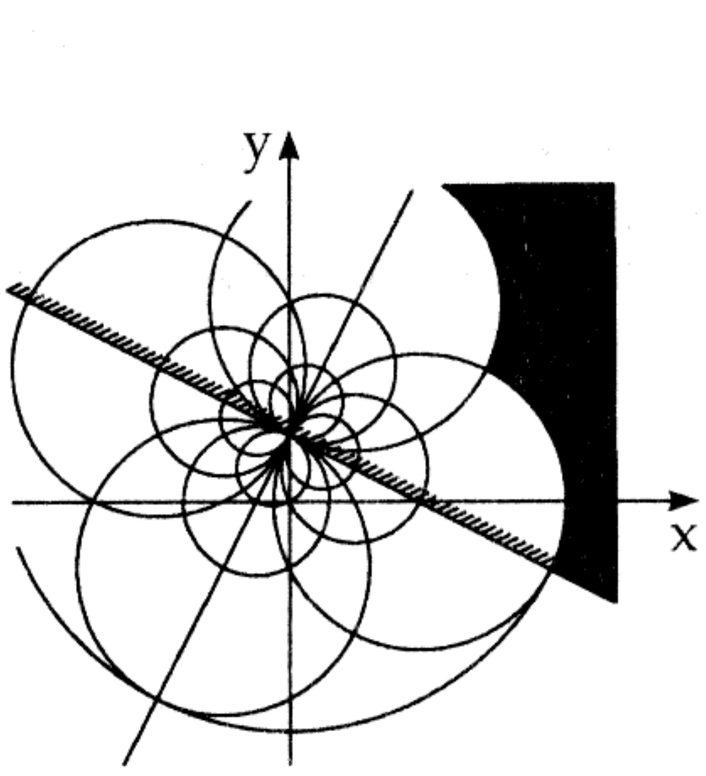
a) lineáris függvény: $w_1 = cz + d$. (14.15b)

b) reciprok: $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$. (14.15c)

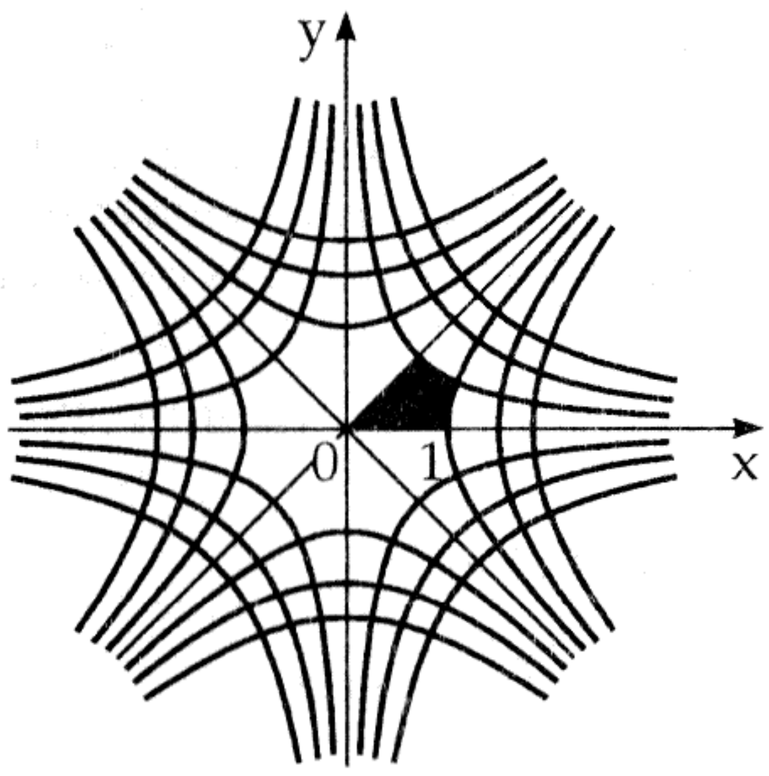
c) lineáris függvény: $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c} w_2$. (14.15d)

Ha a köröket és egyeneseket együtt „köregyenes"-nek hívjuk, akkor a lineáris törtfüggvények köregyenestartók és a $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, $w(\infty) = \frac{a}{c}$ kiterjesztéssel a kibővített síkon is konformok.

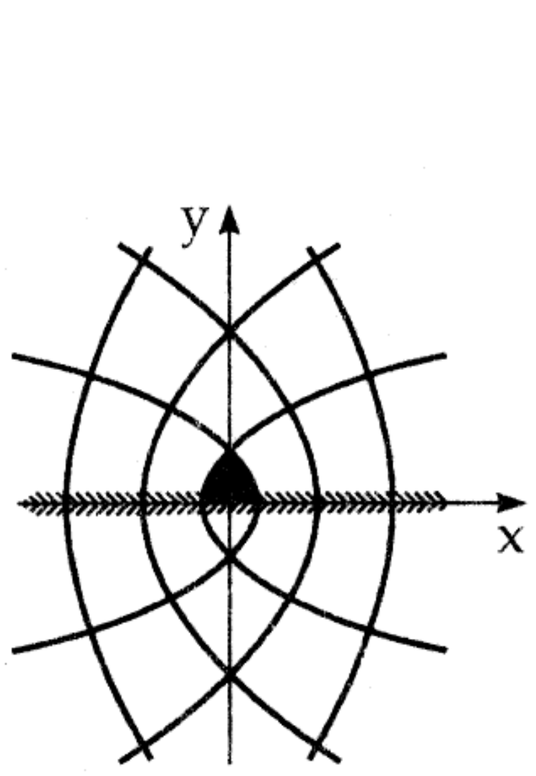
Ennek a konform leképezésnek a fixpontja az az egy vagy két pont, amelyik a $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ másodfokú egyenletet kielégíti.
Ha a z-síkban a z_1 és z_2 pontok egymás tükörképei a K_1 köregyenesre vonatkozóan (azaz kör esetében egymás inverzei), akkor a w-síkban lévő w_1 és w_2 képpontjaik is tükörképei egymásnak a K_1 köregyenes w-képére, a K_2 körre vonatkozóan. Az említett alakzatokat most a **14.12. ábra** mutatja.



14.12. ábra.



14.13. ábra.



14.14. ábra.

4. Másodfokú függvény

A

$$w = z^2 \tag{14.16a}$$

másodfokú függvényt tanácsos polár- és derékszögű koordinátákkal felírt alakjában is vizsgálni:

$$w = \rho^2 e^{\mathrm{i}2\varphi}\,, \tag{14.16b}$$

$$w = u + \mathrm{i}\,v = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}\,xy\,. \tag{14.16c}$$

A polárkoordinátás alakból látható, hogy a z-sík felső felének a képe az egész w-sík, azaz az egész z-sík képe a w-síkot kétszeresen fedi le.
A derékszögű koordinátákkal felírt alak pedig azt mutatja, hogy a w-sík $u =$ állandó és $v =$ állandó egyenesei a z-sík merőleges $x^2 - y^2 = u$ és $2xy = v$ hiperbolaseregének a képei **(14.13. ábra)**.
Ennek a leképezésnek a fixpontjai $z = 0$ és $z = 1$, de a $z = 0$ helyen a leképezés nem konform, mert ott a deriváltja 0.

5. Négyzetgyök

Az előző leképezés inverze a

$$w = \sqrt{z}\,, \tag{14.17}$$

függvény, egy olyan tartományon, amelyben a 0-t nem lehet megkerülni, pontosan akkor konform, ha a pontonkénti ($z \neq 0$) két lehetőség közül úgy választunk, hogy w folytonos legyen; emiatt minden ilyen tartományon két konform $\sqrt{z}$ függvény van. Az egész z-sík képe a w-síknak vagy a felső, vagy az alsó felére kerül, a w-sík koordinátavonalai két egymásra merőleges konfokális parabolaseregből származnak. Ezeknek a paraboláknak a gyújtópontja a z-sík origója, tengelyük pedig a z-sík pozitív, ill. negatív valós tengelye **(14.14. ábra)**.
A leképezés fixpontjai $z = 0$ és $z = 1$. A $z = 0$ pontban a leképezés nem konform, hiszen 0-ban még a valós $\sqrt{x}$ sem deriválható.

6. Lineáris függvény és lineáris törtfüggvény összege

A konform leképezést a

$$w = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad k = \text{ valós állandó} > 0,\ z \neq 0 \tag{14.18a}$$

képlet definiálja. $z = \rho\, e^{\mathrm{i}\varphi}$-ból a valós és képzetes részek szétválasztása után az

$$u = \frac{k}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi\,, \quad v = \frac{k}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi \tag{14.18b}$$

kifejezésekhez jutunk. A z-sík $\rho = \rho_0 =$ állandó, $\rho_0 \neq 1$ körei **(14.15.a ábra)** a w-sík konfokális ellipsziseibe mennek át **(14.15.b ábra)**:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol} \quad a = \frac{k}{2}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right)\,, \quad b = \frac{k}{2}\left|\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right|\,. \tag{14.18c}$$

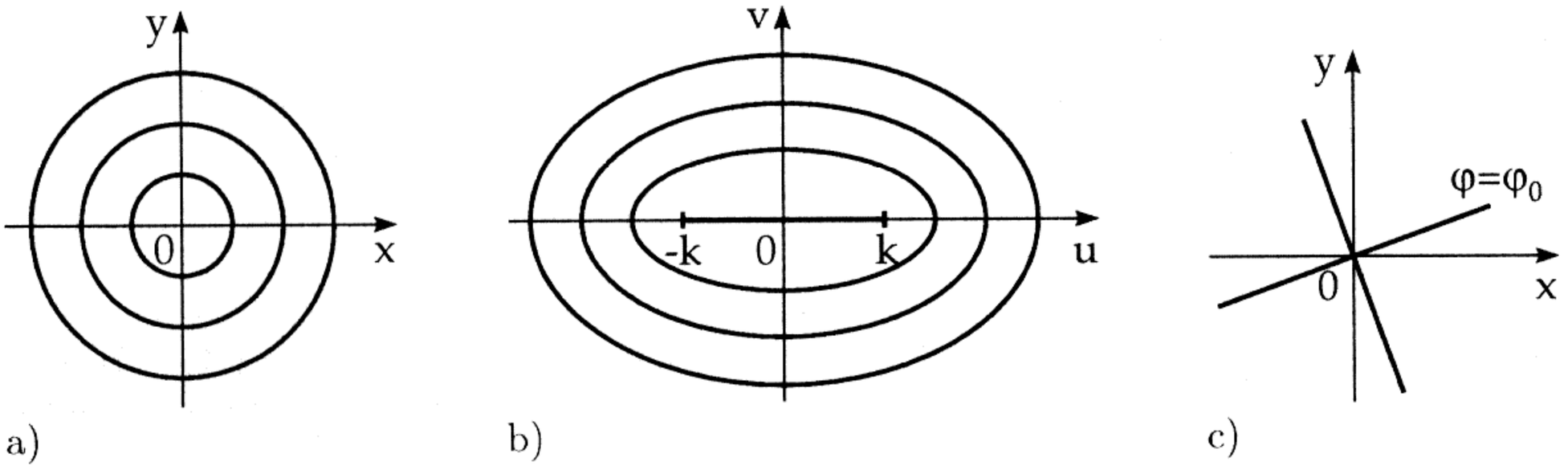
A gyújtópontok a valós tengely $\pm k$ pontjai. A z-sík $\rho_0 = 1$ egységkörének képe a w-síkon elfajult ellipszis lesz: a kétszeresen bejárt $[-k, +k]$ szakasz a valós tengelyen. Az egységkörnek mind a belseje, mind a külseje a $[-k, +k]$ szaksztól megfosztott w-síkra képződik le; az inverz függvény a benne szereplő négyzetgyök miatt kétértékű:

$$z = \frac{w + \sqrt{w^2 - k^2}}{k}\,. \tag{14.18d}$$

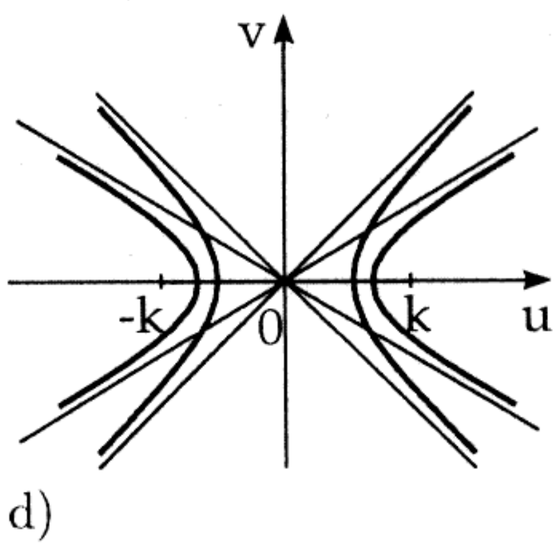
A z-sík $\varphi = \varphi_0$ egyenesei **(14.15.c ábra)** az

$$\frac{u^2}{\alpha^2} - \frac{v^2}{\beta^2} = 1, \quad (\alpha = k\cos\varphi_0\,, \quad \beta = k\sin\varphi_0) \tag{14.18e}$$

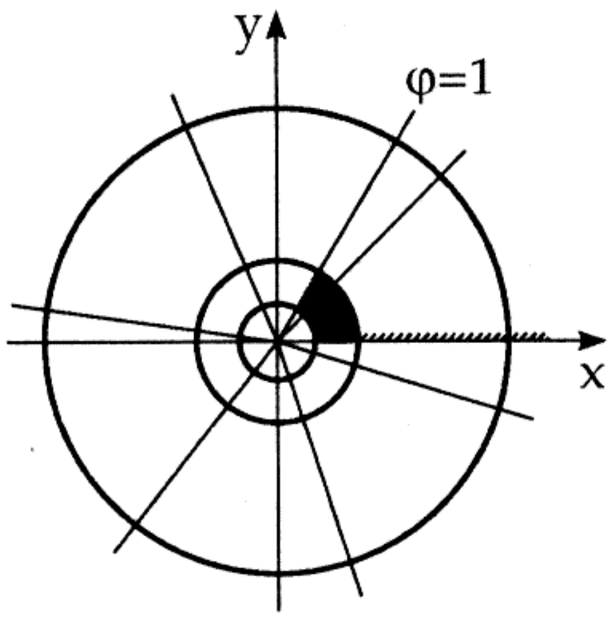
konfokális hiperbolák lesznek, gyújtóponjaik: $\pm k$ **(14.15.d ábra)**. A z-sík $\left(\varphi = 0\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ \frac{3}{2}\pi\right)$ koordináta-féltengelyeinek megfelelő hiperbolák elfajulnak, az $u = 0$ tengely és a valós tengely $(-\infty, -k]$ és $[k, +\infty)$ intervalluma lesz belőlük .



14.15. ábra.



14.15. ábra.



14.16. ábra.

7. Logaritmus

A

$$w = \operatorname{Ln} z, \quad z \neq 0 \tag{14.19a}$$

függvény algebrai alakja z polárkoordinátáival felírva:

$$u = \ln \rho\,, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{Ln} = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{14.19b}$$

Ebből látható, hogy az $u =$ állandó és $v \in (c, c+2\pi]$, c állandó koordinátavonalak a z-sík origója körüli koncentrikus körök, illetve a z-sík origóján átmenő félegyenesek képei **(14.16. ábra)**.
Az $\operatorname{Ln} z$ függvény végtelen sok értékű, egy-egy konform ága az e^z egy-egy vízszintes 2π magasságú periódus-sávjára való megszorításának inverze (lásd (14.69c)).
A $-\pi < \varphi \leq +\pi$ megszorítással kapjuk az $\ln z$ főágát; ezzel tehát az egész z-sík a w-síkon olyan sávba megy át, amelyet a $v = \pm\pi$ párhuzamos egyenesek határolnak, közülük a $v = \pi$ tartozik hozzá a sávhoz.

8. Exponenciális függvény (lásd 725. old. is)

A

$$w = e^z \tag{14.20a}$$

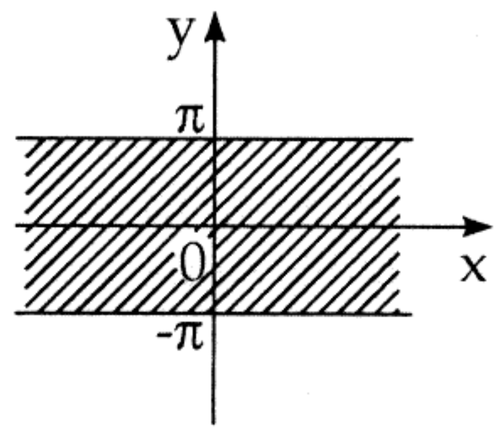
függvény a

$$w = \rho e^{\mathrm{i}\psi}\,. \tag{14.20b}$$

polárkoordinátás formában a $z = x + \mathrm{i}\,y$ algebrai alakból:

$$\rho = e^x \quad \text{és} \quad \psi = y\,. \tag{14.20c}$$

Ha x a $-\infty$ és $+\infty$ között változik, akkor ρ nullától végtelenig változik; ha y felveszi a $-\pi$ és $+\pi$ közötti értékeket, akkor ψ is a $-\pi$ és π közötti értékeken fut végig. Így a z-síknak egy-egy, az x-tengellyel párhuzamos 2π magasságú periódus-sávja lesz leképezve a teljes w-síkra **(14.17. ábra)**.



14.17. ábra.

9. Schwarz–Christoffel-formula

A konform leképezések RIEMANNtól származó alaptétele azt mondja ki, hogy ha adott a síkon a D_1 egyszeresen összefüggő tartomány (azaz minden D_1-beli zárt görbe belseje is D_1-ben van; pl. egy körgyűrű nem ilyen), amely nem az egész sík, akkor létezik olyan konform leképezés, amely D_1-et kölcsönösen egyértelműen átviszi az egységkör belsejére. Ekvivalens következménye, hogy ha D_1 és D_2 két ilyen tartomány, akkor egyik a másikba kölcsönösen egyértelműen átvihető konform leképezéssel. Ha a két tartomány határa egyszerű, szakaszonként sima görbe (azaz a görbét paraméteresen előállító függvénypárnak véges sok pont kivételével minden pontban létezik és nem $\vec{\mathbf{0}}$ a gradiense), akkor a leképezés kiterjeszthető a tartományok lezárásai közötti homeomorfizmussá.
Mivel ilyenkor a kölcsönös egyértelműség miatt a kiterjesztett leképezés a határok között is homeomorfizmus, ezért az egyik határgörbét valamelyik irányban bejárva a képpontok a másik határgörbére esnek és annak két lehetséges, egymással ellentétes irányítása egyikét követve teljes egészében befutják azt. Ez hasznos észrevétel, ha adott két tartomány és a feladat egyikük konform leképezése a másikra, még akkor is, ha nem egyszeresen összefüggőek és így mindkettőnek a határa több diszjunkt görbéből áll; továbbá akkor is, ha például törtlineáris leképezést keresünk (ilyenkor a tartományok gyakran kör belseje, külseje, félkör, félsík, negyedsík, nem feltétlenül koncentrikus körök által meghatározott körgyűrű, két kör uniójának komplementuma). Ha az eredeti leképezést sikerül képlettel megadni, akkor sokszor ugyanez a képlet definiálja a kiterjesztett homeomorfizmust is. A RIEMANN tétele által garantáltan létező konform leképezés általában nem egyértelmű; a lezárások közti homeomorfizmus esetében egyértelművé tehető D_1 határán tetszőleges három pont és D_2 határán tetszőleges három pont, mint képeik kijelölésével, amivel egyúttal azt is eldöntöttük, hogy a leképezés során D_1 határa adott irányú bejárásának D_1 határa melyik irányú bejárása feleljen meg.

Speciális esete a feladatnak, ha a w-síkbeli D_1 nyílt felső félsíkot akarjuk egy z-síkbeli D_1 sokszögtartományra leképezni; ekkor rendelkezésünkre áll az alábbi explicit SCHWARZ–CHRISTOFFEL-formula (néha az inverzét hívják így, néha a félsík szerepét átveszi az egységkörlap). Tekintsük a sík egy nyílt, egyszeresen összefüggő valódi részhalmazát: a feladat szempontjából sokszögtartománynak tekintjük, ha a határa (amelyhez a nemkorlátos esetben hozzászámítjuk a csúcsnak tekintett ∞ pontot is) előáll véges sok, korlátos vagy nem korlátos egyenesszakasz uniójaként. Tehát a definíció annyira általános, hogy nem követeljük meg sem a korlátosságot sem a konvexitást, és emiatt pl. egy félsíkot vagy egy konvex sokszögből egy benne levő, vele egy közös csúcsú konvex sokszög elhagyása után megmaradó nemkonvex halmazt vagy ennek határeseteként egy határpontjából induló szakasszal bemetszett sokszöget vagy egy félegyenessel bemetszett végtelen sávot vagy most ennek határeseteként a síkból egy félegyenes elhagyása után megmaradó bemetszett síkot is sokszögtartománynak tekintünk. Ha — pl. egy rajzzal — csak a kerület van megadva és az nem korlátos, akkor előfordulhat, hogy a csatlakozó határszakaszok uniója által határolt mindkét sokszögtartomány egyszeresen összefüggő, tehát tisztázni kell, hogy melyiket tekintjük D_2-nek.

Meg akarjuk őrizni a „klasszikus" sokszögek azon tulajdonságát, hogy ugyanannyi csúcsuk van, mint oldaluk, mert ekkor az is változatlanul igaz lesz, hogy egy n-oldalú sokszög (belső) szögeinek összege $(n-2)\pi$ és emiatt külső szögeinek összege 2π és erre szükségünk lesz. Ezt úgy fogjuk biztosítani, hogy minden csúcs két oldalon lesz rajta és minden oldalon két csúcs lesz. Emiatt egy pont jelenthet több csúcsot is; erre példa a fent említett, „konvex sokszög\konvex sokszög", ahol éppen a közös csúcs lesz a kapott nemkonvex sokszög kétszeres csúcsa. A ∞ is lehet többszörös csúcs: látni fogjuk, hogy pl. egy végtelen sávnak a ∞ kétszeres csúcsa.

Ez előfordulhat oldallal is, de azt mindig csak kétszeresen kell számolnunk: erre korlátos oldal esetében példa a határra támaszkodó szakasszal bemetszett sokszög, amelynek ezen szakasz kétszeres oldala; a félegyenessel bemetszett sík ezen kétszeresen számolt félegyenese pedig példa a nemkorlátos oldal kettős előfordulására. Általában egy korlátos vagy nemkorlátos határszakasz akkor kétszeres, ha mindkét „partján" a közvetlen környezete a sokszögtartományhoz tartozik. Ezekután egy pont — akár véges, akár a ∞ — annyiszoros csúcs, ahány különböző oldalpár közös pontja.

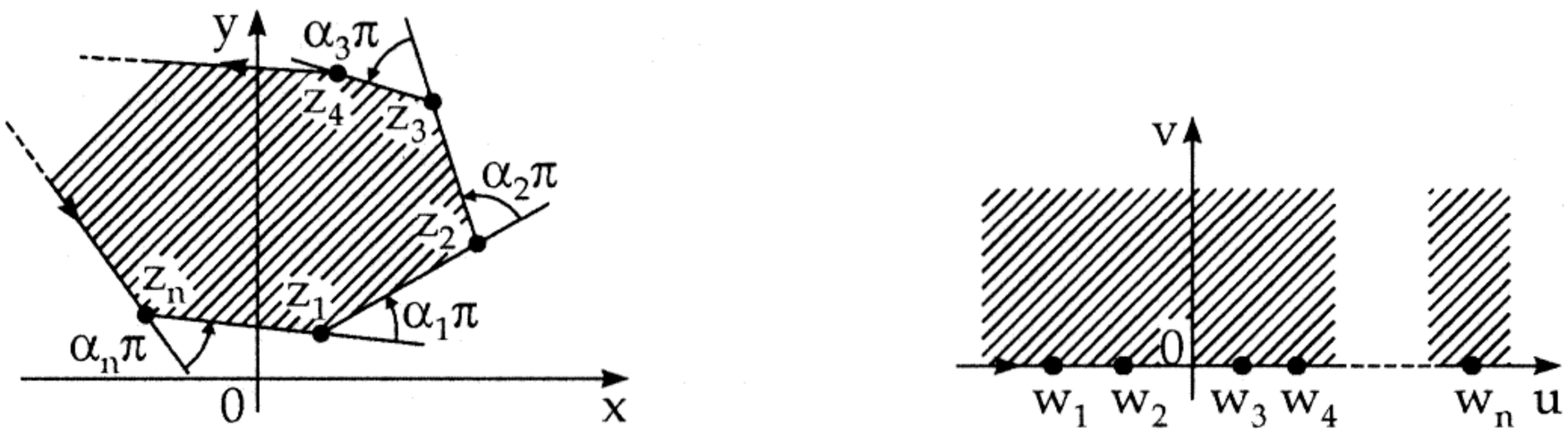
Végül a csúcsok pontos definiálásához az oldalak csatlakozását is definiálni kell: egy kétszer számolt szakasz két oldala a „nemszabad" csúcsban (akár véges, akár a ∞) nem találkozik: képzeljük úgy, hogy a két oldalt elválasztja egy láthatatlan szögtartomány, ami a „szabad" csúcsból indul és nem tartozik a sokszöghöz (éppen ezáltal lesz a másik csúcs többszörös). Ha az oldalak között egész egyenesek is vannak (könnyen látható, hogy legfeljebb kettő lehet), akkor tetszőlegesen kiválasztott pontjukkal átmenetileg osszuk őket két félegyenessé; ezzel ugyanannyival növeltük az oldalak és a csúcsok számát és kiiktattuk az oldalak közül az egyeneseket. Ezután a határ két félegyenese definíció szerint csatlakozik a ∞-ben, ha annak akármelyik környezetében összeköthetők, azaz akármilyen nagy M számhoz létezik N, hogy a két félegyenes bármely, N-nél nagyobb abszolút értékű pontjának összekötő szakasza része a sokszögtartománynak és ezen szakasz minden pontja az origótól legalább M távolságra van; minden ilyen félegyenespár a ∞, mint csúcs egy-egy újabb példányát határozza meg. Ezután a felvett legfeljebb két segédpontról elfelejtkezhetünk. Többszörösség esetében természetesen a kiterjesztett leképezés a zárt félsík és a zárt sokszög, azaz a félsík határa és a sokszög határa között csak úgy lehet homeomorfizmus, ha egy határpont több példányát ténylegesen különbözőnek és nemszomszédosnak tekintjük.

Még szükségünk van sokszög belső és külső szögeinek definíciójára. Ha adott egy véges csúcs — és vele az oda befutó két oldal — akkor a belső szög fogalma ismert. (Például az egyenesekre tett ideiglenes csúcsokban ez nyilván π.) Ez mindig pozitív és legfeljebb 2π (pl. ennyi egy bemetsző szakasz szabad csúcsánál). Ha ez α, akkor az ottani külső szög definíció szerint $\pi - \alpha$, tehát a nemkonvex esetben ez lehet negatív is. Ha két oldal a végtelenben találkozik, akkor párhuzamos esetben az ottani belső szög 0, ha nem párhuzamosak, akkor a végesben vett belső szögük (geometriai értelemben kettő van, de csak az egyik szögtartomány tartozik a sokszöghöz) ellentettje. Ez úgy adódik, hogy egy végtelenben konform függvénnyel, pld. a reciprokkal bevisszük őket a 0-ba és kiszámoljuk az ottani hajlásszögüket. Mindkét esetben a fenti különbséggel értelmezzük a külső szögüket, ami tehát párhuzamosok esetében π. Ezen értelmezésekkel minden n-oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\pi$ és emiatt külső szögeié 2π.

Ezek után a SCHWARZ–CHRISTOFFEL-*formula*:

$$\text{Ha } w \neq w_i, \text{ akkor } z(w) = C_1 \int_{w_0}^{w} \frac{dt}{(t-w_1)^{\alpha_1}(t-w_2)^{\alpha_2}\cdots(t-w_n)^{\alpha_n}} + C_2, \quad z(w_i) = z_i. \quad (14.21)$$

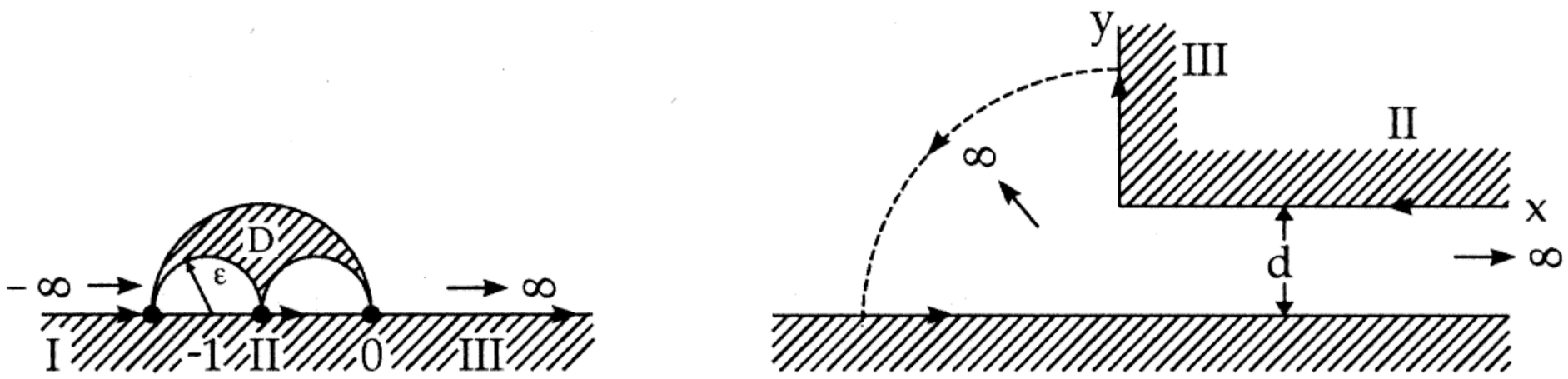
A formulában szereplő C_1 komplex számmal való szorzás forgatva nyújt, C_2 hozzáadása eltol; ezen meghatározandó állandók nem függenek a sokszög alakjától, hanem csak a területétől és a z-síkban elfoglalt helyzetétől. A nevezőben szereplő w_i valós számok az adott sokszög z_i csúcsainak inverzei: sem ezek, sem $C_{1,2}$ meghatározására nincs általános módszer. Azonban az említett kiegészítés értelmében tetszőlegesen megadhatunk három valós számot és előírhatjuk, hogy melyiküknek melyik z-csúcs legyen a képe. Ez már egyértelműen meghatározza a többi w_i-t és a $C_{1,2}$ állandókat és azt, hogy melyik w_i-nek melyik z_i a képe, amivel tehát megoldottuk az eredetileg kitűzött feladatot, sőt többet: megadtuk a zárt felső félsík homeomorf leképezését a zárt sokszögtartományra, ami a belsejeik között konform. Az α_i számokat azzal definiáljuk, hogy a sokszög külső szögeit $\alpha_i\pi$ alakban írjuk fel; a fentiek szerint az α-k összege 2. w_0 a zárt felső félsík mindegyik w_i-től különböző, egyébként tetszőleges pontja, de ha valamely w_i-hez tartozó α_i negatív, akkor w_0 választható ezen w_i-nek is. t komplex (!) integrációs változó, integrációs út lehet bármely, a w_0-t a zárt felső félsíkban a w-vel összekötő egyszerű rektifikálható görbe, amelyik nem megy át egyik w_i-n sem; $\operatorname{Im} w > 0$ esetén például a w_0, w végpontú szakasz.



a) b)

14.18. ábra.

A képlet tehát a határokra is érvényes: az egyik határ a ∞-nel kiegészített valós tengely, ennek a képlet szerinti képe a sokszögtartomány határa, azaz kerülete. Ha az egyik csúcsinverz a végtelen távoli pont, tehát (valósan kifejezve) valamely $w_i = \pm\infty$ (ez most egyetlen pont! és csak egy pont lehet ilyen, mert a w_i-k nem eshetnek egybe), akkor a nevezőből a megfelelő $(t-w_i)\alpha_i$ tényező egyszerűen elhagyandó.



a) b)

14.19. ábra.

■ **A:** A sokszög a **14.19. ábrán** látható: egy síknegyed és egy félig végtelen sáv uniója; a határ szegélyezése a tartományból kifelé mutat. Két oldala az x- és az y-tengely pozitív fele, a harmadik határegyenes d távolsággal van az x-tengely alatt. Egyetlen véges csúcsa van, a 0 és a ∞ kétszeres csúcsa. Tehát a csúcsok a ∞ a 0 és a ∞; legyenek az inverzeik és a hozzájuk tartozó α-k ebben a sorrendben a

-1, 0, ∞, illetve 1, $-1/2$ és $3/2$. Az α-k értéke adott volt, mert az ábráról leolvasható, de a sorrendjük nem; most viszont már tudható, hogy a -1 képe a „jobb szélső" ∞ és emiatt a ∞ képe a „bal felső" ∞. Figyelembevéve, hogy a 0 képe a 0, azt kapjuk, hogy ha $w : -\infty \to +\infty$, akkor a képpont a sokszöget pozitív irányban járja be. A formula ezt adja: $z(w) = C_1 \int_0^w \frac{dt}{(t+1)t^{-1/2}}$; ne felejtsük el, hogy a korábban mondottak szerint a ∞-hez tartozó tagot ki kell hagyni. Továbbá w_0 azért lehet 0, mert t kitevője negatív és $C_2 = 0$, mert a $w = 0$-hoz a $z = 0$ csúcs tartozik.

$$C \int_0^w \frac{dt}{(t+1)t^{-1/2}} = 2C\left(\sqrt{w} - \operatorname{arctg}\sqrt{w}\right) \qquad \text{(lásd (14.80b))},$$

mert a zárt felső félsíkot legyezőszerűen egy kicsit mindkét oldalon lehajtva és a kapott nyílt halmazból a 0-t és a -1-et kihagyva a megmaradt nyílt halmazon a jobb oldali függvény primitív függvénye az integrandusnak (C-t bevittük) és értékét 0-ban 0-nak deklarálva még a 0 határpontban is triviálisan folytonos (sőt, a négyzetgyök bármilyen értelmezése mellett még deriválható is, amit a komplex függvények körében is érvényes L'HOSPITAL-szabállyal lehet kiszámolni), tehát alkalmazható a NEWTON–LEIBNIZ-tétel a vonalintegrál kiszámítására. C meghatározásához észre kell venni, hogy ha $w : 0 \to +\infty$, akkor az integrál értéke a C egyre nagyobb valós számszorosa, a bejárásról mondottak szerint pedig a megfelelő pont a tartomány határán a 0-ból a képzetes tengelyen felfele mozog, tehát C tiszta képzetes szám. Tudjuk a körüljárásból, hogy $w = -1 \pm \varepsilon$, $\varepsilon \to 0 + 0$ esetén a képpont az alsó egyenesre $(-\varepsilon)$, illetve a ∞-ből visszafordulva az x-tengely pozitív felére $(+\varepsilon)$ esik. A különbséget majd annak határértékét kiszámolhatjuk akár a primitív függvénybe való behelyettesítéssel, akár a $t = \varepsilon e^{\mathrm{i}\vartheta} - 1$ helyettesítéssel a -1 középpontú, $\varepsilon \to 0+0$ sugarú felső félkörön elvégezve az integrálást (a $\dfrac{t^{1/2}}{t+1}$ integrandus az ábrán a három berajzolt görbével határolt halmaznál kicsit bővebb tartományon is reguláris, tehát az összefűzésükkel kapott zárt görbén vett integrálja 0). A határérték $C\pi$, ami tehát tiszta képzetes; másrészt ez olyan szám, amit az alsó egyenesen lévő komplex számhoz adva az x-tengely egy pontját kapjuk. Tehát a felette lévő pontot kaphatjuk csak, azaz $\mathrm{i}d$-t adtuk hozzá. Végülis $C\pi = \mathrm{i}d$, azaz $C = \mathrm{i}\dfrac{d}{\pi}$.



14.20. ábra.

■ **B:** Téglalap leképezése. A téglalap csúcspontjai legyenek: $z_{1,4} = \pm K$, $z_{2,3} = \pm K + \mathrm{i}K'$. A z_1 és z_2 pontok inverzei legyenek a valós tengely $w_1 = 1$ és $w_2 = 1/k$ $(0 < k < 1)$ pontjai. Mivel a z_4 és z_3 pontok a z_1 és z_2 pontoknak a képzetes tengelyre vonatkozó tükörképei, a SCHWARZ-féle tükrözési elv szerint (lásd 707. old.) ezeknek a $w_4 = -1$ és $w_3 = -1/k$ pontok az inverzeik **(14.20.a,b ábra)**. Téglalap esetén: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/2$, tehát a formula:

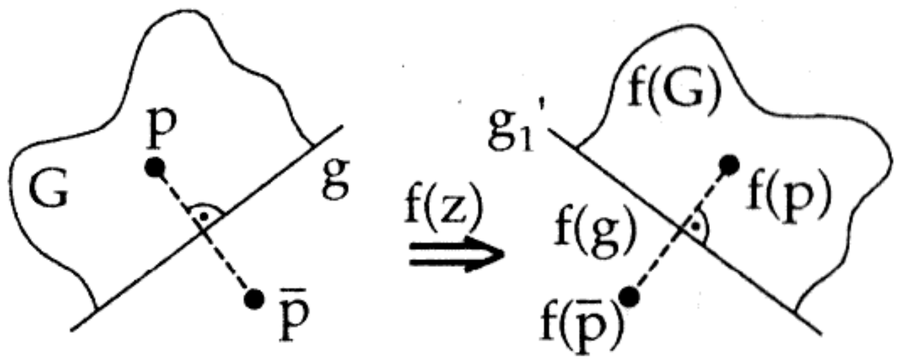
$$z = C \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t-w_1)(t-w_2)(t-w_3)(t-w_4)}} = C \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)\left(t^2 - \dfrac{1}{k^2}\right)}}.$$ (A $z = 0$ pont a $w = 0$ pont képe, ezért megint $C_2 = 0$; ha $w : 0 \to 1$, akkor $z : 0 \to K$, tehát z valós és ilyenkor az integrandus > 0, tehát $C > 0$. Mivel a $w_2 \to \infty \to w_3$ szakasz képe a $z_2 \to z_3$ szakasz, ezért szimmetrikus w-pontok képei szimmetrikus z-pontok a tükrözési elv szerint és csak a ∞ és az $\mathrm{i}K$ pontnak nincs tőle különböző

tükörképe, ezért a $z = \mathrm{i}K$ pont őse a $w = \infty$ pont.

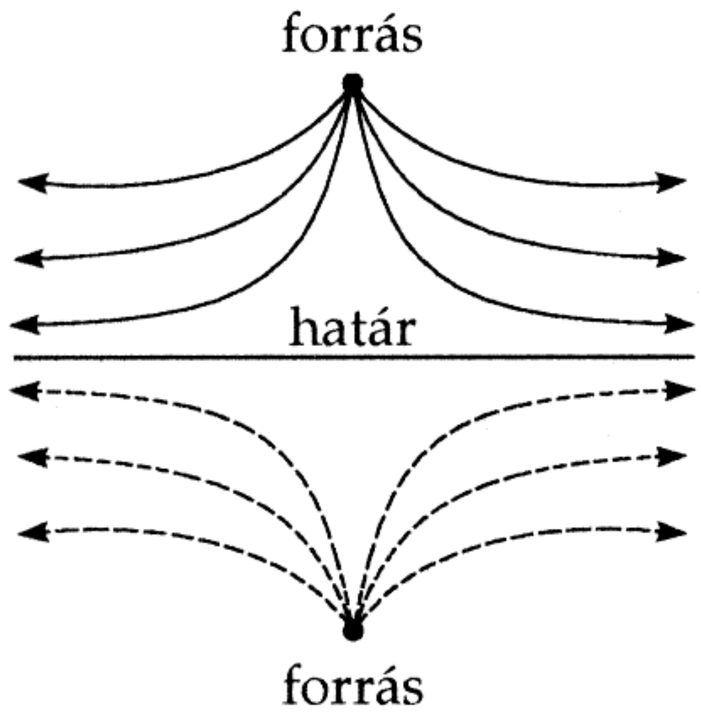
Ha $C = 1/k$, akkor: $z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = F(\varphi, k)$ (helyettesítés: $t = \sin\vartheta$, $w = \sin\varphi$) . $F(\varphi\,, k)$ elsőfajú elliptikus integrál (lásd 443. old.).

14.1.3.3. A Schwarz-féle tükrözési elv

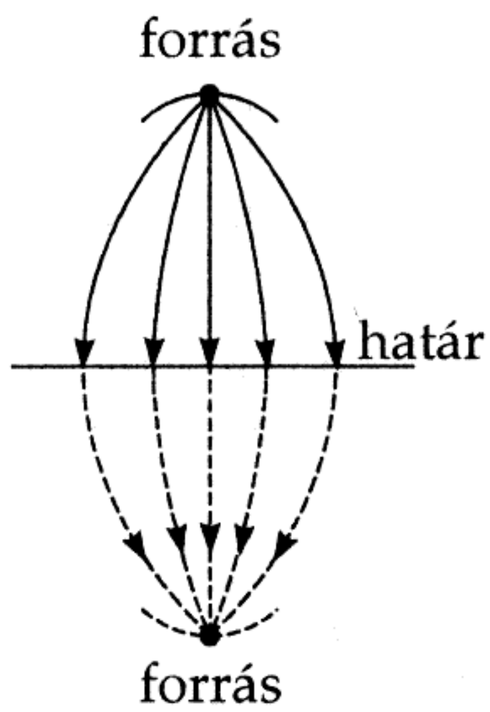
1. Állítás Legyen f reguláris a G tartományon, melynek határa tartalmaz egy g szakaszt vagy körívet úgy, hogy ennek egyik oldalán egy kis környezet (téglalap vagy körgyűrű-cikk) G-ben van. Ha f folytonosan kiterjeszthető g-re és a kiterjesztés g-t vagy szakaszra vagy körívre képezi le, akkor f regulárisan kiterjeszthető G-nek g-re vonatkozó tükörképére és az így „megduplázott" tartományon g-re szimmetrikus pontok f-képei az $f(g)$ szakaszra vagy körívre szimmetrikusak lesznek **(14.21. ábra)**.



14.21. ábra.



14.22. ábra.



14.23. ábra.

2. Alkalmazások Ennek az elvnek az alkalmazása leegyszerűsíti az egyenesekkel határolt értelmezési tartományú síkbeli mezők ábrázolását és a velük való számolást. Ha az egyenes határszakasz egy áramvonal (elválasztó határ a **14.22. ábrán**), akkor minden forrást, mint forrást, minden nyelőt, mint nyelőt és minden rotációt, mint ellenkező irányú rotációt kell tükrözni. Ha az egyenes határszakasz ekvipotenciális vonal, (erősen húzott határ **14.23. ábrán**), akkor a forrásokat, mint nyelőket, minden nyelőt, mint forrást, és minden rotációt, mint azonos irányú rotációt kell tükrözni.

14.1.3.4. Komplex potenciál

1. A komplex potenciál fogalma Az x, y-síkban vizsgáljuk a $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(x, y)$ forrás- és rotációmentes mezőt. A $\vec{\mathbf{V}}$ vektor $V_x(x, y)$ és $V_y(x, y)$ komponensei legyenek folytonosak és differenciálhatók, a $\vec{\mathbf{V}}$ értelmezési tartománya egyszeresen összefüggő.

a) Forrásmentes a mező, ha $\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}} = 0$, azaz $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$. Az integrálhatósági feltétel erre a differenciálegyenletre a $\Psi(x, y)$ *áramfüggvénnyel* kifejezve:

$$d\Psi = -V_y\,dx + V_x\,dy = 0\,, \quad (14.22a) \qquad \text{és így fennáll} \quad V_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,, \qquad V_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,. \qquad (14.22b)$$

A $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező két P_1 , P_2 pontjára a $\Psi(P_2) - \Psi(P_1)$ különbség a mértéke a P_1 és P_2 pontokat összekötő görbén áthaladó áramlásnak, feltéve, ha ez a görbe teljesen a vektormező értelmezési tartományában van.

b) Rotációmentes a mező, ha $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{V}} = 0$, azaz $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$. Az integrálhatóság feltétele erre a differenciálegyenletre a $\Phi(x, y)$ *potenciálfüggvénnyel* kifejezve:

$$d\Phi = v_x\,dx + v_y\,dy = 0\,, \quad (14.23a) \qquad \text{és fennáll} \quad v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,, \qquad v_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,. \quad (14.23b)$$

A Φ, Ψ függvénypár eleget tesz a CAUCHY–RIEMANN-féle differenciálegyenlet-rendszernek (ld. 695. old.) és mindketten kielégítik a LAPLACE-féle differenciálegyenletet ($\Delta\Phi = 0\,,\ \Delta\Psi = 0$). A Φ és iΨ függvények összege adja a

$$W = f(z) = \Phi(x,y) + \mathrm{i}\,\Psi(x,y) \quad (14.24)$$

analitikus függvényt. Ezt a függvényt nevezzük a $\vec{\mathbf{V}}$ mező komplex potenciáljának.

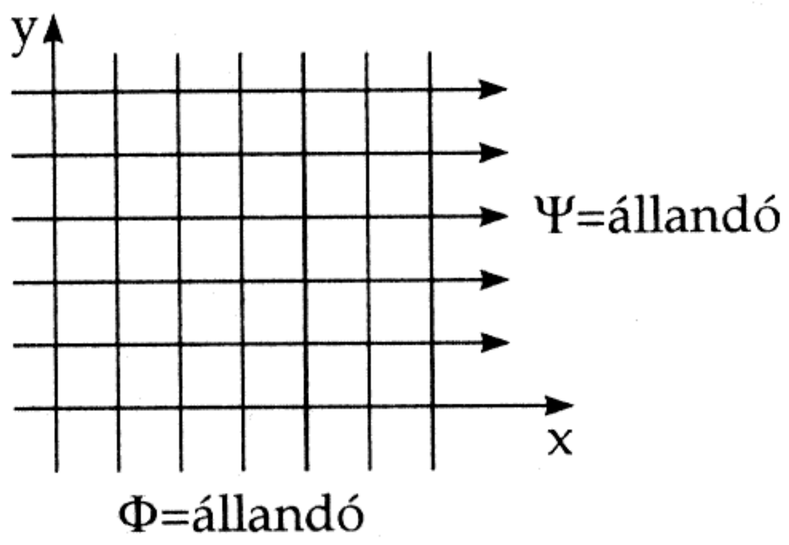
A fizikában és elektrotechnikában elfogadott konvenció szerint a $\vec{\mathbf{V}}$ vektormező potenciálja: $-\Phi(x,y)$ (lásd 685. old.). Az áramvonalak és az ekvipotenciális vonalak merőleges görbesereget alkotnak. A komplex potenciál deriváltjára és a $\vec{\mathbf{V}}$ vektorra az alábbi összefüggések érvényesek:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v_x - \mathrm{i}v_y\,, \qquad \overline{\frac{dW}{dz}} = \overline{f'(z)} = v_x + \mathrm{i}v_y\,. \quad (14.25)$$

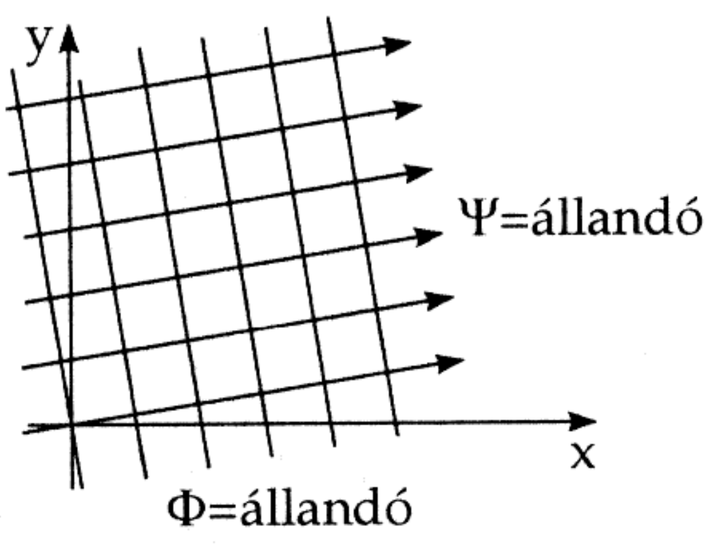
2. Homogén mező komplex potenciálja A

$$W = az \quad (a \text{ valós szám}) \quad (14.26)$$

függvény olyan mező komplex potenciálját szogáltatja, amelyiknek ekvipotenciális vonalai párhuzamosak az y-tengellyel és erővonalai az x-tengellyel **(14.24. ábra)**. Ha a komplex szám, akkor ez a mező elforgatását eredményezi **(14.25. ábra)**.



14.24. ábra.



14.25. ábra.

3. Forrás és nyelő komplex potenciálja Az $e > 0$ hozamú, $z = z_0$ pontban lévő forrás által létrehozott mező komplex potenciálja:

$$W = \frac{e}{2\pi}\ln(z - z_0)\,. \quad (14.27)$$

Egy hasonló intenzitású nyelő esetén:

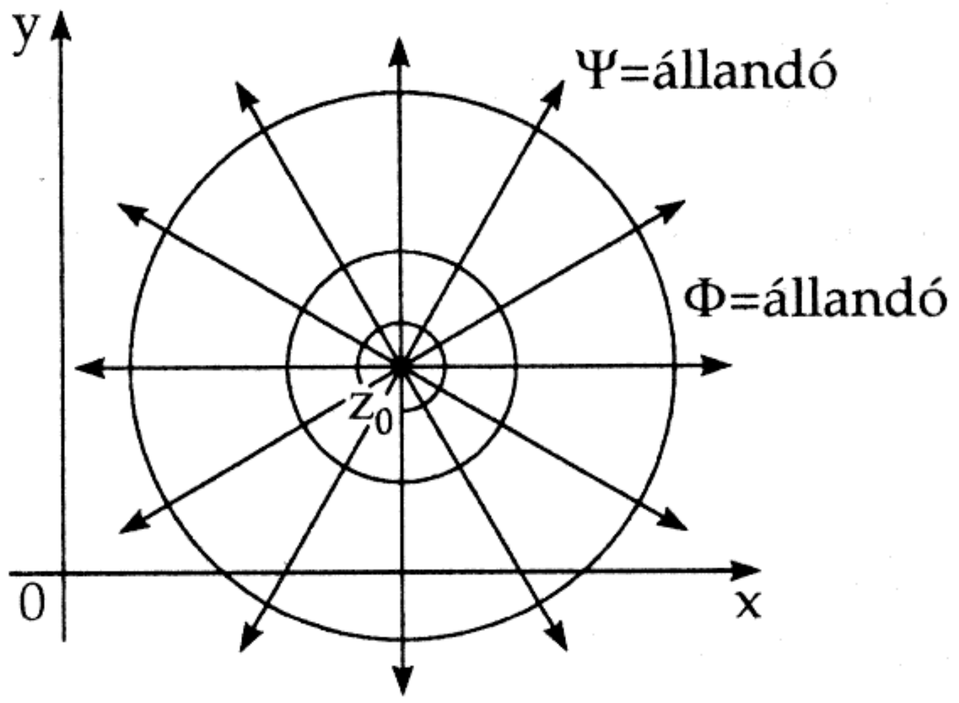
$$W = -\frac{e}{2\pi}\ln(z - z_0)\,. \quad (14.28)$$

Az erővonalak sugarasan indulnak ki a $z = z_0$ pontból, míg az ekvipotenciális vonalak a z_0 pont körüli koncentrikus körök **(14.26. ábra)**.

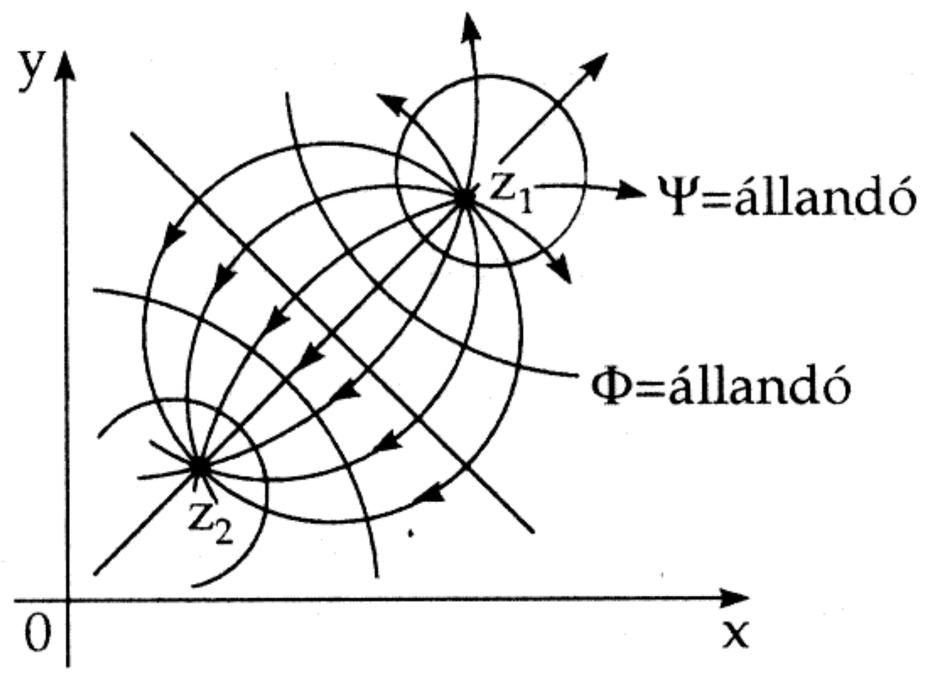
4. Egy forrás–nyelő-rendszer komplex potenciálja Ha egy forrás van a z_1 pontban és egy nyelő a z_2 pontban, és egyenlő intenzitásúak, akkor a komplex potenciált a kettő szuperpozíciójaként kapjuk:

$$W = \frac{e}{2\pi}\ln\frac{z - z_1}{z - z_2}\,. \quad (14.29)$$

A $\Phi =$ állandó ekvipotenciális vonalak APOLLÓNIUSZ-*köröket* alkotnak a z_1 és a z_2 pontokra vonatkozóan, a $\Psi =$ állandó erővonalak a z_1 és a z_2 pontokon átmenő körök **(14.27. ábra)**.



14.26. ábra.



14.27. ábra.

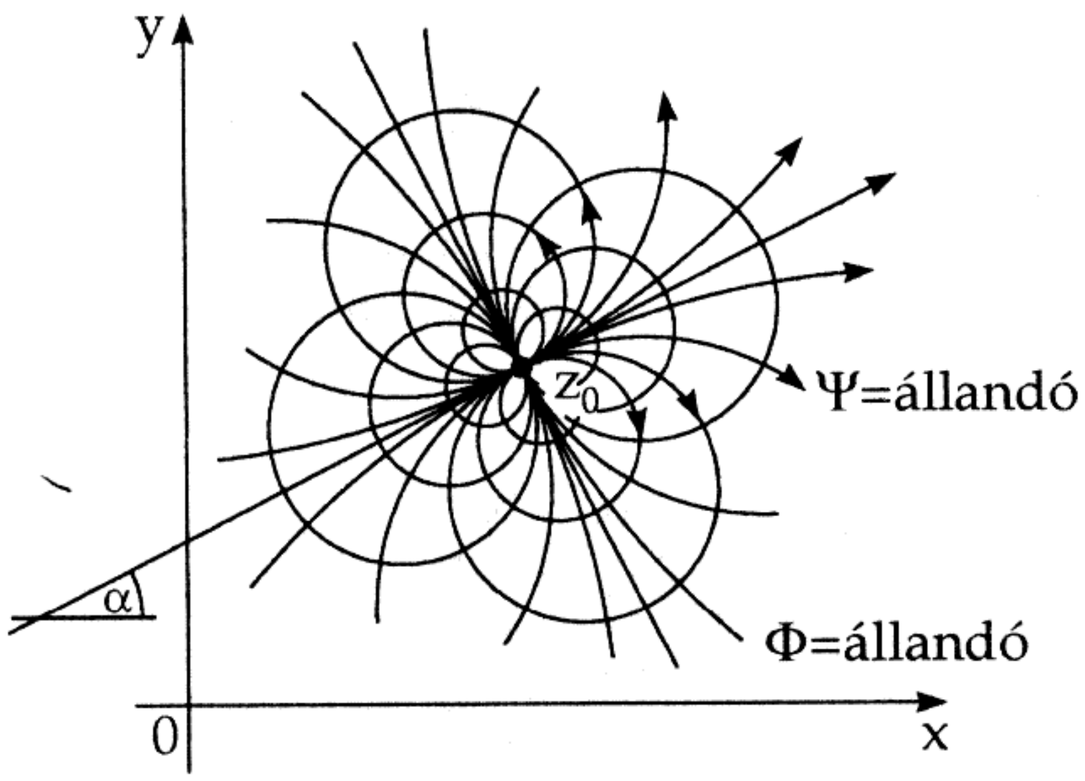
5. Dipólus komplex potenciálja A z_0 pontban lévő, a valós tengellyel α szöget bezáró dipólus komplex potenciálja ($M > 0$) **(14.28. ábra)**:

$$W = \frac{Me^{\mathrm{i}\alpha}}{2\pi(z - z_0)}\,. \tag{14.30}$$

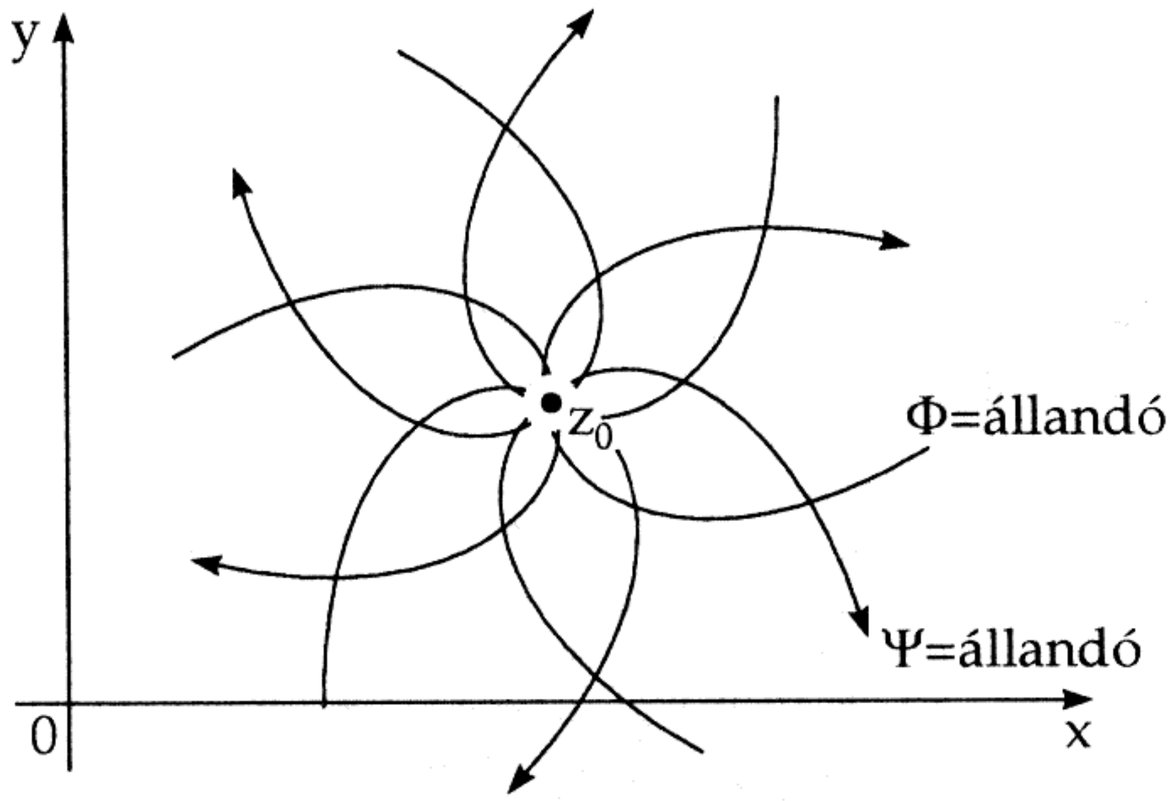
6. Örvény (rotáció) komplex potenciálja Ha az örvény intenzitása (a cirkuláció értéke): $|\Gamma|$ és Γ valós, valamint az örvény centruma a z_0 pontban van, akkor:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}} \ln(z - z_0)\,. \tag{14.31}$$

A **14.26. ábrával** összehasonlítva az erővonalak és az ekvipotenciális vonalak szerepe felcserélődik. Komplex Γ esetén (14.31) az örvényforrás potenciálját adja; ennek erő- és ekvipotenciális vonalai egy-egy (egymásra merőleges) spirálsereget alkotnak **(14.29. ábra)**.



14.28. ábra.



14.29. ábra.

14.1.3.5. A szuperpozíció elve

1. Komplex potenciálok szuperpozíciója

Több forrásból, nyelőből és örvényből álló mező potenciálja és áramfüggvénye kiszámítható az általuk létrehozott egyes mezők komplex potenciáljai, ill. áramfüggvényei összeadásával. Matematikailag tekintve ez a $\Delta\Phi = 0$ és $\Delta\Psi = 0$ LAPLACE-féle differenciálegyenletek linearitása miatt lehetséges.

2. Új mezők előállítása

1. Integráció Komplex alappotenciálokból az új mezők előállítása összeadáson kívül történhet a súlyfüggvények segítségével, integrálással is.

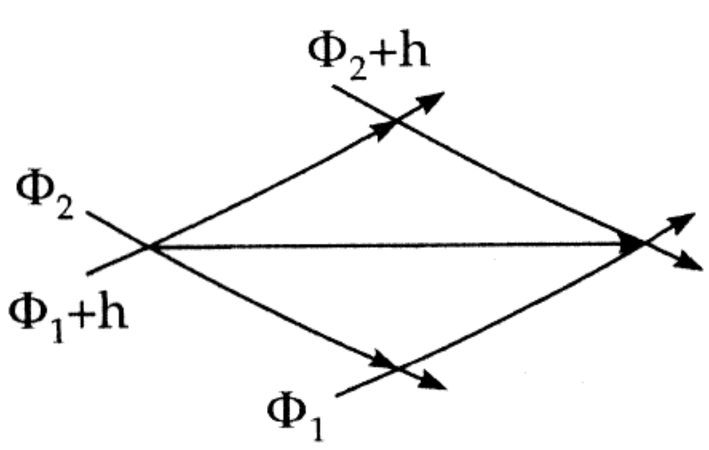
■ Legyen adott az l görbén a $\varrho(s)$ örvénysűrűség. A komplex potenciál deriváltjára felírhatunk egy CAUCHY-típusú integrált (lásd 715. old.):

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_l \frac{\varrho(\zeta)}{z_0 - \zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int \frac{\varrho^*(s)\, ds}{z_0 - \zeta(s)}, \tag{14.32}$$

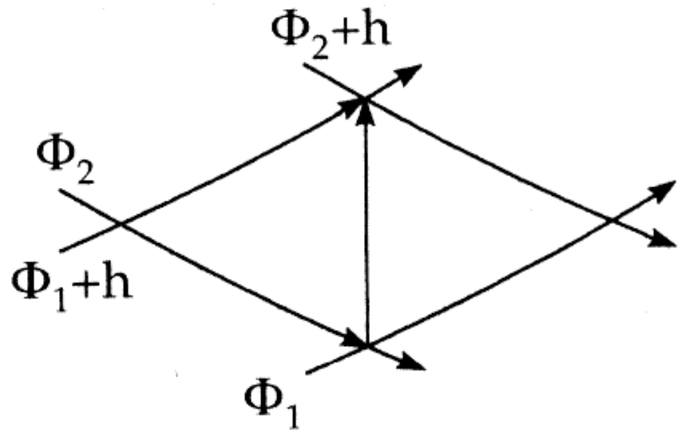
ahol $\zeta(s)$ az l görbe paraméteres előállítása, s az ívhossz paraméter.

2. Maxwell-féle átlós eljárás Egy Φ_1 és egy Φ_2 potenciálú mezőt kell szuperponálnunk. Az ekvipotenciális vonalak képét jelölje $[[\Phi_1]]$ és $[[\Phi_2]]$ úgy, hogy egyik potenciálvonaltól a másikig a potenciál értéke mindkét rendszerben ugyanazzal a h értékkel növekedjék, és úgy irányítsuk a vonalakat, hogy a nagyobb Φ-értékek mindenkor balra kerüljenek.

A $[[\Phi_1]]$ és $[[\Phi_2]]$ által alkotott háló elemi négyszöge a fenti feltételek értelmében paralelogramma. Az átló irányában haladó vonalak egy olyan mező $[[\Phi]]$ ekvipotenciális vonalainak a képét adják, amelynek potenciálja: $\Phi = \Phi_1 \pm \Phi_2$. A $[[\Phi_1 + \Phi_2]]$ képét megkapjuk, ha a paralelogramma irányított oldalait, mint vektorokat összeadjuk **(14.30.a ábra)**, a $[[\Phi_1 - \Phi_2]]$ képet pedig akkor, ha mint vektorokat kivonjuk őket **(14.30.b ábra)**. Az összetett potenciál értéke ugyancsak h értékkel ugrik az egyik ekvipotenciális vonalról a következőre való átmenetnél.



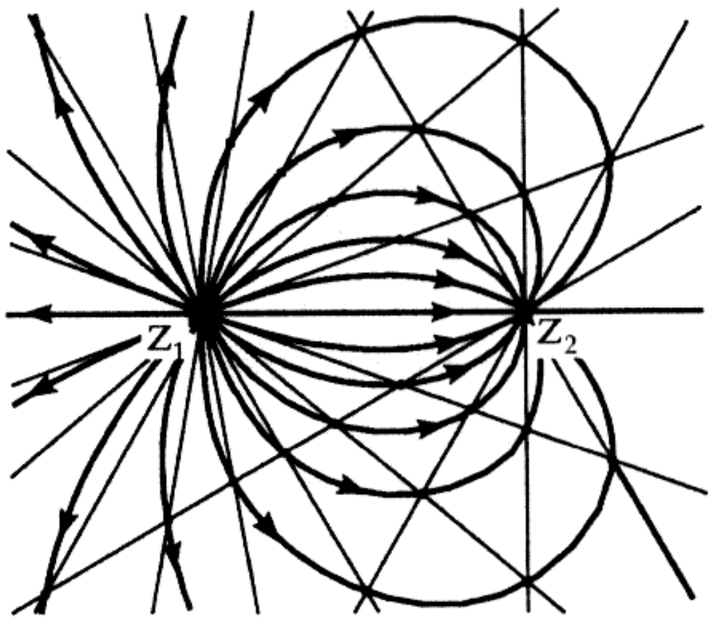
a)



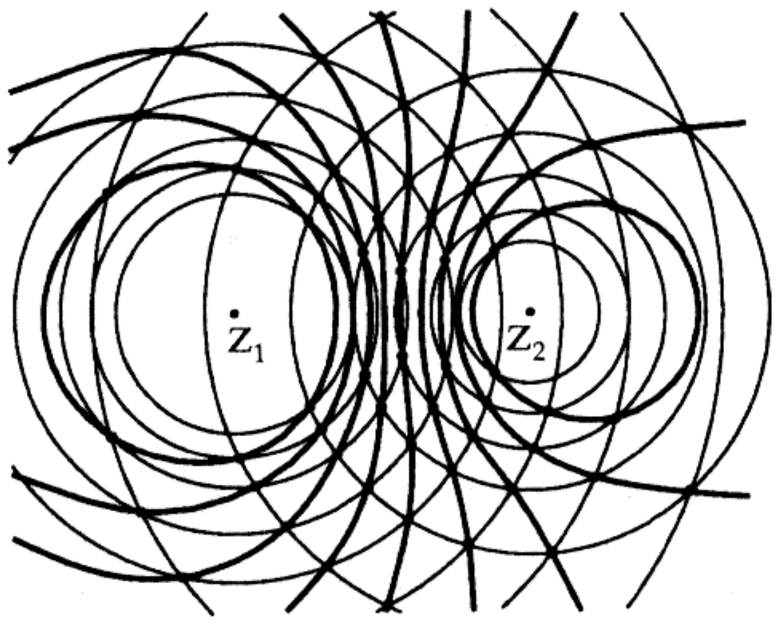
b)

14.30. ábra.

■ Egy forrás és egy nyelő erő- és ekvipotenciális-vonalainak térképe a **(14.31.a,b) ábrán** látható (az intenzitásuk aránya: $|e_1|/|e_2| = 3/2$) .



a)



b)

14.31. ábra.

14.1.3.6. A komplex számsík tetszőleges leképezése

Akkor mondjuk definiáltnak a

$$w = f(z = x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y) \tag{14.33a}$$

komplex függvényt, ha a valós változós $u = u(x, y)$ és $v = v(x, y)$ függvények definiáltak és ismertek egy közös értelmezési tartományon. Az $f(z)$ függvénynek nem kell analitikusnak lennie, mint ahogyan ez a konform leképezésnél követelmény.

A w függvény egy új komplex számsíkot határoz meg. Azt mondjuk, hogy a z-síkot leképezi a w-síkra, azaz minden z ponthoz egy neki megfelelő w pontot rendel.

a) Koordinátavonalak transzformációja Koordinátavonalakat az alábbiak szerint transzformálunk:

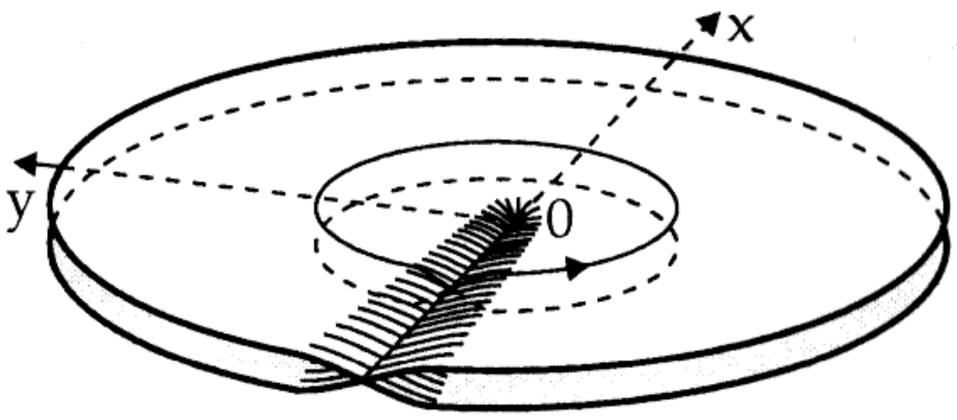
$$\begin{aligned} &y = c \longrightarrow u = u(x, c)\,, \quad v = v(x, c)\,, \qquad x \text{ itt paraméter}\,; \\ &x = c_1 \longrightarrow u = u(c_1, y)\,, \quad v = v(c_1, y)\,, \qquad y \text{ itt paraméter}\,. \end{aligned} \tag{14.33b}$$

b) Geometriai alakzatok transzformációja A z-sík geometriai alakzatai átmennek a w-sík geometriai alakzataiba:

$$x = x(t)\,,\ y = y(t) \quad \rightarrow \quad u = u(x(t), y(t)),\ v = v(x(t), y(t))\,, \quad t \text{ itt paraméter}\,. \tag{14.33c}$$

■ Ha $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ akkor az $y = c$ egyenesek átmennek a $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, tehát a $v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}c$, egyenesekbe. Az $x = c_1$ egyenesek átmennek a $v = 2u - 3c_1$ egyenesekbe **(14.5. ábra)**. A **14.5.a ábra** vonalkázott téglalapjának a képe a **14.5.b ábra** vonalkázással jelzett paralelogrammája lesz.

c) Riemann-felület Ha a $w = f(z)$ függvény nem egyértékű leképezés, hanem több különböző w értékhez tartozhat ugyanaz a z érték, akkor a leképezés több egymás fölött fekvő síkon ábrázolható egyértékűen. A szomszédosaknak van közös vonaluk; ha ezek mentén bemetszünk, majd két-két síkot összeillesztünk, akkor az így egymásra helyezett és összeillesztett síkokból álló felületet az $f(z)$ függvény *(többrétegű)* RIEMANN-*felület*ének nevezzük (lásd [14.16]).



14.32. ábra.

■ $w = z^2$. Miközben a $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ befutja az egész z-síkot, azaz a $-\pi \leq \varphi < \pi$ tartományt, a neki megfelelő $w = \varrho e^{\mathrm{i}\psi} = r^2 e^{\mathrm{i}2\varphi}$ w-érték kétszer futja be a w-síkot. Úgy képzelhetjük, hogy két w-síkot helyezünk egymásra. A két sík metszete a valós tengely negatív oldala **(14.32. ábra)** Ha ennek mentén bemetszünk, majd a vágás mentén a két síkot összeragasztjuk, akkor az így keletkezett egyetlen felületet a $w = z^2$ függvény Riemann-felületének nevezzük, amelynek az origó elágazási pontja.

14.2. Integrálás a komplex síkon

14.2.1. Határozott és határozatlan integrál

14.2.1.1. A komplex integrál definíciója

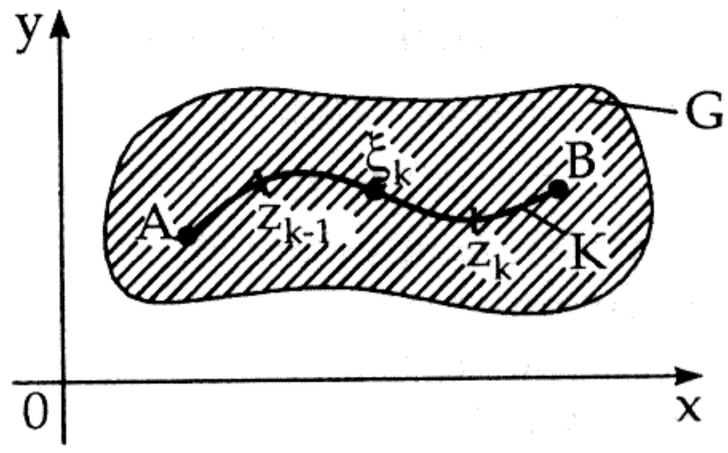
1. Határozott komplex integrál Az $f(z)$ függvény legyen folytonos a G tartományon, amelyen a K rektifikálható görbe az A és B pontokat köti össze. Az A és B pont között haladó görbét tetszés szerinti z_i osztópontokkal n számú ívrészre osztjuk fel **(14.33. ábra)**. Minden kis ívrészen választunk egy ξ_i pontot, és képezzük az alábbi közelítő összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta z_i \quad \text{ahol} \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}\,. \tag{14.34a}$$

Amennyiben $\Delta z_i \to 0$ és $n \to \infty$ esetén a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta z_i \tag{14.34b}$$

határérték a ξ_i osztópontok megválasztásától függetlenül létezik, akkor ez a határérték definiálja az $f(z)$ függvénynek a K görbe mentén vett A és B határpontok közti *határozott komplex integrálját*. Jelölése:



14.33. ábra.

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = (K) \int_{A}^{B} f(z)\, dz. \tag{14.35}$$

2. Határozatlan komplex integrál Ha a határozott integrál az integrációs úttól független (lásd 714. old.), akkor meghatározott feltételek mellett (14.2.2.1.) létezik $F(z)$, hogy:

$$F(z) = \int f(z)\, dz + C, \quad \text{azaz} \quad F'(z) = f(z)\,, \tag{14.36}$$

ahol C komplex integrációs állandó. Az $F(z)$ függvény neve *határozatlan (komplex) integrál.*

Az egyváltozós komplex elemi függvények határozatlan integrálját hasonló formulák szerint határozzuk meg, mint a nekik megfelelő egyváltozós, valós elemi függvényekét.

■ **A:** $\int \sin z\, dz = -\cos z + C\,.$ ■ **B:** $\int e^z\, dz = e^z + C\,.$

3. A határozott és határozatlan komplex integrál közötti összefüggés Ha az $f(z)$ függvénynek van határozatlan integrálja, akkor a határozott és határozatlan integrál közötti kapcsolat a következő (NEWTON–LEIBNIZ-formula):

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = \int_{A}^{B} f(z)\, dz = F(B) - F(A) \tag{14.37}$$

14.2.1.2. Komplex integrálok tulajdonságai és kiszámítási módja

1. A 2. típusú vonalintegrállal való hasonlóság A határozott komplex integrál ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint a 2. típusú vonalintegrál (lásd 472. old.):

a) Az integrációs út irányának megfordítása az integrál előjelének megváltoztatásához vezet.

b) Ha az integrációs utat több részre osztjuk, akkor az egész úton számított integrál egyenlő az egyes útszakaszokon számított integrálok összegével.

c) Összeg integrálja az integrálok összege, konstans az integrál alól kiemelhető.

2. Az integrálérték becslése Ha az $f(z)$ függvény abszolút értéke az s hosszúságú $\overset{\frown}{AB}$ integrációs út z pontjain nem vesz fel egy M pozitív számnál nagyobb értéket, akkor

$$\left| \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz \right| \le \int_{\overset{\frown}{AB}} |f(z)|\, ds \le Ms, \quad \text{ahol} \quad |f(z)| \le M, \text{ és az } \overset{\frown}{AB} \text{ görbe hossza} \le s. \tag{14.38}$$

3. Paraméteres alakban adott komplex integrálok számítása Ha $K = \overset{\frown}{AB}$ integrációs út az alábbi paraméteres alakban ismert:

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t), \tag{14.39}$$

és adott a kezdő- és végponthoz tartozó t érték: t_A és t_B, tehát $A = (x(t_A), y(t_A))$ és $B = (x(t_B), y(t_B))$, akkor a határozott komplex integrál két valós vonalintegrál kiszámításával határozható meg. Ehhez az integrandust valós és képzetes részre bontjuk, és azt kapjuk, hogy:

$$(K)\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^B (u\,dx - v\,dy) + \mathrm{i}\int_A^B (v\,dx + u\,dy)$$

$$= \int_A^B [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)]\,dt + \mathrm{i}\int_A^B [v(t)x'(t) + u(t)y'(t)]\,dt, \tag{14.40}$$

$$\text{ahol} \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}\,y\,. \tag{14.41}$$

A $(K)\int_A^B f(z)\,dz$ írásmód jelzi, hogy a határozott komplex integrált a K görbe mentén az A és B pontok között kell meghatározni. Gyakran használjuk ilyen esetben a $\int_{(K)} f(z)\,dz$, ill. $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ írásmódot is.

■ $I = \int_{(K)} (z - z_0)^n\,dz$ (n egész). A K görbe a z_0 pont körüli r_0 sugárú kör.

$x = x_0 + r_0\cos t$, $y = y_0 + r_0\sin t$, ahol $(0 \le t \le 2\pi)$. Ekkor a K görbe pontjai paraméteres alakban $= x + \mathrm{i}\,y = z_0 + r_0(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$, $dz = r_0(-\sin t + \mathrm{i}\cos t)\,dt$. Ezeknek az értékeknek a behelyettesítése és a MOIVRE-formula szerinti átalakítás után azt kapjuk, hogy:

$$I = r_0^{n+1}\int_0^{2\pi} (\cos nt + \mathrm{i}\sin nt)(-\sin t + \mathrm{i}\cos t)\,dt = r_0^{n+1}\int_0^{2\pi} [\mathrm{i}\cos(n+1)t - \sin(n+1)t]\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq -1\,, \\ 2\pi\mathrm{i}r_0^{n+1} & \text{ha } n = -1\,. \end{cases}$$

4. Az integrációs úttól való függetlenség Az egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett komplex függvénynek két fix A és B pontot összekötő egyszerű görbén vett integrálja bizonyos esetekben független ezen integrációs úttól. Ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy a függvény ezen a tartományon analitikus legyen, azaz eleget tegyen a CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenleteknek (14.4) és a valós és képzetes részeinek parciális deriváltjai legyenek folytonosak. Ekkor (14.37) érvényes.

Egy tartomány *egyszeresen összefüggő*, ha minden benne lévő zárt görbe belseje is a tartományban van. Ezzel ekvivalens, hogy minden benne lévő zárt görbe folytonosan összehúzható egy pontra a tartományban maradva.

5. Zárt úton vett komplex integrál Ha az egyszeresen összefüggő tartományon analitikus $f(z)$ függvényt a tartományban futó, K zárt görbe mentén integráljuk, akkor ennek az integrálnak az értéke a CAUCHY-féle integráltétel értelmében nulla (lásd 714. old.):

$$\oint f(z)\,dz = 0\,. \tag{14.35}$$

Ha ez a tartomány szinguláris pontot tartalmaz, akkor az integrált a reziduumtétel segítségével határozhatjuk meg (lásd 720. old.).

■ Az $f(z) = \dfrac{1}{z - a}$ függvénynek egy szinguláris pontja van, a $z = a$ helyen. Az integrál értéke az

óramutatóval ellentétes körüljárású, zárt, a-t megkerülő K úton: $\oint\limits_{(K)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi\mathrm{i}$ **(14.34. ábra)**.

14.2.2. Cauchy-féle integráltétel, a komplex függvénytan alaptétele

14.2.2.1. Cauchy-féle integráltétel egyszeresen összefüggő tartományokra

Ha az $f(z)$ függvény egy egyszeresen összefüggő tartományon analitikus, akkor igaz a következő két ekvivalens állítás:

a) Minden zárt K görbén vett integrálja nulla

$$\oint f(z)\,dz = 0\,. \tag{14.36}$$

b) Az $\int\limits_A^B f(z)\,dz$ integrál értéke független az A és B pontokat összekötő egyszerű görbe megválasztásától.

Ez az állítás a CAUCHY-*féle integráltétel*, vagy más néven *a komplex függvénytan alaptétele.*

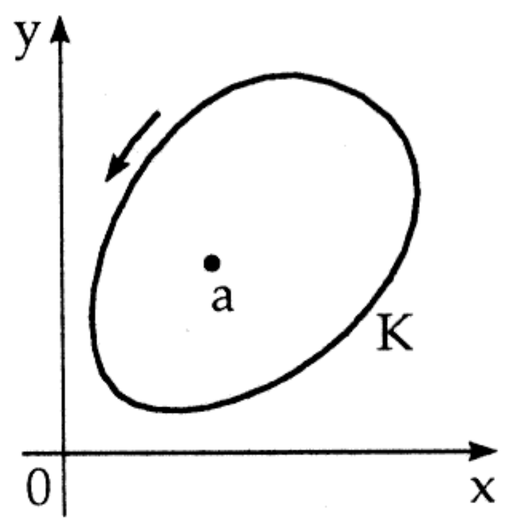
14.2.2.2. Cauchy integráltétele többszörösen összefüggő tartományokra

Legyenek K, K_1, K_2, ..., K_n egyszerű zárt görbék úgy, hogy a K görbe az összes K_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ görbét magában foglalja, de a többi K_ν közül már nem tartalmazza egyik a másikat a belsejében és nem is metszik egymást, továbbá legyen az f(z) függvény analitikus azon a G tartományon, amelyik tartalmazza az összes K_ν és a K görbét, valamint a K és K_ν-k közötti tartományt.(Ez azt jelenti, hogy a G tartomány legalább a **14.35. ábrán** látható bevonalkázott rész.) Ekkor fennáll:

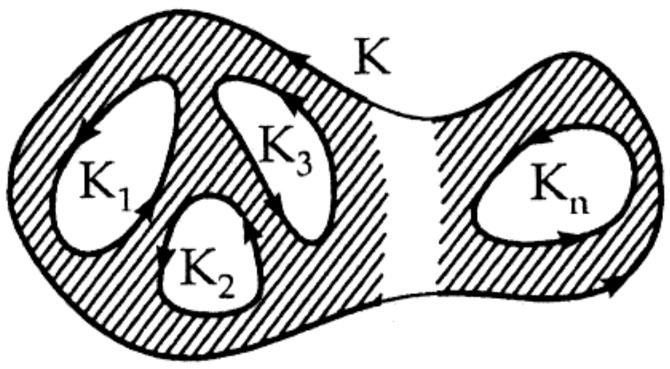
$$\oint\limits_{(K)} f(z)\,dz = \oint\limits_{(K_1)} f(z)\,dz + \oint\limits_{(K_2)} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{(K_n)} f(z)\,dz\,, \tag{14.37}$$

abban az esetben, ha az összes K, K_1, ..., K_n görbe ugyanúgy van irányítva, pl. az óramutató járásával egyezően.

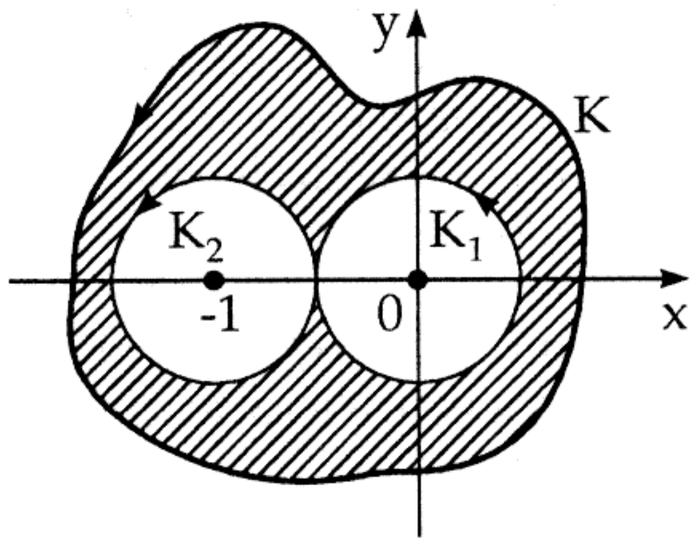
Ez a tétel alkalmas olyan zárt görbén való integrálok kiszámítására, amelyek belsejében az $f(z)$ függvénynek szinguláris pontjai is vannak (lásd 720. old.).



14.34. ábra.



14.35. ábra.



14.36. ábra.

■ Határozzuk meg az $\oint\limits_{(K)} \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz$ integrál értékét, ha a K görbe az origót és a $z = -1$ pontot is, mint belső pontot magában foglalja **(14.36. ábra)**. A CAUCHY-féle integráltétel értelmében a K görbén vett integrált a K_1 és K_2 görbén vett integrálok összegével helyettesíthetjük, ahol K_1 az origó körüli $r_1 = 1/2$ sugarú kör és K_2 a $z = -1$ középpontú $r_2 = 1/2$ sugarú kör. Az integrandust parciális

törtekre való bontással egyszerűbb alakra hozhatjuk. Így nyerjük azt kapjuk, hogy:
$\oint\limits_{(K)} \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = \oint\limits_{(K_1)} \frac{2\,dz}{z+1} + \oint\limits_{(K_2)} \frac{2\,dz}{z+1} - \oint\limits_{(K_1)} \frac{dz}{z} - \oint\limits_{(K_2)} \frac{dz}{z} = 0 + 4\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i} - 0 = 2\pi\mathrm{i}$. (Az integrálást vessük össze a 713. oldalon lévő példával.)

14.2.3. A Cauchy-féle integrálformulák

14.2.3.1. Analitikus függvény egy tartomány belsejében

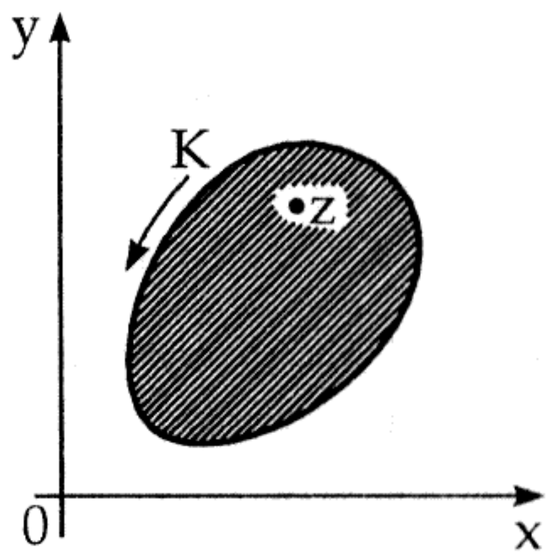
Ha az $f(z)$ függvény egy egyszerű zárt K görbén és e görbe által bezárt egyszeresen összefüggő tartományon analitikus, akkor ennek a tartománynak minden z belső pontjára **(14.37. ábra)** fennáll:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{(K)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad (\text{CAUCHY-}\textit{féle integrálformula}), \tag{14.38}$$

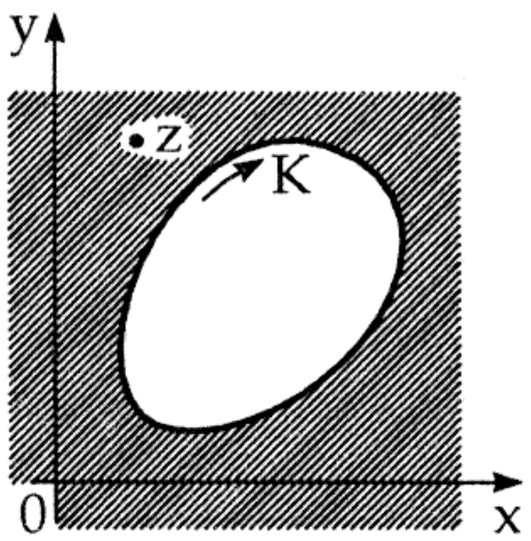
ha ξ a K görbét az óramutató járásával ellentétes irányban futja be. Így lehet egy analitikus függvénynek egy tartomány belsejében vett helyettesítési értékét a tartomány határán felvett függvényértékekkel kifejezni.
A (14.38) formulából következtethetünk egy G tartományon analitikus függvény n-edik deriváltjának létezésére és alakjára, mert az integrálkifejezést lehet a z paramétere szerint újra és újra deriválni:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{(K)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi\,, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{14.39}$$

Egy analitikus függvény ezek szerint tetszőlegesen sokszor deriválható. Ettől eltérően a valós függvények körében, ha egy függvény egyszer differenciálható, abból általában még nem következik, hogy ismételten is differenciálható.
A (14.38) és (14.39) egyenleteket CAUCHY-*féle integralformulák*nak nevezzük.



14.37. ábra.



14.38. ábra.

14.2.3.2. Analitikus függvény egy tartományon kívül

Amennyiben az $f(z)$ függvény a zárt K integrációs úton kívül az egész síkon analitikus, akkor ennek a (külső) tartománynak a pontjaiban is megkaphatjuk f és minden deriváltja értékét a (14.38), (14.39) CAUCHY-féle formulákkal, de a K zárt integrációs út görbéjét az óramutató járásával egyező irányítottságúnak kell vennünk **(14.38. ábra)**.
A CAUCHY-féle integrálformulák segítségével sok valós határozott integrál értéke is kiszámítható (lásd 721. old.).

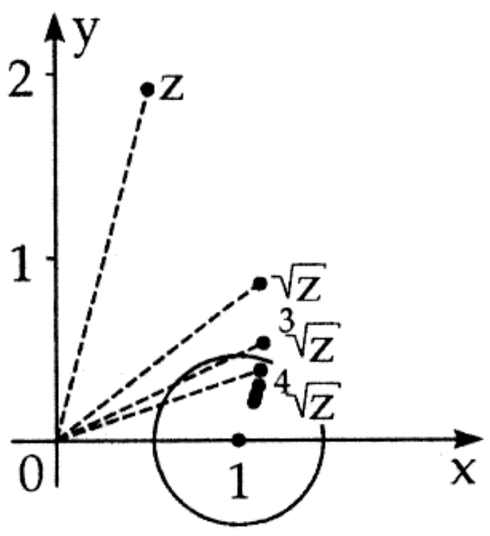
14.3. Analitikus függvények hatványsorba való fejtése

14.3.1. Komplex tagú sorok konvergenciája

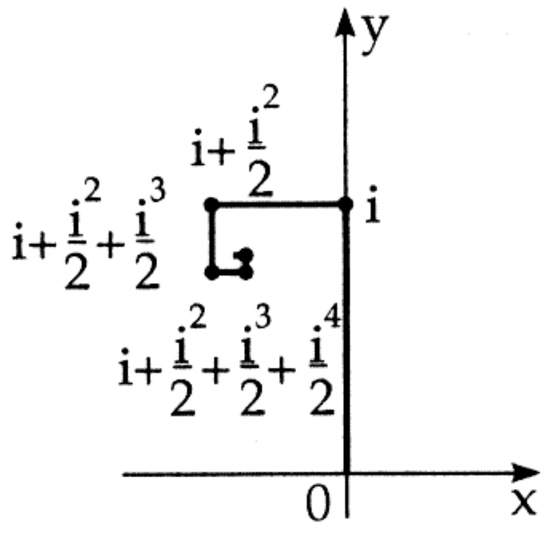
14.3.1.1. Komplex tagú sorozatok konvergenciája

A $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ komplex számok végtelen sorozatának határértéke z $(z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n)$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz bizonyos $n = n(\varepsilon)$-tól kezdve a $|z - z_n| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $z_n, z_{n+1}, \ldots$ számoknak megfelelő minden pont a z középpontú, ε sugarú kör belsejében van.

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{a}\} = 1$ minden $a \neq 0$ komplez számra is. Az $\{\sqrt[n]{a}\}$ kifejezésen a legkisebb nemnegatív argumentumú n-edik gyökét értjük **(14.39. ábra)**.



14.39. ábra.



14.40. ábra.

14.3.1.2. Komplex tagú végtelen sor konvergenciája

Az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ sorozat tart az s számhoz, a sor összegéhez, ha

$$s = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,. \tag{14.40}$$

Ha töröttvonallal összekötjük a z sík azon pontjait, amelyeket az $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ részletösszegek határoznak meg, akkor a sor konvergeciája azt jelenti, hogy a töröttvonal végpontja közelít az s számhoz.

■ **A:** $\mathrm{i} + \dfrac{\mathrm{i}^2}{2} + \dfrac{\mathrm{i}^3}{3} + \dfrac{\mathrm{i}^4}{4} + \cdots$. ■ **B:** $\mathrm{i} + \dfrac{\mathrm{i}^2}{2} + \dfrac{\mathrm{i}^3}{2^2} + \cdots$ **(14.40. ábra)**.

*Abszolút konvergenciá*ról beszélünk, (■ **B**), ha a tagok abszolútértékeiből alkotott $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots$ sor is konvergens, *feltételes konvergenciá*ról, (■ **A**), ha a sor konvergens, de a tagok abszolút értékéből alkotott sor divergens.

Ha egy

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{14.41}$$

sor tagjai az $f_i(z)$ függvények, akkor a sor összege egy $f(z)$ függvény, amelynek értelmezési tartományát olyan z számok alkotják, amelyekre az $f_i(z)$ helyettesítési értékekből álló sor konvergens és összege az $f(z)$ megfelelő értéke.

14.3.1.3. Komplex tagú hatványsorok

1. Konvergencia A komplex hatványsor alakja:

$$P(z - z_0) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots\,, \tag{14.42a}$$

ahol z_0 a komplex sík egy rögzített pontja, az a_ν együtthatók komplex számok. Amennyiben $z_0 = 0$, a hatványsor alakja a következő:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{14.42b}$$

Ha a $P(z - z_0)$ hatványsor konvergens z_1-ben, akkor abszolút konvergens minden olyan z-ben, amelyik a z_0 középpontú, $r = |z_1 - z_0|$ sugarú körön belül van és a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens a körön belüli minden zárt halmazon.

2. Konvergenciakör A hatványsor konvergenciatartománya és divergenciatartománya között van egy egyértelműen meghatározott kör, a konvergenciakör. A sugarát úgy határozzuk meg, mint a valós esetben:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}; \qquad \text{ez} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ ha ezen utóbbi határérték létezik.} \tag{14.43}$$

Ha a sor a $z = z_0$ pont kivételével mindenütt divergens, akkor $r = 0$, ha a sor mindenütt konvergens, akkor $r = \infty$. A hatványsor viselkedését a konvergenciakör kerületén lévő pontok esetén minden esetben külön meg kell vizsgálni.

■ A $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hatványsor (konvergenciakörének sugara $r = 1$) divergens, ha $z = 1$ (harmonikus sor) és konvergens, ha $z = -1$ (LEIBNIZ alternáló sorokra vonatkozó kritériuma szerint). A $|z| = 1$ egységkör minden további pontjában a sor konvergens.

3. A hatványsorok deriváltjai és a konvergenciakör A konvergenciakörén belül minden hatványsor analitikus függvény. Ennek a függvénynek a deriváltjait a hatványsor tagonkénti deriválásával nyerjük. A derivált sorok konvergenciakörének sugara ugyanaz, mint az eredeti soré.

4. A hatványsorok integrálása és a konvergenciakör A $g(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ integrál hatványsorba-fejtését az $f(z)$ z_0 körüli hatványsorának tagonkénti integrálásával nyerjük. A konvergenciakör sugara változatlan marad.

14.3.2. Taylor-sorok

Minden olyan $f(z)$ függvény, amely egy G tartomány belsejében analitikus, a G tartomány bármelyik z_0 pontja körül egyértelműen a következő alakú hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{(TAYLOR-}sor\text{)}, \tag{14.44a}$$

ahol a konvergenciakör a z_0 pont körüli maximális sugarú (ami ∞ is lehet) kör, ami még a G tartományban van **(14.41. ábra)**. A hatványsor a_n együtthatói:

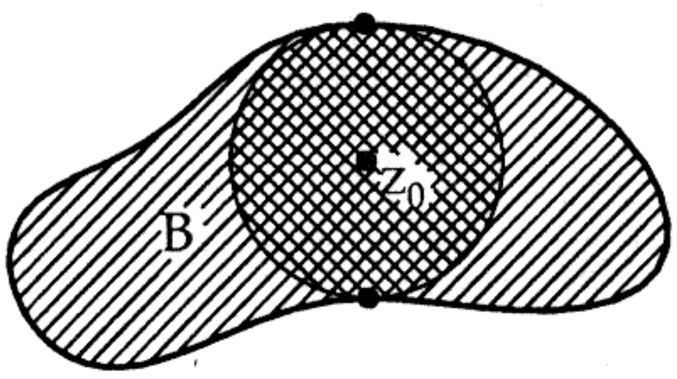
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{14.44b}$$

A TAYLOR-sor tehát a következő alakban írható fel:

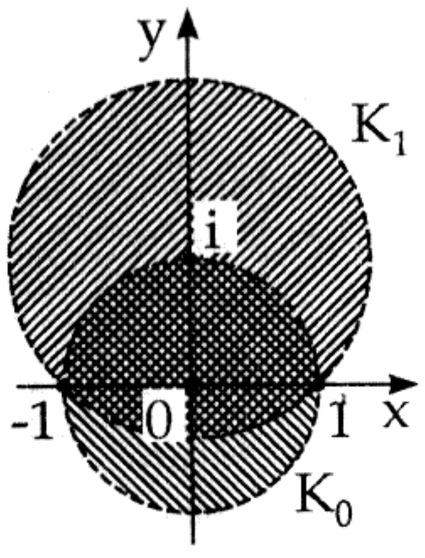
$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots \tag{14.44c}$$

A konvergenciakörén belül minden hatványsor az összegfüggvényének a TAYLOR-sora.

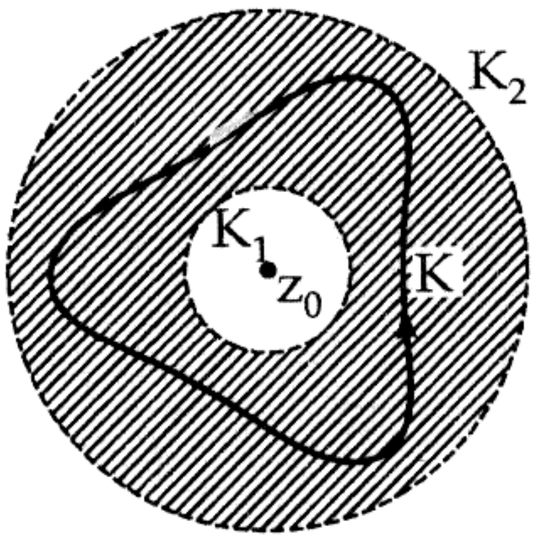
■ A TAYLOR-sorokra vonatkozó példák a 14.5.2. fejezetben vannak (e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$).



14.41. ábra.



14.42. ábra.



14.43. ábra.

14.3.3. Az analitikus folytatás elve

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor két hatványsor z_0 pont körüli K_0 konvergenciakörének és z_1 pont körüli K_1 konvergenciakörének van közös része **(14.42. ábra)**. A két függvény:

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{és} \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n . \tag{14.45a}$$

A konvergenciakörök közös tartományában legyen:

$$f_0(z) = f_1(z) . \tag{14.45b}$$

Ekkor a két hatványsor ugyanannak az $f(z)$ analitikus függvénynek a z_0 és z_1 pontok körüli TAYLOR-sora. Az $f_1(z)$ függvényt a csak K_0-ban definiált $f_0(z)$ függvény *analitikus folytatás*ának hívjuk a K_1-ben (a definíció a két függvényre szimmetrikus). ◦

■ Az $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mértani sor (a K_0 konvergenciakör sugara: $r_0 = 1$, középpontja: $z_0 = 0$) és az $f_1(z) = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \right)^n$ lényegében mértani sor (a K_1 konvergenciakör sugara: $r_1 = \sqrt{2}$, középpontja: $z_1 = \mathrm{i}$) összegfüggvénye a konvergenciaköreik metszetén (a **14.42. ábrán** kettőzve vonalkázott területen, $z \neq 1$); ugyanaz az $f(z) = 1/(1-z)$ analitikus függvény. Ezért $f_1(z)$ analitikus folytatása $f_0(z)$-nek a K_0-ból a K_1-be (és fordítva).

14.3.4. Laurent-sorfejtés

Minden olyan $f(z)$ függvény, amelyik analitikus két koncentrikus kör körgyűrűjében (középpont: z_0, sugarak: $r_1 < r_2$) egy általánosított hatványsorba, LAURENT-sorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots + a_k (z - z_0)^k + \cdots . \tag{14.46a}$$

Az a_n komplex együtthatók az alábbi formulával határozhatók meg:

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{(K)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{14.46b}$$

K-val olyan zárt integrációs utat jelölünk, ami a körgyűrűtartományon ($r_1 < |z| < r_2$) belül fekszik, megkerüli z_0-t és befutási iránya ellentétes az óramutató járásával **(14.43. ábra)**. Ha az $f(z)$ függvény a körgyűrűnél bővebb D tartományban analitikus, akkor a LAURENT-*sor* konvergenciatartománya D tartományban a z_0 körüli legbővebb körgyűrű.

■ Az $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvény az $1 < |z| < 2$ gyűrűtartományban analitikus. Határozzuk meg LAURENT-sorát. Az $f(z)$ függvényt parciális törtekre való bontással $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ alakra hozzuk. Egyszerű átalakítással ezt a két tagot, mint geometriai sor összegét tudjuk felírni, melyek különkülön a $|z| > 1$, illetve a $|z| < 2$, együtt az $1 < |z| < 2$ gyűrűtartományban konvergensek. Így azt kapjuk, hogy:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)} - \frac{1}{2\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}}_{|z|>1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n}_{|z|<2}$$

(az egyes szummák alá írtuk a konverganciatartományaikat).

14.3.5. Izolált szinguláris pontok és a reziduumtétel

14.3.5.1. Izolált szinguláris pontok

Ha az $f(z)$ függvény egy z_0 pont környezetében analitikus, de magában a z_0 pontban nem, akkor a z_0 pont az $f(z)$ függvénynek *izolált szinguláris pontja (szingularitása)*. Ha az $f(z)$ függvény a z_0 pont környezetében az

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{14.47}$$

LAURENT-sorba fejthető, akkor az ilyen izolált szinguláris pontokat a LAURENT-sor típusa szerint osztályozhatjuk:

1. Ha a LAURENT-sor nem tartalmazza $(z - z_0)$ negatív kitevős hatványait, (vagyis, ha $n < 0$ esetén $a_n = 0$), akkor a LAURENT-sor TAYLOR-sorba megy át. Az együtthatókat a CAUCHY-féle integrálformulák segítségével kapjuk:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{(K)} (\xi - z_0)^{-n-1} f(\xi)\, d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{14.48}$$

Ha f értelmezett a z_0-ban és $f(z_0) = a_0$, akkor az $f(z)$ függvény a z_0 ponttal kibővített tartományon is analitikus; ha nem, akkor z_0 megszüntethető szinguláris pontja.

2. Amennyiben a LAURENT-sorban véges sok negatív kitevőjű $(z - z_0)$ kifejezést tartalmazó tag van (ha $n < m < 0$ esetén $a_m \neq 0$, de minden $a_n = 0$) akkor a z_0 *m-edrendű pólus* vagy *m-szeres pólus*. Ha a $(z - z_0)^m$ tényezővel (m-nél kisebb hatvány nem elég) szorzunk, akkor $f(z)$ olyan függvénybe megy át, amelyik z_0 környezetében (tehát z_0-ban is) analitikus.

■ Az $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ függvénynek a $z = 0$ helyen elsőrendű pólusa van.

3. Ha a LAURENT-sor végtelen sok negatív kitevőjű $(z - z_0)$ tagot tartalmaz, akkor z_0 az $f(z)$ függvény lényegesen szinguláris pontja.
Egy pólushoz való közelítésnél $|f(z)|$ minden határon túl növekszik. Egy lényeges szingularitás bármilyen környezetében $f(z)$ értékkészletéből legfeljebb egy érték maradhat ki.

■ Az $f(z) = e^{1/z}$ függvény LAURENT-sora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \dfrac{1}{z^n}$. Ennek a függvénynek a $z = 0$ pont lényegesen szinguláris pontja.

14.3.5.2. Meromorf függvények

Ha egy egyébként holomorf függvény véges szinguláris pontjai csak pólusok, akkor a függvény *meromorf*. A meromorf függvény mindig felírható két analitikus függvény hányadosaként.

■ Az egész síkon meromorf függvényekre példák azok a racionális függvények, amelyeknek csak véges számú pólusa van, valamint olyan transzcendens függvények, mint pl. a $\operatorname{tg} z$ és $\operatorname{ctg} z$.

14.3.5.3. Elliptikus függvények

Az elliptikus függvények kétszeresen periodikusak és szingularitásaik pólusok, azaz meromorf függvények két független periódussal (lásd 730. old.). Ez azt jelenti, hogy ha a két periódus ω_1 és ω_2, akkor a hányadosuk nem valós, azaz

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \operatorname{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) \neq 0)\,. \tag{14.49}$$

Az $f(z)$ függvény minden értékét felveszi, pl. azon a paralelogrammán, amelynek csúcspontjai: $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$.

14.3.5.4. Reziduum

Az $f(z)$ függvény LAURENT-sorában a $(z-z_0)^{-1}$ hatvány a_{-1} együtthatóját az $f(z)$ *függvény* z_0 *izolált szinguláris pontjához tartozó reziduumának* hívjuk:

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{(K)} f(\xi)\, d\xi\,. \tag{14.50a}$$

Ha z_0 m-edrendű pólus, akkor a hozzá tartozó reziduumot a következő formula segítségével is kiszámíthatjuk:

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m]. \tag{14.50b}$$

Ha a függvény $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ hányadosalakban írható fel, ahol a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ a $z = z_0$ pontban analitikusak és z_0 pont a $\psi(z) = 0$ egyenlet egyszeres gyöke, azaz $\psi(z_0) = 0$, de $\psi'(z_0) \neq 0$ és $\varphi(z_0) \neq 0$, akkor a $z = z_0$ pont elsőrendű pólusa az $f(z)$ függvénynek. (14.50b)-ből adódik:

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\,. \tag{14.50c}$$

Általánosabban, ha $\varphi(z_0) \neq 0$ és z_0 a $\psi(z) = 0$ egyenletnek m-szeres gyöke, azaz, ha $\psi(z_0) = \psi'(z_0) = \ldots = \psi^{(m-1)}(z_0) = 0$, $\psi^{(m)}(z_0) \neq 0$, akkor a $z = z_0$ pont az $f(z)$-nek m-szeres pólusa.

14.3.5.5. Reziduumtétel

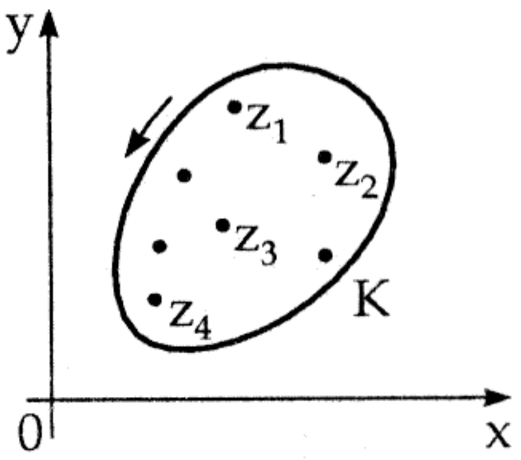
A reziduumok segítségével kiszámítható az izolált szinguláris pontokat körülvevő zárt úton vett integrál értéke **(14.44. ábra)**.

Ha az $f(z)$ függvény a K egyszerű, zárt görbe által határolt egyszeresen összefüggő G tartományon a véges számú $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ pont kivételével analitikus, akkor a zárt K görbén az óramutató járásával ellentétes irányban vett integrál értékét megkapjuk, ha a szinguláris pontokhoz tartozó reziduumok összegét szorozzuk 2πi-vel:

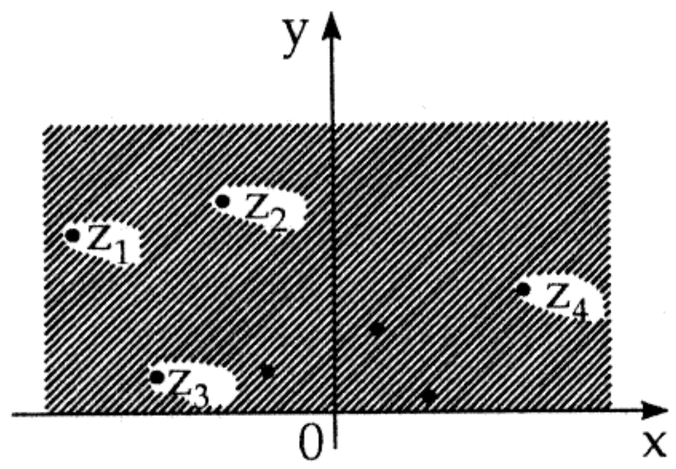
$$\oint\limits_{(K)} f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res} f(z)\,|_{z=z_k}\,. \tag{14.51}$$

■ Az $f(z) = e^z/(z^2+1)$ függvénynek a $z_{1,2} = \pm \mathrm{i}$ helyeken elsőrendű pólusa van. A hozzátartozó reziduumok összege $\sin 1$. Így, ha K az origó középpontú, $r > 1$ sugarú kör, akkor $\oint\limits_{(K)} \dfrac{e^z}{z^2+1}\, dz =$

$= 2\pi \mathrm{i} \sin 1$.



14.44. ábra.



14.45. ábra.

14.4. Valós integrálok meghatározása komplex integrálokkal

14.4.1. A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazása

A CAUCHY-féle integrálformulákkal ki lehet számítani valós határozott integrálok értékét is.

■ Az $f(z) = e^z$ függvény a teljes z-síkon analitikus. A (14.38) CAUCHY-féle integrálformulát használjuk, a K integrációs út egy z középpontú és r sugarú kör. A kör egyenlete: $\xi = z + re^{\mathrm{i}\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. (14.38) értelmében azt kapjuk, hogy:

$$e^z = (e^z)^{(n)} = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{(K)} \frac{e^\xi}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{(z+re^{\mathrm{i}\varphi})}}{r^{n+1}e^{\mathrm{i}\varphi(n+1)}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{z+r\cos\varphi+\mathrm{i}r\sin\varphi-\mathrm{i}n\varphi}\, d\varphi\,, \text{ úgyhogy } z = 0\text{-ra } \frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi+\mathrm{i}(r\sin\varphi-n\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\cos(r\sin\varphi - n\varphi)]\, d\varphi + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}[\sin(r\sin\varphi - n\varphi)]\, d\varphi\,.$$

Az integrálok értékei valósak és a kifejezés egy valós számmal egyenlő, tehát a képzetes rész nulla, amiből $\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}$.

14.4.2. A reziduumtétel alkalmazása

A reziduumtétel segítségével sok egyváltozós függvény határozott integrálját ki lehet számítani. Amennyiben az $f(z)$ függvény a komplex számsík zárt felső félsíkján analitikus, kivéve a valós tengely fölött elhelyezkedő $z_1, z_2, \ldots, z_n$ szinguláris pontokat **(14.45. ábra)**, és ha a $z = \infty$ legalább másodrendű zérushelye f-nek, tehát ha az $f(1/z) = 0$ egyenlet egyik gyökének a multiplicitása $m > 2$ (lásd 43. old.), akkor igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_i}\,. \tag{14.52}$$

■ Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ integrál értékét. Az $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^3} = \frac{z^6}{(z^2+1)^3} = 0$ egyenletnek $z = 0$ hatszoros gyöke. Az $\frac{1}{(1+z^2)^3}$ függvénynek a felső félsíkon egyetlen szinguláris pontja van: $z = \mathrm{i}$, ez háromszoros pólus, mert az $(1+z^2)^3 = 0$ egyenletnek két háromszoros gyöke van: i és $-\mathrm{i}$. A reziduumot (14.50b) szerint számítva: $\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3|_{z=\mathrm{i}}} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-\mathrm{i})^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z=\mathrm{i}}$. A parciális deriválást elvégezve $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{1+z^2}\right)^3 = \frac{d^2}{dz^2}(z+\mathrm{i})^{-3} = 12(z+\mathrm{i})^{-5}$; azt kapjuk, hogy $\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3|_{z=\mathrm{i}}} = 6(z+\mathrm{i})^{-5}|_{z=\mathrm{i}} = \frac{6}{(2\mathrm{i})^5} = -\frac{3}{16}\mathrm{i}$, és (14.52) szerint $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{3}{16}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{8}\pi$. Megjegyzendő, hogy megszámlálhatóan sok izolált szinguláris pont esetén is igaz az állítás, amennyiben (14.52) jobb oldala abszolút konvergens. Továbbá valójában az a feltétel, hogy létezzen olyan R, M és δ pozitív szám, hogy $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > R$ esetén $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. A reziduumtétel további alkalmazásait lásd pl. [14.18].

14.4.3. A Jordan-lemma alkalmazásai

14.4.3.1. Jordan-lemma

Sok esetben valós improprius integrálokat meghatározhatunk nemkorlátos tartományon, zárt görbén kiszámolt komplex integrálok segítségével. Hogy csak egyszer kelljen elvégeznünk a mindig előadódó becsléseket, a JORDAN-*lemmát* alkalmazzuk, ami improprius integrálok esetén az alábbi alakra vonatkozik:

$$\int\limits_{(K_R)} f(z)e^{\mathrm{i}\alpha z}\,dz \tag{14.53a}$$

ahol K_R a z-sík felső felén elhelyezkedő, origó középpontú R sugarú félkör **(14.46. ábra)**. A JORDAN-lemmában a következő eseteket különböztetjük meg:

a) $\alpha > 0$: Ha $|z| \to \infty$ esetén $f(z)$ a felső félsíkon és a valós tengelyen egyenletesen tart a nullához, akkor $R \to \infty$ esetén

$$\int\limits_{(K_R)} f(z)e^{\mathrm{i}\alpha z}\,dz \to 0\,. \tag{14.53b}$$

b) $\alpha = 0$: Ha $|z| \to \infty$ esetén $zf(z)$ egyenletesen tart nullához, akkor a fenti állítás változatlanul igaz.

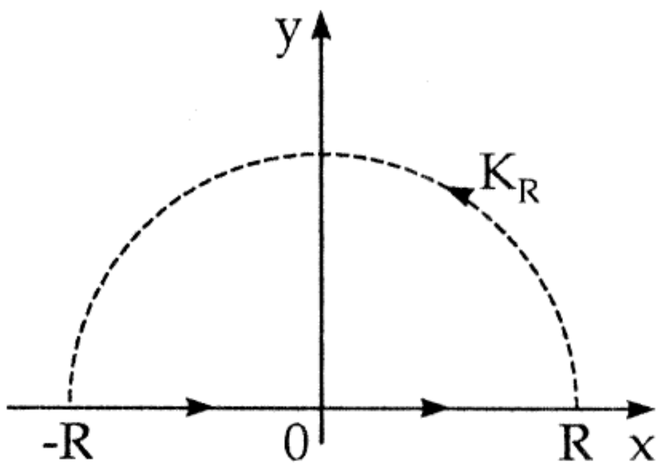
c) $\alpha < 0$: A megfelelő állítás most is igaz, ha a félkör a valós tengely alatt helyezkedik el.

d) Az állítás akkor is igaz, ha egy teljes félkör helyett csak egy körívről van szó.

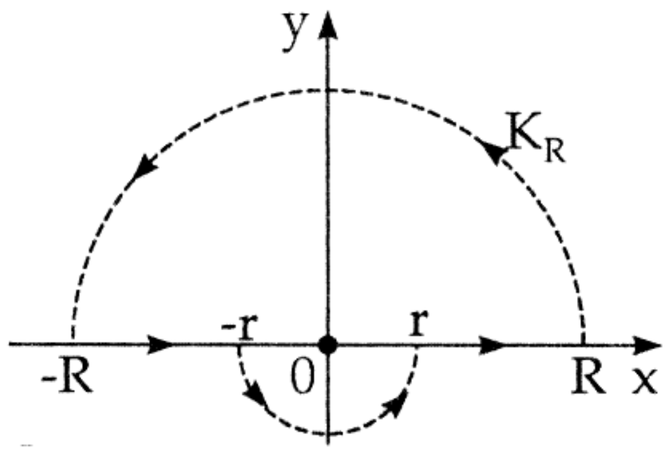
e) A megfelelő állítás a következő alakú integrálra is igaz:

$$\int\limits_{(K_R^*)} f(z)e^{\alpha z}\,dz, \tag{14.53c}$$

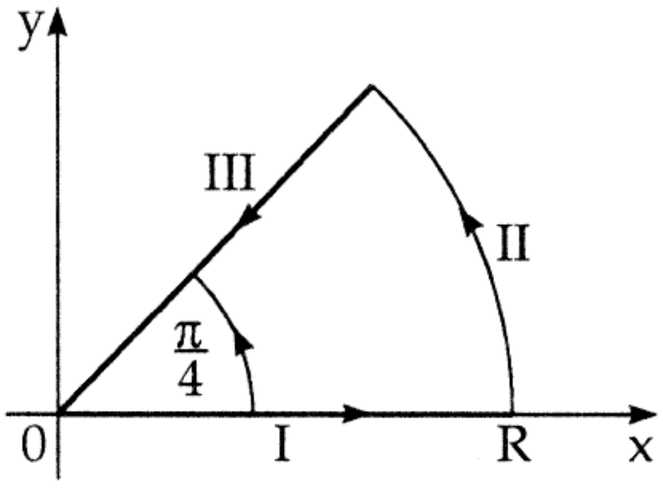
ha K_R^* a bal félsíkon fekvő félkört vagy körívet jelöl és $\alpha > 0$, ill. ha a jobb félsíkon van és $\alpha < 0$.



14.46. ábra.



14.47. ábra.



14.48. ábra.

14.4.3.2. Példák a Jordan-lemma alkalmazására

1. Az $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^2+a^2}\,dx$ integrál meghatározása

A keresett valós integrálhoz az alábbi komplex integrált rendeljük:

$$2\mathrm{i}\int_0^R \underbrace{\frac{x\sin\alpha x}{x^2+a^2}}_{\text{páros függvény}}dx = \mathrm{i}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin\alpha x}{x^2+a^2}\,dx + \underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{x\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx}_{=0\,,\text{ mivel az integrandus páratlan függvény}} = \int_{-R}^{R}\frac{xe^{\mathrm{i}\alpha x}}{x^2+a^2}\,dx\,.$$

Az utolsó integrál az $\oint\limits_{(K)} \frac{ze^{\mathrm{i}\alpha z}}{z^2+a^2}\,dz$ komplex integrál „része", a K görbe a fent definiált K_R félkörív és a valós tengely $-R$ és R közötti része egyesítve $(R > |a|)$. A komplex integrandusnak a felső félsíkon csak a $z = a\,\mathrm{i}$ szingularitása, ami elsőrendű pólus, mert a nevező deriváltja már nem 0 $a\mathrm{i}$-ben. A reziduumtétel szerint: $I = \oint\limits_{(K)} \frac{ze^{\mathrm{i}\alpha z}}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\lim\limits_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{ze^{\mathrm{i}\alpha z}}{z^2+a^2}(z-a\mathrm{i})\right] = 2\pi\mathrm{i}\lim\limits_{z\to a\mathrm{i}}\frac{ze^{\mathrm{i}\alpha z}}{z+a\mathrm{i}} = \pi\mathrm{i}e^{-\alpha a}$,

tehát $I = I_1 + I_2 = \int\limits_{(K_R)} \frac{ze^{\mathrm{i}\alpha z}}{z^2+a^2}\,dz + \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{\mathrm{i}\alpha x}}{x^2+a^2}\,dx = \pi\mathrm{i}e^{-\alpha a}$. A JORDAN-lemma szerint $\lim\limits_{R\to\infty} I_1 = 0$,

így $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha a} \quad (\alpha > 0\,,\ \ a \geq 0)\,.$

Hasonló módon számítható ki a **21.6. táblázat** többi integrálja.

2. Integrálszinusz

*Integrálszinusz*nak hívjuk az $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrált (lásd 467. old.) is. Az előző feladathoz hasonlóan az $I = \int\limits_K \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz$ komplex integrált vizsgáljuk, ahol a K görbe a **14.47. ábrán** látható. A komplex integrál integrandusának megint elsőrendű pólusa van a $z = 0$ helyen, így az r sugarú körön a már megszokott helyettesítéssel:

$I = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}z\right] = 2\pi\mathrm{i}\,,$ tehát $I = 2\mathrm{i}\int\limits_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + \mathrm{i}\int\limits_\pi^{2\pi} e^{\mathrm{i}r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}\,d\varphi + \int\limits_{K_R}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz = 2\pi\mathrm{i}$. Ha áttérünk az $R\to\infty$, $r\to 0$ határértékekre, akkor észrevehető, hogy a második integrál integrandusa $r\to 0$ esetén egyenletesen tart 1-hez, tehát az $r\to 0$ határértékre való áttérés az integráljelen belül is elvégezhető (pontosan úgy, ahogy 14.1.3.2. **9. A** példájában a felső félkörön vett $\varepsilon\to 0$ esetben) és így figyelembe véve JORDAN lemmáját:

$$2\mathrm{i}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \pi\mathrm{i} = 2\pi\mathrm{i}\,,\ \text{ tehát }\quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{14.54}$$

ami tehát bizonyítja is az improprius integrál konvergenciáját (természetesen ez valós módszerekkel is igazolható).

3. Ugrásfüggvény integrálja

Néha szakadásos valós függvényeket komplex is integrálokkal és a JORDAN-lemmával számíthatunk ki. Az *ugrásfüggvény* példa erre:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{-\smile\to} \frac{e^{\mathrm{i}tz}}{z}\,dz = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 0\,, \\ 1/2 & \text{ha } t = 0\,, \\ 0 & \text{ha } t < 0\,. \end{cases} \tag{14.55}$$

A $-\smile\to$ szimbólum jelzi az integrációs utat a valós tengely mentén ($|\,R\,|\to\infty$), az origót az alsó félsíkban egy félkör mentén megkerülve **(14.47. ábra)**.
Ha t az időt jelenti, akkor a $\Phi(t) = cF(t-t_0)$ függvény egy olyan mennyiséget ír le, ami a $t = t_0$ időpillanatban 0-ról $c/2$-en át c-re ugrik. Ezt ugrásfüggvénynek, vagy HEAVISIDE-*függvény*nek nevezik

és az elektrotechnikában a hirtelen fellépő áram- vagy feszültséglökések leírására használják.

4. Négyszögimpulzus

A JORDAN-lemma alkalmazására további példa a négyszögimpulzus komplex integrállal történő reprezentálására:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < a \text{ és } t > b\,, \\ 1 & \text{ha } a < t < b\,, \\ 1/2 & \text{ha } t = a \text{ és } t = b\,. \end{cases} \tag{14.56a}$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\frown} \frac{e^{\mathrm{i}(b-t)z}}{z}\, dz - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\frown} \frac{e^{\mathrm{i}(a-t)z}}{z}\, dz\,. \tag{14.56b}$$

5. Fresnel-integrálok

A két FRESNEL-*integrál*:

$$\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \int\limits_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2} \tag{14.57}$$

meghatározásához az $I = \int\limits_K e^{-z^2}\, dz$ integrált vizsgáljuk, a **14.48. ábrán** jelzett zárt integrációs úton.

CAUCHY integráltétele szerint (e^{-z^2} az egész síkon reguláris): $I = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} = 0$ és $I_{\mathrm{I}} = \int\limits_0^R e^{-x^2}\, dx$,

$I_{\mathrm{II}} = \mathrm{i}R \int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi) + \mathrm{i}\varphi} d\varphi\,,\quad I_{\mathrm{III}} = e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int\limits_R^0 e^{-\mathrm{i}r^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\left[\mathrm{i}\int\limits_0^R \sin r^2\, dr - \int\limits_0^R \cos r^2\, dr\right]$

($z = re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ helyettesítéssel).

I_{II} felső becslése: tekintettel arra, hogy $|\mathrm{i}| = |e^{\mathrm{i}\tau}| = 1$ (τ valós) és (14.38)-ot használva:

$$|I_{\mathrm{II}}| < R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\varphi}\, d\varphi = \frac{R}{2}\int\limits_0^{\alpha} e^{-R^2\cos\varphi}\, d\varphi + \frac{R}{2}\int\limits_{\alpha}^{\pi/2} e^{-R^2\cos\varphi}\, d\varphi < \frac{R}{2}\int\limits_0^{\alpha} e^{-R^2\cos\alpha}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{R}{2}\int\limits_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} e^{-R^2\cos\varphi}\, d\varphi < \frac{\alpha R}{2} e^{-R^2\cos\alpha} + \frac{1 - e^{-R^2\cos\alpha}}{2R\sin\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

és mindkettő $R \to \infty$ esetén 0-hoz tart, tehát $\lim\limits_{R\to\infty} I_{\mathrm{II}} = 0$. Ha áttérünk a $\lim\limits_{R\to\infty} I$ határértékre, akkor kiszámolhatjuk I határértékét is: $\lim_{R\to\infty} I_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (lásd 8.4.1.2. **B** példája) és a valós és képzetes részek szétválasztása után jutunk a (14.57) eredményhez.

14.5. Algebrai és elemi transzcendens függvények

14.5.1. Algebrai függvények

1. Definíció Az a függvény, amelyiknek definíciójában a z változóval képzett véges sok algebrai művelet és legfeljebb véges sok állandó szerepel, *algebrai függvény*. Egész általánosan a $w(z)$ komplex algebrai függvény, hasonlóan a valós algebrai függvényhez, felírható implicit alakban, mint polinom:

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \cdots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0 \tag{14.58}$$

Nem szükségszerű, hogy ezeket a függvényeket explicit alakra tudjuk hozni.

2. Példák algebrai függvényekre

lineáris függvény: $w = az + b\,,$ (14.59)

reciprok függvény: $w = \frac{1}{z}\,,$ (14.60)

másodfokú függvény: $w = z^2\,,$ (14.61)

négyzetgyök függvény: $w = \sqrt{z^2 - a^2}\,,$ (14.62)

lineáris törtfüggvény: $w = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. (14.63)

14.5.2. Elemi transzcendens függvények

A komplex transzcendens függvényeket éppúgy, mint az algebrai függvényeket a megfelelő valós transzcendens függvények mintájára definiáljuk. Részletes tárgyalásuk [21.1] vagy [21.10] művekben található.

1. *e* alapú exponenciális függvény

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots . \tag{14.64}$$

A sor a teljes z-síkon konvegens.

a) Tisztán képzetes kitevő: $\mathrm{i}y$. Az EULER-*formula* (lásd 35. old.) értelmében igaz, hogy:

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y, \quad \text{így például} \quad e^{\mathrm{i}\pi} = -1\,. \tag{14.65}$$

b) Általános eset: $z = x + \mathrm{i}\,y$:

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,, \qquad \text{azaz} \tag{14.66a}$$

$$\mathrm{Re}\,(e^z) = e^x \cos y\,, \quad \mathrm{Im}\,(e^z) = e^x \sin y\,, \quad |e^z| = e^x\,, \quad \arg(e^z) = y\,. \tag{14.66b}$$

c) Komplex szám exponenciális alakja (lásd 35. old.):

$$a + \mathrm{i}b = \varrho e^{\mathrm{i}\varphi}\,. \tag{14.67a}$$

az e^z függvény periódusa $2\pi\,\mathrm{i}$: $\quad e^z = e^{z+2k\pi\,\mathrm{i}}$. (14.67b)

Speciálisan fennáll: $\quad e^0 = e^{2k\pi\,\mathrm{i}} = 1\,, \qquad e^{(2k+1)\pi\mathrm{i}} = -1\,.$ (14.67c)

d) *A komplex számokra vonatkozó* EULER-*formula*:

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \tag{14.68a}$$

amiből $\quad e^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z\,;$ (14.68b) ez

következik akár (14.68a) két oldala hatványsorának összevetéséből, akár (14.65)-ból, mert ha két, adott D tartományon reguláris függvény (most a síkon az e^z és a $\cos z + \sin z$) a tartomány egy pontjához konvergáló pontsorozaton (most az egész valós tengelyen) megegyezik, akkor az egész D-n is megegyeznek.

2. Természetes logaritmus (az exponenciális függvény inverze)

$$w = \mathrm{Ln}\,z\,, \quad \text{ha} \quad z = e^w\,. \tag{14.69a}$$

Mivel $z = \varrho e^{\mathrm{i}\,\varphi}$, felírhatjuk: $\varrho e^{\mathrm{i}\varphi} = e^w = e^{\mathrm{Re}\,w + \mathrm{Im}\,w} = e^{\mathrm{Re}\,w}(\cos(\mathrm{Im}\,w) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}\,w))$, tehát $\varrho = e^{\mathrm{Re}\,w} \to \mathrm{Re}\,w = \ln h$ és $\varphi + 2k\pi = \mathrm{Im}\,w$, amiből $w = \ln h + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)$, azaz

$$w = \mathrm{Ln}\,z = \ln\varrho + \mathrm{i}\,(\varphi + 2k\pi) \quad \text{és} \tag{14.69b}$$

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{Ln}\,z) = \ln\varrho\,, \quad \mathrm{Im}\,(\mathrm{Ln}\,z) = \varphi + 2k\,\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)\,. \tag{14.69c}$$

Mivel $\mathrm{Ln}\,z$ többértékű függvény (az értékek közti különbség $2k\pi\mathrm{i}$), szokás szerint csak a *logaritmus főértékét* ($\ln z$) adjuk meg:

$$\ln z = \ln\varrho + \mathrm{i}\,\varphi \qquad (-\pi < \varphi \leq +\pi)\,. \tag{14.69d}$$

Az $\mathrm{Ln}\,z$ függvény minden komplex számra értelmezve van, kivéve a nullát, hiszen e^z csak ezt az értéket nem veszi fel.

3. Általános hatványfüggvény

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}\,a}\,. \tag{14.70a}$$

a^z $(a \neq 0)$ periodikus függvény, főértéke:

$$a^z = e^{z\ln a} \quad \text{és ennek periódusa} \quad \frac{2\pi\mathrm{i}}{\ln a}. \tag{14.70b}$$

4. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények, hatványsoraik

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots , \tag{14.71a}$$

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots , \tag{14.71b}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots , \tag{14.72a}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots . \tag{14.72b}$$

Mind a négy sor konvergens az egész síkon, mind a négy függvény periodikus, mert valamely e^w elemi függvénye. A (14.71a,b) függvények periódusa 2π, a (14.72a,b) függvényeké $2\pi\,\mathrm{i}$.
Néhány összefüggés különböző helyen vett értékeik között:

$$\sin \mathrm{i}\, z = \mathrm{i} \operatorname{sh} z , \tag{14.73a}$$

$$\cos \mathrm{i}\, z = \operatorname{ch} z , \tag{14.73b}$$

$$\operatorname{sh} \mathrm{i}\, z = \mathrm{i} \sin z , \tag{14.74a}$$

$$\operatorname{ch} \mathrm{i}\, z = \cos z . \tag{14.74b}$$

A valós egyváltozós trigonometrikus és hiperbolikus függvények átalakítási formulái az említett egyértelműségi tétel miatt (2.7.2.), (2.9.3.) érvényesek a megfelelő komplex függvényekre is. Így határozhatjuk meg a $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$ függvények valós és képzetes részeit a $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$ és $\operatorname{ch}(a+b)$ addíciós képletei, vagy az EULER-formula segítségével.

■ $$\cos(x + \mathrm{i}\, y) = \cos x \cos \mathrm{i}\, y - \sin x \sin \mathrm{i}\, y = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i} \sin x \operatorname{sh} y . \tag{14.75}$$

Ebből következik:

$$\operatorname{Re}(\cos z) = \cos \operatorname{Re}(z) \operatorname{ch} \operatorname{Im}(z) , \tag{14.76a}$$

$$\operatorname{Im}(\cos z) = -\sin \operatorname{Re}(z) \operatorname{sh} \operatorname{Im}(z) . \tag{14.76b}$$

A $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$ és $\operatorname{cth} z$ függvényeket is a megfelelő valós formulákkal definiáljuk és megint csak ezt tehetjük, ha a megfelelő valós függvényeket regulárisan akarjuk kiterjeszteni a valós tengelyről a komplex síkra:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} , \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} , \tag{14.77a}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} , \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} , \tag{14.77b}$$

ahol a nevezők nem 0-k; $\sin z$-nek és $\cos z$-nek nincsenek más gyökei a valósakon kívül, és $\operatorname{ch} z$-nek az $\mathrm{i}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $\operatorname{sh} z$-nek a $k\pi\mathrm{i}$ számok a gyökei.

5. Inverz trigonometrikus és hiperbolikus függvények Ezek a függvények, épp úgy mint a valós analogonjaik, többértékűek és a logaritmus függvény segítségével a következő alakúak:

$$\operatorname{arcsin} z = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}(\mathrm{i}\, z + \sqrt{1 - z^2}) , \tag{14.78a}$$

$$\operatorname{arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}) , \tag{14.78b}$$

$$\operatorname{arccos} z = -\mathrm{i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) , \tag{14.79a}$$

$$\operatorname{arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) , \tag{14.79b}$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Ln} \frac{1 + \mathrm{i}\, z}{1 - \mathrm{i}\, z} , \tag{14.80a}$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z} , \tag{14.80b}$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Ln} \frac{\mathrm{i}\, z + 1}{\mathrm{i}\, z - 1} , \tag{14.81a}$$

$$\operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1} , \tag{14.81b}$$

mindegyik esetben csak olyan z-kre, melyekben az Ln-ben szereplő argumentumok és azok nevezői sem 0-k.
Főértékek: Az inverz trigonometrikus és hiperbolikus függvények *főértékeit* ugyanezekkel a formulákkal fejezzük ki a logaritmus főértékének ($\ln z$) segítségével:

$$\operatorname{arcsin} z = -\mathrm{i} \ln(\mathrm{i}\, z + \sqrt{1 - z^2}) , \tag{14.82a}$$

$$\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) , \tag{14.82b}$$

$$\arccos z = -\mathrm{i}\,\ln(z+\sqrt{z^2-1})\,, \qquad (14.83a) \qquad \operatorname{arch} z = \ln(z+\sqrt{z^2-1})\,, \qquad (14.83b)$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\,, \qquad (14.84a) \qquad \operatorname{arth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}\,, \qquad (14.84b)$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}z-1}\,, \qquad (14.85a) \qquad \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}\,. \qquad (14.85b)$$

6. A trigonometrikus és hiperbolikus függvények valós és képzetes részei

14.1. táblázat. A trigonometrikus és hiperbolikus függvények valós és képzetes részei

Függvény $w = f(x+\mathrm{i}y)$	Valós rész $= \mathrm{Re}\,(w)$	Képzetes rész $= \mathrm{Im}\,(w)$
$\sin(x \pm \mathrm{i}y)$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\pm \cos x \operatorname{sh} y$
$\cos(x \pm \mathrm{i}y)$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$\mp \sin x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{tg}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\pm\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$
$\operatorname{sh}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\pm \operatorname{ch} x \sin y$
$\operatorname{ch}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\pm \operatorname{sh} x \sin y$
$\operatorname{th}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\pm\dfrac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$

7. A trigonometrikus és hiperbolikus függvények abszolút értéke és argumentuma

14.2. táblázat. A trigonomtrikus és hiperbolikus függvények abszolút értéke és argumentuma

Függvény $w = f(x+iy)$	Abszolút érték $= \lvert w\rvert$	Argumentum $= \arg w$
$\sin(x \pm \mathrm{i}y)$	$\sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x\ \operatorname{th} y)$
$\cos(x \pm \mathrm{i}y)$	$\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	$\mp \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x\ \operatorname{th} y)$
$\operatorname{tg}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\dfrac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\lvert\cos 2x + \operatorname{ch} 2y\rvert}$	$\pm \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}\right)$
$\operatorname{sh}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x\ \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{ch}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x\ \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{th}(x \pm \mathrm{i}y)$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2x + \sin^2 2y}}{\lvert\operatorname{ch} 2x + \cos 2y\rvert}$	$\pm \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin 2y}{\operatorname{sh} 2x}\right)$

14.5.3. Görbék egyenlete komplex alakban

Egy valós t változójú komplex függvény paraméteres alakban is felírható:

$$z = x(t) + \mathrm{i}y(t) = z(t)\,. \qquad (14.86)$$

A z pontok t változása során a $z(t)$ görbét futják be. A következőkben az egyenes, kör, hiperbola, ellipszis és logaritmikus spirál egyenleteit és grafikus ábrázolását mutatjuk be.

1. Egyenes

a) Egy ponton átmenő egyenes (z_1 az egyenes egy pontja, $t \in \mathbf{R}$, φ az x-tengellyel bezárt szög), (lásd 14.49.a ábra):

$$z = z_1 + te^{\mathrm{i}\varphi}\,. \tag{14.87a}$$

b) Két ponton (z_1, z_2) átmenő egyenes (lásd 14.49.b ábra):

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad t \in \mathbb{R};\ \text{más alakban } z = a + tb, \tag{14.87b}$$

ahol a és $b \neq 0$ komplex számok, és $\arg b$ az előbbi φ.

c) Komplex változóval kifejezve, mértani helyként

$$\beta z + \overline{\beta}\,\overline{z} + c = 0, \tag{14.87c}$$

ahol β komplex, c valós állandó. Az $ax+by+c=0$-ból adódik az $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$ helyettesítéssel.

2. Kör

a) Kör, sugár: r, középpont az origóban (lásd 14.50.a ábra):

$$z = re^{\mathrm{i}t} \qquad 0 \le t < 2\pi. \tag{14.88a}$$

b) Kör, sugár: r, középpont a z_1 pontban (lásd 14.50.b ábra):

$$z = z_1 + re^{\mathrm{i}t} \qquad 0 \le t < 2\pi. \tag{14.88b}$$

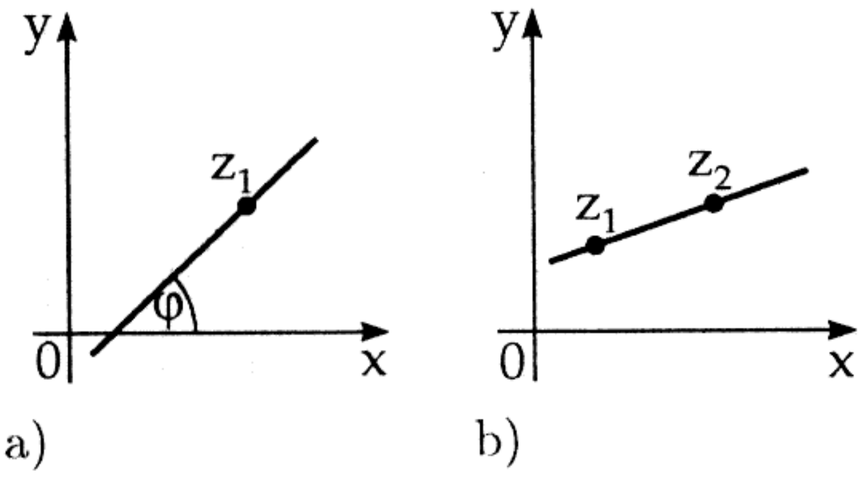
c) Kör, mértani helyként:

$$|z - z_1| = r \tag{14.88c}$$

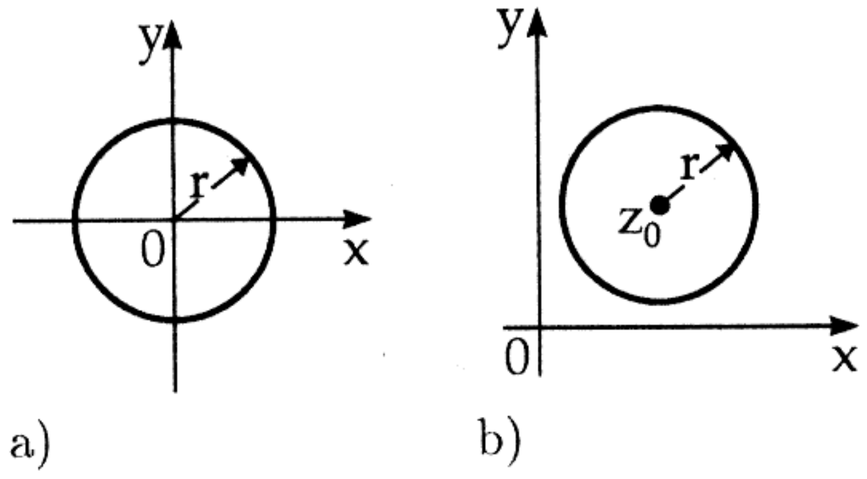
d) Kör, mértani helyként, más alakban:

$$az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\,\overline{z} + c = 0, \qquad a \neq 0 \text{ és } c \text{ valósak, } \beta \text{ komplex;} \tag{14.88d}$$

(14.88a)-ból adódik az előző helyettesítéssel a kör valós egyenletéből. Ez általánosabban a köregyenesek közös egyenlete is ($a = 0$-ra kapjuk az egyeneseket).



14.49. ábra.



14.50. ábra.

3. Hiperbola, valós normálalak: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(lásd 14.51. ábra) : a fenti helyettesítéssel

$$z^2 + \overline{z}^2 + 2\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} - \frac{4a^2b^2}{b^2 + a^2} = 0, \tag{14.89a}$$

vagy

$$z = \pm\,(a\,\mathrm{ch}\,t + \mathrm{i}b\,\mathrm{sh}\,t) \tag{14.89b}$$

vagy ezt átrendezve

$$z = \pm\left(ce^t + \bar{c}e^{-t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{14.89c}$$

ahol c és $\bar{c}$ konjugált komplex számok:

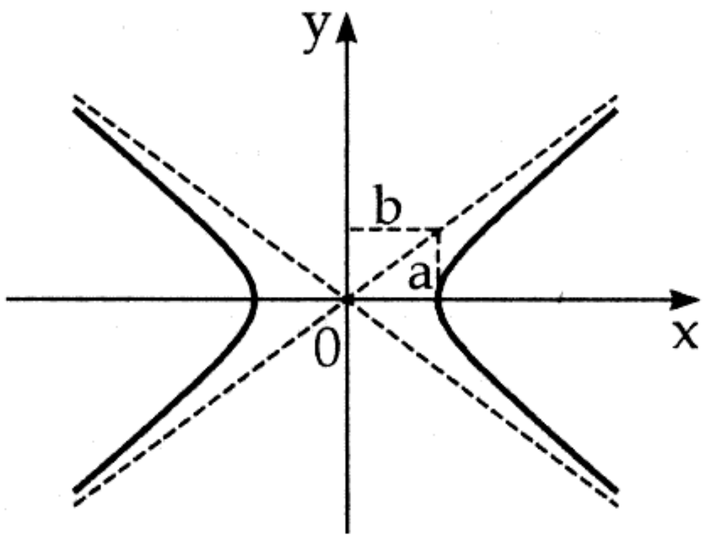
$$c = \frac{a + \mathrm{i}b}{2} \quad \bar{c} = \frac{a - \mathrm{i}b}{2}\,. \tag{14.89d}$$

vagy (általános alak, $z_{1,2}$ fókuszok, $a > 0$)

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = a, \tag{14.89e}$$

illetve (z_0 a középpont)

$$z = z_0 + ue^t + ve^{-t}, \qquad u, v \text{ komplexek, } |u| = |v|. \tag{14.89f}$$



14.51. ábra.

4. Ellipszis

a) Ellipszis, valós normálalak: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (lásd 14.52.a ábra):

$$z^2 + \overline{z}^2 + 2\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} z\overline{z} - \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2} = 0 \tag{14.90a}$$

(ha $a = b$, akkor kör), vagy

$$z = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t \tag{14.90b}$$

vagy

$$z = ce^{\mathrm{i}t} + de^{-\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t < 2\pi \tag{14.90c}$$

ahol

$$c = a + b\,, \quad d = a - b\,; \tag{14.90d}$$

a és b az ellipszis féltengelyeinek hosszai.

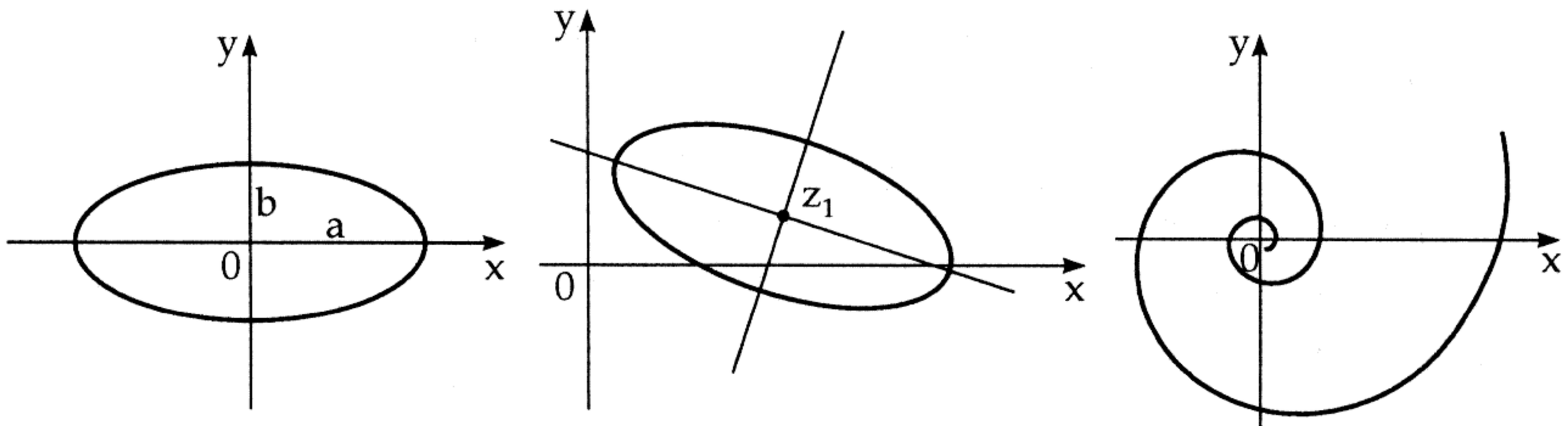
b) Ellipszis, általános alak (lásd 14.52.b ábra): z_1 és z_2 a két fókusz, $b > |z_1 - z_2|$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = b \tag{14.91a}$$

vagy a középpont a z_1 pontban van, a tengelyek (14.89b)-hez hasonlóan egy szöggel elfordultak

$$z = z_1 + ce^{\mathrm{i}t} + de^{-\mathrm{i}t} \qquad 0 \le t < 2\pi. \tag{14.91b}$$

Itt c és d tetszés szerinti komplex számok, az ellipszis tengelyeinek a hosszát és elfordulását határozzák meg.



a) b)

14.52. ábra.

14.53. ábra.

5. Logaritmikus spirál (lásd 14.53. ábra):

$$z = ae^{\mathrm{i}bt}\,, -\infty < t < \infty, \tag{14.92}$$

ahol a és b tetszőleges komplex számok, de $\mathrm{Re}\, b \neq 0$ és $a \neq 0$.

14.6. Elliptikus függvények

14.6.1. Az elliptikus integrálokkal való összefüggés

Azok az (8.22) alakú integrálok, ahol az integrandus $R(x, \sqrt{P(x)})$, és $P(x)$ harmad- vagy negyedfokú polinom, amelynek nincsenek többszörös gyökei, kevés kivételtől eltekintve zárt alakban nem integrálhatók. Ezeket mint határozott integrálokat numerikus módszerekkel határozzuk meg (lásd 443. old.). Az elliptikus integrálok inverzei az *elliptikus függvények.* Az elliptikus függvények hasonlóak a trigonometrikus függvényekhez, és azok általánosításának tekinthetjük őket. Egy speciális esetként vizsgáljuk az alábbi integrált:

$$\int_0^u (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = x \qquad (|u|<1), \tag{14.93}$$

a) Az $u = \sin x$ trigonometrikus függvény és az inverz függvényének főértéke között az

$$u = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin u \quad \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le u \le 1 \tag{14.94}$$

kapcsolat áll fenn.
b) A (14.93) integrál értéke $\arcsin u$. Így a szinuszfüggvény tekinthető a (14.93) integrál inverz függvényének. Hasonló kapcsolatokat találunk az elliptikus integráloknál is.

■ A *matematikai inga* definíció szerint egy tömegnélküli, nem nyújtható, l hosszúságú fonalra függesztett m tömegű test. **(14.54. ábra)** A matematikai inga lengésideje meghatározható egy másodrendű, nemlineáris differenciálegyenlet segítségével, amely mozgásegyenlet a tömegre ható erők egyensúlyát fejezi ki:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0, \text{ más alakban } \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] = 2\,\frac{g}{l}\,\frac{d}{dt}(\cos\vartheta)\ (\vartheta(0)=\vartheta_0\,,\ \dot\vartheta(0)=0). \tag{14.95a}$$

Az l ingahossz és az egyensúlyi helyzetből való s kilengés közötti összefüggés: $s = l\vartheta$, így $\dot s = l\dot\vartheta$ és $\ddot s = l\ddot\vartheta$. A tömegre ható $F = mg$ erő (g a gravitációs gyorsulás) két összetevőre bomlik, az F_N komponens a körív normálisának irányába, az F_T az érintő irányába mutat **(14.54. ábra)**. Az $F_N = mg\cos\vartheta$ komponenst a fonal feszültsége tartja egyensúlyban. Ez a komponens merőleges a mozgás irányára, így nincs befolyással a mozgásegyenletre. Az F_T hozza létre a mozgás gyorsulását, tehát: $F_T = m\ddot s = ml\ddot\vartheta = -mg\sin\vartheta$. Az F_T komponens mindig a nyugalmi helyzet felé mutat.
A változók szétválasztásával nyerjük:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\vartheta} \frac{d\Theta}{\sqrt{2(\cos\Theta - \cos\vartheta_0)}}\,. \tag{14.95b}$$

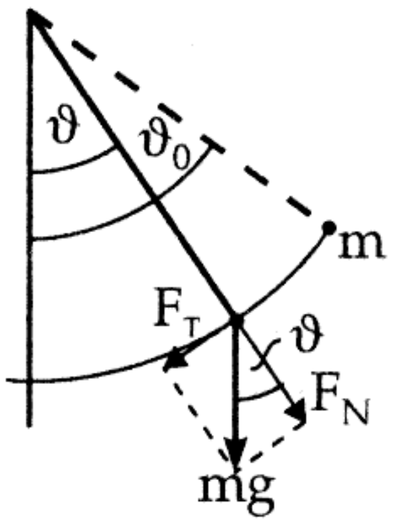
Itt t_0 jelöli azt az időt, amikor az inga először ment át a legmélyebb ponton, azaz $\vartheta(t_0) = 0$. Az integrációs változót Θ jelöli. Néhány átalakítás után a $\sin\dfrac{\Theta}{2} = k\sin\psi\,,\quad k = \sin\dfrac{\vartheta_0}{2}$ helyettesítések segítségével azt kapjuk, hogy:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k,\varphi)\,. \tag{14.95c}$$

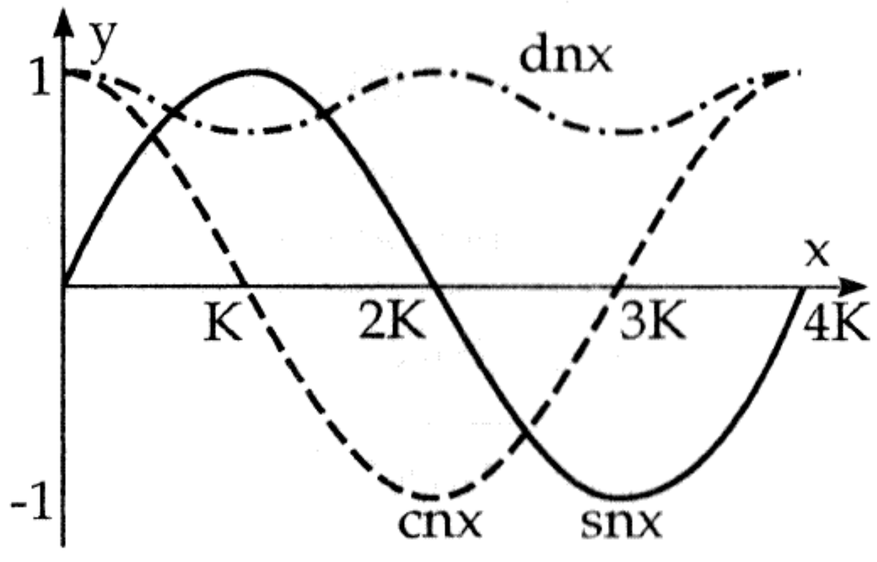
Itt $F(k,\varphi)$ egy elsőfajú elliptikus integrál (lásd (8.25a), 443. old.). A kitérés szöge $\vartheta = \vartheta(t)$. Ez a függvény $2T$ szerint periodikus. Itt

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}K\,, \tag{14.95d}$$

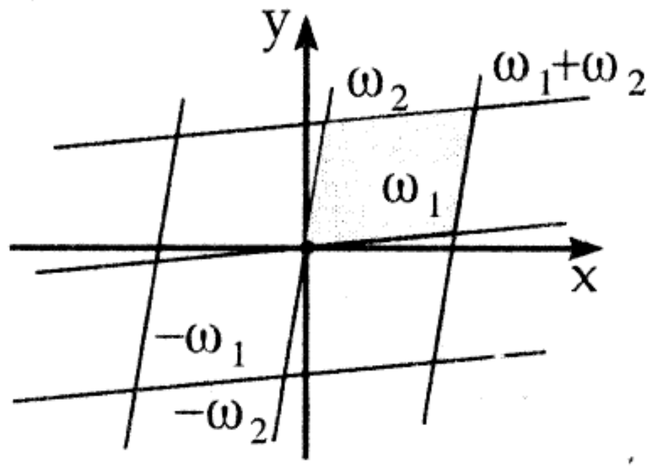
K egy teljes elsőfajú elliptikus integrál **(21.7. táblázat)**. T jelöli a *lengésidőt*, azaz a két szélső helyzet közti tartózkodás idejét, amelyeket $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ jellemez. Kis kitéréskor $\sin\vartheta \approx \vartheta$ és ezért $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.



14.54. ábra.



14.55. ábra.



14.56. ábra.

14.6.2. Jacobi-féle függvények

1. Definíció

A (8.24a) és (8.25a) tételek szerint az $F(\varphi, k)$ elsőfajú elliptikus integrálra $0 < k < 1$ esetén fennáll, hogy

$$\frac{dF}{d\varphi} = (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} > 0\,, \tag{14.96}$$

azaz $F(k, \varphi)$ a φ változóra nézve szigorúan monoton, úgyhogy az

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = u(\varphi) \quad (14.97a) \qquad \text{inverz függvénye: } \varphi = \operatorname{am}(k, u) = \varphi(u) \quad (14.97b)$$

létezik. A neve *amplitúdó-függvény*. Segítségével definiáljuk az ún. JACOBI-*féle függvényeket*:

$$\operatorname{sn} u = \sin\varphi = \sin\operatorname{am}(k, u) \quad \text{(sinus amplitudinis)}\,, \tag{14.98a}$$

$$\operatorname{cn} u = \cos\varphi = \cos\operatorname{am}(k, u) \quad \text{(cosinus amplitudinis)}\,, \tag{14.98b}$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u} \qquad \text{(delta amplitudinis)}\,. \tag{14.98c}$$

2. Meromorf és kétszeresen periodikus függvények

A JACOBI-féle függvények a komplex z-síkon analitikusan folytathatók. Az $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ és $\operatorname{dn} z$ függvények így *meromorf* függvények (lásd 719. old.), azaz a pólushelyeiken kívül nincs más szinguláris pontjuk. Ezenkívül *kétszeresen periodikusak*: ezen $f(z)$ függvények mindegyikének pontosan két periódusa van, ω_1 és ω_2 két tetszés szerinti komplex szám, melyeknek a hányadosa nem valós szám. Emiatt

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z)\,, \tag{14.99}$$

ahol m és n tetszés szerinti egész számok. A meromorf kétszeresen periodikus függvények *elliptikus függvények*. Az alábbi

$$\{z_0 + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2\colon\ 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1\} \tag{14.100}$$

halmazt tetszőleges rögzített $z_0 \in \mathbb{C}$ mellett az elliptikus függvény *periódus-paralelogrammájának* hívjuk. Ha a függvény egy periódus-paralelogrammán **(14.56. ábra)** korlátos, akkor LIOUVILLE tétele értelmében konstans.

■ A (14.98a) és (14.98b) JACOBI-féle függvények elliptikus függvények. A (14.97b) amplitúdó-függvény nem elliptikus függvény.

3. A Jacobi-féle függvények tulajdonságai

A **14.3. táblázatban** a JACOBI-féle függvények tulajdonságai megkaphatók a következő helyettesítésekkel:

$$k'^2 = 1 - k^2\,, \quad K' = F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)\,,\ K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \tag{14.101}$$

ahol m és n tetszés szerinti egész számok. A $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ és $\operatorname{dn} z$ függvények menetét a **14.55. ábrán**

14.3. táblázat. A JACOBI-féle függvények periódusai, zérushelyei és pólusai

	Periódusok: ω_1, ω_2	Zérushelyek	Pólusok
$\operatorname{sn} z$	$4K, 2\mathrm{i}K'$	$2mK + 2n\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$
$\operatorname{cn} z$	$4K, 2(K + \mathrm{i}K')$	$(2m+1)K + 2n\mathrm{i}K'$	
$\operatorname{dn} z$	$2K, 4\mathrm{i}K'$	$(2m+1)K + (2n+1)\mathrm{i}K'$	

láthatjuk. A pólushelyeken kívül a JACOBI-féle függvényekre a következő összefüggések és addíciós képletek állnak fenn:

1.
$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1\,, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1\,, \tag{14.102}$$

2.
$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{(\operatorname{sn} u)(\operatorname{cn} v)(\operatorname{dn} v) + (\operatorname{sn} v)(\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u)}{1 - k^2(\operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn}^2 v)}\,, \tag{14.103a}$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{(\operatorname{cn} u)(\operatorname{cn} v) - (\operatorname{sn} u)(\operatorname{dn} u)(\operatorname{sn} v)(\operatorname{dn} v)}{1 - k^2(\operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn}^2 v)}\,, \tag{14.103b}$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{(\operatorname{dn} u)(\operatorname{dn} v) - k^2(\operatorname{sn} u)(\operatorname{cn} u)(\operatorname{sn} v)(\operatorname{cn} v)}{1 - k^2(\operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn}^2 v)}\,, \tag{14.103c}$$

3.
$$(\operatorname{sn} z)' = (\operatorname{cn} z)(\operatorname{dn} z) = \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z)}\,, \tag{14.104a}$$

$$(\operatorname{cn} z)' = -(\operatorname{sn} z)(\operatorname{dn} z) = \sqrt{(1 - \operatorname{cn}^2 z)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 z)}\,, \tag{14.104b}$$

$$(\operatorname{dn} z)' = -k^2(\operatorname{sn} z)(\operatorname{cn} z) = \sqrt{(\operatorname{dn}^2 z - 1)(k'^2 - \operatorname{dn}^2 z)}\,. \tag{14.104c}$$

A JACOBI-féle egyenletek és más elliptikus egyenletek további tulajdonságairól lásd [14.12], [14.18].

14.6.3. Thétafüggvények

A JACOBI-féle függvények kiszámításához a *thétafüggvények*et használjuk:

$$\vartheta_1(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)z\,, \tag{14.105a}$$

$$\vartheta_2(z,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)z\,, \tag{14.105b}$$

$$\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz\,, \tag{14.105c}$$

$$\vartheta_4(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz\,. \tag{14.105d}$$

Ha $|q| < 1$ (q komplex), akkor a (14.105a)–(14.105d) sorok minden komplex z argumentumra konvergensek. Amennyiben q konstans, gyakran használjuk az alábbi rövidítést:

$$\vartheta_k(z) := \vartheta_k(\pi z, q) \quad (k = 1,2,3,4)\,. \tag{14.106}$$

Ezzel a JACOBI-féle függvények a következő alakúak:

$$\operatorname{sn} z = 2K\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)}\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\dfrac{z}{2K}\right)}, \tag{14.107a}$$

$$\operatorname{cn} z = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2\left(\dfrac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\dfrac{z}{2K}\right)}, \tag{14.107b}$$

$$\operatorname{dn} z = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3\left(\dfrac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\dfrac{z}{2K}\right)}, \tag{14.107c}$$

$$\text{ahol } q = \exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right),\ k = \left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right)^2 \tag{14.107d}$$

és K, K' meghatározható (14.101) alapján.

14.6.4. Weierstrass-féle függvények

WEIERSTRASS vezette be az alábbi függvényeket:

$$\wp(z) = \wp(z,\omega_1,\omega_2)\,, \tag{14.108a}$$

$$\zeta(z) = \zeta(z,\omega_1,\omega_2)\,, \tag{14.108b}$$

$$\sigma(z) = \sigma(z,\omega_1,\omega_2) \tag{14.108c}$$

ahol ω_1 és ω_2 megint két tetszés szerinti komplex számot jelöl, melyek hányadosa nem valós szám. Elvégezzük az alábbi helyettesítést

$$\omega_{mn} = 2(m\omega_1 + n\omega_2)\,, \tag{14.109a}$$

ahol m és n tetszés szerinti egész számok és definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\wp(z,\omega_1,\omega_2) = z^{-2} + \sum_{m,n}{}' \left[(z-\omega_{mn})^{-2} - \omega_{mn}^{-2}\right]. \tag{14.109b}$$

Itt a szummajelen lévő vessző azt jelenti, hogy az $m = n = 0$ értékpárt kizártuk. A $\wp(z,\omega_1,\omega_2)$ függvénynek a következő tulajdonságai vannak:

1. Elliptikus függvény, periódusai: ω_1 és ω_2.

2. A (14.109b) sor konvergens minden $z \neq \omega_{mn}$ esetén.

3. A $\wp(z,\omega_1,\omega_2)$ függvény eleget tesz az alábbi differenciálegyenletnek:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{14.110a}$$

$$\text{ahol } g_2 = 60\sum{}'\omega_{mn}^{-4},\quad g_3 = 140\sum{}'\omega_{mn}^{-6}. \tag{14.110b}$$

m,n $\qquad$ m,n

A g_2 és g_3 értékeket a $\wp(z,\omega_1,\omega_2)$ függvény *invariáns*ainak hívjuk.

4. Az $u = \wp(z,\omega_1,\omega_2)$ függvény inverz függvénye az alábbi integrálnak:

$$z = \int_u^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}\,. \tag{14.111}$$

5.
$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2 - \wp(u) - \wp(v)\,. \tag{14.112}$$

A WEIERSTRASS-féle

$$\zeta(z) = z^{-1} + \sum_{m,n}{}' \left[(z - \omega_{mn})^{-1} + \omega_{mn}^{-1} + \omega_{mn}^{-2} z \right] , \tag{14.113a}$$

$$\sigma(z) = z\exp\left(\int_0^z \left[\zeta(t) - t^{-1} \right] dt \right) = z \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{z}{\omega_{mn}} \right) \exp\left(\frac{z}{\omega_{mn}} + \frac{z^2}{2\omega_{mn}^2} \right) \tag{14.113b}$$

függvények nem kétszeresen periodikusak, tehát nem elliptikus függvények. A következő összefüggések érvényesek:

1. $\zeta'(z) = -\wp(z)\,,\ \zeta(z) = (\ln\sigma(z))\,,$ (14.114)

2. $\zeta(-z) = -\zeta(z)\,,\ \sigma(-z) = -\sigma(z)\,,$ (14.115)

3. $\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1)\,, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_2)\,,$ (14.116)

4. $$\zeta(u + v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\,.$$ (14.117)

5. Minden elliptikus függvény racionális függvénye a $\wp(z)$ és $\zeta(z)$ WEIERSTRASS-féle függvényeknek.

15. Integráltranszformációk

15.1. Az integráltranszformáció fogalma

15.1.1. Az integráltranszformációk általános definíciója

*Integráltranszformáció*n az egyváltozós esetben és a legbővebb eredeti tartomány esetén két függvény, $f(t)$ és $F(p)$ közötti,

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(p,t) f(t)\, dt \tag{15.1a}$$

alakú összefüggést értünk. Az $f(t)$ függvényt *eredeti függvény*nek vagy *tárgyfüggvény*nek, értelmezési tartományát *eredeti tartomány*nak nevezzük. Az $F(p)$ függvényt *képfüggvény*nek, *transzformált függvény*nek vagy *eredő függvény*nek, értelmezési tartományát *képtartomány*nak hívjuk.
A $K(p,t)$ függvényt a transzformáció *magjá*nak hívjuk. Míg t esetében valós változóról van szó, addig $p = \sigma + \mathrm{i}\omega$ komplex változó.
Rövidített írásmódot kapunk, ha a $K(p,t)$ magú integráltranszformációra bevezetjük a $\mathcal{T}$ szimbólumot:

$$F(p) = \mathcal{T}\{f(t)\}\,. \tag{15.1b}$$

Ilyenkor röviden $\mathcal{T}$-transzformációról beszélünk.

15.1.2. Speciális integráltranszformációk

Különböző $K(p,t)$ magokra és különböző értelmezési tartományokra különböző integráltranszformációkat kapunk. A legelterjedtebbek a LAPLACE-transzformáció, a LAPLACE–CARSON-transzformáció, valamint a FOURIER-transzformáció. A **15.1. táblázatban** egyváltozós függvények integráltranszformációiról adunk áttekintést. Ehhez manapság, elsősorban a képfelismerésnél vagy jelek karakterizálásánál használatos további transzformációk járulnak, így a *wavelet-transzformáció*, a GÁBOR-*transzformáció* és a WALSH-*transzformáció* (lásd 770. old.).

15.1.3. Inverz transzformációk

Az alkalmazásoknál a képfüggvény eredeti függvénybe való visszatranszformálásának közvetlen jelentősége van. Ilyenkor a transzformáció, másnéven operátor *megfordítás*áról vagy *inverz transzformáció*ról is beszélünk. A $\mathcal{T}^{-1}$ szimbólum segítségével a (15.1a) integráltranszformáció megfordítását a következőképpen írhatjuk:

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(p)\}\,. \tag{15.2a}$$

A $\mathcal{T}^{-1}$ operátort $\mathcal{T}$ *inverz operátor*ának nevezzük; fennáll

$$\mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}\{f(t)\}\} = f(t)\,. \tag{15.2b}$$

Az inverz transzformáció meghatározása azt jelenti, hogy keressük a megoldását a (15.1a) integrálegyenletnek, ahol $F(p)$ az adott és $f(t)$ a keresett függvény. Ha létezik megoldás, akkor az az

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(p)\} \tag{15.2c}$$

alakban írható. Az *inverz operátor* explicit meghatározása különböző integráltranszformációk, azaz különböző $K(p,t)$ magok esetén az integráltranszformációk elméletének alapvető problémái közé tartozik. Az alkalmazó, amikor feladatot old meg, elsősorban az összetartozó képfüggvények és eredeti függvények között a vonatkozó táblázatokban feltüntetett *megfeleltetés*et használja fel (**21.11., 21.12. és 21.13. táblázat**).

15.1.4. Az integráltranszformációk linearitása

Ha $f_1(t)$ és $f_2(t)$ két transzformálható függvény, akkor

$$\mathcal{T}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \mathcal{T}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{T}\{f_2(t)\}\,, \tag{15.3}$$

15.1. táblázat. Egyváltozós függvények integráltranszformációinak áttekintése

Transzformáció	$K(p,t)$ **mag**	**Szimbólum**	**Megjegyzés**
LAPLACE-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ e^{-pt} & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt$	$p=\sigma+\mathrm{i}\omega$
Kétoldali LAPLACE-transzformáció	e^{-pt}	$\mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$	$\mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{f(t)1(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$ ahol $1(t)=\begin{cases}0 \text{ ha } t<0\\ 1 \text{ ha } t\geq 0\end{cases}$
Véges LAPLACE-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ e^{-pt} & \text{ha } 0\leq t\leq a \\ 0 & \text{ha } t>a \end{cases}$	$\mathcal{L}_a\{f(t)\}=\int_0^{a} e^{-pt}f(t)dt$	
LAPLACE–CARSON-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ pe^{-pt} & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{C}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} pe^{-pt}f(t)dt$	A CARSON-transzformációnak is van kétoldali és véges változata.
FOURIER-transzformáció	$e^{-\mathrm{i}\omega t}$	$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)dt$	$p=\sigma+\mathrm{i}\omega$, ahol $\sigma=0$, mert a kétoldali LAPLACE-transzformációkból származtatjuk.
Egyoldali FOURIER-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ e^{-\mathrm{i}\omega t} & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_{\mathrm{I}}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)dt$	$p=\sigma+\mathrm{i}\omega$, ahol $\sigma=0$, mert az (egyoldali) LAPLACE-transzformációból származtatjuk.
Véges FOURIER-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ e^{-\mathrm{i}\omega t} & \text{ha } 0\leq t\leq a \\ 0 & \text{ha } t>a \end{cases}$	$\mathcal{F}_a\{f(t)\}=\int_0^{a} e^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)dt$	$p=\sigma+\mathrm{i}\omega$, ahol $\sigma=0$, mert a véges LAPLACE-transzformációból származtatjuk.
FOURIER-koszinusz-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \mathrm{Re}\,[e^{\mathrm{i}\omega t}] & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_c\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$	
FOURIER-szinusz-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \mathrm{Im}\,[e^{\mathrm{i}\omega t}] & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_s\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$	Az egyoldali FOURIER-transzformáció valós része, ha f valós
MELLIN-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ t^{\,p-1} & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{M}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} t^{\,p-1}f(t)dt$	Az egyoldali FOURIER-transzformáció képzetes része, ha f valós
ν-edrendű HANKEL-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ tJ_\nu(\sigma t) & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{H}_\nu\{f(t)\}=\int_0^{\infty} tJ_\nu(\sigma t)f(t)dt$	$p=\sigma+\mathrm{i}\omega$, ahol $\omega=0$ $J_\nu(\sigma t)=\nu$-edrendű elsőfajú BESSEL-függvény
STIELTJES-transzformáció	$\begin{cases} 0 & \text{ha } t<0 \\ \dfrac{1}{p+t} & \text{ha } t\geq 0 \end{cases}$	$\mathcal{S}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} \dfrac{f(t)}{p+t}dt$	

ahol k_1 és k_2 tetszőleges számok. Ez azt jelenti, hogy minden integráltranszformáció lineáris operátor a $\mathcal{T}$-transzformálható függvények T halmazán, pontosabban vektorterén.

15.1.5. Többváltozós függvények integráltranszformációi

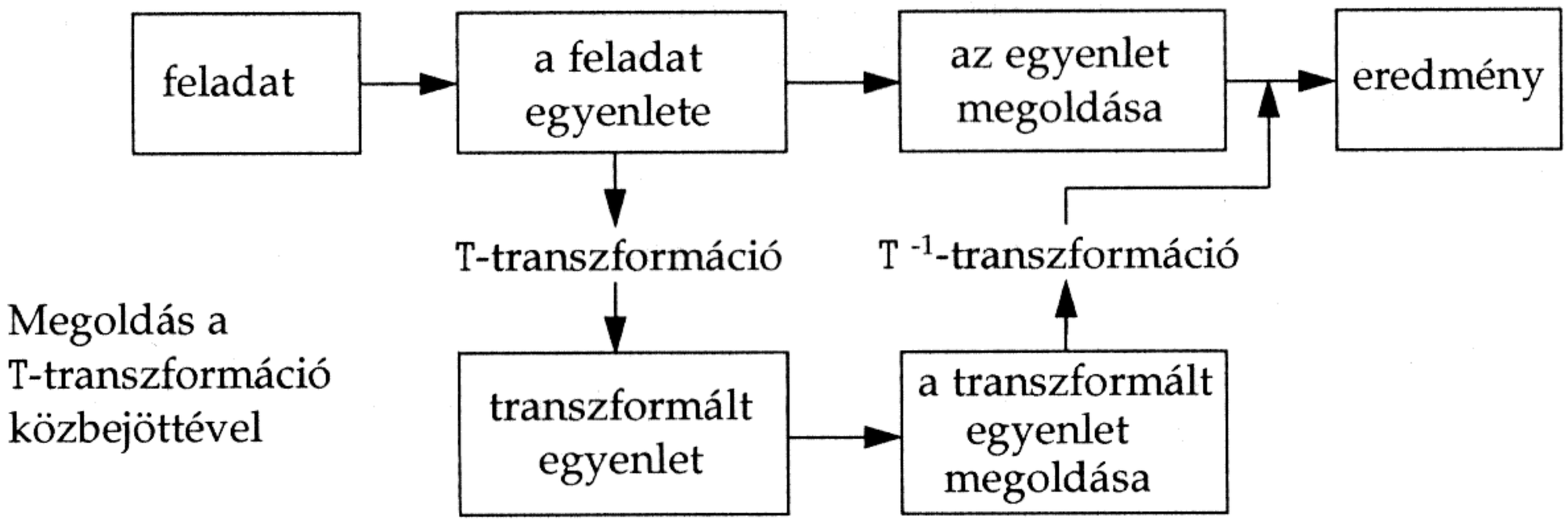
A többváltozós függvényekre vonatkozó integráltranszformációkat *többszörös integráltranszformációk*nak is nevezzük (lásd Irod. [15.16]). Legelterjedtebbek a kétszeres LAPLACE-transzformáció, vagyis kétváltozós függvényekre vonatkozó LAPLACE-transzformáció, a kétszeres LAPLACE–CARSON-transzformáció és a kétszeres FOURIER-transzformáció. A LAPLACE-transzformáció $\mathcal{L}$ jelének használatával a kétszeres LAPLACE-transzformációt definiáló egyenlet a következő:

$$F(p,q) = \mathcal{L}^2\{f(x,y)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{15.4}$$

15.1.6. Az integráltranszformációk alkalmazásai

1. Elvi jelentőség Az integráltranszformációknak nagy elméleti jelentőségük van a matematika olyan alapvető területein, mint az integrálegyenletek vagy a lineáris operátorok elmélete, de ezenkívül széleskörű alkalmazásra találtak a fizika és a technika gyakorlati feladatainak megoldásában is. Az integráltranszformációkat felhasználó módszereket gyakran *operátormódszerek*nek nevezik. Alkalmasak közönséges és parciális differenciálegyenletek, integrálegyenletek és differenciaegyenletek megoldására.

2. Az operátormódszer sémája Az integráltranszformációs operátormódszer alkalmazásának általános sémáját a **15.1. ábra** mutatja. Ennél a módszernél a probléma megoldását nem a kiindulási egyenlet közvetlen megoldása útján, hanem integráltranszformáció közbeiktatásával keressük. A kiindulási egyenlet megoldása a transzformált egyenlet megoldásának visszatranszformálásával adódik.



15.1. ábra.

Például az operátormódszer alkalmazása közönséges differenciálegyenletek megoldására a következő három lépésből áll:

1. Áttérés az ismeretlen függvényre vonatkozó differenciálegyenletről a függvény transzformáltjára vonatkozó egyenletre.

2. A képtartományban kapott — általában már nem differenciál-, hanem algebrai egyenlet megoldása.

3. A megoldásul kapott képfüggvény visszatranszformálása a $\mathcal{T}^{-1}$ inverz operátor segítségével az eredeti tartományba, vagyis az eredetileg keresett megoldásfüggvény meghatározása.

Az operátormódszer nehézsége gyakran nem az egyenlet megoldásában, hanem a függvényről a transzformáltra való áttérésben és a visszatranszformálásban áll.

15.2. Laplace-transzformáció

15.2.1. A Laplace-transzformáció tulajdonságai

15.2.1.1. Laplace-transzformált, eredeti tartomány és képtartomány

1. A Laplace-transzformáció definíciója Az

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p) \tag{15.5}$$

LAPLACE-transzformáció a t valós változó $(-\infty, 0)$-n eltűnő, komplex értékű megadott $f(t)$ függvényéhez, amelyet *eredeti függvény*nek hívunk, a p komplex változónak egy másik, $F(p)$ *képfüggvény*nek nevezett függvényét rendeli. Az improprius integrál létezéséhez feltesszük, hogy az $f(t)$ eredeti függvény legfeljebb exponenciális nagyságrendű, tehát a $t \geq 0$ az *eredeti értelmezési tartomány*ban minden véges intervallumon abszolút értékben is integrálható; ezt biztosítja, ha szakaszonként folytonos méginkább ha szakaszonként sima, amit a továbbiakban fel is teszünk, továbbá $t \to \infty$ esetén nem tart erősebben ∞-hez, mint $Ke^{\alpha t}$, valamely $K > 0$-val és $\alpha > 0$-val. Az $F(p)$ képfüggvény értelmezési tartományát *képtartomány*nak nevezzük.
Az irodalomban a LAPLACE-transzformáltat gyakran a WAGNER-féle vagy LAPLACE–CARSON-féle

$$\mathcal{L}_W\{f(t)\} = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = p\,F(p) \tag{15.6}$$

alakban definiálják (lásd Irod. [15.17]).

2. Konvergencia A $\operatorname{Re} p > \alpha$ (a fenti α-k minimuma) jobb oldali félsíkban az $\mathcal{L}\{f(t)\}$ LAPLACE-integrál konvergens improprius integrál **(15.2. ábra)**, itt az $F(p)$ képfüggvény analitikus és rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

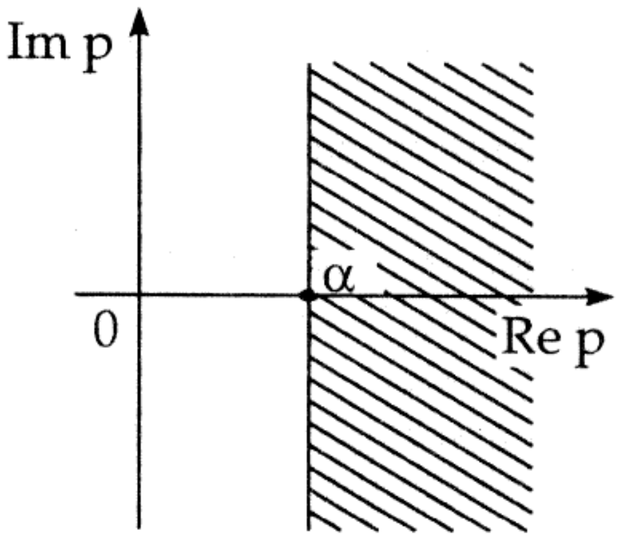
1. $$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty,\ \arg p=\varphi,\ |\varphi|<\pi/2} F(p) = 0\,. \tag{15.7a}$$

Ezt a szükséges feltételt minden képfüggvénynek teljesítenie kell; ha tehát valamely $\operatorname{Re} p > \alpha$ félsíkban adott egy F holomorf függvény, akkor (15.7a) szükséges (de nem elégséges) feltétele annak, hogy F valamely függvény LAPLACE-transzformáltja legyen.

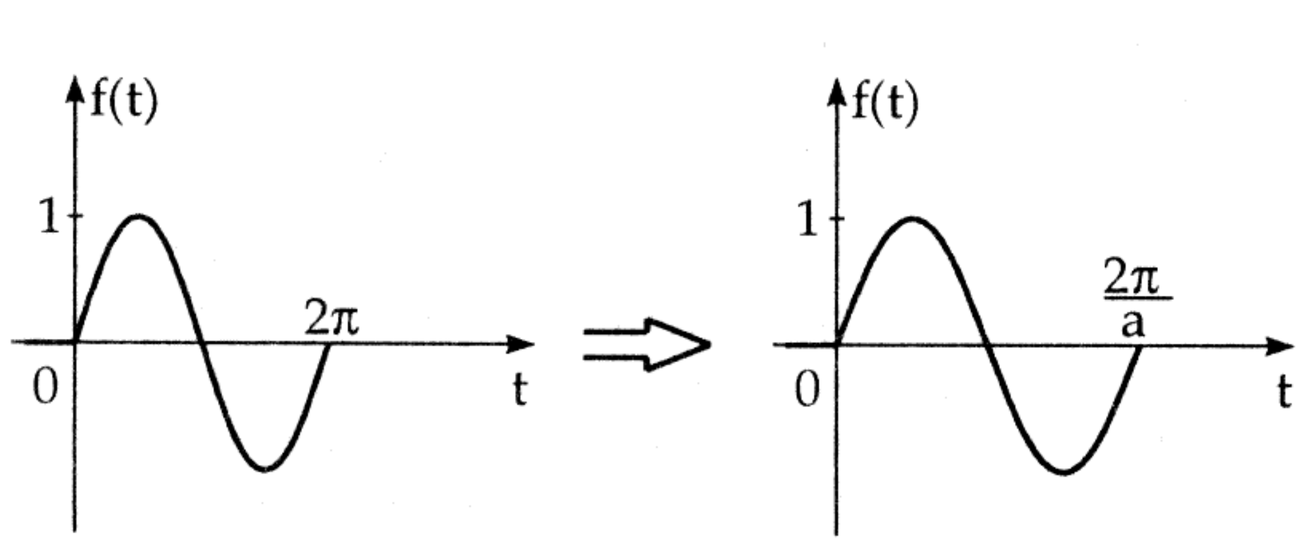
2. Ha létezik f' és f' LAPLACE-transzformáltja is, akkor $\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0+0)$, ha a bal oldali határérték létezik; ha még $pF(p)$ a jobb félsíkban analitikus, akkor

$$\lim_{p\to 0} p\,F(p) = A\,, \tag{15.7b}$$

ha az $f(t)$ eredeti függvénynek létezik $\lim_{t\to\infty} f(t) = A$ véges határértéke.



15.2. ábra.



15.3. ábra.

3. Inverz Laplace-transzformáció (visszatranszformálás inverz integrállal) A képfüggvényből az eredeti függvényt, vagy legalábbis egy olyat, amelynek létezik LAPLACE-transzformáltja, és az

$F(p)$ az

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \int_{c-\mathrm{i}R}^{c+\mathrm{i}R} e^{pt} F(p)\, dp = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)], & \text{ha } t>0\,, \\ \frac{1}{2} f(0+0), & \text{ha } t=0 \\ 0, & \text{ha } t<0\,. \end{cases} \tag{15.8}$$

megfordítási képlet segítségével kapjuk meg, ha f szakadási helyeiben is léteznek a féloldali határértékei. E komplex integrálban az integrációs út a képzetes tengellyel párhuzamos bármely $x = c > \alpha$ függőleges egyenes. Speciálisan, ha f a $t \geq 0$-ban is folytonos, akkor $\mathcal{L}^{-1}F(p) = f(t)$.

15.2.1.2. Laplace-transzformációval kapcsolatos számolási szabályok

Integráltranszformációkkal kapcsolatban számolási szabályon az eredeti tartományban végzett műveletek és a képtartományban végzett más műveletek közti összefüggést értünk.
A következőkben az eredeti függvényeket mindig kisbetűvel, a hozzájuk tartozó képfüggvényeket pedig a megfelelő nagybetűvel jelöljük.

1. Összeadási vagy linearitási tétel

Összeg LAPLACE-transzformáltja a LAPLACE-transzformáltak összegével egyenlő, a konstans tényezőket pedig ki lehet emelni a LAPLACE-integrál elé ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ konstansok):

$$\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)\} = \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p) + \cdots + \lambda_n F_n(p)\,; \tag{15.9}$$

ez nem más, mint a LAPLACE-transzformáció, mint operátor linearitása.

2. Hasonlósági tételek

$\varphi(t)$ LAPLACE-transzformáltjából az $f(at)$ $(a > 0)$ LAPLACE-transzformáltját úgy kapjuk meg, hogy vesszük $f(t)$ LAPLACE-transzformáltját a p/a helyen és osztunk a-val:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{15.10a}$$

Hasonló állítás érvényes az ellenkező irányban:

$$F(ap) = \frac{1}{a}\,\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}(p) \tag{15.10b}$$

(ha $f(t)$-nek van LAPLACE-transzformáltja, akkor $f(t/a)$-nak is van; ha F definiált a p helyen, akkor az ap helyen is definiált.) A **15.3. ábra** a szinuszfüggvény példáján mutatja be a két eredeti függvény viszonyát.

3. Eltolási tételek

1. Eltolás jobbra Egy $a > 0$-val jobbra eltolt eredeti függvény LAPLACE-transzformáltját úgy kapjuk meg, hogy a kiindulási eredeti függvény LAPLACE-transzformáltját megszorozzuk az e^{-ap} tényezővel:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-ap} F(p)\,. \tag{15.11a}$$

2. Eltolás balra Egy $a > 0$-val balra eltolt eredeti függvény LAPLACE-transzformáltját úgy kapjuk meg, hogy a kiindulási eredeti függvény LAPLACE-transzformáltjából kivonjuk az $\int_0^a f(t)\, e^{-pt}\, dt$ integrált, majd a különbséget megszorozzuk az e^{ap} tényezővel:

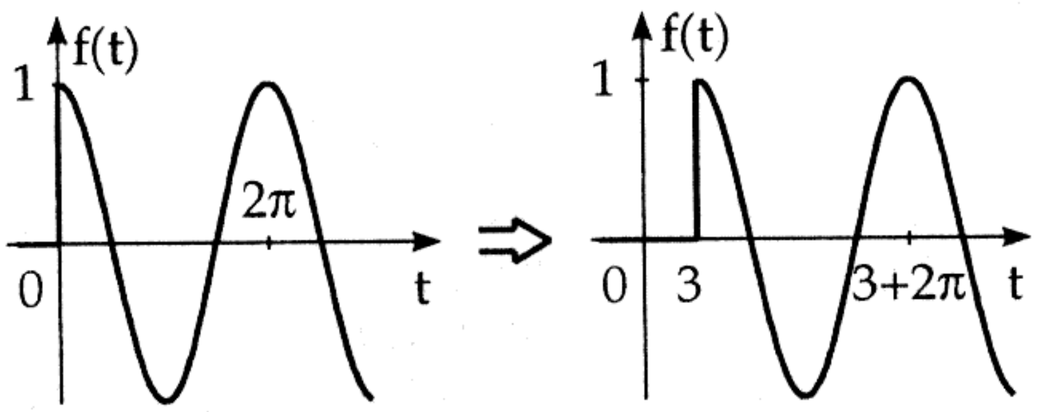
$$\mathcal{L}\{f(t+a)\}(p) = e^{ap}\left[F(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt\right]. \tag{15.11b}$$

A **15.4. és a 15.5. ábra** egy koszinuszfüggvény jobbra ill. egy egyenes balra való eltolását szemlélteti.

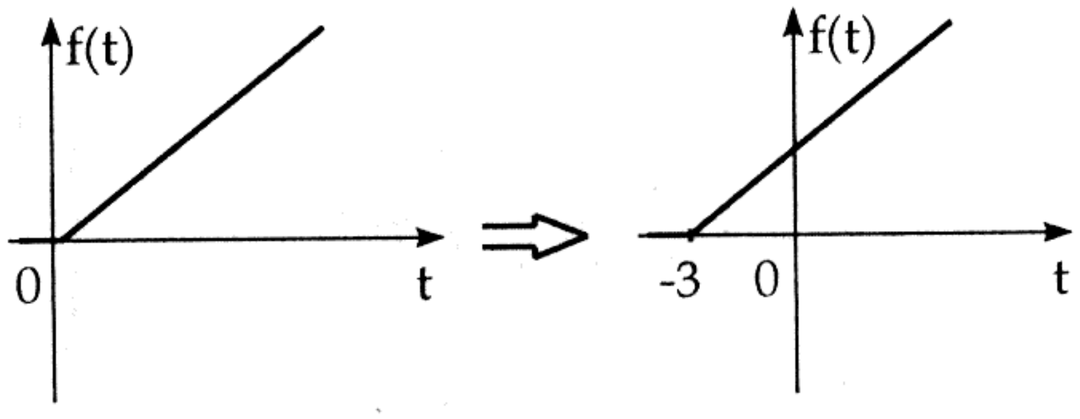
4. Csillapítási tétel (a képfüggvény eltolása)

Egy e^{-bt} tényezővel csillapított eredeti függvény LAPLACE-transzformáltját úgy kapjuk meg, hogy az eredeti függvény LAPLACE-transzformáltját a $p + b$ helyen vesszük (b tetszőleges komplex szám):

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\} = F(p+b)\,. \tag{15.12}$$



15.4. ábra.



15.5. ábra.

5. Differenciálás az eredeti tartományban

Ha $t > 0$ esetén az $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ deriváltak léteznek és $f(t)$ fellépő legmagasabb rendű deriváltjának létezik képfüggvénye, akkor az alacsonyabb rendű deriváltaknak, beleértve magát az $f(t)$ függvényt is, szintén létezik képfüggvényük, és fennáll:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= p\,F(p) - f(0+0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= p^2\,F(p) - f(0+0)\,p - f'(0+0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n\,F(p) - f(0+0)\,p^{n-1} - f'(0+0)\,p^{n-2} - \cdots \\ &\quad - f^{(n-2)}(0+0)\,p - f^{(n-1)}(0+0). \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

A (15.13) utolsó egyenletéből adódik a LAPLACE-integrál következő előállítása, amelyet sokszor közelítő kiszámítására lehet felhasználni:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{f(+0)}{p} + \frac{f'(+0)}{p^2} + \frac{f''(+0)}{p^3} + \cdots + \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}\,. \tag{15.14}$$

6. Differenciálás a képtartományban

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{15.15}$$

7. Integrálás az eredeti tartományban

Az eredeti függvény egy integráljának a képfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy az eredeti függvény képfüggvényét megszorozzuk az $1/p^n$ $(n > 0)$ tényezővel:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\,d\tau_n\,d\tau_{n-1}\ldots d\tau_1\right\} = \frac{1}{(n-1)\,!}\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)^{(n-1)}\,f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p^n}F(p)\,. \tag{15.16a}$$

A közönséges egyszeres integrál speciális esetében, tehát $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ esetén kapjuk:

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p)\,. \tag{15.16b}$$

Nyilvánvalóan $f(0) = 0$ esetén az eredeti tartományban a differenciálás és az integrálás kioltja egymást.

8. Integrálás a képtartományban

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t^n}\right\} = \int_p^\infty \int_{p_1}^\infty \cdots \int_{p_{n-1}}^\infty F(p_n)\,dp_n dp_{n-1}\ldots dp_1 = \frac{1}{(n-1)\,!}\int_p^\infty (z-p)^{n-1}F(z)\,dz\,. \tag{15.17a}$$

Ez a képlet csak akkor érvényes, ha az $f(t)/t^n$ függvénynek is létezik LAPLACE-transzformáltja. Ehhez szükséges, hogy $t \to 0+0$ esetén $f(x)$ elég erősen tartson nullához. Továbbá a $p_i \to \infty$, komplex síkbeli görbéknek benne kell lenniük $\mathcal{L}\{f(t)\}$ konvergencia és egyúttal F regularitási félsíkjában és rajtuk $\mathrm{Re}\,(p_i) \to \infty$-nek teljesülnie kell; tehát például integrációs utaknak tetszőleges, p_i-ből kiinduló, a valós tengellyel hegyesszöget bezáró félegyenesek választhatók.

9. Osztási tétel

8. $n = 1$-re vonatkozó speciálisesetként

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du\,. \tag{15.18}$$

Ahhoz, hogy a bal oldali integrál létezzen, léteznie kell a $\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{f(t)}{t}$ véges határértéknek és a fent említett szögfeltételnek is teljesülnie kell.

10. Paraméter szerinti differenciálás és integrálás

Amikor f és így F is egy $\alpha \in (a, b)$ valós paramétertől is függ, és fennállnak az ezen műveletek elvégezhetőségére vonatkozó ismert feltételek:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right\} = \frac{\partial F(p,\alpha)}{\partial \alpha}\,, \tag{15.19a}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\,d\alpha\right\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(t,\alpha)\,d\alpha. \tag{15.19b}$$

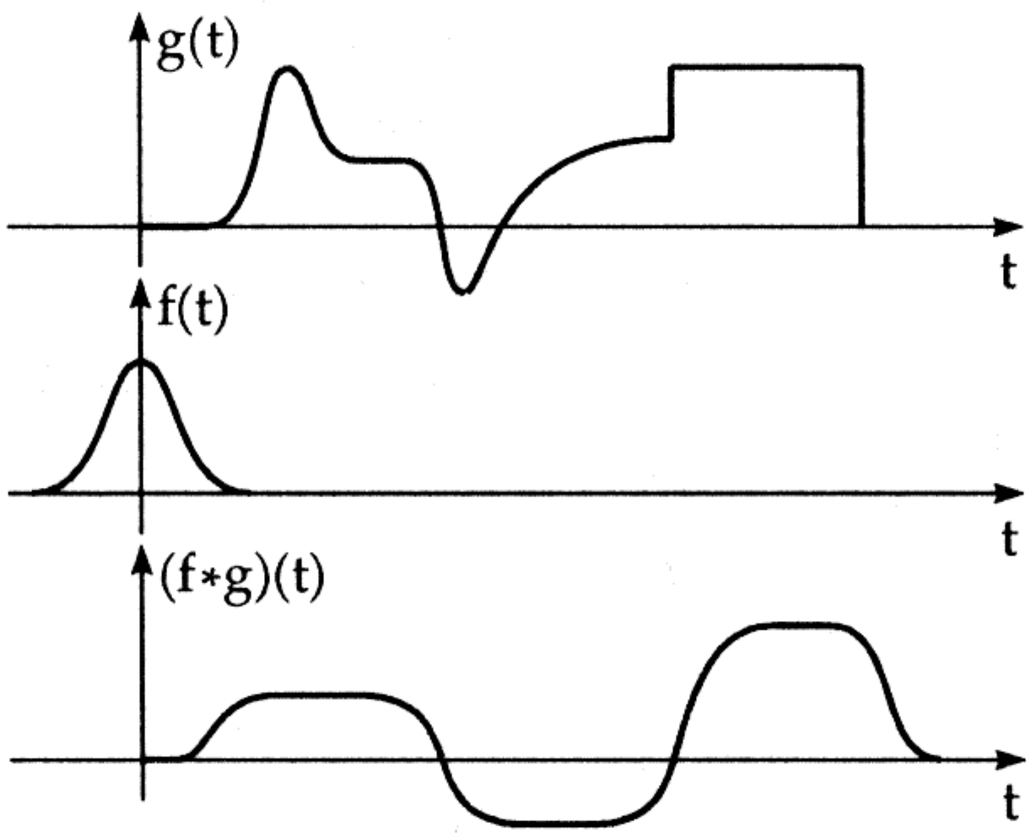
E képletek néha lehetővé teszik LAPLACE-integrálok már ismert integrálokból való kiszámítását.

11. Konvolúció

1. Konvolúció az eredeti tartományban Két függvény, $f_1(x)$ és $f_2(x)$ konvolúciójának az

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{15.20}$$

integrált nevezzük ($t < 0$-ra 0-nak definiáljuk). A (15.20) egyenletet *egyoldali (klasszikus) konvolúció*nak is nevezzük a $(0, t)$ intervallumban. Kétoldali konvolúció (a $(-\infty, \infty)$ intervallumban) a FOURIER-transzformációnál lép fel (758. old.).
A (15.20) konvolúció a következő tulajdonságokkal rendelkezik:



15.6. ábra.

a) Kommutatív törvény:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1\,, \tag{15.21a}$$

b) Asszociatív törvény:

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)\,, \tag{15.21b}$$

c) Disztributív törvény:

$$(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3 \tag{15.21c}$$

A képtartományban a konvolúciónak a közönséges szorzás felel meg:

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = F_1(p)\cdot F_2(p)\,. \tag{15.22}$$

A **15.6. ábrán** két függvény konvolúciója van feltüntetve. A konvolúciótételt a következőképpen lehet invertálásra, tehát az eredeti függvény meghatározására felhasználni:

1. A megadott képfüggvény $F(p) = F_1(p)\cdot F_2(p)$ alkalmas szorzatfelbontása.
2. $F_1(p)$ és $F_2(p)$ képfüggvény $f_1(t)$, ill. $f_2(t)$ eredeti függvényének meghatározása táblázat alapján.
3. A megadott $F(p)$ képfüggvényhez tartozó eredeti függvény képzése $f_1(t)$ és $f_2(t)$ konvolúciójaként az $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ képlet szerint az eredeti tartományban.

2. Konvolúció a képtartományban (komplex konvolúció)

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\cdot f_2(t)\}(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{x_1-\mathrm{i}\infty}^{x_1+\mathrm{i}\infty}F_1(z)\cdot F_2(p-z)\,dz=\\ =\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{x_2-\mathrm{i}\infty}^{x_2+\mathrm{i}\infty}F_1(p-z)\cdot F_2(p)\,dz\,.\end{cases}\tag{15.23}$$

Mindkét integrálás egy, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenes mentén történik, és megint improprius integrált jelent. Ha az első integrált használjuk, akkor x_1 és p értéke csak olyan lehet, hogy $x_1+it=z$ az $\mathcal{L}\{f_1\}$ konvergencia-félsíkjában, $p-z$ pedig az $\mathcal{L}\{f_2\}$ konvergencia-félsíkjában helyezkedjen el. Hasonló megjegyzések vonatkoznak a második integrálra is.

15.2.1.3. Speciális függvények képfüggvényei

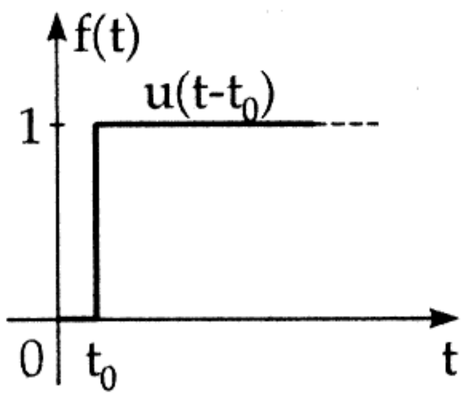
1. Ugrásfüggvény A $t=t_0$ helyhez tartozó egységugrást, másnéven a HEAVISIDE-féle egységfüggvényt az

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 \text{ ha } t>t_0\,,\\ 0 \text{ ha } t<t_0\end{cases}\qquad (t_0>0)\tag{15.24}$$

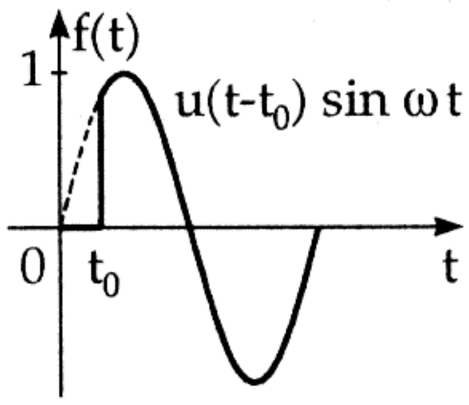
ugrásfüggvény **(15.7. szemléltető ábra**, lásd még 723. old.) adja meg.

■ **A:** $f(t)=u(t-t_0)\sin\omega t$, $\qquad F(p)=e^{-t_0p}\dfrac{\omega\,\cos\omega\,t_0+p\,\sin\omega\,t_0}{p^2+\omega^2}$ **(15.8. ábra)**.

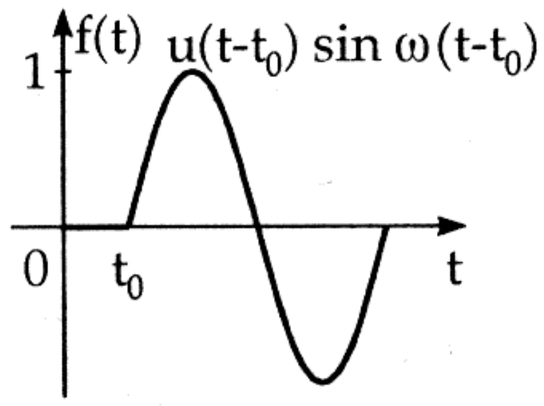
■ **B:** $f(t)=u(t-t_0)\sin\omega\,(t-t_0)$, $\qquad F(p)=e^{-t_0p}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ **(15.9. ábra)**.



15.7. ábra.



15.8. ábra.



15.9. ábra.

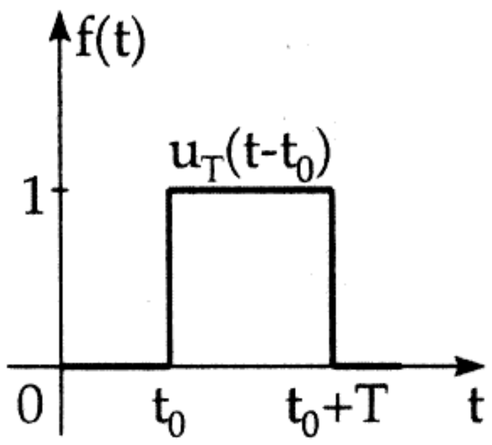
2. Négyszögimpulzus A t_0 helyhez tartozó 1 magasságú és T szélességű négyszögimpulzus **(15.10. szemléltető ábra)** két ugrásfüggvény különbségeként jön létre:

$$u_T(t-t_0)=u(t-t_0)-u(t-t_0-T)=\begin{cases}0 & \text{ha } t<t_0\,,\\ 1 & \text{ha } t_0<t<t_0+T\,,\\ 0 & \text{ha } t>t_0+T\,;\end{cases}\tag{15.25}$$

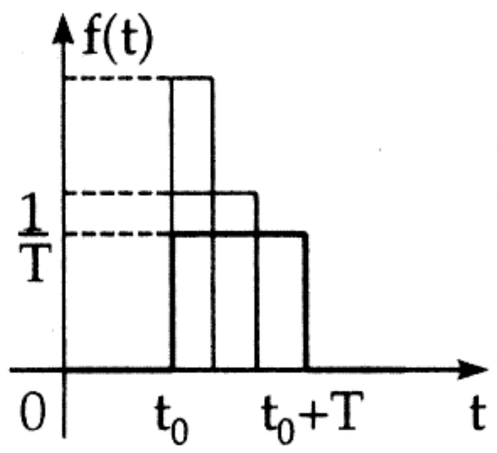
$$\mathcal{L}\{u_T(t-t_0)\}=\frac{e^{-t_0p}(1-e^{-Tp})}{p}\,,\ \text{speciálisan}\ \mathcal{L}\{u_{t_0}(t)\}=\frac{1-e^{-t_0p}}{p}\,.\tag{15.26}$$

3. Impulzusfüggvény (Dirac-féle δ-függvény) (lásd még 663. old.) A $\delta(t-t_0)$ impulzusfüggvényt (amely valójában nem függvény, hanem hasznos formalizmus, éppúgy, mint a vektoranalízisben a formális differenciáloperátorok, amelyek nem valódi vektorok) szemléletesen mint a t_0 helyhez tartozó T szélességű és $1/T$ magasságú négyszögimpulzus $t=t_0$ helyen vett határesetét lehet elképzelni **(15.11. ábra)**:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{T\to0}\frac{1}{T}[\,u(t-t_0)-u(t-t_0-T)\,].\tag{15.27}$$



15.10. ábra.



15.11. ábra.

Folytonos $h(t)$ függvényre

$$\int_a^b h(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} h(t_0)\,, & \text{ha } t_0 \text{ benne van } (a,b)\text{-ben,} \\ 0, & \text{ha } t_0 \text{ nincs benne } (a,b)\text{-ben.} \end{cases} \tag{15.28}$$

(Képzeljük azt, hogy $\delta(t-t_0)$ $t \neq t_0$-ban 0, t_0-ban pedig „olyan nagy", hogy integrálja mégis 1.) A

$$\delta(t-t_0) = \frac{du(t-t_0)}{dt}, \qquad \mathcal{L}\{\,\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 p} \qquad (t_0 \geq 0) \tag{15.29}$$

jellegű, általánosított függvényekre vonatkozó, formális összefüggéseket a *disztribúcióelmélet* vizsgálja (lásd 662. old.).

1. Szakaszonként differenciálható függvények

A szakaszonként differenciálható függvények képfüggvényei könnyen megadhatók a fent bevezetett formális δ-függvény segítségével:
Ha $f(t)$ szakaszonként differenciálható és a t_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ helyen a_ν ugrása van, akkor általánosított első deriváltja (15.29) első képletét figyelembevéve a

$$\frac{df(t)}{dt} = f_s'(t) + a_1\delta(t-t_1) + a_2\delta(t-t_2) + \cdots + a_n\delta(t-t_n) \tag{15.30}$$

formulával van definiálva, ahol azokban a tartományokban, amelyekben $f(t)$ differenciálható, $f_s'(t)$ az $f(t)$ függvény közönséges deriváltját jelenti (és a t_ν pontokban 0); ha ezen derivált valamely szakaszon/szakaszonként állandó, akkor ő pedig kifejezhető egy/több négyszögimpulzussal, ld. példák.
Ha $f(t)$ differenciálható, ugrások csak a deriváltakban lépnek fel, akkor ezek deriváltjaira teljesen hasonló képletek érvényesek. Így azon görbevonalú „poligonok" képfüggvényét, amelyek oldalai tetszőlegesen rendű polinomokkal definiálhatók (az empirikusan talált görbéket legtöbbször ilyen egyszerű függvényekkel közelítjük), nagyobb számolási ráfordítás nélkül meg lehet adni $\mathcal{L}$ linearitásának felhasználásával. (15.13) formális alkalmazásakor ugráshely esetén az $f(0+0)$, $f'(0+0)$, ... értékeket nullával kell helyettesíteni.

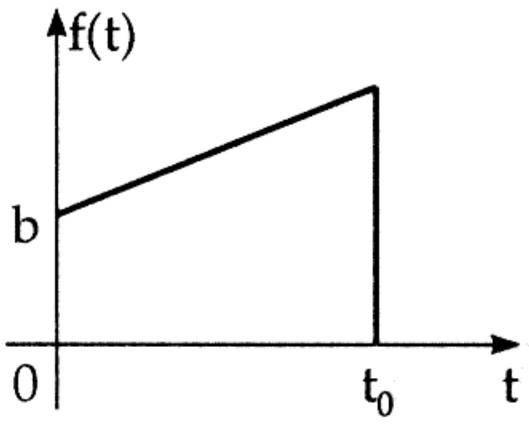
■ **A:** $f(t) = \begin{cases} at+b \text{ ha } 0 < t < t_0\,, \\ 0 \qquad \text{egyébként}\,, \end{cases}$ **(15.12. ábra)**; $f'(t) = a\,u_{t_0}(t) + b\,\delta(t) - (at_0+b)\,\delta(t-t_0)\,;$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{a}{p}(1-e^{-t_0 p}) + b - (at_0+b)\,e^{-t_0 p}\,; \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p}\left[\frac{a}{p} + b - e^{-t_0 p}\left(\frac{a}{p} + at_0 + b\right)\right].$$

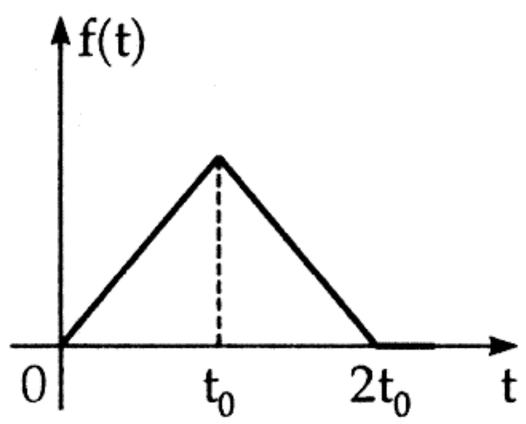
■ **B:**

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } 0 < t < t_0\,, \\ 2t_0 - t, & \text{ha } t_0 < t < 2t_0\,, \\ 0, & \text{ha } t > 2t_0\,, \end{cases} \textbf{(15.13. ábra)}; \quad f'(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t < t_0\,, \\ -1, & \text{ha } t_0 < t < 2t_0\,, \\ 0, & \text{ha } t > 2t_0\,, \end{cases} \textbf{(15.14. ábra)};$$

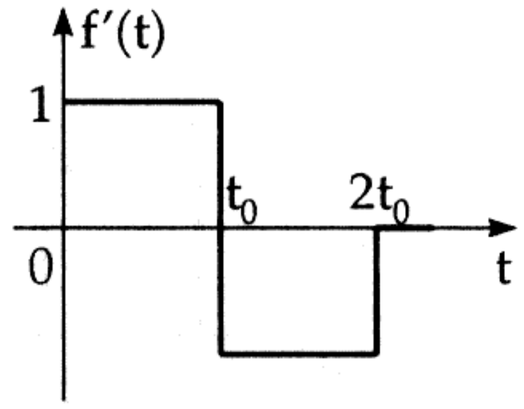
$$f''(t) = \delta(t) - \delta(t-t_0) - \delta(t-t_0) + \delta(t-2t_0)\,; \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = 1 - 2e^{-t_0 p} + e^{-2t_0 p}\,; \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(1-e^{-t_0 p})^2}{p^2}\,.$$



15.12. ábra.



15.13. ábra.



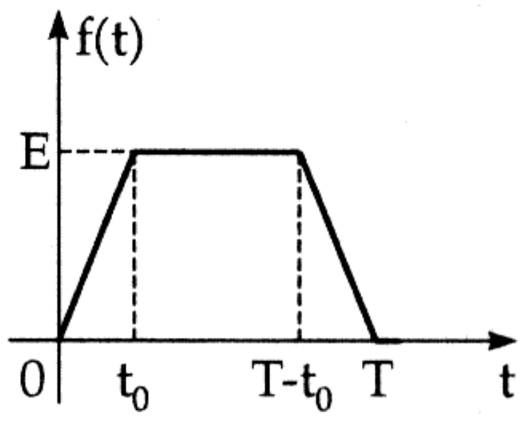
15.14. ábra.

■ **C:** $f(t)=\begin{cases} Et/t_0, & \text{ha} \quad 0<t<t_0\,, \\ E, & \text{ha} \quad t_0<t<T-t_0\,, \\ -E(t-T)/t_0, & \text{ha} \quad T-t_0<t<T\,, \\ 0, & \text{egyébként}\,, \end{cases}$ **(15.15. ábra)**;

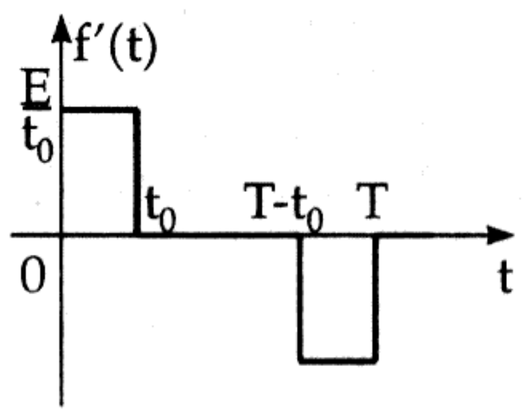
$$f'(t)=\begin{cases} E/t_0, & \text{ha} \quad 0<t<t_0\,, \\ 0, & \text{ha} \quad t_0<t<T-t_0\,, \\ -E/t_0, & \text{ha} \quad T-t_0<t<T\,, \\ 0, & \text{egyébként}\,, \end{cases}$$ **(15.16. ábra)**;

$$f''(t)=\frac{E}{t_0}\delta(t)-\frac{E}{t_0}\delta(t-t_0)-\frac{E}{t_0}\delta(t-T+t_0)+\frac{E}{t_0}\delta(t-T)\,;\ \mathcal{L}\{f''(t)\}=\frac{E}{t_0}\left[1-e^{-t_0p}-e^{-(T-t_0)p}+e^{-Tp}\right];$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{E}{t_0}\,\frac{(1-e^{-t_0p})(1-e^{-(T-t_0)p})}{p^2}\,.$$



15.15. ábra.



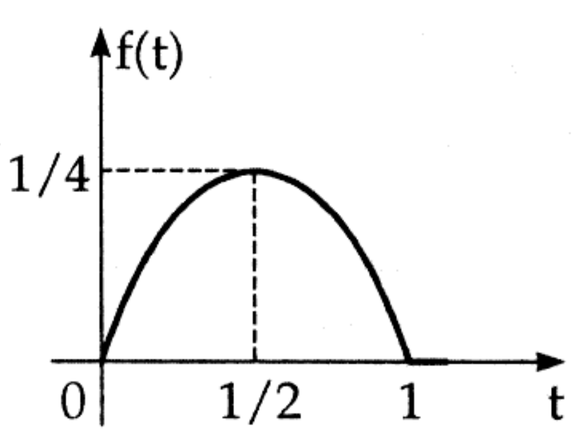
15.16. ábra.

■ **D:**

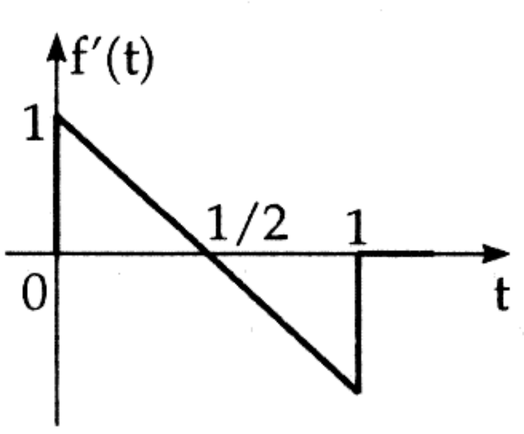
$f(t)=\begin{cases} t-t^2, & \text{ha } 0<t<1\,, \\ 0, & \text{egyébként}\,, \end{cases}$ **(15.17. ábra)**; $f'(t)=\begin{cases} 1-2t, & \text{ha } 0<t<1\,, \\ 0, & \text{egyébként}\,, \end{cases}$ **(15.18. ábra)**;

$$f''(t)=-2u_1(t)+\delta(t)+\delta(t-1)\,;$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=-\frac{2}{p}(1-e^{-p})+1+e^{-p}\,;\quad \mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1+e^{-p}}{p^2}-\frac{2\,(1-e^{-p})}{p^3}\,.$$



15.17. ábra.



15.18. ábra.

1. Periodikus függvények A T periódusú, az $f(t)$ függvény periodikus folytatásával előálló $f^*(t)$ periodikus függvény képfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy $f(t)$ LAPLACE-transzformáltját megszorozzuk az

$$(1 - e^{-Tp})^{-1} \tag{15.31}$$

periodizációs tényezővel.

■ **A:** A fenti **B** példa $f(t)$ függvényének $T = 2t_0$ periódusú periodikus folytatása egy $f^*(t)$ függvény, amelyre .... $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \dfrac{(1 - e^{-t_0 p})^2}{p^2} \cdot \dfrac{1}{1 - e^{-2t_0 p}} = \dfrac{1 - e^{-t_0 p}}{p^2(1 + e^{-t_0 p})}$.

■ **B:** A fenti **C** példa $f(t)$ függvényének T periódusú periodikus folytatása egy $f^*(t)$ függvény, amelyre $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \dfrac{E\,(1 - e^{-t_0 p})\,(1 - e^{-(T - t_0)p})}{t_0\,p^2\,(1 - e^{-Tp})}$.

15.2.1.4. A Dirac-féle δ-függvény és a disztribúciók

Bizonyos műszaki rendszerek lineáris differenciálegyenletekkel való leírásánál gyakran $u(t)$ és $\delta(t)$ lép fel zavaró- vagy bemenőfüggvényként, viszont rájuk az egyértelmű megoldhatóság 738. oldalon megkívánt feltételei nem teljesülnek: $u(t)$ nem folytonos, $\delta(t)$ pedig a klasszikus analízis értelmében nem definiálható.

Kiutat a disztribúcióelmélet kínál azzal, hogy bevezeti az ún. *általánosított függvényeket* (disztribúciókat), amelyek közé pl. az ismert folytonos valós függvények és $\delta(t)$ is besorolható, miközben a szükséges differenciálhatósági tulajdonságok garantálva vannak. A disztribúcióknak különféle előállításaik vannak. Az egyik legismertebb a L. SCHWARTZ által bevezetett, sorozatfolytonos valós lineáris funkcionálként való előállítás (lásd 661. old. és Irod. [12.14]).

A valós függvények esetével analóg módon a periodikus disztribúciókhoz FOURIER-együtthatókat és így FOURIER-sort lehet — egyértelműen — hozzárendelni (lásd 427. old.).

1. A δ-függvény approximációi

A (15.27) összefüggés analógiájára a $\delta(t)$ impulzusfüggvényt egy $\varepsilon > 0$ szélességű és $1/\varepsilon$ magasságú négyszögimpulzussal lehet approximálni:

$$f(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{ha } |t| < \varepsilon/2\,, \\ 0, & \text{ha } |t| \geq \varepsilon/2\,. \end{cases} \tag{15.32a}$$

További példák $\delta(t)$ approximációjára a haranggörbék (lásd 72. old.) és a LORENTZ-függvények (lásd 97. old.):

$$f(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \quad (\varepsilon > 0)\,, \tag{15.32b}$$

$$f(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon/\pi}{t^2 + \varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0)\,. \tag{15.32c}$$

Mindezek a függvények rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\varepsilon)\,dt = 1\,.$ (15.33a)

2. $f(-t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon)\,,$ azaz páros függvények. (15.33b)

3. $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} f(t,\varepsilon) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } t = 0\,, \\ 0, & \text{ha } t \neq 0\,. \end{cases}$ (15.33c)

2. A δ-függvény tulajdonságai

A δ-függvénynek az alkalmazások szempontjából fontos tulajdonságai a következők:

1. $$\int_{x-a}^{x+a} f(t)\delta(x-t)\,dt = f(x) \quad (f \text{ folytonos},\ a>0)\,. \tag{15.34}$$

2. $$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x) \quad (\alpha > 0)\,. \tag{15.35}$$

3. $$\delta\left(g(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i), \quad \text{ahol } g(x_i)=0 \text{ és } g'(x_i)\neq 0 \ \ (i=1,2,\ldots,n)\,. \tag{15.36}$$

Itt $g(x)$ minden zérushelyét tekintetbe kell venni.

4. A δ-függvény n-edik deriváltja: n-szeri parciális integrálással a (15.34)-ből adódó

$$f^{(n)}(x) = \int_{x-a}^{x+a} f^{(n)}(t)\,\delta(x-t)\,dt \tag{15.37a}$$

képletből az alábbi összefüggést kapjuk a δ-függvény n-edik deriváltjára:

$$(-1)^n f^{(n)}(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\delta^{(n)}(x-t)\,dt\,. \tag{15.37b}$$

5. A δ-függvény Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{15.38a}$$

A visszatranszformálás a δ-függvénynek egy további előállítását adja, mégpedig improprius integrál alakjában:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\omega t}\,d\omega\,. \tag{15.38b}$$

15.2.2. Visszatranszformálás az eredeti tartományba

Az eredeti tartományba való visszatranszformálásra a következő utak állnak rendelkezésünkre:
1. Összetartozó eredeti függvényeket és képfüggvényeket, más szóval megfeleléseket tartalmazó táblázat használata (lásd **21.11. táblázat**, 1094. old.).
2. Visszavezetés ismert megfelelésekre átalakítás útján (lásd 15.2.2.2., 747. old. és 15.2.2.3., 747. old.).
3. Az inverziós formula használata (lásd 15.2.2.4., 749. old.).

15.2.2.1. Visszatranszformálás táblázatok segítségével

A táblázathasználatot itt egy a **21.11. táblázatból**, 1094. old., vett példán mutatjuk be. További részletes táblázatok találhatók a [15.4] műben.

■ $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)(p+c)} = F_1(p)\cdot F_2(p)\,,\ \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2+\omega^2}\right\} = \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t = f_1(t)\,,$
$\mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p+c}\right\} = e^{-ct} = f_2(t)$. A (15.22) konvolúciótétel alkalmazásával kapjuk: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\cdot F_2(p)\}$

$$= \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{\omega}e^{-c(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{c^2+\omega^2}\left(\frac{c\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{\omega} + e^{-ct}\right).$$

15.2.2.2. Résztörtekre bontás

1. Az elv Az alkalmazásokban gyakran lépnek fel $F(p) = H(p)/G(p)$ alakú képfüggvények, ahol $G(p)$ polinom p-ben. Ha megtaláltuk $H(p)$ és $1/G(p)$ eredeti függvényét, akkor a keresett, $F(p)$-hez tartozó eredeti függvényt — ahogy az előbbi példában is — a konvolúciótétel alkalmazásával kapjuk meg.

2. $G(p)$ egyszeres valós zérushelyei Ha az $1/G(p)$ képfüggvénynek csak elsőrendű p_ν pólusai vannak $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, akkor van

$$\frac{1}{G(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{G'(p_\nu)(p - p_\nu)} \tag{15.39}$$

résztörtekre bontása. Ennélfogva a hozzá tartozó eredeti függvény a következő:

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{G(p)}\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t}\,. \tag{15.40}$$

3. Heaviside-féle kifejtési tétel Ha a számlálóban álló $H(p)$ függvény szintén polinomja p-nek, de $G(p)$-nél alacsonyabb fokú, akkor az $F(p)$-hez tartozó eredeti függvényt a HEAVISIDE-ról elnevezett

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{H(p_\nu)}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t} \tag{15.41}$$

képlettel kapjuk meg.

4. Komplex zérushelyek Ha a nevezőben komplex gyökök fordulnak elő, akkor a HEAVISIDE-féle kifejtési tételt ugyanúgy lehet alkalmazni. A konjugált komplex tagpárokat, amelyek komplex zérushelyek esetén mindig fellépnek, kvadratikus kifejezéssé foglalhatjuk össze, és ezek visszatranszformálását, éppúgy mint $G(p)$ többszörös zérushelyei esetén, a megfelelések táblázatának segítségével hajthatjuk végre.

■ $F(p) = \dfrac{1}{(p+c)(p^2+\omega^2)}$, tehát $H(p) = 1$, $G(p) = (p+c)(p^2+\omega^2)$, $G'(p) = 3p^2 + 2pc + \omega^2$. A $p_1 = -c$, $p_2 = \mathrm{i}\omega$, $p_3 = -\mathrm{i}\omega$ pólusok mindannyian elsőrendűek. A HEAVISIDE-tétel értelmében $f(t) = \dfrac{1}{\omega^2+c^2}e^{-ct} - \dfrac{1}{2\omega(\omega - \mathrm{i}c)}e^{\mathrm{i}\omega t} - \dfrac{1}{2\omega(\omega + \mathrm{i}c)}e^{-\mathrm{i}\omega t}$, vagy résztörtekre bontás és megfelelési táblázat alapján $F(p) = \dfrac{1}{\omega^2+c^2}\left[\dfrac{1}{p+c} + \dfrac{c-p}{p^2+\omega^2}\right]$, $f(t) = \dfrac{1}{\omega^2+c^2}\left[e^{-ct} + \dfrac{c}{\omega}\sin\omega t - \cos\omega t\right]$. Az $f(t)$-re kapott két kifejezés azonos.

15.2.2.3. Sorfejtések

$F(p)$-ből néha úgy is megkaphatjuk az $f(t)$ függvényt, hogy megpróbáljuk az $F(p)$ függvényt $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(p)$ alakú sorba fejteni, ahol az $F_n(p)$ tagok ismert képfüggvények, azaz $F_n(p) = \mathcal{L}[f_n(t)]$.

1. $F(p)$ – abszolút konvergens sorral állítható elő Ha $F(p)$ a változó csökkenő hatványai szerinti

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{\lambda_n}} \tag{15.42}$$

alakú sor amely, $|p| > R$ esetén abszolút konvergens, és a λ_n számok tetszőleges növekedő $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots < \cdots \to \infty$ sorozatot alkotnak, akkor bizonyos további feltételek teljesülése esetén lehetséges a tagonkénti visszatranszformálás:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{\lambda_n - 1}}{\Gamma(\lambda_n)}\,. \tag{15.43}$$

Itt Γ a gammafüggvény (lásd 469. old.) jele. Speciálisan a $\lambda_n = n+1$, azaz $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ esetben az $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n\,!}\, t^n$ sort kapjuk, amely minden komplex t-re is konvergens. Továbbá érvényes egy $|f(t)| < C\, e^{c|t|}$ alakú becslés, ahol C és c két valós konstans.

■ $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \dfrac{1}{p}\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \dfrac{1}{p^{2n+1}}$. Tagonként transzformálva az eredeti tartományba, kapjuk: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \dfrac{t^{2n}}{(2n)\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n\,!)^2} \left(\dfrac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$ (0-adrendű BESSEL-függvény).

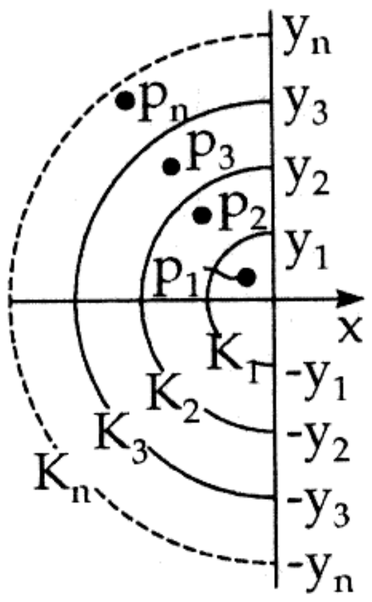
2. $F(p)$ meromorf függvény Ha $F(p)$ *meromorf függvény*, amely két, közös zérushely nélküli, egész, azaz mindenütt konvergens hatványsorba fejthető függvény hányadosaként áll elő, és amely ennélfogva felbontható egy egész függvény és végtelen sok résztört összegére, akkor a reziduumtétel miatt érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}y_n}^{c+\mathrm{i}y_n} e^{tp}\, F(p)\, dp = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{p_\nu t} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(K_n)} e^{tp} F(p)\, dp\,. \tag{15.44}$$

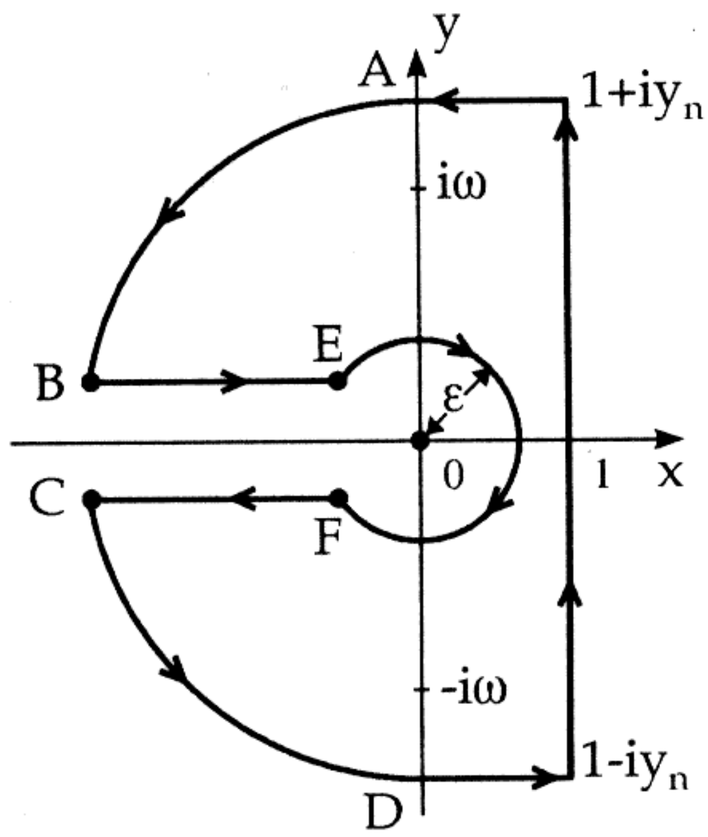
Itt p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ az $F(p)$ függvény elsőrendű pólusai, b_ν a hozzájuk tartozó reziduumok (lásd 720. old.), y_ν bizonyos monoton növő ordináták és K_ν a γ_ν-t a $-\gamma_\nu$-vel összekötő görbevonalú poligonok, pl. félkörök a **15.19. ábrán** feltüntetett módon. Az $f(t)$ megoldást az

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{p_\nu t}\,, \tag{15.45}$$

alakban kapjuk meg, ha $y_n \to \infty$ esetén $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{(K_n)} e^{tp} F(p)\, dp \to 0$; ezen feltétel teljesülését azonban nem mindig könnyű igazolni.



15.19. ábra.



15.20. ábra.

Egyes esetekben, például amikor az $F(p)$ meromorf függvény racionális része azonosan nulla, a most kapott eredmény a HEAVISIDE-féle kifejtési tétel meromorf függvényekre való formális átvitelét jelenti.

15.2.2.4. Inverz integrál

Az

$$f(t) = \lim_{y_n \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}y_n}^{c+\mathrm{i}y_n} e^{tp} F(p)\, dp \tag{15.46}$$

inverziós formulában egy, bizonyos tartományokban analitikus függvény komplex síkbeli út mentén vett integrálja szerepel, amelyre alkalmazhatók a komplex integrálás olyan módszerei, mint a reziduumszámítás vagy az integrációs út CAUCHY-tételnek megfelelő deformálása.

■ $F(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2} e^{-\alpha\sqrt{p}}$, w és $\alpha > 0$ valós paraméterek. Olyan zárt $K = K_{\varepsilon,n}$ „kulcslyuk"-görbét választunk integrációs útnak, amelyik magában foglalja $F(p)$ két reziduumát $\pm \mathrm{i}w$-ben, de nem foglalja magában, azaz nem kerüli meg a 0-t; emiatt $K_{\varepsilon,n}$-en $\arg p$-t folytonosan tudjuk értelmezni és így $\sqrt{p}$, tehát $F(p)$ is analitikus a görbén és a $\pm \mathrm{i}w$ kivételével a lezárt tartományon. Emiatt $\sum_{p=\pm \mathrm{i}w} \operatorname{Res} F(p) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{(K_{\varepsilon,n})} F(p)\, dp$ (a görbe felbontását és a kitüntetett helyhez tartozó $\arg p$ értékeket ld. a **15.20. ábrán**, illetve az integráljelek alatt), tehát

$$\frac{e^{\mathrm{i}wt-\alpha\sqrt{\mathrm{i}w}} + e^{-\mathrm{i}wt-\alpha\sqrt{-\mathrm{i}w}}}{2} = \underbrace{\int}_{\overset{\frown}{AB}\ \frac{\pi}{2}\ \pi-0} + \underbrace{\int}_{\overrightarrow{BE}\ \pi-0\ \frac{3}{4}\pi} + \underbrace{\int}_{\overset{\frown}{EF}\ \frac{3}{4}\pi\ -\frac{3}{4}\pi} + \underbrace{\int}_{\overrightarrow{FC}\ -\frac{3}{4}\pi\ -\pi+0} + \underbrace{\int}_{\overrightarrow{CD}\ -\pi+0\ -\frac{\pi}{2}}$$
$$+ \underbrace{\int}_{\overrightarrow{D\ D+1}(=1-iy_n)\ -\frac{\pi}{2}\ -\frac{\pi}{2}+0} + \underbrace{\int}_{\overrightarrow{1-iy_n\ 1+iy_n}(=A+1)\ -\frac{\pi}{2}+0\ \frac{\pi}{2}-0} + \underbrace{\int}_{\overrightarrow{A+1\ A}\ \frac{\pi}{2}-0\ \frac{\pi}{2}} \tag{15.47}$$

Ha $\varepsilon \to 0+0$ és $n \to \infty$, tehát $y_n \to \infty$, akkor a JORDAN-lemma (lásd 722. old.) szerint a $\overset{\frown}{AB}$-n és $\overset{\frown}{CD}$-n vett részintegrálok adalékai 0-hoz tartanak, de ugyanez történik az $\overset{\frown}{EF}$ körív adalékával is, mert az integrandus korlátos marad, az integrációs út hossza pedig 0-hoz tart. Végül a $\overrightarrow{D\ D+1}$ és az $\overrightarrow{A\ A+1}$ utak adaléka is triviálisan becsülve 0-hoz tart. Marad a $\overline{BE}$ és az $\overline{FC}$ vízszintes szakaszon vett integrál vizsgálata, ahol $e^{-\alpha\sqrt{p}}$-ben a negatív valós tengely felső ($p = re^{\mathrm{i}\pi}$) majd 2π-nyi szögugrás után alsó ($p = re^{-\mathrm{i}\pi}$) partja az integrációs út határhelyzete:

$$\int_{-\infty}^{0} F(p)e^{tp}\, dp = -\int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2+\omega^2} e^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\, dr, \qquad \int_0^{-\infty} F(p)e^{tp}\, dp = \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2+\omega^2} e^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\, dr\,.$$

Így végül a következőt kapjuk:

$$f(t) = \frac{e^{\mathrm{i}wt-\alpha\sqrt{\mathrm{i}w}} + e^{-\mathrm{i}wt-\alpha\sqrt{-\mathrm{i}w}}}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r \sin\alpha\sqrt{r}}{r^2+\omega^2}\, dr\,.$$

15.2.3. Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformáció segítségével

Már a LAPLACE-transzformációra vonatkozó számolási szabályokból (lásd 739. old.) látható, hogy LAPLACE-transzformáció alkalmazása esetén az eredeti tartományban végzett bonyolult műveletek, mint a differenciálás vagy az integrálás, a képtartományban egyszerű algebrai műveletekkel helyettesíthetők. Ehhez azonban, például a differenciálásnál, kezdeti feltételeket is tekintetbe kell venni. Ezt a körülményt a differenciálegyenletek megoldásánál kihasználjuk.

15.2.3.1. Állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek

1. Az elv A c_i állandókkal az

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + c_1\, y'(t) + c_0\, y(t) = f(t) \quad (c_n = 1) \tag{15.48a}$$

n-edrendű differenciálegyenlet az $y(0+0) = y_0$, $y'(0+0) = y_0' = \ldots, y^{(n-1)}(0+0) = y_0^{(n-1)}$ kezdeti feltételek mellett LAPLACE-transzformációval a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_k p^k\right) Y(p) - \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{k-\nu-1} y_0^{(\nu)} = F(p) \tag{15.48b}$$

félig algebrai egyenletbe megy át, ahol $G(p) = \sum_{k=0}^{n} c_k p^k = 0$ a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete (lásd 278. old.).

2. Elsőrendű differenciálegyenlet Az eredeti egyenlet és a képegyenlet a következő:

$$y'(t) + c_0 y(t) = f(t)\,, \quad y(0+0) = y_0\,, \tag{15.49a}$$

$$(p + c_0)\, Y(p) - y_0 = F(p)\,. \tag{15.49b}$$

Az $Y(p)$ függvényre kapjuk:

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0}{p + c_0}\,. \tag{15.49c}$$

Speciális eset: Ha $f(t) = \lambda\, e^{\mu t}$ ($\lambda\,, \mu$ állandók) akkor (15.50a)

$$Y(p) = \frac{\lambda}{(p-\mu)(p+c_0)} + \frac{y_0}{p+c_0}\,, \text{amiből visszatranszformálva a megoldás} \tag{15.50b}$$

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu + c_0} e^{\mu t} + \left(y_0 - \frac{\lambda}{\mu + c_0}\right) e^{-c_0 t}\,. \tag{15.50c}$$

3. Másodrendű differenciálegyenlet Az eredeti egyenlet és a képegyenlet a következő:

$$y''(t) + 2ay'(t) + by(t) = f(t)\,, \qquad y(0+0) = y_0, \qquad y'(0+0) = y_0'\,. \tag{15.51a}$$

$$(p^2 + 2ap + b)\, Y(p) - 2ay_0 - (py_0 + y_0') = F(p)\,. \tag{15.51b}$$

Ekkor $Y(p)$-re adódik:

$$Y(p) = \frac{F(p) + (2a+p)\, y_0 + y_0'}{p^2 + 2ap + b}\,. \tag{15.51c}$$

Esetszétválasztás:

a) $b < a^2$: $\quad G(p) = (p-\alpha_1)(p-\alpha_2)$ ($\alpha_1\,,\ \alpha_2$ valós, $\alpha_1 \neq \alpha_2$), (15.52a)

$$q(t) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})\,. \tag{15.52b}$$

b) $b = a^2$: $\quad G(p) = (p-\alpha)^2\,,$ (15.53a) $\qquad q(t) = t\, e^{\alpha t}\,.$ (15.53b)

c) $b > a^2$: $\quad G(p)$ zérushelyei komplex számok, (15.54a)

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{b - a^2}}\, e^{-at} \sin \sqrt{b - a^2}\, t\,. \tag{15.54b}$$

Az $y(t)$ megoldást úgy kapjuk meg, hogy vesszük $Y(p)$ számlálójának eredeti függvényét, és képezzük ennek $q(t)$-vel való konvolúcióját.
Célszerű a konvolúció alkalmazását elkerülni és a jobb oldalt lehetőleg közvetlenül transzformálni.

■ Az $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 37 \cos 3t + 9e^{-t}$ differenciálegyenlet képegyenlete, ha $y_0 = 1$ és $y_0' = 0$,

a következő: $Y(p) = \dfrac{p+2}{p^2+2p+10} + \dfrac{37p}{(p^2+9)(p^2+2p+10)} + \dfrac{9}{(p+1)(p^2+2p+10)}$.
A jobb oldal második és harmadik tagjának résztörtekre bontásával, a kvadratikus kifejezéseket nem bontva fel lineáris tényezőkre, kapjuk az $Y(p) = \dfrac{-p}{p^2+2p+10} - \dfrac{19}{(p^2+2p+10)} + \dfrac{p}{(p^2+9)} + \dfrac{18}{(p^2+9)} + \dfrac{1}{(p+1)}$ előállítást, és tagonkénti transzformálással (lásd a megfelelések táblázatát, 1094. old.) az $y(t) = (-\cos 3t - 6\sin 3t)e^{-t} + \cos 3t + 6\sin 3t + e^{-t}$ megoldást.

4. *n*-edrendű differenciálegyenlet Tegyük fel, hogy a differenciálegyenlet $G(p) = 0$ karakterisztikus egyenletének csak egyszeres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gyökei vannak, és közülük egyik sem nulla. Az $f(t)$ zavarófüggvényre vonatkozóan két esetet tekintünk.

1. Ha az $f(t)$ zavarófüggvény a gyakorlatban sokszor előforduló $u(t)$ ugrásfüggvénnyel egyenlő,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 0\,, \\ 0 & \text{ha } t < 0\,, \end{cases} \qquad \text{(15.55a)} \qquad \text{akkor a megoldás } y(t) = \frac{1}{G(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu G'(\alpha_\nu)} e^{\alpha_\nu t}\,. \qquad \text{(15.55b)}$$

2. Általános $f(t)$ zavarófüggvény esetén (15.55b) szerint az $\tilde{y}(t)$ megoldást a DUHAMEL-formulával kapjuk:

$$\tilde{y}(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t y(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}[\, y * f\,]\,. \qquad (15.56)$$

15.2.3.2. Változó együtthatójú közönséges differenciálegyenletek

Különösen hatékonyan lehet alkalmazni a LAPLACE-transzformációt azokra a differenciálegyenletekre, amelyeknek az együtthatói t polinomjai. Bár a (6.) egyenlet alkalmazása után a képtartományban ismét differenciálegyenletet kapunk, szerencsés esetben ennek rendje alacsonyabb.
Speciálisan ha az együtthatók elsőfokú polinomok, akkor a képtartományban a differenciálegyenlet elsőrendű, és így legtöbbször könnyen megoldható.

■ A 0-adrendű BESSEL-féle differenciálegyenlet a következő: $t\dfrac{d^2f}{dt^2} + \dfrac{df}{dt} + tf = 0$ (lásd (9.50a) az $n = 0$ esetben). Transzformáció után a képtartományban kapjuk:
$-\dfrac{d}{dp}[\, p^2F(p) - pf(0) - f'(0)\,] + pF(p) - f(0) - \dfrac{dF(p)}{dp} = 0$ vagyis $\dfrac{dF}{dp} = -\dfrac{p}{p^2+1}F(p)\,.$
A változók szétválasztásával és integrálással adódik $\log|F(p)| = -\displaystyle\int \frac{p\,dp}{p^2+1} = -\log\sqrt{p^2+1} + \log C\,,$
$F(p) = \dfrac{C}{\sqrt{p^2+1}}$ (C integrációs konstans), $f(t) = CJ_0(t)$ (lásd 748. old., példa).

15.2.3.3. Parciális differenciálegyenletek

1. Általános eljárás

Egy parciális differenciálegyenlet megoldása legalább két változó függvénye: $u = u(x,t)$. Mivel a LAPLACE-transzformáció egyetlen változóra vonatkozó integrálást tartalmaz, a másik változót a transzformáció során konstansnak kell tekinteni:

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}u(x,t)\, dt = U(x,p)\,. \qquad (15.57)$$

A deriváltak transzformálása során is x rögzített marad:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = p\,\mathcal{L}\{u(x,t)\} - u(x,0+0)\,, \qquad (15.58)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\} = p^2\mathcal{L}\{u(x,t)\} - u(x,0+0)p - u_t(x,0+0)\,\ldots$$

Az x szerinti deriválásokról fel kell tenni, hogy a LAPLACE-integrálással felcserélhetők:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{\partial}{\partial x}U(x,p)\,. \qquad (15.59)$$

Így a képtartományban közönséges differenciálegyenletet kapunk. A perem- és kezdeti feltételeket is transzformálni kell a képtartományba.

2. A homogén közegre vonatkozó egydimenziós hővezetési egyenlet megoldása

1. A feladat megfogalmazása Tekintsük az egydimenziós, korlátos homogén közegre vonatkozó, nulla zavarótagú

$$u_{xx} - a^{-2}u_t = u_{xx} - u_y = 0 \qquad (15.60a)$$

hővezetési egyenletet a $0 < t < \infty\,,\ 0 < x < l$ alaptartományban az

$$u(x,0+0) = u_0(x)\,, \quad u(0+0,t) = a_0(t)\,, \quad u(l-0,t) = a_1(t) \qquad (15.60b)$$

kezdeti és határhőmérsékleti peremfeltételekkel (a^2 a hővezetési együttható). Az időkoordinátára az $y = a^2t$ helyettesítést alkalmaztuk. Ugyanúgy, mint a (9.2.3.3.) háromdimenziós hővezetési egyenlet a 546. oldalon, (15.60a) is parabolikus típusú.

2. Laplace-transzformáció A képegyenlet alakja

$$\frac{d^2U}{dx^2} = p\,U - U_0(p)\,, \qquad (15.61a)$$

a peremfeltételeké pedig

$$U(0+0,p) = A_0(p)\,, \quad U(l-0,p) = A_1(p)\,. \qquad (15.61b)$$

Ekkor a képegyenlet megoldása a homogén esetben ($u_0(x) = 0$)

$$U(x,p) = c_1e^{x\sqrt{p}} + c_2e^{-x\sqrt{p}}\,. \qquad (15.61c)$$

Célszerű először két U_1, U_2 partikuláris megoldást előállítani, amelyekre

$$U_1(0,p) = 1\,, \quad U_1(l,p) = 0\,, \qquad (15.62a) \qquad U_2(0,p) = 0\,, \quad U_2(l,p) = 1\,, \qquad (15.62b)$$

tehát $$U_1(x,p) = \frac{e^{(l-x)\sqrt{p}} - e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}} - e^{-l\sqrt{p}}}\,, \qquad (15.62c) \qquad U_2(x,p) = \frac{e^{x\sqrt{p}} - e^{-x\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}} - e^{-l\sqrt{p}}}\,. \qquad (15.62d)$$

A képegyenlet keresett megoldása ekkor a következő alakú:

$$U(x,p) = A_0(p)\,U_1(x,p) + A_1(p)\,U_2(x,p)\,. \qquad (15.63)$$

3. Visszatranszformálás A visszatranszformálás a $0 < x < \infty$ (végtelen közeg) esetben különösen egyszerű, mert ekkor:

$$\lim_{l\to\infty} U(x,p) = A_0(p)e^{-x\sqrt{p}} \qquad \text{a megoldás,} \qquad (15.64)$$

amiből (15.22) miatt

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{a_0(t-\tau)}{\tau^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)\,d\tau\,. \qquad (15.65)$$

15.3. Fourier-transzformáció

15.3.1. A Fourier-transzformáció tulajdonságai

15.3.1.1. Fourier-integrál

1. A Fourier-integrál komplex előállítása A FOURIER-transzformáció alapja a FOURIER-*integrál*, más néven FOURIER-féle integrálformula: Ha a nem periodikus $f(t)$ függvény tetszőleges véges intervallumban kielégíti a DIRICHLET-féle feltételeket (lásd 428. old.), továbbá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \quad (15.63a) \qquad \text{konvergens, akkor fennáll} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} f(\tau)\,d\omega\,d\tau \quad (15.63b)$$

minden olyan pontban, amelyben az $f(t)$ függvény folytonos, és

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (15.63c)$$

a szakadási helyeken.

2. Ekvivalens előállítások A (15.63b) FOURIER-integrál előállításának más, ekvivalens alakjai:

1. $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\left[\,\omega\,(t-\tau)\,\right]d\omega\,d\tau\,. \qquad (15.64)$$

2. $$f(t) = \int_{0}^{\infty}\left[\,a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t\,\right]d\omega \qquad \text{ahol az együtthatók:} \qquad (15.65a)$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,, \qquad (15.65b) \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\,. \qquad (15.65c)$$

3. $$f(t) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\left[\,\omega t + \psi(\omega)\,\right]d\omega\,. \qquad (15.66)$$

4. $$f(t) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\sin\left[\,\omega t + \varphi(\omega)\,\right]d\omega\,. \qquad (15.67)$$

A két új függvényre fennállnak a következő összefüggések:

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}\,, \qquad (15.68a) \qquad \varphi(\omega) = \psi(\omega) + \frac{\pi}{2}\,, \qquad (15.68b)$$

$$\cos\psi(\omega) = \frac{a(\omega)}{A(\omega)}\,, \qquad (15.68c) \qquad \sin\psi(\omega) = \frac{b(\omega)}{A(\omega)}\,, \qquad (15.68d)$$

$$\cos\varphi(\omega) = \frac{b(\omega)}{A(\omega)}\,, \qquad (15.68e) \qquad \sin\varphi(\omega) = \frac{a(\omega)}{A(\omega)}\,. \qquad (15.68f)$$

15.3.1.2. Fourier-transzformáció és inverz transzformáció

1. A Fourier-transzformáció definíciója

A FOURIER-transzformáció egy (15.1a) alakú integráltranszformáció, amely a (15.63b) FOURIER-integrálból az

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega\tau} f(\tau)\, d\tau \tag{15.69}$$

helyettesítéssel adódik; ez tehát a definíció ($w \in R$). Így a valós $f(t)$ eredeti függvény és az általában véve komplex értékű $F(\omega)$ képfüggvény között a következő összefüggést kapjuk:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\, d\omega\,. \tag{15.70}$$

Rövidítésként az $\mathcal{F}$ jelet használjuk:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{\, f(t)\,\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, dt\,. \tag{15.71}$$

Az $f(t)$ eredeti függvényt FOURIER-transzformálhatónak mondjuk, ha a (15.69) integrál, tehát egy ω paraméterű improprius integrál, létezik. Ha a FOURIER-integrál mint közönséges improprius integrál nem létezik, akkor CAUCHY-féle főértékként értelmezzük (lásd 464. old.). Az $F(\omega)$ képfüggvény, amelyet FOURIER-*transzformált*nak is nevezünk, korlátos, folytonos, és $|\omega| \to \infty$ esetén nullához tart:

$$\lim_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0\,. \tag{15.72}$$

$F(\omega)$ létezése és korlátossága közvetlenül következik a nyilvánvaló

$$|F(\omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \tag{15.73}$$

egyenlőtlenségből. A FOURIER-transzformált létezése $F(\omega)$ folytonosságának és a $\lim_{|\omega|\to\infty} F(\omega) \to 0$ tulajdonságnak elégséges feltétele. Pontosabban: ha az $f(t)$ függvény a $(-\infty\,,\ \infty)$ intervallumban abszolút integrálható, akkor FOURIER-transzformáltja létezik, az ω változó folytonos függvénye, és fennáll (15.72).

A következő függvények nem FOURIER-transzformálhatók: konstans függvények, tetszőleges periodikus függvények (pl. $\sin \omega t, \cos \omega t$), hatványfüggvények, polinomok, exponenciális függvények (pl. $e^{\alpha t}$, hiperbolikus függvények).

2. Fourier-szinusztranszformáció és Fourier-koszinusztranszformáció

A (15.71) FOURIER-transzformáció integrandusát szinusz- és koszinuszfüggvényre felbontva adódik a FOURIER-féle szinusz-, ill. koszinusztranszformáció.

1. Fourier-féle szinusztranszformáció

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{\, f(t)\,\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt\,. \tag{15.74a}$$

2. Fourier-féle koszinusztranszformáció

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\{\, f(t)\,\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt\,. \tag{15.74b}$$

3. Átszámítási képletek Egyfelől a (15.74a) FOURIER-féle szinusztranszformáció és a (15.74b) FOURIER-féle koszinusztranszformáció, másfelől a (15.71) FOURIER-transzformáció között a következő átszámítási képletek érvényesek:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{\, f(t)\,\} = \mathcal{F}_c\{\, f(t) + f(-t)\,\} - \mathrm{i}\mathcal{F}_s\{\, f(t) - f(-t)\,\}, \tag{15.75a}$$

$$F_s(\omega) = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{F}\{\, f(|t|)\operatorname{sign} t\,\}, \tag{15.75b}$$

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\, f(t)\,\}. \tag{15.75c}$$

Páros, ill. páratlan $f(t)$ függvényekre a következő előállítás adódik:

ha $f(t)$ páros: $\mathcal{F}\{\, f(t)\,\} = 2\mathcal{F}_c\{\, f(t)\,\}$, (15.75d)

ha $f(t)$ páratlan: $\mathcal{F}\{\, f(t)\,\} = -2\mathrm{i}\mathcal{F}_s\{\, f(t)\,\}$. (15.75e)

3. Exponenciális Fourier-transzformáció

A (15.71) szerinti $F(\omega)$-val szemben az

$$F_e(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega t} f(t)\, dt \tag{15.76}$$

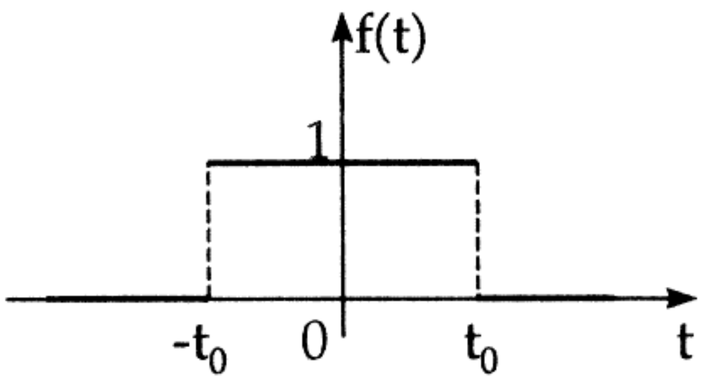
transzformációt *exponenciális* FOURIER-*transzformáció*nak nevezzük. Fennáll

$$F(\omega) = 2F_e(-\omega)\,. \tag{15.77}$$

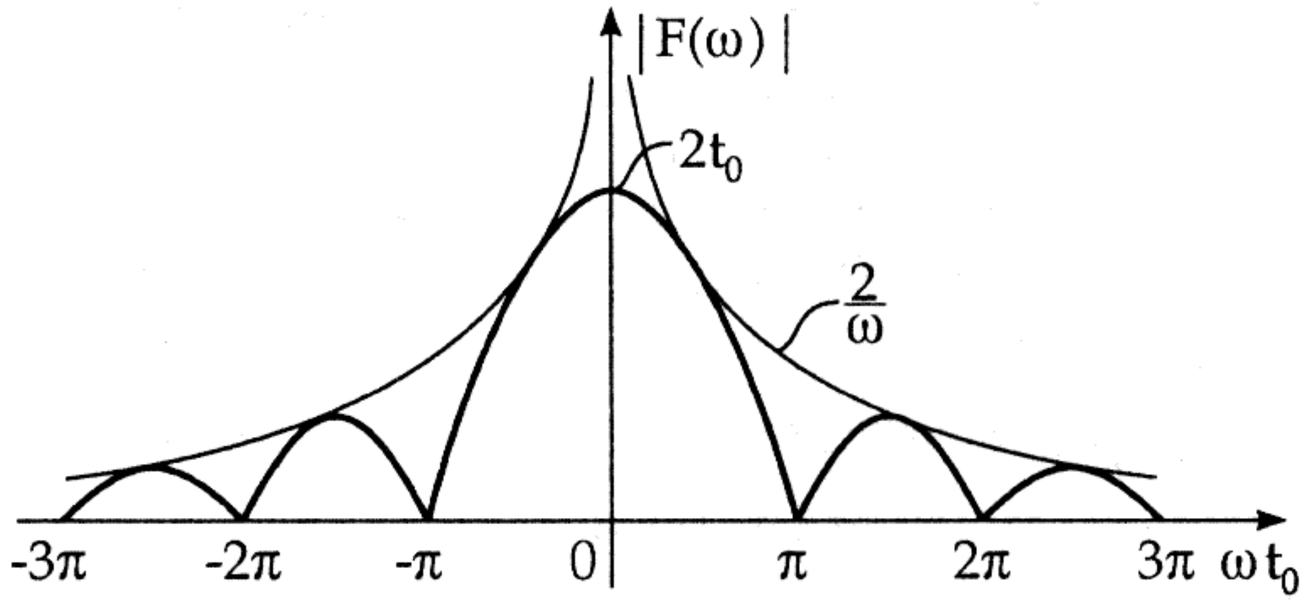
4. Táblázatok a Fourier-transzformációhoz

Egyik lehetőségként, a (15.75a,b,c) képletek értelmében, a FOURIER-féle szinusz- és koszinusztranszformációhoz nincs szükség speciális megfelelési táblázatra vagy, másik lehetőségként, a FOURIER-féle szinusz- és koszinusztranszformáció táblázataiból (15.75a,b,c) segítségével számítjuk ki az $F(\omega)$ függvényt. A **21.12.1. táblázatban** (lásd 1100. old.) és a **21.12.2. táblázatban** (lásd 1106. old.) az $\mathcal{F}_s$ FOURIER-féle szinusztranszformáció és az $\mathcal{F}_c$ FOURIER-féle koszinusztranszformáció van összefoglalva, továbbá egyes függvényekre az exponenciális $F(\omega)$ transzformáltakról is található táblázat (**21.12.3. táblázat**, 1112. old.).

■ A szimmetrikus négyszögimpulzus $f(t) = 1$ ha $|t| < t_0$, $f(t) = 0$ ha $|t| > t_0$ (A.1) függvénye **(15.21. ábra)** teljesíti a FOURIER-integrál definíciójának feltételeit (15.63a). Az együtthatók (15.65b,c) alapján: $a(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-t_0}^{+t_0} \cos\omega t\, dt = \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega t_0$ és $b(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-t_0}^{+t_0} \sin\omega t\, dt = 0$ (A.2), úgyhogy (15.65a) szerint $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega t_0 \cos\omega t}{\omega}\, d\omega$ (A.3). Az ugráshelyek figyelembe vételével (15.63c) értelmében kapjuk: $f(t) = \dfrac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\, d\omega$ (A.4).



15.21. ábra.



15.22. ábra.

5. A Fourier-transzformáció spektrális interpretációja

A periodikus függvények FOURIER-sorának analógiájára a nem periodikus függvények FOURIER-integráljának is van egyszerű fizikai interpretációja. Ha az $f(t)$ függvénynek létezik FOURIER-integrálja, akkor (15.66) és (15.67) értelmében előállítható folytonosan változó ω frekvenciájú, periodikus

$$A(\omega)\,\sin\left[\,\omega\,t+\varphi(\omega)\,\right], \qquad (15.78a) \qquad A(\omega)\,\cos\left[\,\omega\,t+\psi(\omega)\,\right] \qquad (15.78b)$$

szinuszos harmonikus összetevők összegeként. Az $A(\omega)$ kifejezés az egyes összetevők („rezgések") amplitúdóját, $\varphi(\omega)$ és $\psi(\omega)$ pedig a fázisukat adja meg. A komplex írásmódra ugyanez az interpretáció vonatkozik: Az $f(t)$ függvény ω-tól függő,

$$\frac{1}{2\pi}F(\omega)\,d\omega\,e^{\mathrm{i}\omega\,t}, \qquad (15.79)$$

típusú mennyiségek összege (ill. integrálja), ahol az összetevők amplitúdóját is, fázisát is $\frac{1}{2\pi}F(\omega)$ határozza meg.

A FOURIER-integrál és FOURIER-transzformáció ezen *spektrális interpretációja* a fizikai és műszaki alkalmazások szempontjából nagyon fontos. Az

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{\mathrm{i}\psi(\omega)}, \qquad \text{ill.} \qquad |F(\omega)|\,e^{\mathrm{i}\varphi(\omega)} \qquad (15.80a)$$

képfüggvényt az $f(t)$ *függvény spektrumának* vagy *frekvenciaspektrumának*, az

$$|F(\omega)|=\pi\,A(\omega) \qquad (15.80b)$$

mennyiséget $f(t)$ *amplitúdóspektrumának*, a $\varphi(\omega)$, ill. $\psi(\omega)$ függvényt pedig $f(t)$ *fázisspektrumának* nevezzük. Az $F(\omega)$ spektrum és a (15.65b,c) együtthatók között fennáll az

$$F(\omega)=\pi[\,a(\omega)-\mathrm{i}b(\omega)\,] \qquad (15.81)$$

összefüggés, amelyből a következő állítások adódnak:

1. Ha $f(t)$ valós függvény, akkor az $F(\omega)$ amplitúdóspektrum páros, a fázisspektrum pedig páratlan függvénye ω-nak. Ezen eseten belül:

2. Ha $f(t)$ valós és páros függvény, akkor az $F(\omega)$ spektrum valós, ha pedig $f(t)$ valós és páratlan, akkor az $F(\omega)$ spektrum képzetes.

■ Ha a szimmetrikus négyszögimpulzusra vonatkozó (A.2) eredményt (lásd 755. old.) a (15.81) összefüggésbe helyettesítjük, akkor az $F(\omega)$ képfüggvényre és az $|F(\omega)|$ amplitúdóspektrumra ezt kapjuk **(15.22. ábra)**:

$F(\omega)=\mathcal{F}[\,f(t)\,]=\pi a(\omega)=2\dfrac{\sin\,\omega\,t_0}{\omega}$ (A.3), $|F(\omega)|=2\left|\dfrac{\sin\,\omega\,t_0}{\omega}\right|$ (A.4). Az $|F(\omega)|$ amplitúdóspektrumnak a $\dfrac{2}{\omega}$ hiperbolával való érintkezési pontjaira a következő adódik: $\omega\;t_0=\pm(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

15.3.1.3. A Fourier-transzformációra vonatkozó számolási szabályok

Ahogyan a LAPLACE-transzformációnál már megjegyeztük, integráltranszformációkkal kapcsolatos számolási szabályokon az eredeti tartományban végzett bizonyos műveleteknek a képtartomány más műveleteire történő leképezését értjük. Ha feltesszük, hogy az $f(t)$ és a $g(t)$ függvény a $(-\infty\,,\;\infty)$ intervallumban abszolút integrálható, és képezni lehet az

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{\,f(t)\,\} \qquad \text{és a} \qquad G(\omega)=\mathcal{F}\{\,g(t)\,\} \qquad (15.82)$$

FOURIER-transzformáltat, akkor érvényesek az alábbiakban megfogalmazott szabályok.

1. Addíciós (linearitási) tétel

Bármely α, β-val

$$\mathcal{F}\{\,\alpha f(t)+\beta g(t)\,\}=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)\,. \qquad (15.83)$$

2. Hasonlósági tétel (léptékváltoztatás)

Ha $\alpha \neq 0$ és valós, akkor

$$\mathcal{F}\{\, f(t/\alpha)\,\} = |\alpha|\, F(\alpha\omega)\,. \tag{15.84}$$

3. Eltolási tétel

Ha $\alpha \neq 0$ valós és β valós, akkor

$$\mathcal{F}\{\, f(\alpha t+\beta)\,\} = (1/\alpha)\, e^{\mathrm{i}\beta\omega/\alpha} F(\omega/\alpha); \qquad \text{speciálisan, ha } \alpha = 1 \text{ és } \beta = -t_0\text{, akkor} \tag{15.85a}$$

$$\mathcal{F}\{\, f(t-t_0)\,\} = e^{-\mathrm{i}\omega t_0} F(\omega)\,. \tag{15.85b}$$

Ha (15.85b)-ben a t_0 értéket a $-t_0$ értékkel helyettesítjük, akkor:

$$\mathcal{F}\{\, f(t+t_0)\,\} = e^{\mathrm{i}\omega t_0} F(\omega)\,. \tag{15.85c}$$

4. Csillapítási tétel

Ha $\alpha > 0$ és β is valós, akkor

$$\mathcal{F}\{\, e^{\mathrm{i}\beta t} f(\alpha t)\,\} = (1/\alpha) F((\omega-\beta)/\alpha); \qquad \text{speciálisan, ha } \alpha = 1,\ \beta = \omega_0\text{, akkor} \tag{15.86a}$$

$$\mathcal{F}\{\, e^{\mathrm{i}\omega_0 t} f(t)\,\} = F(\omega-\omega_0)\,. \tag{15.86b}$$

5. Differenciálás a képtartományban

Ha $t^n f(t)$ FOURIER-transzformálható, akkor

$$\mathcal{F}\{\, t^n f(t)\} = \mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega)\,, \tag{15.87}$$

ahol $F^{(n)}(\omega)$ az $F(\omega)$ függvény n-edik deriváltja.

6. Differenciálás az eredeti tartományban

Ha az $f(t)$ függvény a $(-\infty,\infty)$ intervallumban folytonos és abszolút integrálható, és $t \to \pm\infty$ esetén nullához tart, továbbá az $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ általánosított deriváltak abszolút integrálhatók, tehát FOURIER-transzformálhatók, akkor fennáll

$$\mathcal{F}\{\, f'(t)\,\} = \mathrm{i}\omega\, \mathcal{F}\{\, f(t)\,\}\,, \ldots, \mathcal{F}\{\, f^{(n)}(t)\,\} = \mathrm{i}\omega^n\, \mathcal{F}\{\, f(t)\,\} \tag{15.88}$$

Ezeket a differenciálási szabályokat differenciálegyenletek megoldásánál lehet felhasználni (ld. 760. old.).

7. Integrálás a képtartományban

Ha a $t^n f(t)$ függvény $(-\infty,\infty)$-ben abszolút integrálható, akkor az $f(t)$ függvény FOURIER-transzformáltjának létezik az első n folytonos deriváltja, és ezeket a

$$\frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial\omega^k}\left[e^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\right] dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} t^k f(t)\, dt \tag{15.89a}$$

képlet segítségével lehet meghatározni $(k = 1, 2, \ldots, n)$, és fennáll

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = 0\,. \tag{15.89b}$$

8. Integrálás az eredeti tartományban és a Parseval-formula

1. Integrálási tétel Ha teljesül az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 0 \tag{15.90a}$$

feltétel, akkor

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt\right\} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} F(\omega)\,. \tag{15.90b}$$

2. Parseval-formula Ha az $f(t)$ függvény és négyzete a $(-\infty,\infty)$ intervallumban integrálható, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{15.91}$$

9. Konvolúció

Az

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \tag{15.92}$$

kétoldali konvolúció a $(-\infty, \infty)$ intervallumra vonatkozik, és azon feltevés mellett létezik, hogy az $f_1(t)$ és az $f_2(t)$ függvény abszolút integrálható a $(-\infty, \infty)$ intervallumban. Ha $t < 0$ esetén $f_1(t)$ is, $f_2(t)$ is nullával egyenlő, akkor (15.92)-ből az

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau & \text{ha } t \geq 0\,, \\ 0 & \text{ha } t < 0\,. \end{cases} \tag{15.93}$$

egyoldali konvolúció adódik. Ennélfogva ez a kétoldali konvolúciónak egy speciális esete. Míg a FOURIER-transzformáció a kétoldali, addig a LAPLACE-transzformáció az egyoldali konvolúciót használja. A kétoldali konvolúció FOURIER-transzformáltjára — a LAPLACE-transzformációra vonatkozó megfelelő tétellel egyezően — fennáll

$$\mathcal{F}\{\, f_1(t) * f_2(t)\,\} = \mathcal{F}\{\, f_1(t)\,\} \cdot \mathcal{F}\{\, f_2(t)\,\}\,, \tag{15.94}$$

feltéve hogy az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2\, dt \qquad \text{és az} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2\, dt \tag{15.95}$$

integrál létezik, vagyis a két függvény és négyzete integrálható $(-\infty, \infty)$-ben.

■ Kiszámítandó a szimmetrikus négyszögimpulzus (A.1) függvényének (lásd 755. old.) önmagával vett $\psi(t) = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$ (A.1) kétoldali konvolúciója.

Mivel $\psi(t) = \int_{-t_0}^{t_0} f(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-t_0}^{t+t_0} f(\tau)\, d\tau$ (A.2), azért $t < -2t_0$ és $t > 2t_0$ esetén $\psi(\omega) = 0$, továbbá $-2t_0 \leq t \leq 0$ esetén $\psi(t) = \int_{-t_0}^{t+t_0} d\tau = t + 2t_0$. (A.3)

Ezzel analóg módon $0 < t \leq 2t_0$ esetén $\psi(t) = \int_{t-t_0}^{t_0} d\tau = -t + 2t_0$. (A.4) Összefoglalva, erre a konvolúcióra a következő adódik **(15.23. ábra)**:

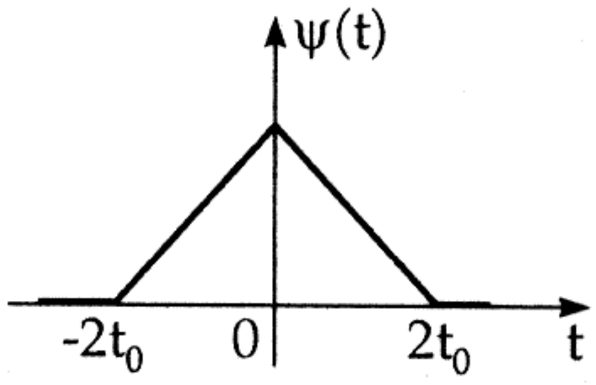
$$\psi(t) = f(t) * f(t) = \begin{cases} t + 2t_0 & \text{ha } -2t_0 \leq t \leq 0\,, \\ -t + 2t_0 & \text{ha } 0 < t \leq 2t_0\,, \\ 0 & \text{ha } |t| > 2t_0\,. \end{cases} \tag{A.5}$$

A FOURIER-transzformáltra a szimmetrikus négyszögimpulzusra vonatkozó szóló példa (A.1) képletével (755. old., **15.21. ábra)** azt kapjuk, hogy $\Psi(\omega) = \mathcal{F}\{\, \psi(t)\,\} = \mathcal{F}\{\, f(t) * f(t)\,\} = [\, F(\omega)\,]^2 = 4\frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega^2}$ (A.6), az $f(t)$ függvény amplitúdóspektrumára pedig azt, hogy

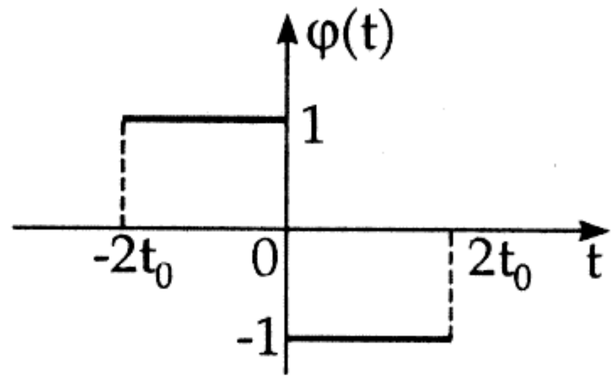
$$|F(\omega)| = 2\left|\frac{\sin \omega t_0}{\omega}\right| \text{ és } |F(\omega)|^2 = 4\frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega^2}.\ (A.7)$$

10. A Fourier- és a Laplace-transzformáció összehasonlítása

A FOURIER- és a LAPLACE-transzformáció között szoros kapcsolat van, ami abból adódik, hogy a FOURIER-transzformáció a LAPLACE-transzformációnak a $p = \mathrm{i}\omega$ helyettesítéssel előálló speciális esete. Ebből következik, hogy minden FOURIER-transzformálható függvény LAPLACE-transzformálható is, viszont a megfordítás az $f(t)$ függvényeknek csak egy kisebb körére igaz. A **15.2. táblázatban**



15.23. ábra.



15.24. ábra.

a két integráltranszformáció számos tulajdonságának összehasonlítása látható.

15.2. táblázat. A FOURIER- és a LAPLACE-transzformáció tulajdonságainak összehasonlítása

FOURIER-transzformáció	LAPLACE-transzformáció
$F(\omega) = \mathcal{F}\{ f(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, dt$ ω valós, fizikailag értelmezhető, pl. frekvenciaként.	$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t), p \} = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ p komplex, $p = r + \mathrm{i}x$.
Egy eltolási tétel van.	Két eltolási tétel van.
Az eredeti függvény értelmezési tartománya: $(-\infty, +\infty)$	Az eredeti függvény értelmezési tartománya: $[0, \infty)$
Alkalmazható olyan differenciálegyenletek megoldására, amelyek ezzel a kétoldali értelmezési tartománnyal kapcsolatos problémákat írnak le, pl. a hullámegyenlet.	Alkalmazható olyan differenciálegyenletek megoldására, amelyek ezen egyoldali értelmezési tartománnyal kapcsolatos problémákat írnak le, pl. a hővezetési egyenlet.
A differenciálási tétel nem tartalmaz kezdeti értékeket.	A differenciálási tétel tartalmaz kezdeti értékeket.
A FOURIER-integrál konvergenciája csak $f(t)$-től függ.	A LAPLACE-integrál konvergenciáját az e^{-pt} tényező biztosítja.
A kétoldali konvolúcióra alkalmazható.	Az egyoldali konvolúcióra alkalmazható.

15.3.1.4. Speciális függvények képfüggvényei

■ **A:** Melyik képfüggvény tartozik az $f(t) = e^{-a|t|}$, $\operatorname{Re} a > 0$ (A.1) eredeti függvényhez? Figyelembe véve, hogy $|t| = -t$ ha $t < 0$ és $|t| = t$ ha $t > 0$, (15.71) segítségével kapjuk: $\int_{-A}^{+A} e^{-\mathrm{i}\omega t - a|t|} dt =$

$$\int_{-A}^{0} e^{-(\mathrm{i}\omega - a)t}\, dt + \int_{0}^{+A} e^{-(\mathrm{i}\omega + a)t}\, dt = -\frac{e^{-(\mathrm{i}\omega - a)t}}{\mathrm{i}\omega - a}\bigg|_{-A}^{0} - \frac{e^{-(\mathrm{i}\omega + a)t}}{\mathrm{i}\omega + a}\bigg|_{0}^{+A} = \frac{-1 + e^{(\mathrm{i}\omega - a)A}}{\mathrm{i}\omega - a} + \frac{1 - e^{-(\mathrm{i}\omega + a)A}}{\mathrm{i}\omega + a} \quad \text{(A.2)}.$$

Mivel $|e^{-aA}| \le e^{-A \operatorname{Re} a}$ és $\operatorname{Re} a > 0$, az $A \to \infty$ esetben létezik a CAUCHY-féle főérték határértéke, úgyhogy $F(\omega) = \mathcal{F}\{ e^{-a|t|} \} = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$ (A.3).

■ **B:** Melyik képfüggvény tartozik az $f(t) = e^{-at}$, $\operatorname{Re} a > 0$ eredeti függvényhez? A függvény nem FOURIER-transzformálható, mert $A \to \infty$ esetén nincs határérték.

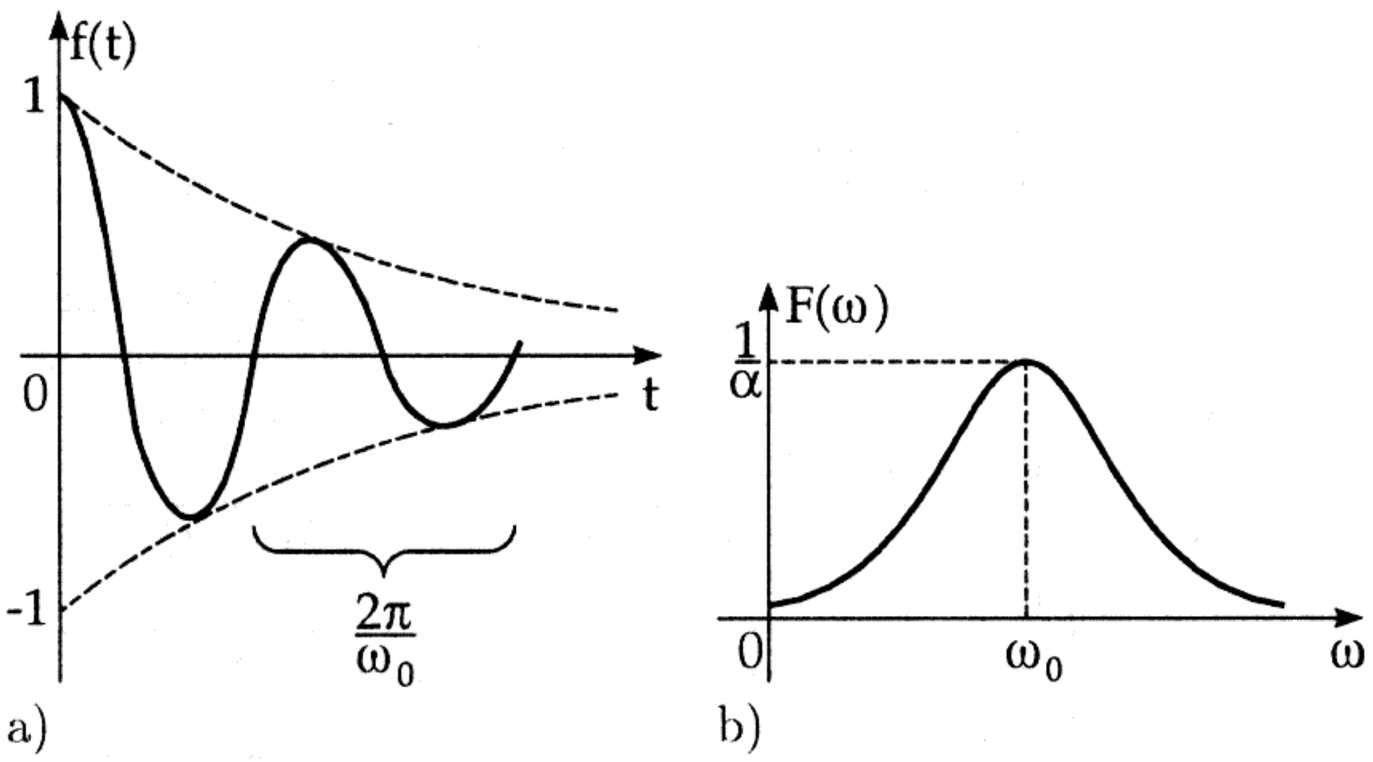
■ **C:** Keresendő a

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -2t_0 < t < 0\,, \\ -1 & \text{ha } 0 < t < 2t_0\,, \\ 0 & \text{ha } |t| > 2t_0 \end{cases} \quad \text{(C.1)}$$

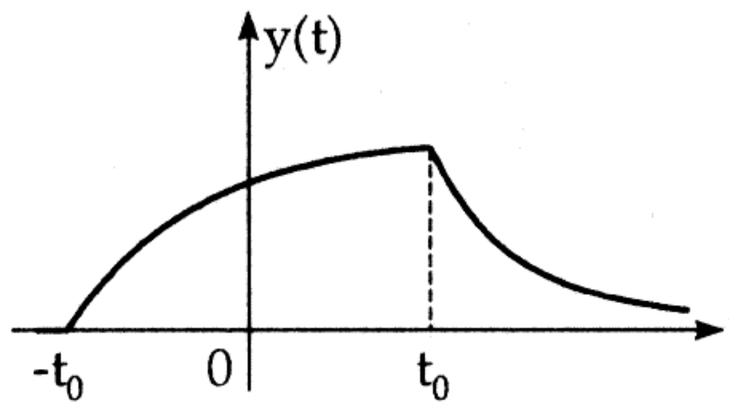
bipoláris négyszögimpulzus **(15.24. ábra)** FOURIER-transzformáltja, ahol a $\varphi(t)$ függvény az unipo-

láris négyszögimpulzus 755. oldalon szereplő példájában (A.1) alatt megadott egyenlet segítségével fejezendő ki. Fennáll $\varphi(t) = f(t+t_0) - f(t-t_0)$ (C.2). FOURIER-transzformációval (15.85b, 15.85c) értelmében adódik $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\,\varphi(t)\,\} = e^{\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega) - e^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$, (C.3) ahonnan (A1) szerint következik $\phi(\omega) = (e^{\mathrm{i}\omega t_0} - e^{-\mathrm{i}\omega t_0})\dfrac{2\sin\omega t_0}{\omega} = 4\mathrm{i}\dfrac{\sin^2\omega t_0}{\omega}$ (C.4).

■ **D:** Csillapított rezgés képfüggvénye: A **15.25.a ábrán** feltüntetett csillapított rezgést az $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0\,, \\ e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$ függvény írja le. A számolás egyszerűsítése céljából az $f^*(t) = e^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega_0)t}$ komplex függvény FOURIER-transzformáltját határozzuk meg, tehát $f(t) = \mathrm{Re}\,(f^*(t))$. FOURIER-transzformációval kapjuk: $\mathcal{F}\{\,f^*(t)\,\} = \int_0^\infty e^{-\mathrm{i}\omega t}e^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega_0)t}\,dt = \int_0^\infty e^{(-\alpha+(\omega-\omega_0)\mathrm{i}\,t}\,dt =$ $\dfrac{e^{-\alpha t}e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}}{-\alpha+\mathrm{i}(\omega_0-\omega)}\Big|_0^\infty = \dfrac{1}{\alpha-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)} = \dfrac{\alpha+\mathrm{i}(\omega_0-\omega)}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}$. A végeredmény az $\mathcal{F}\{\,f(t)\,\} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}$ **(15.25.b ábra)** LORENTZ-féle vagy BREIT–WIGNER-féle görbe (lásd még 97. old.). Láthatjuk, hogy időtartománybeli csillapított rezgésnek a frekvenciatartománybeli egyetlen csúcs felel meg.



15.25. ábra.



15.26. ábra.

15.3.2. Differenciálegyenletek megoldása Fourier-transzformáció segítségével

A FOURIER-transzformációnak a LAPLACE-transzformációhoz hasonlóan fontos alkalmazási területe a differenciálegyenletek megoldása, mert ezek az egyenletek az említett transzformációk révén egyszerű alakot öltenek. Közönséges differenciálegyenletek esetén algebrai egyenletek, parciális differenciálegyenletek esetén közönséges differenciálegyenletek állnak elő.

15.3.2.1. Közönséges differenciálegyenletek

Az

$$y'(t) + a\,y(t) = f(t) \qquad \text{ahol} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| < t_0\,, \\ 0 & \text{ha } |t| \geq t_0\,, \end{cases} \tag{15.96a}$$

differenciálegyenletet, amelyben $f(t)$ a **15.21. ábrán** feltüntetett függvény, az

$$\mathcal{F}\{\,y(t)\,\} = Y(\omega) \tag{15.96b}$$

FOURIER-transzformáció az

$$\mathrm{i}\omega\,Y + aY = \frac{2\sin\omega t_0}{\omega} \tag{15.96c}$$

algebrai egyenletbe viszi át, úgyhogy $$Y(\omega) = 2\,\frac{\sin \omega t_0}{\omega(a + \mathrm{i}\omega)} \tag{15.96d}$$

adódik. A visszatranszformálás eredménye

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\, Y(\omega)\,\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\, 2\,\frac{\sin \omega t_0}{\omega(a + \mathrm{i}\omega)}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\omega t}\sin \omega t_0}{\omega(a + \mathrm{i}\omega)}\,d\omega, \tag{15.96e}$$

tehát

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < t < -t_0\,, \\ \dfrac{1}{a}\left[\,1 - e^{-a(t+t_0)}\right] & \text{ha } -t_0 \le t \le +t_0\,, \\ \dfrac{1}{a}\left[\,e^{-a(t-t_0)} - e^{-a(t+t_0)}\right] & \text{ha } t_0 < t < \infty\,. \end{cases} \tag{15.96f}$$

A (15.96f) függvényt a **15.26. ábra** szemlélteti.

15.3.2.2. Parciális differenciálegyenletek

1. Általános eljárás

Egy parciális differenciálegyenlet megoldása legalább két változó függvénye: $u = u(x,t)$. Mivel a FOURIER-transzformáció egyváltozós integrálást tartalmaz, a másik változót a transzformálásnál konstansnak kell tekinteni. Ha például a t mennyiséget rögzítettnek választjuk és az x értéket változónak, akkor:

$$\mathcal{F}\{\, u(x,t)\,\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega\tau}u(x,\tau)\,d\tau = U(x,\omega)\,. \tag{15.97}$$

A deriváltak transzformálásánál is az egyik változó, a fenti esetben x, rögzített marad, tehát az eredeti függvény parciális deriváltjait transzformáljuk:

$$\mathcal{F}\left\{\,\frac{\partial^{(n)}u(x,t)}{\partial t^n}\right\} = (\mathrm{i}\omega)^n\mathcal{F}\{\, u(x,t)\,\}\,. \tag{15.98}$$

A LAPLACE-transzformációkhoz hasonlóan az x szerinti deriváltakról ki kell kötni, hogy ezek a FOURIER-transzformációval felcserélhetők:

$$\mathcal{F}\left\{\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}[\,u(x,t)\,] = \frac{\partial}{\partial x}U(x,\omega)\,. \tag{15.99}$$

Így a képtartományban közönséges differenciálegyenletet kapunk. A kezdeti és peremfeltételeket szintén a képtartományba kell transzformálni.

2. A homogén közegre vonatkozó egydimenziós hullámegyenlet megoldása

1. A feladat megfogalmazása A homogén közegre vonatkozó, nulla zavarótagú, egydimenziós hullámegyenlet a következő:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0\,. \tag{15.100a}$$

A (9.2.3.2.) háromdimenziós hullámegyenlethez (544. old.) hasonlóan, (15.100a) is hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet. Tegyük fel, hogy az

$$u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)\,, \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (0 \le t < \infty) \tag{15.100b}$$

kezdeti feltételek mellett a fenti CAUCHY-probléma korrekt kitűzésű, tehát megadható egy-egy függvényosztály, amelyben a feladatnak van, illetve egyértelműen van megoldása, továbbá a megoldás valamilyen konvergencia értelmében folytonosan függ a kiindulási adatoktól.

2. Fourier-transzformáció Megoldás céljából FOURIER-transzformációt végzünk x szerint, tehát az időkoordinátát tekintjük konstansnak:

$$\mathcal{F}\{\, u(x,t)\,\} = U(\omega,t)\,. \tag{15.101a}$$

Innen

$$(\mathrm{i}\omega)^2 U(\omega,t) - \frac{d^2U(\omega,t)}{dt^2} = 0, \qquad \text{ahol} \tag{15.101b}$$

$$\mathcal{F}\{\, u(x,0)\,\} = U(\omega,0) = \mathcal{F}\{\, f(x)\,\} = F(\omega)\,, \tag{15.101c}$$

$$\mathcal{F}\{\, u_t(x,0)\,\} = U'(\omega,0) = \mathcal{F}\{\, g(x)\,\} = G(\omega)\,. \tag{15.101d}$$

$$\omega^2 U + U'' = 0\,. \tag{15.101e}$$

Az eredmény a most újra változónak tekintendő t időkoordinátára vonatkozó, a képfüggvény ω változóját paraméterként tartalmazó közönséges differenciálegyenlet.
Ezen ismert, állandó együtthatójú differenciálegyenlet általános megoldása

$$U(\omega,t) = C_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 e^{-\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{15.102a}$$

Az

$$U(\omega,0) = C_1 + C_2 = F(\omega)\,, \quad U'(\omega,0) = \mathrm{i}\omega\, C_1 - \mathrm{i}\omega\, C_2 = G(\omega) \tag{15.102b}$$

kezdeti feltételek segítségével a C_1, C_2 konstansok meghatározhatók:

$$C_1 = \frac{1}{2}[\, F(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega)\,]\,, \quad C_2 = \frac{1}{2}[\, F(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega)\,]\,. \tag{15.102c}$$

Megoldásként kapjuk:

$$U(\omega,t) = \frac{1}{2}[\, F(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega)\,]e^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{2}[\, F(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega)\,]e^{-\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{15.102d}$$

3. Visszatranszformálás A fenti összegben szereplő $F(\omega)$ függvény visszatranszformálására célszerű az

$$\mathcal{F}\{\, f(ax+b)\,\} = 1/a \cdot e^{\mathrm{i}b\omega/a} F(\omega/a)\,, \tag{15.103a}$$

eltolási tételt felhasználni, ahonnan ($a = 1$ és $b = \pm t$ helyettesítéssel)

$$\mathcal{F}^{-1}\{\, e^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\,\} = f(x+t)\,, \quad \mathcal{F}^{-1}[\, e^{-\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\,] = f(x-t)\,. \tag{15.103b}$$

Ebből az

$$\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} F(\omega) \tag{15.103c}$$

integrálási szabály alkalmazásával és a $\tau + t = z$ helyettesítéssel

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \right\} = \int_{-\infty}^{x} \mathcal{F}^{-1}\{\, G(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\}\, d\tau = \int_{-\infty}^{x} g\,(\tau + t)\, d\tau = \int_{-\infty}^{x+t} g\,(z)\, dz \tag{15.103d}$$

és hasonlóan

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ -\frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} \right\} = -\int_{-\infty}^{x-t} g\,(z)\, dz\,. \tag{15.103e}$$

Tehát az eredeti tartományban a végső megoldás

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g\,(z)\, dz\,. \tag{15.104}$$

15.4. Z-transzformáció

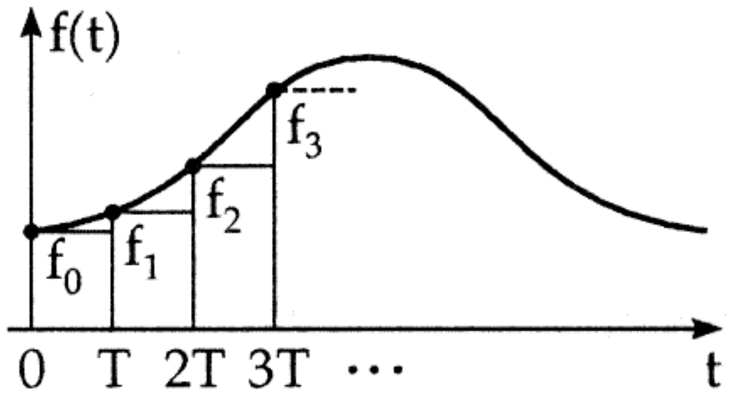
A természetben és a technikában megkülönböztetünk folytonos és diszkrét folyamatokat. Míg a folytonos folyamatok közül sokat differenciálegyenlettel lehet leírni, addig a diszkrét folyamatok gyakran *differenciaegyenlet*re vezetnek. Differenciálegyenletek megoldására különösen a FOURIER- és a LAPLACE-transzformáció alkalmas, a differenciaegyenletek megoldására viszont más, megfelelő operátormódsze-

rek kerültek kifejlesztésre. Utóbbiak közül legismertebb a diszkrét halmazon vett paraméteres integrálként is felfogható Z-transzformáció, amely szoros kapcsolatban áll a LAPLACE-transzformációval.

15.4.1. A Z-transzformáció tulajdonságai

15.4.1.1. Diszkrét függvények

Ha egy $f(t)$ $(0 \le t < \infty)$ függvény értékét csak diszkrét $t_n = nT/$ $(n = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ T > 0)$ argumentumokra ismerjük, akkor bevezetjük az $f(nT) = f_n$ jelölést és képezzük az $\{f_n\}$ sorozatot. Ilyen helyzet áll elő pl. az elektrotechnikában, amikor egy $f(t)$ függvény értékeiből a diszkrét t_n időpontokban mintát veszünk. Az ábrázolás gyakran *lépcsősfüggvény* alakjában történik **(15.27. ábra)**. Az $\{f_n\}$ sorozat és a csak diszkrét argumentumokra értelmezett $f(nT)$ függvény, amelyet *diszkrét függvény*nek mondunk, egymással ekvivalens. Az $\{f_n\}$ sorozattól $n \to \infty$ esetén semmiféle konvergenciát nem követelünk meg.



15.27. ábra.

15.4.1.2. A Z-transzformáció definíciója

1. Eredeti sorozat és képfüggvény Az $\{f_n\}$ sorozathoz hozzárendeljük az

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \tag{15.105}$$

végtelen sort és az

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} \tag{15.106}$$

jelölést alkalmazzuk. Ha ez a sor valamely z-re konvergens, akkor az $\{f_n\}$ sorozatot ezen z-ben *Z-transzformálhatónak* mondjuk. $\{f_n\}$-re az *eredeti sorozat*, $F(z)$-re a *képfüggvény* elnevezést használjuk. Itt z komplex változó, $F(z)$ pedig komplex értékű függvény.

■ $f_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. A megfelelő végtelen sor

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n . \tag{15.107}$$

Ez $1/z$ hányadosú mértani sor, amely $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ esetén konvergens és összege $F(z) = \frac{z}{z-1}$, ha pedig $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$, akkor divergens. Tehát az $\{1\}$ sorozat $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ esetén, vagyis a z-síknak a $|z| = 1$ egységkörön kívül fekvő pontjaiban Z-transzformálható.

2. Tulajdonságok Mivel az $F(z)$ képfüggvény (15.105) szerint az $1/z$ komplex változó hatványsora, a komplex változós hatványsorok tulajdonságaiból (lásd 716. old.) kapjuk:

a) Ha az $\{f_n\}$ sorozat Z-transzformálható, akkor van olyan R valós szám, hogy a (15.105) sor $|z| > 1/R$ esetén abszolút konvergens és $|z| < 1/R$ esetén divergens. A $|z| \ge 1/R_0 > 1/R$ értékekre a sor még egyenletesen konvergens is. Az R szám a (15.105) hatványsor $1/z$ változóra vonatkozó konvergenciasugara. Ha a sor minden $|z| > 0$-ra konvergens, akkor megállapodás szerint $R = \infty$. Nem Z-transzformálható sorozat esetén azt mondjuk, hogy $R = 0$.

b) Ha az $\{f_n\}$ sorozat $|z| > 1/R$ esetén Z-transzformálható, akkor a hozzá tartozó $F(z)$ képfüggvény $|z| > 1/R$ esetén analitikus, és egyúttal ez $\{f_n\}$ egyetlen képfüggvénye. A megfordítás: Ha $F(z)$ a $|z| > 1/R$ tartományban analitikus és $z = \infty$ esetén is reguláris függvény, akkor $F(z)$-hez található pontosan egy $\{f_n\}$ eredeti sorozat. Itt $F(z)$ $z = \infty$-beli regularitása azt jelenti, hogy $F(z)$ (15.105) alakú hatványsorba fejthető és fennáll $F(\infty) = f_0$.

3. Határérték-tételek A LAPLACE-transzformáció képfüggvényének határérték-tulajdonságaihoz hasonlóan ((15.7b), 738. old.), a Z-transzformációra a következő határérték-tételek érvényesek:

a) Ha $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ létezik, akkor

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)\,. \tag{15.108}$$

Itt z akár a valós tengelyen, akár tetszőleges módon tarthat ∞-hez. Mivel a

$$\mathcal{Z}\{F(z) - f_0\} = f_1 + f_2\frac{1}{z} + f_3\frac{1}{z^2} + \cdots\,, \tag{15.109}$$

$$\mathcal{Z}^2\left\{F(z) - f_0 - f_1\frac{1}{z}\right\} = f_2 + f_3\frac{1}{z} + f_4\frac{1}{z^2} + \cdots\,, \tag{15.110}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

sorok is nyilvánvalóan Z-transzformáltak, a (15.108) összefüggéssel analóg módon kapjuk:

$$f_1 = \lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}\{F(z) - f_0\}, \qquad f_2 = \lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}^2\left\{F(z) - f_0 - f_1\frac{1}{z}\right\}, \ldots \tag{15.111}$$

Így az $F(z)$ képfüggvényből a fenti sorrendet követve meg tudjuk határozni az $\{f_n\}$ eredeti sorozatot.

b) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ létezik, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1+0}(z-1)F(z)\,. \tag{15.112}$$

A $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ értéket azonban csak akkor lehet (15.112)-ből meghatározni, ha tudjuk, hogy a határérték létezik, mert a fenti állítás nem megfordítható.

■ $f_n = (-1)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Innen következik $\mathcal{Z}\{f_n\} = \dfrac{z}{z+1}$ és $\lim\limits_{z\to 1+0}(z-1)\dfrac{z}{z+1} = 0$, holott $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ nem létezik.

15.4.1.3. Számolási szabályok

A Z-transzformáció alkalmazásához fontos tudni, hogy az eredeti sorozatokon végzett bizonyos műveletek miként tükröződnek vissza a képfüggvényekre vonatkozó megfelelő műveletekben, és megfordítva. A továbbiakban legyen $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ ha $|z| > 1/R$.

1. Eltolás (transzláció)

Megkülönböztetünk előre- és hátratolást.

1. Első eltolási tétel: $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k}F(z) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,,$ (15.113)

ahol megállapodás szerint $f_{n-k} = 0$ ha $n - k < 0$.

2. Második eltolási tétel: $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k\left[F(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} f_\nu\left(\dfrac{1}{z}\right)^\nu\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,.$ (15.114)

2. Összegezés

Ha $|z| > \max\left(1, \dfrac{1}{R}\right)$, akkor $\mathcal{Z}\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} f_\nu\right\} = \dfrac{1}{z-1}F(z)\,.$ (15.115)

3. Differenciaképzés

A

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n\,, \quad \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n) \qquad (m = 1, 2, \ldots\,;\ \Delta^0 f_n = f_n) \tag{15.116}$$

differenciák transzformáltjaira teljesülnek a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\Delta f_n\} &= (z-1)F(z) - zf_0\,, \\ \mathcal{Z}\{\Delta^2 f_n\} &= (z-1)^2F(z) - z(z-1)f_0 - z\Delta f_0\,, \\ \vdots \qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathcal{Z}\{\Delta^k f_n\} &= (z-1)^kF(z) - z\sum_{\nu=0}^{k-1}(z-1)^{k-\nu-1}\Delta^\nu f_0\,. \end{aligned} \tag{15.117}$$

4. Csillapítás

Ha $\lambda \neq 0$ tetszőleges komplex szám és $|z| > \dfrac{|\lambda|}{R}$, akkor

$$\mathcal{Z}\{\lambda^n f_n\} = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)\,. \tag{15.118}$$

5. Konvolúció

Két sorozat, $\{f_n\}$ és $\{g_n\}$ *konvolúciójá*n azon $\{f_n\} * \{g_n\}$ sorozatot értjük, amelynek k-adik eleme =

$$= \sum_{\nu=0}^{k} f_\nu\, g_{k-\nu}\,. \tag{15.119}$$

Ha a $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ Z-transzformált létezik $|\lambda| > 1/R_1$ esetén, továbbá a $\mathcal{Z}\{g_n\} = G(z)$ Z-transzformált létezik $|z| > 1/R_2$ esetén, akkor

$$\mathcal{Z}\{\{f_n\} * \{g_n\}\} = F(z)G(z) \tag{15.120}$$

a $|z| > \max\left(\dfrac{1}{R_1}, \dfrac{1}{R_2}\right)$ értékekre. A (15.120) összefüggést a Z-transzformáció *konvolúciótételé*nek is nevezzük. Ez a két hatványsor szorzására vonatkozó szabálynak felel meg.

6. A képfüggvény differenciálása

$$\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{dF(z)}{dz}\,. \tag{15.121}$$

(15.121) ismételt alkalmazásával $F(z)$ magasabbrendű deriváltjai is meghatározhatók.

7. A képfüggvény integrálása

Az $f_0 = 0$ feltétellel fennáll

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f_n}{n}\right\} = \int_z^\infty \frac{F(\xi)}{\xi}\,d\xi\,, \tag{15.122}$$

ahol az integrációs út bármely, a konvergenciatartománybeli, ∞-be tartó folytonos görbe lehet, például a 0-ból kiinduló, a z-n átmenő félegyenes z-be eltolva.

15.4.1.4. Kapcsolat a Laplace-transzformációval

Ha az $f(t)$ diszkrét függvényt (lásd 763. old.) lépcsősfüggvénynek tekintjük az

$$f(t) = f(nT) = f_n \qquad \text{ha} \quad nT \leq t < (n+1)\,T \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\,;\; T > 0) \tag{15.123}$$

definícióval, akkor erre a szakaszonként konstans függvényre alkalmazható a LAPLACE-transzformáció (lásd 738. old.) és $T = 1$ esetén kapjuk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f_n e^{-pt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{e^{-np} - e^{-(n+1)p}}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p}\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-np}\,. \tag{15.124}$$

A (15.124) alatti végtelen sort *diszkrét* LAPLACE-*transzformáció*nak is hívjuk és a $\mathcal{D}$ jellel jelöljük:

$$\mathcal{D}\{f(t)\} = \mathcal{D}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-np}\,. \tag{15.125}$$

(15.125)-ben az e^p mennyiséget z-vel helyettesítve $\mathcal{D}\{f_n\}$-ből egy z csökkenő hatványai szerint haladó sor, úgynevezett LAURENT-*sor* lesz (lásd 718. old.). Az $e^p = z$ helyettesítéssel, amely a Z-transzformáció elnevezéshez vezetett, (15.124)-ból végül a következő összefüggést kapjuk lépcsősfüggvények LAPLACE-transzformáltja és Z-transzformáltja között:

$$pF(p) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) F(z), \qquad (15.126a) \qquad \text{ill.} \quad p\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \mathcal{Z}\{f_n\}\,. \qquad (15.126b)$$

Így a Z-transzformációra vonatkozó megfelelések (lásd **21.13. táblázat**, 1113. old.) lépcsősfüggvények LAPLACE-transzformációjára vonatkozó megfelelésekre (lásd **21.11. táblázat**, 1094. old.) számíthatók át, és megfordítva.

15.4.1.5. A Z-transzformáció invertálása

A Z-transzformáció invertálása, röviden visszatranszformálás, azt jelenti, hogy megadott $F(z)$ képfüggvényhez keressük a hozzá tartozó, egyértelműen meghatározott $\{f_n\}$ eredeti sorozatot. Jelölés:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \{f_n\}\,. \qquad (15.127)$$

A visszatranszformálásra különféle lehetőségek vannak.

1. Táblázathasználat Ha az $F(z)$ függvény a táblázatban explicit módon nem szerepel, megpróbálhatjuk átalakításokkal és a számolási szabályok alkalmazásával olyan függvényekből előállítani, amelyek a **21.13. táblázatban** már megtalálhatók.

2. $F(z)$ LAURENT-sora A (15.105) definíció alapján a visszatranszformálás eredménye rögtön adódik, ha az $F(z)$ függvény $1/z$ szerinti sorfejtése ismert vagy meghatározható.

3. $F\left(\frac{1}{z}\right)$ Taylor-sora Mivel $F\left(\frac{1}{z}\right)$ sorában z növekvő kitevőjű hatványai állnak, (15.105) miatt a TAYLOR-formulából adódik

$$f_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=0} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \qquad (15.128)$$

4. Határérték-tétel alkalmazása A (15.108), (15.111) határértékek segítségével az $F(z)$ képfüggvényből az $\{f_n\}$ eredeti sorozat közvetlenül meghatározható.

■ $F(z) = \dfrac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$. Alkalmazandó a fenti négy módszer.

1. Az $F(z)/z$ függvény résztörtekre bontásával (lásd 15. old.) olyan függvényeket kapunk, amelyek szerepelnek a **21.13. táblázatban**.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}\,. \qquad \text{Innen}$$

$$F(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1} \qquad \text{és} \qquad \{f_n\} = 2(2^n - n - 1) \quad \text{ha } n \geq 0\,.$$

2. Osztással $F(z)$ a következő, z csökkenő kitevőjű hatványai szerint haladó sorba megy át:

$$F(z) = \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 2\frac{1}{z^2} + 8\frac{1}{z^3} + 22\frac{1}{z^4} + 52\frac{1}{z^5} + 114\frac{1}{z^6} + \ldots \qquad (15.129)$$

Innen közvetlenül leolvasható, hogy $f_0 = f_1 = 0$, $f_2 = 2$, $f_3 = 8$, $f_4 = 22$, $f_5 = 52$, $f_6 = 114$, …, de az f_n általános tagra zárt kifejezést nem kapunk.

3. Az $F\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény és a (15.128)-ban megkívánt deriváltak képzéséhez célszerű, ha $F(z)$ fenti rész-

törtekre bontásából indulunk ki, és a következőket kapjuk:

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{1-2z} - \frac{2z}{(1-z)^2} - \frac{2}{1-z}, \qquad \text{azaz} \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \text{ha } z = 0,$$

$$\frac{dF\left(\frac{1}{z}\right)}{dz} = \frac{4}{(1-2z)^2} - \frac{4z}{(1-z)^3} - \frac{4}{(1-z)^2}, \qquad \text{azaz} \quad \frac{dF\left(\frac{1}{z}\right)}{dz} = 0 \quad \text{ha } z = 0,$$

$$\frac{d^2F\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^2} = \frac{16}{(1-2z)^3} - \frac{12z}{(1-z)^4} - \frac{12}{(1-z)^3}, \qquad \text{azaz} \quad \frac{d^2F\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^2} = 4 \quad \text{ha } z = 0,$$

$$\frac{d^3F\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^3} = \frac{96}{(1-2z)^4} - \frac{48z}{(1-z)^5} - \frac{48}{(1-z)^4}, \qquad \text{azaz} \quad \frac{d^3F\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^3} = 48 \quad \text{ha } z = 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

A (15.128)-ban szereplő faktoriálisok figyelembe vételével adódik $f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$.

4. A határérték-tételek (lásd 764. old.) és a L'HOSPITAL-*szabály* (lásd 55. old.) alkalmazásával kapjuk:

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 0,$$

$$f_1 = \lim_{z\to\infty} z(F(z) - f_0) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 0,$$

$$f_2 = \lim_{z\to\infty} z^2\left(F(z) - f_0 - f_1\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^3}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 2,$$

$$f_3 = \lim_{z\to\infty} z^3\left(F(z) - f_0 - f_1\frac{1}{z} - f_2\frac{1}{z^2}\right) = \lim_{z\to\infty} z^3\left(\frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} - \frac{2}{z^2}\right) = 8, \ \ldots$$

Így az $\{f_n\}$ eredeti sorozatot lépésről lépésre meg lehet határozni.

15.4.2. A Z-transzformáció alkalmazásai

15.4.2.1. Lineáris differenciaegyenletek általános megoldása

A k-adrendű, lineáris, állandó együtthatójú differenciaegyenlet alakja a következő:

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots). \tag{15.130}$$

Az a_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ együtthatók megadott valós vagy komplex számok, amelyek tehát nem függnek n-től. Legyen $a_0 \neq 0$ és $a_k \neq 0$. A $\{g_n\}$ sorozat adott; keresendő az $\{y_n\}$ sorozat.

Hogy (15.130) meghatározott megoldását kapjuk, elő kell írni az $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ értékeket. Ezután (15.130)-ből $n = 0$ mellett ki lehet számítani a következő, y_k értéket. Az $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$ értékekből, a (15.130) összefüggést $n = 1$ mellett alkalmazva kapjuk y_{k+1} értékét. Így rekurzív módon minden y_n értéket ki lehet számítani. Az adott $\{g_n\}$ és a keresett $\{y_{n+k}\}$ sorozatokat Z-transzformálva azonban y_n-re általános formula is adható. E célból a (15.130)-beli sorozatokra alkalmazzuk a második eltolási tételt (15.114), ami a következő eredményre vezet:

$$a_k z^k\left[Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - \cdots - y_{k-1} z^{-(k-1)}\right] + \cdots + a_1 z[Y(z) - y_0] + a_0 Y(z) = G(z), \tag{15.131}$$

ahol $Y(z) = Z(y_n)$ és $G(z) = Z(g_n)$. Ha még bevezetjük az $a_k z^k + a_{k-1} y^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = p(z)$ jelölést is, akkor (15.131), az ún. képegyenlet megoldása

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} G(z) + \frac{1}{p(z)} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \sum_{j=i+1}^{k} a_j z^{j-i}. \tag{15.132}$$

A lineáris differenciálegyenletek LAPLACE-transzformációval való megoldásához hasonlóan a Z-transzformáció használatakor is megvan az az előnyünk, hogy a kezdeti értékeket a képegyenlet már tartalmazza, tehát a megoldás automatikusan figyelembe veszi őket. (15.132)-ből a keresett $\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ megoldást 15.4.1.5. szerinti visszatranszformálással nyerjük.

15.4.2.2. Másodrendű differenciaegyenletek (kezdetiérték-feladat)

A másodrendű differenciaegyenlet alakja a következő:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g_n\,. \tag{15.133}$$

Kezdeti értékként meg van adva y_0 és y_1. A második eltolási tétel alapján a (15.133)-höz tartozó képegyenlet

$$z^2\left[Y(z) - y_0 - y_1\frac{1}{z}\right] + a_1 z[Y(z) - y_0] + a_0 Y(z) = G(z)\,. \tag{15.134}$$

A $z^2 + a_1 z + a_0 = p(z)$ helyettesítéssel a képfüggvény

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)}G(z) + y_0\frac{z(z+a_1)}{p(z)} + y_1\frac{z}{p(z)}\,. \tag{15.135}$$

Tegyük fel, hogy a $p(z)$ polinom zérushelyei α_1 és α_2 nem nullák, mert különben $a_0 = 0$ lenne és a differenciaegyenlet elsőrendűre redukálódna. Résztörtekre bontással

$$\frac{z}{p(z)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\dfrac{z}{z-\alpha_1} - \dfrac{z}{z-\alpha_2}\right), & \text{ha } \alpha_1 \neq \alpha_2\,, \\ \dfrac{z}{(z-\alpha_1)^2}, & \text{ha } \alpha_1 = \alpha_2\,, \end{cases} \tag{15.136a}$$

tehát a Z-transzformáció **21.13. táblázatának** alkalmazásával

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{p(z)}\right\} = \{p_n\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}\right\}, & \text{ha } \alpha_1 \neq \alpha_2\,, \\ \{n\alpha_1^{n-1}\}, & \text{ha } \alpha_1 = \alpha_2\,. \end{cases} \tag{15.136b}$$

Mivel $p_0 = 0$, a második eltolási tétel szerint

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{p(z)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\,\frac{z}{p(z)}\right\} = \{p_{n+1}\} \tag{15.136c}$$

és az első eltolási tétel szerint

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{p(z)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\,\frac{z}{p(z)}\right\} = \{p_{n-1}\}\,. \tag{15.136d}$$

($p_{-1} = 0$). A konvolúciótétel segítségével (15.135)-et visszatranszformálva azt kapjuk, hogy

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu-1} g_{n-\nu} + y_0(p_{n+1} + a_1 p_n) + y_1 p_n\,. \tag{15.136e}$$

Innen, mivel $p_{-1} = p_0 = 0$, (15.136b) értelmében

$$y_n = \sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu}\frac{\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_0\left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + a_1\frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + y_1\frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}\,. \tag{15.136f}$$

Az $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $a_0 = \alpha_1\alpha_2$ összefüggések miatt (lásd VIETA-féle gyökképletek) ez még tovább egyszerűsíthető:

$$y_n = \sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu}\frac{\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 a_0\frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1\frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}. \tag{15.136g}$$

Az $\alpha_1 = \alpha_2$ esetben analóg módon (vagy $\alpha_2 \to \alpha_1$-ből) kapjuk:

$$y_n = \sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu}(\nu-1)\alpha_1^{\nu-2} - y_0 a_0 (n-1)\alpha_1^{n-2} + y_1 n \alpha_1^{n-1} \,. \tag{15.136h}$$

A másodrendű differenciaegyenletnél az $Y(z)$ képfüggvény visszatranszformálását résztörtekre bontás nélkül is elvégezhetjük, ha megfeleléseket, pl.

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2 - 2az\,\mathrm{ch}\,b + a^2}\right\} = \left\{a^{n-1}\frac{\mathrm{sh}\,bn}{\mathrm{sh}\,n}\right\} \tag{15.137}$$

használunk fel és itt is alkalmazzuk a második eltolási tételt. Ha $a_0 \geq 0$, akkor az $a_1 = -2a\,\mathrm{ch}\,b$, $a_0 = a^2$ helyettesítéssel (15.135) eredeti sorozata:

$$y_n = \frac{1}{\mathrm{sh}\,b}\left[\sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu} a^{\nu-2}\,\mathrm{sh}(\nu-1)b - y_0 a^n\,\mathrm{sh}(n-1)b + y_1 a^{n-1}\,\mathrm{sh}\,nb\right] . \tag{15.138}$$

Ez a képlet numerikus számolás szempontjából különösen akkor kedvező, ha a_0 és a_1 komplex szám, persze ekkor sh z-t érdemes az exp z-re átírt alakjából számolni.

15.4.2.3. Másodrendű differenciaegyenletek (peremérték-feladat)

Az alkalmazások során gyakran előfordul, hogy a differenciaegyenlet y_n értékeit csak véges sok $0 < n < N$ indexre keressük. A (15.133) másodrendű differenciaegyenlet esetében ilyenkor általában a két *peremérték*, y_0 és y_N van megadva. E peremérték-feladat megoldásához a megfelelő kezdetiérték-feladat (15.136g) megoldásából indulunk ki, ahol az ismeretlen y_1 helyébe most y_N-et kell bevezetni. E célból a (15.136g), illetve (15.136h) összefüggésben n helyébe N-et írunk, és kiszámítjuk belőle az egyedüli paraméternek tekinthető y_1-et mint y_0 és y_N függvényét:

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1^N - \alpha_2^N}\left[y_0 a_0(\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}) + y_N(\alpha_1 - \alpha_2) - \sum_{\nu=2}^{N}(\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) g_{N-\nu}\right] , \tag{15.139}$$

illetve

$$y_1 = \frac{y_0 a_0 (N-1)\alpha_1^{N-2} + y_N - \sum_{\nu=2}^{N} g_{N-\nu}(\nu-1)\alpha_1^{\nu-2}}{n\alpha_1^{N-1}} \tag{15.140}$$

Ezt a (15.136g), illetve (15.136h) képletbe helyettesítve megkapjuk y_n-et:

$$y_n = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu}(\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) - y_0 a_0(\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1^N - \alpha_2^N}\left(y_0 a_0(\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}) + y_N(\alpha_1 - \alpha_2) - \sum_{\nu=2}^{N}(\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) g_{N-\nu}\right)\right] , \tag{15.141}$$

illetve

$$y_n = \sum_{\nu=2}^{n} g_{n-\nu}(\nu-1)\alpha_1^{\nu-2} - y_0 a_0 (n-1) a_1^{n-2} + \alpha_1^{n-2} y_0 a_0 (N-1) +$$
$$+ \alpha_1^{n-N}\left(y_N - \sum_{\nu=2}^{N} g_{N-\nu}(\nu-1)\alpha_1^{\nu-2}\right) . \tag{15.142}$$

A (15.141) megoldás csak akkor értelmes, ha $\alpha_1^N - \alpha_2^N \neq 0$. Ellenkező esetben a peremérték-problémának általános megoldása nincs, hanem a differenciálegyenletek peremérték-feladatainak analógiájára sajátértékek és sajátfüggvények lépnek fel és csak bizonyos (y_0, y_N) párokra van megoldás, viszont az

$\alpha_1 = \alpha_2$ esetben nyilván nincs ilyen korlátozás.

15.5. Wavelet-transzformáció („hullámocska"-transzformáció)

15.5.1. Jelek

Ha egy fizikai rendszerből valamilyen hatás indul ki, amely szétterjed, és matematikailag leírható egy függvénnyel vagy számsorozattal, akkor *jel*ről beszélünk.
*Jelanalízis*en a jelnek egy a jelre jellemző mennyiséggel való jellemzését értjük. Matematikailag ez a következőt jelenti: A jelet leíró függvényt vagy számsorozatot leképezzük egy másik függvényre vagy számsorozatra, amely a jel tipikus tulajdonságait különösen jól felismerhetővé teszi. Természetesen ilyen leképezések során egyes információk elveszhetnek.
A jelanalízis invertálását, vagyis a kiindulási jel visszanyerését, *jelszintézis*nek nevezzük.

A jelanalízis és jelszintézis közötti kapcsolat különösen világosan látható a FOURIER-transzformáció példáján: jellemezzük az $f(t)$ jelet (t az idő) a hozzá tartozó frekvenciaspektrummal. Ekkor a (15.143a) képlet a jel-analízist, a (15.143b) képlet pedig a jel-szintézist írja le:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\, dt\,, \qquad \text{(15.143a)} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\, d\omega\,. \qquad \text{(15.143b)}$$

15.5.2. Wavelet-ek

A FOURIER-transzformációnak nincs lokalizációs tulajdonsága, azaz ha egy jel egy helyen megváltozik, akkor a transzformált mindenütt megváltozik anélkül, hogy a megváltozás helyét „egyszerű ránézésre" meg lehetne találni. Az ok abban rejlik, hogy a FOURIER- transzformáció a jelet *síkhullámok*ra bontja fel. Ezeket trigonometrikus függvények írják le, amelyek a végtelenségig állandó periódusúak. Ezzel szemben a wavelet-transzformációnál egy majdnem tetszőlegesen választható ψ függvényt, (lokalizált „*hullámocskát*"), jelanalízis céljából eltolunk és összetömörítünk.

Például a HAAR-féle wavelet **(15.28.a ábra)** és a „mexikói kalap" **(15.28.b ábra)**:

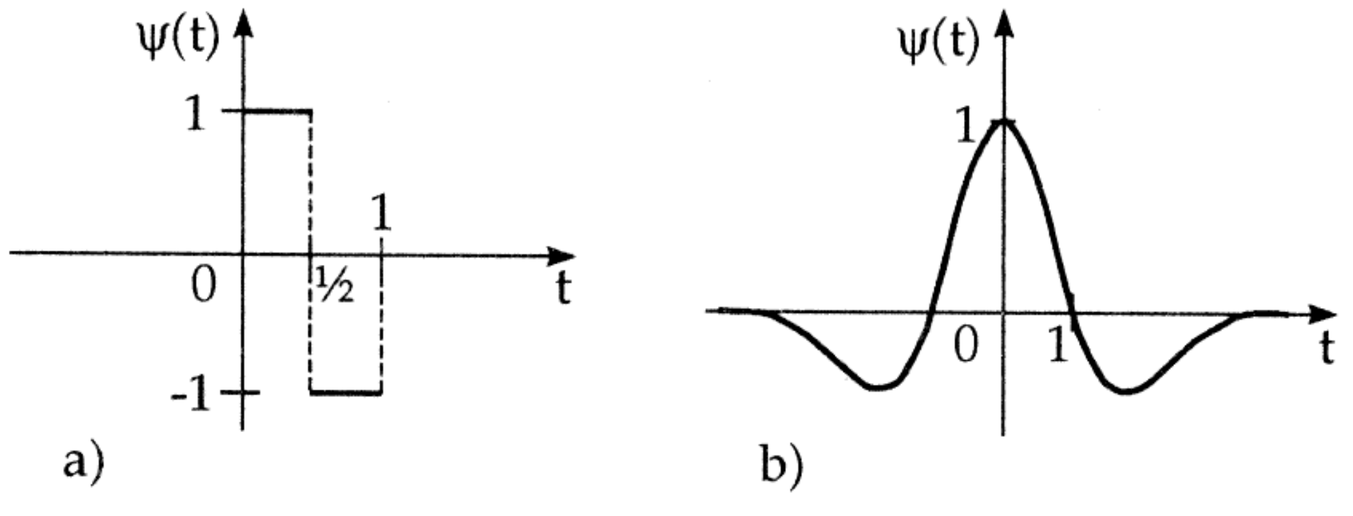
■ **A A Haar-féle wavelet:**

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2}\,, \\ -1 & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad \text{(15.144)}$$

■ **B Mexikói kalap:**

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} \qquad \text{(15.145)}$$

$$= (1 - x^2) e^{-x^2/2}\,. \qquad \text{(15.146)}$$



15.28. ábra.

Általában érvényes: wavelet-ként mindazon ψ függvények szóba jönnek, amelyek négyzetesen integrálhatók, és amelyek (15.143a) szerint képzett $\Psi(\omega)$ FOURIER-transzformáltjával (15.147)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|}\, d\omega. \qquad \text{véges} \qquad \text{(15.147)}$$

Wavelet-ekkel kapcsolatban fontosak a következő tulajdonságok és definíciók:

1. A wavelet-ekre fennáll, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0\,. \tag{15.148}$$

2. A ψ wavelet k-adik momentumának a

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)\,dt\,. \tag{15.149}$$

integrált nevezzük. A legkisebb n természetes számot, amelyre $\mu_n \neq 0$, a ψ wavelet *rendjé*nek hívjuk.

■ A (15.144) HAAR-féle wavelet-re $n = 1$, a (15.146) mexikói kalapra $n = 2$.

3. Ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, akkor ψ definíció szerint végtelen rendű. Minden korlátos tartójú, nem $\neq 0$ wavelet véges rendű.

4. Bármely n-edrendű wavelet bármely legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomra ortogonális.

15.5.3. Wavelet-transzformáció

A $\psi(t)$ wavelet-ből egy a valós paraméter segítségével egy egész függvénysereget lehet képezni:

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (a \neq 0)\,. \tag{15.150}$$

Az $|a| \geq 1$ esetben a $\psi(t)$ kiindulási függvény tömörítéséről van szó. Ha $a < 0$, akkor ezen kívül tükrözés is történik. Az $1/\sqrt{|a|}$ a léptéktényező.
Egy második valós b paraméter segítségével a $\psi_a(t)$ függvényeket el is lehet tolni. Ekkor a következő kétparaméteres görbesereget kapjuk:

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,. \tag{15.151}$$

A b eltolási paraméter az időpontot (ill. helyet) jellemzi, az a paraméter pedig a $\psi_{a,b}(t)$ függvény kiterjedését adja meg. A $\psi_{a,b}(t)$ függvény a *wavelet-transzformáció alapfüggvénye*. Ezzel az $f(t)$ függvény wavelet-transzformációja a következőképpen van értelmezve:

$$\mathcal{L}_\psi f(a,b) = c\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)\,dt = \frac{c}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt\,. \tag{15.152a}$$

A visszatranszformálásra fennáll:

$$f(t) = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\psi f(t)\psi_{a,b}(t)\frac{1}{a^2}\,da\,db\,. \tag{15.152b}$$

A képletben c a ψ wavelet megválasztásától függő konstans.

■ A (15.146) HAAR-féle wavelet felhasználásával adódik

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad b \leq t < b + a/2\,, \\ -1 & \text{ha} \quad b + a/2 \leq t < b + a\,, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

és így

$$\mathcal{L}_\psi f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(\int_b^{b+a/2} f(t)\,dt - \int_{b+a/2}^{b+a} f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{\sqrt{|a|}}{2}\left(\frac{2}{a}\int_{b}^{b+a/2} f(t)\,dt - \frac{2}{a}\int_{b+a/2}^{b+a} f(t)\,dt\right). \tag{15.153}$$

A (15.153) szerinti $\mathcal{L}_\psi f(a,b)$ érték egy multiplikatív konstanstól eltekintve az $f(t)$ függvény két szomszédos, $b + a/2$ körüli, $\frac{|a|}{2}$ hosszúságú intervallumon vett középértékének a különbsége.

Megjegyzések:

1. Az alkalmazásokban nagy szerepe van a *diadikus wavelet-transzformáció*nak. Ennek alapfüggvényei

$$\psi_{i,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^i}}\psi\left(\frac{t-2^i j}{2^i}\right), \qquad (i,\ j \text{ egész számok}) \tag{15.154}$$

alakúak, vagyis az alapfüggvények egyetlen $\psi(t)$ wavelet-ből jönnek létre a szélesség akár többszöri megkettőzésével vagy felezésével és ezen faktor egész számú többszörösével történő eltolással.

2. A $\psi(t)$ wavelet-et *ortogonális wavelet*-nek nevezzük, ha a (15.154) szerint képzett alapfüggvények ortogonális bázist alkotnak.

3. Különösen jó numerikus tulajdonságai vannak a DAUBECHIES-wavelet-eknek. Ezek kompakt tartójú ortogonális wavelet-ek, tehát az időtengelynek csak egy korlátos (és zárt) részén különböznek nullától. Zárt előállításuk nincs (lásd Irod. [15.11]).

15.5.4. Diszkrét wavelet-transzformáció

15.5.4.1. Gyors wavelet-transzformáció

Induljunk ki abból, hogy a (15.152b) integrál-előállítás nagy mértékben redundáns, és így a kettős integrál információveszteség nélkül kettős összeggel helyettesíthető, amit a wavelet-transzformáció konkrét alkalmazásainál lehet figyelembe venni. Ehhez szükséges:

1. a transzformáció hatékony kiszámítása, ami a *többskálás analízis* fogalmára vezet, valamint

2. az inverz transzformáció hatékony kiszámítása, vagyis a jelek hatékony rekonstruálása wavelet-transzformáltjukból, ami a *keret (frame)* fogalmára vezet.

Mindkét fogalommal kapcsolatban be kell érnünk az irodalmi utalással (lásd Irod. [15.11], [15.2]).

Megjegyzés: A wavelet-ek nagy sikere a különböző alkalmazási területeken, pl.

- fizikai mennyiségek és méréssorozatok számításánál,
- kép- és beszédfelismerésnél, valamint
- hírközléssel kapcsolatos adatsűrítésnél,

gyors algoritmusaikon alapszik. Az **FFT** (gyors FOURIER-transzformáció, lásd 950. old.) analógiájára itt **FWT**-ről (gyors wavelet-transzformáció) beszélünk.

15.5.4.2. Diszkrét Haar-wavelet transzformáció

A diszkrét wavelet-transzformáció példájaként a HAAR-wavelet transzformációt ismertetjük: Adva van egy jelre vonatkozó páros számú f_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ érték. Ezekből d_i $(i = 1, 2, \ldots, N/2)$ részletértékeket számítunk ki a következőképpen:

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2i-1} + f_{2i}), \quad d_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2i-1} - f_{2i}). \tag{15.155}$$

A d_i értékeket tároljuk, az s_i értékekre pedig alkalmazzuk a (15.155) előírást, vagyis a (15.155) képletben az f_i értékeket az s_i értékekkel helyettesítjük. Folytatjuk az eljárást, és az

$$s_i^{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_{2i-1}^{(n)} + s_{2i}^{(n)}\right), \quad d_i^{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_{2i-1}^{(n)} - s_{2i}^{(n)}\right) \tag{15.156}$$

képletekből végül a $d_i^{(n)}$ komponensekkel rendelkező részletvektorok sorozatát nyerjük. Minden részletvektor valamilyen információt tartalmaz a jel tulajdonságairól.

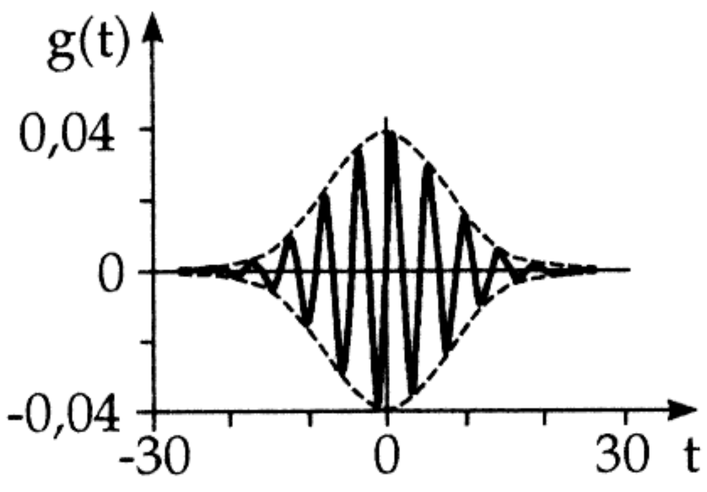
Megjegyzés: Nagy N értékekre a diszkrét wavelet-transzformáció tart a (15.152a) integrálos wavelet-transzformációhoz.

15.5.5. Gábor-transzformáció (Gábor Dénes nevéből)

*Idő–frekvencia analízis*nek nevezzük a jeleknek a bennük foglalt frekvenciák és e frekvenciák megjelenési időpontja szerinti jellemzését. Ehhez a jelet időszakaszokra („ablakokra") osztjuk fel, majd alkalmazzuk rájuk a FOURIER-transzformációt. Ilyenkor „beablakozott FOURIER-transzformációról" (**WFT**) is beszélünk. Az ablakfüggvényt úgy kell megválasztani, hogy az a jelet egy ablakon kívül kioltsa. GÁBOR DÉNES a következő ablakfüggvényt használta **(15.29. ábra)**:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{15.157}$$

Ennél a választásnál $g(t)$ „egységnyi össztömeggel" a $t = 0$ pont körül koncentrálódik, és az ablakszélesség (kb. 2σ) konstansnak tekinthető.



15.29. ábra.

Az $f(t)$ függvény GÁBOR-transzformáltja ekkor

$$\mathcal{G}f(\omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-s)e^{-\omega t}\,dt\,. \tag{15.158}$$

Ez azt adja meg, hogy az $[s-\sigma, s+\sigma]$ időintervallum folyamán az $e^{\mathrm{i}\omega t}$ alaprezgés milyen komplex amplitúdóval van képviselve f-ben, azaz ha ebben az intervallumban az ω frekvencia fellép, akkor amplitúdója $|\mathcal{G}f(\omega, s)|$.

15.6. Walsh-függvények

15.6.1. Lépcsősfüggvények

Függvények approximációjánál az ortogonális függvényrendszerek, pld. speciális polinomok vagy trigonometrikus függvények fontos szerepet játszanak, mert a tekintett intervallumban simák, vagyis elég sokszor differenciálhatók. Vannak azonban olyan problémák is, pl. raszterezett képpontjainak átvitele, amelyeknek a matematikai tárgyalására a sima függvények nem alkalmasak, hanem *lépcsősfüggvények*, azaz szakaszonként konstans függvények megfelelőbbek. A WALSH-függvények nagyon egyszerű lépcsősfüggvények, csak a $+1$ és -1 értéket veszik fel. Ez a két függvényérték két állapotnak felel meg, úgyhogy a WALSH-függvények különösen könnyen realizálhatók számítógépen.

15.6.2. Walsh-rendszerek

A trigonometrikus függvények analógiájára most periodikus lépcsősfüggvényeket tekintünk. Az $I = [0, 1]$ intervallumot választjuk periódusintervallumnak, és felosztjuk 2^n egyenlő hosszúságú részintervallumra. Legyen S_n az 1 periódusú, részintervallumonként állandó lépcsősfüggvények halmaza. Az S_n-hez tartozó lépcsősfüggvényeket egy véges dimenziójú vektortér vektorainak lehet felfogni, ugyanis bármely $g \in S_n$ függvény a részintervallumokban felvett $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}$ értékei által meg van határozva és ezért vektornak tekinthető:

$$\underline{\mathbf{g}}^{\mathrm{T}} = (g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1})\,. \tag{15.159}$$

Az S_n-hez tartozó WALSH-függvények a szorzatintegrálra mint skaláris szorzatra nézve ortonormált teljes rendszert alkotnak az $L^1[0, 1]$ térben (tehát ha $f \in L[0, 1] = L^1[0, 1]$ és f mindegyik WALSH-függvényre ortogonális, akkor f az $L[0, 1]$ nullvektora). Természetesen $\cup_n S_n$ elemeit különféleképpen lehet megszámozni, úgyhogy nagyon sok WALSH-rendszer adódik, de mindegyik ugyanazokból a függvényekből áll. Kiderült, hogy három rendszer megkülönböztetett figyelmet érdemel: a WALSH–KRONECKER-függvények, a WALSH–KACZMARZ-függvények és a WALSH–PALEY-függvények.
A FOURIER-transzformáció analógiájára definiálni lehet a WALSH-*transzformációt*, amelynél a trigonometrikus függvények szerepét a WALSH-függvények veszik át. Ily módon adódnak pl. a WALSH-sorok,

WALSH-polinomok, a WALSH-szinusz- és WALSH-koszinusz-transzformáció, a WALSH-integrálok, valamint a gyors FOURIER-transzformáció analógiájára a gyors WALSH-transzformáció. Egy bevezetés a WALSH-függvények elméletébe és alkalmazásába az Irod. [15.7] hivatkozásban található.

16. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika azokkal a törvényszerűségekkel foglalkozik, amelyek egy általános értelemben vett kísérlethez tartozó adott eseményhalmaz bizonyos eseményeinek véletlen bekövetkezésére vonatkoznak. Feltesszük, hogy ezeket a kísérleteket változatlan feltételek mellett tetszőleges sokszor ismételten végre tudjuk hajtani. A valószínűségszámítás tehát a matematika azon ága, mely a véletlen tömegjelenségek statisztikai törvényszerűségeit vizsgálja.

16.1. Kombinatorika

Egy halmaz elemeiből gyakran tudunk bizonyos módon új halmazokat alkotni. Az elemek ezen új összeállítása vezet a *permutáció* (sorrend, elrendezés), a *kombináció* (kiválasztás) és a *variáció* fogalmához. A variáció fogalmában egyesül a sorrend és kiválasztás, mert az elemek kiválasztásánál azok sorrendjét is tekintetbe vesszük.
A kombinatorika tehát azt vizsgálja, hogyan és hányféleképpen lehet egy véges halmazból bizonyos számú elemet kiválasztani vagy elrendezni.

16.1.1. Permutációk

1. Definíció

n különböző elem egy meghatározott sorrendjét permutációnak nevezzük.

2. Ismétlés nélküli permutációk száma

n különböző elem összes permutációinak száma:

$$P_n = n! \,. \tag{16.1}$$

■ Egy tanteremben egy sorban 16 ülőhely van. 16 diák ezekre a helyekre 16! különböző sorrendben tud leülni.

3. Ismétléses permutációk száma

Ha az n elem között k egyforma elem van ($k \leq n$), akkor a lehetséges sorrendek száma:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \,. \tag{16.2}$$

■ A tanteremben a 16 ülőhelyet a 16 diák a táskájával foglalta le, de a 16 táska között 4 egyforma. Ekkor a lehetséges sorrendek száma: 16!/4!.

4. Általánosítás

Ha az n elem közül $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ elem egyforma ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), akkor az n elem összes lehetséges sorrendjének a száma:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_m)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \,. \tag{16.3}$$

■ Adott 5 számjegy: 4, 4, 5, 5, 5. Ezekből összesen $P_5^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ különböző ötjegyű szám képezhető.

16.1.2. Kombinációk

1. Definíció

n különböző elemből k elem egy lehetséges kiválasztását kombinációnak nevezzük, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.
Ezt k-adosztályú kombinációnak nevezzük, amely lehet ismétlés nélküli vagy ismétléses.

2. Ismétlés nélküli kombinációk száma

$C_n^{(k)}$ az a szám, amely megadja, hogy n különböző elemből k elemet hányféleképpen tudunk kivenni, ha a különböző sorrend nem jelent különböző kiválasztást és mindegyik elemet csak egyszer vehetjük ki.

$$C_n{}^{(k)} = \binom{n}{k} \qquad (k \leq n)\,, \tag{16.4}$$

■ Egy gyűlés 30 résztvevőjéből 4 tagú vezetőséget választunk. Ezt $\binom{30}{4} = 27405$-féleképpen tehetjük meg, ha a vezetőségen belül az egyes funkciók elosztására nem vagyunk tekintettel.

3. Ismétléses kombinációk száma

n különböző elemből k elemet visszatevéssel választunk ki (azaz egy elemet többször is kiválaszthatunk) úgy, hogy a sorrend nem számít. A lehetséges kiválasztások száma:

$$C_n{}^{(k),i} = \binom{n+k-1}{k} \qquad k > n \text{ is lehet.} \tag{16.5}$$

■ Ha k darab kockát feldobunk, akkor $C_6{}^{(k),i} = \binom{6+k-1}{k}$ különböző eredmény lehetséges. (Ha csak a felülre került számokat teintjük.) Például 2 kocka esetén $C_6{}^{(2),i} = \binom{7}{2} = 21$.

16.1.3. Variációk

1. Definíció

n különböző elemből k elem egy lehetséges kiválasztását variációnak nevezzük, ha különböző sorrend különböző kiválasztásnak számít. Tehát a variáció olyan kombináció, ahol a sorrendet is figyelembe vesszük. Ezért itt is megkülönböztetjük az ismétlés nélküli és az ismétléses variációt.

2. Ismétlés nélküli variációk száma

n elemből k elemet kiválasztunk úgy, hogy a sorrendet is figyelembe vesszük. Ekkor n elem k-adosztályú variációinak a száma:

$$V_n{}^{(k)} = k!\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \qquad (k \leq n)\,. \tag{16.6}$$

■ Hányféle kiválasztás lehetséges, ha az előbbi gyűlésen a 30 résztvevőből a 4-et kiválasztva még közülük az elnököt, a helyettest, a titkárt és a jegyzőt is különbözőképpen jelölhetjük? A megoldás: $\binom{30}{4} \cdot 4! = 657720$.

3. Ismétléses variációk száma

n elemből k elemet kiválasztunk úgy, hogy a sorrendet figyelembe vesszük és egy elemet többször is kiválaszthatunk. Ekkor n elem k-adosztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_n{}^{(k),i} = n^k\,. \tag{16.7}$$

■ **A:** Egy TOTO-szelvényen 13 játékra a lehetséges tippek száma: 3^{13}.

■ **B:** A számítógép digitális egysége: 1 byte = 8 bit. Ezért tehát 1 byte összesen $2^8 = 256$ különböző jelet tud ábrázolni, melyek az ismert ASCII táblázatba vannak leírva.

16.1.4. A kombinatorikai képletek összefoglalása

16.1. táblázat. A kombinatorikai képletek összefoglalása

A kiválasztás, azaz n-ből k elem különböző összeállításának módja	A lehetőségek száma	
	ismétlés nélkül $(k \leq n)$	ismétléssel
Permutáció	$P_n = n!\ (k = n)$	$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad (k \leq n)$
Kombináció	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	$C_n^{(k),i} = \binom{n+k-1}{k} \quad k > n$ is lehet
Variáció	$V_n^{(k)} = k!\binom{n}{k}$	$V_n^{(k),i} = n^k \quad k > n$ is lehet

16.2. Valószínűségszámítás

16.2.1. Események, gyakoriságok és valószínűségek

16.2.1.1. Események

1. Definíciók

A valószínűségszámításban véletlen kísérleten olyan kísérletet értünk, melynek kimenetelét az általunk figyelembe vehető feltételek nem határozzák meg teljesen. A kísérlet kimenetelei a véletlen események, melyek az **A** eseményhalmazt alkotják. Az **A** halmaz elemei tehát a *véletlen események*, valamint a *biztos esemény* és a *lehetetlen esemény.*

A biztos esemény az adott kísérlet minden végrehajtásánál bekövetkezik, a lehetetlen esemény egyik végrehajtásnál sem következik be, a véletlen esemény vagy bekövetkezik, vagy nem. A kísérlet összes lehetséges, egymást páronként kizáró kimenetelei az *elemi események.* Ha az **A** eseményhalmaz elemei az $A, B, C, \ldots$ események, valamint az I biztos és a O lehetetlen esemény, akkor a **16.2. táblázat** tartalmazza a definiált kapcsolatokat.

16.2. táblázat. Események közötti kapcsolatok

Elnevezés	Jelölés	Jelentés
1. A ellentett eseménye:	$\overline{A}$	$\overline{A}$ pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.
2. A és B események összege:	$A + B$	$A + B$ pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik.
3. A és B események szorzata:	AB	AB pontosan akkor következik be, ha mind A, mind B bekövetkezik.
4. A és B események különbsége:	$A - B$	$A - B$ pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem.
5. Egymásból következő események:	$A \subseteq B$	$A \subseteq B$ azt jelenti, hogy A bekövetkezése a B bekövetkezését maga után vonja.
6. Elemi esemény:	E	E nem írható fel $A + B$ összegeként, ha $E \neq A$ és $E \neq B$!
7. Összetett esemény:		Nem elemi esemény.
8. Egymást kizáró események A és B:	$AB = O$	A és B nem következhetnek be egyszerre.

2. Számítási szabályok

(A BOOLE-algebra azonosságai):

1. a) $A + B = B + A\,,$ (16.8) **1. b)** $AB = BA\,.$ (16.9)

2. a) $A + A = A\,,$ (16.10) **2. b)** $AA = A\,.$ (16.11)

3. a) $A + (B + C) = (A + B) + C\,,$ (16.12) **3. b)** $A(BC) = (AB)C\,.$ (16.13)

4. a) $A + \overline{A} = I\,,$ (16.14) **4. b)** $A\overline{A} = O\,,.$ (16.15)

5. a) $A(B + C) = AB + AC\,,$ (16.16) **5. b)** $A + BC = (A + B)(A + C)\,.$ (16.17)

6. a) $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}\,,$ (16.18) **6. b)** $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}\,.$ (16.19)

7. a) $B - A = B\overline{A}\,,$ (16.20) **7. b)** $\overline{A} = I - A\,.$ (16.21)

8. a) $A(B - C) = AB - AC\,,$ (16.22) **8. b)** $AB - C = (A - C)(B - C)\,.$ (16.23)

9. a) $O \subseteq A\,,$ (16.24) **9. b)** $A \subseteq I\,.$ (16.25)

10. Ha $A \subseteq B$ akkor $A = AB$ és $B = A + B\overline{A}$ és ez fordítva is igaz. (16.26)

Teljes eseményrendszer: Olyan A_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ eseménysorozat, melyre:

11. $A_iA_k = O$ $(i \neq k)$ és $A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots = I\,.$ (16.27)

■ **A:** Két érmét dobunk fel.

Ha az érméket külön dobjuk fel, akkor az elemi eseményeket a mellékelt táblázat mutatja

	Fej	Írás
1. Érme	A_{11}	A_{12}
2. Érme	A_{21}	A_{22}

Az 1. érme feldobásakor összetett esemény:
1. Fej vagy írás van felül: $A_{11} + A_{12} = I\,.$
2. Egyszerre van fej és írás felül: $A_{11}A_{12} = O\,.$
Ha a két érmét egyszerre dobjuk fel, akkor négy elemi esemény van:
$A_{11}A_{21}$; $A_{11}A_{22}$; $A_{12}A_{21}$; $A_{12}A_{22}\,.$
Összetett esemény pl.: 1. Az 1.érmén fej van: $A_{11}A_{21} + A_{11}A_{22}\,.$ 2. Van legalább egy fej: $A_{11}A_{21} + A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}\,.$

■ **B:** Izzólampák élettartama.

A_n elemi esemény: a t élettartam kielégíti az $(n-1)\Delta t < t \leq n\Delta t$ $(n = 1, 2, \ldots)$, egyenlőtlenséget, ahol $\Delta t > 0$ tetszőleges időegység).

A összetett esemény: az élettartam legfeljebb $n\Delta t$, azaz $A = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu$.

16.2.1.2. Gyakoriságok és valószínűségek

1. Gyakoriságok

Legyen A egy esemény az **A** eseményhalmazból. Ha a kísérletet n-szer ismételten végrehajtva az A esemény n_A-szor következik be, akkor n_A-t az A gyakoriságának, az $n_A/n = h_A$ számot pedig az A relatív gyakoriságának nevezzük.
Azt a számot, amely körül nagy n esetén a relatív gyakoriság stabilizálódik, nevezzük az A valószínűségének és $P(A)$-val jelöljük. (Valószínűség latinul: probabilitas, angolul: probability.) A relatív gyakoriságra bizonyos egyszerű azonosságok érvényesek, ezek alapján adjuk meg a $P(A)$ valószínűség axiomatikus definícióját.

2. A valószínűség definíciója

Az események halmazán értelmezett P(A) valós függvényt valószínűségnek mondjuk, ha eleget tesz az alábbi feltételeknek:

1. Minden $A \in \mathbf{A}$ eseményre:

$$0 \le h_A \le 1\,, \quad 0 \le P(A) \le 1\,. \tag{16.28}$$

2. A O lehetelen, illetve I biztos eseményre:

$$h_O = 0\,, \;\; h_I = 1\,, \quad P(O) = 0, \;\; P(I) = 1\,. \tag{16.29}$$

3. Ha $A \in \mathbf{A}$ és $B \in \mathbf{A}$ egymást kizáró események, akkor:

$$h_{A+B} = h_A + h_B\,, \quad P(A+B) = P(A) + P(B)\,. \tag{16.30}$$

3. A valószínűségszámítás alapvető azonosságai, melyek a definícióból következnek

1. Ha $B \subseteq A$ akkor $P(B) \le P(A)\,.$ (16.31)

2. $P(A) + P(\overline{A}) = 1\,.$ (16.32)

3. Véges sok, páronként kizáró A_i eseményre $(i = 1, \ldots, n\,;\; A_iA_k = O\,,\, i \neq k)$:

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)\,. \tag{16.33}$$

4a. Tetszőleges A_i $(i = 1, \ldots, n)$ eseményre:

$$\begin{aligned} P(A_1 + \cdots + A_n) \;=\; & P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_1A_2) - \cdots - P(A_1A_n) \\ & - P(A_2A_3) - \cdots - P(A_2A_n) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \\ & + P(A_1A_2A_3) + \cdots + P(A_1A_2A_n) + \cdots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \\ & \vdots \\ & + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)\,. \end{aligned} \tag{16.34a}$$

4b. Speciálisan $n = 2$ esetén: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)\,.$ (16.34b)

5. Egyenlő valószínűségű események: ha egy teljes eseményrendszerben valamennyi A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ esemény egyformán valószínű, akkor:

$$P(A_i) = \frac{1}{n}\,. \tag{16.35}$$

Ha az A esemény felírható, mint m darab A_i esemény összege $(m \le n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$P(A) = \frac{m}{n}\,. \tag{16.36}$$

(Azt mondjuk, hogy m az A esemény bekövetkezéséhez szükséges kedvező kimenetelek száma, míg n az összes lehetséges kimenetelek száma.)

4. Példák a valószínűség kiszámítására

■ **A:** Egy szabályos kockával dobva annak valószínűsége, hogy kettest dobunk: $P(A) = \frac{1}{6}\,.$

■ **B:** Mi a valószínűsége, hogy a "6 a 49-ből" LOTTÓ játékban egy szelvényt kitöltve 4 találatunk lesz?

Az összes lehetséges kimenetelek száma $\binom{49}{6}$. A kedvező kimenetelek száma: 6 jó számból 4-et eltalálunk $\binom{6}{4}$-féleképpen, s ezek mindegyikéhez $\binom{49-6}{6-4} = \binom{43}{2}$ rosszul választott szám tartozik.

Tehát a 4 találat valószínűsége:

$$P(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0{,}000968 = 0{,}0968\,\%\,.$$

Hasonlóan kaphatjuk meg a 6 találat $P(A_6)$ valószínűségét:.

$$P(A_6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 0{,}715 \cdot 10^{-7} = 7{,}15 \cdot 10^{-6}\,\% .$$

■ **C:** Határozzuk meg azt a $P(A)$ valószínűséget, hogy k személy között van kettő, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk (a születési évnek nem kell megegyezni)!
Tekintsük először az ellentett $\overline{A}$ esemény (mindenki születésnapja különböző napra esik) valószínűségét:

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-k+1}{365} .$$

Tehát:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k} .$$

Néhány numerikus érték adott k esetén:

k	10	20	23	30	60
P(A)	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994

Látható, hogy már 23 személy esetén ez a valószínűség nagyobb, mint 0,5, azaz 50 % .

16.2.1.3. Feltételes valószínűség, Bayes tétele

1. Feltételes valószínűség

Annak valószínűségét, hogy a B esemény bekövetkezik feltéve, hogy A bekövetkezett, nevezzük a B esemény A feltétel melletti $P(B|A)$ vagy $P_A(B)$ feltételes valószínűségének és a

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} , \quad P(A) \neq 0 . \tag{16.37}$$

képlettel definiáljuk.
Ekkor igaz, hogy:

1. Ha $P(A) \neq 0$ és $P(B) \neq 0$, akkor

$$\frac{P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(A)} . \tag{16.38a}$$

azaz

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) .$$

2. Hasonlóan $P(A_1A_2A_3 \ldots A_n) \neq 0$ esetén

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) . \tag{16.38b}$$

2. Független események

Az A és B események függetlenek, ha

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{és} \quad P(B|A) = P(B) \tag{16.39a}$$

azaz

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{16.39b}$$

3. Teljes eseményrendszerre vonatkozó tételek

Ha az **A** eseményhalmaz $B_i \in \mathbf{A}$ eseményei teljes eseményrendszert alkotnak úgy, hogy $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor egy tetszőleges $A \in \mathbf{A}$ eseményre igaz:

1. A teljes valószínűség tétele

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) . \tag{16.40}$$

2. Bayes tétele

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \qquad k = 1, \ldots, n\,. \tag{16.41}$$

■ Egy üzemben bizonyos termékeket 3 egyforma gépen állítanak elő: az összes termék 20 %-át az elsőn, 30 %-át a másodikon, 50 %-át a harmadikon. A selejtarány a megfelelő sorrendben: 5 %, 4 %, 2 %. A minőségellenőrzés két tipikus kérdése: A legyártott termékeket egy helyen tárolva és közűlük egyet véletlenszerűen kiválasztva

a) Mi a valószínűsége, hogy ez selejtes?

b) Ha ez a termék selejtes, mi a valószínűsége, hogy például az első gép gyártotta?

Használjuk a következő jelöléseket:

- A_i: Az i-edik gép terméke $(i = 1, 2, 3)$ ahol $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}3$, $P(A_3) = 0{,}5$. Továbbá igaz, hogy:
- $A_i A_j = O$, $A_1 + A_2 + A_3 = I$.
- A: A termék selejtes.
- $P(A|A_1) = 0{,}05$ az első gép selejtaránya, hasonlóan $P(A|A_2) = 0{,}04$ és $P(A|A_3) = 0{,}02$.

Így a két kérdésre adott válasz:

a) $P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$
$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0,5 \cdot 0{,}02 = 0{,}032\,.$

b) $P(A_1|A) = P(A_1)\dfrac{P(A|A_1)}{P(A)} = 0{,}2\dfrac{0{,}05}{0{,}032} = 0{,}31\,.$

16.2.2. Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény

A valószínűségszámításban a matematikai analízis módszereit alkalmazzuk és ezért szükségünk van a változó és a függvény fogalmának bevezetésére.

16.2.2.1. Valószínűségi változó

Az elemi események egy adott halmazát leírhatjuk úgy, hogy minden elemi eseményhez hozzárendelünk egy x számot $(x \in R)$. Ez a szám adott véletlen feltételek teljesülésétől függ. Az ilyen, véletlentől függő számértékeket felvevő változót *valószínűségi változó*nak vagy *véletlen változó*nak nevezzük, jelölése:X. Tehát egy véletlen kísérlet minden lehetséges kimenetele egy x valós számmal és a megfelelő valószínűséggel reprezentálható.

Ha az X valószínűségi változó véges számú, vagy megszámlálhatóan sok értéket (a torlódási pontok kivételével) vesz fel, akkor *diszkrét valószínűségi változó*ról beszélünk. A X valószínűségi változó *folytonos*, ha x értékei az egész számegyeneshez, vagy annak egy részintervallumához tartoznak. Pontos definiciót a 16.2.2.2. alpontban adunk. Ritkán előfordul kevert (folytonos és diszkrét) valószínűségi változó is. ■ **A:** 778. oldal, **A** példa. Rendeljük hozzá az A_{11}, A_{12}, A_{21} és A_{22} eseményekhez az 1, 2, 3, 4 számokat. Így egy diszkrét valószínűségi változót definiáltunk.

■ **B:** Egy gyárban a legyártott készletből véletlenszerűen kiválasztott izzólámpa élettartama folytonos valószínűségi változó, jelöljük T-vel. Egy t adott valós szám esetén $T = t$ azt jelenti, hogy ez az izzó pontosan t idő alatt ég ki.

16.2.2.2. Eloszlásfüggvény

1. Eloszlásfügvvény definíciója és tulajdonságai

Az X valószínűségi változó eloszlását az eloszlásfüggvénnyel jellemezzük:

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad -\infty < x < \infty\,. \tag{16.42}$$

Tehát $F(x)$ értéke az x helyen azt adja meg, mekkora valószínűséggel vesz fel az X valószínűségi változó $-\infty$ és x közötti értékeket. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

2. $F(x)$ az x-nek nem csökkenő függvénye.

3. $F(x)$ minden pontban jobbról folytonos.

Megjegyzés: Az irodalomban az eloszlásfüggvény definíciója sokszor a következő: $F(x) = P(X < x)$. Ekkor a fenti tulajdonságok közül a 3. változik: "balról" folytonos.

2. Diszkrét és folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Diszkrét valószínűségi változó: Ha az X valószínűségi változó az $x_i \ \ (i = 1, 2, \ldots)$ értékeket $P(X = x_i) = p_i \ \ (i = 1, 2, \ldots)$ valószínűséggel veszi fel, akkor

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i \,. \tag{16.43}$$

Folytonos valószínűségi változó: A valószínűségi változó akkor folytonos, ha létezik olyan nem negatív $f(x)$ függvény, melyre a $P(X \in S)$ kifejezhető mint: $P(X \in S) = \int\limits_S f(x)\,dx$ Ez az $f(x)$ függvény a *sűrűségfüggvény.*

Annak valószínűségét, hogy X értékei egy véges $[a, b]$ intervallumban vannak az $f(t)$ sűrűségfüggvénnyel adjuk meg:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{ahol} \quad f(x) \ge 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,. \tag{16.44}$$

A megfelelő folytonos eloszlásfüggvény:

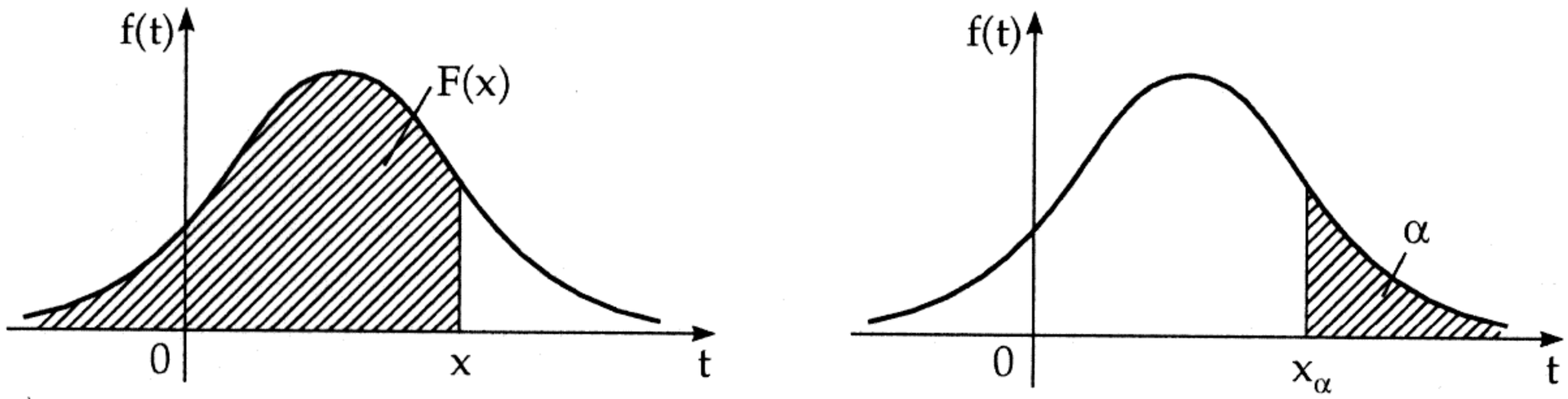
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{16.45}$$

Annak a valószínűsége, hogy az X folytonos valószínűségi változó egy konkrét x_i értéket vesz fel nulla:

$$P(X = x_i) = 0\,.$$

3. A valószínűség, mint terület

Folytonos valószínűségi változó esetén a $P(X \le x) = F(x)$ eloszlásfüggvény értéke az x helyen egyenlő a sűrűségfüggvény alatti területtel a $-\infty < t \le x$ intervallum felett **(16.1.a ábra)**. Adott α valószí-



16.1. ábra.

nűség-érték esetén azt az $x = x_\alpha$ értéket nevezzük az eloszlás α-adrendű kvantilisének, amelyre

$$P(X > x) = \alpha\,, \tag{16.46}$$

teljesül. Ekkor a $f(t)$ alatti terület x_α-tól jobbra éppen α **(16.1.b ábra)**.

Megjegyzés: Az irodalomban sokszor az x_α-tól balra eső terület mértékét hívjuk α-kvantilisnek.

A matematikai statisztikában α kis értékei esetén (pl. $\alpha = 0{,}05 = 5\%$ vagy $\alpha = 0{,}01 = 1\%$) hibavaló-

színűségről, a szignifikáns eltérés valószínűségéről beszélünk. Az ezen értékeknek megfelelő kvantilisek a gyakorlatban legtöbbször előforduló eloszlásokra **21.14.-től 21.18. táblázatokban** találhatók.

16.2.2.3. Várható érték, szórás, Csebisev-egyenlőtlenség

Egy eloszlás két legfontosabb jellemző paramétere: a μ várható érték (középérték) és a σ szórás. Ezek ismeretében kaphatunk az eloszlásra egy első, durva közelítést. A várható érték fogalma megfelel a mechanikából ismert súlypont fogalmának, azaz például folytonos esetben μ az $f(x)$ függvény alatti tartomány súlypontjának abszcisszája. A szórás pedig az X valószínűségi változónak a μ várható értéktől vett eltérését, a μ várható érték körüli ingadozását jellemzi.

1. Várható érték

Ha $g(X)$ az X valószínűségi változó függvénye, akkor $g(X)$ szintén valószínűségi változó. $g(X)$ várhatóértékének definíciója:

1. Diszkrét eset: $$E(g(X)) = \sum_k g(x_k)p_k\,. \tag{16.47a}$$

2. Folytonos eset: $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx\,. \tag{16.47b}$$

E várható értékek léteznek, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)|p_k$ végtelen sor, illetve a $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|f(x)\,dx$ integrál konvergens. Az X valószínűségi változó várható értéke $g(X) = X$ esetén:

$$\mu_X = E(X) = \sum_k x_k p_k \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx\,, \tag{16.48a}$$

és (16.47a,b)-ből következően igaz, hogy

$$E(aX + b) = a\mu_X + b \quad (a, b \text{ valós számok})\,. \tag{16.48b}$$

2. n-edrendű momentumok

Az X valószínűségi változó momentuma:

1. n-edrendű momentuma: $E(X^n)$, (16.49a)

2. n-edrendű centrális momentuma: $E((X - \mu_X)^n)$. (16.49b)

3. Szórásnégyzet és szórás

$n = 2$ esetén a centrális momentumot szórásnégyzetnek (variációnak) nevezzük:

$$E((X - \mu_X)^2) = D^2(X) = \sigma_X^2 = \begin{cases} \sum_k (x_k - \mu_X)^2 p_k \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\,dx\,. \end{cases} \tag{16.50}$$

σ_X-t nevezzük szórásnak. A következő azonosságok érvényesek:

$$D^2(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2\,, \quad D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)\,. \tag{16.51}$$

4. Súlyozott közép, számtani közép

Diszkrét esetben a X valószínűségi változó várható értéke az $x_1, \ldots, x_n$ értékek súlyozott középértéke:

$$E(X) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{16.52}$$

ahol az X valószínűségi változó az x_k értékeket p_k $(k = 1, \ldots n)$ valószínűséggel veszi fel, ahol a p_k értékeket súlyoknak tekinthetjük. Diszkrét egyenletes eloszlás esetén:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n\,, \qquad E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,. \tag{16.53}$$

Megjegyzés: Folytonos egyenletes eloszlásról akkor beszélünk, ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a \le x \le b\,, \\ 0 & \text{egyébként}\,, \end{cases}\,. \tag{16.54}$$

Ebből következik, hogy

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}\,, \quad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\,. \tag{16.55}$$

5. Csebisev-egyenlőtlenség

Ha az X valószínűségi változó μ várható értéke és σ szórása létezik, akkor tetszőleges $\lambda > 0$ valós szám esetén:

$$P(|X - \mu| \ge \lambda\sigma) \le \frac{1}{\lambda^2}\,. \tag{16.56}$$

Tehát nagyon kicsi a valószínűsége annak, hogy az X valószínűségi változó értékei a μ várható értéktől a szórás többbszörösénél (λ nagy értéke esetén) messzebb esnek.

16.2.2.4. Többdimenziós valószínűségi változók

Az $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *véletlen vektor*ról vagy más néven *valószínűségi vektor*ról akkor beszélünk, ha minden egyes elemi esemény bekövetkezésekor az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók $x_1, \ldots, x_n$ értéket vesznek fel. A megfelelő eloszlásfüggvény:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n)\,. \tag{16.57}$$

Az eloszlásfüggvény folytonos, ha létezik egy $f(t_1, \ldots, t_n)$ függvény úgy, hogy

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1 \ldots\, dt_n\,. \tag{16.58}$$

Az $f(t_1, \ldots, t_n)$ függvényt az n-dimenziós eloszlás *sűrűségfüggvényének* nevezzük. Ha az $x_1, \ldots, x_n$ változók közül egy vagy több a végtelenhez tart, kapjuk az úgynevezett *peremeloszlásokat*. Ezek vizsgálatát és példákat a [16.4] és [16.25] irodalom tartalmazza.
Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók *függetlenek*, ha:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n)\,, \quad f(t_1, \ldots, t_n) = f_1(t_1)\ldots f_n(t_n)\,. \tag{16.59}$$

16.2.3. Diszkrét eloszlások

1. Kétállapotú alapsokaság és az urnamodell

A kétállapotú statisztikai sokaság N eleme két osztályba sorolható: az egyik osztályban van M elem bizonyos A tulajdonságokkal, a másikban $N - M$ elem, melyek az A tulajdonsággal nem rendelkeznek. A $P(A) = p$ és $P(\overline{A}) = 1 - p$ valószínűségek adottak. Ebből a sokaságból n elemet kétféleképpen választhatunk ki: visszatevéssel, illetve visszatevés nélkül. A kihúzott n elemet, amennyiben minden elemet egymástól függetlenül, egyforma valószínűséggel választunk *n-elemű véletlen mintának* nevezzük. A fentieket az urnamodell segítségével szemléltetjük.

2. Urnamodell

Egy dobozban vagy urnában nagyszámú fehér és piros golyó van. Keressük annak a valószínűségét, hogy n véletlenszerűen kihúzott golyó között pontosan k piros golyó van. Ha mindegyik kihúzott golyót, miután a színét feljegyeztük, a következő húzás előtt újra visszatesszük a dobozba, akkor visszatevéses

mintavételről beszélünk. Azokat a valószínűségeket, melyek megadják, hogy az n elemű mintában pontosan k piros golyó van, a binomiális eloszlás írja le. Ha az n golyót visszatevés nélkül húzzuk, akkor kapjuk a hipergeometrikus eloszlást.

16.2.3.1. Binomiális eloszlás

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, melynek csak két kimenetele lehet: A és $\overline{A}$, melyek valószínűsége adott: $P(A) = p$ és $P(\overline{A}) = 1 - p$. Legyen az X_n valószínűségi változó értéke az a szám, ahányszor az n végrehajtás során az A bekövetkezett. Ekkor:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{16.60}$$

Ennek megfelelően az előbbi statisztikai sokaságra legyen az az A esemény, hogy visszatevéssel pirosat húztunk:

$$P(A) = \frac{M}{N} = p\,, \quad P(\overline{A}) = \frac{N-M}{N} = 1 - p = q\,. \tag{16.61}$$

Annak valószínűsége, hogy az első k független húzás eredménye A és utána $n-k$ eredménye $\overline{A}$: $p^k(1-p)^{n-k}$. Ugyanez a valószínűség adódik bármelyik lehetséges, előre rögzített sorrend esetén, azaz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{16.62}$$

esetben.

Az X_n valószínűségi változó eloszlása: *binomiális eloszlás.* Az eloszlás paraméterei n és p.

1. Várható érték és szórásnégyzet

$$E(X_n) = \mu = n \cdot p\,, \tag{16.63a}$$

$$D^2(X_n) = \sigma^2 = n \cdot p(1-p)\,. \tag{16.63b}$$

2. Ha X_n binomiális eloszlású, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - E(X_n)}{D(X_n)} \le \lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt\,. \tag{16.63c}$$

Tehát elég nagy n esetén a binomiális eloszlást $\mu_X = E(X_n)$ és $\sigma^2 = D^2(X_n)$ paraméterű normális eloszlással közelíthetjük. Ez általában akkor elég pontos közelítés, ha $np > 4$ és $n(1-p) > 4$.

3. Rekurziós képlet Gyakorlati számításokban érdemes az alábbi rekurziós képletet alkalmazni:

$$P(X_n = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(X_n = k)\,. \tag{16.63d}$$

4. Ha X_n és X_m binomiális eloszlású valószínűségi változók n, p, illetve m, p paraméterekkel, akkor az $X = X_n + X_m$ valószínűségi változó is binomiális eloszlású $n+m$, p paraméterekkel.

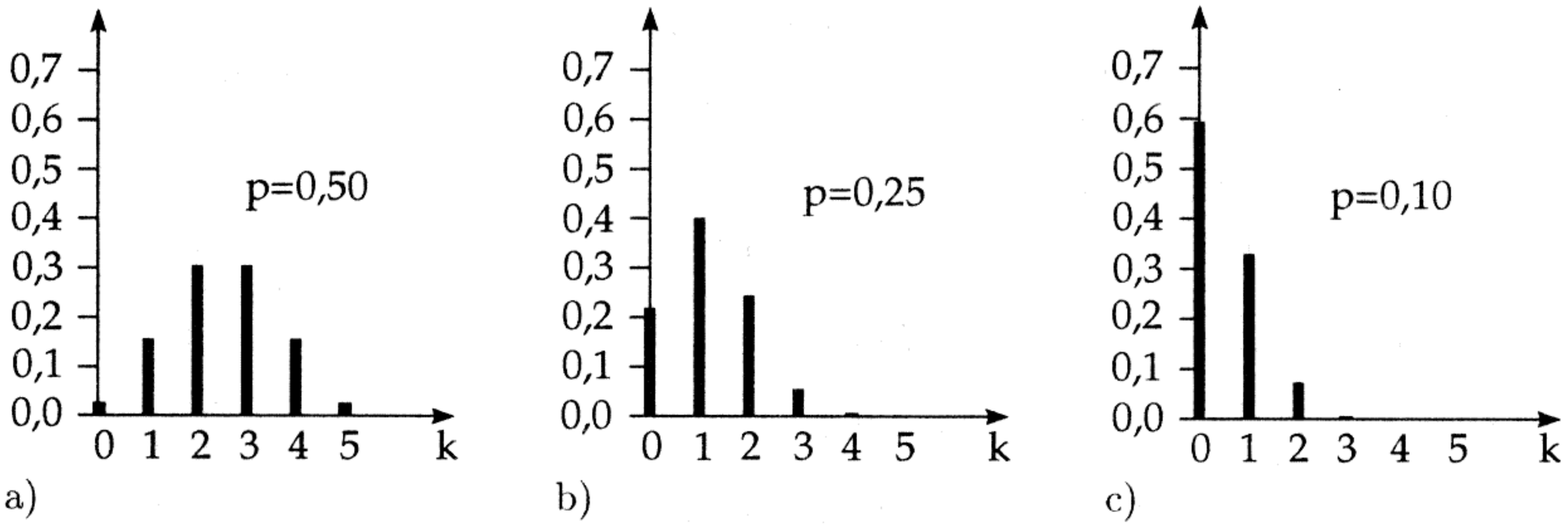
Az **16.2.a,b,c ábrán** három binomiális eloszlást ábrzoltunk $n = 5$, $p = 0{,}5$; $0{,}25$, illetve $0{,}1$ paraméterekkel. Látható, hogy $p = q = 0{,}5$ esetén az eloszlás szimmetrikus. Ahogy p távolodik a 0,5-től, úgy csökken a szimmetria.

16.2.3.2. Hipergeometrikus eloszlás

A binomiális eloszláshoz hasonlóan a statisztikai sokaság most is kétállapotú. M elem rendelkezik az A tulajdonsággal, a többi $N - M$ elem pedig az A tulajdonsággal nem rendelkezik. A különbség abban van, hogy a megfelelő urnamodellben az n-elemű véletlen mintát most visszatevés nélkül vesszük.

Annak valószínűsége, hogy az n kihúzott golyó között k piros van:

$$P(X = k) = P^n_{M,N}(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{16.64a}$$



16.2. ábra.

ahol

$$0 \le k \le n\,, \quad k \le M\,, \quad n-k \le N-M\,. \tag{16.64b}$$

Azt az X valószínűségi változót, melynek eloszlását a (16.64a) adja meg, *hipergeometrikus eloszlásúnak* nevezzük. Paraméterei N, M, n. Ekkor

1. Várható érték és szórásnégyzet

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n\frac{M}{N}\,, \tag{16.65a}$$

$$\sigma^2 = D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(n\frac{M}{N}\right)^2$$

$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}\,. \tag{16.65b}$$

2. Rekurziós képlet

$$P(X=k+1) = W_{M,N}^{n}(k+1) = \frac{(n-k)(M-k)}{(k+1)(N-M-n+k+1)} P(X=k)\,. \tag{16.65c}$$

A **16.3.a,b,c ábrán** 3 hipergeometrikus eloszlás látható az $N = 100$, $M = 50$, 25 és 10; $n = 5$ esetben, melyek a **16.2. ábrán** az $p = 0{,}5$; 0,25 és 0,1 eseteknek felelnek meg. Ebben a három példában nincs szignifikáns különbség a binomiális és a hipergeometrikus eloszlás között.

16.2.3.3. Poisson-eloszlás

Ha az X diszkrét valószínűségi változóra

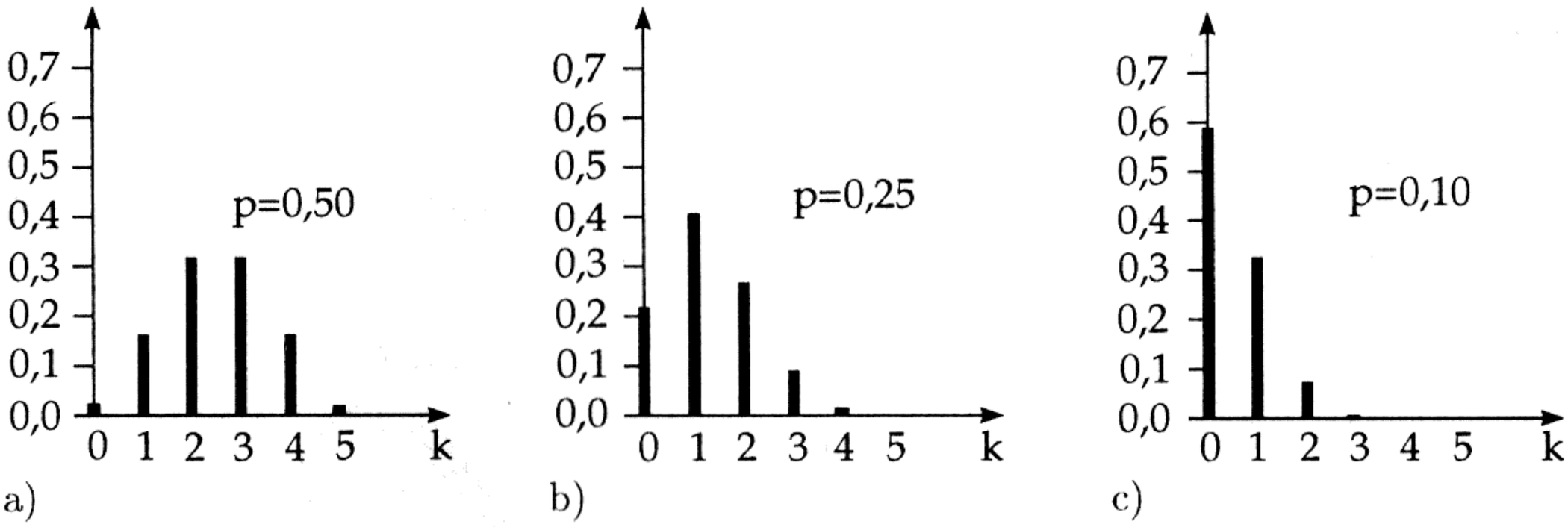
$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda > 0) \tag{16.66}$$

akkor X POISSON-*eloszlású*. Az eloszlás paramétere: λ.

1. Várható érték és szórásnégyzet

$$E(X) = \lambda\,, \tag{16.67a}$$

$$D^2(X) = \lambda\,. \tag{16.67b}$$



16.3. ábra.

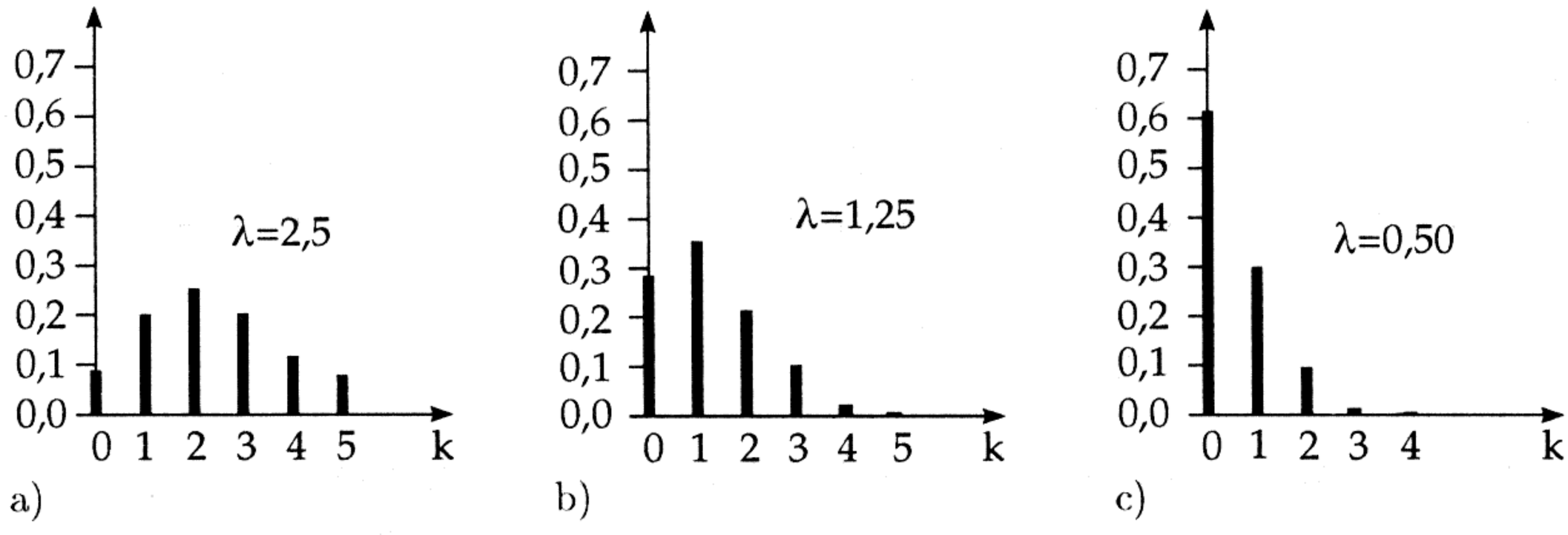
2. Ha X_1 és X_2 független, POISSON-eloszlású valószínűségi változók λ_1, ill. λ_2 paraméterekkel, akkor az $X = X_1 + X_2$ valószínűségi változó is POISSON-eloszlású és paramétere: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

3. Rekurziós képlet

$$P(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1} \cdot P(X = k)\,. \tag{16.67c}$$

A POISSON-eloszlás a binomiális eloszlás határértéke, azaz ha az X_n, n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók eloszlásainak sorozatát tekintjük $n \to \infty$ ($p \to 0$) esetén úgy, hogy $np = \lambda > 0$ állandó, akkor X_n eloszlása a λ paraméterű POISSON-eloszláshoz tart. $p \leq 0{,}08$ és $n \geq 1500p$ esetén a binomiális eloszlást kielégítő pontossággal helyettesíti a POISSON-eloszlás, és így a megfelelő valószínűségek kiszámítása lényegesen egyszerűbb.

A **16.4. ábra** 3 POISSON-eloszlás első öt értékét mutatja. A megfelelő paraméterek: $\lambda = np = 2{,}5$; 1,25 és 0,5; ezek az értékek felelnek meg a **16.2.** és **16.3. ábráknak**.



16.4. ábra.

16.2.4. Folytonos eloszlások

16.2.4.1. Normális eloszlás

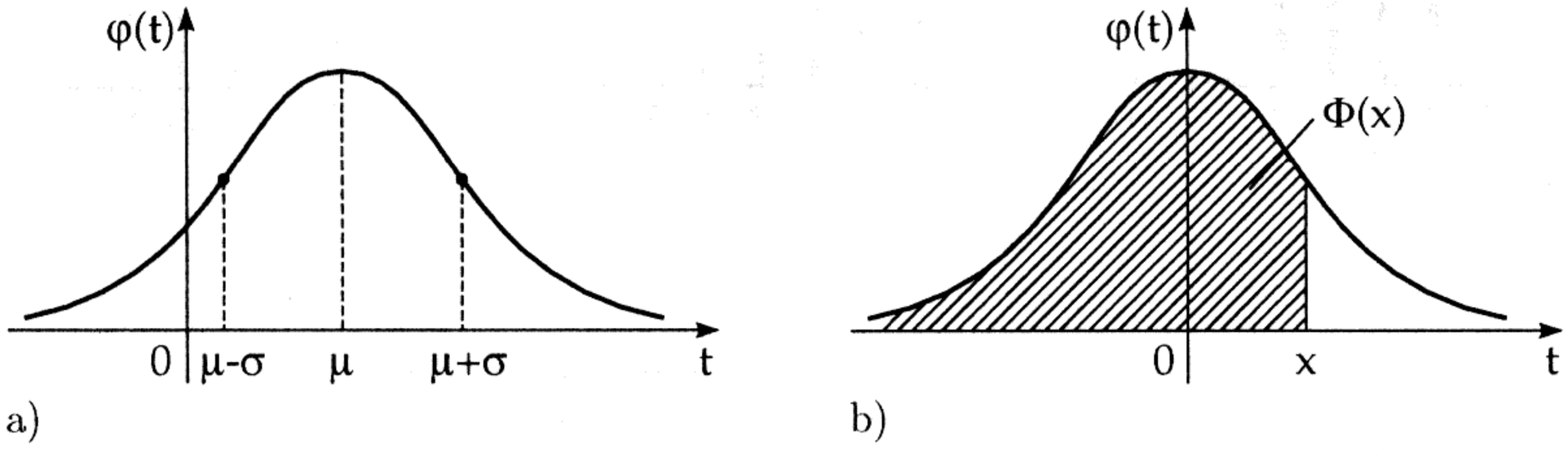
1. Eloszlás és sűrűségfüggvény Egy X valószínűségi változó normális eloszlású, pontosabban (μ, σ)-normáleloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt\,, \tag{16.68}$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\mu \text{ tetszőleges, } \sigma > 0 \text{ valós számok}). \tag{16.69}$$

A sűrűségfüggvény maximuma a $t = \mu$ helyen, inflexiós pontjai a $\mu \pm \sigma$ helyeken vannak (lásd **16.5.a,b ábra**).



16.5. ábra.

2. Várható érték és szórásnégyzet Normális eloszlás esetén ezek az eloszlás paraméterei:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \tag{16.70a}$$

és

$$D^2(X) = E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2\,. \tag{16.70b}$$

Ha az X_1 és X_2 valószínűségi változók függetlenek és normális eloszlásúak μ_1 , σ_1, illetve μ_2 , σ_2 paraméterekkel, akkor az $X = k_1X_1 + k_2X_2$ (k_1, k_2 valós, konstans) valószínűségi változó is normális eloszlású, $\mu = k_1\mu_1 + k_2\mu_2$, $\sigma = \sqrt{{k_1}^2{\sigma_1}^2 + {k_2}^2{\sigma_2}^2}$ paraméterekkel.
A $P(a \le X \le b)$ valószínűséget a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye segítségével kaphatjuk meg:

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\,. \tag{16.71}$$

16.2.4.2. Standard normális eloszlás, Gauss-hibafüggvény

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény (16.68)-ból $\mu = 0$ és $\sigma^2 = 1$ esetén kapjuk az eloszlásfüggvényt:

$$P(X \le x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt \tag{16.72a}$$

a megfelelő sűrűségfüggvény a GAUSS-féle haranggörbe:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{16.72b}$$

A standard azaz $(0, 1)$-normáleloszlás táblázata **(21.15. táblázat)** a $\Phi(x)$ értékeit tartalmazza pozitív x-ekre, mert negatív x értékekre ebből:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{16.73}$$

2. Valószínűségintegrál A következő definíciók szerint a $\Phi(x)$ függvény megfelelő integráljait az irodalomban valószínűségintegrálnak, illetve GAUSS-hibaintegrálnak hívják.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x) - \frac{1}{2}\,, \tag{16.74a}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = 2 \cdot \Phi_0(\sqrt{2}x)\,. \tag{16.74b}$$

16.2.4.3. Logaritmikus normális eloszlás

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény Az X valószínűségi változót logaritmikus normális eloszlásúnak vagy röviden lognormális eloszlásúnak nevezzük, μ_L és σ_L^2 paraméterekkel, ha az

$$Y = \log X \tag{16.75}$$

valószínűségi változó μ_L és σ_L^2 paraméterű normális eloszlású. Az X valószínűségi változó csak pozitív értékeket vehet fel. Sűrűségfüggvénye:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t \le 0\,, \\ \dfrac{\log e}{t\sigma_L\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\log t - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}\right) & \text{ha} \quad t > 0\,, \end{cases} \tag{16.76}$$

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 0\,, \\ \dfrac{1}{\sigma_L\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\log x} \exp\left(-\frac{(t-\mu_L)^2}{2\sigma_L^2}\right) dt & \text{ha} \quad x > 0\,. \end{cases} \tag{16.77}$$

A gyakorlati alkalmazásokban vagy a természetes-, vagy a tízesalapú logaritmust használják.

2. Várható érték és szórás Természetes logaritmus alkalmazása esetén:

$$\mu = \exp\left(\mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2}\right), \qquad \sigma^2 = \left(\exp\sigma_L^2 - 1\right)\exp\left(2\mu_L + \sigma_L^2\right). \tag{16.78}$$

3. Megjegyzések

a) A lognormális eloszlás sűrűségfüggvényét két különböző (μ_L, σ_L) és a természetes logaritmus alkalmazása esetén a **16.6. ábra** szemlélteti.

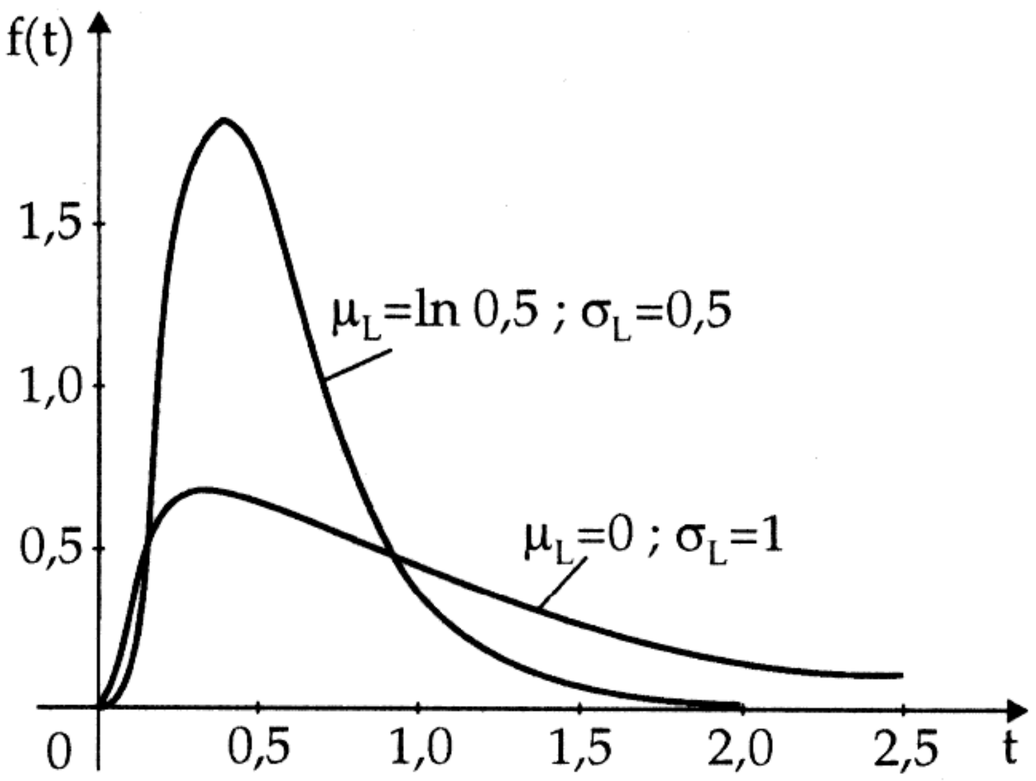
b) Figyelem: μ_L és σ_L^2 az $Y = \log X$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete, míg μ és σ^2 (16.78) szerint az X valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete.

c) A lognormális eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvénye felírható a $\Phi(x)$ standard normális eloszlásfüggvény segítségével:

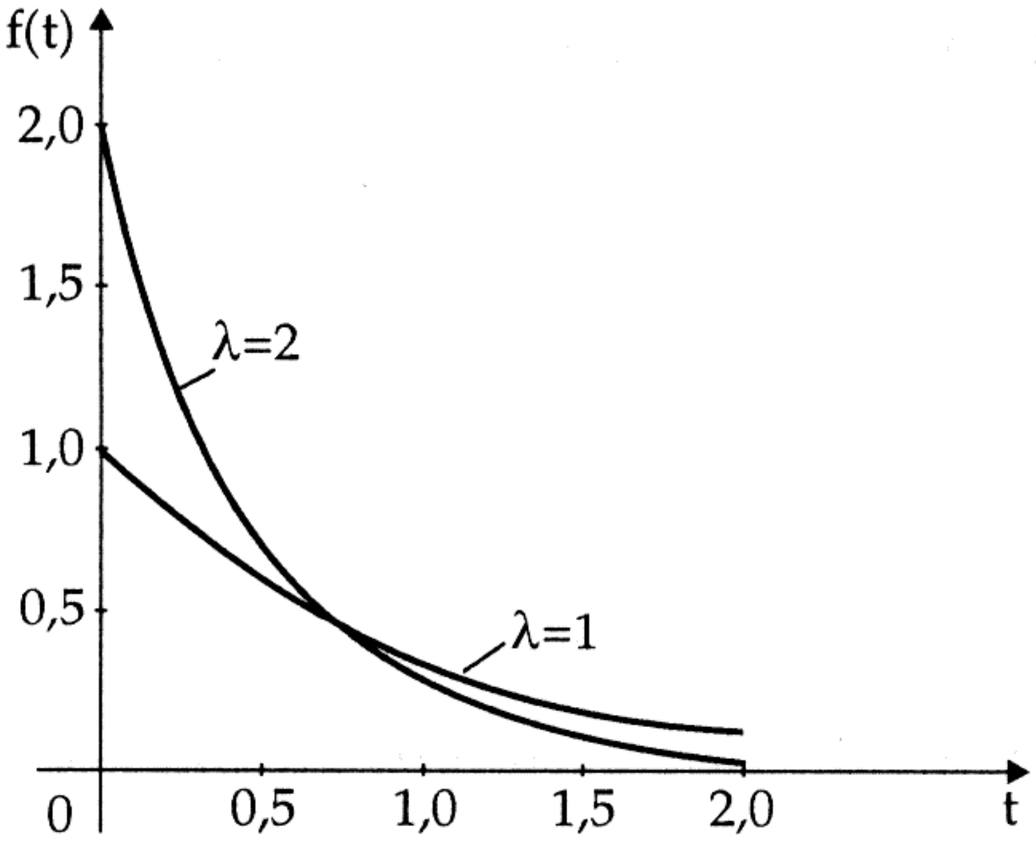
$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu_L}{\sigma_L}\right). \tag{16.79}$$

d) A lognormális eloszlás alkalmazási területe: gazdasági, technikai és biológiai folyamatok élettartam vizsgálata.

e) Míg a normális eloszlás sok, egymástól független valószínűségi változó összegének, addig a lognormális eloszlás ezek szorzatának eloszlását írja le.



16.6. ábra.



16.7. ábra.

16.2.4.4. Exponenciális eloszlás

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény Egy folytonos X valószínűségi változó *exponenciális eloszlású* λ paraméterrel $(\lambda > 0)$, ha sűrűségfüggvénye (lásd **16.7. ábra**):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 0\,, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{ha} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{16.80}$$

és így az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{16.81}$$

2. Várható érték és szórásnégyzet

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\,, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,. \tag{16.82}$$

Az exponenciális eloszlást a következő véletlen folyamatok leírásában alkalmazzák: telefonbeszélgetések időtartama, rádióaktív bomlás esetén a részecskék élettartama, gép működési ideje két véletlen leállás között, alkatrészek élettartama.

16.2.4.5. Weibull-eloszlás

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény Egy folytonos X valószínűségi változó WEIBULL-eloszlású α és β paraméterekkel: $(\alpha > 0\,,\, \beta > 0)$, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < 0\,, \\ \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\dfrac{t}{\beta}\right)^{\alpha} & \text{ha} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{16.83}$$

és az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0\,, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & \text{ha} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{16.84}$$

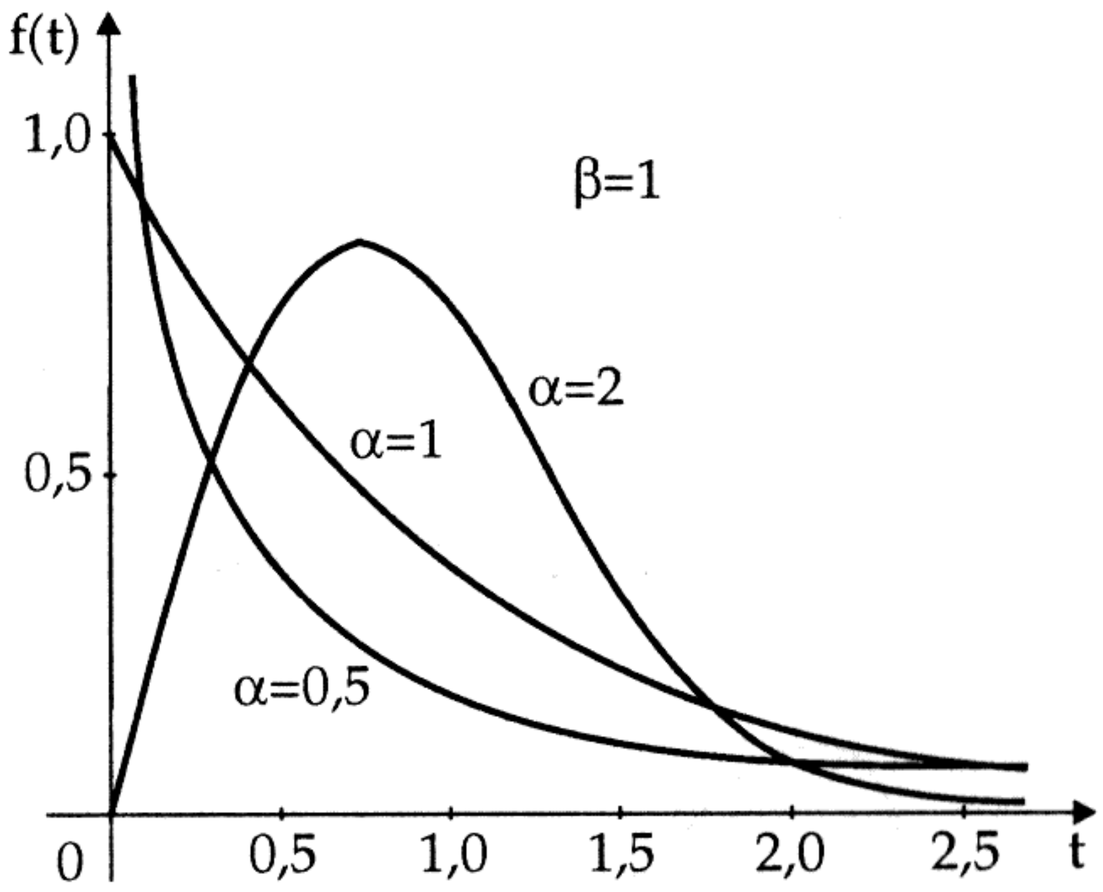
2. Várható érték és szórásnégyzet

$$\mu = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\,, \qquad \sigma^2 = \beta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]\,. \tag{16.85}$$

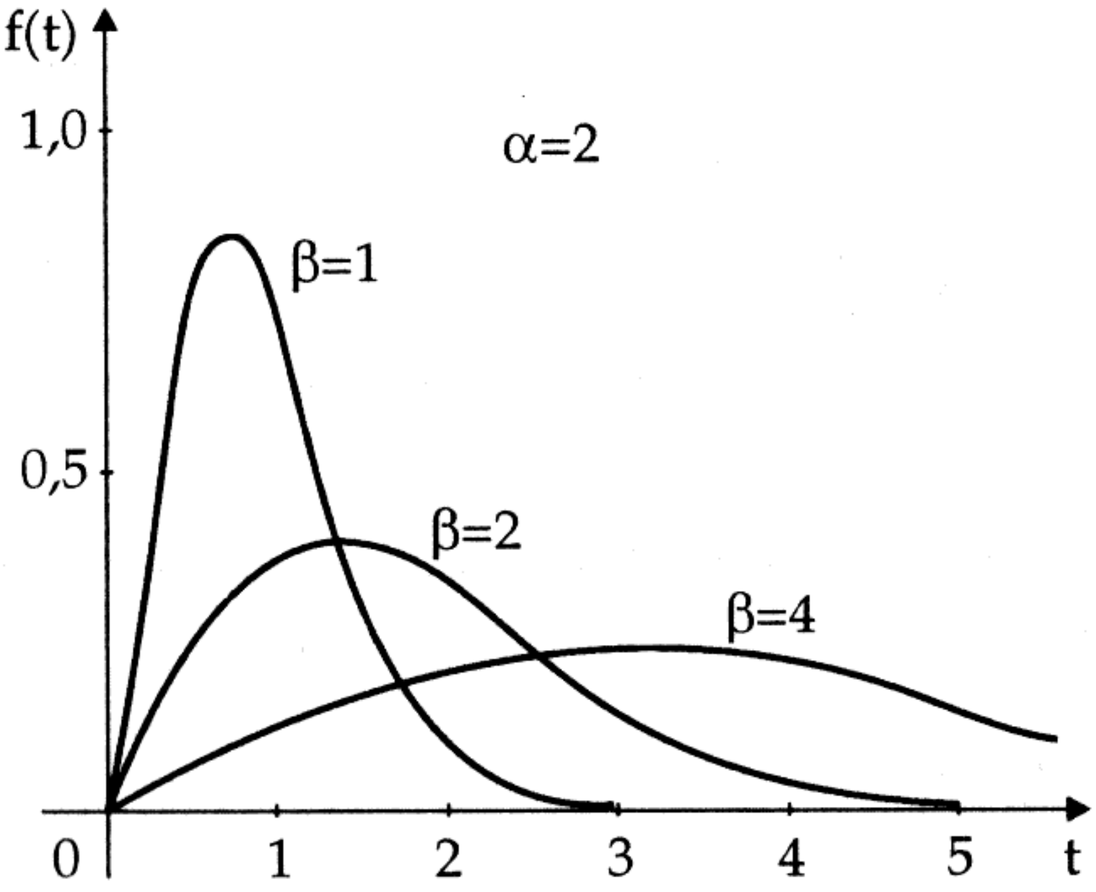
Itt $\Gamma(x)$ a gammafüggvént jelöli (lásd 469. old.):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{ha} \quad x > 0\,. \tag{16.86}$$

(16.83)-ban α-t alakparaméternek, β-t léptékparaméternek is hívják (lásd **16.8.** és **16.9. ábra**).



16.8. ábra.



16.9. ábra.

Megjegyzések:

a) $\alpha = 1$ esetén a WEIBULL-eloszlás $\lambda = \dfrac{1}{\beta}$ paraméterű exponenciális eloszlásnak felel meg.

b) Van 3 paraméteres WEIBULL-eloszlás is, a γ "helyzetparaméter" az eltolás mértékét adja meg:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right]. \tag{16.87}$$

c) A WEIBULL-eloszlást leginkább a megbízhatóságelméletben alkalmazzák, mivel különböző alkatrészek és alkatrész-csoportok véletlen élettartamát igen rugalmasan írja le.

16.2.4.6. χ^2-eloszlás

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, $(0,1)$-normális eloszlású független valószínűségi változók, akkor a

$$\chi^2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2 \tag{16.88}$$

valószínűségi változó eloszlását n szabadságfokú χ^2-eloszlásnak nevezzük. Eloszlásfüggvényét jelölje $F_{\chi^2}(x)$, a megfelelő sűrűségfüggvény:

$$f_{\chi^2}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} & \text{ha} \quad t > 0\,, \\ 0 & \text{ha} \quad t \le 0 \end{cases} \tag{16.89}$$

$$F_{\chi^2}(x) = P(\chi^2 \le x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \quad (x > 0)\,. \tag{16.90}$$

2. Várható értek és szórás

$$E(\chi^2) = n\,, \tag{16.91a}$$

$$D^2(\chi^2) = 2n\,. \tag{16.91b}$$

3. Ha X_1 és X_2 független, n, illetve m szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változók, akkor az $X = X_1 + X_2$ valószínűségi változó $n + m$ szabadságfokú, χ^2 eloszlású.

4. Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független $(0, \sigma)$-normáleloszlású valószínűségi változók, akkor

$$X = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \quad \text{sűrűségfüggvénye} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma^2} f_{\chi^2}\left(\frac{t}{\sigma^2}\right), \tag{16.92}$$

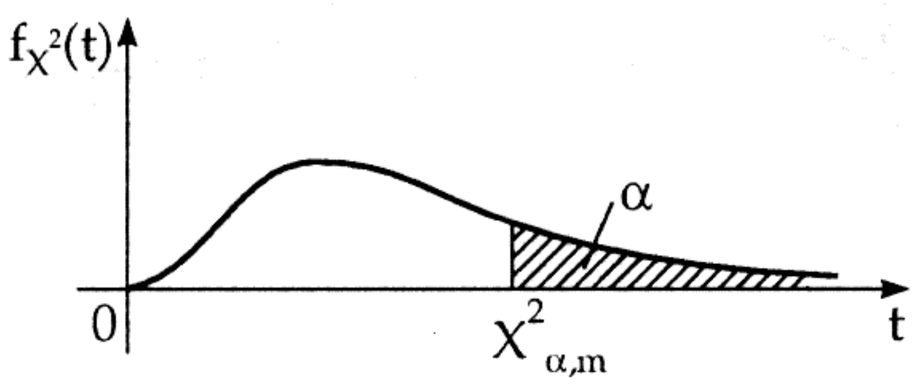
$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \quad \text{sűrűségfüggvénye} \quad f(t) = \frac{n}{\sigma^2} f_{\chi^2}\left(\frac{nt}{\sigma^2}\right), \tag{16.93}$$

$$X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2} \quad \text{sűrűségfüggvénye} \quad f(t) = \frac{2t}{\sigma^2} f_{\chi^2}\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right). \tag{16.94}$$

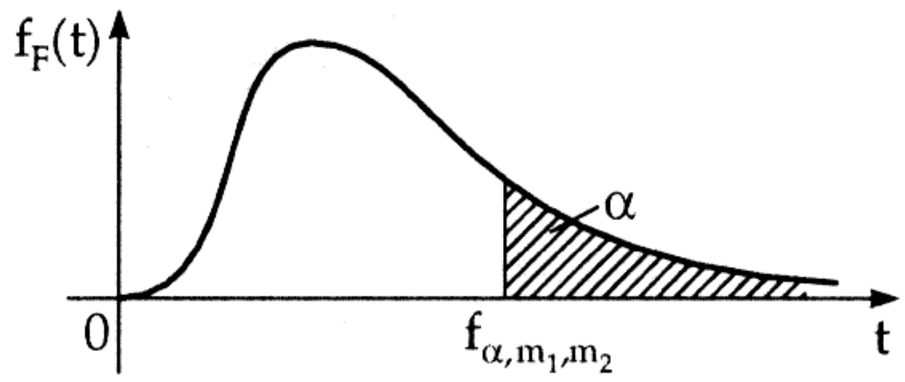
5. Az m szabadságfokú χ^2-eloszlás α-adrendű kvantilise az a $\chi^2_{\alpha,m}$ szám, melyre

$$P(X \geq \chi^2_{\alpha,m}) = \alpha\,. \tag{16.95}$$

(lásd **16.10. ábra**). A χ^2-eloszlás kvantiliseit különböző α és m értékekre a **21.16. táblázat** tartalmazza.



16.10. ábra.



16.11. ábra.

16.2.4.7. Fisher-eloszlás

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény Ha X_1 és X_2 független, χ^2-eloszlású valószínűségi változók m_1, illetve m_2 szabadságfokkal, akkor az

$$F_{m_1,m_2} = \frac{X_1}{m_1} \Big/ \frac{X_2}{m_2} \tag{16.96}$$

valószínűségi változó m_1, m_2 szabadságfokú FISHER-eloszlást vagy *F-eloszlást* követ. Ekkor:

$$f_F(t) = \begin{cases} \left(\frac{m_1}{2}\right)^{m_1/2} \left(\frac{m_2}{2}\right)^{m_2/2} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \frac{t^{\frac{m_1}{2}-1}}{\left(\frac{m_1}{2}t+\frac{m_2}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}}}, & \text{ha } t > 0\,, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0\,. \end{cases} \tag{16.97}$$

$$F_F(X) = P(F_{m_1 m_2 \leq x}) =$$

$$= \left(\frac{m_1}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{m_2}{2}\right)^{\frac{m_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \int_0^x \frac{\left(t^{\frac{m_1}{2}-1}\right) dt}{\left(\frac{m_1}{2}t+\frac{m_2}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}}}\,. \tag{16.98}$$

2. Várható érték és szórásnégyzet

$$E(F_{m_1,m_2}) = \frac{m_2}{m_2-2}\,, \tag{16.99a}$$

$$D^2(F_{m_1,m_2}) = \frac{2{m_2}^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)}\,. \tag{16.99b}$$

$m_2 \geq 3$ $\qquad\qquad$ $m_2 \geq 5$

3. Kvantilisek Az F-eloszlás f_{α,m_1,m_2} kvantilisei **(16.11. ábra)** a **21.17. táblázatban** (ld. 1121. old.) találhatók.

16.2.4.8. Student-eloszlás

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény Ha X egy $(0,1)$-normális eloszlású, Y pedig egy X-től független, m szabadságfokú χ^2-eloszlású valószínűségi változó, akkor a

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/m}} \tag{16.100}$$

valószínűségi változó eloszlása: m-szabadságfokú STUDENT-*eloszlás* vagy t-*eloszlás* Ekkor:

$$f_S(t) = \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}} \tag{16.101}$$

$$P(T \leq t) = F_S(t) = \int_{-\infty}^{t} f_S(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}}\,. \tag{16.102}$$

2. Várható érték és szórásnégyzet

$$E(T) = 0\,, \tag{16.103a}$$

$$D^2(T) = \frac{m}{m-2} \quad (m > 2)\,. \tag{16.103b}$$

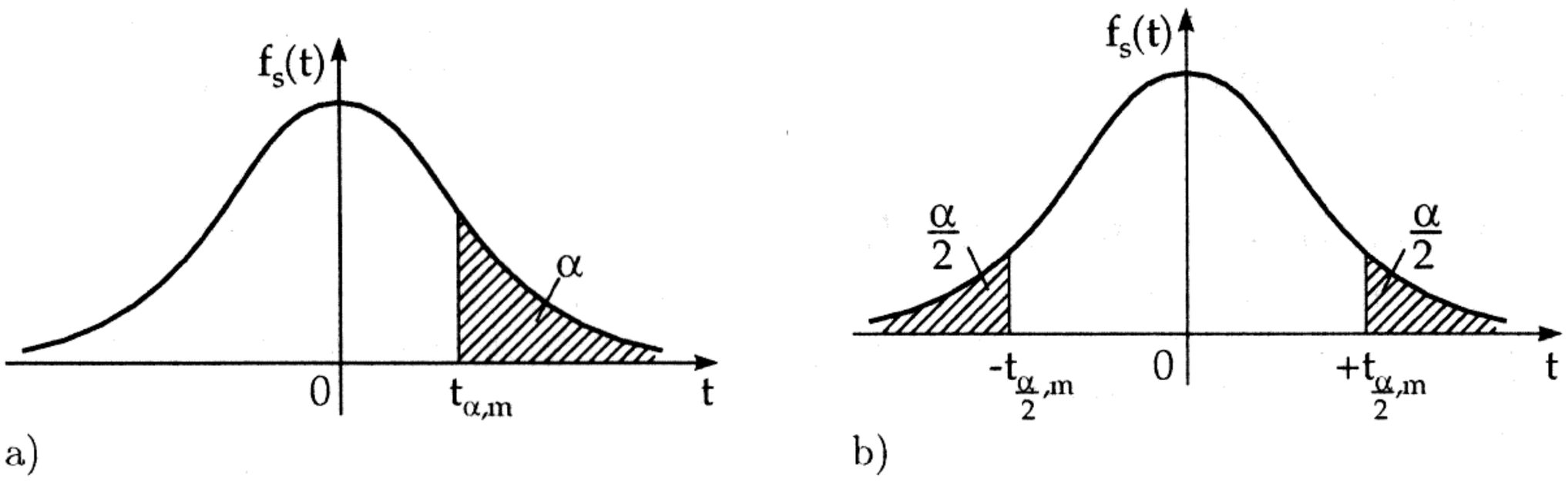
3. Kvantilisek A t-eloszlás $t_{\alpha,m}$, illetve $t_{\alpha/2,m}$ kvantilisei azok a számok, melyekre **(16.12.a,b ábra)**:

$$P(T > t_{\alpha,m}) = \alpha \tag{16.104a}$$

vagy

$$P(\,|T| > t_{\alpha/2,m}) = \alpha. \tag{16.104b}$$

A STUDENT-eloszlást (melyet GOSSET vezetett be STUDENT álnév alatt) a statisztikában a sokaság becsült várható értékének tesztelésére használják, ha a véletlen minta kis elemszámú és a sokaság szórásnégyzete nem ismert, azt is a mintából becsüljük.



16.12. ábra.

16.2.5. A nagy számok törvényei, határértéktételek

A nagy számok törvényei egy véletlen A esemény n_A/n relatív gyakorisága és $P(A)$ valószínűsége közötti összefüggéseket vizsgálják, ha a véletlen kísérlet ismételt végrehajtásainak n száma elég nagy.

1. A nagy számok Bernoulli-féle törvénye

Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$ esetén

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - P(A)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta\,, \qquad \text{(16.105a)} \quad \text{ha} \quad n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2\eta}\,. \qquad \text{(16.105b)}$$

További törvények az [16.8], [16.20] irodalomban.

■ Hányszor kell egy kockát feldobnunk, hogy a hatos dobások relatív gyakorisága a megfelelő valószínűséget 95 % valószínűséggel 0,01-nél pontosabban megközelítse?
Ekkor $\varepsilon = 0{,}01$, $\eta = 0{,}05$; tehát $4\varepsilon^2\eta = 2 \cdot 10^{-5}$, azaz a BERNOULLI-törvény szerint $n \geq 5 \cdot 10^4$. Ez igen nagy szám. A becslést finomítani, azaz n-et csökkenteni akkor tudjuk, ha az eloszlásfüggvényt ismerjük (lásd [16.10]).

2. Lindeberg–Levy-határértéktétel

Ha az $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók azonos eloszlásúak μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, akkor az

$$Y_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \text{(16.106)}$$

valószínűségi változó $F_n(y)$ eloszlásfüggvénye $n \to \infty$ esetén e $(0,1)$-normáleloszláshoz tart, azaz

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\,. \qquad \text{(16.107)}$$

A gyakorlatban az $F_n(y)$ eloszlásfüggvényt $n > 30$ esetén pótolhatjuk a $(0,1)$-normális eloszlás $\phi(y)$ eloszlásfüggvényével. További határértéktételek: irodalom [16.1], [16.8], [16.10], [16.20].

■ Egy üzemben folyamatosan gyártott ellenállások közül 100-elemű mintát vettünk. Tudjuk, hogy az egyes ellenállások értékei független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és ismert a szórásnégyzet: $\sigma^2 = 150(\Omega^2)$. A minta alapján a 100 ellenállás számtani közepe $\overline{X} = 1050\,\Omega$. Milyen tartományban fekszik 99 % valószínűséggel a sokaság μ várható értéke?
Tudjuk, hogy $P(|Y| \leq \lambda) = P(-\lambda \leq Y \leq \lambda) = P(Y \leq \lambda) - P(Y < -\lambda)$. valamint, hogy az $Y = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlású. Ezért $P(Y \leq -\lambda) = 1 - P(Y \leq \lambda)$ és így $P(|Y| \leq \lambda) = 2P(Y \leq \lambda) - 1$.
Ez a valószínűség az adott 99 %. Tehát $2\phi(\lambda) - 1 = 0{,}99$, azaz $\phi(\lambda) = 0{,}995$. A standard normális eloszlás **21.15. táblázatából** kapjuk: $\lambda = 2{,}58$. Mivel $\sigma/\sqrt{100} = 1{,}225$, ezért a 99 % valószínűséghez tartozó intervallum: $|1050 - \mu| < 2{,}58 \cdot 1{,}225$, azaz $1046{,}8\,\Omega < \mu < 1053{,}2\,\Omega$.

16.3. Matematikai statisztika

A matematikai statisztika a valószínűségszámítás alkalmazása konkrét véletlen tömegjelenségekre. A statisztika tételei egy alapsokaság tulajdonságainak valószínűségeit kísérletek vagy megfigyelések eredményeiből határozzák meg. Gazdaságossági okokból célszerű, hogy a kísérletek, illetve megfigyelések száma minél kisebb legyen.

16.3.1. Mintafüggvények

16.3.1.1. Alapsokaság, minta, véletlen vektor

1. Alapsokaság

Alapsokaságnak vagy statisztikai sokaságnak nevezzük olyan elemek halmazát, melyeket bizonyos tulajdonságok szempontjából vizsgálatnak vetünk alá. Tehát azonos típusú elemek egy sokasága, pl. egy

bizonyos gyártott termék egyes darabjai, vagy egy mérési sorozat azon eredményei, melyeket ugyanazon kísérlet ismételt végrehajtásai esetén mértek. Egy alapsokaság elemeinek N száma igen nagy lehet, akár végtelen is.

2. Minta

Hogy a minket érdeklő tulajdonság szempontjából ne kelljen a sokaság minden egyes elemét megvizsgálni, kiveszünk egy n-elemű részhalmazt ($n \leq N$). Ha a kiválasztás véletlenszerűen történik, azaz a sokaság minden egyes elemét ugyanakkora valószínűséggel választjuk ki, akkor *véletlen mintáról* beszélünk. A véletlen kiválasztást az elemek ismételt megkeverésével, "vakválasztással" vagy pl.a *véletlen számok* segítségével biztosítjuk.

3. Véletlen kiválasztás véletlen számok alkalmazásával

Egymásra halmozott, rétegezett elemek, pl. betontömbök, esetén egy véletlen kiválasztás nagyon nehéz vagy lehetetlen. Ekkor alkalmazzuk a **21.19. táblázatot**.

A $(0, 1)$ intervallumon, azaz 0,00 . . . 0 és 0,99 . . . 9 között véletlen számokat tudunk előállítani személyi számítógépünkön a RAN vagy RANDOM eljárással, mely minden alkalmazási programcsomagban benne van. Így a tizedesvessző utáni számjegyekből többjegyű, 1-nél nagyobb véletlen számokat is előállíthatunk. Sokszor a véletlen számok táblázatokban adottak. Az 1124. oldalon a **21.19. táblázatban**, kétjegyű véletlen számok vannak, melyek összeillesztésével többjegyű véletlen számok is képezhetők.

■ 10 elemű véletlen mintát kell vennünk egy szállítmányból, mely 70 egymásra halmozott csövet tartalmaz. Ehhez a csöveket megszámozzuk 00-tól 69-ig. Egy kétjegyű véletlen szám táblázat segítségével meghatározunk egy rendszert, amely szerint az egyes elemeket kiválasztjuk, pl. vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan. Azt a véletlen számot, amely ismételten fordul elő vagy 69-nél nagyobb, kihagyjuk. Ezután a véletlen mintát azok a csövek alkotják, melyek számai megfelelnek a véletlen számoknak. Ha csak többszámjegyű véletlen szám táblázatunk van, akkor kettesével azonosítjuk az egymásutáni számjegyeket.

4. Véletlen vektor

Az alapsokaságnak megfelelő valószínűségi változó eloszlását a paraméterekkel meghatározott eloszlásfüggvény írja le, amely eloszlásfüggvényt a sokaság tulajdonságaiból kell meghatároznunk. Ezeket a tulajdonságokat a statisztikai vizsgálat elején nem ismerjük, a véletlen mintából kell minél több információt kapni róluk. Általában nem egyetlen mintából következtetünk, hanem több, azonos n elemszámú mintát vizsgálunk. Ekkor természetesen a véletlen minta egyes realizációi különbözőek, pl. az 1. minta 1. eleme különbözik a 2. minta 1. elemétől. Tehát a minta 1. eleme valószínűségi változó: X_1. Hasonlóan a $2., 3., \ldots, n$ mintaelemek az $X_2, X_3, \ldots X_n$ valószínűségi változók, melyeket mintaváltozóknak is nevezünk. Összefoglalva tehát kapjuk az

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

véletlen vektort. Minden konkrét

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n-elemű mintát, amit az alapsokaságból véletlenszerűen vettünk, az X véletlen vektor egyes realizációinak tekintünk.

16.3.1.2. Mintafüggvények, jellemzők

Mivel az egy alapsokaságból vett véletlen minták egymástól különbözőek, ezért a mintaelemekből képezett $\overline{x}$ számtani középérték is mintaként különböző. Ezek a középértékek felfoghatók, mint egy valószínűségi változó realizációi. Jelölje ezt a valószínűségi változót $\overline{X}$, amely a véletlen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mintaváltozók függvénye.

$$\begin{array}{rl} 1. \text{ minta:} & x_{11},\ x_{12},\ \ldots\ x_{1n} \text{ középértéke } \overline{x}_1\,. \\ 2. \text{ minta:} & x_{21},\ x_{22},\ \ldots\ x_{2n} \text{ középértéke } \overline{x}_2\,. \\ \vdots & \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ m. \text{ minta:} & x_{m1},\ x_{m2},\ \ldots\ x_{nn} \text{ középértéke } \overline{x}_m\,. \end{array} \tag{16.108}$$

Itt x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$ az i-edik minta j-edik eleme.
Az $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ véletlen vektor bármely függvénye újra valószínűségi változó, melyet *mintafüggvénynek* nevezünk. A legfontosabb mintafüggvények a mintaközép vagy mintaátlag, a mintaszórás, a medián és a terjedelem.

1. Mintaátlag

Az X_i valószínűségi változók számtani közepe az:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,. \tag{16.109a}$$

valószínűségi változó. Egy adott $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ minta esetén az

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{16.109b}$$

értéket *mintaátlag*nak nevezzük.
Sokszor előnyös a mintaátlag kiszámításához egy x_0 becsült értéket bevezetni, melyet tetszőlegesen választunk, de lehetőleg a várható $\overline{x}$ értékhez közel. Ha pl. egy hosszú mérési sorozatban az x_i mért értékek sokjegyű számok, melyek csak utolsó számjegyükben különböznek, akkor érdemes kisebb

$$z_i = x_i - x_0 \tag{16.109c}$$

számokkal dolgozni. Ekkor

$$\overline{x} = x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i = x_0 + \overline{z} \,. \tag{16.109d}$$

2. Minta-szórásnégyzet

Az X_i valószínűségi változóknak az $\overline{X}$ átlagértéktől vett átlagos eltérését az

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{16.110a}$$

valószínűségi változó írja le. Egy adott $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ minta esetén a mintából becsült szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \,. \tag{16.110b}$$

Az x_0 becsült érték felhasználásával:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 - \overline{z} \sum_{i=1}^{n} z_i}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2 - n(\overline{x} - x_0)^2}{n-1} \,. \tag{16.110c}$$

Ha $\overline{x} = x_0$ akkor $\overline{z} = 0$ és így $\overline{z} \sum_{i=1}^{n} z_i = 0$.

3. Medián (mintaközép)

Ha a véletlen minta n elemét nagyság szerint rendezzük, akkor az $\tilde{X}$ medián érteke egy olyan szám, amelynél az adott mintában ugyanannyi elem kisebb, mint amennyi nagyobb. Egy adott minta mediánja páratlan n esetén az $\dfrac{n+1}{2}$-edik, páros n esetén az $\dfrac{n}{2}$-edik és $\dfrac{n}{2} + 1$-edik helyen álló értékek középértéke:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{m+1}, & \text{ha } n = 2m+1 \,, \\ \dfrac{x_{m+1} + x_m}{2}, & \text{ha } n = 2m \,. \end{cases} \tag{16.111}$$

4. Terjedelem

$$R = \max_i X_i - \min_i X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{16.112a}$$

Adott $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ minta esetén a minta terjedelme:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = \max_i x_i - \min_i x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{16.112b}$$

A fenti mintafüggvények egy-egy realizációja tehát azt jelenti, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mintához hozzárendeljük az $\overline{x}$, s^2, $\tilde{x}$ és R értékeket. (Csak R-et jelöljük nagy betűvel.)

i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	1,01	6	1,00	11	1,00
2	1,02	7	0,99	12	1,00
3	1,00	8	1,01	13	1,02
4	0,98	9	1,01	14	1,00
5	0,99	10	1,00	15	1,01

■ A permanens-dinamikus hangszórók folyamatos gyártásából 15-elemű mintát vettünk. A vizsgált X tulajdonság a B légrésindukció, teslában mérve. A minta alapján számított értékek:
$\overline{x} = 1{,}0027$, ill. $\overline{x} = 1{,}0027$ ha $x_0 = 1{,}00$;
$s^2 = 1{,}2095 \cdot 10^{-4}$, ill. $s^2 = 1{,}2076 \cdot 10^{-4}$ ha $x_0 = 1{,}00$;
$\tilde{x} = 1{,}00$; $R = 0{,}04$.

16.3.2. Leíró statisztika

16.3.2.1. Adott mérési eredmények statisztikai kiértékelése

Valamely halmaz egy tulajdonságát, azaz ismérvét statisztikailag úgy vizsgáljuk, hogy ezt a tulajdonságot egy X valószínűségi változó írja le. Az X ismérv meghatározására többször n számú x_i mérési, ill. megfigyelési adatunk van és ezekből következtetünk X eloszlására.
Ezeket az n-hosszúságú mérési-, ill. megfigyeléssorozatokat úgy tekintjük, mint a végtelen alapsokaságból vett véletlen mintákat, ha a kísérletet, ill. megfigyelést mindig azonos körülmények között, függetlenül ismételjük.
Mivel n igen nagy lehet, ezért az adatok kiértékelése a következőképpen történik:

1. Jegyzőkönyv, alaplista Ez tartalmazza az összes x_i mért vagy megfigyelt értéket.

2. Intervallumok vagy osztályok Az n darab adott x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mért értéket k intervallumba, azaz k számú, h-hosszúságú *osztályba* soroljuk. Az osztályok száma általában 10 és 20 között van. Így keletkezik egy *gyakorisági sor.*

3. Gyakoriságok és gyakoriságeloszlás A h_i abszolút gyakoriság azon mért értékek száma, melyek az i-edik, Δx_i hosszúságú intervallumba (osztályba) esnek $(i = 1, 2, \ldots, k)$, a megfelelő relatív gyakoriság h_i/n (%-ban is megadható). Ha a h_i/n relatív gyakoriságokat a megfelelő intervallumok fölött megfelelő léptékkel mint téglalapokat ábrázoljuk, kapjuk a gyakoriságeloszlás grafikus képét, a *hisztogramot* **(16.13.a ábra)**. A h_i/n értékek az $f(x)$ sűrűségfüggvény tapasztalati közelítő értékeinek foghatók fel.

4. Kumulált gyakoriságok Az abszolút, ill. relatív gyakoriságok összegzése révén kapjuk a kumulált gyakoriságokat ill. kumulált relatív gyakoriságokat.

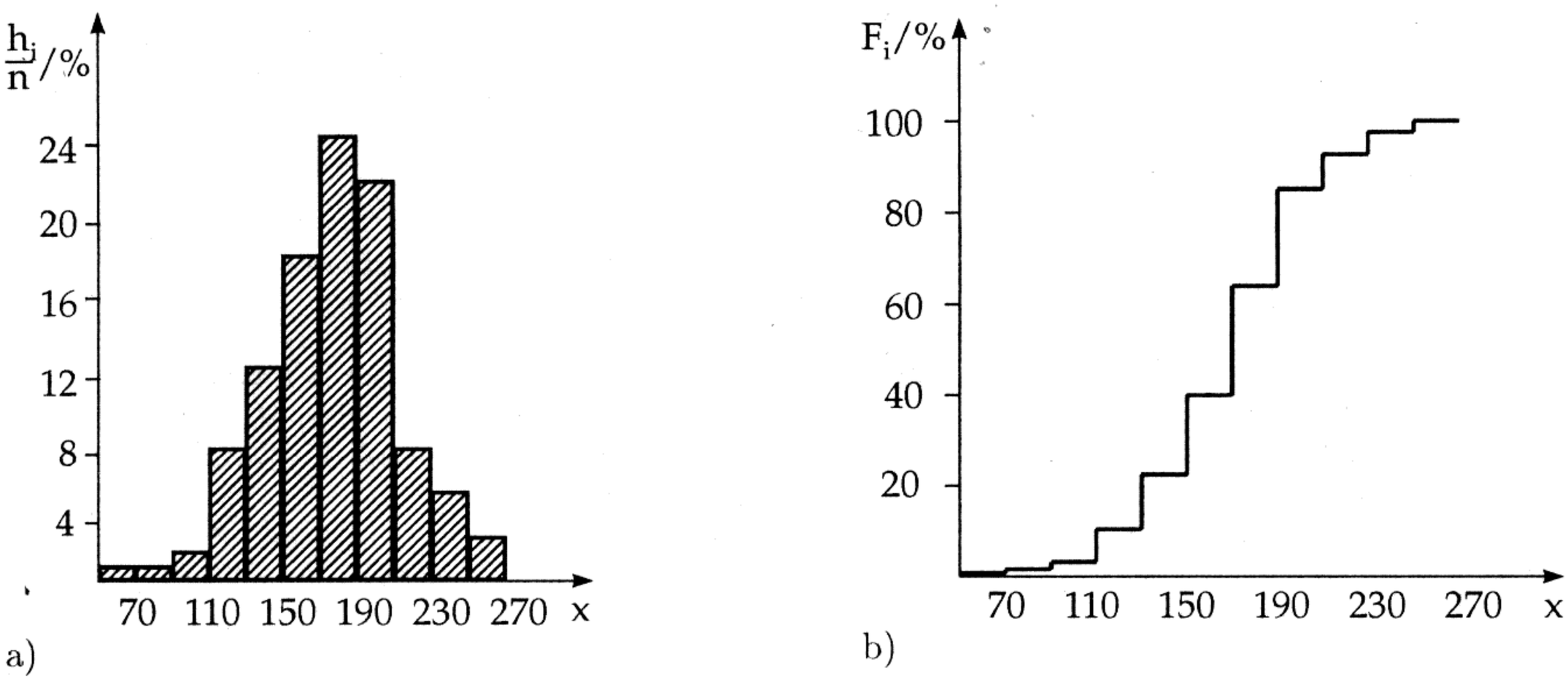
16.3. táblázat. Gyakoriságtáblázat

Osztály	h_i	$h_i/n(\%)$	F_i (%)
50 – 70	1	0,8	0,8
71 – 90	1	0,8	1,6
91 – 110	2	1,6	3,2
111 – 130	9	7,2	10,4
131 – 150	15	12,0	22,4
151 – 170	22	17,6	40,0
171 – 190	30	24,0	64,0
191 – 210	27	21,6	85,6
211 – 230	9	7,2	92,8
231 – 250	6	4,8	97,6
251 – 270	3	2,4	100,0

$$F_j = \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_j}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)\,. \tag{16.113}$$

Ha az F_j értéket a megfelelő intervallum felső határán a koordinátarendszerben függőlegesen felmérjük és a következő intervallum felső határáig vízszintesen folytatjuk, kapjuk a tapasztalati eloszlásfüggvényt, mely az ismeretlen $F(x)$ függvény közelítése **(16.13.b ábra)**.

■ Egy kísérletnél $n = 125$ mérést végeztek. A mérési eredmények 50 és 270 közé estek, és így $k = 11$ osztályba sorolva azokat az osztály szélessége $h = 20$. Az itt látható **16.3. táblázat** tartalmazza a megfelelő adatokat.



16.13. ábra.

16.3.2.2. Statisztikai paraméterek

Miután a mért értékeket az előző pont szerint feldolgoztuk, meghatározzuk az alapsokaság paramétereinek tapasztalati közelítéseit:

1. Mintaátlag

Ha valamenyi mért értéket vesszük:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{16.114a}$$

Ha a j. osztály elemeit azok $\overline{x}_j$ átlagával helyettesítjük:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} h_j \overline{x}_j \,. \tag{16.114b}$$

2. Mintaszórásnégyzet

Ha valamennyi mért értéket vesszük:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \,. \tag{16.115a}$$

Ha a j. osztály elemeit azok $\overline{x}_j$ átlagával helyettesítjük:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} h_j (\overline{x}_j - \overline{x})^2 \,. \tag{16.115b}$$

3. Medián

Ezt a paramétert a

$$P(X < \tilde{x}) = \frac{1}{2} \tag{16.116a}$$

egyenlőség definiálja, és diszkrét minták esetén:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{m+1}\,, & \text{ha } n = 2m+1\,, \\ \dfrac{x_{m+1} + x_m}{2}\,, & \text{ha } n = 2m\,, \end{cases} \tag{16.116b}$$

4. Terjedelem

$$R = x_{\max} - x_{\min} \,. \tag{16.117}$$

5. Módusz

Az a mért érték, mely a mérések során a legtöbbször előfordul. Jele: D.

16.3.3. Statisztikai próbák

A matematikai statisztika fő célja következetések levonása a véletlen mintákból az alapsokaság eloszlására.

1. Egy eloszlást első közelítésben a μ és σ^2 paraméterek elég jól meghatároznak (mért értékek esetén μ jelenti az előírt, ú.n. névleges értéket vagy névértéket, míg σ^2 az ettől vett eltérések egy mértéke),

2. A mért vagy megfigyelt értékek eloszlása legtöbbször a GAUSS-féle normális eloszlással modellezhető,

ezért a vizsgálatnál két alapvető kérdés:

a) Valóban normális eloszlású-e a megfelelő modell?

b) Mennyire jól közelítik az $\overline{x}$ és s^2 mintaparaméterek a sokaság paramétereit?

16.3.3.1. Normális eloszlásra vonatkozó próbák

A matematikai statisztikában a normális eloszlás vizsgálatára különböző teszteket azaz próbákat dolgoztak ki. A két leggyakoribb módszer közül az egyik egy grafikus módszer, melyet az ú.n. GAUSS-papír segítségével hajtunk végre, a másik egy numerikus módszer, a χ^2-próba.

1. Statisztikai vizsgálat Gauss-papír segítségével

1. A Gauss-papír elve Egy derékszögű koordinátarendszerben az x-tengely beosztása egyenletes, az y-tengelyt a következőképpen skálázzuk: egyenlő Z távolságok, melyekhez azonban az

$$y = \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \tag{16.118}$$

számokat írjuk. Ha egy X valószínűségi változó normáleloszlású μ és σ^2 paraméterekkel, akkor eloszlásfüggvényére igaz, hogy (lásd 788. old.)

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(Z)\,, \tag{16.119a}$$

azaz

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{16.119b}$$

Z	x
0	μ
1	$\mu+\sigma$
-1	$\mu-\sigma$

és így x és Z között lineáris kapcsolat van. A helyettesítésből leolvashatók a kis táblázatban (16.119b) leírt hozzárendelések.

2. A Gauss-papír alkalmazása

2. χ^2-próba

Azt vizsgáljuk, hogy egy statisztikai sokaságot leíró X valószínűségi változó normális eloszlású-e. Ekkor az X értékkészletét k osztályba soroljuk és a j-edik osztály felső határát ξ_j-vel jelöljük ($j = 1, 2, \ldots, k$). Annak "elméleti" valószínűsége, hogy X a j-edik osztályba esik:

$$p_j = F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})\,, \tag{16.120a}$$

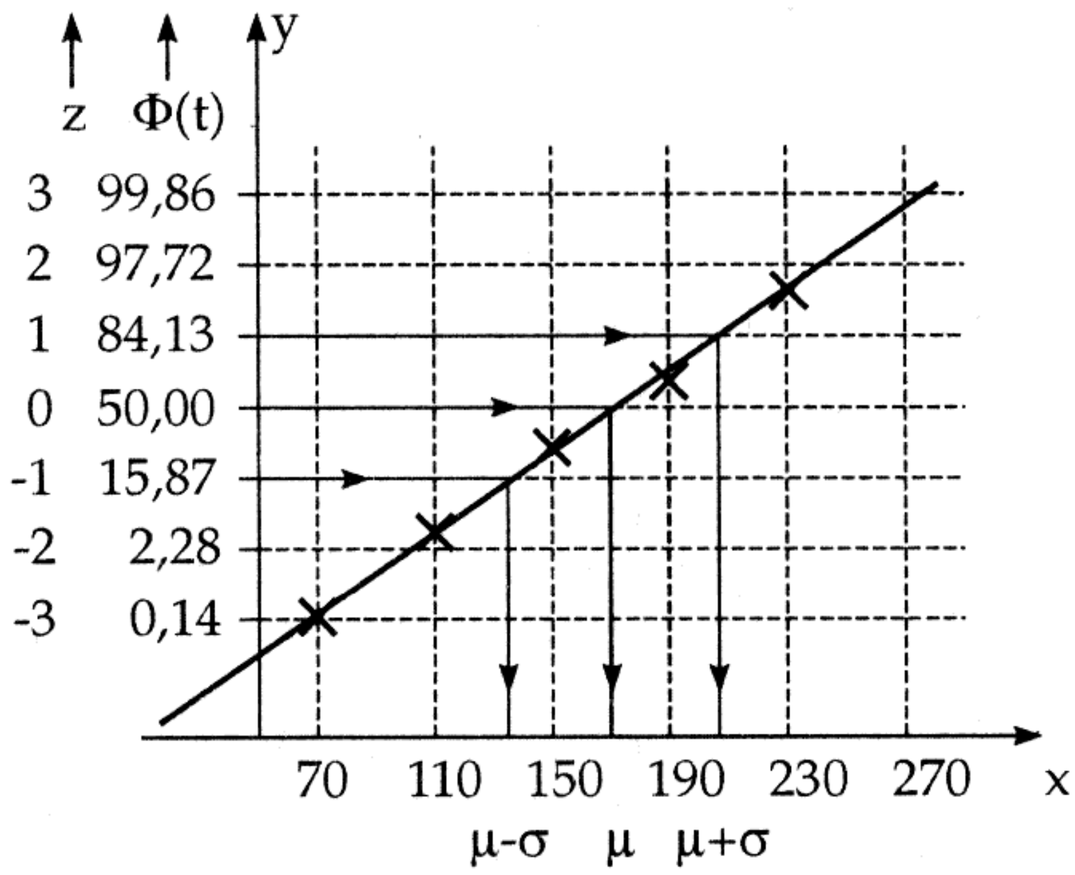
ahol $F(x)$ az X eloszlásfüggvénye, ($j = 1, 2, \ldots, k$; és ξ_0 az 1. osztály alsó határa, $F(\xi_0) = 0$). Mivel X normáleloszlású, ezért

$$F(\xi_j) = \Phi\left(\frac{\xi_j - \mu}{\sigma}\right) \tag{16.120b}$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normáleloszlás eloszlásfüggvénye (lásd 788. old.). A μ és σ^2 paraméterek nem ismertek, ezeket egy véletlen mintából $\overline{x}$ és s^2 értékekkel közelítjük.

Vegyünk egy véletlen mintát egy normáleloszlású sokaságból, számítsuk ki ebből a kumulatív relatív gyakoriságokat, melyeket ordinátaként felmérünk a megfelelő intervallumok felső határához, mint abszcisszához (16.113) képlet. Ekkor ezek a pontok kis véletlen eltérésektől eltekintve egy egyenesen lesznek, (lásd **16.14. ábra**).
A **16.14. ábrából** látható, hogy a példában szereplő sokaságra a normális eloszlást elfogadhatjuk $\mu \approx 176$, $\sigma \approx 37{,}5$ paraméter-értékekkel.

Megjegyzés: Az F_i kumulatív relatív gyakoriságokat egyszerűbb a GAUSS-papírra felmérni, ha a skála számozása egyenletes az y-tengelyen, de ekkor a skála-beosztás nem egyenletes.



16.14. ábra.

Ha egy sokaságból $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-elemű véletlen mintát vettünk, és az előbbi osztályba sorolás esetén az egyes gyakoriságok: h_j $(j = 1, \ldots, k)$, akkor a

$$\chi^2_m = \sum_{j=1}^{k} \frac{(h_j - np_j)^2}{np_j} \tag{16.120c}$$

valószínűségi változó közelítőleg $m = k - 1$ szabadságfokú, χ^2-eloszlást követ. Ehhez szükséges, hogy $np_j \geq 5$ legyen, amit egyes osztályok összevonásával mindig elérhetünk.
A normális eloszlás vizsgálatára a χ^2-*illeszkedési-próbát* úgy alkalmazzuk, hogy előre megadunk egy $1-\alpha$ biztonsági (megbízhatósági vagy konfidencia) szintet vagy egy α hibavalószínűségi (szignifikancia) szintet, és a **21.16. táblázatból** kikeressük a $\chi^2_{\alpha\,;k-1}$ kvantilist, melyre igaz, hogy $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha\,;k-1}) = \alpha$.
Ha a mintából számított χ^2_m értékekre

$$\chi^2_S < \chi^2_{\alpha\,;k-1}\,, \tag{16.120d}$$

akkor elfogadjuk azt az állítást, hogy a minta normális eloszlású sokaságból származik.

■ Az alabbi χ^2-próbát a 797. old. példájának adataira végeztük. Van egy $n = 125$ elemű véletlen mintánk, amelyből már meghatároztuk az $\overline{x} = 176{,}32$ és $s^2 = 36{,}70$ értékeket. Ezeket használjuk a sokaság ismeretlen μ és σ^2 paraméterei becslésére. A χ^2_m érték kiszámítását az alábbi **16.4. táblázat** részletezi:
Az utolsó oszlop összege: $\chi^2_m = 3{,}4486$. Az $np_j \geq 5$ követelmény miatt az osztályok száma $k = 11$-ről $k^* = k - 4 = 7$-re csökkent. Mivel μ és σ helyett a számításban azok becsült értékét használtuk, azaz becsléses illeszkedésvizsgálat történt, ezért a szabadságfok 2-vel csökken: $k^* - 1 - 2 = 7 - 3 = 4$. $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszint esetén $\chi^2_{\alpha,k^*-1-2} = \chi^2_{0{,}05;4} = 9{,}5$, (lásd **21.16. táblázat**). A számított χ^2_m értékre tehát: $3{,}4486 < 9{,}5$, ezért a hipotézist elfogadjuk: a sokaság normális eloszlású.

16.3.3.2. A mintaközepek eloszlása

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó. A megfelelő sokaságból tetszőlegesen sok n-elemű mintát vehetünk. Ekkor az egyes mintaközépértékek egy új, szintén folytonos $\overline{X}$ valószínűségi változó értékei, melynek statisztikai megbízhatóságára és normális eloszlására a következő állítások igazak.

1. A mintaközepek statisztikiai megbízhatósága

Ha X normáleloszlású μ és σ^2 paraméterekkel, akkor $\overline{X}$ is normáleoszlású μ és σ^2/n paraméterekkel, azaz az $\overline{X}$ valószínűségi változó $\overline{f}(x)$ sűrűségfüggvénye a μ körül erősebben koncentrált, mint a sokaság

16.4. táblázat. χ^2-próba

ξ_j	h_j	$\frac{\xi_j-\mu}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{\xi_j-\mu}{\sigma}\right)$	p_j	np_j	$\frac{(h_j-np_j)^2}{np_j}$
70	1	−2,90	0,0019	0,0019	0,2375	
90	1	−2,35	0,0094	0,0075	0,9375	
110	2 } 13	−1,81	0,0351	0,0257	3,2125 } 12,9750	0,00005
130	9	−1,26	0,1038	0,0687	8,5857	
150	15	−0,72	0,2358	0,1320	16,6500	0,1635
170	22	−0,17	0,4325	0,1967	24,5875	0,2723
190	30	0,37	0,6443	0,2118	26,4750	0,4693
210	27	0,92	0,8212	0,1769	22,1125	1,0803
230	9	1,46	0,9279	0,1067	13,3375	1,4106
250	6 } 9	2,01	0,9778	0,0499	6,2375 } 8,3375	0,0526
270	3	2,55	0,9946	0,0168	2,1000	
						$\chi_S^2 = 3{,}4486$

$f(x)$ sűrűségfüggvénye. Bármely előre adott $\varepsilon > 0$ értékre igaz, hogy:

$$P(|X-\mu| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1\,, \quad P(|\overline{X}-\mu| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1\,. \tag{16.121}$$

Ebből következik, hogy n növekedésével az $\overline{X}$ mintaközép a μ-nek egyre jobb közelítése lesz.

■ Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma$, ekkor (16.121)-ből $P\left(|\overline{X}-\mu| \le \frac{1}{2}\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}\right) - 1$, és n különböző értékeire a megfelelő értékeket a **16.5. táblázat** tartalmazza.

Tehát egy $n = 49$ elemű minta esetén az $\overline{x}$ mintaközép 99,96 % biztonsággal legfeljebb $\pm\frac{1}{2}\sigma$-t különbözik μ-től.

16.5. táblázat.
A mintaközép statisztikai megbízhatósága

n	$P\left(\lvert X-\mu\rvert \le \frac{1}{2}\sigma\right)$
1	38,29 %
4	68,27 %
16	95,45 %
25	98,76 %
49	99,96 %

2. A mintaközép normális eloszlása

Az $\overline{X}$ valószínűségi változó μ és σ^2/n paraméterű normális eloszlást követ, ha az alapsokaság μ és σ^2 paraméterű, és tetszőleges eloszlású volt.

16.3.3.3. Megbízhatósági (konfidencia-) intervallum a sokaság várható értékére

1. Megbízhatósági intervallum a várható értékre ismert σ^2 szórásnégyzet esetén

Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó μ és σ^2 paraméterekkel. 16.3.3.2. szerint $\overline{X}$ is folytonos, normáliseloszlású μ és σ^2/n paraméterekkel. A

$$\overline{Z} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \tag{16.122}$$

helyettesítést alkalmazva a standard-normális eloszlású $\overline{Z}$ valószínűségi változót kapjuk, melyre

$$P(|\overline{Z}| \le \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx = 2\Phi(\varepsilon) - 1\,. \tag{16.123}$$

Adott α hibavalószínűség esetén a (16.123) képlet alapján a standard normális eloszlás táblázatából meghatározható az az $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ érték, melyre

$$P(|\overline{Z}| \le \varepsilon) = 1 - \alpha\,, \tag{16.124}$$

és ekkor (16.122)-ből

$$\mu = \overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon(\alpha)\,. \tag{16.125}$$

Az $\overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon(\alpha)$ értékeket nevezzük a μ várható értékre vett megbízhatósági vagy konfidencia határoknak ismert σ^2 esetén adott $1-\alpha$ megbízhatósági szint, vagy α szignifikancia szint esetén.
Másképpen azt is mondhatjuk: a μ várható érték $1-\alpha$ biztonsággal a (16.125) által meghatározott megbízhatósági intervallumban fekszik.

Megjegyzés: Ha a mintanagyság elég nagy ($n > 100$), akkor a fenti konfidencia-intervallumot ismeretlen σ^2 esetén is alkalmazhatjuk, a mintából becsült s^2 szórásnégyzettel. $n < 100$ és ismeretlen σ^2 esetén a konfidencia határokat a t-eloszlás (16.128) segítségével határozzuk meg.

2. Megbízhatósági intervallum a várható értékre ismeretlen σ^2 szórásnégyzet esetén

Ha a sokaságra σ^2 nem ismert, akkor az n-elemű véletlen mintából kapott s^2 mintaszórásnégyzettel pótoljuk, és (16.122) helyett a

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n}\,, \tag{16.126}$$

valószínűségi változót kapjuk, mely t-eloszlású (lásd 793. old.) és szabadságfoka $m = n - 1$. Ekkor egy előre megadott α szignifikancia szint esetén

$$P(|T| \le \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_t(x)\,dx = P\left(\frac{|\overline{X} - \mu|}{s}\sqrt{n} \le \varepsilon\right) = 1 - \alpha\,. \tag{16.127}$$

Ebből $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, n) = t_{\alpha/2;n-1}$ (16.127), ahol $t_{\alpha/2;n-1}$ az $n-1$ szabadságfokú t-eloszlás $\alpha/2$ értékhez tartozó kvantilise (**21.18. táblázat**). A $|T| = t_{\alpha/2;n-1}$ egyenlőségből következik:

$$\mu = \overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2;n-1}\,. \tag{16.128}$$

Az $\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2;n-1}$ értékeket nevezzük a μ várható értékre vett megbízhatósági vagy konfidencia határoknak ismeretlen σ^2 esetén adott $1-\alpha$ megbízhatósági szint, vagy α szignifikancia szint esetén.

■ Egy 6 elemű véletlen minta értékei 0,842; 0,846; 0,835; 0,839; 0,843; 0,838. Ebből $\overline{x} = 0{,}8405$ és $s = 0{,}00394$.
Adjuk meg az 5 % illetve 1 % szignifikanciaszinthez tartozó konfidencia határokat!
1. $\alpha = 0{,}05$: A **21.18. táblázatból** $t_{\alpha/2;5} = 2{,}57$ tehát $|\overline{X} - \mu| \le 2{,}57 \cdot 0{,}00394/\sqrt{6} = 0{,}0042$, vagyis a μ várható érték az $\overline{x} = 0{,}8405$ értéktől 0,95 valószínűséggel legfeljebb $\pm 0{,}0042$-tel különbözik.
2. $\alpha = 0{,}01$: $t_{\alpha/2;5} = 4{,}03$; $|\overline{X} - \mu| \le 4{,}03 \cdot 0{,}00394/\sqrt{6} = 0{,}0065$, azaz μ az $\overline{x}$-től 0,99 valószínűséggel legfeljebb $\pm 0{,}0065$-tel különbözik.

16.3.3.4. Megbízhatósági intervallum a sokaság szórásnégyzetére

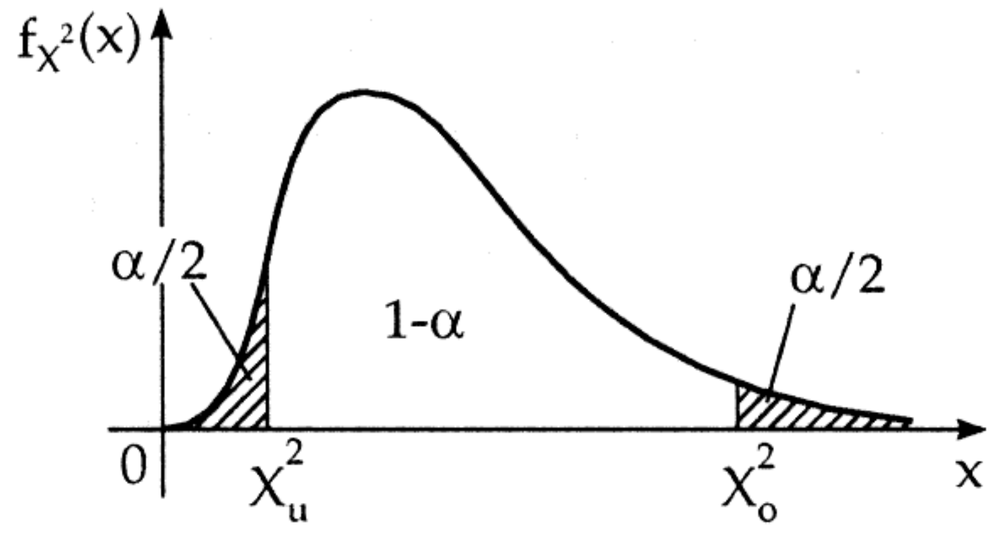
Legyen az X valószínűségi változó normáleloszlású μ és σ^2 paraméterekkel. Ekkor a

$$\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \tag{16.129}$$

valószínűségi változó $m = n-1$ szabadságfokú χ^2-eloszlású, ahol n a véletlen minta elmeinek száma és s^2 a minta szórásnégyzete. A **16.15. ábra**, mutatja a χ^2-eloszlás sűrűségfüggvényét, tehát

$$P(\chi^2 < \chi_u^2) = P(\chi^2 > \chi_0^2) = \frac{\alpha}{2}\,, \tag{16.130}$$

azaz a **21.16. táblázatból** a χ^2 eloszlás



16.15. ábra.

megfelelő kvantilisei:

$$\chi_u^2 = \chi_{1-\alpha/2;n-1}^2\,, \quad \chi_0^2 = \chi_{\alpha/2;n-1}^2\,. \tag{16.131}$$

(16.129) alapján a sokaság ismeretlen σ^2 szórásnégyzetére adott α hibasűrűség esetén az alábbi becslést kapjuk:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}\,. \tag{16.132}$$

A (16.132) megbízhatósági intervallum kis n mintanagyság esetén nagyon durva becslés lehet.

■ A 802. oldalon lévő példa számértékeire $\alpha = 5\%$ esetén a **21.16. táblázatból** $\chi_{0,025;5}^2 = 0{,}831$ és $\chi_{0,975;5}^2 = 12{,}8$, tehát $0{,}625 \cdot s \le \sigma \le 2{,}453 \cdot s$, ahol $s = 0{,}00394$.

16.3.3.5. Hipotézisvizsgálat

Egy statisztikai hipotézis-vizsgálat, azaz "statisztikai próba" vagy "teszt" menete:

1. Felállítunk egy H hipotézist, hogy véletlen mintánk egy előre megadott tulajdonságú sokaságból származik, pl.
H: A sokaság normális eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel; vagy
H: A sokaság ismeretlen μ paraméterét egy μ_0 közelítő értékkel becsüljük, melyet pl. az $\overline{x}$ mintaátlag alapján nyertünk.

2. A keresett paraméterre a mintafüggvény és a táblázatbeli értékek felhasználásával adott szignifikanciaszintre (pl. $\alpha = 0{,}01$ vagy $\alpha = 0{,}05$) felírjuk a B konfidencia-intervallumot.

3. A hipotézist az adott szinten elvetjük, ha a feltételezett érték nem a B intervallumban fekszik.

■ Teszteljük a várható értékre vonatkozó H: $\mu = \mu_0$ hipotézist adott α szignifikanciaszint mellett.

16.3.3.3. szerint a $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n}$ valószínűségi változó $m = n-1$ szabadságfokú t-eloszlást követ. Ebből következik, hogy a hipotézist α szinten el kell vetnünk, ha μ helyébe μ_0-t helyettesítve:

$$|\overline{X} - \mu_0| \ge \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha;n-1} \tag{16.133}$$

adódik. Azt mondjuk, hogy a minta alapján szignifikáns eltérés van. További példákat a különböző tesztekre, próbákra a [16.23] irodalom tartalmaz.

16.3.4. Korreláció és regresszió

A *korreláció-analízis* egy alapsokaság különböző ismérvei közötti összefüggések erősségét vizsgálja a mért vagy megfigyelt értékek alapján. Az ismérvek közötti függvénykapcsolatokat, összefüggéseket a regresszióanalízis vizsgálja.

16.3.4.1. Kétváltozós lineáris korreláció

1. Kétdimenziós valószínűségi változók

Két ismérvet egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásával írunk le. Az eloszlást az alábbi eloszlásfüggvények határozzák meg:

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{16.134a}$$

$$F_1(x) = P(X \le x, Y < \infty)\,, \quad F_2(y) = P(X < \infty, Y \le y). \tag{16.134b}$$

Az X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)\,. \tag{16.135}$$

A kétdimenziós eloszlás legfontosabb paraméterei:

1. Várható értékek

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{16.136a}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{16.136b}$$

2. Szórásnégyzetek

$$\sigma_X^2 = E((X-\mu_X)^2)\,, \tag{16.137a}$$

$$\sigma_Y^2 = E((Y-\mu_Y)^2)\,. \tag{16.137b}$$

3. Kovariancia

$$\sigma_{XY} = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)\,. \tag{16.138}$$

4. Korrelációs együttható

$$\varrho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\,. \tag{16.139}$$

A korrelációs együttható az X és Y közötti összefüggést méri a következőképpen:
Ha $\varrho_{XY}^2 = 1$, akkor az (X, Y) valószínűségi változónak megfelelő síkbeli pontok 1 valószínűséggel egy egyenesen vannak. Ha X és Y függetlenek, akkor $\varrho_{XY} = 0$. Fordítva: ha $\varrho_{XY} = 0$, ebből X és Y függetlensége nem mindig következik. Ha (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású, vagyis sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho_{XY}^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\frac{\varrho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\varrho_{XY}^2}}. \tag{16.140}$$

akkor a korrelátlanságból következik a függetlenség.

2. Két ismérv függetlenségének tesztelése

A gyakorlatban sokszor kell azt vizsgálnunk, hogy az n-elemű (x_i, y_i) $(i = 12, \ldots, n)$ véletlen mintánk olyan normális eloszlású sokaságból származik, melyre $\varrho_{XY} = 0$, azaz az X és Y ismérvek egymástól függetleneknek tekinthetők. A tesztet a következőképpen végezzük el:

1. Felállítjuk a hipotézist: H: $\varrho_{XY} = 0$.

2. Megadjuk az α szignifikanciaszintet és a hozzátartozó $t_{\alpha,m}$ kvantilist a **21.18.** t-táblázatból, ahol $m = n - 2$.

3. Kiszámítjuk a

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \tag{16.141a}$$

ahol

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}} \tag{16.141b}$$

értéket.
4. A hipotézist elvetjük, ha $|t| \geq t_{\alpha,m}$. A r_{xy} értéket empirikus, vagyis tapasztalati korrelációs együtthatónak nevezzük.

16.3.4.2. Kétváltozós lineáris regresszió

1. A regressziós egyenes meghatározása

Ha az empirikus korrelációs együttható alapján megállapítottuk, hogy az X és Y ismérvek között kapcsolat áll fenn, akkor a következő feladat az $Y = f(X)$ függvény meghatározása. A legegyszerűbb eset, ha a korrelációs együtthatók értéke közel 1 vagy -1, vagy pedig ha az (X, Y) sokaság normáleloszlású. Ekkor bármely rögzített x-értékre:

$$E(Y) = a + bx \tag{16.142}$$

Az ismeretlen a és b paraméterek értékét a véletlen mintából a

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2 = \min \tag{16.143}$$

követelmény szerint kapjuk meg. Ezt a módszert nevezzük a *legkisebb négyzetek módszerének.*

$$\tilde{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \quad \tilde{a} = \overline{y} - \tilde{b}\overline{x}\,, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n-2}s_y^2(1 - r_{xy}^2) \tag{16.144a}$$

ahol

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,, \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \tag{16.144b}$$

Az $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ együtthatók a regressziós együtthatók, az $y(x) = \tilde{a} + \tilde{b}x$ egyenes a *regressziós egyenes.*

2. Konfidencia-intervallumok a regressziós együtthatókra

Miután az $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ értéket a minta alapján meghatároztuk, felmerül a kérdés, mennyire jó becslései ezek a keresett a és b együtthatóknak. Az alábbi értékeket számítjuk ki:

$$t_b = (\tilde{b} - b)\frac{s_x\sqrt{n-2}}{s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \tag{16.145a}$$

$$t_a = (\tilde{a} - a)\frac{s_x\sqrt{n-2}}{s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}\,. \tag{16.145b}$$

Ezek $m = n-2$ szabadságfokú t-eloszlású valószínűségi változók. Tehát egy előre adott α-szignifikancia szint mellett a **21.18. táblazatból** kikeressük a megfelelő $t_{\alpha;m}$ kvantilis értéket. Mivel $P(\,|t| < t_{\alpha;m}) = 1 - \alpha$, ezért $t = t_a$, ill. $t = t_b$ esetén:

$$|\tilde{b} - b| < t_{\alpha;n-2}\,\frac{s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}}{s_x\sqrt{n-2}}\,, \tag{16.146a}$$

$$|\tilde{a} - a| < t_{\alpha;n-2}\,\frac{s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}{s_x\sqrt{n-2}\cdot\sqrt{n}}\,. \tag{16.146b}$$

Az itt meghatározott konfidencia-intervallumok segítségével megadhatjuk az $y = a + bx$ regressziós egyenes konfidencia-tartományát ([16.4], [16.25] irodalom).

16.3.4.3. Többdimenziós regresszió

1. Függvénykapcsolat

Tegyük fel, hogy az X_1, X_2,..., X_n ismérvek és az Y ismérv között kapcsolat áll fenn, mely az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{s} a_j g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{16.147}$$

elméleti regressziós függvénnyel írható le. A $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények n-változós adott függvények. Az a_j együtthatók konstans értékek. Mivel az a_j-k (16.147)-ben lineáris együtthatók, ezért szokták ezt is lineáris regressziónak nevezni.

■ Az $f(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 {x_1}^2 + a_4 {x_2}^2 + a_5 x_1 x_2$, másodfokú polinomra $g_0 = 1$, $g_1 = x_1$, $g_2 = x_2$, $g_3 = {x_1}^2$, $g_4 = {x_2}^2$ és $g_5 = x_1 x_2$, ezért ezt felfoghatjuk, mint egy elméleti lineáris regresszió-függvényt.

2. Vektor írásmód

Több változó esetén érdemes a vektor-jelölést használni:

$$\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}} \tag{16.148}$$

és így

$$y = f(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{j=0}^{s} a_j g_j(\underline{\mathbf{x}})\,. \tag{16.149}$$

3. Feltételezett kapcsolat és a normál-egyenletrendszer

A (16.147) elméleti kapcsolatot az

$$(\underline{\mathbf{x}}^{(i)}, f_i)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{16.150a}$$

mért értékekből a véletlen mérési hibák miatt nem tudjuk pontosan leírni. Ezért feltételezünk egy függvényt:

$$y = \tilde{f}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{j=0}^{s} \tilde{a}_j g_j(\underline{\mathbf{x}}) \tag{16.150b}$$

és a legkisebb négyzetek módszere (lásd 805. old.) szerint

$$\sum_{i=1}^{N} \left[f_i - \tilde{f}\left(\underline{\mathbf{x}}^{(i)}\right) \right]^2 = \min \tag{16.150c}$$

követelmény alapján határozzuk meg az $\tilde{a}_j$ együtthatókat, melyek az elméleti a_j becsült értékei. Az alábbi jelölésekkel:

$$\underline{\tilde{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0\left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}\right) & g_1\left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}\right) & \ldots & g_s\left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}\right) \\ g_0\left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right) & g_1\left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right) & \ldots & g_s\left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0\left(\underline{\mathbf{x}}^{(N)}\right) & g_1\left(\underline{\mathbf{x}}^{(N)}\right) & \ldots & g_s\left(\underline{\mathbf{x}}^{(N)}\right) \end{pmatrix} \tag{16.150d}$$

kapjuk $\underline{\tilde{\mathbf{a}}}$ meghatározására az ú.n. normál-egyenletrendszert:

$$\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}\underline{\tilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{f}} \tag{16.150e}$$

A $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}$ mátrix szimmetrikus, ezért a CHOLESKY-eljárással (16.150e) könnyen megoldható.

■ Határozzuk meg az

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{16.151}$$

regressziós függvény együtthatóit, ha a véletlen mintánk

x_1	5	3	5	3
x_2	0,5	0,5	0,3	0,3
$f(x_1, x_2)$	1,5	3,5	6,2	3,2

(16.150d)-ből:

$$\underline{\tilde{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3{,}5 \\ 6{,}2 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0{,}5 \\ 1 & 3 & 0,5 \\ 1 & 5 & 0{,}3 \\ 1 & 3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \tag{16.152}$$

és így:

$$\begin{aligned} 4\tilde{a}_0 + 16\,\tilde{a}_1 + 1{,}6\,\tilde{a}_2 &= 14{,}4\,, \\ 16\tilde{a}_0 + 68\,\tilde{a}_1 + 6{,}4\,\tilde{a}_2 &= 58{,}6\,, \\ 1{,}6\tilde{a}_0 + 6{,}4\tilde{a}_1 + 0{,}68\tilde{a}_2 &= 5{,}32\,, \end{aligned} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{aligned} \tilde{a}_0 &= 7{,}0\,, \\ \tilde{a}_1 &= 0{,}25\,, \\ \tilde{a}_2 &= -11\,. \end{aligned} \tag{16.153}$$

4. Megjegyzések

1. A regressziós együtthatók meghatározásához az $\tilde{f}\left(\underline{\mathbf{x}}^{(i)}\right) = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ interpolációs feltételekből is kiindulhattunk volna, azaz

$$\mathbf{G}\underline{\tilde{\mathbf{a}}} = \underline{\mathbf{f}}\,. \tag{16.154}$$

Ha $s < N$, akkor egy túldeterminált lineáris egyenletrendszerünk van, melynek közelítő megoldását HOUSEHOLDER-eljárással (lásd 943. old.) kapjuk meg. Az átmenetet (16.154)-ból, azaz (16.154) szorzását $\mathbf{G}^{\mathbf{T}}$-vel GAUSS-*transzformációnak* is nevezzük. Ha $\mathbf{G}$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, vagyis a $\mathbf{G}$ mátrix rangja $= s + 1$, akkor a (16.150e) normál-egyenletrendszer egyértelműen megadható, és ez a megoldás megegyezik a HOUSEHOLDER-féle közelítő megoldással.

2. Többdimenziós esetben is megadhatók (16.146a,b) analógiájára a regressziós együtthatókra konfidencia intervallumok (lásd |16.9|).

3. Az F-eloszlás segítségével (lásd 792. old.) tesztelhetjük a feltételezett függvénykapcsolatot. Ez a teszt eldönti, hogy a (16.150b) képlettel adott függvény már kevesebb tag esetén is jól közelíti-e az elméleti regressziós függvényt (lásd |16.9|).

16.3.5. Monte-Carlo módszerek

16.3.5.1. Szimuláció

Szimulációról beszélünk, amikor egy folyamat vagy egy rendszer vizsgálata egy azokat helyettesítő rendszer segítségével történik. Olyan matematikai modelleket alkalmazunk, melyek a keresett folyamatot jól leírják és számítógéppel könnyen kiértékelhetők. Ekkor digitális szimulációról beszélünk. Ha a szimuláció során véletlenül választott pontokat vagy mennyiségeket használunk, akkor ez a Monte-Carlo szimuláció vagy véletlen szimuláció.

16.3.5.2. Véletlen számok

A véletlen számok egy meghatározott eloszlású valószínűségi változó (lásd 781. old.) realizációi. Különböző eloszlásoknak különböző típusú véletlen számok felelnek meg.

1. Egyenletes eloszlású véletlen számok

A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számok annak az X valószínűségi változónak a realizációi, melynek $f_0(x)$ sűrűségfüggvénye és $F_0(x)$ eloszlásfüggvénye a következő:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{máskor}\,; \end{cases} \qquad F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 0\,, \\ x & \text{ha} \quad 0 < x \le 1\,, \\ 1 & \text{ha} \quad x > 1\,. \end{cases} \tag{16.155}$$

1. Négyzetközép-módszer A véletlen számok előállítására szolgáló első egyszerű algoritmus NEUMANN JÁNOStól származik. Ezt *négyzetközép-módszernek* nevezzük. Egy $2n$ jegyű z egész számból indulumk ki. Képezzük a z^2 számot, és így egy $4n$ jegyű egész számot kapunk. Ebből elhagyjuk az első és az utolsó n számjegyet, és így megint egy $2n$-jegyű egész számot kaptunk. Ezt az eljárást ismételjük. Ha a kapott egész számok elé írjuk a „0”-t, akkor $2n$-jegyű tizedes törteket kaptunk, melyeket véletlen számoknak tekinthetünk. A $2n$ szám választása az alkalmazott komputer számábrázolásától függ. Legyen pl. $2n = 10$. Ebben az esetben az algoritmus gyakorlati alkalmazása nem vált be, mert az ily

módon előállított sorozatokban a szükségesnél több kicsiny szám van. Ezért más módszereket kellett kifejleszteni.

2. Kongruenciamódszer A kongruenciamódszer igen elterjedt: A z_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ egész számok egy sorozatát a

$$z_{i+1} \equiv c \cdot z_i \mod m \tag{16.156}$$

rekurziós képlet szerint számítjuk. Itt z_0 tetszőleges pozitív szám. c és m szintén pozitív egész számok, melyeket alkalmasan választunk. z_{i+1} mindig a legkisebb nem negatív szám, amely az (16.156) kongruenciát kielégíti. A z_i/m számok 0 és 1 között vannak és mint egyenletes eloszlású véletlen számok alkalmazhatók.

3. Megjegyzések

a) Válasszuk $m = 2^r$, ahol r egy komputer-szó bitjeinek a száma, pl. $r = 40$. A c számot válasszuk $\sqrt{m}$ nagyságrendjében.

b) Ezeket a véletlen számokat, melyeket egy adott képletből nyertünk és egy X valószínűségi változó értékeit szimulálják, *pszeudovéletlen-számoknak* nevezzük.

c) Véletlen számokat a zsebszámítógéppel is előállíthatunk a „ran" paranccsal (az angol random szó rövidítése).

2. Más eloszlású véletlen számok

Egy tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvénynek megfelelő véletlen számokat a következőképpen állíthatunk elő:

Kiindulunk egyenletes eloszlású véletlen számok egy $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozatából. Ezekből számítjuk az $\eta_i = F^{-1}(\xi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ számokat. Itt $F^{-1}(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény inverze. Ekkor:

$$P(\eta_i \le x) = P(F^{-1}(\xi_i) \le x) = P(\xi_i \le F(x)) = \int_0^{F(x)} f_0(t)\,dt = F(x)\,, \tag{16.157}$$

azaz az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ véletlen számok eleget tesznek az $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel megadott eloszlásnak. Az $F(x)$ függvény legyen folytonos és monoton növekedő.

3. Véletlen számok táblázata és alkalmazása

1. A táblázat előállítása Egy véletlenszám-táblázatot pl. a következőképpen csinálhatunk: 10 egyforma golyóra ráírjuk a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számokat. A golyókat egy urnában jól összekeverjük. Ezután húzunk egy golyót és a kapott számot felírjuk. A golyót az urnába visszatesszük, újra keverünk és húzunk. Ilyen módon véletlen számjegyek egy sorozatát kapjuk, melyeket az áttekinthetőség kedvéért négyes csoportba osztunk (lásd **21.19. táblázat**).

A fenti eljárás biztosítja, hogy a táblázat négyjegyű számainak mind a négy helyen a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számok egyenlő valószínűséggel fordulnak elő.

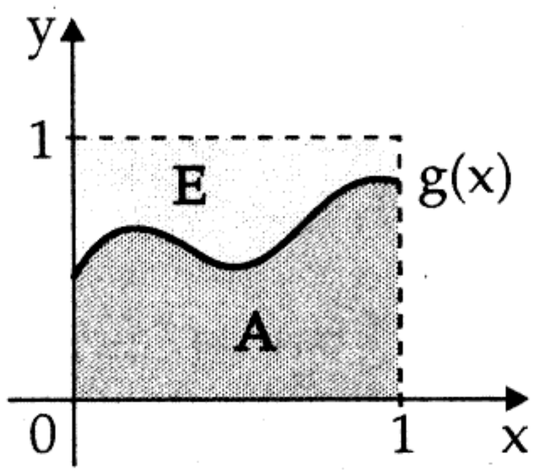
2. A véletlen számok alkalmazása A véletlenszám-táblázat alkalmazását egy példán mutatjuk meg. $N = 250$ vizsgált tárgyból $n = 20$ darabot véletlenszerűen kell kiválasztanunk. A tárgyakat megszámoztuk 000-tól 249-ig. A **21.19. táblázatban** kiválasztunk egy számot valamelyik oszlopban vagy sorban és meghatározzuk, hogy a következő 19 véletlen számot függőlegesen, vízszintesen vagy átlósan fogjuk a táblázatból kivenni. A véletlen számoknak csak az első 3 számjegyét vesszük figyelembe, és csak azokat a számokat alkalmazzuk, amelyek 250-nél kisebbek.

16.3.5.3. Példa Monte-Carlo szimulációra

Az

$$I = \int_0^1 g(x)dx \tag{16.158}$$

határozott integrál közelítő kiszámítása egyenletes eloszlású véletlen számok alkalmazásával jó példa a véletlen szimulációs módszer alkalmazására. A következőkben két lehetséges megoldást tárgyalunk.



16.16. ábra.

Tegyük fel, hogy $0 \leq g(x) \leq 1$. Ez transzformációval mindig elérhető (lásd (16.163), 809. old.). Ekkor az I integrál egy olyan idom területe, mely teljes egészében az E egységnégyzetben fekszik **(16.16. ábra)**. A $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számok egy sorozatából kettesével vesszük a pontokat és így ezek az egységnégyzet véletlen pontjainak koordinátái lesznek. Így választottunk n darab P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ véletlen pontot az E egységnégyzeten. Jelölje m azon pontok számát, amelyek az A tartományon belül vagy annak határára esnek, ekkor a relatív gyakoriság fogalmának felhasználásával a megfelelő terület:

$$\int_0^1 g(x)dx \approx \frac{m}{n}\,. \tag{16.159}$$

1. A relatív gyakoriság alkalmazása

Hogy (16.159) alkalmazásával egy előre meghatározott, elég nagy pontosságot elérjünk, n-et igen nagynak kell választani. Ezért a hatásosabb módszert keresve adódik a következő módszer, illetve egyéb módszerek az [16.18] irodalomban.

2. A várható érték alkalmazása

A (16.158) integrál kiszámításához megint az X, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó n darab $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ realizációjából indulunk ki: Ekkor a $g_i = g(\xi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ értékek a $g(X)$ valószínűségi változó realizációi, melynek várható értéke (16.47a,b) (lásd 783. old.):

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_0(x)dx = \int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\,. \tag{16.160}$$

Ezt az eljárást, amely a véletlen mintaátlagot integrál kiszámítására használja, nevezzük általános Monte-Carlo módszernek.

16.3.5.4. A Monte-Carlo módszerek alkalmazása a numerikus matematikában

1. Többes integrálok kiszámítása

Először az egyváltozós függvényekre keressük a határozott integrálnak egy olyan transzformációját, amely az

$$I^* = \int_a^b h(x)dx \tag{16.161}$$

integrál kiszámítását az

$$I = \int_0^1 g(x)dx \qquad 0 \leq g(x) \leq 1 \tag{16.162}$$

integrál kiszámítására vezeti vissza. Erre már alkalmazhatjuk az 16.3.5.3. Monte-Carlo módszert. A következő helyettesítést alkalmazzuk:

$$x = a + (b-a)u\,, \qquad m = \min_{x\in[a,b]} h(x)\,, \qquad M = \max_{x\in[a,b]} h(x)\,. \tag{16.163}$$

Így a (16.161) képlet a következő képletbe megy át:

$$I^* = (M-m)(b-a)\int_0^1 \frac{h(a+(b-a)u)-m}{M-m}du + (b-a)m\,, \tag{16.164}$$

ahol a $\dfrac{h(a+(b-a)u)-m}{M-m} = g(u)$ integrandus eleget tesz a $0 \le g(u) \le 1$ feltételnek.

■ A többes integrálok Monte-Carlo módszerrel történő közelítő kiszámítását a

$$V = \iint\limits_S h(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ahol} \quad h(x,y) \ge 0 \tag{16.165}$$

kettősintegrál példáján mutatjuk meg. Itt S az a síkbeli tartomány, melyet az $a \le x \le b$ és $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ egyenlőtlenségek határoznak meg. Ekkor V annak a K hengerszerű testnek a térfogata, amely az x,y-síkra merőlegesen áll és $0 \le z \le h(x,y)$. Legyen ez a test egy olyan Q téglatest része, amely az $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $0 \le z \le e$ $(a,b,c,d,e$ konstansok) egyenlőtlenségekkel írható le. A (16.163), (16.165)-hez hasonló transzformációval olyan kifejezést kapunk, mely a

$$V^* = \iint\limits_{S^*} g(u,v)\,du\,dv \quad \text{mit} \quad 0 \le g(u,v) \le 1 \tag{16.166}$$

integrált tartalmazza, ahol V^* egy K^* test térfogata, amely test az egységkockán belül van.
A (16.166) integrál közelítő értékét Monte-Carlo módszerrel számítjuk ki: a $[0,1]$ intervallumon választott véletlen számokat hármasával összefogjuk, így n darab P_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ pontot nyerünk az egységkockában. Ha ebből m pont a K^* testhez tartozik, akkor (16.159) analógiájára

$$V^* \approx \frac{m}{n}. \tag{16.167}$$

Megjegyzés: Egyváltozós függvény határozott integráljának kiszámítására a legjobb a 19.3. fejezetben leírt eljárást használni. Többes integrálok esetén a Monte-Carlo módszer alkalmazása célszerű.

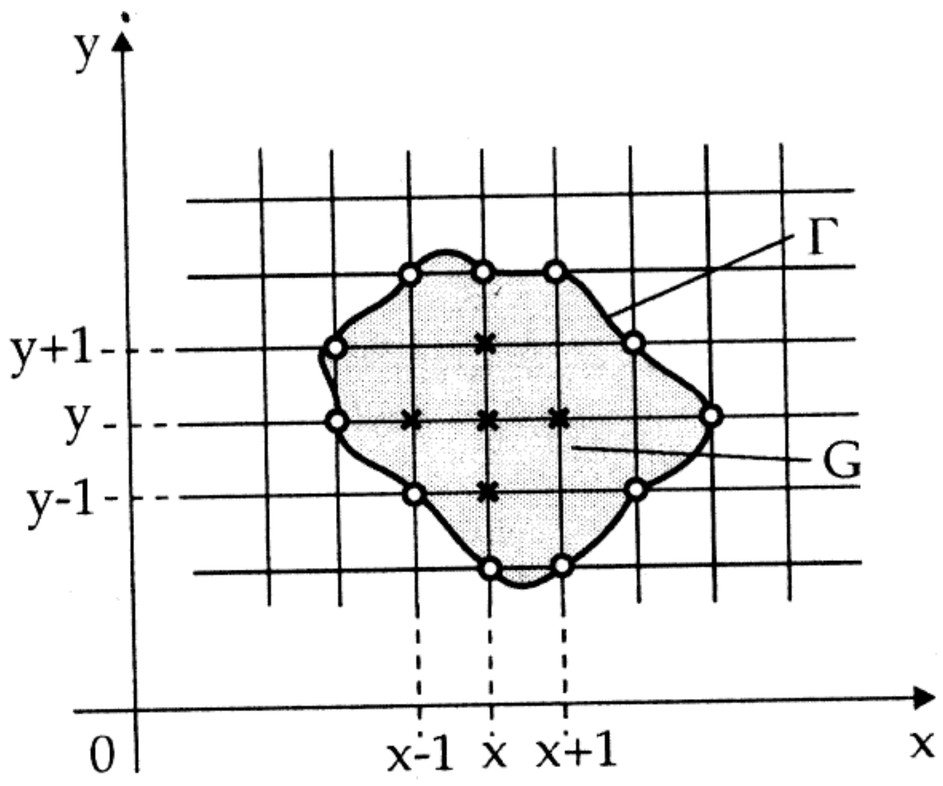
2. Parciális differenciálegyenletek megoldása

1. A véletlen bolyongás módszere A Monte-Carlo módszert a parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására a véletlen bolyongás folyamatok felhasználásával alkalmazzuk. Példaként tekintsük a következő paraméterérték feladatot:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ha} \quad (x,y) \in G\,, \tag{16.168a}$$

$$u(x,y) = f(x,y) \qquad \text{ha} \quad (x,y) \in \Gamma\,. \tag{16.168b}$$

Itt G az x,y-sík egy egyszeresen összefüggő tartományát, Γ a G tartomány határát jelöli **(16.17. ábra)**.



16.17. ábra.

A G tartományt — ugyanúgy mint a 19.5.1. pontban a differenciamódszerek esetén — lefedjük egy négyzetráccsal. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a lépésköz $b = 1$.
Ily módon belső $P(x,y)$ rácspontokat és R_i határpontokat kapunk. Az R_i határpontokról, melyek egyúttal rácspontok is, az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy valóban, pontosan a G tartomány Γ határán fekszenek, azaz

$$u(R_i) = f(R_i) \quad (i = 1,2,\ldots,N) \tag{16.169}$$

2. A megoldás menete Képzeljük el, hogy egy részecske egy belső $P(x,y)$ pontból elindulva véletlen bolyongást kezd.

Ez azt jelenti, hogy
1. A részecske e $P(x,y)$ pontból véletlenszerűen a 4 szomszédos pont egyikébe megy. Annak valószínű-

sége, hogy ezek közül valamelyikbe jut 1/4.
2. Ha a részecske egy R_i határpontba jut, a bolyongás 1 valószínűséggel befejeződik.

Kimutatható, hogy a részecske bármely P belső pontból véges sok lépés után egy R_i határpontba jut. Annak valószínűségét, hogy a $P(x, y)$ pontban kezdődött bolyongás az R_i határpontba végződik, jelölje:

$$p(P, R_i) = p((x, y), R_i) \tag{16.170}$$

Ekkor

$$p(R_i, R_i) = 1\,, \quad p(R_i, R_j) = 0 \quad \text{ha} \quad i \neq j \tag{16.171}$$

és

$$p((x, y), R_i) = \frac{1}{4}[p((x-1, y), R_i) + p((x+1, y), R_i) + p((x, y-1), R_i) + p((x, y+1), R_i)]\,. \tag{16.172}$$

A (16.172) tehát egy differenciaegyenlet a $p((x, y), R_i)$ valószínűségre. Ha a $P(x, y)$ pontból n darab véletlen bolyongás indul ki, s ezekből m_i jut el R_i-be $(m_i \leq n)$, akkor

$$p((x, y), R_i)) \approx \frac{m_i}{n}\,. \tag{16.173}$$

A (16.173) egyenlet a (16.168a) a differenciálegyenletnek egy közelítő megoldását adja a (16.169) feltétel mellett. A (16.168b) peremfeltételt pedig úgy vesszük figyelembe, hogy legyen:

$$v(P) = v(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f(R_i) p((x, y), R_i) \tag{16.174}$$

mivel (16.172) miatt igaz, hogy $v(R_j) = \sum_{i=1}^{N} f(R_i) p(R_j, R_i) = f(R_j)$.
A $v(x, y)$ kiszámításához (16.172)-at megszorozzuk $f(R_i)$-vel és az összegzés után a következő differenciaegyenletet kapjuk $v(x, y)$-re:

$$v(x, y) = \frac{1}{4}[v(x-1, y) + v(x+1, y) + v(x, y-1) + v(x, y+1)]. \tag{16.175}$$

Ha a $P(x, y)$ ponttól n számú bolyongást indítunk és ezekből m_i végződik a megfelelő R_i határpontokban $(i = 1, 2, \ldots, N)$, akkor

$$v(x, y) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i f(R_i) \tag{16.176}$$

adja a $P(x, y)$ pontban a (16.168a,b) peremértékfeladat megoldásának egy közelítő értékét.

16.3.5.5. A Monte-Carlo módszerek további alkalmazásai

A Monte-Carlo módszereket, mint véletlen szimulációs módszereket (vagy statisztikai kísérleti módszereket) a tudomány legkülönbözőbb területein alkalmazzák. Például:

- Atomtechnika: Neutronok áthatolása anyagrétegeken (biológiai védekezés kidolgozása);
- Infomatika: a jel és a zavarás szétválasztása;
- Operációkutatás: sorbanállási és kiszolgálási problémák, tárolási és lefutási tervezések.

Ilyen és hasonló problémák megoldásai a [16.18], [16.22] irodalomban találhatók.

16.4. A mérési hibák elmélete

Minden tudományos mérés esetén — függetlenül attól, milyen gondosan hajtjuk azt végre — a megfigyelt, illetve mért értékeket mérési hibák terhelik. A DIN szerint a mérési hibákat, azaz valamely adat mérése során fellépő hibákat *eltéréseknek* nevezzük. Ezzel szemben a mérési eredmények megadásánál a bennük foglalt hibáról mint *bizonytalanságról* (*hibahatárról*) beszélünk. Ezzel a két fogalommal a mérési hibák elméletének célját a következőképpen fogalmazhatjuk meg:
1. Az eltéréseket minimalizálni kell, azaz a mért ismérv meghatározására a lehető legjobb közelítő eljárást kell kidolgoznunk. Erre szolgál a *kiegyenlítő számítás* elmélete, melyet GAUSS óta ismerünk. Ez lényegében a *legkisebb négyzetek módszere.*

2. A bizonytalanságot a lehető legjobban kell megbecsülnünk, és itt a matematikai statisztika módszereit alkalmazzuk.

16.4.1. Mérési hibák és azok eloszlása

16.4.1.1. A mérési hibák osztályozása kvalitatív ismérvek alapján

Ha a mérési hibákat az azokat előidéző okok szerint osztályozzuk, akkor a következő három típust különböztetjük meg:

1. Durva mérési hibák oka a hibás leolvasás vagy felcserélés.

2. Szisztematikus mérési hibákat okoznak rosszul beállított mérőműszerek, valamint olyan mérési módszerek, melyeknél a rendszerből fakadó merési hibák szerepet játszhatnak. Ezeket a hibákat nem tudjuk mindig kiküszöbölni.

3. A statisztikai vagy véletlen hibák okai egyrészt a mérési feltételek kevéssé befolyásolható véletlen ingadozásai, másrészt a vizsgált mennyiségek vagy események véletlen ismérvei.

A mérési hibák elméletében abból indulunk ki, hogy a durva és szisztematikus hibákat sikerül kiküszöbölnünk, és a bizonytalanságok (hibahatárok) kiszámításánál csupán a statisztikai tulajdonságokat és a véletlen mérési hibákat vizsgáljuk.

16.4.1.2. A mérési hiba sűrűségfüggvénye

1. Mérési jegyzőkönyv

A hibahatárok kiszámítása feltételezi, hogy a mérési eredményeket egy mérési jegyzőkönyvben, táblázatban leírták, és a relatív gyakoriságok vagy az $f(x)$ sűrűségfüggvény, illetve a kumulált relatív gyakoriságok vagy az $F(x)$ eloszlásfüggvény megadásával ezek rendelkezésünkre állnak (lásd 797. old.). Az x változón itt a keresett ismérvet leíró X valószínűségi változó realizációját értjük.

2. Hiba-sűrűségfüggvény

A mérési hibák tulajdonságaira tett speciális feltevések a hibaeloszlás sűrűségfüggvényének speciális tulajdonságait feltételezik.

1. Folytonos sűrűségfüggvény A véletlen mérési hiba egy bizonyos intervallum tetszőleges értékeit veheti fel, akkor eloszlását folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvény írja le.

2. Páros sűrűségfüggvény A mérési hiba azonos valószínűséggel vesz fel azonos abszolút-értékű, de különböző előjelű értéket, akkor a sűrűségfüggvény páros függvény: $f(-x) = f(x)$.

3. Monoton csökkenő sűrűségfüggvény A nagy abszolútértékű mérési hibák kevésbé valószínűek, mint a kis abszolútérékűek, ekkor $f(x)$ $x > 0$ esetén monoton csökkenő függvény.

4. Véges várható érték A hiba abszolútértékének várható értéke legyen véges, azaz

$$E(|X|) = 2\int_0^\infty x f(x)\,dx < \infty\,. \tag{16.177}$$

Ezen tulajdonságok figyelembevételével különböző hiba-sűrűségfüggvények adódnak.

3. Normáleloszlású hiba

1. Sűrűség- és eloszlásfüggvény A gyakorlatban a legtöbb esetben kiindulhatunk abból, hogy a mérési hiba normális eloszlású, $\mu = 0$ várható értékkel és valamely σ^2 szórásnégyzettel, azaz a mérési hiba $f(x)$ sűrűség-, illetve $F(x)$ eloszlásfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(16.178a)} \qquad \text{és} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right). \tag{16.178b}$$

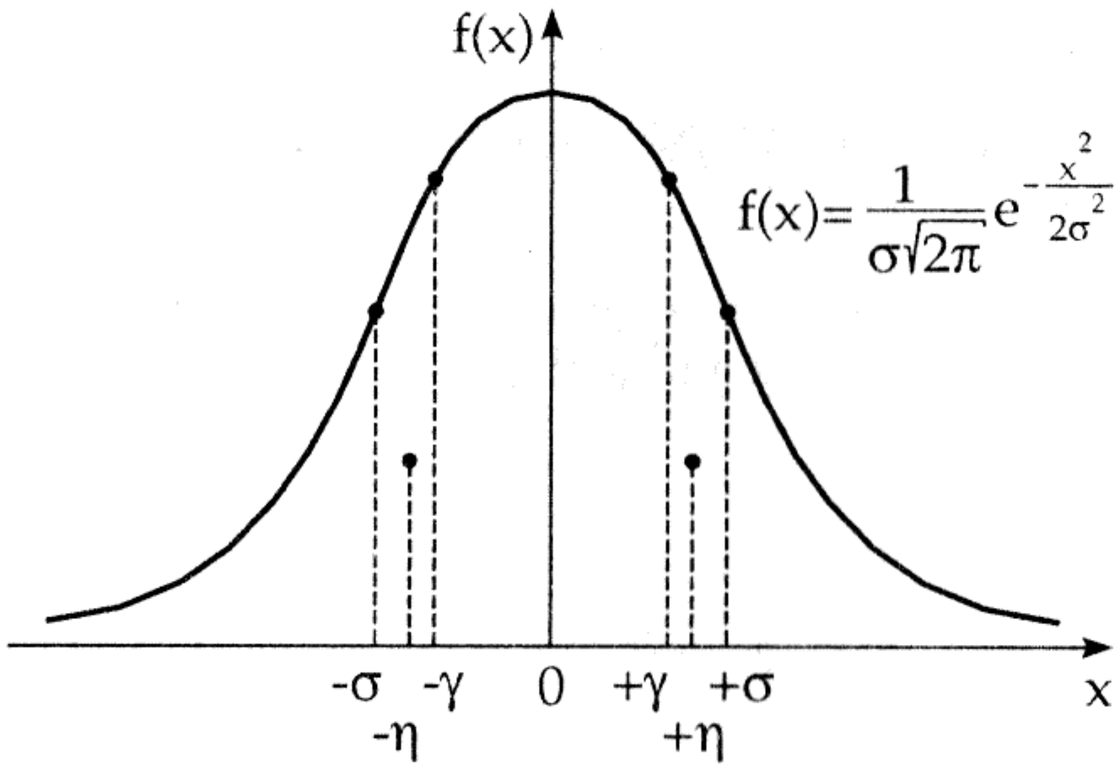
Itt $\Phi(x)$ a standard normáliseloszlás eloszlásfüggvénye ((16.72a), **21.15. táblázat**). (16.178a,b) esetén hiba-normáliseloszlásról is beszélünk.

A **16.18. ábra** a hiba-normáliseloszlás sűrűségfüggvényén a súlypontokat, illetve inflexiós-pontokat mutatja. A **16.19. ábra** a normális sűrűségfüggvényt három különböző σ érték esetén ábrázolja. Az

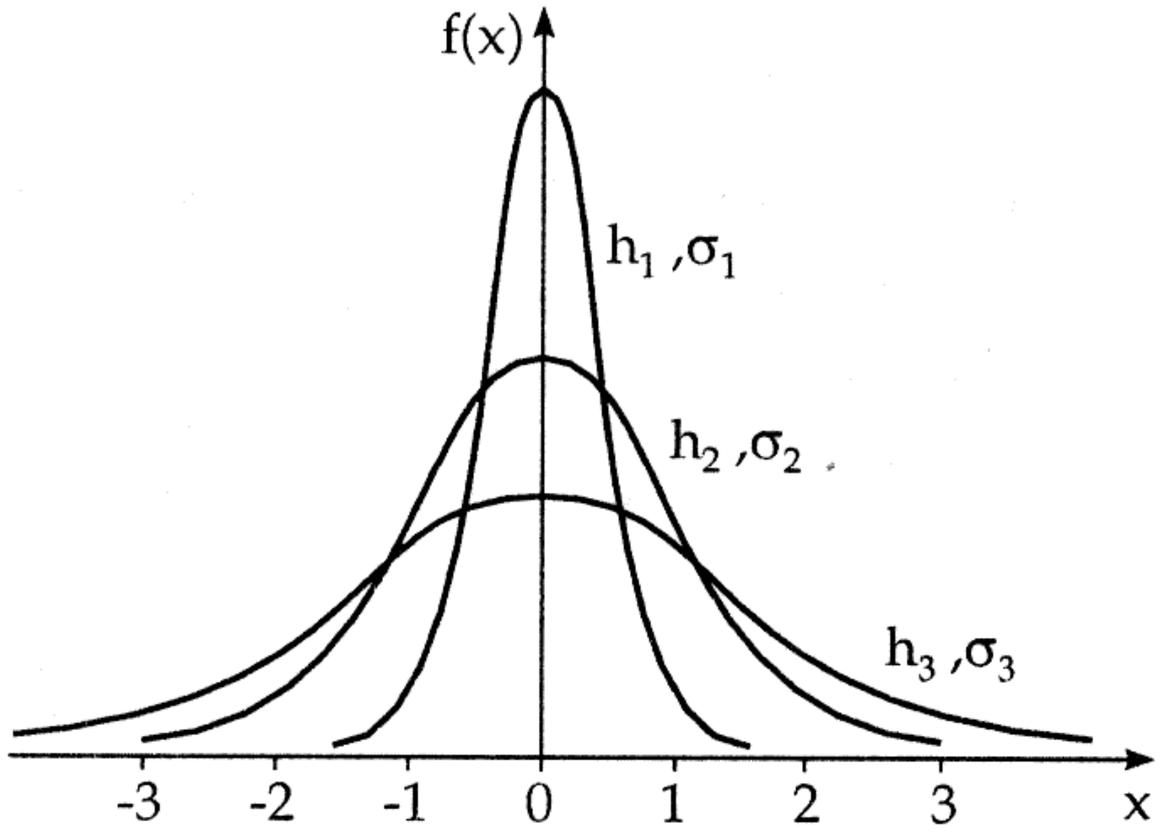
inflexiós pontok a $\pm\sigma$, a két féltartomány súlypontjai a $\pm\eta$ abszcissza-értékeknél vannak. A függvény maximuma az $x = 0$ pontban van, a maximum értéke $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Növekedő σ érték esetén a függvény görbéje szélesedik, de az alatta lévő terület mindig egységnyi. Ez az eloszlás tehát azt jelenti, hogy abszolútértékben mérve kis hibák gyakrabban fordulnak elő, nagy hibák ritkábban.

4. A hiba-normáliseloszlás jellemzése paraméterekkel

A hiba-normális eloszlásának jellemzésére használatos a σ^2 szórásnégyzet, azaz a σ szórás paraméteren kívül a h pontosság, az η átlagos hiba és a γ valószínű hiba is.



16.18. ábra.



16.19. ábra.

1. **Pontosság** A σ szórás mellett a normális eloszlás szélességét a

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{16.179}$$

pontossággal is jellemezhetjük. Minél karcsúbb a GAUSS-görbe, annál nagyobb a pontosság értéke **(16.19. ábra)**. Ha a véletlen minta alapján σ-t a $\tilde{\sigma}$, ill. $\tilde{\sigma}_x$ értékekkel helyettesítjük, akkor h értéke a mérési módszer pontosságát jellemzi.

2. **Egyszerű átlagos hiba** A hiba abszolútértékének η várható értéke:

$$\eta = E(|X|) = 2\int_0^\infty x f(x)\,dx\,. \tag{16.180}$$

3. **Valószínű hiba** A hiba abszolút értékének γ korlátját hívjuk valószínűségi hibának, ha

$$P(|X| \le \gamma) = \frac{1}{2}\,. \tag{16.181a}$$

Ebből következik, hogy

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} f(x)\,dx = 2\Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - 1 = \frac{1}{2}\,, \tag{16.181b}$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normáleloszlás eloszlásfüggvénye.

4. **Előre adott hibahatár** Ha egy $a > 0$ hibahatárt amit nem szabad túllépni, előre megadunk, akkor a

$$P(|X| \le a) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 \tag{16.182}$$

képlet annak a valószínűségét adja meg, hogy a hiba a $[-a, a]$ intervallumba esik.

5. Összefüggés a szórás, az átlagos és valószínű hiba, valamint a pontosság között A hibanormáliseloszlás esetén a következő összefüggések érvényesek, ahol $\varrho = 0{,}4769$:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \frac{\gamma}{\varrho\sqrt{\pi}}\,, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\varrho}\,, \tag{16.183a}$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{h} = \varrho\sqrt{2}\sigma = \varrho\sqrt{\pi}\eta\,, \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{\varrho}{\gamma} \tag{16.183b}$$

és

$$\Phi(\varrho\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\,. \tag{16.184}$$

16.4.1.3. A mérési hibák osztályozása kvantitatív ismérvek esetén

1. A valódi érték és a közelítő érték

Egy mérhető mennyiség valódi értéke legyen x_w. Ennek becslésére a megfelelő valószínűségi változó várható értékét használjuk, melyet a mért x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ véletlen minta alapján realizálunk. Tehát x_w közelítő értékét az alábbi középértékek adják:

1. Egyenlő súlyozású középérték

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{16.185a}$$

, illetve

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} h_j \overline{x}_j\,, \tag{16.185b}$$

ha a mért értékeket k osztályba soroltuk h_j abszolút gyakorisággal és $\overline{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ osztályközepekkel.

2. Súlyozott középérték

$$\overline{x}^{(g)} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} g_i\,. \tag{16.186}$$

Itt az egyes x_i mért értékeket g_i $(g_i > 0)$ súlyfaktorokkal súlyoztuk (lásd 817. old.).

2. A mérési sorozat egyes méréseinek hibája

1. A mérési sorozat egyes méréseinek valódi hibája a mért x_i értékeknek a valódi x_v értéktől vett eltérése. Mivel a valódi értéket rendszerint nem ismerjük, az x_i i-edik mért érték valódi ε_i hibája:

$$\varepsilon_i = x_v - x_i. \tag{16.187a}$$

is ismeretlen érték.

2. A mérési sorozat egyes méréseinek látszólagos hibája a mért x_i értéknek az $\overline{x}$ mintaközéptől vett eltérése:

$$v_i = \overline{x} - x_i\,. \tag{16.187b}$$

3. A véletlen minta négyzetesközép hibája, azaz szórásnégyzete és szórása Mivel a valódi hibák, illetve a látszólagos hibák számtani közepe a különböző előjelek miatt nem jellemzi az átlagos eltérést, ezért a hibák négyzetösszegét számítjuk ki:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2\,, \tag{16.188a}$$

$$v^2 = \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2\,. \tag{16.188b}$$

A gyakorlatban csak (16.188b)-t alkalmazzuk, mivel a v_i értékek a mérések alapján meghatározhatók. Ezért a

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ (n-1)} \tag{16.189}$$

definiáljuk, mint a mérési sorozat, azaz a véletlen minta négyzetes-közép hibáját. A $\tilde{\sigma}$ érték az alapsokaság eloszlás σ szórásának közelítő értéke.
Ha az eloszlás normális, akkor $\tilde{\sigma} = \sigma$ esetén:

$$P(|\varepsilon| \leq \tilde{\sigma}) = 2\Phi(1) - 1 = 0{,}68\,. \tag{16.190}$$

Eszerint tehát annak a valószínűsége, hogy a valódi hiba abszolútértéke nem nagyobb, mint σ, körlbelül 68 %.

4. Valószínű hiba az a γ szám, amelyre:

$$P(|\varepsilon| \leq \gamma) = \frac{1}{2}\,. \tag{16.191}$$

Eszerint annak a valószínűsége, hogy a hiba abszolútértéke γ-nál nem nagyobb, 50 %. A $\pm\gamma$ értékek a sűrűségfüggvény alatti két szimmetrikus, jobb és bal oldali tartományt egyenlő területű részekre osztják, azaz elfelezik. **(16.18. ábra)**.
Ha a hiba normális eloszlású, akkor $\tilde{\gamma}$ és $\tilde{\sigma}$ között a következő összefüggés áll fenn:

$$\tilde{\gamma} = 0{,}6745\tilde{\sigma} \approx \frac{2}{3}\tilde{\sigma} = \frac{2}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ (n-1)}\,. \tag{16.192}$$

5. Átlagos hiba az az η szám, mely a hiba abszolútértékének a várható értéke:

$$\tilde{\eta} = E(|\varepsilon|) = 2\int_0^\infty x f(x)\,dx\,. \tag{16.193}$$

Normáleloszlású hiba esetén $\eta = 0{,}798$. A

$$P(|\varepsilon| \leq \eta) = 2\Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}576 \tag{16.194}$$

összefüggés alapján tehát annak a valószínűsége, hogy a hiba abszolútértéke η-nál nem nagyobb, kb. 57,6 %. A $\pm\eta$ értékek a normális sűrűségfüggvény alatti jobb, ill. bal oldali tartományok súlypontjai. **(16.18. ábra)**.
Normáleloszlású hiba esetén tehát

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{\sigma} = 0{,}7978\tilde{\sigma} \approx 0{,}8\tilde{\sigma} = 0{,}8\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ (n-1)}\,. \tag{16.195}$$

3. Egy mérési sorozat számtani átlagának hibája

Az $\overline{x}$ mintaátlag hibájának definíciói az egyes mérések fent definiált hibái alapján:

1. Négyzetesközép-hiba vagy szórás

$$\tilde{\sigma}_{\overline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ n(n-1)} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\,. \tag{16.196}$$

2. Valószínű hiba

$$\tilde{\gamma}_{\overline{x}} \approx \frac{2}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ n(n-1)} = \frac{2}{3}\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\,. \tag{16.197}$$

3. Átlagos hiba

$$\tilde{\eta}_{\overline{x}} \approx 0{,}8\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \Big/ n(n-1)} = 0{,}8\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\,. \tag{16.198}$$

4. Az elérhető hibaszintek optimalizálása Mivel a mintaátlag háromféle hibája arányos az egyes mérések hibájával és fordítottan arányos n négyzetgyökével, ezért nem érdemes a mérések számát túl nagyra választani. A hiba jelentős csökkentését csak a mérési módszer h pontosságának (16.179) javítása eredményezi.

4. Abszolút és relatív hiba

1. Abszolút bizonytalanság, abszolút hiba Egy mérési eredmény bizonytalansága, melyet az ε_i, v_i, σ_i, γ_i vagy η_i; illetve az ε, v, σ, γ vagy η számokkal jellemezhetünk, a mérés megbízhatóságának egy mértéke. Ezen hibák és a hibaterjedési számításokban (lásd 818. old.) ezeknek megfelelő eredmények jellemzésére vezettük be az *abszolút bizonytalanság*, azaz *abszolút hiba* fogalmát. Az abszolút hiba dimenziója, ill. mértékegysége ugyanaz, mint a mért mennyiségé. Azért hívjuk abszolút hibának, hogy ne keverjük össze az alábbiakban bevezetett relatív hibával. Jelölése általában Δx_i vagy Δx. Az "abszolút" szó itt mást jelent, mint az abszolútérték fogalmában, amely a mért mennyiségnek a nagyságát, előjeltől függetlenül jelenti.

2. Relatív bizonytalanság, relatív hiba A relatív hiba a mérések minőségének mértéke. A relatív és abszolút hiba között az a különbség, hogy a relatív hibának nincs dimenziója, mert ez az abszolút hiba és a mért érték hányadosa. Amennyiben ez utóbbit nem ismerjük, a mintaátlaggal pótoljuk,

$$\delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x}\,. \tag{16.199a}$$

A relatív hibát legtöbbször százalékban adjuk meg és *százalékos hibának* is hívjuk.

$$\delta x_i/\% = \delta x_i \cdot 100\,\%\,. \tag{16.199b}$$

5. Abszolút és relatív maximális hiba

1. Abszolút maximális hiba Ha a meghatározandó ismérv a mért mennyiségek függvénye, akkor a keletkező maximális hibát e függvény alapján kell meghatározni. Ez vagy a hibaterjedés törvényei segítségével történik, amikor a mérések egy kiegyenlítését alkalmazzuk, mivel a legkisebb négyzetek módszerével a $\sum(x_i - x)^2$ minimumát keressük; vagy lemondunk a kiegyenlítésről, és csak a hiba egy felső korlátját keressük: abszolút hibának nevezzük a $\Delta z_{\max}$ értéket. Ha n darab x_i független változó van, akkor:

$$\Delta z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \Delta x_i\,, \tag{16.200}$$

ahol x_i helyére a mindenkori $\overline{x}_i$ középértéket tesszük.

2. Relatív maximális hiba Ezt úgy kapjuk, hogy az abszolút maximális hibát elosztjuk a mért mennyiség z értékével (általában a $\overline{z}$ mintaátlaggal):

$$\delta z_{\max} = \frac{\Delta z_{\max}}{\overline{z}}\,. \tag{16.201}$$

16.4.1.4. A mért eredmények megadása hibahatárokkal

A mért eredmények reális becslése csak úgy lehetséges, ha a fellépő hibát is meg tudjuk becsülni; a mért eredmények megadása lehetetlen a hibaadatok megadása nélkül. Ezekből az adatokból felismerhető kell, hogy legyen, melyik típusú hiba milyen adott szignifikanciaszinten mely megbízhatósági határokkal rendelkezik.

1. A definiált hiba megadása A mért eredményt az egyes mérésekre

$$x = x_i \pm \Delta x = x_i \pm \tilde{\sigma}, \tag{16.202a}$$

alakban, a mintaközépre

$$x = \overline{x} \pm \Delta x_{\overline{x}} = \overline{x} \pm \tilde{\sigma}_{\overline{x}}. \tag{16.202b}$$

alakban adjuk meg. Itt Δx legtöbbször a mintából kapott becsült szórást jelenti. Lehet azonban $\tilde{\gamma}$-t vagy $\tilde{\eta}$-t is alkalmazni.

2. Tetszőleges konfidencia-határok megadása A $t = \dfrac{x - x_v}{\sigma}$ mennyiség $N(\mu, \sigma)$ normális eloszlású alapsokaság esetén $f = n - 1$ szabadsági fokú t-eloszlást (16.102) követ. Előre megadott α szignifikanciaszint, vagy $1 - \alpha$ konfidenciaszint esetén az ismeretlen $x_v = \mu$ valódi értékre a $t_{\alpha;f}$ t-kvantilis segítségével a

$$\mu = \overline{x} \pm t_{\alpha;f} \cdot \tilde{\sigma}_{\overline{x}}. \tag{16.203}$$

megbízhatósági, azaz konfidencia-határokat kapjuk. Vagyis az x_v valódi érték $1 - \alpha$ biztonsággal, azaz $1 - \alpha$ valószínűséggel az adott intervallumban fekszik.
A statisztikában legtöbbször az az érdekünk, hogy az n mintanagyság a lehető legkisebb legyen. A $2t_{\alpha;f}\tilde{\sigma}_{\overline{x}}$ hosszúságú intervallum annál kisebb, minél kisebb $1 - \alpha$ és minél nagyobb n. Mivel $\tilde{\sigma}_{\overline{x}}$ a $\sqrt{n}$ növekedésével csökken, valamint a $t_{\alpha,f}$ kvantilis, ahol $f = n - 1$, szintén csökken ($n = 5$ és $n = 10$ között $\frac{1}{\sqrt{n}}$-nel arányosan (lásd **21.18. táblázat**), a konfidencia-intervallum $1/n$-nel egyenes arányban csökken.

16.4.1.5. Azonos pontosságú direkt mérések hibaszámítása

Ha mind az n mérésre ugyanaz a $\tilde{\sigma}_{\overline{x}}$ szórás realizálható, akkor azonos pontosságú mérésekről beszélünk: $h = \text{const}$. Ebben az esetben a legkisebb négyzetek módszere a (16.189), (16.192) és (16.194)-ban adott hiba-értékeket eredményezi.

■ A következő táblázat $n = 10$ azonos pontosságú direkt mérésből álló mérési sorozat eredményeit tartalmazza:

x_i	1,592	1,581	1,574	1,566	1,603	1,580	1,591	1,583	1,571	1,559
$v_i \cdot 10^3$	− 12	− 1	+ 6	+ 14	− 23	0	− 11	− 3	+ 9	+ 21
${v_i}^2 \cdot 10^6$	144	1	36	196	529	0	121	9	81	441

$\overline{x} = 1{,}580$, $\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2/(n-1)} = 0{,}0131$, $\tilde{\sigma}_{AM} = \tilde{\sigma}_i\sqrt{n} = 0{,}041$;
Végeredmény: $\overline{x} = x \pm \tilde{\sigma}_{\overline{x}} = 1{,}580 \pm 0{,}041$.

16.4.1.6. Különböző pontosságú direkt mérések hibaszámítása

1. Egy mérés súlya

Ha a mérési eredmények különböző mérési eljárásokból származnak, vagy egyes olyan mérések középértékeiként keletkeztek, melyek ugyanazon x_i középérték körül $\tilde{\sigma}_i$ szórással ingadoznak, akkor e mintaközép kiszámítására a súlyozott átlagot használjuk:

$$\overline{x}^{(g)} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} g_i \tag{16.204}$$

ahol

$$g_i = \frac{\tilde{\sigma}^2}{{\tilde{\sigma}_i}^2} \,. \tag{16.205}$$

e szórásnégyzetek hányadosa. $\tilde{\sigma}$ helyére egy tetszőleges, de legtöbbször a legkisebb $\tilde{\sigma}_i$ értéket helyettesítjük. Ez lesz a súlyozási egység szórása: ha $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}$ akkor $g_i = 1$. (16.203)-ból következik: egy mérés súlya annál nagyobb, minél kisebb volt a $\tilde{\sigma}_i$ hiba.

2. Szórások

A súlyozási egység szórását a

$$\tilde{\sigma}^{(g)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i {v_i}^2 \Big/ (n-1)} \,. \tag{16.206}$$

becslő érték adja: $\tilde{\sigma}^{(g)} < \tilde{\sigma}$ kell, hogy legyen, különben $\tilde{\sigma}^{(g)} > \tilde{\sigma}$ esetén x_i szisztematikus hibával terhelt. Az egyes mérések szórása ekkor:

$$\tilde{\sigma_i}^{(s)} = \frac{\tilde{\sigma}^{(g)}}{\sqrt{g_i}} = \frac{\tilde{\sigma}^{(g)}}{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma_i} \,, \tag{16.207}$$

ahol $\tilde{\sigma_i}^{(s)} < \tilde{\sigma_i}$.
A súlyozott átlag hibája:

$$\tilde{\sigma}_{\overline{x}}^{(s)} = \tilde{\sigma}^{(s)} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i {v_i}^2 \Big/ (n-1) \sum_{i=1}^{n} g_i} \,. \tag{16.208}$$

3. Hibamegadás

Mint 16.4.1.4.-ben láttuk, ez vagy a definiált hiba, vagy az f szabadsági fokú t-kvantilis segítségével történik.

■ Adott $n = 5$ mérési sorozat különböző $\overline{x}_i \;\; (i = 1, 2, \ldots, 5)$ mintaátlaggal és $\tilde{\sigma}_{\overline{x}_i}$ mintaszórással.

$\overline{x}_i$	$\tilde{\sigma}_{\overline{x}_i}$	$\tilde{\sigma}^2_{\overline{x}_i}$	g_i	z_i	$g_i z_i$	${z_i}^2$	$g_i {z_i}^2$
1,573	0,010	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,81	$-1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}44 \cdot 10^{-4}$	$1{,}16 \cdot 10^{-4}$
1,580	0,004	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	5,06	$-5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$2{,}50 \cdot 10^{-5}$	$1{,}26 \cdot 10^{-4}$
1,582	0,005	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	3,24	$-3{,}0 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}7 \cdot 10^{-3}$	$9{,}0 \cdot 10^{-6}$	$2{,}91 \cdot 10^{-5}$
1,589	0,009	$8{,}1 \cdot 10^{-5}$	1,00	$+4{,}0 \cdot 10^{-3}$	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$
1,591	0,011	$1{,}21 \cdot 10^{-4}$	0,66	$+6{,}0 \cdot 10^{-3}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$3{,}6 \cdot 10^{-5}$	$2{,}37 \cdot 10^{-5}$
$(\overline{x}_i)_m$	$\tilde{\sigma}$		$\sum_{i=1}^{n} g_i$		$\sum_{i=1}^{n} g_i z_i$		$\sum_{i=1}^{n} g_i {z_i}^2$
$=1{,}583$	$=0{,}009$		$=10{,}7$		$=3{,}6 \cdot 10^{-2}$		$=3{,}1 \cdot 10^{-4}$

A táblázatból $(\overline{x}_i)_m = 1,5830$ és $\tilde{\sigma} = 0{,}009$, ehhez választjuk az $x_0 = 1{,}585$ értéket. Ha $z_i = x_i - x_0$, $g_i = \tilde{\sigma}^2 / {\tilde{\sigma}_i}^2$ akkor $\overline{z} = -0{,}0036$ és $\overline{x} = x_0 + \overline{z} = 1,582$. A mintaszórások: $\tilde{\sigma}^{(g)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i {v_i}^2 \Big/ (n-1)} = 0{,}0088 < \tilde{\sigma}$ és $\tilde{\sigma_x} = \tilde{\sigma}_{\overline{x}} = 0{,}0027$. A végeredmény $x = \overline{x} \pm \tilde{\sigma_x} = 1{,}585 \pm 0{,}0027$.

16.4.2. Hibaterjedés és hibaanalízis

A statisztikában a keresett tulajdonság gyakran mért ismérvek valamilyen függvénye. Ha a hibák elég kicsik, akkor a függvényt a hibák szerint TAYLOR-sorba fejtjük, és a másodrendű tagokat már nem vesszük figyelembe. Ekkor beszélünk hibaterjedésről.

16.4.2.1. Gauss hibaterjedési törvénye

1. A feladat kitűzése

Meg kell határoznunk egy z mennyiség nagyságát és hibáját, ha z az $x_j \;\; (j = 1, 2, \ldots, k)$ független változók $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvénye. Itt az x_j értékeket, melyek egy valószínűségi változó realizációi, úgy határozzuk meg, mint n_j nagyságú minták $\overline{x}_j$ mintaközepeit. Szórásnégyzetük ${\sigma_j}^2$. Azt kell vizsgálnunk, hogy az egyes változók hibái hogyan befolyásolják az $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvényérték hibáját. Legyen az $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvény differenciálható, változói független valószínűségi változók, melyek különböző eloszlásúak is lehetnek különböző ${\sigma_j}^2$ értékekkel.

2. Taylor-sorfejtés

Mivel a hibák a független változók viszonylag kis változói, ezért az $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvény $\overline{x}_j$ pontok körüli TAYLOR-sorának lineáris részével közelítünk, melynek együtthatóit jelölje a_j. Így a Δf hibára a

következő kifejezést kapjuk:

$$\Delta f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k)\,, \tag{16.209a}$$

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j = \sum_{j=1}^{k} a_j dx_j\,, \tag{16.209b}$$

ahol a $\partial f/\partial x_j$ parciális deriváltakat az $(\overline{x}_1\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k)$ pontban számítjuk.
A hiba szórásnégyzete:

$$\sigma_f{}^2 = a_1{}^2\sigma_{x_1}{}^2 + a_2{}^2\sigma_{x_2}{}^2 + \cdots + a_k{}^2\sigma_{x_k}{}^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j{}^2\sigma_{x_j}{}^2\,. \tag{16.210}$$

3. A $\sigma_f{}^2$ szórásnégyzet közelítése

Mivel az x_j független változók szórásnégyzetei nem ismertek, ezért azokat az x_{jl} $(l = 1, 2, \ldots, n_l)$ mért értékekből becsüljük:

$$\tilde{\sigma}^2_{\overline{x}_j} = \frac{\sum_{l=1}^{n_j}(x_{jl} - \overline{x}_j)^2}{n_j(n_j - 1)}\,. \tag{16.211}$$

Ezekkel az értékekkel $\sigma_f{}^2$ közelítése:

$$\tilde{\sigma}_f{}^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j{}^2\tilde{\sigma}^2_{\overline{x}_j}\,. \tag{16.212}$$

Ez a (16.212) képlet a GAUSS-*féle hibaterjedési törvény.*

4. Speciális esetek

1. Lineáris eset A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a függvény szórásnégyzetét az egyes szórásnégyzetek összege adja, azaz minden $a_j = 1$:

$$\tilde{\sigma}_f = \sqrt{\tilde{\sigma}_1{}^2 + \tilde{\sigma}_2{}^2 + \cdots + \tilde{\sigma}_k{}^2}\,. \tag{16.213}$$

■ Spektrometriában egy detektorcsatorna impulzuserősítőjének kimenetén kell az impulzusszélességet meghatározni, amelyet három tényező befolyásol: 1. A spektrométeren átmenő E_0 energia statisztikai eloszlása, melyet $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Str}}$ jellemez; 2. statisztikai kölcsönhatások a detektorban: $\tilde{\sigma}_{\mathrm{Det}}$; 3. a detektorimpulzusok erősítőjének elektronikus zaja: $\tilde{\sigma}_{\mathrm{el}}$. A teljes impulzusszélesség hibája:

$$\sigma_f = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\mathrm{Str}} + \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{Det}} + \tilde{\sigma}^2_{\mathrm{el}}}\,. \tag{16.214}$$

2. Hatványtörvény Gyakran találkozunk a következő alakú függvénnyel:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_k) = a{x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2} \ldots {x_k}^{b_k}\,. \tag{16.215}$$

Logaritmikus differenciálással kapjuk:

$$\frac{df}{f} = b_1\frac{dx_1}{x_1} + b_2\frac{dx_2}{x_2} + \cdots + b_k\frac{dx_k}{x_k}\,, \tag{16.216}$$

amiből a hibaterjedési törvény szerint az átlagos relatív hiba:

$$\frac{\tilde{\sigma}_f}{f} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(b_j\frac{\tilde{\sigma}_{\overline{x}_j}}{\overline{x}_j}\right)^2}\,. \tag{16.217}$$

■ Legyen adott az $f(x_1, x_2, x_3)$ függvény a következő alakban: $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + {x_2}^2 + {x_3}^3$; a megfelelő szórások: σ_{x_1} , σ_{x_2} és σ_{x_3} .

Ekkor a relatív hiba:

$$\delta z = \frac{\tilde{\sigma}_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\tilde{\sigma_{x_1}}}{x_1}\right)^2 + \left(2\frac{\tilde{\sigma_{x_2}}}{x_2}\right)^2 + \left(3\frac{\tilde{\sigma_{x_3}}}{x_3}\right)^2}.$$

5. Eltérés a maximális hibától:
A (16.200), (16.201) abszolút vagy relatív maximális hiba megadása azt jelenti, hogy a mérési eredmények között kiegyenlítést nem alkalmazunk. Az abszolút vagy relatív hibáknak a hibaterjedési törvény segítségével történt meghatározásánál az x_j mérési eredmények kiegyenlítését jelenti, hogy azokra egy előre adott szintű konfidencia-intervallumot határozunk meg. Ezt az eljárásmódot 16.4.1.4. írja le.

16.4.2.2. Hibaanalízis

Hibaanalízisen egy $\varphi(x_i)$ függvény kiszámításánál fellépő hibaterjedés vizsgálatát értjük, ha a magasabbrendű tagokat nem vesszük figyelembe. A hibaanalízisben tehát egy algoritmus segítségével Δx_i bemenő hibának a $\varphi(x_i)$ függvényértékben megjelenő hatását vizsgáljuk. Ebben az összefüggésben differenciális hibaanalízisről is beszélünk.
A numerikus matematikában hibaanalízisen a számítási-, kerekítési- és bemenő-hibáknak az eredmény pontosságára gyakorolt hatását vizsgáljuk (irodalom [19.27], [19.31]).

17. Dinamikai rendszerek és káosz

17.1. Közönséges differenciálegyenletek és leképezések

17.1.1. Dinamikai rendszerek

17.1.1.1. Alapfogalmak

1. Dinamikai rendszerek típusai, pályák

A *dinamikai rendszer* fizikai, biológiai és más valós létező rendszerek leírására szolgáló matematikai objektum. Ezt az M *fázistér* — amely a továbbiakban gyakran $\mathbb{R}^n$, annak részhalmaza vagy valamely metrikus tér lesz és leképezések valamely olyan $\varphi^t\colon M \to M$ családja határozza meg, ahol a t (*az idő*) paraméter *folytonos idejű* rendszerek esetén $\mathbb{R}$, *diszkrét idejű* rendszerek esetén pedig $\mathbb{Z}$, illetve $\mathbb{Z}_+$ eleme. Ezenfelül tetszőleges $x \in M$ esetén

a) $\varphi^0(x) = x$ és

b) $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$ kell, hogy teljesüljön minden t, s mellett. A φ^1 leképezést röviden φ jelöli.

A továbbiakban az időpontok halmazát Γ-val fogjuk jelölni, ahol tehát $\Gamma = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{R}_+$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ vagy $\Gamma = \mathbb{Z}_+$ lehet. Ha $\Gamma = \mathbb{R}$, akkor a dinamikai rendszert *folyam*nak is hívjuk; ha $\Gamma = \mathbb{Z}$ vagy $\Gamma = \mathbb{Z}_+$, akkor *diszkrét* dinamikai rendszerről van szó. Ha $\Gamma = \mathbb{R}$ vagy $\Gamma = \mathbb{Z}$ akkor **a)** és **b)** miatt minden $t \in \Gamma$ mellett φ^t-vel együtt a $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$ inverz leképezés is létezik, ilyenkor *invertálható* dinamikai rendszerről beszélünk.

Ha a dinamikai rendszer nem invertálható, akkor tetszőleges $A \subset M$ részhalmaz és tetszőleges $t > 0$ esetén $\varphi^{-t}(A)$ az A halmaz φ^t által létesített $\varphi^{-t}(A) = \{x \in M : \varphi^t(x) \in A\}$ ősképét jelöli. Ha minden $t \in \Gamma$ esetén a $\varphi^t : M \to M$ leképezés folytonos, illetve k-szor folytonosan differenciálható (ilyenkor legyen $M \subset \mathbb{R}^n$), akkor a dinamikai rendszert *folytonos*nak, illetve C^k-*simá*nak nevezzük; ha a leképezés akárhányszor differenciálható, akkor C^∞-*simá*nak hívjuk.

Tetszőleges rögzített $x \in M$ mellett a $t \longmapsto \varphi^t(x)$, $t \in \Gamma$ leképezés a dinamikai rendszer 0 időpontban x pontból induló *mozgás*át definiálja. A 0 időpontban x pontból induló mozgás $\gamma(x)$ képe, azaz $\gamma(x) := \{\varphi^t(x)\}_{t\in\Gamma}$ az x ponton áthaladó *pálya* (vagy *trajektória*). Hasonlóan értelmezzük az x ponton áthaladó $\gamma^+(x) := \{\varphi^t(x)\}_{t\geq 0}$ *pozitív félpálya*t, és ha $\Gamma \neq \mathbb{R}_+$ vagy $\Gamma \neq \mathbb{Z}_+$, az x ponton áthaladó $\gamma^-(x) := \{\varphi^t(x)\}_{t\leq 0}$ *negatív félpálya*t.

A $\gamma(x)$ pálya *nyugalmi helyzet* (vagy *stacionárius pont*), ha $\gamma(x) = x$. A $\gamma(x)$ pálya T *periódusú*, (vagy T *szerint periodikus*) ha létezik olyan $T \in \Gamma$, amellyel minden $t \in \Gamma$ esetén $\varphi^{t+T}(x) = \varphi^t(x)$. A legkisebb ilyen tulajdonságú $T \in \Gamma$ pozitív szám az *alapperiódus*.

2. Differenciálegyenlet által indukált folyam

Tekintsük az

$$\dot{x} = f \circ x, \tag{17.1}$$

differenciálegyenletet, ahol az $f : M \to \mathbb{R}^n$ *vektormező* r-szer folytonosan differenciálható leképezés és $M = \mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza. A továbbiakban $\mathbb{R}^n$-ben mindig az EUKLIDÉSZi $\|\cdot\|$ normát használjuk, azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ esetén $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Ha az f leképezést komponensenként tekintjük: $f = (f_1, \ldots, f_n)$, akkor (17.1) az n skaláris differenciálegyenletből álló $\dot{x}_i = f_i \circ (x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ rendszer.

A lokálisan egyértelmű megoldhatóságra vonatkozó PICARD–LINDELÖF-féle tétel és a *kezdeti feltételek szerinti r-szeres differenciálhatóság*ra vonatkozó tétel (lásd |17.6|) garantálja, hogy minden $x_0 \in M$ ponthoz létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, $B_\delta(x_0) := \{x \in M\colon \|x - x_0\| < \delta\}$ gömb és $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta(x_0) \to M$ leképezés, amelyekre:

1. $\varphi(\cdot, \cdot)$ $(r+1)$-szer folytonosan differenciálható az első argumentuma (az idő) szerint és r-szer folytonosan differenciálható a második argumentuma (a hely) szerint.

2. Minden rögzített $x \in B_\delta(x_0)$ esetén a $\varphi(\cdot, x)$ függvény a 0 időpontban x pontból induló *lokálisan egyértelmű megoldás*a a (17.1) egyenletnek a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ időintervallumon, azaz minden $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = f(\varphi(t,x)), \quad \varphi(0,x) = x$, és bármely másik a 0 időpontban x pontból induló megoldás elegendően kicsiny időtartamokra megegyezik $\varphi(\cdot,x)$-szel.

Tegyük fel, hogy (17.1) minden lokális megoldása egyértelműen kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$ számegyenesre. Ekkor létezik olyan $\varphi\colon \mathbb{R}\times M \to M$ leképezés (*karakterisztikus függvény*), amely a következő tulajdonságú:
1. minden $x \in M$ esetén $\varphi(0,x) = x$,
2. minden $t,\ s \in \mathbb{R}$ és minden $x \in M$ esetén $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$,
3. $\varphi(\cdot,\cdot)$ az első argumentuma szerint $(r+1)$-szer, a második argumentuma szerint pedig r-szer folytonosan differenciálható,
4. minden rögzített $x \in M$ esetén $\varphi(\cdot,x)$ az egész $\mathbb{R}$ számegyenesen értelmezett megoldása a (17.1) egyenletnek.

A (17.1) egyenlethez tartozó C^r-sima folyam ezek után a $\varphi^t := \varphi(t,\cdot)$ összefüggéssel definiálható. A (17.1) egyenlet által indukált folyam $\varphi(\cdot,x)\colon \mathbb{R}\to M$ mozgását *integrálgörbé*nek hívjuk.

■ Az

$$\dot{x} = \sigma(y-x) \quad \dot{y} = rx - y - xz \quad \dot{z} = xy - bz \tag{17.2}$$

rendszer a *konvektív turbulenciát leíró* LORENZ-*rendszer* (lásd a 832. és a 851. oldalt is). Itt $\sigma > 0$, $r > 0$ és $b > 0$ paraméter. A LORENZ-rendszernek az $M = \mathbb{R}^3$ halmazon egy C^∞-folyam felel meg.

3. Diszkrét dinamikai rendszerek

Tekintsük az

$$x_{t+1} = \varphi(x_t), \tag{17.3}$$

differenciaegyenletet, amely az $x \longmapsto \varphi(x)$ hozzárendeléssel adható meg. Itt $\varphi\colon M \to M$ folytonos vagy r-szer folytonosan differenciálható leképezés; az utóbbi esetben legyen $M \subset \mathbb{R}^n$. Ha φ invertálható, akkor (17.3) a

$$\varphi^t = \underbrace{\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{t\text{-szer,}},\ \text{ha} \quad t>0, \qquad \varphi^t = \underbrace{\varphi^{-1}\circ\cdots\circ\varphi^{-1}}_{-t\text{-szer,}}, \quad \text{ha} \quad t<0,\ \varphi^0 = \mathrm{id} \tag{17.4}$$

megállapodással invertálható diszkrét dinamikai rendszert definiál. Ha φ nem invertálható, akkor a φ^t leképezések csak $t \geq 0$ esetére vannak definiálva. A φ^t leképezés realizálásáról lásd (5.86), 293. old.

■ **A:** Az

$$x_{t+1} = \alpha x_t(1-x_t), \quad t = 0,1,\ldots \tag{17.5}$$

differenciaegyenlet az $\alpha \in (0,4]$ paraméterrel a *logisztikus egyenlet*. Itt $M = [0,1]$ és rögzített α mellett $\varphi\colon [0,1]\to[0,1]$ a $\varphi(x) := \alpha x(1-x)$ képlettel megadott függvény. Nyilvánvalóan φ végtelen sokszor differenciálható, de nem invertálható. A (17.5) egyenlet tehát nem invertálható dinamikai rendszert definiál.

■ **B:** Az

$$x_{t+1} = y_t + 1 - ax_t^2, \quad y_{t+1} = bx_t, \quad t = 0,\pm1,\ldots, \tag{17.6}$$

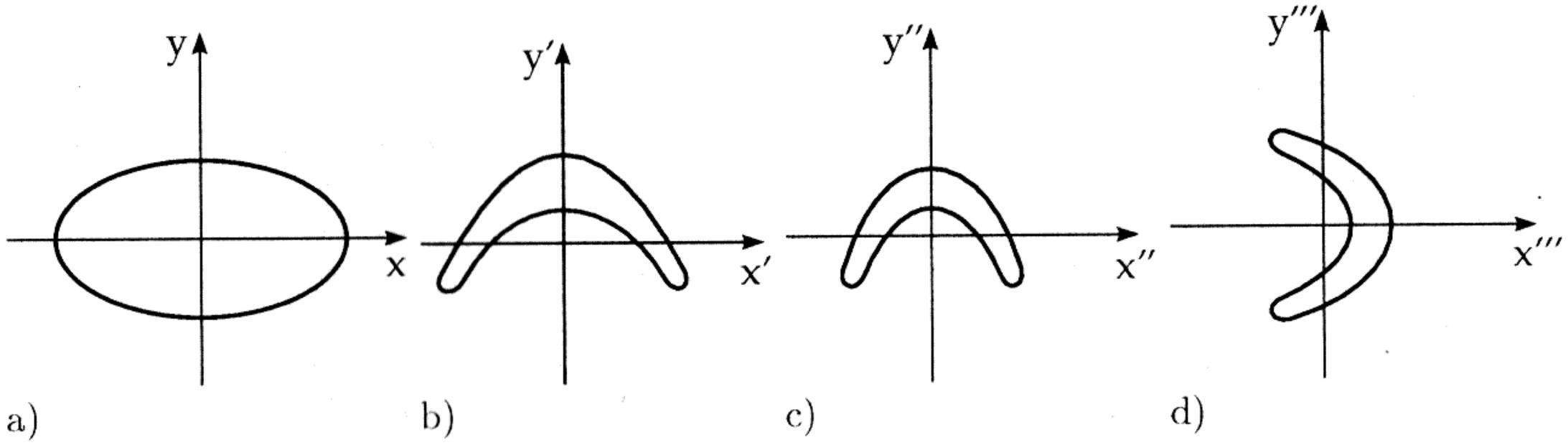
differenciaegyenlet az $a > 0$ és $b \neq 0$ paraméterrel az HÉNON-*leképezés*. A (17.6) egyenletnek megfelelő $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x,y) := (y+1-ax^2\ bx)$ leképezés végtelen sokszor differenciálható és invertálható.

4. Térfogatcsökkentő és térfogatmegőrző rendszerek

Az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon definiált $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ invertálható dinamikai rendszer *térfogatcsökkentő* vagy *disszipatív*, illetve *térfogatmegőrző* vagy *konzervatív*, ha minden olyan $A \subset M$ halmaz esetén, amelynek $\mathrm{vol}(A)$ n-dimenziós térfogata pozitív és minden $t > 0\ (t \in \Gamma)$ mellett fennáll a $\mathrm{vol}(\varphi^t(A)) < \mathrm{vol}(A)$, illetve a $\mathrm{vol}(\varphi^t(A)) = \mathrm{vol}(A)$ reláció.

■ **A:** Legyen a (17.3)-ban szereplő φ függvény C^r*-diffeomorfizmus* (azaz $M \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\varphi\colon M\to M$ invertálható, φ és φ^{-1} C^r-sima leképezés) és legyen $D\varphi(x) \quad \varphi$ JACOBI-mátrixa az $x \in M$ pontban. A (17.3) diszkrét rendszer disszipatív, ha minden $x \in M$ esetén $|\det D\varphi(x)| < 1$, és konzervatív, ha az M halmazon $|\det D\varphi(x)| \equiv 1$.

■ **B:** Mivel a (17.6) rendszer esetén $D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, így $|\det D\varphi(x,y)| \equiv b$, ezért (17.6) disszipatív, ha $|b| < 1$, és konzervatív, ha $|b| = 1$.
Az HÉNON-leképezés három leképezésből tehető össze **(17.1. ábra)**: A kiindulási tartományt először az $x' = x$, $y' = y + 1 - ax^2$ leképezés területtartó módon kinyújtja és meghajlítja, azután az $x'' = bx'$, $y'' = y'$ leképezés az első tengely irányában összenyomja (ha $|b| < 1$) és végül az $x''' = y''$, $y''' = x''$ leképezés a szögfelezőre tükrözi.



17.1. ábra.

17.1.1.2. Invariáns halmazok

1. α- és ω-határhalmazok, elnyelő halmazok

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer M-en. Az $A \subset M$ halmazt *a $\{\varphi^t\}$ leképezésre nézve invariáns*nak nevezzük, ha $\varphi^t(A) = A$ minden $t \in \Gamma$ esetén, és *a $\{\varphi^t\}$ leképezésre nézve pozitívan invariáns*nak nevezzük, ha $\varphi^t(A) \subset A$ minden $t \in \Gamma, t \geq 0$ esetén.
Minden $x \in M$ esetén az *x-en áthaladó pálya ω-határhalmaza*

$$\omega(x) := \{y \in M : \exists\, t_n \in \Gamma, \quad t_n \to +\infty, \quad \varphi^{t_n}(x) \to y, \quad \text{ha } n \to +\infty\}. \tag{17.7}$$

Az $\omega(x)$ halmaz elemei a pálya *ω-határpont*jai. Ha invertálható dinamikai rendszerről van szó, akkor minden $x \in M$ esetén az

$$\alpha(x) := \{y \in M : \exists\, t_n \in \Gamma, \quad t_n \to -\infty, \quad \varphi^{t_n}(x) \to y, \quad \text{ha } n \to +\infty\} \tag{17.8}$$

halmaz az *x-en áthaladó pálya α-határhalmaza*; $\alpha(x)$ elemei a pálya *α-határpont*jai.
A térfogatcsökkentés lokális tulajdonsága sok rendszernél azzal jár, hogy létezik a fázistérben egy olyan korlátos halmaz, amelybe az idő múlásával minden pálya eljut, és ott is marad. A $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ rendszerre nézve *elnyelő*nek nevezzük az olyan korlátos, nyílt, összefüggő $U \subset M$ halmazt, amelyre minden pozitív $t \in \Gamma$ mellett $\varphi^t(\overline{U}) \subset U$ teljesül. (Itt $\overline{U}$ az U halmaz lezártját jelöli.)

■ Tekintsük a síkon az

$$\dot{x} = -y + x\,(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y\,(1 - x^2 - y^2). \tag{17.9a}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Az $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ polárkoordináták bevezetésével (17.9a) megoldása az $(r(0), \vartheta(0)) = (r_0, \vartheta_0)$ kezdeti feltétel mellett

$$r(t, r_0) = [1 + (r_0^{-2} - 1)\,e^{-2t}]^{-1/2}, \quad \vartheta(t, \vartheta_0) = t + \vartheta_0 \tag{17.9b}$$

alakban adható meg. A megoldás ilyen előállításából következik, hogy a (17.9a) által indukált folyamnak van 2π periódusú pályája, amely $\gamma((1,0)) = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$ alakban állítható elő. A p ponton átmenő pályák határhalmazaira:

$$\alpha(p) = \begin{cases} (0,0) & \| p \| < 1\,, \\ \gamma((1,0)), & \| p \| = 1\,, \\ \emptyset\,, & \| p \| > 1 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \omega(p) = \begin{cases} \gamma((1,0))\,, & p \neq (0,0)\,, \\ (0,0)\,, & p = (0,0)\,. \end{cases}$$

Minden olyan $B_r := \{(x,y) : x^2 + y^2 < r^2\}$ gömb, amelyre $r > 1$, elnyelő halmaza (17.9a)-nek.

2. Az invariáns halmazok stabilitása

Legyen A az (M, ρ) metrikus téren definiált $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszerre nézve invariáns halmaz. Az A halmazt *stabilis*nak nevezzük, ha A minden U környezetében van A-nak olyan $U_1 \subset U$ környezete, hogy minden $t > 0$ mellett $\varphi^t(U_1) \subset U$. A $\{\varphi^t\}$-re nézve invariáns A halmaz *aszimptotikusan stabilis*, ha stabilis és fennáll a következő:

$$\exists\, \Delta > 0 \quad \left.\begin{array}{l} \forall x \in M \\ \operatorname{dist}(x, A) < \Delta \end{array}\right\} : \quad \operatorname{dist}(\varphi^t(x), A) \longrightarrow 0, \quad \text{ha} \quad t \to +\infty. \tag{17.10}$$

Itt $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\limits_{y\in A} \rho(x, y)$.

3. Kompakt halmazok

Legyen (M, ρ) metrikus tér. Az $\{U_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer M *nyílt lefedése*, ha M minden pontja eleme legalább egy U_i halmaznak. Az (M, ρ) metrikus teret *kompakt*nak hívjuk, ha M minden $\{U_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ lefedéséből kiválasztható véges sok olyan $U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}$ halmaz, hogy $M = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$. A $K \subset M$ halmaz kompakt, ha K mint altér kompakt.

4. Attraktor, vonzási tartomány

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer az (M, ρ) metrikus téren, és legyen A invariáns halmaz $\{\varphi^t\}$-re nézve. A $W(A) := \{x \in M : \omega(x) \subset A\}$ halmazt A *vonzási tartomány*ának nevezzük. A $\Lambda \subset M$ halmaz az M-en definiált $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer *attraktor*a, ha Λ invariáns $\{\varphi^t\}$-re nézve, és Λ-nak van olyan U nyílt környezete, amelyre (a LEBESGUE-mérték értelmében) majdnem minden $x \in U$ mellett $\omega(x) = \Lambda$ teljesül.

■ A $\Lambda = \gamma((1, 0))$ pálya a (17.9a) egyenlet által indukált folyam attraktora. Itt $W(\Lambda) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Bizonyos dinamikai rendszerekhez általánosabb attraktorfogalomra van szükségünk. Így például vannak olyan Λ invariáns halmazok, amelyeknek minden környezetében van olyan periodikus pálya, amelyet Λ nem vonz (például a FEIGENBAUM-attraktor.) Az sem szükségszerű, hogy a Λ halmazt egyetlen ω-határhalmaz feszítse ki. A Λ kompakt halmazt az M-en definiált $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer MILNOR-*féle értelemben vett attraktor*ának hívjuk, ha Λ invariáns $\{\varphi^t\}$-re nézve és Λ vonzási tartománya tartalmaz pozitív LEBESGUE-mértékű halmazt.

17.1.2. A közönséges differenciálegyenletek kvalitatív elmélete

17.1.2.1. A folyam létezése és a fázistér szerkezete

1. A megoldások folytathatósága

A (17.1) differenciálegyenlet mellett, amelyet *autonóm*nak nevezünk, olyan differenciálegyenletek is fellépnek, amelyeknek a jobb oldala explicite függ az időtől, és amelyeket ezért *nemautonóm* egyenleteknek hívunk:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{17.11}$$

Itt legyen $f\colon \mathbb{R} \times M \to M$ $(M \subset \mathbb{R}^n)$ egy C^r-leképezés. Az $x_{n+1} := t$ új változó bevezetésével (17.11) mint az $\dot{x} = f \circ (x_{n+1}, x)$, $\dot{x}_{n+1} = 1$ autonóm differenciálegyenlet interpretálható. A (17.11) egyenlet t_0 időpontban x_0-ból induló megoldását $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ fogja jelölni.

Ha meg akarjuk mutatni, hogy a (17.1) egyenletnek a megoldása globálisan létezik (vagyis értelmezési tartománya kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$ számegyenesre) és ezáltal az általa indukált folyam is létezik, gyakran hasznosnak bizonyulnak a következő tételek.

1. Wintner és Conti kritériuma Ha (17.1)-ben $M = \mathbb{R}^n$ és létezik olyan $\omega\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ folytonos függvény, amellyel minden $x \in \mathbb{R}^n$ mellett $\|f(x)\| \le \omega(\|x\|)$ teljesül és amelyre $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{\omega(r)} dr = +\infty$, akkor (17.1) minden megoldása az egész $\mathbb{R}_+$ félegyenesre kiterjeszthető.

■ WINTNER és CONTI kritériumának alkalmazásához például a következő függvények választhatók: $\omega(r) = Cr + 1$ és $\omega(r) = C\,r|\ln\, r| + 1$, ahol $C > 0$ tetszőleges állandó.

2. A folytatási elv Ha (17.1) valamely megoldása az idő növekedtével korlátos marad, akkor ez a megoldás minden pozitív időre (így az egész $\mathbb{R}_+$ halmazon) értelmezhető.

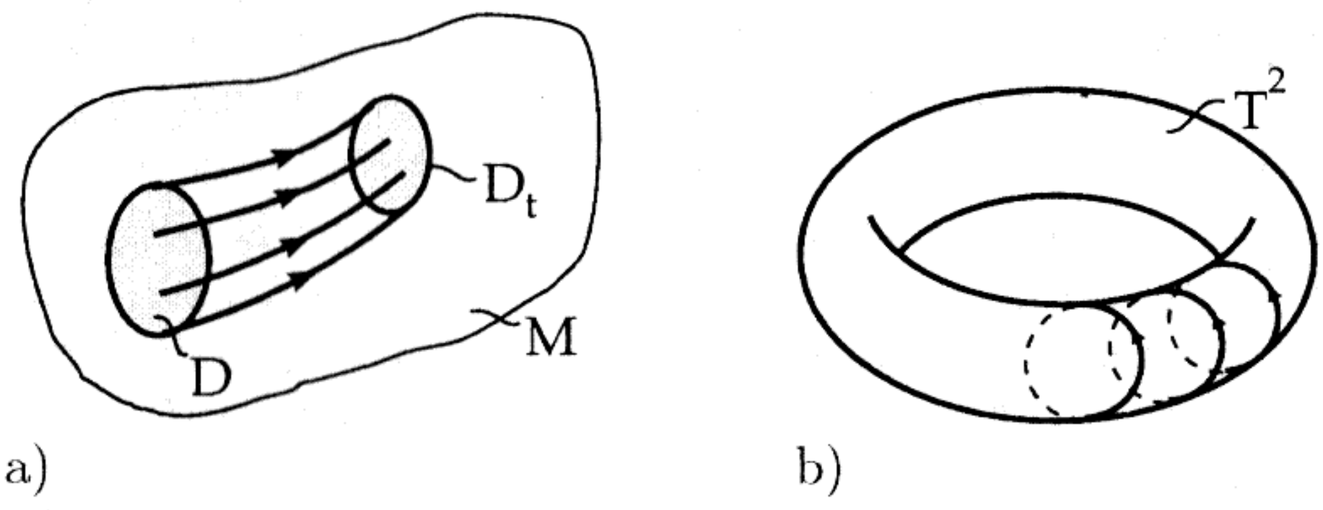
Feltevés: A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy létezik egy (17.1) által indukált folyam.

2. Fázisportré

a) Ha φ megoldása a (17.1) egyenletnek, akkor tetszőleges c állandóval $t \mapsto \varphi(t+c)$ is megoldása annak.
b) A (17.1) egyenlet két tetszőleges pályájának vagy nincs közös pontja vagy egybeesnek. Az egyenlet fázistere tehát diszjunkt pályákra bomlik. A fázistér diszjunkt pályákra való felbontását nevezzük *fázisportré*nak.
c) Minden nyugalmi helyzettől különböző pálya reguláris sima görbe, amely lehet zárt vagy nem zárt.

3. Liouville tétele

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\mathrm{R}}$ a (17.1) egyenlet által indukált folyam, $D \subset M \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges korlátos, mérhető halmaz, $D_t := \varphi^t(D)$ és $V_t :=$ vol(D_t) a D_t halmaz n-dimenziós térfogata **(17.2.a ábra)**. Akkor



17.2. ábra.

tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ mellett fönnáll a $\dfrac{d}{dt}\, V_t = \displaystyle\int_{D_t} \mathrm{div} f(x)\, dx$ összefüggés. Az $n = 3$ esetben LIOUVILLE tétele így szól:

$$\frac{d}{dt}\, V_t = \iiint_{D_t} \mathrm{div} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,. \tag{17.12}$$

Következmény: Ha a (17.1) egyenletre teljesül, hogy minden $x \in M$ esetén $\mathrm{div} f(x) < 0$, akkor a (17.1) által indukált folyam térfogatcsökkentő. Ha minden $x \in M$ esetén $\mathrm{div} f(x) = 0$, akkor a (17.1) által indukált folyam térfogatmegőrző.

■ **A:** A (17.2) LORENZ-rendszernél $\mathrm{div} f(x, y, z) \equiv -(\sigma + 1 + b)$. Mivel $\sigma > 0$ és $b > 0$, ezért $\mathrm{div} f(x, y, z) < 0$. LIOUVILLE tétele szerint tehát tetszőleges korlátos és mérhető $D \subset \mathbb{R}^3$ halmazra $\dfrac{d}{dt}\, V_t = \displaystyle\iiint_{D_t} -(\sigma + 1 + b)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -(\sigma + 1 + b)\, V_t$. A $\dot{V}_t = -(\sigma + 1 + b)\, V_t$ lineáris differenciálegyenlet megoldása $V_t = V_0 \cdot e^{-(\sigma+1+b)t}$, következésképpen $V_t \to 0$, ha $t \to +\infty$.

■ **B:** Legyen $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és legyen $H\colon U \to \mathbb{R}$ egy C^2-függvény. Az $\dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \circ (x, y)$, $\dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \circ (x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ differenciálegyenletet HAMILTON-féle *differenciálegyenlet*nek nevezzük. A H függvény a rendszer HAMILTON-*függvénye*. Ha ennek a differenciálegyenletnek a jobboldalát f jelöli, akkor nyilvánvaló, hogy $\forall (x, y) \in U$ div $f(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i}(x, y) - \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i}(x, y) \right] = 0$. A HAMILTON-féle differenciálegyenletek tehát térfogatmegőrzők.

17.1.2.2. Lineáris differenciálegyenletek

1. Alaptételek

Legyen $t \mapsto A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{n}$ $\mathbb{R}$-en definiált mátrixfüggvény, ahol az összes $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ komponens folytonos, és legyen b: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ folytonos vektorértékű függvény. Akkor az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{17.13a}$$

egyenletet *elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük, az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{17.13b}$$

egyenletet pedig a hozzátartozó *elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet*nek.

1. A homògén lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó alaptétel A (17.13b) egyenlet minden megoldása kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$ halmazra. (17.13b) megoldásainak L_H halmaza az $\mathbb{R}$-en definiált C^1-sima vektorfüggvények lineáris terének n-dimenziós altere (*a homogén lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó alaptétel*).

2. Az inhomogén lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó alaptétel A (17.13a) egyenlet megoldásainak halmaza az $\mathbb{R}$-en definiált C^1-sima vektorfüggvények $L_I = \varphi_0 + L_H$ alakú affin alterét alkotják, ahol φ_0 az egyenlet tetszőleges megoldása (*az inhomogén lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó alaptétel*). Legyen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ a (17.13b) egyenlet tetszőleges megoldása és $\Phi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ a hozzá tartozó *megoldásmátrix*. Akkor a Φ függvény $\mathbb{R}$-en kielégíti a $\dot{Z}(t) = A(t)Z(t)$ *mátrix-differenciálegyenlet*et, ahol $Z(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ az L_H tér valamely bázisa, akkor $\Phi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ neve: (17.13b) *alapmátrix*a. Ha Φ a (17.13b) egyenlet egy megoldásmátrixa, akkor $W(t) := \det \Phi(t)$ a WRONSKI-*determináns*. Erre fennáll a LIOUVILLE-*formula*:

$$\dot{W}(t) = \operatorname{Sp} A(t)\, W(t) \quad (t \in \mathbb{R})\,. \tag{17.13c}$$

Vagy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $W(t) = 0$, vagy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $W(t) \neq 0$. A $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ rendszer pontosan akkor bázisa L_H-nak, ha valamilyen t-re (és így mindegyikre) $\det[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \neq 0$.

3. Az állandók variálására vonatkozó tétel Legyen Φ a (17.13b) egyenlet tetszőleges alapmátrixa. Akkor a (17.13a) egyenlet τ időpontban p-ből induló megoldása

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(\tau)^{-1}\, p + \int_{\tau}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\, b(s)ds \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{17.13d}$$

alakban állítható elő (*az állandók variálására vonatkozó tétel*).

2. Autonóm lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük az $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$-típusú függvényekre vonatkozó

$$\dot{x} = A\, x, \tag{17.14}$$

differenciálegyenletet, ahol A egy (n, n)-típusú állandó mátrix. Az A mátrix *operátornormáját* (lásd a 637. oldalt is) így definiáljuk: $\|A\| := \max\{\|A\, x\|,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \leq 1\}$, ahol $\mathbb{R}^n$ vektorainak normáján ismét az euklideszi-normát kell érteni.

Legyen A és B két tetszőleges (n, n)-típusú mátrix. Akkor:

a) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, **b)** $\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$,

c) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, **d)** $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,

e) $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, ahol $\lambda_{\max}$ a legnagyobb sajátértéke $A^T A$-nak.

A (17.14) egyenlet 0 időpontban E_n kezdeti értéket felvevő alapmátrixa az

$$e^{At} = E_n + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \tag{17.15}$$

mátrix-exponenciálisfüggvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) A $t \mapsto e^{At}$ függvény hatványsora tetszőleges kompakt időintervallumon egyenletesen és az egész számegyenesen abszolút konvergens;

b) $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t} \quad (t \geq 0)$;

c) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = (e^{At})^{\cdot} = Ae^{At} = e^{At}A \quad (t \in \mathbb{R})$;

d) $e^{(t+s)A} = e^{tA}\, e^{sA} \quad (s, t \in \mathbb{R})$;

e) minden $t \in \mathbb{R}$ esetén e^{At} reguláris és $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$;

f) ha A és B (n,n)-típusú felcserélhető mátrixok, azaz $AB = BA$, akkor $B\, e^A = e^A\, B$ és $e^{A+B} = e^A\, e^B$;

g) ha A és B (n,n)-típusú mátrixok és B reguláris, akkor $e^{BAB^{-1}} = B\, e^A\, B^{-1}$.

3. Periodikus együtthatójú lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük a (17.13b) homogén lineáris differenciálegyenletet, ahol $t \mapsto A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$ *T periódusú mátrix-függvény*, azaz $\forall t \in \mathbb{R},\ \ i,j = 1,\dots,n \quad a_{ij}(t) = a_{ij}\,(t+T)$. Ebben az esetben (17.13b) *lineáris T periódusú differenciálegyenlet.* Ilyenkor (17.13b) minden Φ alapmátrixa $\Phi(t) = G(t)e^{tR}$ alakban állítható elő, ahol G sima, reguláris T periódusú mátrixfüggvény, R pedig (n,n)-típusú állandó mátrix (FLOQUET *tétele*). Legyen $\Phi(t)$ a (17.13b) T periódusú differenciálegyenletnek a 0 időpontban normált ($\Phi(0) = E_n$) alapmátrixa és legyen ennek $\Phi(t) = G(t)e^{tR}$ egy a FLOQUET-tétel szerinti előállítása. Akkor a $\Phi(T) = e^{RT}$ mátrixot (17.13b) *monodrómiamátrix*ának hívjuk; sajátértékei (17.13b) *multiplikátor*ai. A $\rho \in \mathbf{C}$ szám pontosan akkor multiplikátora a (17.13b) egyenletnek, ha ennek van olyan φ megoldása, amelyre $\varphi(t+T) = \rho\,\varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R})$ teljesül.

17.1.2.3. Stabilitáselmélet

1. Ljapunov-féle stabilitás és orbitális stabilitás

Tekintsük a (17.11) nemautonóm differenciálegyenletet. Ennek $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ megoldása LJAPUNOV-*féle értelemben stabilis*, ha

$$\left.\begin{array}{rr} \forall t_1 \geq t_0\ \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_1) & \forall x_1 \in M \\ & \|x_1 - \varphi(t_1, t_0, x_0)\| < \delta \end{array}\right\} : \|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$$

$$\forall t \geq t_1\,. \tag{17.16a}$$

A $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ megoldást LJAPUNOV-*féle értelemben aszimptotikusan stabilis*nak hívjuk, ha stabilis és

$$\left.\begin{array}{rr} \forall t_1 \geq t_0\ \ \exists \Delta = \Delta(t_1) & \forall x_1 \in M \\ & \|x_1 - \varphi(t_1, t_0, x_0)\| < \Delta \end{array}\right\} : \|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)\| \to 0,$$

$$\text{ha } t \to +\infty\,. \tag{17.16b}$$

A (17.1) autonóm differenciálegyenletre a LJAPUNOV-féle értelemben vett stabilitás mellett vizsgálhatjuk a pályamenti (vagy orbitális) stabilitást is. Az (17.1) egyenlet $\varphi(\cdot, x_0)$ megoldása *orbitálisan stabilis* (*aszimptotikusan orbitálisan stabilis*), ha a $\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ pálya stabilis (aszimptotikusan stabilis) mint invariáns halmaz. A (17.1) egyenlet nyugalmi helyzetet reprezentáló megoldása (stacionárius pontja) pontosan akkor stabilis LJAPUNOV-féle értelemben, ha orbitálisan stabilis. A (17.1) egyenlet periodikus megoldásai körében azonban már különbözhet a kétféle stabilitásfogalom.

■ Legyen adott $\mathbb{R}^3$-ban egy olyan folyam, amelynek a T^2 tórusz invariáns halmaza. Tegyük fel, hogy derékszögű koordinátákban a folyamot $\dot{\Theta}_1 = 0$, $\dot{\Theta}_2 = f_2 \circ \Theta_1$ írja le, ahol $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus sima függvény, amelyre:

$$\left.\begin{array}{rrr} \forall \Theta_1 \in \mathbb{R} & \exists\, U_{\Theta_1}\ (\Theta_1 \text{ környezete}) & \forall \delta_1, \delta_2 \in U_{\Theta_1} \\ & & \delta_1 \neq \delta_2 \end{array}\right\} : f_2(\delta_1) \neq f_2(\delta_2).$$

A $(\Theta_1(0), \Theta_2(0))$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás a tóruszon így adható meg:

$$\Theta_1(t) = \Theta_1(0)\,, \quad \Theta_2(t) = \Theta_2(0) + f_2(\Theta_1(0))t \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ebből az előállításból látható, hogy minden megoldás orbitálisan stabilis, de LJAPUNOV-féle értelemben nem stabilis **(17.2.b ábra)**.

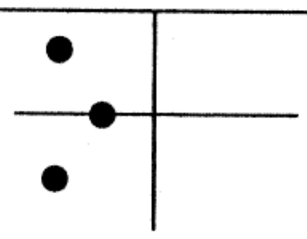
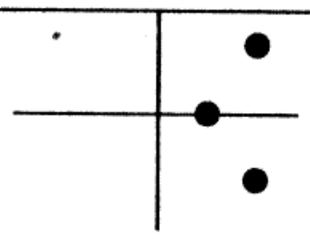
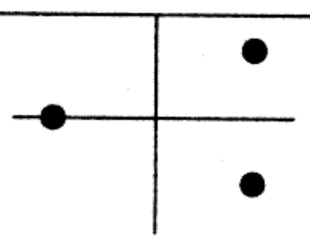
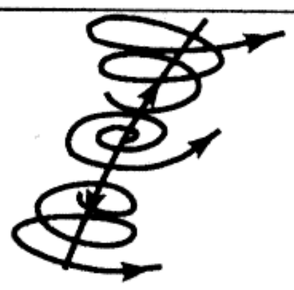
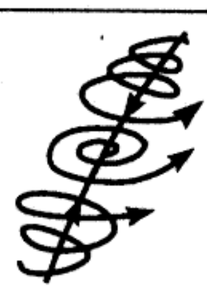
2. Ljapunov aszimptotikus stabilitásra vonatkozó tétele

A skalárértékű V függvényt a $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ pont U környezetében *pozitív definit*nek hívjuk, ha:
1. $V: U \subset M \to \mathbb{R}$ folytonos, és
2. minden $x \in U \setminus \{p\}$ esetén $V(x) > 0$, továbbá $V(p) = 0$.
Legyen $U \subset M$ nyílt halmaz és $V: U \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. A V függvény LJAPUNOV-*függvénye* a (17.1) egyenletnek U-ban, ha $V \circ \varphi$ nem nő, mindaddig, amíg a megoldásra $\varphi(t) \in U$ fennáll. Legyen $V: U \to \mathbb{R}$ LJAPUNOV-függvénye a (17.1) egyenletnek és legyen V pozitív definit p valamely U környezetében. Ekkor p stabilis. Ha ezenkívül az is fennáll, hogy (17.1) valamely a $\varphi(t, x) \in U \quad (t \geq 0)$ feltételnek eleget tevő megoldására a $V(\varphi(t, x_0)) =$ állandó $(t \geq 0)$ összefüggés azt vonja maga után, hogy $\varphi(t, x_0) = p$ $(t \geq 0)$ is mindig fennáll (vagyis ha a LJAPUNOV-függvény teljes trajektória mentén állandó, akkor az a teljes trajektória csak a stacionárius pont lehet), akkor a p stacionárius pont még aszimptotikusan stabilis is.

■ A $(0, 0)$ pont stacionárius pontja az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - x^2 y$ síkbeli differenciálegyenletnek, $V(x, y) := x^2 + y^2$ pedig olyan függvény, amely $(0, 0)$ minden környezetében pozitív definit és amelynek deriváltjára tetszőleges megoldás mentén $\dfrac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = -2x(t)^2 y(t)^2 < 0$, ha $x(t)y(t) \neq 0$ teljesül. A $(0, 0)$ pont tehát aszimptotikusan stabilis.

3. A stacionárius pontok osztályozása és stabilitása

Legyen x_0 a (17.1) egyenlet stacionárius pontja. Ennek közelében a pályák lokális viselkedése bizonyos feltételek mellett az $\dot{y} = D f(x_0) y$ *variációs egyenlet*tel írható le, ahol $Df(x_0)$ az f függvény JACOBI-mátrixa az x_0 pontban. Ha $Df(x_0)$-nak nincsen olyan λ_j sajátértéke, amelyre $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, akkor az x_0 stacionárius pont *hiperbolikus*. Az x_0 hiperbolikus stacionárius pont (m, k)-típusú, ha $Df(x_0)$-nak pontosan m sajátértéke negatív valós részű és $k := n - m$ sajátértéke pozitív valós részű. Az (m, k)-típusú hiperbolikus stacionárius pont *nyelő*, ha $m = n$, *forrás*, ha $k = n$, és *nyereg*, ha $m \neq 0$ és $k \neq 0$ **(17.3. ábra)**. A nyelő aszimptotikusan stabilis; a forrás és a nyereg instabilis (*az első közelítésben vett stabilitásra vonatkozó tétel*). A hiperbolikus stacionárius pontokon (nyelő, forrás és nyeregpont) belül további algebrai különbségeket szokás tenni. Így a nyelő (forrás) *stabilis csomó* (*instabilis csomó*), ha a JACOBI-mátrix minden sajátértéke valós, és *stabilis fókusz* (*instabilis fókusz*), ha vannak nem eltűnő képzetes részű sajátértékek. Az $n = 3$ esetben ebből adódik a nyeregpontok felosztása nyeregcsomókra és nyeregfókuszokra.

A stacionárius pont típusa	nyelő	forrás	nyeregpont
A JACOBI-mátrix sajátértékei			
Fázisportré			

17.3. ábra.

4. Periodikus pályák stabilitása

Legyen $\varphi(\cdot, x_0)$ a (17.1) egyenlet T periódusú megoldása és $\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0),\ t \in [0, T]\}$ ennek a pályája. Bizonyos feltételek mellett a fázisportrét $\gamma(x_0)$ közelében az $\dot{y}(t) = D f(\varphi(t, x_0))\, y(t)$ *variációs*

egyenlet írja le. Mivel $t \mapsto A(t) := Df(\varphi(t,x_0))$ (n,n)-típusú T szerint periodikus folytonos mátrixfüggvény, ezért FLOQUET tételéből következik, hogy a variációs egyenlet $t=0$-nál normált $\Phi_{x_0}(t)$ alapmátrixa $\Phi_{x_0}(t) = G(t)e^{Rt}$ alakban állítható elő, ahol G olyan T periódusú reguláris sima mátrixfüggvény, amelyre $G(0) = E_n$ teljesül, és R (n,n)-típusú állandó mátrix, amely nincs egyértelműen meghatározva. A $\Phi_{x_0}(T) = e^{RT}$ mátrix a $\gamma(x_0)$ *periodikus pálya monodrómiamátrixa*, az e^{RT} mátrix sajátértékei a $\gamma(x_0)$ *periodikus pálya multiplikátorai.* Ha a $\gamma(x_0)$ pályát egy másik $\varphi(\cdot,x_1)$ megoldás reprezentálja, azaz $\gamma(x_0) = \gamma(x_1)$, akkor $\gamma(x_0)$ és $\gamma(x_1)$ multiplikátorai egybeesnek. Periodikus pálya egyik multiplikátora (az ANDRONOV–WITT-*tétel szerint*) mindig 1.

Legyenek $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n = 1$ a $\gamma(x_0)$ periodikus pálya multiplikátorai, és legyen $\gamma(x_0)$ monodrómiamátrixa $\Phi_{x_0}(T)$. Akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j = \mathrm{Sp}\Phi_{x_0}(T) \text{ és } \prod_{j=1}^{n} \rho_j = \det \Phi_{x_0}(T) = e^{\int_0^T \mathrm{Sp}Df(\varphi(t,x_0))dt}$$
$$= e^{\int_0^T \mathrm{div} f(\varphi(t,x_0))dt}. \tag{17.17}$$

Ha még $n=2$ is teljesül, akkor $\rho_2 = 1$ és $\rho_1 = e^{\int_0^T \mathrm{div} f(\varphi(t,x_0))dt}$.

■ Legyen a (17.9a) egyenlet 2π szerint periodikus megoldása $\varphi(\cdot,(1,0)) = (\cos t, \sin t)$. A variációs egyenlet $A(t)$ mátrixa

$$A(t) = Df(\varphi(t,(1,0))) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-\sin 2t \\ 1-\sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

A $t=0$-nál normált $\Phi_{(1,0)}(t)$ alapmátrix

$$\Phi_{(1,0)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t \\ e^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol az utolsó szorzat a $\Phi_{(1,0)}(t)$ mátrix FLOQUET-előállítása. Továbbá $\rho_1 = e^{-4\pi}$ és $\rho_2 = 1$. A multiplikátorokat a FLOQUET-előállítás nélkül is meg lehet határozni. A (17.9a) rendszer esetén $\mathrm{div} f(x,y) = 2-4x^2-4y^2$. Ebből $\mathrm{div} f(\cos t, \sin t) = -2 \quad (t \in \mathbb{R})$. A fenti képlet szerint $\rho_1 = e^{\int_0^{2\pi} -2dt} = e^{-4\pi}$.

5. Periodikus pályák osztályozása

Ha a (17.1) egyenlet γ periodikus pályájának $\rho_n = 1$-en kívül további multiplikátora nincs a komplex egységkörön, akkor γ *hiperbolikus*. A hiperbolikus periodikus pálya (m,k)-*típusú*, ha m számú multiplikátora az egységkörön belül, $k := n-1$ számú multiplikátora pedig az egységkörön kívül fekszik. Ha $m>0$ és $k>0$, akkor a periodikus pálya (m,k)-típusú *nyeregszerű.*

ANDRONOV és WITT egy tétele szerint a (17.1) egyenlet $(n-1,0)$-típusú hiperbolikus periodikus pályája aszimptotikusan stabilis. Az (m,k)-típusú hiperbolikus periodikus pályák $k>0$ esetén instabilisak.

■ **A:** A $\gamma = \{\varphi(t) : t \in [0,T]\}$ síkbeli periodikus pálya — amelynek multiplikátorai ρ_1 és $\rho_2 = 1$ — aszimptotikusan stabilis, ha $|\rho_1| < 1$, azaz, ha $\int_0^T \mathrm{div} f(\varphi(t))\,dt < 0$.

■ **B:** Ha a $\rho_n = 1$ multiplikátoron kívül még egy további is a komplex egységkörön fekszik, akkor az ANDRONOV–WITT-tétel nem alkalmazható. A periodikus pályák stabilitási analíziséhez a multiplikátorokra vonatkozó információ nem elegendő.

■ **C:** Példaként tekintsük az $\dot{x} = -y + x\,f \circ (x^2+y^2)$, $\quad \dot{y} = x + y\,f \circ (x^2+y^2)$ síkbeli rendszert az $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sima függvénnyel, amely teljesíti még az $f(1) = f'(1) = 0$, és minden $r \neq 1, r>0$, esetén az $f(r)(r-1) < 0$ feltételeket is. Nyilvánvalóan $t \mapsto \varphi(t) := (\cos t, \sin t)$ a vizsgált rendszer 2π szerint periodikus megoldása és $\Phi_{(1,0)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ az alapmátrix FLOQUET-előállítása.

Innen látszik, hogy $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Polárkoordinátákra áttérve a rendszer alakja $\dot{r} = r f \circ r^2$, $\dot{\vartheta} = 1$. Ebből az előállításból azonnal következik, hogy a $\gamma((1,0))$ periodikus pálya aszimptotikusan stabilis.

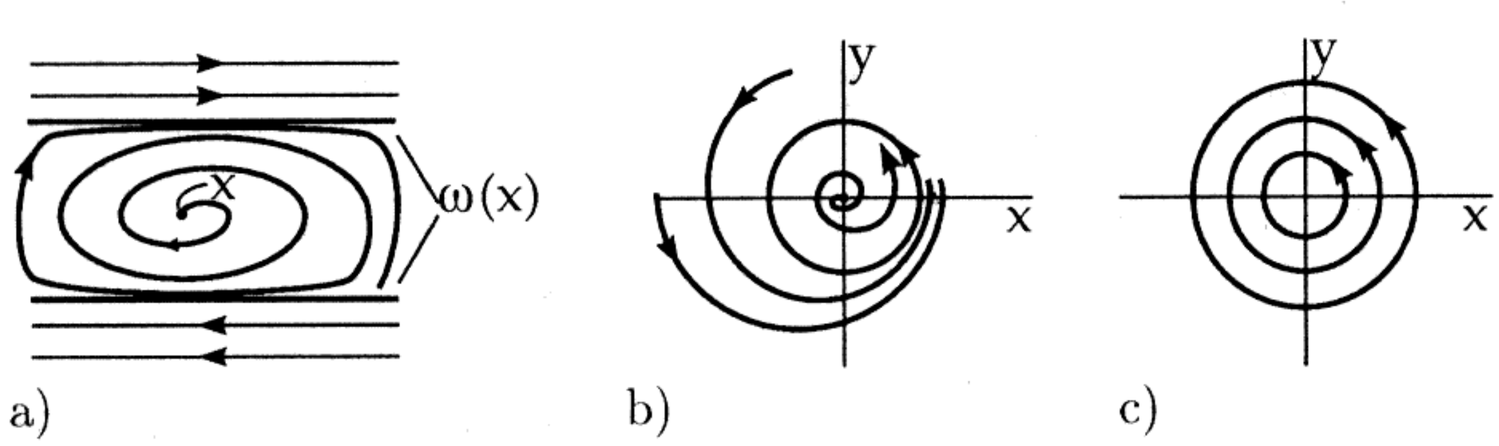
6. A határhalmazok tulajdonságai. Határciklusok

A 17.1.1.2. alpontban definiált α- és ω-határhalmaz az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon megadott (17.1) differenciálegyenlet folyamára nézve a következő tulajdonságokkal rendelkezik. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont. Akkor:

a) Az $\alpha(x)$ és az $\omega(x)$ halmaz zárt.

b) Ha $\gamma^+(x)$, illetve $\gamma^-(x)$ korlátos, akkor $\omega(x) \neq \emptyset$, illetve $\alpha(x) \neq \emptyset$. Ezenkívül ebben az esetben $\omega(x)$, illetve $\alpha(x)$ a (17.1) egyenlet folyamára nézve invariáns, továbbá összefüggő.

■ Ha például $\gamma^+(x)$ nem korlátos, akkor $\omega(x)$ nem feltétlenül összefüggő **(17.4.a ábra)**. A (17.1) sík-



17.4. ábra.

beli autonóm differenciálegyenletre (azaz, ha $M \subset \mathbb{R}^2$) érvényes a

Poincaré–Bendixson-tétel: Legyen $\varphi(\cdot, p)$ a (17.1) egyenlet olyan nem periodikus megoldása, amelyre $\gamma^+(p)$ korlátos. Ha $\omega(p)$ nem tartalmazza (17.1) stacionárius pontját, akkor $\omega(p)$ az egyenlet periodikus pályája.

Síkbeli autonóm differenciálegyenletek esetén tehát nem lehetséges bonyolultabb attraktor, mint a stacionárius pont vagy a periodikus pálya.

A (17.1) egyenlet γ periodikus pályáját *határciklus*nak nevezzük, ha van olyan $x \notin \gamma$ pont, hogy vagy $\gamma \subset \omega(x)$ vagy $\gamma \subset \alpha(x)$ teljesül. A határciklus *stabilis határciklus*, ha van olyan U környezete γ-nak, hogy minden $x \in U$ esetére $\gamma = \alpha(x)$, és *instabilis határciklus*, ha van olyan U környezete γ-nak, hogy minden $x \in U$ esetére $\gamma = \omega(x)$.

■ **A:** A (17.9a) egyenlet folyamának $\gamma = \{(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi)\}$ periodikus pályájára minden $p \neq (0,0)$ esetén teljesül a $\gamma = \omega(p)$ tulajdonság. Tehát a $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ pálya γ olyan környezete, amellyel γ stabilis határciklus lesz **(17.4.b ábra)**.

■ **B:** Az $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ lineáris differenciálegyenlet esetén azonban $\gamma = \{(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$ periodikus pálya, de nem határciklus **(17.4.c ábra)**. ·

7. m-dimenziós beágyazott tóruszok mint invariáns halmazok

Előfordulhat, hogy a (17.1) differenciálegyenlet invariáns halmaza egy m-dimenziós tórusz. Az $M \subset \mathbb{R}^n$ fázistérbe *beágyazott* T^m *m-dimenziós tórusz* olyan $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (\Theta_1, \ldots, \Theta_m) \mapsto g(\Theta_1, \ldots, \Theta_m)$ differenciálható leképezés értékkészlete, amely minden Θ_i koordinátájának 2π szerint periodikus függvénye.

■ Egyszerű esetekben a (17.1) rendszer mozgása a tóruszon derékszögű koordinátarendszerben a $\dot{\Theta}_i = \omega_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ differenciálegyenletekkel írható le. A rendszer $(\Theta_1(0), \ldots, \Theta_m(0))$ kezdeti ponton átmenő megoldása $\Theta_i(t) = \omega_i t + \Theta_i(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m; t \in \mathbb{R})$.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény *kváziperiodikus*, ha f-nek van $f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_n t)$ alakú előállítása, ahol g, éppen úgy, mint fent, olyan differenciálható függvény, amely minden komponensében 2π szerint periodikus, és ahol az ω_i frekvenciák *összemérhetetlenek*, azaz nincsenek olyan n_i egész számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{m} n_i^2 > 0$ és $n_1\omega_1 + \cdots + n_m\omega_m = 0$.

17.1.2.4. Invariáns sokaságok

1. Definíciók, szeparatrixfelületek

Legyen γ a (17.1) egyenlet hiperbolikus stacionárius pontja vagy hiperbolikus periodikus pályája. Ennek $W^s(\gamma)$ *stabilis sokaság*a ($W^u(\gamma)$ *instabilis sokaság*a) a fázistér mindazon pontjainak halmaza, amelyeken azok a pályák áthaladnak, amelyek $t \to +\infty \quad (t \to -\infty)$ esetén γ-hoz tartanak:

$$W^s(\gamma) := \{x \in M \colon \omega(x) = \gamma\} \text{ és } W^u(\gamma) := \{x \in M \colon \alpha(x) = \gamma\}\,. \tag{17.18}$$

A stabilis, illetve instabilis sokaságokat *szeparatrixfelület*eknek is nevezzük.

■ Tekintsük a síkban az

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y + x^2 \tag{17.19a}$$

differenciálegyenletet. Ennek a 0 időpontban az (x_0, y_0) pontból induló megoldása

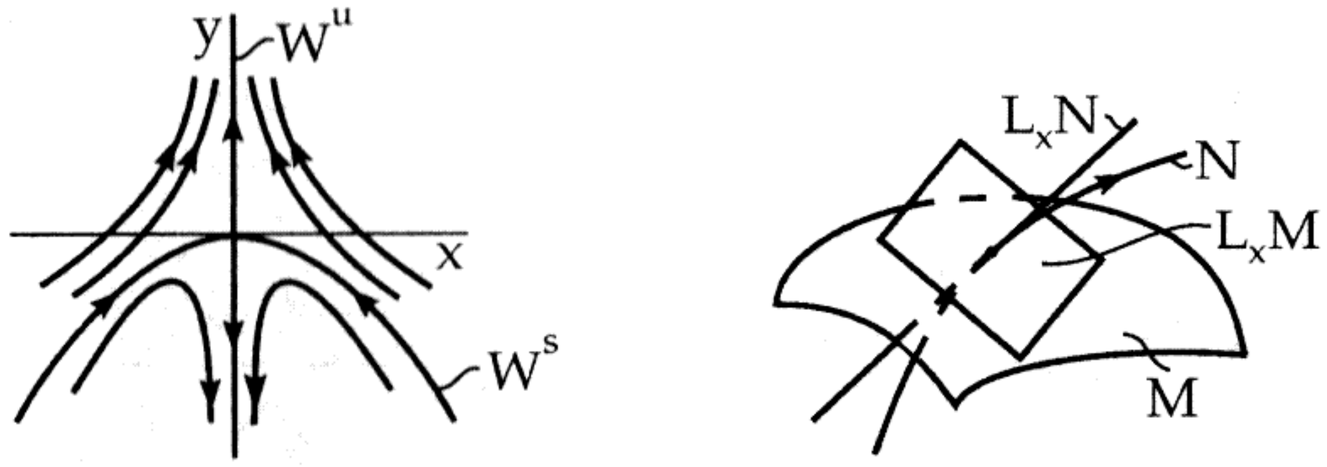
$$\varphi(t, x_0, y_0) = (e^{-t}x_0, e^t y_0 + \frac{x_0^2}{3}\,(e^t - e^{-2t})). \tag{17.19b}$$

A (17.19a) egyenlet $(0,0)$ stacionárius pontjának stabilis, illetve instabilis sokaságára ezt kapjuk:

$$W^s((0,0)) = \{(x_0, y_0) \colon \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0, y_0) = (0,0)\} = \{(x_0, y_0) \colon y_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0\}\,,$$

$$W^u((0,0)) = \{(x_0, y_0) \colon \lim_{t \to -\infty} \varphi(t, x_0, y_0) = (0,0)\} = \{(x_0, y_0) \colon x_0 = 0,\ y_0 \in \mathbb{R}\}$$

(17.5.a ábra). Legyen M és N sima felület $\mathbb{R}^n$-ben, és L_xM, illetve L_xN az x-en átmenő, M-hez,



a) b)

17.5. ábra.

illetve N-hez húzott érintősík. Az M és az N felület egymásra *transzverzális*, ha minden $x \in M \cap N$ esetén fennáll a következő összefüggés:

$$\dim L_xM + \dim L_xN - n = \dim\,(L_xM \cap L_xN)\,.$$

■ A **17.5.b ábrán** bemutatott metszetre $\dim L_xM = 2$, $\dim L_xN = 1$ és $\dim(L_xM \cap L_xN) = 0$, ezért az M és az N felület egymásra transzverzális.

2. Hadamard és Perron tétele

A szeparatrixfelületek fontos tulajdonságait írja le HADAMARD *és* PERRON *tétele*:
Legyen γ a (17.1) egyenlet hiperbolikus stacionárius pontja vagy hiperbolikus periodikus pályája.
a) A $W^s(\gamma)$ és a $W^u(\gamma)$ sokaság általánosított C^r-felület, amelyek lokálisan C^r-sima elemi felületeknek látszanak. A (17.1) egyenlet minden olyan pályája, amely $t \to +\infty$ vagy $t \to -\infty$ esetén nem γ-hoz tart, γ valamely elegendően kicsiny környezetét vagy $t \to +\infty$, vagy $t \to -\infty$ esetén elhagyja.
b) Ha $\gamma = x_0$ (m,k)-típusú stacionárius pont, akkor a $W^s(x_0)$, illetve a $W^u(x_0)$ felület dimenziója m, illetve k. A $W^s(x_0)$, illetve a $W^u(x_0)$ felület x_0-ban érinti az $\dot{y} = Df(x_0)y$ egyenlet

$$E^s = \{y \in \mathbb{R}^n \colon e^{Df(x_0)t}y \to 0,\ \text{ha}\ t \to +\infty\} \tag{17.20a}$$

*stabilis alter*ét, illetve az $\dot{y} = Df(x_0)y$ egyenlet

$$E^u = \{y \in \mathbb{R}^n \colon e^{Df(x_0)t}y \to 0,\ \text{ha}\ t \to -\infty\} \tag{17.20b}$$

*instabilis alter*ét.
c) Ha γ (m,k)-típusú hiperbolikus periodikus pálya, akkor a $W^s(\gamma)$ és a $W^u(\gamma)$ felület dimenziója $m+1$,

illetve $k+1$, és ezek egymást γ mentén transzverzálisan metszik **(17.6.a ábra)**.

■ **A:** Ahhoz, hogy meghatározzuk a (17.19a) differenciálegyenlet $(0,0)$ stacionárius pontjának lokális stabilis sokaságát, feltesszük, hogy $W^s_{loc}((0,0))$ a következő alakú:
$W^s_{loc}((0,0)) = \{(x,y)\colon y = h(x), |x| < \Delta, h\colon (-\Delta,\Delta) \to \mathbb{R} \text{ differenciálható}\}$. Legyen $t \mapsto (x(t), y(t))$ a (17.19a) differenciálegyenlet olyan megoldása, amely a $W^s_{loc}((0,0))$ halmazban fekszik. A t-vel szomszédos s időpontokra az invariancia alapján kapjuk, hogy $y(s) = h(x(s))$. Deriválással és az $\dot{x}$ és az $\dot{y}$ függvénynek a (17.19a) rendszerből való előállításával az ismeretlen h függvényre a $h'(x)\,(-x) = h(x) + x^2, h(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot kapjuk. A megoldást $h(x) = \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots$ alakú sor formájában keresve — ahol figyelembe vettük, hogy $h'(0) = 0$ — behelyettesítéssel és az együtthatók összehasonlításával (bár ebben az egyszerű példában a kezdetiérték-feladat közvetlen megoldásával is!) adódik $a_2 = -\frac{2}{3}$ és $a_k = 0$, ha $k \geq 3$.

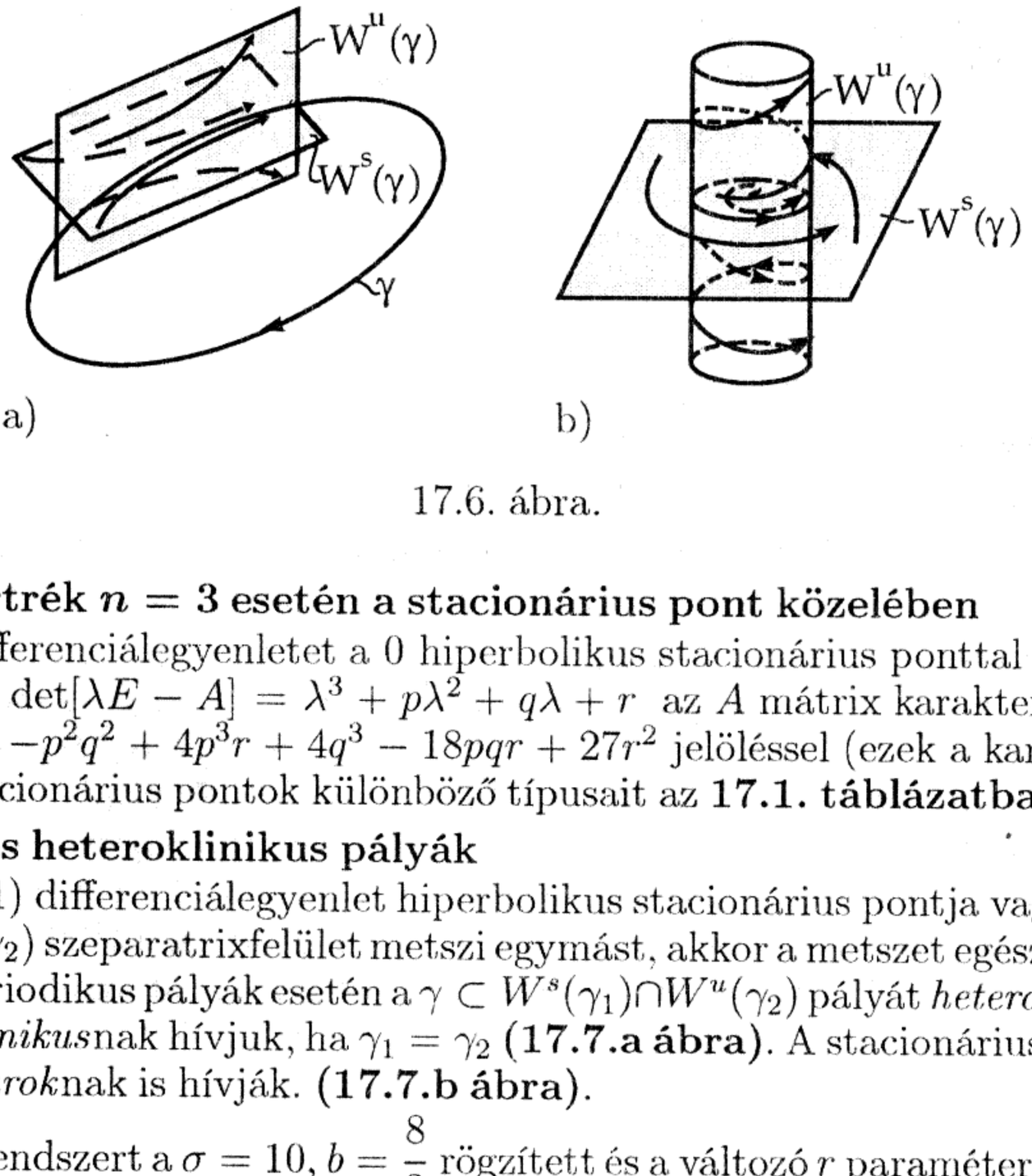
■ **B:** Az $\alpha > 0$ paramétert tartalmazó

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)\,,\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)\,,\ \dot{z} = \alpha z \tag{17.21}$$

rendszernek $\gamma = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\}$ periodikus pályája a $\rho_1 = e^{-4\pi}$, $\rho_2 = e^{\alpha 2\pi}$ és a $\rho_3 = 1$ multiplikátorral.
Hengerkoordinátákban a (17.21) egyenletnek a 0 időpontban az (r_0, ϑ_0, z_0) kezdeti ponton átmenő megoldása $t \mapsto (r(t, r_0)\,,\ \vartheta(t, \vartheta_0)\,,\ e^{\alpha t} z_0)$, ahol $r(\cdot, r_0)$ és $\vartheta(\cdot, \vartheta_0)$ a (17.9a) egyenlet megoldása polárkoordinátás alakban. Így tehát

$$W^s(\gamma) = \{(x,y,z)\colon z = 0\} \setminus \{(0,0,0)\} \quad \text{és} \quad W^u(\gamma) = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{(henger)}.$$

Mindkét szeparatrixfelület látható az **17.6.b ábrán**.



17.6. ábra.

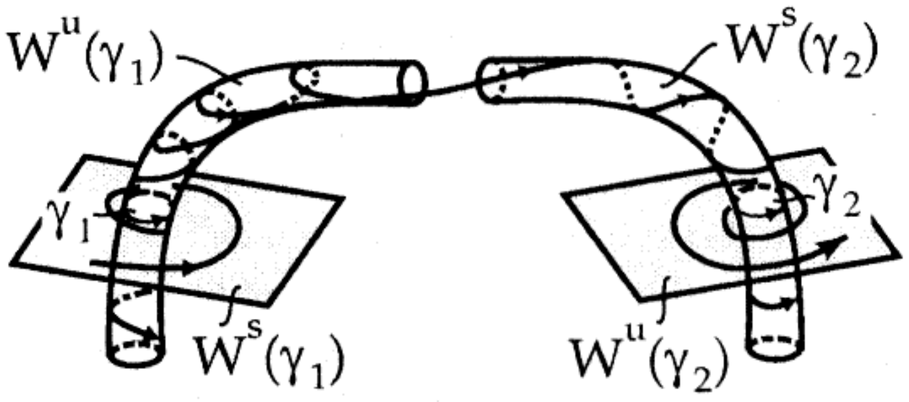
3. Lokális fázisportrék $n = 3$ esetén a stacionárius pont közelében

Tekintsük a (17.1) differenciálegyenletet a 0 hiperbolikus stacionárius ponttal $n = 3$ esetén. Legyen $A := Df(0)$ és legyen $\det[\lambda E - A] = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r$ az A mátrix karakterisztikus polinomja. A $\delta := pq - r$ és $\Delta := -p^2q^2 + 4p^3r + 4q^3 - 18pqr + 27r^2$ jelöléssel (ezek a karakterisztikus polinom diszkriminánsai) a stacionárius pontok különböző típusait az **17.1. táblázatban** soroljuk föl.

4. Homoklinikus és heteroklinikus pályák

Legyen γ_1 és γ_2 a (17.1) differenciálegyenlet hiperbolikus stacionárius pontja vagy periodikus pályája. Ha a $W^s(\gamma_1)$ és a $W^s(\gamma_2)$ szeparatrixfelület metszi egymást, akkor a metszet egész pályákból áll. Stacionárius pontok vagy periodikus pályák esetén a $\gamma \subset W^s(\gamma_1) \cap W^u(\gamma_2)$ pályát *heteroklinikus*nak nevezzük, ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$, és *homoklinikus*nak hívjuk, ha $\gamma_1 = \gamma_2$ **(17.7.a ábra)**. A stacionárius pontok homoklinikus pályáját *szeparatrixhurok*nak is hívják. **(17.7.b ábra)**.

■ A (17.2) LORENZ-rendszert a $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ rögzített és a változó r paraméterértékek mellett tekintjük. Ennek $(0,0,0)$ stacionárius pontja $1 < r < 13{,}926\ldots$ esetén nyereg, amelyet egy W^s kétdimenziós stabilis sokaság és egy egydimenziós W^u instabilis sokaság jellemez.

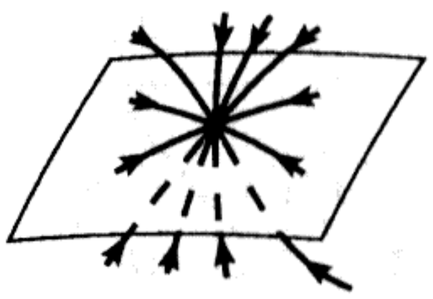


17.7. ábra.

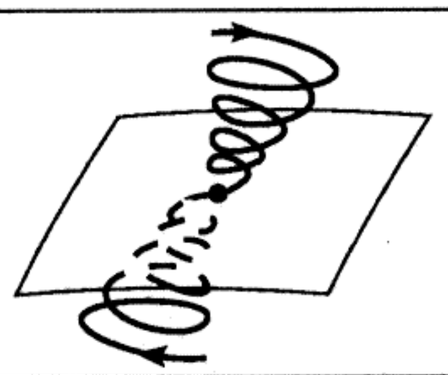
17.1. táblázat. Stacionárius pontok típusai a háromdimenziós fázistérben

Paraméter-tartomány	Δ	A stacionárius pont típusa	A kar. polinom nullahelyei	W^s, illetve W^u dimenziója
$\delta > 0\,;\, q > 0\,,\, r > 0$	$\Delta < 0$	stabilis csomó	$\mathrm{Im}\,\lambda_j = 0$ $\lambda_j < 0,\ j = 1,2,3$	$\dim W^s = 3\,,\ \dim W^u = 0$
	$\Delta > 0$	stabilis fókusz	$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$ $\lambda_3 < 0$	

$\Delta < 0$:

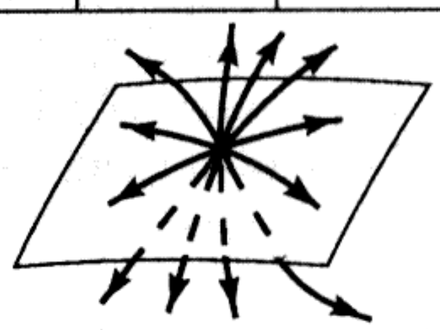


$\Delta > 0$:

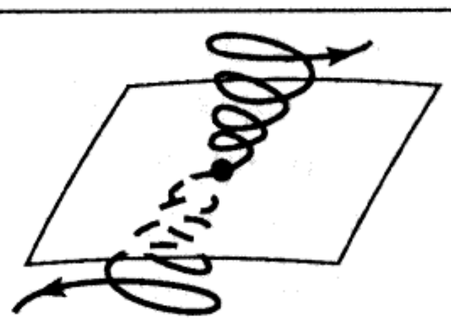


Paraméter-tartomány	Δ	A stacionárius pont típusa	A kar. polinom nullahelyei	W^s, illetve W^u dimenziója
$\delta < 0\,;\, r < 0\,,\, q > 0$	$\Delta < 0$	instabilis csomó	$\mathrm{Im}\lambda_j = 0$ $\lambda_j > 0,\ j = 1,2,3$	$\dim W^s = 0\,,\ \dim W^u = 3$
	$\Delta > 0$	instabilis fókusz	$\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$ $\lambda_3 > 0$	

$\Delta < 0$:

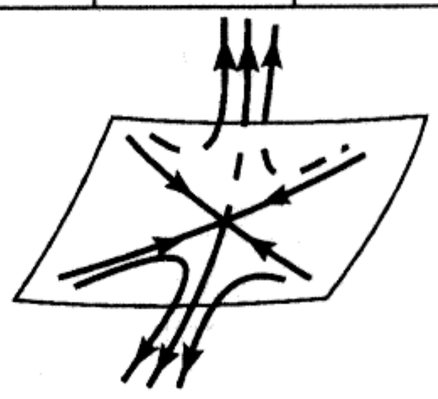


$\Delta > 0$:

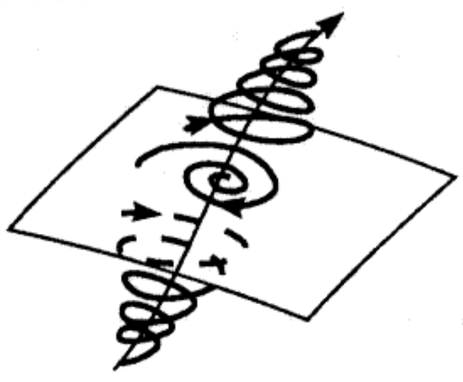


Paraméter-tartomány	Δ	A stacionárius pont típusa	A kar. polinom nullahelyei	W^s, illetve W^u dimenziója
$\delta > 0\,; r < 0\,,\, q \leq 0$ vagy $r < 0\,,\, q > 0$	$\Delta < 0$	nyereg-csomó	$\mathrm{Im}\lambda_j = 0$ $\lambda_{1,2} < 0\,,\ \lambda_3 > 0$	$\dim W^s = 2\,,\ \dim W^u = 1$
	$\Delta > 0$	nyereg-fókusz	$\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$ $\lambda_3 > 0$	

$\Delta < 0$:

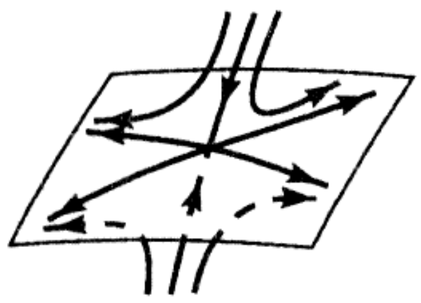


$\Delta > 0$:

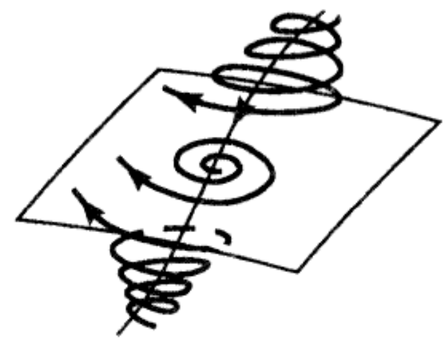


Paraméter-tartomány	Δ	A stacionárius pont típusa	A kar. polinom nullahelyei	W^s, illetve W^u dimenziója
$\delta < 0\,;\, r > 0\,,\, q \leq 0$ vagy $r > 0\,,\, q > 0$	$\Delta < 0$	nyereg-csomó	$\mathrm{Im}\lambda_j = 0$ $\lambda_{1,2} > 0\,,\, \lambda_3 < 0$	$\dim W^s = 1\,,\, \dim W^u = 2$
	$\Delta > 0$	nyereg-fókusz	$\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$ $\lambda_3 < 0$	

$\Delta < 0$:



$\Delta > 0$:

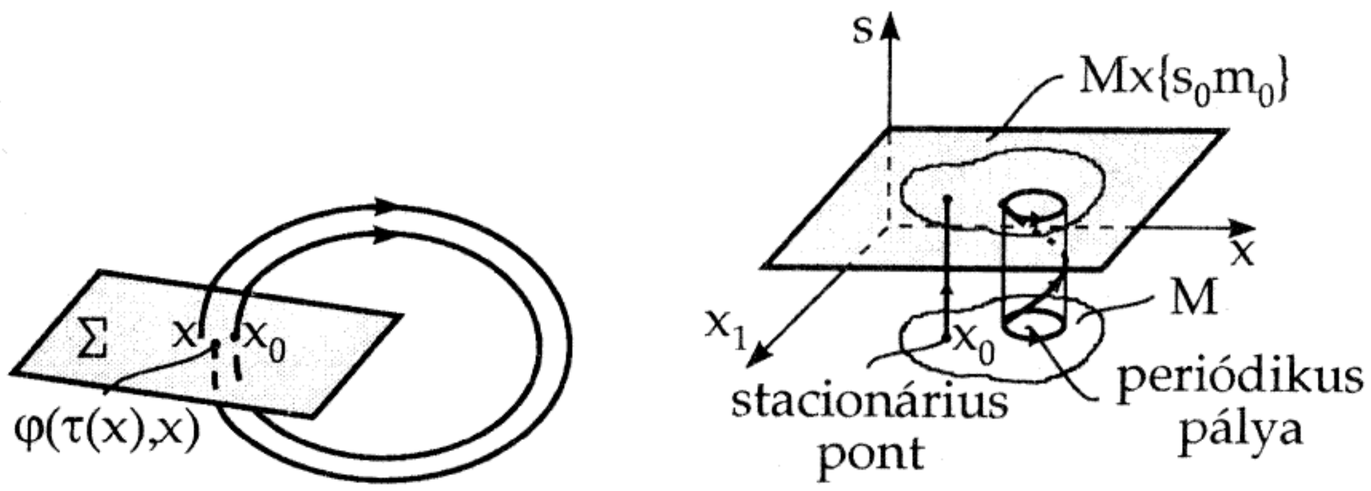


Ha $r = 13{,}926\ldots$, akkor a $(0,0,0)$ pontban két szeparatrixhurok keletkezik, azaz az instabilis sokaság két ága $t \to +\infty$ esetén a stabilis sokaság fölött visszatér az origóba (lásd [17.4], [17.14]).

17.1.2.5. Poincaré-leképezés

1. Poincaré-leképezés autonóm differenciálegyenleteknél

Legyen $\gamma = \{\varphi(t, x_0),\, t \in [0, T]\}$ a (17.1) egyenlet T periódusú pályája és legyen $\sum$ olyan $(n-1)$-dimenziós sima hiperfelület, amely a γ pályát x_0-ban transzverzálisan metszi **(17.8.a ábra)**.



17.8. ábra.

Akkor x_0-nak van olyan U környezete és olyan $\tau : U \to \mathbb{R}$ sima függvény, amelyre $\tau(x_0) = T$, és minden $x \in U$ esetén $\varphi(\tau(x), x) \in \sum$. A $P\colon U \cap \sum \to \sum \quad P(x) := \varphi(\tau(x), x)$ leképezés a γ pálya POINCARÉ-*leképezése* x_0-ban. Ha a (17.1) egyenlet f jobb oldala r-szer folytonosan differenciálható, akkor P pontosan ugyanannyiszor differenciálható. A $DP(x_0)$ JACOBI-mátrix sajátértékei a *periodikus pálya multiplikátorai.* Ezek tehát nem függenek sem attól, hogyan választjuk meg γ-n az x_0 pontot, sem attól, hogyan választjuk meg a transzverzális felületet.

A POINCARÉ-leképezéshez az $M = U$-n definiált (17.3) rendszert rendelhetjük, amely mindaddig definiálva van, amíg a képpontok U-ban maradnak. Ezen diszkrét rendszer stacionárius pontjainak a (17.1) rendszer periodikus pályái felelnek meg, és ezeknek a stacionárius pontoknak a stabilitása a (17.1) rendszer periodikus pályái stabilitásának felelnek meg.

■ A (17.9a) rendszer esetén a

$$\sum = \{(r, \vartheta)\colon r > 0, \vartheta = \vartheta_0\}.$$

transzverzális hipersíkokat polárkoordinátás alakban tanulmányozzuk. Ezekhez a síkokhoz az $U = \sum$ választással élhetünk. Nyilvánvalóan $\tau(r) = 2\pi \quad (\forall r > 0)$, ezért

$$P(r) = [1 + (r^{-2} - 1)\, e^{-4\pi}]^{-1/2},$$

ahol használtuk a (17.9a) rendszer megoldásának előállítását. Továbbá fennáll, hogy $P(\sum) = \sum P(1) = 1$ és $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$.

2. Poincaré-leképezés nemautonóm időben periodikus differenciálegyenleteknél

Egy olyan (17.11) nemautonóm differenciálegyenlet, amelynek f jobb oldala időben T szerint periódikus, azaz, amelyre $f(t+T,x) = f(t,x) \quad (\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in M)$ teljesül, úgy interpretálható, mint az $\dot{x} = f \circ (s,x)$, $\dot{s} = 1$ autonóm differenciálegyenlet az $M \times \{s \bmod T\}$ cilindrikus fázistérrel. Legyen $s_0 \in \{s \bmod T\}$ tetszőleges. Akkor $\sum = M \times \{s_0\}$ transzverzális sík **(17.8.b ábra)**. A $P\colon \sum \to \sum$ POINCARÉ-leképezés globálisan mint $x_0 \longmapsto \varphi(s_0+T, s_0, x_0)$ adható meg, ahol $\varphi(\cdot, s_0, x_0)$ a (17.11) differenciálegyenletnek az s_0 időpontban x_0 értéket felvevő megoldása.

17.1.2.6. Differenciálegyenletek topologikus ekvivalenciája

1. Definíció

Tegyük fel, hogy a (17.1) egyenlettel és a hozzátartozó $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ folyammal együtt adott még egy további

$$\dot{x} = g \circ x, \tag{17.22}$$

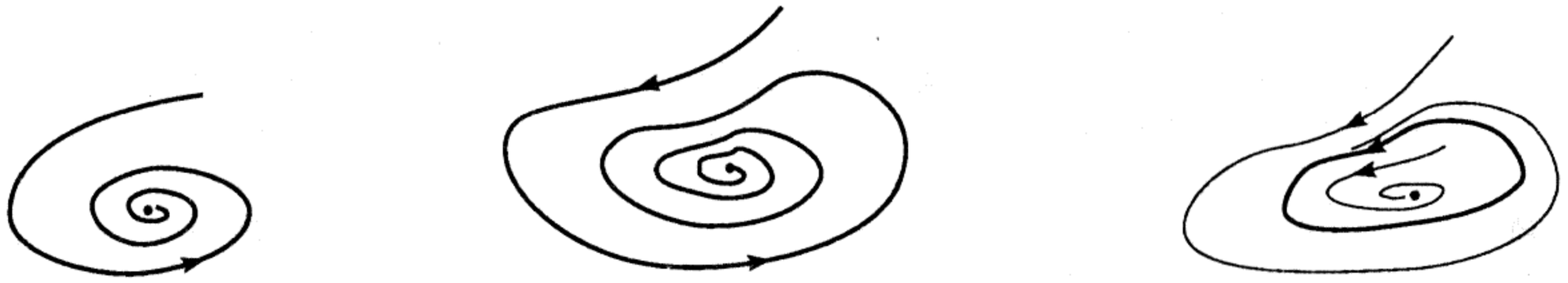
autonóm differenciálegyenlet is, ahol $g\colon N \to \mathbb{R}^n$ egy $N \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon megadott C^r-leképezés. Tegyük fel, hogy a (17.22) differenciálegyenlet $\{\psi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ folyama létezik.

A (17.1) és a (17.22) differenciálegyenlet (illetve ezek folyama) *topologikusan ekvivalens*, ha van olyan $h\colon M \to N$ *homeomorfizmus*, (azaz h bijektív, h és h^{-1} folytonos), amely (17.1) pályáit (17.22) pályáiba viszi át irányítástartó (de a paraméterezést nem feltétlenül megtartó) módon. A (17.1) és a (17.22) rendszer tehát topologikusan ekvivalens, ha a $h\colon M \to N$ homeomorfizmus mellett van még egy olyan $\tau : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ folytonos leképezés is, amely minden rögzített $x \in M$ mellett szigorúan monoton növekedő, $\mathbb{R}$-et $\mathbb{R}$-re képezi le, amelyre minden $x \in M$ mellett $\tau(0,x) = 0$, és amelyre minden $x \in M$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén a $h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x))$ reláció teljesül.

Topologikus ekvivalenciánál (17.1) stacionárius pontjai (17.22) stacionárius pontjaiba, (17.1) periodikus pályái (17.22) periodikus pályáiba mennek át, miközben a periódusok nem feltétlenül egyeznek meg. Tehát ha a (17.1) és a (17.22) rendszer topologikusan ekvivalens, akkor fázisterük pályákra való felbontásának topologikus szerkezete megegyezik. A (17.1) és a (17.22) rendszer *topologikusan konjugált*, ha úgy topologikusan ekvivalensek a $h\colon M \to N$ homeomorfizmussal, hogy h még a paraméterezést is megtartja, azaz $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x)) \quad \forall\, t, x$.

A topologikus ekvivalencia, illetve konjugáltság az M és N fázisterek részhalmazára is vonatkozhat. Ha például (17.1) az $U_1 \subset M$ és (17.22) a $U_2 \subset N$ részhalmazon van definiálva, akkor (17.1) és (17.22) *topologikusan ekvivalens* (U_1, U_2)-n, ha létezik olyan $h\colon U_1 \to U_2$ homeomorfizmus, amely (17.1) pályáinak U_1-gyel vett metszetét (17.22) pályáinak U_2-vel vett metszetébe viszi át az irányítás megtartásával.

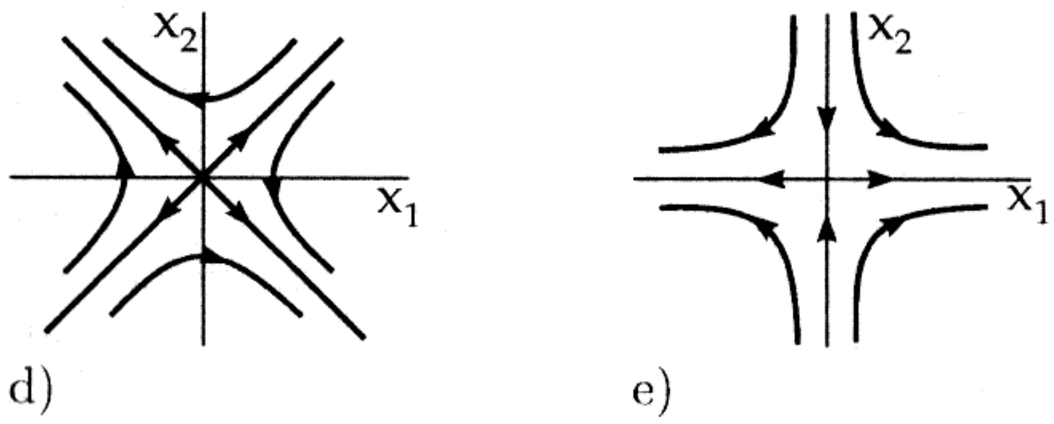
■ **A:** A (17.1) és (17.22) közötti homeomorfizmusok tehát olyan leképezések, amelyeknél például pályák nyújtása és összenyomása meg van engedve, feldarabolásuk és csatlakoztatásuk azonban nem. A **17.9.a ábra** és a **17.9.b ábra** fázisportréjához tartozó folyamok topologikusan ekvivalensek; a **17.9.a ábra** és a **17.9.c ábra** fázisportréjához tartozó folyamok azonban nem.



a) b) c)

■ **B:** Tegyük fel, hogy adott az $\dot{x} = Ax$ és $\dot{x} = Bx$ síkbeli lineáris differenciálegyenlet (lásd [17.19]), ahol $A := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ és $B := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. Ezeknek a rendszereknek a fázisportréja a $(0,0)$ pont közelében a **17.9.d,** illetve a **17.9.e ábrán** látható.

A $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) := Rx$ homeomorfizmus, ahol $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, és a $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,



d) e)

17.9. ábra.

$\tau(t,x) := \frac{1}{2}\,t$ függvény az első rendszer pályáit a második rendszer pályáiba viszi át, úgy, hogy a topologikus ekvivalencia fennáll.

2. Grobman és Hartman tétele

Legyen p a (17.1) differenciálegyenlet hiperbolikus stacionárius pontja. Akkor a (17.1) differenciálegyenlet p közelében topologikusan ekvivalens linearizáltjával, az $\dot{y} = Df(p)y$ egyenlettel.

17.1.3. Diszkrét dinamikai rendszerek

17.1.3.1. Stacionárius pontok, periodikus pályák és határhalmazok

1. Stacionárius pontok típusai

Legyen x_0 a (17.3) egyenlet — ahol $M \subset \mathbf{R}^n$ — stacionárius pontja. A (17.3) iteráció lokális viselkedését x_0 közelében bizonyos feltevések mellett az $y_{t+1} = D\varphi(x_0)y_t$ $(t \in \Gamma)$ *variációs egyenlet* meghatározza. Ha $D\varphi(x_0)$-nak nincs olyan λ_i sajátértéke, amelyre $|\lambda_i| = 1$, akkor az x_0 stacionárius pont (a differenciálegyenletek esetéhez hasonlóan) *hiperbolikus*. Az x_0 hiperbolikus stacionárius pont (m,k)*-típusú*, ha $Df\,(x_0)$-nak pontosan m sajátértéke a komplex egységkörön belül, $k := n - m$ sajátértéke pedig a komplex egységkörön kívül fekszik. Az (m,k)-típusú hiperbolikus stacionárius pont *nyelő*, ha $m = n$, *forrás*, ha $k = n$, és *nyereg*, ha $m > 0$ és $k > 0$. A nyelő aszimptotikusan stabilis; a forrás és a nyereg instabilis (*diszkrét rendszerek első közelítésben vett stabilitására vonatkozó tétel*).

2. Periodikus pályák

A (17.3) egyenlet $\gamma(x_0) = \{\varphi^k(x_0),\ k = 0, \cdots, T-1\}$ T periódusú pályája $(T \geq 2)$ *hiperbolikus*, ha x_0 a φ^T leképezés hiperbolikus stacionárius pontja.
A $D\varphi^T(x_0) = D\varphi^T(\varphi^{T-1}(x_0)) \cdots D\varphi(x_0)$ mátrix a *monodrómiamátrix*; a $D\varphi^T(x_0)$ mátrix sajátértékei $\gamma(x_0)$ *multiplikátor*ai.

Ha $\gamma(x_0)$ minden multiplikátora 1-nél kisebb abszolút értékű, akkor a $\gamma(x_0)$ periodikus pálya aszimptotikusan stabilis.

3. Az ω-határhalmaz

A (17.3) egyenlet — ahol $M = \mathbf{R}^n$ — minden $\omega(x)$ ω-határhalmaza zárt, és $\omega(\varphi(x)) = \omega(x)$. Ha a $\gamma^+(x)$ félpálya korlátos, akkor $\omega(x) \neq \emptyset$ és $\omega(x)$ invariáns φ-re nézve. Analóg tulajdonságok érvényesek az α-határhalmazra.

■ Tegyük fel, hogy adott $\mathbf{R}$-en az $x_{t+1} = -x_t$, $t = 0, \pm 1, \cdots$, (tehát $\varphi(x) = -x$) differenciaegyenlet. Ha $x = 1$, akkor nyilvánvaló, hogy $\omega(1) = \{1, -1\}$, $\omega(\varphi(1)) = \omega(-1) = \omega(1)$ és $\varphi(\omega(1)) = \omega(1)$. Megjegyzendő, hogy $\omega(1)$, eltérően a differenciálegyenletek esetétől, nem összefüggő.

17.1.3.2. Invariáns sokaságok

1. Szeparatrixfelületek

Legyen x_0 a (17.3) egyenlet stacionárius pontja. Akkor $W^s(x_0) = \{y \in M\colon \varphi^i(y) \to x_0, \text{ ha } i \to +\infty\}$ az x_0 pont *stabilis sokasága* és $W^u(x_0) = \{y \in M\colon \varphi^i(y) \to x_0, \text{ ha } i \to -\infty\}$ az x_0 pont *instabilis sokasága*. A stabilis és az instabilis sokaságokat *szeparatrixfelületek*nek is hívják.

2. Hadamard és Perron tétele

HADAMARD és PERRON tétele $M \subset \mathbb{R}^n$-beli diszkrét rendszerekre a szeparatrixfelületek tulajdonságait írja le.

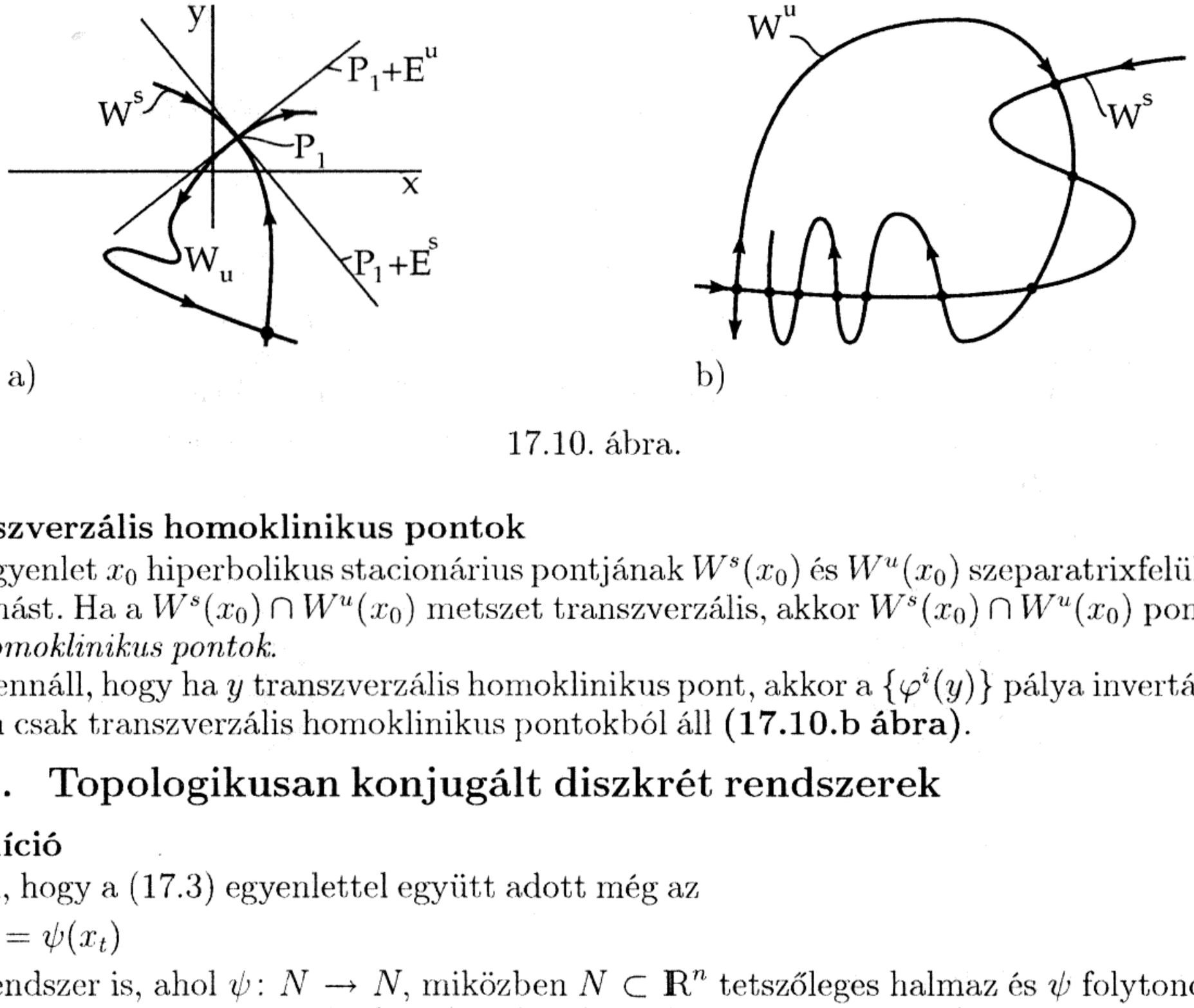
Ha x_0 a (17.3) egyenlet (m,k)-típusú hiperbolikus stacionárius pontja, akkor $W^s(x_0)$ és $W^u(x_0)$ olyan m-, illetve k-dimenziós általánosított C^r-sima felület, amelyek lokálisan C^r-sima elemi felületeknek látszanak. A (17.3) egyenlet olyan pályái, amelyek $i \to +\infty$ vagy $i \to -\infty$ esetén nem x_0-hoz tartanak, x_0 valamely elegendően kicsiny környezetét vagy $i \to +\infty$, vagy $i \to -\infty$ esetén elhagyják. A $W^s(x_0)$, illetve $W^u(x_0)$ felület x_0-ban érinti az $y_{i+1} = D\varphi(x_0)y_i$ egyenlet $E^s = \{y \in \mathbb{R}^n : [D\varphi(x_0)]^i\, y \to 0$, ha $i \to -\infty\}$ *stabilis alterét*, illetve $E^u = \{y \in \mathbb{R}^n : [D\varphi(x_0)]^i y \to 0$, ha $i \to -\infty\}$ *instabilis alterét*.

■ Tekintsük az HÉNON-leképezések családjából a következő diszkrét dinamikai rendszert:

$$x_{i+1} = x_i^2 + y_i - 2,\ y_{i+1} = x_i,\ i \in \mathbb{Z}\,. \tag{17.23}$$

(17.23) két hiperbolikus stacionárius pontja $P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és $P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

A P_1 pont lokális stabilis és instabilis sokaságainak meghatározása: Az $x_i = \xi_i + \sqrt{2},\ y_i = \eta_i + \sqrt{2}$ változótranszformációval (17.23) a $\xi_{i+1} = \xi_i^2 + 2\sqrt{2}\xi_i + \eta_i,\ \eta_{i+1} = \xi_i$ rendszerbe megy át, amelynek $(0,0)$ stacionárius pontja. A $Df((0,0))$ JACOBI-mátrix $\lambda_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ sajátértékeihez az $a_1 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}, 1)$, illetve az $a_2 = (\sqrt{2}-\sqrt{3}, 1)$ sajátvektorok tartoznak, ezért $E^s = \{ta_2 : t \in \mathbb{R}\}$ és $E^u = \{ta_1 : t \in \mathbb{R}\}$. A $W^u_{loc}((0,0)) = \{(\xi,\eta) : \eta = \beta(\xi),\ |\xi| < \Delta, \beta : (-\Delta, \Delta) \to \mathbb{R}$ differenciálható$\}$ feltevéssel élve β-t a $\beta(\xi) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,\xi + k\xi^2 + \cdots$ hatványsor alakjában keressük. Ha $(\xi_i, \eta_i) \in W^u_{loc}((0,0))$, akkor $(\xi_{i+1}, \eta_{i+1}) \in W^u_{loc}((0,0))$. Ez a β felbontásában szereplő együtthatókra olyan egyenletet ad, amelyből azok meghatározhatók, miközben $k < 0$. A stabilis és instabilis sokaság elvi lefutása látható a **17.10.a ábrán** (lásd [17.6]).



17.10. ábra.

3. Transzverzális homoklinikus pontok

A (17.3) egyenlet x_0 hiperbolikus stacionárius pontjának $W^s(x_0)$ és $W^u(x_0)$ szeparatrixfelületei metszhetik egymást. Ha a $W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ metszet transzverzális, akkor $W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ pontjai *transzverzális homoklinikus pontok.*

Eközben fennáll, hogy ha y transzverzális homoklinikus pont, akkor a $\{\varphi^i(y)\}$ pálya invertálható rendszer esetén csak transzverzális homoklinikus pontokból áll **(17.10.b ábra)**.

17.1.3.3. Topologikusan konjugált diszkrét rendszerek

1. Definíció

Tegyük fel, hogy a (17.3) egyenlettel együtt adott még az

$$x_{t+1} = \psi(x_t) \tag{17.24}$$

diszkrét rendszer is, ahol $\psi : N \to N$, miközben $N \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz és ψ folytonos (M és N általában lehetnek metrikus terek is). A (17.3) és (17.24) diszkrét rendszer (illetve a φ és a ψ leképezés) *topologikusan konjugált*, ha létezik olyan $h : M \to N$ homeomorfizmus (*a konjugáló homeomorfizmus*),

amellyel $\varphi = h^{-1} \circ \psi \circ h$. Ha (17.3) és (17.24) topologikusan konjugált, akkor a h konjugáló homeomorfizmus (17.3) pályáit (17.24) pályáiba viszi át.

2. Grobman és Hartman tétele
Ha a (17.3) egyenletben szereplő $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény diffeomorfizmus, x_0 pedig (17.3) hiperbolikus stacionárius pontja, akkor a (17.3) egyenlet x_0 közelében topologikusan konjugált linearizáltjával, az $y_{t+1} = D\varphi(x_0)y_t$ egyenlettel.

17.1.4. Strukturális stabilitás (robusztusság)

17.1.4.1. Strukturálisan stabilis differenciálegyenlet

1. Definíció
A (17.1) differenciálegyenlet vagy az $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ vektormező *strukturálisan stabilis* (vagy *robusztus*), ha f kicsiny megváltozásakor (perturbálásakor) topologikusan ekvivalens differenciálegyenlet keletkezik. A strukturális stabilitás pontos definíciójához az M-en definiált mezők közötti távolság fogalmára van szükség. Olyan M-en definiált sima vektormezőkre fogunk szorítkozni, amelyek közös $U \subset M$ elnyelő halmaza nyílt, korlátos és összefüggő. Legyen az U halmaz ∂U határa sima $(n-1)$-dimenziós hiperfelület, és tegyük fel, hogy ez előállítható $\partial U = \{x \in \mathbb{R}^n\colon h(x) = 0\}$ alakban, ahol $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan C^1-függvény, amelyre ∂U valamely környezetében grad $h(x) \neq 0$. Legyen $\mathrm{X}^1(U)$ az összes M-en definiált sima vektormező metrikus tere a C^1-*metrikával*:

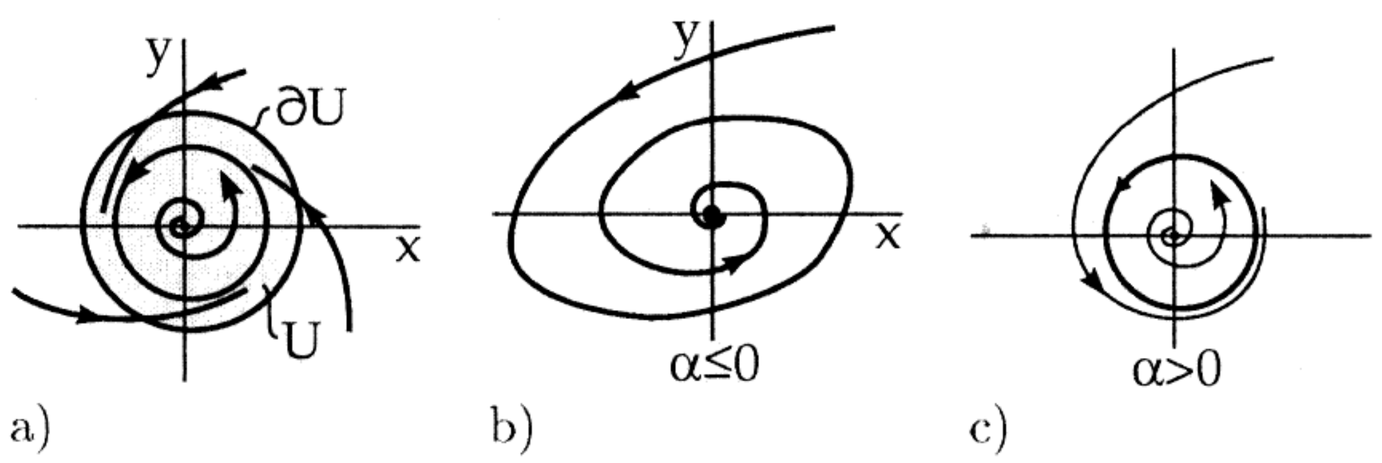
$$\rho(f,g) = \sup_{x\in U} \| f(x) - g(x)\| + \sup_{x\in U} \| Df(x) - Dg(x)\| . \tag{17.25}$$

(A jobb oldal első tagjában $\|\cdot\|$ az EUKLIDÉSZi vektornormát, a másodikban az operátornormát jelöli.) Azok az f sima vektormezők, amelyek a ∂U határt U irányában transzverzálisan metszik, azaz, amelyekre grad $h(x)^T f(x) \neq 0$, $(x \in \partial U)$ és $\varphi^t(x) \in U$ $(x \in \partial U, t > 0)$, alkotják az $\mathrm{X}^1_+(U) \subset \mathrm{X}^1(U)$ halmazt. Az $f \in \mathrm{X}^1_+(U)$ vektormező *strukturálisan stabilis*, ha van olyan $\delta > 0$, amelyre teljesül, hogy minden $g \in \mathrm{X}^1_+(U)$ vektormező, amelyre $\rho(f,g) < \delta$ topologikusan ekvivalens f-fel.

■ Legyen az α paramétert — ahol $|\alpha| < 1$ — tartalmazó síkbeli

$$\dot{x} = -y + x(\alpha - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(\alpha - x^2 - y^2) \tag{17.26}$$

differenciálegyenletek jobb oldala $g(\cdot,\alpha)$. A g differenciálegyenlet például $\mathrm{X}^1_+(U)$-hoz tartozik, ha $U = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 2\}$ **(17.11.a ábra)**. Nyilvánvaló, hogy $\rho(g(\cdot,0), g(\cdot,\alpha)) = |\alpha|(\sqrt{2}+1)$. A $g(\cdot,0)$ vektormező strukturálisan instabilis, mivel a $g(\cdot,0)$ vektormezőhöz tetszőlegesen közel létezik olyan vektormező, amely topologikusan nem ekvivalens $g(\cdot,0)$-vel **(17.11.b,c ábra)**. Ez világos lesz, ha áttérünk az $\dot{r} = -r^3 + \alpha r, \dot{\vartheta} = 1$ polárkoordinátás alakra. Ha $\alpha > 0$, akkor ugyanis mindig létezik az $r = \sqrt{\alpha}$ stabilis határciklus.



17.11. ábra.

2. Strukturálisan stabilis rendszerek a síkban
Tegyük fel, hogy a (17.1) síkbeli differenciálegyenlet (ahol $f \in \mathrm{X}^1_+(U)$) strukturálisan stabilis. Akkor:
a) A (17.1) egyenletnek csak véges sok stacionárius pontja és periodikus pályája van.

b) A (17.1) egyenlet összes $\omega(x)$ $(x \in \overline{U})$ ω-határhalmaza csak stacionárius pontokból és periodikus pályákból áll.

Andronov és Pontrjagin tétele: A (17.1) síkbeli differenciálegyenlet, ahol $f \in \mathrm{X}^1_+(U)$, pontosan akkor strukturálisan stabilis, ha:
a) az összes $\overline{U}$-beli stacionárius pont és periodikus pálya hiperbolikus, és
b) nincs olyan szeparatrix (azaz heteroklinikus és homoklinikus pálya), amely nyeregből ered és nyeregbe torkollik.

17.1.4.2. Strukturálisan stabilis diszkrét rendszerek

Tekintsünk olyan (17.3) alakú diszkrét rendszereket (azaz $\varphi : M \to M$ leképezéseket), amelyekre $U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt, összefüggő halmaz sima határral. Legyen $\mathrm{Diff}^1(U)$ az M-en definiált összes diffeomorfizmus metrikus tere az U-ra vonatkozólag definiált C^1-metrikával. Álljon a $\mathrm{Diff}^1_+(U) \subset \mathrm{Diff}(U)$ halmaz azokból a φ diffeomorfizmusokból, amelyekre fennáll, hogy $\varphi(\overline{U}) \subset U$. A $\varphi \in \mathrm{Diff}^1_+(U)$ leképezés (és ezzel együtt a (17.3) dinamikai rendszer) *strukturálisan stabilis*, ha van olyan $\delta > 0$, hogy azok a $\psi \in \mathrm{Diff}^1_+(U)$ leképezések, amelyekre $\rho(\varphi, \psi) < \delta$, topologikusan konjugáltak φ-vel.

17.1.4.3. Tipikus tulajdonságok

1. Definíció

Az (M, ρ) metrikus tér elemeinek valamely tulajdonsága *tipikus* (vagy *generikus*), ha M ilyen tulajdonságú elemeinek B összessége *második* BAIRE-*kategóriájú halmaz*, azaz előáll $B = \bigcap_{m=1,2\ldots} B_m$ alakban, ahol minden B_m halmaz nyílt és sűrű M-ben.

■ **A:** Az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (irracionális számok) halmaz második BAIRE-kategóriájú halmaz, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ viszont nem az.

■ **B:** A sűrűség maga, mint a „tipikusság" jellemzője nem elegendő: a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ és az $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ halmaz egyaránt sűrű, mégsem lehetnek egyidejűleg tipikusak.

■ **C:** Egy valós számhalmaz λ LEBESGUE-mértéke (lásd 657. old.) és a halmaz BAIRE-féle kategóriája között nincs összefüggés. Így (lásd [17.7]) a $B := \bigcap_{k=1,2,\ldots} B_k$ halmaz, ahol $B_k := \bigcup_{n\geq 0} \left(a_n - \frac{1}{k\,2^n},\ a_n + \frac{1}{k\,2^n} \right)$, és $\mathbb{Q} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a racionális számok sorozata, második kategóriájú. Másrészt, mivel $B_k \supset B_{k+1}$ és $\lambda(B_k) < +\infty$, ezért $\lambda(B) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} \frac{1}{1-1/2} = 0$.

2. Síkbeli rendszerek tipikus tulajdonságai. Hamilton-rendszerek

Síkbeli differenciálegyenletek esetén az $\mathrm{X}^1_+(U)$-beli strukturálisan stabilis rendszerek halmaza nyílt és sűrű $\mathrm{X}^1_+(U)$-ben. Tehát a strukturálisan stabilis rendszerek a síkon tipikusak. Az is tipikus tulajdonság, hogy egy $X^1_+(U)$-ból vett síkbeli rendszer minden pályája az idő növekedtével véges sok stacionárius pont és periodikus pálya valamelyikéhez tart. A kváziperiodikus pályák nem tipikusak. Meghatározott feltevések mellett azonban HAMILTON-rendszereknél a differenciálegyenlet kváziperiodikus pályái kis megzavarás esetén megmaradnak. A HAMILTON-rendszerek tehát nem tipikus rendszerek.

■ Tekintsük $\mathbb{R}^4$-ben a

$$\dot{j}_1 = 0,\ \dot{j}_2 = 0,\ \dot{\Theta}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial j_1},\ \dot{\Theta}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial j_2},$$

HAMILTON-rendszert (a hatásváltozók legyenek szögek), ahol a $(j_1, j_2) \mapsto H_0(j_1, j_2)$ HAMILTON-függvény analitikus. Ennek a rendszernek nyilván $j_1(t) = c_1, j_2(t) = c_2, \Theta_1(t) = \omega_1 t + c_3, \Theta_2(t) = \omega_2 t + c_4$ a megoldása a $c_1, \ldots, c_4$ állandóval, miközben ω_1 és ω_2 függhet c_1-től és c_2-től. A $(j_1, j_2) = (c_1, c_2)$ reláció egy T^2 invariáns tóruszt definiál. Tekintsük most H_0 helyett a

$$H_0(j_1, j_2) + \varepsilon H_1(j_1, j_2, \Theta_1, \Theta_2)$$

perturbált HAMILTON-függvényt, ahol H_1 analitikus, $\varepsilon > 0$ pedig legyen kis pozitív paraméter.

A KOLMOGOROV–ARNOLD–MOSER-*tétel* (KAM-*tétel*) ebben az esetben azt mondja ki, hogy ha H_0 nem degenerált, azaz $\det\left(\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial j_i \partial j_k}\right) \neq 0$, akkor elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ számot véve a perturbált HAMILTON-rendszerben az invariáns nemrezonáns tóruszok többsége nem tűnik el, csak kissé deformálódik. A *többség* olyan értelemben veendő, hogy a tóruszra vett komplementerhalmaz LEBESGUE-mértéke nullához tart, ha ε tart 0-hoz. Egy a fentiekben definiált tórusz, amelyet ω_1 és ω_2 jellemez, nemrezonáns, ha van olyan $c > 0$ állandó, hogy minden pozitív egész p és q számmal az $\left|\dfrac{\omega_1}{\omega_2} - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{c}{q^{2.5}}$ egyenlőtlenség teljesül.

3. Nemvándorló pontok, Morse–Smale-rendszerek

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\mathrm{R}}$ dinamikai rendszer az n-dimenziós kompakt irányítható M sokaságon. A $p \in M$ pont *nemvándorló* $\{\varphi^t\}$-re nézve, ha p tetszőleges $U_p \subset M$ környezetére fennáll, hogy:

$$\forall\, T > 0 \quad \exists\, t, \quad |t| \geq T\colon \quad \varphi^t(U_p) \cap U_p \neq \emptyset\,. \tag{17.27}$$

■ A stacionárius pontok és a periodikus pályák csak nemvándorló pontokból állnak.

A (17.1) egyenlet által generált dinamikai rendszer összes nemvándorló pontjának halmaza zárt, $\{\varphi^t\}$-re nézve invariáns, és tartalmazza az összes periodikus pályát, továbbá M minden pontjának ω-határhalmazát.

Az M-en definiált, sima vektormező által generált $\{\varphi^t\}_{t\in\mathrm{R}}$ dinamikai rendszer MORSE–SMALE-*rendszer*, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. A rendszernek véges sok stacionárius pontja és periodikus pályája van és mind hiperbolikus.

2. A stacionárius pontok, illetve a periodikus pályák összes stabilis és instabilis sokasága transzverzális egymásra.

3. A nemvándorló pontok halmaza csak stacionárius pontokból és periodikus pályákból áll.

Palis és Smale tétele: A MORSE–SMALE-rendszerek strukturálisan stabilisak.

PALIS és SMALE tételének megfordítása nem érvényes: $n \geq 3$ esetén léteznek olyan strukturálisan stabilis rendszerek, amelyeknek végtelen sok periodikus pályájuk van.

Az $n \geq 3$ esetben a strukturálisan stabilis rendszerek nem tipikusak.

17.2. Az attraktorok kvantitatív leírása

17.2.1. Valószínűségi mértékek az attraktorokon

17.2.1.1. Invariáns mérték

1. Definíció. Az attraktorra koncentrált mérték

Legyen $\{\varphi^t\}_{\iota\in\Gamma}$ dinamikai rendszer az (M, ρ) téren. Legyen $\mathcal{B}$ az M halmaz BOREL-halmazainak σ-algebrája és $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ mérték $\mathcal{B}$-n. Feltesszük, hogy minden φ^t leképezés μ-mérhető. A μ mérték *invariáns* $\{\varphi^t\}_{\iota\in\Gamma}$-re nézve, ha minden $A \in \mathcal{B}$ és $t > 0$ esetén $\mu(\varphi^{-t}(A)) = \mu(A)$. Ha a $\{\varphi^t\}_{\iota\in\Gamma}$ dinamikai rendszer invertálható, akkor a mérték azon tulajdonsága, hogy invariáns a dinamikai rendszerre nézve, úgy is kifejezhető, hogy $\mu(\varphi^t(A)) = \mu(A)$ $(A \in \mathcal{B}, t > 0)$. Azt mondjuk, hogy a μ mérték az $A \subset M$ BOREL-*halmazra van koncentrálva*, ha $\mu(M \setminus A) = 0$. Ha tehát Λ a $\{\varphi^t\}_{\iota\in\Gamma}$ dinamikai rendszer attraktora és μ invariáns mérték $\{\varphi^t\}$-re nézve, akkor a mérték Λ-ra van koncentrálva, ha $\mu(B) = 0$ minden olyan B BOREL-halmaz esetén, amelyre $\Lambda \cap B = \emptyset$.

A $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ mérték *tartóját* supp μ-vel jelölik; ez M legszűkebb olyan zárt részhalmaza, amelyre a μ mérték koncentrálva van.

■ **A:** Tekintsük az $M := [0, 1]$ intervallumon a *moduló-leképezést*:

$$x_{t+1} = 2x_t \pmod 1\,. \tag{17.28}$$

Ebben az esetben $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2\,, \\ 2x - 1, & 1/2 < x \leq 1\,. \end{cases}$

A definíció alapján látható, hogy a LEBESGUE-mérték invariáns a moduló-leképezésre nézve. Az $x \in$

$[0,1)$ szám $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 2^{-n}$ $(a_n = 0$ vagy $1)$ kettes számrendszerbeli alakja azonosítható ezzel: $x = .\, a_1 a_2 a_3 \ldots$. A $2x (\mathrm{mod}\, 1)$ művelet eredménye úgy írható, mint $.\, a_1' a_2' a_3' \ldots$, ahol $a_i' = a_{i+1}$, azaz minden számjegy egy hellyel balra eltolódik, és az első számjegyet elhagyjuk.

■ **B:** A

$$\Psi\colon [0,1] \to [0,1], \qquad \Psi(y) := \begin{cases} 2y, & 0 \le y < 1/2, \\ 2(1-y), & 1/2 \le y \le 1 \end{cases} \tag{17.29}$$

leképezés a *háztető-leképezés*, és a LEBESGUE-mérték ennek invariáns mértéke. A $h: [0,1) \to [0,1)$, $h(x) := \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ homeomorfizmus a (17.5)-ban szereplő φ leképezést a (17.29)-ben szereplőbe viszi át, ha $\alpha = 4$. Így tehát (17.5)-höz $\alpha = 4$ esetén van olyan invariáns mérték, amely abszolút folytonos. A (17.29) leképezés $\rho_1(y) \equiv 1$ sűrűségére és a (17.5) leképezés $\alpha = 4$ paraméterérték melletti ρ sűrűségére fennáll, hogy $\rho_1(y) = \rho(h^{-1}(y))\, |(h^{-1})'(y)|$. Ebből azonnal adódik, hogy $\rho(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

■ **C:** Ha x_0 a $\{\varphi^i\}$ invertálható diszkrét dinamikai rendszer stabilis periodikus pontja, akkor $\mu := \dfrac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \delta_{\varphi^i(x_0)}$ invariáns valószínűségi mértéke $\{\varphi^i\}$-nek, ahol δ_{x_0} az x_0-ra koncentrált DIRAC-mérték.

2. Természetes mérték

Legyen Λ az M-en definiált $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ rendszer attraktora a W vonzási tartománnyal. Tetszőleges $A \subset W$ BOREL-halmaz és tetszőleges $x_0 \in W$ pont esetére képezzük a következő mennyiséget:

$$\mu(A; x_0) := \lim_{T\to\infty} \frac{t(T, A, x_0)}{T}\,. \tag{17.30}$$

Itt $t(T, A, x_0)$ az összes eltelt $T > 0$ időnek az a része, amennyit a $\{\varphi^t(x_0)\}_{t=0}^{T}$ pályaszakasz az A halmazban tölt. Ha λ-m. m. (majdnem minden) $x_0 \in W$ esetén még $\mu(A; x_0) = \alpha$ is teljesül, akkor legyen $\mu(A) := \mu(A; x_0)$. Mivel m. m. $x_0 \in W$ kezdőpontból induló pálya $t \to +\infty$ esetén Λ-hoz tart, ezért μ Λ-ra koncentrált valószínűségi mérték.

17.2.1.2. Az ergodelmélet elemei

1. Ergodikus dinamikai rendszerek

Az (M, ρ) téren definiált $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer a μ invariáns mértékkel *ergodikus* (azt is mondják, hogy a mérték ergodikus), ha minden olyan A BOREL-halmazra, amelyre $\varphi^{-t}(A) = A \quad (\forall\, t > 0)$, vagy $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(M \setminus A) = 0$.
Ha $\{\varphi^t\}$ (17.3) alakú diszkrét dinamikai rendszer, $\varphi\colon M \to M$ homeomorfizmus, M pedig kompakt metrikus tér, akkor mindig létezik invariáns ergodikus mérték.

■ **A:** Tekintsük az S^1 *kör elforgatás*át:

$$x_{t+1} = x_t + \Phi \pmod{2\pi}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{17.31}$$

ahol $\varphi\colon [0, 2\pi) \to [0, 2\pi)$, $\varphi(x) := x + \Phi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. A LEBESGUE-mérték invariáns φ-re nézve. Ha $\dfrac{\Phi}{2\pi}$ irracionális, akkor (17.31) ergodikus; ha $\dfrac{\Phi}{2\pi}$ racionális, akkor (17.31) nem ergodikus.

■ **B:** Ha a dinamikai rendszer attraktora stabilis stacionárius pont vagy stabilis periodikus pálya, akkor a dinamikai rendszer a természetes mértékre nézve ergodikus.

Birkhoff ergodikus tétele: Tegyük fel, hogy a $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer ergodikus a μ invariáns valószínűségi mértékre nézve. Akkor minden integrálható $h \in L^1(M, \mathcal{B}, \mu)$ függvény esetén a $\{\varphi^t(x_0)\}_{t=0}^{\infty}$ pozitív félpályák mentén az időátlag, azaz $\overline{h}(x_0) = \lim_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T h\,(\varphi^t(x_0))\, dt$ (folyamra) és $\overline{h}(x_0) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} h\left(\varphi^i(x_0)\right)$ (diszkrét rendszerekre) μ-m. m. $x_0 \in M$ pont esetén megegyezik az $\int\limits_M h\,d\mu$ térátlaggal.

2. Fizikai vagy SBR-mértékek

Az ergodikus tétel állítása csak akkor használható, ha a μ mérték tartója a lehető legnagyobb. Legyen $\varphi\colon M \to M$ folytonos leképezés, $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ invariáns mérték. Azt mondjuk (lásd [17.9]), hogy a μ mérték SBR-*mérték* (SINAI, BOWEN és RUELLE neve után), ha minden $h\colon M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén azoknak az $x_0 \in M$ pontoknak a halmaza, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h(\varphi^i(x_0)) = \int_M h\,d\mu \tag{17.32a}$$

teljesül, pozitív LEBESGUE-mértékű. Ehhez elegendő, hogy a

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\varphi^i(x)} \tag{17.32b}$$

mértékek sorozata m. m. $x \in M$ esetén gyengén konvergáljon μ-höz, azaz minden folytonos h függvényre $\int\limits_M h\,d\mu_n \to \int\limits_M h d\mu$, ha $n \to +\infty$ teljesüljön.

■ Néhány fontos attraktorra, így például az HÉNON-attraktorra bebizonyították, hogy létezik SBR-mérték.

3. Keverő dinamikai rendszerek

Az (M, ρ) téren definiált $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer μ invariáns valószínűségi mértéke *keverő*, ha tetszőleges $A, B \subset M$ BOREL-halmaz esetén $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu\left(A \cap \varphi^{-t}(B)\right) = \mu(A)\mu(B)$. Keverő rendszerek esetén azon pontok halmazának a mértéke, amelyek $t = 0$ esetén A-ban és nagy t-re B-ben vannak, csak a $\mu(A)\mu(B)$ szorzattól függ.
Keverő rendszer ergodikus is: Legyen $\{\varphi^t\}$ keverő rendszer és legyen A olyan BOREL-halmaz, amelyre $\varphi^{-t}(A) = A$ $(t > 0)$. Akkor $\mu(A)^2 = \lim\limits_{t\to\infty} \mu(\varphi^{-t}(A) \cap A) = \mu(A)$, így $\mu(A)$ vagy 0 vagy 1.
A (17.1) differenciálegyenlet $\{\varphi^t\}$ folyama pontosan akkor keverő, ha tetszőleges $g, h \in L^2(M, \mathcal{B}, \mu)$ négyzetesen integrálható függvények esetén fennáll a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_M [g(\varphi^t(x)) - \overline{g}\,][h(x) - \overline{h}\,]\,d\mu = 0 \tag{17.33}$$

összefüggés. Itt $\overline{g}$ és $\overline{h}$ a térátlagot jelöli, amelyet az időátlaggal helyettesítettünk.

■ A (17.28) moduló-leképezés keverő. A (17.31) elforgatás a $\dfrac{\lambda}{2\pi}$ valószínűségi mértékre nézve nem keverő.

4. Az autokorrelációs függvény

Legyen az M-en definiált $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer a μ invariáns mértékkel ergodikus. Legyen $h : M \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos függvény, $\{\varphi^t(x)\}_{t\geq 0}$ tetszőleges félpálya és helyettesítsük a $\overline{h}$ térátlagot az időátlaggal, azaz a $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T h\left(\varphi^t(x)\right) dt$ kifejezéssel a folytonos idejű esetben és a

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} h\left(\varphi^i(x)\right)$ kifejezéssel a diszkrét idejű esetben. A h függvényre nézve a $\{\varphi^t(x)\}_{t\geq 0}$ félpálya

mentén a $\tau \geq 0$ időpontban a folyam *autokorrelációs függvénye*

$$C_h(\tau) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h\left(\varphi^{t+\tau}(x)\right) h\left(\varphi^t(x)\right) dt - \overline{h}^2, \tag{17.34a}$$

diszkrét rendszer esetén pedig

$$C_h(\tau) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\varphi^{i+\tau}(x)\right) h\left(\varphi^i(x)\right) - \overline{h}^2. \tag{17.34b}$$

Az autokorrelációs függvényt negatív időpontokra is definiáljuk, amikor is $C_h(\cdot)$-t mint $\mathbb{R}$-en, illetve $\mathbb{Z}$-n definiált függvényt fogjuk fel.
Periodikus vagy kváziperiodikus pályák esetén C_h periodikus, illetve kváziperiodikus. Ha növekvő τ és tetszőleges h próbafüggvény esetén $C_h(\tau)$ gyorsan csökken, az kaotikus viselkedésre utal. Ha ráadásul növekvő τ esetén $C_h(\tau)$ exponenciális sebességgel csökken, akkor ez a keverő viselkedés jele.

5. Teljesítményspektrum

A C_h függvény FOURIER-transzformáltját *teljesítményspektrum*nak hívják (lásd a 756. oldalt is) és P_h-val jelölik. Az időben folytonos esetben a $\int_{-\infty}^{+\infty} |C_h(\tau)| d\tau < \infty$ feltevés mellett

$$P_h(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_h(\tau) e^{-\mathrm{i}\omega\tau}\, d\tau = 2\int_0^{\infty} C_h(\tau)\cos(\omega\tau)\, d\tau\,. \tag{17.35a}$$

Az időben diszkrét esetben, ha $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_h(k)| < +\infty$, akkor

$$P_h(\omega) = C_h(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} C_h(k)\cos\omega k\,. \tag{17.35b}$$

Ha C_h abszolút integrálhatósága, illetve konvergenciája nem áll fenn, akkor fontos esetekben P_h disztribúcióként fogható fel. Valamely dinamikai rendszer periodikus mozgásainak olyan teljesítményspektrum felel meg, amelyet ekvidisztáns impulzusok jellemeznek. Kváziperiodikus mozgásoknál a teljesítményspektrumban olyan impulzusok lépnek fel, amelyek a kváziperiodikus mozgás alapimpulzusainak egészszámú lineáris kombinációiként adódnak. „Szélessávú spektrum egyedi csúcsokkal" ezzel szemben a kaotikus viselkedés indikátorának számít.

■ **A:** Legyen φ a (17.1) differenciálegyenlet T periódusú pályája, h olyan próbafüggvény, amelyre $t \mapsto h(\varphi(t))$ időátlaga nulla, és legyen $h(\varphi(t))$ FOURIER-előállítása $h(\varphi(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}$, ahol $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Akkor $C_h(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \cos(k\omega_0\tau)$ és $P_h(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0)$, ahol δ a δ-disztribúciót jelöli.

■ **B:** Legyen φ a (17.1) differenciálegyenlet kváziperiodikus pályája, h olyan próbafüggvény, amelyre az időátlag φ mentén nulla, és legyen $h(\varphi(t))$ előállítása (kettős FOURIER-sor alakjában)
$h(\varphi(t)) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k_1 k_2} e^{\mathrm{i}(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t}$. Akkor
$C_h(\tau) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{k_1 k_2}|^2 \cos(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)\tau$ és
$P_h(\omega) = 2\pi \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{k_1 k_2}|^2 \delta(\omega - k_1\omega_1 - k_2\omega_2)$.

17.2.2. Entrópiák

17.2.2.1. Topologikus entrópia

Legyen (M, ρ) kompakt metrikus tér és $\{\varphi^k\}_{k\in\Gamma}$ diszkrét idejű folytonos dinamikai rendszer M-en. Definiáljuk tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén a ρ_n távolságfüggvényt M-en a következőképpen:

$$\rho_n(x, y) := \max_{0\leq i\leq n} \rho\left(\varphi^i(x), \varphi^i(y)\right) \tag{17.36}$$

Legyen továbbá $N(\varepsilon, \rho_n)$ azoknak az M-beli pontoknak a maximális száma, amelyek a ρ_n metrikában egymástól legalább ε távolságra vannak. A (17.3) diszkrét dinamikai rendszer, illetve a φ leképezés *topologikus entrópiája* $h(\varphi) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln N(\varepsilon, \rho_n)$. A topologikus entrópia a leképezés bonyolultságának mértéke. Legyen (M_1, ρ_1) egy másik kompakt metrikus tér és $\varphi_1 \colon M_1 \to M_1$ folytonos leképezés. Ha ekkor a φ és φ_1 leképezés topologikusan konjugált, akkor topologikus entrópiájuk megegyezik. Speciálisan, a topologikus entrópia nem függ a metrikától. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $h(\varphi^n) = nh(\varphi)$. Ha φ még homeomorfizmus is, akkor $h(\varphi^k) = |k|\, h(\varphi)$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén. A legutóbbi tulajdonság alapján értelmezzük az $M \subset \mathbb{R}^n$-en definiált (17.1) differenciálegyenlet folyamára a topologikus entrópiát a $h(\varphi^t) := h(\varphi^1)$ képlettel.

17.2.2.2. Metrikus entrópia

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ az M téren definiált dinamikai rendszer a Λ attraktorral és a Λ-ra koncentrált μ invariáns valószínűségi mértékkel. Legyen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $Q_1(\varepsilon), \ldots, Q_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ olyan $\{(x_1, \ldots, x_n) \colon k_i\varepsilon \le x_i < (k_i+1)\varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$, (ahol $k_i \in \mathbb{Z}$) kocka, amelyre $\mu(Q_i) > 0$. Kövessük tetszőleges $x \in Q_i$ mellett a $\{\varphi^t(x)\}_{t=0}^{\infty}$ félpályát növekvő t mellett. $\tau > 0$ ($\tau = 1$ diszkrét rendszerekben) időközökben N-szer egymás után megjegyezzük azoknak a kockáknak az $i_1, \ldots, i_N$ sorszámát, amelyekben a félpálya tartózkodik. Legyen $E_{i_1 \ldots i_N}$ mindazon Λ-hoz közeli kezdőértékek halmaza, amelyekből kiinduló félpálya a $t_i = i\tau \ (i = 1, 2, \ldots, N)$ időpontokban a $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_N}$ kockában van, és legyen $p(i_1, \cdots, i_N) = \mu(E_{i_1, \cdots, i_N})$ annak a valószínűsége, hogy egy (tipikus) kezdeti érték $E_{i_1, \cdots, i_N}$-ben fekszik. Az entrópia megadja azt az információnövekedést, amit egy olyan kísérlet átlagosan nyújt, amely megmutatja, hogy a véges sok diszjunkt esemény közül valójában melyik következett be. A fenti szituációban ez éppen

$$H_N = -\sum_{(i_1, \cdots, i_N)} p(i_1, \cdots, i_N) \ln p\ (i_1, \cdots, i_N), \tag{17.37}$$

ahol az összes olyan N hosszúságú $(i_1, \cdots, i_N)$ jelsorozatra összegzünk, amelyeket a fent leírt módon a pályák realizálnak.

A $\{\varphi^t\}$ rendszer Λ attraktorának h_μ *metrikus entrópiája* vagy KOLMOGOROV–SINAI-*entrópiája* a μ invariáns mértékre nézve a $h_\mu = \lim\limits_{\tau\to 0} \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{H_N}{\tau N}$. mennyiség. (Diszkrét rendszerekre a $\tau \to \infty$ melletti határérték eltűnik.) A $\varphi \colon \Lambda \to \Lambda$ leképezés $h(\varphi)$ topologikus entrópiájára fennáll, hogy $h_\mu \le h(\varphi)$. Sok esetben $h(\varphi) = \sup\{h_\mu \colon \mu$-invariáns valószínűségi mérték Λ-n$\}$.

■ **A:** Tegyük fel, hogy a (17.1) differenciálegyenlet $\Lambda = \{x_0\}$ stabilis stacionárius pontja attraktor, és legyen μ az x_0-ra koncentrált természetes mérték. Az ilyen attraktorokra $h_\mu = 0$.

■ **B:** A (17.28) eltolás-leképezésre $h(\varphi) = h_\mu = \ln 2$, ahol μ a(z invariáns) LEBESGUE-mérték.

17.2.3. Ljapunov-kitevők

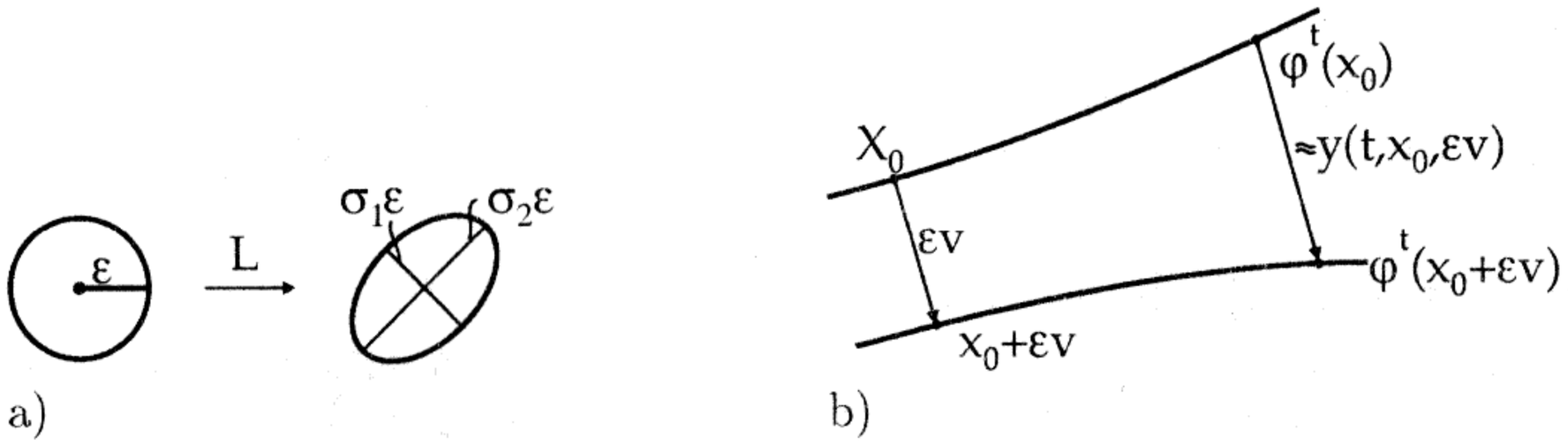
1. Mátrix szinguláris értékei

Legyen L tetszőleges (n, n)-típusú mátrix. Az L mátrix $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n$ *szinguláris értékei* a pozitív szemidefinit $L^T L$ mátrix $\alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_n \ge 0$ sajátértékeinek nemnegatív négyzetgyöke. A sajátértékeket multiplicitásukkal együtt soroljuk fel.

A szinguláris értékeknek geometriai interpretációjuk is van. Ha K_ε a 0 középpontú, $\varepsilon > 0$ sugarú gömb, akkor az $L(K_\varepsilon)$ kép olyan ellipszoid, amelynek féltengelyei a $\sigma_i\varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ számok **(17.12.a ábra)**.

2. A Ljapunov-kitevők definíciója

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon definiált sima dinamikai rendszer, amelynek Λ attraktora, μ pedig erre koncentrált invariáns ergodikus valószínűségi mérték. Tetszőleges $t \ge 0$ és $x \in \Lambda$ esetére legyenek a φ^t leképezés x pontbeli $D\varphi^t(x)$ JACOBI-mátrixának szinguláris értékei $\sigma_1(t, x) \ge \cdots \ge \sigma_n(t, x)$.



17.12. ábra.

Akkor létezik $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ számoknak olyan sorozata, a LJAPUNOV-*kitevők*, hogy $\frac{1}{t} \ln \sigma_i(t,x) \to \lambda_i$, ha $t \to +\infty$ μ-majdnem mindenütt L^1-beli értelemben. OSELEDEC tétele szerint létezik $\mathbb{R}^n$ altereinek olyan sorozata, amelyre

$$\mathbb{R}^n = E^x_{s_1} \supset E^x_{s_2} \supset \cdots \supset E^x_{s_{r+1}} = \{0\}\,, \tag{17.38}$$

úgy, hogy μ-m. m. x esetén az $\frac{1}{t} \ln \|D\varphi^t(x)v\|$ mennyiség $v \in E^x_{s_j} \setminus E^x_{s_{j+1}}$-ben egyenletesen tart valamely $\lambda_{s_j} \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ elemhez.

3. A Ljapunov-kitevők kiszámolása

A $\chi_i(x) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t,x)$ képlet, ahol $\sigma_i(t,x)$ ismét az x középpontú egységgömbből $D\varphi^t(x)$-vel végrehajtott deformáció után kapott ellipszoid féltengelyeként interpretálható, a LJAPUNOV-kitevők kiszámításához használható. Ilyenkor még valamilyen ortonormalizálást is segítségül veszünk, például a Householder-félét. Az $y(t,x,v) := D\varphi^t(x)v$ függvény a $\{\varphi^t\}$ rendszer folyamának $\gamma^+(x)$ félpályájához tartozó variációs egyenlet olyan megoldása, amely a 0 időpontban a v pontból indul. Valóban, ha $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ a (17.1) differenciálegyenlet folyama, akkor a variációs egyenlet: $\dot{y}(t) = Df(\varphi^t(x))y(t)$. Ennek az egyenletnek a 0 időpontban a v ponton átmenő megoldása $y(t,x,v) = \Phi_x(t)v$ alakban állítható elő, ahol $\Phi_x(t)$ a variációs egyenlet 0 időpontban normált alapmátrixa, amely — a kezdeti állapot szerinti differenciálhatóság tétele szerint (lásd 821. old.) — a $\dot{Z}(t) = Df(\varphi^t(x))Z(t)$ mátrix-differenciálegyenlet $Z(0) = E_n$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

A $\chi(x,v) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|D\varphi^t(x)v\|$ szám az $x + \varepsilon v$ kezdőpontú $\gamma(x+\varepsilon v)(0 < \varepsilon \ll 1)$ pálya viselkedését írja le a $\gamma(x)$ kiindulási pályához képest, v irányban. Ha $\chi(x,v) < 0$, az azt jelenti, hogy v irányban t növekedtével a pályák közelednek egymáshoz, ha azonban $\chi(x,v) > 0$, akkor a pályák eltávolodnak egymástól **(17.12.b ábra)**.

Legyen a $\{\varphi^t\}_{t\in I}$ dinamikai rendszer attraktora Λ, μ pedig az erre koncentrált invariáns ergodikus valószínűségi mérték. Akkor az összes LJAPUNOV-kitevő összege μ-m. m. $x \in \Lambda$ esetén folyamoknál

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} f(\varphi^s(x))\, ds, \tag{17.39a}$$

a (17.3) diszkrét rendszer esetén pedig

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |\det D\varphi(\varphi^i(x))|\,. \tag{17.39b}$$

Disszipatív rendszerek esetén tehát $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$. Figyelembe véve, hogy folyamok egyik LJAPUNOV-kitevője nulla, ha az attraktor nem stacionárius pont, a LJAPUNOV-kitevők számítása leegyszerűsíthető (lásd [17.16]).

■ **A:** Legyen x_0 a (17.1) differenciálegyenlet folyamának stacionárius pontja, és legyenek az α_i számok az x_0 pontban vett JACOBI-mátrix sajátértékei. Az x_0-ban koncentrált mértékkel a LJAPUNOV-

kitevőkre fennáll, hogy $\lambda_i = \operatorname{Re}\alpha_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

■ **B:** Legyen $\gamma(x_0) = \{\varphi^t(x_0)\,,\ t \in [0, T]\}$ a (17.1) differenciálegyenlet T periódusú pályája, és legyenek a ρ_i számok $\gamma(x_0)$ multiplikátorai. A $\gamma(x_0)$-ra koncentrált mértékkel fennáll, hogy $\lambda_i = \frac{1}{T}\ln|\rho_i|$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$.

4. Metrikus entrópia és Ljapunov-kitevők

Ha $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, attraktora Λ, a Λ-ra koncentrált ergodikus valószínűségi mérték μ, akkor a h_μ metrikus entrópiára fennáll a $h_\mu \leq \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i$, egyenlőtlenség, ahol a LJAPUNOV-kitevőket multiplicitásukkal kell venni.
A $h_\mu = \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i$ egyenlőség (a PESIN-képlet) általában nem áll fenn. Ha a μ mérték mindemellett még abszolút folytonos is a LEBESGUE-mértékre nézve és $\varphi\colon M \to M$ C^2-diffeomorfizmus, akkor érvényes a PESIN-képlet.

17.2.4. Dimenziók

17.2.4.1. Metrikus dimenziók

1. Fraktálok

Dinamikai rendszerek attraktorai vagy más invariáns halmazai geometriailag bonyolultabb felépítésűek is lehetnek, mint a pont az egyenes vagy a tórusz. A *fraktál*ok, dinamikától függetlenül, olyan halmazok, amelyek egy vagy több jellemzőjükkel kitűnnek, mint amilyen a kirojtosodás, porózusság, bonyolultság, önhasonlóság. Mivel a szokásos dimenziófogalom, ahogyan azt sima felületek és görbék esetén használják, fraktálokra nem alkalmazható, a dimenzió általánosított definícióit kell segítségül venni. A dimenzióelmélet részletes tárgyalását illetően lásd [17.9], [17.5].

■ Osszuk fel a $G_0 = [0, 1]$ intervallumot három egyenlő hosszúságú szakaszra, és távolítsuk el a középső nyílt harmadot. Így a $G_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ halmazt kapjuk. Azután G_1 mindkét részintervallumából ugyanígy távolítsuk el a középső harmadot. Ekkor a $G_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ halmaz adódik. Folytassuk ezt az eljárást a G_k halmazzal, amelyet úgy kapunk, hogy G_{k-1} minden részintervallumából eltávolítjuk a középső nyílt harmadot. Ezáltal olyan $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$ halmazsorozathoz jutunk, ahol minden G_n halmaz 2^n számú, $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú intervallumból áll.
A C CANTOR-*halmaz*t úgy definiáljuk, mint azon pontok halmazát, amelyek az összes G_n halmaznak elemei, azaz $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. A C halmaz kompakt, nem megszámlálható, LEBESGUE-mértéke nulla és perfekt (azaz C zárt, és minden pontja torlódási pont). A CANTOR-halmaz példaként szolgálhat a fraktálokra.

2. Hausdorff-dimenzió

Ehhez a dimenziófogalomhoz a motivációt a háromdimenziós LEBESGUE-mérték szolgálgtatja. Legyen az $A \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmaz lefedve megszámlálható sok, $r_i \leq \varepsilon$ sugarú B_{r_i} gömbbel, tehát úgy, hogy $\bigcup_i B_{r_i} \supset A$ teljesüljön. Akkor A „nyerstérfogatára" ezt kapjuk: $\sum_i \frac{4}{3}\pi r_i^3$. Képezzük most A összes megszámlálható sok, $r_i \leq \varepsilon$ sugarú gömbbel való lefedésére a $\mu_\varepsilon(A) := \inf\{\sum_i \frac{4}{3}\pi r_i^3\}$ számot, és tartsunk ε-nal nullához, akkor az A halmaz $\overline{\lambda}(A)$ külső LEBESGUE-mértékéhez jutunk, amely mérhető halmazok esetén megegyezik a $\operatorname{vol}(A)$ térfogattal.
Legyen M az $\mathbb{R}^n$ EUKLIDESZi tér, vagy általánosabban szeparábilis metrikus tér a ρ metrikával, és

legyen $A \subset M$ ennek részhalmaza. Tetszőleges $d \geq 0$ paraméter és $\varepsilon > 0$ mellett képezzük a

$$\mu_{d,\varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (\mathrm{diam} B_i)^d : A \subset \bigcup B_{i=1}^{+\infty} , \mathrm{diam} B_i \leq \varepsilon \right\} \tag{17.40a}$$

mennyiséget, ahol $B_i \subset M$ tetszőleges olyan részhalmaz, amelynek átmérője: $\mathrm{diam} B_i = \sup_{x,y \in B_i} \rho(x,y)$.

Az A halmaz d *dimenziós külső* HAUSDORFF-*mértéke*

$$\mu_d(A) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{d,\varepsilon}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{d,\varepsilon}(A). \tag{17.40b}$$

Ez lehet véges vagy végtelen. Az A halmaz $d_H(A)$ HAUSDORFF-*dimenziója* ezek után a HAUSDORFF-mértékek egyértelműen meghatározott kritikus értéke:

$$d_H(A) = \begin{cases} +\infty , & \text{ha } \mu_d(A) \neq 0 \text{ minden } d \geq 0 \text{ esetén} , \\ \inf \{ d \geq 0 : \mu_d(A) = 0 \} . \end{cases} \tag{17.40c}$$

Megjegyzés: A $\mu_{d,\varepsilon}(A)$ mennyiségeket az $r_i \leq \varepsilon$ sugarú gömbökből alkotott lefedésből, vagy $\mathbb{R}^n$ esetén a legfeljebb ε élhosszúságú kockákból is lehet számolni.

A Hausdorff-dimenzió alapvető tulajdonságai:

(HD1) $d_H(\emptyset) = 0$.
(HD2) Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, akkor $0 \leq d_H(A) \leq n$.
(HD3) $A \subset B$-ből következik $d_H(A) \leq d_H(B)$.
(HD4) Ha $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, akkor $d_H(A) = \sup_i d_H(A_i)$.
(HD5) Ha A véges vagy megszámlálható, akkor $d_H(A) = 0$.
(HD6) Ha $\varphi : M \to M$ LIPSCHITZ-folytonos (azaz létezik olyan $L > 0$ állandó, amellyel $\forall x, y \in M$ esetén $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x,y)$), akkor $d_H(\varphi(A)) \leq d_H(A)$. Ha létezik a φ^{-1} inverz leképezés és ez is LIPSCHITZ-folytonos, akkor még $d_H(A) = d_H(\varphi(A))$ is teljesül.

■ A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazára **(HD5)** miatt $d_H(\mathbb{Q}) = 0$. A C CANTOR-halmazra $d_H(C) = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309\ldots$.

3. Kapacitásdimenzió

Legyen A az (M, ρ) metrikus tér kompakt halmaza, és legyen $N_\varepsilon(A)$ azoknak a legfeljebb ε átmérőjű halmazoknak a minimális száma, amelyekkel A lefedhető. A

$$\overline{d}_C(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \tag{17.41a}$$

mennyiséget A *felső kapacitásdimenziójának*, a

$$\underline{d}_C(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \tag{17.41b}$$

mennyiséget pedig *alsó kapacitásdimenziójának* hívjuk. Ha $\overline{d}_C(A) = \underline{d}_C(A) := d_C(A)$, akkor $d_C(A)$ az A halmaz *kapacitásdimenziója*. $\mathbb{R}^n$-ben a kapacitásdimenziót olyan korlátos halmazokra is tekinthetjük, amelyek nem zártak.

Az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra a fenti definícióban szereplő $N_\varepsilon(A)$ szám a következőképpen is definiálható: Lefedjük $\mathbb{R}^n$-et n-dimenziós, ε oldalhosszú kockákból álló ráccsal. Ezután $N_\varepsilon(A)$-nak vehetjük a rács azon kockáinak a számát, amelyek metszik az A halmazt.

A kapacitásdimenzió alapvető tulajdonságai:

(KD1) Mindig teljesül, hogy $d_H(A) \leq d_C(A)$.
(KD2) Az m-dimenziós $F \subset \mathbb{R}^n$ felületre $d_H(F) = d_C(F) = m$.
(KD3) Az A halmaz $\overline{A}$ lezártjára: $d_C(A) = d_C(\overline{A})$, míg gyakran $d_H(A) < d_H(\overline{A})$.
(KD4) Ha $A = \bigcup_n A_n$, akkor a kapacitásdimenzióra általában nem érvényes, hogy $d_C(A) = \sup_n d_C(A_n)$.

■ Legyen $A := \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Akkor $d_H(A) = 0$ és $d_C(A) = \frac{1}{2}$.

Ha A a $[0, 1]$ itervallum racionális pontjainak halmaza, akkor **KD2** és **KD3** miatt $d_C(A) = 1$. Másrészt $d_H(A) = 0$.

4. Önhasonlóság

Számos olyan geometriai alakzat képzéséhez, amelyet *önhasonló*nak neveznek, a következő eljárás szolgál alapul: Valamilyen kiindulási alakzatot olyan új alakzattal helyettesítünk, amely a kiindulási alakzat p számú, $q > 1$ tényezővel lineárisan skálázott másolatából áll. Az összes, a k-adik lépésben előállt k-szorosan skálázott kiindulási alakzatot ezután ismét úgy kezeljük, mint az első lépésben.

■ **A:** CANTOR-halmaz: $p = 2$, $q = 3$.

■ **B:** KOCH-féle görbe: $p = 4$, $q = 3$. Az első 3 lépés a **17.13. ábrán** látható.

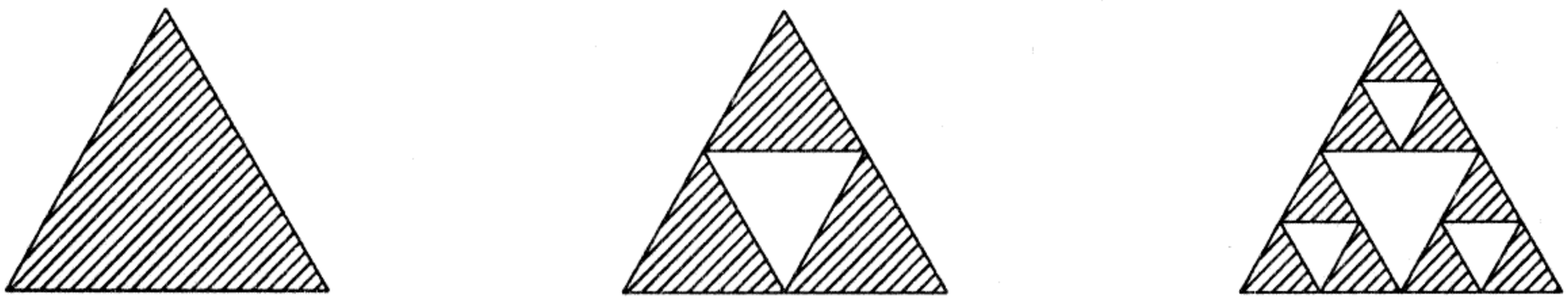
■ **C:** SIERPIŃSKI-sárkány: $p = 3$, $q = 2$. Az első 3 lépést a **17.14. ábra** mutatja. (A fehér háromszögeket ismételten eltávolítjuk.)

■ **D:** SIERPIŃSKI-szőnyeg: $p = 8$, $q = 3$. Az első 3 lépést a **17.15. ábra** mutatja. (A fehér négyszögeket távolítjuk el.)

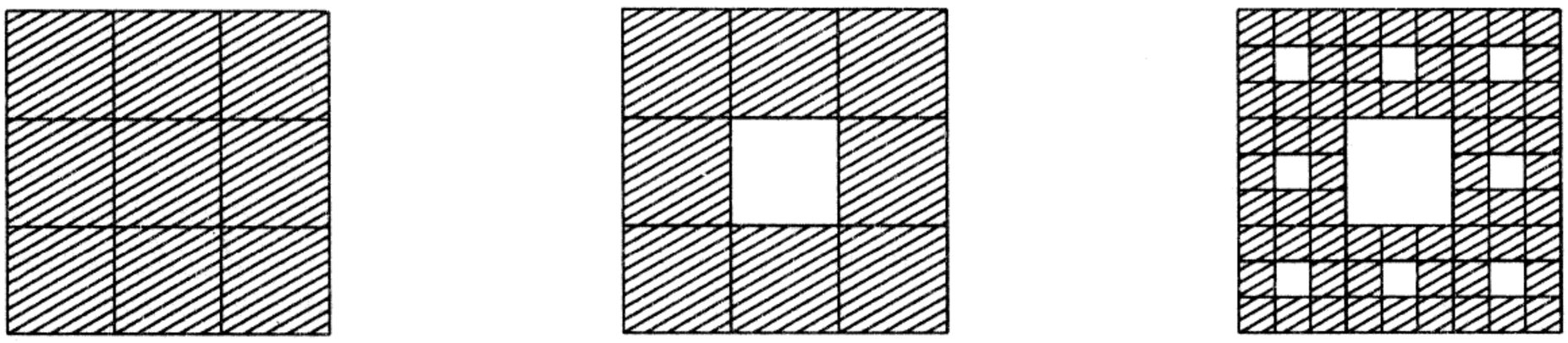
Az **A**–**D** alatti halmazokra: $d_C = d_H = \dfrac{\ln p}{\ln q}$.



17.13. ábra.



17.14. ábra.



17.15. ábra.

17.2.4.2. Invariáns mértékkel definiált dimenziók

1. Mérték dimenziója

Legyen μ a Λ halmazra koncentrált valószínűségi mérték az (M, ρ) téren. Ha $x \in \Lambda$ tetszőleges pont, $B_\delta(x)$ az x középpontú, δ sugarú gömb, akkor

$$\overline{d}_\mu(x) := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(B_\delta(x))}{\ln \delta} \tag{17.42a}$$

jelöli a *felső* és

$$\underline{d}_\mu(x) := \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu(B_\delta(x))}{\ln \delta} \tag{17.42b}$$

az *alsó pontonkénti dimenzió*t. Ha $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) := d_\mu(x)$, akkor $d_\mu(x)$ *a* μ *mérték dimenziója* az x pontban.

Young I. tétele: Ha μ-m. m. $x \in \Lambda$ esetén fennáll a $d_\mu(x) = \alpha$ összefüggés, akkor $\alpha = d_H(\mu) := \inf_{X \subset \Lambda,\, \mu(X)=1} \{d_H(X)\}$. A $d_H(\mu)$ mennyiséget a μ *mérték* HAUSDORFF-*dimenziójának* nevezzük.

■ Legyen $M = \mathbb{R}^n$, és legyen $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ olyan kompakt gömb, amelynek $\lambda(\Lambda)$ LEBESGUE-mértéke pozitív. A μ mérték Λ-ra vett leszűkítése $\mu_\Lambda = \dfrac{\lambda}{\lambda(\Lambda)}$. Akkor $\mu(B_\delta(x)) \sim \delta^n$ és $d_H(\mu) = n$.

2. Információdimenzió

Legyen $\{\varphi^t\}_{t \in \Gamma}$ attraktora, Λ úgy lefedve ε oldalhosszúságú $Q_1(\varepsilon), \ldots, Q_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ kockákkal, mint 17.2.2.2.-ben. Legyen μ invariáns valószínűségi mérték Λ-n.
A $Q_1(\varepsilon), \ldots, Q_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ lefedés *entrópiája*

$$H(\varepsilon) := -\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon), \quad \text{ahol} \quad p_i(\varepsilon) := \mu(Q_i(\varepsilon)), \;\; i = 1, \ldots, n(\varepsilon). \tag{17.43}$$

Ha a $d_I(\mu) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{H(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$ határérték létezik, akkor rendelkezik a dimenzió tulajdonságaival. Ekkor ezt a mennyiséget *információdimenzió*nak nevezzük.

Young II. tétele: Ha μ-m. m. $x \in \Lambda$ esetén fennáll a $d_\mu(x) = \alpha$ összefüggés, akkor $\alpha = d_H(\mu) = d_I(\mu)$.

■ **A:** Tegyük fel, hogy a μ mérték $\{\varphi^t\}$ valamely stacionárius pontjára van koncentrálva. Mivel $\varepsilon > 0$ esetén $H_\varepsilon(\mu) = -1 \ln 1 = 0$ is fennáll, ezért $d_I(\mu) = 0$.

■ **B:** Tegyük fel, hogy a μ mérték $\{\varphi^t\}$ valamely határciklusára van koncentrálva. Ha $\varepsilon > 0$, akkor $H_\varepsilon(\mu) = -\ln \varepsilon$, ezért $d_I(\mu) = 1$.

3. Korrelációdimenzió

Legyen $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ a $\{\varphi^t\}_{t \in \Gamma}$ rendszer $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ attraktorának pontjaiból álló sorozat, μ invariáns valószínűségi mérték Λ-n, és legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Definiáljuk az $x_i := (y_i, \ldots, y_{i+m}) \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ vektorokra a távolságot a $\operatorname{dist}(x_i, x_j) := \max_{0 \le s \le m} \|y_{i+s} - y_{j+s}\|$ képlettel, ahol $\|\cdot\|$ az euklidészi vektornorma. Ha Θ jelöli a HEAVISIDE-függvényt: $\Theta(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, akkor a

$$C^m(\varepsilon) = \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N^2} \operatorname{card}\{(x_i, x_j) \colon \operatorname{dist}(x_i, x_j) < \varepsilon\}$$

$$= \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \Theta\left(\varepsilon - \operatorname{dist}(x_i, x_j)\right) \tag{17.44a}$$

kifejezést *korrelációintegrál*nak nevezzük. A

$$d_K := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln C^m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \tag{17.44b}$$

mennyiség (amennyiben létezik) a *korrelációdimenzió.*

4. Általánosított dimenzió

Fedjük le az M-en definiált $\{\varphi^t\}_{t \in \Gamma}$ rendszer Λ attraktorát — μ invariáns valószínűségi mérték — éppúgy, mint 17.2.2.2.-ben, ε oldalhosszúságú kockákkal. A $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$ paraméter tetszőleges értéke

esetén

$$H_q(\varepsilon) := \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon)^q, \quad \text{ahol } p_i(\varepsilon) = \mu(Q_i(\varepsilon)), \tag{17.45a}$$

a q-ad *rendű általánosított entrópia* a $Q_1(\varepsilon), \ldots, Q_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ lefedésre nézve.
A q-adrendű RÉNYI-*dimenzió*

$$d_q := -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \tag{17.45b}$$

amennyiben ez a határérték létezik.

A Rényi-dimenzió speciális esetei:

1. $q = 0$: $d_0 = d_C(\operatorname{supp} \mu)$. (17.46a)

2. $q = 1$: $d_1 := \lim_{q \to 1} d_q = d_I(\mu)$. (17.46b)

3. $q = 2$: $d_2 = d_K$. (17.46c)

5. Ljapunov-dimenzió

Legyen $\{\varphi^t\}_{t \in \Gamma}$ sima dinamikai rendszer az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ennek attraktora (illetve invariáns halmaza) Λ, és legyen μ Λ-ra koncentrált invariáns ergodikus valószínűségi mérték. Ha a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ számok a LJAPUNOV-kitevők μ-re nézve, és k a legnagyobb olyan index, amelyre $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$, akkor a

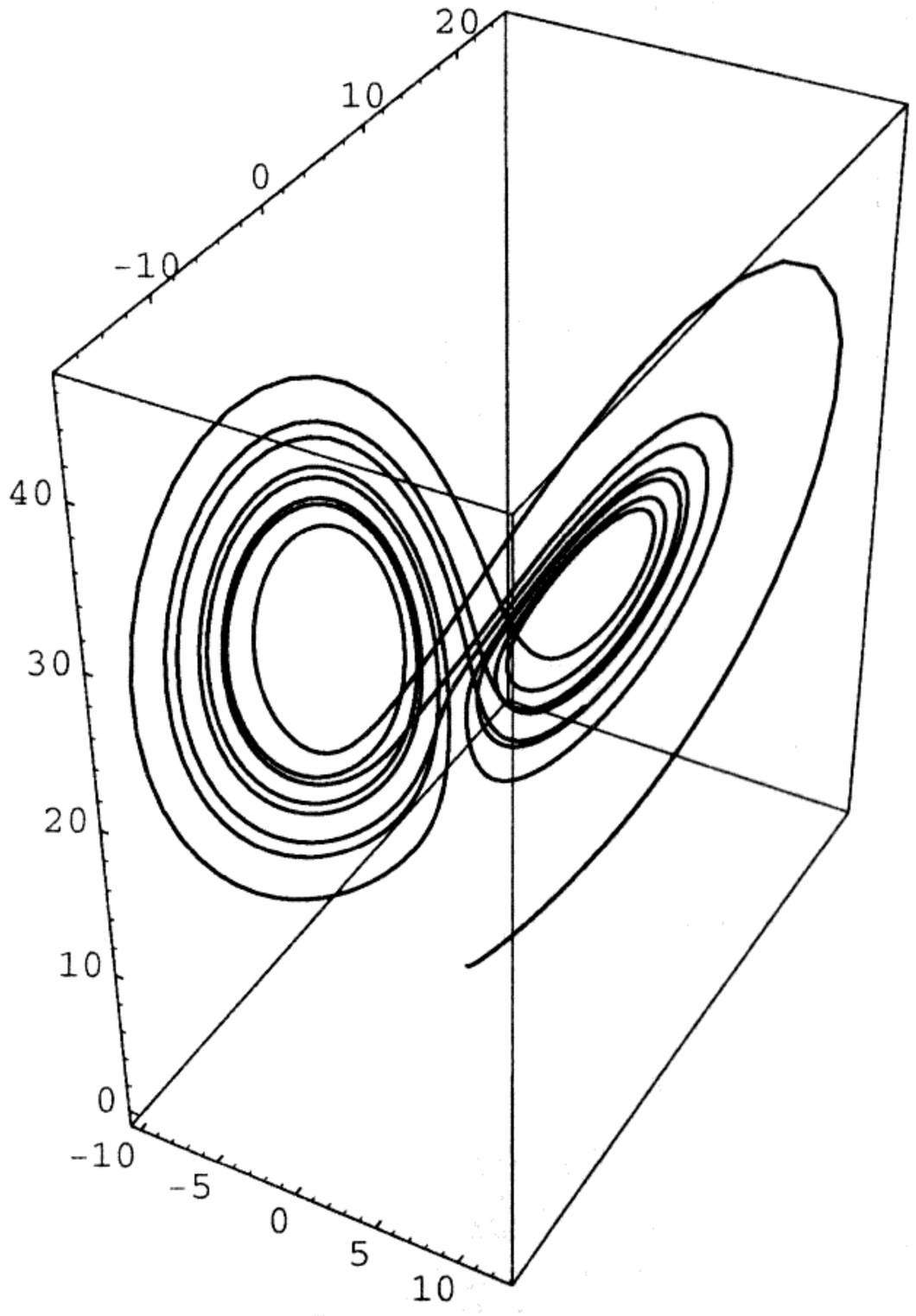
$$d_L(\mu) := k + \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|} \tag{17.47}$$

mennyiség a μ *mérték* LJAPUNOV-*dimenziója*.
Ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$, akkor $d_L(\mu) := n$; ha $\lambda_1 < 0$, akkor $d_L(\mu) := 0$.

Ledrappier tétele: Legyen $\{\varphi^t\}$ a (17.3) diszkrét rendszer az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ahol φ egy C^2-függvény, és μ a fenti, $\{\varphi^t\}$ valamely Λ attraktorára koncentrált invariáns ergodikus valószínűségi mérték. Akkor $d_H(\mu) \leq d_L(\mu)$.

■ **A:** Tegyük fel, hogy a $\{\varphi^t\}$ sima dinamikai rendszer $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ attraktorát lefedtük ε oldalhosszúságú négyzetekkel. Legyen $\sigma_1 > 1 > \sigma_2$ a $D\varphi$ leképezés szinguláris értéke. Akkor az attraktor d_C-dimenziós térfogatára fennáll, hogy $m_{d_C} \simeq N_\varepsilon \cdot \varepsilon^{d_C}$. Minden ε oldalhosszúságú négyzetet φ közelítőleg olyan paralellogrammába visz, amelynek oldalhosszai $\sigma_2\varepsilon$ és $\sigma_1\varepsilon$. Ha a lefedést $\sigma_2\varepsilon$ oldalhosszúságú rombuszokból vesszük, akkor $N_{\sigma_2\varepsilon} \simeq N_\varepsilon \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Az $N_\varepsilon \varepsilon^{d_C} \simeq N_{\sigma_2\varepsilon}(\varepsilon\sigma_2)^{d_C}$ összefüggésből azonnal kapjuk, hogy $d_C \simeq 1 - \frac{\ln \sigma_1}{\ln \sigma_2} = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$. Ezek a heurisztikus meggondolások utalnak a LJAPUNOV-dimenziót definiáló képlet eredetére.

■ **B:** Tegyük fel, hogy adott a (17.6) HÉNON-rendszer az $a = 1{,}4$ és $b = 0{,}3$ paraméterrel. A (17.6) rendszernek ezeknél a paraméterértékeknél bonyolult szerkezetű Λ attraktora van: az HÉNON-*attraktor*. Ennek numerikusan meghatározott kapacitásdimenziója $d_C(\Lambda) \simeq 1{,}26$. Megmutatható, hogy az HÉNON-attraktorhoz létezik SBR-mérték. A λ_1 és λ_2 LJAPUNOV-kitevőkre fennáll, hogy $\lambda_1 + \lambda_2 = \ln |\det D\varphi(x)| = \ln b = \ln 0{,}3 \simeq -1{,}204$. A numerikusan megállapított $\lambda_1 \simeq 0{,}42$ értékből $\lambda_2 \simeq -1{,}62$ adódik. Így tehát $d_L(\mu) \simeq 1 + \frac{0{,}42}{1{,}62} \simeq 1{,}26$.



17.16. ábra.

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ sima dinamikai rendszer az $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, Λ pedig kompakt invariáns halmaz. Rögzítsünk egy tetszőleges $t_0 \geq 0$ időpontot és legyen $\Phi := \varphi^{t_0}$.

Douady és Oesterlé tétele:
Legyenek $\sigma_1(x) \geq \cdots \geq \sigma_n(x)$ a $D\Phi(x)$ leképezés szinguláris értékei és legyen a $d \in (0,n]$ szám előállítása $d = d_0 + s$, ahol $d_0 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ és $s \in [0,1]$. Ha $\sup_{x\in\Lambda} [\sigma_1(x)\sigma_2(x)\ldots\sigma_{d_0}(x)\sigma_{d_0+1}^s(x)] < 1$, akkor $d_H(\Lambda) < d$.

Speciális változat differenciálegyenletekre:
Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ a (17.1) differenciálegyenlet folyama, Λ kompakt invariáns halmaz és legyenek $\alpha_1(x) \geq \cdots \geq \alpha_n(x)$ az $\frac{1}{2}[Df(x)^T + Df(x)]$ *szimmetrizált* JACOBI-*mátrix* sajátértékei a tetszőleges $x \in \Lambda$ pontban. Ha a $d \in (0,n]$ szám $d = d_0 + s$ alakú, ahol $d_0 \in \{0,\ldots,n-1\}$, $s \in [0,1]$, és $\sup_{x\in\Lambda}[\alpha_1(x) + \cdots + \alpha_{d_0}(x) + s\alpha_{d_0+1}(x)] < 0$, akkor $d_H(\Lambda) < d$. A

17.2.4.3. Lokális Hausdorff-dimenzió Douady és Oesterlé nyomán

$$d_{DO}(x) := \begin{cases} 0\,, \text{ ha } \alpha_1(x) < 0\,, \\ \sup\{d\colon 0 \leq d \leq n\,,\ \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_{[d]}(x) + (d-[d])\alpha_{[d]+1}(x) \geq 0\}, \quad \text{egyébként} \end{cases} \tag{17.48}$$

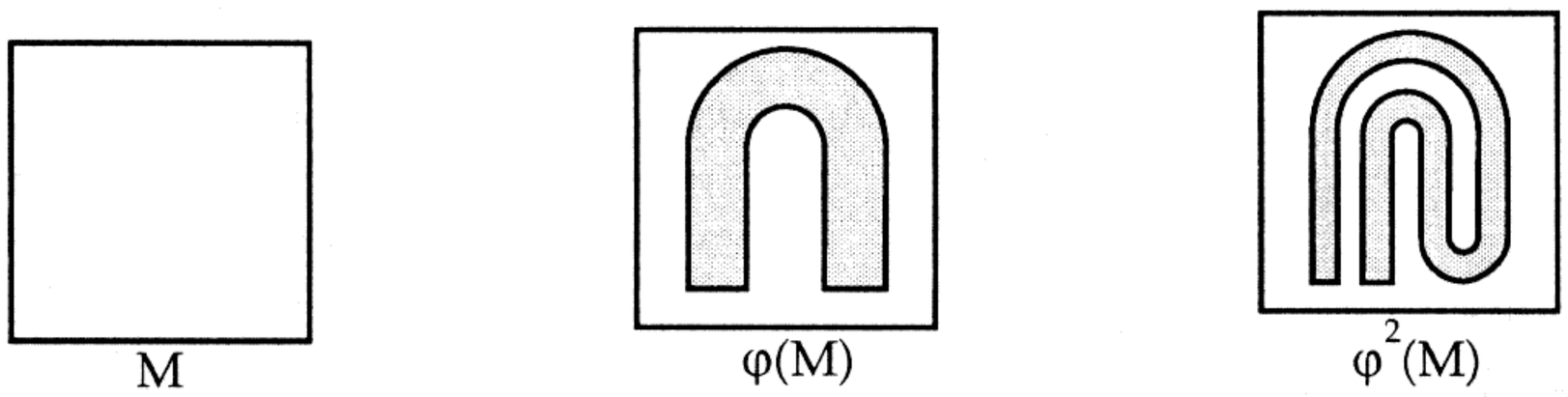
mennyiség, ahol $x \in \Lambda$ tetszőleges, $[d]$ pedig d egész részét jelöli, a DOUADY–OESTERLÉ-*féle dimenzió* az x pontban. DOUADY és OESTERLÉ fent megfogalmazott tételének feltételei mellett ekkor differenciálegyenletekre fennáll, hogy $d_H(\Lambda) \leq \sup_{x\in\Lambda} d_{DO}(x)$.

■ A (17.2) LORENZ-rendszernek $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$, $r = 28$ esetén olyan Λ attraktora van (a LORENZ-*attraktor*), amelynek numerikusan meghatározott dimenziója $d_H(\Lambda) \approx 2{,}06$ (**17.16. ábra**, amit Mathematicával állítottunk elő). DOUADY és OESTERLÉ tétele alapján tetszőleges $b > 1, \sigma > 0$ és $r > 0$ esetére kapjuk a $d_H(\Lambda) \leq 3 - \dfrac{\sigma+b+1}{\kappa}$ becslést, ahol $\kappa := \dfrac{1}{2}\left[\sigma + b + \sqrt{(\sigma-b)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{b-1}} + 2\right)\sigma r}\right]$.

17.2.4.4. Példák attraktorokra

■ **A:** A φ *patkóleképezés* az olyan POINCARÉ-leképezésekkel kapcsolatban lép föl, amelyek a stabilis és instabilis sokaság transzverzális metszeteit tartalmazzák. Az $M = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetet először is az egyik koordinátatengely irányában lineárisan megnyújtjuk, azután a másik irányban összenyomjuk. Végül a kapott téglalapot a közepén meghajlítjuk **(17.17. ábra)**. Ha ezt az eljárást folyamatosan ismételjük, halmazok olyan $M \supset \varphi(M) \supset \cdots$ sorozatát kapjuk, amelyre $\Lambda := \bigcap_{k=0}^{\infty} \varphi^k(M)$

olyan kompakt és φ-ra nézve invariáns halmaz, amely M összes pontját magához vonzza. Egyetlen pont kivételével Λ lokálisan „egyenes $\times$ CANTOR-halmaz" alakú szorzatként írható le.

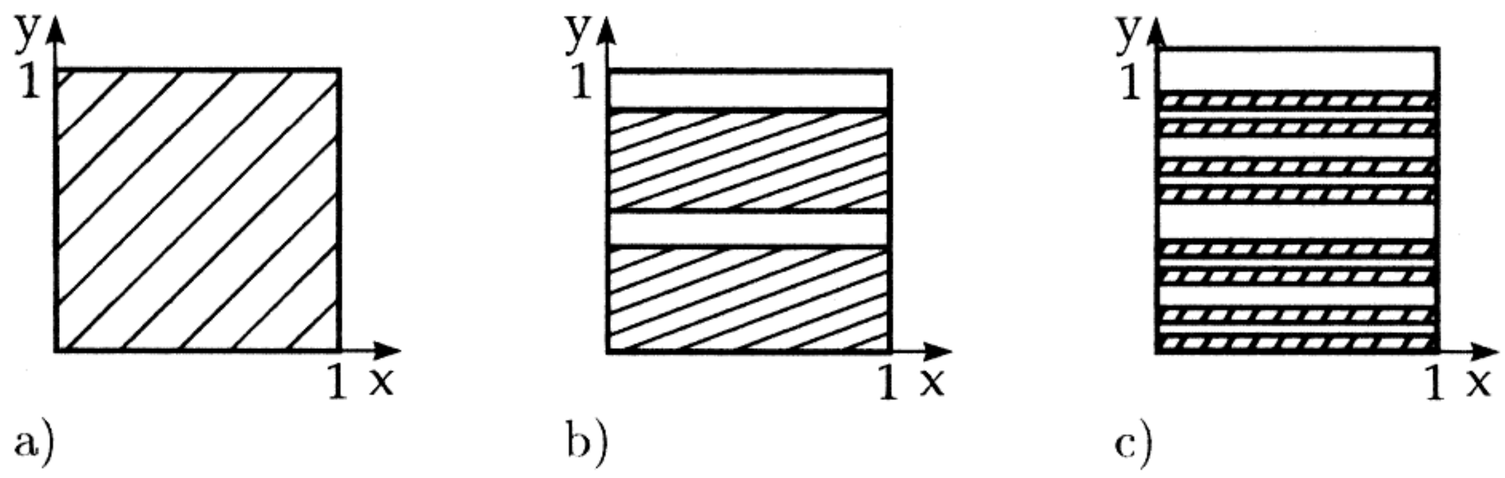


17.17. ábra.

■ **B:** Legyen $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ paraméter és legyen $M := [0,1] \times [0,1]$ az egységnégyzet. A $\varphi : M \to M$ leképezés, ahol

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (2x, \alpha y)\,, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2\,,\ y \in [0,1]\,, \\ (2x-1, \alpha y + 1/2), & \text{ha } 1/2 < x \le 1\,,\ y \in [0,1] \end{cases}$$

a disszipatív *pékleképezés*. A **17.18. ábra** a pékleképezés két iterációját mutatja. Felismerhető a létrejövő „*levelestészta-struktúra*".



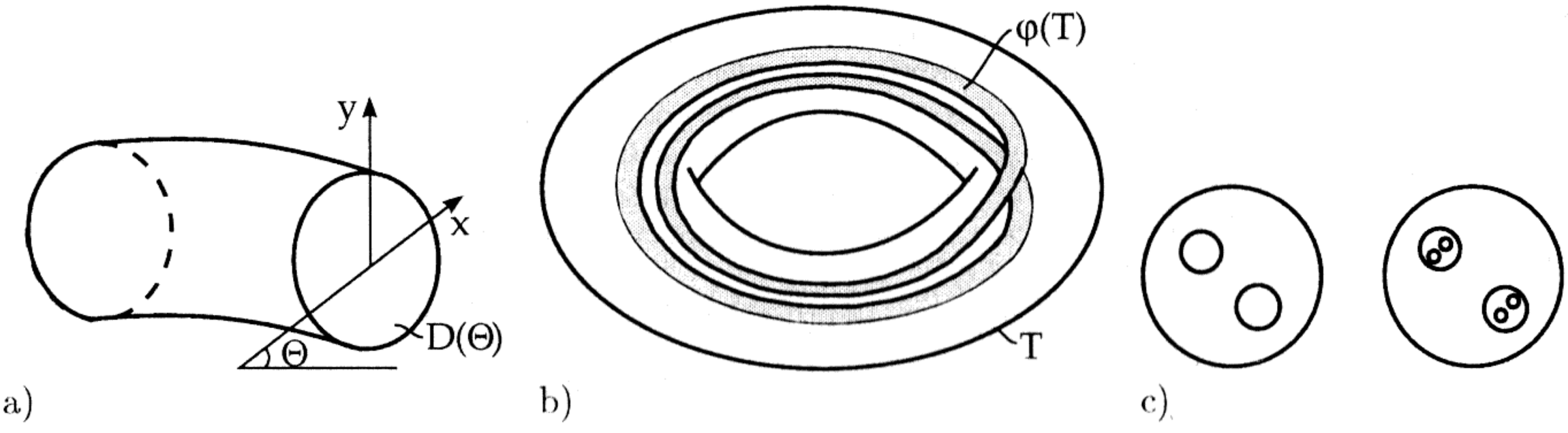
17.18. ábra.

A $\Lambda := \bigcap_{k=0}^{\infty} \varphi^k(M)$ halmaz invariáns φ-re nézve, és Λ az M halmaz minden pontját vonzza. A HAUSDORFF-dimenzió értéke: $d_H(\Lambda) = 1 + \dfrac{\ln 2}{-\ln \alpha}$. A $\{\varphi^k\}$ dinamikai rendszerhez létezik M-en a LEBESGUE-mértéktől különböző μ invariáns mérték. Azokban a pontokban, ahol a deriváltak léteznek, a JACOBI-mátrix: $D\varphi^k((x,y)) = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$. Ebből adódnak a $\sigma_1(k,(x,y)) = 2^k, \sigma_2(k,(x,y)) = \alpha^k$ szinguláris értékek, ennek következtében (a μ invariáns mértékre nézve) a LJAPUNOV-kitevők: $\lambda_1 = \ln 2, \lambda_2 = \ln \alpha$. Ezért a LJAPUNOV-dimenzió: $d_L(\mu) = 1 + \dfrac{\ln 2}{-\ln \alpha} = d_H(\Lambda)$. Itt érvényes a metrikus entrópiára vonatkozó PESIN-féle képlet, azaz $h_\mu = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i = \ln 2\,.$

■ **C:** Legyen T a teljes tórusz a (Θ, x, y) lokális koordinátákkal, amint a **17.19.a ábrán** látható. Definiáljuk az $\alpha \in (0, 1/2)$ paramétertől függő φ: $T \to T$ leképezést a következőképpen:

$$\Theta_{k+1} = 2\Theta_k\,, \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\Theta_k \\ \sin\Theta_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

A $\varphi(T)$ kép a $\varphi(T) \cap D(\Theta)$ és $\varphi^2(T) \cap D(\Theta)$ metszettel együtt a **17.19.b** és **17.19.c ábrán** látható. Az iteráció eredményeképpen a $\Lambda := \bigcap_{k=0}^{\infty} \varphi^k(T)$ halmaz keletkezik, amelyet *szolenoid*nak neveznek. A Λ



17.19. ábra.

attraktor hosszanti irányban kontinuum sok görbéből áll, amelyek mindegyike sűrű Λ-ban és amelyek mindegyike instabilis. Λ-nak az ezen görbékre transzverzális metszete CANTOR-típusú halmaz.

A HAUSDORFF-dimenzióra fennáll, hogy $d_H(\Lambda) = 1 - \dfrac{\ln 2}{\ln \alpha}$. A Λ halmaznak van olyan teljes környezete, amely vonzási tartomány. Ezenkívül a Λ attraktor strukturálisan stabilis, azaz a fent megfogalmazott kvalitatív tulajdonságok φ C^1-kicsi megzavarásainál nem változnak.

■ **D:** A szolenoid példa *hiperbolikus attraktor*ra.

17.2.5. Különös attraktorok és káosz

1. Kaotikus attraktor

Legyen $\{\varphi^t\}_{\iota\in\Gamma}$ dinamikai rendszer az (M, ρ) metrikus téren. Ennek a rendszernek a Λ attraktora *kaotikus*, ha Λ-n belül fennáll a *kezdeti állapotoktól való érzékeny függőség.*

A „kezdeti állapotoktól való érzékeny függőség"-et többféle módon pontosabbá fogjuk tenni. Ez fennáll például, ha az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:

a) $\{\varphi^t\}$ minden mozgása Λ-n bizonyos értelemben instabilis.

b) $\{\varphi^t\}$ legnagyobb LJAPUNOV-kitevője egy Λ-ra koncentrált invariáns ergodikus valószínűségi mértékre nézve pozitív.

■ Az **a)** értelemben vett érzékeny függőség áll fenn a szolenoidnál. A **b)** tulajdonság például az HÉNON-attraktornál fordul elő.

2. Fraktálok és különös attraktorok

A $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer valamely Λ attraktorát *fraktál*nak nevezzük, ha nem véges sok pontból vagy szakaszonként differenciálható görbéből vagy felületből áll, vagy nem olyan halmaz, amely valamely zárt, szakaszonként differenciálható felülettel van határolva. Az attraktor *különös*, ha kaotikus, fraktál vagy mindkettő. A kaotikus, fraktál és különös fogalmat analóg módon használjuk olyan kompakt invariáns halmazokra is, amelyek nem attraktorok. A dinamikai rendszer *kaotikus*, ha van kompakt invariáns kaotikus halmaza.

■ Tekintsük az egységnégyzeten az

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n \pmod 1, \quad y_{n+1} = x_n + y_n \pmod 1 \tag{17.49}$$

leképezést (az ANOSZOV-*diffeomorfizmus*t). A rendszernek valójában a T^2 tórusz a megfelelő fázistere. Ez a rendszer konzervatív, a LEBESGUE-mérték invariáns mértéke, megszámlálhatóan végtelen sok periodikus pályája van, amelyek egyesítése sűrű, továbbá a rendszer keverő.
Másrészt $\Lambda = T^2$ egy 2 (vagyis egész) dimenziójú invariáns halmaz.

3. Devaney-féle kaotikus rendszerek

Legyen $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ dinamikai rendszer az (M, ρ) metrikus téren a Λ kompakt invariáns halmazzal. A $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ rendszer (illetve a Λ halmaz) DEVANEY-*féle értelemben kaotikus*, ha:

a) $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ *topologikusan tranzitív* Λ-n, azaz van olyan pozitív félpálya, amely Λ-ban sűrű.

b) $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ periodikus pályái Λ-ban sűrűek.
c) $\{\varphi^t\}_{t\in\Gamma}$ GUCKENHEIMER-*féle értelemben érzékeny a kezdeti feltételekre a* Λ *halmazon*, azaz

$$\begin{aligned} &\exists\ \varepsilon>0 \quad \forall\, x\in\Lambda \quad \forall\,\delta>0\,,\\ &\exists\ y\in\Lambda\cap U_\delta(x)=\{z\colon \rho(x,z)<\delta\}\,,\\ &\exists\ t\geq 0\colon \rho(\varphi^t(x),\varphi^t(y))\geq\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{17.50}$$

■ Tekintsük a 0–1-sorozatok

$$\sum=\{s=s_0s_1s_2\ldots\colon s_i\in\{0,1\}\quad (i=0,1\ldots)\}$$

terét. Legyen az $s=s_0s_1s_2\ldots$ és az $s'=s'_0s'_1s'_2\ldots$ sorozat távolsága

$$\rho(s,s'):=\begin{cases}0\,, & \text{ha}\quad s=s'\,,\\ 2^{-j}\,, & \text{ha}\quad s\neq s',\ j \text{ a legkisebb olyan index, amelyre } s_j\neq s'_j.\end{cases}$$

Az így kapott $(\sum,\rho)$ pár teljes metrikus tér, amely még kompakt is.
A $\sigma\colon s=s_0s_1s_2\ldots\longmapsto\sigma(s):=s'=s_1s_2s_3\ldots$ leképezés a BERNOULLI-*féle eltolás-leképezés.*
Az eltolás-leképezés DEVANEY-féle értelemben kaotikus.

17.2.6. Káosz egydimenziós leképezéseknél

Kompakt intervallumon definiált folytonos leképezések esetére számos elegendő feltétel ismeretes kaotikus invariáns halmaz létezésére. Három példát kell megemlítenünk.

Szinaj tétele: Legyen $\varphi\colon I\to I$ a kompakt I intervallum (például $I=[0,1]$) önmagába való folytonos leképezése. Akkor a $\{\varphi^k\}$ rendszer I-n pontosan akkor kaotikus DEVANEY-féle értelemben, ha φ topologikus entrópiája I-n — azaz $h(\varphi)$ — pozitív.

Sarkovszkij tétele: Rendezzük a pozitív egész számokat a következőképpen:

$$3\succ 5\succ 7\succ\ldots\succ 2\cdot 3\succ 2\cdot 5\succ\ldots\succ 2^2\cdot 3\succ 2^2\cdot 5\succ\ldots\ldots\succ 2^3\succ 2^2\succ 2\succ 1\,. \tag{17.51}$$

Legyen $\varphi\colon I\to I$ az I kompakt intervallum önmagába való folytonos leképezése, és legyen $\{\varphi^k\}$ I-n n-periodikus pálya. Akkor $\{\varphi^k\}$-nak $n\succ m$ esetén van m-periodikus pályája is.

Block, Guckenheimer és Misiuriewicz tétele: Legyen $\varphi\colon I\to I$ az I kompakt intervallum önmagába való folytonos leképezése úgy, hogy $\{\varphi^k\}$-nak van 2^nm-periodikus pályája ($m>1$ páratlan szám). Akkor $h(\varphi)\geq\dfrac{\ln 2}{2^{n+1}}$.

17.3. Bifurkációelmélet és a káoszhoz vezető átmenetek

17.3.1. Bifurkációk Morse–Smale-rendszerekben

Legyen $\{\varphi^t_\varepsilon\}_{t\in\Gamma}$ az $M\subset\mathbb{R}^n$ halmazon vagy differenciálegyenlet vagy leképezések által generált dinamikai rendszer, amely még az $\varepsilon\in V\subset\mathbb{R}^l$ paramétertől is függ. *Bifurkáció*ról akkor beszélünk, ha a dinamikai rendszer fázisportréjának topológiai szerkezete az ε paraméter kis megváltoztatása esetén megváltozik. Az $\varepsilon=0\in V$ paraméter a *bifurkációs érték*, ha 0 minden környezetében léteznek olyan $\varepsilon\in V$ paraméterértékek, hogy a $\{\varphi^t_\varepsilon\}$ és a $\{\varphi^t_0\}$ dinamikai rendszer M-en egymással topológiailag nem ekvivalens, illetve nem konjugált. Annak a paramétertérnek a dimenziója, amely a lehető legkisebb és amelynél bifurkáció még megfigyelhető, a bifurkáció *kodimenzió*ja.

Megkülönböztetünk *lokális* bifurkációkat, amelyek a dinamikai rendszer egyes pályáinak közelében mennek végbe, és *globális* bifurkációkat, amelyek egyszerre a fázistér nagyobb részét érintik.

17.3.1.1. Lokális bifurkációk stacionárius pontok közelében

1. A központi sokaságra vonatkozó tétel

Tekintsünk egy paramétertől függő

$$\dot x=f(x,\varepsilon),\quad \text{illetve}\quad \dot x_i=f_i(x_1,\ldots,x_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l)\quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{17.52}$$

differenciálegyenletet, ahol $M\subset\mathbb{R}^n$ és $V\subset\mathbb{R}^l$ nyílt halmaz, az $f: M\times V\to\mathbb{R}^n$ függvényről pedig feltesszük, hogy r-szer folytonosan differenciálható. A (17.52) egyenlet az $M\times V$ fázistéren az

$\dot{x} = f \circ (x, \varepsilon)$, $\dot{\varepsilon} = 0$ paramétert nem tartalmazó differenciálegyenletként is interpretálható. PICARD és LINDELÖF tételéből és a kezdeti feltételek szerinti differenciálhatóságra vonatkozó tételből (lásd 821. old.) következik, hogy a (17.52) egyenletnek tetszőleges $p \in M$ és $\varepsilon \in V$ mellett létezik a 0 időpontban a p ponton átmenő $\varphi(\cdot, p, \varepsilon)$ lokálisan egyértelmű megoldása, amely 2. és 3. változójában (p és ε szerint) r-szer folytonosan differenciálható. Tegyük fel, hogy a (17.52) rendszernek minden megoldása az egész $\mathbb{R}$ számegyenesen értelmezve van, továbbá $\varepsilon = 0$ esetén a 0 pont a rendszer stacionárius pontja, azaz $f(0,0) = 0$. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ a $D_x f(0,0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\right]_{i,j=1}^{n}$ mátrix azon sajátértékei, amelyekre $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$. Legyen ezenkívül $D_x f(0,0)$-nek még pontosan m számú negatív és $k := n - s - m$ számú pozitív valós részű sajátértéke.

A differenciálegyenletek *központi sokaságára vonatkozó tétel* (SOSITAISVILI *tétele*) (lásd [17.12]) szerint a (17.52) differenciálegyenlet elegendően kicsiny normájú ε mellett 0 környezetében topológiailag ekvivalens az

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon) := Ax + g(x, \varepsilon), \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = z \tag{17.53}$$

rendszerrel, ahol $x(t) \in \mathbb{R}^s$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ és $z(t) \in \mathbb{R}^k$, A pedig (s,s) típusú mátrix, amelynek sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, és g egy olyan C^r-függvény, amelyre $g(0,0) = 0$, $D_x g(0,0) = 0$.
A (17.53) előállításból következik, hogy (17.52) bifurkációit 0 valamely környezetében le lehet írni kizárólag az

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon) \tag{17.54}$$

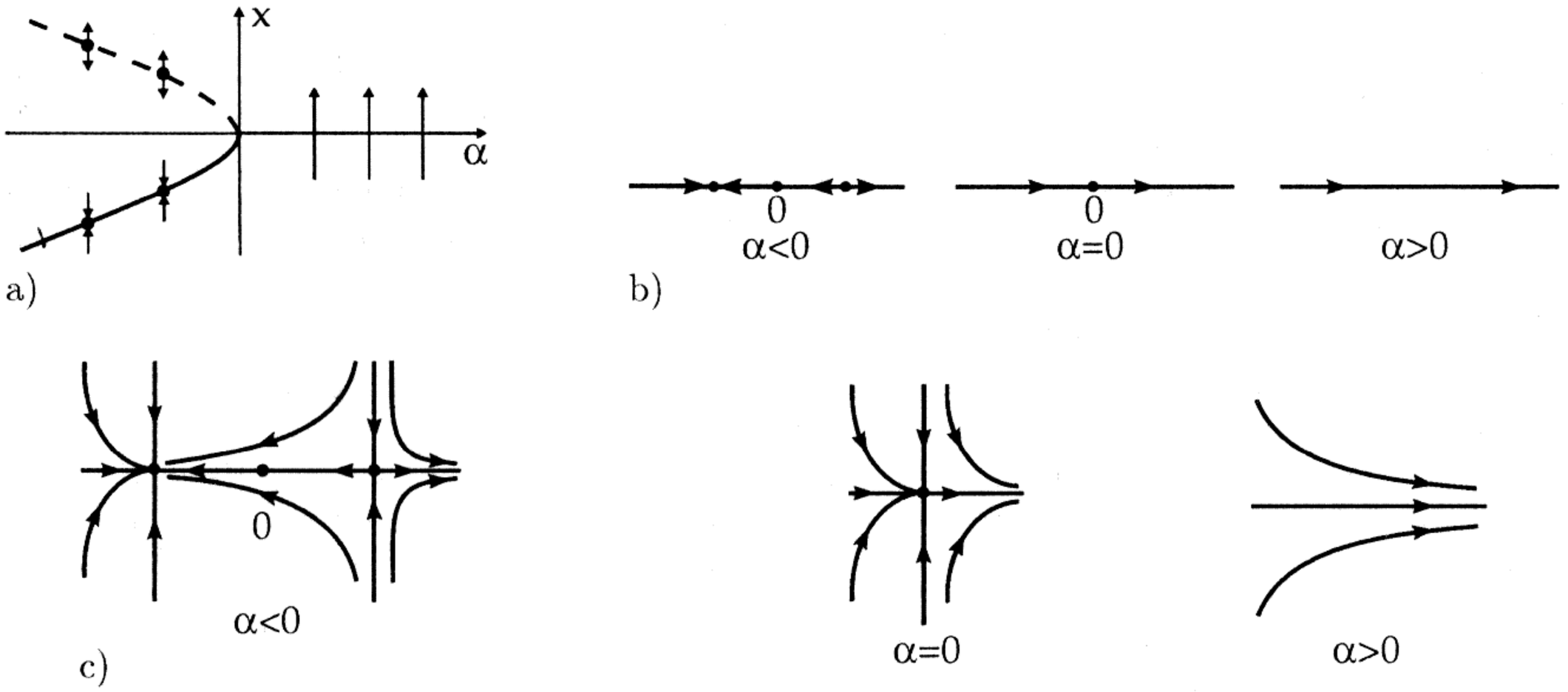
differenciálegyenlettel. A (17.54) egyenlet (17.53) *redukált differenciálegyenlete* a $W^c_{loc} = \{(x,y,z) : y = 0, z = 0\}$ *lokális központi sokaság*on. A (17.54) redukált differenciálegyenletet gyakran viszonylag egyszerű alakra (például polinomiális jobb oldalúra) lehet hozni olyan nemlineáris paraméterfüggő koordinátatranszformációval, amely a fázisportré topologikus szerkezetét a vizsgált stacionárius pont környezetében nem változtatja meg. Ezt az alakot *normálalak*nak nevezzük. A normálalak nem határozható meg egyértelműen; rendszerint különböző normálalakok ekvialens módon leírhatják ugyanazt a bifurkációt.

2. Nyeregcsomó-bifurkáció és transzkritikus bifurkáció

Tekintsük a (17.52) egyenletet $l = 1$ mellett; legyen f legalább kétszer folytonosan differenciálható, és tegyük fel, hogy $D_x f(0,0)$ egyik sajátértéke $\lambda_1 = 0$ és $n-1$ számú λ_j sajátértékére $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$ áll fenn. A központi sokaságra vonatkozó tétel szerint ebben az esetben (17.52) minden bifurkációját 0 közelében a (17.54) egydimenziós redukált differenciálegyenlet írja le. Nyilvánvaló, hogy $F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$. Ha még azt is föltesszük, hogy $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(0,0) \neq 0$ és $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0,0) \neq 0$, és (17.54) jobb oldalát TAYLOR-sorba fejtjük, akkor (17.54) [17.13] szerint koordinátatranszformációval $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) > 0$ esetén az

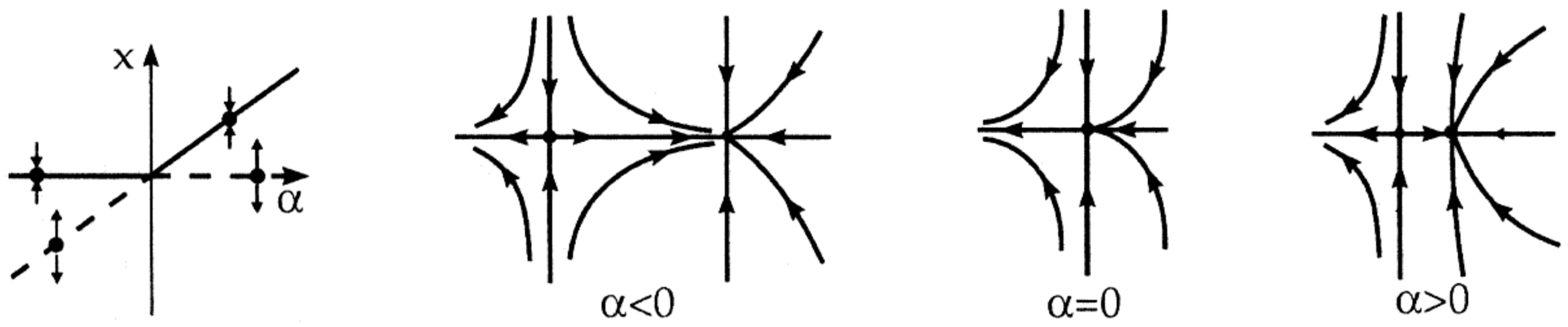
$$\dot{x} = \alpha + x^2 + \cdots \tag{17.55}$$

$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) < 0\right)$ esetén pedig az $\dot{x} = \alpha - x^2 + \cdots$ normálalakra hozható, ahol $\varepsilon \mapsto \alpha(\varepsilon)$ olyan differenciálható függvény, amelyre $\alpha(0) = 0$. A pontok a magasabbrendű tagokat jelölik. Ha $\alpha < 0$, akkor a (17.55) egyenletnek $x = 0$ közelében két stacionárius pontja van, amelyek közül az egyik stabilis, a másik instabilis. Ha $\alpha = 0$, akkor ezek az $x = 0$ instabilis stacionárius ponttá olvadnak össze. Ha $\alpha > 0$, akkor a (17.55) egyenletnek nincs stacionárius pontja 0 közelében **(17.20.b ábra)**.
A többdimenziós esetre való áttérés 0 közelében (17.52) *nyeregcsomó-bifurkáció*ját adja. Az $n = 2$ és $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ esetre ezt a bifurkációt a **17.20.c ábrán** látjuk. A nyeregcsomó-bifurkációt a kibővített fázistérben a **17.20.a ábra** mutatja. Elegendően sima (17.52) alakú vektormezők esetére a nyeregcsomó-bifurkációk tipikusak.



17.20. ábra.

Ha az F-re vonatkozó nyeregcsomó-bifurkációhoz vezető feltételekben a $\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0,0) \neq 0$ feltevést a $\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0,0) = 0$ és $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varepsilon}(0,0) \neq 0$ feltevéssel helyettesítjük, akkor (17.54)-ből adódik a *transzkritikus bifurkáció* $\dot{x} = \alpha x - x^2$ rövidített (magasabb tagok nélküli) normálalakja. A **17.21. ábrán** látható $n = 2$ és $\lambda_2 < 0$ esetén a transzkritikus bifurkáció, a bifurkációs diagramal együtt. A nyeregcsomó- és a transzkritikus bifurkáció az 1 kodimenziós bifurkációk közé tartozik.



17.21. ábra.

3. Hopf-bifurkáció

Legyen $n \geq 2$, $l = 1$ és $r \geq 4$, és tekintsük a (17.52) egyenletet. Tegyük fel, hogy ha $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0$ elegendően kicsiny), akkor $f(0,\varepsilon) = 0$. Legyenek a $D_x f(0,0)$ JACOBI-mátrix sajátértékei $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \mathrm{i}\omega$ $(\omega \neq 0)$ és legyen $n-2$ számú λ_j sajátértékre $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. A központi sokaságra vonatkozó tétel szerint a bifurkációt a (17.54) redukált differenciálegyenlet írja le, amely most:

$$\dot{x} = \alpha(\varepsilon)x - \omega(\varepsilon)y + g_1(x,y,\varepsilon), \quad \dot{y} = \omega(\varepsilon)x + \alpha(\varepsilon)y + g_2(x,y,\varepsilon), \tag{17.56}$$

ahol α, ω, g_1 és g_2 differenciálható függvények, és fennáll, hogy $\omega(0) = \omega$, $\alpha(0) = 0$. A (17.56) egyenlet nemlineáris komplex koordinátatranszformációval és az (r, ϑ) polárkoordináták bevezetésével az

$$\dot{r} = \alpha(\varepsilon)r + a(\varepsilon)r^3 + \cdots, \quad \dot{\vartheta} = \omega(\varepsilon) + b(\varepsilon)r^2 + \cdots \tag{17.57}$$

normálalakra hozható, ahol a pontok a magasabbrendű tagokat jelentik. (17.57) együtthatófüggvényeinek TAYLOR-sorba fejtése az

$$\dot{r} = \alpha'(0)\varepsilon r + a(0)r^3, \quad \dot{\vartheta} = \omega(0) + \omega'(0)\varepsilon + b(0)r^2 \tag{17.58}$$

normálalakra vezet. ANDRONOV és HOPF tétele következtében (17.58) leírja (17.57) bifurkációit a stacionárius pont közelében $\varepsilon = 0$-nál.

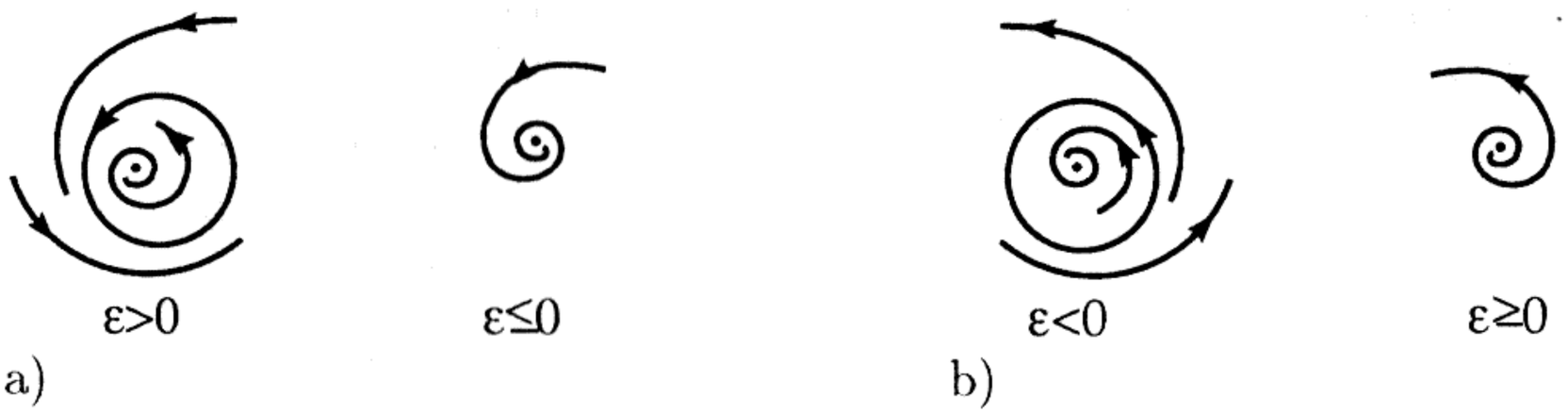
Az $\alpha'(0) > 0$ feltevés mellett a (17.58) egyenletre a következő esetek adódnak:

1. $a(0) < 0$ **(17.22.a ábra).**

- $(a)\ \varepsilon > 0$: Stabilis határciklus és instabilis stacionárius pont.
- $(b)\ \varepsilon = 0$: Ciklus és stacionárius pont összeolvad stabilis stacionárius ponttá.
- $(c)\ \varepsilon < 0$: $t \to +\infty$ esetén minden pálya $(0,0)$ közelében spirálisan tart a stacionárius ponthoz, mint (b)-ben.

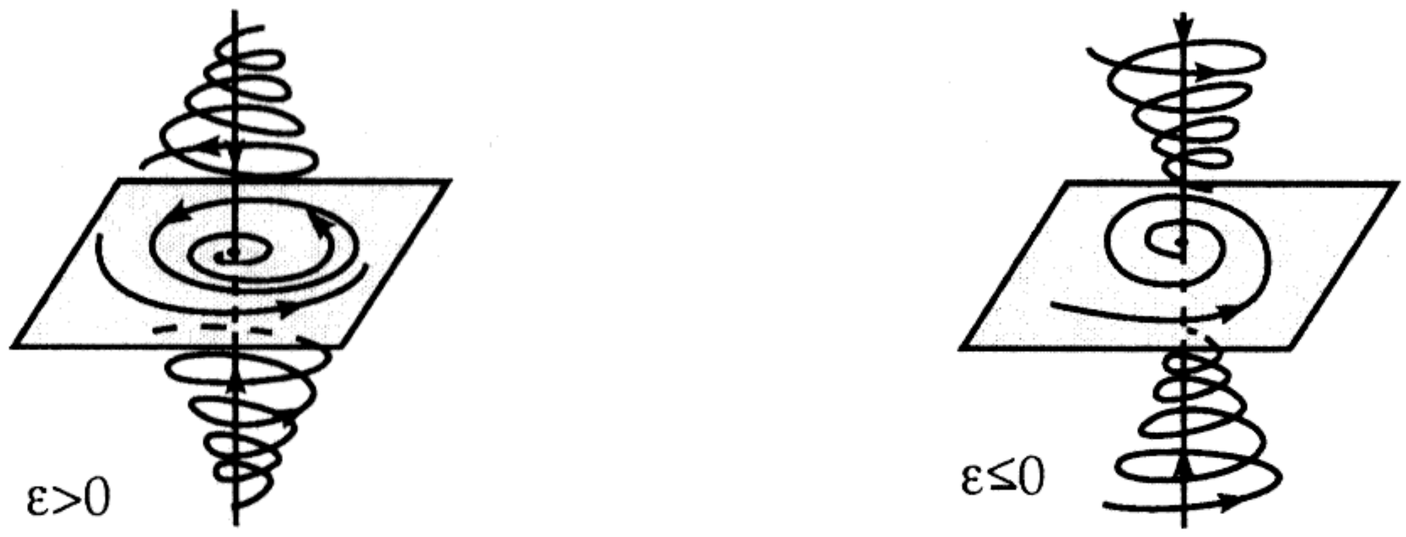
2. $a(0) > 0$ **(17.22.b ábra).**

- $(a)\ \varepsilon < 0$: Instabilis határciklus.
- $(b)\ \varepsilon = 0$: Ciklus és stacionárius pont összeolvad instabilis stacionárius ponttá.
- $(c)\ \varepsilon > 0$: Spirálisan instabilis stacionárius pont, mint (b)-ben.



17.22. ábra.

A fenti eseteket a (17.52) kiindulási rendszerre visszafordítva azt látjuk, hogy határciklus jön létre egy összetett stacionárius pontból (*1 multiplicitású összetett örvénypont*); ezt HOPF-*bifurkáció*nak (vagy ANDRONOV–HOPF-*bifurkáció*nak) nevezzük. Az $a(0) < 0$ esetet *szuperkritikus*nak, az $a(0) > 0$ esetet *szubkritikus*nak hívjuk (feltéve, hogy $\alpha'(0) > 0$). Az $n = 3, \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \mathrm{i},\ \lambda_3 < 0, \alpha'(0) > 0$ és $a(0) < 0$ eset a **17.23. ábrán** látható.



17.23. ábra.

A HOPF-bifurkációk tipikusak és az 1 kodimenziós bifurkációk közé tartoznak. A bemutatott esetszétválasztás illusztrálja azt a tényt, hogy a szuperkritikus HOPF-bifurkáció a fent megfogalmazott feltevések mellett az örvénypont stabilitása alapján ismerhető fel:
Tegyük fel, hogy (17.52) jobb oldala 0 pontbeli JACOBI-mátrixának $\lambda_1(\varepsilon)$ és $\lambda_2(\varepsilon)$ sajátértékei $\varepsilon = 0$-nál tiszta képzetes számok, a többi λ_j sajátértékre pedig $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. Legyen továbbá $\dfrac{d}{d\varepsilon}\,\mathrm{Re}\lambda_1(\varepsilon)_{|\varepsilon=0} > 0$ és legyen 0 a (17.52) egyenlet aszimptotikusan stabilis örvénypontja, amikor $\varepsilon = 0$. Akkor $\varepsilon = 0$-nál a (17.52) egyenletben szuperkritikus HOPF-bifurkáció megy végbe.

■ Az ε paramétert tartalmazó $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ VAN DER POL-féle differenciálegyenlet átírható az

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = -\varepsilon(x^2 - 1)y - x \tag{17.59}$$

síkbeli differenciálegyenletté. Ha $\varepsilon = 0$, akkor ez az egyenlet a harmonikus oszcillátor egyenletébe megy át, amelynek egy stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis stacionárius pontján kívül csak periodikus megoldásai vannak. $\varepsilon > 0$ esetén végrehajtva az $u = \sqrt{\varepsilon}\, x$, $v = \sqrt{\varepsilon}\, y$ transzformációt (17.59) az

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u - (u^2 - \varepsilon)v \tag{17.60}$$

síkbeli egyenletbe megy át.

A (17.60) egyenlet $(0,0)$ stacionárius pontjában vett JACOBI-mátrixának sajátértékeire fennáll, hogy $\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}$ és így $\lambda_{1,2}(0) = \pm \mathrm{i}$, továbbá $\frac{d}{d\varepsilon} \mathrm{Re}\lambda_1(\varepsilon)_{|\varepsilon=0} = \frac{1}{2} > 0$.

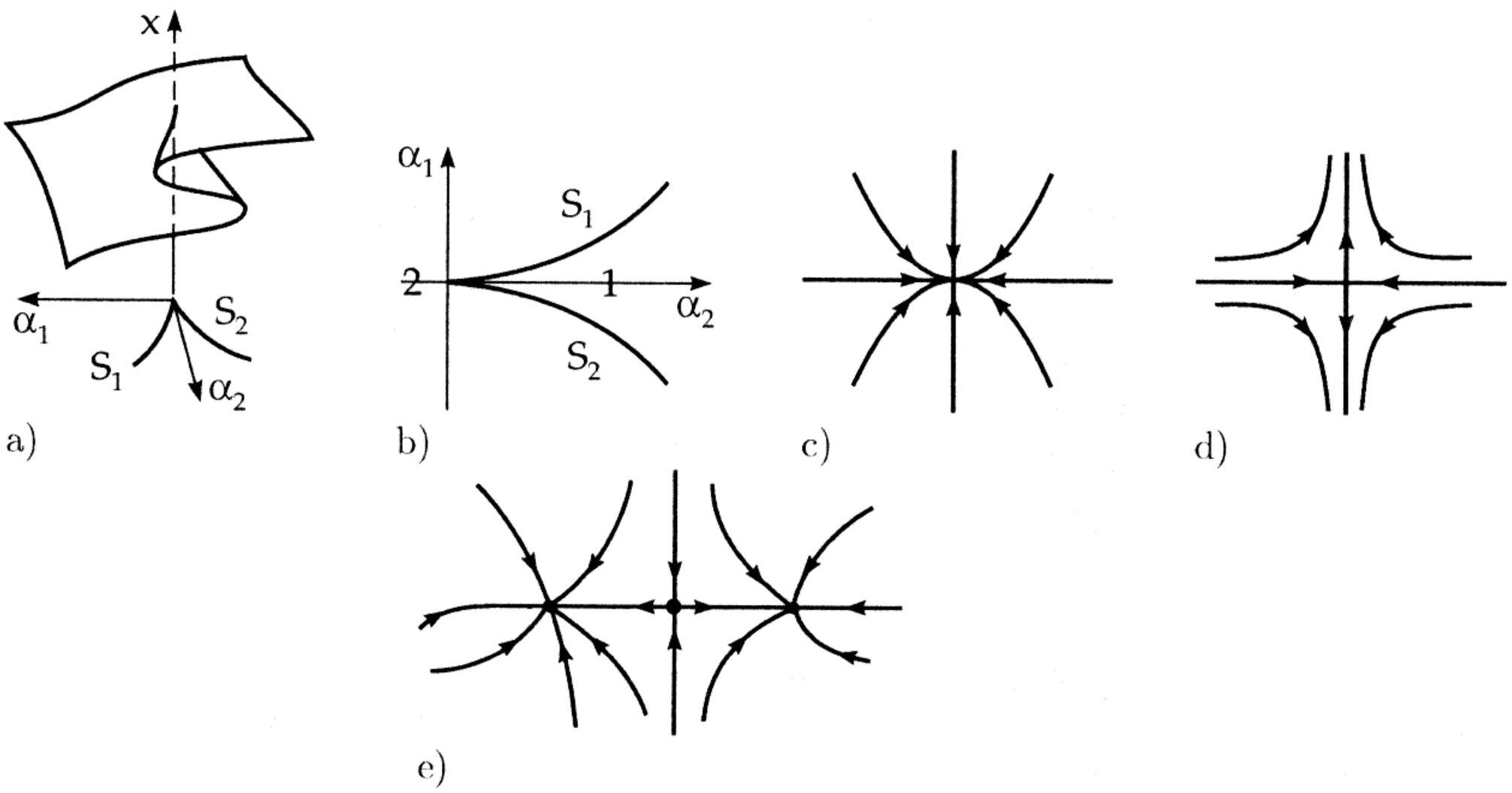
Amint azt 17.1.2.3. 1. példájában megmutattuk, $(0,0)$ a (17.60) egyenlet aszimptotikusan stabilis stacionárius pontja $\varepsilon = 0$-nál. A $\varepsilon = 0$ paraméterértéknél szuperkritikus HOPF-bifurkáció lép fel, és $(0,0)$ kicsi $\varepsilon > 0$ esetén instabilis örvénypont, amelyet olyan határciklus vesz körül, amelynek amplitudója ε növekedtével nő.

4. Bifurkációk kétparaméteres differenciálegyenletekben

1. Csúcs-bifurkáció Legyen a (17.52) differenciálegyenletben $r \geq 4$ és $l = 2$. Legyen a $D_x f(0,0)$ JACOBI-mátrix egyik sajátértéke $\lambda_1 = 0$, és tegyük fel, hogy $n-1$ számú λ_j sajátértékére: $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. Ha a (17.54) redukált differenciálegyenletre $F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0$ és $l_3 := \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ teljesül, akkor az F függvény $(0,0)$ körüli TAYLOR-sora az

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \mathrm{sign}\, l_3 x^3 \tag{17.61}$$

rövidített (magasabb tagok nélküli) normálalakra vezet (lásd [17.1]), ahol α_1 és α_2 paraméter. Az $\{(\alpha_1, \alpha_2, x)\colon \alpha_1 + \alpha_2 x + \mathrm{sign}\, l_3 x^3 = 0\}$ halmaz a kibővített fázistérben olyan felületet alkot, amelynek neve *redő* **(17.24.a ábra)**.



17.24. ábra.

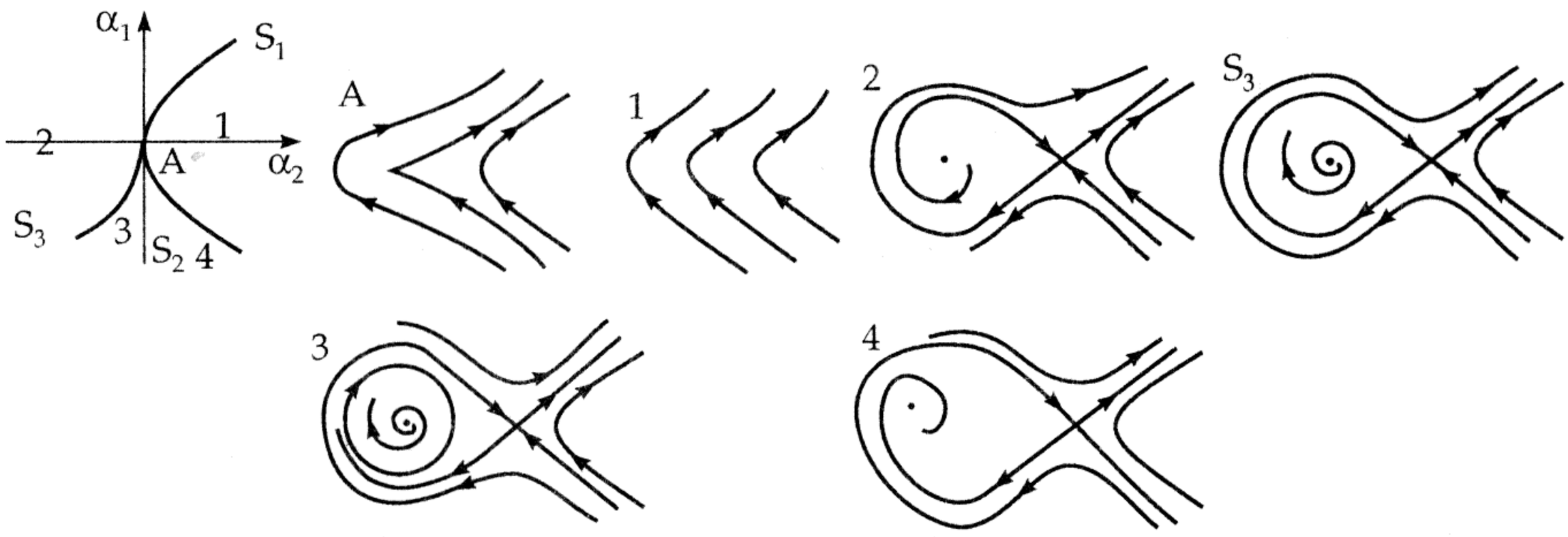
Legyen a továbbiakban $l_3 < 0$. A (17.61) rendszer nemhiperbolikus stacionárius pontjait az $\alpha_1 + \alpha_2 x - x^3 = 0$, $\alpha_2 - 3x^2 = 0$ egyenletrendszer definiálja. A stacionárius pontok az S_1 és S_2 görbén vannak, amely görbéket az $\{(\alpha_1, \alpha_2) : 27\alpha_1^2 - 4\alpha_2^3 = 0\}$ halmaz határozza meg, és együttesen egy *csúcs*ot (cusp) alkotnak **(17.24.b ábra)**. Ha $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$, akkor a (17.61) egyenlet 0 stacionárius pontja stabilis. (17.52) fázisportréja 0 közelében, például, ha $n = 2$, $l_3 < 0$ és $\lambda_1 = 0$, akkor $\lambda_2 < 0$ esetén (*háromszorosan összetett csomó*) a **17.24.c ábrán**, és $\lambda_2 > 0$ esetén (*háromszorosan összetett nyereg*)

a **17.24.d ábrán** látható (lásd [17.13]).
Amikor az $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ ponton keresztül az 1 síkrész belsejébe jutunk **(17.24.b ábra)**, akkor (17.52) összetett csomó típusú nem hiperbolikus stacionárius pontja, 0, széthasad három hiperbolikus stacionárius pontra (két stabilis csomóra és egy nyeregre) (*szuperkritikus villabifurkáció*).
Kétdimenziós fázisterű (17.52) rendszer esetére a fázisportré az **17.24.c,e ábrán** látható. Amikor az $S_i \setminus \{(0,0)\}$ $(i = 1,2)$ halmazból vett paraméterpár áthalad 1-ből 2-be, egy kétszeresen összetett, nyeregcsomó-típusú stacionárius pont keletkezik, amely utána megmarad. Egy stabilis hiperbolikus stacionárius pont megmarad.

2. Bogdanov–Takens-bifurkáció Legyen a (17.52) rendszer esetén $n \geq 2$, $l = 2$, $r \geq 2$, és legyen a $D_x f(0,0)$ mátrix két sajátértéke $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, és $n-2$ számú λ_j sajátértékére teljesüljön, hogy $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. Tegyük fel, hogy a (17.54) redukált kétdimenziós differenciálegyenlet topológiailag ekvivalens az

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = \alpha_1 + \alpha_2 x + x^2 - xy\,. \tag{17.62}$$

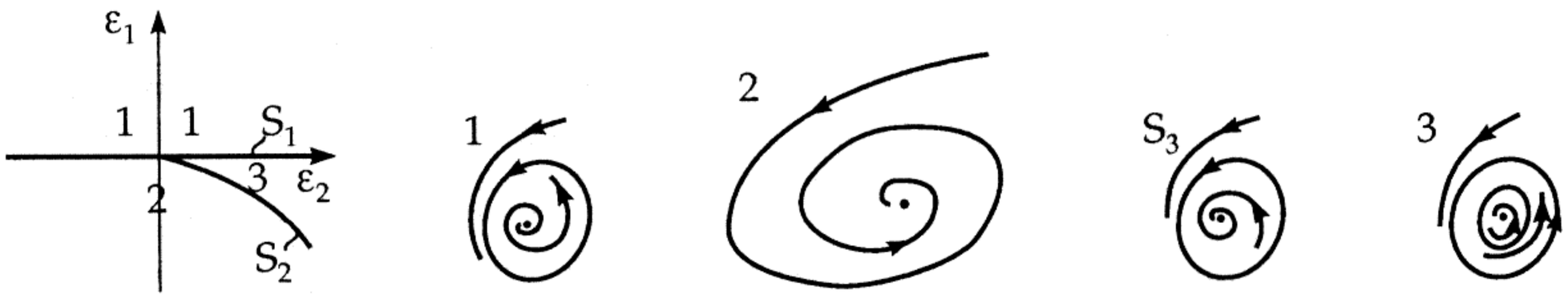
síkbeli rendszerrel. Akkor az $S_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon \alpha_2^2 - 4\alpha_1 = 0\}$ görbén nyeregcsomó-bifurkáció jön létre. Miközben az $S_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon \alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0\}$ görbén az $\alpha_1 < 0$ síkrészből átjutunk az $\alpha_1 > 0$ síkrészbe, HOPF-bifurkáció révén stabilis határciklus keletkezik, az $S_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon \alpha_1 = -k\alpha_2^2 + \cdots\}$ $(k > 0$, állandó) görbén pedig a kiindulási rendszernek szeparatrixhurka van **(17.25. ábra)**, amely a 3 síkrészbe jutva stabilis határciklussá bifurkál (lásd [17.1],[17.17]).
Ez a bifurkáció globális természetű, előfordulásakor azt mondjuk, hogy *egy nyereg homoklinikus pályájából egyetlen periodikus pálya keletkezik*, vagy hogy *a szeparatrixhurok fölbomlik.*



17.25. ábra.

3. Általánosított Hopf-bifurkáció Tegyük fel, hogy a (17.52) rendszerre teljesülnek a HOPF-bifurkáció feltételei $r \geq 6$ mellett és a kétdimenziós redukált differenciálegyenlet normálalakja polárkoordinátás alakban $\dot{r} = \varepsilon_1 r + \varepsilon_2 r^3 - r^5 + \cdots$, $\dot{\vartheta} = 1 + \cdots$. Ennek a rendszernek a bifurkációdiagramja **(17.26. ábra)** tartalmazza az $S_1 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\colon\ \varepsilon_1 = 0\,,\, \varepsilon_2 \neq 0\}$ görbét, amelynek pontjai HOPF-bifurkációkat reprezentálnak (lásd [17.1]). A 3 síkrészen két periodikus pálya van, ezek közül az egyik stabilis, a másik instabilis. Az $S_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\colon\ \varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_2 > 0\,,\, \varepsilon_1 < 0\}$ görbén ezek a nem hiperbolikus ciklusok egy összetett ciklussá olvadnak össze, amely a 2 síkrészen eltűnik.

5. Szimmetriasértés
Sok (17.52) alakú differenciálegyenlet *szimmetria*tulajdonsággal rendelkezik a következő értelemben: létezik olyan T lineáris transzformáció (sőt esetleg transzformációk egy csoportja), hogy minden $x \in M$ és $\varepsilon \in V$ esetén $f(Tx, \varepsilon) = T\,f\,(x, \varepsilon)$. A (17.52) rendszer γ pályája *szimmetrikus T-re nézve*, ha $T\gamma = \gamma$. Azt mondjuk, hogy $\varepsilon = 0$ esetén *szimmetriasértő* bifurkáció lép fel például (17.52)-ben ($l = 1$-nél), ha $\varepsilon < 0$ mellett stabilis stacionárius pont vagy stabilis határciklus létezik, amely mindig szimmetrikus T-re nézve, $\varepsilon = 0$-nál pedig két további stabilis stacionárius pont vagy határciklus keletkezik, amelyek már nem szimmetrikusak T-re nézve.



17.26. ábra.

■ Ha a (17.52) rendszerben $f(x,\varepsilon) = \varepsilon x - x^3$, akkor $T: x \mapsto -x$ egy szimmetriát definiál, mert $f(-x,\varepsilon) = -f(x,\varepsilon)$ $(x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R})$. Ha $\varepsilon < 0$, akkor $x_1 = 0$ stabilis stacionárius pont. Ha $\varepsilon > 0$, akkor $x_1 = 0$ mellett másik két stacionárius pont $x_{2,3} = \pm\sqrt{\varepsilon}$, amelyek egyike sem szimmetrikus.

17.3.1.2. Lokális bifurkációk periodikus pálya közelében

1. A leképezések központi sokaságára vonatkozó tétel

Legyen (17.52) egy periodikus pályája γ, amikor $\varepsilon = 0$, és legyenek ennek a multiplikátorai $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n = 1$. A γ pálya közelében akkor jöhet létre bifurkáció, ha ε megváltoztatásánál a multiplikátorok közül legalább egy érinti a komplex egységkört. Ha egy γ-ra transzverzális felületet alkalmazunk, akkor az

$$x \longmapsto P(x,\varepsilon) \tag{17.63}$$

paraméterfüggő POINCARÉ-leképezéshez jutunk. Azután legyen $P\colon E \times V \to \mathbb{R}^{n-1}$ — ahol $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ és $V \subset \mathbb{R}^l$ nyílt halmaz — egy C^r-leképezés, sőt a $\tilde{P}\colon E \times V \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^l$, $\tilde{P}(x,\varepsilon) := (P(x,\varepsilon),\varepsilon)$ leképezésre legyen még C^r-diffeomorfizmus is. Legyen továbbá $P(0,0) = 0$, és tegyük fel, hogy a $D_xP(0,0)$ JACOBI-mátrix s számú $\rho_1, \ldots, \rho_s$ sajátértékére $|\rho_i| = 1$, m számú $\rho_{s+1}, \ldots, \rho_{s+m}$ sajátértékére $|\rho_i| < 1$, és $k := n - s - m - 1$ számú $\rho_{s+m+1}, \ldots, \rho_{n-1}$ sajátértékére $|\rho_i| > 1$ teljesül. Akkor a *leképezések központi sokaságára vonatkozó tétel* (lásd [17.12]) kimondja, hogy a $\tilde{P}$ leképezés $(0,0) \in E \times V$ közelében topologikusan konjugált az

$$(x,y,z,\varepsilon) \longmapsto (F(x,\varepsilon), A^s y, A^u z, \varepsilon) \tag{17.64}$$

leképezéssel $(0,0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^l$ közelében, és $F(x,\varepsilon) = A^c x + g(x,\varepsilon)$. Eközben g olyan C^r-differenciálható leképezés, amely teljesíti a $g(0,0) = 0$ és a $D_xg(0,0) = 0$ feltételt. Az A^c, A^s, illetve az A^u mátrix (s,s), (m,m), illetve (k,k) típusú.
A (17.64) alakból következik, hogy (17.63) bifurkációi $(0,0)$ közelében a $W^c_{loc} = \{(x,y,z)\colon\ y = 0,\ z = 0\}$ *lokális központi sokaság*on az

$$x \longmapsto F(x,\varepsilon) \tag{17.65}$$

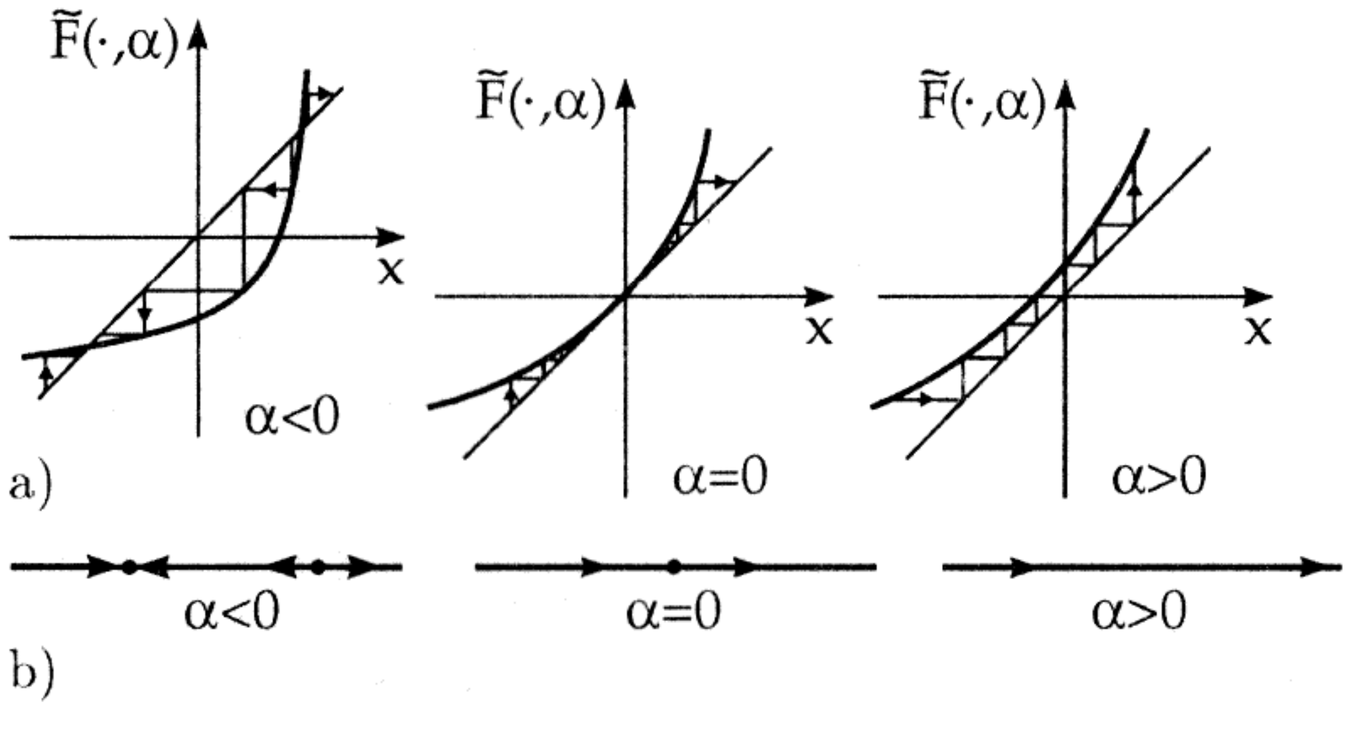
*redukált leképezés*sel teljesen leírhatók.

2. Kétszeresen összetett félig stabilis periodikus pályák bifurkációja

Legyen a (17.52) rendszer esetén $n \geq 2, r \geq 3$ és $l = 1$. Tegyük fel, hogy $\varepsilon = 0$ mellett a (17.52) rendszernek γ periodikus pályája a $\rho_1 = +1$, $|\rho_i| \neq 1\,(i = 2,3,\ldots,n-1)$ és $\rho_n = 1$ multiplikátorokkal. A leképezések központi sokaságára vonatkozó tétel szerint a (17.63) POINCARÉ-leképezésben fellépő bifurkációkat a (17.65) egydimenziós redukált leképezés fogja leírni $A^c = 1$-gyel. Ha eközben még azt is feltesszük, hogy $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ és $\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0,0) \neq 0$, akkor $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) > 0$ esetén

$$x \longmapsto \tilde{F}(x,\alpha) = \alpha + x + x^2, \tag{17.66}$$

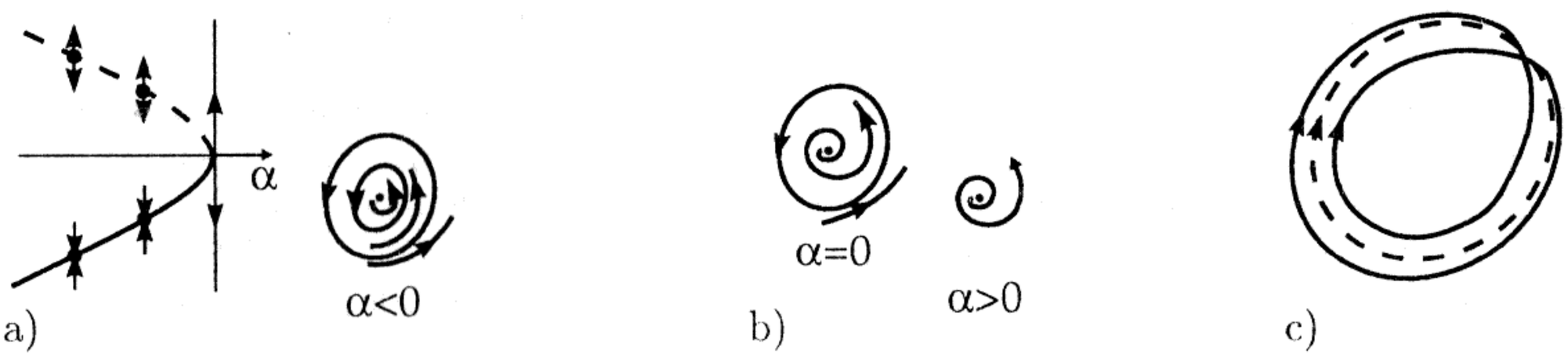
$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) < 0$ esetén pedig az $x \longmapsto \alpha + x - x^2$ normálalakhoz jutunk. A **17.27.a ábrán** illetve a **17.27.b ábrán** (lásd [17.1]) a (17.66) iterációs eljárás lefutása és a hozzátartozó fázisportré látható különböző α értékek mellett 0 közelében.



17.27. ábra.

Ha $\alpha < 0$, akkor $x = 0$ közelében van egy stabilis és egy instabilis stacionárius pont, amelyek összeolvadnak az $x = 0$ instabilis stacionárius ponttá. Ha $\alpha > 0$, akkor $x = 0$ közelében nincs stacionárius pont. A (17.65) egyenletben fellépő, (17.66) által leírt bifurkációt *leképezések szubkritikus nyeregcsomó-bifurkáció*jának nevezzük.

A (17.52) differenciálegyenlet esetén a (17.66) leképezés tulajdonságai *kétszeresen összetett félig stabilis periodikus pálya bifurkációjá*ra utalnak: ha $\alpha < 0$, akkor létezik egy γ_1 stabilis periodikus pálya és egy γ_2 instabilis periodikus pálya, amelyek $\alpha = 0$-nál egy γ félig stabilis pályává olvadnak össze, amely $\alpha > 0$ esetén felbomlik **(17.28.a,b ábra)**.



17.28. ábra.

3. Perióduskettőződés vagy flip-bifurkáció

Legyen a (17.52) rendszer esetén $n \geq 2, r \geq 4$ és $l = 1$. Tekintsük (17.52) egy γ periodikus pályáját $\varepsilon = 0$ esetén a $\rho_1 = -1\,,\ |\rho_i| \neq 1\ (i = 2, \ldots, n-1)$ és $\rho_n = 1$ multiplikátorokkal. A POINCARÉ-leképezés 0-hoz közeli bifurkációs viselkedését a (17.65) egydimenziós leképezés írja le $A^c = -1$ mellett, miközben az

$$x \longmapsto \tilde{F}(x, \alpha) = (-1 + \alpha)x + x^3 \tag{17.67}$$

normálalakot kell feltételeznünk. A (17.67) rendszer $x = 0$ stacionárius pontja kis $\alpha \geq 0$ esetén stabilis és $\alpha < 0$ esetén instabilis. Az $\tilde{F}^2$ második iterált leképezésnek $\alpha < 0$ esetén az $x = 0$ ponton kívül még két olyan stabilis fixpontja van: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha} + o(|\alpha|)$, amelyek $\tilde{F}$-nek nem fixpontjai. Ennek következtében ezeknek a (17.67) leképezés 2 periódusú pontjainak kell lenniük.

Általában szólva, egy (17.65) alakú C^4-leképezés esetén 2 periódusú pálya keletkezésére kerül sor $\varepsilon = 0$ esetén, ha teljesülnek a következő feltételek (lásd [17.2]):

$$\begin{aligned} &F(0,0) = 0\,, && \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = -1\,, && \frac{\partial F^2}{\partial \varepsilon}(0,0) \ = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 F^2}{\partial x \partial \varepsilon}(0,0) \neq 0\,, && \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^2}(0,0) = 0\,, && \frac{\partial^3 F^2}{\partial x^3}(0,0) \neq 0\,. \end{aligned} \tag{17.68}$$

Mivel $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = -1$ miatt $\dfrac{\partial F^2}{\partial x}(0,0) = +1$, ezzel megfogalmaztuk az F^2 leképezésre a *villabifurkáció* feltételeit.

A (17.67) leképezés tulajdonságai a (17.52) differenciálegyenletre nézve azt vonják maguk után, hogy $\alpha = 0$ esetén γ-ból egy körülbelül kétszeres periódusú stabilis periodikus pálya hasad le (*periódusketté-tőződés*), miközben γ elveszíti stabilitását **(17.28.c ábra)**.

■ A $\varphi_\alpha\colon [0,1] \to [0,1], \quad \varphi_\alpha(x) := \alpha x(1-x)$ logisztikus leképezés $0 < \alpha \leq 4$ esetén a

$$x_{t+1} = \alpha x_t(1 - x_t) \tag{17.69}$$

diszkrét dinamikai rendszerhez tartozik. A leképezés bifurkációs viselkedése [17.10] szerint a következő: Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor (17.69)-nek 0 stacionárius pontja a $[0,1]$ vonzási tartománnyal. Ha $1 < \alpha < 3$, akkor (17.69)-nek 0 instabilis stacionárius pontja és $1 - \frac{1}{\alpha}$ stabilis stacionárius pontja, ahol az utóbbi vonzási tartománya $(0,1)$. Ha $\alpha_1 = 3$, akkor az $1 - \frac{1}{\alpha}$ stacionárius pont egy instabilis és egy stabilis 2 periódusú pályára esik szét.

Az $\alpha_2 = 1 + \sqrt{6}$ értéknél a 2 periódusú pálya is instabilissá válik, és egy stabilis 2^2 periódusú pályára cserélődik. A perióduskettőződés folytatódik, és stabilis 2^q periódusú pályák keletkeznek $\alpha = \alpha_q$ esetén. Numerikus vizsgálatok alátámasztják, hogy $q \to +\infty$ esetén $\alpha_q \to \alpha_\infty \approx 3{,}570\ldots$.

Ha $\alpha = \alpha_\infty$, akkor olyan F attraktorhoz jutunk (FEIGENBAUM-*attraktor*), amelynek a szerkezete a CANTOR-halmazéhoz hasonló. Az attraktorhoz tetszőlegesen közel vannak olyan pontok, amelyek nem az attraktorba, hanem instabilis periodikus pályákon iterálódnak. Az F attraktornak vannak sűrű pályái, és HAUSDORFF-dimenziója $d_H(F) \approx 0{,}538\ldots$. Másrészt nem tapasztaljuk a kezdeti állapotoktól való érzékeny függést. Az $\alpha_\infty < \alpha < 4$ tartományban van egy olyan pozitív LEBESGUE-mértékű A paraméterhalmaz, hogy $\alpha \in A$ esetén a (17.69) rendszernek pozitív mértékű kaotikus attraktora van. Az A halmaz tele van tűzdelve ablakokkal, amelyekben perióduskettőződés lép fel.

A logisztikus leképezés bifurkációs viselkedését az *egycsúcsú leképezések* (azaz az I intervallum olyan önmagába való leképezései, amelyeknek I-ben egyetlen egyszerű maximumuk van) osztályában is meg lehet találni. Habár azok az α_i paraméterértékek, amelyeknél a perióduskettőződés fellép, a különböző egycsúcsú leképezéseknél különbözőek, a konvergenciasebesség, amellyel ezek a paraméterek a mindenkori α_∞ értékhez tartanak, azonos: $\alpha_k - \alpha_\infty \approx C\delta^{-k}$, ahol $\delta = 4{,}6692\ldots$ a FEIGENBAUM-állandó (C függ a konkrét leképezéstől). Az F attraktorok HAUSDORFF-dimenziója is azonos $\alpha = \alpha_\infty$ esetén: $d_H(F) \approx 0{,}538\ldots$.

4. Stabilis tórusz keletkezése

Tekintsük a (17.52) rendszert $n \geq 3, r \geq 6$ és $l = 1$ mellett. Tegyük fel, hogy minden ε esetén (17.52)-nek van periodikus pályája 0 közelében: γ_ε. Legyenek γ_0 multiplikátorai $\rho_{1,2} = e^{\pm i\Psi}$, ahol $\Psi \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$, ρ_j $(j = 3, \ldots, n-1)$, ahol $|\rho_j| \neq 1$ és $\rho_n = 1$.

A központi sokaságra vonatkozó tétel szerint a szóban forgó helyzetben olyan

$$x \longmapsto F(x, \varepsilon) \tag{17.70}$$

kétdimenziós redukált C^6-leképezés adódik, amelyre $F(0,\varepsilon) = 0$, ha ε közel van 0-hoz.

Ha a $D_xF(0,\varepsilon)$ JACOBI-mátrixnak minden 0-hoz közeli ε esetén $\rho(\varepsilon)$ és $\overline{\rho}(\varepsilon)$ konjugált komplex sajátértékei vannak, ahol $|\rho(0)| = 1$, akkor $d := \dfrac{d}{d\varepsilon}|\rho(\varepsilon)|_{|\varepsilon=0} > 0$ és $\rho(0)$ nem q-adik egységgyök $(q = 1,2,3,4)$, akkor (17.70) sima ε-tól függő koordinátatranszformációval $x \mapsto \tilde{F}(x,\varepsilon) = \tilde{F}_o(x,\varepsilon) + O(\|x\|^5)$ alakra hozható (itt O a LANDAU-féle nagy ordó szimbólum), ahol $\tilde{F}_o$ polárkoordinátákban

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} |\rho(\varepsilon)|r + a(\varepsilon)r^3 \\ \vartheta + \omega(\varepsilon) + b(\varepsilon)r^2 \end{pmatrix}. \tag{17.71}$$

Itt α, ω és b differenciálható függvények. Legyen $a(0) < 0$. Akkor (17.71) $r = 0$ stacionárius pontja minden $\varepsilon < 0$ esetén aszimptotikusan stabilis és $\varepsilon > 0$ esetén instabilis. Ezenkívül $\varepsilon > 0$ mellett létezik az $r = \sqrt{-\dfrac{d\varepsilon}{a(0)}}$ kör, amely a (17.71) leképezésre nézve invariáns és aszimptotikusan stabilis **(17.29.a**

ábra).

Neimark és Sacker tétele (lásd [17.18], [17.3]) kimondja, hogy (17.71) bifurkációs viselkedése hasonló $\tilde{F}$-éhoz is ráillik (*szuperkritikus* HOPF-*bifurkáció leképezés*eknél).

■ Az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)x + y + x^2 - 2y^2 \\ -x + (1+\varepsilon)y + x^2 - x^3 \end{pmatrix},$$

által megadott (17.70) leképezésnél $\varepsilon = 0$ esetén szuperkritikus HOPF-bifurkáció lép fel.

Az a tény, hogy a (17.70) leképezésnek létezik zárt invariáns görbéje, a (17.52) differenciálegyenletre vonatkoztatva azt jelenti, hogy $a(0) < 0$ esetén a γ_0 periodikus pálya instabilis és abból $\varepsilon > 0$ esetén egy (17.52)-re nézve invariáns stabilis tórusz keletkezik **(17.29.b ábra)**.



17.29. ábra.

17.3.1.3. Globális bifurkációk

Amellett, hogy periodikus pálya keletkezhet egy szeparatrixhurok felbomlásával, a (17.52) rendszerben még további globális bifurkációk is előfordulhatnak. Ezek közül kettőt példával világítunk meg (lásd [17.12]).

1. Periodikus pálya keletkezése nyeregcsomó eltűnése révén

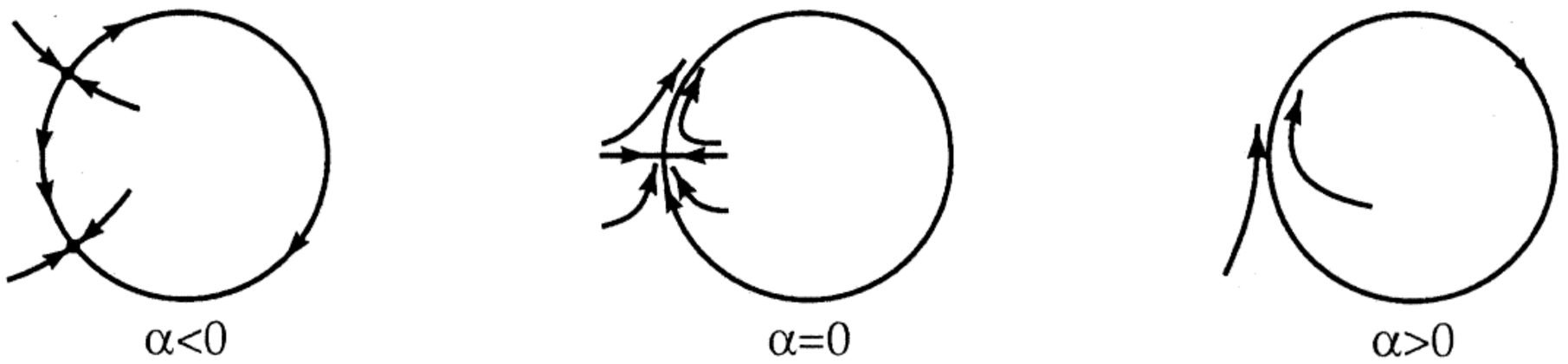
■ Az

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) + y(1 + x + \alpha)\,,\ \dot{y} = -x(1 + x + \alpha) + y(1 - x^2 - y^2)$$

paraméterfüggő rendszer az $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ polárkoordinátákban

$$\dot{r} = r(1 - r^2)\,,\ \dot{\vartheta} = -(1 + \alpha + r\cos\vartheta)\,. \tag{17.72}$$

alakú. Nyilvánvalóan tetszőleges α paraméterértéknél az $r = 1$ kör invariáns (17.72)-re nézve, és minden pálya (kivéve a $(0,0)$ stacionárius pontot) $t \to +\infty$ esetén ehhez a körhöz tart. Ha $\alpha < 0$, akkor egy nyereg és egy stabilis csomó helyezkedik el a körön, amelyek $\alpha = 0$ esetén összeolvadnak egy nyeregcsomó-típusú összetett stacionárius ponttá. Ha $\alpha > 0$, akkor nincs stacionárius pont a körvonalon, amely akkor periodikus pálya **(17.30. ábra)**.



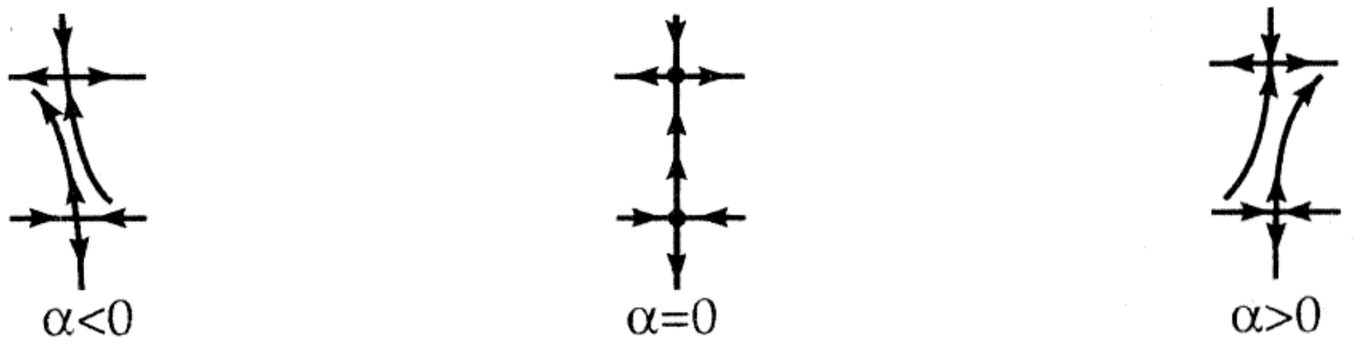
17.30. ábra.

2. Nyereg-nyereg-szeparatrix felbomlása a síkon

■ Tekintsük az

$$\dot{x} = \alpha + 2xy\,,\ \dot{y} = 1 + x^2 - y^2\,. \tag{17.73}$$

paraméterfüggő síkbeli differenciálegyenletet. Ha $\alpha = 0$, akkor (17.73)-nek $(0,1)$ és $(0,-1)$ nyeregpontja, és az y-tengely invariáns halmaza. Ennek az invariáns halmaznak egy része a heteroklinikus pálya. Ha $|\alpha| \neq 0$ kicsi, akkor a nyeregpontok megmaradnak, míg a heteroklinikus pálya szétesik **(17.31. ábra)**.



17.31. ábra.

17.3.2. Káoszhoz vezető átmenetek

Különös attraktorok gyakran nem hirtelen keletkeznek, hanem olyan bifurkációk sorozatának eredményeképpen, amelyek közül a tipikusakat a (17.3.1.) szakaszban bemutattuk. A különös attraktorok, illetve a küĺönös invariáns halmazok képződéséhez vezető legfontosabb átmeneteket fogjuk leírni a következőkben.

17.3.2.1. Perióduskettőződések kaszkádja

A (17.69) logisztikus egyenlethez hasonlóan a folytonos idejű rendszerekben is juthatunk perióduskettőző kaszkádhoz, mégpedig a következő forgatókönyv szerint. Tegyük fel, hogy a (17.52) rendszernek $\varepsilon < \varepsilon_1$ mellett $\gamma_\varepsilon^{(1)}$ stabilis periodikus pályája. Az $\varepsilon = \varepsilon_1$ peraméterérték esetén $\gamma_{\varepsilon_1}^{(1)}$ közelében perióduskettőződés jelenik meg, amelynél a $\gamma_\varepsilon^{(1)}$ periodikus pálya elveszíti stabilitását. Lehasad belőle egy mintegy kétszer akkora periódusú $\gamma_{\varepsilon_1}^{(2)}$ periodikus pálya. Amikor $\varepsilon = \varepsilon_2$, akkor ismét megjelenik egy perióduskettőződés, miközben $\gamma_{\varepsilon_2}^{(2)}$ veszíti el stabilitását, és keletkezik egy $\gamma_{\varepsilon_2}^{(4)}$ stabilis pálya körülbelül kétszer akkora periódussal. (17.52) alakú rendszerek fontos osztályaira ez a perióduskettőződés folytatódik, és létrejön paraméterértékeknek egy $\{\varepsilon_j\}$ sorozata.
Bizonyos (17.52) alakú differenciálegyenletekre (például a hidrodinamikai differenciálegyenletekre, amilyen a LORENZ-rendszer is) vonatkozó numerikus számítások alátámasztják, hogy létezik a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j+2} - \varepsilon_{j+1}} = \delta \text{ határérték, ahol } \delta \text{ ismét a FEIGENBAUM-állandó.}$$

Az $\varepsilon_* = \lim_{j\to\infty} \varepsilon_j$ értéknél a végtelen periódusú ciklus elveszíti stabilitását, és sor kerül a különös attraktor képződésére.
A **17.32.a ábrán** látható annak a geometriai háttere, hogy miként képződik ez a különös attraktor a (17.52) rendszerben perióduskettőződések kaszkádján keresztül. A POINCARÉ-metszet eközben közelítőleg egy pékleképezést mutat, amely arra utal, hogy a CANTOR-halmazhoz hasonló szerkezet keletkezik.



a) b)

17.32. ábra.

17.3.2.2. Intermittencia

Tekintsük (17.52) egy olyan stabilis periodikus pályáját, amely $\varepsilon = 0$ esetén elveszíti stabilitását, amikor az egységkörön belül lévő multiplikátorai közül pontosan egy fölveszi a $+1$ értéket. A központi sokaságra vonatkozó tétel szerint a POINCARÉ-leképezés megfelelő nyeregcsomó-bifurkációja leírható az $x \mapsto \tilde{F}(x, \alpha) = \alpha + x + x^2 + \cdots$ normálalakú egydimenziós leképezéssel. Itt $\varepsilon \mapsto \alpha(\varepsilon)$ olyan függvény, amelyre fennáll, hogy $\alpha(0) = 0$. Az **17.32.b ábrán** látható $\tilde{F}(\cdot, \alpha)$ gráfja pozitív α esetén.

Amint azt a **17.32.b ábra** mutatja, $\alpha \gtrsim 0$ esetén $\tilde{F}(\cdot, \alpha)$ iteráltjai viszonylag sokáig időznek az alagútzónában. A (17.52) egyenletre nézve ez azt jelenti, hogy a megfelelő pályák viszonylag sokáig maradnak a kiindulási periodikus pálya környezetében. Ebben a szakaszban (17.53) viselkedése közel periodikus (*laminális fázis*). Az alagútzónán átjutva a vizsgált pálya elmenekül, ami irreguláris mozgásokhoz vezet (*turbulens fázis*). Egy bizonyos idő elteltével a pálya újból befogódik, és ismét megindul a lamináris fázis. A leírt helyzetben akkor keletkezik különös attraktor, ha a periodikus pálya eltűnik, és stabilitását a kaotikus halmaz örökli meg. A nyeregcsomó-bifurkáció csak egyike a tipikus lokális bifurkációknak, amelyek szerepet játszanak az intermittencia-forgatókönyvben. Két további ilyen a perióduskettőződés és a tórusz felhasadása.

17.3.2.3. Globális homoklinikus bifurkációk

1. Smale tétele

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{R}^3$-beli (17.52) differenciálegyenlet POINCARÉ-leképezésének invariáns sokasága a γ periodikus pálya közelében olyan, mint a **17.10.b ábrán**. A $P^j(x_0)$ transzverzális homoklinikus pontok megfelelnek (17.52) egy γ-ra nézve homoklinikus pályájának. Ha létezik egy homoklinikus pálya (17.52)-ben, akkor az a kezdeti értékektől való érzékeny függéshez vezet. A vizsgált POINCARÉ-leképezéssel összefüggésben megszerkeszthetők a SMALE által bevezetett patkóleképezések. Ez a következő állításhoz vezet:

Smale tétele: A (17.65) POINCARÉ-leképezés valamely transzverzális homoklinikus pontjának minden környezetében van ennek a leképezésnek periodikus pontja. Ennélfogva transzverzális homoklinikus pont minden környezetében a $P^m (m \in \mathbb{N})$ leképezésnek van olyan Λ invariáns halmaza, amely CANTOR-típusú. A P^m leképezés Λ-ra vett leszűkítése topologikusan konjugált egy BERNOULLI-eltolással, azaz egy keverő rendszerrel.

A (17.52) differenciálegyenlet invariáns halmaza a homoklinikus pálya közelében olyan, mint a CANTOR-halmaz és az egységkör szorzata. Ha ez az invariáns halmaz vonzó, akkor különös attraktora (17.52)-nek.

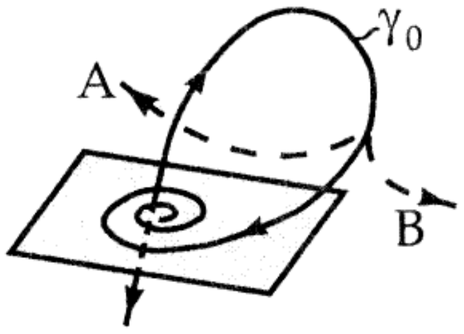
2. Silnyikov tétele

Tekintsük az $\mathbb{R}^3$-beli (17.52) differenciálegyenletet az ε skaláris paraméterrel. Tegyük fel, hogy a (17.52) rendszernek $\varepsilon = 0$ esetén 0 nyeregcsomó típusú hiperbolikus stacionárius pontja, amely kis $|\varepsilon|$ mellett megmarad. Legyen a $D_x f(0,0)$ JACOBI-mátrix sajátértéke egyrészt $\lambda_3 > 0$, másrészt legyenek $\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}\,\omega \quad (a > 0)$ konjugált komplex sajátértékek. Tegyük fel továbbá, hogy a (17.52) egyenletnek $\varepsilon = 0$-nál a γ_0 pálya szeparatrixhurka, azaz olyan homoklinikus pályája, amely $t \to -\infty$ és $t \to +\infty$ esetén 0-hoz tart **(17.33.a ábra)**.

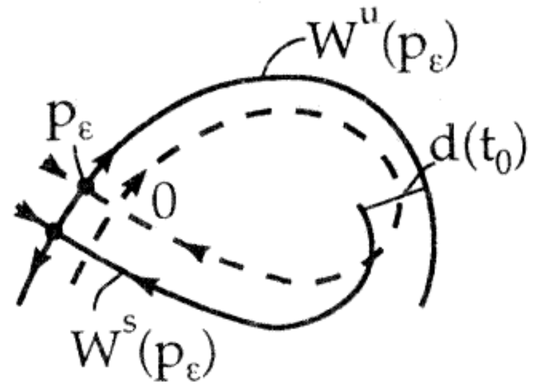
Akkor (17.52) fázisportréja a szeparatrixhurok közelében a következő:

a) Legyen $\lambda_3 + a < 0$. Ha a szeparatrixhurok $\varepsilon \neq 0$ esetén az A-val jelölt variánsnak megfelelően **(17.33.a ábra)** hasad fel, akkor $\varepsilon = 0$ mellett fellép (17.52) pontosan egy periódikus pályája. Ha a szeparatrixhurok $\varepsilon \neq 0$ esetén a B-vel jelölt variánsnak megfelelően **(17.33.b ábra)** hasad fel, akkor nem keletkezik periodikus pálya.

b) Legyen $\lambda_3 + a > 0$. Akkor $\varepsilon = 0$ esetén (illetve kicsi $|\varepsilon|$ mellett) a γ_0 szeparatrixhurok közelében (illetve a széteső γ_0 szalag közelében) megszámlálhatóan végtelen sok nyeregszerű periodikus pálya létezik. A valamely γ_0-ra transzverzális síkra vonatkozó POINCARÉ-leképezés $\varepsilon = 0$ esetén patkóleképezések megszámlálhatóan végtelen halmazát generálja, amelyek közül kicsi $|\varepsilon| \neq 0$ esetén véges sok marad meg.



a)



b)

17.33. ábra.

3. Melnikov módszere

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \varepsilon g(t, x(t))\,, \tag{17.74}$$

síkbeli differenciálegyenletet, ahol ε kis paraméter. Tegyük fel, hogy $\varepsilon = 0$ esetén (17.74) HAMILTON-rendszer, azaz az $f = (f_1, f_2)$ függvényre álljon fenn, hogy $f_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}$ és $f_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}$, ahol a $H : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény C^3-beli. A $g : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^2$ időtől függő vektormezőről tegyük fel, hogy kétszer folytonosan differenciálható, és első változójában T szerint periodikus. Legyen továbbá f és g korlátos halmazokon korlátos. Tegyük fel, hogy $\varepsilon = 0$ esetén (17.74)-nak van homoklinikus pályája a 0 nyeregpontra nézve és hogy (17.74) POINCARÉ-metszete, $\sum_{t_0}$ az $\{(x_1, x_2, t)\}$ fázistérben $t = t_0$-nál olyan, mint a **17.33.b ábrán**. A $P_{\varepsilon,t_0} : \sum_{t_0} \to \sum_{t_0}$ POINCARÉ-leképezésnek kicsiny $|\varepsilon|$ esetén p_ε nyeregpontja van $x = 0$ közelében a $W^s(p_\varepsilon)$ és a $W^u(p_\varepsilon)$ invariáns sokasággal. Ha a perturbálatlan rendszer homoklinikus pályáját $t \mapsto \varphi(t - t_0)$ adja meg, akkor a $W^s(p_\varepsilon)$ és a $W^u(p_\varepsilon)$ sokaság távolsága azon egyenes mentén mérve, amely átmegy a $\varphi(0)$ ponton és merőleges $f(\varphi(0))$-ra, a

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{M(t_0)}{\| f(\varphi(0)) \|} + 0(\varepsilon^2) \tag{17.75a}$$

képlettel számolható ki. Itt M a MELNIKOV-*féle függvény*, amelyet

$$M(t_0) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t - t_0)) \wedge g(t, \varphi(t - t_0))\, dt \tag{17.75b}$$

definiál. (Ha $a = (a_1, a_2)$ és $b = (b_1, b_2)$, akkor $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$.) Ha az M MELNIKOV-függvénynek t_0-ban egyszerű nullahelye van, (azaz $M(t_0) = 0$ és $M'(t_0) \neq 0$), akkor a $W^s(p_\varepsilon)$ és a $W^u(p_\varepsilon)$ sokaság elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ esetén transzverzálisan metszi egymást. Ha M-nek nincs nullahelye, akkor $W^s(p_\varepsilon) \cap W^u(p_\varepsilon) = \emptyset$, azaz nincsenek homoklinikus pontok.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy a (17.74) perturbálatlan rendszernek van heteroklinikus pályája: $t \mapsto \varphi(t - t_0)$, amely a 0_1 nyeregből a 0_2 nyeregbe megy. Legyen p_ε^1 és p_ε^2 a P_{ε,t_0} POINCARE-leképezés nyeregpontja kicsi $|\varepsilon|$ mellett. Ha a fenti módon számolt M-nek t_0-ban egyszerű nullahelye van, akkor $W^s(p_\varepsilon^1)$ és $W^u(p_\varepsilon^2)$ kicsi $\varepsilon > 0$ mellett transzverzálisan metszik egymást.

■ Tekintsük az inga egyenletének $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \sin \omega t$ periodikus perturbáltját, azaz az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x + \varepsilon \sin \omega t$ rendszert, ahol ε kis paraméter és ω egy további paraméter. Az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$ perturbálatlan rendszer HAMILTON-rendszer a $H(x, y) := \frac{1}{2} y^2 - \cos x$ HAMILTON-függvénnyel. Ennek van (többek között) egy $(-\pi, 0)$-n és $(\pi, 0)$-n átmenő heteroklinikus pályapárja (az $S^1 \times \mathbb{R}$ cilindrikus fázistérben ezek homoklinikus pályák), amelyeket $\varphi^{\pm}(t) := (\pm 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t)\,, \pm 2 \dfrac{1}{\operatorname{ch} t})$ $(t \in \mathbb{R})$ ad meg. A MELNIKOV-függvény közvetlen kiszámolása ezt adja: $M(t_0) = \mp \dfrac{2\pi \sin \omega t_0}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)}$. Mivel $t_0 = 0$ esetén M-nek egyszerű nullahelye van, a perturbált rendszer POINCARÉ-leképezésének kicsi $\varepsilon > 0$ mellett

transzverzális homoklinikus pontjai vannak.

17.3.2.4. A tórusz felbomlása

1. A tórusztól a káoszig

1. A turbulencia Hopf–Landau-modellje Az kérdés, hogy a reguláris (lamináris) viselkedés hogyan megy át irreguláris (turbulens) viselkedésbe, különösen az elosztott paraméterű rendszereknél érdekes, amelyeket például parciális differenciálegyenletekkel írnak le. Ebből a nézőpontból a *káosz* úgy interpretálható, mint időben szabálytalan, de térben rendezett viselkedés.
Ezzel szemben a *turbulencia* a rendszer olyan viselkedése, amely időben és térben is szabálytalan. A HOPF–LANDAU-modell a turbulencia keletkezését HOPF-bifurkációk végtelen kaszkádjával magyarázza: Amikor $\varepsilon = \varepsilon_1$, akkor egy stacionárius pontból határciklus keletkezik, amely $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ esetén instabilissá válik és a T^2 tóruszhoz vezet. A k-adik bifurkációnál egy k-dimenziós tórusz keletkezik, amelyre a nem lezárt pályák feltekeredne k. A HOPF–LANDAU-modell általában nem vezet olyan attraktorhoz, amelyet a kezdeti feltételektől való érzékeny függés és a keveredés jellemezne.

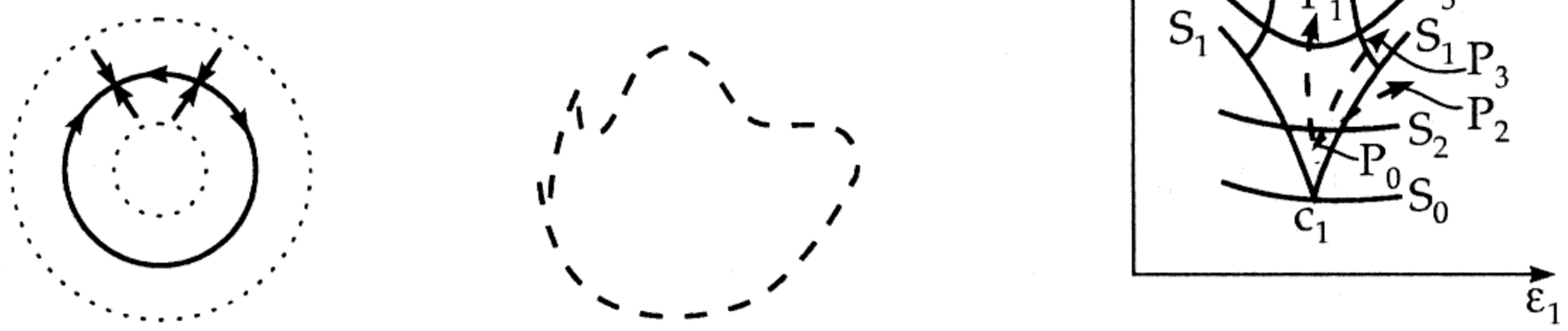
2. A Ruelle–Takens–Newhouse-forgatókönyv Legyen a (17.52) rendszerben $n \geq 4$ és $l = 1$. Tegyük fel, hogy az ε paraméter megváltoztatásánál a stacionárius pont$\longrightarrow$ periodikus pálya$\longrightarrow$ tórusz $T^2 \longrightarrow$ tórusz T^3 bifurkációsorozat valósul meg három egymás után következő HOPF-bifurkáció során. Legyen a T^3-on megadott kváziperiodikus folyam struktuálisan instabilis. Akkor (17.52) már meghatározott kicsi perturbációi T^3 széteséséhez és strukturálisan stabilis különös attraktor keletkezéséhez vezethetnek.

3. Afraimovics és Silnyikov tétele a simaságvesztésről és a T^2 tórusz perturbációjáról Legyen $n \geq 3 \quad l = 2$, és legyen (17.52) elegendően sima rendszer. Tegyük fel, hogy az ε_0 paraméterértéknél a (17.52) rendszernek $T^2(\varepsilon_0)$ vonzó sima tórusza, amelyet a γ_s stabilis periodikus pálya, a nyeregszerű γ_u periodikus pálya, és ez utóbbi $W^u(\gamma_u)$ instabilis sokasága feszít ki (*rezonanciatórusz*).
A **17.34.a ábra** olyan felületen vett POINCARÉ-leképezés stacionárius pontjaiból álló invariáns sokaságot mutat, amely felület a tóruszt hosszanti irányára transzverzálisan metszi. A γ_s pálya azon ρ multiplikátora, amely az egységkörhöz a legközelebb van, valós és egyszeres. Legyen továbbá $\varepsilon(\cdot)$: $[0,1] \longrightarrow V$ tetszőleges folytonos görbe a paramétertérben, amelyre $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, és amelyre a (17.52) rendszernek $\varepsilon = \varepsilon(1)$ esetén nincs invariáns rezonanciatórusza. Akkor fennál a következő állítás:

a) Létezik olyan $s_* \in (0,1)$ érték, amelynél $T^2(\varepsilon(s_*))$ elveszíti simaságát. Eközben vagy a $\rho(s_*)$ multiplikátor komplex, vagy a $W^u(\gamma_u)$ instabilis sokaság elveszíti simaságát γ_s közelében.
b) Van még egy olyan további $s_{**} \in (s_*, 1)$ paraméterérték, hogy a (17.52) rendszernek $s \in (s_{**}, 1]$ esetén nincs rezonáns tórusza. A tórusz eközben a következő forgatókönyv szerint esik szét:

α) A γ_s periodikus pálya $\varepsilon(s_{**})$-nál elveszíti stabilitását. Létrejön egy lokális bifurkáció, amilyen például a perióduskettőződés vagy egy tórusz keletkezése.
β) A γ_u és a γ_s periodikus pálya $\varepsilon(s_{**})$ esetén összeesik (nyeregcsomó-bifurkáció) és ezáltal megszűnik.

γ) A γ_u pálya stabilis és instabilis sokasága $\varepsilon(s_{**})$ esetén nem transzverzálisan metszi egymást (lásd a *bifurkációs diagram*ot az **17.34.c ábrán**. Az S_1 csőrszerű görbén lévő pontok γ_s és γ_u összeolvadásának felelnek meg (nyeregcsomó-bifurkáció). A csőr C_1 csúcsa egy olyan S_0 görbén van, amely egy tórusz felhasadásának felel meg.
Az S_2 görbén vannak azok a paraméterpontok, amelyeknél a simaságvesztés fellép, míg az S_3-on lévő pontok a T^2 tórusz felbomlását jellemzik. S_4-en azok a paraméterpontok vannak, amelyekre γ_u stabilis és instabilis sokasága egymást nem transzverzálisan metszi. Legyen P_0 tetszőleges pont a csőr csúcsában, úgy hogy ennél a paraméterértéknél a T^2 rezonanciatórusz jelenjen meg. A P_0-tól P_1-hez vivő átmenet a tétel α) esetének felel meg. Ha eközben S_2-n a ρ multiplikátor -1-gyé válik, akkor perióduskettőződés lép fel. További egymáshoz csatlakozó perióduskettőződések kaszkádja különös attraktor képződéséhez vezethet. Ha az S_2-n való áthaladáskor a $\rho_{1,2}$ konjugált komplex multiplikátorok lépnek fel az egységkörön, akkor az egy további tórusz felhasadásához vezethet, amelyre azután AFRAIMOVICS és SILNYIKOV tétele újból alkalmazható.
A P_0-tól P_2-höz való átmenet a tétel β) esetét reprezentálja: A tórusz elveszíti simaságát, és az S_1-en való áthaladáskor nyeregcsomó-bifurkáció lép fel. A tórusz szétesik, ami fellép: átmenet a káoszhoz



17.34. ábra.

intermittencián keresztül. Végül a P_0-tól P_3-hoz való átmenet a γ) esetnek felel meg: Az S_4-en való áthaladás közben elvész a simaság és egy nem robusztus homoklinikus görbe keletkezik. A γ_s stabilis ciklus megmarad, és olyan hiperbolikus halmaz keletkezik, amely a későbbiekben nem vonzó. Ha γ_s eltűnik, akkor ebből a halmazból különös attraktor keletkezhet.

2. Az egységkör leképezései és a forgatási szám

1. Ekvivalens és felemelt leképezések A simaságvesztésnél és a tórusz szétesésénél a POINCARÉ-leképezés invariáns görbéinek tulajdonságai fontos szerepet játszanak. Ha a POINCARÉ-leképezést polárkoordinátás alakban írjuk fel, akkor bizonyos feltevések mellett a szögváltozók szétcsatolt leképezéseit kapjuk, mint hű segédleképezéseket az egységkörön. Ezek sima invariáns görbék esetében **(17.34.a ábra)** invertálhatók, nem sima görbék esetében **(17.34.b ábra)** viszont nem invertálhatók. A

$$\Theta_{n+1} = F(\Theta_n) \tag{17.76}$$

dinamikai rendszert generáló $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(\Theta+1) = F(\Theta)+1\,(\Theta \in \mathbb{R})$, leképezést *ekvivariáns*nak nevezzük. Minden ilyen leképezéshez hozzárendelhető az egységkör valamely $f\colon S^1 \to S^1$ leképezése, ahol $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{\Theta \bmod 1, \Theta \in \mathbb{R}\}$. Eközben $f(x) := F(\Theta)$, ha a $[\Theta]$ ekvivalenciaosztályra fennáll az $x = [\Theta]$ összefüggés. F-et f *felemelt leképezés*ének hívjuk. Ez a hozzárendelés nyilvánvalóan nem egyértelmű. Legyen

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{17.77}$$

az f-hez tartozó dinamikai rendszer.

■ Ha ω és K két paraméter, akkor legyen az $\tilde{F}(\cdot\,;\omega, K)$ leképezés minden $\tau \in \mathbb{R}$ esetén a $\tilde{F}(\sigma;\omega,K) := \sigma + \omega - K\sin\sigma$ képlettel definiálva. Az ehhez rendelt dinamikai rendszer:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \omega - K\sin\sigma_n \tag{17.78}$$

a $\sigma_n = 2\pi\Theta_n$ transzformációval a

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\,\sin 2\pi\Theta_n \tag{17.79}$$

rendszerré transzformálható, ahol $\Omega := \dfrac{\omega}{2\pi}$. Az $F(\Theta;\Omega,K) := \Theta + \Omega - \dfrac{K}{2\pi}\sin 2\pi\Theta$, leképezés ekvivariáns, amely a *körleképezés kanonikus alakját* generálja.

2. Forgatási szám A (17.76) egyenlet $\gamma(\Theta) = \{F^n(\Theta)\}$ pályája pontosan akkor (17.77) *q periódusú pályája* S^1-ben, ha (17.76)-nek *p/q−ciklusa*, azaz, ha van olyan p egész szám, hogy $\Theta_{n+q} = \Theta_n + p$, $(n \in \mathbb{Z})$ teljesül. Az $f\colon S^1 \to S^1$ leképezés *irányítástartó*, ha tartozik hozzá monoton növekedő F felemelt leképezés. Ha a (17.76)-ban szereplő F függvény monoton növő homeomorfizmus, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik a $\lim\limits_{|n|\to\infty} \dfrac{F^n(x)}{n}$ határérték, és ez a határérték független x-től. Ezért definiálható a $\rho(F) := \lim\limits_{|n|\to\infty} \dfrac{F^n(x)}{n}$ kifejezés. Ha $f\colon S^1 \to S^1$ homeomorfizmus, F és $\tilde{F}$ az f függvény két felemeltje, akkor $\rho(F) = \rho(\tilde{F}) + k$, ahol k egész szám. A legutóbbi tulajdonság alapján definiálható az $f\colon S^1 \to S^1$

irányítástartó homeomorfizmus $\rho(f)$ *forgatási száma*: $\rho(f) := \rho(F) \bmod 1$, ahol F tetszőleges felemelt leképezése f-nek.

Ha (17.77)-ben $f\colon S^1 \to S^1$ irányítástartó homeomorfizmus, akkor a forgatási szám a következő tulajdonságokkal rendelkezik (lásd [17.12]):

a) Ha (17.77)-nek van q periódusú pályája, akkor létezik olyan p egész szám, hogy $\rho(f) = \frac{p}{q}$.

b) Ha $\rho(f) = 0$, akkor (17.77)-nek van stacionárius pontja.

c) Ha $\rho(f) = \frac{p}{q}$, ahol $p \neq 0$ egész és q természetes szám (p és q relatív prímek), akkor (17.77)-nek van q periódusú pályája.

d) $\rho(f)$ pontosan akkor irracionális, ha (17.77)-nek sem periodikus pályája, sem stacionárius pontja nincsen.

Denjoy tétele: Ha $f\colon S^1 \to S^1$ irányítástartó C^2-diffeomorfizmus és az $\alpha = \rho(f)$ forgatási szám irracionális, akkor f topológiailag konjugált egy tiszta forgatással, amelynek a felemelt leképezése $F(x) = x + \alpha$.

3. Differenciálegyenletek a T^2 tóruszon

Legyen

$$\dot{\Theta}_1 = f_1 \circ (\Theta_1, \Theta_2), \quad \dot{\Theta}_2 = f_2 \circ (\Theta_1, \Theta_2) \tag{17.80}$$

síkbeli differenciálegyenlet, amelyben f_1 és f_2 differenciálható és 1 periódusú függvénye mindkét argumentumának. Ebben az esetben (17.80) olyan folyamot definiál, amely úgy is interpretálható, mintha Θ_1 és Θ_2 a $T^2 = S^1 \times S^1$ tóruszon változnék. Ha minden (Θ_1, Θ_2) esetén $f_1(\Theta_1, \Theta_2) > 0$, akkor a (17.80) egyenletnek nincs stacionárius pontja, és ekvivalens a

$$\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1} = \frac{f_2(\Theta_1, \Theta_2)}{f_1(\Theta_1, \Theta_2)} \tag{17.81}$$

skaláris elsőrendű egyenlettel. A $\Theta_1 = t$, $\Theta_2 = x$ és $f = \frac{f_2}{f_1}$ jelöléssel a (17.81) egyenlet átírható az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{17.82}$$

nemautonóm differenciálegyenletté, amelynek a jobb oldala mindkét változójában 1 szerint periódus. Legyen $\varphi(\cdot, x_0)$ a (17.82) egyenlet 0 időpontban x_0-ból induló megoldása. Ehhez hozzárendelhető egy $\varphi^1(\cdot) = \varphi(1, \cdot)$ leképezés, amely valamely $f\colon S^1 \to S^1$ leképezás felemeltjének tekinthető.

■ Legyen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ állandó és $\dot{\Theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\Theta}_2 = \omega_2$ olyan differenciálegyenlet a tóruszon, amely $\omega_1 \neq 0$ esetén ekvivalens az $\dot{x} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ skaláris differenciálegyenlettel. Ekkor $\varphi(t, x_0) = \frac{\omega_2}{\omega_1} t + x_0$ és $\varphi^1(x) = \frac{\omega_2}{\omega_1} + x$.

4. A körleképezés kanonikus alakja

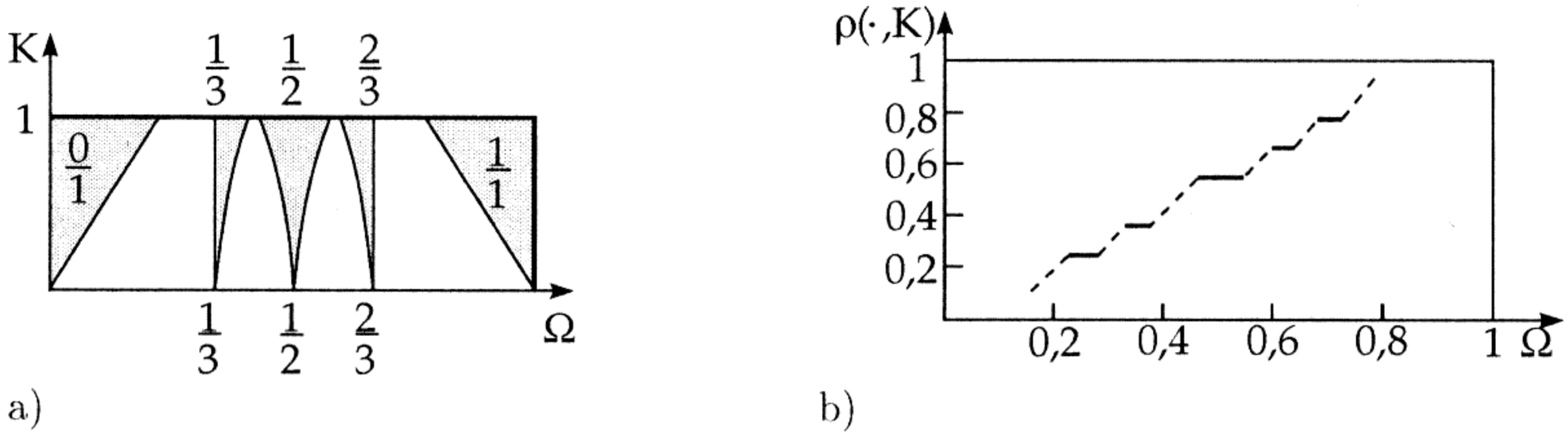
1. Kanonikus alak A (17.79)-ban szereplő F leképezés $0 \leq K < 1$ esetén irányítástartó diffeomorfizmus, mivel $\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 1 - K \cos 2\pi\vartheta > 0$. Ha $K = 1$, akkor F többé nem diffeomorfizmus, de még homeomorfizmus, míg ha $K > 1$, a leképezés többé már nem is invertálható és ezért nem is homeomorfizmus. A $0 \leq K \leq 1$ paramétertartományban $F(\cdot, \Omega, K)$-ra a forgatási számot $\rho(\Omega, K) := \rho(F(\cdot; \Omega, K))$ definiálja. Legyen $K \in (0, 1)$ rögzített. Akkor $\rho(\cdot, K)$ [0,1]-en a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) A $\rho(\cdot, K)$ függvény nem csökkenő, folytonos, de nem differenciálható.

b) Minden $\frac{p}{q} \in [0, 1)$ racionális számhoz létezik olyan $I_{p/q}$ intervallum, amelynek a belseje nem üres, és amelyre minden $\Omega \in I_{p/q}$ mellett fennáll, hogy $\rho(\Omega, K) = \frac{p}{q}$.

c) Minden $\alpha \in (0, 1)$ irracionális számhoz létezik pontosan egy olyan Ω, amellyel $\rho(\Omega, K) = \alpha$.

2. Az ördög lépcsője és az Arnold-nyelv Minden $K \in (0,1)$ esetén $\rho(\cdot, K)$ a CANTOR-függvény. $\rho(\cdot, K)$ gráfja, amit a **17.35.b ábrán** mutatunk be, *az ördög lépcsője* (*devil's staircase*). A (17.79) rendszer bifurkációs diagramja a **17.35.a ábrán** látható. Az Ω-tengely minden racionális pontjából csőr alakú, nem üres belsejű síkrész indul ki (az ARNOLD-*nyelv*), amelyen belül a forgatási szám állandó, és megegyezik az adott racionális számmal.



a) b)

17.35. ábra.

A nyelv keletkezésének oka a frekvenciák szinkronizálódása (*frekvenciacsatolás* vagy *frequency locking*). Ha $0 \leq K < 1$, akkor ezek a síkrészek nem fedik át egymást. Az Ω-tengely minden irracionális pontjából folytonos görbe indul ki, amely mindig eléri a $K = 1$ egyenest. Az első ARNOLD-nyelvben, ahol $\rho = 0$, a (17.79) dinamikai rendszernek stacionárius pontja van. Ha rögzítjük K-t és Ω nő, akkor az első ARNOLD-nyelv peremén ezek közül a stacionárius pontok közül kettő összeolvad, és így egyidejűleg megszűnik. Egy ilyen nyeregcsomó-bifurkáció eredményeképpen egy S^1-en sűrű pálya keletkezik. Hasonló jelenségek figyelhetők meg a többi ARNOLD-nyelv elhagyásakor is.
A $K > 1$ esetre a forgatási számok elmélete már nem alkalmazható. A dinamika bonyolultabb lesz, és fellép a káoszhoz való átmenet. Eközben — a FEIGENBAUM-állandó esetéhez hasonlóan — további állandók lépnek fel, amelyek leképezések meghatározott osztályaira (ilyen például a szabványos körleképezés is) egyenlőek. Ezek közül egyet az alábbiakban leírunk.

3. Aranymetszés, Fibonacci-számok A $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ irracionális számot *aranymetszési állandó*nak hívják, és a következő egyszerű lánctört-előállítása van: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}}$. A lánctört fokozatos csonkításával racionális számok olyan $\{r_n\}$ sorozatát kapjuk, amely $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$-höz tart. Az r_n számok $r_n = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ alakban állíthatók elő, ahol F_n olyan FIBONACCI-számok, amelyek az $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ iterációs eljárással határozhatók meg az $F_0 = 0$ és $F_1 = 1$ kezdeti értékek mellett. Legyen most a Ω_∞ egyenlet (17.79) olyan paraméterértéke, amelyre $\rho(\Omega_\infty, 1) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, és legyen Ω_n mindig az Ω_∞-hoz legközelebbi olyan érték, amelyre $\rho(\Omega_n, 1) = r_n$. Numerikus elemzés a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Omega_n - \Omega_{n-1}}{\Omega_{n+1} - \Omega_n} = -2{,}8336\ldots$ határértéket adja.

18. Optimalizálás

18.1. Lineáris programozás

18.1.1. Problémafelvetés és geometriai ábrázolás

18.1.1.1. A lineáris programozási feladat alakjai

1. Tárgya A lineáris programozás tárgya véges sok változó *lineáris célfüggvény*ének (**CF**) minimalizálása vagy maximalizálása véges számú *feltétel* (**F**) mellett, melyek lineáris egyenlőség, ill. egyenlőtlenség alakban adottak.
A lineáris programozás jelentősége abban rejlik, hogy számos gyakorlati feladat visszavezethető lineáris programozási feladatra, ill. lineáris modelleken keresztül közelítve lineáris optimalizálási feladatként leírhatóak és a megoldási módszer elmélete szemléletes és átlátható.

2. Általános alak Egy lineáris programozási feladat általános alakja:

$$\textbf{CF:}\quad f(\underline{\mathbf{x}}) = c_1x_1 + \cdots + c_rx_r + c_{r+1}x_{r+1} + \cdots + c_nx_n = \max! \tag{18.1a}$$

$$\textbf{F:}\quad \left.\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,r}x_r & + & a_{1,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & \le & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s,1}x_1 & +\cdots+ & a_{s,r}x_r & + & a_{s,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a_{s,n}x_n & \le & b_s \\ a_{s+1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{s+1,r}x_r & + & a_{s+1,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a_{s+1,n}x_n & = & b_{s+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +\cdots+ & a_{m,r}x_r & + & a_{m,r+1}x_{r+1} & +\cdots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{18.1b}$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_r \ge 0; \qquad x_{r+1}, \ldots, x_n \quad \text{előjelkötetlen.}$$

Az összevont, tömörebb forma:

$$\textbf{CF:}\quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^{1\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}^1 + \underline{\mathbf{c}}^{2\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}^2 = \max! \tag{18.2a}$$

$$\textbf{F:}\quad \left.\begin{array}{l} \mathbf{A}_{11}\underline{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{A}_{12}\underline{\mathbf{x}}^2 \le \quad b^1 \\ \mathbf{A}_{21}\underline{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{A}_{22}\underline{\mathbf{x}}^2 = \quad b^2 \\ \underline{\mathbf{x}}^1 \ge 0,\ \underline{\mathbf{x}}^2 \quad \text{előjelkötetlen.} \end{array}\right\} \tag{18.2b}$$

Jelölések:

$$\underline{\mathbf{c}}^1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}}^2 = \begin{pmatrix} c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{x}}^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}}^2 = \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,r} \\ \vdots & & & \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \cdots & a_{s,r} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \cdots & a_{1,r+n} \\ a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \cdots & a_{2,r+n} \\ \vdots & & & \\ a_{s,r+1} & a_{s,r+2} & \cdots & a_{s,n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \cdots & a_{s+1,r} \\ a_{s+2,1} & a_{s+2,2} & \cdots & a_{s+2,r} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} a_{s+1,r+1} & a_{s+1,r+2} & \cdots & a_{s+1,n} \\ a_{s+2,r+1} & a_{s+2,r+2} & \cdots & a_{s+2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,r+1} & a_{m,r+2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3. Feltételek Azon feltételeket, ahol a „$\ge$"reláció lép fel, egy (-1)-es szorzóval a fenti alakra transzformáljuk.

4. Minimum feladat A $f(\underline{\mathbf{x}}) = \min!$ feladatot az ekvivalens maximum feladatra vezetjük vissza:

$$-f(\underline{\mathbf{x}}) = \max! \tag{18.3}$$

5. Egészértékűségi feltételek Néhány változóra még egészértékűségi feltétel is van. Ilyen egészértékű feladatokkal a továbbiakban nem foglalkozunk.

6. Előjelkötött és kiegészítő változós megfogalmazás A megoldómódszer bevezetése előtt a feladatot célszerű olyan alakra hozni, ahol a feltételek rendszere (18.1b), (18.2b) egy egyenletrendszer előjelkötött változókkal.

Minden előjelkötetlen x_k változót helyettesítünk két nemnegatív változó különbségével $x_k = x_k^1 - x_k^2$. Az egyenlőtlenségeket egy nemnegatív *kiegészítő változó* hozzáadásával alakítjuk egyenletekké. Így a lineáris optimalizálási feladat a fenti alakot ölti.

$$\mathbf{CF}: f(\underline{\mathbf{x}}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \max! \quad (18.4a)$$

$$\left.\begin{array}{rl} & a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{F}: & a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right\} \quad (18.4b)$$

Megjegyzés: Ebben az alakban és a továbbiakban az "n" jelentése (18.1.ab) alakhoz képest megváltozik. Itt n a kiegészítő változókkal együtt az összes változó számát jelenti. A tömör alak:

$$\mathbf{CF:} \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \max! \quad (18.5a) \qquad \mathbf{F:} \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,. \quad (18.5b)$$

Feltehető, hogy $m \leq n$, különben az egyenletrendszer lineárisan összefüggő, ill. ellentmondó egyenleteket tartalmaz.

7. Megengedett tartomány Azon nemnegatív vektorok $\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$ halmaza, melyek minden feltételt kielégítenek, alkotják az M *megengedett tartomány*t:

$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n : \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\}. \quad (18.6a)$$

Egy $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ pontot, amely rendelkezik a

$$f(\underline{\mathbf{x}}^*) \geq f(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \underline{\mathbf{x}} \in M \quad (18.6b)$$

tulajdonsággal, a lineáris optimalizálási feladat *maximumpont*jának vagy *megoldás*ának hívjuk.

18.1.1.2. Egy példa és grafikus megoldása

1. Példa: Két termék gyártása A két E_1 és E_2 termék előállításához az R_1, R_2 és R_3 anyagok szükségesek. A **18.1. táblázat** mutatja az E_1 és E_2 termékek darabjához (*db*) szükséges alapanyagmennyiséget (*me*) és az alapanyagokból rendelkezésre álló mennyiséget.

Az egységnyi E_1, ill. E_2 termék eladásából 20, ill. 60 pénzegységhez (*Ft*) jutunk.
Olyan termelési programot keresünk, mely maximális bevételt biztosít, feltéve, hogy E_1-ből legalább 10 egységet gyártunk.

18.1. táblázat

	R_1 me/db	R_2 me/db	R_3 me/db
E_1	12	8	0
E_2	6	12	10
Összmennyiség	630	620	350

Bevezetve az x_1, ill. x_2 jelölést az E_1, ill. E_2 termékekből gyártandó mennyiségekre, akkor a következő feladatot kapjuk:

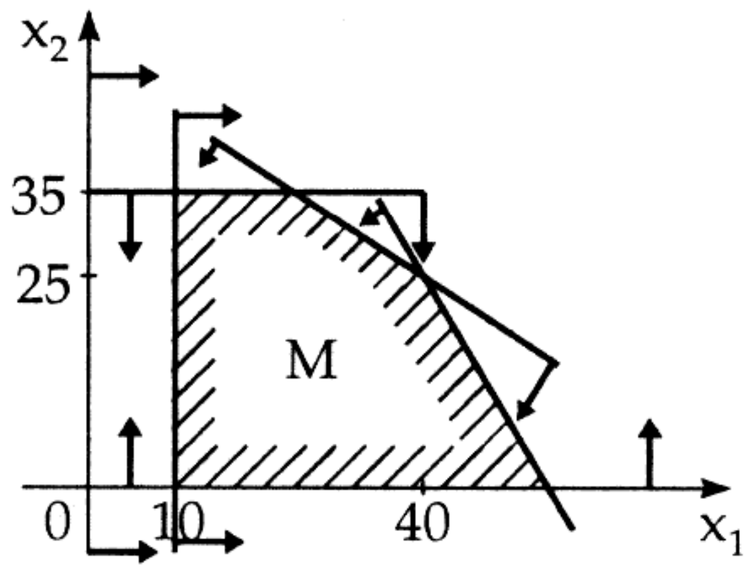
$$\begin{array}{lrcl} \mathbf{CF:} & f(\underline{\mathbf{x}}) = 20x_1 + 60x_2 & = & \max! \\ \mathbf{F:} & 12x_1 + 6x_2 & \leq & 630 \\ & 8x_1 + 12x_2 & \leq & 620 \\ & 10x_2 & \leq & 350 \\ & x_1 & \geq & 10 \end{array}$$

Az x_3, x_4, x_5, x_6 kiegészítő változók bevezetése után:

$$\begin{aligned}
\mathbf{CF}:\ f(\underline{\mathbf{x}}) &= 20x_1 + 60x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = \max! \\
\mathbf{F}:\quad 12x_1 + 6x_2 + x_3 &= 630 \\
8x_1 + 12x_2 + x_4 &= 620 \\
10x_2 + x_5 &= 350 \\
-x_1 + x_6 &= -10
\end{aligned}$$

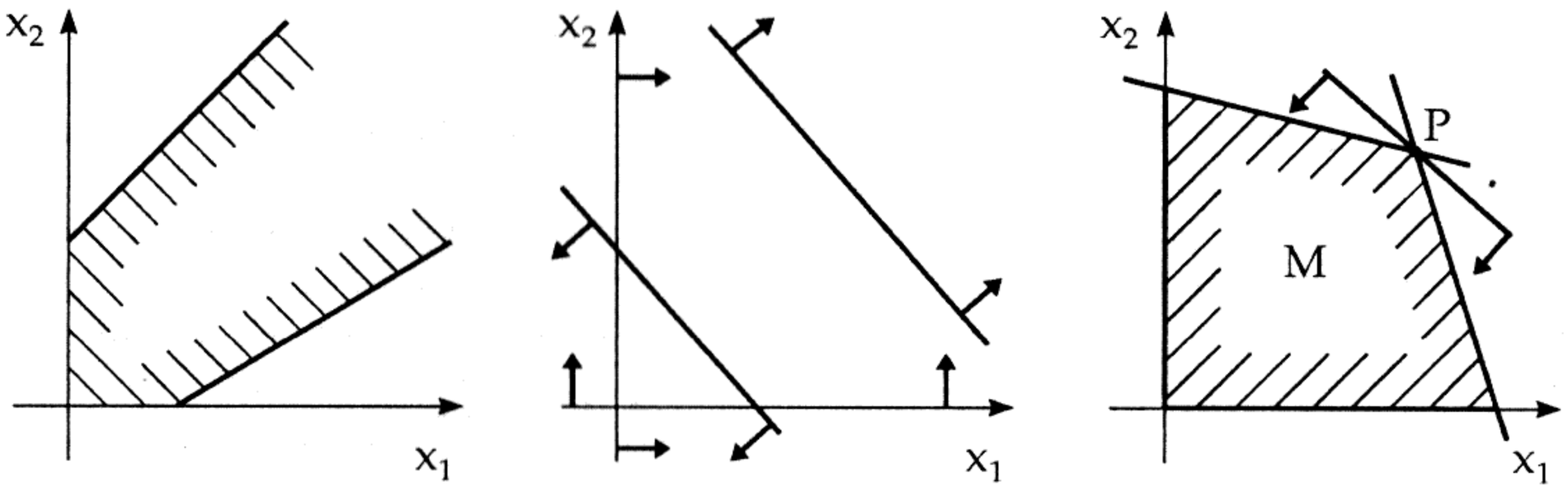
2. A lineáris optimalizálási feladat tulajdonságai A példa segítségével könnyen szemléltethetjük grafikusan a lineáris optimalizálási feladatok néhány tulajdonságát. Ehhez eltekintünk a kiegészítő változók bevezetésétől.

a) Az $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ egyenes az x_1, x_2 síkot két félsíkra osztja. Azon (x_1, x_2) pontok, melyek kielégítik a $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ egyenlőtlenséget, ezen az egyenesen, ill. a félsíkok egyikén helyezkednek el. A ponthalmaz grafikus ábrázolása egy Descartes-féle koordinátarendszerben a válaszegyenes berajzolásával és a megoldáshalmazt tartalmazó félsík irányába mutató nyilak berajzolásával történik. Az összes feltétel grafikus ábrázolása után a megengedettségi M tartományt a félsíkok metszeteként **(18.1. ábra)** kapjuk.



18.1. ábra.

A példában az M egy sokszöglap. Előfordulhat, hogy M nemkorlátos vagy üres. Amennyiben a sokszög egy csúcsán több, mint két egyenes halad át, akkor degenerált csúcsról **(18.2. ábra)** beszélünk.



18.2. ábra.

b) Minden olyan pont az x_1, x_2 síkban, melyek kielégítik az $f(x) = 20x_1 + 60x_2 = c_0$ egyenletet, egy egyenesre, az ún. c_0 függvényértékhez tartozó szintvonalra esnek. A c_0 változtatásával egy párhuzamos egyenessereghez jutunk, melyek mindegyikén a célfüggvény értéke állandó. Szemléletesen azon pontok optimális megoldásai a feladatnak, melyek benne vannak az M megengedettségi tartományban és egy olyan $20x_1 + 60x_2 = c_0$ szintvonalra esnek, melyhez a legnagyobb c_0 érték tartozik. A konkrét példában a kérdéses szintvonal a $20x_1 + 60x_2 = 2600$ és a maximumpont a $(x_1, x_2) = (25; 35)$. A szintvonalakat a **18.3. ábra** mutatja, ahol a nyilak a célfüggvényérték növekedésének irányát jelzik.

Ha az M tartomány nem üres és korlátos halmaz, akkor legalább egy csúcsban a célfüggvény értéke maximális. Ellenkezőleg, nemkorlátos M megengedett tartomány esetén elképzelhető, hogy a célfüggvényérték a végtelenhez tart.

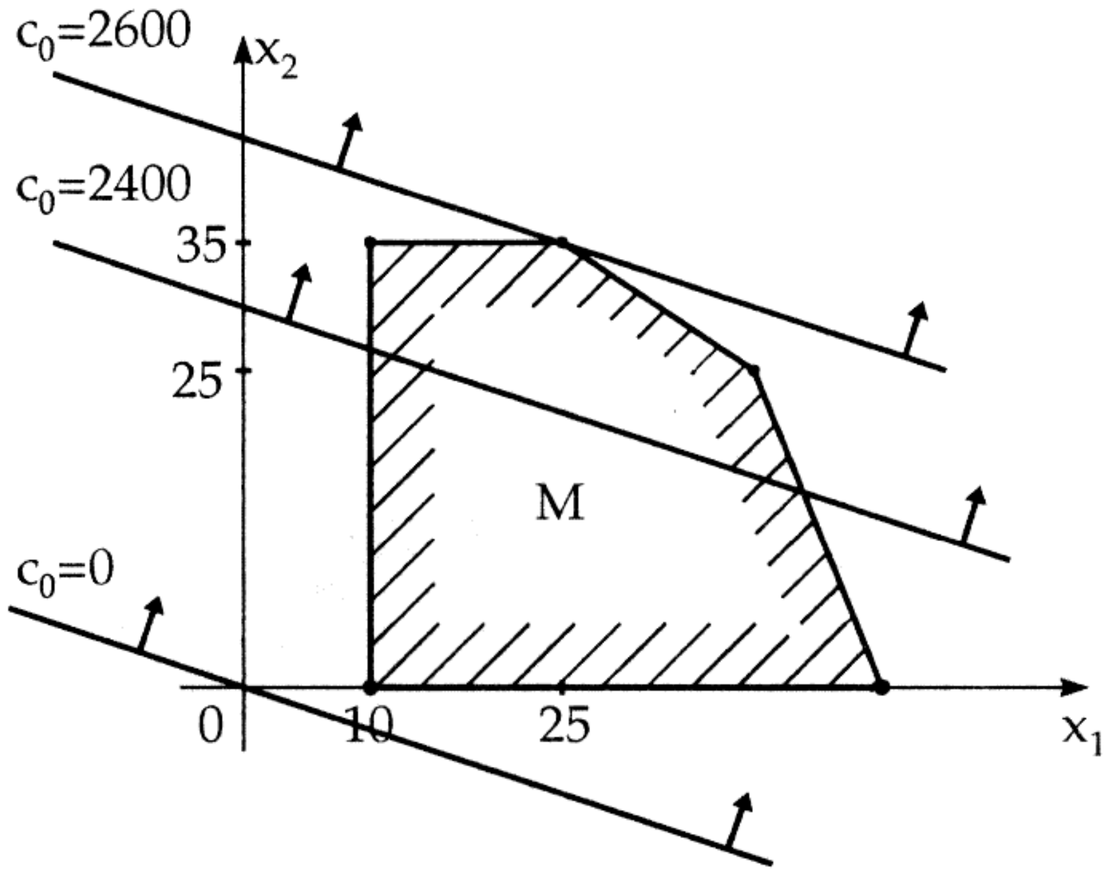
18.1.2. A lineáris programozás alapfogalmai, normálalak

Tekintsük a (18.5a,b) feladatot az M megengedett tartománnyal.

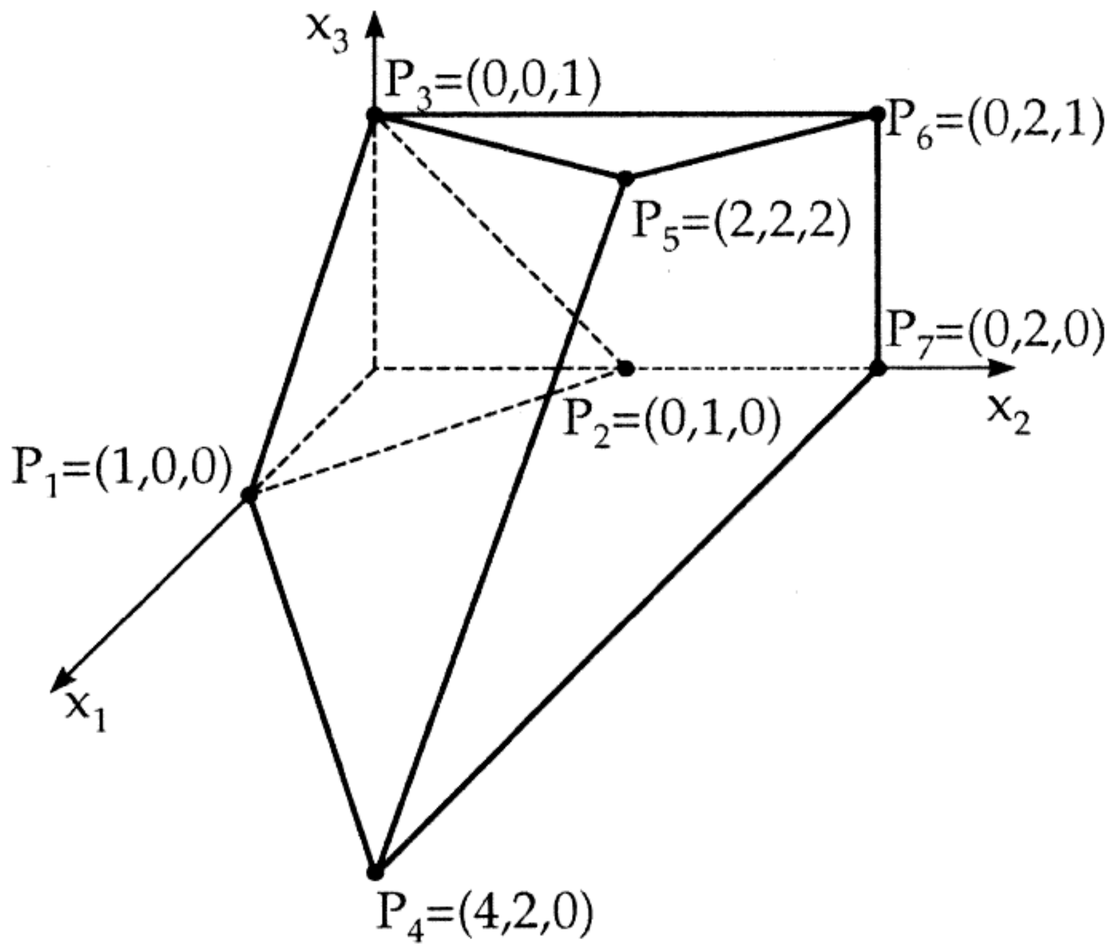
18.1.2.1. Csúcs és bázis

1. A csúcs definíciója Egy $\underline{\mathbf{x}} \in M$ pontot pontosan akkor hívjuk M *csúcspont*jának, ha minden $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2 \in M$, ahol $\underline{\mathbf{x}}_1 \neq \underline{\mathbf{x}}_2$teljesül:

$$\underline{\mathbf{x}} \neq \lambda\underline{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda)\underline{\mathbf{x}}_2, \quad \forall\, 0 < \lambda < 1, \tag{18.7}$$



18.3. ábra.



18.4. ábra.

azaz $\underline{\mathbf{x}}$ nem fekszik egyetlen M-ben haladó szakasz belsejében sem.

2. Tétel a csúcspontról Egy $\underline{\mathbf{x}} \in M$ pont pontosan akkor *csúcspont*ja M-nek, ha az $\mathbf{A}$ mátrix $\underline{\mathbf{x}}$ pozitív koordinátáihoz tartozó oszlopai lineárisan függetlenek.

Azon feltételezés mellett, hogy $\mathbf{A}$ rangja m, $\mathbf{A}$ mátrixnak legfeljebb m lineárisan független oszlopa lehet. Ezért egy csúcspontnak legfeljebb m pozitív koordinátája lehet. A maradék $n - m$ koordináta nulla. Normál esetben pontosan m koordináta pozitív. Ha a pozitív koordináták száma kisebb m-nél, akkor *degenerált csúcs*ról beszélünk.

3. Bázis Minden csúcshoz hozzárendelhető az $\mathbf{A}$ mátrix m lineárisan független oszlopvektora úgy, hogy a pozitív koordinátákhoz tartozó oszlopok mind szerepelnek. Ezt a lineárisan független vektorrendszert a *csúcs bázis*ának hívjuk. Normál esetben egy csúcshoz egyértelműen hozzárendelhető egy bázis. Egy degenerált csúcshoz viszont több bázis is megadható. Legfeljebb $\binom{n}{m}$-féle képpen lehet az $\mathbf{A}$ mátrix n oszlopából m lineárisan függetlent kiválasztani. Így a különböző bázisok, ill. csúcsok száma legfeljebb $\binom{n}{m}$. Ha M nem üres, akkor M-nek legalább egy csúcsa van.

■

CF: $f(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \max!$

F:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

A feltételek által meghatározott M megengedett tartományt a **18.4. ábra** mutatja.

Az x_4, x_5, x_6, x_7 kiegészítő változók bevezetése után:

F:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ -x_1 + 2x_3 + x_6 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_7 &= 2 \end{aligned}$$

A poliéder $P_2 = (0, 1, 0)$ pontjának a kiegészített rendszerben az $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 0, 0, 1, 2, 5)$ pont felel meg. Az $\mathbf{A}$ 2, 5, 6 és 7 oszlopai alkotják a hozzátartozó bázist. P_1 degenerált csúcs koordinátái $(1, 0, 0, 0, 2, 3, 0)$. Ezen csúcs egy bázisa az 1, 5, 6 és a 2, 4 vagy 7 oszlopok egyikéből áll.

4. Maximális célfüggvényértékű csúcs Az M megengedett tartomány csúcsairól szóló tétel jelentőségét a következő tétel világítja meg.
Ha M nem üres és az $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}$ M-en felülről korlátos, akkor az M legalább egyik csúcsa maximumpont.
Ezek alapján egy lineáris programozási feladatot meg lehet úgy oldani, hogy a csúcsok közül kiválasztjuk a legnagyobb célfüggvényértékkel rendelkezőt. Mivel a gyakorlati feladatokban az M csúcsainak száma nagyon nagy lehet, ezért szükség van egy olyan módszerre, amely biztosan megtalálja az optimális csúcsot. Ilyen módszer a *szimplex módszer* vagy másnéven a *szimplex algoritmus.* Az algoritmus a lineáris optimalizálási feladat egy olyan felírását igényli, amelyből egy csúcsot egyből le lehet olvasni.

18.1.2.2. A lineáris programozási feladat normálalakja

1. Normálalak és bázismegoldás A lineáris optimalizálási feladat mindig, esetleg a változók átnevezésével, ilyen alakra hozható:

$$\textbf{CF:} \qquad f(\underline{\mathbf{x}}) = c_1x_1 + \cdots + c_{n-m}x_{n-m} + c_0 = \max! \tag{18.8a}$$

$$\textbf{F:} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} & & = b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n-m}x_{n-m} & + x_n & = b_m \\ x_1, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n \geq 0. & & \end{array}\right\} \tag{18.8b}$$

Az együttható mátrix utolsó m oszlopa nyilvánvalóan lineárisan független és bázist alkot.
Az $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ *bázismegoldás*t az egyenlőségrendszerből azonnal leolvashatjuk. Ha $\underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{0}}$, akkor (18.8a,b)-t *a lineáris optimalizálási feladat normálalakjának* vagy *kanonikus alakjának* hívjuk. Ebben az esetben $\underline{\mathbf{x}} \geq 0$ bázismegoldás, így az M megengedett tartomány csúcsa. A normálalakban az $x_1, \ldots, x_{n-m}$ változókat *nembázisváltozók*nak, az $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ változókat pedig *bázisváltozók*nak hívjuk. Ehhez a csúcshoz tartozó célfüggvényérték c_0, mivel a célfüggvényben fellépő x koordináták, azaz a nembázisváltozók, kinullázódnak.

2. A normálalak felírása Ha az M egy csúcsa ismert, akkor a következő módon kaphatjuk meg a lineáris optimalizálási feladat egy normálalakját. Válasszunk az $\mathbf{A}$ oszlopaiból egy ehhez a csúcshoz tartozó bázist. A bázishozváltozókat az $\underline{\mathbf{x}}_B$, a nembázisváltozókat az $\underline{\mathbf{x}}_N$ vektorba fogjuk össze. A bázishoz tartozó oszlopok alkotják az $\mathbf{A}_B$ bázismátrixot, a maradék oszlopokból képzett mátrix az $\mathbf{A}_N$. Ekkor fennáll

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_N\underline{\mathbf{x}}_N + \mathbf{A}_B\underline{\mathbf{x}}_B = \underline{\mathbf{b}}\,. \tag{18.9}$$

Az $\mathbf{A}_B$ mátrix reguláris és inverze az $\mathbf{A}_B^{-1}$. (18.9) és $\mathbf{A}_B^{-1}$ szorzata és a célfüggvény átírása a nembázisváltozókkal a lineáris optimalizálási feladat egy kanonikus alakját adja:

$$\textbf{CF:} \qquad f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}_N + c_0\,, \tag{18.10a}$$

$$\textbf{F:} \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\underline{\mathbf{x}}_N + \underline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\underline{\mathbf{b}}, \qquad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{x}}_N \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{x}}_B \geq \underline{\mathbf{0}}\,. \tag{18.10b}$$

■ A fenti példában $\underline{\mathbf{x}} = (0, 1, 0, 0, 1, 2, 5)$ egy csúcs. Így:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.11a}$$

$$\begin{matrix} x_2 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

és

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{18.11b}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

Ebből adódik

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + x_2 & + x_3 & - x_4 & & & & = 1 \\ -x_1 & & - x_3 & + x_4 & + x_5 & & & = 1 \\ -x_1 & & + 2x_3 & & & + x_6 & & = 2 \\ 5x_1 & & + 5x_3 & - 3x_4 & & & + x_7 & = 5 \end{array}\right\}. \tag{18.12}$$

$f(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$-ből az első feltétel háromszorosának levonásával kapjuk a nembázisváltozókra átszámított célfüggvényt

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = -x_1 + x_3 + 3x_4 + 3. \tag{18.13}$$

18.1.3. Szimplex módszer

18.1.3.1. Szimplex tábla

A *szimplex módszer* segítségével a megengedett tartomány csúcspontjainak egy növekvő célfüggvényértékű sorozatát határozhatjuk meg. Az egyik csúcsról a másikra áttérés oly módon történik, hogy az egyik csúcshoz tartozó normálalakot átalakítjuk a másik csúcshoz tartozó normálalakká. Szemléletesebbé tehető a módszer és a számítási eljárás formalizálása is könnyebb, ha a megadott normálformát (18.8a, b) egy szimplex táblába **(18.2.a, 18.2.b táblázat)** foglaljuk:

18.2.a táblázat.

	x_1	$\cdots$	x_{n-m}	
x_{n-m+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n-m}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n-m}$	b_m
	c_1	$\cdots$	c_{n-m}	$-c_0$

vagy tömörebben

18.2.b táblázat

	$\underline{\mathbf{x}}_N$	
$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\mathbf{A}_N$	$\underline{\mathbf{b}}$
	$\underline{\mathbf{c}}$	$-c_0$

A táblázat k-dik sorát így olvassuk:

$$x_{n-m+k} + a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n-m}x_{n-m} = b_k. \tag{18.14a}$$

A célfüggvényre

$$c_1x_1 + \cdots + c_{n-m}x_{n-m} = f(\underline{\mathbf{x}}) - c_0. \tag{18.14b}$$

teljesül. A szimplex táblából az $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ csúcs olvasható le. Ezen csúcs célfüggvényértéke $f(\underline{\mathbf{x}}) = c_0$.

Minden táblázat az alábbi három eset egyikét és csak egyikét elégíti ki:

a) $c_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$: A táblázat optimális. Az $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ maximumpont.

b) Legalább egy j-re teljesül, hogy $c_j > 0$ és $a_{ij} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$: A lineáris optimumszámítási feladatnak nincsen optimális megoldása, mert a célfüggvény az x_j értékének növelésével korlátlanul nő.

c) Minden j-re, amelyre $c_j > 0$, létezik legalább egy i, hogy $a_{ij} > 0$: Az $\underline{\mathbf{x}}$ csúcsból egy másik $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}$ csúcsba át lehet menni úgy, hogy $f(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}) \geq f(\underline{\mathbf{x}})$. Egy nemdegenerált $\underline{\mathbf{x}}$ csúcsra mindig a „>"áll.

18.1.3.2. Átmenet egy másik szimplex táblára

1. Nemdegenerált eset Ha egy táblázat még nem eldönthető **(c) eset**, akkor akkor egy másik táblázatot **(18.3. táblázat)** kell meghatározni, melyben egy x_q bázisváltozót egy x_p nembázisváltozóra cserélünk ki figyelembevéve a következő szabályokat:

a) $$\tilde{a}_{pq} = \frac{1}{a_{pq}}; \tag{18.15a}$$

b) $$\tilde{a}_{pj} = a_{pj} \cdot \tilde{a}_{pq}, \quad j \neq q, \quad \tilde{b}_p = b_p \cdot \tilde{a}_{pq}; \tag{18.15b}$$

c) $$\tilde{a}_{iq} = -a_{iq} \cdot \tilde{a}_{pq}, \quad i \neq p, \quad \tilde{c}_q = -c_q \cdot \tilde{a}_{pq}; \tag{18.15c}$$

d) $$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + a_{pj} \cdot \tilde{a}_{iq}, \quad i \neq p, \quad j \neq q,$$

$$\tilde{b}_i = b_i + b_p \cdot \tilde{a}_{iq}, \quad i \neq p, \quad \tilde{c}_j = c_j + a_{pj} \cdot \tilde{c}_q, \quad j \neq q, \tilde{c}_0 = c_0 + b_q \cdot \tilde{c}_q. \tag{18.15d}$$

Az a_{pq} elemet *pivot elem*nek, vagy *generáló elemnek* a p-dik sort *pivot sor*nak és a q-dik oszlopot *pivot oszlop*nak hívjuk. A pivot sor és a pivot oszlop kiválasztásánál két dolgot kell figyelembe venni:

a) Az új táblázat legyen megengedett, azaz $\underline{\tilde{\mathbf{b}}} \geq \underline{\mathbf{0}}$teljesüljön; ezért $a_p q > 0$

b) Teljesüljön a $\tilde{c}_0 \geq c_0$ egyenlőtlenség.

Ekkor az $(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}_N, \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\tilde{\mathbf{b}}})$ egy nemkisebb célfüggvényértékű $f(\underline{\tilde{\mathbf{x}}}) = \tilde{c}_0$ új csúcs. Ezek a feltételek a pivot elem megválasztásán múlnak:

a) Egy olyan q-t válasszunk pivotoszlopnak, melyre $c_q > 0$;

b) Lényeges, hogy olyan sort válasszunk p pivotsornak, melyre

$$\frac{b_p}{a_{pq}} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ a_{iq} > 0}} \left\{ \frac{b_i}{a_{iq}} \right\} . \tag{18.16}$$

Ha a megengedettségi tartomány csúcsai nemdegeneráltak, akkor a szimplex módszer végessok lépésben egy eldöntött táblázattal (**a)** vagy **b)** eset) leáll.

■ A 18.1.2.-ben talált normálformából könnyen készíthetünk szimplex táblát **(18.4.a táblázat)**.

18.3. táblázat

	$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}_N$	
$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}_B$	$\tilde{\mathbf{A}}_N$	$\underline{\tilde{\mathbf{b}}}$
	$\underline{\tilde{\mathbf{c}}}$	$-\tilde{c}_0$

18.4.a táblázat

	x_1	x_3	x_4		
x_2	1	1	$-\underline{1}$	1	
x_5	$-\underline{1}$	$-\underline{1}$	$\underline{\underline{1}}$	$\underline{1}$	1 : 1
x_6	-1	2	$\underline{0}$	2	
x_7	5	5	$-\underline{3}$	5	
	-1	1	$\underline{3}$	-3	

18.4.b táblázat

	x_1	x_3	x_5		
x_2	0	$\underline{0}$	1	2	
x_4	-1	$-\underline{1}$	1	1	
x_6	$-\underline{1}$	$\underline{\underline{2}}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	2 : 2
x_7	2	$\underline{2}$	3	8	8 : 2
	2	$\underline{4}$	-3	-6	

A táblázat nem optimális, mert az utolsó sorban még a célfüggvénynek pozitív együtthatói szerepelnek. A harmadik oszlopot választjuk pivot oszlopnak (a második oszlop is megfelelne). A pivot oszlop minden lehetséges pozitív elemére képezzük a b_i/a_{iq} hányadost. A hányadosokat a táblázat utolsó sora után írtuk. A legkisebb hányados határozza meg a pivot sort. Ha a pivot sor meghatározása nem egyértelmű, akkor az új táblázat által meghatározott csúcs degenerált lesz. A kicserélési szabály segítségével megkapjuk a **18.4b táblát**. Ez a táblázat a $(0, 2, 0, 1, 0, 2, 8)$ csúcsot határozza meg, ami a P_7 pontnak felel meg az **18.4. ábrán**. Mivel az új tábla nem optimális, kicseréljük x_6-ot x_3-ra **(18.4.c táblázat)**. A 3. táblázat csúcsa a **18.4. ábra** P_6 pontjának felel meg. A következő cserénél már optimális táblázatot **(18.4.d táblázat)** kapunk, a maximumpont $\underline{\mathbf{x}}^* = (2, 2, 2, 5, 0, 0, 0)$, ami P_5 pont $f(\underline{\mathbf{x}}^*) = 18$ célfüggvényértékkel.

18.4.c táblázat.

	x_1	x_6	x_5		
x_2	$\underline{0}$	0	1	2	
x_4	$-\underline{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	2	
x_3	$-\underline{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	
x_7	$\underline{\underline{3}}$	$-\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{6}$	6 : 3
	$\underline{4}$	-2	-3	-10	

18.4.d táblázat.

	x_7	x_6	x_5	
x_2	0	0	1	2
x_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	5
x_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	2
	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-7	-18

18.5. táblázat.

	x_1	$\cdots$	x_n	
y_1	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	b_m
CF	c_1	$\cdots$	c_n	0
CF*	$\sum_{j=1}^{m} a_{j,1}$	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{m} a_{j,n}$	$\sum_{j=1}^{m} b_j = -g(\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$

2. Degenerált eset Ha a szimplex táblázatban a pivot oszlopválasztást követően a pivot sor nem egyértelmű, akkor az új táblázatban degenerált csúcsot kapunk. A degenerált csúcs geometriai jelentése:

több csúcs egybeesése egy pontban. Ilyen csúcshoz több bázis tartozik. Így előfordulhat, hogy néhány báziscsere után nem jutunk új csúcsba. Sőt, konstruálható olyan példa, melyben néhány lépésen belül visszajutunk egy korábbi táblázathoz és ez végtelen ciklushoz vezethet.
Degenerált csúcs esetén lehet egy ε^i (, ahol $\varepsilon > 0$alkalmas szám) tag b_i-hez adásával az egyenletrendszert úgy módosítani, hogy ez és minden másik csúcs nemdegenerálttá váljon és a módosított feladat és az eredeti feladat optimális megoldása megegyezik, ha a megoldásba $\varepsilon = 0$-t írunk. Az algoritmusban ez a módosítás a szimplex tábla kiegészítésével történik, amit most nem részletezünk.
Amennyiben a pivot oszlopot és nem egyértelmű esetben a pivot sort „véletlenszerűen"választjuk, akkor a legtöbb gyakorlati példában ciklus képződése nem valószínű.

18.1.3.3. Egy kezdő szimplex tábla meghatározása

1. Segédfeladat és mesterséges változók Gyakran, főleg nagyszámú feltétel esetén, nehéz egy csúcsot és az ahhoz tartozó szimplex táblát megadni. Ezért először egy *segédprogram*ot állítunk össze, melynek megoldásából az eredeti feladat egy szimplex táblázatát kapjuk. Ezért az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{0}}$ egyenletrendszer minden sorához egy $y_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *mesterséges változó*t adunk és a következő segédprogramot kapjuk:

$$\mathbf{CF^*}: \quad g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = -y_1 - \cdots - y_m = \max! \tag{18.17a}$$

$$\mathbf{F^*}: \quad \left.\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + y_1 & & = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \ddots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & + y_n & = b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0; \;\; y_1, \ldots, y_m \geq 0. & & \end{array}\right\} \tag{18.17b}$$

Az $y_1, \ldots, y_m$ bázisváltozókkal fel tudjuk írni az induló szimplex táblát **(18.5. táblázat)**. A táblázat utolsó sora a $\mathbf{CF^*}$ segéd-célfüggvény nem bázisbeli változóira átszámított együtthatókat tartalmazza. Szemmelláthatóan $g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \leq 0$. Ha a segédfeladat egy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*)$ maximumpontjára $g(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*) = 0$, akkor $\underline{\mathbf{y}}^* = 0$ és következésképpen $\underline{\mathbf{x}}^*$ megoldása az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszernek. Különben az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszernek $g(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*) < 0$ esetén nincs megoldása.

2. Esetszétválasztás A segédprogram szimplex módszerrel történő megoldásának az a célja, hogy a mesterséges változókat eltávolítsuk a bázisból. Amennyiben egy mesterséges változó kikerül a bázisból, akkor a neki megfelelő oszlop kitörölhető a táblázatból. Így meghatározunk egy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*)$ maximumpontot és döntünk:
1. $g(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*) < 0$: Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszernek nincs megoldása.
2. $g(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*) = 0$: Ha a bázisváltozók között nincsenek mesterséges változók, akkor egyből az eredeti feladat kezdő táblája van a kezünkben. Egyébként addig választunk a mesterséges változók sorából $\neq 0$ elemet és végzünk vele báziscserét, míg minden mesterséges változó kikerül a bázisból és így a táblázatból is.
Mesterséges változók bevezetésével a segédfeladat dimenziója nagyon nagyra nőhet. Nem szükséges minden egyenlethez mesterséges változót bevezetni. Ha a feltételek rendszere a kiegészítő változók bevezetése előtt $\mathbf{A}_1\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{b}}_1$, $\mathbf{A}_2\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}_2$, $\mathbf{A}_3\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}}_3$, ahol $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3 \geq 0$ alakú volt, akkor akkor csak az első két részben van szükség mesterséges változókra. A harmadik részben a kiegészítő változókat választjuk kezdő bázisnak.

■ A 18.1.2. rész példájában csak az első egyenlethez kell mesterséges változót bevezetni:

$$\begin{array}{lrcl} \mathbf{CF^*}: & g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = & -y_1 & = \max! \\ \mathbf{F^*}: & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + y_1 & & = 1 \\ & x_2 + x_5 & & = 2 \\ & -x_1 + 2x_3 + x_6 & & = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_7 & & = 2 \end{array}$$

A kiszámolt táblázat **(18.6.b táblázat)** $g(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}^*) = 0$ megoldással optimális. A második oszlop kitörlésével a kiindulási feladat egy kezdő táblázatát kapjuk.

18.6.a táblázat.

	x_1	x_2	x_3	x_4		
y_1	$\underline{1}$	$\underline{\underline{1}}$	$\underline{1}$	$-\underline{1}$	$\underline{1}$	1 : 1
x_5	0	$\underline{1}$	0	0	2	2 : 1
x_6	-1	$\underline{0}$	2	0	2	
x_7	2	$-\underline{3}$	2	0	2	
ZF	2	$\underline{3}$	4	0	0	
ZF*	1	$\underline{1}$	1	-1	1	

18.6.b táblázat

	x_1	y_1	x_3	x_4	1
x_2	1	1	1	-1	1
x_5	-1	-1	-1	1	1
x_6	-1	0	2	0	2
x_7	5	3	5	-3	5
ZF	-1	-3	1	3	-3
ZF*	0	-1	0	0	0

18.1.3.4. Módosított szimplex módszer

1. Módosított szimplex tábla Legyen a lineáris optimalizálási feladat normálformában adott:

$$\textbf{CF:} \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = c_1 x_1 + \cdots + c_{n-m} x_{n-m} + c_0 = \max! \tag{18.18a}$$

$$\textbf{F:} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} = \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n-m}x_{n-m} + x_n = \beta_m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{array}\right\} \tag{18.18b}$$

Hogy egy másik normálalakot és azzal együtt egy másik csúcsot kapjunk, elég az (18.18b) egyenletrendszert a megfelelő bázisinverzzel beszorozni. A szimplex módszert módosíthatjuk úgy, hogy nem számoljuk minden lépésben újra a szimplex táblát, hanem csak az új bázisinverzet határozzuk meg. Az eredeti táblázatból csak az új pivotelem meghatározásához szükséges elemeket kell kiszámolni. Ha a változók száma a feltételek számához viszonyítva nagyon nagy ($n > 3m$), akkor a módosított szimplex módszerrel figyelemreméltó számítási időt és tárolókapacitást lehet megtakarítani a számítási pontosság növelése mellett.

A módosított szimplex tábla általános alakját a **18.7. táblázat** mutatja.

18.7. táblázat

	$x_1 \cdots x_{n-m}$	$x_{n-m+1} \cdots x_n$		x_q
x_1^B		$a_{1,n-m+1} \cdots a_{1,n}$	b_1	r_1
$\vdots$		$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m^B		$a_{m,n-m+1} \cdots a_{m,n}$	b_m	r_m
	$c_1 \cdots c_{n-m}$	$c_{n-m+1} \cdots c_n$	$-c_0$	c_q

A táblázatban szereplő jelölések:

$x_1^B, \ldots, x_m^B$: Aktuális bázisváltozók.

$c_1, \ldots, c_n$: Nembázisváltozókra átszámított célfüggvény együtthatói.

$b_1, \ldots, b_m$: Az aktuális normálalak jobb oldala.

c_0 : A $(x_1^B, \ldots, x_m^B) = (b_1, \ldots, b_m)$ csúcsban a célfüggvény értéke.

$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{1,n-m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,n-m+1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$: Az aktuális bázisinverz, ahol az $\mathbf{A}^*$ oszlopai az $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ változókhoz tartozó oszlopok aktuális normálalakja.

$\underline{\mathbf{r}} = (r_1, \ldots, r_m)^{\mathrm{T}}$:Aktuális pivot oszlop.

2. Módosított szimplex lépés

a) A táblázat nem optimális, amíg legalább egy $c_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Egy q pivot oszlop kiválasztása egy $c_q > 0$-ra.

b) Az r-dik pivot oszlop számítása a (18.18b) együtthatómátrix q-dik oszlopának és $\mathbf{A}^*$ szorzataként és a kapott vektor bevitele a tábla utolsó oszlopaként.

A pivot sor meghatározása ugyanúgy mint a szimlex algoritmus esetén (18.16).
c) Az új táblázat kiszámítása a (18.15a–d) alapján, ahol a_{iq}-t formálisan r_i-vel helyettesítjük és az indexek a $n-m+1 \le j \le n$ tartományba esnek. Az $\tilde{r}_i$ mennyiségeket nem írjuk be. A $\underline{\tilde{\mathbf{c}}} = (\tilde{c}_{n-m+1}, \ldots, \tilde{c}_n)^{\mathrm{T}}$ segítségével $j = 1, \ldots, n-m$-re meghatározzuk $\tilde{c}_j = c_j + \underline{\alpha}_j^{\mathrm{T}} \underline{\tilde{\mathbf{c}}}$-t, ahol $\underline{\alpha}_j$ a (18.18b) együtthatómátrixának j-dik oszlopát jelöli.

■ A 18.1.2. példa normálalakjába x_4-et kell bevenni. A hozzátartozó $\underline{\alpha}_4$ pivot oszlopot a **(18.8.a táblázat)** táblába be kell venni.

18.8.a táblázat.

	x_1	x_3	x_4	x_2	x_5	x_6	x_7		x_4	
x_2				1	0	0	0	1	$-\underline{1}$	
x_5				$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{\underline{1}}$	1 : 1
x_6				0	0	1	0	2	$\underline{0}$	
x_7				0	0	0	1	5	$\underline{3}$	
	-1	1	$\underline{3}$	0	0	0	0	-3	$\underline{3}$	

18.8.b táblázat.

	x_1	x_3	x_4	x_2	x_5	x_6	x_7		x_3	
x_2				1	1	0	0	2	$\underline{0}$	
x_5				0	1	0	0	1	$-\underline{1}$	
x_6				$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{\underline{2}}$	2 : 2
x_7				0	3	0	1	8	$\underline{2}$	8 : 2
	2	$\underline{4}$	0	0	-3	0	0	-6	$\underline{4}$	

$j = 1, 3, 4$-re kapjuk: $\tilde{c}_j = c_j - 3\alpha_{2j}$: $(c_1, c_3, c_4) = (2, 4, 0)$.
A kapott $\underline{\mathbf{x}} = (0, 2, 0, 1, 0, 2, 2)$ csúcspont a **18.4. ábra** P_7 pontjának felel meg. A következő pivot sor a $j = 3$ lesz. Az $\underline{\mathbf{r}}$-t a 2. táblázatba már beírtuk **(18.8.b táblázat)**:

$$\underline{\mathbf{r}} = (r_1, \ldots, r_m) = \mathbf{A}^* \underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A további számításokat a 18.1.3.2. példa alapján (lásd 877. old.) végezzük.

18.1.3.5. Dualitás a lineáris optimalizálásban

1. Hozzárendelés Minden lineáris optimalizálási feladathoz (primál feladat) kölcsönösen egyértelműen rendelhető egy másik optimalizálási feladat (duál feladat):

Primál feladat

CF: $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}_1^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_2^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}}_2 = \max!$ (18.19a)

F: $\mathbf{A}_{1,1}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{1,2}\underline{\mathbf{x}}_2 \le \underline{\mathbf{b}}_1$,
$\mathbf{A}_{2,1}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{2,2}\underline{\mathbf{x}}_2 = \underline{\mathbf{b}}_2$,
$\underline{\mathbf{x}}_1 \ge 0$, $\underline{\mathbf{x}}_2$ előjelkötetlen, (18.19b)

Duál feladat

CF*: $g(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{b}}_1^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{u}}_1 + \vec{b}_2^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{u}}_2 = \min!$ (18.20a)

F*: $\mathbf{A}_{1,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_{2,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_2 \ge \underline{\mathbf{c}}_1$,
$\mathbf{A}_{1,2}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_{2,2}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{c}}_2$,
$\underline{\mathbf{u}}_1 \ge 0$, $\underline{\mathbf{u}}_2$ előjelkötetlen. (18.20b)

Az egyik feladat célfüggvényének együtthatói alkotják a másik feladat feltételeinek jobb oldalát. Minden előjelkötetlen változóhoz egyenlőség és minden előjelkötött változóhoz egyenlőtlenség tartozik a másik feladatban.

2. Dualitástételek
a) Ha mind a két feladatnak létezik megengedett megoldása, azaz $M \ne \emptyset$, $M^* \ne \emptyset$, akkor

$$f(\underline{\mathbf{x}}) \le g(\underline{\mathbf{u}}) \qquad \text{minden } \underline{\mathbf{x}} \in M, \ \underline{\mathbf{u}} \in M^*, \tag{18.21a}$$

és mind a két feladatnak létezik optimális megoldása.
b) Az $\underline{\mathbf{x}} \in M$ és $\underline{\mathbf{u}} \in M^*$ vektorok pontosan akkor optimális megoldásai a megfelelő feladatnak, ha teljesül:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = g(\underline{\mathbf{u}}). \tag{18.21b}$$

c) Ha $f(\underline{\mathbf{x}})$ az M halmazon felülről, ill. $g(\underline{\mathbf{u}})$ az M^* halmazon alulról nemkorlátos, akkor $M^* = \emptyset$, ill. $M = \emptyset$.

d) Az $\underline{\mathbf{x}} \in M$ és $\underline{\mathbf{u}} \in M^*$ vektorok pontosan akkor optimális megoldásai a megfelelő feladatnak, ha teljesülnek az

$$\underline{\mathbf{u}}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_{1,1}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{1,2}\underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{b}}_1) = 0 \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_{1,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_{2,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_2 - \underline{\mathbf{c}}_1) = 0 \tag{18.21c}$$

feltételek. Az utolsó két összefüggés alapján a duál feladat egy $\underline{\mathbf{u}}$ nemdegenerált optimális megoldásából a primál feladat egy $\underline{\mathbf{x}}$ optimális megoldása számítható ki az alábbi lineáris egyenletrendszerből:

$$\mathbf{A}_{2,1}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{2,2}\underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{b}}_2 = \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{18.22a}$$

$$(\mathbf{A}_{1,1}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_{1,2}\underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{b}}_1)_i = \underline{\mathbf{0}} \qquad \text{ha } u_i > 0\,, \tag{18.22b}$$

$$x_i = 0 \qquad \text{ha } (\mathbf{A}_{1,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{A}_{2,1}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}_2 - \underline{\mathbf{c}}_1)_i \neq 0. \tag{18.22c}$$

A duál feladat megoldásához használható a szimplex módszer.

3. A duál feladat alkalmazhatósága A duális feladat megoldása a következő esetekben előnyös:
a) Ha a duálfeladatra könnyebb a normálalakot felírni, akkor érdemes a primál feladatról áttérni a duálra.
b) Ha a primál feladatban a feltételek száma a változókhoz képest nagy, akkor a duál feladat módosított szimplex módszerrel történő megoldása csökkenti a számítási igényt.

■ A 18.1.2. példa kiegészítő változók nélkül:

Primál feladat

$$\begin{aligned}
\textbf{CF:}\quad & f(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \max! \\
\textbf{F:}\quad & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_3 \leq 2 \\
& 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Duál feladat

$$\begin{aligned}
\textbf{CF}^*\textbf{:}\quad & g(\underline{\mathbf{u}}) = -u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = \min! \\
\textbf{F}^*\textbf{:}\quad & -u_1 - u_3 + 2u_4 \geq 2 \\
& -u_1 + u_2 - 3u_4 \geq 3 \\
& -u_1 + 2u_3 + 2u_4 \geq 4 \\
& u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0
\end{aligned}$$

A kiegészítő változók bevezetése után és a kezdő szimplex tábla felállítása után megoldjuk a duál feladatot szimplex módszerrel, majd a kiegészítő vektorokat elfelejtve az $\underline{\mathbf{u}}^* = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 7, 2/3, 4/3)$ megoldást kapjuk, ahol $g(\underline{\mathbf{u}}) = 18$. Ebből a primál feladat egy $\underline{\mathbf{x}}^*$ optimális megoldása kiszámítható az $(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}})_i = 0$, ahol $u_i > 0$ rendszer segítségével, azaz $x_2 = 2$, $-x_1 + 2x_3 = 2$, $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2$, így végül $\underline{\mathbf{x}}^* = (2, 2, 2)$, ahol $f(\underline{\mathbf{x}}) = 18$.

18.1.4. Speciális lineáris optimalizálási feladatok

18.1.4.1. Szállítási feladat

1. A modell
Egy m gyártó $E_1, E_2, \ldots, E_m$ által $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mennyiségben gyártott terméket kell elszállítani az n fogyasztóhoz $V_1, V_2, \ldots, V_n$, akik $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mennyiséget igényelnek. c_{ij} jelöli az egységnyi áru szállításának költségét az E_i gyártó és a V_j felhasználó között. Az E_I-től V_j-hez x_{ij} árut szállítunk. Olyan szállítást keresünk, melynek összköltsége minimális. Feltételezzük, hogy a gyártók összkapacitása megegyezik az aggregált kereslettel, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \tag{18.23}$$

Kapunk egy $\mathbf{C}$ költségmátrixot és egy $\mathbf{X}$ elosztási mátrixot:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} E: \\ E_1 \\ \vdots \\ E_m \\ V: \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{pmatrix} \\ \\ V_1 \cdots V_n \end{array} \tag{18.24a}$$

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \sum: \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \sum: \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} \\ \\ b_1 \cdots b_n \end{array} \tag{18.24b}$$

Ha a (18.23) feltétel nem teljesül, akkor két esetet különböztetünk meg:

a) A $\sum a_i > \sum b_j$ esetén egy V_{n+1} fiktív vevőt vezetünk be $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ igénnyel és $c_{i,n+1} = 0$ szállítási költséggel.
b) A $\sum a_i < \sum b_j$ esetben egy E_{m+1} fiktív gyártót vezetünk be $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ gyártási kapacitással és $c_{m+1,j} = 0$ szállítási költséggel. Az optimális elosztáshoz az alábbi optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\mathbf{CF}: \quad f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min! \tag{18.25a}$$

$$\mathbf{F}: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \;\; (i = 1, \ldots, m)\,, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \;\; (j = 1, \ldots, n)\,, \;\; x_{ij} \geq 0)\,. \tag{18.25b}$$

A célfüggvény a minimumát a megengedett tartomány egy csúcsában veszi fel. Az $m + n$ feltételből $m+n-1$ lineárisan független, így nemdegenerált esetben a csúcsnak $m+n-1$ pozitív x_{ij} koordinátát kell tartalmaznia. Az optimális szállítás meghatározása a szállítási algoritmus segítségével történik.

2. Egy megengedett bázismegoldás kiszámítása

Az „*északnyugati sarok szabály*"segítségével mindig találunk kezdő megengedett bázismegoldást:

a) Legyen $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. (18.26a)

b) Ha $a_1 < b_1$, kihúzzuk az $\mathbf{X}$ első sorát. (18.26b)

Ha $a_1 > b_1$, kihúzzuk $\mathbf{X}$ első oszlopát. (18.26c)

Ha $a_1 = b_1$, kihúzzuk $\mathbf{X}$ első sorát vagy első oszlopát, tetszőlegesen. (18.26d)

Ha csak egy sor van, de még több oszlop, akkor oszlopot kell kitörölni és fordítva.
c) Helyettesítsük a_1-et $a_1 - x_{11}$-gyel és b_1-et $b_1 - x_{11}$-gyel és ismételjük az eljárást a csökkentett táblázattal.
Minden ezen eljárással pozitív értéket felvevő változó bázisváltozó, minden más változó nem bázisváltozó és így értékük 0.

■

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} E: \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ V: \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\ V_1 \; V_2 \; V_3 \; V_4 \end{array} \qquad \mathbf{X} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \end{pmatrix} \\ \sum: \quad b_1 = 4 \; b_2 = 6 \; b_3 = 5 \; b_4 = 7 \end{array} \begin{array}{c} \sum: \\ a_1 = 9 \\ a_2 = 10 \\ a_3 = 3 \end{array}$$

Egy kezdő csúcs kiszámítása északnyugati sarok szabállyal:

1.lépés

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ | & & \\ \not{4} & 6 & 5 \; 7 \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \not{9} \; 5 \\ 10 \\ 3 \end{array}$$

további lépések

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & \text{—} \\ | & 1 & 5 \; 4 \\ | & | & | \; 3 \\ 0 & \not{6} & \not{5} \; \not{7} \\ & \not{1} & 0 \; 3 \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \not{5} \; 0 \\ \not{10} \; \not{9} \; \not{4} \; 0 \\ 3 \end{array}$$

Olyan kezdőkiosztások, melyek a szállítási költségeket is figyelembe veszik (pl. VOGEL-féle approximációs módszer, ld. [18.15]), jobb kezdőmegoldást szolgáltatnak.

3. A szállítási feladat megoldása potenciálokkal

A bázisváltozókat iteratív módon kicseréljük nembázisváltozókra úgy, hogy minden esetben egy módosított költségmátrixot számítunk hozzá. A számítás menetét egy példa segítségével adjuk meg.

a) A $\tilde{\mathbf{C}}$ módosított költségmátrix számítása $\mathbf{C}$-ből:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + p_i + q_j \quad (i = 1, \ldots, m\,, \;\; j = 1, \ldots, n)\,, \tag{18.27a}$$

az alábbi feltételekkel

$$\tilde{c}_{ij} = 0 \text{ minden } (i,j)\text{-re, ahol } x_{ij} \text{ az aktuális bázisváltozó.} \tag{18.27b}$$

Ehhez a **C**-ben a bázisváltozókhoz tartozó költségeket megjelöljük és $p_1 = 0$-t rögzítjük. A további p_i és q_j mennyiségeket —, melyeket szokás potenciálnak, ill. szimplex szorzónak hívni — úgy számítjuk ki, hogy a megjelölt költségekhez tartozó p_i, q_j és a c_{ij} költség összege nullát adjon:

■

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (5) & (3) & 2 & 7 \\ 8 & (2) & (1) & (1) \\ 9 & 2 & 6 & (3) \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = -1 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{-2} & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{18.27c}$$

$$q_1 = -5 \; q_2 = -3 \; q_3 = -2 \; q_4 = -2$$

b) Számítás:

$$\tilde{c}_{pq} = \min_{i,j}\{\tilde{c}_{ij}\}. \tag{18.27d}$$

Ha $\tilde{c}_{pq} \geq 0$, akkor az adott **X** szállítás optimális; különben x_{pq}-t választjuk új változónak. A példában $\tilde{c}_{pq} = \tilde{c}_{32} = -2$.

c) A $\tilde{\mathbf{C}}$-ban a $\tilde{c}_{pq}$ és a bázisváltozókhoz tartozó költségeket jelöljük meg. Amennyiben $\tilde{\mathbf{C}}$ egyik sora vagy oszlopa legfeljebb egy megjelölt elemet tartalmaz, akkor ezt a sort vagy oszlopot kihúzzuk. A maradék mátrixszal addig folytatjuk ezt az eljárást, míg több kihúzás már nem lehetséges.

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left(\begin{array}{c|cc|c} \cancel{(0)} & (0) & 0 & 5 \\ \hline 4 & (0) & (0) & (0) \\ 3 & (-2) & 3 & (0) \end{array}\right). \tag{18.27e}$$

d) A megmaradt megjelölt $\tilde{c}_{ij}$ elemekhez tartozó x_{ij}-k egy ciklust alkotnak. Legyen $\tilde{x}_{pq} = \delta > 0$. Minden további megjelölt $\tilde{c}_{ij}$-hez tartozó $\tilde{x}_{ij}$-t úgy határozunk meg, hogy a feltételek teljesüljenek. A δ-t a

$$\delta = x_{rs} = \min\{x_{ij} : \quad \tilde{x}_{ij} = x_{ij} - \delta\} \tag{18.27f}$$

egyenletből számoljuk, ahol x_{rs} kilép a bázisból. A példában $\delta = \min\{1,3\} = 1$.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \sum \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 5 & & \\ & \longleftarrow & & \\ 1-\delta & 5 & 4+\delta & \\ \downarrow & & \uparrow & \\ \delta & \longrightarrow & 3-\delta & \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 5 & 7 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \sum \\ 9 \\ \\ 10 \\ \\ 3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & & \\ & & 5 & 5 \\ 1 & & & 2 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = 53. \tag{18.27g}$$

Ezután az eljárást az 1. lépéstől ismételjük $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ választással.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (5) & (3) & 2 & 7 \\ 8 & 2 & (1) & (1) \\ 9 & (2) & 6 & (3) \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 = 0 \\ p_2 = 3 \\ p_3 = 1 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} (0) & (0) & (\underline{-2}) & 3 \\ \hline 6 & 2 & (0) & (0) \\ 5 & (0) & 3 & (0) \end{array}\right) \tag{18.27h}$$

$$q_1 = -5 \; q_2 = -3 \; q_3 = -4 \; q_4 = -4$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 5-\delta & \leftarrow & \delta \\ & & & \uparrow \\ & \downarrow & & 5-\delta & \leftarrow & 5+\delta \\ & & & & & \uparrow \\ & 1+\delta & & \longrightarrow & & 2+\delta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \delta = 2 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 3 & 7 \\ 3 & & \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{X}) = 49. \tag{18.27i}$$

A következő meghatározandó $\tilde{\mathbf{C}}$ mátrix nem tartalmaz negatív elemet. Ezért $\tilde{\mathbf{X}}$ egy optimális szállítás.

18.1.4.2. Hozzárendelési feladat

Az ismertetés egy példa alapján történik.

■ n szállítási meggbízást kell kiadni n szállítmányozási vállalatnak oly módon, hogy minden vállalat pontosan egy megbízást kapjon. Keressük a legköltségkímélőbb hozzárendelést, ha az i-dik vállalat a j-dik szállításért c_{ij} költséget számol fel.
Egy hozzárendelési feladat speciális szállítási feladat, ahol $m = n$ és $a_i = b_j = 1$ minden i, j-re.

$$\mathbf{CF}: \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min! \tag{18.28a}$$

$$\mathbf{F}: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1, \ldots, n), \qquad x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{18.28b}$$

A megengedett elosztási mátrixok minden sora és minden oszlopa pontosan egy 1-est tartalmaz, a többi elem 0. Egy $\mathbf{X}$ megengedett elosztási mátrixból kiindulva a hozzárendelési feladat az egészértékűségi feltételt figyelmen kívül hagyva megoldható a szállítási algoritmussal. Továbbá minden megengedett bázismegoldás (csúcs) degenerált, mert $n - 1$ bázisváltozó nullával egyenlő. Ezért a ciklusok elkerülése külön ügyelni kell.

18.1.4.3. Elosztási feladat

A feladatot egy példán keresztül mutatjuk be.
■ Az m számú $E_1, E_2, \ldots, E_m$ terméket $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mennyiségben kell előállítani. Minden terméket lehet az n darab $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gép bármelyikén gyártani. Az M_j gép az E_i termék egy egységének előállításához b_{ij} megmunkálási időre van szüksége és c_{ij} költséggel jár. Az M_j gépen rendelkezésre álló munkaidő b_j. Az M_j gépen E_i termékből termelt x_{ij} mennyiségeket úgy kell megválasztani, hogy az összköltség minimális legyen.
Az elosztási feladatra az alábbi modell adódik:

$$\mathbf{CF}: \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min! \tag{18.29a}$$

$$\mathbf{F}: \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \ \ (i = 1, \ldots, m), \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_{ij} \le b_j \ \ (j = 1, \ldots, n), \qquad x_{ij} \ge 0 \ \text{ minden } \ i, j\,. \tag{18.29b}$$

Az elosztási feladat a szállítási feladat egy általánosítása és megoldható a szimplex módszerrel. Ha minden $b_{ij} = 1$, akkor egy E_{m+1} fiktív termék bevezetése után (lásd 882. old.) az effektív szállítási algoritmust (lásd 882. old.) használhatjuk a megoldásához.

18.1.4.4. Utazó ügynök problémája

Adva van n város $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Hogy O_i-ből O_j-be jussunk az ügynöknek c_{ij} távolságot kell megtennie. $c_{ij} \neq c_{ji}$ is megengedett.
Keressük a legrövidebb utat úgy, hogy az ügynök minden várost csak egyszer látogat meg és végül visszatér a kiindulási helyre.
Mint a hozzárendelési feladatban, itt is a $\mathbf{C}$ távolságmátrix minden sorában és minden oszlopában egy elemet kell kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott elemek összege minimális legyen. Az utazó ügynök feladat megoldásának numerikus számítását jelentősen megnehezíti, hogy a megjelölt c_{ij} elemeknek ki kell elégíteni az alábbi feltételt:

$$c_{i_1,i_2}, c_{i_2,i_3}, \ldots, c_{i_n,i_{n+1}}, \qquad \text{ahol } i_k \neq i_l \ k \neq l \text{ és } i_{n+1} = i_1. \tag{18.30}$$

Az utazó ügynök probléma elágazás és szétválasztás típusú eljárásokkal (branch and bound) oldható meg.

18.1.4.5. Sorbarendezési feladat

n különböző termék megmunkálása történik a terméktől függő sorrendben m különböző gépen. Egyik gépen sem lehet egyszerre több terméket megmunkálni. Minden termék minden gépen történő megmunkálásának ideje ismert. A termelési eljárásban lehetnek várakozási idők, melynek oka, hogy a gép —, melyen a megmunkálásra sor kerül — éppen foglalt, de várhatnak a gépek is.
Olyan sorrendet kell találni, mely a gépeken megmunkált darabok összátfutási idejét, az összes várakozási időt vagy a gépleállási idők összegét minimalizálja, a gazdasági céloktól függően. Egy további cél lehet, ha előírjuk, hogy nem lehetnek várakozási- és leállási idők és emellett minimalizáljuk a teljes átfutási időt.

18.2. Nemlineáris programozás

18.2.1. Problémafelvetés és elméleti alapok

18.2.1.1. Problémafelvetés

1. **Nemlineáris optimumszámítás** Nemlineáris programozási feladaton az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min!\,, \qquad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{feltéve} \tag{18.31a}$$

$$g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \qquad h_j(\underline{\mathbf{x}}) = 0, \quad j \in J = \{1, \ldots, r\} \tag{18.31b}$$

alakú problémát értjük, ha legalább egy f, g_i, h_j függvény nem lineáris. A megengedett pontok M halmaza:

$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \;\; g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0,\; i \in I,\; h_j(\underline{\mathbf{x}}) = 0,\; j \in J\}. \tag{18.32}$$

A minimumpontok meghatározása a feladat.

2. **Minimumpontok** Egy $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ vektort *globális minimumpont*nak nevezünk, ha minden $\underline{\mathbf{x}} \in M$-re teljesül az $f(\underline{\mathbf{x}}^*) \leq f(\underline{\mathbf{x}})$. Ha ez csak az $\underline{\mathbf{x}}^*$ pont egy U környezetének $\underline{\mathbf{x}}$ megengedett pontjaira teljesül, akkor $\underline{\mathbf{x}}^*$ egy *lokális minimumpont*. A minimumpont definíciójából adódnak az optimalitási feltételek. Mivel a $h_j(\underline{\mathbf{x}}) = 0$ egyenlettípusú feltételek két egyenlőtlenségre

$$-h_j(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0\,, \qquad h_j(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0 \tag{18.33}$$

bonthatók, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $J(J = \emptyset)$ halmaz üres.

18.2.1.2. Optimalitási feltételek

1. **Speciális irányok**

1. **A megengedett irányok kúpját** egy $\underline{\mathbf{x}} \in M$ pontban a

$$Z(\underline{\mathbf{x}}) = \{\underline{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^n : \;\; \exists \bar{\alpha} > 0 : \; \underline{\mathbf{x}} + \alpha \underline{\mathbf{d}} \in M,\; 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\}, \qquad \underline{\mathbf{x}} \in M, \tag{18.34}$$

definiálja, ahol az irányokat $\underline{\mathbf{d}}$-vel jelöltük. Ha $\underline{\mathbf{d}} \in Z(\underline{\mathbf{x}})$, akkor az $\underline{\mathbf{x}} + \alpha \underline{\mathbf{d}}$ sugár minden pontja megfelelően kicsi α értékre M-beli.

2. **Egy csökkenési irány** az $\underline{\mathbf{x}}$ pontban egy olyan $\underline{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre létezik egy $\bar{\alpha} > 0$, hogy

$$f(\underline{\mathbf{x}} + \alpha \underline{\mathbf{d}}) < f(\underline{\mathbf{x}}) \qquad \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha}). \tag{18.35}$$

Egy minimumpontban nem létezik ilyen megengedett csökkenési irány.
Ha f differenciálható, akkor $\nabla f(\underline{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} < 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\underline{\mathbf{d}}$ csökkenési irány. ∇-val a nablaoperátort jelöljük, ahol $\nabla f(\underline{\mathbf{x}})$ az f skalár függvény $\underline{\mathbf{x}}$ helyen felvett gradiensét jelöli.

2. **Szükséges optimalitási feltétel**

Ha f differenciálható és $\underline{\mathbf{x}}^*$ lokális minimumpont, akkor

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*)^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} \geq 0 \qquad \text{minden} \quad \underline{\mathbf{d}} \in \overline{Z}(\underline{\mathbf{x}}^*) \textit{mellett.} \tag{18.36a}$$

Továbbá igaz

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*) = \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{18.36b}$$

ha $\underline{\mathbf{x}}^*$ az M belsejében fekszik.

3. Lagrange-függvény és nyeregpont
További feltételezések mellett a (18.36a,b) optimalitási feltételt egy a gyakorlati alkalmazásnak megfelelő alakra kell hozni. Ehhez az egyenlőségtípusú feltételt tartalmazó szélsőértékszámításban használatos LAGRANGE-*féle multiplikátor módszer*nek (lásd 407. old.) megfelelően képezzük a LAGRANGE függvényt:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = f(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} g(\underline{\mathbf{x}}) \,, \qquad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R},\ \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}_+^m \,. \tag{18.37}$$

Egy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ pontot L *nyeregpont*jának hívunk, ha

$$L(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}) \le L(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*) \le L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}^*) \qquad \text{minden} \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}_+^m \,. \tag{18.38}$$

4. Globális Kuhn–Tucker-feltételek
Egy $\underline{\mathbf{x}}^* \in \mathbb{R}^n$ pont kielégíti a globális KUHN–TUCKER-feltételeket, ha létezik olyan $\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathbb{R}_+^m$ vektor, azaz $\underline{\mathbf{u}}^* \ge 0$, hogy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*)$ az L nyeregpontja.
A KUHN–TUCKER-feltételek bizonyítása megtalálható a 645. oldalon.

5. Elégséges optimalitási feltétel
Ha $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ az L nyeregpontja, akkor $\underline{\mathbf{x}}^*$ a 18.31a,b)-nak globális minimumpontja.
Ha f és g_i függvények differenciálhatóak, akkor lokális optimalizálási feltételeket is le lehet vezetni.

6. Lokális Kuhn–Tucker-feltételek
Egy $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ pont kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-feltételeket, ha léteznek olyan $u_i \ge 0$, $i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^*)$ számok, hogy

$$-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*) = \sum_{i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^*)} u_i \nabla g_i(\underline{\mathbf{x}}^*), \qquad \text{ahol} \tag{18.39a}$$

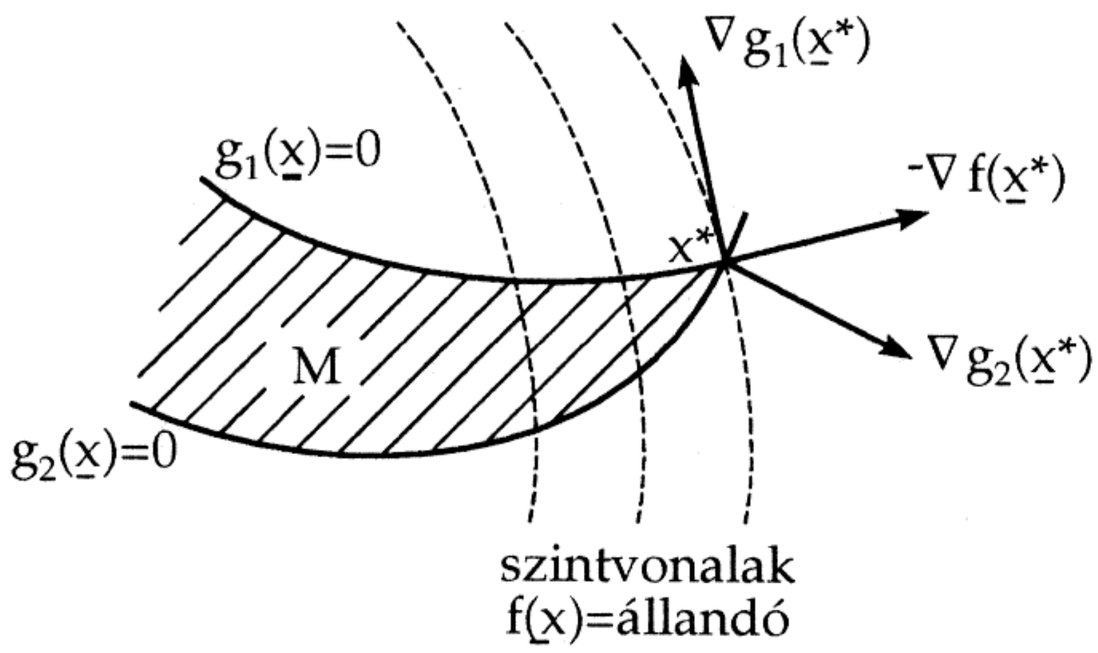
$$I_0(\underline{\mathbf{x}}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \ : \ g_i(\underline{\mathbf{x}}) = 0\} \,. \tag{18.39b}$$

indexhalmaz az $\underline{\mathbf{x}}$-ben aktív feltételeket jelöli.
Az $\underline{\mathbf{x}}^*$ pontot KUHN–TUCKER-*pont*nak vagy *stacionárius pont*nak hívjuk.
Geometriailag egy $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ pont kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-feltételeket, ha a $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*)$ negatív gradiens az $\underline{\mathbf{x}}^*$-ban aktív feltételek $\nabla g_i(\underline{\mathbf{x}}^*)$, $i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^*)$ gradiensei által kifeszített kúpban van **(18.5. ábra)**. Gyakran használják az alábbi ekvivalens formát (18.39a,b) helyett: az $\underline{\mathbf{x}}^* \in \mathbb{R}^n$ kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-feltételeket, ha létezik egy $\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathbb{R}_+^m$, melyre

$$g(\underline{\mathbf{x}}^*) \le 0, \tag{18.40a}$$

$$u_i g_i(\underline{\mathbf{x}}^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{18.40b}$$

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\underline{\mathbf{x}}^*) = 0. \tag{18.40c}$$



18.5. ábra.

7. Szükséges optimalitási feltétel és a Kuhn–Tucker-feltételek
Ha $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ (18.31a,b) lokális minimumpontja és a megengedett tartomány $\underline{\mathbf{x}}^*$-ban kielégíti a $\exists \underline{\mathbf{d}} \in \mathbf{R}^n : \nabla g_i(\underline{\mathbf{x}}^*)^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} < 0$ mindeni $\in I_0(\underline{\mathbf{x}}^*)$ *regularitási feltétel*t, akkor $\underline{\mathbf{x}}^*$ kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-feltételeket.

18.2.1.3. Dualitás az optimalizálásban

1. Duál feladat A (18.31a,b)-hoz a LAGRANGE-függvény (18.37) felhasználásával a következő duál feladat szerkeszthető:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \max! \qquad \text{feltéve} \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in M^* \quad , \text{ahol} \tag{18.41a}$$

$$M^* = \{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \ : \ L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \min_{\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n} L(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}})\}. \tag{18.41b}$$

2. Dualitási tételek Ha $\underline{\mathbf{x}}_1 \in M$ és $(\underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{u}}_2) \in M^*$, akkor

a) $L(\underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{u}}_2) \leq f(\underline{\mathbf{x}}_1)$.

b) Ha $L(\underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{u}}_2) = f(\underline{\mathbf{x}}_1)$, akkor $\underline{\mathbf{x}}_1$ minimumpontja (18.31a,b)-nak és $(\underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{u}}_2)$ maximumpontja (18.41a)-nak.

18.2.2. Speciális nemlineáris optimalizálási feladatok

18.2.2.1. Konvex optimalizálás

1. Konvex feladat nak a

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \qquad \text{feltéve} \quad g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{18.42}$$

problémát hívjuk, ha f és g_i függvények konvexek. f és g_i függvények lehetnek lineárisak is. A konvex feladatra teljesül: **a)** Az f minden M feletti lokális minimuma globális minimum is egyben.

b) Ha M nem üres és korlátos, akkor (18.42)-nek létezik legalább egy megoldása.

c) Ha f szigorúan konvex, akkor (18.42)-nek legfeljebb egy megoldása létezhet.

2. Optimalitási feltételek

a) Ha f folytonosan parciálisan differenciálható, akkor $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ pontosan akkor megoldása (18.42)-nek, ha teljesül:

$$(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^*)^{\mathrm{T}} \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*) \geq 0 \qquad \text{minden} \quad \underline{\mathbf{x}} \in M\,. \tag{18.43}$$

b) A SLATER-*feltétel* egy regularitási feltétel az M megengedett tartományra. Akkor teljesül, ha létezik egy $\underline{\mathbf{x}} \in M$, hogy $g_i(\underline{\mathbf{x}}) < 0$ minden nem affin lineáris g_i függvényre.

c) Ha a SLATER feltétel teljesül, akkor $\underline{\mathbf{x}}^*$ pontosan akkor minimálpontja (18.42)-nek, ha létezik $\underline{\mathbf{u}}^* \geq 0$, hogy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*)$ a LAGRANGE-függvény nyeregpontja. Ha ezen kívül az f, g_i függvények differenciálhatók is, akkor $\underline{\mathbf{x}}^*$ pontosan akkor megoldása (18.42)-nek, ha $\underline{\mathbf{x}}^*$ kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-feltételeket.

d) Olyan konvex optimalizálási feladatokra, ahol az f és g_i függvények differenciálhatóak, a (18.41a,b) duál feladat egyszerűbben is megfogalmazható:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \max!\,, \qquad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in M^* \quad \text{ahol} \tag{18.44a}$$

$$M^* = \{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \ : \ \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{0}}\}. \tag{18.44b}$$

Az L gradiensét csak $\underline{\mathbf{x}}$-re vonatkozóan képezzük.

e) A konvex optimalizálási feladatokra érvényes az *erős dualitástétel*:

Ha M kielégíti a SLATER feltételt és $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ a (18.42) egy megoldása, akkor létezik egy $\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathbb{R}^m_+$, hogy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*)$ a (18.44a,b) duál feladatnak megoldása és teljesül:

$$f(\underline{\mathbf{x}}^*) = \min_{\underline{\mathbf{x}} \in M} f(\underline{\mathbf{x}}) = \max_{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in M^*} L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = L(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*)\,. \tag{18.45}$$

18.2.2.2. Kvadratikus optimalizálás

1. Feladatmeghatározás A kvadratikus optimalizálás az alábbi alakú feladatokkal foglalkozik:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}} = \min!\,, \qquad \underline{\mathbf{x}} \in M \subset \mathbb{R}^n \quad \text{ahol} \tag{18.46a}$$

$$M = M_I\!: \quad M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}},\ \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\}\,. \tag{18.46b}$$

A $\mathbf{C}$ egy szimmetrikus (n, n) mátrix, $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ egy (m, n) mátrix és $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$.

Az M megengedett tartomány további alternatív alakjai:

$$M = M_{II}\!: \quad M = \{\underline{\mathbf{x}} \ : \ \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}},\ \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\}, \tag{18.47a}$$

$$M = M_{III}\!: \quad M = \{\underline{\mathbf{x}} \ : \ \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}}\}\,. \tag{18.47b}$$

2. A Lagrange-függvény és a Kuhn–Tucker-feltételek

A (18.46a,b) feladat LAGRANGE-függvénye:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}). \tag{18.48}$$

A megengedett tartományra a

$$\underline{\mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{p}} + 2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{y}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{u}}} = -\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}} \tag{18.49}$$

jelöléssel a KUHN–TUCKER-feltételek:

	I. eset:	**II. eset:**	**III. eset:**	
a)	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{b}}$	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$	$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{b}}$	(18.50a)
b)	$2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\mathbf{p}}$	$2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\mathbf{p}}$	$2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\mathbf{p}}$	(18.50b)
c)	$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{v}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{v}} \geq \underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}},\ \underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{0}}$	(18.50c)
d)	$\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = 0$	$\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}} = 0$	$\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = 0.$	(18.50d)

3. Konvexitás Az $f(\underline{\mathbf{x}})$ függvény pontosan akkor (erősen) konvex, ha a $\mathbf{C}$ (pozitív definit) pozitív szemidefinit. Minden konvex optimalizálási tétel könnyen megfogalmazható kvadratikus feladatokra a pozitív szemidefinit $\mathbf{C}$ mátrixszal, továbbá a SLATER feltétel mindig teljesül, ezért egy $\underline{\mathbf{x}}^*$ pont optimalitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen egy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$ pont, mely kielégíti a lokális KUHN–TUCKER-rendszer feltételeit.

4. Duál feladat Ha $\mathbf{C}$ pozitív definit, akkor (18.46a) duális feladatát (18.44a) expliciten az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \max!\,, \qquad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in M^*, \tag{18.51a}$$

$$M^* = \{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \ :\ \underline{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{p}})\}. \tag{18.51b}$$

Ha a $-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{p}})$ kifejezést az $\underline{\mathbf{x}}$ helyett beírjuk az $L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})$ célfüggvénybe, akkor a feladat ekvivalens

$$\varphi(\underline{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{4}\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{b}}\right)^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} - \frac{1}{4}\underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{C}}^{-1}\underline{\mathbf{p}} = \max!\,, \qquad \underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,, \tag{18.52}$$

alakját kapjuk, melyre: Ha $\underline{\mathbf{x}}^* \in M$ megoldása (18.46a, b)-nek, akkor van (18.52)-nek egy $\underline{\mathbf{u}}^* \geq \underline{\mathbf{0}}$ megoldása és teljesül:

$$f(\underline{\mathbf{x}}^*) = \varphi(\underline{\mathbf{u}}^*)\,. \tag{18.53}$$

A (18.52) feladat helyettesíthető az

$$\psi(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = \min!\,, \qquad \underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,, \quad \text{ahol} \tag{18.54a}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{h}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{b}} \tag{18.54b}$$

ekvivalens alakkal.

18.2.3. Megoldási módszerek kvadratikus optimalizálási feladatokra

18.2.3.1. Wolfe-eljárás

1. Feladatmegadás és megoldási elv WOLFE módszere az alábbi alakú kvadratikus feladatok megoldására alkalmas:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \min!\,, \qquad \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,. \tag{18.55}$$

Az itt leírt változatban $\mathbf{C}$ pozitív definit. Az alapötlet, hogy számítsuk ki a (18.55) feladat KUHN–TUCKER feltételrendszerének egy $(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*)$ megoldását:

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,, \tag{18.56a}$$

$$2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\mathbf{p}}\,, \tag{18.56b}$$

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,, \quad \underline{\mathbf{v}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,; \tag{18.56c}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}} = 0. \tag{18.57}$$

A (18.56a,b,c) képletek egy $m+n$ egyenlőtlenségből álló lineáris egyenlőtlenség rendszert alkotnak $2n+m$ változóval. A (18.57) feltétel miatt vagy $\underline{\mathbf{x}}_i = 0$ vagy $\underline{\mathbf{v}}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ezért (18.56a,b,c), (18.57) minden megoldása legfeljebb $m+n$ nemzérus komponensből áll és így a (18.56a,b,c) bázismegoldása lesz.

2. A megoldás menete A szimplex módszer segítségével először az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ rendszer egy $\bar{\underline{\mathbf{x}}}$ megengedett bázismegoldását (csúcsát) határozzuk meg. Az $\bar{\underline{\mathbf{x}}}$ bázisváltozóihoz tartozó indexek alkotják az I_B indexhalmazt. Hogy a (18.56a,b,c) rendszer egy olyan megoldásához jussunk, mely (18.57)-et is kielégíti, meg kell oldani az alábbi segédfeladatot:

$$-\mu = \min!, \qquad (\mu \in \mathbf{R}); \tag{18.58}$$

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,, \tag{18.59a}$$

$$2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} - \mu\underline{\mathbf{q}} = -\underline{\mathbf{p}} \quad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{q}} = 2\mathbf{C}\bar{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\mathbf{p}}\,, \tag{18.59b}$$

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,, \ \underline{\mathbf{v}} \geq \underline{\mathbf{0}}\,, \ \mu \geq 0; \tag{18.59c}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}} = 0. \tag{18.60}$$

Ennek a feladatnak egy $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}, \mu)$ megoldására, mely kielégíti (18.56a,b,c)-t és (18.57)-et, teljesülnie kell $\mu = 0$ feltételnek.

Tudjuk, hogy az $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}, \mu) = (\bar{\underline{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{0}}, 1)$ megengedett bázismegoldása a (18.59a,b,c) rendszernek kielégíti (18.60) feltételt. Egy ehhez a bázismegoldáshoz tartozó bázis a következő együtthatómátrix oszlopaiból állítható elő:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{0}} \\ 2\mathbf{C} & -\mathbf{I} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & -\underline{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \tag{18.61}$$

(18.61)-ben az $\mathbf{I}$ az egységmátrixot, $\mathbf{0}$ a nullmátrixot és $\underline{\mathbf{0}}$ a megfelelő dimenziós nullvektort jelöli.

a) m oszlop, melyek az x_i-hez tartoznak, ahol $i \in I_B$,

b) $n-m$ oszlop, melyek a v_i-hez tartoznak, itt $i \notin I_B$,

c) minden u_i-hez tartozó m oszlop,

d) az utolsó oszlop, de ezért egy megfelelő **b)** vagy **c)** által meghatározott oszlopot elhagyunk.

Ha $\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{0}}$, akkor a **d)**-t nem lehet kicserélni; de az $\bar{\underline{\mathbf{x}}}$ már megoldás.

Fel tudunk írni egy kezdő szimplex táblát. A célfüggvény minimalizálása a szimplex eljárással történik egy kiegészítő feltétellel, nevezetesen az $\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}} = 0$ egyenlettel, ami biztosítja:

Ha egy cserélési lépésnél x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bázisváltozó, akkor v_i nem lehet bázisváltozó és fordítva. Pozitív definit $\mathbf{C}$ mátrix esetén a szimplex módszer a plusz feltétel figyelembevételével a (18.58), (18.59a,b,c), (18.60) feladat egy $\mu = 0$-t kielégítő megoldását adja. Pozitív szemidefinit $\mathbf{C}$ mátrix esetén a szigorított pivotelemválasztás miatt előfordulhat, hogy $\mu > 0$ ellenére nem tudunk báziscserét végrehajtani anélkül, hogy a plusz feltételt meg ne sértenénk. Bizonyítható, hogy ebben az esetben μ egyáltalán nem csökkenthető.

■ $f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 32x_2 = \min!$ ahol $x_1 + 2x_2 + x_3 = 7\,, \quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 8.$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben a $\mathbf{C}$ csak pozitív szemidefinit. Az $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egy megengedett bázismegoldása $\bar{\underline{\mathbf{x}}} = (0, 0, 7, 8)^{\mathrm{T}}$, $\underline{\mathbf{q}} = 2\mathbf{C}\bar{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\mathbf{p}} = (-10, -32, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Bázisvektornak válasszuk:

a) A $\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ 2\mathbf{C}\end{pmatrix}$ 3. és 4. oszlopát, **b)** a $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{I}\end{pmatrix}$ 1. és 2. oszlopát, **c)** a $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ oszlopait és **d)** a $\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{0}}\\ -\underline{\mathbf{q}}\end{pmatrix}$ oszlopot a $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{I}\end{pmatrix}$ 1. oszlopa helyett.

Ezekből az oszlopokból állítjuk össze a bázismátrixot és számítjuk ki az inverzét (lásd 18.1.). Beszorozva a bázisinverzzel a (18.61) mátrixot és a $\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{b}}\\ -\underline{\mathbf{p}}\end{pmatrix}$ vektort, kapjuk a kezdő szimplex táblát **(18.9. táblázat)**.
A plusz szabály miatt a táblázatban x_1-et csak v_2-re lehet kicserélni. Néhány szimplex lépés után megoldásként $\underline{\mathbf{x}}^* = (2, 5/2, 0, 3/2)^{\mathrm{T}}$ adódik. $2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{v}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} - \mu\underline{\mathbf{q}} = -\underline{\mathbf{p}}$ utolsó két egyenlősége: $v_3 = u_1,\ v_4 = u_2$. Ezért a számolás elején a feladat méretét lehet csökkenteni u_1 és u_2 változók kiküszöbölésével.

18.9. táblázat

	x_1	x_2	v_1	v_3	v_4	
x_3	1	2	0	0	0	7
x_4	2	1	0	0	0	8
v_2	$\boxed{\frac{64}{10}}$	-8	$-\frac{32}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{54}{10}$	0
u_1	0	0	0	-1	0	0
u_2	0	0	0	0	-1	0
μ	$\frac{2}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{10}$	-1

18.2.3.2. Hildreth–d'Esopo-eljárás

1. Elv A szigorúan konvex

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \min!\,, \qquad \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}} \tag{18.62}$$

optimalizálási feladat duálja (lásd 18.2.2.2.)

$$\psi(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{h}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} = \min! \qquad \underline{\mathbf{u}} \ge 0 \quad \text{ahol} \tag{18.63a}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad \underline{\mathbf{h}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{b}}. \tag{18.63b}$$

Az $\mathbf{E}$ mátrix pozitív definit és az átlóban elhelyezkedő $e_{ii} > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ elemei pozitívak. Az $\underline{\mathbf{x}}$ és $\underline{\mathbf{u}}$ változói között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\underline{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{p}}). \tag{18.64}$$

2. Iterációs megoldás A (18.63a) duál feladat, melynek egyetlen feltétele az $\underline{\mathbf{u}} \ge \underline{\mathbf{0}}$, a következő egyszerű iterációs eljárással oldható meg:
a) Legyen $\underline{\mathbf{u}}^1 \ge \underline{\mathbf{0}}$ (pl. $\underline{\mathbf{u}}^1 = \underline{\mathbf{0}}$), $k = 1$.
b) Számítsuk ki u_i^{k+1}-et $i = 1, 2, \ldots, m$-re az alábbiak szerint:

$$w_i^{k+1} = -\frac{1}{e_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} e_{ij}u_j^{k+1} + \frac{h_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{m} e_{ij}u_j^k\right), \tag{18.65a}$$

$$u_i^{k+1} = \max\left\{0, w_i^{k+1}\right\}. \tag{18.65b}$$

c) Ha a megállási kritérium, pl. $\left|\psi(\underline{\mathbf{u}}^{k+1}) - \psi(\underline{\mathbf{u}}^k)\right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ nem teljesül, akkor végrehajtjuk $k := k + 1$-re a **b)** lépést.
Feltéve, hogy létezik $\underline{\mathbf{x}}$, melyre $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} < \underline{\mathbf{b}}$, a $\{\psi(\underline{\mathbf{u}}^k)\}$ sorozat konvergálni fog a $\psi_{\min}$ minimumértékhez és a (18.64) alapján képzett $\{\underline{\mathbf{x}}^k\}$ sorozat az $\underline{\mathbf{x}}^*$ olptimális ponthoz fog konvergálni. Azonban az $\{\underline{\mathbf{u}}^k\}$ sorozat nem mindig konvergál.

18.2.4. Numerikus keresési eljárások

Keresési eljárások számos optimalizálási feladatban használhatóak közelítő megoldások kiszámítására csekély számítási igénnyel. Lényegében függvényértékek összehasonlításán alapszanak.

18.2.4.1. Egydimenziós keresés

Sok optimalizációs eljárás tartalmaz olyan részfeladatot, hogy keressük egy $f(x)$ függvény minimumát, ha $x \in [a,b]$. Gyakran elég az x^* minimumpont egy $\overline{x}$ közelítése.

1. A feladat megfogalmazása Legyen f az $[a,b]$-n unimodális és x^* egy globális minimumhely. Meghatározandó egy $[c,d] \subseteq [a,b]$ intervallum úgy, hogy $x^* \in [c,d]$ és $d-c < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Az $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt egy móduszúnak hívunk az $[a,b]$ intervallumban, ha f minden $J \subseteq [a,b]$ zárt részintervallumban egyetlen egy lokális minimumponttal rendelkezik.

2. Egyenletes keresés Úgy választunk egy n-et (n egész), hogy $\delta = \dfrac{b-a}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ fennálljon és kiszámoljuk az $f(x^k)$ értékeket $x^k = a + k\delta$, $k = 1, \ldots, n$-ra. Ha ezen függvényértékek között $f(x)$ a legkisebb, akkor az x^* minimumpont az $[x-\delta, x+\delta]$ intervallumban van. A megkövetelt pontossághoz szükséges kiszámítandó függvényértékek számát

$$n > \frac{2(b-a)}{\varepsilon} - 1 \tag{18.66}$$

segítségével becsülhetjük meg..

3. Az aranymetszés és a FIBONACCI-eljárás Az $[a,b] = [a_1, b_1]$ intervallumot úgy szükítjük lépésenként, hogy a kapott részintervallum mindig tartalmazza az x^* minimumpontot. Az $[a_1, b_1]$ intervallum

$$\lambda_1 = a_1 + (1-\tau)(b_1 - a_1)\,, \qquad \mu_1 = a_1 + \tau(b_1 - a_1) \quad \text{ahol} \tag{18.67a}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618 \tag{18.67b}$$

pontjait számítjuk ki. Ez az aranymetszésnek megfelelő felosztás.
Két esetet kell megkülönböztetni:

a) $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$: legyen $\quad a_2 = a_1\,, \quad b_2 = \mu_1 \quad$ és $\quad \mu_2 = \lambda_1.$ (18.68a)

b) $f(\lambda_1) \geq f(\mu_1)$: legyen $\quad a_2 = \lambda_1\,, \quad b_2 = b_1 \quad$ és $\quad \lambda_2 = \mu_1.$ (18.68b)

Ha $b_2 - a_2 \geq \varepsilon$, akkor az eljárást megismételjük az $[a_2, b_2]$ intervallumra, ahol az egyik érték $f(\lambda_2)$ (**a**) eset), ill. $f(\mu_2)$ (**b**) eset) az előző lépésből ismert. Egy x^*-ot tartalmazó $[a_n, b_n]$ intervallum kiszámításához összesen n függvényérték kiszámítására van szükség. Az

$$\varepsilon > b_n - a_n = \tau^{n-1}(b_1 - a_1) \tag{18.69}$$

összefüggésből kaphatunk becslést a szükséges n lépésszámra.
Az aranymetszés eljárással legfeljebb egy függvényérték-kiszámítással többet kell elvégezni, mint a FIBONACCI-eljárással. Az intervallumfelosztást nem az aranymetszés szabálya szerint, hanem a FIBONACCI-*számok* (lásd 329. és 870. old.) segítségével végezzük.

18.2.4.2. Minimumkeresés n-dimenziós euklideszi vektortérben

Az $f(\underline{\mathbf{x}}) = \min!$, $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ feladat $\underline{\mathbf{x}}^*$ minimumpontjának keresése visszavezethető egydimenziós keresések sorozatára.
Legyen

a) $\quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^1, \qquad k = 1,$ ahol $\underline{\mathbf{x}}_1$ egy alkalmas kezdő közelítés $\underline{\mathbf{x}}^*$-ra. (18.70a)

b) Megoldjuk $r = 1, 2, \ldots, n$-re az egydimenziós feladatokat

$$\varphi(\alpha_r) = f(x_1^{k+1}, \ldots, x_{r-1}^{k+1}, x_r^k + \alpha_r, x_{r+1}^k, \ldots, x_n^k) = \min!\,, \qquad \alpha_r \in \mathbb{R}\,. \tag{18.70b}$$

Ha $\bar{\alpha}_r$ minimálpontja, ill. közelítése az r-dik feladatnak, akkor legyen $x_r^{k+1} = x_r^k + \bar{\alpha}_r$.

c) Amennyiben két egymást követő közelítés távolsága kellően kicsi, azaz a normájukra igaz

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{k+1} - \underline{\mathbf{x}}^k\| < \varepsilon_1 \qquad \text{vagy} \qquad f(\underline{\mathbf{x}}^{k+1}) - f(\underline{\mathbf{x}}^k) < \varepsilon_2, \tag{18.70c}$$

akkor $\underline{\mathbf{x}}^{k+1}$ az $\underline{\mathbf{x}}^*$ egy közelítése. Különben $k := k + 1$ választással a b lépésre térünk. Az egydimenziós feladatokat a b lépésben többek között a 18.2.4.1.-ben leírt keresési eljárásokkal lehet megoldani.

18.2.5. Eljárás feltétel nélküli feladatokra

Tekintsük az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \qquad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \tag{18.71}$$

általános optimalizálási feladatot, ahol f függvény folytonosan differenciálható. Ebben a szakaszban leírt eljárás egy általában végtelen $\{\underline{\mathbf{x}}^k\} \in \mathbb{R}^n$ pontsorozatot konstruálunk, melynek torlódási pontjai stacionárius pontok lesznek. A ponthalmazt egy $\underline{\mathbf{x}}^1 \in \mathbb{R}^n$ pontból a

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k \underline{\mathbf{d}}^k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{18.72}$$

szabály alapján számoljuk, azaz az $\underline{\mathbf{x}}^k$-ban egy $\underline{\mathbf{d}}^k \in \mathbb{R}^n$ irányt határozunk meg és az adott $\alpha_k \in \mathbb{R}$ *lépésköz*zel, mely megadja az $\underline{\mathbf{x}}^{k+1}$-nak az $\underline{\mathbf{x}}^k$-tól vett távolságát a $\underline{\mathbf{d}}^{k+1}$ irányban. Egy ilyen felépítésű eljárást *csökkenő irányú eljárás*nak nevezünk, ha

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{k+1}) < f(\underline{\mathbf{x}}^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{18.73}$$

A $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = 0$feltétel, ahol ∇ a nabla operátor (lásd 678. old.), jellemzi a stacionárius pontokat és leállási feltételként használható az iterációs eljárásoknál.

18.2.5.1. A legmeredekebb csökkenő irányú eljárás (gradiens módszer)

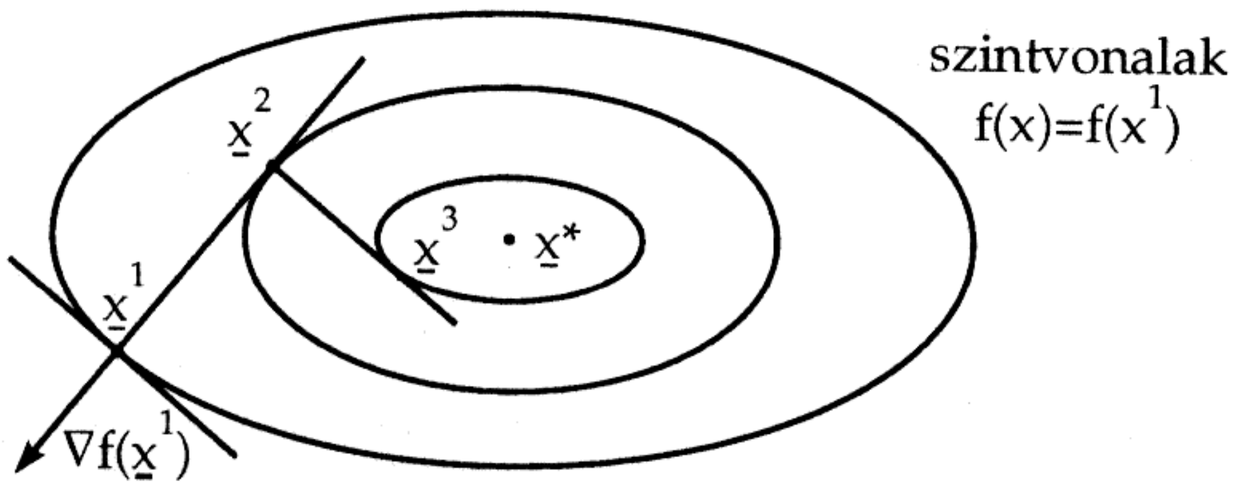
Az aktuális $\underline{\mathbf{x}}^k$ pontból kiindulva a $\underline{\mathbf{d}}^k$-nak a lokálisan legmeredekebb csökkenő irányt választjuk:

$$\underline{\mathbf{d}}^k = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k). \tag{18.74a}$$

Tehát

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k - \alpha_k \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k). \tag{18.74b}$$

Az $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{x}}^i)$ szintvonalakkal mutatja a **18.6. ábra** a gradiens módszer egy vázlatos képét.



18.6. ábra.

Az α_k lépésközt a CAUCHY-elv —, nevezik *sugárminimalizálási elv*nek is — alapján számítjuk, azaz α_k megoldása az egydimenziós feladatnak:

$$f(\underline{\mathbf{x}}^k + \alpha \underline{\mathbf{d}}^k) = \min!, \quad \alpha \geq 0. \tag{18.75}$$

Ehhez használhatjuk 18.2.4. eljárásait. A *gradiens módszer* (18.74b) viszonylag lassan konvergál. Az $\{\underline{\mathbf{x}}^k\}$ sorozat minden $\underline{\mathbf{x}}^*$ torlódási pontjára $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^*) = 0$. Kvadratikus célfüggvény — azaz $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}}$ — esetén az eljárás az alábbi alakot ölti:

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k \underline{\mathbf{d}}^k, \qquad \text{ahol} \tag{18.76a}$$

$$\underline{\mathbf{d}}^k = -(2\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}^k + \underline{\mathbf{p}}) \qquad \text{és} \qquad \alpha_k = \frac{\underline{\mathbf{d}}^{k\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}}^k}{2\underline{\mathbf{d}}^{k\mathrm{T}} \mathbf{C} \underline{\mathbf{d}}^k}. \tag{18.76b}$$

18.2.5.2. A Newton-módszer alkalmazása

Az f függvényt az $\underline{\mathbf{x}}^k$ aktuális közelítő pontban egy kvadratikus függvénnyel közelítjük:

$$q(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{x}}^k) + (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}} \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) + \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}} \mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^k)(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^k). \tag{18.77}$$

Itt $\mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^k)$ a HESSE mátrix, azaz az f-nek az $\underline{\mathbf{x}}^k$ pontban vett második parciális deriváltjainak a mátrixa. Ha $\mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^k)$ pozitív definit, akkor $q(\underline{\mathbf{x}})$-nek az $\underline{\mathbf{x}}^{k+1}$ helyen globális minimuma van $\nabla q(\underline{\mathbf{x}}^{k+1}) = 0$ és a NEWTON-módszer iterációs lépését kapjuk:

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k - \mathbf{H}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}^k)\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) \quad (k = 1, 2, \ldots)\,, \quad \text{azaz} \tag{18.78a}$$

$$\underline{\mathbf{d}}^k = -\mathbf{H}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}^k)\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) \qquad \text{és} \quad \alpha_k \equiv 1. \tag{18.78b}$$

A NEWTON-módszer gyorsan konvergál, de az alábbi hátrányokkal rendelkezik:
a) A $\mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^k)$ mátrixnak pozitív definitnek kell lennie.
b) A módszer csak megfelelően jó kezdőérték esetén konvergál.
c) Nincs semmiféle lépésköz szabályozás.
d) A módszer általában nem csökkenő irányú eljárás.
e) A $\mathbf{H}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}^k)$ mátrix számítási igénye elég nagy.
Néhány kellemetlen tulajdonság semlegesíthető az ún. *tompított* NEWTON-*eljárás*sal:

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k - \alpha_k\mathbf{H}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}^k)\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{18.79}$$

Az α_k tompító tényezőt többek között sugárminimalizálással lehet számolni (lásd 18.2.5.1.).

18.2.5.3. A konjugált gradiensek módszere

Két $\underline{\mathbf{d}}^1, \underline{\mathbf{d}}^2 \in \mathbb{R}^n$ vektor *konjugált vektorok* egy szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{C}$ mátrixra vonatkozóan, ha

$$\underline{\mathbf{d}}^{1\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{d}}^2 = 0\,. \tag{18.80}$$

Ha $\underline{\mathbf{d}}^1, \underline{\mathbf{d}}^2, \ldots, \underline{\mathbf{d}}^n$ páronként konjugáltak egy $\mathbf{C}$ mátrixra vonatkozóan, akkor a $q(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ konvex, kvadratikus feladat megoldható n lépésben, ha egy tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}^1$-ből képezzük a $\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k\underline{\mathbf{d}}^k$ sorozatot, ahol α_k az optimális lépésköz a csökkenési irányba. Ha feltesszük, hogy $f(\underline{\mathbf{x}})$ az $\underline{\mathbf{x}}^*$ minimumpont közelében közelítően kvadratikus —, azaz $\mathbf{C} \approx \frac{1}{2}\mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^*)$ — akkor a kvadratikus célfüggvényekre kitalált eljárás kiterjeszthető általános $f(\underline{\mathbf{x}})$ függvényekre anélkül, hogy a $\mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^*)$ mátrixot expliciten használnánk.
A konjugált gradiensek módszere az alábbi lépésekből áll:

a) $\underline{\mathbf{x}}^1 \in \mathbb{R}^n\,,\ \underline{\mathbf{d}}^1 = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^1)\,,$ (18.81)

ahol $\underline{\mathbf{x}}^1$ az $\underline{\mathbf{x}}^*$ egy alkalmas kezdő közelítése.

b) $\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k\underline{\mathbf{d}}^k, \quad (k = 1, \ldots, n)$ ahol $\alpha_k \geq 0$ olyan, hogy $f(\underline{\mathbf{x}}^k + \alpha\underline{\mathbf{d}}^k)$ minimális legyen (18.82a)

$$\underline{\mathbf{d}}^{k+1} = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{k+1}) + \mu_k\underline{\mathbf{d}}^k\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1 \quad \text{ahol} \tag{18.82b}$$

$$\mu_k = \frac{\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{k+1})^{\mathrm{T}}\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{k+1})}{\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}}\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{d}}^{n+1} = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{n+1})\,. \tag{18.82c}$$

c) A **b)** lépés ismétlése $\underline{\mathbf{x}}^{n+1}$ és $\underline{\mathbf{d}}^{n+1}$ vektorokkal $\underline{\mathbf{x}}^1$ és $\underline{\mathbf{d}}^1$ helyett.

18.2.5.4. Davidon, Fletcher és Powell módszere (DFP)

A DFP-eljárással az $\underline{\mathbf{x}}^1 \in \mathbb{R}^n$ pontból kiindulva egy pontsorozatot számítunk a következő módon:

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k - \alpha_k\mathbf{M}_k\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{18.83}$$

Az $\mathbf{M}_k$ mátrix szimmetrikus és pozitív definit. Az eljárás ötlete az, hogy kvadratikus $f(\underline{\mathbf{x}})$ függvényre az $\mathbf{M}_k$ mátrixokkal lépésenként approximáljuk az inverz HESSE mátrixot. Egy szimmetrikus pozitív definit $\mathbf{M}_1$ mátrixból kiindulva, pl. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ az egységmátrix), az $\mathbf{M}_{k-1}$-ből $\mathbf{M}_k$-t egy kettőrangú javítómátrix hozzáadásával kapjuk:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k-1} + \frac{\underline{\mathbf{v}}^k\underline{\mathbf{v}}^{k\mathrm{T}}}{\underline{\mathbf{v}}^{k\mathrm{T}}\underline{\mathbf{v}}^k} - \frac{(\mathbf{M}_{k-1}\underline{\mathbf{w}}^k)(\mathbf{M}_{k-1}\underline{\mathbf{w}}^k)^{\mathrm{T}}}{\underline{\mathbf{w}}^{k\mathrm{T}}\mathbf{M}_k\underline{\mathbf{w}}^k} \tag{18.84}$$

ahol $\underline{\mathbf{v}}^k = \underline{\mathbf{x}}^k - \underline{\mathbf{x}}^{k-1}$ és $\underline{\mathbf{w}}^k = \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) - \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{k-1})$, $(k = 2, 3, \ldots)$. Az α_k lépésközt a

$$f(\underline{\mathbf{x}}^k - \alpha \mathbf{M}_k \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)) = \min!, \qquad \alpha \geq 0. \tag{18.85}$$

sugárminimalizálásból kapjuk. Ha $f(\underline{\mathbf{x}})$ egy kvadratikus függvény, akkor a DFB eljárás az $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}$ választás mellett a konjugált gradiensek módszerét adja.

18.2.6. Gradiens módszer egyenlőtlenségfeltételes feladatokra

Ha az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \qquad \text{ahol} \quad g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{18.86}$$

feladatot az

$$\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k \underline{\mathbf{d}}^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{18.87}$$

alakú iterációs eljárással oldjuk meg, akkor a megengedett tartomány korlázos volta miatt az alábbi két előfeltételt kell figyelembe venni:

1. A $\underline{\mathbf{d}}^k$ irányt egy $\underline{\mathbf{x}}^k$-ban megengedett csökkenési iránynak kell választani.
2. Az α_k lépésközt úgy kell meghatározni, hogy $\underline{\mathbf{x}}^{k+1}$ is az M-be essen.

Különböző eljárások a (18.87) előírás szerinti $\underline{\mathbf{d}}^k$ irány megadásában térnek el. Az $\{\underline{\mathbf{x}}^k\} \subset M$ sorozat megengedettségének biztosítása végett az α'_k-t, ill. α''_k-t az alábbi módon választjuk:

$$\alpha'_k \text{értéket} f(\underline{\mathbf{x}}^k + \alpha \underline{\mathbf{d}}^k) = \min!\,, \quad \alpha \geq 0\,; \quad \text{ill.} \quad \alpha''_k = \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha \underline{\mathbf{d}}^k \in M\}\,. \tag{18.88}$$

Ebből

$$\alpha_k = \min\{\alpha'_k, \alpha''_k\}\,. \tag{18.89}$$

Ha a k-dik lépésben nincsen $\underline{\mathbf{d}}^k$ megengedett csökkenési irány, akkor $\underline{\mathbf{x}}^k$ stacionárius pont.

18.2.6.1. Megengedett irányok módszere

1. Iránykeresési feladat Egy $\underline{\mathbf{d}}^k$ megengedett csökkenési irányt az $\underline{\mathbf{x}}^k$ pontban a következő optimalizálási feladattal nyerhetünk:

$$\sigma = \min! \tag{18.90}$$

$$\nabla g_i(\underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} \leq \sigma, \qquad i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^k)\,, \tag{18.91a}$$

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} \leq \sigma\,, \tag{18.91b}$$

$$\|\underline{\mathbf{d}}\| \leq 1. \tag{18.91c}$$

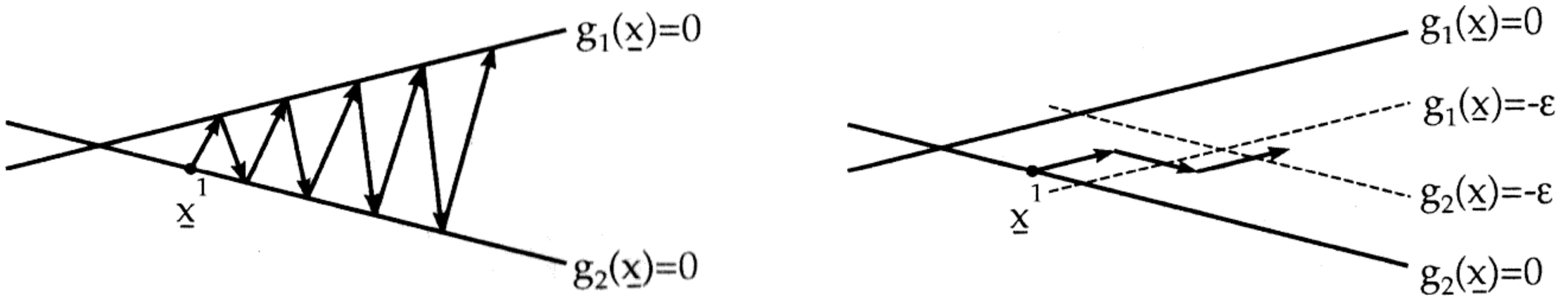
Ha ezen *iránykeresési feladat* $\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{d}}^k$ megoldására $\sigma < 0$, akkor a (18.91a) a $\underline{\mathbf{d}}^k$ megengedettségét és a (18.91b) a csökkenési tulajdonságát biztosítja. A (18.91c) normálási feltétel biztosítja az iránykeresési program megengedett tartományának korlátosságát. Ha $\sigma = 0$, akkor $\underline{\mathbf{x}}^k$ stacionárius pont, mert $\underline{\mathbf{x}}^k$-ban nincs megengedett csökkenési irány.
Egy (18.91a,b,c)-ben definiált iránykeresési feladat a korlátos $\underline{\mathbf{x}}^k$ sorozatban egy cikk-cakk viselkedést válthat ki. Ez elkerülhető, ha az $I_0(\underline{\mathbf{x}}^k)$ indexhalmazt az

$$I_{\varepsilon_k}(\underline{\mathbf{x}}^k) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \;:\; -\varepsilon_k \leq g_i(\underline{\mathbf{x}}^k) \leq 0\}, \quad \varepsilon_k \geq 0 \tag{18.92}$$

ún. $\underline{\mathbf{x}}^k$-ban ε_k-aktív feltételek indexhalmazára cseréljük. Ezáltal kizárunk minden olyan lokális csökkenési irányt, melyeken $\underline{\mathbf{x}}^k$-tól indulva az M ε_k-aktív feltételei által alkotott határához közelebb kerülünk **(18.7. ábra)**.
Ha a módosítás után $\sigma = 0$ a (18.91a,b,c) megoldása, akkor $\underline{\mathbf{x}}^k$ akkor és csak akkor stacionárius pont, ha $I_0(\underline{\mathbf{x}}^k) = I_{\varepsilon_k}(\underline{\mathbf{x}}^k)$ teljesül. Ellenkező esetben alkalmasan csökkentjük ε_k-t és az iránykeresési feladatot megismételjük.

2. Lineáris feltételek speciális esete Ha a $g_i(\underline{\mathbf{x}})$ lineáris, azaz $g_i(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{x}} - b_i$, akkor egy egyszerűbb iránykeresési feladat adódik:

$$\sigma = \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}} \underline{\mathbf{d}} = \min! \qquad \text{ahol} \tag{18.93}$$

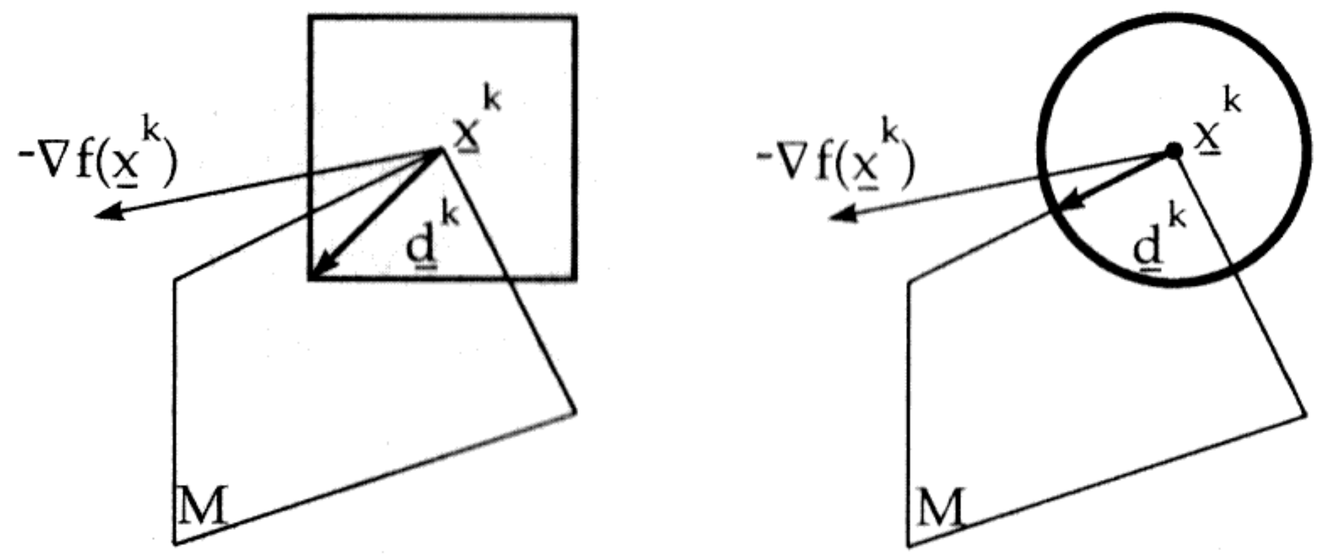


18.7. ábra.

$$\underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}} \le 0, \qquad i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^k), \quad \text{ill.} \quad i \in I_{\varepsilon_k}(\underline{\mathbf{x}}^k), \tag{18.94a}$$

$$||\underline{\mathbf{d}}|| \le 1. \tag{18.94b}$$

A normák különböző megválasztásának $||\underline{\mathbf{d}}|| = \max\{|d_i|\} \le 1$, ill. $||\underline{\mathbf{d}}|| = \sqrt{\underline{\mathbf{d}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}}} \le 1$ hatását a **18.8.a,b ábra** mutatja.



18.8. ábra.

Bizonyos értelemben legjobb választás a $||\underline{\mathbf{d}}|| = ||\underline{\mathbf{d}}||_2 = \sqrt{\underline{\mathbf{d}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}}}$, mert az iránykeresési feladattal azt a $\underline{\mathbf{d}}^k$ irányt találjuk meg, amelyik a $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$-val a legkisebb szöget zárja be. Ebben az esetben az iránykeresési feladat nem lineáris, így nagyobb a számítási igénye. Ellenben a $||\underline{\mathbf{d}}|| = ||\underline{\mathbf{d}}||_\infty = \max\{|d_i|\} \le 1$ választással $-1 \le d_i \le 1$, $(i = 1, \ldots, n)$ lineáris feltételeket kapunk, így az iránykeresési feladat megoldható pl. a szimplex módszerrel.
Hogy az $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \min!$ $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} \le \underline{\mathbf{b}}$ alakú kvadratikus optimalizálási feladatokra a megengedett irányok módszere véges sok lépésben véget érjen, az iránykeresési feladatot kiegészítjük egy konjugált feltétellel: Ha egy lépésben $\alpha_{k-1} = \alpha'_{k-1}$, azaz $\underline{\mathbf{x}}^k$ egy „belsőpont", akkor az iránykeresési feladathoz csatoljuk a

$$\underline{\mathbf{d}}^{k-1\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{d}} = 0 \tag{18.95}$$

feltételt. A továbbiakban a korábbi lépésekből megtartjuk a megfelelő feltételeket. A (18.95) feltételektől csak akkor tekintünk el, ha egy $\alpha_k = \alpha''_k$ lépést teszünk.

■ $f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 32x_2 = \min!$ $g_1(\underline{\mathbf{x}}) = -x_1 \le 0$, $g_2(\underline{\mathbf{x}}) = -x_2 \le 0$,
$g_3(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 + 2x_2 - 7 \le 0$, $g_4(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + x_2 - 8 \le 0$.

1. lépés: Legyen $\underline{\mathbf{x}}^1 = (3,0)^{\mathrm{T}}$, $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^1) = (-4,-32)^{\mathrm{T}}$, $I_0(\underline{\mathbf{x}}^1) = \{2\}$.

iránykeresési feladat: $\left.\begin{array}{l} -4d_1 - 32d_2 = \min! \\ -d_2 \le 0, \ ||\underline{\mathbf{d}}||_\infty \le 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\mathbf{d}}^1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$.

sugárminimalizáció: $\alpha'_k = -\dfrac{\underline{\mathbf{d}}^{k\mathrm{T}}\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)}{2\underline{\mathbf{d}}^{k\mathrm{T}}\mathbf{C}\underline{\mathbf{d}}^k}$ ahol $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

maximális megengedett lépésköz: $\alpha''_k = \min\left\{\dfrac{-g_i(\underline{\mathbf{x}}^k)}{\underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}}^k} : \text{ ahol } i\text{-re } \underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}}^k > 0\right\}$, $\alpha'_1 = \dfrac{18}{5}$, $\alpha''_1 = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow$

$\alpha_1 = \min\left\{\frac{18}{5}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, $\underline{\mathbf{x}}^2 = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

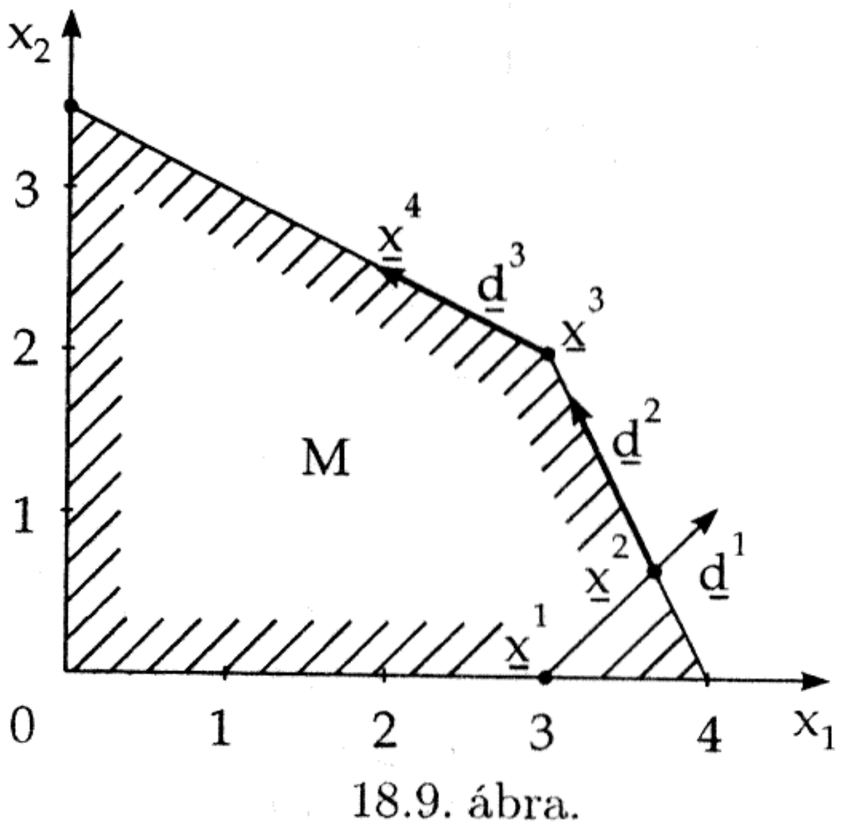
2. lépés: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^2) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{80}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $I_0(\underline{\mathbf{x}}^2) = \{4\}$.

iránykeresési feladat: $\left\{\begin{array}{l} -\frac{8}{3}d_1 - \frac{80}{3}d_2 = \min! \\ 2d_1 + d_2 \leq 0,\ \ ||\underline{\mathbf{d}}||_\infty \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\mathbf{d}}^2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \alpha_2' = \frac{152}{51}, \ \alpha_2'' = \frac{4}{3} \Longrightarrow$

$\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $\underline{\mathbf{x}}^3 = (3,2)^{\mathrm{T}}$.

3. lépés: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^3) = (-4,-16)^{\mathrm{T}}$, $I_0 = (\underline{\mathbf{x}}^3) = \{3,4\}$.

iránykeresési feladat: $\left\{\begin{array}{l} -4d_1 - 16d_2 = \min! \\ d_1 + 2d_2 \leq 0,\ \ 2d_1 + d_2 \leq 0,\ \ ||\underline{\mathbf{d}}||_\infty \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\mathbf{d}}^3 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}, \alpha_3' = 1, \ \alpha_3'' = 3 \Longrightarrow \alpha^3 = 1, \ \underline{\mathbf{x}}^4 = \left(2, \frac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.



18.9. ábra.

A következő iránykeresési feladat $\sigma = 0$-t ad. Ezért $\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{\mathbf{x}}^4$ a minimumpont (**18.9. ábra**).

18.2.6.2. A vetített gradiensek módszere

1. A feladat megadása és megoldási elve Adva van az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \qquad \text{bei} \qquad \underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} \leq b_i, \tag{18.96}$$

konvex optimalizálási feladat, ahol $i = 1, \ldots, m$. Az alábbi módon határozzuk meg az $\underline{\mathbf{x}}^k \in M$ pontban a $\underline{\mathbf{d}}^k$ megengedett csökkenési irányt: Ha $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ egy megengedett irány, akkor legyen $\underline{\mathbf{d}}^k = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$. Különben $\underline{\mathbf{x}}^k$ az M határán van és $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ az M-ből kifele mutat. Egy $\mathbf{P}_k$ lineáris leképezéssel levetítjük $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$-t az M határának egy az $\underline{\mathbf{x}}^k$-ban aktív feltételekből álló lineáris részsokaságára.

Egy élre vetítést a **18.10.a ábra**, egy oldallapra vetítést a **18.10.b ábra** mutat. A nemdegeneráltság feltétele mellett, azaz minden $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ vektorra az $\underline{\mathbf{a}}_i$, $i \in I_0(\underline{\mathbf{x}})$ vektorok lineárisan függetlenek, egy ilyen vetítést megadhatunk a következő képlettel:

$$\underline{\mathbf{d}}^k = -\mathbf{P}_k \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}_k\right)\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k). \tag{18.97}$$

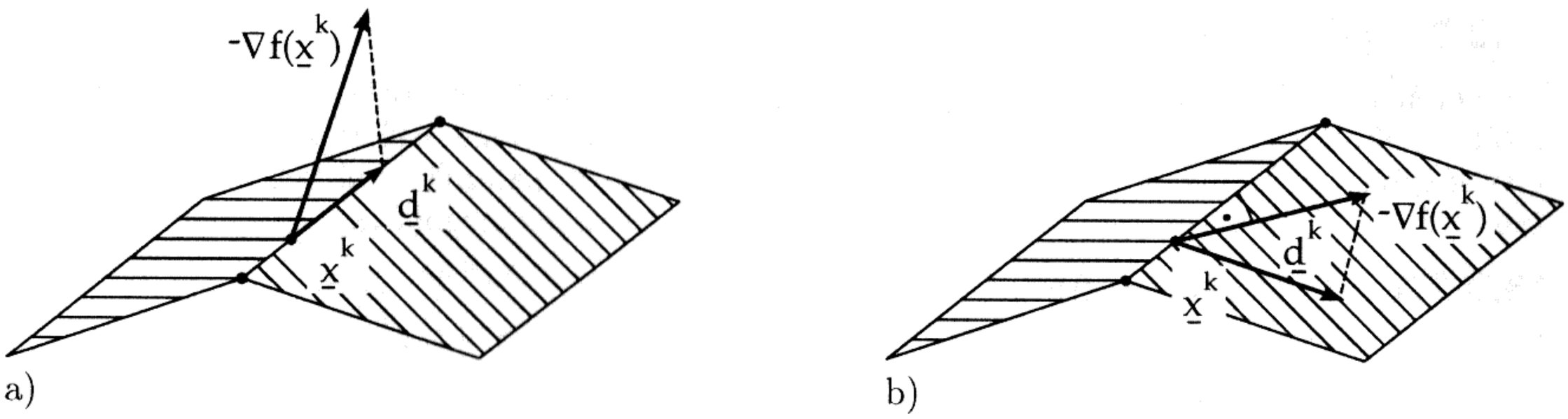
Az $\mathbf{A}_k$ az összes olyan $\underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}$-ból áll, melyeknek megfelelő feltételek azt a lineáris részsokaságot alkotják, melyre a $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}_k)$-t kell vetíteni.

2. Algoritmus A vetített gradiensek módszerénhez a következő algoritmus tartozik:
Legyen $\underline{\mathbf{x}}^1 \in M$ és $k = 1$. Kövessük az alábbi lépéseket:

I: Ha $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ megengedett irány, akkor legyen $\underline{\mathbf{d}}^k = -\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ és menjünk a **III.** lépésre. Egyébként állítsuk elő az $\mathbf{A}_k$ mátrixot az $\underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}$ vektorokból $i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^k)$ és menjünk **II**-re.

II: Legyen $\underline{\mathbf{d}}^k = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}_k\right)\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$. Ha $\underline{\mathbf{d}}^k \neq \underline{\mathbf{0}}$, akkor folytassuk **III**-mal. Ha $\underline{\mathbf{d}}^k = 0$ és $\underline{\mathbf{u}} = -(\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}_k\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) \geq 0$, akkor $\underline{\mathbf{x}}^k$ minimumpont. A $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k) = \sum_{i \in I_0(\underline{\mathbf{x}}^k)} u_i\underline{\mathbf{a}}_i = \mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{u}}$ lokális KUHN–TUCKER-feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. Ha $\underline{\mathbf{u}} \ngeq \underline{\mathbf{0}}$, akkor választunk egy i-t, melyre $u_i < 0$, kihúzzuk az $\mathbf{A}_k$ i-dik sorát és **II**-t megismételjük.

III: Kiszámoljuk α_k-t és az $\underline{\mathbf{x}}^{k+1} = \underline{\mathbf{x}}^k + \alpha_k\underline{\mathbf{d}}^k$ új pontot, majd $k = k+1$-gyel **I**-re megyünk.



18.10. ábra.

3. Megjegyzések az algoritmushoz Ha $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ nem megengedett, akkor ezt a vektort először a legkisebb dimenziójú részsokaságra, melyben $\underline{\mathbf{x}}^k$ van, leképezzük. Ha $\underline{\mathbf{d}}^k = \underline{\mathbf{0}}$, akkor $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^k)$ merőleges erre a részsokaságra. Ha $\underline{\mathbf{u}} \geq \underline{\mathbf{0}}$ nem teljesül, akkor egy aktív feltétel elhagyásával csökkentjük a részsokaság dimenzióját, ennek következtében előfordulhat, hogy $\underline{\mathbf{d}}^k \neq \underline{\mathbf{0}}$ **(18.10.b ábra)** (oldallapra vetítés). Mivel $\mathbf{A}_k$ az $\mathbf{A}_{k-1}$-ből gyakran sor hozzáadásával, ill. eltörlésével keletkezik,
ezért az $(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k{}^{\mathrm{T}})^{-1}$ mátrix költséges kiszámítását gyorsíthatjuk, ha felhasználjuk, hogy ismerjük az $(\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}{}^{\mathrm{T}})^{-1}$ mátrixot.

■ A korábbi példa (lásd 895. old.) megoldása.

1. lépés: $\underline{\mathbf{x}}^1 = (3,0)^{\mathrm{T}}$,

I: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^1) = (-4,-32)^{\mathrm{T}}$, $-\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^1)$ megengedett, $\underline{\mathbf{d}}^1 = (4,32)^{\mathrm{T}}$.

III: A lépésközt a korábbi példa alapján határozzuk meg: $\alpha_1 = \dfrac{1}{20}$, $\underline{\mathbf{x}}^2 = \left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

2. lépés:

I: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^2) = \left(-\dfrac{18}{5}, -\dfrac{96}{5}\right)^{\mathrm{T}}$ (nem megengedett), $I_0(\underline{\mathbf{x}}^2) = \{4\}$, $\mathbf{A}_2 = (2\ 1)$.

II: $\mathbf{P}_2 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{d}}^2 = \left(-\dfrac{8}{25}, \dfrac{16}{25}\right)^{\mathrm{T}} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

III: $\alpha_2 = \dfrac{5}{8}$, $\underline{\mathbf{x}}^3 = (3,2)^{\mathrm{T}}$.

3. lépés:

I: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^3) = (-4,-16)^{\mathrm{T}}$ (nem megengedett), $I_0(\underline{\mathbf{x}}^3) = \{3,4\}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. II: $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\underline{\mathbf{d}}^3 = (0,0)^{\mathrm{T}}, \underline{\mathbf{u}} = \left(\dfrac{28}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ $u_2 < 0$: $\mathbf{A}_3 = (1\ 2)$.

II: $\mathbf{P}_3 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{d}}^3 = \left(-\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

III: $\alpha_3 = \dfrac{5}{16}$, $\underline{\mathbf{x}}^4 = \left(2, \dfrac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

4. lépés:

I: $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^4) = (-6,-12)^{\mathrm{T}}$ (nem megengedett), $I_0(\underline{\mathbf{x}}^4) = \{3\}$, $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3$.

II: $\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3$, $\underline{\mathbf{d}}^4 = (0,0)^{\mathrm{T}}$, $u = 6 \geq 0$.

Következésképeen $\underline{\mathbf{x}}^4$ minimumpont.

18.2.7. Büntető- és korlátozó módszerek

Ezen eljárásosztály alapelve, hogy egy feltételes optimalizálási feladatot a célfüggvény módosításával feltétel nélküli feladatok sorozatára alakítjuk át. A módosított feladatokat pl. a 18.2.5. módszerekkel lehet megoldani. Megfelelően eljárva olyan megoldássorozatot kapunk a módosított célfüggvényű feladatokból, melynek torlódási pontjai az eredeti feladat optimális megoldásai.

18.2.7.1. Büntető eljárás

A

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \quad \text{ahol} \quad g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.98}$$

feladatot feltétel nélküli minimumfeladatok

$$H(\underline{\mathbf{x}}, p_k) = f(\underline{\mathbf{x}}) + p_k S(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \quad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \;\; p_k > 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots) \tag{18.99}$$

sorozatával helyettesítjük. A p_k egy pozitív paraméter. $S(\underline{\mathbf{x}})$-re teljesül:

$$S(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} = 0 & \underline{\mathbf{x}} \in M\,, \\ > 0 & \underline{\mathbf{x}} \notin M, \end{cases} \tag{18.100}$$

azaz az M megengedettségi tartomány elhagyását egy $p_k S(\underline{\mathbf{x}})$ taggal büntetjük. A (18.99) feladatot egy ∞-hez tartó p_k büntető paraméter-sorozattal oldjuk meg. Érvényes

$$\lim_{k \to \infty} H(\underline{\mathbf{x}}, p_k) = f(\underline{\mathbf{x}}), \quad \underline{\mathbf{x}} \in M. \tag{18.101}$$

Ha $\underline{\mathbf{x}}^k$ a k-dik büntető feladat megoldása, akkor:

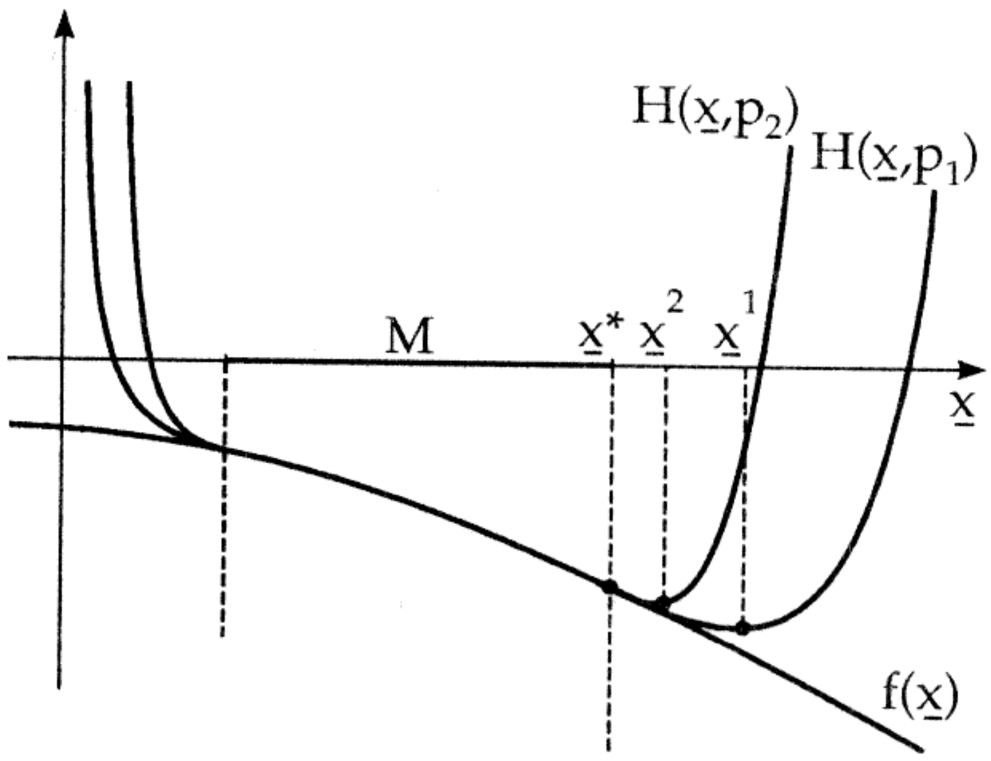
$$H(\underline{\mathbf{x}}^k, p_k) \geq H(\underline{\mathbf{x}}^{k-1}, p_{k-1}), \qquad f(\underline{\mathbf{x}}^k) \geq f(\underline{\mathbf{x}}^{k-1}), \tag{18.102}$$

és az $\{\underline{\mathbf{x}}^k\}$ sorozat minden $\underline{\mathbf{x}}^*$ torlódási pontja (18.98)-nek optimális megoldása. Ha $\underline{\mathbf{x}}^k \in M$, akkor $\underline{\mathbf{x}}^k$ megoldja az eredeti feladatot.
$S(\underline{\mathbf{x}})$-re használatosak:

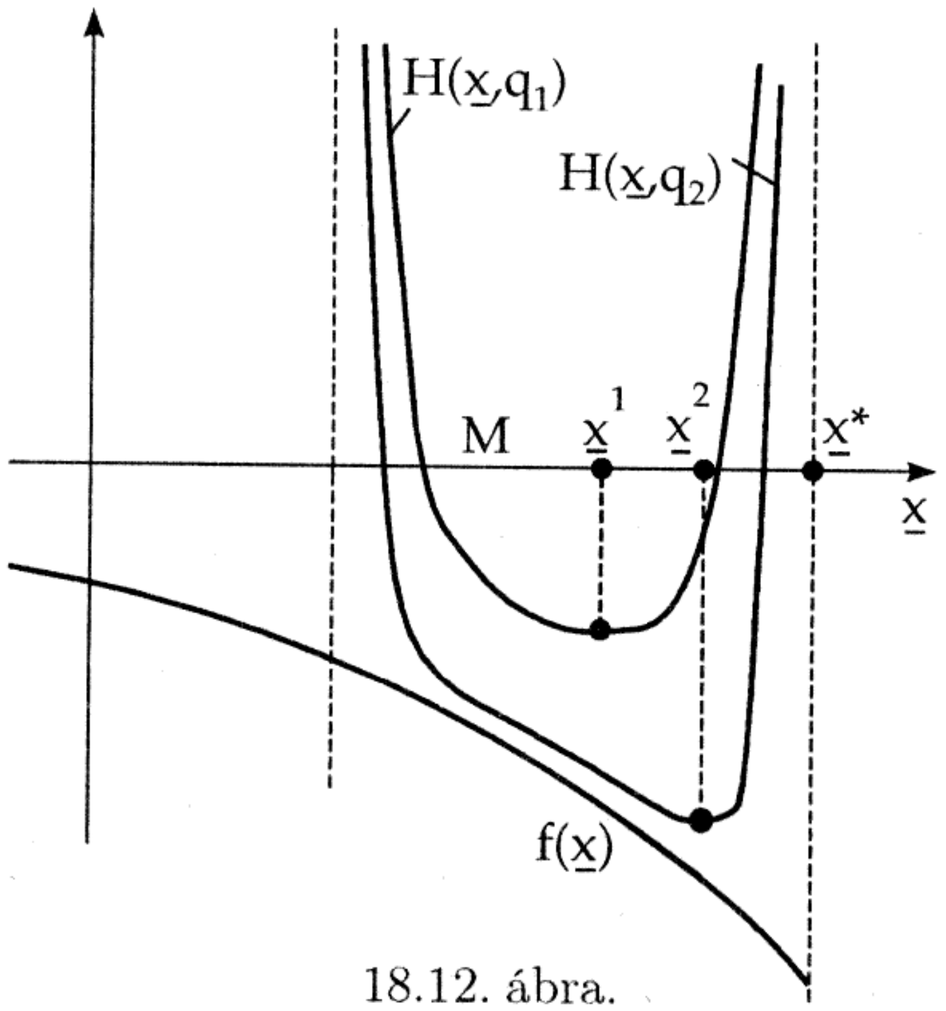
$$S(\underline{\mathbf{x}}) = \max^r\{0, g_1(\underline{\mathbf{x}}), \ldots, g_m(\underline{\mathbf{x}})\} \quad (r = 1, 2, \ldots) \quad \text{vagy} \tag{18.103a}$$

$$S(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{m} \max^r\{0, g_i(\underline{\mathbf{x}})\} \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{18.103b}$$

Ha az $f(\underline{\mathbf{x}})$ és $g_i(\underline{\mathbf{x}})$ függvények differenciálhatóak, akkor $r > 1$ esetén a M határán is differenciálható a $H(\underline{\mathbf{x}}, p_k)$ büntető függvény, így a (18.99) segédfeladat megoldásához analitikus segédeszközöket is igénybe vehetünk. A **18.11. ábra** szemlélteti a büntető függvényes eljárást.



18.11. ábra.



18.12. ábra.

■ $f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 =$ min! ahol $x_1 + x_2 \geq 1$, $H(\underline{\mathbf{x}}, p_k) = x_1^2 + x_2^2 + p_k \max^2\{0, 1 - x_1 - x_2\}$.
A szükséges optimalitási feltétel:

$$\nabla H(\underline{\mathbf{x}}, p_k) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2p_k \max\{0, 1 - x_1 - x_2\} \\ 2x_2 - 2p_k \max\{0, 1 - x_1 - x_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A H gradiensének csak az $\underline{\mathbf{x}}$ kordinátáinak megfelelő részét képezzük. A két egyenlet különbségéből adódik $x_1 = x_2$. Az $2x_1 - 2p_k \max\{0, 1 - 2x_1\} = 0$ egyenletnek $x_1^k = x_2^k = \dfrac{p_k}{1 + 2p_k}$ az egyértelmű megoldása. A $k \to \infty$ határátmenettel kapjuk a $x_1^* = x_2^* = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{p_k}{1 + 2p_k} = \dfrac{1}{2}$ megoldást.

18.2.7.2. Korlátozási eljárás

Tekintsük a

$$H(\underline{\mathbf{x}}, q_k) = f(\underline{\mathbf{x}}) + q_k B(\underline{\mathbf{x}}) = \text{min!}, \quad q_k > 0 \tag{18.104}$$

alakú pótfeladatok sorozatát. A $q_k B(\underline{\mathbf{x}})$ tag akadályozza meg, hogy a (18.104) megoldása során elhagyjuk az M megengedett tartományt, mivel M határához közeledve a célfüggvény a végtelenhez tart. Teljesüljön a *regularitási feltétel*

$$M^0 = \{\underline{\mathbf{x}} \in M \ : \ g_i(\underline{\mathbf{x}}) < 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)\} \neq \emptyset \qquad \text{és} \quad \overline{M^0} = M \tag{18.105}$$

azaz az M belseje ne legyen üres és M^0 zárt burka legyen M.
A $B(\underline{\mathbf{x}})$ függvényt M^0-on folytonosan definiáljuk. Az M határán ∞-re nő. A (18.104) pótfeladatot egy nullához tartó q_k paraméterrel-sorozattal oldjuk meg. A k-dik feladat (18.104) $\underline{\mathbf{x}}^k$ megoldására

$$f(\underline{\mathbf{x}}^k) \leq f(\underline{\mathbf{x}}^{k-1}), \tag{18.106}$$

teljesül és $\{\underline{\mathbf{x}}^k\}$ sorozat minden $\underline{\mathbf{x}}^*$ torlódási pontja (18.98) megoldása.
A **18.12. ábra** szemlélteti a korlátozófüggvényes eljárást.
$B(\underline{\mathbf{x}})$ függvényként használatosak:

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = -\sum_{i=1}^{m} -\ln(-g_i(\underline{\mathbf{x}})), \qquad \underline{\mathbf{x}} \in M^0 \quad \text{vagy} \tag{18.107a}$$

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{[-g_i(\underline{\mathbf{x}})]^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \quad \underline{\mathbf{x}} \in M^0. \tag{18.107b}$$

■ $f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 = \text{min! ahol } x_1 + x_2 \geq 1, \quad H(\underline{\mathbf{x}}, q_k) = x_1^2 + x_2^2 + q_k(-\ln(x_1 + x_2 - 1)), \quad x_1 + x_2 > 1,$

$$\nabla H(\underline{\mathbf{x}}, q_k) = \begin{pmatrix} 2x_1 - q_k \dfrac{1}{x_1 - x_2 - 1} \\ 2x_2 - q_k \dfrac{1}{x_1 + x_2 - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 + x_2 > 1.$$

A H gradiensének csak az $\underline{\mathbf{x}}$ kordinátáinak megfelelő részét képezzük. A két egyenlet különbségéből adódik: $x_1 = x_2$,

$$2x_1 - q_k \frac{1}{2x_1 - 1} = 0, \ x_1 > \frac{1}{2}, \implies x_1^2 - \frac{x_1}{2} - \frac{q_k}{4} = 0, \ x_1 > \frac{1}{2},$$

$$x_1^k = x_2^k = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} q_k}, \ k \to \infty, \ q_k \to 0: \ \ x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}.$$

A (18.99) és (18.104) feladatok megoldásai a k-adik lépésben nem függenek a korábbi lépésekben kapott megoldásoktól. Gyakran lépnek fel konvergenciaproblémák nagy büntető-, ill. kicsi korlátparaméterek esetén (18.99) és (18.104) (18.2.4.) eljárásokkal történő megoldása során, ha az optimumtól távol indulunk. Gyakorlatban ezért használjuk a k-adik pótfeladat megoldását a $k + 1$-edik feladat kezdőpontjaként.

18.2.8. Metszősíkok módszere

1. A feladat ismertetése és a megoldás elve Tekintsük az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \min!\,, \qquad \underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n \tag{18.108}$$

optimalizálási feladatot azon a korlátos $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, melyet a konvex $g_i(\underline{\mathbf{x}})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ függvények $g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0$ által határoznak meg.Egy nem lineáris, de konvex $f(\underline{\mathbf{x}})$ célfüggvénnyel rendelkező feladatot ilyen alakra hozhatunk, ha

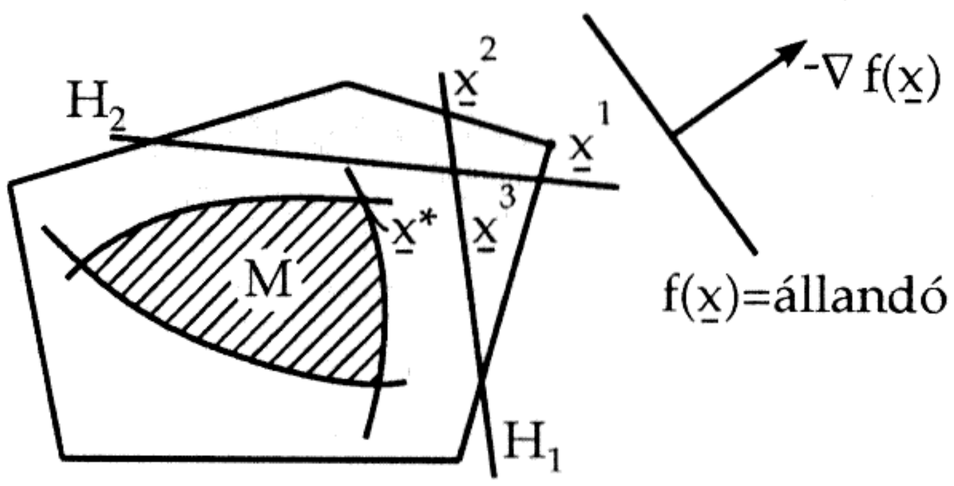
$$f(\underline{\mathbf{x}}) - x_{n+1} \leq 0\,, \qquad x_{n+1} \in \mathbb{R} \tag{18.109}$$

új feltételt vezetünk be és az

$$\overline{f}(\overline{\underline{\mathbf{x}}}) = x_{n+1} = \min! \qquad \text{feladatot minden} \quad \overline{\underline{\mathbf{x}}} = (\underline{\mathbf{x}}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{18.110}$$

esetén $\overline{g}_i(\underline{\mathbf{x}}) = g_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0$ feltételek mellett megoldjuk.
Az eljárás alapgondolata, hogy konvex poliéderrel iteratív módon közelítsük meg M-et az $\underline{\mathbf{x}}^*$ minimumpont környékén. Így a kiindulási feladatot lineáris feladatok sorozatára vezetjük vissza. sorozatára.
Elöször meghatározunk egy

$$P_1 = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \;:\; \underline{\mathbf{a}}_i{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} \leq b_i,\ i = 1, \ldots, s\} \tag{18.111}$$



18.13. ábra.

poliédert. Az

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \min! \qquad \text{ahol} \quad \underline{\mathbf{x}} \in P_1 \tag{18.112}$$

lineáris programból kapjuk P_1-nek egy $f(\underline{\mathbf{x}})$-től függő optimális $\underline{\mathbf{x}}^1$ csúcsát. Ha $\underline{\mathbf{x}}^1 \in M$, akkor megtaláltuk az eredeti feladat optimális megoldását. Ellenkező esetben egy $H_1 = \{\underline{\mathbf{x}} : \underline{\mathbf{a}}_{s+1}{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = b_{s+1},\ \underline{\mathbf{a}}_{s+1}{}^{\mathrm{T}}x^1 > b_{s+1}\}$ hipersíkot definiálunk, mely elválasztja $\underline{\mathbf{x}}^1$-et és M-et. Az új poliéder

$$P_2 = \{\underline{\mathbf{x}} \in P_1 :\ \underline{\mathbf{a}}_{s+1}{}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} \leq b_{s+1}\}. \tag{18.113}$$

A **18.13. ábra** szemlélteti a metszősíkok módszerét.

2. Kelley-eljárás A különböző eljárások a H_k elválasztó hipersík megválasztásában térnek el. A KELLEY-féle eljárásban H_k-t az alábbi módon határozzuk meg: Úgy választjuk j_k-t, hogy

$$g_{j_k}(\underline{\mathbf{x}}^k) = \max\{g_i(\underline{\mathbf{x}}^k)\ \ (i = 1, \ldots, m)\}\,. \tag{18.114}$$

legyen. A $g_{jk}(\underline{\mathbf{x}})$ függvény $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^k$ pontbeli érintősíkja

$$T(\underline{\mathbf{x}}) = g_{j_k}(\underline{\mathbf{x}}^k) + (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^k)^{\mathrm{T}}\nabla g_{j_k}(\underline{\mathbf{x}}^k)\,. \tag{18.115}$$

A $H_k = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \;:\; T(\underline{\mathbf{x}}) = 0\}$ hipersík elválasztja az $\underline{\mathbf{x}}^k$ pontot az $g_{j_k}(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0$ feltételt kielégítő $\underline{\mathbf{x}}$ pontoktól. Ennek megfelelően a $k+1$-dik lineáris feladatban szerepel a $T(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0$ további feltétel. Az $\{\underline{\mathbf{x}}^k\}$ sorozat minden $\underline{\mathbf{x}}^*$ torlódási pontja a kiindulási feladat minimumpontja.
A gyakorlatban a módszer csekély konvergenciasebességet mutat. További hátrány, hogy a feltételek száma minden egyes iterációban nő.

18.3. Diszkrét dinamikus optimalizálás

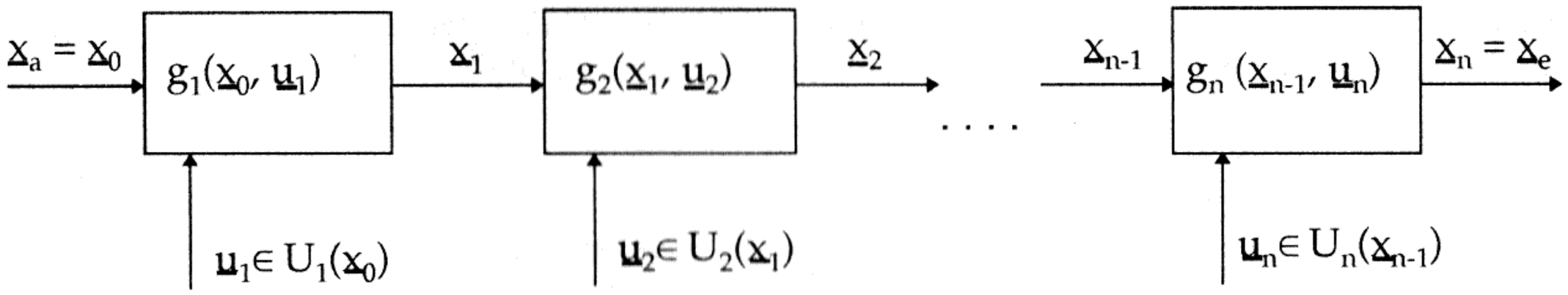
18.3.1. Diszkrét dinamikus optimalizálás

Optimalizálási feladatok széles köre oldható meg dinamikus programozással. A feladatokat olyan időtől természetesen vagy formálisan függő folyamatoknak fogjuk fel, melyeket időfüggő döntések irányítanak. Ha a folyamatot véges sok lépcsőre lehet bontani, akkor *diszkrét dinamikus optmalizálás*ról beszélünk, egyébként *folytonos dinamikus optimalizálás*ról. Ebben a részban csak n-lépcsős diszkrét feladatokat vizsgálunk.

18.3.1.1. n-lépcsős döntési folyamatok

Az n-lépcsős P folyamat a 0. időpontban indul egy $\underline{x}_a = \underline{x}_0$ kezdőállapottal és $1, 2, \ldots, n-1$ lépések $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}$ köztes állapotain keresztül vezet az $\underline{x}_n = \underline{x}_e \in X_e \subseteq \mathbf{R}^m$ végállapothoz. Az $\underline{x}_j$ *állapotvektorok* az $X_j \subseteq \mathbf{R}^m$ állapottartományból valóak. Az $\underline{x}_{j-1}$-ből az $\underline{x}_j$ állapotba egy $\underline{u}_j$ *döntés* útján jutunk. Az $\underline{x}_{j-1}$ állapotban lehetséges $\underline{u}_j$ *döntésvektorok* egy $U_j(\underline{x}_{j-1}) \subseteq \mathbf{R}^s$ döntéshalmazt alkotnak. Az $\underline{x}_{j-1}$-ből az $\underline{x}_j$-t az alábbi transzformációval **(18.14. ábra)** kapjuk:

$$\underline{x}_j = g_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j)\,, \qquad j = 1(1)n. \tag{18.116}$$



18.14. ábra.

18.3.1.2. Dinamikus optimalizálási feladatok

A cél, hogy megállapítsunk egy olyan $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ *stratégiát*, mely minden feltételt figyelembevéve úgy visz $\underline{x}_a$-ból $\underline{x}_e$-be, hogy egy $f(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))$ célfüggvényt vagy *költségfüggvényt* minimalizál. Az $f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j)$ függvényeket *lépésköltség*nek hívjuk. Ezzel a dinamikus optimalizálási feladatot az alábbi alakba írhatjuk:

$$\textbf{CF:} \qquad f(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) \longrightarrow \min! \tag{18.117a}$$

$$\textbf{F:} \qquad \left.\begin{array}{ll} \underline{x}_j = g_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), & j = 1(1)n, \\ \underline{x}_0 = \underline{x}_a,\ \underline{x}_n = \underline{x}_e \in X_e,\ \underline{x}_j \in X_j \subseteq \mathbf{R}^m, & j = 1(1)n, \\ u_j \in U_j(x_{j-1}) \subseteq \mathbf{R}^m, & j = 1(1)n. \end{array}\right\} \tag{18.117b}$$

Az $\underline{x}_j$ feltételek *dinamikusak* és az $\underline{x}_0, u_j$ feltételek *statikus feltételek.* A (18.117a) helyett megfogalmazható maximalizáló feladat is. Egy minden feltételt kielégítő $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$, stratégiát *megengedett*nek hívunk. Hogy a dinamikus optimalizálás módszereit alkalmazni tudjuk a 18.3.3 részben a költségfüggvény alakjára kikötéseket teszünk.

18.3.2. Példák diszkrét döntési modellekre

18.3.2.1. Bevásárlási feladat

Egy n-lépésre osztható időintervallum j-dik periódusában a vállalatnak v_j mennyiségre van szüksége egy bizonyos termékből. A j-dik periódus elején ebből a termékből x_{j-1} mennyiség van raktáron, speciálisan $x_0 = x_a$ adott. Arról kell döntenünk, hogy a c_j áron mekkora u_j mennyiséget vegyünk. A választás során nem léphetjük túl a K raktárkapacitást, azaz $x_{j-1} + u_j \leq K$. Olyan $(u_1, \ldots, u_n)$ vásárlási stratégiát keresünk, mely minimalizálja az összköltséget. Ez az alábbi dinamikus feladatra vezet:

$$\textbf{CF:} \qquad f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(u_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \longrightarrow \min! \tag{18.118a}$$

$$\textbf{F:} \qquad \left.\begin{array}{ll} x_j = x_{j-1} + u_j - v_j\,, & j = 1(1)n, \\ x_0 = x_a\,, \quad 0 \leq x_j \leq K\,, & j = 1(1)n, \\ U_j(x_{j-1}) = \{u_j : \max\{0, v_j - x_{j-1}\} \leq u_j \leq K - x_{j-1}\}\,, & j = 1(1)n. \end{array}\right\} \tag{18.118b}$$

(18.118b) tekintetbe veszi, hogy az igényt minden időpillanatban ki tudjuk elégíteni és a raktárkapacitást soha nem lépjük túl. Ha van raktározási költség, egységenként l, akkor az átlagos raktárköltség a

j-dik periódusban $(x_{j-1} + u_j - v_j/2)l$ és a módosított költségfüggvény

$$f(x_0, u_1, \ldots, x_{n-1}, u_n) = \sum_{j=1}^{n} (c_j u_j + (x_{j-1} + u_j - v_j/2) \cdot l). \tag{18.119}$$

18.3.2.2. Hátizsák-feladat

A $c_1, \ldots, c_n$ értékű és $w_1, \ldots, w_n$ súlyú $A_1, \ldots, A_n$ tárgyak közül ki kell néhányat választani úgy, hogy összsúlyuk egy W súlyt ne haladjon meg. A kiválasztott tárgyak hasznosságát maximalizáljuk. Ez a feladat nem függ az időtől. A problémát „mesterségesen" dinamizáljuk. Minden lépcsőben döntünk az A_j tárgyról, a döntést az u_j jellemzi. $u_j = 1$, ha A_j-t kiválasztjuk, egyébként $u_j = 0$. Ha egy lépés elején rendelkezésre álló súlykapacitást x_{j-1}-gyel jelöljük, akkor az alábbi dinamikus feladatot kapjuk:

$$\textbf{CF:} \qquad f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \longrightarrow \max! \tag{18.120a}$$

$$\textbf{F:} \qquad \left.\begin{array}{ll} x_j = x_{j-1} - w_j u_j, & j = 1(1)n, \\ x_0 = W\,, \quad 0 \le x_j \le W, & j = 1(1)n, \\ \left.\begin{array}{l} u_j \in \{0,1\}, \text{ ha } x_{j-1} \ge w_j, \\ u_j = 0\,, \quad \text{ha } x_{j-1} < w_j, \end{array}\right\} & j = 1(1)n. \end{array}\right\} \tag{18.120b}$$

18.3.3. Bellmann-féle funkcionálegyenletek

18.3.3.1. A költségfüggvény tulajdonságai

A BELLMANN-féle funkcionálegyenletek felállításához két kikötést kell tenni a költségfüggvényre:

1. Szeparálhatóság A $f(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))$ függvény *szeparálható*, ha a $H_1, \ldots, H_{n-1}$ kétargumentumú függvényekkel és az $F_1, \ldots, F_n$ függvényekkel az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} &f(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) = F_1(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))\,, \\ &F_1(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) = H_1\left(f_1(\underline{x}_0, \underline{u}_1), F_2(f_2(\underline{x}_1, \underline{u}_2), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))\right)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_{n-1}(f_{n-1}(\underline{x}_{n-2}, \underline{u}_{n-1}), f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) = H_{n-1}\left(f_{n-1}(\underline{x}_{n-2}, \underline{u}_{n-1}), F_n(f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))\right) \\ &F_n(f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) = f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)\,. \end{aligned} \tag{18.121}$$

2. Minimumfelcserélhetőség A $H(\tilde{f}(\underline{a}), \tilde{F}(\underline{b}))$ *minimumfelcserélhető*, ha teljesül:

$$\min_{(\underline{a},\underline{b}) \in A \times B} H\left(\tilde{f}(\underline{a}), \tilde{F}(\underline{b})\right) = \min_{\underline{a} \in A} H\left(\tilde{f}(\underline{a}), \min_{\underline{b} \in B} \tilde{F}(\underline{b})\right). \tag{18.122}$$

Ez a tulajdonság például abban az esetben teljesül, ha H minden $\underline{a} \in A$ esetén a második argumentumában monoton növő, azaz minden $\underline{a} \in A$ esetén fennáll:

$$H\left(\tilde{f}(\underline{a}), \tilde{F}(\underline{b}_1)\right) \le H\left(\tilde{f}(\underline{a}), \tilde{F}(\underline{b}_2)\right)\,, \text{ ha } \tilde{F}(\underline{b}_1) \le \tilde{F}(\underline{b}_2). \tag{18.123}$$

A dinamikus optimalizálási feladat f költségfüggvényéről továbbiakban feltesszük, hogy szeparálható és minden H_j, $j = 1(1)n-1$ függvényről, hogy minimumkicserélhető. Mindkét feltételt kielégítő gyakran alkalmazott költségfüggvény-osztály az alábbi:

$$f^{sum} = \sum_{j=1}^{n} f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \quad \text{ill.} \quad f^{max} = \max_{j=1(1)n} f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j). \tag{18.124}$$

A H_j függvények

$$H_j^{sum} = f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j) + \sum_{k=j+1}^{n} f_k(\underline{x}_{k-1}, \underline{u}_k), \qquad \text{ill.} \tag{18.125}$$

$$H_j^{max} = \max\left\{ f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \max_{k=j+1(1)n} f_k(\underline{x}_{k-1}, \underline{u}_k) \right\}. \tag{18.126}$$

18.3.3.2. A funkcionálegyenletek megfogalmazása

Definiáljuk az alábbi függvényeket:

$$\phi_j(\underline{x}_{j-1}) = \min_{\substack{\underline{u}_k \in U_k(\underline{x}_{k-1}) \\ k=j(1)n}} F_j(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)), \quad j = 1(1)n, \tag{18.127}$$

$$\phi_{n+1}(\underline{x}_n) = 0. \tag{18.128}$$

Ha nem létezik olyan $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$ stratégia, mely az $\underline{x}_{j-1}$ állapotból az $\underline{x}_e \in X_e$ végállapotba vezet, akkor legyen $\phi_j(\underline{x}_{j-1}) = \infty$. A szeparálhatóságot és a minimumkicserélhetőséget és a dinamikus feltételeket a következőkben használjuk ki, $j = 1(1)n$:

$$\phi_j(\underline{x}_{j-1}) = \min_{\underline{u}_j \in U_j(\underline{x}_{j-1})} H_j(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \min_{\substack{\underline{u}_k \in U_k(\underline{x}_{k-1}) \\ k=j+1(1)n}} F_{j+1}(f_{j+1}(\underline{x}_j, \underline{u}_{j+1}), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n))),$$

$$= \min_{\underline{u}_j \in U_j(\underline{x}_{j-1})} H_j\left(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \phi_{j+1}(\underline{x}_j)\right)$$

$$\phi_j(\underline{x}_{j-1}) = \min_{\underline{u}_j \in U_j(\underline{x}_{j-1})} H_j\left(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \phi_{j+1}(g_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j))\right). \tag{18.129}$$

Az (18.129) egyenletek a (18.128) egyenlettel együtt alkotják a BELLMANN*féle funkcionálegyenleteket*. $\phi_1(\underline{x}_0)$ az f költségfüggvény optimumértéke.

18.3.4. Bellmann-féle optimalitási kritérium

A

$$\phi_j(\underline{x}_{j-1}) = \min_{\underline{u}_j \in U_j(\underline{x}_{j-1})} H_j\left(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \phi_{j+1}(\underline{x}_j)\right) \tag{18.130}$$

funkcionálegyenlet kiszámítása megfelel egy olyan $(\underline{u}_j^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ optimális stratégia meghatározásának, melyhez az $\underline{x}_{j-1}$ állapottal induló P_j részfolyamat,(ami a P teljes folyamat utolsó $n-j+1$ lépéséből áll) és az

$$F_j(f_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j), \ldots, f_n(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_n)) \longrightarrow \min! \tag{18.131}$$

költségfüggvény szolgál alapul. Az $\underline{x}_{j-1}$ kezdőállapotú P_j folyamat optimális stratégiája független a P első $j-1$ lépésében hozott $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{j-1}$ döntésektől, melyek az $\underline{x}_{j-1}$ állapotba vezettek. A $\phi_j(\underline{x}_{j-1})$ kiszámításához ismerni kell $\phi_{j+1}(\underline{x}_j)$ értékét. Ha $(\underline{u}_j^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ optimális stratégia a P_j folyamathoz, akkor nyilvánvalóan az $(\underline{u}_{j+1}^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ egy optimális stratégia az $\underline{x}_j = g_j(\underline{x}_{j-1}, \underline{u}_j^*)$ kezdőállapotú P_{j+1} részfolyamatra. Ezt a megállapítást álltalánosítja a BELLMANN-*féle optimalitási kritérium.*

Bellmann-elv: Ha $(\underline{u}_1^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ a P folyamat optimális stratégiája és ehhez az $(\underline{x}_0^*, \ldots, \underline{x}_n^*)$ állapotsorozat tartozik, akkor minden P_j, $(j = 1(1)n)$ részfolyamatra (melynek kezdőállapota $\underline{x}_{j-1}^*$) az $(\underline{u}_j^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ stratégia optimális.

18.3.5. Bellmann-féle funkcionálegyenlet-módszer

18.3.5.1. A minimális költség meghatározása

A (18.128,18.129) funkcionálegyenletek segítségével a $\phi_{n+1}(\underline{x}_n) = 0$ egyenlőségből kiindulva a j index csökkentésével meghatározzuk a $\phi_j(\underline{x}_{j-1})$ függvényértéket, ahol $\underline{x}_{j-1} \in X_{j-1}$. Ehhez minden

$\underline{x}_{j-1} \in X_{j-1}$ értékre egy optimalizálási feladatot kell megoldani az $U_j(\underline{x}_{j-1})$ megengedett tartomány felett. Minden $\underline{x}_{j-1}$ állapotra adódik egy $\underline{u}_j$ minimumhely, mely az $\underline{x}_{j-1}$ kezdőállapotú P_j részfolyamat optimális megoldása. Amennyiben az X_j halmazok nem végesek vagy nagyon nagyok, akkor a ϕ_j értékeit esetleg csak $\underline{x}_{j-1} \in X_{j-1}$ kijelölt osztópontokban számítjuk ki, ezek segítségével a köztes helyeken interpolációval végzünk becsléseket. A $\phi_1(\underline{x}_0)$ adja a P folyamat költségfüggvényének optimális értékét. Egy $(\underline{u}_1^*, \ldots, \underline{u}_n^*)$ optimális stratégia, ill. egy hozzátartozó $(\underline{x}_0^*, \ldots, \underline{x}_n^*)$ állapotsorozat kiszámítására két lehetőség is van.

18.3.5.2. Az optimális stratégia meghatározása

1. Első változat: A funkcionálegyenletek kiértékelésénél az összes $\underline{x}_{j-1} \in X_{j-1}$ állapotra kiszámított $\underline{u}_j$ minimumhelyet tároljuk. A $\phi_1(\underline{x}_0)$ kiszámítása után egy optimális stratégiához jutunk, ha az $\underline{x}_0 = \underline{x}_0^*$ kezdőállapothoz tárolt $\underline{u}_1 = \underline{u}_1^*$-ból kiszámoljuk a következő $\underline{x}_1^* = g_1(\underline{x}_0^*, \underline{u}_1^*)$ állapotot. Az ehhez az $\underline{x}_1^*$ állapothoz tárolt $\underline{u}_2^*$ szolgáltatja $\underline{x}_2^*$-ot stb.

2. Második változat: Minden $\underline{x}_{j-1} \in X_{j-1}$ állapotra külön tároljuk a $\phi_j(\underline{x}_{j-1})$ értéket. Mivel minden $\phi_j(\underline{x}_{j-1})$ ismert, ezért számolhatunk az index alapján növekvő sorrendben. $j = 1$ és $\underline{x}_1^*$ kezdőértékek mellett

$$\phi_j(\underline{x}_{j-1}^*) = \min_{\underline{u}_j \in U_j(\underline{x}_{j-1}^*)} H_j\left(f_j(\underline{x}_{j-1}^*, \underline{u}_j), \phi_{j+1}(g_j(\underline{x}_{j-1}^*, \underline{u}_j))\right) \tag{18.132}$$

funkcionálegyenlet segítségével határozzuk meg $\underline{u}_j^*$-ot. Ebből adódik $\underline{x}_j^* = g_j(\underline{x}_{j-1}^*, \underline{u}_j^*)$. Az index léptetésekor mindig egy újabb optimalizálási feladatot kell megoldani.

3. A két változat összehasonlítása Az **1.** változatban a számítási igény kisebb, mert nincs szükség a **2.** változatban elvégzett optimalizálásra. Ellenben minden $\underline{x}_{j-1}$ állapothoz egy $\underline{u}_j$ döntést kell tárolni, ami magasabb dimenziós $U_j(\underline{x}_{j-1})$ döntéstereknél — a **2.** változathoz viszonyítva, ahol csak a $\phi_j(\underline{x}_{j-1})$-t kell tárolni — lényegesen nagyobb tárigényt jelent. Ennek megfelelően a számítógépes megoldás esetén a **2.** változat sok esetben előnyösebb.

18.3.6. Példák funkcionálegyenlet-módszer alkalmazására

18.3.6.1. Optimális vásárlási stratégia

1. A feladat megfogalmazása A 18.3.2.1. fejezetből ismert optimális bevásárlási stratégia meghatározása a

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \longrightarrow \min!$$

$$x_j = x_{j-1} + u_j - v_j\,, \qquad j = 1(1)n\,,$$

$$x_0 = x_a\,,\ 0 \le x_j \le K\,, \qquad j = 1(1)n\,,$$

$$U_j(x_{j-1}) = \{u_j \ :\ \max\{0, v_j - x_{j-1}\} \le u_j \le K - x_{j-1}\}\,, \quad j = 1(1)n$$

funkcionálegyenletekre vezet

$$\phi_{n+1}(x_n) = 0,$$

$$\phi_j(x_{j-1}) = \min_{u_j \in U_j(x_{j-1})} \left(c_j u_j + \phi_{j+1}(x_{j-1} + u_j - v_j)\right), \quad j = 1(1)n.$$

2. Számpélda

$$n = 6\,, \quad K = 10\,, \quad x_a = 2, \qquad \begin{array}{llllll} c_1 = 4, & c_2 = 3, & c_3 = 5, & c_4 = 3, & c_5 = 4, & c_6 = 2, \\ v_1 = 6, & v_2 = 7, & v_3 = 4, & v_4 = 2, & v_5 = 4, & v_6 = 3. \end{array}$$

1. Visszafelé számolás: A $\phi_j(x_{j-1})$ függvényértékeket az $x_{j-1} = 0, 1, \ldots, 10$ osztópontokban meghatározzuk. Elég a minimumot egészértékű u_j-k között keresni.

$$j = 6\colon \quad \phi_6(x_5) = \min_{u_6 \in U_6(x_5)} c_6 u_6 = c_6 \max\{0, v_6 - x_5\} = 2\max\{0, 3 - x_5\}.$$

A BELLMANN-féle funkcionálegyenlet-módszer **2.** változata szerint csak a $\phi_6(x_5)$ értékek kerülnek a táblázat utolsó sorába. Például $\phi_4(0)$ meghatározása:

$$\phi_4(0) = \min_{2\le u_4\le 10}(3u_4 + \phi_5(u_4 - 2))$$
$$= \min(28, 27, 26, 25, 24, 25, 26, 27, 30) = 24.$$

	$x_j = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$j = 1$			75								
2	59	56	53	50	47	44	41	38	35	32	29
3	44	39	34	29	24	21	18	15	12	9	6
4	24	21	18	15	12	9	6	4	2	0	0
5	22	18	14	10	6	4	2	0	0	0	0
6	6	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Előre számítás:

$$\phi_1(2) = 75 = \min_{4\le u_1\le 8}(4u_1 + \phi_2(u_1 - 4)).$$

$u_1^* = 4$ adódik minimumhelyként és így $x_1^* = x_0^* + u_1^* - v_1 = 0$. Ezt az eljárást megismételjük $\phi_2(0)$-ra, majd a további lépésekben. Az optimális stratégia:

$$(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*, u_6^*) = (4, 10, 1, 6, 0, 3).$$

18.3.6.2. Hátizsák-feladat

1. A feladat megfogalmazása Legyen adva 18.3.2.2. rész feladata

$$\textbf{CF:} \qquad f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \longrightarrow \max! \qquad (18.133a)$$

$$\textbf{F:} \qquad \left.\begin{array}{ll} x_j = x_{j-1} - w_j u_j\,, & j = 1(1)n, \\ x_0 = W\,, \quad 0 \le x_j \le W\,, & j = 1(1)n, \\ \left.\begin{array}{l} u_j \in \{0,1\},\ \text{ha } x_{j-1} \ge w_j, \\ u_j = 0\,, \quad \text{ha } x_{j-1} < w_j\,, \end{array}\right\} & j = 1(1)n\,. \end{array}\right\} \qquad (18.133b)$$

Mivel minimalizálási feladatról van szó, ezért a BELLMANN-féle funkcionálegyenletek az alábbiak:

$$\phi_{n+1}(x_n) = 0\,,$$
$$\phi_j(x_{j-1}) = \max_{u_j \in U_j(x_{j-1})}(c_j u_j + \phi_{j+1}(x_{j-1} - w_j u_j))\,, \quad j = 1(1)n\,.$$

A döntés vagy 0 vagy 1, ezért ajánlatos az funkcionálegyenlet-módszer **1.** változatát alkalmazni. $j = n, n-1, \ldots, 1$-re adódik:

$$\phi_j(x_{j-1}) = \begin{cases} c_j + \phi_{j+1}(x_{j-1} - w_j)\,, \text{ahol } x_{j-1} \ge w_j \text{ és } c_j + \phi_{j+1}(x_{j-1} - w_j) > \phi_{j+1}(x_{j-1})\,, \\ \phi_{j+1}(x_{j-1}) \qquad \text{különben}\,, \end{cases}$$

$$u_j(x_{j-1}) = \begin{cases} 1\,, \text{ahol } x_{j-1} \ge w_j \text{ és } c_j + \phi_{j+1}(x_{j-1} - w_j) > \phi_{j+1}(x_{j-1})\,, \\ 0 \text{ különben}\,. \end{cases}$$

2. Számpélda $W = 10, \quad n = 6 \quad \begin{array}{llllll} c_1 = 1, & c_2 = 2, & c_3 = 3, & c_4 = 1, & c_5 = 5, & c_6 = 4, \\ w_1 = 2, & w_2 = 4, & w_3 = 6, & w_4 = 3, & w_5 = 7, & w_6 = 6. \end{array}$ A w_j súlyok egészértékűsége miatt $x_j \in \{0, 1, \ldots, 10\},\ j = 1(1)n,\ x_0 = 10$. A táblázat minden lépésre és minden x_{j-1} állapotra tartalmazza $\phi_j(x_{j-1})$ függvényértéket és az aktuális $u_j(x_{j-1})$ döntést. Például határozzuk meg a következő értékeket: $\phi_6(x_5)$, $\phi_3(2)$, $\phi_3(6)$, és $\phi_3(8)$

$$\phi_6(x_5) = \begin{cases} 0, & x_5 < w_6 = 4 \\ c_6 = 6, \text{ különben.} \end{cases}; \quad u_6(x_5) = \begin{cases} 0,\ x_5 < 4 \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$

$\phi_3(2)$: $\quad x_2 = 2 < w_3 = 3$: $\quad \phi_3(2) = \phi_4(2) = 3,\ u_3(2) = 0.$

$\phi_3(6)$: $x_2 > w_3$ és $c_3 + \phi_3(x_2 - w_3) = 6 + 3 < \phi_4(x_2) = 10$: $\phi_3(6) = 10,\ u_3(6) = 0.$

$\phi_3(8)$: $x_2 > w_3$ és $c_3 + \phi_3(x_2 - w_3) = 6 + 9 > \phi_4(x_2) = 10$: $\phi_3(8) = 15,\ u_3(8) = 1.$

Az optimális stratégia:

$(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*, u_6^*) = (0, 1, 1, 1, 0, 1), \quad \phi_1(10) = 19.$

	$x_j = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$j = 1$											19; 0
2	0; 0	3; 0	4; 1	7; 1	9; 0	10; 1	13; 1	13; 1	15; 0	16; 0	19; 1
3	0; 0	3; 0	3; 0	6; 1	9; 1	9; 0	10; 0	12; 1	15; 1	16; 1	16; 0
4	0; 0	3; 1	3; 1	3; 1	6; 0	9; 1	10; 1	10; 1	10; 1	13; 0	16; 1
5	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	6; 0	7; 1	7; 1	7; 1	7; 1	13; 1	13; 1
6	0; 0	0; 0	0; 0	0; 0	6; 1	6; 1	6; 1	6; 1	6; 1	6; 1	6; 1

19. Numerikus módszerek

Ebben a fejezetben a numerikus eljárások alapelveit foglaljuk össze. A gyakorlati feladatok számítógépen történő megoldásához a programkönyvtárat kell ismernünk és alkalmaznunk. Néhány ilyen programcsomagot a 19.8.3. pont tartalmaz. Az alapvető, speciális programrendszerek: a Mathematica és a Maple, a bennük alkalmazott numerikus programokat a 20.1. fejezet és a 19.8.4. szakasz írja le. A numerikus számításoknál mindig fellépő hibák befolyását és kezelését a 19.8.2. szakasz tartalmazza.

19.1. Egyismeretlenes nemlineáris egyenlet numerikus megoldása

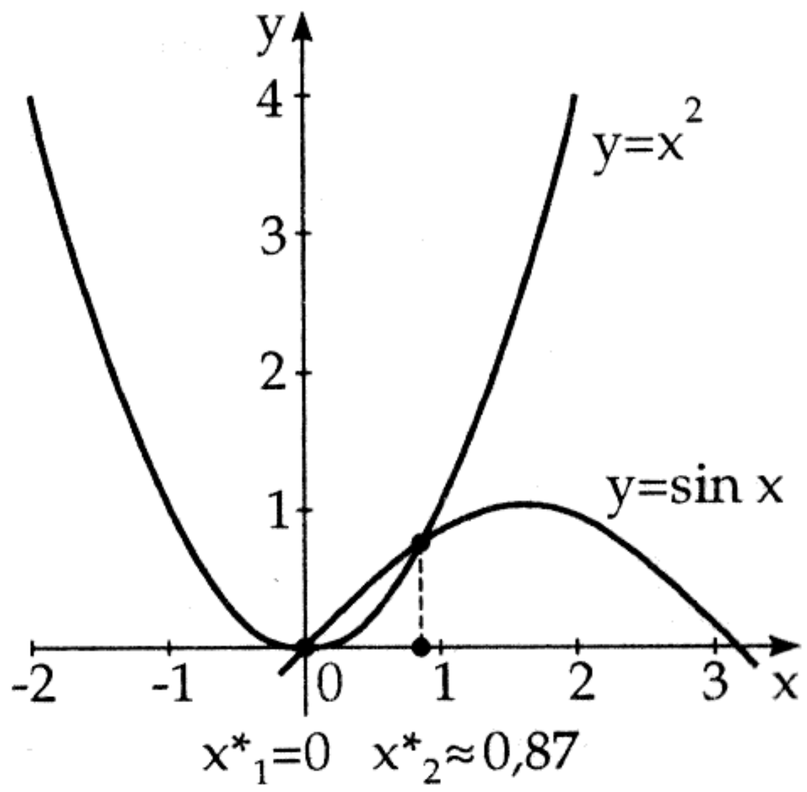
Minden egyismeretlenes egyenletet a következő normálalakok egyikére hozhatunk:

Zérushely-egyenlet: $f(x) = 0\,.$ (19.1)

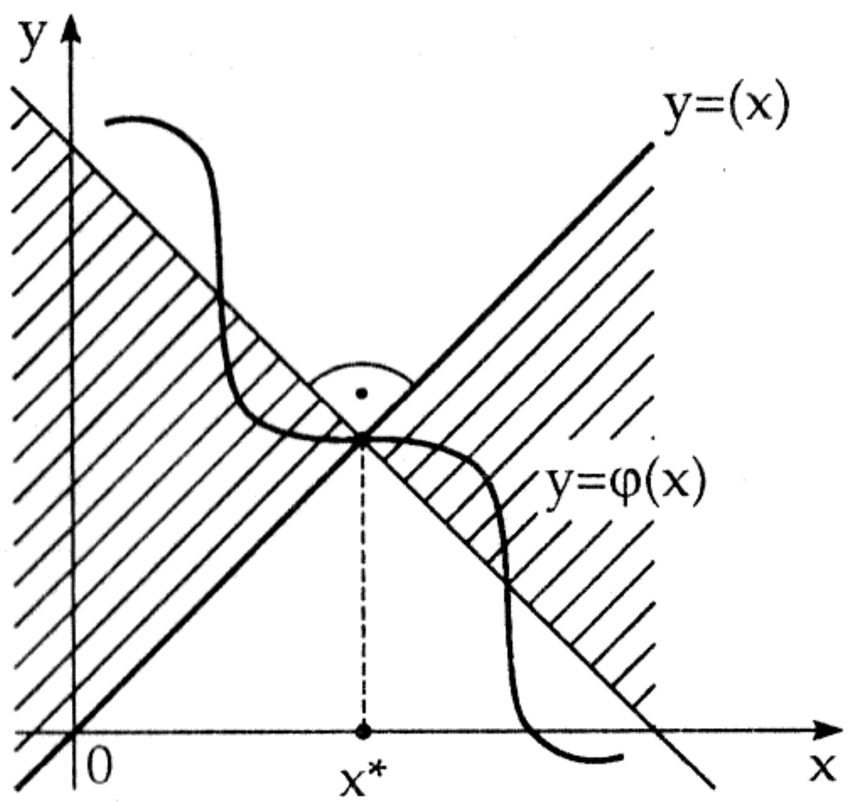
Fixpont-egyenlet: $x = \varphi(x)\,.$ (19.2)

Tegyük fel, hogy a (19.1) és (19.2) egyenleteknek létezik megoldása. A megoldásokat jelölje x^*. Az x^* gyök egy első közelítését úgy próbáljuk megadni, hogy a megoldandó egyenletet $f_1(x) = f_2(x)$ alakra hozzuk, ahol az $y = f_1(x)$ és $y = f_2(x)$ görbék könnyen ábrázolhatók és áttekinthetők.

■ $f(x) = x^2 - \sin x = 0$. Az $y = x^2$ és $y = \sin x$ görbéket ábrázolva látszik, hogy $x_1^* = 0$ és $x_2^* \approx 0{,}87$ (**19.1. ábra**).



19.1. ábra.



19.2. ábra.

19.1.1. Iterációs eljárások

Az egyenletek közelítő megoldásánál alkalmazott iterációs módszerek általános elve abban áll, hogy ismert x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ közelítő értékek felhasználásával további közelítő értékek sorozatát képezzük, melyek lépésről-lépésre, lehetőleg gyorsan a valódi gyökértékhez tartanak.

19.1.1.1. Szukcesszív approximáció

Ha az egyenlet $x = \varphi(x)$ fixpont-alakban adott, akkor a kézenfekvő iterációs eljárás:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; x_0 \text{ adott}), \tag{19.3}$$

melyet szukcesszív approximációnak (sorozatos közelítésnek) nevezünk. Az x_n sorozat az x^* megoldáshoz konvergál, ha az x^*-nak van olyan környezete (**19.2. ábra**), ahol

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*}\right| \leq K < 1 \quad (K = \text{konstans}) \tag{19.4}$$

és az x_0 kezdő érték ebben a környezetben fekszik. Ha $\varphi(x)$ differenciálható, akkor a megfelelő feltétel:

$$|\varphi'(x)| \leq K < 1\,. \tag{19.5}$$

A konvergencia sebessége annál nagyobb, minél kisebb K.

■ $x^2 = \sin x$, azaz $x_{n+1} = \sqrt{\sin x_n}$.

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0,87	0,8742	0,8758	0,8764	0,8766	0,8767
$\sin x_n$	0,7643	0,7670	0,7681	0,7684	0,7686	0,7686

Megjegyzés 1: Komplex gyökök esetén $x = u + \mathrm{i}v$. A valós és képzetes rész szétválasztása után a megoldandó egyenletből egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk az u és v valós ismeretlenekkel.

Megjegyzés 2: A nemlineáris egyenletrendszerek iteratív megoldási módszerét 19.2.2. tartalmazza.

19.1.1.2. Newton-eljárás

1. A Newton-eljárás képlete Az $f(x) = 0$ típusú egyenletre az iteratív NEWTON-eljárást a következőképpen alkalmazzuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\,; x_0 \text{ adott})\,, \tag{19.6}$$

tehát az új, x_{n+1} közelítő gyökérték kiszámításához ismernünk kell az $f(x)$ függvénynek és annak $f'(x)$ első deriváltjának értékét az x_n helyen.

2. A Newton-eljárás konvergenciája A NEWTON-eljárás konvergenciájának szükséges feltétele:

$$f'(x) \neq 0 \tag{19.7a}$$

elégséges feltétele:

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right| \leq K < 1 \quad (K = \text{const}) \tag{19.7b}$$

A (19.7a,b) feltételeknek az x^* egy olyan környezetében kell teljesülniük, amely az összes x_n pontot tartalmazza. Ha a NEWTON-eljárás konvergál, akkor a konvergencia olyan gyors, hogy minden iterációs lépésnél a pontos tizedesjegyek száma körülbelül megduplázódik. Ebben az esetben négyzetes konvergenciáról beszélünk.

■ Az $f(x) = x^2 - a = 0$ egyenlet megoldására, azaz az $x = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ érték közelítő kiszámítására a NEWTON-féle iterációs képlet:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\,. \tag{19.8}$$

$a = 2$ esetén:

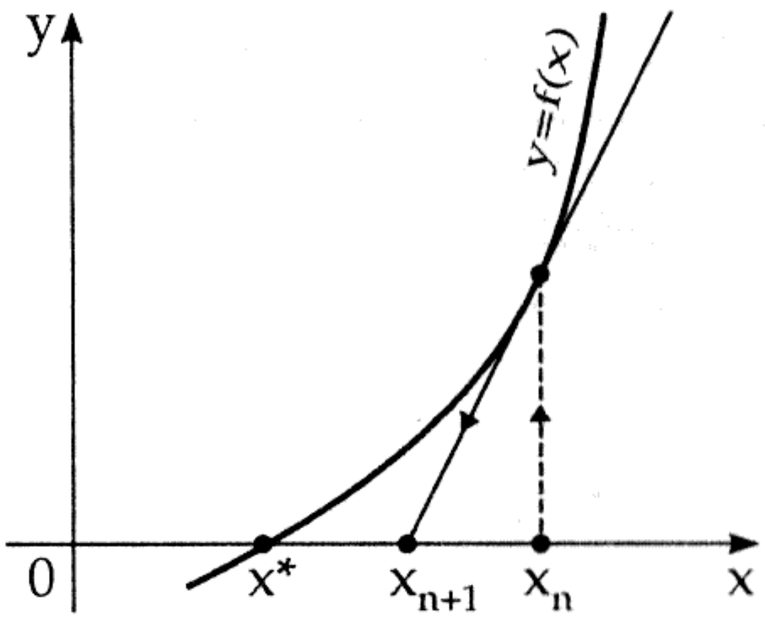
n	0	1	2	3
x_n	1,5	1,416 666 6	1,414 215 7	1,414 213 6

3. Geometriai szemléltetés A NEWTON-eljárás geometriai szemléltetését a **19.3. ábra** mutatja: Az eljárás alapja tehát, hogy az $y = f(x)$ függvény görbéjét lokálisan az érintővel közelítjük.

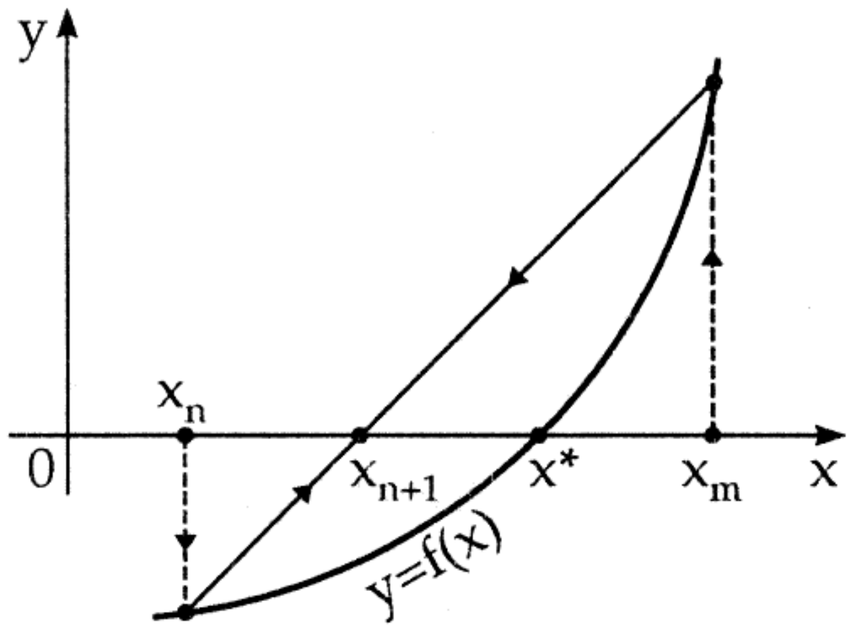
4. Módosított Newton-eljárás Ha az iteráció során az $f'(x_n)$ értékek csak jelentéktelen mértékben változnak, akkor ezt állandónak hagyjuk, és az úgynevezett módosított NEWTON-eljárással számolunk tovább:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_m)} \quad (m \text{ rögzített, } m < n). \tag{19.9}$$

A konvergencia jóságát ez az egyszerűsítés nem befolyásolja lényegesen.



19.3. ábra.



19.4. ábra.

5. Komplex változós differenciálható függvények A NEWTON-eljárás komplex változós differenciálható függvények esetén is alkalmazható.

19.1.1.3. Regula falsi

1. A regula falsi, azaz húrmódszer képlete Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására a következő sorozatot állítjuk elő:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_m}{f(x_n) - f(x_m)} f(x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots ;\ m < n ;\ x_0, x_1 \text{ adott}) , \tag{19.10}$$

Vagyis a NEWTON-eljárástól vett lényeges különbség abban áll, hogy itt csak a függvényértékeket használjuk, azaz az $f'(x_n)$ differenciálhányadost az $f(x)$ függvénynek az x_n és egy előző x_m $(m < n)$ pont közötti differenciahányadosával pótoljuk.

2. Geometriai szemléletetés A regula falsi módszer geometriai szemléltetése a **19.4. ábrán** látható. A módszer lényege tehát most az, hogy $y = f(x)$ görbéjét lokálisan egy megfelelő húrral közelítjük.

3. Konvergencia A (19.10) sorozat biztosan a gyökhöz konvergál, ha $f(x_n)$ és $f(x_m)$ különböző előjelűek. Ha az iteráció a gyököt már elég jól megközelítette, akkor az előjel-feltételtől függetlenül $x_m = x_{n-1}$ választással a konvergenciát gyorsíthatjuk.

■ $f(x) = x^2 - \sin x = 0$.

n	$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$	x_n	$f(x_n)$	$\Delta y_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$	$\dfrac{\Delta x_n}{\Delta y_n}$
0		0,9	0,0267		
1	−0,3	0,87	−0,0074	−0,0341	0,8798
2	0,0065	0,8765	−0,000252	0,007148	0,9093
3	0,000229	0,876729	0,000003	0,000255	0,8980
4	−0,000003	0,876726			

Ha a számítás során a $\Delta x_n / \Delta y_n$ értékek már csak nagyon kicsit változnak, azok ismételt kiszámítását mellőzhetjük.

4. Steffensen-eljárás

Ha a regula falsi-t, azaz a húrmódszert az $f(x) = x - \varphi(x) = 0$ egyenletre $x_m = x_{n-1}$ választással alkalmazzuk, akkor a konvergencia lényegesen felgyorsul. Ez az eljárás STEFFENSEN-*eljárás* néven vált ismertté.

■ Az $x^2 - \sin x = 0$ egyenlet helyett az STEFFENSEN-eljárással az $f(x) = x - \sqrt{\sin x} = 0$ egyenletet oldjuk meg.

n	$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$	x_n	$f(x_n)$	$\Delta y = f(x_n) - f(x_{n-1})$	$\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}$
0		0,9	0,014942		
1	−0,03	0,87	−0,004259	−0,019201	1,562419
2	0,006654	0,876654	−0,000046	0,004213	1,579397
3		0,876727	0,000001		

19.1.2. Polinomegyenletek megoldása

n-edfokú polinomegyenletnek nevezzük az

$$f(x) = p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,. \tag{19.11}$$

alakú egyenleteket, melyek bal oldala x-ben racionális egész kifejezés. Az egyenlet jó hatásfokú megoldásához szükségünk van olyan eljárásokra, melyek egyrészt a $p_n(x)$ függvény és deriváltjai értékeit adott helyen kiszámítják, másrészt a gyökök elhelyezkedésének kezdeti közelítését meghatározzák.

19.1.2.1. Horner-elrendezés

1. Valós értékű független változó

Az n-edfokú $p_n(x)$ polinom $x = x_0$ helyen vett helyettesítési értékének kiszámításához a következő összefüggést használjuk fel:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_0) p_{n-1}(x) + p_n(x_0) \tag{19.12}$$

ahol $p_{n-1}(x)$ egy $n-1$-edfokú polinom:

$$p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + a'_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a'_1 x + a'_0\,. \tag{19.13}$$

(19.12)-ből x^k együtthatóinak összehasonlításával az alábbi rekurziós képlet adódik:

$$a'_{k-1} = x_0 a'_k + a_k \quad (k = n, n-1, \ldots, 0;\ a'_n = 0,\ \ a'_{-1} = p_n(x_0))\,. \tag{19.14}$$

Így a $p_n(x)$ polinom a_k együtthatóiból meghatározzuk $p_{n-1}(x)$ a'_k együtthatóit és kiszámítjuk a $p_n(x_0)$ függvényértéket. Ezt az eljárást ismételjük, azaz a következő lépésben a $p_{n-2}(x)$ polinomot határozzuk meg $p_{n-1}(x)$-ből:

$$p_{n-1}(x) = (x - x_0) p_{n-2}(x) + p_{n-1}(x_0) \tag{19.15}$$

Így polinomok egy sorozatát kapjuk: $p_n(x)\,, p_{n-1}(x)\,, \ldots\,, p_1(x)\,, p_0(x)$. A számítás táblázatos alakban:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$ a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$x_0 a'_{n-1}$	$x_0 a'_{n-2}$	$\ldots$ $x_0 a'_3$	$x_0 a'_2$	$x_0 a'_1$	$x_0 a'_0$
	a'_{n-1}	a'_{n-2}	a'_{n-3}	$\ldots$ a'_2	a'_1	a'_0	$p_n(x_0)$
x_0		$x_0 a''_{n-2}$	$x_0 a''_{n-3}$	$\ldots$ $x_0 a''_2$	$x_0 a''_1$	$x_0 a''_0$	
	a''_{n-2}	a''_{n-3}	a''_{n-4}	$\ldots$ a''_1	a''_0	$p_{n-1}(x_0)$	
		$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$					
x_0		$x_0 a_0^{(n-1)}$					
	$a_0^{(n-1)}$	$p_1(x_0)$					
x_0							
	$a_0^{(n)} = p_0(x_0)$						

(19.16)

(19.16)-ból $p_n(x_0)$ közvetlenül kiolvasható és igaz, hogy:

$$p'_n(x_0) = 1! p_{n-1}(x_0)\,,\ \ p''_n(x_0) = 2! p_{n-2}(x_0)\,, \ldots,\ p_n^{(n)}(x_0) = n! p_0(x_0)\,. \tag{19.17}$$

■ $p_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7$. Határozzuk meg a $p_4(x)$ polinom és deriváltjai helyettesítési értékeit az $x_0 = 2$ helyen.

	1	2	−3	0	−7
2		2	8	10	20
	1	4	5	10	13
2		2	12	34	
	1	6	17	44	
2		2	16		
	1	8	33		
2		2			
	1	10			
2					
	1				

A táblázatból kiolvasható:
$p_4(2) = 13$,
$p_4'(2) = 44$,
$p_4''(2) = 66$,
$p_4'''(2) = 60$,
$p_4^{(4)}(2) = 24$.

Megjegyzés: A HORNER-elrendezést komplex a_k-együtthatók esetén is alkalmazhatjuk, ha (19.16)-ban mindenegyes együtthatóra egy valós és egy képzetes oszlopot képezünk.

2. Komplex-értékű független változó

Ha (19.11)-ben az a_k együtthatók valósak, akkor a $p_n(x_0)$ helyettesítési értéknek az $x_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ helyen történő kiszámításához csak valós számokkal kell műveleteket végeznünk. A $p_n(x)$ polinomot átalakítjuk:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= (x^2 - px - q)(a'_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a'_0) + r_1 x + r_0 \end{aligned} \tag{19.18a}$$

ahol

$$x^2 - px - q = (x - x_0)(x - \overline{x}_0), \quad \text{azaz} \quad p = 2u_0, \quad q = -({u_0}^2 + {v_0}^2). \tag{19.18b}$$

Ekkor

$$p_n(x_0) = r_1 x + r_0 = (r_1 u_0 + r_0) + \mathrm{i} r_1 v_0. \tag{19.18c}$$

A (19.18a) elrendezést most az ún. COLLATZ-féle kétsoros HORNER-elrendezés váltja fel:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_3	a_2	a_1	a_0
q			qa'_{n-2}	...	qa'_3	qa'_2	qa'_1	qa'_0
p		pa'_{n-2}	pa'_{n-3}	...	pa'_2	pa'_1	pa'_0	
	a'_{n-2}	a'_{n-3}	a'_{n-4}	...	a'_1	a'_0	r_1	r_0
	$= a_n$							

(19.18d)

■ $p_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7$. Számítsuk ki a függvényértéket az $x_0 = 2 - \mathrm{i}$ helyen, azaz $p = 4$ és $q = -5$.

	1	2	−3	0	−7
−5			−5	−30	−80
4		4	24	64	
	1	6	16	34	−87

A táblázatból kiolvasható:
$p_4(x_0) = 34x_0 - 87 = -19 - 34\mathrm{i}$.

19.1.2.2. A gyökök elhelyezkedése

1. Valós gyök, Sturm-lánc

A DESCARTES-*féle előjelszabály* alkalmazásával először eldöntjük, van-e valós gyöke az adott polinomnak.

1. A pozitív gyökök száma vagy egyenlő az

$$a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_1,\ a_0 \tag{19.19a}$$

együtthatósorozat előjelváltásainak számával, vagy annál egy páros számmal kisebb.

2. A negatív gyökök száma megegyezik az

$$a_0,\ -a_1,\ a_2, \ldots,\ (-1)^n a_n \tag{19.19b}$$

együtthatósorozat előjelváltásainak számával vagy annál egy páros számmal kisebb.

■ $p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 13x^2 - 15x - 16$ polinomnak 1 vagy 3 pozitív, 0 vagy 2 negatív gyöke van.

A STURM-lánc (lásd 44. old.) alkalmazásával pontosan meghatározhatjuk az $x = a$ és $x = b$ helyek között lévő valós gyökök számát.

Az $y = p_n(x)$ függvény görbéjéről áttekintést kaphatunk, ha a HORNER-elrendezés segítségével azonos távolságú $x_\nu = x_0 + \nu \cdot h$ (h = konstans) pontokban a függvényértékeket kiszámítjuk. Ha a függvény értéke az $x = a$ és $x = b$ helyeken különböző előjelű, akkor a két hely között biztosan van legalább egy valós gyök.

2. Komplex gyökök

Azon komplex-síkbeli tartomány behatárolásához, amelyben a valós, ill. komplex gyökök lehetnek, a (19.11) polinomegyenletet a következőképpen alkíthatjuk át:

$$f^*(r) = |a_{n-1}|r^{n-1} + |a_{n-2}|r^{n-2} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \geq |a_n|r^n \tag{19.20}$$

és rendszeres próbálkozással meghatározzuk a pozitív gyökök egy r_0 felső korlátját. Ekkor az összes x_k^* ($k = 1, 2, \ldots, n$) gyökre igaz, hogy

$$|x_k^*| \leq r_0\,. \tag{19.21}$$

■ $f(x) = p_4(x) = x^4 + 4\,,\ 4x^3 - 20{,}01x^2 - 50{,}12x + 29{,}45 = 0\,,\ \ f^*(x) = 4{,}4r^3 + 20{,}01r^2 + 50{,}12r + 29{,}45 = r^4\,.$

$$\begin{aligned} r = 6\text{:}&\quad f^*(6) = 2000{,}93 > 1296 = r^4,\\ r = 7\text{:}&\quad f^*(7) = 2869{,}98 > 2401 = r^4,\\ r = 8\text{:}&\quad f^*(8) = 3963{,}85 < 4096 = r^4. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $|x_k^*| < 8$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Valóban, a legnagyobb abszolútértékű gyökre igaz: x_1^*: $-7 < x_1^* < -6\,.$

Megjegyzés: Negatív valósrészű komplex gyökök számának meghatározására például az elektrotechnikában van szükség, ahol a vektordiagrammok elméletében speciális eljárásokat dolgoztak ki, melyeket stabilitásfeltételeknek is neveznek ([19.11], [19.38]).

19.1.2.3. Numerikus eljárások

1. Általános eljárások

Valamennyi, a 19.1.1.-ben adott eljárás alkalmazható a polinom-egyenletek valós gyökeinek meghatározására. A NEWTON-eljárás különösen jó, mivel gyorsan konvergál és az $f(x_n)$ és $f'(x_n)$ értékek a HORNER-elrendezés segítségével gyorsan kiszámíthatók. Ha az $f(x) = 0$ polinom-egyenlet x^* gyökének x_n közelítő-értékéből indulunk ki, akkor a $\delta = x^* - x_n$ jelölést bevezetve a

$$\delta = -\frac{1}{f'(x_n)}\left[f(x_n) + \frac{1}{2!}f''(x_n)\delta^2 + \cdots\right] = \varphi(\delta) \tag{19.22}$$

iterációval a gyököt meghatározzuk.

2. Speciális eljárás

A BAIRSTOW-eljárás gyökpárok, — így pl. konjugált komplex gyökök — meghatározására szolgál. Abból indul ki, hogy az adott polinom egy négyzetes tényezőjét leválasztja úgy, mint a HORNER-elrendezés (19.18a-d). A cél a p és q együtthatókat úgy meghatározni, hogy az r_0 és r_1 maradék együtthatók nullák legyenek ([19.37], [19.11], [19.38]).

Ha csak a legnagyobb vagy legkisebb abszolútértekű valós gyököket keressük, akkor ezeket a BERNOULLI-módszerrel egyszerűen megkaphatjuk ([19.37]).

Mindenekelőtt a történeti hagyomány miatt meg kell még említenünk a GRAEFFE-*eljárás*t, mely egyidejűleg az összes valós és komplex gyököt meghatározza, de igen sok számítási munkát igényel ([19.11], [19.38]).

19.2. Egyenletrendszerek numerikus megoldása

A gyakorlatban a megoldandó feladatok igen sokszor abban állnak, hogy n ismeretlen x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mennyiségre adott m feltétel egy egyenletrendszer alakjában:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{19.23}$$

Az ismeretlen x_i-ket úgy kell meghatározni, hogy azok a (19.23) egyenletrendszer egy megoldását képezzék. Az ismeretlenek száma és az egyenletek száma rendszerint megegyezik, azaz $m = n$. Az $m > n$ esetben a (19.23) egyenletrendszert túlhatározottnak, $m < n$ esetén alulhatározottnak nevezzük.
A túlhatározott egyenletrendszernek rendszerint nincs megoldása, ezért kiegészítjük az alábbi négyzetes-közép feltétellel:

$$\sum_{i=1}^{m} F_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min \tag{19.24}$$

Az alulhatározott esetben általában $n - m$ ismeretlent paraméternek választhatunk, és így a (19.23) egyenletrendszer megoldása $n - m$ számú paramétertől függ, azaz egy $(n - m)$ dimenziós megoldáshalmaz adja a megoldást.
Megkülönböztetünk lineáris és nemlineáris egyenletrendszereket aszerint, hogy bennük az ismeretlenek csak lineárisan, vagy nemlineárisan is szerepelnek.

19.2.1. Lineáris egyenletrendszerek

Adott az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\,. \end{aligned} \tag{19.25}$$

A (19.25) egyenletrendszer mátrixos alakban felírva:

$$\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,. \tag{19.26a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{19.26b}$$

Ha az $\mathbf{A} = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ négyzetes mátrix reguláris, akkor a (19.25) rendszer egyértelműen megoldható (lásd 272. old.). (19.25) megoldására elvileg kétféle numerikus megoldás létezik.

1. Direkt eljárás, amely az egyenletrendszert elemi átalakításokkal olyan alakra hozza, ahonnan a megoldások közvetlenül leolvashatók és könnyen kiszámíthatók. Ide tartozik a helyettesítéses-eljárás (lásd 270. old.) és a 19.2.1.1. **3.**-ban leírt eljárások.

2. Iterációs eljárás, amely adott kezdeti közelítő értékekből kiindulva a közelítő megoldások olyan sorozatát adja, mely (19.25) megoldásához konvergál.

19.2.1.1. Mátrix háromszög-faktorizációja

1. A Gauss-féle eliminációs eljárás elve

Az $\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert elemi átalkításokkal, úgy mint
1. sorok felcserélése,
2. egy sor szorzása nullától különböző számmal,

3. egyik sor többszörösének hozzáadása a másik sorhoz, úgynevezett *lépcsőzetes egyenletrendszer* alakjára hozzuk:

$$\mathbf{U}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{c}} \quad \text{ahol} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix} \tag{19.27}$$

Mivel itt ekvivalens átalakításokat végeztünk ezért az $\mathbf{R}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{c}}$ és az $\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszerek megoldása ugyanaz. (19.27)-ből kapjuk:

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}x_k\right) \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1;\ x_n = \frac{c_n}{r_{nn}})\,. \tag{19.28}$$

A (19.28) képlettel adott eljárást visszafelé helyettesítésnek is hívhatjuk, mivel itt az egyenletek fordított sorrendben, visszafelé következnek.
Az átmenet $\mathbf{A}$-ból $\mathbf{R}$-be $n-1$ eliminációs lépésben történik, ezek kivitelezését itt az első lépésre mutatjuk meg részletesen. Ez az $\mathbf{A}$ mátrixot az $\mathbf{A}_1$ mátrixba viszi át:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \multicolumn{3}{l}{\multirow{3}{*}{$\boxed{\begin{matrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{matrix}}$}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{19.29}$$

Az eljárás a következő

1. Választunk egy $a_{r1} \neq 0$ együtthatót. Ha nincs ilyen, akkor stop: $\mathbf{A}$ szinguláris. Ha van, akkor a_{r1}-et *pivot-elem*nek nevezzük.

2. Felcseréljük az $\mathbf{A}$ mátrix 1. és r-edik sorát. Az új mátrixot jelölje $\overline{\mathbf{A}}$.

3. Az $\overline{\mathbf{A}}$ mátrix i-edik $i = 2, 3, \dots, n$ sorából kivonjuk az 1. sor l_{i1}-szeresét.
Az eredmény az $\mathbf{A}_1$ mátrix és a megfelelő új $\underline{\mathbf{b}}_1$ jobb oldal az alábbi elemekkel:

$$a_{ik}^{(1)} = \overline{a}_{ik} - l_{i1}\overline{a}_{1k}\,, \quad l_{i1} = \frac{\overline{a}_{i1}}{\overline{a}_{11}}\,,$$

$$b_i^{(1)} = \overline{b}_i - l_{i1}\overline{b}_1 \qquad (i, k = 2, 3, \dots, n)\,. \tag{19.30}$$

(19.29)-ben az $\mathbf{A}_1$-ben bekeretezett részmátrix $(n-1, n-1)$ méretű kvadratikus mátrix, és a következő lépésben erre alkalmazzuk az **1.**, **2.**, **3.** lépéseket. Ezt az eljárást nevezik GAUSS-féle eliminációs eljárásnak vagy GAUSS-algoritmusnak (lásd 275. old.).

2. Háromszög-faktorizáció

A GAUSS-féle eliminációs eljárás mátrix jelöléssel a következőképpen írható le: minden reguláris mátrixra alkalmazható az úgynevezett háromszög vagy LU-faktorziáció:

$$\mathbf{P}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U} \tag{19.31}$$

ahol

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & 0 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{19.32}$$

ahol $\mathbf{U}$ felső háromszög mátrix (upper triangular matrix), $\mathbf{L}$ alsó háromszög mátrix (lower triangular matrix), $\mathbf{P}$ pedig úgynevezett permutációs mátrix. $\mathbf{P}$ olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorá-

ban és oszlopában pontosan egy elem 1, a többi mind 0. $\mathbf{P}$ írja le az $\mathbf{A}$ mátrix sorcseréit, melyeket az eliminációs eljárásban a pivotelem választással adtunk meg.

■ Oldjuk meg a GAUSS-algoritmus alkalmazásával a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ egyenletrendszert.

A vázlatos jelölésben az együtthatómátrixot és a jobb oldali vektort együtt, az úgynevezett *kibővített mátrix*ban foglaltuk össze:

$$(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{b}}) = \left(\begin{array}{|ccc|c} \boxed{3} & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2/3 & 1/3 & -1 & 17/3 \\ 1/3 & \boxed{2/3} & -1 & 10/3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ 2/3 & 1/2 & \boxed{-1/2} & 4 \end{array}\right),$$

azaz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

A kibővített együtthatómátrixban megjelöltük az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ mátrixokat és a pivot-elemeket.

3. A háromszög-faktorizáció alkalmazása

Az LU-faktorizáció segítségével az $\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldását 3 lépésben írhatjuk le:

1. $\mathbf{P}\,\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$: A háromszög-faktorizáció végrehajtása
2. $\mathbf{P}\,\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{L}\,\underline{\mathbf{c}}$: A $\underline{\mathbf{c}}$ új jobb oldal meghatározása.
3. $\mathbf{U}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{c}}$: Az $\underline{\mathbf{x}}$ megoldás meghatározása visszafelé helyettesítéssel.

Ha a lineáris egyenletrendszer megoldásánál az $(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{b}})$ kibővített együttható mátrixra a GAUSS-algoritmust alkalmazzuk, akkor az $\mathbf{L}$ alsó háromszögmátrixot nem használjuk. Viszont $\mathbf{L}$-et hatásosan alkalmazhatjuk akkor, amikor egyszerre több olyan lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, melyeknek ugyanaz az $\mathbf{A}$ együttható mátrixa, de a $\underline{\mathbf{b}}$ jobb oldalak különböző vektorok.

4. A pivot-elemek kiválasztása

A k-adik eliminációs lépés végrehajtásakor az $\mathbf{A}_{k-1}$ mátrix első oszlopának minden nullától különböző $a_{i1}^{(k-1)}$ eleme szóba jöhet. A kiszámított megoldás pontosságának érdekében a következő két stratégia ajánlott:

1. **Diagonál-stratégia** Pivot-elemeknek mindig a főátlóban lévő következő elemet választjuk. Ez akkor jó választás, ha a főátlóban álló elem az adott sorban a legnagyobb abszolútértékű.
2. **Oszlop-pivotizálás**

A k-adik eliminációs lépés végrehajtása előtt úgy választunk egy r sorindexet, hogy:

$$|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k-1)}|\,. \tag{19.33}$$

legyen. Ha $r \neq k$, akkor az r-edik és a k-adik sort felcseréljük. Megmutatható, hogy így a kerekítési hibák terjedése jelentősen csökkenthető.

19.2.1.2. Cholesky-eljárás szimmetrikus mátrixokra

Sok esetben (19.26a)-ban az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix nemcsak szimmetrikus, hanem még pozitív definit is, azaz a hozzárendelhető $Q(\underline{\mathbf{x}})$ kvadratikus alakra igaz, hogy:

$$Q(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k > 0 \tag{19.34}$$

minden $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ esetén. Mivel minden szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra a háromszög-faktorizáció egyértelmű:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{19.35}$$

ahol

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & 0 & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \tag{19.36a}$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{l_{kk}} \quad (i = k, k+1, \dots, n); \tag{19.36b}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} l_{jk} \quad (i, j = k+1, k+2, \dots, n) \tag{19.36c}$$

ezért a megfelelő $\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszerre a CHOLESKY-eljárást alkalmazva a következő lépéseket kapjuk:

1. $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$: CHOLESKY-faktorizáció.

2. $\mathbf{L}\,\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{b}}$: A $\underline{\mathbf{c}}$ új jobb oldal meghatározása.

3. $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{c}}$: Az $\underline{\mathbf{x}}$ megoldás meghatározása visszafelé helyettesítéssel.

Nagy n értékek esetén a CHOLESKY-eljárás munkaigénye körülbelül fele a (19.31) LU-eljárásénak.

19.2.1.3. Ortogonalizálási eljárások

1. Lineáris kiegyenlítő feladatok

Adott egy túlhatározott lineáris egyenletrendszer

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ m > n), \tag{19.37}$$

mátrix alakban:

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}. \tag{19.38}$$

Az (m, n) méretű $\mathbf{A} = (a_{ik})$ mátrix rangja legfeljebb n lehet, azaz az oszlopai lineárisan függetlenek. Mivel a túlhatározott lineáris egyenletrendszernek nincs szabályszerű megoldása, ezért áttérünk az úgynevezett *hibaegyenletek* rendszerére

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ m > n) \tag{19.39}$$

és az r_i *reziduumok* négyzetösszegét fogjuk minimalizálni:

$$\sum_{i=1}^{m} {r_i}^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right]^2 = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min! \tag{19.40}$$

A (19.40) feladatot *lineáris négyzetesközép-feladat*nak vagy *lineáris kiegészítő feladat*nak nevezzük. (lásd még 407. old.). Annak szükséges feltételei, hogy az $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hiba-négyzetösszeg relatív minimumát felvegye:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{19.41}$$

Ezekből az egyenletekből kapjuk az

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{b}}. \tag{19.42}$$

lineáris egyenletrendszert. A (19.38)-ból (19.42)-be való átmenetet hívjuk GAUSS-*transzformáció*nak, mivel a (19.42) egyenletrendszert (19.38)-ból a GAUSS-féle hibanégyzet-módszer alkalmazásával nyertük. $\mathbf{A}$-ról feltesszük, hogy rangja maximális, tehát $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (n, n) típusú, pozitív definit mátrix, az úgynevezett normálegyenletek pedig numerikusan megoldhatók a CHOLESKY-eljárás alkalmazásával. A

normál-egyenletrendszer megoldásánál numerikus problémák léphetnek fel, ha az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix kondíciószáma (lásd [19.27]) nagyon nagy. Ekkor az $\underline{\mathbf{x}}$ megoldás relatív hibája igen nagy lehet. Ezért numerikusan kedvezőbb, ha a lineáris kiegyenlítő feladatok megoldására ortogonalizációs eljárásokat alkalmazunk.

2. Ortogonalizációs eljárások

A (19.40) lineáris négyzetesközép feladatok megoldására alkalmazott ortogonalizációs eljárások alapját a következő tételek foglalják össze:

1. Egy vektor hossza invariáns az ortogonális transzformációkkal szemben, azaz az $\underline{\mathbf{x}}$ és $\tilde{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_0\underline{\mathbf{x}}$ vektor hossza megegyezik, ha

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{Q}_0 = \mathbf{E} \tag{19.43}$$

2. Minden olyan (m, n) típusú $\mathbf{A}$ mátrix esetén, melynek rangja n $(n < m)$ létezik egy $\mathbf{Q}$ (m, m) típusú ortogonális mátrix úgy, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{R}} \quad (19.44) \quad \text{ahol} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n}\\ & r_{22} & \dots & r_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & r_{nn}\\ \hline & & \mathbf{0} & \end{array}\right). \tag{19.45}$$

Itt $\mathbf{R}$ egy (n, n) típusú háromszögmátrix, $\mathbf{0}$ egy $(m-n, n)$ típusú nullmátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix ilyen faktorizációját *QR-transzformáció*nak nevezzük. Így a (19.39) hibaegyenletek az alábbi ekvivalens egyenletrendszerbe mennek át: .

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n - \hat{b}_1 &= \hat{r}_1\,,\\ r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n - \hat{b}_2 &= \hat{r}_2\,,\\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad &= \vdots\\ r_{nn}x_n - \hat{b}_n &= \hat{r}_n\,,\\ -\hat{b}_{n+1} &= \hat{r}_{n+1}\,,\\ \vdots \quad &= \vdots\\ -\hat{b}_m &= \hat{r}_m \end{aligned} \tag{19.46}$$

anélkül, hogy a reziduumok négyzetösszege megváltozna. (19.46)-ból következik, hogy ez a négyzetösszeg $\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \dots = \hat{r}_n = 0$ esetén lesz minimális, és a minimum értéke az $\hat{r}_{n+1}$-ből $\hat{r}_m$-ig lévő tagok négyzetösszege. Az $\underline{\mathbf{x}}$ keresett megoldást az

$$\mathbf{R}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\hat{\mathbf{b}}}_0\,, \tag{19.47}$$

egyenletrendszerből visszafelé helyettesítéssel nyerjük. Itt $\underline{\hat{\mathbf{b}}}_0$ a (19.46)-ban lévő $\hat{b}_1\,,\ \hat{b}_2\,,\ \dots\,,\ \hat{b}_n$ értékek vektorát jelöli. A (19.39)-ból (19.46)-ba való átmenet algortitmusára leggyakrabban az alábbi két módszert alkalmazzuk:
1. GIVENS-transzformáció,
2. HOUSEHOLDER-transzformáció.
Az első transzformáció forgatásokkal, a második tükrözéssel képezi az $\mathbf{A}$ mátrix QR-transzfolmáltját. A részletes numerikus eljárást a [19.26] irodalom tartalmazza.
Lineáris négyzetesközép-becsléseket leginkább a HOUSEHOLDER-transzformációval oldunk meg. Ekkor sok esetben kihasználhatjuk az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix speciális struktúráját, így például szalagmátrix

vagy ritka mátrix esetén.

19.2.1.4. Iteráció teljes- és egyenkénti lépésekkel

1. Jacobi-eljárás

Legyen a (19.25) lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixában minden a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ főátlóbeli elem nullától különböző. Ekkor az i-edik sorban az x_i ismeretlent kifejezhetjük, és így az alábbi iterációs formulát kapjuk, melyben μ az iterációs index:

$$x_i^{(\mu+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.48}$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots;\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \text{ kezdeti értékek}).$$

Ezt az eljárást JACOBI-*eljárás*nak vagy *teljeslépés-eljárás*nak nevezzük, mivel az új $\underline{\mathbf{x}}^{(\mu+1)}$ vektor valamennyi komponensét $\underline{\mathbf{x}}^{(\mu)}$ vektor komponenseiből számítjuk. A JACOBI-eljárás tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ kezdeti vektor esetén akkor konvergál, ha a:

$$\max_k \sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| < 1 \qquad \text{oszlopösszeg-feltétel} \tag{19.49}$$

vagy a

$$\max_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \left|\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right| < 1 \qquad \text{sorösszeg-feltétel}\,. \tag{19.50}$$

feltétel teljesül.

2. Gauss–Seidel-eljárás

Ha az $x_1^{(\mu+1)}$ első komponenst a JACOBI-eljárással meghatároztuk, akkor kézenfekvő, hogy $x_2^{(\mu+1)}$ kiszámításánál már ezt az értéket alkalmazzuk. Ha az összes többi komponens kiszámításánál ugyanígy járunk el, akkor a kapott iterációs képlet:

$$x_i^{(\mu+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(\mu+1)} - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(\mu)} \tag{19.51}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \text{ adott kezdőértékek};\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

A (19.51) képletet GAUSS–SEIDEL-*eljárás*nak vagy *egyenkénti lépések módszerének* nevezzük. Ez az eljárás általában a JACOBI-eljárásnál gyorsabban konvergál, viszont a rávonatkozó konvergencia-tétel valamivel bonyolultabb.

■
$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 14\,,\\ -3x_1 + 26x_2 + 5x_3 - x_4 &= 22\,,\\ -4x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 5x_4 &= 17\,,\\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 12x_4 &= -20\,. \end{aligned}$$

A (19.51)-nek megfelelő iterációs lépések:

$$\begin{aligned} x_1^{(\mu+1)} &= \frac{1}{10}\left(14 + 3x_2^{(\mu)} + 4x_3^{(\mu)} - 2x_4^{(\mu)}\right)\,,\\ x_2^{(\mu+1)} &= \frac{1}{26}\left(22 + 3x_1^{(\mu+1)} - 5x_3^{(\mu)} + x_4^{(\mu)}\right)\,,\\ x_3^{(\mu+1)} &= \frac{1}{16}\left(17 + 4x_1^{(\mu+1)} - 5x_2^{(\mu+1)} - 5x_4^{(\mu)}\right)\,,\\ x_4^{(\mu+1)} &= \frac{1}{12}\left(20 + 2x_1^{(\mu+1)} + 3x_2^{(\mu+1)} - 4x_3^{(\mu+1)}\right)\,. \end{aligned}$$

Ez a táblázat néhány közelítést és a megoldást tartlmazza:

$\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$	$\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$	$\underline{\mathbf{x}}^{(4)}$	$\underline{\mathbf{x}}^{(5)}$	$\underline{\mathbf{x}}$
0	1,4	1,5053	1,5012	1,5
0	1,0077	0,9946	0,9989	1
0	1,0976	0,5059	0,5014	0,5
0	1,7861	1,9976	1,9995	2

3. Relaxációs eljárások

A (19.51) GAUSS–SEIDEL iterációs eljárást az alábbi korrektúra- vagy hibajavító alakban is felírhatjuk:

$$x_i^{(\mu+1)} = x_i^{(\mu)} + \left(\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(\mu+1)} - \sum_{k=i}^{n} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k^{(\mu)} \right), \quad \text{azaz}$$

$$x_i^{(\mu+1)} = x_i^{(\mu)} + d_i^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19.52}$$

Egy megfelelő ω relaxációs paraméter választásával (19.52) az alábbi képletbe megy át:

$$x_i^{(\mu+1)} = x_i^{(\mu)} + \omega d_i^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19.53}$$

és így az egyes lépések konvergencia-tulajdonságait javíthatjuk. Megmutatható, hogy konvergencia csak

$$0 < \omega < 2 \tag{19.54}$$

esetén lehetséges. $\omega = 1$ esetén kapjuk a GAUSS–SEIDEL-eljárást. $\omega > 1$ esetén *túlrelaxálás*ról beszélünk, a megfelelő iterációs módszert SOR-módszernek (**s**uccessive **o**ver **r**elaxation) hívjuk. Az iterációs módszereket a lineáris egyenletrendszerek megoldására elsősorban akkor használjuk, amikor az együtthatómátrix a_{ii} főátlóbeli elemei abszolút értékben a többi a_{ik} $(i \neq k)$ elemnél lényegesen nagyobbak, vagy pedig, ha az egyes egyenletek sorrendjének átrendezésével az egyenletrendszer ilyen alakra hozható.

19.2.2. Nemlineáris egyenletrendszerek

Tegyük fel, hogy az n nemlineáris egyenletből álló

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.55}$$

n-ismeretlenű $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egyenletrendszernek van megoldása. A megoldásra általános szabályt csak numerikus módszerekkel, az iterációs eljárás segítségvel kaphatunk.

19.2.2.1. Általános iterációs eljárás

Az általános iterációs eljárás abból indul ki, hogy a (19.55) egyenletek

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.56}$$

fixpontos alakra hozhatók. Ekkor a becsült $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$,..., $x_n^{(0)}$ kezdeti közelítő értékekből kiindulva a fokozatos közelítést az alábbi módszerekkel javíthatjuk:

1. Teljeslépésű iteráció

$$x_i^{(\mu+1)} = f_i\left(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19.57}$$

vagy

2. Egyeslépésű iteráció

$$x_i^{(\mu+1)} = f_i\left(x_1^{(\mu+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(\mu+1)}, x_i^{(\mu)}, x_{i+1}^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19.58}$$

Ezen eljárásoknak konvergenciája annál gyorsabb, minél kevésbé függenek az f_i függvényértékek az ismeretlenektől a megoldás egy környezetében, azaz, ha az f_i-k differenciálhatóak, akkor ott a parciális deriváltak abszolút-értékben minél kisebbek. A konvergencia feltételeként kapjuk:

$$K < 1 \quad \text{ahol} \quad K = \max_i \left(\sum_{k=1}^{n} \max \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \right). \tag{19.59}$$

Ezzel a K mennyiséggel a közelítő gyök hibabecslése:

$$\max_i \left| x_i^{(\mu+1)} - x_i \right| \leq \frac{K}{1-K} \max_i \left| x_i^{(\mu+1)} - x_i^{(\mu)} \right|. \tag{19.60}$$

Itt az x_i értékek a keresett pontos megoldás, az $x_i^{(\mu)}$ és $x_i^{(\mu+1)}$ értékek pedig a μ-edik, ill. $(\mu+1)$-edik közelíés komponensei.

19.2.2.2. Newton-eljárás

A NEWTON-eljárás a (19.55) zérushely-egyenletből indul ki. Az $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ becsült kezdőértékek megoldása után az F_i függvényeket az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változók szerint TAYLOR-sorba fejtjük. (lásd 423. old.). Ha a TAYLOR-sorban csak a lineáris tagokat vesszük figyelmbe, lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek segítségével a közelítés iteratív javításai a következőképpen nyerhetők:

$$F_i\left(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_1^{(\mu)}, \ldots x_n^{(\mu)}\right)\left(x_k^{(\mu+1)} - x_k^{(\mu)}\right) = 0 \tag{19.61}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

A (19.61) egyenletrendszernek, melyet minden iterációs lépésben meg kell oldanunk, az együtthatómátrixa:

$$\mathbf{F}'(\underline{\mathbf{x}}^{(\mu)}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right)\right) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.62}$$

amelyet JACOBI-mátrixnak nevezünk. A NEWTON-eljárás négyzetesen konvergál, azaz a konvergencia sebessége erősen függ a kezdeti értékek jóságától. Ha (19.61)-ben $x_k^{(\mu+1)} - x_k^{(\mu)} = d_k^{(\mu)}$ helyettesítést alkalmazunk, akkor a NEWTON-eljárást az alábbi korrektúra- (hibajavító) alakba írhatjuk:

$$x_k^{(\mu+1)} = x_k^{(\mu)} + d_k^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19.63}$$

Hogy a kezdeti értékektől vett erős függést enyhítsük, a relaxációs eljáráshoz hasonlóan bevezetünk egy γ-úgynevezett csillapítási tényezőt:

$$x_k^{(\mu+1)} = x_k^{(\mu)} + \gamma d_k^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots;\ \gamma > 0)\,. \tag{19.64}$$

A γ tényező meghatározásának leírása a [19.27] irodalomban található.

19.2.2.3. Gauss–Newton-eljárás differenciálás nélkül

A (19.24) négyzetesközép-feladat megoldásánál nemlineáris esetben (nemlineáris kiegyenlítő-feladat) az iterációt a következő módon alkalmazzuk:

1. Az $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ kezdeti közelítésekből kiindulva az $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nemlineáris függvényeket a (19.61)) NEWTON-eljárásnak megfelően az $\tilde{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lineáris közelítésekkel approximáljuk, melyeket minden iterációs lépésben az

$$\tilde{F}_i(x_1, \ldots, x_n) = F_i\left(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_1^{(\mu)}, \ldots x_n^{(\mu)}\right)\left(x_k - x_k^{(\mu)}\right) \tag{19.65}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

képlettel számítunk.

2. (19.65)-ban alkalmaztuk a $d_k^{(\mu)} = x_k - x_k^{(\mu)}$ helyettesítést és a $d_k^{(\mu)}$ értékek iterációs javítását a GAUSS-féle hibanégyzet-módszerrel végezzük, ami az alábbi legkisebb-négyzet feladat

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{F}_i^2(x_1, \ldots, x_n) = \min \tag{19.66}$$

megoldása a normál-egyenletek (lásd 943. old.) vagy a HOUSEHOLDER-transzformáció segítségével.

3. A keresett megoldásra az alábbi közelítéseket kapjuk:

$$x_k^{(\mu+1)} = x_k^{(\mu)} + d_k^{(\mu)}, \quad \text{ill.} \tag{19.67a}$$

$$x_k^{(\mu+1)} = x_k^{(\mu)} + \gamma d_k^{(\mu)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{19.67b}$$

ahol γ ($\gamma > 0$) a csillapítási tényező.

Ha a **2.** és a **3.** lépést $x_k^{(\mu+1)}$ helyébe $x_k^{(\mu)}$-et írva ismételjük, kapjuk a GAUSS–NEWTON-eljárást. Így a közelítő értékeknek olyan sorozatát nyerjük, melynek konvergenciája erősen függ a kezdeti értékek választásától. A γ csillapítási paraméter segítségével elérhető a hiba-négyzetösszeg csökkentése.

Ha a $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ parciális deriváltak kiszámítása túl körülményes, akkor ezeket igen egyszerű a megfelelő differenciahányadosokkal közelíteni:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\left(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_k^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right) \approx \frac{1}{h_k^{(\mu)}}\Big[F_i\left(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_{k-1}^{(\mu)}, x_k^{(\mu)} + h_k^{(\mu)}, x_{k+1}^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right)$$
$$-F_i\left(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_k^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}\right)\Big] \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{19.68}$$

A $h_k^{(\mu)}$ úgynevezett diszkretizáló lépéshosszak az iterációs lépéstől és a változóktól függően speciálisan választhatók.

Ha a (19.68) közelítéseket alkalmazzuk, akkor a GAUSS–NEWTON-eljárás folyamán csak az F_i függvényértékeket kell kiszámítani, azaz az eljárás differenciálásmentes.

19.3. Numerikus integrálás

19.3.1. Általános kvadratúraformula

Az

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{19.69}$$

határozott integrál közelítő kiszámítására akkor van szükség, ha az $f(x)$ integrandus primitív függvénye elemi úton nem írható fel, túl bonyolult vagy az $[a, b]$ intervallumnak csak egyes kiválasztott x_ν pontjaiban az ún. alappontokban ismert. (19.69) közelítő kiszámítására az ún. kvadratúraformulákat használjuk. Ezek általános alakja:

$$Q(f) = \sum_{\nu=0}^{n} c_{0\nu} y_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} c_{1\nu} y'_\nu + \cdots + \sum_{\nu=0}^{n} c_{p\nu} y_\nu^{(p)} \tag{19.70}$$

ahol $y_\nu^{(\mu)} = f^{(\mu)}(x_\nu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$, $y_\nu = f(x_\nu)$, $c_{\mu\nu}$ const.

$$I(f) = Q(f) + R\,, \tag{19.71}$$

R jelöli a kvadratúraformula hibáját. A kvadratúraképletek alkalmazhatóságának feltétele, hogy az $f(x)$ integrandusnak és deriváltjának numerikus értékei az alappontokban adottak legyenek. Azokat a képleteket, melyek csak függvényértékekkel számolnak, *középérték-formulák*nak, azokat, melyek a derivált értékeit is felhasználják, HERMITE-féle kvadratúra formuláknak nevezzük.

19.3.2. Interpolációs kvadratúrák

Az alábbi képletek az úgynevezett interpolációs kvadratúrákat írják le. Ekkor az $f(x)$ integrandust a lehetőleg kevés) alapponton áthaladó, megfelelő fokszámú $p(x)$ interpolációs polinommal helyettesítjük, azaz a részintervallumokra a $p(x)$ polinomot integráljuk. A teljes intervallumra az integrál értékét összegzéssel kapjuk. A továbbiakban valamennyi képletben feltesszük, hogy az alappontok egyenlő távolságúak:

$$x_\nu = x_0 + \nu h \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)\,, \quad x_0 = a\,,\ x_n = b\,,\ h = \frac{b-a}{n}\,. \tag{19.72}$$

Mindenegyes kvadratúraformulához tartozik egy $|R|$ szám, amely a hiba abszolútértekének egy felső korlátja. Az integrálási tartományon a $|f^{(\mu)}(x)|$ felső korlátja M_μ.

19.3.2.1. Téglányösszeg

Az $[x_0, x_0 + h]$ intervallumon $f(x)$-t az $y = y_0 = f(x_0)$ konstansértékű függvénnyel pótoljuk, amely $f(x)$-et az x_0 alappontban, azaz a részintervallum bal oldali végpontjában felvett értékekkel interpolálja. Így kapjuk a *bal oldali téglányösszeg*et:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx h \cdot y_0\,, \qquad |R| \le \frac{h^2}{2} M_1\,. \tag{19.73a}$$

Összegzéssel kapjuk a bal oldali téglányösszeget:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\,, \qquad |R| \le \frac{(b-a)h}{2} M_1\,. \tag{19.73b}$$

M_1 az alappontok teljes tartományán az $|f'(x)|$ felső korlátját jelöli.
Analóg módon kapjuk a *jobb oldali téglányösszeg*et:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\,, \qquad |R| \le \frac{(b-a)h}{2} M_1\,. \tag{19.74}$$

19.3.2.2. Trapézformula

Az $[x_0, x_0 + h]$ intervallumban $f(x)$-et elsőfokú polinommal helyettesítjük, amely $f(x)$-et az x_0 és $x_1 = x_0 + h$ alappontokban interpolálja. Ekkor

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1)\,, \quad |R| \le \frac{h^3}{12} M_2\,. \tag{19.75}$$

Összegzéssel adódik az *összetett trapézformula* vagy *trapézösszeg*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\,, \quad |R| \le \frac{(b-a)h^2}{12} M_2\,. \tag{19.76}$$

M_2 az alappontok teljes tartományán az $|f''(x)|$ felső korlátját jelöli. A trapézösszeg hibája h^2-tel arányos, a trapézösszeg hibarendje 2. Tehát, ha $h \to 0$ (vagyis $n \to \infty$), akkor a trapézösszeg a határozott integrál értékéhez tart, eltekintve a kerekítési hibáktól.

19.3.2.3. Hermite-féle trapézformula

Az $[x_0, x_0 + h]$ intervallumon $f(x)$-et egy harmadfokú polinommal helyettesítjük, amely $f(x)$-et és $f'(x)$-et az x_0 és $x_1 = x_0 + h$ alappontokban interpolálja:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0' - y_1')\,, \quad |R| \le \frac{h^5}{720} M_4\,. \tag{19.77}$$

Összegzéssel kapjuk a HERMITE-trapézösszeget:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) + \frac{h^2}{12}(y_0' - y_n')\,, \quad |R| \le \frac{(b-a)h^4}{720} M_4\,. \tag{19.78}$$

Itt M_4 az $|f^{(4)}(x)|$-nek az alappontok teljes tartományán érvényes felső korlátja. A HERMITE-trapézösszeg hibája tehát negyedrendű, és a legfeljebb harmadfokú polinomokra pontos értéket ad.

19.3.2.4. Simpson-formula

Az $[x_0, x_0 + 2h]$ intervallumon $f(x)$-et egy másodfokú polinommal helyettesítjük, amely $f(x)$-et x_0, $x_1 = x_0 + h$ és $x_2 = x_0 + 2h$ alappontokban interpolálja:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\,, \quad |R| \le \frac{h^5}{90} M_4\,. \tag{19.79}$$

Az összetett SIMPSON-formulában n mindig páros:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\,, \tag{19.80}$$

$$|R| \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4\,.$$

Itt M_4 az $|f^{(4)}(x)|$-nek az alappontok teljes tartományán érvényes felső korlátja. Az összetett SIMPSON-formula hibája negyedrendű és a legfeljebb harmadfokú polinomokra pontos értéket ad.

19.3.3. Gauss-típusú kvadratúraformulák

A GAUSS-típusú kvadratúraképletek középérték-formulák:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu y_\nu \quad \text{ahol} \quad y_\nu = f(x_\nu) \tag{19.81}$$

Itt nemcsak a c_ν együtthatókat, hanem a x_ν alappontokat is szabad paraméterként kezeljük, úgy határozzuk meg őket, hogy a (19.81) képletet minél magasabb fokszámú polinomra pontossá tegyük.
A tapasztalat azt mutatja, hogy a GAUSS-típusú kvadratúraformulák többnyire nagyon pontos közelítéseket adnak, de ehhez az alappontokat igen speciálisan kell választani.

19.3.3.1. Gauss-kvadratúra formulák

Ha (19.81)-ben az integrációs intervallumot úgy választjuk, hogy $[a, b] = [-1, 1]$ legyen, az alappontok pedig a LEGENDRE-polinomok gyökei (lásd 520., 1093. oldalak), akkor a c_ν együtthatókat úgy lehet meghatározni, hogy a (19.81) képlet a legfeljebb $2n + 1$-edfokú polinomok integrálját pontosan adja.
A LEGENDRE-polinom gyökei az origóra szimmetrikusan helyezkednek el. Az $n = 1, 2$ és 3 esetekben kapjuk:

$$\begin{aligned}
n = 1\text{:} \quad & x_0 = -x_1, && c_0 = 1\,,\\
& x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,350\,269\ldots, && c_1 = 1\,.\\
n = 2\text{:} \quad & x_0 = -x_2, && c_0 = \frac{5}{9}\,,\\
& x_1 = 0, && c_1 = \frac{8}{9}\,,\\
& x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774\,596\,669\ldots, && c_2 = c_0\,.\\
n = 3\text{:} \quad & x_0 = -x_3, && c_0 = 0{,}347\,854\,854\ldots,\\
& x_1 = -x_2, && c_1 = 0{,}652\,145\,154\ldots,\\
& x_2 = 0{,}339\,981\,043\ldots, && c_2 = c_1\,,\\
& x_3 = 0{,}861\,136\,311\ldots, && c_3 = c_0\,.
\end{aligned} \tag{19.82}$$

Megjegyzés: A $t = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{a+b}{2}$ transzformáció a $[-1,1]$ intervallumnak az $[a,b]$ intervallumot felelteti meg. A fenti $[-1,1]$-ben érvényes x_ν és c_ν értékkel az integrál közelítő értéke:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu f\left(\frac{b-a}{2}x_\nu + \frac{a+b}{2}\right). \tag{19.83}$$

19.3.3.2. Lobatto-féle kvadratúraformulák

Egyes esetekben célszerű az intervallum végpontjait is alappontként választani: Ekkor (19.81)-ben $2n$ szabad paraméter van. Ezeket úgy határozzuk meg, hogy a legfeljebb $2n-1$-edfokú polinomokra pontos eredményt kapjunk. Például $n=2$ és $n=3$ esetén:

$n = 2$:

$$\begin{aligned} &x_0 = -1\,,\ c_0 = \frac{1}{3}\,,\\ &x_1 = 0\,,\quad c_1 = \frac{4}{3}\,,\\ &x_2 = 1\,,\quad c_2 = c_0\,. \end{aligned} \tag{19.84a}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} &x_0 = -1\,, && c_0 = \frac{1}{6}\,,\\ &x_1 = -x_2\,, && c_1 = \frac{5}{6}\,,\\ &x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447\,213\,595\ldots, && c_2 = c_1\,,\\ &x_3 = 1\,, && c_3 = c_0\,. \end{aligned} \tag{19.84b}$$

Az $n=2$ eset megegyezik a SIMPSON-formulával.

19.3.4. Romberg-eljárás

A ROMBERG-eljárás alkalmas a numerikus integrálás pontosságának növelésére. Trapézösszegek olyan sorozatát képezi, melyet az integrálási intervallum egymásutáni felezésével nyerünk.

19.3.4.1. A Romberg-eljárás algoritmusa

Az eljárás a következő lépésekből áll:

1. A trapézösszeg meghatározása Az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál közelítését a

$$h_i = \frac{b-a}{2^i} \quad (i = 0,1,2,\ldots,m) \tag{19.85}$$

lépésközökkel meghatározzuk a $T(h_i)$ trapézösszeget. A rekurziós képlet:

$$\begin{aligned} T(h_i) = T\left(\frac{h_{i-1}}{2}\right) &= \frac{h_{i-1}}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + f\left(a+\frac{h_{i-1}}{2}\right) + f(a+h_{i-1}) + f\left(a+\frac{3}{2}h_{i-1}\right)\right.\\ &\left. + f(a+2h_{i-1}) + \cdots + f\left(a+\frac{2n-1}{2}h_{i-1}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right] \end{aligned} \tag{19.86}$$

$$= \frac{1}{2}T(h_{i-1}) + \frac{h_{i-1}}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{h_{i-1}}{2}+jh_{i-1}\right) \quad (i=1,2,\ldots,m;\ n=2^{i-1})\,.$$

A (19.86) rekurziós képlet szerint a $T(h_i)$-nak a $T(h_{i-1})$-ből való számításához mindig csak az újonnan bevett alappontokban kell a függvényértéket kiszámítani.

2. Háromszög-elrendezés Legyen $T_{0i} = T(h_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ és rekurzív módon számítsuk ki a

$$T_{ki} = T_{k-1,i} + \frac{T_{k-1,i} - T_{k-1,i-1}}{4^k - 1} \quad (k = 1,2,\ldots,m\,;\ i = k, k+1,\ldots)\,. \tag{19.87}$$

értékeket.

A (19.87) szerint kiszámított értékeket egy háromszög-sémában foglaljuk össze:

$$\begin{array}{l} T(h_0) = T_{00} \\ T(h_1) = T_{01}\ \ T_{11} \\ T(h_2) = T_{02}\ \ T_{12}\ \ T_{22} \\ T(h_3) = T_{03}\ \ T_{13}\ \ T_{23}\ \ T_{33} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{19.88}$$

Addig folytatjuk lefelé a számításokat, amíg valamely sor két utolsó eleme már kielégítően megegyezik. A második oszlop T_{1i} $(i = 1, 2, \ldots)$ értékei felelnek meg a SIMPSON-szabály által számítottaknak.

19.3.4.2. Extrapoláció elve

A ROMBERG-eljárás az extrapolációs elv egy alkalmazásának tekinthető. Ezt a (19.87) képlet $k = 1$ esetben vett levezetésével illusztráljuk. Jelölje I a keresett integrált, $T(h)$ pedig a hozzátartozó (19.76) trapézösszeget. Ha az integrandus az integrálási intervallumban $(2m+2)$-szer folytonosan differenciálható, akkor meg lehet mutatni, hogy a trapézösszeg R kvadratúraképlet-hibára egy h-szerinti aszimptotikus sorfejtés adható meg:

$$R(h) = I - T(h) = a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_m h^{2m} + O(h^{2m+2}) \tag{19.89a}$$

vagy

$$T(h) = I - a_1 h^2 - a_2 h^4 - \cdots - a_m h^{2m} + O(h^{2m+2}) \tag{19.89b}$$

Az a_1 , a_2 ,. . . ,a_m együtthatók h-tól független konstansok.

Képezzük (19.89b) $T(h)$-t és $T\left(\frac{h}{2}\right)$-t és tekintsük az alábbi lineáris kombinációt:

$$T_1(h) = \alpha_1 T(h) + \alpha_2 T\left(\frac{h}{2}\right) = (\alpha_1 + \alpha_2) I - a_1 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{4}\right) h^2 - a_2 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{16}\right) h^4 - \cdots . \tag{19.90}$$

Ha $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ és $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{4} = 0$ akkor $T_1(h)$ hibarendje 4, míg $T(h)$ és $T(h/2)$ hibarendje 2. Tehát

$$T_1(h) = -\frac{1}{3} T(h) + \frac{4}{3} T\left(\frac{h}{2}\right) = T\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} . \tag{19.91}$$

Ez a (19.87) képlet $k = 1$ esetén. Az itt leírt eljárást sorozatosan ismételve T_{ki} közelítésére (19.87) szerint

$$T_{ki} = I + O(h_i^{2k+2}) . \tag{19.92}$$

adódik.

■ Határozzuk meg az $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ határozott integrál (integrálszínusz, lásd 467. old.) közelítő értékét 8 tizedesjegy pontossággal.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
	0,92073549			
1. Romberg-eljárás:	0,93979328	0,94614588		
	0,94451352	0,94608693	0,94608300	
	0,94569086	0,94608331	0,94608307	0,94608307 .

$k = 3$ esetén a közelítő érték: 0,94608307, a 10 jegyű pontos érték: 0,9460830704. A hiba $O\left((1/8)^8\right)$ nagyságrendje $\approx 6 \cdot 10^{-8}$.

2. Trapéz és Simpson-formula: A ROMBERG-eljárás fenti elrendezéséből kiolvasható, hogy $h_3 = 1/8$ esetén a trapéz-formula közelítő értéke 0,94569086, a SIMPSON-formula közelítő értéke 0,94608331.

A HERMITE-eljárással javított trapézformulából: $I \approx 0{,}94569086 + \frac{0{,}30116868}{64 \cdot 12}$

$= 0{,}94608301.$

3. Gauss-formula: A (19.83) képlet szerint:

$$n=1: \quad I \approx \frac{1}{2}\left[c_0 f\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)+c_1 f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\right)\right] = 0{,}94604113;$$

$$n=2: \quad I \approx \frac{1}{2}\left[c_0 f\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)+c_1 f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\right)+c_2 f\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}\right)\right] = 0{,}94608313;$$

$$n=3: \quad I \approx \frac{1}{2}\left[c_0 f\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}\right)+\cdots+c_3 f\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\right)\right] = 0{,}94608307\,.$$

Látható, hogy a GAUSS-formula $n=3$ esetén, azaz csak 4 függvényérték felhasználásával már egy 8 jegy pontosságú közelítő értéket ad. Ugyanezt a pontosságot trapézösszeggel csak $n>1000$ esetén lehet elérni.

Megjegyzések:

1. A periodikus függvények integrálásának a FOURIER-analízisben van jelentős szerepe (lásd 427. old.). A numerikus megvalósítást harmonikus analízis címszó alatt találjuk (lásd 949. old.), számítógépen a gyors FOURIER-transzformáció: FFT (Fast FOURIER-Transformation) adja a megoldást (ld. 950. old.).

2. Sok esetben célszerű a numerikus integrálásnál az integrandus speciális tulajdonságait kihasználni. Így az eddig tárgyalt kvadratúraformulákon kívül még sok másikat is kifejlesztettek. A képlethiba becslésével történő konvergencia kérdésének és az optimális kvadratúraképletek megszerkesztésének igen nagy irodalma van (lásd [19.3]).

3. A többes integrálok numerikus kiszámításához itt csak az irodalomra utalunk (lásd [19.30]).

19.4. Közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldása

Egy közönséges differenciálegyenlet megoldásának képletét sok esetben nem tudjuk olyan zárt alakban felírni, amely csak ismert elemi vagy összetett függvényeket tartalmaz. Ebben az esetben a megoldást numerikus eljárásokkal kell meghatároznunk, amennyiben a megoldhatóság általános feltételei (lásd 496. old.) teljesülnek. A numerikus eljárással csak partikuláris megoldást tudunk megadni, ezt azonban igen nagy pontossággal. Mivel az elsőrendűnél magasabbrendű differenciálegyenleteknél különbséget tudunk tenni kezdeti, illetve peremfeltételek között, ezért erre a két feladat-osztályra különböző eljárásokat fejlesztettek ki.

19.4.1. Kezdetiérték-feladatok

Az

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \tag{19.93}$$

kezdetiérték-feladat megoldására adott módszer elve abban áll, hogy a keresett $y(x)$ függvény y_i közelítőértékeit számítjuk ki választott x_i alappontokban. Itt rendszerint ekvidisztans alappontokat alkalmazunk előre adott h lépéshosszal:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0,1,2,\ldots)\,. \tag{19.94}$$

19.4.1.1. Euler-féle poligonvonal-eljárás

A (19.93) feladatot integrál-alakban felírva kapjuk:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\,dx\,. \tag{19.95}$$

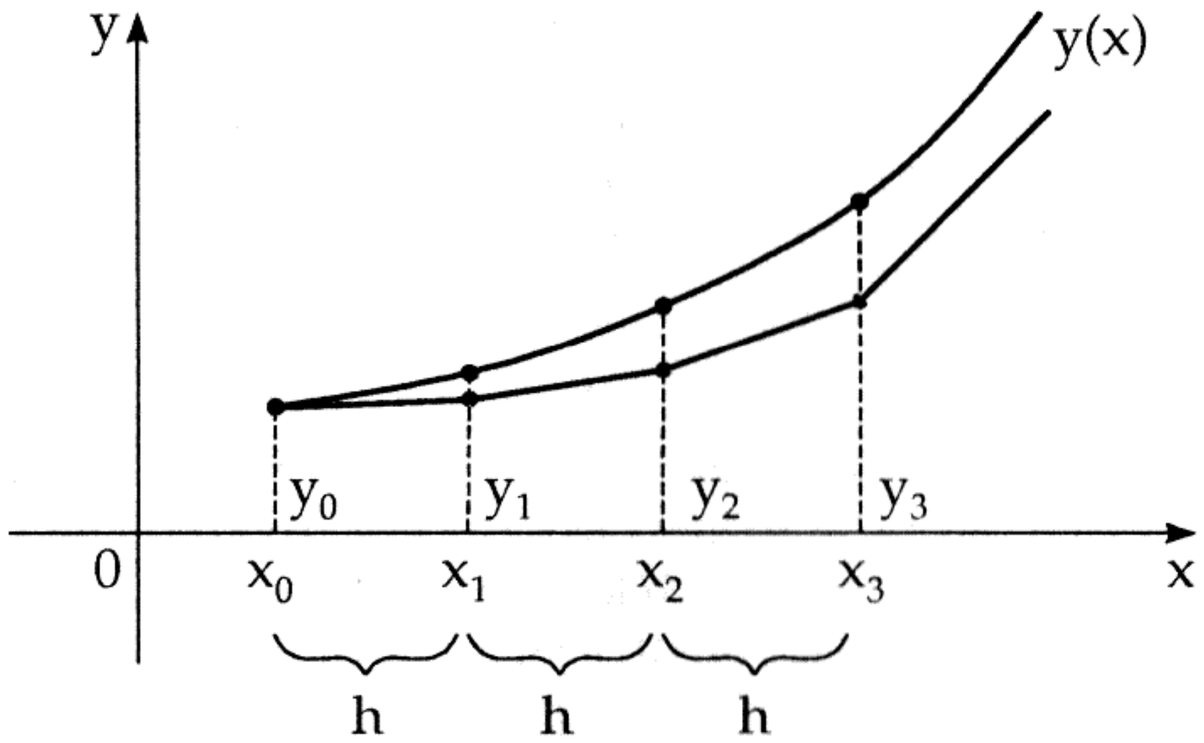
Ez lesz a kiindulópontja az alábbi közelítésnek:

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y(x))\,dx \approx y_0 + hf(x_0,y_0) = y_1\,, \tag{19.96}$$

amelyet ezután az EULER-féle poligonvonal-eljárás általánosít:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots ; y(x_0) = y_0)\,. \tag{19.97}$$

A geometriai szemléltetést a **19.5. ábra** mutatja. Ha (19.96)-ot az



19.5. ábra.

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y_0 + f(x_0, y_0)h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2 \tag{19.98}$$

TAYLOR-sorfejtéssel összehasonlítjuk, akkor látható, hogy y_1 az $y(x_1)$ valódi értéket h^2 nagyságrendű hibával közelíti meg. A pontosságot a h lépéshossz csökkentésével növelhetjük. Gyakorlati számítások tapasztalata szerint a h lépéshossz felezése az y_i hibáját általában felezi.

Az EULER-féle poligonvonal-eljárás segítségével igen könnyen nyerhetünk áttekintést a megoldás-görbe körülbelüli alakjáról.

19.4.1.2. 4-edrendű Runge–Kutta-eljárás

1. Számítási vázlat A (19.93) kezdetiérték-feladat közelítő megoldásához x_0-ből $x_1 = x_0 + h$-ba vezető lépés számításának vázlata:

x	y	$k = h \cdot f(x, y)$
x_0	y_0	k_1
$x_0 + h/2$	$y_0 + k_1/2$	k_2
$x_0 + h/2$	$y_0 + k_2/2$	k_3
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	

(19.99)

A további lépéseket ugyanezen vázlat szerint folytatjuk. A RUNGE–KUTTA-módszer hibája (19.99) szerint h^5 nagyságrendű, és ezért a lépéshossz megfelelő választásával igen nagy pontosság érhető el.

■ $y' = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ és $y(0) = 0$. Az $y(0{,}5)$ értéket határozzuk meg egy lépésben, azaz legyen $h = 0{,}5$ (lásd a mellékelt táblázatot). A 8 tizedes jegyre pontos érték: 0,01041860.

x	y	$k = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$
0	0	0
0,25	0	0,00781250
0,25	0,00390625	0,00781441
0,5	0,00781441	0,03125763
0,5	0,01041858	

2. Megjegyzések

1. $y' = f(x)$ speciális differenciálegyenletnél a RUNGE–KUTTA-módszer a SIMPSON-formulába megy át (lásd 923. old.).

2. Igen nagy lépésszámú algoritmus esetén célszerű, sőt szükséges lehet a lépéshossz megváltoztatása. Erről a hibabecslés segítségével döntünk, melyet úgy nyerünk, hogy a számítást megismételjük például dupla, $2h$ lépéshosszal. Ha például az $y(x_0 + 2h)$ értékre az $y_2(h)$ (egyszeri lépéshosszú számítás) és $y_2(2h)$ (dupla lépéshosszú számítás) értékeket meghatároztuk, akkor az $R_2(h) = y(x_0 + 2h) - y_2(h)$ hiba becslésére kapjuk:

$$R_2(h) \approx \frac{1}{15}[y_2(h) - y_2(2h)]\,. \tag{19.100}$$

További információkat az úgynevezett *lépéshossz-vezérlés*ről a [19.27] irodalom tartalmaz.

3. Magasabbrendű differenciálegyenletekre alkalmazott RUNGE–KUTTA-módszer (lásd [19.27]). A magasabbrendű differenciálegyenleteket egyébként mindig átírhatjuk elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerekké (lásd 506. old.). Ekkor a közelítő eljárás (19.99) szerint párhuzamosan végrehajtott számításokból áll, melyeket az egyes differenciálegyenletek kapcsolnak össze.

19.4.1.3. Többlépéses eljárások

A (19.97) EULER-féle poligonvonal-módszer és a (19.99) RUNGE–KUTTA-módszer úgynevezett *egylépéses-eljárások*, mivel y_{i+1} kiszámításánál az előző lépésekből csak az y_i értéket használják fel. Ezzel szemben az általános *többlépéses eljárások* az alábbi alakban adhatók meg:

$$\begin{aligned} &y_{i+k} + \alpha_{k-1}y_{i+k-1} + \alpha_{k-2}y_{i+k-2} + \cdots + \alpha_1 y_{i+1} + \alpha_0 y_i \\ &= h(\beta_k f_{i+k} + \beta_{k-1}f_{i+k-1} + \cdots + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i) \end{aligned} \tag{19.101}$$

tetszőlegesen választott α_j és β_j $(j = 0, 1, \ldots, k\,;\ \alpha_k = 1)$. konstansokkal (19.101)-et *k-lépéses eljárás*nak nevezzük, ha $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$. *Explicit*nek hívjuk, ha $\beta_k = 0$, mert ekkor a (19.101) jobb oldala $f_{i+j} = f(x_{i+j}, y_{i+j})$ értékeiben csak a már ismert y_i , y_{i+1} , . . . , y_{i+k-1} értékek fordulnak elő. Ha $\beta_k \neq 0$, akkor az eljárást *implicit*nek mondjuk, mivel a keresett y_{i+k} érték (19.101) mindkét oldalán szerepel. Egy k-lépéses eljárás alkalmazása esetén k kezdeti értéket kell ismernünk: $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$. Ezeket például egy egylépéses-eljárással tudjuk előállítani.

A (19.93) kezdetiérték-feladat megoldására úgy kaphatunk speciális többlépéses-eljárásokat, hogy (19.93)-ban az $y'(x_i)$ deriváltat differenciaképletekkel (lásd 505. old.) helyettesítjük és (19.95)-ban az integrált a kvadratúraformulával (lásd 921. old.) közelítjük.

Példák speciális többlépéses eljárásokra:

1. Középpont-szabály (19.93)-ban az $y'(x_{i+1})$ deriváltat az x_i és x_{i+2} alappontokhoz tartozó szelő meredekségével helyettesítjük: Ekkor

$$y_{i+2} - y_i = 2hf_{i+1}\,. \tag{19.102}$$

2. Milne módszere (19.95)-ban az integrált SIMPSON-formulával közelítjük:

$$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})\,. \tag{19.103}$$

3. Adams–Bashforth-módszer (19.95)-ban az integrandust k darab x_i , x_{i+1} ,. . . , x_{i+k-1} alappontokhoz tartozó LAGRANGE-féle interpolációs polinommal helyettesítjük. x_{i+k-1} és x_{i+k} között integrálva kapjuk:

$$y_{i+k} - y_{i+k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \left[\int_{x_{i+k-1}}^{x_{i+k}} L_j(x)\,dx \right] f(x_{i+j}, y_{i+j}) = h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{i+j}, y_{i+j})\,. \tag{19.104}$$

A (19.104) eljárás y_{i+k}-re nézve explicit. A β_j együtthatók kiszámításához lásd [19.1].

19.4.1.4. Prediktor–korrektor-módszerek

A gyakorlatban az implicit többlépéses módszerek előnyösebbek az explicit módszereknél, mert velük ugyanolyan pontosság lényegesen nagyobb lépésközzel érhető el. Ezzel szemben viszont egy implicit többlépéses eljárásnál az y_{i+k} közelítő-érték kiszámításához egy általában nemlineáris egyenletet kell megoldani. Ez (19.101)-ból következik és a következő alakú:

$$y_{i+k} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{i+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{i+j} = F(y_{i+k})\,. \tag{19.105}$$

A (19.105) megoldása iterációval történik a következőképpen: Egy explicit többlépéses eljárással meghatározunk egy $y_{i+k}^{(0)}$ kezdőértéket, az úgynevezett *prediktor*t, majd ezt az

$$y_{i+k}^{(\mu+1)} = F(y_{i+k}^{(\mu)}) \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{19.106}$$

implicit iterációs képlettel javítva kapjuk az úgynevezett *korrektort*. Speciális prediktor-korrektor képletek a következők:

1. $$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i-2} - 16f_{i-1} + 23f_i)\,, \tag{19.107a}$$

$$y_{i+1}^{(\mu+1)} = y_i + \frac{h}{12}(-f_{i-1} + 8f_i + 5f_{i+1}^{(\mu)}) \quad (\mu = 0, 1, \ldots)\,; \tag{19.107b}$$

2. $$y_{i+1}^{(0)} = y_{i-2} + 9y_{i-1} - 9y_i + 6h(f_{i-1} + f_i)\,, \tag{19.108a}$$

$$y_{i+1}^{(\mu+1)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(\mu)}) \quad (\mu = 0, 1, \ldots)\,. \tag{19.108b}$$

A SIMPSON-formula mint korrektor numerikusan instabil, és például az alábbi kifejezéssel helyettesíthető:

$$y_{i+1}^{(\mu+1)} = 0{,}9y_{i-1} + 0{,}1y_i + \frac{h}{24}(0{,}1f_{i-2} + 6{,}7f_{i-1} + 30{,}7f_i + 8{,}1f_{i+1}^{(\mu)})\,. \tag{19.109}$$

19.4.1.5. Konvergencia, konzisztencia, stabilitás

1. Globális diszkretizációs hiba és konvergencia

Az egylépéses eljárások általában:

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, h) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots\,;\ y_0 \text{ adott})\,. \tag{19.110}$$

alakban írhatók fel.

Itt a $F(x, y, h)$ függvényt az egylépéses eljárás *növekmény-függvény*ének vagy haladási irányának nevezzük. A (19.110)-ból nyert közelítő megoldás függ a h lépésköztől és ezért $y(x, h)$-val kell jelölnünk. Eltérése a pontos $y(x)$ megoldástól adja a $g(x, h)$ globális diszkretizációs hibát (lásd (19.111)) és azt mondjuk, hogy a (19.110) egylépéses eljárás *p-rendben konvergens*, ha p a legnagyobb olyan természetes szám, melyre

$$g(x, h) = y(x, h) - y(x) = O(h^p) \tag{19.111}$$

A (19.111) képlet azt állítja, hogy a kezdetiérték-feladat értelmezési tartományában minden x-re a $h = \dfrac{x - x_0}{n}$ lépésközzel meghatározott $y(x, h)$ közelítő érték a felosztás bármely finomítása mellett $h \to 0$ esetén az $y(x)$ megoldáshoz konvergál.

■ A (19.97) EULER-féle poligonvonal-módszer konvergencia rendje: $p = 1$. A RUNGE–KUTTA módszerre $p = 4$.

2. Lokális diszkretizációs hiba és konzisztencia

A (19.111) szerint a konvergencia rendje megadja, mennyire jól közelíti az $y(x, h)$ közelítő megoldás az $y(x)$ pontos megoldást. Ezenkívül felmerül a kérdés: mennyire jól közelíti az $F(x, y, h)$ növekményfüggvény az $y' = f(x, y)$ deriváltat. Ehhez bevezetjük az $l(x, h)$ úgynevezett *lokális diszkretizációs hibát* és azt mondjuk: A (19.110) egylépéses eljárás p-rendben konzisztens, ha p a legnagyobb olyan természetes szám, melyre

$$l(x, h) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} - F(x, y, h) = O(h^p) \tag{19.112}$$

(19.112)-ból közvetlenül adódik, hogy

$$\lim_{h \to 0} F(x, y, h) = f(x, y)\,. \tag{19.113}$$

■ Az EULER-féle poligonvonal-módszer konzisztenciarendje $p = 1$ a RUNGE–KUTTA-módszeré $p = 4$.

3. Stabilitás a kezdeti-értékek zavarásával szemben

Az egylépéses eljárások gyakorlati alkalmazásánál az $O(h^p)$ diszkretizációs hibához még egy $O(1/h)$ kerekítési hiba is hozzáadódik. Ezért tehát egy nem túl kicsi, véges $h > 0$ lépésközzel kell számolnunk. Itt fontos szerepet játszik az, hogy hogyan viselkedik az egylépéses eljárás y_i numerikus megoldása a

kezdetiérték zavarásával szemben, még az $x_i \to \infty$ esetben is.
A közönséges differenciálegyenletek elméletében egy (19.93) kezdetiérték-feladatot *stabil*nak mondunk a *kezdeti értékek zavarásával* szemben, ha:

$$|\tilde{y}(x) - y(tx)| \leq |\tilde{y}_0 - y_0| \,. \tag{19.114}$$

Itt $\tilde{y}(x)$ (19.93) megoldása, ha y_0 helyett $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$ a zavart kezdeti feltétel. A (19.114) becslés mutatja, hogy a megoldás ingadozása abszolútértékben nem haladja meg a kezdeti érték ingadozását.
(19.114)-ot általában nehéz ellenőrizni. Ezért bevezetjük a következő lineáris tesztfeladatot:

$$y' = \lambda y \quad \text{és} \quad y(t_0) = y_0 \quad (\lambda \text{ konst}, \ \lambda \leq 0) \tag{19.115}$$

amely stabil és ennek a speciális kezdetiérték-problémának egylépéses megoldási módszerét vizsgálja.
Azt mondjuk: egy konzisztens egylépéses eljárás $h > 0$ lépésközre abszolút stabil a kezdeti érték zavarásával szemben, ha a (19.115) lineáris tesztképletben az azzal számított valamennyi y_i közelítésre érvényes az

$$|y_i| \leq |y_0| \tag{19.116}$$

becslés.

■ (19.115)-ra az EULER-féle poligonvonal módszerrel $y_{i+1} = (1 + \lambda h)y_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ adódik. Látható, hogy (19.116) $|1 + \lambda h| \leq 1$ esetén igaz, és így a $-2 \leq \lambda h \leq 0$ lépésköz-korlátozás adódik.

4. Merev differenciálegyenletek

Sok alkalmazás esetén, például a kémiai kinetikában, a matematikai modellek olyan differenciálegyenletekre vezetnek, melyek megoldása különböző erősségű exponenciálisan lecsengő tagokból áll. Például az alábbi példában:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2 \text{ konst}) \tag{19.117}$$

ahol $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ és $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$, ha például $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$, akkor a λ_2-höz tartozó tag nem befolyásolja a megoldás értékét, de erősen befolyásolja a közelítő eljárás h lépésközének választását, és így a kerekítési hiba hatását nagyon megnöveli. Ekkor feltétlenül szükséges egy megfelelő közelítő módszer kiválasztása (lásd [19.26]).

19.4.2. Peremérték-feladatok

A közönséges differenciálegyenleteknél fellépő peremérték-feladatok megoldására vonatkozó legfontosabb módszereket a következő, másodrendű differenciálegyenlet egyszerű lineáris peremérték-feladatán szemléltetjük:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad \text{ahol} \quad y(a) = \alpha \,, \ y(b) = \beta \,. \tag{19.118}$$

Adottak a $p(x)$, $q(x)$ és $f(x)$ függvények, valamint az α és β számok.
A következőkben leírt módszereket értelemszerűen általanosíthatjuk magasabbrendű differenciálegyenletek peremérték-feladataira.

19.4.2.1. Differenciamódszerek

Az $[a, b]$ intervallumot ekvidisztans $x_\nu = x_0 + \nu h$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n;\ x_0 = a,\ x_n = b)$ alappontokkal n egyenlő részre osztjuk és a belső alappontokban felírt

$$y''(x_\nu) + p(x_\nu)y'(x_\nu) + q(x_\nu)y(x_\nu) = f(x_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{19.119}$$

differenciálegyenletben a deriváltakat az alábbi, úgynevezett *véges differenciákkal* helyettesítjük:

$$y'(x_\nu) \approx y'_\nu = \frac{y_{\nu+1} - y_{\nu-1}}{2h} \,, \tag{19.120a}$$

$$y''(x_\nu) \approx y''_\nu = \frac{y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1}}{h^2} \,. \tag{19.120b}$$

Így az $[a, b]$ intervallum belsejében az $n - 1$ számú $y_\nu \approx y(x_\nu)$ közelítő értékre $n - 1$ számú lineáris egyenletet kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy $y_0 = \alpha$ és $y_n = \beta$. Ha a peremfeltételekben deriváltak is vannak, akkor ezeket is véges differenciákkal helyettesítjük.

A differenciálegyenletek sajátérték-problémáit (ld. 524. old.) hasonlóképpen kezeljük. Ekkor a (19.119)-ben és (19.120a,b)-ben leírt differenciamódszer mátrixok sajátértékproblémájának megoldására vezet.

■ Az $y'' + \lambda^2 y = 0$ homogén differenciálegyenlet megoldása az $y(0) = y(1) = 0$ peremfeltételek mellett sajátérték-probléma megoldására vezet. A diferenciamódszer a differenciálegyenletet az $y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1} + h^2\lambda^2 y_\nu = 0$ differenciaegyenletbe viszi át. Három belső pontot választva, azaz $h = 1/4$, esetén az $y_0 = y(0) = 0$, $y_4 = y(1) = 0$ figyelembe véve kapjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\left(-2 + \frac{\lambda^2}{16}\right) y_1 + \quad y_2 \quad &= 0\,, \\
y_1 + \left(-2 + \frac{\lambda^2}{16}\right) y_2 + \quad y_3 \quad &= 0\,, \\
y_2 + \left(-2 + \frac{\lambda^2}{16}\right) y_3 \quad &= 0\,.
\end{aligned}$$

Ennek a homogénegyenletrendszernek akkor van nullától különböző megoldása, ha az együtthatók determinánsa 0-val egyenlő. Ebből a feltételből a sajáértékekre kapjuk: ${\lambda_1}^2 = 9{,}37$, ${\lambda_2}^2 = 32$ és ${\lambda_3}^2 = 54{,}63$, melyek közül csak a legkisebb közelíti a valódi 9,87 értéket.

Megjegyzés: A differenciamódszer pontosságát növelhetjük, ha

1. A h lépésközt csökkentjük.

2. Magasabbrendű közelítő véges differenciákat alkalmazunk (a (19.120a,b) közelítések hibarendje $O(h^2)$).

3. A többlépéses módszert alkalmazzuk (lásd 928. old.).

A nemlineáris peremérték-feladatokra alkalmazott differenciamódszer esetén az y_ν ismeretlen közelítő értékekre vonatkozó nemlineáris egyenletrendszet kell megoldanunk (lásd 19.2.2.).

19.4.2.2. Próbafüggvény-módszer

A (19.118) peremérték-feladat közelítő megoldásaként vegyük azon alkalmasan választott $g_i(x)$ függvények lineáris kombinációját, melyek lineárisan függetlenek és a peremfeltételeket egyenként kielégítik:

$$y(x) \approx g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)\,. \tag{19.121}$$

Ha $g(x)$-et a (19.118) differenciálegyenletbe behelyettesítjük, akkor fellép az

$$\varepsilon(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = g''(x) + p(x)g'(x) + q(x)g(x) - f(x)\,, \tag{19.122}$$

hiba, az úgynevezett defekt. A feltételezett megoldás a_i együtthatói meghatározásának módszereit az alábbiakban ismertetjük.

1. Kollokációmódszer A n számú x_ν alappontban, az úgynevezett *kollokációs helyeken* a defekt tűnjön el. Ekkor az együtthatókra az

$$\varepsilon(x_\nu; a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,, \quad a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b \tag{19.123}$$

lineáris egyenletrendszert nyerjük.

2. Hibanégyzet-módszer Az a célunk, hogy az

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int_a^b \varepsilon^2(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)\, dx \tag{19.124}$$

a_i együtthatóktól függő integrál értéke minimális legyen. A szükséges feltételek:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.125}$$

melyek az a_i együtthatókra lineáris egyenletrendszert adnak.

3. Galerkin-módszer A követelmény az úgynevezett *hiba-ortogonalitás*, azaz teljesüljön, hogy

$$\int_a^b \varepsilon(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) g_i(x)\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.126}$$

Ily módon a feltételezett megoldás együtthatóira lineáris egyenletrendszert kapunk.

4. Ritz-módszer Sok peremérték-feladatnál az $y(x)$ megoldás egyúttal egy úgynevezett *variációs feladat*nak is megoldása, azaz $y(x)$ minimalizálja az

$$I[y] = \int_a^b H(x, y, y')\, dx \tag{19.127}$$

integrál értéket (lásd (10.4)). Ha ismert a $H(x, y, y')$ függvény, akkor $y(x)$-t (19.121) szerint a $g(x)$ közelítő függvénnyel helyettesítjük és az $I[y] = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ függvényt minimalizáljuk. Az ehhez szükséges

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.128}$$

feltételek az a_i együtthatókra n számú egyenletet adnak.

■ A p, q, f és y függvényekre tett bizonyos kikötések mellett a

$$-[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = f(x)\,, \quad y(a) = \alpha\,,\ y(b) = \beta \tag{19.129}$$

peremérték-feladat és az

$$I[y] = \int_a^b [p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x) - 2f(x)y(x)]\, dx = \min \qquad y(a) = \alpha\,,\ y(b) = \beta \tag{19.130}$$

variációs feladat ekvivalens, ezért a (19.129) alakú peremérték-feladat $H(x, y, y')$ függvényét (19.130)-ból közvetlenül kiolvashatjuk.
A (19.121) próbafüggvény helyett gyakran a

$$g(x) = g_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) \tag{19.131}$$

függvényt feltételezzük úgy, hogy $g_0(x)$ a peremfeltételeket teljesíti és a $g_i(x)$ függvények eleget tesznek a

$$g_i(a) = g_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.132}$$

feltételeknek. Így például a (19.118) peremérték-feladatban a

$$g_0(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) \tag{19.133}$$

próbafüggvényt választhatjuk.

Megjegyzés: Lineáris peremérték-feladatnál a (19.121) és (19.131) próbafüggvényekből az együtthatók meghatározására egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Nemlineáris peremérték-feladatoknál nemlineáris egyenletrendszereket kapunk, melyeket a 19.2.2.-ben adott módszerekkel oldhatunk meg.

19.4.2.3. Célmódszerek

A célmódszerekkel a peremérték-feladatok megoldását kezdetiérték-feladatok megoldására vezetjük vissza. A módszer elvét az úgynevezett *egycél-módszeren* mutatjuk meg.

1. Egycél-módszerek A (19.118) peremérték-feladatokhoz hozzárendeljük az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \text{és} \quad y(a) = \alpha\,,\ y'(a) = s \tag{19.134}$$

kezdetiérték-feladatot. Így s egy paraméter amelytől függ az (19.134) kezdeti-érték-feladat megoldása, azaz $y = y(x, s)$. Az $y(x, s)$ függvény (19.134) szerint kielégíti az $y(a, s) = \alpha$ első peremfeltételt. Az

s paramétert úgy kell meghatározni, hogy $y(x,s)$ az $y(b,s)=\beta$ második peremfeltételt is kielégítse. Ehhez meg kell oldanunk az

$$F(s)=y(b,s)-\beta \tag{19.135}$$

egyenletet a regula-falsi-módszerrel. Ehhez csak az $F(s)$ függvényértékekre van szükség, de az $x=b$ pontig mindenegyes függvényérték kiszámítása a (19.134) kezdetiérték-feladatnak a 19.4.1. módszer szerinti megoldását jelenti speciális s paraméter-értékekre.

2. Többcél-módszerek Az úgynevezett többcél-módszereknél az $[a,b]$ integrációs intervallumot részintervallumokra osztjuk és mindenegyes részintervallumra alkalmazzuk az egycél-módszert. Eszerint a keresett megoldás olyan részmegoldásokból tevődik össze, melyekre a részintervallumok határán biztosítanunk kell a folytonos átmenetet. Ez a követelmény új feltételeket eredményez. A többcél-eljárást elsősorban nemlineáris peremérték-feladatoknál alkalmazzuk. Numerikus realizálásukat lásd [19.12].

19.5. Parciális differenciálegyenletek közelítő integrálása

Az alábbiakban egy példán mutatjuk meg a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának elvét. Ez a példa egy másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet két független változóval, megfelelő perem- és/vagy kezdetifeltételekkel.

19.5.1. Differenciamódszer

Az integrációs tartományt (x_μ, y_ν) választott pontokkal rácsszerűen felosztjuk. A rácsot rendszerint derékszögűnek választjuk:

$$x_\mu = x_0+\mu h,\ \ y_\nu = y_0+\nu l \quad (\mu,\nu=1,2,\ldots)\,. \tag{19.136}$$

$l=h$ esetén négyzetrácsot kapunk. Ha a keresett megoldást $u(x,y)$ jelöli, akkor a differenciálegyenletekben és a perem-, illetve kezdetifeltételekben fellépő parciális deriváltakat véges differenciákkal helyettesítjük a következőképpen, ahol $u_{\mu\nu}$ az $u(x_\mu,y_\nu)$ függvényérték közelítő értékét jelenti:

parciális derivált	véges differencia	hibarend
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_\mu,y_\nu)$	$\dfrac{1}{h}(u_{\mu+1,\nu}-u_{\mu,\nu})$ vagy $\dfrac{1}{2h}(u_{\mu+1,\nu}-u_{\mu-1,\nu})$	$O(h)$ vagy $O(h^2)$
$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_\mu,y_\nu)$	$\dfrac{1}{l}(u_{\mu,\nu+1}-u_{\mu,\nu})$ vagy $\dfrac{1}{2l}(u_{\mu,\nu+1}-u_{\mu,\nu-1})$	$O(l)$ vagy $O(l^2)$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_\mu,y_\nu)$	$\dfrac{1}{4hl}(u_{\mu+1,\nu+1}-u_{\mu+1,\nu-1}-u_{\mu-1,\nu+1}+u_{\mu-1,\nu-1})$	$O(hl)$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_\mu,y_\nu)$	$\dfrac{1}{h^2}(u_{\mu+1,\nu}-2u_{\mu,\nu}+u_{\mu-1,\nu})$	$O(h^2)$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_\mu,y_\nu)$	$\dfrac{1}{l^2}(u_{\mu,\nu+1}-2u_{\mu,\nu}+u_{\mu,\nu-1})$	$O(l^2)$

(19.137)

(19.137)-ben a hiba rendjét a LANDAU-féle O szimbólummal írjuk fel.

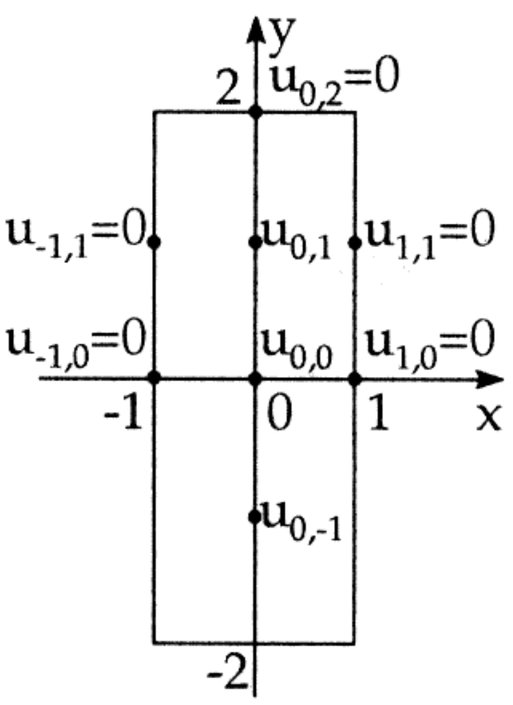
Néhány esetben kedvezőbb, ha a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_\mu,y_\nu)\approx\sigma\frac{u_{\mu+1,\nu+1}-2u_{\mu,\nu+1}+u_{\mu-1,\nu+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{u_{\mu+1,\nu}-2u_{\mu,\nu}+u_{\mu-1,\nu}}{h^2} \tag{19.138}$$

közelítést alkalmazzuk, ahol σ rögzített paraméter $(0\le\sigma\le1)$. A (19.138) képlet két véges differencia konvex kombinációja, amelyet a (19.137) képletből $y=y_\nu$ és $y=y_{\nu+1}$ értékek esetén kaptunk.
A (19.137) képletekkel a parciális differenciálegyenlet mindenegyes belső rácspontban differenciaegyenletbe megy át, amelynél figyelembe kell vennünk a perem- és kezdetifeltételeket. Így az $u_{\mu,\nu}$ közelítő értékekre egy olyan egyenletrendszert kell iteratív módszerekkel megoldanunk, melynek dimenziószáma

kis h és l értékek esetén igen nagy lehet (lásd 19.2.1.4.).

■ **A:** Az $u(x,y)$ függvény eleget tesz a $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -1$ differenciálegyenletnek minden olyan (x,y) pontban, ahol $|x| < 1$, és $|y| < 2$, azaz egy téglalap belsejében. A peremfeltételek legyenek: $u = 0$ ha $|x| = 1$ és $|y| = 2$. Ennek a differenciálegyenletnek megfelelő differenciaegyenlet-rendszer egy h lépésközű négyzetrács esetén a következő: $4u_{\mu,\nu} = u_{\mu+1,\nu} + u_{\mu,\nu+1} + u_{\mu-1,\nu} + u_{\mu,\nu-1} + h^2$. $h = 1$ lépésköz **(19.6. ábra)** esetén kapjuk a függvényértékek első durva közelítését a három belső rácspontban: $4u_{0,1} = 0 + 0 + 0 + u_{0,0} + 1$, $4u_{0,0} = 0 + u_{0,1} + 0 + u_{0,-1} + 1$, $4u_{0,-1} = 0 + u_{0,0} + 0 + 0 + 1$.
Ebből: $u_{0,0} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$, $u_{0,1} = u_{0,-1} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.



19.6. ábra.

■ **B:** A parciális differenciálegyenletek megoldásánál alkalmazott differenciamódszerek rendszerint speciális felépítésűek. Ezt az alábbi, általánosított peremérték-feladaton mutatjuk meg. Az integrációs tartomány legyen a G egységnégyzet: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Keresünk egy olyan $u(x,y)$ függvényt, melyre a négyzet belsejében igaz, hogy $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ G határán pedig, $u(x,y) = g(x,y)$A f és g függvények adottak. $h = l = 1/n$ esetén a megfelelő differenciaegyenlet:

$$u_{\mu+1,\nu} + u_{\mu,\nu+1} + u_{\mu-1,\nu} + u_{\mu,\nu-1} - 4u_{\mu,\nu} = \frac{1}{n^2} f(x_\mu, y_\nu)$$

$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-1)$. Ha $n = 5$, akkor ezen differenciálegyenlet-rendszer bal oldala a 4×4 belső pontban az $u_{\mu,\nu}$ közelítő értékekre a következő alakú lesz, amennyiben a rácson soronként balról jobbra mozgunk és figyelembe vesszük, hogy a peremen a függvényértékek ismertek:

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & 0 \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
0 & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ \hline u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ \hline u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \\ \hline u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{pmatrix}$$

Látjuk, hogy az együtthatómátrix szimmetrikus és ritka. Az ilyen alakú mátrixot *blokk-tridiagonális* mátrixnak nevezzük. Az együtthatómátrix alakja azonban függ attól, hogy milyen irányban mentünk végig a rácspontokon.
A másodrendű parciális differenciálegyenleteket tartalmazó különböző típusú feladatokra, elsősorban az elliptikus, parabolikus és hiperbolikus differenciálegyenletekre sokféle alkalmas differenciamódszert dolgoztak ki, melyeket stabilitás és konvergencia szempontjából vizsgáltak. A szakirodalom igen gazdag, az alapvető művek [19.25], [19.27].

19.5.2. Próbafüggvény-módszer

Az $u(x,y)$ keresett megoldásra az alábbi próbafüggvényt írjuk fel:

$$u(x,y) \approx v(x,y) = v_0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i(x,y)\,. \tag{19.139}$$

Ekkor például
1. $v_0(x,y)$-nak az adott inhomogén differenciálegyenletet, a többi $v_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ próbafüggvénynek a hozzátartozó homogén differenciálegyenletet (*peremmódszer*) ki kell elégítenie, vagy
2. $v_0(x,y)$-nak az inhomogén peremfeltételeket, a többi $v_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ próbafüggvénynek a homogén peremfeltételeket ki kell elégítenie.

Ha a $v(x,y)$ közelítő függvényt (19.139) szerint először a peremfeltételekbe, majd másodszorra a differenciálegyenletekbe helyettesítjük, akkor mindkét esetben fellép egy hiba, az úgynevezett *defekt*:

$$\varepsilon = \varepsilon(x,y;a_1,a_2,\ldots,a_n), \tag{19.140}$$

A próbafüggvény a_i együtthatóit a következő módszerek szerint határozhatjuk meg:

1. Kollokációmódszer

Az ε defektet n lehetőleg kedvezően elosztott (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2,\ldots, n)$ pontban, az úgynevezett *kollokációs helyek*en 0-val tesszük egyenlővé:

$$\varepsilon(x_\nu, y_\nu; a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{19.141}$$

Az első esetben a kollokációs helyek határpontok (határkollokáció), a második esetben az integrációs tartomány belső pontjai (tartományi kollokáció).
(19.141)-ből az együtthatókra n egyenletet kapunk. A határkollokációt rendszerint előnyben részesítjük a tartományi kollokációval szemben.

■ A 19.5.1. differenciamódszerrel kezelt példában alkalmazzunk egy olyan próbafüggvényt, amely kielégíti a differenciálegyenletet:
$v(x,y;a_1,a_2,a_3) = -\frac{1}{4}(x^2+y^2) + a_1 + a_2(x^2-y^2) + a_3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$. Az együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy a peremfeltétel az $(x_1;y_1) = (1;0{,}5)$, $(x_2;y_2) = (1;1{,}5)$ és $(x_3;y_3) = (0{,}5;2)$ határpontokban teljesüljön. Az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
-0{,}3125 &+ a_1 + 0{,}75a_2 - 0{,}4375a_3 = 0\,,\\
-0{,}8125 &+ a_1 - 1{,}25a_2 - 7{,}4375a_3 = 0\,,\\
-1{,}0625 &+ a_1 - 3{,}75a_2 + 10{,}0625a_3 = 0
\end{aligned}$$

melynek megoldása $a_1 = 0{,}4562$, $a_2 = -0{,}2000$, $a_3 = -0{,}0143$. A közelítő függvény segítségével az integrációs tartomány tetszőleges pontjaiban kiszámíthatjuk a megoldás közelítő értékeit. A kapott $v(0;1) = 0{,}3919$ és $v(0;0) = 0{,}4562$ értékeket összehasonlíthatjuk a differenciamódszerrel kapott eredményekkel.

2. Hibanégyzet-módszer

Aszerint, hogy a (19.139) próbafüggvények a differenciálegyenletet vagy a peremfeltételeket elégítik ki, megkívánjuk, hogy
1. A C határvonalon az

$$I = \int_{(C)} \varepsilon^2(x(t), y(t)\,;\, a_1, \ldots, a_n)\, dt\,, \tag{19.142a}$$

vonalintegrál értéke (itt $x = x(t)$, $y = y(t)$ a C határgörbe paraméteres megoldása), vagy
2. A G tartomány feletti

$$I = \iint_{(G)} \varepsilon^2(x,y;\, a_1, \ldots, a_n)\, dx\, dy \tag{19.142b}$$

kettős integrál értéke minimális legyen. Az ehhez szükséges $\dfrac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$ feltételekből az $a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n$ paraméterekre n egyenletet kapunk.

19.5.3. Végeselem-módszer (FEM)

Amióta nagyteljesítményű számítógépekkel rendelkezünk, a FEM-módszer lett a parciális differenciálegyenletek legfontosabb numerikus megoldási módszere. Ennek alkalmazása sok felhasználási területen, így például a mechanikában és a statikában is, a legigényesebb és legtöbbet mondó matematikai modelleket szolgáltatja.
A sokféle alkalmazas miatt a FEM-et különbözőképpen realizálják, de itt csak az alapgondolatokat vázoljuk. Ez — analógia folytán — emlékeztet a peremérték-feladatok numerikus megoldásánál alkalmazott RITZ-módszerre (lásd 932. old.) és a spline-módszerre (lásd 954. old.).
A végeselem-módszer az alábbi lépésekből áll:

1. Egy variációs feladat felállítása Az adott peremérték-feladathoz meg kell fogalmaznunk egy variációs feladatot. Az alábbi példán megmutatjuk, ez hogyan történik:
Legyen

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f \;\text{ a } G \text{ tartomány belsejében, } \; u = 0 \;\text{ a } G \text{ peremén}\,. \tag{19.143}$$

Szorozzuk meg a (19.143) differenciálegyenletet egy megfelelően sima $v(x, y)$ függvénnyel, amely G határán eltűnik, majd a kapott függvényt integráljuk G felett:

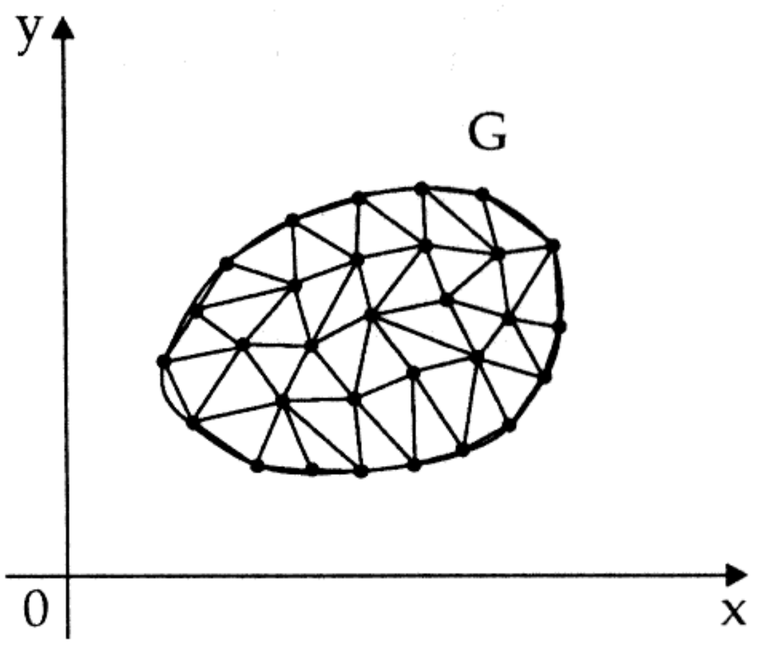
$$\iint\limits_{(G)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v \, dx \, dy = \iint\limits_{(G)} f v \, dx \, dy\,. \tag{19.144}$$

A GAUSS-integrálformulában (lásd 688. old.), (13.116)-ban a $P(x, y) = -vu_y$ és $Q(x, y) = vu_x$ helyettesítést alkalmazva (19.144)-ből az

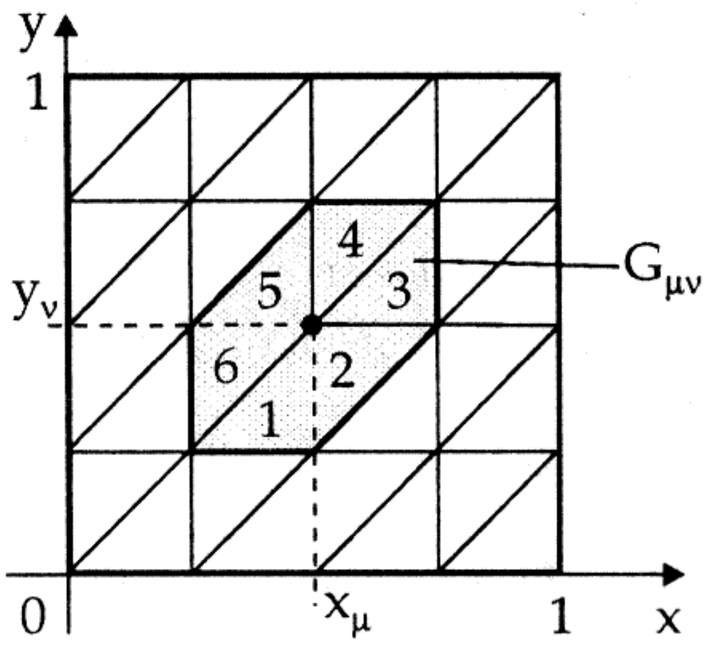
$$a(u, v) = b(v) \tag{19.145a}$$

varíciós egyenletet kapjuk, ahol

$$a(u, v) = -\iint\limits_{(G)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \, dy, \quad b(v) = \iint\limits_{(G)} f v \, dx \, dy. \tag{19.145b}$$



19.7. ábra.



19.8. ábra.

2. Háromszög-felbontás A G integrációs tartományt egyszerű résztartományokra osztjuk. Rendszerint háromszög-felbontást alkalmaztunk, amikor g-t úgy fedjük be háromszögekkel, hogy a szomszédos háromszögeknek vagy egy oldala, vagy egy csúcsa közös. Így jól tudunk közelíteni egy görbevonallal

határolt tartományt **(19.7. ábra)**.

Megjegyzés: A numerikus nehézségek elkerülése végett a felbontás ne tartalmazzon túl tompa háromszögeket.

■ Az egységnégyzet háromszögfelbontását elvégezhetjük a **19.8. ábrán)** bemutatott módon. Ekkor az $x_\mu = \mu h$, $y_\nu = \nu h$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, N\,;\, h = 1/N)$ rácspontokból indulunk ki, és $(N-1)^2$ számú belső pontot kapunk. A próbafüggvény választása érdekében célszerű az (x_μ, y_ν) pontban összefutó hat háromszöget egy $G_{\mu\nu}$ résztartománnyá összevonni:

3. Próbafüggvény A keresett $u(x, y)$ függvényre minden háromszögben felírunk egy próbafüggvényt. Egy háromszöget a hozzátartozó próbafüggvénnyel *véges elem*nek nevezünk. Ezek az x és y változók polinomjai. Sok esetben elég az

$$\tilde{u}(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{19.146}$$

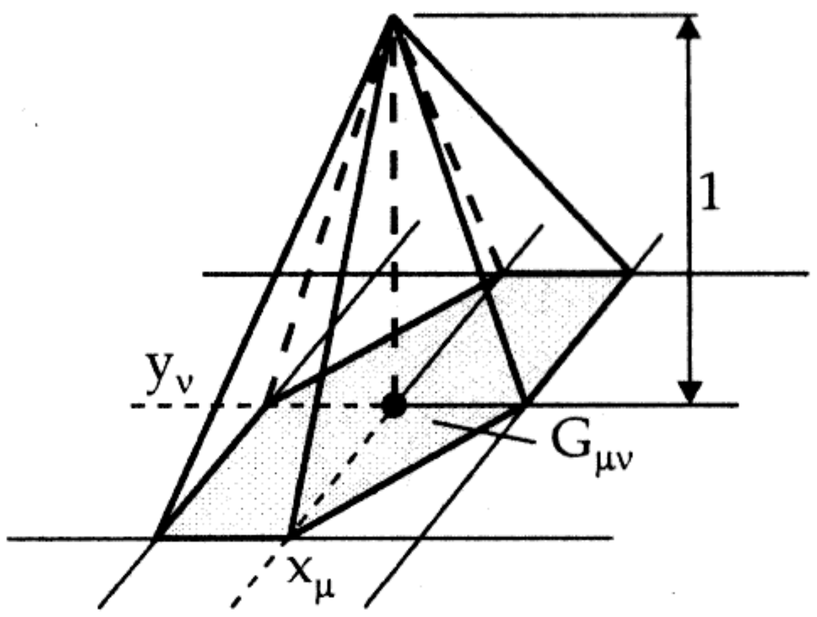
lineáris próbafüggvényt választani. A próbafüggvényeknek az egyik háromszögből a szomszédos háromszögbe való átmenetnél legalábbis folytonosnak kell lenniük, hogy a teljes megoldás folytonos legyen. (19.146)-ban az a_1, a_2 és a_3 együtthatókat egyértelműen meghatározzák a megfelelő háromszög csúcspontjaiban felvett u_1, u_2 és u_3 függvényértékek. Ezzel a folytonos átmenet is biztosítva van. A (19.146) így ismeretlen paraméterként a keresett függvényértekek u_i közelítéseit tartalmazza. A teljes G tartományon a keresett $u(x, y)$ megoldás közelítő értékére az

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{\mu=1}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} \alpha_{\mu\nu} u_{\mu\nu}(x, y)\,. \tag{19.147}$$

próbafüggvényt alkalmazzuk.
Az $\alpha_{\mu\nu}$ együtthatókat kell még alkalmasan meghatároznunk. Az $u_{\mu\nu}(x, y)$ függvényekre teljesülni kell, hogy azok (19.146) szerint a $G_{\mu\nu}$ mindenegyes háromszögén lineáris függvényt ábrázoljanak és eleget tegyenek a következő feltételeknek:

1. $$u_{\mu\nu}(x_k, y_l) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = \mu, l = \nu\,, \\ 0 & \text{minden más } G_{\mu\nu} \text{ rácspontban}\,. \end{cases} \tag{19.148a}$$

2. $$u_{\mu\nu}(x, y) \equiv 0 \quad \text{ha } (x, y) \notin G_{\mu\nu}\,. \tag{19.148b}$$



19.9. ábra.

A **19.9. ábra** $u_{\mu\nu}(x, y)$-t mutatja a $G_{\mu\nu}$ tartomány felett. $u_{\mu\nu}$ kiszámítását $G_{\mu\nu}$-re, azaz a **19.8. ábra** 1.–6. háromszögére itt csak az 1. háromszögre mutatjuk meg:

$$u_{\mu\nu}(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3, \quad \text{ahol} \tag{19.149}$$

$$u_{\mu\nu}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_\mu, y = y_\nu\,, \\ 0 & \text{ha } x = x_{\mu-1}, y = y_{\nu-1}\,, \\ 0 & \text{ha } x = x_\mu, y = y_{\nu-1}\,. \end{cases} \tag{19.150}$$

(19.150)-ból következik, hogy $a_1 = 1 - \nu, a_2 = 0, a_3 = 1/h$, és így az 1. háromszögre:

$$u_{\mu\nu}(x, y) = 1 + \left(\frac{y}{h} - \nu\right). \tag{19.151}$$

Analóg számítással nyerhető:

$$u_{\mu\nu}(x,y)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{x}{h}-\mu\right)+\left(\dfrac{y}{h}-\nu\right) & \text{a 2. háromszögre},\\ 1-\left(\dfrac{x}{h}-\mu\right) & \text{a 3. háromszögre},\\ 1-\left(\dfrac{y}{h}-\nu\right) & \text{a 4. háromszögre},\\ 1+\left(\dfrac{x}{h}-\mu\right)+\left(\dfrac{y}{h}-\nu\right) & \text{az 5. háromszögre},\\ 1+\left(\dfrac{x}{h}-\mu\right) & \text{a 6. háromszögre}.\end{cases} \tag{19.152}$$

4. A próbafüggvény együtthatóinak kiszámítása Az $\alpha_{\mu\nu}$ együtthatókat azon követelmények alapján határozzuk meg, hogy a (19.147) a (19.145a) variációs feladatot minden $u_{\mu\nu}$ esetén kielégítse, azaz (19.145a)-ba $u(x,y)$ helyett $\tilde{u}(x,y)$-t, $v(x,y)$ helyett $u_{\mu\nu}(x,y)$-t írunk. Ilymódon a próbafüggvény együtthatóinak meghatározására a

$$\sum_{\mu=1}^{N-1}\sum_{\nu=1}^{N-1}\alpha_{\mu\nu}a(u_{\mu\nu},u_{kl})=b(u_{kl})\quad(k,l=1,2,\ldots,N-1)\,. \tag{19.153}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, ahol

$$a(u_{\mu\nu},u_{kl})=\iint\limits_{G_{kl}}\left(\frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_{kl}}{\partial x}+\frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_{kl}}{\partial y}\right)dx\,dy\,,\quad b(u_{kl})=\iint\limits_{G_{kl}}f u_{kl}\,dx\,dy\,. \tag{19.154}$$

Az a $a(u_{\mu\nu},u_{kl})$ értékek kiszámításánál vigyázni kell, hogy az integrál értéke azon esetekben növekedjék, amikor a $G_{\mu\nu}$ és G_{kl} tartományok metszete nem üres. Ezeket a tartományokat a **19.1. táblázat** sráfozva jelöli.

Az integrálást mindig egy $h^2/2$ területű háromszögre végezzük úgy, hogy az x-szerinti parciális deriváltakból adódik:

$$\frac{1}{h^2}\left(4\alpha_{kl}-2\alpha_{k+1,l}-2\alpha_{k-1,l}\right)\frac{h^2}{2}\,. \tag{19.155a}$$

Analóg módon adódik az y-szerinti parciális deriváltakból:

$$\frac{1}{h^2}\left(4\alpha_{kl}-2\alpha_{k,l+1}-2\alpha_{k,l-1}\right)\frac{h^2}{2}\,. \tag{19.155b}$$

(19.153)-ban a $b(u_{kl})$ jobb oldal kiszámításából adódik:

$$b(u_{kl})=\iint\limits_{G_{kl}}f(x,y)u_{kl}(x,y)\,dx\,dy\approx f_{kl}V_P\,, \tag{19.156a}$$

ahol V_P a G_{kl} fölött $u_{kl}(x,y)$ által leírt 1 magasságú gúla térfogata **(19.9. ábra)**. Mivel

$$V_P=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}h^2\quad\text{ezért}\quad b(u_{kl})\approx f_{kl}h^2\,. \tag{19.156b}$$

Így a próbafüggvény együtthatóinak meghatározására a (19.153) variációs egynletek az alábbi lineáris egyenletrendszert adják:

$$4\alpha_{kl}-\alpha_{k+1,l}-\alpha_{k-1,l}-\alpha_{k,l+1}-\alpha_{k,l-1}=h^2f_{kl}\quad(k,l=1,2,\ldots,N-1) \tag{19.157}$$

Megjegyzések:

1. Ha a próbafüggvény együtthatóit (19.157) szerint határozzuk meg, akkor (19.147)-ból $\tilde{u}(x,y)$ egy olyan explicit közelítő megoldás, melynek értékei G tetszőleges (x,y) pontjaiban kiszámíthatók.

2. Ha az integrációs tartományt egy tetszőleges szabálytalan háromszög-hálóval fedtük le, akkor célszerű az úgynevezett háromszögkoordinátákat, (baricentrikus koordinátákat) bevezetni: Ezáltal egy pontnak a háromszöghálóhoz viszonyított helyzete könnyen megállapítható és a (19.154)-gal analóg

többdimenziós integrál kiszámítása egyszerűbb, mivel minden tetszőleges háromszög nagyon egyszerűen egy egység-háromszögre transzformálható.

3. Ha a közelítő függvény pontosságát javítani vagy differenciálhatóságát biztosítani akarjuk, akkor tartományonként négyzetes vagy köbös próbafüggvnyekre kell áttérnünk (lásd [19.25]).

4. Gyakorlati problémák megoldásánál igen magas dimenziószámú feladatok keletkezhetnek. Ezért sok speciális módszert dolgoztak ki pl. egy automatikus háromszög-felbontásra és az elemek előnyös átszámozására (ettől függ a megoldandó egyenletrendszernek struktúrája). A részletes tárgyalást lásd [19.13], [19.9] és [19.25].

19.6. Approximáció, kiegyenlítő számítás, harmonikus analízis

19.6.1. Polinom-interpoláció

Az interpoláció alapfeladata az, hogy síkbeli pontok adott (x_ν, y_ν) $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ sorozatára egy folytonos görbét illesszen. Grafikusan ezt megtehetjük egy görbe-vonalzóval, numerikusan egy $g(x)$ függvény segítségével, amely az x_ν *alappontokban* az y_ν függvényértékeket veszi fel, azaz $g(x)$ teljesíti az interpolációs feltételt:

$$g(x_\nu) = y_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.158}$$

Az interpolációs függvények elsősorban polinomok, illetve periodikus függvények esetén ún. trigonometrikus polinomok. Az utóbbi esetben *trigonometrikus interpolációról* beszélünk (lásd 950. old.). Ha $n+1$ alappontot használunk, akkor n-edrendű interpolációról beszélünk és ebben az esetben az interpolációs polinom legfeljebb n-edfokú. Mivel növekvő polinom-fokszám esetén az interpolációs polinom oszcillációja rendszerint nemkívánatos módon felerősödik, ezért az interpolációs intervallumot célszerűen részintervallumokra osztjuk és *spline-interpolációt* alkalmazunk (lásd 954. old.).

19.6.1.1. Newton-féle interpolációs formula

A (19.158) interpolációs feladat megoldására írjunk fel egy n-edfokú polinomot az alábbi alakban:

$$g(x) = p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\,. \tag{19.159}$$

Ez a próbafüggvény, az ún. NEWTON-féle interpolációs képlet, lehetővé teszi az a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ együtthatók egyszerű kiszámítását, mivel a (19.158) interpolációs feltétel egy lépcsőzetes lineáris egyenletrendszerre vezet.

■ $n = 2$ esetén (19.158)-ból az itt mellékelt egyenletrendszert kapjuk. A $p_n(x)$ interpolációs polinom a (19.158) interpolációs feltétellel egyértelműen meghatározott. A függvényértékek kiszámítása egyszerűen a HORNER-elrendezéssel történhet (lásd 910. old.).

$$\begin{aligned} p_2(x_0) &= a_0 &&= y_0 \\ p_2(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) &&= y_1 \\ p_2(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &&= y_2 \end{aligned}$$

19.6.1.2. Lagrange-féle interpoláció

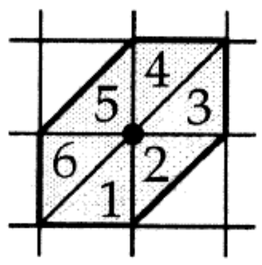
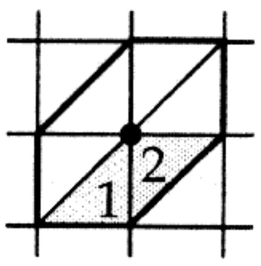
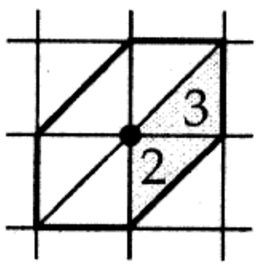
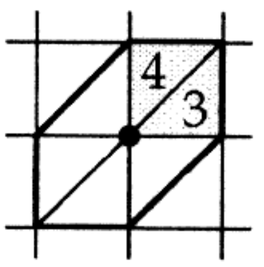
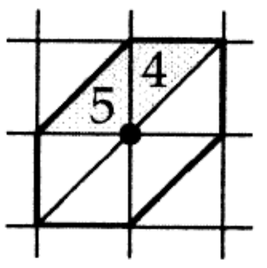
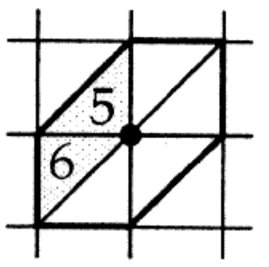
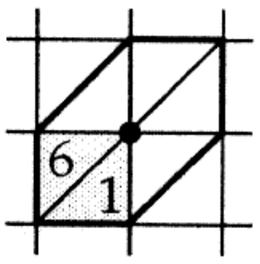
Az $n+1$ számú $(x_\nu\,,\ y_\nu)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ pontra n-edfokú polinomot úgy illesztünk, hogy az alábbi LAGRANGE-féle próbafüggvényt használjuk:

$$g(x) = p_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} y_\mu L_\mu(x)\,. \tag{19.160}$$

Itt az $L_\mu(x)$-ek $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$ a LAGRANGE-féle alappolinomok. A (19.160) interpolációs feltétel akkor teljesül, ha

$$L_\mu(x_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \mu = \nu\,, \\ 0 & \text{ha } \mu \neq \nu\,. \end{cases} \tag{19.161}$$

19.1. táblázat. FEM számítási táblázat

Felületdarab kiválasztása	Grafikus ábrázolás	Háromszögek G_{kl} $G_{\mu\nu}$	$\frac{\partial u_{kl}}{\partial x}$	$\frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial x}$	$\sum \frac{\partial u_{kl}}{\partial x}\frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial x}$
1. $\mu = k$ $\nu = l$		1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6	0 $-1/h$ $-1/h$ 0 $1/h$ $1/h$	0 $-1/h$ $-1/h$ 0 $1/h$ $1/h$	$\frac{4}{h^2}$
2. $\mu = k$ $\nu = l-1$		1 5 2 4	0 $-1/h$	$1/h$ 0	0
3. $\mu = k+1$ $\nu = l$		2 6 3 5	$-1/h$ $-1/h$	$1/h$ $1/h$	$-\frac{2}{h^2}$
4. $\mu = k+1$ $\nu = l+1$		3 1 4 6	$-1/h$ 0	0 $1/h$	0
5. $\mu = k$ $\nu = l+1$		4 2 5 1	0 $-1/h$	$1/h$ 0	0
6. $\mu = k-1$ $\nu = l$		5 3 6 2	$1/h$ $1/h$	$-1/h$ $-1/h$	$-\frac{2}{h^2}$
7. $\mu = k-1$ $\nu = l-1$		6 4 1 3	$1/h$ 0	0 $-1/h$	0

Itt $\delta_{\mu\nu}$ a KRONECKER-szimbólum. A (19.161) feltétel miatt és mivel a LAGRANGE-féle alappolinomok n-edfokúak, ezért

$$L_\mu = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\mu-1})(x-x_{\mu+1})\cdots(x-x_n)}{(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots(x_\mu-x_n)} = \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{n} \frac{x-x_\nu}{x_\mu-x_\nu}\,. \tag{19.162}$$

■ Interpoláljuk az $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 1 & 3 & 2 \end{array}$ táblázattal adott pontokat a LAGRANGE-féle interpolációs képlettel!

Ekkor:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)\,,$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}x(x-3)\,,$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}x(x-1)\,;$$

$$p_2(x) = 1\cdot L_0(x) + 3\cdot L_1(x) + 2\cdot L_2(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1\,.$$

A LAGRANGE interpolációs polinom az adott y_μ függvényértékek explicit, lineáris függvénye. Ennek elméleti meggondolásokban van jelentősége (lásd ADAMS–BASHFORTH-módszer, 928. old.). Gyakorlati számításokban a LAGRANGE interpolációs formula kevésbé alkalmas.

19.6.1.3. Aitken–Neville-interpoláció

Gyakorlati feladatoknál a $p_n(x)$ interpolációs polinomnak nem kell mindig explicit kifejezésnek lennie, elég csak az integrációs tartomány egy adott x helyén a polinom függvényértékét ismernünk. Ezen függvényérték kiszámítása az AITKEN–NEVILLE-módszer szerint rekurzióval történik. Ehhez célszerű az alábbi jelölést használni:

$$p_n(x) = p_{0,1,\ldots,n}(x)\,, \tag{19.163}$$

melyben az indexek az alkalmazott alappontokat és egyúttal az interpolációs polinom fokszámát adják meg. Legyen

$$p_{0,1,\ldots,n}(x) = \frac{(x-x_0)p_{1,2,\ldots,n}(x) - (x-x_n)p_{0,1,2,\ldots,n-1}(x)}{x_n - x_0}\,, \tag{19.164}$$

azaz a $p_{0,1,\ldots,n}(x)$ függvényérték a $p_n(x)$ és $p_0(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomok függvényértékei közötti lineáris interpolációval adódik. (19.164) alkalmazások vázlatát $n=4$ esetben írjuk fel:

$$\begin{array}{c|l} x_0 & y_0 = p_0 \\ x_1 & y_1 = p_1\ p_{01} \\ x_2 & y_2 = p_2\ p_{12}\ p_{012} \\ x_3 & y_3 = p_3\ p_{23}\ p_{123}\ p_{0123} \\ x_4 & y_4 = p_4\ p_{34}\ p_{234}\ p_{1234}\ \underline{p_{01234} = p_4(x).} \end{array} \tag{19.165}$$

(19.165) elemeit oszlop szerint számítjuk. A fenti elrendezésben új értéket mindig a tőle balra álló és a közvetlenül afölött álló értékből nyerünk, pl.

$$p_{23} = \frac{(x-x_2)p_3 - (x-x_3)p_2}{x_3-x_2} = p_3 + \frac{x-x_3}{x_3-x_2}(p_3-p_2)\,, \tag{19.166a}$$

$$p_{123} = \frac{(x-x_1)p_{23} - (x-x_3)p_{12}}{x_3-x_1} = p_{23} + \frac{x-x_3}{x_3-x_1}(p_{23}-p_{12})\,, \tag{19.166b}$$

$$p_{1234} = \frac{(x-x_1)p_{234} - (x-x_4)p_{123}}{x_4-x_1} = p_{234} + \frac{x-x_4}{x_4-x_1}(p_{234}-p_{123})\,. \tag{19.166c}$$

Ha az AITKEN–NEVILLE-algoritmusra számítógépprogramot írunk, akkor mindössze egy $\underline{\mathbf{p}}$, $n+1$-komponensű vektorra van szükség (lásd [19.3]), amely egymásután felveszi a (19.165) egyes oszlopainak értékeit. Itt feltesszük, hogy a k-adik oszlop $p_{i-k,i-k+1,\ldots,i}$ $(i = k, k+1, \ldots, n)$ eleme a $\underline{\mathbf{p}}$ vektor i-edik p_i komponensének felel meg. Így (19.165) oszlopait felülről lefelé számítjuk, hogy megkapjuk a többi szükséges értéket. Az algoritmus az alábbi lépésekből áll:

1. $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legyen $p_i = y_i$. (19.167a)

2. $k = 1, 2, \ldots, n$ és $i = n, n-1, \ldots, k$ esetén legyen $p_i = p_i + \dfrac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}}(p_i - p_{i-1})$. (19.167b)

A (19.167b) algoritmus végén p_n ertéke a $p_n(x)$ függvényérték az adott x helyen.

19.6.2. Középben vett approximáció

A középben vett approximációt, melynél megkülönböztetünk diszkrét és folytonos feladatokat, GAUSS-*féle hibanégyzet-módszer*nek is nevezzük, vagy pedig a *kiegyenlítő számítás* fogalommal foglaljuk össze.

19.6.2.1. Folytonos feladat, normálegyenletek

Approximáljuk az $f(x)$ függvényt az $[a, b]$ intervallumon egy $g(x)$ függvénnyel úgy, hogy az

$$F = \int_a^b \omega(x)[f(x) - g(x)]^2\, dx \tag{19.168}$$

kifejezés értéke minimális legyen, mégpedig azon paraméterek függvényeként, melyeket a $g(x)$ függvény tartalmaz. $\omega(x)$ egy adott súlyfüggvényt jelöl, az egész integrációs intervallumon $\omega(x) > 0$.
Ha $g(x)$-re felírjuk a

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x) \tag{19.169}$$

próbafüggvényt, lineárisan független $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ függvényekkel, akkor a (19.168) relatív minimumára vonatkozó

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{19.170}$$

szükséges feltételekből adódik az úgynevezett normál-egyenletrendszer:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (g_i, g_k) = (f, g_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{19.171}$$

melyből az a_i együtthatókat meghatározzuk. Itt rövidített jelöléseket használtunk:

$$(g_i, g_k) = \int_a^b \omega(x) g_i(x) g_k(x)\, dx \tag{19.172a}$$

$$(f, g_k) = \int_a^b \omega(x) f(x) g_k(x)\, dx \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n), \tag{19.172b}$$

mely kifejezéseket a két függvény skaláris szorzatának is nevezünk.
A normál-egyenletrendszer egyértelműen megoldható, mivel feltettük a $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ próbafüggvények lineáris függetlenségét. A (19.171) egyenletrendszer együtthatómátrixa szimmetrikus, így az egyenletet a CHOLESKY-módszerrel is megoldhatjuk. Az a_i együtthatókat az egyenletrendszer megoldása nélkül akkor tudjuk meghatározni, ha a próbafüggvények rendszere ortogonális, azaz

$$(g_i, g_k) = 0 \quad \text{ha} \quad i \neq k\,. \tag{19.173}$$

Ortonormált rendszerről akkor beszélünk, ha

$$(g_i, g_k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq k\,, \\ 1 & \text{ha } i = k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{19.174}$$

(19.174)-gal a (19.171) normálegyenletek az

$$a_i = (f, g_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{19.175}$$

alakra egyszerűsödnek. Lineárisan független függvényrendszerek mindig ortogonalizálhatók.A $g_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ hatványfüggvényekből súlyfüggvények és integrációs tartományok választásával az alábbi ortogonális polinomokat kapjuk:

19.2. táblázat. Ortogonális polinomok

$[a, b]$	$\omega(x)$	Az ortogonális polinom neve	l. oldal
$[-1, 1]$	1	LEGENDRE-polinom $P_n(x)$	520. old.
$[-1, 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	CSEBISEV-polinom $T_n(x)$	946. old.
$[0, \infty)$	e^{-x}	LAGUERRE-polinom $L_n(x)$	522. old.
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2/2}$	HERMITE-polinom $H_n(x)$	522. old.

(19.176)

Ezzel a választékkal kezelhetők a legfontosabb alkalmazási területek:
1. Véges approximációs intervallum.
2. Egyoldalú végtelen approximációs intervallum, például időfüggő problémák.
3. Mindkét oldalon végtelen approximációs intervallum, például zavarási problémák.
Vegyük figyelembe, hogy minden $[a, b]$ véges intervallum az

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad (x \in [a, b]\,,\, t \in [-1, 1]) \tag{19.177}$$

helyettesítéssel átvihető a $[-1, 1]$ intervallumba, amelyre sok próbafüggvényt definiáltak.

19.6.2.2. Diszkrét feladat, normálegyenletek, Householder-módszer

Legyen adott N számú (x_ν, y_ν) értékpár, például egy mérés eredményei. Keresett az a $g(x)$ függvény, melynek $g(x_\nu)$ függvényértékei az adott y_ν értékeket jól közelítik abban az értelemben, hogy az

$$F = \sum_{\nu=1}^{N} [y_\nu - g(x_\nu)]^2 \tag{19.178}$$

négyzetösszeg, mint a $g(x)$ függvény paramétereinek függvénye, minimális legyen. A (19.178) képlet a klasszikus *hiba-négyzetösszeg.* A hiba-négyzetösszeg minimalizálását a relatív szélsőérték szükséges feltételének alkalmazásával a *legkisebb négyzetek módszerének* nevezzük. (19.169)-ből a relatív minimum $\dfrac{\partial F}{\partial a_i} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ szükséges feltételeivel diszkrét esetben a próbafüggvény együtthatóira a normál-egyenletrendszert kapjuk:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i [g_i g_k] = [y g_k] \quad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{19.179}$$

Itt a GAUSS-féle összeg-szimbolika alapján az alábbi rövidítéseket használjuk:

$$[g_i g_k] = \sum_{\nu=1}^{N} g_i(x_\nu) g_k(x_\nu)\,, \tag{19.180a}$$

$$[y g_k] = \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu g_k(x_\nu) \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n). \tag{19.180b}$$

Rendszerint igaz, hogy $n <<< N$.

■ A $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinom-próbafüggvényre a normálegyenletek $a_0[x^k] + a_1[x^{k+1}] + \cdots + a_n[x^{k+n}] = [x^k y]$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, ahol $[x^k] = \sum_{\nu=1}^{N} {x_\nu}^k$, $[x^0] = N$, $[x^k y] = \sum_{\nu=1}^{N} {x_\nu}^k y_\nu$, $[y] = \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu$. A (19.179) normál-egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, ezért megoldható például a CHOLESKY-módszerrel.

A (19.179) normál-egyenletrendszer és a (19.178) hiba-négyzetösszeg mátrixokkal felírva az alábbi áttekinthető alakra hozható:

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{y}}, \quad F = (\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{G}\underline{\mathbf{a}})^{\mathrm{T}}(\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{G}\underline{\mathbf{a}}) \qquad \text{ahol} \tag{19.181a}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0(x_1) & g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_n(x_1) \\ g_0(x_2) & g_1(x_2) & g_2(x_2) & \ldots & g_n(x_2) \\ g_0(x_3) & g_1(x_3) & g_2(x_3) & \ldots & g_n(x_3) \\ \vdots & & & & \\ g_0(x_N) & g_1(x_N) & g_2(x_N) & \ldots & g_n(x_N) \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{19.181b}$$

Ha a hiba-négyzetösszeg minimalizálása helyett az N számú (x_ν, y_ν) pontra az integrációs eljárást alkalmazzuk, akkor $n < N - 1$ esetén:

$$\mathbf{G}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{y}}, \tag{19.182}$$

Egy túlhatározott lineáris egyenletrendszer lesz, melynek rendszerint nincs megoldása. $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$-vel balról szorozva (19.182)-ból a (19.179), ill. (19.181a) normál-egyenletrendszert kapjuk.
Numerikus szempontból azonban a kedvezőbb a (19.182) kiegyenlítő feladatokra a HOUSEHOLDER-módszert alkalmazni, amely a (19.178) legkisebb hiba-négyzetösszeg értelmében adja a megoldást.

19.6.2.3. Többdimenziós feladatok

1. Kiegyenlítő feladat

Tekintsük a következő többdimenziós kiegyenlítő feladatot: keresett az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény képlete ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változók), ha adottak az f_ν függvényértékek, melyek általában mérési eredmények (lásd a mellékelt táblázatot).
Vektoros jelölést használva a feladat leírása áttekinthetőbb és jobban felismerhető az analógia az egydimenziós esettel:

x_1	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$\ldots$	$x_1^{(N)}$
x_2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$\ldots$	$x_2^{(N)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$x_n^{(1)}$	$x_n^{(2)}$	$\ldots$	$x_n^{(N)}$
f	f_1	f_2	$\ldots$	f_N

(19.183)

$\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$: a független változók vektora,
$\underline{\mathbf{x}}^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})^{\mathrm{T}}$: a ν-edik alapponthoz tartozó vektor $(\nu = 1, \ldots, N)$,
$\underline{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, \ldots f_N)^{\mathrm{T}}$: az N alapponthoz tartozó függvényértékek vektora.

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\underline{\mathbf{x}})$ függvényérték közelítésére az alábbi próbafüggvényt alkalmazzuk:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} a_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{19.184}$$

Itt az $m + 1$ számú $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_i(\underline{\mathbf{x}})$ függvény az alkalmasan választott próbafüggvényeket jelöli.

■ **A:** n-változós lineáris próbafüggvény: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$.

■ **B:** 3-változós teljes-négyzet próbafüggvény:
$g(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 {x_1}^2 + a_5 {x_2}^2 + a_6 {x_3}^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_1 x_3 + a_9 x_2 x_3$.

A próbafüggvények együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy a $\sum_{\nu=1}^{N} \left[f_\nu - g\left(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)} \right) \right]^2 =$ min teljesüljön.

2. Normál-egyenletrendszer Ha (19.181b)-val analóg módon képezzük a $\mathbf{G}$ mátrixot, melybe formálisan az x_ν alappontok helyére $\underline{\mathbf{x}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ alapvektorokat írunk, akkor normál-egyenletrendszer a többdimenziós esetben is

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{f}} \tag{19.185}$$

alakban írható, vagy pedig a

$$\mathbf{G}\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{f}} \tag{19.186}$$

túlhatározott lineáris egyenletrendszert alkalmazzuk.

■ Többdimenziós regresszióra példa: (lásd 806. old.).

19.6.2.4. Nemlineáris négyzetesközép-feladatok

A megoldási módszer elvét egy diszkrét, egydimenziós példán mutatjuk meg. A $g(x)$ próbafüggvénynek vannak olyan paraméterei, melyektől nem lineárisan függ.

■ **A:** $g(x) = a_0 e^{a_1 x} + a_2 e^{a_3 x}$. Ebben az exponenciális összegben a_1 és a_3 nem lineárisan szereplő paraméterek.

■ **B:** $g(x) = a_0 e^{a_1 x} \cos a_2 x$. Itt a_1 és a_2 nem lineáris paraméter.

A $g(x)$ próbafüggvények az $\underline{\mathbf{a}} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ paraméter-vektortól való függését a

$$g = g(x, \underline{\mathbf{a}}) = g(x;\, a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{19.187}$$

összefüggés jelöli. Legyen N számú (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ értékpár. A

$$\sum_{\nu=1}^{N} [y_\nu - g(x_\nu;\, a_0, a_1, \ldots, a_n)]^2 = F(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{19.188}$$

hiba-négyzetösszeget a $\dfrac{\partial F}{\partial a_i} = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ szükséges feltételekkel minimalizáljuk, melyek egy nemlineáris normál-egyenletrendszert adnak. Ezt pl. az iterációs NEWTON-módszerrel (lásd 920. old.) oldhatjuk meg.

Egy másik, a gyakorlati feladatokban gyakran használt eljárás, hogy a (19.24) nemlineáris négyzetesközép feladatokra az GAUSS–NEWTON-módszert (lásd 920. old.) használjunk. Ezt a most megoldandó (19.188) nemlineáris approximációs feladatra a következő lépések szerint alkalmazzuk:

1. A $g(x, \underline{\mathbf{a}})$ próbafüggvényt az a_i-k szerinti TAYLOR-sorral linearizáljuk. Ehhez ismernünk kell az $a_i^{(0)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ kezdeti értékeket:

$$g(x, \underline{\mathbf{a}}) \approx \tilde{g}(x, \underline{\mathbf{a}}) = g(x, \underline{\mathbf{a}}^{(0)}) + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial a_i}(x, \underline{\mathbf{a}}^{(0)})(a_i - a_i^{(0)})\,. \tag{19.189}$$

2. Megoldjuk a

$$\sum_{\nu=1}^{N} [y_\nu - \tilde{g}(x_\nu, \underline{\mathbf{a}})]^2 = \min! \tag{19.190}$$

lineáris kiegyenlítő feladatot a

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{G}}\underline{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}} \tag{19.191}$$

normál-egyenletrendszer segítségével vagy a HOUSEHOLDER-módszerrel. (19.191)-ben $\underline{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{a}}$ és $\underline{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}}$ vektorok komponensei

$$\Delta a_i = a_i - a_i^{(0)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \quad \text{és} \tag{19.192a}$$

$$\Delta y_\nu = y_\nu - g(x_\nu, \underline{\mathbf{a}}^{(0)}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{19.192b}$$

A $\tilde{\mathbf{G}}$ mátrixot a (19.181b)-beli $\mathbf{G}$ mátrixhoz hasonlóan képezzük, amikor $g_i(x_\nu)$ helyére $\dfrac{\partial g}{\partial a_i}(x_\nu, \underline{\mathbf{a}}_1^{(0)})$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, N)$ kerül.

3. Az új közelítés kiszámítása:

$$a_i^{(1)} = a_i^{(0)} + \Delta a_i, \text{ ill. } a_i^{(1)} = a_i^{(0)} + \gamma \Delta a_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{19.193}$$

ahol $\gamma > 0$ egy lépésköz-paraméter.

A **2.** és a **3.** lépéseket ismételjük: $a_i^{(1)}$ helyére $a_i^{(0)}$-et írunk, és így tovább folytatva megkapjuk a közelítő értékek egy sorozatát, melynek konvergenciája igen erősen függ a kezdeti közelítő értékek jó választásától. Viszont a γ lépésköz-paraméter segítségével mindig elérhető a hiba-négyzetösszeg csökkentése.

19.6.3. Csebisev-approximáció

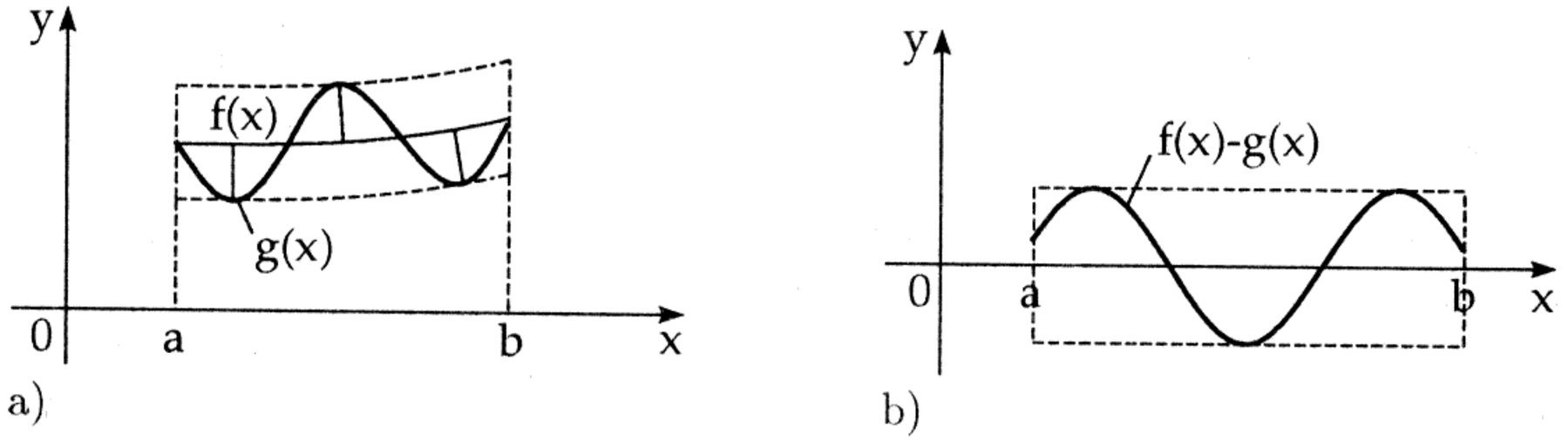
19.6.3.1. A feladat kitűzése és az alternálási tétel

1. A Csebisev-approximáció

CSEBISEV-*approximáció*n vagy *egyenletes approximáció*n folytonos esetben a következő feladatot értjük: Egy $a \le x \le b$ intervallumban az $f(x)$ függvényt egy $g(x) = g(x\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ közelítő függvénnyel úgy kell approximálnunk, hogy

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_n)| = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{19.194}$$

legnagyobb hiba-abszolútérték az a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ paraméterek választásával a lehető legkisebb legyen. Ha $f(x)$-hez létezik egy ilyen közelítő-függvény, akkor az eltérések a maximumot az intervallumnak legalább $n + 2$ számú x_ν pontjában, az úgynevezett alternáló pontokban, váltakozó előjellel **(19.10. ábra)** veszi fel. Ez a lényege a CSEBISEV-féle approximációs feladat megoldásának jellemzésére szolgáló alternálási tételnek.



19.10. ábra.

■ Ha a $[-1, 1]$ intervallumon az $f(x) = x^n$ függvényt egy legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinommal közelítjük, akkor ha a hibafüggvényt úgy normáljuk, hogy maximuma 1 legyen, a $T_n(x)$ CSEBISEV-polinomot kapjuk. Az alternáló pontok, melyek a határpontok és $n - 1$ pont az intervallum belsejében, a $T_n(x)$ szélsőértékhelyeinek felelnek meg **(19.11.a–f ábrák)**.

19.6.3.2. A Csebisev-polinomok tulajdonságai

1. Ábrázolások

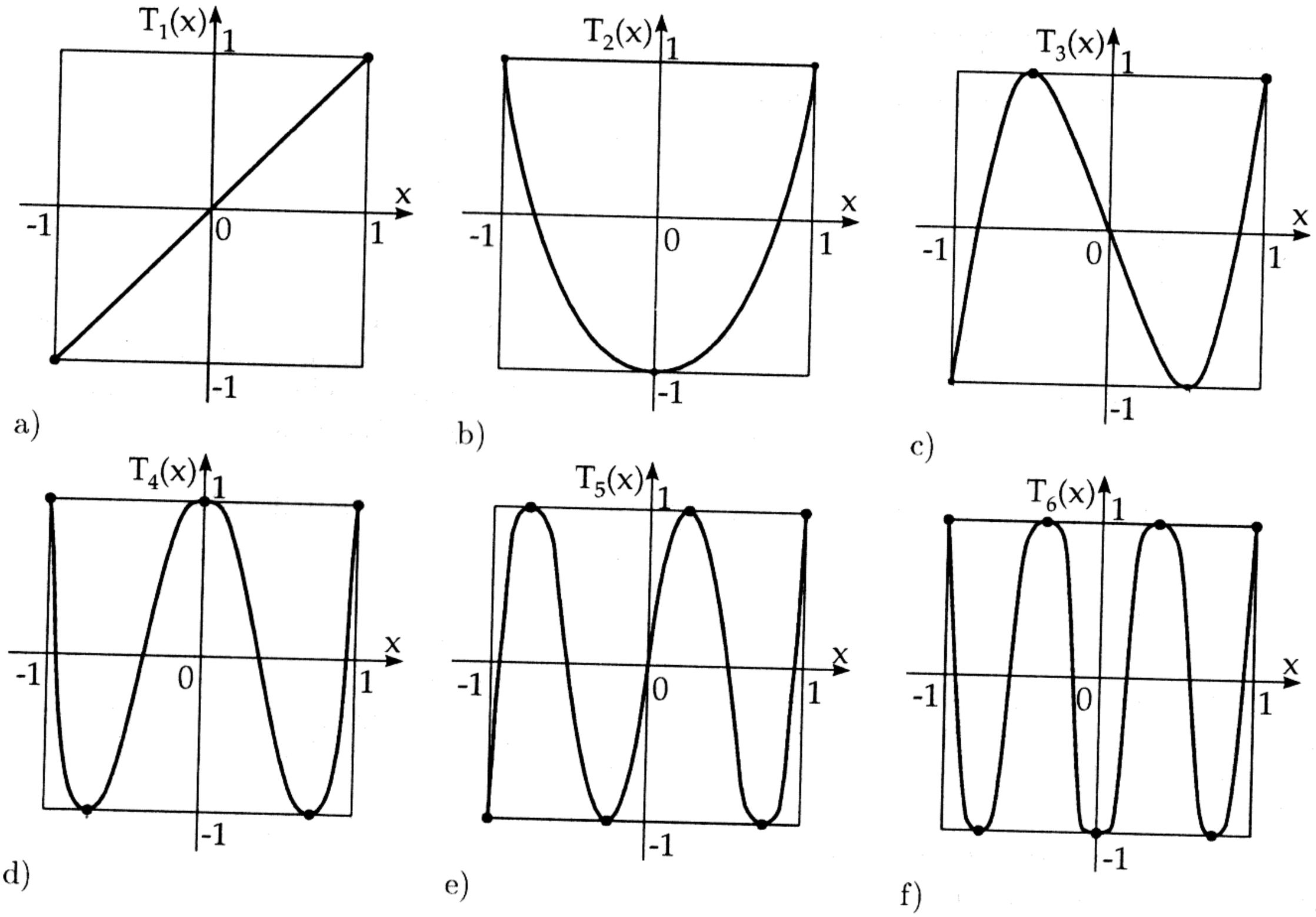
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \tag{19.195a}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right], \tag{19.195b}$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos nt,\ x = \cos t & \text{ha } |x| < 1\,, \\ \operatorname{ch} nt,\ x = \operatorname{ch} t & \text{ha } |x| > 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{19.195c}$$

2. $T_n(x)$ gyökei

$$x_\mu = \cos\frac{(2\mu - 1)\pi}{2n} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.196}$$



19.11. ábra.

3. $T_n(x)$ szélsőértékei ha $x \in [-1, 1]$

$$x_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.197}$$

4. Rekurziós képlet

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots\,;\, T_0(x) = 1\,,\, T_1(x) = x)\,. \tag{19.198}$$

Ebből következik például, hogy

$$T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x\,, \tag{19.199a}$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\,, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\,, \tag{19.199b}$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\,, \tag{19.199c}$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\,, \tag{19.199d}$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\,, \tag{19.199e}$$
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x\,, \tag{19.199f}$$
$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1\,. \tag{19.199g}$$

19.6.3.3. Remes-algoritmus

1. Az alternálási tétel következményei

Az alternálási tétel a folytonos CSEBISEV-féle approximációs feladat numerikus megoldásának a kiindulópontja. Ha a próbafüggvénynek a

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x) \tag{19.200}$$

függvényt választjuk $n+1$ számú lineárisan független, ismert $g_i(x)$ próbafüggvénnyel, akkor ${a_i}^*$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ jelöli a CSEBISEV-féle approximációs feladat megoldásának együtthatóit és (19.194) szerint $\varrho = \Phi({a_0}^*, {a_1}^*, \ldots, {a_n}^*)$ jelöli a hozzátartozó minimális eltérést. Abban az esetben, ha az f és g_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ függvények differenciálhatók, az alternálási tételből következik:

$$\sum_{i=0}^{n} {a_i}^* g_i(x_\nu) + (-1)^\nu \varrho = f(x_\nu)\,, \qquad \sum_{i=0}^{n} {a_i}^* g'(x_\nu) = f'(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+2)\,. \tag{19.201}$$

Az x_ν pontok az alternáló pontok, melyekre

$$a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le b\,. \tag{19.202}$$

A (19.201) egyenletek $2n+4$ számú feltételt jelentenek a CSEBISEV-féle approximációs-feladat $2n+4$ ismeretlenére. $n+1$ próbafüggvény-együtthatóra, $n+2$ alternáló pontra és a ϱ minimális eltérésre. Ha a intervallum határpontjai az alternáló ponthoz tartoznak, a deriváltakra a feltételeknek nem kell teljesülniük.

2. A minimálmegoldás meghatározása Remes szerint

REMES szerint a minimálmegoldást az alábbiak szerint határozzuk meg:

1. Meghatározunk egy ${x_\nu}^{(0)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n+2)$ alternáló-pont közelítést (19.202) szerint, melyek például ekvidisztans pontok vagy a $T_{n+1}(x)$ szélsőértékhelyei (lásd 946. old.).

2. Megoldjuk a lineáris egyenletrendszert:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i g_i({x_\nu}^{(0)}) + (-1)^\nu \varrho = f({x_\nu}^{(0)}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+2)$$

és így megkapjuk az ${a_i}^{(0)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ és ϱ_0 közelítéseket.

3. Megadunk egy következő ${x_\nu}^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n+2)$ alternáló-pont közelítést, például mint az $f(x) - \sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(0)} g_i(x)$ hibafüggvény szélsőérték-helyeit. Itt elég, ha a szélsőértekhelyekre közelítéseket használunk.

A **2.** és **3.** lépéseket ismételjük, amikor ${x_\nu}^{(1)}$ és ${a_i}^{(1)}$ helyére ${x_\nu}^{(0)}$ és ${a_i}^{(0)}$ kerül, és ezt folytatva az együtthatókra és az alternáló pontokra közelítések sorozatát kapjuk, melynek konvergenciáját a [19.29] irodalom tárgyalja. A REMES-algoritmust alkalmazó eljárást megszakíthatjuk, ha például egy bizonyos μ iterációs indextől kezdve:

$$|\varrho_\mu| = \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} {a_i}^{(\mu)} g_i(x) \right| \tag{19.203}$$

már elég pontosságot biztosít.

19.6.3.4. Diszkrét Csebisev-approximáció és optimizálás

A

$$\max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x) \right| = \min! \tag{19.204}$$

folytonos CSEBISEV approximációs feladatból a hozzátartozó diszkrét feladatot úgy kapjuk meg, ha N számú x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N\,;\, N \geq n+2)$ alappontot az $a \leq x_1 < x_2 \cdots < x_N \leq b$ tulajdonsággal úgy választunk, hogy

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,N} \left| f(x_\nu) - \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x_\nu) \right| = \min! \tag{19.205}$$

A

$$\gamma = \max_{\nu=1,2,\ldots,N} \left| f(x_\nu) - \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x_\nu) \right| , \tag{19.206}$$

helyettesítést alkalmazva kapjuk:

$$\left| f(x_\nu) - \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x_\nu) \right| \leq \gamma \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{19.207}$$

(19.207)-ban az abszolútérték felbontása után lineáris egyenlőtlenség-rendszert kapunk γ-ra és az a_i együtthatókra úgy, hogy (19.205)-ból a megfelelő lineáris optimizálásási feladat (lásd 871. old.)

$$\gamma = \min! \qquad \text{ha} \quad \begin{cases} \gamma + \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x_\nu) \geq \quad f(x_\nu)\,, \\ \gamma - \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x_\nu) \geq -f(x_\nu)\,, \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{19.208}$$

A (19.208) egyenletnek $\gamma > 0$ esetén mindig van minimál-megoldása. Ha az alappontok N száma elég nagy, akkor bizonyos feltételek mellett a diszkrét feladat megoldását a folytonos feladat megoldása közelítésének tekinthetjük.

Ha a lineáris $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x)$ közelítő függvény helyett egy olyan $g(x) = g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ függvényt alkalmazunk, mely az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ paramétereknek nemlineáris függvénye, akkor az előzőekkel analóg módon egy *nemlineáris optimalizálási feladat*ot , kapunk, amely már egyszerű, nemlineáris próbafüggvény esetén rendszerint nem konvex. Ez a tény lényegesen korlátozza a nemlineáris optimalizálási feladatokra alkalmazott numerikus megoldási módszerek választékát. (lásd 887. old.).

19.6.4. Harmonikus analízis

Egy formálisan vagy tapasztalatilag megadott $f(x)$ 2π szerinti periodikus függvényt a

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \tag{19.209}$$

trigonometrikus polinommal vagy FOURIER-összeggel közelítjük, ahol a_0, a_k és b_k valós számok. A harmonikus analízis tárgya a próbafüggvény együtthatóinak meghatározására.

19.6.4.1. A trigonometrikus interpoláció képletei

1. A Fourier-együtthatók képletei

Mivel az 1 , $\cos kx$, $\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ függvényrendszer a $[0, 2\pi]$ intervallumon az $\omega \equiv 1$ súlyfüggvény esetén ortogonális, a hibanégyzet-módszer alkalmazásával (19.171)-ból a próbafüggvény együtthatóira az

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.210}$$

képleteket kapjuk. A (19.210) képlet szerint kiszámított a_k és b_k együtthatókat nevezzük az $f(x)$ periodikus függvény FOURIER-együtthatóinak (lásd 427. old.).

Ha a (19.210)-ban fellépő integrálokat nem lehet, vagy nagyon bonyolult elemi úton kiszámítani, vagy az $f(x)$ függvény értékei csak egyes pontokban adottak, akkor a FOURIER-együtthatókat közelítőleg határozzuk meg numerikus integrálással.
A trapézformula (lásd 922. old.) alkalmazására $N+1$ számú

$$x_\nu = \nu h \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, N), \quad h = \frac{2\pi}{N} \tag{19.211}$$

ekvidisztans alappont esetén az alábbi közelítő formulát kapjuk:

$$a_k \approx \tilde{a}_k = \frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N} f(x_\nu)\cos kx_\nu\,, \quad b_i \approx \tilde{b}_k = \frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N} f(x_\nu)\sin kx_\nu \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{19.212}$$

A periodikus függvények itt ismertetett esetében a trapézformula átment az egyszerű téglányösszegbe. Ez ebben az esetben nagy pontosságot biztosít, mivel a trapézformula hibarendje: $O(h^{2m+2})$.

2. Trigonometrikus interpoláció

Egyes speciális trigonometrikus polinomok, melyeket az $\tilde{a}_k$ és $\tilde{b}_k$ közelítő együtthatókkal képezünk, igen fontos approximációs tulajdonságokkal rendelkeznek. Kettő ezek közül:

1. Interpoláció Legyen $N = 2n$. A

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{2}\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\tilde{a}_k\cos kx + \tilde{b}_k\sin kx) + \frac{1}{2}\tilde{a}_n\cos nx \tag{19.213}$$

speciális trigonometrikus polinom a (19.212) együtthatókkal az x_ν alappontokban teljesíti a

$$\tilde{g}_1(x_\nu) = f(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{19.214}$$

interpolációs feltételt. $f(x)$ periodicitása miatt $f(x_0) = f(x_N)$.

2. Középben vett approximáció Legyen $N = 2n$. A

$$\tilde{g}_2(x) = \frac{1}{2}\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{m}(\tilde{a}_k\cos kx + \tilde{b}_k\sin kx) \tag{19.215}$$

speciális trigonometrikus polinom $m < n$ esetén a (19.212) együtthatókkal az $f(x)$ függvényt diszkrét négyzetes középben approximálja, azaz az

$$F = \sum_{\nu=1}^{N}[f(x_\nu) - \tilde{g}_2(x_\nu)]^2 \tag{19.216}$$

hiba-négyzetösszeg értéke minimális. A (19.212) képletek adják a kiindulópontot a FOURIER-együtthatók effektív kiszámítására szolgáló különböző eljárásokra.

19.6.4.2. Gyors Fourier-transzformáció (FFT)

1. A Fourier együtthatók kiszámításának számítási igénye

A (19.212) képletekben fellépő összegek a diszkrét FOURIER-transzformációval összefüggésben is előfordulnak, például az elektrotechnikában, az impulzus- és mindenekelőtt a képfeldolgozásokban. Itt N igen nagy lehet, ezért a megfelelő összegeket igen racionálisan kell számítanunk, mivel a FOURIER-együtthatókra N számú (19.212) közelítőérték kiszámítása N^2 összeadást és N^2 szorzást igényel. Az

$N = 2^p$ speciális esetben azonban az ún. *gyors* FOURIER-*transzformáció* **FFT** (**F**ast **F**OURIER **T**ransformation) segítségével a szorzások $N^2 = 2^{2p}$ számát $pN = p2^p$-re csökkenthetjük. A mellékelt számpélda mutatja ennek a redukciónak a nagyságrendjét.

p	N^2	pN
10	$\sim 10^6$	$\sim 10^4$
20	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^7$

(19.217)

Ezáltal a számítások terjedelme és így a számítási idő olyan erősen lecsökken, hogy egyes fontos alkalmazási területeken kisebb számítógépek is alkalmazhatók.
Az FFT felhasználja az N-edik egységgyökök, azaz $z^N = 1$ egyenlet gyökeinek a tulajdonságait ahhoz, hogy (19.212)-ban az összeadásokat szukcesszíven összefoglalja.

2. A Fourier-összeg komplex alakja

Hogy az FFT elvét a lehető legegyszerűbben leírhassuk, átalkítjuk a (19.209) FOURIER-összeget a

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx}\right), \quad \sin kx = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(e^{-\mathrm{i}kx} - e^{\mathrm{i}kx}\right) \tag{19.218}$$

képletek segítségével az alábbi komplex képletté:

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}e^{\mathrm{i}kx} + \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}e^{-\mathrm{i}kx}\right). \tag{19.219}$$

Ha

$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}, \tag{19.220a}$$

akkor (19.210) miatt

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx, \tag{19.220b}$$

és (19.219) átmegy a FOURIER összeg komplex alakjába:

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} \quad \text{mit} \quad c_{-k} = \bar{c}_k. \tag{19.221}$$

Ha a c_k komplex együtthatókat megkaptuk, akkor ezekből is megkaphatjuk a valós FOURIER-együtthatókat:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = 2\mathrm{Re}(c_k), \quad b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{19.222}$$

3. A komplex Fourier-együtthatók numerikus kiszámítása

A c_k együtthatók numerikus kiszámításához (19.220b)-ra alkalmazzuk a trapéz-formulát (19.211) és (19.212)-hoz analóg módon és így a diszkrét komplex $\tilde{c}_k$ FOURIER-együtthatók:

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} f(x_\nu)e^{-\mathrm{i}kx_\nu} = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \omega_N^{k\nu} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{ahol} \tag{19.223a}$$

$$f_\nu = \frac{1}{N}f(x_\nu), \quad x_\nu = \frac{2\pi\nu}{N} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1), \quad \omega_N = e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}. \tag{19.223b}$$

A (19.223a) kifejezést (19.223b) figyelembevételével az f_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ függvényértékek N hosszúságú diszkrét komplex FOURIER-transzformációjának nevezzük.
Az $\omega_N^\nu = z$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ hatványok eleget tesznek a $z^N = 1$ egyenletnek. Ezért ezeket N-edik egységgyököknek is nevezzük. Mivel $e^{-2\pi\mathrm{i}} = 1$, ezért:

$$\omega_N^N = 1, \ \omega_N^{N+1} = \omega_N^1, \ \omega_N^{N+2} = \omega_N^2, \ldots. \tag{19.224}$$

A (19.223a) összeg effektív számítása abból adódik, hogy egy $N = 2n$ hosszúságú diszkrét komplex FOURIER-transzformáció két, $N/2 = n$ hosszúságú transzformációra vezethető vissza a következőképpen:

a) A páros indexű $\tilde{c}_k$ együtthatókra $k = 2l$:

$$\tilde{c}_{2l} = \sum_{\nu=0}^{2n-1} f_\nu \omega_N^{2l\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[f_\nu \omega_N^{2l\nu} + f_{n+\nu}\omega_N^{2l(n+\nu)}\right] = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[f_\nu + f_{n+\nu}\right]\omega_N^{2l\nu}. \tag{19.225}$$

Itt figyelembe vettük, hogy $\omega_N^{2l(n+\nu)} = \omega_N^{2ln}\omega_N^{2l\nu} = \omega_N^{2l\nu}$. Ha az

$$y_\nu = f_\nu + f_{n+\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{19.226}$$

helyettesítést elvégeztük, és figyelembe vesszük, hogy $\omega_N^2 = \omega_n$, akkor

$$\tilde{c}_{2l} = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \omega_n^{l\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{19.227}$$

az y_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ értékek diszkrét komplex FOURIER $n = N/2$ hosszúságú transzformációja.

b) A páratlan indexű $\tilde{c}_k$ együtthatókra, $k = 2l + 1$, és az előbbiekkel analóg módon:

$$\tilde{c}_{2l+1} = \sum_{\nu=0}^{2n-1} f_\nu \omega_N^{(2l+1)\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} [(f_\nu - f_{n+\nu})\omega_N^\nu]\, \omega_N^{2l\nu} . \tag{19.228}$$

Ha az

$$y_{n+\nu} = (f_\nu - f_{n+\nu})\omega_N^\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{19.229}$$

helyettesítést elvégezzük, és figyelembe vesszük, hogy $\omega_N^2 = \omega_n$ akkor

$$\tilde{c}_{2l+1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_{n+\nu}\omega_n^{l\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{19.230}$$

az $y_{n+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ értékek diszkrét FOURIER $n = N/2$ hosszúságú transzformációja.
A számításnak az **a)** és **b)**, pontokban leírt redukálása, azaz egy diszkrét komplex FOURIER-transzformáció visszavezetése két, fele hosszúságú diszkrét komplex transzformációra folytatható, ha az N szám 2 hatványaként írható fel: $N = 2^p$ (p természetes szám). A redukálás p-szer ismétlése az FFT. Mivel mindenegyes redukáló lépésben (19.229) miatt $N/2$ komplex szorzás van, ezért az FFT műveleti nagyságrendje:

$$\frac{N}{2}p = \frac{N}{2}\log_2 N . \tag{19.231}$$

4. Az FFT vázlata

Az $N = 8 = 2^3$ speciális esetben (19.226) és (19.229) szerint az FFT három redukciós lépését az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

1. táblázat:

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	
f_0	$y_0 = f_0 + f_4$	$y_0 := y_0 + y_2$	$y_0 := y_0 + y_1$	$= \tilde{c}_0$
f_1	$y_1 = f_1 + f_5$	$y_1 := y_1 + y_3$	$y_1 := (y_0 - y_1)\omega_2^0$	$= \tilde{c}_4$
f_2	$y_2 = f_2 + f_6$	$y_2 := (y_0 - y_2)\omega_4^0$	$y_2 := y_2 + y_3$	$= \tilde{c}_2$
f_3	$y_3 = f_3 + f_7$	$y_3 := (y_1 - y_3)\omega_4^1$	$y_3 := (y_2 - y_3)\omega_2^0$	$= \tilde{c}_6$
f_4	$y_4 = (f_0 - f_4)\omega_8^0$	$y_4 := y_4 + y_6$	$y_4 := y_4 + y_5$	$= \tilde{c}_1$
f_5	$y_5 = (f_1 - f_5)\omega_8^1$	$y_5 := y_5 + y_7$	$y_5 := (y_4 - y_5)\omega_2^0$	$= \tilde{c}_5$
f_6	$y_6 = (f_2 - f_6)\omega_8^2$	$y_6 := (y_4 - y_6)\omega_4^0$	$y_6 := y_6 + y_7$	$= \tilde{c}_3$
f_7	$y_7 = (f_3 - f_7)\omega_8^3$	$y_7 := (y_5 - y_7)\omega_4^1$	$y_7 := (y_6 - y_7)\omega_2^0$	$= \tilde{c}_7$
	$N = 8,\ n := 4,\ \omega_8 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{8}}$	$N := 4,\ n := 2,\ \omega_4 = \omega_8^2$	$N := 2,\ n := 1,\ \omega_2 = \omega_4^2$	

A 3. lépésben, ahol y-értékhez hozzárendeljük a keresett komplex FOURIER-együtthatókat, láthatjuk, hogy történik az egyes redukciós lépésekben a páros és páratlan indexű együtthatók kiszámítása. A következő **2. táblázatban** ennek a vázlatát adjuk meg

2. táblazat:

$$\tilde{c}_k \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{2k} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{4k} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{8k} \\ \tilde{c}_{8k+4} \end{cases} \\ \tilde{c}_{4k+2} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{8k+2} \\ \tilde{c}_{8k+6} \end{cases} \end{cases} \\ \tilde{c}_{2k+1} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{4k+1} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{8k+1} \\ \tilde{c}_{8k+5} \end{cases} \\ \tilde{c}_{4k+3} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_{8k+3} \\ \tilde{c}_{8k+7} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \tag{19.232}$$

$(k = 0, 1, \ldots, 7) \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (k = 0, 1) \quad (k = 0).$

Ha az **1. táblázatban** felírjuk a $\tilde{c}_k$ együtthatókat és indexeiket az első redukciós lépés előtt és a harmadik után a kettes számrendszerben adjuk meg, akkor látható, hogy a keresett együtthatók sorrendje bit-tükrözéssel egyszerűen megkapható, mint azt a **3. táblázat** mutatja.

3. táblázat:	Index	1. lépés	2. lépés	3. lépés	Index
$\tilde{c}_0$	000	$\tilde{c}_0$	$\tilde{c}_0$	$\tilde{c}_0$	000
$\tilde{c}_1$	00L	$\tilde{c}_2$	$\tilde{c}_4$	$\tilde{c}_4$	L00
$\tilde{c}_2$	0L0	$\tilde{c}_4$	$\tilde{c}_2$	$\tilde{c}_2$	0L0
$\tilde{c}_3$	0LL	$\tilde{c}_6$	$\tilde{c}_6$	$\tilde{c}_6$	LL0
$\tilde{c}_4$	L00	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_1$	00L
$\tilde{c}_5$	L0L	$\tilde{c}_3$	$\tilde{c}_5$	$\tilde{c}_5$	L0L
$\tilde{c}_6$	LL0	$\tilde{c}_5$	$\tilde{c}_3$	$\tilde{c}_3$	0LL
$\tilde{c}_7$	LLL	$\tilde{c}_7$	$\tilde{c}_7$	$\tilde{c}_7$	LLL

■ Hajtsuk végre a diszkrét FOURIER transzformációt az FFT alkalmazásával az

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi^2 \text{ ha } x = 0\,, \\ x^2 \text{ ha } 0 < x < 2\pi\,, \end{cases}$$

2π szerint periodikus függvényre. Legyen $N = 8$. Ekkor $x_\nu = \dfrac{2\pi}{8}$, $f_\nu = \dfrac{1}{8} f(x_\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 7)$, $\omega_8 = e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{8}} = 0{,}707107(1 - \mathrm{i})$, $\omega_8^2 = -\mathrm{i}$, $\omega_8^3 = -0{,}707107(1 + \mathrm{i})$ és az alábbi **4. táblázat** tartalmazza az eredményeket

4. táblázat	1. lépés	2. lépés	3. lépés
$f_0 = 2{,}467401$	$y_0 = 3{,}701102$	$y_0 = 6{,}785353$	$y_0 = 13{,}262281 \quad = \tilde{c}_0$
$f_1 = 0{,}077106$	$y_1 = 2{,}004763$	$y_1 = 6{,}476928$	$y_1 = \ 0{,}308425 \quad = \tilde{c}_4$
$f_2 = 0{,}308425$	$y_2 = 3{,}084251$	$y_2 = 0{,}616851$	$y_2 = \ 0{,}616851 + 2{,}467402\,\mathrm{i} = \tilde{c}_2$
$f_3 = 0{,}693957$	$y_3 = 4{,}472165$	$y_3 = 2{,}467402\,\mathrm{i}$	$y_3 = \ 0{,}616851 - 2{,}467402\,\mathrm{i} = \tilde{c}_6$
$f_4 = 1{,}233701$	$y_4 = 1{,}233700$	$y_4 = 1{,}233700 + 2{,}467401\,\mathrm{i}$	$y_4 = \ 2{,}106058 + 5{,}956833\,\mathrm{i} = \tilde{c}_1$
$f_5 = 1{,}927657$	$y_5 = -1{,}308537(1 - \mathrm{i})$	$y_5 = 0{,}872358 + 3{,}489432\,\mathrm{i}$	$y_5 = \ 0{,}361342 - 1{,}022031\,\mathrm{i} = \tilde{c}_5$
$f_6 = 2{,}775826$	$y_6 = 2{,}467401\,\mathrm{i}$	$y_6 = 1{,}233700 - 2{,}467401\,\mathrm{i}$	$y_6 = \ 0{,}361342 + 1{,}022031\,\mathrm{i} = \tilde{c}_3$
$f_7 = 3{,}778208$	$y_7 = 2{,}180895(1 + \mathrm{i})$	$y_7 = -0{,}872358 + 3{,}489432\,\mathrm{i}$	$y_7 = \ 2{,}106058 - 5{,}956833\,\mathrm{i} = \tilde{c}_7$

A harmadik (utolsó) redukciós lépésből kapjuk (19.222) szerint az itt látható valós FOURIER együtthatókat.
Ez a példa szemlélteti a FOURIER együtthatóknak azt az általános tulajdonságát, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= 26{,}524\,562 \\ a_1 &= \ 4{,}212\,116 \quad b_1 = -11{,}913\,666 \\ a_2 &= \ 1{,}233\,702 \quad b_2 = -\ 4{,}934\,804 \\ a_3 &= \ 0{,}722\,684 \quad b_3 = -\ 2{,}044\,062 \\ a_4 &= \ 0{,}616\,850 \quad b_4 = \ 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{c}_{N-k} = \bar{\tilde{c}}_k \tag{19.233}$$

Itt $k = 1, 2, 3$ esetén látható, hogy $\tilde{c}_7 = \bar{\tilde{c}}_1$, $\tilde{c}_6 = \bar{\tilde{c}}_2$, $\tilde{c}_5 = \bar{\tilde{c}}_3$.

19.7. Görbék és felületek ábrázolása spline-ok segítségével

19.7.1. Harmadfokú spline-ok

Mivel a magasabb fokszámú interpolációs és kiegyenlítő polinomok rendszerint nemkívánatos oszcillációval rendelkeznek, célszerű az approximációs intervallumot úgynevezett csomópontokkal részintervallumokra osztani és az approximációt mindenegyes részintervallumon viszonylag egyszerű függvényekkel elvégezni. A gyakorlatban legtöbbször harmadfokú polinomokat alkalmaznak. Az a célunk, hogy ennél a szakaszonkénti approximációnál a csomópontokban az egyes függvények sima átmenetét biztosítsuk.

19.7.1.1. Interpolációs spline-ok

1. A harmadfokú interpolációs spline definíciója

Legyen adott N számú (x_i, f_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$ interpolációs pont. Az $S(x)$ harmadfokú interpolációs-splinet egyértelműen meghatározzák az alábbi tulajdonságok:

1. $S(x)$ kielégíti az $S(x_i) = f_i$ $(i = 1,2, \ldots, N)$ interpolációs feltételt.

2. $S(x)$ minden $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ részintervallumban legfeljebb harmadfokú polinom.

3. $S(x)$ az $[x_1, x_N]$ approximációs intervallumban folytonosan differenciálható.

4. $S(x)$ kielégíti az alábbi feltételeket:

a) $S''(x_1) = S''(x_N) = 0$ (ekkor természetes spline-ról beszélünk) vagy

b) $S'(x_1) = f_1{}'$, $S'(x_N) = f_N{}'$ ($f_1{}'$ és $f_N{}'$ adott számértékek) vagy

c) $S(x_1) = S(x_N)$, ha $f_1 = f_N$, és $S'(x_1) = S'(x_N)$ valamint $S''(x_1) = S''(x_N)$ (ekkor periodikus spline-ról beszélünk).

Ezekből a tulajdonságokból következik, hogy az összes kétszer folytonosan differenciálható olyan $g(x)$ függvények között, melyek kielégítik a $g(x_i) = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ feltételt az $S(x)$ függvényre még az is igaz, hogy

$$\int_{x_1}^{x_N} [S''(x)]^2\,dx \le \int_{x_1}^{x_N} [g''(x)]^2\,dx \tag{19.234}$$

(HOLLADAY tétele). (19.234) alapján azt mondjuk, hogy $S(x)$ összgörbülete minimális, mivel egy síkgörbe κ görbületére első közelítésben igaz, hogy $\kappa \approx S''$ (lásd 229. old.). Ezenkívül megmutatható: ha az (x_i, f_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$ pontokon át egy vékony rugalmas vonalzót (angolul spline) fektetünk, akkor annak hajlatait pont a harmadfokú interpolációs spline írja le.

2. A spline-együtthatók meghatározása

Az $S(x)$ harmadfokú spline-t az $x \in [x_i, x_{i+1}]$ értékek esetén az

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N-1)\,. \tag{19.235}$$

próbafüggvénnyel írjuk le. A részintervallum hosszát jelölje: $h_i = x_{i+1} - x_i$. A próbafüggvény együtthatóit a természetes spline esetében az alábbiak szerint határozzuk meg:

1. Az interpolációs feltételből következik:

$$a_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N-1)\,. \tag{19.236}$$

Célszerű bevezetni az a_N együtthatót is, amely a próbafüggvényben nem szerepel. Legyen $a_N = f_N$

2. $S''(x)$ folytonosságából a belső csomópontokban adódik:

$$d_{i-1} = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_{i-1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, N-1)\,. \tag{19.237}$$

A természetes peremfeltételekből következően $c_1 = 0$ és (19.237) érvényes $i = N$ esetén is, ha a c_N együtthatót is bevesszük. Legyen $c_N = 0$.

3. $S(x)$-nek a belső csomópontokban vett folytonosságából adódik:

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2c_{i-1} + c_i}{3}h_{i-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, N)\,. \tag{19.238}$$

4. $S'(x)$-nek a belső csomópontokban vett folytonosságából adódik:

$$c_{i-1}h_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + c_{i+1}h_i = 3\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad (i = 2, 3, \ldots, N-1)\,. \tag{19.239}$$

(19.236) miatt a a c_i $(i = 2, 3, \ldots, N-1\,;\ c_1 = c_N = 0)$ együtthatók meghatározására szolgáló (19.239) lineáris egyenletrendszer jobb oldala ismert. A bal oldal a következő alakú:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \mathbf{0} & \\ & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & & h_{N-2} \\ & & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ \\ c_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{19.240}$$

Az együtthatómátrix tridiagonális, és így a (19.239) egyenletrendszer numerikus megoldása az LU-módszerrel igen egyszerű (lásd 914. old.). A c_i együtthatókról (19.238) és (19.237) szerint megkapjuk a többi együtthatót.

19.7.1.2. Kiegyenlítő spline-ok

A gyakorlatban az adott f_i értékek gyakran mért értékek, tehát hibával terheltek. Ebben az esetben nem célszerű az interpolációs feltételből kiindulni. Ezért bevezetjük a harmadfokú kiegyenlítő spline-t. Ezt úgy kapjuk, hogy a harmadfokú interpolációs spline-ra vonatkozó interpolációs feltételt a

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{f_i - S(x_i)}{\sigma_i}\right]^2 + \lambda\int_{x_1}^{x_N}[S''(x)]^2\,dx = \min! \tag{19.241}$$

feltétellel helyettesítjük. Az a követelmény megmarad, hogy S, S' és S'' folytonosak legyenek, és így a spline-együtthatók meghatározására egy olyan szélsőértékfeladat adódik, melyet a LAGRANGE-függvénnyel (lásd 407. old.). oldhatunk meg. Részletesen lásd [19.30], [19.31].

A (19.241)-ban λ $(\lambda \geq 0)$ egy simító paraméter, amit előre meg kell adni. Ha $\lambda = 0$, akkor speciális esetként a harmadfokú interpolációs spline adódik, „nagy" λ értékekre egy sima közelítő görbét kapunk, amely viszont a mérési pontokban pontatlan, ha $\lambda = \infty$, akkor, mint másik speciális esetet, a kiegyenlítő egyenes egyenletét kapjuk. λ alkalmas választását a számítógépen képernyő-dialógussal követhetjük.
(19.241)-ban a σ_i $(\sigma_i > 0)$ paramétereket az f_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ mért értékek standard hibáját (lásd 814. old.) jelölik.
Az eddig tárgyalt harmadokú interpolációs és kiegyenlítő spline-oknál az interpolációs, illetve mérési pontok megegyeztek a spline függvény csomópontjaival. Ennek az a következménye, hogy nagy N esetén a spline igen sok harmadfokú függvényből tevődik össze. Kézenfekvő a csomópontok számát és helyzetét szabadon választani, mivel a gyakorlati életben legtöbbször lényegesen kevesebb spline-szakasz is elég. Ezenkívül numerikus szempontból is kedvezőbb a (19.235) próbafüggvény helyett a spline-okat

$$S(x) = \sum_{i=1}^{r+2} a_i N_{i,4}(x) \tag{19.242}$$

alakban keresni. Itt r a szabadon választott csomópontok száma, $N_{i,4}(x)$ jelöli az úgynevezett negyedrendű normalizált B-spline-okat (*basis-splines*) melyek az i-edik csomóponthoz tartozó harmadfokú polinomok. Részletesen lásd [19.4].

19.7.2. Kétdimenziós harmadfokú spline-ok

19.7.2.1. A kétdimenziós harmadfokú spline-ok tulajdonságai

Ezeket a spline-okat az alábbi feladat megoldására alkalmazzák:
Adott az x, y-síkon egy R téglalap-tartomány: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, ezt az (x_i, y_j) $(i = 0, 1, \ldots, n;$

$j = 0, 1, \ldots, m$) rácspontokkal, melyekre

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \tag{19.243}$$

R_{ij} résztartományokra osztjuk, ahol R_{ij} azon (x, y) pontokat tartalmazza, melyekre $x_i \le x \le x_{i+1}$, $y_j \le y \le y_{j+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1\,;\ j = 0, 1, \ldots, m-1)$. A rácspontokban legyenek adottak az $f(x, y)$ függvény értékei:

$$f(x_i, y_j) = f_{ij} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n\,;\ j = 0, 1, \ldots, m) \tag{19.244}$$

Keresett R felett egy lehetőleg egyszerű, sima felület, amely a (19.244) pontokat approximálja.

19.7.2.2. Kétdimenziós harmadfokú interpolációs spline-ok

1. Tulajdonságok

Az $S(x, y)$ kétdimenziós harmadfokú spline-t a következő tulajdonságok egyértelműen meghatározzák:
1. $S(x, y)$ kielégíti az interpolációs feltételeket:

$$S(x_i, y_j) = f_{ij} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)\,. \tag{19.245}$$

2. Az R téglalap-tartomány mindenegyes R_{ij} résztartományán $S(x, y)$ azonosan egyenlő egy x-ben és y-ban harmadfokú polinommal, azaz igaz, hogy

$$S(x, y) = S_{ij}(x, y) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} a_{ijkl} (x - x_i)^k (y - y_j)^l\,. \tag{19.246}$$

Itt az $S_{ij}(x, y)$ próbafüggvényben 16 együttható van és így $S(x, y)$ felírásához $16 \cdot m \cdot n$ együtthatót kell meghatározni.
3. A

$$\frac{\partial S}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial S}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \tag{19.247}$$

parciális deriváltak folytonosak R-en. Így biztosítjuk, hogy a keresett felület minél simább legyen.
4. $S(x, y)$ kielégíti az alábbi speciális peremfeltételeket:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_j) = p_{ij} \quad \text{ha} \quad i = 0, n;\ j = 0, 1, \ldots, m\,,\\
&\frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_j) = q_{ij} \quad \text{ha} \quad i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, m\,,\\
&\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) = r_{ij} \quad \text{ha} \quad i = 0, n;\ j = 0, m\,.
\end{aligned} \tag{19.248}$$

Itt p_{ij}, q_{ij} és r_{ij} előre adott számértékek.
Az a_{ijkl} együtthatók meghatarozásánál felhasználhatjuk az egydimenziós harmadfokú spline-interpolációnál kapott eredményeket. Világos, hogy
1. Igen nagyszámú, összesen $(2n + m + s)$ lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, viszont mindegyik együtthatómátrixa tridiagonális.
2. A lineáris egyenletrendszerek lényegében csak a jobb oldalban különböznek.

Általában azt mondhatjuk, hogy a kétdimenziós harmadfokú interpolációs spline-ok számítási idő és pontosság szempontjából igen kedvezőek és így a gyakorlati feladatokban sokszor jól alkalmazhatók. Az együtthatók meghatározásának számítástechnikai kivitelézést lásd: [19.6], [19.28].

2. Tenzorszorzat-próbafüggvények

A kétdimenziós harmadfokú spline-próbafüggvény egy példa volt az úgynevezett tenzorszorzat-próbafüggvényre, melynek alakja:

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} g_i(x) h_j(y) \tag{19.249}$$

és főleg derékszögű rácsok feletti approximációra alkalmas. A $g_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ és $h_j(y)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ függvények két lineárisan független függvényrendszert alkotnak. A tenzorszorzat-próbafüggvények numerikus szempontból azzal az előnnyel rendelkeznek, hogy pl. a (19.245) kétdimenziós interpolációs feladat megoldása visszavezethető egydimenziós feladatok megoldására. Ezenkívül igaz, hogy: A (19.245) kétdimenziós interpolációs feladat a (19.249) próbafüggvénnyel egyértelműen megoldható, ha

1. az egydimenziós interpolációs feladatok az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontoknak megfelelő $g_i(x)$ próbafüggvényekkel és:

2. az egydimenziós interpolációs feladatok az $y_0, y_1, \ldots, y_m$ alappontoknak megfelelő $h_j(y)$ próbafüggvényekkel egyértelműen megoldhatók.

Egy fontos tenzor-szorzat próbafüggvény a harmadfokú B-spline-okkal:

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{r+2} \sum_{j=1}^{p+2} a_{ij} N_{i,4}(x) N_{j,4}(y) \,. \tag{19.250}$$

Itt $N_{i,4}(x)$ és $N_{j,4}(y)$ függvények normalizált negyedrendű B-spline-ok. r jelöli az x irányú, p pedig az y irányú csomópontok számát. A csomópontok szabadon választhatók, de az interpolációs feladat megoldhatóságának érdekében bizonyos kikötéseket kell tenni a csomópontok és az interpolációs alappontok helyzetére vonatkozóan.

Az interpolációs feladatok megoldására alkalmazott B-spline próbafüggvényekkel olyan egyenletrendszert kapunk, melynek együtthatómátrixa sávmátrix, tehát numerikusan könnyen kezelhető.
Különböző feladatokra a kétdimenziós B-spline alkalmazasát lásd [19.15].

19.7.2.3. Kétdimenziós harmadfokú kiegyenlítő spline

Az egydimenziós harmadfokú kiegyenlítő spline-t a (19.241) szélsőérték-feltétel jellemez. A kétdimenziós esetben egy egész sor megfelelő szélsőérték-feltételt állíthatnánk fel, de ezek közül csak kevés biztosít egyértelmű megoldást. Alkalmas szélsőérték-feltételeket és algoritmusokat a kétdimenziós harmadfokú B-spline-okra lásd [19.21], [19.20].

19.7.3. Görbék és felületek Bernstein–Bézier-ábrázolása

1. Bernstein alappolinomok

Görbék és felületek BERNSTEIN–BÉZIER-ábrázolása (röviden B–B-ábrázolás) A Bernstein-féle alappolinomot használja:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{19.251}$$

és az alábbi tulajdonságokat használja ki:

1. $0 \underset{n}{\leq} B_{i,n}(t) \leq 1 \qquad \text{ha} \quad 0 \leq t \leq 1 \,,$ (19.252)

2. $\sum_{i=0} B_{i,n}(t) = 1 \,.$ (19.253)

A (19.253) képlet közvetlenül a binomiális tételből következik.

■ **A:** $B_{01}(t) = 1 - t \,,\ B_{1,1}(t) = t$ **(19.12. ábra)**.

■ **B:** $B_{03}(t) = (1-t)^3 \,,\ B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 \,,\ B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)\ B_{3,3}(t) = t^3$ **(19.13. ábra)**.

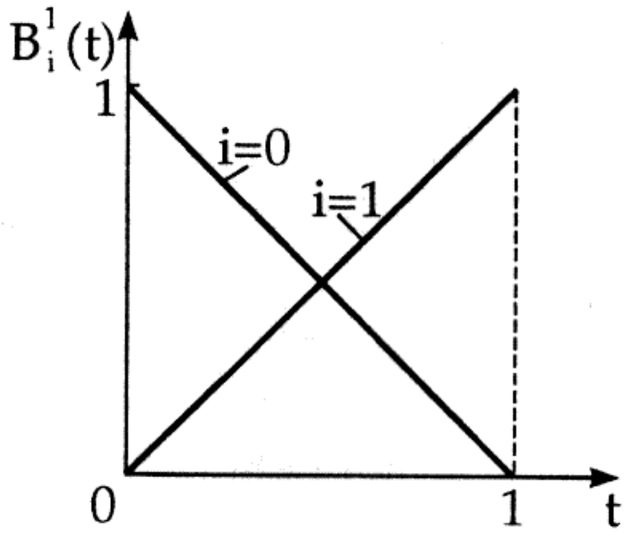
2. Vektorábrázolások

A következőkben egy térgörbét, melynek paraméteres mogoldása $x = x(t)\,, y = y(t)\,, z = z(t)\,,$ vektor alakban írunk fel:

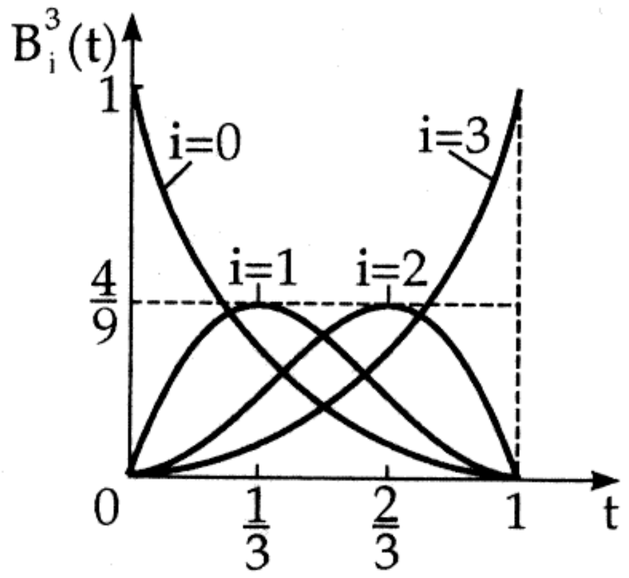
$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\vec{\mathbf{e}}_x + y(t)\,\vec{\mathbf{e}}_y + z(t)\,\vec{\mathbf{e}}_z \tag{19.254}$$

Itt t a görbe paramétere. Felület esetén a megfelelő vektoros alak:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\,\vec{\mathbf{e}}_x + y(u, v)\,\vec{\mathbf{e}}_y + z(u, v)\,\vec{\mathbf{e}}_z \,. \tag{19.255}$$



19.12. ábra.



19.13. ábra.

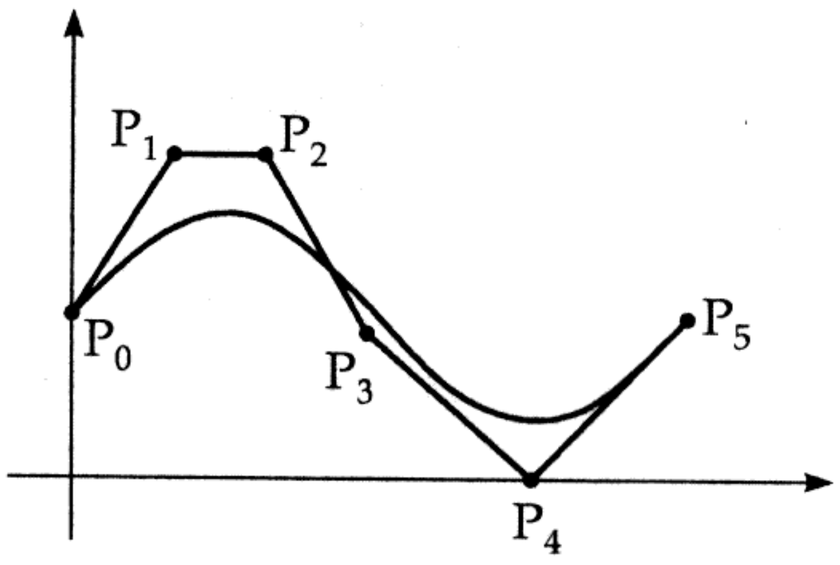
Itt u és v a felület paraméterei:

19.7.3.1. A B–B-görbeábrázolás elve

Adott egy térbeli poligon $n+1$ P_i csúcspontja $(i = 0, 1, \ldots, n)$ a hozzátartozó $\vec{\mathbf{P}}_i$ helyvektorokkal. Ekkor ezt a poligont támaszpoligonnak nevezzük. Az

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\vec{\mathbf{P}}_i \tag{19.256}$$

utasítással ezen pontokhoz hozzárendelünk egy térgörbét, az úgynevezett B–B-görbét. (19.253) miatt (19.256)-ot az adott pontok „változó konvexkombináció"jának nevezzük. A (19.256) térgörbe fontos tulajdonságai:



19.14. ábra.

1. P_0 és P_n interpolálva lesz.

2. A $\overrightarrow{P_0P_1}$ és $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ vektorok a $\vec{\mathbf{r}}(t)$ érintő vektorai P_0-ban, ill. P_n-ben.

A támaszpoligon és a B–B-görbe közötti kapcsolatot a **19.14. ábra mutatja**.

A B–B-ábrázolást elsősorban görbék tervezésére használják, mert itt a poligon-csúcsok változtatásával igen egyszerűen befolyásolhatjuk a görbe alakját.

A BERNSTEIN-alappolinomok helyett sokszor normalizált B-spline-okat használunk. A megfelelő térgörbéket ekkor B-spline görbéknek hívjuk. Alakjuk elvileg megegyezik a B–B-görbék alakjával, de azokkal szemben a következő előnyökkel rendelkeznek:

1. A támaszpoligont jobban approximálják.

2. A poligon-csúcspontok változtatásával a B-spline görbe csak lokálisan változik.

3. A görbe alakjának lokális változásai mellett a differenciálhatóság is befolyásolható. Így például egyenesszakaszok és törések képezhetők.

19.7.3.2. B–B felületábrázolás

Adottak a P_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ pontok a $\vec{\mathbf{P}}_{ij}$ helyzetvektorokkal, mely pontokat a felület paramétervonalainak hálóján mint csúcspontokat képzelhetünk el. A (19.256) B–B-görbék analógiájára a hálózati pontokhoz hozzárendelünk egy felületet az

$$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)\vec{\mathbf{P}}_{ij} \tag{19.257}$$

képlettel. A (19.257) képlet alkalmas felület-tervezésre, mivel a hálózati pontok változtatásával egyszerűen kaphatjuk felületek egy variációját. A hálózati pontok befolyása itt globális, ezért tehát (19.257)-ben is át kellene térni a BERNSTEIN-alappolinomról a B-spline-okra.

19.8. Számítógépek használata

19.8.1. Belső jelábrázolás

A számítógépek jelfeldolgozó gépek. A jelek ábrázolását és feldolgozását az alkalmazott software (program) rögzíti és irányítja. A külső jelek, betűk és számjegyek bináris kódolással, mint bit-sorozatok vannak ábrázolva. Egy *bit* (binary digit) a legkisebb ábrázolható egység, mely a 0 vagy 1 értéket veheti fel. 8 bit alkotja a következő egységet, *byte*-ot. Egy byte-on tehát 2^8 bitkombináció ábrázolható, azaz egy byte-hoz 256 különböző jelet lehet hozzárendelni. Egy ilyen hozzárendelést hívunk *kód*nak. Különböző kódrendszerek léteznek, a legelterjettebb a kibővített **ASCII** (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange).

19.8.1.1. Számrendszerek

1. Képzési szabály

A számítógépen a számokat több, egymást követő byte-on ábrázoljuk. A belső számábrázolás alapja a kettes számrendszer, amely a tízes számrendszerhez hasonlóan a poliadikus számrendszerekhez tartozik.
Poliadikus számrendszerben a képzési szabály:

$$a = \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \qquad (m > 0\,,\ n \geq 0\,,\ m\,,n \text{ egész}) \tag{19.258}$$

B a számrendszer alapja (bázis), z_i-k pedig a számrendszer számjegyei ($0 \leq z_i < B$). A számjegyek $i \geq 0$ esetén a szám egész részét, $i < 0$ a szám törtrészét képezik.
A számítógép használatával kapcsolatban az alábbi **19.3. táblázatban** összefoglalt számrendszerek a leggyakoribbak.

19.3. táblázat. Számrendszerek

Számrendszer	Alap	Megengedett számjegyek
Kettes számrendszer	2	0, 1
Nyolcas számrendszer	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Tizenhatos számrendszer	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A,B,C,D,E,F (Az A–F betűk a 10–15 értékeket jelölik.)
Tizes számrendszer	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

2. Konvertálás

Az egyik számrendszerről a másikra való áttérést hívjuk *konvertálás*nak. Ha egyszerre több számrendszert használunk, akkor a tévedések elkerülése végett a számrendszer alapját indexnek feltüntetjük.

■ A tízes számrendszerben adott 139,8125 számra tehát: $139{,}8125_{10} = 10001011{,}1101_2 = 213{,}64_8 = 8B{,}D_{16}$.

1. Áttérés a kettes számrendszerből a nyolcas, ill. tizenhatos számrendszerre Ez igen egyszerű, a ponttól kiindulva balra és jobbra három vagy négy bites csoportokat képezünk melyek értékét meghatározzuk. Ezek az értékek lesznek a nyolcas-, illetve tizenhatos-rendszerben a számjegyek.

2. Áttérés a tízes számrendszerből a kettes-, nyolcas- vagy tizenhatos számrendszerbe A tízes rendszerből egy másik rendszerbe való konvertálásra az egész- és a tört-tizedesszámokra az alábbi algoritmusokkal számolunk.

a) Egész rész: Ha G egész szám a tízes számrendszerben, akkor a B bázisú számrendszerben a (19.258) képzési szabály szerint:

$$G = \sum_{i=0}^{n} z_i B^i \qquad (n \geq 0)\,. \tag{19.259}$$

Osszuk el G-t B-vel, így kapunk egy egész részt (az összeg) és egy maradékot:

$$\frac{G}{B} = \sum_{i=1}^{n} z_i B^{i-1} + \frac{z_0}{B}\,. \tag{19.260}$$

Itt z_0 a $0, 1, \ldots, B-1$ értékeket veheti fel és ez lesz a legkisebb értékű számjegy az új számrendszerben. Ezt az eljárást az összegre sorozatosan ismételve kapjuk a többi számjegyet.

b) Törtrész: Ha g valódi tizedestört, akkor a B-bázisú számrendszerre az alábbiak szerint konvertálunk:

$$gB = z_{-1} + \sum_{i=2}^{m} z_{-i} B^{-i+1}\,. \tag{19.261}$$

A keletkezett összegekre az eljárást ismételve kapjuk a z_{-2}, z_{-3}, ... értékeket.

■ **A:** Alakítsuk át a 139 tizedes számot bináris számmá.

$139:2 = 69$	marad	1	$(1 = z_0)$
$69:2 = 34$	marad	1	$(1 = z_1)$
$34:2 = 17$	marad	0	$(0 = z_2)$
$17:2 = 8$	marad	1	:
$8:2 = 4$	marad	0	:
$4:2 = 2$	marad	0	:
$2:2 = 1$	marad	0	:
$1:2 = 0$	marad	1	$(1 = z_7)$

$139_{10} = 10001011_2$

■ **B:** Alakítsuk át a 0,8125 tizedes törtet bináris számmá.

$0{,}8125 \cdot 2 = 1{,}625$	$(1 = z_{-1})$
$0{,}625 \cdot 2 = 1{,}25$	$(1 = z_{-2})$
$0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$	$(0 = z_{-3})$
$0{,}5 \cdot 2 = 1{,}0$	$(1 = z_{-4})$
$0{,}0 \cdot 2 = 0{,}0$	

$0{,}8125_{10} = 0{,}1101_2$

3. Bináris, oktális és hexadecimális számok konvertálása tizedes számokká A kettes-, nyolcas- vagy tizenhatos számrendszerben adott számokat akarjuk tizedes számként felírni. A megfelelő algoritmus:

$$a = \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \qquad (m > 0\,,\ n \geq 0\,, \text{egész})\,. \tag{19.262}$$

ahol a tizedespontot z_0 után kell kitenni. A számítást célszerű a HORNER-módszerrel végezni.

■ $11101 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 29$.
A megfelelő HORNER-elrendezést lásd a számítás mellett.

	1	1	1	0	1
2		2	6	14	28
	1	3	7	14	29

19.8.1.2. Belső számábrázolás

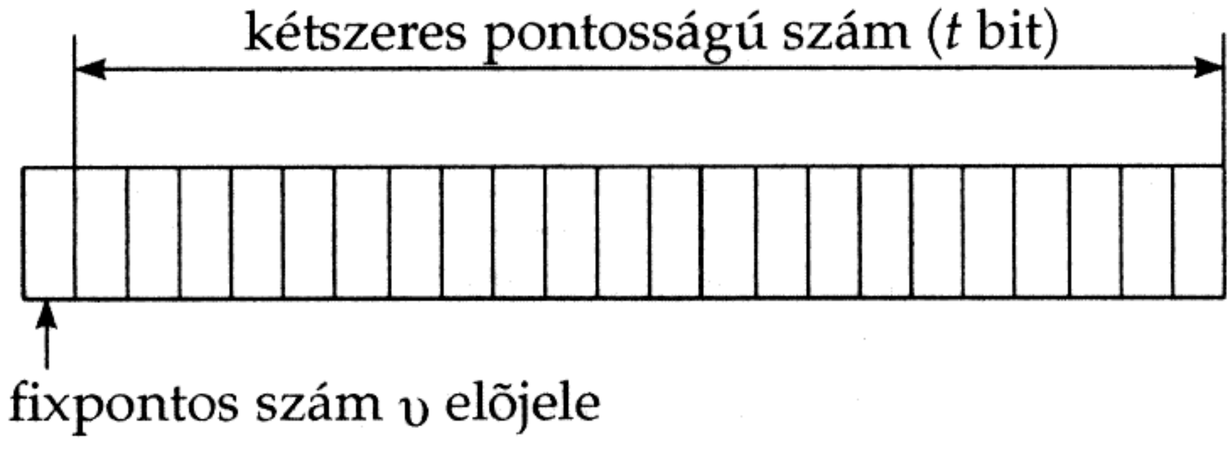
A számítógépen a kettes számrendszerben ábrázolt bináris számokat egy vagy több byte-on ábrázoljuk. Itt két ábrázolási mód lehetséges: a *fixpontos* és a *lebegőpontos*. Az első esetben a tizedespont rögzített helyen áll (egész számoknál tehát a szám végén), a második esetben „lebeg" a kitevő változásának megfelelően.

1. Fixpontos számok

A fixpontosan ábrázolt számok által felvehető értékek tartománya az adott paraméterekkel:

$$0 \leq | a | \leq 2^t - 1 \,. \qquad (19.263)$$

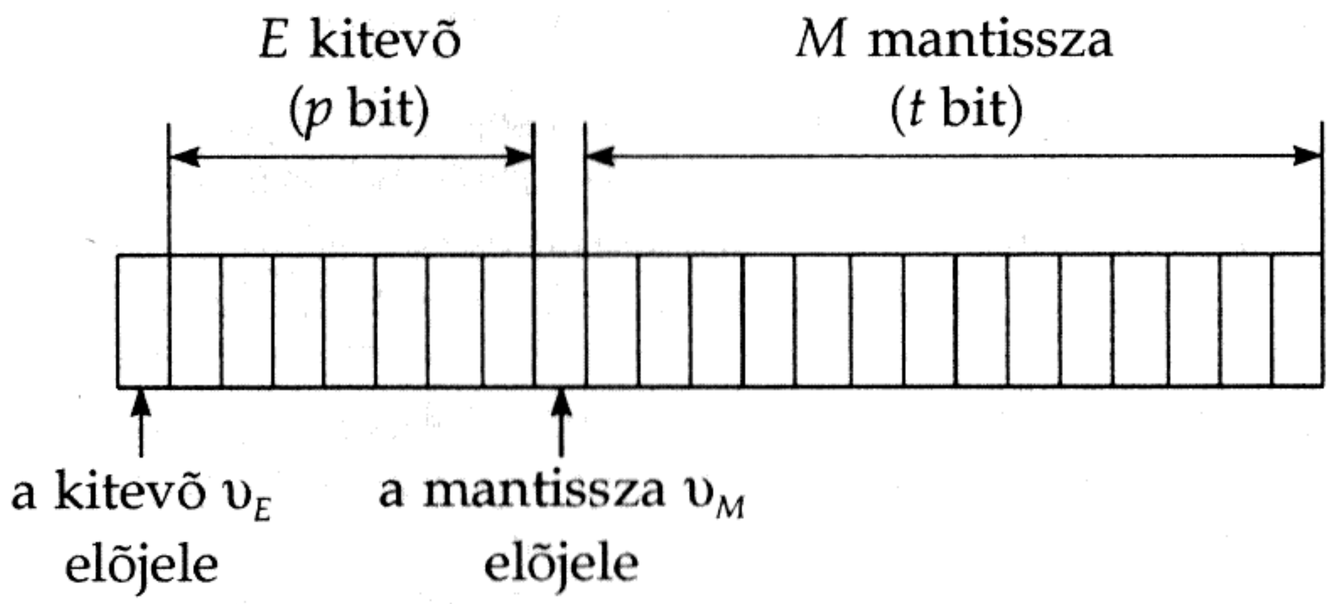
A mellékelt ábra mutatja a fixpontos számábrázolást.



19.15. ábra.

2. Lebegőpontos számok

A lebegőpontos számabrázolásra elvileg két lehetőség van.



19.16. ábra.

1. Normalizált féllogaritmikus alak Ennél az első tárolási formánál az a szám E kitevőjének és M mantisszájának előjelét külön tároljuk:

$$a = \pm M B^{\pm E} \qquad (19.264)$$

Ekkor az E kitevőt (exponent) úgy választjuk, hogy az M mantissza teljesítse az $1/B \leq M < 1$ feltételt. Ekkor beszélünk normalizált féllogaritmikus alakról **(19.16. ábra)**.

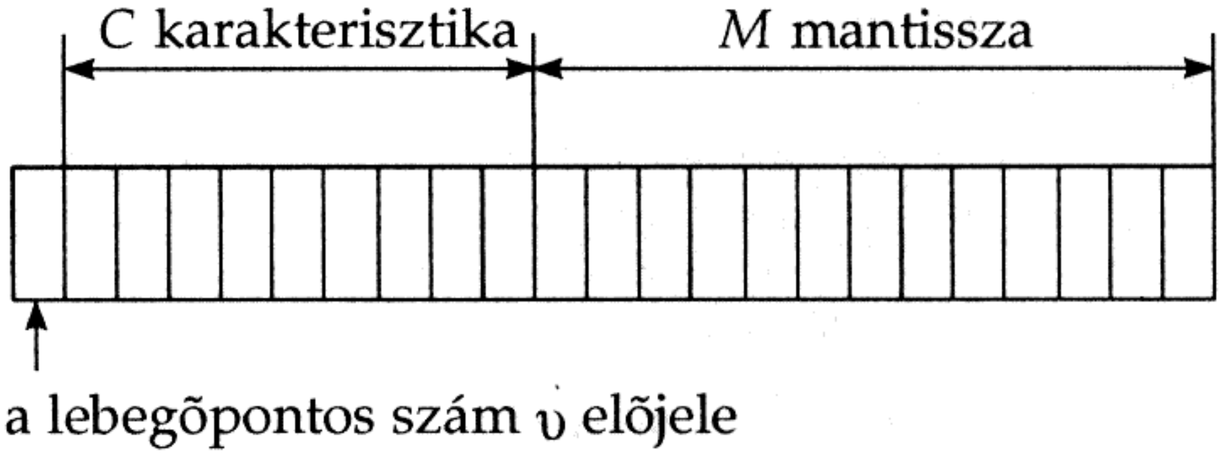
Az adott paraméterektől függően a lebegőpontos számok abszolútértékeinek tartománya:

$$2^{-2^p} \leq | a | \leq \left(1 - 2^{-t}\right) \cdot 2^{(2^p - 1)} \,. \qquad (19.265)$$

2. IEEE-standard A lebegőpontos számábrázolás (ma szokásos) alakját az 1985-ben kibocsájtott IEEE-standard (**I**nstitute of **E**lectrical and **E**lectronics **E**ngineers) adja meg. Ez a számítógépi aritmetika szabványosításával foglalkozik és előírásokat tartalmaz a formátumokra, a kerekítési szabályokra, az aritmetikai műveletekre, a számértékek konvertálasára, az összehasonlító műveletekre és a kivételes esetek, mint például a tartomány-túllépések kezelésére. A lebegőpontos számábrázolásra a **19.17. ábrán** bemutatott alakot írja elő.

A C karakterisztikát az E kitevőből úgy kapjuk, hogy egy alkalmas K konstanst hozzáadunk. Ezt úgy választjuk, hogy a C karakterisztika csak pozitív értékű lehet. Az ábrázolható szám ekkor:

$$a = (-1)^v \cdot 2^E \cdot 1.b_1 b_2 \ldots b_{t-1}, \quad \text{ahol } E = C - K \qquad (19.266)$$



19.17. ábra.

Ekkor igaz, hogy $C_{\min} = 1$, $C_{\max} = 254$; $C = 0$ és $C = 255$ tartalék-értékek.
A standard-ábrázolásban két alapformátum van (egyszeres pontosságú és dupla pontosságú lebegőpontos számok), de további formátumok is léteznek. A **19.4. táblázat** a bázisformátumok paramétereit tartalmazza.

19.4. táblázat. Bázisformátumok paraméterei

Paraméter	egyszeres pontosság	dupla pontosság
szóhossz bitekben	32	64
maximális kitevő $E_{\max}$	+127	+1023
minimális kitevő $E_{\min}$	−126	−1022
K konstans	+127	+1023
A kitevő bitjeinek száma	8	11
A mantissza bitjeinek száma	24	53

19.8.2. Gépi számításoknál fellépő numerikus hibák

19.8.2.1. Bevezetés, hibatípusok

A számítógéppel való számolásra elvileg ugyanazok a szempontok érvényesek, mint a kézi számolásra, méges ezek fontosságát felerősítik a következők: a számábrázolásnál a rögzített, behatárolt tartomány, a számok kétféle ábrázolásmódja, valamint a számítógép hiányzó kritikai érzéke a fellépő hibákkal szemben. Ehhez jön még, hogy a számítógépen lényegesen nagyobb terjedelmű feladatokat futtatunk, mint amilyeneket kézi számolással meg tudnánk oldani.
Ezért kérdéseket kell megválaszolnunk a számítási hibák lefolyását és megítélését, a matematikailag egyenértékű eljárások közül a numerikusan legkedvezőbb kiválasztását, vagy például egy iterációs eljárás megfelelően történő megszakítását illetőleg.
A továbbiakban a hibák megadására a következő jelöléseket használjuk, melyekben x egy pontos mennyiség, de értéke általában ismeretlen, $\tilde{x}$ pedig egy x-re vett közelítő érték:

abszolút hiba: $|\Delta x| = |x - \tilde{x}|\,,$ (19.267) relatív hiba: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|\,.$ (19.268)

Gyakran az alábbi jelöléseket is használjuk:

$$\epsilon(x) = x - \tilde{x} \quad \text{és} \quad \epsilon_{rel}(x) = \frac{x-\tilde{x}}{x}. \tag{19.269}$$

19.8.2.2. Normalizált tizedestörtek és kerekítés

1. Normalizált tizedes törtek

Bármely $x \neq 0$ valós szám felírható tizedes tört alakjában:

$$x = \pm 0, b_1 b_2 \ldots \cdot 10^E \quad (b_1 \neq 0) \tag{19.270}$$

Itt $0, b_1 b_2 \ldots$ a mantissza, amelyet a $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ számjegyek alkotnak. Az E egész szám a 10-es alapnak megfelelő kitevő. Mivel $b_1 \neq 0$ (19.270)-et *normalizált tizedes tört*nek hívjuk.
A számítógépen csak véges sok számjeggyel lehet dolgozni, ezért korlátozva van a mantissza számjegyeinek t száma és az E kitevő értékkészlete. Így az x számból (19.270) szerint kerekítéssel úgy, ahogy azt a gyakorlatból ismerjük, adódik:

$$\tilde{x} = \begin{cases} \pm 0, b_1 b_2 \cdots b_t \cdot 10^E & \text{ha} \quad b_{t+1} \leq 5 \ \text{(lekerekítés)}\,, \\ \pm(0, b_1 b_2 \cdots b_t + 10^{-t}) 10^E & \text{ha} \quad b_{t+1} > 5 \ \text{(fölkerekítés)}\,, \end{cases} \tag{19.271}$$

azaz a kerekítés által okozott abszolút hiba:

$$|\Delta x| = |x - \tilde{x}| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-t} 10^E. \tag{19.272}$$

2. A numerikus számítások alapműveletei

Minden numerikus eljárás alapműveletek sorozatából tevődik össze. A problémák leginkább abból adódnak, hogy a lebegőpontos aritmetikában is csak véges sok helyünk van a számábrázolásra. Ezekről a

problémákról itt rövid áttekintést adunk. Tegyük fel, hogy x és y két normalizált lebegőpontos, hibával nem terhelt szám, azonos előjelűek és egyik sem 0 ($x \neq 0$, $y \neq 0$).

$$x = m_1 B^{E_1}, \qquad y = m_2 B^{E_2} \qquad \text{ahol} \tag{19.273a}$$

$$m_i = \sum_{k=1}^{t} a_{-k}^{(i)} B^{-k}, \quad a_{-1}^{(i)} \neq 0, \qquad \text{és} \tag{19.273b}$$

$$a_{-k}^{(i)} = 0 \text{ vagy } 1 \text{ vagy} \ldots \text{ vagy } \quad B-1 \text{ ha } \quad k > 1 \quad (i = 1, 2). \tag{19.273c}$$

1. Összeadás Ha $E_1 > E_2$, akkor E_1 lesz a közös kitevő, mivel a normalizálás miatt a tizedespontot balra vihetjük. A mantisszákat összeadjuk.

$$\text{Ha } \quad B^{-1} \leq | \, m_1 + m_2 B^{-(E_1 - E_2)} \, | < 2 \qquad (19.274a) \qquad \text{és} \quad | \, m_1 + m_2 B^{-(E_1 - E_2)} \, | \geq 1, \qquad (19.274b)$$

akkor a tizedespont egy hellyel balra tolódik és ugyanakkor a kitevő eggyel nő (összeadás-túlcsordulás).

■ $0{,}9604 \cdot 10^3 + 0{,}5873 \cdot 10^2 = 0{,}9604 \cdot 10^3 + 0{,}05873 \cdot 10^3 = 1{,}01913 \cdot 10^3 = 0{,}1019 \cdot 10^4$.

2. Kivonás Ugyanúgy történik, mint az összeadás, a mantisszákat kivonjuk. Ha

$$| \, m_1 - m_2 B^{-(E_1 - E_2)} \, | < 1 - B^{-t} \qquad (19.275a) \qquad \text{és} \quad | \, m_1 - m_2 B^{-(E_1 - E_2)} \, | < B^{-1}, \quad (19.275b)$$

akkor a tizedespontot maximum t hellyel jobbra visszük és a kitevőt megfelelően csökkentjük.

■ $0{,}1004 \cdot 10^3 - 0{,}9988 \cdot 10^2 = 0{,}1004 \cdot 10^3 - 0{,}09988 \cdot 10^3 = 0{,}00052 \cdot 10^3 = 0{,}5200 \cdot 10^0$. Ez a példa a kritikus eset, amikor a vezető nullák kitörlődnek. A helyek adott száma miatt (itt 4) jobbról nullák jöttek be, és így az eredmény csalókán 4 jegyre pontosnak látszik.

3. Szorzás A kitevőket összeadjuk, a mantisszákat összeszorozzuk. Ha

$$m_1 m_2 < B^{-1}, \tag{19.276}$$

akkor a tizedespontot a kitevő egyidejű csökkentésével egy hellyel jobbra visszük (szorzás alulcsordulás).

■ $0{,}3176 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2504 \cdot 10^5 = 0{,}07952704 \cdot 10^8 = 0{,}7953 \cdot 10^7$.

4. Osztás A kitevőket kivonjuk, a mantisszákat osztjuk. Ha

$$\frac{m_1}{m_2} \geq B^{-1}, \tag{19.277}$$

akkor a tizedespontot a kitevő egyidejű növelésével egy hellyel balra visszük (osztás-túlcsordulás)

■ $0{,}3176 \cdot 10^3 / 0{,}2504 \cdot 10^5 = 1{,}2683706 \ldots 10^{-2} = 0{,}1268 \cdot 10^{-1}$.

5. Az eredmény hibája A négy alapművelet és hibamentes operandusok esetén az eredmény hibája csak a kerekítésből adódik. t számú hely és B-bázis esetén a relatív hiba korlátja:

$$\frac{B}{2} B^{-t}. \tag{19.278}$$

6. A nullák kitörlésének elkerülése Láttuk, hogy a kritikus művelet két, közelítőleg egyenlő lebegőpontos szám kivonása. Ha lehet, ezt úgy kerüljük el, hogy a műveletek vagy az operandusok sorrendjét felcseréljük.

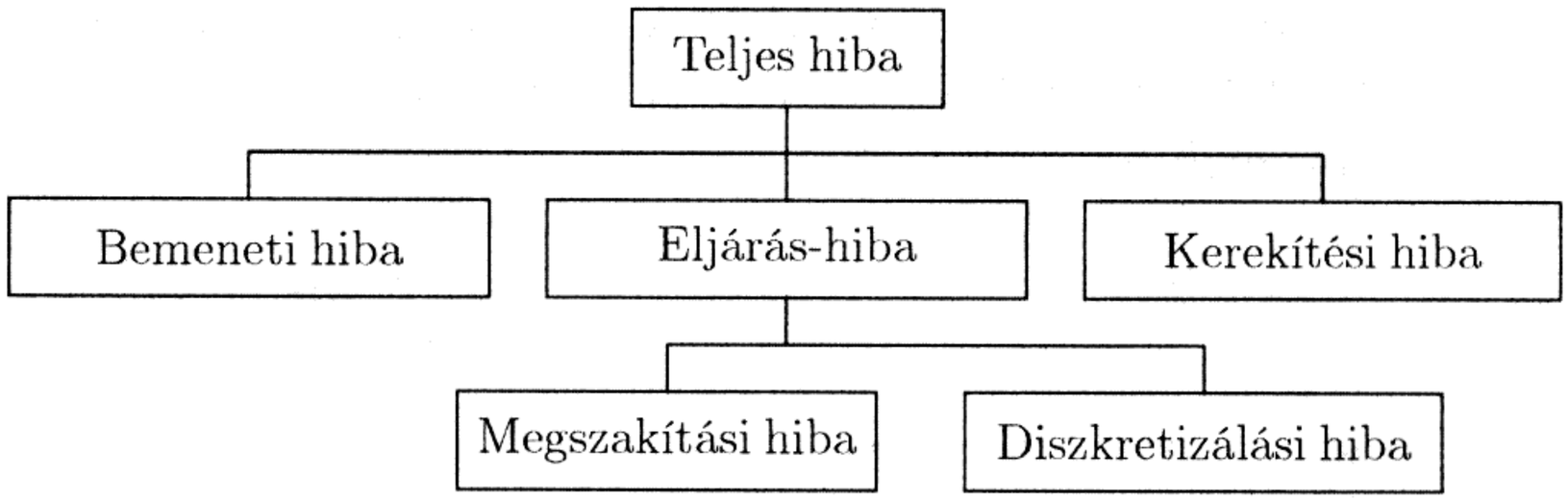
19.8.2.3. Numerikus számítások pontossága

1. Hibatípusok

A numerikus számításokat mindig hiba terheli. Az alábbi hibatípusok léteznek, és ezekből tevődik össze az eredmény kumulált hibája, a teljes hiba **(19.18. ábra)**:

2. Bemeneti hiba

1. A bemeneti hiba fogalma A számított eredménynek azt a hibáját nevezzük bemeneti hibának, amelyet a hibával terhelt bemenő adatok okoznak. A bementi hibának a bemenő adatok hibájából történő kiszámítását nevezzük a *hibaelmélet direkt feladatá*nak. Ennek megfelelő inverz feladat az, amikor



19.18. ábra.

azt keressük, mekkora hibákat engedhetünk meg a bemenő adatoknál, ha az eredmény bemeneti hibája egy adott korlátot nem léphet túl. A bemeneti hiba becslése összetett feladatoknál igen bonyolult és ritkán kivitelezhető.
Általában egy $y = f(x)$ ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ valós értékű függvény kiszámítandó értékére a bemeneti hiba abszolútértéke:

$$|\Delta y| = |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)|$$
$$= |\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(x_i - \tilde{x}_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_x |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \right) |\Delta x_i| \,, \tag{19.279}$$

ha az $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényre a TAYLOR-sor (lásd 422. old.) lineáris részét alkalmazzuk. Itt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a közbülső helyeket, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek közelítését jelölik. Itt a közelítő értékeken a hibával terhelt bemenő adatokat értjük. Ebben az összefüggésben figyelembe kell venni, a GAUSS-féle hibaterjedési törvényt is (lásd 818. old.).

2. Bemeneti hiba egyszerű aritmetikai műveletek esetén Az egyszerű aritmetikai műveletekre ismert a bemeneti hiba meghatározása. (19.267) és (19.269) jelöléseket a négy alapműveletre kapjuk:

$$\epsilon(x \pm y) = \epsilon(x) \pm \epsilon(y) \,, \tag{19.280}$$
$$\epsilon(xy) = y\epsilon(x) + x\epsilon(y) + \epsilon(x)\epsilon(y) \,, \tag{19.281}$$
$$\epsilon(\frac{x}{y}) = \frac{1}{y}\epsilon(x) - \frac{x}{y^2}\epsilon(y) + \quad \varepsilon\text{-ban magasabbrendű tagok}, \tag{19.282}$$
$$\epsilon_{rel}(x \pm y) = \frac{x\epsilon_{rel}(x) \pm y\epsilon_{rel}(y)}{x \pm y} \,, \tag{19.283}$$
$$\epsilon_{rel}(xy) = \epsilon_{rel}(x) + \epsilon_{rel}(y) + \epsilon_{rel}(x)\epsilon_{rel}(y) \,, \tag{19.284}$$
$$\epsilon_{rel}(\frac{x}{y}) = \epsilon_{rel}(x) - \epsilon_{rel}(y) + \quad \varepsilon\text{-ban magasabbrendű tagok} \,. \tag{19.285}$$

E képletek azt mutatják, hogy a bemenő adatok kis relatív hibái szorzásnál és osztásnál az eredmény kis relatív hibáját eredményezik. Ezzel szemben az összeg és különbség relatív hibája igen megnő, ha $|x \pm y| \ll |x| + |y|$. Ekkor áll fenn a hely-kitörlés veszélye.

3. Eljáráshiba

1. Az eljáráshiba fogalma Az eljáráshibák abból a szükségszerűségből adódnak, hogy folytonosságot és határértéket numerikusan kell approximálnunk. Ebből adódik a *megszakítási hiba* (például az iterációs eljárásoknál) és folytonos problémák véges diszkrét rendszerrel történő approximációjánál a *diszkretizációs hiba* (például a numerikus integrálásnál). Az eljárási hibák a bemeneti és a kerekítési hibáktól függetlenül léteznek; ezért csak az alkalmazott megoldási módszerrel összefüggésben vizsgáljuk azokat.

2. Iterációs módszerek megfelelő kezelése Ha a megoldásra egy iterációs módszert alkalmazunk, akkor tudnunk kell, hogy elvileg két kimenetel lehetséges: egy helyes megoldás, illetve egy hamis megoldás. Azonban a kritikus eset is felléphet, hogy nem kaptunk megoldást, pedig a feladatnak létezik egy

megoldása.
Hogy az iterációs módszert áttekinthetőbbé és biztosabbá tegyük, a következő tanácsokat kell megfogadnunk.

a) Hogy a „végtelen" iterációt elkerüljük, figyeljük az iterációs lépések számát és ezt is vonjuk be a megszakítási feltételekbe. (Az iterációt akkor is megszakítjuk egy bizonyos ciklus-menetszám után, ha a kívánt pontosságot még nem értük el.)

b) A részeredmények numerikus vagy grafikus kijelzésével kövessük a megoldás menetét a képernyőn.

c) Használjuk ki a probléma-megoldás esetleges jól ismert tulajdonságait, például monotonicitás, gradiens, stb.

d) Vizsgáljuk meg a változók és függvények skálázásának lehetőségeit.

e) Végezzünk több tesztet a lépésközök, megszakítási feltételek, kezdeti értékek, stb. különböző változataira.

4. Kerekítési hiba

A kerekítési hibák a részeredmények kerekítéseiből adódnak. Ezért egy matematikai módszer megítélésénél igen fontosak az eredmény kitűzött pontosságát illetően. A bemeneti- és az eljárás-hiba mellett a kerekítési hibák befolyásolják azt, hogy egy numerikus módszer erősen stabil, gyengén stabil vagy instabil. Erős, illetve gyenge stabilitásról beszélünk, ha a teljes hiba rendje növekvő lépésszám esetén csökken, illetve nem változik, illetve növekszik. Instabilitás esetén két esetet különböztetünk meg: vagy nagyrészt kerekítés és diszkretizáció okozza (numerikus instabilitás), vagy az adatokat terhelő hibák okozzák (természetes instabilitás). Egy számítási módszer akkor észszerű, ha a numerikus instabilitás nem nagyobb a természetes instabilitásnál.
A kerekítési hibák lokális terjedésére, azaz az egyik számítási lépésről a másikra való áttérésnél fellépő kerekítési hibák figyelésére ugyanazok a meggondolások és becslések érvényesek, mint amiket a bemeneti hibánál tárgyaltunk.

5. Példák numerikus számításokra

A numerikus számítások célszerű végrehajtásának problematikáját néhány példával világítjuk meg.

■ A: A másodfokú egyenlet gyökei:

$ax^2 + bx + c = 0$ a, b, és c valós együtthatók és $D = b^2 - 4ac \geq 0$ (valós gyökök). Kritikus szituációk lépnek fel, ha **a)** $\mid 4ac \mid \ll b^2$ és **b)** $4ac \approx b^2$. A megfelelő eljárások:

a) $x_1 = -\dfrac{b + \text{sign}(b)\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{c}{ax_1}$ (VIETA gyöktétele).

b) A direkt megoldási módszerrel D kiszmításánál az eltűnést nem kell megszüntetni. Mivel azonban b értéke est jelentősen meghaladja, a $(b + \text{sign}(b)\sqrt{D})$ összegben a hiba jelentős csökkenése lép fel.

■ B: Keskeny gömbhéj térfogata ha $h \ll r$

A $V = 4\pi\dfrac{(r+h)^3 - r^3}{3}$ képlet $(r + h) \approx r$ miatt igen erős eltűnést eredményez, de a

$V = 4\pi\dfrac{3r^2h + 3rh^2 + h^3}{3}$ képlet nem tűnik el.

■ C: Az $S = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}$ összeg kiszámítása 3 tizedesjegy pontossággal $(S = 1,07667\ldots)$ 8-jegyű

számolásnál közelítőleg 6000 összeadást kellene figyelembe venni. Az $\dfrac{1}{k^2+1} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k^2(k^2+1)}$ azonos átalakítás után kapjuk:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2+1)} \quad S = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2+1)}$$

. Ezzel a képlettel számolva már elég csupán 6 tagot figyelembe venni.

■ **D: A 0/0 alak megszüntetése**, például a $z = (1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2})\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ függvénynél $x = y = 0$ esetén. A törtet bővítjük $(1 + \sqrt{1 + x^2 + y^2})$-tel.

■ **E: Példa instabil rekurzív eljárásra** Az $y_{n+1} = ay_n + by_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ alakú algoritmusok akkor stabilak, ha az $\left|\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + b}\right| < 1$ feltétel teljesül. Például az $y_{n+1} = -3y_n + 4y_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ speciális eset instabil. Ha ugyanis y_0, ill. y_1 hibája ε, ill. $-\varepsilon$, akkor $y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \ldots$ esetén a hibák 7ε, -25ε, 103ε, -409ε, 1639ε, ... Tehát ez a számítási módszer $a = -3$ és $b = 4$ paraméterek esetén instabil.

■ **F: Differenciálegyenletek numerikus integrálása** Az

$$y' = f(x, y) \text{ ahol } f(x, y) = ay \tag{19.286}$$

elsőrendű közönséges differenciálegyenletre, az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel esetén a numerikus számításoknál fellépő problémákat fogjuk itt részleteses megmutatni.

a) Természetes instabilitás Az $y(x)$ pontos megoldás mellett legyen $u(x)$ az a megoldás, amely nem az $y(x_0) = y_0$ pontos kezdeti feltételhez, hanem egy hibával terhelt kezdeti feltételhez tartozik. Erre a „zavart" megoldásra az általánosság megszorítása nélkül felírhatjuk az

$$u(x) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x) \tag{19.287a}$$

próbafüggvényt, ahol ε egy paraméter $0 < \varepsilon < 1$ és $\eta(x)$ egy úgynevezett zavaró függvény. Mivel $u'(x) = f(x, u)$, ezért az

$$u'(x) = f(x, y(x) + \varepsilon\,\eta(x)) = f(x, y) + \varepsilon\,\eta(x)\,f_y(x, y) + \text{magasabb rendű tagok} \tag{19.287b}$$

TAYLOR-sorfejtéssel kapjuk az

$$\eta'(x) = f_y(x, y)\eta(x)\,. \tag{19.287c}$$

úgynevezett differenciál-variációsegyenletet. Az $f(x, y) = ay$ probléma megoldása ekkor:

$$\eta(x) = \eta_0\, e^{a(x - x_0)}, \text{ ahol } \eta_0 = \eta(x_0)\,. \tag{19.287d}$$

Ha $a > 0$, akkor kis kezdeti zavarásból korlátlanul növekvő $\eta(x)$ zavarás adódik. Tehát itt természetes instabilitás van.

b) Az eljárás-hiba vizsgálata a trapéz-szabálynál Ha $a = -1$, akkor az $y'(x) = -y(x)$ stabil differenciálegyenletet kapjuk, melynek pontos megoldása:

$$y(x) = y_0 e^{-(x - x_0)}, \quad \text{ahol} \quad y_0 = y(x_0)\,. \tag{19.288a}$$

A trapézformula:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)dx \approx \frac{y_i + y_{i+1}}{2}h, \quad \text{ahol} \quad h = x_{i+1} - x_i\,. \tag{19.288b}$$

Ezt az adott differenciálegyenletre alkalmazva kapjuk:

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-y)dx = \tilde{y}_i - \frac{\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1}}{2}h \quad \text{vagy} \quad \tilde{y}_{i+1} = \frac{2 - h}{2 + h}\tilde{y}_i, \quad \text{ill.}$$

$$\tilde{y}_i = \left(\frac{2 - h}{2 + h}\right)^i \tilde{y}_0\,. \tag{19.288c}$$

Mivel $x_i = x_0 + ih$ és ebből $i = (x_i - x_0)/h$, $0 \le h < 2$ esetén adódik:

$$\tilde{y}_i = \left(\frac{2 - h}{2 + h}\right)^{(x_i - x_0)/h} \tilde{y}_0 = \tilde{y}_0 e^{c(h)(x_i - x_0)}, \quad \text{ahol}$$

$$c(h) = \frac{\ln\left(\frac{2-h}{2+h}\right)}{h} = -1 - \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{80} - \cdots \tag{19.288d}$$

Az $\tilde{y}_0 = y_0$ feltétel teljesülése esetén tehát $\tilde{y}_i < y_i$, ezért ha $h \to 0$, akkor $\tilde{y}_i$ a pontos megoldáshoz, az $y_0 e^{-(x_i - x_0)}$ értékhez tart.

c) Bemeneti hiba b) alatt feltettük, hogy a pontos és a közelítő kezdeti értékek megegyeznek. Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor $y_0 \neq \tilde{y}_0$, de igaz, hogy $| \tilde{y}_0 - y_0 | < \varepsilon_0$.

$$(\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}) \leq \frac{2-h}{2+h}(\tilde{y}_i - y_i) \text{ miatt } (\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}) \leq \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{i+1} (\tilde{y}_0 - y_0) \tag{19.289a}$$

következik. Tehát ε_{i+1} nagyságrendje legfeljebb akkora, mint ε_0 nagyságrendje volt, és így az eljárás a kezdeti érték tekintetében stabil.
Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy ha a fenti differenciálegyenlet numerikus megoldására a SIMPSON-módszert alkalmazzuk, akkor mesterségesen instabilitást hozunk létre. Így például ebben az esetben $h \to 0$ esetén az általános megoldás:

$$\tilde{y}_i = C_1 e^{-x_i} + C_2 (-1)^i e^{x_i/3} \tag{19.289b}$$

Ennek az az oka, hogy a numerikus megoldási módszer magasabbrendű differenciákat használ, mint ami a differenciálegyenlet rendjének megfelel.

19.8.3. Numerikus módszereket tartalmazó programkönyvtárak

Az idők folyamán a különböző programozási nyelveken egymástól függetlenül a numerikus módszerekre vonatkozó függvényekből és eljárásokból programkönyvtárakat hoztak létre. Kifejlesztésüknél figyelembe vettek számos számítógépes tapasztalatot, hogy a könyvtár programjai jól alkalmazhatók legyenek a gyakorlatból adódó numerikus feladatok megoldására. E programkönyvtárak többnyire minden típusú számítógépre felvihetők és bizonyos konvenciók betartása esetén többé-kevésbé egyszerűen felhasználhatók.

A programkönyvtárak eljárásainak alkalmazása nem menti fel a felhasználót az alól, hogy a megoldandó probléma keresett megoldásáról elgondolkozzék. Ebben az a figyelmeztetés is benne van, hogy a felhasználónak az alkalmazott matematikai módszer gyengeségeiről és erősségeiről közelebbi információkat kell szereznie.

19.8.3.1. NAG-könyvtárak

A *NAG-könyvtár* (**N**umerical **A**lgorithms **G**roup) numerikus módszerek széleskörű gyűjteménye függvények és szubrutinok/eljárások formájában A PASCAL, ADA, ALGOL 68 és FORTRAN 77 nyelven. A vázlatos tartalom:

1. Komplex aritmetika
2. Polinomok gyökhelyei
3. Transzcendens egyenletek gyökei
4. Sorok
5. Integrálás
6. Közönséges differenciálegyenletek
7. Parciális differenciálegyenletek
8. Numerikus differenciálás
9. Integrálegyenletek
10. Interpoláció
11. Görbék és felületek adatainak approximációja
12. Függvények minimuma/maximuma
13. Mátrix-műveletek, inverzió
14. Sajátértékek, sajátvektorok
15. Determinánsok
16. Szimultán lineáris egyenletek
17. Ortogonalizálás
18. Lineáris algebra
19. Statisztikai adatok egyszerű feldolgozása
20. Korreláció és regresszióanalízis
21. Véletlenszám-generátorok
22. Nemparaméteres statisztika
23. Idősoranalízis
24. Operációkutatás
25. Speciális függvények
26. Matematikai és gépi konstansok

19.8.3.2. IMSL-könyvtár

Az **IMSL-könyvtár** (International Mathematical and Statistical Library) három, egymással összehangolt részből áll:

IMSL MATH/LIBRARY általános matematikai eljárásokra,
IMSL STAT/LIBRARY statisztikai problémákra,
IMSL SFUN/LIBRARY speciális függvényekre.

A részkönyvtárak függvényeket és eljárásokat tartalmaznak FORTRAN 77 nyelven. A vázlatos tartalom:

MATH/LIBRARY

1. Lineáris rendszerek
2. Sajátértékek
3. Interpoláció és approximáció
4. Integrálás és differenciálás
5. Differenciálegyenletek
6. Transzformációk
7. Nemlineáris egyenletek
8. Optimalizálás
9. Vektor- és mátrix-műveletek
10. Segédfüggvények

STAT/LIBRARY

1. Alapvető karakterisztikák
2. Regresszió
3. Korreláció
4. Variancia analízis
5. Csoportos és diszkrét feldolgozás
6. Nemparaméteres statisztika
7. Illeszkedési tesztek
8. Idősoranalízis
9. Kovariancia- és faktoranalízis
10. Diszkriminancia analízis
11. Cluster-analízis
12. Mintavétel
13. Élettartam-eloszlások és megbízhatóság-elmélet.
14. Többdimenziós skálázás
15. Sűrűség-, hazárd és rizikófüggvény becslése.
16. Sornyomtató-grafika
17. Valószínűség-eloszlások
18. Véletlenszám-generátorok
19. Segéd-algoritmusok
20. Matematikai segédeszközök

SFUN/LIBRARY

1. Elemi függvények
2. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények
3. Exponenciális függvények
4. Gamma-függvények
5. Hiba-függvények
6. Bessel-függvények
7. Kelvin-függvények
8. Bessel-függvények (tört rendű)
9. Weierstrass-féle elliptikus függvények
10. Különböző függvények

19.8.3.3. FORTRAN SSL II

Az **SSL II-könyvtár** (Scientific Subroutine Library II) FORTRAN 77 nyelven írt alprogramokat tartalmaz. A vázlatos tartalom:

1. Lineáris algebra
2. Sajátértékek, sajátvektorok
3. Nemlineáris egyenletek
4. Szélsőértékek
5. Interpoláció és approximáció
6. Transzformációk
7. Nummerikus differenciálás és integrálás
8. Differenciálegyenletek
9. Speciális függvények
10. Pszeudo-véletlenszámok

19.8.3.4. Aacheni könyvtár

Az **Aacheni könyvtár** alapja a numerikus matematikának, G. ENGELN–MÜLLGES (Aacheni szaktudományi főiskola) és F. REUTTER (Rhajna-Westfália Műszaki Főiskola, Aachen). által adott képletgyüjteménye. Ez a könyvtár a BASIC, TURBO BASIC, FORTRAN 77, PL/1, APL, C, MODULA 2 és TURBO PASCAL nyelveken létezik. A vázlatos tartalom:

1. Nemlineáris és speciális algebrai egyenletek megoldásának módszerei
2. Lineáris egyenletrendszerek megoldásának direkt és iteratív módszerei

3. Nemlineáris egyenletrendszerek
4. Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai
5. Lineáris és nemlineáris approximáció
6. Polinomiális és racionális interpoláció, valamint polinom- spline-ok
7. Numerikus differenciálás
8. Numerikus integrálás
9. Közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték problémái
10. Közönséges differenciálegyenletek paremérték problémái.

19.8.4. Számítógép-algebrai rendszerek alkalmazása

19.8.4.1. Mathematica

A Mathematica komputer-algebra rendszer tartalmas apparátussal rendelkezik sokféle matematikai feladat numerikus megoldására. Eközben a Mathematica eljárásmódja egész más, a szimbolikus számítások esetében. A Mathematica bizonyos, előre meghatározott elvek szerint a vizsgált függvényekről értéklistát ad ugyanúgy, mint grafikus eljárásoknál, és ezekből az értékekből határozza meg a mindenkori megoldást. Mivel a felhasznált pontok száma mindig véges, „rossz" függvényeknél problémák léphetnek fel. A Mathematica ugyan itt is megkísérli azt a megoldást, hogy a problematikus helyeken növeli az alappontok számát, de végül bizonyos tartományokban fel kell tételezni a folytonosságot. Itt lehet az eredményben fellépő hiba okát keresni. Minden esetben érdemes a vizsgált objektumról minél több kvalitatív információt begyüjteni, és ha lehet, legalább a feladat résztartományaiban szimbolikus számításokat elvégezni.
A **19.5. táblázat** mutatja a numerikus számításoknak megfelelő eljárásokat:

19.5. táblázat. Numerikus műveletek

`NIntegrate`	határozott integrálokat számol
`NSum`	$\sum_{i=1}^{n} f(i)$ összegeket számol
`NProduct`	szorzatokat számol
`NSolve`	algebrai egyenleteket old meg numerikusan
`NDSolve`	differenciálegyenleteket old meg numerikusan

A Mathematica beindítása után megjelenik a „Promt" $In[1] :=$ kijelzés, vagyis a rendszer készen áll a bevitelre. Az első bevitel után a megfelelő eredmény jele: Out[1] . Általánosan: a szöveget az In[n] := jellel kezdődő sorokba írjuk be. A válaszokat a Mathematica az Out[n] jelű sorokban adja meg. A kifejezésekben fellépő –> nyíl például azt jelenti: helyettesítsük x-be az a értéket.

1. Görbeillesztés és interpolációs módszer

1. 1. Görbeillesztés: A legkisebb négyzetek módszerével (lásd 405. old.) és diszkrét feladatokra a középben vett approximációnál (lásd 943. old.) a Mathematica végrehajtja a kiválasztott függvényeknek az adathalmazra illesztését. Az általános utasítás:

$$\texttt{Fit}[\{y_1, y_2, \ldots\}, funkt, x] \,. \tag{19.290}$$

Itt y_i-k az adatlista, $funkt$ azon kiválasztott függvények listája, melyeket a pontokra akarunk illeszteni és x a függvények független változóinak tartománya. Ha pl. $funkt$-ba azt írjuk: `Table`$[x\hat{}i, \{i, 0, n\}]$, akkor n-edfokú polinom illesztését hajtja végre.

■ Legyen adott az alábbi adatlista:

$$\text{In}[1] := l = \{1.70045, 1.2523, 0.638803, 0.423479, 0.249091, 0.160321, 0.0883432, 0.0570776,$$
$$0.0302744, 0.0212794\}$$

Az

In[2] := $f1 =$ `Fit`$[l, \{1, x, x\text{^}2, x\text{^}3, x\text{^}4\}, x]$

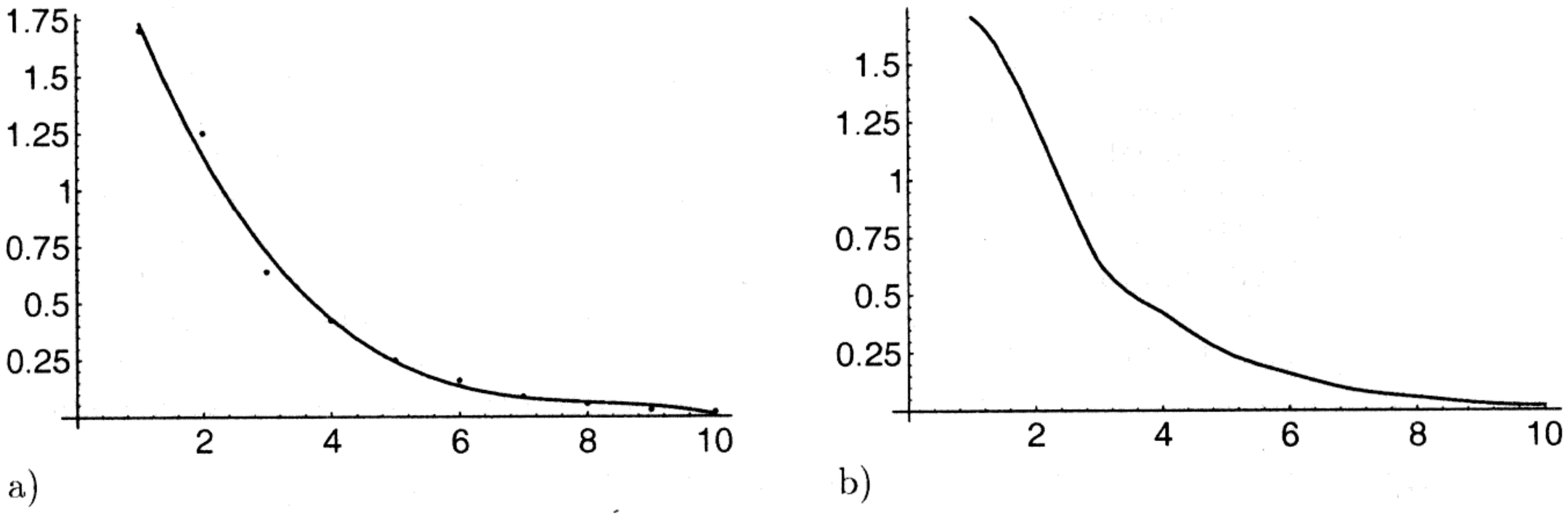
utasítás beírásával azt jeleztük, hogy l elemeit az $x = 1, 2, \ldots, 10$ értékekhez kell hozzárendelnünk. Az eredmény a negyedfokú approximációs polinom:

Out[2] $= 2.48918 - 0.853487x + 0.0998996x^2 - 0.00371393x^3 - 0.0000219224x^4$

Az

In[3] := `Plot`[`ListPlot`$[l, \{x, 10\}], f1, \{x, 1, 10\},$ `AxesOrigin`$\rightarrow \{0, 0\}$]

utasítással az adatoknak és approximációs görbének egy ábráját kapjuk **(19.19.a ábra)**. Az adott



19.19. ábra.

pontokra ez a görbe teljesen kielégítő. A pontok az $e^{1-0.5x}$ függvény TAYLOR-sorának első négy tagjából adódtak.

2. A Mathematica interpoláció speciális algoritmusokat tartalmaz interpolációs függvények meghatározására. Ezek az úgynevezett `InterpolatingFunction` eljárások, melyek képzése a valódi függvényekhez hasonlóan történik. Az útmutatást a 19.6. táblázat tartalmazza.

■ In[3] := `Plot`[`Interpolation`$[l][x], \{x, 1, 10\}$] adja a **19.19.b ábrát**. Látható, hogy a Mathematica az adatlistára precízen illeszkedő függvényt adott.

19.6. táblázat. Interpolációs utasítások

`Interpolation`$[\{y_1, y_2, \ldots\}]$	az y_i értékekkel egy közelítő függvény képét a mindenkori $x_i = i$ egész értékekre
`Interpolation`$[\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots\}]$	az (x_i, y_i) pontokra közelítőfüggvényt képez

2. Polinomegyenletek numerikus megoldása

A MATHEMATICA a polinomok gyökeit numerikusan meg tudja határozni (lásd 1012. old.). Erre szolgál az `NSolve`$[p[x] == 0, x, n]$ utasítás, ahol n a számítás kívánt pontosságát adja meg. Ha n értékét elhagyjuk, akkor gépi pontossággal számol. Mindig a megoldások teljes halmazát kapjuk, azaz m-edfokú polinom esetén m gyököt.

■ In[1] := `NSolve`$[x\text{^}6 + 3x\text{^}2 - 5 == 0]$

Out[1] $= \{x\rightarrow -1.07432\}, \{x\rightarrow -0.867262 - 1.15292\text{I}\}, \{x\rightarrow -0.867262 + 1.15292\text{I}\},$

$\{x\rightarrow 0.867262 - 1.15292\text{I}\}, \{x\rightarrow 0.867262 + 1.15292\text{I}\}, \{x\rightarrow 1.07432\}\}$.

3. Numerikus integrálás

A numerikus integrálás elvégzésére az `NIntegrate` utasítás szolgál. Ez az integrálandó függvényre adott adatsorozattal másképpen dolgozik, mint a szimbolikus módszer. Példaként álljon itt két impropius integrál (lásd 460. old.) kiszámítása.

■ **A:** In[1] := `NIntegrate[Exp[-x^2], {x, -Infinity, Infinity}]` Out[1] = 1.77245 .

■ **B:** In[2] := `NIntegrate[1/x^2, {x, -1, 1}]`

Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

NIntegrate::inum: Integrand ComplexInfinity is not numerical at$\{x\} = \{0\}$.

A **B** példában a Mathematica felismeri, hogy a függvény az $x = 0$ helyen nem folytonos és válaszában erre figyelmeztet. Ez azzal függ össze, hogy a Mathematica a problematikus tartományban az alappontok számát növeli és így a szakadási helyet megtalálja. Bizonyos esetekben azonban mégis lehet, hogy itt hibás választ kapunk. A Mathematica a numerikus integrálásnál bizonyos opciókat előre beállít, mely beállítások egyes speciális esetekre nem megfelelőek. Így például a `MinRecursion` és `MaxRecursion` paraméterek, azaz a rekurziós lépések minimális, ill. maximális száma, melyekkel a Mathematica problematikus tartományokon számol adottak, értéküket mindig 0 és 6. Ha ezeket megemeljük, akkor a Mathematica lassabban ugyan, de sokkal jobb eredményeket szolgaltat.

■ In[3] := `NIntegrate[Exp[-x^2], {x, -1000, 1000}]`

A Mathematica nem képes az $x = 0$ pontban a hegyes maximumot észrevenni, mivel az integrációs tartomány túl nagy, és a válasza:

NIntegrate::ploss:

Numerical integration stopping due to loss of precision. Achieved neither the requested

PrecisionGoal nor AccuracyGoal;suspect one of the following:highly oscillatory integrand

or the true value of the integral is 0 .

Out[3] = $1.34946\ 10^{-26}$

Ha viszont az utasítást kibővítjük:

In[4] := `NIntegrate[Exp[-x^2], {x, -1000, 1000}, MinRecursion-> 3, MaxRecursion-> 10]`,

akkor kapjuk:

Out[4] = 1.77245

Ugyanazt az eredményt, mint az utolsó példában kaphatjuk a kibővített utasítással:

`NIntegrate`$[fun, \{x, x_a, x_1, x_2, \ldots, x_e\}]$. (19.291)

Itt az integrál alsó és felső határán kívül az integrációs intervallumon további x_i pontokat adhatunk meg, melyek a problematikus tartományt szűkítik és pontosabban számolnak.

4. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

Közönséges differenciálegyenletek vagy differenciálegyenlet-rendszerek numerikus megoldásánál a Mathematica az eredményeket egy `InterpolatingFunction`-eljárás felhasználásával állítja elő. Így lehetővé válik, hogy az intervallum tetszőleges pontjában a numerikus megoldás értékét meghatározzuk vagy a megoldásgörbét ábrázoljuk. A leggyakoribb utasításokat a **19.7. táblázat** mutatja.

■ Oldjuk meg azt a differenciálegyenletet, mely egy nehéz test mozgását írja le egy olyan közegben, ahol súrlódás is van. Kétdimenziós esetben a mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = -\gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{x}\,, \qquad \ddot{y} = -g - \gamma\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{y}\,.$$

A surlódást itt a sebességgel arányosnak tételezzük fel. Legyen $g = 10, \gamma = 0.1$ így az $x(0) = y(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 100, \dot{y}(0) = 200$ kezdeti értékekkel a következő bevitelt írjuk fel a mozgásegyenletek megoldására:

In[1] := $dg =$ `NDSolve[{x''[t] == -0.1Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2] x'[t], y''[t] == -10`

`-0.1Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2] y'[t], x[0] == y[0] == 0, x'[0] == 100, y'[0] == 200}],`

19.7. táblázat. Differenciálegyenletek numerikus megoldásánál használt utasítások

`NDSolve`$[dgl, y, \{x, x_a, x_e\}]$	az x_a és x_e közötti tartományban adja a differenciálegyenlet egy numerikus megoldását
`InterpolatingFunction`$[liste][x]$	az x pontbeli megoldást adja
`Plot[Evaluate`$[y[x]/.\ mo.]], \{x, x_a, x_e\}]$	a megoldást ábrázolja

$\{x, y\}, \{t, 15\}]$

A Mathematica a megfelelő interpolációs függvény megadásával válaszol:

Out[1] = {{x-> `InterpolatingFunction`[{0., 15.}, <>],

y-> `InterpolatingFunction`[{0., 15.}, <>]}}

A megoldást az

In[2] := `ParametricPlot`[{$x[t], y[t]$}/.$dg, \{t, 0, 2\}$, `PlotRange`-> `All`]

utasítással mint paraméteres görbét ábrázoljuk **(19.20.a ábra)**.
`NDSolve` opciók egy sorozatát tudja elfogadni, melyek az eredmény pontosságát befolyásolják.
Az `AccuracyGoal` utasítással előre megadhatjuk a numerikus megoldásnál a számítási pontosságot. Általában a Mathematica a problematikus tartományok közelében elfogadhatóan növeli az alappontok számát. Ez viszont a szingularitások környezetében a lépésszámtartalék kimerüléséhez vezethet. Ilyen esetekben lehetőség van a a `MaxSteps` megadásánál nagyobb lépésszámot előírni. `MaxSteps`-et végtelenre is be lehet allítani.

■ A FOUCAULT-féle inga differenciálegyenletei:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 2\Omega\dot{y}(t)\,, \quad \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -2\Omega\dot{x}(t).$$

Ha $\omega = 1$, $\Omega = 0{,}025$ és a kezdeti feltételek $x(0) = 0$, $y(0) = 10\,\dot{x}(0) = 10$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, akkor a bemenet és az eredmény:

In[3] := $dg3$ = `NDSolve`[{$x''[t] == -x[t] + 0.05y'[t], y''[t] == -y[t] - 0.05x'[t]$,

$x[0] == 0, y[0] == 10, x'[0] == y'[0] == 0\}, \{x, y\}, \{t, 0, 40\}]$

Out[3] = {{x-> `InterpolatingFunction`[{0., 40.}, <>],

y-> `InterpolatingFunction`[{0., 40.}, <>]}}

Ha

In[4] := `ParametricPlot`[{$x[t], y[t]$}/.$dg3, \{t, 0, 40\}$, `AspectRatio`-> 1]

akkor kapjuk a **19.20.b ábrát**.

19.8.4.2. Maple

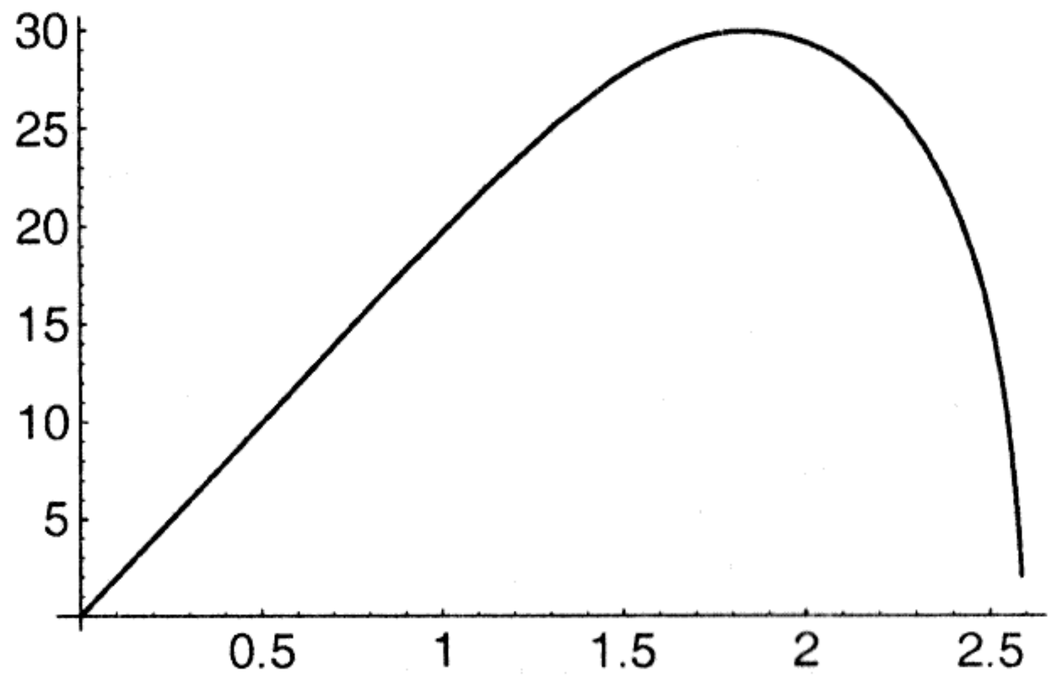
A Maple számítógép-algebrai rendszer igen sokféle matematikai feladatot tud megoldani a beépített közelítő eljárások segítségével. A számításoknál a tizedeshelyek szükséges számát a `Digits` globális változóval állíthatjuk be tetszőleges n-re. Arra viszont mindig ügyelni kell, hogy n-et az eredeti beállításnál nagyobbra választottuk, akkor ez a számítási sebesség rovására történik.

1. Kifejezések és függvények numerikus kiszámítása

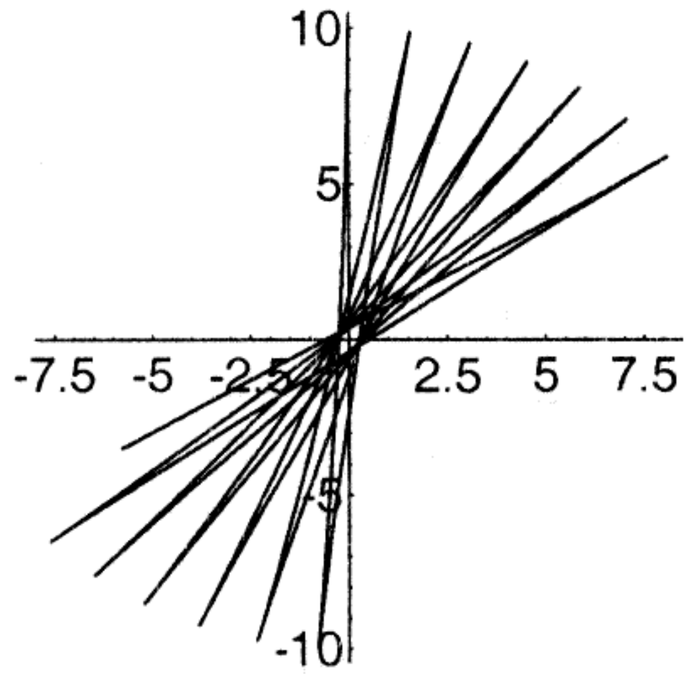
A Maple indítása után megjelenik a „Prompt” > , ami azt mutatja, hogy a rendszer bevitelre vár. A bevitel és az eredmény kiírása gyakran egy sorban jelenik meg, esetleg egy ⟶ nyíloperátorral elválasztva.

1. `evalf` operátor Olyan kifejezések számértékei, melyek egészen általános beépített vagy a felhasználó által definiált függvényeket tartalmaznak, az

`evalf`$(kifejz, n)$ (19.292)



a)



b)

19.20. ábra.

paranccsal kaphatók meg. Itt a *kifejz* a numerikusan kiértékelendő kifejezést jelöli, az opciós n argumentumot azért alkalmazzuk, hogy a `Digits` beállításától eltérően n-jegyű lebegőpontos aritmetikával dolgozzunk.

■ Tabellázzuk az $y = f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ függvény értékeit.
Először definiáljuk a függvényt nyíl-operátor segítségével:

$$> f := z \text{ -> } \texttt{sqrt}(z) + \ln(z); \longrightarrow f := z \text{ -> } \sqrt{x} + \ln x\,.$$

Ezután a szükséges függvényértékeket az `evalf`$(f(x))$; utasítással határozzuk meg, ahol x helyébe a numerikus értékeket helyettesítjük be.
A következő utasítással például kaphatunk a függvényértékekre egy táblázatot 1 és 4 között, 0,2 lépésközzel:

$$> \texttt{for } x \texttt{ from } 1 \texttt{ by } 0.2 \texttt{ to } 4 \texttt{ do print}(f[x] = \texttt{evalf}(f(x), 12)) \texttt{ od};$$

Ebben a példában 12 számjeggyel történt a számítás. A Maple az eredményt egy egyoszlopos táblázatban adja, ahol például $f_{[3.2]} = 2.95200519181$.

2. `evalhf` operátor: Az `evalf` mellett létezik az `evalhf` operátor. Hasonlóan alkalmazzuk, mint az `evalf`-ot. Az argumentumok itt is függvények, melyek függvényértéke valós. A lebegőpontos számokra viszont a gépi pontosság érvényes, minden számítás ezzel történik és végül az eredmény a Maple saját lebegőpontos számrendszerébe kerül. Ha ezt a parancsot használjuk, akkor a nagyterjedelmű numerikus számításoknál jelentős időt nyerünk, viszont vigyázni kell, mert a 962. oldalon beírt problémák esetén a hibák jelentősen megnőnek.

2. Egyenletek numerikus megoldása

Mint a számítógép-algebrai rendszerek c. fejezetben, az 1023. oldalon említettük, a Maple igen sokféle egyenlet és egyenletrendszer megoldására alkalmas. Ennek akkor különösen nagy a jelentősge, amikor transzcendens egyenletekről vagy olyan algebrai egyenletekről van szó, melyeket csak a valós számok tartományán tudunk megoldani.
Erre a célra szolgál az `fsolve` parancs. Szintaktikája a következő:

$$\texttt{fsolve}(gln, var, option) \tag{19.293}$$

Ez a parancs általános egyenletekre rendszerint egyetlen gyököt határoz meg. A polinom-egyenletre azonban az összes valós gyököt előállítja. Az alábbi táblázatban a rendelkezésre álló opciókat adtuk meg: ■ **A:** Határozzuk meg az $x^6 + 3x^2 - 5 = 0$ egyenlet összes gyökét. Ha

$$> eq := x\text{^}6 + 3 * x\text{^}2 - 5 = 0 : \qquad \text{akkor kapjuk}$$

$$> \texttt{fsolve}(eq, x); \longrightarrow -1.074323739\,,\ 1.074323739$$

A Maple csak a két valós gyököt adta meg. A `complex` opcióval kapjuk meg a komplex gyököket is:

$$> \texttt{fsolve}(eq, x, \texttt{complex});$$

19.8. táblázat. Az `fsolve` parancs opciói

`complex`	egyetlen komplex gyököt (vagy egy polinom összes komplex gyökét) határozza meg
`maxsols` $= n$	legalább n gyököt meghatároz (csak polinomegyenletekre)
`fulldigits`	megakadályozza a részszámítsokban a pontosság adott érték alá csökkenését
`intervall`	az adottintervallumban keresi a megoldásokat

$$-1.074323739, -0.8672620244 - 1.152922012\mathtt{I}, -0.8672620244 + 1.152922012\mathtt{I},$$
$$0.8672620244 - 1.152922012\mathtt{I}, 0.8672620244 + 1.152922012\mathtt{I}, 1.074323739$$

■ **B:** Határozzuk meg az $e^{-x^3} - 4x^2 = 0$ mindkét megoldását.
Először legyen:

$>$ $eq := \mathtt{exp}(-x\mathtt{\^{}}3) - 4 * x\mathtt{\^{}}2 = 0$ majd ezzel

$>$ $\mathtt{fsolve}(eq, x); \longrightarrow 0.4740623572$

adja a pozitív megoldást.

$>$ $\mathtt{fsolve}(eq, x, x = -2..0); \longrightarrow -0.5412548544$

adja a második (negatív) gyököt.

3. Numerikus integrálás

A határozott integrálok kiszámítása sokszor csak numerikusan lehetséges. Ez az eset áll fenn, ha az integrandus egy túl bonyolult függvény vagy ha a primitív függvényt nem lehet elemi függvényekkel felírni. A Maple a határozott integrál kiszamítására az `evalf` integrációs parancsot használja:

$$\mathtt{evalf}(\mathtt{int}(f(x), x = a..b), n)\,. \tag{19.294}$$

Ekkor a Maple az integrált közelítő módszerek segítségével a megkívánt pontossággal meghatározza. Ez az eljárás rendszerint jól alkalmazható.

■ Számítsuk ki az $\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-x^3}\,dx$ integrál értékét! Mivel a primitív függvény nem ismert, először beírjuk:

$>$ $\mathtt{int}(\mathtt{exp}(-x\mathtt{\^{}}3), x = -2..2); \longrightarrow \int_{-2}^{2} e^{-x^3}\,dx$

Ha most beírjuk:

$>$ $\mathtt{evalf}(\mathtt{int}(\mathtt{exp}(-x\mathtt{\^{}}3), x = -2..2), 15);$

akkor eredményül a 277,745841695583 értéket kapjuk.
Itt a Maple a beépített közelítő eljárás felhasználásával 15 jegy pontossággal számolt.

Bizonyos esetekben ez a módszer csődöt mond, főleg akkor, amikor nagyon nagy intervallumok fölött kell integrálni. Ekkor a

$\mathtt{readlib}(\mathtt{`evalf/int`})$:

könyvtári parancsot használva egy új közelítő módszert hívunk be, amely egy megfelelő NEWTON-eljárást alkalmaz.

■ Ha a bevitel

$>$ $\mathtt{evalf}(\mathtt{int}(\mathtt{exp}(-x\mathtt{\^{}}2), x = -1000..1000));$

akkor hibaüzenetet kapunk. Ezután írjuk:

$>$ $\mathtt{readlib}(\mathtt{`evalf/int`})$:

$>$ $\mathtt{`evalf/int`}(\mathtt{exp}(-x\mathtt{\^{}}2), x = -1000..1000, 10, \mathtt{_NCrule});$

1.772453851

és ez a helyes eredmény. Itt a harmadik argumentum a pontosságra vonatkozó adat, az utolsó a közelítő eljárás belső jelölése.

4. Differenciálegyenletek közelítő megoldása

Az 1023. oldalon tárgyaltuk a közönséges differenciálegyenletek megoldását a `dsolve` Maple-eljárással. A legtöbb esetben azonban nem lehetséges az eredményt zárt alakban megadni. Ezekben az esetekben megkísérelhetjük az egyenletet numerikusan megoldani, de ehhez megfelelő kezdeti feltételek megadása szükséges.
Ekkor a `dsolve` parancsot az alábbi alakban adjuk meg:

$$\texttt{dsolve}(diffe, var, \texttt{numeric}) \tag{19.295}$$

ahol a harmadik argumentum a **numeric** opció. Itt a $diffe$ argumentum a differenciálegyenlet mellett a kezdeti feltételeket is tartalmazza. Ennek az utasításnak az eredménye egy eljárás, amely ha pl. ezt f jelöli, az $f(t)$ meghívásával a megoldás értékét a független változó t értéke esetén adja meg.
A Maple itt a RUNGE–KUTTA-eljárást alkalmazza (lásd 927. old.). Az előre adott pontosság az abszolút és relatív hibára: $10^{-\text{Digits}+3}$. A `_RELERR` és `_ABSERR` globális szimbólumokkal a felhasználó megváltoztathatja az előzetesen beállított pontosságot. Ha a számításnál problémák lépnek fel, akkor ezek kizárására a Maple különböző jelöléseket alkalmaz.

■ A 927. oldalon a RUNGE–KUTTA-módszer adott példában a Maple-t alkalmazza:

```
> r := dsolve({diff(y(x),x) = (1/4) * (x^2 + y(x)^2), y(0) = 0}, y(x), numeric);
```

```
r := proc `dsolve/numeric/result2` (x, 1592392, [1]) end
```

Ha

```
> r(0.5); ⟶ {x(.5) = .5000000000, y(x)(.5) = .01041860472}
```

akkor például kiírhatjuk a megoldás értékét az $x = 0{,}5$ pontban.

20. Matematikai programcsomagok

20.1. Bevezetés

20.1.1. A matematikai programcsomagok rövid jellemzése

1. A matematikai programcsomagok általános célkitűzései A matematikai gyakorlatban egyre több számítógépes rendszert alkalmaznak. Ilyen rendszerekkel, mint például a Macsyma, Reduce, Derive, Maple, Mathcad, Mathematica, SPSS, BMDP viszonylag kis kapacitású személyi számítógépeken is meg tudnak oldani nehéz matematika feladatokat, mint például bonyolult kifejezések egyszerűsítése, deriváltak és integrálok kiszámítása, egyenletek és egyenletrendszerek megoldása, egy- és többváltozós függvények grafikus ábrázolása, és még sok más feladatot. Ezen rendszerek segítségével *kezelhetjük* a matematikai kifejezéseket, azaz azokat a matematika törvényei szerint átalakíthatjuk és egyszerűsíthetjük, amennyiben ez zárt alakban lehetséges. Ezenkívül ezek a rendszerek numerikus megoldások kívánt pontosságú kiszámítására, függvénykapcsolatok grafikus ábrázolására is alkalmasak.

2. A matematikai programcsomagok alkalmazásának speciális lehetőségei A legtöbb ilyen rendszer képes külső adatokkal és adatrendszerekkel kommunikálni, azaz lehetőség van adatok importjára, exportjára. Azon definíciók és utasítások alapkészlete mellett, melyeket a rendszer minden elindításnál betölt, számos, a speciális matematikai területeknek megfelelő kiegészítő programcsomagokat tartalmazó programkönyvtár is betölthető (lásd irod. [20.4]).
Ezek a rendszerek lehetővé teszik, hogy programozással saját programcsomagokat hozzunk létre.
Ezen matematikai rendszerek lehetőségeit azonban nem szabad túlbecsülni. Ha egy határozatlan integrál nem fejezhető ki zárt alakban, akkor ilyent ez a rendszer sem tud megadni.
A fellépő hibákat illetően utalunk a Numerikus problémák a számítógépen c. fejezetre (ld. 962. old.).

3. Korlátozódás a Mathematica és Maple rendszerekre Az eddig ismert rendszerek tovább fejleszthetők. Minden konkrét leírás azonban csak az aktuális állapotot tükrözheti. A továbbiakban az ilyen rendszerek alapvető felépítésébe és a fontos matematikai területeken történő alkalmazásaikba nyújtunk bepillantást. Mondanivalónkat a Maple egy viszonylag új változatára, a Maple 7-re alapozzuk, de néhány fontos kivételtől eltekintve csak azokat az elemeit ismertetjük, amelyek már az első széles körben elterjedt Maple V Release 4 változatban is megvoltak. Hasonlóan a Mathematica Version 4 azon részeit tekintjük át, amelyek már a Version 2.2-ben is szerepeltek. Mindkét rendszer esetében ezek — a könyv német, illetve jelen magyar kiadásának idején — a legújabb változatok. A Mathematica és a Maple kiválasztása önkényes, jelenleg azonban ez a két rendszer tűnik a legszélesebb körben elterjedtnek. A Mathematica számolási eredményeit át lehet konvertálni a Maple-be. Az ehhez szükséges programok megtalálhatók egy CD–ROM-on lévő kézikönyvben (ld. [20.8]).

4. Be- és kivitel a Mathematica és Maple rendszerekben
Ebben az ismertetésben nem tárgyaljuk, hogy hogyan van a szóban forgó programcsomag a számítógép saját operációs rendszerébe beillesztve. Abból indulunk ki, hogy az operációs rendszerből egy utasítással elindítjuk a rendszert, amelyet ezután egy utasítássorral vagy egy, a Windows-hoz hasonló munkafelülettel irányítani tudunk.
A be- és kivitel a képernyőn a Mathematicá-ban (ld. 969. old.) és a Maple-ben (ld. 972. old.) mindig külön sorban jelenik meg, hogy a többi szövegrésztől jól elkülönüljenek, például

$$\begin{array}{ll} \mathrm{In}[1] := \texttt{Solve}[3\ \ x - 5 == 0, x] & \text{a Mathematicá-ban,} \\ > \ \texttt{solve}(3 * x - 5 = 0, x) & \text{a Maple-ben,} \end{array} \tag{20.1}$$

de mi helytakarékossági okokból az együvétartozó be- és kiviteleket gyakran egy sorban (esetleg $\longrightarrow$ jellel elválasztva) foglaljuk össze.
A rendszerspecifikus szimbólumokat (utasítások, típusjelölések, stb.) a szövegben írógép betűtípussal emeljük ki.

20.1.2. Bevezető példák a legfontosabb alkalmazási területekről

20.1.2.1. Képletkezelés

*Képletkezelés*en itt a legtágabb értelemben a matematikai kifejezések egyszerűsítését vagy egy, a to-

vábbi kezelésre alkalmas alakra hozását értjük, így például egyenletek vagy egyenletrendszerek algebrai megoldását, függvények differenciálását, határozatlan integrálok meghatározását, differenciálegyenletek megoldását, végtelen sorok képzését, stb.

■ Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet:

$$x^2 + ax + b = 0, \quad \text{ahol} \quad a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{20.2a}$$

A Mathematicá-ban a bevitel:

$$\texttt{Solve}[x\text{\^{}}2 + a\ \ x + b == 0, x]\,. \tag{20.2b}$$

A megfelelő beviteli utasítás (SHIFT+ENTER) beütése után a Mathematica ezt a sort az

$$\text{In}[1] := \texttt{Solve}[x\text{\^{}}2 + a\ \ x + b == 0; x] \tag{20.2c}$$

sorral helyettesíti és elkezdi feldolgozni. Rövid idő után egy új sor jelenik meg:

$$\text{Out}[1] = \{\{x \to \frac{-a + \texttt{Sqrt}[a^2 - 4b]}{2}\}, \{x \to \frac{-a - \texttt{Sqrt}[a^2 - 4b]}{2}\}\}\,. \tag{20.2d}$$

A Mathematica az egyenletet szimbolikusan megoldotta, és a két gyököt egy olyan *listával* adta meg, amely két részlistából áll, s ezek mindegyike egy-egy gyököt tartalmaz. Itt `Sqrt` természetesen a négyzetgyök jele.

A Maple-ben a bevitel a következő alakban történik:

$$> \ \texttt{solve}(x\text{\^{}}2 + a * x + b = 0, x)\,; \tag{20.3a}$$

Itt fontos az utolsó jel után a pontosvessző. Ha ehelyett : szerepelne, azzal megakadályoznánk a kiírást. A bevitelt a számítógép által kiírt > jel utáni karakterrel kezdjük és az ENTER beütésével fejezzük be, ezután a Maple feldolgozza a bevitt képletet, és a következő sort írja ki:

$$1/2(-a + (a^2 - 4b)^{1/2})\,,\ 1/2(-a - (a^2 - 4b)^{1/2}) \tag{20.3b}$$

Az eredményt két kifejezés, azaz a két megoldás *sorozata* adja.

Az egyes rendszerek speciális jelöléseitől eltekintve az utasítások alapvető felépítése igen nagy hasonlóságot mutat. Az elején mindig egy *szimbólum* áll, ezt a rendszer *operátor*ként értelmezi, melyet az őt követő, zárójelben álló egy vagy több *operandus*ra kell alkalmazni. Az eredményt a megoldások listája vagy sorozata szolgáltatja. A képletkezelések műveleteinek ábrázolása hasonlóan történik.

20.1.2.2. Numerikus számítások

A számítógépes matematikai rendszerek a numerikus matematika feladatainak kezelésére számos eljárást tartalmaznak. Ilyen feladatok például az algebrai egyenletek, a lineáris egyenletrendszerek, transzcendens egyenletek megoldása, határozott integrálok kiszámítása, differenciálegyenletek numerikus megoldása, interpolációs problémák és még sok más.

■ Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^6 - 2x^5 - 30x^4 + 36x^3 + 190x^2 - 36x - 150 = 0\,. \tag{20.4a}$$

Ez egy hatodfokú egyenlet, amelynek a gyökei zárt alakban nem adhatók meg, pedig 6 valós gyöke van, melyeket így numerikus úton kell meghatározni.

A Mathematicá-ban a bevitel:

$$\text{In}[2] := \texttt{NSolve}[x\text{\^{}}6 - 2x\text{\^{}}5 - 30x\text{\^{}}4 + 36x\text{\^{}}3 + 190x\text{\^{}}2 - 36x - 150 == 0, x] \tag{20.4b}$$

A válasz:

$$\begin{aligned}\text{Out}[2] = \ &\{\{x\text{->}\ -4.42228\}\,,\ \{x\text{->}\ -2.14285\}\,,\ \{x\text{->}\ -0.937397\}\,,\ \{x\text{->}\ 0.972291\}\,,\\ &\{x\text{->}\ 3.35802\}\,,\ \{x\text{->}\ 5.17217\}\}\end{aligned} \tag{20.4c}$$

Ez a lista tartalmazza a 6, adott pontossággal számított gyököt. Mivel nem szimbolikus, hanem numerikus adataink vannak, numerikus megoldást szeretnénk. Ezért az `NSolve` utasítást használjuk. Általános alakja: `NSolve`[baloldal == jobboldal, változó] — mint a fenti is —, ahol a bal- és jobboldal egy-egy polinom. `NSolve`[egyenlet, változó, n] a gyököket n jegy pontossággal adja meg.

A pontosság tárgyalására később visszatérünk.

A Maple-ben a bevitel:

$$> \texttt{fsolve}(x\hat{}6 - 2 * x\hat{}5 - 30 * x\hat{}4 + 36 * x\hat{}3 + 190 * x\hat{}2 - 36 * x - 150 = 0, x); \qquad (20.4d)$$

Itt a végén az „= 0" hiányozhat, és az utána írt „x" változónév is elhagyható az egyértelműség miatt. A Maple az adott kifejezést automatikusan nullával teszi egyenlővé. A kiírt eredmény a 6 gyök sorozata. Az `fsolve` utasítás azt jelenti, hogy az eredményt lebegőpontos alakban várjuk.

20.1.2.3. Grafikus ábrázolások

A legtöbb számítógépes rendszer lehetővé teszi mind a beépített, mind a felhasználó által definiált függvények grafikus ábrázolását. Ez rendszerint egyváltozós függvények ábrázolása derékszögű, illetve polár-koordinátarendszerben, paraméteres görbeábrázolás, illetve implicit függvények ábrázolása. A kétváltozós függvényeket mint térbeli felületeket ábrázolják, itt is mód van paraméteres ábrázolásra. Lehet a háromdimenziós térben görbéket ábrázolni. A különböző rendszerekben vannak még ezenkívül további grafikus lehetőségek függvénykapcsolatok ábrázolására, például diagrammok formájában. Mindegyik rendszer az ábrázolási opciók széles választékával rendelkezik, melyek a vonalas ábrázolástól a kiegészítő grafikus elemek, például vektorok beépítésén át a feliratozásig és színezésig terjednek.
A létrehozott grafikák rendszerint a Postscript, Raster vagy Plotter kiterjesztéssel exportálhatók, és így más programokba beépíthetők, illetve közvetlenül a nyomtatóra vagy a rajzolóra küldhetők.

20.1.2.4. Programozás a számítógépes környezetben

Mindegyik rendszerben lehetőség van arra, hogy speciális feladatok megoldására saját programokat írjunk. Ez egyrészt az olyan egyszerű, ismert eljáráselemek felhasználását jelenti, mint a ciklus- és kontrollutasítások, például DO, IF — THEN, WHILE, FOR, stb., másrészt a funkcionális, az objektumorientált és a logikai programozás többé-kevésbé ismert módszereit, melyek sok problémára elegáns megoldásokat adnak.
A felhasználó által írt programok a rendszer könyvtárába bevihetők, és ezután onnan szükség szerint mindig betölthetők.

20.1.3. A matematikai programcsomagok felépítése és használata

20.1.3.1. Alapvető szerkezeti elemek

1. Objektumtípusok

A számítógépes rendszerek az objektumtípusok széles választékával dolgoznak. *Objektumok*nak nevezzük a rendszer által használt számokat, változókat, függvényeket, operátorokat, stb., melyeket a rendszer indításakor betölt, és amelyek a programba beírhatók vagy a felhasználó által a szintaxisnak megfelelően definiálhatók.
Az objektumok osztályait, mint például a számok vagy a listák fajtáit nevezzük *típus*nak.
A legtöbb objektumot a nevével azonosítjuk, melyet az objektumosztály szimbólumának tekintünk.

A felhasználó a beviteli sorban objektumok egy sorozatát adja meg, azaz azok nevét a szintaxisnak megfelelően, majd a bevitelt lezárja egy erre a célra definiált jellel és/vagy egy speciális rendszerutasítással, mely szerint a rendszer az adatok feldolgozását megkezdi, és az eredményt a további sorokban ábrázolja. (A bevitel több sorból is állhat.)

A következőkben tárgyalt objektumok, ill. objektumtípusok és -osztályok mindegyik rendszerben rendelkezésünkre állnak. Most részletesen bemutatjuk az egyes rendszerek eltérő specialitásait.

2. Számok

A matematikai programcsomagok általában a következő számtípusokat ismerik: *egész számok, racionális számok, valós számok (lebegőpontos számok), komplex számok*; egyes rendszerek ismernek még *algebrai számokat, gyökkifejezéseket*, stb.

Típusvizsgálati műveletekkel vizsgálhatjuk adott számok tulajdonságait, mint például *nemnegatív,*

prímszám, stb.

A lebegőpontos számokat előírt pontossággal használhatjuk. A rendszerek általában előre meghatározott pontossággal dolgoznak, amely szükség szerint egy adott határig megváltoztatható.

A rendszerek ismerik a matematikai szempontból alapvető jelentőségű számokat és szimbólumokat, mint például e, π és ∞. Ezeket szimbolikusan kezelik, de a számokat tetszőleges pontossággal numerikus számításokban is alkalmazzák.

3. Változók és értékadó operátorok

A változóknak nevük van, vagyis rendszerint egy, a felhasználó által meghatározott szimbólum jelöli azokat. Nem célszerű azonban (és meg is van nehezítve) a rendszer fogalmainak jelölésére lefoglalt neveket adni. Amíg a változónak nem adtunk értéket, a mindenkori szimbólum magát a változót jelenti.

A változóknak értéket adhatunk speciális *értékadó operátorok* segítségével. A változók értékei lehetnek számok, más változók, mint például objektumok speciális sorozata, melyet általában kifejezésnek hívunk. Az értékadó utasítások kiértékelésének időpontja különböző lehet, azaz az értékadás történhet akár rögtön az értékadás beírásánál, akár a változó későbbi behívásánál.

4. Operátorok

Mindegyik rendszer *operátorok* alapkészletével rendelkezik. Ide tartoznak a matematikai műveletek és relációk: $+$, $-$, $*$, $/$, $\hat{}$ (vagy $**$), $>$, $<$, $=$, melyek feldolgozása a megfelelő, ismert sorrendben történik. Ha az operátorok az operandusok között állnak, akkor *infix* jelölésről (alakról, írásmódról) beszélünk.

A *prefix* típusú operátorok — mely esetben az operátor az operandus/ok előtt áll — mindegyik rendszerben jelentős számban vannak. Ide tartoznak rendszerint a speciális objektum-osztályokkal — mint például számok, polinomok, halmazok, listák, mátrixok, egyenletrendszerek — dolgozó operátorok és a funkcionális operátorok, mint például a differenciálás, integrálás, stb. Ezenkívül ilyenek az eredmények megjelenítési formátumának meghatározására, jelláncok és egyéb, a rendszer által használt objektumok kezelésére szolgáló operátorok. Néhány rendszer, pl. a Mathematica megengedi egyes operátorok *suffix* írásmódját, amikor az operátor az operandus/ok mögött áll. Az operátorok gyakran opcionális argumentumokat is használnak, melyek speciális helyzeteket kezelnek.

5. Kifejezések és függvények

*Kifejezés*en objektumok olyan elrendezését értjük, melyek adott matematikai műveletekkel vannak összekapcsolva, ilyenek például a matematikából jól ismert alapképletek. A programcsomagok egyik fő célja a kifejezések átalakítása, például egyenletek megoldása.

■ Kifejezés például az alábbi:

$$x\hat{}4 - 5 * x\hat{}3 + 2 * x\hat{}2 - 8 \tag{20.5}$$

ahol x egy változó.

Ezek a rendszerek ismerik a szokásos elemi függvényeket, mint az exponenciális, a logaritmus függvény, a trigonometrikus függvények és inverzeik, valamint egy sor speciális függvényt. Ezeket a függvényeket beírhatjuk változók helyére. Így új, bonyolultabb függvényeket kapunk.

6. Listák és halmazok

Mindegyik rendszer ismeri a *Lista* objektumosztályt; listán az objektumok egy elrendezését értjük. A lista elemeihez speciális operátorokkal lehet hozzáférni. Rendszerint megengedettek a listákból álló listák is. Így egymásba skatulyázott listákat kapunk, melyeket speciális objektumtípusok, mint pl. mátrixok és tenzorok képzésére használhatunk; erre a célra mindegyik rendszer speciális objektumosztályokkal rendelkezik. Ebből adódik vektorterek vektorai és lineáris leképezései (tenzorai) szimbolikus

használatának lehetősége, általában a lineáris algebra használata.
A rendszerek a halmaz fogalmát is ismerik, a halmazelmélet műveletei implementálva vannak.

20.2. Mathematica

A Mathematica rendszert a Wolfram Research, Inc. cég fejlesztette ki. A Mathematica 4 változat részletes tárgyalása [20.5]-ben található.

20.2.1. Alapvető szerkezeti elemek

A Mathematica rendszer alapvető szerkezeti elemeit egységesen *kifejezéseknek* hívjuk. Ezek szintaxisa:

$$\texttt{obj}_0[\texttt{obj}_1, \texttt{obj}_2, \ldots, \texttt{obj}_n]. \tag{20.6}$$

Itt $\texttt{obj}_0$ a fenti *kifej* kifejezés *feje* (Head); egyúttal a nulladik argumentuma, amit Head[*kifej*] hatására kapunk meg. Az $\texttt{obj}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ a kifejezés *részei*, melyeket a megfelelő Part[*kifej*, i]-vel vagy *kifej*[[i]]-vel kapunk meg; ha i negatív akkor $\texttt{obj}_{n+1-i}$ az eredmény.
A kifejezés feje sok esetben egy operátor vagy egy függvény, a részek az operandusok vagy változók, melyekkel a fej dolgozik.

■ Head[$f[x]$] $\longrightarrow$ f; Head[$a + b$] $\longrightarrow$ Plus; Head[4] $\longrightarrow$ Integer; Head[x] $\longrightarrow$ Symbol

Egy kifejezésben mind a fej, mind a részek megint lehetnek kifejezések. A szögletes zárójelek a Mathematica rendszerben a kifejezések leírására vannak fenntartva, ezért csak ebben az összefüggésben használhatjuk őket.

■ Az $x\hat{}2 + 2 * x + 1$ kifejezésnek, amely a Mathematicá-ban ebben az infix alakban is megadható, a következő FullForm utasítással kapható meg a teljes alakja, ami a kiértékelés szempontjából ekvivalens az eredetivel: FullForm[$x\hat{}2 + 2 * x + 1$], amire a gép válasza:

$$\texttt{Plus}[1, \texttt{Times}[2, x], \texttt{Power}[x, 2]]$$

ami maga is egy kifejezés. A Plus, Power és Times szavak a megfelelő matematikai műveleteket jelölik (ld. **a 20.2. táblázatot**).

Ebből a példából láthatjuk, hogy ahogy általában a kifejezések, valamennyi egyszerű matematikai művelet belső, prefix alakban is létezik, és hogy a képernyőn megjelenő beviteli alak csak egyszerűsítés.
Már említettük, hogy a kifejezések egyes részei kiemelhetők a Part[*kifej*, i] vagy *kifej*[[i]] utasítással. *kifej*[[$i, j, \ldots$]] = *kifej*[[i]][[j]] ... tehát az i. rész j. részének a ... részét adja. *kifej*[[$\{i_1, i_2, \ldots\}$]] pedig a megfelelő részkifejezések listáját adja meg, ennek értelemszerű alesete másképpen *kifej*[Range[i, j]]. Formálisan és így az indexelés szempontjából is egy kifejezés listák egymásba skatulyázott listája, amelyet ezen alakban az említett FullForm utasítás mutat meg.

■ Ha a Mathematicá-ban a bevitel:

$$\text{In}[1] := x\hat{}2 + 2 * x + 1$$

ahol a $*$ jelet akár el is hagyhatjuk, akkor az SHIFT + ENTER-t leütve a Mathematica válasza:

$$\text{Out}[1] = 1 + 2x + x^2.$$

A Mathematica felismerte a bevitelt és standard matematikai alakban adta vissza. Ha a bevitelt lezártuk volna egy pontosvesszővel, akkor a kiírás nem történt volna meg; ez általános szabály.
Ha most ezt írjuk be:

$$\text{In}[2] := \texttt{FullForm}[\%]$$

akkor a válasz:

$$\text{Out}2 = \texttt{Plus}[1, \texttt{Times}[2, x], \texttt{Power}[x, 2]]$$

A szögletes zárójelbe írt % jel azt közölte a Mathematicá-val, hogy az előző kivitel a mostani utasítás argumentuma (az utolsó előtti eredményére %%-kal, az Out[n] kivitelre %n-nel hivatkozhatunk). Ebből a kifejezésből például a harmadik elemet, ami szintén egy kifejezés, kiemelhetjük:

$$\text{In}[3] := \texttt{Part}[\%, 3], \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[3] = \texttt{Power}[x, 2]\,.$$

A szimbólumok a Mathematicá-ban az alapobjektumok jelölései; ezek betűk és számok sorozatai, de soha nem kezdődhetnek számmal. A $ jel is megengedett. A kis- és nagybetűket a rendszer megkülönbözteti. A rendszer belső szimbólumai, sőt összetett szavaknál a második, harmadik tagok is nagybetűvel kezdődnek (ha azok önmagukban is értelmesek).

20.2.2. Számábrázolás a Mathematicá-ban

20.2.2.1. A számok alaptípusai a Mathematicá-ban

A Mathematica a számok négy fajtáját ismeri, melyeket a **20.1. táblázat** tartalmazza.

20.1. táblázat. Számábrázolás a Mathematicá-ban

Szám típusa	Fej	Jellemzés	Bevitel
Egész	`Integer`	tetszőleges hosszú pontos egész szám	*nnnnn*
Racionális	`Rational`	`Integer/Integer` alakú egyszerűsíthetetlen tört	*pppp/qqqq*
Valós	`Real`	előírt pontosságú lebegőpontos szám	*nnnn.mmmm*
Komplex	`Complex`	*szám + szám* ∗`I` alakú komplex szám	

A valós, azaz a lebegőpontos számok hossza tetszőleges lehet. Ha egy *nnn* egész számot *nnn.* alakban írunk, akkor ezt a Mathematica lebegőpontos, azaz valós számként értelmezi.
A `Head`[x] megállapítja az x szám típusát. Így például In[1] := `Head`[51] esetén a válasz: Out[1] = `Integer` , de In[2] := `Head`[51.] esetén Out[2] = `Real` a válasz. Egy komplex szám valós és képzetes része tetszőleges típusú szám lehet. Az 5.731 + 0 `I` számhoz a Mathematica a `Real` típust rendeli, de az 5.731 + 0. I már `Complex` típusú, mert a 0.-t lebegőpontos számként értékeli, melynek értéke csak közelítőleg 0, tehát a szám képzetes része nem tűnik el .
Vannak további műveletek, melyekkel a számokról felvilágosítást kaphatunk: Így például

$$\text{In[3]} := \texttt{NumberQ}[x] \quad \longrightarrow \quad \text{Out[3]} = \texttt{True}, \text{ ha } x \text{ egy szám,} \tag{20.7a}$$

egyébként Out[3] = `False`. Itt a `True` és `False` a BOOLE-féle 'igaz' és 'hamis' logikai értékek szimbólumai.
Az `IntegerQ`[x] azt teszteli, vajon x egész szám és ezért, ha

$$\text{In[4]} := \texttt{IntegerQ}[2.], \qquad \text{akkor} \qquad \text{Out[4]} = \texttt{False}\,. \tag{20.7b}$$

Hasonló, nyilvánvaló jelentésű tesztek az `EvenQ`, `OddQ` és `PrimeQ` fejekkel adhatók meg. Így például:

$$\text{In[5]} := \texttt{PrimeQ}[1075643] \quad \longrightarrow \quad \text{Out[5]} = \texttt{True}, \tag{20.7c}$$

de (a jegyösszeg — és így maga a szám is — 3 többese)

$$\text{In[6]} := \texttt{PrimeQ}[1075641] \quad \longrightarrow \quad \text{Out[6]} = \texttt{False} \tag{20.7d}$$

Ezek a tesztek a predikátumok csoportjához tartoznak, melyek mind `Q`-val végződnek és mindig a `True` vagy `False` logikai értéket adják válaszként.

20.2.2.2. Speciális számok

A Mathematica tartalmaz néhány speciális számot, melyekre gyakran van szükség és amelyeket tetszőleges pontossággal meghívhatunk. Ilyen a π szám, melynek jele `Pi`, az e szám az `E` jellel, a $\frac{\pi}{180}$ a `Degree` jellel (a szögmértékből ívmértékbe való átszámítás faktora), `Infinity` a ∞ jele, a már tárgyalt képzetes egységé pedig `I`.

20.2.2.3. Számok ábrázolása és konvertálása

A számok a `Form`-végű utasításokkal különböző alakban ábrázolhatók, melyeket egymásba lehet konvertálni. Így például minden x valós számot az `N`[x, n] belső függvény egy n-jegyre pontos lebegőpontos számba konvertál.

$$\text{In[7]} := \texttt{N}[E,\ 19] \quad \longrightarrow \quad \text{Out[7]} = 2.718281828459045235 \tag{20.8a}$$

A `Rationalize`$[x,\ dx]$ belső függvény az x számot dx pontossággal racionális számmá alakítja:

$$\text{In}[8] := \texttt{Rationalize}[\%,\ 10\hat{}-5] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[8] = \frac{1457}{536} \tag{20.8b}$$

Ha 0 pontosságot adunk meg, akkor a Mathematica az x számot lehető legjobban közelítő racionális számot állítja elő, figyelembe véve a szám pontosságát, ami része belső ábrázolásának.
Különböző számrendszerekben adott számok is egymásba konvertálhatók. A `BaseForm`$[x,\ b]$ az x kifejezéssel megadott decimális számot a b (≤ 36) alapú számrendszerben neki megfelelő számba konvertálja. Ha $b > 10$, akkor a 9-nél nagyobb számjegyek jelei sorban az $a, b, c, \ldots$ betűk; az új alap alsó indexként megjelenik a szám végén, nem egész szám esetén, ha van előírt pontosság, azt az új alak örökli.

■ **A:** Így például

$$\text{In}[15] := \texttt{BaseForm}[255,\ 16] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[15] = ff_{16} \tag{20.9a}$$

vagy

$$\text{In}[16] := \texttt{BaseForm}[\texttt{N}[E,\ 10],\ 8] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[16] = 2.557605213_8 \tag{20.9b}$$

Az inverz transzformációban $b\hat{}\hat{}mmmm$ -et kell írni, ahol $mmmm$ b alapú szám, amelyet 10-es számrendszerbe akarunk (vissza)alakítani.

■ **B:** Ekkor tehát

$$\text{In}[17] := 8\ \hat{}\hat{}735 \quad \text{eredménye} \quad \text{Out}[17] = 477 \tag{20.9c}$$

A számok ábrázolása a mindenkori, előre beállított pontossággal történik, ami alapértelmezésben 6 értékes jegyet jelent, 6-nál több jegyűek esetén pedig az ún. tudományos írásmódban, azaz $nnnn.mmmm10\hat{} \pm q$ alakban.

20.2.3. A fontos operátorok

Sok alapoperátor egyszerű alakban írható a matematikában szokásos $< symb_1\ op\ symb_2 >$ infix alakban. Ez azonban minden esetben a teljes írásmódnak csak egy egyszerűsített szinoním változata. A leggyakrabban előforduló műveleti és relációs operátorokat és azok teljes, azaz belső alakját a **20.2. táblázat** tartalmazza.

20.2. táblázat. A Mathematica fontosabb operátorai és azok `FullForm`-alakja

$a + b$	`Plus`$[a,\ b]$	$u == v$	`Equal`$[u,\ v]$
$a\ \ b$ vagy $a * b$	`Times`$[a,\ b]$	$w! = v$	`Unequal`$[w,\ v]$
$a\hat{}b$	`Power`$[a,\ b]$	$r > t$	`Greater`$[r,\ t]$
a/b	`Times`$[a,$ `Power`$[b,\ -1]]$	$r >= t$	`GreaterEqual`$[r,\ t]$
u–> v	`Rule`$[u,\ v]$	$s < t$	`Less`$[s,\ t]$
$r = s$	`Set`$[r,\ s]$	$s <= t$	`LessEqual`$[s,\ t]$

A **20.2. táblázatban** a legtöbb jelölés és megnevezése magától értetődő (vagy egyik a másikból következik). A szorzat $a\ \ b$ alakjánál vigyázni kell; a két tényező között szükséges egy szóköz.

Vizsgáljuk meg a `Rule` és `Set` fejjel kezdődő kifejezéseket! Legyen a baloldali r kifejezés értéke például egy változó, a jobboldali s kifejezésé pedig egy szám. A `Set` azonnali hozzárendelés hatására, annak törléséig r értéke az így hozzárendelt s. A törlés vagy új érték hozzárendelésével vagy az x = ., ill. `Clear`$[x]$ utasítás hatására, azaz minden eddigi hozzárendelés törlésével történik. A `Rule` konstrukció ezzel szemben egy transzformációs szabály, mely legtöbbször az alábbi /. helyettesítőoperátorban fordul elő.

`ReplaceAll`$[t,\ u$ –> $v]$ vagy röviden $t/.\ u$–> v azt jelenti, hogy a t kifejezésben u összes előfordulása helyébe v kerül.

■ $\text{In}[5] := x + y^2\ /.\ y \texttt{ -> } a + b \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[5] = x + (a+b)^2$

A `Rule` és a `ReplaceAll` operátorra is jellemző, hogy az utasítás vagy a transzformációs szabály bevitele után annak jobboldalát rögtön kiértékeli. Ezért a baloldalak értéke minden ezt követő hívásuk után már a megfelelő jobboldalak értékével helyettesítődik.

Van viszont két alternatív operátor, melyek késleltetett hatásúak:

$$u := v \quad (\texttt{FullForm-alakja} = \texttt{SetDelayed}[u, v]) \tag{20.10a}$$

és

$$u :> v \quad \text{vagy} \quad u :\rightarrow v \quad (\texttt{FullForm-alakja} = \texttt{RuleDelayed}[u, v]) \tag{20.10b}$$

Itt is érvényes az utasítás, illetve a transzformációs szabály felülírásáig, hogy a baloldalt a jobboldallal helyettesítjük, viszont a jobboldal aktuális kiértékelése csak a baloldal aktuális meghívásakor történik meg.

Az $u == v$, `FullForm`-alakban $\texttt{Equal}[u,\ v]$ kifejezés értéke pontosan akkor `True`, amikor u és v azonos. Az `Equal`-t például egyenletek kezelésénél használjuk. Jó tudni, hogy bármely f operátornak van egy ekvivalens $//f$, utóképzős alakja is:

$$\text{In}[6] := x + y//f \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[6] = f[x + y]$$

20.2.4. Listák

20.2.4.1. Fogalom és jelentés

A Mathematicá-ban a listákat változók csoportjainak a kezelésére használjuk, ez elsősorban a lineáris algebrában és analízisben igen fontos. Mivel általában a kifejezések a listákkal sok hasonlóságot mutatnak, a listák kezelése mintául szolgál a kifejezések bizonyos osztályainak kezelésére, emiatt a listaműveletekhez nagyon hasonlóak a `String`... alakú, karakterláncokra vonatkozó utasítások.

A lista több objektum összefoglalása egy objektummá és a listában minden objektum egyenértékű, csak a listán elfoglalt helyük különbözteti meg őket. Egy listát így hozunk létre adatokból:

$$\texttt{List}[a1,\ a2,\ a3,\ \ldots] \equiv \{a1,\ a2,\ a3,\ \ldots\} \tag{20.11}$$

A lista alkalmazását egy konkrét listán mutatjuk meg, melynek jele $l1$:

$$\text{In}[1] := l1 = \texttt{List}[a1,\ a2,\ a3,\ a4,\ a5,\ a6] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[1] = \{a1,\ a2,\ a3,\ a4,\ a5,\ a6\} \tag{20.12}$$

A Mathematica a lista kiírásánál a kapcsos zárójelet használja.

A **20.3. táblázatban** azon utasításokat foglaltuk össze, melyek egy listából egy részlistát képeznek.

20.3. táblázat.
Listaelemeket kiválasztó utasítások és eredményük; l listát jelent, a többi argumentum kifejezést, melynek értéke természetes szám

$\texttt{First}[l]$	kiválasztja az első elemet
$\texttt{Last}[l]$	kiválasztja az utolsó elemet
$\texttt{Part}[l,\ n]$ vagy $l[[n]]$	kiválasztja az n-edik elemet
$\texttt{Part}[l,\ \{n1,\ n2,\ \ldots\}]$	létrehoz egy listát az adott sorszámú elemekből
$l[[\{n1,\ n2,\ \ldots\}]]$	ugyanaz, mint az előző művelet
$\texttt{Take}[l,\ m]$	az l lista első m eleméből hoz létre új listát
$\texttt{Take}[l,\ -m]$	a lista utolsó m eleméből hoz létre új listát
$\texttt{Take}[l,\ \{m,\ n\}]$	az l lista elemeit sorszám szerint m-től n-ig egy új listába teszi
$\texttt{Drop}[l,\ n]$	az első n elem kivételével hoz létre új listát
$\texttt{Drop}[l,\ \{m,\ n\}]$	az első $m-1$ és az n-nél nagyobb sorszámú listaelemekből hoz létre új listát
$\texttt{Rest}[l]$	ugyanaz, mint $\texttt{Drop}[l, 1]$

■ Például (20.11)-ben az $l1$ listára:

$$\begin{aligned}
&\text{In}[2] := \texttt{First}[l1] &&\longrightarrow \quad \text{Out}[2] = a1\\
&\text{In}[3] := l1[[3]] &&\longrightarrow \quad \text{Out}[3] = a3\\
&\text{In}[4] := l1[[\{2,\ 4,\ 6\}]] &&\longrightarrow \quad \text{Out}[4] = \{a2,\ a4,\ a6\}\\
&\text{In}[5] := \texttt{Take}[l1,\ 2] &&\longrightarrow \quad \text{Out}[5] = \{a1,\ a2\}
\end{aligned}$$

20.2.4.2. Többszintű listák

Már szó volt róla, hogy a listák elemei maguk is lehetnek listák, így egymásba skatulyázott, többszintű listákat kapunk. Ha például

$$\begin{aligned}
&\text{In}[6] := a1 = \{b11,\ b12,\ b13,\ b14,\ b15\}\\
&\text{In}[7] := a2 = \{b21,\ b22,\ b23,\ b24,\ b25\}\\
&\text{In}[8] := a3 = \{b31,\ b32,\ b33,\ b34,\ b35\}
\end{aligned}$$

és így tovább, hasonlóan $a4$, $a5$ és $a6$, akkor a listák egy listáját kapjuk, melyet nagy terjedelme miatt itt nem írunk ki explicit alakban. A $\texttt{Part}[l,\ i,\ j]$ utasítással az i-edik részlista j-edik elemét lehet kiemelni. Ugyanez az eredménye az $l[[i,\ j]]$ utasításnak. A 984. oldalon vizsgált példában:

$$\text{In}[12] := l1[[3,\ 4]] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[12] = b34$$

A $\texttt{Part}[l,\ \{i1,\ i2\ \ldots\},\ \{j1,\ j2\ \ldots\}]$, más alakban az $l[[\{i1,\ i2,\ \ldots\},\ \{j1,\ j2,\ \ldots\}]]$ utasítás olyan listát állít elő, amely az $i1, i2, \ldots$ sorszámú listák mindegyikének $j1, j2 \ldots$ sorszámú elemeit tartalmazza.

■ Így a fenti példában (lásd 984. old.)

$$\text{In}[13] := l1[[\{3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\}]] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[13] = \{\{b32,\ b33,\ b34\},\ \{b52,\ b53,\ b54\}\}$$

Ezekből a példákból jól felismerhető a listák egymásba skatulyázásának elve. A listákat harmad- vagy magasabbrendben is egymásba lehet illeszteni és ezeket a többszintű listákat a megfelelő kiválasztó műveletekkel lehet kezelni.

20.2.4.3. Műveletek listákkal

A Mathematica műveletek egész sorát tartalmazza, melyekkel listákat lehet lekérdezni, bővíteni vagy rövidíteni:

20.4. táblázat. Listaműveletek és eredményük

$\texttt{Position}[l,\ a]$	megadja az a elem pozícióját az l listában
$\texttt{MemberQ}[l,\ a]$	ellenőrzi, hogy a eleme-e az l listának
$\texttt{FreeQ}[l,\ a]$	ellenőrzi, hogy a az l listában nem fordul elő
$\texttt{Prepend}[l,\ a]$	az l lista elejére beírja a-t
$\texttt{Append}[l,\ a]$	az l lista végére beírja a-t
$\texttt{Insert}[l,\ a,\ i]$	az l lista i-edik helyére beilleszti a-t ($-i$ esetén a végéről számolva)
$\texttt{Delete}[l,\ \{i,\ j,\ \ldots\}]$	kitörli az $i, j, \ldots$ sorszámú elemeket az l listából
$\texttt{ReplacePart}[l,\ a,\ i]$	az i-edik elemet a-val helyettesíti az l listában

■ A Delete művelettel például a fent definiált $l1$ listát rövidíthetjük az $a6$ elem törlésével:

$$\text{In}[14] := l2 = \texttt{Delete}[l1,\ 6] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[14] = \{a1,\ a2,\ a3,\ a4,\ a5\}$$

Ez természetesen csak szimbolikus felírás, hiszen $a1$, $a2$ és $a3$ már új értéket kapott In[6]-ban, In[7]-ben és In[8]-ban.

20.2.4.4. Speciális listák

A Mathematica egy sor olyan műveletet tartalmaz, melyek speciális listákat hoznak létre. Egy ilyen művelet, mely a matematikai függvények feldolgozásánál és értékeik csoportos megjelenítésénél nagy szerepet játszik, a Table:

20.5. táblázat. A `Table` utasítás szintaxisa és eredménye

`Table`$[f[i],\ \{i,\ imax\}]$	$\{f[1], f[2], \ldots, f[imax]\}$
`Table`$[f[i],\ \{i,\ imin,\ imax\}]$	$\{f[imin], \ldots, f[imax]\}$
`Table`$[f,\ \{i,\ imin,\ imax,\ di\}]$	$\{f[imin], f[imin + di], \ldots\}$, amelyben a legutolsó argumentum a legnagyobb $imax$-nál kisebb-egyenlő ($di < 0$ esetén a legkisebb, $imax$-nál nagyobb-egyenlő) eleme az $imin$ kezdőértékű, di különbségű számtani sorozatnak
`Table`$[kifej,\ \{imax\}]$	$\{\underbrace{kifej, kifej, \ldots, kifej}_{imax-\text{szor}}\}$

■ A binomiális együtthatók táblázata $n = 7$ esetén:

In[15] := `Table[Binomial[7, i], {i, 0, 7}]]` ⟶ Out[15] = {1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1}

A `Binomial`$[n, m]$ $\binom{n}{m}$-et adja meg. A `Table` művelettel többdimenziós táblázatok is létrehozhatók. Így például

`Table`$[f,\ \{i,\ i1,\ i2\},\ \{j,\ j1,\ j2\},\ \ldots]$

többszintű, egymásba skatulyázott táblázatokat eredményez:

In[16] := `Table[Binomial[i, j], {i, 1, 7}, {j, 0, i}]`,

aminek hatására megkapjuk az n-edrendű binomiális együtthatókat $n = 1, 2, \ldots 7$ esetén:

Out[16] = {{1, 1}, {1, 2, 1}, {1, 3, 3, 1}, {1, 4, 6, 4, 1},
{1, 5, 10, 10, 5, 1}, {1, 6, 15, 20, 15, 6, 1}, {1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1}}

A `Range` művelet speciális listákat hoz létre:

`Range`$[imax]$ létrehozza az $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ listát,

ahol n az $imax$ valós szám egészrésze; $imax < 0$ esetén üres listát kapunk. Hasonlóan a `Range`$[n1,\ n2]$ és a `Range`$[n1,\ n2,\ dn]$ listaként létrehoz egy számtani sorozatot 1, illetve dn különbséggel, amelynek kezdőeleme az $n1$ kifejezés (pld. valós szám), utolsó eleme pedig a végtelen számtani sorozat utolsó azon eleme, amely még kisebb-egyenlő (nagyobb-egyenlő) az $n2$ valós számnál.

20.2.5. Vektorok és mátrixok mint listák

20.2.5.1. Mátrixlisták létrehozása

Egy sor speciális (lista-) utasítás a vektorok és mátrixok definiálására szolgál. Egy ilyen egyszintű lista:

$$v = \{v1,\ v2,\ \ldots,\ vn\} \tag{20.13}$$

mindig felfogható, mint az n-dimenziós tér egy vektora, melynek komponensei $v1, v2, \ldots, vn$. A speciális `Array`$[v,\ n]$ utasítás, ahol v függvény, az értékek listáját hozza létre: $\{v[1], v[2], \ldots, v[n]\}$. Ilyen vektorokkal lehet a szimbolikus vektorszámításokat elvégezni.

A fent bevezetett $l1$ (lásd 984. old.) és $l2$ (ld. 984. old.) listák felfoghatók, mint i-sorú és j-oszlopú mátrixok. Ebben az esetben bij a mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem. Így $l1$ egy (6,5) típusú téglalap-mátrix, $l2$ egy (5,5) típusú négyzetes mátrix.

Az `Array`$[b,\ \{n,\ m\}]$ utasítással egy (n, m)-típusú mátrixot hozunk létre listaként, melynek elemei maguk is listák: a sorok felülről lefelé. A mátrix elemeit $b[i,\ j]$ jelöli. i az egyes sorok sorszámát adja meg 1 és n között, j az oszlopokét 1 és m között. Ebben a szimbólikus alakban $l1$-et így írhatjuk:

$$l1 = \texttt{Array}[b,\ \{6,\ 5\}]\ . \tag{20.14a}$$

Ahhoz, hogy az $l1$ $(6, 5)$-ös mátrixot eredeti formájában visszakapjuk, $l1$-et így kell definiálni:

$$l1 = \texttt{Array}[b[\#1,\ \#2]\&,\ \{6,\ 5\}]\ . \tag{20.14b}$$

Ha vektorról van szó, azaz $n = 1$, akkor `Array`$[b,\ m]$-et írunk. A fentiekből nyilvánvaló, hogy az `Array` rövidebb, a `Table` hatékonyabb hasonló célokra.

Az `IdentityMatrix`[n] utasítás az n-edrendű egységmátrixot hozza létre.
A `DiagonalMatrix`[*lista*] olyan diagonálmátrixot hoz létre, melynek főátlójában a lista elemei állnak. A `Dimension`[*lista*] megadja annak a mátrixnak a dimenzióját, melynek struktúráját a lista tartalmazza. Végül pedig a `MatrixForm`[*lista*] utasítással egy listát mátrix alakban jeleníthetünk meg. Másik lehetőség mátrixok definiálására: Legyen $f(i,j)$ az i és j egész számok függvénye. Ekkor a `Table`[$f, \{i,\ n\},\ \{j,\ m\}$] utasítás egy olyan (n,m)-típusú mátrixot definiál, melynek elemei az $f(i,j)$ értékek.

20.2.5.2. Műveletek mátrixokkal és vektorokkal

A Mathematica lehetővé teszi mátrixok és vektorok formális kezelését. Ehhez a **20.6. táblázatban** leírt algebrai műveleteket használja.

20.6. táblázat. A főbb mátrixműveletek jelölése és eredménye

$c\ a$	az a mátrix szorzása a c skalárral
$a\ .\ b$	az a és b mátrixok szorzata
`Det`[a]	az a mátrix determinánsa
`Inverse`[a]	az a mátrix inverze
`Transpose`[a]	az a mátrix transzponáltja
`MatrixPower`[$a,\ n$]	az a mátrix n-edik hatványa
`Eigenvalues`[a]	az a négyzetes mátrix sajátértékei
`Eigenvectors`[a]	az a négyzetes mátrix sajátvektorai, az azonos sajátértékhez tartozók a megfelelő sajátaltér egy bázisát adják; a vektorok általában nincsenek normálva

■ **A:** Legyen

$$\text{In[18]} := r = \texttt{Array}[a,\ \{4,\ 4\}] \longrightarrow \text{Out[18]} = \begin{array}{l}\{\{a[1,\ 1], a[1,\ 2], a[1,\ 3], a[1,\ 4]\},\\ \{a[2,\ 1], a[2,\ 2], a[2,\ 3], a[2,\ 4]\},\\ \{a[3,\ 1], a[3,\ 2], a[3,\ 3], a[3,\ 4]\},\\ \{a[4,\ 1], a[4,\ 2], a[4,\ 3], a[4,\ 4]\}\}\end{array}$$

$$\text{In[19]} := \texttt{Transpose}[r] \quad \text{hatására} \quad \text{Out[19]} = \begin{array}{l}\{\{a[1,\ 1], a[2,\ 1], a[3,\ 1], a[4,\ 1]\},\\ \{a[1,\ 2], a[2,\ 2], a[3,\ 2], a[4,\ 2]\},\\ \{a[1,\ 3], a[2,\ 3], a[3,\ 3], a[4,\ 3]\},\\ \{a[1,\ 4], a[2,\ 4], a[3,\ 4], a[4,\ 4]\}\}\end{array}$$

adja az r mátrix r^{T} transzponáltját.
Ha egy négydimenziós vektort így definiálunk:

$$\text{In[20]} := v = \texttt{Array}[u,\ 4]\ ,$$

akkor az eredmény

$$\text{Out[20]} = \{u[1],\ u[2],\ u[3],\ u[4]\}$$

Most képezzük az r mátrix és a v vektor szorzatát, amelynek eredménye egy vektor (ld. Műveletek mátrixokkal c. fejezet, 253. old.).

$$\text{In[21]} := r\ .\ v \longrightarrow \text{Out [21]} = \begin{array}{l}\{a[1,\ 1]\ u[1] + a[1,\ 2]\ u[2] + a[1,\ 3]\ u[3] + a[1,\ 4]\ u[4]\ ,\\ a[2,\ 1]\ u[1] + a[2,\ 2]\ u[2] + a[2,\ 3]\ u[3] + a[2,\ 4]\ u[4]\ ,\\ a[3,\ 1]\ u[1] + a[3,\ 2]\ u[2] + a[3,\ 3]\ u[3] + a[3,\ 4]\ u[4]\ ,\\ a[4,\ 1]\ u[1] + a[4,\ 2]\ u[2] + a[4,\ 3]\ u[3] + a[4,\ 4]\ u[4]\ \}.\end{array}$$

A Mathematica nem tesz különbséget oszlop- és sorvektor között. A mátrixszorzás, speciálisan mátrix és vektor szorzása azonban általában nem kommutatív (ld. Műveletek mátrixokkal c. fejezet, 253. old.). Az oszlopvektort adó $r\ .\ v$ kifejezés megfelel a lineáris algebrában a „mátrix szorzása oszlopvektorral jobbról" műveletnek, a sorvektort adó $v\ .\ r$ kifejezés pedig „mátrix szorzása sorvektorral balról" műveletnek.
■ **B:** Adott a $pt = b$ lineáris egyenletrendszer mátrixa (ezt a példát a CRAMER-szabály című alpontban, a 274. oldalon is tárgyaltuk):

In[22] := p = MatrixForm[{{2, 1, 3}, {1, −2, 1}, {3, 2, 2}}]

Out[22]//MatrixForm = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

és a vektorok

In[23] := t = Array[x, 3] Out[23] = {x[1], x[2], x[3]}

In[24] := b = {9, −2, 7} Out[24] = {9, −2, 7}

Mivel $\det(p) \neq 0$, a rendszer egyszerűen megoldható: $t = p^{-1}b$, azaz

In[25] := Inverse[p] . b, és az eredmény Out[25] = {−1, 2, 3}.

20.2.6. Függvények

20.2.6.1. Alapfüggvények

A Mathematica a már említetteken túl még sok matematikai alapfüggvényt ismer, melyekből néhányat a **20.7. táblázat** tartalmaz.

20.7. táblázat. Az elemi transzcendens alapfüggvények és jelölésük

Exponenciális függvény	Exp[x]
Logaritmus függvény	Log[x], Log[b, x] (e, illetve b alapú)
Trigon. függvények	Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], Sec[x], Csc[x]
Arkuszfüggvények	ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x], ArcSec[x], ArcCsc[x]
Hiperbol. függvények	Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x], Coth[x], Sech[x], Csch[x]
Áreafüggvények	ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x], ArcCoth[x], ArcSech[x], ArcCsch[x]

A Mathematica mindezeket a függvényeket a változó komplex értékére is kiszámolja: $x + iy$-t x, y-ként kell megadnunk.

A Mathematica a Log függvényen annak általánosan elfogadott, folytonos és invertálható főágát érti, a többi függvényre lásd az alábbi honlapot.

20.2.6.2. Speciális függvények

A Mathematica sok speciális függvényt is ismer. Néhányat ezek közül a **20.8. táblázat** tartalmaz:

20.8. táblázat. Speciális függvények és jelölésük

Bessel-függvények: $J_n(z)$ és $Y_n(z)$	BesselJ[n, z], BesselY[n, z]
Módosított Bessel-függvények: $I_n(z)$ $K_n(z)$	BesselI[n, z], BesselK[n, z]
Legendre-polinomok: $P_n(x)$	LegendreP[n, x]
Gömbfüggvények: $Y_l^m(\vartheta, \phi)$	SphericalHarmonicY[$l, m, theta, phi$]

További függvények megfelelő speciális könyvtárakból betölthetők (ld. [17.1] is). Ajánljuk az Olvasó figyelmébe a speciális függvények kimeríthetetlen kincstárát a http://functions.wolfram.com honlapon.

20.2.6.3. Tiszta függvények

A Mathematica lehetőséget ad úgynevezett tiszta függvények használatára. Ezek olyan függvények, melyeknek nem kell nevet adnunk. Jelölésük: Function[x, *fvert*]. Itt *fvert* helyére írjuk az általunk definiált függvény értékét az x helyen.

In[1] := Function[x, x^3 + x^2] Out[1] = Function[x, $x^3 + x^2$] (20.15)

és ebből

In[2] := `Function`[x, x^3 + x^2][c] hatására Out[2] = $c^3 + c^2$. (20.16)

A tiszta függvények jelölésére létezik egy egyszerűsített írásmód. Ennek alakja *fvert* &, ahol a behelyettesítendő változót # jelzi (ld. (20.14b)). Az előbbi két input helyett tehát írhatjuk ezt:

In[3] := (#^3 + #^2) & [c], amire Out[3] = $c^3 + c^2$ (20.17)

Többváltozós tiszta függvényeket is definiálhatunk:
`Function`[{$x_1, x_2, \ldots$}, *fvert*] vagy röviden *fvert* &, ahol *fvert* változóit #1, #2, ... jelöli. A & jel beírása a végén igen fontos, ez mutatja, hogy az előtte álló kifejezést (éppen addig!) tiszta függvénynek kell tekinteni.

20.2.7. Mintázat

A Mathematica lehetővé teszi a felhasználónak, hogy saját függvényeket definiáljon és azokat a számításaiban felhasználja. Az

In[1] := `f`[x_] := Poliert (20.18)

utasítással, ahol Poliert az x változó tetszőleges polinomja, a felhasználó által definiált speciális függvényt hoztunk létre.

Az `f` függvény definíciójában nem x áll, hanem x_ (kiejtve x–aláhúzás). Az x_ szimbólum jelentése „valami az x névvel". Ettől kezdve a Mathematica, amikor egy `f`[*valami*] kifejezés megjelenik, azt a fenti definícióval helyettesíti. A definíciónak ezt a módját nevezzük *mintának*. Az _ szimbólummal egy minta alapelemét jelöljük; y_ jelentése: egy y-nevű minta. Az is lehetséges, hogy a definícióban csak egy _-t írunk a (20.18)-beli „:=Poliert"-nek megfelelő jobboldal nélkül: például y^_. Ez a minta y valamilyen tetszőleges kitevőjű hatványát jelenti, tehát ugyanolyan struktúrájú kifejezéseknek egy teljes osztályát. A mintában az a döntő, hogy az egy struktúrát határoz meg. Ha a Mathematica egy kifejezést egy *mintára* vonatkoztatva vizsgál, összehasonlítja a kifejezés elemeinek struktúráját a minta struktúrájával. A Mathematica nem a matematikai egyenlőséget vizsgálja! Ezt a következőképpen világíthatjuk meg: Legyen l az alábbi lista:

In[2] := l = { 1, y, y^a, y^`Sqrt`[x], {`f`[y^(r/q)], 2^y } } (20.19)

Írjuk még ezt:

In[3] := l /. y^_ -> *igen* (20.20)

ekkor a Mathematica válasza:

Out[3] = { 1, y, *igen*, *igen*, {`f`[*igen*], 2^y }} (20.21)

A Mathematica a lista elemeit az y^_ minta struktúrájával hasonlította össze, és minden ilyen elem helyébe *igen*-t írt. Az 1 és y elemeket nem helyettesítette, mert azok nem az adott struktúrával rendelkeznek, pedig $1 = y^0$, és $y = y^1$, tehát ők is y hatványai.
Megjegyzés: A minta-összehasonlítás mindig a `FullForm`-alak szerint történik. Legyen például

In[4] := b/y /. y^_ -> *igen* ekkor Out[4] = b *igen* (20.22)

Ez annak a következménye, hogy a b/y `FullForm`-alakja `Times`[b, `Power`[y, −1]] és a struktúra-összehasonlításnál a `Times` második argumentuma megfelelt a minta struktúrájának.

Az

In[5] := `f`[x_] := x^3 (20.23a)

definícióval az adott mintának megfelelően az

In[6] = `f`[r] hatására Out[6] = r^3 stb. (20.23b)

jelenik meg. Ekkor pl.

In[7] := `f`[a] + `f`[x] eredménye Out[7] = $a^3 + x^3$ (20.23c)

Ha minta nélkül, ezt definiáltuk volna:

In[8] := `f`[x] := x^3 , akkor ugyanazon In[7] (20.23d)

bevitel esetén az eredmény

$$\text{Out}[7] = \texttt{f}[a] + x^3 \tag{20.23e}$$

lett volna. A mintázatot nem használó definíció a Mathematicá-ban az $f(x_0) := \ldots$ alaknak felel meg, míg a fenti az $x \in D_f$, $f(x) = \ldots$-nak.

20.2.8. Függvényműveletek

A függvények argumentumai általában számok vagy algebrai kifejezések. A Mathematica szimbolikus jellege azonban lehetővé teszi, hogy függvényeket is változóknak tekinthessünk, a függvényneveket, mint kifejezéseket kezeljük és ezekkel, mint kifejezésekkel dolgozzunk.

1. Inverz függvény Egy adott f függvény inverz függvényét az `InverseFunction` függvénymű-lettel kapjuk.

■ **A:** $\text{In}[1] := \texttt{InverseFunction}[f]\ [x] \quad \text{Out}[1] = f^{-1}\ [x]$

■ **B:** $\text{In}[2] := \texttt{InverseFunction}[\texttt{Exp}] \quad \text{Out}[2] = \texttt{Log}$

2. Differenciálás A Mathematica kihasználja azt a lehetőséget, hogy a differenciálás felfogható, mint egy leképezés egy függvénytérben. A differenciálási operátor a Mathematicá-ban: `Derivative`$[1][f]$ vagy röviden $\texttt{f}'$; hasonlóan a `Derivative`$[2][f]$ f második deriváltját jelent, stb. Ha az `f` függvény definiálva van, akkor $\texttt{f}'$ megadja a deriváltját.

■ $\text{In}[3] := \texttt{f}[x_] := \texttt{Sin}[x]\ \texttt{Cos}[x]$

$\text{In}[4] := \texttt{f}'$ eredménye $\text{Out}[4] = \texttt{Cos}[\#1]^2 - \texttt{Sin}[\#1]^2\ \&$,

tehát $\texttt{f}'$ egy tiszta függvény, és ennek megfelelően

$\text{In}[5] := \%\ [x] \quad \text{Out}[5] = \texttt{Cos}[x]^2 - \texttt{Sin}[x]^2$

3. Nest A `Nest`$[f,\ x,\ n]$ megadása azt jelenti, hogy az `f` függvény az x változóra n-szer egymás után alkalmazandó. Az eredmény: $\texttt{f}[\texttt{f}[\ldots\texttt{f}[x]]\ldots]$.

4. NestList A `NestList`$[f,\ x,\ n]$ funkcionális operátor az $\{x,\ \texttt{f}[x],\ \texttt{f}[\texttt{f}[x]],\ \ldots\}$ listát hozza létre, amelynek utolsó eleme a fenti `Nest`$[f,\ x,\ n]$.

5. FixedPoint A `FixedPoint`$[f,\ x]$ függvényoperátor hatására az `f` függvényt addig iterálja a Mathematica, amíg argumentumként fixpontot nem kapunk, tehát az eredmény már nem változik, legalábbis az aktuálisan érvényes pontosságon belül.

6. FixedPointList A `FixedPointList`$[f,\ x]$ függvényoperátor a `NestList`-hez hasonlóan az `f` függvény iteráltjait számolja mindaddig, amíg a függvényérték már nem változik, de ráadásul még listázza is azokat.

■ A fenti alakú függvényoperátorok szemléltetésére a `Nest` alkalmazásával a NEWTON-módszerrel közelítőleg megoldunk egy $f(x) = 0$ egyenletet (ld. 16.1.1.2). Az $x\cos x = \sin x$ egyik gyökéről ábra alapján tudjuk, hogy közel van a 4,5 értékhez:

$\text{In}[6] := \texttt{f}[x_] := x - \texttt{Tan}[x] \qquad \text{In}[7] := \texttt{f}'[x] \qquad \text{Out}[7] = 1 - \texttt{Sec}[x]^2$

$\text{In}[8] = \texttt{g}[x_] := x - \texttt{f}[x]/\texttt{f}'[x] \qquad \text{In}[9] := \texttt{NestList}[g,\ 4.5,\ 4]$

$\text{Out}[9] = \{4.5,\ 4.49342,\ 4.49341,\ 4.49341,\ 4.49341\}$

$\text{In}[10] := \texttt{FixedPoint}[g,\ 4.5] \qquad \text{Out}[10] = 4.49341.$

Az eredményt természetesen nagyobb beállított pontossággal is megkaphattuk volna.

7. Apply Legyen adott egy f függvény, és egy $\{a,\ b,\ c,\ \ldots\}$ lista. Ekkor, ha f annyi változós, ahány elemű a lista, akkor

$$\texttt{Apply}[f,\ \{a,\ b,\ c,\ \ldots\}] \quad \text{hatására} \quad f[a,\ b,\ c, \ldots] \text{-t kapjuk} \tag{20.24}$$

■ $\text{In}[1] := \texttt{Apply}[\texttt{Plus},\ \{u,\ v,\ w\}] \longrightarrow \text{Out}[1] = u + v + w$

$\text{In}[2] := \texttt{Apply}[\texttt{List},\ a + b + c] \longrightarrow \text{Out}[2] = \{a,\ b,\ c\}$

Itt jól felismerhető a feldolgozás általános módszere. Ehhez írjuk az utolsó operációt `FullForm`-alakba, hiszen már tudjuk, hogy a rendszer számára ez az elsődleges:

$$\text{In}[3] := \texttt{Apply}[\texttt{List},\ \texttt{Plus}[a,\ b,\ c]] \longrightarrow \text{Out}[3] = \texttt{List}[a,\ b,\ c]$$

Az `Apply` függvényoperátor tehát a `Plus` kifejezés fejét a kért listával pótolja, és általában is `Apply`$[f,\ \textit{kifej}]$ — vagy $f@@$ — a kifejezés fejét f-re cseréli.

8. Map A `Map` művelet megfelelő f függvény és lista esetén az alábbi eredményt adja:

$$\texttt{Map}[f,\ \{a,\ b,\ c, \ldots\}] \quad \{f[a],\ f[b],\ f[c], \ldots\} \tag{20.25}$$

A `Map` tehát egy új listát állított elő, melynek elemei az f függvény megfelelő értékei.

■ Legyen adott az f függvény: $f(x) = x^2$. Ennek bevitele:

$$\text{In}[4] := \texttt{f}[x_] \ := \ x\texttt{\^{}}2$$

Ekkor a `Map` alkalmazásával kapjuk:

$$\text{In}[5] := \texttt{Map}[f,\ \{u,\ v,\ w\}] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[5] = \{u^2,\ v^2,\ w^2\}$$

A `Map` operátort is lehet általánosabban alkalmazni:

$$\text{In}[6] := \texttt{Map}[f,\ a + b + c] \quad \longrightarrow \quad \text{Out}[6] = a^2 + b^2 + c^2,$$

tehát `Map`$[f,\ kifej]$ — vagy f/@ alkalmazza f-et a kifejezés `FullForm`-alakja első szintjének minden elemére.

20.2.9. Programozás

A Mathematica ismeri a többi programnyelvben meglévő eljárásokat, például a ciklusutasításokat. A két alapvető ciklusutasítás:

$$\texttt{Do}[kifej,\ \{i, i1, i2, di\}] \tag{20.26a}$$

és

$$\texttt{While}[test,\ kifej] \tag{20.26b}$$

Az első ciklusutasítás di lépésközzel kiértékeli az általában i-től függő *kifej* kifejezést az $i1$ és $i2$ közötti tartományban. Ha di-t nem adjuk meg, akkor egységnyi lépésközzel számol. Ha $i1$ is hiányzik, akkor az alsó határ 1. Ha i is hiányzik, azaz `Do`$[kifej,\ \{imax\}]$ adott csak, akkor hatására a *kifej* kifejezés $imax$-szor kiértékelődik. Másrészt a `Do`$[kifej,\ \{i,\ imin,\ imax\},\ \{j,\ jmin,\ jmax\}, \ldots]$ (esetleg di, $dj, \ldots$ megadásával) többszintű ciklusutasítás kiértékeli az i-től, j-től, ... függő *kifej* kifejezést az $imin$, $jmin, \ldots$ értékekkel kezdve és az $imax$, $jmax, \ldots$ értékekkel végezve.
Míg a `Do`-ciklusban a végrehajtások száma előre adott, a `While`-utasítás addig értékeli ki először a *test* tesztet, majd a kifejezést, amíg a *test* értéke `True`. Itt *kifej*-nek nem is kötelező szerepelnie.

■ Számítsuk ki e^2 közelítő értékét az exponenciális függvény TAYLOR-sora első 10 tagjának felhasználásával!

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := \quad & sum = 1.0; \\ & \texttt{Do}[sum = sum + (2\texttt{\^{}}i/i!), \{i, 1, 10\}] \\ & sum \\ \text{Out}[1] = \ & 7.38899 \end{aligned} \tag{20.27}$$

■
$$\begin{aligned} &\text{In}[1] := n = 17; \text{While}[(n = \text{Floor}[n, 2])! = 0, \text{Print}[\text{n}]] \\ &8 \\ &4 \\ &2 \\ &1 \end{aligned}$$

Itt `Floor` természetesen az egészrészfüggvény, „n = `Floor` ...” egy szokatlan alkalmazása — „külső” alakja — a már szerepelt `Set`$[r, s]$ azonnali hozzárendelésnek, $kifej! = kifej$ pedig a már szintén szerepelt `Unequal`$[kifej,\ kifej]$ „külső” alakja.

A Mathematica lehetővé teszi lokális változók definiálását és használatát. Ez a következő utasítással történik:

$$\texttt{Module}[\{x1, y2, \ldots\},\ proced] \tag{20.28}$$

A listában felsorolt változók vagy konstansok a *proced* eljárásra nézve lokálisak, a hozzájuk rendelt értékek az eljáráson kívül nem érvényesek. Kezdőértékeket $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ formában adhatunk meg.

Ezzel az utasítással megszabadulhatunk a Do említett kötöttségétől; így például e^2 fenti kiszámításában nem kell konkrétan megadnunk, hogy a sor első hány elemét akarjuk felhasználni.

■ **A:** Definiáljunk egy eljárást (függvényt), amely 1-től n-ig kiszámítja a természetes számok négyzetgyökeinek összegét!

```
In[1] := sumq[n_] :=
            Module[{sum = 1.},
                Do[sum = sum + N[Sqrt[i]], {i, 2, n}];
                sum   ];
```
(20.29)

Ekkor például a sumq[30] hívás eredménye: 112.083.

A Mathematica programozási erejét az adja, hogy rendelkezésünkre áll a Nest, Apply, Map és még számos egyéb programozási paradigmához tartozó függvény, és a paradigmák a feladat igényeinek megfelelően vegyíthetők.

■ **B:** Növeljük az **A** példában elért pontosságot 10 jegyre a Table, Plus, Apply, N Mathematica-függvények felhasználásával:

```
sumq[n_] := N[Apply[Plus, Table[Sqrt[i], {i, 1, n}]], 10]
```

Ezután $sumq[30]$ eredménye 112.0828452.

A részleteket lásd [20.6].

20.2.10. Kiegészítések a szintaxishoz, információk, üzenetek

20.2.10.1. Kontextusok, attribútumok

A Mathematica már eleve sok szimbólummal dolgozik, és ezenkívül még szükség szerint további programkönyvtárak behívhatók. Az esetleges többértelműség elkerülésével a Mathematicá-ban a szimbólumok nevei két részből állnak, ezek a kontextus, ami többek között az „elérési út" általánosítása, és a rövid név.

A rövid nevek a kifejezések fejének és elemeinek (ld. 980. old.) nevei. A Mathematicá-ban ezenkívül a szimbólumok megnevezésére szükség van az adott programrésszel való kapcsolatát megadó adatokra. Ezt teszi lehetővé a kontextus megadása, amely megnevezi a megfelelő programrészt. Tehát egy szimbólum teljes neve a kontextusból és a rövid névből áll, melyeket egy ‘ választ el.

A Mathematica indításánál mindig két kontextus jelenik meg: a *System‘* és a *Global‘*, tehát egy lokális es egy globális. A további programcsomagok elérhetőségéről a Contexts[ ] utasítással kaphatunk információt.

A Mathematica valamennyi belső függvénye a *System‘* kontextus alatt fut, a felhasználó által definiált függvények a *Global‘* kontextus alá kerülnek, azaz elérhetőségük globális.
Ha egy adott kontextus aktuális, azaz a megfelelő programrész be lett töltve, akkor a szimbólumokat már a rövid nevükkel hívhatjuk meg.
Egy további Mathematica-programcsomag beolvasásánál a << Name Package‘ utasítás nyitja meg a hozzátartozó kontextusokat és írja hozzá azokat a már meglévő listához. Előfordulhat, hogy később egy új könyvtár behívásával olyan nevet töltöttünk be, amely a most megnyitott kontextusban már szerepel, mint egy másik definíció neve. Ezt a Mathematica jelenti. Ekkor vagy töröljük az előre definiált nevet a Remove[Global‘name] utasítással, vagy a betöltött szimbólumra a teljes nevet használjuk.

Azon tulajdonságok mellett, melyekkel a szimbólumok definíció szerint rendelkeznek, általánosabbakkal, azaz *attribútum*okkal is felruházhatjuk őket. Így például Orderless: a szimbólummal reprezentált függvény kommutatív, mátrix szimmetrikus, tetszőlegesen sok változójú függvény kommutatív, azaz argumentumai automatikusan a kanonikus sorrendbe átrendezendők; Protected: védett, az értékeket nem lehet megváltoztatni; Locked: az attribútumokat nem lehet megváltoztatni. Bármely f objektum attribútumairól az Attributes[f] ad felvilágosítást; Attributes[f] = {$attr1$, $attr2$, ...} elvégzi a listában szereplő attribútumok hozzárendelését f-hez.

Protect[$s1$, $s2$, ...] a Protected attribútummal látja el az $s1$, $s2$, ... szimbólumokat. Attribútumokat az Unprotect utasítással törölhetünk, így ez egyfajta inverze az Attributes-nak.

20.2.10.2. Információk

A beépített, belső objektumokról és fő tulajdonságaikról a következő utasításokkal informálódhatunk:

?*szimbólum*	Rövid információt ad a *szimbólum* nevű objektumról.
??*szimbólum*	Részletes információt ad róla.
?$B*$, illetve ? $*B$, illetve ? $*B*$	Információt ad a B-vel kezdődő, illetve végződő, illetve B-t tartalmazó nevű objektumokról. (Itt B karaktersorozat is lehet.)

Speciálisan jelölt operátorokról is információt kaphatunk, például ? := az értékadó operátorról nyújt felvilágosítást. Végül `Options`[*utasítás*] kiadja az *utasítás* opcióit, a `Help` pedig sok egyéb mellett (pl. a beépített függvények) tartalmazza az egész aktuális [20.10]-et.

20.2.10.3. Üzenetek

A Mathematica olyan üzenetformalizmussal rendelkezik, melyet különböző célokra alkalmazhatunk. Ezek az üzenetek a számítások közben jelennek meg. Kiírásuk mindig a *symbol* : : *tag*: (tag = címke) karaktersorozattal kezdődik, ezért a továbbiakban erre lehet hivatkozni. Szemléltessük ezt a következő példákkal:

■ **A:** In[1] := `f[x_] := 1/x;` In[2] := `f[0]`

`Power::infy:Infinite expression` $\frac{1}{0}$ `encountered.` Out[2] = `ComplexInfinity`

■ **B:** In[3] := `Log[3, 16, 25]`

`Log::argt:Log called with 3 arguments; 1 or 2 arguments are expected.`
Out[3] = `Log[3, 16, 25]`

■ **C:** In[4] := `Multply[x, x^n]`

`General::spell1: Possible spelling error: new symbol name ,,Multply'' is similar to existing symbol ,,Multiply''.` Out[4] = `Multply[x, x^n]`

Az **A** példában a Mathematica figyelmeztet, hogy a feldolgozás folyamán $\frac{1}{0}$ hatására megjelent a ∞ érték. A számítást a Mathematica „elvégezte" és mivel x komplex is lehet, a végeredmény a komplex sík ideális pontja. Látható, hogy itt *symbol* = `Power`, *tag* = `infy`. A **B** példában a logaritmusfüggvényt három változóval hívtuk meg, ami a definícióban nincs megengedve. A Mathematica tehát nem csinált semmit. A **C** példában a Mathematica olyan szimbólumnevet talált, ami egy ismert szimbólumnévre hasonlít. Erre figyelmeztet, és nem csinál semmit, azaz megint visszaadta az inputot.

A felhasználó az `Off`[*symbol* : : *tag*] utasítással kiiktathatja az üzenetet, amely a továbbiakban nem fog megjelenni. A tiltást feloldhatjuk az `On`[*symbol* : : *tag*] utasítással.
A `Messages`[*symbol*] az összes üzenetet megjeleníti, amelyek a *symbol* nevű szimbólumra vonatkoznak.

20.3. Maple

A Maple rendszert a Waterloo Egyetemen (Ontario, Kanada) fejlesztették ki, és a Waterloo Maple Software terjeszti. Bevezető irodalomnak ajánlott [20.6].

20.3.1. Alapvető szerkezeti elemek

20.3.1.1. Típusok és objektumok

A Maple-ben minden kifejezésnek, általában minden objektumnak van típusa, amely meghatározza, hogy az objektum melyik objektumosztályhoz tartozik és ami ugyanaz marad akkor is, ha az objektum értéke megváltozik. Egy típus jelenthet például közös adatstruktúrát vagy közös matematikai tulajdonságokat. Így egy kifejezés `posint` típusú, ha értékét a pozitív természetes számok összességéből veszi. Sok Maple-utasításnak szüksége van erre az információra, hogy eldöntse, a program számára megengedett-e egy bevitt érték vagy hogy tudja, mit kell csinálnia az argumentumaival. Ez utóbbira példa a `` `.` ``, ami a nemkommutatív szorzás operátora. Ez mást csinál mátrixokkal és vektorokkal és mást számokkal, ezért ismernie kell argumentumainak típusát.

Egy *obj* objektum típusát a

$$> \texttt{whattype}(obj)\,; \tag{20.30}$$

utasítással kaphatjuk meg,

$$> \texttt{type}(obj,\, t) \tag{20.31}$$

értéke pedig pontosan akkor `true`, ha t szabályos típuskifejezés és *obj* beletartozik a t típusú objektumok összességébe; egyébként értéke `false` (a BOOLE-változók ugyanazok, mint a Mathematicá-ban).
Az előzőekből már következik, hogy a szabályos típuskifejezések összességének is kell egy kollektív típussal rendelkeznie, ami nem meglepően a `type`. Eszerint $\texttt{type}(T, \texttt{type})$ értéke pontosan akkor `true`, ha T szabályos típuskifejezés, aminek speciális eseteként természetesen $\texttt{type}(\texttt{type}, \texttt{type}) \rightarrow \texttt{true}$. Bizonyos környezetekben $\texttt{type}(obj, t)$ helyett $obj :: t$ is használható.
Logikailag az is következik az előzőekből, hogy egy objektumnak több típusa is lehet, például amikor egy objektumosztálynak további relációkkal kijelöljük egy fontos részosztályát. Így a 6 szám az `integer` és a `posint` típushoz is hozzátartozik. Ez azonban úgy is megtörténhet, hogy egyik osztály sem része a másiknak:

$$> \texttt{type}(a+b,\texttt{`+`}); \longrightarrow \texttt{true} \quad \text{és} \tag{20.32}$$

$$> \texttt{type}(a+b,\texttt{'polynom'}); \longrightarrow \texttt{true} \tag{20.33}$$

A típusok egy része alaptípus (**surface type**), ami azt jelenti, hogy elég megvizsgálni a kifejezés fájának a tetejét a szóbanforgó típus szempontjából. Ilyen például a `list`, `set`, `algebraic`. Ezek általában a Maple magjában vannak és a hozzájuk tartozás ellenőrzése igen gyors, ideje állandó, tehát nem függ a kifejezés hosszától. Ha ezzel szemben a kifejezésfa egészét — de legalábbis nemcsak a tetejét — be kell járni (esetleg rekurzívan) az adott típushoz tartozás ellenőrzésére, akkor beágyazott típusról (**nested type**) beszélünk. Erre példa a `constant`, hiszen a kifejezés teljes bejárása nélkül nem dönthető el, hogy van-e nemkonstans része. A beágyazottak egy részosztálya a strukturált típusoké: ezeket a felhasználó hozza létre, tehát ez egy „nyílt” osztály. Ide tartozik például a `list(posint)`. A **20.9. táblázat** tartalmazza a Maple típusait, tehát a készen kapott alap- és beágyazott típusokat. Az előbbieket vastagon szedtük.
Ha egy típusnév egyúttal egy operátor neve vagy egy fentartott szó, más néven saját szimbólum, akkor a `type` utasítás argumentumaként fordított idézőjelek közé kell tenni, ld. (20.32). Ha azt akarjuk, hogy Maple-programunk robusztus legyen, tehát a szóbajövő inputok minél szélesebb körére jól működjön, akkor célszerű megakadályozni a típuskifejezésben szereplő, akár saját nevek kiértékelődését azzal, hogy 'név' alakban használjuk őket a `type`-ban, ld. (20.33).

20.3.1.2. Bevitel és kivitel

A Maple-ben a bevitel leggyakrabban előforduló alakja:

$$\texttt{obj}_0(\texttt{obj}_1, \texttt{obj}_2, \ldots, \texttt{obj}_n) \tag{20.34}$$

Itt a kifejezés első, azaz a nyitó zárójel előtti része rendszerint egy operátor, egy utasítás vagy egy függvény, amely a zárójelben álló argumentumokkal dolgozik. Bizonyos esetekben az argumentumok speciális opciók is lehetnek, melyek az operátor vagy a függvény speciális alkalmazásait vezérlik. Fontos a lezáró ; pontosvessző, ami azt jelenti, hogy a bevitel befejeződött. Ha a bevitelt egy : zárja le, akkor a Maple ezt úgy értelmezi, hogy a bevitelt ugyan fel kell dolgozni, de az eredményt nem kell ábrázolni.

A *szimbólumok*, azaz a nevek a Maple-ben betűkből, számokból és az aláhúzásból (_) állhatnak. Az első helyen nem állhat szám. A kis- és nagybetűk különbözőnek számítanak. A szóközt a Maple belső szimbólumokban használja, ezért az általunk definiált szimbólumokban kerülni kell.

Karakterláncokat, azaz `string` típusú objektumokat felső vesszők, azaz aposztrófok között foglalunk össze:

$$\begin{aligned} &> S := \text{'ez egy string'} \\ &\quad S := \text{ez egy string} \end{aligned} \tag{20.35}$$

20.9. táblázat. A Maple típusai; az alaptípusok vastagon vannak szedve

`*`	`+`	`.`	`=`	`^`
`||`	`<>`	`<`	`<=`	`..`
`**`	**!**	abstract_rootof	**algebraic**	algext
algfun	algnum	algnumext	**And**	**`and`**
anyfunc	anyindex	**anything**	arctrig	Array
array	atomic	attributed	**boolean**	BooleanOpt
builtin	complex	complexcons	constant	cubic
cx_infinity	dependent	dimension	disjcyc	embedded_axis
embedded_imaginary	embedded_real	**equation**	**even**	evenfunc
expanded	**exprseq**	extended_numeric	extended_rational	facint
filedesc	finite	**float**	float[]	**fraction**
freeof	**function**	global	hfarray	identical
imaginary	indexable	**indexed**	indexedfun	infinity
integer	**intersect**	last_name_eval	**laurent**	**linear**
list	**listlist**	literal	local	**logical**
mathfunc	Matrix	**matrix**	**minus**	**`module`**
moduledefinition	**monomial**	MVIndex	**name**	**negative**
negint	negzero	neg_infinity	NONNEGATIVE	**nonnegative**
nonnegint	nonposint	nonpositive	nonreal	**Not**
`not`	nothing	**numeric**	**odd**	oddfunc
operator	**Or**	**`or`**	patfunc	patindex
patlist	Point	**point**	polynom	posint
positive	poszero	pos_infinity	prime	**procedure**
protected	quadratic	quartic	Queue	radalgfun
radalgnum	radext	radfun	radfunext	**radical**
radnum	radnumext	Range	**range**	**rational**
ratpoly	ratseq	realcons	real_infinity	**relation**
RootOf	**rtable**	satisfies	**scalar**	sequential
series	**set**	sfloat	SimpleStack	specfunc
specified_rootfof	specindex	**sqrt**	**square**	stack
string	subset	suffixed	symbol	symmfunc
table	tabular	**taylor**	TEXT	**trig**
truefalse	**type**	typefunc	typeindex	undefined
uneval	**union**	unit	unit_name	Vector
vector	verification	verify	with_unit	**zppoly**

Látható, hogy a kiírás aposztróf nélküli, a `whattype` típusvizsgálat eredménye: `string` .

Amíg a szimbólumhoz nem rendelünk értéket, addig a szimbólum vagy `string` vagy `name` típusú, azaz a

> `type`(*symb*, `name`); vagy a `type`(*symb*, `string`); (20.36)

típusvizsgálat értéke `true`.

Ha a felhasználó nem tudja, hogy a Maple-ben például egy `Név`-értékű szimbólumhoz már van-e érték hozzárendelve, akkor a `?Név` bevitellel rákérdezhet. Ha a Maple válasza az, hogy ezt a nevet nem ismeri, akkor a szimbólum szabadon felhasználható. Ha a szimbólumhoz a := értékadó utasítással értéket rendelünk, a szimbólum automatikusan felveszi a hozzárendelt érték típusát.

■ Legyen $x1$ egy változó szimbóluma. Ha a bevitel

> `whattype`($x1$); a Maple válasza: `symbol`

Ha most $x1$-nek egy egész számot adunk értékként:

$$> \ x1 := 5; \qquad \longrightarrow \qquad x1 := 5$$

akkor a `whattype`($x1$);-re a Maple válasza: `integer` .

A Maple igen nagyszámú utasítást, függvényt és operátort ismer. Ezek nem mindegyike hívható rögtön a rendszer indításakor, mert jelentős számú speciális függvény és operátor a Maple könyvtáraiban áll rendelkezésre. Vannak például lineáris algebra, statisztika, stb. programcsomagok. Szükség esetén ezeket a csomagokat `with`*(csomagnév)*; utasítással töltjük be (lásd kiegészítések a szintaxishoz 1005. old.). Csak ezután állnak az általuk tartalmazott műveletek és függvények a szokásos módon a felhasználó rendelkezésére.

20.3.2. Számábrázolás a Maple-ben

20.3.2.1. A számok alaptípusai a Maple-ben

A Maple az ábrázolás szempontjából **20.10. táblázatban** felsorolt alaptípusokat ismeri.

20.10. táblázat. Számok alakjai a Maple-ben

Szám fajtája	Típus	Ábrázolás
egész szám	`integer`	*nnnnnn* tetszőleges sok számjegy sorozata
törtszám	`fraction`	*ppp/qqq* két egész szám hányadosa
lebegőpontos szám	`float`	*nn.mmm* vagy tudományos jelölésben $n.mm * 10\hat{}(pp)$

A típusvizsgáló függvények segítségével az egész számok további tulajdonságaira is rákérdezhetünk: így például

1. Racionális számok (`rational`)**:** A Maple-ben a racionális számok az egész számok és a törtek, de ha a tört egész számmá egyszerűsíthető, akkor ezt a Maple nem törtszámnak (`fraction`) tekinti.

2. Lebegőpontos számok (`float`)**:** Ha egy egész szám mögé kitesszük a tizedespontot, annak típusa automatikusan lebegőpontos lesz.

3. Közös tulajdonságok: Mind a három számfajta `realcons`, `numeric` és `constant` típusú. A két utolsó típus a komplex számokat is jellemzi.

4. Komplex számok: A komplex számokat az `I` imaginárius egységgel képezzük. Az `I` szám típusa `radnum`, vagyis racionális szám gyöke. Definíciója, mely a Maple indulásakor automatikusan betöltődik:

$$> \ \texttt{alias}(\texttt{I} = (-1)\hat{}(1/2)) \tag{20.37}$$

Az itt alkalmazott `alias` utasítás teszi lehetővé, hogy függvények, definíciók, kifejezések és egyéb matematikai szimbólumok rövidített jelölését bevezessük. Az `alias` utasítás alakja

$$> \ \texttt{alias}(e1, e2, \ldots). \tag{20.38}$$

Itt az *ei*-k a fentiekhez hasonló egyenletek, melyek a Maple-függvények rövidített jelöléseit definiálják. Az `alias` függvény meghívásakor a Maple az éppen definiált rövidítéseken kívül a többi, már korábban definiált `alias` eredményét is megmutatja. Ha valamely rövidítést vissza akarunk vonni, akkor az `alias`($sym = sym$)-t hívjuk. Például, ha `I` helyett `i`-vel szeretnénk jelölni a $(-1)\hat{}(1/2)$-t, akkor ezt így érhetjük el: `alias`(`I` = `I`); `alias`(`i` = $(-1)\hat{}(1/2)$).

20.3.2.2. Speciális számok

A Maple egy sor speciális számot ismer a matematikából, pl. `Pi`, `gamma`, azaz π, γ — utóbbi az EULER-konstans. Fontos tudni, hogy a legújabb változatban „`e`” helyett `exp`(1) szerepel.

20.3.2.3. Számok ábrázolása és konvertálása

1. Lebegőpontos számok

Az `evalf` *(szám)*; utasítás a racionális számokat, szimbolikusan ábrázolt számokat és számítások eredményeit előre (rendszerint 10 jegyre) beállított pontosságú lebegőpontos számokká alakítja.

■ $> \ \texttt{evalf}(Pi);$ 3.141592654

A számítás pontosságát a Maple-ben a `Digits` változó beállításával vezérelhetjük. Ha az előre beállított pontosság a konkrét feladatban nem megfelelő, akkor megváltoztathatjuk a következő módon:

> `Digits` := m; m a kívánt tizedesjegyek száma. (20.39)

Ez a beállítás a következő ilyen utasításig érvényes.

2. Különböző alapú számok

Számok átalakítása, azaz konvertálása egyik alapúból egy másik alapúba a `convert` utasítással történik, amely azonban ennél fontosabb, mert sokkal szélesebb körben használható kifejezések átalakítására, átírására egyik formából a másikba. Alakja:

`convert`(*kifej*, *típus*, *arg3*, ...). (20.40)

A **20.11. táblázat** megadja az átalakítás típusának a mindig a 2. helyen szereplő lehetséges értékeit. A típustól (esetleg még *arg3* értékétől) függ az is, hogy van-e még és hány további *arg3*,... argumentuma az utasításnak.

20.11. táblázat. A `convert` függvény középső argumentumának értékei

abs	Airy	`and`	array	base
Bessel	binary	binomial	'bytes'	confrac
conversion_table	'*'	'+'	D	decimal
degrees	diff	dimension	`disjcyc`	Ei
equality	erf	erfc	exp	expln
`expsincos`	factorial	float	fraction	fullparfrac
GAMMA	'`global`'	Heaviside	hex	horner
hypergeom	int	list	listlist	ln
'`local`'	mathorner	Matrix	matrix	MeijerG
metric	mod2	ModifiedMeijerG	multiset	name
numericproc	octal	`or`	parfrac	`permlist`
piecewise	PLOT3Doptions	PLOToptions	polar	POLYGONS
polynom	pwlist	radians	radical	rational
ratpoly	RootOf	set	signum	sincos
sqrfree	StandardFunctions	std	stdle	string
symbol	system	table	tan	temperature
trig	`truefalse`	units	unit_free	Vector
vector	windchill			

Röviden ismertetjük az egyes típusok jelentését; a logikailag összetartozókat együtt tárgyaljuk.
`abs`: a kifejezés `signum`-jait `abs`-okká alakítja. Inverze a `signum`. `Airy`: a kifejezés BESSEL- és HANKEL-függvényeit (azaz BESSEL-ek egyszerű lineáris kombinációját) átalakítja AIRY-függvényekre. `` `and` `` és `` `or` ``: halmazt és listát úgy ad vissza, hogy elemeit a megfelelő művelettel összekapcsolja. `array`: tömbbe vagy mátrixba konvertál. `base`: `convert`(n, `base`, b) az n decimális számot adja vissza a b bázisban, `convert`(l, `base`, a, b) az l listával adott a bázisbeli számot b bázisban adja vissza szintén listaként. Itt lista azt jelenti, hogy ha a szám alakja: $z_1(base)^0 + z_2(base)^1 + \ldots$, akkor a $[\ldots, z_2, z_1]$ listával reprezentáljuk. `binary`: a tizes számrendszerből konvertál a binárisba. `decimal`: bármilyen alakú és alapú (amit a 3. argumentum mond meg) számot átír decimálissá. `hex`: pozitív decimálist alakít hexadecimálissá. `octal`: decimális számot oktálisra alakít. `Bessel`: `Bessel`-függvényt fejez ki `BesselI`-, `BesselJ`-, `BesselK`-, `BesselY`- vagy HANKEL-függvények segítségével. `binomial`: gammafüggvények és faktoriálisok egész kitevőjű szorzatát alakítja át bétafüggvényeket (más néven binomiális függvényeket vagy elsőfajú EULER-integrálokat) tartalmazó törtté; `beta`$(x, y) = \dfrac{\Gamma(x) + \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$. `'bytes'`: karakterláncot („string") alakít át elemenként decimálisan (0–255) megadott byte-sorozattá vagy fordítva a 3. argumentumnak megfelelően. `confrac`: algebrai kifejezést alakít át közelítő lánctörtté, ami vagy racionális

számokból álló lista, vagy racionális együtthatós, legfeljebb másodfokú polinomok hatványaiból álló lánctört. `conversion_table`: fizikai egységek két listájából állítja elő az átváltási számok táblázatát az értelmes listapárokra. `dimensions`: egy kifejezés szimbolikusan megadott fizikai mennyiségeit átírja a megnevezéseikkel (pl. `length`). `metric`: angol/amerikai hosszúság- és térfogategységet európaivá vagy másfajta angol/amerikaivá alakít. `system`: adott dimenziójú fizikai mennyiséget az alap-, vagy a felhasználó által megadott egység számszorosaként fejez ki, vagy megnevezését kicseréli adott rendszerbeli jelével (pld. `length` $\rightarrow m$). `units`: a bevitt fizikai egységek közötti konverziós együtthatót adja vissza (ha akarjuk, az új egységgel együtt). `unit_free`: a fizikai mennyiségből elhagyja az egység megnevezését. `windchill`: a szél hűtő hatását fejezi ki a (Fahrenheit(T), mérföld/óra(V))-pároknak a Fahrenheitben kifejezett látszólagos hőmérsékletté alakításával, amit egy T-től, V-től és $\sqrt{V}$-től egyszerűen függő közelítő kifejezés ad meg. `'+'` és `'*'`: szorzat elemeit összegzi, illetve összeg elemeit összeszorozza; ha nincs művelet, akkor a kifejezésben szereplő argumentumokkal teszi ugyanezt. `D`: deriválást fejez ki a `D` operátorral. `Diff`: `D`($f(x)$)-et `diff`($f(x), x$)-ként ad vissza, ahol `diff` $= \frac{\partial}{\partial x}$. `degrees`: radiánból fokba konvertál; inverze a `radians`, amely fokban elsőfokú kifejezést átír radiánra. `` `disjcyc` ``: permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként állít elő, inverze a `` `permlist` ``. `Ei`: trigonometrikus, hiperbolikus, logaritmikus integrált exponenciális integrálként állít elő. `equality`: a 3. argumentum „`lessthan`”, illetve „`lessequal`” értékének megfelelően a kifejezésben szereplő $<$, illetve $\leq$ relációkat átírja egyenlőséggé. `erf` az `erfc` komplementáris hibafüggvényt `erf`-fel fejezi ki és hasonlóan az `erf` hibafüggvényt átírja `erfc`-vel (`erfc`$(x) = 1 -$ `erf`(x)). `exp`: a kifejezésben szereplő trigonometrikus függvényeket az exponenciális alakjukkal helyettesíti. Részben inverze a `trig`, amely a szereplő exponenciális függvényeket átírja a sin, cos, sh, ch függvényekkel. `expln`: a kifejezésben szereplő elemi függvényeket átírja az exponenciális és a logaritmikus függvényekkel kifejezett alakjukra. `` `expsincos` ``: a kifejezés trigonometrikus függvényeit a szinusz és a koszinusz függvénnyel fejezi ki, a a hiperbolikusokat pedig az exponenciálissal. `factorial`: a kifejezés gammafüggvényeit, binomiális, sőt az általánosabb multinomiális részkifejezéseit a faktoriálissal fejezi ki. Alternatív alakja: `convert`(*kifej*, `!`). Inverze a `Gamma`, amely a kifejezés faktoriális, binomiális, általánosabban multinomiális részkifejezéseit átírja a gammafüggvénnyel. `float`: átír lebegőpontos alakra, ugyanaz a hatása, mint az `evalf` függvénynek. `fraction`: megpróbálja egész számok hányadosaként visszaadni a bevitt argumentumot. `fullparfrac`: parciális törtekre bontja a bevitt racionális kifejezést. Mindkettő tartalmazhat `RootOf`(*kifej*)-t. Hasonló a csak polinomokat elfogadó parfrac (ld. 20.4.1.2.4.) `` `global` ``: a bevitt Maple-objektum lokális szimbólumait globálissá alakítja. Inverzének tekinthető a `` `local` ``, amelyik szimbólumot vagy karakterláncot az adott környezet minden más nevétől különböző lokálissá alakít. `Heaviside`: a „`piecewise`”-zal, `abs`-sal, `signum`-mal kifejezett szakaszonként folytonos függvényt HEAVISIDE-függvényekkel fejezi ki. „Inverze” a `piecewise`, amely a `Heaviside`-, `abs`, `signum` függvénnyel és esetszétválasztással definiált függvényt szakaszonként folytonossá alakítja a `piecewise` szintaxisának megfelelően (ld. `pwlist`). `horner`: polinomot alakít HORNER-alakra. Ha a polinom argumentuma mátrix, akkor helyette a `mathorner` opciót használhatjuk a kiértékelésre. `hypergeom`: `sum`-mal vagy `Sum`-mal képzett (akár végtelen) sort próbál hipergeometrikus függvénnyé, tehát gammafüggvények szorzatösszegévé alakítani. `int`: névvel (pld. „`fourier`”, „`mellin`”) megadott integráltranszformációt integrálalakra hoz. `list`: listává alakít táblázatot, vektort, karakterláncot vagy kifejezést (utóbbinál az eredmény az argumentumok listája). `listlist`: listát vagy tömböt listák listájává alakít. `int`: a kifejezésbeli inverz trigonometrikus és hiperbolikus függvényeket átírja a logaritmikus függvénnyel. `Matrix`: `array`, `Array`, `list`, `matrix`, `Matrix`, `vector`, `Vector` típusú kifejezést alakít `Matrix` típusúvá. Itt `Matrix` eljárással létrehozott, kezdeti/megadott értékekkel, elemei adattípusával, tárolási utasítással ellátott, esetleg speciális alosztályba tartozó, bármikor könnyen módosítható mátrixot jelent; hasonló a definíciója a `Vector` és az `Array` adattípusnak is. `matrix`: listák listáját, `Matrix`-ot, tömböt alakít mátrixszá. `Vector` eredménye: `Array`, lista, `matrix`, `Matrix`, tömb, vektor, `Vector` átalakítása `Vector`-rá; szabályozhatjuk, hogy milyen sorrendben kapjuk az elemeket. `vector` hatása hasonló, de a végeredmény vektor. `MeijerG`: megpróbálja a kifejezést `MeijerG`-alakra átírni, ahol `MeijerG` gammafüggvényekből álló integrandus integrálja valamely komplex síkbeli úton; `ModifiedMeijerG` a bevitt függvény módosított MEIJER-reprezentációját adja vissza. `mod2`: `mod2` alakra redukál egy kifejezést, tehát az együtthatóként vagy hatványként szereplő egészeket 0-val vagy

1-gyel, a logikai műveleteket a megfelelő algebraival helyettesíti ($x \wedge y \to xy$, $x \vee y \to x + y + xy$, $\neg x \to 1 + x$). `multiset`: a bevitt táblázatot, algebrai kifejezést vagy listát átalakítja multihalmazzá, amelyben a táblázatelemek, változókitevők, illetve listaelemek előfordulási számai a megjelenő multiplicitások. `name`: a kifejezést névvé, azaz szimbólummá alakítja; ugyanaz, mint `symbol`. `numericproc`: kétváltozós szimbolikus függvényt eljárással megadott numerikus függvénnyé alakít. `PLOT3Doptions`: a felhasználói 3D-plot utasításokat átalakítja belső formájukra. Ugyanezt teszi a `PLOToptions` a `plot` utasításokkal. `polar`: az algebrai alakban bevitt komplex számot `polar`(r, *theta*) trigonometrikus alakban adja vissza. `POLYGONS`: a `GRID` és `MESH` struktúrákat vagy ilyenek listáját, továbbá a `PLOT3D` struktúrát átalakítja POLYGONS struktúrává vagy ilyenek listájává. `polynom`: LAURENT-sorból elhagyja a maradéktagot. `pwlist`: a `piecewise`(*felt1*, $f1$, *felt2*, $f2, \ldots,$ *feltn*, fn) feltételi esetszétválasztással definiált szakaszonként folytonos függvényt átalakítja az [$f1$, $t1$, $f2$, $t2, \ldots, fn$, tn, $f(n+1)$] rendezett listává. `radical`: trigonometrikus függvényeket is tartalmazó legfeljebb 4-edfokú polinomargumentumú `RootOf`-kifejezést megpróbál esetleg szinusz- és koszinuszértékeket is tartalmazó gyökképlettel kifejezni; megadható, hogy a több gyökből melyikre, vagy mely számhoz közelire van szükségünk. `ratpoly`: adott pontossággal megadja LAURENT-sor PADO-approximációját (tehát egy racionális függvényt), CSEBISEV-sor CSEBISEV–PADO-approximációját (CSEBISEV-függvények racionális függvényét). `RootOf`: gyökkifejezést `RootOf`-alakúként ad vissza. `set`: táblázat és tömb elemeit, kifejezés argumentumait adja vissza halmazként. `sincos`: a kifejezés trigonometrikus függvényeit szinusszal és koszinusszal, hiperbolikusait sh-szal és ch-szal fejezi ki. `sqrfree`: a bevitt polinom négyzetmentes felbontását adja meg, tehát amelyben minden tényezőnek csak egyszeres gyökei vannak. `StandardFunctions`: a kifejezés `MeijerG` és hipergeometrikus függvényeit átalakítja standard elemi és speciális függvényekké. `std`: lineáris egyenlőségekből és egyenlőtlenségekből álló rendszert standard alakra hoz, amelyben a konstansok a jobboldalon szerepelnek. `stdle`: másfajta standard alakra hoz egy ilyen rendszert egyenlőségeinek egyenlőtlenségpárrá alakításával. `String`: a *kifej* kifejezést karakterlánccá, azaz "kifej"-jé alakítja. `table`: listát vagy tömböt alakít táblázattá. `tan`: a kifejezés trigonometrikus függvényeit átírja a tangens függvénnyel. `` `truefalse` ``: BOOLE-kifejezést értékel ki; ha eljárásra alkalmazzuk, és az FAIL-értéket ad, akkor `false` a végeredménye.
A táblázatból látható, hogy már számok átalakítására is igen sokféle konvertáló függvény áll rendelkezésünkre.

■ Példák a `convert` alkalmazásaira:

> `convert`(73, `binary`); ⟶ 1001001 > `convert`(73, `octal`); ⟶ 111

> `convert`(79, `hex`); ⟶ $4F$ > `convert`(1.45, `fraction`); ⟶ $\frac{29}{20}$

> `convert`(11001101, `decimal`, `binary`); ⟶ 205 > `convert`(‘$FFA2$‘, `decimal`, `hex`); ⟶ 65442

Az utolsó példában a hexadecimális számot aposztrófok között kellett megadni.

`convert`([1, 2, 3, 4], `` ` + ` ``); ⟶ 10

$$\texttt{convert}(\sinh(x) + \sin(x), \exp); \longrightarrow \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2}I\left(e^{(Ix)} - \frac{1}{e^{(Ix)}}\right)$$

■ Alakítsuk át a 351 oktális számot hexadecimális számmá!

> `convert`([1, 5, 3], `base`, 8, 16); ⟶ [9, 14], ami a megszokott jelölésben az E9.

20.3.3. Fontos operátorok a Maple-ben

Fontos operátorok az ismert aritmetikai műveletek: +, −, ∗, /, ^ és a relációs operátorok:
=, <, <=, >, >=, <>.

Speciális jelentősége van a konkatenációra szolgáló `cat`-operátornak, melynek infixform rövidített alakja: ‘||‘. Ezzel az operátorral összekapcsolhatunk két szimbólumot (nevet).

■ > $x := variable : h := aux :$

> `cat`(h, x); ⟶ *auxvariable*

Elég beírni a `cat`(h, x) helyett, hogy ‘‘$\|h\|x$; az eredmény akkor is *auxvariable*. Vigyázni kell, hogy az elején két nyitó idézőjel álljon és köztük semmi, különben a Maple az első operandust nem oldja fel.

Ezzel a konstrukcióval nagyon könnyen állíthatunk elő indexes változókat.

■ $> i := 1,2,3,4,5:$ egész számok sorozata

$> y||i;$ $\longrightarrow$ $y1, y2, y3, y4, y5$,

tehát összekapcsolja a fenti sorozatot a más értéket nem kapott és a nyitó idézőjelek hiánya miatt változatlan y-nal, tehát a `cat` és a || között az a különbség, hogy az utóbbival egy szimbólumot sorban egymás után többet is összekapcsolhatunk, nemcsak kettőt, viszont az elsőt — ami az üres is lehet — nem helyettesíti be.

20.3.4. Algebrai kifejezések

Az aritmetikai operátorok segítségével változókból algebrai kifejezések konstruálhatók. Ezek típusa mindig `algebraic`, melynek „altípusai" `integer`, `fraction`, `float`, `string`, `indexed`, `series`, `function`, `uneval` valamint aritmetikai operátortípusok és pontoperátorok.
Látható, hogy egyetlen változó (egy string) szintén az `algebraic` típushoz tartozik. Az alap-számtípusok szintén, mivel azokhoz a `subs` utasítással algebrai kifejezések értéke rendelhető.

■ $> p := x\hat{}3 - 4 * x\hat{}2 + 3 * x + 5:$

Itt egy kifejezést definiáltunk, ami az x változó harmadfokú polinomja. A `subs` helyettesítési operátorral a polinom (kifejezés) x változójához értékeket (számokat) rendelünk és a kifejezést kiértékeljük:

$> \mathtt{subs}(x = 3, p);$ $\longrightarrow 5$ $> \mathtt{subs}(x = 3/4, p);$ $\longrightarrow \frac{347}{64}$

$> \mathtt{subs}(x = 1.54, p);$ $\longrightarrow 3.785864$

Az `op` operátorral egy kifejezésből részkifejezéseket választhatunk ki. Az

$$\mathtt{op}(p); \tag{20.41}$$

megadja a fent definiált p részkifejezései sorozatát (ld. 999. old.)

$$x^3, -4x^2, 3x, 5 \tag{20.42}$$

Az $\mathtt{op}(i, p)$; alak az i-edik tagot adja vissza, például $\mathtt{op}(2, p)$ eredménye $-4x^2$. A kifejezés első szintű részkifejezéseinek számát a $\mathtt{nops}(p)$ utasítással kaphatjuk meg.

20.3.5. Sorozatok és listák

A Maple-ben sorozaton olyan kifejezések egymásutánját értjük, melyek vesszővel vannak elválasztva. Az elemek sorrendje lényeges, tehát ugyanazon elemek különböző sorrendű sorozatai különböző objektumok. A sorozat a Maple egyik alaptípusa: `exprseq`.

■ $> f1 := x\hat{}3, -4 * x\hat{}2, 3 * x, 5:$ (20.43a)

Így egy sorozatot definiáltunk, tehát

$> \mathtt{type}(f1, \mathtt{exprseq});$ eredménye `true`. (20.43b)

A

$> \mathtt{seq}(f(i), i = 1..n);$ utasítással az $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ (20.44)

sorozatot állítjuk elő.

■ $> \mathtt{seq}(i^2, i = 1..5)$; eredménye $1, 4, 9, 16, 25$.

Egészértékű változók értelmezési tartományát $n..m$ definiálja, ahol n és m kifejezések. Például egy eljárásban $i = n..m$ alakban használhatjuk, aminek hatására az i indexváltozó egymás után felveszi az $n, n+1, n+2, \ldots, m$ értékeket. Ezen struktúra típusa: `` `..` ``.

A sorozatok előállítására (20.44)-gyel ekvivalens az alábbi egyszerűbb írásmód:

$> f(i)\$i = n..m;$ (20.45)

amely szintén az $f(n), f(n+1), \ldots, f(m)$ értékeket állítja elő. Ennek megfelelően tehát $\$n..m$; eredménye az $n, n+1, \ldots, m$ sorozat, és például $x\$3$; eredménye $x.x.x$.

A sorozatokat kiegészíthetjük további tagokkal:

$$> \ sorozat := 1,2,3; \quad \text{ami után} \tag{20.46}$$

$$> \ sorozat, 4,5,6; \quad \text{eredménye} \quad 1,2,3,4,5,6.$$

Ha az f függvény értékeinek sorozatát szögletes zárójelbe tesszük, akkor egy `list` típusú *lista* keletkezik.

■ $> \ l := [i\$i = 1..6]; \quad \longrightarrow \quad l := [1,2,3,4,5,6]$

A már ismertetett `op` operátorral az $\mathtt{op}(lista)$; utasítás visszaadja a *lista* nevű sorozatot.

Ha listákat bővíteni akarunk, akkor először (például az *op*-pal) sorozatokká kell átalakítani azokat, majd ezeket bővíteni és szögletes zárójelekkel újra listává alakítani.

A listák elemei lehetnek újra listák, az így kapott kétszintű, háromszintű, stb. listák típusa `listlist`. Ezek a struktúrák a mátrixok konstrukciójánál játszanak szerepet.

A lista egy eleméhez az $\mathtt{op}(n, lista)$; vagy $lista[n]$; utasítással férhetünk hozzá. Ez a lista n-edik elemét adja. Egyszerűbb, ha a listának egy nevet adunk, például L, és utána $L[n]$;-t hívjuk. Egy kétszintű L listánál az alsó szint elemeit az $\mathtt{op}(m, \mathtt{op}(n, L))$; vagy az ezzel egyenértékű $L[n][m]$; hívással kapjuk.

A többszintű listák felépítése is igen egyszerű.

■ Egyszintű lista létrehozása:

$$> \ L1 := [a,b,c,d,e,f]; \quad \longrightarrow \quad L1 := [a,b,c,d,e,f]$$

A lista 4. elemének meghívása:

$$> \ \mathtt{op}(4,L); \quad \text{vagy} \quad > \ L[4]; \quad \longrightarrow \quad d$$

Kétszintű lista létrehozása:

$$> \ L2 := [[a,b,c],[d,e,f]] :$$

(A kiírást a lezáró kettősponttal letiltottuk!) A 2. allista 3. elemének leírása:

$$> \ \mathtt{op}(3, \mathtt{op}(2, L2)); \quad \text{vagy} \quad L2[2][3]; \quad \longrightarrow \quad f$$

Háromszintű lista létrehozása:

$$> \ L3 := [[[a,b,c],[d,e,f]],[[s,t],[u,v]],[[x,y],[w,z]]] :$$

20.3.6. Táblázat- és tömbstruktúrák, vektorok és mátrixok

20.3.6.1. Táblázat- és tömbstruktúrák

A Maple-ben táblázatok és mátrixok létrehozása a `table` és az `array` utasításokkal történik. A

$$\mathtt{table}(ifc, lista) \tag{20.47}$$

utasítás egy táblázat-struktúrát hoz létre; itt az ifc egy — akár a felhasználó által definiált — index-függvény, a *lista* pedig olyan kifejezések listája, melyek elemei egyenletek. Ebben az esetben a Maple az egyenletek bal oldalát a táblázatbevitel sorszámozásaként, a jobb oldalakat a táblázat beviendő elemeiként használja. Ha a listában csak elemek vannak, akkor a táblázatban az 1-gyel kezdődő természetes számok lesznek a sorszámok.

■ $> \ T := \mathtt{table}([a,b,c]); \quad \longrightarrow \quad T := \mathtt{table}([1 = a \ \ 2 = b \ \ 3 = c])$

$> \ R := \mathtt{table}([a = x, b = y, c = z]); \quad \longrightarrow \quad R := \mathtt{table}([a = x \ \ b = y \ \ c = z])$

T és R újbóli hívása csak a T és R szimbólumokat adja vissza. Valamely kifejezés megadott szintű és sorszámú elemét az `op`-pal kaphatjuk meg. Így magát a táblázatot a Maple az $\mathtt{op}(T)$; hatására adja vissza: az $\mathtt{op}(\mathtt{op}(T))$; utasítás eggyel mélyebb szintre menve a táblázat komponenseit adja (fnc, lista) alakban. Innen látható, hogy ezen struktúrák feldolgozása eltér az általános szabálytól, amelynek értelmében a Maple egy kifejezést rendszerint végig kiértékel, azaz addig, amíg már semmilyen további kiértékelés

nem lehetséges („full evaluation"). Ebben az esetben azonban, bár a definíciót feldolgozta, mégis a további kiértékelést felfüggesztette, viszont az `op` utasítás hatására végrehajtotta. Ez azért van, mert a teljes kiértékelés valójában „last name evaluation", amelyik megáll az `array`, `table`, `matrix`, `proc` típusoknál, mert azok mérete nem korlátozott és így esetleg nem is férnének el a képernyőn. A tényleges teljes kiértékelést ki tudjuk kényszeríteni például az `op` vagy az `eval` utasítással.

A T indexeit az `indices`(T);, T tagjait az `entries`(T); utasításra kapjuk meg.

■ A fenti példákban:

$>$ `indices`(T); eredménye $[1], [2], [3]$ és $>$ `indices`(R); eredménye $[a], [b], [c]$

valamint

$>$ `entries`(R); eredménye $[x], [y], [z]$

Az

`array`$(ifc, bounds, list)$; (20.48)

utasítás speciális, akár többdimenziós táblázatokat (tömböket) hoz létre, *bounds* az indexhatárokat, *list* pedig a táblázatelemeket jelöli. Ez utóbbiak legalább egyike kell, hogy szerepeljen. Az alábbiakban részletesen foglalkozunk az utasítással.

20.3.6.2. Egydimenziós tömbök

Az `array`(1..5); utasítás egy 5 hosszúságú, egydimenziós tömböt hoz létre üresen, azaz explicit elemek nélkül; $v :=$ `array`$(1..5, [4,\ 6,\ 2,\ 9,\ 8])$; a tömböt már az adott elemekkel fel is tölti. Az ilyen egydimenziós tömböket a Maple egyúttal vektoroknak is tekinti, tehát a `type`$(v,$ `vector`$)$; típusvizsgáló függvény a `true` értéket adja. Ha viszont a `whattype`(v); a kérdés, akkor a válasz `symbol` a kiértékelés fenti halasztott módja miatt. Emiatt, ha mégis tömbként akarjuk a Maple-vel felismertetni, akkor a fentiek miatt erről külön gondoskodnunk kell. Ezt például az `eval` utasítással érhetjük el és így `whattype(eval`(v)`)`; eredménye már `array`.

20.3.6.3. Kétdimenziós tömbök

Kétdimenziós tömböket az

$$A := \texttt{array}(1..m, 1..n, [[a(1,1), \ldots, a(1,n)], \ldots, [a(m,1), \ldots, a(m,n)]]); \tag{20.49}$$

utasítással definiálhatunk. Az így definiált struktúrát a Maple $(n \times m)$-típusú mátrixként értelmezi. Az $a(i,j)$-k a megfelelő mátrixelemek.

■ $>\ x :=$ `array`$(1..3, [x1, x2, x3])$;

Az eredmény a fentiek szerint az

$$x := [x1,\ x2,\ x3] \qquad \text{vector.}$$

Viszont mátrixot kaphatunk például az egydimenziós eset „üres" változatának megfelelőjével:

$>\ A :=$ `array`$(1..3, 1..4, [])$;

$$A := \texttt{array}(1..3, 1..4, [])$$

Ezután az

$>$ `eval`(A); utasítás eredménye $\begin{bmatrix} ?_{[1,1]} & ?_{[1,2]} & ?_{[1,3]} & ?_{[1,4]} \\ ?_{[2,1]} & ?_{[2,2]} & ?_{[2,3]} & ?_{[2,4]} \\ ?_{[3,1]} & ?_{[3,2]} & ?_{[3,3]} & ?_{[3,4]} \end{bmatrix}$

A Maple a tömb, azaz a mátrix még nem meghatározott elemeit $?_{[i,j]}$-vel jelöli. Ha néhány elemhez most értékeket rendelünk hozzá:

$>\ A[1,1] := 1 : A[2,2] := 1 : A[3,3] := 0 :$

akkor a kiértékelés ezt adja:

$$> \texttt{eval}(A); \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & ?_{[1,2]} & ?_{[1,3]} & ?_{[1,4]} \\ ?_{[2,1]} & 1 & ?_{[2,3]} & ?_{[2,4]} \\ ?_{[3,1]} & ?_{[3,2]} & 0 & ?_{[3,4]} \end{bmatrix}$$

A

$$> B := \texttt{array}([[b11, b12, b13], [b21, b22, b23], [b31, b32, b33]]);$$

utasítással a

$$B := \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{bmatrix}$$

mátrixot elemeivel együtt hoztuk létre, mivel ezek a definícióban eleve adottak voltak. Látható, hogy a dimenzióadatok megadása opcionális és most szükségtelen, mivel a mátrixot elemeinek teljes felsorolása meghatározza. Ha viszont egy mátrixból nem minden elem értékét ismerjük, akkor meg kell adni az indextartományt; a Maple a nem definiált értékeket azok formális szimbólumával helyettesíti:

$$> C := \texttt{array}(1..3, 1..4, [[c11, c12, c13], [c21, c22], []]);$$

$$C := \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 & C_{[1,4]} \\ c21 & c22 & C_{[2,3]} & C_{[c24]} \\ C_{[3,1]} & C_{[3,2]} & C_{[3,3]} & C_{[3,4]} \\ C_{[4,1]} & C_{[4,2]} & C_{[4,3]} & C_{[4,4]} \end{bmatrix}$$

A következő indexfüggvények lehetnek opcionális argumentumok: `diagonal, identity, symmetric, antisymmetric, sparse`. Ezekkel éppen a megfelelő típusú és méretű mátrixokat kapjuk meg; `sparse` hatására a nem definiált helyekre 0 kerül. Ezek az opciók egyúttal tárolásimódokat is előírnak.

■ $> \texttt{array}(1..3, 1..3, \texttt{antisymmetric}); \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & ?_{[1,2]} & ?_{[1,3]} \\ -?_{[1,2]} & 0 & ?_{[2,3]} \\ -?_{[1,3]} & -?_{[2,3]} & 0 \end{bmatrix}$

20.3.6.4. Vektorokra és mátrixokra vonatkozó speciális utasítások

A lineáris algebra műveletei közül itt csak azt említjük meg, hogy mátrixok szorzására a $\&*$ függvény szolgál, és minden műveletet az `evalm` függvénnyel értékelünk ki.

■ Szorozzuk össze az előző példában szereplő B mátrixot a már korábban szintén definiált x vektorral:

$$> \texttt{evalm}(B\& * x);$$

$$|b11\,x1 + b12\,x2 + b13\,x3,\ \ b21\,x1 + b22\,x2 + b23\,x3,\ \ b31\,x1 + b32\,x2 + b33\,x3|\,.$$

A Maple-ben vektorok és mátrixok előállítására speciális utasítások vannak, ezek a `vector` és a `matrix`, melyeket már a `linalg` programcsomaggal is be tudunk tölteni.

20.3.7. Függvények és operátorok

20.3.7.1. Függvények

A Maple igen sok előre definiált függvényt tartalmaz, melyek vagy azonnal elérhetők a rendszer indításánál, vagy speciális programcsomagokkal betölthetők. Ezek a függvények a `mathfunc` típushoz tartoznak, felsorolásukat az `?inifcns` eljárással kérhetjük.

A következő **20.12.** és **20.13. táblázatokban** vázlatos áttekintést adunk az alap- és speciális függvényekről.
A speciális függvényekhez tartoznak a FRESNEL-függvények is.

Az ortogonális polinomok csomagja többek között tartalmazza az HERMITE-, LAGUERRE-, LEGENDRE- JACOBI- és CSEBISEV-polinomokat. A részleteket ld. [20.6].

20.12. táblázat. A főbb alapfüggvények és jelölésük

Exponenciális függvény	`exp`
Logaritmus függvény	`log`, `ln`
Trigonometrikus függvények	`sin`, `cos`, `tan`, `cot`, `sec`, `csc`
Arkuszfüggvények	`arcsin`, `arccos`, `arctan`, `arccot`
Hiperbolikus függvények	`sinh`, `cosh`, `tanh`, `coth`, `sech`, `csch`
Áreafüggvények	`arcsinh`, `arcsosh`, `arctanh`, `arccoth`

20.13. táblázat. A főbb speciális függvények és jelölésük

BESSEL-függvények: $J_n(z)$ és $Y_n(z)$	`BesselJ`(n,z), `BesselY`(n,z)
Módosított BESSEL-függvények: $I_n(z)$, $K_n(z)$	`BesselI`(n,z), `BesselK`(n,z)
Gammafüggvény	`GAMMA`(x)
Integrál-exponenciális függvény	`Ei`(x)

20.3.7.2. Operátorok

A Maple-ben a függvények úgy viselkednek, mint a LISP programozási nyelvben a λ-függvények. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy egy függvény neve, mihelyt az a Maple-ben definiálva lett, operátorként működik. Más szavakkal a `type`(sin, `operator`); eredménye `true`. Ha az operátor mellé egy vagy több argumentumot írunk gömbölyű zárójelbe, akkor ez már az adott változók megfelelő függvénye.

■ > `type`(cos, `operator`); eredménye `true` és > `type`(cos, `function`); eredménye `false`.

A Maple lehetővé teszi, hogy a felhasználói függvényeket operátorok alakjában hozzuk létre. Ha

> $F := x->$ `mathkifej` : (20.50)

akkor az x változó `mathkifej` algebrai kifejezéséből egy F nevű, operátor alakú függvény jött létre. Itt az algebrai kifejezés tartalmazhat a felhasználó által előre definiált és belső függvényeket is. Ha az operátor-szimbólum mellé gömbölyű zárójelben egy független változót írunk, akkor ezen független változó függvényét kapjuk.

■ > $F := x\text{->} \sin(x) * \cos(x) + x\text{^}3 * \mathrm{tg}(x) + x\text{^}2$:

> $F(y);$ $\longrightarrow$ $F(y) := \sin(y)\cos(y) + y^3\,\mathrm{tg}(y) + y^2$

Ha itt az y argumentumnak (pl. lebegőpontos) számértéket adunk, akkor az

> $F(nn.mmm)$;

hívással a Maple a megfelelő függvényértéket adja.

Egy kifejezésből (gondoljunk pl. egy x változójú polinomra) az `unapply`$(function, var)$ utasítással megkapjuk a hozzátartozó operátort. Például:

> $p := x\text{^}2;$ $\longrightarrow$ $p := x^2$

> $f :=$ `unapply`$(p, x);$ $\longrightarrow$ $f := x \to x^2$

Az operátorokkal a szokásos szabályok szerint dolgozhatunk. Két operátor összege, különbsége és szorzata újra operátor lesz. Ha két függvényt akarunk összeszorozni, melyek operátor-alakban vannak ábrázolva, akkor a megfelelő írásmód: $(F * G)(x)$, ennek — és a kommutativitás miatt a $(G * F)(x)$-nek is az — eredménye az $F(x) * G(x)$ függvény. Két operátor kompozícióján értjük, hogy a két operátort egymás után alkalmazzuk. A Maple-ben ennek a kompozícióműveletnek a jele: `@` . Ez a művelet általában nem kommutatív.

■ Legyen $F := x\text{->} \cos(2 * x)$ és $G := x\text{->} x\text{^}2$. Ekkor

> $(G \,@\, F)(x);$ $\longrightarrow$ $\cos^2(2x),$

> $(F \,@\, G)(x);$ $\longrightarrow$ $\cos(2x^2)$

20.3.7.3. Differenciáloperátorok

A differenciálás operátora a Maple-ben: `D`, amelyet az operátor alakban adott függvényekre a $\texttt{D}(F)$, ill. $\texttt{D}[i](G)$ alakban alkalmazzuk. Az első egy egyváltozós függvény deriváltját operátor alakban állítja elő. Ha a változót mellé írjuk zárójelben, akkor a deriváltat, mint kifejezést kapjuk meg. Másik írásmód: $\texttt{D}(F)(x) = \texttt{diff}(F(x), x)$. Magasabbrendű deriváltakat a `D` operátor többszörös alkalmazásával kapunk, amit egyszerűen $(\texttt{D@@}n)(F)$ jelöl, ahol `@@` n a differenciáloperátor n-edik „hatványát" jelenti.

Ha G többváltozós függvény, akkor a $\texttt{D}[i](G)$ a G-nek az i-edik változó szerinti parciális deriváltját állítja elő. Ez az eredmény is újra operátor. A $\texttt{D}[i,j](G)$ a $\texttt{D}[i](\texttt{D}[j](G))$-t, azaz G-nek a második parciális deriváltját állítja elő a j-edik, majd az i-edik változó szerint.

A `D` differenciáloperátorra a differenciálszámításból (ld. 385. old.) ismert szabályok érvényesek, ha F és H függvények differenciálhatók.

$$\texttt{D}(F+H) = \texttt{D}(F) + \texttt{D}(H)\,, \tag{20.51a}$$

$$\texttt{D}(F*H) = (\texttt{D}(F)*H) + (F*\texttt{D}(H))\,, \tag{20.51b}$$

$$\texttt{D}(F\texttt{@}\ H) = \texttt{D}(F)\texttt{@}H*\texttt{D}(H)\,. \tag{20.51c}$$

20.3.7.4. A map utasítás

A Maple-ben a `map` utasítást akkor használjuk, ha egy operátort, ill. egy függvényt egy kifejezésre, ill. annak komponenseire akarunk alkalmazni. Legyen például F egy függvény. Ekkor a $\texttt{map}(F, x + x\texttt{\^{}}2 + x*y)$; eredménye az $F(x) + F(x^2) + F(x\ \ y)$ kifejezés. A $\texttt{map}(F, y*z)$; eredménye ehhez hasonlóan $F(y)*F(z)$.

■ $\texttt{map}(f,[a,b,c,d])$; $\longrightarrow$ $[f(a), f(b), f(c), f(d)]$

20.3.8. Programozás a Maple-ben

A Maple a saját eljárások és programok felépítéséhez a szokásos ciklus- és ellenőrző struktúrákat speciális formában tartalmazza.

Esetek megkülönböztetése az `if`-utasítással történik. Ennek alapstruktúrája:

`if` *felt* `then` *ut*1 `else` *ut*2 `fi` (20.52)

Az `else`-ág hiányozhat.

Az `else`-ág előtt tetszőlegesen sok elágazás szerepelhet az alábbi módon:

`elif` *felti* `then` *uti*, (20.53)

ahol *uti* az i-edik utasítást, *felti* az i-edik feltételt jelenti. Az utasítások közül az adott sorrendben első igaz feltételhez tartozó hajtódik végre. Ciklusokat a `for`, ill. `while` fenntartott szavakkal képezünk; a ciklus eljárását a `do` ... utasítások ... `od` alakban írjuk.

A `for`-ciklusban a futóindexet az

i `from` *n* `to` *m* `by` *di*

alakban írjuk, ahol *di* a lépésköz, például az alábbi ciklus kiírja a számokat 1-től 10-ig:

```
> for i from 1 to 10 by 1 do i od;
```

amit egyszerűbb alakban is megadhatunk:

```
> for i to 10 do i od;
```

Ha az n kezdőérték vagy a lépésköz hiányzik, akkor ezek értéke automatikusan 1.

A `while`-ciklus első része

`for` *ind* `while` *felt*

A ciklusok is többszörösen egymásba skatulyázhatók.

Hogy önmagukban zárt programokat tudjunk létrehozni, a Maple-ben az eljárásutasítást használjuk (procedure). Ez több sort is elfoglalhat, megfelelően tárolva a saját neve alatt saját végrehajtásában bármikor rekurzíven meghívható. Az alapstruktúra:

```
proc(args)
    local  ...
    options  ...
    utasítások
end;
```
(20.54)

Az eljárás argumentumainak száma nem kell, hogy megegyezzék a benne felhasznált változók számával.
A `local` típusú változók csak az eljáráson belül léteznek.

■ Írjunk eljárást az első n természetes szám négyzetgyöke összegének kiszámítására:

```
> sumqw := proc(n)
>          local s, i;
>          s[0] := 0;
>          for i to n
>          do s[i] := s[i - 1] + sqrt(i) od;
>          evalf(s[n]);
> end;
```

Ha az eljárást a nevével meghívjuk a kívánt argumentum-értékre:

```
> sumqw(30);
```

akkor az eredmény: 112.0828452

20.3.9. Kiegészítések a szintaxishoz, információk és segítség

20.3.9.1. A Maple-könyvtár használata

A Maple indítása után a felhasználónak sok belső utasítás áll rendelkezésére, de ezeken kívül vannak még úgynevezett vegyes könyvtári függvények és utasítások, melyeket a `readlib`(f) utasítással tudunk elérni. Ezen utasítások felsorolását és rövid leírását a [20.10] tartalmazza.
A Maple-ben a speciális programcsomagok igen széleskörű könyvtára áll rendelkezésünkre.
Egy ilyen speciális csomag meghívása a

```
> with(name);
```
(20.55)

paranccsal történik. Itt *name* a meghívott csomag neve, tehát például *linalg* a lineáris algebrai speciális csomag esetén. A csomag behívása után a Maple felsorolja annak összes utasítását és figyelmeztet, ha a csomagban új definíciók már meglévő utasításokkal egyeznek.

Ha a könyvtári csomagból csak egy speciális utasítást akarunk használni, akkor ennek hívása:

csomag`[utasítás]`
(20.56)

20.3.9.2. Környezeti változók

A Maple kiviteleit egy sor környezeti változóval vezérelhetjük. Már bemutattuk a `Digits` változót (ld. 995. old.), mellyel a lebegőpontos szám kiírandó számjegyeinek számát határozhatjuk meg.

Az eredmény kiírásának általános módját a `prettyprint` határozza meg. Itt az alapbeállítás:

```
> interface(prettyprint = true)
```
(20.57)

Ezzel középre igazított kimenetet biztosíthatunk matematikai írásmódban. Ha az opciót `false`-nak állítjuk be, akkor a kiírás a balszélen kezdődik és egy írógép típusú írásmódot használ.

20.3.9.3. Információk és segítség

Az utasítások és a kulcsszavak jelentéséről a

$?fogalom;$
(20.58)

utasítással kaphatunk felvilágosítást. A kérdőjel helyett írhatjuk: `help`(*fogalom*). Ekkor egy segítőképernyő jelenik meg, amely a könyvtári kézikönyvnek a kérdezett fogalomra vonatkozó részét tartalmazza.

Ha a Maple-t Windows alatt futtatjuk, akkor a HELP hívása megnyit egy egyre mélyebben kereshető menüt, amelyben a segédképernyőn az egérrel a kívánt fogalom magyarázatára klikkelhetünk.

20.4. A matematikai programcsomagok alkalmazása

Ennek a fejezetnek a tárgya: hogyan lehet matematikai problémaköröket ilyen rendszerekkel kezelni. Az itt tárgyalt problémaköröket egyrészt a gyakorlatban és az oktatásban mutatott gyakoriságuk, másrészt az ilyen rendszerekkel való kezelhetőségük figyelembevételével választottuk ki. Bemutatjuk az egyes rendszerek függvényeit, utasításait, operátorait, továbbá kiegészítő szintaxis-útmutatásokat adunk, valamint példákat oldunk meg. Ahol szükséges, ott röviden bemutatjuk a vonatkozó speciális programcsomagokat is.

20.4.1. Algebrai kifejezések kezelése

A gyakorlatban gyakran lépnek fel olyan algebrai kifejezések (lásd 10. old.), melyeket a további feldolgozás, mint például differenciálás, integrálás, sorbafejtés, határértékképzés vagy numerikus kiértékelés érdekében át kell alakítani. Ezeket a kifejezéseket rendszerint az egész számok gyűrűje (ld. 320. old.) vagy a racionális számok teste (ld. 320. old.) felett értelmezzük. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a számítógépes rendszerek a véges testek, illetve a racionális számok gyökkifejezésekkel bővített teste fölött értelmezett polinomokat is kezelni tudják. Az érdeklődők olvassák el az idevonatkozó szakirodalmat, illetve nézzék meg a megfelelő csomagot (a Mathematicá-ban az `Algebra`, a Mapple-ben a `GF`). Fontos szerepet játszanak a racionális számok teste felett értelmezett polinomokkal végzett műveletek. (ld. 320. old.).

20.4.1.1. Mathematica

A Mathematica a **20.14. táblázatban** bemutatott függvényeket és operátorokat használja algebrai kifejezések átalakítására.

1. Kifejezések kiszorzása

Az algebrai kifejezések kiszorzása mindig végrehajtható. Itt az együtthatók is lehetnek kifejezések.

■ In[1] : = `Expand`[$(x+y-z)$^4]

Out[1] $= x^4 + 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4 - 4\,x^3\,z - 12\,x^2\,y\,z - 12\,x\,y^2\,z - 4\,y^3\,z$
$+6\,x^2\,z^2 + 12\,x\,y\,z^2 + 6\,y^2\,z^2 - 4\,x\,z^3 - 4\,y\,z^3 + z^4$

Hasonlóan:

In[2] : = `Expand`[$(a\ x + b\,y$^$2)(c\,x$^$3 - d\ y$^$2)$]

Out[2] $= a\,c\,x^4 - a\,d\,x\,y^2 + b\,c\,x^3\,y^2 - b\,d\,y^4$

2. Polinomok szorzattá alakítása

A polinomok faktorizációját egész és racionális számok fölött a Mathematica csak akkor hajtja végre, ha ez az egész vagy racionális számok tartományában lehetséges. Egyébként a Mathematica a kifejezést változatlanul visszaadja.

■ In[2] := $p = x$^$6 + 7x$^$5 + 12x$^$4 + 6x$^$3 - 25x$^$2 - 30x - 25$;

In[3] := `Factor`[p] , eredménye

Out[3] $= ((5+x)\ (1+x+x^2)\ (-5+x^2+x^3))$

A Mathematica a polinomot három, a racionális számok teste fölött irreducibilis polinom szorzatára bontotta.

20.14. táblázat. Algebrai kifejezések kezelésére vonatkozó utasítások neve és jelentése

`Expand`$[p]$	a p algebrai kifejezésben elvégzi a szorzásokat és a hatványozásokat; tört esetén csak a számlálóban
`Expand`$[p, r]$	mint `Expand`$[p]$, de csak p azon részeivel, melyek r-et tartalmazzák
`PowerExpand`$[a]$	szorzat nem egész kitevőjű hatványát is szétbontja szorzatra, szorzat logaritmusát összegre bontja, hatvány logaritmusát szorzattá alakítja, hatvány hatványát átalakítja hatvánnyá
`Factor`$[p]$	tényezőkre bontja az algebrai kifejezés számlálóját és nevezőjét az egészek vagy a GAUSS-egészek felett, miután előzőleg összevonta egyetlen törtté
`Collect`$[p, x]$	rendezi p-t x hatványai szerint
`Collect`$[p, \{x, y, \ldots\}]$	ugyanaz mint az előző, csak a változók hatványainak szorzata szerint
`ExpandNumerator`$[r]$	az r racionális kifejezés számlálóját szorozza ki
`ExpandDenominator`$[r]$	csak a nevezőjét szorozza ki
`ExpandAll`$[r]$	mind a számlálót, mind a nevezőt kiszorozza
`Together`$[r]$	a kifejezést közös nevezőre hozza és egyetlen törtté alakítja, majd egyszerűsít
`Apart`$[r]$	a kifejezést a lehető legegyszerűbb nevezőkkel parciális törtekre bontja
`Cancel`$[r]$	egyszerűsít a közös tényezőkkel
`Simplify`$[r]$	algebrai átalakításokkal leegyszerűsíti r-et. Opciói: `ComplexityFunction` $\rightarrow f$, mellyel f segítségével mi írhatjuk elő a kifejezések bonyolultságának mérőszámát; `TimeConstraint` $\rightarrow$ *kifej*, mellyel előírhatjuk, hogy hány másodpercig dolgozhat a keletkező részkifejezéseken (értéke `Infinity` is lehet); `Trig` $\rightarrow$ `True`/`False`, mellyel eldönhetjük, hogy alkalmazzon-e trigonometrikus átalakításokat is.
`FullSimplify`$[r]$	az előzőnél több transzformációt használ fel. Az óvatosság érdekében az `ExcludedForms` opcióval megadható, hogy a Mathematica milyen részkifejezéseket ne változtasson

Ha egy polinom a racionális komplex számok teste fölött teljesen felbontható, akkor ezt a teljes felbontást a `GaussianIntegers` opcióval kaphatjuk meg.

■ In[4] := `Factor`$[x^2 - 2x + 5]$

Out[4] = $5 - 2x + x^2$, de

In[5] := `Factor`$[\%,$ `GaussianIntegers` `->` `True`$]$

Out[5] = $(-1 - 2\mathrm{I} + x)(-1 + 2\mathrm{I} + x)$

3. Műveletek polinomokkal

A **20.15. táblázat** olyan utasításokat tartalmaz, amelyekkel a polinomokkal a racionális számok teste fölött algebrai műveleteket végezhetünk.

20.15. táblázat. Algebrai polinommműveletek neve és jelentése

`PolynomialGCD`$[p1, p2, \ldots]$	a $p1, p2, \ldots$ polinomok legnagyobb közös osztóját határozza meg
`PolynomialLCM`$[p1, p2, \ldots]$	a $p1, p2, \ldots$ polinomok legkisebb közös többszörösét határozza meg
`PolynomialQuotient`$[p1, p2, x]$	a $p1$ polinomot (mint x függvényét) osztja $p2$-vel és visszaadja a hányadost
`PolynomialRemainder`$[p1, p2, x]$	meghatározza a $p1$ polinom $p2$-vel való osztása maradékát

■ Definiáljunk két polinomot:

In[1] := $p = x\text{^}6 + 7x\text{^}5 + 12x\text{^}4 + 6x\text{^}3 - 25x\text{^}2 - 30x - 25;$

$q = x\text{^}4 + x\text{^}3 - 6x\text{^}2 - 7x - 7;$

Ezekre alkalmazzuk az alábbi műveleteket:

In[2] := `PolynomialGCD`$[p, q]$
Out[2] = $1 + x + x^2$
In[3] := `PolynomialLCM`$[p, q]$
Out[3] = $(-7 + x)(1 + x + x^2)(-25 - 5x + 5x^2 + 6x^3 + x^4)$
In[4] := `PolynomialQuotient`$[p, q, x]$
Out[4] = $12 + 6x + x^2$
In[5] := `PolynomialRemainder`$[p, q, x]$
Out[5] = $59 + 96x + 96x^2 + 37x^3$

A két utolsó eredmény figyelembevételével adódik:

$$\frac{x^6 + 7x^5 + 12x^4 + 6x^3 - 25x^2 - 30x - 25}{x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 7} = x^2 + 6x + 12 + \frac{37x^3 + 96x^2 + 96x + 59}{x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 7}$$

4. Parciális törtekre bontás

A Mathematica két polinom hányadosát képes parciális törtek összegére bontani.

■ Az előző példa p és q polinomjára kapjuk:

In[6] := `Apart`$[q/p]$ $\longrightarrow$ Out[6] = $\dfrac{-6}{35\ (5 + x)} + \dfrac{-55 + 11\,x + 6\,x^2}{35\ (-5 + x^2 + x^3)}$

5. Nempolinomiális kifejezések kezelése

A `Simplify` paranccsal olyan bonyolult kifejezéseket tudunk sokszor egyszerűsíteni, amelyek nem polinomokból állnak. A Mathematica mindig megkísérli, hogy az algebrai kifejezéseket a szimbolikus változók természetétől függetlenül kezelje. Ehhez beépített algebrai azonosságokat használ. Így például a Mathematica ismeri a hatványozás azonosságait (ld. 7. old.):

In[1] := `Simplify`$[a\hat{}n/a\hat{}m)]$ $\longrightarrow$ Out[1] = $a^{(-m+n)}$ (20.59)

A `Trig -> True` opcióval az `Expand` és `Factor` függvények a trigonometrikus azonosságokat is felhasználva alakítják át a kifejezéseket. Hasonló hatású a `TrigExpand` és a `TrigFactor` függvény is.

■ Így egyes trigonometrikus azonosságok (ld. 81. old.) is megkaphatók:

In[2] := `Factor[Sin`$[4x]$`, Trig-> True]` $\longrightarrow$ Out[2] = $4\cos(x)^3 \sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3$

In[3] := `Factor[Cos`$[5x]$`, Trig-> True]` $\longrightarrow$ Out[3] = $\cos(x)\ (1 - 2\cos(2\,x) + 2\cos(4\,x))$.

A Mathematica 2.2. változatától „felfelé” a `Trig-> True` opció a `TrigExpand` utasítással már közvetlenül is elérhető.

Végül még arra utalunk, hogy a `ComplexExpand`$[kifej]$ utasítás valós változókat tartalmazó kifejezést feltételez, míg a `ComplexExpand`$[kifej, \{x1, x2, \ldots\}]$ $x1, x2, \ldots$ változói komplexnek vannak tekintve.

■ In[1] := `ComplexExpand[Sin`$[2\ x]$`, {`x`}]`
Out[1] = $\cosh(2\,\mathrm{Im}(x))\ \sin(2\,\mathrm{Re}(x)) + i\ \cos(2\,\mathrm{Re}(x))\sinh(2\,\mathrm{Im}(x))$

20.4.1.2. Maple

A Maple a **20.16. táblázatban** bemutatott műveleteket használja algebrai kifejezések átalakítására és egyszerűsítésére.

1. Kifejezések kiszorzása

A legegyszerűbb esetben a Maple a kifejezést a hatványok összegére bontja:

■ > `expand(`$(x + y - z)\hat{}4$`);`
$4\,x^3y - 4\,x^3z + 6\,x^2y^2 + 6\,x^2z^2 + 4\,xy^3 - 4\,xz^3 - 4\,y^3z + 6\,y^2z^2 - 4\,yz^3 + x^4 + y^4 + z^4$
$-12\,x^2yz - 12\,xy^2z + 12\,xyz^2$

20.16. táblázat. Algebrai kifejezéseket kezelő függvények neve és jelentése

`expand`$(p, q1, q2, \ldots)$	elvégzi a szorzásokat és a hatványozásokat a p algebrai kifejezésben. Az opcionális qi argumentumok részkifejezések, amelyeket a Maple nem bont fel.
`factor`(p, K)	a p kifejezést faktorizálja. K egy opcionális lista egy vagy több `RootOf`(kifejezés)-sel, mint elemmel, amelyek gyökei definiálják a testbővítést, amely felett faktorizálni akarunk. K helyett szerepelhet a `real` vagy `complex` argumentum is, ekkor gyökkifejezések helyett lebegőpontos számok szerepelnek együtthatókként a végeredményben.
`simplify`$(p, q1, q2, \ldots)$	belső egyszerűsítési szabályokat alkalmaz p-re. Az opcionális argumentumok jelenléte esetén csak ezeket használja fel.
`radsimp`(p)	egyszerűsíti p gyökkifejezéseit.
`normal`(p)	a p racionális függvényt normálalakra hozza, tehát végrehajtása után a számláló és a nevező relatív prím lesz.
`sort`(p)	rendezi a p polinom tagjait csökkenő kitevők szerint.
`coeff`(p, x, i)	az x^i együtthatóját adja meg.
`collect`(p, v)	egy többváltozós polinom v változót tartalmazó tagjait gyűjti össze.

■ Itt bemutatjuk a Maple működését egy opcionális argumentum hiánya, illetve megléte esetén:

> `expand`$((a*x\hat{}3+b*y\hat{}4)*sin(3*x)*cos(2*x))$;

$$8\,ax^3\sin(x)\cos(x)^4 - 6\,ax^3\sin(x)\cos(x)^2 + ax^3\sin(x) + 8\,by^4\sin(x)\cos(x)^4$$
$$-6\,by^4\sin(x)\cos(x)^2 + by^4\sin(x)$$

Ha tiltó argumentumot is megadunk:

> `expand`$((a*x\hat{}2-b*y\hat{}3)*sin(3*x)*cos(2*x), a*x\hat{}2-b*y\hat{}3)$;

$$8\,(ax^2-by^3)\sin(x)\cos(x)^4 - 6\,(ax^2-by^3)\sin(x)\cos(x)^2 + (ax^2-by^3)\sin(x)$$

A Maple az opcionális argumentumot változatlanul hagyja.

■ Itt bemutatjuk a Maple nagyon fejlett képességeit:

> `expand`$(exp(2*a*x)*sinh(2*x)+ln(x^3)*sin(4*x))$;

$$2\,\mathrm{e}^{ax^2}\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) + 24\,\ln(x)\sin(x)\cos(x)^3 - 12\,\ln(x)\sin(x)\cos(x)$$

2. Polinomok szorzattá alakítása, azaz faktorizálása

A Maple képes polinomokat szorzattá alakítani nemcsak a racionális számok teste fölött, ha ez elvileg lehetséges.

■ > $p := x\hat{}6+7*x\hat{}5+12*x\hat{}4+6*x\hat{}3-25*x\hat{}2-30*x-25$:

$q := x\hat{}4+x\hat{}3-6*x\hat{}2-7*x-7$:

> $p1 :=$ `factor`(p);

$(x+5)\,(x^2+x+1)\,(x^3+x^2-5)$ és

> $q1 :=$ `factor`(q);

$(x^2+x+1)\,(x^2-7)$

Először a Maple mindkét polinomot irreducibilis tényezők szorzatára bontotta a racionális számok teste felett. Ha további felbontást akarunk, akkor a következő a teendő:

■ > $p2 :=$ `factor`$(p, (-3)\hat{}(1/2))$;

$$\frac{(x^3+x^2-5)\left(2\,x+1-\sqrt{-3}\right)\left(2\,x+1+\sqrt{-3}\right)(x+5)}{4}$$

A Maple a fenti második tényezőt tovább bontotta (ehhez a racionális számtestet bővítette $\sqrt{-3}$-mal).

Általában nem tudjuk, hogy egy ilyen bővítés lehetséges-e. Ha a talált faktorok fokszáma legfeljebb 4, akkor van gyökképlet, tehát ilyenkor mindig lehetséges. A `RootOf` függvénnyel ezután a gyököket algebrai kifejezésekként adhatjuk meg.

■ > $r := \texttt{RootOf}(x^3 + x^2 - 5)$: $k := \texttt{allvalues}(r)$:

> $k[1]$;

$$\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}} + \frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}}} - 1/3$$

> $k[2]$;

$$-\frac{\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}}}{2} - \frac{1}{18\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}}} - 1/3 + \frac{\sqrt{-1}\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}} - \frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{133}{54} + \frac{\sqrt{655}\sqrt{3}}{18}}}\right)}{2}$$

A $k[3]$ hívása a komplex $k[2]$ konjugált komplex értékét adja; mivel a 3 gyök 3 kifejezéssel van megadva, $\sqrt{-1}$-en kívül az összes szereplő gyök egy-egy (pozitív) valós számot jelent.

Megjegyzendő, hogy ha valamelyik együttható lebegőpontos számként van megadva, akkor a gyököket is lebegőpontos alakban kapjuk meg.

3. Műveletek polinomokkal

A már ismertetett függvények mellett igen fontos a `gcd` és `lcm` függvény. Ezek két polinom legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét határozzák meg. A $\texttt{quo}(p, q, x)$ adja az x-től függő p polinom q-val való osztása hányadosát, a $\texttt{rem}(p, q, x)$ pedig a maradékot.

■ > $p := x^6 + 7 * x^5 + 12 * x^4 + 6 * x^3 - 25 * x^2 - 30 * x - 25$:

$q := x^4 + x^3 - 6 * x^2 - 7 * x - 7$:

> $\texttt{gcd}(p, q)$;

$$x^2 + x + 1$$

> $\texttt{lcm}(p, q)$;

$$210\,x + 5\,x^6 - 43\,x^5 - 109\,x^4 - 72\,x^3 + 150\,x^2 + 175 + 7\,x^7 + x^8$$

A `normal` utasítással két, racionális számtest feletti polinom formális hányadosát normálalakra hozhatjuk, azaz két, egyszerűsített polinom hányadosaként kapjuk meg.

■ Az előző példa polinomjaira:

> $\texttt{normal}(p/q)$;

$$\frac{x^4 + 6\,x^3 + 5\,x^2 - 5\,x - 25}{x^2 - 7}$$

A `numer` és `denom` a számláló és a nevező elkülönített felbontására szolgálnak, a már említett testbővítést is megengedve.

> $\texttt{factor}(\texttt{denom}(\%), (7)\hat{}(1/2))$;

$$\left(x + \sqrt{7}\right)\left(x - \sqrt{7}\right)$$

4. Parciális törtekre bontás

A parciális törtekre bontás a Maple-ben a már tárgyalt `convert` utasítással történik (ld. 996. old.), így már tudjuk, hogy a `parfrac` opcióval kell meghívni.

■ Az előző példák p és q polinomjára kapjuk:

```
> convert(p/q, parfrac, x);
```

$$x^2 + 6\,x + 12 + \frac{37\,x + 59}{x^2 - 7} \qquad \text{és}$$

```
> convert(q/p, parfrac, x);
```

$$-\frac{6}{35\,x + 175} + \frac{-55 + 11\,x + 6\,x^2}{35\,x^3 + 35\,x^2 - 175}$$

5. Általános kifejezések kezelése

A következő példákban bemutatott utasítások racionális és algebrai függvényeket tartalmazó algebrai és transzcendens kifejezések átalakítását teszik lehetővé. Rendszerint megadhatók bennük opcionális argumentumok, melyek az átalakításokat adott feltételek mellett végrehajtják.

Példaként tekintsük a `simplify` utasítást.
Az egyszerű `simplify`(*kifej*) alak esetén a Maple megpróbálja a beépített egyszerűsítési szabályokat a kifejezésre alkalmazni:

■
```
> t := sinh(3 * x) + cosh(4 * x) :
> simplify(t);
```

$$4\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x) + 8\,\mathrm{ch}(x)^4 - 8\,\mathrm{ch}(x)^2 + 1$$

Hasonlóan:

```
> r := sin(2 * x) * cos(3 * x) :
> simplify(r);
```

$$8\,\sin(x)\cos(x)^4 - 6\,\sin(x)\cos(x)^2$$

Rendelkezésünkre áll ezenkívül a `combine` utasítás, mely bizonyos értelemben az `expand` inverze.

■
```
> t := tan(2 * x)^2 :
> t1 := expand(t);
```

$$t1 := \frac{4\,\sin(x)^2\cos(x)^2}{(2\,\cos(x)^2 - 1)^2}$$

```
> combine(t1, trig);
```

$$\cos(2\,x)^{-2} - 1$$

Itt a `combine`-t a `trig` opcióval hívtuk meg, amely gondoskodik arról, hogy a trigonometrikus alapazonosságok is alkalmazhatók legyenek. Ha most a `simplify` utasítást alkalmazzuk:

```
> t2 := simplify(t);
```
$\longrightarrow$
$$-\frac{\cos(2\,x)^2 - 1}{\cos(2\,x)^2}$$

Itt a Maple a tangensfüggvényt a cosinusfüggvénnyel fejezte ki. Lássunk még egy olyan példát is, ahol érdemes a `combine`-t egy másik argumentummal is meghívni.

```
> f := 32 * sin(x)^3 * cos(x)^3 * exp(x) * exp(y);
```

$$f := 32\,\sin(x)^3\cos(x)^3\exp(x)\exp(y)$$

```
> combine(f);
```

$$\exp(x + y)\sin(6x) + 3\exp(x + y)\sin(2x)$$

> `combine`$(f, \texttt{trig})$;
> $\exp(x)\exp(y)\sin(6x) + 3\exp(x)\exp(y)\sin(2x)$
> `combine`$(f, \texttt{exp})$;
> $32\sin(x)^3\cos(x)^3\exp(x+y)$.

Hasonló átalakítások végezhetők az exponenciális, logaritmus- és egyéb függvényeken.

20.4.2. Egyenletek és egyenletrendszerek megoldása

A tárgyalt és a hasonló rendszerek az egyenletek és egyenletrendszerek megoldására beépített rutinokkal rendelkeznek. Ha az egyenletek az algebrai számok testén belül explicite megoldhatók, akkor a megoldásokat gyökkifejezésekként kapjuk meg. Ha nem lehetséges a gyököket zárt alakban megadni, akkor adott pontosságú numerikus megoldásokat kapunk. A továbbiakban néhány alaputasítást mutatunk be. A lineáris egyenletrendszerek megoldásának külön fejezetet szentelünk (ld. 1018. old.) .

20.4.2.1. Mathematica

1. Egyenletek

A Mathematica az egyenletek kezelését és megoldását széles körben teszi lehetővé. Az egyenletet a Mathematica logikai kifejezésnek fogja fel. Ha azt írjuk:

$$\text{In[1]} := g = x\text{^}2 + 2x - 9 == 0\,, \tag{20.60a}$$

akkor ezt a Mathematica olyan nyílt mondatnak értelmezi, amelyben x a lekötetlen változó. Ha ezután a bevitel:

$$\text{In[2]} := \%/.\ x\text{-}\!>\ 2, \quad \text{akkor megjelenik} \quad \text{Out[2]} = \texttt{False}, \tag{20.60b}$$

mivel az x ezen értékére a jobb és bal oldal nem azonos.
A `Roots`$[g, x]$ utasítás — ahol $g\ r == s$ alakú, r és s kifejezések — a fenti azonosságot olyan alakra hozza, ami x-et explicit módon tartalmazza. A Mathematica az eredményt a logikai VAGY-gyal összekapcsolt egyenletek formájában adja, amelyek együtt kiadják g gyökeit.

$$\text{In[2]} := \texttt{Roots}[g, x] \ \text{eredménye}$$

$$\text{Out[2]} = x == \frac{-2 + \texttt{Sqrt}[40]}{2}\,||\,x == \frac{-2 - \texttt{Sqrt}[40]}{2} \tag{20.60c}$$

Ebben az értelemben az egyenletekkel logikai műveleteket végezhetünk.
A `ToRules` függvény ezután a logikai VAGY-gyal összekapcsolt egyenleteket helyettesítési szabályokká alakítja és a gyökeiket egy listában az alábbi módon felsorolja:

$$\text{In[3]} := \{\texttt{ToRules}[\%]\}$$

$$\text{Out[3]} = \{\{x \text{-}\!>\ \frac{-2 + \texttt{Sqrt}[40]}{2}\}, \{x \text{-}\!>\ \frac{-2 - \texttt{Sqrt}[40]}{2}\}\} \tag{20.60d}$$

2. Egyenletek megoldása

A Mathematica-ban a `Solve` utasítás szolgál az egyenletek megoldására. Bizonyos értelemben a `Solve` a `Roots` és a `ToRules` műveleteket hajtja végre egymás után.

A Mathematica a polinomiális egyenleteket szimbolikusan csak akkor tudja megoldani, ha ez algebrai alakban egyáltalán lehetséges, azaz legfeljebb negyedfokú esetben. Ha a magasabb fokszámú kifejezések algebrai eljárásokkal, mint például faktorizációval, egyszerűbb alakra hozhatók, akkor a Mathematica itt is tud megoldásokat számítani. A `Solve` megkísérli az `Expand` és `Decompose` belső függvényekkel a megfelelő szétbontást elvégezni.

Elvileg — bizonyos feltételek teljesülése esetén — a Mathematica numerikus megoldásokat is tud adni.

■ Egy harmadfokú egyenlet általános megoldása:

$$\text{In[4]} := \texttt{Solve}[x\text{^}3 + a\ x\text{^}2 + b\ x + c == 0, x]$$

A Mathematica válasza:

$$\text{Out[4]} = \{\{x\text{->} \frac{-a}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}\ (-a^2+3\,b)}{3\left(-2\,a^3+9\,a\,b-27\,c+3^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\left(a^2\,b^2\right)+4\,b^3+4\,a^3\,c-18\,a\,b\,c+27\,c^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(-2\,a^3+9\,a\,b-27\,c+3^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\left(a^2\,b^2\right)+4\,b^3+4\,a^3\,c-18\,a\,b\,c+27\,c^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{1\ 32^{\overline{3}}}\},$$

$$\ldots\}$$

A tagok hosszúsága miatt a megoldáslistában csak az első megoldást tüntettük fel. Ha egy adott a, b, c együtthatójú egyenletet akarunk megoldani, akkor jobb magát az egyenletet a `Solve` utasítással kezelni, mint az a, b, c értékeket a szimbolikus megoldásba utólag behelyettesíteni.

■ **A:** A harmadfokú egyenlet (ld. 40. old.) megoldása:

```
In[5]:= Solve[x^3 + 6 x + 2 == 0, x]
Out[5]= {{x-> -0.32748}, {x-> 0.16374 + 2.46585 I}, {x-> 0.16374 - 2.46585 I}}
```

■ **B:** Egy hatodfokú egyenlet megoldása:

```
In[6]:= Solve[x^6 - 6x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 65x^2 - 38x - 120 == 0, x]
Out[6]= {{x-> -1}, {x-> 4}, {x-> 3}, {x-> 2}, {x-> -1 - 2 I}, {x-> -1 + 2 I}}
```

A Mathematica-nak sikerült a **B** példa egyenletét elsőfokú tényezőkre faktorizálni, ezután a megoldás problémamentes.

Ha numerikus megoldásról van szó, akkor az `NSolve` utasítást jobb használnunk, ez sokkal gyorsabb, mint az `N[Solve[...]]`.

■ Oldjuk meg a következő bonyolult egyenletet az `NSolve` alkalmazásával:

```
In[7]:= NSolve[x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 2 == 0, x]
Out[7]= {{x-> -0.379567 - 0.76948 I}, {x-> -0.379567 + 0.76948 I},
         {x-> 0.641445}, {x-> 1. - 1. I}, {x-> 1. + 1. I}, {x-> 2.11769}}
```

3. Transzcendens egyenletek megoldása

A Mathematica transzcendens egyenleteket is meg tud oldani. Ez általában szimbolikus módon nem lehetséges. Az ilyen egyenleteknek ezenkívül néha végtelen sok megoldása van. Ezért ilyen esetekben a Mathematicá-val közöljük a keresés első vagy első kezdőértékét. Ez a `FindRoot`$[g, \{x, x_s\}]$ vagy a `FindRoot`$[g, \{x, \{x_0, x_1\}\}]$ utasítással lehetséges, ahol x_s, illetve x_0 a gyökkeresés kezdő értéke. Itt g megint *kifej*1 == *kifej*2 alakú. `FindRoot`$[g, \{x, x_s, x_{\min}, x_{\max}\}]$ hatására a keresés x_s-ből indul és az $[x_{\min}, x_{\max}]$ intervallumon kívülre jutva megáll. `FindRoot`$[\{egy_1, egy_2, \ldots\}, \{x, x_0\}, \{y, y_0\}, \ldots]$ megpróbálja az egy_i-kből álló egyenletrendszert numerikusan megoldani az $x_0, y_0, \ldots$ kezdőértékekből indulva. Ha minden egyenlet és kezdőérték valós, akkor `FindRoot` csak valós megoldásokat keres. Ha bármelyikük komplex vagy bármelyik kezdőértékhez hozzáadunk 0.I-t, akkor komplex gyököket is keres.

■

```
In[8]:= FindRoot[x + ArcCoth[x] - 4 == 0, {x, 1.1}]
Out[8]= {x-> 1.00502}    és
In[9]:= FindRoot[x + ArcCoth[x] - 4 == 0, {x, 5}]
Out[9]= {x-> 3.72478}
```
(20.61)

4. Egyenletrendszerek megoldása

A Mathematica képes több egyenletet szimultán megoldani. Az erre szolgáló belső függvényeket, melyek az egyenletrendszer szimbolikus, tehát nem a numerikus megoldásait adják, a **20.17. táblázat** tartalmazza.

20.17. táblázat. Egyenletrendszer-megoldó utasítások és jelentésük

`Solve`$[\{l_1 == r_1, l_2 == r_2, \ldots\}, \{x, \ldots\}]$	megoldja az egyenletrendszert az adott ismeretlenekre
`Eliminate`$[\{l_1 == r_1, \ldots\}, \{x, \ldots\}]$	kiküszöböli az $x, \ldots$ változókat az egyenletrendszerből
`Reduce`$[\{l_1 == r_1, \ldots\}, \{x, \ldots\}]$	egyszerűsíti, sőt ha lehet, meg is oldja az egyenletrendszert és diszkutálja a fellépő eseteket, még akkor is, ha nem tudja megoldani. Akkor szokás használni, ha `Solve` kudarcot vall.

Ahogy az egyismeretlenes egyenlet esetén, az `NSolve` itt is numerikus megoldást ad. Lineáris egyenletrendszerek megoldására példákat a 20.4.3. fejezet tárgyal az 1016. oldalon.

20.4.2.2. Maple

1. Fontos függvények

A Maple-ben az egyenletek szimbolikus megoldására szolgáló két alapfüggvény a `solve` és a `RootOf`, ill. `roots`. Ezekkel és ezek lehetséges variációival, bizonyos opcionális argumentumok használatával sokféle egyenlet, még transzcendensek is megoldhatók. Ha egy egyenlet zárt alakban nem oldható meg, akkor kérhetünk a Maple-től közelítő numerikus megoldást.

A `RootOf` függvény egy egyismeretlenes egyenlet összes gyökére vonatkozó gyűjtő szimbólum. A következő kifejezésben:

$$k := \texttt{RootOf}(x\texttt{\^{}}3 - 5 * x + 7, x) \longrightarrow \quad k := \texttt{RootOf}(_Z^3 - 5\,_Z + 7) \tag{20.62}$$

a k az $x^3 - 5x + 7 = 0$ egyenlet gyökeinek együttesét jelenti. Itt, ha lehetséges, a Maple a bevitt kifejezést egyszerűbb alakra hozza, és a $_Z$ globális változóval állítja elő. Az `allvalues`(k) függvény meghívásával kapjuk a gyökök sorozatát.

A `solve` utasítás megadja az egyenlet gyökeit, ha ilyenek léteznek és gyökkifejezésekkel előállíthatók.

■ $>$ $k := \texttt{solve}(x\texttt{\^{}}4 + x\texttt{\^{}}3 - 6 * x\texttt{\^{}}2 - 7 * x - 7, x);$

$$k := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}, \sqrt{7}, -\sqrt{7}\ ,$$

viszont

$$> r := \texttt{solve}(x\texttt{\^{}}6 + 4 * x\texttt{\^{}}5 - 3 * x + 2, x); \longrightarrow r := \texttt{RootOf}(_Z^6 + 4\,_Z^5 - 3\,_Z + 2)$$

Ennek az egész együtthatós, 0-tól különböző szabad tagú egyenletnek nincs racionális gyöke, mert ismert, hogy akkor egy ilyennek egész gyöke is van és az osztja a szabad tagot. Az `allvalues` függvénnyel kaphatjuk meg a közelítő numerikus megoldásokat.

2. Egyismeretlenes egyenletek megoldása

1. Polinomegyenletek Az egyismeretlenes, legfeljebb negyedfokú polinomegyenletre a Maple szimbolikus megoldást ad.

■ $>$ $\texttt{solve}(x\texttt{\^{}}4 - 5 * x\texttt{\^{}}2 - 6);$ $\longrightarrow$ $\quad \mathrm{I}, -\mathrm{I}, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$

2. Harmadfokú egyenletek Az általános együtthatós harmadfokú egyenletek megoldását zárt alakban tudja a Maple előállítani.

■ $> r := solve(x\text{^}3 + a * x\text{^}2 + b * x + c, x) :$
$> r[1];$

$$\sqrt[3]{\frac{ba}{6} - \frac{c}{2} - \frac{a^3}{27} + \frac{\sqrt{4\,b^3 - b^2a^2 - 18\,bac + 27\,c^2 + 4\,ca^3}\sqrt{3}}{18}} - \frac{\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}}{\sqrt[3]{\frac{ba}{6} - \frac{c}{2} - \frac{a^3}{27} + \frac{\sqrt{4\,b^3 - b^2a^2 - 18\,bac + 27\,c^2 + 4\,ca^3}\sqrt{3}}{18}}} - \frac{a}{3}$$

Az $r[2]$, és $r[3]$ hasonló kifejezések, melyeket hosszúságuk miatt elhagytunk.

3. Általános negyedfokú egyenlet Az általános negyedfokú egyenletet is problémamentesen oldja meg a Maple.

Ha a `solve` utasítást egy olyan egyenletre alkalmazzuk, melynek együtthatói lebegőpontos számok, akkor a Maple az egyenletet numerikusan oldja meg.

■ $>$ `solve`$(1. * x\text{^}3 + 6. * x + 2., x);$

$$-3.27480002,\ .1637400010 - 2.46585327\,\mathrm{I},\ .1637400010 + 2.46585327\,\mathrm{I}$$

A Maple olyan egyenleteket is meg tud oldani, melyekben az ismeretlenek gyökös kifejezésekben szerepelnek.

4. Hamis gyökök. Ilyen esetben vigyázni kell, mert az (esetleg többszöri) négyzetreemelésekkel új egyenletek keletkeznek, melyek megoldása az eredeti egyenletnek esetleg nem megoldása. Ezért a Maple által talált gyököket minden esetben ellenőrizni kell.

■ Oldjuk meg a $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-1} - 1 = 0$ egyenletet! Ehhez a bevitel:

$> p := $ `sqrt`$(x + 7) +$ `sqrt`$(2 * x - 1) - 1 :\ l :=$ `solve`$(p = 0, x) :$

Az $>\ s :=$ `allvalues`(l); megadja a két lehetséges gyököt

$$s[1] := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 + \sqrt{17})^2 \quad \text{és} \quad s[2] := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{17})^2\,.$$

A $>$ `subs`$(x = s[i], p);\quad i = 1, 2$ utasítással ellenőrizzük, hogy az egyenletnek egyik sem gyöke (a gyökök összes értékével végigszámolva ellenőrizhetjük, hogy tényleg csak ezek lehetnének a gyökök, tehát nincs az egyenletnek megoldása).

3. Transzcendens egyenletek megoldása

Azok az egyenletek, melyekben transzcendens kifejezések is vannak, általában csak numerikus úton oldhatók meg. Tetszőleges típusú egyenlet numerikus megoldására a Maple-ben az `fsolve` utasítás szolgál. Ennek segítségével próbálja meg a Maple a vizsgált egyenlet valós gyökeit megkeresni. Így azonban általában csak egy gyököt kapunk. A transzcendens egyenleteknek viszont rendszerint több gyökük van. Ezért az `fsolve` utasítás harmadik opcionális argumentumaként megadhatjuk az intervallumot, amelyben a gyököket keressük.

■ $>$ `fsolve`$(x +$ `arccoth`$(x) - 4 = 0, x);\ \longrightarrow\ 3.724783628,$ azonban

$>$ `fsolve`$(x +$ `arccoth`$(x) - 4 = 0, x, 1..1.5);\ \longrightarrow\ 1.005020099$ (20.63)

4. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása

Az egyenletrendszerek megoldására is a `solve` és az `fsolve` utasítások szolgálnak. Ezek argumentumaként először kapcsos zárójelben megadjuk az egyenleteket, a második argumentum pedig szintén kapcsos zárójelben az ismeretleneket tartalmazza:

$>$ `solve`$(\{egy\,1, egy\,2, \ldots\}, \{x1, x2, \ldots\});$ (20.64)

■ $>$ `solve`$(\{x\text{^}2 - y\text{^}2 = 2, x\text{^}2 + y\text{^}2 = 4\}, \{x, y\});$ (20.65)

$$\{y = 1, x = \sqrt{3}\}, \{y = 1, x = -\sqrt{3}\}, \{y = -1, x = \sqrt{3}\}, \{y = -1, -\sqrt{3}\}$$

20.4.3. A lineáris algebra elemei

20.4.3.1. Mathematica

A 20.2.4. fejezetben a listák alapján definiáltuk a mátrix fogalmát és egy sor mátrixműveletet. A Mathematica a lineáris egyenletrendszerek elméletének keretein belül ezekre a definíciókra épít. A következőkben definiálunk egy $(m \times n)$-típusú mátrixot, melynek elemei: $p_{ij} = \mathtt{p}[[i, j]]$:

$$p = \mathtt{Array}[p, \{m, n\}]\,, \tag{20.66}$$

illetve két, n-, ill. m-dimenziós vektort:

$$x = \mathtt{Array}[x, \{n\}] \quad \text{és} \quad b = \mathtt{Array}[b, \{m\}] \tag{20.67}$$

Ezekkel a definíciókkal felírhatjuk az általános lineáris inhomogén, ill. homogén egyenletrendszert (ld. 4.4.2. fejezet, 272. old.) a következő alakban:

$$p\,.\,x == b \qquad p\,.\,x == 0 \tag{20.68}$$

1. Speciális eset: $n = m$, $\det p \neq 0$

Az $n = m$, $\det p \neq 0$ speciális esetben az inhomogén egyenletrendszer egyértelműen megoldható, a megoldás:

$$x = \mathtt{Inverse}[p]\,.\,b \tag{20.69}$$

A Mathematica ilyen egyenletrendszereket még kb. 50 ismeretlennel is — a számítógéptől függően — viszonylag rövid idő alatt meg tud oldani. Egy ezzel ekvivalens, mégis bizonyos esetekben valamivel gyorsabb utasítás a `LinearSolve`$[p, b]$.

2. Általános eset

A `LinearSolve` és `NullSpace` utasításokkal kezelhetők a Lineáris Algebra fejezet 4.4.2. szakaszában leírt esetek, azaz megállapíthatjuk, hogy létezik-e megoldás, és ha igen, akkor ezt a megoldást meg is kaphatjuk. A következőkben tekintsünk néhány példát a 4.4.2. szakaszból.

■ **A:** A 2. szakasz példája (ld. 273. old.)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek a homogén rendszernek léteznek nemtriviális megoldásai, melyek a p mátrix magtere bázisvektorai lineáris kombinációjaként írhatók fel. Ez az n-dimenziós vektortérnek az az altere, amelyet a p mátrix, mint transzformáció a nullvektorra képez le. A `NullSpace`$[p]$ utasítás meghatároz egy bázist. Az:

$$\mathrm{In}[1] := p = \{\{1, -1, 5, -1\}, \{1, 1, -2, 3\}, \{3, -1, 8, 1\}, \{1, 3, -9, 7\}\}$$

bevitellel akkor egy olyan egyenletrendszer mátrixát adtuk meg, melynek determinánsa nullával egyenlő, amit a `Det`$[p]$ utasítással ellenőrizhetünk. A következő bevitel:

$$\mathrm{In}[2] := \mathtt{NullSpace}[p]$$

aminek az eredménye a négydimenziós tér két lineárisan független vektorának listája:

$$\mathrm{Out}[2] = \{\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0\}, \{-1, -2, 0, 1\}\}.$$

Ez a két vektor bázis a p mátrix kétdimenziós magterében. Ezen két vektor bármely lineáris kombinációja szintén a magtérben fekszik, tehát a homogén egyenletrendszernek szintén megoldása. A vizsgált példa megoldásával (ld. 273. old.) való összehasonlítással azonosságot kapunk.

■ **B:** A 272. oldal **A** példája:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 8 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixa a $(3,5)$-típusú $m1$ mátrix, jobb oldala a $b1$ vektor. A bevitel:

$\text{In}[3] := m1 = \{\{1,-2,3,-1,2\},\{3,-1,5,-3,-1\},\{2,1,2,-2,-3\}\};$

$\text{In}[4] := b1 = \{2,6,8\};$

Az

$\text{In}[5] := \texttt{LinearSolve}[m1, b1]$

utasítás bevitele után megjelenik az üzenet:

`LinearSolve` : : nosol: Linear equation encountered which has no solution.

Ezután újra megjelennek a bevitt adatok.

■ **C:** A 272. oldal 1. szakaszának **B** példája:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

A bevitel:

$\text{In}[5] := m2 = \{\{1,-1,2\},\{1,-2,-1\},\{3,-1,5\},\{-2,2,3\}\};$

$\text{In}[6] := b2 = \{1,2,3,-4\};$

Mivel ebben az esetben az egyenletrendszer túlhatározott, a Mathematicá-val megvizsgáltatjuk, hogy lehet-e az $m2$ mátrix sorait lineáris függőségük alapján redukálni. Ez a vizsgálat az

$\text{In}[7] := \texttt{RowReduce}[m2];$

bevitellel történik, amire

$\text{Out}[7] = \{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\},\{0,0,0\}\}$

Most már kérhetjük a megoldást:

$$\text{In}[8] := \texttt{LinearSolve}[m2, b2]; \longrightarrow \text{Out}[8] = \{\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\}$$

3. Sajátértékek és sajátvektorok

Mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait a 4.5. szakaszban (ld. 277. oldal) definiáltuk. A Mathematica speciális utasításai lehetővé teszik ezek meghatározását. Kettőt már említettünk: az `Eigenvalues`$[m]$ utasítás az m kvadratikus mátrix sajátértékeinek, az `Eigenvectors`$[m]$ pedig m sajátvektorainak listáját adja eredményül; míg `Eigensystem`$[m]$ egyszerre szolgáltatja a sajátértékeket és a sajátvektorokat. Ha m helyett `N`$[m]$-et írunk, akkor a sajátértékek numerikus közelítését kapjuk. Ha a négyzetes mátrix rendje 4-nél nagyobb, akkor nem várhatunk algebrai megoldást, mert a megfelelő polinomegyenlet fokszáma nagyobb, mint 4. Ezért ilyen esetben a numerikus megoldást kell kérnünk.

■ $\text{In}[9] := h = \texttt{Table}[1/(i+j-1), \{i,5\}, \{j,5\}]$

Ennek eredménye egy 5-dimenziós, ún. HILBERT-mátrix:

$$\text{Out}[9] = \{\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\}, \{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\}, \{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}\}$$

Az

$\text{In}[10] := \texttt{Eigenvalues}[h]$

utasításra a Mathematica válasza:

Eigenvalues::eival: Unable to find all roots of the characteristic polynomial.

Ha azonban a bevitel:

$\text{In}[11] := \texttt{Eigenvalues}[N[h]]$,

akkor

$\text{Out}[11] = \{1.56705, 0.208534, 0.0114075, 0.000305898, 3.28793\,10^{-6}\}$

20.4.3.2. Maple

A Maple-könyvtár hasonló célokra a `linalg` speciális programcsomagot használja (a Maple 7-ben van egy új, hatékonyabb, fejlettebb `LinearAlgebra` nevű csomag is, de azt nem tárgyaljuk). A

```
> with(linalg):
```
(20.70)

utasítás megadása után ennek a csomagnak mind a 100 utasítása és függvénye rendelkezésünkre áll. Ezeknek teljes felsorolását és leírását [20.6] tartalmazza. Ennek a csomagnak a használatánál vigyázni kell, hogy a mátrixokat és a vektorokat ne az általánosabb `array`, hanem a `matrix` és a `vector` utasításokkal hozzuk létre.

A `matrix`(m, n, s) utasítás egy $m \times n$-es mátrixot hoz létre. Ha s hiányzik, akkor a mátrix elemeinek nincs értéke, de az értékadást utólag pótolhatjuk az $A[i, j] := \ldots$ utasításokkal. Ha s egy $f = f(i, j)$ indexfüggvény, akkor ezek az értékek lesznek a mátrix elemei. Végül s lehet elemeknek, ill. vektorok listáinak listája. A vektorok definíciója hasonló: `vector`(n, e).
A **20.18. táblázat** a legfontosabb mátrix- és vektorműveleteket tartalmazza.

20.18. táblázat. Mátrixműveletek és jelentésük

`transpose`(A)	megadja az A mátrix transzponáltját
`det`(A)	megadja a négyzetes A mátrix determinánsát
`inverse`(A)	meghatározza a négyzetes, nemszinguláris A mátrix inverzét
`adjoint`(A)	meghatározza a négyzetes, nemszinguláris A mátrix adjungáltját, amire `adjoint`(A) &$*$ A = A &$*$ `adjoint`(A) = az egységmátrix `det`(A)-szorosa.
`mulcol`$(A, s, kifej)$	az A mátrix s-edik oszlopát végigszorozza a kifejezéssel
`mulrow`$(A, r, kifej)$	Az A mátrix r-edik sorát végigszorozza a kifejezéssel

Vektorok és mátrixok összeadására a `matadd`(u, v, k, l) utasítás szolgál: ez összeadja a k és l skalárokkal szorzott u és v vektorokat vagy mátrixokat. A k és l opcionális argumentumok hiányozhatnak. Az összeadás csak akkor hajtódik végre, ha a mátrixok azonos típusúak.

Mátrixokat vagy a `multiply`(u, v) utasítással, vagy a &$*$ rövid alakú infix-operátorral szorozhatunk össze.

1. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

A lineáris egyenletrendszerek kezelésére a Maple-ben speciális operátorok állnak rendelkezésre, melyeket a lineáris algebrai programcsomag tartalmaz. A lineáris egyenletrendszer alakja:

$$A \cdot x = c \tag{20.71}$$

ahol A a rendszer mátrixa, c a rendszer jobb oldalának vektora.

Ha a rendszernek nincs megoldása, akkor egy üres sorozat a válasz, aminek a fenntartott, belső neve `NULL`. Ha a rendszernek több, lineárisan független megoldása van, akkor ezeket paraméteres alakban kapjuk.

A `nullspace`(A) függvény egy bázist ad az A mátrix magterében, amely szinguláris mátrix esetén a nullvektortól különböző, azaz bővebb.

Az egyenletrendszerek megoldására felhasználhatjuk a mátrixszorzás műveleteit és az inverz mátrix meghatározását is.

■ **A:** 4.4.2.1., **2.**-ból, 273. oldal **E** példa (homogén rendszer):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

A rendszer mátrixa szinguláris, így a homogén egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. A megoldáshoz először az A mátrixot definiáljuk:

$> A := \texttt{matrix}([[1,-1,5,-1],[1,1,-2,3],[3,-1,8,1],[1,3,-9,7]]) :$

A $\texttt{det}(A)$ függvénnyel meggyőződhetünk arról, hogy A szinguláris, és kérjük a magtér bázisát, amiből látszik, hogy az kétdimenziós:

$$> a := \texttt{nullspace}(A) \longrightarrow a := \left\{ \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0 \right], [-1,-2,0,1] \right\} .$$

Az általános eset Maple-függvényei a GAUSS-algoritmus alkalmazására a **20.19. táblázatban** találhatók.

20.19. táblázat. A GAUSS-algoritmus műveletei és jelentésük

$\texttt{pivot}(A,i,j)$	az A mátrixból az i-edik sor megfelelő többszöröseit a többi sorhoz hozzáadva egy olyan mátrixot hoz létre, melynek j-edik sorában A_{ij}-n kívül minden elem 0.
$\texttt{gausselim}(A)$	a sorok pivotálásával létrehozza a GAUSS-háromszögmátrixot. Feltétele, hogy a mátrixelemek csak racionális számok lehetnek.
$\texttt{gaussjord}(A)$	létrehozza a GAUSS–JORDAN eljárással a GAUSS–JORDAN alakot, ami „ideális" esetben felső háromszögmátrix. Itt a mátrixelemek lehetnek lebegőpontos számok is.
$\texttt{augment}(A,u)$	létrehozza a kibővített mátrixot úgy, hogy az A mátrixhoz hozzáfűzi az u vektort.

Ha olyan egyenletrendszerünk van, melyben az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik és a rendszer mátrixa nem szinguláris, akkor azt a `linsolve` utasítással oldjuk meg.

■ **B:** Oldjuk meg a 2. szakasz (ld. 918. old.) példáját kétféleképpen:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 14 \\ -3x_1 + 26x_2 + 5x_3 - x_4 &= 22 \\ -4x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 12x_4 &= -20 \end{aligned}$$

Ekkor

$> A := \texttt{matrix}([[10,-3,-4,2],[-3,26,5,-1],[-4,5,16,5],[2,3,-4,-12]]) :$

$> v := \texttt{vector}([14,22,17,-20]) :$

A `linsolve` eredménye:

$$> \texttt{linsolve}(A,v); \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

A GAUSS-algoritmussal:

$$> F := \texttt{gaussjord}(\texttt{augment}(A,v)); \longrightarrow F := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

■ **C:** Oldjuk meg a 1. szakasz (ld. 272. old.) **B** példájának inhomogén egyenletrendszerét:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Ehhez először definiálnunk kell a megfelelő mátrixot és jobb oldali vektort:

$> A := \texttt{matrix}([[1,-1,2],[1,-2,-1],[3,-1,5],[-2,2,3]]) :$

> $v :=$ `vector`$([1,2,3,-4])$:

A rendszer túlhatározott, ezért megoldására nem használhatjuk a `linsolve` utasítást. Így kibővítjük a mátrixot:

$$> F := \texttt{augment}(A, v); \longrightarrow F := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

A `gaussjord` utasítás az F mátrixot felső háromszögalakra transzformálja:

$$> F1 := \texttt{gaussjord}(F); \longrightarrow F1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megoldásvektor $F1$-ből megint közvetlenül kiolvasható.

2. Sajátértékek és sajátvektorok

Egy négyzetes mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására a Maple-ben speciális operátorok állnak rendelkezésre. Figyelni kell azonban arra, hogy ha a mátrix rendje 4-nél nagyobb, akkor a karakterisztikus egyenlet általában nem oldható meg zárt alakban. Ekkor a Maple a sajátértékeket közelítő lebegőpontos számokként adja meg.

■ Határozzuk meg az 5-dimenziós HILBERT-mátrix (ld. 1017. old.) sajátértékeit!

A `linalg` csomagban van egy speciális utasítás az n-dimenziós HILBERT-mátrix előállítására, a `hilbert`(n, x). Ezen mátrix elemei: $1/(i + j - x)$. Ha x-et nem adjuk meg, akkor a Maple automatikusan az $x = 1$ értéket használja. Tehát a feladatot a

> `eigenvals(hilbert(5))`;

bevitellel oldjuk meg. A Maple válasza:

`RootOf`$(-1 + 307505_Z - 1022881200_Z^2 + 92708406000_Z^3$
$-476703360000_Z^4 + 266716800000_Z^5)$

Ezt a `allvalues` paranccsal tudjuk a közelítő sajátértékek sorozatává alakítani.

20.4.4. Differenciál- és integrálszámítás

20.4.4.1. Mathematica

A 20.2.8. szakaszban (ld. 989. old.) a derivált függvényoperátorként van értelmezve. A Mathematicában rengeteg lehetőség van a matematikai analízis olyan műveleteinek végrehajtására, mint tetszőleges rendű differenciálhányadosok, parciális deriváltak, teljes differenciálok, határozott és határozatlan integrálok képzése, függvények sorbafejtése, differenciálegyenletek megoldása.

1. Differenciálhányadosok kiszámítása

1. A differenciálás operátora A differenciálási operátor a `Derivative`, amely tehát függvényt ad eredményül. Az írásmódja:

$$\texttt{Derivative}[n_1, n_2, \ldots][f] \tag{20.72}$$

Az argumentumok azt adják meg, hányszor kell az első, második, ... változó szerint deriválni, ebben a sorrendben. Ebben az értelmezésben ez egy parciális deriváltat ad meg. Megjegyzendő, hogy a végeredménynek a deriválások sorrendjétől való függetlensége, tehát a YOUNG-tétel érvényessége — a **20.20. táblázat** utasításai esetében — fel van tételezve. A Mathematica az eredményt megkísérli elemi függvényekkel kifejezni. Ha f egyváltozós, akkor `Derivative`$[1][f]$ nyilván f'-t adja.

2. Függvények differenciálása Egy adott függvény adott helyen való differenciálása a `D` operátorral történik.

A `D` a differenciáloperátorok csoportjához tartozik, mely csoportot a **20.20. táblázat** mutatja be.

20.20. táblázat. Differenciálási műveletek és jelentésük

`D`$[f[x],\{x,n\}]$	az $f(x)$ függvény x szerinti n-edik deriváltját adja. $n=1$ esetén $\{x,1\}$ helyett x írható.
`D`$[f[x_1,x_2,\ldots],\{x_1,n_1\},\{x_2,n_2\},\cdots]$	az f függvény x_i $(i=1,2,\cdots)$ változók szerinti n_i-edik deriváltját adja ebben a sorrendben
`Dt`$[f]$	az f függvény főrésze
`Dt`$[f,x]$	$\dfrac{df}{dx}$, azaz az x változó szerinti parciális derivált, feltételezve, hogy a többi is x függvénye
`Dt`$[f,x_1,x_2,\ldots]$	az f többváltozós függvény alábbi parciális deriváltja: $\dfrac{d}{dx_1}\dfrac{d}{dx_2}\ldots f$

A 6.1.2.2. szakasz (ld. 387. old.) példájára kapjuk:

■ **A** : In[1] := `D[Sqrt[x^3 Exp[4x] Sin[x]], x]`

$$\text{Out[1]} = \frac{\mathtt{E}^{4x}\,x^2\,(x\,\mathtt{Cos}[x]+3\,\mathtt{Sin}[x]+4\,x\,\mathtt{Sin}[x])}{2\,\mathtt{Sqrt}[\mathtt{E}^{4x}\,x^3\,\mathtt{Sin}[x]]}$$

■ **B** : In[2] := `D[(2x+1)^(3x), x]`

$$\text{Out[2]} = 6\,x\,(1+2\,x)^{-1+3x} + 3\,(1+2\,x)^{3x}\,\mathtt{Log}[1+2\,x]$$

A `Dt` eredménye f főrésze a `Dt`$[x_i]$ megváltozásokkal.

■ **C** : In[3] := `Dt[x^3 + y^3]` ⟶ Out[3] = $3x^2$`Dt[x]` + $3y^2$ `Dt[y]`

■ **D** : In[4] := `Dt[x^3 + y^3, x]` ⟶ Out[4] = $3x^2 + 3y^2$`Dt[y, x]`

A Mathematica az utolsó példában feltételezte, hogy y az x változó függvénye, de nem ismerjük a függvénykapcsolatot, ezért y^3 deriváltjának második tényezőjét szimbolikusan írja, a **20.20. táblázat** 4. sorának megfelelően.

Ha a Mathematica a differenciálásnál egy szimbolikus függvényt talál, akkor az általános alakban hagyja, és a deriváltat f'-vel jelöli.

■ **E** : In[5] := `D[x f[x]^3, x]` ⟶ Out[5] = `f[x]`$^3 + 3x$`f[x]`^{2}`f'[x]`

Látható, hogy a Mathematica ismeri a szorzat és a hányados deriválásának szabályát és a láncszabályt, sőt ezeket is tudja formálisan alkalmazni:

■ **F** : In[6] := `D[f[u[x]] x]` ⟶ Out[6] = `f'[u[x]] u'[x]`

■ **G** : In[7] := `D[u[x]/v[x], x]` ⟶ Out[7] = $\dfrac{\mathtt{u'[x]}}{\mathtt{v[x]}} - \dfrac{\mathtt{u[x]\ v'[x]}}{\mathtt{v[x]}^2}$

2. Határozatlan integrál

Az `Integrate`$[f,x]$ utasítás hatására a Mathematica megpróbálja az $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált integrációs konstansok nélkül kiszámolni. Általában minden olyan határozatlan integrált meg tud határozni, amely elemi függvény, tehát kifejezhető racionális, exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus függvényekkel és inverzeikkel. Ha a Mathematica nem tudja a határozatlan integrált kiértékelni, visszaadja a bevitt függvényt. Továbbá a Mathematica ismer néhány speciális nem elemi függvényt, például az elliptikus és a BESSEL-függvényeket.

A Mathematica lehetőségeinek szemléltetésére bemutatunk néhány példát, melyeket matematikailag a Határozatlan integrálok c. alfejezetben (ld. a 433. oldaltól) tárgyaltunk.

1. Racionális törtfüggvények integrálása (8.1.3.3. szakasz, 438. old.)

■ **A** : In[1] := `Integrate`[$(2x+3)/(x\text{\^{}}3+x\text{\^{}}2-2x), x$]

$$\text{Out[1]} = \frac{5\,\texttt{Log}[-1+x]}{3} - \frac{3\,\texttt{Log}[x]}{2} - \frac{\texttt{Log}[2+x]}{6}$$

■ **B** : In[2] := `Integrate`[$(x\text{\^{}}3+1)/(x(x-1)\text{\^{}}3), x$]

$$\text{Out[2]} = -(-1+x)^{-2} - \frac{1}{-1+x} + 2\,\texttt{Log}[-1+x] - \texttt{Log}[x] \tag{20.73}$$

2. Trigonometrikus függvények integrálása (ld. 8.1.5. szakasz, 444. old.)

■ **A:** Tekintsük a 8.1.5. 5. szakasz (ld. 445. old.) példáját:

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int t^2(1-t^2)^2\,dt$$

($x = \arcsin t$ helyettesítéssel)

In[3] := `Integrate`[`Sin`[x]\^{}2`Cos`[x]\^{}5, x]

$$\text{Out[3]} = \frac{5\,\texttt{Sin}[x]}{64} - \frac{\texttt{Sin}[3\,x]}{192} - \frac{3\,\texttt{Sin}[5\,x]}{320} - \frac{\texttt{Sin}[7\,x]}{448}$$

■ **B:** Tekintsük a 8.1.5., 5. szakasz (ld. 445. old.) példáját:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (x = \arccos t \text{ helyettesítéssel})$$

Legyen

In[4] := `Integrate`[`Sin`[x]/`Sqrt`[`Cos`[x]], x]

Ekkor

Out[4] = −2`Sqrt`[`Cos`[x]]

3. Megjegyzés: Ha az integrandus nem elemi függvény, akkor a Mathematica csupán átalakítja a képletet a szokásos írásmódba.

■ In[5] := `Integrate`[$x\text{\^{}}x, x$] ⟶ Out[5] = `Integrate`[x^x, x]

3. Határozott és többszörös integrálok

1. Határozott integrálok Az `Integrate`[$f, \{x, x_a, x_f\}$] utasítással a Mathematica meghatározza az $f(x)$ függvény határozott integrálját az x_a alsó és x_f felső határ között, melyek végtelenek is lehetnek.

■ **A** : In[1] := `Integrate`[`Exp`[$-x^2$], $\{x$, −`Infinity`, `Infinity`$\}$]

Out[1] = `Sqrt`[`Pi`]

Az improprius integrál értékét ld. **21.6. táblázat**, 1083. old., 9. ha $a = 1$.

■ **B:** Ha azonban a bevitel:

In[2] := `Integrate`[$1/x\text{\^{}}2, \{x, -1, 1\}$],

akkor

Out[2] = ∞

Itt a Mathematica helyesen kiszámolta egy improprius integrál tágabb értelemben vett főértékét.

A határozott integrálok kiszámításánál is mindig óvatosan kell eljárnunk. Ha az integrandus tulajdonságait nem ismerjük, először rajzoltassuk meg az adott intervallumban a függvény ábráját.

2. Többszörös integrálok Kettős határozott integrálok kiszámítását az

`Integrate`[`f`$[x, y], \{x, x_a, x_f\}, \{y, y_a, y_f\}$] (20.74)

utasítással végezhetjük el. A feldolgozás jobbról balra történik: először az y szerinti integrálás hajtódik végre, emiatt az y_a és y_f határok x függvényei is lehetnek, amiket a primitív függvénybe helyettesítve folytatódik az x szerinti integrálás.

■ Tekintsük a 8.4.1.2. szakasz (ld. 480. old.) *A* példáját, ahol egy adott parabola és egy, ezt 2 pontban metsző egyenes közötti területet kellett kiszámítani:

$$\text{In[3]} := \texttt{Integrate}[x\ y\texttt{\^{}}2, \{x, 0, 2\}, \{y, x\texttt{\^{}}2, 2x\}] \longrightarrow \text{Out[3]} = \frac{32}{5}\,.$$

4. Differenciálegyenletek megoldása

A Mathematica a közönséges differenciálegyenleteket szimbolikusan is meg tudja oldani, ha a megoldás zárt alakban kifejezhető. Ebben az esetben a Mathematica rendszerint a megoldásfüggvényt adja. Az ide vonatkozó utasításokat a **20.21. táblázat** tartalmazza.

20.21. táblázat. Differenciálegyenleteket megoldó utasítások és eredményük

`DSolve`[*diffegy*, $y[x], x$]	ha lehetséges, a differenciálegyenlet megoldásának implicit alakjából kifejezi $y[x]$-t
`DSolve`[*diffegy*, y, x]	a differenciálegyenlet megoldását tiszta függvény alakjában adja, y x-nek függvénye
`DSolve`[{*diffegy*$_1$, *diffegy*$_2$, ...}, y, x]	közönséges differenciálegyenlet-rendszert old meg

Az utasítások a differenciálegyenletek általános megoldásait a $C[i]$ konstansokkal (ld. 9.1. alfejezet, 496. old.) határozzák meg. A kezdeti értékek vagy peremfeltételek beírhatók az egyenlet, ill. egyenleteket tartalmazó lista végére. Ebben az esetben kapjuk a partikuláris megoldást.

Példaként tekintsük a 9.1.1.2. szakasz (ld. 497. old.) differenciálegyenleteit.

■ **A:** Oldjuk meg az $y'(x) - y(x)\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$ differenciálegyenletet.

$$\text{In[1]} := \texttt{DSolve}[y'[x] - y[x]\ \texttt{Tan}[x] == \texttt{Cos}[x], y, x]$$

A Mathematica megoldja a differenciálegyenletet és a megoldást tiszta függvényként egy $C[1]$ integrációs konstanssal adja meg:

$$\text{Out[1]} = \{\{y \rightarrow \texttt{Function}[\frac{\texttt{Sec[Slot[1]]}\ (4\,\text{C(1)} + \texttt{Sin[2 Slot[1]]} + 2\,\texttt{Slot[1]})}{4}]\}\}$$

Itt a `Slot` szimbólum a # helyett áll, annak `FullForm`-alakja, `Slot`$[n]$ a tiszta függvény n-edik argumentuma.

Ha most $y[x]$-re kérjük a megoldást, akkor:

$$\text{In[2]} := y[x]/.\ \%1 \longrightarrow \text{Out[2]} = \{\frac{\texttt{Sec}[x]\ (2\,x + 4\,\text{C(1)} + \texttt{Sin}[2\,x])}{4}\}$$

Ebben a példában a helyettesítést $y[x]$ helyett pl. $y[1]$-re is elvégezhettük volna, vagy $y'[x]$ beírásával a deriváltat kaptuk volna meg.

A differenciálegyenletek szimbolikus megoldásakor, ugyanúgy, mint a határozatlan integrálnál, nem célszerű a Mathematicá-t túlterhelni. Ha nem tudja megoldani, mert például az eredmény nem írható fel elemi függvények algebrai kifejezéseként, akkor kommentár nélkül visszaadja és numerikus megoldást kell keresni.

20.4.4.2. Maple

A Maple az analízis feladatainak megoldásaira sok lehetőséggel rendelkezik. A függvények differenciálásán kívül ide tartozik a határozott és határozatlan integrálok kiszámítása, a függvények hatványsorba fejtése. Itt a Maple lehetőséget nyújt az analitikus függvények elméletének alkalmazására. Igen sokféle differenciálegyenlet megoldására is lehetőség van.

1. Differenciálás

A 20.3.7. szakaszban (ld. 1002. old.) bevezettük a `D` differenciálási operátort. Ennek alkalmazása különböző opcionális argumentumokkal lehetővé teszi, hogy a függvényeket operátoralakban differenciáljuk. A teljes szintaxis a következő:

$$\texttt{D}[i](f) \tag{20.75a}$$

Ez az f (operátor-) függvény i-edik változója szerinti parciális deriváltat határozza meg. Az eredmény ismét egy operátoralakban adott függvény. A $\texttt{D}[i,j](f)$ utasítás ekvivalens a következőkkel:

$$\texttt{D}[i](\texttt{D}[j](f))\,. \tag{20.75b}$$

Itt az f argumentum egy operátor-alakban adott függvénykifejezés. Ez tartalmazhat az előre definiált belső függvényeken kívül általunk definiált függvényneveket, nyíloperátorokkal definiált függvényeket, stb. Megjegyzendő, hogy $\texttt{D}[](f) = f$.

■ Legyen

$$> \; f := (x,y) \texttt{->} \;\; \texttt{exp}(x*y) + \texttt{sin}(x+y)\,:$$

Ekkor

$$> \; \texttt{D}[\,](f); \longrightarrow f$$
$$> \; \texttt{D}[1](f); \longrightarrow (x,y) \texttt{->} \;\; y\,\texttt{exp}(x\,y) + \texttt{cos}(x+y)$$
$$> \; \texttt{D}[2](f); \longrightarrow (x,y) \texttt{->} \;\; x\,\texttt{exp}(x\,y) + \texttt{cos}(x+y)$$
$$> \; \texttt{D}[1,2](f); \longrightarrow (x,y) \texttt{->} \;\; \texttt{exp}(x\,y) + x\,y\,\texttt{exp}(x\,y) - \texttt{sin}(x+y)$$

A differenciálási operátoron kívül még rendelkezésre áll a `diff` függvény, melynek szintaxisa:

$$\texttt{diff}(\textit{kifej}, x1, x2, \ldots, xn) \tag{20.76a}$$

Itt a *kifej* argumentum az $x1, x2, \ldots$ változókat tartalmazó algebrai kifejezés. Az eredmény a kifejezés $x1, \ldots, xn$ szerinti parciális deriváltja, ebben a sorrendben. Ha $n > 1$, akkor ugyanezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy a `diff` függvényt egymás után többször alkalmazzuk:

$$\texttt{diff}(a, x1, x2) = \texttt{diff}(\texttt{diff}(a, x1), x2) \tag{20.76b}$$

Egyetlen argumentum szerinti többszörös differenciálást a $ sorozatoperátorral végezhetünk el:

■ $> \; \texttt{diff}(\texttt{sin}(x), x\$5);\ (\equiv \texttt{diff}(\texttt{sin}(x), x, x, x, x, x)) \longrightarrow \texttt{cos}(x)$

Ha az $f(x)$ függvényt nem definiáltuk, akkor a `diff` operátor a fellépő deriváltakat szimbolikusan adja meg: $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x)\,.$

■ $> \; \texttt{diff}(f(x)/g(x)); \longrightarrow \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial x} f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)\dfrac{\partial}{\partial x} g(x)}{g(x)^2}$

$> \; \texttt{diff}(x * f(x), x); \longrightarrow f(x) + x\,\dfrac{\partial}{\partial x} f(x)$

2. Határozatlan integrálok

Ha egy adott $f(x)$ függvény $F(x)$ primitív függvénye elemi függvény, akkor ezt a Maple az $\texttt{int}(f, x)$ meghívásával ki tudja számolni. Az integrációs konstanst nem írja ki. Ha a primitív függvény nem írható fel zárt alakban, akkor a Maple az integrandust visszaadja.

1. Racionális törtfüggvények integráljai

■ **A** : $> \; \texttt{int}((2*x+3)/(x\texttt{\^{}}3 + x\texttt{\^{}}2 - 2*x), x); \longrightarrow -\dfrac{3}{2}\ln(x) - \dfrac{1}{6}\ln(x+2) + \dfrac{5}{3}\ln(x-1)$

■ **B** : $> \; \texttt{int}((x\texttt{\^{}}3+1)/(x*(x-1)\texttt{\^{}}3), x); \longrightarrow -\ln(x) - \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} + 2\ln(x-1)$

Megjegyzendő, hogy a felhasználónak kell meghatároznia, hogy mely értelmezési tartományokban és hogyan módosítandó a kapott formula.

2. Irracionális (gyökös) függvények integráljai A Maple az 1050. oldalon található (határozatlan integrál-)táblázatban adott képleteknek megfelelően határozza meg az integrálokat.

■ Ha > $X := \texttt{sqrt}(x\texttt{\^{}}2 - a\texttt{\^{}}2)$: akkor

$$> \texttt{int}(X, x); \longrightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \tag{20.77}$$

$$> \texttt{int}(X/x, x); \longrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} - a\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$> \texttt{int}(X * x, x); \longrightarrow \frac{1}{3}(x^2 - a^2)^{3/2}$$

3. Trigonometrikus függvények integráljai

■ **A** : > $\texttt{int}(x\texttt{\^{}}3 * \texttt{sin}(a * x), x);$

$$\frac{-a^3x^3\cos(ax) + 3a^2x^2\sin(ax) - 6\sin(ax) + 6ax\cos(ax)}{a^4}$$

■ **B** : > $\texttt{int}(1/(\texttt{sin}(a * x))\texttt{\^{}}3, x);$ $\longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{\cos(ax)}{a\sin(ax)^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(\mathrm{csc}(ax) - \mathrm{ctg}(ax)}{a}$

4. Megjegyzés: A fentemlítettek értelmében pld.

■ > $\texttt{int}(x\texttt{\^{}}x, x);$ esetén a válasz $\int x^x\,\mathrm{d}x,$

mivel ez az integrál nem elemi függvény.

3. Határozott és többszörös integrálok

1. Határozott integrálok Határozott integrálok kiszámítására is az `int` utasítást alkalmazzuk, melynek második argumentuma most $x = a\,..\,b$ alakú. Itt x az integrációs változó, a és b az integrációs intervallum alsó és felső határa.

■ **A** : > $\texttt{int}(x\texttt{\^{}}2, x = a..b);$ $\longrightarrow \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$

> $\texttt{int}(x\texttt{\^{}}2, x = 1..3);$ $\longrightarrow \frac{26}{3}$

■ **B** : > $\texttt{int}(\texttt{exp}(-x\texttt{\^{}}2), x = -\mathit{infinity}..\mathit{infinity});$ $\longrightarrow \sqrt{\pi}$

■ **C** : > $\texttt{int}(1/x\texttt{\^{}}4, x = -1..1);$ $\longrightarrow \infty$

Ha a Maple visszaadja a bevitt kifejezést, akkor megkísérelhetjük valamelyik numerikus integrálási módszert (ld. 19.3. szakasz, 921. old.) alkalmazni.

2. Többszörös integrálok A többszörös integrálok értékét a Maple, ha ez explicit módon lehetséges, az `int` operátor többszöri egymásba skatulyázott hívásával számítja ki (**B**-hez ld. a (20.74) utáni példát.

■ **A** : > $\texttt{int}(\texttt{int}(x\texttt{\^{}}2 + y\texttt{\^{}}2 * \texttt{exp}(x + y), x), y);$

$$\frac{1}{3}x^3y + e^{x+y}(x+y)^2 - 2(x+y)e^{x+y} + 2e^{x+y} - 2\left((x+y)e^{x+y} - e^{x+y}\right)x + e^{x+y}x^2$$

■ **B** : > $\texttt{int}(\texttt{int}(x * y\texttt{\^{}}2, y = x\texttt{\^{}}2..2 * x), x = 0..2);$ $\longrightarrow \frac{32}{5}$

Megjegyzés: Mint látható az **A** példából, ebben az esetben is használhatjuk az $\texttt{int}(f, x)$ változatot többszörös határozatlan integrál kiszámítására.

4. Differenciálegyenletek megoldása

A `dsolve` operátorral, melynek különböző alakjai vannak a Maple-ben, közönséges differenciálegyenleteket és differenciálegyenlet-rendszereket tudunk megoldani. Az eredmény kívánság szerint lehet az általános megoldás, vagy az adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás. Ezt a megoldást

20.22. táblázat. A `dsolve` operátor opciói és hatásuk

`explicit`	ha lehetséges, explicit alakban adja a megoldást. Ha nem, akkor implicit megoldást keres. Ezt az opciót — ha semelyik sincs feltüntetve — a `dsolve` eleve megadottnak tekinti.
`laplace`	a megoldáshoz a LAPLACE-transzformációt alkalmazza.
`series`	a megoldást hatványsor + maradéktag alakban adja meg.
`numeric`	a megoldás numerikus kiszámítását eredményezi.

egy paraméter explicit vagy implicit függvényeként kapjuk. A `dsolve` operátor utolsó argumentumaként megadhatjuk a **20.22. táblázatban** leírt opciókat.

1. Általános megoldás

$$> \texttt{dsolve}(\texttt{diff}(y(x),x) - y(x) * \texttt{tan}(x) = \texttt{cos}(x), y(x)); \tag{20.78a}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos(x)\sin(x) + x + 2\,_C1}{\cos(x)} \tag{20.78b}$$

A Maple az általános megoldást explicit alakban, egy konstanssal meghatározta; csak formailag különbözik a 20.4.4.1.4.-beli Mathematica-megoldástól. A következő példában a megoldást csak implicit alakban tudja előállítani (ha a jobboldal nincs megadva, azt a Maple automatikusan 0-nak tekinti)

$$> \texttt{dsolve}(\texttt{diff}(y(x),x) * (x - y(x)) + y(x)\texttt{\^{}}2, y(x)); \tag{20.79a}$$

$$e^{-\frac{1}{y(x)}}x + \texttt{Ei}\left(1, \frac{1}{y(x)}\right) = _C1\,, \tag{20.79b}$$

ahol $\texttt{Ei}(a,b)$ a **20.13. táblázatban** szereplő $\texttt{Ei}(x)$ változata: $\int_a^b \frac{e^t}{t}\mathrm{d}\,t$; a és b nemcsak számok, hanem függvények is lehetnek.

2. Megoldás kezdeti feltételekkel Próbáljuk meg $y' - e^x - y^2 = 0\,,\ y(0) = 0$ differenciálegyenletet a `series` opcióval megoldani. Itt figyelni kell arra, hogy a kezdeti feltétel határozza meg, hogy a polinom + maradéktag alakú megoldás mely pont körüli hatványsort reprezentálja. Ugyanez érvényes a `Laplace`-opcióra.

$$> \texttt{dsolve}(\{\texttt{diff}(y(x),x) - \texttt{exp}(x) - y(x)\texttt{\^{}}2, y(0) = 0\}, y(x), \texttt{series}); \tag{20.80a}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{31}{120}x^5 + O(x^6) \tag{20.80b}$$

A példából is látszik, hogy a **20.22. táblázat** opciói alkalmazásakor az egyenletet és a tőle vesszővel elválasztott kezdeti feltételeket kapcsos zárójelek közé kell írni. Ugyanez érvényes differenciálegyenletrendszerek megoldása esetén is. Megjegyzendő továbbá, hogy a hatványsor kiírt részének hosszát az `Order` nevű állítható paraméter értéke határozza meg.

20.5. Számítógépes grafika

A modern programcsomagokban a matematikai összefüggések grafikus ábrázolására síkbeli függvénygráfok, térbeli görbék és felületek állnak rendelkezésünkre az analízistől és a vektoralgebrától kezdve a differenciálgeometriáig. A grafika a Mathematicá-nak igen erős oldala.

20.5.1. Grafika a Mathematicá-val

20.5.1.1. A grafika alapjai

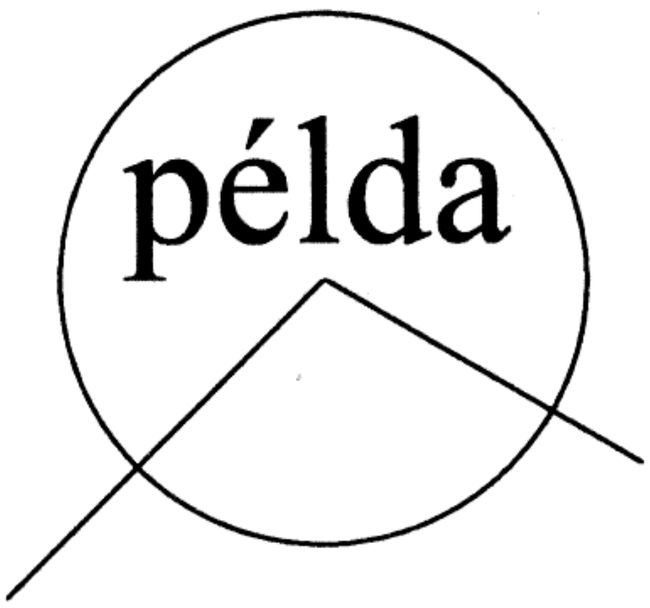
A Mathematica a grafikus objektumokat a beépített grafikus elemekből építi fel. Ezek az elemek a pontok (`Point`), a vonalak (`Line`) és a poligonok (`Polygon`), valamint olyan tulajdonságok, mint például

a vastagság és a szín.

A Mathematica ezenkívül sok olyan opcióval is rendelkezik, melyek megadják, hogy a grafikus objektumokat milyen környezetben és milyen módon használjuk.
A `Graphics`[*lista*] utasítással, ahol a *lista* grafikus elemek listája, a Mathematicá-t utasítjuk, hogy a felsorolt elemekből grafikát alkosson. Ezt a listát követheti még az ábrázolás módjára vonatkozó opciók listája.
Az alábbi bevitel:

$$\text{In[1]} := g = \texttt{Graphics}[\{\texttt{Line}[\{\{0,0\},\{5,5\},\{10,3\}\}],\texttt{Circle}[\{5,5\},4], \tag{20.81a}$$

$$\texttt{Text}[\texttt{FontForm}[\text{„példa”}, \text{„Times”}, 16],\{5,6\}]\},\texttt{AspectRatio}\text{->}\ \texttt{Automatic}] \tag{20.81b}$$



20.1. ábra.

a következő elemekből épít fel grafikát:
a) Két egyenes szakaszt rajzol a $(0,0)$-ból kiindulva az $(5,5)$ ponton át a $(10,3)$ pontig.
b) Rajzol egy kört, melynek középpontja $(5,5)$, sugara 4.
c) A „példa” szöveget Times betűtípussal 16 pontos méretben az $(5,6)$ pont fölé írja.
A `Show`[g] utasítással a Mathematica a g 2- vagy 3-dimenziós grafikus objektumot a képernyőre küldi **(20.1. ábra)**.
Itt lehet bizonyos grafikus opciókat előre beállítani. Az adott esetben az `AspectRatio` opciót `Automatic`-ra állítottuk; ennek eredeti beállítása 1/`GoldenRatio` .

Ez az x-irányú és y-irányú skálabeosztásra $1 : 1/1,618 = 1 : 0,618$ arányt jelent. Mivel ezzel a beállítással a kör elipszissé torzult volna, az opció `Automatic`-ra állításával értük el a torzítatlan ábrázolást. Ez az opció általában a grafikus objektum tényleges x- és y-irányú kiterjedéséből állapítja meg az arányt; 3-dimenziós grafikus objektumoknál ezt nem is változtathatjuk meg.

20.5.1.2. Grafikus elemek

A Mathematica a **20.23. táblázatban** felsorolt kétdimenziós grafikus objektumokat tartalmazza.

20.23. táblázat. Kétdimenziós grafikus objektumok definíciója és hatása

`Point`$[\{x,\ y\}]$	(x,y)-koordinátájú pont
`Line`$[\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\ldots\}]$	az adott pontok összekötése egyenes szakaszokkal ebben a sorrendben
`Rectangle`$[\{x_{lu},y_{lu}\},\{x_{ro},y_{ro}\}]$	kitölti az adott bal alsó, ill. jobb felső koordinátájú téglalapot
`Polygon`$[\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\ldots\}]$	kitölti az ebben a sorrendben adott csúcspontokkal definiált poligont
`Circle`$[\{x,y\},r]$	(x,y) középpontú, r sugarú kör
`Circle`$[\{x,y\},r,\{\alpha_1,\alpha_2\}]$	a fenti kör íve a két adott szög között
`Circle`$[\{x,y\},\{a,b\}]$	a és b féltengelyű ellipszis az (x,y) középponttal
`Circle`$[\{x,y\},\{a,b\},\{\alpha_1,\alpha_2\}]$	a fenti ellipszis íve az adott szögek közt
`Disk`$[\{x,y\},r]$	kitöltött kör, ill. elipszis (ekkor r helyett $\{a,\ b\}$)
`Text`$[text,\{x,y\}]$	kiírja a *text* szöveget (amit idézőjelek között kell megadni) az (x,y) centrummal

Ezen objektumokon kívül a Mathematicá-ban további, az ábrázolás módját befolyásoló grafikus utasításokat is használhatunk **(20.24. táblázat)**.
Ezenkívül vannak színezésre vonatkozó utasítások is, melyeket itt nem részletezünk.

20.24. táblázat. Grafikus utasítások és jelentésük

`PointSize`$[a]$	a további pontok a átmérőjű körök, ahol a a grafika teljes szélességének törtrészét jelenti
`AbsolutePointSize`$[b]$	az előző, de most az argumentum abszolút értékét jelenti, az egység a nyomtató pontátmérője
`Thickness`$[a]$	a további vonalak az a relatív szélességgel legyenek kirajzolva
`AbsoluteThickness`$[b]$	a fenti, itt b abszolút szélesség
`Dashing`$[\{a_1, a_2, \ldots\}]$	szaggatott vonalat hoz létre, felváltva berajzolt és be nem rajzolt szakaszokkal, melyek hosszai ciklikusan $a_1, a_2, \ldots$. Ezek a számok az ábra szélességének a_1-, a_2-, ...-szeresét jelentik. Függvényre alkalmazva szaggatott vonallal rajzolja ki a gráfját a leírt módon (ha argumentum nélkül van megadva, akkor folytonos vonalat hoz létre)
`AbsoluteDashing`$[\{b_1, b_2, \ldots\}]$	ugyanaz, mint `Dashing`, azzal a különbséggel, hogy argumentumai a nyomtató pontméretének, néha a képernyő képpontméretének b_1-, b_2-, ...-szeresét jelentik
`GrayLevel`$[p]$	meghatározza az objektumok szürkeségét (a két szélsőérték: $p = 0$ fekete, $p = 1$ fehér)

20.5.1.3. Grafikus opciók

A Mathematica egy sor grafikus opcióval is rendelkezik, melyek befolyásolják a teljes kép kinézetét. A legfontosabbakat a **20.25. táblázat** mutatja be. Átfogóbb tárgyalást tartalmaz [20.5].

20.25. táblázat. Néhány grafikus opció és eredménye

`AspectRatio -> `w	beállítja a grafika hosszúsága és szélessége w arányát, ami helyett `Automatic` w-nek az 1 értéket adja; alapértelmezés $w = 1/$`GoldenRatio`, ahol `GoldenRatio` $= (1 + \sqrt{5})/2 \approx$ $\approx 1{,}61803$
`Axes -> Automatic`	a Mathematicá-ra bízza a tengelyek berajzolásának tényét és módját
`Axes -> True`	berajzolja a koordináta-tengelyeket
`Axes -> False`	nem rajzol koordináta-tengelyeket
`Axes -> {True, False}`	csak x-tengelyt rajzol; {`False`, `True`} csak y-t
`Frame -> True`	keretez
`GridLines -> Automatic`	rácsot rajzol
`AxesLabel -> `$\{x_{symbol}, y_{symbol}\}$	ráírja a tengelyekre az adott kifejezéseket: ha csak egy van megadva, azt a síkban az y-, térben pedig a z-tengelyre teszi; szöveg, azaz karaktersorozat „szöveg”-ként adandó meg.
`Ticks -> Automatic`	automatikus skálabeosztás, amit `Ticks -> None` semlegesít/töröl
`Ticks -> `$\{\{x_1, x_2, \ldots\}, \{y_1, y_2, \ldots\}\}$	az x-, illetve az y-tengely ezen helyein megjeleníti a skálabeosztásokat

20.5.1.4. A grafikus ábrázolás szintaxisa

1. A grafikus objektumok felépítése

Ha az elemekből grafikus objektumot kell felépítenünk, akkor először megadunk egy listát a megfelelő objektumokról azok főadataival:

$$\{objekt_1, objekt_2, \ldots\}, \tag{20.82a}$$

Itt az objektumok maguk is lehetnek grafikus objektumok listái. Például legyen $objekt_1$ a következő:

$$\text{In}[1] := o1 = \{\texttt{Circle}[\{5,5\},\{5,3\}],\texttt{Line}[\{\{0,5\},\{10,5\}\}]\}$$

és hasonlóan

$$\text{In}[2] := o2 = \{\texttt{Circle}[\{5,5\},3]\}.$$

Ha most az egyik grafikus objektumot, például $o2$-t speciális utasításokkal akarjuk módosítani vagy újabb tulajdonságokkal felruházni, akkor ezt megint egy közös listával tehetjük meg.

$$\text{In}[3] := o3 = \{\texttt{Thickness}[0.01], o2\}.$$

Ez az utasítás a zárójelen belül minden egyes felsorolt objektumra vonatkozik (a példában tehát csak $o2$-re), esetleg a zárójelen belül egymásba skatulyázott objektumokra is, de azon kívül nincs hatása.

Most hozzunk létre az objektumokból két különböző grafikus listát:

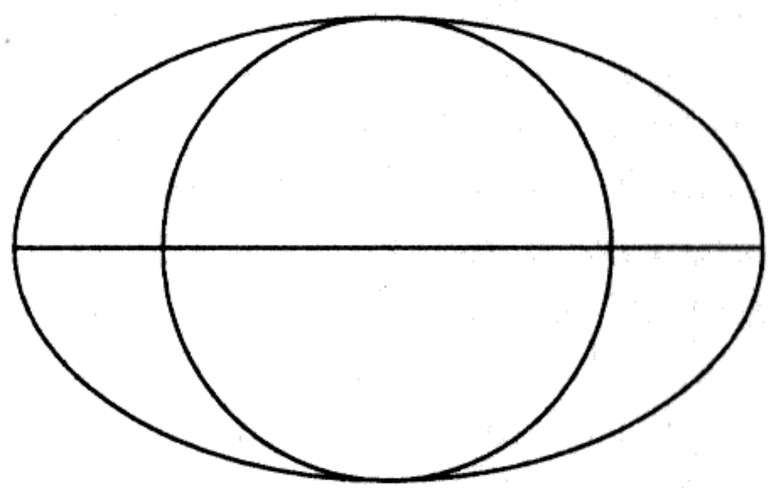
$$\text{In}[4] := g1 = \texttt{Graphics}[\{o1, o2\}]\ ;\ g2 = \texttt{Graphics}[\{o1, o3\}];\ ,$$

melyek a második objektum, a körvonal vastagságában különböznek. Ezután a

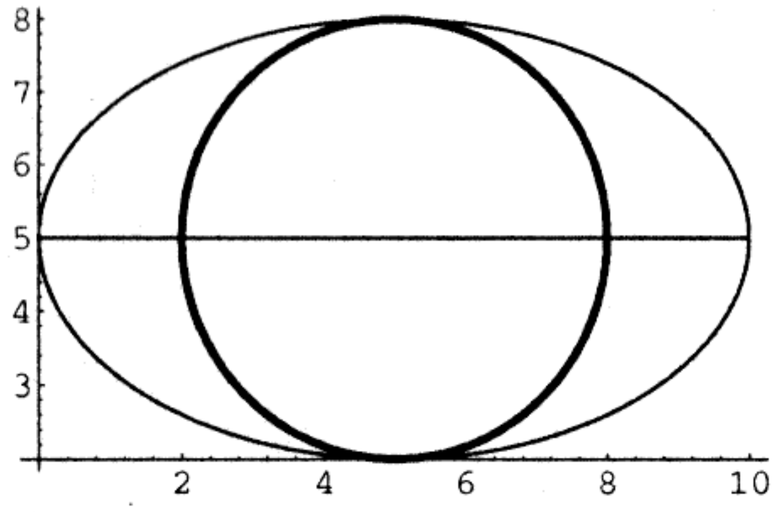
$$\texttt{Show}[g1] \quad \text{és} \quad \texttt{Show}[g2, \texttt{Axes} \rightarrow \texttt{True}] \tag{20.82b}$$

megjelenítő utasítások eredményeként kapjuk a **20.2.a ábrán** bemutatott képeket.

A **20.2.b ábránál** az `Axes -> True` opciót használtuk. Ezért a két tengely és a tengelyeken a skálabeosztás megfelelően jelölve is van.



a)



b)

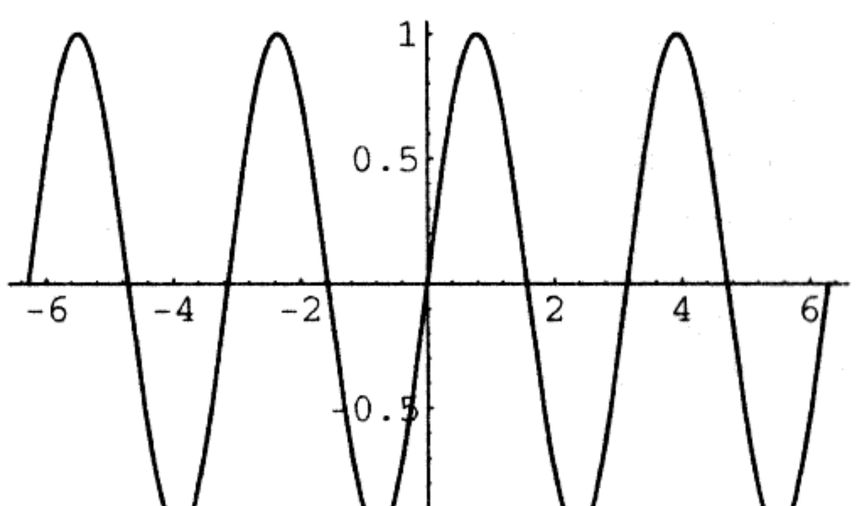
20.2. ábra.

2. Függvények grafikus ábrázolása

A Mathematica a függvények grafikus ábrázolására speciális utasításokkal rendelkezik. A

$$\texttt{Plot}[\texttt{f}[x], \{x, x_{min}, x_{max}\}] \tag{20.83}$$

utasítás az f függvényt grafikusan ábrázolja az $x = x_{min}$ és $x = x_{max}$ értékek közötti intervallumban. A Mathematica belső algoritmusaival létrehoz egy függvényérték-táblázatot és az ebből adódó függvénygráfot a grafikus elemek felhasználásával ábrázolja.



20.3. ábra.

■ Ábrázoljuk a $\sin 2x$ függvényt a $[-2\pi, 2\pi]$ intervallumban!

$$\text{In}[5] := \texttt{Plot}[\texttt{Sin}[2x], \{x, -2\texttt{Pi}, 2\texttt{Pi}\}]$$

A Mathematica ekkor a **20.3. ábrát** rajzolja ki.
Látható, hogy itt a Mathematica előre beállított grafikus opciókat használt.

A tengelyeket automatikusan megrajzolta, beskálázta és ráírta a megfelelő x-és y-skálaértékeket. Az is látható, hogy az előre beállított `AspectRatio` szerint a szélesség és magasság aránya: $1 : 0,618$.

Az `InputForm[%]` utasítással kérhetjük a grafikus objektum paramétereinek részletezését. A fenti példa esetén erre az alábbi választ kapjuk:

```
Graphics[{{Line[{{-6.283185307179587, 4.900593819634 48 * 10^ - 16},
{6.283185307179587, -(4.900593819634 48 * 10^ - 16)}}]}},
{PlotRange -> Automatic, AspectRatio -> GoldenRatio^(-1),
DisplayFunction :> $DisplayFunction, ColorOutput -> Automatic,
Axes -> Automatic, AxesOrigin -> Automatic, PlotLabel -> None,
AxesLabel -> None, Ticks -> Automatic, GridLines -> None, Prolog -> {},
Epilog -> {}, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic,
DefaultColor -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont,
RotateLabel -> True, Frame -> False, FrameStyle -> Automatic,
FrameTicks -> Automatic, FrameLabel -> None, PlotRegion -> Automatic,
ImageSize -> Automatic, TextStyle :> $TextStyle, FormatType :> $FormatType}]
```

Tehát a grafikus objektum leírása két részlistából áll. Az első a `Line` grafikus elemet tartalmazza: argumentumai $\{x_i, y_i\}$ vagy $\{x_i, y_i, z_i\}$ pontok, melyek ebben a sorrendben szakaszokkal vannak összekötve. Jelen esetben 2 pont megadásával kirajzolja a függvény értelmezési tartományát. A második részlista az adott grafikában használt opciókat tartalmazza. Látható, hogy ezek mind előre be vannak állítva. `PlotRange` szabályozza a megjelenítés „téglalapját"; ha argumentuma `Automatic`, akkor a függvény gráfjából a képernyőn csak a távoleső, izolált pontok maradnak ki, de egyébként a gráfot nem vágja le sem alulról-felülről, sem balról-jobbról. `DisplayFunction` argumentumai a megjelenítés tényét és helyét (képernyő, adott kiterjesztésű fájlok, stb.) határozzák meg. Alapértelmezése a `$DisplayFunction`, ami a képernyőt jelenti. `ColorOutput` a megjelenítés színét állítja be, ami lehet a szürke árnyalat, vagy 3, ill. 4 alapszín keveréke. `AxesOrigin` az `Automatic` argumentummal a Mathematicá-ra bízza, hogy hol messék egymást a tengelyek; helyette $\{x, y\}$ hatására ott lesz a metszéspont. `PlotLabel` az ábra címét adja meg, ami `None`-nal elmarad. Alkalmazási szabályai ugyanazok, mint `AxesLabel`-éi. `Prolog` és `Epilog` segítségével előírhatjuk, hogy milyen kiegészítő grafikus objektum kerüljön előzetesen, illetve utólag a fő objektumba; üres argumentum, mint jelenleg is, ezek hiányát mutatja. `AxesStyle` a tengelyek megjelenítési módját szabályozza; fő paraméterei a már ismerős `Dashing` és `Thickness`, valamint a színárnyalatot beállító `Hue`. `Background` a háttér színét állítja be. `DefaultColor` a pontok, vonalak, stb. színének beállítására való. `DefaultFont` a betűkészlet kiválasztására szolgáló egyik opció (a másik a `TextStyle`). `RotateLabel -> True`-val elérhetjük, hogy a függőleges tengelyen szereplő címke függőlegesen jelenjen meg. `Frame -> False` hatására az ábra nem lesz kerettel körülvéve. `FrameStyle` a keret 4 oldalának megjelenítését szabályozza. `FrameTicks` a keret 4 oldalának skálabeosztására való. `FrameLabel` a 4 oldalra kerülő címkékről gondoskodik. `PlotRegion` szabályozza, hogy a kép hanyadrészét töltse ki az ábra, más szóval a grafika margóit lehet vele beállítani. `ImageSize` a kép méretét határozza meg, nyomtatási pontokkal kifejezve. `TextStyle` a feliratok betűkészletét, betűtípusát, színét szabályozza. Végül `FormatType` a képletek stílusának beállítására való. Még megjegyezzük, hogy a `Line`-értékek közül csak egyet adtunk meg, a függvény gráfját alkotó szakaszok leírását kihagytuk a válaszból. Ha az ábrázoláson később változtatni akarunk, akkor a megváltoztatott opcióbeállításokat a `Plot`-utasításban a két fő argumentum: a függvény és az intervallum után kell felsorolni. Így az

```
In[6] := Plot[Sin[2x], {x, -2Pi, 2Pi}, AspectRatio -> 1]        (20.84)
```

utasítás a kimeneti ábrát azonos x- és y- skálabeosztással jelenítené meg.
A `Plot`-ban egyszerre több opciót is megadhatunk.
A következő bevitel:

```
Plot[{f1[x], f2[x], ...}, {x, xmin, xmax}]                      (20.85)
```

egy grafikus ábrán közös intervallumon több függvényt ábrázol.

A

`Show`[*g*, *opciók*] (20.86)

(újra) megjeleníti a *g* grafikus objektumot, de úgy, hogy opciói felülírják *g* eredeti opcióit.
A grafikus objektumok listájára vonatkozó

`Show`[`GraphicsArray`[*lista*]], (20.87)

utasítással egymás mellé, fölé vagy „valódi" mátrix-formában tudjuk ezen objektumokat elrendezni.

20.5.1.5. Kétdimenziós görbék

Példaként ábrázoljuk a Függvények és ábrázolásuk c. fejezetben (ld. 47. old.) bemutatott görbéket.

1. Exponenciális függvények

Egyszerre több exponenciális függvényt (ld. 72. old.) ábrázol a Mathematica a következő bevitelnek megfelelően **(20.4.a ábra)**:

$\text{In}[1] := \texttt{f}[x_] := 2\texttt{\^{}}x; \texttt{g}[x_] := 10\texttt{\^{}}x;$

$\text{In}[2] := \texttt{h}[x_] := (1/2)\texttt{\^{}}x; \texttt{j}[x_] := (1/\texttt{E})\texttt{\^{}}x; \texttt{k}[x_] := (1/10)\texttt{\^{}}x;$

Ezek voltak az ábrázolandó függvények definíciói. Az e^x függvényt nem kell definiálnunk, mert az a Mathematica beépített, sőt belső függvénye. A második lépésben a következő grafikákat hozzuk létre:

$\text{In}[3] := p1 = \texttt{Plot}[\{\texttt{f}[x], \texttt{h}[x]\}, \{x, -4, 4\}, \texttt{PlotStyle} \texttt{->} \texttt{Dashing}[\{0.01, 0.02\}]]$

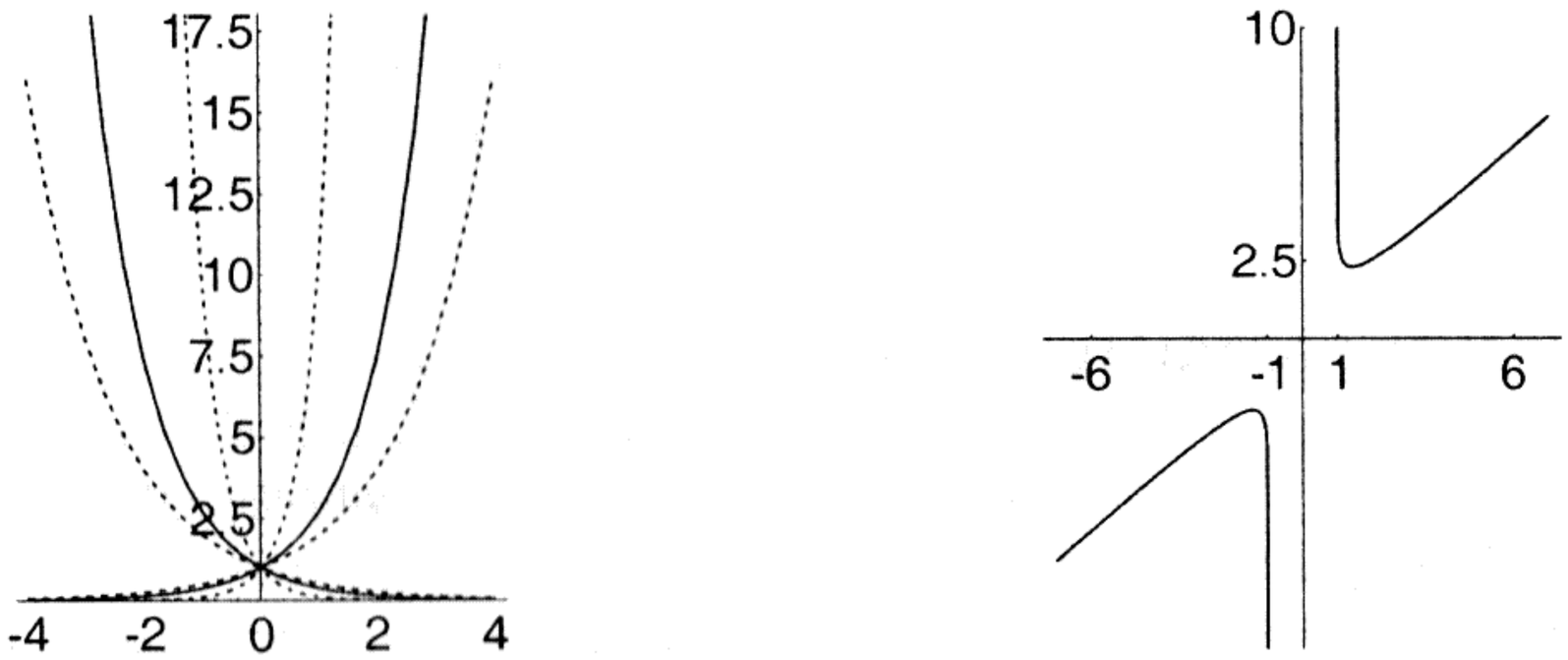
$\text{In}[4] := p2 = \texttt{Plot}[\{\texttt{Exp}[x], \texttt{j}[x]\}, \{x, -4, 4\}]$

$\text{In}[5] := p3 = \texttt{Plot}[\{\texttt{g}[x], \texttt{k}[x]\}, \{x, -4, 4\}, \texttt{PlotStyle} \texttt{->} \texttt{Dashing}[\{0.005, 0.02, 0.01, 0.02\}]]$

A teljes, a **(20.4.a) ábrán** bemutatott képet akkor kapjuk, ha még ezt is bevisszük:

$\text{In}[6] := \texttt{Show}[\{p1, p2, p3\}, \texttt{PlotRange} \texttt{->} \{0, 18\}, \texttt{AspectRatio} \texttt{->} 1.2]$

A görbékre nem írtunk szöveget, de ez is lehetséges lenne a megfelelő grafikus elemek felhasználásával. A `PlotStyle` opcióival tudjuk a függvénygráfok megjelenítését befolyásolni, ezek egyike a már ismert `Dashing`. A `PlotRange` a `Show` egyik opciója: `PlotRange`$\texttt{->} \{a, b\}$ hatására az ebből a szempontból még nem definiált tengely a és b értékek közti része lesz látható.



a) b)

20.4. ábra.

2. Az $y = x + \operatorname{arcth} x$ függvény

Az $|x| > 1$-re definiált $\operatorname{arcth} x$ függvény (2.10. szakasz, ld. 93. old.) tulajdonságai figyelembevételével az $y = x + \operatorname{arcth} x$ függvényt a következőképpen tudjuk ábrázolni (mivel az arcth beépített függvény, a Mathematica saját elnevezését kell használnunk):

$\text{In}[1] := f1 = \texttt{Plot}[x + \texttt{ArcCoth}[x], \{x, 1.000000000005, 7\}]$

$\text{In}[2] := f2 = \texttt{Plot}[x + \texttt{ArcCoth}[x], \{x, -7, -1.000000000005\}]$

$$\text{In[3]} := \texttt{Show}[\{f1, f2\}, \texttt{PlotRange} \text{->} \{-10, 10\}, \texttt{AspectRatio} \text{->} 1.2, \texttt{Ticks} \text{->} \{\{\{-6,-6\},\{-1,-1\},\{1,1\},\{6,6\}\},\{\{2.5,2.5\},\{10,10\}\}\}$$

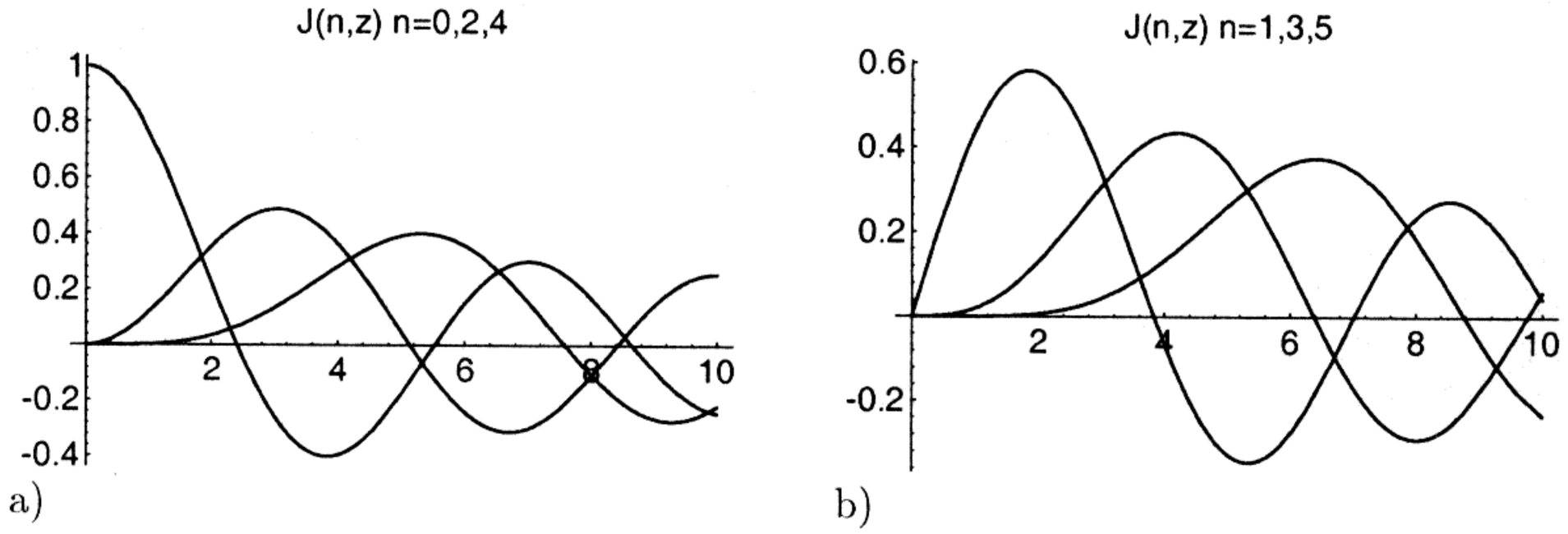
Az x-értékekhez 1 és -1 közelében nagyon közel mentünk, hogy a kívánt y-tartományban elég nagy y-értékeket tudjunk ábrázolni. Az eredményt a **20.4.b ábra** mutatja.

3. Bessel-függvények

Az alábbi hívásokkal előállítjuk a $J_n(z)$ BESSEL-függvények gráfját az $n = 0, 2, 4$ és $n = 1, 3, 5$ értékekre:

$$\begin{aligned}
\text{In[1]} &:= bj0 = \texttt{Plot}[\{\texttt{BesselJ}[0,z], \texttt{BesselJ}[2,z], \texttt{BesselJ}[4,z]\}, \{z, 0, 10\}, \\
&\quad \texttt{PlotLabel} \text{->} \ \text{„}J(n,z)\ n = 0, 2, 4\text{”}] \\
\text{In[2]} &:= bj1 = \texttt{Plot}[\{\texttt{BesselJ}[1,z], \texttt{BesselJ}[3,z], \texttt{BesselJ}[5,z]\}, \{z, 0, 10\}, \\
&\quad \texttt{PlotLabel} \text{->} \ \text{„}J(n,z)\ n = 1, 3, 5\text{”}] \qquad (20.88) \\
\text{In[3]} &:= \texttt{Show}[\texttt{GraphicsArray}[\{bj0, bj1\}]]
\end{aligned}$$

Ennek hatására a Mathematica ezeket a függvényeket egymás mellett két koordinátarendszerben ábrázolja **(20.5. ábra)**. `GraphicsArray`$[\{g_1, g_2, \ldots\}]$, ill. `GraphicsArray`$[\{\{g_{11}, g_{12}, \ldots\}, \ldots\}]$ argumentumai grafikus objektumok, amelyeket a Mathematica egybevágó téglalapokon, egymás mellett vagy táblázatban hoz létre. A `Graphics`-hoz képest egy új opciója van, amellyel ezen téglalapok távolságát lehet megszabni. A tényleges megjelenítés a `Show` hatására történik meg.



20.5. ábra.

20.5.1.6. Görbék paraméteres ábrázolása

A Mathematica rendelkezik egy olyan speciális grafikus utasítással, mellyel paraméteres alakban adott függvényeket lehet ábrázolni. Az utasítás szerkezete és használata megától értetődő:

$$\texttt{ParametricPlot}[\{f_x(t), f_y(t)\}, \{t, t_1, t_2\}]\,. \qquad (20.89)$$

Lehetőség van több paraméteres görbe közös grafikán való ábrázolására. Ehhez a fenti utasításban egyetlen pár helyett a megfelelő függvénypárok listáját kell megadnunk. Opciói ugyanazok, mint a `Plot` opciói. Az `AspectRatio` -> `Automatic` opcióval a Mathematica az arányt ebben az esetben is az alakzat tényleges x- és y-irányú kiterjedéséből határozza meg.

A **20.6. ábrán** ábrázolt paraméteres görbék az archimedesi spirál (ld. 107. old.) és logaritmikus spirál (ld. 108. old.); az ottani polárkoordinátás alakból $a = 1$ és $k = 0{,}1$ választással tértünk át a paraméteresre.

A megfelelő bevitelek

$$\text{In[1]} := \texttt{ParametricPlot}[\{t\ \texttt{Cos}[t], t\ \texttt{Sin}[t]\}, \{t, 0, 3\texttt{Pi}\}, \texttt{AspectRatio} \text{->} \texttt{Automatic}]$$

és

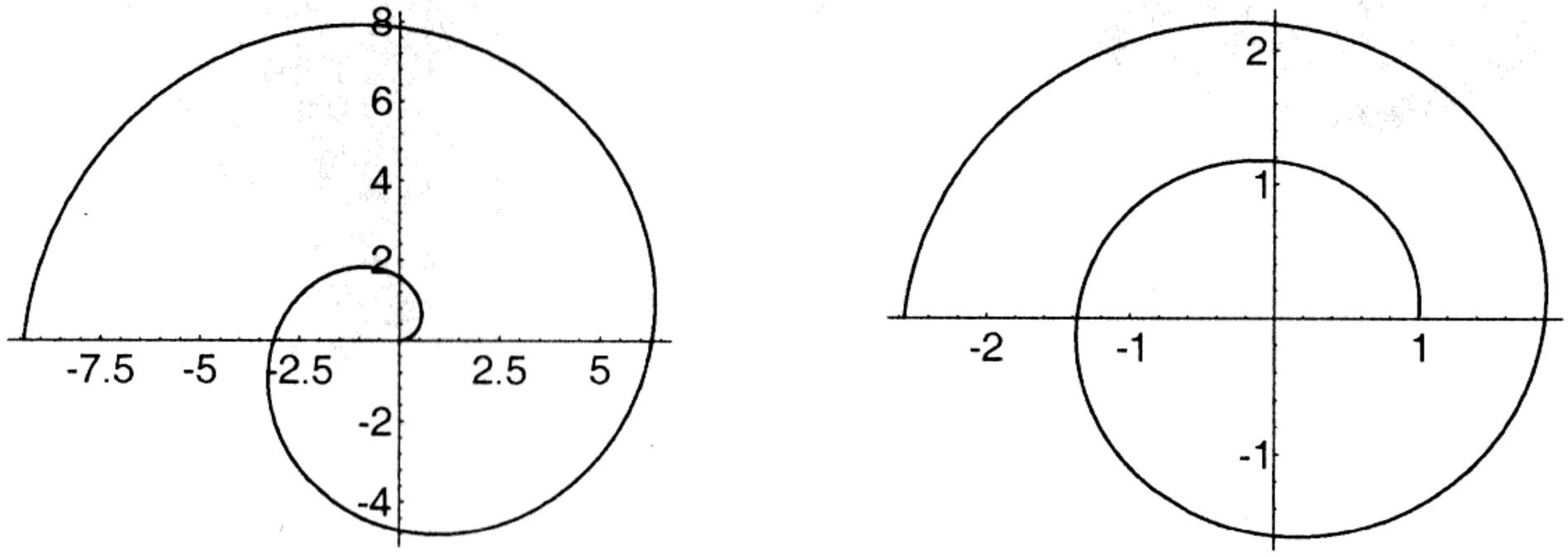
$$\text{In[2]} := \texttt{ParametricPlot}[\{\texttt{Exp}[0.1t]\ \texttt{Cos}[t], \texttt{Exp}[0.1t]\ \texttt{Sin}[t]\}, \{t, 0, 3\texttt{Pi}\},$$

AspectRatio–> Automatic]

Az

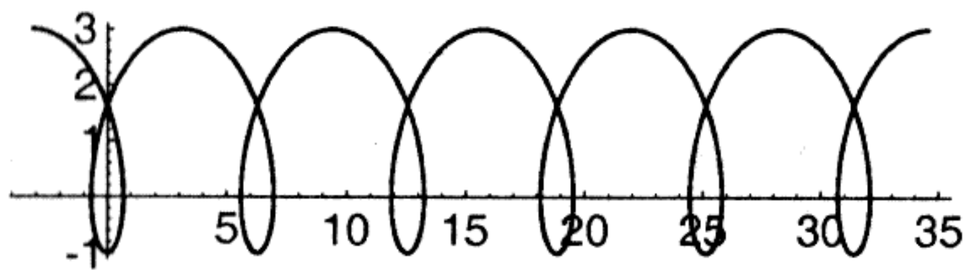
In[3] := ParametricPlot[{t − 2 Sin[t], 1 − 2 Cos[t]}, {t, −Pi, 11Pi}, AspectRatio–> 0.3]

bevitellel a 2.13.2.-ban leírt trochoidot (ld. 104. old.) ábrázoltuk. **(20.7. ábra)**.



a) b)

20.6. ábra.



20.7. ábra.

20.5.1.7. Felületek és térgörbék ábrázolása

A Mathematica lehetőséget nyújt háromdimenziós grafikus elemek ábrázolására. A kétdimenziós esethez hasonlóan épülnek fel a háromdimenziós grafikák, melyeket különböző opciók alkalmazásával különböző perspektívákból láthatunk. Lehetőség van a háromdimenziós térben felületek, azaz kétváltozós függvények, valamint térbeli paraméteres görbék ábrázolására. A háromdimenziós grafikus elemek részletes leírását a [20.5] tartalmazza. Ezeket az elemeket ugyanúgy kell kezelni, mint azt a kétdimenziós esetben tettük.

1. Felületek grafikus ábrázolása

A Plot3D utasítás egy kétváltozós függvény és értelmezési tartományának (ami egy téglalap) megadását várja el:

In[] := Plot3D[f[x, y], {$x, x_{\min}, x_{\max}$}, {$y, y_{\min}, y_{\max}$}] (20.90)

Itt minden opcióra az alapbeállítás érvényes.

■ Az $z = x^2 + y^2$ függvényre az

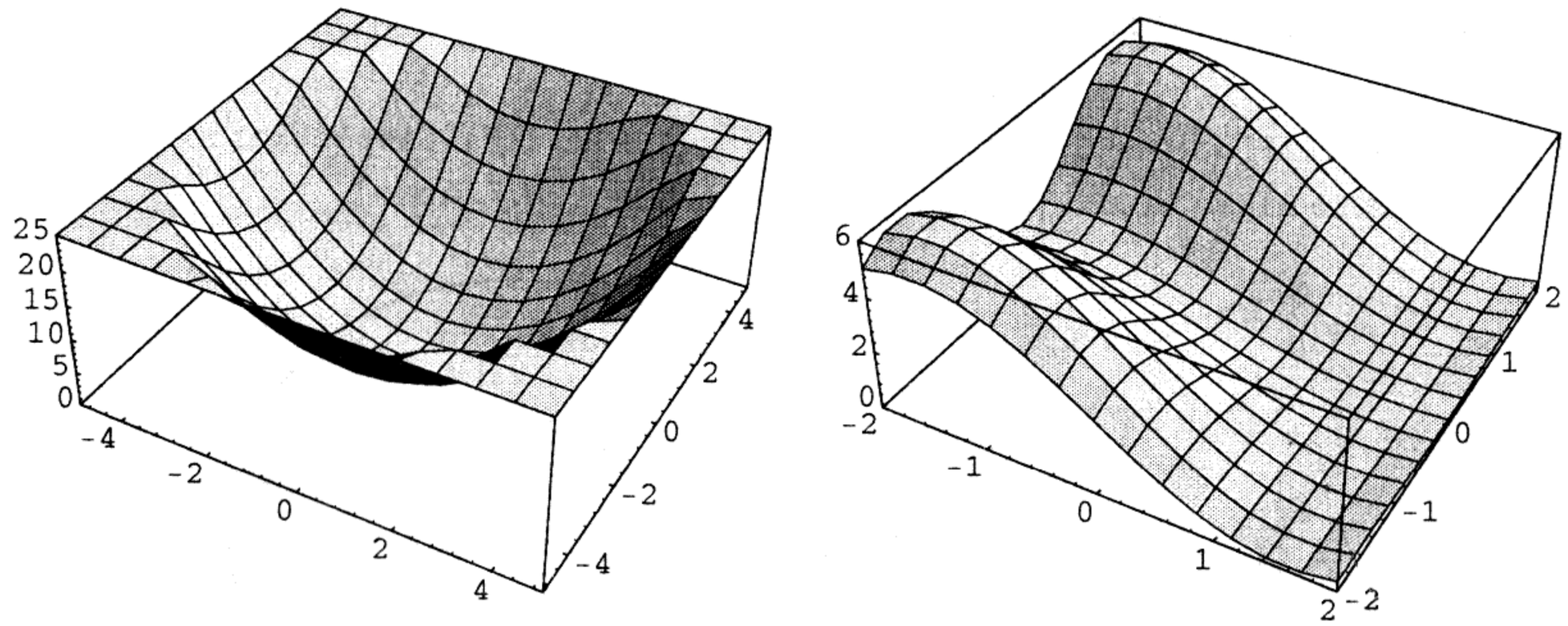
In[1] := Plot3D[x^2 + y^2, {x, −5, 5}, {y, −5, 5}, PlotRange–> {0, 25}]

bevitel a **20.8.a ábrát** állítja elő, ahol a PlotRange opció a kívánt $z = 25$ értékkel a gráfot a $z = 25$ síkkal levágja.

A másik bevitel:

In[2] := Plot3D[(1 − Sin[x]) (2 − Cos[2 y]), {x, −2, 2}, {y, −2, 2}]

a **20.8.b ábrát** adja.



a) b)

20.8. ábra.

2. A Plot3D opciói

Ezen utasítás igen sok opcióval rendelkezik. A **20.26. táblázatban** csak néhányat sorolunk fel, a 2D-grafikából ismerteket itt nem ismételjük meg, mert azok a 3-dimenziós esetre értelemszerűen átvihetők.

20.26. táblázat. A `Plot3D` főbb opciói és hatásuk

`Boxed`	előre beállított értéke `True`, a felület körül háromdimenziós keretet rajzol
`HiddenSurface`	előre beállítva `True` , a felület átlátszatlanságát eredményezi
`ViewPoint`	meghatározza a tér azon (x, y, z) pontját, melyből a felületet perspektivikusan szemléljük. Előre beállított értéke: $\{1.3, -2.4, 2\}$
`Shading`	előre beállítva `True`, a felületet satírozza. `False` esetén fehér felületet kapunk, tengelypárhuzamos függőleges síkok és a felület metszésvonalaival.
`PlotRange`	ezen argumentumnak 3 értéke lehet: `All`; $\{z_{\min}, z_{\max}\}$, illetve $\{\{x_{\min}, x_{\max}\}, \{y_{\min}, y_{\max}\}, \{z_{\min}, z_{\max}\}\}$. Az ábra koordinátahatárait állítják be, ezek lehetnek $\{$`min`, `Automatic`$\}$ alakúak is. Előre beállítva: `Automatic`, melynek hatására a távoli izolált pontok kimaradnak.

Itt külön is felhívjuk a figyelmet a `ViewPoint` opcióra, mellyel a mindenkori felületet tetszőleges perspektívából tudjuk ábrázolni.

3. Háromdimenziós objektumok paraméteres ábrázolása

A 2-dimenziós esethez hasonlóan itt is tudunk paraméteresen megadott objektumokat ábrázolni. A

`ParametricPlot3D`$[\{f_x[t,u], f_y[t,u], f_z[t,u]\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}, \{u, u_{\min}, u_{\max}\}]$ (20.91)

utasítás egy paraméteres alakban adott felületet rajzol ki, a

`ParametricPlot3D`$[\{f_x[t], f_y[t], f_z[t]\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}]$ (20.92)

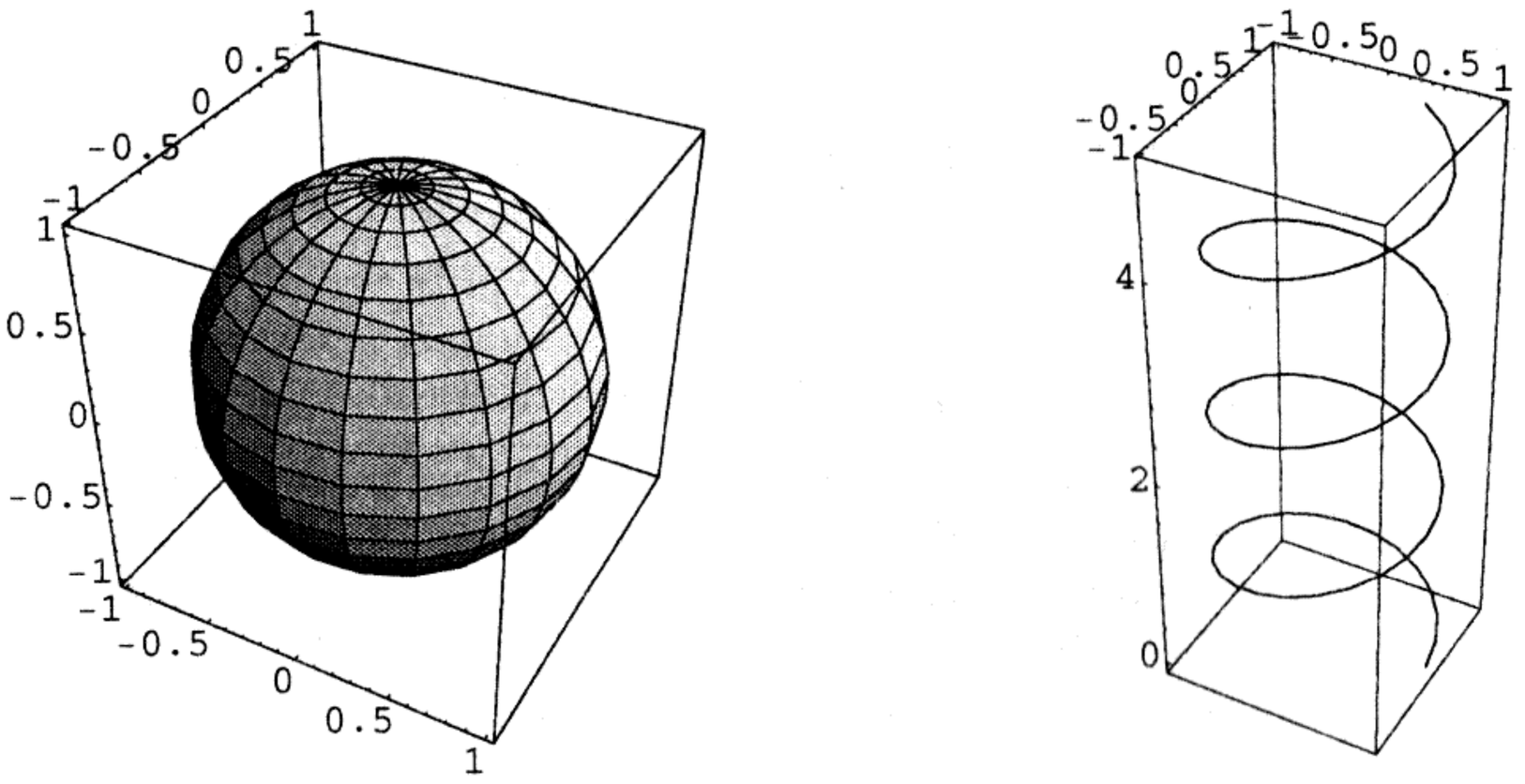
pedig egy háromdimenziós paraméteres görbét ábrázol.

■ A **20.9.a** és **20.9.b ábrákat** az

In[3] := `ParametricPlot3D`$[\{$`Cos`$[t]$ `Cos`$[u]$, `Sin`$[t]$ `Cos`$[u]$, `Sin`$[u]\}, \{t, 0,$ `2Pi`$\}$, $\{u, -$`Pi`$/2,$ `Pi`$/2\}]$ és

In[4] := `ParametricPlot3D`$[\{$`Cos`$[t]$, `Sin`$[t], t/4\}, \{t, 0, 20\}]$ (20.93)

utasítások hozzák létre.



a) b)

20.9. ábra.

A Mathematicá-ban további utasítások vannak sűrűség-, kontúr-, oszlop- és szektordiagramok, valamint a különböző diagramtípusok kombinációi ábrázolására. Lehetőség van továbbá a grafikus objektumok többfajta kiterjesztésű kivitelére a képernyőn kívül más adathordozóra is (pl. rajzoló).

■ A LORENZ-attraktor ábráját (ld. 851. old.) a Mathematica rajzolta.

20.5.2. Grafika a Maple-vel

20.5.2.1. Kétdimenziós grafika

A Maple függvények grafikus ábrázolását a számos opcióval rendelkező `plot` utasítás hatására végzi el. A bemeneti függvények lehetnek egyváltozós explicit függvények, paraméteresen adott függvények és kétdimenziós pontok listái. A Maple a bemeneti függvényből bizonyos belső algoritmusok szerint értéktáblázatot készít, melynek pontjain egy spline-eljárással sima görbét fektet át. A grafika leírása egy önálló környezetben van, és megfelelő rendszerutasításokkal beszerkeszthető a munkadokumentumokba, ill. megfelelő formátumban a nyomtatóra vagy a rajzolóra kivihető. A különböző kiterjesztésű file-ként történő kivitel a `plotsetup` utasítással történik; ezután az `export` menüpontot kell használni.

1. A kétdimenziós grafika szintaxisa

A kétdimenziós `plot` utasítás alapstruktúrája:

$$\texttt{plot}(funct, hb, vb, options); \tag{20.94}$$

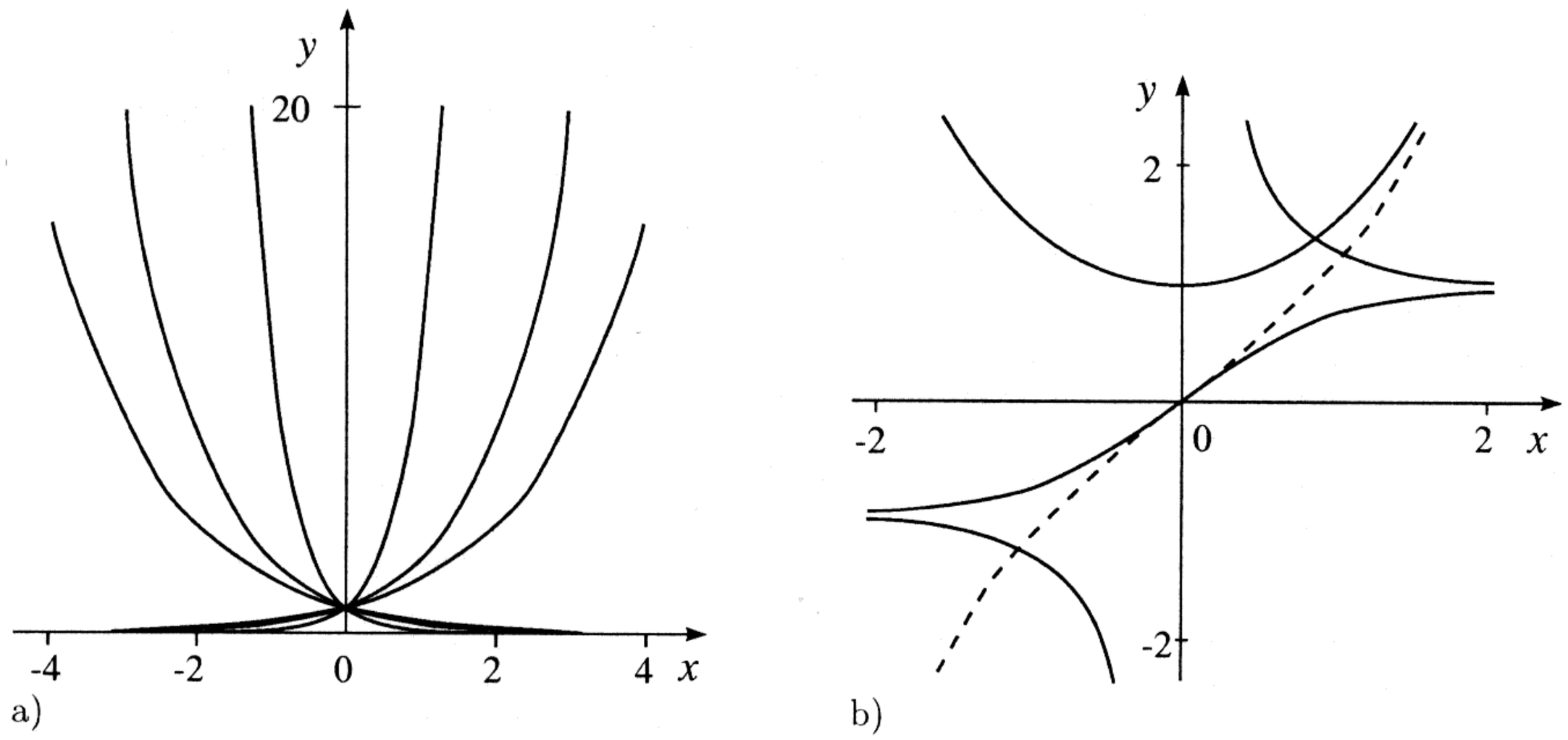
A `plot` első argumentuma a következőket jelentheti:
a) egy valós változó valós értékű függvénye, pl. $f(x)$;
b) egy függvényoperátor, melyet pl. a nyílszimbólummal lehet létrehozni;
c) egy valós függvény paraméteres alakja, amelyet az $[u(t), v(t), t = a..b]$ lista ír le, ahol $t = a..b$ a paramétertartományt jelöli;
d) több, együtt ábrázolandó függvény halmaza, vagy — ahol animáció esetén a sorrend is fontos — listája;
e) számok (páros sok elemű) listája, melyek egymás utáni pontok (x, y)-koordinátáit jelentik; a képernyőn a szomszédos x-értékekhez tartozók szakasszal lesznek összekötve.
A teljesség kedvéért még hozzátesszük, hogy eljárásokkal definiált függvények is képezhetik az utasítás első argumentumát.
A *hb* második argumentum a független változó intervalluma, ezt $x = a..b$ alakban kell megadni. Ha ezt az argumentumot nem adjuk meg, akkor a Maple automatikusan a $-10..10$ intervallumot használja. Lehetséges az egyik határhoz a $-\infty$ és/vagy a másikhoz a $+\infty$ szimbolikus értéket hozzárendelni. A *vb* harmadik argumentum a függő, tehát a függőleges tengelyen ábrázolt változó értelmezési tartományát szabályozza. Ezt is $y = a..b$ alakban kell megadni; ha ezt elhagyjuk, akkor a Maple úgy érti, hogy ezt a

tartományt a független változók tartományának pontjaihoz hozzárendelt függvényértékek határozzák meg. Ez akkor okoz problémát, ha például ebben a tartományban van egy pólushely, tehát ahol legalább az egyik oldali határérték $\pm\infty$. Ezért, ha lehetséges, korlátozzuk a függőleges tartományt!
További argumentumokként megadhatunk egy vagy több opciót, melyeket a **20.27. táblázat** tartalmaz.

20.27. táblázat. A `plot` utasítás opciói és jelentésük

`coords = polar`	polárkoordinátás ábrázolást definiál; az első paraméter az origótól vett távolság, a második a szög
`numpoints` $= n$	megadja a grafika kiszámított csomópontjainak minimális számát (alapbeállítás = 49).
`resolution` $= m$	az ábrázolás vízszintes irányú felbontását adja képpontban (alapbeállítás $m = 200$)
`xtickmarks` $= p$	beállítja az x-tengelyen bejelölt skálabeosztások számát (és hasonlóan `ytickmarks` $= q$ az y-tengely beosztásainak számát)
`style = SPLINE`	a pontok összekötésére harmadfokú spline-interpolációt használ
`style = LINE`	lineáris interpolációt használ a fenti célra
`style = POINT`	csak a pontokat jelöli
`title` $=$ "T"	címet ad a grafikának; itt T string-típusú változó

Ha egy grafikában egyszerre több függvényt akarunk ábrázolni, akkor a Maple ezek görbéit rendszerint különböző színekkel vagy eltérően szaggatott vonalakkal jeleníti meg.
Grafikus felületen futó Maple-verzióban lehetőség van arra, hogy közvetlenül a grafikán tudjuk a `Plot` opcionális paramétereivel (legördülő menüpontokként utólag is) beállítani a megjelenítés bizonyos részleteit: a méretarányt, a vonalak vastagságát, feliratozást, 3 dimenzióban a rácsozást, a felületdarabok ábrázolását, a függőleges-vízszintes mérték arányát, a kép keretezését, stb.



20.10. ábra.

2. Példák kétdimenziós grafikára

1. Exponenciális és hiperbolikus függvények Az alábbi utasítás:

```
> plot({2^x, 10^x, (1/2)^x, (1/10)^x, exp(x), 1/exp(x)}, x = -4..4, y = 0..20,
```
(20.95a)

$>$ `xtickmarks` $= 2,$ `ytickmarks` $= 2);$ (20.95b)

a **20.10.a ábrán** bemutatott exponenciális függvényeket hozta létre.
Hasonlóan a

$>$ `plot`$(\{$`sinh`$(x),$ `cosh`$(x),$ `tanh`$(x),$ `coth`$(x)\}, x = -2.1..2.1, y = -2.5..2.5);$

utasítás négy hiperbolikus függvényt (ld. 90. old.) közösen ábrázol a **20.10.b ábrán**. (Az I. és a III. síknegyedbe eső két görbe együtt alkotja a $\operatorname{cth}(x)$ függvényt.)

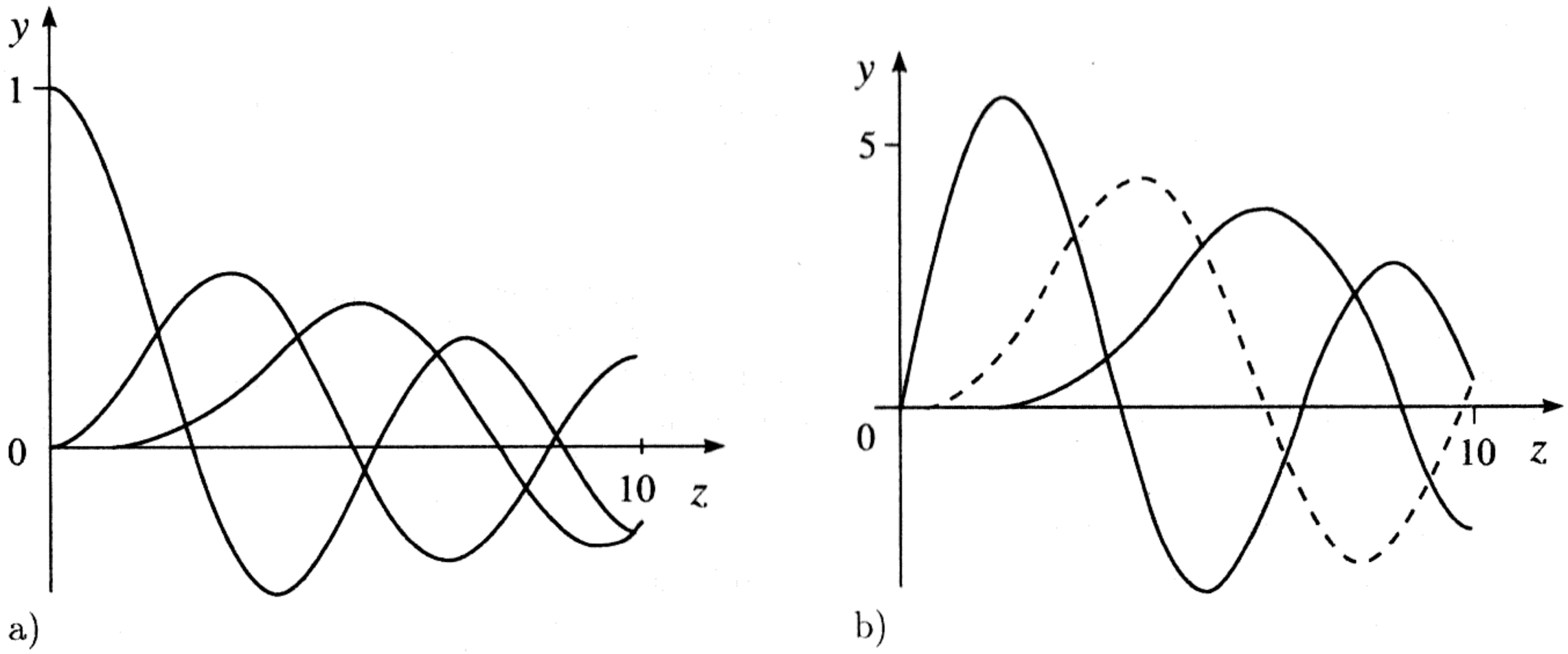
2. Bessel-függvények Az alábbi két utasítás

$>$ `plot`$(\{$`BesselJ`$(0, z),$ `BesselJ`$(2, z),$ `BesselJ`$(4, z)\}, z = 0..10);$ (20.96a)

és

$>$ `plot`$(\{$`BesselJ`$(1, z),$ `BesselJ`$(3, z),$ `BesselJ`$(5, z)\}, z = 0..10);$ (20.96b)

az első három–három $J(n, z)$ BESSEL-függvényt rajzolja ki páros **(20.11.a ábra)** és páratlan n esetén **(20.11.b ábra)**.



20.11. ábra.

Hasonlóan lehet egyéb, a Maple-ben definiált speciális függvényeket ábrázolni.

3. Paraméteres ábrázolás A

$>$ `plot`$([t *$ `cos`$(t), t *$ `sin`$(t), t = 0..3 * Pi]);$ (20.97a)

hívással kapjuk a **20.12.a ábra** görbéjét.
A következő utasítás eredménye (**20.12.b ábra**) egy trochoid (ld. 104. old.; $\lambda = 1$, tehát az alsó kettőspontok az x-tengelyre esnek), a rákövetkezőé egy hiperbolikus spirál (ld. 108. old., **20.12.c ábra**).

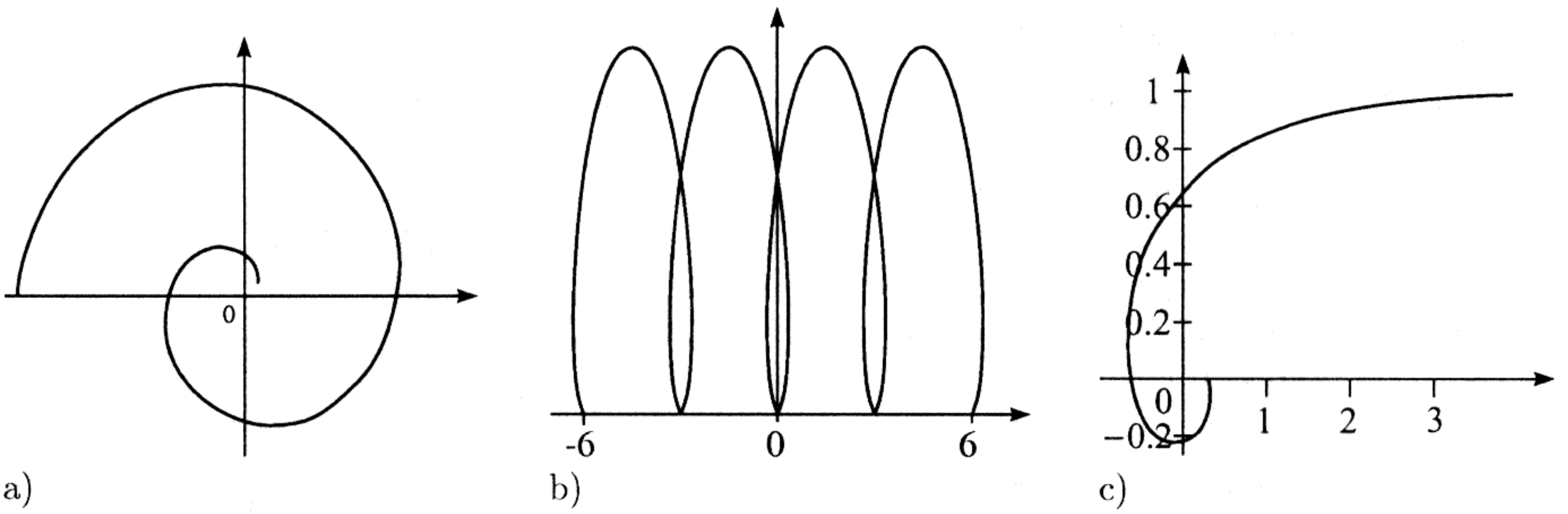
$>$ `plot`$([t -$ `sin`$(2 * t), 1 -$ `cos`$(2 * t), t = -2 * Pi..2 * Pi]);$ (20.97b)

$>$ `plot`$([1/t, t, t = 0..2 * Pi], x = -.5..3.5,$ `coords` $=$ `polar`$);$ (20.97c)

A `coords` $=$ `polar` opció beírásával a Maple a paraméteres ábrázolást polárkoordinátásnak interpretálja. Megjegyzendő, hogy a Maple képes a pólusok kezelésére: egyenes szakasszal helyettesíti egy közrefogó pontpárhoz tartozó gráfpontok között a függvényt. A jelen esetben azonban még erre sincs szükség, mert $x_{\max} = 3{,}5$ miatt $\dfrac{1}{t}$ korlátos marad.

3. A `plots` csomag
A `plots` csomag kiegészítő grafikus utasításokat tartalmaz. A

`polarplot`$(L, options)$ (20.98)



20.12. ábra.

utasítással görbéket tudunk polárkoordinátás alakban ábrázolni. Az L helyére több $r(\varphi)$-vel jelölt függvényt írhatunk, kapcsos zárójelben felsorolva. A Maple a φ változót szögként értelmezi és a görbéket a $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ paramétertartományban ábrázolja, ha nem adtunk meg egy másik tartományt. Az opciók ugyanazok, mint a `plot` utasításéi.
A

$$\texttt{conformal}(F, r1, r2, options) \tag{20.99}$$

utasítás az F komplex függvény segítségével egy derékszögű rács vonalait görbevonalú rácsba képezi le. Az új rácsvonalak szintén derékszögben metszik egymást. A kötelező $r1$ alakja: $z = z_1..z_2$, ahol z_1 és z_2 az eredeti tartomány, azaz a téglalap bal alsó és jobb felső csúcsa. A nem kötelező $r2$ az ábrát tartalmazó ablak nagyságát határozza meg. Itt az alapbeállítást az ábrából adódó maximumok és minimumok adják.

20.5.2.2. Háromdimenziós grafika

Két független változó függvényének, mint térbeli felületnek az ábrázolására vagy térbeli görbék ábrázolására a Maple-ben a `plot3d` utasítás szolgál. Az ezen utasítással létrehozott objektumokat a Maple a kétdimenziós esethez hasonlóan itt is egy külön ablakban ábrázolja. Az ábrázolásnál felhasználható opciók száma azonban itt sokkal nagyobb; különös jelentőségük van a szemléleti perspektívát beállító kiegészítő opcióknak.

1. A plot3d utasítás szintaxisa

Ez az utasítás négy különböző alakban használható:

a) $\texttt{plot3d}(funct, x = a..b, y = c..d)$. Itt $funct$ egy kétváltozós függvény, a független változók tartománya: $x = a..b$, $y = c..d$. Az eredmény egy térbeli felület.
b) $\texttt{plot3d}(f, a..b, c..d)$. Itt f egy 2-változós operátor vagy eljárás, például amit a nyíloperátor hozott létre. A tartományok megint a megfelelő változókra vonatkoznak.
c) $\texttt{plot3d}([u(s,t), v(s,t), w(s,t)], s = a..b, t = c..d)$. Az s és t argumentumú u, v és w kétváltozós függvények a térbeli felület paraméteres megadásának koordináta-függvényei.
d) $\texttt{plot3d}([f, g, h], a..b, c..d)$. Az előzővel ekvivalens; itt f, g és h kétváltozós operátorok, ill. eljárások.

A `plot3d` operátor összes további argumentuma a Maple-ben opció. A lehetséges opciókat a **20.28. táblázat** foglalja össze. Ezeket `option` = *érték* alakban kell használni.
Az opciók majdnem mindegyike a munkafelület megfelelő menüjében elérhető és átállítható. Ily módon a felület ábrázolását utólag módosíthatjuk és így lényegesen javíthatjuk.

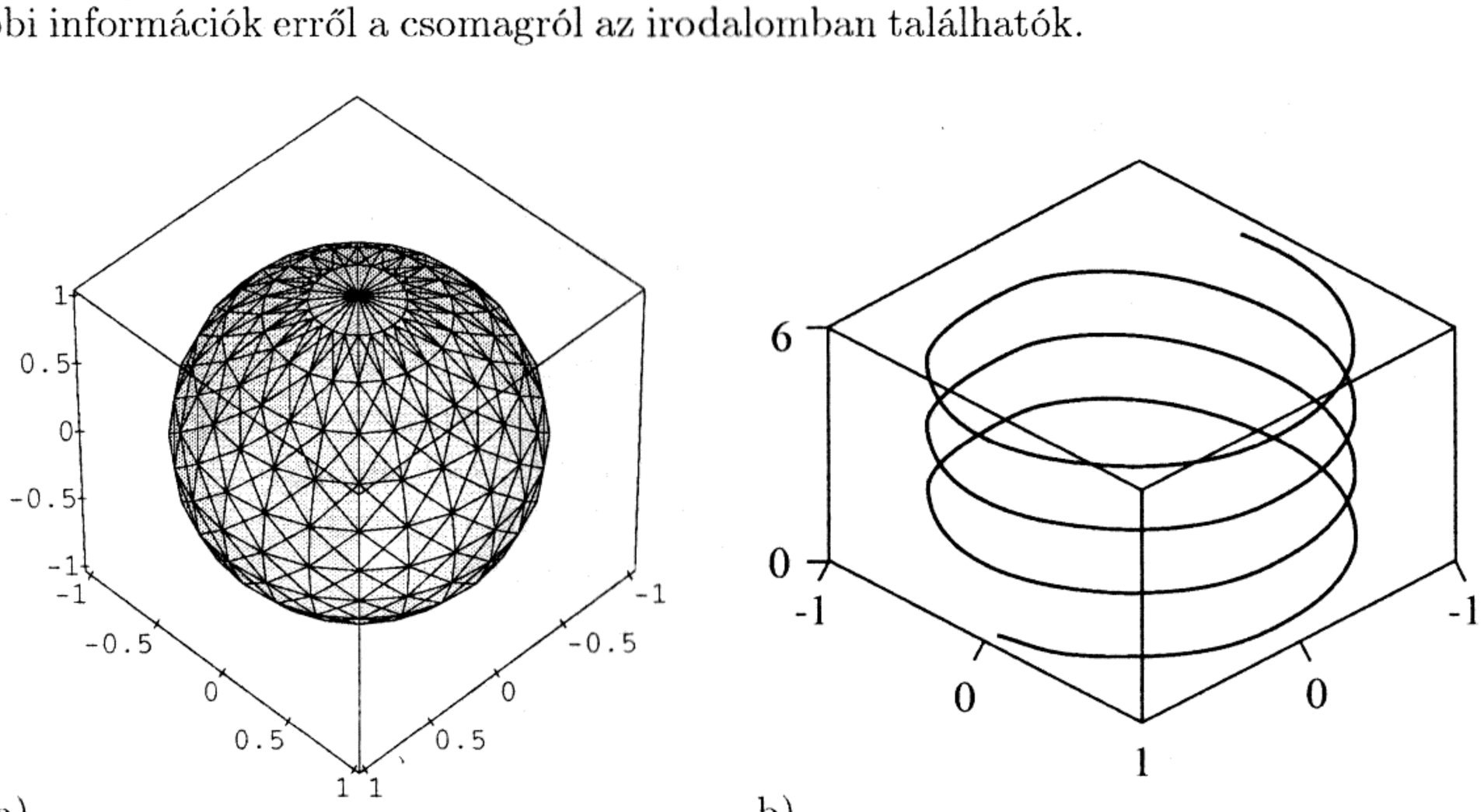
2. Kiegészítő utasítások a plots csomagból

A már említett `plots` könyvtári csomag a térbeli alakzatok ábrázolására további lehetőségeket is nyújt. Elsősorban említjük a térgörbék ábrázolására szolgáló `spacecurve` utasítást. Ennek első argumentuma három egyparaméteres függvény listája, a második argumentum a paraméter-tartományt adja meg.

20.28. táblázat. A `plot3d` utasítás főbb opciói és hatásuk

`numpoints` $= n$	beállítja a kiszámított pontok minimális számát (alapbeállítás $n = 625$)
`grid` $= [m, n]$	meghatározza a derékszögű rács dimenzióját; a transzformálás után ábrázolandó vízszintes, illetve függőleges egyenesek száma m, illetve n
`labels` $= [x, y, z]$	a tengelyek megnevezését adja meg, ha valamelyik speciális karaktereket tartalmaz, azt aposztrófok közé kell tenni
`style` $= s$	s értékei: `POINT`, `HIDDEN`, `PATCH`, `WIREFRAME`, `CONTOUR`, `PATCHNOGRID`, `PATCHCONTOURLINE`, amelyekkel a felület ábrázolásmódját adjuk meg
`axes` $= f$	f értéke lehet `BOXED`, `NORMAL`, `FRAME` vagy `NONE`, amivel a tengelyek ábrázolását adjuk meg
`coords` $= c$	a használandó koordinátarendszert specifikálja, lehetséges értékei: `cartesian`, `spherical`, `cylindrical`; alapbeállítás: `cartesian`
`projection` $= p$	p értéke 0 és 1 közötti szám, a szemléleti perspektívát határozza meg; alapbeállítás 1 (ortogonális vetítés), 0 eredménye egy halszemperspektíva
`orientation` $= [theta, phi]$	azon térbeli pont gömbi koordinátáit adja meg, amelyből a felületet szemléljük, amikor éppen a kapott grafikát látjuk
`view` $= z1..z2$	megadja azon szélső z-értékeket, melyekkel meghatározott vízszintes síkokkal a felületet levágjuk és így a köztes részt kapjuk; alapbeállítás: az egész felület

Ezenkívül a `plot3d` utasítás opciói itt is megengedettek, amennyiben erre az esetre alkalmazhatók. További információk erről a csomagról az irodalomban találhatók.



a) b)

20.13. ábra.

■ A

$$> \texttt{plot3d}([\texttt{cos}(t) * \texttt{cos}(u), \texttt{sin}(t) * \texttt{cos}(u), \texttt{sin}(u)], t = 0..2 * Pi, u = 0..2 * Pi) \qquad (20.100a)$$

és a

$$> \texttt{spacecurve}([\texttt{cos}(t), \texttt{sin}(t), t/4], t = 0..7 * Pi) \qquad (20.100b)$$

utasítás egy perspektivikusan ábrázolt gömböt **(20.13.a ábra)** és egy perspektivikusan ábrázolt térbeli spirált **(20.13.b ábra)** hoz létre (ld. **20.9. ábra**).

21. Táblázatok

21.1. Gyakran előforduló állandók

π	3,141592654 ...	
$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$	0,017453293 ...	
$1' = \dfrac{\pi}{10800}$	0,000290888 ...	
$1'' = \dfrac{\pi}{648000}$	0,000004848 ...	
1 rad=1	57,29577951 ... $^\circ$	
$1^\circ/_\circ$	0,01	
$1^\circ/_{\circ\circ}$	0,001	
e	2,718281828 ...	
$\lg e = M$	0,434294482 ...	
$\ln 10 = \dfrac{1}{M}$	2,302585093 ...	
C	0,577215665 ...	EULER–féle állandó

21.2. Fizikai állandók

A táblázat mindazon értékeket tartalmazza, melyek a CODATA Bulletin No. 63, November 1986 alapján a „Legfontosabb fizikai állandók 1986" (E.R. Cohen und B.N. Taylor, Review of Modern Physics, Vol. 59, No. 4, Oktober 1987) kiadványban szerepelnek.

AVOGADRO–állandó	$N_A = 6{,}022\,136\,7(36) \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Atomi tömegegység	$m_u = 1\mathrm{u} = (\mathrm{g\,mol}^{-1})/N_A = 1{,}660\,540\,2(10) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
	$= 931{,}494\,32(28)\,\mathrm{MeV}c^{-2} = 1822{,}89\,m_e$
BOHR-magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e = 9{,}274\,015\,4(31) \cdot 10^{-24}\,\mathrm{JT}^{-1}$
	$= 5{,}788\,382\,63(52) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVT}^{-1}$
BOHR-sugár	$a_0 = \hbar^2/E_0(e)e^2 = r_e/\alpha^2 = 0{,}529\,177\,249(24) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$
BOLTZMANN-állandó	$k = R_0/N_A = 1{,}380\,658(12) \cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK}^{-1}$
	$= 8{,}617\,385(73) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVK}^{-1}$
COMPTON-hullámhossz	$\lambda\!\!\!^{-}_c = \hbar/mc$
Elektron	$\lambda\!\!\!^{-}_e = 3{,}861\,593\,23(35) \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}$
Neutron	$\lambda\!\!\!^{-}_n = 2{,}100\,194\,45(19) \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}$
Proton	$\lambda\!\!\!^{-}_p = 2{,}103\,089\,37(19) \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}$
Elektromos töltésegység	$e = 1{,}602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
	$e/h = 2{,}417\,988\,36(72) \cdot 10^{14}\,\mathrm{AJ}^{-1}$
Nehézségi gyorsulás	$g_n = 9{,}806\,65\,\mathrm{ms}^{-2}$
FARADAY-állandó	$F = N_A e = 96\,485{,}309(29)\,\mathrm{Cmol}^{-1}$
Finomszerkezeti állandó	$\alpha = \mu_0 ce^2/2h = 7{,}297\,353\,08(33) \cdot 10^{-3}$
	$1/\alpha = 137{,}035\,989\,5(61)$
Univerzális gázállandó	$R_0 = N_A k = 8{,}314\,510(70)\,\mathrm{Jmol}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$

Gravitációs állandó	$G = 6{,}672\,59(85) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$
Indukciós állandó	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{NA^{-2}} = 12{,}566\,370\,614\ldots \cdot 10^{-7}\ \mathrm{NA^{-2}}$
Influencia állandó	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8{,}854\,187\,817\ldots \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Fm^{-1}}$
Magmagneton	$\mu_k = e\hbar/2m_p = 5{,}050\,786\,6(17) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{JT^{-1}}$
	$= 3{,}152\,451\,66(28) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{eVT^{-1}}$
Magsugár	$R = r_0 A^{1/3}$; $r_0 = (1{,}2\ldots1{,}4)$ fm; $1 \leq A \leq 250$:
	$r_0 \leq R \leq 9$ fm
Klasszikus elektronsugár	$r_e = \alpha^2 a_0 = 2{,}817\,940\,92(38) \cdot 10^{-15}$ m
Fénysebesség vákumban	$c = 299\,792\,458\ \mathrm{ms^{-1}}$
LOSCHMIDT-állandó	$n_0 = N_A/V_m = 2{,}686\,763(23) \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$
Mágikus számok	$N_m, Z_m = 2, 8, 20, 28, 50, 82;$
	$N_m = 126$, esetleg 184; $Z_m =$ esetleg 114, 126
Mágneses momentum	
Elektron	$\mu_e = 1{,}001\,159\,652\,193(10)\mu_B = 928{,}477\,01(31) \cdot 10^{-26}\ \mathrm{JT^{-1}}$
Proton	$\mu_p = +2{,}792\,847\,386(63)\mu_k = 1{,}410\,607\,61(47) \cdot 10^{-26}\ \mathrm{JT^{-1}}$
Neutron	$\mu_n = -1{,}913\,042\,75(45)\mu_k = 0{,}966\,237\,07(40) \cdot 10^{-26}\ \mathrm{JT^{-1}}$
Moláris térfogat	$V_m = R_0 T_0/p_0 = 0{,}022\,414\,10(19)\ \mathrm{m^3mol^{-1}}$
PLANCK-állandó	$h = 6{,}626\,075\,5(40) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} = 4{,}135\,669\,2(12) \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eVs}$
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}054\,572\,66(63) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
	$= 6{,}582\,122\,0(20) \cdot 10^{-16}\ \mathrm{eVs}$
Nyugalmi tömeg	
Elektron	$m_e = 9{,}109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 5{,}485\,799\,03(13) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{u}$
Proton	$m_p = 1{,}672\,623\,1(10) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1\,836{,}152\,701(37)m_e$
	$= 1{,}007\,276\,470(12)\ \mathrm{u}$
Neutron	$m_n = 1{,}674\,928\,6(10) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1\,838{,}683\,662(40)m_e$
	$= 1{,}008\,664\,904(14)\ \mathrm{u}$
Myon	$m_{\mu^\pm} = 1{,}883\,532\,7(11) \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg} = 206{,}768\,262(30)m_e$
	$= 0{,}113\,428\,913(17)\ \mathrm{u}$
Pion	$m_{\pi^\pm} = 2{,}488 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg} = 273{,}19m_e$
	$m_{\pi^0} = 2{,}406 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg} = 264{,}20m_e$
Nyugalmi energia	
Elektron	$E_0(e) = 0{,}510\,999\,06(15)$ MeV
Proton	$E_0(p) = 938{,}272\,31(28)$ MeV
Neutron	$E_0(n) = 939{,}565\,63(28)$ MeV
Myon	$E_0(\mu^\pm) = 105{,}658\,389(34)$ MeV
Pion	$E_0(\pi^\pm) = 139{,}57$ MeV
	$E_0(\pi^0) = 134{,}972$ MeV
Atomi tömegegység	$E_0(u) = 931{,}494\,32(28)$ MeV
RYDBERG-állandó	$R_\infty = {\mu_0}^2 me^4c^3/8h^3 = 10\,973\,731{,}534(13)\ \mathrm{m^{-1}}$
RYDBERG-energia	$hcr_\infty = 13{,}605\,698\,1(40)$ eV
STEFAN–BOLTZMANN-állandó	$\sigma = (\pi^2/60)k^4/\hbar^3c^2 = 5{,}670\,51(19) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
THOMSON–keresztmetszet	$\sigma_0 = 8\pi {r_e}^2/3 = 0{,}665\,246\,16(18) \cdot 10^{-28}\ \mathrm{m^2}$
Változási hatás állandók	
Erős változási hatás	$\alpha_k = 0{,}08\ldots14$
Elektrom. változási hatás	$\alpha_C = 1/137$
Gyenge változási hatás	$\alpha_F = 3 \cdot 10^{-12}$
Gravitációs változási hatás	$\alpha_G = 5{,}1 \cdot 10^{-39}$
Vákuum sugárzási ellenállása	$Z_0 = 376{,}730\,3\ \Omega$

21.3. Néhány függvény hatványsora

Függvény	Sorfejtés	Konvergencia-tartomány
	Algebrai függvények	
	Binomiális sor	
$(a \pm x)^m$	$a^m \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ alakra hozása után az alábbi formákat ölti:	$\lvert x\rvert \le a$ ha $m > 0$ $\lvert x\rvert < a$ ha $m < 0$
	Pozitív kitevőjű binomiális sorok	
$(1 \pm x)^m$ $(m > 0)$	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$ $+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{4}}$	$1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$	$1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$	$1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}}$	$1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
$(1 \pm x)^{\frac{5}{2}}$	$1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert \le 1$
	Negatív kitevőjű binomiális sorok	
$(1 \pm x)^{-m}$ $(m > 0)$	$1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \cdots$ $+ (\mp 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{4}}$	$1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}}$	$1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}}$	$1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}}$	$1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$

Függvény	Sorfejtés	Konvergencia-tartomány
$(1 \pm x)^{-\frac{5}{2}}$	$1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \cdots)$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-4}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7x^4 + \cdots)$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1 \pm x)^{-5}$	$1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7x^3 \mp 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8x^4 + \cdots)$	$\lvert x\rvert < 1$
	Trigonometrikus függvények	
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a + x\cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \cdots + \frac{x^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a - x \sin a - \frac{x^2 \cos a}{2!} + \frac{x^3 \sin a}{3!} + \frac{x^4 \cos a}{4!} - \cdots + \frac{x^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \cdots + \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots\right]$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\sec x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \cdots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$

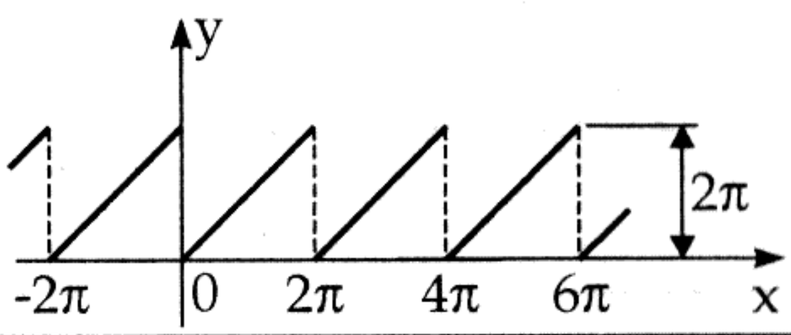
Függvény	Sorfejtés	Konvergencia-tartomány
$\operatorname{cosec} x$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\frac{127}{604800}x^7+\cdots+\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}$	$0<\lvert x\rvert<\pi$
	Exponenciális függvények	
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$a^x=e^{x\ \ln a}$	$1+\frac{x\ \ln a}{1!}+\frac{(x\ \ln a)^2}{2!}+\frac{(x\ \ln a)^3}{3!}+\cdots+\frac{(x\ \ln a)^n}{n!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\frac{x}{e^x-1}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{B_1\,x^2}{2!}-\frac{B_2\,x^4}{4!}+\frac{B_3\,x^6}{6!}-\cdots+(-1)^{n+1}\,\frac{B_n\,x^{2n}}{(2n)!}\pm\cdots$	$\lvert x\rvert<2\pi$
	Logaritmusfüggvények	
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\cdots+\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}+\cdot s\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\,\frac{(x-1)^n}{n}\pm\cdots$	$0<x\le 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\cdots$	$x>\frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}\pm\cdots$	$-1<x\le 1$
$\ln(1-x)$	$-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right]$	$-1\le x<1$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $=2\ \operatorname{Arth} x$	$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right]$	$\lvert x\rvert<1$

Függvény	Sorfejtés	Konvergencia-tartomány
$\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $= 2\,\mathrm{Arcth}\,x$	$2\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+\dfrac{1}{7x^7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}}+\cdots\right]$	$\lvert x\rvert > 1$
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{180}-\dfrac{x^6}{2835}-\cdots-\dfrac{2^{2n-1}\,B_n\,x^{2n}}{n\,(2n)\,!}-\cdots$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\ln\cos x$	$-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^6}{45}-\dfrac{17x^8}{2520}-\cdots$ $-\dfrac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n\,x^{2n}}{n(2n)\,!}-\cdots$	$\lvert x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$
$\ln\lvert\mathrm{tg}\,x\rvert$	$\ln\lvert x\rvert+\dfrac{1}{3}\,x^2+\dfrac{7}{90}\,x^4+\dfrac{62}{2835}\,x^6+\cdots$ $+\dfrac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)\,!}\,x^{2n}+\cdots$	$0 < \lvert x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$
	A trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)	
$\arcsin x$	$x+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\,x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots$ $+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$\dfrac{\pi}{2}-\left[x+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\,x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots\right.$ $\left.+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots\right]$	$\lvert x\rvert < 1$
$\mathrm{arctg}\,x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\pm\cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\mathrm{arctg}\,x$	$\pm\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3\,x^3}-\dfrac{1}{5\,x^5}+\dfrac{1}{7\,x^7}-\cdots$ $+(-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}}\pm\cdots$	$\lvert x\rvert > 1$
$\mathrm{arcctg}\,x$	$\dfrac{\pi}{2}-\left[x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\pm\cdots\right]$	$\lvert x\rvert < 1$

Függvény	Sorfejtés	Konvergencia-tartomány
	Hiperbolikus függvények	
$\operatorname{sh} x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$
$\operatorname{th} x$	$x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \dfrac{17}{315}x^7 + \dfrac{62}{2835}x^9 - \cdots$	
	$+\dfrac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}\,B_n x^{2n-1} \pm \cdots$	$\lvert x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + \dfrac{2x^5}{945} - \dfrac{x^7}{4725} + \cdots$	
	$+\dfrac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}}{(2n)!}\,B_n x^{2n-1} \pm \cdots$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\operatorname{sech} x$	$1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{5}{4!}x^4 - \dfrac{61}{6!}x^6 + \dfrac{1385}{8!}x^8 - \cdots$	
	$+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,E_n x^{2n} \pm \cdots$	$\lvert x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$
$\operatorname{cosech} x$	$\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{7\,x^3}{360} - \dfrac{31\,x^5}{15120} + \cdots$	
	$+\dfrac{2(-1)^n\,(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}\,B_n x^{2n-1} + \cdots$	$0 < \lvert x\rvert < \pi$
	A hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)	
$\operatorname{Arsh} x$	$x - \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$	
	$+(-1)^n \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)}\,x^{2n+1} \pm \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arch} x$	$\pm\left[\ln(2x) - \dfrac{1}{2\cdot 2x^2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6x^6} - \cdots\right]$	$x > 1$
$\operatorname{Arth} x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arcth} x$	$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + \dfrac{1}{7x^7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} + \cdots$	$\lvert x\rvert > 1$

21.4. Fourier-sorfejtés

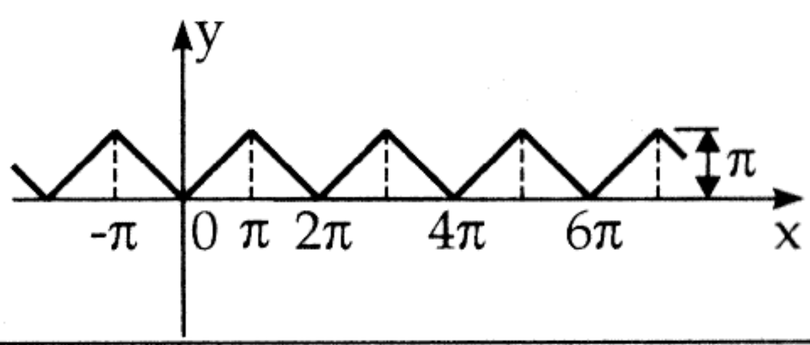
1. $y = x$, ha $0 < x < 2\pi$



$$y = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$

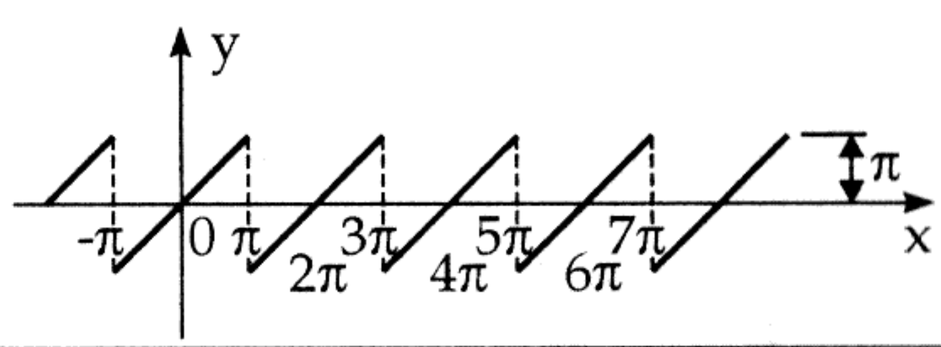
2. $y = x$, ha $0 \leq x \leq \pi$

$y = 2\pi - x$, ha $\pi < x \leq 2\pi$



$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

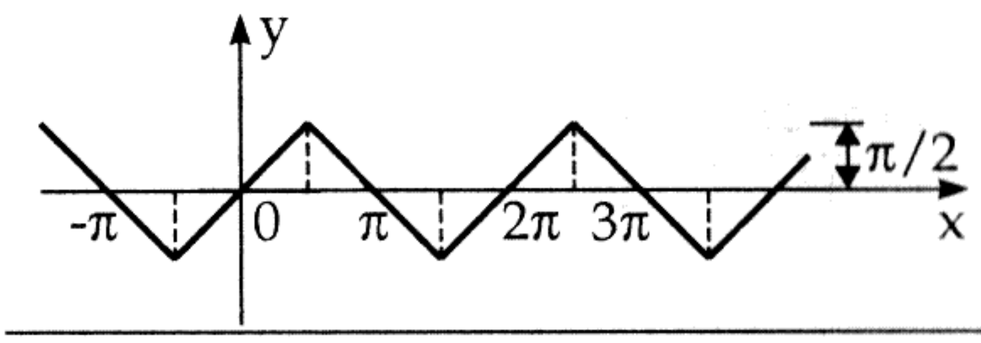
3. $y = x$, ha $-\pi < x < \pi$



$$y = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

4. $y = x$, ha $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

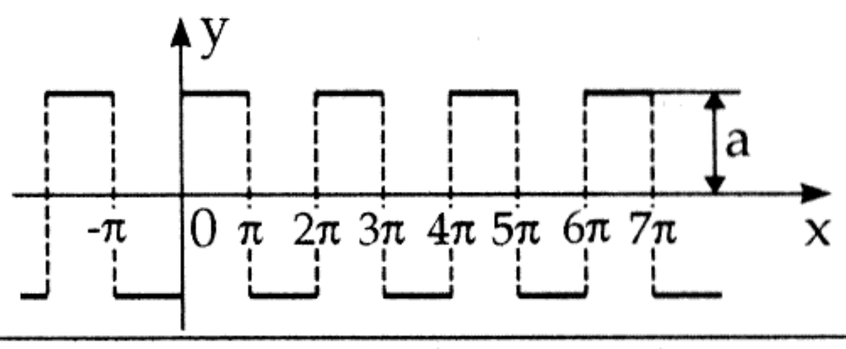
$y = \pi - x$, ha $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \cdots\right)$$

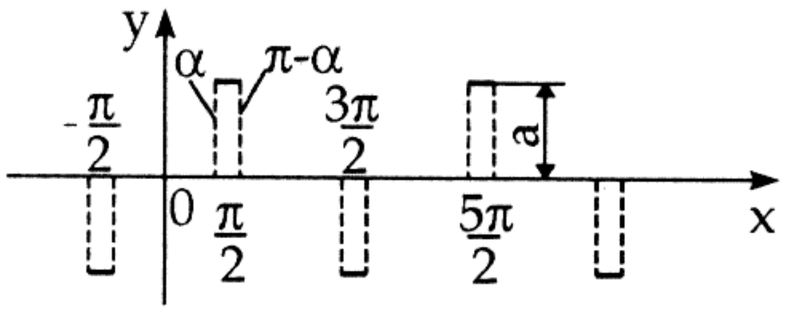
5. $y = a$, ha $0 < x < \pi$

$y = -a$, ha $\pi < x < 2\pi$



$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

6. $y = 0$, ha $0 \le x < \alpha$ és ha $\pi - \alpha < x \le \pi + \alpha$ és $2\pi - \alpha < x \le 2\pi$
$y = a$, ha $\alpha < x < \pi - \alpha$; $y = -a$, ha $\pi + \alpha < x \le 2\pi - \alpha$

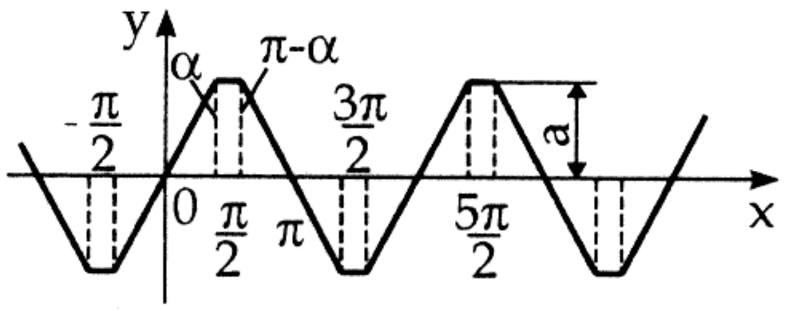


$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha\sin x + \frac{1}{3}\cos 3\alpha\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha\sin 5x + \cdots\right)$$

---

7. $y = \dfrac{ax}{\alpha}$, ha $-a \le x \le a$
$y = a$, ha $\alpha \le x \le \pi - \alpha$,
$y = \dfrac{a(\pi - x)}{\alpha}$, ha $\pi - \alpha \le x \le \pi + \alpha$,
$y = -a$, ha $\pi + \alpha \le x \le 2\pi - \alpha$

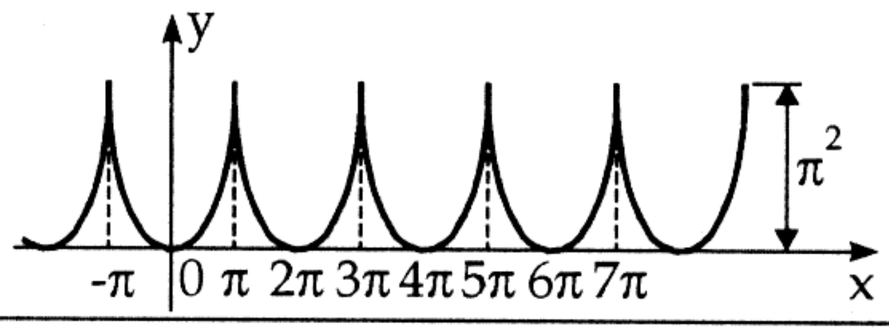
$$y = \frac{4}{\pi}\frac{a}{\alpha}\left(\sin\alpha\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x + \cdots\right)$$



$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ esetben: $$y = \frac{6\sqrt{3}a}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{5^2}\sin 5x + \frac{1}{7^2}\sin 7x - \frac{1}{11^2}\sin 11x + \cdots\right)$$

---

8. $y = x^2$, ha $-\pi \le x \le \pi$



$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

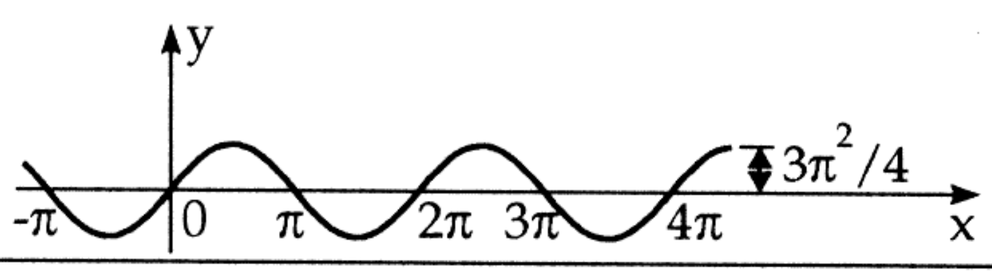
---

9. $y = x(\pi - x)$, ha $0 \le x \le \pi$

$$y = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$$

---

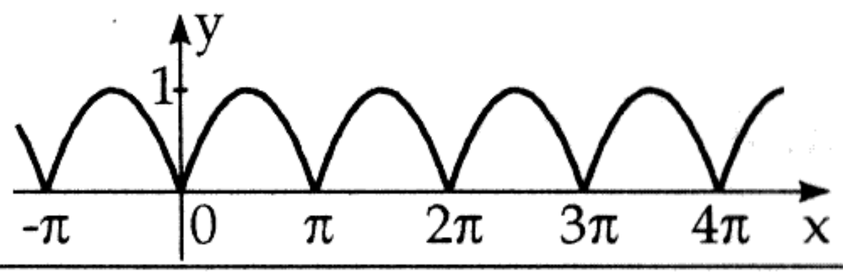
10. $y = x(\pi - x)$, ha $0 \le x \le \pi$
$y = (\pi - x)(2\pi - x)$, ha $\pi \le x \le 2\pi$



$$y = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \cdots\right)$$

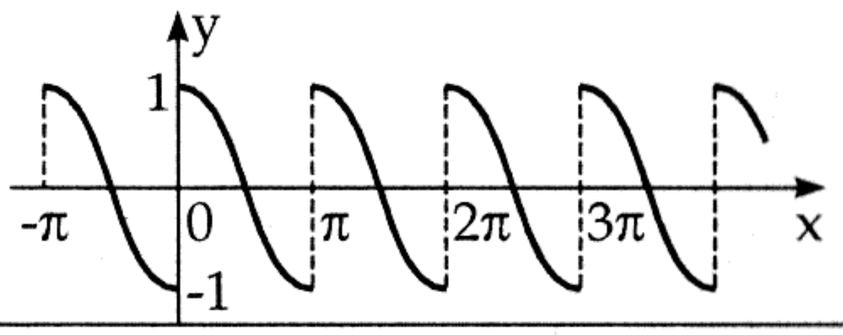
---

11. $y = \sin x$, ha $0 \leq x \leq \pi$



$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

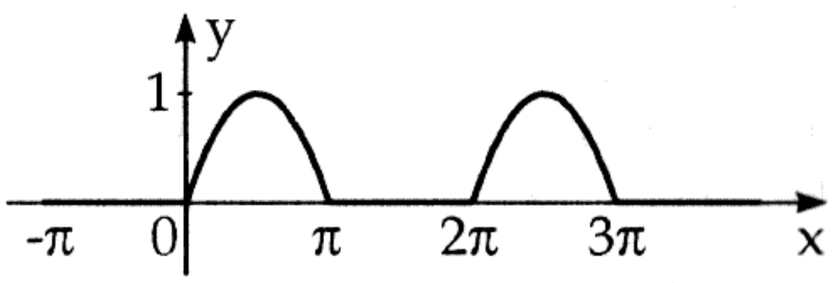
12. $y = \cos x$, ha $0 < x < \pi$



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

13. $y = \sin x$, ha $0 \leq x \leq \pi$

$y = 0$, ha $\pi \leq x \leq 2\pi$



$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

14. $y = \cos ux$, ha $-\pi \leq x \leq \pi$

$$y = \frac{2u \sin u\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{u^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{u^2 - 9} + \cdots\right]$$

(u tetszőleges, de nem egész szám)

15. $y = \sin ux$, ha $-\pi < x < \pi$

$$y = \frac{2 \sin u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1 - u^2} - \frac{2 \sin 2x}{4 - u^2} + \frac{3 \sin 3x}{9 - u^2} + \cdots\right)$$

(u tetszőleges, de nem egész szám)

16. $y = x \cos x$, ha $-\pi < x < \pi$

$$y = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{4 \sin 2x}{2^2 - 1} - \frac{6 \sin 3x}{3^2 - 1} + \frac{8 \sin 4x}{4^2 - 1} - \cdots$$

17. $y = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$, ha $0 < x \leq \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \cdots$$

18. $y = \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$, ha $0 \leq x < \pi$

$$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \cdots$$

19. $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, ha $0 < x < \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots$$

21.5. Határozatlan integrál

(A táblázat használatához lásd 434. oldalt).

21.5.1. Racionális függvények integrálása

21.5.1.1. Az $ax + b$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölés: $X = ax + b$

1. $\int X^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}X^{n+1}$ $\qquad (n \neq -1);$ $\qquad (n = -1\text{-re}$ ld. 2.-t).

2. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}\ln X.$

3. $\int xX^n\,dx = \frac{1}{a^2(n+2)}X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)}X^{n+1}$

$(n \neq -1, \neq -2);$ $\qquad (n = -1\,, = -2\text{-re}$ ld. 5. és 6.-ot).

4. $\int x^m X^n\,dx = \frac{1}{a^{m+1}}\int (X-b)^m X^n\,dX$ $\qquad (n \neq -1, \neq -2, \ldots, \neq -m).$

Ezt a képletet akkor alkalmazzuk, ha $m < n$, vagy m egész és n tört; ezekben az esetekben $(X-b)^m$-t NEWTON binomiális tétele segítségével (lásd 12. old.) számítjuk ki.

5 $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln X.$

6. $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2X} + \frac{1}{a^2}\ln X.$

7. $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2}\right).$

8. $\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right)$ $\qquad (n \neq 1, \neq 2).$

9. $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2\ln X\right).$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^2}\left(X - 2b\ln X - \frac{b^2}{X}\right).$

11. $\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right).$

12. $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right]$ $\qquad (n \neq 1, \neq 2, \neq 3).$

13. $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3\ln X\right).$

14. $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2\ln X + \frac{b^3}{X}\right).$

15. $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X - 3b\ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2}\right).$

16. $\int \frac{x^3\,dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3}\right).$

17. $\int \frac{x^3\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}}\right]$

$(n \neq 1, \neq 2, \neq 3, \neq 4).$

18. $\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b}\ln\frac{X}{x}.$

19. $\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln\frac{X}{x} + \frac{ax}{X}\right).$

20. $\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln\frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2}\right).$

21. $\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln\frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right]$ $(n \geq 1).$

22. $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\frac{X}{x}.$

23. $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3}\ln\frac{X}{x}\right].$

24. $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -a\left[\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4}\ln\frac{X}{x}\right].$

25. $\int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[-\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na\ln\frac{X}{x}\right]$ $(n \geq 2).$

26. $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3}\left[a^2\ln\frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2}\right].$

27. $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right].$

28. $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2\ln\frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right].$

29. $\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x}\right.$

$\left. + \frac{n(n+1)a^2}{2}\ln\frac{X}{x}\right]$ $(n \geq 3).$

30. $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}}\sum_{i=0}^{m+n-2}\binom{m+n-2}{i}\frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}.$

Ha a szummajel alatt szereplő általános tag nevezője zérussá válik, akkor helyette a

$$\binom{m+n-2}{m-1}(-a)^{m-1}\ln\frac{X}{x}.$$

kifejezés veendő.

Jelölés: $\Delta = bf - ag$

31. $\displaystyle\int \frac{ax+b}{fx+g}\,dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2}\ln(fx+g).$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b} \qquad (\Delta \neq 0).$

33. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b) - \frac{g}{f}\ln(fx+g)\right] \qquad (\Delta \neq 0).$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta}\ln\frac{fx+g}{ax+b}\right) \qquad (\Delta \neq 0).$

35. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

36. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2}\ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln(b+x) \qquad (a \neq b).$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

38. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

39. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

21.5.1.2. Az $X = ax^2 + bx + c$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölések: $X = ax^2 + bx + c$; $\Delta = 4ac - b^2$

40.
$$\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \qquad (\text{ha } \Delta > 0),$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \qquad (\text{ha } \Delta < 0),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}, \qquad (\text{ha } \Delta < 0).$$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta}\left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X}\right) + \frac{6a^2}{\Delta^2}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}.$

44. $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln X - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40).

. $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

46. $\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{X^{n-1}}$.

47. $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

48. $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

49. $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a}\int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a}\int \frac{x\,dx}{X^n}$ (ld. 43. és 46.).

50. $\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{X^n}$

$-\frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$ $(m \neq 2n-1)$; $(m = 2n-1$-re ld. 51.).

51. $\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}$.

52. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

53. $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54. $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln\frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right)\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

55. $\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n}$

$-\frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$ $(m > 1)$.

56. $\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\left[f\ln\frac{(fx+g)^2}{X}\right]$

$+\frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 40.).

21.5.1.3. Az $a^2 \pm x^2$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölések: $X = a^2 \pm x^2$,

$$Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,, \text{ ha } X\text{-ben a „+” jel érvényes,} \\ \operatorname{arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x}\,, \text{ ha } X\text{-ben a „−” jel érvényes és } |x| < a\,, \\ \operatorname{arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a}\,, \text{ ha } X\text{-ben a „−” jel érvényes és } |x| > a\,. \end{cases}$$

Ha a képletben kettős előjel szerepel, akkor a felső előjel az $X = a^2 + x^2$, az alsó az $X = a^2 - x^2$ esetre vonatkozik.

57. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}Y.$

58. $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3}Y.$

59. $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5}Y.$

60. $\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{X^n}.$

61. $\int \frac{x\,dx}{X} = \pm\frac{1}{2}\ln X.$

62. $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \mp\frac{1}{2X}.$

63. $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \mp\frac{1}{4X^2}.$

64. $\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{1}{2nX^n} \qquad (n \neq 0).$

65. $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \pm x \mp aY.$

66. $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp\frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a}Y.$

67. $\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \mp\frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3}Y.$

68. $\int \frac{x^2\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{X^n} \qquad (n \neq 0).$

69. $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X.$

70. $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X.$

71. $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$

72. $\int \frac{x^3\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n} \qquad (n > 1).$

73. $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}.$

74. $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

75. $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

76. $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y.$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y.$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y.$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

$X = a^2 \pm x^2,$

$$Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\,, \text{ ha } X\text{-ben} \quad \text{„+” jel érvényes,} \\ \operatorname{arth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+x}{a-x}\,, \text{ ha } X\text{-ben} \quad \text{„−” jel érvényes és } |x| < a, \\ \operatorname{arcth}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+a}{x-a}\,, \text{ ha } X\text{-ben} \quad \text{„−” jel érvényes és } |x| > a\,. \end{cases}$$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}.$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \pm b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \pm \frac{b}{a}Y\right].$

21.5.1.4. Az $a^3 \pm x^3$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölések: $a^3 \pm x^3 = X$. Ha a képletben kettős előjel szerepel, akkor a felső előjel az $X = a^3 + x^3$, az alsó az $X = a^3 - x^3$ esetre vonatkozik.

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 83.).

85. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x^2)} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}.$

86. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (ld. 85.).

87. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X} = \pm\frac{1}{3}\ln X.$

88. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp\frac{1}{3X}.$

89. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm x \mp a^3\int \frac{dx}{X}$ (ld. 83.).

90. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \mp\frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 83.).

91. $\displaystyle\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3}\ln\frac{x^3}{X}.$

92. $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6}\ln\frac{x^3}{X}.$

93. $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (ld. 85.).

94. $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{X}$ (ld. 85.).

95. $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 83.).

96. $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6}\int \frac{dx}{X}$ (ld. 83.).

21.5.1.5. Az $a^4 + x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok

97. $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

98. $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}.$

99. $\int \frac{x^2\,dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

100. $\int \frac{x^3\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4}\ln(a^4+x^4).$

21.5.1.6. Az $a^4 - x^4$ kifejezést tartalmazó integrálok

101. $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

102. $\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

103. $\int \frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\ln\frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

104. $\int \frac{x^3\,dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4}\ln(a^4-x^4).$

21.5.1.7. Néhány tört parciális törtekre bontása

105. $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right).$

106. $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c},$

ahol $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$, $B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$.

107. $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d},$

$$\text{ahol}\quad A=\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)},\ B=\frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$

108. $\dfrac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)}\equiv\dfrac{1}{fb-ag}\left(\dfrac{b}{a+bx^2}-\dfrac{g}{f+gx^2}\right).$

21.5.2. Irracionális függvények integráljai

21.5.2.1. A $\sqrt{x}$ és $a^2\pm b^2x$ kifejezéseket tartalmazó integrálok

Jelölések:

$$X=a^2\pm b^2x\,,\ Y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{b\sqrt{x}}{a}, & \text{ha } X\text{-ben „+” jel érvényes,}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}, & \text{ha } X\text{-ben „−” jel érvényes.}\end{cases}$$

Ha a képletben kettős előjel szerepel, akkor a felső az $X=a^2+b^2x$, az alsó az $X=a^2-b^2x$ esetre vonatkozik.

109. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{X}=\pm\frac{2\sqrt{x}}{b^2}\mp\frac{2a}{b^3}Y.$

110. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X}=\pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^3}}{b^2}-\frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4}+\frac{2a^3}{b^5}Y.$

111. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2}=\mp\frac{\sqrt{x}}{b^2X}\pm\frac{1}{ab^3}Y.$

112. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2}=\pm\frac{2\sqrt{x^3}}{b^2X}+\frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X}-\frac{3a}{b^5}Y.$

113. $\displaystyle\int\frac{dx}{X\sqrt{x}}=\frac{2}{ab}Y.$

114. $\displaystyle\int\frac{dx}{X\sqrt{x^3}}=-\frac{2}{a^2\sqrt{x}}\mp\frac{2b}{a^3}Y.$

115. $\displaystyle\int\frac{dx}{X^2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{a^2X}+\frac{1}{a^3b}Y.$

116. $\displaystyle\int\frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}}=-\frac{2}{a^2X\sqrt{x}}\mp\frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X}\mp\frac{3b}{a^5}Y.$

21.5.2.2. Egyéb, a $\sqrt{x}$ kifejezést tartalmazó integrálok

117. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2}=-\frac{1}{2a\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2}+\frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

118. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}}=\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2}+\frac{1}{a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

119. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

120. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^4-x^2)\sqrt{x}}=\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}+\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{a}.$

21.5.2.3. A $\sqrt{ax+b}$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölés: $X = ax + b$

121. $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{X^3}.$

122. $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$

123. $\displaystyle\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$

124. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$

125. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$

126. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$

127. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{b}}\operatorname{arcth}\sqrt{\dfrac{X}{b}} = -\dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\dfrac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}}, & \text{ha } b>0\,, \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{X}{-b}}, & \text{ha } b<0\,. \end{cases}$

128. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = 2\sqrt{X} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

129. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

130. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

131. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$

132. $\displaystyle\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}.$

133. $\displaystyle\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}\left(5\sqrt{X^7} - 7b\sqrt{X^5}\right).$

134. $\displaystyle\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9} - \frac{2b\sqrt{X^7}}{7} + \frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right).$

135. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3} + 2b\sqrt{X} + b^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

136. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X} + \frac{b}{\sqrt{X}}\right).$

137. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3} - 2b\sqrt{X} - \frac{b^2}{\sqrt{X}}\right).$

138. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

139. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}} - \frac{3a}{b^2\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 127.).

140. $\displaystyle\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}.$

141. $\displaystyle\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} - \frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

142. $\displaystyle\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n} - \frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n} + \frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

143. $\displaystyle\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int \frac{X^{(n-2)/2}}{x}dx.$

144. $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$

145. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}.$

21.5.2.4. A $\sqrt{ax+b}$ és $\sqrt{fx+g}$ kifejezéseket tartalmazó integrálok

Jelölések: $X = ax+b$, $Y = fx+g$, $\Delta = bf - ag$

146.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{fX}{aY}}, & \text{ha } af<0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{fX}{aY}}, & \text{ha } af>0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{af}}\ln\left(\sqrt{aY}+\sqrt{fX}\right), & \text{ha } af>0. \end{cases}$$

147. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (ld. 146.).

148. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}.$

149.
$$\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\dfrac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}}, & \text{ha } \Delta f<0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\dfrac{f\sqrt{X}-\sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X}+\sqrt{\Delta f}}, & \text{ha } \Delta f>0. \end{cases}$$

150. $\displaystyle\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta+2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (ld. 146.).

151. $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (ld. 146.).

152. $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (ld. 149.).

153. $\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right).$

154. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left\{\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n-\frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right\}.$

155. $\int \sqrt{X}Y^n\,dx = \frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}Y^{n+1} + \Delta\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}}\right)$ (ld. 153.).

156. $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = \frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right).$

21.5.2.5. A $\sqrt{a^2-x^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölés: $X = a^2 - x^2$

157. $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$

158. $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

159. $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$

160. $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}.$

161. $\int \frac{\sqrt{X}}{x}dx = \sqrt{X} - a\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

162. $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}.$

163. $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

164. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}.$

165. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$

166. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

167. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

168. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

169. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

170. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

171. $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right).$

172. $\int x\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

173. $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$

174. $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

175. $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

176. $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$

177. $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

178. $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

179. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \arcsin\frac{x}{a}.$

181. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182. $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

183. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

184. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

21.5.2.6. A $\sqrt{x^2+a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölés: $X = x^2 + a^2$

185. $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right] + C_1\,.$$

186. $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$$

187. $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right) + C$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right] + C_1\,.$$

188. $$\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$$

189. $$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln\frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

190. $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

191. $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

192. $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

193. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

194. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{X}\right) + C_1.$$

195. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$$

196. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

197. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

198. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

199. $$\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right) + C_1.$$

200. $$\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$$

201. $$\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C$$
$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1\,.$$

202. $$\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$$

203. $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

204. $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C$$
$$= -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} + \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

205. $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right).$$

206. $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

207. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

208. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

209. $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

210. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

211. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

212. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

21.5.2.7. A $\sqrt{x^2-a^2}$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölés: $X = x^2 - a^2$

213. $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

214. $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$$

215. $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right) + C$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} - a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1.$$

216. $\displaystyle\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$

217. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a\arccos\frac{a}{x}.$

218. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

219. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$

220. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

221. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

222. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

223. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$

224. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

225. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2x}.$

226. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

227. $\displaystyle\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right) + C$
$\displaystyle= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right) + C_1.$

228. $\displaystyle\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229. $\displaystyle\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{arch}\frac{x}{a} + C$
$\displaystyle= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

230. $\displaystyle\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

231. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3\arccos\frac{a}{x}.$

232. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\operatorname{arch}\frac{x}{a} + C$
$\displaystyle= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

233. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a\arccos\frac{a}{x}.$

234. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$

235. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$

236. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

237. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

238. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

239. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$

240. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}.$

21.5.2.8. A $\sqrt{ax^2+bx+c}$ kifejezést tartalmazó integrálok

Jelölések: $X = ax^2+bx+c\,,\ \Delta = 4ac-b^2\,,\ k = \dfrac{4a}{\Delta}$

241. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{aX}+2ax+b\right)+C, & \text{ha } a>0\,,\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arsh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}+C_1, & \text{ha } a>0\,,\ \Delta>0\,,\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b), & \text{ha } a>0\,,\ \Delta=0\,,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, & \text{ha } a<0\,,\ \Delta<0\,. \end{cases}$

242. $\displaystyle\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}.$

243. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X}+2k\right).$

244. $\displaystyle\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$

245. $\displaystyle\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

246. $\displaystyle\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X+\frac{3}{2k}\right) + \frac{3}{8k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

247. $\displaystyle\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2+\frac{5X}{4k}+\frac{15}{8k^2}\right)+\frac{5}{16k^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

248. $\displaystyle\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)}+\frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx.$

249. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

250. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$.

251. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (ld. 244.).

252. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a}-\frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X}+\frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

253. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a\Delta\sqrt{X}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

254. $\displaystyle\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a}-\frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X}-\frac{b}{4ak}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (ld. 241.).

255. $\displaystyle\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a}-\frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (ld. 246.).

256. $\displaystyle\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a}-\frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (ld. 248.).

257. $\displaystyle\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x-\frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a}+\frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{X}\,dx$ (ld. 245.).

258. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{cX}}{x}+\dfrac{2c}{x}+b\right)+C, & \text{ha } c>0\,, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arsh}\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}}+C_1, & \text{ha } c>0\,,\ \Delta>0\,, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\dfrac{bx+2c}{x}, & \text{ha } c>0\,,\ \Delta=0\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\dfrac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}}, & \text{ha } c<,\ \Delta<0\,. \end{cases}$

259. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 258.).

260. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}+c\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 241. és 258.).

261. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x}+a\int\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (ld. 241. és 258.).

262. $\displaystyle\int\frac{X^{(2n+1)/2}}{x}dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1}+\frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx+c\int\frac{X^{(2n-1)/2}}{x}dx$ (ld. 248. és 260.).

263. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}.$

264. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}.$

265. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arcsin\frac{x-a}{a}.$

266. $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$

267. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} \qquad (ag-bf>0),$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}} \qquad (ag-bf<0).$$

21.5.2.9. Egyéb irracionális kifejezéseket tartalmazó integrálok

268. $\displaystyle\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}.$

269. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$

270. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$

271. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$

272. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$

21.5.2.10. Rekurzív formulák a binomiális differenciál integráljának kiszámításához

273. $\displaystyle\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$

$$= \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

21.5.3. Trigonometrikus függvények integráljai

(A $\sin x$, $\cos x$ függvényeket a hiperbolikus és exponenciális függvényekkel együtt tartalmazó kifejezések integráljait az egyéb transzcendens kifejezéseket tartalmazó integrálok táblázat tartalmazza (lásd 1075. old.).

21.5.3.1. Szinuszfüggvényt tartalmazó integrálok

274. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$

275. $\displaystyle\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax.$

276. $\displaystyle\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$

277. $\displaystyle\int \sin^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

278. $\displaystyle\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$ (n pozitív, egész szám).

279. $\displaystyle\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$

280. $\displaystyle\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$

281. $\displaystyle\int x^3\sin ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$

282. $\displaystyle\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$ ($n > 0$).

283. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \cdots.$

A $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ határozott integrált integrálszinusznak (lásd 467. old.) nevezzük és $\mathrm{si}(x)$-szel jelöljük.

Az integrál kiszámítása a 721. oldalon található. A hatványsora: $\mathrm{si}(x) = x - \dfrac{x^3}{3\cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5\cdot 5!} - \dfrac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots$ (ld. 467. oldal).

284. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{x^2}dx = -\frac{\sin ax}{x} + a\int \frac{\cos ax\,dx}{x}$ (ld. 322.).

285. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}\,dx$ (ld. 324.).

286. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax).$

287. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

288. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\sin^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

289. $$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \qquad (n > 1).$$

290. $$\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n (ax)^{2n+1} + \cdots\right)$$

A B_n-ek a BERNOULLI–féle számok (lásd 417. old.).

291. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax.$$

292. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x \cos ax}{(n-1)a \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax} \qquad (n > 2).$$

293. $$\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

294. $$\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$$

295. $$\int \frac{x\,dx}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

196. $$\int \frac{x\,dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

297. $$\int \frac{\sin ax\,dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right).$$

298. $$\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

299. $$\int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

300. $$\int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

301. $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

302. $$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1 - \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$$

303. $$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin\left(\frac{3 \sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1}\right).$$

304. $$\int \frac{dx}{1 - \sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$$

305. $$\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (|a| \neq |b|;$$ ha $|a| = |b|$ ld. 275.).

306. $$\int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax/2 + c}{\sqrt{b^2 - c^2}}, \qquad \text{ha } (b^2 > c^2),$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} ax/2 + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} ax/2 + c + \sqrt{c^2 - b^2}}, \qquad \text{ha } (b^2 < c^2).$$

307. $\int \frac{\sin ax\,dx}{b+c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (ld. 306.).

308. $\int \frac{dx}{\sin ax(b+c\sin ax)} = \frac{1}{ab}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (ld. 306.).

309. $\int \frac{dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c\sin ax)} + \frac{b}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (ld. 306.).

310. $\int \frac{\sin ax\,dx}{(b+c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c\sin ax)} + \frac{c}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\sin ax}$ (ld. 306.).

311. $\int \frac{dx}{b^2+c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2+c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b>0)$.

312. $\int \frac{dx}{b^2-c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tg} ax}{b}$ $(b^2>c^2\,,\ b>0)\,,$

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax+b}{\sqrt{c^2-b^2}\operatorname{tg} ax-b}$ $(c^2>b^2\,,\ b>0)\,.$

21.5.3.2. A koszinuszfüggvényt tartlmazó integrálok

313. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$

314. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$

315. $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax.$

316. $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax.$

317. $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$

318. $\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}.$

319. $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax.$

320. $\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\sin ax.$

321. $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$

322. $\int \frac{\cos ax}{x}dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots$

A $-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ határozott integrált integrálkoszinusznak (lásd 723. old.) nevezzük és $\operatorname{Ci}(x)$-szel jelöljük.

A hatványsora: $\mathrm{Ci}(x) = C - \ln x - \dfrac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dfrac{x^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$ (lásd 468. old.), ahol C az EULER–féle állandó (lásd 468. old.).

323. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x^2} dx = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax\, dx}{x}$ (ld. 283.).

324. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax\, dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$(ld. 285.).

325. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{arth} \operatorname{Artanh}(\sin ax) = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax).$

326. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$

327. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

328. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1).$

329. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10 \cdot 8!} + \cdots \right.$

$$\left. + \frac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n!)} + \cdots \right)$$

Az E_n-ek az EULER–féle számok (lásd 418. old.).

330. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax.$

331. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{(n-1)a \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 2).$

332. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

333. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$

334. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}.$

335. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}.$

336. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\, dx}{1 + \cos ax} = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

337. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\, dx}{1 - \cos ax} = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$

338. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax(1 + \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

339. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax(1 - \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$

340. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

341. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

342. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

343. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

344. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right).$

345. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

346. $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$ $(|a|\neq|b|)$; (ha $|a|=|b|$ ld. 314.).

347. $\displaystyle\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(b-c)\operatorname{tg} ax/2}{\sqrt{b^2-c^2}},$ (ha $b^2>c^2$)

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{(c-b)\operatorname{tg} ax/2+\sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg} ax/2-\sqrt{c^2-b^2}},$$ (ha $b^2<c^2$).

348. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{b+c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (ld. 347.).

349. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (ld. 347.).

350. $\displaystyle\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (ld. 347.).

351. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (ld. 347.).

352. $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}$ $(b>0)$.

353. $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}$ $(b^2>c^2,\ b>0)$,

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{b\operatorname{tg} ax-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax+\sqrt{c^2-b^2}}$$ $(c^2>b^2,\ b>0)$.

21.5.3.3. A szinusz- és koszinuszfüggvényeket tartalmazó integrálok

354. $\displaystyle\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax.$

355. $\displaystyle\int \sin^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$

356. $\displaystyle\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax$ $(n\neq -1)$.

357. $\int \sin ax \cos^n ax\, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

358. $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\, dx$

(az n kitevő csökkentése; m és $n > 0$),

$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\, dx$

(az m kitevő csökkentése; m és $n > 0$).

359. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax.$

360. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{\sin ax} \right].$

361. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax} \right).$

362. $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2 \sin^2 ax} \right).$

363. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2 \cos^2 ax} \right).$

364. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2ax.$

365. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left[\frac{\sin ax}{2 \cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \right].$

366. $\int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2 \sin^2 ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right).$

367. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \qquad (n \neq 1)$ (ld. 361. és 363.).

368. $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \qquad (n \neq 1)$ (ld. 360. és 362.).

369. $\int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$

(az n kitevő csökkentése; $m > 0$, $n > 1$),

$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$

(az m kitevő csökkentése; $n > 0$, $m > 1$).

370. $\int \frac{\sin ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a \cos ax} = \frac{1}{a} \sec ax.$

371. $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a\cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C_1.$

372. $\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$

373. $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

374. $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin ax}{2\cos^2 ax} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right].$

375. $\int \frac{\sin^2 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n \neq 1) \qquad$ (ld. 325., 326., 328.).

376. $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln\cos ax\right).$

377. $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$

378. $\int \frac{\sin^3 ax\,dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right] \qquad (n \neq 1,\ n \neq 3).$

379. $\int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos ax} \qquad (n \neq 1).$

380. $\int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx = = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx \qquad (m \neq 1),$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} ax\,dx}{\cos^m ax} \qquad (m \neq n),$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-1} ax\,dx}{\cos^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1).$$

381. $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax.$

382. $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a\sin^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$

383. $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\sin^{n-1} ax}.$

384. $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

385. $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\sin^2 ax} - \ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

386. $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a\sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}\right) \qquad (n \neq 1) \qquad$ (ld. 289.).

387. $\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln\sin ax\right).$

388. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\sin ax + \frac{1}{\sin ax}\right).$

389. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 ax\,dx}{\sin^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} ax}\right] \qquad (n \neq 1, n \neq 3).$

390. $\displaystyle\int \frac{\cos^n ax}{\sin ax}\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin ax} (n \neq 1).$

391. $\displaystyle\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^m ax} = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1),$

$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\sin^{m-1} ax} + \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^m ax} \qquad (m \neq n),$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\,dx}{\sin^{m-2} ax} \qquad (m \neq 1).$$

392. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

393. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp\frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$

395. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$

396. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

397. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

398. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

399. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$

400. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$

401. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm\frac{1}{a}\ln\left(1 \pm \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

402. $\displaystyle\int \frac{dx}{b\sin ax + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\ln \operatorname{tg}\frac{ax+\theta}{2},$ ahol $\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$ és $\operatorname{tg}\theta = \frac{c}{b}.$

403. $\displaystyle\int \frac{\sin ax\,dx}{b + c\cos ax} = -\frac{1}{ac}\ln(b + c\cos ax).$

404. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{b + c\sin ax} = \frac{1}{ac}\ln(b + c\sin ax).$

405. $$\int \frac{dx}{b + c\cos ax + f\sin ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2 + f^2}\sin(ax + \theta)},$$

ahol $\sin\theta = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + f^2}}$ és $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{c}{f}$ (ld. 306.).

406. $$\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} ax\right).$$

407. $$\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\frac{c\operatorname{tg} ax + b}{c\operatorname{tg} ax - b}.$$

408. $$\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \qquad (a^2 \neq b^2);$$ (ha $a = b$ ld. 354.).

21.5.3.4. A tangensfüggvényt tartalmazó integrálok

409. $$\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax.$$

410. $$\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$$

411. $$\int \operatorname{tg}^3 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a}\ln\cos ax.$$

412. $$\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx.$$

413. $$\int x\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

A B_n-ek a BERNOULLI-féle számok (lásd 417. old.).

414. $$\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n!)} + \cdots$$

415. $$\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{tg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$$

416. $$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$$

417. $$\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\sin ax \pm \cos ax).$$

21.5.3.5. A kotandensfüggvényt tartalmazó integrálok

418. $$\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\sin ax.$$

419. $$\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$$

420. $$\int \operatorname{ctg}^3 ax\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a}\ln\sin ax.$$

421. $$\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx \qquad (n \neq 1).$$

422. $\int x \operatorname{ctg} ax\, dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n}B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots .$

A B_n-ek a BERNOULLIféle számok (lásd 417. old.).

423. $\int \frac{\operatorname{ctg} ax\, dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \dots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots .$

424. $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

425. $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\, dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (ld. 417.).

21.5.4. Egyéb transzcendens függvények integráljai

21.5.4.1. A hiperbolikus függvények integráljai

426. $\int \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax.$

427. $\int \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax.$

428. $\int \operatorname{sh}^2 ax\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2}x.$

429. $\int \operatorname{ch}^2 ax\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2}x.$

430. $\int \operatorname{sh}^n ax\, dx$

$$= \frac{1}{an} \operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} ax\, dx, \qquad (\text{ha } n > 0),$$

$$= \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{sh}^{n+2} ax\, dx, \qquad (\text{ha } n < 0)\,(n \neq -1).$$

431. $\int \operatorname{ch}^n ax\, dx$

$$= \frac{1}{an} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} ax\, dx, \qquad (\text{ha } n > 0),$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{ch}^{n+2} ax\, dx, \qquad (\text{ha } n < 0)\,(n \neq -1).$$

432. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{th} \frac{ax}{2}.$

433. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} e^{ax}.$

434. $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax.$

435. $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax.$

436. $\int \operatorname{th} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax.$

437. $\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sh} ax.$

438. $\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$

439. $\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$

440. $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax) \qquad (a^2 \neq b^2).$

441. $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax) \qquad (a^2 \neq b^2).$

442. $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax) \qquad (a^2 \neq b^2).$

443. $\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$

444. $\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax).$

445. $\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax).$

446. $\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$

21.5.4.2. Exponenciális függvények integráljai

447. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}.$

448. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$

449. $\int x^2 e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$

450. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

451. $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$

Az $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ határozott integrált integrálexponenciális függvénynek nevezzük (lásd 468. old.) és $\operatorname{Ei}(x)$-szel jelöljük. Ha $x > 0$, akkor az improprius integrál divergens, mert az integrálandó függvénynek a $t = 0$ pontban pólusa van; ebben az esetben $\operatorname{Ei}(x)$-en az improprius integrál főértékét értjük (lásd 468. old.).

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \cdots,$$

ahol C az EULER–féle állandó (lásd 468. old.).

452. $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right) \qquad (n \neq 1).$

453. $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$

454. $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax}).$

455. $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax}).$

456. $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arctg}\left(e^{ax}\sqrt{\frac{b}{c}}\right) \qquad (bc>0),$

$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}}\ln\frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}} \qquad (bc<0).$

457. $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$

458. $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx\,;$ (ld. 451.).

459. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$

460. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$

461. $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x)$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx\,;$ (ld. 447. és 459.).

462. $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x)$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx\,;$ (ld. 447. és 460.).

463. $\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx].$

464. $\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx].$

21.5.4.3. Logaritmusfüggvények integráljai

465. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$

466. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$

467. $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$

468. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (lnx)^{n-1}\,dx \qquad (n \neq -1).$

469. $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln\ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \cdots .$

Az $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ határozott integrált integrállogaritmusnak nevezzük (lásd 468. old.) és $\mathrm{Li}(x)$-szel jelöljük.
Ha $x > 1$, akkor ez az improprius integrál divergens, mert az integrálandó függvény a $t = 1$ helyen végtelenné válik; ebben az esetben $\mathrm{Li}(x)$-en az improprius integrál főértékét értjük (lásd 468. old.).
Az integrállogaritmus és az integrálexponenciális függvény között összefüggés áll fenn (lásd 468. old.): $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$.

470. $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$; (ld. 469.).

471. $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \qquad (m \neq -1).$

472. $\int x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx$ $(m \neq -1\,,\ n \neq -1)$; (ld. 470.).

473. $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$

474. $\int \frac{\ln x}{x^m}\,dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2x^{m-1}} \qquad (m \neq 1).$

475. $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}dx$ $(m \neq 1)$; (ld. 474.).

476. $\int \frac{x^m\,dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y}\,dy,$ ahol $y = -(m+1)\ln x$; (ld. 451.).

477. $\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

478. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x.$

479. $\int \frac{dx}{x^n\ln x} = \ln\ln x - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \cdots .$

480. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

481. $\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1}\int \frac{dx}{x^p(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

482. $\int \ln\sin x\,dx = x\ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \cdots - \frac{2^{2n-1}B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \cdots .$

A B_n-ek a BERNOULLI-féle számok (lásd 417. old.).

483. $\int \ln\cos x\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \dots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} - \dots .$

484. $\int \ln\operatorname{tg} x\,dx = x\ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots .$

485. $\int \sin\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x).$

486. $\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x).$

487. $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx\,;$ (ld. 451.).

21.5.4.4. A trigonometrikus függvények inverzeinek integráljai

488. $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}.$

489. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

490. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}.$

491. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} + \dots .$

492. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

493. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$

494. $\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

495. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}.$

496. $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7} - \dots .$

497. $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

498. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$

499. $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$

500. $\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

501. $\int x^n \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2} \qquad (n \neq -1).$

502. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \cdots \qquad (|x| < |a|).$

503. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

504. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \qquad (n \neq 1).$

505. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$

506. $\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

507. $\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$

508. $\int x^n\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2} \qquad (n \neq -1).$

509. $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}\ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} - \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} - \cdots.$

510. $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

511. $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \qquad (n \neq 1).$

21.5.4.5. A hiperbolikus függvények inverzeinek integráljai

512. $\int \operatorname{arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}.$

513. $\int \operatorname{arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}.$

514. $\int \operatorname{arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2).$

515. $\int \operatorname{arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2).$

21.6. Határozott integrál

21.6.1. Trigonometrikus függvények határozott integráljai

Az m, n természetes számokra teljesül:

1. $\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0\,.$ (21.1) **2.** $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0\,.$ (21.2) **3.** $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0\,.$ (21.3)

4. $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n\,, \\ \pi, & \text{ha } m = n\,. \end{cases}$ (21.4) **5.** $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n\,, \\ \pi, & \text{ha } m = n\,. \end{cases}$ (21.5)

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\cdots\frac{n-1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan}\,, \\ \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \quad (n \geq 2)\,.$ (21.6)

7a. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)\,.$ (21.7a)

$\mathrm{B}(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ a bétafüggvény, vagy elsőfajú EULER-féle integrál, $\Gamma(x)$ a gamma-függvény, vagy másodfajú EULER-féle integrál (lásd 469. old.).

A (21.7a) képlet tetszőleges α, β mellett teljesül; az alábbi integrálok kiszámítására használjuk őket:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx\,, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x}\,dx\,, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}} \quad \text{stb.}$$

A pozitív és egész α, β számokra adódik:

7b. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\,dx = \dfrac{\alpha!\beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}\,.$ (21.7b)

8. $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a > 0\,, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a < 0\,. \end{cases}$ (21.8)

9. $\int_0^{\alpha} \dfrac{\cos ax\,dx}{x} = \infty \qquad (\alpha \text{ tetszőleges})\,.$ (21.9)

10. $\int_0^{\infty} \dfrac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a > 0\,, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a < 0\,. \end{cases}$ (21.10)

11. $\int_0^{\infty} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\dfrac{b}{a}\,.$ (21.11)

12. $$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } |a|<1\,, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{ha } |a|=1\,, \\ 0, & \text{ha } |a|>1\,. \end{cases} \tag{21.12}$$

13. $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \tag{21.13}$$

14. $$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2+x^2}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}e^{-|ab|} \quad \text{(az előjel megegegyezik } b \text{ előjelével)}\,. \tag{21.14}$$

15. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}\,. \tag{21.15}$$

16. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|\,. \tag{21.16}$$

17. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \tag{21.17}$$

18. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}, \quad \text{ha } |k|<1\,. \tag{21.18}$$

19. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k}\arcsin k, \quad \text{ha } |k|<1\,. \tag{21.19}$$

20. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}(\mathrm{K}-\mathrm{E}), \quad \text{ha } |k|<1\,. \tag{21.20}$$

Ebben és a következő esetben az E és K teljes elliptikus integrálok (lásd 444. old.):
$\mathrm{E} = \mathrm{E}\left(k\,,\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{K} = F\left(k\,,\frac{\pi}{2}\right)$ (lásd elliptikus integrál táblázat, 1088. old.).

21. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}[\mathrm{E}-(1-k^2)\,\mathrm{K}]\,. \tag{21.21}$$

22. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos ax\,dx}{1-2b\cos x+b^2} = \frac{\pi b^a}{1-b^2} \quad a\geq 0 \text{ és egész } , |b|<1\,. \tag{21.22}$$

21.6.2. Exponenciális függvények határozott integráljai

(Az integrandusban szerepelnek algebrai, trigonometrikus és logaritmikus függvények is.)

23. $$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad \text{ha } a>0\,,\ n>-1\,, \tag{21.23a}$$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad \text{ha } n>0\,. \tag{21.23b}$$

$\Gamma(n)$ a gamma-függvényt (lásd 469. old.) jelöli;
(lásd gamma-függvény táblázat, 1090. old.).

24. $$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}, \quad \text{ha } a>0\,,\ n>-1\,, \tag{21.24a}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}a^{k+1/2}}, \quad \text{ha } n\,(n=2k)\,,\ \text{egész, páros} \tag{21.24b}$$

$$= \frac{k!}{2a^{k+1}}, \qquad \text{ha } n\,(n=2k+1)\,,\ \text{egész, páratlan}\,. \tag{21.24c}$$

25. $$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad \text{ha } a>0\,. \tag{21.25}$$

26. $$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}, \quad \text{ha } a>0\,. \tag{21.26}$$

27. $$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot e^{-b^2/4a^2}, \quad \text{ha } a>0\,. \tag{21.27}$$

28. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{21.28}$$

29. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{21.29}$$

30. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx = \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}, \quad \text{ha } a>0\,. \tag{21.30}$$

31. $$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C \approx -0,5772 \tag{21.31}$$

C jelöli az EULER-féle állandót (lásd 468. old.).

21.6.3. Logaritmikus függvények határozott integráljai

(Az integrandus tartalmazhat algebrai és trigonometrikus függvényeket is.)

32. $$\int_0^1 \ln|\ln x|\,dx = -C = -0,5772 \quad \text{(visszavezetjük a 21.31-re)}\,. \tag{21.32}$$

C jelöli az EULER-féle állandót (lásd 468. old.).

33. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(visszavezetjük 21.28-ra)}\,. \tag{21.33}$$

34. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{(visszavezetjük 21.29-re)}\,. \tag{21.34}$$

35. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{21.35}$$

36. $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2\,. \tag{21.36}$$

37. $$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1), \quad \text{ha } (-1 < a < \infty)\,. \tag{21.37}$$

$\Gamma(x)$ a gamma-függvényt (lásd 469. old.) (lásd gamma-függvény táblázat, 1090. old.).

38. $$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,. \tag{21.38}$$

39. $$\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}\,. \tag{21.39}$$

40. $$\int_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1\,. \tag{21.40}$$

41. $$\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}, \quad \text{ha } a \geq b\,. \tag{21.41}$$

42. $$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a, & \text{ha} \quad (a \geq b > 0)\,, \\ 2\pi\ln b, & \text{ha} \quad (b \geq a > 0)\,. \end{cases} \tag{21.42}$$

43. $$\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{tg} x\,dx = 0\,. \tag{21.43}$$

44. $$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2\,. \tag{21.44}$$

21.6.4. Algebrai függvények határozott integrálja

45. $$\int_0^1 x^a(1-x)^\beta\,dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$
$$= \mathrm{B}\,(\alpha+1\,,\ \beta+1)\,, \quad \text{(visszavezetjük 21.7a-ra)}\,. \tag{21.45}$$

$\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ a bétafüggvényt, vagy elsőfajú EULER-féle integrált (lásd 1083. old.) jelöli, $\Gamma(x)$ a gamma-függvényt, vagy másodfajú EULER-féle integrált (lásd 469. old.) jelöli.

46. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \text{ha } a<1\,. \tag{21.46}$$

47. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi\operatorname{ctg} a\pi, \quad \text{ha } a<1\,. \tag{21.47}$$

48. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\dfrac{a\pi}{b}}, \qquad \text{ha } 0<a<b\,. \tag{21.48}$$

49. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{a}\right)}{a\,\Gamma\left(\dfrac{2+a}{2a}\right)}\,. \tag{21.49}$$

$\Gamma(x)$ a gamma-függvényt (lásd 469. old.) jelöli (lásd gamma-függvény táblázat, 1090. old.).

50. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{2\sin a} \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{21.50}$$

51. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin x} \quad \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{21.51}$$

21.7. Elliptikus integrál

21.7.1. Elsőfajú elliptikus integrál $F(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$

φ /°	α /°									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

21.7.2. Másodfajú elliptikus integrál $E(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$

φ /°	α /°									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

21.7.3. Teljes elliptikus integrál, $k = \sin\alpha$

α /°	K	E	α /°	K	E	α /°	K	E
0	1,5708	1,5708	**30**	1,6858	1,4675	**60**	2,1565	1,2111
1	1,5709	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	**35**	1,7312	1,4323	**65**	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5632	38	1,7633	1,4092	68	2,4198	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	**40**	1,7868	1,3931	**70**	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	**45**	1,8541	1,3506	**75**	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468
20	1,6200	1,5238	**50**	1,9356	1,3055	**80**	3,1534	1,0401
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6365	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	**55**	2,0347	1,2587	**85**	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0080
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2206	89	5,4349	1,0008
						90	∞	1,0000

21.8. Gamma-függvény

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	**1,25**	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	**1,30**	0,89747	**1,55**	0,88887	**1,80**	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	**1,35**	0,89115	**1,60**	0,89352	**1,85**	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	**1,40**	0,88726	**1,65**	0,90012	**1,90**	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	**1,45**	0,88566	**1,70**	0,90864	**1,95**	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88592	74	0,91683	99	0,99581
1,25	0,90640	**1,50**	0,88623	**1,75**	0,91906	**2,00**	1,00000

A gamma-függvény értékei $x < 1$ ($x \neq 0, -1, -2, \ldots$) és $x > 2$ esetekre az alábbi képletek segítségével számolhatók:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

■ **A:** $\Gamma(0{,}7) = \dfrac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = \dfrac{0{,}90864}{0,7} = 1{,}2981.$

■ **B:** $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5 \cdot \Gamma(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \Gamma(1{,}5) = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}88623 = 3{,}32336.$

21.9. Bessel–függvények (hengerfüggvények)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,0000	+0,0000	$-\infty$	$-\infty$	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	0,9975	0,0499	−1,5342	−6,4590	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	0,9900	0,0995	1,0181	3,3238	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	0,8812	0,3290	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	0,8463	0,3688	−0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	−0,0517	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	0,1104	0,5560	0,5208	+0,0015	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	0,1424	0,4416	0,2605	0,2276	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3879	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	0,4026	+0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	0,4018	−0,0272	+0,0234	0,4078	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	0,3766	0,1386	0,0938	0,3680	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	0,2097	0,3147	0,2921	0,1812	24,91	22,20	0,004119	0,004521

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
							0,00	0,00
5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479	27,24	24,34	3691	4045
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	3308	3619
5,2	0,1103	0,3432	0,3313	0,0792	32,58	29,25	2966	3239
5,3	0,0758	0,3460	0,3374	0,0445	35,65	32,08	2659	2900
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0101	39,01	35,18	2385	2597
5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238	42,69	38,59	2139	3226
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	1918	2083
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	1721	1866
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	1544	1673
5,9	0,1220	0,2951	0,3044	0,1481	61,38	55,90	1386	1499
6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750	67,23	61,34	1244	1344
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	1117	1205
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	1003	1081
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	09001	09691
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	08083	08693
6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741	106,3	97,74	07259	07799
6,6	0,2740	0,1250	0,1452	0,2857	116,5	107,3	06520	06998
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	05857	06280
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	05262	05636
6,9	0,2981	0,0349	0,0563	0,3029	153,7	142,1	04728	05059
7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027	168,6	156,0	04248	04542
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0042	0,2995	185,0	171,4	03817	04078
7,2	0,2951	0,0543	0,0339	0,2934	202,9	188,3	03431	03662
7,3	0,2882	0,0826	0,0628	0,2846	222,7	206,8	03084	03288
7,4	0,2786	0,1096	0,0907	0,2731	244,3	227,2	02772	02953
7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591	268,2	249,6	02492	02653
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	02240	02383
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	02014	02141
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	01811	01924
7,9	0,1944	0,2192	0,2065	0,1817	389,4	363,9	01629	01729
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	−0,1581	427,6	399,9	01465	01554
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	01317	01396
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	01185	01255
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	01066	01128
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	009588	01014
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	−0,0262	683,2	641,6	008626	009120
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	007761	008200
8,7	−0,0125	0,2697	0,2700	0,0280	824,4	775,5	006983	007374
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0544	905,8	852,7	006283	006631
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	995,2	937,5	005654	005964
9,0	−0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1094	1031	005088	005364
9,1	0,1142	0,2324	0,2383	0,1275	1202	1134	004579	004825
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	004121	004340
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	003710	003904
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	003339	003512
9,5	−0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032	1753	1658	003036	003160
9,6	0,2090	0,1395	0,1502	0,2171	1927	1824	002706	002843
9,7	0,2218	0,1166	0,1279	0,2287	2119	2006	002436	002559
9,8	0,2323	0,0928	0,1045	0,2379	2329	2207	002193	002302
9,9	0,2403	0,0684	0,0804	0,2447	2561	2428	001975	002072
10,0	−0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	001778	001865

21.10. Legendre-polinomok (gömbfüggvények)

$$P_0(x) = 1; \qquad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5); \qquad P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	−0,3000	0,0000	0,3750	0,0000	−0,3125	0,0000
0,05	−0,4962	−0,0747	0,3657	0,0927	−0,2962	−0,1069
0,10	−0,4850	−0,1475	0,3379	0,1788	−0,2488	−0,1995
0,15	−0,4662	−0,2166	0,2928	0,2523	−0,1746	−0,2649
0,20	−0,4400	−0,2800	0,2320	0,3075	−0,0806	−0,2935
0,25	−0,4062	−0,3359	0,1577	0,3397	+0,0243	−0,2799
0,30	−0,3650	−0,3825	+0,0729	0,3454	0,1292	−0,2241
0,35	−0,3162	−0,4178	−0,0187	0,3225	0,2225	−0,1318
0,40	−0,2600	−0,4400	−0,1130	0,2706	0,2926	−0,0146
0,45	−0,1962	−0,4472	−0,2050	0,1917	0,3290	+0,1106
0,50	−0,1250	−0,4375	−0,2891	+0,0898	0,3232	0,2231
0,55	−0,0462	−0,4091	−0,3590	−0,0282	0,2708	0,3007
0,60	+0,0400	−0,3600	−0,4080	−0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	−0,2884	−0,4284	−0,2705	+0,0347	0,2737
0,70	0,2350	−0,1925	−0,4121	−0,3652	−0,1253	+0,1502
0,75	0,3438	−0,0703	−0,3501	−0,4164	−0,2808	−0,0342
0,80	0,4600	+0,0800	−0,2330	−0,3995	−0,3918	−0,2397
0,85	0,5838	0,2603	−0,0506	−0,2857	−0,4030	−0,3913
0,90	0,7150	0,4725	+0,2079	−0,0411	−0,2412	−0,3678
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	+0,3727	+0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

21.11. Laplace-transzformáció

(ld. 738 oldal)

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,dt\,, \quad f(t) = 0, \ \text{ha} \ t < 0\,.$$

A táblázatban szereplő C az EULER-féle állandó (lásd 468. old.) $C = 0{,}577216\,.$

	$F(p)$	$f(t)$
1	0	0
2	$\dfrac{1}{p}$	1
3	$\dfrac{1}{p^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\alpha t}$
5	$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\beta t} - \mathrm{e}^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
6	$\dfrac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\dfrac{\beta\mathrm{e}^{\beta t} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
7	$\dfrac{1}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sin\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,t$
8	$\dfrac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin \alpha t$
9	$\dfrac{\alpha\cos\beta + p\sin\beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$
10	$\dfrac{p}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$	$\left(\cos\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,t - \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sin\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,t\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}$
11	$\dfrac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos \alpha t$
12	$\dfrac{p\cos\beta - \alpha\sin\beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos(\alpha t + \beta)$
13	$\dfrac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\mathrm{sh}\,\alpha t$
14	$\dfrac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$

	$F(p)$	$f(t)$
15	$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$	$-\dfrac{(\beta-\gamma)\mathrm{e}^{\alpha t}+(\gamma-\alpha)\mathrm{e}^{\beta t}+(\alpha-\beta)\mathrm{e}^{\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
16	$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}-[1+(\alpha-\beta)t]\,\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
17	$\dfrac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}-[\alpha+\beta(\alpha-\beta)t]\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
18	$\dfrac{p^2}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t}-[2\alpha-\beta+\beta(\alpha-\beta)t]\,\beta\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
19	$\dfrac{1}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\alpha\sin\beta t-\beta\sin\alpha t}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}$
20	$\dfrac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\cos\beta t-\cos\alpha t}{(\alpha^2-\beta^2)}$
21	$\dfrac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	$\cos^2\alpha t$
22	$\dfrac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	$\sin^2\alpha t$
23	$\dfrac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$	$\mathrm{ch}^2\,\alpha t$
24	$\dfrac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$	$\mathrm{sh}^2\,\alpha t$
25	$\dfrac{2\alpha^2 p}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin\alpha t\cdot\mathrm{sh}\,\alpha t$
26	$\dfrac{\alpha(p^2+2\alpha^2)}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin\alpha t\cdot\mathrm{ch}\,\alpha t$
27	$\dfrac{\alpha(p^2-2\alpha^2)}{p^4+4\alpha^4}$	$\cos\alpha t\cdot\mathrm{sh}\,\alpha t$
28	$\dfrac{p^3}{p^4+4\alpha^4}$	$\cos\alpha t\cdot\mathrm{ch}\,\alpha t$
29	$\dfrac{\alpha p}{(p^2+\alpha^2)^2}$	$\dfrac{t}{2}\sin\alpha t$

	$F(p)$	$f(t)$
30	$\dfrac{\alpha p}{(p^2-\alpha^2)^2}$	$\dfrac{t}{2}\operatorname{sh}\alpha t$
31	$\dfrac{\alpha\beta}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$	$\dfrac{\beta\operatorname{sh}\alpha t-\alpha\operatorname{sh}\beta t}{\alpha^2-\beta^2}$
32	$\dfrac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$	$\dfrac{\operatorname{ch}\alpha t-\operatorname{ch}\beta t}{\alpha^2-\beta^2}$
33	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
34	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
35	$\dfrac{1}{p^n\sqrt{p}}$	$\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}}\,t^{n-\frac{1}{2}}\quad(n>0\,,\ \text{ganz})$
36	$\dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha t}$
37	$\sqrt{p+\alpha}-\sqrt{p+\beta}$	$\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$
38	$\sqrt{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}$	$\dfrac{\sin\alpha t}{t\sqrt{2\pi t}}$
39	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}{p^2+\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\sin\alpha t$
40	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\alpha^2}+p}{p^2+\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\cos\alpha t$
41	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2-\alpha^2}-p}{p^2-\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\operatorname{sh}\alpha t$
42	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2-\alpha^2}+p}{p^2-\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\operatorname{ch}\alpha t$
43	$\dfrac{1}{p\sqrt{p+\alpha}}$	$\dfrac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^{\sqrt{\alpha t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$
44	$\dfrac{1}{(p+\alpha)\sqrt{p+\beta}}$	$\dfrac{2\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi(\beta-\alpha)}}\cdot\displaystyle\int_0^{\sqrt{(\beta-\alpha)t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$

	$F(p)$	$f(t)$
45	$\dfrac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} + 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\alpha t}} \mathrm{e}^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$ (nulladrendű BESSEL-függvény, 518. old.)
47	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$ (módosított nulladrendű BESSEL-függvény 518. old.)
48	$\dfrac{1}{\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} \cdot I_0\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\,t\right)$
49	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+2\alpha p+\beta^2}}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot J_0\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t\right)$
50	$\dfrac{\mathrm{e}^{1/p}}{p\sqrt{p}}$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
51	$\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{p}$	$\dfrac{\sin \alpha t}{t}$
52	$\operatorname{arctg}\dfrac{2\alpha p}{p^2-\alpha^2+\beta^2}$	$\dfrac{2}{t}\sin \alpha t \cdot \cos \beta t$
53	$\operatorname{arctg}\dfrac{p^2-\alpha p+\beta}{\alpha\beta}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}-1}{t}\sin \beta t$
54	$\dfrac{\ln p}{p}$	$-C-\ln t$
55	$\dfrac{\ln p}{p^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}[\psi(n)-\ln t]\,, \quad \psi(n)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-C$
56	$\dfrac{(\ln p)^2}{p}$	$(\ln t + C)^2 - \dfrac{\pi^2}{6}$
57	$\ln\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}$	$\dfrac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{\beta t}-\mathrm{e}^{\alpha t}\right)$
58	$\ln\dfrac{p+\alpha}{p-\alpha} = 2\operatorname{arth}\dfrac{\alpha}{p}$	$\dfrac{2}{t}\operatorname{sh}\alpha t$
59	$\ln\dfrac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$	$2\cdot\dfrac{\cos \beta t-\cos \alpha t}{t}$
60	$\ln\dfrac{p^2-\alpha^2}{p^2-\beta^2}$	$2\cdot\dfrac{\operatorname{ch}\beta t-\operatorname{ch}\alpha t}{t}$

	$F(p)$	$f(t)$
61	$\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}}{t\sqrt{t}}$
62	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha \geq 0$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
63	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p\right)^{\nu}}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1$	$\alpha^{\nu}J_{\nu}(\alpha t)$ (lásd BESSEL-függvény, 518. old.)
64	$\dfrac{\left(p-\sqrt{p^2-\alpha^2}\right)^{\nu}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1$	$\alpha^{\nu}I_{\nu}(\alpha t)$ (lásd BESSEL-függvény, 519. old.)
65	$\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\beta p}$ $(\beta > 0$, valós$)$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ 1, & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
66	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ J_0\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
67	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ I_0\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
68	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}}{\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\frac{t}{2}}I_0\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
69	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}}{p^2+\alpha^2}\left(\beta+\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}\right)$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ \dfrac{\sqrt{t^2-\beta^2}}{\alpha}J_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
70	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}}{p^2-\alpha^2}\left(\beta+\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\right)$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ \dfrac{\sqrt{t^2-\beta^2}}{\alpha}I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
71	$\mathrm{e}^{-\beta p} - \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ \dfrac{\beta\alpha}{\sqrt{t^2-\beta^2}}J_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$
72	$\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}} - \mathrm{e}^{-\beta p}$	$\begin{cases} 0, & \text{ha } t < \beta \\ \dfrac{\beta\alpha}{\sqrt{t^2-\beta^2}}I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right), & \text{ha } t > \beta \end{cases}$

	$F(p)$	$f(t)$
73	$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}}{p}$	$\begin{cases} 0 \ , \text{ ha } t>\alpha \\ 1, \text{ ha } 0<t<\alpha \end{cases}$
74	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha p}-\mathrm{e}^{-\beta p}}{p}$	$\begin{cases} 0, \text{ ha } 0<t<\alpha \\ 1, \text{ ha } \alpha<t<\beta \\ 0, \text{ ha } t>\beta \end{cases}$

21.12. Fourier-transzformáció

A táblázatokban használt jelölések:

C: EULER-féle állandó ($C = 0{,}577215\ldots$)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0$$ (gamma-függvény, lásd 469. old.),

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2}z)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$ (BESSEL-függvény, lásd 518. old.),

$$K_\nu(z) = \tfrac{1}{2}\pi(\sin(\pi\nu))^{-1}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)],$$ ahol

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi\nu} J_\nu(z\, e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi})$$ (módosított BESSEL-függvény, lásd 519. old.),

$$\left.\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt \\ S(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt \end{aligned}\right\}$$ (FRESNEL-integrál, lásd 724. old.),

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \\ \mathrm{si}(x) &= -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$ (integrálszinusz, lásd 723. old.),

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$ (integrálkoszinusz, lásd 723. old.).

A táblázatban szereplő rövidítések megegyeznek a fejezetekben szereplő definíciókban használtakkal.

21.12.1. Fourier-koszinusz-transzformáció

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\, \cos(t\,\omega)\, dt$
1.	$1\,, \quad 0 < t < a$ $0\,, \quad t > a$	$\dfrac{\sin(a\,\omega)}{\omega}$
2.	$t, \quad 0 < t < 1$ $2 - t, \quad 1 < t < 2$ $0, \quad t > 2$	$4\left(\cos\omega \sin^2\dfrac{\omega}{2}\right)\omega^{-2}$
3.	$0\,, \quad 0 < t < a$ $\dfrac{1}{t}\,, \quad t > a$	$-\mathrm{Ci}(a\,\omega)$
4.	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\omega}}$
5.	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,, \quad 0 < t < a$ $0\,, \quad t > a$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{2\,C\,(a\omega)}{\sqrt{\omega}}$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\cos(t\,\omega)\,dt$
6.	$0\,, \quad 0 < t < a$ $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,, \quad t > a$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1 - 2\,C\,(a\omega)}{\sqrt{\omega}}$
7.	$(a+t)^{-1}\,, \quad a > 0$	$[-\,\mathrm{si}\,(a\omega)\,\sin\,(a\omega) - \mathrm{Ci}\,(a\omega)\,\cos\,(a\omega)]$
8.	$(a-t)^{-1}\,, \quad a > 0$	$\left[\cos\,(a\omega)\,\mathrm{Ci}\,(a\omega) + \sin\,(a\omega)\,\left(\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{Si}\,(a\omega)\right)\right]$
9.	$(a^2 + t^2)^{-1}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{e^{-a\omega}}{a}$
10.	$(a^2 - t^2)^{-1}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\sin\,(a\omega)}{\omega}$
11.	$\dfrac{b}{b^2 + (a-t)^2} + \dfrac{b}{b^2 + (a+t)^2}$	$\pi\,e^{-b\omega}\,\cos\,(a\omega)$
12.	$\dfrac{a+t}{b^2 + (a+t)^2} + \dfrac{a-t}{b^2 + (a-t)^2}$	$\pi\,e^{-b\omega}\,\sin(a\omega)$
13.	$(a^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$K_0\,(a\omega)$
14.	$(a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\,, \quad 0 < t < a$ $0\,, \quad t > a$	$\dfrac{\pi}{2}\,J_0\,(a\omega)$
15.	$t^{-\nu}\,, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$	$\sin\left(\dfrac{\pi\,\nu}{2}\right)\,\Gamma\,(1-\nu)\,\omega^{\nu\,-\,1}$
16.	$e^{-a\,t}$	$\dfrac{a}{a^2 + \omega^2}$
17.	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$	$\dfrac{1}{2}\,\ln\left(\dfrac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2}\right)$
18.	$\sqrt{t}\,e^{-at}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,(a^2 + \omega^2)^{-\frac{3}{4}}\,\cos\left(\dfrac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\left(\dfrac{\omega}{a}\right)\right)$
19.	$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\left(\dfrac{a + (a^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 + \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos(t\,\omega)\,dt$
20.	$t^n\,e^{-at}$	$n\,!\,a^{n+1}(a^2+\omega^2)^{-(n+1)} \sum_{0\le 2m\le n+1} (-1)^m \binom{n+1}{2m} \left(\frac{\omega}{a}\right)^{2m}$
21.	$t^{\nu-1}\,e^{-at}$	$\Gamma(\nu)\,(a^2+\omega^2)^{-\frac{\nu}{2}}\,\cos\left(\nu\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right)$
22.	$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)$	$-\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2\,\pi\omega})$
23.	$e^{-a\,t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
24.	$t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{-\sqrt{2a\omega}}(\cos\sqrt{2a\omega}-\sin\sqrt{2a\omega})$
25.	$t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\sqrt{2a\omega}}\cos\sqrt{2a\omega}$
26.	$\ln t\,, \quad 0<t<1$ $0\,, \quad t>1$	$-\frac{\operatorname{Si}(\omega)}{\omega}$
27.	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left(C+\frac{\pi}{2}+\ln 4\omega\right)$
28.	$(t^2-a^2)^{-1}\ln\left(\frac{t}{a}\right)$	$\frac{\pi}{2}\quad\frac{1}{a}\left(\sin(a\omega)\,\operatorname{Ci}(a\omega)-\cos(a\omega)\operatorname{si}(a\omega)\right)$
29.	$(t^2-a^2)^{-1}\ln(bt)$	$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a}\left\{\sin(a\omega)\,[\operatorname{Ci}(a\omega)-\ln(ab)]-\cos(a\omega)\operatorname{si}(a\omega)\right\}$
30.	$\frac{1}{t}\ln(1+t)$	$\frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{Ci}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2+\left(\operatorname{si}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2\right]$
31.	$\ln\left\lvert\frac{a+t}{b-t}\right\rvert$	$\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\pi}{2}\,[\cos(b\omega)-\cos(a\omega)]\right.$ $+\cos(b\omega)\operatorname{Si}(b\omega)+\cos(a\omega)\operatorname{Si}(a\omega)$ $\left.-\sin(a\omega)\,\operatorname{Ci}(a\omega)-\sin(b\omega)\,\operatorname{Ci}(b\omega)\right\}$
32.	$e^{-at}\,\ln t$	$-\frac{1}{a^2+\omega^2}\left[aC+\frac{a}{2}\,\ln(a^2+\omega^2)+\omega\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\cos(t\,\omega)\,dt$
33.	$\ln\left(\dfrac{a^2+t^2}{b^2+t^2}\right)$	$\dfrac{\pi}{\omega}\,(e^{-b\omega}-e^{-a\omega})$
34.	$\ln\left\lvert\dfrac{a^2+t^2}{b^2-t^2}\right\rvert$	$\dfrac{\pi}{\omega}\,(\cos(b\omega)-e^{-a\omega})$
35.	$\dfrac{1}{t}\,\ln\left(\dfrac{a+t}{a-t}\right)^2$	$-\,2\,\pi\,\mathrm{si}\,(a\omega)$
36.	$\dfrac{\ln(a^2+t^2)}{\sqrt{a^2+t^2}}$	$-\left[\left(C+\ln\left(\dfrac{2\omega}{a}\right)\right)\,K_0(a\omega)\right]$
37.	$\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right)$	$\pi\,\dfrac{1-e^{-a\omega}}{\omega}$
38.	$\ln\left\lvert 1-\dfrac{a^2}{t^2}\right\rvert$	$\pi\,\dfrac{1-\cos(a\omega)}{\omega}$
39.	$\dfrac{\sin(at)}{t}$	$\dfrac{\pi}{2}\,, \quad \omega < a$ $\dfrac{\pi}{4}\,, \quad \omega = a$ $0\,, \quad \omega > a$
40.	$\dfrac{t\,\sin(at)}{t^2+b^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\,e^{-ab}\,\mathrm{ch}\,(b\omega)\,, \quad \omega < a$ $-\,\dfrac{\pi}{2}\,e^{-b\omega}\,\mathrm{sh}\,(ab)\,, \quad \omega > a$
41.	$\dfrac{\sin(at)}{t\,(t^2+b^2)}$	$\dfrac{\pi}{2}\,b^{-2}\,(1-e^{-ab}\,\mathrm{ch}\,(b\omega))\,, \quad \omega < a$ $\dfrac{\pi}{2}\,b^{-2}\,e^{-b\omega}\,\mathrm{sh}\,(ab)\,, \quad \omega > a$
42.	$e^{-bt}\,\sin(at)$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a+\omega}{b^2+(a+\omega)^2}+\dfrac{a-\omega}{b^2+(a-\omega)^2}\right]$
43.	$\dfrac{e^{-t}\,\sin t}{t}$	$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2}{\omega^2}\right)$
44.	$\dfrac{\sin^2(at)}{t}$	$\dfrac{1}{4}\,\ln\left\lvert 1-4\,\dfrac{a^2}{\omega^2}\right\rvert$
45.	$\dfrac{\sin(at)\,\sin(bt)}{t}$	$\dfrac{1}{2}\,\ln\left\lvert\dfrac{(a+b)^2-\omega^2}{(a-b)^2-\omega^2}\right\rvert$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\cos(t\,\omega)\,dt$
46.	$\dfrac{\sin^2(at)}{t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}\omega\right)$, $\omega < 2a$ 0, $\omega > 2a$
47.	$\dfrac{\sin^3(at)}{t^2}$	$\dfrac{1}{8}\{(\omega+3a)\,\ln(\omega+3a) + (\omega-3a)\,\ln\lvert\omega-3a\rvert - (\omega+a)\,\ln(\omega+a) - (\omega-a)\,\ln\lvert\omega-a\rvert\}$
48.	$\dfrac{\sin^3(at)}{t^3}$	$\dfrac{\pi}{8}(3a^2-\omega^2)$, $0 < \omega < a$ $\dfrac{\pi}{4}\omega^2$, $\omega = a$ $\dfrac{\pi}{16}(3a-\omega)^2$, $a < \omega < 3a$ 0, $\omega > 3a$
49.	$\dfrac{1-\cos(at)}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert 1-\dfrac{a^2}{\omega^2}\right\rvert$
50.	$\dfrac{1-\cos(at)}{t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}(a-\omega)$, $\omega < a$ 0, $\omega > a$
51.	$\dfrac{\cos(at)}{b^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{-ab}\,\operatorname{ch}(b\omega)}{b}$, $\omega < a$ $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{-b\omega}\,\operatorname{ch}(ab)}{b}$, $\omega > a$
52.	$e^{-bt}\,\cos(at)$	$\dfrac{b}{2}\left[\dfrac{1}{b^2+(a-\omega)^2}+\dfrac{1}{b^2+(a+\omega)^2}\right]$
53.	$e^{-bt^2}\,\cos(at)$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\,e^{-\frac{a^2+\omega^2}{4b}}\,\operatorname{ch}\left(\dfrac{a\omega}{2b}\right)$
54.	$\dfrac{t}{b^2+t^2}\,\operatorname{tg}(at)$	$\pi\,\operatorname{ch}(b\omega)\,(1+e^{2ab})^{-1}$
55.	$\dfrac{t}{b^2+t^2}\,\operatorname{ctg}(at)$	$\pi\,\operatorname{ch}(b\omega)\,(e^{2ab}-1)^{-1}$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\cos(t\,\omega)\,dt$
56.	$\sin(at^2)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)-\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right)$
57.	$\sin[a(1-t^2)]$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\cos\left(a+\frac{\pi}{4}+\frac{\omega^2}{4a}\right)$
58.	$\frac{\sin(at^2)}{t^2}$	$\frac{\pi}{2}\,\omega\left[S\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)-C\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]+\sqrt{2a}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega^2}{4a}\right)$
59.	$\frac{\sin(at^2)}{t}$	$\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left[C\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]^2-\left[S\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]^2\right\}$
60.	$e^{-at^2}\,\sin(bt^2)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}}\,a\omega^2\,(a^2+b^2)^{-1}$ $\cdot\,\sin\left[\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{b\omega^2}{4\,(a^2+b^2)}\right]$
61.	$\cos(at^2)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)+\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]$
62.	$\cos[a(1-t^2)]$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\sin\left(a+\frac{\pi}{4}+\frac{\omega^2}{4a}\right)$
63.	$e^{-at^2}\,\cos(bt^2)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}}\,a\omega^2\,(a^2+b^2)^{-1}$ $\cdot\,\cos\left[\frac{b\omega^2}{4\,(a^2+b^2)}-\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$
64.	$\frac{1}{t}\,\sin\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{\pi}{2}\,J_0\left(2\sqrt{a\omega}\right)$
65.	$\frac{1}{\sqrt{t}}\,\sin\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left[\sin\left(2\sqrt{a\omega}\right)+\cos\left(2\sqrt{a\omega}\right)-e^{-2\sqrt{a\omega}}\right]$
66.	$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3\,\sin\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\sin\left(2\sqrt{a\omega}\right)+\cos\left(2\sqrt{a\omega}\right)+e^{-2\sqrt{a\omega}}\right]$
67.	$\frac{1}{\sqrt{t}}\,\cos\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left[\cos\left(2\sqrt{a\omega}\right)-\sin\left(2\sqrt{a\omega}\right)+e^{-2\sqrt{a\omega}}\right]$
68.	$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3\,\cos\left(\frac{a}{t}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\left(2\sqrt{a\omega}\right)-\sin\left(2\sqrt{a\omega}\right)+e^{-2\sqrt{a\omega}}\right]$

	$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos(t\omega)\,dt$
69.	$\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(a\sqrt{t}\right)$	$2\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\left[C\left(\frac{a^2}{4\omega}\right)\sin\left(\frac{a^2}{4\omega}\right) - S\left(\frac{a^2}{4\omega}\right)\cos\left(\frac{a^2}{4\omega}\right)\right]$
70.	$e^{-bt}\sin\left(a\sqrt{t}\right)$	$\frac{a}{2}\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}a^2b\,(b^2+\omega^2)^{-1}}$ $\cdot x\,cos\left[\frac{a^2\omega}{4\,(b^2+\omega^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{b}\right)\right]$
71.	$\frac{\sin\left(a\sqrt{t}\right)}{t}$	$\pi\left[S\left(\frac{a^2}{4\omega}\right) + C\left(\frac{a^2}{4\omega}\right)\right]$
72.	$\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(a\sqrt{t}\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4\omega}\right)$
73.	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}\cos\left(b\sqrt{t}\right)$	$\sqrt{\pi}\,(a^2+\omega^2)^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}ab^2\,(a^2+b^2)^{-1}}$ $\cdot\cos\left[\frac{b^2\omega}{4\,(a^2+\omega^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$
74.	$e^{-a\sqrt{t}}\cos\left(a\sqrt{t}\right)$	$\sqrt{\pi}\,a\,(2\omega)^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{a^2}{2\omega}}$
75.	$\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\left[\cos\left(a\sqrt{t}\right) - \sin\left(a\sqrt{t}\right)\right]$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,e^{-\frac{a^2}{2\omega}}$

21.12.2. Fourier-szinusz-transzformáció

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin(t\omega)\,dt$
1.	1, $0 < t < a$ 0, $t > a$	$\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega}$
2.	t, $0 < t < 1$ $2-t$, $1 < t < 2$ 0, $t > 2$	$4\omega^{-2}\sin\omega\,\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$
3.	$\frac{1}{t}$	$\frac{\pi}{2}$
4.	$\frac{1}{t}$, $0 < t < a$ 0, $t > a$	$\mathrm{Si}\,(a\omega)$

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\sin(t\,\omega)\,dt$
5.	$\begin{cases} 0\,, & 0 < t < a \\ \dfrac{1}{t}\,, & t > a \end{cases}$	$-\operatorname{si}(a\omega)$
6.	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\omega}}$
7.	$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & 0 < t < a \\ 0, & t > a \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{2\,S(a\omega)}{\sqrt{\omega}}$
8.	$\begin{cases} 0\,, & 0 < t < a \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,, & t > a \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1-2\,S(a\omega)}{\sqrt{\omega}}$
9.	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^3$	$\sqrt{\pi\,2\,\omega}$
10.	$(a+t)^{-1} \qquad (a>0)$	$[\sin(a\omega)\ \operatorname{Ci}(a\omega) - \cos(a\omega)\ \operatorname{si}(a\omega)]$
11.	$(a-t)^{-1} \qquad (a>0)$	$\left[\sin(a\omega)\ \operatorname{Ci}(a\omega) - \cos(a\omega)\ \left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Si}(a\omega)\right)\right]$
12.	$\dfrac{t}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\,e^{-a\omega}$
13.	$(a^2-t^2)^{-1}$	$\dfrac{1}{a}\,[\sin(a\omega)\ \operatorname{Ci}(a\omega) - \cos(a\omega)\operatorname{Si}(a\omega)$
14.	$\dfrac{b}{b^2+(a-t)^2} - \dfrac{b}{b^2+(a+t)^2}$	$\pi\,e^{-b\omega}\sin(a\omega)$
15.	$\dfrac{a+t}{b^2+(a+t)^2} - \dfrac{a-t}{b^2+(a-t)^2}$	$\pi\,e^{-b\omega}\cos(a\omega)$
16.	$\dfrac{t}{a^2-t^2}$	$-\dfrac{\pi}{2}\,\cos(a\omega)$
17.	$\dfrac{1}{t\,(a^2-t^2)}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1-\cos(a\omega)}{a^2}$
18.	$\dfrac{1}{t\,(a^2+t^2)}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1-e^{-a\omega}}{a^2}$

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\sin(t\,\omega)\,dt$
19.	$t^{-\nu}$, $0 < \operatorname{Re}\nu < 2$	$\cos\left(\frac{\pi\,\nu}{2}\right)\quad \Gamma(1-\nu)\,\omega^{\nu-1}$
20.	e^{-at}	$\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$
21.	$\frac{e^{-at}}{t}$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
22.	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t^2}$	$\left[\frac{1}{2}\,\omega\,\ln\left(\frac{b^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right)+b\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{b}\right)-a\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$
23.	$\sqrt{t}\,e^{-at}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(a^2+\omega^2)^{-\frac{3}{4}}\,\sin\left[\frac{3}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$
24.	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\left(\frac{(a^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}-a}{a^2+\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
25.	$t^n\,e^{-at}$	$n\,!a^{n+1}(a^2+\omega^2)^{-(n+1)}\quad \sum_{m=0}^{[\frac{1}{2}n]}(-1)^m\binom{n+1}{2m+1}\left(\frac{\omega}{a}\right)^{2m+1}$
26.	$t^{\nu-1}\,e^{-at}$	$\Gamma(\nu)\,(a^2+\omega^2)^{-\frac{\nu}{2}}\,\sin\left[\nu\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]$
27.	$e^{-\frac{1}{2}t}\,(1-e^{-t})^{-1}$	$-\frac{1}{2}\,\operatorname{th}(\pi\omega)$
28.	$t\,e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\frac{\omega}{4a}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
29.	$t^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{a}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,e^{-\sqrt{2a\omega}}\,[\cos\sqrt{2a\omega}+\sin\sqrt{2a\omega}]$
30.	$t^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{a}{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,e^{-\sqrt{2a\omega}}\,\sin\sqrt{2a\omega}$
31.	$\ln t$, $0 < t < 1$ 0, $t > 1$	$\frac{\operatorname{Ci}(\omega)-C-\ln\omega}{\omega}$

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\sin(t\,\omega)\,dt$
32.	$\frac{\ln t}{t}$	$-\frac{\pi}{2}\,(C+\ln\,\omega)$
33.	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,\left[\frac{\pi}{2}-C-\ln\,4\omega\right]$
34.	$t\,(t^2-a^2)^{-1}\,\ln\,(bt)$	$\frac{\pi}{2}\,[\cos\,(a\omega)\,(\ln\,(ab)-\mathrm{Ci}(a\omega))-\sin(a\omega)\cdot\mathrm{si}(a\omega)]$
35.	$t\,(t^2-a^2)^{-1}\,\ln\,(\frac{t}{a})$	$-\frac{\pi}{2}\,[\cos\,(a\omega)\;\mathrm{Ci}(a\omega)+\sin\,(a\omega)\;si\;(a\omega)]$
36.	$e^{-at}\,\ln\,t$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}\,\left[a\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{\omega}{a}\right)-C\omega-\frac{1}{2}\,\omega\,\ln\,(a^2+\omega^2)\right]$
37.	$\ln\,\left\|\frac{a+t}{b-t}\right\|$	$\frac{1}{\omega}\,\left\{\ln\,\left(\frac{a}{b}\right)+\cos\,(b\omega)\;\mathrm{Ci}(b\omega)-\cos\,(a\omega)\;\mathrm{Ci}(a\omega)\right.$ $+\sin\,(b\omega)\,\mathrm{Si}(b\omega)-\sin\,(a\omega)\,\mathrm{Si}(a\omega)$ $\left.+\frac{\pi}{2}\,[\sin\,(b\omega)+\sin\,(a\omega)]\right\}$
38.	$\ln\,\left\|\frac{a+t}{a-t}\right\|$	$\frac{\pi}{\omega}\,\sin\,(a\omega)$
39.	$\frac{1}{t^2}\,\ln\,\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^2$	$\frac{2\pi}{a}\,[1-\cos\,(a\omega)-a\omega\;\mathrm{si}(a\omega)]$
40.	$\ln\,\left(\frac{a^2+t^2+t}{a^2+t^2-t}\right)$	$\frac{2\pi}{\omega}\,e^{-\omega\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}}\,\sin\,\left(\frac{\omega}{2}\right)$
41.	$\ln\,\left\|1-\frac{a^2}{t^2}\right\|$	$\frac{2}{\omega}\,[C+\ln\,(a\omega)-\cos\,(a\omega)\;\mathrm{Ci}(a\omega)-\sin\,(a\omega)\,\mathrm{Si}(a\omega)]$
42.	$\ln\,\left(\frac{a^2+(b+t)^2}{a^2+(b-t)^2}\right)$	$\frac{2\pi}{\omega}\,e^{-a\omega}\;\sin\,(b\omega)$
43.	$\frac{1}{t}\,\ln\,\left\|1-a^2t^2\right\|$	$-\,\pi\;\mathrm{Ci}\,\left(\frac{\omega}{a}\right)$
44.	$\frac{1}{t}\,\ln\,\left\|1-\frac{a^2}{t^2}\right\|$	$\pi\,[C+\ln\,(a\omega)-\mathrm{Ci}(a\omega)]$

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\sin(t\,\omega)\,dt$
45.	$\dfrac{\sin(at)}{t}$	$\dfrac{1}{2}\,\ln\left\lvert\dfrac{\omega+a}{\omega-a}\right\rvert$
46.	$\dfrac{\sin(at)}{t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\omega\,, \qquad 0<\omega<a$ $\dfrac{\pi}{2}\,a\,, \qquad \omega>a$
47.	$\dfrac{\sin(\pi t)}{1-t^2}$	$\sin\omega\,, \qquad 0\le\omega\le\pi$ $0\,, \qquad \omega\ge\pi$
48.	$\dfrac{\sin(at)}{b^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{e^{-ab}}{b}\,\mathrm{sh}\,(b\omega)\,, \qquad 0<\omega<a$ $\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{e^{-b\omega}}{b}\,\mathrm{sh}\,(ab)\,, \qquad \omega>a$
49.	$e^{-bt}\,\sin(at)$	$\dfrac{1}{2}\,b\left[\dfrac{1}{b^2+(a-\omega)^2}-\dfrac{1}{b^2+(a+\omega)^2}\right]$
50.	$\dfrac{e^{-bt}\,\sin(at)}{t}$	$\dfrac{1}{4}\,\ln\left(\dfrac{b^2+(\omega+a)^2}{b^2+(\omega-a)^2}\right)$
51.	$e^{-bt^2}\,\sin(at)$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\,e^{-\frac{1}{4}\frac{a^2+\omega^2}{b}}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{a\omega}{2b}\right)$
52.	$\dfrac{\sin^2(at)}{t}$	$\dfrac{\pi}{4}\,, \qquad 0<\omega<2a$ $\dfrac{\pi}{8}\,, \qquad \omega=2a$ $0\,, \qquad \omega>2a$
53.	$\dfrac{\sin(at)\,\sin(bt)}{t}$	$0\,, \qquad 0<\omega<a-b$ $\dfrac{\pi}{4}\,, \qquad a-b<\omega<a+b$ $0\,, \qquad \omega>a+b$
54.	$\dfrac{\sin^2(at)}{t^2}$	$\dfrac{1}{4}\Big[(\omega+2a)\,\ln(\omega+2a)$ $+(\omega-2a)\ln\lvert\omega-2a\rvert-\dfrac{1}{2}\omega\ln\omega\Big]$

	$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\sin(t\,\omega)\,dt$
55.	$\frac{\sin^2(at)}{t^3}$	$\frac{\pi}{4}\,\omega\,\left(2a-\frac{\omega}{2}\right), \quad 0<\omega<2a$ $\frac{\pi}{2}\,a^2, \quad \omega>2a$
56.	$\frac{\cos(at)}{t}$	$0, \quad 0<\omega<a$ $\frac{\pi}{4}, \quad \omega=a$ $\frac{\pi}{2}, \quad \omega>a$
57.	$\frac{t\,\cos(at)}{b^2+t^2}$	$-\frac{\pi}{2}\,e^{-ab}\,\mathrm{sh}\,(b\omega), \quad 0<\omega<a$ $\frac{\pi}{2}\,e^{-b\omega}\,\mathrm{ch}(ab), \quad \omega>a$
58.	$\sin(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,\left[\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\,C\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)+\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\,S\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]$
59.	$\frac{\sin(at^2)}{t}$	$\frac{\pi}{2}\,\left[C\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)-S\,(\,\frac{\omega^2}{4a}\right)\Big]$
60.	$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,\left[\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\,C\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)-\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\,S\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)\right]$
61.	$\frac{\cos(at^2)}{t}$	$\frac{\pi}{2}\,\left[C\,\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)+S\,(\,\frac{\omega^2}{4a}\right)\Big]$
62.	$e^{-a\sqrt{t}}\,\sin(a\sqrt{t})$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a}{2\omega\,\sqrt{\omega}}\,e^{-\frac{a^2}{2\omega}}$

21.12.3. Exponenciális Fourier-transzformáció

Bár (15.75a) szerint $F(\omega)$ előállítható F_c és F_s segítségével, szerepel még néhány transzformáció, melyekre $F(\omega) = 2F_e(-\omega)$ teljesül.

	$f(t)$	$F_e(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\mathrm{i}t\omega}\, dt$
1.	A , $a \le t \le b$ 0 , különben	$\dfrac{\mathrm{i}\,A}{2\omega}\,(e^{\mathrm{i}a\omega} - e^{\mathrm{i}b\omega})$
2.	t^n , $0 \le t \le b$ 0 , különben $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\dfrac{1}{2}\left[n!\,(-\mathrm{i}\omega)^{-(n+1)} - e^{\mathrm{i}b\omega}\sum_{m=0}^{n}\dfrac{n!}{m!}\,(-\mathrm{i}\omega)^{m-n-1}\,b^m\right]$
3.	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{i}t)^\nu}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$	$\dfrac{\pi}{\Gamma(\nu)}\,\omega^{\nu-1}\,e^{-a\omega}$, $\omega > 0$ 0 , $\omega < 0$
4.	$\dfrac{1}{(a-\mathrm{i}t)^\nu}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$	0 , $\omega > 0$ $\dfrac{\pi}{\Gamma(\nu)}\,(-\omega)^{\nu-1}\,e^{a\omega}$, $\omega < 0$

21.13. Z-transzformáció

A definíció a 763., a számolási szabályok a 764., a leképezés inverze a 766. oldalon található.

	Az eredeti f_n sorozat	A leképezésnél vett képe $F(z) = Z(f_n)$	Konvergenciatartomány
1	1	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
2	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\|z\| > 1$
3	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
4	n^2	$\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\| > 1$
5	n^3	$\frac{z\,(z+4\,z+1)}{(z-1)^4}$	$\|z\| > 1$
6	e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$	$\|z\| > \|e^a\|$
7	a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
8	$\frac{a^n}{n\,!}$	$e^{\frac{a}{z}}$	$\|z\| > 0$
9	$n\,a^n$	$\frac{za}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
10	$n^2\,a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|z\| > \|a\|$
11	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$	$\|z\| > 1$
12	$\binom{k}{n}$	$\left(1+\frac{1}{z}\right)^k$	$\|z\| > 0$
13	$\sin bn$	$\frac{z\,\sin b}{z^2-2z\,\cos b+1}$	$\|z\| > 1$
14	$\cos bn$	$\frac{z(z-\cos b)}{z^2-2z\,\cos b+1}$	$\|z\| > 1$

	Eredeti f_n sorozat	A leképezésnél vett képe $F(z) = Z(f_n)$	Konvergenciatartomány
15	$e^{an} \sin bn$	$\dfrac{ze^a \sin b}{z^2 - 2ze^a \cos b + e^{2a}}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
16	$e^{an} \cos bn$	$\dfrac{z(z - e^a \cos b)}{z^2 - 2ze^a \cos b + e^{2a}}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
17	$\operatorname{sh} bn$	$\dfrac{z \operatorname{sh} b}{z^2 - 2z \operatorname{ch} b + 1}$	$\lvert z\rvert > \max(\lvert e^b\rvert, \lvert e^{-b}\rvert)$
18	$\operatorname{ch} bn$	$\dfrac{z(z - \operatorname{ch} b)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} b + 1}$	$\lvert z\rvert > \max(\lvert e^b\rvert, \lvert e^{-b}\rvert)$
19	$a^n \operatorname{sh} bn$	$\dfrac{za \operatorname{sh} b}{z^2 - 2za \operatorname{ch} b + a^2}$	$\lvert z\rvert > \max(\lvert ae^b\rvert, \lvert ae^{-b}\rvert)$
20	$a^n \operatorname{ch} bn$	$\dfrac{z(z - a \operatorname{ch} b)}{z^2 - 2za \operatorname{ch} b + a^2}$	$\lvert z\rvert > \max(\lvert ae^b\rvert, \lvert ae^{-b}\rvert)$
21	$f_n = 0 \quad f"ur \quad n \neq k,$ $f_k = 1$	$\dfrac{1}{z^k}$	$\lvert z\rvert > 0$
22	$f_{2n} = 0, \quad f_{2n+1} = 2$	$\dfrac{2z}{z^2 - 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
23	$f_{2n} = 0,$ $f_{2n+1} = 2(2n + 1)$	$\dfrac{2z(z^2 + 1)}{(z^2 - 1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
24	$f_{2n} = 0,$ $f_{2n+1} = \dfrac{2}{2n + 1}$	$\ln \dfrac{z - 1}{z + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
25	$\cos \dfrac{n\pi}{2}$	$\dfrac{z^2}{z^2 + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
26	$(n + 1)\, e^{an}$	$\dfrac{z^2}{(z - e^a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
27	$\dfrac{e^{b(n+1)} - e^{a(n+1)}}{e^b - e^a}$	$\dfrac{z^2}{(z - e^a)\,(z - e^b)}$	$\lvert z\rvert > \max(\lvert e^a\rvert, \lvert e^b\rvert),\ a \neq b$
28	$\dfrac{1}{6}\,(n - 1)\, n(n + 1)$	$\dfrac{z^2}{(z - 1)^4}$	$\lvert z\rvert > 1$

	Az eredeti f_n sorozat	A leképezésnél vett képe $F(z) = Z(f_n)$	Konvergenciatartomány
29	$f_0 = 0, \quad f_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geq 1$	$\ln \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
30	$\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	$\sqrt{z} \sin \dfrac{1}{\sqrt{z}}$	$\lvert z \rvert > 0$
31	$\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$	$\cos \dfrac{1}{\sqrt{z}}$	$\lvert z \rvert > 0$

21.14. Poisson-eloszlás

A POISSON-eloszlás $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k\,!}\, e^{-\lambda}$ táblázata:

k	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

k	λ					
	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000696	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8	0,000001	0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008102
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

(folytatás az előző oldalról)

k	λ					
	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091126	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

21.15. Standard normális eloszlás

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye (lásd 788. old.).

21.15.1. Standard normális eloszlás, ahol $0{,}00 \leq x \leq 1{,}99$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	**0,5000**	**0,20**	**0,5793**	**0,40**	**0,6554**	**0,60**	**0,7257**	**0,80**	0,7881
0,01	0,5040	0,21	0,5832	0,41	0,6591	0,61	0,7291	0,81	0,7910
0,02	0,5080	0,22	0,5871	0,42	0,6628	0,62	0,7324	0,82	0,7939
0,03	0,5120	0,23	0,5910	0,43	0,6664	0,63	0,7357	0,83	0,7967
0,04	0,5160	0,24	0,5948	0,44	0,6700	0,64	0,7389	0,84	0,7995
0,05	0,5199	0,25	0,5987	0,45	0,6736	0,65	0,7422	0,85	0,8023
0,06	0,5239	0,26	0,6026	0,46	0,6772	0,66	0,7454	0,86	0,8051
0,07	0,5279	0,27	0,6064	0,47	0,6808	0,67	0,7486	0,87	0,8079
0,08	0,5319	0,28	0,6103	0,48	0,6844	0,68	0,7517	0,88	0,8106
0,09	0,5359	0,29	0,6141	0,49	0,6879	0,69	0,7549	0,89	0,8133
0,10	**0,5398**	**0,30**	**0,6179**	**0,50**	**0,6915**	**0,70**	**0,7580**	**0,90**	0,8159
0,11	0,5438	0,31	0,6217	0,51	0,6950	0,71	0,7611	0,91	0,8186
0,12	0,5478	0,32	0,6255	0,52	0,6985	0,72	0,7642	0,92	0,8212
0,13	0,5517	0,33	0,6293	0,53	0,7019	0,73	0,7673	0,93	0,8238
0,14	0,5557	0,34	0,6331	0,54	0,7054	0,74	0,7704	0,94	0,8264
0,15	0,5596	0,35	0,6368	0,55	0,7088	0,75	0,7734	0,95	0,8289
0,16	0,5636	0,36	0,6406	0,56	0,7123	0,76	0,7764	0,96	0,8315
0,17	0,5675	0,37	0,6443	0,57	0,7157	0,77	0,7794	0,97	0,8340
0,18	0,5714	0,38	0,6480	0,58	0,7190	0,78	0,7823	0,98	0,8365
0,19	0,5753	0,39	0,6517	0,59	0,7224	0,79	0,7852	0,99	0,8389

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,00	**0,8413**	**1,20**	**0,8849**	**1,40**	**0,9192**	**1,60**	**0,9452**	**1,80**	**0,9641**
1,01	0,8438	1,21	0,8869	1,41	0,9207	1,61	0,9463	1,81	0,9649
1,02	0,8461	1,22	0,8888	1,42	0,9222	1,62	0,9474	1,82	0,9656
1,03	0,8485	1,23	0,8907	1,43	0,9236	1,63	0,9484	1,83	0,9664
1,04	0,8508	1,24	0,8925	1,44	0,9251	1,64	0,9495	1,84	0,9671
1,05	0,8531	1,25	0,8944	1,45	0,9265	1,65	0,9505	1,85	0,9678
1,06	0,8554	1,26	0,8962	1,46	0,9279	1,66	0,9515	1,86	0,9686
1,07	0,8577	1,27	0,8980	1,47	0,9292	1,67	0,9525	1,87	0,9693
1,08	0,8599	1,28	0,8997	1,48	0,9306	1,68	0,9535	1,88	0,9699
1,09	0,8621	1,29	0,9015	1,49	0,9319	1,69	0,9545	1,89	0,9706
1,10	**0,8643**	**1,30**	**0,9032**	**1,50**	**0,9332**	**1,70**	**0,9554**	**1,90**	**0,9713**
1,11	0,8665	1,31	0,9049	1,51	0,9345	1,71	0,9564	1,91	0,9719
1,12	0,8686	1,32	0,9066	1,52	0,9357	1,72	0,9573	1,92	0,9726
1,13	0,8708	1,33	0,9082	1,53	0,9370	1,73	0,9582	1,93	0,9732
1,14	0,8729	1,34	0,9099	1,54	0,9382	1,74	0,9591	1,94	0,9738
1,15	0,8749	1,35	0,9115	1,55	0,9394	1,75	0,9599	1,95	0,9744
1,16	0,8770	1,36	0,9131	1,56	0,9406	1,76	0,9608	1,96	0,9750
1,17	0,8790	1,37	0,9147	1,57	0,9418	1,77	0,9616	1,97	0,9756
1,18	0,8810	1,38	0,9162	1,58	0,9429	1,78	0,9625	1,98	0,9761
1,19	0,8830	1,39	0,9177	1,59	0,9441	1,79	0,9633	1,99	0,9767

21.15.2. Standard normális eloszlás, ahol $2{,}00 \leq x \leq 3{,}90$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,00	**0,9773**	**2,20**	**0,9861**	**2,40**	**0,9918**	**2,60**	**0,9953**	**2,80**	**0,9974**
2,01	0,9778	2,21	0,9864	2,41	0,9920	2,61	0,9955	2,81	0,9975
2,02	0,9783	2,22	0,9868	2,42	0,9922	2,62	0,9956	2,82	0,9976
2,03	0,9788	2,23	0,9871	2,43	0,9925	2,63	0,9957	2,83	0,9977
2,04	0,9793	2,24	0,9875	2,44	0,9927	2,64	0,9959	2,84	0,9977
2,05	0,9798	2,25	0,9878	2,45	0,9929	2,65	0,9960	2,85	0,9978
2,06	0,9803	2,26	0,9881	2,46	0,9931	2,66	0,9961	2,86	0,9979
2,07	0,9808	2,27	0,9884	2,47	0,9932	2,67	0,9962	2,87	0,9979
2,08	0,9812	2,28	0,9887	2,48	0,9934	2,68	0,9963	2,88	0,9980
2,09	0,9817	2,29	0,9890	2,49	0,9936	2,69	0,9964	2,89	0,9981
2,10	**0,9821**	**2,30**	**0,9893**	**2,50**	**0,9938**	**2,70**	**0,9965**	**2,90**	**0,9981**
2,11	0,9826	2,31	0,9896	2,51	0,9940	2,71	0,9966	2,91	0,9982
2,12	0,9830	2,32	0,9894	2,52	0,9941	2,72	0,9967	2,92	0,9983
2,13	0,9834	2,33	0,9901	2,53	0,9943	2,73	0,9968	2,93	0,9983
2,14	0,9838	2,34	0,9904	2,54	0,9945	2,74	0,9969	2,94	0,9984
2,15	0,9842	2,35	0,9906	2,55	0,9946	2,75	0,9970	2,95	0,9984
2,16	0,9846	2,36	0,9909	2,56	0,9948	2,76	0,9971	2,96	0,9985
2,17	0,9850	2,37	0,9911	2,57	0,9949	2,77	0,9972	2,97	0,9985
2,18	0,9854	2,38	0,9913	2,58	0,9951	2,78	0,9973	2,98	0,9986
2,19	0,9857	2,39	0,8133	2,59	0,9952	2,79	0,9974	2,99	0,9986

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,00	**0,9987**	**3,20**	**0,9993**	**3,40**	**0,9997**	**3,60**	**0,9998**	**3,80**	**0,9999**
3,10	0,9990	3,30	0,9995	3,50	0,9998	3,70	0,9999	3,90	0,9999

21.16. χ^2-eloszlás

A χ^2-eloszlás eloszlásfüggvénye (lásd 791. old.).

χ^2-eloszlás: $\chi^2_{\alpha,m}$ kvantilis

Szabadsági fok	Valószínűség α					
m	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,0039	3,8	5,0	6,6
2	0,020	0,051	0,103	6,0	7,4	9,2
3	0,115	0,216	0,352	7,8	9,4	11,3
4	0,297	0,484	0,711	9,5	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	37,7	40,6	44,3
26	12,2	13,8	15,4	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	42,6	45,7	49,6
30	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9
40	22,2	24,4	26,5	55,8	59,3	63,7
50	29,7	32,4	34,8	67,5	71,4	76,2
60	37,5	40,5	43,2	79,1	83,3	88,4
70	45,4	48,8	51,7	90,5	95,0	100,4
80	53,5	57,2	60,4	101,9	106,6	112,3
90	61,8	65,6	69,1	113,1	118,1	124,1
100	70,1	74,2	77,9	124,3	129,6	135,8

21.17. Fisher-féle F-eloszlás

A FISHER-féle F-eloszlás eloszlásfüggvénye (lásd 792. old.).

FISHER-féle F-eloszlás: f_{α,m_1,m_2} kvabtilis $\alpha = 0{,}05$ esetben

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	250,0	251,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,46	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,64	8,62	8,59	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,75	5,72	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,50	4,46	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,81	3,77	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,38	3,34	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	3,08	3,05	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,86	2,83	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,70	2,66	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,57	2,53	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,51	2,47	2,43	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,42	2,38	2,34	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,31	2,27	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,25	2,20	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,19	2,15	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	2,15	2,10	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	2,11	2,06	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	2,07	2,03	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	2,04	1,99	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	2,01	1,96	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,98	1,94	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,20	2,00	1,96	1,91	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,94	1,89	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,92	1,87	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,90	1,85	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,31	2,13	1,93	1,88	1,84	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	1,91	1,87	1,82	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,28	2,10	1,90	1,85	1,80	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,84	1,79	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,74	1,69	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,65	1,59	1,39
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,55	1,49	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,75	1,52	1,46	1,39	1,00

FISHER-féle F-eloszlás: f_{α,m_1,m_2} kvantilis $\alpha = 0{,}01$ esetben

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6235	6261	6287	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,42	99,46	99,47	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,50	26,41	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,84	13,74	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,47	9,38	9,29	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	7,23	7,14	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,99	5,91	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	5,20	5,12	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,65	4,57	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	4,25	4,17	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,94	3,86	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,70	3,62	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,51	3,43	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,14	3,80	3,43	3,35	3,27	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	3,21	3,13	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	3,10	3,02	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,46	3,08	3,00	2,92	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,92	2,84	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,84	2,76	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,78	2,69	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,72	2,64	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,67	2,58	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,62	2,54	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,58	2,49	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,54	2,45	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,50	2,42	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,47	2,38	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,23	2,90	2,52	2,44	2,35	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,41	2,33	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,38	2,30	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	2,20	2,11	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	2,03	1,94	1,60
125	6,84	4,78	3,94	3,48	3,17	2,95	2,66	2,33	1,94	1,85	1,75	1,37
∞	6,63	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,70	1,59	1,00

21.18. Student-féle t-eloszlás

A STUDENT-féle t-eloszlás eloszlásfüggvénye (ld. 793 oldal).

STUDENT-féle t-eloszlás $t_{\alpha,m}$, ill. $t_{\alpha/2,m}$ kvantilise

Szabadsági fok	Kétoldali hipotézishez α szinten					
m	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Egyoldali hipotézishez α szinten					

21.19. Véletlen számok

A véletlen számok jelentését a Monte-Carlo módszerrel foglalkozó fejezet tartalmazza (lásd 807. old.).

4730	1530	8004	7993	3141	0103	4528	7988	4635	8478	9094	9077	5306	4357	8353
0612	2278	8634	2549	3737	7686	0723	4505	6841	1379	6460	1869	5700	5339	6862
0285	1888	9284	3672	7033	4844	0149	7412	6370	1884	0717	5740	8477	6583	0717
7768	9078	3428	2217	0293	3978	5933	1032	5192	1732	2137	9357	5941	6564	2171
4450	8085	8931	3162	9968	6369	1256	0416	4326	7840	6525	2608	5255	4811	3763
7332	6563	4013	7406	4439	5683	6877	2920	9588	3002	2869	3746	3690	6931	1230
4044	1643	9005	5969	9442	7696	7510	1620	4973	1911	1288	6160	9797	8755	6120
0067	7697	9278	4765	9647	4364	1037	4975	1998	1359	1346	6125	5078	6742	3443
5358	5256	7574	3219	2532	7577	2815	8696	9248	9410	9282	6572	3940	6655	9014
0038	4772	0449	6906	8859	5044	8826	6218	3206	9034	0843	9832	2703	8514	4124
8344	2271	4689	3835	2938	2671	4691	0559	8382	2825	4928	5379	8635	8135	7299
7164	7492	5157	8731	4980	8674	4506	7262	8127	2022	2178	7463	4842	4414	0127
7454	7616	8021	2995	7868	0683	3768	0625	9887	7060	0514	0034	8600	3727	5056
3454	6292	0067	5579	9028	5660	5006	8325	9677	2169	3196	0357	7811	5434	0314
0401	7414	3186	3081	5876	8150	1360	1868	9265	3277	8465	7502	6458	7195	9869
6202	0195	1077	7406	4439	5683	6877	2920	9588	3002	2869	3746	3690	2705	6251
8284	0338	4286	5969	9442	7696	7510	1620	6973	1911	1288	6160	9797	1547	4972
9056	0151	7260	4765	9647	4364	1037	4975	1998	1359	1346	6125	5078	3424	1354
9747	3840	7921	3219	2532	7577	2815	8696	9248	9410	9282	6572	3940	8969	3659
2992	8836	3342	6906	8859	5044	8826	6218	3206	9034	0843	9832	2703	5225	8898
6170	4595	2539	7592	1339	4802	5751	3785	7125	4922	8877	9530	6499	6432	1516
3265	8619	0814	5133	7995	8030	7408	2186	0725	5554	5664	6791	9677	3085	8319
0179	3949	6995	3170	9915	6960	2621	6718	4059	9919	1007	6469	5410	0246	3687
1839	6042	9650	3024	0680	1127	8088	0200	5868	0084	6362	6808	3727	8710	6065
2276	8078	9973	4398	3121	7749	8191	2087	8270	5233	3980	6774	8522	5736	3132
4146	9952	7945	5207	1967	7325	7584	3485	5832	8118	8433	0606	2719	2889	2765
3526	3809	5523	0648	3326	1933	6265	0649	6177	2139	7236	0441	1352	1499	3068
3390	7825	7012	9934	7022	2260	0190	1816	7933	2906	3030	6032	1685	3100	1929
4806	9286	5051	4651	1580	5004	8981	1950	2201	3852	6855	5489	6386	3736	0498
7959	5983	0204	4325	5039	7342	7252	2800	4706	6881	8828	2785	8375	7232	2483
8245	9611	0641	7024	3899	8981	1280	5678	8096	7010	1435	7631	7361	8903	8684
7551	4915	2913	9031	9735	7820	2478	9200	7269	6284	9861	2849	2208	8616	5865
5903	2744	7318	7614	5999	1246	9759	6565	1012	0059	2419	0036	2027	5467	5577
9001	4521	5070	4150	5059	5178	7130	2641	7812	1381	6158	9539	3356	5861	9371
0265	3305	3814	0973	4958	4830	6297	0575	4843	3437	5629	3496	5406	4790	9734

Tárgymutató

(0)-intervallum, 613
1. típusú vonalintegrál, 470
2. típusú vonalintegrál, 472

a változók szétválasztása, 533
ABEL-csoportok, 296
ABEL-féle
    integrálegyenlet, 600
ablakok, 772
abszcissza, 189, 208
abszcisszatengely, 189
abszolút érték
    analitikus függvény, 696
    elemé, 614
    komplex számé, 35
    vektor, 180
abszolút folytonos, 660
abszolút integrálható, 463
abszolút konvergens, 463
abszorpciós szabály
    BOOLE-algebra, 346
    ítéletkalkulus, 284
adattípus, 344
addíciós tételek
    áreafüggvények, 95
    hiperbolikus függvények, 91
    inverz trigonometrikus függvények, 87
    trigonometrikus függvények, 80, 82
additivitás
    σ-, 657
adjacencia, 352
adjacencia mátrix, 354
adjungált, 259
admittanciamátrix, 359
adszorpciós szabály
    halmazok, 290
AGNESI-féle kürt, 96
AIRY-függvény, 996
aktív szabály, 379
alak
    kvadratikus, valós, 280
    kvadratikus, valós, pozitív definit, 280
    négyzetes, 915
alap
    hatványé, 7
alapfeladatok
    gömbháromszögtan, 168
    síkbeli trigonometria, 143
alapintegrálok
    értelmezés, 434
    táblázatok, 434
alapképletek
    gömbháromszögtan, 164
    síkbeli trigonometria, 141
alapmátrix, 826–828
alappont, 921, 939
    ekvidisztans, 926
alaprendszer
    differenciálegyenlet, 509
alapsokaság, 794
    kétállapotú, 784
alapszabályok
    halmazok, 289
    ítéletkalkulus, 284
alaptétel, 298
    algebráé, 43
    elemi számelmélet, 325
    integrálszámítás, 448
    komplex függvénytan, 714
alapvektor, 186
    reciprok, 185, 186
aldeterminánsz, 259
α-határhalmaz, 823, 830, 836
α-szinthalmaz, 368
    szigorú, 368
α-vágat, 368
    szigorú, 368
algebra
    BOOLE-, 346, 778
      véges, 347
    faktor-, 345
    kapcsolási, 346, 350
    kijelentés-, 346
    kommutatív, 631
    LIE-, 306
    lineáris, 251
    normált, 631

Ω-, 344
Ω-rész-, 344
szabad-, 346
σ-, 656
BOREL-féle, 657
univerzális, 344
algoritmus
AITKEN–NEVILLE-, 942
DANTZIG-, 362
euklideszi, 2, 14, 327
FORD–FULKERSON-, 363
GAUSS-féle, 275, 914
KRUSKAL-, 359
maximális folyam, 363
QR-, 281
RAYLEIGH–RITZ-, 281
REMES-, 948
ROMBERG-, 924
tétel az euklideszi algoritmushoz, 328
algoritmusok
gráfelmélet, 351
alkotó
egyenesvonalú, felület, 222, 250
alkotó (egyenes), 154
állandó
ítélet, 283
táblázat, 1040
állandók variálása, 510
állapot
elfajult, 550
részecske, 547
stacionárius, 548
alsó háromszög mátrix, 914
általános egyenlet
másodrendű görbék, 204
általános hatványfüggvény, 725
általános helyettesítés, 444
általánosítás, 297
altér, 322
affin, 607
eltolt, 607
instabilis, 831, 837
invariáns, 301
lineáris, 607
stabilis, 831, 837
altérkritérium, 322
alternálási tétel, 946
alternáló pont, 946
amplitúdó, 76, 83
amplitúdó-függvények, 731
amplitúdóspektrum, 756
analízis
harmonikus, 949
többskálás, 772
annuitás, 22
annuitástörlesztés, 23
annullátor, 644
ANOSZOV-diffeomorfizmus, 853
antecedens, 376
antiderivált, 433, 434
antikink-szoliton, 558
antiszoliton, 557
APOLLÓNIUSZ-
tétel, 198
approximáció, 939
CSEBISEV-, 946
δ-függvény, 745
egyenletes, 946
középben vett, 942
szukcesszív
BANACH-tér, 640
differenciálegyenletek, 505
integrálegyenlet, 576
approximációprobléma, 634
approximációs módszer
besorolás, 407
áramfüggvény, 707
aranymetszés, 192, 870
arányosság
egyenes, 63
fordított, 65
arányosságok, 16
ARCHIMÉDESZI spirál, 107
área koszinusz hiperbolikusz, 93
área kotangens hiperbolikusz, 94
área szinusz hiperbolikusz, 93
área tangens hiperbolikusz, 94
áreafüggvény, 93
árengedmény, 21
argumentum, 47, 121
ARNOLD-nyelv, 870
ASCII, 959
asszociatív szabály
BOOLE-algebra, 346
halmazok, 289
ítéletkalkulus, 284
mátrixok, 254
tenzorok, 263
asszociatív tulajdonság
vektoriális szorzás, 184
aszimptota, 234
definíció, 234
görbe, 231
asztrois, 106, 482

átalakítás, azonos, 10
átfogó, 132
átlag
  súlyozott, 817
átlós eljárás, MAXWELL-féle, 710
átmérő, 139
  ellipszis, 198
  hiperbola, 202
  konjugált
    ellipszis, 198
    hiperbola, 202
    parabola, 203
attraktor, 824
  fraktál, 853
  HÉNON-, 850, 853
  hiperbolikus, 853
  kaotikus, 853
  különös, 853
  LORENZ-, 851
autokorrelációs függvény, 843
axiális mező, 666
axióma
  algebra, 631
  metrikus tér, 615
  normált tér, 626
  nyílt halmaz, 617
  rendezett vektortér, 612
  skalárszorzat, 632
  vektortér, 606
  zárt halmaz, 617
az állandók variálása
  tétel, 826
az ördög lépcsője, 870
azimut, 160
azimutális egyenlet, 551
azonosan teljesül, 10
azonosság, 10
  BOOLE-függvény, 348
  LAGRANGE-, 185

BAIRSTOW-eljárás, 912
bal oldali mellékosztály, 297
bal oldali szinguláris vektor, 281
balcsavar, 241
balrendszer, 207
BANACH-tér, 629
  példák, 629
  sor, 629
barionok osztályozása, 318
BAYES-tétel, 780
bázis, 875
  HAMEL-, 609
  kontravariáns, 266
  kovariáns, 265
  SCHAUDER-, 636
  vektortér, 322, 609
bázisinverz, 875
bázisvektor
  kontravariáns, 265
  kovariáns, 265
B–B-ábrázolás
  felület, 957
  görbe, 957, 958
becsült érték, 796, 803
befizetés
  egyszeri, 21
  előzetes, 22
  évesnél gyakoribb, 22
  rendszeres, 22
  utólagos, 22
befogó, szög melletti, 132
befogó, szöggel szemközti, 132
beírt kör, 134
  sugara, 143
belső szorzat, 632
bemeneti fokszám, 352
BERGE tétele, 360
BERNOULLI-
  számok, 417
  törvény, 794
BERNOULLI–L'HOSPITAL-féle szabály, 55
BERNSTEIN-féle alappolinomok, 957
BESSEL-féle
  differenciálegyenlet, 517, 751
  egyenlőtlenség, 635
BESSEL-függvény, 518
  módosított, 519
bétafüggvény, 996, 1083
bifurkáció
  BOGDANOV–TAKENS-, 859
  csúcs-, 858
  flip-, 861
  globális, 854, 863
    homoklinikus, 865
  HOPF-, 856, 859
  kodimenzió, 854
  lokális, 854
  nyeregcsomó, 855
  transzkritikus, 856
  villa-, 859, 862
binom
  kvadratikus, 70
  lineáris, 70
binomiális együttható, 12

binomiális eloszlás, 784
binormális, térgörbe, 239, 241
bit, 959
bizonyítás
  direkt, 4
  ellentmondással, 4
  indirekt, 4, 285
  konstruktív, 5
  következtetés n-ről $n+1$-re, 5
  teljes indukcióval, 5
bizonytalanság
  abszolút, 816
  fuzzy, 364
  mérési eredmények, 811
  relatív, 816
biztonság, statisztikai, 800
biztosítási matematika, 20
BMDP, 976
bolyongási folyamatok, 810
BOLZANO–WEIERSTRASS-tulajdonság, 650
BOOLE-
  algebra, 346, 778
    véges, 347
  függvény, 284, 348
    n-változós, 348
  kifejezés, 348
  változó, 348
bőség, forrás, 691
brachisztochron-probléma, 562
BRAVAIS-rács, 314
BREIT–WIGNER-féle görbe, 96, 760
BRODETSKY–SMEAL-féle módszer, 44
burkoló, 237
burok
  konvex, 610
  lineáris, 607
  zárt lineáris, 634
byte, 959

CANTOR-függvény, 870
CANTOR-halmaz, 846–848, 852
CARATHÉODORY-feltételek, 653
CARDANO-képlet, 40
CARSON-transzformáció, 735
CARTAN–WEYL-bázis, 308
CASSINI-féle görbe, 101
CAUCHY-
  elv, 619
  feladat, 527
  integrál, 603
  sorozat, 618
CAUCHY-féle
  főérték, 464
  integrálformulák, 715
    alkalmazások, 721
  integrálkritérium, 414
CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenlet, 695
CAUCHY–SCHWARZ–BUNYAKOVSZKIJ-egyenlőtlenség, 633
CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség, 30
CAYLEY tétele, 299, 359
célfüggvény, 871
célmódszer, 932
  egyszerű, 932
centrális felületek, 220
centrális mező, 665
centrifugális nyomaték, 263
centrum, 504
centrum
  vektormező, 667
χ^2-illeszkedés-próba, 800
χ^2-eloszlás, 791
χ^2-teszt, 799
χ^2-próba, 799
CHOLESKY-
  eljárás, 277, 915
  felbontás, 916
ciklois, 102
  alap, 102
  egybevágó, 102
  hurkolt, 103
  közönséges, 102
  nyújtott, 103
ciklus
  diszjunkt, 997
  határciklus, 858
  lánc, 361
cisszoid, 97
CLAIRAUT-féle differenciálegyenlet, 501, 528
CLEBSCH–GORDAN-
  együttható, 302
  sor, 302
  tétel, 302
COULOMB-mező, ponttöltés, 668, 691
CRAMER-szabály, 274

csavarvonal, 241
CSEBISEV-
  approximáció, 946
    diszkrét, 948
  polinom, 946
    képlet, 88
  sor, 998
  tétel, 441

CSEBISEV–PADO-approximáció, 998
csillapítás, rezgéseké, 85
csillapítási paraméter, 920
csomó, 833
    háromszorosan összetett, 858
    nyeregcsomó, 828, 833
    stabilis, 828
csomópont, 503
    dikritikus, 504
    forrás, 363
    gráf, 351
    izolált, 352
    nyelő, 363
    szint, 358
    távolság, 355
csomópont fokszám, 352
csomópontok
    approximációs intervallumok, 954
csomósík, 550
csonkagúla, 153
csonka-körkúp, egyenes, 157
csoport, 296
    ABEL-, 296
    diéder-, 296
    faktor-, 299
    folytonos, 303
    homomorfiatétel, 299
    LIE-, 303
    rész-, 297
    végtelen, 303
csoporthomomorfizmus, 299
csoportizomorfizmus, 299
csoportosítás, 11
csoporttáblázat, 296
csúcs, 130, 151
    ellipszis, 197
    háromoldalú, 151
    konvex, 151
    szimmetrikus, 151
csúcspont
    hiperbola, 200
    parabola, 203
    sík görbe, 232
csúcsszög, 131

D'ALEMBERT-formula, 545
DE MORGAN-szabály
    BOOLE-algebra, 347
defekt, 931, 935
definit, 280
    pozitív, 915
defuzzyfikáció, 378
dekódolás, 336
dekrementum, logaritmikus, 85
DELAMBRE-féle egyenletek, 167
δ-disztribúció, 662
δ-funkcionál, 643
δ-függvény, 657, 662
    alkalmazások, 746
    approximációk, 745
    DIRAC-féle, 742
deltatenzor, 264
DE MORGAN-szabály, 284, 290
deriválás
    belső, 387
    disztribúció, 662
    egyváltozós függvény, 384
    elemi függvények, 385
    függvény
      implicit, 388
      paraméteres alak, 389
    inverz
      függvény, 388
    külső, 387
    logaritmikus, 387
    magasabb rendű
      paraméteres alak, 392
    összetett függvény, 387
    tört, 387
deriválási szabályok
    táblázat, 390
derivált
    általánosított, 662
    bal oldali, 385
    FRÉCHET-, 653
    függvény
      komplex változós, 694
      többváltozós, 398
    hányadosé, 387
    jobb oldali, 385
    konstanssal szorzott függvényé, 385
    konstansé, 385
    magasabb rendű, 391, 401
      inverz függvény, 393
    összegé, 386
    parciális, 398
    szorzaté, 387
    táblázat, 386
    vegyes, 401
Derive, 976
DESCARTES-
    levél, 96
DESCARTES-féle
    előjelszabály, 44, 911

determináns, 259
differenciálás, 260
JACOBI-féle, 676
kiszámítás, 260
nullává válás, 260
szorzás, 260
számítási szabályok, 259
tükrözés, 260
WRONSKI-, 509, 826
diagonálmátrix, 252
diagonál-stratégia, 915
diédercsoport, 296
diffeomorfizmus, 822
ANOSZOV-, 853
irányítástartó, 869
differencia
szimmetrikus, 290
differenciaegyenlet, 762, 933
lineáris, 767
másodrendű, 768, 769
peremértékek, 769
differenciahányados, 921
differenciaképzés
véges kifejezések, 930
Z-transzformáció, 764
differenciál
fogalom, 398
főbb tulajdonságok, 399
integrálhatósága, 476
ív, 246
magasabb rendű, 400
másodrendű, 401
parciális, 399
teljes, 400
másodrendű, 401
n-ed rendű, 401
differenciálás
alapszabályok, 385
az integráljel mögött, 466
egyváltozós függvény, 384
elemi függvények, 385
függvény
implicit, 388
inverz, 388
komplex változós, 694
paraméteres alak, 389
többváltozós, 398
grafikus, 389
implicit függvények, 402
közvetett függvények, 401
logaritmikus, 387
magasabb rendű
inverz függvény, 393
paraméteres előállítás, 392
összetett függvények, 401
több változó, 401
tört, 387
vektorfüggvény, 664
differenciálási szabályok
egyváltozós függvények, 385
magasabb rendű derivált, 391
táblázat, 390
többváltozós függvények, 385, 401
vektorfüggvények, 664
differenciálegyenlet, 496
alaprendszer, 509
állandó együtthatójú, 509, 750
állandók variálása, 510
általános megoldás, 496
autonóm, 824
BERNOULLI-féle, 500
BESSEL-féle, 517
CLAIRAUT-féle, 501, 528
egzakt, 498
elliptikus, 532
elliptikus típus, 531
elsőrendű, 496
EULER-féle, 513
variációszámítás, 564
folyama, 821
FOURIER-transzformáció, 760
grafikus integrálás, 506
HAMILTON-féle, 825, 866
HELMHOLTZ-féle, 548
HERMITE-féle, 522
hiperbolikus, 532
hiperbolikus típus, 531
hipergeometrikus, 521
homogén, 498
implicit, 496, 501
indexegyenlet, 517
integráló tényező, 499
integrál, 496
integrálfelület, 526
integrálgörbe, 497
iránymező, 496
közönséges, 496
közelítő integrálás, 926
lineáris, 760
kvadratúra, 510
LAGRANGE-féle, 501
LAGUERRE-féle, 522
LAPLACE-féle, 692
LEGENDRE-féle, 520

lineáris, 826
alaptétel, 826
elsőrendű, 499
homogén, 826
inhomogén, 826
másodrendű, 516
n-edrendű, 509
periodikus együtthatós, 827
megoldás, 496
létezése, 496
megoldásfelület, 526
merev, 930
mátrix-, 826
numerikus integrálás, 506
ortogonalitás, 524
önadjungált, 523
parabolikus, 532
parabolikus típus, 531
parciális, 525, 751, 761
elsőrendű, 525
kvázilineáris, 525
lineáris, 525
másodrendű, 530
nemlineáris, 555
teljes integrál, 527
parciális, közelítő integrálás, 933
partikuláris megoldás, 496
peremérték-feladat, 523
POISSON-féle, 546, 690, 693
redukált, 855
RICCATI-féle, 500
sajátfüggvény, 524, 549
sajátérték, 524, 549
szinguláris pont, 503
teljesen integrálható, 530
topologikusan ekvivalens, 835
tóruszon, 827, 869
ultrahiperbolikus, 532
VAN DER POL-féle, 857
változó együtthatójú, 751
WEBER-féle, 553
differenciálegyenletek
a szuperpozíció elve, 510
CAUCHY–RIEMANN-, 539
felbontási tétel, 510
kanonikus rendszer, 528
karakterisztikus egyenlet, 514
karakterisztikus rendszer, 526
karakterisztikus sáv, 527
karakterisztikák, 526
lineáris rendszer, 513
magasabb rendű, 506
normál alak, 513
normális rendszer, 528
parciális, 525
rendszerek, 506
térelmélet, 692
differenciálgeometria, 224
differenciálhányados
iránymenti, 671
térbeli, 673
térfogati, 671
vektorfüggvény, 664
differenciálhányados (deriválás), 384
differenciálhatóság
a kezdeti feltételek szerint, 821
egyváltozós függvény, 384
komplex változós függvény, 694
többváltozós függvény, 400
differenciáloperátorok
térbeli, 678
differenciálszámítás, 384
áttekintés, 681
legfontosabb tételek, 393
összefüggések, 681
számítási szabályok, 682
térbeli, 671
vektorkomponensek, 681
differenciáltranszformáció, affin, 698
differenciamódszerek, 543, 930, 933
differenciaséma, 18
diffúziós egyenlet, 559
háromdimenziós, 546
diffúziós együttható, 546
dikritikus csomópont, 504
dimenzió, 846
általánosított, 849
DOUADY–OESTERLÉ-, 851
HAUSDORFF-, 846, 847
információ-, 849
invariáns mértékkel definiált, 848
kapacitás-, 847
korreláció-, 849
LJAPUNOV-, 850
metrikus, 846
mértéké, 848
pontonkénti, alsó, 848
pontonkénti, felső, 848
RÉNYI-, 850
vektortér, 322, 609
dimenziótétel, 322
DIRAC-
disztribúció, 662
mérték, 657

tétel, 357
DIRICHLET-feladat, 537, 692
DIRICHLET-féle feltétel, 428
diszjunkció, 283
diszjunkt, 289
diszkretizációs hiba
globális, 929
lokális, 929
diszkretizáló lépésköz, 921
diszkrimináns, 530
disztribúció, 661, 662, 745
deriválása, 662
DIRAC-, 662
reguláris, 662
disztribúcióelmélet, 742
disztributív szabály
BOOLE-algebra, 346
gyűrűk, testek, 320
halmazok, 290
ítéletkalkulus, 284
mátrixok, 254
tenzorok, 263
disztributív tulajdonság
vektoriális szorzat, 184
divergencia, 678
centrális mező, 676
definíció, 675
határérték végtelen, 410
különböző koordinátarendszerek, 676
nincs határérték, 410
sor, 414
számsorozat, 410
utalás, 673
vektorkomponensek, 681
vektormező, 675
dodekaéder, 155
domborzat, 696
duális, 347
dualitás
lineáris optimalizálás, 880
nemlineáris optimalizálás, 886
dualitási elv
BOOLE-algebra, 347
dualitástétel, erős, 887
dualizálás, 347
DUHAMEL-formula, 751

egészértékűségi feltétel, 872
egzinsztencionalitási elv, 288
egyállású szög, 131
egybevágóság
azonos értelemben, 135
csúcsok, 151
nem azonos értelemben, 135
síkidomok, 136
egycél-módszer, 932
egyenes, 63, 130
egyenlet, 217
síkbeli, 193
térbeli, 217
képzetes, 205
tér, 150
térbeli, 214
vektoregyenlet, 188
egyenes egyenlete
irányténvező, síkbeli, 194
sík, 193
általános, 194
egy ponton át, 194
HESSE-féle normálalak, 194
két ponton át, 194
polárkoordinátás, 195
tengelymetszetes, 194
térben, 217
egyenesek
kitérő, 150
két egyenes szöge, 196
merőleges, 130, 196
metszéspontja, síkbeli, 195
metsző, 150
ortogonalitása, 130
ortogonális, 196
párhuzamos, 130, 150, 196
egyenespár, transzformáció, 205
egyenkénti lépések módszere, 918
egyenlet, 10
algebrai, 38, 42
DIOPHANTOSZI, 329
lineáris, 329
egyenes
sík, 193
egyenes egyenlete
térben, 217
ellipszis, 198
elsőfajú, 651
elsőfokú, 39
exponenciális, megoldása, 45
felület, 213
normálalakja, 220
térben, 243
foka, 38
gömb, 243
gyöke, 38
harmadfokú, 40, 64

hiperbola, 200
hiperbolikus függvényre, megoldása, 46
homogén, 651
index-, 517
ingáé, 866
inhomogén, 651
karakterisztikus, 277, 503
kijelentésalgebra, 346
KORTEWEG DE VRIES-, 556
kvadratikus, 39
lineáris, 39
logaritmikus, megoldása, 45
logisztikus, 822, 862
másodfajú, 651
másodfokú, 39, 63
megoldása, 38
n-edfokú, 42
negyedfokú, 41
nemlineáris, numerikus megoldás, 907
normálalakja, 38
operátoregyenlet, 651
rendszerek, 38
SCHRÖDINGER-
  lineáris, 547
  nemlineáris, 555, 557
szinusz–GORDON-, 558
  sík
    általános, 214
    térben, 214
  térgörbe, 214, 238
    vektoralak, 238
  transzcendens, 38
  trigonometrikus, megoldása, 45
  vektor-, 187
egyenletek
  DELAMBRE-féle, 167
  MOLLWEIDE-féle, 142
  NAPIER-féle, 167
egyenletrendszer
  alulhatározott, 913
  homogén, 272
  háromszögmátrixú, 275
  inhomogén, 272
  lépcsőzetes, 913
  lineáris, 270, 272, 913
    alaprendszer, 273
    elemcsere-eljárás, 273
    triviális megoldás, 273
    túlhatározott, 276, 916
  nemlineáris, 913, 919
  numerikus megoldás, 913
    direkt módszer, 913
    iterációs módszer, 913
  túlhatározott, 913
egyenlőség
  aszimptotikus, 425
  komplex számoké, 35
  mátrixok, 253
  PARSEVAL-, 428, 525, 590, 636
  vektoroké, 180
egyenlőségi kapcsolat
  azonosság, 10
egyenlőtlenség, 28
  BERNOULLI-, 30
  BESSEL-, 635
  binomiális, 30
  CAUCHY–SCHWARZ-, 30
  CSEBISEV-, 31, 784
  elsőfokú, 33
  háromszög-, 29
  HÖLDER-, 32
  különböző középértékeké, 30
  MINKOWSKI-, 32
  másodfokú, 33
  speciális, 29
  számtani
    és mértani középé, 30
    és négyzetes középé, 30
egyesítés
  fuzzy halmazoké, 369, 370
  halmaz, 289
egyeslépésű iteráció, 919
egylépéses eljárás, 928
egységes számlaszám rendszer (EKONS), 337
egységgömb, 626
egységgyök, 951
egységmátrix, 253
egységvektor, 181
együttható, 38
  algebrai kifejezésé, 11
  CLEBSCH–GORDAN-, 302
  metrikus, 185, 186
  vektorfelbontás, 181
együtthatómátrix, 272
  kibővített, 272
  kibővítétt, 915
EINSTEIN-féle konvenció, 261
ék, 153
ékszög, 161
ekvivalencia
  bizonyítás során, 4
  igazságtábla, 283
  logikai, 284
ekvivalencia osztály, 294

ekvivalencia reláció, 293
él
  gráf, 351
    hossz, 354
    kiértékelés, 354
él, alakzat, 151
elágazási pont, 711
elem, 287
  generikus, 839
  inverz, 296
  neutrális, 295
  pozitív, 612
  szinguláris, 502
  tipikus, 839
  véges, 937
elemcsere-eljárás, 270, 273
elemcsere-lépés, 270
elemcsere-séma, 270
elemek kapcsolata, 287
elemi diszjunkció, 349
elemi esemény, 777
elemi formula, 286
elemi intervallum, 447
elemi konjunkció, 349
elemi területrész
  sík, táblázatok, 483
elforgatás, 841
elforgatási mátrix, 190, 211
elhelyezés
  szabad, 147
eliminációs elv, GAUSS-féle, 275
eliminációs lépés, 914
eljárás
  BAIRSTOW-, 912
  CHOLESKY-, 277, 915
  egylépéses, 928
  elemcsere-, 270
  felező, 281
  GAUSS–NEWTON-, 920
    differenciálás nélkül, 921
  GAUSS–SEIDEL-, 918
  GRAEFFE-, 912
  HOUSEHOLDER-, 277, 943
  iterációs, 281
  JACOBI-, 281, 918
  LÁNCZOS-, 281
  NEWTON-, 908, 920
    módosított, 908
ortogonalizálási, 277, 279
ROMBERG-, 924
RUNGE–KUTTA-, 927
STEFFENSEN-, 909
  többlépéses, 928
  transzformációs, 281
ellenőrző kód, 336
ellentmondás
  BOOLE-függvény, 348
ellipszis, 197
  átmérő, 198
  binom, 70
  egyenlete, 198
  érintő, 198
  félparaméter, 197
  fókuszainak tulajdonságai, 198
  görbületi körének sugara, 199
  ívhossz, 199
  kerület, 199
  terület, 199
  transzformáció, 205
ellipszoid, 220
  centrális felület, 224
  felület
    másodrendű, 224
  képzetes, 224
elliptikus függvények, 719
elliptikus integrál, 707
  elsőfajú, 730
  teljes, 731
eloszlás
  binomiális, 784
  χ^2-, 791
  diszkrét, 784
  exponenciális, 790
  FISHER-, 792
  folytonos, 787
  gyakoriság-, 797
  hiba-, 812
  hipergeometrikus, 784, 785
  logaritmikus normális, 789
  normális, 787
  POISSON-, 786
  STUDENT-, 793
  t-, 793
  WEIBULL-, 790
eloszlásfüggvény, 781
  folytonos, 782
elosztási feladat, 884
elosztási mátrix, 881
előjelfüggvény, 48
előjelszabály
  DESCARTES-féle, 44
előmetszés
  a gömbön, 171
  irányzás nélkül, 148

két félegyenessel, 147
élsorozat, 354
elemi kör, 354
kör, 354
nyitott, 354
út, 354
zárt, 354
első közelítés egyenlete, 505
első kvadratikus alapforma
felület, 246
eltérés
mérési hiba, 811
szignifikáns, 803
eltolásinvariáns, 626
eltolás-leképezés, 844, 854
elv
CAUCHY-féle, 619
elválasztási tétel, 645
endomorfizmus, 611
entrópia
általánosított, 849
metrikus, 844
topologikus, 843, 854
epiciklois, 104
hurkolt, 106
nyújtott, 106
epitrochoid, 106
epszilontenzor, 265
ERASZTOSZTHENÉSZI-szita, 325
eredeti függvény, 735
eredeti lista (mérési jegyzőkönyv), 797, 812
eredeti tartomány, 735
eredő függvény, 735
érintő
hajlásszöge, 227
kör, 197
sík görbe, 226
térgörbe, 239, 241
érintő irányszöge, 384
érintődarab, 227
érintőmeridián, 177
érintőnégyszög, 138
érintősík, 158, 400
felület, 244, 245
érintőszög, 139
erővonal, 671
értékazonos, 284
értékazonos kifejezések, 348
értékkészlet
függvényé, 47
halmaz, 48
operátor, 610
értékrendszer, 121
értelmezés táblázat útján, 123
értelmezési tartomány, 122
függvény, 47
halmaz, 48
operátor, 610
érzékenység a kezdeti feltételekre, 854
esemény, 777
biztos, 777
elemi, 777
független, 780
lehetetlen, 777
véletlen, 777
eseményhalmaz, 777
eseményrendszer, teljes, 780
ess sup, 660
euklideszi
algoritmus, 2, 14
norma, 323
vektornorma, 258
vektortér, 323
EULER-
formula, 725
függvény, 335
képlet, 247
szög, 211
út, 356
vonal, 356
EULER–HIERHOLZER-tétel, 356
EULER-féle
összefüggés, 35
differenciálegyenlet, 513
elsőfajú integrál, 996, 1083
formulák, 427
integrál, 2. fajú, 466
konstans, 468
poliéder-tétel, 154
poligonvonal-eljárás, 926
számok, 417
európai árucikkszámozás (EAN), 337
evolúciós egyenlet, 556
evolúciós függvény, 556
evoluta, 236
evolvens, 236
köré, 108
excentricitás, numerikus
ellipszis, 197
hiperbola, 200
másodrendű görbe, 205
parabola, 203
explicit előállítás, 49
exponenciális eloszlás, 790

exponenciális függvény, 703
e alapú, 725
exponenciális összeg, 73
extrapoláció elve, 925
extremális, 563
extremálisok
görbületi sugár, 568

fa, 358
bináris, 358
rendezett, 358
gyökér, 358
reguláris bináris, 358
faktoralgebra, 345
faktorcsoport, 299
faktorgyűrű, 321
faktorhalmaz, 294
faktoriális, 12, 996
FALK-séma, 254
favázak, 358, 359
fázis, 83
szinusz, 76
fáziseltolódás, 83
fázisportré, 825
fázisspektrum, 756
fázistér, 821
FEIGENBAUM-állandó, 862, 864
feladat
CAUCHY-, 527
DIRICHLET-, 537, 692
diszkrét, 943
folytonos, 942
inhomogén, 545
korrekt kitűzésű, 543
NEUMANN-, 692
STURM–LIOUVILLE-, 524
többdimenziós, 944
felár, 21
felbomlás, tórusz, 867
felbontás
ortogonális, 634
felbontási tétel
differenciálegyenletek, 510
felcserélés
ciklikus
oldalak és szögek, 142
vektorok, 207
felcserélési tétel
SCHWARZ-féle, 401
felcserélhetőségi szabály, 285
félcsoportok, 295
félegyenes, 130
felesleg, gömbi, 164
felező eljárás, 281
felezőpont
szakasz
tér, 212
félig rendezett halmaz, 294
félnorma, 626
féloldal-tétel, 166
felosztás, 294
állandó, 192
belső, 192
külső, 192
szakasz
sík, 192
tér, 212
felosztási tétel, 294
félpálya
negatív, 821
pozitív, 821
félparaméter, 197
parabola, 70
felső háromszög mátrix, 914
felszín
felületdarab, 246
gömb, 157
henger, 154
hordótest, 158
háromszög
gömbháromszög, 164, 168
kettős integrál, 483
kúp, 156
poliéder, 152
tórusz, 158
félszög-tétel
gömbháromszögtan, 165
síkbeli trigonometria, 142
félszögtétel
síkbeli trigonometria, 82
féltér, 646
feltétel
CARATHÉODORY-, 653
dinamikus, 901
DIRICHLET-féle, 428
KUHN–TUCKER-, 886
statikus, 901
feltételek
egyenlőtlenségek, egyenlőségek, 871
felület, 243
ábrázolás spline-okkal, 954
B–B-ábrázolás, 957
egyenesvonalú alkotó, 250
egyenlete, 213

térben, 243
első kvadratikus alapforma, 246
érintősík, 244, 245
forgás-, 213
főgörbületi sugár, 247
főgörbületi sugár, 247
geodetikus vonal, 250
henger-, 213
irányított, 492
kúp-, 213
lefejthető, 250
metrika, 247
másodrendű, 220, 223
alak, 223
centrális, 224
invariánsok előjelei, 224
normálvektor, 244
transzverzális, 831
vonal-, 250
felületi
vonalelem, 246
felületdarab felszíne, 246
felületegyenlet
másodrendű, 223
normálalakja, 220
felületelem, 246
görbe felület, 491
integrálszámítás
táblázat, tér, 491
paraméteres alak, 490
vektorkomponens, 682
felületi integrál, 488, 685, 687
1. típusú, 488
2. típusú, 492
általános típusú, 494
felületi normális, 244, 245
felületi pont, 249
elliptikus, 249
hiperbolikus, 249
parabolikus, 249
szinguláris, 245
FEM, 936
ferdén levágott henger, 155
feszültségtenzor, 263
FFT, 950
FIBONACCI-
sorozat, 329
számok, 329, 870
fixpont
lineáris leképezés, 699
stabilis, 861
fixpont-egyenlet, 907
fixpontos szám, 960, 961
fixponttétel
BANACH-, 619, 652
BROUWER-, 654
SCHAUDER-, 654
fluxus
skalármező, 687
vektormező
skalárfluxus, 687
vektorfluxus, 687
fok, 131
fokszámmátrix, 359
fókusz, 504, 828, 833
ellipszis, 197
hiperbola, 200
parabola, 203
fókuszból kiinduló vezérsugár, 200
folyam
differenciálegyenlet, 821
ív, 363
folytatás
analitikus, 718
folytonosság, függvény, 58
egyváltozós, 58
elemi, 59
komplex változós, 694
közvetett, 60
többváltozós, 128
fordított leképezés, 293
forgásellipszoid, 220
forgásparaboloid, 221
forgásszög, 212
forgástest, palást-felszín, 457
forgatási csoport $SO(3)$, 309
forgatási szám, 869
forgatásinvariáns, 264, 265
forgatásmátrix, 256
ortogonális, 262
forgásfelület, 213
formula
D'ALEMBERT-, 545
DUHAMEL-, 751
KIRCHHOFF-, 545
L'HUILIER-féle, 168
LEIBNIZ-féle, 391
LIOUVILLE-, 509, 826
PLEMELJ–SZOHOCKIJ-, 603
POISSON-, 545
RIEMANN-, 539
SIMPSON-, 923
STIRLING-, 470
TAYLOR-, 395

formulák, EULER-féle, 427
forrás, 828, 836
  csomópont, 363
  vektormező, 675
forráseloszlás
  diszkrét, 691
  folytonos, 692
forrásmező
  örvénymentes, 690
  tiszta, 690
forrássűrűség, 690
FOURIER-analízis, 427
FOURIER-együtthatók, 427, 949
  meghatározás, 407
  numerikus meghatározás, 430
FOURIER-integrál, 431, 753
  ekvivalens előállítások, 753
  komplex előállítás, 753
FOURIER-összeg, 428, 949
  komplex alak, 951
FOURIER-sor, 427
  HILBERT-tér, 635
  komplex alak, 427
  legjobb közelítés, 635
FOURIER-sorfejtés, 427
  formulák, 430
FOURIER-transzformáció, 753
  addíciós tétel, 756
  áttekintés, 735
  csillapítási tétel, 757
  definíció, 754
  differenciálás
    eredeti tartomány, 757
    képtartomány, 757
  diszkrét komplex, 951
  eltolási tétel, 757
  exponenciális, 755
  FOURIER-koszinusztranszformáció, 754
  FOURIER-szinusztranszformáció, 754
  gyors, 950
  hasonlósági tétel, 757
  integrálás
    eredeti tartomány, 757
    képtartomány, 757
  inverz, 754
  konvolúció, 758
    kétoldali, 741
  képfüggvény, 759
  linearitási tétel, 756
  összehasonlítás a LAPLACE-transzformációval, 758
  spektrális interpretáció, 756
  táblázatok, 755
főelem, 271
főérték
  árkuszfüggvények, 86
  CAUCHY-féle, 464
  integrál, improprius, 461
  inverz hiperbolikus függvény, 726
  inverz trigonometrikus függvény, 726
  komplex szám artumentumáé, 35
  logaritmus, 725, 726
főfeladat
  1., háromszögelés, 147
  2., háromszögelés, 149
főgörbületi sugár
  felület, 247
főideál, 320
főkör, 158, 172
főmennyiség, 11
főnormális, térgörbe, 239, 241, 242
főoszlop, 271
fősor, 271
főtengelyirányok, 264
főtengelytranszformáció, 264, 279
főtétel
  integrálszámítás, 465
fraktál, 846
FRÉCHET-derivált, 653
FREDHOLM-féle
  alternatíva, 581, 651
  integrálegyenlet, 572, 587, 621
  megoldási módszer, 579
  tételek, 579
frekvencia, 76, 83
  körfrekvencia, 83
frekvenciacsatolás, 870
frekvenciaspektrum, 756
  diszkrét, 431
  folytonos, 431
FRENET-képletek, 243
FRESNEL-integrál, 724
FUBINI-tétel, 480
funkcionál, 47, 563, 637
  lineáris, 610, 611
  lineáris, folytonos, 642
    L^p-térben, 644
funkcionálanalízis, 606
fuzzy
  értékűség, 373
  halmaz, 364
  hatványhalmaz, 364
  irányítás, 379
  kompozíció, 375

max–min, 376
max–szorzás, 376
max–átlag, 376
következtető rendszerek, 376
logika, 364
nyelvezet, 365
reláció, 373
relációmátrix, 374
rendszer, 381
rendszer, felhasználás, 378
fuzzy halmaz
diszkrét, 365
komplemense, 373
magassága, 368
magja, 368
másodfajú, 365
normális, 368
összekapcsolási operátor, 375
részhalmaza, 368
szinthalmaza, 368
karakterizációs tétel, 369
szubnormális, 368
tartója, 364
ultra, 365
univerzális, 368
üres, 368
fuzzy halmazok
azonossága, 365
egyesítése, 370
hasonlósága, 369
komplemense, 369
metszete, 369, 370
műveletei, 369
uniója, 369, 370
fuzzy reláció
bináris, 374
fuzzy relációk
kompozíciója, 375
fuzzy szabálybázis, 376
fuzzyfikálás, 379
függés, poláris, 145
függetlenség
az integrációs úttól, 476, 713
lineáris, 271, 609
függőség
lineáris, 271, 322
függvény
abszolút integrálható, 463, 466
AIRY-, 996
algebrai, 61
általánosított, 661, 662, 745
amplitúdó-függvény, elliptikus, 731
analitikus, 695
área-, 93
árkusz-, 85
BESSEL-, 518
módosított, 519
BOOLE-, 284, 348
béta-, 1083
ciklometrikus, 85
diszkrét, 763
egyváltozós, 47
elemi, 61
elemi, transzcendens, 725
elliptikus, 443, 719, 731
eloszlás-, 781
értékkészlete, 47
EULER-, 335
exponenciális, 62, 72
komplex, 703
folytonosság, 58
egyoldali, 58
intervallumban, 58
szakaszonként, 58
független, 126
függő, 126
goniometriai, 75
GREEN-, 540
HAMILTON-, 528, 825
HANKEL-, 996
harmonikus, 692, 695
hatvány-, 71
határérték, 52
a végtelenben, 54
bal oldali, 53
iterált, 128
jobb oldali, 53
TAYLOR-sorfejtés, 56
végtelen, 53
határértéktételek, 54
HEAVISIDE-, 663, 997
HERMITE-féle, 634
hiba-, 468, 997
hiperbolikus, 89, 133, 726
hipergeometrikus, 998
holomorf, 695
homogén, 126, 567
igazság-, 283, 284
integrálható, 448, 658
inverz, 51
deriválás, 388
hiperbolikus, 93, 726
létezése, 60
magasabb rendű deriváltak, 393

trigonometrikus, 62, 85, 726
irracionális, 62, 70
JACOBI-, 731
kétszeresen periodikus, 731
komplemens, 373
komplex, 47
algebrai, 724
korlátos, 696
lineáris, 699
lineáris tört, 700
másodfokú, 701
négyzetgyök, 701
törtlineáris, 700
komplex változós, 694
komplex értékű, 47
korlátos, 50
koszekáns, 78
koszinusz, 76
kotangens, 77
közbeeső változó, 387
középérték, 450
közvetett
közbeeső változó, 387
közvetett deriválás, 387
kvadratikus, 61
LAGRANGE-, 886
LAGUERRE-, 634
LAPLACE-, 692
lineáris, 61, 63
lineáris törtfüggvény, 62, 65
lineáris és lineáris törtfüggvény összege, 701
logaritmus, komplex függvény, 703
logaritmusfüggvény, 62, 72
lokálisan integrálható, 661
MACDONALD-, 519
meromorf, 719, 731, 748
mintafüggvény, 795
monoton
csökkenő, 49
növekedő, 49
mérhető, 658
nagyságrend, 56
nem elemi, 61
NEUMANN-, 518
összetett, 63
paraméteres előállítás
magasabb rendű deriválás, 392
periodikus, 51, 745
páratlan, 50
páros, 50
racionális egész, 61
elsőfokú, 63
harmadfokú, 64
másodfokú, 63
n-edfokú, 64
racionális törtfüggvény, 62, 65
reguláris, 695
RIEMANN-, 539
szakadási hely, 58
kifutás a végtelenbe, 58
megszüntethető szakadás, 59
véges ugrás, 58
szakaszonként folytonos, 58
szekáns, 77
szigorúan monoton, 49
szinusz, 75
tangens, 76
théta-, 732
többváltozós, 47, 121
transzcendens, 62
trigonometrikus, 62, 75, 132, 726
valós, 47
valószínűségi változók, 781
WEBER-, 518
WEIERSTRASS-féle, 733
függvény korlátossága, 50
függvény fogalma, 47
függvénydeterminány, 266, 482, 676
többváltozós, 126
függvénypapír
egyszer logaritmikus, 119
fogalma, 119
kétszer logaritmikus, 120
reciprok skála, 120
függvényrendszer
ortogonális, 942
ortonormált, 943
függvénysor, 419
függvény
hozzátartozási, 364
tagsági, 364

GÁBOR-transzformáció, 773
GALERKIN-módszer, 932
gammafüggvény, 466, 469, 996
GAUSS-
egészek, 1007
görbület, felület, 249
hibanégyzetmódszer, 916
integráltétel, 688
lépés, 275
papír, 799
transzformáció, 276, 807, 916
GAUSS-féle

algoritmus, 275, 914
  Maple, 1019
eliminációs elv, 275
eliminációs módszer, 913
haranggörbe, 72, 788
hibaintegrál, 468, 788
hibanégyzet-módszer, 942
  besorolás, 407
hibaterjedési törvény, 819
koordináták, 244
  összegszimbolika, 943
  számsík, 34
GAUSS–KRÜGER-koordináták, 161
GAUSS–NEWTON-eljárás, 920
  differenciálás nélkül, 921
geometria, 130
  analitikus, 180
    sík, 189
    tér, 207
  differenciálgeometria, 224
GIRARD-tétel, 164
globális szélsőérték meghatározása, 397
gömb, 157
  egyenlete három alakban, 243
  metrikus tér, 616
  mint ellipszoid, 220
gömbcikk, 157
gömbfüggvény, 553
  elsőfajú, 520
  másodfajú, 521
gömbi koordináták
  vektormező, 669
gömbkétszög, 161
gömbkoordináták, 209
gömbmező, 665
gömbréteg, 157
gömbskatulyázási tétel, 619
gömbszelet, 157
görbe
  ábrázolás spline-okkal, 954
  algebrai, 95, 193
    n-edrendű, 234
ARCHIMÉDESZI spirál, 107
área koszinusz hiperbolikusz, 93
área kotangens hiperbolikusz, 94
área szinusz hiperbolikusz, 93
área tangens hiperbolikusz, 94
árkusz koszinusz, 85
árkusz kotangens, 85
árkusz szinusz, 85
árkusz tangens, 85
aszimptota, 231, 234
aszimptotikus pont, 233
asztrois, 106
B–B-ábrázolás, 957
CASSINI-féle, 101
ciklois, 102, 103
cisszoid, 97
csillapított rezgések, 85
DESCARTES-féle levél, 96
egyenlet
  tér, 214
empirkus, 110
epiciklois, 104
epitrochoid, 106
evoluta, 236
evolvens, 236
exponenciális, 72
GAUSS-féle harang-, 72, 788
gömbfelületi, 158, 172
görbületi, 229
  sugár, 229
harmadrendű, 66, 95
hiperbolikus spirál, 107
hiperbolikus típusú, 69, 71
hipociklois, 106
hipotrochoid, 106
hossz, 1. típusú vonalintegrál, 472
inflexiós pont, 231
involuta, 236
izolált pont, 233
kardioid, 100
katenoid, 109
képzetes, 193
kettőspont, 233
klotoid, 109
KOCH-féle, 848
konkáv, 228
konvex, 228
koszekáns, 78
koszinusz, 76
koszinusz hiperbolikusz, 89
kotangens, 77
kotangens hiperbolikusz, 90
kör evolvense, 108
lemniszkáta, 102
logaritmikus spirál, 108
logaritmus, 72
LORENTZ-görbe, 96
megszűnési pont, 233
n-edrendű, 64, 193
negyedrendű, 98
NEIL-parabola, 95
NIKODEMES-féle konkoid, 98

önérintési pont, 233
parabolikus típusú, 64
PASCAL-féle csiga, 99
spirál, 107
szekáns, 77
szférikus, 665
szinusz, 76
szinusz hiperbolikusz, 89
sztrofoid, 97
sík, 225
csúcspont, 232
érintő, 226
irány, 225
ívelem, 225
normális, 226
szög, 228
tangens, 76
tangens hiperbolikusz, 90
tér-, 238
többszörös pont, 233
töréspont, 233
traktrix, 110
transzcendens, 193
trochoid, 103
visszatérési pont, 233
görbe egyenlete
sík, 193, 225
tér, 214
görbeháló, 698
görbék
gömbfelületi, 172
metszéspontjai, 179
görbék egyenlete
komplex alak, 727
görbék vizsgálata, általános, 235
görbepont, sík görbe, 231
görbesereg, burkoló, 237
görbület
felület, 247, 249
minimális összgörbület, 954
sík görbe, 229
térgörbe, 240
görbületi kör, 230
középpontja, 230
görbületi kör sugara
extremálisok, 568
görbületi sugár, 230
görbék egy felületen, 247
görbe, 229
sík görbe, 229
térgörbe, 240
görbületi vonal, 248
gradiens, 678
definíció, 673
különböző koordinátarendszerek, 674
skalármező, 673, 674
utalás, 673
vektorkomponensek, 681
gradiens módszer, 892
gradiensmódszer, 571
GRAEFFE-eljárás, 912
gráf
ciklus, 361
csomópont, 351
egyszerű, 351, 352
él, 351
erősen összefüggő, 362
fa, 352
felosztás, 361
folyam, 363
irányítatlan, 351
irányított, 351
ívek, 351
izomorfia, 353
kevert, 351
komponens, 355
kör, 361
nem sík-, 361
összefüggő, 355, 362
párok, 352
reguláris, 352
rész-, 353
sík-, 352, 361
speciális osztályai, 352
súlyozott, 354
szállítási hálózat, 352
teljes, 352
teljes párosítás, 352
végtelen, 352
gráfelmélet, algoritmusok, 351
gravitációs tér, pontszerű sokaság, 691
GREEN
integráltételei, 689
GREEN-
függvény, 540
módszer, 540, 541
gúla, 153
egyenes, 153
n-oldalú, 153
szabályos, 153

gyakoriság, 778, 797
abszolút, 797
kumulált, 797

relatív, 778, 797
gyakoriságeloszlás, 797
gyök
egyenleté, 42
fogalma, 8
gyökeres fa, 358
gyökjel alatti mennyiség, 8
gyökkritérium, 413
gyöktétel, VIETA-féle, 43
gyökvonás, 8
komplex számoké, 38
gyűrű, 320
faktorgyűrű, 321
homomorfiatétel, 321
rész-, 320
gyűrűhomomorfizmus, 321
gyűrűizomorfizmus, 321

HA–AKKOR szabály, 376
tüzelő, 379
hadronok osztályozása, 318
hajlásszög, 143
hajózás, 171
halmaz
a nyílt halmazok axiómái, 617
a racionális számok halmaza, 1
a zárt halmazok axiómái, 617
az egész számok halmaza, 1
azonos számosságú halmazok, 295
BOREL-, 657
diszjunkt, 289
elem, 287
elnyelő, 823
faktorhalmaz, 294
fuzzy, 364
halmazfogalom, 287
hatvány, 288
invariáns, 823
fraktál, 853
kaotikus, 853
stabilis, 824
irracionális számoké, 1
kompakt, 650, 824
komplex számoké, 34
konvex, 610
koordináták (x, y), 291
korlát, 613
korlátosak metrikus térben, 617
lezárás, 618
megszámlálhatatlan végtelen, 295
megszámolható, 295
megszámolhatóan végtelen, 295
mérhető, 657
nyílt, 616
relatíve kompakt, 650
rendezésre nézve korlátos, 613
rész-, 288
számosság, 295
sűrű, 618
természetes számok, 1
üres, 288
valós számoké, 2
végtelen, 295
zárt, 617
halmazalgebra, alapszabályok, 289
halmazelmélet, 287
halmazműveletek, 288
direktszorzat, 290
egyesítés, 289
komplemens, 289
különbség, 290
metszet, 289
szimmetrikus differencia, 290
halmazok elválaszthatósága, 645
HAMEL-bázis, 609
HAMILTON-
differenciálegyenlet, 825, 839, 866
függvény, 528, 825
kör, 357
rendszer, 839
HAMMING-távolság, 615
HANKEL-függvény, 996
HANKEL-transzformáció, 735
hányados deriváltja, 387
hármas, 291
hármas integrál, 483
alkalmazás, 488
harmonikus analízis, 939
harmonikus függvény, 695
háromszög
beírt kör, 134
derékszögű, 135
egybevágó, 136
egyenlőoldalú, 134
egyenlőszárú, 134
EULER-féle, 163
gömbháromszög
alapfeladatok, 168
derékszögű, 168
ferdeszögű, 170
megoldása, 168
gömbi, 162
EULER-féle, 163
körülírt kör, 134

középvonal, 134
magassága, 134
magasságpont, 134
meghatározó adatok, 134
oldalfelező, 134
PASCAL-, 12
sík-, 134
alapfeladatok, 143
beírt kör sugara, 143
derékszögű, 141
EUKLEIDÉSZ tételei, 141
ferdeszögű, 142
körülírt kör sugara, 143
tangensképletek, 142
terület, 141, 143
síkbeli
terület, 193
súlypont, 134
szögfelező, 134
háromszög-elrendezés, 18
háromszög-egyenlőtlenség
komplex számokra, 29
metrikus tér, 615
norma, 626
normaaxiómák, 258
unitér tér, 633
valós számokra, 29
vektorok, 181
háromszögek
hasonló, 136
háromszögelés
méréstechnika, 147
háromszög-faktorizáció, 913, 914
háromszög-felbontás
FEM, 936
háromszög-koordináták, 939
háromszögmátrix, 253
alsó, 253
felső, 253
hasáb, 152
egyenes, 152
szabályos, 152
hasonlósági transzformáció, 279
HASSE-diagram, 294
határ
bizonytalan, 374
határciklus, 830, 858
instabilis, 830
stabilis, 830
határérték
függvény
egyváltozós, 52
komplex változós, 694
függvénysorok, 419
határozott integrál, 447
részletösszegek, 419
sor, 411
sorozat metrikus térben, 617
számsorozat, 410
többváltozós, 127
határértéktételek
függvények, 54
LINDEBERG–LEVY-, 794
számsorozatok, 410
határpont, 237
hátrametszés
CASSINI-féle, 149
SNELLIUS-féle, 149
hatvány
fogalma, 7
reciprok, 69
hatványfüggvény, általános, 725
hatványhalmaz, 288
fuzzy, 364
hatványozás
komplex számoké, 37
valós számoké, 7
hatványsor, 421
aszimptotikus, 425, 426
inverz, 422
hatványsorba való fejtés, 422
analitikus függvények, 716
hatványsorok
komplex, 716
háztető-leképezés, 841
HEAVISIDE-féle
egységfüggvény, 742
kifejtési tétel, 747
HEAVISIDE-függvény, 663, 724, 997
HELMHOLTZ-féle differenciálegyenlet, 548
hely
mértani, 193
helykoordináták, tükrözés, 268
helyvektor
a komplex számsíkon, 34
henger, 154, 222
elliptikus, 222
hiperbolikus, 222
invariánsok előjelei
elliptikus, 224
hiperbolikus, 224
parabolikus, 224
parabolikus, 222
hengeres kiterjesztés, 377

hengerfelület, 154, 213
hengerfüggvény, 518
hengerkoordináták, 209
  vektormező, 669
hengerszelet, 155
HÉNON-leképezés, 822, 837
HERMITE-polinomok, 522, 554
HESSE-féle normálalak
  egyenes egyenlete, sík, 194
  síkegyenlet, 214
HESSE-mátrix, 892
hiba, 814
  abszolút, 816, 962
    hibamaximum, 816
  átlagos, 813, 815
    négyzetes, 814, 815
  bemeneti, 963
  definiált, 816
  diszkretizálási, 964, 965
  egyszerű átlagos, 813
  eljárás-, 964
  eredmény-, 963
  kerekítési, 965
  közép
    kvadratikus, 428
    négyzetes, 428
  látszólagos, 814
  megszakítási, 964
  összefüggés a hibatípusok között, 814
  relatív, 816, 962
    hibamaximum, 816
  százalékos, 816
  szórás, 814
  szórásátlagos, 815
  valódi, 814
  valószínű, 813, 815
hibaanalízis, 820
hibabecslés
  iterációs módszer, 919
  középértéktétel, 394
hibaegyenlet, 916
hibaelmélet
  direkt feladat, 963
  inverz feladat, 963
hibaeloszlás, 812
hibafüggvény, 468, 997
hibaintegrál, GAUSS-féle, 468, 788
hibák négyzetösszege, 276
hibanégyzet-módszer, 111, 931, 935, 942
  GAUSS-féle
    módszer, 407
hiba-négyzetösszeg, 916, 943
hiba-normáleloszlás, 812
hiba-ortogonalitás, 932
hiba-sűrűségfüggvény, 812
hibaterjedés, 818
hibatípusok, 963
  hibaeloszlás, 812
hibavalószínűség, 783, 800
hidrosztatikai nyomás, 458
HILBERT-mátrix, 1017, 1020
HILBERT-tér, 633
  izomorf, 636
  skalárszorzat, 632
hiperaltér, 645
hiperbola, 200
  aszimptotái, 201
  átmérő, 202
  binom, 70
  csúcspont, 200
  egyenlő oldalú, 65
  egyenlőoldalú, 202
  érintő, 200
  érintődarab, 201
  félparaméter, 200
  fókusz, 200
  fókuszának tulajdonságai, 200
  görbületi körének sugara, 202
  konjugált, 201
  terület, 202
  transzformáció, 205
  vezéregyenes, 200
hiperbolaegyenlet, 200
hiperbolaív, 202
hiperbolaszelet, 202
hiperbolikus függvény, 132, 133, 726
hiperboloid, 220
  egyköpenyű, 220, 222
    centrális felület, 224
  kétköpenyű, 220
    centrális felület, 224
hiperfelület, 122
hipergeometrikus
  függvény, 998
hipergeometrikus
  eloszlás, 784
hipersík, 645
hipociklois, 106
  hurkolt, 106
  nyújtott, 106
hipotézis próba
  statisztikai, 799
hipotézisvizsgálat, 803
hipotrochoid, 106

hisztogram, 797
hitel, 21
hodográf, vektorfüggvény, 664
HOLLADAY-tétel, 954
holoedria, 316
homályosság, 364
homeomorfizmus, 835
  irányítástartó, 869
homeomorfizmus
  konjugáló, 837
homogenitás foka, 126
homomorfiatétel, 345
  csoport, 299
  gyűrű, 321
homomorfizmus, 299, 345, 611
  algebráké, 631
  gyűrű, 321
  természetes, 299, 321, 323
  vektorhálók, 613
HOPF-bifurkáció, 856
HOPF–LANDAU-modell
  turbulenciáé, 867
hordótest, 158
  parabolikus, 158
HORNER-elrendezés, 910, 960
  kétsoros, 911
hossz
  intervallumé, 656
  vektor, 189
hosszúság
  1. típusú vonalintegrál, 472
  földrajzi, 160, 244
  redukált, 173
HOUSEHOLDER-
  eljárás, 277, 943
  tridiagonalizálás, 281
hozzárendelési feladat, 884
hozzátartozási függvény, 364
HÖLDER-folytonosság, 602
hővezetés egyenlete
  egydimenziós, 537
  háromdimenziós, 546
hővezetési egyenlet
  egydimenziós, 752
L'HUILIER-féle formula, 168
hullámegyenlet
  egydimenziós, 761
  n-dimenziós, 544
hullámfüggvény
  hővezetés egyenlete, 546
  klasszikus feladat, 544
  SCHRÖDINGER-egyenlet, 547
hullámhossz, 83
hullám, sík, 770
húr, 140
húr rezgése, 533
húr-érintő szög, 139
húrnégyszög, 138
húrok
  egymást metsző, 139
hurok, gráf, 352
húrszög, 139

ideál, 320
  főideál, 320
idempotencia szabály
  BOOLE-algebra, 347
  halmazok, 290
  ítéletkalkulus, 284
idő–frekvencia analízis, 773
IEEE-standard, 961
igazságérték, 283
igazságfüggvény, 283, 284
  diszjunkció, 283
  ekvivalencia, 283
  implikáció, 283
  konjunkció, 283
  NAND-függvény, 285
  negáció, 283
  NOR-függvény, 285
igazságtábla, 283
igazságváltozó, 283
ikozaéder, 155
illeszkedés, 352
illeszkedési mátrix, 354
illesztési feladat
  különböző módszerek, 407
implicit előállítás, 49
implikáció, 283
  bizonyításnál, 4
impulzusfüggvény, 742
incidencia matrix, 354
incidenciafüggvény, 351
indexfelemelés, 266
indukciós következtetés, 5
infinitezimális, 447
infix jelölésmód, 295
inflexiós pont, 231, 236, 395, 397
  meghatározása, 396
inga
  FOUCAULT-féle, 972
  matematikai, 730
inga egyenlete, 866
ingadozás, függvény, 61

instabilitás
kerekítési, numerikus számítás, 965
integrációs határ
alsó, 447
felső, 447
integrációs határok, 447
paramétertől függő, 467
integrációs intervallum, 447
integrációs konstans, 434
integrációs út, 470
integrációs változó, 447
értelmezés, 434
integráf, 454
integrál
abszolút konvergens, 466
elemi függvények, 434
EULER-féle, 466, 469
exponenciális, 997
felületi, 488
FOURIER-, 431
FOURIER-integrál, 753
FRESNEL-, 724
görbementi, 470
komplex függvény, 658
kör-, 470, 476
LEBESGUE-, 658
összehasonlítás a RIEMANN-integrállal, 460
nemelemi függvényeké, 437, 467
paraméteres, 466
primitív függvény, 433
RIEMANN-, 447
összehasonlítás a STIELTJES-integrállal, 460
STIELTJES-, 643
fogalom, 460
összehasonlítás a RIEMANN-integrállal, 460
utalás, 649
szinguláris, 502
vonal-, 470
integrál, elliptikus, 443, 707
1. fajú, 437, 443
2. fajú, 443
3. fajú, 443
elsőfajú, 730
határozatlan, 443
határozott, 443
sorfejtés, 470
teljes, 731
integrál, határozatlan, 433
alapintegrál, 434
egyéb transzcendens függvények
táblázat, 1077
elemi függvények, 434
táblázat, 1050
értelmezés, 434
exponenciális függvények
táblázat, 1078
hiperbolikus függvények
táblázat, 1077
hiperbolikus függvények inverzei
táblázat, 1082
irracionális függvények
táblázat, 1057
koszinuszfüggvény
táblázat, 1070
kotangensfüggvény
táblázat, 1076
logaritmusfüggvények
táblázat, 1079
szinusz- és koszinuszfüggvények
táblázat, 1072
szinuszfüggvény
táblázat, 1068
tangensfüggvény
táblázat, 1076
trigonometrikus függvények
táblázat, 1068
trigonometrikus függvények inverzei
táblázat, 1081
táblázat, 1050
táblázat, alapintegrálok, 434
integrál, határozott, 447
differenciálás, 449
értelmezés, 433
táblázat, 1083
algebrai függvények, 1087
exponenciális függvények, 1085
logaritmikus függvények, 1086
trigonometrikus függvények, 1083
integrál, improprius, 447
divergens, 461, 464
fogalom, 460
főérték, 461, 464
konvergens, 461, 464
integrál, komplex
határozatlan, 712
határozott, 711
integrálás
általános szabály, 434
az integráljelen belül, 467
függvény, nemelemi, 467
grafikus, 437, 453

intervallumszabály, 449
komplex, 721
komplex síkon, 711
konstans szorzó, 434
logaritmikus, 436
megcserélési szabály, 450
numerikus, 921
  többes integrálok, 926
összegszabály, 435
parciális, 436
racionális függvények, 437
sorfejtéssel, 437, 453, 467
térfogat, 457
vektormezők, 682
integrálási szabályok
  határozatlan integrál, 438
  határozott integrál, 451
integrálegyenlet
  ABEL-féle, 600
  elfajult magú, 587
  FREDHOLM-féle, 621
    elsőfajú, 587
    másodfajú, 573
  homogén, 572
  inhomogén, 572
  iterációs módszer, 576, 594
  karakterisztikus, 602
  lineáris, 572
  mag, 573
  négyzetes integrálhatóság, 589
  sajátfüggvény, 574
  sajátérték, 574
  szinguláris, 600
  transzponált, 575, 602
  VOLTERRA-féle, 621
    elsőfajú, 572, 595
    másodfajú, 595
integrálegyenletek, ortonormált rendszer, 589, 593
integrálexponenciális függvény
  táblázat határozatlan integrálok, 1078
integrálexponenciális függvény, 468
integrálfelület, 526
integrálformula
  GAUSS-, 688
integrálgörbe, 497, 822
integrálhatóság
  teljes, 530
  teljes differenciálé, 476
integrálhatósági feltétel, 476, 477
integrálkoszinusz, 468
integrálkritérium, CAUCHY-féle, 414
integrállogaritmus, 437, 468
  táblázat határozatlan integrálok, 1079
integrálnorma, 661
integráló tényező, 499
integrálszámítás, 433
  alaptétel, 448
  főtétel, 465
  középértéktétel, 450
integrálszinusz, 467, 723
integráltétel, 688
  CAUCHY-, 714
  GAUSS-, 688
  GREEN-, 689
  STOKES-, 688
integráltranszformáció, 735, 997
  alkalmazás, 737
  CARSON-transzformáció, 735
  definíció, 735
  egyváltozós, 735
  eredeti tartomány, 735
  FOURIER-transzformáció, áttekintés, 735
  GÁBOR-transzformáció, 773
  gyors wavelet-transzformáció, 772
  HANKEL-transzformáció, 735
  képtartomány, 735
  LAPLACE-transzformáció, áttekintés, 735
  linearitás, 735
  mag, 735
  MELLIN-transzformáció, 735
  speciális, 735
  STIELTJES-transzformáció, 735
  többszörös, 737
  többváltozós, 737
  WALSH-transzformáció, 773
  wavelet-transzformáció, 770, 771
integrandus, 434
integrálformulák
  CAUCHY-féle, 715
intenzitás, forrás, 691
intermittencia, 865, 868
interpoláció
  AITKEN–NEVILLE-, 941
  fuzzy rendszerek, 381, 383
  LAGRANGE-féle, 939
  spline-, 939
  trigonometrikus, 939, 949, 950
  tudásalapú, 381
interpolációs feltétel, 939
interpolációs formula
  NEWTON-féle, 939
interpolációs kvadratúra, 921
interpolációs spline, 954

harmadfokú, 954
kétdimenziós harmadfokú, 956
interpretáció, kifejezés, 286
intervallum, 2, 797
(0)-, 613
intervallumszabály, 449
invariáns, 680, 733
forgatás-, 264
másodrendű görbe, 205
skalár, 184, 212
transzformáció-, 264
transzláció-, 264
inverz, 611
inverz függvény, 51
hiperbolikus függvények, 93
trigonometrikus, 85
inverz transzformáció, 735
inverz, csoportelem, 296
inverzió, 700
derékszögű koordinátarendszer, 268
tér, 268
involuta, 236
irány
sík görbe, 225
térgörbe, 238
térbeli, 180, 210
irány, északi
földrajzi, 169
geodétikus, 169
irányhármas, 181
derékszögű koordináták, 182
irányítás, 269
koordinátarendszer, 207
számegyenesé, 1
iránykoszinusz, tér, 210
iránymenti differenciálhányados, 671, 673
skalarmező, 671
vektormező, 672
iránymező, 497
irányszög, 145
iránytényező, 66, 183
síkbeli, 194
irracionalitás, algebrai, 2
irányszög, 384
ítélet, 283
duális, 347
ítéletkalkulus, 283
alapszabályok, 284
kifejezés, 283
ítéletváltozó, 283
iteráció, 907
egyeslépésű, 919
inverz, 281
teljeslépésű, 919
iterációs eljárás, 281, 907, 913, 918
általános, 919
ív
gráf, 351
hossz, 354
lánc, 361
hiperbola, 202
ívdifferenciál, 246
ívelem, 225
ívhossz
1. típusú vonalintegrál, 472
ellipszis, 199
körszelet, 140
parabola, 204
síkgörbe, 140, 455
térgörbe, 246
térgörbe, 472
ívmérték, 131
ívmetszet, 149
ívsorozatok, 361
izomorfia
gráf, 353
izomorfizmus, 299, 345
BOOLE-algebra, 347
vektortereké, 611

JACOBI
azonosság, 306
JACOBI-
determináns, 126
eljárás, 281, 918
függvények, 731
mátrix, 920
járadék
örök-, 24
utólagos konstans, 24
járadék-végösszeg, 24
járadékösszeg, 24
járadékszámítás, 24
jegyzőkönyv, 797
jel, 770
jelábrázolás, belső, 959
jelanalízis, 770
jelölés
fordított lengyel, 359
lengyel, 359
posztfix-, 359
jelszintézis, 770
jobb oldali mellékosztály, 297
jobb oldali szinguláris vektor, 281

jobbcsavar, 241, 685
jobbkéz-szabály, 183
jobbkéz-szabály, 685
jobbrendszer, 207
JORDAN-lemma, 722

kamat, 21
kamatláb, 21
kamatos kamat, 21
kamatoskamat-számítás, 21
kamattényező, 21
KAM-tétel, 840
kanonikus alak, 531
kanonikus alak, körleképezés, 868, 869
kanonikus rendszer, 528
káosz, 821, 867
  a tórusztól a káoszig, 867
  egydimenziós leképezéseknél, 854
  intermittencián keresztül, 868
  káoszhoz vezető átmenetek, 854, 864
  különös attraktorok, 853
kapacitás
  ív, 363
kapcsolási algebra, 346, 350
kapcsolási érték, 350
kapcsolási függvény, 350
karakter
  leképezés, 301
csoportelem, 301
karakterisztika, 10
karakterisztikus egyenlet, 514
karakterisztikus függvény, 364
karakterisztikus sáv, 527
karakterizációs tétel, 369
kardinalitás, 288, 295
kardioid, 100
kategória
  második, BAIRE-féle, 839
katenoid, 89, 109
KDNF, 349
kép
  függvény, 48
kép, altér, 322
képfüggvény, 735
képlet
  binomiális, első, 12
  binomiális, második, 12
  CARDANO-, 40
  HERON-féle, 143
  MOIVRE-
    hiperbolikus függvények, 92
    trigonometrikus függvények, 81
  MOIVRE-féle
    komplex számokra, 37
  PESIN-, 846, 852
képletkezelés, 976
képtartomány, 735
  halmaz, 48
képzetes
  egység, 34
  számok, 34
képzetes rész, 34
kerekítés, 962
kerekítési hiba, 965
keresési eljárások, numerikus, 891
keresztbe vett parciálisok megegyezése, 684
keret
  YOUNG-, 303
kerület
  ellipszis, 199
  köré, 139
kerületi szög, 139
két félsík, 151
kétértékűség elve, 283
kétszög, gömbi, 161
kettes számrendszer, 959
kéttest-probléma, 528
kettős egyenes, 205
kettős integrál, 479
  alkalmazás, 483
kettőspont, görbe, 233
kezdetiérték-feladat, 926
kezdőpont, 352
kezdőfázis, 76, 83
kezdőpont, koordinátarendszer
  sík, 189
  tér, 208
kezelés
  algebrai kifejezések, 1006
  nempolinomiális kifejezések, 1008
kicserélési eljárás
  párosítás, 360
kiegészítő szög, 131
kiegészítő változó, 872
kiegészítőszög-tételek, 79
kiegyenlítési feladat
  nemlineáris, 111
kiegyenlítő feladat
  lineáris, 916
kiegyenlítő számítás, 939, 942
  diszkrét feladat, 943
  folytonos feladat, 942
  mérési hiba, 811
  többdimenziós feladat, 944

kiegyenlítő spline, 955
harmadfokú, 955
kétdimenziós harmadfokú, 957
kiemelés, 11
kiértékelés, 284, 378, 797
vonalas lista, 797
kifejezés
algebrai, 10
kezelés, 1006
általános érvényű, 285, 286
analitikus, 48
értelmezési tartomány, 48
explicit előállítás, 49
implicit előállítás, 49
paraméteres előállítás, 49
BOOLE-algebrai, 348
interpretáció, 286
irracionális, 11, 17
ítéletkalkulus, 283
multinomiális, 997
nempolinomiális
kezelés, 1008
predikátumkalkulus, 286
predikátumlogika, 286
racionális egész, 11
racionális tört, 11, 14
transzcendens, 11
vektoranalitikus, 681
véges, 930, 933
kifejtési együttható, 183
kifejtési tétel, LAPLACE-féle, 259
kijelentésalgebra, 346
kimenő fokszám, 352
kínai levélhordó problémája, 356
kínai maradéktétel, 333
kink-szoliton, 558
KIRCHHOFF-formula, 545
kis gömbi kör, 176
ívhossz, 176
metszéspontok, 177
sugár, gömbfelületi, 176
útirányszög, 176
kiterjesztés
lineáris funkcionál, 645
kiterjesztési szabály, 373
kiterjesztési tétel
BANACH–HAHN-, 645
kitevő, 7
kivonás, 963
komplex számoké, 36
polinomoké, 11
racionális számoké, 1
kizárt harmadik, 284
KKNF, 349
KLEIN-féle négyescsoport, 298
klotoid, 109
KOCH-féle görbe, 848
kocka, 153
kockázatelmélet, 20
kód, 336
ASCII, 959
nyilvános kulcs, 336
RSA, 336
kodimenzió, 854
kódolás, 336, 339
kódolási módszer, RSA, 336
kollinearitás, vektoroké, 184
kollokáció
határ-, 935
tartományi, 935
kollokációmódszer, 931, 935
kollokációs hely, 931, 935
kollokációs módszer, 586
kombináció, 775
ismétlés nélküli, 775
ismétléses, 775
kombinatorika, 775
kommutatív szabály
BOOLE-algebra, 346
halmazok, 289
ítéletkalkulus, 284
mátrixok, 254
vektorok, 255
kommutatív tulajdonság
vektoriális szorzás, 184
komplemens, 289
fuzzy halmazoké, 369
halmaz, 289
SUGENO-, 373
YAGER-, 373
komplemensfüggvény
fuzzy halmazé, 373
komplementum
algebrai, 259
ortogonális, 634, 644
komplex függvénytan, 694
komplex számok, 34
komplexifikálás, 611
kompozíció, 375
max–min, 376
max–szorzás, 376
max–átlag, 376
kondíció, 917
konfidencia-intervallum, 805

regressziós együttható, 805
konfidencia-határ
előre adott, 817
szórásnégyzet, 802
várható érték, 801
konfidencia-tartomány, 805
kongruencia
algebrai, 331
kvadratikus, 333
lineáris, 332
polinomkongruencia, 334
szimultán lineáris, 333
szimultán lineáris kongruenciák rendszere, 333
kongruenciamódszer, 808
kongruenciareláció, 345
mag, 345
konjugált komplex számok, 36
konjunkció, 283
konkáv, 228
konkoid
általános, 99
egyenesé, 99
köré, 99
NIKODEMES-féle, 98
konstans
EULER-féle, 468
ítélet, 283
polinomokban, 61
konstans deriváltja, 385
konstans tag, 272
konstanssal szorzott függvény deriváltja, 385
kontrakcióelv, 619, 620
konvenció, EINSTEIN-féle, 261
konvergencia, 929
abszolút, 414, 421, 716
BANACH-tér, 629
egyenletes, 419, 421
függvénysorozatok, 617
feltételes, 414, 716
gyenge, 651
gyökkritérium, 413
hányadoskritérium, 412
integrálkritérium, 414
konvergencia-tételek, 411
középértékben, 428
nem egyenletes, 419
összehasonlító kritérium, 412
p-ad rendű, 929
sor, 411, 414
sorok, komplex tagú, 716
számsorozat, 410
számsorozat, komplex tagok, 716
végtelen sor, komplex tagok, 716
WEIERSTRASS-kritérium, 420
konvergenciaintervallum, 421
konvergenciakör, 717
konvergenciakritérium
CAUCHY-, 53, 128
gyökkritérium, 413
hányadoskritérium, 412
integrálkritérium, 414
LEIBNIZ-féle, 415
összehasonlító, 412
konvergenciasugár, 421
konvergenciatartomány, 419
konvergenciatételek, 660
konvertálás, számrendszerek, 959
konvex, 228
konvolúció
egyoldali, 758
FOURIER-transzformáció, 758
kétoldali, 758
LAPLACE-transzformáció, 741
Z-transzformáció, 765
konzekvens, 376
konzisztencia, 929
p-ad rendű, 929
koordináta
görbevonalú, 265
tiszta kontravariáns, 267
tiszta kovariáns, 267
vegyes, 267
koordinátaegyenlet
síkbeli görbe, 193
térgörbe, 241, 242
koordinátafelület, 208, 265
koordinátainverzió, 268
koordináták
affin, 182, 185
baricentrikus, 939
derékszögű, 182, 186, 189, 191
sík, 189
tér, 208
földrajzi, 160
GAUSS-féle, 244
GAUSS–KRÜGER-, 160
geodézia, 143
gömb-, 209
görbevonalú, 190
háromdimenziós, 208
görbevonalú, 244
háromszög-, 939
hengerkoordináták, 209

kontravariáns, 187
kovariáns, 187
polárkoordináták, 189–191
térbeli, 209
pont, 189
SOLDNER-, 160
vektor, 182
koordinátarendszer
balsodrású, 207
egyszer logaritmikus, 119
GAUSS–KRÜGER-, 143
jobbsodrású, 207
kétszer logaritmikus, 120
ortogonális, 181
ortonormális, 181
SOLDNER-, 143
síkbeli, 189
transzformáció, 261
tér, 207
koordinátarendszer kezdőpontja
tér, 208
koordinátás megadás
skalármezők, 666
vektormezők, 668
koordinátatengyely, 189
koordinátatranszformáció, 190, 210, 266, 669
másodrendű görbék, 205
másodrendű görbék egyenletei, 206
koordinátavonal, 208, 265
korlát
halmaz, 613
sorozat, 409
korlátozott, kvantifikáció, 287
korrekt kitűzésű, 543
korrektor, 928
korreláció-analízis, 803
korreláció
lineáris, 804
korrelációs együttható, 804
tapasztalati, 805
KORTEWEG DE VRIES-egyenlet, 555
koszekáns, 78
koszekáns hiperbolikusz, 89
koszekánsfüggvény, 132
koszinusz, 76
koszinusz hiperbolikusz, 89
koszinuszfüggvény, 132
hiperbolikus, 133
koszinusztétel, 142
gömbi, 164
oldalakra vonatkozó, 164
poláris, 165
kotangens, 77
kotangens hiperbolikusz, 89
kotangensfüggvény, 132
kovariancia
kétdimenziós eloszlás, 804
középértéktétel, 60
köbgyök, 8
kölcsönhatás
szolitonok, 555
kölcsönható erő, 547
költségmátrix, 881
könyvtár
Aacheni-, 968
IMSL-, 968
NAG-, 967
numerikus módszer, 967
SSL II-, 968
kör, 139
APOLLÓNIUSZ-, 708
érintője, 197
főkör, 158, 172
gráf, 361
HAMILTON-, 357
kis gömbi, 158, 176
síkbeli, 196
veszélyes, 149
kör egyenlete
derékszögű koordinátákban, 196
kör, kis gömbi, 158
köralakzatok, síkbeli, 139
körcikk, 140
köregyenes, 700
köregyenlet
paraméteres előállítás, 197
polárkoordinátás, 197
körfelület, 249
körfrekvencia, 83
körfüggvény, 132
körgyűrű, 140, 158
körhenger, 155
körhordótest, 158
körintegrál, 470, 476
eltűnése, 478
vektormező, 684
körkúp, 156
körleképezés, 868, 869
körmező, 668
körpont, 249
körszelet, 140
körülírt kör, 134, 138, 143
sugara, 143
körüljárás

alakzat, 135
tükrözési szimmetria, 135
kötés, 346
disztributív, 346
következtetés a fuzzy logikában, 376
következtetés n-ről $n+1$-re, 5
közbülsőérték-tétel, 129
közelítés, aszimptotikus, 15
közelítő feladatok
megoldás szélsőérték-meghatározással, 407
közelítő formulák
sorfejtés, 424
közelítő képletek
empirikus görbék, 110
közép
harmonikus, 20
mértani, 19
négyzetes, 20
számtani, 19
középérték, 19, 814
függvény, 450
mintafüggvény, 796
számtani, 783
súlyozott, 783, 814
középérték-képlet, 921
középérték-módszer, 111
középértéktétel
differenciálszámítás, 394
általánosítás, 395
integrálszámítás, 450
általánosított, 450
középpont
gömbfelületi, 176
szakasz
sík, 192
középponti szög, 131, 140
középpont-szabály, 928
középső érték, mintafüggvények, 796
középvonal, háromszögé, 134
központi gyógyszerszám, 337
központi sokaság, 855
differenciálegyenleteké, 854
leképezéseké, 860
lokális, 860
kriptoanalízis, klasszikus
módszerek, 341
KASISKI–FRIEDMAN-próba, 341
statisztikus analízis, 341
kriptológia, 338
DES-algoritmus, 343
DIFFIE–HELLMAN-koncepció, 342
egyirányú függvények, 343
feladat, 338
IDEA-algoritmus, 344
kódolás
környezetfüggetlen, 338
környezetfüggő, 338
kriptológiai rendszerek, 338
kriptológiai rendszerek biztonsága, 339
matematikai pontosítás, 338
nyilvános kulcsú eljárások, 342
One-Time-Tape, 342
RSA-eljárás, 343
kriptológia, klasszikus
helyettesítés, 339
monoalfabetikus, 339
monografikus, 339
polialfabetikus, 339
poligrafikus, 339
módszerek, 339
cserével végzett titkosítás, 340
HILL-kód, 340
mátrixhelyettesítés, 340
VIGENERE-kód, 340
transzpozíció, 339
kriptológia sifrírozás, 338
kristályosztályok, 316
kristályrendszerek, 316
krisztallográfia
rácsstruktúra, 313
szimmetriacsoport, 313
kritérium
WEIERSTRASS-, 419
kritériumok
függvénysorok, 419
oszthatósági, 327
sorok konvergenciája, 411
számsorozatok konvergenciája, 410
KRONECKER-szimbólum, 264
KRONECKER-szorzat, 257
KUAN, 356
KUHN–TUCKER-feltételek, 886
utalás, 645
kumulált gyakoriság, 797
kúp, 156, 220, 631
centrális felület, 224
generáló, 612
képzetes, 224
normális, 631
reguláris, 631
tömör, 631
vektortér, 610
kúpfelület, 156, 213
kúppont, 244, 245

kúpszeletek, 157, 204, 205
    széteső, 205
KURATOWSKI tétele, 361
különbség, 290
    szimmetrikus, 290
különbség
    korlátos, 370
kürt
    AgnesifeleAGNESI-féle, 96
kvadránsrelációk, 79
kvadratikus alak
    valós, 280
    valós, pozitív definit, 280
kvadratúraformula, 921
    GAUSS-típusú, 923
    HERMITE-féle, 921
    integrálegyenlet, 582
    interpolációs kvadratúra, 921
    LOBATTO-féle, 924
kvantálási feltételek, 554
kvantilis, 782
    α-adrendű, 782
kvantor, 286
    egzisztenciális, 286
    univerzális, 286
kvantumszám, 549
    mágneses, 552
    pálya-impulzusnyomaték, 551
    rezgési, 554
kváziperiodikus, 830

LAGRANGE-
    azonosság, 185
    függvény, 886
    függvények, 407
    interpolációs formula, 939
    multiplikátor-módszer, 407
    tétel, 297
LAGUERRE-polinomok, 522
lánc, 294
    gráf, 361
        elemi, 361
láncgörbe, 89, 109, 565
láncszabály, 665
    összetett függvény, 387
lánctört, 2
LÁNCZOS-eljárás, 281
LANDAU-féle szimbólumok, 57
LAPLACE-differenciálegyenlet, 692
LAPLACE-egyenlet, 546
LAPLACE-féle kifejtési tétel, 259
LAPLACE-operátor, 668
    hullámegyenlet, 544
    különböző koordinátarendszer, 680
    polárkoordináták, 405
    vektorkomponensek, 681
LAPLACE-transzformáció, 738
    addíciós tétel, 739
    áttekintés, 735
    csillapítási tétel, 739
    definíció, 738
    differenciálegyenlet, 749
        állandó együtthatójú, 750
        parciális, 751
        változó együtthatójú, 751
differenciálás, eredeti tartomány, 740
differenciálás, képtartomány, 740
diszkrét, 765
eltolási tétel, 739
eredeti függvény, 738
eredeti tartomány, 738
hasonlósági tétel, 739
integrálás, eredeti tartomány, 740
integrálás, képtartomány, 740
inverz, 738, 746
inverz integrál, 749
konvergencia, 738
konvolúció, 741
    egyoldali, 741
    komplex, 742
képfüggvény, 738
képtartomány, 738
linearitási tétel, 739
Maple, 1026
osztási tétel, 741
összefüggés a Z-transzformációval, 765
összehasonlítás a FOURIER-transzformációval, 758
résztörtekre bontás, 747
sorfejtés, 747
szakaszonként differenciálható, 743
    táblázat, 1094
    ugrásfüggvény, 742
lapszög, 151
LAURENT-sor, 718, 765, 998
LAURENT-sorfejtés, 718
lebegőpontos szám, 960, 961
    féllogaritmikus alak, 961
    IEEE-standard, 961
    Maple, 995
    Mathematica, 981
LEBESGUE-
    integrál, 658

összehasonlítás a RIEMANN-integrállal, 460
mérték, 657
lefedés
nyílt, 824
lefejtési görbe, 236
LEGENDRE-
differenciálegyenlet, 520
polinomok
asszociált, 521
elsőfajú, 520
másodfajú, 521
szimbólum, 333
legjobb közelítés, 635
legkisebb felső korlát, 613
legkisebb közös többszörös (lkkt), 328
legkisebb négyzetek módszere, 276
besorolás, 407
kiegyenlítő számítás, 811
különböző módszerek, 407
regresszió analízis, 805
legnagyobb alsó korlát, 613
legnagyobb közös osztó (lnko), 327
lineáris kombináció, 328
legrövidebb út, 355
LEIBNIZ-formula, 391
leírás, 25
digitális, 26
lineáris, 25
mértani sorozat szerint csökkenő, 27
számtani sorozat szerint csökkenő, 26
leírási meredekség, 26
leképezés, 291, 293
adjungált, 300
altér, 301
bijektív, 293, 610
csoport, 299
csoportok közötti, 299
direkt szorzat, 301
direkt összeg, 301
egységkör, 868
egyértelmű, 293
ekvivalens, 300, 868
eltolás, 844
felemelt, 868
forgatás, 841
függvény, 48
háztető, 841
HÉNON-, 837
hű, 300
injektív, 293, 610
inverz leképezés, 293
kaotikus, 854
komplex számsík, 711
kontraktív, 619
lineáris, 322, 610
LIPSCHITZ-folytonos, 625
mag, 299
moduló, 840
nem ekvivalens, 300
patkó, 851
POINCARÉ-, 834, 851
redukált, 860
szürjektív, 293, 610
teljes reducibilis, 302
topologikusan konjugált, 837
tulajdonságok, 300
unitér, 300
leképezés, konform, 697
exponenciális függvény, 703
fixpont, 699
köregyenes transzformáció, 700
lineáris és lineáris törtfüggvény összege, 701
lineáris függvény, 699
lineáris törtfüggvény, 700
logaritmus, 703
másodfokú függvény, 701
négyzetgyök, 701
reciprok függvénye, 699
leképezési tér, 299
lemma
JORDAN-, 722
lemniszkáta, 102, 234
lencsealak, ellipszoid, 220
lengésidő, 731
lépcsősfüggvény, 763, 773
lépéshossz-vezérlés, 927
lépésköz, 926
lépésköz-paraméter, 920
lépték, 1
léptéktényező, 118, 146
lezárás
halmazé, 618
LIE-csoport
félegyszerű, 308
kompakt, 306
összefüggő, 306
LIE-algebra, 306
ABEL-féle, 306
antikommutatív, 306
kommutátorképzés, 306
linearitás, 306
limesz
függvény, 52

határozott integrál, 447
sor, 411
superior, 421
számsorozat, 410
lineáris
függetlenség, 322
függőség, 322
lineáris forma, 610, 611
folytonos, 642
lineáris integrálegyenlet, 572
lineáris kombináció
vektorok, 84, 181, 184
LIOUVILLE-
formula, 509, 826
tétel, 825
LIPSCHITZ-
állandó, 625
feltétel, 496, 507
folytonos, 625
lokálisan, 625
LJAPUNOV-
függvény, 828
kitevők, 844
lnko és lkkt összefüggése, 328
logaritmikus dekrementum, 85
logaritmus
BRIGGS-féle, 9
definíciója, 9
főérték, 725
kettes alapú, 10
komplex függvény, 703
NAPIER-féle, 9
természetes, 9, 725
tízes alapú, 9
logaritmuskeresés, 9
logaritmustáblázat, 10
logarléc, 10
logaritmikus skála, 118
logika, 283
fuzzy, 364
ítéletkalkulus, 283
predikátumkalkulus, 286
LORENTZ-görbe, 96
LORENTZ-görbe, 760
LORENZ-rendszer, 822, 825, 864
loxodróma, 177
ívhossz, 178
két loxodróma metszéspontjai, 179
metszéspont, 179
útirányszög, 178
L^p-tér, 660
LU-faktorizáció, 914
MACDONALD-függvény, 519
MACLAURIN-sor, 423
Macsyma, 976
mag, 299, 368
altér, 322
gyűrű, 321
homomorfizmus, 345
integrálegyenlet, 573
elfajult, 573, 584
iterált, 577, 597
integráltranszformáció, 735
kongruenciareláció, 345
operátor, 611
mag-approximáció
integrálegyenletek, 584
spline-próbakifejezés, 585
tenzorszorzat-approximáció, 584
magasság
gömbrészek, 157
háromszög, 134
hengeralakzatok, 154
kúpalakzatok, 156
poliéderalakzatok, 152
magasságpont, 134
majoráns, 418
mantissza, 10, 962
Maple
7-es verzió, 976
alapvető szerkezeti elemek, 992
algebrai kifejezések, 999
kezelés, 1008
kiszorzása, 1008
attribútumok, 1005
be- és kivitel, 972, 976, 993
differenciálegyenletek, 1025
differenciáloperátorok, 1004
differenciálás, 1024
egyenletek
egyismeretlenes, 1014
harmadfokú, 1014
polinom-, 1014
transzcendens, 1015
egyenletrendszerek, 1015
lineáris, 1018
függvények, 1002
alap-, 1002
belső, 1003
előre definiált, 1002
fontos, 1014
kompozíciója, 1003
λ-, 1003
speciális, 1002

GAUSS-algoritmus, 1019
grafika, 1035
  BESSEL-függvény, 1037
  bevezetés, 978
  exponenciális függvény, 1037
  hiperbolikus függvény, 1037
  hiperbolikus spirál, 1037
  háromdimenziós, 1038
  kétdimenziós, 1035
  paraméteres ábrázolás, 1037
  trochoid, 1037
hamis gyökök, 1015
indexfüggvény, 1018
integrál
  határozatlan, 1024
  határozott, 1025
  többszörös, 1025
karakterisztikus egyenlet, 1020
karakterláncok (string), 993
képletkezelés, bevezetés, 976
kezelés, általános kifejezések, 1011
kiegészítések a szintaxishoz, 1005
kifejezés fája, 993
kontextusok, 1005
környezeti változó, 1005
lebegőpontos számok, konverzió, 995
lineáris algebra elemei, 1018
listák, 999
  kétszintű, stb., 1000
munkafelület, 976
műveletek
  polinomokkal, 1010
mátrixok, 1000
numerikus matematika, 972
  differenciálegyenletek, 975
  egyenletek, 973
  integrálás, 974
  kifejezések és függvények, 972
numerikus számítás, 977
objektumok, 992
  típusa, 993
objektumosztályok, 992
operátorok
  fontos, 998
  függvények, 1003
  helyettesítési, 999
  pont-, 999
parciális törtekre bontás, 1011
polinomok faktorizálása, 1009
programcsomagok, 995
programozás, 1004
  ciklusstruktúrák, 1004
  ellenőrző struktúrák, 1004
rendszerleírás, 992
rövid jellemzés, 976
sajátértékek és sajátvektorok, 1020
segítség és információk, 1005
sorozatok, 999
számábrázolás, 995
számkonverzió, különböző alapok, 996
számok
  komplex, 995
  lebegőpontos, 995
  racionális, 995
  speciális, 995
számok konvertálása, 995
szimbólumok, 993
szorzattá alakítás, polinomok, 1009
táblázatstruktúrák, 1000
típusok, 992
  alap-, 993, 994
  beágyazott, 993
  strukturált, 993
tömbstruktúrák, 1000
  tárolási mód, 1002
V Release 4, 976
  vektorok, 1000
maradék, 276
maradék, négyzetes modulo m, 333
maradékgyűrű, 320, 331
  modulo m, 332
maradékosztály, 331
  primitív, 332
  prím, 332
maradékösszeadás, 331
maradékszorzás, 331
maradékspektrum, 642
maradéktag, 411
  becslés, 418
másodrendű felület invariánsai, 223
másodrendű felületek, 220
másodrendű görbe
  általános egyenlet, 204
  poláregyenlet, 206
másodrendű görbék, 204
matematikai programcsomagok, 976
  alapvető szerkezeti elemek, 978
  algebrai kifejezések kezelése, 1006
  alkalmazások, 1006
  célkitűzések, 976
  differenciál- és integrálszámítás, 1020
  egyenletek és egyenletrendszerek, 1012
  függvények, 979
  grafika, 1026

kiterjesztés, 978
halmazok, 979
infix alak, 979
kifejezés, 979
lineáris algebra elemei, 1016
listák, 979
egymásba skatulyázott, 979
listákból álló, 979
matematikai műveletek, 979
objektumok, 978
opcionális argumentumok, 979
operátorok, 979
értékadó, 979
funkcionális, 979
prefix alak, 979
programozás, 978
relációk, 979
suffix írásmód, 979
számok, 978
lebegőpontos, 979
típusok, 978
típusvizsgálat, 978
változó, 979
Mathcad, 976
Mathematica
alapvető szerkezeti elemek, 980
algebrai kifejezések
kezelés, 1006
kiszorzás, 1006
attribútumok, 991
be- és kivitel, 969, 976, 980
differenciál- és integrálszámítás, 1020
differenciálegyenletek, 1023
differenciálhányados, 1020
differenciálás, 989
differenciálás operátora, 1020
egyenletek
kezelés, 1012
megoldása, 1012
transzcendens, 1013
egyenletet szimbolikus megoldása, 977
egyenletrendszerek, 1014
általános eset, 1016
inhomogén, 1016
speciális eset, 1016
fej, 980
felületek, 1033
függvények, 987
alap-, 987
elemi transzcendens, 987
inverz, 989
speciális, 987
tiszta, 987
függvényműveletek, 989
görbék
archimedesi spirál, 1032
kétdimenziós, 1031
logaritmikus spirál, 1032
paraméteres ábrázolás, 1032
grafika, 1026
BESSEL-függvények, 1032
bevezetés, 978
elemek, 1026, 1027
exponenciális függvény, 1031
függvények, 1029
függvénygráfok megjelenítése, 1031
háromdimenziós, 1034
kétdimenziós objektumok, 1027
objektumok, 1026
opciók, 1028
skálabeosztás, 1027
szintaxis, 1028
helyettesítőoperátor, 982
integrál
határozatlan, 1021
határozott, 1022
improprius, 1022
többszörös, 1022
képletkezelés, bevezetés, 976
kifejezés, 980
feje, 980
részei, 980
kontextusok, 991
lebegőpontos számok, konverzió, 981
lineáris algebra elemei, 1016
listák, 977, 983
egymásba skatulyázása, 984
speciális, 984
többszintű, 984
logikai értékek, 981
mátrixok mint listák, 985
mintázat, 988
munkafelület, 976
műveletek
listákkal, 984
mátrixokkal, 986
polinomokkal, 1007
vektorokkal, 986
numerikus matematika, 969
differenciálegyenletek, 971
görbeillesztés, 969
integrálás, 971
interpoláció, 970
polinomegyenletek, 970

numerikus számítás, 977
objektumok
  háromdimenziós, 1034
operátorok
  alap-, 982
  funkcionális, 989
  függvény-, 989
  késleltetett hatású, 983
  műveleti, 982
  relációs, 982
  utóképzős alakja, 983
parciális törtekre bomtás, 1008
polinomok faktorizációja, 1006
programozás, 990
  ciklusutasítások, 990
  lokális változók, 990
rendszerleírás, 980
rövid jellemzés, 976
részek, 980
sajátértékek és sajátvektorok, 1017
számábrázolás, 981
  tudományos írásmód, 982
számok konvertálása, 981
szintaxis, kiegészítések, 991
szorzattá alakítás, polinomok, 1006
teljes írásmód, 982
térgörbék, 1033
transzformációs szabály, 982
utasítások
  részlistákat létrehozó, 983
üzenetek, 992
vektorok mint listák, 985
Version 2.2, 976
Version 4, 976
mátrix, 251
  adjacencia, 354
  adjungált, 251, 259
  alsó háromszög, 914
  blokk-tridiagonális, 934
  defektus, 323
  derékszögű, 251
  diagonál-, 252
  egység-, 253
  felső háromszög, 914
  ferdén hermitikus, 253
  ferdén szimmetrikus, 252
  fokszám, 359
  forgatás-, 256
  főátlóbeli elem, 252
  háromszög-faktorizáció, 913
  hermitikus, 253
  HESSE-, 892
  háromszög-, 253
  incidencia, 354
  invertálás, 271
  inverz, 256, 259
  komplex, 251
  konjugált komplex, 251
  kvadratikus, 251, 252
  normál, 252
  null-, 251
  nullitár, 323
  ortogonális, 256
  önadjungált, 253
  permutációs, 914
  rang, 255
  reciprok, 256
  reguláris, 255
  ritka, 934
  skalár-, 252
  spur, 252
  szimmetrikus, 252
  szinguláris, 255
  távolsági, 355
  teljes rang, 276
  transzponált, 251
  unitér, 256
  valós, 251
mátrix-fa-tétel, 359
mátrix-exponenciálisfüggvény, 826
mátrixok
  asszociatív szabály, 254
  disztributív szabály, 254
  egyenlőség, 253
  hatványok, 257
  kommutativitási szabály, 254
  műveletek, 253
  műveleti szabályok, 257
  osztás, 254
  sajátértékek, 277
  sajátérték-feladat, 277
  sajátvektorok, 277
  szorzás, 254
mátrixszorzat
  eltűnés, 257
  számok, 254
max–szorzás kompozíció, 376
maximum
  abszolút, 50, 396
  globális, 396
  globális, 50
  lokális, 50, 395
  relatív, 50
maximum kritérium módszer, 378

maximumelv, 696
max–min kompozíció, 376
MAXWELL-féle átlós eljárás, 710
medián
    mintafüggvények, 796
    mérési eredmények kiértékelése, 798
megbízhatóság, statisztikai, 800
megfigyelt érték, 811
megoldás, 872
megoldásfelület, 526
megszűnési pont, 233
mellékfeltétel, 561, 565
mellékszög, 131
MELLIN-transzformáció, 735
MELNIKOV-módszer, 866
membrán rezgése, 535
meredekség, érintő, 227
mérési hiba, 811
mérési jegyzőkönyv, 812
meridián, 160, 244
meridián-összetartás, 169
merőleges, gömbi, 170
mért érték, 811
mérték, 657
    dimenzióé, 848
    DIRAC-, 657
    ergodikus, 841
    fizikai, 842
    halmazra koncentrált, 840
    HAUSDORFF-, 846
    invariáns, 840
    komplett, 658
    LEBESGUE-, 657, 840
    SBR-, 842
    σ-véges, 660
    tartója, 840
    természetes, 841
    valószínűségi, 660
metrika, 615
    felület, 247
metszéspont
    egyenesek, 195
    egyenesek térben, 219
    három síké, 216
    négy síké, 216
    sík és egyenes, 218
metszésszög, 160
metszet, 289
    drasztikus, 370
    fuzzy halmazoké, 369, 370
    halmaz, 289
metszet-halmaz, 289
MEUSNIER tétele, 247
mezonok osztályozása, 318
mező
    axiális, 666
    centrálszimmetrikus, 665
    COULOMB-mező, ponttöltés, 668, 691
    fluxus, 687
    forrás-, 690
    gömb-, 665
    hengerszimmetrikus, 666
    konzervatív, 684
    kör-, 668
    NEWTON-féle, 668
    potenciálos, 684
    skalár-, 665
    szuperpozíció, 691
MILNE módszere, 928
minimálfa, 359
minimálfelület, 249
minimum
    abszolút, 50, 396
    globális, 396
    globális, 50
    lokális, 50, 395
    relatív, 50
minimum feladat, 871
minimumpontok, 885
minta, 795
    Mathematica, 988
    véletlen, 795
mintaátlag
    mérési eredmények kiértékelése, 798
mintafüggvény, 795
mintaváltozó, 795
módszer
    ADAMS–BASHFORTH-, 928
    állandók variálása, 510
    BERNOULLI-, 912
    BRODETSKY–SMEAL-féle, 44
    fokozatos közelítés, 505
    GALERKIN-, 932
    GREEN-, 540
határozatlan együtthatóké, 16
legkisebb négyzetek, 943
legnagyobb felület, 378
MAMDANI-, 379
maximum kritérium, 378
Maximumátlag, 378
MILNE-, 928
négyzetközép, 807
NEWTON-, 989
paraméteres területfelezéses, 378

prediktor–korrektor-, 928
RIEMANN-, 539
RITZ-, 932
SOR, 919
SUGENO, 379
súlypont, 378
  általánosított, 378
  paraméteres, 378
szukcesszív approximáció, 505
  BANACH-tér, 640
  területfelezéses, 378
  véges differenciák, 543
  végeselem, 543, 571, 936
módszerek
  Monte-Carlo-, 807
  statisztikai kísérletek, 811
moduló-leképezés, 840
modulus, 180
  analitikus függvény, 696
  komplex számé, 35
módusz, mérési eredmények kiértékelése, 799
MOIVRE-képlet
  hiperbolikus függvények, 92
  komplex számokra, 37
  trigonometrikus függvények, 81
MOLLWEIDE-egyenletek, 142
momentum
  centrális, n-ed rendű, 783
  n-ed rendű, 783
monodrómiamátrix, 827, 828, 836
monotonitás
  függvény, 49
  számsorozatok, 409
monotonitási feltételek, 393
Monte-Carlo módszerek, 807
  numerikus matematika alkalmazása, 809
  szokásos, 809
Monte-Carlo szimuláció
  példa, 808
MORSE–SMALE-rendszerek, 840
multihalmaz, 998
multiindex, 630
multinomiális kifejezés, 997
multiplikátor, 827, 828, 836
multiplikátor-módszer, LAGRANGE-féle, 407
munka
  általános, 477
  speciális, 458
művelet, 295
  algebrai, 263
  aritmetikai, 1
  asszociatív, 295
  bináris, 295
  kommutatív, 295
  külső, 295
  n-változós, 295
műveleti szabályok
  fuzzy kompozíció, 376

nablaoperátor
  definíció, 678
  kétszeres alkalmazás, 679
nagy számok törvénye, 794
nagyság, infinitezimális, 447, 454
nagyságrend
  függvény, 56
NAND-függvény, 285
NAPIER-féle egyenletek, 167
navigáció, 172
n-dimenziós euklideszi vektortér, 253
negáció, 283
  BOOLE-függvény, 348
  kettős tagadás, 285
négyes, 291
négyescsoport, KLEIN-féle, 298
négyszög, 136, 138
  kerület, 138
négyszögimpulzus, 724, 742
négyzet, 137
négyzetesközép-feladat
  lineáris, 276, 916
  nemlineáris, 945
  rangdeficiens eset, 277
négyzetgyök
  komplex, 701
  természetes számoké, 8
nemnegatív számok, 1
Nemzetközi Könyvszámozási Szabvány (ISBN), 336
NEUMANN-elv, 311
NEUMANN-sor, 577, 597
NEUMANN-feladat, 692
NEUMANN-függvény, 518
NEWTON-féle interpolációs formula, 939
NEWTON–LEIBNIZ-tétel, 448
NEWTON-módszer, 654, 908, 920, 989
  megfelelő, 974
  módosított, 654, 908
  nemlineáris optimalizálás, 892
    tompított, 893
NOR-függvény, 285
norma, 276
  euklideszi, 258, 323
  fél-, 626

integrál-, 661
mátrix-, 258
  hozzárendelt norma, 258
  oszlopösszegnorma, 258
  sorösszegnorma, 258
  spektrálnorma, 258
normált tér, 626
operátor-, 637, 826
s-, 369
t-, 369
vektor-, 258
  abszolút összegnorma, 258
  euklideszi, 258
  mátrixnorma, 258
normaizomorfia, 646
normálalak, 531
  felületegyenlet, 220
  lineáris programozás, 873
  redukált differenciálegyenlet, 855
normálási feltétel, 549
normálegyenlet, 917, 942, 943
normál-egyenletrendszer, 806, 942
normálforma, 349
  kanonikus disztributív, 349
  kanonikus konjunktív, 349
normális eloszlás, 787
  logaritmikus, 789
  standard, 788
normális loszlás
  kétdimenziós, 804
normális eloszlástörvény
  megfigyelési hibák, 73
normális, sík görbe, 226
normálisdarab, 227
normáló tényező, 194
normálosztó, 298
normálsík, térgörbe, 239, 241
normálvektor
  felület, 244
  sík, 214
normális eloszlás
  standard
    táblázat, 1118
növekményfüggvény, 929
nullapont, 1
nullmátrix, 251
nullvektor, 181
numerikus könyvtár, 907
numerus, 10
NYSTRÖM-módszer, 583

nyelő, 828, 836
  csomópont, 363
  vektormező, 675
nyelvi érték, 365
nyelvi változó, 365
nyereg, 828, 836
nyeregfokusz
  nyeregfókusz, 828
nyeregfókusz, 833
nyeregpont, 504, 886
nyíldiagram, 291
nyolcas számrendszer, 959
nyomás, 458

obeliszk, 153
oktaéder, 155
oldalfelező, 142
oldalfelező, 134
oldallap, 151
oldalnyomás, 458
ω-határhalmaz, 823, 830, 836
operandus, 977
operátor, 977
  adjungált, 648
  aggregációs, 371
  demi-folytonos, 656
  differenciálható, 653
  ÉS, 371
fogalom, 48
folytonos, 625
  inverz, 639
gamma, 371
HAMMERSTEIN-, 653
idempotens, 650
inverz, 611
izoton növekedő, 655
koercitív, 656
kompakt, 650
kompenzáló, 371
kontraktív, 619
korlátos, 637
lambda, 371
lineáris, 610
  folytonos, 637
  korlátos, 637
monoton, 656
norma, 826
NYEMICKIJ-, 653
önadjungált, 649
pozitív, 613
pozitív definit, 649
szigorúan monoton, 656
szinguláris, 602

teljes, 650
URISZON-, 653
VAGY, 371
véges dimenziójú, 650
zárt, 639
operátor, lineáris, 324
felcserélhetőség, 324
kommutativitás, 324
összege, 324
szorzata, 324
operátor-írásmód, differenciálegyenletek, 511
operátormódszer, 542, 737
operátorok differeciálhatósága
nemlineáris, 653
optimalitási feltétel, 885, 887
BELLMANN-féle, 903
elégséges, 886
optimalizálás
konvex
utalás, 645
optimalizálás, diszkrét
bevásárlási feladat, 901
dinamikus, 900
folytonos dinamikus, 900
funkcionálegyenlet-módszer, 903
funkcionálegyenletek, 903
BELLMANN-féle, 902
hátizsák-feladat, 902, 905
költségfüggvény, 902
minimumfelcserélhetőség, 902
n-lépcsős döntési folyamatok, 901
optimális stratégia, 904
vásárlási, 904
optimalizálás, lineáris
a csúcs bázisa, 874
csúcs, 874
degenerált csúcs, 874
dualitás, 880
elosztási feladat, 884
hozzárendelési feladat, 884
sorbarakási feladat, 885
szállítási feladat, 881
tulajdonságok, 873
utazó ügynök problémája, 884
optimalizálás, nemlineáris
csökkenő irányú eljárás, 892
dualitás, 886
gradiens módszer, 892
egyenlőtlenségfeltételek, 894
iránykeresési feladat, 894
konvex, 887
konvexitás, 888
korlátozási eljárás, 899
kvadratikus, 887
NEWTON-módszer, 892
numerikus keresési eljárások, 891
nyeregpont, 886
sugárminimalizálás elve, 892
optimalizálási eljárások
a legmeredekebb csökkenő irányú, 892
aranymetszés, 891
büntető és korlátozó, 898
DFP módszer, 893
feltétel nélküli feladat, 892
FIBONACCI-, 891
HILDRETH–D'ESOPO-, 890
KELLEY-, 900
konjugált gradiensek, 893
megengedett irányok, 894
metszősíkok módszere, 900
tompított, 893
vetített gradiensek, 896
WOLFE-, 888
optimalizálási feladat
dinamikus, 901
duál feladat, 880
konvex, 887
lineáris, 881
bázismegoldás, 875
nemlineáris, 949
primál feladat, 880
optimumszámítás, 871
lineáris
alak, 871
ordináta, 189, 208
ordinátatengely, 189
ORE tétele, 357
ortodróma, 172
Északisark-közeli pont, 172
ívhosszúság, 173
két ortodróma metszéspontjai, 179
metszéspontok, 174, 176
útirányszög, 172
ortogonális polinom, 943
ortogonalitás, 524
egyeneseké, 130
HILBERT-tér, 634
trigonometriai függvényeké, 323
vektorok, 184
ortogonalitási feltétel
egyenes–sík, 219
egyenesek térben, 219
síkok, 216
ortogonalizációs eljárás, 279, 916, 917

GIVENS-, 917
GRAM–SCHMIDT-féle, 279, 635
HOUSEHOLDER-, 277, 917
SCHMIDT-féle, 589
ortogonáltér, 634
ortonormált, vektorok, 262
oszcillátor, lineáris, harmonikus, 553
oszlopösszeg feltétel, 918
oszlop-pivotizálás, 915
osztály
egyenlettel definiált, 346
kiértékelés, 797
osztályközép, mérési eredmények kiértékelése, 798
osztás, 963
komplex számoké, 37
polinomoké, 14
racionális számoké, 1
oszthatóság, 324
oszthatósági kritériumok, 326, 327
oszthatósági szabályok, elemi, 324
osztó, 14, 324
legnagyobb közös (LNKO)
polinomoké, 14
legnagyobb közös osztó (lnko), 327
egész számok, 327
lineáris kombináció, 328
pozitív, 326

önérintési pont, 233
önhasonlóság, 848
örvényfluxussűrűség, 692
örvénymező
forrásmentes, 690
tiszta, 690
örvénypont, 504
örvénysűrűség, 690
örvényvonalak, 677
összeadás, 963
komplex számoké, 36
polinomoké, 11
racionális számoké, 1
összeg, 6
algebrai, 370
korlátos, 370
szummajel, 6
számolási szabályok, 6
összeg deriváltja, 386
összehasonlító függvény, 563, 568
összekapcsolás
fuzzy halmazoké, 369
összekapcsolási operátor, 375
összemérhetetlenség, 4, 830
összemérhetőség, 4
összetett ítélet, 283
extenzionális, 283
ötös, 291

PADO-approximáció, 998
palást
gömb, 157
gúla, 153
henger, 154
hordótest, 158
kocka, 153
kúp, 156
poliéder, 152
téglatest, 152
tórusz, 158
pálya, 821
heteroklinikus, 832
homoklinikus, 832, 866
kétszeresen összetett, periodikus, 861
periodikus, 821
hiperbolikus, 829
nyeregszerű, 829
parabola, 203
binom, 70
csúcspont, 203
érintő, 203
félparaméter, 203
fókusz, 203
görbületi körének sugara, 204
harmadfokú, 64
másodfokú, 63
n-edrendű, 65
NEIL-, 95
paraméter, 203
terület, 204
transzformáció, 205
vezéregyenes, 203
parabola
ívhossza, 204
parabolaátmérő, 203
parabolaegyenlet, 203
parabolatengely, 203
parabolikus görbék, 206
paraboloid, 221
elliptikus, 221
forgásparaboloid, 221
hiperbolikus, 222
centrális felület, 224
invariánsok előjelei
elliptikus, 224

hiperbolikus, 224
parabolikus, 224
paralelepipedon, 152
paralelogramma, 136
parallelogramma-egyenlőség, unitér tér, 633
paraméter
algebrai kifejezésé, 11
függvény, 49
parabola, 203
paraméteres előállítás, 49
kör, 197
paraméteres integrál, 466
paraméter
statisztikai, 798
parciális törtek, 997
parciális törtekre bontás
speciális esetek, 1056
párhuzamossági feltétel
egyenes–sík, 219
egyenesek térben, 219
síkok, 216
paritás, 553
párok, rendezett, 290
párosítás, 360
maximális, 360
telített, 360
teljes, 360
PARSEVAL-
egyenlőség, 428, 525, 590, 636
formula, 757
partikuláris integrál, 449
PASCAL-féle csiga, 99
PASCAL-háromszög, 12
patkóleképezés, 851
pénzügyi matematika, 20
peremeloszlás, 784
peremérték-feladat, 523, 930
HILBERT-féle, 603
index, 603
homogén, 523
inhomogén, 523
lineáris, 523
peremfeltétel, 561
peremintegrál-módszerek, 543
peremkollokáció, 935
peremmódszer, 935
periodizációs tényező, 745
periódus, 51, 83
szekáns, 77
szinusz, 76
tangens, 76
perióduskettőződés, 861
kaszkád, 862, 864, 867
periódus-paralelogramma, 731
permutáció, 775, 997
permutációcsoport, 298
permutációs mátrix, 914
perturbáció, 543
PESIN-képlet, 846, 852
PICARD iterációs módszere, 576
pivot-elem, 914
planiméter, 454
POINCARÉ-leképezés, 834, 835
POISSON-
differenciálegyenlet, 546, 690, 693
eloszlás, 786
formula, 545
integrál, 542
poláregyenlet, 551
másodrendű görbe, 206
polárérintődarab, 227
polárgömbháromszög, 162
poláris, 162
polárkoordináták, 189–191
térbeli, 209
polárnormális, 227
polárnormálisdarab, 227
polárszög, 190
polárszubtangens, 227
polártengely, 190
poliéder, 152
konvex, 154
szabályos, 154
poliéder-tétel, EULER-féle, 154
poligonvonal-eljárás, EULER-féle, 926
polinom, 11, 63
BERNSTEIN-féle alappolinomok, 957
CSEBISEV-, 946
CSEBISEV-képlet, 88
elsőfokú, 63
harmadfokú, 64
karakterisztikus, 277
kvadratikus, 63
LAGUERRE-, 635
LEGENDRE-, 634
másodfokú, 63
n-edfokú, 64
racionális egész függvény, 61
trigonometrikus, 949
polinomegyenletek megoldása, 910
polinom-interpoláció, 939
polinomok
HERMITE-, 554
LAGUERRE-, 522

LEGENDRE-, 520
szorzatelőállítása, 43
pólus
a gömbön, 162
analitikus függvény, 697
bal oldali, 162
függvény, 59
jobb oldali, 162
koordinátarendszer kezdőpontja, 181, 190
m-edrendű, komplex függvény, 719
m-szeres, komplex függvény, 719
pólustávolság, 244
pont, 130
aszimptotikus, 233
átellenes, 159
belső, 616
érintkezési, 618
izolált, 224, 232, 233, 618
koordináták, 189
környezete, 616
legjobban közelítő, 237
n-dimenziós térben, 121
nemvándorló, 840
racionális, 1
szinguláris, 502
differenciálegyenlet, 503
izolált, 503
torlódási, 618
transzverzális homoklinikus, 837
végtelen távoli, 192
pont környezete, 616
pontosság, 813
pontossági mérték, 813
pontspektrum, 641
PÓSA tétele, 357
posztfix-jelölés, 359
potenciál
komplex, 707
konzervatív mező, 685
retardált, 545
potenciálegyenlet, 546
potenciálfüggvény, 707
potenciálos mező, 684
rotáció, 678
pótszög, 131
pótszögtételek, 79
pozitív definit, 915
precessziós szög, 212
predikátum, 286
n-változós, 286
predikátumkalkulus, 286
prediktor, 928
prediktor–korrektor-módszer, 928
prefix-jelölés, 359
prehilbert tér, 632
prímfaktor felbontás, 325
kanonikus, 325
prímelemek, 325
primitív függvény, 433
prímszámok, 325
hármas, 325
iker, 325
négyes, 325
próbafüggvény-módszer, 931, 935
probléma
izoperimetrikus, általános, 562
regularizálási, 277
programozás
Maple, 1004
matematikai programcsomag, 978
Mathematica, 990
programozás, lineáris, 871
alapfogalmak, 873
általános alak, 871
feltétel, 871
programozás, nemlineáris, 885
programozási feladat
lineáris
normálalak, 875
projekciótétel
ortogonáltér, 634
projektor, 650
pszeudoskalár, 269
pszeudotenzor, 268, 269
pszeudovektor, 268, 269
pszeudo-véletlen számok, 808
PYTHAGORAS
derékszögű háromszög, 141
ferdeszögű háromszög, 142

QR-algoritmus, 281
QR-transzformáció, 917

rács
BRAVAIS-rács, 314
rácspont
spline-oknál, 955
rácsstruktúra
krisztallográfia, 313
radiális egyenlet, 551
radián, 131
radikál, 502
rádióiránymérés, 171
rang
mátrix, 255

RAYLEIGH–RITZ-algoritmus, 281
reakció, kémiai koncentráció, 121
reciprok függvény
  konform leképezés, 699
Reduce, 976
redukció, 263
  tenzor, 268
redukciós képletek
  trigonometrikus függvények, 79
régi fokbeosztás, 131
regresszió
  lineáris, 805
  többdimenziós, 806
regresszió-analízis, 803
regressziós egyenes, 805
regressziós együttható, 805
regula falsi, 909
regularitási feltétel, 886, 899
regularizációs eljárás, 282
regularizálási paraméter, 277
rektifikálás, 110
reláció, 291
  binaráris, 291
  ekvivalenciarelaáció, 293
  fuzzy, 373
  inverz, 292
  kongruencia, 345
  n-változós, 291
  rendezési, 293
relációs mátrix, 291
relációs szorzat, 292
relatív prím, 14
  indirekt bizonyítás, 4
relaxációs eljárások, 919
relaxációs paraméter, 919
REMES-algoritmus, 948
rend
  másodrendű görbék, 204
  n-edrendű görbe, 193
  wavelet, 771
rendezés, 294
  folytonos csoport, 303
  lexikografikus, 294
  részleges, 294
  teljes, 294
rendezési intervallum, 613
rendezési reláció, 293
  teljes, 294
rendőrelv, 55
rendszer
  differenciálegyenletek
    kanonikus, 528
    lineáris, 513
    magasabb rendű, 506
    megoldás-, 506
    normális, 528
  dinamikai, 821
    C^r-sima, 821
    disszipatív, 822
    diszkrét, 822
    ergodikus, 841
    folytonos, 821
    időben diszkrét, 821, 822
    időben folytonos, 821
    invertálható, 821
    kaotikus, 853
    keverő, 842
    konzervatív, 822
    mozgás, 821
    térfogatcsökkentő, 822
    térfogatmegőrző, 822
  egyenletek
    lineáris, 273
    nemlineáris, 919
    numerikus megoldás, 913
    túlhatározott, 276
  kaotikus
    DEVANEY-féle, 853
    keverő, 853
    lineáris, 270, 998
      standard alakra hozás, 998
    négy pontból, 213
    normálegyenletek, 276
    ortogonális, 634
    ortonormált, 634
    teljes, 636
    trigonometrikus, 634
    tudásalapú interpoláció, 381
részbenrendezés, 612
részcsoport, 297
  ciklikus, 297
  triviális, 297
részcsoport kritérium, 297
részgráf, 353
  indukált, 353
részgyűrű, 320
  triviális, 320
részgyűrű kritérium, 320
részhalmaz, 288
részletösszeg, 411
résztörtekre bontás, 15
rezgés, harmonikus, 83
rezgésidő, 83
reziduális spektrum, 642

reziduum, 720, 916
reziduumtétel, 719, 720
    alkalmazások, 721
rezolvens, 577, 579, 597, 641
rezolvenshalmaz, 641
rezonanciatórusz, 867
RIEMANN-
    formula, 539
    függvény, 539
    módszer, 539
RIEMANN-felület
    elágazási pont, 711
    többrétegű, 711
RIEMANN-integrál, 447
    összehasonlítás a LEBESGUE-integrállal, 460
    összehasonlítás a STIELTJES-integrállal, 460
RITZ-módszer, 570, 932
$\mathbb{R}^n$ (n-dimenziós euklideszi vektortér), 253
ROMBERG-eljárás, 924
rombusz, 137
rotáció, 678
    definíció, 676
    különböző koordinátarendszer, 677
    potenciálos mező, 678
    utalás, 673
    vektorkomponensek, 681
    vektormező, 676
rotátor, 550
rúd rezgése, 534
RUELLE–TAKENS–NEWHOUSE-forgató-könyv, 867
RUNGE–KUTTA-eljárás, 927

sajátérték, 277, 524, 549, 641
    integrálegyenlet, 574, 579
    operátor, 641
sajátérték-probléma
    általános, 277
    speciális, 277
sajátfüggvény, 524, 549
    integrálegyenlet, 574, 579
    normált, 524
sajátvektor, 264, 277
    súly, 308
SARRUS-szabály, 260
sáv, karakterisztikus, 527
SCHAUDER-bázis, 636
SCHÖNFLIESS-szimbolika, 311
SCHRÖDINGER-egyenlet
    lineáris, 547
    nemlineáris, 555, 557
    nemstacionárius, 547
    stacionárius, 548
SCHWARZ–CHRISTOFFEL-formula, 703
SCHWARZ-féle felcserélési tétel, 401
SCHWARZ-féle tükrözési elv, 707
séma
    FALK-, 254
SIERPIŃSKI-
    sárkány, 848
    szőnyeg, 848
sík
    egyenlete, 214
      általános, 214
      HESSE-féle normálalak, 214
      tengelymetszetes alak, 214
    rektifikáló, 239, 241, 242
    tér, 150
    térbeli, 214
    vektoregyenlet, 188
síkgeometria, 130
síknegyed, 189
síkok
    ortogonalitási feltétel, 216
    párhuzamos, 150
      távolsága, 217
    párhuzamosságának feltételei, 216
simító paraméter, 955
SIMPSON-formula, 923
simulósík, térgörbe, 239, 241
skála
    fogalma, 118
    logaritmikus, 118
skálaegyenlet , 118
skalár, 180
    forgásinvariáns tulajdonság, 269
    invariáns, 262
skalármátrix, 252
skalármező, 665
    axiális mező, 666
    centrális mező, 665
    gradiens, 673, 674
    iránymenti differenciálhányados, 671
    koordinátás megadás, 666
    síkbeli, 665
skalárszorzat, 183, 323
    derékszögű koordináták, 185
    HILBERT-tér, 632
    két függvény, 942
    koordinátás előállítása, 187
    vektorok, 255
SLATER-feltétel, 887
s-norma, 369
sokaság

instabilis, 831, 836
lineáris, 607
stabilis, 831, 836
sokszög
belső szög, 138
beírt kör sugara, 139
körülírt kör sugara, 139
középponti szög, 138
külső szög, 138
oldalhosszúság, 138
szabályos, 138
síkbeli, 138
terület, 139
sokszögek
hasonló, 136
sokszögelés, 147
sor
abszolút konvergencia, 421
általános tag, 411
alternáló, 415
BANACH-tér, 629
binomiális, 13
CLEBSCH–GORDAN-, 302
CSEBISEV-, 998
divergencia, 414
divergens, 411
FOURIER-, 427
komplex alak, 427
függvény-, 419
geometriai, végtelen, 411
gyökkritérium, 413
hányadoskritérium, 412
harmonikus, 411
hatvány-, 421
hipergeometrikus, 522
integrálkritérium, 414
konvergencia, 414
egyenletes, 419, 421
nem egyenletes, 419
konvergenciatartomány, 419
konvergens, 411
LAURENT-, 998
MACLAURIN-féle, 423
maradéktag, 411, 419
mértani, 18
végtelen, 18
NEUMANN-, 638
összeg, 411
összehasonlító kritérium, 412
részletösszeg, 411
számtani, 17
TAYLOR-, 395, 422
véges, 17
végtelen, 409, 411
WEIERSTRASS-kritérium, 420
sorbarakási feladat, 885
sorfejtés, 747
FOURIER-, 430
LAURENT-, 718
MCLAURIN-, 423
TAYLOR-, 395, 422, 717
sormaradék, 411
SOR-módszer, 919
sorok
konstans tagok, 411
konvergencia-tételek, 411
sorozat, 409
CAUCHY-, 618
fundamentális, 618
konvergens, 617
korlátos, 608
metrikus térben, 617
nullához konvergáló, 608
véges, 608
sorösszeg feltétel, 918
spektrál
lineáris operátor, 641
spektrálelmélet, 641
spektrálsugár, 638
spektrum, 756
folytonos, 642
spirál, 107
ARCHIMÉDESZI, 107
hiperbolikus, 107
logaritmikus, 108, 233
spline
alap-, 955
harmadfokú, 954, 955
interpolációs, 954
kiegyenlítő, 955
interpolációs, 954
kétdimenziós harmadfokú
interpolációs, 956
kiegyenlítő, 957
kiegyenlítő, 955
normalizált B, 955
periodikus, 954
természetes, 954
spline-interpoláció, 939
SPSS, 976
spur
mátrix, 252
stabilitás, 929
abszolút, 930

első közelítésben, 828
kerekítési, numerikus számítás, 965
kezdeti értékek zavarása, 929
LJAPUNOV-féle, 827
orbitális, 827
pályamenti, 827
periodikus pályák, 828
strukturális, 838, 839
stacionárius pont, 821
hiperbolikus, 828
standard normális eloszlás, 788
statisztika, 775
bizonytalanságok kiszámítása, 811
kiértékelés, 797
leíró, 797
matematikai, 775, 794
mintafüggvény, 795
statisztikai vizsgálatok, 799
STEFFENSEN-eljárás, 909
STIELTJES-integrál
fogalom, 460
összehasonlítás a RIEMANN-integrállal, 460
utalás, 649
STIELTJES-transzformáció, 735
STIRLING-formula, 470
STOKES-integráltétel, 688
struktúra
algebrai, 283
klasszikus algebrai, 295
STURM-féle
függvény, 44
lánc, 44, 912
STURM–LIOUVILLE-feladat, 524
sugár
köré, 139
polárkoordináták, 190
sugársor, 195
súly
mérés, 817
sajátvektor, 308
statisztikai, 783
súlyfaktor
statisztikai, 814
súlyfüggvény, 524
súlypont, 192, 212
háromszög, 134
ívszakasz, 459
tetszés szerinti síkidom, 460
trapéz, 460
zárt görbe, 460
súlypont módszer, 378
általánosított, 378
paraméteres, 378
súlypontkoordináták
1. típusú vonalintegrál, 472
hármas integrál, 488
kettős integrál, 483
sűrűségfüggvény, 782
többdimenziós, 784

szabály
BERNOULLI–L'HOSPITAL-féle, 55
CRAMER-, 274
DE MORGAN-, 284
NAPIER-, 169
nyelvi, 380
SARRUS-, 260
szakadás, megszüntethető, 59
szakadási hely, 58
szakasz, 130
szalagmátrix, 918
szállítási feladat, 881
szállítási hálózat, 363
szám
fixpontos, 960, 961
lebegőpontos, 960, 961
féllogaritmikus alak, 961
számábrázolás, belső, 960
számegyenes, 1
kiterjesztett, 657
számelmélet, elemi, 324
számítás, numerikus, 965
alapműveletek, 962
komputer, 962
pontosság, 963
számjegyösszeg
1. fokú, 326
2. fokú, 326
3. fokú, 326
alternáló
1. fokú, 326
2. fokú, 326
3. fokú, 326
számok, 1
a racionális számok halmaza, 1
BERNOULLI-féle, 417
egész, 1
EULER-féle, 417
FIBONACCI-, 329, 870
irracionális, 2, 4
képzetes, 34
komplex, 34
abszolút értéke, 35
algebrai alakja, 34

argumentuma, 35
exponenciális alakja, 35
főérték, 35
gyökvonása, 38
hatványozása, 37
kivonása, 36
modulusa, 35
osztása, 37
összeadása, 36
szorzása, 36
trigonometrikus alakja, 35
konjugált komplex, 36
nemnegatív, 1
összetett számok, 325
prímszámok, 325
racionális, 1
természetes, 1
transzcendens, 2
valós, 2
számosság
halmaz, 288, 295
számrendszer, 959
kettes, 959
nyolcas, 959
tizenhatos, 959
tízes, 959
számsík
GAUSS-féle, 34
komplex leképezés, 711
számsorozat, 409
divergencia, 410
határérték, 410
konvergencia, 410
konvergens, 617
korlátos, 409, 608
képzési szabály, 409
metrikus térben, 617
monoton, 409
nullához konvergáló, 608
tagok, 409
véges, 608
végtelen, 409
számsorozatok
alsó korlát, 410
felső korlát, 410
szár, 130
százalék, 20
százalékszámítás, 20
szekáns, 77
szekáns hiperbolikusz, 89
szekánsfüggvény, 132
szektorformula, 688
szélesség, földrajzi, 160, 244
szelő-érintő szög, 139
szelők, 139
szelőszög, 139
szélsőérték, 50, 395
abszolút, 395
lokális, 395
többváltozós függvények, 405
szélsőérték-meghatározás, 396
abszolút, 397
általános szabály, 397
előjelvizsgálat, 396
feltételes, 407
globális, 397
implicit függvény, 397
magasabb rendű deriváltak, 396
szemimonoton, 631
szeparatrixfelület, 831, 836
szeparatrixhurok, 832, 865
σ-additivitás, 657
σ-algebra, 656
BOREL-féle, 657
szignatúra, 344
szignifikancia, 803
szimbólum, 977
KRONECKER-, 264
LANDAU-féle, 57
LEGENDRE, 333
szimmetria
centrális, 135
FOURIER-sorfejtés, 428
tengelyes, 135
tükrözési szimmetria, 135
szimmetriacsoport, 312
krisztallográfia, 313
szimmetriaelem, 311
szimmetriaműveletek, 311
fixpont nélküli, 311
forgatás, 311
forgatástükrözés, 311
kristályrács struktúrák, 315
tükrözés, 311
szimmetriasértés, bifurkáció, 859
szimmetrikus differencia, 290
szimplex lépés
módosított, 879
szimplex módszer, 876
módosított, 879
szimplex tábla, 876
módosított, 879
segédfeladat, 878
szimuláció

digitális, 807
Monte-Carlo, 807
szingleton, 368
szinguláris értékek, 281, 844
szinguláris értékek szerinti felbontás, 281, 282
szinguláris pont
analitikus függvény, 697
megszüntethető, 697
szingularitás
izolált, 719
lényeges, 697, 719
szintfelület, 666
szinthalmaz
fuzzy halmazé, 368
szintvonal, 122, 666
szinusz, 75
szinusz hiperbolikusz, 89
szinuszfüggvény, 132
hiperbolikus, 133
szinusz–GORDON-egyenlet, 555, 558
szinusz-koszinusztétel, 165
poláris, 165
szinuszos mennyiségek, 83
szinusztétel, 142, 164
szita, ERASZTOSZTHENÉSZ, 325
szivaralak, ellipszoid, 220
szó, 615
SZOBOLJEV-tér, 630
szolenoid, 852
szoliton
antikink, 558
antiszoliton, 557
BOUSSINESQ-, 559
BURGERS-, 559
HIROTA-, 559
KADOMZEV–PEDVIASWILI-, 560
kink, 558
kink-antikink, 558
kink-antikink-kollízió, 558
kink-kink-kollízió, 558
kink-rács, 559
KORTEWEG DE VRIES-, 556
nemlineáris, SCHRÖDINGER-, 557
szolitonok, 555
kölcsönhatás, 555
szórás, 783, 814, 815, 817
szórásnégyzet, 783
kétdimenziós eloszlás, 804
mérési eredmények kiértékelése, 798
mintafüggvények, 796
szorzás, 963
komplex számoké, 36
polinomoké, 11
racionális számoké, 1
szorzat, 7
algebrai, 370
DESCARTES-, 290
diadikus
tenzorok, 263
vektorok, 255
direkt, 290, 374
csoport, 298
n-szeres, 347, 374
Ω-algebra, 346
KRONECKER-, 257
produktumjel, 7
számolási szabályok, 7
vektoriális, 183
szorzat deriváltja, 387
szög, 130
derék-, 131
egyállású, 131
egyenes-, 131
egyenes és sík, 219
egyeneseken, 130
egyeneseké, térben, 219
EULER, 211
fogalma, 130
fok, 131
hegyes-, 131
homorú, 131
ívmérték, 131
két sík által bezárt, 216
magassági, 143
nutációs, 211
párhuzamos egyeneseken, 131
sík görbe, 228
sík görbék között, 228
síkbeli, 151
társszögek, 131
tér-, 131, 151
tompa-, 131
térgörbék közötti, 246
vektorok között, 189
visszahelyezés, 173
szögek összege
gömbháromszög, 164
síkháromszög, 134
szögekre vonatkozó koszinusztétel, 165
szögfajták, 130
szögfelező, 134, 143
szögfüggvény, 75
szteradián, 151
sztochasztika, 775

sztrofoid, 97
szubnormálisdarab, 227
szubtangens, 227
szuperpozíció
elve, 709
differenciálegyenletek, 510
mezők, 691
nemlineáris, 557
rezgéseké, 84
szuperpozíciótétel, 691

tag, 10
tagsági érték, 364
tagsági függvény, 364, 365
harangalakú, 366
trapéz alakú, 365
támaszfunkcionál, 645
támaszhipersík, 645
támaszpoligon, 958
tangens, 76
tangens hiperbolikusz, 89
tangensfüggvény, 132
hiperbolikus, 133
tangensképletek, 142
tangenstétel, 142
tárgyfüggvény, 735
tartó
fuzzy halmazé, 364
függvény, 585
kompakt, 772
mérték, 840
sugársor, 195
tartomány, 122
egyszeresen összefüggő, 713
egyszerűen összefüggő, 122
három- és többdimenziós, 123
kétdimenziós, 122
kétszeresen összefüggő, 122
megengedett, 872
nem összefüggő, 122
nyitott, 122
többszörösen összefüggő, 122
zárt, 122
tartományi kollokáció, 935
tautológia
BOOLE-függvény, 348
ítéletkalkulus, 285
predikátumkalkulus, 286
távoli pont, 192
távolság
egyenes, 195
gömbi, 159
HAMMING-, 615
két egyenesé, 218
két pont között, 191
két ponté, térben, 212
metrikus tér, 615
pont–egyenes, 218
pont–sík, 215
síkoké, 217
távolsági mátrix, 355
TAYLOR-sorfejtés, 56
TAYLOR-formula, 395
TAYLOR-kifejtés, 395
TAYLOR-sor, 395, 422
analitikus függvény, 717
egyváltozós függvény, 423
kétváltozós, 423
m-változós, 424
TAYLOR-sorfejtés
egyváltozós, 423
kétváltozós, 423
m-változós, 424
vektorfüggvény, 665
téglalap, 137
téglányösszeg, 922
bal oldali, 922
jobb oldali, 922
téglatest, 152
tehetetlenségi nyomaték, 459
1. típusú vonalintegrál, 472
hármas integál, 488
kettős integrál, 483
tehetetlenségi tenzor, 263
telegráfegyenlet, 539
teljesítményspektrum, 843
teljeslépés-eljárás, 918
teljeslépésű iteráció, 919
teljessé tétel, 624
teljesszög, 131
síkbeli, 131
térbeli, 151
tényező, polinomé, 43
tenzor, 261
0-adrendű, 262
antiszimmetriks, 264
definíció, 262
deltatenzor, 264
diadikus szorzat, 263
elsőrendű, 262
epszilontenzor, 265
ferdén szimmetrikus, 264, 268
feszültség-, 263
indexfelemelés, 268

invariáns, 264
komponensek, 262
másodrendű, 262
n-edrendű, 262
nyom, 265
összeadás, kivonás, 268
redukció, 263, 268
sajátérték, 264
számítási szabályok, 263
szimmetrikus, 264, 268
szorzás, 268
számítási szabályok, 264
tehetetlenségi, 263
tenzorinvariáns, 265
tenzorszorzat, 263
próbafüggvény, 956
vektorok, 255
tér
absztrakt, 48
félnormált, 626
gravitációs tér, pontszerű sokaság, 691
HILBERT-, 632
lineáris, 606
L^p-, 660
metrikus, 615
normálható, 628
normált, axióma, 626
rendezett, normált, 631
RIESZ-, 613
szeparábilis, 618
SZOBOLJEV-, 630
teljes, 618
topologikus, 617
több dimenziós, 121
unitér, 633
véges dimenziós, 650
térbeli irány, 180, 210
térelmélet
alapfogalmak, 664
differenciálegyenletek, 692
térfogat
ék, 153
gömb, 157
gúla, 153
hármas integrál, 488
hasáb, 152
henger, 154
hordótest, 158
kettős integrál, 483
kocka, 153
kúp, 156
obeliszk, 153
poliéder, 152
részhalmaz, 656
téglatest, 152
tetraéder, 213
tórusz, 158
üreges henger, 155
térfogatelem
derékszögű koordináták, 485
gömbkoordináták, 487
hengerkoordináták, 486
tetszőleges koordináták, 487
vektorkomponens, 682
térfogatelemek
táblázat, 488
térfogati differenciálhányados, 671, 673, 674
térfogati integrál, 483
térgeometria, 150
térgörbe, 238
érintő, 239
binormális, 239, 241
egyenlet, 214, 238
érintő, 241
főnormális, 239, 241, 242
görbület, 240
görbületi sugár, 240
irány, 238
kísérő triéder, 239
koordinátaegyenlet, 241, 242
normálsík, 239, 241
simulósík, 239, 241
torzió, 242
torziósugár, 242
vektoregyenlet, 238, 241, 242
térinverzió, 268
skalárszorzat, 269
vegyesszorzat, 269
terjedelem
mintafüggvények, 797
mérési eredmények kiértékelése, 799
térszög, 151
terület
ellipszis, 199
görbe felületrész, 491
görbe határok, 455
görbeszektor, 455
hasonló síkbeli alakzatok, 136
hiperbola, 202
háromszög
síkbeli, 193
síkháromszög, 141, 143
kettős integrál, 483
körcikké, 140

köré, 139
körgyűrűrészé, 140
körszeleté, 140
parabola, 204
paralelogramma, 137, 189
poliéder, 189
részhalmaz, 656
rombusz, 137
síkidomok, 455
sokszög, 193
téglalap, négyzet, 137
területelem
integrálszámítás
táblázatok, sík, 483
területképlet, HERON-féle, 143
test, 320
testbővítés, 320
testkiterjesztés, 320
tesztfeladat, lineáris, 930
tétel
a kezdeti feltételek szerinti differenciálhatóságára vonatkozó, 821
a komplex függvénytan alaptétele, 714
ABEL-, 421
AFRAIMOVICS–SILNYIKOV-, 867
ANDRONOV–PONTRJAGIN-, 838
ANDRONOV–WITT-, 828, 829
APOLLÓNIUSZ, 198
ARZELA–ASCOLI-, 650
az euklideszi algoritmushoz, 328
az állandók variálásáé, 826
BAIRE-féle kategória-, 619
BANACH-, 639
BANACH–HAHN (kiterjesztési tétel), 645
BANACH–HAHN-, 638
BANACH–STEINHAUS-, 639
BAYES-, 780, 781
BEPPO LEVI-, 660
BERGE-, 360
binomiális, 12
BIRKHOFF-, 346, 841
BLOCK, GUCKENHEIMER, MISIURIEWICZ, 854
BOLZANO-, 60, 129
CAYLEY-, 299, 359
CLEBSCH–GORDAN-, 302
CSEBISEV-, 441
DENJOY-, 869
DIRAC-, 357
DOUADY–OESTERLÉ-, 851
EUKLEIDÉSZ tételei, 141
EULER-, 335
EULER–HIERHOLZER-, 356
EULER-féle poliéder-, 154
FATOU-, 660
felosztási tétel, 294
FERMAT-, 335, 393
FERMAT–EULER-, 335
FLOQUET-, 827
FUBINI-, 480
függvény korlátossága, 61, 129
GIRARD-, 164
gömbskatulyázási, 619
GROBMAN–HARTMAN-, 836, 838
GULDIN-féle, 1., 460
GULDIN-féle, 2., 460
HADAMARD–PERRON-, 831, 837
HELLINGER–TOEPLITZ-, 639
HILBERT–SCHMIDT-, 652
HOLLADAY-, 954
HURWITZ-, 512
integráltétel, CAUCHY, 714
KAM-, 840
kínai maradéktétel, 333
konstans, analitikus függvény, 696
központisokaság-
differenciálegyenleteké, 854
leképezéseké, 860
KREJN–LOZANOVSZKIJ-, 639
KURATOWSKI-, 361
LAGRANGE-, 297
LEBESGUE-, 660
LEDRAPPIER-, 850
LEIBNIZ-, 415
LERAY–SCHAUDER-, 655
LIOUVILLE-, 696, 825
LJAPUNOV-, 828
maximumelv, analitikus függvény, 696
MEUSNIER-, 247
NEWTON–LEIBNIZ-, 448
ORE-, 357
OSELEDEC-, 844
PALIS–SMALE-, 840
PICARD–LINDELÖF-, 622, 821
PITAGORASZ-
ortogonáltér, 634
POINCARÉ–BENDIXSON-, 830
PÓSA-, 357
PYTHAGORAS-
derékszögű háromszög, 141
ferdeszögű háromszög, 142
RADON–NIKODYM-, 660
RIEMANN-, 414
RIESZ-, 643, 644

RIESZ–FISCHER-, 636
ROLLE-, 394
SARKOVSZKIJ-, 854
SCHAUDER-, 651
SCHWARZ-féle felcserélési, 401
SILNYIKOV-, 865
SMALE-, 865
SOSITAISVILI-, 855
stabilitás első közelítésben, 828
STURM-, 44
SZINAJ-, 854
szuperpozíciótétel, 691
TAYLOR-, 395
teljes valószínűség, 780
TUTTE-, 360
WEIERSTRASS-, 61, 129, 618
WILSON-, 335, 336
WINTNER–CONTI-, 824
YOUNG-, 849, 1020
zártgráf, 639
tételek, egybevágósági, 136
tetraéder, 153, 213
thétafüggvény, 732
típus, 344
tizenhatos számrendszer, 959
tízes számrendszer, 959
t-konorma, 369
t-norma, 369
topologikusan
ekvivalens, 835
konjugált, 835
torlódási pont, 618
tórusz, 158, 827, 852, 853
felbomlása, 867
keletkezése, 862, 867
mint invariáns halmaz, 830
rezonancia-, 867
simaságvesztése, 867
torzió, térgörbe, 242
torziósugár, térgörbe, 242
többcél-módszer, 933
többlépéses eljárás, 928
többskálás analízis, 772
többszörös, 14
legkisebb közös (lkkt), 328
osztóé, 324
többszörös élek, 352
többszörös integrálok, 479
többszörös integráltranszformáció, 737
többszörös pont, 233
tömeg
1. típusú vonalintegrál, 472
hármas integrál, 488
kettős integrál, 483
tömegközéppont, 192, 212
töréspont, 233
törlesztés, 22
törlesztésszámítás, 22
törlesztőrészlet, 21
tört
ál-, 15
valódi, 15
törtlineáris függvény, 700
trajektória, 821
traktrix, 110
transzformáció
DESCARTES-féle koordináták polárkoordinátákkal, 404
egybevágósági, 135
geometriai, 142
HOPF–COLE-, 559
lineáris, 261, 610
wavelet-, 770
transzformációdeterminánsz, 211
transzformációs eljárás, 281
transzformálás
derékszögű koordináták, 210
transzformált függvény, 735
transzformációinvariáns, 264
transzlációinvariáns, 264, 265
tranzitív lezárt, 292
tranzitivitás, 28
trapéz, 137
trapézformula, 922
HERMITE-féle, 922
összetett, 922
trapézösszeg, 922
HERMITE-féle, 922
összetett, 922
tridiagonalizálás, 281
triéder, 163
kísérő, 238
trigonometria
szférikus, 158
síkbeli, 141
trigonometrikus függvény, 726
trochoid, 103
turbulencia, 822, 867
TUTTE tétele, 360
tükrözés
egyenesre, 135
helykoordináták, 268
pontra, 135
tükrözési elv, SCHWARZ-féle, 707

tükrözési szimmetria, sík, 135
tüzelési érték, 377
tüzelő szabály, 379

ugrás, véges, 58
ugrásfüggvény, 723, 742
ugrásösszeg, 647
unió
    drasztikus, 370
    fuzzy halmazoké, 369, 370
univerzális kvantor, 286
urnamodell, 784
út
    EULER-féle, 356
      nyitott, 356
    gráf
      alternáló, 360
      javító, 360
utazó ügynök problémája, 884
útirányszög, 160
útszámítás, 458

üreges henger, 155

valenciamátrix, 359
valódi érték, 814
valós rész, 34
valószínűség, 779
    feltételes, 780
    teljes, 780
    területmérték szemléltetés, 782
valószínűségi integrál, 788
valószínűségi mérték, 840
    ergodikus, 844
    invariáns, 841
valószínűségi változó, 781
    diszkrét, 781
    folytonos, 781, 782
    független, 784, 804
      kétdimenziós, 804
      többdimenziós, 784
valószínűségszámítás, 775, 777
váltószög, 131
változások
    nagyságrend, 399
változó
    BOOLE-, 348
    független, 47, 121, 270
    függő, 47, 270
    ítéletváltozó, 283
    kötött, 286
    mesterséges, 878
    nyelvi, 365
    szabad, 286
változók szétválasztásának módszere, 533
változószétválasztás, 533
VAN DER POL-féle differenciálegyenlet, 857
várható érték, 783
    kétdimenziós eloszlás, 804
variáció, 775, 776
    ismétlés nélküli, 776
    ismétléses, 776
variációs egyenlet, 828, 836, 845, 936
variációs feladat, 932
variációs probléma, 561
    általánosabb, 569
    DIRICHLET-féle, 569
    elsőrendű, 561
    legegyszerűbb
      egydimenziós, 563
      többdimenziós, 568
    magasabb rendű, 561
    paraméteres, 561
variációszámítás, 561
variancia, 783
varietás, 345
végeselem, 543
végpont, 352
végtelen, 1
    megszámolhatatlanul, 295
    megszámolhatóan, 295
vegyes szorzat
    koordinátás előállítása, 187
vektor, 180, 253, 607
    abszolút érték, 180
    alap-, 186
    axiális, 180
      tükrözési viselkedés, 268
    bal oldali szinguláris, 281
    differenciálási szabályok, 664
    egyenes mentén eltolható, 180
    egység-, 181
    felbontás, 181
    hossz, 189
    jobb oldali szinguláris, 281
    kollineáris, 181
    komplanáris, 181
    komponensek, 670
    konjugált, 893
    koordinátái, 182
    kötött, 180
    modulus, 180
    null-, 181
    ortogonális, 184
    oszlop-, 253

poláris, 180
tükrözési viselkedés, 268
reciprok, 186
reciprok alapvektor, 186
síkbeli felületdarab, 685
sor-, 253
szabad, 180
vegyes szorzat, 185
vezérsugár, 181
vektoralgebra, 180
vektoranalízis, 664
vektordiagram, rezgések, 84
vektoregyenlet
egyenes, 188
sík, 188
térgörbe, 238, 241, 242
vektorfelbontás, 181
vektorfüggvény
differenciálhányados, 664
hodográf, 664
lineáris, 267
skalár változó, 664
TAYLOR-sorfejtés, 665
vektorgradiens, 675, 678, 679
vektorháló, 613
vektorhálók, homomorf, 613
vektoriális szorzat
koordinátás előállítása, 187
kétszeres, 185
vektoriteráció, 281
vektormező, 666, 821
centrális, 667
derékszögű koordináták, 668
divergencia, 675
forrás, 675
gömbi koordináták, 669
hengeres, 668
hengerkoordináták, 669
iránymenti differenciálhányados, 672
komponensek, 670
koordinátás megadás, 668
körintegrál, 684
körmező, 668
nyelő, 675
pontszerű források, 691
rotáció, 676
szférikus, 668
vektorok
ciklikus felcserélés, 207
diadikus szorzat, 255
kommutativitási szabály, 255
skalárszorzat, 255
tenzorszorzat, 255
vektorpotenciál, 690
vektorszorzat, 183
derékszögű koordináták, 185
útmutatás, 255
vektortér, 321, 606
$\mathcal{B}(T)$, 608
$\mathcal{C}([a,b])$, 608
$\mathcal{C}^k([a,b])$, 608
euklideszi, 323
$\mathcal{F}(T)$, 608
függvények, 608
$\mathbb{K}^n$, 607
komplex, 607
konvergens sorozatok, 608
korlátos sorozatok, 608
L^p, 660
$\mathbf{l}^p$, 608
n-dimenziós, 322
összes nullsorozatok, 608
rendezett, 612
részben rendezett, 612
s az összes számsorozatok, 608
sorozatokból álló, 607
valós, 321, 607
végtelen dimenziós, 322
véges számsorozatok, 608
véletlen jelenség, 775
véletlen minta, 784
véletlen szám, 795, 807
alkalmazás, 808
egyenletes eloszlású, 807
előállítás, 808
kongruenciamódszer, 808
más eloszlás, 808
pszeudo-, 808
táblázat, 1124
véletlen vektor
matematikai statisztika, 795
többdimenziós valószínűségi változó, 784
VENN-diagram, 288
verifikálás, bizonyításnál, 4
vetítési tétel, 142
vezéregyenes
ellipszis, 198
hiperbola, 200
parabola, 203
vezéregyenes-tulajdonság
másodrendű görbe, 205
vezérgörbe, 154
vezérsugár, 181
vezérvonal

traktrix, 110
VIETA-féle gyöktétel, 43
visszafelé helyettesítés, 914
visszahelyezés, 173
visszatérési pont, 233
VOLTERRA-féle
integrálegyenlet, 572, 595, 621
vonal
geodetikus, 159, 250
vonalas lista, 797
vonalelem
felületi, 246
vektorkomponens, 682
vonalfelület, 250
vonalintegrál, 470
1. típusú, 470
alkalmazás, 472
2. típusú, 472
általános típus, 475
másodfajú, általános típusú, 684
vektormező, 682
vonzási tartomány, 824

WALSH-függvények, 773
WALSH-rendszerek, 773
wavelet, 770
DAUBECHIES-, 772
ortogonális, 772
wavelet-transzformáció, 770, 771
diadikus, 772
diszkrét, 772
HAAR-, 772
gyors, 772
WEBER-függvény, 518
WEIBULL-eloszlás, 790
WEIERSTRASS
approximációs tétele, 618
WEIERSTRASS-
függvény, 733
kritérium, 419
tétel, 61, 129
WRONSKI-determináns, 509, 826
www.maplesoft.com, 976
www.wolfram.com, 976

YOUNG-keret, 303
YOUNG-tétel, 1020

zárt formulák, 286
zártsági reláció, 636
zenit, 143
zenitszög, 143
zérushely, komplex függvény, 696
zérushely-egyenlet, 907
zérusponti rezgési energia, 554
Z-transzformáció, 762
csillapítás, 765
definíció, 763
differenciaképzés, 764
differenciálás, 765
eredeti sorozat, 763
integrálás, 765
inverz, 766
képfüggvény, 763
konvolúció, 765
összefüggés a LAPLACE-transzformációval, 765
összegezés, 764
számolási szabályok, 764
transzláció, 764
Z-transzformálható, 763

Irodalomjegyzék

Az alábbi felsorolásban témánként találják meg a hivatkozott német műveket. Mindegyik fejezetben mellékeljük magyar szerzők, ill. művek hivatkozás nélküli listáját.

1. Aritemetika

[1.1] ASSER, G.: Grundbegriffe der Mathematik. Mengen, Abbildungen, natürliche Zahlen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1980.

[1.2] BOSCH, K.: Finanzmathematik. — Oldenbourg–Verlag 1991.

[1.3] HEILMANN, W.–R.: Grundbegriffe der Risikotheorie. — Verlag Versicherungswirtschaft 1986.

[1.4] ISENBART, F., MÜNZER, H.: Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium. — Verlag Gabler, 2. Auflage 1986.

[1.5] DÜCK, W.; KÖRTH, H.; RUNGE, W.; WUNDERLICH, L.: Mathematik für Ökonomen, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1989.

[1.6] Fachlexikon ABC Mathematik. — Verlag H. Deutsch 1978.

[1.7] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1. — Verlag H. Deutsch 1993.

[1.8] GOTTWALD, S.; KÜSTNER, H.; HELLWICH, M.; KÄSTNER, H.: Mathematik Ratgeber. — Verlag H. Deutsch 1988.

[1.9] HEITZINGER, W.; TROCH, I.; VALENTIN, G.: Praxis nichtlinearer Gleichungen. — C. Hanser Verlag 1984.

[1.10] NICKEL, H. (HRSG.): Algebra und Geometrie für Ingenieure. — Verlag H. Deutsch 1990.

[1.11] PFEIFER, A.: Praktische Finanzmathematik. — Verlag H. Deutsch 1995.

[1.12] WISLICENY, J.: Grundbegriffe der Mathematik. Rationale, reelle und komplexe Zahlen. — Verlag H. Deutsch 1988.

BACSKAI ZOLTÁN; KREKÓ BÉLA: Matematikai alapismeretek. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1963.

BARANYAI ZSOLT; LIPPNER GYÖRGY: Egyenlőtlenségek. — Tankönyvkiadó 1978.

HAJNAL ANDRÁS; HAMBURGER PÉTER: Halmazelmélet. — Tankönyvkiadó 1983.

HAJNAL IMRE: Matematikai fogalmak, tételek. — Mozaik Kiadó 1992.

HALMOS, P. R.; SIEGLER, L. E.: Elemi számelmélet. Halmazelméleti feladatok. — Műszaki Könyvkiadó 1981.

HÁMORI MIKLÓS: Halmazok, matematikai logika az általános és a középiskolai tanulók számára. — Tankönyvkiadó 1983.

HARDY ZSIGMOND; SÓLYOM MIHÁLY: Út a modern algebrához. — Tankönyvkiadó 1979.

HARSÁNYI ZSUZSA: A pénz körül forog a világ. — TypoTEX 1993.

KOKITS ZSIGMOND: Középiskolai matematika. — Tankönyvkiadó 1964.

KORNAI JÁNOS: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1973.

KÓSA ANDRÁS: Halmazok, valós számok, függvények. — LSI ATSz 1990.

KRATOFIL DEZSŐ: Algebra. — Műszaki Könyvkiadó 1970.

LAKATOS IMRE: Bizonyítások és cáfolatok. — TypoTEX 1998.

LÁNCZOS KORNÉL: Számok mindenütt. — Gondolat Kiadó 1972.

PÉTER RÓZSA: Játék a végtelennel. — TypoTEX 1999.

RIEGER RICHÁRD: Komplex számok. — Tankönyvkiadó 1952.
SÁRKÖZY ANDRÁS: Komplex számok. — Műszaki Könyvkiadó 1973.
SMULLYAN, R. M.: Gödel nemteljességi tételei. — TypoTEX 2000.
SURÁNYI JÁNOS: Polinomok, egyenletek az iskolában. — Fővárosi Pedagógiai Intézet 1977.
URBÁN JÁNOS: Matematikai logika. — TypoTEX 1998.
VARGA TAMÁS: Népszerű algebra. — Művelt Nép Kiadó 1954.

2. Függvények és előállításuk

[2.1] ASSER, G.: Einführung in die mathematische Logik, Teil I bis III. — Verlag H. Deutsch 1976–1983.
[2.2] FETZER, A.; FRÄNKEL, H.: Mathematik Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1. — VDI–Verlag 1995.
[2.3] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–1992, seit 1994 Verlag H. Deutsch.
[2.4] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1. — Verlag H. Deutsch 1993.
[2.5] GÖRKE, L.: Mengen – Relationen – Funktionen. — Verlag H. Deutsch 1974.
[2.6] HASSE, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. — Verlag H. Deutsch 1970.
[2.7] Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering. Formulas, Tables, Functions, Graphs, Transforms. — Research and Aducation Association 1961.
[2.8] PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1 bis 3. — Verlag Vieweg 1994–1996.
[2.9] SIEBER, N.; SEBASTIAN, H.J.; ZEIDLER, G.: Grundlagen der Mathmatik, Abbildungen, Funktionen, Folgen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 1), 1973; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 1), 1978.
[2.10] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 1. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.
[2.11] STÖCKER, H. (HRSG.): Analysis für Ingenieurstudenten, Bd. 1. — Verlag H. Deutsch 1995.

BEDŐ LÁSZLÓ: Függvények általános és középiskolai tanulók számára. — Tankönyvkiadó 1987.
CZÉDLI GÁBOR: Boole függvények. — Polygon 1997.
FARKAS MIKLÓS: Speciális függvények. — LSI ATSz 1989.
FAZEKAS FERENC; FREY TAMÁS: Operátorszámítás, speciális függvények. — Tankönyvkiadó 1957.
FEKETE ZOLTÁN; ZALAY MIKLÓS: Többváltozós függvények analízise. — Műszaki Könyvkiadó 1985.
FREY TAMÁS: Egyváltozós elemi függvények. — Tankönyvkiadó 1977.
HASZPRA OTTÓ; PÁLMAY LORÁNT: Nomogramok. — Tankönyvkiadó 1962.
JORDÁN KÁROLY: Elliptikus függvények és alkalmazásuk. — Tudományos Könyvkiadó 1950.
KATZ SÁNDOR: Függvények korszerű felfogásban. — Tankönyvkiadó 1989.
KÓSA ANDRÁS: Halmazok, valós számok, függvények. — LSI ATSz 1990.
KÓSA ANDRÁS: Ismerkedés a matematikai analízissel. — Műszaki Könyvkiadó 1981.
MIKOLÁS MIKLÓS: Valós függvénytan és ortogonális sorok. — Tankönyvkiadó 1980.
PÉTER RÓZSA: Rekursive Funktionen. — Akadémiai Kiadó 1957.
PINTÉR LAJOS: Analízis I–II. — TypoTEX 1998.
SIPOS BÉLA: Termelési függvények, vállalati prognózisok. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1982.
SZARKA ZOLTÁN: Komplex függvénytan 1–2. — LSI ATSz 1989.
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Valós függvények és függvénysorok. — Tankönyvkiadó 1977.
Görbék tanulmányozására és általában a matematikatörténettel való ismerkedésre szolgáló honlap:
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`

3. Geometria

[3.1] BÄR, G.: Geometrie. — B. G. Teubner 1996.

[3.2] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[3.3] BÖHM, J.: Geometrie, Bd. 1 u. 2. — Verlag Verlag H. Deutsch 1988.
[3.4] DRESZER, J.: Mathematik–Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. — Verlag H. Deutsch 1975.
[3.5] EFIMOW, N.V.: Höhere Geometrie, Bd. 1 u. 2. — Verlag Vieweg 1970.
[3.6] FISCHER, G.: Analytische Geometrie. — Verlag Vieweg 1988.
[3.7] Kleine Enzyklopädie Mathematik. — Verlag Enzyklopädie, Leipzig 1967. — Gekürzte Ausgabe: Mathematik Ratgeber. — Verlag H. Deutsch 1988.
[3.8] KLINGENBERG, W.: Lineare Algebra und Geometrie. — Springer–Verlag 1993.
[3.9] KLOTZEK, B.: Einführung in die Differentialgeometrie, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1995.
[3.10] KOECHER, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie. — Springer–Verlag 1992.
[3.11] MANGOLDT, H. v.; KNOPP, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. II. — S. Hirzel Verlag 1978.
[3.12] MARSOLEK, L.: BASIC im Bau– und Vermessungswesen. — B. G. Teubner 1986.
[3.13] MATTHEWS, V.: Vermessungskunde Teil 1 u. 2. — B. G. Teubner 1993.
[3.14] NICKEL, H. (HRSG.): Algebra und Geometrie für Ingenieure. — Verlag H. Deutsch 1990.
[3.15] PAULI, W. (HRSG.): Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Bd. 2 Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie der Ebene. — Verlag H. Deutsch 1989.
[3.16] RASCHEWSKI, P.K.: Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. — Verlag H. Deutsch 1995.
[3.17] SCHÖNE, W.: Differentialgeometrie. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 6), 1975; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 6) 1978.
[3.18] SCHRÖDER, E.: Darstellende Geometrie. — Verlag H. Deutsch 1980.
[3.19] SIGL, R.: Ebene und sphärische Trigonometrie. — Verlag H. Wichmann 1977.
[3.20] STEINERT, K.-G.: Sphärische Trigonometrie. — B. G. Teubner 1977.

ANDRÁSFAI BÉLA: Vonalak és felületek topológiája. — Tankönyvkiadó 1985.
BAKOS TIBOR: Ki tud többet a bűvös négyzetekről? — Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1998.
BOLTYANSZKIJ, V. G.; JEFREMOVICS, V. A.: Szemléletes topológia. — Tankönyvkiadó 1966.
BOLYAI JÁNOS: Appendix. A tér tudománya. — Akadémiai Kiadó 1977.
COXETER, H. S. M.: A geometriák alapjai. — Műszaki Könyvkiadó 1973.
COXETER, H. S. M.: Projektív geometria. — Gondolat Kiadó 1974.
CSÁSZÁR ÁKOS: Bevezetés az általános topológiába. — Akadémiai Kiadó 1980.
CZAPÁRI ENDRE; HORVAI KATALIN; REIMAN ISTVÁN; SOÓS PAULA: Geometriai feladatok gyűjteménye. I–II. — Tankönyvkiadó 1989.
DÁVID LAJOS: Bolyai geometria az Appendix alapján. — Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola 1992.
EDŐCS OTTÓ: Ábrázoló geometria. I–II. — Műszaki Könyvkiadó 1965.
FARAGÓ LÁSZLÓ; FORGÓ PÉTERNÉ: Geometriai szerkesztések. — Tankönyvkiadó 1952.
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. — Springer 1972.
FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Reguläre Figuren. — Akadémiai Kiadó 1965.
FITOS LÁSZLÓ: Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában. — Tankönyvkiadó 1984.
HAJÓS GYÖRGY: Bevezetés a geometriába. — Tankönyvkiadó 1999.
HALMOS, PAUL R.: Véges dimenziós terek. — Műszaki Könyvkiadó 1984.
HÓDI ENDRE: Fejezetek térmértanból. — Tankönyvkiadó 1954.
HORVÁTH FERENC: Tér és rajz. — Műszaki Könyvkiadó 1963.
JÁNOSSY LAJOS; GNÄDIG PÉTER; TASNÁDI PÉTER: Vektor- és tenzoralgebra. — Tankönyvkiadó 1982.
KÁLMÁN ATTILA: Nemeuklideszi geometriák elemei. — Tankönyvkiadó 1989.
KÁRTESZI FERENC: Ábrázoló geometria. — Tankönyvkiadó 1962.

KÁRTESZI FERENC: A kocka. — ONI 1949.
KÁRTESZI FERENC: Az olló geometriája. — ONI 1949.
KÁRTESZI FERENC: Bevezetés a véges geometriába. — Akadémiai Kiadó 1972.
KÁRTESZI FERENC: Szabályos testek. — Tankönyvkiadó 1951.
KÁRTESZI FERENC: Szemléletes geometria. — Gondolat Kiadó 1966.
KATONA ZOLTÁN: Ábrázoló geometria. — Tankönyvkiadó 1973.
KERÉKJÁRTÓ BÉLA: Les Fondaments de la Géometrie. — Akadémiai Kiadó 1969.
KOLLÁR IMRE: Műszaki geometria. — Akadémiai Kiadó 1990.
KÓLYA DÁNIEL: Ábrázoló geometriai példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1993.
KÓLYA DÁNIEL: Gyakorlati ábrázoló geometria. — Műszaki Könyvkiadó 1993.
LÁNCZOS KORNÉL: A geometriai térfogalom fejlődése. — Gondolat Kiadó 1976.
LŐRINCZ PÁL; PETRICH GÉZA: Ábrázoló geometria. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1996.
LUKÁCS OTTÓ: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben. — Tankönyvkiadó 1974.
PÁL IMRE: Raumgeometrie in der technischen Praxis. — Akadémiai Kiadó 1974.
PÁL IMRE: Térláttatós ábrázoló mértan. — Műszaki Könyvkiadó 1964.
PELLE BÉLA: Geometria. — Tankönyvkiadó 1979.
PETHES ENDRE: 222 ábrázoló geometriai feladat. Műszaki Könyvkiadó 1987.
PETRICH GÉZA: Ábrázoló geometria. — Tankönyvkiadó 1973.
POGÁTS FERENC: Trigonometria. — Műszaki Könyvkiadó 1973.
POGÁTS FERENC: Vektorgeometria. — Műszaki Könyvkiadó 1974.
POGÁTS FERENC: Vektorok, koordinátageometria, trigonometria. — TypoTEX 1998.
RADÓ FERENC; ORBÁN BÉLA: A geometria mai szemmel. — Dacia 1981.
RÉDEI LÁSZLÓ: Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein. — Akadémiai Kiadó 1965. (Englisch 1968).
REIMAN ISTVÁN: A geometria és határterületei. — Gondolat Kiadó 1986.
REIMAN ISTVÁN: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon. — Tankönyvkiadó 1972.
REIMAN ISTVÁN: Vektorok a geometriában. — Tankönyvkiadó 1992.
REIMAN ISTVÁN: Fejezetek a geometriából. — TypoTEX 1998.
SCHARNITZKY VIKTOR: Vektorgeometria és lineáris algebra. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
SCHOPP JÁNOS: Kúpszeletek. — Tankönyvkiadó 1972.
STROMMER GYULA: Ábrázoló geometria. — Tankönyvkiadó 1974.
STROMMER GYULA: Geometria. — Tankönyvkiadó 1988.
SZÁSZ PÁL: Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába. — Akadémiai Kiadó 1973.
SZEDERKÉNYI ANTAL: Topológia. — Tankönyvkiadó 1975.
SZIKSZAI JÓZSEF: Háromszöggel kapcsolatos feladatok koordináta-geometriai megoldása. — Tankönyvkiadó 1977.
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA; GEHÉR LÁSZLÓ; NAGY PÉTER: Differenciál-geometria. — Műszaki Könyvkiadó 1979.
SZŐKEFALVI-NAGY GYULA: A geometriai szerkesztések elmélete. — Akadémiai Kiadó 1968.
VARGA TAMÁS: Kis geometria. — Művelt Nép Kiadó 1956.
VIGASSY LAJOS: Geometriai transzformációk. — Tankönyvkiadó 1972.
VIGASSY LAJOS: Projektív geometria. — Tankönyvkiadó 1970.
VIGASSY LAJOS: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. — Tankönyvkiadó 1957.
WESZELY TIBOR: A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria modellje. — Dacia Könyvkiadó 1975.
ZIGÁNY FERENC: Ábrázoló geometria. — Tankönyvkiadó 1952.

4. Lineáris algebra

[4.1] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[4.2] BERENDT, G.; WEIMAR, E.: Mathematik für Physiker, Bd. 1. — VCH, Weinheim 1990.
[4.3] BOSECK, H.: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume. — Verlag H. Deutsch 1984.
[4.4] BUNSE, W.; BUNSE–GERSTNER, A.: Numerische lineare Algebra. — B. G. Teubner 1985.

[4.5] FADDEJEW, D.K.; FADDEJEWA, W.N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.
[4.6] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1 — Verlag H. Deutsch 1993.
[4.7] JÄNICH, K.: Lineare Algebra. — Springer–Verlag 1993.
[4.8] KIEŁBASIŃSKI, A.; SCHWETLICK, H.: Numerische lineare Algebra. Eine computerorientierte Einführung. — Verlag H. Deutsch 1988.
[4.9] KLIN, M.CH.; PÖSCHEL, R.; ROSENBAUM, K.: Angewandte Algebra. — Verlag H. Deutsch 1988.
[4.10] KLINGENBERG, W.: Lineare Algebra und Geometrie. — Springer–Verlag 1993.
[4.11] KOECHER, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie. — Springer–Verlag 1992.
[4.12] LIPPMANN, H.: Angewandte Tensorrechnung. Für Ingenieure, Physiker und Mathematiker. — Springer–Verlag 1993.
[4.13] MANTEUFFEL, K.; SEIFFART, E.; VETTERS, K.: Lineare Algebra. — BSB B. G. Teubner, Leipzig (MINÖL, Bd. 13), 1975; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 13), 1978.
[4.14] NICKEL, H. (HRSG.): Algebra und Geometrie für Ingenieure. — Verlag H. Deutsch 1990.
[4.15] OSE, G. (HRSG.): Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Bd. 4. — Verlag H. Deutsch 1995.
[4.16] PFENNINGER, H.R.: Lineare Algebra. — Verlag Verlag H. Deutsch 1991.
[4.17] RASCHEWSKI, P.K.: Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. — Verlag H. Deutsch 1995.
[4.18] REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.
[4.19] SCHULTZ–PISZACHICH, W.: Tensoralgebra und -analysis. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 11), 1977; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 11), 1979.
[4.20] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III,1. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1989–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.
[4.21] ZURMÜHL, R.; FALK, S.: Matrizen und ihre Anwendung – 1. Grundlagen. — Springer–Verlag 1992.

ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfelmélet, folyamok, mátrixok. — Akadémiai Kiadó 1983.
FARKAS IRÉN; FARKAS MIKLÓS: Introduction to linear algebra. — Akadémiai Kiadó 1975.
FELDMANN LÁSZLÓ: Vektoralgebra. — Tankönyvkiadó 1952.
FREUD RÓBERT: Lineáris algebra. — Eötvös Kiadó 1998.
FRIED ERVIN: Klasszikus és lineáris algebra. — Tankönyvkiadó 1990.
GÁSPÁR GYULA: Mátrixszámítás műszaki alkalmazásokkal. — Műszaki Könyvkiadó 1963.
GÁSPÁR LÁSZLÓ: Lineáris algebrai példatár. — Tankönyvkiadó 1970.
GÁSPÁR LÁSZLÓ: Mátrixaritmetikai gyakorlatok. — Tankönyvkiadó 1992.
GELFAND, I. M.: Előadások a lineáris algebráról. — Akadémiai Kiadó 1955.
HALMAI ERZSÉBET: Lineáris algebra. — Tankönyvkiadó 1991.
HALMOS, PAUL R.: Véges dimenziós vektorterek. — Műszaki Könyvkiadó 1984.
KREKÓ BÉLA: Lineáris algebra. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1976.
KREKÓ BÉLA: Mátrixszámítás. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1966.
LOVASS-NAGY VIKTOR: Mátrixszámítás. — Tankönyvkiadó 1956.
OBÁDOVICS J. GYULA: Lineáris algebra. I–II. — LSI ATSz 1989.
RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai. — Tankönyvkiadó 1991.
SCHARNITZKY VIKTOR: Mátrixszámítás. — Műszaki Könyvkiadó 1996.
SCHARNITZKY VIKTOR: Vektorgeometria és lineáris algebra. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
SZARKA ZOLTÁN: Vektoranalízis és tenzoralgebra. — LSI ATSz 1989.
SZENTMÁRTONI TIBOR: Vektor- és tenzorszámítás. — Egyetemi Nyomda 1948.
SZTRÓKAINÉ FÖLDVÁRI VERA: Mátrixok az általános iskolai tanulók számára. — Tankönyvkiadó 1988.

TASNÁDY ISTVÁN; KÖRMENDI ISTVÁN: Vektoralgebra és lineáris egyenletrendszerek. — Tankönyvkiadó 1954.

5. Algebra és diszkrét matematika

Algebra és diszkrét matematika, általános

[5.1] AIGNER, M.: Diskrete Mathematik. — Verlag Vieweg 1993.
[5.2] BELKNER, H.: Determinanten und Matrizen. — Verlag H. Deutsch 1988.
[5.3] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P.: A Course in Universal Algebra. — Springer–Verlag 1981.
[5.4] DÖRFLER, W.; PESCHEK, W.: Einführung in die Mathematik für Informatiker. — C. Hanser Verlag 1988.
[5.5] EHRIG, H.; MAHR, B.: Fundamentals of Algebraic Specification 1. — Springer–Verlag 1985.
[5.6] METZ, J.; MERBETH, G.: Schaltalgebra. — Verlag Verlag H. Deutsch 1970.
[5.7] WECHLER, W.: Universal Algebra for Computer Scientists. — Springer–Verlag 1992.
[5.8] WINTER, R.: Grundlagen der formalen Logik. — Verlag Harri Deutsch 1996.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA; CZÉDLI GÁBOR; SZENDREI ÁGNES: Absztrakt algebrai feladatok. — Tankönyvkiadó 1988.
BLICKLE TIBOR; SEITZ KÁROLY: A modern algebrai módszerek felhasználása a műszaki kémiában. — Műszaki Könyvkiadó 1975.
CSÁKÁNY BÉLA: Algebra. — Tankönyvkiadó 1973.
DEMETROVICS JÁNOS; JORDAN DENEV; RADISLAV PAULOV: A számítástudomány alapjai. — Tankönyvkiadó 1985.
FRIED ERVIN: Absztrakt algebra elemi úton. — Műszaki Könyvkiadó 1972.
FRIED ERVIN: Általános algebra. — Tankönyvkiadó 1981.
FRIED ERVIN: Klasszikus és lineáris algebra. — Tankönyvkiadó 1990.
HARDY ZSIGMOND; SÓLYOM MIHÁLY: Út a modern algebrához. — Tankönyvkiadó 1975.
HUSZÁR GÉZA: Algebra. — Tankönyvkiadó 1980.
KARDOS GYULA: Algebra I. — Műszaki Könyvkiadó 1965.
KERÉKJÁRTÓ BÉLA: Les Fondaments de la Géometrie. — Akadémiai Kiadó 1969.
KERTÉSZ ANDOR: Einführung in die transfinite Algebra. — Akadémiai Kiadó 1975.
KERTÉSZ ANDOR: Vorlesungen über Artinsche Ringe. — Akadémiai Kiadó 1968.
KUROS, A. G.: Felsőbb algebra. — Tankönyvkiadó 1967.
RÉDEI LÁSZLÓ: Algebra. I. — Akadémiai Kiadó 1954.
SAFAREVICS, I. R.: Algebra. — TypoTEX 2000.
SURÁNYI LÁSZLÓ: Algebra, testek, gyűrűk, polinomok. — TypoTEX 1996.
SZÁSZ FERENC: Radicals of Rings. — Akadémiai Kiadó 1981.
SZELE TIBOR: Bevezetés az algebrába. — Tankönyvkiadó 1977.
SZENDREI ÁGNES: Diszkrét matematika, logika, algebra, kombinatorika. — Polygon 1996.
SZENDREI JÁNOS: Algebra és számelmélet. — Tankönyvkiadó 1993.

Algebra és diszkrét matematika, csoportelmélet

[5.9] ALEXANDROFF, P.S.: Einführung in die Gruppentheorie. — Verlag H. Deutsch 1992.
[5.10] BELGER, M., EHRENBERG, L.: Theorie und Anwendungen der Symmetriegruppen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL Bd. 23), 1981; Verlag H. Deutsch (MINÖA Bd. 23), 1981.
[5.11] FÄSSLER, A.; STIEFEL, E.: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendungen. — Birkhäuser–Verlag 1992.
[5.12] HEIN, W.: Struktur und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. — Springer–Verlag 1990.
[5.13] HEINE, V.: Group Theory in Quantum Mechanics. — Dover, Mineola 1993.

[5.14] LIDL, R., PILZ, G.: Angewandte abstrakte Algebra I. — BI–Wissenschaftverlag 1982.
[5.15] LUDWIG, W., FALTER, C.: Symmetries in Physics. Group Theory Applied to Physical Problems. — Springer–Verlag 1996.
[5.16] MARGENAU, M., MURPHY, G.M.: Die Mathematik für Physik und Chemie. — B. G. Teubner, Leipzig 1964; Verlag H. Deutsch 1965.
[5.17] MATHIAK, K., STINGL, P.: Gruppentheorie für Chemiker, Physiko–Chemiker, Mineralogen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.
[5.18] PONTRJAGIN, L.: Topologische Gruppen, Band 1, 2. — B. G. Teubner 1957, 19858.
[5.19] STIEFEL, E., FÄSSLER, A.: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung. — B. G. Teubner 1979.
[5.20] VARADARAJAN, V.: Lie Groups, Lie Algebras and their Representation. — Springer–Verlag 1990.
[5.21] VAN DER WAERDEN, B.: Gruppentheoretische Methoden in der Quantenmechanik. — Springer–Verlag 1932.
[5.22] WIGNER, E.: Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. — Academic Press 1959.
[5.23] WEYL, H.: The Theory of Groups and Quantum Mechanics. — Dover, Mineola 1993.
[5.24] ZACHMANN, H.G.: Mathematik für Chemiker. — VCH, Weinheim 1990.

FUCHS, L.: Abelian groups. — Akadémiai Kiadó 1958.
FUCHS, L.: Partially Ordered Algebraic Systems. — Akadémiai Kiadó 1965.
GROSSMAN, J.; MAGNUS, W.: Csoportok és gráfjaik. — Műszaki Könyvkiadó 1972.
GYAPJAS FERENC: Csoportelmélet. — Tankönyvkiadó 1974.
HALL, G. G.: Alkalmazott csoportelmélet. — Műszaki Könyvkiadó 1975.
KUROS, A. G.: Csoportelmélet. — Akadémiai Kiadó 1955.
RÉDEI LÁSZLÓ: Endliche p-Gruppen. — Akadémiai Kiadó 1989.
RÉDEI LÁSZLÓ: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen. — Akadémiai Kiadó 1964.
RÉDEI LÁSZLÓ: The Theory of Finitely Generated Commutative Semigroups. — Akadémiai Kiadó 1965.
STEINFELD OTTÓ: Quasi-ideals in Rings and Semigroups. — Akadémiai Kiadó 1978.
WIGNER JENŐ: Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában. — Akadémiai Kiadó 1979.

Algebra és diszkrét matematika, számelmélet

[5.25] BUNDSCHUH, P.: Einführung in die Zahlentheorie. — Springer–Verlag 1992.
[5.26] KRÄTZEL, E.: Zahlentheorie. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.
[5.27] PADBERG, F.: Elementare Zahlentheorie. — BI– Wissenschaftsverlag 1991.
[5.28] RIVEST, R.L., SHAMIR, A., ADLEMAN, L.: A Method for Obtaining Digital Signatures and Public Key Cryptosystems. — Comm. ACM 21, (1978), 12 – 126.
[5.29] SCHEID, H.: Zahlentheorie. — BI– Wissenschaftsverlag 1991, 2. Auflage Spektrum Akademischer Verlag 1995.
[5.30] SCHMUTZER, E.: Grundlagen der theoretischen Physik, Bd. 1, 4. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1991.

ERDŐS PÁL; SURÁNYI JÁNOS: Válogatott fejezetek a számelméletből. — Polygon 1996.
FARAGÓ LÁSZLÓ: A számelmélet elemei. — Tankönyvkiadó 1954.
FRIED ERVIN: Oszthatóság és számrendszerek. — Tankönyvkiadó 1982.
HUA LO-KENG: A törzsszámok additív elmélete. — Akadémiai Kiadó 1959.
MEGYESI LÁSZLÓ: Bevezetés a számelméletbe. — Polygon 1997.
ORE, OYSTEIN: Bevezetés a számok világába. — Gondolat Kiadó 1977.

PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Barátkozzunk a számokkal. — TypoTEX 1993.
PÉTER RÓZSA: A számok világa. — Egyetemi Nyomda 1948.
RÉVÉSZ PÁL: Die Gesetze der großen Zahlen. — Akadémiai Kiadó 1968.
SÁRKÖZY ANDRÁS: Számelmélet és alkalmazásai. — Műszaki Könyvkiadó 1978.
SÁRKÖZY ANDRÁS: Számelmélet. Példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1976.
SZALAY MIHÁLY: Számelmélet. — TypoTEX 1998.
SZENDREI JÁNOS: Algebra és számelmélet. — Tankönyvkiadó 1993.
SZTRÓKAI VERA; TÖRÖK JUDIT: 1991: Érdekességek és feladatok egy évszámról. — TypoTEX 1990.
VINOGRADOV, I. M.: A számelmélet alapjai. — Tankönyvkiadó 1951.

Algebra és diszkrét matematika, kriptológia

[5.31] BAUER, F. L.: Kryptologie — Methoden und Maximen. — Springer–Verlag 1993.
[5.32] HORSTER, P.: Kryptologie. — BI–Wissenschaftsverlag 1985.
[5.33] SCHNEIDER, B.: Angewandte Kryptologie — Protokolle, Algorithmen und Sourcecode in C. — Addison–Wesley–Longman 1996.
[5.34] WOBST, R.: Methoden, Risiken und Nutzen der Datenverschlüsselung. — Addison–Wesley–Longman 1997.

MÁRKUS LÁSZLÓ: Algoritmus mátrix alapú logaritmus kiszámítására kriptográfiai alkalmazásokkal. — SzTAKI 1985.
Dénes Tamás: TITOK TAN avagy KÓDTÖRŐ ABC. — Infonia könyvek, Bagolyvár Könyvkiadó 2002.
Györfi László, Győri Sándor, Vajda István: Információ- és kódelmélet — TypoTEX 2002.
Révay Zoltán: Titkosírások — Zrínyi Katonai Kiadó 1978, Budapest; Lazi Könyvkiadó 2001, Szeged.
Simon Singh: Kódkönyv. A rejtjelezés és rejtjelfejtés története — Park Könykiadó 2002.
3 honlap Bletchley Parkról, ahol a II. világháború alatt a brit kormány rejtjelező és rejtjelfejtő központja működött:
`http://www.codesandciphers.org.uk`
`http://retrobeep.com`
`http://bletchleypark.org.uk`
Az Alan Turing honlap:
`http://www.turing.org.uk`
Az internethez fűződő jogokat védő egyesület, az Electronic Frontier Foundation honlapja:
`http://www.eff.org`
A rejtjelezés és rejtjelfejtés közös új ígérete, a kvantum-számítástudomány egyik honlapja:
`http://www.qubit.org`
Az amerikai nemzeti rejtjelmúzeum honlapja:
`http://www.nsa.gov/museum`
Az amerikai rejtjelező és rejtjelfejtő szövetség honlapja:
`http://www.cryptogram.org`
A rejtjelezés gyakran feltett kérdéseinek honlapja:
`http://www.faqs.org/faqs/crpytography-faq`
Magánhonlap kezdő rejtjelezőknek:
`http://www.ftech.net/~monark/crpyto/index.html`

Algebra és diszkrét matematika, gráfelmélet

[5.35] BIESS, G.: Graphentheorie. — Verlag H. Deutsch 1979.
[5.36] EDMONDS, J.: Paths, Trees and Flowers. — Canad. J. Math. 17, (1965), 449-467.
[5.37] EDMONDS, J., JOHNSON, E.L.: Matching, Euler Tours and the Chinese Postman. — Math. Programming 5, (1973), 88-129.
[5.38] NÄGLER, G., STOPP, F.: Graphen und Anwendungen — B. G. Teubner 1995.
[5.39] SACHS, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen. — B. G. Teubner, Leipzig 1970.

[5.40] VOLKMANN, L.: Graphen und Diagraphen. — Springer–Verlag 1991.

ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfelmélet. — Polygon 1994.
ANDRÁSFAI BÉLA: Gráfelmélet, folyamok, mátrix. — Akadémiai Kiadó 1983.
ANDRÁSFAI BÉLA: Ismerkedés a gráfelmélettel. — Tankönyvkiadó 1985.
HAJNAL PÉTER: Gráfelmélet. — Polygon 1997.
KATONA GYULA Y.; RECSKI ANDRÁS; SZABÓ CSABA: A számítástudomány alapjai. — TypoTEX 2002.
LIPI GÁBOR; NEMES ÁRON; NOVÁK ISTVÁN: A kínai hadseregtől az utazó ügynökig (gráfok a gépközelben). — Novotrade 1990.
LOVÁSZ LÁSZLÓ: Kombinatorikai problémák és feladatok. — TypoTEX 1999.
MAYEDA, WATARU: Alkalmazott gráfelmélet. — Műszaki Könyvkiadó 1976.
ORE, OYSTEIN: A gráfok és alkalmazásaik. — Gondolat Kiadó 1972.
RÓNYAI LAJOS; IVANYOS GÁBOR; SZABÓ RÉKA: Algoritmusok. — TypoTEX 1998.
SZÁSZ GÁBOR: Hálóelmélet. — Tankönyvkiadó 1978.
TILLAINÉ BUDAVÁRI ANIKÓ: Topológiai és gráfelméleti érdekességek. — Tankönyvkiadó 1987.
VÁGÓ ISTVÁN: A gráfelmélet alkalmazása a villamos hálózatok számításában. — Műszaki Könyvkiadó 1976.

Algebra és diszkrét matematika, fuzzy logika

[5.41] BANDEMER, H., GOTTWALD, S.: Einführung in Fuzzy–Methoden – Theorie und Anwendungen unscharfer Mengen. — Akademie–Verlag, 4. Auflage 1993.
[5.42] DRIANKOV, D., HELLENDORN, H., REINFRANK, M.: An Introduction to Fuzzy Control.— Springer–Verlag 1993.
[5.43] DUBOIS, D., PRADE, H.: Fuzzy–Sets and System–Theory and Applications. — Academic Press, Inc., London 1980.
[5.44] GOTTWALD, S.: Mehrwertige Logik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen. — Akademie–Verlag 1989.
[5.45] GRAUEL, A.: Fuzzy-Logik. Einführung in die Grundlagen mit Anwendungen. — B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1995.
[5.46] KAHLERT, J., FRANK, H: Fuzzy–Logik und Fuzzy–Control. Eine anwendungsorientierte Einführung mit Begleitssoftware. — Verlag Vieweg 1993.
[5.47] KRUSE, R., GEBHARDT, J., KLAWONN, F.: Fuzzy–Systeme. — B.G.Teubner 1993.
[5.48] ZIMMERMANN, H-J.: Fuzzy Sets. Decision Making and Expert Systems. — Verlag Kluwer–Nijhoff 1987.
[5.449] ZIMMERMANN, H-J., ALTROCK, C.: Fuzzy–Logik, Bd. 1, Technologie. — Oldenbourg–Verlag 1993.

KÓCZY T. LÁSZLÓ; TIKK DOMONKOS: Fuzzy rendszerek. — TypoTEX 2000.
VÖRÖS GÁBOR: Bevezetés a neurális és minősítő számítástechnikába. Alapismeretek a neurálhálókról és a fuzzy logikáról. — LSI Oktatóközpont 1997.

6. Differenciálszámítás

[6.1] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[6.2] COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1971–72.
[6.3] FETZER, A.; FRÄNKEL, H.: Mathematik Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1, 2. — VDI–Verlag 1995.
[6.4] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 bis 3. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–92, seit 1994 Verlag H. Deutsch.

[6.5] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1 u. 3. — Verlag H. Deutsch 1993–1994.
[6.6] HARBARTH, K.; RIEDRICH, T.: Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig (MINÖL, Bd. 4), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 4) 1978.
[6.7] JOOS, G.E.; RICHTER, E.: Höhere Mathematik. Ein kompaktes Lehrbuch für Studium und Beruf. — Verlag H. Deutsch 1994.
[6.8] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — Springer–Verlag 1964.
[6.9] KÖRBER, K.-H.; PFORR, E.A.: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 5), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 5), 1980.
[6.10] MANGOLDT, H. v.; KNOPP, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2 u. 3. — S. Hirzel Verlag 1978–81.
[6.11] PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1 bis 3. — Verlag Vieweg 1994–1996.
[6.12] PFORR, E.A.; SCHIROTZEK, W.: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 2), 1973; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 2) 1978.
[6.13] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. II u. III. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.
[6.14] STÖCKER, H. (HRSG.): Analysis für Ingenieurstudenten. — Verlag H. Deutsch 1995.
[6.15] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. — Verlag Harri Deutsch 1980.
[6.16] ZACHMANN, H.G.: Mathematik für Chemiker. — VCH, Weinheim 1990.

ALEXITS GYÖRGY; FENYŐ ISTVÁN: Matematika vegyészek számára. Tankönyvkiadó 1973.
BAJCSAY PÁL: Differenciálszámítás. — Tankönyvkiadó 1962.
BAJCSAY PÁL: Egyváltozós függvények differenciálszámítása. — Tankönyvkiadó 1952.
BAJCSAY PÁL: Többváltozós függvények és differenciálásuk. — Tankönyvkiadó 1953.
BALÁZS MÁRTON; KOLUMBÁN JÓZSEF: Matematikai analízis. — Dacia 1978.
BANACH, S.: Differenciál- és integrálszámítás. — Tankönyvkiadó 1965.
BÁRCZY BARNABÁS: Differenciálszámítás. — Műszaki Könyvkiadó 1998.
BEKE MANÓ: Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba. — Gondolat Kiadó 1967.
BIRÓ SÁNDORNÉ; SZABADOS TAMÁS: Vektoranalízis. — Műszaki Könyvkiadó 1983.
CSÁSZÁR ÁKOS: Valós analízis I–II. — Tankönyvkiadó 1988.
CSÁSZÁR ÁKOSNÉ: Differenciál- és integrálszámítás. — Tankönyvkiadó 1953.
CSERNYÁK LÁSZLÓ: Analízis, matematika üzemgazdászoknak. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
CSIRMAZ LÁSZLÓ: Nemsztenderd analízis. — TypoTEX 1999.
DENKINGER GÉZA: Analízis. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
DENKINGER GÉZA; GYURKÓ LAJOS: Analízis. Gyakorlatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Differenciálszámítás. Példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1997.
GÁSPÁR GYULA: Műszaki matematika. II., III. — Tankönyvkiadó 1977.
GREBENCSA, M. K.; NOVOSZJOLOV, SZ. I.: Matematikai analízis. I–II. — Tankönyvkiadó 1951/52.
JÁNOSSY LAJOS; JÁNOSSY ISTVÁN: Szemléletes differenciálszámítás. — Tankönyvkiadó 1977.
JÁNOSSY LAJOS; TASNÁDI PÉTER: Vektorok és tenzorok differenciálása. — Tankönyvkiadó 1989.
KALMÁR LÁSZLÓ: Bevezetés a matematikai analízisbe. I–II. — Tankönyvkiadó 1983.
KORÁNYI ERZSÉBET: Használjuk a differenciálszámítást! — Tankönyvkiadó 1974.
KÓSA ANDRÁS: Ismerkedés a matematikai analízissel. — Műszaki Könyvkiadó 1981.
KÓSA ANDRÁS: Matematikai analízis a középiskolában. — Tankönyvkiadó 1990.
KÓSA ANDRÁS; MEZEI ISTVÁN; S. GYARMATI ERZSÉBET: Analízis példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1986.
KOVÁCS JÓZSEF; TAKÁCS GÁBOR; TAKÁCS MIKLÓS: Analízis. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
PACH ZS. PÁLNÉ; FREY TAMÁS: Vektor- és tenzoranalízis. — Műszaki Könyvkiadó 1970.

PÓLYA GYÖRGY; SZEGŐ GÁBOR: Feladatok és tételek az analízisből. I–II. — Tankönyvkiadó 1980/81.
RUDIN, WALTER: A matematikai analízis alapjai. — Műszaki Könyvkiadó 1978.
SZÁSZ PÁL: A differenciál- és integrálszámítás elemei. I–II. — Közoktatásügyi Kiadó 1951.
SZÉP JENŐ: Analízis. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1972.
SZÉP JENŐ: Matematika I. — Tankönyvkiadó 1988.
SZERÉNYI TIBOR: Analízis. — Tankönyvkiadó 1990.

7. Végtelen sorok

[7.1] APELBLAT, A.: Tables of Integrals and Series. — Verlag H. Deutsch 1996.
[7.2] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[7.3] COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1971–72.
[7.4] FETZER, A.; FRÄNKEL, H.: Mathematik Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1, 2. — VDI–Verlag 1995.
[7.5] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 bis 3. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–92, seit 1994 Verlag H. Deutsch.
[7.6] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1 bis 3. — Verlag H. Deutsch 1993–1995.
[7.7] HARBARTH, K.; RIEDRICH, T.: Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 4), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 4), 1978.
[7.8] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — Springer–Verlag 1964.
[7.9] KÖRBER, K.-H.; PFORR, E.A.: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig (MINÖL, Bd. 5), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 5), 1980.
[7.10] MANGOLDT, H. v.; KNOPP, K., HRG. F. LÖSCH: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1 bis 4. — S. Hirzel Verlag 1989.
[7.11] PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1 bis 3. — Verlag Vieweg 1994–1996.
[7.12] PLASCHKO, P.; BROD, K.: Höhere mathematische Methoden für Ingenieure und Physiker. — Springer–Verlag 1989.
[7.13] PFORR, E.A.; SCHIROTZEK, W.: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 2), 1973; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 2), 1978.
[7.14] SCHELL, H.-J.: Unendliche Reihen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 3), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 3), 1978.
[7.15] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. II u. III. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.
[7.16] STÖCKER, H.(HRSG.): Analysis für Ingenieurstudenten. — Verlag H. Deutsch 1995.
[7.17] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. — Verlag H. Deutsch 1980.

ALEXITS GYÖRGY: Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. — Akadémiai Kiadó 1961.
FREY TAMÁS: Taylor-sorok. — Tankönyvkiadó 1955.
FREY TAMÁS: Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok. — Tankönyvkiadó 1956.
KÓSA ANDRÁS: Ismerkedés a matematikai analízissel. — Műszaki Könyvkiadó 1981.
LEINDLER LÁSZLÓ: Ortogonális sorok szummálhatósága. — Akadémiai Kiadó 1985.
LEINDLER LÁSZLÓ: Strong approximation by Fourier series. — Akadémiai Kiadó 1985.
MIKOLÁS MIKLÓS: Valós függvénytan és ortogonális sorok. — Tankönyvkiadó 1980.
SCHIPP F.; WADE, W. R.; SIMON, P.; PÁL, L.: Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Akadémiai Kiadó 1990.

SOLYMÁR LÁSZLÓ: Lectures on Fourier Series. — Oxford Univ. Press 1988.
SZARKA ZOLTÁN: Végtelen sorozatok és sorok I. — LSI ATSz 1988.
SZEGŐ GÁBOR: Orthogonal polynomials. — AMS 1975.

8. Integrálszámítás

[8.1] APELBLAT, A.: Tables of Integrals and Series. — Verlag H. Deutsch 1996.

[8.2] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.

[8.3] BRYTSCHKOW, J.A.; MARITSCHEW, O.I.; PRUDNIKOV, A.P.: Tabellen unbestimmter Integrale. — Verlag H. Deutsch 1992.

[8.4] COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1971–72.

[8.5] FETZER, A.; FRÄNKEL, H.: Mathematik Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1, 2. — VDI–Verlag 1995.

[8.6] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 bis 3. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–92, seit 1994 Verlag H. Deutsch.

[8.7] GELLRICH, R.; GELLRICH, C.: Mathematik, Bd. 1 u. 3. — Verlag H. Deutsch 1993–94.

[8.8] GÜNTHER, P. (HRSG.): Grundkurs Analysis, Bd. 3. — B. G. Teubner, Leipzig 1973.

[8.9] HARBARTH, K.; RIEDRICH, T.: Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 4), 1978; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 4) 1978.

[8.10] JOOS, G.E.; RICHTER, E.: Höhere Mathematik. Ein kompaktes Lehrbuch für Studium und Beruf. — Verlag H. Deutsch 1994.

[8.11] KAMKE, E.: Das Lebesgue–Stieltjes–Integral. — B. G. Teubner; Leipzig 1960.

[8.12] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — Springer–Verlag 1964.

[8.13] KÖRBER, K.-H.; PFORR, E.A.: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 5), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 5), 1979.

[8.14] MANGOLDT, H. v.; KNOPP, K., HRG. F. LÖSCH: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1 bis 4. — S. Hirzel Verlag 1989.

[8.15] MANGOLDT, H. v.; KNOPP; LÖSCH: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. IV. — S. Hirzel Verlag 1975.

[8.16] PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1 bis 3. — Verlag Vieweg 1994–1996.

[8.17] PFORR, E.A.; SCHIROTZEK, W.: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 2), 1973; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 2), 1978.

[8.18] SCHELL, H.-J.: Unendliche Reihen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 3), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 3), 1978.

[8.19] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. II u. III. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.

[8.20] STÖCKER, H. (HRSG.): Analysis für Ingenieurstudenten. — Verlag H. Deutsch 1995.

[8.21] TRIEBEL, H.: Höhere Analysis. — Verlag Harri Deutsch 1980.

[8.22] ZACHMANN, H.G.: Mathematik für Chemiker. — VCH, Weinheim 1990.

ALEXITS GYÖRGY; FENYŐ ISTVÁN: Matematika vegyészek számára. Tankönyvkiadó 1973.
BAJCSAY PÁL: Többváltozós függvények integrálása. Tankönyvkiadó 1953.
BALÁZS MÁRTON; KOLUMBÁN JÓZSEF: Matematikai analízis. — Dacia 1978.

Banach, S.: Differenciál- és integrálszámítás. — Tankönyvkiadó 1965.
Bárczy Barnabás: Integrálszámítás. Példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1997.
Magyar Zoltán: The Lebesgue integral. — Akadémiai Kiadó 1997.
Császár Ákos: Valós analízis I–II. — Tankönyvkiadó 1988.
Csernyák László: Analízis, matematika üzemgazdászoknak. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Csirmaz László: Nemsztenderd analízis. — TypoTEX 1999.
Denkinger Géza: Analízis. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Denkinger Géza; Gyurkó Lajos: Analízis. Gyakorlatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Fazekas Ferenc: Határozatlan integrál. — Tankönyvkiadó 1954.
Fazekas Ferenc: Határozott integrál. — Tankönyvkiadó 1954.
Gáspár Gyula: Műszaki matematika. II., III. — Tankönyvkiadó 1977.
Grebencsa, M. K.; Novoszjolov, Sz. I.: Matematikai analízis. I–II. — Tankönyvkiadó 1951/52.
Jánossy Lajos; Gnädig Péter; Tasnádi Péter: Vektorok integrálása. — Tankönyvkiadó 1983.
Kalmár László: Integrállevél. — Gondolat Kiadó 1986.
Kovács József; Takács Gábor; Takács Miklós: Analízis. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Máté László: Funkcionálanalízis műszakiaknak. — Műszaki Könyvkiadó 1976.
Laczkovich Miklós: Sejtés és bizonyítás. — TypoTEX 1998.
Németh József; Varga Antal: Az integrálról. — Tankönyvkiadó 1986.
Pólya György; Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízisből. I–II. — Tankönyvkiadó 1980/81.
Rudin, Walter: A matematikai analízis alapjai. — Műszaki Könyvkiadó 1978.
Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei. I–II. — Közoktatásügyi Kiadó 1951.
Szép Jenő: Analízis. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1972.
Szerényi Tibor: Analízis. — Tankönyvkiadó 1990.
Szőkefalvi-Nagy Béla: A mérték és integrál modern fogalmának kialakulása. — Tankönyvkiadó 1962.

9. Differenciálegyenletek

Differentiálegyenletek, általános

[9.1] Arnold, V.I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979.
[9.2] Baule, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[9.3] Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. — Springer–Verlag 1991.
[9.4] Collatz, L.: Differentialgleichungen. — B. G. Teubner 1990.
[9.5] Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. — Akademische Verlagsgesellschaft 1963.
[9.6] Courant, R.; Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1968.
[9.7] Fetzer, A.; Fränkel, H.: Mathematik Lehrbuch für Fachhochschulen, Bd. 1, 2. — VDI–Verlag 1995.
[9.8] Frank, Ph.; Mises, R. v.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 1 u. 2. — Verlag Vieweg 1961.
[9.9] Golubew, V.V.: Differentialgleichungen im Komplexen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
[9.10] Greiner, W.: Quantenmechanik, Teil 1. — Verlag H. Deutsch 1992.
[9.11] Greiner, W.; Müller, B.: Quantenmechanik, Teil 2. — Verlag H. Deutsch 1990.
[9.12] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch. — B. G. Teubner 1991.
[9.13] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Bd. 1–2. — B. G. Teubner, Leipzig 1969, 1965.

[9.14] KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Teil 1 u. 2. — BSB B. G. Teubner, Leipzig 1977.

[9.15] KUNTZMANN, J: Systeme von Differentialgleichungen. — Berlin 1970.

[9.16] LANDAU, L.D.; LIFSCHITZ, E.M.: Quantenmechanik. — Akademie–Verlag 1979, Verlag H. Deutsch 1992.

[9.17] MAGNUS, K.: Schwingungen. — B. G. Teubner 1986.

[9.18] MEINHOLD, P.; WAGNER, E.: Partielle Differentialgleichungen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 8), 1975; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 8), 1979.

[9.19] MICHLIN, S.G.: Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. — Verlag H. Deutsch 1978.

[9.20] PETROWSKI, I.G.: Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. — B. G. Teubner, Leipzig 1954.

[9.21] PETROWSKI, I.G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. — B. G. Teubner, Leipzig 1955.

[9.22] POLJANIN, A.D.; SAIZEW, V.F.: Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. — Verlag H. Deutsch 1996.

[9.23] REISSIG, R.; SANSONE, G.; CONTI, R.: Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. — Edizioni Cremonese 1969.

[9.24] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 2. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.

[9.25] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen der Physik. — Verlag H. Deutsch 1992.

[9.26] STEPANOW, W.W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982.

[9.27] WENZEL, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1 und 2. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 7/1, 7/2), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 7/1, 7/2), 1981.

[9.28] WLADIMIROW, V.S.: Gleichungen der mathematischen Physik. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972.

ARNOLD, V. J.: A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei. — Műszaki Könyvkiadó 1979.

ARNOLD, V. J.: Közönséges differenciálegyenletek. — Műszaki Könyvkiadó 1987.

BAJCSAY PÁL: Közönséges differenciálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1981.

EGERVÁRI JENŐ: A mechanika differenciálegyenleteiről. — Egyetemi Nyomda 1948.

EGERVÁRI JENŐ: Differenciálegyenletek. — Egyetemi Nyomda 1945.

GÁSPÁR GYULA; RAISZ IVÁN; SALÁNKI JÓZSEF: Differenciálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1969.

HATVANI LÁSZLÓ; PINTÉR LAJOS: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. — Polygon 1997.

OBÁDOVICS J. GYULA: Közönséges differenciálegyenletek. 1–2. — LSI ATSz 1989.

PETROVSZKIJ, I. G.: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről. — Akadémiai Kiadó 1951.

PONOMARJOV, K. K.: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. — Tankönyvkiadó 1969.

PONTRJAGIN, L. SZ.: Közönséges differenciálegyenletek. — Akadémiai Kiadó 1972.

SCHARNITZKY VIKTOR: Differenciálegyenletek. Példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1997.

TERJÉKI JÓZSEF: Differenciálegyenletek. — Polygon 1997.

Parciális differenciálegyenletek

[9.29] DODD, R.K., EILBECK, J.C., GIBBON, J.D., MORRIS, H.C.: Solitons and Nonlinear Wave Equations. — Academic Press 1982.

[9.30] DRAZIN, P.G., JOHNSON, R.: Solitons. An Introduction. — Cambridge University Press 1989.

[9.31] GU CHAOHAO (Ed.): Soliton Theory and Its Applications. — Springer–Verlag 1995
[9.32] LAMB, G.L.: Elements of Soliton Theory. — Wiley 1980.
[9.33] MAKHANKOV, V.G.: Soliton Phenomenology (übers. aus dem Russ.). — Verlag Kluwer 1991.
[9.34] REMOISSENET, S.: Waves Called Solitons. Concepts and Experiments. — Springer–Verlag 1994.
[9.35] TODA, M.: Nonlinear Waves and Solitons. — Verlag Kluwer 1989.
[9.36] VVEDENSKY, D.: Partical Differential Equations with Mathematica. — Addison–Wesley 1993.

FREUD GÉZA: Parciális differenciálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1959.
GÁSPÁR GYULA; RAISZ IVÁN; SALÁNKI JÓZSEF: Differenciálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1969.
PETROVSZKIJ, J. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. — Akadémiai Kiadó 1955.
SIMON LÁSZLÓ; BADERKO, E. A.: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1983.

10. Variációszámítás

[10.1] BLANCHARD, P.; BRÜNING, E.: Variational methods in mathematical physics. — Springer–Verlag 1992
[10.2] KLINGBEIL, E.: Variationsrechnung. — BI–Verlag 1988.
[10.3] KLÖTZLER, R.: Mehrdimensionale Variationsrechnung. — Birkhäuser Verlag 1970.
[10.4] KOSMOL, P.: Optimierung und Approximation. — Verlag W. de Gruyter 1991.
[10.5] MICHLIN, S.G.: Numerische Realisierung von Variationsmethoden. — Akademie–Verlag 1969.
[10.6] ROTHE, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Teil VII. — B. G. Teubner, Leipzig 1960.
[10.7] SCHWANK, F.: Randwertprobleme. — B. G. Teubner, Leipzig 1951.

BAJCSAY PÁL: Variációszámítás. — Tankönyvkiadó 1957.
KÓSA ANDRÁS: Variációszámítás. — Tankönyvkiadó 1973.
LAVRENTYEV, M. A.; LJUSZTYERNYIK, L. A.: Variációszámítás. — Akadémiai Kiadó 1953.

11. Lineáris integrálegyenletek

[11.1] DRABEK, P., KUFNER, A.: Integralgleichungen. — B. G. Teubner 1996.
[11.2] FENYÖ, S.; STOLLE, H.W.: Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen Bd. 1 bis 4. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1984.
[11.3] FRANK, PH.; MISES, R. V.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 1 u. 2. — Verlag Vieweg 1961.
[11.4] HACKBUSCH, W.: Integralgleichungen. — B. G. Teubner 1989.
[11.5] KANTOROWITSCH, L.W.; KRYLOW, W.I.: Näherungsmethoden der höheren Analysis. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
[11.6] KUPRADSE, W.D.: Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
[11.7] MICHLIN, S.G.: Vorlesungen über lineare Integralgleichungen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.
[11.8] MICHLIN, S.G.; SMOLIZKI, CH., L.: Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen. — B.G. Teubner, Leipzig 1969.
[11.9] MUSCHELISCHWILI, N.I.: Singuläre Integralgleichungen. — Akademie–Verlag 1965.
[11.10] SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. — Akademische Verlagsgesellschaft 1950.

[11.11] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. IV/1. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1993, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.

FENYŐ ISTVÁN: Integrálegyenletek. — Tankönyvkiadó 1957.
MIHLIN, SZ G.: Integrálegyenletek. — Akadémiai Kiadó 1953.

12. Funkcionálanalízis

[12.1] ACHIESER, N.I.; GLASMANN, I.M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert–Raum. — Berlin 1975.

[12.2] ALIPRANTIS, C.D.; BURKINSHAW, O.: Positive Operators. — Academic Press Inc., Orlando 1985.

[12.3] ALIPRANTIS, C.D.; BORDER, K.C.; LUXEMBURG, W.A.J.: Positive Operators, Riesz Spaces and Economics. — Springer–Verlag 1991.

[12.4] ALT, H.W.: Lineare Funktionalanalysis — Eine anwendungdorientierte Einführung. — Springer–Verlag 1976.

[12.5] BALAKRISHNAN, A.V.: Applied Functional Analysis. — Springer–Verlag 1976.

[12.6] BAUER, H.: Maß- und Integrationstheorie. — Verlag W. de Gruyter 1990.

[12.7] BRONSTEIN, I.N.; SEMENDAJEW, K.A.: Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik. — BSB B. G. Teubner, Leipzig 1970; Verlag H. Deutsch 1990.

[12.8] COLLATZ, L.: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. — Springer–Verlag 1964.

[12.9] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J.T.: Linear Operators Teil I bis III. — Intersciences Publishers New York, London 1958, 1963, 1971.

[12.10] EDWARDS, R.E.: Functional Analysis. — Holt, Rinehart and Winston, New York 1965.

[12.11] GAJEWSKI, H.; GRÖGER, K.; ZACHARIAS, K.: Nichtlineare Operatorengleichungen und Operatordifferentialgleichungen. — Akademie–Verlag 1974.

[12.12] GÖPFERT, A.; RIEDRICH, T.: Funktionalanalysis. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 22), 1980; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 22), 1980.

[12.13] HALMOS, P.R.: A Hilbert Space Problem Book. — Van Nostrand Comp. Princeton 1967.

[12.14] HEUSER, H.: Funktionalanalysis. — B. G. Teubner 1986.

[12.15] HUTSON, V.C.L.; PYM, J.S.: Applications of Functional Analysis and Operator Theory. — Academic Press, London 1980.

[12.16] HEWITT, E.; STROMBERG, K.: Real and Abstract Analysis. — Springer–Verlag 1965

[12.17] JOSHI, M.C.; BOSE, R.K.: Some Topics in Nonlinear Functional Analysis. — Wiley Eastern Limited, New Delhi 1985.

[12.18] KANTOROWITSCH, L.V.; AKILOW, G.P.: Funktionalanalysis (in Russisch) — Nauka, Moskau 1977.

[12.19] KOLMOGOROW, A.N.; FOMIN, S.W.: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis. — Akademie–Verlag 1975.

[12.20] KRASNOSEL'SKIJ, M.A.; LIFSHITZ, J.A., SOBOLEV, A.V.: Positive Linear Systems. — Heldermann Verlag Berlin 1989.

[12.21] LJUSTERNIK, L.A.; SOBOLEW, W.I.: Elemente der Funktionalanalysis. — Akademie–Verlag, 4. Auflage 1968, Nachdruck: Verlag H. Deutsch 1975.

[12.22] MEYER-NIEBERG, P.: Banach Lattices. — Springer–Verlag 1991.

[12.23] NEUMARK, M.A.: Normierte Algebren. — Berlin 1959.

[12.24] RUDIN, W.: Functional Analysis. — McGraw–Hill, New York 1973.

[12.25] SCHAEFER, H.H.: Topological Vector Spaces. — Macmillan, New York 1966.

[12.26] SCHAEFER, H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. — Springer–Verlag 1974.

[12.27] TRENOGIN, W.A.: Funktionalanalysis (in Russisch). — Nauka, Moskau 1980.
[12.28] YOSIDA, K.: Functional Analysis. — Springer–Verlag 1965.

ACZÉL, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. — Birkhäuser 1961.
CSERNYÁK LÁSZLÓ: Operációkutatás. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1998.
FAZEKAS FERENC; FREY TAMÁS: Operátorszámítás, speciális függvények. — Tankönyvkiadó 1957.
JÁRAI ANTAL: Regularity properties of functional equations. — JPTE 1996.
KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, SZ. V.: A függvényelmélet és funkcionálanalízis elemei. — Műszaki Könyvkiadó 1981.
LUKÁCS OTTÓ: Operációkutatás. — Tankönyvkiadó 1982.
MÁTÉ LÁSZLÓ: Funkcionálanalízis műszakiaknak. — Műszaki Könyvkiadó 1976.
MIKUSINSKY, J.: Operátorszámítás. — Műszaki Könyvkiadó 1961.
RIESZ FRIGYES; SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Funkcionálanalízis. — Tankönyvkiadó 1989.
TÓTH IRÉN: Operációkutatás. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.

13. Vektoranalízis és térelmélet

[13.1] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[13.2] BREHMER, S.; HAAR, H.: Differentialformen und Vektoranalysis. — Berlin 1972.
[13.3] DOMKE, E.: Vektoranalysis: Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. — BI–Verlag 1990.
[13.4] FOCK, V.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. — Berlin 1960.
[13.5] KÄSTNER, S.: Vektoren, Tensoren, Spinoren. — Berlin 1964.
[13.6] REICHARDT, H.: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.
[13.7] SCHARK, R.: Vektoranalysis für Ingenieurstudenten. — Verlag H. Deutsch 1992.
[13.8] SCHMUTZER, E.: Relativistische Physik. — B. G. Teubner, Leipzig 1968.
[13.9] WUNSCH, G.: Feldtheorie. — Verlag Technik 1971.

BIRÓ SÁNDORNÉ; SZABADOS TAMÁS: Vektoranalízis. — Műszaki Könyvkiadó 1983.
FAZEKAS FERENC: Vektoranalízis. — Tankönyvkiadó 1957.
JÁNOSSY LAJOS; GNÄDIG PÉTER; TASNÁDI PÉTER: Vektorok integrálása. — Tankönyvkiadó 1983.
JÁNOSSY LAJOS; TASNÁDI PÉTER: Vektorok és tenzorok differenciálása. — Tankönyvkiadó 1989.
KÁRTESZI FERENC: Szemléletes geometria. — Gondolat Kiadó 1966.
PACH ZS. PÁLNÉ; FREY TAMÁS: Vektor- és tenzoranalízis. — Műszaki Könyvkiadó 1970.
PÉTER RÓZSA: Rekursive Funktionen. — Akadémiai Kiadó 1957.
SCHARNITZKY VIKTOR: Vektorgeometria és lineáris algebra. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
SZARKA ZOLTÁN: Vektoranalízis és tenzoralgebra. — LSI ATSz 1989.
SZENTMÁRTONI TIBOR: Vektor- és tenzorszámítás. — Egyetemi Nyomda 1948.
WESZELY TIBOR: A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria modellje. — Dacia Könyvkiadó 1975.

14. Komplex függvénytan

[14.1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.: Pocketbook of Mathematical Functions. — Verlag H. Deutsch 1984.
[14.2] ALBRING, W.: Angewandte Strömungslehre. — Theodor Steinkopff Verlag 1970.
[14.3] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[14.4] BEHNKE, H.; SOMMER, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Springer–Verlag 1976.
[14.5] BETZ, A.: Konforme Abbildung. — Springer–Verlag 1964.

[14.6] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 2. — Deutscher Verag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–92, seit 1994 Verlag H. Deutsch.
[14.7] FISCHER, W.; LIEB, I.: Funktionentheorie. — Verlag Vieweg 1992.
[14.8] FREITAG, E.; BUSAM, R.: Funktionentheorie. — Springer–Verlag, 2., erweiterte Auflage 1994.
[14.9] GREUEL, O.: Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 9), 1978; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 9), 1978.
[14.10] JAHNKE, E.; EMDE, F.: Tafeln höherer Funktionen. — B. G. Teubner, Leipzig 1960.
[14.11] JÄNICH, K.: Funktionentheorie. Eine Einführung. — Springer–Verlag 1993.
[14.12] KNOPP: Funktionentheorie. — Verlag W. de Gruyter 1976.
[14.13] LAWRENTJEW, M.A.; SCHABAT, B.W.: Methoden der komplexen Funktionentheorie. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
[14.14] MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. — Springer–Verlag 1948.
[14.15] OBERHETTINGER, F.; MAGNUS, W.: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. — Springer–Verlag 1949.
[14.16] RÜHS, F.: Funktionentheorie. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.
[14.17] SCHARK, R.: Funktionentheorie für Ingenieurstudenten. — Verlag H. Deutsch 1993.
[14.18] SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. III. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954, Verlag H. Deutsch 1987–91, seit 1994 Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.
[14.19] WUNSCH, G.: Feldtheorie. — Verlag Technik 1975.

CZÉDLI GÁBOR: Boole függvények. — Polygon 1997.
DUNCAN, J.: Bevezetés a komplex függvénytanba. — Műszaki Könyvkiadó 1974.
FARKAS MIKLÓS: Speciális függvények. I–II. — LSI ATSz 1989.
FAZEKAS FERENC; FREY TAMÁS: Operátorszámítás, speciális függvények. — Tankönyvkiadó 1957.
FUKSZ, B. A.; SABAT, B. V.: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. — Tankönyvkiadó 1975.
GÁSPÁR GYULA; SZARKA ZOLTÁN: Komplex változós függvénytan, Laplace-transzformáció. — Tankönyvkiadó 1982.
JORDÁN KÁROLY: Elliptikus függvények és alkalmazásuk. — Tudományos Könyvkiadó 1950.
KNOPP K.: A függvénytan elemei. — Tankönyvkiadó 1958.
SZARKA ZOLTÁN: Komplex függvénytan. — LSI ATSz 1989.
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Komplex függvénytan. — Tankönyvkiadó 1988.

15. Integráltranszformációk

[15.1] BERG, L.: Operatorenrechnung, Bd. 1 u. 2. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972–74.
[15.2] BLATTER, C.: Wavelets – Eine Einführung. — Vieweg 1998
[15.3] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace–Transformation, Bd. 1 bis 3. — Birkhäuser Verlag 1950–1958.
[15.4] DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace–Transformation. — Oldenbourg–Verlag, 6. Auflage 1989.
[15.5] FETZER, V.: Integral–Transformationen. — Hüthig Verlag 1977.
[15.6] FÖLLINGER, O.: Laplace– und Fourier–Transformation. — Hüthig, 6.Auflage 1993.
[15.7] GAUSS, E.: WALSH–Funktionen für Ingenieure und Naturwissenschaftler. — B. G. Teubner 1994.
[15.8] GELFAND, I.M.; SCHILOW, G.E.: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. 1 bis 4. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962–66.
[15.9] HUBBARD, B.B.: Wavelets. Die Mathematik der kleinen Wellen. Birkhäuser 1997.

[15.10] JENNISON, R.C.: Fourier Transforms and convolutions for the experimentalist. — Pergamon Press 1961.
[15.11] LOUIS, A. K.; MAASS, P.; RIEDER, A.: Wavelets. Theorie und Anwendungen. — B. G. Teubner Stuttgart 1994.
[15.12] OBERHETTINGER, F.: Tabellen zur Fourier–Transformation. — Springer–Verlag 1990.
[15.13] OBERHETTINGER, F.; BADIL, L.: Tables of Laplace Transforms. — Springer–Verlag 1973.
[15.14] PAPOULIS, A.: The Fourier Integral and its Applications. — McGraw–Hill 1962.
[15.15] STOPP, F.: Operatorenrechnung. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 10), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 10), 1978.
[15.16] VICH, R.: Z–Transformation, Theorie und Anwendung. — Verlag Technik 1964.
[15.17] VOELKER, D.; DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace–Transformation. — Birkhäuser Verlag 1950.
[15.18] WAGNER, K.W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. — J.A. Barth Verlag 1950.
[15.19] ZYPKIN, J.S.: Theorie der linearen Impulssysteme. — Verlag Technik 1967.

DAVIES, B.: Integráltranszformációk és alkalmazásaik. — Műszaki Könyvkiadó 1983.
FODOR GYÖRGY: A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazásokkal. — Műszaki Könyvkiadó 1963.

16. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

[16.1] BANDEMER, H.; BELLMANN, A.: Statistische Versuchsplanung. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 19/2), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 19/2), 1979.
[16.2] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.
[16.3] BEHNEN, K., NEUHAUS, G.: Grundkurs Stochastik. — B. G. Teubner, 3. Auflage 1995.
[16.4] BEYER, O. et al.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 17), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 17), 1980.
[16.5] BEYER, O. ET. AL.: Stochastische Prozesse und Modelle. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 19/1), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖL, Bd. 19/1), 1980.
[16.6] CLAUSS; FINZE; PARTZSCH: Statistik für Soziologen, Pädagogen, Psychologen und Mediziner, Bd. 1. — Verlag H. Deutsch 1995.
[16.7] DÜCK, W.; KÖSTH, H.; RUNGE, W.; WUNDERLICH, L.: Mathematik für Ökonomen, Bd. 1. — Verlag H. Deutsch 1989.
[16.8] FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — Deutscher Verlag der Wissenschaften, 11. Auflage 1988.
[16.9] HARTMANN; LEZKI; SCHÄFER: Mathematische Methoden in der Stoffwirtschaft. — Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie.
[16.10] HEINHOLD, J.; GAEDE, K.–W.: Ingenieurstatistik. — Oldenbourg–Verlag 1964.
[16.11] HOCHSTÄDTER, D.: Statistische Methodenlehre. — Verlag H. Deutsch 1993.
[16.12] HOCHSTÄDTER, D., KAISER, U.: Varianz– und Kovarianzanalyse. — Verlag H. Deutsch 1988.
[16.13] HÖPCKE, W.: Fehlerlehre und Ausgleichrechnung. — Verlag W. de Gruyter 1980.
[16.14] KOLMOGOROFF: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Springer–Verlag 1977.
[16.15] LAHRES: Einführung in die diskreten Markoff–Prozesse und ihre Anwendungen. — Verlag Vieweg 1964.
[16.16] MANTEUFFEL, K.; STUMPE, D.: Spieltheorie. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 21/1), 1977; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 21/1)1979.
[16.17] OSE, G. (HRSG.): Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Bd. 4. — Verlag H. Deutsch 1991.

[16.18] PISCHLER, J.; ZSCHIESCHE, H.–U.: Simulationsmethoden. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 20), 1976; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 20), 1978.
[16.19] PRECHT, M.; VOIT, K.; KRAFT, R.: Mathematik 1 für Nichtmathematiker. — Oldenbourg–Verlag 1990.
[16.20] RÈNY, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
[16.21] RINNE, H.: Taschenbuch der Statistik. — Verlag H. Deutsch 1995
[16.22] SOBOL, I.M.: Die Monte–Carlo–Methode. — Verlag H. Deutsch 1991.
[16.23] STORM, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. — Fachbuchverlag, 10. Auflage 1995.
[16.24] TAYLOR, J.R.: Fehleranalyse. — VCH, Weinheim 1988.
[16.25] WEBER, E.: Grundriß der biologischen Statistik für Naturwissenschaftler, Landwirte und Mediziner. — Gustav Fischer Verlag 1972.
[16.26] WEBER, H.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure. — B. G. Teubner 1992.
[16.27] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. — Springer–Verlag 1984.

BARÓTI GYÖRGY; RATKÓ ISTVÁN: Programozói bevezetés a valószínűségszámításba. — Műszaki Könyvkiadó 1974.
BOGNÁR JÁNOSNÉ: Valószínűségszámítás. Feladatgyűjtemény. — Tankönyvkiadó 1982.
BOGNÁR JÁNOSNÉ; MOGYORÓDI JÓZSEF; PRÉKOPA ANDRÁS; RÉNYI ALFRÉD; SZÁSZ DOMOKOS: Valószínűségszámítás. Példatár. — Tankönyvkiadó 1974.
BOGNÁR JÁNOSNÉ; NEMETZ TIBOR; TUSNÁDI GÁBOR: Ismerkedés a véletlennel. — Tankönyvkiadó 1984.
BORNEMISZA ESZTER: Hibával mért diszkrét adatok statisztikai elemzése. — OMIKK–TÁRKI 1994.
BOROVKOV, A. A.: Matematikai statisztika. Paraméterek becslése. Hipotézisvizsgálat. — TypoTEX 1999.
CSERNYÁK LÁSZLÓ: Valószínűségszámítás. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1998.
CSÖRGŐ, M.; RÉVÉSZ, P.: Strong Approximations in Probability and Statistics. — Akadémiai Kiadó 1981.
DENKINGER GÉZA: Valószínűségszámítás. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
DENKINGER GÉZA: Valószínűségszámítási gyakorlatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
DÉVÉNYI DEZSŐ; GULYÁS OTTÓ: Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában. — Tankönyvkiadó 1988.
ÉLTETŐ ÖDÖN; MESZÉNA GYÖRGY; ZIERMANN MARGIT: Stochasztikus módszerek és modellek. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1982.
ERDŐS, P.; SPENCER, J.: Probabilistic methods in combinatorics. — Akadémiai Kiadó 1974.
FERENCZY MIKLÓS: Valószínűségszámítás és alkalmazása. Feladatgyűjtemény. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1998.
FÜSTÖS LÁSZLÓ; KOVÁCS ERZSÉBET: A számítógépes adatelemzés statisztikai módszerei. — Tankönyvkiadó 1989.
FÜSTÖS LÁSZLÓ; MESZÉNA GYÖRGY; SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei. — Akadémiai Kiadó 1986.
GNEGYENKO, B.; HINCSIN, A.: Bevezetés a valószínűségszámításba. — Művelt Nép Kiadó 1954.
GOLENKO, D. I.: Statisztikai módszerek alkalmazása gazdasági rendszerekben. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1973.
HAJTMANN BÉLA: Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára. — Akadémiai Kiadó 1968.
HANNO ISTVÁN: Introduction to the Monte-Carlo method. — Akadémiai Kiadó 1999.
JAHN, W.; VAHLE, H.: A faktoranalízis és alkalmazása. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1974.
JÁNOSSY LAJOS: A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása. — Tankönyvkiadó 1965.
JÁNOSSY LAJOS; TASNÁDI PÉTER: Valószínűségszámítás. — Tankönyvkiadó 1975.

Jordán Károly: Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból. — Akadémiai Kiadó 1956.
Karlin, S.; Taylor, H.: Sztochasztikus folyamatok. — Gondolat Kiadó 1985.
Korpás Attiláné: Általános statisztika I–II. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1996/97.
Kovacsics József: Statisztika. — Tankönyvkiadó 1979.
Köves Pál; Párniczky Gábor: Általános statisztika 1–2. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1981.
Lukács Ottó: Matematikai statisztikai példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1996.
Lukács Ottó: Valószínűségszámítás feladatokkal. — Tankönyvkiadó 1988.
Medgyessy Pál; Takács Lajos: Valószínűségszámítás. — Tankönyvkiadó 1966.
Mellár Tamás: Alkalmazott makroökonómia. — Bonusz Kft. 1997.
Meszéna György; Ziermann Margit: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1981.
Meyer Dietmar; Solt Katalin: Makroökonómia. — Aula 1999.
Mogyoródi József; Michaleczky György: Matematikai statisztika. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1995.
Mogyoródi, J.; Vincze, I.; Wertz, W.: Statistics and Probability. — Akadémiai Kiadó 1984.
Móri Tamás; Szeidl László; Zemplényi András: Matematikai statisztika példatár. — Eötvös 1997.
Móri Tamás; Székely J. Gábor: Többváltozós statisztikai analízis. — Műszaki Könyvkiadó 1986.
Mundruczó György: Alkalmazott regressziószámítás. — Akadémiai Kiadó 1981.
Nemetz Tibor: Valószínűségszámítás. — TypoTEX 1998.
Obádovics J. Gyula: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. — Scolar 1995.
Pál Lénárd: A valószínűségszámítás és a statisztika alapjai 1–2. — Akadémiai Kiadó 1995.
Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. — Műszaki Könyvkiadó 1975.
Recski András: Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and Statistics. — Akadémiai Kiadó 1989.
Reimann József: Ismerkedés a valószínűségszámítással. — Zrínyi Katonai Kiadó 1972.
Reimann József: Mathematical Statistics with Application in Flood Hydrology. — Akadémiai Kiadó 1989.
Reimann József; Tóth Julianna: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
Rényi, A.: Foundations of Probability. — Holden Day 1970.
Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről. — TypoTEX 1994.
Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. — Tankönyvkiadó 1974.
Rétháti László: Valószínűségelméleti megoldások a geotechnikában. — Akadémiai Kiadó 1985.
Sarkadi, Károly; Vincze, István: Mathematical methods of statistical quality control. — Akadémiai Kiadó 1974.
Sarkadi, Károly; Vincze, István: Studies in Mathematical Statistics, Theory and Applications. — Akadémiai Kiadó 1968.
Solt György: Valószínűségszámítás. Példatár. — Műszaki Könyvkiadó 1997.
Spiegel, M.: Statisztika. Elmélet és gyakorlat. — Panem 1995.
Steiner Ferenc: The most frequent value. Introduction to a modern conception of statistics. — Akadémiai Kiadó 1991.
Székely J. Gábor: Paradoxonok.
Szentmártoni Tibor: Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban. — Tudományos Könyvkiadó 1950.
Takács Lajos; Ziermann Margit: Valószínűségszámítás. — Tankönyvkiadó 1972.
Tusnádi Gábor; Ziermann Margit: Idősorok analízise. — Műszaki Könyvkiadó 1986.
Várlaki Péter: Bevezetés a statisztikai rendszer-identifikációba. — Műszaki Könyvkiadó 1986.
Vetier András: Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1995.
Vincze Endre: Valószínűségszámítás. — Tankönyvkiadó 1972.
Vincze István: Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal. — Műszaki Könyvkiadó 1975.
Vincze István; Varbanova Mária: Nemparaméteres matematikai statisztika. — Akadémiai Kiadó

1993.
WICKMANN, D.: Bayes-statisztika. Betekintést nyerni és dönteni bizonytalan helyzetekben. — Eötvös Kiadó 1999.

17. Dinamikai rendszerek és káosz

[17.1] AFRAIMOVICH, V.S.; GAVRILOV, N.K.; LUKYANOV, V.I.; SHILNIKOV, L.P.: Grundlegende Bifurkationen dynamischer Systeme (in Russisch). — Universitätsverlag Gorki 1985.

[17.2] ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M.: Die Erforschung des Chaos. — Verlag Vieweg 1994.

[17.3] ARROWSMITH, D.K.; PLACE, C.M.: An introduction to Dynamical Systems. — Cambridge University Press 1990.

[17.4] BELYKH, V.N.: Qualitative Methoden der Theorie nichtlinearer Schwingungen von konzentrierten Systemen. — Universitätsverlag Gorki 1980.

[17.5] BOTHE, H.G.; SCHMELING, J.; SIEGMUND-SCHULTZE, R.: Studie zur Dynamik differenzierbarer Abbildungen. — Weierstrass– Institut Berlin 1989.

[17.6] BRÖCKER, TH.: Analysis III. — Wissenschaftsverlag Zürich 1992.

[17.7] DE MALO, W.; VAN STRIEN, S.: One–Dimensional Dynamics. — Springer–Verlag 1993

[17.8] EDGAR, G.A.: Measure, Topology and Fractal Geometry. — Springer–Verlag 1990.

[17.9] FALCONER, K.: Fractal Geometry. — Wiley 1990.

[17.10] GREBOGI, C.; OTT, E.; PELIKAN, S.; YORKE, J.A.: Strange attractors that are not chaotic. — Physica 13 D 1984.

[17.11] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. — Springer–Verlag 1990.

[17.12] HALE, J.; KOÇAK, H.: Dynamics and Bifurcations. — Springer–Verlag 1991.

[17.13] KIRCHGRABER, U.: Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen. — Elemente der Mathematik 1992.

[17.14] LEONOV, G.A., REITMANN, V.: Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. — B. G. Teubner 1992.

[17.15] LEONOV, G.A., REITMANN, V.; SMIRNOVA, V.B.: Non–Local Methods for Pendulum–Like Feedback Systems — B. G. Teubner 1987.

[17.16] LEVEN, R.W.; KOCH, B.-P.; POMPE, B.: Chaos in dissipativen Systemen. — Akademie–Verlag 1994.

[17.17] MAREK, M.; SCHREIBER, I.: Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems. — Cambridge University Press 1991.

[17.18] MEDVED', M.: Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcations Theory. — Adam Hilger 1992.

[17.19] PERKO, L.: Differential Equations and Dynamical Systems. — Springer–Verlag 1991.

[17.20] PILYUGIN, S. YU.: Einführung in robuste Systeme von Differentialgleichungen. — Universitätsverlag Leningrad 1988.

[17.21] RABINOVICH, M. I.; TRUBEZKOV, D. I.: Einführung in die Theorie der Schwingungen und Wellen. — Nauka Moskau 1984.

A káosz és rendezetlenség kutatása, *Magyar Tudomány* **38** (4) (1993)

ARNOLD, V. I.: Katasztrófaelmélet. — Tankönyvkiadó 1987.

ARNOLD, V. I.: Közönséges differenciálegyenletek. — Műszaki Könyvkiadó 1987.

ARNOLD, V. I.: A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei. — Műszaki Könyvkiadó 1988.

FOKASZ NIKOSZ: Káosz és fraktálok. Bevezetés a kaotikus dinamikus rendszerek matematikájába. — Új Mandátum 1999.

GLEICK, J.: Káosz: egy új tudomány születése. — Göncöl 1999.
KÜRTI J. (SZERK.): Nemlineáris jelenségek. Struktúrák kialakulása és káosz, I–II. — ELTE Fizikus Diákkör, 1983.
POSTON, T.; STEWART, I.: Katasztrófaelmélet és alkalmazásai. — Műszaki Könyvkiadó 1985.
SZABÓ L. I.: Ismerkedés a fraktálok matematikájával. — Polygon, 1997.
SZÁSZ DOMOKOS: Dinamikai rendszerek. — `http://www.math.bme/hu/`
SZÉPFALUSI PÉTER; TÉL TAMÁS: A káosz. Véletlenszerű jelenségek a nemlineáris rendszerekben. — Akadémiai Kiadó 1982.
TALLOS P.: Dinamikai rendszerek alapjai. — Aula, 1999.

18. Optimalizálás

[18.1] BECKMANN, M.J.: Spieltheorie, dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Warteschlangentheorie, Simulation, unscharfe Entscheidungen. In: Grundlagen des Operations–Research (Hrsg. TOMASGAL). — Springer–Verlag 1992.

[18.2] BIESS, G.: Graphentheorie. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 21/2), 1980; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 21/2), 1980.

[18.3] DÜCK, W.; KÖSTH, H.; RUNGE, W.; WUNDERLICH, L.: Mathematik für Ökonomen, Bd. 2. — Verlag H. Deutsch 1980.

[18.4] ELSTER, K.-H.: Einführung in die nichtlineare Optimierung.— B. G. Teubner 1978.

[18.5] GOEBEL: Variationsrechnung in BANACH–Räumen, (Beiträge zur Analysis 2). — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.

[18.6] GROSSMANN, C.; KLEINMICHEL, H.: Verfahren der nichtlinearen Optimierung. — B. G. Teubner, Leipzig 1976.

[18.7] KOSMOL: Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben. — B. G. Teubner, 2. Auflage 1992.

[18.8] KLÖTZLER, R.: Mehrdimensionale Variationsrechnung. — Birkhäuser Verlag 1970.

[18.9] KRABS, W.: Optimierung und Approximation. — B. G. Teubner.

[18.10] KRELLE, W.; KÜNZI, H.P.; RANDOW, R. v.: Nichtlineare Programmierung. — Springer–Verlag 1979.

[18.11] Optimierung und optimale Steuerung. Lexikon der Optimierung. — Akademie–Verlag 1986.

[18.12] OSE, G. (FEDERFÜHRUNG): Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Bd. 4. — Verlag H. Deutsch 1991.

[18.13] PIEHLER, J.: Einführung in die lineare Optimierung — BGB B.G. Teubner 1970.

[18.14] PONTRJAGIN, L.S. ET AL: Mathematische Theorie der optimalen Prozesse. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.

[18.15] SEIFFART, E.; MANTEUFFEL, K.: Lineare Optimierung. — BSB B. G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 14), 1974; Verlag H. Deutsch, (MINÖA, Bd. 14), 1981.

FORGÓ FERENC: Nemkonvex és diszkrét programozás. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1978.
GÁSPÁR LÁSZLÓ; TEMESI JÓZSEF: Lineáris programozási gyakorlatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1999.
GÁSPÁR LÁSZLÓ; TEMESI JÓZSEF: Matematikai programozási feladatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1999.
HOSSZÚ MIKLÓS: Matematikai programozás. — Tankönyvkiadó 1969.
KÓSA ANDRÁS: Optimalizálási eljárások I–II. — LS ATSz 1989.
KÓSA ANDRÁS: Optimumszámítási modellek. — Műszaki Könyvkiadó 1979.
KOVÁCS MARGIT: A nemlineáris programozás elmélete. — TypoTEX 1997.
KREKÓ BÉLA: Lineáris programozás. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1966.
KREKÓ BÉLA: Optimumszámítás. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1972.

KREKÓ BÉLA; BACSKAI ZOLTÁN: Bevezetés a lineáris programozásba. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1957.
MARTOS BÉLA: Nonlinear programming. — Akadémiai Kiadó 1975.
OBÁDOVICS J. GYULA: Numerikus módszerek és programozásuk. — Tankönyvkiadó 1975.
PRÉKOPA ANDRÁS: Lineáris programozás. — BJMT 1968.
PRÉKOPA ANDRÁS: Stochastic programming. — Akadémiai Kiadó 1955.
STAHL JÁNOS: Lineáris programozási dekompozíciós eljárások. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1978.
SZÉKELY VLADIMIR; TARNÄY KÁLMÁN: A programozás alapjai. — Műszaki Könyvkiadó 1975.
VARGA JÓZSEF: Alkalmazott programozás. — Tankönyvkiadó 1981.
VARGA JÓZSEF: Angewandte Optimierung. — Akadémiai Kiadó 1991.
VARGA JÓZSEF: Gyakorlati programozás. — Tankönyvkiadó 1985.
VARGA JÓZSEF: Praktische Optimierung. — Akadémiai Kiadó 1974.
VARGA LÁSZLÓ: Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata. — Akadémiai Kiadó 1982.

19. Numerikus módszerek

[19.1] CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P.: Numerical Methods for Engineers. — McGraw–Hill Book Co. 1989.
[19.2] COLLATZ, L.: Numerical Treatment of Differential Equations. — Springer 1966.
[19.3] DAVIS, P.J.; RABINOWITZ, P: Methods of numerical integration. — Academic Press 1984.
[19.4] DE BOOR, C.: A practical guide to splines. — Springer–Verlag 1978.
[19.5] ENGELN–MÜLLGES, G.; REUTTER, F.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit FORTRAN 77–Programmen. — Bibliographisches Institut 1988.
[19.6] ENGELN–MÜLLGES, G.; REUTTER, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. — Bibliographisches Institut 1987.
[19.7] ENGELN–MÜLLGES, G.; REUTTER, F.: Numerik–Algorithmen. Entscheidungshilfe zur zur Auswahl und Nutzung. — VDI–Verlag, Düsseldorf 1996.
[19.8] GOLUB, G., ORTEGA, J.M.: Scientific Computing. — B. G. Teubner 1996.
[19.9] GROSSMANN, CH.; ROOS, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. — B. G. Teubner 1992.
[19.10] HÄMMERLIN, G.; HOFFMANN, K.–H.: Numerische Mathematik. — Springer–Verlag, 4. Auflage 1994.
[19.11] HEITZINGER, W.; TROCH, I.; VALENTIN, G.: Praxis nichtlinearer Gleichungen. — C. Hanser Verlag 1984.
[19.12] KIEŁBASIŃSKI, A.; SCHWETLICK, H.: Numerische lineare Algebra. Eine computerorientierte Einführung. — Verlag H. Deutsch 1988.
[19.13] KNOTHE, K.; WESSELS, H.: Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure. — Springer–Verlag 1992.
[19.14] LANCASTER, P; SALKAUSKA, S.K.: Curve and Surface Fitting. — Academic Press 1986.
[19.15] LOCHER, F.: Numerische Mathematik für Informatiker. — Springer–Verlag 1992.
[19.16] MAESS, G.: Vorlesungen über numerische Mathematik, Bd. 1 u. 2. — Akademie–Verlag 1984–1988.
[19.17] MEINARDUS, G.: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. — Springer–Verlag 1964.
[19.178] MEINARDUS, G.; MERZ, G.: Praktische Mathematik. Für Ingenieure, Mathematiker und Physiker, Bd. 1 u. 2. — Bibliographisches Institut 1979–82.
[19.19] MEIS, T.; MARKOWITZ, U.: Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen. — Springer–Verlag 1978.
[19.20] MÜHLIG, H.; STEFAN, F.: Approximation von Flächen mit Hilfe von B–Splines. — Wiss. Z. TU Dresden 1991.

[19.21] MULANSKY, B.: Glättung mittels zweidimensionaler Tensorprodukt–Spline–Funktionen. — Wiss. Z. TU Dresden 1990.

[19.22] MYSCHKIS, A.D.: Angewandte Mathematik für Physiker und Ingenieure. — Verlag H. Deutsch 1981.

[19.23] REINSCH, CHR.: Smoothing by Spline Functions. — Numer. Math. 1967.

[19.24] SAMARSKII, A.A.: Theorie der Differenzenverfahren. — Akademische Verlagsgesellschaft 1984.

[19.25] SCHWARZ, H.R.: Methode der finiten Elemente. — B. G. Teubner 1984.

[19.26] SCHWARZ, H.R.: Numerische Mathematik. — B. G. Teubner 1986.

[19.27] SCHWETLICK, H.; KRETZSCHMAR, H.: Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure. — Fachbuchverlag 1991.

[19.28] SPÄTH, H.: Spline–Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. — Oldenbourg–Verlag 1983.

[19.29] STOER, J.; BULIRSCH, R.: Numerische Mathematik, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1989–90.

[19.30] STROUD, A.H.: Approximate calculation of multiple integrals. — Prentice Hall 1971.

[19.31] STUMMEL, F.; HAINER, K.: Praktische Mathematik. — B. G. Teubner.

[19.32] TÖRNIG, W.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Bd. 1 u. 2. — Springer–Verlag 1990.

[19.33] ÜBERHUBER, C.: Computer–Numerik 1, Computer–Numerik 2. — Springer–Verlag 1995

[19.34] WELLER, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. — Verlag Vieweg 1995.

[19.35] WERNER, J.: Numerische Mathematik, Bd. 1 u. 2. — Verlag Vieweg 1992.

[19.36] WILLERS, F.A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. — Akademie–Verlag 1951.

[19.37] WILLERS, F.A.: Methoden der praktischen Analysis. — Akademie–Verlag 1951.

[19.38] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. — Springer–Verlag 1984.

KIS OTTÓ; KOVÁCS MARGIT: Numerikus módszerek. — Műszaki Könyvkiadó 1973.

OBÁDOVICS J. GYULA: Numerikus módszerek és programozásuk. — Tankönyvkiadó 1975.

POPPER GYÖRGY; CSIZMÁS FERENC: Numerikus módszerek mérnököknek. — TypoTEX 1993.

SIMONOVITS MIKLÓS: Számítástechnika. — Műszaki Könyvkiadó 1983.

STOYAN GISBERT; TAKÓ GALINA: Numerikus módszerek: elmélet, gyakorlat, szoftver 1–3. — ELTE–TypoTEX 1993–97.

SZIDAROVSZKY FERENC: Bevezetés a numerikus módszerekbe. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1974.

THEISS, E.; PÁRNICZKY, G.; PINTÉR, L.; KREKÓ, B.: Korreláció és trendszámítás. — Közgazdasági és Jogi Kiadó 1958.

VIRÁGH JÁNOS: Numerikus matematika. — JATEPRESS 1997.

20. Matematikai programcsomagok

[20.1] BENKER, M.: Mathematik mit Mathcad. — Springer–Verlag 1996.

[20.2] BURKHARDT, W.: Erste Schritte mit Mathematica. — Springer–Verlag, 2. Auflage 1996.

[20.3] BURKHARDT, W.: Erste Schritte mit Maple. — Springer–Verlag, 2. Auflage 1996.

[20.4] CHAR, GEDDES, GONNET, LEONG, MONAGAN, WATT: Maple V Library, Reference Manual. — Springer–Verlag 1991.

[20.5] DAVENPORT, J.H., SIRET, Y.; TOURNIER, E.: Computer Algebra. — Academic Press 1993.

[20.6] GLOGGENGIESSER, H.: Maple V. — Verlag Markt & Technik 1993.

[20.7] JENKS, R.D.; SUTOR, R.S.: Axiom. — Springer–Verlag 1992.

[20.8] KOFLER, M.: Maple V, Release 4, —Addison Wesley, (Deutschland) GmbH, Bonn 1996.

[20.9] MAEDER, R.: Programmierung in Mathematica, Second Edition. — Addison Wesley 1991.

[20.10] WOLFRAM, S.: The Mathematica Book, Fourth Edition. — Wolfram Media, Cambridge University Press, 1999.

ARATÓ, M.; VARGA, J.: Mathematical Models in Computer Systems. — Akadémiai Kiadó 1981.
BÁRDOS ATTILA; KÖRTVÉLYESI GÉZÁNÉ: Programozási alapfeladatok gyűjteménye. — SZÁMALK 1985.
CSŐKE LAJOS; GARAMHEGYI GÁBOR: A számítógép-programozás logikai alapjai. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.
DEMETROVICS JÁNOS; DENEV JORDAN; PAVLOV RADISZLAV: A számítástudomány matematikai alapjai. — Tankönyvkiadó 1985.
GRAHAM, R.; KNUTH, D.; PATASHNIK, O.: Konkrét matematika. A számítástudomány alapjai — Műszaki Könyvkiadó 1998.
HACK FRIGYES: DERIVE. Matematikai segítő program. — ELTE 1996.
HECK, ANDRÉ: Bevezetés a Maple használatába. — Juhász Gyula Felsőoktatási Kiadó 1999.
KLINCSIK MIHÁLY; MARÓTI GYÖRGY: MAPLE 8 tételben a matematikai problémamegoldás művészetéről. — NOVADAT 1997.
KNUTH, D. E., A számítógrép-programozás művészete 1–3. — Műszaki Könyvkiadó 1994.
MANNA, ZOHAR: Programozáselmélet. — Műszaki Könyvkiadó 1981.
MOLNÁRKA GYŐZŐ; GERGÓ LAJOS; WETTL FERENC; HORVÁTH ANDRÁS; KELLÓS GÁBOR: A Maple V és alkalmazásai. — Springer 1996.
STOYAN GISBERT: MATLAB – 4. és 5. verzió. Numerikus módszerek, grafika, statisztika, eszköztárak. — TypoTEX 1998.
SZILI LÁSZLÓ; TÓTH JÁNOS: Matematika és Mathematica. — Eötvös Kiadó 1996.
MICHAEL J. WESTER (SZERK.): Computer Algebra Systems: A Practical Guide. — John Wiley & Sons, Chichester, UK.
A Maple és a Mathematica összehasonlításához ld:
`http://www.arec.umd.edu/mnerlove/GAUSS_MATLAB_C&E.pdf`
`http://www.scientificweb.com/ncrunch`

21. Táblázatok

[21.1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.: Pocketbook of Mathematical Functions. — Verlag H. Deutsch 1984.
[21.2] APELBLAT, A.: Tables of Integrals and Series. — Verlag H. Deutsch 1996
[21.3] BRYTSCHKOW, JU.A.; MARITSCHEW, O.I.; PRUDNIKOW, A.P.: Tabellen unbestimmter Integrale. — Verlag H. Deutsch 1992.
[21.4] EMDE, F.: Tafeln elementarer Funktionen. — B. G. Teubner, Leipzig 1959.
[21.5] GRADSTEIN,I.S.; RYSHIK, I.M.: Summen–, Produkt– und Integraltafeln, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1981.
[21.6] GRÖBNER, W.; HOFREITER, N.: Integraltafel, Teil 1: Unbestimmte Integrale, Teil 2: Bestimmte Integrale. — Springer–Verlag, Teil 1, 5. Auflage 1975; Teil 2, 5. Auflage 1973.
[21.7] JAHNKE, E.; EMDE, F.; LÖSCH, F.: Tafeln höherer Funktionen. — B. G. Teubner, Leipzig 1960.
[21.8] MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. — Springer–Verlag, 7. Auflage 1964.
[21.9] MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. — Springer–Verlag 1948.
[21.10] MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Integraltafeln. — Springer–Verlag 1950.
[21.11] MÜLLER, H.P.; NEUMANN, P.; STORM, R.: Tafeln der mathematischen Statistik. — C. Hanser Verlag 1979.
[21.12] POLJANIN, A.D.; SAIZEW, V.F.: Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. — Verlag H. Deutsch 1996.

21.13] SCHÜLER: Acht– und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, dargestellt mittels des JACOBIschen Parameters q. — Springer–Verlag 1955.

21.14] SCHULER, M.; GEBELEIN, H.: Acht– und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. — Springer–Verlag 1955.

21.15] SCHÜTTE, K.: Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen. — München 1966.

CSENGERI PINTÉR PÉTER: Mennyiségek — mértékegységek. SI. — Műszaki Könyvkiadó 1987.

HACK FRIGYES: Matematikai képletek, négyjegyű függvénytáblázatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1998.

SCHARNITZKY VIKTOR: Matematikai képletgyűjtemény főiskolásoknak. — Syca 1998.

22. Összefoglaló művek

22.1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.: Pocketbook of Mathematical Functions. — Verlag H. Deutsch 1984.

22.2] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1979.

22.3] BERENDT, G.; WEIMAR, E.: Mathematik für Physiker, Bd. 1 u. 2. — VCH, Weinheim 1990.

22.4] BRONSTEIN, J.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. — B. G. Teubner Leipzig 1976, 17. Auflage; Verlag H. Deutsch 1977.

22.5] BRONSTEIN, J.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. — B. G. Teubner Leipzig 1989, 24., neubearbeitete Auflage; Verlag H. Deutsch 1989,

22.6] BRONSTEIN, J.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel. — Verlag H. Deutsch 1991.

22.7] DALLMANN, H.; ELSTER, K.–H.; ELSTER, R.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1–3. — Gustav Fischer Verlag 1991.

22.8] DRESZER, J.: Mathematik–Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. — Verlag H. Deutsch 1975.

22.9] DÜCK, W.; KÖRTH, H.; RUNGE, W.; WUNDERLICH, L.: Mathematik für Ökonomen, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1989.

22.10] Fachlexikon ABC Mathematik. — Verlag H. Deutsch 1978.

22.11] FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 u. 3. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964; Verlag H. Deutsch 1989–92, seit 1994 Verlag H. Deutsch.

22.12] FISCHER, H.; KAUL, H.: Mathematik für Physiker, 1. — B. G. Teubner 1990.

22.13] HAINZL, J.: Mathematik für Naturwissenschaftler. — B. G. Teubner 1985.

22.14] JOOS, G.; RICHTER, E.W.: Höhere Mathematik für den Praktiker. — Verlag H. Deutsch 1994.

22.15] Kleine Enzyklopädie Mathematik. — Verlag Enzyklopädie, Leipzig 1967. — Gekürzte Ausgabe: Mathematik Ratgeber. — Verlag H. Deutsch 1988.

22.16] MANGOLDT, H. v.; KNOPP, K., HRG. F. LÖSCH: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1 bis 4. — S. Hirzel Verlag 1989.

22.17] MARGENAU, H.; MURPHY, G.M.: Die Mathematik für Physik und Chemie, Bd. 1 u. 2. — Verlag H. Deutsch 1965–67.

22.18] Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. — BSB B.G. Teubner, Leipzig, (MINÖL, Bd. 1 bis 23), 1973 bis 1981.
Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und sonstige anwendungsorientierte Berufe. — Verlag Harri Deutsch, (MINÖA, Bd. 1–23) 1973-1981.

22.19] NETZ, H.; RAST, J.: Formeln der Mathematik. — C. Hanser Verlag 1986.

22.20] PAPULA, L.: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1 bis 3. — Verlag Vieweg 1994–1996.

22.21] PHILIPPOW, E.: Taschenbuch Elektrotechnik. — Verlag Technik 1968.

[22.22] PLASCHKO, P.; BROD, K.: Höhere mathematische Methoden für Ingenieure und Physiker. — Springer–Verlag 1989.

[22.23] PRECHT, M.; VOIT, K.; KRAFT, R.: Mathematik für Nichtmathematiker, Bd. 1 u. 2. — Oldenbourg–Verlag 1991.

[22.24] ROTHE, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Teil I bis IV. — B. G. Teubner 1958 – 1964.

[22.25] SCHMUTZER, E.: Grundlagen der theoretischen Physik, Bd. 1 u. 4. — Deutscher Verlag der Wissenschaften 1991.

[22.26] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 1 bis 5.— Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953; Verlag H. Deutsch 1987–1991, seit 1994 im Verlag H. Deutsch unter dem Titel Lehrbuch der höheren Mathematik.

[22.27] STÖCKER, H.: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. — Verlag H. Deutsch, 3. Auflage 1995.

[22.28] ZEIDLER, E. (HRSG.): Teubner–Taschenbuch der Mathematik. — B. G. Teubner, Teil 1 1996, Teil 2 1995.

ALEXITS GYÖRGY; FENYŐ ISTVÁN: Matematika vegyészek számára. — Tankönyvkiadó 1973.

BRONSTEIN, I. N.; SZEMENGYAJEV, K. A.: Matematikai zsebkönyv. — Műszaki Könyvkiadó 1987.

DEMETROVICS JÁNOS; JORDAN DENEV; RADISLAV PAULOV: A számítástudomány alapjai. — Tankönyvkiadó 1985.

DEZSŐ ÁGNES; ÉDES ZOLTÁN; SÁRKÁNY PÉTER: Középiskolai matematikai lexikon. — Corvina 1997.

ERDEY-GRÚZ TIBOR (FŐSZERK.): Természettudományi lexikon 1–7. — Akadémiai Kiadó 1978.

FARKAS MIKLÓS (FŐSZERK.): Matematikai kislexikon. — Műszaki Könyvkiadó 1979.

FAZEKAS FERENC (SZERK.): Műszaki matematikai gyakorlatok. A sorozat: 11 kötet, B sorozat: 9 kötet, C sorozat: 7 kötet. — Tankönyvkiadó 1952–73.

FRIED ERVIN; PÁSZTOR ISTVÁN; REIMAN ISTVÁN; RÉVÉSZ PÁL; RUZSA IMRE: Matematikai kisenciklopédia. — Gondolat Kiadó 1968.

GÁSPÁR GYULA (SZERK.): Műszaki matematikai gyakorlatok. I–VI. — Műszaki Könyvkiadó 1963–1977.

KORN, G.; KORN, T.: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. — Műszaki Könyvkiadó 1975.

MERZA JÓZSEF (SZERK.): Matematika. Ötnyelvű szótár magyar kötet. — Akadémiai Kiadó 1984.

MÜLLER, F.: Számítástechnikai kislexikon. — Műszaki Könyvkiadó 1973.

OBÁDOVICS J. GYULA: Matematika. — Scolar 1996.

OBÁDOVICS J. GYULA; SZARKA ZOLTÁN: Matematikai összefoglaló. — Műszaki Könyvkiadó 1968.

OLÁH JUDIT (SZERK.): Matematikai zseblexikon. — Akadémiai Kiadó–TypoTEX 1992.

Oxford számítástechnikai értelmező szótár. — Novotrade 1989.

PÓLYA GYÖRGY; SZEGŐ GÁBOR: Feladatok és tételek az analízisből. I–II. — Tankönyvkiadó 1980/81.

REIMAN ISTVÁN: Matematika. — Műszaki Könyvkiadó 1912.

SCHARNITZKY VIKTOR (SZERK.): Matematikai feladatok. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1999.

SH atlasz 7. Matematika. — Springer Hungarica 1993.

SZÁSZ GÁBOR: Matematika 1–3. — Nemzeti Tankönyvkiadó 1997.

SZÁSZ PÁL: A differenciál- és integrálszámítás elemei. I–II. — Közoktatásügyi Kiadó 1951.

Természettudományi Kislexikon. — Akadémiai Kiadó 1989.

A modern matematika egyik összefoglaló honlapja:

`http://www.math-atlas.org`

Kedves Olvasó!

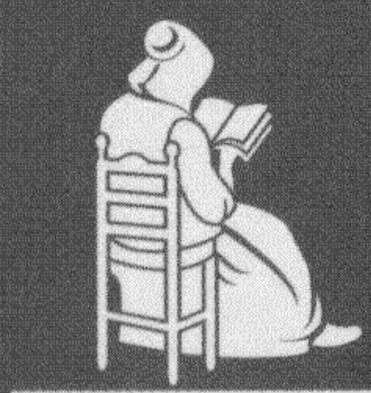
Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a `www.typotex.hu` címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a TypoTEX Kiadó, az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő és TEX szakértő: Tikk Domonkos
A TEX szedésben közreműködött Erő Zsuzsa, Géczy Flóra, Orbán András és a fordítók
A borítót Tóth Norbert tervezte
Terjedelem: 76 (A/5) ív
Készült a pécsi Bornus Nyomdában
Felelős vezető: Borbély Tamás

Kézikönyvek

- Aritmetika
- Függvények és előállításuk
- Geometria
- Lineáris algebra
- Algebra és diszkrét matematika
- Differenciálszámítás
- Végtelen sorok
- Integrálszámítás
- Differenciálegyenletek
- Variációszámítás
- Lineáris integrálegyenletek
- Funkcionálanalízis
- Vektoranalízis és tételmélet
- Komplex függvénytan
- Integráltranszformációk
- Valószínűségszámítás és matematikai statisztika
- Dinamikai rendszerek és káosz
- Optimalizálás
- Numerikus módszerek
- Számítógép-algebrai rendszerek



TYPOTEX

9800 Ft

ISBN 978-963-279-079-4

