Trembeczki Csaba

PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOROK

12 feladatsor megoldásokkal, magyarázatokkal

MATEMATIKA

EMELT SZINT

A 2024-től érvényes követelményekhez, 1. kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2023

A könyvet írta: **Trembeczki Csaba** • *középiskolai tanár*

Lektorálta: Németh Sarolta • *középiskolai tanár*

Felelős szerkesztő: Tóth Katalin

Borítóterv: Szőke András

Műszaki szerkesztő: Horváth Péter

Ábrák: Horváth Péter, Kovács Attila

Anyanyelvi lektor: Varró Sándor

Fotók: shutterstock.com, NASA

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is.
A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

ISBN: 978 963 697 899 0

Copyright: Mozaik Kiadó – Szeged, 2021, 2023

Kedves Érettségire Készülő Olvasónk!

Engedje meg, hogy bevezetőnket egy klasszikus matematikai fordulattal kezdjük: *tételezzük fel,* hogy Ön olyan szakon szeretne továbbtanulni, amelyhez szükséges a matematika. Ha ez igaz, akkor mindig legyen Ön előtt: most nemcsak érettségire készül, hanem a későbbi tanulmányait is megalapozza!

Az emelt szintű írásbeli érettségire való felkészülés matematikából is összetett folyamat, melynek legfontosabb lépései a következők:

- a szükséges tananyag áttekintése, megtanulása (a tananyag pontos leírását megtalálja az *érettségi vizsgakövetelmények matematikából* címszóra keresve az interneten);
- az áttekintés során az egyes témakörökhöz kapcsolódó tematikus feladatok megoldása (javasoljuk, hogy ehhez keressen jó tankönyveket, feladatgyűjteményeket, és nézzen bele az elmúlt évek emelt szintű érettségi feladatsoraiba is);
- a felkészülés második felében (amikor már jó pár téma tanulásával végzett) rendszeres időközönként **próbaérettségi feladatsorok** írása.

A felkészülés harmadik lépéséhez szívből *„ajánljuk magunkat":* könyvünkben 12 darab, az elmúlt évek matematikaérettségi feladatainak elemzése alapján készült feladatsort talál.

Gondolatok a feladatsorokról

A feladatsorokat – melyeket önálló gyakorlásra javaslunk – igyekeztünk úgy összeállítani, hogy modellezzék az „éles" érettségin várható feladatsorok felépítését. A vizsgán ugyanis bizonyos témakörök mindig előkerülnek (síkgeometria, térgeometria, valószínűségszámítás, függvények, valamilyen egyenlet vagy egyenlőtlenség, gráfelmélet, az analízis elemei). Ezekhez csatlakozik még kombinatorika, halmazelmélet, sorozatok, logika, matematikai modell készítését igénylő feladat.

Készüljön úgy az írásbelire, hogy összegyűjti az egyes témakörökre jellemző feladattípusokat. Tudatosítsa, hogy mire érdemes figyelni az egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok megoldásakor, melyek azok a geometriai tételek, amelyek jellemzően előkerülnek a feladatokban stb. Ha végez egy témakörrel, „lépjen egyet hátra", és gondolkozzon el először annak belső összefüggésein (például miben hasonlít, miben tér el a *szinusz-* és a *koszinusztétel* felhasználása), majd a más témákhoz kötődő kapcsolódási pontokon (mint a *területszámítás* vagy a *Pitagorasz-tétel*). Ezzel az írásbeli mellett a szóbeli vizsgára is készül.

Jó tanácsok a próbaérettségi feladatsorok használatához

A felesleges idegeskedés elkerülése érdekében jegyezze meg: minden feladatsor megoldásával azt az állapotot rögzíti, hogy az adott napon milyen teljesítményt tudott nyújtani. Ha nem sikerült úgy, ahogy szerette volna, ne csüggedjen. Minden eredmény fejleszthető! Alaposan elemezze azoknak a feladatoknak a megoldásait, amelyek kevésbé jól sikerültek.

Ha átgondolja és megérti, hogy *mit miért* rontott el egy adott feladatban, akkor jó eséllyel később eszébe jut a helyes lépés, és elkerüli gondolkodása csapdáit. A könyvben található részletes megoldási útmutatók segíteni fogják ebben.

A próbaérettségi írásának az a célja, hogy a valódi vizsgát a lehető legjobban modellezve felkészítse az ott várható teendőkre.

A 12 próbavizsga 12 napot fog igénybe venni a felkészülésből, ezért tervezze meg, mikor írja őket. Készítse elő az optimális körülményeket: legyen Ön körül nyugalom, csend, ne kelljen másra, csak a feladatok megoldásaira koncentrálnia. Kapcsolja ki és tegye el a mobiltelefonját, hiszen élesben, az érettségi vizsgán is ezt kell majd tennie. Az asztalán és a látóterében csak az alábbiak legyenek:

- feladatsor, üres papír, kék tollak, ceruza (nem piros, kizárólag az ábrák rajzolásához!);
- függvénytábla, vonalzó, körző, szögmérő és **az** a szöveges adatok tárolására és megjelenítésére **nem** alkalmas számológép, amelyet majd a vizsgán is használ. (Ebbe a vizsga előtti utolsó próbaérettségi előtt feltétlenül érdemes új elemeket tenni és így kipróbálni, hogy biztosan működjön majd a vizsgán is!)

Célszerű teljes délelőttöket (8^{00}–12^{00}) szánni a próbavizsgákra.

A feladatsorok – és azokon belül a feladatok – tetszőleges sorrendben oldhatók meg a rendelkezésére álló **4 óra alatt.** Használja fel az időt! Dolgozzon alaposan, hiszen **minden lépést indokolnia kell.** Figyeljen a tételek hivatkozására: például nem mindegy, hogy a *Pitagorasz-tételt* vagy annak *megfordítását* használta, és fontos, hogy a Newton–Leibniz-tételt csak a primitív függvény megkeresése után alkalmazhatja. Gondolatmeneteit igyekezzen világosan és egyszerűen megfogalmazni. Ha egy részben nem biztos, számoljon tovább – a folytatásra még kaphat teljes pontszámot!

Ahogy majd az érettségi vizsgán is, a feladatsorok 1–4. feladatát mind meg kell oldania. Az 5–9. feladatok közül egyet kihagyhat, annak sorszámát egy üres négyzetben jelölnie kell. Ha nem teszi meg egyértelműen, akkor a javítónak *kötelezően az utolsó feladatot kell figyelmen kívül hagynia* – akkor is, ha azt esetleg maximális pontszámra oldotta meg. Próbálja meg az összes feladatot megoldani, majd gondolja át, melyik feladatot hagyja ki. Lehet, hogy egy 10 pontos részfeladat teljes megoldásáig nem jut el, de több pontot szerez vele, mint a biztosan megoldottnak *vélt* két 3 pontossal.

Ha egy feladatsort megoldott, később nyugodtan térjen vissza hozzá, és próbálja meg újra.

A könyv minden közreműködőjével együtt drukkolok Önnek a sikeres érettségijéhez!

A szerző



Feladatsorok

Tanácsok a feladatsorok megoldásához

A feladatsor megoldására a vizsgán 240 perc áll rendelkezésre.

Ha végzett egy-egy feladattal, akkor olvassa el újra a szöveget, és ellenőrizze, hogy megtette-e a következőket:

- *felhasznált minden szükséges adatot,* minden *feltételt* figyelembe vett, megtette a *kikötéseket;*
- a kérdésre *válaszolt,* a feladatban *meghatározott* típusú értéket (pl. egész számot) kapott;
- a megoldásnál helyes *mértékegységet* írt, a kért módon *kerekítette* a megoldást;
- *ellenőrizte* a kapott megoldást a szövegbe vagy a kiinduló egyenletbe visszahelyettesítve;
- alaposan *megindokolta* a megoldás során alkalmazott lépéseket.

Ha egy feladattal elakad, inkább térjen át egy másik kérdésre, és később próbálja újra. Használja bátran a függvénytáblát, készítsen vázlatokat, gyűjtsön ötleteket! Jusson eszébe, hogy alkalmazhat *indirekt* vagy *teljes indukciós* bizonyítást is!

Ne mulassza el kiválasztani és a sorszámát a négyzetbe beírni az 5–9. feladatok közül annak, amelynek az értékelését a vizsgán „passzolná”.

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 Legyen az x pozitív valós szám.

a 3 ☐
b 4 ☐
c 5 ☐
ö 12 ☐

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás a pozitív valós számok halmazán! Válaszát indokolja!

Ha $a = b$, akkor a és b harmonikus, mértani és számtani közepe mértani sorozatot alkot.

b) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását a pozitív valós számok halmazán, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

c) Az x pozitív valós számnak és 5-nek a négyzetes közepe $\sqrt{17}$. Mennyi az ismeretlen szám értéke?

2 *a)* Határozza meg $\frac{p}{q}$ értékét, ha $q \neq 0$, $q \neq -2p$ és $\frac{2p+q}{4p+2q} = \frac{10p}{9q}$.

a 3 ☐
b 5 ☐
c 4 ☐
ö 12 ☐

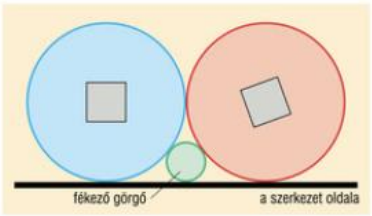
b) Oldja meg a valós számok halmazán az $|1 - |x|| \geq 1$ egyenlőtlenséget!

c) Adja meg azon egyjegyű pozitív számok halmazát, amelyekre $\cos\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3 *a)* Egy deltoid oldalainak hossza a és b, köré kör írható. Bizonyítsa be, hogy a deltoid területe $T = ab$.

a 4 ☐
b 6 ☐
c 3 ☐
ö 13 ☐

Egy régi szerkezetben nem fogaskerekeket, hanem azonos méretű, egymással érintkező, henger alakú gumigörgőket használtak. A szerkezetet használaton kívül úgy zárták le, hogy a két nagy görgő „közé" egy kisebb méretű fékező görgőt szorítottak, erre csukták a szerkezet oldalát.



b) Számítsa ki a kis görgő érintkezéshez szükséges minimális sugarát, ha a nagy görgő átmérője 16 cm!

c) A nagy gumigörgőket egy 4 cm oldalú négyzet keresztmetszetű tengelyre húzták, hogy a forgómozgást át tudják adni. Határozza meg, hány köbcentiméter gumi szükséges a két nagy görgő gyártásához, ha a négyzetes oszlop alakú tengelyeknek a görgők belsejébe eső hossza 6-6 cm!

4 Egy vegyesbolt vezetője azt figyelte meg, hogy egy bizonyos árucikk esetén minden 100 Ft-os árcsökkenés napi kettő darabbal több termék eladását eredményezi. Gyors fejszámolás után azt kapja, hogy e modell szerint 5000 Ft-os egységár esetén ebből a termékből naponta 20 darabot adnának el.

a) 3 ☐
b) 5 ☐
c) 6 ☐
ö) 14 ☐

a) Hány darabot adnának el a modell szerint akkor, ha 3550 Ft-os árcédulát tennének az árucikkre?

b) Igazolja, hogy a napi bevétel $b(x) = -0{,}02x^2 + 120x$ hozzárendelési szabállyal írható le, ahol x a termék egységára forintban!

c) A termék beszerzési ára fix 1800 Ft/darab. Határozza meg, hány termék eladása esetén lesz maximális a bevétel, és mekkora ebben az esetben a terméken keletkező nyereség! (A nyereség a bevétel és a beszerzési ár különbsége.)

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 Gabi és Dani tojásokat festettek húsvétra, összesen 15 darabot. 6 darabra kézzel virágmintát készítettek, a többit egyszínűre festették. A 15 tojást Dani véletlenszerűen osztotta el két fűvel bélelt, fonott tálka között: először a kerek tartóba tett gondosan 8 darab tojást, majd a szögletesbe 7-et.

a) 5 ☐
b) 5 ☐
c) 6 ☐
ö) 16 ☐

a) Mekkora valószínűséggel kerül a virágmintás tojások közül 4 ugyanabba a tartóba?

Gabi az üzletben alaposan megvizsgálta a tojásokat, mielőtt megvette őket. Megfigyelése szerint „minden tízes tartóra jut egy törött tojás" (értsük ez alatt, hogy a tojások mindegyike 0,1 valószínűséggel törött).

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három 10-es doboz tojást átvizsgálva (kiveszi, megnézi és visszateszi az egyes tojásokat), Gabi legalább kettő törött tojást talál?

Dani a korábban elkészült 15 tojás mellé még p darab pettyest is festett ($p \geq 3$). Húsvét után Dani apukája véletlenszerűen kiválaszt három tojást a sonka mellé vacsorára.

c) Bizonyítsa be, hogy annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között legalább kettő pettyes van, $\frac{p^3 + 42p^2 - 43p}{p^3 + 42p^2 + 587p + 2730}$.

→ 56

6 Egy enyhe tüneteket okozó vírus elterjedésekor azt figyelték meg a szakemberek, hogy munkanapokon a *napi fertőzési ráta* magasabb volt (107%), mint szombaton vagy vasárnap (102%). A különbséget azzal magyarázták, hogy hétvégéken nagymértékben csökken az emberek közötti találkozások száma. (A 107%-os fertőzési ráta azt jelenti, hogy a megadott időszakban – példánkban egy munkanap – 100 fertőzött személyre körülbelül 7 újabb fertőzött jut.)

a 3
b 4
c 9
ö 16

a) Igaz vagy hamis a következő kijelentés? Válaszát indokolja!

A vírus heti fertőzési rátája eléri a 150%-ot.

A kórokozó terjedését egy viszonylag zárt közösségben csak később vették észre. Amikor kiderült, megállapították, hogy az *addigi időszakra vonatkozó fertőzési ráta* (amelyben 3 hétvége volt) 435,79%. Feltételezzük, hogy a *hétköznapi napi fertőzési ráta* ebben a közösségben is 107%, a *hétvégi napi fertőzési ráta* 102%.

b) Határozza meg, hogy ebben a közösségben összesen hány napja terjedt a fertőzés!

A vírus a szakemberek és a lakosság szoros együttműködése következtében végül az utolsó héten 5 munkanap alatt lecsengett. Ezen a héten a *napi fertőzési ráta* mindennap ugyanannyi százalékkal csökkent, ráadásul már szerdán elérte a bűvös 100% értéket, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy nem terjed tovább. Így az *5 munkanapra számított fertőzési ráta* 99,992% volt.

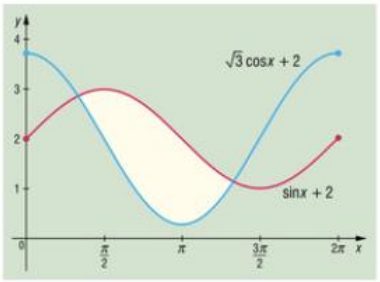
c) Számítsa ki, mekkora volt a *hét első napján a fertőzési ráta,* és adja meg %-os alakban!

7 Adottak a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon értelmezett következő függvények:

$$f(x) = \sin x + 2$$

és

$$g(x) = \sqrt{3}\cos x + 2.$$



a 4
b 8
c 4
ö 16

a) Igazolja, hogy a $g(x)$ függvény mindenhol pozitív értéket vesz fel!

b) Számítsa ki az ábrán sárgával jelölt, a két görbe által határolt zárt síkidom területét!

Egy műszaki cikkekkel kereskedő online üzletnek az év nagy részében 60%-os haszna van egy népszerű játékkonzolon. A „fekete péntek" nevű időszakban a konzolra 40%-os kedvezményt hirdet a bolt.

c) Mekkora hasznuk keletkezett az üzemeltetőknek a kedvezményes időszakon kívül, ha a „fekete pénteken" adták el a teljes éves mennyiség 25%-át, összesen 11,52 millió forint értékben? (A haszon az eladási és beszerzési ár különbözete.)

8 *a)* Egy egyszerű gráfban a pontok fokszámainak összege 100. Adja meg, hogy legalább hány pontja van a gráfnak, ha tudjuk, hogy van benne 0 fokú pont!

a 6 ☐
b 3 ☐
c 7 ☐
ö 16 ☐

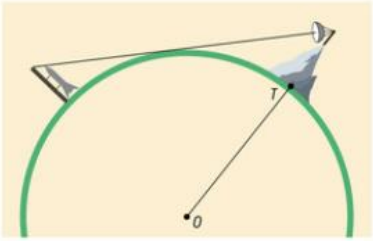
Bolygónk égi kísérője, a Hold a Földhöz hasonlóan gömb alakúnak tekinthető, amelynek sugara 1737,1 km.



b) A Hold magjának átmérője megközelítőleg 475 km. Hány százaléka a mag térfogata a teljes Hold térfogatának?

A Hold legmagasabb hegye 11 350 méter magas, a mérnökök ennek tetejére szeretnének radarállomást telepíteni.

Egy 250 méter magas rakétakilövő tornyot is terveznek a mérnökök, bizonyos okok miatt a lehető legtávolabb a hegytől – azonban fontos, hogy a radar „rálásson" a kilövőállomás tetejére.



c) Legfeljebb milyen messze lehet a Hold felszínén mérve a T ponttól a kilövőállomás talppontja? (A hegyen kívül simának tekintjük a felszínt.)

9 Egy radartorony helyzete a koordináta-rendszerben az $O(-6; 12)$ pont. Két kisebb érzékelő található még az $A(18; -6)$ és $B(10; 0)$ pontokban. A torony radarja által lefedett terület kör alakúnak tekinthető, amelynek egy érintője az A és B pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese.

a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

a) Mekkora a radar által lefedett terület, ha a koordináta-rendszerben 1 egység a valóságban 2 km-nek felel meg? (A Föld görbületétől eltekintünk.) Válaszát egész négyzetkilométerre kerekítve adja meg!

b) Egy repülőgép az e: $3x - y = 5$ egyenes mentén repül keresztül a radar által megfigyelt területen. Hány rácspont felett repül át eközben? (Rácspont: olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám.)

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 Egy lufikat fújó gép szabályozza a bejutó levegőmennyiséget az eltelt idő függvényében, másodpercben mérve. A gömb alakú lufi átmérőjét centiméterben a fújás x. másodpercében a $d(x) = -\frac{8}{45}x^2 + \frac{16}{3}x$ függvény adja meg. A gép a görbe maximumánál hagyja abba a befúvást, és levegővesztéség nélkül köti el a lufi száját.

a 2 ☐
b 4 ☐
c 5 ☐
ö 11 ☐

a) Határozza meg egész centiméterre kerekítve a lufi átmérőjét a 10. másodpercben!

b) Hány másodperc alatt fújja fel a lufit a gép?

c) Számítsa ki, hányadik másodpercben lesz a lufi felszíne pontosan 400π cm^2! Ne használjon közelítő értéket!

2 Oldja meg az egyenlőtlenséget és az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

a 4 ☐
b 8 ☐
ö 12 ☐

a) $\sqrt{\frac{x}{5} - 4} < 20$

b) $\left.\begin{aligned} \log_2 x + 3\log_2 y &= 2{,}5 \\ \log_3(x^2) + \log_3 y &= 0 \end{aligned}\right\}$

3 A ruhaüzletekben a felpróbált, de meg nem vásárolt ruháknak külön állványt állítanak ki. Nyitás után nem sokkal a 4 próbafülkébe 4, 3, 5 és 2 darab különböző ruhát vitt négy vásárló. A próbára vitt ruhák közül 2 darabot mindegyikük megvásárolt, a többit sorban felakasztották az állványra (a ruhák nem keveredtek össze, más nem használta az állványt ekkor).

a 3 ☐
b 4 ☐
c 7 ☐
ö 14 ☐

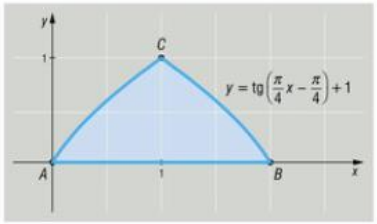
a) Számítsa ki, hányféle sorrendben kerülhettek a ruhák az állványra, ha figyelembe vesszük, hogy melyik ruhát melyik vevő próbálta fel!

Egy tervezés alatt álló embléma csúcsai:

$A(0; 0)$, $B(2; 0)$ és $C(1; 1)$.

Az emblémát határoló három vonal közül egyik az AB szakasz. Az AC ívet az alábbi függvény írja le:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) + 1, \quad 0 \le x \le 1.$$



Az embléma terve szimmetrikus az $x = 1$ egyenesre.

b) Adja meg a CB ívet leíró $g(x)$ függvény hozzárendelési szabályát!

Az előző pontban megadott embléma AC ívét elég jó közelítéssel leírja a $[0; 1]$ intervallumon értelmezett $h(x) = \frac{8}{7}\left(\frac{x}{2} - 1\right)^3 + \frac{8}{7}$ függvény.

c) Döntse el, hogy az $f(x)$ vagy a $h(x)$ görbe alkalmazásakor válik „hegyesebbé" az embléma csúcsa a C pontban! (Az az embléma hegyesebb, amelynek az ívét alkotó függvény érintője meredekebb a C pontban.)

4 Peti úgy készített a társasjátékához egy nyolcoldalú „dobótestet", hogy összeragasztott két egybevágó, négyzet alapú egyenes gúlát, amelyek alaplapjai hézagmentesen fedik egymást, oldallapjaik pedig szabályos háromszögek.



a) Számítsa ki, hány fokos szöget zár be a „dobótest" két szomszédos oldallapja egymással!

a 6 ☐
b 8 ☐
ö 14 ☐

Egy különböző online boltok árait összehasonlító weboldal a termék alatti grafikonon bemutatja a termék átlagárának változását az elmúlt időszakban. Egy termék esetén a grafikon azt mutatja, hogy az ára sokáig nem változott, majd két hete bizonyos százalékban növekedett. Azonban két napja a növelt ár a növelés mértékénél 3%-kal nagyobb mértékben csökkent. A két árváltozás összességében 4,3%-os csökkenést eredményezett az egy hónappal ezelőtti árhoz képest.

b) Határozza meg a növekedés és a csökkenés százalékos mértékét!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 *a)* Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja!

Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor van két szögfelezője, melyek a szemközti oldalakat egyenlő arányban osztják.

a 3 ☐
b 5 ☐
c 8 ☐
ö 16 ☐

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igazolja ellenpéldával, hogy a megfordított állítás hamis!

c) Az ABC derékszögű háromszög BC befogója 3, AC befogója 4 egység. Egy olyan PQR egyenlő szárú háromszöget írunk bele, amelynek P csúcsa az átfogóra, alapjának Q végpontja a BC, R végpontja az AC befogóra illeszkedik és szimmetriatengelye merőleges az átfogóra. Határozza meg, mekkora az ABC háromszögbe írható legnagyobb területű PQR háromszög alapja!

6 *a)* Igazolja, hogy nincs olyan a, b, c pozitív egész szám, amelyekre teljesül, hogy ebben a sorrendben egy növekvő számtani, $a!$, $b!$, $c!$ pedig ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő elemei!

b) Határozza meg, milyen n pozitív egész számra teljesül, hogy $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

c) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Döntését igazolja!

Létezik olyan szigorúan monoton növő számsorozat, amelyben a szomszédos tagok hányadosai rendre a pozitív egész számokat (1, 2, 3, …) adják.

Másképp: *Minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $a_n < a_{n+1}$ *és* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n$.

a 4 ☐
b 8 ☐
c 4 ☐
ö 16 ☐

7 Egy angol autókészítő manufaktúrában kézzel gyártanak kétüléses sportautókat. Az autó egyik kis alkatrészét három beszállítótól – egy japántól, egy osztráktól és egy angoltól – szerzik be, és beszerelés előtt összeöntik egy nagy ládába. Műszak elején a ládában lévő összes alkatrész 40%-a japán, 200 darab osztrák, ennek 3,5-szerese pedig hazai termék.

a) Egy autóhoz három ilyen alkatrész kell. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a véletlenszerűen kiválasztott három alkatrész közül pontosan egy való Japánból, ha a műszak elején vesszük ki őket!

b) A japán alkatrészek 1%-a, az osztrák alkatrészek 2%-a, az angol alkatrészek 7%-a nem felel meg a minőségi követelményeknek. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy műszak elején kiválasztott alkatrész nem megfelelő, akkor az japán?

c) Az autó egy másik alkatrésze háromszög alakú. Ebben a háromszögben az α szög szinusza megegyezik a β szög koszinuszával, valamint $b : a = \sqrt{3} : 1$. Számítsa ki a háromszög szögeit!

a 6 ☐
b 4 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

8 Egy lapra 10 pontot rajzolunk, és megszámozzuk őket $10k$-tól $10k + 9$-ig, ahol $k = 1, 2, \ldots, 12$-ig az összes egész értéket felveheti (pl. $k = 4$-re a 40, 41, …, 49 számokat írjuk a pontok mellé). Azokat a pontokat kötjük össze éllel, amelyek mellé írt számok nem relatív prímek.

a) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf egyetlen k értékre sem összefüggő!

b) Bizonyítsa be, hogy k választásától függetlenül minden gráf csak egy összefüggő részből és izolált pontokból állhat!

a 4 ☐
b 5 ☐
c 7 ☐
ö 16 ☐

Kati és Jancsi nemrég félbehagytak egy asztalitenisz-mérkőzést, amikor a döntő játszmában Kati 5 : 2 arányban vezetett. A sok egymás ellen lejátszott mérkőzésük alapján kijelenthetjük, hogy Kati egy-egy labdamenetben átlagosan 0,7 valószínűséggel szerez pontot Jancsi ellen (függetlenül attól, hogy ki adogat).

c) Számítsa ki a valószínűségét, hogy Kati végül legalább 11 : 4 arányú győzelmet arat Jancsi felett! (A mérkőzésnek vége van, ha valaki a döntő játszmában – legalább 2 ponttal vezetve – 11 labdamenetet nyer.)

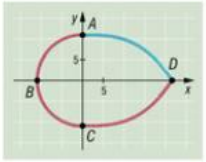
9 Zsuzsi reggelire mindennap eszik egy gyümölcsöt, mégpedig egy narancsot, egy körtét, vagy egy almát. A következő hét napra épp ma vásárol be a piacon, ahol mindhárom gyümölcs kapható.

a) Hányféleképp töltheti meg gyümölccsel a kosarát Zsuzsi, ha csak a gyümölcsök darabszámát vesszük figyelembe?

a 5
b 5
c 6
ö 16

Zsuzsi másnap egy új felmosóvödröt vett a piacon. A vödör 25 cm magas egyenes hengerszerű testnek tekinthető, amelynek körvonala felülnézetben egy félkörből és két szimmetrikus harmadfokú görbeívből áll.





A vödör felülnézeti képét koordináta-rendszerben alkalmasan elhelyezve (1 egység 1 cm-nek felel meg) az ABC félkörív középpontja az origó, a körvonal szimmetrikus az x tengelyre. A felülnézeti képen AC távolság 22 egység, illetve B és D pont távolsága 33 egység.

b) Az ábra kékkel jelölt AD ívének egyenlete $y = -ax^3 + b$. Határozza meg a és b paraméter értékét és a görbe értelmezési tartományát!

c) Számítsa ki a vödör térfogatát! (Az eredményt egész literre kerekítve adja meg!)

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet és az egyenlőtlenséget!

a) $2^{2x} - 2 \cdot (2^2)^2 = 2^{x+2}$ b) $\frac{5-x}{x-3} \leq -2$

a 6 b 5 ö 11

2 Egy autó gumiabroncsának gyári jelölése a következő: 195/65 R15. A számok közül a 195 az abroncs w szélessége milliméterben. A /65 jelentése, hogy a gumi h magassága hány százaléka a szélességének. Ennek a típusnak az esetén a magasság:

$$195 \cdot 0{,}65 = 126{,}75 \text{ mm}.$$

Az R a gumi anyagának belső szerkezetére utal, a 15 a keréktárcsa d átmérője collban (1 coll = 2,54 cm).

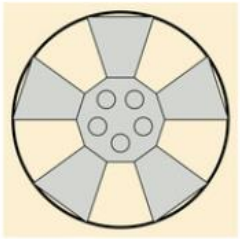


a 6 b 6 ö 12

Egy R jelű terepgumi méretei a következők: a gumi $w = 26{,}67$ cm széles és $h = 109{,}4$ mm magas. A gumi futófelületének nagysága 0,843 m^2. (A kereket egyenes hengernek tekintve a futófelület a henger palástja).

a) Adja meg a gumiabroncs hagyományos gyári jelölését egész számokra kerekítve!

Egy cég könnyűfém keréktárcsák védelmére gyárt a tárcsa külső, fémrészeire ragasztható fóliát. Legújabb termékük az ábrán látható 195/65 R15 típusra való. A kerékanyáknak kihagyott lyukak 4 cm átmérőjűek.



b) Határozza meg a fólia területét egész négyzetcentiméterre kerekítve, ha a belső szabályos tízszög köré írt kör átmérője 41%-a a külső szabályos tízszög átmérőjének!

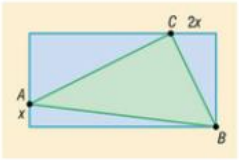
3 Adott a k: $(x-2)^2 + y^2 = 56{,}25$ egyenletű kör és az e: $3x + 4y = b$ egyenes.

a) Határozza meg az egyenes egyenletében b paramétert úgy, hogy az e egyenes áthaladjon a k kör középpontján!

b) Határozza meg az egyenes egyenletében b paramétert úgy, hogy az e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

a 3 b 11 ö 14

4 Adott az $a = 2$ cm, $b = 4$ cm oldalú téglalap. Az ABC háromszög B csúcsa a téglalap egyik csúcsába esik, másik két csúcsa az ábra szerint mozog a téglalap két oldalán ($0 \le x \le 2$).



a 3 ☐
b 3 ☐
c 8 ☐
ö 14 ☐

a) Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög területét a következő függvény írja le: $t(x) = -x^2 + 4$!

b) Határozza meg, milyen egész x értékekre lesz a háromszög területe pozitív egész szám! (Ne használjon közelítő értéket!)

c) Határozza meg azt az x értéket, amelyre a háromszög A csúcsnál levő szöge 45°-os!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 *a)* Az $f(x) = x(p - x)$ függvény értelmezési tartománya a $[0; p]$ intervallum. Határozza meg p értékét úgy, hogy a parabola x tengellyel bezárt területe $\frac{500}{3}$ területegység legyen!

a 5 ☐
b 11 ☐
ö 16 ☐

b) Adott a valós számokon értelmezett $g(x) = ax^3 + (a - 1)x^2 + bx$ függvény, ahol a és b valós paraméterek. A $g(x)$ függvénynek $x = 1$ pontban zérushelye, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pontban szélsőértéke van. Számítsa ki az a és b paraméterek értékét! Adja meg a $g(x)$ függvény minden szélsőértékének helyét és értékét!

6 *a)* Adott az első 500 darab pozitív páros szám. Határozza meg, hány olyan szám van közöttük, amely a 15-tel relatív prím!

a 5 ☐
b 5 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

Az ábrán egy módosított Pascal-háromszöget látunk. Az eredetihez hasonlóan itt is a kezdő, 0. sorban egy darab 1-es van, és minden sor kezdő, 0. eleme 1-es, továbbá minden számot a felette álló két számból származtatunk.

0. sor				1				
1. sor			1		2			
2. sor		1		4		4		
3. sor	1		6		12		8	
4. sor	1	8		24		32		16

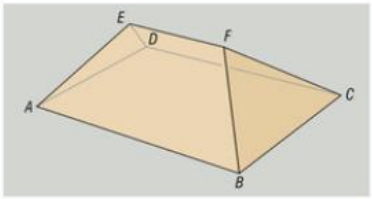
Azonban a szabály más: a bal felső szomszéd 2-szereséhez adjuk a jobb felső szomszédot (például a 3. sorban $6 = 2 \cdot 1 + 4$, a 4. sorban $32 = 2 \cdot 12 + 8$).

b) Igazolja, hogy minden sorban a számok összege 3 hatványa!

c) Bizonyítsa be, hogy az n. sor harmadik elemét megkaphatjuk úgy is, ha ugyanezen sor második elemét megszorozzuk $(n - 1)$-gyel!

(Például a 3. sorban $12 = 2 \cdot 6$, a 4. sorban $24 = 3 \cdot 8$.)

7 Egy kontytető sematikus rajza látható az ábrán. A tető alapja az *ABCD* téglalap, a szemközti határoló lapjai egybevágó szimmetrikus alakzatok. Ismert méretei a következők:



$AB = 12$ m, $BC = 10$ m,

$\sphericalangle ABF = 50°$.

a 4 ☐
b 6 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

A tető készítése közben azt vették észre az ácsok, hogy a délben függőlegesen fentről érkező napsugarak alatt a *BF* és *CF* gerendák árnyékai derékszöget zárnak be a tető vízszintes síkjában.

a) Határozza meg, milyen hosszú az *EF* tetőnyereg!

b) Számítsa ki a *BFC* és *ABCD* síkok által bezárt szöget!

Egy kis légitársaság n város között üzemeltet járatokat úgy, hogy velük bármely városból bármely másikba eljuthatunk akár közvetlenül, akár átszállással, de pontosan egy útvonalon (egy repülőgép csak és kizárólag adott két város között jár). A társaság a jövőben bármely két város között szeretne üzemeltetni repülőjáratot. Számításaik szerint ehhez 10 repülőgépet kellene vásárolniuk.

c) Hány gépe van most a társaságnak?

8 Az emberek már az ókorban is szívesen játszottak társasjátékokat. Egyiptomban például a szenet nevű játékban a lépések meghatározásához négy dobópálcát használtak (ezek egyforma, keskeny és vékony falapok, amelyek egyik oldala fehérre van festve). Egyszerre vetették el (dobták el) őket, és annyit léptek, ahány pálcának a fehér oldala volt felfelé.



a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

a) Igazolja, hogy a szenet nevű egyiptomi társasjátékban a játékosok körönként átlagban kettőt léptek! (Azaz a négy pálcát elvetve a dobás várható értéke 2 volt.)

Egy hagyományos dobókockával játszott társasjáték utolsó 8 mezőjét „végjátéknak" nevezik (ez a rész látható az ábrán).



A végjáték mezőinek jelentése a következő:

- **1, 2, 3, 4, 5 mezők:** ezeken állva már csak a célba léphet a játékos, de ahhoz annyit kell dobnia, amennyit a mező mutat.
- **„rossz" mező:** ha itt fejezi be egy lépését, akkor az a kör véget ért számára, és még a következő körből is kimarad.

- **„jó" mező:** innen indulva kétszer dobhat (kivéve, ha elsőre 1-est dob: akkor meg kell állnia a „rossz" mezőn, vagyis ez a kör véget ért számára, és a következő körből is kimarad).

A jó mezőről indulva akár egy kör alatt is célba érhet a játékos. Például elsőre 4-est dobva a 3-as mezőre lép, majd másodikra 3-ast dobva célba ér.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a „jó" mezőn álló játékos legfeljebb két kör alatt célba ér?

9 Egy munkahelyen nyolc számítógép van hálózatba kötve. A hálózatot karbantartó rendszergazda írt egy kis tesztprogramot, amely nagyjából percenként véletlenszerűen ellenőriz három különböző géppárt, hogy közöttük rendben zajlik-e a kommunikáció. (Két géppár különböző, ha a pár legalább egyik tagja különböző.)

a 6
b 4
c 6
ö 16

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy teszteléskor van két gép, amelyek közül mindhárom ellenőrzés egyik kiválasztott tagja az egyik vagy a másik gép közül kerül ki!

Egy emberről emberre terjedő kórokozóval fertőzött, de tünetmentes személy 1,8 egészséges embernek tudja átadni egy nap folyamán a kórokozót. A megfertőzött személy másnap már képes továbbfertőzni, de 14 napig tünetmentes. Egy iskolának összesen 600 tanulója, dolgozója van.

b) Észreveszik-e a járványt még azelőtt, hogy az iskola összes tanulója és dolgozója fertőzötté válhat?

Egy kifejlesztett teszt elvileg már akkor kimutatja a vírusfertőzést, amikor az egyén fertőzőképessé válik. A fejlesztők szerint *„fertőzött ember esetén 99,9% valószínűséggel kapunk pozitív eredményt. Az egészséges emberek esetében néha jelez, ám a 'fals pozitív' eredmény valószínűsége csupán 2%."* Úgy becsüljük, hogy a tesztelés napján az iskola tanulói, dolgozói közül körülbelül 50 fő fertőzött lehet. A tesztet mindenképpen érdemes elvégezni, ha pozitív teszteredmény esetén legalább 80% a valószínűsége, hogy az illető fertőzött.

c) Számítások alapján döntse el, érdemes-e a tesztet elvégezni!

4. feladatsor

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! a 7 b 4 ö 11

$\cos x - 2\cos^3 x = 0$

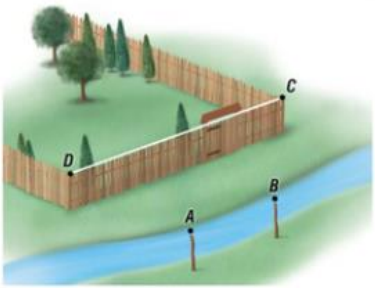
b) Legyen $f(x) = 3^{2x+1}$. Igazolja, hogy

$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 9$.

2 Egy négyszög a, b, c, d oldalai közül $b = 17$ cm, $d = 33$ cm. Az a és a c oldal hosszának centiméterben mérve véletlenszerűen választunk egy-egy kétjegyű pozitív egész számot. a 7 b 6 ö 13

a) Mekkora valószínűséggel alkot az így kapott négy szakasz érintőnégyszöget? (A négyszögekben az a és a c oldalt megkülönböztetjük.)

Tamás a feleségétől egy olyan mobiltelefont kapott a születésnapjára, amelyik fokra pontosan képes mérni egy adott pontból két másik pont közötti szögelfordulást. Hogy kipróbálja, a telkük mögött csörgedező patak túloldalán megjelölte egy leszúrt bottal az A pontot, majd tőle 16 méterre a B pontot (A, B, C, D egy vízszintes síkba esnek, ahol C és D pontok a telek sarkait jelölik).



Ezután telefonját a botok tetejére illesztve lemérte az alábbi szögeket:

$DAC\sphericalangle = 78°$, $CAB\sphericalangle = 35°$,

$DBC\sphericalangle = 67°$, $DBA\sphericalangle = 29°$.

b) Számítsa ki a DC távolságot! Eredményét méterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

3 Adottak az alábbi egyenletű parabolák ugyanazon a valós paraméterrel: a 7 b 6 ö 13

$y = x^2 + ax - 2$ és $y = x^2 - 2x + a$.

a) Bizonyítsa be, hogy a két parabolának az a paraméter megválasztásától függetlenül mindig van közös pontja!

b) Határozza meg az a paraméter értékét, ha ismert, hogy a két parabola csak az x tengelyen metszi egymást!

4 Adott a $]0; 2]$ intervallumon értelmezett f függvény: $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$.

a) Adja meg azt a leghosszabb zárt intervallumot, amelyen az f egyetlen helyettesítési értéke sem pozitív!

b) Számítsa ki az $\int_1^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét!

c) Egy téglatestnek pontosan nyolc éle 12 cm hosszú. Térfogatának mérőszáma egyenlő a felszíne mérőszámával. Számítsa ki a téglatest felszínét!

a 7 ☐
b 3 ☐
c 4 ☐
ö 14 ☐

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 Egy gyártó az általa készített napelemekre azt a garanciát vállalja, hogy termékei 25 év használat után a gyártáskor mért teljesítmény minimum 80%-ára képesek.

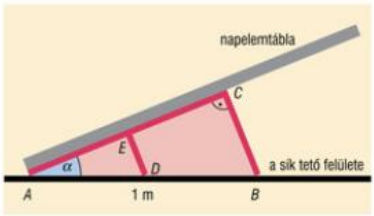
a) Határozza meg, legfeljebb hány százalék a gyártó által garantált éves teljesítményromlás, ha az éves teljesítménycsökkenést minden évben azonosnak tekintjük! Válaszát két tizedesjegyre adja meg!

b) A gyártó a honlapján 1%-os éves teljesítményromlással kalkulál. Határozza meg, legalább hány egész évnek kell eltelnie, hogy a napelem teljesítménye 50% alá csökkenjen!

a 3 ☐
b 5 ☐
c 8 ☐
ö 16 ☐

A napelemek felülete 1,6 m × 1 m, sík tető esetén fém tartószerkezetre telepítik őket. Az ábrán a tartószerkezet keresztmetszetét piros szín jelöli.

A szerkezet 3 eleme az $AB = 1$ m átfogójú ABC derékszögű háromszög AC és BC befogója, illetve a DE középvonala.



c) Határozza meg a tartószerkezet ábrán látható elemeinek elméleti maximális hosszát egész centiméterre kerekítve, ha az ABC háromszög α szögére: $0 < \alpha < 90°$!

6 Adott az $\mathbb{R}^+$ halmazon értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x - 5\sqrt{x} \quad \text{és} \quad g(x) = x + 5\sqrt{x}.$$

a) Igazolja, hogy $f(x)$ a $[7; 25[$ intervallumon negatív értékeket vesz fel!

b) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) \cdot g(x)| \leq 46$ egyenlőtlenséget!

a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

7 Egy népszerű csokiszeletet gyártó cég akciót hirdet a termékeire. Szerencsés esetben a csomagolás belsejében „Nyert" felirat olvasható. A csomagolás külsején látható reklám szerint a csokik közül *„minden negyedik nyer"*.

a 4 ☐
b 5 ☐
c 7 ☐
ö 16 ☐

a) Kata hat szelet csokit kapott ajándékba. Mekkora valószínűséggel van közöttük legalább kettő nyerő?

b) Döntse el, melyik esemény következik be nagyobb valószínűséggel!

A) Négy megvásárolt csoki közül egyik sem nyer.

B) Öt megvásárolt csokiból páros sok nyer, de a nyereménycsokik nem nyernek.

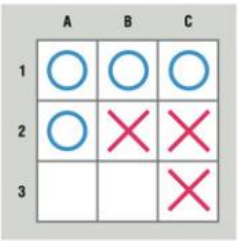
→ 100

Egy magyar–német vegyesvállalat online videókonferenciájához az elmúlt fél órában 6 magyar és 4 német kolléga csatlakozott, így a konferencia résztvevői között a magyarok aránya 40%-ról 48%-ra növekedett.

c) Számítsa ki, jelenleg hányan vesznek részt az online videókonferencián!

8 A tic-tac-toe nevű játékot két játékos játssza egy 3 × 3-as táblán. Az egyik játékos az X, a másik a O szimbólumot használja, felváltva helyezik el jelüket egy szabad mezőn.

Az nyer, akinek vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan három jelet sikerül egymás mellé tenni. (Az ábrán például O nyert.)



a 2 ☐
b 6 ☐
c 4 ☐
d 4 ☐
ö 16 ☐

Jelöljük a tábla oszlopait A, B, C betűkkel, a sorokat pedig 1, 2, 3 számokkal.

Tekintsük azt a gráfot, amelyben minden pont egy mezőnek felel meg (az A1 pont a bal felső mezőnek). Két pontot akkor köt össze kék színű él, ha nyerő állást alkotnak egy harmadik ponttal (például a B1, B2, B3 pontok össze vannak kötve egymással).

a) Melyik a legnagyobb fokszámú pont a gráfban? Mennyi a fokszáma?

b) Határozza meg, hány fekete élt kellene még berajzolni ebbe a gráfba a kékek mellé, hogy az élek színétől eltekintve teljes gráfot kapjunk!

c) A fekete élek alkotta gráfban tekintsük csak azokat az éleket, amelyek az A1, A2, A3 pontokhoz kapcsolódnak. Közülük néhány kört alkot. Hány él alkotja ezt a kört?

d) A teljes gráfban túl sok fekete él van ahhoz, hogy fagráfot alkossanak. Tudunk-e belőlük elhagyni úgy, hogy az *eredeti gráf mind a 9 pontja* és a megmaradt fekete élek fagráfot alkossanak? Válaszát indokolja!

9 Egy prémiumparfümöket árusító üzlet kétórás akciót hirdetett. Az akció első órájában 30 fő vásárolt. Az üzletvezető tudta, hogy a második óra idősávjában jóval több vásárlóra számíthat, ezért az első óra vásárlásainak átlagértéke alapján biztos volt benne, hogy az akcióban elérik a 6 millió forintos bevételt. Tévedett: az akció egészére összesítve ugyanis az első órához képest 18 000 forinttal csökkent a vásárlások átlagértéke, így az összes bevétel végül 5 040 000 forint lett.

a 10
b 6
ö 16

a) Hányan éltek a meghirdetett akcióval és vásároltak parfümöt az üzletben a két óra alatt, ha az első órában, illetve a második órában vásárolt termékek átlagértékeinek aránya 5 : 3?

b) Határozza meg, hányféleképpen lehet a 120-at páros számok szorzatára bontani!

→ 103

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 a) Adottak az $e: x - my = 6$ és az $f: 2x + y = m$ egyenesek, ahol m pozitív valós paraméter. Határozza meg m értékét úgy, hogy az e és f egyenesek metszéspontjának abszcisszája 2 legyen!

b) Adott az $e: x - 3y = 6$ egyenletű egyenes. Az x tengely (20; 0) pontjából egy lézersugarat bocsátunk az origó irányába, amely az e egyenesről az $A(6; 0)$ pontban visszaverődik. Határozza meg a visszavert lézersugár egyenesének egyenletét közelítő értékek használata nélkül!

a 5 ☐
b 7 ☐
ö 12 ☐

106

2 a) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{9 - 6x + x^2} = \frac{7 - 2x}{2}$$

b) Oldja meg a $[-\pi; 0]$ alaphalmazon az egyenletet!

$$\mathrm{tg}^4 x - 4\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$$

a 6 ☐
b 7 ☐
ö 13 ☐

3 2018. augusztus elején járta be a világot a hír: Svájcot akkora aszály sújtotta, hogy katonai Super Puma helikopterek szállítottak vizet a hegyre a teheneknek. A helikopter utazósebessége $240\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Bizonyítsa be, hogy ha a helikopterek hegynek felfelé az s hosszú utat $v_1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel t_1 idő alatt, hegynek lefelé pedig az ugyanolyan hosszú utat $v_2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel t_2 idő alatt teszik meg, akkor az oda-vissza út átlagsebességét a v_1 és v_2 sebességek harmonikus közepeként kell kiszámítani!

a 4 ☐
b 6 ☐
c 3 ☐
ö 13 ☐

Tételezzük fel, hogy a helikopterek a felfelé úton vízzel megrakodva az utazósebességüknél épp annyival mentek lassabban, mint amennyivel ugyanazon az úton gyorsabban jöttek vissza. Egy oda-vissza út átlagsebességére így $236{,}25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jött ki.

b) Mennyi volt a felfelé és a lefelé úton az utazósebességtől való eltérés?

Egy földön fekvő megfigyelő teodolittal (szögmérő műszerrel) ellenőrzi a vízszintes terep felett feléje tartó helikopter repülési magasságát. Tudja, hogy a vizeshordó 30 méterrel lóg a helikopter alá. Egy adott pillanatban a megfigyelő 28°-os emelkedési szögben látja a tőle 400 méterre levő helikoptert.

c) Határozza meg a vizeshordó talajtól mért távolságát!

4 Egy kilencelemű minta öt különböző pozitív egész értékből áll. A minta mediánja 10, terjedelme 8, két módusza 7 és 14. A mintaelemek mediántól vett átlagos abszolút eltérése 3.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő kilenc számot!

a 9 ☐
b 4 ☐
ö 13 ☐

Külföldi tárgyalódelegáció érkezik egy vállalathoz. A fogadóbizottságnak ugyanannyi tagja van, mint ahányan érkeznek. A fogadóbizottságban mindenki csak a közvetlenül alá beosztottakat ismeri, mást nem, de közvetve mindenki kapcsolatba hozható mindenkivel. Az érkezők közül mindenki közvetlenül ismer mindenkit.

b) Hány tagúak a bizottságok, ha a két bizottságban egyenlő számú ismeretség van?

→ 110

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 Adott az alábbi sorozat: 1; 3; 6; 10; 15; … A sorozat soron következő elemét úgy kapjuk meg, hogy mindig eggyel nagyobb számot adunk (dőlt betűvel jelöltük) az aktuális taghoz, mint az előző esetében:

$1 + 2 = 3$; $3 + 3 = 6$; $6 + 4 = 10$; $10 + 5 = 15$; …

a) Jelölje a sorozatot $\{a_n\}$, tagjait $a_1 = 1$; $a_2 = 3$, és így tovább. Adja meg a sorozat a_{10} elemét!

b) Bizonyítsa be, hogy a sorozat n. tagját az $a_n = \binom{n+1}{2}$ képlet előállítja!

c) Igazolja, hogy akárhogyan is adunk meg egy k pozitív egész számot, a sorozatnak mindig lesz olyan tagja, amely pontosan k darab 0-ra végződik!

a 3 ☐
b 5 ☐
c 8 ☐
ö 16 ☐

6 Egy hegyen átvezető egyenes alagút keresztmetszetét egy fordított állású parabola nemnegatív ordinátájú pontjai és az x tengely adják. A parabola egyenlete:

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + 5.$$

A koordináta-rendszer egysége 1 méternek felel meg a valóságban.

Amíg egy különleges rakománnyal közlekedő teherszállító jármű hajt át az alagúton, a forgalmat leállítják. A teherszállító jármű keresztmetszete négyzetnek tekinthető.

a) Milyen széles lehet a legnagyobb ilyen jármű, amely elfér az alagút alatt? Válaszát egész centiméterre kerekítve adja meg!

b) Az alagút 585 méter hosszú. Hány köbméter levegőt tartalmaz, ha nincs benne egyetlen jármű sem?

a 8 ☐
b 8 ☐
ö 16 ☐

7 Bergengócia egyik áruházában 55 alkalmazott dolgozik, egy részük eladó (ők teszik az árut a polcra, szolgálnak ki a pultokban, ülnek a pénztárban), másik részük biztonsági őr (az áruházi tolvajokat kell lelepleziük).

a 6
b 10
ö 16

Az eladók napi fizetése 100 peták, a biztonsági őröké 175 peták. Egy vásárló átlagosan 30 petákot költ egy nap, azonban egy-egy áruházi tolvaj ennek 1,2-szeresét próbálja fizetés nélkül elvinni az áruházból. A statisztikák szerint minél több eladó dolgozik, annál szívesebben jönnek a vásárlók: az 500, naponta biztosan érkező vevőn túl minden eladó 20 újabb vásárlót „vonz" az üzletbe.

Sajnos azonban az is kiderült, hogy biztonsági őrök nélkül a boltba betérők 30%-a fizetés nélkül próbál távozni. A statisztikák azt mutatták, hogy ez az arány minden biztonsági őr alkalmazásával 1%-kal csökken, azaz egy biztonsági őr alkalmazása esetén már csak 29%, két őr esetén 28% és így tovább. (A biztonsági őrök feladata alapvetően az elrettentés. Sajnos az elfogott tolvajokból is csak kára keletkezik a boltnak, ugyanis a bergengóc rendőrség az árut bizonytalan időre lefoglalja.)

→ 114

a) Határozza meg a fentiek alapján becsült napi hasznot, ha az áruház alkalmazottai közül 42 az eladó! (A haszon a bevétel és a kiadás – ami most a bér és a tolvajok által okozott kár – különbsége.)

b) Számítsa ki, hogy a fenti feltételek fennállása mellett mennyi az áruházban elérhető maximális napi haszon, és hány eladót kell ehhez alkalmazni!

8 Janka kedvenc cukrászdájában a fagylalttölcsér alakja egy alaplapjánál 6 cm belső átmérőjű, 13 cm magas egyenes körkúp. A kimért fagylaltgombócok egybevágó, 5 cm átmérőjű gömbök. Amíg a meleg nyári napon Janka a barátnőjével beszélget, kezében gyorsan olvad a fagylalt.

a 4
b 7
c 5
ö 16

a) Határozza meg, legkevesebb hány gombóc fagylaltot kell kérnie Jankának ahhoz, hogy azok teljesen elolvadva már kifolyjanak a tölcsérből! (Feltételezzük, hogy a tölcsér nem ázik át és a fagylalt térfogata sem változik az olvadás során.)

b) Számítsa ki, hogy ha Janka csak egy gombóc fagylaltot kér, az elolvadva milyen magasan áll a tölcsérben! Kerekítsen egész centiméterre.

Janka egész ügyes egy online játszható „villámjátékban" – amelyben minél pontosabb választ kell adni minél gyorsabban –, a fordulók 68%-át megnyeri. Minden játék két fordulóból áll: a nyertes az elsőben 100, a másodikban 200 pontot szerez, a vesztes pedig mindig 0 pontot kap.

c) Számítsa ki Janka egy játékban szerezhető pontszámának várható értékét!

9 Egy fizikatanár a Paksi Atomerőműbe szervez az érdeklődő végzős diákoknak látogatást reggeli indulással és délutáni érkezéssel. Minél jobban kihasználják a bérelt buszt, annál kevesebb az egy főre jutó költség. A részvételi szándékukat jelzők közül sajnos jelenleg 10 fő beteg. Ha ők nem jönnek, akkor az utazóknak a buszköltségre 741 Ft-tal többet, de ha az utazás napjáig mind meggyógyulnak és még két fő csatlakozik hozzájuk, akkor 114 Ft-tal kevesebbet kellene fizetni.

a 9 ☐
b 7 ☐
ö 16 ☐

a) Mennyi lenne az egy főre jutó buszköltség, ha a betegeknek csak a fele gyógyul fel és tud elmenni a kirándulásra? Válaszát 100 forintra kerekítse!

A tanár hazafelé megkérte a résztvevőket, hogy otthon egy anonim online tesztben értékeljék a látogatást. A teszt mind a hat kérdése esetén az *A*, *B*, *C*-vel jelölt lehetőségek közül kell egyet választani. Nem írta oda, de a kiértékeléskor minden *A* válasz 1, minden *B* válasz 2, minden *C* válasz 3 pontot ér.

Egy kitöltő az első két kérdésre a *C* választ jelölte meg, a harmadikra *A*-t. A 4. és 5. kérdés esetén nem tudott dönteni a *B* és *C* között, az 6.-ra pedig mindhárom lehetőséget elfogadhatónak tartotta, ezért a három utolsó kérdésnél a számára elfogadható válaszok közül véletlenszerűen választott. Tudjuk, hogy a kérdések és a kitöltő azokra adott válaszai is függetlenek egymástól.

b) Várhatóan hány pontja lesz ennek a kitöltőnek a teszt kiértékelésekor?

→117

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőtlenséget a $[0; 2\pi]$ halmazon!

$-2\sin x \leq 1$

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} - 1$

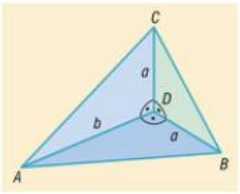
a 5 ☐
b 7 ☐
ö 12 ☐

2 Robi saját grillsütőt készített egy kiszuperált 150 literes, 80 cm magas, egyenes körhenger alakú hordóból. A hordót a forgástengelyével párhuzamosan, a forgástengelytől 5 cm-re fekvő síkban vágta el. A kisebb rész lett a tető, a nagyobb a tűztér, ezeket csuklópántokkal fogatta össze.

a) Hány köbdeciméter a tűztér térfogata?

a 6 ☐
b 6 ☐
ö 12 ☐

Robi a grillsütő lábaira talpakat tervez fémlemezekből. Egy talp három darab egymáshoz forrasztott derékszögű háromszögből készül: *ABD* és *ACD* egybevágó háromszögek, *BCD* pedig egyenlő szárú háromszög. A tervek alapján $2a + b = 36$ cm.



b) Hogyan válassza meg Robi az a él hosszát, hogy a fémlemezek területe a lehető legnagyobb legyen?

3 *a)* Legfeljebb mekkora lehet egy háromszögnek az a szöge, amelyiknél nincs kisebb szög a háromszögben?

b) Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 12 cm, 17 cm. Számítással döntse el, hogy a háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű!

c) Egy derékszögű háromszög oldalai olyan egész számok, amelyek 5 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a háromszög középső oldalának hossza?

a 3 ☐
b 5 ☐
c 5 ☐
ö 13 ☐

4 Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola által a síkból kimetszett konvex tartomány II. síknegyedbe eső területét!

b) Írja fel a parabolához a (-4) abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

a 5 ☐
b 5 ☐
c 4 ☐
ö 14 ☐

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 Tomi 9 évesen kezdett kosarazni, majd egy év múlva stabil helye lett a kezdőcsapatban. Az év végi statisztika szerint 54%-os pontossággal dobta a ziccereket (amikor egyedül vezetheti kosárra a labdát), és 35%-os pontossággal a büntetődobásokat.

a) Tomi az év utolsó meccsén bátran elvállalt egy hárompontos dobáskísérletet, amely közben személyi hibát (faultot) követtek el ellene. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a számára megítélt három büntetődobásból legfeljebb kétszer talál célba! (Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!)

b) Legalább hány ziccerkísérlet kell ahhoz egy mérkőzésen, hogy Tomi legalább 90%-os eséllyel legalább egyszer pontot érjen el?

c) Ezen az utolsó mérkőzésen Tominak összesen 11 ziccer- és 14 büntetődobás-kísérlete volt (másfajta dobása nem volt), amelyekből a statisztikának megfelelő számú dobás lett sikeres (kerekítve). Édesapja csak Tomi dobásait fényképezte: ezeket visszanézve, ha csak azt látjuk a képen, hogy a labda a gyűrűben landol, mekkora valószínűséggel származott a pont büntetőből?

a 4 ☐
b 6 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

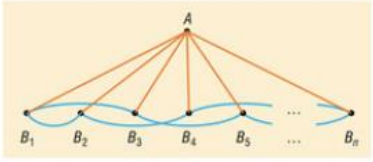
6 *a)* Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan G, illetve G' nemüres teljes gráf, amelyre igaz, hogy G' csúcsainak száma négyszerese G csúcsai számának, továbbá G' éleinek száma hússzorosa G élei számának.

b) Egy tudóscsoportnak 11 tagja van, akik aktívan kommunikálnak egymással: mindenki legalább 5 másik tudóssal beszélget a kutatási eredményekről. Igazolja, hogy ekkor biztosan mindenki értesülni fog minden, a csoportban elért tudományos eredményről!

a 3 ☐
b 7 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

Egy szociológiai vizsgálatban az *A*-val jelzett influenszer követőit vizsgálják. Úgy válogatják össze a B_1, B_2, …, B_n követői csoportot ($n > 1$), hogy a csoportban mindenki pontosan két másik taggal álljon kapcsolatban.



A vizsgálatot végzők felrajzolják a kapcsolati hálót, ebben narancsszínnel jelölik az influenszer, kékkel a csak csoporttagok kapcsolatait. Ezek után az ábrán jelöltekből véletlenszerűen kiválasztanak két kapcsolatot.

c) Legfeljebb hány fős csoportot vizsgáljanak, ha azt szeretnék, hogy legfeljebb 0,24 legyen annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott kapcsolat narancsszínű lesz?

→ 124

7 Egy élelmiszerboltban 3 kg-os csomagban lehet termelői krumplit vásárolni. Tamás nagyon szereti a krumplit és mindig hosszabb időre vásárol, ezért 6 zsák krumplit visz haza. Úgy érzi, két feltétel együttes teljesülése esetén lenne teljesen elégedett:

(1) ha a csomagok tömegének átlaga és mediánja nem térne el 3 kg-tól 2 dkg-nál többel, és

(2) ha sem a mediántól vett abszolút átlagos eltérés, sem a szórás (kerekítve) nem haladná meg a 10 dkg-ot.

a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

Otthon leméri az egyes csomagokat, és az alábbi értékeket kapja:

Csomag	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Tömeg (dkg)	298	306	304	291	285	312

a) A feltételek teljesülését számítással ellenőrizve döntse el, hogy Tamás végül elégedett volt-e a krumplivásárlással!

b) Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-4; 0)$, $B(11; 5)$ és $C(5; 13)$. Igazolja, hogy a $3x - 4y + 12 = 0$ egyenletű e egyenes úgy vágja két darabra az ABC háromszöget, hogy a kerületét és területét is felezi!

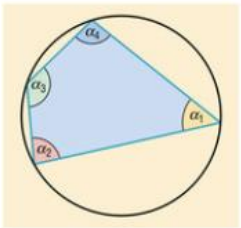
→ 127

8 *a)* Egy mértani sorozat hányadosa $\sqrt{2}$, a sorozat első tíz tagjának összege $\frac{93}{2-\sqrt{2}}$. Igazolja, hogy a sorozat páros tagjai egész számok!

a 4 ☐
b 6 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

b) Egy számtani sorozat differenciája 3, első n tagjának összege $S_n = 235$; első $2n$ tagjának összege pedig $S_{2n} = 770$. Számítsa ki a sorozat első tagját!

c) Az ábrán látható húrnégyszög α_1, α_2, α_4 szöge ebben a sorrendben mértani sorozatot alkot, a negyedik szöge pedig $\alpha_3 = 150°$. Számítsa ki a húrnégyszög szögeit!



9 *a)* Az 56 160-nak és az n pozitív egész számnak a legnagyobb közös osztója 104. Határozza meg azt a legnagyobb, 10 000-nél kisebb számot, amely eleget tesz a feltételnek!

a 6 ☐
b 3 ☐
c 7 ☐
ö 16 ☐

Adott f, g és h függvény:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1}$; $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_3 x$; $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x + 2$.

b) Legyen $k(x) = h(f(x))$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a k összetett függvény külső függvénye a h, belső függvénye pedig az f.

Bizonyítsa be, hogy $k(x) = 9 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x + 2$.

c) Oldja meg az $f(g(x)) > h(x)$ egyenlőtlenséget a függvények közös értelmezési tartományán!

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

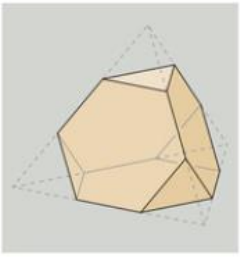
1 *a)* Határozza meg $x \cdot y$ értékét, ha $x, y > 0$ és $x + \frac{49}{y} = 14\sqrt{\frac{x}{y}}$.

b) Legyen $f\colon]4; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(4x - 16)$.
Igazolja, hogy minden $x > 4$ helyen $f(x^2) - f(2x) = \log_3 \frac{x+2}{2}$.

c) Oldja meg a $\log_3 0{,}5 + \log_3(x + 2) \leq 1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a 3 ☐
b 5 ☐
c 5 ☐
ö 13 ☐

2 A képen látható testet úgy kaptuk, hogy egy szabályos tetraéderből az egy csúcsba futó élek csúcshoz közelebbi harmadolópontjain át fektetett síkokkal levágtunk négy kisebb tetraédert.



a) Határozza meg, hány százaléka a test felszíne az eredeti tetraéder felszínének! Válaszát egy tized százalékra kerekítve adja meg!

a 4 ☐
b 8 ☐
ö 12 ☐

Egy cukrászda legkedveltebb specialitása a parfégolyó, amelynek belsejébe ilyen alakú csokit tesznek. Először egy 9 cm élű szabályos tetraédert készítenek csokoládéból, majd levágják a harmadolópontokban a sarkokat, végül az egészet úgy veszik körbe a választható ízű parféval, hogy a desszert gömb alakú legyen, felszíne pedig érintse a csoki sarkait.

b) Számítsa ki a parfégolyó sugarát!

3 Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 3. Tudjuk, hogy a sorozat a_{n-5}, a_n, a_{n+20} tagjai ebben a sorrendben a $\{b_n\}$ mértani sorozat első három egymást követő tagjai.

a) Számítsa ki a számtani sorozat a_{n-5}, a_n, a_{n+20} tagjainak értékét!

b) Igazolja, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat esetén, ha $a_1 \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$!

a 6 ☐
b 7 ☐
ö 13 ☐

4 Egy dobókockával négyszer egymás után dobunk. A kapott értékeket felírva egy négyjegyű számot alkotunk.

a) Hányféle olyan négyjegyű szám keletkezhet, amelyben a számjegyek szorzata 12?

a 5 ☐
b 8 ☐
ö 13 ☐

→ 132

Bence különböző dolgokat csomagolt a táskájába egy kirándulásra. Amikor este a szálláson kipakoltak, Dominik megállapította, hogy Bence 12-szer többféleképpen választhatna ki a táskájában levő dolgok közül ötöt, mint hármat.

b) Hány különböző dolgot csomagolt a táskájába Bence?

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

→137

5 *a)* Oldja meg az egyenletet a páratlan számok halmazán!

$|7 - |x - 1|| = 4$

b) Mely egész számok elégítik ki az egyenlőtlenséget?

$(1 - x)^3 + (1 + x)^3 < 62$

a 7 ☐ b 9 ☐ ö 16 ☐

6 Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 16{,}5x^2 - 35x$ függvény.

a) Igazolja, hogy a függvénynek $x = 1$-ben lokális minimuma van! Határozza meg a függvény további szélsőértékhelyeit!

b) Határozza meg a legbővebb $[a; b]$ intervallumot, amelyen az $f(x)$ függvény konvex, és $a, b \in \mathbb{Z}$!

a 11 ☐ b 5 ☐ ö 16 ☐

7 Felírtunk 4 különböző pozitív számjegyet egy papírra. Azon számjegyeket kötjük össze egymással, amelyek közül valamelyik osztója a másiknak (de egyik számjegyet sem kötjük össze saját magával.) Így egy négypontú gráfot kapunk.

a) Igazolja, hogy ennek a gráfnak 0-tól 6-ig akármennyi éle lehet!

a 6 ☐ b 10 ☐ ö 16 ☐

Egy szerepjátékban Panna és Fanni küzdenek meg, kezdetben Pannának 8, Fanninak 3 életerőpontja van. A küzdelemben háromszor egymás után támadnak egymásnak.

Egy támadás során Fanni és Panna is dob egy-egy hagyományos dobókockával. A dobások következményei:

A) Ha a dobott számok szorzata 1, akkor Fanni életerőpontszáma azonnal 0-ra vált.

B) Ha a dobott számok szorzata prím, akkor Fanni életerőpontszáma kettővel csökken.

C) Ha a dobott számok szorzata 15-nél nagyobb, akkor Fanni életerőpontszáma eggyel csökken.

D) Ha a dobott számok szorzata 10-nél kisebb összetett szám, akkor nincs változás az életerőpontokban.

E) Egyébként Panna pontszáma csökken eggyel.

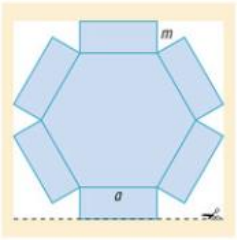
A csata véget ér, ha

(1) Fanninak elfogy minden életerőpontja (Pannának nem fogyhat el).

(2) Fanninak három támadás után még van életerőpontja (akkor elmenekül).

b) Mennyi a valószínűsége, hogy Fanni a Pannával való küzdelem után tovább játszhat?

8 Zoli egy szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú dobozt készít kedvese névnapjára, ebbe teszi az ajándékát. Első próbálkozásra megszerkesztette egy papírlapon a doboz alapját és az oldalait, majd a papírlapot úgy vágta el a lap rövidebb élével párhuzamosan, hogy a doboz hálójának egyes élei és csúcsai az ábra szerinti módon a papírlap szélére esnek.



a) Bizonyítsa be, hogy a doboz készítéséhez felhasznált papírlap akkor és csak akkor lehet négyzet alakú, ha a doboz m magassága megegyezik az alaplap a oldalának hosszával!

b) A papír oldala 28,6 cm és 27,3 cm, a dobozka alapéle hosszabb a magasságánál. Számítsa ki egész centiméterre kerekítve az a és az m értékét!

a 8 ☐
b 8 ☐
ö 16 ☐

→ 141

9 *a)* Igazolja, hogy az $A(1; -1)$; $B(5{,}1; 2{,}7)$, $C(4; 5)$ és $D(1{,}5; 4{,}5)$ pontokkal megadott $ABCD$ négyszög deltoid!

A következő pontok egy $ABCD$ trapézt alkotnak: $A(0; 0)$, $B(9; 0)$, $C(5; 4)$, $D(2; 4)$. Az $S: y - 2 \geq 0$ egy zárt félsík egyenlete, amelynek van közös része a trapézzal.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha kiválasztjuk a trapéz egy P pontját, akkor az pontja lesz az S félsíknak is?

a 4 ☐
b 6 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

Egy kisvárosból kiinduló két legnépszerűbb kerékpártúra-útvonal közül az egyik főleg a közeli dombok között, a másik végig sík terepen halad. Attila tudja magáról, hogy kényelmes tempóban felfelé $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, lejtőn $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, sík terepen $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel teker. Ma a dombok felé ment, így a túra megtételéhez szükséges idő 20%-ában lejtőn, felében sík terepen, a maradék 54 percben emelkedőn kerekezett. Holnap a síkság felé akar indulni.

c) Határozza meg, mennyi ideig biciklizik holnap, ha a mai átlagsebességénél 20%-kal gyorsabban teker a síkságon, és 20 km-rel hosszabb utat szeretne megtenni, mint ma!

8. feladatsor

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőséget a valós számok halmazán!

$2 = \sqrt{0{,}25x^2 + x + 5}$

a 4 ☐
b 8 ☐
ö 12 ☐

b) Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon!

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{9}{y} &= 6 \\ \frac{x}{8} + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

2 *a)* Legyen H az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmaza. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Döntését indokolja!

Az $a, b \in H$ számokra ha a nem osztója b-nek, akkor a és b relatív prím.

a 3 ☐
b 4 ☐
c 7 ☐
ö 14 ☐

b) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

c) Határozza meg azokat az $n \in \mathbb{Z}^+$ számokat, amelyekhez létezik olyan p pozitív prím, hogy az $np + n^p$ összeg is pozitív prím! Adja meg p lehetséges értékeit is!

3 *a)* Hányféleképpen bonthatunk fel egy hatelemű halmazt két diszjunkt (közös elem nélküli) részhalmazra úgy, hogy mindegyik részhalmaz tartalmazzon legalább egy elemet?

a 5 ☐
b 9 ☐
ö 14 ☐

Bergengóciában egy 200 km hosszú útszakaszon végig a megengedett legnagyobb sebességgel halad egy személygépkocsi. Ugyanazon az útszakaszon egy teherautó ennél a személyautónál mindig $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val lassabban közlekedik. A személyautó 15 perccel hamarabb megy végig az úton, mint a teherautó.

b) Mekkora az útszakaszon megengedett legnagyobb sebesség egész $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra kerekítve Bergengóciában?

4 *a)* Az ABC szabályos háromszög S súlypontjának a BC oldalra való tükörképe S'. Bizonyítsa be, hogy a kialakult $ABS'C$ négyszög húrnégyszög!

a 4 ☐
b 7 ☐
ö 11 ☐

b) Egy $ABCD$ húrnégyszögben $AB = BD = DA$, a C csúcs a D-hez közelebb harmadolja az A-t nem tartalmazó BD ívet. Számítsa ki, mekkorák a négyszög szögei!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 Egy vidám matematikus három problémával (A, B, C) foglalkozott tegnap, mind a háromhoz kis papírlapra írt különböző ötleteket, számításokat. Az A problémához egy, a B-hez kettő, a C-hez három papírdarabkát használt. A papírlapok az asztalán véletlenszerűen összekeveredtek, talán a huzat fújta őket egymásra. Most szomorúan veszi fel egymás után őket: csak akkor lesz újra vidám, ha valamelyik probléma összes jegyzetét megtalálja.

a) Az első, amihez minden jegyzetet megtalál, a B probléma. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ez pontosan a 4. húzásra sikerül neki!

b) Hányféleképpen következhet be az, hogy a matematikus pontosan a harmadik húzás után lesz újra vidám?

a 7 ☐
b 9 ☐
ö 16 ☐

6 Egy szabadidőközpont térképére koordináta-rendszert helyezve, a téglalap alakú labdarúgópálya csúcsai az $A(4; -2)$, $B(7; -2)$, $C(7; 3)$, $D(4; 3)$ pontoknak felelnek meg. Az új városvezetés – részben az elgazosodott focipálya területén – egy kör alakú mesterséges tavat akar kialakítani. A tó tervezett határvonalának egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

a) Számítsa ki, hány négyzetméter a focipálya, illetve a kör alakú tó területe, ha 1 egység 15 méternek felel meg!

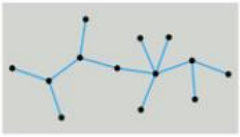
b) A jelenlegi focipályának hány százalékát borítja majd víz, ha elkészül a tó? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a 4 ☐
b 12 ☐
ö 16 ☐

↑ 149

7 Tekintsük az alábbi definíciót!

Hernyógráfnak nevezzük az olyan egyszerű, összefüggő, körmentes gráfokat, amelyekben van egy központi út, és minden más pontja legfeljebb 1 él távolságra van a központi úttól.



a) Igaz-e a következő kijelentés?

Minden hernyógráf fagráf.

Egy egyszerű n pontú gráfot három állapotban tekintünk:

A) fa; *B)* minden pont fokszáma 3; *C)* minden pont fokszáma 5.

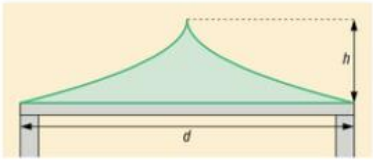
b) Határozza meg a pontok számát, ha tudjuk, hogy az *A)*, *B)*, *C)* gráfok éleinek számai ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három elemét alkotják!

Egy konvex sokszög belső szögei fokban mérve egész számok, és egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek differenciája 4°.

c) Határozza meg a feltételeknek megfelelő sokszögek számát!

a 2 ☐
b 5 ☐
c 9 ☐
ö 16 ☐

8 Egy régi kapubejáró tetejét különleges dísz ékesíti. A timpanon felső, vízszintes tengelyű félparabola ív határoló körvonalai az ábrán láthatók (a szimmetrikus parabolaívek találkozási pontja a közös tengelypontjuk).



a 7
b 9
ö 16

A díszítés $h = 200$ cm magas, és a bejárat teljes $d = 800$ cm szélességében húzódik. A felületén a domborművek már csak halványan látszanak (gyakorlatilag síknak tekinthető), ezért az állagmegóvás első lépéseként bevonják egy speciális anyaggal.

a) Számítsa ki a timpanon felületének pontos értékét!

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényről a következőket tudjuk.

(1) A függvénygörbe áthalad a $P(2; 7)$ ponton.

(2) A függvénynek az $x = -1$ helyen szélsőértéke van.

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{19}{3}$.

b) Határozza meg az a, b, c valós paramétereket!

→ 152

9 A $\vec{v}$ és $\vec{v}'$ helyvektor hossza egyaránt $\sqrt{10}$, skalárszorzatuk -10.

a 3
b 5
c 8
ö 16

a) Határozza meg a két helyvektor által bezárt szöget!

b) Határozza meg, hány olyan különböző $\sqrt{10}$ hosszú $\vec{v}$ vektor van, amelynek abszcisszája 2-vel nagyobb, mint az ordinátája!

Sok-sok év múlva egy távoli galaxisban a Bolygóközi Űrhajózási Vállalat olyan kis kétszemélyes űrrepülőt tervez, amelynek négy szárnya van. 2-2 szárny a gép két oldalán alaphelyzetben egymáson fekszik, de felszállás után ezek szimmetrikusan X alakban kinyílnak, illetve meg is nyúlnak.

1 méter egységű koordináta-rendszerben modellezve, ha a szárnyak forgásközéppontja az origó, akkor a jobb felső szárny végpontja az $e: y = 2x - 4$ egyenesen mozog ($x \geq 2$). A mérnökök arra jöttek rá, hogy akkora szögben optimális kinyitni az egy oldalon levő szárnyakat, amelynél a szárnyakat modellező vektorok skaláris szorzata maximális.

c) Határozza meg a szárny maximális hosszát!

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Legalább hány élt kell egy 190 élű teljes gráfból véletlenszerűen kitörölnünk, ha azt akarjuk, hogy a megmaradó gráf biztosan ne legyen összefüggő?

a 5 ☐
b 6 ☐
ö 11 ☐

Egy regionális futárszolgálat több település között működtet járműveket. Korábban bármely két település között pontosan egy dízelüzemű jármű teljesített szolgálatot. A cégvezető észrevette, hogy miután a járműflotta háromnegyedét és még egy járművet lecseréltek tisztán elektromos üzeműre, a megmaradt dízelek egy **fagráf** élei mentén szállítják a küldeményeket (a településeket tekintve a gráf csúcsainak).

b) Hány településen érhető el ez a futárszolgálat?

2 *a)* Az ábrán a harmadfokú $f(x)$ függvény $f'(x)$ első és $f''(x)$ második deriváltfüggvénye látható.

Határozza meg, hogy az eredeti $f(x)$ függvény milyen tulajdonságokkal rendelkezik a megadott intervallumokon!

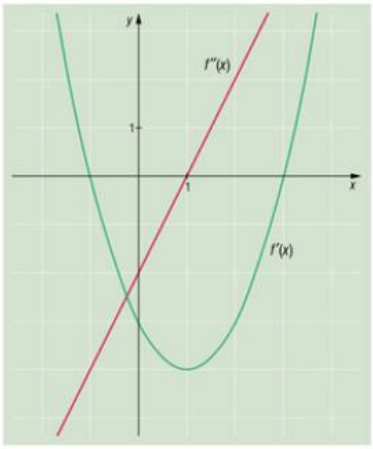
A tulajdonságok jellemzéséhez használja az első táblázatban a

növekszik, csökken,
konvex, konkáv,

illetve a másodikban a

maximum, minimum,
inflexiós

szavakat!



a 6 ☐
b 6 ☐
ö 12 ☐

	$]-\infty; -1[$	$]-1; 1[$	$]1; 3[$	$]3; \infty[$
$f(x)$ monoton				
$f(x)$ konvexitása				

Az $f(x)$ függvénynek	**az $x = -1$ helyen**		**pontja van.**
	az $x = 1$ helyen		**pontja van.**
	az $x = 3$ helyen		**pontja van.**

→ 156

b) Adott a minden valós számon értelmezett és deriválható következő függvény:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}5x^2 - 2x + 4.$

Határozza meg koordinátáikkal azon pontokat, amelyekben a függvényhez húzott érintő párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel!

3 *a)* Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon!

$$\left.\begin{aligned} x &= y + 1 \\ 2\sqrt{x} + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

a 7 ☐
b 7 ☐
ö 14 ☐

b) Hány negatív egész számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség?

$\log_4(3x + 35) \leq 3$

4 Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont:

$A(-10; 14)$, $B(2; -2)$ és $C(-1; 6)$.

a 6 ☐
b 8 ☐
ö 14 ☐

a) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb belső szögét!

b) Határozza meg az x tengely azon pontjainak koordinátáit, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe! ☐

5 Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5. A $\{b_n\}$ számtani sorozat első tagja 7, differenciája 0,5. A háromjegyű pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk.

a 9 ☐
b 7 ☐
ö 16 ☐

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a számegyenesen valamely $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ értékre egyenlő távolságra van a_i-től és b_i-től? Válaszát tovább nem egyszerűsíthető $\frac{p}{q}$ alakban adja meg!

Adottak a szabályos n-szögek, ahol $n = 3, 4, 5, \ldots$

b) Igazolja, hogy nincs három olyan szabályos sokszög, melyek oldalszámai egymást követő számok, belső szögeik pedig fokban megadva mértani sorozatot alkotnak!

6 A pozitív egész számokat egy végtelen táblázatba rendezzük a következőképp. A bal felső sarokba (az 1. oszlop 1. sorába) 1-es kerül. Ezután mindig a sorban következő egésztől egyesével növekedve kitöltjük a következő üres fordított L alakot. Ha a megkezdett L alak végére értünk, akkor a következő oszlop elejétől folytatjuk a kitöltést.

1	2	5	10	17	...
4	3	6	11	18	
9	8	7	12	19	
16	15	14	13	20	
25	24	23	22	21	
...					...

a 3
b 5
c 8
ö 16

a) Adja meg, hányadik oszlop hányadik sorában található a 76!

b) Igazolja, hogy az első oszlopban csak négyzetszámok szerepelnek, és minden négyzetszám ott található!

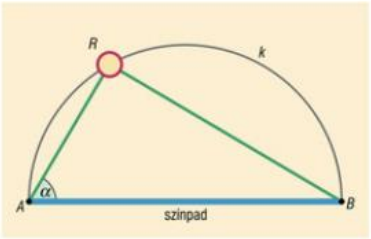
c) Határozzon meg egy $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az n-edik oszlop n-edik sorában található számot (az átló n. elemét) adja meg!

7 Egy használtautó-kereskedő minden autót három kategória valamelyikébe sorol attól függően, hogy mennyit hajlandó engedni a kiírt árból: 10, 15 vagy 20 százalékot. A két kisebb engedményű járművek száma együtt kétszer annyi, mint ahány legnagyobb engedményű autója van. A 10%-os és 15%-os járművek számának aránya eggyel nagyobb, mint a 20%-os és a 15%-os autók számának aránya. A kereskedőnek 90 járműve van.

a 7
b 9
ö 16

a) Számítsa ki, hány autóra alkudhat a betérő vevő 15%-os kedvezményt!

Egy 10 méter széles AB színpadon olyan színdarabot próbálnak, amely egy nap történéseit mutatja be. Ehhez a fővilágosító egy AB átmérőjű félkör alakú acélvázat (k) emel a színpad hátulján, és azon vezet körbe egy R reflektort, ezzel jelképezve a Nap mozgását. A reflektort az acélváz A és B pontjából induló AR és BR kötelekkel mozgatják.



b) Határozza meg azt az α szöget, amelyre a reflektort mozgató kötelekből a legtöbb látható a színpadon (α az AR kötéldarabnak a színpad síkjával bezárt szöge)!

8 Évi mindennap fut valamennyit. Múlt héten mindennap egész kilométereket futott csak: az egyes napokon lefutott kilométereinek módusza 4, mediánja 6, átlaga ezektől különböző, terjedelme pedig 13. Azt is tudjuk, hogy volt két nap, amikor pontosan annyi egész kilométert futott, mint a heti átlag.

a 6
b 7
c 3
ö 16

a) Hány kilométert futott a múlt héten Évi?

→ 164

Egy urnában összesen 1000 darab golyó van. Mindegyik golyó vagy piros, vagy zöld színű. Az 1000 golyóból véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztunk 5-öt.

b) Hány piros golyó lehet az urnában, ha az *A* esemény valószínűsége nagyobb, mint a *B* esemény valószínűsége?

A esemény: *a kiválasztott golyók közül 1 piros.*

B esemény: *a kiválasztott golyók közül 3 piros.*

c) Egy urnában 100 golyó van, ebből 42 piros, a többi zöld. Az előző feladat *A* és *B* eseményei közül melyik következhet be többféleképpen, ha **visszatevés nélkül** választunk ki 5 golyót?

9 Tekintsük egy szabályos tizenkétszög összes átlóját. Az átlók közül kiválasztunk véletlenszerűen négyet.

a 6
b 5
c 5
ö 16

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott átlók két szomszédos csúcsból indulnak ki!

Egy rönkhasító gép nagyjából minden 20. rönköt csak legalább másodjára repeszt el (tekinthetjük úgy, hogy a gép minden rönköt $\frac{19}{20}$ valószínűséggel hasít el egyből). Szombaton délelőtt szeretnénk 150 rönköt elhasítani vele.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy legalább 3 rönköt nem sikerül elsőre elrepeszteni!

→170

Egy hétpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, és kékre színezzük őket.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kék él nem alkot három él hosszúságú kört! (Egy kör hosszán az őt alkotó élek számát értjük.)

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$\lg|x| < 2$

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$3^{2x} + 3^x - 3^{x+2} = 9$

a 4 ☐
b 7 ☐
ö 11 ☐

2 *a)* Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabolagörbéről tudjuk, hogy tengelypontja a $T(2; 3)$ pont, és a görbe áthalad a $P(4; 1)$ ponton. Határozza meg a parabola egyenletét!

a 6 ☐
b 6 ☐
ö 12 ☐

Adott a papíron egy n (> 1) pontú üres gráf (nincsenek benne élek). A következő játékot játsszuk: minden lépésben felveszünk a papíron egy új pontot, és azt összekötjük két másik, már meglévő ponttal.

b) Határozza meg azt a legkisebb lépésszámot, ami után (a megfelelő lépéseket lépve) a gráf összefüggővé válhat!

3 *a)* A 20 és az x pozitív valós szám számtani és harmonikus közepének eltérése 4,5. Határozza meg x értékét!

a 7 ☐
b 3 ☐
c 4 ☐
ö 14 ☐

b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás! Válaszát indokolja!

Ha $x \geq 20$, akkor a 20-nak és az x-nek a harmonikus közepe biztosan kisebb a két szám számtani közepénél.

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását a pozitív valós számok halmazán! Változtassa meg úgy a megfordított állítás következményét, hogy az állítás igazzá váljon!

→ 172

4 Egy pénzintézet p%-os kamatlábú THM-mel (THM: teljes hiteldíj mutató, egy évre vonatkozik) hirdeti a tőle felvehető hiteleket. A q kamattényezőt p-ből a $q = 1 + \frac{p}{100}$ képlettel kapjuk. A hitelösszeget C (tőke, Ft), az éves egyenlő összegű törlesztést A (annuitás, Ft), a futamidőt n (év) jelöli a képletben, amely a közöttük levő összefüggést írja le: $C \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. A havi annuitást úgy kapjuk meg, ha az évest egyenlően elosztjuk a 12 hónapra: $A_{\text{havi}} = \frac{A}{12}$.

a 4 ☐
b 5 ☐
c 5 ☐
ö 14 ☐

a) Mekkora (forintra kerekített) összeget vehetünk fel 5 éves futamidőre, ha a THM 18% és havonta legfeljebb 50 ezer forintot tudunk visszafizetni?

b) Felvettünk egy 4 millió forintos hitelt 20%-os THM-re, amelyet 10 év alatt tervezünk visszafizetni. Határozza meg a havi törlesztőrészlet értékét!

Már épp el is kezdenénk a 4 millió forintos hitel törlesztését, de ekkor az utolsó pillanatban külső tényezők miatt egyéves hitelmoratóriumot hirdetnek ki. A moratórium alatt, ha élünk a lehetőséggel, semmit nem kell fizetnünk – ám a kamatokat ugyanúgy számolja a hitelt folyósító bank, hiszen a pénze már nálunk van. Ez a moratórium lejártával megnöveli a fizetendő összeget.

c) Számítsa ki, hány forintra nő a havi törlesztőrészlet, ha a hitelszerződés lejáratának dátuma nem változik!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 *a)* Egy $0 < a < b$ oldalú téglalapot a hosszabb oldalának felezőpontjában, az oldalra merőleges vágással kettévágunk. Határozza meg a téglalap oldalai közötti összefüggést, ha a keletkezett téglalap hasonló az eredetihez!

b) Egy $0 < a < b < c$ élű téglatestet a leghosszabb élének felezőpontjában, az élre merőleges síkkal kettévágunk. Határozza meg a téglatest oldalai közötti összefüggést, ha a keletkezett téglatest hasonló az eredetihez!

a 4 ☐
b 12 ☐
ö 16 ☐

→176

6 Adott az f és g függvény:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x - 2 \quad \text{és} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 4.$$

a) Számítsa ki az $f(g(x))$ összetett függvény zérushelyeit!

b) Számítsa ki a g függvény és az x tengely közé zárt véges síkidom területét!

c) Számítással igazolja, hogy a $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ függvény szigorúan monoton növő a $[8; \infty[$ intervallumon!

a 3 ☐
b 7 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

7 *a)* Az $ABCDEFGH$ téglatestben

$AD = BC = EH = GF = 4$ cm, $\quad AE = BF = CG = DH = 3$ cm,

$AB = EF = GH = DC = 12$ cm.

Adja meg az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatának pontos értékét!

a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

János nemrég vett egy téglatest alakú dobozkát, amelyre egyik oldalának szemközti sarkai közé vékony díszítő csíkot ragasztott. A csík hossza 10 cm. Sajnos a doboz méreteit elfelejtette, ám arra emlékszik, hogy legalább két különböző éle centiméterben mérve egész szám hosszúságú. Talált egy 26 cm hosszú hurkapálcát, ami pont elfért a dobozka szemközti sarkai között átlósan.

b) Határozza meg a feltételeknek megfelelő nem egybevágó dobozok számát!

8 Az érettségiző Dani és egyetemista nővére, Ági nagyjából egyszerre végeztek a vizsgáikkal, majd amikor találkoztak, elmesélték egymásnak az élményeiket. A beszélgetés során kiderült, hogy Áginak hat vizsgája volt, mindegyikre egy hétnél kevesebbet, de egy napnál többet készült, és hogy két vizsga kivételével mindegyikre különböző számú napot tanult. Azt is tudjuk, hogy az egyes vizsgáira fordított napok számának módusza megegyezik az átlagukkal.

a 5
b 3
c 8
ö 16

a) Számítsa ki Ági egyes vizsgákra való felkészülési napjai számának szórását!

Adott az $f(x) = \log_a(x + 7) + 1$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ paraméter.

b) Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Az a paraméter mely értékeire monoton növő, illetve csökkenő a függvény?

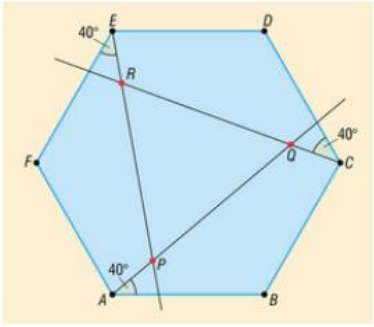
Az $a \geq 2$ paraméter a továbbiakban egész számot jelöl. Tekintsük az $f(x)$ függvény görbéje és a tengelyek által határolt véges, zárt T síkidomba eső rácspontokat (egész koordinátájú pontokat).

c) Határozza meg, hogy az a paramétert növelve annak melyik értékétől kezdődően nem változik a T síkrészbe eső rácspontok száma! (A zárt síkidom határoló vonalai a síkidomhoz tartoznak.)

↑ 180

9 Egy 10 cm oldalú szabályos hatszög minden második csúcsánál található belső szögét azonos körüljárás szerint harmadolták.

a 5
b 11
ö 16



a) Bizonyítsa be, hogy a szögszárak metszéspontjai által alkotott PQR háromszög szabályos!

b) Határozza meg a szabályos PQR háromszög oldalainak hosszát egész centiméter pontossággal!

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg a $]-2\pi; 0]$ halmazon az egyenletet!

$2\cos^2 x - \sin x = 2$

a 6
b 6
ö 12

b) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$\log_3(x - 2) - \log_3 x = 2$

2 Bergengócia repterén tegnap 9 óra 50 perckor az alábbi indulási időpontokat jelző tábla fogadta az utasokat:

a 3
b 6
c 4
ö 13

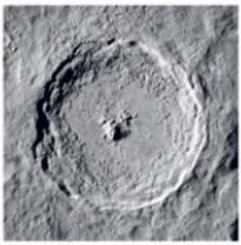
Indulás	Cél	Járat	Terminál	Státusz	Idő
7 : 30 AM	BUD	MA–2277	A3	Felszállt	7 : 35 AM
8 : 35 AM	MIL	BA–3930	C1	Felszállt	8 : 42 AM
8 : 40 AM	YTO	LU–6320	C2	Felszállt	8 : 45 AM
8 : 56 AM	BHX	SX–2257	A2	Felszállt	9 : 10 AM
9 : 10 AM	SOL	MA–3124	C6	Felszállt	9 : 12 AM
9 : 17 AM	DEB	BA–776	A1	Felszállt	9 : 17 AM
9 : 30 AM	LHR	TF–3210	A7	Felszállt	9 : 50 AM
9 : 45 AM	LTN	BA–1145	C3	Várakozik	
9 : 47 AM	LUN	LU–121	C1	Felszállt	9 : 47 AM
9 : 55 AM	SAT	FX–856	A3	Várakozik	

a) Felszállhatott-e úgy a két még várakozó repülőgép, hogy a késések átlaga 5 percen belül maradjon? Válaszát indokolja!

b) Mikor az utolsó két gép is felszállt, a kijelzőn megjelentek az időpontok. Kiderült, hogy az egész percben mért késések átlaga nem haladta meg a 6 percet, valamint a késéseknek egyetlen módusza volt. Adja meg az összes, feltételeknek megfelelő késést (egész percben) a két még várakozó gép esetében!

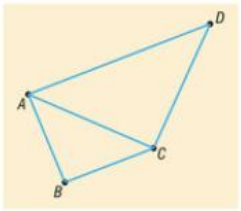
→ 184

Bergengócia repteréről a legkülönbözőbb földi és naprendszerbeli célpontokra indulnak járatok. A Holdon az egyik legkedveltebb turistalátványosság a Tycho-kráter, amelynek felszíni átmérője 85 km, mélysége 4800 m. Tételezzük fel, hogy a kráter csonkakúp alakú, melynek alkotói 30°-os szöget zárnak be a felszín síkjával.



c) Számítsa ki a Tycho-kráter térfogatát egész köbkilométerre kerekítve!

3 Egy szurikátacsalád új kotorékot keres magának. Találnak is egymáshoz közel négy lehetséges odúnak való helyet, ezeket jelölik az *A*, *B*, *C*, *D* pontok. Egy arra járó vadász messziről figyelve őket megállapítja, hogy a *BAD* töröttvonal hossza 10,25 méter, a *BCD* töröttvonalé pedig 9 méter. Kicsivel később azt is megfigyeli, hogy $AB = CB$, $CA = DC$, valamint az *ABC* és az *ACD* háromszög hasonló.



a 8
b 4
ö 12

a) Határozzuk meg az ábrán berajzolt szakaszok hosszait!

A szurikáták egy kilométerrel arrébb találtak egy nagyobb kiterjedésű *PQRS* konvex négyszöget alkotó lyukhálózatot, amelyben $PQ = QR = 16$ m, $PR = 20$ m, $RS = PS = 18$ m. Most a *PQRS* négyszögön belül szaladgálva próbálják eldönteni, hogy melyik lyukat alakítsák ki lakóhelynek.

b) Mekkora területen futkároznak? Válaszát egész négyzetméterre kerekítve adja meg!

4 *a)* Döntse el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak legalább 7 éle van, akkor összefüggő.

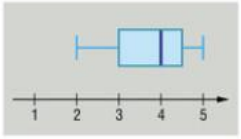
a 3
b 4
c 6
ö 13

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a hétpontú egyszerű gráfokra, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Ádám a legutóbbi matematikadolgozatát dicséretes ötösre írta meg, de csoporttársai már nem annyira remekeltek, ők az alábbi jegyeket kapták:

1, 3, 5, 4, 2, 1, 4, 3, 1.

A másik csoportba járók eredményeiről készült a következő dobozdiagram:



c) Készítsen Ádám csoportjának eredményeiről is dobozdiagramot, és hasonlítsa össze az eredményeket a diagramok alapján!

→ 187

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 A távoli jövőben egy távoli bolygón egy értékes ásványt bányásznak majd, amelyet a bányában kitermelt kőzetből kémiai tisztítással nyernek ki. A kibányászott kőzet értékét egyetlen tulajdonság határozza meg: az, hogy az adott ásvány kristályából mennyi található benne (a kristály adott mintabeli darabszáma megfelelő géppel meghatározható). A kristály „sűrűségét" az $x \in \mathbb{R}_0^+$ változó írja le, amely azt adja meg, hogy 1 kg kőzetben megközelítőleg $1000 \cdot x$ db kristály található.

Egy kilogramm kitermelt kőzet piaci árát az $a(x) = \frac{1}{16}x^3 + 1$ összefüggés írja le *pe* pénzegységben. Az x mértékegysége $\frac{1000\ \text{db}}{\text{kg}}$, az $a(x)$ mértékegysége $\left(\frac{\text{pe}}{\text{kg}}\right)$.

a) Számítsa ki az x változó értékét két tizedesjegy pontossággal arra az 5 kg-os kőzetmintára, amelyben 7560 darab kristályt találtak!

b) Ha egy 3 kg-os kőzetminta 2430 pénzegységbe került, akkor hány kristály található benne (egészre kerekítve)?

c) Egy mintában 16 000 darab kristályt találtak. Hány kilogrammos minta esetén fizetik a piacon a legkevesebbet ezért a mintáért?

a 3 ☐
b 5 ☐
c 8 ☐
ö 16 ☐

6 Jelöljük $\overline{abc}$-vel a $100a + 10b + c$ számot, amely lehet három-, kettő- vagy egyjegyű is: $a, b, c \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

a) Határozza meg a p számjegy lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön az (1) és (2) tulajdonság is!

(1) A $\overline{2p7} \cdot \overline{p35}$ szorzat osztható 3-mal.

(2) A $\overline{14p} + \overline{p80}$ összeg osztható 12-vel.

b) Igazolja, hogy nincs olyan n (> 2) egész szám, amelyre $n^2 - 2n - 2$ osztható 8-cal!

c) Igazolja, hogy $6^n + n^2 - 2n$ osztható 5-tel, ha az n pozitív egész szám utolsó jegye 1.

a 6 ☐
b 4 ☐
c 6 ☐
ö 16 ☐

→ 190

7 Tekintsük az alábbi, konvergens sorozatokra vonatkozó állítást:

Ha egy konvergens sorozatra igaz, hogy határértéke egész szám, akkor a sorozat minden tagja egész szám.

a) Állapítsa meg, hogy igaz vagy hamis az állítás!

b) Fogalmazza meg a konvergens sorozatokra vonatkozó fenti állítás megfordítását, és arról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Állítását indokolja!

a 3 ☐
b 4 ☐
c 4 ☐
d 5 ☐
ö 16 ☐

Adott a koordinátasíkon az $A(1; 1)$, $B(7; 1)$, $C(4; 5)$ pontok által alkotott háromszög.

c) Határozza meg a háromszög beírt körének sugarát!

d) Jelölje a háromszög $BAC\sphericalangle$ szögét α. Határozza meg α szögfelezőjének egyenletét!

8 A cukrászdákban előfordul, hogy a hétvégére megrendelt tortáért nem megy el a megrendelő. Az egyik cukrászdában azt figyelték meg, hogy 100 dobostorta-rendelésből általában egyet nem visznek el (annak a valószínűsége, hogy egy rendelést elvisznek, 0,99). Ezért a cukrászda minden hétvégére több megrendelést vesz fel (48-at), mint amennyit fizikailag teljesíteni képes (45-öt). A cukrászdának nem okoz bevételkiesést, ha nem viszik el az összes elkészült tortát, mert azokat a következő hét elején mindig el tudják adni.

a 5 ☐
b 6 ☐
c 5 ☐
ö 16 ☐

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezen a hétvégén pontosan egy olyan elégedetlen vásárlója lesz a cukrászdának, aki hétvégére dobostortát rendelt, de nem jut hozzá!

A rendelésükről lemaradt ügyfeleket a cukrászda 10 000 forint értékű kuponnal kárpótolja. Ennek értékhatáráig a vevő bármit elvihet, ami abban a pillanatban kapható náluk.

b) Mekkora az egy hétvégére eső várható bevétel ezer forintra kerekítve, ha egy dobostorta 8000 Ft-ba kerül?

Egy termelő a krumplit 5 kg-os csomagokban árusítja. Saját bevallása szerint minden csomag 99%-os valószínűséggel legalább 5 kg. Ezt egy vevője visszatevéses mintavétellel szeretné ellenőrizni.

c) Legalább hány csomagot kell lemérnie, hogy legalább 80%-os valószínűséggel találjon közöttük 5 kg-nál könnyebb csomagot?

9 Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúságból van legalább három darab 1 cm-től 10 cm-ig. Kiválasztunk tetszőlegesen három pálcikát a készletből.

a 9 ☐
b 7 ☐
ö 16 ☐

a) Mekkora valószínűséggel építhetünk a három pálcikából olyan háromszöget, amelynek nem minden oldala különböző? (Két kiválasztás különböző, ha az egyik kiválasztás 3 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 3 pálcikájával úgy, hogy mind a 3 párban egyenlő hosszú a két pálcika.)

Két lakótelepi csapat, a Telepi Sündisznók és a Második Emelet sok focimeccset játszik egymás ellen a házak közti műfüves pályán. Legutóbb az Emelet nyert 5 : 0-ra a Sündisznók ellen. A mérkőzés után a Sündisznók játékosai megfogadták, hogy a következő 5 gólos meccset ők nyerik meg.

b) Határozza meg ennek a valószínűségét, ha az Emelet csapata 2 tizeddel nagyobb valószínűséggel szerez gólt, mint a Sündisznók!

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 Ádám és Tomi unokatestvérek. A nagypapájuktól kaptak egy-egy kosár cseresznyét és barackot, mindkettőből 1 kg-ot. A fiúk elhatározzák, hogy a gyümölcsöket igazságosan elosztják egymás között: Tomi a barackot, Ádám a cseresznyét osztja két, szerinte egyenlő részre, majd a másik kiválasztja, hogy melyik részt szeretné.

a 6 ☐
b 5 ☐
ö 11 ☐

a) Igazolja, hogy akárhogyan osztották szét a gyümölcsöket és akárhogyan választottak közülük, igaz, hogy a fiúknál levő gyümölcsök tömegének szórása egyenlő!

Az iskolai jótékonysági bálon tombolát szerveznek, amelyen 20 kisebb-nagyobb értékű ajándékot lehet nyerni. A 800 darab sorsjegyből elsőként Jutka vásárolt 7 darabot. (Egy sorsjegy egy nyereményre jogosít.)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jutka nyer a tombolán?

2 *a)* Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a 6 ☐
b 7 ☐
ö 13 ☐

$$2^{2-3x} + \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} = 264$$

b) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$$\frac{1+x}{x} < \frac{5-x}{2}$$

3 *a)* Egy mértani sorozat negyedik tagja 52, hetedik tagja 3328. Számítsa ki a sorozat negyedik, ötödik, hatodik és hetedik tagjának átlagát!

a 6 ☐
b 7 ☐
ö 13 ☐

Az a, b, c hétjegyű pozitív egészek olyan számok, amelyekben az egymást követő számjegyek monoton számtani sorozatot alkotnak.

b) Hány olyan $(a; b; c)$ rendezett számhármast adhatunk meg, amelynek tagjai maguk is rendre monoton sorozatot alkotnak?

4 A mobiltelefonok kijelzői téglalap alakúak, a tulajdonságaikat meghatározó értékek közül az egyik a *kijelző átlójának hossza.* Ezt inchben adják meg, jele: ″ (1″ = 2,54 cm). Például a 4″ azt jelenti, hogy a képernyő átlójának hossza 4 inch, azaz 4 · 2,54 cm = 10,16 cm. Egy másik szám a *képarány,* a kijelző két oldalának aránya. Például a 16 : 9-es képarány azt jelenti, hogy ha a hosszabb oldal 12 cm, akkor a rövidebb oldal 6,75 cm. A képernyőpontban (pixelben) megadott 1920 × 1080 képernyőfelbontás is a 16 : 9 képarányra utal (16 : 9 = 1920 : 1080).

a 6 ☐
b 8 ☐
ö 14 ☐

Tudjuk, hogy egy mobiltelefon téglalap alakú kijelzőjének hosszabb oldala mentén 1280 pixel található, a képátló 5″ inches, a képaránya 16 : 9.

a) Hány pixel van a kijelző rövidebb oldalán? Számítsa ki egy négyzet alakúnak tekintett pixel oldalának hosszát! (Az eredményt centiméterben, normálalakban adja meg, ahol az együttható két tizedesjegyre pontos.)

Jelölje általában egy kijelző képátlójának hosszát d (centiméterben), a képarányt pedig r.

b) Bizonyítsa be, hogy a $T = \dfrac{d^2}{r + \dfrac{1}{r}}$ képletbe helyettesítve megkapjuk a kijelző területét (négyzetcentiméterben)!

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 *a)* Egy háromszög a, b oldala centiméterben mérve egész szám. Ismert, hogy $c = 10$ cm és $b \cdot \cos\alpha = 3$. Határozza meg a lehetséges háromszög oldalait!

b) Egy 10 csapatos bajnokság első fordulójára szeretnék összeállítani a csapatok párosítását. Hányféleképpen alakítható ki az első forduló, ha figyelembe vesszük, hogy melyik csapat játszik otthon és melyik idegenben? (Azaz az *A*–*B* párosítás különbözik a *B*–*A* párosítástól. Két fordulót különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan párosítást, amelyet a másik nem.)

a 10 ☐
b 6 ☐
ö 16 ☐

6 *a)* Legyen a $p(x) = \dfrac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{2}$ kifejezés értelmezési tartománya $x \in [1; \infty[$. Igazolja, hogy a $p(x) \leq x$ egyenlőtlenség az értelmezési tartomány minden pontjában teljesül!

b) Három teljes gráf pontjainak száma egy szigorúan növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy mértani sorozat három egymást követő tagja!

a 6 ☐
b 10 ☐
ö 16 ☐

7 A Pascal-háromszög számait leírjuk egymás mellé a 0. sortól a 99. sor végéig (az első 1-es a 0. sorban van), sorról sorra:

1, | 1, 1, | 1, 2, 1, | 1, 3, 3, 1, | 1, 4, 6, 4, 1, | …, 99, 1.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a leírt számok közül véletlenszerűen kiválasztva két egymás melletti számot, az egyik szám egyes!

a 7 ☐
b 9 ☐
ö 16 ☐

→ 204

Lili és Cili testvérek, 40 mesekönyvük van. Ha a mesekönyvek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor arról tudjuk, hogy:

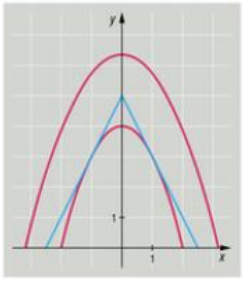
(1) 0,875 annak a valószínűsége, hogy valamelyikük olvasta;

(2) 0,8 annak a valószínűsége, hogy Lili olvasta, ha Cili olvasta;

(3) 0,375 annak a valószínűsége, hogy Cili olvasta, ha Lili nem olvasta.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy mesekönyvet véletlenszerűen választunk a polcról, akkor azt csak Lili olvasta kettejük közül?

8 Az építész az általa megálmodott letisztult, modern épülethez egy fordított parabola alakú nyitott bejáratot tervez. Számítógépes modelljében a talajt az x tengelyre helyezve a bejárat belső íve az $y = -x^2 + 4$ parabola pozitív értékű pontjaiból áll. A tervek szerint a bejárat külső ívét az $y = -x^2 + p$ parabola ($p > 4$) pozitív értékű pontjai alkotják.



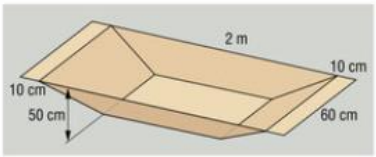
a 10
b 6
ö 16

a) Határozza meg a p paramétert úgy, hogy a nyitott bejárat felülete és a kaput alkotó, két ív közötti felület egyenlő legyen!

Az építkezés során a belső ív $|x| = 1$ abszcisszájú pontjaiban az ívet érintő támoszlopokat emeltek, amelyek a bejárat szimmetriatengelyén találkoztak. Ezek segítségével állványozták fel a külső ívet.

b) Adja meg annak a $g(x) = m \cdot |x| + b$ alakú abszolútérték-függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely leírja a két támoszlop alakját ebben a koordinátarendszerben!

9 Egy fémteknő téglalap alapú egyenes csonkagúla, amelynek méretei a következők: hosszúsága 2 méter, amelyből a két végén 10-10 cm a pereme, mélysége 50 cm, szélessége 60 cm. Térfogata 0,38 m^3.



a 8
b 8
ö 16

a) Mekkorák a teknő aljának élei?

Bizonyos okok miatt egy időben élelmiszer-felvásárlási láz tört ki, ami miatt egy üzletből a vásárlók naponta elvitték az élelmiszer jellegű árukészlet 80%-át. A bolt rendes körülmények között élelmiszerből 15 tonna árukészlettel rendelkezett. Szerencsére az utánpótlás biztosított volt, így mindennap 0,3 tonna élelmiszert szállítottak az üzletbe.

b) Legalább mennyi élelmiszer lesz a boltban akkor is, ha ez az állapot elég hosszú ideig (akár örökre) fennmarad?

⇒ 208



Megoldások

Tudnivalók a megoldások használatához

A megoldás után ne álljon rögtön neki az ellenőrzésnek, inkább pihenje ki magát. A javítás során ne legyen magával elnéző, de örüljön a jó megoldásoknak! Csak akkor fejlődhet, ha képes megerősíteni a jó gondolatait, és bátran szembenéz az elkövetett hibáival.

A könyv minden feladat részletes megoldásait tartalmazza. Az esetek egy részében több kidolgozott megoldást is talál, vagy a megjegyzésben szerepel utalás más megoldási lehetőségekre.

Az egyes lépések mellett megtalálható az értük járó pontszám. Fontos: néhány eset kivételével (például másodfokú egyenlet megoldásai) minden számolást, lépést indokolni kell – a pontszám az indoklásért **és** az eredményért együttesen jár. A könyvben szereplő pontok nem hivatalos érettségi pontok, de megmutatják, hogy *várhatóan* mennyi pontot kapna, ha a feladat az érettségin „élesben" szerepelne.

Lehetséges, hogy a megoldása nincs a megadott megoldások között. Ilyenkor nézze át a pontozást és a megoldás kulcslépéseit, és igyekezzen azok alapján vagy hasonlóan pontozni. Alapszabály: amit nem ír le, azt ne értékelje.

I. rész

1 Legyen az x pozitív valós szám.

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás a pozitív valós számok halmazán! Válaszát indokolja! a 3

Ha $a = b$, akkor a és b harmonikus, mértani és számtani közepe mértani sorozatot alkot.

M: A nevezetes közepek között pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha a számok egyenlők. (1 pont)

Ezért ha $a = b$ (> 0), akkor

$$H(a, b) = M(a, b) = A(a, b),$$

amelyek így egy $q = 1$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)

Tehát az állítás **igaz.** (1 pont)

b) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását a pozitív valós számok halmazán, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! b 4

M: I. megoldás

A megfordított állítás:

Ha a és b (pozitív valós számok) harmonikus, mértani és számtani közepe mértani sorozatot alkot, akkor $a = b$. (1 pont)

Ha találunk ellenpéldát, akkor az állítás hamis. Legyen például $a = 2$, $b = 8$, ekkor:

$$H(2, 8) = \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{16}{5}; \quad M(2, 8) = \sqrt{2 \cdot 8} = 4; \quad A(2, 8) = \frac{2+8}{2} = 5.$$

(1 pont)

Így H, M és A mértani sorozatot alkot, hiszen $\frac{M}{H} = \frac{4}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{4} = \frac{A}{M}$, de $a \neq b$. (1 pont)

Tehát az állítás **hamis.** (1 pont)

II. megoldás

A megfordított állítás:

Ha a és b (pozitív valós számok) harmonikus, mértani és számtani közepe mértani sorozatot alkot, akkor $a = b$. (1 pont)

Tekintsük az a, b (> 0) számokra az említett közepeket, és vizsgáljuk meg, hogy mértani sorozatot alkothatnak-e:

$$\frac{\frac{\sqrt{ab}}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\sqrt{ab}}{2ab}}{a+b} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}}.$$

(1 pont)

Átalakítva azt az azonosságot kapjuk, hogy $ab = ab$. (1 pont)

H, M, A ezek szerint bármely a, b (> 0) számra mértani sorozatot alkot, tehát az állítás **hamis.** (1 pont)

c) Az x pozitív valós számnak és 5-nek a négyzetes közepe $\sqrt{17}$. Mennyi az ismeretlen szám értéke?

M: Jelölje az ismeretlen értékét x. Ekkor $\sqrt{\frac{x^2+5^2}{2}} = \sqrt{17}$. (1 pont) c 5

Mindkét oldalt négyzetre emelve és kettővel felszorozva:

$$x^2 + 25 = 34.$$ (1 pont)

Innen $x^2 = 9$, azaz $|x| = 3$. (1 pont)

Mivel $x > 0$, így csak az $x = 3$ lehet megoldás. (1 pont)

Ellenőrzés: $\sqrt{\frac{3^2+5^2}{2}} = \sqrt{\frac{34}{2}} = \sqrt{17}$, tehát a megoldás $x = 3$. (1 pont) ö 12

2 *a)* Határozza meg $\frac{p}{q}$ értékét, ha $q \neq 0$, $q \neq -2p$ és $\frac{2p+q}{4p+2q} = \frac{10p}{9q}$. a 3

M: A bal oldalon egyszerűsíthetünk $(2p + q)$-val: $\frac{1}{2} = \frac{10p}{9q}$. (1 pont)

Ebből $\frac{p}{q} = \frac{9}{20} = 0{,}45$. (1 pont)

Ellenőrzés: $p = 0{,}45q \Rightarrow \frac{1{,}9q}{3{,}8q} = \frac{1}{2} = \frac{4{,}5q}{9q}$. (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az $|1 - |x|| \geq 1$ egyenlőtlenséget! b 5

M: I. megoldás

Ha $|x| \leq 1$, akkor a bal oldali kifejezés $1 - |x| \geq 1$, azaz $0 \geq |x|$. (1 pont)

Ennek egyetlen megoldása $x = 0$. Ez a vizsgált $[-1; 1]$ tartományban van. (1 pont)

Meg kell vizsgálni, hogy a kapott értékre teljesül-e a feltétel.

Ha $|x| \geq 1$, akkor a bal oldali kifejezés $|x| - 1 \geq 1$, azaz $|x| \geq 2$. (1 pont)

Itt végtelen sok valós számot kapunk: $x \leq -2$ vagy $2 \leq x$, ami mind a vizsgált $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$ tartományba esik. (1 pont)

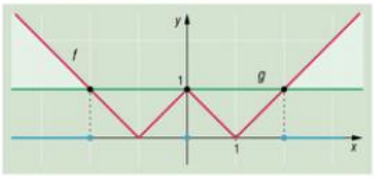
Meg kell vizsgálni, hogy a kapott értékre teljesül-e a feltétel.

A megoldások összesítve: $x \in]-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; \infty[$. (1 pont)

II. megoldás

Transzformációs lépésekkel ábrázoljuk a bal oldalt mint a valós számokon értelmezett $f(x)$ függvényt:

$$|x| \Rightarrow -|x| \Rightarrow -|x| + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |-|x| + 1|.$$



A jobb oldal konstans $g(x) = 1$. (3 pont)

A megoldásokat ott találjuk, ahol f metszi g-t ($f = g$), vagy ahol f „felette" van g-nek ($f > g$). (1 pont)

Ez a pont jár, ha az ábráról vagy a megoldásból kiderül a gondolat.

Az ábráról leolvasva: $x \in]-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; \infty[$. (1 pont)

c) Adja meg azon egyjegyű pozitív számok halmazát, amelyekre $\cos\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$. c 4

M: Ha $\cos\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$, akkor $x \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ bármely k egész számra. (1 pont)

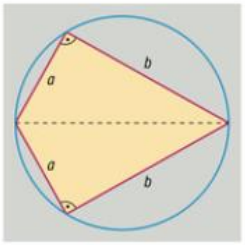
Az egyenlet mindkét oldalát π-vel osztva és 2-vel szorozva: $x = 1 + 2k$, azaz páratlan szám. (1 pont)

A $2k + 1$ alak $k = 0, 1, 2, 3, 4$ értékre lesz pozitív és egyjegyű. (1 pont)

Így a megoldások: $x = 1, 3, 5, 7, 9$. (1 pont) ö 12

3 *a)* Egy deltoid oldalainak hossza a és b, köré kör írható. Bizonyítsa be, hogy a deltoid területe $T = ab$. a 4

M: A deltoid szimmetrikus az egyik átlójára, az átlót „látó" két szemközti szöge egyenlő. (1 pont)



Ha körbe írható, akkor egyúttal húrnégyszög is, ebből adódóan két derékszögű háromszögre bontható. (1 pont)

Mindkét háromszög befogói a deltoid a és b oldalai, így a két háromszög területére:

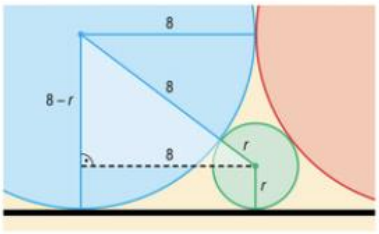
$$t = \frac{ab}{2}.$$ (1 pont)

Így $T_{deltoid} = t + t = ab$. (1 pont)

Egy régi szerkezetben nem fogaskerekeket, hanem azonos méretű, egymással érintkező, henger alakú gumigörgőket használtak. A szerkezetet használaton kívül úgy zárták le, hogy a két nagy görgő „közé" egy kisebb méretű fékező görgőt szorítottak, erre csukták a szerkezet oldalát.

b) Számítsa ki a kis görgő érintkezéshez szükséges minimális sugarát, ha a nagy görgő átmérője 16 cm! b 6

M: Tekintsük az ábrát. A két kör érinti egymást és a szerkezet egyenes falát.



A körök középpontjait összekötő sugár áthalad az érintési ponton.

Az egyenest érintő pontokba húzott sugarak merőlegesek az egyenesre. (2 pont)

Kialakul egy derékszögű háromszög, oldalai $8 - r$, 8 és $8 + r$. (1 pont)

A Pitagorasz-tételt felírva:

$$(8 - r)^2 + 8^2 = (8 + r)^2,$$ (1 pont)

amiből $64 = 32r$. (1 pont)

A kis görgő minimális sugara $r = 2$. (1 pont)

c) A nagy gumigörgőket egy 4 cm oldalú négyzet keresztmetszetű tengelyre húzták, hogy a forgómozgást át tudják adni. Határozza meg, hány köbcentiméter gumi szükséges a két nagy görgő gyártásához, ha a négyzetes oszlop alakú tengelyeknek a görgők belsejébe eső hossza 6-6 cm! c 3

M: Egy nagy görgő térfogata, ha tömör lenne:

$$V_{ng} = 8^2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 1206{,}37 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

A nagy görgőben levő négyzetes hasáb alakú üreg térfogata:

$$V_{nh} = 4^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3.$$ (1 pont)

A nagy görgők térfogata együtt:

$$2 \cdot (1206{,}37 - 96) = \mathbf{2220{,}74 \text{ cm}^3}.$$ (1 pont) ö 13

4 Egy vegyesbolt vezetője azt figyelte meg, hogy egy bizonyos árucikk esetén minden 100 Ft-os árcsökkenés napi kettő darabbal több termék eladását eredményezi. Gyors fejszámolás után azt kapja, hogy e modell szerint 5000 Ft-os egységár esetén ebből a termékből naponta 20 darabot adnának el.

a) Hány darabot adnának el a modell szerint akkor, ha 3550 Ft-os árcédulát tennének az árucikkre? a 3

M: Ha 100 Ft-os árcsökkenés 2-vel több darab eladását eredményezi, akkor a modell szerint 50 Ft-os csökkenés 1-gyel többet. (1 pont)

Így a 3550 Ft-os ár az 5000 Ft-hoz képest $\frac{5000 - 3550}{50} = 29$ darabos növekedést jelent. (1 pont)

$20 + 29 =$ **49 darabot adnának el** naponta 3550 Ft-os egységáron. (1 pont)

b) Igazolja, hogy a napi bevétel $b(x) = -0{,}02x^2 + 120x$ hozzárendelési szabállyal írható le, ahol x a termék egységára forintban! b 5

M: I. megoldás

Az *a)* rész megoldását továbbgondolva: ha x Ft az egységár, akkor az eladott darabszám:

$$\frac{5000 - x}{50} + 20.$$ (2 pont)

A bevétel ekkor:

$$\left(\frac{5000 - x}{50} + 20\right) \cdot x,$$ (1 pont)

ami átalakítva $(120 - 0{,}02x) \cdot x$. (1 pont)

Kifejtve és rendezve, x Ft-os egységár mellett a napi bevétel:

$$\mathbf{b(x) = -0{,}02x^2 + 120x.}$$ (1 pont)

II. megoldás

Tekintsük először az egységár–mennyiség (Ft–db) koordináta-rendszert és benne az eladott darabszámot az egységár lineáris függvényében:

$$d(x) = mx + b.$$ (1 pont)

Tudjuk, hogy 100 Ft pozitív irányú elmozdulás az x tengelyen 2 db-ot mozdít az y tengelyen lefelé, innen $m = -0{,}02$. (1 pont)

Az (5000; 20) ponton függvényünk áthalad, $b = 120$, tehát

$$d(x) = -0{,}02x + 120.$$ (1 pont)

A bevétel–mennyiség (Ft-db) rendszerben minden x Ft-ért árusított termékből $d(x)$ darabot adunk el, így a bevétel $x \cdot d(x)$. (1 pont)

Tehát x Ft-os egységár mellett a napi bevétel:

$$b(x) = -0{,}02x^2 + 120x.$$ (1 pont)

c) A termék beszerzési ára fix 1800 Ft/darab. Határozza meg, hány termék eladása esetén lesz maximális a bevétel, és mekkora ebben az esetben a terméken keletkező nyereség! (A nyereség a bevétel és a beszerzési ár különbsége.) c 6

M: $b(x)$ fordított állású parabola, van két zérushelye:

$$b(x) = -0{,}02x^2 + 120x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 6000.$$ (1 pont)

Szimmetrikus görbe, maximuma a zérushelyek között félúton található: (1 pont)

$$x_{max} = 3000 \text{ Ft}.$$ (1 pont)

Tehát akkor maximális a bevétel, ha 3000 Ft-ért árulják a terméket. Ekkor az eladott darabszám:

$$d(3000) = -0{,}02 \cdot 3000 + 120 = 60 \text{ db}.$$ (1 pont)

A bevétel és a beszerzés különbsége a nyereség: (1 pont)

$b(3000) - 60 \cdot 1800 =$ **72 000 Ft** a maximális nyereség a terméken.

(1 pont) ö 14

A maximum deriválással is megkereshető.

II. rész

5 Gabi és Dani tojásokat festettek húsvétra, összesen 15 darabot. 6 darabra kézzel virágmintát készítettek, a többit egyszínűre festették. A 15 tojást Dani véletlenszerűen osztotta el két fűvel bélelt, fonott tálka között: először a kerek tartóba tett gondosan 8 darab tojást, majd a szögletesbe 7-et.

a) Mekkora valószínűséggel kerül a virágmintás tojások közül 4 ugyanabba a tartóba? a 5

M: A tojások elhelyezése visszatevés nélküli mintavétel. (Mindegy, melyik tálat tekintjük, a maradék kerül a másik edénybe.) (1 pont)

A továbbiakban a kerek tálat tekintjük:

Mindkét esetben az összes esetek száma:

$$\binom{15}{8} = 6435.$$ (1 pont)

Egyik kedvező eset, ha 4 virágmintás kerül a kerek tálba:

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{9}{4} = 1890.$$ (1 pont)

Másik kedvező eset, ha 2 virágmintás kerül a kerek tálba:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{6} = 1260.$$ (1 pont)

(Ha 2 van a kerekben, 4 van a szögletesben.)

A valószínűség:

$$P = \frac{1890 + 1260}{6435} \approx \mathbf{0{,}4895.}$$ (1 pont)

Gabi az üzletben alaposan megvizsgálta a tojásokat, mielőtt megvette őket. Megfigyelése szerint „minden tízes tartóra jut egy törött tojás" (értsük ez alatt, hogy a tojások mindegyike 0,1 valószínűséggel törött).

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három 10-es doboz tojást átvizsgálva (kiveszi, megnézi és visszateszi az egyes tojásokat), Gabi legalább kettő törött tojást talál? b 5

M: A szöveg alapján visszatevéses mintavételt kell tekintenünk. Az egyes tojásokra vonatkozó események valószínűségei:

$$p_{\text{törött}} = 0{,}1; \quad p_{\text{nem törött}} = 0{,}9.$$ (1 pont)

A „legalább kettő" kitételt sok (2, 3, …, 30 törött tojás) esemény alkotja, ezért áttérünk a komplementerre: 0 vagy 1 törött tojás van. (1 pont)

$P(\text{nincs törött tojás}) = 0{,}9^{30} \approx 0{,}0424.$ (1 pont)

$P(\text{1 törött tojás van}) = \binom{30}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{29} \approx 0{,}1413.$ (1 pont)

A keresett valószínűség:

$$1 - (0{,}0424 + 0{,}1413) \approx \mathbf{0{,}8163.}$$ (1 pont)

Dani a korábban elkészült 15 tojás mellé még p darab pettyest is festett ($p \geq 3$). Húsvét után Dani apukája véletlenszerűen kiválaszt három tojást a sonka mellé vacsorára.

c) Bizonyítsa be, hogy annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között legalább kettő pettyes van, $\dfrac{p^3 + 42p^2 - 43p}{p^3 + 42p^2 + 587p + 2730}$. c 6

M: Visszatevés nélküli a mintavétel (a tojásokat megesszük). (1 pont)

Az összes esetek száma:

$$\binom{15+p}{3} = \frac{(15+p)!}{3! \cdot (12+p)!} = \frac{(15+p)(14+p)(13+p)}{3!}.$$ (1 pont)

2 pettyes tojás kiválasztásának lehetőségei:

$$\binom{p}{2}\binom{15}{1} = \frac{p!}{2!\cdot(p-2)!} = \frac{p(p-1)}{2!}\cdot 15.$$ (1 pont)

(Ekkor a korábban elkészült 15-ből 1 kerül a kiválasztottak közé.)

3 pettyes tojás kiválasztásának lehetőségei:

$$\binom{p}{3}\binom{15}{0} = \frac{p!}{3!\cdot(p-3)!} = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}.$$ (1 pont)

(Ekkor a korábban elkészültekből nem kerül a mintába egy sem.)

A kérdezett valószínűség:

$$\frac{\frac{p(p-1)}{2!}15 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}}{\frac{(15+p)(14+p)(13+p)}{3!}} = \frac{p(p-1)[45+p-2]}{(15+p)(14+p)(13+p)}.$$ (1 pont)

Ezt beszorzás és összevonás után az állításban szereplő alakra hozva **az állítást igazoltuk.** (1 pont) ö 16

6 Egy enyhe tüneteket okozó vírus elterjedésekor azt figyelték meg a szakemberek, hogy munkanapokon a *napi fertőzési ráta* magasabb volt (107%), mint szombaton vagy vasárnap (102%). A különbséget azzal magyarázták, hogy hétvégéken nagymértékben csökken az emberek közötti találkozások száma. (A 107%-os fertőzési ráta azt jelenti, hogy a megadott időszakban – példánkban egy munkanap – 100 fertőzött személyre körülbelül 7 újabb fertőzött jut.)

a) Igaz vagy hamis a következő kijelentés? Válaszát indokolja! a 3

A vírus heti fertőzési rátája eléri a 150%-ot.

M: A hét 5 munkanapból és 2 hétvégi napból áll. (1 pont)

$$r_{\text{heti}} = 1{,}07^5 \cdot 1{,}02^2 \approx 1{,}46.$$ (1 pont)

Tehát a kijelentés **hamis.** (1 pont)

A kórokozó terjedését egy viszonylag zárt közösségben csak később vették észre. Amikor kiderült, megállapították, hogy az *addigi időszakra vonatkozó fertőzési ráta* (amelyben 3 hétvége volt) 435,79%. Feltételezzük, hogy a *hétköznapi napi fertőzési ráta* ebben a közösségben is 107%, a *hétvégi napi fertőzési ráta* 102%.

b) Határozza meg, hogy ebben a közösségben összesen hány napja terjedt a fertőzés! b 4

M: $4{,}3579 = 1{,}07^n \cdot 1{,}02^6$. (1 pont)

Rendezve és mindkét oldal 1,07-es alapú logaritmusát véve:

$$1{,}07^n = \frac{4{,}3579}{1{,}02^6}.$$ (1 pont)

Az $f(x) = \log_{1,07} x$ logaritmusfüggvény egy értéket egy helyen vesz fel, ezért

$$n = \log_{1,07} \frac{4,3579}{1,02^6} = 20.$$ (1 pont)

A kölcsönös egyértelműségre, szigorú monotonitásra, bijektivitásra való hivatkozások esetén is jár a pont.

Így a kórokozó megjelenése óta **26 nap** telt el. (1 pont)

A vírus a szakemberek és a lakosság szoros együttműködése következtében végül az utolsó héten 5 munkanap alatt lecsengett. Ezen a héten a *napi fertőzési ráta* mindennap ugyanannyi százalékkal csökkent, ráadásul már szerdán elérte a bűvös 100% értéket, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy nem terjed tovább. Így az *5 munkanapra számított fertőzési ráta* 99,992% volt.

c) Számítsa ki, mekkora volt a *hét első napján a fertőzési ráta,* és adja meg %-os alakban! c 9

M: Jelölje p a keddi, még 100% feletti százalékértéket, és legyen $q = \frac{p}{100}$. Ekkor a napi együtthatók:

hétfőn $1 + 2q$, kedden $1 + q$, szerdán 1, csütörtökön $1 - q$, pénteken $1 - 2q$. (1 pont)

Ha a következetes jelölések a megoldásból kiderülnek, jár a pont.

A szöveg alapján a köztük levő összefüggés:

$$(1 + 2q) \cdot (1 + q) \cdot 1 \cdot (1 - q) \cdot (1 - 2q) = 0,99992.$$ (1 pont)

Az egyenlet kifejtésekor támaszkodjunk a nevezetes szorzatokra:

$$(1 + 2q) \cdot (1 - 2q) \cdot (1 + q) \cdot (1 - q) = (1 - 4q^2) \cdot (1 - q^2) =$$ (1 pont)

$$= 4q^4 - 5q^2 + 1 = 0,99992 \Rightarrow 4q^4 - 5q^2 + 0,00008 = 0.$$ (2 pont)

Ez egy q^2-ben másodfokú egyenlet. A megoldóképlet alapján

$$q_1^2 \approx 1,249984 \quad \text{és} \quad q_2^2 \approx 0,000016.$$ (1 pont)

A szöveg alapján q nem lehet 1-nél nagyobb (mert akkor csütörtökre már negatív lenne), valamint q nem lehet negatív sem (mert akkor idővel nem csökkenne). (1 pont)

Ezért $q = 0,004$. (1 pont)

A hétfői fertőzési ráta tehát **100,8%** volt. (1 pont) ö 16

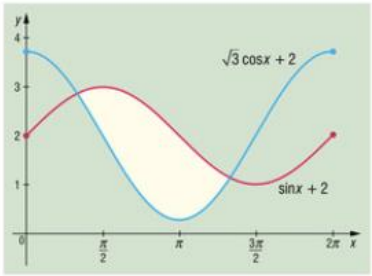
7 Adottak a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon értelmezett következő függvények:

$$f(x) = \sin x + 2$$

és

$$g(x) = \sqrt{3}\cos x + 2.$$

a) Igazolja, hogy a $g(x)$ függvény mindenhol pozitív értéket vesz fel! a 4



M: I. megoldás

Ismert, hogy

$$-1 \le \cos x \le 1.$$ (1 pont)

Mindkét oldalt szorozzuk $\sqrt{3}$-mal:

$$-\sqrt{3} \le \sqrt{3}\cos x \le \sqrt{3}.$$ (1 pont)

Majd adjunk hozzá kettőt:

$$-\sqrt{3}+2 \le \sqrt{3}\cos x + 2 \le \sqrt{3}+2.$$ (1 pont)

Mivel $0 < 2-\sqrt{3}$,

$$0 < 2-\sqrt{3} \le \sqrt{3}\cos x + 2 = g(x),$$

így az állítás **igaz.** (1 pont)

II. megoldás

Kérdés: $\sqrt{3}\cos x + 2 > 0$. (1 pont)

Rendezve: $\cos x > -\frac{2}{\sqrt{3}}$. (1 pont)

Mivel

$$\sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1.$$ (1 pont)

Ezért $\cos x \ge -1 > -\frac{2}{\sqrt{3}}$, ami bizonyítja, hogy az állítás **igaz.** (1 pont)

b) Számítsa ki az ábrán sárgával jelölt, a két görbe által határolt zárt síkidom területét! b 8

M: Először határozzuk meg az integrációs tartomány határait a

$$\sin x + 2 = \sqrt{3}\cos x + 2$$

egyenlet $[0; 2\pi]$ intervallumba eső megoldásaiként.

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x, \qquad /: \cos x \ (\neq 0)$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$ (2 pont)

Innen $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = 4\frac{\pi}{3}$. (1 pont)

A vizsgálandó $\left[\frac{\pi}{3}; 4\frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon belül a függvények nem metszik egymást, és például $\sin\pi > \cos\pi$, ezért $\sin x \ge \sqrt{3}\cos x$. (1 pont)

Így a keresett terület értéke:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} \left[\sin x + 2 - \left(\sqrt{3}\cos x + 2\right)\right] \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} \left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) \mathrm{d}x.$$ (1 pont)

(A területet a két külön kiszámolt integrál különbségeként is fel lehet írni.)

Megkeresve a primitív függvényeket, majd alkalmazva a Newton–Leibniz-tételt: (2 pont)

$$\left[-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}}=-\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)-\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right].$$

A két görbe közötti terület **4 területegység.** (1 pont)

Egy műszaki cikkekkel kereskedő online üzletnek az év nagy részében 60%-os haszna van egy népszerű játékkonzolon. A „fekete péntek" nevű időszakban a konzolra 40%-os kedvezményt hirdet a bolt.

c) Mekkora hasznuk keletkezett az üzemeltetőknek a kedvezményes időszakon kívül, ha a „fekete pénteken" adták el a teljes éves mennyiség 25%-át, összesen 11,52 millió forint értékben? (A haszon az eladási és beszerzési ár különbözete.) c 4

M: Jelölje x a fekete pénteken eladott áru beszerzési értékét, y az egész évben eladott áruk beszerzési értékét.

Az árengedmény 40%-os, így

$$x\cdot 1{,}6\cdot 0{,}6=11{,}52\ \text{(millió Ft)},$$ (1 pont)

$$x=12\ \text{(millió Ft)}=0{,}25y,$$ (1 pont)

$$y=48\ \text{(millió Ft)}.$$ (1 pont)

Innen a kedvezményes időszakon kívüli haszon:

$$0{,}75\cdot 48\cdot 0{,}6=\mathbf{21{,}6\ millió\ Ft.}$$ (1 pont) ö 16

8 *a)* Egy egyszerű gráfban a pontok fokszámainak összege 100. Adja meg, hogy legalább hány pontja van a gráfnak, ha tudjuk, hogy van benne 0 fokú pont! a 6

M: A fokszámok összege az élek számának kétszerese, tehát a gráfnak 50 éle van. (1 pont)

Egy n pontú gráfban akkor van a maximális számú él, ha a gráf teljes gráf. (1 pont)

Azt a lehető legkevesebb pontú gráfot keressük, amelyben mint teljes gráfban 50-nél több él van:

$$\frac{n(n-1)}{2}\geq 50,$$ (1 pont)

azaz

$$n(n-1)\geq 100.$$ (1 pont)

A megoldások közül a legkisebb pozitív egész az $n=11$. (1 pont)

Mivel van izolált pont, ezért $n\geq 12$, így legalább **12 pontja** van a gráfnak. (1 pont)

Bolygónk égi kísérője, a Hold a Földhöz hasonlóan gömb alakúnak tekinthető, amelynek sugara 1737,1 km.



b) A Hold magjának átmérője megközelítőleg 475 km. Hány százaléka a mag térfogata a teljes Hold térfogatának?

b 3

M: A mag sugara $r = 237{,}5$ km. Bármely két gömb hasonló, így

$$237{,}5 = 1737{,}1 \cdot \lambda \quad (\Rightarrow \lambda \approx 0{,}136722). \qquad \text{(1 pont)}$$

A térfogatok aránya $\lambda^3 \approx 0{,}002556$. (1 pont)

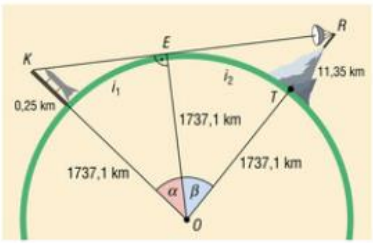
A keresett érték **0,2556%.** (1 pont)

A Hold legmagasabb hegye 11 350 méter magas, a mérnökök ennek tetejére szeretnének radarállomást telepíteni. Egy 250 méter magas rakétakilövő tornyot is terveznek a mérnökök, bizonyos okok miatt a lehető legtávolabb a hegytől – azonban fontos, hogy a radar „rálásson" a kilövőállomás tetejére.

c) Legfeljebb milyen messze lehet a Hold felszínén mérve a T ponttól a kilövőállomás talppontja? (A hegyen kívül simának tekintjük a felszínt.)

c 7

M: Az elérhető legnagyobb távolság akkor áll elő, ha az ORK háromszög RK oldala érinti az O középpontú kört. (1 pont)



Ekkor E érintési pontban derékszög van, $OE = 1737{,}1$ km. (1 pont)

Mindkét derékszögű háromszögben kiszámítjuk a benne futó körív hosszát.

Az OEK derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{1737{,}1}{1737{,}1 + 0{,}25} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}972°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen

$$i_1 = \frac{2 \cdot 1737{,}1 \cdot \pi}{360°} \cdot 0{,}972° \approx 29{,}470 \text{ km}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az OER derékszögű háromszögben:

$$\cos\beta = \frac{1737{,}1}{1737{,}1 + 11{,}35} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 6{,}532°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen

$$i_2 = \frac{2 \cdot 1737{,}1 \cdot \pi}{360°} \cdot 6{,}532° \approx 198{,}038 \text{ km}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kilövőállomás és a hegy talppontjának a Hold felszínén levő távolsága:

$$i_1 + i_2 = 29{,}470 + 198{,}038 = \mathbf{227{,}508 \text{ km}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

9 Egy radartorony helyzete a koordináta-rendszerben az $O(-6; 12)$ pont. Két kisebb érzékelő található még az $A(18; -6)$ és $B(10; 0)$ pontokban. A torony radarja által lefedett terület kör alakúnak tekinthető, amelynek egy érintője az A és B pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese.

a) Mekkora a radar által lefedett terület, ha a koordináta-rendszerben 1 egység a valóságban 2 km-nek felel meg? (A Föld görbületétől eltekintünk.) Válaszát egész négyzetkilométerre kerekítve adja meg! a 6

M: Készítsünk ábrát, például 2 hosszú egységet tekintve. (1 pont)

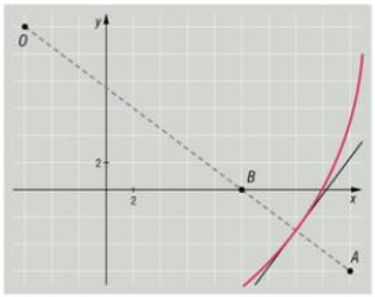
Sejtés: az ábra alapján az ABO pontok egy egyenesre esnek. (1 pont)

Mivel

$$2 \cdot \overrightarrow{BA}(8; -6) = \overrightarrow{OB}(16; -12),$$

(1 pont)

így sejtésünk helyes. (1 pont)



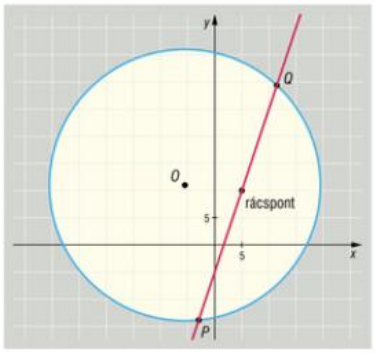
A kör áthalad az AB szakasz felezőpontján, az $F_{AB}(14; -3)$ ponton, így sugara:

$$R = d(OF_{AB}) = \sqrt{(14+6)^2 + (-3-12)^2} = 25 \text{ egység} = 50 \text{ km}.$$ (1 pont)

A radar által lefedett terület: $R^2 \cdot \pi \approx$ **7854 km²**. (1 pont)

b) Egy repülőgép az e: $3x - y = 5$ egyenes mentén repül keresztül a radar által megfigyelt területen. Hány rácspont felett repül át eközben? (Rácspont: olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám.) b 10

M: Készítsünk ábrát! Szükségünk van arra a két pontra, ahol a gép be- és kilép a radar hatósugarába, illetve hatósugarából. (1 pont)



Az $O(-6; 12)$ középpontú, $r = 25$ egység sugarú kör egyenlete:

$$(x+6)^2 + (y-12)^2 = 625.$$

(1 pont)

Az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}(x+6)^2 + (y-12)^2 &= 625\\ 3x - y &= 5\end{aligned}\right\}.$$

(1 pont)

A második egyenletből $y = 3x - 5$.

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$(x+6)^2 + (3x-17)^2 = 625.$$ (1 pont)

Kifejtve és összevonva kapjuk a következő másodfokú egyenletet:

$$x^2 - 9x - 30 = 0.$$ (2 pont)

Ennek megoldásai $x_1 \approx -2{,}76$ és $x_2 \approx 11{,}76$. (1 pont)

Azaz azon x egészek jöhetnek szóba, amelyekre $-2{,}76 < x < 11{,}76$. (1 pont)

Mivel $y = 3x - 5$, így ha x egész, akkor y is egész, tehát $P(x; y)$ rácspont. (1 pont)

A megfelelő x értékek a $-2, -1, \ldots, 10$ és a 11, vagyis a repülőgép összesen **14 darab** rácsponton repül át. (1 pont)

ö 16

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

I. rész

1 Egy lufikat fújó gép szabályozza a bejutó levegőmennyiséget az eltelt idő függvényében, másodpercben mérve. A gömb alakú lufi átmérőjét centiméterben a fújás x. másodpercében a $d(x) = -\frac{8}{45}x^2 + \frac{16}{3}x$ függvény adja meg. A gép a görbe maximumánál hagyja abba a befúvást, és levegővesztéség nélkül köti el a lufi száját.

a) Határozza meg egész centiméterre kerekítve a lufi átmérőjét a 10. másodpercben! a 2

M: $d(10) = -\frac{8}{45} \cdot 10^2 + \frac{16}{3} \cdot 10 = 35{,}\dot{5}.$ (1 pont)

A 10. másodpercben a lufi átmérője **36 centiméter.** (1 pont)

b) Hány másodperc alatt fújja fel a lufit a gép? b 4

M: I. megoldás

A függvény maximumhelyét deriválással határozzuk meg. (1 pont)

Szélsőérték ott lehet, ahol

$$d'(x) = -\frac{16}{45}x + \frac{16}{3} = 0, \quad \text{innen} \quad x = 15.$$ (1 pont)

A derivált csökkenő lineáris függvény, így ha $x < 15$, akkor pozitív ($d(x)$ nő), ha $x > 15$, akkor negatív értékeket vesz fel ($d(x)$ csökken). Tehát az $x = 15$ a $d(x)$ függvény maximumhelye. (1 pont)

Ha ez egy ábráról egyértelműen kiderül, akkor is jár a pont.

A gép **15 másodperc** alatt végez a lufi felfújásával. (1 pont)

II. megoldás

A függvény maximumhelyét teljes négyzetté alakítással határozzuk meg. (1 pont)

$$d(x) = -\frac{8}{45}x^2 + \frac{16}{3}x = -\frac{8}{45}(x^2 - 30x) = -\frac{8}{45}[(x-15)^2 - 225] =$$

$$= -\frac{8}{45}(x-15)^2 + 40.$$ (1 pont)

Leolvasható, hogy a fordított állású parabolát 15 egységgel toltuk el az x tengely mentén jobbra. Tehát a $d(x)$ függvény maximumhelye $x = 15$. (1 pont)

Ha ez egy ábráról egyértelműen kiderül, akkor is jár a pont.

A gép **15 másodperc** alatt végez a lufi felfújásával. (1 pont)

c) Számítsa ki, hányadik másodpercben lesz a lufi felszíne pontosan 400π cm^2! Ne használjon közelítő értéket! c 5

M: A gömb felszíne

$$A = 4r^2 \cdot \pi = 400\pi \text{ cm}^2,$$

innen $r = 10$ cm, $d = 20$ cm. (1 pont)

A $d(x)$ függvény alapján:

$$20 = -\frac{8}{45}x^2 + \frac{16}{3}x, \quad \text{ebből} \quad 0 = -2x^2 + 60x - 225. \qquad \text{(1 pont)}$$

$x_{1,2} = 15 \pm 7{,}5\sqrt{2}$. (1 pont)

A *b)*-beli eredmény alapján a gép 15 másodpercig működik, tehát a keresett érték: $x = 15 - 7{,}5\sqrt{2}$. (1 pont)

A lufi felszíne a fújás **$15 - 7{,}5\sqrt{2}$-edik másodpercében** lesz 400π cm^2. (1 pont) ö 11

Csak ez a pont nem jár, ha nem pontos értéket ad meg.

2 Oldja meg az egyenlőtlenséget és az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{\frac{x}{5} - 4} < 20$

b) $\left.\begin{aligned} \log_2 x + 3\log_2 y &= 2{,}5 \\ \log_3(x^2) + \log_3 y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Megoldás:

a) A bal oldal értelmezési tartománya az $x \geq 20$ valós számok halmaza. (1 pont) a 4

A bal oldal értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. (1 pont)

Négyzetre emelés és ekvivalens átalakítások után $x < 2020$. (1 pont)

A feladat megoldásai a $\mathbf{20 \leq x < 2020}$ valós számok. (1 pont)

b) A logaritmus definíciójából adódóan $x, y > 0$. (1 pont) b 8

Ez a pont akkor is jár, ha csak a feladat végén végez ellenőrzést.

Mindkét egyenlet a logaritmus definíciója és azonosságai alapján átalakítható a következőképpen:

$$\left.\begin{aligned} \log_2(x \cdot y^3) &= \log_2(2^{2{,}5}) \\ \log_3(x^2 \cdot y) &= \log_3 1 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az azonosságok használatáért is jár a pont.

Az $f(x) = \log_2 x$ és a $g(x) = \log_3 x$ függvények minden értéket pontosan egy helyen vesznek fel, ezért az egyenletrendszer mindkét egyenletéből elhagyható a logaritmus. (1 pont)

A kölcsönös egyértelműségre, szigorú monotonitásra, bijektivitásra való hivatkozások esetén is jár a pont.

Az $\left.\begin{aligned} x \cdot y^3 &= 2^{2{,}5} \\ x^2 \cdot y &= 1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletét négyzetre emelve:

$$\left.\begin{aligned} x^2 \cdot y^6 &= 32 \\ x^2 \cdot y &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenletet elosztva kapjuk, hogy $y^5 = 32$. (2 pont)

Innen $y = 2$, majd visszahelyettesítve kapjuk: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (1 pont)

Ellenőrzés:

$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\log_2 2 = -\frac{1}{2} + 3 = 2{,}5$ és $\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 2 = -\log_3 2 + \log_3 2 = 0.$ (1 pont) ö 12

Az egyenletrendszer megoldása tehát: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = 2$.

Megjegyzés: Az $\left.\begin{matrix} x \cdot y^3 = 2^{2,5} \\ x^2 \cdot y = 1 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldható például úgy is, hogy a második egyenletből kifejezzük y-t: $y = \frac{1}{x^2}$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe: $x \cdot \frac{1}{x^6} = 2^{2,5}$. Innen $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, majd $y = 2$.

3 A ruhaüzletekben a felpróbált, de meg nem vásárolt ruháknak külön állványt állítanak ki. Nyitás után nem sokkal a 4 próbafülkébe 4, 3, 5 és 2 darab különböző ruhát vitt négy vásárló. A próbára vitt ruhák közül 2 darabot mindegyikük megvásárolt, a többit sorban felakasztották az állványra (a ruhák nem keveredtek össze, más nem használta az állványt ekkor).

a) Számítsa ki, hányféle sorrendben kerülhettek a ruhák az állványra, ha figyelembe vesszük, hogy melyik ruhát melyik vevő próbálta fel! a 3

M: A vevők 2, 1, 3, és 0 darab ruhát helyeztek az állványra. (1 pont)

Az egyes vevők 2!, 1! és 3! sorrendben helyezhették el saját ruháikat, illetve 3! sorrendben érkezhettek az állványhoz, vagyis (1 pont)

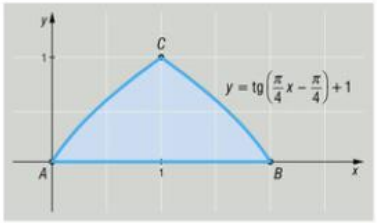
$2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!$ = **72-féle sorrendben** kerülhettek a ruhák az állványra. (1 pont)

Egy tervezés alatt álló embléma csúcsai:

$A(0; 0)$, $B(2; 0)$ és $C(1; 1)$.

Az emblémát határoló három vonal közül egyik az AB szakasz. Az AC ívet az alábbi függvény írja le:

$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$, $0 \le x \le 1$.



Az embléma terve szimmetrikus az $x = 1$ egyenesre.

b) Adja meg a CB ívet leíró $g(x)$ függvény hozzárendelési szabályát! b 4

M: A CB ívet leíró g függvény az $[1; 2]$ intervallumon van értelmezve. (1 pont)

A $g(x)$ függvényt két lépésben kaphatjuk meg.

Az $f(x)$ függvényt tükrözzük az y tengelyre:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) + 1. \quad \text{(1 pont)}$$

Majd eltoljuk 2-vel vízszintesen a pozitív irányba:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}(x-2)-\frac{\pi}{4}\right)+1. \qquad \text{(1 pont).}$$

Ha csak egy transzformációt ír le jól, akkor azért összesen 2 pontot kap.

A keresett függvény:

$$g(x)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)+1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az előző pontban megadott embléma AC ívét elég jó közelítéssel leírja a $[0;1]$ intervallumon értelmezett $h(x)=\frac{8}{7}\left(\frac{x}{2}-1\right)^3+\frac{8}{7}$ függvény.

c) Döntse el, hogy az $f(x)$ vagy a $h(x)$ görbe alkalmazásakor válik „hegyesebbé" az embléma csúcsa a C pontban! (Az embléma hegyesebb, amelynek az ívét alkotó függvény érintője meredekebb a C pontban.) c 7

M: Az f függvény deriváltja:

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A $h(x)$ függvény deriváltja:

$$h'(x)=\frac{8}{7}\cdot 3\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{12}{7}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Kiszámítva az $x=1$ helyen felvett értékeiket:

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$h'(1)=\frac{12}{7}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{3}{7}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kapott értékek az adott függvényhez a C pontban húzott érintők meredekségei. (1 pont)

Mivel

$$\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854>\frac{3}{7}\approx 0{,}4286, \qquad \text{(1 pont)}$$

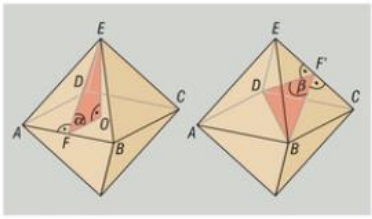
ezért az **$f(x)$ függvény** alkalmazásakor válik „hegyesebbé" az embléma a C pontban. (1 pont) ö 14

4 Peti úgy készített a társasjátékához egy nyolcoldalú „dobótestet", hogy összeragasztott két egybevágó, négyzet alapú egyenes gúlát, amelyek alaplapjai hézagmentesen fedik egymást, oldallapjaik pedig szabályos háromszögek.



a) Számítsa ki, hány fokos szöget zár be a „dobótest" két szomszédos oldallapja egymással! a 6

M: Mivel a szöveg szerint a test két gúla összeillesztésével keletkezett, tegyük fel, hogy a szomszédos lapok szöge két különböző értéket is felvehet (az ábra jelöléseivel 2α és β). Az *AFE*, *FOE* háromszögek derékszögűek, a *BF'D* háromszög egyenlő szárú. (1 pont)



Bármekkora is a test éle, a testek hasonlók, így a szögek nem változnak. Legyen a test minden éle 2 egység. (1 pont)

Az *AFE* háromszögben:

$$AF = 1 \quad \text{és} \quad EAF\sphericalangle = 60°,$$

ezért

$$FE = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}.$$

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, így $\alpha \approx 54{,}74°$. (1 pont)

A négyzet két különböző oldalán fekvő háromszöglapok $2\alpha \approx$ **109,47°** szöget zárnak be. (1 pont)

Az *ABCD* négyszög négyzet, ezért az átlója $BD = 2\sqrt{2}$.

A *BF'D* háromszögben $BF' = F'D = FE = \sqrt{3}$, ezért a koszinusztételt alkalmazva:

$$8 = 3 + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \cos\beta,$$

ahonnan $\cos\beta = -\frac{1}{3}$. (1 pont)

Amiből a négyzet azonos oldalán fekvő oldallapok szöge $\beta \approx$ **109,47°.** (1 pont)

A test szimmetriáiból adódóan az oldallapok csak ezt a kétféle szöget zárhatják be egymással, tehát bármely két lapja **109,47°-os** szöget zár be.

Megjegyzés: A szögek egyenlősége a szögfüggvények értékei alapján igazolható. Használjuk fel például a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ összefüggéseket:

$$\cos 2\alpha = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} = \cos\beta.$$

Mivel $0° \le 2\alpha,\ \beta \le 180°$, így $2\alpha = \beta$.

Egy különböző online boltok árait összehasonlító weboldal a termék alatti grafikonon bemutatja a termék átlagárának változását az elmúlt időszakban. Egy termék esetén a grafikon azt mutatja, hogy az ára sokáig nem változott, majd két hete bizonyos százalékban növekedett. Azonban két napja a növelt ár a növelés mértékénél 3%-kal nagyobb mértékben csökkent. A két árváltozás összességében 4,3%-os csökkenést eredményezett az egy hónappal ezelőtti árhoz képest.

b) Határozza meg a növekedés és a csökkenés százalékos mértékét!

b 8

M: Jelölje a 2 héttel ezelőtti %-os növekedés mértékét $p > 0$, ekkor a 2 nappal ezelőtti áresés mértéke $(p + 3)\%$. (1 pont)

A termék új árát két hete $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ tényezővel, (1 pont)

két nappal ezelőtt $\left(1-\frac{p+3}{100}\right)$ tényezővel való szorzással kellett számítani. (1 pont)

Ezek együtt $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p+3}{100}\right)=1-\frac{4{,}3}{100}$-szoros változást eredményeztek. (1 pont)

Kifejtve és átrendezve:

$$(100 + p)(97 - p) = 9570,$$

amiből $0 = p^2 + 3p - 130$ adódik. (1 pont)

A megoldások: $p_1 = 10$, $p_2 = -13$. (1 pont)

Mivel p negatív érték nem lehet, a növekedés mértéke **10%**, a csökkenésé **13%** volt. (1 pont)

Ellenőrzés: Visszahelyettesítve $1{,}1 \cdot 0{,}87 = 0{,}957$. (1 pont) ö 14

II. rész

5 *a)* Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! a 3

Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor van két szögfelezője, melyek a szemközti oldalakat egyenlő arányban osztják.

M: Az egyenlő szárú háromszög szimmetrikus az alapjának felezőmerőlegesére. (1 pont)

Ebből adódik, hogy az alapon fekvő szögek szögfelezői is szimmetrikus pontokban metszik a szárakat. (1 pont)

Mivel a szárak egyenlők, a szimmetrikus metszéspontok azonos arányban osztják őket, tehát az állítás **igaz.** (1 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igazolja ellenpéldával, hogy a megfordított állítás hamis! b 5

M: Az állítás megfordítása:

Ha egy háromszögnek van két szögfelezője, melyek a szemközti oldalakat egyenlő arányban osztják, akkor a háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Jelölje a háromszög oldalait a, b, c, a szemközti szögeket α, β, γ.

A háromszög szögfelezőire vonatkozó tétel alapján az α felezője $b : c$, a β felezője $a : b$ arányban osztja az a, illetve b oldalakat. (1 pont)

A megfordítás feltétele szerint:

$$b : c = a : b \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = ac.$$ (1 pont)

Ellenpéldaként olyan pozitív számokat keresünk, amelyekre igaz az előbbi összefüggés és a háromszög-egyenlőtlenség: $a + b > c$, de a, b, c mind különbözőek. (1 pont)*

(Feltehetjük, hogy $a < b < c$).

Ilyen például az

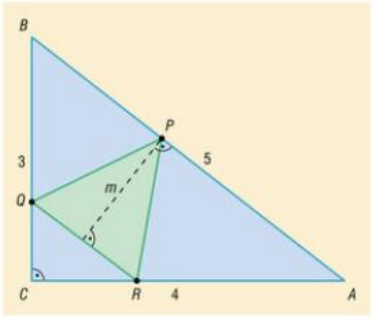
$$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 9 \quad (36 = 4 \cdot 9).$$ (1 pont)*

* A háromszög-egyenlőtlenség vizsgálata nélkül csak az első 3 pont jár.

c) Az ABC derékszögű háromszög BC befogója 3, AC befogója 4 egység. Egy olyan PQR egyenlő szárú háromszöget írunk bele, amelynek P csúcsa az átfogóra, alapjának Q végpontja a BC, R végpontja az AC befogóra illeszkedik és szimmetriatengelye merőleges az átfogóra. Határozza meg, mekkora az ABC háromszögbe írható legnagyobb területű PQR háromszög alapja! c 8

M: I. megoldás

Készítsünk ábrát! Jelölje a kérdezett QR szakaszt x ($x \in [0; 5]$), a PQR háromszög magasságát m. (1 pont)



Az ABC háromszög derékszögű, így az AB átfogó hossza 5.

$$T_{ABC\triangle} = \frac{5m'}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2},$$

innen az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magassága $m' = 2{,}4$ egység. (1 pont)

Mivel a PQR háromszög magassága merőleges az AB átfogóra, ezért $x \parallel AB$. Így $ABC\triangle \sim RQC\triangle$. (1 pont)

Jelölje RQC háromszög magasságát m''. A hasonlóság miatt:

$$\frac{x}{5} = \frac{m''}{2{,}4}, \quad \text{amiből} \quad m'' = 0{,}48x.$$ (1 pont)

Mivel

$$m = 2{,}4 - m'', \quad \text{ezért} \quad m = 2{,}4 - 0{,}48x.$$ (1 pont)

Keressük a következő kifejezés maximumát:

$$T_{PQR\triangle} = \frac{x \cdot m}{2} = x(1{,}2 - 0{,}24x).$$ (1 pont)

$T_{PQR\triangle}$ értéke x függvényében egy fordított állású parabola, ezért maximuma van, ami a szimmetria miatt a két zérushely számtani közepében található. (1 pont)

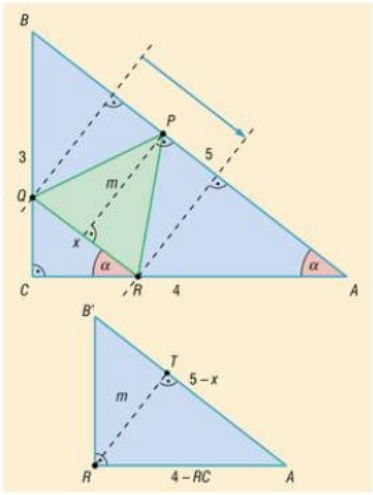
Mivel

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad \text{így} \quad x_{max} = 2{,}5 \text{ egység.}$$ (1 pont)

A T(x) függvény maximuma deriválással is meghatározható.

II. megoldás

Készítsünk ábrát! Legyen $QR = x$ ($x \in [0; 5]$), a PQR háromszög magassága pedig m. (1 pont)



Az ABC háromszög derékszögű, így az AB átfogó hossza 5.

Vágjuk ki a Q és R pontokban az átfogóra állított merőleges egyenesek közé eső darabot az ABC háromszögből, így kapjuk az $AB'R$ háromszöget. (1 pont)

$AB'R\triangle \sim ABC\triangle$, $RQC\triangle \sim ABC\triangle$, $ATR\triangle \sim ABC\triangle$,

ugyanis mind derékszögű és az A csúcsnál levő szögeik megegyeznek (ez az RQC háromszögben az R csúcsnál levő szög). (1 pont)

Mivel $RQC\triangle \sim ABC\triangle$, ezért

$$\frac{RC}{x} = \frac{4}{5}, \quad \text{így} \quad RC = \frac{4}{5}x. \qquad \text{(1 pont)}$$

$ATR\triangle \sim ABC\triangle$, így

$$\frac{m}{4 - RC} = \frac{3}{5}, \quad \text{amiből} \quad m = \frac{3}{5}(4 - RC) = \frac{3}{5}\left(4 - \frac{4}{5}x\right).$$

Innen $m = 2{,}4 - 0{,}48x$. (1 pont)

Keressük a következő kifejezés maximumát:

$$T_{PQR\triangle} = \frac{x \cdot m}{2} = x(1{,}2 - 0{,}24x)\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

$T_{PQR\triangle}$ értéke x függvényében egy fordított állású parabola, ezért maximuma van, ami a szimmetria miatt a két zérushely számtani közepében található. (1 pont)

Mivel

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad \text{így} \quad \mathbf{x_{max} = 2{,}5 \text{ egység.}} \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

A T(x) függvény maximuma deriválással is meghatározható.

6 *a)* Igazolja, hogy nincs olyan a, b, c pozitív egész szám, amelyekre teljesül, hogy ebben a sorrendben egy növekvő számtani, $a!$, $b!$, $c!$ pedig ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő elemei!

a 4

M: Tételezzük fel indirekt úton, hogy van olyan d szám, amelyre $b = a + d$ és $c = a + 2d$ teljesül, a, b, c, d pozitív egészek, és $a!$, $b!$, $c!$ mértani sorozatot alkot. (1 pont)

A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{(a+d)!}{a!}=\frac{(a+2d)!}{(a+d)!} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)\cdot\ldots\cdot(a+d)=(a+d+1)\cdot\ldots\cdot(a+2d).$$

(1 pont)

Mivel mindkét oldalon d tényezőből álló szorzatok állnak, továbbá a jobb oldal minden tényezője nagyobb a bal oldal minden tényezőjénél, ezért a két oldal nem lehet egyenlő. (1 pont)

Csak mindkét feltétel említése esetén jár a pont.

Mivel a kijelentés tagadásából ellentmondásra jutottunk, a kétértékű arisztotelészi logika alapján az eredeti kijelentés **igaz.** (1 pont)

b) Határozza meg, milyen n pozitív egész számra teljesül, hogy $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ egy számtani sorozat egymást követő tagjai! b 8

M: Számtani a sorozat, ha $\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=\binom{n}{3}-\binom{n}{2}$ $(n \geq 3)$. (1 pont)

Kifejtve a binomiális együtthatókat:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}-\frac{n(n-1)}{2}.$$ (1 pont)

Leosztunk n-nel $(n > 0)$, majd a közös nevezővel felszorzunk:

$$3(n-1)-6=(n-1)(n-2)-3(n-1).$$ (2 pont)

Kifejtve a zárójeleket

$$6n-12=n^2-3n+2$$

formát kapunk, majd összevonva:

$$0=n^2-9n+14.$$ (1 pont)

A megoldóképletből $n_1 = 7$, $n_2 = 2$. (1 pont)

Mivel $n \geq 3$, ezért $n \neq 2$. Az egyetlen megoldás az $n = 7$. (1 pont)

Ekkor $\binom{n}{1}=7, \binom{n}{2}=21, \binom{n}{3}=35$, amire $21-7=35-21=14$. (1 pont)

c) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Döntését igazolja! c 4

Létezik olyan szigorúan monoton növő számsorozat, amelyben a szomszédos tagok hányadosai rendre a pozitív egész számokat (1, 2, 3, …) adják.

Másképp: *Minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $a_n < a_{n+1}$ *és* $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n$.

M: Az állítás **hamis.** (1 pont)

Ugyanis a sorozat meghatározása értelmében $\frac{a_2}{a_1}=1$, (1 pont)

amiből $a_2 = a_1$. (1 pont)

Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy a sorozat szigorúan monoton növő, azaz $a_1 < a_2$. (1 pont) ö 16

7 Egy angol autókészítő manufaktúrában kézzel gyártanak kétüléses sportautókat. Az autó egyik kis alkatrészét három beszállítótól – egy japántól, egy osztráktól és egy angoltól – szerzik be, és beszerelés előtt összeöntik egy nagy ládába. Műszak elején a ládában lévő összes alkatrész 40%-a japán, 200 darab osztrák, ennek 3,5-szerese pedig hazai termék.

a) Egy autóhoz három ilyen alkatrész kell. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a véletlenszerűen kiválasztott három alkatrész közül pontosan egy való Japánból, ha a műszak elején vesszük ki őket!

M: Jelölje x az alkatrészek darabszámát! A szöveg szerint:

$$0{,}4x + 200 + 200 \cdot 3{,}5 = x.$$ (1 pont)

Innen $x = 1500$, továbbá 600 japán, 200 osztrák és 700 angol eredetű. (1 pont)

Az alkatrészeket felhasználjuk, tehát visszatevés nélküli a mintavétel: hipergeometriai eloszlással számolunk. (1 pont)

Nem japán alkatrész 900 darab van, közülük $\binom{900}{2}$-féle módon választhatunk. A teljes mintából $\binom{1500}{3}$-féle úton választhatunk. (1 pont)

Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{600}{1}\binom{900}{2}}{\binom{1500}{3}}.$$ (1 pont)

Ez kiszámítva $P \approx 0{,}4324$. (1 pont)

b) A japán alkatrészek 1%-a, az osztrák alkatrészek 2%-a, az angol alkatrészek 7%-a nem felel meg a minőségi követelményeknek. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy műszak elején kiválasztott alkatrész nem megfelelő, akkor az japán?

M: Feltételes valószínűséget kell számolnunk (jelölje azt az eseményt, hogy egy alkatrész megfelelő F, komplementerét nF, J pedig azt, hogy az alkatrész japán): $P(J|nF)$. (1 pont)

A japán és nem megfelelő alkatrészek darabszáma:

$$600 \cdot 0{,}01 = 6.$$

Az osztrák nem megfelelő alkatrészek darabszáma:

$$200 \cdot 0{,}02 = 4.$$

Az angol nem megfelelő alkatrészek darabszáma:

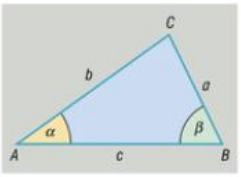
$$700 \cdot 0{,}07 = 49.$$ (1 pont)

A feltételes valószínűség:

$$P(J|nF) = \frac{P(J \cdot nF)}{P(nF)} = \frac{\frac{6}{1500}}{\frac{6+4+49}{1500}} = \frac{6}{59}.$$ (1 pont)

A keresett valószínűség tizedes tört alakban $P(J|nF) \approx 0{,}1017$. (1 pont)

c) Az autó egy másik alkatrésze háromszög alakú. Ebben a háromszögben az α szög szinusza megegyezik a β szög koszinuszával, valamint $b : a = \sqrt{3} : 1$. Számítsa ki a háromszög szögeit! c 6



M: Használjuk a szokásos szög és oldal jelöléseket.

$0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$. (1 pont)

Ekkor felírhatjuk a szinusztételt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$ (1 pont)

A szöveg alapján:

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta, \quad \text{azaz} \quad \beta = 60°.$$ (1 pont)

Mivel $\cos 60° = \frac{1}{2} = \sin\alpha$, ezért $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 150°$. (1 pont)

$\alpha_2 = 150°$ nem megoldás, mert a háromszögnek már van egy 60°-os szöge. (1 pont)

Így csak egy megoldásunk van: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$. (1 pont) ö 16

Csak 3 pont jár, ha a megoldásban $\sin\alpha = \cos\beta$ egyenlőségből egyből $\alpha = 90° - \beta$ következik. A tompaszögű eset kizárása esetén már jár a teljes pontszám.

8 Egy lapra 10 pontot rajzolunk, és megszámozzuk őket $10k$-tól $10k + 9$-ig, ahol $k = 1, 2, \ldots, 12$-ig az összes egész értéket felveheti (pl. $k = 4$-re a 40, 41, …, 49 számokat írjuk a pontok mellé). Azokat a pontokat kötjük össze éllel, amelyek mellé írt számok nem relatív prímek.

a) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf egyetlen k értékre sem összefüggő! a 4

M: Egy gráf biztosan nem összefüggő, ha van izolált pontja. (1 pont)

Mivel $k \geq 1$, a lehetséges 10-es számközökbe eső prímszámok is 10-nél nagyobbak, így egyetlen többszörösük sem eshet ugyanabba a számközbe. (1 pont)

A gráf szabálya szerint a relatív prímeket reprezentáló pontok között nem vezet él: egy adott számközben található prím az előző megjegyzés alapján minden más számközbeli számmal relatív prím. (1 pont)

Az állítás **igaz,** mivel minden adott számközben találunk legalább egy prímszámot. Például: 11; 29; 31; 43; 53; 67; 71; 83; 97; 101; 113; 127. (1 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy k választásától függetlenül minden gráf csak egy összefüggő részből és izolált pontokból állhat! b 5

M: A páros számoknak közös osztója a 2, tehát az ő pontjaik biztosan össze vannak kötve: összefüggő részgráfot alkotnak. (1 pont)

Azt bizonyítjuk, hogy a gráf többi pontja vagy csatlakozik hozzájuk, vagy izolált pont. (1 pont)

A prímszámok pontjai izolált pontok. (1 pont)

A t páratlan összetett számok esetén két lehetőség van. Ha van olyan p prímtényezője, amelynek esik ugyanezen 10-es számközbe t' többszöröse (pl. $p = 3$), akkor az egyik többszörös páros, azaz őket együtt bekötjük a páros számok pontjaiból álló részgráfba. (1 pont)

Konkrét példán bemutatva a gondolatot, jár a pont. Például: $t = 39 = 3 \cdot 13$, $t' = 36 = 3 \cdot 12$.

Ha t-nek nincs az előzőben leírt prímtényezője, akkor viszont senkivel sem kötjük össze, tehát izolált pont. (1 pont)

Valójában egyetlen ilyen szám van, a $11^2 = 121$. Önmagában a 121 elemzéséért is jár a pont.

Kati és Jancsi nemrég félbehagytak egy asztalitenisz-mérkőzést, amikor a döntő játszmában Kati 5 : 2 arányban vezetett. A sok egymás ellen lejátszott mérkőzésük alapján kijelenthetjük, hogy Kati egy-egy labdamenetben átlagosan 0,7 valószínűséggel szerez pontot Jancsi ellen (függetlenül attól, hogy ki adogat).

c) Számítsa ki a valószínűségét, hogy Kati végül legalább 11 : 4 arányú győzelmet arat Jancsi felett! (A mérkőzésnek vége van, ha valaki a döntő játszmában – legalább 2 ponttal vezetve – 11 labdamenetet nyer.) c 7

M: Kati nyerhet

11 : 2, 11 : 3, vagy 11 : 4 arányban. (1 pont)

Tehát 6 pontot kell úgy nyernie, hogy az utolsót ő nyeri. (1 pont)

Mivel nyerni lehet újra és újra, függetlenül a korábbi eredményektől, ezért visszatevéses mintavétellel számolunk, azaz binomiális eloszlással. (1 pont)

A pont akkor is jár, ha ez csak a számolásból derül ki.

11 : 2 esetén minden további labdamenetet – összesen hatot – Kati nyeri meg, ennek valószínűsége

$$p_{11:2} = 0{,}7^6 \approx 0{,}1176.$$ (1 pont)

11 : 3 esetén Kati ismét hat labdamenetet nyer, és az utolsót is biztosan ő nyeri meg. Azonban most Jani is szerez egy pontot 0,3 valószínűséggel, valamikor Kati első öt pontszerzése közben. Így eggyel több labdamenetet játszanak, mint az előbb, összesen hetet:

$$p_{11:3} = \binom{6}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}2118.$$ (1 pont)

11 : 4 esetén Jani két pontot szerez 0,3 valószínűséggel valamikor Kati első öt pontszerzése közben. Most nyolc labdamenetet játszanak:

$$p_{11:4} = \binom{7}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}2224.$$ (1 pont)

Mivel egymást kizáró eseményeket írtunk fel, a keresett valószínűséget ezek összegeként kapjuk:

$$P = p_{11:2} + p_{11:3} + p_{11:4} \approx 0{,}5518.$$ (1 pont) ö 16

9 Zsuzsi reggelire mindennap eszik egy gyümölcsöt, mégpedig egy narancsot, egy körtét, vagy egy almát. A következő hét napra épp ma vásárol be a piacon, ahol mindhárom gyümölcs kapható.

a 5

a) Hányféleképp töltheti meg gyümölccsel a kosarát Zsuzsi, ha csak a gyümölcsök darabszámát vesszük figyelembe?

M: I. megoldás

Vegyen Zsuzsi n db narancsot, k db körtét, a db almát. Ekkor

$$n + k + a = 7.$$ (1 pont)

Felírva a lehetőségeket, n és k értéke a értékét már meghatározza, és minden eshetőséget figyelembe vettünk. (2 pont)

A lehetőségek számát az adja, ahányféleképpen az adott n-re választhatjuk k értékét, vagyis: 1; 2; 3; …; 8-féleképpen. (1 pont)

Ezek összege adja az összes lehetőség számát: $1 + 2 + \ldots + 8 = \mathbf{36}$. (1 pont)

n	7	6	5	4	3	2	1	0
k	0	0; 1	0; 1; 2	0; …; 3	0; …; 4	0; …; 5	0; …; 6	0; …; 7
Lehetőség	1	2	3	4	5	6	7	8

II. megoldás

Képzeljük el, hogy Zsuzsi a hét napra vásárol: _ _ _ _ _ _ _. (1 pont)

Az egyes gyümölcsök között úgy tudunk különbséget tenni, hogy két függőleges vonallal jelöljük, miből mennyit vett. Az első vonal előtt levő helyeken a narancsok, a kettő között a körték, a második után az almák vannak. (1 pont)

(Például _ _ _|_ _|_ _ jelentése három narancs, két alma és két körte.)

Mivel az első elé, bármely kettő közé és az utolsó után is tehetünk függőleges elválasztó vonalat, ezért 8 helyünk van. (1 pont)

Mivel két vonalat is kitehetünk ugyanazon helyre, ezért kiválasztunk, de ismétléssel:

$$\binom{8+2-1}{2} = 36.$$ (1 pont)

Az összes lehetőség száma **36.** (1 pont)

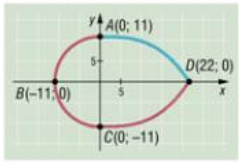
Zsuzsi másnap egy új felmosóvödröt vett a piacon. A vödör 25 cm magas egyenes hengerszerű testnek tekinthető, amelynek körvonala felülnézetben egy félkörből és két szimmetrikus harmadfokú görbeívből áll.

A vödör felülnézeti képét koordináta-rendszerben alkalmasan elhelyezve (1 egység 1 cm-nek felel meg) az ABC félkörív középpontja az origó, a körvonal szimmetrikus az x tengelyre. A felülnézeti képen AC távolság 22 egység, illetve B és D pont távolsága 33 egység.

b 5

b) Az ábra kékkel jelölt AD ívének egyenlete $y = -ax^3 + b$. Határozza meg a és b paraméter értékét és a görbe értelmezési tartományát!

M: A szövegből következik, hogy a kék ív áthalad az $A(0; 11)$ és $D(22; 0)$ pontokon (a görbe értelmezési tartománya tehát a $[0; 22]$ intervallum). **(1 pont)**



Mivel a két pont koordinátái kielégítik a kék görbe egyenletét, így teljesül, hogy

$$11 = -a \cdot 0^3 + b, \quad \text{valamint} \quad 0 = -a \cdot 22^3 + b. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tekintsük ezeket mint egyszerű egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= b \\ 0 &= -10648a + b \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = \frac{1}{968}$, $b = 11$. **(1 pont)**

Tehát a görbe a $[0; 22]$ intervallumon van értelmezve, és egyenlete:

$$y = -\frac{1}{968}x^3 + 11. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az értelmezési tartomány elmaradása esetén az utolsó pont nem jár.

c) Számítsa ki a vödör térfogatát! (Az eredményt egész literre kerekítve adja meg!) c 6

M: A vödör felülnézetből szimmetrikus az x tengelyre, egy félkörből, valamint az $y = -\frac{1}{968}x^3 + 11$ görbe alatti terület duplájából áll. **(1 pont)**

1 egység 1 cm-nek felel meg. A félkör sugara 11 cm, ezért területe

$$T_1 = \frac{11^2\pi}{2} \approx 190{,}07 \text{ cm}^2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A görbe alatti területet integrállal tudjuk felírni:

$$T_2 = 2\int_0^{22} -\frac{1}{968}x^3 + 11\,\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A primitív függvény kiszámítása után alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$T_2 = 2\left[-\frac{1}{3872}x^4 + 11x\right]_0^{22} = 363. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A kérdezett térfogat:

$$(T_1 + T_2) \cdot 25 = 13826{,}75 \text{ cm}^3 \approx 13{,}8 \text{ dm}^3 \approx \textbf{14 liter}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$ ö 16

Helyes gondolatmenet esetén a c) rész pontjai akkor is járnak, ha a megoldás a b) részből áthozott hibás görbére épül.

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

I. rész

1 Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet és az egyenlőtlenséget!

a) $2^{2x} - 2 \cdot (2^2)^2 = 2^{x+2}$ *b)* $\frac{5-x}{x-3} \leq -2$

Megoldás:

a) A hatványozás azonosságai alapján az egyenlet átírható: a 6

$$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

Az egyenlet 2^x-ben másodfokú, így a megoldóképletet használva:

$$2^x_1 = -4, \quad 2^x_2 = 8. \quad \text{(1 pont)}$$

Mivel az $f(x) = 2^x$ függvény értékkészlete $]0; \infty[$, ezért $2^x_1 \neq -4$. (1 pont)

A $2^x_2 = 8$ megoldásból tovább számolhatunk. Az $f(x) = 2^x$ függvény egy értéket csak egy helyen vesz fel. (1 pont)

A kölcsönös egyértelműségre, szigorú monotonitásra, bijektivitásra való hivatkozások esetén is jár a pont.

Így a $2^x = 2^3$ egyenletből adódik, hogy $x = 3$. (1 pont)

Ellenőrzés: $2^6 - 32 = 2^5$, ami igaz. (1 pont)

b) Rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget, és vonjunk össze: b 5

$$\frac{5-x}{x-3} + 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5-x+2(x-3)}{x-3} \leq 0, \quad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{x-1}{x-3} \leq 0. \quad \text{(1 pont)}$$

A tört számlálója minden valós x ($\neq 3$) számra nagyobb a nevezőjénél. (1 pont)

Így a tört csak akkor lehet nempozitív, ha

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 3 < 0, \quad \text{(1 pont)}$$

azaz $1 \leq x < 3$, vagy más jelöléssel $x \in [1; 3[$. (1 pont) ö 11

Előjelvizsgálat nélküli felszorzással legfeljebb 2 pont jár.

2 Egy autó gumiabroncsának gyári jelölése a következő: 195/65 R15. A számok közül a 195 az abroncs w szélessége milliméterben. A /65 jelentése, hogy a gumi h magassága hány százaléka a szélességének. Ennek a típusnak az esetén a magasság:

$$195 \cdot 0{,}65 = 126{,}75 \text{ mm}.$$

Az R a gumi anyagának belső szerkezetére utal, a 15 a keréktárcsa d átmérője collban (1 coll = 2,54 cm).



Egy R jelű terepgumi méretei a következők: a gumi $w = 26{,}67$ cm széles és $h = 109{,}4$ mm magas. A gumi futófelületének nagysága 0,843 m^2. (A kereket egyenes hengernek tekintve a futófelület a henger palástja).

a) Adja meg a gumiabroncs hagyományos gyári jelölését egész számokra kerekítve! a 6

M: A gumi szélessége a / jel előtti szám:

$$w = 26{,}67 \text{ cm} = 266{,}7 \text{ mm} \approx 267 \text{ mm}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A / utáni számhoz tekintsük a $\frac{109{,}4}{266{,}7} \approx 0{,}4102$ hányadost, ez így 41%. (1 pont)

A gumi futófelülete az egyenes henger palástja:

$$2R \cdot \pi \cdot 266{,}7 = 843\,000 \text{ mm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen a gumival szerelt kerék sugara: $R = 503{,}1$ mm. (1 pont)

A keréktárcsa sugara:

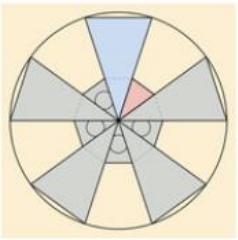
$$R - h = 393{,}7 \text{ mm}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{2 \cdot 393{,}7}{25{,}4} = 31 \text{ coll}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kérdezett gumi jelölése: **267/41 R31.** (1 pont)

Fontos a válasz formátuma.

Egy cég könnyűfém keréktárcsák védelmére gyárt a tárcsa külső, fémrészeire ragasztható fóliát. Legújabb termékük az ábrán látható 195/65 R15 típusra való. A kerékanyáknak kihagyott lyukak 4 cm átmérőjűek.

b) Határozza meg a fólia területét egész négyzetcentiméterre kerekítve, ha a belső szabályos tízszög köré írt kör átmérője 41%-a a külső szabályos tízszög átmérőjének! b 6



M: A lefóliázandó felület az ábra alapján 5 nagy, és 5 kisebb egyenlő szárú háromszögre bontható. A szárak közötti szög mindenhol

$$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ. \qquad \text{(1 pont)}$$

A keréktárcsa átmérője:

$$d = 15 \cdot 2{,}54 = 38{,}1 \text{ cm},$$

amiből $R = 19{,}05$ cm. (1 pont)

A belső szabályos tízszög köré írt kör sugarára:

$$r = R \cdot 0{,}41 = 7{,}8105 \text{ cm}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A keréktárcsa háromszögeinek területe:

$$5T_{\text{nagy}\triangle} = 5 \cdot \frac{R^2 \cdot \sin 36^\circ}{2} \approx 533{,}27 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

$$5T_{\text{kis}\triangle} = 5 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 36^\circ}{2} \approx 89{,}64 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Megjegyzés: Ugyanennyi pont jár, ha a háromszögek hasonlóságát használja fel. A hasonlóság aránya a szövegből: $\lambda = 0{,}41$, így a területekre adódik:

$$T_{\text{nagy}\triangle} \cdot 0{,}41^2 = T_{\text{kis}\triangle}.$$

A tárcsavédő fólia területe így

$$533{,}27 + 89{,}64 - 5 \cdot 2^2 \cdot \pi \approx \mathbf{560\ cm^2}.$$ (1 pont) ö 12

A kerekítés hiánya pontveszteség!

3 Adott a k: $(x-2)^2 + y^2 = 56{,}25$ egyenletű kör és az e: $3x + 4y = b$ egyenes.

a) Határozza meg az egyenes egyenletében b paramétert úgy, hogy az e egyenes áthaladjon a k kör középpontján! a 3

M: A kör középpontja $O(2; 0)$. (1 pont)

A kör középpontjának koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. (1 pont)

Ekkor $3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = b$, tehát $\mathbf{b = 6}$. (1 pont)

b) Határozza meg az egyenes egyenletében b paramétert úgy, hogy az e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja! b 11

M: I. megoldás

Tekintsük a k és e egyenletéből alkotott egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(x-2)^2 + y^2 &= 56{,}25\\ 3x + 4y &= b\end{aligned}\right\}.$$

Fejezzük ki a második egyenletből y-t: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{b}{4}$. (1 pont)

Helyettesítsük vissza:

$$(x-2)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{b}{4}\right)^2 = 56{,}25.$$ (1 pont)

Fejtsük ki a zárójeleket:

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{6b}{16} + \frac{b^2}{16} = 56{,}25.$$ (1 pont)

Szorozzuk fel, és rendezzük x-ben másodfokú egyenletre:

$$25x^2 - (64 + 6b)x + b^2 - 836 = 0.$$ (1 pont)

Azt szeretnénk elérni, hogy az egyenletrendszernek, így a másodfokú egyenletnek se legyen megoldása. (1 pont)

Ehhez az szükséges, hogy a diszkrimináns negatív legyen. (1 pont)

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (64 + 6b)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (b^2 - 836).$$ (1 pont)

Ez kifejtve:

$$D = -b^2 + 12b + 1370{,}25 < 0.$$ (1 pont)

A másodfokú egyenlőtlenség megoldásának első lépésében megállapítjuk az egyenlet megoldásait: $b_1 = 43{,}5$ és $b_2 = -31{,}5$. (1 pont)

A másodfokú függvény képe egy lefelé nyíló parabola. (1 pont)

Így a b értékére keresett tartomány: $]-\infty; -31{,}5[\cup]43{,}5; \infty[$. (1 pont)

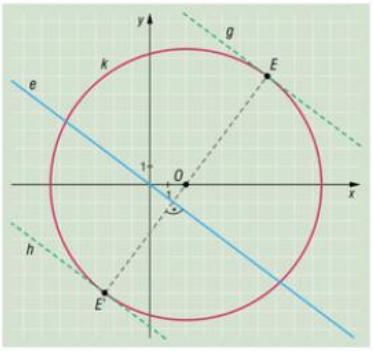
II. megoldás

Az ábrát tekintve keressük azon E és E' pontokat, amelyekben éppen érintené az e egyenes a k kört.

Ezekben a pontokban a sugár merőleges az érintőre: $EE' \perp e$.

Ha tudjuk E és E' pontok helyét, akkor tudjuk g és h egyenes egyenletét is: tudunk következtetni b értékeire (e-nek g-nél feljebb, h-nál lejjebb kell lennie). (1 pont)

Ha a gondolat a megoldás során kiderül, akkor jár a pont.



Az e egyenes normálvektora: $\overrightarrow{n_e}(3; 4)$. (1 pont)

Mivel $EE' \perp e$, ezért $\overrightarrow{n_{EE'}}(-4; 3)$, és mivel $O(2; 0) \in EE'$, így EE':

$$-4x + 3y = -8.$$ (1 pont)

Keressük az EE' egyenes és k metszéspontjait:

$$\left.\begin{aligned}(x-2)^2 + y^2 &= 56{,}25\\ -4x + 3y &= -8\end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

Fejezzük ki az egyenes egyenletéből y-t: $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

Helyettesítsünk vissza:

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = 56{,}25.$$ (1 pont)

Fejtsük ki a zárójeleket:

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{6b}{16} + \frac{b^2}{16} = 56{,}25.$$ (1 pont)

Rendezzük x-ben másodfokú egyenletre:

$$x^2 - 4x - 16{,}25 = 0.$$ (1 pont)

A megoldóképletből $x_1 = 6{,}5$ és $x_2 = -2{,}5$. (1 pont)

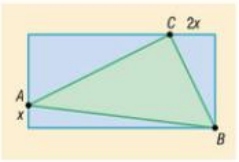
Visszahelyettesítve: $y_1 = 6$ és $y_2 = -6$, így $E(6{,}5; 6)$ és $E'(-2{,}5; -6)$. (1 pont)

Írjuk fel a g (átmegy E-n) és a h (átmegy E'-n) egyenes egyenletét:

$$g: 3x + 4y = 43{,}5 \quad \text{és} \quad h: 3x + 4y = -31{,}5.$$ (1 pont)

Ezekből kapjuk, hogy **$b > 43{,}5$ vagy $b < -31{,}5$.** (1 pont) ö 14

4 Adott az $a = 2$ cm, $b = 4$ cm oldalú téglalap. Az ABC háromszög B csúcsa a téglalap egyik csúcsába esik, másik két csúcsa az ábra szerint mozog a téglalap két oldalán ($0 \le x \le 2$).



a) Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög területét a következő függvény írja le: $t(x) = -x^2 + 4$! a 3

M: Az ABC háromszög területét megkapjuk, ha a téglalap területéből kivonjuk a derékszögű háromszögek területeit. (1 pont)

A keresett terület:

$$T_{ABC\triangle} = 2 \cdot 4 - \left(\frac{x \cdot 4}{2} + \frac{2x \cdot 2}{2} + \frac{(2-x)\cdot(4-2x)}{2}\right) = \quad \text{(1 pont)}$$

$$= 8 - (2x + 2x + 4 - 4x + x^2) = \mathbf{-x^2 + 4.} \quad \text{(1 pont)}$$

b) Határozza meg, milyen egész x értékekre lesz a háromszög területe pozitív egész szám! (Ne használjon közelítő értéket!) b 3

M: A $0 \le x \le 2$ feltétel miatt x csak 0, 1, 2 egész értéket vehet fel, közülük $x = 2$-re a terület 0. (1 pont)

Ha $x = 0 \Rightarrow t(0) = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow \mathbf{x = 0,}$ jó megoldás. (1 pont)

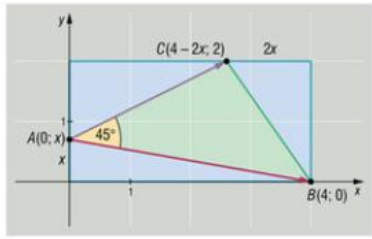
Ha $x = 1 \Rightarrow t(1) = -1^2 + 4 = 3 \Rightarrow \mathbf{x = 1,}$ jó megoldás. (1 pont)

c) Határozza meg azt az x értéket, amelyre a háromszög A csúcsnál levő szöge 45°-os! c 8

M: I. megoldás

Helyezzük az ábrát alkalmas koordináta-rendszerbe, $0 \le x \le 2$.

Ekkor az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok által bezárt szög 45°. (1 pont)



A két vektor koordinátái:

$\overrightarrow{AC}(4 - 2x;\ 2 - x)$, $\overrightarrow{AB}(4;\ -x)$. (1 pont)

Skalárszorzatuk koordinátákkal felírva:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (4 - 2x) \cdot 4 + (2 - x) \cdot (-x) = (2 - x) \cdot (8 - x). \quad \text{(1 pont)}$$

Hosszúságaikra:

$$AC = \sqrt{5} \cdot (2 - x), \quad \text{valamint} \quad AB = \sqrt{16 + x^2}. \quad \text{(1 pont)}$$

Skalárszorzatuk a definíció szerint felírva:

$$(2 - x) \cdot (8 - x) = \sqrt{5} \cdot (2 - x) \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$(2 - x)$-szel egyszerűsítünk ($x \neq 2$, az $x = 2$ eset nem megoldás, mert arra $A = C$ lenne), rendezzük:

$$2(8 - x) = \sqrt{10} \cdot \sqrt{16 + x^2}. \quad \text{(1 pont)}$$

Négyzetre emelve, újra rendezve:

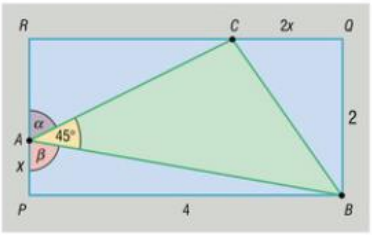
$$3x^2 + 32x - 48 = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

A megoldóképletből $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -12$. (1 pont)

Mivel x és $2 - x$ távolságot jelölnek, így az egyetlen megoldás $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$. (1 pont)

II. megoldás

Jelöljük a szögeket az ábra alapján. Ekkor *PBA* és *ACR* háromszög is derékszögű.



$RC = 4 - 2x$ és $AR = 2 - x$. (1 pont)

$BAC\sphericalangle = 45°$, ha $\alpha + \beta = 135°$. (1 pont)

Az *ACR* háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4-2x}{2-x} = 2$. (1 pont)

A *PBA* háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{x}$. (1 pont)

Az addíciós tétel alapján:

$$\operatorname{tg}135° = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 - 2 \cdot \frac{4}{x}} = -1.$$ (2 pont)

Ebből

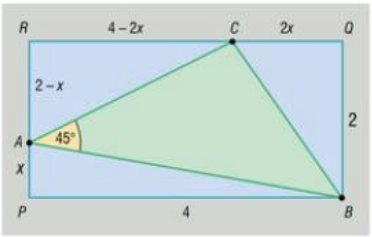
$$2 + \frac{4}{x} = 2 \cdot \frac{4}{x} - 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{4}{x},$$ (1 pont)

amiből $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$. (1 pont)

III. megoldás

Tekintsük az ábra jelöléseit.

A *BQC*, *CRA* és *APB* háromszög is derékszögű. (1 pont)



ABC háromszögben írjuk fel a koszinusztételt $BAC\sphericalangle$-re:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 45°$. (1 pont)

Három Pitagorasz-tételt felírva:

$$BC^2 = 2^2 + (2x)^2 = 4 + 4x^2, \quad AB^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2,$$
$$AC^2 = (2-x)^2 + (4-2x)^2 = 5(2-x)^2.$$ (1 pont)

Ezzel visszahelyettesítve a koszinusztételbe, majd rendezve ($x \le 2$):

$$4 + 4x^2 = 16 + x^2 + 5(2-x)^2 - 2\sqrt{16+x^2} \cdot \sqrt{5}(2-x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$ (1 pont)

$$-3(4-x^2) = 5(2-x)^2 - \sqrt{16+x^2} \cdot (2-x) \cdot \sqrt{10}.$$ (1 pont)

(Más ekvivalens átalakítások is végezhetők.)

Az $x = 2$ eset nem megoldás, mert ekkor $A = C$.

$$\sqrt{160 + 10x^2} = 16 - 2x,$$
$$160 + 10x^2 = 4x^2 - 64x + 256,$$
$$3x^2 + 32x - 48 = 0.$$ (1 pont)

A megoldóképletből $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -12$. (1 pont)

Mivel x és $2 - x$ távolságot jelölnek, így az egyetlen megoldás $x = \frac{4}{3}$. (1 pont) ö 14

II. rész

5 *a)* Az $f(x) = x(p - x)$ függvény értelmezési tartománya a $[0; p]$ intervallum. Határozza meg p értékét úgy, hogy a parabola x tengellyel bezárt területe $\frac{500}{3}$ területegység legyen! a 5

M: Az $f(x) = -x^2 + px$ függvény egy fordított állású parabola. (1 pont)

Két zérushelye: $x_1 = 0$ és $x_2 = p$. (1 pont)

A kérdezett terület a két zérushely között található, a kiszámításához fel kell írnunk a következő határozott integrált:

$$\int_0^p (-x^2 + px)\,dx.$$ (1 pont)

Az integrációs határok egy alkalmas ábráról is leolvashatók.

A primitív függvényt megkeresve, alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_0^p (-x^2 + px)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + p\frac{x^2}{2}\right]_0^p = -\frac{p^3}{3} + p\frac{p^2}{2} = \frac{p^3}{6}.$$ (1 pont)

A $\frac{p^3}{6} = \frac{500}{3}$ egyenlet egyetlen megoldása a $p = 10$. (1 pont)

b) Adott a valós számokon értelmezett $g(x) = ax^3 + (a - 1)x^2 + bx$ függvény, ahol a és b valós paraméterek. A $g(x)$ függvénynek $x = 1$ pontban zérushelye, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pontban szélsőértéke van. Számítsa ki az a és b paraméterek értékét! Adja meg a $g(x)$ függvény minden szélsőértékének helyét és értékét! b 11

M: Az $x = 1$ zérushely:

$$g(1) = a \cdot 1^3 + (a - 1) \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 0, \text{ így } 2a + b = 1.$$ (1 pont)

A szélsőértékhez deriváljunk:

$$g'(x) = 3ax^2 + 2(a - 1)x + b.$$ (1 pont)

(A függvény polinom, így deriválható.)

Az $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ szélsőérték (ahol egy deriválható függvénynek szélsőértéke van, ott az első deriváltja 0):

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a + 2(a-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + b = 0,$$

így

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)a + b = \frac{2}{\sqrt{3}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ez két egyenlet két ismeretlenre, készítsünk egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2a + b &= 1 \\ \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)a + b &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Kivonva a két egyenletet egymásból:

$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)a = 1-\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad a = 1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Visszahelyettesítve kapjuk, hogy $b = -1$. (1 pont)

A függvény hozzárendelési szabálya:

$$g(x) = x^3 - x. \qquad \text{(1 pont)}$$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első derivált nulla értéket vesz fel:

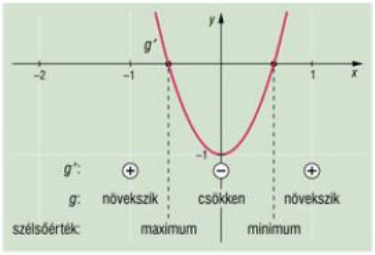
$$g'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Szélsőérték ott van, ahol az első derivált előjelet vált: mégpedig ahol (+)-ból fordul (−) előjelűbe, ott maximuma, ahol fordítva, ott minimuma van a függvénynek.

Ehhez ábrázoljuk az első deriváltat, amely egy másodfokú függvény.

(1 pont)

Más, helyes magyarázat is elfogadható.



Az $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **maximum-**, az $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **minimumhelye** $g(x)$-nek. (1 pont)

Ezt a megállapítást valahol rögzíteni kell.

A felvett értékek pedig:

$$g_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$g_{\max}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

6 *a)* Adott az első 500 darab pozitív páros szám. Határozza meg, hány olyan szám van közöttük, amely a 15-tel relatív prím! a 5

M: I. megoldás

Legyen az alaphalmaz az $U = \{2; 4; 6; \ldots; 1000\}$.

Ennek H részhalmaza a 15-tel relatív prím számok halmaza.

Legyen A a 3, B az 5 prímtényezőt tartalmazó számok halmaza.

Egy szám akkor relatív prím a 15-tel, ha prímtényezős felbontása nem tartalmazza sem a 3, sem az 5 prímtényezőt. (1 pont)

Más megfogalmazás is jó, pl. „nem osztója a 3 és nem osztója az 5".

H komplementere $A \cup B$: azon számok alkotják, amelyek tartalmazzák a 3 vagy az 5 prímtényezőt. (1 pont)

Amelyek „oszthatók 3-mal vagy 5-tel".

Az elemszámaikról tudjuk, hogy

$$|A| = \left[\frac{500}{3}\right] = 166, \quad |B| = \left[\frac{500}{5}\right] = 100, \quad |A \cap B| = \left[\frac{500}{15}\right] = 33.$$ (1 pont)

Az egészrész fogalmának használata nélkül, egyszerű lefelé kerekítéssel is jó.

Alkalmazzuk a logikai szita formulát:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 166 + 100 - 33 = 233.$$ (1 pont)

A keresett számok száma a H halmaz elemszáma, vagyis

$$|H| = |U| - |A \cup B| = 500 - 233 = \mathbf{267 \text{ darab.}}$$ (1 pont)

II. megoldás

Tekintsük a vizsgált számokat (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...) és húzzuk ki a 3-mal oszthatókat. Minden harmadik számot törlünk:

$$2, 4, \cancel{6}, 8, 10, \cancel{12}, 14, 16, \cancel{18}, 20, 22, \cancel{24}, \ldots$$

Most húzzuk ki az 5-tel oszthatókat, minden 5. számot törlünk:

$$2, 4, \cancel{6}, 8, \cancel{10}, \cancel{12}, 14, 16, \cancel{18}, \cancel{20}, 22, \cancel{24}, \ldots$$ (1 pont)

Az összes számot nem tudjuk felírni, de ha 30-ig elmegyünk, akkor a minta ismétlődik (mert a 30 páros és osztható 15-tel):

$$2, 4, \cancel{6}, 8, \cancel{10}, \cancel{12}, 14, 16, \cancel{18}, \cancel{20}, 22, \cancel{24}, 26, 28, \cancel{30}.$$ (1 pont)

A 30 valamely egész többszörösére való hivatkozás is megfelel.

Az első 15 darab páros számból 8 darab maradt. Az 500 szám 33 darab 15-ös blokkot tartalmaz, minden blokkban 8 jó számmal:

$$33 \cdot 8 = 264.$$ (1 pont)

Kimaradt az utolsó 5 páros szám, vizsgáljuk meg őket:

$$\cancel{1000}, 998, \cancel{996}, 994, 992.$$ (1 pont)

Tehát a válasz: $264 + 3 = \mathbf{267 \text{ darab}}$ ilyen szám van. (1 pont)

Az ábrán egy módosított Pascal-háromszöget látunk. Az eredetihez hasonlóan itt is a kezdő, 0. sorban egy darab 1-es van, és minden sor kezdő, 0. eleme 1-es, továbbá minden számot a felette álló két számból származtatunk.

0. sor					1				
1. sor				1		2			
2. sor			1		4		4		
3. sor		1		6		12		8	
4. sor	1		8		24		32		16

Azonban a szabály más: a bal felső szomszéd 2-szereséhez adjuk a jobb felső szomszédot (például a 3. sorban $6 = 2 \cdot 1 + 4$, a 4. sorban $32 = 2 \cdot 12 + 8$).

b) Igazolja, hogy minden sorban a számok összege 3 hatványa! b 5

M: A sorok sorszáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk:

(1) $n = 0$-ra $1 = 3^0$, $n = 1$-re $1 + 2 = 3^1$. (1 pont)

(2) Tételezzük fel, hogy valamely $n = k$ értékre a k. sorban levő $a_0 = 1$, $a_1, \ldots, a_k$ számok összegére

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 3^k.$$

(3) Kérdés, hogy $n = k + 1$ értékre a $(k + 1)$. sorban levő $b_0 = 1, b_1, \ldots, b_{k+1}$ számokra teljesül-e az összefüggés, azaz

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k+1} = 3^{k+1}.$$ (1 pont)

A képzési szabály miatt:

$$b_0 = 2 \cdot 0 + a_0, \quad b_1 = 2a_0 + a_1, \quad b_2 = 2a_1 + a_2, \ldots, b_{k+1} = 2a_k + 0.$$ (1 pont)

Ezeket összeadva, végül a (2) indukciós feltevést felhasználva:

$$\sum_{i=0}^{k+1} b_i = (a_0 + 2a_0) + (a_1 + 2a_1) + \ldots + (a_k + 2a_k) = 3\sum_{j=0}^{k} a_j = 3^{k+1}.$$ (1 pont)

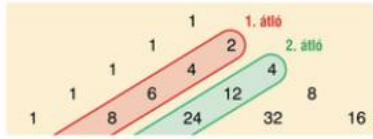
Ezzel igazoltuk, hogy minden sorban a szereplő tagok összege **3 hatványa.** (1 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy az n. sor harmadik elemét megkaphatjuk úgy is, ha ugyanezen sor második elemét megszorozzuk $(n - 1)$-gyel! c 6

(Például a 3. sorban $12 = 2 \cdot 6$, a 4. sorban $24 = 3 \cdot 8$.)

M: I. megoldás

Az ábrán az 1. átló (k. sorban a_1) minden tagja $2k$. Ugyanis az előző sor eleméhez $2 \cdot 1$-et adunk, és 2-vel kezdjük. (1 pont)



A 2. átló szomszédos elemeinek különbsége 4-gyel növekszik ($12 = 4 + \mathbf{8}$, $24 = 4 + 8 + \mathbf{12}$, ...).

Ez azért van így, mert minden lépésben az 1. átló 2-vel nagyobb elemét szorozzuk fel újra 2-vel. (1 pont)

Ebből adódik, hogy a k. sor 2. átlóban szereplő eleme egy $\{c_n\}$ számtani sorozat ($c_1 = 4$, $d = 4$) első $(k - 1)$ elemének összege. (1 pont)

Így a k. sor 2. átlóban szereplő a_2 eleme előáll ilyen alakban:

$$a_2 = S_{k-1} = (k-1)\cdot 4 + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\cdot 4.$$ (1 pont)

Kifejtve és összevonva:

$$a_2 = 4k - 4 + 2k^2 - 6k + 4 = 2k^2 - 2k = 2k(k-1).$$ (1 pont)

A kapott kifejezés állításunkat bizonyítja, hiszen a k. sorban

$$a_2 = a_1(k-1).$$ (1 pont)

II. megoldás

A háromszöget tekintve a k. sor első eleme $2k$. Ugyanis a második sor első eleme 2, majd a következő az előzőnél $2 \cdot 1$-gyel több. (1 pont)

A sorok sorszáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk, de most $n \geq 2$ értéktől:

(1) $n = 2$-re $4 = (2-1)\cdot 4$, $n = 3$-ra $12 = (3-1)\cdot 6$. (1 pont)

(2) Tételezzük fel, hogy egy megengedett $n = k$ értékre a k. sorban levő első három elem

$$a_0 = 1, a_1 = 2k, a_2 = (k-1)\cdot 2k.$$

(3) Kérdés, hogy $n = k+1$ értékre a $(k+1)$. sor első három elemére teljesül-e az összefüggés, azaz:

$$b_0 = 1, b_1 = 2(k+1), b_2 = k\cdot 2(k+1).$$ (1 pont)

Az első megjegyzés és a képzési szabály miatt:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2(k+1),$$
$$b_2 = 2a1 + a_2 = 2\cdot 2k + (k-1)\cdot 2k.$$ (1 pont)

Utóbbit átalakítva:

$$b_2 = 2\cdot 2k + (k-1)\cdot 2k = 4k + 2k^2 - 2k = 2k^2 + 2k = 2k(k+1).$$ (1 pont)

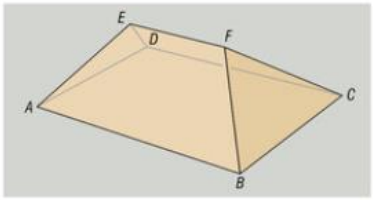
A kapott kifejezés állításunkat bizonyítja, hiszen a $(k+1)$. sorban

$$b_2 = 2(k+1)k = b_1 k.$$ (1 pont) ö 16

7 Egy kontytető sematikus rajza látható az ábrán. A tető alapja az $ABCD$ téglalap, a szemközti határoló lapjai egybevágó szimmetrikus alakzatok. Ismert méretei a következők:

$AB = 12$ m, $BC = 10$ m,

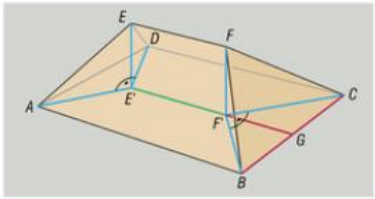
$ABF\sphericalangle = 50°$.



A tető készítése közben azt vették észre az ácsok, hogy a délben függőlegesen fentről érkező napsugarak alatt a BF és CF gerendák árnyékai derékszöget zárnak be a tető vízszintes síkjában.

a) Határozza meg, milyen hosszú az EF tetőnyereg! a 4

M: Az $ABCD$ síkra merőlegesen vetítettük E (E') és F (F') pontokat, G felezi BC-t.



Ebből adódik: $EF = E'F'$. (1 pont)

$BF'C\sphericalangle = 90°$, továbbá a szimmetria miatt a $BF'C\triangle$ egyenlő szárú. (1 pont)
(Az $AE'D\triangle$-re ugyanez érvényes.)

Így $BG \perp GF'$ és $BG = GF' = 5$. (1 pont)
(A BCF' háromszög egy fél négyzet.)

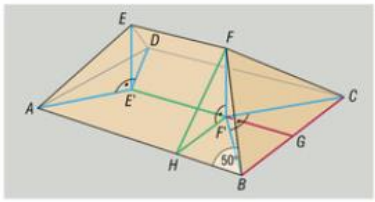
Ezért

$$EF = E'F' = AB - 2GF' = 12 - 2 \cdot 5 = \mathbf{2\ m}.$$ (1 pont)

Fontos a mértékegység megadása.

b) Számítsa ki a BFC és $ABCD$ síkok által bezárt szöget! b 6

M: Legyen H az a pontja AB-nek, ahol $F'H \perp AB$. Ekkor $F'H = 5$ és a $HF'F\triangle$ derékszögű. (1 pont)



$$\frac{HF}{5} = \operatorname{tg} 50°,$$

$$HF = 5 \cdot \operatorname{tg} 50° \approx 5{,}96\ \text{m}.$$ (1 pont)

A mértékegység hiánya itt nem jelent pontlevonást.

$HF' = BG$, így alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$FF'^2 = HF^2 - HF'^2 \approx 5{,}96^2 - 5^2.$$ (1 pont)

Innen a tető magassága:

$$FF' \approx \sqrt{5{,}96^2 - 5^2} \approx 3{,}24 \text{ méter}.$$ (1 pont)

F' az F-nek az $ABCD$ síkra eső merőleges vetülete, ezért az $F'GF$ háromszög derékszögű.

Tudjuk, hogy $GF' = 5$, ezért

$$\operatorname{tg} F'GF\sphericalangle = \frac{FF'}{GF'} = \frac{3{,}24}{5}.$$ (1 pont)

Ebből $F'GF\sphericalangle = \mathbf{32{,}94°}$. (1 pont)

Egy kis légitársaság n város között üzemeltet járatokat úgy, hogy velük bármely városból bármely másikba eljuthatunk akár közvetlenül, akár átszállással, de pontosan egy útvonalon (egy repülőgép csak és kizárólag adott két város között jár). A társaság a jövőben bármely két város között szeretne üzemeltetni repülőjáratot. Számításaik szerint ehhez 10 repülőgépet kellene vásárolniuk.

c) Hány gépe van most a társaságnak? c 6

M: A városokat pontoknak, a közöttük levő járatokat éleknek tekintve a kapott gráf egyszerű, mert bármely két város között csak egy járat van (nincs többszörös él).

Ha a megfeleltetés a megoldásból egyértelműen kiderül, nincs pontlevonás.

Jelen állapotban a gráf összefüggő és körmentes is, tehát fa. (1 pont)

A fa kitételnek szerepelnie kell.

Az n pontú fagráf éleinek száma $n-1$ (ennyi repülőgépe van jelenleg a társaságnak). (1 pont)

10 éllel (géppel) kiegészítve teljes a gráf, élszáma $\frac{n(n-1)}{2}$. (1 pont)

Az egyenlet:

$$\frac{n(n-1)}{2} = n-1+10 \quad \Rightarrow \quad n^2-3n-18=0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Megoldásai: $n_1 = 6$ és $n_2 = -3$.

A városok száma pozitív egész szám lehet, tehát $n = 6$. (1 pont)

Vagyis a társaságnak jelenleg **5 repülőgépe van.** (1 pont) ö 16

8 Az emberek már az ókorban is szívesen játszottak társasjátékokat. Egyiptomban például a szenet nevű játékban a lépések meghatározásához négy dobópálcát használtak (ezek egyforma, keskeny és vékony falapok, amelyek egyik oldala fehérre van festve). Egyszerre vetették el (dobták el) őket, és annyit léptek, ahány pálcának a fehér oldala volt felfelé.



a) Igazolja, hogy a szenet nevű egyiptomi társasjátékban a játékosok körönként átlagban kettőt léptek! (Azaz a négy pálcát elvetve a dobás várható értéke 2 volt.) a 6

M: A négy pálca közül 0, 1, 2, 3 vagy 4 mutat fehér oldalt dobás után, tehát ennyit léphetnek a játékosok. (1 pont)

A pálcák összesen $2^4 = 16$-féle módon állhatnak meg elvetés után. (1 pont)

Akkor lépünk k-t ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), ha a négy pálca közül k mutat fehér oldalt. Ez annyiféleképp lehet, ahányféleképp kiválaszthatunk 4-ből k-t: a kedvező esetek száma $\binom{4}{k}$. (1 pont)

A k dobás ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) valószínűsége így $P(k) = \frac{\binom{4}{k}}{16}$. (1 pont)

Az egyes dobásokra a binomiális együtthatók tulajdonságai miatt

$$P(0) = P(4) = \frac{1}{16}, \quad P(1) = P(3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \quad P(2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A dobások (azaz a lépésszám) várható értéke:

$$0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Egy hagyományos dobókockával játszott társasjáték utolsó 8 mezőjét „végjátéknak" nevezik (ez a rész látható az ábrán).



A végjáték mezőinek jelentése a következő:

- **1, 2, 3, 4, 5 mezők:** ezeken állva már csak a célba léphet a játékos, de ahhoz annyit kell dobnia, amennyit a mező mutat.
- **„rossz" mező:** ha itt fejezi be egy lépését, akkor az a kör véget ért számára, és még a következő körből is kimarad.
- **„jó" mező:** innen indulva kétszer dobhat (kivéve, ha elsőre 1-est dob: akkor meg kell állnia a „rossz" mezőn, vagyis ez a kör véget ért számára, és a következő körből is kimarad).

A jó mezőről indulva akár egy kör alatt is célba érhet a játékos. Például elsőre 4-est dobva a 3-as mezőre lép, majd másodikra 3-ast dobva célba ér.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a „jó" mezőn álló játékos legfeljebb két kör alatt célba ér? b 10

M: A „legfeljebb két kör" jelentése „egy vagy kettő kör alatt". 1-et semmiképpen sem dobhat, mert akkor a következő körből kimarad, így legalább 3 kör kellene a célba éréshez. (1 pont)

***A)* eset**

A „jó" mezőről *egy kör* alatt akkor ér célba a játékos, ha elsőre legalább 2-t dob, másodikra pedig azt a számot, amelyik mezőre lépett. (1 pont)

Az első dobása így 5-féle lehet, a második viszont minden esetben csak egyféle. (1 pont)

Az összes esetek száma $6^2 = 36$, így az egy körön belüli célba érés valószínűsége $P(A) = \frac{5}{36}$. (1 pont)

***B)* eset**

A „jó" mezőről *két kör* alatt csak úgy érhet célba, ha

- az első körben elsőre legalább 2-t dob, másodikra pedig nem azt a számot, amin áll,
- majd a következő körben megdobja a számot, amin éppen áll. (1 pont)

Az első kör első dobása így 5-féle lehet, ahogy a második dobásé is: $5^2 = 25$ a kedvező esetek száma és $6^2 = 36$ az összes esetek száma. (1 pont)

A játékos így $P(1) = \frac{25}{36}$ valószínűséggel próbázik újra a következő körben. (1 pont)

A második körben pedig pontosan annyit dob, amennyin áll, erre 1 lehetősége van. Ennek valószínűsége $P(2) = \frac{1}{6}$. (1 pont)

A két kör eseményei független események, így két kör alatt a játékos a „jó" mezőről $P(B) = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ valószínűséggel ér célba. (1 pont)

A kérdezett esemény valószínűsége:

$$P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{55}{216}.$$ (1 pont) ö 16

9 Egy munkahelyen nyolc számítógép van hálózatba kötve. A hálózatot karbantartó rendszergazda írt egy kis tesztprogramot, amely nagyjából percenként véletlenszerűen ellenőriz három különböző géppárt, hogy közöttük rendben zajlik-e a kommunikáció. (Két géppár különböző, ha a pár legalább egyik tagja különböző.)

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy teszteléskor van két gép, amelyek közül mindhárom ellenőrzés egyik kiválasztott tagja az egyik vagy a másik gép közül kerül ki! a 6

M: I. megoldás

Modellezzük a feladatot teljes gráfban: az A, …, H pontok a gépeknek, az élek pedig a köztük levő közvetlen kommunikációnak felelnek meg.

Az élek száma $\binom{8}{2} = 28$, az összes események száma $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19656$.

Jelölje A és B azt a két gépet, amelyek részt vesznek a tesztekben. (1 pont)
(A három teszt sorrendjét ebben a megoldásban figyelembe vesszük.)

Ha az A–B pár a kiválasztott géppárok között van, akkor a lehetséges másik két kiválasztott pár:

A–X, A–Y $(6 \cdot 5)$ vagy B–X, B–Y $(6 \cdot 5)$ vagy A–X, B–X $(6 \cdot 6)$.

(1 pont)

(X és Y a többi hat gép közül kettő különböző. X és X esetén lehet ugyanaz is.

Például ha X jelöli F és Y a C gépet, akkor a három összesorsolt géppár sorban lehet A–B, A–F, A–C; vagy A–F, A–B, A–C; vagy A–F, A–C, A–B. F-et és C-t nem kell cserélnünk, a $6 \cdot 5$ eset tartalmazza a lehetőséget. Ugyanez a helyzet két B esetén is.

Ha szerepel A–B, illetve külön-külön A és B is, akkor lehet akár különböző, akár ugyanaz a gép is a párjuk. Így például $X = C$ esetén A–C, A–B, B–C párosításban fordulnak elő. Ez a $6 \cdot 6$ eset része, ám ennek a három különböző párnak az összes lehetséges sorrendje nem!)

Az első két esetben az A–B három helyre kerülhet, a harmadik esetben mind különböző, így sorrendjük 3!. Összesen:

$$3 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 5 + 3! \cdot 6 \cdot 6 = 396.$$ (1 pont)

Ha A és B nincs összesorsolva, akkor a három pár lehet:

A–X, A–Y, B–X vagy A–X, B–Y, B–X. (1 pont)

Az egyedül levő mindkét esetben 3 helyre kerülhet:

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 = 1080.$$ (1 pont)

A keresett valószínűség:

$$P = \frac{396 + 1080}{19\,656} = 0{,}0751.$$ (1 pont)

II. megoldás

Modellezzük a feladatot teljes gráfban: az A, …, H pontok a gépeknek, az élek pedig a köztük levő közvetlen kommunikációnak felelnek meg.

Az élek száma $\binom{8}{2} = 28$, az összes események száma $\binom{28}{3} = 3276$.

Jelölje A és B azt a két gépet, amelyek részt vesznek a tesztekben. (1 pont)
(A három teszt sorrendjét ebben a megoldásban nem vesszük figyelembe.)

Ha a választott géppárok között van A–B, akkor a lehetséges másik kettő kiválasztott pár:

$$A\text{–}X,\ A\text{–}Y \quad \text{vagy} \quad B\text{–}X,\ B\text{–}Y \quad \text{vagy} \quad A\text{–}X,\ B\text{–}X.$$

Itt X és Y a többi hat gép közül kettő különböző, X és X esetén lehet ugyanaz is. (1 pont)

Ezek száma $2 \cdot \binom{6}{2} + 6 \cdot 6 = 66$. (1 pont)

Ha A és B nincs összesorsolva, akkor a három pár lehet:

$$A\text{–}X,\ A\text{–}Y,\ B\text{–}X \quad \text{vagy} \quad A\text{–}X,\ B\text{–}Y,\ B\text{–}X.$$ (1 pont)

Ezek száma $2 \cdot \binom{6}{2} \cdot 6 = 180$. (1 pont)

A keresett valószínűség:

$$P = \frac{66 + 180}{3276} = 0{,}0751.$$ (1 pont)

Egy emberről emberre terjedő kórokozóval fertőzött, de tünetmentes személy 1,8 egészséges embernek tudja átadni egy nap folyamán a kórokozót. A megfertőzött személy másnap már képes továbbfertőzni, de 14 napig tünetmentes. Egy iskolának összesen 600 tanulója, dolgozója van.

b) Észreveszik-e a járványt még azelőtt, hogy az iskola összes tanulója és dolgozója fertőzötté válhat? b 4

M: I. megoldás

Az adott napon fertőzni képes személyek száma:

első nap 1 fő; másnap $1 \cdot 1{,}8$ fő; harmadnap $1 \cdot 1{,}8^2$ fő stb. (1 pont)

Ez egy $\{a_n\}$ mértani sorozat, $a_1 = 1$, $q = 1{,}8$. (1 pont)

Ha 14 napig nem okoz tüneteket a vírus, akkor a kérdés:

$1 \cdot 1{,}8^{13}$ nagyobb vagy kisebb-e, mint 600? (1 pont)

Mivel $1 \cdot 1{,}8^{13} \approx 2082$, sajnos **nem veszik észre időben** a fertőzést. (1 pont)

II. megoldás

Az adott napon fertőzni képes személyek száma:

első nap 1 fő; másnap $1 \cdot 1{,}8$ fő; harmadnap $1 \cdot 1{,}8^2$ fő stb.

Ez egy $\{a_n\}$ mértani sorozat, $a_1 = 1$, $q = 1{,}8$. (1 pont)

Kérdés, hány nap alatt képes a vírus megfertőzni 600 főt?

$$1 \cdot 1{,}8^n = 600 \quad \Rightarrow \quad n = \log_{1,8} 600 \approx 10{,}883 \approx 11. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az $f(x) = \log_{1,8} x$ függvény bijektív, ezért a művelet elvégezhető. (1 pont)
(Egyenlőtlenségként felírva arra is hivatkozni kell, hogy az 1-nél nagyobb alap miatt a logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő.)

Mivel $11 < 14$, sajnos **nem veszik észre időben** a fertőzést. (1 pont)

Egy kifejlesztett teszt elvileg már akkor kimutatja a vírusfertőzést, amikor az egyén fertőzőképessé válik. A fejlesztők szerint *„fertőzött ember esetén 99,9% valószínűséggel kapunk pozitív eredményt. Az egészséges emberek esetében néha jelez, ám a 'fals pozitív' eredmény valószínűsége csupán 2%."* Úgy becsüljük, hogy a tesztelés napján az iskola tanulói, dolgozói közül körülbelül 50 fő fertőzött lehet. A tesztet mindenképpen érdemes elvégezni, ha pozitív teszteredmény esetén legalább 80% a valószínűsége, hogy az illető fertőzött.

c) Számítások alapján döntse el, érdemes-e a tesztet elvégezni! c 6

M: Jelölje F azt az eseményt, hogy valaki fertőzött, nF, hogy nem fertőzött; $(+)$ azt, hogy a teszt pozitív, $(-)$, hogy negatív. (1 pont)

Ha ez kiderül a megoldás során, jár a pont.

Készítsünk az adatok megjelenítésére alkalmas táblázatot! (3 pont)

	F	nF	
$(+)$	$50 \cdot 0{,}999$	$550 \cdot 0{,}02$	60,95
$(-)$	$50 \cdot 0{,}001$	$550 \cdot 0{,}98$	539,05
	50	550	600

Ez alapján a pozitív tesztet produkálók között a fertőzött személy valószínűsége:

$$P = \frac{49{,}95}{60{,}95} \approx 0{,}8195. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kérdéses valószínűség nagyobb, mint 0,8, így a tesztet **érdemes elvégezni.** (1 pont) ö 16

Megjegyzés: Természetesen nemcsak az adatok táblázatba gyűjtésével, hanem feltételes valószínűség felírásával is megoldható a feladat:

$$P(F|(+)) = \frac{50 \cdot 0{,}999}{50 \cdot 0{,}999 + 550 \cdot 0{,}02}.$$

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

I. rész

1 *a)* Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! a 7

$\cos x - 2\cos^3 x = 0$

M: Alakítsuk szorzattá:

$$\cos x(1 - 2\cos^2 x) = \cos x(1 - \sqrt{2}\cos x)(1 + \sqrt{2}\cos x) = 0. \quad \text{(2 pont)}$$

A szorzat alakból leolvasható, hogy öt megoldássereg van:

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (1 pont)

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l2\pi$, és $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m2\pi$, ahol $l, m \in \mathbb{Z}$. (2 pont)

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{3\pi}{4} + n2\pi$, és $x_5 = -\frac{3\pi}{4} + o2\pi$, ahol $n, o \in \mathbb{Z}$. (2 pont)

A megoldáshalmaz:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right\}, \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

A $\cos x = 2\cos^3 x$ egyenlet más megoldása csak akkor jó, ha nem jár gyökvesztéssel.

b) Legyen $f(x) = 3^{2x+1}$. Igazolja, hogy b 4

$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 9.$

M: Helyettesítsünk x helyére $(x + 1)$-et:

$$f(x + 1) = 3^{2(x+1)+1} = 3^{2x+3}. \quad \text{(1 pont)}$$

$f(x + 1)$ és $f(x)$ hányadosa:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{3^{2x+3}}{3^{2x+1}}. \quad \text{(1 pont)}$$

A hatványozás azonosságai miatt: (1 pont)

$3^{2x+3-(2x+1)} = 3^2 = 9$, ezzel az állítást beláttuk. (1 pont) ö 11

2 Egy négyszög a, b, c, d oldalai közül $b = 17$ cm, $d = 33$ cm. Az a és a c oldal hosszának centiméterben mérve véletlenszerűen választunk egy-egy kétjegyű pozitív egész számot.

a) Mekkora valószínűséggel alkot az így kapott négy szakasz érintőnégyszöget? (A négyszögekben az a és a c oldalt megkülönböztetjük.) a 7

M: Egy négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő. (1 pont)

$$a + c = b + d = 17 + 33 = 50.$$ (1 pont)

Mivel a és c csak kétjegyű pozitív egész lehet, ezért

$$a, c \in \{10; 11; 12; \ldots; 99\},$$ (1 pont)

így az összes esetek száma 90^2. (1 pont)

Kedvező eset, ha $a + c = 50$, azaz

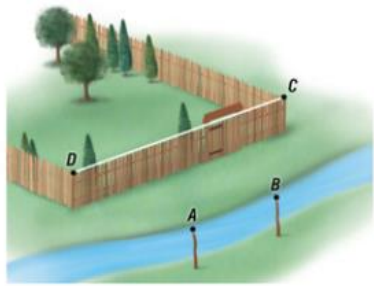
$$10 + 40,\quad 11 + 39,\quad 12 + 38,\quad \ldots,\quad 40 + 10,$$ (1 pont)

ami összesen 31 lehetőség. (1 pont)

A keresett valószínűség:

$$P = \frac{31}{90^2} = 0{,}0038.$$ (1 pont)

Tamás a feleségétől egy olyan mobiltelefont kapott a születésnapjára, amelyik fokra pontosan képes mérni egy adott pontból két másik pont közötti szögelfordulást. Hogy kipróbálja, a telkük mögött csörgedező patak túloldalán megjelölte egy leszúrt bottal az A pontot, majd tőle 16 méterre a B pontot (A, B, C, D egy vízszintes síkba esnek, ahol C és D pontok a telek sarkait jelölik).



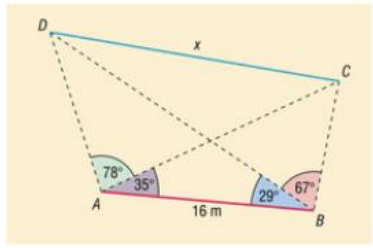
Ezután telefonját a botok tetejére illesztve lemérte az alábbi szögeket:

$$DAC\sphericalangle = 78°,\quad CAB\sphericalangle = 35°,$$
$$DBC\sphericalangle = 67°,\quad DBA\sphericalangle = 29°.$$

b) Számítsa ki a DC távolságot! Eredményét méterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg! b 6

M: Készítsünk ábrát!

$DAB\sphericalangle = 113°$, $ADB\sphericalangle = 38°$,
$ABC\sphericalangle = 96°$, $BCA\sphericalangle = 49°$. (1 pont)



Mivel az $ABD\triangle$-ben ismerjük a szögeket, így a szinusztételből:

$$\frac{DB}{16} = \frac{\sin 113°}{\sin 38°} \Rightarrow DB = 23{,}92\ (\text{m}).$$ (1 pont)

Az $ABC\triangle$-ben is ismerjük a szögeket, így a szinusztételből:

$$\frac{BC}{16} = \frac{\sin 35°}{\sin 49°} \Rightarrow BC = 12{,}16\ (\text{m}).$$ (1 pont)

Így a $DBC\triangle$-ben tudjuk a BD és BC oldalt, illetve a közéjük zárt szöget, alkalmazhatjuk a koszinusztételt: (1 pont)

$$x^2 = 23{,}92^2 + 12{,}16^2 - 2 \cdot 23{,}92 \cdot 12{,}16 \cdot \cos 67° \approx 492{,}73. \quad \text{(1 pont)}$$

Innen a kérdezett távolság $x \approx 22{,}2$ m. (1 pont) ö 13

3 Adottak az alábbi egyenletű parabolák ugyanazon a valós paraméterrel:

$$y = x^2 + ax - 2 \quad \text{és} \quad y = x^2 - 2x + a.$$

a) Bizonyítsa be, hogy a két parabolának az a paraméter megválasztásától függetlenül mindig van közös pontja! a 7

M: Akkor van közös pontjuk, ha az egyenleteikből álló egyenletrendszernek van megoldása: (1 pont)

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + ax - 2 \\ y &= x^2 - 2x + a \end{aligned}\right\}. \quad \text{(1 pont)}$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat:

$$(a + 2)x - (2 + a) = 0, \quad \text{(1 pont)}$$

$$(a + 2)(x - 1) = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

Ha $a = -2$, akkor a két görbe egybeesik, tehát van közös pontjuk. (1 pont)

Ha $a \neq -2$, akkor $x = 1$ helyen metszik egymást. Ekkor $y = a - 1$. (1 pont)

Tehát valóban, bármely valós a esetén **van** a görbéknek közös pontjuk. (1 pont)

b) Határozza meg az a paraméter értékét, ha ismert, hogy a két parabola csak az x tengelyen metszi egymást! b 6

M: Ha csak az x tengelyen metszik egymást, akkor nem eshetnek egybe, tehát $a \neq -2$. (1 pont)

Ekkor viszont csak $x = 1$ pontban lehet a metszéspontjuk: (1 pont)*

$$y = 1^2 + a \cdot 1 - 2 = a - 1. \quad \text{(1 pont)}*$$

Akkor metszik egymást az x tengelyen, ha $y = a - 1 = 0$, (1 pont)*

így **a paraméter értéke: $a = 1$.** (1 pont)

*A *-gal jelölt pontok az a) részben meghatározott $y = a - 1$ kifejezés felhasználása esetén is járnak.*

Ellenőrzés: Ha $a = 1$, $x = 1$, $y = 0$, akkor

$$0 = 1^2 + 1 \cdot 1 - 2 \quad \text{és} \quad 0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1. \quad \text{(1 pont)}$$

ö 13

4 Adott a $]0; 2]$ intervallumon értelmezett f függvény: $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$.

a) Adja meg azt a leghosszabb zárt intervallumot, amelyen az f egyetlen helyettesítési értéke sem pozitív! a 7

M: Alakítsuk szorzattá:

$$f(x) = x^2(x^2 - x - 1). \quad \text{(1 pont)}$$

x^2 nem befolyásolja az előjelet. (1 pont)

A zárójeles kifejezés egy felfelé nyíló parabola, amely a zérushelyek között vesz fel negatív értékeket. (1 pont)

A zérushelyek: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (1 pont)

Mivel negatív vagy 0 értékeket keresünk, a keresett intervallum zárt: (1 pont)

$$\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$ (1 pont)

Azonban a függvény csak a pozitív valós számokon van értelmezve, így a keresett intervallum:

$$\left]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$ (1 pont)

b) Számítsa ki az $\int_1^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét! b 3

M: A primitív függvény megkeresése után alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{32}{5} - \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) =$$ (2 pont)

$$= \frac{7}{60} \approx 0{,}1167$$ az integrál értéke. (1 pont)

c) Egy téglatestnek pontosan nyolc éle 12 cm hosszú. Térfogatának mérőszáma egyenlő a felszíne mérőszámával. Számítsa ki a téglatest felszínét! c 4

M: Ha egy téglatestnek van nyolc egyforma hosszú éle, akkor az csak négyzetes hasáb lehet, amelyben az egyforma élek az alap- és fedőlap élei. (1 pont)

A feladat szövege szerint:

$$V = a^2b = 2(2ab + a^2) = A, \quad \text{ahol} \quad a = 12 \text{ cm}.$$ (1 pont)

Behelyettesítve:

$$144b = 2(24b + 144), \quad \text{innen} \quad b = 3.$$ (1 pont)

A test felszíne $A = 432 \text{ cm}^2$. (1 pont) ö 14

II. rész

5 Egy gyártó az általa készített napelemekre azt a garanciát vállalja, hogy termékei 25 év használat után a gyártáskor mért teljesítmény minimum 80%-ára képesek.

a) Határozza meg, legfeljebb hány százalék a gyártó által garantált éves teljesítményromlás, ha az éves teljesítménycsökkenést minden évben azonosnak tekintjük! Válaszát két tizedesjegyre adja meg! a 3

M: A teljesítmény minden évben az előző évihez képest p%-kal csökken. Legyen $q = \frac{100 - p}{100}$. Így az eredetihez viszonyított éves teljesítményt egy $a_1 = 1$ első tagú, q kvóciensű mértani sorozat írja le, amelynek 25. tagja 0,8.

$$q^{24} = 0{,}8, \quad /\sqrt[24]{\ }$$ (1 pont)

$$q \approx 0{,}9907.$$ (1 pont)

Ebből az éves teljesítményromlás megközelítőleg

$$p = 100\% - 99{,}07\% = \mathbf{0{,}93\%.}$$ (1 pont)

b) A gyártó a honlapján 1%-os éves teljesítményromlással kalkulál. Határozza meg, legalább hány egész évnek kell eltelnie, hogy a napelem teljesítménye 50% alá csökkenjen! b 5

M: Legyen ismét $a_1 = 1$, $q = 0{,}99$ a mértani sorozatban. (1 pont)

$$0{,}99^{n-1} < 0{,}5 \quad /\log_{0{,}99}$$ (1 pont)

Az $f(x) = \log_{0{,}99} x$ alapja 1-nél kisebb, ezért szigorúan monoton csökkenő, így a relációjel megfordul: (1 pont)*

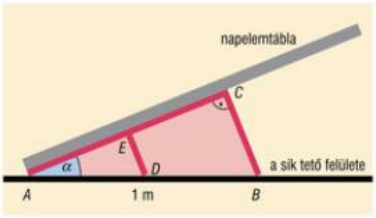
$$n - 1 > 68{,}97.$$ (1 pont)

Tehát legalább **70 évnek** kell eltelni, mire a teljesítmény az eredeti fele alá csökken. (1 pont)

** Ha a monotonitás irányára (csökkenés) való hivatkozás elmarad, ez a pont nem jár. Egyenlet megoldása esetén viszont nem szükséges. Ebben az esetben az igényel magyarázatot, hogy a kapott számot miért felfelé kerekítjük.*

A napelemek felülete 1,6 m × 1 m, sík tető esetén fém tartószerkezetre telepítik őket. Az ábrán a tartószerkezet keresztmetszetét piros szín jelöli.

A szerkezet 3 eleme az $AB = 1$ m átfogójú ABC derékszögű háromszög AC és BC befogója, illetve a DE középvonala.



c) Határozza meg a tartószerkezet ábrán látható elemeinek elméleti maximális hosszát egész centiméterre kerekítve, ha az ABC háromszög α szögére: $0 < \alpha < 90°$! c 8

M: I. megoldás

Felhasználva az ábra jelöléseit:

$$BC = 1 \cdot \sin\alpha; \quad AC = 1 \cdot \cos\alpha; \quad DE = 0{,}5 \cdot \sin\alpha.$$ (1 pont)

Kérdés, hogy mennyi a következő kifejezés maximális értéke:

$$d(\alpha) = AC + BC + DE = 1{,}5\sin\alpha + \cos\alpha.$$ (1 pont)

Keressük deriválással a maximumot:

$$d'(\alpha) = 1{,}5\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}5\cos\alpha = \sin\alpha.$$ (2 pont)

$$1{,}5 = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 \approx 56{,}31°.$$ (1 pont)

Ott van maximum, ahol az első derivált értéke 0, az ennél kisebb α értékekre pozitív, a nagyobbakra pedig negatív értéket vesz fel. (1 pont)

- Ha $0° < \alpha < \alpha_0 \Rightarrow 1{,}5\cos\alpha > \sin\alpha$, tehát $d'(\alpha) > 0$.
- Ha $\alpha_0 < \alpha < 90° \Rightarrow 1{,}5\cos\alpha < \sin\alpha$, tehát $d'(\alpha) < 0$. (1 pont)*

A maximum létezése igazolható a második derivált vizsgálatával is.

A keresett hossz:

$$d(56{,}31°) = 1{,}5\sin 56{,}31° + \cos 56{,}31° \approx 1{,}803 \text{ méter,}$$

azaz **180 cm.** (1 pont)

II. megoldás

Jelölje x (> 0) a BC befogót, ekkor

$$DE = \frac{x}{2} \quad \text{és} \quad AC = \sqrt{1-x^2}.$$ (1 pont)

Kérdés, hogy mennyi a következő kifejezés maximális értéke:

$$d(x) = AC + BC + DE = 1{,}5x + \sqrt{1-x^2}.$$ (1 pont)

Keressük deriválással a maximumot:

$$d'(x) = 1{,}5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = 1{,}5 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 1{,}5\sqrt{1-x^2} = x.$$ (2 pont)

$|x| = \frac{3}{\sqrt{13}}$, amiből $x > 0$ miatt $x_0 = \frac{3}{\sqrt{13}}$. (1 pont)

(Egy szakasz hosszát keressük, nem lehet negatív.)

Ott van maximum, ahol az első derivált értéke 0, az ennél kisebb α értékekre pozitív, a nagyobbakra pedig negatív értéket vesz fel. (1 pont)

- Ha $x < x_0 \Rightarrow 1{,}5\sqrt{1-x^2} > x$, tehát $d'(x) > 0$.
- Ha $x_0 < x \Rightarrow 1{,}5\sqrt{1-x^2} < x$, tehát $d'(x) < 0$. (1 pont)*

A maximum létezése igazolható a második derivált vizsgálatával is.

A keresett hossz:

$$d\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 1{,}5\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{6{,}5}{\sqrt{13}} \approx 1{,}803 \text{ méter,}$$

azaz **180 cm.** (1 pont) ö 16

6 Adott az $\mathbb{R}^+$ halmazon értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x - 5\sqrt{x} \quad \text{és} \quad g(x) = x + 5\sqrt{x}.$$

a) Igazolja, hogy $f(x)$ a $[7; 25[$ intervallumon negatív értékeket vesz fel! a 6

M: Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget, és ellenőrizzük, hogy a megoldások halmazának részhalmaza-e a $[7; 25[$:

$$x - 5\sqrt{x} < 0.$$ (1 pont)*

Másodfokú kifejezésként kezelve:

$$x - 5\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 5\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} = 0,\ \sqrt{x_2} = 5.$$ (2 pont)*

Mivel $\sqrt{x}$-ben ez felfelé nyíló parabola, így a két zérushely között negatív:

$$0 < \sqrt{x} < 5 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 25 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]0; 25[. \qquad \text{(2 pont)*}$$

Mivel $[7; 25[\subset]0; 25[$, ezért a kijelentés **igaz.** (1 pont)

*A *-gal jelölt pontok az $x > 0$ feltételre hivatkozva a következő gondolatmenetért is járnak: $x < 5\sqrt{x} \Rightarrow x^2 < 25x \Rightarrow 0 < x < 25$. Hivatkozás nélkül csak 2 pont jár.*

b) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) \cdot g(x)| \leq 46$ egyenlőtlenséget! b 10

M: Nevezetes szorzat alapján:

$$|f(x) \cdot g(x)| = |x^2 - 25x| \leq 46.$$

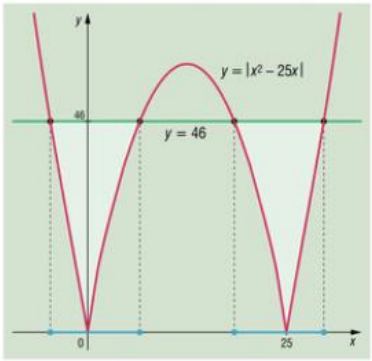
Határozzuk meg az abszolút értékben levő normál állású parabola zérushelyeit:

$$x^2 - 25x = x(x - 25) = 0,$$

amiből $x_1 = 0$ és $x_2 = 25$. (1 pont)

Az abszolút értékben levő kifejezés nemnegatív, ha $x \leq 0$ vagy $25 \leq x$. Ekkor az abszolút értéket kifejtve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$x^2 - 25x - 46 \leq 0. \qquad \text{(2 pont)}$$



Az $x^2 - 25x - 46 \leq 0$ egyenlet megoldásai:

$$x \in \left[\frac{25 - \sqrt{809}}{2}; \frac{25 + \sqrt{809}}{2}\right]. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az $x \leq 0$ vagy $25 \leq x$ feltétellel összevetett megoldások:

$$x \in \left[\frac{25 - \sqrt{809}}{2}; 0\right] \cup \left[25; \frac{25 + \sqrt{809}}{2}\right]. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $0 < x < 25$, akkor $x^2 - 25x < 0$, így kifejtve a következő alakhoz jutunk:

$$0 \leq x^2 - 25x + 46. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek megoldásai: $x \in]-\infty; 2] \cup [23; \infty[$. (1 pont)

A $0 < x < 25$ feltétellel összevetett megoldások:

$$x \in]0; 2] \cup [23; 25[. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mindent egybevetve a feladat megoldásai:

$$x \in \left[\frac{25 - \sqrt{809}}{2}; 2\right] \cup \left[23; \frac{25 + \sqrt{809}}{2}\right]. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

7 Egy népszerű csokiszeletet gyártó cég akciót hirdet a termékeire. Szerencsés esetben a csomagolás belsejében „Nyert" felirat olvasható. A csomagolás külsején látható reklám szerint a csokik közül *„minden negyedik nyer"*.

a) Kata hat szelet csokit kapott ajándékba. Mekkora valószínűséggel van közöttük legalább kettő nyerő? a 4

M: Érdemes áttérni a komplementerre: 0 vagy 1 nyerő.

Egy csokira a nyerés valószínűsége: $p_{\text{nyer}} = \frac{1}{4}$, $p_{\text{nem nyer}} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

$P(\text{0 nyerő}) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0{,}178.$ (1 pont)

$P(\text{1 nyerő}) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}356.$ (1 pont)

A kérdezett valószínűség:

$$1 - (0{,}178 + 0{,}356) = \mathbf{0{,}466.}$$ (1 pont)

b) Döntse el, melyik esemény következik be nagyobb valószínűséggel! b 5

A) Négy megvásárolt csoki közül egyik sem nyer.

B) Öt megvásárolt csokiból páros sok nyer, de a nyereménycsokik nem nyernek.

M: $P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}3164.$ (1 pont)

$P(B) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}1529.$ (3 pont)

Az *A* esemény nagyobb valószínűséggel következik be, mint a *B*. (1 pont)

Egy magyar–német vegyesvállalat online videókonferenciájához az elmúlt fél órában 6 magyar és 4 német kolléga csatlakozott, így a konferencia résztvevői között a magyarok aránya 40%-ról 48%-ra növekedett.

c) Számítsa ki, jelenleg hányan vesznek részt az online videókonferencián! c 7

M: Eredetileg jelölje m a magyar, n a német résztvevők számát, így

$$\frac{m}{m+n} = 0{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}6m = 0{,}4n.$$ (1 pont)

A csatlakozás után

$$\frac{m+6}{m+n+10} = 0{,}48 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}52m + 1{,}2 = 0{,}48n.$$ (2 pont)

Készítsünk egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}6m &= 0{,}4n \\ 0{,}52m + 1{,}2 &= 0{,}48n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}5m.$$ (1 pont)

A 2. egyenletből:

$$0{,}52m + 1{,}2 = 0{,}72m \quad \Rightarrow \quad m = 6,$$ (1 pont)

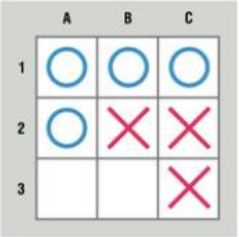
visszahelyettesítve: $n = 9$. (1 pont)

Az eredeti 15 résztvevőhöz 10 csatlakozott, így most **25 fős** a konferencia. (1 pont) ö 16

8 A tic-tac-toe nevű játékot két játékos játssza egy 3 × 3-as táblán. Az egyik játékos az X, a másik a O szimbólumot használja, felváltva helyezik el jelüket egy szabad mezőn.

Az nyer, akinek vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan három jelet sikerül egymás mellé tenni. (Az ábrán például O nyert.)

Jelöljük a tábla oszlopait A, B, C betűkkel, a sorokat pedig 1, 2, 3 számokkal.



Tekintsük azt a gráfot, amelyben minden pont egy mezőnek felel meg (az A1 pont a bal felső mezőnek). Két pontot akkor köt össze kék színű él, ha nyerő állást alkotnak egy harmadik ponttal (például a B1, B2, B3 pontok össze vannak kötve egymással).

a) Melyik a legnagyobb fokszámú pont a gráfban? Mennyi a fokszáma? a 2

M: A gráf legnagyobb fokszámú pontja az a pont, amelyikhez a legtöbb nyerő állásban szereplő mező tartozik: ez a **középső B2.** (1 pont)

A B2 mező az összes többi mezővel alkothat nyerő állást, tehát mind a 8 másik ponttal össze van kötve. **Fokszáma 8.** (1 pont)

b) Határozza meg, hány fekete élt kellene még berajzolni ebbe a gráfba a kékek mellé, hogy az élek színétől eltekintve teljes gráfot kapjunk! b 6

M: Tekintsük a kék élű gráfot! Ebben fokszámok szempontjából három különböző típusú mező van: sarok és élközép 4-4 darab, és a középső. (1 pont)

A sarokmezők fokszáma 6, az élközépmezőké 4, a középsőé 8. (1 pont)

Így a kék gráf fokszámainak összege $(6 + 4) \cdot 4 + 8 = 48$. (1 pont)

Ennek fele a kék élek száma, vagyis 24. (1 pont)

A 9 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$. (1 pont)

Ebből 24 él kék, **12 fekete élt kell rajzolni.** (1 pont)

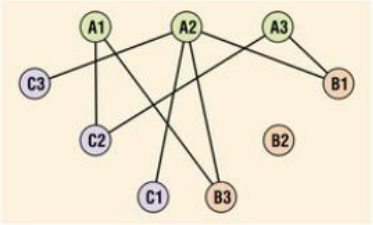
Az a) vagy a b) részben egy jól ábrázolt gráf alapján megfogalmazott helyes válaszért is járnak a pontok.

c) A fekete élek alkotta gráfban tekintsük csak azokat az éleket, amelyek az A1, A2, A3 pontokhoz kapcsolódnak. Közülük néhány kört alkot. Hány él alkotja ezt a kört? c 4

M: Ábrázoljuk az A1, A2, A3 pontokhoz csatlakozó fekete élek alkotta részgráfot.

Azok az élek feketék, amely mezők nem alkothatnak nyerő állást. (1 pont)

A gráfban B2, C1 és C3 kivételével minden pont foka 2 vagy 4. (1 pont)



Kört vagy köröket az A1, A2, A3, B1, B3, C2 pontok alkothatnak.

Mivel az A1, C2, A3, B1, A2, B3, A1 zárt út, így valóban egyetlen kört alkotnak. (1 pont)

Ezt a kört **6 él** alkotja. (1 pont)

d) A teljes gráfban túl sok fekete él van ahhoz, hogy fagráfot alkossanak. Tudunk-e belőlük elhagyni úgy, hogy az *eredeti gráf mind a 9 pontja* és a megmaradt fekete élek fagráfot alkossanak? Válaszát indokolja! d 4

M: A fekete gráf a kék komplementere. (1 pont)

A B2 pont a kék gráfban minden ponttal össze van kötve. (1 pont)

Így a fekete gráfban B2 izolált pont, tehát a gráf nem összefüggő, ezért nem lehet fa. (1 pont)

A válasz tehát: akárhogyan is hagyunk el éleket belőle, a fekete gráf **nem lehet fa.** (1 pont) ö 16

9 Egy prémiumparfümöket árusító üzlet kétórás akciót hirdetett. Az akció első órájában 30 fő vásárolt. Az üzletvezető tudta, hogy a második óra idősávjában jóval több vásárlóra számíthat, ezért az első óra vásárlásainak átlagértéke alapján biztos volt benne, hogy az akcióban elérik a 6 millió forintos bevételt. Tévedett: az akció egészére összesítve ugyanis az első órához képest 18 000 forinttal csökkent a vásárlások átlagértéke, így az összes bevétel végül 5 040 000 forint lett.

a) Hányan éltek a meghirdetett akcióval és vásároltak parfümöt az üzletben a két óra alatt, ha az első órában, illetve a második órában vásárolt termékek átlagértékeinek aránya 5 : 3? a 10

M: Gyűjtsük össze az ismert és ismeretlen adatokat egy táblázatba!

	1. óra	2. óra	Egész idő
A vásárlók száma	30	n	$30 + n$
A vásárlások átlagértéke	x	y	$x - 18\,000$
A vásárlás értéke	$30x$	$n \cdot y$	5 040 000

Ebből kiolvasható, hogy

$$30x + n \cdot y = 5\,040\,000 \quad \text{és} \quad (30 + n)(x - 18\,000) = 5\,040\,000.$$

(1 pont)

Továbbá mivel $x : y = 5 : 3$, így készíthetünk egy egyenletrendszert

$$\left.\begin{aligned} 30x + n \cdot y &= 5\,040\,000 \\ (30 + n)(x - 18\,000) &= 5\,040\,000 \\ \frac{x}{y} &= \frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \text{(I)} \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}6x \text{ (a 3. egyenletből).}$$

(2 pont)

Az (I) 1. egyenletébe visszahelyettesítve y-t:

$$\left.\begin{aligned} 30x + 0{,}6n \cdot x &= 5\,040\,000 \\ 30x + n \cdot x - 18\,000n &= 5\,580\,000 \end{aligned}\right\} \text{(II)} \qquad \text{(1 pont)}$$

(II)-ben szorozva 0,6-del a 2. egyenletet, majd kivonva az elsőből a másodikat:

$$12x + 10\,800n = 1\,692\,000, \quad /:12$$
$$x + 900n = 141\,000,$$
$$x = 141\,000 - 900n. \qquad \text{(2 pont)}$$

Visszahelyettesítve az eredeti (I) egyenletrendszer 2. egyenletébe:

$$(30 + n)(123\,000 - 900n) = 5\,040\,000,$$
$$0 = 900n^2 - 96\,000n + 1\,350\,000, \quad /:300$$
$$0 = 3n^2 - 320n + 4500. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ennek megoldásai $n_1 = 90$ és $n_2 = \frac{50}{3}$. (1 pont)

A megoldásnak egész számnak kell lennie, ezért az akcióban összesen $30 + 90 =$ **120 fő vásárolt** parfümöt. (1 pont)

Ellenőrzés: Visszahelyettesítve az értékeket, a megfelelő mezők összege egyenlő:

$$30 \cdot 60\,000 + 90 \cdot 36\,000 = 120 \cdot 42\,000 = 5\,040\,000. \qquad \text{(1 pont)}$$

	1. óra	2. óra	Egész idő
A vásárlók száma	30	90	120
A vásárlások átlagértéke	60 000	36 000	42 000
A vásárlás értéke	1 800 000	3 240 000	5 040 000

b) Határozza meg, hányféleképpen lehet a 120-at páros számok szorzatára bontani! b 6

M: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. (1 pont)

Mivel 3 darab 2-es prímtényezője van, ezért 2 vagy 3 darab páros szám szorzatára bontható. (1 pont)

Ha 2 darab páros szám szorzatára bontjuk, akkor az egyikben 1, a másikban 2 darab 2-es prímtényező szerepel. (1 pont)

Mivel a két tényező különböző, a 3 és 5 prímet szorzóként melléjük írhatjuk 4 módon:

$$2 \text{ és } 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot 3 \text{ és } 2^2 \cdot 5,$$
$$\text{vagy} \quad 2 \cdot 5 \text{ és } 2^2 \cdot 3, \quad \text{vagy} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ és } 2^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha 3 darab páros szám szorzatára bontjuk, akkor mindegyikben egy 2-es prímtényező szerepel: a 3 és 5 prímet pedig vagy együtt egy 2-eshez, vagy külön két 2-eshez írjuk szorzóként. Ez két lehetőség. (1 pont)

Összesen $4 + 2 = 6$ ilyen felbontás van. (1 pont) ö 16

Megjegyzés: Ha minden magyarázat nélkül felírja az összes felbontást, 6 pontot kap. Ha egyet ront, akkor 3 pontot kap. Ha többet ront, akkor nem kap pontot. A lehetséges felbontások:

2 és $2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3$ és $2^2 \cdot 5$; $2 \cdot 5$ és $2^2 \cdot 3$;
$2 \cdot 3 \cdot 5$ és 2^2; 2 és 2 és $2 \cdot 3 \cdot 5$; 2 és $2 \cdot 3$ és $2 \cdot 5$.

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

I. rész

1 *a)* Adottak az $e: x - my = 6$ és az $f: 2x + y = m$ egyenesek, ahol m pozitív valós paraméter. Határozza meg m értékét úgy, hogy az e és f egyenesek metszéspontjának abszcisszája 2 legyen! a 5

M: A metszésponthoz felírjuk az egyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - my &= 6 \\ 2x + y &= m \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A feltételekből tudjuk, hogy az első koordináta $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} 2 - my &= 6 \\ 4 + y &= m \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Helyettesítsünk az első egyenletbe m-et, majd rendezzük:

$$2 - (4 + y)y = 6 \quad \Rightarrow \quad -y^2 - 4y - 4 = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ennek egyetlen megoldása $y = -2$. (1 pont)

A második egyenletbe behelyettesítve kapjuk a feladat pozitív valós megoldását: $m = 2$. (1 pont)

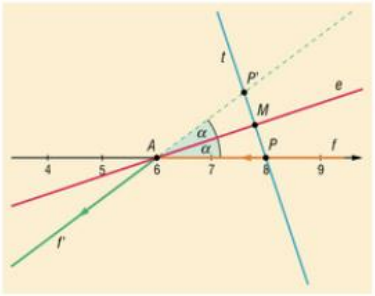
b) Adott az $e: x - 3y = 6$ egyenletű egyenes. Az x tengely (20; 0) pontjából egy lézersugarat bocsátunk az origó irányába, amely az e egyenesről az $A(6; 0)$ pontban visszaverődik. Határozza meg a visszavert lézersugár egyenesének egyenletét közelítő értékek használata nélkül! b 7

M: I. megoldás

A visszavert f' fénysugár a beérkező f fénysugárnak az e tükörre vonatkozó tükörképe.

Tükrözzünk egy tetszőleges P ($\in f$) pontot az e-re (P'). (1 pont)

Az ábra önmagában elegendő.



Legyen $P(8; 0)$, és jelölje M a P-ből az e-re bocsátott merőleges és e metszéspontját.

Ekkor $n_e(1; -3)$, amiből $n_t(3; 1)$, így a t segédegyenes egyenlete:

$$t: 3x + y = 24 \ (= 3 \cdot 8 + 1 \cdot 0). \qquad \text{(1 pont)}$$

M meghatározásához az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 6 \\ 3x + y &= 24 \end{aligned}\right\}.$$

Az 1. egyenletből $x = 3y + 6$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $10y = 6$, amiből $y = 0{,}6$ és $x = 7{,}8$. (2 pont)

Az $M(7{,}8; 0{,}6)$ metszéspont felezi PP'-t, így $P'(7{,}6; 1{,}2)$. (1 pont)

A visszavert f' fénysugár áthalad a P' és az A pontokon, ezért irányvektora:

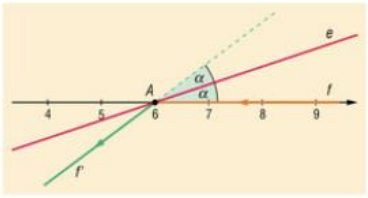
$$\overrightarrow{v_{f'}}(1{,}6;\ 1{,}2), \quad \text{vagy} \quad \overrightarrow{v_{f'}}(4;\ 3). \qquad \text{(1 pont)}$$

A visszavert fénysugár egyenlete:

$$3x - 4y = 18. \qquad \text{(1 pont)}$$

II. megoldás

A visszavert f' fénysugár ugyanakkora szöget zár be az e tükörrel, mint a beérkező f fénysugár. (1 pont)



Az e tükör meredeksége és iránytangense:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A visszaverődés ezt az α szöget megduplázza:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A visszavert f' fénysugár meredeksége $m' = \frac{3}{4}$, illetve áthalad az A ponton, így

$$f'\colon\ y = \frac{3}{4}(x-6). \qquad \text{(2 pont)}$$

A visszavert fénysugár egyenlete:

$$y = 0{,}75x - 4{,}5. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 12

Bármilyen ekvivalens alakban megadott jó egyenlet megfelelő.

2 *a)* Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! a 6

$$\sqrt{9-6x+x^2} = \frac{7-2x}{2}$$

M: I. megoldás

A gyökjel alatt $(3-x)^2 \geq 0$ szerepel, vagyis az egyenlet bármely valós x-re értelmezve van.

Kettővel szorozva és négyzetre emelve mindkét oldalt:

$$4(9-6x+x^2) = 49 - 28x + 4x^2, \qquad \text{(2 pont)}$$

$$36 - 24x = 49 - 28x, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$4x = 13, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$x = 3{,}25. \qquad \text{(1 pont)}$$

Megjegyzés: A négyzetre emeléssel gyököt nem vesztünk, legfeljebb hamis gyököt kapunk, ami az ellenőrzéskor kiderül.

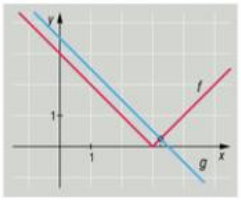
Ellenőrzés: $\sqrt{9-6\cdot 3{,}25+3{,}25^2} = 0{,}25 = \frac{7-2\cdot 3{,}25}{2}$. (1 pont)

II. megoldás

A négyzetgyök alatt álló nevezetes szorzat miatt az egyenlet

$$|3 - x| = \frac{7 - 2x}{2} = 3{,}5 - x.$$ (1 pont)

Ábrázolva a bal oldalt f, a jobb oldalt g függvényként, a megoldás megsejthető.



Más megoldás nem lehet, mert a közös $m = -1$ meredekségük miatt $g \parallel f$ csökkenő ágával. (2 pont)

A g függvény a négyzetrácsot felezőpontokban metszi és merőleges az f emelkedő szárára, azaz a g negyedeli az f négyzetrácsba eső szakaszát. (1 pont)

A sejtésünk, hogy $x = 3{,}25$. (1 pont)

Ellenőrzés: $\sqrt{9 - 6 \cdot 3{,}25 + 3{,}25^2} = 0{,}25 = \frac{7 - 2 \cdot 3{,}25}{2}$. (1 pont)

III. megoldás

A négyzetgyök alatt álló nevezetes szorzat miatt az egyenlet

$$|3 - x| = \frac{7 - 2x}{2}.$$ (1 pont)

Ha $3 - x < 0$, vagyis $3 < x$, akkor

$$x - 3 = \frac{7 - 2x}{2}.$$ (1 pont)

$2x - 6 = 7 - 2x \Rightarrow 4x = 13 \Rightarrow x_1 = 3{,}25.$ (1 pont)

Ha $3 - x \geq 0$, azaz $3 \geq x$, akkor

$$3 - x = \frac{7 - 2x}{2}.$$ (1 pont)

$6 - 2x = 7 - 2x \Rightarrow 6 = 7$, ami ellentmondás $\Rightarrow$ nincs megoldás. (1 pont)

Ellenőrzés: $\sqrt{9 - 6 \cdot 3{,}25 + 3{,}25^2} = 0{,}25 = \frac{7 - 2 \cdot 3{,}25}{2}$. (1 pont)

b) Oldja meg a $[-\pi; 0]$ alaphalmazon az egyenletet! b 7

$\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$

M: Az egyenlet $\operatorname{tg}^2 x$-ben másodfokú. (1 pont)

Az egyenlet megoldásai: $(\operatorname{tg}^2 x)_1 = 3$ és $(\operatorname{tg}^2 x)_2 = 1$. (1 pont)

Megjegyzés: A gyököket szorzattá alakítással is megkapjuk ($a = \operatorname{tg}^2 x$):

$$a^2 - 4a + 3 = (a - 3)(a - 1).$$

Mindkét megoldás nemnegatív, így

$\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + k_1\pi$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$. (1 pont)*

$\operatorname{tg} x_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{3} + k_2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$. (1 pont)*

$\operatorname{tg} x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4} + k_3\pi, \quad$ ahol $k_3 \in \mathbb{Z}$. (1 pont)*

$\operatorname{tg} x_4 = -1 \quad \Rightarrow x_4 = -\frac{\pi}{4} + k_4\pi, \quad$ ahol $k_4 \in \mathbb{Z}$. (1 pont)*

A keresett $[-\pi; 0]$ alaphalmazba ezek közül azonban csak négy megoldás esik ($k_1 = k_3 = -1$, $k_2 = k_4 = 0$ értékekre):

$$-\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{4}.$$ (1 pont) ö 13

*A *-gal jelölt pontokból csak 2 jár, ha nincs utalás a végtelen sok megoldásra (nem szerepel a $k\pi$ periódus), és csak 1 pont jár, ha a válasz nem felel meg a kérdésnek (a megoldások nem negatívak).*

3 2018. augusztus elején járta be a világot a hír: Svájcot akkora aszály sújtotta, hogy katonai Super Puma helikopterek szállítottak vizet a hegyre a teheneknek. A helikopter utazósebessége $240\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Bizonyítsa be, hogy ha a helikopterek hegynek felfelé az s hosszú utat $v_1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel t_1 idő alatt, hegynek lefelé pedig az ugyanolyan hosszú utat $v_2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel t_2 idő alatt teszik meg, akkor az oda-vissza út átlagsebességét a v_1 és v_2 sebességek harmonikus közepeként kell kiszámítani! a 4

M: Az oda-vissza úton számított átlagsebesség a $2s$ út és $t_1 + t_2$ idő hányadosa:

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2}.$$ (1 pont)

Az idő az út és a sebesség hányadosa:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}.$$ (1 pont)

Behelyettesítve, majd s-sel egyszerűsítve, v_1, v_2 harmonikus közepét kapjuk:

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$ (2 pont)

Tételezzük fel, hogy a helikopterek a felfelé úton vízzel megrakodva az utazósebességüknél épp annyival mentek lassabban, mint amennyivel ugyanazon az úton gyorsabban jöttek vissza. Egy oda-vissza út átlagsebességére így $236{,}25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jött ki.

b) Mennyi volt a felfelé és a lefelé úton az utazósebességtől való eltérés? b 6

M: A feladat szerint létezik egy olyan v (> 0) sebesség, amelyre igaz, hogy a helikopter felfelé $v_1 = 240 - v$, lefelé pedig $v_2 = 240 + v$ sebességgel halad. (1 pont)

Ekkor az oda-vissza út átlagsebessége:

$$236{,}25 = \frac{2}{\frac{1}{240-v}+\frac{1}{240+v}} = \frac{(240-v)(240+v)}{240}.$$ (2 pont)

Ezt átalakítva hiányos másodfokú egyenletre jutunk:

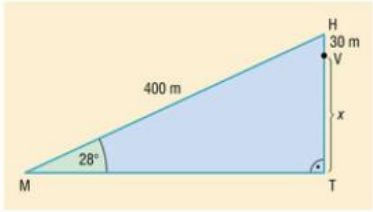
$$56\,700 = 57\,600 - v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 900, \text{ ahonnan:}$$ (2 pont)

a keresett átlagsebességtől való eltérés $v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (> 0). (1 pont)

Egy földön fekvő megfigyelő teodolittal (szögmérő műszerrel) ellenőrzi a vízszintes terep felett feléje tartó helikopter repülési magasságát. Tudja, hogy a vizeshordó 30 méterrel lóg a helikopter alá. Egy adott pillanatban a megfigyelő 28°-os emelkedési szögben látja a tőle 400 méterre levő helikoptert.

c) Határozza meg a vizeshordó talajtól mért távolságát! c 3

M: Készítsünk ábrát! A hordó felszín feletti magasságát jelölje x. (1 pont)



Az ábra alapján:

$$\sin 28° = \frac{x+30}{400}, \text{ ebből:}$$ (1 pont)

$x \approx 157{,}789$ **m** távolságra van a hordó a talajtól. (1 pont)

ö 13

4 Egy kilencelemű minta öt különböző pozitív egész értékből áll. A minta mediánja 10, terjedelme 8, két módusza 7 és 14. A mintaelemek mediántól vett átlagos abszolút eltérése 3.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő kilenc számot! a 9

M: A 7 és a 14 móduszok háromszor fordulnak elő. (1 pont)

Ugyanis ha 2-2 helyen szerepelnének, akkor 4 üres hely maradna, így vagy 5-nél több különböző számot írunk, vagy lenne másik módusz. Mindkettő ellentmond a feltételnek. (1 pont)

Így viszont a medián előtt és után is van még egy-egy szám:

$$X < 10 < Y.$$ (1 pont)

Az abszolút átlagos eltérésből:

$$\frac{|X-10|+3\cdot|7-10|+|10-10|+3\cdot|14-10|+|Y-10|}{9} = 3,$$ (1 pont)

az abszolút értékek elhagyhatók, mivel ismerjük a nagyságrendi viszonyokat:

$$\frac{10-X+3\cdot 3+3\cdot 4+Y-10}{9} = 3.$$ (1 pont)

Átalakítva: $Y - X = 6$. (1 pont)

A terjedelem 8, ezért a rangsor két szélén nem állhat egyszerre 7 és 14, illetve X és Y sem. Tehát csak *A)* X és 14, vagy *B)* 7 és Y lehetséges. (1 pont)

A két esetnek megfelelő kiosztásokból megkapjuk a megoldásokat:

A) $X\ 7\ 7\ 7\ 10\ Y\ 14\ 14\ 14 \quad \Rightarrow \quad X = 6$ és $Y = 12$. (1 pont)

B) $7\ 7\ 7\ X\ 10\ 14\ 14\ 14\ Y \quad \Rightarrow \quad Y = 15$ és $X = 9$. (1 pont)

Tehát a kilenc szám:

6, 7, 7, 7, 10, 12, 14, 14, 14, vagy 7, 7, 7, 9, 10, 14, 14, 14, 15.

Külföldi tárgyalódelegáció érkezik egy vállalathoz. A fogadóbizottságnak ugyanannyi tagja van, mint ahányan érkeznek. A fogadóbizottságban mindenki csak a közvetlenül alá beosztottakat ismeri, mást nem, de közvetve mindenki kapcsolatba hozható mindenkivel. Az érkezők közül mindenki közvetlenül ismer mindenkit.

b) Hány tagúak a bizottságok, ha a két bizottságban egyenlő számú ismeretség van? b 4

M: Jelölje n a két bizottság létszámát, és modellezzük őket gráfokkal (pontok a tagok, élek a közöttük meglévő ismeretségek).

A fogadóbizottságot a leírás alapján fagráf modellezi, $n - 1$ éllel. (1 pont)

Az érkező bizottság teljes gráfot alkot $\frac{n(n-1)}{2}$ éllel. (1 pont)

Az élek számai egyenlők:

$$n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Megoldást tehát csak a **kéttagú** bizottságok alkotnak. (1 pont) ö 13

II. rész

5 Adott az alábbi sorozat: 1; 3; 6; 10; 15; … A sorozat soron következő elemét úgy kapjuk meg, hogy mindig eggyel nagyobb számot adunk (dőlt betűvel jelöltük) az aktuális taghoz, mint az előző esetében:

$1 + 2 = 3; \quad 3 + 3 = 6; \quad 6 + 4 = 10; \quad 10 + 5 = 15; \quad \ldots$

a) Jelölje a sorozatot $\{a_n\}$, tagjait $a_1 = 1$; $a_2 = 3$, és így tovább. Adja meg a sorozat a_{10} elemét! a 3

M: A sorozat elemei: (2 pont)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

A sorozat 10. eleme: $a_{10} = 55$. (1 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a sorozat n. tagját az $a_n = \binom{n+1}{2}$ képlet előállítja! b 5

M: I. megoldás

Használjunk a sorozat tagjai szerinti teljes indukciót. (1 pont)

(1) $n = 1$-re az állítás igaz: $a_1 = \binom{1+1}{2} = 1$.

(2) Tegyük fel, hogy valamely $n = k$-ra igaz, hogy $a_k = \binom{k+1}{2}$. (1 pont)

(3) Kérdés, hogy ekkor $n = k + 1$-re igaz-e, hogy $a_{k+1} = \binom{k+1+1}{2}$. (1 pont)

A képzési szabály szerint, felhasználva a (2) indukciós feltevést:

$$a_{k+1} = a_k + k + 1 = \binom{k+1}{2} + k + 1 =$$

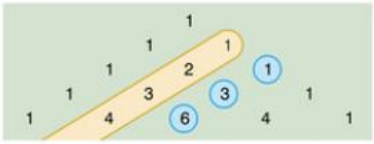
$$= \frac{(k+1)k}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \binom{k+2}{2},$$

ezzel az állítást beláttuk. (2 pont)

II. megoldás

Használjuk fel a Pascal-háromszög ismert tulajdonságait. (1 pont)

(A Pascal-háromszög minden tulajdonságát bizonyítottnak tekintjük.)



A sorozat definíciójában megadottak megfeleltethetők a Pascal-háromszögnek. (1 pont)

Az eggyel növekvő számokat megtaláljuk a sárga átlóban. (1 pont)

A sorozat tagjait pedig a karikázott számok jelölik (mivel a Pascal-háromszög 2. átlójának képzési szabálya megfelel a sorozat képzési szabályának). (1 pont)

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható a Pascal-háromszög n. sorának k. eleme, így a sorozatot valóban $a_n = \binom{n+1}{2}$ elemek alkotják. (1 pont)

c) Igazolja, hogy akárhogyan is adunk meg egy k pozitív egész számot, a sorozatnak mindig lesz olyan tagja, amely pontosan k darab 0-ra végződik! c 8

M: Ha egy szám pontosan k darab 0-ra végződik, akkor felírható $a \cdot 10^k$ alakban, ahol a nem 0-ra végződő pozitív egész szám. (1 pont)*

Az állítás igazolásához keresünk a sorozatban egy ilyen tagot. (1 pont)*

Ehhez az $a_n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ (1 pont)

kifejezést $a \cdot 10^k$ alakúra hozzuk. Ezt többféleképpen megtehetjük, például

$$\frac{n+1}{2} = 10^k \quad \text{és} \quad n = a. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor $n + 1 = 2 \cdot 10^k$, (1 pont)

így

$$n = a = 2 \cdot 10^k - 1 = 19\ldots9,$$ (1 pont)

amiben k darab 9-es számjegy szerepel. (1 pont)

A sorozat $a_{19\ldots9} = a_{2 \cdot 10^k - 1}$ **tagja** k darab 0-ra végződik. (1 pont) ö 16

* *A jelölt pontok járnak, ha ezek a gondolatok a megoldásból kiderülnek. Összesen 4 pont jár, ha csak konkrét példák szerepelnek, de az általánosítás elmarad.*

Megjegyzés: További lehetőség az $\frac{n}{2} = 10^k$ és $n + 1 = a$ felosztás, ekkor $n = 2 \cdot 10^k$, azaz megfelelő tulajdonságú az $a_{20\ldots0}$ tag is. Nem felel meg azonban az $\frac{n+1}{2} = a$ és $n = 10^k$, illetve $\frac{n}{2} = a$ és $n + 1 = 10^k$, mert ezen esetekben a nem lehet egész szám.

6 Egy hegyen átvezető egyenes alagút keresztmetszetét egy fordított állású parabola nemnegatív ordinátájú pontjai és az x tengely adják. A parabola egyenlete:

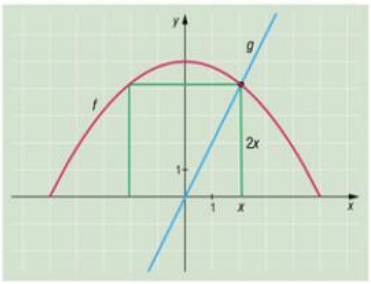
$$y = -\frac{1}{5}x^2 + 5.$$

A koordináta-rendszer egysége 1 méternek felel meg a valóságban.

Amíg egy különleges rakománnyal közlekedő teherszállító jármű hajt át az alagúton, a forgalmat leállítják. A teherszállító jármű keresztmetszete négyzetnek tekinthető.

a) Milyen széles lehet a legnagyobb ilyen jármű, amely elfér az alagút alatt? Válaszát egész centiméterre kerekítve adja meg! a 8

M: Készítsünk ábrát! Jelölje f az alagút oldalát jelző parabolagörbét. (1 pont)



A kamionnak is szimmetrikusnak kell lennie az y tengelyre. (1 pont)

A négyzet vízszintes oldalát felezi az y tengely, így a kamion jobb alsó „sarkát" az $(x; 0)$ pontba helyezve $(x > 0)$ a jobb felső „sarka" az $y = 2x$ egyenesen van. (1 pont)

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ y &= -\frac{1}{5}x^2 + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2x = -\frac{1}{5}x^2 + 5.$$ (2 pont)

Rendezve az egyenletet:

$$x^2 + 10x - 25 = 0.$$ (1 pont)

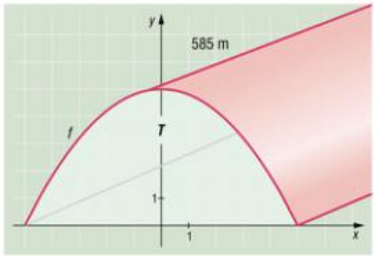
A megoldóképletből: $x_1 \approx 2{,}071$ és $x_2 \approx -12{,}071$. (1 pont)

Mivel $x > 0$, így **a kamion maximális szélessége és magassága**

$$2x_1 = 414 \text{ cm}.$$ (1 pont)

b) Az alagút 585 méter hosszú. Hány köbméter levegőt tartalmaz, ha nincs benne egyetlen jármű sem? b 8

M: Az alagút egyenes hengerszerű test, amelynek magassága 585 m. (1 pont)



A térfogathoz a T alapterületet kell meghatároznunk. (1 pont)

T az f parabola pozitív értékei és az x tengely által közbezárt terület. (1 pont)

A határozott integrálhoz megállapítjuk a határokat:

$$-\frac{1}{5}x^2+5=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=5 \text{ és } x_2=-5. \qquad \text{(1 pont)}$$

A görbe szimmetriája miatt:

$$T=2\int_0^5\left(-\frac{1}{5}x^2+5\right)\mathrm{d}x. \qquad \text{(1 pont)}$$

Megkeressük a primitív függvényt, és alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$2\left[-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^3}{3}+5x\right]_0^5=2\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{5^3}{3}+5\cdot5\right)=\frac{100}{3}\,\text{te}=\frac{100}{3}\,\text{m}^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen az alagút térfogata:

$$V=T\cdot m=\frac{100}{3}\cdot585=\mathbf{19\,500\ m^3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

7 Bergengócia egyik áruházában 55 alkalmazott dolgozik, egy részük eladó (ők teszik az árut a polcra, szolgálnak ki a pultokban, ülnek a pénztárban), másik részük biztonsági őr (az áruházi tolvajokat kell leleplezniük).

Az eladók napi fizetése 100 peták, a biztonsági őröké 175 peták. Egy vásárló átlagosan 30 petákot költ egy nap, azonban egy-egy áruházi tolvaj ennek 1,2-szeresét próbálja fizetés nélkül elvinni az áruházból. A statisztikák szerint minél több eladó dolgozik, annál szívesebben jönnek a vásárlók: az 500, naponta biztosan érkező vevőn túl minden eladó 20 újabb vásárlót „vonz" az üzletbe.

Sajnos azonban az is kiderült, hogy biztonsági őrök nélkül a boltba betérők 30%-a fizetés nélkül próbál távozni. A statisztikák azt mutatták, hogy ez az arány minden biztonsági őr alkalmazásával 1%-kal csökken, azaz egy biztonsági őr alkalmazása esetén már csak 29%, két őr esetén 28% és így tovább. (A biztonsági őrök feladata alapvetően az elrettentés. Sajnos az elfogott tolvajokból is csak kára keletkezik a boltnak, ugyanis a bergengóc rendőrség az árut bizonytalan időre lefoglalja.)

a) Határozza meg a fentiek alapján becsült napi hasznot, ha az áruház alkalmazottai közül 42 az eladó! (A haszon a bevétel és a kiadás – ami most a bér és a tolvajok által okozott kár – különbsége.) a 6

M: Figyeljük meg, hogy az *a)*, illetve a *b)* kérdés megválaszolásához elvégzendő számítások között az első lépésekben nincs eltérés, ezért érdemes az *a)* rész számolásait részletesen kiírni. Ugyanis ekkor a *b)* részben el tudunk indulni, csak az *a)* lépéseiben betűvel kell jelölnünk a megfelelő számokat.

Ha az 55 alkalmazottból 42 fő eladó, akkor $55 - 42 = 13$ fő biztonsági őr.

Kiadás a munkabér: (1 pont)

$$42 \cdot 100 + 13 \cdot 175 = 6475 \text{ (peták).} \quad \text{(1 pont)}$$

A vásárlók száma: $500 + 42 \cdot 20 = 1340$ (fő). (1 pont)

A bevétel a rendes vásárlók költése (a betérők 70%-a, plusz őrönként 1%):

$$1340 \cdot (0{,}7 + 13 \cdot 0{,}01) \cdot 30 = 33\,366 \text{ (peták).} \quad \text{(1 pont)}$$

A kiadás a tolvajok által okozott kár (a betérők 30%-a, mínusz őrönként 1%):

$$1340 \cdot (0{,}3 - 13 \cdot 0{,}01) \cdot 36 = 8200{,}8 \text{ (peták).} \quad \text{(1 pont)}$$

Amiből a haszon: $33\,366 - (6475 + 8200{,}8) =$ **18 680,2 peták.** (1 pont)

b) Számítsa ki, hogy a fenti feltételek fennállása mellett mennyi az áruházban elérhető maximális napi haszon, és hány eladót kell ehhez alkalmazni! b 10

M: Legyen a boltban $e \leq 55$, $e \in \mathbb{Z}^+$ fő eladó és $(55 - e)$ biztonsági őr. (1 pont)

Kiadás a munkabér:

$$100e + (55 - e) \cdot 175 = 9625 - 75e. \quad \text{(1 pont)}$$

A napi vásárlók száma $500 + 20e$. (1 pont)

A bevétel a rendes vásárlók költése (a betérők 70%-a, plusz őrönként 1%):

$$(500 + 20e)[0{,}7 + (55 - e) \cdot 0{,}01] \cdot 30 =$$
$$= (500 + 20e)[1{,}25 - 0{,}01e] \cdot 30 = 6 \cdot (25 + e)(125 - e). \quad \text{(1 pont)}$$

A kiadás a tolvajok által okozott kár (a betérők 30%-a, mínusz őrönként 1%):

$$(500 + 20e)[0{,}3 - (55 - e) \cdot 0{,}01] \cdot 36 =$$
$$= (500 + 20e)[0{,}01e - 0{,}25] \cdot 36 = 7{,}2 \cdot (25 + e)(e - 25). \quad \text{(1 pont)}$$

A haszon az eladók e számának függvényében:

$$h(e) = 6 \cdot (25 + e)(125 - e) - [9625 - 75e + 7{,}2 \cdot (25 + e)(e - 25)].$$

(1 pont)

A műveletek elvégzése után:

$$h(e) = -13{,}2e^2 + 675e + 13\,625. \quad \text{(1 pont)}$$

A fordított állású parabola maximumhelye:

$$e_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{675}{2(-13{,}2)} \approx 25{,}57. \quad \text{(1 pont)}$$

$$h(25) = 22\,250, \quad h(26) = 22\,251{,}8 \quad \Rightarrow \quad e_{\max} = 26. \quad \text{(1 pont)}$$

Tehát a napi haszon maximuma kerekítve **22 252 peták,** és ez $e =$ **26 fő eladó** alkalmazása esetén várható. (1 pont) ö 16

8 Janka kedvenc cukrászdájában a fagylalttölcsér alakja egy alaplapjánál 6 cm belső átmérőjű, 13 cm magas egyenes körkúp. A kimért fagylaltgombócok egybevágó, 5 cm átmérőjű gömbök. Amíg a meleg nyári napon Janka a barátnőjével beszélget, kezében gyorsan olvad a fagylalt.

a) Határozza meg, legkevesebb hány gombóc fagylaltot kell kérnie Jankának ahhoz, hogy azok teljesen elolvadva már kifolyjanak a tölcsérből! (Feltételezzük, hogy a tölcsér nem ázik át és a fagylalt térfogata sem változik az olvadás során.) a 4

M: A körkúp alakú tölcsér térfogata:

$$V_{\text{tölcsér}} = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot 13}{3} = 39\pi\ (\text{cm}^3). \qquad \text{(1 pont)}$$

Egy gömb fagylalt térfogata:

$$V_{\text{fagylalt}} = \frac{4 \cdot 2{,}5^3 \cdot \pi}{3} = \frac{62{,}5}{3} \cdot \pi\ (\text{cm}^3). \qquad \text{(1 pont)}$$

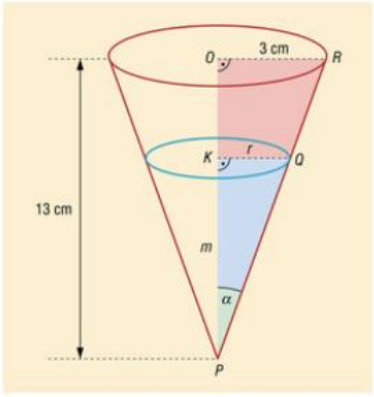
A kettő hányadosa:

$$\frac{V_{\text{tölcsér}}}{V_{\text{fagylalt}}} = \frac{39 \cdot 3}{62{,}5} = 1{,}872. \qquad \text{(1 pont)}$$

A tölcsérben már **két** elolvadt gombóc sem fér el. (1 pont)

b) Számítsa ki, hogy ha Janka csak egy gombóc fagylaltot kér, az elolvadva milyen magasan áll a tölcsérben! Kerekítsen egész centiméterre. b 7

M: Készítsünk ábrát!



A tölcsérben jelölje az olvadt fagylalt magasságát m, a fedőkör sugarát r.

A tölcsér magassága és alapkörének sugara ismert (13 cm és 3 cm). (1 pont)

PQR és PRO háromszög derékszögű, továbbá hasonlók is ($KPQ\sphericalangle = OPR\sphericalangle = \alpha$). (1 pont)

Az r sugarú, m magas forgáskúppá alakult fagylalt térfogata:

$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{62{,}5}{3} \cdot \pi. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezekből felírhatunk egy egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{r} &= \frac{13}{3} \\ r^2 \cdot m &= 62{,}5 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{az 1. egyenletből } m = \frac{13}{3} r. \qquad \text{(2 pont)}$$

A 2. egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{13}{3}r^3 = 62{,}5 \quad \Rightarrow \quad r^3 \approx 14{,}423. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen $r \approx 2{,}434$ cm és $m \approx 10{,}548$ cm $\approx$ **11 cm** magasan áll az olvadt fagyi. (1 pont)

Janka egész ügyes egy online játszható „villámjátékban" – amelyben minél pontosabb választ kell adni minél gyorsabban –, a fordulók 68%-át megnyeri. Minden játék két fordulóból áll: a nyertes az elsőben 100, a másodikban 200 pontot szerez, a vesztes pedig mindig 0 pontot kap.

c) Számítsa ki Janka egy játékban szerezhető pontszámának várható értékét! c 5

M: Janka egy fordulóban való győzelmének esélye $p = 0{,}68$; vereségének esélye $1 - p = 0{,}32$. (1 pont)

(Nyerni és veszteni újra és újra lehet, ezért visszatevéses mintavétellel, azaz binomiális eloszlással számolunk.)

0 pontot szerez, ha mindkét fordulóban veszít:

$$P(0) = 0{,}32^2 = 0{,}1024. \qquad \text{(1 pont)}$$

100 vagy 200 pontot szerez, ha egy fordulóban nyer, egyben veszít:

$$P(100) = P(200) = 0{,}32 \cdot 0{,}68 = 0{,}2176. \qquad \text{(1 pont)}$$

300 pontot szerez, ha mindkét fordulót megnyeri:

$$P(300) = 0{,}68^2 = 0{,}4624. \qquad \text{(1 pont)}$$

A várható érték pedig:

$$M = 0 \cdot 0{,}1024 + 100 \cdot 0{,}2176 + 200 \cdot 0{,}2176 + 300 \cdot 0{,}4624 = \mathbf{204\ pont.}$$

(1 pont) ö 16

9 Egy fizikatanár a Paksi Atomerőműbe szervez az érdeklődő végzős diákoknak látogatást reggeli indulással és délutáni érkezéssel. Minél jobban kihasználják a bérelt buszt, annál kevesebb az egy főre jutó költség. A részvételi szándékukat jelzők közül sajnos jelenleg 10 fő beteg. Ha ők nem jönnek, akkor az utazóknak a buszköltségre 741 Ft-tal többet, de ha az utazás napjáig mind meggyógyulnak és még két fő csatlakozik hozzájuk, akkor 114 Ft-tal kevesebbet kellene fizetni.

a) Mennyi lenne az egy főre jutó buszköltség, ha a betegeknek csak a fele gyógyul fel és tud elmenni a kirándulásra? Válaszát 100 forintra kerekítse! a 9

M: Az eddigi jelentkezők számát jelölje d, a rájuk jutó buszköltségeket k.

Az utazás bekerülési költsége $d \cdot k$. (1 pont)

A legrosszabb és legjobb esetekre felírhatunk egy egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(d-10)(k+741) &= d \cdot k\\ (d+2)(k-114) &= d \cdot k\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Felbontva a zárójeleket, $d \cdot k$-t levonva mindkét oldalból:

$$\left.\begin{aligned} 741d - 10k &= 7410 \\ -114d + 2k &= 228 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A 2. egyenletet 5-tel szorozva és hozzáadva az 1. egyenletet:

$$171d = 8550 \quad \Rightarrow \quad d = 50 \text{ (fő)}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha 50 diák utazik, a kirándulás egy főre jutó költsége kifejezhető a 2. egyenletből:

$$2k = 228 + 50 \cdot 114 \quad \Rightarrow \quad k = 2964 \text{ (Ft)}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből az összköltség:

$$50 \cdot 2964 = 148\,200 \text{ (Ft)}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha csak 45 fő utazik, akkor az egy főre jutó költség:

$$\frac{148\,200}{45} = 3293{,}\dot{3} \text{ Ft} \approx \mathbf{3300 \text{ Ft}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A tanár hazafelé megkérte a résztvevőket, hogy otthon egy anonim online tesztben értékeljék a látogatást. A teszt mind a hat kérdése esetén az *A*, *B*, *C*-vel jelölt lehetőségek közül kell egyet választani. Nem írta oda, de a kiértékeléskor minden *A* válasz 1, minden *B* válasz 2, minden *C* válasz 3 pontot ér.

Egy kitöltő az első két kérdésre a *C* választ jelölte meg, a harmadikra *A*-t. A 4. és 5. kérdés esetén nem tudott dönteni a *B* és *C* között, az 6.-ra pedig mindhárom lehetőséget elfogadhatónak tartotta, ezért a három utolsó kérdésnél a számára elfogadható válaszok közül véletlenszerűen választott. Tudjuk, hogy a kérdések és a kitöltő azokra adott válaszai is függetlenek egymástól.

b) Várhatóan hány pontja lesz ennek a kitöltőnek a teszt kiértékelésekor? b 7

M: A kitöltő a két *C* és egy *A* válaszával az 1., 2., 3. kérdésen már biztosan szerzett

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ pontot}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Jó megoldás esetén a táblázat és a fenti megállapítás felírása nélkül is jár ez a pont.

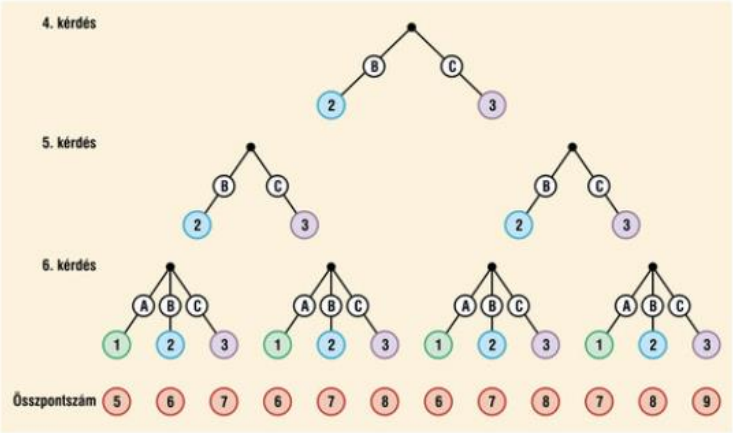
	A	*B*	*C*
1			3
2			3
3	1		
4		2	3
5		2	3
6	1	2	3

A 4. és az 5. kérdésre bármit is választ, azt $\frac{1}{2}$, a 6. kérdésre pedig $\frac{1}{3}$ valószínűséggel teszi.

Minden egyes kitöltés valószínűsége

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Gráfban ábrázolva a lehetőségeket:



Az utolsó három kérdésen szerezhet 5, 6, 7, 8, 9 pontot. 5 és 9 pontot egyféleképp, 6 és 8 pontot háromféleképp, 7-et négyféleképp. (4 pont)

A pontszáma várható értéke így:

$$M = 7 + 5 \cdot 1 \cdot p + 6 \cdot 3 \cdot p + 7 \cdot 4 \cdot p + 8 \cdot 3 \cdot p + 9 \cdot 1 \cdot p =$$

$$= 7 + p \cdot 84 = \mathbf{14\ pont.}$$ (1 pont)

ö 16

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

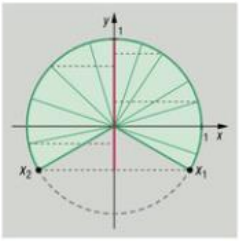
I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőtlenséget a $[0; 2\pi]$ halmazon! a 5

$-2\sin x \le 1$

M: Osszuk el mindkét oldalt (-2)-vel, a relációjel megfordul:

$$\sin x \ge -\frac{1}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$



Megoldva a $\sin x = -0{,}5$ egyenletet, a két megoldássereg:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + k_1 \cdot 2\pi \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + k_2 \cdot 2\pi. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyenlőtlenség megoldásai:

$$-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a $[0; 2\pi]$-ba eső megoldásokat keressük, ezért a feladat megoldásai:

$$\left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]. \qquad \text{(1 pont)}$$

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! b 7

$\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} - 1$

M: A kifejezések értelmezési tartománya $x + 1 \ge 0$ és $4x - 3 \ge 0$, értékkészletük alapján $4x - 3 \ge 1$. Ezeket összevetve $x \ge 1$. (1 pont)

Adjunk mindkét oldalhoz egyet, emeljük négyzetre, és fejtsük ki:

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 = \left(\sqrt{4x-3}\right)^2, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1 = 4x - 3. \qquad \text{(1 pont)}$$

Rendezzük a gyökön kívüli tagokat egy oldalra, és emeljünk ismét négyzetre:

$$\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = (3x-5)^2,$$

$$4(x+1) = 9x^2 - 30x + 25, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$0 = 9x^2 - 34x + 21. \qquad \text{(1 pont)}$$

A megoldóképletből: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{9}$. (1 pont)

Az $x \ge 1$ feltételnek az x_2 nem felel meg, $x_1 = 3$-at ellenőrizzük:

$$\sqrt{3+1} = 2 = \sqrt{4 \cdot 3 - 3} - 1 = \sqrt{9} - 1.$$

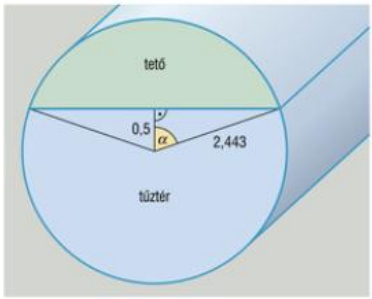
A feladat egyetlen megoldása $x = 3$. (1 pont) ö 12

Ha csak értelmezési tartományt vizsgálja meg és ez alapján elfogadja mindkét megoldást, ez a pont nem jár.

2 Robi saját grillsütőt készített egy kiszuperált 150 literes, 80 cm magas, egyenes körhenger alakú hordóból. A hordót a forgástengelyével párhuzamosan, a forgástengelytől 5 cm-re fekvő síkban vágta el. A kisebb rész lett a tető, a nagyobb a tűztér, ezeket csuklópántokkal fogatta össze.

a) Hány köbdeciméter a tűztér térfogata? a 6

M: A hordó, a tűztér és a tető is egy-egy egyenes hengerszerű test, térfogatuk az alapterület és a magasság szorzata.



$$V_{\text{hordó}} = 150\ \text{dm}^3 = R^2 \cdot \pi \cdot 8,$$

amiből

$$R^2 \approx 5{,}9683 \quad \Rightarrow \quad R \approx 2{,}443\ \text{(dm)}.$$

(1 pont)

A tűztér alapja egy olyan körszelet, amelynek területe egy $360° - 2\alpha$ (α hegyesszög) középponti szögű körcikk és egy egyenlő szárú háromszög területének összege. (1 pont)

$$\cos\alpha = \frac{0{,}5}{2{,}443} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 78{,}19°.$$ (1 pont)

A körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{2{,}443^2 \cdot \pi}{360°} \cdot (360° - 2 \cdot 78{,}19°) \approx 10{,}6051\ (\text{dm}^2).$$ (1 pont)

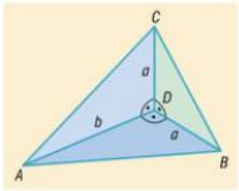
Az egyenlő szárú háromszög területe:

$$T_{\triangle} = \frac{2{,}443^2 \cdot \sin(2 \cdot 78{,}19°)}{2} \approx 1{,}1956\ (\text{dm}^2).$$ (1 pont)

A tűztér térfogata:

$$V_{\text{tűztér}} = (T_{\text{körcikk}} + T_{\triangle}) \cdot 8 \approx \mathbf{94{,}4\ dm^3}.$$ (1 pont)

Robi a grillsütő lábaira talpakat tervez fémlemezekből. Egy talp három darab egymáshoz forrasztott derékszögű háromszögből készül: *ABD* és *ACD* egybevágó háromszögek, *BCD* pedig egyenlő szárú háromszög. A tervek alapján $2a + b = 36$ cm.



b) Hogyan válassza meg Robi az a él hosszát, hogy a fémlemezek területe a lehető legnagyobb legyen? b 6

M: A talp felülete $A = \frac{a^2}{2} + ab$, ennek keressük a maximumát. (1 pont)

$$2a + b = 36 \quad \Rightarrow \quad b = 36 - 2a.$$ (1 pont)

Behelyettesítve b-t a felület egyenletébe:

$$A = \frac{a^2}{2} + a(36 - 2a) = -\frac{3a^2}{2} + 36a = -\frac{3a}{2} \cdot (a - 24).$$ (2 pont)

A lefelé nyíló parabola zérushelyei $\sigma_1 = 0$ és $\sigma_2 = 24$, (1 pont)

maximuma ezek felezőpontjában található: $\sigma_{max} = 12$. (1 pont) ö 12

Megjegyzés: Az $A(\sigma) = -\frac{3\sigma^2}{2} + 36\sigma$ függvény maximumát deriválással is megkaphatjuk: $A'(\sigma) = -3\sigma + 36$. Szélsőérték ott lehet, ahol $A'(\sigma) = 0$, és ezen helyek közül ott van, ahol a második derivált negatív. Mivel $A''(\sigma) = -3$ konstans, így az $\sigma = 12$ maximum.

3 *a)* Legfeljebb mekkora lehet egy háromszögnek az a szöge, amelyiknél nincs kisebb szög a háromszögben? a 3

M: I. megoldás

Tételezzük fel, hogy a háromszög belső szögeire $\alpha \le \beta, \gamma$.

Tudjuk, hogy a háromszög szögösszege $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. (1 pont)

Alkalmazva a kezdeti feltételt:

$$180° = \alpha + \beta + \gamma \ge \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha.$$ (1 pont)

Ebből $\alpha \le 60°$, vagyis α legfeljebb **60°** lehet. (1 pont)

II. megoldás

A szabályos háromszög minden szöge 60°, tehát lehetséges, hogy a legkisebb szög ($\alpha \le \beta, \gamma$) legalább 60°.

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy ennél nem lehet több. (1 pont)

Ugyanis ha feltesszük, hogy

$$60° < \alpha \quad \Rightarrow \quad 180° < 3\alpha \le \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$ (1 pont)

Ám ez ellentmondás, tehát α legfeljebb **60°** lehet. (1 pont)

b) Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 12 cm, 17 cm. Számítással döntse el, hogy a háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű! b 5

M: I. megoldás

A legnagyobb szög a legnagyobb oldallal szemben található. (1 pont)

Alkalmazzuk rá a koszinusztételt:

$$17^2 = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{4}{7}.$$ (2 pont)

Mivel $\cos\alpha$ értéke negatív, ezért α tompaszög. (1 pont)

A háromszög **tompaszögű.** (1 pont)

($\alpha \approx 124{,}85°$.)

II. megoldás

A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján ha egy $p > q, r$ oldalú háromszögben

$$p^2 = q^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{a háromszög derékszögű.}$$ (1 pont)

Ismert, hogy ha a $p > q$, r oldalú háromszögben a p, q, r oldalakra teljesül, hogy

- $p^2 < q^2 + r^2 \quad \Rightarrow$ a háromszög hegyesszögű,
- $p^2 > q^2 + r^2 \quad \Rightarrow$ a háromszög tompaszögű. (2 pont)

Ebben a háromszögben

$$17^2 = 289 > 7^2 + 12^2 = 49 + 144 = 193.$$ (1 pont)

Tehát a háromszög **tompaszögű.** (1 pont)

III. megoldás

A háromszög területét megkapjuk a Heron-képletből:

$$s = 18, \quad T = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 6} \approx 34{,}4674 \text{ (cm}^2\text{)}.$$ (1 pont)

A legnagyobb oldallal szemben van a legnagyobb szög. (1 pont)

A területből megkapjuk a két kisebb oldal által bezárt (legnagyobb) szöget.

$$T = \frac{7 \cdot 12 \cdot \sin\alpha}{2} = 34{,}4674 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \approx 0{,}82065.$$ (1 pont)

Ebből $\alpha_1 \approx 55{,}15°$ és $\alpha_2 \approx 180° - 55{,}15° = 124{,}85°$. (1 pont)

Mivel háromszög legnagyobb szöge nem lehet 60°-nál kisebb, a háromszög **tompaszögű.** (1 pont)

c) Egy derékszögű háromszög oldalai olyan egész számok, amelyek 5 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a háromszög középső oldalának hossza? c 5

M: A háromszög oldalai különböző számok, jelölje a középsőt b: ekkor a többi oldal $a = b - 5$, $c = b + 5$. (1 pont)

Pitagorasz tétele alapján

$$(b + 5)^2 = (b - 5)^2 + b^2,$$ (1 pont)

amiből $20b = b^2$. (2 pont)

Mivel $b > 0$, ezért $b = 20$. (1 pont) ö 13

4 Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola által a síkból kimetszett konvex tartomány II. síknegyedbe eső területét! a 5

M: A lefelé nyíló parabola zérushelyei az $f(x) = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -4$ és $x_2 = 2$. (1 pont)

A II. síknegyedet jobbról az y tengely zárja le. Ezért az integrációs tartomány:

$$T = \int_{-4}^{0} (-x^2 - 2x + 8)\,dx.$$ (1 pont)

A primitív függvény megkeresése után alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$T = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{0} = 0 - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 + 8 \cdot (-4)\right) = \frac{80}{3}.$$ (2 pont)

Az eredmény $\frac{80}{3}$ **területegység.** (1 pont)

b) Írja fel a parabolához a (-4) abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét! b 5

M: Az $y = mx + b$ érintő m meredekségét a deriváltból kapjuk meg:

$$f'(x) = -2x - 2.$$ (1 pont)

Behelyettesítve: $f'(-4) = 6$. (1 pont)

Az érintő áthalad a $(-4; f(-4))$ ponton, ahol $f(-4) = 0$. (1 pont)

A pont koordinátáit behelyettesítve:

$$0 = 6 \cdot (-4) + b \quad \Rightarrow \quad b = 24.$$ (1 pont)

Az érintő egyenlete $y = 6x + 24$. (1 pont)

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit! c 4

M: A parabola egyenletét $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$ alakra hozzuk. (1 pont)

Tudjuk, hogy a p paraméterű normál parabola fókuszpontja $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, egyenlete $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Jelen esetben (fordított állású) $\frac{1}{2p} = -1$, így $p = -\frac{1}{2}$. (1 pont)

A parabola transzformációs lépéseit az $F\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ fókuszpontra alkalmazva először toljuk el 9-cel felfelé: $F\left(0; 9 - \frac{1}{4}\right) = F(0; 8{,}75)$, (1 pont)

majd 1-gyel balra: $F(-1; 8{,}75)$. (1 pont) ö 14

II. rész

5 Tomi 9 évesen kezdett kosarazni, majd egy év múlva stabil helye lett a kezdőcsapatban. Az év végi statisztika szerint 54%-os pontossággal dobta a ziccereket (amikor egyedül vezetheti kosárra a labdát), és 35%-os pontossággal a büntetődobásokat.

a) Tomi az év utolsó meccsén bátran elvállalt egy hárompontos dobáskísérletet, amely közben személyi hibát (faultot) követtek el ellene. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a számára megítélt három büntetődobásból legfeljebb kétszer talál célba! (Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!) a 4

M: I. megoldás

A „legfeljebb kettő" lehet 0, 1 vagy 2 sikeres dobás.

A 0 sikeres dobás ($q = 1 - 0{,}35$) valószínűsége:

$$P(0) = 0{,}65^3 = 0{,}274625. \qquad \text{(1 pont)}$$

(A sikeres/sikertelen dobás megismételhető, ezért visszatevéses a mintavétel – binomiális eloszlás.)

Az 1 sikeres dobás valószínűsége:

$$P(1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}35^1 \cdot 0{,}65^2 = 0{,}443625. \qquad \text{(1 pont)}$$

A 2 sikeres dobás valószínűsége:

$$P(2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot 0{,}65^1 = 0{,}238875. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kérdezett esemény valószínűsége kerekítve

$$P(0) + P(1) + P(2) = \mathbf{0{,}957}. \qquad \text{(1 pont)}$$

II. megoldás

A „háromból legfeljebb kétszer" 0, 1 vagy 2 sikeres dobást jelent. (1 pont)

(A sikeres/sikertelen dobás megismételhető, ezért visszatevéses a mintavétel – binomiális eloszlás.)

Érdemes áttérni a komplementer eseményre: 3 sikeres dobás. (1 pont)

$$P(3) = 0{,}35^3 = 0{,}042875. \qquad \text{(1 pont)}$$

A kérdezett esemény valószínűsége kerekítve $1 - P(3) = \mathbf{0{,}957}$. (1 pont)

b) Legalább hány ziccerkísérlet kell ahhoz egy mérkőzésen, hogy Tomi legalább 90%-os eséllyel legalább egyszer pontot érjen el? b 6

M: A ziccerkísérletek számát jelölje n ($\in \mathbb{N}^+$).

Legalább egy találat elérése lehet 1, 2, 3, 4, …, n találat, ezért érdemes áttérni a komplementerre. (1 pont)

A komplementer esemény, hogy n dobásból nincs találat. Egy dobás esetén ennek a valószínűsége $1 - 0{,}54 = 0{,}46$. Így annak a valószínűsége, hogy n dobásból nincs találat: $P(0) = 0{,}46^n$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség legyen legalább 0,9:

$$1 - P(0) = 1 - 0{,}46^n \geq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}1 \geq 0{,}46^n. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mindkét oldalnak vesszük 0,46 alapú logaritmusát.

Mivel $f(x) = \log_{0{,}46} x$ szigorúan monoton csökkenő, ezért az egyenlőtlenség iránya megfordul. (1 pont)

$$\log_{0{,}46} 0{,}1 \approx 2{,}965 \leq n. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel n pozitív egész, **legalább 3** ziccerkísérlet kell ahhoz, hogy Tomi legalább 90%-os valószínűséggel egyszer kosarat dobjon. (1 pont)

c) Ezen az utolsó mérkőzésen Tominak összesen 11 ziccer- és 14 büntetődobás-kísérlete volt (másfajta dobása nem volt), amelyekből a statisztikának megfelelő számú dobás lett sikeres (kerekítve). Édesapja csak Tomi dobásait fényképezte: ezeket visszanézve, ha csak azt látjuk a képen, hogy a labda a gyűrűben landol, mekkora valószínűséggel származott a pont büntetőből? c 6

M: Feltételes valószínűséget kell számolnunk: jelölje S a sikeres dobást, B a büntetőt. A kérdés így $P(B|S) = \frac{P(B \cdot S)}{P(S)}$. (1 pont)

Rendezzük táblázatba az adatokat, ahonnan (2 pont)

	Ziccer	Büntető	
Sikeres	6	5	**11**
Nem sikeres	5	9	**14**
	11	**14**	**25**

$P(B \cdot S) = \frac{5}{25} = 0{,}2$; (1 pont)

$P(S) = \frac{11}{25} = 0{,}44$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség:

$P(B|S) = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$. (1 pont) ö 16

6 a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja! a 3

Van olyan G, illetve G' nemüres teljes gráf, amelyre igaz, hogy G' csúcsainak száma négyszerese G csúcsai számának, továbbá G' éleinek száma hússzorosa G élei számának.

M: Jelölje a gráfok csúcsainak számát n és n'.

A csúcsok számára igaz, hogy $n' = 4n$ $(n > 0)$.

Ekkor az éleik száma:

$$20 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n'(n'-1)}{2}.$$ (1 pont)

Átalakítva:

$$20n(n-1) = 4n(4n-1) \quad \Leftrightarrow \quad 5(n-1) = 4n - 1.$$ (1 pont)

Az $5n - 5 = 4n - 1$ egyenletet megoldva $n = 4$, tehát az állítás **igaz.** (1 pont)

b) Egy tudóscsoportnak 11 tagja van, akik aktívan kommunikálnak egymással: mindenki legalább 5 másik tudóssal beszélget a kutatási eredményekről. Igazolja, hogy ekkor biztosan mindenki értesülni fog minden, a csoportban elért tudományos eredményről! b 7

M: Alkalmazzunk gráfmodellt! A pontok a tudósok, az őket összekötő élek pedig azt jelentik, hogy az adott két tudós kommunikál egymással. A gráf egyszerű. (Feltehetjük, hogy a tudósok önmagukkal nem kommunikálnak. Kommunikálni nem lehet „többszörösen" sem.)

A feltételek a gráfok nyelvén megfogalmazva: egy egyszerű, 11 pontú gráf minden pontja legalább 5 fokú. (1 pont)

Az állítás a gráfok nyelvén: az ilyen gráf összefüggő. (1 pont)

Indirekt úton gondolkodva tételezzük fel, hogy a feltételek fennállnak, és a gráf mégsem összefüggő. (1 pont)

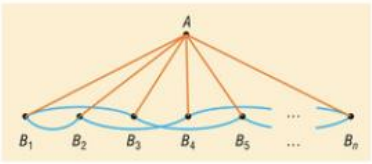
Ha nem az, akkor felbontható legalább két, n és m pontból álló részre, amelyek pontjai között nem fut él. (1 pont)

Feltehetjük, hogy $n < m$, ekkor n legfeljebb 5 lehet. (1 pont)

Azonban $n \leq 5$ pontú egyszerű (rész)gráfban egy pont maximális fokszáma 4, ami ellentmond a *minden pontja legalább 5 fokú* feltételnek. (1 pont)

A feltett állítás hamis, így az eredeti állítás **igaz.** (1 pont)

Egy szociológiai vizsgálatban az A-val jelzett influenszer követőit vizsgálják. Úgy válogatják össze a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ követői csoportot ($n > 1$), hogy a csoportban mindenki pontosan két másik taggal álljon kapcsolatban.



A vizsgálatot végzők felrajzolják a kapcsolati hálót, ebben narancsszínnel jelölik az influenszer, kékkel a csak csoporttagok kapcsolatait. Ezek után az ábrán jelöltekből véletlenszerűen kiválasztanak két kapcsolatot.

c) Legfeljebb hány fős csoportot vizsgáljanak, ha azt szeretnék, hogy legfeljebb 0,24 legyen annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott kapcsolat narancsszínű lesz? c 6

M: A kékkel jelölt $B_i - B_j$ $(i \neq j)$ kapcsolatok száma: $\frac{2 \cdot n}{2} = n$. (1 pont)

A narancsszínű $A - B_i$ kapcsolatok száma szintén n, így az összes kapcsolatok száma $2n$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{n-1}{4n-2} \leq 0{,}24.$$ (2 pont)

Mivel $n > 1$, ezért $4n - 2 > 0$, így $n - 1 \leq 0{,}96n - 0{,}48$, ami átrendezve $0{,}04n \leq 0{,}52$. (1 pont)

Leosztva 0,04-dal, $n \leq 13$. Tehát a követői csoport **legfeljebb 13 fős** lehet. (1 pont) ö 16

7 Egy élelmiszerboltban 3 kg-os csomagban lehet termelői krumplit vásárolni. Tamás nagyon szereti a krumplit és mindig hosszabb időre vásárol, ezért 6 zsák krumplit visz haza. Úgy érzi, két feltétel együttes teljesülése esetén lenne teljesen elégedett:

(1) ha a csomagok tömegének átlaga és mediánja nem térne el 3 kg-tól 2 dkg-nál többel, és

(2) ha sem a mediántól vett abszolút átlagos eltérés, sem a szórás (kerekítve) nem haladná meg a 10 dkg-ot.

Otthon leméri az egyes csomagokat, és az alábbi értékeket kapja:

Csomag	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Tömeg (dkg)	298	306	304	291	285	312

a) A feltételek teljesülését számítással ellenőrizve döntse el, hogy Tamás végül elégedett volt-e a krumplivásárlással! a 6

M: Állítsuk az értékeket nagyság szerint sorba: 285, 291, 298, 304, 306, 312, és határozzuk meg először a mediánt és az átlagot:

$$Me = \frac{298 + 304}{2} = 301,$$

a medián 1 dkg-mal tér el a 3 kg-tól. (1 pont)

$$A = \frac{285 + 291 + 298 + 304 + 306 + 312}{6} = 299{,}\dot{3},$$

az átlag eltérése 1 dkg-nál is kisebb. (1 pont)

A mediántól vett abszolút átlagos eltérés:

$$AAE = \frac{|285-301|+|291-301|+|298-301|+|304-301|+|306-301|+|312-301|}{6} =$$

(1 pont)

$$= \frac{16 + 10 + 3 + 3 + 5 + 11}{6} = 8 < 10.$$ (1 pont)

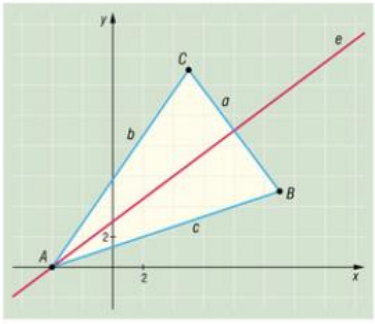
A szórás:

$$s = \sqrt{\frac{205{,}44 + 69{,}44 + 1{,}78 + 21{,}78 + 44{,}44 + 160{,}44}{6}} \approx 9{,}16 < 10.$$ (1 pont)

Mivel az összes feltétel teljesül, Tamás **elégedett** lehet a vásárlással. (1 pont)

b) Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-4; 0)$, $B(11; 5)$ és $C(5; 13)$. Igazolja, hogy a $3x - 4y + 12 = 0$ egyenletű e egyenes úgy vágja két darabra az ABC háromszöget, hogy a kerületét és területét is felezi! b 10

M: Ábrázoljuk a feladatban adott ABC háromszöget és az e egyenest. (1 pont)



Sejtésünk az, hogy

(1) az ABC háromszög egyenlő szárú, és (1 pont)

(2) e az ABC háromszög csúcsán átmenő oldalfelező merőleges. (1 pont)

(Az e egyben szögfelező, magasság- és súlyvonal is.)

Igazoljuk, hogy az ABC háromszög valóban egyenlő szárú, és e egyenes átmegy az A ponton:

$$d(AB) = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} \quad \text{és} \quad d(AC) = \sqrt{13^2 + 9^2} = \sqrt{250}. \qquad \text{(1 pont)}$$

e áthalad az A ponton:

$$3 \cdot (-4) - 4 \cdot 0 + 12 = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Olvassuk ki az e egyenes egyenletéből az $\overrightarrow{n_e}(3; -4)$ normálvektorát, és írjuk fel a $\overrightarrow{BC}(-6; 8)$ vektort. (1 pont)*

Mivel $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{n_e}$, így $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{n_e}$, azaz $BC \perp e$. (2 pont)*

Egyenlő szárú háromszögben a szárak közös csúcsán áthaladó, az alapra merőleges egyenes az oldalfelező merőleges. (1 pont)*

Egyenlő szárú háromszögben az alap oldalfelező merőlegese egyúttal szimmetriatengely is, ezért a feladatban szereplő állítások **teljesülnek.** (1 pont) ö 16

(A csúcson átmenő súlyvonal (szögfelező, magasság) is az.)

**Megjegyzés:* A pontok természetesen járnak más meggondolások esetén is, két lehetőséget megemlítünk.

(1) Igazoljuk, hogy az e egyenes áthalad a háromszög $S_{ABC\triangle}(4; 6)$ súlypontján:

$$3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 + 12 = 0.$$

(2) Igazoljuk, hogy az e egyenes áthalad a háromszög BC oldalának $F_{BC}(8; 9)$ felezőpontján:

$$3 \cdot 8 - 4 \cdot 9 + 12 = 0.$$

8 *a)* Egy mértani sorozat hányadosa $\sqrt{2}$, a sorozat első tíz tagjának összege $\frac{93}{2-\sqrt{2}}$. Igazolja, hogy a sorozat páros tagjai egész számok! a 4

M: A mértani sorozat összegképletéből:

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{93}{2 - \sqrt{2}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Átalakítva:

$$a_1 \cdot \frac{2^5 - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{93}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)} \quad \Rightarrow \quad 31a_1 = \frac{93}{\sqrt{2}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből $a_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = 3, a_3 = 3 \cdot \sqrt{2}, a_4 = 6.$ (1 pont)

A sorozat páros tagjaira:

$$a_{2n+2} = a_1 \cdot q^{2n+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{2n} = 3 \cdot 2^n \in \mathbb{Z} \ (n \geq 0). \qquad \text{(1 pont)}$$

Az utolsó pont jár az elemek felsorolása és a páratlan kitevőre való hivatkozás esetén is.

b) Egy számtani sorozat differenciája 3, első n tagjának összege $S_n = 235$; első $2n$ tagjának összege pedig $S_{2n} = 770$. Számítsa ki a sorozat első tagját! b 6

M: Az első n tag összegéből:

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\cdot 3)\cdot n}{2} = n\cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3 = 235,$$

hasonlóan az első $2n$ tag összegéből:

$$S_{2n} = 2n\cdot a_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}\cdot 3 = 770. \qquad \text{(1 pont)}$$

Készítsünk belőlük egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2n\cdot a_1 + 3n(n-1) &= 470 \\ 2n\cdot a_1 + 3n(2n-1) &= 770 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$3n(2n-1) - 3n(n-1) = 300. \qquad \text{(1 pont)}$$

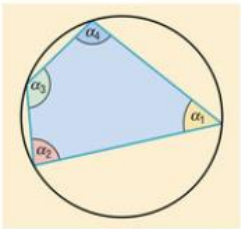
Kifejtve és egyszerűsítve:

$$n^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 10,\ n_2 \neq -10\ (n > 0). \qquad \text{(2 pont)}$$

Visszahelyettesítve például S_n-be:

$$235 = 10\cdot a_1 + 5\cdot 9\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 10. \qquad \text{(1 pont)}$$

c) Az ábrán látható húrnégyszög α_1, α_2, α_4 szöge ebben a sorrendben mértani sorozatot alkot, a negyedik szöge pedig $\alpha_3 = 150°$. Számítsa ki a húrnégyszög szögeit! c 6



M: Mivel a húrnégyszög szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást, ezért $\alpha_1 = 30°$. (1 pont)

A mértani sorozat képzési szabálya alapján:

$$\alpha_2 = 30°\cdot q, \quad \alpha_4 = 30°\cdot q^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ismét a húrnégyszög tulajdonsága miatt

$$\alpha_2 + \alpha_4 = 30°\cdot q + 30°\cdot q^2 = 180°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Egyszerűsítve és átrendezve:

$$q^2 + q - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 \neq -3 \text{ és } q_2 = 2\ (q > 0). \qquad \text{(2 pont)}$$

Behelyettesítve: $\alpha_2 = 60°$, $\alpha_3 = 120°$. (1 pont) ö 16

9 *a)* Az 56 160-nak és az n pozitív egész számnak a legnagyobb közös osztója 104. Határozza meg azt a legnagyobb, 10 000-nél kisebb számot, amely eleget tesz a feltételnek! a 6

M: A legnagyobb közös osztóban a közös prímtényezők szerepelnek az előforduló legkisebb kitevőn. Bontsuk szorzattá a számokat:

$$56\,160 = 2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13, \quad 104 = 2^3\cdot 13. \qquad \text{(1 pont)}$$

$n = k\cdot 104$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), és sem 2, sem 3, sem 5 nem osztója k-nak. (1 pont)

Induljunk ki a lehető legnagyobb értékből:

$10\,000 : 104 \approx 96{,}154$, így k értéke legfeljebb 96 lehet. (1 pont)

Mivel k nem osztható 2-vel, így páratlan. (1 pont)

Mivel k nem osztható sem 5-tel, sem 3-mal, így nem lehet 95 és 93. (1 pont)

Mivel $91 = 7 \cdot 13$, ezért a legnagyobb $k = 91$ és $n = 9464$. (1 pont)

Adott f, g és h függvény:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1}$; $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_3 x$; $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x + 2$.

b) Legyen $k(x) = h(f(x))$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz a k összetett függvény külső függvénye a h, belső függvénye pedig az f. b 3

Bizonyítsa be, hogy $k(x) = 9 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x + 2$.

M: $k(x) = h(f(x)) = (3^{x+1})^2 + 3^{x+1} + 2 =$ (1 pont)

a hatványozás azonosságai alapján:

$= 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^x + 2 = 3^2 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x + 2 =$ (1 pont)

$= 9 \cdot (3^2)^x + 3 \cdot 3^x + 2 = 9 \cdot 9^x + 3 \cdot 3^x + 2$, ezt akartuk bizonyítani. (1 pont)

c) Oldja meg az $f(g(x)) > h(x)$ egyenlőtlenséget a függvények közös értelmezési tartományán! c 7

M: A közös értelmezési tartomány $x > 0$, mivel $D_f = D_h = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}^+$. (1 pont)

$$f(g(x)) = 3^{\log_3 x + 1} = 3^{\log_3 x} \cdot 3^1 = 3x,$$ (1 pont)

hiszen 3^x és $\log_3 x$ függvények egymás inverzei. (1 pont)

A megoldandó egyenlőtlenség:

$$3x > x^2 + x + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 > x^2 - 2x + 2.$$ (1 pont)

A diszkrimináns negatív, tehát a jobb oldalnak nincs zérushelye. (1 pont)

Ha nincs zérushelye és normál állású parabola ($a = 1 > 0$), akkor minden értéke pozitív. (1 pont)

Az egyenlőtlenségnek **nincs** valós megoldása. (1 pont) ö 16

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

I. rész

1 *a)* Határozza meg $x \cdot y$ értékét, ha $x, y > 0$ és $x + \frac{49}{y} = 14\sqrt{\frac{x}{y}}$. a 3

M: Szorozva y-nal és rendezve $\sqrt{x \cdot y}$-ra, másodfokú egyenletet kapunk:

$$x \cdot y - 14\sqrt{x \cdot y} + 49 = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

A megoldás: $\sqrt{x \cdot y} = 7$. (1 pont)

Ebből a kérdezett $x \cdot y = 49$. (1 pont)

b) Legyen $f:]4; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(4x - 16)$. b 5

Igazolja, hogy minden $x > 4$ helyen $f(x^2) - f(2x) = \log_3 \frac{x+2}{2}$.

M: Első lépésben írjuk fel az $f(x^2)$ és $f(2x)$ függvényeket, majd a különbségüket:

$f(x^2) = \log_3(4x^2 - 16)$ (1 pont)

$f(2x) = \log_3(4(2x) - 16) = \log_3(8x - 16)$ (1 pont)

$f(x^2) - f(2x) = \log_3[4(x-2)(x+2)] - \log_3[8(x-2)]$. (1 pont)

A logaritmus azonosságai alapján:

$$\log_3 \frac{4(x-2)(x+2)}{8(x-2)} = \log_3 \frac{x+2}{2}. \quad \text{(1 pont)}$$

Utóbbi értelmezési tartománya $]-2; \infty[$, ezért az egyenlőség minden $x > 4$ helyen teljesül, tehát **igaz.** (1 pont)

Az értelmezési tartományokra való hivatkozás elmaradása esetén ez a pont nem jár.

c) Oldja meg a $\log_3 0{,}5 + \log_3(x+2) \le 1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! c 5

M: A $\log_3(x+2)$ függvény értelmezési tartománya $x + 2 > 0$, vagyis $x > -2$.

$$\log_3 0{,}5 + \log_3(x+2) \le 1 = \log_3 3. \quad \text{(1 pont)}$$

A logaritmus azonosságai alapján:

$$\log_3(x+2) \le \log_3 3 - \log_3 0{,}5 = \log_3 6. \quad \text{(1 pont)}$$

Az $f(x) = \log_3 x$ függvény alapja 1-nél nagyobb, vagyis a függvény szigorúan monoton növekvő, így a logaritmust elhagyva a relációjel nem változik: (1 pont)

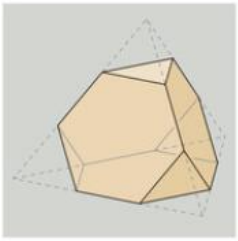
$$x + 2 \le 6 \quad \Rightarrow \quad x \le 4. \quad \text{(1 pont)}$$

Összevetve ezt az értelmezési tartománnyal:

$$-2 < x \le 4, \quad \text{vagy} \quad x \in]-2; 4]. \quad \text{(1 pont)}$$

ö 13

2 A képen látható testet úgy kaptuk, hogy egy szabályos tetraéderből az egy csúcsba futó élek csúcshoz közelebbi harmadolópontjain át fektetett síkokkal levágtunk négy kisebb tetraédert.



a) Határozza meg, hány százaléka a test felszíne az eredeti tetraéder felszínének! Válaszát egy tized százalékra kerekítve adja meg!

a 4

M: I. megoldás

A szabályos tetraéder oldallapjai szabályos háromszögek, területüket tekintsük 1-nek.

Az eredeti test felszíne 4. (1 pont)

A levágott kis tetraéderek hasonlók az eredetihez.

A hasonlóság aránya 1 : 3. Az oldallapok területeinek aránya 1 : 9. (1 pont)

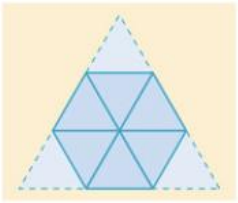
Az eredeti test minden oldallapjából 3 kis oldallapot távolítottunk el, ám összesen 4 új kis oldallap is keletkezett.

Így az új test felszíne:

$$4 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{9}\right) + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{9}.$$ (1 pont)

A felszínek aránya $\frac{\frac{28}{9}}{4} = \frac{7}{9}$, százalékban **77,8%.** (1 pont)

II. megoldás



A szabályos tetraéder oldallapjait alkotó szabályos háromszögeket osszuk fel az oldalak harmadolópontjait összekötő vonalakkal 9 kis egybevágó szabályos háromszögre.

A kis háromszögek területe legyen 1. (1 pont)

A levágott kis tetraéderek hasonlók az eredetihez.

A hasonlóság aránya 1 : 3. Az oldallapok területeinek aránya 1 : 9. (1 pont)

Az eredeti test minden 9 kis háromszögéből 3-at távolítottunk el, ám összesen 4 új kis oldallap is keletkezett.

Így az új test felszíne: $4 \cdot (9 - 3) + 4 = 28$. (1 pont)

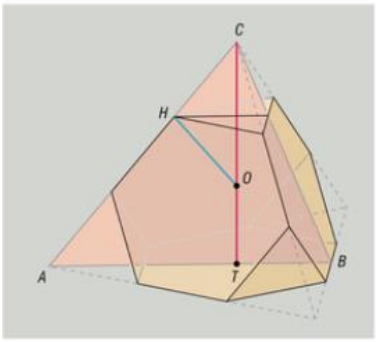
A felszínek aránya $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$, százalékban **77,8%.** (1 pont)

Egy cukrászda legkedveltebb specialitása a parfégolyó, amelynek belsejébe ilyen alakú csokit tesznek. Először egy 9 cm élű szabályos tetraédert készítenek csokoládéból, majd levágják a harmadolópontokban a sarkokat, végül az egészet úgy veszik körbe a választható ízű parféval, hogy a desszert gömb alakú legyen, felszíne pedig érintse a csoki sarkait.

b) Számítsa ki a parfégolyó sugarát!

b 8

M: A gömb O középpontja a tetraéder középpontja, ami egyben súlypontja is, sugara pedig az O pont és a csokitest (bármely, pl. H) csúcsának távolsága.



Tekintsünk egy olyan ABC síkmetszetet, amely átmegy az eredeti tetraéder A, C csúcsán és az AC éltől kitérő él felezőpontján (B).

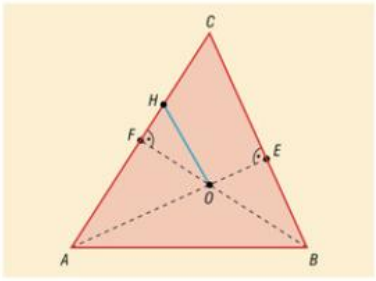
Ez tartalmazza az AB szakaszt tartalmazó lap súlypontját (T), valamint O-t is. (1 pont)

ABC háromszög egyenlő szárú: AB és CB is egy-egy oldallap magassága.

$$AC = 9 \text{ (cm)}, \qquad AB = BC = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az ABC háromszögben O magasságpont, mivel T egy szabályos oldallap háromszög középpontja (ugyanígy lenne a BC oldalon). (1 pont)

Tekintsük külön az ABC háromszöget.



Ebben ismert, hogy

$AF = FC = 4{,}5$ cm;

$HC = 3$ cm;

$FH = FC - HC = 1{,}5$ cm.

BFC, AEC, AOF és OFH háromszög derékszögű. (1 pont)

A BF Pitagorasz-tétellel számítható:

$$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{2}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

$AOF\triangle \sim ACE\triangle$ (derékszögűek és $OAF\sphericalangle$ közös).

$BFC\triangle \sim AEC\triangle$ (derékszögűek és $FCE\sphericalangle$ közös). (1 pont)

Ebből adódik, hogy

$$\frac{OF}{4{,}5} = \frac{4{,}5}{\frac{9}{\sqrt{2}}} \quad \Rightarrow \quad OF = \frac{9}{2\sqrt{2}} \text{ (cm)}. \qquad \text{(1 pont)}$$

OFH háromszögben újra felhasználva a Pitagorasz-tételt és hogy $OH = R$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{99}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt{5{,}5} \approx 3{,}5178 \text{ cm}. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 12

3 Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 3. Tudjuk, hogy a sorozat a_{n-5}, a_n, a_{n+20} tagjai ebben a sorrendben a $\{b_n\}$ mértani sorozat első három egymást követő tagjai.

a) Számítsa ki a számtani sorozat a_{n-5}, a_n, a_{n+20} tagjainak értékét! a 6

M: Legyen $a_n = a$. Ekkor

$$a_{n-5} = a - 5 \cdot 3 \quad \text{és} \quad a_{n+20} = a + 20 \cdot 3. \qquad \text{(1 pont)}$$

(Ha $a_{n-5} = a$, akkor $a_n = a + 5 \cdot 3$ és $a_{n+20} = a + 25 \cdot 3$.)

A mértani sorozat definíciója szerint

$$\frac{a}{a-15} = \frac{a+60}{a}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Átrendezve, a kapott egyenlet:

$$a^2 = (a+60)(a-15) \quad \Rightarrow \quad 0 = 45a - 900 \quad \Rightarrow \quad a = 20. \qquad \text{(2 pont)}$$

Így

$$a_{n-5} = 20 - 15 = 5, \quad a_n = 20, \quad a_{n+20} = 20 + 60 = 80. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ellenőrzés: Az 5, 20, 80 tagok $q = 4$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak, mivel $20 = 5 \cdot 4$, $80 = 5 \cdot 4^2$. (1 pont)

b) Igazolja, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat esetén, ha $a_1 \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$! b 7

M: Legyen az $\{a_n\}$ első tagja a_1, differenciája d. (1 pont)

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \quad a_{n+1} = a_1 + n \cdot d. \qquad \text{(1 pont)}$$

A legmagasabb fokú szorzó n^1, osszunk le vele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + n \cdot d}{a_1 + (n-1)d} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_1}{n} + d}{\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n}d}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a_1 és d konstans, n pedig tart a végtelenbe, így

$$\frac{a_1}{n} \to 0, \quad \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1. \qquad \text{(2 pont)*}$$

A konvergens sorozatok határértékeire vonatkozó műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_1}{n} + d}{\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n}d} = \frac{0+d}{0+1\cdot d} = \frac{d}{d} = 1. \qquad \text{(2 pont)*}$$ ö 13

* *Megjegyzések:* Az utolsó két lépésben az $\frac{1}{n} \to 0$ tulajdonságra, konvergens sorozat konstansszorosának határértékére, konstans sorozat határértékére, konvergens sorozatok különbségének, összegének és hányadosának határértékére hivatkozhatnánk.

A megoldás során abból is kiindulhatunk, hogy $a_{n+1} = a_n + d$. Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + d}{a_n} = 1 + \frac{d}{a_1 + (n-1)d} = 1 + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{d}{\frac{a_1}{n-1} + d}.$$

Mivel $\frac{1}{n-1} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{d}{\frac{a_1}{n-1} + d}\right) = 1 + 0 \cdot 1.$$

4 Egy dobókockával négyszer egymás után dobunk. A kapott értékeket felírva egy négyjegyű számot alkotunk.

a) Hányféle olyan négyjegyű szám keletkezhet, amelyben a számjegyek szorzata 12? a 5

M: A 12-t felbonthatjuk (a dobókockával dobható) $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$ és $2 \cdot 2 \cdot 3$ alakokra. A többi számjegy mindig 1. (1 pont)

Minden esetben ismétléses permutációkat számolunk. (1 pont)

A 2–6–1–1 lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$. (1 pont)

Az összes többi esetben is két különböző és két egyforma számjegy alkotja a négyjegyű számokat, ezért 3–4–1–1 és 2–2–3–1 lehetséges sorrendjeinek száma is külön-külön 12. (1 pont)

Vagyis **a feltételnek megfelelő négyjegyű számok száma** összesen

$3 \cdot 12 = \mathbf{36}$. (1 pont)

Bence különböző dolgokat csomagolt a táskájába egy kirándulásra. Amikor este a szálláson kipakoltak, Dominik megállapította, hogy Bence 12-szer többféleképpen választhatna ki a táskájában levő dolgok közül ötöt, mint hármat.

b) Hány különböző dolgot csomagolt a táskájába Bence? b 8

M: Legyen a Bence táskájában lévő dolgok száma n darab. Az ezekből kiválasztható 5, illetve 3 elemű részhalmazok száma $\binom{n}{5}$, illetve $\binom{n}{3}$ $(n \geq 5,\ n \in \mathbb{N})$. (1 pont)

Dominik szerint $\binom{n}{5} = 12 \cdot \binom{n}{3}$. (1 pont)

Átalakítva:

$$\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = 12 \cdot \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!}.$$ (1 pont)

Leosztva $n!$-sal, felszorozva $5!$-sal és $(n-3)!$-sal:

$(n-3)(n-4) = 5 \cdot 4 \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 7n - 228 = 0.$ (2 pont)

A megoldóképletből: $n_1 = 19$, $n_2 = -12$. (1 pont)

$n \geq 5$, így csak $n = 19$ lehet, vagyis **Bence 19 dolgot csomagolt be.** (1 pont)

Ellenőrzés: $\binom{19}{5} = 11\,628 = 12 \cdot 969 = 12 \cdot \binom{19}{3}$. (1 pont) ö 13

II. rész

5 *a)* Oldja meg az egyenletet a páratlan számok halmazán! a 7

$|7 - |x - 1|| = 4$

M: I. megoldás

A belső abszolút értéket figyelembe véve:

- Ha $x - 1 \geq 0$ (azaz $x \geq 1$), akkor $|7 - (x - 1)| = |8 - x| = 4$. (1 pont)

  Innen: ha $8 - x = 4 \Rightarrow x_1 = 4$, ha $8 - x = -4 \Rightarrow x_2 = 12$. (Mindkét értékre $x \geq 1$). (2 pont)

- Ha $x - 1 < 0$ (azaz $x < 1$), akkor $|7 + (x - 1)| = |6 + x| = 4$. (1 pont)

  Innen: ha $6 + x = 4 \Rightarrow x_3 = -2$, ha $6 + x = -4 \Rightarrow x_4 = -10$. (Mindkét értékre $x < 1$). (2 pont)

Más megoldás nem lehetséges. Mivel minden kapott megoldás páros, ezért a feladatnak **nincs megoldása.** (1 pont)

II. megoldás

A belső abszolút értéket felbontva $7 + 1$ vagy $7 - 1$ szerepel majd x mellett tagként az egyenlőség bal oldalán. (2 pont)

Az egyenlőség jobb oldalán levő érték szintén páros szám. (2 pont)

Páros számok összegeként, különbségeként az ismeretlenre csak páros számot kaphatunk. (2 pont)

Tehát az egyenletnek **nincs megoldása** a páratlan számok halmazán. (1 pont)

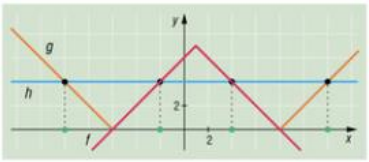
III. megoldás

Ábrázoljuk függvényként!

$f(x) = 7 - |x - 1|$ (2 pont)

$g(x) = |7 - |x - 1||$ (1 pont)

$h(x) = 4$ (1 pont)



A lehetséges megoldások: $x_1 = -10$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 12$. (1 pont)

Ezek mind kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Mivel minden megoldás páros, az egyenletnek **nincs megoldása** a páratlan számok halmazán. (1 pont)

b) Mely egész számok elégítik ki az egyenlőtlenséget? b 9

$(1 - x)^3 + (1 + x)^3 < 62$

M: Fejtsük ki a zárójeleket, majd vonjunk össze:

$$(1 - x)^3 + (1 + x)^3 =$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 6x^2 + 2.$$ (3 pont)

Így az egyenlőtlenségünk:

$$6x^2 + 2 < 62 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 10.$$ (2 pont)

Ebből kapjuk: $|x| < \sqrt{10} \approx 3{,}1623$. (1 pont)

Azaz x lehetséges értékei: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$ (2 pont)

Ellenőrzés: $(1 - x)^3 + (1 + x)^3$ értékei a lehetséges x-ekre rendre 56, 26, 8, 2, 8, 26, 56. (1 pont) ö 16

6 Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 16{,}5x^2 - 35x$ függvény.

a) Igazolja, hogy a függvénynek $x = 1$-ben lokális minimuma van! Határozza meg a függvény további szélsőértékhelyeit! a 11

M: I. megoldás

Egy deriválható függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol első deriváltja 0. (Mivel f polinomfüggvény, ezért minden pontban deriválható.) (1 pont)

$f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 33x - 35$ (1 pont)

$f'(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1 - 35 = 0$ (1 pont)

Ha $x = 1$ a deriváltnak zérushelye, akkor szorzattá alakítható:

$$f'(x) = (x - 1)(-x^2 + 2x + 35).$$ (1 pont)

A további zérushelyek a második tényezőből:

$$-x^2 + 2x + 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5 \text{ és } x_2 = 7.$$ (2 pont)

Vizsgáljuk meg a tényezők szerint f' előjelét (a fordított állású parabola a zérushelyek között pozitív): (4 pont)

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 7$	$x = 7$	$7 < x$
$f'(x)$	$(-)\cdot(-) = (+)$	0	$(-)\cdot(+) = (-)$	0	$(+)\cdot(+) = (+)$	0	$(+)\cdot(-) = (-)$
$f(x)$	növekszik	MAX	csökken	MIN	növekszik	MAX	csökken

A táblázat önmagában is 3 pontot ér. Ha három elsőfokú tényezőre bontja és úgy vizsgálja meg, természetesen az is jó.

A vizsgálatból látható, hogy a függvénynek

- **$x = -5$-ben és $x = 7$-ben helyi maximuma,**
- **$x = 1$-ben valóban helyi minimuma van.** (1 pont)

II. megoldás

Egy deriválható függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol első deriváltja 0. (Mivel f polinomfüggvény, ezért minden pontban deriválható.) (1 pont)

$f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 33x - 35$ (1 pont)

$f'(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1 - 35 = 0$ (1 pont)

Ott van minimum, ahol a második derivált által felvett érték pozitív:

$$f''(x) = -3x^2 + 6x + 33 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 33 > 0.$$ (2 pont)

Ha $x = 1$ a deriváltnak zérushelye, akkor szorzattá alakítható:

$$f'(x) = (x - 1)(-x^2 + 2x + 35).$$ (1 pont)

A további zérushelyek a második tényezőből:

$$-x^2 + 2x + 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5 \text{ és } x_2 = 7.$$ (2 pont)

Vizsgáljuk meg őket:

$f''(7) = -3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 33 < 0,$ (1 pont)

$f''(-5) = -3 \cdot (-5)^2 + 6 \cdot (-5) + 33 < 0.$ (1 pont)

Így az $x_0 = 1$-ben helyi minimuma, az $x_1 = -5$-ben és $x_2 = 7$-ben helyi maximuma van az $f(x)$ függvénynek. (1 pont)

b) Határozza meg a legbővebb $[a; b]$ intervallumot, amelyen az $f(x)$ függvény konvex, és $a, b \in \mathbb{Z}$! b 5

M: A kétszeresen deriválható f függvény ott konvex, ahol a második deriváltja pozitív:

$$f''(x) = -3x^2 + 6x + 33 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 11 < 0.$$ (2 pont)

A zérushelyek:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{48}}{2} \approx -2{,}4641 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{48}}{2} \approx 4{,}4641.$$ (1 pont)

A normál állású parabola a zérushelyek között negatív:

$$-2{,}4641 < x < 4{,}4641.$$ (1 pont)

A leghosszabb egész végpontú intervallumot keressük, $x \in [-2; 4]$. (1 pont) ö 16

7 Felírtunk 4 különböző pozitív számjegyet egy papírra. Azon számjegyeket kötjük össze egymással, amelyek közül valamelyik osztója a másiknak (de egyik számjegyet sem kötjük össze saját magával.) Így egy négypontú gráfot kapunk.

a) Igazolja, hogy ennek a gráfnak 0-tól 6-ig akármennyi éle lehet! a 6

M: A kijelentést bizonyítjuk, ha minden esetre adunk példát: (6 pont)



6 jó megoldás: 4 pont, 5 jó megoldás: 3 pont, 4 jó megoldás: 2 pont, 3 jó megoldás: 1 pont. Ennél kevesebb megoldásért nem jár pont.

Egy szerepjátékban Panna és Fanni küzdenek meg, kezdetben Pannának 8, Fanninak 3 életerőpontja van. A küzdelemben háromszor egymás után támadnak egymásnak.

Egy támadás során Fanni és Panna is dob egy-egy hagyományos dobókockával. A dobások következményei:

A) Ha a dobott számok szorzata 1, akkor Fanni életerőpontszáma azonnal 0-ra vált.

B) Ha a dobott számok szorzata prím, akkor Fanni életerőpontszáma kettővel csökken.

C) Ha a dobott számok szorzata 15-nél nagyobb, akkor Fanni életerőpontszáma eggyel csökken.

D) Ha a dobott számok szorzata 10-nél kisebb összetett szám, akkor nincs változás az életerőpontokban.

E) Egyébként Panna pontszáma csökken eggyel.

A csata véget ér, ha

(1) Fanninak elfogy minden életerőpontja (Pannának nem fogyhat el).

(2) Fanninak három támadás után még van életerőpontja (akkor elmenekül).

b) Mennyi a valószínűsége, hogy Fanni a Pannával való küzdelem után tovább játszhat? b 10

M: Jelöljük *A*, *B*, *C*, *D*, *E*-vel a lehetséges felsorolt eseményeket.

A legegyszerűbb, ha elemi eseményekre bontva táblázatba foglaljuk őket: (2 pont)

F/*P*	1	2	3	4	5	6
1	*A*	*B*	*B*	*D*	*B*	*D*
2	*B*	*D*	*D*	*D*	*E*	*E*
3	*B*	*D*	*D*	*E*	*E*	*C*
4	*D*	*D*	*E*	*C*	*C*	*C*
5	*B*	*E*	*E*	*C*	*C*	*C*
6	*D*	*E*	*C*	*C*	*C*	*C*

$$P(A) = \frac{1}{36},\quad P(B) = \frac{1}{6},\quad P(C) = \frac{11}{36}.$$ (2 pont)

D és *E* esemény Fanni szempontjából egyformán jó ebben a küzdelemben:

$$P(D + E) = \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{1}{2}.$$ (1 pont)

Fanni életereje 3 marad, ha háromszor egymás után *D* vagy *E* esemény következett be:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}1250.$$ (1 pont)

Fanni életereje 2 lesz, ha kétszer *D* vagy *E*, egyszer *C* esemény következett be valamilyen sorrendben:

$$p_2 = \binom{3}{1} \cdot \frac{11}{36} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0{,}2292.$$ (1 pont)

Fanni ereje 1-re csökken, ha

- egyszer *D* vagy *E*, kétszer pedig *C* esemény következett be valamilyen sorrendben:

$$p_3 = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{11}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}1400.$$ (1 pont)

- kétszer *D* vagy *E*, egyszer pedig *B* esemény következett be valamilyen sorrendben:

$$p_4 = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}1250.$$ (1 pont)

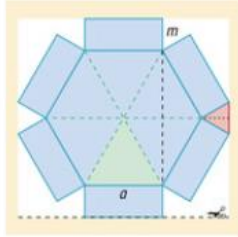
A kérdezett valószínűség ezen egymást kizáró események valószínűségeinek összege:

$$P = 0{,}6192.$$ (1 pont) ö 16

8 Zoli egy szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú dobozt készít kedvese névnapjára, ebbe teszi az ajándékát. Első próbálkozásra megszerkesztette egy papírlapon a doboz alapját és az oldalait, majd a papírlapot úgy vágta el a lap rövidebb élével párhuzamosan, hogy a doboz hálójának egyes élei és csúcsai az ábra szerinti módon a papírlap szélére esnek.

a 8

a) Bizonyítsa be, hogy a doboz készítéséhez felhasznált papírlap akkor és csak akkor lehet négyzet alakú, ha a doboz m magassága megegyezik az alaplap a oldalának hosszával!



M: Az „akkor és csak akkor" típusú állításokat mindkét irányban igazolni kell. **(1 pont)**

Tekintsük az ábrát! Az a oldalú szabályos hatszög a oldalú szabályos háromszögekre bontható.

A piros m oldalú háromszögek is szabályosak, **(1 pont)**

ugyanis a piros háromszögek egyenlő (m) szárúak és a két szár közötti szög

$$360° - 2 \cdot 90° - 2 \cdot 60° = 60°.$$ **(1 pont)**

A hatszöget magában foglaló téglalap mindkét oldala két egybevágó háromszög oldalából és másik két egybevágó háromszög magasságából áll.

Az a oldalú zöld szabályos háromszögek magassága $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Az m oldalú piros szabályos háromszögek magassága $m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. **(1 pont)**

A papírlap függőleges oldala:

$$2m + 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2m + a \cdot \sqrt{3}.$$

A papírlap vízszintes oldala:

$$2a + 2m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a + m \cdot \sqrt{3}.$$ **(1 pont)**

A pont akkor is jár, ha ezek nincsenek külön összegyűjtve, de kiderülnek a megoldásból.

„⇒" Ha $a = m \Rightarrow 2m + 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a + 2m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (vagyis a függőleges oldal egyenlő a vízszintes oldallal), tehát a papírlap négyzet. **(1 pont)**

„⇐" Ha a papírlap négyzet $\Rightarrow 2m + a \cdot \sqrt{3} = 2a + m \cdot \sqrt{3}$, **(1 pont)**
amit átalakítva $(2 - \sqrt{3} \neq 0)$:

$$m(2 - \sqrt{3}) = a(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow m = a.$$ **(1 pont)**

b) A papír oldala 28,6 cm és 27,3 cm, a dobozka alapéle hosszabb a magasságánál. Számítsa ki egész centiméterre kerekítve az a és az m értékét! b 8

M: Ha $a > m$, akkor

$$2m + a \cdot \sqrt{3} < 2a + m \cdot \sqrt{3}.$$ (1 pont)

Az oldalak hosszából felírható az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2a + m \cdot \sqrt{3} &= 28{,}6 \\ 2m + a \cdot \sqrt{3} &= 27{,}3 \end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

Az első egyenletet 2-vel, a másodikat $\sqrt{3}$-mal szorozva:

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2m \cdot \sqrt{3} &= 57{,}2 \\ 2m \cdot \sqrt{3} + 3a &= 47{,}285 \end{aligned}\right\}.$$ (2 pont)

Kivonva a két egyenletet egymásból: $a = 9{,}915$ cm. (1 pont)

Behelyettesítve az 1. egyenletbe:

$$2 \cdot 9{,}915 + m \cdot \sqrt{3} = 28{,}6 \quad \Rightarrow \quad m = 5{,}063 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Ebből egész centiméterre kerekítve **$a = 10$ cm** és **$m = 5$ cm.** (1 pont) ö 16

Megjegyzés: Az egyenletrendszert úgy is megoldhatjuk, ha kifejezzük a-t az első egyenletből: $a = 14{,}3 - m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$2m + 24{,}768 - 1{,}5m = 27{,}3 \quad \Rightarrow \quad m = 5{,}064,$$

$$a = 14{,}3 - 5{,}064 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9{,}914.$$

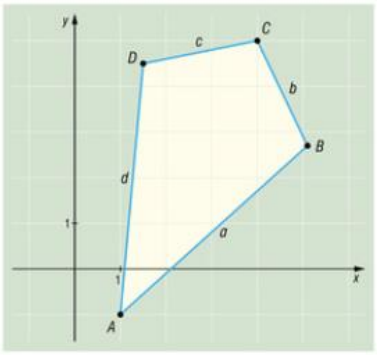
9 *a)* Igazolja, hogy az $A(1; -1)$; $B(5{,}1; 2{,}7)$, $C(4; 5)$ és $D(1{,}5; 4{,}5)$ pontokkal megadott $ABCD$ négyszög deltoid! a 4

M: I. megoldás

Egy négyszög deltoid, ha 2-2 szomszédos oldala egyenlő hosszú.

(1 pont)

Ha ez kiderül a megoldásból, a pont jár.



$BC = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}3^2} = \sqrt{6{,}5}$,

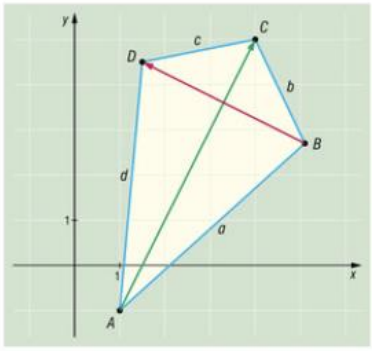
$CD = \sqrt{2{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{6{,}5}$, (1 pont)

$AB = \sqrt{4{,}1^2 + 3{,}7^2} = \sqrt{30{,}5}$,

$AD = \sqrt{0{,}5^2 + 5{,}5^2} = \sqrt{30{,}5}$. (1 pont)

Mivel $BC = CD$ és $AB = AD$, így az ***ABCD* négyszög deltoid.** (1 pont)

II. megoldás



Egy négyszög deltoid, ha egyik átlója merőlegesen felezi a másikat.

Vizsgáljuk meg a $\overrightarrow{BD}(-3{,}6;\ 1{,}8)$ és az $\overrightarrow{AC}(3;\ 6)$ vektort. (1 pont)

Az ábra alapján $\overrightarrow{AC}$ felezi $\overrightarrow{BD}$-t.

$F_{BD}(3{,}3;\ 3{,}6) \in \overrightarrow{AC}$, mert

$$\frac{3}{2{,}3} \cdot \overrightarrow{AF_{BD}}(2{,}3;\ 4{,}6) = \overrightarrow{AC}(3;\ 6).$$ (1 pont)

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, mivel skalárszorzatuk 0:

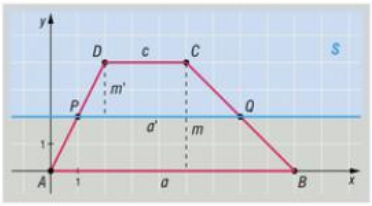
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -3{,}6 \cdot 3 + 1{,}8 \cdot 6 = 0.$$ (1 pont)

Mivel $\overrightarrow{AC}$ merőlegesen felezi $\overrightarrow{BD}$-t, ezért az ***ABCD* négyszög deltoid.** (1 pont)

A következő pontok egy *ABCD* trapézt alkotnak: $A(0;\ 0)$, $B(9;\ 0)$, $C(5;\ 4)$, $D(2;\ 4)$. Az $S: y - 2 \geq 0$ egy zárt félsík egyenlete, amelynek van közös része a trapézzal.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha kiválasztjuk a trapéz egy *P* pontját, akkor az pontja lesz az *S* félsíknak is? b 6

M: Tekintsük az ábrát!



Az $S: y - 2 \geq 0$ zárt félsíkot kékkel jelöltük. (1 pont)

A félsík $y = 2$ határvonala felezi a trapéz szárait, ezért a metszéspontok:

$P(1;\ 2)$ és $Q(7;\ 2)$. (1 pont)

Az *S* félsík *ABCD* trapézzal vett *PQCD* metszete is trapéz alakú. (1 pont)

A *PQCD* trapéz területe:

$$t = \frac{a' + c}{2} \cdot m' = \frac{6 + 3}{2} \cdot 2 = 9.$$ (1 pont)

Az *ABCD* trapéz területe:

$$T = \frac{a + c}{2} \cdot m = \frac{9 + 3}{2} \cdot 4 = 24.$$ (1 pont)

Geometriai valószínűséget számolunk, azaz a „kedvező" eseményt ábrázoló terület nagyságát osztjuk az eseménytér területének nagyságával:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{9}{24} = 0{,}375.$$ (1 pont)

Egy kisvárosból kiinduló két legnépszerűbb kerékpártúra-útvonal közül az egyik főleg a közeli dombok között, a másik végig sík terepen halad. Attila tudja magáról, hogy kényelmes tempóban felfelé $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$, lejtőn $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$, sík terepen $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel teker. Ma a dombok felé ment, így a túra megtételéhez szükséges idő 20%-ában lejtőn, felében sík terepen, a maradék 54 percben emelkedőn kerekezett. Holnap a síkság felé akar indulni.

c) Határozza meg, mennyi ideig biciklizik holnap, ha a mai átlagsebességénél 20%-kal gyorsabban teker a síkságon, és 20 km-rel hosszabb utat szeretne megtenni, mint ma! c 6

M: A $t_{\text{domb}} = 54$ perc a teljes időtartam 30%-a, azaz

$$54 = 0{,}3t_{\text{ma}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{ma}} = 180 \text{ perc} = 3 \text{ óra.} \qquad \text{(1 pont)}$$

Ennek az időnek a 20%-át lejtőn tette meg:

$$t_{\text{lejtő}} = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{ (óra).}$$

A felét síkságon:

$$t_{\text{síkság}} = 1{,}5 \text{ (óra).} \qquad \text{(1 pont)}$$

Az 54 perc megfelel 0,9 órának. A ma megtett távolság:

$$0{,}6 \cdot 30 + 0{,}9 \cdot 10 + 1{,}5 \cdot 15 = 49{,}5 \text{ km.} \qquad \text{(1 pont)}$$

Az átlagsebesség:

$$v_{\text{ma}} = \frac{49{,}5}{3} = 16{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A holnapi átlagsebesség:

$$v_{\text{holnap}} = 16{,}5 \cdot 1{,}2 = 19{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A megtett út:

$$49{,}5 + 20 = 69{,}5 \text{ km.} \qquad \text{(1 pont)}$$

A szükséges idő:

$$t_{\text{holnap}} = \frac{69{,}5}{19{,}8} \text{ h} \approx 3{,}51 \text{ óra.} \qquad \text{(1 pont)} \quad \text{ö 16}$$

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőséget a valós számok halmazán! a 4

$$2 = \sqrt{0{,}25x^2 + x + 5}$$

M: Mivel $0{,}25x^2 + x + 5$ bármely x-re pozitív ($D < 0$ és felfelé nyíló parabola), ezért $x \in \mathbb{R}$.

Négyzetre emelve és rendezve, másodfokú egyenletet kapunk:

$$0 = 0{,}25x^2 + x + 1. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyetlen megoldás: $x = -2$. (1 pont)

Ellenőrzés: $2 = \sqrt{0{,}25 \cdot (-2)^2 - 2 + 5} = \sqrt{1 - 2 + 5} = \sqrt{4}$. (1 pont)

b) Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon! b 8

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{9}{y} &= 6 \\ \frac{x}{8} + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

M: A tört nevezője miatt $y \neq 0$. Szorozzuk a második egyenletet 8-cal:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{9}{y} &= 6 \\ x + 8y &= 40 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$8y - \frac{9}{y} = 34. \qquad \text{(1 pont)}$$

Szorozzuk fel y-nal, és rendezzük mint másodfokú egyenletet:

$$8y^2 - 34y - 9 = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $y_1 = -0{,}25$ és $y_2 = 4{,}5$. (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$x_1 + \frac{9}{-0{,}25} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 42, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$x_2 + \frac{9}{4{,}5} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1 = 42;\ y_1 = -0{,}25 \quad \text{és} \quad x_2 = 4;\ y_2 = 4{,}5. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ellenőrzés: A második egyenletbe való visszahelyettesítéssel:

$$\frac{42}{8} - 0{,}25 = 5 \quad \text{és} \quad \frac{4}{8} + 4{,}5 = 5. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 12

2 *a)* Legyen H az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmaza. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Döntését indokolja! a 3

Az $a, b \in H$ számokra ha a nem osztója b-nek, akkor a és b relatív prím.

M: Adunk egy ellenpéldát: legyen $a = 4$ és $b = 6$. Ekkor 4 nem osztója 6-nak, de $(4; 6) = 2$. (2 pont)

Az állítás **hamis.** (1 pont)

b) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! b 4

M: A megfordított állítás:

(Az $a, b \in H$ számokra) ha a és b relatív prím, akkor a nem osztója b-nek. (1 pont)

Ha a és b relatív prímek, akkor nincs közös prímtényezőjük. (1 pont)

Ha nincs közös prímtényezőjük, akkor $a > 1$ nem lehet osztója b-nek. (1 pont)

A megfordított állítás **igaz.** (1 pont)

c) Határozza meg azokat az $n \in \mathbb{Z}^+$ számokat, amelyekhez létezik olyan p pozitív prím, hogy az $np + n^p$ összeg is pozitív prím! Adja meg p lehetséges értékeit is! c 7

M: Alakítsuk szorzattá a kifejezést:

$$n(p + n^{p-1}).$$ (1 pont)

Egy szorzat pontosan akkor prím, ha egyik tényezője prím, a másik 1. (1 pont)

$p + n^{p-1} > 1$, hiszen p pozitív prím, n pozitív egész. (1 pont)

Vagyis $n = 1$. Ekkor viszont a másik tényező

$$p + n^{p-1} = p + 1.$$ (2 pont)

p és $p + 1$ egymás utáni prímek, tehát $p = 2$ és $p + 1 = 3$. (1 pont)

Ellenőrzés: $1 \cdot 2 + 1^2 = 3$. (1 pont) ö 14

3 *a)* Hányféleképpen bonthatunk fel egy hatelemű halmazt két diszjunkt (közös elem nélküli) részhalmazra úgy, hogy mindegyik részhalmaz tartalmazzon legalább egy elemet? a 5

M: Egy hatelemű halmazt vagy

$$|A| = 1 \text{ és } |B| = 5, \quad \text{vagy} \quad |A| = 2 \text{ és } |B| = 4,$$
$$\text{vagy} \quad |A| = 3 \text{ és } |B| = 3$$

elemszámú közös elem nélküli A és B részhalmazokra bonthatunk. (1 pont)

Mindegyik esetben az eredeti hat elemből kiválasztva az A elemeit, a B elemei egyértelműen meghatározottak (vagy fordítva). (1 pont)

Az A elemeit rendre $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$, illetve $\binom{6}{3} = 20$-féle módon választhatjuk ki. (2 pont)

Egy hatelemű halmaz összesen $6 + 15 + 20 =$ **41-féleképpen** bontható fel két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy ezek mindegyike tartalmazzon legalább egy elemet. (1 pont)

Bergengóciában egy 200 km hosszú útszakaszon végig a megengedett legnagyobb sebességgel halad egy személygépkocsi. Ugyanazon az útszakaszon egy teherautó ennél a személyautónál mindig $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val lassabban közlekedik. A személyautó 15 perccel hamarabb megy végig az úton, mint a teherautó.

b) Mekkora az útszakaszon megengedett legnagyobb sebesség egész $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra kerekítve Bergengóciában? b 9

M: Jelölje az útszakaszon megengedett legnagyobb sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban v, ekkor a teherautó sebessége $v - 10$ $(v > 10)$. (1 pont)

Jelölje az útszakasz megtételéhez a személyautónak szükséges időt (órában) t, ekkor a teherautó (15 perc = 0,25 óra) $t + 0{,}25$ ideig közlekedik. (1 pont)

Írjunk fel egyenletrendszert a két jármű adatai alapján:

$$\left.\begin{aligned} t \cdot v &= 200 \\ (t + 0{,}25) \cdot (v - 10) &= 200 \end{aligned}\right\}. \quad \text{(1 pont)}$$

Az első egyenletből kifejezve az időt:

$$t = \frac{200}{v}. \quad \text{(1 pont)}$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(\frac{200}{v} + 0{,}25\right) \cdot (v - 10) = 200. \quad \text{(1 pont)}$$

Felbontva a zárójelet, majd másodfokú alakra rendezve:

$$0{,}25v - \frac{2000}{v} - 2{,}5 = 0, \quad \text{(1 pont)}$$

$$0{,}25v^2 - 2{,}5v - 2000 = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

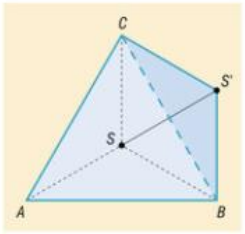
A megoldóképletből: $v_1 \approx -84{,}58$, $v_2 \approx 94{,}58$. (1 pont)

Mivel $v > 10$, ezért v_1 nem megoldás.

Így a megengedett legnagyobb sebesség **95** $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (1 pont) ö 14

Megjegyzés: Az egyenletrendszert megoldhatjuk úgy is, ha a 2. egyenletben felbontjuk a zárójeleket, majd kivonjuk belőle az első egyenletet. Kapjuk, hogy $0{,}25v - 10t = 2{,}5$. Ebből kifejezve az egyik ismeretlent és a $t \cdot v = 200$ egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk a megoldást.

4 *a)* Az ABC szabályos háromszög S súlypontjának a BC oldalra való tükörképe S'. Bizonyítsa be, hogy a kialakult $ABS'C$ négyszög húrnégyszög! a 4



M: Tekintsük az ábrát. Bármely szabályos háromszög súlypontja, magasságpontja, körülírt és beírt körének középpontja egybeesik.

A tükrözés miatt $BS'C\sphericalangle = BSC\sphericalangle$. (1 pont)

Mivel S egyben a körülírt kör középpontja is, ezért az azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$$BSC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle = 2 \cdot 60° = 120°.$$ (1 pont)

Így az $ABSC$ négyszög szemközti szögeinek összege

$$BAC\sphericalangle + BS'C\sphericalangle = 60° + 120° = 180°,$$ (1 pont)

ami alapján valóban **húrnégyszög.** (1 pont)

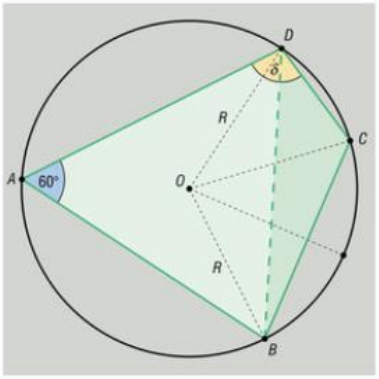
Megjegyzés: Ha a háromszög másik szögét választjuk:

A tükrözés miatt $SCB\sphericalangle = S'CB\sphericalangle$.

S a beírt kör középpontja is, ezért $SCB\sphericalangle = \frac{ACB\sphericalangle}{2} = 30°$.

$ACS'\sphericalangle = ACB\sphericalangle + BCS'\sphericalangle = 90°$, ugyanígy $ABS'\sphericalangle = 90°$.

b) Egy $ABCD$ húrnégyszögben $AB = BD = DA$, a C csúcs a D-hez közelebb harmadolja az A-t nem tartalmazó BD ívet. Számítsa ki, mekkorák a négyszög szögei! b 7



M: Tekintsük az ábrát.

CO harmadolja a $BOD\sphericalangle$ szöget.

A DOC és BOC háromszögek egyenlő szárúak. (2 pont)

C harmadolópont, ezért az azonos íven nyugvó körületi és középponti szögek tétele miatt:

$$DOC\sphericalangle = \frac{1}{3}DOB\sphericalangle = \frac{1}{3} \cdot 2DAB\sphericalangle =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 60° = 40°.$$ (2 pont)

(Ugyanígy $COB\sphericalangle = 80°$.)

A DOC háromszög egyenlő szárú, így

$$ODC\sphericalangle = \frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$ (1 pont)

Ebből

$$ADC\sphericalangle = ADO\sphericalangle + ODC\sphericalangle = 30° + 70° = 100°.$$ (1 pont)

Mivel az $ABCD$ húrnégyszög, így $\mathbf{BCD\sphericalangle = 120°}$ és $\mathbf{ABC\sphericalangle = 80°}$. (1 pont) ö 11

II. rész

5 Egy vidám matematikus három problémával (A, B, C) foglalkozott tegnap, mind a háromhoz kis papírlapra írt különböző ötleteket, számításokat. Az A problémához egy, a B-hez kettő, a C-hez három papírdarabkát használt. A papírlapok az asztalán véletlenszerűen összekeveredtek, talán a huzat fújta őket egymásra. Most szomorúan veszi fel egymás után őket: csak akkor lesz újra vidám, ha valamelyik probléma összes jegyzetét megtalálja.

a) 7

a) Az első kérdés, amihez minden jegyzetet megtalál, a B probléma. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ez pontosan a 4. húzásra sikerül neki!

M: A matematikus nem húzhat A cetlit, mert a B jegyzeteit találja meg elsőnek, negyedikre viszont B-t kell kivennie. Az első három húzás során csak az egyik B és két C cetli kerülhet elő. (1 pont)

Az egy B és két C cetlit háromféle sorrendben húzhatja ki:

$$B–C–C, \quad C–B–C, \quad C–C–B.$$ (1 pont)

A két B cetli $2 \cdot 1 = 2$, (1 pont)

a C probléma két jegyzete $3 \cdot 2 = 6$-féle módon jöhet elő. (1 pont)

A kedvező esetek száma $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$. (1 pont)

Az összes esetek száma különböző cetlik esetén $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{36}{360} = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1}.$$ (1 pont)

b) 9

b) Hányféleképpen következhet be az, hogy a matematikus pontosan a harmadik húzás után lesz újra vidám?

M: Vegyük sorra az eseteket!

(1) Ha a harmadik húzásra C-t húz, akkor az első két cetlinek is C-nek kell lennie. Ezeknek a lehetséges sorrendje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. (1 pont)

(2) Ha az utolsó jegyzetlap B, akkor előtte csak egy B és egy C lehet $B–C$ vagy $C–B$ sorrendben (2 lehetőség). (1 pont)

A két B lehetséges sorrendje $2 \cdot 1 = 2$. A C cetli 3-féle lehet. (1 pont)

Így ennek az összes lehetősége: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. (1 pont)

(3) Ha a harmadik lap A, akkor előtte egy B és egy C, vagy két C jegyzetlap lehet csak. (1 pont)

A két C jegyzet $3 \cdot 2 = 6$ sorrendben fordulhat elő. (1 pont)

Az egy B és egy C két módon követheti egymást ($B–C$ vagy $C–B$), (1 pont)

a B kétféle, a C háromféle lehet: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. (1 pont)

A (3) esetben az összes lehetőségek száma $6 + 12 = 18$.

Így az összes lehetséges sorrendek száma: $6 + 12 + 18 = \mathbf{36}$. (1 pont)

ö 16

6 Egy szabadidőközpont térképére koordináta-rendszert helyezve, a téglalap alakú labdarúgópálya csúcsai az $A(4; -2)$, $B(7; -2)$, $C(7; 3)$, $D(4; 3)$ pontoknak felelnek meg. Az új városvezetés – részben az elgazosodott focipálya területén – egy kör alakú mesterséges tavat akar kialakítani. A tó tervezett határvonalának egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

a) Számítsa ki, hány négyzetméter a focipálya, illetve a kör alakú tó területe, ha 1 egység 15 méternek felel meg! a 4

M: A focipálya oldalai $AB = 3$, $BC = 5$ egység, ez $AB = 45$ és $BC = 75$ m-nek felel meg.

$$T_{\text{pálya}} = 45 \cdot 75 = 3375 \text{ m}^2.$$ (1 pont)

A kör sugarához alakítsuk át az egyenletet:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$ (1 pont)

Ebből a sugár négyzetére

$$r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad r = 5 \text{ egység},$$

ami 75 méternek felel meg. (1 pont)

$$T_{\text{tó}} = r^2\pi = 75^2 \cdot \pi \approx \mathbf{17\,671{,}46 \text{ m}^2}.$$ (1 pont)

Megfelelő kerekítés elfogadható.

b) A jelenlegi focipályának hány százalékát borítja majd víz, ha elkészül a tó? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! b 12

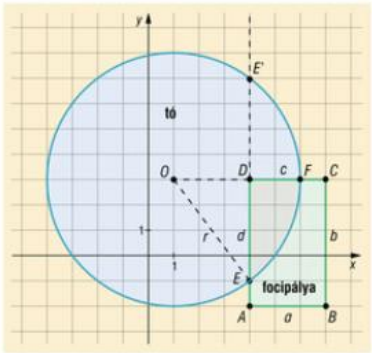
M: Modellezzük koordináta-rendszerben a feladatot!

$O(1; 3)$, $r = 5$. (1 pont)

Legyenek E és F a téglalap és a körlap határoló vonalainak metszéspontjai. Az OED háromszög derékszögű. (1 pont)

Ekkor az átfedés területe kiszámítható az OEF körcikk és az OED háromszög területei különbségeként:

$$T_{\text{közös rész}} = T_{OEF \text{ körcikk}} - T_{OED\triangle}.$$ (1 pont)



Az E pont az AD oldalon van az x tengely alatt, így $E(4; y)$, ahol $y < 0$. (1 pont)

Mivel a körön is rajta van, ezért

$$(4 - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 6y - 7 = 0.$$ (1 pont)

Innen $y_1 = 7$ és $y_2 = -1$. Az egyik metszéspont $E'(4; 7)$, illetve $E(4; -1)$. (1 pont)

(Az E pont koordinátáit az OED háromszög már ismert oldalai ($OD = 3$ és $OE = 5$) és a Pitagorasz-tétel alapján is megadhatjuk.)

Az OED háromszög területe:

$$T_{OED\triangle} = \frac{OD \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (területegység)}.$$ (1 pont)

A körcikk területéhez szükségünk van a $DOE\sphericalangle$ hegyesszög értékére.

$$\cos(DOE\sphericalangle) = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad DOE\sphericalangle \approx 53{,}13°. \qquad \text{(1 pont)}$$

(Bármelyik szögfüggvény használható, hiszen a háromszög összes oldala ismert.)

A körcikk területe:

$$T_{OEF\ \text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot DOE\sphericalangle \approx \frac{5^2\pi}{360°} \cdot 53{,}13° = 11{,}59 \text{ (területegység).} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$T_{\text{közös rész}} = T_{OEF\ \text{körcikk}} - T_{OED\triangle} = 11{,}59 - 6 = 5{,}59 \text{ (te).} \qquad \text{(1 pont)}$$

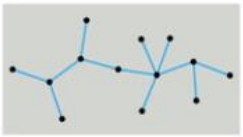
A jelenlegi focipálya területe $3 \cdot 5 = 15$ (te), így a keresett érték

$$\frac{5{,}59}{15} \cdot 100 = 37{,}2\dot{6}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A focipálya területének **37,3%-a** kerül víz alá. (1 pont) ö 16

7 Tekintsük az alábbi definíciót!

Hernyógráfnak nevezzük az olyan egyszerű, összefüggő, körmentes gráfokat, amelyekben van egy központi út, és minden más pontja legfeljebb 1 él távolságra van a központi úttól.



a) Igaz-e a következő kijelentés? a 2

Minden hernyógráf fagráf.

M: Fának nevezzük az egyszerű, összefüggő és körmentes gráfokat. (1 pont)

Ezeket a tulajdonságokat a hernyógráf definíciója is tartalmazza, tehát **minden hernyógráf fa.** (1 pont)

Egy egyszerű n pontú gráfot három állapotban tekintünk:

A) fa; *B)* minden pont fokszáma 3; *C)* minden pont fokszáma 5.

b) Határozza meg a pontok számát, ha tudjuk, hogy az *A)*, *B)*, *C)* gráfok éleinek számai ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három elemét alkotják! b 5

M: Az *A)* gráf esetében az élek száma: $n - 1$. (1 pont)

A *B)*, illetve *C)* gráfok esetében az élek száma:

$$\frac{n \cdot 3}{2} = 1{,}5n, \quad \text{illetve} \quad \frac{n \cdot 5}{2} = 2{,}5n. \qquad \text{(1 pont)}$$

A mértani sorozat definíciója szerint:

$$\frac{1{,}5n}{n-1} = \frac{2{,}5n}{1{,}5n} = \frac{5}{3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen $4{,}5n = 5n - 5$, amiből a gráf pontjainak száma $n = 10$. (1 pont)

Ellenőrzés: Az *A)*, *B)* és *C)* gráfok éleinek száma így 9, 15, 25; a hányados pedig $q = \frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$. (1 pont)

Egy konvex sokszög belső szögei fokban mérve egész számok, és egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek differenciája 4°.

c) Határozza meg a feltételeknek megfelelő sokszögek számát! c 9

M: A konvex, n (> 2) csúcsú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$. (1 pont)

Az általuk alkotott számtani sorozat első tagját jelölje α, differenciája 4°. A tagok összegére:

$$S_n = n \cdot \alpha + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 4°.$$ (1 pont)

Ugyanazt írtuk fel két különböző formában, egyszerűsítünk 2-vel:

$$n \cdot \alpha + 2° \cdot n \cdot (n - 1) = (n - 2) \cdot 180°.$$ (1 pont)

Fejezzük ki α-t, amelyről tudjuk, hogy egész érték:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} - 2° \cdot (n - 1) = 180° - 2° \cdot (n - 1) - \frac{360°}{n}.$$ (2 pont)

A kifejezés utolsó tagját kivéve mindegyik egész (n egész). Az utolsó tört annyiféleképpen lehet egész szám, amennyi osztója van 360-nak. (1 pont)

Ehhez bontsuk prímtényezőkre:

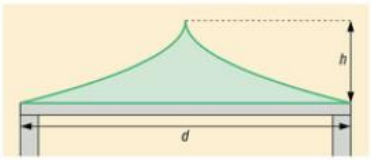
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$ (1 pont)

A 360 osztóinak száma:

$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24.$$ (1 pont)

Mivel $0 < \alpha$, ezért $2 < n < 90$, kiesik 6 lehetőség ($n \neq 1, 2, 90, 120, 180, 360$). A feladatnak $24 - 6 = 18$ megoldása van. (1 pont) ö 16

8 Egy régi kapubejáró tetejét különleges dísz ékesíti. A timpanon felső, vízszintes tengelyű félparabola ív határoló körvonalai az ábrán láthatók (a szimmetrikus parabolaívek találkozási pontja a közös tengelypontjuk).

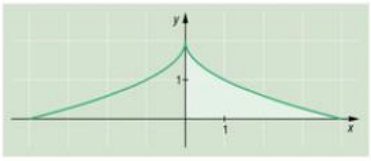


A díszítés $h = 200$ cm magas, és a bejárat teljes $d = 800$ cm szélességében húzódik. A felületén a domborművek már csak halványan látszanak (gyakorlatilag síknak tekinthető), ezért az állagmegóvás első lépéseként bevonják egy speciális anyaggal.

a) Számítsa ki a timpanon felületének pontos értékét! a 7

M: A kapubejáró feletti timpanont modellezzük egy alkalmasan választott koordináta-rendszerben. Például legyen a rendszer 1 egysége 1 m.

A szimmetria miatt elegendő csak az egyik oldalt tekintenünk.



Keressük azt a függvényt, amely megfelel egy (0; 2) tengelypontú, vízszintes tengelyű félparabolának, és áthalad a (4; 0) ponton. (1 pont)

A keresett függvény az x tengelyre tükrözött, függőlegesen eltolt négyzetgyök-függvény: (1 pont)

$$D_f = [0; \infty[, \quad f(x) = -\sqrt{x} + 2.$$ (1 pont)

($D_f = [0; 4]$ is megfelel.)

Ennek az x tengely feletti területét kell kiszámítanunk:

$$\int_0^4 \left(-\sqrt{x} + 2\right) \mathrm{d}x = \int_0^4 \left(-x^{\frac{1}{2}} + 2\right) \mathrm{d}x = \quad (1 \text{ pont})$$

Megkeressük a primitív függvényét, majd alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\left[-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x\right]_0^4 = \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x\right]_0^4 = -\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$ (2 pont)

A koordináta-rendszer egységét 1 méternek választottuk, így a timpanon teljes felülete $\frac{16}{3}$ m². (1 pont)

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényről a következőket tudjuk.

(1) A függvénygörbe áthalad a $P(2; 7)$ ponton.

(2) A függvénynek az $x = -1$ helyen szélsőértéke van.

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{19}{3}$.

b) Határozza meg az a, b, c valós paramétereket! b 9

M: (1)-ből: Az $y = ax^2 + bx + c$ görbe változóiba helyettesítsük a $P(2; 7)$ pont koordinátáit:

$$\text{(I)} \quad 7 = 4a + 2b + c.$$ (1 pont)

(2)-ből: Ha tudjuk, hogy az $x = 1$ helyen szélsőértéke van, akkor ott az első deriváltja nulla.

A derivált $f'(x) = 2ax + b$. (1 pont)

Behelyettesítve:

$$\text{(II)} \quad f'(-1) = -2a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2a.$$ (1 pont)

Ezt visszahelyettesítve (I)-be:

$$7 = 8a + c \quad \Rightarrow \quad c = 7 - 8a.$$ (1 pont)

A keresett görbe hozzárendelési szabálya egy paraméterrel:

$$f(x) = ax^2 + 2ax + 7 - 8a.$$ (1 pont)

Megkeressük ez utóbbi primitív függvényét, majd alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\left[a\cdot\frac{x^3}{3}+ax^2+(7-8a)x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left[\frac{a}{3}+a+7-8a\right]-\left[-\frac{a}{3}+a+8a-7\right]=14-\frac{46}{3}a. \qquad \text{(2 pont)}$$

(3)-ból:

$$14-\frac{46}{3}a=\frac{19}{3} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Visszahelyettesítve: $c = 3,\ b = 1.$ (1 pont) ö 16

9 A $\vec{v}$ és $\vec{v'}$ helyvektor hossza egyaránt $\sqrt{10}$, skalárszorzatuk -10.

a) Határozza meg a két helyvektor által bezárt szöget! a 3

M: A skalárszorzat definíciója szerint:

$$\vec{v}\cdot\vec{v'}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha=-10, \qquad \text{(1 pont)}$$

amiből $\cos\alpha=-1$. (1 pont)

Mivel két vektor által bezárt szög $0°\le\alpha\le180°$, ezért $\alpha = 180°$. (1 pont)
(A vektorok egymás ellentettjei.)

b) Határozza meg, hány olyan különböző $\sqrt{10}$ hosszú $\vec{v}$ vektor van, amelynek abszcisszája 2-vel nagyobb, mint az ordinátája! b 5

M: Ha a vektor abszcisszája 2-vel nagyobb, mint az ordinátája, akkor

$$x=y+2, \quad \text{azaz} \quad \vec{v}(y+2;y). \qquad \text{(1 pont)}$$

A vektor hossza

$$\sqrt{10}=\sqrt{(y+2)^2+y^2}, \qquad \text{(1 pont)}$$

ezt kifejtve, majd rendezve:

$$0=y^2+2y-3. \qquad \text{(1 pont)}$$

A megoldásai: $y_1 = 1$ és $y_2 = -3$. (1 pont)

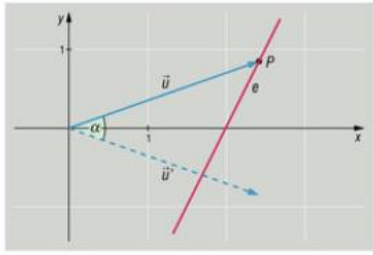
A keresett vektorok: $\vec{v_1}(3;1)$, illetve $\vec{v_2}(-1;-3)$, tehát **két** ilyen vektor létezik. (1 pont)

Sok-sok év múlva egy távoli galaxisban a Bolygóközi Űrhajózási Vállalat olyan kis kétszemélyes űrrepülőt tervez, amelynek négy szárnya van. 2-2 szárny a gép két oldalán alaphelyzetben egymáson fekszik, de felszállás után ezek szimmetrikusan X alakban kinyílnak, illetve meg is nyúlnak.

1 méter egységű koordináta-rendszerben modellezve, ha a szárnyak forgásközéppontja az origó, akkor a jobb felső szárny végpontja az $e: y = 2x - 4$ egyenesen mozog ($x \ge 2$). A mérnökök arra jöttek rá, hogy akkora szögben optimális kinyitni az egy oldalon levő szárnyakat, amelynél a szárnyakat modellező vektorok skaláris szorzata maximális.

c) Határozza meg a szárny maximális hosszát! c 8

M: A jobb felső szárnyat $\vec{u}$, a jobb alsó szárnyat pedig $\vec{u'}$ (azaz $\vec{u}$-nak az x tengelyre vonatkozó tükörképe) modellezi. (1 pont)



Mivel $P \in e$: $y = 2x - 4$ $(x \geq 2)$, ezért

$P(x; 2x - 4)$ és $\vec{u}(x; 2x - 4)$. (1 pont)

A szimmetria miatt $\vec{u'}(x; 4 - 2x)$. (1 pont)

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = x^2 + (2x - 4)(4 - 2x) = -3x^2 + 16x - 16. \quad \text{(2 pont)}$$

A lefelé nyíló parabola maximumpontja:

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-3)} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad y_{max} = 2 \cdot \frac{8}{3} - 4 = \frac{4}{3}. \quad \text{(2 pont)*}$$

Ebből a keresett helyzetű szárny hossza:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{5} \text{ egység} \approx \mathbf{2{,}98\ m.} \quad \text{(1 pont)}$$

ö 16

**Megjegyzés:* Ezt az értéket megkaphatjuk más utakon is.

I. Jelölje $s(x)$ a skalárszorzat értékét ($D_s = [2; \infty[$), akkor

$$s'(x) = -6x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3}.$$

Ellenőrizni kell, hogy maximum.

II. A zérushelyek számtani közepeként. Ha

$$-3x^2 + 16x - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-16 \pm 8}{-6},$$

innen $x = \frac{8}{3}$. A parabola fordított állásából következik a maximum.

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

I. rész

1 *a)* Legalább hány élt kell egy 190 élű teljes gráfból véletlenszerűen kitörölnünk, ha azt akarjuk, hogy a megmaradó gráf biztosan ne legyen összefüggő? a 5

M: Egy n pontú gráf akkor lesz biztosan nem összefüggő, ha kevesebb éle van, mint egy n pontú fának, tehát $(n-1)$-nél kevesebb éle van. (1 pont)

Tudnunk kell, hány pontú a gráf:

$$190 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 = n^2 - n - 380. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből $n_1 \neq -19$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, $n_2 = 20$. (1 pont)

A 20 pontú fagráfnak 19 éle van, tehát a gráfnak legfeljebb 18 éle lehet. (1 pont)

Legalább $190 - 18 = \mathbf{172}$ **élt** kell törölni, hogy biztosan ne legyen összefüggő. (1 pont)

Egy regionális futárszolgálat több település között működtet járműveket. Korábban bármely két település között pontosan egy dízelüzemű jármű teljesített szolgálatot. A cégvezető észrevette, hogy miután a járműflotta háromnegyedét és még egy járművet lecseréltek tisztán elektromos üzeműre, a megmaradt dízelek egy **fagráf** élei mentén szállítják a küldeményeket (a településeket tekintve a gráf csúcsainak).

b) Hány településen érhető el ez a futárszolgálat? b 6

M: Legyen a települések száma n.

Korábban a közöttük működő dízeljárművek egy teljes gráf élein közlekedtek, így eredetileg a számuk:

$$\frac{n(n-1)}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezek háromnegyedét és még egyet lecseréltek, így maradt egynegyedük mínusz 1:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1, \qquad \text{(1 pont)}$$

ez pedig az n pontú fa éleinek számával egyezik meg, ami $n - 1$. (1 pont)

Készítsünk egyenletet:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1 = n - 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 9n = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek megoldásai: $n_1 \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, $n_2 = 9$.

Tehát **9 település** között működik a futárszolgálat. (1 pont) ö 11

2 *a)* Az ábrán a harmadfokú $f(x)$ függvény $f'(x)$ első és $f''(x)$ második deriváltfüggvénye látható.

Határozza meg, hogy az eredeti $f(x)$ függvény milyen tulajdonságokkal rendelkezik a megadott intervallumokon!

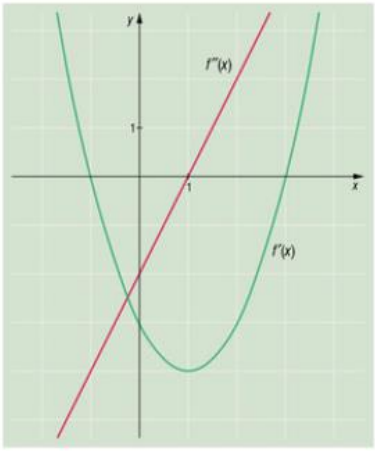
A tulajdonságok jellemzéséhez használja az első táblázatban a

növekszik, csökken,
konvex, konkáv,

illetve a másodikban a

maximum, minimum,
inflexiós

szavakat!



a 6

M: A kitöltött táblázatok: **(6 pont)**

	$]-\infty; -1[$	$]-1; 1[$	$]1; 3[$	$]3; \infty[$
$f(x)$ monoton	növekszik	csökken	csökken	növekszik
$f(x)$ konvexitása	konkáv	konkáv	konvex	konvex

Az $f(x)$ függvénynek	**az $x = -1$ helyen**	maximum	**pontja van.**
	az $x = 1$ helyen	inflexiós	**pontja van.**
	az $x = 3$ helyen	minimum	**pontja van.**

11 helyes válasz 6 pont, 10 helyes válasz 5 pont, 9 helyes válasz 4 pont, 8 helyes válasz 3 pont, 7 helyes válasz 2 pont, 6 helyes válasz 1 pont, ennél kevesebb 0 pont.

b) Adott a minden valós számon értelmezett és deriválható következő függvény:

b 6

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}5x^2 - 2x + 4.$$

Határozza meg koordinátáikkal azon pontokat, amelyekben a függvényhez húzott érintő párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel!

M: Két egyenes párhuzamos, ha meredekségük egyenlő. **(1 pont)***

A meredekséget a derivált adott pontbeli értéke adja meg.

$f'(x) = x^2 - 3x - 2$ **(1 pont)***

$f'(x) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ **(1 pont)**

Ahonnan: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. **(1 pont)**

Visszahelyettesítve f-be:

$$y_1 = f(x_1) = -\frac{20}{3}, \quad y_2 = f(x_2) = \frac{25}{6}.$$ (1 pont)

A keresett pontok:

$$E_1\left(4; -\frac{20}{3}\right) \quad \text{és} \quad E_2\left(-1; \frac{25}{6}\right).$$ (1 pont) ö 12

* *Ha a jelölt megjegyzések kiderülnek a megoldásból, a pontok járnak.*

3 *a)* Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon! a 7

$$\left.\begin{aligned} x &= y + 1 \\ 2\sqrt{x} + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

M: I. megoldás

A négyzetgyök miatt $x \geq 0$. Alakítsuk át az első egyenletet:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= y \\ 2\sqrt{x} + y &= 4 \end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

Az első egyenletből helyettesítsünk a másodikba:

$$2\sqrt{x} + x - 1 = 4.$$ (1 pont)

Rendezzük a $\sqrt{x}$-re másodfokú egyenletet:

$$x + 2\sqrt{x} - 5 = 0.$$ (1 pont)

Mivel $\sqrt{x} \geq 0$, ezért $\sqrt{x_1} \neq -1 - \sqrt{6}$, (1 pont)

ezért csak a $\sqrt{x_2} = -1 + \sqrt{6}$ a jó. (1 pont)

Négyzetre emelve, majd visszahelyettesítve:

$$x = 7 - 2\sqrt{6}, \quad y = 6 - 2\sqrt{6}.$$ (1 pont)

Ellenőrzés: (1): $7 - 2\sqrt{6} = 6 - 2\sqrt{6} + 1$,

(2): $2\left(-1 + \sqrt{6}\right) + 6 - 2\sqrt{6} = -2 + 6 = 4$. (1 pont)

II. megoldás

A négyzetgyök miatt $x \geq 0$. Helyettesítsünk be az első egyenletből a másodikba:

$$2\sqrt{y+1} + y = 4.$$ (1 pont)

Vigyük át y-t, és emeljünk négyzetre:

$$4(y + 1) = 16 - 8y + y^2.$$ (1 pont)

Rendezzük az y-ra másodfokú egyenletet:

$$0 = y^2 - 12y + 12.$$ (1 pont)

Ennek gyökei: $y_1 = 6 + 2\sqrt{6}$ és $y_2 = 6 - 2\sqrt{6}$. (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $x_1 = 7 + 2\sqrt{6}$, $x_2 = 7 - 2\sqrt{6}$. (1 pont)

Ellenőrzés a második egyenletben:

1. gyökpár: $2\left(1+\sqrt{6}\right)+6+2\sqrt{6}=8+4\sqrt{6}\neq 4$, vagyis nem megoldás,

2. gyökpár: $2\left(\sqrt{6}-1\right)+6-2\sqrt{6}=-2+6=4$. (1 pont)

Tehát a megoldások: $x=7-2\sqrt{6}$, $y=6-2\sqrt{6}$. (1 pont)

b) Hány negatív egész számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség? b 7

$\log_4(3x+35)\leq 3$

M: A logaritmus miatt:

$$3x+35>0 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{35}{3}=-11{,}\dot{6}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Alakítsuk át a 3-at is 4-es alapú logaritmussá:

$$\log_4(3x-35)\leq 3=\log_4(4^3)=\log_4 64. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel az $f(x)=\log_4 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért egyrészt a logaritmus mindkét oldalon elhagyható, másrészt a reláció iránya nem változik. (1 pont)

Mindenképpen tartalmaznia kell a megoldásnak megfelelő utalást ezekre.

Így az egyenlőtlenség:

$$3x-35\leq 64, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$x\leq 33. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldásai: $x\in\left]-\frac{35}{3};33\right[$. (1 pont)

Ezek közül kell kiválasztanunk a negatív egészeket: $x\in\{-11;-10;\ldots;-1\}$,

11 negatív egész szám elégíti ki az egyenlőtlenséget. (1 pont) ö 14

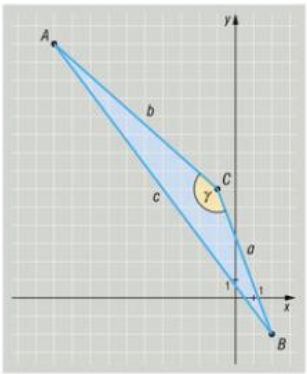
4 Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont:

$$A(-10;14), \quad B(2;-2) \quad \text{és} \quad C(-1;6).$$

a) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb belső szögét! a 6

M: I. megoldás

A pontokat ábrázolva az a sejtésünk, hogy a háromszög C csúcsánál tompaszög van, tehát ez a legnagyobb.



Legyen $ACB\sphericalangle=\gamma$.

Tekintsük a $\overrightarrow{CA}(-9;8)$ és $\overrightarrow{CB}(3;-8)$ vektorokat. (1 pont)

Ezek skalárszorzatára:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-9\cdot 3+8\cdot(-8)=-91.$$

(1 pont)

A skaláris szorzat negatív szám, tehát biztos, hogy γ tompaszög.*

A két vektor hossza:

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2} = \sqrt{145}, \quad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{3^2 + (-8)^2} = \sqrt{73}.$$ (1 pont)

A skalárszorzat definíciójából:

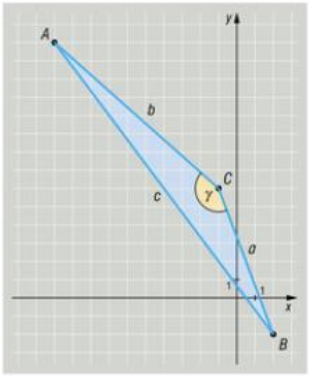
$$-91 = \sqrt{145} \cdot \sqrt{73} \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{-91}{\sqrt{145} \cdot \sqrt{73}}.$$ (2 pont)

A legnagyobb szög $\gamma \approx 152{,}19°$. (1 pont)*

Ennél nagyobb szöge nem lehet a háromszögnek.*

* A két megjegyzés közül valamelyiknek szerepelnie kell.

II. megoldás



A pontokat ábrázolva az a sejtésünk, hogy a háromszög C csúcsánál fekvő szög a legnagyobb.

Legyen $ACB\sphericalangle = \gamma$.

Az oldalak hosszait meghatározva, a koszinusztétel segítségével kiszámolhatjuk a háromszög összes szögét. (1 pont)

$$AC = \sqrt{(-9)^2 + 8^2} = \sqrt{145}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + (-8)^2} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$$

(1 pont)

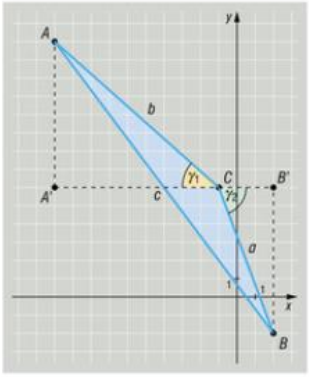
Nagyobb szög a nagyobb oldallal szemben található, tehát a sejtésünk helyes: a legnagyobb, vagyis az AB oldallal szemközti γ a legnagyobb szög. (1 pont)

A koszinusztételbe behelyettesítve:

$$400 = 145 + 73 - 2\sqrt{145} \cdot \sqrt{73} \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{182}{-2\sqrt{145} \cdot \sqrt{73}}.$$ (2 pont)

A legnagyobb szög $\gamma \approx 152{,}19°$. (1 pont)

III. megoldás



A pontokat ábrázolva az a sejtésünk, hogy a háromszög C csúcsánál tompaszög van, tehát ez a legnagyobb.

Legyen $ACB\sphericalangle = \gamma$.

Vegyük fel az A', B' pontokat.

A γ szöget felbonthatjuk γ_1 és $180° - \gamma_2$ részekre.

A', B'-re teljesül, hogy

(1) $C \in A'B' \parallel x$ tengely,

(2) $AA' \parallel BB' \parallel y$ tengely.

Az $AA'C$ háromszög derékszögű, így

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \approx 41{,}63°. \qquad \text{(1 pont)}$$

A $BB'C$ háromszög derékszögű, így

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \approx 69{,}44°. \qquad \text{(1 pont)}$$

Amiből $180° - \gamma_2 = 110{,}56°$. (1 pont)

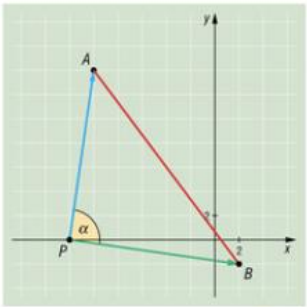
Ezekből $\gamma_1 + 180° - \gamma_2 = \gamma$, (1 pont)

$\gamma \approx 152{,}19°$. (1 pont)

Mivel ez tompaszög, valóban ez a háromszög legnagyobb szöge. (1 pont)

b) Határozza meg az x tengely azon pontjainak koordinátáit, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik! b 8

M: I. megoldás



Tekintsük az x tengely $P(x; 0)$ pontját és a belőle induló, A és B pontokba mutató vektorokat: $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$.

Azt szeretnénk elérni, hogy legyen

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Írjuk fel a két vektort:

$$\overrightarrow{PA}(-10 - x;\ 14),$$

$$\overrightarrow{PB}(2 - x;\ -2). \qquad \text{(1 pont)}$$

Két nemzéró vektor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0: (1 pont)

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-10 - x)(2 - x) + 14 \cdot (-2) = x^2 + 8x - 48 = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

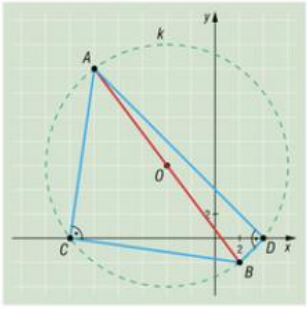
A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$, $x_2 = -12$. (1 pont)

A keresett pontok: $P_1(4; 0)$ és $P_2(-12; 0)$. (1 pont)

Ellenőrzés: A pontok helyességét ellenőrizhetjük a Pitagorasz-tétellel:

$$400 = 2 \cdot (2^2 + 14^2), \quad \text{illetve} \quad 400 = (14^2 + 14^2) + (2^2 + 2^2). \qquad \text{(1 pont)}$$

II. megoldás



Tekintsük az AB szakasz fölé írt Thalész-kört.

Ahol ez metszi az x tengelyt (C, D), azokban a pontokban a Thalész-tétel biztosítja a derékszög létezését. (1 pont)

Az AB mint átmérő fölé emelt kör egyenletét keressük.

AB hossza:

$$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20.$$

AB felezőpontja:

$$F_{AB}\left(\frac{-10+2}{2};\frac{14-2}{2}\right),$$

vagyis a kör középpontja:

$$O = F_{AB}(-4;\,6),$$

valamint a sugara

$$r = OB = \frac{AB}{2} = 10.$$ (1 pont)

Tehát a kör egyenlete:

$$(x+4)^2 + (y-6)^2 = 10.$$ (1 pont)

Ennek az x tengellyel vett metszéspontjait keressük:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ (x+4)^2 + (y-6)^2 &= 100 \end{aligned}\right\}.$$ (1 pont)

Behelyettesítve $y = 0$-t a második egyenletbe, majd rendezve:

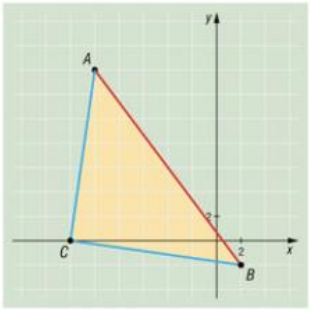
$$(x+4)^2 + (0-6)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 8x - 48 = 0.$$ (2 pont)

Ahonnan: $x_1 = 4$, $x_2 = -12$. (1 pont)

A keresett pontok: $P_1(4;\,0)$ és $P_2(-12;\,0)$. (1 pont)

III. megoldás

Olyan $C(x;\,0)$ pontokat keresünk az x tengelyen, amelyekre teljesül, hogy az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge derékszög.



Írjuk fel az oldalak hosszait:

$AB = 20$,

$AC = \sqrt{(-10-x)^2 + 14^2}$, (1 pont)

$BC = \sqrt{(2-x)^2 + 2^2}$. (1 pont)

A Pitagorasz-tételhez az oldalak négyzetösszegét felírva:

$$20^2 = (-10-x)^2 + 14^2 + (2-x)^2 + 2^2.$$ (1 pont)

Rendezve és összevonva:

$$x^2 + 8x - 48 = 0.$$ (2 pont)

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$, $x_2 = -12$. (1 pont)

A keresett pontok: $C_1(4;\,0)$ és $C_2(-12;\,0)$. (1 pont)

A pontok a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt megfelelnek a követelményeknek. (1 pont)

ö 14

1 ponttal kevesebb jár, ha hiányzik a Pitagorasz-tétel megfordítására való hivatkozás.

II. rész

5 Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5. A $\{b_n\}$ számtani sorozat első tagja 7, differenciája 0,5. A háromjegyű pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a számegyenesen valamely $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ értékre egyenlő távolságra van a_i-től és b_i-től? Válaszát tovább nem egyszerűsíthető $\frac{p}{q}$ alakban adja meg! a 9

M: A sorozatok elemei:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_i	4	9	**14**	19	24	29	**34**	39	…
b_i	7	7,5	**8**	8,5	9	9,5	**10**	10,5	…

Egy c szám a számegyenesen kétféleképpen lehet egyenlő távolságra az a és b számoktól:

(1) ha $a = b$, akkor c bármi lehet,

(2) ha $a \neq b$, akkor csak a számtani közepük: $c = \frac{a+b}{2}$. (1 pont)

Mivel a sorozatokban bármely indexre $a_i \neq b_i$, ($i > 1$-re $a_i > b_i$), ezért csak a második lehetőséget kell figyelembe vennünk. (1 pont)

Két egész szám számtani közepe pontosan akkor egész, ha paritásuk egyenlő.

Az $\{a_n\}$ sorozat minden páratlan tagja páros, a $\{b_n\}$ sorozatnak minden 4. eleme páros a 3.-tól kezdődően, a többi esetben nem azonos a paritásuk. (1 pont)

Mindkét sorozat n. eleme páros, ha $n = 4k + 3$ alakú ($k \in \mathbb{N}$). (1 pont)

Keressük azokat a k-kat, amelyekre a két elem számtani közepe háromjegyű (kedvező esetek):

$$100 \leq \frac{4 + (4k + 3 - 1) \cdot 5 + 7 + (4k + 3 - 1) \cdot 0{,}5}{2} \leq 999. \quad \text{(1 pont)}$$

Átalakítás után a kedvező esetekre kapjuk, hogy

$$100 \leq 11k + 11 \leq 999 \quad \Rightarrow \quad 8{,}\overline{09} \leq k \leq 89{,}\overline{81}, \quad \text{(1 pont)}$$

amiből

$$k = 9, 10, \ldots, 89. \quad \text{(1 pont)}$$

Az összes háromjegyű számok száma 900. (1 pont)

A valószínűség $P = \frac{81}{900}$, ami egyszerűsítés után $P = \frac{9}{100}$. (1 pont)

Adottak a szabályos n-szögek, ahol $n = 3, 4, 5, \ldots$

b) Igazolja, hogy nincs három olyan szabályos sokszög, melyek oldalszámai egymást követő számok, belső szögeik pedig fokban megadva mértani sorozatot alkotnak! b 7

M: Tételezzük fel indirekt úton, hogy valamely $n \geq 4$ egészre létezik három, a feltételeknek megfelelő $n - 1$, n, $n + 1$ oldalú szabályos sokszög. (1 pont)

Ezen szabályos n-szögek minden belső szöge

$$\frac{(n-3)\cdot 180^\circ}{n-1}, \quad \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \quad \text{és} \quad \frac{(n-1)\cdot 180^\circ}{n+1} \text{ fokos.}$$ (1 pont)

Mértani sorozatot pontosan akkor alkotnak, ha

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} : \frac{(n-3)\cdot 180^\circ}{n-1} = \frac{(n-1)\cdot 180^\circ}{n+1} : \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$ (1 pont)

180°-kal, majd $(n - 1)$-gyel egyszerűsítve:

$$\frac{(n-2)(n-1)}{n(n-3)} = \frac{(n-1)n}{(n+1)(n-2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-2)}{n(n-3)} = \frac{n}{(n+1)(n-2)}.$$ (1 pont)

Felszorozva és kifejtve:

$$(n-2)^2 \cdot (n+1) = n^2 \cdot (n-3) \quad \Rightarrow \quad 4 \neq 0.$$ (2 pont)

Ellentmondásra jutottunk, tehát ilyen n érték **nem létezik.** (1 pont) ö 16

6 A pozitív egész számokat egy végtelen táblázatba rendezzük a következőképp. A bal felső sarokba (az 1. oszlop 1. sorába) 1-es kerül. Ezután mindig a sorban következő egésztől egyesével növekedve kitöltjük a következő üres fordított L alakot. Ha a megkezdett L alak végére értünk, akkor a következő oszlop elejétől folytatjuk a kitöltést.

1	2	5	10	17	...
4	3	6	11	18	
9	8	7	12	19	
16	15	14	13	20	
25	24	23	22	21	
...					...

a) Adja meg, hányadik oszlop hányadik sorában található a 76! a 3

M: I. megoldás

Az átlóban levő számokra teljesül, hogy:

$$\mathbf{1}, \quad 1 + 2 = \mathbf{3}, \quad 1 + 2 + 4 = \mathbf{7}, \quad 1 + 2 + 4 + 6 = \mathbf{13}, \quad \ldots$$ (1 pont)

$1 + 2 + 4 + \ldots + 16 = \mathbf{73}$, ami a 9. oszlop 9. sorában van. (1 pont)

Tőle 3-at előre lépve találjuk a 76-ot. Tehát a 76 helye a **9. sor 6. oszlopa.** (1 pont)

II. megoldás

(A *b)* kérdés alapján tudjuk, hogy) az első oszlopban négyzetszámok vannak. (1 pont)

A 76 utáni első négyzetszám a 81, ami a 9. sor 1. oszlopában van. (1 pont)

Innen vízszintesen 5-öt lépve találjuk a 76-ot. Tehát a **9. sor 6. oszlopában** van. (1 pont)

b) Igazolja, hogy az első oszlopban csak négyzetszámok szerepelnek, és minden négyzetszám ott található! b 5

M: I. megoldás

Minden cella négyzet alakú, és egyetlen számot tartalmaz. (1 pont)

Minden L alak négyzetet formáz a nála kevesebb cellából álló L alakokkal: ha n darab L alakot rakunk össze, akkor n^2 darab cellánk van. (1 pont)

(Az L alak mindkét szára ugyanannyi cellából áll.)

A számokat 1-től kezdve, sorban egymás után írjuk be a cellákba. (1 pont)

A legutolsó (legnagyobb) szám mindig a bal alsó cellába kerül, és mivel n^2 cella van, négyzetszám lesz. (1 pont)

Máshol viszont nem lehet négyzetszám, hiszen a következő L alakot véve, a négyzetek oldala 1-gyel növekszik. (1 pont)

Ezzel **az állítást igazoltuk.**

II. megoldás

Ismert, hogy az első n darab páratlan szám összege n^2.

Ebből következik, hogy a páratlan számok összegeként az összes négyzetszám előállítható. (1 pont)

Azt állítjuk, hogy az n-edik L alak mezőinek száma az n-edik páratlan szám.

Ennek igazolására az L alakok sorszáma (n) szerinti teljes indukciót alkalmazunk. (1 pont)

(1) Ha $n = 1 \Rightarrow$ 1 az első páratlan szám, az állítás igaz.

(2) Tegyük fel, hogy $n = k$-ra az állítás igaz: a k-adik L alak mezőinek száma $2k + 1$. (1 pont)

(3) Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e.

Tekintsük az ábrát!

Minden L alakot eltolva a sarkai mentén a következőbe, két újabb cella jelenik meg:

$$2k + 1 + 2 = 2k + 3,$$

tehát **az állítás igaz.** (1 pont)



A kitöltés módja miatt a legnagyobb szám a bal alsó cellába, vagyis az első oszlopba kerül. (1 pont)

Megjegyzés: Fentivel analóg módon bizonyítható a páratlan számok összegére vonatkozó állítással együtt az L alakokra vonatkozó állítás is. Természetesen a pontok arra is járnak.

c) Határozzon meg egy $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az n-edik oszlop n-edik sorában található számot (az átló n. elemét) adja meg! c 8

M: I. megoldás

Olyan függvényt kell készítenünk, amely az n pozitív egészhez hozzárendeli a táblázat n-edik oszlopának n-edik sorában található számot. Ezt a számot jelöli $f(n)$.

A táblázatból leolvasható, hogy

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 7, \quad f(4) = 13, \quad f(5) = 21.$$ (1 pont)

Észrevehetjük, hogy

$$f(2) = 3 = 2^2 - 1, \quad f(3) = 7 = 3^2 - 2, \quad f(4) = 13 = 4^2 - 3.$$ (1 pont)

Az ebből megfogalmazható sejtés:

$$f(n) = n^2 - (n - 1) = n^2 - n + 1.$$ (1 pont)

A sejtést bizonyítjuk n szerinti teljes indukcióval. (1 pont)

(1) $n = 1$-re $f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$.

(2) Tegyük fel, hogy $n = k$-ra az átló k-adik cellájának eleme $f(k) = k^2 - k + 1$. (1 pont)

(3) Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e.

Tekintsük az ábrát! Bármely $2k - 1$ mezőből álló L alak sarkától a következő sarokig $(k - 1)$-et lépünk a sor végéig, majd $(k + 1)$-et a következő L alak oszlopában: (1 pont)

$$f(k + 1) = f(k) + k - 1 + k + 1 = k^2 + k + 1 =$$
$$(k + 1)^2 - (k + 1) + 1.$$ (2 pont)

1	2	5	10	17	...
4	3	6	11	18	
9	8	7	12	19	
16	15	14	13	20	
25	24	23	22	21	
...					...

A sejtésünket igazoltuk, vagyis **a keresett függvény: $f(n) = n^2 - n + 1$.**

II. megoldás

Olyan függvényt kell készítenünk, amely az n pozitív egészhez hozzárendeli a táblázat n-edik oszlopának n-edik sorában található számot. Ezt a számot jelöli $f(n)$.

A táblázatból leolvasható, hogy

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 7, \quad f(4) = 13, \quad f(5) = 21.$$ (1 pont)

Sejtésként megfogalmazhatjuk, hogy

$$f(2) = 1 + 2, \quad f(3) = 1 + 2 + 4, \quad f(4) = 1 + 2 + 4 + 6.$$ (1 pont)

A sejtést bizonyítsuk a tagok száma szerinti teljes indukcióval. (1 pont)

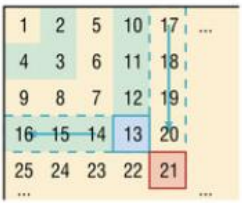
(1) $n = 1$-re $f(1) = 1$, $n = 2$-re $f(2) = 1 + 2$.

(2) Tegyük fel, hogy $n = k$-ra az átló k-adik cellájának eleme:

$$f(k) = 1 + 2 + \ldots + 2(k - 1).$$ (1 pont)

(3) Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e.

Tekintsük az ábrát! Bármely $2k - 1$ mezőből álló L alak sarkától a következő sarokig $(k - 1)$-et lépünk a sor végéig, majd $(k + 1)$-et a következő L alak oszlopában:



$$f(k + 1) = f(k) + k - 1 + k + 1 = f(k) + 2k.$$ (1 pont)

Adjuk meg végül zárt alakban $f(k)$ értékét:

$$f(k) = 1 + 2 + \ldots + 2(k - 1) = 1 + 2(1 + 2 + \ldots + k - 1).$$ (1 pont)

Az első $(k - 1)$ pozitív egész összegét tudjuk, így a keresett függvény:

$$f(k) = 1 + 2 \cdot \frac{(k-1)k}{2} = k^2 - k + 1.$$ (2 pont) ö 16

7 Egy használtautó-kereskedő minden autót három kategória valamelyikébe sorol attól függően, hogy mennyit hajlandó engedni a kiírt árból: 10, 15 vagy 20 százalékot. A két kisebb engedményű járművek száma együtt kétszer annyi, mint ahány legnagyobb engedményű autója van. A 10%-os és 15%-os járművek számának aránya eggyel nagyobb, mint a 20%-os és a 15%-os autók számának aránya. A kereskedőnek 90 járműve van.

a) Számítsa ki, hány autóra alkudhat a betérő vevő 15%-os kedvezményt! a 7

M: Jelölje a 10%, 15%, 20% kategóriájú járművek számát x, y, z. Az utolsó megjegyzés alapján:

$$x + y + z = 90.$$

A második mondat alapján:

$$x + y = 2z.$$

A harmadik mondat alapján:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{y} + 1 \quad \Rightarrow \quad x = z + y.$$

Készítsünk egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 90 \\ x + y &= 2z \\ x &= z + y \end{aligned}\right\}.$$ (3 pont)

A harmadik egyenletből az elsőbe $y + z$ helyére x-et írva:

$$2x = 90 \quad \Rightarrow \quad x = 45.$$ (1 pont)

A másodikból az elsőbe $x + y$ helyére $2z$-t írva:

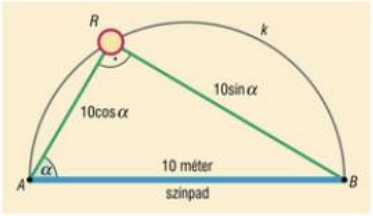
$$3z = 90 \quad \Rightarrow \quad z = 30,$$ (1 pont)

innen pedig a keresett 15%-os kedvezményű autók száma $y = 15$. (1 pont)

Ellenőrzés: (1) $45 + 15 + 30 = 90$, (2) $45 + 15 = 2 \cdot 30$, (3) $45 = 30 + 15$. (1 pont)

Egy 10 méter széles AB színpadon olyan színdarabot próbálnak, amely egy nap történéseit mutatja be. Ehhez a fővilágosító egy AB átmérőjű félkör alakú acélvázat (k) emel a színpad hátulján, és azon vezet körbe egy R reflektort, ezzel jelképezve a Nap mozgását. A reflektort az acélváz A és B pontjából induló AR és BR kötelekkel mozgatják.

b) Határozza meg azt az α szöget, amelyre a reflektort mozgató kötelekből a legtöbb látható a színpadon (α az AR kötéldarabnak a színpad síkjával bezárt szöge)! b 9



M: Tekintsük az ábrát:

$\alpha = RAB\sphericalangle, \quad 0° < \alpha < 90°.$

A kötél h hossza függ az α szögtől:

$h(\alpha) = RA + RB.$ (1 pont)

Thalész tétele miatt az RAB háromszög derékszögű. (1 pont)

Így az RAB háromszög két befogója:

$RA = 10\cos\alpha \quad$ és $\quad RB = 10\sin\alpha,$ (1 pont)

amiből

$h(\alpha) = 10\cos\alpha + 10\sin\alpha = 10(\cos\alpha + \sin\alpha).$ (1 pont)

Azt az α értéket keressük, amelyre a kötél hossza a legnagyobb.

$h(\alpha)$ szélsőértéke ott lehet, ahol az első deriváltja 0 értéket vesz fel:

$h'(\alpha) = 10(-\sin\alpha + \cos\alpha) = 0.$ (2 pont)*

Átalakítva:

$\sin\alpha = \cos\alpha \ (\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1).$ (1 pont)*

A feltétel miatt ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha = 45°$. (1 pont)

Ez valóban maximum, hiszen

$h''(45°) = 10(-\cos 45° - \sin 45°) < 0.$ (1 pont)** ö 16

(A reflektor ekkor középen helyezkedik el, a delet szimbolizálja.)

Megjegyzések:

A *-gal jelölt pontok járnak, ha $h(\alpha)$-t az addíciós tételek alapján

$$h(\alpha) = 10(\cos\alpha + \sin\alpha) =$$

$$= \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) = \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot (\sin\alpha + 45°)$$

alakba írja, majd a $\sin(\alpha + 45°) = 1$ egyenletet kielégítő értékekből határozza meg a feltételeknek megfelelő megoldásokat.

A **-gal jelölt pont jár akkor is, ha az első derivált alapján határozza meg a szélsőérték létezését és típusát.

8 Évi mindennap fut valamennyit. Múlt héten mindennap egész kilométereket futott csak: az egyes napokon lefutott kilométereinek módusza 4, mediánja 6, átlaga ezektől különböző, terjedelme pedig 13. Azt is tudjuk, hogy volt két nap, amikor pontosan annyi egész kilométert futott, mint a heti átlag.

a) Hány kilométert futott a múlt héten Évi? a 6

M: A hét elemből a középső 6:

$$_\ _\ _\ 6\ _\ _\ _.$$ (1 pont)

Ha az A-val jelölt átlag kétszer szerepel az adatok között, de ez nem egyezik meg a módusszal, akkor a módusz 3 van:

$$4\ 4\ 4\ 6\ _\ _\ _.$$ (1 pont)

Mivel a terjedelem 13, ezért a legnagyobb elem $4 + 13 = 17$:

$$4\ 4\ 4\ 6\ _\ _\ 17.$$ (1 pont)

A maradék két helyre az A átlagnak kell kerülnie a szöveg alapján (hiszen az átlag nem egyezik meg a mediánnal sem). Az átlag:

$$\frac{4+4+4+6+A+A+17}{7} = A \quad \Rightarrow \quad 35 = 5A, \text{ tehát } A = 7.$$ (2 pont)

Évi összesen $7 \cdot 7 = \mathbf{49\ km\text{-}t}$ futott a héten. (1 pont)

Egy urnában összesen 1000 darab golyó van. Mindegyik golyó vagy piros, vagy zöld színű. Az 1000 golyóból véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztunk 5-öt.

b) Hány piros golyó lehet az urnában, ha az A esemény valószínűsége nagyobb, mint a B esemény valószínűsége? b 7

A esemény: *a kiválasztott golyók közül 1 piros.*

B esemény: *a kiválasztott golyók közül 3 piros.*

M: Jelölje p az urnában levő piros golyók számát, $0 < p < 1000$. Így $1000 - p$ darab zöld golyó van. (1 pont)

A kérdezett események valószínűségei:

$$P(A) = \binom{5}{1} \cdot \frac{p}{1000} \cdot \left(\frac{1000-p}{1000}\right)^4,$$ (1 pont)

$$P(B) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{p}{1000}\right)^3 \cdot \left(\frac{1000-p}{1000}\right)^2.$$ (1 pont)

A felírt valószínűségekkel, illetve 5-tel egyszerűsítve:

$$P(A) > P(B) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1000-p}{1000}\right)^2 > 2 \cdot \left(\frac{p}{1000}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1000-p)^2 > 2p^2.$$ (2 pont)

Mindkét oldalon pozitív mennyiségek vannak, gyököt vonhatunk:

$$1000 - p > \sqrt{2} \cdot p \quad \Rightarrow \quad p < \frac{1000}{1+\sqrt{2}} \approx 414{,}2.$$ (1 pont)

(Ha kifejti és megoldja a másodfokú egyenlőtlenséget, az is megfelelő.)

Tehát legfeljebb **414 darab** piros golyó lehet az urnában, ha az A esemény valószínűsége nagyobb. (1 pont)

c) Egy urnában 100 golyó van, ebből 42 piros, a többi zöld. Az előző feladat A és B eseményei közül melyik következhet be többféleképpen, ha **visszatevés nélkül** választunk ki 5 golyót? c 3

M: A eseményre vezető esetek száma:

$$\binom{42}{1}\cdot\binom{58}{4} = 17\,819\,340. \quad \text{(1 pont)}$$

B eseményre vezető esetek száma:

$$\binom{42}{3}\cdot\binom{58}{2} = 18\,976\,440. \quad \text{(1 pont)}$$

A ***B* esemény** többféleképpen következhet be. (1 pont) ö 16

9 Tekintsük egy szabályos tizenkétszög összes átlóját. Az átlók közül kiválasztunk véletlenszerűen négyet.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott átlók két szomszédos csúcsból indulnak ki! a 6

M: Jelölje a szabályos 12-szög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$.

Mivel minden csúcshoz 9 átló kapcsolódik, ezért egy 12-szögnek összesen $\frac{12\cdot 9}{2} = 54$ átlója van. (1 pont)

Közülük négyet ennyiféleképpen választhatunk ki (az összes esetek száma):

$$\binom{54}{4} = 316\,251. \quad \text{(1 pont)}$$

Szomszédos csúcsokat 12-féleképp választhatunk:

$$A_1 \text{ és } A_2,\ A_2 \text{ és } A_3,\ \ldots,\ A_{12} \text{ és } A_1. \quad \text{(1 pont)}$$

Ha mindkét csúcshoz 2 átló kapcsolódik a négyből (szomszédos csúcsokhoz nem kapcsolódhatnak közös átlók):

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{9}{2} = 1296. \quad \text{(1 pont)}$$

Ha az egyikhez 1, a másikhoz 3 átló kapcsolódik a négyből vagy fordítva:

$$2\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{9}{3} = 1512. \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett valószínűség:

$$P = \frac{12(1296+1512)}{316\,251} = \frac{33\,696}{316\,251} \approx 0{,}1065. \quad \text{(1 pont)}$$

Egy rönkhasító gép nagyjából minden 20. rönköt csak legalább másodjára repeszt el (tekinthetjük úgy, hogy a gép minden rönköt $\frac{19}{20}$ valószínűséggel hasít el egyből). Szombaton délelőtt szeretnénk 150 rönköt elhasítani vele.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy legalább 3 rönköt nem sikerül elsőre elrepeszteni! b 5

M: A „legalább 3 rönk" jelen esetben lehet 3, 4, 5, …, 150 darab; ezért érdemes áttérni a komplementerre: 0, 1, 2 darab rönk.

Az, hogy egy rönk elsőre elhasad, $p = \frac{19}{20} = 0{,}95$ valószínűségű esemény.

Ennek komplementere $1 - p = 0{,}05$.

Visszatevéses mintavétellel (binomiális eloszlással) számolunk, mert a hasadás ismétlődő esemény. (1 pont)

A valószínűségeik rendre (a szám azt jelöli, mennyi nem hasad el elsőre):

$$P(0) = 0{,}95^{150} \approx 0{,}0005, \quad \text{(1 pont)}$$

$$P(1) = \binom{150}{1} \cdot 0{,}95^{149} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0036, \quad \text{(1 pont)}$$

$$P(2) = \binom{150}{2} \cdot 0{,}95^{148} \cdot 0{,}05^2 \approx 0{,}0141. \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett valószínűség:

$$P(\text{legalább 3}) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) \approx 1 - 0{,}0182 = \mathbf{0{,}9818}.$$

(1 pont)

Egy hétpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, és kékre színezzük őket.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kék él nem alkot három él hosszúságú kört! (Egy kör hosszán az őt alkotó élek számát értjük.) c 5

M: Egy hétpontú teljes gráfnak $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ éle van. (1 pont)

Közülük 3-at ennyiféleképpen választhatunk ki (az összes esetek száma):

$$\binom{21}{3} = 1330. \quad \text{(1 pont)}$$

Kört akkor alkotnak, ha hárompontú teljes gráfot hoznak létre. (1 pont)

A kedvező esetek száma így annyi, ahányféleképpen kiválaszthatunk a hét pontból 3-at:

$$\binom{7}{3} = 35. \quad \text{(1 pont)}$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P = \frac{35}{1330} \approx 0{,}0263. \quad \text{(1 pont)}$$

ö 16

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

I. rész

1 *a)* Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget! a 4

$\lg|x| < 2$

M: Tegyünk kikötést:

$$|x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$ (1 pont)

Írjuk át a 2-t 10-es alapú logaritmus alakba:

$$\lg|x| < \lg 100.$$ (1 pont)

Az $f(x) = \lg x$ függvény szigorúan monoton, (1 pont)

ezért a feltétellel együtt tekintve $0 < |x| < 100$, amiből

$$x \in]-100; 0[\cup]0; 100[.$$ (1 pont)

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! b 7

$3^{2x} + 3^x - 3^{x+2} = 9$

M: A hatványozás azonosságait alkalmazva és rendezve, az egyenlet 3^x-ben másodfokú:

$$(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0.$$ (2 pont)

Megoldásai: $3^x_1 = 9$ és $3^x_2 = -1$. (1 pont)

Mivel a $g(x) = 3^x$ függvény értékkészlete $\mathbb{R}^+$, ezért $3^x \neq -1$. (1 pont)

A $g(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton, (1 pont)

ezért $3^x = 9 = 3^2$, amiből

$$x = 2.$$ (1 pont)

Ellenőrzés: $3^{2\cdot 2} + 3^2 - 3^{2+2} = 81 + 9 - 81 = 9$. (1 pont) ö 11

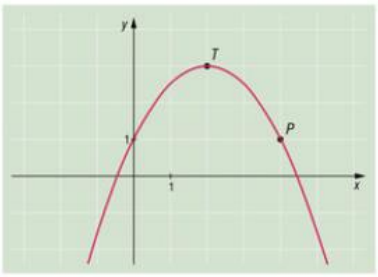
2 *a)* Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabolagörbéről tudjuk, hogy tengelypontja a $T(2; 3)$ pont, és a görbe áthalad a $P(4; 1)$ ponton. Határozza meg a parabola egyenletét! a 6

M: I. megoldás

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a pontokat.

Keressük a megoldást a következő alakban:

$$y = a(x - u)^2 + v.$$ (1 pont)



A tengelypont helyzete miatt az eltolások:

$$y = a(x-2)^2 + 3.$$ (1 pont)

P koordinátáit behelyettesítve az a értékére adódik:

$$1 = a(4-2)^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$ (1 pont)

A transzformációs lépésekkel felírt parabola egyenlete:

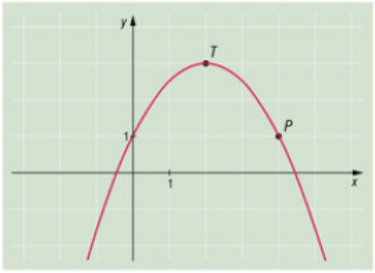
$$y = -\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2 + 3.$$ (1 pont)

Ezt kifejtve, majd az egyenletet összevonva kapjuk, hogy:

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x + 1.$$ (2 pont)

II. megoldás

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a pontokat.



A görbe átmegy a $P(4; 1)$ és $T(2; 3)$ pontokon:

$$1 = 16a + 4b + c,$$
$$3 = 4a + 2b + c.$$ (1 pont)

Egy 3. egyenletre is szükség van.

A görbét megadó függvénynek a tengelypontban szélsőértéke van (maximum), ezért (Fermat tétele értelmében) az $y' = 2ax + b$ deriváltja az $x = 2$ helyen 0:

$$0 = 2\cdot a\cdot 2 + b.$$ (1 pont)

A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 16a + 4b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ 4a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$ (3)-ból $b = -4a$, illetve vonjuk ki (1)-ből (2)-t: (2 pont)

$$-2 = 12a + 2b = 12a - 8a = 4a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$ (1 pont)

Visszahelyettesítés után megkapjuk b-t és c-t, így

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x + 1.$$ (1 pont)

Adott a papíron egy n (> 1) pontú üres gráf (nincsenek benne élek). A következő játékot játsszuk: minden lépésben felveszünk a papíron egy új pontot, és azt összekötjük két másik, már meglévő ponttal.

b) Határozza meg azt a legkisebb lépésszámot, ami után (a megfelelő lépéseket lépve) a gráf összefüggővé válhat! b 6

M: Minden lépésben a pontok száma eggyel, az élek száma kettővel nő. (1 pont)

Minden lépésben új pont jelenik meg. Az új élek ezt az új pontot kötik össze már meglévő pontokkal, így nem lehetnek sem többszörös, sem hurokélek, ebből következően a gráf egyszerű. (1 pont)

A legkevesebb élszámú összefüggő gráf a fa.

Egy n pontú fának $n - 1$ éle van. (1 pont)

k lépés után a pontok száma $n + k$, az élek száma $2k$. (1 pont)

Azt kell elérni, hogy

$$n + k - 1 = 2k \quad \Rightarrow \quad n - 1 = k. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát legalább $n - 1$ megfelelő lépés szükséges, hogy a gráf összefüggő lehessen. (1 pont) ö 12

3 *a)* A 20 és az x pozitív valós szám számtani és harmonikus közepének eltérése 4,5. Határozza meg x értékét! a 7

M: 20 és x (> 0) számtani közepe $\frac{20 + x}{2}$,

harmonikus közepük $\frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{x}} = \frac{40x}{20 + x}$. (1 pont)

A számtani közép nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közép, (1 pont)

így

$$\frac{20 + x}{2} = \frac{40x}{20 + x} + 4{,}5. \qquad \text{(1 pont)}$$

Felszorozva:

$$(20 + x)^2 = 80x + 9(20 + x). \qquad \text{(1 pont)}$$

Összevonva és rendezve:

$$x^2 - 49x + 220 = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

A megoldások: $x_1 = 44$ és $x_2 = 5$. (1 pont)

Ellenőrzés: $x = 44$: $\frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{44}} = 27{,}5$ és $\frac{20 + 44}{2} = 32$,

$x = 5$: $\frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 8$ és $\frac{20 + 5}{2} = 12{,}5$. (1 pont)

b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás! Válaszát indokolja! b 3

Ha $x \geq 20$, akkor a 20-nak és az x-nek a harmonikus közepe biztosan kisebb a két szám számtani közepénél.

M: Mivel $x \geq 20$, ezért lehetséges, hogy $x = 20$. (1 pont)

Két szám bármely két nevezetes közepe pontosan akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő. (1 pont)

Mivel a két érték lehet egyenlő, ezért az állítás **nem igaz.** Nem biztos, hogy a harmonikus közép kisebb a számtani középnél. (1 pont)

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását a pozitív valós számok halmazán! Változtassa meg úgy a megfordított állítás következményét, hogy az állítás igazzá váljon! c 4

M: A megfordított állítás:

Ha (a pozitív) x és 20 harmonikus közepe biztosan kisebb, mint a számtani közepe, akkor $x \geq 20$. (1 pont)

A „ha A, akkor B" típusú állításban a következmény B. (1 pont)

Bármely két nevezetes közép pontosan akkor nem egyenlő, ha az értékek sem egyenlők. (1 pont)

Ha (a pozitív) x és 20 harmonikus közepe biztosan kisebb, mint a számtani közepe, akkor $x \neq 20$. (1 pont) ö 14

(Más megfogalmazás is lehet: $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{20\}$, vagy pl. $x > 20$.)

4 Egy pénzintézet p%-os kamatlábú THM-mel (THM: teljes hiteldíj mutató, egy évre vonatkozik) hirdeti a tőle felvehető hiteleket. A q kamattényezőt p-ből a $q = 1 + \frac{p}{100}$ képlettel kapjuk. A hitelösszeget C (tőke, Ft), az éves egyenlő összegű törlesztést A (annuitás, Ft), a futamidőt n (év) jelöli a képletben, amely a közöttük levő összefüggést írja le: $C \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. A havi annuitást úgy kapjuk meg, ha az évest egyenlően elosztjuk a 12 hónapra: $A_{\text{havi}} = \frac{A}{12}$.

a) Mekkora (forintra kerekített) összeget vehetünk fel 5 éves futamidőre, ha a THM 18% és havonta legfeljebb 50 ezer forintot tudunk visszafizetni? a 4

M: $n = 5$. Ha $p = 18\%$, akkor $q = 1{,}18$. (1 pont)*

Mivel $A_{\text{havi}} = 50\,000$, ezért $A = 600\,000$. (1 pont)*

Behelyettesítve a képletbe:

$$C \cdot 1{,}18^5 = 600\,000 \cdot \frac{1{,}18^5 - 1}{1{,}18 - 1}.$$ (1 pont)

Innen a felvehető hitelösszeg **$C = 1\,876\,303$ Ft.** (1 pont)

b) Felvettünk egy 4 millió forintos hitelt 20%-os THM-re, amelyet 10 év alatt tervezünk visszafizetni. Határozza meg a havi törlesztőrészlet értékét! b 5

M: $C = 4\,000\,000$, $n = 10$. (1 pont)*

$p = 20$, amiből $q = 1{,}2$. (1 pont)*

Behelyettesítve a képletbe:

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}2^{10} = A \cdot \frac{1{,}2^{10} - 1}{1{,}2 - 1}.$$ (1 pont)

Innen $A = 954\,091$ (Ft). (1 pont)

Amiből a havi törlesztőrészlet: $A_{\text{havi}} = 79\,508$ Ft. (1 pont)

Már épp el is kezdenénk a 4 millió forintos hitel törlesztését, de ekkor az utolsó pillanatban külső tényezők miatt egyéves hitelmoratóriumot hirdetnek ki. A moratórium alatt, ha élünk a lehetőséggel, semmit nem kell fizetnünk – ám a kamatokat ugyanúgy számolja a hitelt folyósító bank, hiszen a pénze már nálunk van. Ez a moratórium lejártával megnöveli a fizetendő összeget.

c) Számítsa ki, hány forintra nő a havi törlesztőrészlet, ha a hitelszerződés lejáratának dátuma nem változik! c 5

M: Az egy év alatt 20%-ot emelkedik a visszafizetendő összeg:

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}2 = 4\,800\,000.$$ (1 pont)*

$C = 4\,000\,000$, $q = 1{,}2$.

A futamidő 10 év, de abból egy év eltelik a moratóriummal, így az eredeti szerződés végéig 9 év marad ténylegesen a hitel visszafizetésére. (1 pont)*

Behelyettesítve a képletbe:

$$4\,800\,000 \cdot 1{,}2^{9} = A \cdot \frac{1{,}2^{9} - 1}{1{,}2 - 1}.$$ (1 pont)

Innen $A = 1\,190\,781$ (Ft). (1 pont)

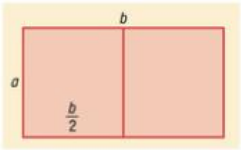
Amiből a havi törlesztőrészlet: $A_{\text{havi}} = 99\,232$ Ft. (1 pont) ö 14

* *A jelölt pontok járnak, ha ezen gondolatok kiderülnek a megoldás során.*

II. rész

5 *a)* Egy $0 < a < b$ oldalú téglalapot a hosszabb oldalának felezőpontjában, az oldalra merőleges vágással kettévágunk. Határozza meg a téglalap oldalai közötti összefüggést, ha a keletkezett téglalap hasonló az eredetihez! a 4

M: A rajzban a feladat szövege szerint $0 < a < b$.



A hosszabb oldalt felezzük. (1 pont)

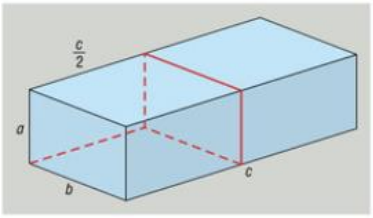
Két téglalap hasonló, ha a megfelelő oldalaik aránya egyenlő: (1 pont)

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{a} \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = b^2.$$ (1 pont)

Ebből $b = a \cdot \sqrt{2}$. (1 pont)

b) Egy $0 < a < b < c$ élű téglatestet a leghosszabb élének felezőpontjában, az élre merőleges síkkal kettévágunk. Határozza meg a téglatest oldalai közötti összefüggést, ha a keletkezett téglatest hasonló az eredetihez! b 12

M: Tekintsük az ábrát. (1 pont)



A $\frac{c}{2}$ él a hosszúsága szerint lehet

A) $0 < a < b < \frac{c}{2}$,

B) $0 < a < \frac{c}{2} < b$,

C) $0 < \frac{c}{2} < a < b$. (1 pont)

Ha két téglatest hasonló, akkor megfelelő éleik aránya egyenlő (ezért a félbevágott test élei között sem lehetnek egyenlők). (1 pont)

Ebből adódóan *A)*-t rögtön ki is zárhatjuk, hiszen

$$a : b : c \neq a : b : \frac{c}{2}.$$ (1 pont)

B) esetben $a : b : c = a : \frac{c}{2} : b$, amiből például

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b = c.$$ (1 pont)

Ez ellentmond a $b < c$ feltételnek, tehát *B)*-t is kizárjuk. (1 pont)

C) esetben $a : b : c = \frac{c}{2} : a : b$, amiből például

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{a} \\ \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 2a^2 = bc \\ b^2 = ac \end{array}\right\}.$$ (2 pont)

Az egyenleteket elosztva egymással, majd felszorozva:

$$2a^3 = b^3 \quad \Rightarrow \quad b = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$ (2 pont)

Visszahelyettesítünk $b^2 = ac$-be, ahonan: $c = a \cdot (\sqrt[3]{2})^2$. (2 pont) ö 16

6 Adott az f és g függvény:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x - 2 \quad \text{és} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 4.$$

a) Számítsa ki az $f(g(x))$ összetett függvény zérushelyeit! a 3

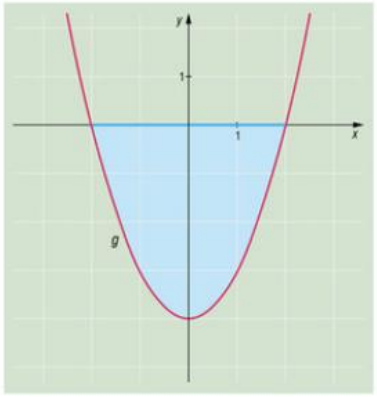
M: Mindkét függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, így $D_{f(g(x))} = \mathbb{R}$. (1 pont)

$$f(g(x)) = 0{,}5(x^2 - 4) - 2 = 0{,}5x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8.$$ (1 pont)

A zérushelyek: $x_1 = 2\sqrt{2}$ és $x_2 = -2\sqrt{2}$. (1 pont)

b) Számítsa ki a g függvény és az x tengely közé zárt véges síkidom területét! b 7

M: A függvény egy normál állású, függőlegesen a negatív irányba eltolt parabola. Az x tengellyel vett zárt véges síkidom a zérushelyek között alakul ki. (1 pont)*



Meg kell határoznunk a $g(x)$ zérushelyeit:

$$g(x) = x^2 - 4 = 0,$$

amiből $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. (1 pont)

Mivel a görbe szimmetrikus az y tengelyre (a függvény páros), ezért elegendő 0-tól 2-ig venni a határozott integrálját, és azt szorozni kettővel. (1 pont)

Mivel az x tengely alatti részt számolunk, ezért a terület mérőszámához az integrál értékének abszolút értékét kell vennünk. (1 pont)*

* *A jelölt pontok járnak, ha ezen gondolatok kiderülnek a megoldás során.*

Keressük meg a primitív függvényét, és alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$T = \left|2 \cdot \int_0^2 (x^2 - 4)\,dx\right| = \left|2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2\right| = 2 \cdot \left|\frac{8}{3} - 8\right| = \quad \text{(2 pont)}$$

$$= \frac{32}{3} \text{ területegység.} \quad \text{(1 pont)}$$

c) Számítással igazolja, hogy a $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ függvény szigorúan monoton növő a $[8; \infty[$ intervallumon! c 6

M: Ha az első deriváltja pozitív $[8; \infty[$-n, akkor a függvény szigorúan monoton növő $[8; \infty[$-n. (1 pont)

$h(x) = f(x) \cdot g(x) = (0{,}5x - 2)(x^2 - 4) = 0{,}5x^3 - 2x^2 - 2x + 8.$ (1 pont)

$h'(x) = 1{,}5x^2 - 4x - 2.$ (1 pont)

$h'(x)$ zérushelyei: $x_1 \approx 3{,}1$ és $x_2 \approx -0{,}43.$ (1 pont)

$h'(x)$ egy felfelé nyíló parabola, tehát a két zérushelyén kívül pozitív:

$$h'(x) > 0, \text{ ha } x \in I =]-\infty; x_2[\cup]x_1; \infty[.$$ (1 pont)

Mivel $x_1 < 8$, ezért $[8; \infty[\subset I$, így ott a $h(x)$ függvény szigorúan monoton növő. (1 pont) ö 16

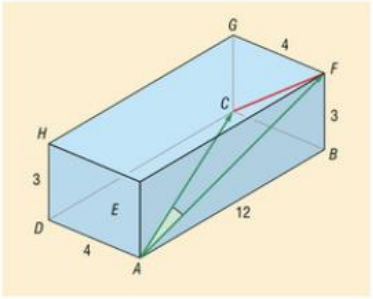
7 *a)* Az $ABCDEFGH$ téglatestben a 6

$AD = BC = EH = GF = 4$ cm, $\quad AE = BF = CG = DH = 3$ cm,

$AB = EF = GH = DC = 12$ cm.

Adja meg az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatának pontos értékét!

M: Tekintsük az ábrát!



A kérdezett skalárszorzat:

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos CAF\sphericalangle.$$

(1 pont)*

* Ha kiderül a megoldás során, a pont jár.

A vektorok hosszai:

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}.$$

(1 pont)

A skalárszorzatot megkapjuk az ACF háromszögben CF-re felírt koszinusztételből, hiszen $AF = |\overrightarrow{AF}|$ és $AC = |\overrightarrow{AC}|$.

A tételhez szükséges a harmadik oldal: $CF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. (1 pont)

(Természetesen a koszinusztételből kiszámítható a szög is, csak úgy nem pontos értékhez jutunk.)

$$25 = 153 + 160 - 2 \cdot |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos CAF\sphericalangle.$$ (1 pont)

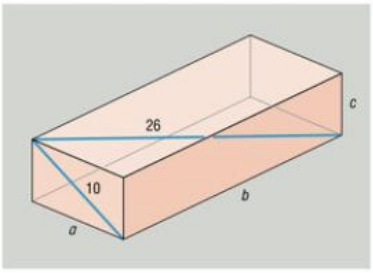
A kérdezett skalárszorzat:

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25 - (153 + 160)}{-2} = \mathbf{144}.$$ (2 pont)

János nemrég vett egy téglatest alakú dobozkát, amelyre egyik oldalának szemközti sarkai közé vékony díszítő csíkot ragasztott. A csík hossza 10 cm. Sajnos a doboz méreteit elfelejtette, ám arra emlékszik, hogy legalább két különböző éle centiméterben mérve egész szám hosszúságú. Talált egy 26 cm hosszú hurkapálcát, ami pont elfért a dobozka szemközti sarkai között átlósan.

b) Határozza meg a feltételeknek megfelelő nem egybevágó dobozok számát! **b 10**

M: Tekintsük az ábrát!



A feladat szövege alapján ismerjük az egyik oldallap átlóját és a testátlót: 10 és 26 cm.

Azt is tudjuk, hogy a, b, c közül legalább kettő $\in \mathbb{Z}^+$. (1 pont)*

* Ha kiderül a megoldás során, a pont jár.

A testátló:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26^2.$$ (1 pont)

Az oldallap átlóját hozzávéve:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 100 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 676 \end{aligned}\right\}.$$ (2 pont)

Az első egyenletből a másodikba helyettesítve: $b^2 = 576$. (1 pont)

Innen $b = 24$ cm. (A b oldal hossza egész szám.) (1 pont)

Ha még egy oldalnak (például a-nak) egésznek kell lennie, akkor arra igaz, hogy $a^2 < 100$. (1 pont)

Ilyen a (> 0) érték lehet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (1 pont)

Azonban a 6 és 8 egymás párjai, ezért nem adnak különböző testeket. (1 pont)

($6^2 + 8^2 = 100$.)

A feltételeknek megfelelő, nem egybevágó téglatestek száma **8.** (1 pont) ö 16

8 Az érettségiző Dani és egyetemista nővére, Ági nagyjából egyszerre végeztek a vizsgáikkal, majd amikor találkoztak, elmesélték egymásnak az élményeiket. A beszélgetés során kiderült, hogy Áginak hat vizsgája volt, mindegyikre egy hétnél kevesebbet, de egy napnál többet készült, és hogy két vizsga kivételével mindegyikre különböző számú napot tanult. Azt is tudjuk, hogy az egyes vizsgáira fordított napok számának módusza megegyezik az átlagukkal.

a) Számítsa ki Ági egyes vizsgákra való felkészülési napjai számának szórását! a 5

M: Ha egy napnál többet, de egy hétnél kevesebbet készült, akkor 2, 3, 4, 5, 6 napot készülhetett csak. (1 pont)

Ezek közül mindegyiknek szerepelnie is kell, hiszen csak így lehet kettő kivételével mind különböző. (1 pont)

Amelyik közülük kétszer szerepel, az (a módusz és) az átlag.

A szimmetrikus 2, 3, **4**, 5, 6 mintában ez csak a 4 lehet. (1 pont)

Tehát a számok: 2, 3, 4, 4, 5, 6, az átlag $A = \frac{24}{6} = 4$. (1 pont)

A számok szórása:

$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2}{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}29.$$ (1 pont)

Adott az $f(x) = \log_a(x + 7) + 1$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ paraméter.

b) Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Az a paraméter mely értékeire monoton növő, illetve csökkenő a függvény? b 3

M: $D_f =]-7; \infty[$. (1 pont)

$R_f = \mathbb{R}$. (1 pont)

Ha $a > 1$, akkor a függvény **szigorúan monoton növő.**

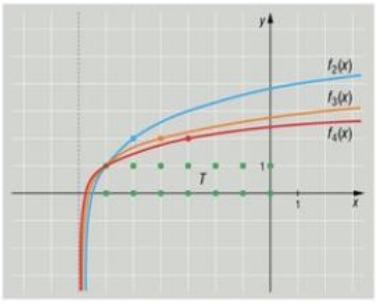
Ha $0 < a < 1$, akkor a függvény **szigorúan monoton csökkenő.** (1 pont)

Az $a \geq 2$ paraméter a továbbiakban egész számot jelöl. Tekintsük az $f(x)$ függvény görbéje és a tengelyek által határolt véges, zárt T síkidomba eső rácspontokat (egész koordinátájú pontokat).

c) Határozza meg, hogy az a paramétert növelve annak melyik értékétől kezdődően nem változik a T síkrészbe eső rácspontok száma! (A zárt síkidom határoló vonalai a síkidomhoz tartoznak.) c 8

M: Ábrázoljunk néhány függvényt! **(2 pont)**

$$f_2(x) = \log_2(x + 7) + 1$$
$$f_3(x) = \log_3(x + 7) + 1$$
$$f_4(x) = \log_4(x + 7) + 1$$



Mivel mindegyik függvényre $a > 1$, ezért minden vizsgált

$$f_a(x) = \log_a(x + 7) + 1$$

függvény szigorúan monoton növő. **(1 pont)**

Mivel minden függvény áthalad a $(-6; 1)$ ponton, ezért az összes T síkrész a-tól függetlenül tartalmazni fogja az $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$ és $y \in \{0; 1\}$ koordinátájú $P(x; y)$ pontokat. **(1 pont)**

(Ezeket jelöltük zölddel.)

A transzformált logaritmusfüggvény tulajdonsága, hogy az $x = -7$ (szaggatott) vonaltól a távolságra metszi el az $y = 2$ egyenest $M(-7 + a; 2)$ pontban. (Például $a = 2$ esetén $M(-5; 2)$, $a = 3$ esetén $M(-4; 2)$ stb.) **(1 pont)**

Ezek a pontok mindig csak egy adott a értékig belső pontjai T-nek. **(1 pont)**

Mi – épp fordítva – azt keressük, hogy melyik a értéktől változatlan a rácspontok halmaza.

Az $M(0; 2) \in T$ ponton $a = 7$ értékre halad át az

$$f_7(x) = \log_7(x + 7) + 1 \text{ függvény.} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $a > 7$ egész szám, akkor az $f_a(x) = \log_a(x + 7) + 1$ függvény által határolt T tartomány már csak a zöld pontokat tartalmazza. **(1 pont)** ö 16

9 Egy 10 cm oldalú szabályos hatszög minden második csúcsánál található belső szögét azonos körüljárás szerint harmadolták.

a) Bizonyítsa be, hogy a szögszárak metszéspontjai által alkotott PQR háromszög szabályos! a 5

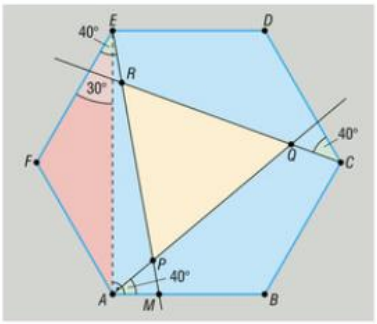
M: I. megoldás

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

A szabályos hatszög belső szögei 120°-osak és AFE háromszög egyenlő szárú, ezért

$$AEP\sphericalangle = 40° - \frac{180° - 120°}{2} = 10°.$$ **(1 pont)**

A hatszög szabályosságából adódóan $AE \perp AB$, ezért az EMA háromszög derékszögű. **(1 pont)**



Mivel $AEM\sphericalangle = 10°$ és $EAM\sphericalangle = 90°$, így $EMA\sphericalangle = 80°$. (1 pont)

Az APM háromszögben

$$APM\sphericalangle = 180° - (40° + 80°) = 60° = RPQ\sphericalangle,$$

mert csúcsszögek. (1 pont)

Ugyanígy adódik a $PQR\sphericalangle$ és $PRQ\sphericalangle$ szögekre is. Tehát a PQR háromszög **szabályos.** (1 pont)

II. megoldás

A szabályos hatszög az O középpontja körül 60°-os forgásszimmetriával rendelkezik. (1 pont)

A 120° többszöröse a 60°-nak, így a szabályos hatszög 120°-os O körüli forgásszimmetriával is rendelkezik. (1 pont)

Az A pontot és minden belőle induló vonalat 120°-os, O körüli forgatás visz C-be, illetve egy újabb O körüli 120°-os forgatás E-be. (1 pont)

Mivel P, Q, R pontok ezen vonalak metszéspontjai, így O pont körüli 120°-os forgásszimmetriával, tehát **szabályos háromszöget** alkotnak. (2 pont)

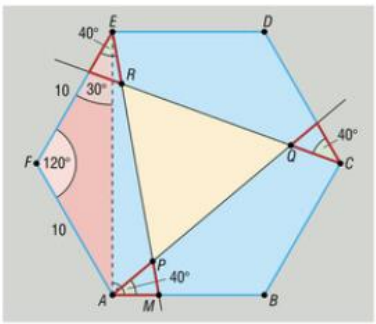
b) Határozza meg a szabályos PQR háromszög oldalainak hosszát egész centiméter pontossággal! b 11

M: Tekintsük az ábrát!

A PQR háromszög szabályos.

A sötétpirossal jelölt kis háromszögek egybevágók (a forgásszimmetria miatt például).

Az AFE háromszög egyenlő szárú, $FEA\sphericalangle = 30°$. (2 pont)



AE hossza a koszinusztételből kiszámítható:

$$AE^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 100 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad AE = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$ (1 pont)

(Kiszámítható a 10 oldalú szabályos háromszög magasságából is.)

EM, AM hosszát a derékszögű EAM háromszögből megkapjuk, ugyanis

$$AEM\sphericalangle = 40° - 30° = 10°.$$ (1 pont)

(Lásd az előző részben.)

Ezt felhasználva:

$$EM = \frac{10\sqrt{3}}{\cos 10°} \approx 17{,}59\ (\text{cm}),$$ (1 pont)

$$AM = 10\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 10° \approx 3{,}05\ (\text{cm}).$$ (1 pont)

Tudjuk a sötétpiros kis APM háromszög AM oldalát és szögeit:

$$PAM\sphericalangle = 40°, \quad PMA\sphericalangle = 80°, \quad APM\sphericalangle = 60°.$$ (1 pont)

Szinusztétellel:

$$\frac{PM}{3{,}05} = \frac{\sin 40°}{\sin 60°} \quad \text{és} \quad \frac{AP}{3{,}05} = \frac{\sin 80°}{\sin 60°}.$$ (2 pont)

($AP = ER$)

Innen $PM \approx 2{,}26$ és $AP \approx 3{,}47$, így

$$EM - (PM + AP) \approx 17{,}59 - (2{,}26 + 3{,}47) = 11{,}86.$$ (1 pont)

A PQR háromszög oldalainak hossza kerekítve **12 cm.** (1 pont) ö 16

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

I. rész

1 *a)* Oldja meg a $]-2\pi; 0]$ halmazon az egyenletet! a 6

$2\cos^2 x - \sin x = 2$

M: Tudjuk, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, amiből $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Behelyettesítve:

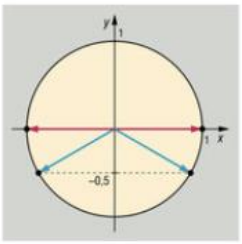
$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2\sin^2 x + \sin x. \qquad \text{(1 pont)}$$

Szorzattá alakítva:

$$0 = \sin x(2\sin x + 1) \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0 \text{ vagy } \sin x = -\frac{1}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $\sin x = 0$, akkor

$$x = 0 + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(1 pont)}$$



Ha $\sin x = -\frac{1}{2}$, akkor

$$x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi, \text{ ahol } l \in \mathbb{Z}$$

vagy

$$x = -\frac{5\pi}{6} + m2\pi, \text{ ahol } m \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezek közül a kérdezett intervallumba négy megoldás esik:

$$x \in \{-\pi; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; 0\}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ellenőrzés:

$x = -\pi$: $2\cos^2(-\pi) - \sin(-\pi) = 2 - 0 = 2.$

$x = -\frac{5\pi}{6}$: $2\cos^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2.$

$x = -\frac{\pi}{6}$: $2\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2.$

$x = 0$: $2\cos^2(0) - \sin(0) = 2 - 0 = 2.$ (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! a 6

$\log_3(x - 2) - \log_3 x = 2$

M: A logaritmus miatt $x - 2 > 0$ és $x > 0$, így a közös rész $x > 2$. A logaritmus azonosságai alapján:

$$\log_3 \frac{(x-2)}{x} = 2. \qquad \text{(1 pont)}$$

A 2-t a logaritmus definíciója alapján átírhatjuk:

$$\log_3 \frac{(x-2)}{x} = \log_3 9. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az $f(x) = \log_3 x$ függvény szigorúan monoton (bijektív, kölcsönösen egyértelmű, egy értéket egy helyen vesz fel), ezért: (1 pont)

$$\frac{(x-2)}{x} = 9.$$ (1 pont)

Felszorozva, majd rendezve: $x = -0{,}25$. (1 pont)

Ellenőrzés: Mivel az $x = -0{,}25$ nem felel meg a logaritmus miatti $x > 2$ feltételnek, így a feladatnak **nincs megoldása.** (1 pont) ö 12

2 Bergengócia repterén tegnap 9 óra 50 perckor az alábbi indulási időpontokat jelző tábla fogadta az utasokat:

Indulás	Cél	Járat	Terminál	Státusz	Idő
7:30 AM	BUD	MA–2277	A3	Felszállt	7:35 AM
8:35 AM	MIL	BA–3930	C1	Felszállt	8:42 AM
8:40 AM	YTO	LU–6320	C2	Felszállt	8:45 AM
8:56 AM	BHX	SX–2257	A2	Felszállt	9:10 AM
9:10 AM	SOL	MA–3124	C6	Felszállt	9:12 AM
9:17 AM	DEB	BA–776	A1	Felszállt	9:17 AM
9:30 AM	LHR	TF–3210	A7	Felszállt	9:50 AM
9:45 AM	LTN	BA–1145	C3	Várakozik	
9:47 AM	LUN	LU–121	C1	Felszállt	9:47 AM
9:55 AM	SAT	FX–856	A3	Várakozik	

a) Felszállhatott-e úgy a két még várakozó repülőgép, hogy a késések átlaga 5 percen belül maradjon? Válaszát indokolja! a 3

M: 9:50 perckor a késések átlaga, ha a BA–1145 járat ebben a pillanatban 5 perc késéssel, az FX–856 járat pedig időben, azaz 0 perc késéssel felszáll:

$$A = \frac{5+7+5+14+2+0+20+5+0+0}{10} = \frac{58}{10} = 5{,}8.$$ (1 pont)

Mivel bármilyen további késés az átlagot növeli, (1 pont)

a válasz **nem.** (1 pont)

b) Mikor az utolsó két gép is felszállt, a kijelzőn megjelentek az időpontok. Kiderült, hogy az egész percben mért késések átlaga nem haladta meg a 6 percet, valamint a késéseknek egyetlen módusza volt. Adja meg az összes, feltételeknek megfelelő késést (egész percben) a két még várakozó gép esetében! b 6

M: Jelölje X a BA–1145 járat 5 percen túli, Y pedig az FX–856 járat késését egész percben, $X, Y \geq 0$.

$$A = \frac{5+7+5+14+2+0+20+(5+X)+0+Y}{10} = \frac{58+X+Y}{10} \leq 6.$$

(1 pont)

Innen $X + Y \leq 2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség lehetséges megoldásai és ellenőrzésük:

$X = 2$, $Y = 0$; ekkor a módusz(ok): 0 (3 db) $\Rightarrow$ megfelelő;

$X = 1$, $Y = 1$; ekkor a módusz(ok): 0, 5 (2-2 db) $\Rightarrow$ nem megfelelő;

$X = 0$, $Y = 2$; ekkor a módusz(ok): 5 (3 db) $\Rightarrow$ megfelelő. (3 pont)

A megoldások:

a BA–1145 járat 7 percet és az FX–856 járat 0 percet késik,

vagy

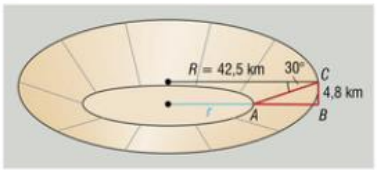
a BA–1145 járat 5 percet és az FX–856 járat 2 percet késik.

(1 pont)

Bergengócia repteréről a legkülönbözőbb földi és naprendszerbeli célpontokra indulnak járatok. A Holdon az egyik legkedveltebb turistalátványosság a Tycho-kráter, amelynek felszíni átmérője 85 km, mélysége 4800 m. Tételezzük fel, hogy a kráter csonkakúp alakú, melynek alkotói 30°-os szöget zárnak be a felszín síkjával.

c) Számítsa ki a Tycho-kráter térfogatát egész köbkilométerre kerekítve! c 4

M: Készítsünk ábrát!



A csonkakúp felszíni sugara:

$$R = \frac{85}{2} = 42{,}5 \text{ (km)}.$$

Az ABC háromszög derékszögű. (1 pont)

A $CAB\sphericalangle = 30°$, mivel váltószögek a jelölt 30°-kal. Innen

$$AB = \frac{4{,}8}{\text{tg}\,30°} \approx 8{,}314 \text{ (km)}.$$ (1 pont)

A csonkakúp alsó sugara:

$$r = R - AB = 42{,}5 - 8{,}314 = 34{,}186 \text{ (km)}.$$ (1 pont)

A csonkakúp térfogata:

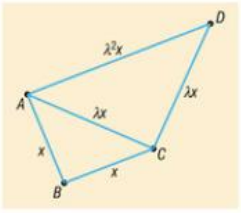
$$V_{csk} = \frac{4{,}8\pi}{3} \cdot (42{,}5^2 + 42{,}5 \cdot 34{,}186 + 34{,}186^2) \approx 22\,256{,}74 \text{ km}^3,$$

azaz a kráter térfogata egészre kerekítve **22 257 km³.** (1 pont) ö 13

3 Egy szurikátacsalád új kotorékot keres magának. Találnak is egymáshoz közel négy lehetséges odúnak való helyet, ezeket jelölik az A, B, C, D pontok. Egy arra járó vadász messziről figyelve őket megállapítja, hogy a BAD töröttvonal hossza 10,25 méter, a BCD töröttvonalé pedig 9 méter. Kicsivel később azt is megfigyeli, hogy $AB = CB$, $CA = DC$, valamint az ABC és az ACD háromszög hasonló.

a 8

a) Határozzuk meg az ábrán berajzolt szakaszok hosszait!



M: Tekintsük az ábrát. $ABC\triangle \sim ACD\triangle$, jelölje a hasonlóság arányát λ (> 0).

Legyen $AB = BC = x$.

ABC és ACD háromszög egyenlő szárú.

Mivel AC az ABC háromszög alapja és az ACD háromszög szára is egyben, ezért

$$AC = \lambda x \quad \Rightarrow \quad AD = \lambda(\lambda x). \qquad \text{(1 pont)}$$

A szöveg alapján a BAD töröttvonal hossza 10,25:

$$x + \lambda^2 x = 10{,}25.$$

A szöveg alapján a BCD töröttvonal hossza 9:

$$x + \lambda x = 9.$$

Egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda^2 x &= 10{,}25 \\ x + \lambda x &= 9 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az első és a második egyenletből kifejezzük x-et:

$$x = \frac{10{,}25}{1+\lambda^2} = \frac{9}{1+\lambda}, \qquad \text{(2 pont)}$$

amiből az alábbi, λ-ban másodfokú egyenletet kapjuk:

$$0 = 9\lambda^2 - 10{,}25\lambda - 1{,}25. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ennek megoldásai:

$$\lambda_1 \neq -\frac{1}{9} \ (\lambda > 0) \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 1{,}25. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen a keresett szakaszok hossza:

$$x = \frac{9}{1+\lambda} = 4 \text{ m} = AB = BC, \quad AC = AD = 5 \text{ m} \quad \text{és} \quad AD = 6{,}25 \text{ m}.$$

(1 pont)

Megjegyzés: A feladat megoldható az arány jelölése nélkül is.

Ha $AB = BC = x$, akkor

$$CD = AC = 9 - x \ (> 0) \quad \text{és} \quad AD = 10{,}25 - x \ (> 0).$$

Így felírható a $\frac{9-x}{x} = \frac{10{,}25-x}{9-x}$ egyenlet, amit átrendezve az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2x^2 - 28{,}25x + 81 = 0.$$

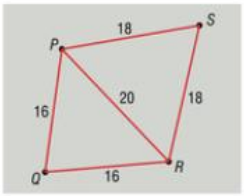
Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$ és $x_2 = 10{,}25$. Utóbbi azonban nem teljesíti a $9 - x > 0$ feltételt.

A szurikáták egy kilométerrel arrébb találtak egy nagyobb kiterjedésű $PQRS$ konvex négyszöget alkotó lyukhálózatot, amelyben $PQ = QR = 16$ m, $PR = 20$ m, $RS = PS = 18$ m. Most a $PQRS$ négyszögön belül szaladgálva próbálják eldönteni, hogy melyik lyukat alakítsák ki lakóhelynek.

b) Mekkora területen futkároznak? Válaszát egész négyzetméterre kerekítve adja meg! b 4

M: I. megoldás

Tekintsük az ábrát. A PQR és PRS háromszögek oldalait ismerjük. Az ismert oldalakra alkalmazzuk Heron képletét:



$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

ahol s a háromszög kerületének fele. (1 pont)

$$T_{PQR} = \sqrt{26 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10} \approx 124{,}900 \text{ (m}^2\text{)}. \quad \text{(1 pont)}$$

$$T_{PRS} = \sqrt{28 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10} \approx 149{,}666 \text{ (m}^2\text{)}. \quad \text{(1 pont)}$$

Mivel $124{,}900 + 149{,}666 = 274{,}566$, ezért kerekítve

$$T_{PQRS} = 275 \text{ m}^2. \quad \text{(1 pont)}$$

II. megoldás

A PQR és PRS háromszögek egyenlő szárúak, így az alaphoz tartozó nevezetes vonalaik egybeesnek. (1 pont)

Pitagorasz tételéből a háromszögek alaphoz tartozó magasságai:

$$m_{PQR} = \sqrt{16^2 - 10^2} = \sqrt{156} \quad \text{és} \quad m_{PRS} = \sqrt{18^2 - 10^2} = \sqrt{224}. \quad \text{(1 pont)}$$

Innen a területeikre:

$$T_{PQR} = \frac{20 \cdot \sqrt{156}}{2} \approx 124{,}900 \text{ (m}^2\text{)},$$

$$T_{PRS} = \frac{20 \cdot \sqrt{224}}{2} \approx 149{,}666 \text{ (m}^2\text{)}. \quad \text{(1 pont)}$$

Mivel $124{,}900 + 149{,}666 = 274{,}566$, ezért kerekítve

$$T_{PQRS} = 275 \text{ m}^2. \quad \text{(1 pont)}$$ ö 12

Megjegyzés: Alkalmazhatunk más területképletet is: $T = \frac{x \cdot y \cdot \sin\gamma}{2}$.

Az ehhez szükséges szögeket meghatározhatjuk például koszinusztételből:

$$20^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \cos PQR\sphericalangle,$$

és

$$20^2 = 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \cos PSR\sphericalangle,$$

vagy az egyenlő szárú háromszögeket derékszögű háromszögekre bontva szögfüggvényekből:

$$\sin\left(\frac{PQR\sphericalangle}{2}\right) = \frac{10}{16} \quad \text{és} \quad \sin\left(\frac{PSR\sphericalangle}{2}\right) = \frac{10}{18}.$$

Mindkét számításból $PQR\sphericalangle \approx 77{,}364°$ és $PSR\sphericalangle \approx 67{,}498°$.

4 *a)* Döntse el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! a 3

Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak legalább 7 éle van, akkor összefüggő.

M: I. megoldás

Egy ötpontú teljes gráfnak már $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ éle van. (1 pont)*

(6 pontú teljes gráf is megfelel a gondolathoz.)

Ha a hét él mindegyike az ötpontú teljes gráf élei közül való, akkor van két pont, amelyekhez nem rajzoltunk élt, vagyis ezek izolált pontok. (1 pont)*

Ha egy gráf tartalmaz izolált pontot, akkor nem összefüggő, **az állítás tehát hamis.** (1 pont)

** A feltételeknek megfelelő ellenpélda rajzolása esetén járnak a pontok.*

II. megoldás

Indirekt úton elindulva tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Az állítás egy „ha A, akkor B" ($A \Rightarrow B$) következtetés, amelynek a tagadása „A és nem B" ($A \wedge \neg B$). (1 pont)

Azaz létezik olyan *hétpontú egyszerű gráf, amelynek legalább hét éle van ÉS nem összefüggő.* (1 pont)

Ilyen gráfra tudunk példát mutatni (körben összekötünk hat pontot és még egy élt közöttük behúzunk, így egy pont izolált, a gráf nem összefüggő), tehát **az állítás hamis.** (1 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a hétpontú egyszerű gráfokra, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! b 4

M: A megfordított állítás:

Ha egy hétpontú egyszerű gráf összefüggő, akkor legalább 7 éle van. (1 pont)

A minimális élszámú, még összefüggő gráf a fa. (1 pont)*

Egy fának eggyel kevesebb éle van, mint ahány pontja, tehát egy hétpontú fának 6 éle van. (1 pont)*

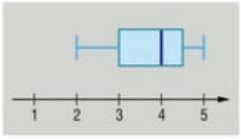
Hat él tehát elegendő, hogy egy hétpontú gráf összefüggő legyen, a megfordított állítás is **hamis.** (1 pont)

** A feltételeknek megfelelő ellenpélda rajzolása esetén is járnak a pontok.*

Ádám a legutóbbi matematikadolgozatát dicséretes ötösre írta meg, de csoporttársai már nem annyira remekeltek, ők az alábbi jegyeket kapták:

1, 3, 5, 4, 2, 1, 4, 3, 1.

A másik csoportba járók eredményeiről készült a következő dobozdiagram:



c) Készítsen Ádám csoportjának eredményeiről is dobozdiagramot, és hasonlítsa össze az eredményeket a diagramok alapján! c 6

M: Dobozdiagramot rangsorba rendezett adatok alapján lehet könnyen készíteni. A rangsor Ádám ötösét is beleértve az *A* csoportban a következő:

1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5.

A dobozdiagramhoz szükség van a mediánra, ami páros sok (10) elem esetén a két középső elem átlaga, azaz 3. (1 pont)

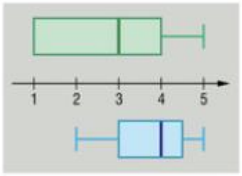
A doboz két szélét az első és harmadik kvartilisek adják, ezek 10 elem esetén a 3. és a 8. elem:

$$Q_1 = 1, \quad Q_3 = 4.$$

A diagram alsó és felső értékét a minimum és a maximum adja, ezek ebben az esetben:

$$\min = Q_1 = 1, \quad \max = 5.$$ (1 pont)

A fentiek alapján az *A* csoport eredményeit bemutató (zöld) diagram: (2 pont)



A *B* csoport (kék) diagramját is mellé téve leolvasható, hogy megközelítőleg

- a *B*-s tanulók fele szerzett 4-est vagy 5-öst, míg az *A* csoport tanulóinak negyede;
- a *B*-s tanulók negyede 2-es vagy 3-as jegyet szerzett, míg az *A*-soknál csak egyest;
- a *B*-sek átlaga körülbelül 4, az *A*-soké 3 (pontosan 2,9);
- a *B*-ben – az átlaghoz hasonlóan – a legrosszabb eredmény eggyel jobb.

(2 pont)* ö 13

* *Legalább három szempont szerinti összehasonlításért jár a 2 pont.*

II. rész

5 A távoli jövőben egy távoli bolygón egy értékes ásványt bányásznak majd, amelyet a bányában kitermelt kőzetből kémiai tisztítással nyernek ki. A kibányászott kőzet értékét egyetlen tulajdonság határozza meg: az, hogy az adott ásvány kristályából mennyi található benne (a kristály adott mintabeli darabszáma megfelelő géppel meghatározható). A kristály „sűrűségét" az $x \in \mathbb{R}_0^+$ változó írja le, amely azt adja meg, hogy 1 kg kőzetben megközelítőleg $1000 \cdot x$ db kristály található. Egy kilogramm kitermelt kőzet piaci árát az $a(x) = \frac{1}{16}x^3 + 1$ összefüggés írja le *pe* pénzegységben. Az x mértékegysége $\frac{1000\ \text{db}}{\text{kg}}$, az $a(x)$ mértékegysége $\left(\frac{\text{pe}}{\text{kg}}\right)$.

a) Számítsa ki az x változó értékét két tizedesjegy pontossággal arra az 5 kg-os kőzetmintára, amelyben 7560 darab kristályt találtak! a 3

M: Adott sűrűségű ásvány tömege egyenes arányban van a benne lévő kristályok mennyiségével (a sűrűség állandó). (1 pont)

Ha 5 kg ásványban 7560 darab kristály van, akkor 1 kg ásványban:

$$\frac{y}{7560} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad y = 1512 \text{ darab.}$$ (1 pont)

1 kg-ban $1000x = 1512$ a kristályok száma, így $x = 1{,}512$, ez két tizedesre kerekítve

$$x = 1{,}51 \frac{1000 \text{ db}}{\text{kg}}.$$ (1 pont)

b) Ha egy 3 kg-os kőzetminta 2430 pénzegységbe került, akkor hány kristály található benne (egészre kerekítve)? b 5

M: Ha a 3 kg-os kőzetminta 2430 pe, akkor ebből 1 kg 810 pe. (1 pont)

Behelyettesítve:

$$810 = \frac{1}{16}x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 12\,944.$$ (1 pont)

Harmadik gyököt vonva:

$$x = 23{,}47953 \frac{1000 \text{ db}}{\text{kg}}.$$ (1 pont)

Tehát 1 kg-ban 23 479,53 (db), (1 pont)

így egészre kerekítve a 3 kg-os kőzetmintában **70 439 darab** kristály található. (1 pont)

c) Egy mintában 16 000 darab kristályt találtak. Hány kilogrammos minta esetén fizetik a piacon a legkevesebbet ezért a mintáért? c 8

M: Jelölje m a minta tömegét kilogrammban:

$$16\,000 = 1000 \cdot x \cdot m,$$ (1 pont)

$$x = \frac{16}{m}.$$ (1 pont)

1 kg kőzet piaci ára:

$$a(x) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{16}{m}\right)^3 + 1.$$ (1 pont)

Ebből m kilogramm árát jelölje

$$b(x) = m \cdot a(x) = \frac{256}{m^2} + m.$$ (1 pont)

Keressük $b(x)$ minimumát. Ehhez deriváljuk egyszer:

$$b'(x) = -\frac{512}{m^3} + 1.$$ (1 pont)

Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0:

$$b'(x) = -\frac{512}{m^3} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 8.$$ (2 pont)

A második deriválttal igazoljuk, hogy a megfelelő minta valóban $m = 8$ kg-os:

$b''(x) = \frac{1536}{m^4} > 0$ minden pontban, ahol értelmezve van, $m = 8$-ban is. (1 pont) ö 16

Megjegyzés: A szélsőérték létezését vizsgálhatja csak az első deriválttal is:

$$m < 8 \Rightarrow b'(x) < 0 \quad \text{és} \quad m > 8 \Rightarrow b'(x) > 0.$$

6 Jelöljük $\overline{\overline{abc}}$-vel a $100a + 10b + c$ számot, amely lehet három-, kettő- vagy egyjegyű is: $a, b, c \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.

a) Határozza meg a p számjegy lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön az (1) és (2) tulajdonság is! a 6

(1) A $\overline{\overline{2p7}} \cdot \overline{\overline{p35}}$ szorzat osztható 3-mal.

(2) A $\overline{\overline{14p}} + \overline{\overline{p80}}$ összeg osztható 12-vel.

M: (1) vizsgálata: Egy szorzat akkor osztható hárommal, ha legalább egy tényezője osztható hárommal.

Egy szám pontosan akkor osztható hárommal, ha jegyeinek összege osztható 3-mal: (1 pont)

$$3 \mid \overline{\overline{2p7}}, \quad \text{ha} \quad p \in \{0; 3; 6; 9\},$$

vagy

$$3 \mid \overline{\overline{p35}}, \quad \text{ha} \quad p \in \{1; 4; 7\}, \qquad \text{(1 pont)}$$

azaz $p \in \{0; 3; 6; 9\} \cup \{1; 4; 7\} \Rightarrow p \in \{0; 1; 3; 4; 6; 7; 9\}$.

(2) vizsgálata: Egy szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és osztható 4-gyel.

Egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből alkotott szám osztható 4-gyel. (1 pont)

Végezzük el az összeadást!

$$\begin{array}{r} 1\,4\,p \\ +\,p\,8\,0 \\ \hline (p+2)\,2\,p \end{array} \qquad \text{(1 pont)}$$

A 12-vel való oszthatóságból:

$$3 \mid \overline{\overline{(p+2)2p}} \ (3 \mid 2p + 4), \quad \text{ha} \quad p \in \{1; 4; 7\}$$

és

$$4 \mid \overline{\overline{2p}}, \quad \text{ha} \quad p \in \{0; 4; 8\}, \qquad \text{(1 pont)}$$

azaz $p \in \{1; 4; 7\} \cap \{0; 4; 8\} \Rightarrow p \in \{4\}$.

Az (1) tulajdonságra a megoldás: $p \in \{0; 1; 3; 4; 6; 7; 9\}$.

A (2) tulajdonságra a megoldás: $p = 4$.

Tehát a feladatnak egyetlen megoldása van, a $p = 4$. (1 pont)

Megjegyzés: Ha minden számjegyet végigpróbál és megállapítja, hogy melyik jó vagy sem, a pontok akkor is járnak. Ha csak a páros számokat próbálja végig és megmagyarázza, hogy p miért nem lehet páratlan, a pontok akkor is járnak.

b) Igazolja, hogy nincs olyan n (> 2) egész szám, amelyre $n^2 - 2n - 2$ osztható 8-cal! b 4

M: Alakítsuk át szorzattá:

$$n^2 - 2n - 2 = n(n - 2) - 2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha n páratlan, akkor a kifejezés páratlan, tehát az eredeti összeg 8-cal nem osztható. (1 pont)

Ha n páros, akkor n és $n-2$ közül az egyik páros, a másik 4-gyel osztható, így $8 \mid n(n-2)$. (1 pont)

Ám az utolsó tag -2, amelynek **nem osztója a 8,** így **az eredeti összegnek sem.** (1 pont)

c) Igazolja, hogy $6^n + n^2 - 2n$ osztható 5-tel, ha az n pozitív egész szám utolsó jegye 1. c 6

M: Ha az n egész szám utolsó jegye 1, akkor $n = 10k + 1$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$. (1 pont)

$6^n = (5+1)^n$, a binomiális tétel miatt a zárójelet kifejtve minden tag osztható 5-tel, kivéve az utolsót, ami 1. (1 pont)

Tehát a 6^n szám $5p + 1$ alakú ($p \in \mathbb{Z}^+$). (1 pont)

Másrészt

$$n^2 = (10k+1)^2 = 100k^2 + 20k + 1,$$

vagyis n^2 is $5q + 1$ alakú ($q = 20k^2 + 4k \in \mathbb{Z}^+$). (1 pont)

Továbbá $2n = 20k + 2$, vagyis a $2n$ szám $5r + 2$ alakú ($r = 4k \in \mathbb{Z}^+$). (1 pont)

A fentieket összegezve kapjuk, hogy:

$$6^n + n^2 - 2n = 5p + 1 + 5q + 1 - (5r + 2) = 5(p + q - r).$$ (1 pont) ö 16

Tehát a kifejezés **osztható 5-tel.**

Megjegyzés: A feladat megoldható teljes indukcióval, de bonyolultabb átalakításokkal. Az indukciós feltétel: $5 \mid 6^{10k+1} + (10k+1)^2 - 2(10k+1)$. Ekkor

$6^{10(k+1)+1} + [10(k+1)+1]^2 - 2[10(k+1)+1] =$

$6^{10} \cdot 6^{10k+1} + [(10k+1)+10]^2 - 2[(10k+1)+10] =$

$6^{10} \cdot 6^{10k+1} + (10k+1)^2 + 18(10k+1) + 80 =$

$6^{10} \cdot [6^{10k+1} + (10k+1)^2 - 2(10k+1)] - (6^{10} - 1)(10k+1)^2 + 2(6^{10} + 9)(10k+1) + 80.$

A zöld kifejezés az indukciós feltevés miatt osztható 5-tel. A piros kifejezések esetén a $6^{10} + 9$, illetve a $6^{10} - 1$ tényezők 5-tel oszthatók, ugyanis 6 minden hatványa 6-ra végződik, így a 9-cel nagyobb, illetve az 1-gyel kisebb számok 5-re végződnek.

7 Tekintsük az alábbi, konvergens sorozatokra vonatkozó állítást:

Ha egy konvergens sorozatra igaz, hogy határértéke egész szám, akkor a sorozat minden tagja egész szám.

a) Állapítsa meg, hogy igaz vagy hamis az állítás! a 3

M: Ha tudunk ellenpéldát mondani, akkor azzal igazoljuk az állítás hamis voltát. (1 pont)

Legyen az $\{a_n\}$ sorozat a következő: $a_n = \frac{1}{n}$. (1 pont)

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 0, tehát egész szám, azonban az első tagot kivéve egyik tagja sem egész szám. Tehát **az állítás hamis.** (1 pont)

b) Fogalmazza meg a konvergens sorozatokra vonatkozó fenti állítás megfordítását, és arról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Állítását indokolja! b 4

M: Az állítás megfordítása:

Ha egy konvergens sorozatra igaz, hogy minden tagja egész szám, akkor a határértéke is egész szám. (1 pont)

A feltétel szerint a sorozat konvergens, jelölje határértékét A. Kérdés, hogy A-nak muszáj-e egész számnak lennie, vagy lehet más valós érték is.

Tegyük fel, hogy A nem egész. Legyen A és a hozzá legközelebbi egész szám távolsága $d > 0$. (1 pont)

A konvergencia definíciója szerint *a határérték* ***bármely*** *környezetébe beleesik a sorozat majdnem minden tagja* (azaz végtelen sok tag van a környezeten belül, és csak véges sok kívül).

Vegyünk d-nél kisebb sugarú környezetet A körül: ebbe egész szám nem eshet. (1 pont)

Ez ellentmond annak, hogy a sorozatnak végtelen sok tagja esik A **bármely** környezetébe. Így A nem lehet *nem egész szám:* tehát A csak egész szám lehet, **az állítás igaz.** (1 pont)

Megjegyzés: Ilyen sorozatra két példa:

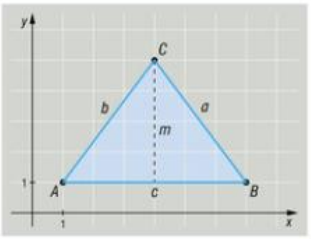
- bármely egész számokból álló konstans sorozat (pl. $a_n = 5$);
- a $b_n = \left[\frac{12}{n}\right]$ sorozat, ahol $[x]$ az x egészrésze ($b_1 = 12$, $b_2 = 6$, $b_3 = 4$, $b_4 = 3$, $b_5 = 2$, $b_6 = 2$, $b_7 = 1$, …, $b_{12} = 1$, $b_{13} = 0$, $b_{14} = 0$ stb.).

Adott a koordinátasíkon az $A(1; 1)$, $B(7; 1)$, $C(4; 5)$ pontok által alkotott háromszög.

c) Határozza meg a háromszög beírt körének sugarát! c 4

M: I. megoldás

Koordináta-rendszerben ábrázolva:



$$AB = 6, \quad m_c = 4.$$

A háromszög területét felírhatjuk többféleképp. Alap és magasság felhasználásával:

$$T = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ területegység.}$$ (1 pont)

A háromszög egyenlő szárú és

$$AC = BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

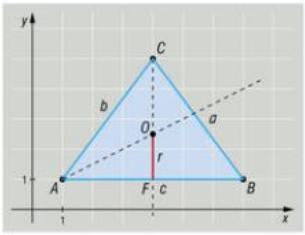
A terület a félkerület ($s = \frac{16}{2} = 8$) és a beírt kör sugarának szorzataként felírva: (1 pont)

$$T = r \cdot s = 8r = 12,$$ (1 pont)

innen $r = \frac{12}{8} = 1{,}5.$ (1 pont)

Megjegyzés: A területet Heron-képlettel vagy bennfoglaló téglalapból is kiszámíthatjuk, ekkor nincs szükség a magasságra.

II. megoldás



A pontok koordinátáiból nyilvánvaló, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú. Ebben $AF = 3$, $CF = 4$.

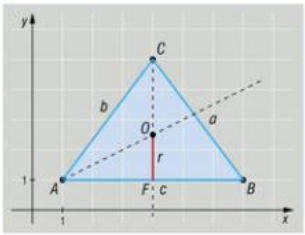
A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. (1 pont)

Alkalmazzuk az AFC háromszögre, hogy a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: (1 pont)

$$\frac{4-r}{r} = \frac{5}{3}, \qquad \text{(1 pont)}$$

amiből $12 = 8r$, azaz $r = 1{,}5$. (1 pont)

III. megoldás



A pontok koordinátáiból nyilvánvaló, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú. Ebben $AF = 3$, $CF = 4$.

A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. (1 pont)

Az AFC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}(CAF\sphericalangle) = \frac{4}{3}.$$

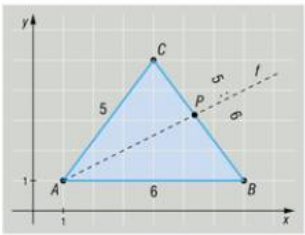
Innen $CAF\sphericalangle \approx 53{,}13°$, amiből $OAF\sphericalangle \approx 26{,}565°$. (1 pont)

Az OAF derékszögű háromszögben $\frac{r}{3} = \operatorname{tg}(OAF\sphericalangle)$, (1 pont)

amiből $r = 1{,}5$ ($\approx 1{,}4999$). (1 pont)

d) Jelölje a háromszög $BAC\sphericalangle$ szögét α. Határozza meg α szögfelezőjének egyenletét! d 5

M: I. megoldás



Ábrázoljuk a háromszöget koordinátarendszerben, és rajzoljuk be az f szögfelezőt. (1 pont)

A szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja:

$$CP : PB = 5 : 6. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ez alapján P koordinátáira:

$$P\left(\frac{5\cdot 7 + 6\cdot 4}{11}; \frac{5\cdot 1 + 6\cdot 5}{11}\right) = P\left(\frac{59}{11}; \frac{35}{11}\right). \qquad \text{(1 pont)}$$

Írjunk fel az A ponton át egy irányvektoros egyenletet:

$$\overrightarrow{AP}\left(\frac{48}{11}; \frac{24}{11}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(2; 1). \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen az f szögfelező egyenlete: $f: x - 2y = -1$. (1 pont)

II. megoldás

Az AC oldal meredekségére $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. (1 pont)

Ebből a szögfelező meredeksége (például az addíciós tételekből):

$$m = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$ (1 pont)

A szögfelező egyenese áthalad $A(1; 1)$-n, így behelyettesítve a koordinátáit: (1 pont)

$$1 = 0{,}5 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}5.$$ (1 pont)

A keresett egyenes egyenlete: $y = 0{,}5x + 0{,}5$. (1 pont) ö 16

8 A cukrászdákban előfordul, hogy a hétvégére megrendelt tortáért nem megy el a megrendelő. Az egyik cukrászdában azt figyelték meg, hogy 100 dobostorta-rendelésből általában egyet nem visznek el (annak a valószínűsége, hogy egy rendelést elvisznek, 0,99). Ezért a cukrászda minden hétvégére több megrendelést vesz fel (48-at), mint amennyit fizikailag teljesíteni képes (45-öt). A cukrászdának nem okoz bevételkiesést, ha nem viszik el az összes elkészült tortát, mert azokat a következő hét elején mindig el tudják adni.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezen a hétvégén pontosan egy olyan elégedetlen vásárlója lesz a cukrászdának, aki hétvégére dobostortát rendelt, de nem jut hozzá! a 5

M: Visszatevéses mintavétellel (binomiális eloszlással) számolunk. (1 pont)
(A tortáért eljönni vagy nem eljönni események ismétlődnek.)

Annak a valószínűsége, hogy egy megrendelő eljön a tortáért, $p = 0{,}99$. A komplementer esemény, ha valaki nem jön el. Ennek a valószínűsége $1 - p = 0{,}01$. (1 pont)

48 rendelést vesznek fel, 45-öt tudnak teljesíteni, de csak egy reklamáló ügyfél van: ez azt jelenti, hogy a 48-ból 2 fő nem jelent meg a tortáért. (1 pont)

$$P(1) = \binom{48}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{46},$$ (1 pont)

Ebből a keresett valószínűség: $P(1) \approx 0{,}071$. (1 pont)

A rendelésükről lemaradt ügyfeleket a cukrászda 10 000 forint értékű kuponnal kárpótolja. Ennek értékhatáráig a vevő bármit elvihet, ami abban a pillanatban kapható náluk.

b) Mekkora az egy hétvégére eső várható bevétel ezer forintra kerekítve, ha egy dobostorta 8000 Ft-ba kerül? b 6

M: Ismét binomiális eloszlással számolunk, $p = 0{,}01$, $1 - p = 0{,}99$. (1 pont)

A 48 rendelés miatt 1, 2 vagy 3 vendég fog reklamálni. Ismert:

$$P(1) = 0{,}071.$$ (1 pont)

Ha két fő reklamál, akkor 1 fő nem jelentkezett:

$$P(2) = \binom{48}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{47} \approx 0{,}2993.$$ (1 pont)

Három fő akkor reklamál, ha mindenki eljön a megrendelt tortáért:

$$P(3) = 0{,}99^{48} \approx 0{,}6173.$$ (1 pont)

A nekik kárpótlásként kifizetett kuponok várható értéke:

$$M = 10\,000 \cdot 0{,}071 + 20\,000 \cdot 0{,}2993 + 30\,000 \cdot 0{,}6173 = 25\,215 \text{ (Ft)}.$$ (1 pont)

45 tortát biztosan ki fognak fizetni, így az előrendelt tortákból várható hétvégi bevétel:

$$45 \cdot 8000 - 25\,215 = \mathbf{334\,785 \text{ Ft}}.$$ (1 pont)

Egy termelő a krumplit 5 kg-os csomagokban árusítja. Saját bevallása szerint minden csomag 99%-os valószínűséggel legalább 5 kg. Ezt egy vevője visszatevéses mintavétellel szeretné ellenőrizni.

c) Legalább hány csomagot kell lemérnie, hogy legalább 80%-os valószínűséggel találjon közöttük 5 kg-nál könnyebb csomagot? c 5

M: Azt szeretnénk, hogy annak a valószínűsége, hogy n darab csomag között van legalább 1 darab 5 kg-nál könnyebb, legalább 0,8 legyen:

P(van legalább 1 darab 5 kg-nál könnyebb) $\geq 0{,}8$. (1 pont)

Ez az esemény sok lehetőségből tevődik össze: 1, 2, 3, …, n. Térjünk át a komplementerre:

$$1 - P(\text{mind legalább 5 kg}) \geq 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}2 \geq P(\text{mind legalább 5 kg}).$$ (1 pont)

A „mind legalább 5 kg" esemény valószínűsége n csomag esetén:

$$P(\text{mind legalább 5 kg}) = 0{,}99^n \leq 0{,}2.$$ (1 pont)

Vegyük mindkét oldal 0,99 (< 1) alapú logaritmusát. Az $f(x) = \log_{0,99} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért a reláció iránya megfordul: (1 pont)

$$n \geq \log_{0,99} 0{,}2 \approx 160{,}14,$$

vagyis legalább **161 csomagot** kellene megmérnünk. (1 pont) ö 16

9 Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúságból van legalább három darab 1 cm-től 10 cm-ig. Kiválasztunk tetszőlegesen három pálcikát a készletből.

a) Mekkora valószínűséggel építhetünk a három pálcikából olyan háromszöget, amelynek nem minden oldala különböző? (Két kiválasztás különböző, ha az egyik kiválasztás 3 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 3 pálcikájával úgy, hogy mind a 3 párban egyenlő hosszú a két pálcika.) a 9

M: A három pálcika kiválasztása ismétléses kombinációval írható le, hiszen ugyanolyan hosszúságú pálcikákat többször is kiválaszthatunk:

$$\binom{10+3-1}{3} = 220.$$ (2 pont)

Három pálcikából akkor készíthető háromszög, ha a két rövidebb oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál. (1 pont)

A kedvező esetek számához gyűjtsük össze azon pálcikahármasokat, amelyekben van legalább két egyforma hosszú pálcika (mondjuk a két egyenlő hossza szerinti növekvő rendben). (4 pont)

A lehetséges oldalhosszak a háromszög-egyenlőtlenség és a rendelkezésre álló elemek szerint												A háromszögek száma
a	*b*	*c*										
1	1	1										1
2	2	1	2	3								3
3	3	1	2	3	4	5						5
4	4	1	2	3	4	5	6	7				7
5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9		9
6	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
7	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
8	8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
9	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
10	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10

Az összes lehetőségek száma:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 5 \cdot 10 = 75.$$ (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{75}{220} \approx \mathbf{0{,}3409}$. (1 pont)

Két lakótelepi csapat, a Telepi Sündisznók és a Második Emelet sok focimeccset játszik egymás ellen a házak közti műfüves pályán. Legutóbb az Emelet nyert 5 : 0-ra a Sündisznók ellen. A mérkőzés után a Sündisznók játékosai megfogadták, hogy a következő 5 gólos meccset ők nyerik meg.

b) Határozza meg ennek a valószínűségét, ha az Emelet csapata 2 tizeddel nagyobb valószínűséggel szerez gólt, mint a Sündisznók! b 7

M: Gólt csak két csapat szerezhet, tehát ők komplementerei egymásnak (más kifejezéssel élve teljes eseményrendszert alkotnak):

$$p_E + p_S = 1.$$ (1 pont)

Ugyanakkor $p_E = p_S + 0{,}2$. (1 pont)

Behelyettesítve:

$$p_S + 0{,}2 + p_S = 1 \quad \Rightarrow \quad p_S = 0{,}4 \quad \text{és} \quad p_E = 0{,}6. \qquad \text{(1 pont)}$$

Egy 5 gólos meccset a Sündisznók 5 : 0, 4 : 1 és 3 : 2 arányban nyerhet meg.

$$P(5:0) = 0{,}4^5 = 0{,}01024, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$P(4:1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0768, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$P(3:2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304. \qquad \text{(1 pont)}$$

A fenti események kizárják egymást, így összeadhatók:

P(5 gólos mérkőzésen nyer S) = $P(5:0) + P(4:1) + P(3:2)$ = 0,3174. (1 pont)

ö 16

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

I. rész

1 Ádám és Tomi unokatestvérek. A nagypapájuktól kaptak egy-egy kosár cseresznyét és barackot, mindkettőből 1 kg-ot. A fiúk elhatározzák, hogy a gyümölcsöket igazságosan elosztják egymás között: Tomi a barackot, Ádám a cseresznyét osztja két, szerinte egyenlő részre, majd a másik kiválasztja, hogy melyik részt szeretné.

a) Igazolja, hogy akárhogyan osztották szét a gyümölcsöket és akárhogyan választottak közülük, igaz, hogy a fiúknál levő gyümölcsök tömegének szórása egyenlő! a 6

M: Jelölje b, b' a barack és c, c' a cseresznye Ádámnál, illetve Tominál levő részét. Ekkor

$$b + b' = 1, \quad c + c' = 1.$$ (1 pont)

Jelölje továbbá A és A' a náluk levő két gyümölcs átlagát. Ekkor

$$A = \frac{b+c}{2}, \quad A' = \frac{b'+c'}{2} = \frac{1-b+1-c}{2} = 1 - \frac{b+c}{2} = 1 - A.$$ (2 pont)

Ádám gyümölcsei tömegének a szórása:

$$s_{\text{Á}} = \sqrt{\frac{(b-A)^2 + (c-A)^2}{2}}.$$ (1 pont)

Tomi gyümölcsei tömegének a szórása:

$$s_{\text{T}} = \sqrt{\frac{(b'-A')^2 + (c'-A')^2}{2}} = \sqrt{\frac{[1-b-(1-A)]^2 + [1-c-(1-A)]^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(A-b)^2 + (A-c)^2}{2}} = s_{\text{Á}},$$ (1 pont)

tehát a két szórás bármely elosztás esetén **egyenlő.** (1 pont)

Az iskolai jótékonysági bálon tombolát szerveznek, amelyen 20 kisebb-nagyobb értékű ajándékot lehet nyerni. A 800 darab sorsjegyből elsőként Jutka vásárolt 7 darabot. (Egy sorsjegy egy nyereményre jogosít.)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jutka nyer a tombolán? b 5

M: Ha Jutka nyer, akkor nyerhet 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7 ajándékot is. Ez elég sok eset ahhoz, hogy áttérjünk a komplementer eseményre.

A komplementer esemény az, hogy egyik tombolaszelvénye sem nyer, ami egyféleképpen lehetséges. (1 pont)

Jutkának hét tombolája van, ezeket $\binom{800}{7}$-féleképpen választhatta ki. (1 pont)

Nyerő szelvény 20 darab van, így 780 szelvény nem nyer. (1 pont)

A komplementer esemény „kedvező” eseteinek száma $\binom{780}{7}$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Jutka nyer:

$$1-\frac{\binom{780}{7}}{\binom{800}{7}}\approx 0{,}8370.$$ (1 pont) ö 11

Megjegyzés: Ha nem tér át a komplementerre, akkor a kedvező esetek száma:

$$\binom{7}{1}\cdot\binom{780}{6}+\binom{7}{2}\cdot\binom{780}{5}+\ldots+\binom{7}{7}\cdot\binom{780}{0}.$$

2 *a)* Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! a 6

$$2^{2-3x}+\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1}=264$$

M: A hatványozás azonosságait felhasználva hozzunk minden tagot azonos alapra:

$$2^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^x+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^x=264.$$ (1 pont)

Vonjunk össze, majd rendezzünk egy oldalra:

$$\frac{33}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^x=264 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{8}\right)^x=64.$$ (1 pont)

A 64 felírható mint $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$. (1 pont)

Hivatkozva arra, hogy az exponenciális függvény egy értéket csak egy helyen vesz fel (szigorúan monoton, bijektív), (1 pont)

$$x=-2.$$ (1 pont)

Ellenőrzés: $2^{2+6}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=2^8+8=256+8=264.$ (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget! b 7

$$\frac{1+x}{x}<\frac{5-x}{2}$$

M: A tört miatt az értelmezési tartomány: $x\neq 0$. (1 pont)

Vonjunk össze:

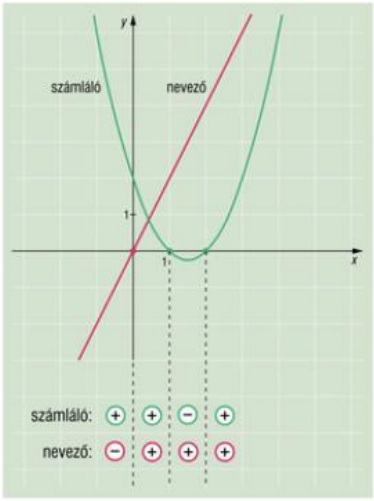
$$\frac{1+x}{x}-\frac{5-x}{2}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2(1+x)-x(5-x)}{2x}<0.$$ (1 pont)

A számlálót kifejtve:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x}<0.$$ (1 pont)

A számláló felfelé nyíló parabola, zérushelyei: $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$. (1 pont)

A nevező egy növekedő lineáris függvény, zérushelye: $x_3 = 0$. (1 pont)



Ezek a pontok a valós számokat négy részre osztják fel:

(1) $x < 0$, ekkor
számláló (+), nevező (−);

(2) $0 < x < 1$, ekkor
számláló (+), nevező (+);

(3) $1 < x < 2$, ekkor
számláló (−), nevező (+);

(4) $2 < x$, ekkor
számláló (+), nevező (+). (1 pont)

A tört értéke negatív csak és kizárólag az (1) és (3) esetben lesz, tehát a megoldások:

$$x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]1; 2\right[. \quad \text{(1 pont)}$$

ö 13

A megoldás más formában is megadható.

3 *a)* Egy mértani sorozat negyedik tagja 52, hetedik tagja 3328. Számítsa ki a sorozat negyedik, ötödik, hatodik és hetedik tagjának átlagát! a 6

M: Jelölje a mértani sorozatot $\{a_n\}$, első tagját a_1, kvóciensét q. Ekkor

$$a_4 = a_1 \cdot q^3, \quad a_5 = a_1 \cdot q^6. \quad \text{(1 pont)}$$

Egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot q^3 &= 52 \\ a_1 \cdot q^6 &= 3328 \end{aligned}\right\} \quad \text{(1 pont)}$$

Elosztva a másodikat az első egyenlettel:

$$q^3 = 64 \quad \Rightarrow \quad q = 4. \quad \text{(2 pont)}$$

A sorozat megnevezett tagjai:

$a_4 = 52$, $a_5 = 4 \cdot 52 = 208$, $a_6 = 4^2 \cdot 52 = 832$, $a_7 = 4^3 \cdot 52 = 3328$, (1 pont)

ezek átlaga:

$$A = \frac{52 + 208 + 832 + 3328}{4} = 1105. \quad \text{(1 pont)}$$

Az a, b, c hétjegyű pozitív egészek olyan számok, amelyekben az egymást követő számjegyek monoton számtani sorozatot alkotnak.

b) Hány olyan $(a; b; c)$ rendezett számhármast adhatunk meg, amelynek tagjai maguk is rendre monoton sorozatot alkotnak? b 7

M: Egy hétjegyű szám számjegyei monoton számtani sorozatot csak akkor alkothatnak, ha a számtani sorozat különbségére

$$d = 0, \quad d = 1 \quad \text{vagy} \quad d = -1.$$ (1 pont)

Ha $d = 0$, akkor a lehetséges számok:

$$1\,111\,111, \quad 2\,222\,222, \quad \ldots, \quad 9\,999\,999.$$ (1 pont)

Ha $d = 1$, akkor a lehetséges számok:

$$1\,234\,567, \quad 2\,345\,678, \quad 3\,456\,789.$$ (1 pont)

Ha $d = -1$, akkor a lehetséges számok:

$$6\,543\,210, \quad 7\,654\,321, \quad 8\,765\,432, \quad 9\,876\,543.$$ (1 pont)

A 16 szám mind különböző. Ezekből kell kiválasztanunk és felírnunk 3-at növekvő sorrendben. (1 pont)

Azt kell észrevennünk, hogy ha kiválasztunk a 16 különböző számból 3 darabot, akkor azok kétféleképp rendezhetők monoton sorozatba: ha $a < b < c$, akkor $(a; b, c)$ növő és $(c; b; a)$ csökkenő. (1 pont)

Az összes lehetőségek száma

$$2 \cdot \binom{16}{3} = 1120.$$ (1 pont) ö 13

4 A mobiltelefonok kijelzői téglalap alakúak, a tulajdonságaikat meghatározó értékek közül az egyik a *kijelző átlójának hossza.* Ezt inchben adják meg, jele: ″ (1″ = 2,54 cm). Például a 4″ azt jelenti, hogy a képernyő átlójának hossza 4 inch, azaz 4 · 2,54 cm = 10,16 cm. Egy másik szám a *képarány,* a kijelző két oldalának aránya. Például a 16 : 9-es képarány azt jelenti, hogy ha a hosszabb oldal 12 cm, akkor a rövidebb oldal 6,75 cm. A képernyőpontban (pixelben) megadott 1920 × 1080 képernyőfelbontás is a 16 : 9 képarányra utal (16 : 9 = 1920 : 1080).

Tudjuk, hogy egy mobiltelefon téglalap alakú kijelzőjének hosszabb oldala mentén 1280 pixel található, a képátló 5″ inches, a képaránya 16 : 9.

a) Hány pixel van a kijelző rövidebb oldalán? Számítsa ki egy négyzet alakúnak tekintett pixel oldalának hosszát! (Az eredményt centiméterben, normálalakban adja meg, ahol az együttható két tizedesjegyre pontos.) a 6

M: A képernyő átlójának hossza centiméterben:

$$5'' = 5 \cdot 2{,}54 \text{ cm} = 12{,}7 \text{ cm}.$$ (1 pont)

A rövidebb oldal mentén levő pixelek darabszáma:

$$\frac{y}{1280} = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad y = 720.$$ (2 pont)

Feltettük, hogy a képernyő téglalap alakú, így a Pitagorasz-tételből egy pixel oldalának hossza ($x > 0$):

$$(1280x)^2 + (720x)^2 = 12{,}7^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 0{,}00865 \text{ cm}.$$ (2 pont)

Normálalakban felírva:

$$x = 8{,}65 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$ (1 pont)

Jelölje általában egy kijelző képátlójának hosszát d (centiméterben), a képarányt pedig r.

b) Bizonyítsa be, hogy a $T = \dfrac{d^2}{r + \dfrac{1}{r}}$ képletbe helyettesítve megkapjuk a kijelző területét (négyzetcentiméterben)! b 8

M. Legyen a és b a képernyő két oldalának, d az átlójának hossza centiméterben. Ekkor Pitagorasz tételéből:

$$a^2 + b^2 = d^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az r az oldalak aránya, ezért például:

$$r = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b \cdot r. \qquad \text{(1 pont)}$$

A téglalap alakú képernyő területébe helyettesítve:

$$T = a \cdot b = r \cdot b^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

A Pitagorasz-tételbe is behelyettesíthetünk, ekkor

$$(b \cdot r)^2 + b^2 = d^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Innen:

$$b^2 = \frac{d^2}{1 + r^2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezt a területbe visszaírva adódik, hogy:

$$T = r \cdot \frac{d^2}{1 + r^2} = \frac{d^2}{\dfrac{1 + r^2}{r}} = \frac{d^2}{\dfrac{1}{r} + r}. \qquad \text{(3 pont)}$$

ö 14

II. rész

5 *a)* Egy háromszög a, b oldala centiméterben mérve egész szám. Ismert, hogy $c = 10$ cm és $b \cdot \cos\alpha = 3$. Határozza meg a lehetséges háromszög oldalait! a 10

M: Az adatok alapján az a oldalra felírt koszinusztételt érdemes alkalmazni:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Behelyettesítve:

$$a^2 = 10^2 + b^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 40 + b^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Átrendezve, majd szorzattá alakítva:

$$(a - b)(a + b) = 40. \qquad \text{(1 pont)}$$

A 40-et pozitív egész számok szorzatára szeretnénk felbontani. A szorzat egyik tényezője biztosan páros, hiszen a szorzat maga páros. Azonban ekkor a és b paritása megegyezik, tehát mindkét tényezőnek párosnak kell lennie:

$$40 = 2 \cdot 20 \quad \text{vagy} \quad 40 = 4 \cdot 10. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyenleteket összeadva és kivonva kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} a+b&=20\\ a-b&=2\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a=11 \text{ és } b=9. \qquad \text{(2 pont)}$$

$$\left.\begin{aligned} a+b&=10\\ a-b&=4\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a=7 \text{ és } b=3. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az $a=7$, $b=3$, $c=10$ nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget.

A háromszög oldalai:

$$\mathbf{a=11\ cm,\quad b=9\ cm \quad és \quad c=10\ cm.} \qquad \text{(2 pont)}$$

b) Egy 10 csapatos bajnokság első fordulójára szeretnék összeállítani a csapatok párosítását. Hányféleképpen alakítható ki az első forduló, ha figyelembe vesszük, hogy melyik csapat játszik otthon és melyik idegenben? (Azaz az *A*–*B* párosítás különbözik a *B*–*A* párosítástól. Két fordulót különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan párosítást, amelyet a másik nem.) b 6

M: Jelöljük a csapatokat *A*, *B*, …, *I*, *J* betűkkel.

A 10 csapat minden fordulóban összesen 5 mérkőzést játszik.

Az első fordulóra összesorsolt *X*, *Y* csapat közül játszhat otthon *X* (*X*–*Y*) és *Y* is (*Y*–*X*), tehát két lehetőség van minden párosításra. (1 pont)

A sorsolást elképzelhetjük így: egy urnából kihúznak két csapatot, majd közülük kisorsolják a hazait és a vendéget.

Az első két csapatot $\binom{10}{2}$, a második kettőt $\binom{8}{2}$, majd $\binom{6}{2}$, $\binom{4}{2}$ és legvégül $\binom{2}{2}$-féle módon választhatják ki. (1 pont)

Minden esetben 2 lehetőség van a hazai–vendég kiválasztására, az 5 meccs esetén tehát 2^5 lehetőség. (1 pont)

Így a lehetőségek száma:

$$2^5 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 3\,628\,800, \qquad \text{(1 pont)}$$

azonban ugyanazt az 5 párosítást más sorrendben is kiválaszthatják, ezért el kell osztanunk a párosítások lehetséges összes kiválasztási sorrendjével, vagyis 5!-sal. (1 pont)

Az első forduló összes lehetséges párosítása:

$$\frac{3\,628\,800}{5!} = \mathbf{30\,240.} \qquad \text{(1 pont)}$$ ö 16

Megjegyzés: A sorsolást elképzelhetjük úgy is, hogy az urnából sorban egymás után húzzák ki a csapatokat. Az elsőként kihúzott a hazai, a második az ellenfele mint vendég. A harmadik ismét hazai, a negyedik a vendége stb. Természetesen a lehetőségek száma ekkor is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$.

6 *a)* Legyen a $p(x) = \dfrac{1+\sqrt{2x^2-1}}{2}$ kifejezés értelmezési tartománya $x \in [1; \infty[$. a 6

Igazolja, hogy a $p(x) \le x$ egyenlőtlenség az értelmezési tartomány minden pontjában teljesül!

M: Rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2x^2-1} \le 2x-1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre: az $f(x) = x^2$ függvény a nemnegatív számokon monoton növő, így a relációjel nem változik. (1 pont)

$$2x^2 - 1 \le 4x^2 - 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 2x^2 - 4x + 2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ezt 2-vel egyszerűsítve teljes négyzetet kapunk:

$$0 \le (x-1)^2, \qquad \text{(1 pont)}$$

ami bármely x-re **teljesül**, így $x \in [1; \infty[$**-re** is. (1 pont)

b) Három teljes gráf pontjainak száma egy szigorúan növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy mértani sorozat három egymást követő tagja! b 10

M: Tételezzük fel, hogy a számtani sorozat különbsége d, és a kérdéses gráfok $n-d$, n, $n+d$ pontúak ($n > d > 0$ egészek). (1 pont)

Közelítsük meg a kérdést indirekt úton, vagyis tegyük fel, hogy az $n-d$, n, $n+d$ pontú teljes gráfok éleinek száma mértani sorozatot alkot. (1 pont)

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n-d)(n-d-1)}{2}} = \frac{\frac{(n+d)(n+d-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\frac{n(n-1)}{(n-d)(n-d-1)} = \frac{(n+d)(n+d-1)}{n(n-1)}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Egyszerűsíteni nem tudunk, szorozzunk fel:

$$[n(n-1)]^2 = (n+d)(n-d)(n+d-1)(n-d-1). \qquad \text{(1 pont)}$$

A jobb oldalon álló nevezetes szorzatok megkönnyítik a kifejtést:

$$[n(n-1)]^2 = (n^2-d^2)[(n-1)^2-d^2], \qquad \text{(1 pont)}$$

$$0 = d^4 - (2n^2-2n+1)d^2. \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel $d > 0$, leoszthatunk vele, majd csoportosítsuk négyzetekként:

$$0 = d^2 - 2n^2 + 2n - 1 \quad \Rightarrow \quad (n-1)^2 + n^2 = d^2. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből viszont az adódik, hogy $d > n$, ami ellentmond az $n > d$ feltételnek: az indirekt feltevéssel ellentmondásra jutottunk, tehát **az eredeti állítás igaz.** (1 pont) ö 16

7 A Pascal-háromszög számait leírjuk egymás mellé a 0. sortól a 99. sor végéig (az első 1-es a 0. sorban van), sorról sorra:

1, | 1, 1, | 1, 2, 1, | 1, 3, 3, 1, | 1, 4, 6, 4, 1, | ..., 99, 1.

a 7

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a leírt számok közül véletlenszerűen kiválasztva két egymás melletti számot, az egyik szám egyes!

M: A Pascal-háromszög 0–99. sorában összesen

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 \text{ darab szám van.}$$

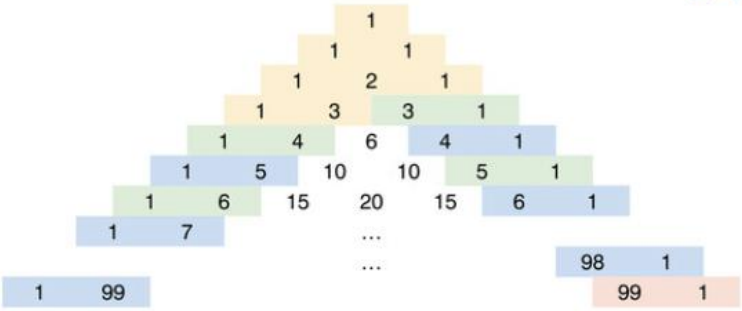
(1 pont)

A felsorolt 5050 darab szám közül két egymás utánit 5049-féle módon lehet kiválasztani. (1 pont)

A megadott

1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, ..., 99, 1

számsorban érdemes csak azon részekre koncentrálnunk, amelyekből akárhogyan választunk ki két számot, közöttük lesz legalább egy darab 1-es szám: (1 pont)



A) 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3

B) 3, 1, 1, 4 ; 4, 1, 1, 5 ; 5, 1, 1, 6 ; 6, 1, 1, 7 ; ...; 98, 1, 1, 99 ;

C) 99, 1

Az *A)* részben 8 számot találunk, közülük 7-féleképp választhatunk két egymás utánit. A *C)* részben 2 számot találunk, közülük egyféleképp választhatunk ki két egymás utánit. (1 pont)

A *B)* részben $4 \cdot 96$ számot találunk, közülük $3 \cdot 96 = 288$-féleképp választhatunk ki két egymás utánit. (1 pont)

Ez összesen $7 + 288 + 1 = 296$ lehetőség. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni számot kiválasztva az egyik szám egyes:

$$P = \frac{296}{5049} \approx 0{,}0586.$$

(1 pont)

Lili és Cili testvérek, 40 mesekönyvük van. Ha a mesekönyvek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor arról tudjuk, hogy:

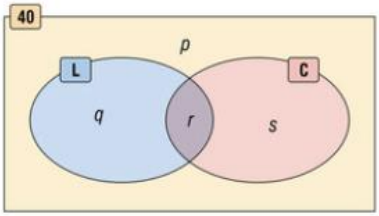
(1) 0,875 annak a valószínűsége, hogy valamelyikük olvasta;

(2) 0,8 annak a valószínűsége, hogy Lili olvasta, ha Cili olvasta;

(3) 0,375 annak a valószínűsége, hogy Cili olvasta, ha Lili nem olvasta.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy mesekönyvet véletlenszerűen választunk a polcról, akkor azt csak Lili olvasta kettejük közül? b 9

M: Készítsünk halmazábrát, amely a Lili és Cili által olvasott, illetve nem olvasott könyvek darabszámait ábrázolja.



L jelöli, hogy Lili, *C* pedig, hogy Cili olvasott egy könyvet. (1 pont)

$$p + q + r + s = 40$$

Az első állítás:

$$P(L + C) = \frac{q+r+s}{40} = 1 - \frac{p}{40} = 0{,}875 \quad \Rightarrow \quad p = 5. \qquad \text{(2 pont)}$$

A harmadik állítás:

$$P(C \mid \text{nem } L) = \frac{s}{p+s} = \frac{s}{5+s} = 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad s = 3. \qquad \text{(2 pont)}$$

A második állítás:

$$P(L \mid C) = \frac{r}{r+s} = \frac{r}{r+3} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad r = 12. \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen:

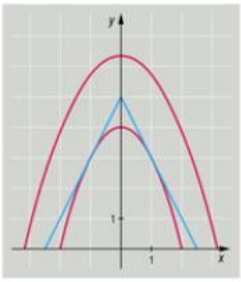
$$q = 40 - (5 + 3 + 12) = 20. \qquad \text{(1 pont)}$$

A csak Lili által olvasott könyvek darabszáma 20, tehát a kérdezett valószínűség:

$$P(L \text{ és nem } C) = \frac{20}{40} = 0{,}5. \qquad \text{(1 pont)}$$

ö 16

8 Az építész az általa megálmodott letisztult, modern épülethez egy fordított parabola alakú nyitott bejáratot tervez. Számítógépes modelljében a talajt az x tengelyre helyezve a bejárat belső íve az $y = -x^2 + 4$ parabola pozitív értékű pontjaiból áll. A tervek szerint a bejárat külső ívét az $y = -x^2 + p$ parabola ($p > 4$) pozitív értékű pontjai alkotják.



a) Határozza meg a p paramétert úgy, hogy a nyitott bejárat felülete és a kaput alkotó, két ív közötti felület egyenlő legyen! a 10

M: Mindkét parabola páros függvény, szimmetrikusak az y tengelyre. (1 pont)

Az $y = -x^2 + 4$ parabola zérushelyei az $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

Az $y = -x^2 + p$ parabola zérushelyei az $x_1 = -\sqrt{p}$ és $x_2 = \sqrt{p}$. (1 pont)

Határozzuk meg az $y = -x^2 + 4$ parabola x tengellyel bezárt területét! Ez a szimmetria miatt

$$2 \cdot \int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx = \quad \text{(1 pont)}$$

Keressük meg a primitív függvényt, majd alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{32}{3}. \quad \text{(2 pont)}$$

A két terület egyenlő, ha az $y = -x^2 + p$ parabola kétszer akkora területet zár be az x tengellyel, mint az $y = -x^2 + 4$ parabola:

$$2 \cdot \int_0^{\sqrt{p}} (-x^2 + p)\,dx = \frac{64}{3}. \quad \text{(1 pont)}$$

Most is keressük meg a primitív függvényt, és alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\left[-\frac{x^3}{3} + px\right]_0^{\sqrt{p}} = -\frac{p \cdot \sqrt{p}}{3} + p \cdot \sqrt{p} = \frac{32}{3}. \quad \text{(2 pont)}$$

Innen $p \cdot \sqrt{p} = 16$, így $\boldsymbol{p = \sqrt[3]{256} \approx 6{,}3496.}$ (2 pont)

Az építkezés során a belső ív $|x| = 1$ abszcisszájú pontjaiban az ívet érintő támoszlopokat emeltek, amelyek a bejárat szimmetriatengelyén találkoztak. Ezek segítségével állványozták fel a külső ívet.

b) Adja meg annak a $g(x) = m \cdot |x| + b$ alakú abszolútérték-függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely leírja a két támoszlop alakját ebben a koordinátarendszerben! b 6

M: A jobb oldali érintési pont $E(1; f(1))$. Mivel $f(1) = -1^2 + 4 = 3$, így az érintési pont $E(1; 3)$. (2 pont)

Az érintő meredekségéhez deriváljunk egyszer:

$$f'(x) = -2x. \quad \text{(1 pont)}$$

Az érintő meredeksége egybeesik az abszolútérték-függvény meredekségével:

$$m = f'(1) = -2 \cdot 1 = -2. \quad \text{(1 pont)}$$

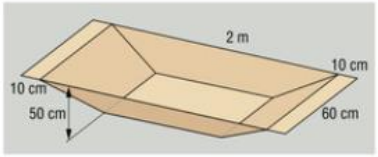
Már csak a b értéke kérdés, helyettesítsünk be:

$$3 = -2 \cdot |1| + b \quad \Rightarrow \quad b = 5. \quad \text{(1 pont)}$$

A támoszlopok helyzetét leíró abszolútérték-függvény hozzárendelési szabálya:

$$\boldsymbol{g(x) = -2 \cdot |x| + 5.} \quad \text{(1 pont)}$$ ö 16

9 Egy fémteknő téglalap alapú egyenes csonkagúla, amelynek méretei a következők: hosszúsága 2 méter, amelyből a két végén 10-10 cm a pereme, mélysége 50 cm, szélessége 60 cm. Térfogata 0,38 m^3.



a) Mekkorák a teknő aljának élei? a 8

M: Tekintsük a csonkagúla alapjának a 0,6 m és 1,8 m oldalú téglalapot. Magassága 0,5 m, fedőlapjának területét jelölje t. (1 pont)

Térfogata:

$$V = \frac{0{,}5}{3} \cdot (0{,}6 \cdot 1{,}8 + \sqrt{0{,}6 \cdot 1{,}8 \cdot t} + t) = 0{,}38.$$ (1 pont)

Rendezés után $\sqrt{t}$-ben másodfokú egyenletet kapunk:

$$5t + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{t} - 6 = 0.$$ (1 pont)

Ennek a megoldásai:

$$\sqrt{t_1} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad \text{és} \quad \sqrt{t_2} \neq -\sqrt{3} \ (< 0).$$ (1 pont)

A csonkagúla fedőlapja és alaplapja hasonló. (1 pont)

Ezért a fedőlap $a > b$ oldalára:

$$a : b = 1{,}8 : 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad a = 3b.$$ (1 pont)

Négyzetre emelve az egyenlet megoldását:

$$t = a \cdot b = 3b^2 = \frac{12}{25}.$$ (1 pont)

A teknő aljának élei:

$$b = \frac{2}{5}\text{ m} = \mathbf{40\ cm} \quad \text{és} \quad a = \frac{6}{5}\text{ m} = \mathbf{120\ cm.}$$ (1 pont)

Bizonyos okok miatt egy időben élelmiszer-felvásárlási láz tört ki, ami miatt egy üzletből a vásárlók naponta elvitték az élelmiszer jellegű árukészlet 80%-át. A bolt rendes körülmények között élelmiszerből 15 tonna árukészlettel rendelkezett. Szerencsére az utánpótlás biztosított volt, így mindennap 0,3 tonna élelmiszert szállítottak az üzletbe.

b) Legalább mennyi élelmiszer lesz a boltban akkor is, ha ez az állapot elég hosszú ideig (akár örökre) fennmarad? b 8

M: Írjuk le a boltból elvitt és oda érkező élelmiszer mennyiségét! Első nap maradt 20%, de érkezett hozzá 0,3 tonna:

$$15 \cdot 0{,}2 + 0{,}3.$$ (1 pont)

Második nap ennek a mennyiségnek maradt a 20%-a és érkezett 0,3 tonna:

$$(15 \cdot 0{,}2 + 0{,}3) \cdot 0{,}2 + 0{,}3.$$ (1 pont)

És így tovább, az n. napon a boltban levő élelmiszer mennyisége:

$$(\ldots((15 \cdot 0{,}2 + 0{,}3) \cdot 0{,}2 + 0{,}3) \cdot 0{,}2 + \ldots) \cdot 0{,}2 + 0{,}3.$$ (1 pont)

A zárójeleket kifejtve:

$$15 \cdot 0{,}2^n + 0{,}3 \cdot 0{,}2^{n-1} + 0{,}3 \cdot 0{,}2^{n-2} + \ldots + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3.$$ (1 pont)

Az összeg első tag utáni része egy olyan mértani sorozat első n tagjának összege, ahol $a_1 = 0{,}3$ és $q = 0{,}2$. Az összegképletet alkalmazva:

$$15 \cdot 0{,}2^n + 0{,}3 \cdot \frac{0{,}2^n - 1}{0{,}2 - 1}.$$ (1 pont)

Azt kell vizsgálnunk, mennyi az összeg, ha $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(15 \cdot 0{,}2^n + 0{,}3 \cdot \frac{1 - 0{,}2^n}{0{,}8}\right).$$ (1 pont)

Tudjuk, hogy $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, így $0{,}2^n \to 0$. (1 pont)

Ebből (és a konvergens sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó tételből) adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(15 \cdot 0{,}2^n + 0{,}3 \cdot \frac{1 - 0{,}2^n}{0{,}8}\right) = 15 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot \frac{1 - 0}{0{,}8} = \mathbf{0{,}375\ t}$$

élelmiszer lesz a feltételek mellett napi szinten a boltban. (1 pont) ö 16

	Elérhető	Elért
I. rész	51 pont	
II. rész	64 pont	
Összesen	115 pont	

A nem értékelt feladat sorszáma: ☐

TARTALOMJEGYZÉK

Feladatok

1. feladatsor 6
2. feladatsor 10
3. feladatsor 14
4. feladatsor 18
5. feladatsor 22
6. feladatsor 26
7. feladatsor 29
8. feladatsor 32
9. feladatsor 35
10. feladatsor 39
11. feladatsor 42
12. feladatsor 46

Megoldások

1. feladatsor 50
2. feladatsor 63
3. feladatsor 77
4. feladatsor 94
5. feladatsor 106
6. feladatsor 120
7. feladatsor 132
8. feladatsor 145
9. feladatsor 156
10. feladatsor 172
11. feladatsor 184
12. feladatsor 200

Kiadja a Mozaik Kiadó • 6701 Szeged, Pf. 301., Telefon: (62) 470-101, (62) 554-660
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Aggod István
Terjedelem: 20,14 (A/5) ív • 2023. május • Raktári szám: MS-3175U